Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

Thèse de doctorat

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de

VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRESIS

Génie Mécanique

Présentée et soutenue par Olivier, Cazier.

Le 18/12/2012, à Valenciennes

Ecole doctorale :
Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Equipe de recherche, Laboratoire :
Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique Industrielles et Humaines (LAMIH)

Instabilités dynamiques de systèmes frottants en présence de variabilités paramétriques : Application au phénomène de crissement

JURY

Président du jury
- Dufrenoy, Philippe. Professeur. Ecole Polytechnique universitaire de Lille.

Rapporteurs
- Aubry, Evelyne. Professeur. Université de Haute-Alsace.
- Blanzé, Claude. Professeur. Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris.

Examinateurs
- Thomas, Olivier. Professeur. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Lille.

Directeur de thèse
- Tison, Thierry. Professeur. Université de Valenciennes.

Co-encadrant : Massa, Franck. Maître de Conférences. Université de Valenciennes.

Remerciements

Je remercie vivement le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche d'avoir assuré le financement de ma thèse et le Campus International pour la Sécurité et l'Intermodalité dans les Transports d'avoir financé les travaux expérimentaux.

Les travaux de recherche qui ont abouti à la rédaction de ce mémoire ont été réalisés au sein de l'équipe « Crash, Confort et Sécurité » du Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique industrielles et Humaines, Département Génie Mécanique, dirigé successivement par Monsieur le Professeur **Eric MARKIEWICZ** et Monsieur le professeur **Thierry-Marie GUERRA**. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude pour la mise à disposition de tous les moyens qui m'ont été nécessaires pour le bon déroulement de mes travaux.

Je tiens tout d'abord à adresser ma plus profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur **Thierry TISON** pour m'avoir proposé ce travail de recherche, m'avoir accueilli dans son équipe et pour la bienveillante attention avec laquelle il a constamment dirigé mes recherches. Je remercie également Monsieur le Maître de Conférences **Franck MASSA** pour avoir su me faire partager ses connaissances et sa grande rigueur scientifique, pour l'intérêt constant qu'il a porté à mes travaux de recherche et pour sa disponibilité et ses conseils. Je témoigne également toute ma gratitude à Monsieur le Maître de Conférences **Bertrand LALLEMAND** pour la qualité de ses explications et son aide précieuse au cours de ces années.

J'exprime ici aussi toute ma gratitude à Madame la Professeur **Evelyne AUBRY** de l'Université de Haute-Alsace et Monsieur le Professeur **Claude BLANZÉ** du Conservatoire National des Arts et Métiers, pour avoir accepté de juger et rapporter ce travail.

Je remercie également Monsieur le Professeur **Philippe DUFRENOY** de l'Ecole Polytechnique Universitaire de Lille et Monsieur le Professeur **Olivier THOMAS** de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Lille pour avoir accepté de participer au jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Enfin, je remercie tous mes collègues du laboratoire pour leur aide et leur bonne humeur, en particulier Monsieur Cédric Hubert, Maître de Conférences, pour son soutien informatique et ses conseils, ainsi que Jérôme et Damien pour les discussions diverses et variées le temps d'un café. Je remercie mes amis, mes parents et ma famille pour leur soutien.

Merci à Pauline pour m'avoir soutenu et motivé chaque jour.

Résumé

Lors de la conception d'un frein, le confort et le bien-être du consommateur font partie des critères principaux. En effet, les instabilités de crissement, qui engendrent une des pollutions acoustiques les plus importantes, représentent un challenge actuel pour la communauté scientifique et les industriels du domaine. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la mise en évidence du caractère variable du crissement, observé pour deux systèmes de freinage d'un même véhicule, grâce à des plans d'expériences, expérimental et numérique. Pour être représentatif d'une famille de structures, il est désormais indéniable qu'il faille prendre en compte les variabilités observées sur de multiples paramètres liés au système étudié dès la phase de conception. L'enrichissement des simulations déterministes actuelles nécessite la mise en place d'outils non déterministes rapides et respectant le conservatisme des solutions étudiées. Pour ce faire, nous avons contribué au développement de méthodes numériques dédiées à la propagation des données floues dans le cas des graphes de coalescence, à la détermination des positions d'équilibre de corps en contact frottant à partir d'une méthode de régulation basée sur la logique floue. Cette solution permet d'appliquer une technique de projection pour réduire le coût numérique en utilisant des bases modales des composants réanalysées par un développement homotopique.

Mots clés

Crissement – Instabilités – Contact frottant – Non-linéarité – Imperfections – Ensembles flous – Régulation – Logique Floue – Méta-modèles

Abstract

During a brake design, consumer comfort and well-being are the main criteria. Indeed, squeal instabilities, that produce main acoustic pollution, represent a current challenge in the scientific community and for industrials. In this thesis, we interest first in the highlight of the variability of squeal, observed for two brake systems of a same vehicle, thanks to experimental and numerical designs of experiments. To be representative of a structure family, it is now undeniable that we must take into account variability observed in various parameters of the studied system, from the design phase. To enrich existing deterministic simulations, quick non deterministic tools must be established, respecting the studied solutions conservatism. For this, we have contributed to the development of numerical methods to propagate fuzzy data in the case of diagram of coalescence, to determine the equilibrium position of frictional contact bodies with a fuzzy logic controller. This solution allows to apply a projection technique for reducing the computational cost. The modal bases of components are reanalyzed by homotopy perturbation.

Keywords

Squeal – Instability – Frictional contact – Non-linearity – Imperfections – Fuzzy sets – Fuzzy Logic Controller – Surrogate model

Table des matières

Introduction **9**

1. Contexte industriel et scientifique 10

2. Incertitudes en ingénierie mécanique 12

3. Problématique et présentation de la recherche 14

3.1. Problématique 14
3.2. Présentation de la recherche 15

4. Références bibliographiques 16

Partie 1 : Instabilité vibratoire des systèmes de frein – Approche expérimentale et numérique non déterministe

Chapitre 1 :
Identification des paramètres imprécis par plan d'expériences **20**

1. Introduction 21

2. Paramètres imprécis favorisant l'apparition du crissement 21

3. Mise en place d'un essai de crissement sur banc de freinage 28

3.1. Système de frein étudié 28
3.2. Banc dynamométrique de freinage 31

4. Résultats du plan d'expériences 34

4.1. Essais expérimentaux suivant la norme SAE J2521 34
4.2. Essais du type freinage de maintien 37

5. Conclusion 48

6. Références bibliographiques 48

Chapitre 2 :
Amélioration des simulations numériques par enrichissement du paramétrage **52**

1. Introduction 53

2. Modélisation numérique des systèmes de freins 54

2.1. Systèmes Masse-Ressort 54
2.2. Modèles Eléments finis 55
2.3. Modèle numérique retenu pour l'étude non déterministe 59

3. Méthodes de résolution pour l'étude de stabilité 60

3.1. Analyse fréquentielle 61
3.2. Analyse temporelle 61
3.3. Déclenchement de l'instabilité 64
3.4. Etude d'une configuration crissante et non crissante 68

4. Vers une conception robuste 74

4.1. Présentation du plan d'expériences 74
4.2. Résultats de l'analyse fréquentielle 76
4.3. Résultats de l'analyse temporelle 82

5. Conclusion 86

6. Références bibliographiques 88

Partie 2 : Développements numériques pour la prise en compte des imprécisions en instabilité vibratoire

Chapitre 3 : Résolution du problème de contact mécanique frottant – Méthode basée sur un régulateur flou 93

1. Introduction 94

2. Modélisation du contact frottant 95

2.1. Formulation continue 95
2.2. Formulation variationnelle 98
2.3. Discrétisation par éléments finis 98

3. Méthodes numériques pour la gestion du contact 100

3.1. Méthodes usuelles 100
3.2. Développements récents 102
3.3. Mise en donnée du problème dans un contexte de tirages multiples 103

4. Définition d'un régulateur flou 104

4.1. La théorie des sous-ensembles flous 104
4.2. La logique floue et son utilisation en ingénierie 106
4.3. Composants constitutifs d'un régulateur flou 108
4.4. Gestion du contact par régulateur flou 112

5. Applications numériques 117

5.1. Modèle bi-poutres (éléments finis 1D) 117
5.2. Modèle bi-poutres (éléments finis 2D) 128
5.3. Limitations de la méthode FL2C 132

6. Conclusion 135

7. Références bibliographiques 136

Chapitre 4 :
Gestion des imprécisions en analyse de stabilité de type fréquentielle 141

1. Introduction 142

2. Analyse de stabilité de type fréquentielle 142

2.1. Mise en donnée du problème 142
2.2. Résolution du système aux valeurs propres généralisées 144
2.3. Théorème de Lyapunov 145

3. Imperfections en ingénierie mécanique 146

3.1. Approches probabilistes 146
3.2. Approches par sous-ensembles flous 150

4. Méthodologie adoptée 156

4.1. Propagation des incertitudes par optimisation 156
4.2. Analyse paramétrique 158
4.3. Réanalyse de la base modale 164

5. Applications numériques 167

5.1. Etude déterministe 167
5.2. Etude non-déterministe 169

6. Conclusion 173

7. Références bibliographiques 173

Conclusion générale et perspectives 180

1. Conclusion générale 181

2. Perspectives 182

3. Références bibliographiques 183

Introduction

1. Contexte industriel et scientifique 10
2. Incertitudes en ingénierie mécanique 12
3. Problématique et présentation de la recherche 14
3.1. Problématique 14
3.2. Présentation de la recherche 15
4. Références bibliographiques 16

1. Contexte industriel et scientifique

Les travaux menés sur l'instabilité vibratoire des systèmes de freins à disque sont, en grande majorité, issus des domaines de l'automobile [FRI07], [DAI08], [COU09], [SIN10], [VER11], [HEU11], du ferroviaire [DIS06], [LOR07], [LOY11] et de l'aéronautique [RYZ09], [CHE09], où la réduction des émissions sonores est un challenge actuel. Récemment, quelques études ont porté sur les freins d'éoliennes [MOR10] [BER10], qui produisent un désagrément sonore pour les habitations proches, ainsi que sur les freins de Vélo Tout Terrain [NAK10]. Quelque soit le domaine d'application, les systèmes de frein utilisés présentent une importante richesse dynamique, de par le nombre de pièces qui les constitue, ainsi qu'une complexité mécanique avérée à cause, par exemple, des jeux de fonctionnement, des amortissements localisés ou encore des zones de contact. Bien que tous les systèmes n'utilisent pas la même technologie pour dissiper de l'énergie, ils présentent tous un mode de fonctionnement propice à la génération de bruit, basé sur un contact frottant entre une partie mobile avec une autre fixe.

Les nuisances sonores, émises par ce type de système, sont généralement classées en deux catégories (FIGURE 0-1) en fonction de la bande fréquentielle d'apparition et de l'intensité sonore émise [AKA02].

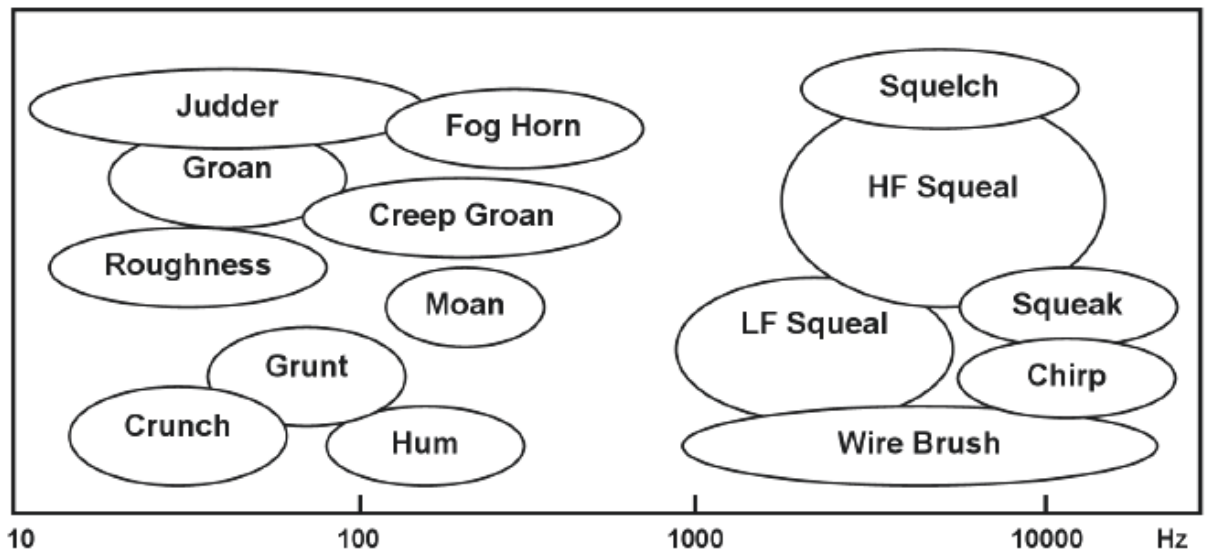


FIGURE 0-1 : Classification des bruits de frein selon Akay

La première catégorie regroupe les vibrations, dites « forcées », obtenues entre 10 Hz à 1 kHz, alors que la seconde inclut les vibrations, qualifiées « d'auto-entretenues », que l'on repère à plus haute fréquence. Le spectre est compris entre 1 kHz et plusieurs dizaines de

kilohertz. Les bruits à basse fréquence sont principalement dus aux mouvements des corps rigides des différents composants du système. Par exemple, le bourdonnement (en anglais "hum") est engendré par une rotation de l'étrier autour d'un axe orthogonal à la surface de frottement du disque et directement lié au phénomène d'arc-boutement-glissement, étudié par Sinou et al. [SIN03], Baillet et al. [BAI06], Kang et al. [KAN10]. Le broutement ("judder") est, quant à lui, associé à la dépendance du coefficient de frottement vis-à-vis de la vitesse relative entre deux corps frottants. Celui-ci conduit à des vibrations ressenties par le conducteur et liées au phénomène d'adhérence-glissement, analysé par Moirot et al. [MOI02], Brunel et al. [BRU04], Ouyang et al. [OUY09], Berhendt et al. [BER10], Loyer et al. [LOY10]. Concernant les bruits à haute fréquence, le crissement ("squeal" en anglais) fait partie des bruits les plus étudiés du fait que les intensités sonores émises peuvent atteindre les 100 décibels. Il apparaît pour des fréquences supérieures à 1 kHz et résulte de la vibration des différents composants du système de frein pendant une phase de freinage, principalement lors de freinages de type maintien ou parking, c'est-à-dire à faible vitesse (de 0 à 30 kilomètres/heure) et pression de freinage de niveau intermédiaire (de 15 à 30 bars). Le crissement, généralement associé à une instabilité par couplage de modes [OUY01], [AKA09], a un caractère variable compte tenu de sa dépendance à une multitude de paramètres endogènes et exogènes aux systèmes de freins. Il est directement lié au frottement produit entre les surfaces du disque et des plaquettes.

Compte tenu du renforcement des critères environnementaux concernant la pollution acoustique, la compréhension de ces phénomènes est un challenge actuel pour la communauté scientifique et les industriels du domaine. Les nuisances engendrées conduisent inévitablement à l'insatisfaction des usagers dans les transports ferroviaires et le mécontentement du client pour les constructeurs automobiles. La réduction des émissions sonores à la source reste le point clé pour diminuer son impact dans le secteur des transports, ce qui nécessite une maîtrise complète du mécanisme d'apparition du crissement, dès la phase de conception.

Bien qu'il soit étudié d'un point de vue théorique et phénoménologique depuis de nombreuses années et malgré une multitude de solutions techniques proposées, le crissement est très difficile à enrayer en pratique. L'un des principaux obstacles à sa prédiction vient du fait qu'il est de nature aléatoire. Les conditions propices au crissement (température, hygrométrie, pression, vitesse) sont, d'une part, difficilement reproductibles. D'autre part, des

variations de comportement sont observées en fonction de l'historique d'utilisation (usure de la plaquette) et une méconnaissance de certains matériaux utilisés et plus généralement des conditions de fonctionnement favorisent un comportement différent entre deux systèmes de freinage de la même famille. Fort de ces constats, il est primordial d'intégrer les incertitudes observées au sein des outils d'aide à la conception de manière à prédire le crissement avec robustesse et pouvoir optimiser en conséquence les différents composants du système de freinage pour espérer atteindre le zéro crissement.

L'étude des instabilités, en particulier le crissement, peut être abordé avec deux catégories de méthodes numériques, à savoir une analyse fréquentielle, dont l'objectif est d'identifier les modes instables à partir d'une analyse aux valeurs propres complexes, et une analyse temporelle qui permet de déterminer l'évolution de grandeurs mécaniques (coefficient de frottement dynamique, vitesse de glissement, …) en fonction du temps. L'analyse fréquentielle est réputée être moins discriminante que l'analyse temporelle de par la nature même des équations à résoudre (étude globale) mais a l'avantage d'avoir un coût numérique très réduit en phase de conception tandis que l'analyse temporelle, dont les temps de calcul peuvent être très prohibitifs, caractérise l'instabilité localement à partir des évolutions de statut (adhérence, glissement, décollement) à l'interface. L'intégration des incertitudes dans ces analyses, ayant un degré de non linéarité plus ou moins marqué, va bien évidemment engendrer un surcoût numérique qu'il faut maîtriser afin que l'étude soit compatible avec la phase de conception. Il est donc nécessaire de s'orienter vers des stratégies de résolutions numériques adaptées, en remplacement des méthodes traditionnelles, et vers des techniques de réduction de modèles.

2. Incertitudes en ingénierie mécanique

La notion d'incertitude (uncertainty en anglais) fait référence à de nombreux qualificatifs comme incertain, imparfait, imprécis, vague, méconnu, mal défini, incomplet, subjectif, épistémique en fonction de la modélisation utilisée. Compte tenu de la nature et de la multiplicité de ces notions, deux catégories ont été définies. La première catégorie regroupe les incertitudes, dites réductibles, lorsque l'on peut les réduire ou même les éliminer si l'on collecte suffisamment d'informations. Celles-ci sont généralement dues à un manque d'informations ou à des notions subjectives. Elles peuvent être aussi assimilées, par certains auteurs, à des ignorances. La seconde fait référence aux incertitudes qualifiées d'irréductibles. Elles peuvent être mieux caractérisées si l'on dispose d'informations supplémentaires mais ne

seront en aucun cas complètement réduites. Pour gérer et manipuler les incertitudes, plusieurs théories et approches non déterministes ont été développées par exemple de type probabiliste, intervalle ou ensemble flou.

Dans la communauté scientifique et en particulier en ingénierie mécanique, la prise en compte de ces données au sein des codes de simulation numérique suscite un vif intérêt depuis quelques années. Les méthodes d'analyse probabiliste ont acquis une grande popularité. Les incertitudes y sont décrites soit par des champs aléatoires, s'il existe une variation des propriétés spatiales du modèle, soit par des variables aléatoires discrètes. La construction de ces distributions de probabilité requiert alors une étude statistique des données mesurées à partir d'essais, d'observations ou de jugements d'experts. Les modélisations de type intervalle ou ensemble flou, quant à elles, font appel à des théories non probabilistes, dans lesquelles le degré d'appartenance à un ensemble remplace le degré de confiance des informations probabilistes. Les données utilisant les intervalles sont alors représentées par une valeur minimale et maximale (avec un degré d'appartenance de 1) tandis que les données floues par une fonction d'appartenance, qui traduit une appartenance pondérée (comprise entre 0 et 1) pour chaque valeur de la variable considérée.

Quelle que soit la théorie utilisée, les verrous scientifiques restent identiques, à savoir propager, à moindre coût, les incertitudes des variables d'entrée vers les variables de sortie associées aux analyses mécaniques. En fonction du problème rencontré (statique, modal, thermique, flambement, …) et des paramètres étudiés (module d'Young, masse volumique, épaisseur, coefficient de frottement…), la tâche est plus ou moins complexe. Elle dépend directement de la nature de l'évolution (linéaire, quadratique, monotone ou non, …) des solutions (déplacements, valeur propre, vecteur propre, …) en fonction des paramètres incertains. A cet effet, de nombreuses méthodologies, basées soit sur des tirages judicieux, soit sur des développements d'ordre élevé, apportent des réponses à ces challenges. Toutefois, ces propositions ne répondent qu'à des problèmes de nature plutôt linéaire. Dès que l'on aborde des études dynamiques fréquentielles ou temporelles (linéaires ou non), les propositions actuelles sont moins efficaces et ces problématiques suscitent actuellement l'intérêt de la communauté scientifique.

3. Problématique et présentation de la recherche

3.1. Problématique

Depuis plusieurs années, l'équipe Crash, Confort et Sécurité (C2S) du Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique industrielles et Humaines (LAMIH), utilise des approches non probabilistes pour prendre en compte les incertitudes présentes sur des caractéristiques endogènes et exogènes associées à un modèle éléments finis. Ces approches, basées sur la théorie des intervalles et des sous-ensembles flous, ont permis, d'une part, de propager les incertitudes dans différents problèmes, de nature linéaire, à savoir des analyses statique et modale [MAS08], cinématique ou de l'identification modale et, d'autre part, de mettre en place une méthodologie d'optimisation [MAS09a], [MAS11], et d'aide à la conception en intégrant la notion de robustesse des solutions imprécises avec la thèse de F. Massa [MAS05]. L'objectif commun à ces développements est de synthétiser l'ensemble des comportements possibles d'une solution mécanique au sein d'un même formalisme. La recherche des données extrêmes se traduit par une méthodologie commune, basée sur une phase d'optimisation min-max (algorithmes de type gradient, métaheuristiques, …) et sur l'utilisation de méta modèles ad hoc pour réduire les temps de calcul tout en conservant un haut degré de précision. Plus récemment avec la thèse de K. Ruffin-Mourier [RUF08], l'équipe s'est focalisée sur la propagation des incertitudes pour des réponses fréquentielles [MAS09b] et sur l'introduction des incertitudes dans des problèmes non linéaires de type contact. Ces travaux ont permis d'étudier, pour le cas du contact nœud-à-nœud sans frottement, l'impact des variabilités des paramètres matériels et de pénalisation sur les réponses temporelles. Enfin, la thèse de Heussaff [HEU12] a traité la prise en compte de l'évolution et de la variabilité des surfaces frottantes d'un frein automobile dans l'étude du crissement. Dans ce cas, c'est l'approche probabiliste qui a été retenue pour modéliser ces surfaces par des champs aléatoires.

Pour parvenir à une conception robuste, sans crissement, d'un système de frein, il est indispensable de poursuivre le développement d'outils d'aide à la conception permettant une meilleure prédictivité des instabilités. Pour ce faire, il peut être utile d'enrichir les modèles numériques, déjà développés, en prenant en compte les incertitudes identifiées lors des expérimentations. Le premier objectif de cette thèse est de faire une synthèse des paramètres imprécis et de quantifier leurs influences sur le comportement dynamique d'un système de frein automobile en menant des plans d'expériences de nature expérimentale et numérique.

Compte tenu des temps de calcul associés aux études non déterministes, il est nécessaire de proposer des stratégies de résolutions numériques, moins coûteuses que les méthodes traditionnelles, pour transférer des incertitudes dans des études non linéaires incluant des zones de contact avec frottement. Ce travail constitue le second objectif de la thèse.

3.2. Présentation de la recherche

Ce mémoire est organisé en deux parties, composées chacune de deux chapitres.

Les deux premiers chapitres se focalisent sur l'étude d'un système de frein automobile sous un angle de vue expérimental puis numérique. Dans le premier chapitre, une base de données expérimentale relative au phénomène de crissement est constituée. Cette étude permet d'identifier les paramètres les plus influents vis-à-vis de l'apparition de cette instabilité et de quantifier les imprécisions associées. Un état de l'art des travaux menés dans ce domaine d'intérêt est ainsi proposé. Le deuxième chapitre détaille les modélisations numériques des systèmes de freinage déjà utilisées dans la littérature, les méthodes de résolution, de nature fréquentielle et temporelle, ainsi que les critères de détection, principalement retenus, pour étudier le crissement. On s'attache ensuite à mettre en évidence l'importance d'enrichir la simulation numérique en intégrant des imprécisions, observées expérimentalement. Ce dernier point est abordé avec une approche, que l'on peut qualifier d'industrielle, utilisant un plan d'expériences numériques avec un code commercial et en profitant des performances du calcul parallèle. Cette approche ne peut, en aucun cas, être utilisée en phase de dimensionnement, de par les temps de calcul prohibitif générés, mais a l'avantage de mettre en exergue les verrous scientifiques sur lesquels il faut s'attarder pour parvenir à la mise en place d'une stratégie de dimensionnement robuste compatible avec la phase de conception.

Afin de maîtriser les temps de calcul des développements non déterministes, présentés dans la première partie, deux leviers sont identifiés, à savoir l'utilisation de nouvelles méthodes de gestion des non-linéarités de contact couplées à une réduction de la taille des modèles. Ces développements s'intègrent à différents niveaux dans la stratégie de propagation des incertitudes pour des analyses de stabilité et font l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Dans le troisième chapitre, on propose de gérer le contact entre composants grâce à un régulateur expert basé sur la logique floue. Ce choix permet de transformer le problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires, pour lesquels on peut mettre en place une

projection sur une base ad hoc. Le dernier chapitre, quant à lui, présente une méthodologie de propagation des incertitudes pour une analyse de stabilité de type fréquentielle. Celle-ci repose sur des développements précédemment menés dans le cadre de la propagation d'incertitudes dans le domaine linéaire. Dans cette méthodologie, les imprécisions sont modélisées par des nombres flous et la détermination des comportements extrêmes des solutions imprécises étudiées est effectuée avec une optimisation locale min-max. Une méthode de réanalyse des bases modales est proposée en considérant une base de projection composée de vecteurs perturbés issus d'un développement homotopique. Les développements proposés sont testés sur des exemples issus de la littérature.

En conclusion de ces travaux, plusieurs remarques, concernant la modélisation numérique du système de frein, le développement du régulateur pour gérer le contact et la prise en compte des imprécisions sont exposées, ce qui permet de dégager plusieurs perspectives de recherche à la fois pour le court terme et à plus long terme.

4. Références bibliographiques

[AKA02] AKAY A. (2002). Acoustics of friction. Journal of the Acoustical Society of America 111(4), 1525-1548.

[AKA09] AKAY A., GIANNINI O., MASSI F., SESTIERI A. (2009). Disc brake squeal characterization through simplified test rigs. Mechanical Systems and Signal Processing 23, 2590-2607.

[BAI06] BAILLET L., D'ERRICO S., LAULAGNET B. (2006). Understanding the occurrence of squealing noise using the temporal finite element method. Journal of Sound and Vibration 292, 443-460.

[BER10] BEHRENDT J., WEISS C., HOFFMANN N.P. (2010). A numerical study on stick-slip motion of a brake pad in steady sliding. Journal of Sound and Vibration, doi :10.1016/j.jsv.2010.08.030.

[BRU04] BRUNEL J-F., DUFRENOY P., DEMILLY F. (2004). Le crissement comme une vibration de structure par propagation d'ondes locales de contact. 5ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2006), Lille, France.

[CHE09] CHEVILLOT F., SINOU J-J., HARDOUIN N. (2009). Nonlinear transient vibrations and coexistences of multi-instabilities induced by friction in an aircraft braking system. Journal of Sound and Vibration 328, 555-574.

[COU09] COUDEYRAS N. (2009). Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale de Lyon.

[DAI08] DAI Y., LIM C.T. (2008). Suppression of brake squeal noise applying finite element brake and pad model enhanced by spectral-based assurance criteria. Applied Acoustics 69, 169-214.

[DIS06] DISSON J-Y., FAILLET J-P., FICHOT D. (2006). Modélisation et aide à la conception de frein ferroviaire "zéro crissement" à l'usage des industriels. 5ème Journée Européenne du Freinage, JEF 2006, Lille, France.

[FRI07] FRITZ G., SINOU J-J., DUFFAL J-M., JEZEQUEL L. (2007). Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. Journal of Sound and Vibration 307, 591-609.

[HEU11] HEUSSAFF A., TISON T., WATREMEZ M., DUBAR L., FERNANDES NUNES R. (2011). Variabilité du contact dans l'étude du crissement des freins automobiles. 10ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France.

[HEU12] HEUSSAFF A. (2012). Analyse expérimentale et numérique de l'influence de paramètres intrinsèques et extrinsèques aux garnitures sur le comportement en frottement et en crissement d'un système de freinage automobile. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[KAN10] KANG J., KROUSGRILL C.M. (2010). The onset of friction-induced vibration and sprigging. Journal of Sound and Vibration 329, 3537-3549.

[LOR07] LORANG X. (2007). Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Polytechnique.

[LOY10] LOYER A., SINOU J.-J., CHIELLO O., LORANG X. (2010). Model reduction strategy for railway disc brake squeal prediction. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[LOY11] LOYER A., SINOU J.-J., CHIELLO O., LORANG X. (2011). Etude du crissement d'un frein à disque ferroviaire. Réduction de modèle en dynamiques transitoire et stationnaire. 10ème Colloque national en Calcul des Structures (CSMA 2011). 9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens.

[MAS05] MASSA F. (2005). Gestion des imperfections en phase de conception des structures mécaniques. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[MAS08] MASSA F., RUFFIN K., TISON T., LALLEMAND B. (2008). A complete method for efficient fuzzy modal analysis. Journal of Sound and Vibration 309, 63-85.

[MAS09a] MASSA F., LALLEMAND B., TISON T. (2009). Fuzzy multiobjective optimization of mechanical structures. Comput. Methods Appl. Engrg. 198, 631-643.

[MAS09b] MASSA F., TISON T., LALLEMAN B. (2009). Fuzzy modal analysis : Prediction of experimental behaviours. Journal of Sound and Vibration 322, 135-154.

[MAS11] MASSA F., LEROUX A., LALLEMAND B., TISON T., BUFFE F., MARY S. (2011). Fuzzy vibration analysis and optimisation of engineering structures : Application to Demeter satellite. IUTAM bookseries 27(1), 63-76, ISSN 978-94-007-0289-9_5.

[MOI02] MOIROT F., NGUYEN Q.-S., OUESLATI A. (2002). An example of stick-slip and stick-slip-separation waves. European Journal of Mechanics A/Solids 22, 107-118.

[MOR10] MORTELETTE L., BRUNEL J-F., DUFRENOY P., DESPLANQUES Y., CHAMIGNON M., MARTIN O., HENRION M. (2010). Friction material for reduction of windturbine brake squeal noise. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[NAK10] NAKAE T., RYU T., SUEOKA A., NAKANO Y., INOUE T. (2010). Squeal and chatter phenomena generated in a mountain bike disc brake. Journal of Sound and Vibration. Doi : 10.1016/j.jsv.2010.08.027.

[OUY01] OUYANG H., MOTTERSHEAD J.E. (2001). Unstable travelling waves in the friction-induced vibration of discs. Journal of Sound and Vibration 248, 768-779.

[OUY09] OUYANG H., BAEZA L., HU S. (2009). A receptance-based method for predicting latent roots and critical points in friction-induced vibration problems of asymmetric systems. Journal of Sound and Vibration 321, 1058-1068.

[RUF08] RUFFIN-MOURIER K. (2008). Réponse dynamique de structures mécaniques à paramètres imprécis. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[RYZ09] RYZHIK B. (2009). Friction-induced vibrations of squeal type due to transverse contraction in a flexible disk. Journal of Sound and Vibration 326, 623-632.

[SIN03] SINOU J.-J., THOUVEREZ F., JEZEQUEL L. (2003). Analysis of friction and instability by the centre manifold theory for a non-linear sprag-slip model. Journal of Sound and Vibration 265, 527-559.

[SIN10] SINOU J.-J. (2010). Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal-On the need to consider both stability and non-linear analysis. Mechanics Research Communications 37, 96-105.

[VER11] VERMOT DES ROCHES G. (2011). Frequency and time simulation of squeal instabilities – Application to the design of industrial automotive brakes. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris.

Partie 1

Instabilité vibratoire des systèmes de frein – Approche expérimentale et numérique non déterministe

Chapitre 1 :

Identification des paramètres imprécis par plan d'expériences

1. Introduction 21
2. Paramètres imprécis favorisant l'apparition du crissement 22
3. Mise en place d'un essai de crissement sur banc de freinage 28
3.1. Système de frein étudié 28
3.2. Banc dynamométrique de freinage 31
4. Résultats du plan d'expériences 34
4.1. Essais expérimentaux suivant la norme SAE J2521 34
4.2. Essais du type freinage de maintien 37
5. Conclusion 48
6. Références bibliographiques 48

1. Introduction

Pour stopper efficacement les véhicules, qui sont de plus en plus lourds et contraints à des normes de sécurité de plus en plus exigeantes, les freins à disque sont les plus efficaces et permettent de contrôler la puissance de freinage. Ce type de système, décrit avec précision par Nguyen-Tajan [NGU02], est composé d'un disque maintenu entre le moyeu et la roue et d'un étrier fixé au porte-moyeu. Les plaquettes de frein, quant à elles, sont maintenues dans l'étrier. Un piston hydraulique permet de déplacer les plaquettes contre le disque pour le pincer et ainsi freiner sa rotation par frottement. A la fin du freinage, le retour des pistons est effectué par l'élasticité du joint annulaire d'étanchéité en caoutchouc ou par des ressorts à réglage automatique. Le retour des plaquettes se fait naturellement par le jeu présent dans la rotation du disque. Ces frottements peuvent entraîner des vibrations du type bourdonnement, ronflement ou crissement. Les deux premières sont moins propices à des niveaux sonores importants contrairement au crissement qui est le point d'intérêt de ce chapitre.

De nombreux essais expérimentaux, sur tribomètre ou banc d'essai industriel, ont permis de mettre en avant l'origine du crissement en l'étudiant à différentes échelles. Des études macroscopiques [COU09], [VER10], [LOY11] ont permis l'étude du comportement dynamique du système de freinage (jusqu'à l'intégration d'une partie du train avant d'un véhicule automobile) et de mettre en évidence les vibrations auto-entretenues qui génèrent le rayonnement acoustique ainsi que le phénomène de couplage de modes. Pour appréhender le comportement à l'interface, des études mésoscopiques [HEU11], [MER11] de nature thermomécanique ou tribologique ont été menées pour mettre en avant, par exemple, les hétérogénéités de surface et la présence d'un troisième corps. Enfin, l'évolution des constituants des matériaux et la topologie de certains composants ont été analysées avec des études microscopiques [KOL11], [HIN11] durant l'historique de freinage. Ces dernières études ont montré l'apparition de zones localisées d'adhérence, de glissement ou de décollement à l'interface en fonction de l'usure des plaquettes. L'ensemble de ces études a mis en exergue de nombreux phénomènes physiques étroitement couplés et présents dans l'apparition du crissement, qui est fortement sensible à des paramètres endogènes et exogènes au système de frein.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur une campagne expérimentale, menée sur un banc d'essai de l'Université de Valenciennes, pour étudier le crissement d'un système de frein automobile. Cette étude permet, en complément des travaux antérieurs issus de la littérature,

de dresser un bilan des paramètres les plus influents dans l'apparition du crissement et de quantifier les imprécisions associées.

2. Paramètres imprécis favorisant l'apparition du crissement

Cet état de l'art regroupe à la fois des observations issues d'essais et des simulations numériques. De nombreux auteurs se sont intéressés aux paramètres influents dans l'apparition des différentes instabilités vibratoires ainsi qu'au phénomène de crissement de systèmes de freins.

Concernant les instabilités vibratoires en général, on peut noter les travaux concernant :

- Le coefficient de frottement : [CAR02], [VAY06], [BAI06], [MAS07], [MEZ07]

  Caridi [CAR02] a mis en évidence qu'une **variation importante du coefficient de frottement au cours d'une simulation va entraîner l'instabilité du système** alors qu'une faible variation n'a pas d'influence particulière sur le comportement. Cette observation est confirmée par Vayssiere et al. [VAY06] grâce à une simulation fréquentielle, par Baillet et al. [BAI06] en temporel et ensuite par Massi et al. [MAS07] pour des analyses fréquentielle et temporelle. Meziane [MEZ07], quant à elle, a mis en évidence l'**apparition de zones stables, instables et d'instabilité discontinue en fonction des valeurs spécifiques de frottement**.

- La pression et la force d'application : [CAR02], [LIN05], [GIA06], [VAY06], [BAI06], [MEZ07]

  Selon Caridi [CAR02], l'**augmentation de la pression** engendre, pour les **basses fréquences**, une **diminution des vibrations** relevées sur un modèle disque-aiguille. Pour les **hautes fréquences**, le phénomène observé est opposé avec une **augmentation des niveaux de réponses**. Giannini et al. [GIA06] ont mis en évidence une augmentation du crissement avec la force appliquée sur le pion de leur système d'essais. Vayssiere et al. [VAY06] l'ont confirmé par une simulation fréquentielle sur un système de pion en frottement sur une plaque et Baillet et al. [BAI06] en temporel par une simulation de frottement d'un pion sur une poutre. Meziane [MEZ07], quant à elle, a mis en évidence le fait que

l'augmentation de la force de mise en contact permet de faire **apparaître des zones stables, instables et d'instabilité discontinue** sur un modèle de deux poutres en contact ponctuel, comme l'avait constaté Linck [LIN05] sur un modèle à plusieurs nœuds de contact.

- La vitesse de déplacement imposée : [LIN05], [MEZ07]

  Les simulations temporelles de Linck [LIN05] ont permis de déterminer une influence de la vitesse sur les régimes d'instabilité. D'après son étude paramétrique, Meziane [MEZ07] en déduit que l'**augmentation de la vitesse** permet de faire apparaître une **zone d'adhérence-glissement**, puis **d'adhérence-glissement-décollement**, et enfin de **glissement-décollement**.

- La vitesse de glissement : [CAR02]

  Caridi [CAR02] a observé une **influence de la variation de la vitesse de glissement sur l'excitation des fréquences**. Avec une baisse de la vitesse de glissement, les niveaux d'accélérations deviennent 4 à 5 fois moins importants mais le nombre de modes propres du disque excités augmente. Les fréquences d'excitation sont plus élevées et leurs amplitudes beaucoup plus faibles. La propension au crissement sera donc plus faible.

- L'angle de contact : [DRO99], [CAR02], [VAY06], [GIA06], [MEZ07], [MEN09]

  Drobecq [DRO99] puis Caridi [CAR02] ont montré l'existence d'un angle critique de contact par expérimentation sur un banc de test puis par simulation temporelle. Vayssiere et al. [VAY06] ont montré que l'**angle de contact entre les deux surfaces en contact influe sur l'apparition du crissement**. Giannini et al. [GIA06] ont utilisé le modèle de frein 'Laboratory brake' standardisé pour effectuer des essais et des comparaisons entre l'expérimental et le numérique. Ils étudient l'angle d'attaque et les forces de frottement et concluent que celui-ci peut faire varier les fréquences propres de la plaquette de plus de 15%. Ils remarquent que le système crisse pour des fréquences proches des fréquences naturelles du système couplé. L'analyse fréquentielle de Meziane [MEZ07] permet de faire une étude paramétrique sur l'angle de contact et sur la position du point de contact (en statique). Elle observe ainsi que ces deux paramètres influent sur l'instabilité. En 2009, Menezes et al. [MEN09] ont réalisé une

expérimentation sur le frottement d'une poutre inclinée en contact avec une poutre horizontale, et ont observé que l'**inclinaison augmente la valeur du coefficient de frottement et favorise le phénomène de stick-slip**.

- La matière du disque et des garnitures en termes d'amortissement et de rigidité : [VAY06], [BAI06]

  Des solutions apportées aux plaquettes et au disque ont été proposées par Vayssiere et al. [VAY06] d'après des études expérimentales et numériques. Il s'agit de modifier les propriétés matérielles. La surface du disque présente une succession de 13 paliers d'angle différent, qui permettent d'observer l'apparition d'instabilités. L'augmentation du module de Young de la plaquette diminue l'angle limite pour lequel les vibrations apparaissent. L'amplitude des vibrations diminue et les fréquences augmentent. Le coefficient de Poisson influe légèrement aussi puisque la fréquence des vibrations diminue et l'amplitude augmente proportionnellement avec ce coefficient. Baillet et al. [BAI06] ont montré que l'**augmentation du module de Young de la plaquette peut réduire le phénomène d'instabilité** et que le coefficient de Poisson joue un rôle dans l'interaction au contact.

- L'état de surface, l'usure et le troisième corps : [CAR02], [LIN05]

  Caridi [CAR02] et Linck [LIN05] ont pris en compte respectivement l'effet de **la rugosité et de l'usure** dans une simulation temporelle disque-aiguille et surface-pion. Ces paramètres **influent directement sur le coefficient de frottement et donc sur les instabilités générées**.

Concernant les travaux dédiés au crissement des systèmes de freinage, les paramètres, qui ont focalisé l'attention des industriels et chercheurs, sont :

- Le coefficient de frottement : [LIU07], [LOR07], [DAI08], [TRI08], [KAN09a], [KAN09b], [RYZ09], [COU09], [FIE10]

  De nombreux auteurs [LIU07], [LOR07], [DAI08], [TRI08], [KAN09a], [KAN09b], [RYZ09] observent, par des analyses fréquentielles, que la **réduction du coefficient de frottement a permis de diminuer le crissement**. Coudeyras [COU09] observe la même tendance lors d'une simulation temporelle sur un système disque-plaquettes. Fieldhouse et al. [FIE10]

montrent que le **crissement est plus fréquent avec un coefficient de frottement élevé**. Le frottement provoque un mouvement de la plaquette contre la butée de l'étrier. Le point d'application de la pression du piston n'est plus centré sur la plaquette, entraînant des vibrations. La présence de graisse sur les butées supprime le crissement car il n'y a plus d'oscillation de la force sur les butées, ce qui réduit les jeux de mise en position.

- La pression de freinage : [LIU07], [TRI08], [RYZ09], [FIE10]

  Ryzhik [RYZ09] a étudié l'influence de la pression par des simulations fréquentielles. **L'augmentation de la pression entraîne une augmentation des fréquences propres** avec une légère baisse de la partie réelle. Liu et al. [LIU07] observent également **une légère augmentation de la propension au crissement** de leur système disque-plaquettes lors de simulations fréquentielles, pour une augmentation de la pression dans une plage allant de 0.5 MPa à 2 MPa. De même, les simulations de Trichês et al. [TRI08] sur un système similaire amènent à la même conclusion. **La valeur des fréquences instables augmente avec la pression**. En se basant sur des tests expérimentaux d'un frein commercial, Fieldhouse et al. [FIE10] étudient les causes du crissement des freins, en faisant varier la position de la zone de contact piston/plaquette qui peut avoir lieu en réel lorsque la plaquette bouge dans l'étrier. La variation de la zone de contact entraîne une modification de la répartition de la pression sur la plaquette et des conditions de frottement de la plaquette sur le disque. L'apparition du crissement varie en fonction de cette position. Ces auteurs étudient également l'influence de la pression de freinage et observent que le crissement s'arrête lorsqu'ils augmentent la pression car la plaquette ne vibre plus. Cette conclusion est contraire aux résultats numériques précédents mais la valeur de la pression n'est pas connue, on peut penser qu'un seuil a été dépassé, au-delà duquel l'augmentation de la pression agit de manière inverse.

- La vitesse de rotation lors du freinage : [LIU07], [KAN09a], [KAN09b]

  Liu et al. [LIU07] observent une **augmentation des instabilités de crissement pour une diminution de la vitesse de rotation** du disque dans la plage Ω=[0.7; 8] rad/s, dans le cas d'une simulation numérique en fréquentiel. Les

simulations fréquentielles de Kang et al. [KAN09a], [KAN09b] ont confirmé cette tendance.

- L'angle de contact : [DAI08], [MEN09]

  Dai et al. [DAI08] montrent par simulation fréquentielle que l'augmentation de l'**angle de positionnement de la plaquette** dans l'étrier **va accroître la propension au crissement du frein**. Les essais de Menezes et al. [MEN09] ont confirmé l'augmentation de la valeur du coefficient de frottement avec l'angle de positionnement de la plaquette.

- La matière du disque et des garnitures en termes d'amortissement et de rigidité : [LIU07], [TRI08], [DAI08]

  Liu et al. [LIU07] observent que l'**augmentation de la rigidité du disque et la diminution de celle de la plaquette par l'intermédiaire de la valeur du module de Young permet de diminuer le crissement**. Trichês et al. [TRI08] observent également une influence du module de Young de la plaquette sur les instabilités. Dai et al. [DAI08] remarquent une influence de la matière sur les fréquences instables de leur modèle numérique avec étrier.

- L'état de surface, l'usure et le troisième corps : [ABU05], [OST09], [HEU12a]

  Abubakar [ABU05] et Osterle et al. [OST09] montrent expérimentalement que l'**usure et la formation du troisième corps vont influer sur la valeur du coefficient de frottement au contact**. Heussaff et al. [HEU12a] modélisent les variabilités des surfaces de contact des plaquettes en termes de distribution de pression et de variation du coefficient de frottement dans un modèle numérique complet de frein automobile. La prise en compte de ces variations dans une étude fréquentielle permet de prédire l'apparition du crissement en fonction de l'usure des plaquettes.

- La forme des plaquettes : [DAI08], [MEN09], [DUB10], [MAS10]

  Dai et al. [DAI08] ont réalisé en 2008 une étude paramétrique en analyse fréquentielle, à partir d'un modèle de frein disque-plaquettes-étrier. Ils étudient **l'influence de la géométrie des patins comme la présence et la forme des chanfreins et l'ajout d'une rainure normale au glissement**. Ils remarquent que **réduire la longueur de la plaquette permet de réduire la propension**

du crissement. Dans une étude expérimentale, Menezes et al. [MEN09] ajoutent sur la plaquette des rayures perpendiculaires au frottement plutôt que parallèles, ce qui entraîne un coefficient de frottement encore plus élevé. Des essais expérimentaux sont réalisés sur un système de frein avec étrier puis sur un système de frein simplifié, en modifiant la géométrie des plaquettes, pour différentes pressions et différentes vitesses [DUB10]. Une corrélation avec les simulations en 3D du modèle simplifié permet d'observer les mêmes influences de la géométrie et de prédire le crissement aux fréquences obtenues en expérimental. La longueur du contact influe fortement sur l'apparition du crissement. En expérimental, sur un disque de frein non ventilé, il teste trois matières différentes avec trois géométries de plaquette (cylindre, chanfrein sur les arêtes, arête droite) en appliquant six niveaux de pression (5 à 30 bars) à trois vitesses de rotation (10, 30 et 100 tours/min). La forme cylindrique est le cas le plus crissant. Il observe pendant le crissement des vibrations du disque hors plan. Sur banc de test, il utilise des vitesses et des pressions élevées pour tester l'influence de la longueur de contact de la plaquette. La fréquence de crissement varie en fonction de la longueur de contact et de la position de la force résultante. Une étude numérique est effectuée en analyse fréquentielle à l'équilibre statique, qui permet de retrouver ces influences. Massi et al. [MAS10] réalisent des expérimentations sur le banc de test 'Colris' qui montrent que l'**ajout d'une masse sur le disque permet de supprimer le crissement**, d'autant plus que la masse est importante.

- La température de l'air et de la surface du disque : [TRI08]

  Trichês et al. [TRI08] observent par une analyse fréquentielle que la **température influe sur le coefficient de frottement**. Une étude expérimentale a montré l'influence de la température sur les paramètres du matériau. Ils modélisent donc les augmentations de température par une **diminution du module de Young, de la rigidité et de l'amortissement** du matériau de frottement.

- Humidité : [BLA03], [ELT08], [ELT09]

  Blau et al. [BLA03] et El-Tayeb et al. [ELT08], [ELT09] ont fait des études expérimentales sur l'**influence de l'humidité et de la présence d'un film**

d'eau au contact, sur le coefficient de frottement, avec différentes matières en contact et suivant les forces et vitesses. Ils ont pu observer que le film d'eau présent sur la surface de contact a un effet hydrodynamique puisqu'il réduit le coefficient de frottement pour des vitesses assez élevées mais l'augmentation de la pression de contact ou la diminution de la vitesse supprime cet effet. Le film d'eau au contact entraîne alors un saut de la force de frottement inversement proportionnel à la vitesse de glissement. Nous avons vu que cette valeur du coefficient de frottement influe directement sur le crissement, donc l'humidité peut avoir un rôle dans l'apparition du crissement des freins.

Cet état de l'art met en évidence que plusieurs paramètres agissent directement sur la propension au crissement. Les variabilités, associées aux paramètres les plus influents, vont inévitablement affecter le comportement du système de freinage. Il est donc clair que celles-ci doivent être prises en compte au plus tôt en phase de conception.

La suite de ce chapitre est dédiée à la définition d'un plan d'expériences expérimental de manière à quantifier ces variabilités pour deux systèmes de freinage automobile : un frein arrière droit et un frein arrière gauche.

3. Mise en place d'un essai de crissement sur banc de freinage

3.1. Système de frein étudié

Le système de frein utilisé (FIGURE 1-1) provient d'une PEUGEOT 407 2.2L HDI. Ce véhicule est équipé de freins à disques ventilés à l'avant et non ventilés à l'arrière. Pour cette étude, on se focalise sur les systèmes de frein arrière, où l'on distingue pour les essais menés, frein gauche et droit. L'ensemble des composants utilisés sont des pièces neuves de première monte.

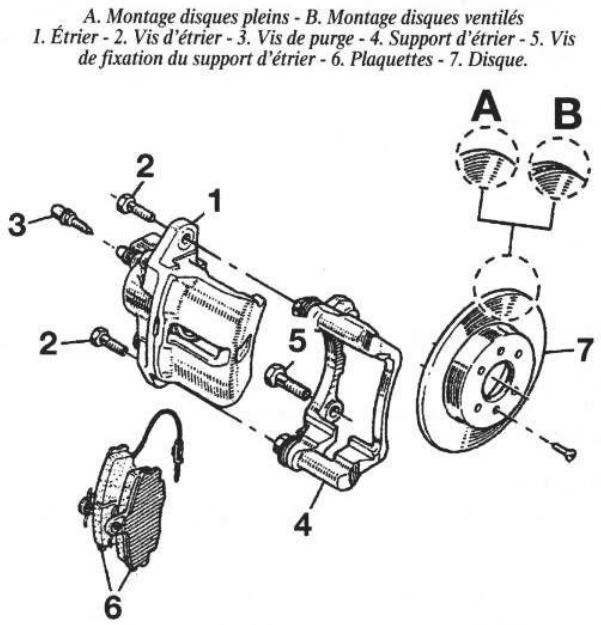


FIGURE 1-1 : Assemblage d'un système de frein disque, plaquettes, étrier - Documentation technique Peugeot 407

Dans cette étude, on restreint le système de frein à l'ensemble disque de frein – étrier – plaquettes sans tenir compte des composants de suspension et de tringlerie :

- Le disque de frein (FIGURE 1-2) est moulé en fonte à graphite lamellaire, dont les propriétés intrinsèques sont à identifier. Le TABLEAU 1-1 regroupe les intervalles de variations associées au module de Young, au coefficient de Poisson ainsi qu'à la masse volumique, que l'on peut rencontrer dans la littérature [VER11], [COU09] pour ce type de disque.

TABLEAU 1-1 : Propriétés matérielles du disque

	Disque	
	Borne inférieure	Borne supérieure
Module de Young [GPa]	78	143
Coefficient de Poisson	0.25	0.3
Densité [kg/m^3]	6800	7700

- Les plaquettes, de marque Bendix JURID produites par Honeywell, sont constituées des garnitures et du support plaquette (FIGURE 1-2). De par sa

complexité et du nombre de matériaux utilisés, il est très difficile de caractériser les propriétés endogènes de la plaquette (TABLEAU 1-2).

TABLEAU 1-2 : Propriétés matérielles de la plaquette

	Plaquette			
	Garniture		Support garniture	
	Borne inférieure	Borne supérieure	Borne inférieure	Borne supérieure
Module de Young [GPa]	1	3	80	210
Coefficient de Poisson	0.1	0.25	0.25	0.3
Densité [kg/m^3]	2500	4000	7200	8000

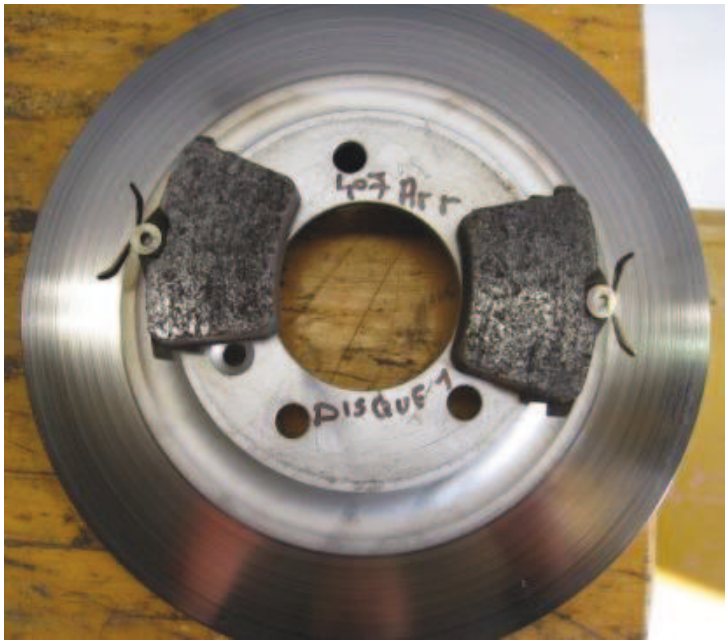


FIGURE 1-2 : Disque et plaquettes arrière de Peugeot 407

- L'étrier, produit par TRW, est de type flottant (FIGURE 1-3). Une pression hydraulique est exercée sur une plaquette mobile qui vient en contact avec le disque et entraîne un déplacement axial de l'étrier du côté opposé, amenant en contact la plaquette fixée sur l'étrier avec la surface opposée du disque. Quel que soit le principe utilisé (montage axial, étrier flottant ou disque mobile), ces montages montrent des dispersions de positionnement des pièces dans

l'assemblage et aucun système n'aura exactement la même configuration. Ces jeux sont essentiels dans le fonctionnement du frein et ne peuvent pas être supprimés. L'étrier flottant est le plus répandu dans la production automobile compte tenu de sa légèreté et de son faible encombrement. L'étrier est coulé dans un alliage d'aluminium (TABLEAU 1-3) alors que le porte étrier est en fonte.

FIGURE 1-3 : Etrier Peugeot 407

TABLEAU 1-3 : Propriétés matérielles de l'étrier

	Etrier	
	Borne inférieure	Borne supérieure
Module de Young [GPa]	65	80
Coefficient de Poisson	0.33	0.33
Densité [kg/m^3]	2650	2820

3.2. Banc dynamométrique de freinage

Les essais sont réalisés sur un banc dynamométrique de freinage du Centre Technologique en Transports Terrestres (C3T) à l'Université de Valenciennes. Fréquemment utilisé par différents constructeurs, ce banc de test est conforme aux normes en vigueur pour la validation des freins. L'ensemble des composants étudiés, à savoir, disque de frein – étrier – plaquettes, est présenté en situation d'essais FIGURE 1-4.

Le disque est fixé, par l'intermédiaire de cinq vis, sur la broche du banc via une interface spécifique. L'étrier, quant à lui, est monté directement sur l'équerre du banc à l'aide d'une interface d'adaptation reprenant l'entraxe de fixation de la chape de l'étrier (FIGURE 1-5).

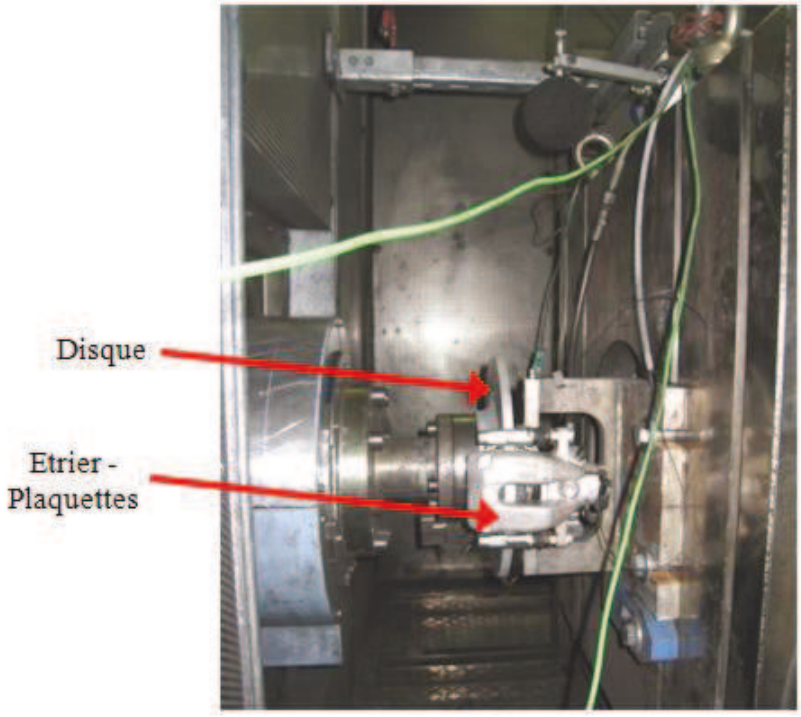


FIGURE 1-4 : Positionnement des composants du système de frein

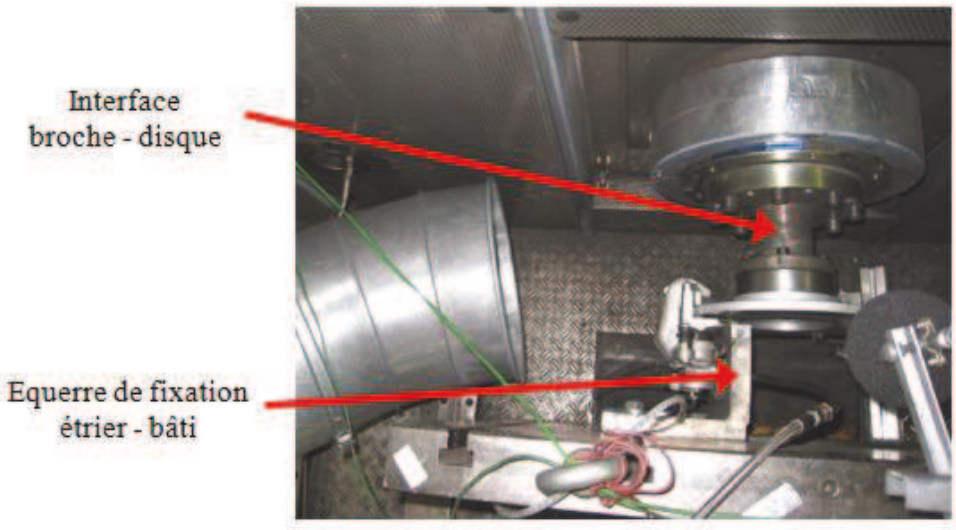


FIGURE 1-5 : Présentation des interfaces de montage

La vitesse de rotation du disque est imposée par la broche et le couple géré est relevé par un couplemètre, positionné sur la broche. La pression hydraulique de freinage est gérée par un circuit hydraulique permettant de reproduire les conditions réelles de pression dans l'étrier. Le banc de test est équipé d'une enceinte climatisée permettant de reproduire la température ambiante souhaitée et de contrôler le taux d'humidité. Les températures élevées

souhaitées à la surface du disque sont engendrées par des freinages spéciaux permettant l'élévation de la température. Enfin, une gaine de refroidissement permet de souffler l'air de refroidissement directement sur le frein pour une baisse plus rapide de la température souhaitée à la surface du disque entre deux coups de frein.

Ce banc est instrumenté avec des capteurs de différentes natures. Les paramètres disponibles sont :

- l'accélération verticale et normale sur l'étrier à l'aide d'accéléromètres (FIGURE 1-6) ;
- la température de l'air ambiant et sur les surfaces du disque à l'aide d'une sonde de température dans l'enceinte et de thermocouples sur les pistes intérieures et extérieures du disque (FIGURE 1-7) ;
- la pression acoustique relevée par un microphone (FIGURE 1-7), positionné à une distance de l'axe du disque imposée par la norme. La pression acoustique est enregistrée avec un seuil de détection du crissement à 70 dB sur une bande de fréquence de 0.55 à 16.5 kHz.

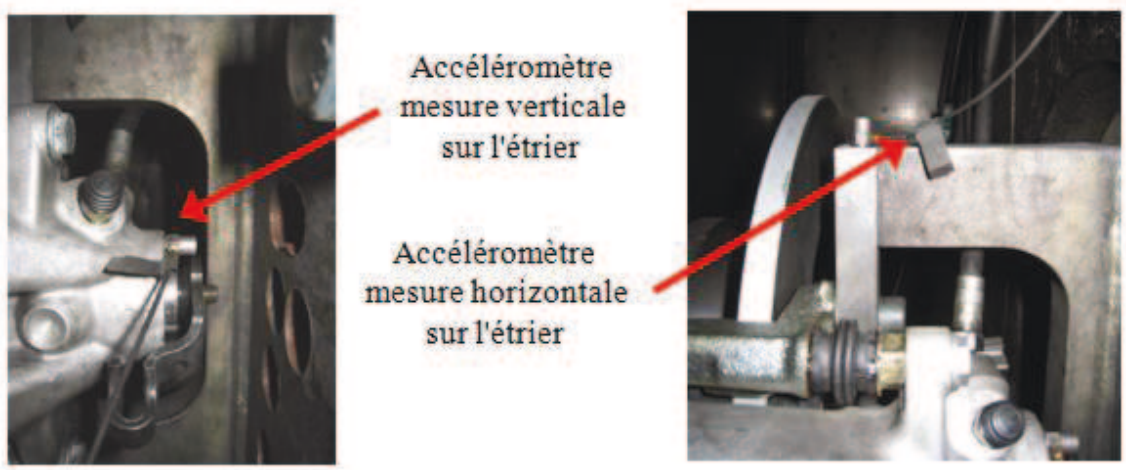


FIGURE 1-6 : Positionnement des accéléromètres

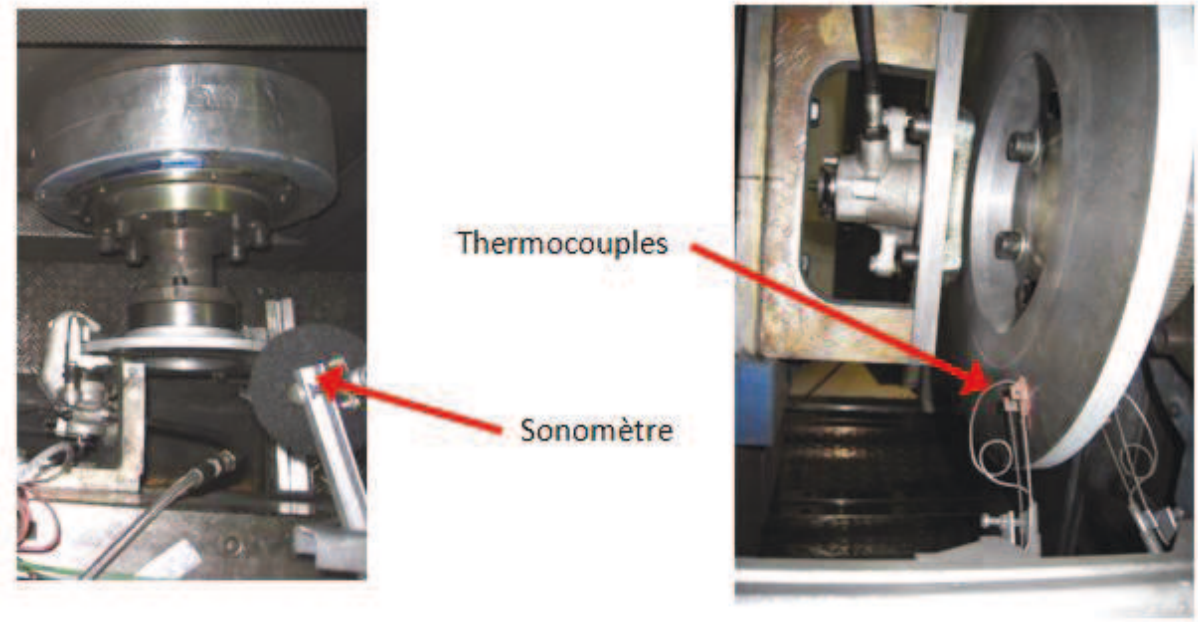


FIGURE 1-7 : Positionnement des thermocouples et du sonomètre

4. Résultats du plan d'expériences

Pour effectuer les relevés de crissement sur les systèmes de freins, la plupart des industriels, comme Ferodo de FEDERAL MOGUL ou Nucap de NAPA, utilisent la norme internationale SAE J2521 de 2006 [SAE06]. Cette norme fixe les réglages en termes de conditions d'essais, de paramètres d'entrée à tester et de relevés en sortie pour traiter les résultats. Récemment employée par Oberts et Laï [OBE11] pour étudier les niveaux sonores émis par un système de freins élargi au triangle de suspension, cette procédure d'essais, suivie pour la mise en place d'une base de données expérimentale, est exposée dans ce paragraphe.

4.1. Essais expérimentaux suivant la norme SAE J2521

La procédure prévoit une succession de 1917 coups de frein paramétrés, en fonction de la vitesse du véhicule et de la pression du circuit hydraulique des freins. Ces essais, résumés ci-dessous, sont décomposés en six groupes :

- Des freinages de décélération (Break-in, Bedding) de 80 km/h à 30 km/h avec inertie du véhicule pour des pressions comprises entre 15 et 46 bars à 100°C.
- Des freinages de décélération (Friction Charateristic) de 80 km/h à 30 km/h avec inertie du véhicule pour une pression à 30 bars et une température de 100°C.

- Des freinages de maintien (Drag Module) à vitesse maintenue constante à 3 et 10 km/h pour des pressions de 0 à 30 bars et des températures de 50°C à 300°C.
- Des freinages d'arrêt (Warm-up) de 50 à 0 km/h pour des pressions de 0 à 30 bars, à 100 et 150°C.
- Des freinages de parking (Backward - Forward) à vitesse constante de 3km/h et -3 km/h et des pressions plus faibles, de 0 à 20 bars, pour des températures de 50 à 150°C.
- Des freinages d'arrêt (Deceleration Module) de 50 à 0 km/h pour des pressions de 0 à 30 bars et des températures de 50 à 250°C.

Ces sections de freinage sont répétées successivement trois fois puis un freinage d'usure est exercé avant le dernier cycle. Le freinage d'usure prévoit une décélération de 0.4 g à partir d'une vitesse de 100 km/h jusqu'à l'arrêt sous une pression de 160 bars avec des températures jusque 550°C. La procédure est répétée pour un couple de freins arrière afin de quantifier les dispersions entre les systèmes de freinage.

Les Figures 1-8 et 1-9 présentent les résultats obtenus pour les différents types de freinages en termes d'occurrence de crissement en distinguant les freins arrière gauche et droit. Tout d'abord, on peut noter qu'il y a globalement une bonne répétabilité entre les deux systèmes de freins malgré quelques différences sur l'occurrence. Ensuite, le freinage de maintien (Drag Module) produit de 2 à 3 fois plus de crissement que les autres configurations de freinage. Ces résultats sont bien en accord avec la littérature puisque ce type d'essai est réalisé pour des faibles vitesses et des pressions intermédiaires. Enfin, il s'avère que plus la plaquette de frein est usée (suite aux freinages d'usure), plus le système crisse. En effet, l'occurrence de crissement est multipliée par 2 entre le premier et le quatrième cycle de freinage de maintien.

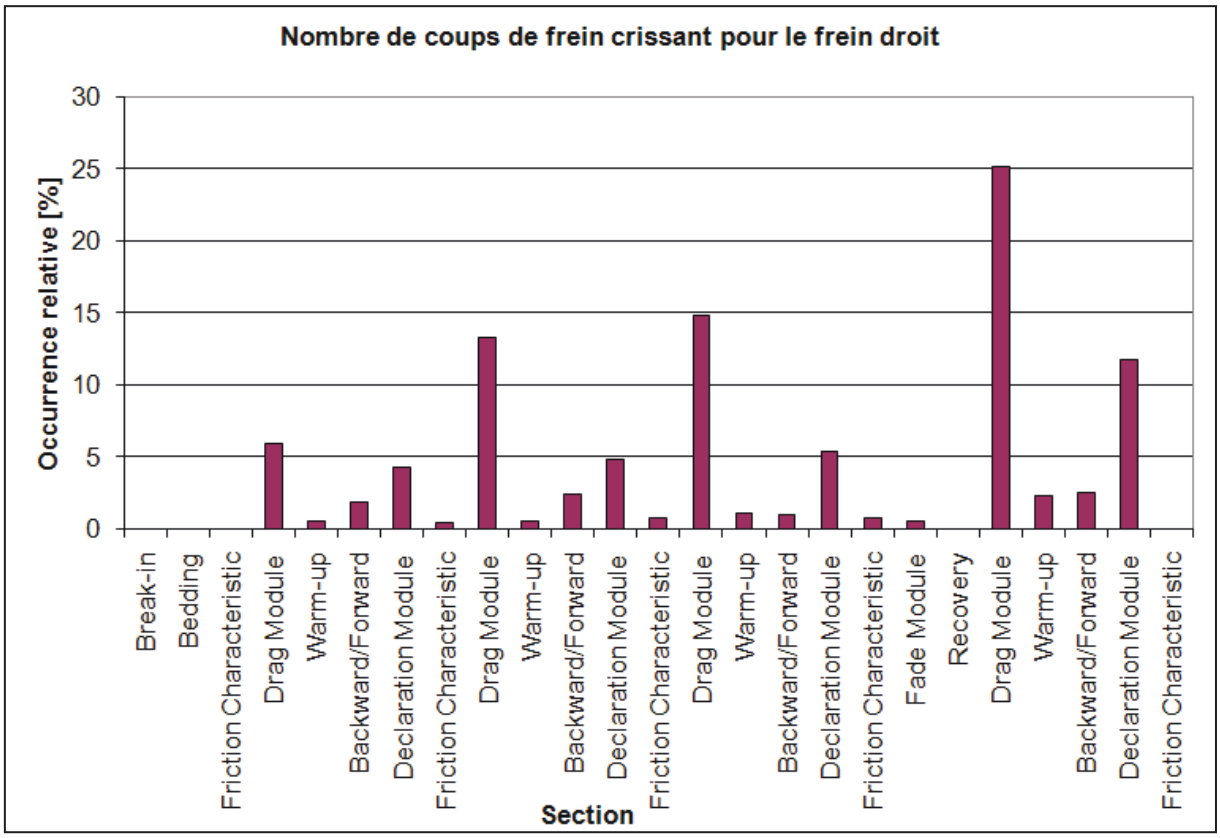


FIGURE 1-8 : Pourcentage de crissement du frein arrière droit suivant les sections de freinage

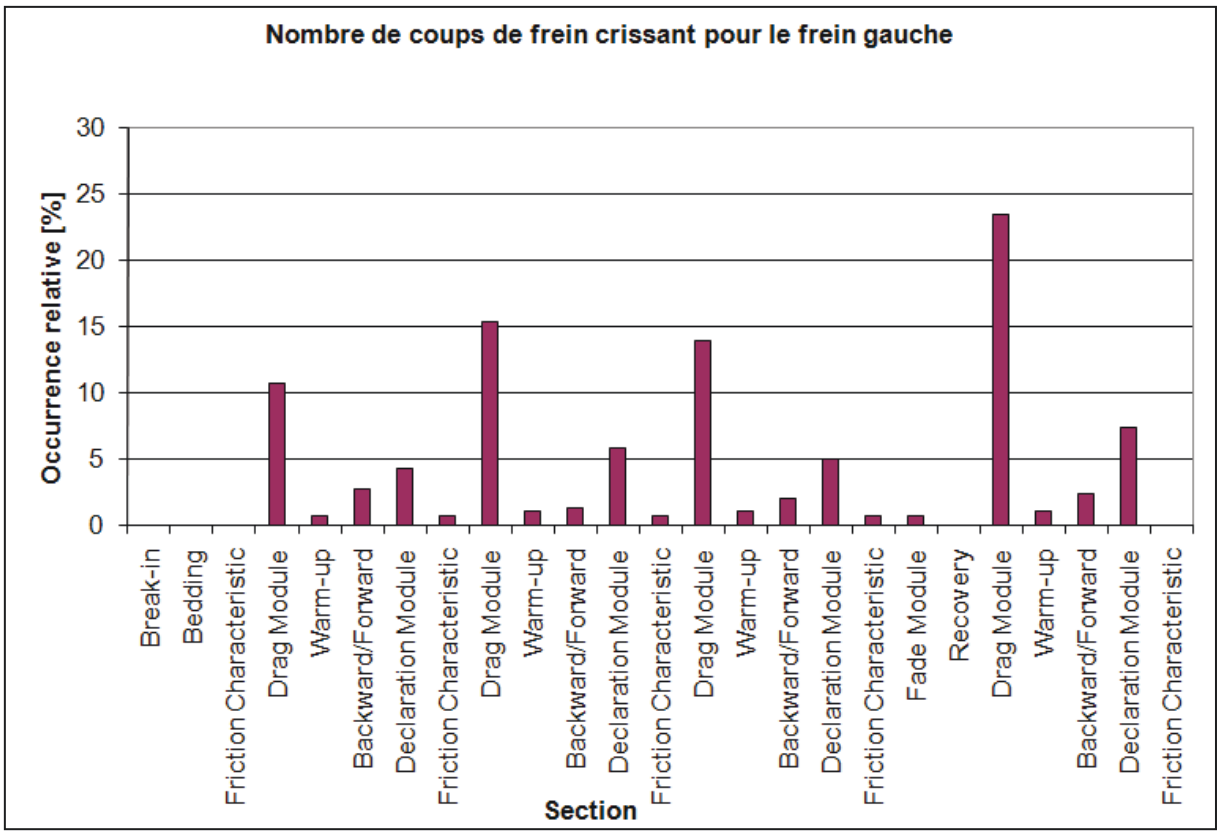


FIGURE 1-9 : Pourcentage de crissement du frein arrière gauche suivant les sections de freinage

Au vu de ces résultats, la suite de cette étude se concentre uniquement sur les freinages de maintien.

4.2. Essais du type freinage de maintien

Couramment utilisé dans les études de crissement [CAR02], [MAS07], [COU09], [VER08], le freinage de maintien est composé de 19 cycles de 14 coups de frein de mesure chacun, répétés à différentes températures comprises entre 50°C et 300°C, comme représentés Figure 1-10.

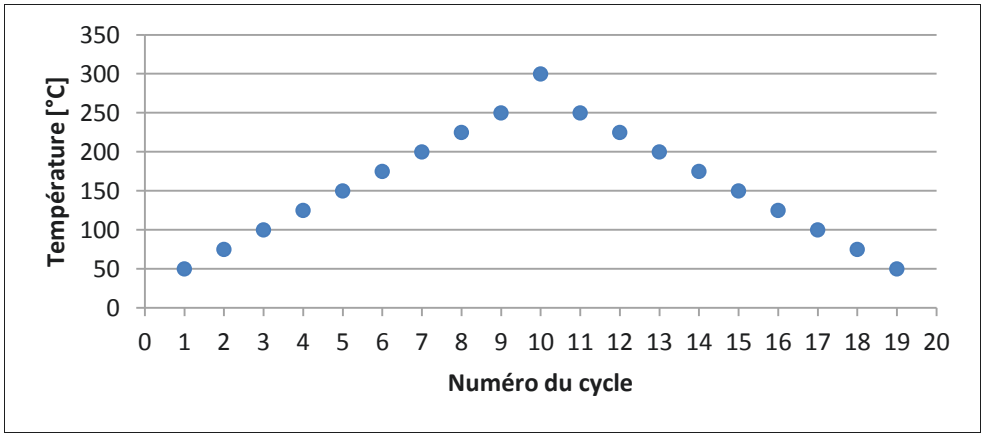


FIGURE 1-10 : Evolution de la température imposée au disque au cours des 19 cycles

Avant chaque cycle d'essais, une procédure préparatoire « de mise en condition » est réalisée. Celle-ci consiste à donner quelques coups de frein afin de mettre en position les composants du système de frein sur le banc de freinage et à contrôler la température initiale :

- 1 freinage de maintien à 20 bars pour atteindre une température du disque de 100°C,
- 6 coups de frein de mise en place à une pression de 30 bars pour une température de 100°C du disque

Un cycle de freinage de maintien, quant à lui, se déroule comme suit :

- 1 cycle de freinage de 14 coups de frein (deux vitesses : 3 et 10 km/h et sept pressions dans l'ordre : 0; 30; 5; 25; 10; 20; 15 bars) avec :
  - une température ambiante de 20°C soufflée sur le frein, pour refroidir le disque ;
  - une température maximale du disque, au début d'un coup de frein, comprise entre 50 et 300°C en fonction du numéro de cycle en cours.

Les FIGURES 1-11 et 1-12 présentent les niveaux sonores relevés en fonction de la bande fréquentielle pour les freins arrière gauche et droit.

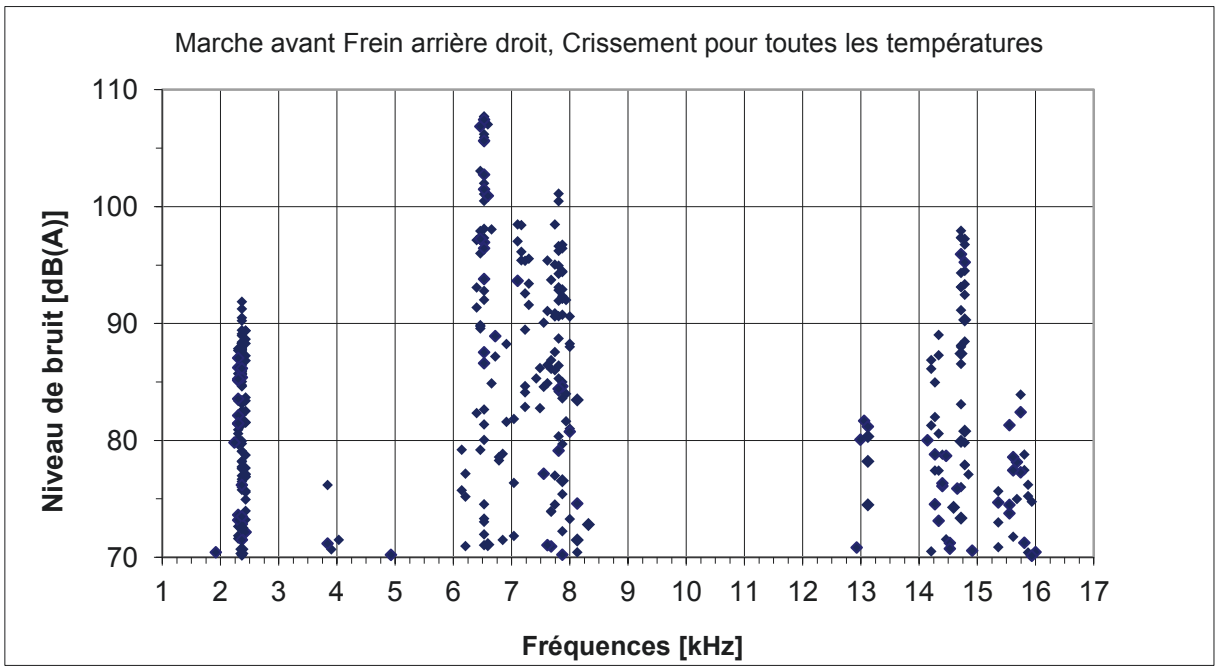


FIGURE 1-11 : Relevé des amplitudes sonores en fonction des fréquences de vibration pour le frein arrière droit lors des cycles de freinage de maintien

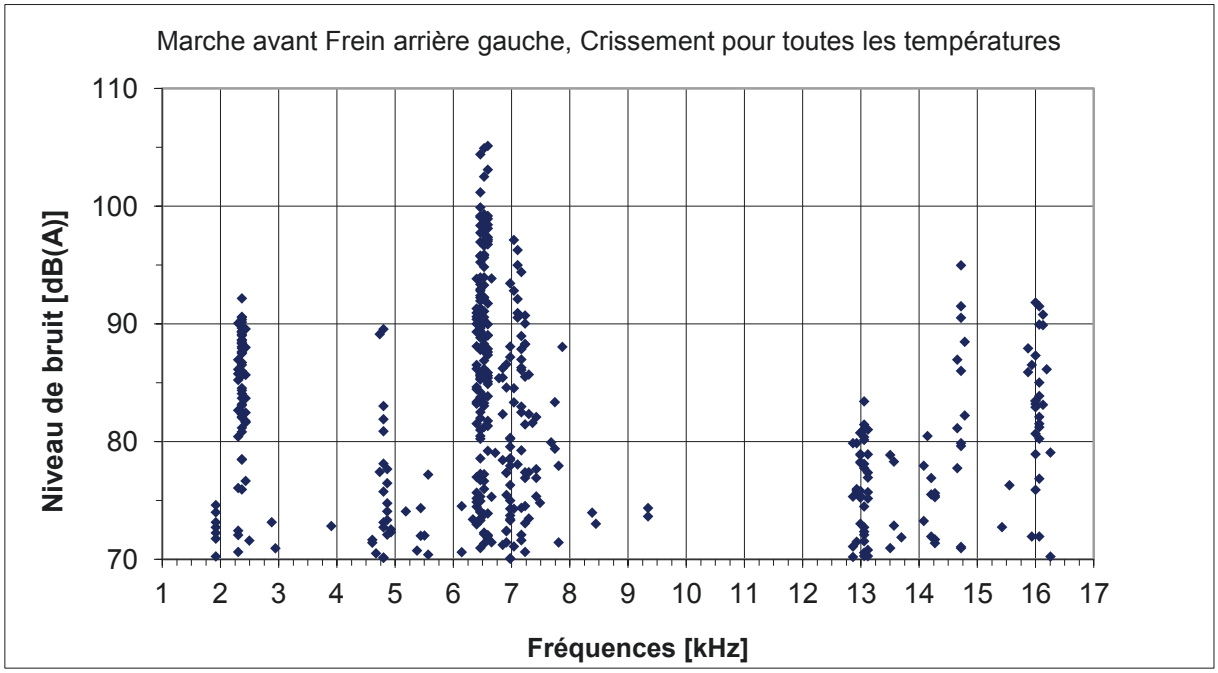


FIGURE 1-12 : Relevé des amplitudes sonores en fonction des fréquences de vibration pour le frein arrière gauche lors des cycles de freinage de maintien

On observe six zones fréquentielles où le crissement apparaît, à savoir, autour de 2.4 kHz, de 6.5 kHz, de 7.8 kHz, de 13 kHz, de 14.6 kHz et de 15.5 kHz. Excepté pour la

fréquence de 2.4 kHz, il est important de noter une forte dispersion autour de ces fréquences. Contrairement au test précédent, les résultats entre les freins gauche et droit présentent plus de différences. On peut noter l'apparition d'une nouvelle zone fréquentielle propice au crissement autour de 4.8 kHz pour le frein gauche ainsi qu'un décalage de fréquences de 7.8 kHz vers 7 kHz et de 15.5 kHz vers 16 kHz entre le frein droit et gauche. De plus, les dispersions autour des fréquences crissantes ne sont pas identiques. Par contre, les niveaux sonores sont comparables entre les deux systèmes.

La Figure 1-13 met en évidence que le niveau sonore le plus fréquent est compris entre 85 dB et 90 dB et le niveau peut atteindre dans très peu de cas les 110 dB.

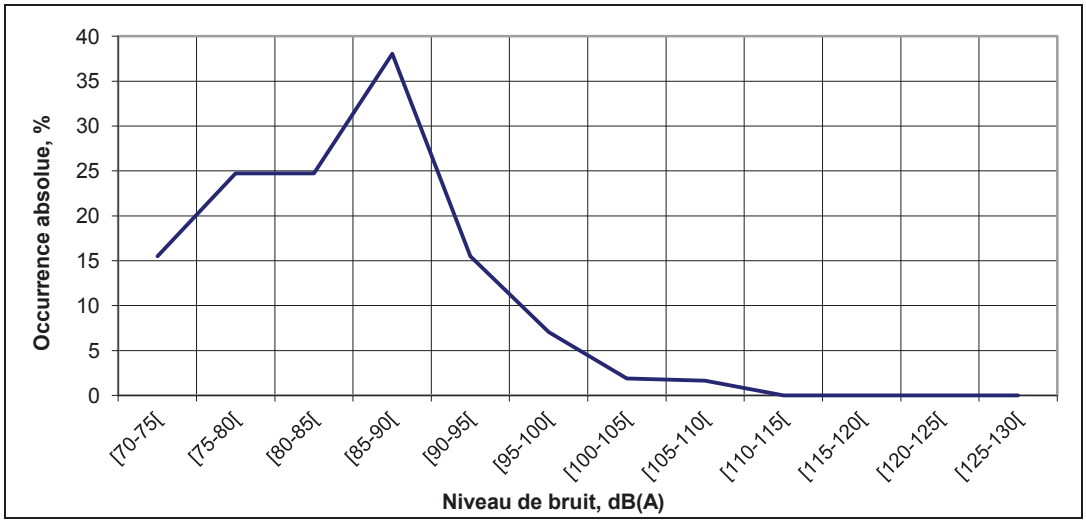


FIGURE 1-13 : Répartition des amplitudes du signal sonore

Pour les FIGURES 1-14 à 1-16, on se focalise sur les paramètres de pression de freinage, de la vitesse de freinage et de la température du disque afin de mettre en évidence leur impact sur l'occurrence de crissement.

La FIGURE 1-14 montre que le crissement est obtenu pour des pressions inférieures à 30 bars et plus particulièrement comprises entre 10 et 30 bars (75% des freinages). La Figure 1-15, quant à elle, met en avant que la vitesse de freinage propice au crissement se situe à 3km/h, ce qui représente quasiment la moitié des crissements enregistrés. Les vitesses, de signe négatif et correspondant à une marche arrière, produisent, quant à elles, peu de crissements. Sur la Figure 1-16, on remarque que la zone de température propice au crissement se situe entre 125°C et 200°C avec une occurrence d'environ 50%. Enfin, la Figure 1-17 présente l'évolution du coefficient de frottement dynamique en fonction d'une pression de freinage inférieure à 30 bars. Pour des basses pressions (proches de 5 bars), on observe un coefficient de frottement variant entre 0.5 et 0.8, alors que les valeurs du coefficient de

frottement sont comprises entre 0.4 et 0.5 pour des pressions intermédiaires où le crissement a été détecté.

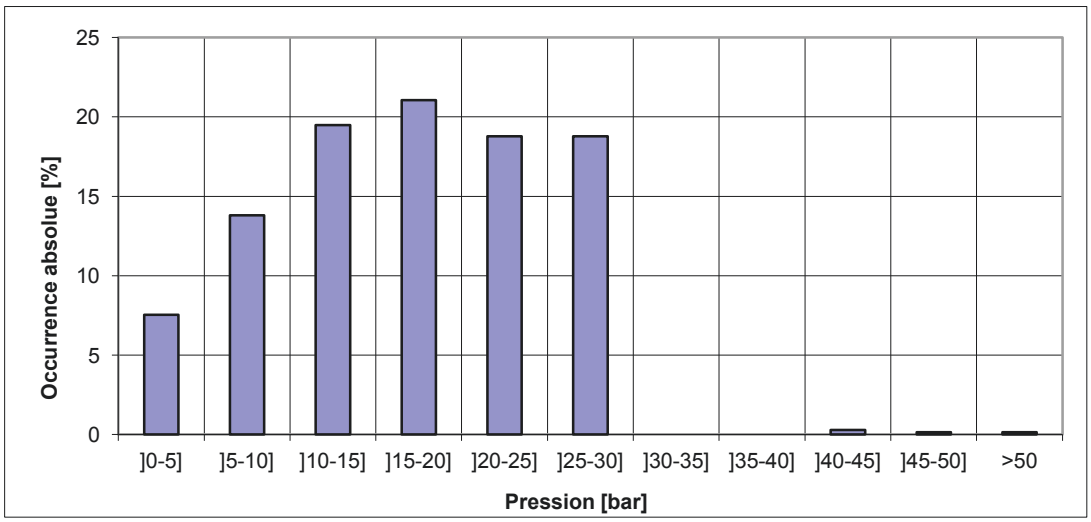


FIGURE 1-14 : Occurrence du crissement suivant la pression de freinage

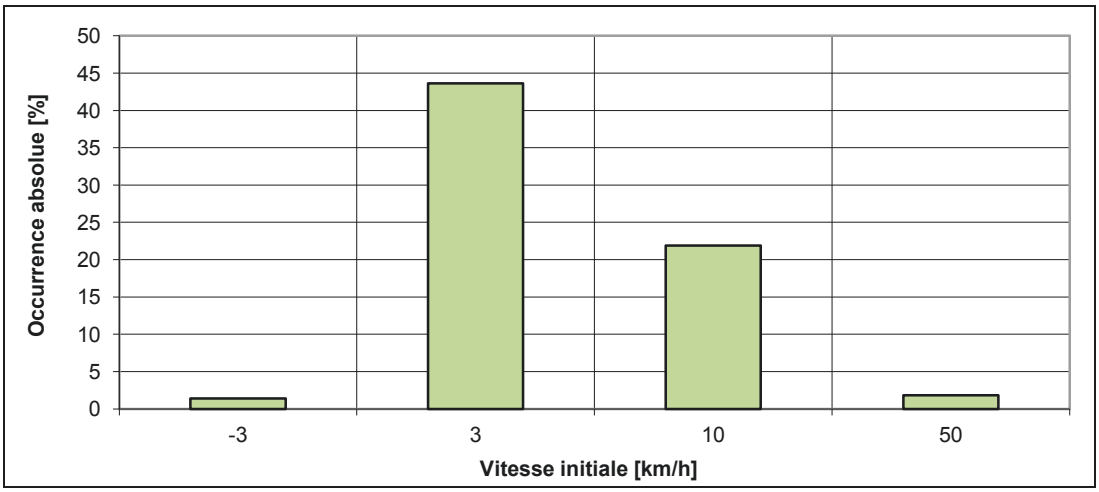


FIGURE 1-15 : Occurrence du crissement suivant la vitesse de freinage

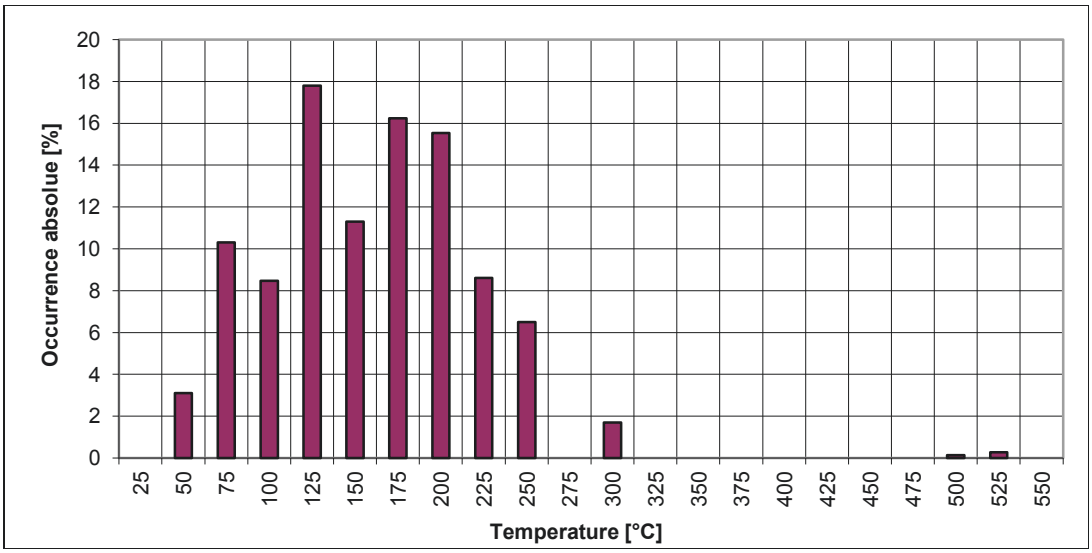


FIGURE 1-16 : Occurrence du crissement suivant la température du disque

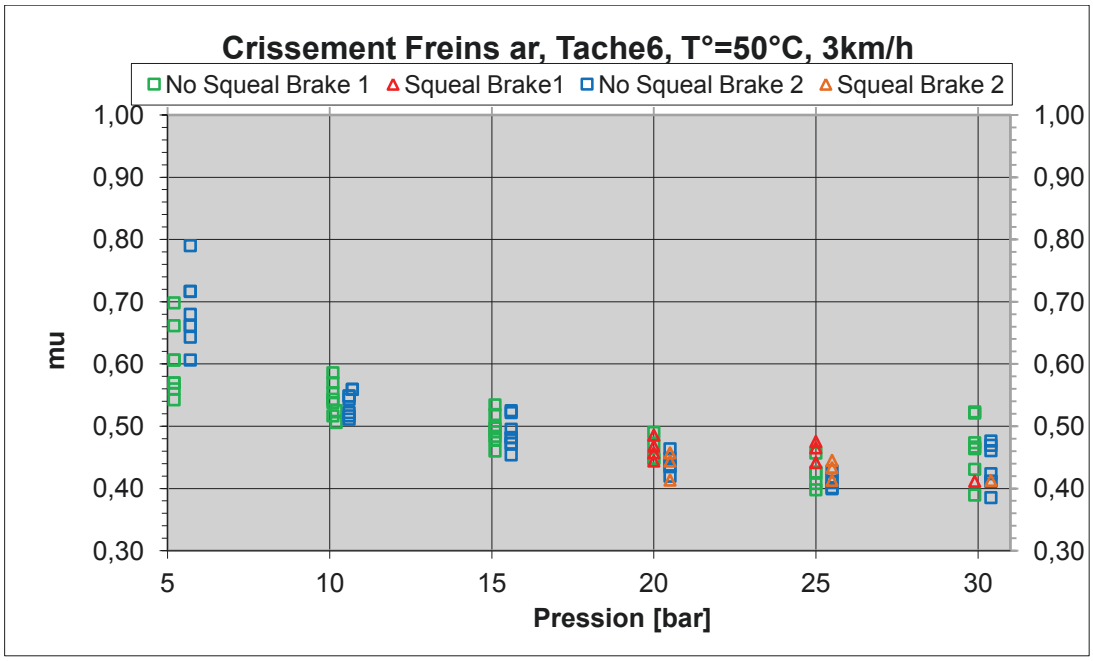


FIGURE 1-17 : Identification des freinages crissant et non crissant en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour des vitesses de 3 km/h

Au vu de ces résultats, une seconde campagne de tests est menée en définissant un plan d'expériences en considérant comme facteurs la vitesse et la pression de freinage. L'objectif est de préciser les zones de crissement en définissant un cycle de freinage, composé de 24 coups de frein, réparti pour trois vitesses constantes du véhicule (V=3, 6 et 10 km/h) et huit pressions de freinage différentes (P= 5; 30; 10; 27.5; 15; 25; 17.5; 20 bars). Avant chaque cycle, six freinages de ralentissement de 80 à 30 km/h à 30 bars et 100°C sont appliqués afin de conditionner correctement le montage du frein. La mise en pression est effectuée par une

rampe en dix secondes d'après la norme SAE, comme représentée à la FIGURE 1-18. P_n représente la pression de commande.

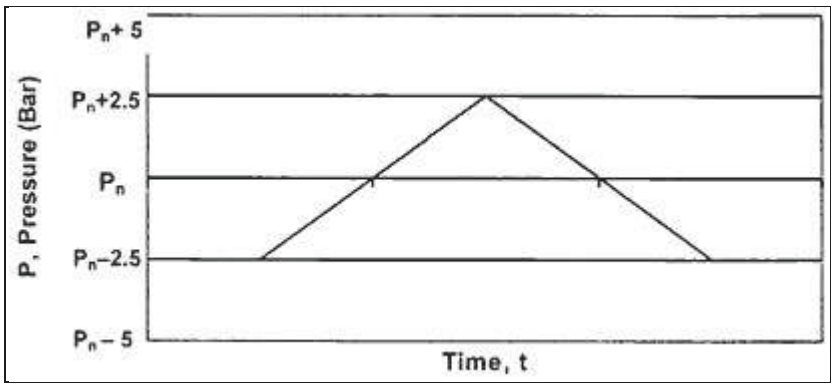


FIGURE 1-18 : Rampe de pression selon la norme SAE J2521

Dans cette étude, nous avons aussi souhaité porter notre attention sur l'effet de la température de la procédure préparatoire « de mise en condition », de la température à la surface du disque et de la température de l'air ambiant sur le crissement. Cinq procédures, définies pour différents niveaux de température (FIGURE 1-19), ont été appliquées pour chacun des deux freins pour une vitesse de freinage fixée à 3 km/h.

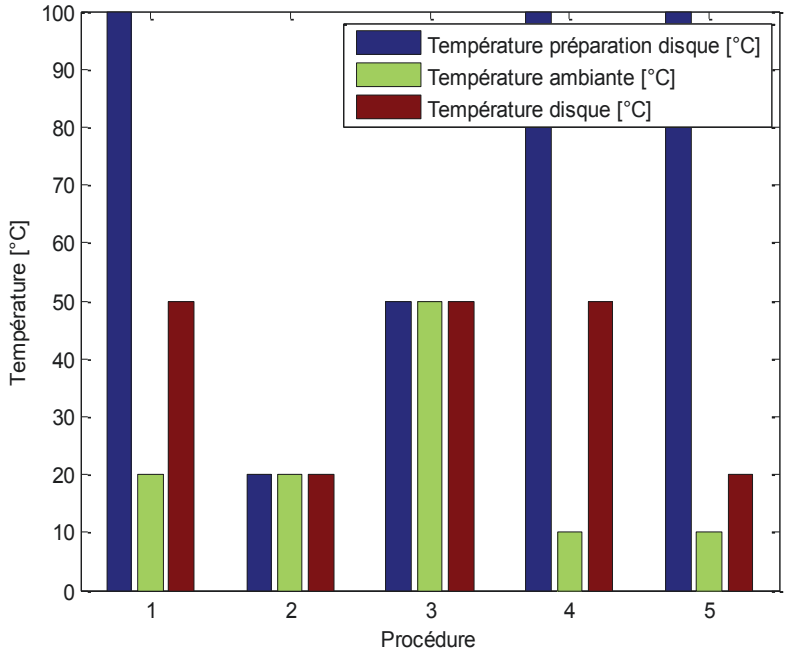


FIGURE 1-19 : Evolution des températures pour les différentes procédures

Les FIGURES 1-20 à 1-24 présentent les résultats obtenus pour les cinq procédures en termes de freinages crissant et non crissant en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour les freins droit (Brake 1) et gauche (Brake 2).

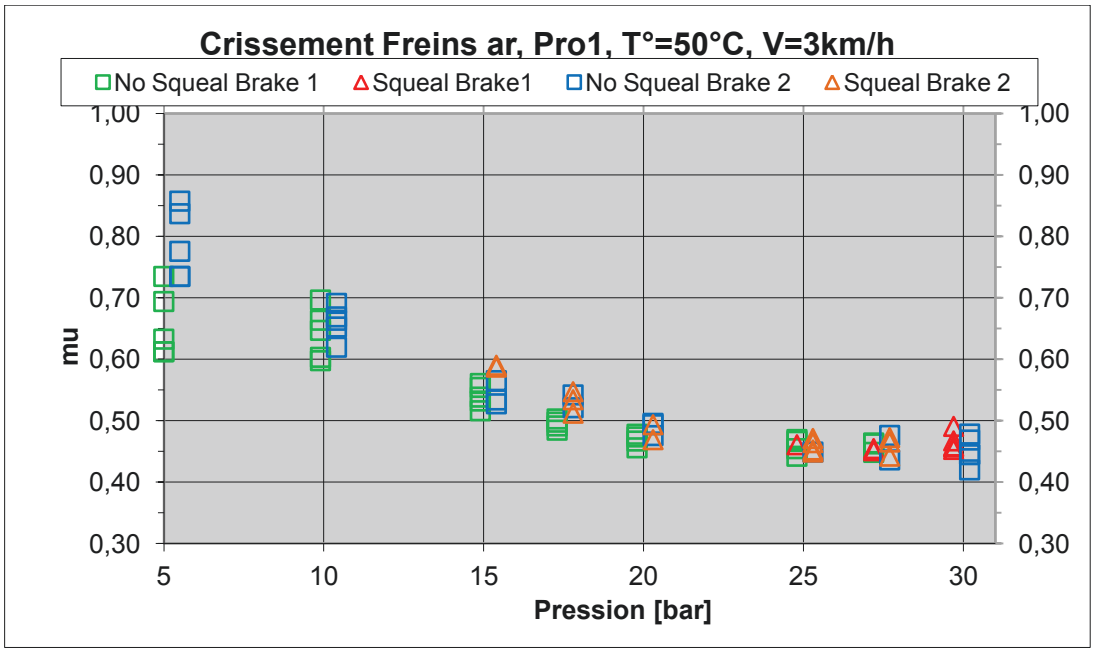


FIGURE 1-20 : Identification des freinages crissant et non crissant (Procédure 1) en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour une vitesse de 3 km/h

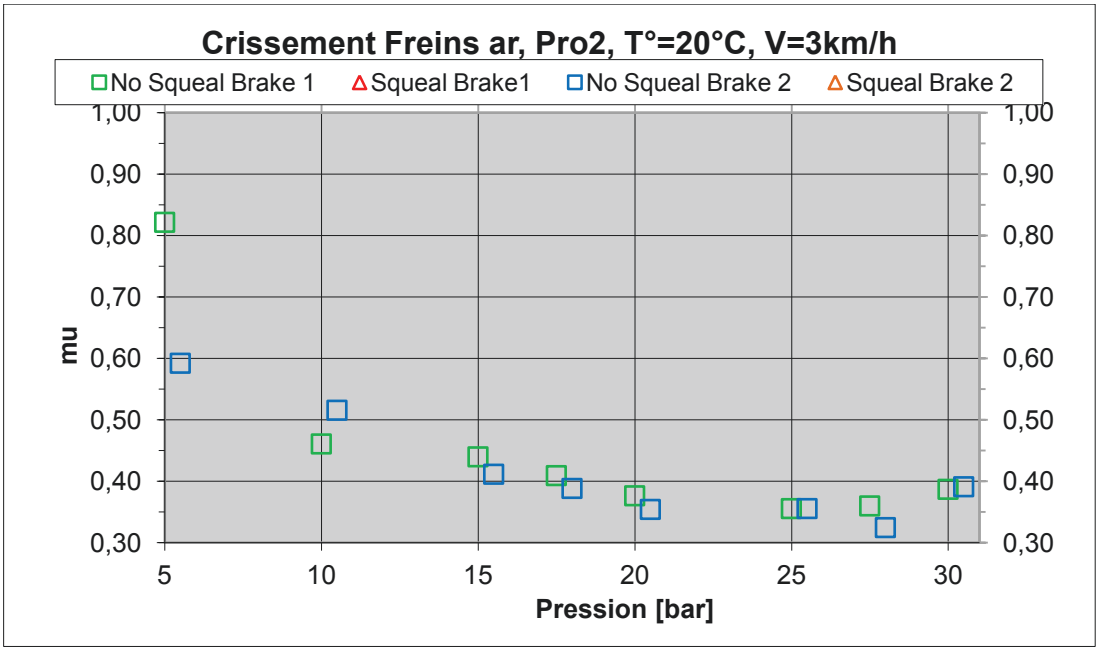


FIGURE 1-21 : Identification des freinages crissant et non crissant (Procédure 2) en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour une vitesse de 3 km/h

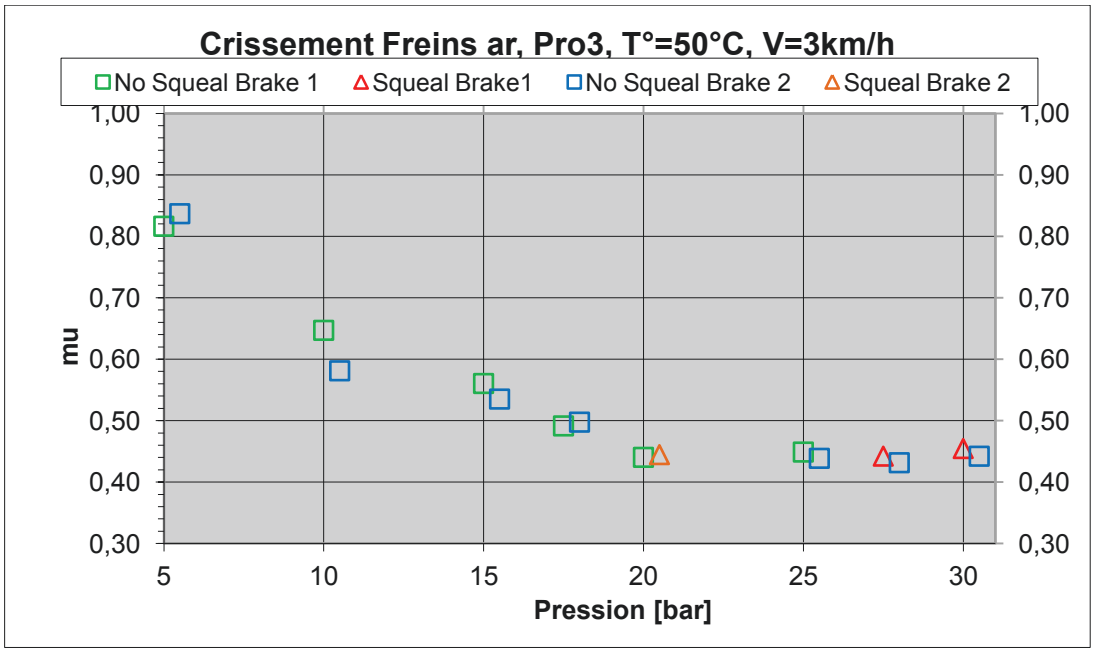


FIGURE 1-22 : Identification des freinages crissant et non crissant (Procédure 3) en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour une vitesse de 3 km/h

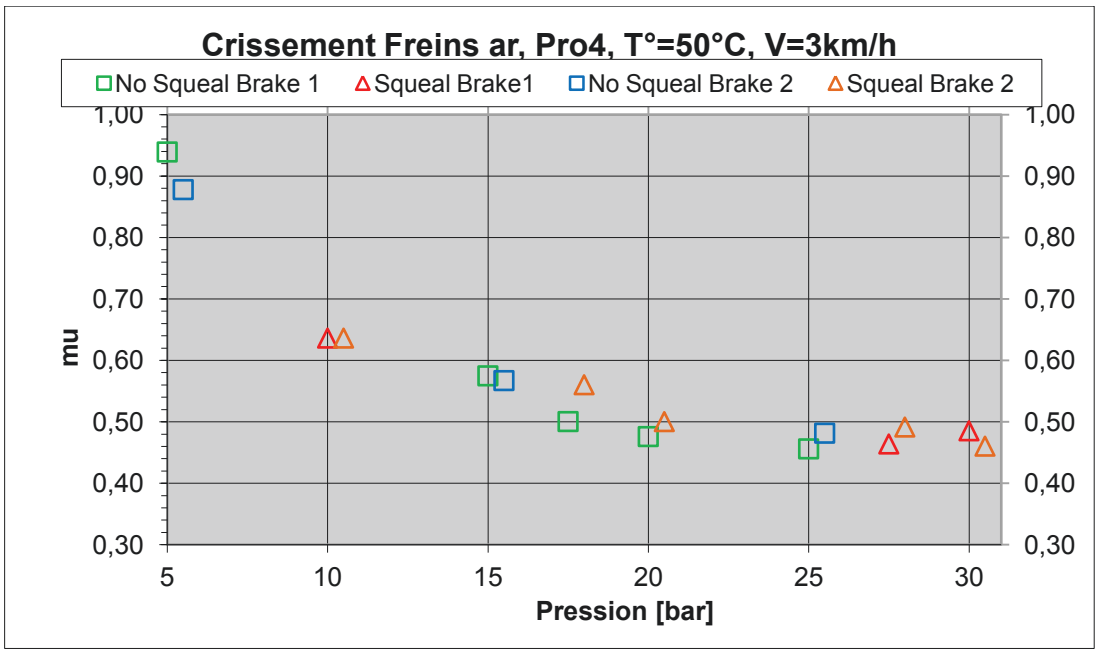


FIGURE 1-23 : Identification des freinages crissant et non crissant (Procédure 4) en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour une vitesse de 3 km/h

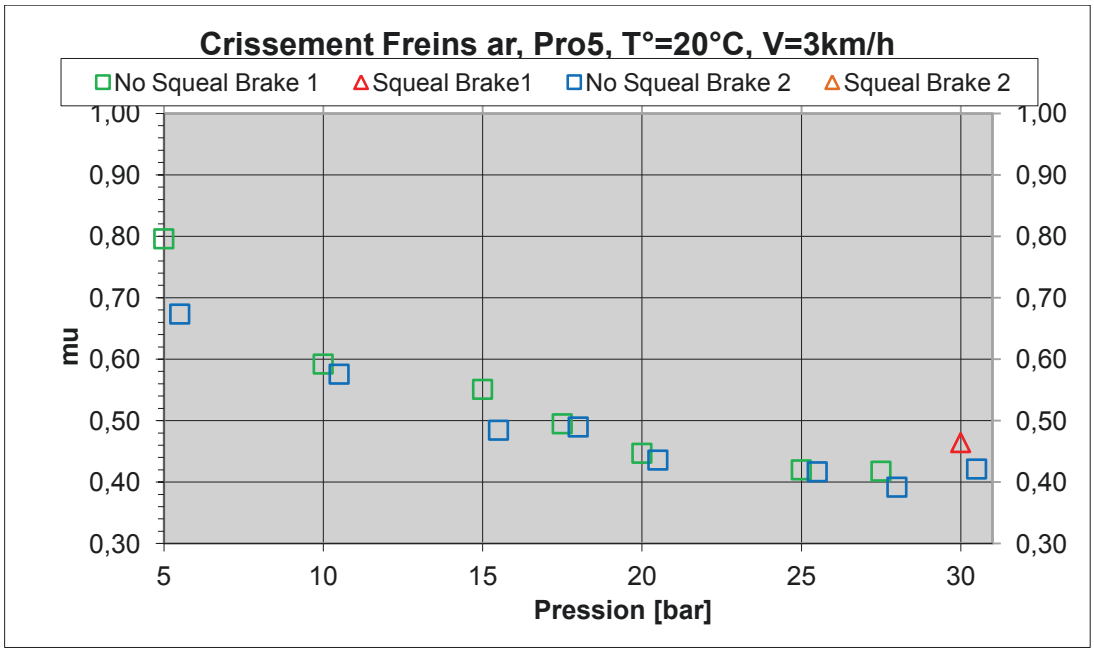


FIGURE 1-24 : Identification des freinages crissant et non crissant (Procédure 5) en fonction du coefficient de frottement et de la pression de freinage pour une vitesse de 3 km/h

On peut regrouper ces procédures en deux catégories en fonction de la température à la surface du disque. Le système a une plus forte tendance à crisser pour les procédures 1, 3 et 4, où la température du disque est à 50°C, comparée à 20°C pour les procédures 2 et 5.

Plus précisément, pour les procédures 1, 3 et 4, le coefficient de frottement est compris entre 0.4 et 0.5 et globalement plus proche de la borne supérieure. Nous observons que plus le coefficient de frottement se rapproche de 0.5, plus le système crisse :

- Procédure 1 : Cette procédure, similaire à celle utilisée dans le premier plan d'expériences pour les freinages de maintien, permet d'observer une bonne répétabilité des résultats et produit le plus de cas crissant ;
- Procédure 3 : Cette procédure, pour laquelle la température de préparation du disque est de 50°C, engendre nettement moins de cas crissant que la procédure 1, où la température est fixée à 100°C ;
- Procédure 4 : Cette procédure, pour laquelle la température ambiante est de 10°C, engendre moins de cas crissant que la procédure 1, où la température est de 20°C.

Pour les procédures 2 et 5, le coefficient de frottement est inférieur à 0.4 (procédure 2) ou légèrement supérieur à 0.4 (procédure 5). Il existe un seuil (proche de 0.4) en dessous duquel nous n'observons aucun crissement.

- Procédure 2 : Cette procédure, pour laquelle il n'y a pas de procédure préparatoire « de mise en condition » puisque la température associée est de 20°C et la température ambiante de 20°C, ne produit aucun cas crissant ;
- Procédure 5 : Cette procédure, pour laquelle les températures de préparation du disque et ambiante sont respectivement de 100°C et 10°C, ne produit qu'un seul cas crissant. Malgré une température élevée durant la phase de préparation, les faibles températures du disque (20°C) et ambiante (10°C) ne favorisent pas le crissement.

Ces résultats montrent que la température ambiante a un faible impact sur le crissement, contrairement à la température de la surface du disque, qui est le facteur principal. En effet, une diminution de cette dernière amène une diminution du nombre de cas crissant. Enfin, cette étude confirme que la température durant l'historique de freinage joue un rôle secondaire uniquement dans le cas où la température à la surface du disque est élevée. La prise en compte de la température et son impact sur les propriétés matérielles s'avère inévitable pour bien maîtriser ce phénomène de crissement.

D'après ces résultats expérimentaux et les observations effectuées pendant les réglages d'essais, nous pouvons dresser, en conclusion à cette étude, un premier bilan des conditions propices au crissement (FIGURE 1-25), à savoir :

- une vitesse de freinage faible (autour de 3km/h),
- une pression de freinage de niveau moyen ou intermédiaire (entre 15 et 30 bars),
- un coefficient de frottement dynamique proche de la valeur 0.5,
- un historique de freinage et une usure de la plaquette (qui n'a pas été quantifiée dans ces travaux, ce point fait l'objet de la thèse de Heussaff [HEU12b]),
- une température du disque de niveau moyen (entre 125°C et 200°C).

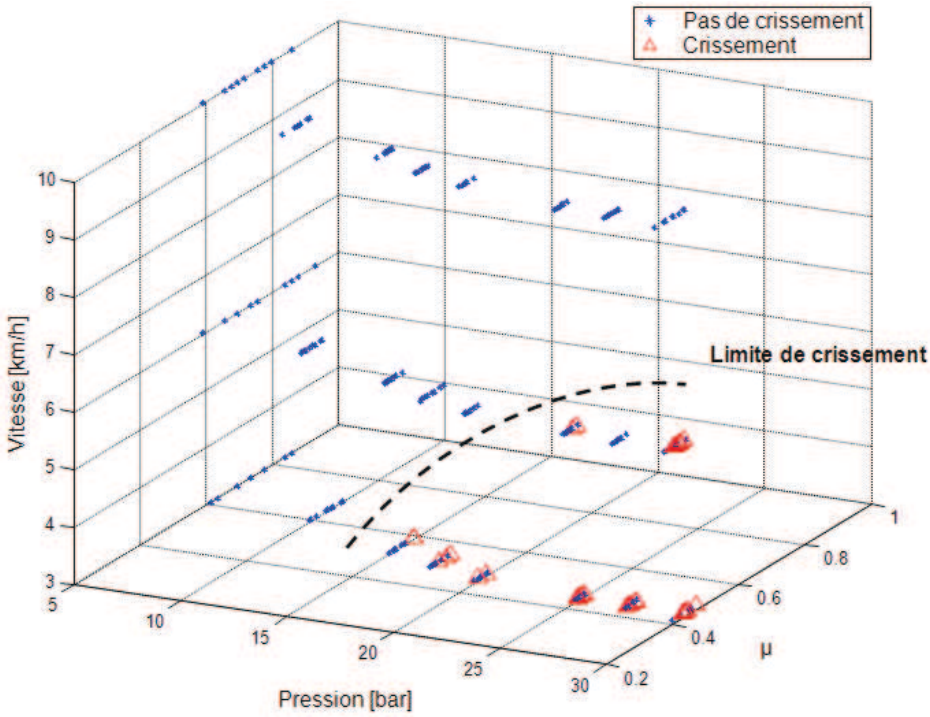


FIGURE 1-25 : Occurrence du crissement en fonction des coefficients de frottement et des variations de la vitesse et de la pression

Ces relevés montrent aussi que le comportement dynamique de deux systèmes de freins gauche et droit, issue de la même voiture, est loin d'être constant pour les plages de fonctionnement définies précédemment.

Nous pouvons, bien évidemment, mettre en cause :

- la géométrie des différents composants du système,
- les propriétés matérielles des composants, d'ailleurs définies par des intervalles de confiance ainsi que les propriétés relatives à la rigidité et l'amortissement de la plaquette,
- les jeux entre composants (positionnement par liens élastiques). Il est nécessaire d'effectuer quelques coups de freins pour le bon positionnement du système.

Le caractère imprécis de nombreux paramètres endogènes et exogènes est donc clairement avéré, ce qui confirme l'intérêt d'enrichir les modèles numériques en prenant en compte les incertitudes observées.

5. Conclusion

Un état de l'art des études, expérimentales et numériques, menées dans le cadre général des instabilités vibratoires puis plus spécifiquement pour le crissement des systèmes de freinage, a permis de répertorier, dans ce premier chapitre, les paramètres les plus influents dans l'apparition du crissement et leur impact sur les fréquences instables. Fort de ce constat, une campagne d'essais, menée sur un banc de freinage développé à l'université et basée sur une procédure utilisée en industrie, a mis en évidence le caractère variable du crissement en termes de niveau de bruit et de gamme de fréquences en étudiant deux systèmes de freinage issus du même véhicule.

L'étude expérimentale, focalisée sur des freinages de maintien où la propension au crissement est la plus forte, a permis, d'une part, de synthétiser les conditions qui sont propices au crissement, à savoir une vitesse de freinage faible, une pression de freinage de niveau moyen ou intermédiaire, un coefficient de frottement dynamique élevé, un historique de freinage et une usure de la plaquette et une température de niveau moyen. Ces conclusions sont en adéquation à celles identifiées dans la littérature. D'autre part, nous avons porté notre attention sur l'effet de la température de la procédure préparatoire « de mise en condition », à la surface du disque, et de l'air ambiant, sur le crissement. Cette étude a mis en exergue que la température à la surface du disque et, plus généralement, que l'historique avant le freinage joue un rôle prépondérant.

Pour mettre en place une étude numérique d'instabilité représentative d'une famille de freins, il est indéniable qu'il faille prendre en compte les variabilités observées sur de multiples paramètres liés au système de freinage dès la phase de conception. L'enrichissement des simulations déterministes actuelles, par la prise en compte de la variabilité des paramètres du modèle, fait l'objet du chapitre suivant.

6. Références bibliographiques

[ABU05] ABU BAKAR A.R. (2005). Modelling and Simulation of Disc Brake Contact Analysis and Squeal. Thèse de Doctorat, Université de Liverpool, Royaume-Uni.

[BAI06] BAILLET L., D'ERRICO S., LAULAGNET B. (2006). Understanding the occurrence of squealing noise using the temporal finite element method. Journal of Sound and Vibration 292, 443-460.

[BLA03] BLAU P.J., MCLAUGHLIN J.C. (2003). Effects of water films sliding speed on the frictional behavior of truck disc brake materials. Tribology International 36, 709-715.

[CAR02] CARIDI J.P. (2002). Caractérisation des paramètres de frottement à l'origine de phénomènes vibroacoustiques. Application aux bruits de crissement des systèmes de

freinage. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[COU09] COUDEYRAS N. (2009). Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale de Lyon.

[DAI08] DAI Y., LIM C.T. (2008). Suppression of brake squeal noise applying finite element brake and pad model enhanced by spectral-based assurance criteria. Applied Acoustics 69, 169-214.

[DRO99] DROBECQ V. (1999). Modélisation de systèmes de freinage ferroviaires avec prise en compte du phénomène de crissement. Application au système de freinage du métro parisien MP59. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[DUB10] DUBOC M., MAGNIER V., BRUNEL J.F., DUFRENOY P., REJDYCH G., CHANCELLIER T. (2010). Influence of contact conditions and pad geometry on disc brake squeal noise. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[ELT08] EL-TAYEB N.S.M., LIEW K.W. (2008). Effect of water spray on friction and wear behavior of noncommercial and commercial brake pad materials. Journal of Materials Processing Technology 208, 135-144.

[ELT09] EL-TAYEB N.S.M., LIEW K.W. (2009). On the dry and wet sliding performance of potentially new frictional brake pad materials for automotive industry. Wear 266, 275-287.

[FIE10] FIELDHOUSE J.D., BRYANT D., TALBOT C.J. (2010). Investigation of brake squeal and the influence of the abutment faces. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[GIA06] GIANNINI O., AKAY A., MASSI F. (2006). Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup. Journal of Sound and Vibration 292, 1-20.

[HEU11] HEUSSAFF A., TISON T., WATREMEZ M., DUBAR L., FERNANDES NUNES R. (2011). Variabilité du contact dans l'étude du crissement des freins automobiles. 10ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France.

[HEU12a] HEUSSAFF A., DUBAR L., TISON T., WATREMEZ M., NUNES R.F. (2012). A methodology for the modeling of the variability of brake lining surfaces. Wear 289, 145-159.

[HEU12b] HEUSSAFF A. (2012). Analyse expérimentale et numérique de l'influence de paramètres intrinsèques et extrinsèques aux garnitures sur le comportement en frottement et en crissement d'un système de freinage automobile. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[HIN11] HINRICHS R., VASCONCELLOS M.A.Z., OSTERLE W., PRIETZEL C. (2011). A TEM snapshot of magnetite formation in brakes : The role of the disc's cast iron graphite lamellae in third body formation. Wear 270, 365-370.

[KAN09a] KANG J. (2009). Squeal analysis of gyroscopic disc brake system based on finite element method. International Journal of Mechanical Sciences 51, 284-294.

[KAN09b] KANG J., M. KROUSGRILL C., SADEGHI F. (2009). Comprehensive stability analysis of disc brake vibrations including gyroscopic, negative friction slope and mode-coupling mechanisms. Journal of Sound and Vibration 324, 387-407.

[KOL11] KOLLURI D.K., BOIDIN X., DESPLANQUES Y., DEGALLAIX G., GHOSH A.K., KUMAR M., BIJWE J. (2011). Effect of Natural Graphite Particle size in friction

materials on thermal localization phenomenon during stop-braking. Wear 268, 1472-1482.

[LIN05] LINCK V. (2005). Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant. Mise en évidence d'instabilités locales de contact -Conséquences tribologiques-. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[LIU07] LIU P., ZHENG H., CAI C., WANG Y.Y., LU C., ANG K.H., LIU G.R. (2007). Analysis of disc brake squeal using the complex eigenvalue method. Applied Acoustics 68, 603-615.

[LOR07] LORANG X. (2007). Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Polytechnique.

[LOY11] LOYER A., SINOU J.-J., CHIELLO O., LORANG X. (2011). Etude du crissement d'un frein à disque ferroviaire. Réduction de modèle en dynamiques transitoire et stationnaire. 10ème Colloque national en Calcul des Structures (CSMA 2011). 9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens.

[MAS07] MASSI F., BAILLET L., GIANNINI O., SESTIERI A. (2007). Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches. Mechanical Systems and Signal Processing 21, 2374-2393.

[MAS10] MASSI F., BERTHIER Y., AKAY A. (2010). On the need for new approaches for brake squeal prediction and suppression. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[MEN09] MENEZES P.L., KISHORE, KAILAS S.V. (2009). Influence of inclination angle of plate on friction, stick-slip and transfer layer-A study of magnesium pin sliding against steel plate. Wear 267, 476-484.

[MER11] MERESSE D. (2011). Approche thermomécanique de la tribologie à grande vitesse. Application au freinage. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[MEZ07] MEZIANE A. (2007). Apport des analyses numériques temporelles et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact -Validation expérimentale-. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[NGU02] NGUYEN-TAJAN T.M.-L. (2002). Modélisation thermomécanique des disques de frein par une approche eulérienne. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique.

[OBE11] OBERST S., LAI J.C.S. (2011). Statistical analysis of brake squeal noise. Journal of Sound and Vibration. doi :10.1016/j.jsv.2010.12.021.

[OST09] ÖSTERLE W., DÖRFEL I., PRIETZEL C., ROOCH H., CRISTOL-BULTHE A.-L., DEGALLAIX G., DESPLANQUES Y. (2009). A comprehensive microscopic study oh third body formation at the interface between a brake pad and brake disc during the final stage of a pin-on-disc test. Wear 267, 781-788.

[RYZ09] RYZHIK B. (2009). Friction-induced vibrations of squeal type due to transverse contraction in a flexible disk. Journal of Sound and Vibration 326, 623-632.

[SAE06] SAE International J2521. (2006). Disc and Drum Brake Dynamometer Squeal Noise Matrix, Surface Vehicle Recommended Practice.

[TRI08] TRICHÊS JUNIOR M., GERGES S.N.Y., JORDAN R. (2008). Analysis of brake squeal noise using the finite element method : A parametric study. Applied Acoustics 69, 147-162.

[VAY06] VAYSSIERE C., BERTHIER Y., BAILLET L. (2006). Influence de la géométrie des premiers corps sur les instabilités de contact-Cas du crissement-. 6ème Journée Européenne du Freinage, (JEF 2010), Lille, France.

[VER08] VERMOT DES ROCHES G., BALMES E., PASQUET T., LEMAIRE R. (2008). Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models. Conférence ISMA 2008, Leuven, Belgium.

[VER10] VERMOT DES ROCHES G., BALMES E., PASQUET T., LEMAIRE R. (2010). Time/frequency analysis of contact-friction instabilities. Application to automotive brake squeal. Conférence ISMA 2010, Leuven, Belgium.

[VER11] VERMOT DES ROCHES G. (2011). Frequency and time simulation of squeal instabilities – Application to the design of industrial automotive brakes. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures.

Chapitre 2 :

Amélioration des simulations numériques par enrichissement du paramétrage

1. Introduction 53

2. Modélisation numérique des systèmes de freins 54

2.1. Systèmes Masse-Ressort 54
2.2. Modèles Eléments finis 55
2.3. Modèle numérique retenu pour l'étude non déterministe 59

3. Méthodes de résolution pour l'étude de stabilité 60

3.1. Analyse fréquentielle 61
3.2. Analyse temporelle 61
3.3. Déclenchement de l'instabilité 64
3.4. Etude d'une configuration crissante et non crissante 68

4. Vers une conception robuste 74

4.1. Présentation du plan d'expériences 74
4.2. Résultats de l'analyse fréquentielle 76
4.3. Résultats de l'analyse temporelle 82

5. Conclusion 86

6. Références bibliographiques 88

1. Introduction

La simulation numérique des phénomènes mécaniques est en développement constant de par la croissance exponentielle de la puissance de calcul. Cette évolution rapide facilite la mise en place d'études numériques, de plus en plus fines et complexes, effectuées à différentes échelles ainsi que le développement de stratégies d'optimisation et de prise en compte des incertitudes dès la phase de conception. En effet, quelques auteurs se sont déjà intéressés à ce dernier point, à savoir la conception robuste de systèmes, soumis à des instabilités, en utilisant, soit des études paramétriques, soit des méthodes non déterministes qui permettent d'enrichir la prédiction de la simulation.

Afin d'optimiser la géométrie du système de freinage, Hu et al. [HU97] ont proposé de mettre en place un plan d'expériences de type Taguchi en se focalisant sur les données géométriques liées à des chanfreins et rainures. Gauger et al. [GAU06], quant à eux, modélisent les données imprécises, telles que la pression de contact, la vitesse de rotation ainsi que le coefficient de frottement, par un formalisme flou. On peut noter aussi les travaux de Giannini et Massi [GIA06], Culla et Massi [CUL09], Oberst et Lai [OBE10], [OBE11] et Heussaf et al. [HEU11] qui prennent en compte les incertitudes dans une analyse d'instabilité fréquentielle. Giannini et Massi [GIA06] se focalisent sur des incertitudes associées au module de Young, à la masse et au coefficient de frottement. Culla et Massi [CUL09], quant à eux, utilisent les simulations de Monte-Carlo sur le frein simplifié. Les paramètres variables, considérés incertains, sont le coefficient de frottement, le module de Young et la rigidité des ressorts. Oberst et Lai [OBE10], [OBE11] réalisent des essais selon la norme SAE J2521, exposée dans le premier chapitre, afin d'identifier les paramètres variables et de corréler le modèle numérique prenant en compte des incertitudes. Les variables d'entrée sont la pression, la vitesse et le coefficient de frottement, tandis que les variables de sortie sont la fréquence, l'énergie cinétique et la puissance acoustique. Enfin, Heussaf et al. [HEU11] étudient la propension au crissement en modélisant différents profils de plaquette (reproduisant des usures caractéristiques) par des champs aléatoires.

Après avoir effectué un état de l'art des modélisations de système de frein, on se focalise sur les méthodes numériques de prédiction du crissement, de nature fréquentielle et temporelle. Ces analyses, faisant l'objet des deux premiers paragraphes, permettront de mettre en avant à la fois les quantités mécaniques d'intérêt et les critères de détection associés. Un focus sur les techniques de déclenchement d'instabilité en temporel terminera cet état de l'art. Dans un dernier paragraphe, on mettra en évidence l'intérêt d'enrichir le paramétrage existant

en prenant en compte les incertitudes liées aux paramètres du modèle numérique. Une approche paramétrique, de type plan d'expériences numériques, et de nature non intrusive vis-à-vis des codes industriels utilisés, est détaillée. Bien que cette approche soit couramment utilisée en industrie, elle conduit à des temps de calcul importants même en considérant la parallélisation des calculs. Toutefois, cette approche va permettre ici de manipuler les informations de nature non déterministes et de mettre en exergue les verrous scientifiques sur lesquels il faut s'attarder pour parvenir à la mise en place d'une stratégie de dimensionnement robuste compatible avec la phase de conception.

2. Modélisation numérique des systèmes de freins

Le crissement étant un phénomène complexe à simuler, il est essentiel que le modèle étudié soit représentatif des observations expérimentales. La littérature est riche en modèles de freins plus ou moins détaillés. Certains auteurs ont préféré utiliser une représentation analytique dans le but d'analyser le comportement global et pouvoir mener des études analytiques paramétriques à moindre coût tandis que d'autres ont privilégié la simulation numérique de type élément finis, bien évidemment plus coûteuse en temps de calcul, afin d'analyser des comportements plus localisés aux différents composants du système. Les deux paragraphes suivants dressent un bilan des modèles analytiques puis des modèles éléments finis exploités depuis une dizaine d'années. Le dernier paragraphe présente le modèle numérique retenu pour la suite de l'étude.

2.1. Systèmes Masse-Ressort

Les modèles analytiques, composés de masses-ressorts-amortisseurs (FIGURE 2-1), ont été particulièrement utilisés au début des années 2000 pour étudier des phénomènes caractéristiques en instabilité [OUY98] tels que le couplage de modes ou le stick-slip. Dans ce contexte, le frein est représenté par le déplacement d'une surface à vitesse constante sur laquelle un appui frottant est exercé par une force constante maintenue par deux ressorts [HOF02]. La surface de contact du modèle peut être modélisée, comme l'a montré Drobecq [DRO99], par une entité lisse comprenant une couche élastique et des raideurs de contact tangentielles.

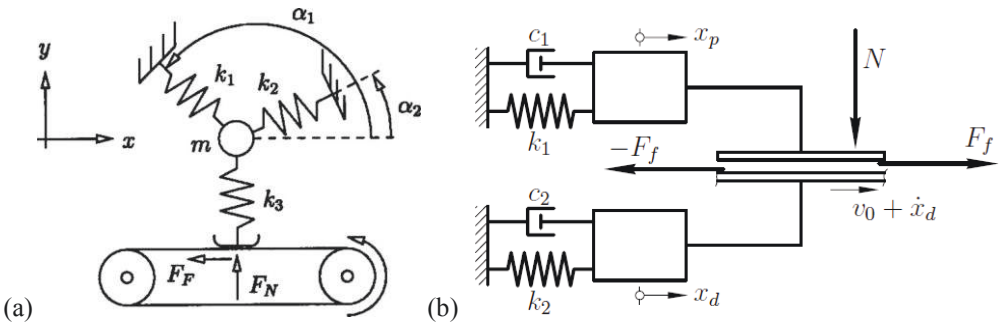


FIGURE 2-1 : (a) Modèle de Shin et al. [SHI02], (b) Modèle de Hoffmann et al. [HOF02]

Plus récemment, on peut citer les travaux de Duboc et al. [DUB10] concernant un modèle semi-analytique de contact, basé sur les travaux d'Oura [OUR08]. Le modèle (FIGURE 2-2) représente la plaquette et le disque en tenant compte des ressorts de positionnement de la plaquette. L'étrier est exprimé par un système à deux degrés de liberté composé d'une translation et d'une rotation. Le disque, quant à lui, possède un degré de liberté en translation. Enfin, la garniture de la plaquette est modélisée par des ressorts distribués dont la rigidité est déduite des propriétés matérielles.

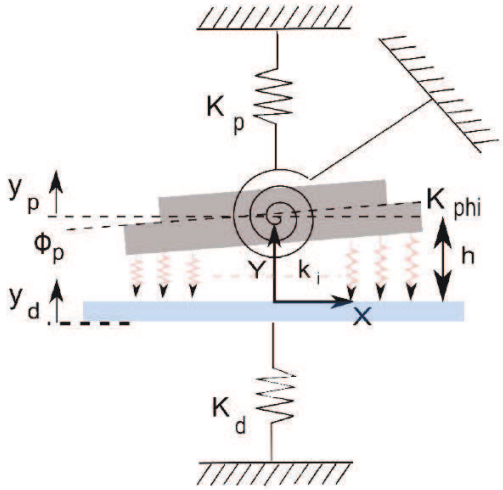


FIGURE 2-2 : Modèle de système de frein selon Duboc et al. [DUB10]

Cette catégorie de modèles, basée sur la représentation des composants disque et plaquettes, a permis de mener des études paramétriques et de sensibilité [DRO99, DUB10] concernant la propension au crissement en fonction des paramètres caractéristiques (conditions de contact, géométries, amortissement, …).

2.2. Modèles Eléments finis

Les modèles éléments finis de systèmes de freinage ont été utilisés pour la première fois en 1994 [NAG94] et n'ont cessé d'être améliorés ces vingt dernières années [HEU12a]

afin de mener des études de plus en plus précises à des échelles microscopiques, mésoscopiques et macroscopiques. En effet, les modèles académiques, composés de deux surfaces en contact représentant des géométries simplifiées du disque et des plaquettes, sont aujourd'hui remplacés en industrie par des modèles articulés flexibles intégrant l'ensemble des composants d'un train avant du véhicule. De ce fait, le nombre de composants retenus, la taille des modèles éléments finis et, par conséquent, les temps de résolution associés ont fortement augmenté.

Les modèles éléments finis des systèmes de freins, rencontrés dans la littérature, peuvent être regroupés en fonction du nombre de composants utilisés, ce qui conditionne le nombre de couplage et donc le nombre d'instabilités observables. On peut distinguer quatre catégories, à savoir :

- les **modèles disque-aiguille** [CAR02, AKA00, MAS07], utilisés dans un premier temps, à l'instar des premières méthodes analytiques, pour comprendre l'apparition du crissement et étudier les phénomènes de couplage et de stick-slip. Plus récemment, ces modèles ont été intégrés dans des procédures de modification en masse et rigidité visant à atténuer voire supprimer le crissement [MAS09].

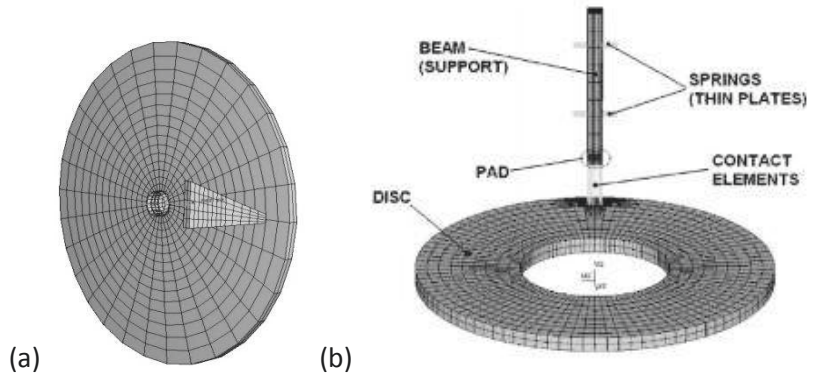


FIGURE 2-3 : (a) Modèle de système de frein selon Caridi [CAR02], (b) selon Massi et al. [MAS07] et Akay [AKA00]

- les **modèles disque-plaquettes** [BAI05], [LOR07], retenus principalement dans des études macroscopiques (fréquentielles et temporelles) dans le but d'étudier les effets du frottement, de la force de contact et des vitesses sur la propension au crissement. Abubakar [ABU05] a pris en compte dans sa modélisation la zone spécifique d'application de la pression. Ces dernières années, cette catégorie de modèle a été utilisée, avec succès, dans des

procédures de recalage avec les résultats expérimentaux menés sur banc [TRI08] ainsi que dans des analyses paramétriques et de sensibilité [LIU07], [DAI08], [COU09a] et [COU09b].

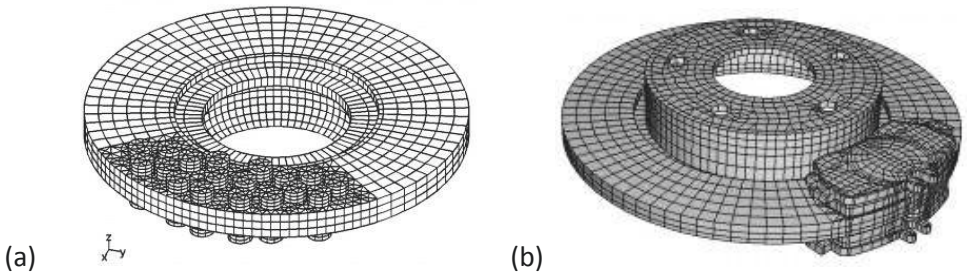


FIGURE 2-4 : (a) Modèle de système de frein selon Lorang [LOR07], (b) selon Abubakar [ABU05]

- les **modèles disque-plaquettes-étrier-garnitures** [BAJ04, FRI07, VER08, VER11], considérés pour des études macroscopiques puis microscopiques liées à l'étude de l'amortissement et à l'usure des plaquettes. D'autre part, ces modèles, de plus grande complexité, ont permis d'évaluer la pertinence des prédictions faites à partir de modèles simplifiés [VER08].

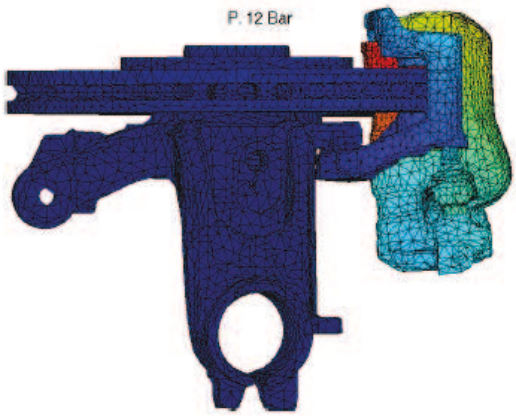


FIGURE 2-5 : Modèle de système de frein selon Vermot Des Roches [VER11]

- les **modèles disque-plaquettes-étrier-pièces d'axe**, utilisés par Heussaff et al. [HEU11] et compatibles avec des besoins industriels, prennent en compte une partie du train du véhicule. Il a été mis en exergue que la géométrie de certains composants, non utilisés dans les catégories précédentes, tels que les pièces d'axe, agissent directement sur les fréquences instables. D'autre part, ce modèle a permis de mettre en place des études fines concernant l'impact de l'usure des plaquettes sur la propension au crissement.

FIGURE 2-6 : Modèle de système de frein selon Heussaff [HEU11]

Au vu de ce bilan, il s'agit de décider du niveau de complexité de la modélisation à retenir pour mener des études de crissement représentatives. Il est clair que la modélisation la plus riche en termes de composants, au préalable recalés, et d'interfaces de liaison est susceptible de capturer le plus d'instabilités. Akay et al. [AKA09] montrent que certaines instabilités sont dues à un couplage de modes entre l'étrier et le disque ou les plaquettes. Cependant, compte tenu des coûts numériques associés aux études de stabilité, couramment implantées dans les codes de simulation, ces modélisations sont, à l'heure actuelle, difficilement intégrables dans des procédures d'optimisation ou des études paramétriques. A contrario, un modèle simplifié, comprenant uniquement le disque et les plaquettes, contient-il les éléments nécessaires à la génération d'instabilités observées en condition d'utilisation ? Coudeyras [COU09] justifie son choix de modèle sans l'étrier par le fait que les instabilités les plus sévères sont provoquées par l'interface frottante disque-plaquette. De même, Liu et al. [LIU07], ne modélisent pas l'étrier mais appliquent des conditions aux limites représentatives au niveau des perçages de fixation du disque et sur les oreilles des plaquettes pour conserver la dynamique. Enfin, Trichês et al. [TRI08] déduisent d'une série d'analyses modales expérimentales sur le système de frein réel que l'étrier ne participe pas à la génération de bruit et n'est donc pas primordial dans la modélisation.

Il s'avère donc très difficile de trouver une limite en terme de complexité de modélisation. Pour utiliser les modèles très complexes, il est essentiel de travailler sur les méthodes de résolution de stabilité, présentées dans le paragraphe 3, pour réduire les coûts numériques. L'objectif est bien évidemment de mettre en place, à moyen terme, des outils d'optimisation robustes pour la conception des freins.

Au-delà de l'augmentation de la complexité du modèle éléments finis, on peut noter aussi une évolution significative concernant l'identification des comportements matériels, par

exemple, pour la zone frittée de la plaquette [OST09] et de l'amortissement pour le shim [REN11] ainsi que pour la représentativité des lois de contact et de frottement [CAR02]. D'autre part, des analyses thermomécaniques et des modèles d'usure et de prise en compte du troisième corps sur les surfaces frottantes ont été proposés [BAJ04], [SOD08] pour être de plus en plus prédictifs.

2.3. Modèle numérique retenu pour l'étude non déterministe

L'objectif final de ce chapitre est d'étudier l'impact des paramètres variables du modèle sur les instabilités observées au travers de plans d'expériences numériques. Ceux-ci vont engendrer des temps de calcul importants. On propose donc de retenir pour cette étude une modélisation simplifiée de type disque-plaquettes (FIGURE 2-7). Le disque est représenté sans les trous de fixation et les plaquettes sans les oreilles de mise en position dans l'étrier.

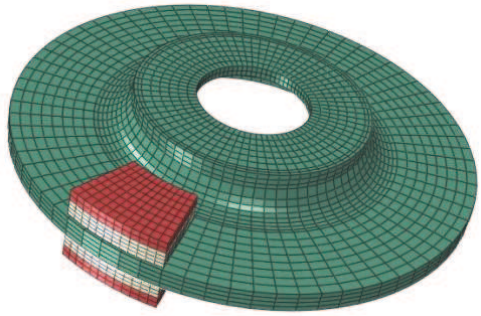


FIGURE 2-7 : Modèle simplifié du frein arrière retenu pour le plan d'expériences

Les éléments utilisés pour le maillage du disque et des plaquettes sont des éléments hexaèdres à 8 nœuds de type C3D8 utilisés sous le logiciel Abaqus V6.11 [ABA11a]. Le modèle est composé de 6768 éléments et 28245 degrés de liberté. Ne disposant pas des caractéristiques exactes des freins utilisés, des erreurs de précision peuvent intervenir lors de la modélisation tant au niveau de la géométrie que des caractéristiques matérielles. La géométrie a été modélisée à partir de mesures relevées sur le frein réel grâce à différents pieds à coulisse donnant une précision de l'ordre du dixième de millimètres. Les dimensions principales sont résumées dans le TABLEAU 2-1.

TABLEAU 2-1 : Caractéristiques géométriques

	Disque		Plaquette
Diamètre extérieur de la piste [m]	$289.5.10^{-3}$	Rayon extérieur [m]	$142.63.10^{-3}$
Diamètre intérieur de la piste [m]	189.10^{-3}	Rayon intérieur [m]	$96.63.10^{-3}$
Epaisseur de la piste [m]	12.10^{-3}	Epaisseur de la matière frittée [m]	10.10^{-3}
Diamètre du trou de centrage [m]	71.10^{-3}	Epaisseur du support [m]	7.10^{-3}

Les caractéristiques matérielles ont été recalées à la suite d'une analyse modale expérimentale des deux composants. Les quantités retenues après recalage sont présentées dans le TABLEAU 2-2.

TABLEAU 2-2 : Caractéristiques matérielles

	Disque	Garniture plaquette	Support garniture plaquette
Densité [kg/m^3]	7150	3800	7400
Module de Young [GPa]	118	1.05	83
Coefficient de Poisson	0.29	0.23	0.29

3. Méthodes de résolution pour l'étude de stabilité

L'étude des instabilités peut être abordée avec deux catégories d'approches numériques :

- l'analyse fréquentielle, plutôt globale de par la nature même des équations à résoudre, se focalise sur l'identification des modes du système, susceptibles d'être instables. Elle conduit à un problème aux valeurs propres complexes. Celui-ci est défini à partir d'une position d'équilibre, obtenue en résolvant un problème statique non linéaire de type contact frottant, qui a été perturbé.
- l'analyse temporelle, qui caractérise plus localement le comportement au niveau de la zone de contact, détermine l'évolution de grandeurs mécaniques (déplacements, efforts, coefficient de frottement dynamique, vitesse de glissement, …) en fonction du temps. L'équation de la dynamique est résolue en prenant en compte un problème non linéaire de contact frottant à chaque pas de temps.

Dans ce paragraphe, on propose de détailler ces deux approches dans le cas d'une étude de crissement d'un système de freinage ainsi que les critères d'identification de

l'instabilité couramment rencontrés dans la littérature. Plusieurs tests numériques permettront de comparer ces différentes propositions.

3.1. Analyse fréquentielle

L'analyse des modes propres complexes est la méthode la plus répandue pour étudier les instabilités [MEZ07] et principalement celles associées aux systèmes de freinage [MAS07, VER11]. Elle permet de hiérarchiser la participation des différents composants dans la propension au crissement [HEU12a], étape primordiale lors de la conception et l'optimisation du système [DIS06].

La simulation numérique est décomposée en deux étapes :

- un calcul de la position d'équilibre statique, permettant de déterminer les matrices de transformation pour coupler les degrés de liberté de contact suivant les directions normales et tangentielles;
- un calcul du problème aux valeurs propres complexes, calculées à partir des matrices couplées prenant en compte le contact frottant.

Les équations et les méthodes de résolution associées feront l'objet du chapitre 4.

L'instabilité de **l'équilibre statique** est qualifiée **au sens de Lyapunov** où le critère sur le signe de la partie réelle des valeurs propres permet de statuer de la stabilité du modèle. La présence d'une partie réelle positive indique un mode instable dont la pulsation est la partie imaginaire associée. Il est important de noter que la partie réelle indique uniquement le taux de croissance des amplitudes mais ne donne aucune information quant à l'amplitude et la prédominance d'un mode instable plutôt qu'un autre dans la réponse dynamique. Dans la littérature, de nombreux auteurs se sont focalisés sur le tracé des **diagrammes de coalescence** permettant de détecter les **bifurcations de Hopf** [HOP42]. Disson et al. [DIS06], Meziane [MEZ07], Daï et Lim [DAI08] et Chevillot et al. [CHE09] observent l'évolution des fréquences par rapport au coefficient de frottement et par rapport à l'amortissement, ce qui permet d'observer les phénomènes de lock-in et lock-out.

3.2. Analyse temporelle

Contrairement à l'approche fréquentielle, où l'on étudie le système autour d'une position d'équilibre, l'approche temporelle, dans sa mise en donnée, permet de simuler le comportement « réel » du système lors du freinage.

La simulation numérique est décomposée en deux étapes :

- une mise en rotation du disque à une vitesse constante,
- une mise en pression des plaquettes sur le disque par l'intermédiaire d'une pression sur les faces arrière des plaquettes de frein.

A l'issue de la simulation, de nombreuses quantités mécaniques, telles que, par exemple, les déplacements, vitesses et accélérations pour chaque degré de liberté du modèle ainsi que les efforts normaux et tangentiels à l'interface, peuvent être observées en fonction du temps. De ce fait, il est possible d'appliquer, sur ces quantités, une multitude de critères, permettant d'identifier les configurations instables.

On peut noter les critères basés sur :

- **les déplacements, les vitesses** [LIN05, ABU05, MEZ07, GRA09, VER11] et **les accélérations** [CAR02, MAS07, ABU05]. Comme il est difficile de définir un seuil limite, caractéristique d'un comportement instable et susceptible d'être différent d'un frein à un autre, les chercheurs se focalisent généralement sur l'évolution de la croissance, exponentielle jusqu'à un cycle limite ou non, des courbes étudiées. Le point d'intérêt est principalement le point de bifurcation de Hopf, obtenu par une étude fréquentielle. Comme ce critère est applicable pour chaque nœud des surfaces en contact, cette identification est longue à mettre en place et généralement plus performante sur les champs de déplacement et vitesse que d'accélération. De plus, les champs de déplacement et de vitesse sont retenus pour tracer le **plan de phase** afin d'étudier les **cycles limites** [COU09, GRA09, VER11]. Afin de repérer les fréquences excitées, il est fréquent de coupler cette analyse à une **transformée de Fourier** [CHE02, CAR02, LIN05, CHE09, VER11] appliquée sur les différents signaux ;
- **le couple de freinage du disque**, qui a été utilisé par Vermot Des Roches et al. [VER08, VER11]. Ce critère, peu utilisé dans la littérature, a permis d'identifier les instabilités de manière efficace en étudiant, dans ce cas encore, la croissance de la courbe ;
- **les puissances et les énergies,** calculées dans le cadre des travaux de Grange et al. [GRA07], à partir des forces tangentielles et des vitesses au niveau de la plaquette. Grange et al. montrent que ce critère, appliqué sur chaque nœud du

modèle, a une évolution similaire à celle de la pression acoustique relevée en expérimental mais avec une amplitude inférieure. Lorang [LOR07] et Vermot Des Roches [VER11] observent le comportement de l'énergie totale pour identifier l'apparition de crissement en se focalisant sur les oscillations, qui sont soit amorties, soit amplifiées ;

- **la somme des forces normales et tangentielles au contact**, qui s'avère être un des critères les plus utilisés [BAI05a, MAS07, MEZ07, VER08, VER11]. Comme pour les précédents critères, les auteurs s'intéressent à la croissance des courbes d'intérêt. Lorang [LOR07], quant à lui, s'intéresse aux comportements de type glissement-adhérence et des ondes de type glissement-décollement ;

- **le coefficient de frottement global dynamique**, calculé à partir du rapport de la résultante des forces tangentielles par la résultante des forces normales sur les nœuds de la surface de contact de la plaquette. L'évolution de ce coefficient de frottement en fonction de la vitesse et en fonction de la pression permet à Linck [LIN05] d'identifier des instabilités de type glissement-décollement, adhérence-glissement-décollement et adhérence-glissement. En plus d'identifier l'apparition du crissement, ce critère renseigne sur la nature des instabilités, comme l'a montré Linck [LIN05]. Toutefois, ce critère est intéressant mais doit être utilisé en parallèle à un autre si on se réfère aux travaux de Vermot Des Roches et al. [VER08], [VER11] ;

- **le statut des nœuds de la zone de contact**, qui est fortement lié au critère basé sur le coefficient de frottement dynamique et sur les efforts normaux et tangentiels. Ce critère nécessite d'être analysé et mis en place pour chaque nœud de la surface de contact, ce qui rend la démarche assez longue. Linck [LIN05] montre avec ce critère, l'apparition de trois régimes instables tandis que Baillet et al. [BAI05b] statuent sur la stabilité ou non en fonction de la proportion de nœuds en état glissant ;

Ce bilan met en évidence qu'il est difficile de mettre en place un critère basé sur un seuil limite, qui nous permettrait de définir la limite entre le domaine stable et instable. Les observations reposent principalement sur la croissance de la courbe d'intérêt qui va être exponentielle pour atteindre un cycle limite dans le cas d'une configuration instable. En

d'autres termes, les critères actuels sont plutôt visuels que véritablement quantitatifs. Les fréquences, excitées durant la phase d'utilisation, sont principalement extraites des spectres de déplacement, vitesse ou des efforts normaux et tangentiels. Les tracés des plans de phase complètent, dans la majorité des travaux, l'étude de stabilité.

3.3. Déclenchement de l'instabilité

En analyse temporelle, les temps de calcul sont excessivement importants. En effet, pour un modèle à 28245 ddls, une simulation de 5 secondes, compatible avec les essais sur banc, dure 17 heures. Dans un contexte de tirages multiples, il est clair qu'appliquer ces méthodes de résolution, implémentées dans les codes industriels, est un véritable frein.

Pour réduire les temps de simulation, plusieurs auteurs ont proposé de déclencher l'instabilité grâce à une variation brutale de paramètres puis ont étudié, pour une durée de simulation plus courte, le comportement du système. Ainsi, soit les oscillations sont amorties et le système est considéré comme stable, soit elles sont entretenues et le système est instable. Par exemple, Caridi [CAR02] a utilisé une variation du coefficient de frottement pour déclencher l'instabilité. Vermot Des Roches et al. [VER08], quant à eux, ont appliqué une surpression de 10% pendant les 5.10^{-5} secondes du début de la simulation pour provoquer l'instabilité.

Afin d'évaluer l'efficacité du déclenchement de l'instabilité, nous avons appliqué, pour le modèle éléments finis présenté dans le paragraphe 2, ces deux stratégies. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser un temps de simulation réduit à vingt millisecondes et d'imposer soit une augmentation du coefficient de frottement de 0.1 (FIGURE 2-8), soit une augmentation de la pression de 10%, comme le montre la FIGURE 2-9.

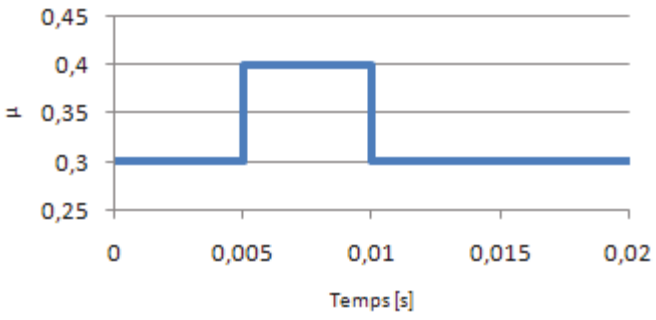


FIGURE 2-8 : Evolution du coefficient de frottement pour le déclenchement de l'instabilité

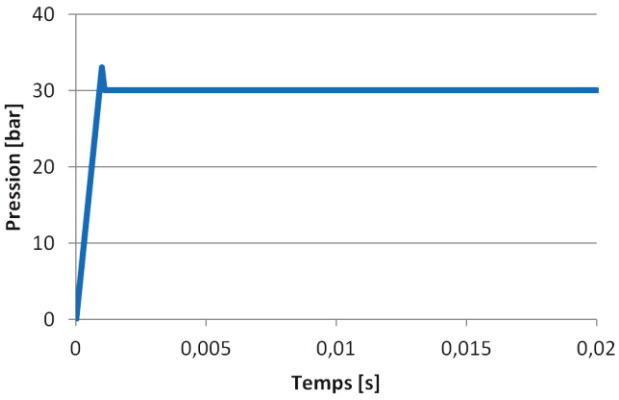


FIGURE 2-9 : Evolution de la pression pour le déclenchement de l'instabilité

La FIGURE 2-10 présente, dans le cas d'une configuration identifiée comme stable (P=5bars, V=10km/h et μ=0.6), l'évolution de la somme des efforts normaux et tangentiels pour des simulations de 5s sans déclenchement de l'instabilité. Les graphes de la FIGURE 2-11 représentent le même critère pour des simulations de 0.02s avec un déclenchement par une variation du coefficient de frottement et de la pression.

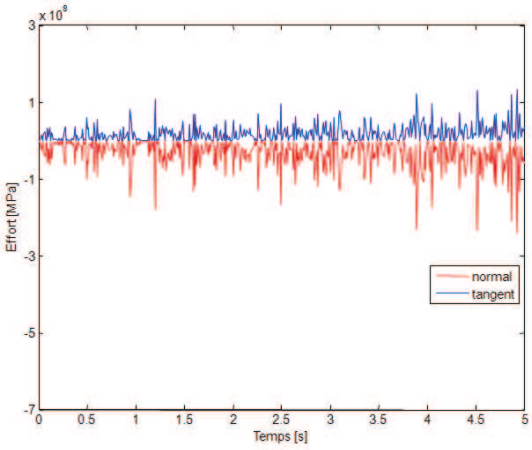


FIGURE 2-10 : Evolution de la somme des efforts normaux et tangentiels pour une configuration stable - sans déclenchement de l'instabilité (5s)

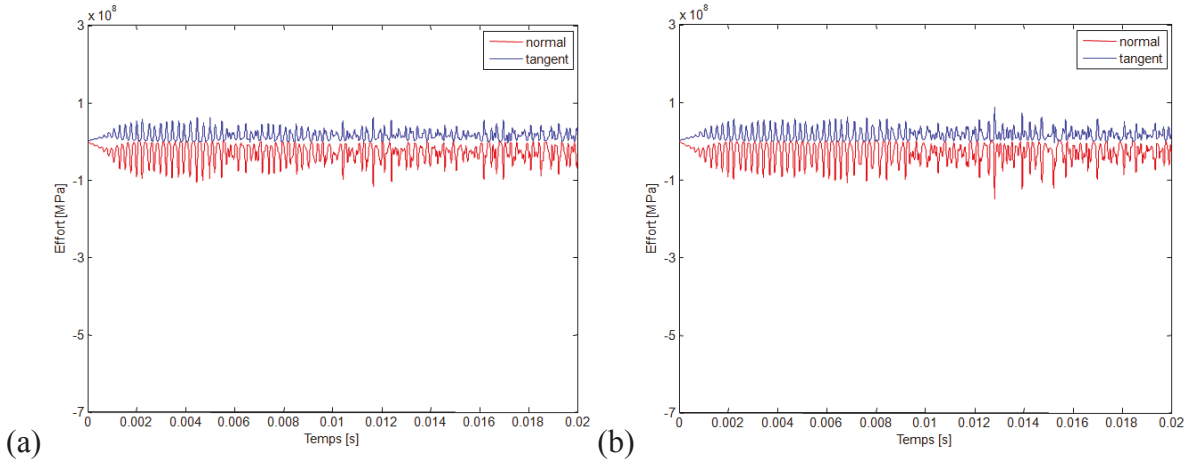


FIGURE 2-11 : Evolution de la somme des efforts normaux et tangentiels pour une configuration stable - déclenchement de l'instabilité (a) avec le coefficient de frottement et (b) avec la pression (20ms)

Les FIGURES 2-12 à 2-13 présentent, les mêmes quantités que précédemment, à savoir la somme des efforts normaux et tangentiels, mais dans le cas d'une configuration identifiée comme instable (P=30bars, V=3km/h et μ=0.5). On peut noter que les déclenchements de l'instabilité avec le coefficient de frottement et la pression permettent d'étudier, avec succès, l'état du système d'une configuration pour un temps de calcul réduit. En plus de cette information qualitative, ces études fournissent aussi une information quantitative sur le niveau de la quantité mécanique observée.

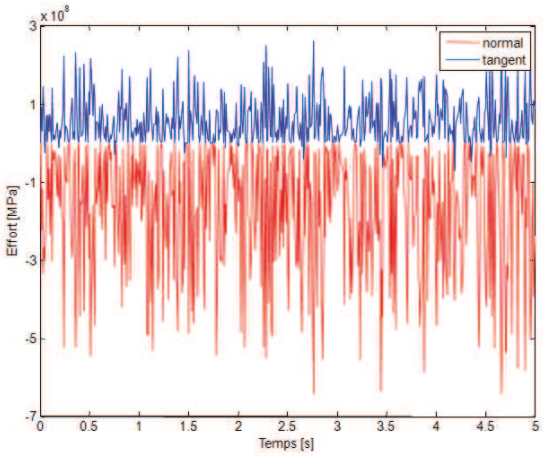


FIGURE 2-12 : Evolution de la somme des efforts normaux et tangentiels pour une configuration instable - sans déclenchement de l'instabilité (5s)

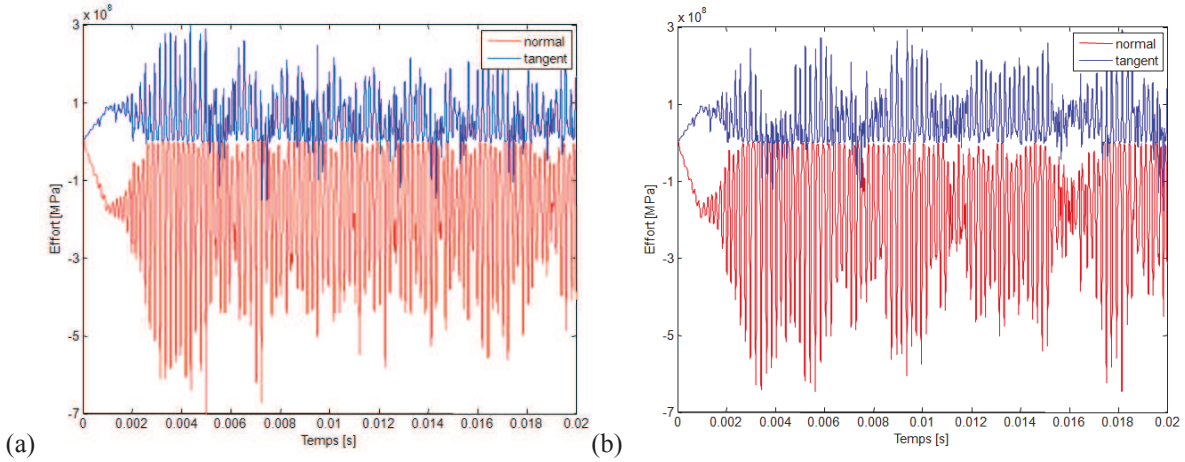


FIGURE 2-13 : Evolution de la somme des efforts normaux et tangentiels pour une configuration instable - déclenchement de l'instabilité (a) avec le coefficient de frottement et (b) avec la pression (20ms)

L'ensemble des tests, menés pour différentes configurations (stables et instables), montre qu'il est toutefois préférable d'imposer une surpression plutôt qu'une variation du coefficient de frottement, qui n'est pas toujours suffisamment prédictive dans l'observation des cas instables. On observe en effet pour quelques configurations identifiées comme instable (par exemple P=3bars, V=3km/h et μ=0.3) sur une simulation de 5s, que l'instabilité ne s'amorce qu'à la fin des vingt millisecondes d'étude (FIGURE 2-14) voire même au-delà. Ceci empêche d'analyser avec certitude la nature du système.

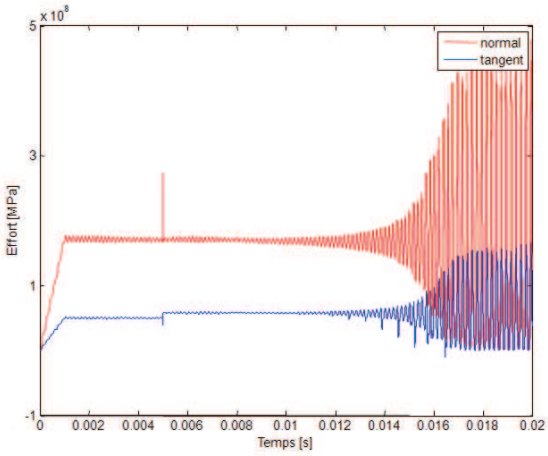


FIGURE 2-14 : Mise en défaut de la stratégie de déclenchement de l'instabilité par coefficient de frottement

D'autre part, le choix d'imposer une augmentation de 10% de la pression est relativement arbitraire. Pour certaines configurations stables (par exemple P=3bars, V=3km/h et μ=0.2), il est nécessaire, pour identifier, avec certitude, la nature du cas observé, d'augmenter la valeur de la pression de 30%, comme le met en évidence la FIGURE 2-15.

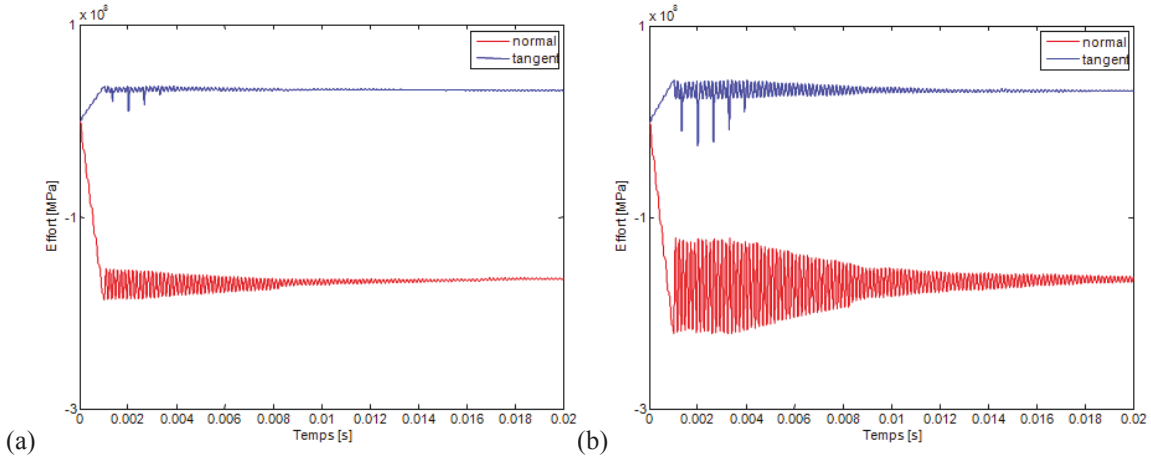


FIGURE 2-15 : Mise en défaut de la stratégie de déclenchement de l'instabilité vis-à-vis de la valeur de 10% de surpression (a) et 30% de surpression (b)

Cette stratégie renseigne surtout si le système présente une forte instabilité. La réduction du temps d'observation permet, bien évidemment, de réduire les temps de calcul. En effet, une simulation requiert désormais 20mn contre les 17h d'une simulation complète. Ce temps est maintenant compatible avec un plan d'expériences. Toutefois, il est important de noter que cette stratégie n'est qu'une première étape dans la maîtrise des temps de calcul. En phase de conception, il est nécessaire d'être prédictif réactif. Quelques propositions, intrusives vis-à-vis des codes de simulation, seront formulées dans la seconde partie de ce mémoire.

3.4. Etude d'une configuration crissante et non crissante

L'état de l'art, mené dans le paragraphe 3.2, concernant les critères d'observation de l'instabilité en temporel, a permis de dégager une liste de critères potentiellement applicables, que l'on propose d'évaluer, comme précédemment, pour deux configurations identifiées comme stable et instable. L'objectif est de dresser un premier bilan des critères les plus prédictifs avant de les appliquer sur les résultats d'un plan d'expériences, où les données sont nombreuses et plus délicates à exploiter.

Pour ces comparaisons, on propose de retenir deux configurations, stable (P=5bars, V=10km/h et μ=0.6) et instable (P=30bars, V=3km/h et μ=0.5), observées lors du plan d'expériences, développé dans le chapitre 1 (FIGURE 2-16).

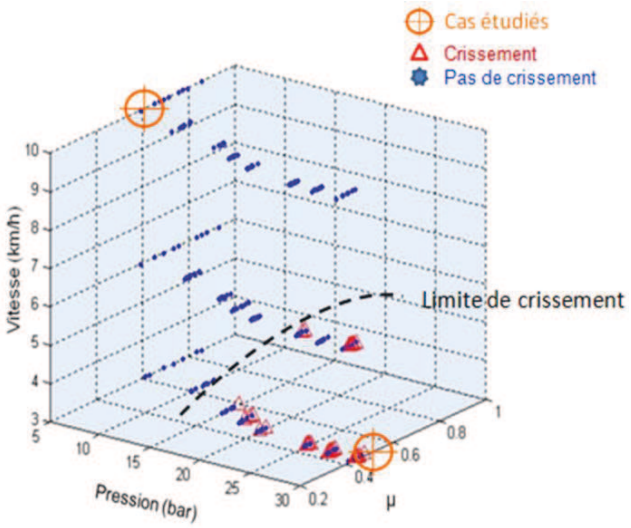
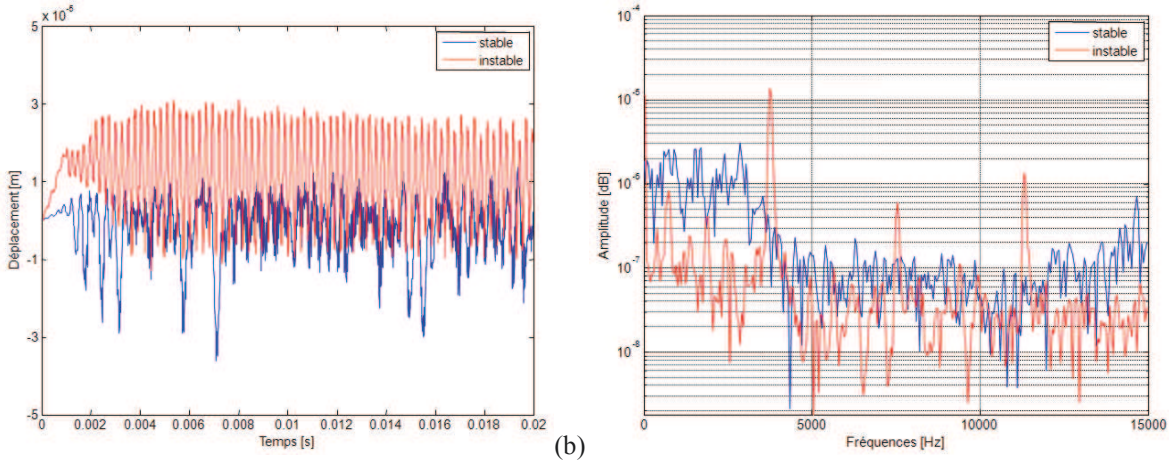


FIGURE 2-16 : Définition des configurations stable et instable lors du plan d'expériences

Pour détecter l'état des configurations étudiées, onze critères sont testés, à savoir :

- l'évolution du déplacement du nœud situé au centre de la plaquette en fonction du temps (FIGURE 2-17a),
- la transformée de Fourier du spectre de déplacement (FIGURE 2-17b),
- l'évolution de la vitesse du nœud situé au centre de la plaquette en fonction du temps (FIGURE 2-18a),
- le plan de phase du nœud situé au centre de la plaquette (FIGURE 2-18b),
- l'évolution de la somme des efforts normaux de la plaquette (FIGURE 2-19a),
- l'évolution de la somme des efforts tangentiels de la plaquette (FIGURE 2-19b),
- la transformée de Fourier de la somme des efforts normaux de la plaquette (FIGURE 2-20a),
- la transformée de Fourier de la somme des efforts tangentiels de la plaquette (FIGURE 2-20b),
- l'évolution du coefficient de frottement dynamique du nœud situé au centre de la plaquette en fonction du temps (FIGURE 2-21),
- l'évolution du statut des nœuds de la plaquette (FIGURE 2-22a),
- l'évolution des changements de statut des nœuds de la plaquette (FIGURE 2-22b),

On observe, pour le spectre en déplacements (FIGURE 2-17a), une croissance de l'amplitude jusqu'à l'obtention d'un niveau limite dans le cas d'une configuration instable. La fréquence d'oscillation est relativement constante. Pour le cas stable, l'évolution moyenne en déplacement est globalement plus basse que dans le cas instable, avec des pics de haute amplitude très localisés. Dans le cas présent, l'évolution en déplacement permet d'apprécier l'instabilité d'un point de vue qualitatif. Toutefois, l'absence de seuil limite en terme d'amplitude, à ne pas dépasser quelle que soit l'étude menée, ne facilite pas l'identification d'une instabilité plus ou moins sévère.

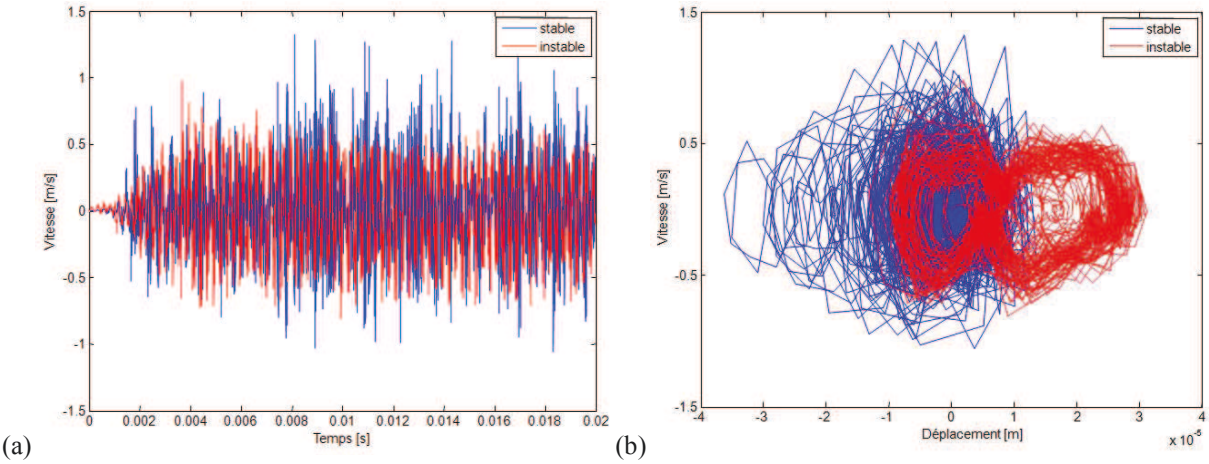


(a) (b)

FIGURE 2-17 : Comparaison du déplacement au centre de la plaquette (a) et des transformées de Fourier du spectre de déplacement (b) entre une configuration stable et instable

La FIGURE 2-17b met en évidence, de par la transformée de Fourier des spectres précédents, les fréquences excitées pour les deux configurations. Pour le cas stable, aucune fréquence n'est retenue, au contraire du cas instable, où l'on relève trois pics caractéristiques respectivement à 3750Hz, 7550Hz et 11300Hz.

Concernant le spectre de vitesse (FIGURE 2-18a), l'information est plus difficile à analyser que dans le cas des déplacements, compte tenu du fait que l'on observe des variations plus ou moins importantes dans les deux configurations. Les amplitudes, associées au cas instable, apparaissent comme contenues dans une plage d'amplitude limite (d'environ -0.5m/s à 1m/s), tandis que les évolutions, de la configuration stable, sont de nature plus hétérogène avec des niveaux pouvant atteindre les 1.5m/s pour quelques pas de temps. Pour intégrer l'information contenue dans le spectre en vitesse, il est préférable de tracer le plan de phase associé (FIGURE 2-18b).

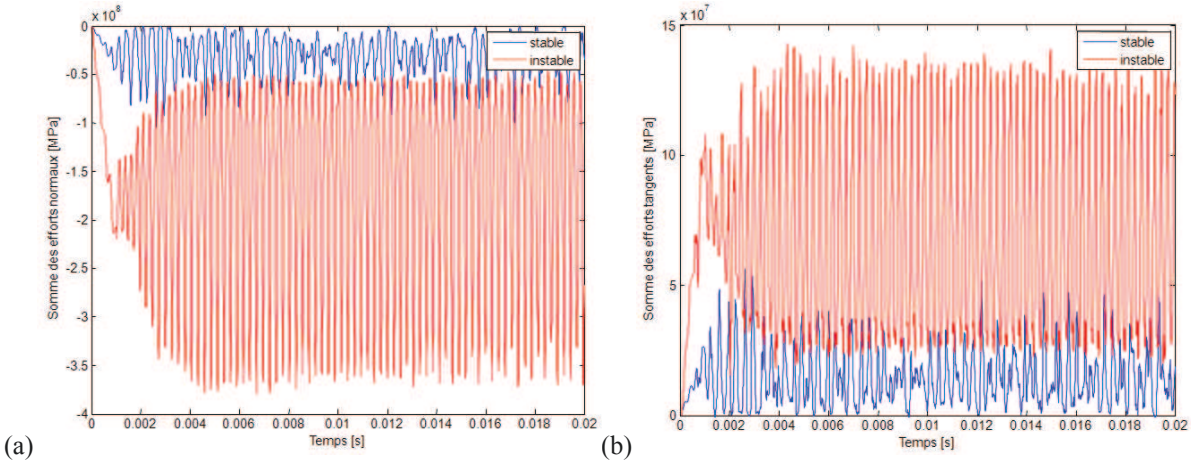


(a) (b)

FIGURE 2-18 : Comparaison de la vitesse (a) et des plans de phase (b) au centre de la plaquette entre une configuration stable et instable

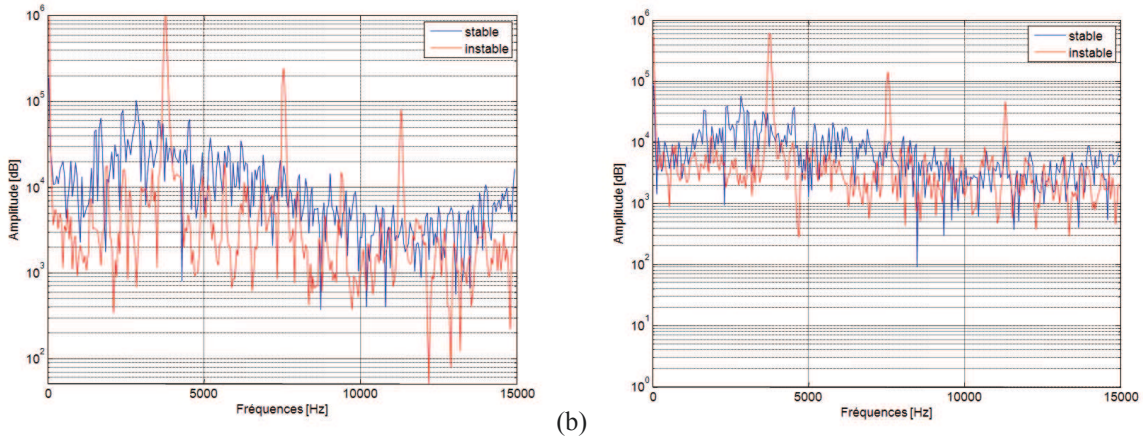
Dans le cas de la configuration stable, on observe un cycle autour de l'origine, qui se décale vers une valeur négative du déplacement. L'allure formée ressemble à un cycle stable ou semi-instable comme décrit par Sinou [SIN02]. Dans le cas de la configuration instable, on observe deux cycles. Le premier cycle est formé autour de l'origine puis un deuxième cycle se forme autour d'une valeur positive du déplacement. Ceci montre un cycle régulier en déplacement et vitesse comme observé sur la courbe de la FIGURE 2-17a. Les oscillations sont stabilisées. Dans le cadre d'une analyse non déterministe, un critère quantitatif de stabilité n'est pas évident à mettre en place pour ce type d'observation.

Les FIGURES 2-19a et 2-19b mettent en évidence un comportement comparable à celui observé pour le spectre en déplacement, à savoir une croissance des amplitudes des efforts normaux et tangentiels en considérant l'ensemble de la zone de contact pour atteindre un niveau limite dans le cas instable. Les fréquences, obtenues à partir des transformées de Fourier des signaux, sont respectivement de 3748Hz, 7546Hz et 11290Hz (FIGURES 2-20a et 2-20b).



(a) (b)

FIGURE 2-19 : Comparaison de la somme des efforts (a) normaux et (b) tangentiels entre une configuration stable et instable



(a) (b)

FIGURE 2-20 : Comparaison des transformées de Fourier de la somme des efforts (a) normaux et (b) tangentiels entre une configuration stable et instable

La FIGURE 2-21 présente l'évolution du coefficient de frottement dynamique du nœud situé au centre de la plaquette en fonction du temps. On observe que, pour le cas stable, le coefficient dynamique diminue plus souvent à 0 (état décollé) que dans le cas instable, où le coefficient évolue principalement entre 0.3 et 0.5. Aux vues de ces évolutions, il est difficile de définir un critère de détection du crissement. Pour analyser plus finement la zone de contact, les FIGURES 2-22a et 2-22b s'intéressent, pour les configurations stables et instables, à l'évolution du statut des nœuds ainsi qu'aux changements de statut pour toute la plaquette. La configuration instable comporte une plus grande proportion de nœuds en état adhérent alors que la configuration stable présente plus de nœuds décollés. La proportion de nœuds en état glissant est globalement équivalente. Ces résultats ne permettent pas de distinguer avec certitude l'état de stabilité ou non de chaque configuration. Il en est de même concernant l'information relative au changement de statut contact-décollé et adhérent-glissant.

Les changements de statut sont toutefois supérieurs dans la configuration stable que dans la configuration instable

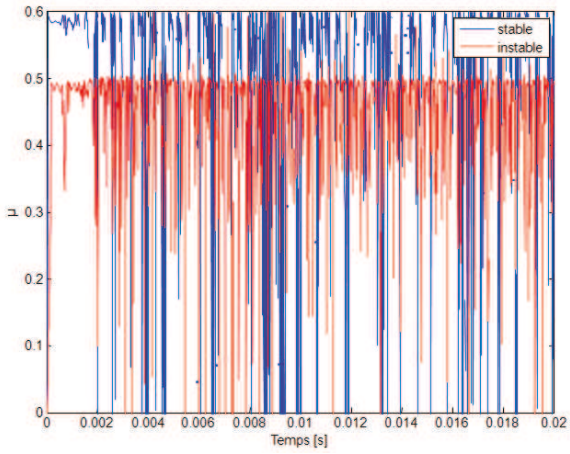


FIGURE 2-21 : Comparaison des coefficients de frottement dynamique entre une configuration stable et instable

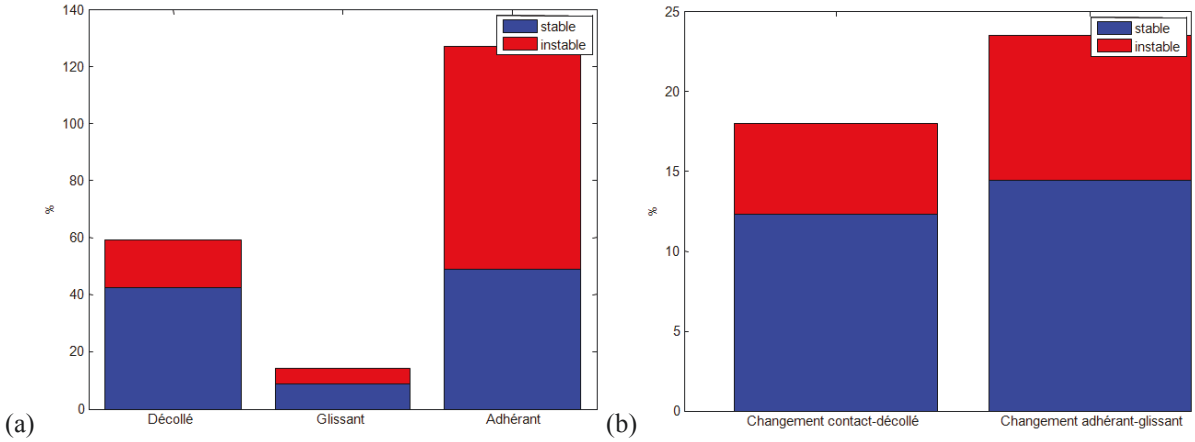


FIGURE 2-22 : Comparaison des différents statuts des nœuds (a) et des différents changements de statut des nœuds (b) entre une configuration stable et instable

En conclusion à cette étude, deux critères retiennent notre attention pour détecter une instabilité en étude temporelle, à savoir l'évolution de la somme des efforts normaux et tangentiels en fonction du temps ainsi que la transformée de Fourier associée, et seront utilisés dans le cadre du plan d'expériences, présenté dans le paragraphe suivant. Le critère en déplacement, quant à lui, n'est pas retenu étant donné que la caractéristique principale de décision, à savoir une croissance du signal puis une stabilisation à un niveau limite, est fortement dépendante du nœud choisi au niveau de la surface de contact.

4. Vers une conception robuste

Fort des constats menés dans le paragraphe 3, un plan d'expériences numérique est réalisé pour étudier l'influence des variabilités, observées lors du plan d'expériences du chapitre 1, sur les réponses vibratoires du système. L'objectif est d'évaluer dans quelle mesure l'apport d'informations, dans le modèle, plus représentatives d'une production, peut permettre au concepteur d'évaluer une solution vis-à-vis du phénomène de crissement. Un des points essentiels est de définir une stratégie d'exploitation des solutions, calculées en grande quantité, pour les plans d'expériences en analyse fréquentielle et temporelle, et de savoir si ces critères, appliqués pour des études déterministes, vont permettre d'agréger l'ensemble des comportements d'une famille de modèles. Le premier paragraphe présente les caractéristiques des plans d'expériences numériques tandis que les paragraphes suivants traitent des résultats obtenus pour l'analyse fréquentielle puis l'analyse temporelle du modèle disque-plaquettes, présenté au paragraphe 2.3.

4.1. Présentation du plan d'expériences

D'après l'analyse des résultats des tests sur banc présentés au chapitre 1, on sait que le crissement apparaît pour des freinages à faible vitesse et des pressions plutôt élevées. Le plan d'expériences est donc exclusivement mené pour un comportement crissant du frein. Les paramètres de fonctionnement, c'est-à-dire des paramètres variables mais dont l'étendue est connue, sont volontairement limités à la « zone » crissante, à savoir une vitesse de véhicule comprise entre 3 et 5 km/h (soit 2.1 et 4.085 rad/s pour la vitesse de rotation du disque) et une pression dans le circuit de freinage entre 20 et 30 bars (soit une pression exercée à l'arrière de chaque plaquette de 9.68 à 14.5 bars).

Deux autres facteurs sont ajoutés à cette étude, à savoir le coefficient de frottement, compris entre 0.2 et 0.6 (qui couvre tous les cas rencontrés dans le chapitre 1) et le module d'Young des garnitures des plaquettes, qui peut varier de +/-10% par rapport à la valeur théorique. Il n'est pas question de réaliser ici un couplage thermo-mécanique, mais de représenter l'effet de la température au travers d'une variation du module de Young à l'instar de Trichês et al. [TRI08]. De plus, cette variation est représentative des dispersions inhérentes à la fabrication d'un matériau, que l'on peut retrouver au sein d'une même famille de composants. Ces deux paramètres sont, contrairement aux paramètres de fonctionnement, subis et non contrôlés. Les différentes valeurs des paramètres de fonctionnement et des paramètres imprécis sont reportées dans le TABLEAU 2-3.

TABLEAU 2-3 : Description des paramètres du plan d'expériences

Paramètres	Symboles	Valeurs
Pression [bars]	P	20 ; 25 ; 30
Vitesse [rad/s]	ω	2.1 ; 3.093 ; 4.085
Coefficient de frottement	μ	0.2 ; 0.3 ; 0.4 ; 0.5 ; 0.6
Module de Young plaquettes [Gpa]	E	0.945 ; 0.9975 ; 1.05 ; 1.1025 ; 1.155

La FIGURE 2-30 résume l'ensemble des combinaisons (cent vingt cinq combinaisons possibles) qui vont être effectuées durant le plan d'expériences, qui n'est, en l'occurrence, pas complet. Pour limiter les calculs, certaines combinaisons de pression et de vitesse ne sont pas prises en compte. Le plan d'expériences comprend les configurations de pressions et de vitesses extrêmes et la configuration de pression et de vitesse intermédiaires alors que le coefficient de frottement et le module d'Young en présentent cinq niveaux.

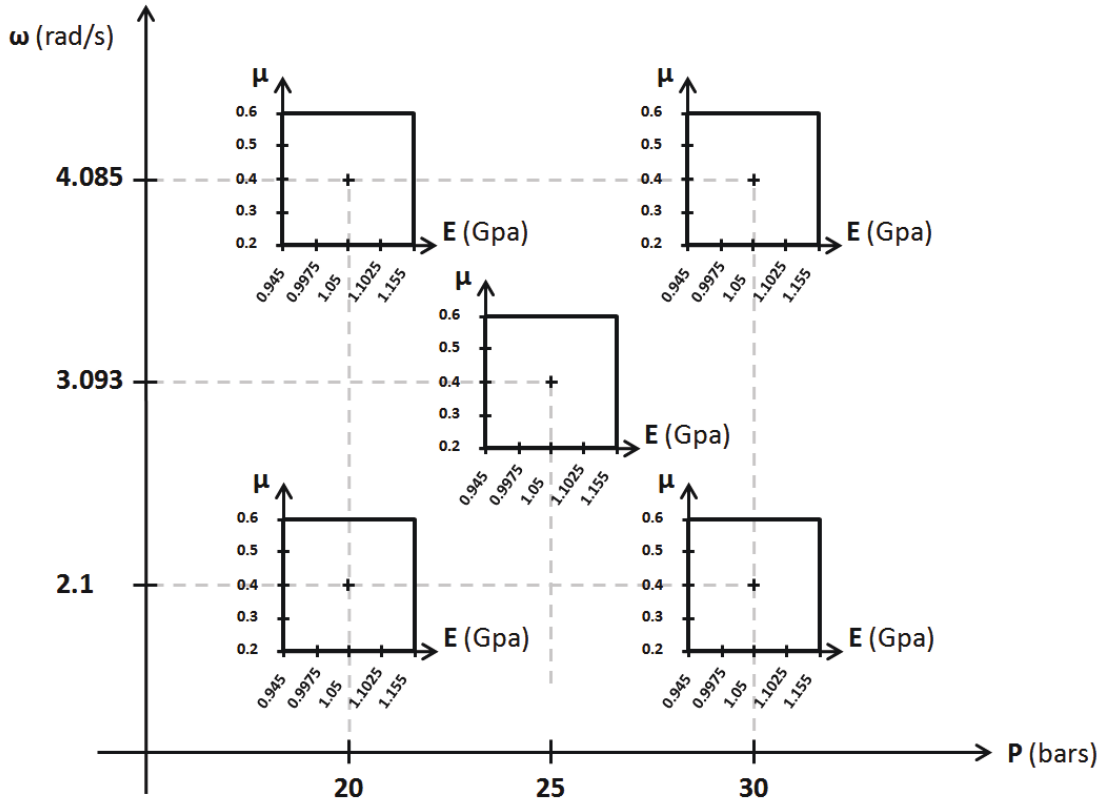


FIGURE 2-30 : Définition des facteurs et niveaux du plan d'expériences

Pour l'analyse temporelle, les plaquettes sont soumises à une pression sur leur face arrière (FIGURE 2-31).

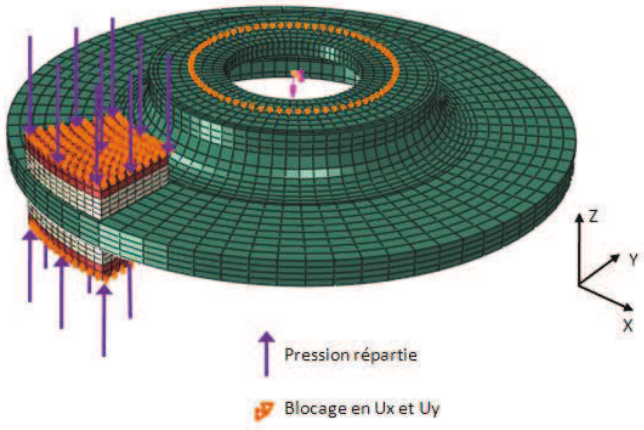


FIGURE 2-31 : Définition des conditions aux limites et du chargement pour l'étude temporelle

D'une part, les nœuds de la face arrière sont bloqués en translation suivant les directions tangentielles, de telle manière que seule la translation vers le disque soit possible. D'autre part, les nœuds situés sur le diamètre correspondant au diamètre des centres des trous de fixation sont bloqués en translation dans la direction de l'axe de rotation.

4.2. Résultats de l'analyse fréquentielle

Tous les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus avec le modèle éléments finis et la procédure décrite aux paragraphes 2.3 et 4.1. De par la modélisation retenue, relativement simplifiée, les paramètres vitesse et pression ne sont pas considérés dans cette analyse. En effet, la géométrie des garnitures des plaquettes est parfaite et la vitesse de rotation du disque n'a pas d'influence car, pour toutes les simulations, les nœuds sont en situation de contact glissant. Pour un coefficient de frottement constant, les efforts tangents calculés pour obtenir l'équilibre statique ne sont pas influencés par la vitesse de rotation. D'autre part, la symétrie du chargement conduit à une neutralité du facteur pression comme le montre la FIGURE 2-32, où sont superposés les graphes de stabilité pour les trois valeurs de pression. Ainsi, la nature du modèle traité et le paramétrage du problème conduisent à une réduction du plan d'expériences à la seule combinaison de fonctionnement intermédiaire, c'est-à-dire P=25 bars et ω=3.093 rad/s.

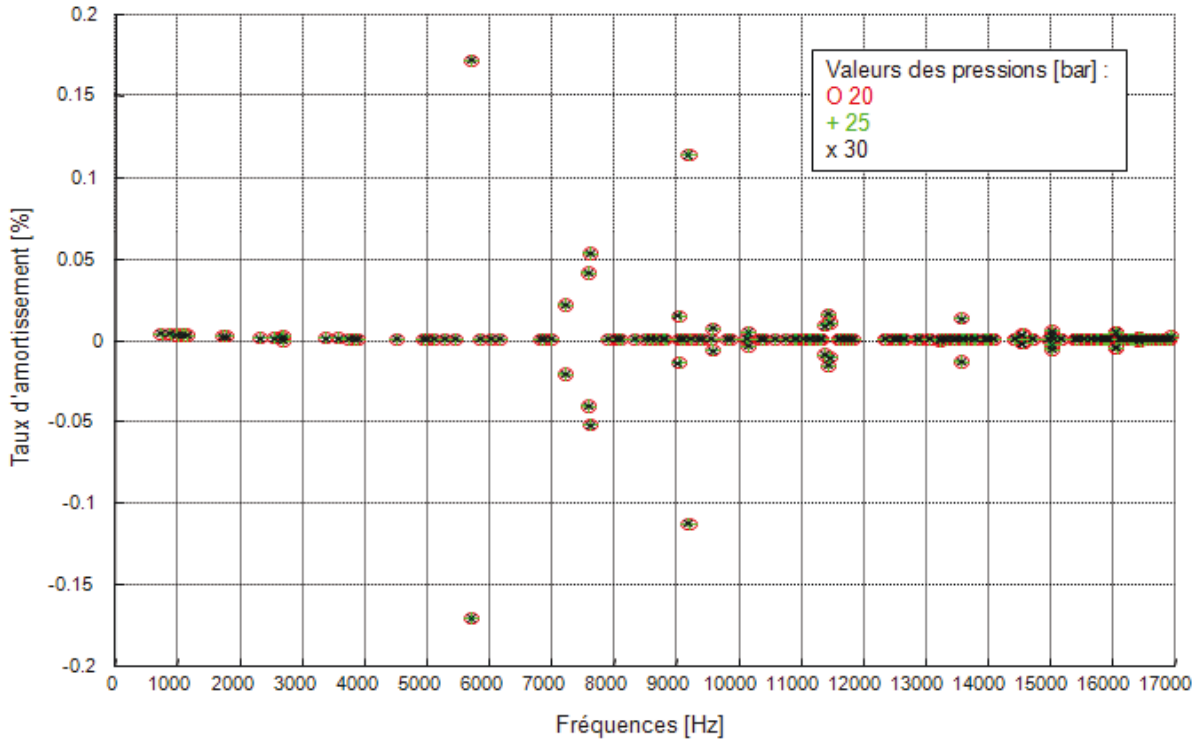


FIGURE 2-32 : Graphe de stabilité pour différentes valeurs de pression (μ=0.4 ; E=1.05Gpa)

On s'attache maintenant à analyser les 25 simulations réalisées pour les 5 valeurs des deux paramètres imprécis et pour la configuration intermédiaire de pression et de vitesse. Les études d'instabilité sont réalisées dans la bande de fréquences 0-17kHz correspondant à celle du plan d'expériences expérimental exposé au chapitre précédent.

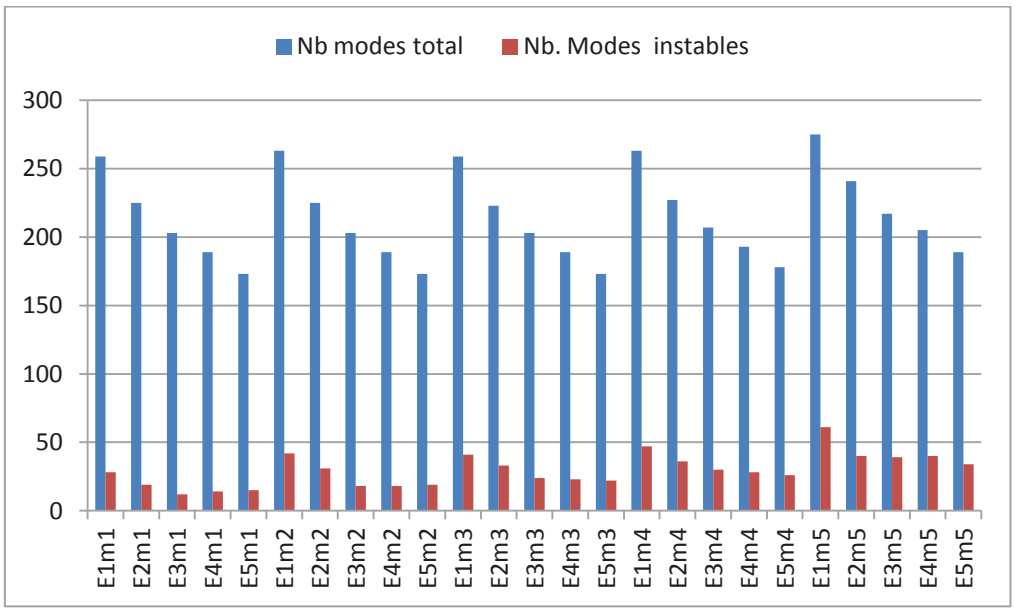


FIGURE 2-33 : Nombre de modes total et instables calculés (P=25 bars et ω=3.093 rad/s)

La FIGURE 2-33 présente le nombre total de modes calculés ainsi que le nombre de modes instables des 25 configurations du système couplé. L'évolution du nombre total de modes s'explique bien évidemment par la rigidification des plaquettes au travers du module de Young et montre également l'effet assez important de ce paramètre. L'effet du coefficient de frottement est moins sensible. Le classement des configurations par nombre d'instabilités croissantes, présenté FIGURE 2-34, ne montre pas de comportement homogène. On retrouve néanmoins une tendance observée en essais, à savoir des configurations plus instables pour un coefficient de frottement autour de 0.5. La configuration qui comporte le plus d'instabilités (61 modes instables) correspond à la valeur du coefficient de frottement le plus élevé (μ=0.6) et le module de Young le plus faible (E=0.945Gpa). En comparaison, la combinaison correspondant aux valeurs nominales des paramètres (μ=0.6 ; E=1.05Gpa) ne comporte que 24 modes instables, confortant ainsi l'intérêt de prendre en compte la variabilité des paramètres.

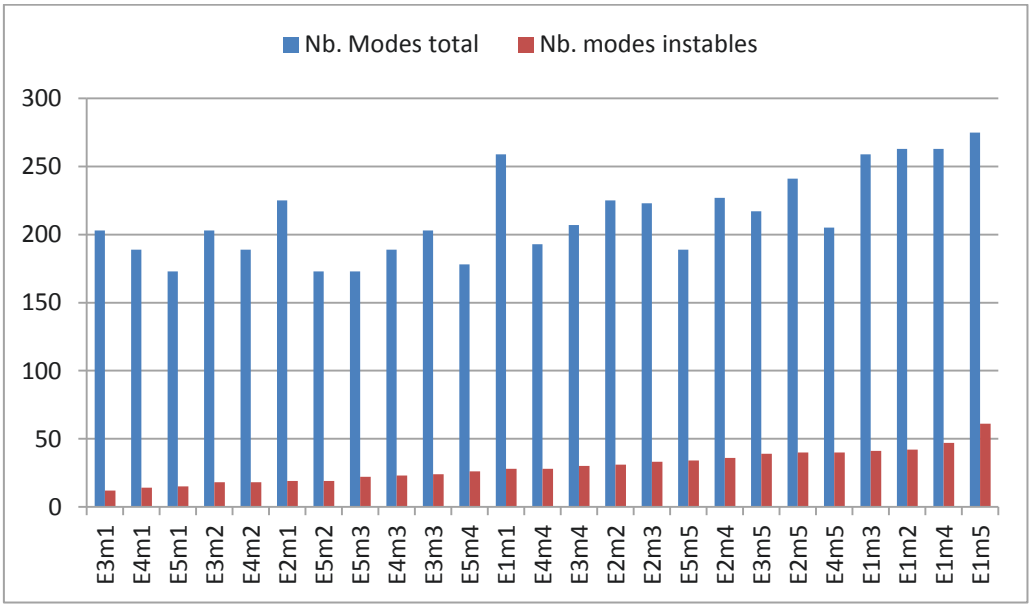


FIGURE 2-34 : Nombre de modes total et instables calculés – classé par nombre croissant d'instabilités

L'analyse directe d'un graphe de stabilité comportant les résultats de l'ensemble des simulations n'apporte pas véritablement d'information complémentaire. Au contraire, un tel graphe rend l'analyse difficile par le nombre d'informations qu'il est nécessaire de gérer. Pour pallier cette difficulté, on propose de constituer des classes d'instabilité en agrégeant les résultats du même type. Les solutions obtenues correspondent à des quantités modales complexes. Il semble donc naturel d'agréger les modes instables de formes similaires au moyen du critère MAC, dont l'expression est adaptée aux modes complexes et rappelée ci-dessous.

$$MAC_{ij} = \frac{\left|\psi_i^H \psi_j\right|^2}{\left|\psi_i^H \psi_i\right|\left|\psi_j^H \psi_j\right|} \qquad \text{Eq. 2-1}$$

où ψ_i et ψ_j correspondent à deux modes instables du système couplé et $()^H$ l'opérateur transconjugué (conjuguée hermitienne).

Lorsque les groupes d'instabilité seront constitués, c'est-à-dire des groupes composés de modes instables de même forme, il sera possible d'évaluer les dispersions en fréquence et en amortissement relatives à chaque groupe. L'idée sous jacente est de repérer les modes susceptibles de conduire à une véritable instabilité en sélectionnant les groupes correspondant à des dispersions faibles. En d'autres termes, il s'agit de rechercher une certaine stabilité (ou robustesse) parmi les groupes de modes instables. En effet, si l'occurrence d'une instabilité de même type est suffisante l'hypothèse est que la robustesse de cette instabilité doit augmenter la confiance sur son apparition.

Pour ce cas test, la base est constituée des 740 modes instables classés par fréquences croissantes, correspondant au total des 25 configurations. Un automac appliqué à cette base, représenté sur la FIGURE 2-35a, donne, non seulement, une idée des associations possibles (en particulier le zoom sur les 100 premiers modes jusqu'à 8kHz en FIGURE 2-35b) mais indique aussi la complexité d'une analyse directe de ce critère avec l'augmentation des fréquences.

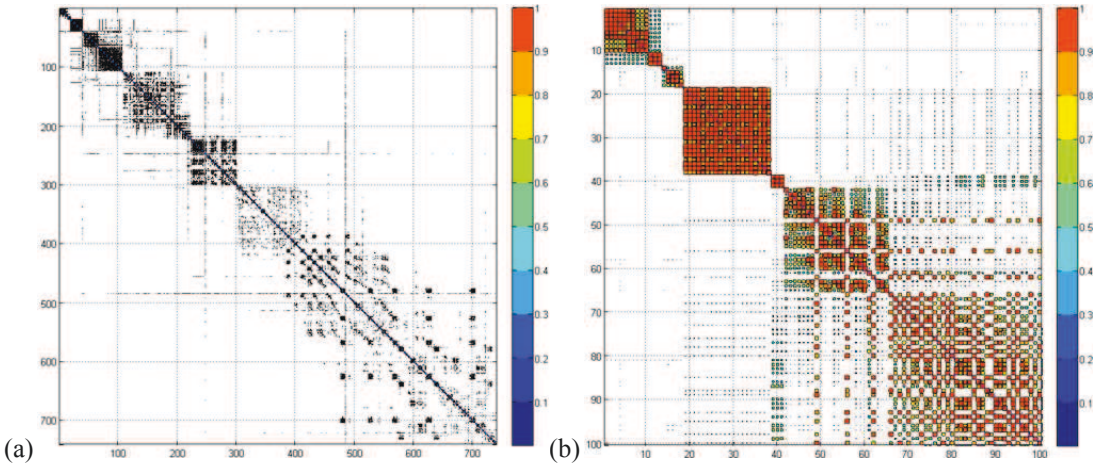


FIGURE 2-35 : Automac sur l'ensemble des modes instables (a) – zoom sur les 100 premiers modes (b)

Pour créer ces groupes, on propose de réaliser un appariement de la base des modes instables en se référant à la simulation comportant le plus de modes instables. Pour ce cas test, la base instable de référence est donnée par la configuration μ=0.6 ; E=0.945Gpa. Les quantités étant calculées, il n'y a pas de bruit de mesure. Le seuil d'appariement est donc

choisi pour des valeurs de mac supérieures à 0.9. Contrairement à la valeur habituelle de 0.7, ce choix permet également de limiter les erreurs de norme sur les vecteurs. Avec un seuil de 0.9 les erreurs de normes sont le plus souvent inférieures à 10% et peuvent atteindre 30% dans quelques cas contre respectivement 20% et 60% pour un seuil de 0.7. La FIGURE 2-36 donne le résultat de l'agrégation sur un graphe d'instabilité. Le taux d'amortissement positif indique ici qu'il s'agit de modes instables. L'ensemble des modes instables de la base est représenté par des points en gris alors que les couleurs correspondent aux différents groupes constitués.

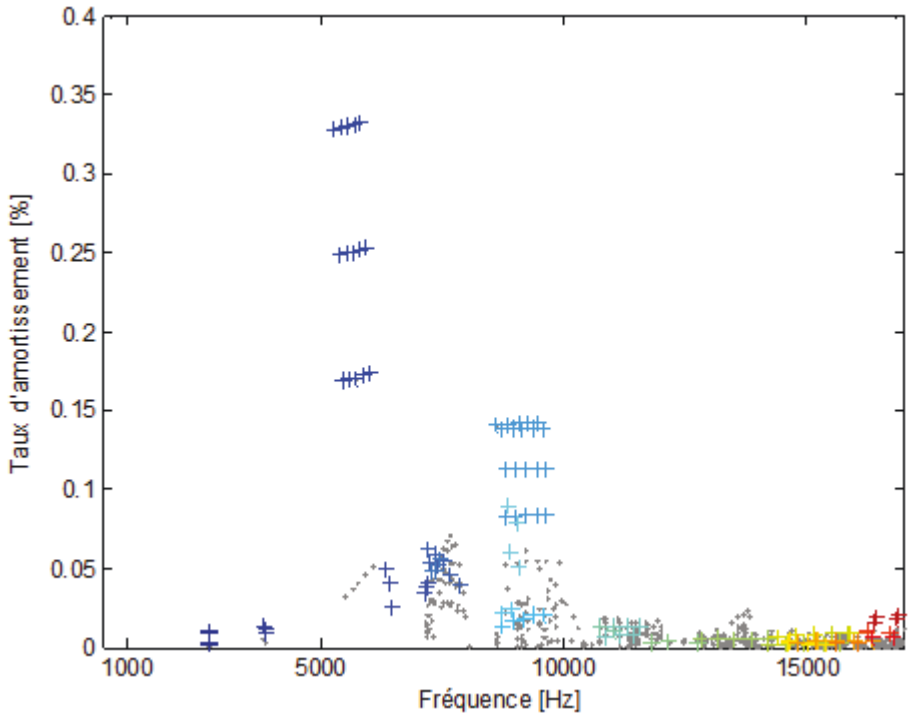


FIGURE 2-36 : Graphe d'instabilité pour les 25 configurations. En gris, tous les modes instables et en couleurs, les modes instables groupés par famille

Le TABLEAU 2-4 précise, pour chaque groupe constitué, le nombre de modes constituant le groupe, les bornes des fréquences et des taux d'amortissement ainsi que les valeurs de référence et enfin les dispersions relatives. Tous les modes instables de référence non appairés avec un autre mode de la base ne sont pas considérés en tant que groupe. En examinant le TABLEAU 2-4, on constate que le nombre de modes constituant un groupe est très hétérogène et assez fréquemment limité à 2 ou 3 modes. Il est alors difficilement concevable de comparer les dispersions relatives de tous les groupes. Pour améliorer la confiance sur l'analyse, on propose de retenir uniquement les groupes comportant un nombre relativement conséquent de modes instables. Compte tenu des valeurs obtenues, le seuil est fixé à 15 modes. Ce seuil représente un nombre d'éléments dans un groupe correspondant à

60% des 25 configurations. Les deux groupes concernés sont surlignés en gras dans le TABLEAU 2-4.

TABLEAU 2-4 : Résultat de l'agrégation des modes instables des 25 configurations. Les lignes en gras correspondent aux groupes dont le nombre d'éléments est supérieur ou égal à 15

	Fréquences instables [Hz]				Amortissements			
Nb	**min**	**réf**	**max**	**Dispersion relative**	**min**	**réf**	**max**	**Dispersion relative**
7	2680.7	2680.7	2691.0	0.38%	0.23%	0.88%	1.02%	89.63%
3	3843.2	3843.2	3850.3	0.18%	0.83%	1.32%	1.32%	37.15%
15	**5274.9**	**5274.9**	**5997.4**	**13.70%**	**16.88%**	**32.76%**	**33.32%**	**50.20%**
3	6325.8	6325.8	6461.4	2.14%	2.47%	5.02%	5.02%	50.81%
3	7144.6	7144.6	7220.0	1.06%	3.47%	3.47%	4.03%	16.19%
7	7197.5	7197.5	7838.8	8.91%	3.90%	6.21%	6.21%	37.12%
3	7295.9	7295.9	7419.4	1.69%	4.81%	4.91%	5.60%	16.01%
20	**8633.8**	**8633.8**	**9643.6**	**11.70%**	**8.25%**	**14.06%**	**14.21%**	**42.42%**
5	8722.6	8722.6	9599.0	10.05%	1.36%	1.36%	2.08%	52.77%
2	8726.0	8726.0	8932.1	2.36%	2.19%	2.19%	2.37%	8.19%
4	8841.6	8841.6	9055.4	2.42%	5.06%	8.99%	8.99%	43.68%
7	10759.0	10759.0	11591.0	7.73%	0.70%	1.40%	1.40%	50.08%
2	10760.0	10760.0	11043.0	2.63%	1.03%	1.28%	1.28%	20.08%
3	11823.0	11823.0	12763.0	7.95%	0.34%	0.34%	0.43%	26.19%
5	12844.0	12844.0	14195.0	10.52%	0.50%	0.57%	0.57%	10.97%
5	14208.0	14208.0	15688.0	10.42%	0.21%	0.22%	0.31%	43.81%
5	14386.0	14386.0	15878.0	10.37%	0.63%	0.63%	0.86%	36.61%
4	14388.0	14388.0	15899.0	10.50%	0.66%	0.66%	0.87%	32.13%
2	14641.0	14641.0	15031.0	2.66%	0.19%	0.33%	0.33%	42.02%
3	14645.0	14645.0	15423.0	5.31%	0.23%	0.37%	0.37%	38.16%
5	14805.0	14805.0	16362.0	10.52%	0.34%	0.34%	0.43%	25.87%
5	14806.0	14806.0	16362.0	10.51%	0.34%	0.34%	0.42%	20.80%
2	15631.0	15631.0	16055.0	2.71%	0.26%	0.26%	0.35%	32.67%
2	16249.0	16249.0	16699.0	2.77%	0.88%	0.93%	0.93%	4.96%
2	16254.0	16254.0	16700.0	2.74%	0.89%	0.97%	0.97%	8.21%
2	16354.0	16354.0	16797.0	2.71%	0.62%	0.62%	0.66%	5.86%
2	16357.0	16357.0	16797.0	2.69%	0.68%	0.68%	0.68%	0.13%
4	16425.0	16446.0	16903.0	2.91%	1.58%	1.91%	2.09%	26.89%
4	16427.0	16449.0	16903.0	2.89%	1.57%	1.91%	2.10%	27.82%

Les deux groupes qui ressortent de l'analyse correspondent à des fréquences de 5200 Hz et 8600 Hz. Pour ces deux groupes, le deuxième présente les dispersions relatives les plus faibles et peut donc être sélectionné comme étant le mode le plus instable. Si l'on rapproche ce résultat de celui obtenu lors des tests exposés au chapitre 1 et synthétisé dans le TABLEAU 2-5, la correspondance n'est pas parfaite mais on constate une assez bonne adéquation des valeurs de fréquences incriminées compte tenu du modèle de frein utilisé. Les deux fréquences relevées précédemment sont à comparer avec les fréquences correspondant aux niveaux acoustiques les plus élevés et indiquées en gras du TABLEAU 2-5.

Ce paragraphe a présenté une méthode d'objectivation de données lorsque l'on souhaite étudier la stabilité d'un système en présence de variabilité par une approche fréquentielle. Les variabilités considérées peuvent être de nature fonctionnelle (même si elles

n'ont pas d'effet dans ce cas particulier) ou correspondre à des imprécisions d'origines diverses, inhérentes aux processus de fabrication. On propose de voir cet ajout d'information comme un enrichissement du paramétrage du problème permettant d'améliorer les prédictions. En effet, l'analyse fréquentielle jugée souvent peu discriminante est ici améliorée en évaluant la robustesse des modes instables. Lorsque le nombre de composants constitutifs d'un modèle de frein est plus important, la procédure proposée peut être complétée par une évaluation des énergies modales relatives à chaque composant de manière à faciliter l'analyse des résultats par la sélection des modes où la participation du disque et des plaquettes est prépondérante [HEU12b].

TABLEAU 2-5 : Résultat de l'agrégation des modes instables des 25 configurations. Les lignes en gras correspondent aux groupes dont le nombre d'éléments est supérieur ou égal à 15

Frein droit		Frein gauche	
Fréquence [Hz]	**Niveau [dB]**	**Fréquence [Hz]**	**Niveau [dB]**
2400	95	2400	95
		4800	90
6500	**108**	**6500**	**105**
7800	**100**	**7000**	**98**
13000	83	13000	83
14600	98	14600	95
15500	85	16000	92

4.3. Résultats de l'analyse temporelle

Contrairement à l'analyse fréquentielle, l'analyse temporelle permet de considérer tous les points de fonctionnement du plan d'expériences. Les résultats étudiés sont donc relatifs aux 125 configurations du plan d'expériences. Rappelons que chaque simulation est réalisée conformément aux indications données dans le paragraphe 3, c'est-à-dire une mise en rotation du disque pour l'une des trois vitesses, suivie d'un calcul en réponse transitoire sur 20 millisecondes avec mise en pression au niveau des plaquettes parmi les trois valeurs imposées du plan d'expériences. Pour assurer la convergence des calculs, le pas d'intégration est fixé à 1.10^{-5}s. Notons que, sur ce modèle simplifié, la quantité d'informations à manipuler et à traiter représente quand même 53 Go de données correspondant aux 3 530 625 réponses

calculées. Ces ordres de grandeur montrent clairement qu'il est essentiel de cibler les critères qui vont objectiver la totalité des informations pour émettre un jugement sur le comportement du système. Ce jugement pourra ensuite être utilisé dans une procédure d'optimisation. Au deuxième paragraphe, nous avons exposé et évalué différents critères. Nous avons retenu la somme des efforts normaux de la zone de contact et le spectre associé. Il faut bien dire qu'il s'est avéré difficile d'exploiter directement toutes ces quantités dans le domaine temporel. C'est donc leurs représentations dans le domaine fréquentiel qui ont été analysée. La FIGURE 2-37 montre les spectres des pressions normales obtenues pour les 125 configurations du plan d'expériences, limités à 17kHz comme dans les études expérimentale et numérique précédentes.

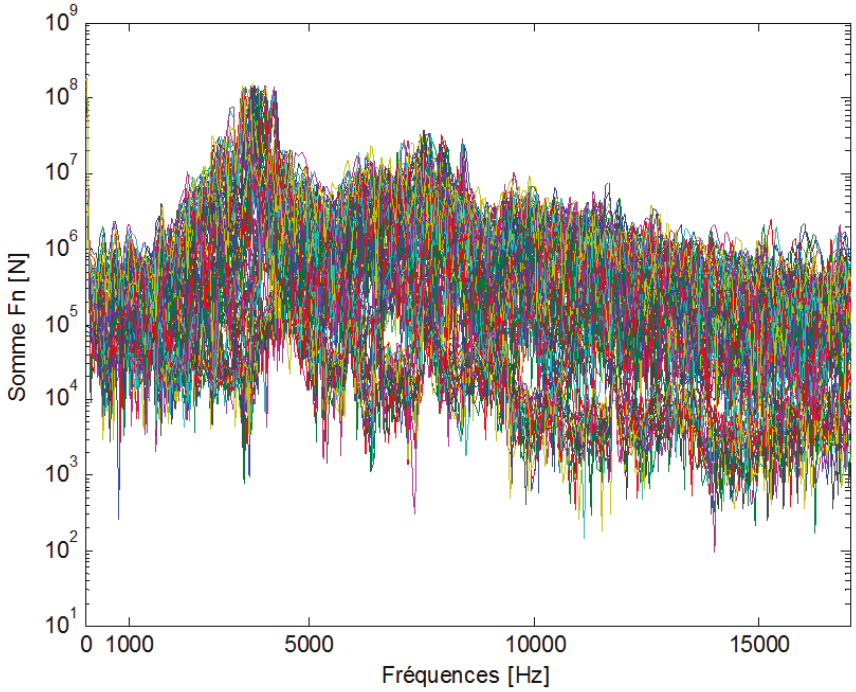


FIGURE 2-37 : Spectres des efforts normaux du plan d'expériences avec une échelle log

Le choix d'une échelle logarithmique pour le graphe de la FIGURE 2-37 montre encore la variabilité du comportement du système, bien plus que dans le cas de l'analyse fréquentielle précédente. Ce graphe montre également qu'une notion de courbe enveloppe n'est pas dénuée de sens et encore moins d'intérêt si elle peut être obtenue plus rapidement. En effet, il est encore possible de repérer des zones fréquentielles critiques. Le choix de l'échelle linéaire d'amplitude du graphe de la FIGURE 2-38b met encore mieux en relief cet aspect. On distingue en effet trois zones de fréquences émergentes autour de 3750Hz, 6400Hz et 7650Hz. Sur la FIGURE 2-38a, l'ensemble des spectres est comparé au spectre correspondant à la solution nominale d'un calcul qui aurait été abordé en approche

déterministe. Dans ce cas, les fréquences identifiées sont respectivement de 3698 Hz, 7396 Hz et 7946 Hz et peuvent être associées respectivement à la première et troisième zone de l'étude non déterministe. Pour la configuration nominale, il n'apparaît aucune fréquence particulière appartenant à la deuxième zone. Ce constat conforte l'intérêt d'enrichir le paramétrage du modèle pour déterminer une plage de comportements et donc évaluer la robustesse d'une conception.

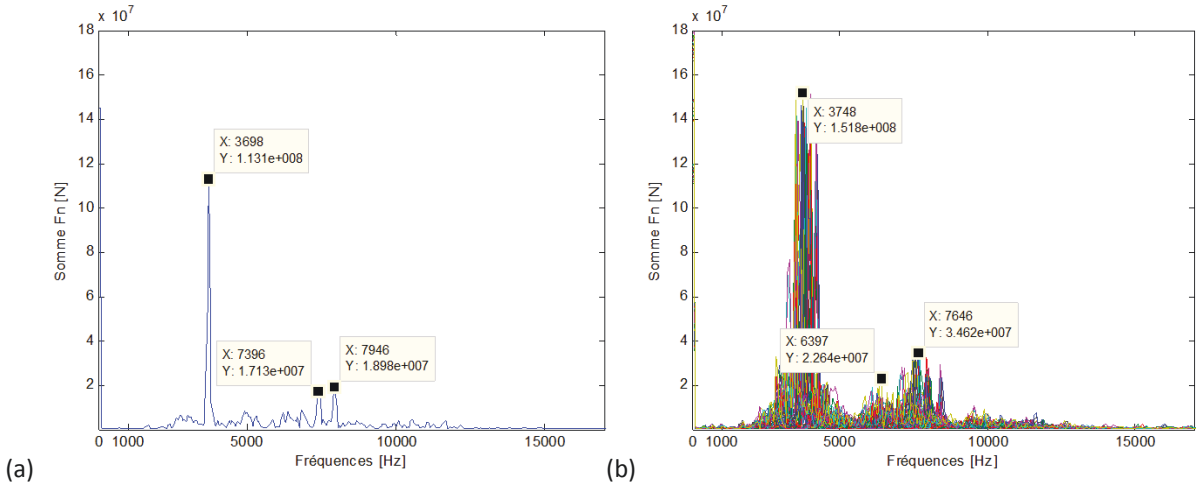


FIGURE 2-38 : Spectres des efforts normaux nominaux (a) et du plan d'expériences avec une échelle linéaire (b)

La FIGURE 2-39 présente une superposition des plans d'expériences relatifs au coefficient de frottement et au module de Young pour les cinq points de fonctionnement définis par un couple pression-vitesse. Si l'on se focalise sur les pics de fréquence, on ne constate pas de différence significative sur chacune des combinaisons « coefficient de frottement- module de Young ». Rappelons que ce plan d'expériences a été réalisé dans une zone de fonctionnement jugée crissante. La conclusion qui s'impose ici est donc que cette situation est stable dans la zone de fonctionnement et laisse envisager une certaine difficulté à corriger le comportement du système. Un examen global des 25 graphes fait apparaître un pic constant autour de 4000 Hz. Un examen plus approfondi montre une évolution des fréquences avec l'évolution du module de Young et une émergence de deux autres pics pour des valeurs du coefficient de frottement de 0.4 et 0.5. On notera que ces deux pics disparaissent pour une valeur du coefficient de frottement de 0.6. C'est un résultat qui a déjà été observé lors des essais exposés au chapitre 1. Les bandes de fréquences correspondant aux trois pics sont respectivement [3500-4450]Hz, [7450-8400]Hz et [11990-12590]Hz. On remarquera que cette dernière bande de fréquences est moins marquée que les deux premières et n'apparaît pas dans la lecture globale des résultats exposée au début de ce paragraphe.

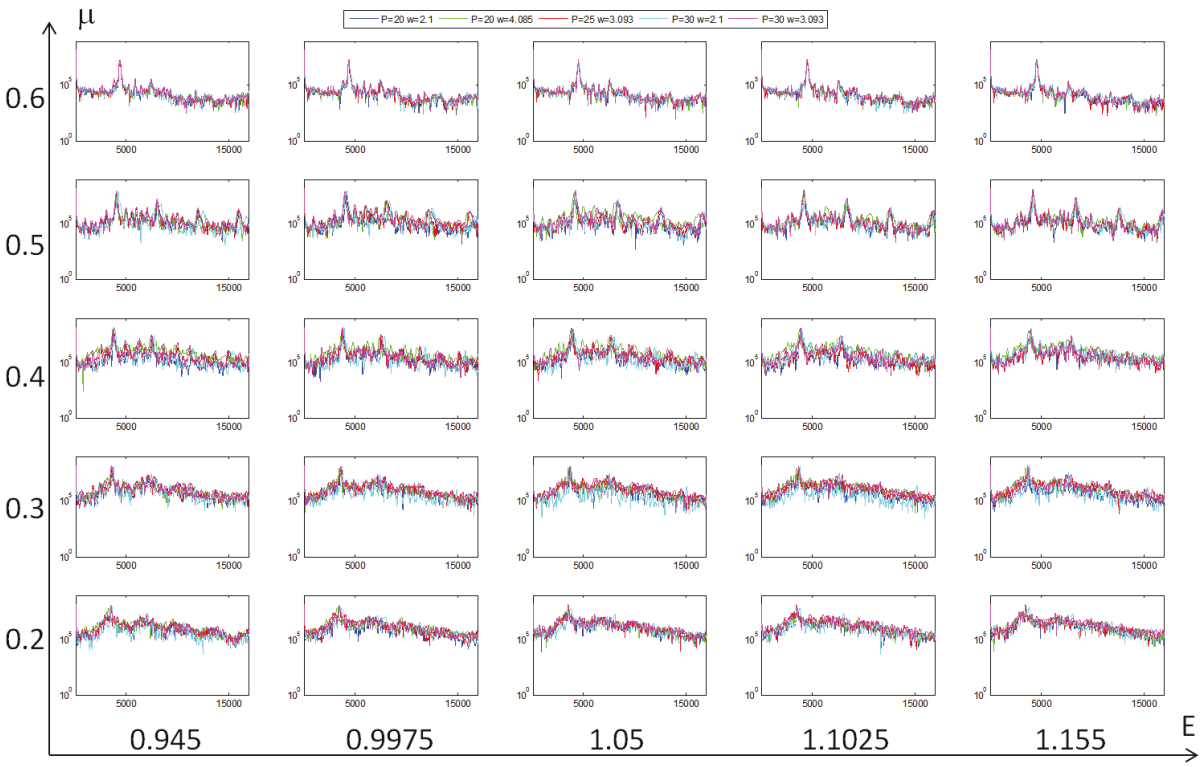


FIGURE 2-39 : Spectres des efforts normaux du plan d'expériences – points de fonctionnement superposés

Le TABLEAU 2-6 synthétise l'ensemble des fréquences instables significatives observées lors des essais et des analyses fréquentielle et temporelle. Les valeurs en gras correspondent aux niveaux acoustiques les plus élevés pour les données expérimentales et, dans le cas de l'analyse fréquentielle à l'instabilité la plus robuste donc la plus susceptible d'apparaître.

TABLEAU 2-6 : Synthèse des fréquences crissantes expérimentales, extraites des FIGURES 1-11 et 1-12, et numériques

Expérience Frein droit		Expérience Frein gauche		Analyse fréquentielle	Analyse Temporelle
Fréquence [Hz]	**Niveau [dB]**	**Fréquence [Hz]**	**Niveau [db]**	**Fréquence [Hz]**	**Fréquence [Hz]**
2400	95	2400	95		3750
		4800	90	5300	
6500	***108***	***6500***	***105***		6400
7800	***100***	***7000***	***98***	***8630***	7650
13000	83	13000	83		12300
14600	98	14600	95		
15500	85	16000	92		

Si l'on compare les valeurs obtenues avec une approche globale par l'analyse temporelle, on constate que les ordres de grandeur des fréquences sont cohérents avec les analyses précédentes. Néanmoins, l'approche globale ne permet pas de sélectionner une fréquence particulière car un outil de repérage automatique manque cruellement pour une analyse automatisée de l'ensemble des spectres étudiés. Dans un premier temps, il faudrait, en effet, pouvoir repérer facilement toutes les fréquences correspondant aux pics significatifs dans chaque relevé. Dans un second temps, une démarche similaire à celle qui a été proposée pour l'analyse fréquentielle pourrait être réalisée en exploitant les déformées opérationnelles, résultant d'une transformée de Fourier des réponses en déplacement, associées à ces fréquences. Il serait alors possible de constituer des groupes de comportements instables constitués de déformées opérationnelles similaires et d'évaluer les dispersions en fréquence et en amplitude pour sélectionner le groupe le plus robuste.

5. Conclusion

Dans un premier temps, ce chapitre a permis de retracer l'évolution des modèles numériques, utilisés ces vingt dernières années, concernant les systèmes de freinage, de rappeler les deux catégories de méthode de résolution, de nature fréquentielle et temporelle, pour étudier leur instabilité et enfin de lister les critères de détection couramment utilisés dans la littérature. Fort de ces constats, un modèle numérique disque - plaquettes a été retenu et

utilisé, d'une part, pour tester les techniques de déclenchement de l'instabilité par variation du coefficient de frottement et de la pression appliquée pour l'étude temporelle. D'autre part, les critères les plus couramment utilisés, pour détecter les instabilités en analyse temporelle, ont été testés pour deux configurations, identifiées comme stable et instable expérimentalement, ce qui a permis d'évaluer leur capacité à être discriminant.

Ce chapitre a été dédié, dans un second temps, à la gestion de variabilités au sein des méthodes de résolution d'instabilités. Pour y parvenir, des plans d'expériences numériques ont été effectués en se focalisant sur les paramètres de fonctionnement, supposés contrôlés dans le système comme la pression et la vitesse, ainsi que sur des paramètres, dont on subit les variations, tels le module d'Young et le coefficient de frottement. Que ce soit en analyse fréquentielle ou temporelle, on observe toujours une assez forte variabilité des quantités observées. Ce chapitre pose la question d'une amélioration des simulations par l'enrichissement du paramétrage. En partant du principe que de telles simulations, à grande échelle, seraient possibles avec les outils actuels, encore faut-il disposer des outils d'analyse adaptés à la masse d'informations générée.

Pour l'analyse fréquentielle, nous avons proposé de constituer des groupes ou classe d'instabilité en rapprochant les modes propres instables de forme identique. Une telle démarche est également réalisable dans le cas de l'analyse temporelle à condition de substituer efficacement la tâche fastidieuse de relevé des fréquences caractéristiques dans les spectres des efforts de contact cumulés. De l'analyse temporelle, on pourrait, en plus, tirer profit des niveaux de réponses du système. L'objectif de l'approche proposée est d'évaluer, pour chaque classe, la robustesse des quantités d'analyse propres à chaque étude. L'hypothèse sous-jacente est que cette stabilité, dans l'instabilité, doit garantir l'apparition du phénomène. C'est donc sur ce cas que le concepteur doit focaliser son attention. Même s'ils ne permettent pas d'affirmer que cette hypothèse soit complètement vérifiée, les résultats obtenus sont encourageants et cohérents avec ceux obtenus expérimentalement.

6. Références bibliographiques

[ABA11a] ABAQUS/CAE V6.11., DASSAULT SYSTEMES. (2011). Documentation Collection, Abaqus Examples Problems Manual 2.2.4 Brake squeal analysis.

[ABU05] ABU BAKAR A.R. (2005). Modelling and Simulation of Disc Brake Contact Analysis and Squeal. Thèse de Doctorat en Mécanique, Université de Liverpool, Royaume-Uni.

[AKA00] AKAY A., WICKERT J., XU Z. (2000). Investigation of mode lock-in and friction interface, Final Report, Department of mechanical engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.

[AKA09] AKAY A., GIANNINI O., MASSI F., SESTIERI A. (2009). Disc brake squeal characterization through simplified test rigs. Mechanical Systems and Signal Processing 23, 2590-2607.

[BAI05] BAILLET L., LINCK V., D'ERRICO S., LAULAGNET B., BERTHIER Y. (2005). Finite Element Simulation of Dynamic Instabilities in Frictional Sliding Contact. Journal of tribology. Vol. 127.

[BAI05a] BAILLET L., LINCK V., D'ERRICO S., LAULAGNET B., BERTHIER Y. (2005). Finite Element Simulation of Dynamic Instabilities in Frictional Sliding Contact. Journal of tribology. Vol. 127.

[BAI05b] BAILLET L., D'ERRICO S., BERTHIER Y. (2005). Influence of sliding contact local dynamics on macroscopic friction coefficient variation. Revue Européenne des Eléments Finis 14, 305-321.

[BAJ04] BAJER A., BELSKY V., KUNG S.W. (2004). The Influence of Friction-Induced Damping and Nonlinear Effects on Brake Squeal Analysis. 22nd Annual Brake Colloquium & Exhibition. Anaheim, California.

[CAR02] CARIDI J.P. (2002). Caractérisation des paramètres de frottement à l'origine de phénomènes vibroacoustiques. Application aux bruits de crissement des systèmes de freinage. Thèse de Doctorat en Mécanique, Université de Valenciennes.

[CHE02] CHERN Y., CHEN F., SWAYZE J. (2002). Nonlinear Brake Squeal Analysis. SAE Paper 2002-01-3138.

[CHE09] CHEVILLOT F., SINOU J-J., HARDOUIN N. (2009). Nonlinear transient vibrations and coexistences of multi-instabilities induced by friction in an aircraft braking system. Journal of Sound and Vibration 328, 555-574.

[COU09] COUDEYRAS N. (2009). Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale de Lyon.

[COU09a] COUDEYRAS N., SINOU J.-J., NACIVET S. (2009). A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The Constrained Harmonic Balance Method, with application to disc brake squeal. Journal of Sound and Vibration 319, 1175-1199.

[COU09b] COUDEYRAS N., SINOU J.-J., NACIVET S. (2009). Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal. Journal of Sound and Vibration.

[CUL09] CULLA A., MASSI F. (2009). Uncertainty model for contact instability prediction. Acoustical Society of America. DOI : 10.1121/1.3183376, 1111-1119.

[DAI08] DAI Y., LIM C.T. (2008). Suppression of brake squeal noise applying finite element brake and pad model enhanced by spectral-based assurance criteria. Applied Acoustics 69, 169-214.

[DIS06] DISSON J.-Y., FAILLET P., FICHOT D. (2006). Modélisation et aide à la conception de frein ferroviaire « zéro crissement » à l'usage des industriels. 5ème Journée Européenne du Freinage, JEF 2006, Lille, France.

[DRO99] DROBECQ V. (1999). Modélisation de systèmes de freinage ferroviaires avec prise en compte du phénomène de crissement. Application au système de freinage du métro parisien MP59. Thèse de Doctorat en Mécanique, Université de Valenciennes.

[DUB10] DUBOC M., MAGNIER V., BRUNEL J.F., DUFRENOY P., REJDYCH G., CHANCELLIER T. (2010). Influence of contact conditions and pad geometry on disc brake squeal noise. 6ème Journée Européenne du Freinage, JEF 2010, Lille, France.

[FRI07] FRITZ G., SINOU J-J., DUFFAL J-M., JEZEQUEL L. (2007). Investigation of the relationship between damping and mode-coupling patterns in case of brake squeal. Journal of Sound and Vibration 307, 591-609.

[GAU06] GAUGER U., HANSS M., GAUL L. (2006). On the Inclusion of Uncertain Parameters in Brake Squeal Analysis. Conf. IMAC XXIV.

[GIA06] GIANNINI O., MASSI F. (2006). Uncertain finite element model for the brake squeal prediction. IMAC-XXIV : Conference & Exposition on Structural Dynamics.

[GRA07] GRANGE P, CLAIR D., FOGLI M. (2007). Caractérisation spectrale du crissement de freins à disques. 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, France.

[GRA09] GRANGE P., CLAIR D., BAILLET L., FOGLI M. (2009). Brake squeal analysis by coupling spectral linearization and modal identification methods. Mechanical Systems and Signal Processing 23, 2575-2589.

[HEU11] HEUSSAFF A., TISON T., WATREMEZ M., DUBAR L., FERNANDES NUNES R. (2011). Variabilité du contact dans l'étude du crissement des freins automobiles. 10ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France.

[HEU12a] HEUSSAFF A., DUBAR L., TISON T., WATREMEZ M., NUNES R.F. (2012). A methodology for the modeling of the variability of brake lining surfaces. Wear 289, 145-159.

[HEU12b] HEUSSAFF A. (2012). Analyse expérimentale et numérique de l'influence de paramètres intrinsèques et extrinsèques aux garnitures sur le comportement en frottement et en crissement d'un système de freinage automobile. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[HOF02] HOFFMANN N., FISCHER M., ALLGAIER R., GAUL L. (2002). A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. Mechanics Research Communications 29, 197-205.

[HOP42] HOPF H. (1942). "Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe". Comment. Math. Helv. 14, p. 257-309.

[HU97] HU Y., NAGY L. I. (1997). Brake squeal analysis using nonlinear transient finite element method. SAE Paper 971510.

[LIN05] LINCK V. (2005). Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant. Mise en évidence d'instabilités locales de contact -Conséquences tribologiques- Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[LIU07] LIU P., ZHENG H., CAI C., WANG Y.Y., LU C., ANG K.H., LIU G.R. (2007). Analysis of disc brake squeal using the complex eigenvalue method. Applied Acoustics 68, 603-615.

[LOR07] LORANG X. (2007). Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV. Thèse de doctorat en Mécanique, Ecole Polytechnique.

[MAS07] MASSI F., BAILLET L., GIANNINI O., SESTIERI A. (2007). Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches. Mechanical Systems and Signal Processing 21, 2374-2393.

[MAS09] MASSI F., BAILLET L., CULLA A. (2009). Structural modifications for squeal noise reduction : numerical and experimental validation. International Journal of Vehicle Design 51, 168-189.

[MEZ07] MEZIANE A. (2007). Apport des analyses numériques temporelles et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact -Validation expérimentale-. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[NAG94] NAGY L. I., CHENG J., HU Y. (1994). A new method development to predict squeal occurrence. SAE Paper 942258.

[OBE10] OBERST S., LAI J.C.S. (2010). Uncertainty modelling for detecting friction-induced pad-mode instabilities in disc brake squeal. International Congress on Acoustics, 23-27 août 2010 à Sydney, Australie.

[OBE11] OBERST S., LAI J.C.S. (2011). Statistical analysis of brake squeal noise. Journal of Sound and Vibration. doi :10.1016/j.jsv.2010.12.021.

[OST09] ÖSTERLE W., DÖRFEL I., PRIETZEL C., ROOCH H., CRISTOL-BULTHE A.-L., DEGALLAIX G., DESPLANQUES Y. (2009). A comprehensive microscopic study oh third body formation at the interface between a brake pad and brake disc during the final stage of a pin-on-disc test. Wear 267, 781-788.

[OUR08] OURA Y., KURITA Y., MATSUMURA Y., MISHIZAWA Y. (2008). Influence of distributed stiffness in contact surface on disc brake squeal. SAE, 2008, (2008-01-2584).

[OUY98] OUYANG H., MOTTERSHEAD J.E., CARTMELL M.P., FRISWELL M.I. (1998). Friction-induced parametric resonances in discs : effect of a negative friction-velocity relationship. Journal of Sound and Vibration. Vol. 209, No. 2. 251-264.

[REN11] RENAUD F. (2011). Etude de l'incidence des comportements dissipatifs dans les instabilitéss vibratoires des systems de freinage. Thèse de Doctorat en Science pour l'ingénieur, Ecole Centrale Paris.

[SHI02] SHIN K., BRENNAN M. J., OH J-E., HARRIS C.J. (2002). Analysis of disc brake noise using a two degree-of-freedom model. Journal of Sound and Vibration 254, 837-848.

[SIN02] SINOU J.J. (2002). Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage. Thèse de doctorat en Mécanique, Ecole Centrale de Lyon.

[SOD08] SÖDERBERG A., ANDERSON S. (2008). Simulation of wear and contact pressure distribution at the pad-to-rotor interface in a disc brake using general purpose finite element analysis software. Wear, doi : 10.1016/j.wear.2009.09.004.

[TRI08] TRICHÊS JUNIOR M., GERGES S.N.Y., JORDAN R. (2008). Analysis of brake squeal noise using the finite element method : A parametric study. Applied Acoustics 69, 147-162.

[VER08] VERMOT DES ROCHES G., BALMES E., PASQUET T., LEMAIRE R. (2008). Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models. Conference ISMA, Leuven, Belgium.

[VER11] VERMOT DES ROCHES G. (2011). Frequency and time simulation of squeal instabilities – Application to the design of industrial automotive brakes. Thèse de doctorat, Ecole Centrale des Arts et Manufactures.

Partie 2

Développements numériques pour la prise en compte des imprécisions en instabilité vibratoire

Chapitre 3 :

Résolution du problème de contact mécanique frottant – Méthode basée sur un régulateur flou

1. Introduction 94

2. Modélisation du contact frottant 95

2.1. Formulation continue 95
2.2. Formulation variationnelle 98
2.3. Discrétisation par éléments finis 98

3. Méthodes numériques pour la gestion du contact 100

3.1. Méthodes usuelles 100
3.2. Développements récents 102
3.3. Mise en donnée du problème dans un contexte de tirages multiples 103

4. Définition d'un régulateur flou 104

4.1. La théorie des sous-ensembles flous 104
4.2. La logique floue et son utilisation en ingénierie 106
4.3. Composants constitutifs d'un régulateur flou 108
4.4. Gestion du contact par régulateur flou 112

5. Applications numériques 117

5.1. Modèle bi-poutres (éléments finis 1D) 117
5.2. Modèle bi-poutres (éléments finis 2D) 128
5.3. Limitations de la méthode FL2C 132

6. Conclusion 135

7. Références bibliographiques 136

1. Introduction

Le contact mécanique entre corps solides est un problème complexe à gérer qui engendre les non-linéarités les plus difficiles à prendre en compte. La prédiction des effets du contact avec frottement est un enjeu majeur pour la communauté scientifique. Leur utilisation est en effet de plus en plus fréquente dans les modèles numériques, dont la complexité est croissante avec l'évolution de la puissance informatique. Par exemple, le modèle numérique du système de freinage, développé par Heussaf [HEU11] et présenté dans le chapitre 2, comporte plusieurs centaines de contacts.

Les verrous scientifiques rencontrés dans ces problèmes sont liés, d'une part, à la résolution numérique, puisqu'il n'existe pas de méthode universelle pour la gestion du contact, qui est fortement liée au problème traité. Toutefois, la robustesse des algorithmes ne cesse d'être améliorée en considérant de plus en plus de situations d'études différentes (prise en compte des aspérités de contact, définition des lois particulières de frottement) mais ceux-ci restent coûteux en temps de calcul. D'autre part, la caractérisation avec précision des paramètres de la zone de contact n'est pas sans problème. Comme nous avons pu le voir dans la première partie de ce mémoire, les paramètres tels que le coefficient de frottement, les propriétés matérielles et les caractéristiques géométriques sont des données variables. Leurs variations vont amener des répercussions, lors de la résolution, sur la réaction normale de contact, la force de frottement ainsi que les déplacements entre solides. Afin de proposer des conceptions de plus en plus robustes, la tendance actuelle en industrie consiste à multiplier les simulations numériques, en menant des études de sensibilité, des plans d'expériences, des optimisations voire des études non déterministes. Les temps de calcul prohibitifs, liés à la gestion du contact, limitent toutefois l'utilisation de ce type d'étude en phase de dimensionnement. La question est de savoir quelle stratégie adopter pour la gestion du contact afin de rendre ces études avancées, basées sur des tirages multiples, accessibles au plus tôt dans la phase de conception.

Dans ce chapitre, on propose de traiter le problème de contact avec le point de vue de l'automaticien en le gérant comme un problème de régulation. Cette stratégie, utilisant un régulateur flou, permettra ensuite de mettre en place une technique de réduction de modèle dans le but de maîtriser les temps de calcul. Après avoir rappelé la modélisation du contact frottant et dressé un état de l'art concernant l'utilisation de la logique floue et des régulateurs flous, on développe une stratégie de résolution du contact utilisable dans un contexte de

tirages multiples. Des applications numériques dans le cadre d'une analyse statique montrent la faisabilité de la stratégie employée. Les résultats statiques obtenus seront ensuite utilisés dans le chapitre 4 et permettront de définir la position d'équilibre, point de départ à l'étude de stabilité.

2. Modélisation du contact frottant

Avant d'introduire l'analyse par éléments finis en mécanique non-linéaire, on propose de rappeler les concepts fondamentaux d'un problème de contact unilatéral frottant d'un solide élastique sur un solide rigide, en hypothèse de petites perturbations, dans le cadre de la dynamique des structures.

2.1. Formulation continue

On considère un solide élastique (FIGURE 3-1), représenté par un domaine Ω, de frontière Γ et soumis à des forces surfaciques F_d sur une surface de partition Γ_F, à un champ de déplacement U_d sur une surface de partition Γ_U ainsi que des forces de volume f_v. La surface de partition Γ_C, quant à elle, est candidate au contact. On note r_c les forces surfaciques de contact.

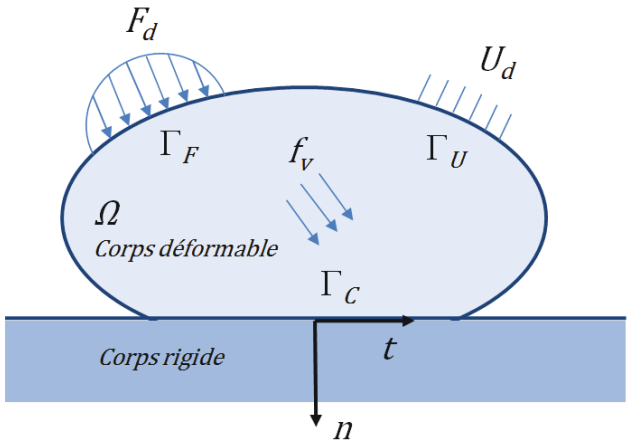


FIGURE 3-1 : Contact unilatéral frottant d'un solide élastique sur un solide rigide

Le problème de contact consiste à calculer les déplacements u et le tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma(u)$ qui vérifient les conditions du système d'équations suivant :

$$div\,\sigma(u) + f_v = \rho\ddot{u} \text{ dans } \Omega \qquad \text{Eq. 3-1}$$

$$\sigma(u) = \mathcal{D} : \varepsilon(u) \text{ dans } \Omega \qquad \text{Eq. 3-2}$$

$\sigma(u)n = F_d$ sur Γ_F Eq. 3-3

$u = U_d$ sur Γ_U Eq. 3-4

$\sigma(u)n = r_c$ sur Γ_C Eq. 3-5

avec $\mathcal{D}$ le tenseur de Hooke, ρ la densité du matériau, $\ddot{u}$ le vecteur accélération, ε le tenseur linéarisé des déformations et n la normale sortante à Γ. Les Equations 3-1 à 3-5 représentent respectivement l'équation d'équilibre du principe fondamental de la dynamique, la relation de comportement, les conditions limites en effort (condition de Neumann) et en déplacement (condition de Dirichlet) et enfin les conditions aux limites de contact.

Afin d'écrire les relations du contact frottant, on extrait les composantes normales et tangentielles du déplacement et de la réaction de contact

$u_n = u\,.\,n$ et $u_t = u - u_n\,n$ Eq. 3-6

$r_n = r_c\,.\,n$ et $r_t = r_c - r_n\,n$ Eq. 3-7

avec u_n le déplacement normal, u_t le déplacement tangentiel, r_n la force surfacique normale de contact et r_t la force surfacique tangentielle de contact.

Les relations de contact unilatéral (ou relations de Signorini [SIG59]) traduisent le fait qu'il n'y a pas interpénétration (Equation 3-8) et que la surface de contact Γ_C ne subit pas des contraintes de compression (Equation 3-9). L'Equation 3-10 est une relation de complémentarité à la surface de contact afin que les composants soient soit en contact, soit décollés.

$u_n \leq 0$ Eq. 3-8

$r_n \leq 0$ Eq. 3-9

$u_n r_n = 0$ Eq. 3-10

Concernant le modèle de frottement, on dénombre, dans la littérature, de nombreuses lois analytiques de frottement, largement détaillées par Raous dans [RAO99a], de complexité plus ou moins importante (par exemple avec la prise en compte des aspérités à l'interface). Le choix du modèle à utiliser pour une étude numérique va donc dépendre du problème à résoudre et des besoins de l'utilisateur. Toutefois, on peut citer :

- la loi de frottement de Coulomb, simple à mettre en œuvre, qui définit une proportionnalité entre la force normale et tangentielle ;

- la loi de frottement de Tresca dans laquelle un seuil en effort est défini lorsque les forces normales sont importantes ;
- la loi de frottement à coefficient de frottement variable où deux coefficients de frottement (statique et dynamique) sont définis en fonction du statut cinématique de contact ;
- la loi de frottement d'Oden et Martins [ODE85] qui intègre un modèle de déformation des aspérités suivant l'axe normal. Caridi [CAR02], dans ces études relatives au freinage, a utilisé ce modèle pour prendre en compte l'aire réelle de contact en fonction des aspérités et a défini une variable aléatoire associée à la hauteur des pics du profil.

Dans le cadre de notre étude, on choisit le modèle de Coulomb [MAR99, RAO99b]. Cette loi exprime que la réaction de contact reste dans le cône de Coulomb (FIGURE 3-2). Lorsque la réaction est sur le cône, la vitesse de glissement V_t s'oppose à la réaction tangentielle tandis que lorsque la réaction est à l'intérieur, la vitesse de glissement est nulle.

Les équations, associées au frottement, sont les suivantes :

si $u_n = 0$ et $\|r_n\| < 0$ (condition de contact) alors : $\|r_t\| \leq \mu\|r_n\|$ Eq. 3-11

De plus, deux configurations sont possibles :

$\|r_t\| = \mu\|r_n\|$ avec $\lambda \geq 0, V_t = -\lambda\|r_t\|$ (glissement) Eq. 3-12

$\|r_t\| < \mu\|r_n\| \Rightarrow V_t = 0$ (adhérence) Eq. 3-13

μ est le coefficient de frottement de Coulomb tel que $0 \leq \mu \leq 1$, suivant la nature des matériaux et des états de surfaces des deux corps en contact et λ est un réel positif quelconque. Il y a adhérence au niveau du contact si la force de réaction du contact frottant se situe à l'intérieur du cône. Si la force de réaction est située sur les bords du cône, il y a glissement.

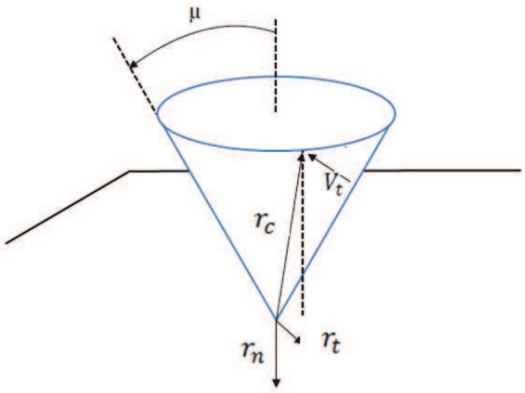


FIGURE 3-2 : Cône de Coulomb

La formulation, précédemment présentée, du problème de mécanique des milieux continus, est dite formulation forte et ne peut être résolue analytiquement pour des systèmes complexes et requiert l'utilisation d'une formulation variationnelle.

2.2. Formulation variationnelle

La forme variationnelle, dite formulation faible, dérive directement du principe des puissances (ou travaux) virtuelles [DUV76, ODE85]. Pour ce faire, on introduit l'espace admissible $C = \{u \mid u = U_d \; sur \; \Gamma_U\}$ et l'espace $C_0 = \{u \in C \mid u = 0 \; sur \; \Gamma_U\}$. En multipliant l'Equation 3-1 par la vitesse virtuelle v^* puis en l'intégrant sur le domaine Ω, on obtient l'équation suivante :

$$\int_\Omega \sigma\,(u) : \varepsilon(v^*)\, d\Omega - \int_\Omega v^* . f_v \, d\Omega - \int_\Omega \rho \, v^* . \ddot{u} d\Omega - \int_{\Gamma_F} v^* . F_d d\Gamma - \int_{\Gamma_C} v^* . r_c d\Gamma = 0 \quad \text{Eq. 3-14}$$

avec $\varepsilon(v^*)$ le tenseur du taux de déformations virtuelles, $v^* \in C_0$ le vecteur des vitesses virtuelles. Le problème est donc de trouver u ∈ C et F_c vérifiant les Equations 3-8 à 3-14.

2.3. Discrétisation par éléments finis

Cette étape permet de passer d'un milieu continu à un milieu discrétisé, permettant ainsi de traiter le problème avec la méthode des éléments finis [ZIE94]. L'Equation 3-14 peut être résolue en utilisant la méthode de Ritz-Galerkin qui consiste à rechercher une solution approchée dans un sous-espace $C^h \in \mathbb{R}^n$ dans C_0. Cette étape consiste à discrétiser les différentes expressions virtuelles sur ce domaine matériel. Le domaine Ω est ainsi décomposé en sous-domaines Ω_e, appelés éléments finis, tel que :

$$\Omega = \bigcup_{elts_e} \Omega_j \quad \text{Eq. 3-15}$$

Pour un élément fini, les approximations nodales du champ de déplacements U, du champ de vitesses $\dot{U}$ et du champ d'accélérations $\ddot{U}$, s'écrivent en fonction des déplacements aux nœuds de l'élément e et des fonctions d'interpolation, par les relations suivantes :

$$u_j = \sum_k N^k u_j^k \quad \text{Eq. 3-16}$$

$$\dot{u}_j = \sum_k N^k \dot{u}_j^k \quad \text{Eq. 3-17}$$

$$\ddot{u}_j = \sum_k N^k \ddot{u}_j^k \quad \text{Eq. 3-18}$$

avec N^k les fonctions d'interpolation des déplacements u_j aux nœuds et u_j^k, $\dot{u}_j^k$, $\ddot{u}_j^k$ respectivement le déplacement, la vitesse et l'accélération du nœud k de l'élément Ω_j.

De même, les déformations sont évaluées en fonction de la matrice de déformation linéaire B^e qui dépend des opérateurs de dérivation, des fonctions d'interpolation et du déplacement :

$$\varepsilon^e = B^e u^e \quad \text{Eq. 3-19}$$

Les contraintes dans l'élément se définissent en fonction des déformations de l'élément et de la matrice de comportement matériel D^e :

$$\sigma^e = D^e \varepsilon^e \quad \text{Eq. 3-20}$$

Le problème variationnel (Equation 3-14) se réécrit donc pour les n_{elt} éléments par la formulation faible discrétisée valable pour tout déplacement virtuel :

$$\sum_{n_{elt}} \left(\delta u^{e^T} \int_{\Omega^e} \rho N^{e^T} N^e d\Omega^e\right) \ddot{u}^e + \sum_{n_{elt}} \left(\delta u^{e^T} \int_{\Omega^e} B^{e^T} D^e B^e d\Omega^e\right) u^e = \sum_{n_{elt}} \left(\delta u^{e^T} \int_{\Omega^e} N^{e^T} f_v^e d\Omega^e\right) + \sum_{n_{elt}} \left(\delta u^{e^T} \int_{\Gamma_F} N^{e^T} F_d^e d\Gamma^e\right) + \sum_{n_{elt}} \left(\delta u^{e^T} \int_{\Gamma_C} N^{e^T} r_c^e d\Gamma^e\right) \quad \text{Eq. 3-21}$$

L'Equation 3-21 fait alors intervenir des matrices et vecteurs caractéristiques tels que :

- la matrice de masse

$$M = \sum_{n_{elt}} \int_{\Omega^e} \rho N^{e^T} N^e d\Omega^e \quad \text{Eq. 3-22}$$

- la matrice de raideur

$$K = \sum_{n_{elt}} \int_{\Omega^e} B^{e^T} D^e B^e d\Omega^e \quad \text{Eq. 3-23}$$

- le vecteur des forces extérieures et de contact

$$F^{ext} = \sum_{n_{elt}} \int_{\Omega^e} N^{e^T} f_v^e d\Omega^e + \sum_{n_{elt}} \int_{\Gamma_F} N^{e^T} F_d^e d\Gamma^e$$

$$F_c = \sum_{n_{elt}} \int_{\Gamma_C} N^{e^T} r_c^e d\Gamma^e \quad \text{Eq. 3-24}$$

En ajoutant une contribution d'un amortissement visqueux, défini par une matrice C, l'Equation 3-21 se réécrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F^{ext} + F_c(U) \quad \text{Eq. 3-25}$$

$$F_c = F_n + F_t \quad \text{Eq. 3-26}$$

avec F^{ext} le vecteur des forces extérieures et F_c le vecteur des forces de contact que l'on peut décomposer en deux contributions, normales et tangentielles à la surface de contact, notées respectivement F_n et F_t.

Dans le cas d'une analyse statique, l'Equation 3-25 est simplifiée comme suit :

$$KU = F^{ext} + F_c(U) \quad \text{Eq. 3-27}$$

3. Méthodes numériques pour la gestion du contact

3.1. Méthodes usuelles

Dans les codes industriels de calcul par éléments finis en mécanique, on dispose généralement de quatre méthodes pour la gestion du contact, à savoir :

- la **méthode de pénalisation** [PER92], qui est une méthode dite de régularisation. La force de contact est définie comme le produit du déplacement par un coefficient de pénalisation, pour le contact normal avec ε_N et pour le contact tangentiel avec ε_T. Ceci permet d'éliminer les inconnues constituées par les forces de contact.

  $$\prod_C = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} (\varepsilon_N {u_n}^2 + \varepsilon_T {u_t}^2) d\Gamma \quad \text{Eq. 3-28}$$

  $$\delta \prod_C = \int_{\Gamma_C} (\varepsilon_N u_n \delta u_n + \varepsilon_T u_t \delta u_t) d\Gamma \quad \text{Eq. 3-29}$$

  L'écriture matricielle est :

  $$[K + K_k]U = F_d \quad \text{Eq. 3-30}$$

  avec K_k la matrice de rigidité associée aux contacts frottant actifs du modèle et F_d la force combinant les efforts extérieurs et de pénalisation.

Dans le cas du glissement, le terme lié au frottement est modifié et en considérant un frottement de Coulomb, l'expression s'écrit :

$$\delta \prod_C = \int_{\Gamma_C} (\varepsilon_N u_n \delta u_n + \mu \varepsilon_N u_t \delta u_t) d\Gamma \qquad \text{Eq. 3-31}$$

Ainsi les termes liés au frottement ne dépendent plus du déplacement tangentiel mais seulement de la contrainte normale. L'orientation des efforts de frottement est assurée par la direction de la vitesse de glissement.

- la **méthode des multiplicateurs de Lagrange** [DHA84, CHA86], qui repose sur la formulation des contraintes géométriques du contact et satisfait donc exactement les conditions de contact. Ainsi les surfaces sont supposées lisses et aucune pénétration n'est autorisée. Les multiplicateurs de Lagrange sont alors assimilables à des forces de réaction. Les multiplicateurs λ_N et λ_T correspondent respectivement aux pressions normale et tangentielle et constituent des inconnues supplémentaires au problème :

$$\prod_C = \int_{\Gamma_C} (\lambda_N u_n + \lambda_T u_t) d\Gamma \qquad \text{Eq. 3-32}$$

λ_N et λ_T sont les multiplicateurs de Lagrange qui vérifient les conditions de Signorini et la loi de Coulomb.

$$\delta \prod_C = \int_{\Gamma_C} (\lambda_N \delta u_n + \lambda_T \delta u_t) d\Gamma \quad + \int_{\Gamma_C} (\delta\lambda_N u_n + \delta\lambda_T u_t) d\Gamma \qquad \text{Eq. 3-33}$$

L'écriture matricielle du problème devient :

$$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Eq. 3-34}$$

$$GU \leq 0 \qquad \text{Eq. 3-35}$$

avec G la matrice globale des contraintes de contact en déplacement.

- la **méthode du Lagrangien augmenté** [FOR83, ALA91, SIM92, PIE97], qui combine les méthodes de pénalisation et des multiplicateurs de Lagrange [WRI90]. A partir de la fonctionnelle lagrangienne classique, cette méthode ajoute des termes de pénalisation appropriés qui ne sont pas nécessairement infinis pour assurer la vérification des contraintes. La méthode de pénalisation est utilisée pour générer une base de multiplicateur de Lagrange. Chacune des itérations sur les multiplicateurs conduit à un sous-problème non contraint. Des coefficients de pénalisation assez faibles assurent la

convergence du calcul. L'algorithme, généralement utilisé pour résoudre ce problème, est de type Uzawa.

- la **méthode du Lagrangien perturbé** [SIM85, WRI85, CHA87], qui est vue comme une méthode de régularisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, modifie la matrice du système à résoudre pour la rendre définie positive. Mieux conditionné, le système numérique généré est alors plus facile à résoudre. Toutefois, cette modification est au détriment de la précision sur la solution du problème initial de contact et conduit à mettre en place un schéma itératif de correction. Cette méthode a été utilisée par Simo et al. [SIM85] pour étudier des problèmes de contact sans frottement puis généralisée par Ju et Taylor [JU88] pour étudier des problèmes de contact avec frottement.

Même si des différences de sensibilité et de précision existent entre ces méthodes, Weyler et al. [WEY11] ont montré que les résultats obtenus avec la méthode de pénalisation et avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour un même problème sont très proches. On peut noter toutefois que la méthode de pénalisation est très sensible au paramètre de pénalisation et peut conduire à la construction de matrices de rigidité mal conditionnées tandis que la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être peu robuste lorsque des conditions de frottement sont prises en compte.

3.2. Développements récents

Afin de pallier aux problèmes de convergence, au choix du coefficient de pénalisation, associés aux méthodes décrites dans le paragraphe précédent, certains auteurs ont présenté, plus récemment, des méthodes alternatives, de manière à réduire la taille du problème et à limiter les coûts numériques, telles que :

- la **méthode du bipotentiel**, introduite par De Saxcé et Feng [SAX98], qui définit un unique potentiel non différentiable, appelé « bi-potentiel », associé à la fois aux conditions de Signorini et à la loi de Coulomb. Cette méthode conduit à la construction d'opérateurs de projection qui permettent de coupler la force normale et la force tangentielle au niveau des lois du contact lors de la résolution. L'objectif est de transformer le problème de contact en un problème de minimisation. L'ensemble des forces de contact est déterminé de manière itérative selon le principe de Gauss-Seidel et le système réduit, associé au problème du contact avec frottement, est résolu en utilisant une résolution de

type Uzawa. Une implémentation de la méthode du bipotentiel est décrite dans [MAG06].

- la **méthode asymptotique numérique** [COC94a, COC94b, COC94c], qui permet de lever la non-linéarité en utilisant des développements homotopiques. Développée en 1990 par Damil et Potier-Ferry [DAM90] pour calculer des bifurcations perturbées, cette méthode remplace les approximations tangentes classiques par des séries entières tronquées à un ordre relativement élevé. Cette méthode génère des gains importants en temps de calcul puisqu'une seule inversion de matrice permet de décrire une grande partie de la branche de solutions. Aggoune [AGG04] a utilisé la méthode asymptotique numérique associée à une technique de perturbation pour présenter une méthode alternative avec un algorithme de prédiction pour la résolution du contact.
- la **méthode du gradient conjugué**, qui permet de résoudre les problèmes multi-contact avec frottement comme des problèmes de quasi-optimisation. Cette méthode repose sur une méthode classique du gradient avec des itérations correctives et une projection. Renouf [REN05] utilise cette méthode sur des matériaux granulaires en contact.

3.3. Mise en donnée du problème dans un contexte de tirages multiples

L'utilisation des méthodes usuelles, présentées dans le paragraphe 3.2, ne semble pas très appropriée dans un contexte de tirages multiples compte tenu de la mise en donnée de la résolution du problème de contact. En effet, si l'on se réfère à l'Equation 3-30 de la méthode de pénalisation ou l'Equation 3-34 de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on observe, dans les deux cas, la résolution d'un système linéaire où la matrice du membre de gauche de l'équation doit être mise à jour et décomposée plusieurs fois en fonction du nombre d'itérations du schéma de résolution et en fonction du nombre de valeurs prises par les données variables. Cette étape va nécessairement engendrer des temps de calcul importants. De plus, aucune étape de calcul ne peut être ré-exploitée lors des tirages successifs. Dans ce contexte, Vermot des Roches [VER11] a proposé, pour résoudre un problème de contact, une méthodologie basée sur une itération sur les résidus et sur une matrice jacobienne fixe intégrée dans une résolution du type Newton modifiée. Cette proposition permet de diminuer

les temps de calcul des simulations non linéaires mais la mise en donnée n'est pas la plus optimale pour un contexte de tirages multiples.

Fort de ces constats, on propose de reporter le problème de gestion du contact dans le membre de droite de l'équation d'équilibre. Les forces de contact agissent alors comme un chargement extérieur, représenté par le terme F_c de l'Equation 3-27 pour une analyse statique. Cette stratégie évite ainsi de coupler les matrices de rigidité relatives à chaque structure du système par des termes de pénalisation ou toute autre entité matricielle. La matrice de rigidité du système reste alors inchangée pendant tout le processus de calcul. La difficulté est de calculer les valeurs des forces de contact pour équilibrer le système. Dans le paragraphe 4, on propose une méthode basée sur des régulateurs flous pour relier les efforts de contact aux gaps normaux et tangents. Le fait de disposer d'une matrice de rigidité constante permet de mettre en place une technique de réduction de modèle efficace. En effet, une projection des équations associées à chaque structure du système sur des bases de projection ad hoc, en l'occurrence les bases modales, permet de réduire la taille du problème à résoudre au nombre de coordonnées modales. Les temps de calculs sont ainsi réduits, car seule l'étape de reconstruction des déplacements est nécessaire pour les degrés de liberté d'interface lors de la détermination des gaps de contact.

En considérant les m premiers modes propres $\{\phi_{i,i=1\dots m}\}$ des différents composants du système, l'équation d'équilibre statique 3-27 devient :

$$\phi^T K \phi \mathrm{q} = \phi^T F^{ext} + \phi^T F_c \qquad \text{Eq. 3-36}$$

où q représente l'ensemble des coordonnées modales associées aux différents composants. Comme la matrice $\phi^T K \phi$ est diagonale, on remplace la résolution des systèmes linéaires par des opérations mathématiques standards, réduisant ainsi les coûts numériques.

4. Définition d'un régulateur flou

4.1. La théorie des sous-ensembles flous

Les sous-ensembles flous constituent une extension des ensembles classiques. Contrairement à l'algèbre booléenne qui associe à chacun des éléments la valeur 0 ou 1, la théorie des sous-ensembles flous attribue un degré de confiance compris dans l'intervalle [0;1] à chacun de ses éléments. De par cette représentation, cette approche, qualifiée d'ensembliste, permet donc de modéliser une imprécision sur la connaissance des bornes d'un paramètre.

Le nombre flou, associé à chaque donnée étudiée, est complètement défini par sa fonction d'appartenance. Un nombre flou $\tilde{p}$ (FIGURE 3-3) est caractérisé par :

- une valeur crête p_c,
- un support $\left[\underline{p}^0; \overline{p}^0\right]$, ensemble des valeurs que peut prendre le paramètre,
- une hauteur correspondant au degré maximal de la fonction d'appartenance.

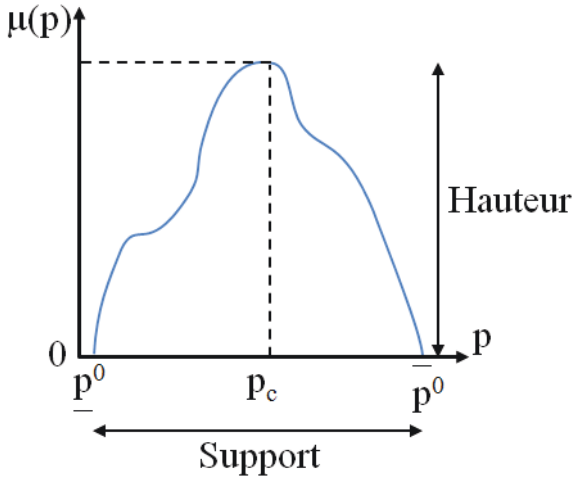


FIGURE 3-3 : Modélisation d'un nombre flou $\tilde{p}$

Différentes fonctions d'appartenance peuvent êtres utilisées. Celles-ci peuvent être déterminées à partir de données expérimentales [VAL93, CHE95] ou à partir de la perception de l'utilisateur [LOD97, FAN98]. Dubois et Prade [DUB80] précisent que les valeurs données à la fonction d'appartenance ne donnent pas une indication précise, mais reflètent plutôt une tendance. Si l'information sur les imperfections n'est pas connue, les fonctions triangulaires (FIGURE 3-4) sont les plus simples et les plus utilisées en général. D'ailleurs, De Lima [DEL00, DEL01] a montré que l'utilisation de fonctions triangulaires peut être satisfaisante comme modélisation simplifiée d'une imprécision.

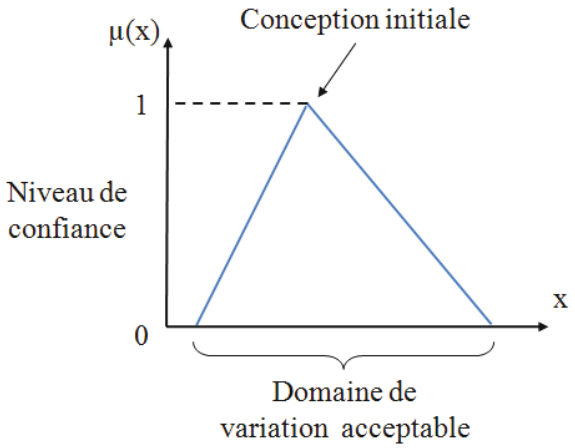


FIGURE 3-4 : Fonction d'appartenance triangulaire

D'autres formes (FIGURE 3-5) existent, à savoir π-shape, uniforme ou trapézoïdale.

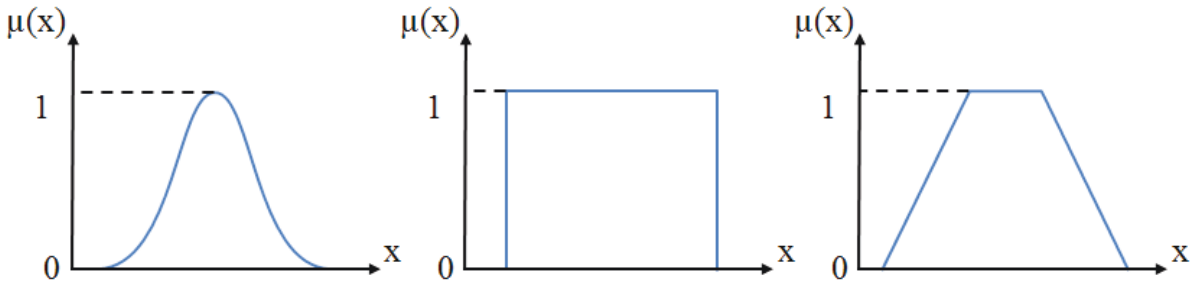


FIGURE 3-5 : Fonctions d'appartenance usuelles : π-shape (a), uniforme (b), trapézoïdale (c)

La forme trapézoïdale peut être justifiée par le fait qu'il existe un groupe de valeurs définies par une base de données, la bibliographie ou des essais pour laquelle la confiance est maximale. Les autres valeurs ont alors un indice de confiance inférieur. La fonction d'appartenance uniforme revient à traiter une information classique au sens des ensembles.

4.2. La logique floue et son utilisation en ingénierie

La logique floue, introduite par Zadeh en 1975 [ZAD75a, ZAD75b, ZAD75c], est basée sur la théorie des ensembles flous et peut être vue comme une extension de la notion de vérité. Contrairement à la logique booléenne, la logique floue ne se limite pas aux deux notions vrai ou faux mais introduit des degrés de véracité. Cette approche permet alors de mieux représenter le mécanisme de la pensée humaine en manipulant des valeurs de vérité intermédiaires, d'effectuer des qualifications linguistiques et ainsi moduler les règles de décision. La FIGURE 3-6 montre les différentes fonctions d'appartenance que l'on peut associer à la variable "erreur", définie par différents adjectifs linguistiques, tels que "forte

erreur positive", "faible erreur positive", "zéro", "faible erreur négative" ou "forte erreur négative".

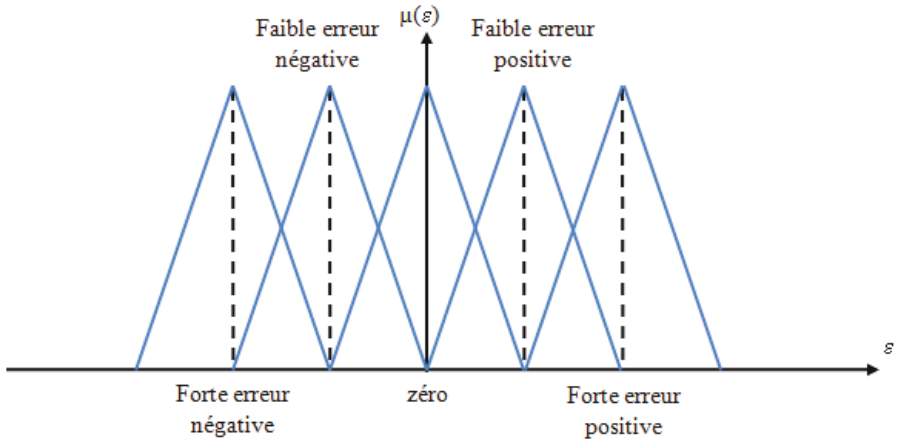


FIGURE 3-6 : Fonctions d'appartenance en triangle associées aux adjectifs linguistiques

La logique floue est largement utilisée en ingénierie depuis de nombreuses années et fait partie de notre quotidien au travers de nombreux appareils électroménagers comme les lave-linge, aspirateurs ou autocuiseurs. Son efficacité a été prouvée avec le développement croissant de l'électronique et des systèmes informatiques.

La première application a été menée par Mamdani et Assilian [MAM74, MAM75] pour le contrôle d'un moteur à vapeur. Ces dix dernières années, de nombreuses applications sont associées aux systèmes automobiles embarqués. Dans sa thèse, Cai [CAI11] présente la mise en place d'un système d'information et d'assistance à la conduite à base de logique floue. Le système de contrôle électronique des suspensions a été étudié par [CAP03] et plus récemment par [SOL12a]. L'utilisation du régulateur flou dans la gestion de la suspension d'un véhicule indépendamment à l'arrière et à l'avant permet d'adapter le confort suivant les irrégularités de la route et en fonction des conditions réelles du trafic. Il permet également indirectement de diminuer la course de la suspension et de réduire la consommation d'énergie. Le contrôle de l'ABS (Anti-lock Braking System) est également géré par un contrôleur flou [MIR05, ZHA06]. Plus récemment, [SHA10] utilise le contrôleur flou couplé à un algorithme génétique de manière à optimiser les paramètres du système. Le régulateur tient compte des paramètres non linéaires influant sur le système comme le poids de chargement du véhicule et les conditions de la route (pente, adhérence). L'objectif du régulateur est de réduire la distance de freinage tout en conservant un niveau de glissement imposé du pneu. Depuis peu, certains véhicules haut de gamme sont équipés d'une fonction d'aide au stationnement. Il s'agit d'une

manœuvre pour le créneau automatique des automobiles avec le système XPARK (Intellitech). Le système est basé sur la logique floue afin d'offrir différents niveaux d'assistance, de la mesure de l'espace disponible jusqu'à l'automatisation complète de la manœuvre. Il doit donc intervenir sur la direction, les freins et les vitesses. Solano Martinez [SOL12b], quant à lui, l'applique à la gestion d'énergie à bord d'un véhicule électrique hybride.

En industrie, le contrôleur par logique floue est également très utilisé pour les systèmes de contrôle ou de commande. Il est très répandu dans les systèmes robotisés par exemple sur les lignes de montage. Ainsi, Bingul [BIN11] couple la logique floue à un PSO (Particle Swarm Optimization) dans l'optimisation de la trajectoire d'un robot plan à deux axes où les variables d'entrée sont l'erreur de la position en degré et l'erreur de déviation en degré/seconde, pour contrôler le couple de sortie. La vitesse est alors mise à jour pour obtenir la meilleure position à chaque incrément de temps.

4.3. Composants constitutifs d'un régulateur flou

La logique floue est souvent associée à la notion de régulateur et plus particulièrement de régulateur flou (en anglais *Fuzzy Logic Controller* ou *FLC*), point d'intérêt de ce chapitre. Le modèle flou permet de relier à la fois les observations scientifiques et l'expérience de l'opérateur à des représentations symboliques et qualitatives.

Pionnier dans le développement de ce type de régulateur, Mamdami [MAM74, MAM75] les définit à partir de quatre principaux composants (FIGURE 3-7), à savoir :

- une interface de fuzzification
- une base de connaissance
- un moteur d'inférence
- une interface de défuzzification

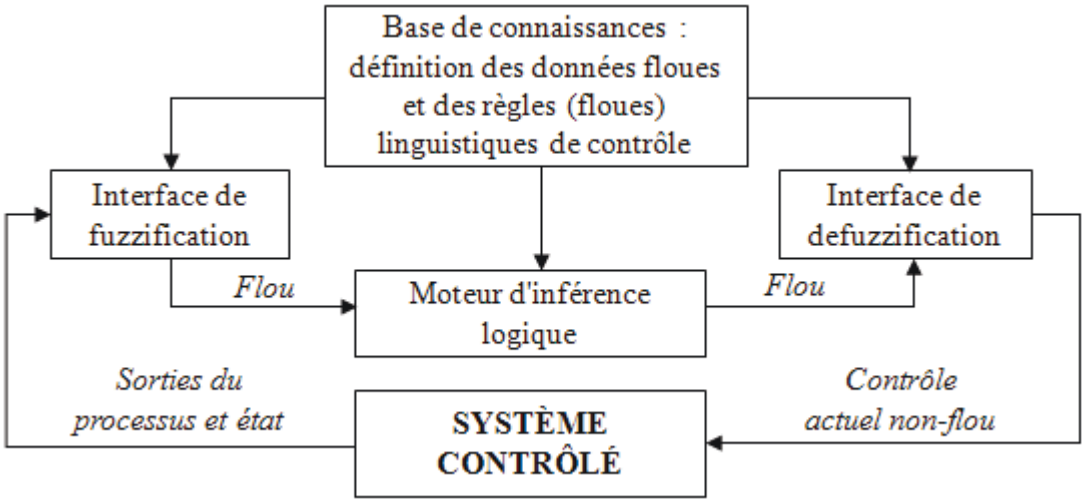


FIGURE 3-7 : Définition d'un régulateur par logique floue

Avant de définir les quatre principaux composants, il est nécessaire de construire les fonctions d'appartenance associées aux variables d'entrée et de sortie, comme définies FIGURE 3-6. Le nombre de fonctions d'appartenance est dépendant du problème traité (compris généralement entre 3 et 7). Ce choix agit directement sur la précision des résultats et la vitesse de convergence. Les fonctions d'appartenance peuvent être choisies symétriques ou non et équidistantes ou non. De plus, la forme de fonction d'appartenance peut être différente (FIGURES 3-4 et 3-5). La plus utilisée pour représenter les variables dans leurs univers de discours est la forme triangulaire. Ces choix sont effectués en fonction de la connaissance du problème et de l'expérience de l'expert. Toutefois, le choix de la forme est généralement moins important que le nombre de fonctions d'appartenances et leur placement.

L'**interface de fuzzification ou pondération** consiste à définir les degrés d'appartenance associés à chaque paramètre d'entrée à partir des valeurs déterministes des paramètres et des fonctions d'appartenance d'entrée, comme présenté FIGURE 3-8.

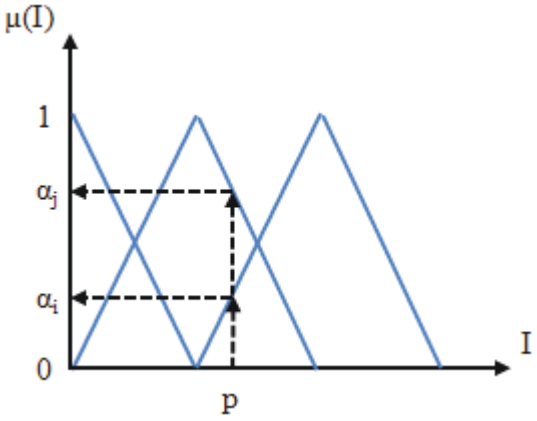


FIGURE 3-8 : Etape de fuzzification

La **base de connaissance** est une collection de règles qui permet de lier entre elles les variables floues d'entrée et de sortie. Le problème initial est alors décomposé en un ensemble de règles, de la forme :

"SI variable EST propriété, ALORS action" Eq. 3-37

qui définit la réponse désirée du système en sortie pour les conditions d'entrée du système. Le nombre et la complexité des règles dépendent du nombre de paramètres d'entrée qui doivent être utilisés et du nombre de variables floues associées à chaque paramètre. Dans le cas où plusieurs données d'entrée sont retenues, les règles vont s'exprimer par exemple comme suit :

Si x_1 est A_1 ET x_2 est A_2 alors y est B Eq. 3-38

Si x_1 est A_1 OU x_2 est A_2 alors y est B Eq. 3-39

où x_1, x_2 et y sont les grandeurs physiques caractéristiques du système, A_1, A_2 et B sont les termes linguistiques, « OU » et « ET » les opérateurs de liaison des fonctions d'entrée.

Le **moteur d'inférence**, considéré comme le « cerveau » du contrôleur, permet de lier les degrés d'appartenance des fonctions d'appartenance d'entrée aux fonctions d'appartenance de sortie. Le degré d'appartenance de la fonction de sortie peut être calculé par différentes méthodes, à savoir :

- la méthode d'inférence min-max,
- la méthode d'inférence max-prod,
- la méthode d'inférence somme-prod.

Dans nos applications, la méthode min-max, présentée FIGURE 3-9, est retenue. Cette méthode traduit respectivement les opérateurs OU et ET, utilisés dans la base de connaissance, par une fonction maximum et minimum. Ce moteur est appliqué pour toutes les combinaisons possibles des entrées.

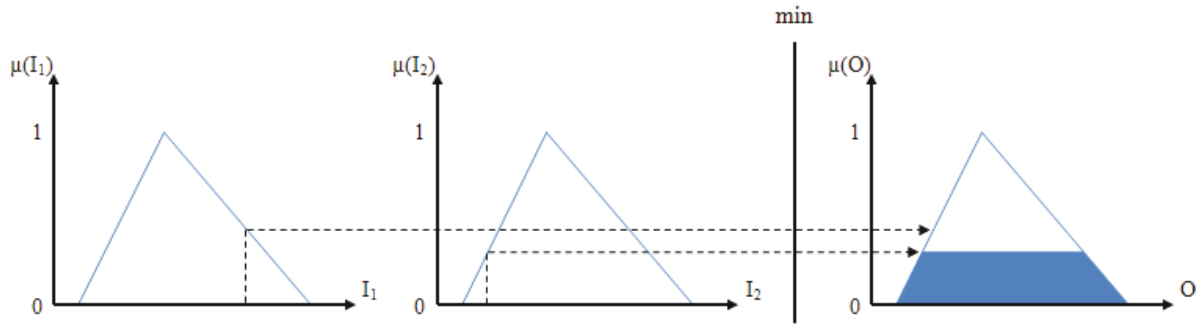


FIGURE 3-9 : Méthode d'inférence min-max pour un opérateur ET

L'**interface de defuzzification ou concrétisation** consiste à transformer l'ensemble flou de sortie résultant de l'agrégation des règles en une grandeur de commande déterministe et précise à appliquer au processus. Dans la littérature, il existe plusieurs stratégies pour réaliser cette opération telles que :

- la moyenne des maxima,
- le centre de gravité,
- le centre des maxima,
- la méthode des maximums,
- la méthode des surfaces et la méthode de la hauteur [KLI95].

La méthode de defuzzification par le centre de gravité, retenue dans nos applications, est la méthode la plus utilisée en commande floue du fait qu'elle fournit intuitivement la valeur la plus représentative de l'ensemble flou issu de l'agrégation des règles. Elle consiste à calculer le centre de gravité de la surface formée par la fonction d'appartenance résultante. La valeur sortie du defuzzifieur est la coordonnée suivant l'axe X du centroïde (FIGURE 3-10).

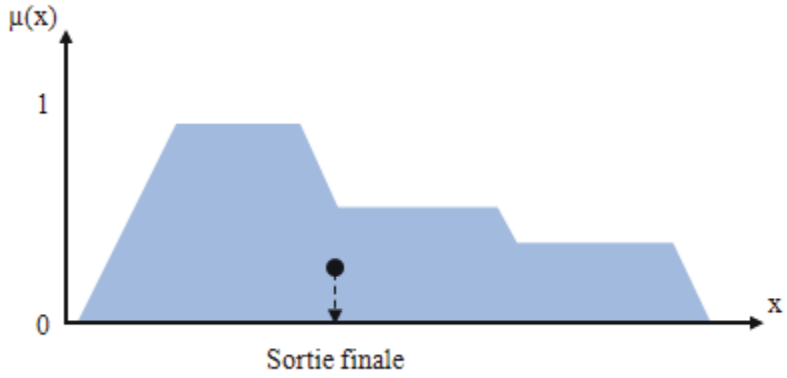


FIGURE 3-10 : Etape de defuzzification par la méthode du centre de gravité

4.4. Gestion du contact par régulateur flou

Dans le cas présent, on cherche à gérer le contact entre différents composants et déterminer ainsi les efforts de contact F_c à l'interface. Comme la logique floue est un outil efficace pour lier plusieurs entrées avec une sortie pour des fonctions non linéaires, on propose de l'exploiter dans le cadre du contact, ce qui se traduit en pratique par une décomposition du problème non linéaire d'origine en une succession de problèmes linéaires.

Pour ce faire, on définit deux régulateurs flous, dédiés respectivement à l'évaluation des efforts normaux F_n et tangentiels F_t. Pour chaque variable, d'entrée et de sortie, on associe un ensemble de fonctions d'appartenance qui vont définir l'univers de discours. En considérant cinq niveaux associés aux termes linguistiques pour chaque variable, le gap normal (FIGURE 3-11), par exemple, peut être qualifié comme "grand négatif", "petit négatif", "nul", "petit positif" et "grand positif". Il en est de même pour la variable de gap tangentiel g_t.

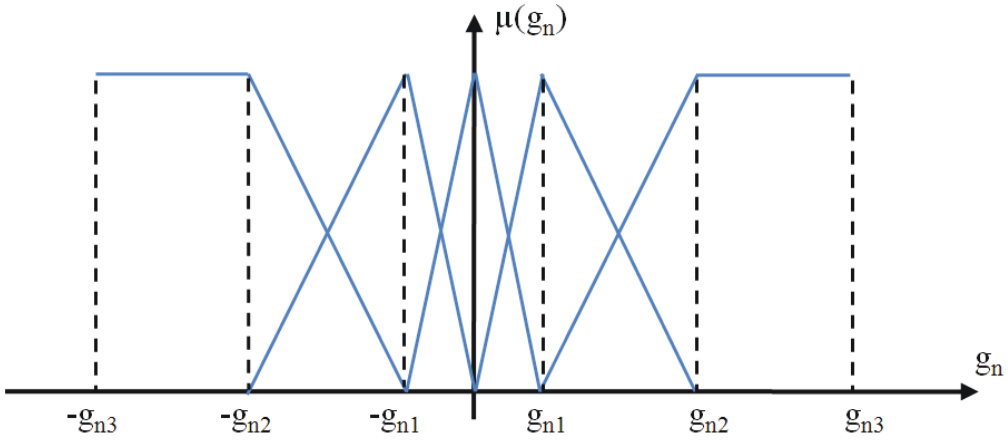


FIGURE 3-11 : Fonctions d'appartenance associées au gap normal g_n

La variable des forces de contact (FIGURE 3-12), quant à elle, peut être qualifiée comme "élevée négative", "faible négative", "nulle", "faible positive" et "élevée positive" [ROS09].

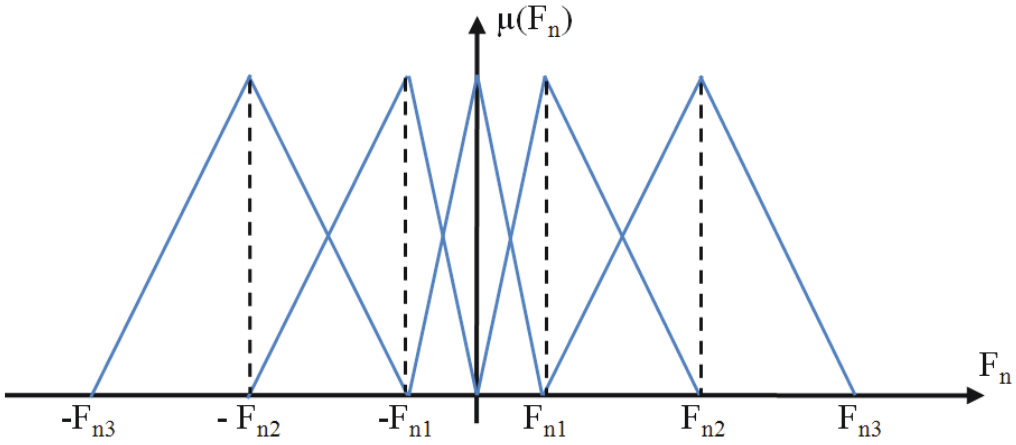


FIGURE 3-12 : Fonctions d'appartenance associées aux variables de la force de contact

Ces fonctions d'appartenance ont une forme en triangle et sont symétriques par rapport à $\mu(F_n)$ mais pas forcément non-équidistantes. Les valeurs des fonctions d'appartenance de ces variables sont notées respectivement g_{ni} et F_{ni} pour le gap en entrée et la force en sortie.

La base de connaissance du régulateur est définie suivant l'observation suivante :

« Si une force est appliquée à un nœud du modèle éléments finis selon une direction donnée, ce nœud va se déplacer dans cette direction ».

D'une manière générale, on peut définir les règles suivantes, qui sont applicables à la fois pour les gaps et les efforts normaux et tangentiels :

- Si le gap est "grand négatif", alors la force de contact est "élevée positive";
- Si le gap est "petit négatif", alors la force de contact est "faible positive";
- Si le gap est "nul", alors la force de contact est "nulle";
- Si le gap est "petit positif", alors la force de contact est "faible négative";
- Si le gap est "grand positif", alors la force de contact est "élevée négative";

Comme l'a montré Azadegan [AZA11], des règles plus complexes, construites en considérant la variation du gap, peuvent être définies. Dans ce travail, seule la variable gap a été retenue.

La FIGURE 3-13 résume les différentes étapes de la procédure de calcul. Cette procédure est de nature itérative.

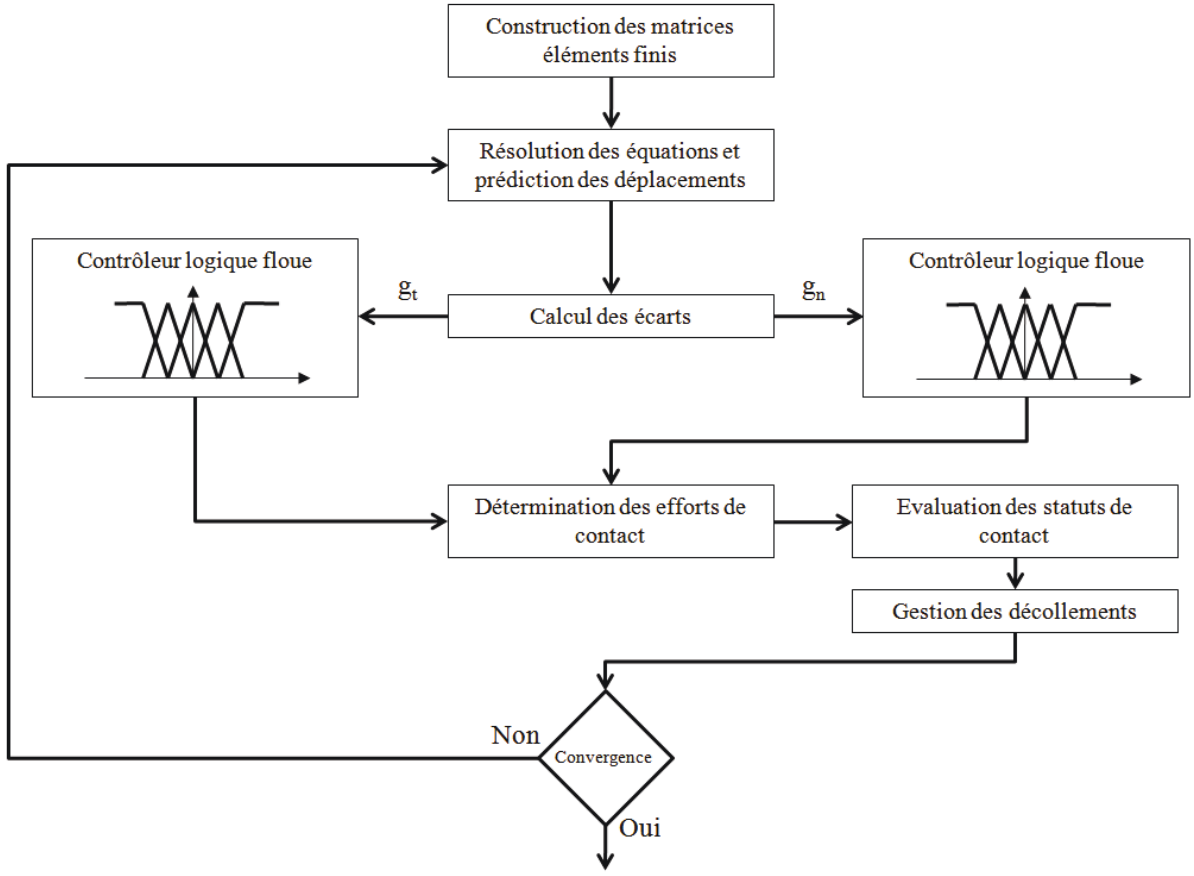


FIGURE 3-13 : Procédure de calcul du contact par régulateur flou

La première étape consiste à construire les matrices éléments finis des différents corps en contact.

La deuxième étape est basée sur la résolution des Equations 3-44 et 3-45 pour prédire les déplacements des nœuds de chaque élément et donc le calcul des gaps, respectivement notés g_{n0} et g_{t0}. La FIGURE 3-14 définit, pour un problème 2D, la base locale de chaque élément maître et précise le calcul du gap normal g_{n0} suivant la direction normale et le gap tangentiel g_{t0} suivant la direction tangentielle de glissement.

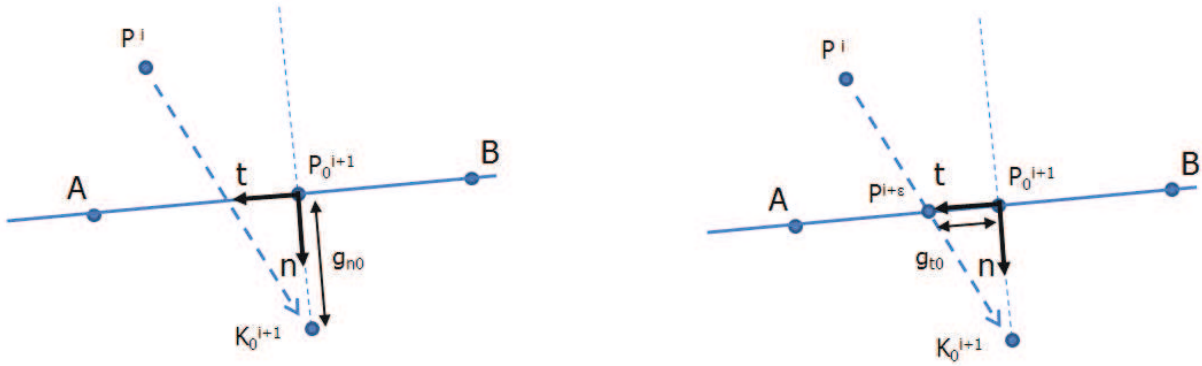


FIGURE 3-14 : (a) Calcul du gap normal initial; (b) Calcul du gap tangentiel initial

Soit un nœud P^i appartenant au corps esclave, en contact avec un élément (A-B) du corps maître, son vecteur position est X_{Pi}. Une base locale de référence (t, n) est considérée sur l'élément (A-B). Les composants tangentiels et normaux dans la base 2D de référence sont :

$$\{t\} = \frac{1}{\|X_B - X_A\|}(X_B - X_A) = \begin{Bmatrix} c \\ s \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 3-40}$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} -s \\ c \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. 3-41}$$

Le gap normal g_{n0} du nœud K_0^{i+1} sur l'élément (A-B) (FIGURE 3-14a) est calculé comme suit :

$$\{g_{n0}\} = \left(X_{K_0^{i+1}} - X_A\right)\{n\} \quad \text{Eq. 3-42}$$

La distance de glissement relatif g_{t0} entre les deux corps (FIGURE 3-14b) est calculée comme suivant :

$$\{g_{t0}\} = \left(X_{K_0^{i+1}} - X_{P^{i+\varepsilon}}\right)\{t\} \quad \text{Eq. 3-43}$$

Les positions X_{Pi} et $X_{K_0^{i+1}}$ des nœuds P^i et K_0^{i+1} aux instants i et i+1 sont d'abord calculées. On calcule ensuite le point d'intersection $P^{i+\varepsilon}$ du vecteur $X_{P^i}X_{K_0^{i+1}}$ avec le segment [AB].

Le glissement du nœud esclave sur l'élément maître est calculé par la projection de g_{t0} sur le segment [AB]. La pénétration du nœud $P^{i+\varepsilon}$ est alors vérifiée par l'Equation 3-44 :

$$\xi = \frac{1}{\|X_B - X_A\|}\left(X_{P^{i+\varepsilon}} - X_A\right)\{t\} \text{ avec } 0 \le \xi \le 1 \quad \text{Eq. 3-44}$$

En utilisant les régulateurs flous, la troisième étape consiste à réduire itérativement la pénétration entre les deux corps, jusqu'à atteindre la position à l'équilibre statique (FIGURE 3-15).

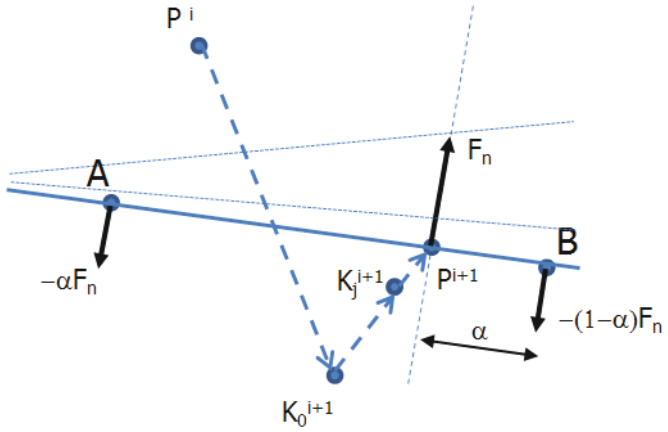


FIGURE 3-15 : Détermination de l'équilibre statique

Les déplacements de l'élément maître (A-B) sont ensuite calculés suivant les forces de contact appliquées et la position est corrigée. Ainsi, les forces de réaction aux nœuds A et B sont calculées par les Equations 3-45 et 3-46 :

$$F_A = \frac{-\alpha F_n}{\|AB\|} = -\alpha F_n \qquad \text{Eq. 3-45}$$

$$F_B = \frac{-(\|AB\|-\alpha)F_n}{\|AB\|} = -(1-\alpha)F_n \qquad \text{Eq. 3-46}$$

avec $\|AB\| = 1$, $F_A$et $F_B$les forces de réaction respectivement aux nœuds A et B.

Les forces obtenues respectent la loi de contact de Signorini pour l'effort normal et les conditions de frottement de Coulomb pour l'effort tangentiel. Pour chaque nœud esclave, si la force normale est négative, une phase de relaxation est prévue pour supprimer l'état de contact. Si la force normale est positive, on étudie le statut des nœuds esclaves. Si l'effort tangentiel F_t est inférieur à la valeur μF_n ($F_t < \mu F_n$), alors le nœud est en statut d'adhérence. Au contraire, si sa valeur est supérieure à μF_n ($F_t > \mu F_n$), le nœud est en contact glissant et l'effort tangentiel F_t est corrigé à la valeur μF_n. Cette méthodologie est comparable à la méthode des statuts [CHA96, VER94].

La procédure est réitérée jusqu'à la convergence du contact. A chaque itération, les déplacements sont calculés pour corriger les positions à la fois pour les nœuds maitres et pour les nœuds esclaves.

5. Applications numériques

Les développements, présentés dans ce paragraphe, ont été mis en œuvre dans le logiciel Matlab en utilisant la boîte à outils Structural Dynamic Toolbox (SDT) [BAL98] pour les calculs éléments finis. Dans cette thèse, seul le contact 2D a été implémenté sous Matlab. La méthode proposée est notée FL2C (Fuzzy Logic Controller for Contact) dans les paragraphes suivants. Les résultats obtenus pour des applications avec éléments finis 1D et 2D sont comparés à ceux issus du code industriel Abaqus [ABA11].

La première application, issue des travaux de Meziane [MEZ07], a pour objectif de tester la robustesse de la méthode FL2C en fonction de différents paramètres de définition du régulateur. La seconde, quant à elle, est inspirée des travaux d'Aggoune et al. [AGG04] et Ruffin et al. [RUF08] et permet de mettre en évidence la plage d'action du régulateur en fonction d'un chargement dont l'amplitude est variable.

5.1. Modèle bi-poutres (éléments finis 1D)

5.1.1. Description du modèle

Le modèle utilisé est constitué de deux poutres en 2D en contact ponctuel frottant. La première poutre (P1) est quasi-verticale avec un angle d'inclinaison $\theta=5°$ et la deuxième poutre (P2) est horizontale (FIGURE 3-16). La distance de contact [GD] est fixée à 0.08m. La simulation du problème est décomposée en deux étapes :

- la première étape consiste à appliquer une force F de 9N verticale au point A de la poutre (P1) afin d'initialiser le contact entre les points C et D ;
- la deuxième étape consiste à appliquer une vitesse de déplacement V de –0.002 m/s à l'extrémité G de la poutre (P2) pour initialiser le frottement au point de contact D.

Le point A est bloqué en translation suivant l'axe x et en rotation suivant l'axe z pour les deux étapes de la simulation. Le point G est encastré à la première étape puis bloqué en translation suivant y et en rotation suivant z lors de la deuxième étape. Une masse ponctuelle de 3 kg est appliquée au point A pour conserver le contact au point C et modéliser les masses présentes sur le banc d'essais utilisé par Meziane. Les propriétés géométriques et matérielles du modèle sont répertoriées dans le TABLEAU 3-1.

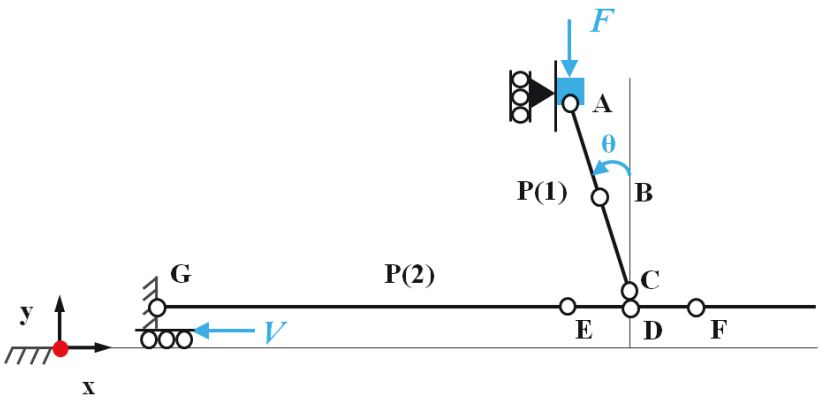


FIGURE 3-16 : Modèle issu des travaux de Meziane [MEZ07]

TABLEAU 3-1 : Caractéristiques numériques du modèle étudié

	P(1)	P(2)
Longueur [m]	0.05	0.15
Largeur [m]	0.01	0.015
Epaisseur [m]	0.0015	0.003
Densité [kg/m^3]	7900	7900
Module de Young [GPa]	185	185
Amortissement de Rayleigh α_1 [s^{-1}]	50	50
Amortissement de Rayleigh α_2 [s]	1.10^{-8}	1.10^{-8}
Nombre d'éléments	30	90

Les fréquences naturelles des deux poutres sont calculées jusqu'à 10 kHz et présentées dans le TABLEAU 3-2. La base modale, utilisée pour la projection dans la méthode FL2C, est constituée de 4 modes pour la poutre P(1) et 7 modes pour la poutre (P2). Le choix de la taille de cette base est discuté dans la suite du paragraphe.

TABLEAU 3-2 : Fréquences propres des poutres P(1) et P(2)

Fréquences de la poutre P(1)	1	2	3	4
Abaqus [Hz]	0	470	2923	8121
SDT/Matlab [Hz]	0	469	2939	8230
Ecart relatif [%]	0	0.2	0.54	1.34

Fréquences de la poutre P(2)	1	2	3	4	5	6	7
Abaqus [Hz]	104	652	1819	3549	5834	8065	8656
SDT/Matlab [Hz]	104	653	1829	3584	5925	8065	8851
Ecart relatif [%]	0	0.15	0.55	0.99	1.56	0	2.25

5.1.2. Etude statique non linéaire

Tout d'abord, on définit le régulateur flou, dont les fonctions d'appartenance associées aux gaps et aux efforts de contact sont présentées respectivement FIGURES 3-17 à 3-19.

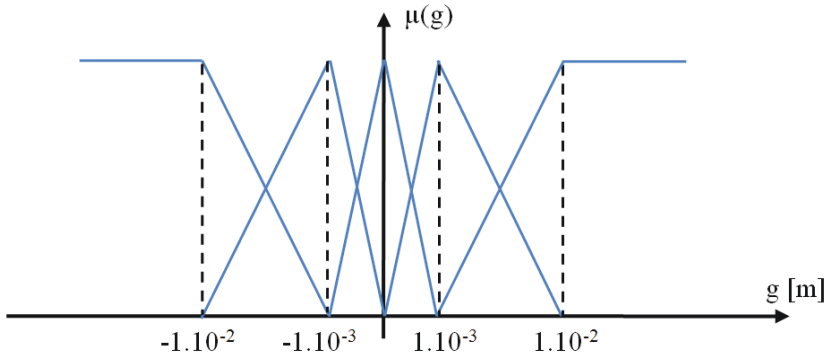


FIGURE 3-17 : Fonctions d'appartenance associées aux variables gap g_n et g_t

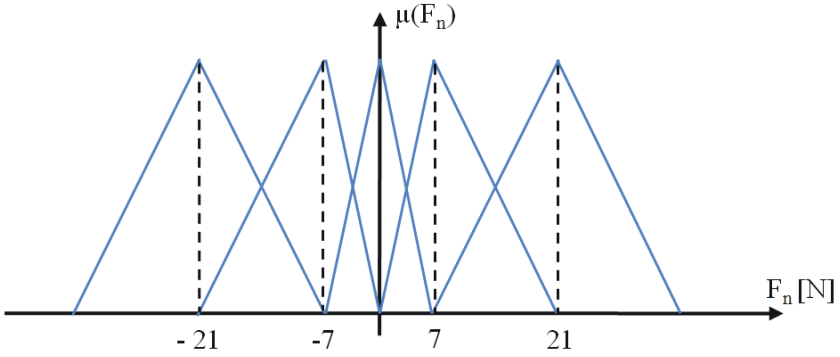


FIGURE 3-18 : Fonctions d'appartenance associées à la variable force de contact F_n

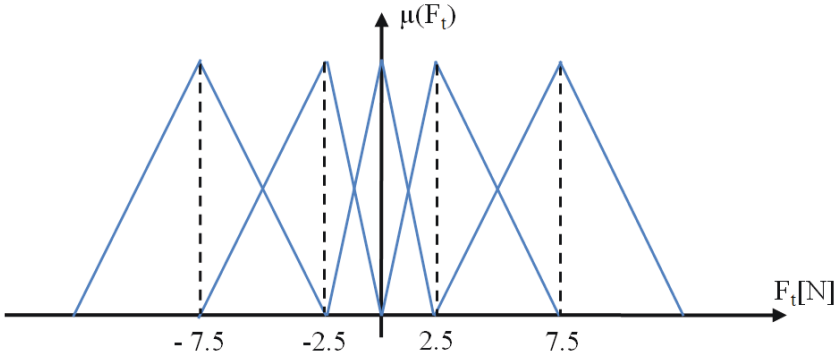


FIGURE 3-19 : Fonctions d'appartenance associées à la variable force de contact F_t

Dans le cas présent, on considère cinq fonctions d'appartenances par variable. Les valeurs crêtes des fonctions d'appartenance associées au gap sont choisies en considérant un cas général où la pénétration à résorber se situe entre 1.10^{-6}m et 1.10^{-2}m. Cet intervalle peut être réduit si on dispose d'informations sur le comportement local du système. Concernant les efforts, on propose d'injecter au maximum une valeur de 21N pour des gaps de l'ordre de

1.10^{-2}m et 7N pour 1.10^{-6}m. Ces valeurs ont été fixées en caractérisant le comportement dans la zone de contact par des analyses statiques préliminaires. En considérant des chargements unitaires dans les directions principales, il est possible d'identifier un lien effort-déplacement et ainsi évaluer un ordre de grandeur de la force de contact associée aux différentes fonctions d'appartenance. La sensibilité des solutions mécaniques de contact vis-à-vis des paramètres de définition des fonctions d'appartenance, associées aux variables décrivant le contact, est testée dans la suite du paragraphe.

On se focalise sur les résultats en termes de déplacements, d'efforts de contact et de coefficient de frottement dynamique pour un coefficient de frottement imposé μ=0.5 (TABLEAUX 3-3 et 3-4) pour les nœuds C à F.

TABLEAU 3-3 : Déplacements des poutres pour les étapes 1 et 2

Etape 1		Abaqus [m]	FL2C [m]	Ecart [m]
Nœud C	x	$1.06\ 10^{-6}$	$6.35\ 10^{-9}$	$1.05\ 10^{-6}$
	y	**$-2.46\ 10^{-4}$**	**$-2.46\ 10^{-4}$**	$1.05\ 10^{-9}$
Nœud D	x	$-4.50\ 10^{-7}$	$6.35\ 10^{-9}$	$4.4\ 10^{-7}$
	y	**$-2.46\ 10^{-4}$**	**$-2.46\ 10^{-4}$**	$1.00\ 10^{-9}$
Nœud E	x	$-4.30\ 10^{-7}$	$6.25\ 10^{-9}$	$4.24\ 10^{-7}$
	y	**$-2.39\ 10^{-4}$**	**$-2.38\ 10^{-4}$**	$1.00\ 10^{-6}$
Nœud F	x	$-4.60\ 10^{-7}$	$6.44\ 10^{-9}$	$4.54\ 10^{-7}$
	y	**$-2.54\ 10^{-4}$**	**$-2.54\ 10^{-4}$**	$1.00\ 10^{-9}$
Etape 2		Abaqus [m]	FL2C [m]	Ecart [m]
Nœud C	x	**$-2.96.10^{-4}$**	**$-2.90.10^{-4}$**	$6.00\ 10^{-6}$
	y	**$-2.54.10^{-4}$**	**$-2.56.10^{-4}$**	$2.\ 00\ 10^{-6}$
Nœud D	x	$-1.20.10^{-3}$	$-1.10.\ 10^{-3}$	$1.\ 00\ 10^{-4}$
	y	**$-2.50.10^{-4}$**	**$-2.52.10^{-4}$**	$2.\ 00\ 10^{-6}$
Nœud E	x	$-1.20.10^{-3}$	$-1.10.\ 10^{-3}$	$1.\ 00\ 10^{-4}$
	y	**$-2.42.10^{-4}$**	**$-2.44.10^{-4}$**	$2.\ 00\ 10^{-6}$
Nœud F	x	$-1.20.10^{-3}$	$-1.20\ 10^{-3}$	$1.00\ 10^{-9}$
	y	**$-2.58.10^{-4}$**	**$-2.6.10^{-4}$**	$2.\ 00\ 10^{-6}$

Au début de la simulation, le nœud C est en contact avec le nœud D. Les déplacements, calculés par les deux méthodes, sont de même grandeur pour chaque étape. Suivant les directions x et y, l'écart moyen est de l'ordre de 1.10^{-7}m pour la première étape et 1.10^{-6}m pour la seconde, avec une convergence de la valeur de la pénétration de l'ordre du

nanomètre pour la méthode FL2C. Les plus grands écarts en déplacement sont observés suivant l'axe x, qui est normal à la direction principale de déplacement et sont non pas induits par la méthode de résolution mais par des différences au niveau de la gestion technique du contact.

Les écarts des forces de contact sont également très faibles (de l'ordre de 10^{-2}N). La plus grande différence est observée à la première étape lorsque les efforts ne sont pas répartis exactement de la même manière dans les deux méthodes. Toutefois, ces résultats sont compatibles avec la précision recherchée. Le coefficient de frottement dynamique, quant à lui, calculé par le rapport des forces tangentielles et des forces normales au nœud esclave de contact, est identique pour les deux méthodes, à savoir un état adhérant pour la première étape et glissant pour la seconde.

La résolution de ce problème a nécessité environ 100 itérations pour la méthode FL2C. En comparaison aux méthodes actuelles, le nombre d'itérations peut sembler élevé (4 itérations sous Abaqus) mais comme le coût numérique associé à une itération est plus faible, le fait d'itérer plus de fois n'est pas nécessairement pénalisant.

TABLEAU 3-4 : Forces de contact et coefficient de frottement dynamique des poutres pour les étapes 1 et 2

Etape 1		Abaqus [m]	FL2C [m]	Ecart [m]
Nœud C	F_n	**$9.00\ 10^{0}$**	**$9.00\ 10^{0}$**	$0.00\ 10^{0}$
	F_t	$-8.16\ 10^{-1}$	$-8.28\ 10^{-1}$	$1.20\ 10^{-2}$
Nœud D	F_n	**$-9.00\ 10^{0}$**	**$-9.00\ 10^{0}$**	$0.00\ 10^{0}$
	F_t	$8.16\ 10^{-1}$	$8.28\ 10^{-1}$	$1.20\ 10^{-2}$
Nœud E	F_n	$4.08\ 10^{-3}$	$0.00\ 10^{0}$	$4.08\ 10^{-3}$
	F_t	$-3.7\ 10^{-4}$	$0.00\ 10^{0}$	$-3.70\ 10^{-4}$
Nœud F	F_n	$-4.08\ 10^{-3}$	$-6.95\ 10^{-5}$	$4.01\ 10^{-3}$
	F_t	$3.7\ 10^{-4}$	$6.39\ 10^{-6}$	$3.06\ 10^{-4}$
μ dynamique		**0.09**	**0.09**	0
Etape 2		Abaqus [m]	FL2C [m]	Ecart [m]
Nœud C	F_n	**$8.98\ 10^{0}$**	**$8.98\ 10^{0}$**	$0.00\ 10^{0}$
	F_t	**$-4.49\ 10^{0}$**	**$-4.49\ 10^{0}$**	$0.00\ 10^{0}$
Nœud D	F_n	**$-4.11\ 10^{0}$**	**$-4.08\ 10^{0}$**	$3.00\ 10^{-2}$
	F_t	**$2.05\ 10^{0}$**	**$2.04\ 10^{0}$**	$1.00\ 10^{-2}$
Nœud E	F_n	$0.00\ 10^{0}$	$0.00\ 10^{0}$	$0.00\ 10^{0}$
	F_t	$0.00\ 10^{0}$	$0.00\ 10^{0}$	$0.00\ 10^{0}$
Nœud F	F_n	**$-4.87\ 10^{0}$**	**$-4.9\ 10^{0}$**	$3.00\ 10^{-2}$
	F_t	**$2.44\ 10^{0}$**	**$2.45\ 10^{0}$**	$1.00\ 10^{-2}$
μ dynamique		**0.5**	**0.5**	0

Dans le but de tester la robustesse de la solution étudiée, on propose de faire évoluer les valeurs crêtes des fonctions d'appartenance des variables du problème et observer l'influence sur l'état final à l'issue de la seconde étape en termes de gap normal (FIGURE 3-20), d'efforts normaux (FIGURE 3-21) et tangentiels (FIGURE 3-22) au point C et du nombre d'itérations (FIGURE 3-23).

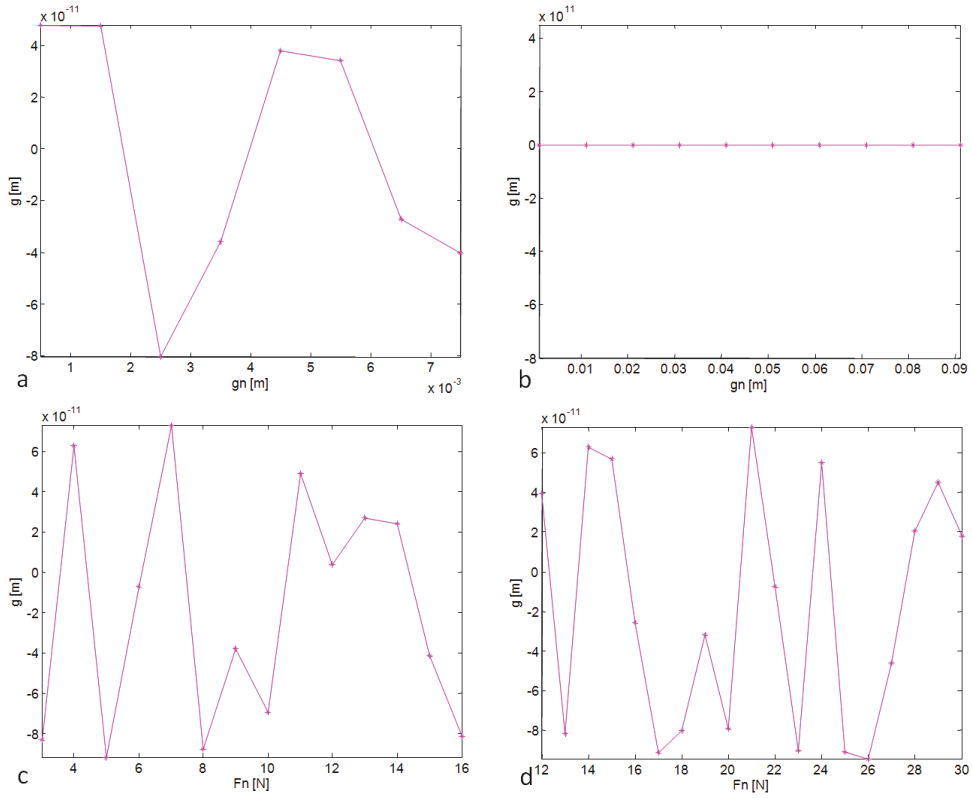


FIGURE 3-20 : Evolution du gap g_n au point C (a) pour une variation de g_{n1} (b) pour une variation de g_{n2} (c) pour une variation de F_{n1} (d) pour une variation de F_{n2}

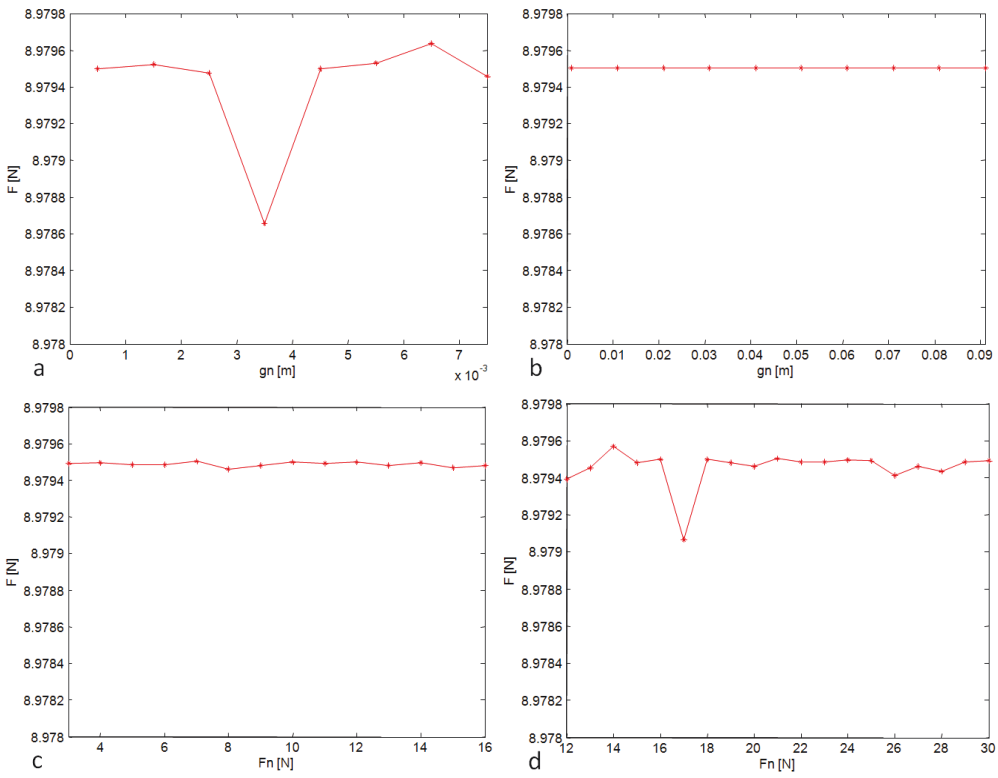


FIGURE 3-21 : Evolution de l'effort normal F_n au point C (a) pour une variation de g_{n1} (b) pour une variation de g_{n2} (c) pour une variation de F_{n1} (d) pour une variation de F_{n2}

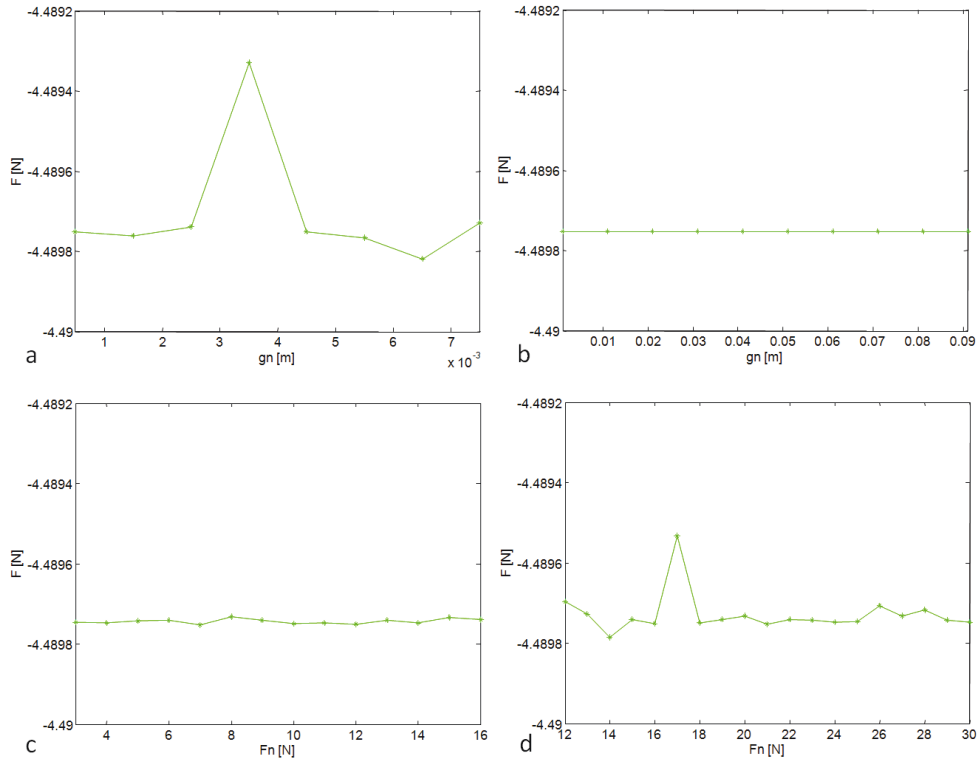


FIGURE 3-22 : Evolution de l'effort tangentiel F_t au point C (a) pour une variation de g_{n1} (b) pour une variation de g_{n2} (c) pour une variation de F_{n1} (d) pour une variation de F_{n2}

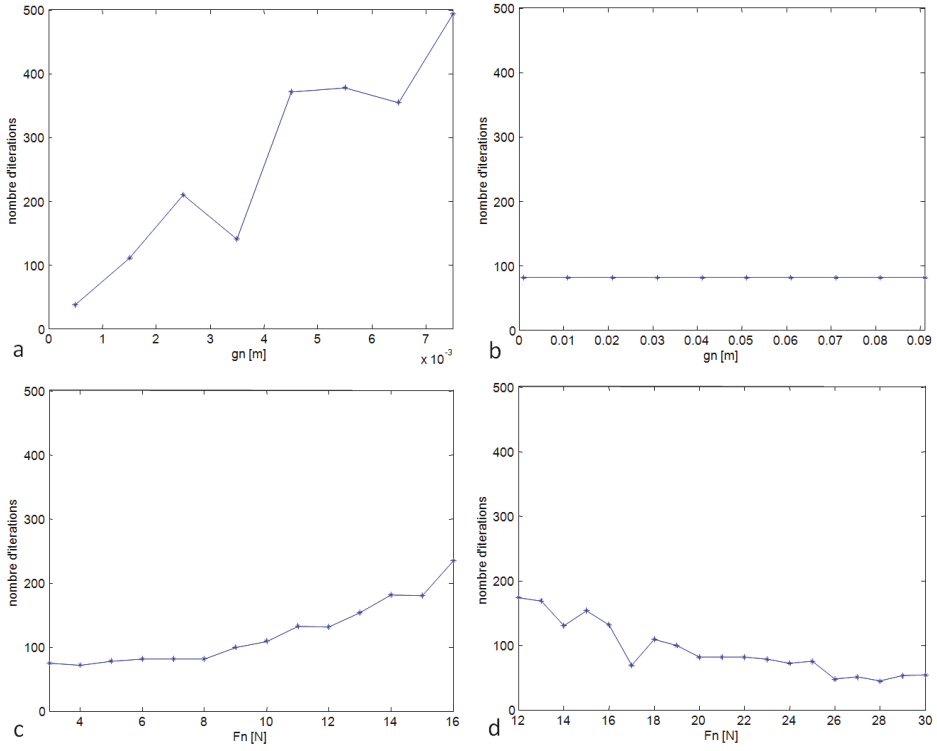


FIGURE 3-23 : Evolution du nombre d'itérations (a) pour une variation de g_{n1} (b) pour une variation de g_{n2} (c) pour une variation de F_{n1} (d) pour une variation de F_{n2}

Les FIGURES 3-20 à 3-23 montrent que le choix des valeurs crêtes n'influe que faiblement sur la précision des solutions mécaniques de contact tant que l'on reste dans des valeurs compatibles avec l'étude. Si l'on s'écarte de ces valeurs, l'algorithme peut bien évidemment diverger. Par contre, le choix des valeurs crêtes agit directement sur le nombre d'itérations et par conséquent la vitesse de convergence. Plusieurs articles, traitant du « tuning » des valeurs de fonctions d'appartenance par des algorithmes d'optimisation, mériteront d'être étudiés en perspective à ce travail en vue de diminuer encore plus les temps de calcul.

Dans le but d'évaluer la précision des résultats en fonction de la projection utilisée, on propose de faire évoluer le nombre de modes retenus pour chaque composant. On se focalise, comme précédemment, sur le gap normal (FIGURE 3-24), les efforts normaux (FIGURE 3-25) et tangentiels (FIGURE 3-26) au point C et le nombre d'itérations (FIGURE 3-27) à l'issue de l'étape 2. Pour les études paramétriques, le nombre de modes utilisés pour chaque composant est compris entre 1 et 10 et est étudié indépendamment.

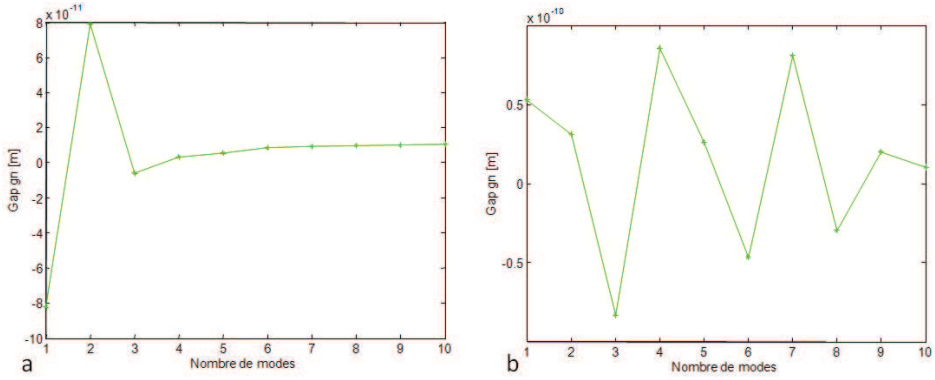


FIGURE 3-24 : Evolution du gap g_n au point C (a) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(1) (b) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(2)

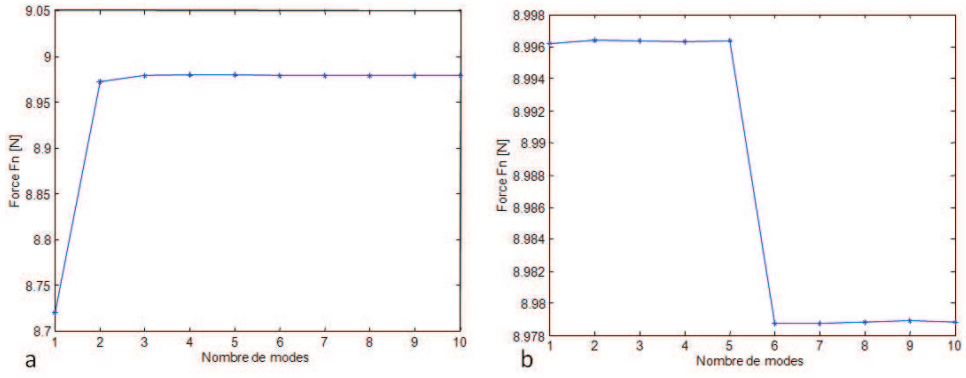


FIGURE 3-25 : Evolution de l'effort normal F_n au point C (a) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(1) (b) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(2)

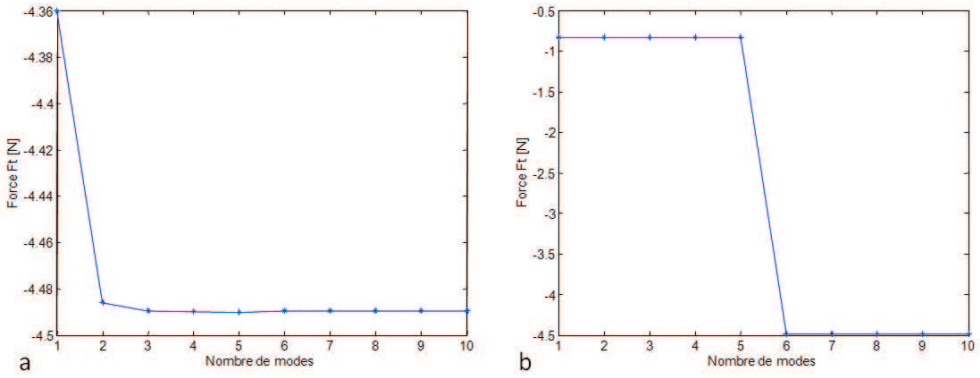


FIGURE 3-26: Evolution de l'effort tangentiel F_t au point C (a) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(1) (b) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(2)

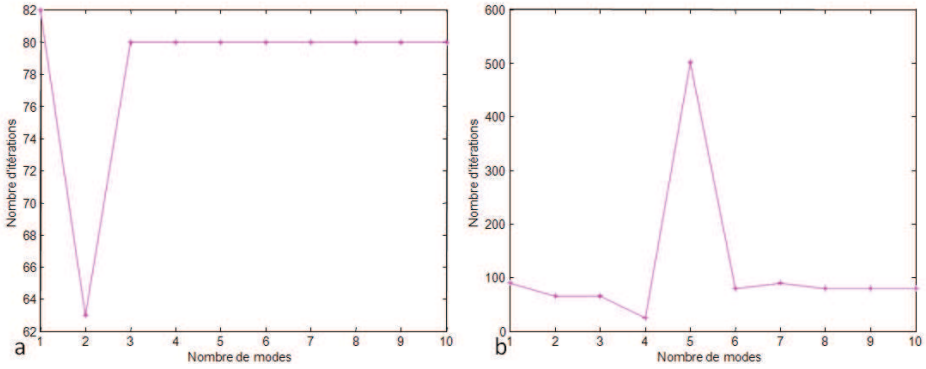


FIGURE 3-27 : Evolution du nombre d'itérations au point C (a) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(1) (b) en fonction du nombre de modes retenus pour la poutre P(2)

Les FIGURES 3-24 à 3-27 mettent en évidence que la projection ne dégrade pas la précision des solutions mécaniques de contact obtenues sans projection modale dès que l'on a retenu suffisamment de modes. La problématique du choix du nombre de modes s'avère être la même que dans le cadre d'un problème dynamique standard.

Les précédents tests ont mis en évidence que les résultats, obtenus par la méthode FL2C, sont cohérents avec ceux obtenus par Abaqus. D'un point de vue temps de calcul, la méthode proposée est très performante dès que le modèle éléments finis manipulé est de taille importante. En effet, les FIGURES 3-28 à 3-30 présentent les temps de calculs associés aux deux étapes statiques (Etapes 1 et 2) dans le cas où les maillages éléments finis, volontairement raffinés, comportent respectivement 120, 6000 et 12000 éléments par composant.

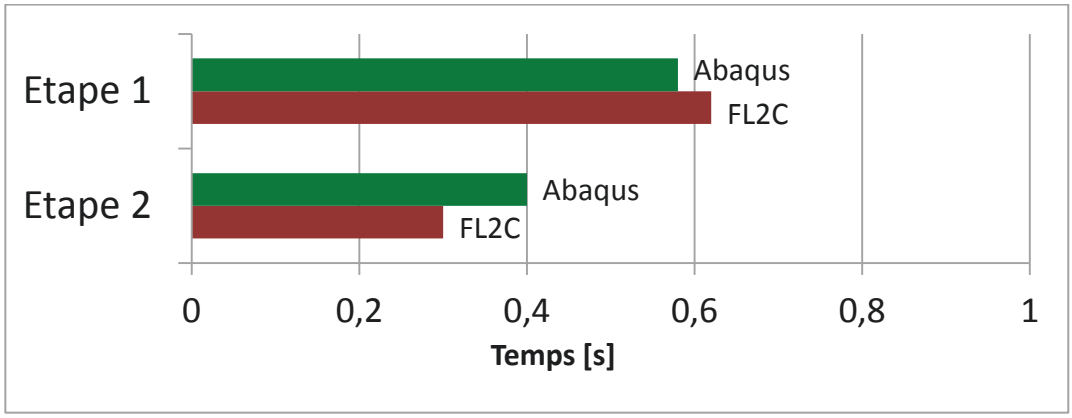


FIGURE 3-28 : Temps de calcul pour un maillage à 120 éléments

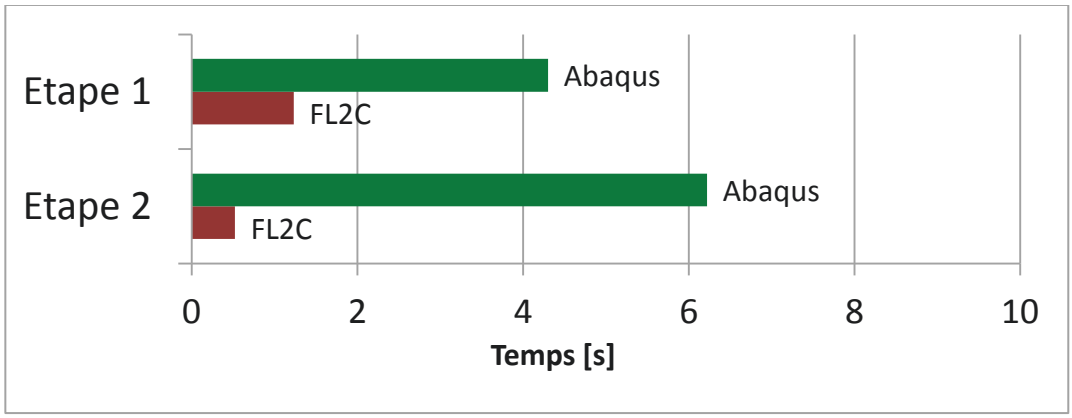


FIGURE 3-29 : Temps de calcul pour un maillage à 6000 éléments

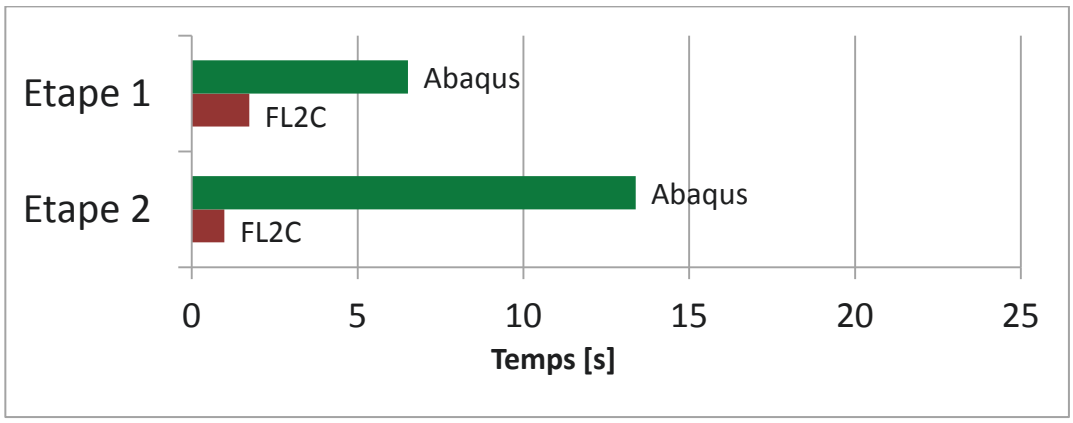


FIGURE 3-30 : Temps de calcul pour un maillage à 12000 éléments

Comme les temps de calcul nécessaires à la construction des matrices sous SDT sont beaucoup plus importants que sous Abaqus, il a été choisi de les construire sous Abaqus puis de les exporter sous Matlab. On observe que la résolution des calculs non-linéaires est moins rapide avec FL2C que sous Abaqus pour un modèle à 120 éléments finis mais devient plus

performante dès que la taille des modèles augmente. Pour le dernier cas, présenté FIGURE 3-30, les temps de calcul sont réduits de 86%.

Ces résultats statiques seront utilisés comme point de départ à l'étude de stabilité, présentée dans le chapitre 4. La réduction observée des temps de calcul est compatible avec l'objectif de mettre en place une méthodologie non déterministe.

5.2. Modèle bi-poutres (éléments finis 2D)

5.2.1. Description du modèle

Le modèle de contact 2D est constitué de deux poutres flexibles horizontales encastrées-libres (FIGURE 3-31). La poutre P(1) est soumise à une force de flexion F pour entraîner le contact sans frottement. Les propriétés géométriques et matérielles du modèle sont répertoriées dans le TABLEAU 3-5. L'écart vertical entre les deux poutres est initialement fixé à 1.10^{-8} m.

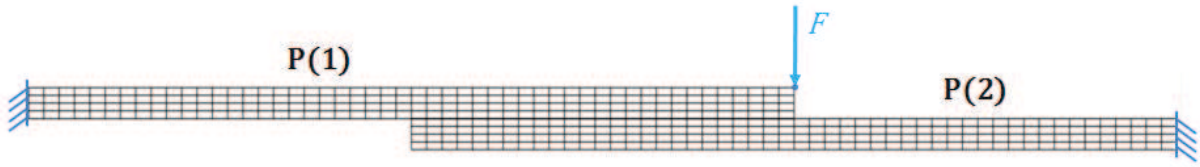


FIGURE 3-31 : Modèle des deux poutres flexibles 2D

TABLEAU 3-5 : Caractéristiques numériques des 2 poutres

	P(1)	P(2)
Longueur [m]	0.2	0.2
Largeur [m]	0.008	0.008
Densité [kg/m^3]	7900	7900
Module de Young [GPa]	$2.1.10^{11}$	$2.1.10^{11}$
Nombre d'éléments	200	200

Les fréquences naturelles des deux poutres, calculées jusqu'à 25 kHz, sont présentées dans le TABLEAU 3-6. Dans cette application, les matrices éléments finis sont construites avec Abaqus puis exportées sous Matlab. Pour chaque poutre, la base modale, utilisée pour la projection dans la méthode FL2C, est constituée de 9 modes.

TABLEAU 3-6 : Fréquences propres des poutres P(1) et P(2)

Fréquences	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Abaqus [Hz]	174.8	1087.1	3007.7	5796.6	6449.5	9387.7	13693	18625	24094

5.2.2. Etude statique non linéaire

Tout d'abord, les fonctions d'appartenance associées aux gaps et aux efforts de contact, utilisées dans le régulateur flou, sont présentées FIGURES 3-32 et 3-33. Les valeurs crêtes des fonctions d'appartenance sont définies, comme précédemment, à partir d'un calcul de référence, expliqué dans le paragraphe 5.1.2.

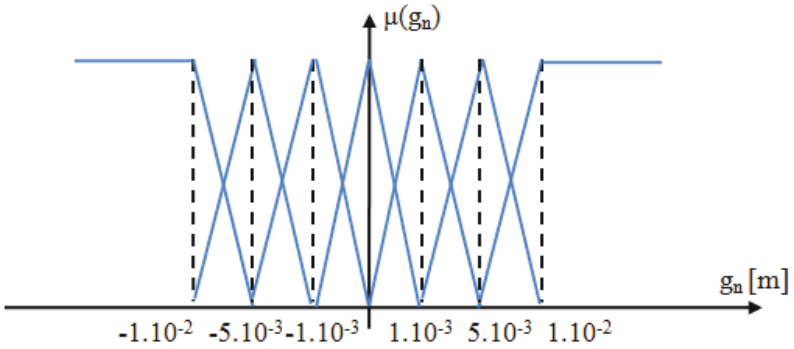


FIGURE 3-32 : Fonctions d'appartenance associées à la variable gap g_n

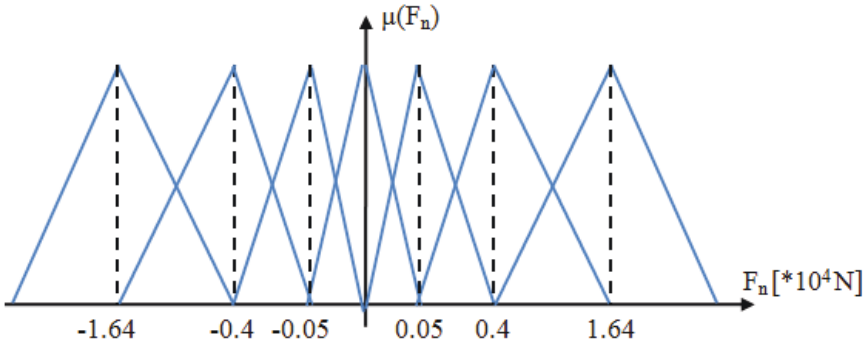


FIGURE 3-33 : Fonctions d'appartenance associées à la variable effort normal F_n

Dans cette application, on se focalise sur la réponse statique des corps en contact pour une force extérieure *F* variable comprise entre 10000 N et 100000 N en gardant constant les paramètres de définition du régulateur.

La FIGURE 3-34 présente le gap normal obtenu avec la méthode FL2C en fonction des différentes valeurs de chargement. Les résultats obtenus, de l'ordre de 10^{-10} m, mettent en

évidence que la méthode proposée est compatible avec différentes valeurs de chargement extérieur sans avoir besoin de redéfinir les univers de définition des fonctions d'appartenance.

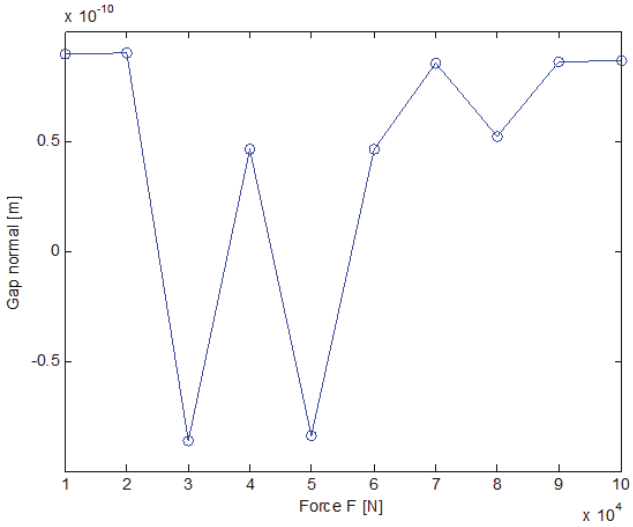


FIGURE 3-34 : Evolution du gap normal en fonction de la force F

Les FIGURES 3-35 et 3-36, quant à elles, montrent que les résultats obtenus en termes d'effort et de déplacement au niveau de la zone de contact sont équivalents à ceux fournis par le logiciel Abaqus pour toute la plage d'effort. En effet, l'erreur maximale pour l'effort normal est inférieure à 1% tandis que les écarts maximaux pour les déplacements suivant X et Y sont respectivement de l'ordre de 10^{-4} m et de 10^{-6} m.

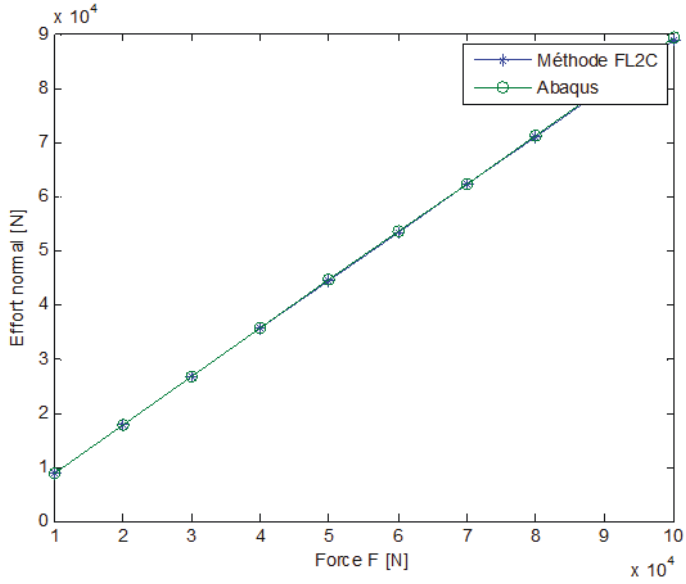


FIGURE 3-35 : Evolution de l'effort normal en fonction de la force F

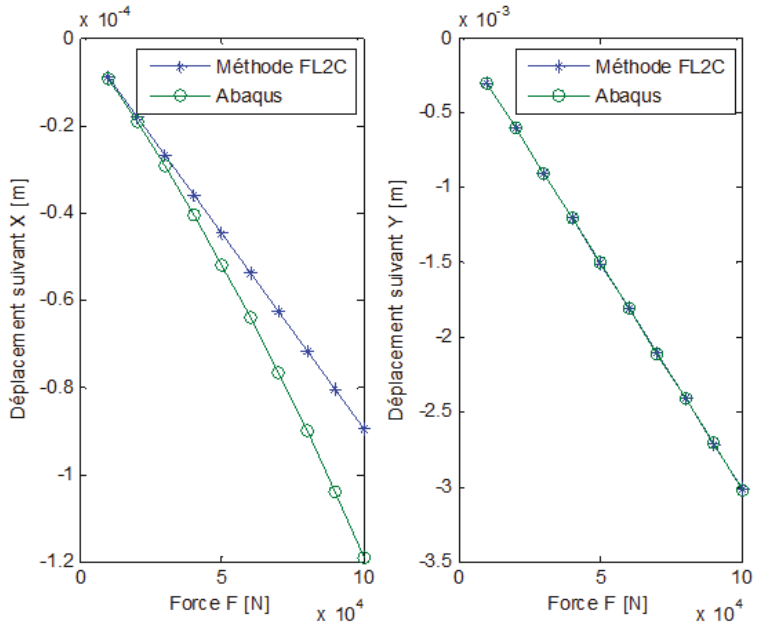


FIGURE 3-36 : Evolution des déplacements du nœud esclave en fonction de la force F

Afin d'apprécier la performance de la méthode FL2C en terme de temps de calcul, on augmente la taille du modèle éléments finis. Les FIGURES 3-37 et 3-38 présentent l'évolution du temps de calcul ainsi que le nombre d'itérations pour les deux méthodes en fonction de différents maillages.

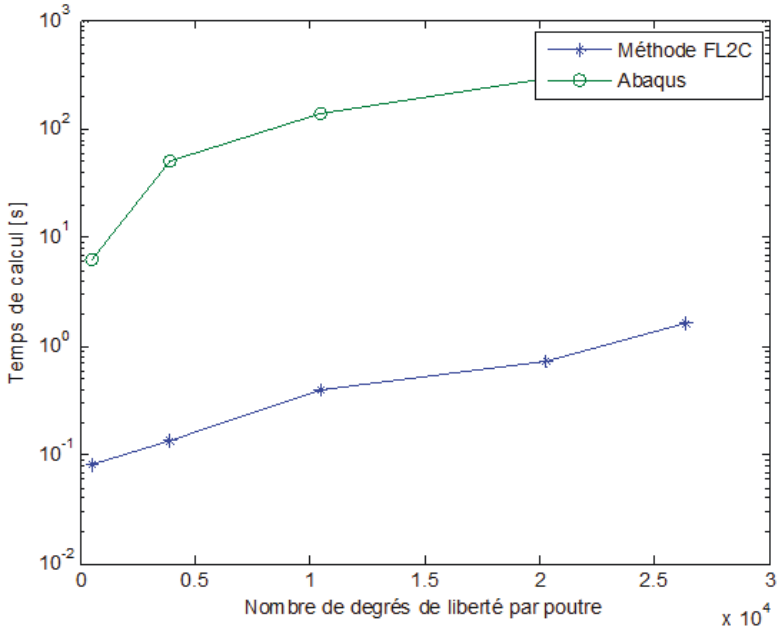


FIGURE 3-37 : Evolution des temps de calcul en fonction de la taille du modèle éléments finis

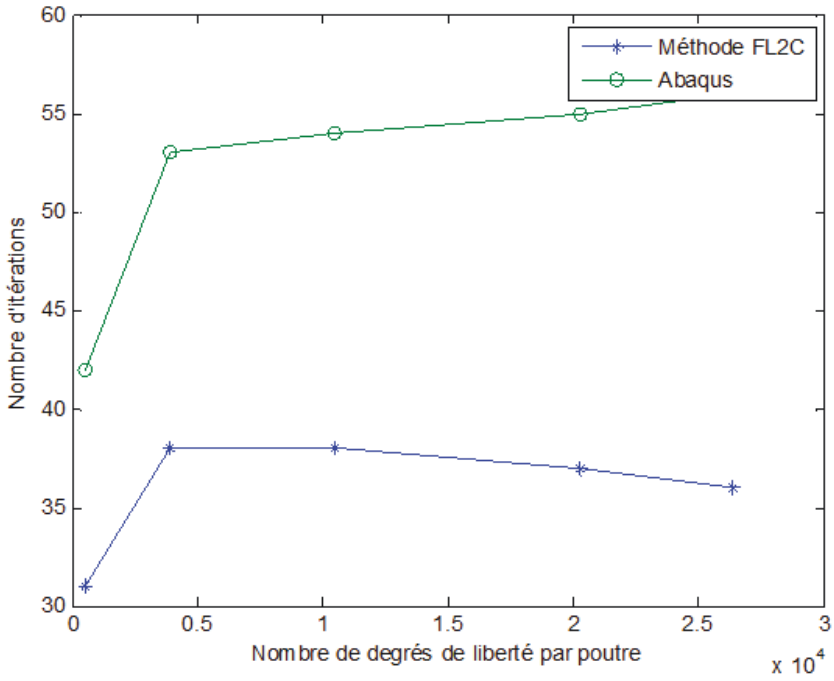


FIGURE 3-38 : Evolution du nombre d'itérations en fonction de la taille du modèle éléments finis

Dans le cas présent, on observe que la méthode FL2C est plus performante qu'Abaqus quelle que soit la finesse de maillage. Pour le maillage le plus fin, les temps de calcul sont réduits de 95%. Pour le schéma non linéaire, le nombre d'itérations est plutôt constant pour les deux méthodes. Les temps de calcul élevés sous Abaqus s'expliquent par le fait qu'il est nécessaire, pour certains maillages fins, de diminuer la variable « Time step » relative à l'incrément d'effort à 10^{-9} s pour assurer la convergence des calculs.

5.3. Limitations de la méthode FL2C

Les deux applications précédentes ont mis en évidence la possibilité de gérer le contact, avec ou sans frottement, en définissant un problème de régulation. Celui-ci garantit une précision imposée en termes de gaps, déplacements et efforts. De plus, la seconde application a montré que la méthode FL2C est robuste vis-à-vis de la définition des valeurs caractéristiques des fonctions d'appartenance et que le régulateur peut être utilisé pour diverses conditions d'étude. Cette approche est compatible avec l'idée de mettre en place des tirages multiples. D'autre part, cette mise en donnée spécifique autorise l'utilisation des bases modales des composants en contact pour réduire la taille du modèle et garantit des temps de calcul plus faibles vis-à-vis d'un calcul de référence Abaqus.

Toutefois, dans ce mémoire, la méthode n'est présentée que pour des contacts en 2D en statique, où les composants n'admettaient qu'un seul nœud de contact. Le passage à un modèle éléments finis, compatible avec des applications dédiées au freinage, où l'on dispose de quelques centaines de nœuds en contact 3D, nécessite d'améliorer le régulateur et de le rendre plus robuste vis-à-vis de la dynamique observée.

Récemment, les travaux, menés sur le régulateur flou, ont été appliqués à deux autres cas :

- une étude statique pour un corps élastique en contact avec un plan rigide curviligne (FIGURE 3-39), où plusieurs nœuds du corps esclave sont en contact avec la surface du corps maître. Les évolutions des positions des nœuds du corps esclave après contact, calculées avec la méthode FL2C et le logiciel Abaqus, sont présentées FIGURE 3-40.

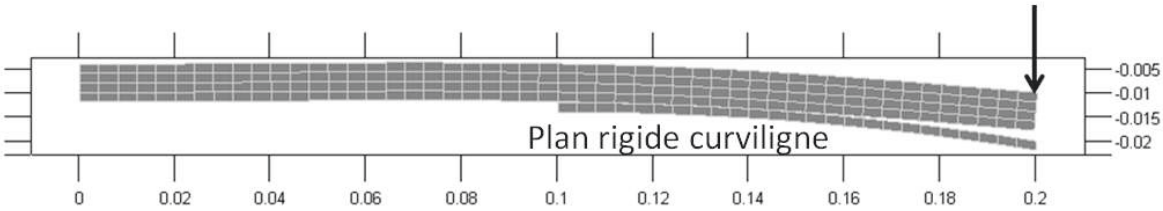


FIGURE 3-39 : Modèle poutre élastique - plan rigide

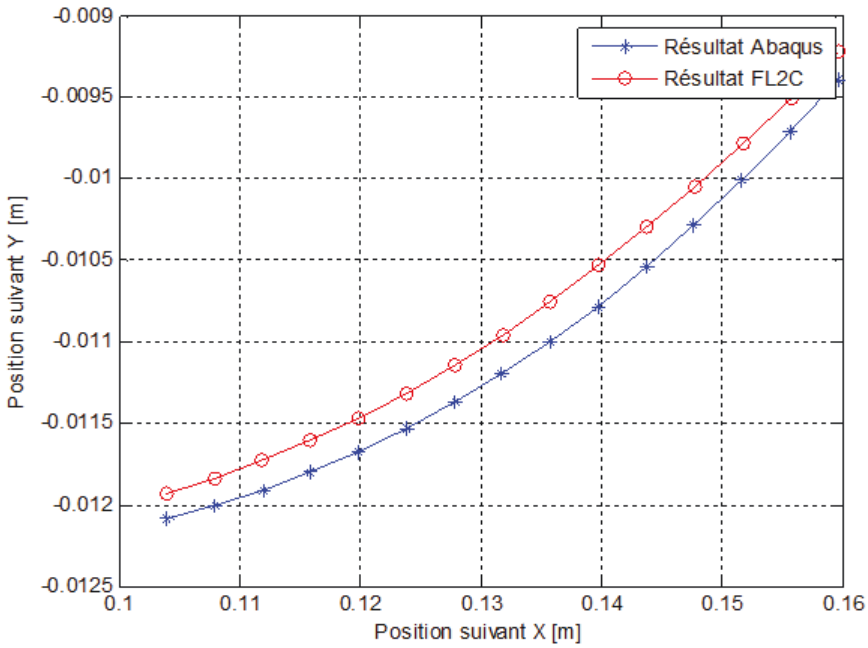


FIGURE 3-40 : Comparaison des positions des nœuds de l'interface après contact

On observe que la nature du comportement est semblable entre les deux méthodes. Toutefois, l'écart observé s'explique par le fait que le gap normal des nœuds en contact après régulation n'est que de 10^{-6} m avec la méthode FL2C. Dans les exemples précédents, le gap normal après convergence était de l'ordre de 10^{-9} m. De plus, cet écart implique que la somme des efforts normaux à l'interface n'est pas identique, à savoir 34828N pour la méthode FL2C et 32368N pour Abaqus.

- une étude dynamique, décrite dans la thèse de Meziane [MEZ07]. Le modèle numérique utilisé est présenté dans le paragraphe 5.1. La FIGURE 3-41 présente l'évolution des efforts normaux et tangentiels ainsi que le coefficient de frottement dynamique, calculés avec la méthode FL2C et le logiciel Abaqus, dans le cas d'un frottement de 0.1. Pour tout l'intervalle d'étude, la convergence concernant le gap normal pour la méthode FL2C est de l'ordre de 10^{-9} m, ce qui est en adéquation avec les résultats obtenus en analyse statique. En termes d'efforts et de coefficient de frottement dynamique, les résultats sont globalement satisfaisants.

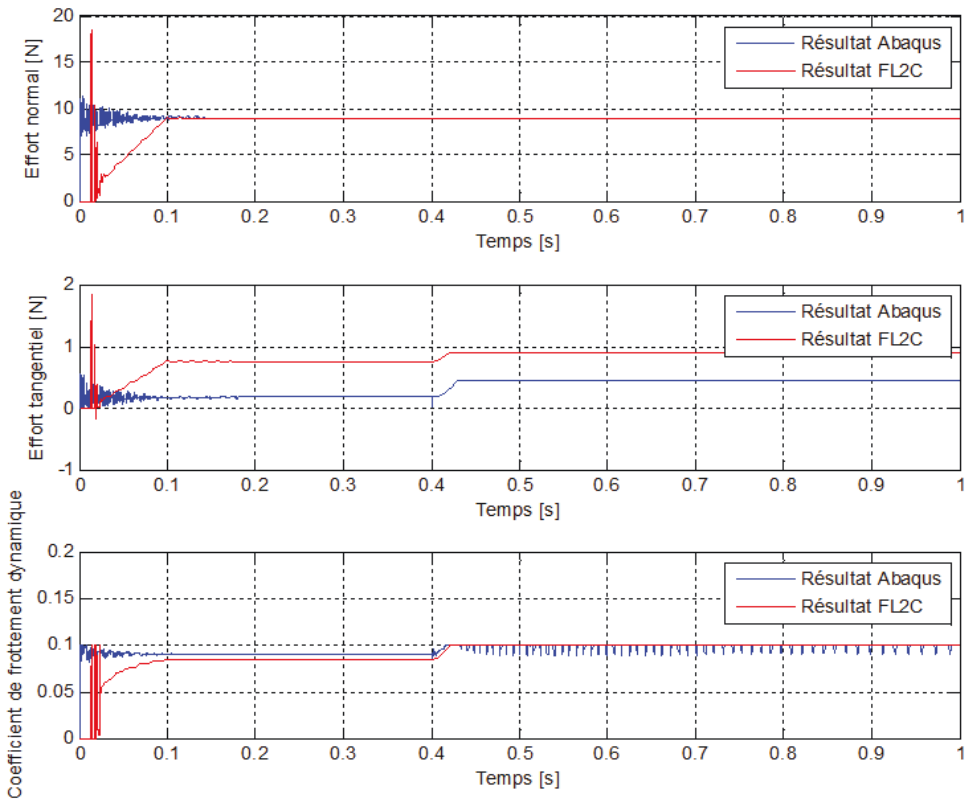


FIGURE 3-41 : Evolution des efforts normaux et tangentiels et du coefficient de frottement dynamique

Ces deux études montrent le potentiel de la méthode FL2C, qu'il faut néanmoins améliorer afin d'assurer la convergence dans le cas d'un problème à plusieurs nœuds de contact. Pour y parvenir, il est nécessaire de travailler sur le régulateur soit en définissant plusieurs variables d'observation floues, soit en développant des approches non linéaires de régulation utilisées dans le domaine de l'automatique. Dans le cadre des analyses dynamiques, il est, là encore, impératif de travailler sur la robustesse du régulateur, pour laquelle la plage d'action doit être étendue pour faire face à une importante dynamique du système.

6. Conclusion

Après avoir proposé un bilan des équations et des techniques de résolution associées au problème de contact avec frottement, ce chapitre a été dédié à la mise en place d'une technique de résolution du problème non-linéaire de contact compatible avec l'idée d'avoir recours ultérieurement à une stratégie de calculs non déterministes. En effet, lorsque l'on manipule des procédures de tirages multiples, il est primordial de pouvoir recalculer une solution perturbée du système étudié à moindre coût, soit en mutualisant les étapes de calcul, soit en exploitant des résultats précédents.

Dans ce chapitre, nous nous sommes focalisés sur la mise en place d'un régulateur basé sur la logique floue. Une stratégie de construction des fonctions d'appartenance associées aux gaps et efforts (normaux et tangentiels) et un ensemble de règles d'inférence permettant de lier les gaps et les efforts de contact ont été proposés. Le moteur d'inférence utilisé est basé sur le fait qu'un nœud du modèle élément finis va se déplacer dans la direction d'application du chargement et que ce déplacement est proportionnel à l'intensité du chargement appliqué. Il est alors possible de mettre en œuvre une régulation qui ramène un nœud à une position souhaitée, c'est-à-dire à la position de contact.

Cette méthodologie a été appliquée dans le cas d'analyses statiques où la zone de contact 2D était principalement réduite à un nœud de contact. Les applications numériques ont mis en exergue la robustesse de la méthode ainsi qu'une bonne précision en termes de gaps, déplacements et efforts. Le régulateur a été couplé à une projection sur les bases modales des différents composants du système afin de réduire la taille du problème ainsi que les temps de calcul vis-à-vis d'un calcul de référence sous Abaqus dans le cas de maillages de taille conséquente.

7. Références bibliographiques

[ABA11] ABAQUS/CAE V6.11., DASSAULT SYSTEMES. (2011). Documentation Collection.

[AGG04] AGGOUNE W., ZAHROUNI H., POTIER-FERRY M. (2004). High-order prediction correction algorithms for unilateral contact problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 168, 19.

[ALA91] ALART P., CURNIER A. (1991). A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92, 353-375.

[AZA11] AZADEGAN A., POROBIC L., GHAZINOORY P., SAMOUEI P., KHEIRKHAH A.S. (2011). Fuzzy logic in manufacturing : A review of literature and a specialized application, International Journal of Production Economics 132, 258-270.

[BAL98] BALMES E. (1998). Structural Dynamic Toolbox for use with Matlab. Distribué par Scientific Software Group., Version 5.0

[BIN11] BINGUL Z., KARAHAN O. (2011). A fuzzy logic controller tuned with PSO for 2 DOF robot trajectory control. Expert Systems with Applications 38, 1017-1031.

[CAI11] CAI S. (2011). Système d'information et d'assistance à la conduite pour la mise en œuvre de la sécurité à bord d'un véhicule. Thèse de Doctorat en Automatique, Université de Technologie belfort-montbéliard.

[CAP03] CAPONETTO R., DIAMANTE O., FARGIONE G., RISITANO A., TRINGALI D. (2003). A soft computing approach to fuzzy sky-hook control of semiactive suspension, IEEE Transactions on Control Systems Technology 11 (6), 786–798.

[CAR02] CARIDI J.P. (2002). Caractérisation des paramètres de frottement à l'origine de phénomènes vibroacoustiques. Application aux bruits de crissement des systèmes de freinage. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[CHA87] CHANG T.Y., SALEEB A.F., SHYU S.C. (1987). Finite element solutions of two-dimensional contact problems based on a consistent mixed formulation. Computers and Structures vol. 27, n° 4, pp. 455-466.

[CHA96] CHAMPANEY L. (1996). Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles. Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

[CHA86] CHAUDHARY A.B., BATHE K.J. (1986). A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. Computers and Structures, 24(6), 855-873.

[CHE95] CHEN J.E., OTTO K.N. (1995). Constructing membership functions using interpolation and measurement theory. Fuzzy Sets and Systems, 73, 313-327.

[COC94a] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M. (1994). Asymptotic numerical method and Padé approximants for non-linear elastic structures, Int. J. Numer Methods Eng., 37, p. 1187-1213.

[COC94b] COCHELIN B. (1994). A path following technique via an asymptotic numerical method, Comput. Struct., 53, p. 1181-1192.

[COC94c] COCHELIN B., DAMIL N., POTIER-FERRY M. (1994). The asymptotic numerical method, an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics, Rev. Eur Eléments Finis, 3, p. 281-297.

[DAM90] DAMIL N., POTIER-FERRY M. (1990). A new method to compute perturbed bifurcations : application to the buckling of imperfect elastic structures. International Journal of Engineering Sciences N9, 28, pp 943-957.

[DEL00] DE LIMA B.S.L.P., EBECKEN N.F.F. (2000). A comparison of models for uncertainty analysis by the finite element method. Finite Element in Analysis and Design, 34, 211-232.

[DEL01] DE LIMA B.S.L.P., TEIXEIRA E.C., EBECKEN N.F.F. (2001). Probabilistic and possibilistic methods for the elastoplastic analysis of soils. Advances in Engineering Software, 32, 569-585.

[DHA84] DHATT G., TOUZOT G. (1984). Une présentation de la Méthode des Éléments Finis 2ème édition.Maloine, Paris.

[DUB80] DUBOIS D., PRADE H. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, Orlando.

[DUV76] DUVAUT G., LIONS J.L. (1976). Inequalities in mechanics and physics, Berlin Springer.

[FAN98] FANG J., SMITH I., ELISHAKOFF I. (1998). Combination of anti-optimisation and fuzzy-set-based analysis for structural optimization under uncertainty. Mathematical Probabilistic Engineering, 4, 187-200.

[FOR83] FORTIN M., GLOWINSKI R. (1983). Augmented Lagrangian methods: application to the numerical solution of boundary-value problems. Studies in Mathematics and its Application, North Holland, Amsterdam.

[HEU11] HEUSSAFF A., TISON T., WATREMEZ M., DUBAR L., FERNANDES NUNES R. (2011). Variabilité du contact dans l'étude du crissement des freins automobiles. 10ème Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France.

[JU88] JU J., TAYLOR R.L. (1988). A perturbed Lagrangian formulation for the element solution of nonlinear frictional contact problems, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Special issue, supplement nu. 1 to vol. 7.

[KLI95] KLIR G.J., YUAN B. (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.

[LOD97] LODWICK W., JAMISON K. (1997). Interval methods and fuzzy optimisation. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 5(3), 239-249.

[MAG06] MAGNIER V., CHARKALUK E., BOUBY C., DE SAXCE G. (2006). Bipotential versus return mapping algorithms : implementation of non-associated flow rules. Proceedings of the eight international conference on Computational Structures Technology. September 12-15, 2006, Las palmas de gran canaria, Espagne.

[MAM74] MAMDAMI E.H. (1974). Applications of fuzzy algorithms for simple dynamic plant, Proc. IEE , 121(12):1585-1588.

[MAM75] MAMDAMI E.H. AND ASSILIAN S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, International Journal of Man-Machine studies 7(1):1-13.

[MAR99] MARTINS J. A. C., BARBARIN S., RAOUS M., PINTO DA COSTA A. (1999). Dynamic stability of finite dimensional linearly elastic systems with unilateral contact

and Coulomb friction, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177, pp. 289 – 328.

[MEZ07] MEZIANE A. (2007). Apport des analyses numériques temporelles et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact -Validation expérimentale-. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[MIR05] MIRZAEI A., MOALLEM M., MIRZAEIAN B., FAHIMI B. (2005). Design of an optimal fuzzy controller for antilock braking systems, in: Proceedings of 2005 IEEE Conference on Vehicle Power and Propulsion, Chicago, IL, USA, (2005), pp. 823–828.

[ODE85] ODEN J.T., MARTINS J.A.C. (1985). Models and computational methods for dynamic friction phenomena. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52, 527-634.

[PER92] PERIC D., OWEN D.R.J. (1992). Computational method for 3D contact problems with friction based on the penalty method. International Journal Methods in Engineering, 28, 1803-1812.

[PIE97] PIETRZAK, G., CURNIER, A. (1997). Continuum mechanics modeling and augmented lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems. Computational Plasticity, Fundamentals and Applications, Barcelona-Spain, march 27-30 1997. Edited by D.R.J. Owen, E. Onate and E.Hinton. Barcelona: CIMNE, 1997. pp. 878-883.

[RAO99a] RAOUS M. (1999). Modèles constitutifs pour le contact et le frottement. Ecoles CEA-EDF-INRIA, Problèmes non linéaires appliqués, Modélisation mathématique et numérique des problèmes de contact et de frottement. INRIA Rocquencourt.

[RAO99b] RAOUS M., CANGÉMI L., COCOU M. (1999). A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177, pp. 383 - 399.

[REN05] RENOUF M., ALART P. (2005). Conjugate gradient type algorithms for frictional multicontact problems : applications to granular materials, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 194, 2019–2041.

[RUF08] RUFFIN-MOURIER K. (2008). Réponse dynamique de structures mécaniques à paramètres imprécis. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[SAX98] DE SAXCÉ G. (1998). The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. Mathematical and computer modelling, 28(4-8), 225–245.

[SHA10] SHARKAWY A.B. (2010). Genetic fuzzy self-tuning PID controllers for antilock braking systems. Engineering Applications of Artificial Intelligence 23, 1041-1052.

[SIG59] SIGNORINI A. (1959). Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata (Issues in non linear and semilinear elasticity). Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 18: 95-139.

[SIM85] SIMO J.C., WRIGGERS P., TAYLOR R.L. (1985). A perturbed Langrangian formulation for the finite element solution of contact problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50, 163-180.

[SIM92] SIMO J.C., LAURSEN T.A. (1992). An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. Computers and Structures, 42(1) :97–116.

[SOL12b] SOLANO MARTINEZ J. (2012). Modélisation et supervision des flux énergétiques à bord d'un véhicule hybride lourd : approche par logique floue de type-2. Thèse de Doctorat en Sciences pour l'Ingénieur, Université de Franche-Comté.

[SOL12a] SOLEYMANI M., MONTAZERI-GH M., AMIRYAN R. (2012). Adaptive fuzzy controller for vehicle active suspension system based on traffic conditions. Scienta Iranica, doi:10.1016/j.scient.2012.03.002.

[VAL93] VALLIAPPAN S., PHAM T.D. (1993). Constructing the membership function of a fuzzy set with objective and subjective information. Microcomputer in Civil Engineering, 38, 531-548.

[VER94] VERPAUX P. et CHARRAS T. (1994). Les contacts unilatéraux dans CASTEM 2000. Rapport DMT94-662, CEA, 1994.

[VER11] VERMOT DES ROCHES G. (2011). Frequency and time simulation of squeal instabilities – Application to the design of industrial automotive brakes. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris.

[WEY11] WEYLER R., OLIVER J., SAIN T., CANTE J.C., (2011). On the Contact Domain Method : A Comparison of Penalty and Lagrange Multiplier Implementations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.

[WRI85] WRIGGERS P., SIMO J.C. (1985). A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. Communications in Applied Numerical Methods, 1985, vol.1, pp. 199-203.

[WRI90] WRIGGERS P., VU VAN T., STEIN E. (1990). Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. Computers & Sructures 37, 3, 319-331.

[ZAD75a] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part I. Information Sciences, 8, 199-249.

[ZAD75b] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part II. Information Sciences, 8, 301-357.

[ZAD75c] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part III. Information Sciences, 9, 43-80.

[ZHA06] ZHAO Z., YU Z., SUN Z. (2006). Research on fuzzy road surface identification and logic control for anti-lock braking system, in: Proceedings of International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES 2006), Shanghai, China, (2006), pp. 380–387.

[ZIE94] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L. (1994). The Finite Element Method, fourth edition. McGraw-Hill Book Company.

Chapitre 4 :
Gestion des imprécisions en analyse de stabilité de type fréquentielle

1. Introduction 141

2. Analyse de stabilité de type fréquentielle 142

2.1. Mise en donnée du problème 142
2.2. Résolution du système aux valeurs propres généralisées 144
2.3. Théorème de Lyapunov 145

3. Imperfections en ingénierie mécanique 146

3.1. Approches probabilistes 146
3.2. Approches par sous-ensembles flous 150

4. Méthodologie adoptée 156

4.1. Propagation des incertitudes par optimisation 156
4.2. Analyse paramétrique 158
4.3. Réanalyse de la base modale 164

5. Applications numériques 167

5.1. Etude déterministe 167
5.2. Etude non-déterministe 169

6. Conclusion 173

7. Références bibliographiques 173

1. Introduction

Les vibrations induites par le frottement, observées dans le domaine des transports tels que l'automobile, le ferroviaire et l'aéronautique, suscitent actuellement de nombreux travaux de recherche [CHE09, SIN10, VER11, LOY11, HEU12]. En effet, l'analyse et la compréhension des phénomènes mécaniques qui leurs sont associés, est primordiale afin de maîtriser les conséquences qui peuvent être néfastes pour l'environnement ou le système d'intérêt (pollution acoustique, perte d'efficacité, endommagement). Pour les étudier, il est courant d'avoir recours à des analyses de stabilité de type fréquentielle, où l'analyse correspond à une linéarisation autour d'une position statique obtenue par la résolution d'un problème non linéaire. Les conditions de stabilité du système sont alors étudiées à partir de la résolution du problème aux valeurs propres.

Bien que de nombreux paramètres de définition des systèmes, observés expérimentalement, soient de nature variable, les analyses effectuées restent généralement déterministes. L'enrichissement des simulations par la prise en compte des imperfections est donc un verrou scientifique actuel compte tenu de la complexité du problème à résoudre, à savoir un problème non linéaire de type contact couplé à une analyse aux valeurs propres. En particulier, il est essentiel de caractériser avec précision l'ensemble des évolutions de comportement pour éviter tout problème de conservatisme des solutions et ceci dans des temps compatibles avec une phase de conception.

Ce chapitre est consacré à la propagation des imperfections paramétriques, définies au niveau du modèle éléments finis, dans le cadre d'une analyse de stabilité de type fréquentielle. Le problème de contact frottant est ici appliqué en deux dimensions. La procédure proposée repose sur :

- une modélisation ensembliste des imperfections en utilisant la théorie des sous-ensembles flous [MAS06, MAS08a] ;
- les développements, présentés dans le troisième chapitre, pour le calcul de la position d'équilibre issue d'une analyse statique non linéaire ;
- l'extension d'une méthodologie de propagation, présentée dans la cadre de problèmes linéaires [MAS08a, MAS09], basée sur la définition d'un problème d'optimisation min-max ;

- une technique de réanalyse des bases modales des composants du système étudié.

Après avoir rappelé les équations associées à l'analyse de stabilité de type fréquentielle et établi un état de l'art des principales méthodes de propagation des incertitudes dans les deux premiers paragraphes, on se focalise dans le troisième paragraphe sur la méthodologie retenue. Tout d'abord, à partir de surfaces de réponse caractéristiques des quantités d'intérêt, on montre comment la méthodologie, déjà appliquée pour des problèmes linéaires [RUF08], peut être exploitée. Une technique de réanalyse, basée sur un développement homotopique et une projection, est ensuite proposée pour limiter les temps de calcul associés à la détermination des bases modales utiles à la projection. Enfin, dans le dernier paragraphe, la méthodologie est appliquée sur un système académique issu des travaux de Meziane [MEZ07].

2. Analyse de stabilité de type fréquentielle

Compte tenu des développements effectués dans le troisième chapitre sur l'analyse statique non linéaire et les travaux antérieurs de l'équipe sur la propagation des incertitudes en analyse modale et en réponse en fréquences, on s'intéresse à l'analyse de stabilité de type fréquentielle, dont les fondements sont rappelés dans la suite de cette partie.

2.1. Mise en donnée du problème

Du fait des non-linéarités induites par le contact unilatéral, la stabilité est restreinte aux perturbations préservant l'état de contact. Ce sont des perturbations, dites glissantes, qui n'admettent aucun déplacement relatif dans la zone de contact effective, notée Γ_c^e et correspondant à la surface de contact Γ_c où le contact est vérifié. Les équations de mouvement sont ainsi écrites pour un équilibre glissant du système et les déplacements u sont divisés en un déplacement nodal du système à un état d'équilibre glissant stable u^e et à un état d'équilibre glissant perturbé $\hat{u}$.

$$(u, r_c)=(u^e + \hat{u}, r^e + \hat{r}) \qquad \text{Eq. 4-1}$$

En considérant les conditions limites constantes dans le temps, la solution quasi-statique (u^e, r^e) est définie par :

$$\begin{cases} \int_\Omega \dot{\varepsilon}^* \mathcal{D} \varepsilon^e \, d\Omega = \int_{\Gamma_F} \dot{u}^* . F_d d\Gamma + \int_{\Gamma_c^e} \dot{u}^* . r^e d\Gamma, \forall \dot{u}^* \in C^0 \\ u_n^e \leq 0 \\ r_n^e \leq 0 \; et \; r_t^e = -\mu r_n^e \frac{V_t}{\|V_t\|} = -\mu r_n^e t^e \\ u_n^e r_n^e = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 4-2}$$

avec ε^e et ε^* les gradients symétriques de u^e et u^*, $\mathcal{D}$ le tenseur d'élasticité, F_d les forces de surface, u_n^e le déplacement normal effectif, r_n^e et r_t^e respectivement les réactions de contact normales et tangentielles, V_t la vitesse de glissement Eulérienne et $C = \{u \mid u = U_d \; sur \; \Gamma_U\}$ et $C_0 = \{u \in C \mid u = 0 \; sur \; \Gamma_U\}$.

Soit une base locale (n, t^e, b) sur Γ_c^e avec n la normale sortante et t^e la direction de glissement telles que $t^e = \frac{V_t}{\|V_t\|}$ et $b = n \wedge t^e$, les solutions du problème dynamique sont de la forme (u, r_c)=$(u^e + \hat{u}, r^e + \hat{r})$ avec $(\hat{u}, \hat{r})$ la perturbation glissante harmonique telle que $(\hat{u}, \hat{r})$=$\left(\hat{u}_0 exp(\lambda t), \hat{r}_0 exp(\lambda t)\right)$.

On obtient le système quadratique aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} trouver \; \hat{u}_0 \in \mathrm{C}, \hat{r}_0 \in \mathrm{C}^0 et \; \lambda \in \mathbb{R} \; tels \; que \; \forall \dot{u}^* \in U^0 \\ \lambda^2 M(\hat{u}_0, \dot{u}^*) + \lambda \hat{C}(\hat{u}_0, \dot{u}^*) + K(\hat{u}_0, \dot{u}^*) = \int_{\Gamma_c^e} \hat{r}_{n0} \dot{\mathrm{u}}^* (n - \mu_\mathrm{e} t^e) \mathrm{d}\Gamma \\ \hat{u}_0 n = 0 \; sur \; \Gamma_c^e \\ \hat{C}(\hat{u}_0, u^*) = C(\hat{u}_0, u^*) - \int_{\Gamma_c^e} \mu \frac{r_n^e}{\|V_t\|} \hat{u}_{0b} u_b^* d\Gamma \end{cases} \quad \text{Eq. 4-3}$$

Le système peut alors être reformulé en déplacements :

$$\begin{cases} trouver \; \hat{u}_0 \in \mathcal{W}^0 \; et \; \lambda \in \mathbb{C} \; tels \; que \; \forall \dot{u}^* \in \mathcal{W}^\mu \\ \lambda^2 M(\hat{u}_0, \dot{u}^*) + \lambda \hat{C}(\hat{u}_0, \dot{u}^*) + K(\hat{u}_0, \dot{u}^*) = 0 \\ \mathcal{W}^0 = \{u, u.n = 0 \; sur \; \Gamma_c^e\} \\ \mathcal{W}^\mu = \{\mathrm{u}, \mathrm{u}.(\mathrm{n} - \mu \mathrm{t}) = 0 \; \mathrm{sur} \; \Gamma_c^e\} \end{cases} \quad \text{Eq. 4-4}$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres quadratique non-symétrique. La discrétisation en éléments finis permet d'obtenir des matrices de masse, de rigidité et d'amortissement non symétriques $\widetilde{M}$, $\widetilde{K}$ et $\tilde{C}$ à partir des matrices éléments finis classiques M, K et C. Les matrices T^N et T^μ sont respectivement les bases des champs orthogonaux à la normale de contact et à la direction $(n - \mu t)$ de l'interface de contact.

Les valeurs propres quadratiques correspondent donc au système d'équations suivant :

$$\left(\lambda_j^2 \widetilde{M} + \lambda_j \tilde{C} + \widetilde{K}\right) \psi_\mathrm{j} = 0 \quad \text{Eq. 4-5}$$

$$\left(\widetilde{M}, \tilde{C}, \widetilde{K}\right) = T^{\mu T}(M, C, K) T^N \quad \text{Eq. 4-6}$$

$$\tilde{C} = C - \mu {P_B}^T D P_B \quad \text{Eq. 4-7}$$

$$D_{ii} = \left(\frac{r_n^e}{\|V_t\|}\right)_i \quad \text{Eq. 4-8}$$

avec λ_j et ψ_j les $j^{ème}$ valeurs propres et vecteurs propres, $[T^N]$ et $[T^\mu]$ les relations de contraintes à l'interface de contact associées respectivement aux espaces $\mathcal{W}^0$ et $\mathcal{W}^\mu$, V_t la norme de la vitesse de glissement à chaque nœud et $[P_B]$ la matrice de projection suivant la direction b.

Le système linéarisé du problème aux valeurs propres généralisé est alors :

$$\left(\tilde{B} + \lambda_v \tilde{A}\right) Z_v = 0 \quad \text{Eq. 4-9}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & 0 \end{bmatrix} et\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{K} & 0 \\ 0 & -\tilde{M} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 4-10}$$

où λ_v et Z_v sont les $v^{ème}$ valeurs propres et modes propres dans l'espace d'état.

2.2. Résolution du système aux valeurs propres généralisées

Plusieurs solveurs, tels que le solveur QZ, existent pour résoudre ce type de problème mais ils sont généralement coûteux en temps de calcul et non opérationnels pour résoudre des problèmes à quelques milliers de degrés de liberté. Dans le cas présent, on préfère utiliser la méthode d'itération sur les résidus développée par Bobillot et Balmes [BOB02], [BOB06]. Ce solveur partiel permet de calculer les n premiers modes propres du problème en utilisant une base de projection composée des résidus en déplacement.

On définit les vecteurs propres approchés par l'expression suivante :

$$\tilde{\psi}_j = T \psi_{jR} \quad \text{Eq. 4-11}$$

avec ψ_R la solution du problème réduit, T un sous-espace engendré par les vecteurs colonnes d'une matrice rectangulaire, définie avec les modes propres réels du système couplé étudié. L'Equation 4-5 devient donc :

$$T^T(\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K)T\psi_{jR} = 0 \quad \text{Eq. 4-12}$$

avec M, C et K respectivement les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système.

Le résidu en effort non nul, de par l'approximation effectuée, est calculé comme suit :

$$R_{Lj} = (\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K)\tilde{\psi}_j \quad \text{Eq. 4-13}$$

Afin d'obtenir un indicateur d'erreur en énergie sur les modes approchés, le résidu en déplacement est calculé à partir du résidu en effort et d'un opérateur $\widehat{K}$:

$$R_{Dj} = \widehat{K}^{-1} R_{Lj} \quad \text{Eq. 4-14}$$

avec l'indicateur d'erreur en énergie du mode j exprimé par :

$$\varepsilon_j = \frac{\|R_{Dj}\|}{\|\tilde{\psi}_j\|_K} \quad \text{Eq. 4-15}$$

$$\|R_{Dj}\| = max_{v_r^2+v_i^2=1} \|v_r Re(R_{Dj}) + v_i Im(R_{Dj})\|_K \quad \text{Eq. 4-16}$$

avec $\|x\|_K = x^T K_0 x$ avec K_0 matrice symétrique définie positive.

Si l'erreur $\epsilon > Tol$, on augmente la dimension du sous-espace de recherche en ajoutant à la base T le résidu en déplacement associé. Puis on recommence l'opération en construisant un nouveau problème réduit.

2.3. Théorème de Lyapunov

D'après le théorème de Lyapunov, une position d'équilibre est stable si et seulement si la solution du problème dynamique, initialement en position d'équilibre légèrement perturbée, reste suffisamment proche de cette position au cours du temps. On parle aussi d'équilibre asymptotiquement stable si à l'infini la solution dynamique tend vers la position d'équilibre.

Pour étudier la stabilité, on se focalise sur la partie réelle (Re) et imaginaire (Im) des valeurs propres (λ_v) de l'Equation 4-9 :

- si Re(λ_v) < 0 pour tout v, l'équilibre considéré est asymptotiquement stable ;
- si Re(λ_v) > 0, l'équilibre considéré est instable ;
- si Re(λ_v) $\leq$ 0 pour tout v, et s'il existe v tel que $Re(\lambda_v) = 0$ alors il n'est pas possible de conclure.

Lors d'un équilibre instable, on différencie deux types d'instabilités :

- par divergence : s'il existe v tel que Re(λ_v) > 0 et que Im(λ_v) = 0 alors un mouvement perturbé s'amplifiera sans oscillations.
- par flottement : s'il existe v tel que Re(λ_v) > 0 et que Im(λ_v) $\neq$ 0 alors une petite perturbation entraînera un mouvement perturbé s'amplifiant autour d'un

mode associé. Ce mouvement sera alors oscillant avec une amplitude croissante.

Ainsi, parmi les valeurs propres solutions de l'Equation 4-9, celles qui ont une partie réelle positive correspondent aux modes instables. Le taux de divergence d'un mode associé à la valeur propre λ est défini par le ratio $2\frac{Re(\lambda_v)}{Im(\lambda_v)}$, appelé taux d'amortissement négatif.

3. Imperfections en ingénierie mécanique

Pour gérer les incertitudes des applications d'ingénierie, plusieurs théories et approches non déterministes ont déjà été mises en œuvre, à savoir l'analyse probabiliste, par intervalle, par ensemble flou, convexe [BEN90, ELI94, BEN94, BEN95], les méconnaissances [PUE04], Dempster Shafer [DEM68, SHA76]. Dans ce paragraphe, on focalise uniquement l'état de l'art sur les approches probabilistes, les plus connues et nombreuses dans la littérature et en industrie, et les approches ensemblistes, de type intervalle et ensemble flou, utilisées depuis plusieurs années dans l'équipe Crash, Confort et Sécurité du LAMIH.

3.1. Approches probabilistes

Introduite à partir du XVII^{e} siècle, la théorie des probabilités constitue une référence pour la propagation des incertitudes et a acquis une grande popularité. Les incertitudes sont alors modélisées soit par des champs aléatoires s'il existe une variation des propriétés spatiales du modèle, soit par des variables aléatoires, quand l'incertitude est localisée sur des paramètres physiques. La construction des distributions de probabilités (FIGURE 4-1), associées à chaque variable aléatoire, requiert une étude statistique des données mesurées à partir d'essais, d'observations ou de jugements d'experts.

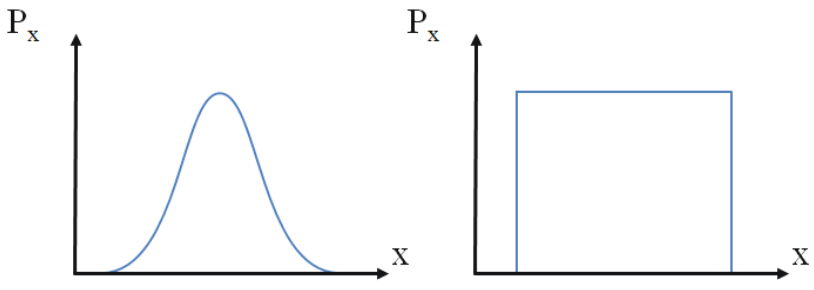


FIGURE 4-1 : Exemples de lois de probabilités : (a) loi gaussienne, (b) loi uniforme

Les méthodes de propagation des incertitudes probabilistes, utilisées en ingénierie mécanique, peuvent être classées en deux catégories, à savoir paramétriques et non-paramétriques.

3.1.1. Méthodes paramétriques

Les méthodes paramétriques, comme leur nom l'indique, permettent de prendre en compte des incertitudes sur les paramètres du modèle et sont généralement classées, selon Sudret [SUD07], en trois catégories selon le type de solutions recherchées (FIGURE 4-2) :

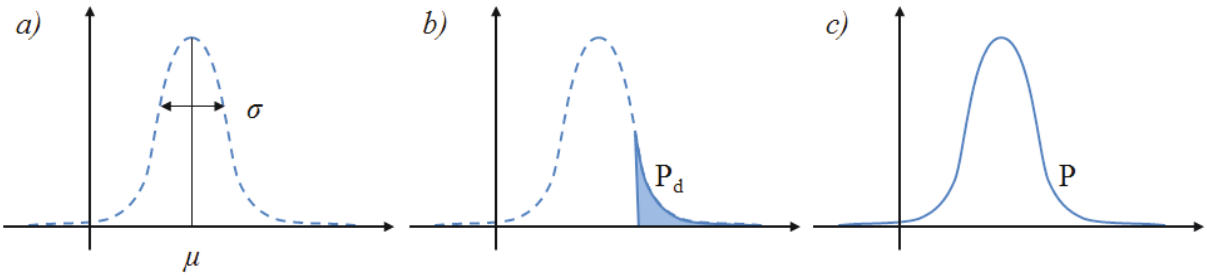


FIGURE 4-2 : (a) Résultats accessibles par les méthodes des deux moments statistiques, (b) par les méthodes de fiabilité, (c) par les méthodes spectrales

- **les méthodes des moments statistiques**, qui permettent de déterminer, en général, les deux premiers moments, à savoir la moyenne et l'écart-type, utiles pour la construction des fonctions de distribution. La méthode de simulations de Monte Carlo [SHI72, VAN95] est la plus connue, la plus générale et la plus facile à mettre en œuvre pour traiter les problèmes avec incertitudes. Elle repose sur un échantillonnage aléatoire et important des variables d'entrée, puis sur des calculs déterministes, standards et robustes, associés à chaque combinaison de paramètres générée. Cette méthode est généralement prise comme référence pour évaluer le potentiel des autres méthodes, puisqu'elle est non intrusive, indépendante de la taille du problème et présente des garanties en terme de convergence. En effet, compte tenu de son coût de calcul prohibitif lorsque le nombre de paramètres incertains augmente, cette méthode n'est pas directement applicable pour des problèmes industriels en mécanique. Pour palier à cet inconvénient majeur, différentes améliorations ont été proposées comme :
    - la parallélisation où il est possible d'effectuer les simulations sur différents ordinateurs/processeurs simultanément [JOH97, PAP99,

JOH03] étant donné que chaque calcul déterministe est indépendant des autres ;

- la réduction de variance, qui permet d'accélérer la convergence en augmentant la densité de réalisations dans les zones d'intérêt [WAN01] ;
- le choix de l'échantillonnage dont le but est de guider les procédures de simulation vers des zones intéressantes afin de couvrir la plus grande partie du domaine en limitant les coûts (Latin hypercube sampling [HEL03], Importance sampling combiné avec le Latin hypercube sampling [CAM02]…) ;
- les méta-modèles où le calcul déterministe est remplacé par une approximation moins coûteuse en temps de calcul. Par exemple, les surfaces de réponse, utilisées par [GAY03, LEW06], ont été mises en place pour réduire la taille des modèles grâce à des interpolations à partir d'un échantillon effectué au préalable. Les temps de calcul sont ainsi réduits ;
- les analyses de sensibilité, menées de manière à ne conserver que les paramètres influents utiles lors de la construction du méta-modèle et qui permettent ainsi de réduire la dimension du problème d'un point de vue nombre de paramètre ;

Pour réduire significativement les temps de calcul des simulations de Monte Carlo, on distingue plusieurs techniques de résolution dont le développement en série de Taylor, la méthode de perturbation et le développement en série de Neumann [BEN98a, CHA98, VAN02, FAL02, VAN03, FAL05] ;

- **les méthodes de fiabilité** qui sont associées à l'étude des événements rares et permettent de définir la probabilité qu'un système remplisse ses fonctions durant un laps de temps déterminé et sous des conditions environnementales spécifiques. Ces méthodes génèrent un indice de fiabilité avec une estimation de la probabilité de défaillance P_d. Un état de l'art des méthodes est proposé par Papadopoulos et Papadrakakis [PAP98a] ;

- **les méthodes spectrales**, où la Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux (MEFS), proposée par Ghanem [GHA91], qui se propose de représenter de façon intrinsèque la réponse d'un modèle mécanique ayant des paramètres stochastiques en utilisant des concepts mathématiques tels que théorème de Karhunen-Loève ou le chaos polynômial. On peut citer, par exemple, les travaux de Blanzé et Champaney [BLA04] qui exploitent la rapidité de la méthode LATIN pour la construction d'une surface de réponse d'un assemblage de contact frottant et dans un deuxième temps, avec une extension de la MEFS pour des assemblages collés. La raideur, le coefficient de frottement, les jeux… sont considérés aléatoires et décomposés dans une base de type chaos polynomial afin de déterminer les données statistiques de la réponse. Nechak et al [NEC11a, NEC11b, NEC12] ont analysé la robustesse de systèmes non-linéaires frottants avec incertitudes probabilistes au niveau des lois de frottement, appliqués au freinage. Dans le cas présent,

Dans ces trois catégories, on distingue aussi deux sous-catégories :

- les **méthodes dites intrusives**, qui exploitent les équations et schémas de résolution classiques (déterministes), couplées à un ensemble de tirages aléatoires ;
- les **méthodes dites non-intrusives** pour lesquelles il est nécessaire de reformuler le problème traité et de modifier les codes de simulation.

3.1.2. Méthodes non-paramétriques

Les méthodes non paramétriques permettent de prendre en compte simultanément les deux types d'incertitudes, paramétriques et de modélisation [SOI00, SOI01, SOI05a, SOI05b]. Par exemple, certaines zones de systèmes complexes, comme les liaisons, sont idéalisées. Elles sont donc mal représentées et le comportement ne correspond pas tout à fait à la réalité. Dans la référence [SOI05a, SOI05b], Soize récapitule les concepts et outils et présente un exemple en élastodynamique. Capiez-Lernout [CAP03] a appliqué ces développements pour l'étude de la réponse forcée d'aubes désaccordées, où les incertitudes non-paramétriques portent sur la modélisation du désaccordage. Kassem [KAS09], quant à lui, a utilisé la méthode non-paramétrique sur un modèle vibroacoustique dans le domaine de l'automobile.

En conclusion de ce paragraphe, il est important de retenir que les méthodes probabilistes, précédemment décrites, reposent sur une étude statistique des données mesurées de manière à définir les lois de probabilité avec précision. Récemment, dans le cadre de l'étude des instabilités, Heussaff et al. [HEU12] ont modélisé par des champs aléatoires les variabilités observées sur les surfaces de frottement des plaquettes de frein. A partir de relevés sur des échantillons de plaquettes ayant subi des cycles de freinage différents, ils ont identifié les variabilités topographiques telles que la forme, la rugosité et l'ondulation de la surface à différents points de la plaquette, de façon à construire des familles de profils de plaquettes caractéristiques d'une production et de types d'usure. L'analyse de stabilité est ensuite réalisée à partir d'une méthode paramétrique non intrusive, qui est dans le cas présent, un plan d'expériences de type Latin Hypercube.

Par manque de données statistiques, il est difficile, en début de phase de conception, de construire de façon objective les données probabilistes. Il est alors fréquent de définir les données incertaines par des lois uniformes englobant l'ensemble des évolutions de paramètres et basées sur le principe du maximum d'entropie.

3.2. Approches par sous-ensembles flous

La théorie des sous-ensembles flous a été introduite à partir de l'idée d'appartenance partielle à une classe, de catégorie aux limites mal définies ou de gradualité dans le passage d'une situation à une autre. Zadeh décrit un sous-ensemble flou comme une collection, telle que l'appartenance d'un élément quelconque à cette collection peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1. Cette théorie, perçue comme une extension de la théorie des ensembles classiques, a pour but de traiter des données imprécises (connaissances mal connues), vagues (connaissances mal définies, difficilement quantifiables) ou définies de façon linguistique (jugement humain).

3.2.1. Principe d'Extension

Le Principe d'Extension, proposé par Zadeh [ZAD75a, ZAD75b, ZAD75c] permet, au travers d'une application connue et continue, de relier deux sous-ensembles flous et s'exprime comme suit :

Soit une application φ d'un premier ensemble de référence X vers un second ensemble de référence Y, éventuellement identique au premier. Le Principe d'Extension permet de définir un sous-ensemble flou B de Y image par φ d'un sous-ensemble flou A de X, tel que :

$$\begin{cases} \forall y \in Y \\ \mu_B(y) = sup_{[x \in X / y=\varphi(x)]} \mu_A(x) \; si \; \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \mu_B(y) = 0 \; si \; \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad \text{Eq. 4-19}$$

En particulier, si X est le produit cartésien des ensembles de référence X_1, X_2,…, X_n, sur lesquels sont définis des sous-ensembles flous A_1, A_2,…, A_n, la caractérisation floue sur Y de la fonction d'appartenance s'exprime comme suit :

En posant $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\mu_B(y) = sup_{[x \in X / y=\varphi(x)]} min\left(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \ldots, \mu_A(x_n)\right) si \; \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \quad \text{Eq. 4-20}$$

Pour être appliqué dans un contexte d'ingénierie, ce Principe d'Extension requiert une discrétisation des fonctions d'appartenance.

3.2.2. Discrétisation des fonctions d'appartenance

Chaque fonction d'appartenance, définie dans le chapitre 3 (FIGURES 3-5 à 3-7), peut être discrétisée :

- suivant le support (FIGURE 4-3), ce qui permet de définir un ensemble de valeurs x_i comprises entre $\underline{x}^0$et $\overline{x}^0$ pour lequel un niveau de confiance a_i est associé. Ces données sont généralement utilisées dans l'approche de type combinatoire ;

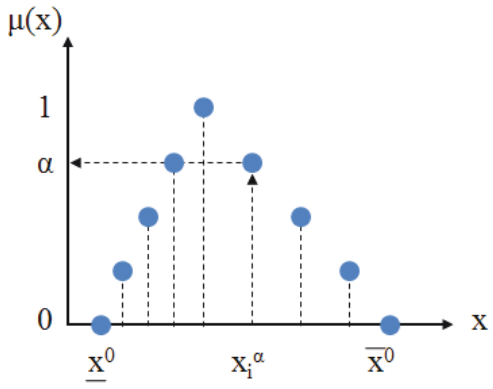


FIGURE 4-3 : Discrétisation du nombre flou $\tilde{X}$ suivant le support

- suivant la hauteur ou le degré d'appartenance (FIGURE 4-4), ce qui engendre un ensemble d'intervalles $\left[\underline{x}_i; \overline{x}_i\right]$ pour lesquels un niveau de confiance est associé.

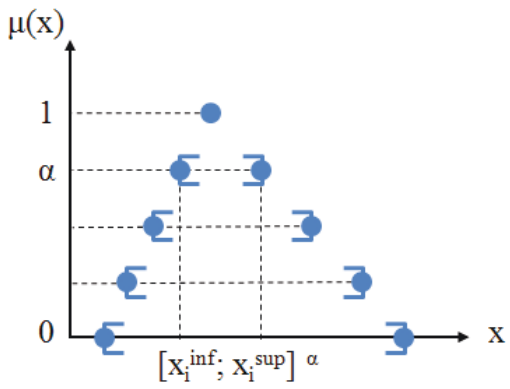


FIGURE 4-4 : Discrétisation du nombre flou $\tilde{X}$ suivant la hauteur

Chaque intervalle est défini par ses bornes inférieure et supérieure (Equation 4-17) ou par sa valeur centre et ses variations (Equation 4-18).

$$\tilde{x}^{\alpha} = \left[\underline{x}^{\alpha}; \overline{x}^{\alpha}\right] \qquad \text{Eq. 4-17}$$

$$\tilde{x}^{\alpha} = \left[x_c - \Delta\underline{x}^{\alpha}; x_c + \Delta\overline{x}^{\alpha}\right] \qquad \text{Eq. 4-18}$$

Le problème avec ensembles flous se transforme donc, pour chaque α-coupure, en un problème par intervalles. Les intervalles résultats sont alors calculés en utilisant l'arithmétique des intervalles, des techniques de perturbation ou d'optimisation ou encore en exploitant simplement les bornes des intervalles des paramètres dans une approche combinatoire.

La qualité de la solution, d'un point de vue forme de la fonction d'appartenance, dépend directement du nombre de valeurs prises pour discrétiser un nombre flou. L'utilisation de la norme triangulaire (*T-min norm*) [MOE05] rend les deux discrétisations équivalentes pour le calcul des fonctions d'appartenance solutions.

3.2.3. Implémentation du Principe d'Extension

Après avoir discrétisé les fonctions d'appartenance des paramètres flous, le Principe d'Extension conduit à mettre en place un plan d'expériences complet multi-facteurs et multi-niveaux. La FIGURE 4-5 présente un exemple de fonction d'appartenance obtenue pour la division entre deux nombres flous. L'ensemble des solutions calculées pour toutes les combinaisons est représenté ainsi que la fonction d'appartenance après traitement.

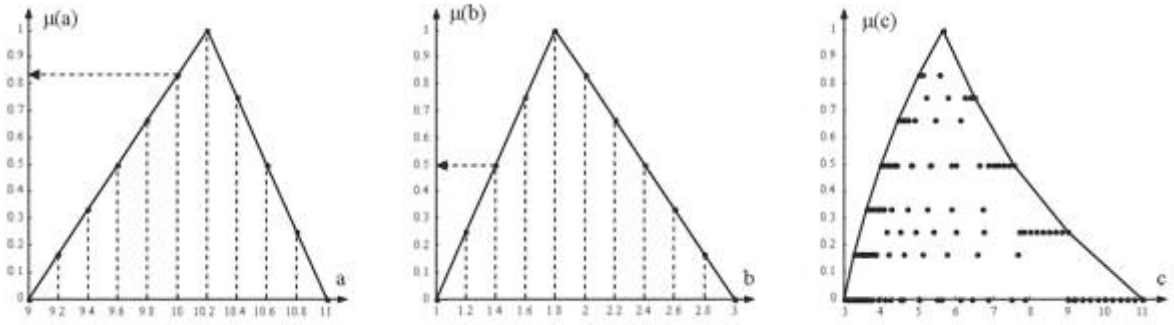


FIGURE 4-5 : Représentation de la division $\widetilde{a} \div \widetilde{b} = \widetilde{c}$ par le Principe d'Extension avec une discrétisation du support : (•) valeurs calculées et (_) fonction d'appartenance

Cette technique est très simple à mettre en œuvre car elle n'utilise qu'une succession de calculs déterministes mais elle devient très coûteuse en temps de calcul lorsque le nombre de paramètres flous est trop important. La FIGURE 4-6 présente une interprétation géométrique de cette méthode pour deux paramètres imprécis.

A l'instar des simulations de Monte Carlo, l'implémentation du Principe d'Extension, appelée General Transformation Method dans plusieurs articles [HAN02, DON05], constitue généralement une référence, parmi les méthodes non intrusives, afin de tester l'efficacité des méthodes proposées, puisqu'elle ne peut être appliquée dans cet état en contexte industriel. Pour réduire les temps de calcul, plusieurs développements ont été proposés et sont applicables pour des comportements spécifiques définis à priori (linéaire, quadratique, monotone), à savoir la méthode du Vertex [OTT93] ou Reduced Transformation Method [HAN02], l'Extended Transformation Method [HAN03] et la Short Transformation Method [DON05].

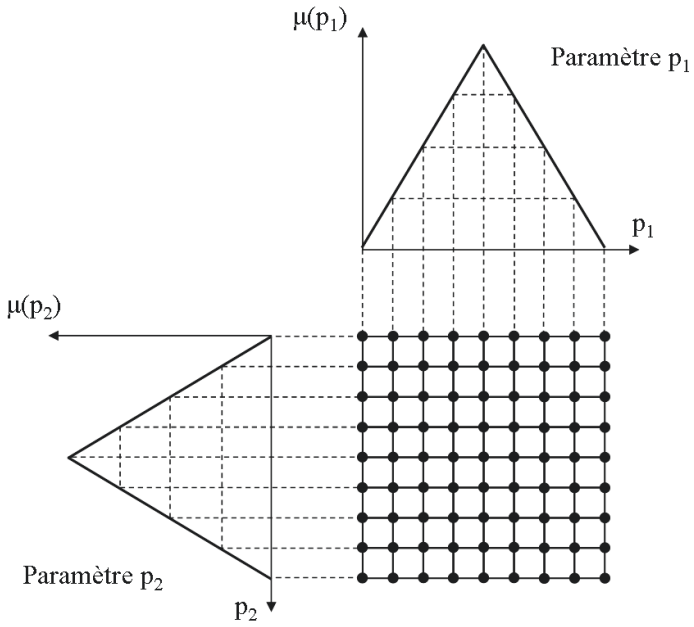


FIGURE 4-6 : Interprétation géométrique du Principe d'Extension avec une discrétisation en *α*-coupures, pour deux paramètres imprécis

3.2.4. Méthode des éléments finis et paramètres flous

Au cours de ces dernières années, le couplage entre la méthode des éléments finis et la théorie des sous-ensembles flous a vu, à l'instar des éléments finis stochastiques, l'essor de la «méthode des éléments finis flous». Des travaux effectués selon une complexité croissante dans différents domaines d'application ont permis le développement des nouvelles méthodes de résolution non déterministes.

L'utilisation du formalisme flou dans les problèmes d'ingénierie mécanique n'est pas immédiate, puisque les équations considérées font appel à des opérations complexes, qui ne sont pas définies dans l'arithmétique de base de cette théorie (addition, soustraction, multiplication, …). Les méthodes de propagation, de nature intrusives, reposent sur une discrétisation suivant la hauteur des fonctions d'appartenance. Le problème à paramètres flous se transforme donc en une succession de problèmes à intervalles (FIGURE 4-7). Le calcul avec les nombres flous généralise donc celui des nombres réels et des intervalles [DUB80, KAU88, BOU94, ZAL00].

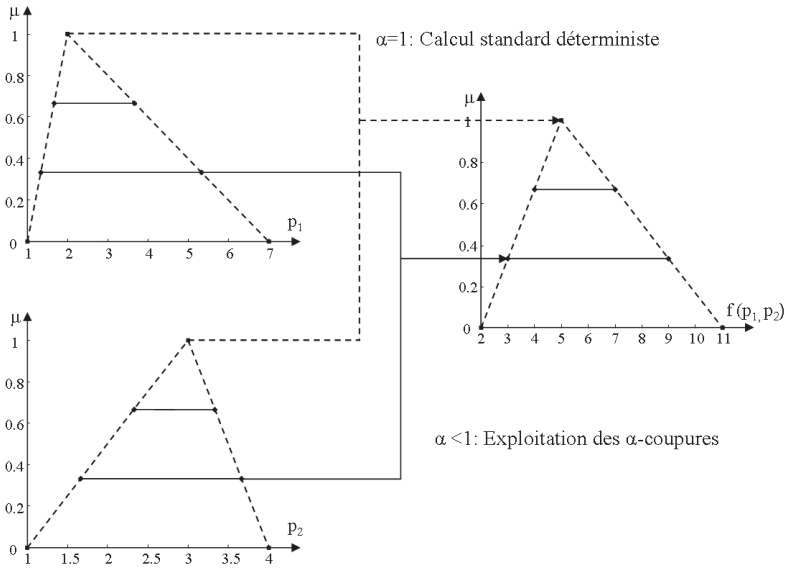


FIGURE 4-7 : Schéma d'un calcul flou pour quatre α-coupures

Une bibliographie complète des approches avec ensembles flous et intervalles peut être trouvée dans la thèse de F. Massa [MAS05]. Plusieurs types d'études ont été proposés pour aborder ce problème :

- l'arithmétique des intervalles, proposée par Moore dans l'ouvrage « Interval Analysis » [MOO66, DES00], qui n'a pas donné les résultats escomptés à cause des problèmes de gestion de multi-occurrence des paramètres dans les opérations à intervalles. Ces intervalles entraînent en effet une surestimation des solutions et des difficultés à mettre en place des techniques de résolution efficaces dans le cas de systèmes linéaires ou de problèmes aux valeurs propres. Cependant, Ragot [RAG07a] a présenté l'utilisation de l'arithmétique des intervalles pour un problème de contact frottant à partir d'un modèle à deux degrés de liberté représentant un balai d'essuie-glace, où l'incertitude porte sur le coefficient de frottement. Des contracteurs ont été utilisés pour réduire les surestimations [RAG07b] ;
- les techniques d'approximation de type perturbations ou développement en séries de Taylor [QIU98], efficaces pour des problèmes linéaires [LAL99, MAS04] et des faibles variations de paramètres, ont été mises en défaut pour des études plus complexes comme l'analyse modale ;
- les techniques d'optimisation [MAS08a] et études de sensibilité [MCW01, POW04] ont permis, quant à elles, d'explorer des champs d'applications plus

vastes comme les problèmes aux valeurs propres et la réponse dynamique [MAS06, MAS08a, RUF08]. Ces techniques sont couplées à des méta-modèles pour maîtriser les temps de calcul qui tendent à croître rapidement avec la prise en compte de données imparfaites.

En conclusion de ce paragraphe, on peut noter que les verrous scientifiques, rencontrés dans ces approches non-probabilistes sont assez proches de ceux présentés en approches probabilistes. Il est important, d'une part, de déterminer l'ensemble des comportements extrêmes des solutions avec précision et éviter les problèmes de conservatisme. D'autre part, il est essentiel de réduire les temps de calcul en utilisant soit le calcul parallèle, soit les méta-modèles judicieusement choisis, soit le couplage des deux stratégies, en fonction du problème mathématique traité.

4. Méthodologie adoptée

La méthodologie adoptée s'inscrit dans la continuité des travaux de l'équipe relatifs aux analyses statique et modale ainsi qu'en réponse dynamique fréquentielle. Il s'agit ici de l'évaluation des solutions floues complexes obtenues en étude de stabilité et plus particulièrement de la construction des enveloppes associées aux courbes des graphes de coalescence fréquemment utilisés pour caractériser l'instabilité notamment en industrie. Pour ce faire, on propose de s'appuyer sur des travaux antérieurs relatifs aux calculs dynamiques flous, basés sur :

- une méthode de propagation de type optimisation [MAS08a] ;
- une analyse de la nature du comportement des solutions vis-à-vis des paramètres flous [CAZ12] ;
- une méthode de réanalyse des solutions propres [MAS11].

4.1. Propagation des incertitudes par optimisation

Massa et al. [MAS08a] ont proposé une méthode de propagation pour des problèmes éléments finis statiques et modaux avec paramètres flous. Cette méthode est décomposée en deux étapes :

- une détermination des combinaisons des valeurs des paramètres qui conduisent aux variations extrêmes de la solution ;

- une approximation des solutions extrêmes pour ces combinaisons spécifiques dans le but de construire la solution de l'intervalle pour chaque α-coupure.

Le problème à intervalles $S^I = f\left(P_1^I, \dots, P_{Np}^I\right)$ est transformé en deux problèmes d'optimisation dans lesquels les variations minimum et maximum des solutions sont :

$$S^I = \left[min\left\{f\left(P_1^I, \dots, P_{Np}^I\right), \dots, f\left(P_1^I, \dots, P_{Np}^{nd}\right), \dots, f\left(P_1^{nd}, \dots, P_{Np}^{nd}\right)\right\};\right.$$

$$\left.max\left\{f\left(P_1^I, \dots, P_{Np}^I\right), \dots, f\left(P_1^I, \dots, P_{Np}^{nd}\right), \dots, f\left(P_1^{nd}, \dots, P_{Np}^{nd}\right)\right\}\right] \quad \text{Eq. 4-21}$$

où Np est le nombre de paramètres de l'intervalle, *nd* le nombre d'α-coupures. Pour résoudre ce problème, on exploite une notion de sensibilité entre chaque α-coupure et on met en place une méthode de résolution locale du premier ordre de type gradient (FIGURE 4-8).

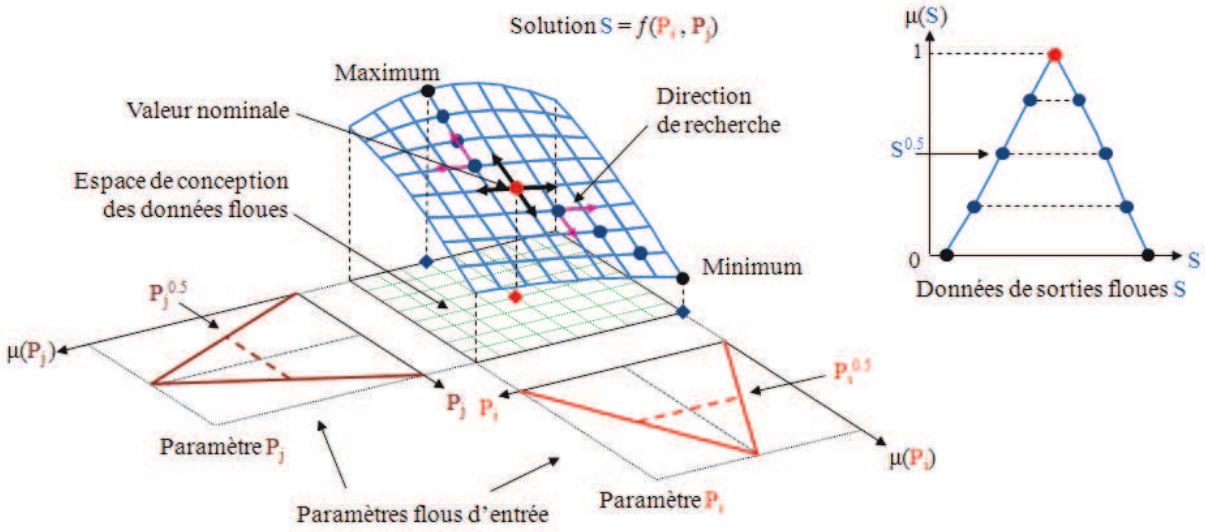


FIGURE 4-8 : Illustration de la méthodologie de propagation

Les étapes de cette méthode sont les suivantes :

- Etape 1 : Pour la valeur crête α=1, on détermine les solutions mécaniques étudiées et leurs sensibilités pour chaque paramètre flou. Les signes des sensibilités du premier ordre indiquent la dépendance de la fonction de réponse et définissent les combinaisons des valeurs discrètes des paramètres flous pour le niveau d'α-coupure suivant ;
- Etape 2 : Pour chaque niveau d'α-coupure, on évalue les dérivées premières des quantités mécaniques pour les combinaisons des valeurs discrètes des paramètres flous déterminées au premier niveau d'α-coupure ;

- Etape 3 : On compare ensuite les signes des dérivées avec ceux obtenus au niveau d'α-coupure précédent ;
    - Etape 3-a : Si les signes sont identiques, l'évolution est considérée comme monotone et les combinaisons déterminées fournissent les variations minimales et maximales pour l'α-coupure courante α_i ;
    - Etape 3-b : Si les signes sont différents, un extrema se situe entre les deux niveaux d'α-coupure α_i et α_{i-1}, la recherche est stoppée dans cette direction et la combinaison apportant la valeur la plus proche de l'extremum est conservée. Pour plus de précision, dès qu'un extremum est détecté, une micro discrétisation peut éventuellement être effectuée ;
- Etape 4 : On évalue ensuite, par approximation, les solutions pour chaque combinaison de paramètres. Cette étape est détaillée dans le paragraphe 4.3.

Cette approche a déjà fait ses preuves en analyses statique [MAS06], modale [MAS05, MAS08a], temporelle avec contact non frottant [RUF08] et pour la réponse harmonique. De par les outils qui la composent, elle n'est bien évidemment pas utilisable pour des comportements fortement non linéaires ou bruités. Avant de l'utiliser en analyse de stabilité, il est nécessaire d'analyser le comportement des solutions que l'on prend en compte par une analyse paramétrique afin de voir si la méthode est compatible. La nature du comportement est en effet directement liée au problème mathématique étudié [MAS08a].

4.2. Analyse paramétrique

Suivant le type de solutions (déplacement, valeur propre, vecteur propre, réponse fréquentielle ou temporelle, …) et les paramètres étudiés (module d'Young, masse volumique, épaisseur, données topologiques, …), la nature de l'évolution n'est pas toujours la même (linéaire, quadratique, monotone ou non, …). Ainsi, pour certains couples de paramètres et solutions, il est possible de mettre en place des règles simples, puisque l'évolution des solutions étudiées est monotone. Par exemple, pour le calcul des déplacements, les bornes inférieures des solutions sont données par les bornes supérieures du module d'Young et inversement. Le raisonnement est analogue, dans le cas des valeurs propres, pour le module d'Young et la masse volumique. Ainsi, les bornes inférieures des valeurs propres sont alors obtenues avec les bornes inférieures du module d'Young et les bornes supérieures de la masse volumique.

Si l'on considère maintenant les paramètres, tels que le coefficient de Poisson ν ou l'épaisseur d'une plaque *e*, l'évolution n'est plus systématiquement monotone. En se référant aux combinaisons de paramètres (caractéristiques des évolutions minimales et maximales), obtenues avec le Principe d'Extension, on constate que certaines combinaisons de paramètres, n'incluant pas les bornes des paramètres imprécis, interviennent activement dans la solution ensembliste. Ces paramètres apparaissent sous la forme de fractions rationnelles (par exemple dans la matrice de comportement des matériaux en contraintes planes), ou de fonctions puissances (cubique dans la formulation d'un élément coque) et sont présents à la fois dans la matrice de masse et de raideur (cas de l'épaisseur pour une analyse modale). Avec de telles données, les combinaisons changent pour chaque type de solution et pour chaque composante du vecteur solution. L'étude de différentes applications fait apparaître des comportements non monotones. Il en est de même lors des études fréquentielles à la résonance. Il est alors nécessaire de décomposer la réponse du signal à étudier en plusieurs zones d'étude spécifiques (FIGURES 4-9 et 4-10), comme l'ont montré Massa et al. [MAS08b].

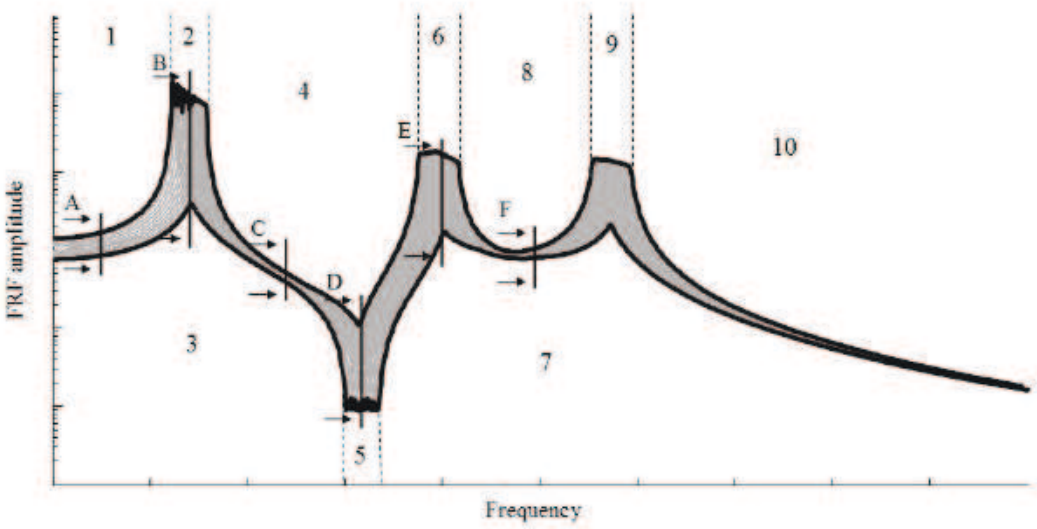


FIGURE 4-9 : Décomposition d'une réponse fréquentielle floue en fonction de zones d'étude spécifiques

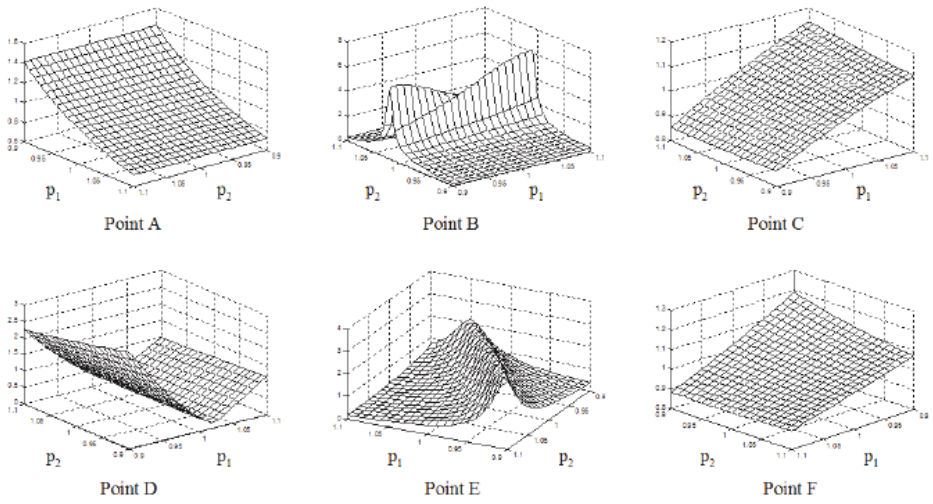


FIGURE 4-10 : Comportements observés en fonction des zones d'étude spécifiques

On s'intéresse, dans le cas présent, aux graphes de coalescence, où la valeur des fréquences, obtenues à partir de l'Equation 4-9, est tracée en fonction du coefficient de frottement. Les FIGURES 4-11 et 4-12 présentent respectivement l'enveloppe des comportements, dans le cas où il y a couplage de modes, ainsi que les trois surfaces de réponse représentatives de trois zones d'étude spécifiques.

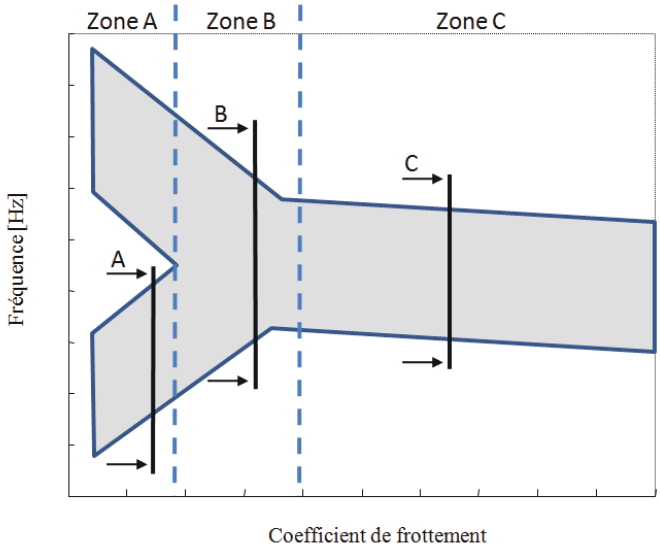


FIGURE 4-11 : Décomposition d'un graphe de coalescence en fonction de zones d'étude spécifiques

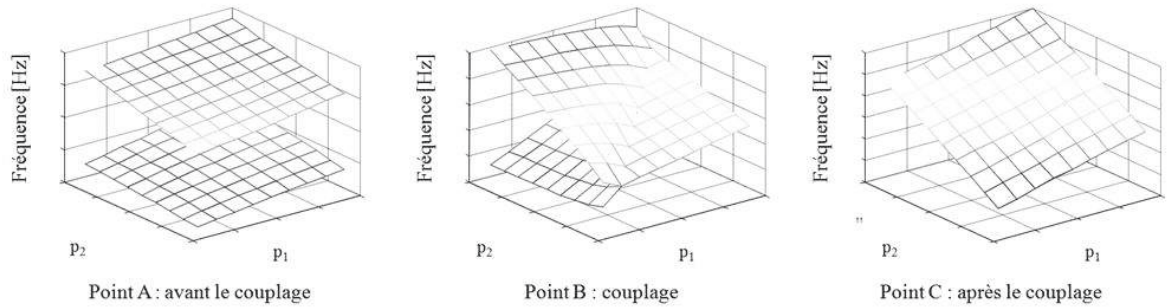


FIGURE 4-12 : Comportements observés en fonction des zones d'étude spécifiques

Cette étude paramétrique met en évidence trois zones d'étude spécifiques :

- avant le couplage de modes, où l'on observe deux surfaces de réponse distinctes associées à chaque fréquence, le comportement est monotone ou non. La création de ces surfaces de réponse a nécessité de mettre en place un suivi des formes modales grâce à un critère MAC, déjà utilisé dans [MAS08a] ;
- durant le couplage de modes, où l'on constate un rapprochement pour ne former qu'une seule surface. En effet, dès que le couplage a eu lieu, on observe des fréquences de valeurs très proches ;
- après le couplage de modes, où l'on a une seule surface de réponse ayant un comportement comparable avec la première zone.

Les surfaces de réponse, présentées FIGURE 4-12, sont non bruitées et donc compatibles avec la méthode de propagation de type gradient, proposée dans le paragraphe 4.1. Pour déterminer l'enveloppe des coalescences, la méthodologie de propagation est alors appliquée pour différentes valeurs de coefficients de frottement :

- Etape 1 : on détermine les évolutions extrêmes de fréquences dans le cas du coefficient de frottement le plus bas. Les combinaisons de paramètres qui engendrent les valeurs extrêmes vont être utilisées pour la zone avant couplage, puisque la nature de l'évolution reste identique en fonction du coefficient de frottement. Les graphes de coalescence associés à ces valeurs de paramètres sont calculés, ce qui permet de caractériser la zone A (FIGURE 4-13) ;

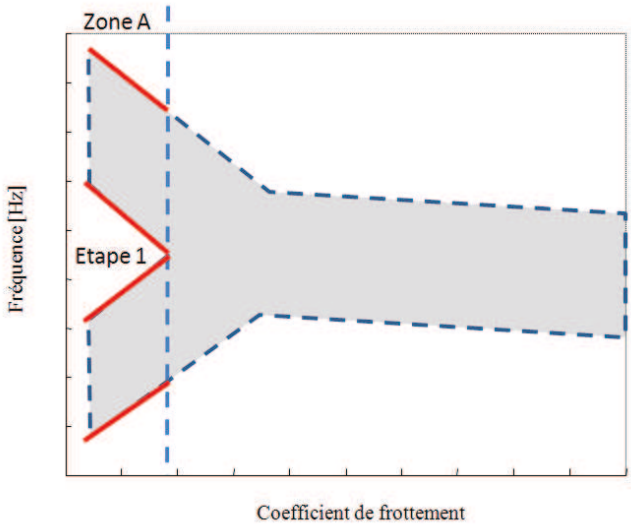


FIGURE 4-13 : Caractérisation de la zone A

- Etape 2 : on détermine les évolutions extrêmes de fréquences dans le cas du coefficient de frottement le plus haut. Les combinaisons de paramètres qui engendrent les valeurs extrêmes vont être utilisées pour la zone après couplage. Les graphes de coalescence associés à ces valeurs de paramètres sont calculés, ce qui permet de caractériser la zone C (FIGURE 4-14) ;

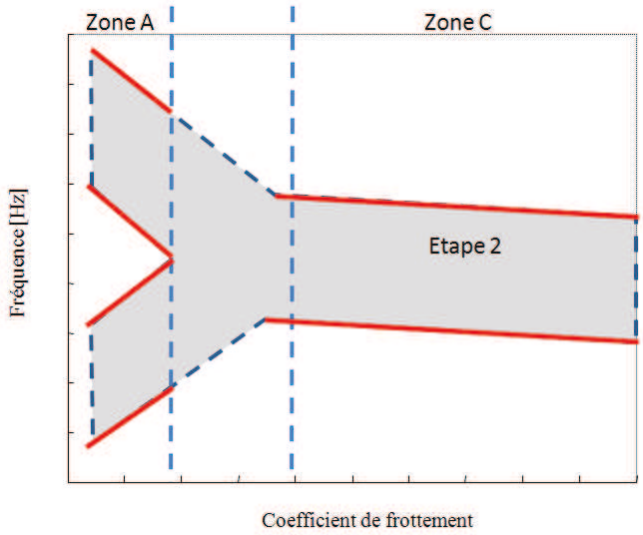


FIGURE 4-14 : Caractérisation de la zone C

- Etape 3 : on calcule le graphe de coalescence pour les valeurs crêtes des fonctions d'appartenance des paramètres imprécis, ce qui permet de connaître la zone où la coalescence va apparaître et d'identifier la valeur du coefficient

de frottement caractéristique, pour lequel on détermine les évolutions extrêmes (FIGURE 4-15) à partir des variations des paramètres imprécis ;

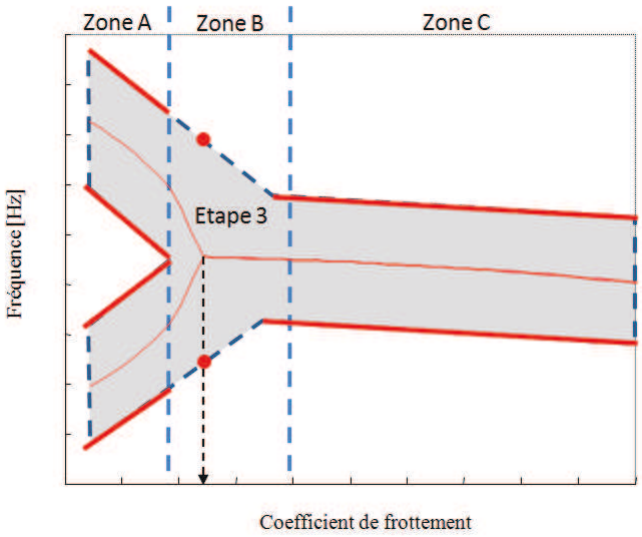


FIGURE 4-15 : Caractérisation de la zone de coalescence (Zone B)

- Etape 4 : à partir de la combinaison de valeurs de paramètres définissant l'évolution minimale de la fréquence la plus basse et la combinaison de valeurs de paramètres définissant l'évolution maximale de la fréquence la plus haute, on calcule les graphes de coalescence associés à ces combinaisons pour caractériser la zone B (FIGURE 4-16).

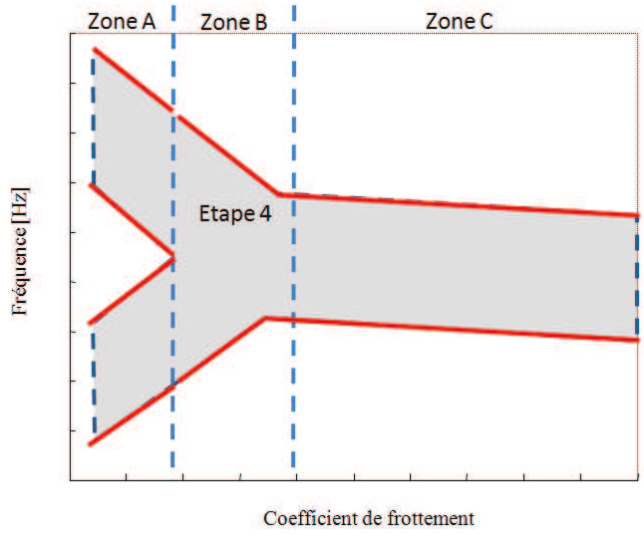


FIGURE 4-16 : Caractérisation de la zone B

Comme la nature de l'évolution des surfaces de réponse évolue dans cette zone, l'utilisation des informations relatives à une valeur du coefficient de frottement peut

engendrer une approximation. Pour affiner cette caractérisation, il serait nécessaire de réitérer l'Etape 4 pour plusieurs valeurs de coefficients de frottement.

4.3. Réanalyse de la base modale

Afin de conserver des temps de calcul acceptables, la méthode de propagation, présentée dans le paragraphe 4.1., est couplée avec une technique de réanalyse. Compte tenu de la mise en donnée des équations du problème de contact, proposée dans le chapitre 3, un des éléments clés est la base modale (Equation 3-38), qui va être modifiée en fonction des perturbations associées aux matrices de masse et rigidité. On propose donc d'utiliser une technique de perturbation homotopique [HE99, MAS05, SIL10] pour réanalyser cette quantité plutôt que de mettre en œuvre plusieurs calculs standards.

Le problème aux valeurs propres modifié s'écrit comme suit :

$$K_m \phi_m^j = \lambda_m^j M_m \phi_m^j,\ j = 1, \dots, n_m \qquad \text{Eq. 4-22}$$

avec M_m et K_m les matrices de masse et de rigidité modifiées, λ_m^j et ϕ_m^j les $j^{ème}$ valeurs et vecteurs propres de la structure modifiée et n_m le nombre de modes.

L'équation de normalisation par rapport à la matrice de masse est définie par :

$$\phi_m^{jT} M_m \phi_m^j = 1 \qquad \text{Eq. 4-23}$$

La technique de perturbation homotopique, qui permet d'exprimer un problème non-linéaire en une succession de problèmes linéaires, consiste à introduire un paramètre inconnu ε pour mettre en évidence la non-linéarité. Ce paramètre est fixé à 1 à la fin de la formulation pour évaluer les quantités d'intérêt perturbées du problème.

Les solutions propres modifiées λ_m^j et ϕ_m^j sont exprimées en séries en fonction du paramètre ε :

$$\lambda_m^j = \lambda_0^j + \varepsilon \lambda_1^j + \cdots + \varepsilon^n \lambda_n^j \qquad \text{Eq. 4-24}$$

$$\phi_m^j = \phi_0^j + \varepsilon \phi_1^j + \cdots + \varepsilon^n \phi_n^j \qquad \text{Eq. 4-25}$$

avec n l'ordre de troncature, λ_0^j et ϕ_0^j respectivement les valeurs et vecteurs propres de la structure initiale et λ_i^j et $\phi_i^j (i = 1, \dots, n)$ les termes d'ordre élevé.

Les matrices M_m et K_m sont composées des matrices initiales M_0 et K_0 et des matrices perturbées ΔMet ΔK représentant les modifications d'ordre matériel et topologique.

$$M_m = M_0 + \varepsilon \Delta M \quad \text{Eq. 4-26}$$

$$K_m = K_0 + \varepsilon \Delta K \quad \text{Eq. 4-27}$$

En introduisant les Equations 4-24 à 4-27 dans les Equations 4-22 et 4-23, on obtient les Equations 4-28 et 4-29 :

$$(K_0 + \varepsilon \Delta K)\left(\phi_0^j + \varepsilon \phi_1^j + \cdots + \varepsilon^n \phi_n^j\right) =$$

$$\ldots \left(\lambda_0^j + \varepsilon \lambda_1^j + \cdots + \varepsilon^n \lambda_n^j\right)(M_0 + \varepsilon \Delta M)\left(\phi_0^j + \varepsilon \phi_1^j + \cdots + \varepsilon^n \phi_n^j\right) \quad \text{Eq. 4-28}$$

$$\left(\phi_0^j + \varepsilon \phi_1^j + \cdots + \varepsilon^n \phi_n^j\right)^T (M_0 + \varepsilon \Delta M)\left(\phi_0^j + \varepsilon \phi_1^j + \cdots + \varepsilon^n \phi_n^j\right) = 1 \quad \text{Eq. 4-29}$$

Les solutions propres initiales λ_0^j et ϕ_0^j sont calculées en utilisant une méthode classique de Lanczos alors que les termes d'ordre élevé λ_i^j et $\phi_i^j (i = 1, \ldots, n)$ sont identifiés en fonction des ordres du paramètre ε et calculés avec une méthode de Wang [WAN91] ou de Lee [LEE97]. Cette dernière méthode, qui couple les Equations 4-28 et 4-29 dans un système linéaire, est définie comme suit :

$$K_o \phi_0^j = \lambda_0^j M_0 \phi_0^j,$$

$$\begin{bmatrix} K_o - \lambda_0^j M_0 & -M_0 \phi_0^j \\ -{\phi_0^j}^{\mathrm{T}} M_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1^j \\ \lambda_1^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\Delta K - \lambda_0^j \Delta M\right)\phi_0^j \\ 0.5 {\phi_0^j}^T \Delta M \phi_0^j \end{Bmatrix}$$

. . . Eq. 4-30

$$\begin{bmatrix} K_o - \lambda_0^j M_0 & -M_0 \phi_0^j \\ -{\phi_0^j}^T M_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{\mathrm{n}}^j \\ \lambda_{\mathrm{n}}^j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\Delta K \phi_{\mathrm{n-1}}^j - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^j \Delta M \phi_{\mathrm{n-k-1}}^j - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^j M_0 \phi_{n-k}^j\right) \\ 0.5\left(\sum_{k=0}^{n-1} {\phi_k^j}^{\mathrm{T}} \Delta M \phi_{\mathrm{n-k-1}}^j + \sum_{k=1}^{n-1} {\phi_k^j}^T M_0 \phi_{n-k}^j\right) \end{Bmatrix}$$

Dans le but de réduire la taille du système étudié, on met en place une projection comme l'ont déjà proposé avec succès Balmès et Corus et al. [BAL96, COR06] sur un système dynamique. La base de projection T est construite à partir des différents vecteurs propres initiaux ϕ_0^j du problème et des vecteurs propres perturbés ϕ_i^j, telle que :

$$T = \left[\phi_0^j \ \phi_1^j \ \dots \ \phi_n^j\right], \ j = 1, \dots, n_m \quad \text{Eq. 4-31}$$

Les modes approximés du modèle projetés sur la base T sont donnés par $\phi_m^j = T\phi_m^{jR}$ où ϕ_m^{jR} est le vecteur propre du problème suivant :

$$[T^T K_m T]\ \phi_m^{jR} = \lambda_m^j [T^T M_m T]\ \phi_m^{jR} \quad \text{Eq. 4-32}$$

La base de projection est de taille $[n_{ddl} * (n+1)n_m]$ et est orthonormalisée avec l'algorithme itératif de Gram Schmidt [JAM03]. Le problème est donc de taille $[(n+1)n_m * (n+1)n_m]$.

Pour ne pas recalculer les solutions propres perturbées $\Gamma_m = \begin{pmatrix} \phi_m^j \\ \lambda_m^j \end{pmatrix}$ pour chaque modification de paramètres du modèle, on propose de les exprimer comme un développement en séries de Taylor, défini par les Equations 4-32 et 4-33 :

$$\Gamma_m = \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left[\sum_{k=1}^{n_{pf}} \frac{\partial \Gamma_0}{\partial P_k} (P_k^m - P_k^0)\right]^{(i)} \quad \text{Eq. 4-33}$$

où

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial P_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_0^j}{\partial P_k} \\ \frac{\partial \lambda_0^j}{\partial P_k} \end{pmatrix} \quad \text{Eq. 4-34}$$

n_{pf} est le nombre de paramètres perturbés, P_k^0 et P_k^m sont respectivement les valeurs initiales et perturbées du paramètre P_k. L'indexe (i) représente la i^{ème} dérivée. On conserve en fonction de l'ordre de la dérivée le paramètre ε utilisé dans le développement homotopique.

Les matrices perturbées M_m et K_m sont exprimées par les matrices initiales M_0 et K_0 associées au problème initial et les dérivées de ces matrices par rapport aux paramètres P_k (Equations 4-35 et 4-36) :

$$M_m = M_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left[\sum_{k=1}^{n_{pf}} \frac{\partial M_0}{\partial P_k} (P_k^m - P_k^0)\right]^{(i)} \quad \text{Eq. 4-35}$$

$$K_m = K_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left[\sum_{k=1}^{n_{pf}} \frac{\partial K_0}{\partial P_k} (P_k^m - P_k^0)\right]^{(i)} \quad \text{Eq. 4-36}$$

Rassembler directement toutes les dérivées des vecteurs propres dans la base de projection T n'est pas avantageux puisque le nombre de dérivées est élevé pour une troncature

d'ordre n. Afin de réduire le temps de calcul, il est important de contrôler la taille de la base de projection. Le terme d'ordre élevé ϕ_i est alors exprimé en termes de dérivées des solutions propres afin de maintenir réduite la taille de la base. Les vecteurs ϕ_i^j sont calculés comme suit :

$$\phi_i^j = \frac{1}{i!}\left[\sum_{k=1}^{n_{pf}} \frac{\partial \phi_0^j}{\partial P_k}(P_k^m - P_k^0)\right]^{(i)} \qquad \text{Eq. 4-37}$$

où le calcul des dérivées des vecteurs propres $\frac{\partial \phi_0^j}{\partial P_k}$ est défini par Lee et al. [LEE97] et développé et validé dans les travaux de Massa et al. [MAS11] dans l'exemple d'une poutre caissonnée encastrée, où les comportements sont de différentes natures (linéaire, quadratique, non monotone, croisement des modes, …). Cette méthode est performante en termes de précision et de gain de temps de calcul dans un contexte de tirage intensif par rapport à des méthodes de perturbation.

5. Applications numériques

Ce paragraphe est consacré à l'étude du diagramme des coalescences comme présentée dans Meziane et al. [MEZ10]. Les résultats déterministes obtenus par la méthode proposée sont, d'une part, confrontés à ceux issus du code industriel Abaqus ainsi que ceux issus des travaux de Meziane. D'autre part, une analyse non déterministe est mise en place pour prendre en compte les variabilités sur des paramètres matériels et géométriques.

5.1. Etude déterministe

Le modèle utilisé est identique à celui présenté dans le chapitre 3 et rappelé ci-dessous :

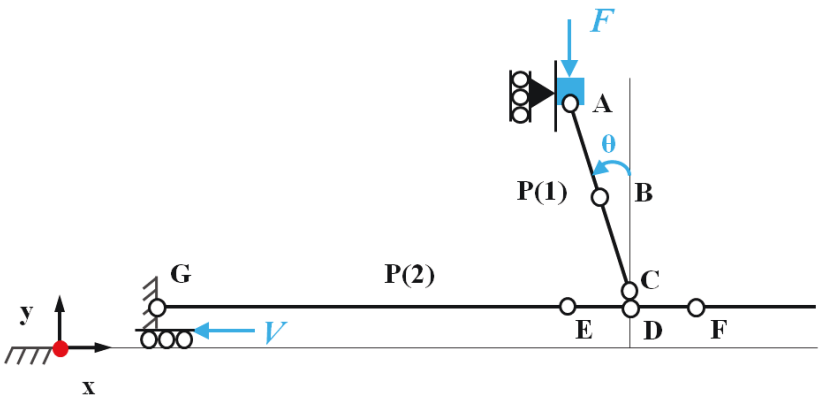


FIGURE 4-17 : Modèle issu des travaux de Meziane [MEZ07]

TABLEAU 4-1 : Caractéristiques numériques du modèle étudié

	P(1)	P(2)
Longueur [m]	0.05	0.15
Largeur [m]	0.01	0.015
Epaisseur [m]	0.0015	0.003
Densité [kg/m^3]	7900	7900
Module de Young [GPa]	185	185
Amortissement de Rayleigh α_1 [s^{-1}]	50	50
Amortissement de Rayleigh α_2 [s]	1.10^{-8}	1.10^{-8}
Nombre d'éléments	30	90

A partir de l'état d'équilibre calculé avec la méthode FL2C et présenté dans le chapitre 3, un calcul de stabilité basé sur un problème aux valeurs propres complexes, est mené pour différentes valeurs du coefficient de frottement. Les diagrammes de coalescence obtenus permettent d'identifier les zones de couplage et de déterminer les fréquences potentiellement instables. La FIGURE 4-18 présente les résultats obtenus avec la méthode FL2C développée sous Matlab et ceux obtenus avec Abaqus.

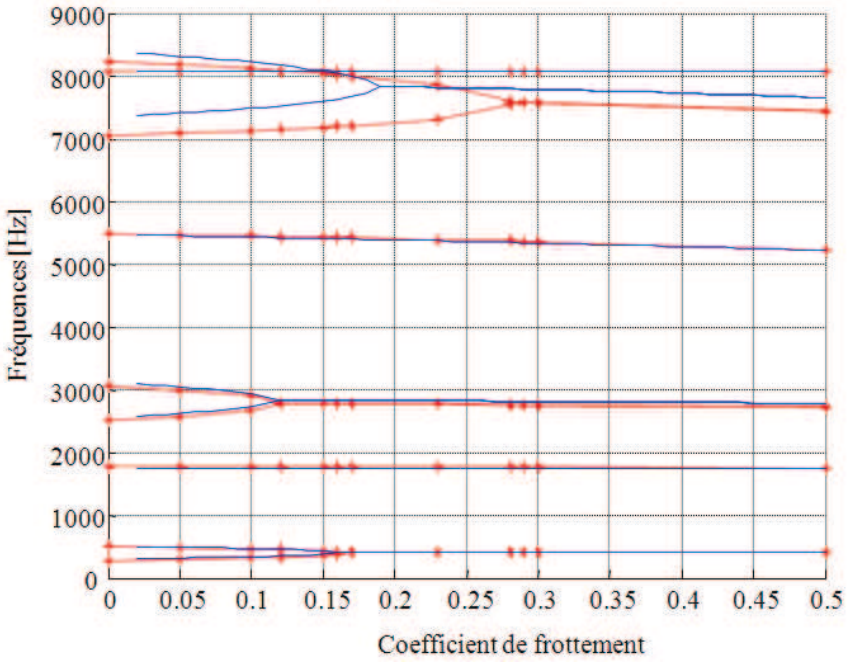


FIGURE 4-18 : Diagramme des coalescences avec Abaqus(*) et avec la méthode FL2C(-)

On observe trois coalescences de mode pour trois valeurs différentes du coefficient de frottement. Les deux premières coalescences sont identiques pour les résultats obtenus par la méthode FL2C et sous Abaqus. La première se produit pour un coefficient de frottement μ=0.16 à une fréquence de 400 Hz. La seconde coalescence se produit pour μ=0.12 à la

fréquence de coalescence F_2=2800 Hz. Enfin, la troisième coalescence est différente pour les deux méthodes de calcul. La fréquence est F_3=7600Hz avec μ=0.28 sur Abaqus et F_3=7900Hz avec μ=0.18 pour la méthode FL2C. Il s'agit du couplage des septième et neuvième modes. Meziane obtient pour ces modes une coalescence à μ=0.23 pour une fréquence de couplage F_3=7700Hz.

Les développements internes des codes n'étant que partiellement connus, il est difficile d'expliquer l'écart sur la troisième coalescence. Les comportements modaux ont été vérifiés et l'écart sur ces fréquences propres dans les trois cas (Abaqus, Matlab et Meziane) ne peut pas être à l'origine des différences obtenues. L'ensemble des résultats reste néanmoins cohérent et valide donc les développements proposés.

5.2. Etude non-déterministe

Afin d'étudier les comportements d'un système soumis à différentes variabilités de paramètres, une analyse non déterministe est menée en utilisant les développements du paragraphe 4. Quatre paramètres sont considérés comme paramètres variables, à savoir les modules de Young E_1 et E_2 des deux composants en contact, l'angle de contact θ et la distance de contact d. Ces paramètres ont été choisis en fonction des observations, faites dans le chapitre 1, concernant les paramètres imprécis. Caridi [CAR02], Meziane [MEZ07], Giannini et al. [GIA06a, GIA06b] ont mis en évidence l'influence de la zone de contact tandis que Massi [MAS07] et Coudeyras [COU09] se sont focalisés sur la matière. Les variations des propriétés de la matière des pièces de fonderie sont dues aux mélanges dans les coulées et sont de l'ordre de +/-10%. Une variabilité de +/-10% est donc appliquée pour chaque module de Young, dont les valeurs sont comprises entre 185 GPa et 220 GPa. Les intervalles de variation pour l'angle et la distance de contact sont respectivement fixés à $\theta = [\frac{\pi}{45} ; \frac{\pi}{30}]$ radians et $d = [0.076; 0.084]$m. Chacun de ces paramètres est modélisé par un nombre flou triangulaire présenté FIGURE 4-19.

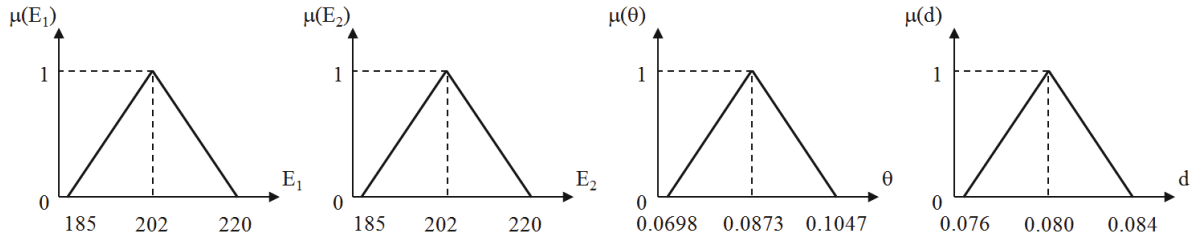


FIGURE 4-19 : Fonctions d'appartenance des paramètres d'entrée

Afin de valider la méthodologie proposée pour propager les imprécisions, on calcule l'enveloppe de comportement du diagramme de coalescence (FIGURE 4-18) où l'on superpose aux résultats obtenus ceux calculés avec le Principe d'Extension, référence dans le domaine ensembliste. Les solutions comparées correspondent aux bornes du support des nombres flous résultats.

La FIGURE 4-20 met en évidence que la méthodologie utilisée fournit des résultats compatibles avec la référence et présente les résultats pour la deuxième coalescence. La mise en place de la stratégie, présentée dans le paragraphe 4.2, conduit, dans le cas présent, à calculer quatre combinaisons spécifiques de paramètres pour la zone avant couplage, deux combinaisons spécifiques pour la zone après couplage et une combinaison associée aux valeurs centres pour la zone de couplage. Au total, sept combinaisons spécifiques de paramètres permettent de définir l'enveloppe de comportement. De plus, la bonne cohérence des résultats met aussi en lumière le fait que les réanalyses mises en place pour approximer les bases modales n'ont pas d'impact sur la précision des résultats.

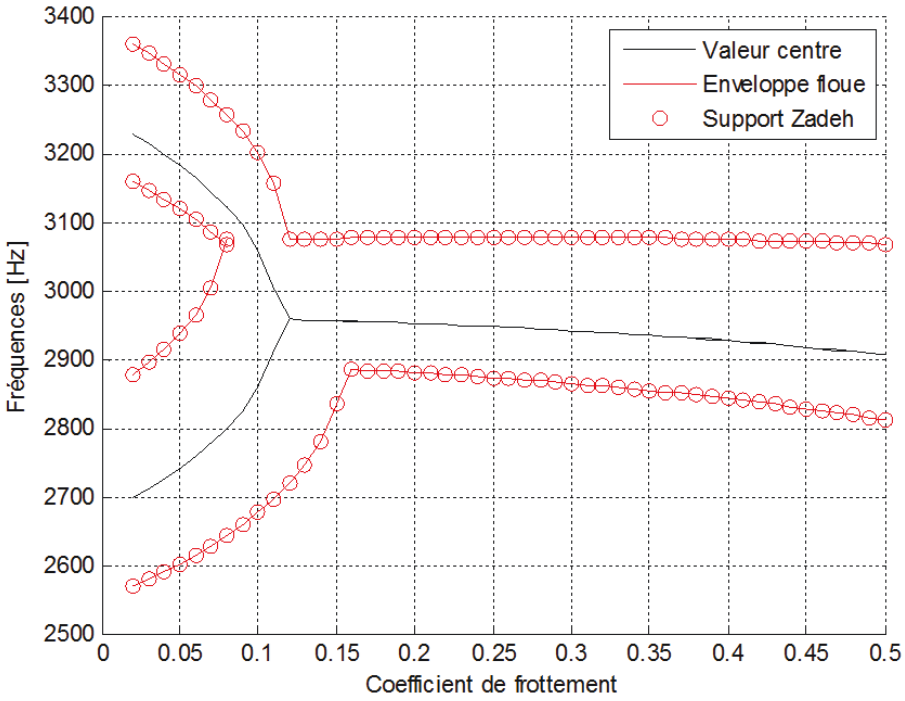


FIGURE 4-20 : Enveloppe de comportement du diagramme pour la 2ème coalescence

La connaissance de l'enveloppe des comportements extrêmes vis-à-vis de la seule courbe de coalescence déterministe, associée aux valeurs centres, permet de caractériser la zone sur laquelle il faut se focaliser. Afin d'étudier l'impact des variabilités sur les fréquences

instables, la FIGURE 4-21 présente les fonctions d'appartenance associées pour un coefficient de frottement fixé, par exemple à 0.5, calculées avec la méthodologie proposée et avec le Principe d'Extension.

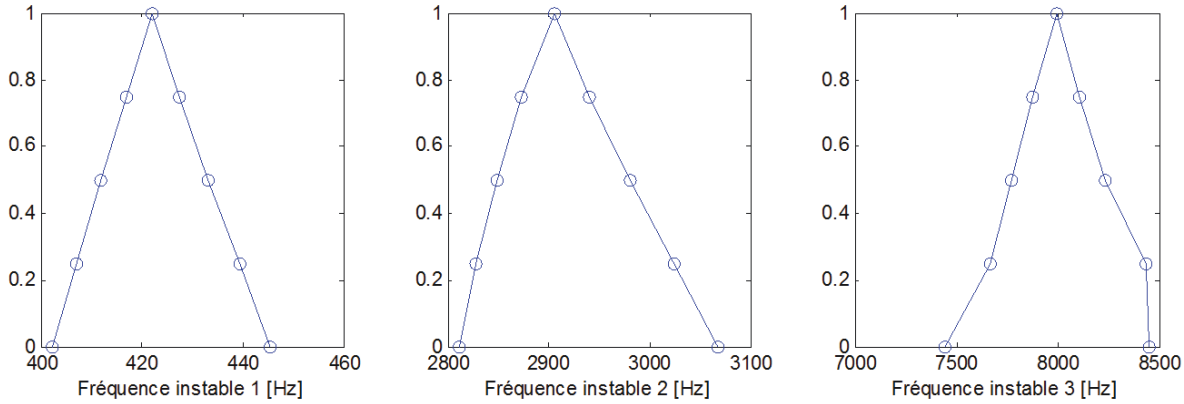


FIGURE 4-21 : Fonctions d'appartenance des fréquences instables

On remarque que l'imprécision introduite sur les paramètres du modèle affecte principalement la troisième coalescence. En effet, la variation du support de la fonction d'appartenance de cette fréquence est de 1009Hz alors que les niveaux atteints par les autres variations sont 43Hz et 256Hz pour les deux premières fréquences de coalescence. La forme des fonctions d'appartenance indique que le comportement est plutôt linéaire pour la première fréquence, quadratique pour la deuxième et non linéaire pour la troisième. Pour cette dernière, la fonction d'appartenance met en évidence, de par son élargissement à sa base, que les variabilités d'entrée ont un impact plus important sur la sortie pour α compris en 0 et 0,5.

De plus, ces coalescences sont observées pour des intervalles de coefficient d'amortissement différents. La FIGURE 4-22 décrit les fonctions d'appartenance des coefficients d'amortissement. Elles sont calculées avec le Principe d'Extension, car les surfaces de réponse sont plus bruitées que celles des fréquences.

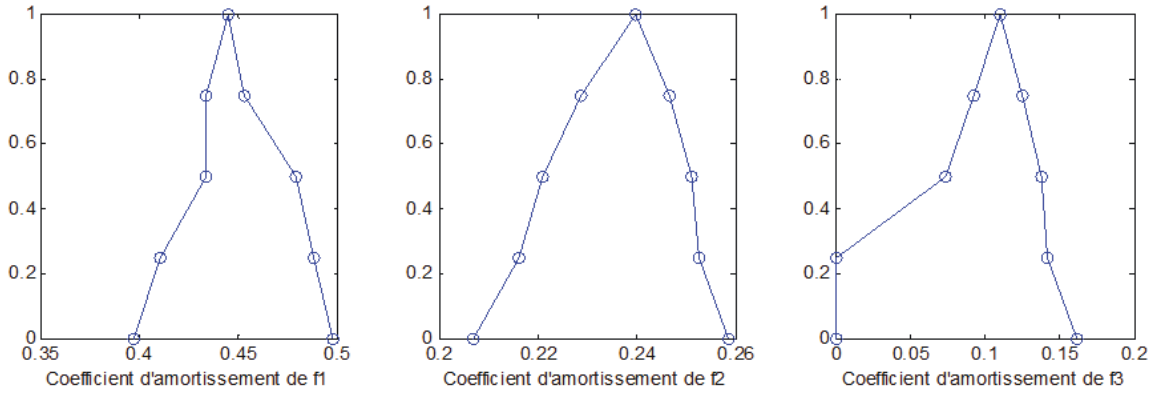


FIGURE 4-22 : Fonctions d'appartenance des taux d'amortissement

Les formes des fonctions d'appartenance montrent que le comportement observé est de nature non linéaire. Les valeurs des taux d'amortissement associés aux trois premières fréquences instables pour le support sont respectivement de [0.39; 0.5], [0.2; 0.26] et [0; 0.16]. La FIGURE 4-23 présente les supports normalisés des fonctions d'appartenance des taux d'amortissement en fonction des supports normalisés des fréquences instables associées.

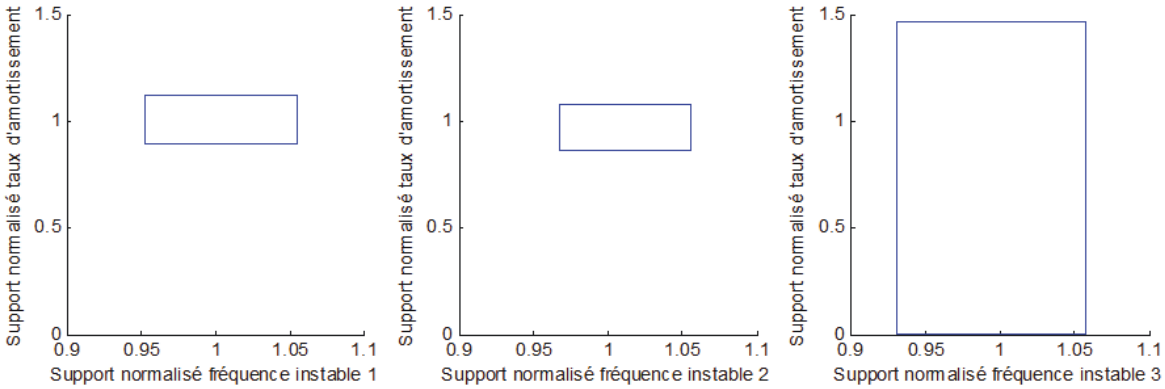


FIGURE 4-23 : Evolution des supports normalisés des fonctions d'appartenance des taux d'amortissement en fonction des supports normalisés des fréquences instables associées

Les variations de support les plus faibles sont observées pour la deuxième instabilité puis pour la première instabilité. La troisième instabilité, quant à elle, admet des variations dix fois supérieures. Il est clair que la partie réelle indique uniquement le taux de croissance des amplitudes mais ne donne aucune information quant à l'amplitude et la prédominance d'un mode instable plutôt qu'un autre dans la réponse dynamique. Toutefois, la question est donc de savoir s'il existe un lien entre la longueur de l'intervalle de dispersion et la sévérité de l'instabilité dynamique. Cette proposition a aussi été formulée dans les travaux de Heussaff et

al. [HEU12] d'après plusieurs études sur des systèmes de freinage. Si l'on considère une approche déterministe, il est clair qu'en industrie le concepteur va se focaliser dans un premier temps sur la première fréquence. Si l'on s'intéresse aux données non déterministes et plus particulièrement aux fonctions d'appartenance, la seconde fréquence est celle qui a la plus faible dispersion et mérite aussi l'attention.

6. Conclusion

Après avoir rappelé les équations relatives à l'étude de stabilité dans le domaine fréquentiel et dressé un état de l'art des techniques de propagation des imperfections dans le cas d'une modélisation par ensembles flous, ce chapitre a permis d'étendre les travaux, précédemment menés pour des analyses linéaires floues, au cas des graphes de coalescence. L'objectif est de déterminer avec précision l'ensemble des comportements extrêmes vis-à-vis des imperfections tout en maîtrisant les temps de calcul.

Pour ce faire, une analyse de la nature des comportements des fréquences a été menée afin d'identifier des zones d'étude spécifiques en fonction du coefficient de frottement. Pour chaque zone, une optimisation locale est mise en place afin de déterminer les combinaisons des paramètres imprécis qui conduisent aux valeurs minimales et maximales de fréquences. Ces deux étapes ont pour objectif de limiter le nombre de calculs à effectuer par rapport au Principe d'Extension. Pour réduire les temps de calcul liés à chaque combinaison des paramètres, la position d'équilibre utilisée dans le calcul de stabilité est calculée grâce à la méthode FL2C, présentée dans le chapitre 3. La base modale des composants en contact, quant à elle, est réanalysée en utilisant une méthode de projection définie à partir d'un développement homotopique.

7. Références bibliographiques

[BAL96] BALMES E. (1996). Parametric families of reduced finite element models: Theory and applications. Mech. Syst. Signal Process. 10 (4), 381-394.

[BEN98a] BENFRATELLO S., MUSCOLINO G. (1998). A perturbation approach for the response of dynamically modified structural systems. Computers and Structures, 68, 101-112.

[BEN90] BEN-HAIM Y., ELISHAKOFF I. (1990). Convex models of uncertainty in applied mechanics, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

[BEN94] BEN-HAIM Y. (1994). A non-probabilistic concept of reliability, Structural Safety, 14, 227-245.

[BEN95] BEN-HAIM Y. (1995). A non-probabilistic measure of linear systems based on expansion of convex models, Structural Safety 17, 91-109.

[BLA04] BLANZE C., CHAMPANEY L. (2004). A computational strategy for the random response of assemblies of structures. International Journal of Solids and Structures, 41(22-23), 6383-6405.

[BLA09] BLANZE C., THOMAS O. (2009). Atténuation de vibration par shunt piézoélectrique en présence d'incertitude sur les paramètres électriques. 9ème Colloque national en Calcul des Structures (CSMA 2009). 25-29 mai 2009, Presqu'île de Giens.

[BOB02] BOBILLOT A. (2002). Méthodes de réduction pour le recalage-Application au cas d'Ariane 5. Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Centrale Paris.

[BOB06] BOBILLOT A., BALMES E. (2006). Iterative computation of modal sensitivities. American Institure of Aeronautics and Astronautics Journal 44, 1332-1338.

[BOU94] BOUCHON-MEUNIER B. (1994). La logique floue, Deuxième édition corrigée, Presses Universitaires de France, Paris.

[CAM02] CAMBIER S., GUIHOT P., COFFIGNAL G. (2002). Computational methods for accounting of structural uncertainties, applications to dynamic behavior prediction of piping systems. Structural Safety, 24, 29-50.

[CAP03] CAPIEZ-LERNOUT E., SOIZE C. (2003). Modèle probabiliste des incertitudes en dynamique des structures pour le désaccordage des roues aubagées. Mécanique & Industries, 4, 585-594.

[CAR02] CARIDI J.P. (2002). Caractérisation des paramètres de frottement à l'origine de phénomènes vibroacoustiques. Application aux bruits de crissement des systèmes de freinage. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[CAZ12] Cazier O., Massa F., Lallemand B., Tison T. (2012). Fuzzy Logic Controller for studying friction-induced vibrations. XVIIIth symposium on vibrations, chocs and noises (VISHNO 2012), Paris, juillet.

[CHA98] CHAKRABORTY S., DEY S.S. (1998). A stochastic finite element dynamic analysis of structures with uncertain parameters, International Journal of Mechanical Sciences, 40, 1071-1087.

[CHE09] CHEVILLOT F., SINOU J-J., HARDOUIN N. (2009). Nonlinear transient vibrations and coexistences of multi-instabilities induced by friction in an aircraft braking system. Journal of Sound and Vibration 328, 555-574.

[COR06] CORUS M., BALMES E., NICOLAS O. (2006). Using model reduction and data expansion techniques to improve SDM. Mech. Syst. Signal Process. 20, 1067-1089.

[COU09] COUDEYRAS N. (2009). Analyse non-linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes : application au crissement de frein. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale de Lyon.

[DEM68] DEMPSTER A.P. (1968). Upper and lower probabilities generated by a random interval, Annals of Mathematical Statistics, 39(3), 957-966.

[DES00] DESSOMBZ O., VON HERPE F. (2000). Application de l'arithmétique des intervalles au calcul des réponses dynamiques de systèmes mécaniques

incertains, Table Ronde MV2, Approches robustes en dynamique des structures, Paris, France, 2000.

[DON05] DONDERS S., VANDEPITTE D., VAN DE PEER J., DESMET W. (2005). Assessment of uncertainty on structural dynamic responses with the short transformation method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 288, 523-549.

[DUB80] DUBOIS D., PRADE H. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, Orlando.

[ELI94] ELISHAKOFF I., ELISEEFF P., GLEGG S. (1994). Convex modelling of material uncertainty in vibrations of a viscoelastic structure, American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal 32, 843-849.

[FAL02] FALSONE G., IMPOLLONIA N. (2002). A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 5067-5085.

[FAL05] FALSONE G., FERRO G. (2005). A method for the dynamical analysis of FE discretized structures in the frequency domain. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19, 4544-4564.

[GAY03] GAYTON N., BOURINET J.M., LEMAIRE M. (2003). CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. Structural Safety, 25, 99-121.

[GHA91] GHANEM R., SPANOS P.D. (1991). Stochastic finite element : a spectral approach. Springer-Verlag.

[GIA06a] GIANNINI O., AKAY A., MASSI F. (2006). Experimental analysis of brake squeal noise on a laboratory brake setup. Journal of Sound and Vibration 292, 1-20.

[GIA06b] GIANNINI O., SESTIERI A. (2006). Predictive model of squeal noise occuring on a laboratory brake. Journal of Sound and Vibration 296, 583-601.

[HAN02] HANSS M. (2002). The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 130, 277-289.

[HAN03] HANSS M. (2003). Simulation and analysis of fuzzy-parameterized models with the extended transformation method. Proceedings of the 22th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS, Chicago, USA.

[HE99] HE J-H. (1999). Homotopy perturbation technique. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 178, 257-262.

[HEL03] HELTON J.C., DAVIS F.J. (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Reliability Engineering and System Safety, 81, 23-69.

[HEU12] HEUSSAFF A., DUBAR L., TISON T., WATREMEZ M., NUNES R.F. (2012). A methodology for the modeling of the variability of brake lining surfaces. Wear 289, 145-159.

[JAM03] JAMAI R., DAMIL N. (2003). Influence of iterated Gram-Schmidt orthonormalisation in the asymptotic numerical method. C. R. Mec. 331 (5), 351-356.

[JOH97] JOHNSON E.A., BERGMAN L.A., SPENCER B.F. (1997). Parallel implementation of Monte Carlo simulation - comparative studies from stochastic structural dynamics. Probabilistic Engineering Mechanics, 12(4), 208-212.

[JOH03] JOHNSON E.A., PROPPE C., SPENCER B.F., BERGAN L.A., SZEKELY G.S., SCHUELLER G.I. (2003). Parallel processing in computational stochastic dynamics. Probabilistic Engineering Mechanics, 18, 37-60.

[KAS09] KASSEM M. (2009). Champ de densité d'énergie pour la vibroacoustique basse et moyenne fréquence des structures complexes utilisant un modèle numérique stochastique - Application à la partition structurale des automobiles. Thèse de Doctorat en Mécanique, Université Paris-Est.

[KAU88] KAUFMANN A., GUPTA M.M. (1988). Fuzzy mathematical models in engineering and management science, Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

[LAL99] LALLEMAND B., CHERKI A., TISON T., LEVEL P. (1999). Fuzzy modal finite element analysis of structures with imprecise material properties. Journal of Sound and Vibration, 220(2), 353-364.

[LEE97] LEE I.W., JUNG G.H. (1997). An efficient algebraic method for the computation of natural frequencies. Comput. Struct. 62(3), 429-435.

[LEW06] LEW T.L., SPENCER A.B., SCARPA F., WORDEN K., RUTHERFORD A., HEMEZ F. (2006). Identification of response surface models using genetic programming. Mechanical Systems and Signal Processing, 20, 1819-1831.

[LOY11] LOYER A., SINOU J.-J., CHIELLO O., LORANG X. (2011). Etude du crissement d'un frein à disque ferroviaire. Réduction de modèle en dynamiques transitoire et stationnaire. 10ème Colloque national en Calcul des Structures (CSMA 2011). 9-13 mai 2011, Presqu'île de Giens.

[MAS04] MASSA F., LALLEMAND B., TISON T., LEVEL P.(2004). Fuzzy eigensolutions of mechanical structures, Engineering Computations, Vol. 21, 66-77.

[MAS05] MASSA F. (2005). Gestion des imperfections en phase de conception des structures mécaniques. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[MAS06] MASSA F., TISON T., LALLEMAND B. (2006). A fuzzy procedure for the static design of imprecise structures, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 195, 925-941.

[MAS08a] MASSA F., RUFFIN K., TISON T., LALLEMAND B. (2008). A complete method for efficient fuzzy modal analysis, Journal of Sound and Vibration, Vol. 309, 63-85.

[MAS08b] MASSA F., RUFFIN K., LALLEMAND B., TISON T. (2008). Structural analysis by interval approach. European Journal of Computational Mechanics 17: 5-6-7.

[MAS09] MASSA F., LALLEMAND B., TISON T. (2009). Fuzzy multiobjective optimization of mechanical structures. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198, 631-643.

[MAS11] MASSA F., TISON T., LALLEMAND B., CAZIER O. (2011). Structural modal reanalysis methods using homotopy perturbation and projection techniques. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 200, 2971-2982.

[MAS07] MASSI F., BAILLET L., GIANNINI O., SESTIERI A. (2007). Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches. Mechanical Systems and Signal Processing 21, 2374-2393.

[MCW01] MCWILLIAM S. (2001). Anti-optimisation of uncertain structures using interval analysis, Computers and Structures, 79, 421-430.

[MEZ07] MEZIANE A. (2007). Apport des analyses numériques temporelles et fréquentielle dans l'étude des instabilités de contact -Validation expérimentale-. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

[MEZ10] MEZIANE A., BAILLET L., LAULAGNET B. (2010). Experimental and numerical investigation of friction-induced vibration of a beam-on-beam in contact with friction. Applied Acoustics 71, 843-853.

[MOE05] MOENS D., VANDEPITTE D. (2005). A fuzzy finite element procedure for the calculation of uncertain frequency-response functions of damped structures: Part 1 - Procedure. Journal of Sound and Vibration, 288, 431-462.

[MOO66] MOORE R. (1966). Interval analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[NEC11a] NECHAK L., BERGER S., AUBRY E. (2011). Analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottant par le chaos polynomial généralisé multiélément. 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, 29 août au 2 septembre 2011.

[NEC11b] NECHAK L. (2011). Approches Robustes du comportement dynamique des systèmes Non Linéaires – Application aux systèmes Frottants. Thèse de Doctorat en Automatique et Mécanique, Université de Haute Alsace de Mulhouse.

[NEC12] NECHAK L., BERGER S., AUBRY E. (2012). A Chaos Expansion Approach for Limit Cycle and stability robust analysis in Nonlinear Dynamic Friction Systems. XVIIIth symposium on vibrations, chocs and noises (VISHNO 2012), Paris, juillet.

[OTT93] OTTO K.N., LEWIS A.D., ANTONSSON E.K. (1993). Approximating alpha-cuts with the Vertex method. Fuzzy Sets and Systems, 55, 43-50.

[PAP98] PAPADOPOULOS V., PAPADRAKAKIS M. (1998). Stochastic finite element-based reliability analysis of space frames. Probabilistic Engineering Mechanics, 13(1), 53-65.

[PAP99] PAPADRAKAKIS M., KOTSOPULOS A. (1999). Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 168, 305-320.

[POW04] POWNUK A. (2004). Efficient method of solution of large scale engineering problems with interval parameters. Proceedings of the NSF workshop on Reliable Engineering Computing, Savannah, Georgia, USA, 305-316.

[PUE04] PUEL G. (2004). Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures, Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Normale Supérieure de Cachan.

[QIU98] QIU Z., ELISHAKOFF I. (1998). Antioptimization of structures with large uncertain-but-non-random parameters via interval analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 152, 361-372.

[RAG07a] RAGOT P. (2007). Contribution à la conception robuste en dynamique des systèmes - Application à un système frottant présentant des instabilités de type Sprag-Slip. Thèse de Doctorat en Mécanique, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Sud-Alsace.

[RAG07b] RAGOT P., BERGER S., AUBRY E., SINOU J.-J. (2007). Conception robuste de systèmes dynamiques frottants. Actes du 18ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble.

[RUF08] RUFFIN-MOURIER K. (2008). Réponse dynamique de structures mécaniques à paramètres imprécis. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis.

[SHA76] SHAFER G. (1976). A mathematical theory of evidence, Princeton University Press.

[SHI72] SHINOZUKA M. (1972). Monte Carlo solution of structural dynamics. Computers and Structures, 2, 855-874.

[SIL10] SILVA G., BREZILLON A., CADOU J.M., DUIGOU L. (2010). A study of the eigenvalue sensitivity by homotopy and perturbation methods. J. Comput. Appl. Math. 234 (7), 2297-2302.

[SIN10] SINOU J.J. (2009). Transient non-linear dynamic analysis of automotive disc brake squeal – On the need to consider both stability and non-linear analysis. Mechanics Research Communications 37, 96-105.

[SOI00] SOIZE C. (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. Probabilistic Engineering Mechanics, 15, 277-294.

[SOI01] SOIZE C. (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. Journal of Acoustic Society of America, 109(5), 1979-1996.

[SOI05a] SOIZE C. (2005). Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. CMAME, 194, 1333-1366.

[SOI05b] SOIZE C. (2005). A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. Journal of Sound and Vibration, 288, 623-652.

[SUD07] SUDRET B. (2007). Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models. Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Blaise Pascal - Clermont II.

[VAN95] VAN VINCKENROY G., DE WILDE W.P. (1995). The use of Monte Carlo techniques in statistical finite element methods for the determination of the structural behaviour of composite materials structural components. Composite Structures, 32, 247-253.

[VAN02] VAN DEN NIEUWENHOF B., COYETTE J.-P. (2002). A perturbation stochastic finite element method for the time-harmonic analysis of structures with random mechanical properties. Proceedings of the 5th World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria.

[VAN03] VAN DEN NIEUWENHOF B., COYETTE J.-P. (2003). Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 3705-3729.

[VER11] VERMOT DES ROCHES G. (2011). Frequency and time simulation of squeal instabilities – Application to the design of industrial automotive brakes. Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris.

[WAN91] WANG B.P. (1991). Improved approximate methods for computing eigenvector derivatives in structural dynamics, AIAA J. 29 (6) 1018-1020.

[WAN01] WANG X. (2001). Variance reduction techniques and quasi-Monte Carlo methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 132, 309-318.

[WOR03] WORDEN K., MANSON G., LORD T.M., FRISWELL M.I. (2003). Some thoughts on uncertainty quantification and propagation. Proceedings of the 21st International Modal Analysis Conference IMAC XXI, Kissimee, Floride.

[ZAD75a] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part I. Information Sciences, 8, 199-249.

[ZAD75b] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part II. Information Sciences, 8, 301-357.

[ZAD75c] ZADEH L.A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - Part III. Information Sciences, 9, 43-80.

[ZAL00] ZALILA Z.(2000). Cours de logique floue, Groupe logique floue, Université Technologique de Compiègne.

Conclusion générale et perspectives

1. Conclusion générale 181
2. Perspectives 182
3. Références bibliographiques 183

1. Conclusion générale

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés, d'une part, à la mise en évidence du caractère variable du crissement, observé pour deux systèmes de freinage d'un même véhicule, grâce à des plans d'expériences, expérimental et numérique. Pour être représentatif d'une famille de structures, il est désormais indéniable qu'il faille prendre en compte les variabilités observées sur de multiples paramètres liés au système étudié dès la phase de conception. L'enrichissement des simulations déterministes actuelles nécessite la mise en place d'outils non déterministes rapides et respectant le conservatisme des solutions étudiées. Pour ce faire, nous avons contribué au développement de méthodes numériques dédiées à la propagation des données floues dans le cas des graphes de coalescence, à la détermination des positions d'équilibre de corps en contact frottant en proposant une méthode de régulation adaptée basée sur la logique floue. Cette solution permet d'appliquer une technique de projection pour réduire le coût numérique en utilisant des bases modales des composants réanalysées par un développement homotopique.

Les analyses bibliographiques, menées dans ce mémoire, ont mis en évidence l'importance de ce sujet de recherche et l'intérêt que porte la communauté scientifique au vu de la qualité et de la diversité des articles proposés sur les thèmes des instabilités dynamiques et, plus particulièrement, du crissement, de la gestion des incertitudes et de la conception robuste.

Les **chapitres 1** et **2** ont permis d'aborder la problématique du crissement d'un point de vue industriel et de répertorier les paramètres les plus influents dans l'apparition du crissement grâce à une multitude de tests expérimentaux et numériques. En effet, la propension au crissement est plus forte lorsque la vitesse de freinage est faible, la pression de freinage est de niveau moyen ou intermédiaire, le coefficient de frottement dynamique est élevé et surtout dès que l'on est en présence d'un historique de freinage significatif en terme d'usure de la plaquette et de température de fonctionnement. D'autre part, ces chapitres ont permis de quantifier l'impact des variabilités associées aux paramètres de définition et de fonctionnement sur les fréquences instables et de mettre en exergue les problématiques liées aux stratégies non déterministes, à savoir la gestion de données multiples et l'utilisation de critères compatibles.

Les **chapitres 3** et **4** sont de nature plus prospective et consacrés aux développements de méthodes numériques utiles pour la propagation des variabilités pour des études de stabilité où le formalisme flou est retenu pour la modélisation des données variables. Le **chapitre 3** a présenté la mise en place d'un régulateur, basé sur la logique floue, pour résoudre un problème de contact avec frottement utile au calcul de la position d'équilibre dans l'étude de stabilité. La mise en donnée du problème de contact est associée à une projection des équations sur les bases modales des composants en contact et conduit à une réduction significative de la taille du modèle et des temps de calcul associés. Dans un contexte de tirages multiples développés dans le **chapitre 4**, les données de définition du modèle sont perturbées et par conséquence les bases modales des composants en contact. Une technique de réanalyse des bases modales a été proposée pour limiter les temps de calcul lors de l'évaluation de chaque combinaison de paramètres variables. Celle-ci repose sur une

projection des matrices perturbées sur une famille de vecteurs calculés à partir d'un développement homotopique. Enfin, une stratégie de détermination des évolutions extrêmes de comportement dans le cas des graphes de coalescence a été proposée. Cette stratégie est une extension des travaux antérieurs menés dans le cas d'analyses linéaires floues où les combinaisons de paramètres, qui conduisent aux comportements extrêmes, sont déterminées à partir de l'analyse de la nature des comportements des quantités d'intérêt.

2. Perspectives

Quelques extensions peuvent être envisagées, à court terme, pour lever les limitations présentées dans les différents chapitres de ce travail et, à long terme, si l'on étend ces développements à d'autres problématiques de recherche.

Tout d'abord, concernant les tests expérimentaux menés dans le **chapitre 1**, il serait intéressant, à l'instar des travaux proposés par Heussaff [HEU12], de faire un focus spécifique sur l'historique de freinage et de mettre en place un plan d'expériences multi-niveaux en prenant comme facteurs la température, l'usure … qui s'avèrent une des conditions primordiales agissant sur l'apparition du crissement. L'objectif est de pouvoir enrichir au mieux les simulations non déterministes menées dans le **chapitre 2**. En conséquence, il ne faudrait pas uniquement deux systèmes de freinage mais toute une famille pour laquelle une étude statistique permettrait d'identifier les variabilités voire les distributions associées aux paramètres d'intérêt dans le cas d'une modélisation probabiliste. En effet, les développements proposés n'excluent pas ce type de modélisation.

La représentativité du modèle éléments finis du système de freinage, utilisé dans le **chapitre 2**, mérite d'être améliorée. En parallèle à cette thèse, d'autres travaux ont montré la nécessité de modéliser l'ensemble disque – plaquette – étrier pour représenter les principales instabilités, de prendre en compte un comportement spécifique pour la zone frittée, comme l'a proposé Renaud [REN11] et de recaler par exemple avec précision les modèles de chaque composant en terme de comportement dynamique en utilisant par exemple le morphing pour ajuster le modèle vis-à-vis des analyses modales expérimentales [FRA12].

Concernant les développements numériques, il serait essentiel de lever les limitations de la méthode FL2C, présentées dans le **chapitre 3**. Certaines applications numériques comportant plusieurs nœuds esclaves en contact ou dans le domaine de la dynamique ont montré que le régulateur n'est pas suffisamment robuste lorsque l'on doit gérer des plages de variations importantes ou en présence d'une dynamique entre les variables gérées. La première étape sera de définir un régulateur avec des règles plus complexes [AZA11] et de ne plus gérer directement la force de contact associée au gap identifié mais plutôt de manipuler un coefficient multiplicateur associé à une variation d'effort. Dans le but de traiter des applications industrielles présentées dans le chapitre 2, il est primordial d'adapter les développements au cas du contact 3D et de valider l'intégration de la méthode FL2C au sein d'un schéma d'intégration de Newmark.

Une réduction supplémentaire des temps de calcul lors du calcul de stabilité avec données floues, détaillées dans le **chapitre 4**, pourrait être obtenue en travaillant directement sur le problème aux valeurs propres complexes et non pas uniquement sur les calculs

intermédiaires. Le point sur lequel nous devons nous attarder vis-à-vis des applications de freinage est la réponse temporelle floue, récemment abordée par Rama Rao [RAM10].

Disposant des outils de réanalyse et de propagation des incertitudes pour les analyses d'ingénierie, il est alors envisageable, à plus long terme, de les intégrer au sein d'une optimisation robuste et sous incertitudes, comme l'ont récemment fait Massa et al. dans le cas d'analyses linéaires floues [MAS11]. D'autre part, les méthodes développées peuvent être appliquées pour traiter la propagation des incertitudes pour d'autres problèmes industriels comme le broutement en usinage à grande vitesse [SEG08] ou le bruit de roulement du contact roue-rail dans le domaine ferroviaire [DEL11].

3. Références bibliographiques

[AZA11] AZADEGAN A., POROBIC L., GHAZINOORY P., SAMOUEI P., KHEIRKHAH A.S. (2011). Fuzzy logic in manufacturing : A review of literature and a specialized application, International Journal of Production Economics 132, 258-270.

[DEL11] DELAVAUD V. (2011). Modélisation temporelle de l'interaction roue/rail, pour une application au bruit de roulement ferroviaire. Thèse de Doctorat en Mécanique, ENSTA Paristech.

[FRA12] FANCA De PAULA B., REJDYCH G., CHANCELIER T., VERMOT Des Roches G., BALMES E. (2012). On the influence of geometry updating for the modal correlation of brake components. XVIIIth symposium on vibrations, chocs and noises (VISHNO 2012), Paris, juillet.

[HEU12] HEUSSAFF A., DUBAR L., TISON T., WATREMEZ M., NUNES R.F. (2012). A methodology for the modeling of the variability of brake lining surfaces. Wear 289, 145-159.

[MAS11] MASSA F., LEROUX A., LALLEMAND B., TISON T., MARY S., BUFFE F. (2011). Fuzzy vibration analysis and optimization of engineering structures Application to Demeter satellite. IUTAM bookseries, 27(1), pp. 63-76.

[RAM10] RAMA RAO M.V., POWNUK A., VANDEWALLE S., MOENS D. (2010). Transient response of structures with uncertain structural parameters. Structural safety 32, 449-460.

[SEG08] SEGUY S. (2008). De l'adaptation à la variation continue de la vitesse de broche afin de contrôler le broutement en fraisage de parois minces : modélisations et études expérimentales. Thèse de Doctorat en Mécanique, Institut national Polytechnique de Toulouse.

Résumé

Lors de la conception d'un frein, le confort et le bien-être du consommateur font partie des critères principaux. En effet, les instabilités de crissement, qui engendrent une des pollutions acoustiques les plus importantes, représentent un challenge actuel pour la communauté scientifique et les industriels du domaine. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la mise en évidence du caractère variable du crissement, observé pour deux systèmes de freinage d'un même véhicule, grâce à des plans d'expériences, expérimental et numérique. Pour être représentatif d'une famille de structures, il est désormais indéniable qu'il faille prendre en compte les variabilités observées sur de multiples paramètres liés au système étudié dès la phase de conception. L'enrichissement des simulations déterministes actuelles nécessite la mise en place d'outils non déterministes rapides et respectant le conservatisme des solutions étudiées. Pour ce faire, nous avons contribué au développement de méthodes numériques dédiées à la propagation des données floues dans le cas des graphes de coalescence, à la détermination des positions d'équilibre de corps en contact frottant à partir d'une méthode de régulation basée sur la logique floue. Cette solution permet d'appliquer une technique de projection pour réduire le coût numérique en utilisant des bases modales des composants réanalysées par un développement homotopique.

Mots clés

Crissement – Instabilités – Contact frottant – Non-linéarité – Imperfections – Ensembles flous – Régulation – Logique Floue – Méta-modèles

Abstract

During a brake design, consumer comfort and well-being are the main criteria. Indeed, squeal instabilities, that produce main acoustic pollution, represent a current challenge in the scientific community and for industrials. In this thesis, we interest first in the highlight of the variability of squeal, observed for two brake systems of a same vehicle, thanks to experimental and numerical designs of experiments. To be representative of a structure family, it is now undeniable that we must take into account variability observed in various parameters of the studied system, from the design phase. To enrich existing deterministic simulations, quick non deterministic tools must be established, respecting the studied solutions conservatism. For this, we have contributed to the development of numerical methods to propagate fuzzy data in the case of diagram of coalescence, to determine the equilibrium position of frictional contact bodies with a fuzzy logic controller. This solution allows to apply a projection technique for reducing the computational cost. The modal bases of components are reanalyzed by homotopy perturbation.

Keywords

Squeal – Instability – Frictional contact – Non-linearity – Imperfections – Fuzzy sets – Fuzzy Logic Controller – Surrogate model