

Commande robuste des systèmes non linéaires complexes

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 juin 2012

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Reims Champagne-Ardenne
(Spécialité Automatique)

par

Malik MANCEUR

Composition du jury

<i>Président :</i>	S. MAMMAR	Professeur à l'Université d'Evry
<i>Rapporteurs :</i>	T. BOUKHOBZA S. GALICHET	Professeur à l'Université de Lorraine Professeur à Polytech Annecy-Chambéry
<i>Examineurs :</i>	A. HAMZAOUI N. ESSOUNBOULI	Professeur à l'IUT de Troyes, Directeur de Thèse Professeur à l'IUT de Troyes, Co-Directeur de Thèse

Mis en page avec la classe thloria.

*À la mémoire de ma mère,
Ma source éternelle d'inspiration et de bénédiction,
À mon père,
Mon maître de passion, de patience et de persévérance,
À mes sœurs et mes frères,
À mes nièces et mes neveux,
À tous mes amis.*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué, à l'Institut Universitaire de Technologie de Troyes (IUT), au sein du Centre de Recherche en Sciences et Techniques de l'Information et de la Communication (CReSTIC), de l'université de Reims Champagne-Ardenne (URCA).

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements à Monsieur Abdelaziz HAMZAOU, Directeur et Professeur à l'IUT de Troyes et Monsieur Najib ESSOUNBOULI, Professeur à l'IUT de Troyes, pour avoir dirigé et co-dirigé ce travail, pour leurs nombreux conseils ainsi que leur soutien tout au long de cette thèse.

J'adresse mes remerciements particuliers à Monsieur Taha BOUKHOBZA, Professeur à l'Université de Lorraine, et à Madame Sylvie GALICHET, Professeur à Polytech Annecy-Chambéry, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de ce travail et pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques constructives ont contribué à améliorer ce document.

J'ai été honoré que Monsieur Saïd MAMMAR, Professeur à l'Université d'Evry, ait accepté d'examiner ce travail et de présider le jury de ma soutenance.

Que tous les membres, collègues et amis du CReSTIC de l'IUT de Troyes trouvent ici le témoignage de mon amitié et de ma reconnaissance, en particulier Jérôme et Lghani.

Enfin, je ne saurais terminer sans remercier toute ma famille, qui m'a accompagné tout au long de mes études par son amour inconditionnel et son soutien constant.

Table des matières

Avant-propos ix

Introduction générale 7

Chapitre 1 Généralités sur la logique floue
--

1.1	Introduction	15
1.2	Concept et ensemble flou type-2	19
1.2.1	Concept du flou type-2	20
1.2.2	Représentation d'un ensemble flou type-2	21
1.2.3	Types d'ensemble flous type-2	21
1.3	Systèmes flous type-2	24
1.3.1	Fuzzification	25
1.3.2	Règles	25
1.3.3	Inférence	25
1.3.4	Réduction de type	26
1.3.5	Défuzzification	28
1.4	Modèle flou de type Takagi-Sugeno (TS)	29
1.4.1	Modélisation floue de type TS	30
1.4.2	Construction d'un modèle flou TS	32
1.5	Conclusion	37

Chapitre 2 Commande par modes glissants d'ordre un et supérieur
--

2.1	Introduction	39
2.2	Contexte et formulation	43

2.3	Synthèse de la surface de glissement	46
2.4	Commande par modes glissants	47
2.4.1	Concepts de base	47
2.4.2	Synthèse de la loi de commande	48
2.5	Commande par modes glissants d'ordre un	50
2.5.1	Inconvénients de la commande par modes glissants	50
2.5.2	Quelques solutions pour le chattering	52
2.6	Commande par modes glissants d'ordre supérieur	53
2.6.1	Principe de fonctionnement	54
2.6.2	Commande par modes glissants d'ordre deux	54
2.7	Commande par modes glissants d'ordre deux d'un système non linéaire	56
2.8	Commande par modes glissants floue d'ordre deux	58
2.8.1	Cas d'un système multi-entrées multi-sorties	62
2.9	Simulations et résultats	67
2.9.1	Cas d'un système mono-entrée mono-sortie	67
2.9.2	Cas d'un système multi-entrées multi-sorties	77
2.10	Conclusion	86

Chapitre 3

Commande floue par modes glissants à base de l'<i>Integral Sliding Mode</i>
--

3.1	Introduction	89
3.2	Commande par modes glissants floue à base de l' <i>Integral Sliding Mode</i>	90
3.2.1	Synthèse de la partie continue de la commande	92
3.2.2	Synthèse de la surface <i>Integral Sliding Mode</i>	94
3.2.3	Synthèse de la commande discontinue avec l'approche proposée	95
3.3	Généralisation de la méthode au cas multivariables	98
3.3.1	Synthèse de la partie continue de commande	100
3.3.2	Synthèse de la surface <i>Integral Sliding Mode</i>	101
3.3.3	Synthèse de la commande discontinue avec l'approche proposée	102
3.4	Simulation et Résultats	105
3.4.1	Cas d'un système SISO	105
3.4.2	Cas d'un système MIMO	109
3.5	Conclusion	114

Chapitre 4**Validation expérimentale**

4.1	Introduction	117
4.2	Banc d'essais	118
4.3	Implémentation de la commande (2.31)	119
4.3.1	Essai sans charge	121
4.3.2	Essai avec charge	123
4.4	Implémentation de la commande (3.21)	128
4.5	Conclusion	133

Conclusion générale et perspectives	135
--	------------

Annexe**Annexe A****Banc d'essais**

A.1	Module dSPACE DS1104	139
A.2	Amplificateur de tension	140
A.3	Capteur de position	141
A.4	Moto-réducteur	142
A.5	Caractéristiques techniques	143
A.6	MATLAB et Simulink	145
A.7	ControlDesk	146

Bibliographie	149
----------------------	------------

Avant-propos

Les travaux de recherche effectués dans cette thèse entrent dans le cadre du projet MOSYP : Mesure et Optimisation des performances des Systèmes de Production. Ce projet d'une durée de cinq ans (2008-2012) s'inscrit dans le cadre du Contrat Plan État Région (CPER) 2007-2013. Il regroupe trois partenaires industriels (Aries Packaging, Distrame, Sinovia) et 18 enseignant-chercheurs du CReSTIC (URCA) et de l'Institut Charles Delaunay (UTT). Ce projet concerne les activités liées au contrôle/commande et à l'ordonnancement des ateliers de production, il s'appuie sur le plateau technique MESERP composé entre autres des trois cellules flexibles situées à Troyes et Reims. MOSYP a pour objectif d'apporter des contributions au domaine de l'automatisation par :

- l'intégration forte des tâches d'ordonnancement et de commande,
- la définition d'un tableau de bord multi-dimensionnel,
- une approche globale du système de production orientée produit.

Ce projet est financé conjointement par la Région Champagne-Ardenne et le Fonds Européen du Développement Régional (investissement : 350*Keuro*; fonctionnement : 150*Keuro* et 3 supports doctoraux). Cette thèse est financée dans le cadre de ce projet et plus particulièrement elle concerne la tâche 2 liée au contrôle/commande.

Table des figures

1.1	(a) Représentation tridimensionnelle d'un ensemble flou type-2 Gaussien. (b) Degré d'appartenance flou correspondant à $x = 4.25$	21
1.2	Ensemble flou type-2 intervalle avec une incertitude de variance $\omega \in [0.42, 0.8]$, l'intervalle d'activation appartient à $[0.05, 0.45]$ pour $x = 4$	23
1.3	Ensemble flou type-2 intervalle avec une incertitude de moyenne $m \in [2.4, 3.15]$, l'intervalle d'activation appartient à $[0.29, 0.69]$ pour $x = 4$	24
1.4	(a) Structure d'un système flou type-2, (b) Le réducteur de type avec ses deux sorties ordinaire et floue type-1.	24
1.5	Fonctions d'appartenance des deux règles du modèle	34
1.6	La réponse du système selon les différents contrôleurs et différentes valeurs initiales d'angle [BMM10].	35
2.1	Convergence en temps fini de l'algorithme du Super-Twisting.	55
2.2	Schéma bloc de la commande proposée.	61
2.3	Bras de robot avec un moteur à courant continu	68
2.4	Fonctions d'appartenance intervalle floues de type-2 de : (a) x_1 du modèle nominal, (b) σ des systèmes adaptatifs.	71
2.5	Les trajectoires du système en utilisant la loi de commande (2.24) :(a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (a) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).	72
2.6	Le signal de commande en utilisant la loi (2.24).	72

2.7	Les trajectoires du système en utilisant la commande proposée (2.31) :(a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (a) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).	73
2.8	(a) Le signal de commande en utilisant l'approche proposée (2.31). (b) L'erreur quadratique de poursuite.	74
2.9	(a) La trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ dans la plan de phase, (b) La surface σ	74
2.10	Les trajectoires du système en utilisant la commande proposée (2.31) :(a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (b) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).	75
2.11	Le signal de commande en utilisant l'approche proposée (2.31).	76
2.12	(a) La trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ dans la plan de phase, (b) La surface de glissement σ	76
2.13	Bras de robot à deux articulations.	77
2.14	(a) Fonctions d'appartenances intervalle flou de type-2 de : (a) x_1 et x_3 du modèle nominal, (b) σ_1 et σ_2 des systèmes adaptatifs.	82
2.15	Poursuite de trajectoire de x_1 et x_3	82
2.16	Poursuite de trajectoire de x_2 et x_4	83
2.17	Les signaux de commande en utilisant la loi (2.83)	83
2.18	Poursuite de trajectoire de x_1 et x_3	84
2.19	Poursuite de trajectoire de x_2 et x_4	85
2.20	Les signaux de commande en utilisant l'approche proposée (2.58).	85
2.21	Les sous-surfaces de glissements.	86
2.22	Les signaux de commandes adaptatifs : (a) $\hat{u}_{11}^*, \hat{u}_{12}^*$, (b) $\hat{u}_{21}^*, \hat{u}_{22}^*$ (Nm).	86
3.1	Etapas de calcul de la commande <i>Integral Sliding Mode</i> floue	97
3.2	Fonctions d'appartenance intervalles flous de type-2 :(a) $x_1(t)$ du modèle nominal; (b) σ des deux systèmes adaptatifs.	106
3.3	La surface de glissement $\sigma = s$ et sa dérivée $\dot{\sigma} = s^1$	107
3.4	(a) Erreur quadratique de position; (b) Effort appliqué u (v).	108

3.5	(c) La position angulaire $x_1(t)$ (trait continu) et sa trajectoire de référence y_r (trait discontinu);(d) La vitesse angulaire $x_2(t)$ (trait continu) et sa trajectoire de référence \dot{y}_r (trait discontinu).	108
3.6	Fonctions d'appartenance intervalles flous de type-2 :(a) de $x_1(t)$ et $x_3(t)$ du modèle nominal, (b) de σ_1 et σ_2 des systèmes adaptatifs.	110
3.7	La sous-surface de glissement σ_1 et sa dérivée $\dot{\sigma}_1$	111
3.8	La sous-surface de glissement σ_2 et sa dérivée $\dot{\sigma}_2$	111
3.9	Les erreurs quadratiques de poursuite en position : (a) de x_1 , (b) de x_3 . . .	112
3.10	(a) La position angulaire x_1 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(1)$ (ligne discontinue), (b) La position angulaire x_3 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(3)$ (ligne discontinue).	112
3.11	(a) La vitesse angulaire x_2 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(2)$ (ligne discontinue), (b) La vitesse angulaire x_4 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(4)$ (ligne discontinue).	113
3.12	Les deux couples de commandes appliquées :(a) $u_1(Nm)$, (b) $u_2(Nm)$	113
4.1	Banc d'essais.	118
4.2	Schéma synoptique du banc d'essais.	119
4.3	Ensemble flous type-2 intervalles : (a) en fonction de σ des systèmes adaptatifs, (b) en fonction de $x_1(t)$ du modèle nominal.	120
4.4	Le signal de commande sans charge.	121
4.5	L'erreur quadratique de poursuite en position sans charge.	122
4.6	L'erreur quadratique de poursuite en vitesse sans charge.	122
4.7	La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) sans charge.	123
4.8	La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) sans charge.	123
4.9	Le signal de commande avec charge et opposition.	124
4.10	L'erreur quadratique de poursuite en position avec charge et opposition. . .	125
4.11	L'erreur quadratique de poursuite en vitesse avec charge et opposition. . .	125

4.12	La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) avec charge et opposition.	126
4.13	La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) avec charge et opposition.	126
4.14	Le signal de commande avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$	127
4.15	L'erreur de poursuite en position avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$	127
4.16	L'erreur de poursuite en vitesse avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$	127
4.17	La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$	128
4.18	La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$	128
4.19	Ensemble flous type-2 intervalles : (a) en fonction de σ des systèmes adaptatifs, (b) en fonction de $x_1(t)$ du modèle nominal.	129
4.20	La surface de glissement σ (ligne continue) et sa dérivée $\dot{\sigma}$	130
4.21	Erreur quadratique de poursuite en position (ligne continue) et de vitesse (ligne discontinue).	131
4.22	Zoom sur la trajectoire des erreurs quadratiques de poursuites.	131
4.23	Le signal de commande.	132
4.24	La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue).	132
4.25	La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue).	133
A.1	Carte dSPACE DS1104 R&R.	140
A.2	Panneau de contrôle dSPACE DS1104.	140
A.3	Amplificateur de tension.	141
A.4	Moteur et codeur absolu.	141
A.5	Branchement du codeur sur un port numérique.	142

A.6	Schéma d'un moto-réducteur+charge.	143
A.7	Caractéristiques techniques du moto-réducteur RE40G/PLG42S.	144
A.8	Caractéristiques techniques du moto-réducteur RE40G/PLG42S.	145
A.9	Le calcul de la position avec Simulink.	146
A.10	Une fenêtre de traitement avec ControlDesk.	147
A.11	Schéma global du banc d'essais.	148

Introduction générale

La modélisation d'un procédé physique est toujours une tâche délicate pour un automaticien. En effet, la compréhension d'un système permet d'agir sur son comportement en lui imposant une conduite selon certaines performances. Par mesure de sécurité, lors d'une élaboration d'une commande, elle ne peut être appliquée directement au procédé réel. Une alternative consiste à concevoir un modèle mathématique du système à commander, utilisable d'une part pour la conception du contrôleur et d'autre part pour la simulation.

Par nature, la majorité des systèmes réels sont non linéaires. Poussée par leur étude complexe et une insuffisance des moyens de simulation, la communauté scientifique a essayé d'approcher le comportement de ces systèmes par des modèles linéaires. Dans ce contexte et grâce à de nombreuses contributions, l'automatique moderne dispose d'un ensemble d'outils bien maîtrisé pour l'analyse de ces systèmes. Cependant, une approximation linéaire n'est valable que dans un domaine de fonctionnement limité et strict. A grande échelle dans les systèmes de production et en robotique, cette approximation perd toute signification. Dans ce cas, une analyse qui fait appel aux méthodologies des systèmes non linéaires est inévitable.

Lors de la mise en équations mathématiques, les systèmes non linéaires manifestent souvent des phénomènes complexes incompréhensibles, voire chaotiques [SL91]. Contrairement à l'automatique linéaire, l'automatique non linéaire ne dispose pas de techniques universelles généralisant des résultats pour l'analyse et la synthèse des contrôleurs pour les systèmes non linéaires [Bou00]. Bien que l'analyse et la commande de ces systèmes ne sont pas toujours des tâches faciles, la plupart des travaux dans la littérature proposent des approches qui sont, généralement, limitées à des formes bien particulières de systèmes

[SL91], [KG02], [CGD⁺00], [CGM01], [HBS04]. En effet, pour faciliter leur étude, de nombreuses hypothèses sur la structure, la commandabilité et l'observabilité du système sont utilisées. Ces hypothèses simplificatrices qui sont difficilement vérifiables, accablent souvent les performances à assurer en commande.

Même si on arrive à avoir un modèle, il sera sans doute incertain en terme de reproduction du comportement physique du procédé. D'ailleurs cette incertitude s'avère naturelle pour la classe des systèmes réels. Cette réputation a motivé l'introduction de la notion de modèles incertains [Bou00]. Poussée par une volonté d'approcher le mieux possible le comportement réel d'un système, cette méthode a pour but de considérer son modèle comme une somme d'un modèle nominal auquel se rajoutent différentes incertitudes. Avec cette nouvelle notion, la commande aura une tâche supplémentaire, celle de rejeter les incertitudes et d'assurer la robustesse [FK96].

L'une des solutions pour contourner la complexité de la représentation mathématique d'un système non linéaire est de le substituer par un modèle flou [TW01]. Avec ce concept, l'expertise humaine traduit le comportement et les relations états, entrées et sorties du procédé par des règles floues [TS85]. En effet, le progrès et l'investissement dans la théorie du flou depuis son introduction par Zadeh [Zad65] a démontré qu'un système flou peut être utilisé comme un approximateur universel [Kos94],[ZZX00],[Mon05],[Wan94],[TW01],[Ess04],[Hus08]. Tenant compte des deux parties prémisse et conclusion qui forment une règle floue, on distingue essentiellement deux familles de modèles flous : de type Mamdani [Mam74],[Mam76] et de type Takagi-Sugeno (TS) [TS85],[SK88],[TW01]. La deuxième famille se distingue remarquablement, bien qu'elle conserve le formalisme flou en amont dans la partie prémisse, par le fait que l'inférence n'est autre qu'une interpolation des conclusions. Comme résultat après défuzzification, on obtient une fonction non linéaire reliant arithmétiquement les entrées et les sorties du système. Cette propriété permet de représenter un système non linéaire par une interconnexion de modèles affines et linéaires autour de certains points de fonctionnement auxquels sont associées des fonctions de pondération appelées fonctions d'activation. Il existe deux manières pour déterminer ces fonctions, soit par identification à partir d'un système réel [Gas00],[GMR02], soit en se servant d'un modèle de connaissance qui permettra d'obtenir sa représentation exacte

dans une portion compacte de l'espace d'état [Mon05],[Mor01],[Wan94],[TW01].

Si théoriquement un système flou nous donne raison d'approximer n'importe quel système non linéaire, en pratique cette représentation est liée à un nombre de règles floues. Quel que soit ce nombre, petit ou grand, les erreurs de modélisation sont peu évitables. Pour cette raison, dans cette thèse ces erreurs sont prises en considération lors de la modélisation. Dans ce cas, un système non linéaire mono-entrée mono-sortie (SISO) ou multi-entrées multi-sorties (MIMO) sera représenté par un modèle nominal flou avec un nombre optimal de règles, auxquels sont associées des erreurs d'approximations qui seront vues comme des incertitudes.

Depuis l'introduction de la théorie floue, il y avait une communauté restreinte de chercheurs qui se sont investis dans la commande floue. En dépit du succès des contrôleurs flous dans le domaine industriel, ils étaient souvent critiqués par faute d'absence de résultats sur la stabilité et d'explications sur la robustesse des systèmes commandés par logique floue [Bou00]. C'est uniquement à partir des années 90 que des commandes floues, notamment adaptatives, assurant la stabilité et la robustesse ont été proposées [Wan94],[TIW98]. Ensuite, plusieurs approches et preuves ont vu le jour, notamment en flou classique appelé de nos jours le flou de type-1 [WTG96],[MMG⁺09],[CGM01],[EHZ06],[Wan94],[TCU01] et le flou généralisé de type-2 [CSGB07],[HEH⁺11],[Hus08],[MEH10c], [MEH10b],[MEH11b],[MEH11c],[CM08].

Les systèmes flous de type-2 sont constitués par des règles, où les ensembles flous qui sont utilisés sont de type-2. Par définition, ces ensembles flous comprennent une incertitude au niveau de leurs fonctions d'appartenance. On peut dire que la logique floue de type-2 est une généralisation de la logique floue conventionnelle dans le sens où les incertitudes ne sont pas uniquement limitées aux variables linguistiques (les mots), mais aussi prises en compte lors de la définition des fonctions d'appartenance.

En effet, les systèmes flous sont constitués par des règles, assez souvent issues de connaissances incertaines. cette incertitude qui peut être au niveau de la partie prémisse ou conclusion, apparaît plus particulièrement dans les ensembles flous à travers les fonctions d'appartenances correspondantes [KM98b],[KM98a]. Par ailleurs les systèmes flous de type-1 sont incapables de prendre en compte et de traiter directement de telles in-

certitudes. En revanche les systèmes flous de type-2 sont constitués par des ensembles flous de type-2 dans la partie prémisse et/ou conséquente. Ces ensembles flous dont les degrés d'appartenance, qui sont eux-mêmes des ensembles flous de type-1, sont très utiles et conseillés dans les circonstances où on a des difficultés à déterminer avec précision une fonction d'appartenance pour un ensemble flou.

La logique floue originale, fondée par Zadeh, a plus de 40 ans d'existence et pourtant elle est incapable de gérer les incertitudes de règles [Men01]. Par contre la logique floue élargie (de type-2) est capable de gérer ces incertitudes, car elle permet de les modéliser et de minimiser leurs effets.

En commande, un contrôleur purement flou de type-1 ou type-2 seul est incapable d'assurer la robustesse de la boucle fermée. Des techniques comme la commande adaptative [Wan94] ou PDC (Parallele Distributed Compensation) [WTG96],[WTG95] permettent d'assurer la stabilité du système. Pour assurer à la fois la stabilité et la robustesse de la boucle fermée, un métissage avec l'une des techniques de robustification est indispensable. Parmi les techniques les plus utilisées, on distingue principalement la commande H_∞ et la commande par modes glissants [MMG⁺09],[GBM09],[ZLZ01],[HEZ04],[HEH⁺11],[EHZ06],[MEH12].

La commande par modes glissants, depuis qu'elle a été introduite par Utkin [Utk77], ne cesse d'accumuler des succès grâce à sa robustesse et sa simplicité d'implémentation. Son concept de base consiste à définir une surface de glissement attractive en fonction des variables d'états du système. La commande va être une somme de deux composantes : la première qui est discontinue permet l'approche et le maintien sur la surface, la seconde permet de glisser le long de celle-ci pour rejoindre l'origine de phase. Cependant, la composante discontinue à cause de la fonction *signe* oscille avec une haute fréquence autour de la surface, ce qui provoque le phénomène de chattering. Ce phénomène représente l'inconvénient majeur de cette technique, car il peut exciter les hautes fréquences non modélisées du système et peut engendrer un vieillissement prématuré des actionneurs. Parmi les solutions proposées dans la littérature à ce niveau, on trouve : la substitution de la fonction *signe* par d'autres à variation plus douce, l'usage de la couche limite et la fonction de saturation [SL91],[Spi07]. D'autres auteurs ont proposé d'approximer la partie discontinue

par un système flou adaptatif [HWR09],[HMEZ03],[NRJ09]. Ces méthodes peuvent certes diminuer ou supprimer l'effet du chattering, mais d'un autre côté elles génèrent d'autres soucis tels que : une erreur qui subsiste, un compromis entre la largeur de la bande de transition et les limitations de commande, un dilemme entre le niveau de performance en poursuite de trajectoires et des commandes adéquates au démarrage.

La commande par modes glissants d'ordre supérieur a émergé dans les années 80, principalement pour apporter des solutions aux limites de la commande par modes glissants classique [Lev93],[EKL86],[PB02]. Cette nouvelle commande agit sur la surface de glissement et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $(r - 1)$, ce qui permet d'apporter plus de précision et d'éliminer le chattering ou au moins de réduire son effet.

L'inconvénient d'un mode glissant d'ordre r réside dans l'information considérable sur les dérivées de la surface, qui sont en fonction des variables d'états du système. Afin de maintenir la caractéristique d'atténuation de chattering tout en optimisant le nombre de capteurs nécessaires pour la mise en oeuvre de la commande, de nombreux algorithmes par modes glissants d'ordre 2 ont été proposés [Lev93],[FL02],[BFU97],[BFLU99], [Bre10]. Il reste à noter que pour cette catégorie de contrôleurs, il n'est pas évident de calculer la valeur optimale des gains de commande. Ces derniers ont un impact sur la réduction de chattering et l'optimisation de l'énergie du signal de commande ; voire même la stabilité de la boucle fermée [MEH11b],[MEH11c],[MEH10b],[Bre10],[MEH12].

Dans cette thèse, nous proposons une famille de lois de commandes adaptatives floues type-2 robustes à base des modes glissants d'ordre 2, pour une classe de systèmes non linéaires incertains. Devant la difficulté de calculer le modèle nominal d'un système non linéaire, ce dernier sera construit à l'aide d'un système flou type-2 TS. Les modèles locaux du système qui sont obtenus par linéarisation autour de certains points de fonctionnement, seront exploités par le système flou TS. Ainsi, pour une commande et un état donné, le modèle nominal flou va apparaître comme une moyenne pondérée des modèles locaux.

Dans un premier temps nous considérons l'algorithme du Super-Twisting, qui fait partie des commandes par modes glissants d'ordre 2 les plus répandues. Son avantage réside dans le fait qu'il agit sur la surface de glissement et sa dérivée, sachant qu'il nécessite uniquement une information sur la première fonction. Mais comme tout algorithme de même

catégorie, il présente quelques inconvénients : il permet de réduire le chattering mais pas de l'éliminer, la valeur optimale des gains de commande est difficile à calculer. Pour résoudre ce problème, nous avons proposé de substituer les composantes du Super-Twisting par deux systèmes flous type-2 adaptatifs [MEH12]. Ces derniers auront comme unique entrée la surface de glissement et comme sortie la valeur optimale des gains de commande. En plus de conserver la structure de l'algorithme d'origine, ils nous permettent d'optimiser l'énergie du signal de commande et de s'affranchir de la connaissance des bornes supérieures des perturbations et des incertitudes. Leur mise à jour est assurée grâce à deux lois d'adaptations, qui sont déduites de l'étude de stabilité de la boucle fermée au sens de Lyapunov.

A l'égard des performances de l'approche que nous proposons, sa seule faiblesse réside dans le choix du temps de convergence qui apparaît dans l'un des termes de la loi de commande, car il est uniquement estimé. Pour remédier à ce problème, nous avons fait appel au concept de l'*Integral Sliding Mode*. En plus d'assurer la bornitude du temps de convergence, ce concept assure la convergence de la surface de glissement et ses dérivées vers zéro en un temps fixé à priori t_f . Ces spécificités résultent du fait que le temps de convergence ne dépend pas du système, mais uniquement de la condition initiale de la variable de glissement et de ses dérivées. Cette nouvelle commande que nous proposons fait appel à un système auxiliaire, qui a pour tâche le calcul d'un terme de correction de la surface de glissement. Avec cette nouvelle méthode, la commande se compose de deux parties. Une partie discontinue qui force l'établissement d'un régime glissant sur la nouvelle surface dite intégrale et assure la robustesse de la boucle fermée. L'autre partie, issue d'une commande optimale par retour d'état stabilise à zéro la dynamique d'ordre supérieur de la représentation d'état de la surface et de ses dérivées. Cette dernière composante a deux dynamiques : pour $t \in [0 \ t_f]$, on lui associe un terme de forçage qui fait converger la surface et ses dérivées ; à $t > t_f$ il sera supprimé.

Les deux approches sont généralisées et adaptées au cas des systèmes multivariables non linéaires et incertains, ensuite elles sont validées expérimentalement sur un banc d'essais. En résumé, le travail présenté dans cette thèse porte sur le métissage de la commande adaptative, de la logique floue et des modes glissants pour résoudre le problème de pour-

suite de trajectoire des systèmes non linéaires et des des inconvénients d'un algorithme de modes glissants d'ordre 2.

L'ensemble de ce travail est organisé en quatre chapitres.

Le *premier chapitre* est consacré à l'introduction de certains fondements théoriques et notions de base de la logique et des systèmes flous de type-2. L'usage de ces derniers en tant qu'approximateurs universels sera mis en avant. Ensuite, nous allons aborder les différentes méthodes pour la construction d'un modèle nominal. En privilégiant les modèles flous TS, pour leurs avantages, ils seront étendus en introduisant le concept du type-2 [MEH10c],[MEH11b],[MEH12].

Dans le *deuxième chapitre*, après avoir présenté la commande par modes glissants, nous allons nous intéresser dans un premier temps à la commande par modes glissants d'ordre un. Les limites de cette commande seront explicitées ainsi que les différentes solutions proposées dans la littérature.

Ensuite, nous allons concentrer notre étude sur la commande par modes glissants d'ordre supérieur, qui représente aussi une solution aux modes glissants d'ordre un. Malgré la grande précision qu'apporte les modes glissants d'ordre élevé, ceux d'ordre deux qui seront privilégiés car ils nécessitent moins de ressources en terme d'information. La commande d'un système non linéaire sera construite à base de l'algorithme du Super-Twisting. Les limites de cette commande en terme de difficulté de calcul des gains et du chattering résiduel seront résolus en substituant les termes du Super-Twisting par deux systèmes adaptatifs flous type-2 [MEH10c],[MEH12]. L'extension aux systèmes multi-entrées d'ordre n sera également présentée [MEH10b],[MEH10a]. Dans les deux cas, des résultats de simulation avec une étude comparative avec l'algorithme d'origine sont présentées pour illustrer les performances des approches proposées.

Dans le *troisième chapitre*, nous allons synthétiser une nouvelle commande adaptative floue type-2 à base des modes glissants d'ordre deux qui utilise le concept de l'*Integral Sliding Mode* [MEH11b]. Ce concept, permet de résoudre le problème d'estimation du temps de convergence de la commande. De plus, il nous permet de fixer à priori ce temps de convergence selon un critère quadratique à optimiser. La surface de glissement sera modifiée et l'une des composantes de commande va agir dessus, ce qui nous permet de

manipuler et maîtriser la phase d'approche et de glissement [MEH11a]. L'extension de cette approche au cas des systèmes multivariables sera également présentée [MEH11c]. La stabilité globale de la boucle fermée, dans les deux cas, est étudiée à l'aide de la théorie de Lyapunov. Des résultats de simulations, des deux approches, sont présentés pour illustrer leurs apports et performances.

Le *quatrième chapitre*, est consacré à la validation expérimentale des commandes proposées dans les chapitres précédents sur un banc d'essais. Plusieurs tests, en terme de poursuite et de robustesse, ont été effectués pour mettre en évidence leurs performances et confirmer les résultats par simulation.

1

Généralités sur la logique floue

1.1 Introduction

Contrairement à l'automatique linéaire, l'automatique non linéaire ne dispose pas de solutions universelles ni pour l'analyse des systèmes ni pour la conception de leurs contrôleurs. L'analyse et la commande de ces systèmes ne sont pas toujours des tâches faciles. La plupart des travaux dans la littérature proposent des approches qui sont, généralement, limitées à des formes bien particulières de systèmes [SL91], [KG02], [CGD⁺00], [CGM01], [HBS04]. De plus, les performances assurées sont, souvent, au prix de la complexité du schéma de commande et du développement théorique utilisé. L'expression qui représente, par des équations, les relations entre les entrées et les sorties du processus est appelée modèle mathématique. Si ces équations sont algébriques, le modèle est dit statique et si elles sont différentielles ou aux différences récurrentes, le modèle est dit dynamique, respectivement à temps continu ou à temps discret. Généralement, un modèle peut être utilisé pour :

1. simuler un processus : à des fins pédagogiques, de détection d'anomalies de fonctionnement, de diagnostic de pannes, de conception assistée par ordinateur, etc.
2. effectuer la synthèse d'une loi de commande ou pour être incorporé dans un dispositif de commande.

Il est clair que la plupart des processus que l'on peut rencontrer nécessiteraient des modèles non linéaires, pour décrire de manière précise leur comportement dans la totalité de leur domaine de fonctionnement, puisque la majorité des modèles linéaires constitue des approximations valables dans un domaine plus ou moins restreint. Il est donc important de pouvoir élaborer un modèle non linéaire pour rendre compte du comportement d'un processus, non seulement autour de ses points de fonctionnement habituels, mais également lors des passages d'un point à un autre.

En automatique, la majorité des approches de la commande non linéaire exige la disponibilité d'un modèle mathématique du système, ce qui n'est pas toujours réalisable en présence d'imprécisions et d'incertitudes liées aux paramètres mal connus, difficilement identifiables et aux dynamiques négligées. D'autre part, les performances assurées seront directement liées à l'exactitude du modèle utilisé. Par conséquent, les automaticiens sont confrontés au problème du modèle mathématique qui doit être précis sachant que les systèmes deviennent de plus en plus complexes, et les méthodes de modélisation traditionnelles s'avèrent souvent incapables de représenter le comportement global d'un système. L'utilisation des contrôleurs basés sur l'expertise humaine peut être une alternative à la commande de ce type de systèmes.

L'idée d'appliquer les techniques floues au domaine du contrôle des processus a été proposée la première fois par Chang et Zadeh en 1972 [CZ72]. Leur démarche reposait sur une approche à base de modèle en utilisant le concept de fonction floue. Toutefois, il est intéressant de noter que les premières applications en contrôle flou ont été effectuées par Mamdani et son équipe [Mam74], [MA75], [Mam76], [Mam77] en utilisant une approche de type heuristique qui a ses racines dans le champ de l'intelligence artificielle. Il s'agit d'utiliser les techniques floues pour leur capacité à exprimer, de manière simple et sous une forme linguistique, des règles de comportement comme cela avait été mis en évidence par Zadeh dans son célèbre article de 1973 [Zad73]. Cette approche a conduit à de nombreux développements dans la communauté de contrôle flou.

Après le travail de défrichage de Mamdani, le premier essai de définition d'une méthodologie d'écriture des contrôleurs flous a été effectué par Mac Vicar-Whelan [MW76] dont la table de règles, de forme antidiagonale, est utilisée dans de multiples applications.

Les relations entre un contrôleur flou reposant sur une table de type Mac Vicar-Whelan et un contrôleur équivalent de type proportionnel-intégral ont été proposées par Tang et Mulholand [TM87]. Le domaine des contrôleurs flous de type proportionnel-intégral-dérivée, ou plus généralement de type linéaire, reste toujours actif (voir par exemple [BI92b],[Buc90],[GF95],[MP99],[TT00],[GEH08],[SBV07],[QTC11]).

Il a été souvent mis en avant que les contrôleurs flous présentaient des propriétés de stabilité ou de robustesse par rapport à des variations paramétriques. Ces constatations sont souvent fondées sur l'analyse des résultats expérimentaux. D'un point de vue théorique, des résultats ont été obtenus sous l'hypothèse des propriétés linéaires des contrôleurs flous. L'analyse de stabilité à partir d'une approche de type Lyapunov permet de déterminer une loi de commande limite associée à un contrôleur flou [FGT07],[BI92a]. L'approche qui a donné lieu à des développements très riches, a été proposée par Takagi et Sugeno en 1985 [TS85],[SK88]. Comme toute autre du même type, elle repose aussi sur une représentation à base de règles. Toutefois, à la différence des contrôleurs de type Mamdani, la partie conclusion des règles s'exprime de manière plus numérique sous la forme d'une constante, d'un polynôme ou de manière plus générale, par une fonction ou une équation différentielle dépendant des variables associées aux prémisses des règles. Ce type de représentation peut être utilisé pour modéliser un processus ou pour synthétiser un contrôleur flou. Cette approche, orientée modèle, a fourni la plupart des résultats théoriques en contrôle flou, en particulier depuis l'article de Takana et Sugeno [TS92] dans lequel les auteurs ont proposé une analyse de la stabilité à partir de la connexion de blocs flous et de la méthode directe de Lyapunov.

Cet article fondateur a permis d'exploiter de nombreux concepts de l'automatique pour l'analyse ou la synthèse des systèmes flous. Par exemple, la stabilisation des systèmes non linéaires peut être envisagée par linéarisation entrées-sorties qui nécessite la connaissance d'un modèle analytique du système à commander. En l'absence de ce modèle analytique, la loi de commande peut être synthétisée à partir d'une relation entrée-sortie fournie par un système flou de type Takagi-Sugeno. Les erreurs de modélisation peuvent être prises en compte par différentes techniques : contrôleurs flous adaptatifs, contrôleurs flous par modes glissants, contrôleurs flous robustes utilisant une synthèse

H_∞ [HEZ04],[HEH⁺11],[EHZ06],[KZHE06],[MEHN10], [HMEZ03],[Wan93],[Wan94],[SS94].

Une autre approche, largement développée, est la conception d'une loi de commande floue stable sous la forme d'un système flou de Takagi-Sugeno associé à un modèle flou de même type. Une loi de commande stabilisante classique peut être engendrée par un contrôleur PDC (Paralell Distributed Compensation). La stabilité de la boucle fermée est généralement obtenue par une approche de type Lyapunov ou par une expression de conditions de stabilité sous forme de LMI (Linear Matrix Inequalities) [WTG96],[BKT09],[CTU00],[MMG⁺09],[GBM09],[ZLZ01],[TIW98].

En résumé, d'un point de vue historique, les contrôleurs de Mamdani sont liés à une approche heuristique tandis que ceux de Takagi-Sugeno reposent plutôt sur une démarche fondée sur un modèle du système à commander. Toutefois, ces deux contrôleurs partagent des propriétés, en particulier :

- une expression de la loi de commande sous forme d'une base de règles ;
- l'usage de sous-ensembles flous pour réaliser une partition floue des variables d'entrées ;
- l'étiquetage linguistique des sous-ensembles flous intervenant dans la partie prémisse des règles ;
- un mécanisme de calcul de la sortie bien formalisé.

Ces dernières années, la logique floue classique appelée logique floue type-1 a été généralisée vers une nouvelle logique floue appelée logique floue type-2. Mendel et son équipe ont beaucoup contribué à son développement [NKMM01],[KML99],[KM98b],[LKM00],[LM00], [Men02],[Men00],[MJ02],[WM02] ; ils ont bâti son fondement théorique, et ils ont démontré son efficacité et sa supériorité en pratique [Men07],[Men03],[CM08],[BMM10] et théorique par rapport à la logique floue type-1 [Men10],[WM10].

La logique floue type-2 est très appréciée dans le cas où nous avons une incertitude au niveau de la fonction d'appartenance, ce qui permet d'incorporer les incertitudes de règles et par conséquent agir positivement sur la sortie du système flou considéré. L'introduction de cette nouvelle logique est justifiée par le fait qu'un système flou type-1 est entaché par au moins trois sources d'incertitudes :

1. Les mots utilisés dans la partie antécédente ou conséquente de règles, peuvent vé-

hiculer différentes idées pour différentes personnes.

2. Les conséquences obtenues en interrogeant un groupe d'experts sont souvent différentes pour la même règle.
3. Les données ou les mesures utilisées pour ajuster ou activer un système flou type-1 sont bruitées.

En se basant sur le fait que la modélisation de l'information linguistique et la prise de décision, représentent la principale application de la logique floue. Plusieurs publications ont mis en évidence l'intérêt de l'usage des systèmes flous type-2 en automatique, seuls ou combinés avec d'autres méthodes de robustification [MEH10c],[MEH10b],[HEH⁺11],[CSGB07],[Hag04],[CM08],[HLL⁺08],[MEH12].

Dans ce chapitre, nous présentons quelques aspects théoriques de la logique floue de type-2, puis nous étendrons la méthode de Takagi-Sugeno pour la construction d'un modèle nominal flou en introduisant le concept du type-2.

1.2 Concept et ensemble flou type-2

Comme il est connu dans la littérature, les systèmes flous sont construits à partir d'un ensemble de règles basées sur des connaissances généralement incertaines. Cette imprécision mène alors à obtenir des règles dont les prémisses et/ou les conséquences sont incertaines, ce qui va entacher les fonctions d'appartenance. Les systèmes flous type-1 sont incapables de prendre en compte de telles contingences de règles. Nous introduisons dans cette partie du chapitre une nouvelle classe de systèmes flous appelée système flou type-2 dans laquelle les valeurs d'appartenance des prémisses ou des conséquences sont elles-mêmes des ensembles flous. Les ensembles flous type-2 sont très efficaces dans le cas où il nous est difficile de déterminer exactement les fonctions d'appartenance pour les ensembles flous, par conséquent ils sont pratiques pour l'incorporation des incertitudes.

La théorie des probabilités est utilisée pour modéliser l'incertitude aléatoire, dans laquelle la fonction de distribution de probabilité (pdf) incarne la totalité des informations concernant les incertitudes aléatoires. Dans la plupart des applications pratiques, il est impossible de connaître ou de déterminer la pdf; ainsi, nous serons obligés d'admettre

le fait qu'une pdf sera complètement caractérisée par tous ses moments. Il n'est pas très pratique et efficace d'utiliser seulement le moment d'ordre 1, parce que les incertitudes aléatoires exigent la connaissance de la dispersion autour de la valeur moyenne, et cette information est fournie par la variance. Alors, nous devons au moins utiliser les deux premiers moments de la pdf.

A l'heure actuelle, on considère que la sortie d'un système flou type-1 correspond à la valeur moyenne d'une densité de probabilité pdf. Donc nous devons considérer que le calcul de la défuzzification pour un système flou de type-1 est équivalent au calcul de la moyenne d'une pdf. La variance nous fournit une mesure de dispersion autour de la valeur moyenne, et elle est généralement utilisée pour capturer plus d'informations concernant les incertitudes statistiques. Par conséquent, les systèmes flous ont aussi besoin d'une certaine mesure de dispersion pour mieux incorporer les incertitudes de règles.

1.2.1 Concept du flou type-2

Initialement, le concept de l'ensemble flou type-2 a été introduit par le père fondateur de la logique floue Zadeh [KY96] comme extension du concept de l'ensemble flou type-1. Un ensemble flou type-2 est caractérisé par une fonction d'appartenance floue, c'est-à-dire, le degré d'appartenance de chaque élément de l'ensemble est lui-même un ensemble flou dans $[0, 1]$. De tels ensembles sont conseillés dans le cas où nous avons une incertitude au niveau de la valeur de l'appartenance elle-même. L'incertitude peut être soit au niveau de la forme de la fonction d'appartenance soit dans l'un de ses paramètres.

La transition d'un ensemble ordinaire à un ensemble flou est la conséquence directe de l'indéterminisme de la valeur de l'appartenance d'un élément à un ensemble par 0 ou 1. Similairement, lorsque nous ne pouvons pas déterminer les fonctions d'appartenance floues par des nombres réels dans $[0, 1]$, on utilise alors les ensembles flous type-2. Pour cela, on peut considérer que les ensembles flous type-1 comme une approximation du premier ordre de l'incertitude et que les ensembles flous type-2 comme une approximation du deuxième ordre.

1.2.2 Représentation d'un ensemble flou type-2

Une fonction d'appartenance de type-2 peut être vue comme une fonction à deux variables. Pour chaque x de l'univers du discours et degré d'appartenance primaire μ_1 , nous aurons une appartenance secondaire μ_2 qui est un nombre ordinaire dans l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi, une fonction d'appartenance peut être définie par :

$$\mu_2(x, \mu_1) : X \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad (1.1)$$

X définit l'espace des entrées x . La figure (1.1-a) est une représentation en trois dimensions d'un ensemble flou type-2 gaussien, dont la fonction d'appartenance principale est gaussienne. La figure (1.1-b) représente le degré d'appartenance flou de type gaussien correspondant à $x = 4.25$.

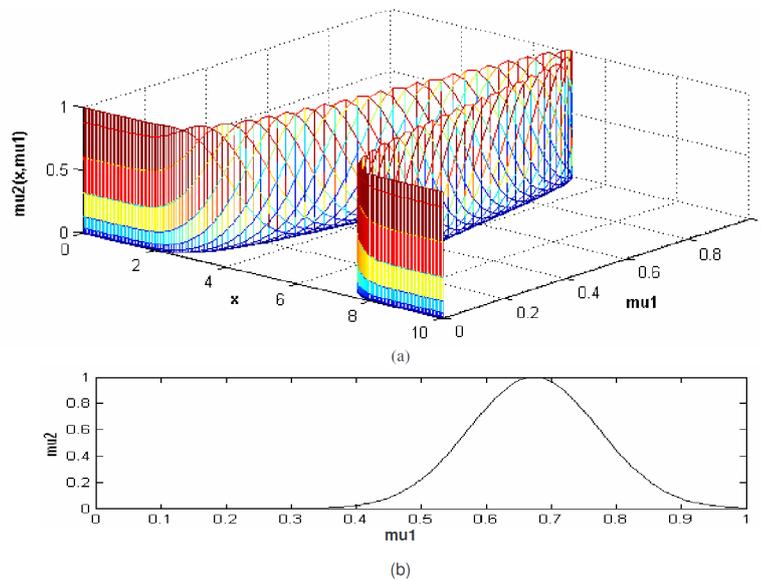


FIGURE 1.1 – (a) Représentation tridimensionnelle d'un ensemble flou type-2 Gaussien. (b) Degré d'appartenance flou correspondant à $x = 4.25$

1.2.3 Types d'ensemble flous type-2

Selon la forme de l'appartenance primaire, on distingue principalement trois sortes d'ensembles flous type-2 :

Ensemble type-2 gaussien

Dans ce type d'ensembles, le degré d'appartenance de chaque point est un ensemble type-1 Gaussien dont le domaine de définition est inclus dans l'intervalle $[0, 1]$. Notons qu'il n'est pas nécessaire que la fonction d'appartenance principale soit aussi Gaussienne [CM08].

Ensemble type-2 triangulaire

Dans ce type d'ensembles, le degré d'appartenance de chaque point est un ensemble type-1 triangulaire dont le domaine de définition est inclus dans l'intervalle $[0, 1]$ [KM98a].

Ensemble type-2 intervalle

Dans ce type d'ensembles, le degré d'appartenance de chaque point est un ensemble ordinaire dont le domaine de définition est inclus dans l'intervalle $[0, 1]$ [KM98a],[KM98b], [LM00]. Dans ce cas, toutes les appartenances secondaires sont égales à 1. Notons que malgré chaque degré d'un ensemble type-2 intervalle est un ensemble ordinaire, l'ensemble lui-même est de type-2, parce que les degrés d'appartenance sont des ensembles et non pas des nombres ordinaires.

Remarque 1

En terme de calcul pour la réduction de type, les ensembles type-2 Gaussien et triangulaire nécessitent un grand effort de calcul. Ce qui crée un inconvénient pour une implémentation en temps réel devant la capacité limitée des calculateurs et des interfaces. Contrairement aux deux premiers ensembles flous, les type-2 intervalle sont moins gourmands en calcul, ce qui les avantage et justifie leurs choix pour les simulations et applications réelles.

Exemple 1

La forme d'un ensemble flou type-2 intervalle est le résultat de l'incertitude qui peut être soit au niveau de la variance ou de son centre (appelé aussi moyenne). Pour élucider cette différence, on considère les deux cas suivants :

a. Soit un ensemble flou caractérisé par une fonction d'appartenance gaussienne de moyenne m et d'écart-type (déviatoin standard) ω qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, tel que :

$$\mu(x) = \exp[-1/2((x - m)/\omega)^2], \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (1.2)$$

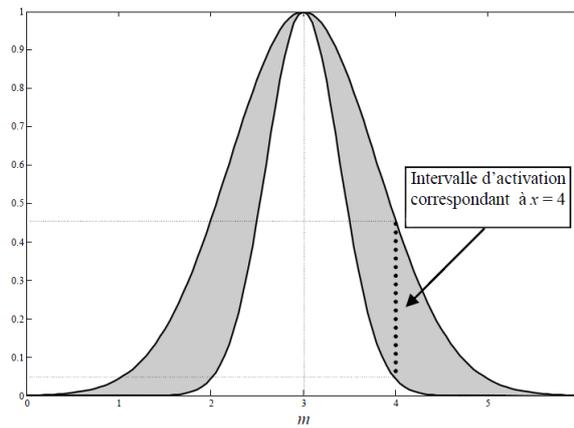


FIGURE 1.2 – Ensemble flou type-2 intervalle avec une incertitude de variance $\omega \in [0.42, 0.8]$, l'intervalle d'activation appartient à $[0.05, 0.45]$ pour $x = 4$.

A chaque valeur de ω , nous allons avoir une courbe d'appartenance différente (voir la figure (1.2)). La valeur d'appartenance de n'importe quel x (excepté pour $x = m$) peut prendre plusieurs valeurs (dépendant de ω), ce qui veut dire que le degré d'appartenance n'est pas un nombre ordinaire, mais un ensemble flou.

b. Soit un ensemble flou avec une fonction d'appartenance gaussienne ayant un écart-type ω fixe, mais une valeur moyenne incertaine, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[m_1, m_2]$, tel que :

$$\mu(x) = \exp[-1/2((x - m)/\omega)^2], \quad m \in [m_1, m_2] \quad (1.3)$$

Comme pour le premier cas, à chaque valeur de m , nous allons avoir une courbe d'appartenance différente (voir la figure (1.3)).

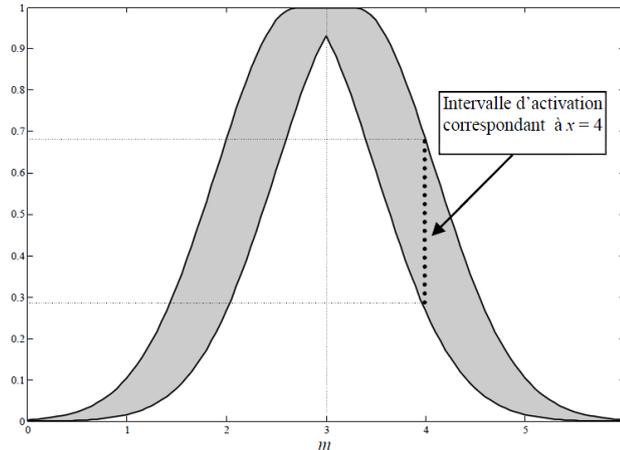


FIGURE 1.3 – Ensemble flou type-2 intervalle avec une incertitude de moyenne $m \in [2.4, 3.15]$, l'intervalle d'activation appartient à $[0.29, 0.69]$ pour $x = 4$.

1.3 Systèmes flous type-2

La structure d'un système flou type-2 est représentée par la figure (1.4) [Men00],[CM08].

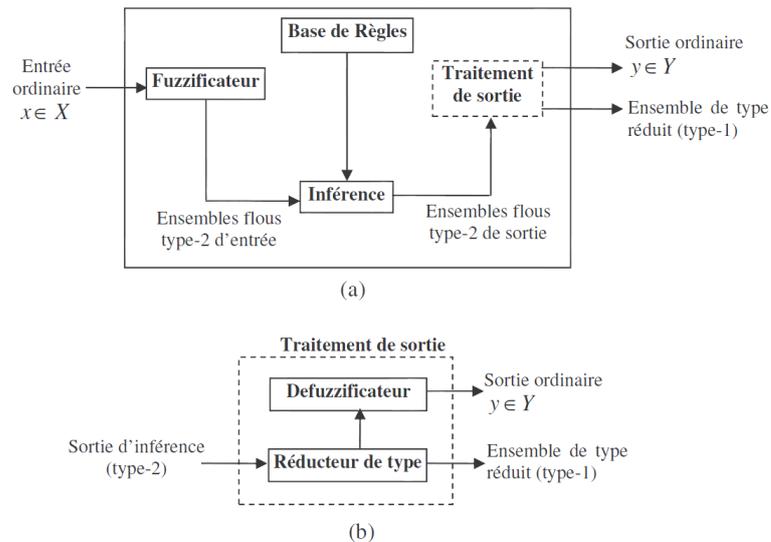


FIGURE 1.4 – (a) Structure d'un système flou type-2, (b) Le réducteur de type avec ses deux sorties ordinaire et floue type-1.

Cette structure est similaire à celle du type-1, on remarque l'apparition d'un cinquième

bloc au niveau du traitement de la sortie, celui de la réduction de type.

1.3.1 Fuzzification

Dans cette thèse, seule la fuzzification de type singleton sera utilisée [Men95], en d'autres termes, l'entrée floue est un point singulier possédant une valeur d'appartenance unitaire.

1.3.2 Règles

Si l'on désire faire une comparaison entre les règles d'un système de type-1 et celles d'un type-2, la différence résidera seulement dans la nature des fonctions d'appartenance, donc, la structure des règles dans le cas du type-2 va rester exactement la même que celle du type-1. La seule différence étant que quelques (ou toutes) les fonctions d'appartenance seront de type-2, alors, la $j^{\text{ème}}$ règle d'un système flou type-2 aura la forme [Men02],[MJ02],[CM08] :

$$\text{Si } x_1 \text{ est } \tilde{F}_1^j \text{ et } x_2 \text{ est } \tilde{F}_2^j \dots \text{ et } x_p \text{ est } \tilde{F}_p^j \text{ Alors } y \text{ est } \tilde{G}^j \quad (1.4)$$

où $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_p \in X_p$ sont les entrées, les \tilde{F}_i^j sont les ensembles des prémisses tel que pour $i = 1, 2, \dots, p, y \in Y$ est la sortie, et les \tilde{G}^j sont les ensembles des conséquences. A noter qu'il n'est pas nécessaire que toutes les fonctions d'appartenance des prémisses et des conséquences soient de type-2. Il suffit qu'une seule fonction d'appartenance dans une prémisse ou dans une conséquence le soit pour que tout le système soit de type-2.

1.3.3 Inférence

L'inférence dans un système flou type-2 utilise la base de règles floues (1.4) pour effectuer une relation entre un vecteur d'entrée $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)$ et la sortie y . La première étape dans l'opération d'inférence floue est le calcul de l'intervalle d'activation associé au $j^{\text{ème}}$ ensemble flou de sortie :

$$F(\underline{x}) = \prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^j}(x_i) \quad (1.5)$$

$\mu_{\tilde{F}_i^j}(x_i)$ est l'intervalle d'activation associé à la variable x_i .

Si l'on note l'ensemble flou de sortie correspondant à la $j^{\text{ème}}$ règle R^j par \tilde{B} . Lorsqu'une entrée \underline{x}' est appliquée, comme nous utilisons une fuzzification de type singleton, qui veut dire que l'ensemble \tilde{X}' auquel appartient \underline{x}' possède un degré d'appartenance unitaire à $\underline{x} = \underline{x}'$ et zéro ailleurs, par conséquent l'ensemble de sortie correspondant à la $j^{\text{ème}}$ règle est calculé en utilisant l'implication minimum ou produit (équivalent à l'opération *meet* avec T-norm minimum ou produit dans le cas du type-2) comme suit :

$$\mu_{\tilde{B}^j}(y) = \mu_{\tilde{G}^j}(y) \cap \left[\prod_{i=1}^p \mu_{\tilde{F}_i^j}(x_i) \right] \quad (1.6)$$

où \cap dénote l'opération *meet* basée sur la T-norme choisie.

Comme dans le cadre de notre thèse uniquement les ensembles flous type-2 intervalles sont utilisés et en choisissant l'opération T-norm produit, l'intervalle d'activation associé à la $j^{\text{ème}}$ règle sera donné par :

$$F^j(\underline{x}) = \left[\underline{f}^j(\underline{x}), \overline{f}^j(\underline{x}) \right] \quad (1.7)$$

où $\underline{f}^j(\underline{x}) = \underline{\mu}_{\tilde{F}_1^j}(x_1) * \underline{\mu}_{\tilde{F}_2^j}(x_2) * \dots * \underline{\mu}_{\tilde{F}_p^j}(x_p)$ et $\overline{f}^j(\underline{x}) = \overline{\mu}_{\tilde{F}_1^j}(x_1) * \overline{\mu}_{\tilde{F}_2^j}(x_2) * \dots * \overline{\mu}_{\tilde{F}_p^j}(x_p)$. Les termes $\underline{\mu}_{\tilde{F}_i^j}(x_i)$ et $\overline{\mu}_{\tilde{F}_i^j}(x_i)$ sont respectivement la valeur inférieure et supérieure de l'intervalle d'activation correspondant à $\mu_{\tilde{F}_i^j}(x_i)$. L'opérateur $*$ désigne une multiplication.

1.3.4 Réduction de type

Etant donné que la sortie du système d'inférence est un ensemble flou type-2, elle doit être réduite avant qu'elle soit défuzzifiée. Pour transformer la sortie floue type-2 en un ensemble flou type-1, la méthode des centres d'ensembles (center of sets en anglais (cos)) est utilisée [Men01]. L'expression de l'ensemble flou de type réduit par cette méthode est donnée par [Men01],[WM09] :

$$Y_{cos}(Y^1, \dots, Y^k, F^1, \dots, F^k) = \int_{y^1} \dots \int_{y^k} \dots \int_{f^1} \dots \int_{f^k} 1 / \frac{\sum_{j=1}^k y^j f^j}{\sum_{j=1}^k f^j} \quad (1.8)$$

Étant donné que chaque ensemble dans l'équation (1.8) est un ensemble type-1 intervalle, alors $Y_{cos}(Y^1, \dots, Y^k, F^1, \dots, F^k)$ est aussi un ensemble type-1 intervalle dont le domaine

est situé sur l'axe des réels :

$$Y_{cos}(Y^1, \dots, Y^k, F^1, \dots, F^k) = [y_l, y_r] \quad (1.9)$$

y_l et y_r sont deux points de gauche et de droite caractérisant l'ensemble réduit Y_{cos} . $f^l(x)$ est $l^{\text{ème}}$ élément de l'intervalle d'activation de (1.7) et y^j est un élément de l'intervalle type-2 $Y^j = [y_l^j, y_r^j]$.

Afin de calculer les points extrêmes y_l et y_r , Karnik et Mendel [WM09] ont développé un algorithme itérative dont la procedure est donnée comme suit :

– **Le calcul de y_l**

1. Discrétiser l'espace de sorti Y en un nombre suffisant de points en choisissant comme segment les centroïdes des ensembles flous impliqués dans l'activations des règles.
2. Trier y^j dans un ordre croissant : $y^1 \leq y^2 \leq \dots \leq y^k$.
3. Initialiser f^j en prenant comme point de départ

$$f^j = \frac{\bar{f}^j + \underline{f}^j}{2}, j = 1, \dots, k$$

ensuite calculer

$$y_l = \frac{\sum_{j=1}^k y^j f^j}{\sum_{j=1}^k f^j}$$

et poser $\hat{y}_l = y_l$.

4. Trouver un point de commutation $N(1 \leq N \leq k - 1)$ qui satisfait : $y^k \leq y_l \leq y^{k+1}$.
5. Poser

$$f^j = \begin{cases} \bar{f}^j, & j < N \\ \underline{f}^j, & j > N \end{cases}$$

calculer

$$y_l = \frac{\sum_{j=1}^k y^j f^j}{\sum_{j=1}^k f^j}$$

et poser $\hat{y}_l = y_l$.

6. Si $\acute{y}_l \neq \acute{y}_l$ aller à l'étape 6. Si $\acute{y}_l = \acute{y}_l$, arrêter et poser $y_l = \acute{y}_l$.

7. Poser $y_l = \acute{y}_l$ et aller à l'étape 3.

– **Le calcul de y_r**

1. Discrétiser l'espace de sorti Y en un nombre suffisant de points en choisissant comme segment les centroïdes des ensembles flous impliqués dans l'activations des règles.

2. Trier y^j dans un ordre croissant : $y^1 \leq y^2 \leq \dots \leq y^k$.

3. Initialiser f^j en prenant comme point de départ

$$f^j = \frac{\bar{f}^j + \underline{f}^j}{2}, j = 1, \dots, k$$

ensuite calculer

$$y_r = \frac{\sum_{j=1}^k y^j f^j}{\sum_{j=1}^k f^j}$$

et poser $\acute{y}_r = y_r$.

4. Trouver un point de commutation $N(1 \leq N \leq k - 1)$ qui satisfait : $y^k \leq y_l \leq y^{k+1}$.

5. Poser

$$f^j = \begin{cases} \bar{f}^j, j < N \\ \underline{f}^j, j > N \end{cases}$$

calculer

$$y_r = \frac{\sum_{j=1}^k y^j f^j}{\sum_{j=1}^k f^j}$$

et poser $\acute{y}_r = y_r$.

6. Si $\acute{y}_r \neq \acute{y}_r$ aller à l'étape 6. Si $\acute{y}_r = \acute{y}_r$, arrêter et poser $y_r = \acute{y}_r$.

7. Poser $y_r = \acute{y}_r$ et aller à l'étape 3.

1.3.5 Défuzzification

Le type réduit (1.9) sera déterminé par ses deux points extrêmes de droite et de gauche respectivement y_l et y_r . En appliquant le centre de gravité au type réduit, la sortie

numérique sera donnée par [CSGB07],[CM08] :

$$Y = \frac{y_l + y_r}{2} \quad (1.10)$$

Contrairement aux systèmes flous type-1 où la sortie est caractérisée par un seul vecteur de fonctions de bases flous (FBF), un système flou type-2 est caractérisé par deux vecteurs de FBF. Dans ce cas y_l peut être écrit comme suit :

$$y_l = \frac{\sum_{j=1}^k f_l^j y_l^j}{\sum_{j=1}^k f_l^j} = \sum_{j=1}^k y_l^j \xi_l^j = \underline{y}_l^T \underline{\xi}_l(\underline{x}) \quad (1.11)$$

où f_l^j désigne le degré d'activation (soit f_l^j ou \bar{f}_l^j) contribuant au point extrême de gauche y_l , $\xi_l^j = \frac{f_l^j}{\sum_{j=1}^k f_l^j}$ sont les composantes du premier vecteur de FBF, $\underline{\xi}_l^T(\underline{x}) = [\xi_l^1, \dots, \xi_l^k]$ et $\underline{y}_l^T = [y_l^1, \dots, y_l^k]$ est la conclusion du système flou type-2.

De même,

$$y_r = \frac{\sum_{j=1}^k f_r^j y_r^j}{\sum_{j=1}^k f_r^j} = \sum_{j=1}^k y_r^j \xi_r^j = \underline{y}_r^T \underline{\xi}_r(\underline{x}) \quad (1.12)$$

où f_r^j désigne le degré d'activation (soit f_r^j ou \bar{f}_r^j) contribuant au point extrême de droite y_r , $\xi_r^j = \frac{f_r^j}{\sum_{j=1}^k f_r^j}$ sont les composantes du premier vecteur de FBF, $\underline{\xi}_r^T(\underline{x}) = [\xi_r^1, \dots, \xi_r^k]$ et $\underline{y}_r^T = [y_r^1, \dots, y_r^k]$.

Finalement, l'équation (1.10) après substitution de (1.11) et (1.12) peut être donnée par :

$$Y = \frac{\underline{y}_l^T \underline{\xi}_l + \underline{y}_r^T \underline{\xi}_r}{2} \quad (1.13)$$

1.4 Modèle flou de type Takagi-Sugeno (TS)

Un système automatisé est caractérisé par de nombreuses non-linéarités, ce qui rend sa modélisation complexe. Afin de s'affranchir de la connaissance parfaite d'un processus à contrôler, le comportement dynamique peut être pris en compte par une modélisation

analytique, c'est-à-dire un modèle de connaissance. Dans ce cas la représentation mathématique obtenue doit ressembler le mieux possible à la réalité du processus. Le dilemme réside alors entre la fidélité du modèle et son adéquation avec une forme mathématiquement exploitable. Dans ce contexte, l'une des premières approches pour étudier un système ayant un comportement non linéaire consiste à l'approximer par un modèle linéaire. L'inconvénient d'une telle approche est son aspect local. D'autre part, plusieurs travaux ont été développés afin de démontrer qu'un système flou peut être utilisé comme un approximateur universel [Kos94],[ZZX00],[Ess04],[Mon05]. Les résultats encourageants obtenus ont permis de pousser la recherche en théorie et en pratique que ça soit en commande et/ou en identification floue, et plus particulièrement au développement du théorème de l'approximation universelle.

La modélisation par un système flou TS permet de représenter un système non linéaire par une interconnexion de modèles affines et linéaires autour de différents points de fonctionnement à travers des fonctions de pondération normalisées appelées fonctions d'activations. Ces fonctions peuvent être soit identifiées à partir d'un processus réel [Gas00], soit sur la base d'un modèle de connaissance afin d'aboutir à une représentation exacte de celui-ci dans un espace compact de l'espace d'état [Mor01].

1.4.1 Modélisation floue de type TS

La modélisation floue de type TS d'un système dynamique est décrite par un ensemble de règles floues Si-Alors. La caractéristique principale de ces systèmes est leur capacité à représenter localement les relations entrées/sorties d'un système en exprimant chaque conclusion, par un système linéaire décrivant la dynamique du système considéré en un point donné [TS85],[TS92],[TW01]. La $i^{\text{ème}}$ règle du modèle flou type-1 tel qu'il a été introduit par Takagi-Sugeno s'écrit [TS85] :

$$\text{Si } x_1(t) \text{ est } F_i^1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n(t) \text{ est } F_i^n \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i \underline{x}(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i \underline{x}(t) \end{cases} \quad (1.14)$$

où F_i^j est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou et i désigne le nombre de règles.

Comme mentionné au début du chapitre, lors de la construction de règles on se repose

essentiellement sur l'expertise humaine. Or l'expérience et la compréhension d'un phénomène d'un individu à un autre change, ce qui nous mène à utiliser une connaissance imprécise et à engendrer des règles avec des prémisses ou des conclusions incertaines. Cela crée de l'incertitude au niveau des règles.

Afin de profiter des avantages de la logique floue type-2 et pour mieux prendre en considération ces incertitudes, nous proposons d'étendre la description de la dynamique du modèle (1.14) en introduisant le concept du flou type-2. Dans ce cas, la $i^{\text{ème}}$ règle du modèle flou type-2 s'écrit [MEH10c],[MEH10b],[MEH11b],[MEH12] :

$$\text{Si } x_1(t) \text{ est } \tilde{F}_i^1 \text{ et } \dots \text{ et } x_n(t) \text{ est } \tilde{F}_i^n \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i \underline{x}(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i \underline{x}(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

où \tilde{F}_i^j est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou type-2 intervalle et i désigne le nombre de règles, $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des commandes, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de sortie du système, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée du système, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$ est la matrice de sortie. Pour une paire état-commande $(\underline{x}(t), u(t))$ donnée, le modèle flou va apparaître comme une moyenne pondérée des modèles locaux linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^R w_i(\underline{x}(t)) \{A_i \underline{x}(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^R w_i(\underline{x}(t))} \\ y(t) = \frac{\sum_{i=1}^R w_i(\underline{x}(t)) C_i \underline{x}(t)}{\sum_{i=1}^R w_i(\underline{x}(t))} \end{cases} \quad (1.16)$$

Avec $w_i(\underline{x}(t)) = \prod_{j=1}^n \tilde{\mu}_i^j(x_j(t))$, pour $i = 1, 2, \dots, R$, et $\tilde{\mu}_i^j(x_j(t))$ désigne la fonction d'appartenance associée à l'ensemble flou \tilde{F}_i^j . $\forall t \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} w_i(\underline{x}(t)) = [\underline{w}_i(\underline{x}(t)) \quad \overline{w}_i(\underline{x}(t))] \\ \underline{w}_i(\underline{x}(t)) = \underline{\mu}_1^j(x_1) * \dots * \underline{\mu}_n^j(x_n) \\ \overline{w}_i(\underline{x}(t)) = \overline{\mu}_1^j(x_1) * \dots * \overline{\mu}_n^j(x_n) \end{cases} \quad (1.17)$$

En posant :

$$h_i(\underline{x}(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{w}_i(\underline{x}(t))}{\sum_{i=1}^R \underline{w}_i(\underline{x}(t))} + \frac{\overline{w}_i(\underline{x}(t))}{\sum_{i=1}^R \overline{w}_i(\underline{x}(t))} \right) \quad (1.18)$$

Le modèle flou TS (1.16) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^R h_i(\underline{x}(t)) \{A_i \underline{x}(t) + B_i u(t)\} \\ y(t) = \sum_{i=1}^R h_i(\underline{x}(t)) C_i \underline{x}(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

Hypothèse 1 *Tous les modèles locaux du modèle flou global sont commandables , i.e. les matrices $P_i = [B_i, A_i B_i, A_i^2 B_i, \dots, A_i^{n-1} B_i]$ pour $i = 1, \dots, R$ sont à plein rang, i.e. $\text{rank}(P_i) = n$ [YMW98].*

1.4.2 Construction d'un modèle flou TS

Pour construire un modèle flou TS, il existe trois méthodes qui peuvent être utilisées :

- La première méthode consiste à choisir un ensemble de points de fonctionnement d'une manière judicieuse, ensuite à linéariser le modèle du système autour de ces derniers [CTU00],[TW01],[TCU01],[LN09]. Les modèles locaux ainsi obtenus sont affines, le modèle flou sera l'interpolation de ces modèles avec des fonctions d'activation choisies de façon à répondre à certaines spécifications (soit : triangulaire, gaussienne, etc.).
- La deuxième méthode dite par identification [GMBR99],[Gas00],[GMR02] permet à partir des données sur les entrées et les sorties, d'identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement.
- La troisième approche est adaptée pour les systèmes non linéaires de complexité modérée. Dans ce cas, le modèle flou TS représente de manière exacte le modèle non linéaire sur un espace compact des variables d'état obtenu par transformation polytopique convexe. On effectue ainsi un découpage des non linéarités qui permet de définir des modèles locaux en fonction du nombre des non linéarités [TIW98],[Mor01],[Mon05],[MMG⁺09].

Dans la dernière approche, on suppose connaître le modèle non linéaire d'une façon exacte sur une portion bien définie. Cependant, son inconvénient réside dans le nombre élevé de règles et modèles impliqués. Dans les deux premières approches, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire du système mais pas très complet. Devant la complexité des phénomènes qui régissent un système non linéaire et la difficulté d'avoir

un modèle global le représentant, nous avons considéré dans nos travaux la première approche. L'approche adoptée permet de réduire considérablement le nombre de modèles locaux et de règles utilisées pour la construction du modèle. Notons aussi que pour un système donné, l'obtention d'un modèle TS n'est pas unique.

Exemple 2

On considère un pendule inversé de masse m et de longueur $2l$, placé sur un chariot mobile de masse M . Les équations de son mouvement sont données par [Can03] :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{g \sin(x_1(t)) - amlx_2^2(t) \sin(2x_1(t))/2 - a \cos(x_1(t))u(t)}{4l/3 - aml \cos^2(x_1(t))} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Où $x_1(t)$ désigne l'angle (en radians) de rotation du pendule par rapport à la verticale, $x_2(t)$ sa vitesse angulaire, $g = 9.8m/s^2$ la constante de gravitation et u désigne la force appliquée au chariot (en Newtons), $a = 1/(m + M)$. $x_1(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, car le système devient incontrôlable pour $x_1(t) = \pm\frac{\pi}{2}$. Pour maintenir la contrôlabilité du modèle flou, les contrôleurs sont conçus de telle sorte à contraindre $x_1(t) \in [-88^\circ, 88^\circ]$.

La dynamique du système non linéaire (1.20) peut être simplifiée comme suit :

Quand $x_1(t)$ est au voisinage de zéro, la dynamique peut être décrite par le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{gx_1(t) - au(t)}{4l/3 - aml} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Quand $x_1(t)$ est au voisinage de $\pm\frac{\pi}{2}$, la dynamique peut être décrite par le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{2gx_1(t)/\pi - a\beta u(t)}{4l/3 - aml\beta^2} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Où $\beta = \cos(88^\circ)$. Notons que les systèmes (1.21) et (1.22) sont linéaires. A base de ces sous systèmes linéaires, on aboutit au modèle flou TS décrit par les deux règles suivantes :

Règle 1

Si $x_1(t)$ est proche de zéro Alors

$$\dot{x}_1(t) = A_1x(t) + B_1u(t) \quad (1.23)$$

Règle 2

Si $x_1(t)$ est proche de $\pm \frac{\pi}{2}$ ($|x_1| < \frac{\pi}{2}$) Alors

$$\dot{x}_1(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \quad (1.24)$$

$$\text{Avec : } A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3-aml} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a}{4l/3-aml} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3-aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a\beta}{4l/3-aml\beta^2} \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'appartenance de la règle 1 et 2, peuvent être définies (choisies) tout simplement comme donné par la figure (1.5) [BMM10].

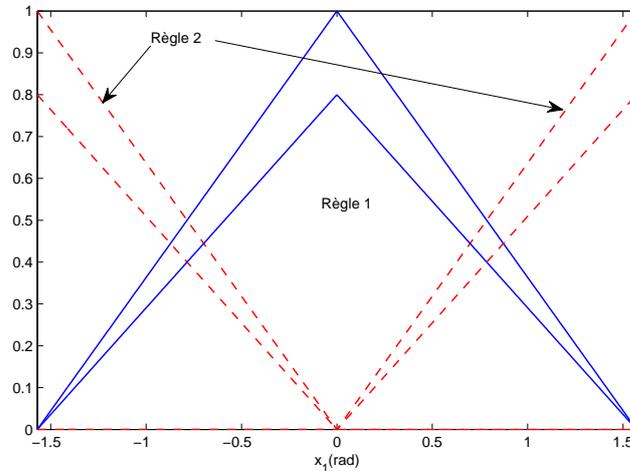


FIGURE 1.5 – Fonctions d'appartenance des deux règles du modèle

A noter que pour le même système considéré, la construction d'un modèle flou est faite en considérant 16 règles avec la troisième approche [TW01]. Généralement, le nombre de modèles locaux et règles sont liés directement à la complexité et l'analyse des conditions LMI (Linear Matrix Inequalities).

Tanaka et Wang [TW01] ont démontré que pour certaines conditions initiales d'angle, un contrôleur linéaire est incapable de stabiliser le système. Comme solution, ils ont introduit le système flou type-1 TS, qui peut être exploité soit pour la modélisation ou la commande de ce pendule. Biglarbegian et al.[BMM10] ont mené une étude comparative

sur cet exemple, en utilisant quatre commandes de différents types : linéaire, non linéaire [BR86] et floues de même structure. La différence entre ces deux dernières, est que l'une a été conçue à base d'un modèle flou type-1 TS [TS95] et l'autre à base d'un modèle intervalle flou type-2 TS [BMM10]. Les expressions de toutes ces commandes sont données dans [BMM10]. Pour une meilleure comparaison des performances, les paramètres du système et des contrôleurs flous sont gardés inchangés.

Le système pendule-chariot est commandé dans le but de stabiliser l'angle à $x_1(t) = 0$ (qui correspond à la position verticale du pendule). Les résultats de comparaisons sont donnés par la figure (1.6) et le tableau (1.1). t_r et t_s désignent respectivement le temps de montée (rise time en anglais, le temps qu'il faut pour qu'un signal passe de 10% à 90% de sa valeur maximale) et le temps de réponse (settling time en anglais, le temps qu'il faut pour qu'un signal atteigne une erreur spécifique).

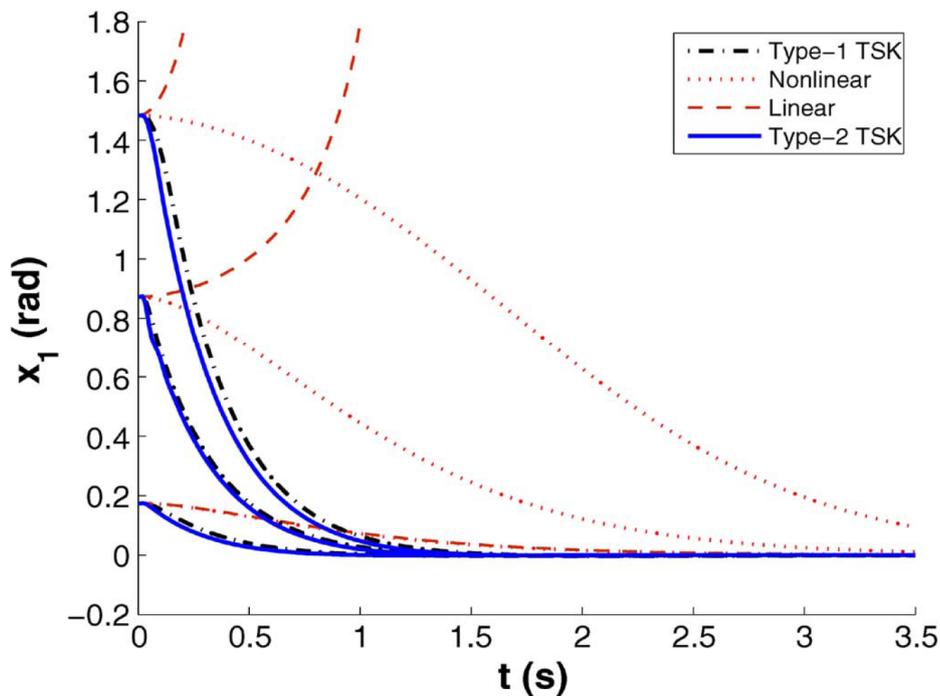


FIGURE 1.6 – La réponse du système selon les différents contrôleurs et différentes valeurs initiales d'angle [BMM10].

	$x_1 = 0.105rad$		$x_1 = 0.873rad$		$x_1 = 1.483rad$	
	$t_r(s)$	$t_s(s)$	$t_r(s)$	$t_s(s)$	$t_r(s)$	$t_s(s)$
Linéaire	1.72	3.42	instable	instable	instable	instable
Type-1	0.64	1.16	0.63	1.53	0.65	1.75
Non linéaire	1.72	3.42	1.83	3.47	2.44	3.47
Intervalle type-2	0.49	0.90	0.62	1.45	0.63	1.64

TABLE 1.1 – Les temps de réponse et de montée des contrôleurs selon les valeurs initiales d’angle.

Nous constatons que pour $x_1(0) = 0.105rad$, le contrôleur linéaire et non linéaire ont la même réponse. De toute évidence, le contrôleur flou type-2 a non seulement stabilisé le système mais a aussi le meilleur régime transitoire. Il a réduit le temps de montée et raccourci le temps de réponse. Le contrôleur flou de type-1 a comme valeurs les deux indicateurs de comparaison $t_r = 0.64s$ et $t_s = 1.16s$. Pour le contrôleur non linéaire, les valeurs correspondantes sont $t_r = 1.72s$ et $t_s = 3.42s$, tandis que pour le contrôleur flou de type-2 on a $t_r = 0.49s$ et $t_s = 1.9s$.

En comparant la réponse de chaque contrôleur pour les différentes valeurs initiales d’angle, le contrôleur non linéaire, flou type-1 et flou type-2 sont capables de stabiliser le système pour tout $x_1(0) \in [0, \pi/2]$. Pour tout angle $x_1(0) > 0.7854rad$, le contrôleur linéaire est incapable de stabiliser le système. Le contrôleur flou type-2 surpasse les autres contrôleurs en régime transitoire. De plus, il offre une structure plus simple, ce qui n’est pas le cas pour le contrôleur non linéaire.

Pour plus de résultats et d’exemples de comparaison, le lecteur peut consulter [BMM10].

Remarque 2

La technique d’approximation locale permet de réduire le nombre de règles pour les modèles flous. Cependant, une loi de commande simple conçue à base d’un modèle approché flou ne peut pas garantir la robustesse et la stabilité du système non linéaire original.

Comme solution pour contourner ce problème, l'usage de commandes robustes telles que la commande par modes glissants est nécessaire.

Le modèle dérivé n'est qu'une approximation du système d'origine. Toutefois, dans [TW01] il est montré que la conception d'un contrôleur flou basé sur le modèle à deux règles fonctionne bien lorsqu'il est appliqué au système pendule inversé non linéaire.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un nouvel approximateur universel ainsi que les concepts et outils de base de la logique floue type-2. Depuis que Zadeh a introduit la théorie de la logique floue en 1965 [Zad65], le nombre d'applications utilisant le concept ne cesse d'augmenter. Certes, cette hausse est le résultat du pouvoir expressif en terme linguistique de l'humain à décrire tout phénomène. Cette connaissance est traduite sous forme de règles Si-Alors, ce qui simplifie la prise de décision en commande ou pour la description de la dynamique d'un système mal connu ou complètement inconnu. Le manque de la première génération de la logique floue, a été comblé par la nouvelle logique floue de type-2. Celle-ci prend en considération les incertitudes et imprécisions de règles, ce qui se traduit par une représentation tridimensionnelle des ensembles flous. La troisième dimension des ensembles flous type-2 fournit un degré supplémentaire permettant la prise en compte et la modélisation des incertitudes.

En raison des phénomènes physiques complexes qui régissent un système réel, il est plus souvent difficile de construire un modèle nominal décrivant le système à commander. Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou qui porte leurs noms pour résoudre ce problème. Ce dernier est basé sur la logique floue de type-1, la caractéristique principale de cette modélisation est que chaque conclusion de règle est exprimée par un modèle linéaire décrivant la dynamique du système autour d'un point de fonctionnement. Afin de profiter de l'avantage de la logique floue de type-2, la modélisation floue donnée par Takagi-Sugeno a été augmentée en introduisant le concept du flou type-2.

Commande par modes glissants d'ordre un et supérieur

2.1 Introduction

La commande non linéaire ne cesse de connaître une expansion ainsi qu'une diversification depuis les années cinquante ; ceci est le résultat d'une augmentation du nombre des procédés industriels et des applications en robotique. L'étude des commandes non linéaires s'avère d'un grand intérêt, puisque la majorité des systèmes réels sont essentiellement non linéaires. Les méthodes linéaires conventionnelles sont satisfaisantes uniquement pour des plages de fonctionnement restreintes. En effet, la modélisation des systèmes réels est plus ou moins précise. Elle se fait en négligeant certaines non linéarités et perturbations, souvent même, en réduisant le nombre de variables du système. Puis, c'est à partir de cette représentation approximative de la réalité physique que l'on souhaite construire le plus simplement possible une commande performante. Cependant, avec les méthodes linéaires, dès que le système sort de son domaine de fonctionnement, le contrôleur n'est plus apte à garantir la stabilité de la boucle fermée. D'où l'intérêt d'étudier plus profondément les méthodes de commande non linéaires.

Depuis quelques décennies, il a été prouvé que la théorie de la géométrie différentielle est un outil efficace pour l'analyse et la mise en œuvre de commandes des systèmes non linéaires [Isi95]. Ses concepts mathématiques qui sont, dans la plupart des cas, faciles à

maîtriser et puissants, permettent de traiter le découplage des perturbations, la régulation de la sortie et la représentation entrée/sortie des systèmes non linéaires.

L'une des méthodes de commande non linéaire les plus connues, utilisant la géométrie différentielle est la commande par linéarisation exacte. Elle consiste à linéariser le système par compensation et à appliquer à ce nouveau système une commande linéaire classique telle que la commande par retour d'état [SB89], [AW89]. Néanmoins, ces commandes sont sensibles aux variations paramétriques. Il est toutefois possible de les stabiliser en ajoutant un processus adaptatif au contrôleur non linéaire. Cette solution est utile et même parfois indispensable lorsque la dynamique du procédé est inconnue et/ou change au cours du temps. Cette méthode se distingue par la présence d'un processus d'identification en temps réel dans la boucle fermée [SL91],[KG02].

Un type de lois de commande robuste simple à calculer et à mettre en oeuvre, même pour des systèmes non linéaires, est la commande par modes glissants. Elle est apparue dans les années soixante à partir des travaux sur les commandes à structure variable, c'est-à-dire des commandes commutant entre plusieurs lois de commande différentes (en général linéaires) en fonction de certains critères [Utk77],[Utk92]. De ce point de vue, une commande par modes glissants se distingue par sa simplicité : le critère de commutation est une surface de glissement divisant l'espace d'état en deux, et les lois de commande dans chaque demi-espace sont des constantes. Cette loi de commande est définie de manière à forcer le système à atteindre un voisinage de la surface de glissement et à y rester, pour tous les modèles de la classe d'incertitudes considérée. Cette commande a deux principaux avantages. Premièrement, le comportement dynamique du système au voisinage de la surface de glissement est essentiellement conditionné par cette dernière. On dit que le système est en régime glissant. Deuxièmement, ce comportement est non seulement robuste, mais aussi insensible aux incertitudes pour lesquelles la commande a été réglée.

Cependant, une fois le régime glissant établi, la discontinuité de la commande engendre des oscillations de fréquences élevées. Ce phénomène est connu sous le nom de chattering. Il est le plus grand défaut des commandes par modes glissants, car en plus de générer un bruit sur des systèmes mécaniques, il peut causer une perte de précision et une usure prématurée des actionneurs ou du système. Pour y remédier, plusieurs solutions

ont été proposées dans la littérature. Parmi elles, la substitution de la fonction *signe* par une autre à variation plus douce telle que la fonction de saturation et la tangente hyperbolique [SL91],[Spi07]. Cependant, ces méthodes engendrent un compromis entre le niveau de performances de poursuite et les sollicitations de commande au démarrage [HEZ03]. D'autres auteurs ont utilisé des contrôleurs flous adaptatifs à une seule entrée [HEZ03],[HWR09],[NRJ09] et de type Mamdani à deux entrées [RO03] pour remplacer la partie discontinue de la commande. L'inconvénient de ces méthodes est la convergence de leurs algorithmes qui dépend directement du choix de la valeur initiale des systèmes adaptatifs flous [MEH11a]. Une autre solution a été également présentée dans [Hus08], qui consiste à éliminer la phase d'approche et à forcer le système à arriver directement sur la surface de glissement.

En plus du phénomène du chattering, une autre question cruciale se pose d'elle même : quel comportement faut-il imposer au système pendant la phase de glissement, autrement dit, comment choisir la surface de glissement ? [Bre10].

La théorie de la commande par modes glissants d'ordre supérieur a émergé dans les années quatre-vingt, entre autres pour apporter une nouvelle réponse aux deux problèmes cités ci-dessus [Lev93],[EKL96],[BFU97],[Lev03]. L'idée fondamentale de cette commande peut être décrite comme suit : soit $\sigma(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état, $t \in \mathbb{R}^+$ la variable du temps) la variable du glissement et $r \in \mathbb{N}$ est l'ordre du mode glissant. Afin de forcer la variable $\sigma(x, t)$ et ses $(r - 1)$ premières dérivées successives vers zéro en un temps fini, la commande agit discontinûment sur la $r^{\text{ème}}$ dérivée de $\sigma(x, t)$. La commande par modes glissants d'ordres supérieurs ne permet pas seulement d'assurer les mêmes avantages que la commande par modes glissants standard en terme de robustesse, mais également d'éliminer ou d'atténuer l'effet du chattering tout en apportant une haute précision. Dans le cas de la commande par modes glissants réelle [Lev93], si l'on note par τ le temps d'échantillonnage alors l'erreur sera $o(\tau)$ en utilisant la commande par modes glissants standard [Fur90], tandis qu'avec la commande par modes glissants d'ordre r l'erreur sera $o(\tau^r)$ [Lev93]. Une étude de la commande par modes glissants d'ordre un et supérieure ainsi que des preuves de stabilité de certains algorithmes peuvent être trouvées dans [Bre10].

L'inconvénient d'un mode glissant d'ordre r réside dans l'information nécessaire sur les

$(r - 1)$ dérivées de $\sigma(x, t)$, qui sont calculées en fonction des variables d'état du système. Vu la difficulté de calculer les dérivées de la surface et de l'état, on retrouve dans la littérature de nombreux algorithmes par modes glissants du second ordre ($r = 2$) [BFU97], [EKL96], [Lev93], [FL02]. Récemment, des commandes par modes glissants arbitraires pour des systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO) avec un temps de convergence fini ont été proposées dans [Lev01], [Lev93], [Lev05] et [LPG04]. Dans [WYZ98], la commande nommée "terminal sliding mode" propose une solution pour les modes glissants d'ordre arbitraire avec un temps de convergence fini. L'inconvénient majeur de cette approche est que toutes les trajectoires du système doivent démarrer à partir d'un secteur prédéfini de l'espace d'état pour avoir une commande finie, ce qui représente une contrainte restrictive particulièrement pour les applications en temps réel. De nombreux résultats concernant la commande par modes glissants d'ordre supérieur pour les systèmes SISO sont donnés dans [EKL96], [BFLU99] et [LPG07]. Cependant, l'inconvénient commun de ces approches est le calcul des gains de commande, car ils sont choisis de façon à satisfaire la condition de convergence en temps fini, ce qui nécessite la connaissance des paramètres du système.

Dans ce chapitre, nous allons présenter en général la commande par modes glissants. Les systèmes considérés dans notre étude sont non linéaires d'ordre n , continus, mono-entrée/mono-sortie et affines en la commande. Tous les résultats de notre contribution ci-après seront généralisés pour les systèmes multivariables (MIMO). Après avoir introduit le concept de base de la commande par modes glissants d'ordre un, nous allons nous intéresser à la commande par modes glissants d'ordre supérieur et plus précisément aux modes glissants d'ordre deux.

Après l'introduction de la notion de modes glissants d'ordre supérieur, nous nous intéresserons à un algorithme qui fait partie des commandes par modes glissants d'ordre deux appelé "Super-Twisting". Les limites de cette commande seront traitées par la substitution de la partie discontinue de commande par des systèmes adaptatifs flous type-2. Ces systèmes vont nous permettre à la fois de calculer la valeur optimale des gains de commande, et de nous affranchir de la connaissance des bornes supérieures des perturbations et des incertitudes du système, tout en gardant la même structure que celle de l'algorithme d'origine. En plus de la conservation de la robustesse, l'approche proposée nous

permettra de lisser le signal de commande. La mise à jour des systèmes flous adaptatifs sera assurée par des lois d'adaptation issues de l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov de la boucle fermée. Afin de tester et comparer les performances de l'approche proposée à celle d'origine, introduite par Levant dans [Lev93], des résultats de simulations seront présentés.

2.2 Contexte et formulation

La modélisation des processus est une étape primordiale dans la mise en oeuvre d'un contrôleur pour les systèmes industriels. La nature non linéaire et la complexité des phénomènes qui régissent ces systèmes rendent leur description analytique avec des équations différentielles très difficile. Nous nous limitons ici aux systèmes non linéaires continus couramment utilisés en automatique, à savoir les systèmes affines en commande dont la dynamique est décrite par le système (SISO) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x})u \\ y = h(\underline{x}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $\underline{f}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{g}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$ et $h(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions non linéaires continues, qui sont partiellement ou totalement inconnues. $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système (2.1).

La structure du système (2.1) ne permet pas d'avoir une relation directe entre l'entrée et la sortie du système, ce qui rend la mise en oeuvre d'une commande assurant la régulation ou l'asservissement difficile. Afin de contourner ce problème, la linéarisation entrée-sortie a été largement utilisée. Elle consiste à trouver, à l'aide des techniques de la géométrie différentielle, une relation explicite entre l'entrée du système et sa sortie [SL91],[Isi95].

On dit que le système (2.1) est de degré relatif ρ si :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R} : L_{\underline{g}}L_{\underline{f}}^k h(\underline{x}) = 0; \quad k < \rho - 1 \quad \text{et} \quad L_{\underline{g}}L_{\underline{f}}^{\rho-1} h(\underline{x}) \neq 0$$

La notation $L_a b(\underline{x})$ est une dérivée de Lie qui signifie la dérivée temporelle de $b(\underline{x})$ dans la direction de a . Le degré relatif représente le retard subi par l'entrée u avant son influence

sur la sortie y . Si le degré relatif ρ est égal à l'ordre n du système, le système (2.1) ne présente pas de dynamiques de zéros et est donc à minimum de phase. Si ρ est strictement inférieur à n , le système est à minimum de phase [SL91],[Isi95] si le sous-système d'ordre $(n - \rho)$ est asymptotiquement stable. Pour exprimer explicitement la relation liant l'entrée et la sortie du système (2.1), on dérive successivement cette dernière jusqu'à l'apparition de l'entrée u .

$$\begin{aligned} y &= h(\underline{x}) \\ \dot{y} &= L_f h(\underline{x}) \\ &\dots\dots \\ y^{(\rho)} &= L_f^\rho h(\underline{x}) + L_g L_f^{\rho-1} h(\underline{x})u \end{aligned}$$

En considérant $n = \rho$, cette structure peut être mise sous la forme canonique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)u \\ y = x_1 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le système (2.2) est dit dans sa forme normale et ne présente pas de dynamiques de zéros [SL91],[Isi95],[Bou00],[Ess04]. Cette nouvelle forme permet facilement d'utiliser différentes approches basées sur la rétroaction pour résoudre les problèmes de poursuite de trajectoire ou de régulation. En prenant en considération les perturbations externes qui peuvent entacher le système ainsi que les incertitudes de modélisation, le système (2.2) peut être réécrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^{(n)} = f(\underline{x}) + g(\underline{x})u + d \\ y = x \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état mesurable du système, avec \mathcal{X} un ouvert de \mathbb{R}^n et d une perturbation externe inconnue mais bornée $|d| \leq \Delta_d$. Nous considérons que les deux fonctions $f(\underline{x})$ et $g(\underline{x})$ peuvent être écrites respectivement comme la somme d'une fonction nominale et d'une incertitude inconnue mais bornée :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\underline{x}) = f_0(\underline{x}) + \Delta f(\underline{x}); |\Delta f(\underline{x})| \leq \Delta_f \\ g(\underline{x}) = g_0(\underline{x}) + \Delta g(\underline{x}); |\Delta g(\underline{x})| \leq \Delta_g \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Où Δ_f et Δ_g sont deux constantes positives. En substituant (2.4) dans (2.3), on obtient :

$$\begin{cases} x^{(n)} = f_0(\underline{x}) + g_0(\underline{x})u + D \\ y = x \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec D est la somme des perturbations et incertitudes de modélisation :

$$\begin{cases} D = \Delta f(\underline{x}) + \Delta g(\underline{x})u + d \\ D_M = \Delta_f + \Delta_g u_M + \Delta_d, \quad |u| \leq u_M \end{cases} \quad (2.6)$$

Le modèle nominal du système peut être obtenu soit par identification ou par approximation avec un système flou [HEBZ04]. Nous considérons le second cas, car il nous permet d'exploiter des informations linguistiques émanant de l'expert humain. L'approximation peut être faite soit à l'aide d'un système flou de type Takagi-Sugeno classique ou adaptatif. Ce dernier permet certes d'obtenir de bons résultats, mais nécessite un temps de calcul et d'apprentissage proportionnel à la taille du système. Par ailleurs, les techniques de linéarisation nous permettent de transformer les informations sur la dynamique du système en modèles locaux autour de certains points de fonctionnement. Ainsi, pour le calcul du modèle nominal, Takagi et Sugeno ont proposé un modèle flou dynamique constitué de règles dont la partie conclusion est mise sous la forme de représentation d'état linéaire du système à commander. Ce même modèle a été étendu en rajoutant le concept de la logique floue type-2 (voir équation (1.19) du chapitre 1).

Le modèle nominal flou type-2 obtenu à la $i^{\text{ème}}$ règle sera donné par [MEH10c],[MEH11b], [MEH11a],[MEH12] :

SI x est \tilde{H}_1^i et \dot{x} est \tilde{H}_2^i et.....et $x^{(n-1)}$ est \tilde{H}_n^i ALORS

$$x^{(n)} = A_i(n, 1 : n)\underline{x} + B_i(n)u \quad (2.7)$$

Où \tilde{H}_j^i , ($j = 1, 2, \dots, n$) est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou type-2 intervalle de la $i^{\text{ème}}$ règle, $A(n, 1 : n) = A(n, J)_{1 \leq J \leq n}$ désigne la $n^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A . Pour une paire état commande (\underline{x}, u) donnée, le modèle flou du système résultant apparaît comme la moyenne pondérée des modèles locaux. Si l'on utilise le produit comme moteur d'inférence, la méthode du centre d'ensemble pour la réduction de type et le centre de gravité pour la défuzzification,

la sortie du système sera donnée par :

$$x^{(n)} = \frac{\sum_{i=1}^R w^i (A_i(n, 1:n) \underline{x} + B_i(n) u)}{\sum_{i=1}^R w^i} = \frac{\sum_{i=1}^R w^i (A_i(n, 1:n) \underline{x})}{\sum_{i=1}^R w^i} + \frac{\sum_{i=1}^R w^i (B_i(n) u)}{\sum_{i=1}^R w^i} \quad (2.8)$$

Si on note par $f_0(\underline{x}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^R w^i A_i(n, 1:n) \underline{x}}{\sum_{i=1}^R w^i} \right)$ et $g_0(\underline{x}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^R w^i B_i(n)}{\sum_{i=1}^R w^i} \right)$, le modèle nominal flou sera donné par :

$$x^{(n)} = f_0(\underline{x}) + g_0(\underline{x})u \quad (2.9)$$

La variable w^i désigne l'intervalle d'activation, qui est en fonction de ses points extrêmes comme donné par l'équation (1.7).

Hypothèse 2 $g_0^{-1}(\underline{x})$ existe et différent de zéro. Si on note par $h_i(\underline{x}) = \frac{w^i}{\sum_{i=1}^R w^i}$ pour $i =$

$1, \dots, R$, sachant aussi que $h_i(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{w}_i(\underline{x}(t))}{\sum_{i=1}^R \underline{w}_i(\underline{x}(t))} + \frac{\overline{w}_i(\underline{x}(t))}{\sum_{i=1}^R \overline{w}_i(\underline{x}(t))} \right)$, les points extrêmes qui forment $h_i(\underline{x})$ posséderont la propriété de somme convexe.

2.3 Synthèse de la surface de glissement

L'objectif de notre étude est d'assurer la commande et une poursuite de trajectoire de référence $y_r(t)$ par la sortie y du système (2.5), donc de faire tendre l'erreur $e = y - y_r$ vers zéro. La synthèse de la surface de glissement repose sur la définition d'une variable de glissement :

Soit $\sigma(\underline{x}, t) : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction suffisamment différentiable et considérée telle que son annulation permettra de satisfaire l'objectif de commande. La fonction $\sigma(\underline{x}, t)$ est appelée variable de glissement ou de commutation. L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{\underline{x} \in \mathcal{X} \mid \sigma(\underline{x}, t) = 0\} \quad (2.10)$$

représente alors une sous-variété de \mathcal{X} de dimension $(n - 1)$ appelée surface de glissement ou contrainte de commutation.

Une condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant est que la variable de glissement ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la commande u [Utk92]. Le degré relatif d'un système désigne le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la sortie par rapport au temps pour faire apparaître l'entrée de manière explicite [Isi95]. Dans la littérature on retrouve plus souvent des travaux qui considèrent la variable de glissement linéaire suivante :

$$\sigma(\underline{x}, t) = e^{(n-1)} + \dots + c_2 \ddot{e} + c_1 \dot{e} + c_0 e \quad (2.11)$$

où $e = y_r - y$ et les coefficients c_i ($0 \leq i \leq n-2$) sont choisis de telle sorte que le polynôme $e^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{n-2} c_i e^{(i)}$ soit un polynôme d'Hurwitz pour que le système réduit soit stable (les racines du polynôme sont à partie réelle négative).

Ainsi, lorsque la variable de glissement $\sigma(\underline{x}, t)$ est forcée à zéro, l'erreur de poursuite e converge asymptotiquement vers zéro, avec une dynamique imposée par le choix des coefficients c_i .

Afin de simplifier le choix de la surface de glissement ainsi que celui des coefficients c_i , nous avons considéré dans cette thèse la surface de glissement définie par Slotine [SL91] :

$$\sigma(\underline{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{(n-1)} e \quad (2.12)$$

La difficulté du choix des coefficients c_i se ramène à un seul choix celui de λ , qui caractérise la pente de la surface de glissement. Le choix $\lambda > 0$ garantit d'avoir un polynôme d'Hurwitz.

2.4 Commande par modes glissants

2.4.1 Concepts de base

Le principe de la commande par modes glissants est de contraindre l'état du système à atteindre en temps fini une hypersurface (dans l'espace d'état) donnée pour ensuite y rester. Cette hypersurface étant une relation entre les variables d'état du système, elle définit une équation différentielle, et donc détermine totalement la dynamique du système, pourvu qu'il reste sur cette hypersurface. L'évolution d'un système soumis à

une loi de commande qui le fait rester sur une hypersurface donnée ne dépend donc plus du tout du système lui-même ou des perturbations auxquelles il peut être soumis, mais uniquement des propriétés de cette hypersurface. Le système bouclé ne sera donc pas seulement robuste vis-à-vis des incertitudes (propres au système) et des perturbations (extérieures au système) mais totalement insensible, car elles sont complètement rejetées par la commande [Bre10]. La synthèse d'une loi de commande par modes glissants consiste donc à déterminer :

1. une hypersurface en fonction des objectifs de commande et des propriétés statiques et dynamiques désirées pour le système bouclé. La dynamique exigée par l'hypersurface doit être compatible avec l'amplitude de commande utile disponible et la dynamique du système en boucle ouverte. Dans le cas contraire, le système ne pourra pas rester sur l'hypersurface, et la propriété d'insensibilité aux perturbations sera perdue.
2. une loi de commande discontinue de manière à contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre cette hypersurface en temps fini puis à y rester en dépit des incertitudes et des perturbations.

2.4.2 Synthèse de la loi de commande

L'objectif de la loi de commande est de contraindre les trajectoires d'état du système à atteindre et ensuite à rester sur la surface de glissement malgré la présence d'incertitudes sur le système. En d'autres termes, la loi de commande doit rendre la surface de glissement localement attractive (c'est-à-dire au voisinage de la surface de glissement, toutes les trajectoires du système doivent être dirigées vers elle). Ainsi, la loi de commande doit être calculée en vérifiant une condition assurant la stabilité de $\sigma(\underline{x}, t) = 0$. Une telle condition est appelée condition d'attractivité.

Une des méthodes pour tester la stabilité de la commande par modes glissants est basée sur le deuxième théorème de Lyapunov. Supposons que l'état d'équilibre soit zéro, soit $V(x)$ la fonction de Lyapunov, sa dérivée temporelle est $\dot{V}(x) = \frac{dV(x)}{dt}$. Le signe de $\dot{V}(x)$ donne une information sur la stabilité du système. Si $V(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $\dot{V}(x) < 0$

alors le système est asymptotiquement stable.

Une classe de fonctions de Lyapunov classique pour la détermination de la condition d'attractivité est celle des fonctions quadratiques du type :

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (2.13)$$

Cette fonction est définie positive de manière évidente. Une condition nécessaire et suffisante pour que la variable de glissement $\sigma(\underline{x}, t)$ tende vers zéro est que la dérivée de V soit définie négative :

$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} < 0 \quad (2.14)$$

Cette inégalité est appelée condition d'attractivité qui n'est pas suffisante pour assurer une convergence en temps fini vers la surface. Pour assurer une convergence de $\sigma(\underline{x}, t)$ vers 0 en un temps fini, une condition plus forte doit être respectée. Dans le cas des modes glissants classiques, on utilise généralement la condition d'attractivité non linéaire dite condition de η -attractivité [Utk92] :

$$\sigma\dot{\sigma} \leq -\eta |\sigma|, \eta > 0 \quad (2.15)$$

Lors de l'établissement d'un mode glissant, le comportement du système peut être décrit par deux phases :

- Phase de convergence : cette phase correspond à l'intervalle de temps $t \in [0, t_c]$ (t_c est le temps de convergence) pendant lequel les trajectoires d'état du système ne sont pas sur la surface de glissement \mathcal{S} . Durant cette phase, le système reste sensible aux variations de paramètres. Sa durée peut être réduite en augmentant η , c'est-à-dire en augmentant l'amplitude de la commande [Bre10].
- Phase de glissement : cette phase correspond à l'intervalle de temps $t \in [t_c, \infty[$ durant laquelle les trajectoires d'état sont concernées dans la surface de glissement \mathcal{S} . Durant cette phase, le comportement du système ne dépend plus du système d'origine ni des perturbations, mais il est entièrement caractérisé par le choix de la surface de glissement.

2.5 Commande par modes glissants d'ordre un

La commande par modes glissants d'ordre un se compose de deux termes, une commande discontinue en fonction du signe de la surface de glissement et une commande dite équivalente caractérisant la dynamique du système sur la surface de glissement.

$$u = u_{eq} + u_{dis} \quad (2.16)$$

Afin de satisfaire la condition de η -attractivité (2.15), il suffit de choisir la partie discontinue de la commande comme suit :

$$u_{dis} = -K \text{sign}(\sigma) \quad (2.17)$$

Avec K est le gain de commande, choisi suffisamment grand pour compenser l'écart dynamique entre le système réel et de référence (donné par la surface de glissement), et les perturbations du système. Pendant le régime glissant, la commande a une fréquence de commutation en théorie infinie, autrement dit, la commande est discontinue à chaque instant. Il est à noter que c'est ce caractère discontinu de la loi de commande qui permet d'assurer une convergence en temps fini ainsi que la robustesse vis-à-vis des perturbations.

La partie équivalente de la commande u_{eq} décrit un mouvement idéal de glissement, c'est-à-dire sans la prise en considération des incertitudes et perturbations du système. Physiquement, elle peut être vue comme la valeur moyenne de la commande réelle. Elle est obtenue grâce aux conditions d'invariance de la surface de glissement :

$$\dot{\sigma} = \sigma = 0$$

2.5.1 Inconvénients de la commande par modes glissants

Un régime glissant idéal nécessite une commande de fréquence de commutation infinie. Évidemment, pour une utilisation pratique, seule une commutation à une fréquence finie est possible, ce qui cause un retard entre la mesure de la sortie et le calcul de la commande, qui peut être amplifié si le système présente naturellement des retards ou des dynamiques négligées. Cela conduit le système à quitter la surface de glissement sans que la commande ne puisse réagir, puis, une fois le signe de la commande inversé, à revenir sur cette surface

et passer de l'autre côté, et ainsi de suite.

Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner des oscillations de haute fréquence de la trajectoire du système autour de la surface de glissement. Ce phénomène est appelé *broutement* ou *chattering* en anglais. Les principales causes de ce phénomène sont [YUO99] :

- les retards purs en série avec le système en boucle ouverte (retards inhérents au système, échantillonnage, . . .),
- les dynamiques non modélisées des capteurs et des observateurs, qui retardent le moment où le régulateur prend conscience qu'il faut inverser la commande,
- les dynamiques non modélisées des actionneurs et autres dynamiques rapides du système, qui retardent le moment où la commande est suffisamment forte pour rapprocher le système de la surface de glissement.

Tous ces phénomènes ont globalement l'effet de retarder l'application effective de la commande permettant de ramener le système sur la surface de glissement à partir du moment où il l'a quitté.

On parle aussi de *chattering* pour désigner l'oscillation de haute fréquence de la commande (et non plus de la variable de glissement). Une autre cause de *chattering*, notamment sur la commande, est le bruit de mesure. En effet, une erreur de mesure quand l'état est très proche de la surface de glissement peut entraîner une erreur de signe de la commande, car il se peut que cette dernière croit alors que le système se trouve de l'autre côté de la surface. Ce phénomène est amplifié par la nécessité d'avoir des observateurs ou dérivateurs rapides, donc filtrant peu la mesure.

Les phénomènes de *chattering* peuvent être si pénalisants que l'utilisation d'une loi de commande par modes glissants peut, dans certaines applications être à proscrire, vu que son utilisation peut dégrader les performances, voire conduire à l'instabilité à cause du *chattering* sur la sortie. Le *chattering* de la commande, peut entraîner une usure prématurée des actionneurs ou de certaines parties du système à cause de fortes sollicitations. En excitant les modes propres des dynamiques non modélisées ou des fréquences de résonance du système correspondant aux retards de commutation, cette commande peut provoquer sur les systèmes mécaniques un bruit haute fréquence et des oscillations

préjudiciables à leur structure. Sur des systèmes autres que mécaniques, les oscillations engendrées peuvent poser d'autres problèmes (réduction de précision, créations d'ondes électromagnétiques néfastes ou autres ondes amplifiées par le système, . . .).

2.5.2 Quelques solutions pour le chattering

Afin de réduire ou d'éliminer le phénomène de chattering, de nombreuses techniques ont été proposées. Parmi les techniques les plus utilisées on cite :

La couche limite (boundary layer)

Elle consiste à substituer la fonction *signe* par une approximation à gain élevé au voisinage de \mathcal{S} , et faire saturer la fonction à l'extérieur [Utk92],[SL91]. Dans ce cas le régime glissant n'est plus dans \mathcal{S} , mais au voisinage de celui-ci. Ce qui entraîne un régime pseudo-glissant. Cependant, cette méthode engendre un compromis entre le niveau de réduction de chattering et la conservation de robustesse. Parmi les fonctions utilisées on cite : la fonction saturation, la fonction *signe* + saturation et tangente hyperbolique. Ces fonctions et d'autres ainsi que leurs formalisme mathématique sont données dans [Bre10].

Observateur

Le principe de cette méthode consiste à faire apparaître une seconde boucle dans la grande boucle du système. C'est dans la deuxième boucle que l'observateur est inséré et que le régime glissant sera généré [BBKU85]. Dans ce cas, l'observateur ne sera pas atteint par les dynamiques non modélisées. C'est ce qui nous permet d'avoir un mode glissant presque idéal dans la boucle secondaire. Mais il se peut qu'il soit troublé par la fréquence d'échantillonnage finie ou par des négligences sur la dynamique et les retards liés au système. La commande fait donc tendre l'état estimé vers un voisinage proche de l'origine. Mais la convergence de l'état estimé vers l'état réel dépend directement de la dynamique de l'observateur, qui peut ne converger qu'asymptotiquement, et ne prendre en compte les perturbations non modélisées que lentement. Cette commande en quelque sorte fait l'autruche, ne tenant pas compte de l'état réel [Bre10].

Système adaptatif flou

En utilisant le même principe que celui de la couche limite, Lin et Chen ont introduit une bande de transition floue [LC02]. Le système flou considéré est de type Mamdani, il a la surface de glissement comme entrée et la commande globale comme sortie. La bande de transition ainsi construite est non linéaire. Les trois règles floues utilisées correspondent à la valeur de la fonction *signe*. Le phénomène de chattering est certes éliminé néanmoins la commande permettant la phase d'approche reste difficile à calculer, car les bornes des incertitudes et des perturbations sont généralement inconnues. Dans [Haj97], l'auteur a proposé de faire varier le gain de glissement à l'aide d'un système flou. Ainsi, sa valeur diminue au fur et à mesure que le système s'approche de la surface de glissement. Dans [Ess04],[HWR09],[NRJ09], la partie discontinue de la commande avec saturation a été substituée par un système flou adaptatif. Le contrôleur a pour entrée la surface de glissement et délivre en sortie la meilleure approximation de la commande. A l'égard de sa performance, sa convergence dépend de la valeur initiale de la partie ajustable.

2.6 Commande par modes glissants d'ordre supérieur

Les modes glissants d'ordre supérieur ont été introduit par Emel'yanov [EKL86] et Levantovsky [Lev85]. Ils représentent une extension des modes glissants d'ordre 1 à un degré plus élevé. Cette généralisation conserve la principale caractéristique en terme de robustesse que celle des modes glissants classiques. Ils permettent aussi de réduire leur principal inconvénient : l'effet de chattering au voisinage de la surface de glissement. L'extension des modes glissants d'ordre un aux modes glissants d'ordre supérieur est caractérisée par le choix d'une commande discontinue agissant non pas sur la surface de glissement mais sur ses dérivées supérieures.

L'inconvénient principal de la commande en mode glissant d'ordre supérieur réside dans le besoin de connaître les variables d'état et leurs dérivées. Il en résulte alors que pour la synthèse d'un contrôleur en modes glissants d'ordre r , les fonctions $(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ sont nécessaires [Spi07].

2.6.1 Principe de fonctionnement

Le régime glissant standard agit sur la surface de glissement afin de l'annuler. Un régime glissant d'ordre r (noté $r - glissant$) agit sur la surface et ses $(r - 1)$ premières dérivées successives par rapport au temps. L'objectif est de forcer le système à évoluer non seulement sur la surface mais aussi sur ses $(r - 1)$ premières dérivées successives et à maintenir l'ensemble de glissement à zéro :

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$$

où r désigne le degré relatif du système, qui signifie le nombre minimum de fois qu'il faut dériver la surface, par rapport au temps, pour faire apparaître la commande explicitement. Il est calculé en déterminant les dérivées successives de σ [PB02] :

$$\begin{aligned} r = 1, i.e., \frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma} &\neq 0 \\ r \geq 2, i.e., \frac{\partial}{\partial u} \sigma^i &= 0 \quad (i = 1, \dots, r - 1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \sigma^r \neq 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Afin de conserver la caractéristique d'atténuation de chattering tout en limitant le nombre de capteurs nécessaires pour la mise en œuvre de la commande, dans notre étude, nous nous sommes limités aux modes glissants d'ordre deux.

2.6.2 Commande par modes glissants d'ordre deux

Le but de ce type de contrôleurs est de générer un régime glissant du second ordre sur une surface σ par l'annulation de σ elle-même ainsi que de sa dérivée $\dot{\sigma}$ en un temps fini ($\sigma = \dot{\sigma} = 0$).

La caractéristique principale de cette stratégie est que la partie discontinue apparaît sur la dérivée de la commande \dot{u} . Finalement lorsque l'on fait le calcul de la commande du système $u = \int \dot{u}$, elle devient continue limitant ainsi le phénomène de réticence.

L'algorithme du Super-Twisting [Lev93]

L'algorithme du Super-Twisting figure parmi les algorithmes de modes glissants d'ordre deux les plus utilisés. Cet algorithme ne s'applique qu'aux systèmes de degré relatif 1. Son intérêt réside dans la réduction du chattering, dû à la continuité du signal de commande.

Cette commande se décompose en un terme algébrique (non dynamique) et un terme intégral. On peut donc considérer cet algorithme comme une généralisation non linéaire d'un PI [Bre10].

L'algorithme du Super-Twisting, à l'instar des autres algorithmes de la même catégorie, nécessite uniquement l'information sur σ et entraîne l'annulation de celle-ci et $\dot{\sigma}$ en un temps fini. Il permet aussi de construire un dérivateur appelé généralement différenciateur exact [Lev98].

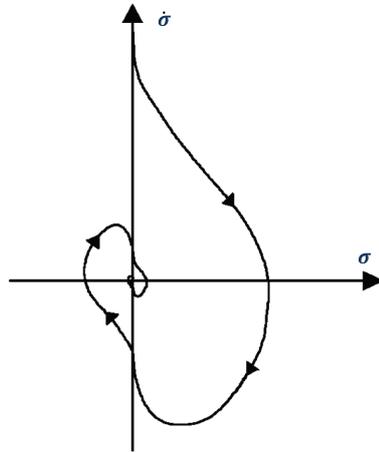


FIGURE 2.1 – Convergence en temps fini de l'algorithme du Super-Twisting.

La convergence de cet algorithme est régie par des rotations autour de l'origine du diagramme de phase (appelées aussi Twisting), comme illustré par la figure (2.1). La loi de commande du Super-Twisting est formée de deux parties. La première u_1 est définie par sa dérivée par rapport au temps, tandis que la deuxième u_2 est continue et en fonction de la variable de glissement. Pour un mode glissant réel, la loi de commande sera donnée par [PB02],[Lev93] :

$$\begin{aligned} u_{dis} &= -u_1 - u_2 \\ \dot{u}_1 &= \alpha \text{sign}(\sigma), \quad u_2 = \beta |\sigma|^{(\frac{1}{2})} \text{sign}(\sigma) \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.7 Commande par modes glissants d'ordre deux d'un système non linéaire

Dans cette section, nous allons décrire les différentes étapes pour la mise en œuvre de la commande à base de l'algorithme du Super-Twisting du système non linéaire d'ordre n (2.5). La commande sera appliquée afin de contraindre la sortie du système y à suivre une trajectoire de référence y_r et que l'erreur de poursuite converge vers zéro en présence d'incertitudes et de perturbations. Pour cela la surface de glissement donnée par Slotine (2.12) sera employée pour le calcul de la variable de glissement. Cette équation peut être réécrite sous la forme d'une somme binomiale comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma(\underline{x}, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \right)^{(n-1)} e \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-k-1)} \lambda^k e\end{aligned}\quad (2.20)$$

La dérivée de σ par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(\underline{x}, t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-k-1)} \lambda^k \dot{e} \\ &= (y_r - y)^{(n)} + \delta_\sigma\end{aligned}\quad (2.21)$$

Où $\delta_\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n-k-1)} \lambda^k \dot{e}$. En substituant par l'expression de la dérivée à l'ordre n de la sortie du système (2.5) dans la dérivée de σ , on obtient :

$$\dot{\sigma}(\underline{x}, t) = \delta_\sigma + y_r^n - f_0(\underline{x}) - g_0(\underline{x})u - D \quad (2.22)$$

En s'appuyant sur les conditions d'invariance de la surface de glissement, la commande équivalente est obtenue en annulant $\dot{\sigma}$:

$$u_{eq} = g_0(\underline{x})^{-1} [y_r^{(n)} - f_0(\underline{x}) + \delta_\sigma] \quad (2.23)$$

En plus de la commande équivalente, la commande globale se compose des deux termes du Super-Twisting u_1 et u_2 . Après avoir regroupé les différentes composantes, la commande globale sera donnée par :

$$u = g_0(\underline{x})^{-1} \left[y_r^n - f_0(\underline{x}) + \delta_\sigma + \int_0^t \alpha \text{sign}(\sigma) dt + \beta |\sigma|^{0.5} \text{sign}(\sigma) \right] \quad (2.24)$$

Afin de satisfaire la condition de transition (2.15) et tester la stabilité et la robustesse en boucle fermée, Levant a considéré la deuxième dérivée de la surface de glissement [Lev93] :

$$\ddot{\sigma}(\underline{x}, t) = \varphi + \varrho \dot{u} \quad (2.25)$$

avec $\varphi = \dot{\delta}_\sigma - y_r^{(n+1)} + \dot{f}_0(\underline{x}) + \dot{D} + \dot{g}_0(\underline{x})u$ et $\varrho = g_0(\underline{x})$ sont des fonctions non linéaires mal connues mais bornées $\Delta > 0, |\varphi| \leq \Delta, 0 < \Gamma_m \leq \varrho \leq \Gamma_M$. Dans son étude Levant n'a pas pris en compte la somme des perturbations et d'incertitudes D ni de sa dérivée, et il a donné les conditions suffisantes de convergence en temps fini vers la surface de glissement [Lev93],[PB02] :

$$\alpha > \frac{\Delta}{\Gamma_m}, \beta \geq \frac{4\Delta \Gamma_M(\alpha + \Delta)}{\Gamma_m^2 \Gamma_m(\alpha - \Delta)} \quad (2.26)$$

Si l'on remplace par l'expression de la commande dans la dérivée de la surface, la condition de η -attractivité (2.15) sera satisfaite si les gains de commande sont choisis de sorte à satisfaire l'inégalité :

$$\alpha t + \beta |\sigma|^{0.5} \geq \eta + D_M \quad (2.27)$$

En régime permanent, on aura $\sigma = 0$, le choix de ces conditions suffisantes va nous permettre facilement de satisfaire la condition (2.15). Cependant, pour un choix optimal de α et β en phase d'approche, la connaissance des bornes supérieures de D et de sa dérivée qui dépendent de la commande u comme indiqué par (2.6) s'imposent. Néanmoins, même si ce problème est résolu, la présence de la fonction $sign(\sigma)$ provoque un phénomène de chattering [SSL07]. Même s'il est d'un ordre moins important que dans la commande par modes glissants classiques, il est toujours résiduel [MEH10c],[MEH10b],[MEH12].

Dans la littérature nous retrouvons une variété de preuve de stabilité de cet algorithme. La preuve originale donnée par Levant [Lev98], est une preuve géométrique basée sur l'intégration numérique du pire cas indiquant pour un jeu de coefficients (α, β) donné s'il est toujours stable ou pas. Une autre méthode, consiste à intégrer analytiquement le cas le plus défavorable [DFL05]. Cette procédure nécessite d'intégrer un majorant, qui forme une enveloppe des trajectoires. Cette preuve donne des conditions analytiques, contrairement à la précédente, mais légèrement plus conservatives. Une troisième méthode consiste à utiliser des fonctions de Lyapunov [MO08]. Ces preuves sont les plus conservatives, ne prouvant la stabilité que pour des valeurs de coefficients assez élevées, mais sont les plus

faciles à généraliser à des algorithmes similaires.

Il reste à souligner qu'aucune de ces méthodes ne donne une solution pour le calcul de la valeur optimale des gains de commande (α, β) . Même si les valeurs de ces coefficients ont un impact sur l'optimisation de l'énergie du signal de commande, sur la réduction du chattering et même sur la stabilité en boucle fermée.

Selon l'usage de l'algorithme, en commande, pour avoir un bon comportement transitoire, la valeur des gains doit être plus grande que le strict nécessaire pour assurer la stabilité. En revanche s'il est utilisé en guise de dérivateur, les coefficients doivent être les plus faibles possible, car ils peuvent perturber l'estimation de la dérivée [Bre10].

2.8 Commande par modes glissants floue d'ordre deux

Afin de lisser le signal de commande, les deux composantes u_1 et u_2 seront remplacées par d'autres issues de systèmes adaptatifs flous de type-2 intervalle. Les lois d'adaptations des paramètres ajustables de ces systèmes sont déduites de l'étude de stabilité du processus en boucle fermée au sens de Lyapunov. Ces adaptations, en plus de lisser le signal de commande, nous permettent d'anticiper au mieux les perturbations et optimiser au mieux le signal de commande, en nous fournissant à chaque instant les valeurs optimales (α^*, β^*) de α et β qui sont difficiles à calculer.

Proposition 1 [MEH10c],[MEH12]

Les composantes de haute fréquence de la commande discontinue (2.19) :

$$u_1 = \int_0^t \alpha \text{sign}(\sigma) dt \quad \text{et} \quad u_2 = \beta |\sigma|^{0.5} \text{sign}(\sigma)$$

sont substituées par :

$$\hat{u}_1(\sigma) = \underline{\theta}_1^T \underline{\xi}(\sigma) t_c \quad \text{et} \quad \hat{u}_2(\sigma) = |\sigma|^{0.5} \underline{\theta}_2^T \underline{\xi}(\sigma) \quad (2.28)$$

Où $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$ sont deux systèmes flous type-2 intervalles de même forme que (1.13) ; ils ont comme unique entrée la surface de glissement σ et en sortie ils délivrent des gains de commande, dont les valeurs optimales vérifient : $|\hat{u}_1^*| = \alpha^* t_c$ et $|\hat{u}_2^*| = \beta^* |\sigma|^{0.5}$. Avec

$\underline{\theta}$ désigne le vecteur des paramètres ajustables. t_c est considéré comme étant le temps de convergence qui nous permet d'arriver au voisinage de ϑ , qui est défini par :

$$|\sigma| \leq \vartheta \quad (2.29)$$

Avec :

$$t_c = \begin{cases} t & \text{si } |\sigma| > \vartheta \\ t_\vartheta & \text{si } |\sigma| \leq \vartheta \end{cases} \quad (2.30)$$

Étant donné que t_c est inconnu à priori, on prend à $t = 0$, $t_c = t$ jusqu'à atteindre $|\sigma| = \vartheta$. Dans ce cas, t_c prend la valeur de t qui correspond à l'instant où $|\sigma| = \vartheta$.

La commande proposée est donnée par :

$$u = g_0^{-1}(\underline{x}) [-f_0(\underline{x}) + \delta_\sigma + y_r^{(n)} + \hat{u}_1(\sigma) + \hat{u}_2(\sigma)] \quad (2.31)$$

Démonstration 1 Pour ajuster les paramètres de $\underline{\theta}_1$ et $\underline{\theta}_2$, nous devons dériver leurs lois adaptatives. L'estimation de leurs paramètres optimaux $\underline{\theta}_1^*$ et $\underline{\theta}_2^*$ est donnée par :

$$\underline{\theta}_1^* = \arg \min_{\underline{\theta}_1 \in \Omega_{u_1}} \left(\sup_{\sigma \in \mathbb{R}} |\hat{u}_1(\sigma | \underline{\theta}_1) - u_1| \right) \quad (2.32)$$

$$\underline{\theta}_2^* = \arg \min_{\underline{\theta}_2 \in \Omega_{u_2}} \left(\sup_{\sigma \in \mathbb{R}} |\hat{u}_2(\sigma | \underline{\theta}_2) - u_2| \right) \quad (2.33)$$

Ω_{u_1} et Ω_{u_2} sont respectivement deux ensembles de contrainte pour $\underline{\theta}_1$ et $\underline{\theta}_2$, ils sont donnés par :

$$\Omega_{u_1} = \{ \underline{\theta}_1 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varepsilon \leq |\underline{\theta}_1| \leq M_{u_1} \} \quad (2.34)$$

$$\Omega_{u_2} = \{ \underline{\theta}_2 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varepsilon \leq |\underline{\theta}_2| \leq M_{u_2} \} \quad (2.35)$$

avec ε , M_{u_1} et M_{u_2} sont les bornes des paramètres estimés. Les valeurs des deux paramètres flous $\underline{\theta}_1$ et $\underline{\theta}_2$ évoluent entre leurs deux bornes. Dans le cas où il y a possibilité qu'ils atteignent les bornes, des projections peuvent être utilisées [Wan94],[HWR09].

Considérons maintenant la fonction de Lyapunov qui suit, pour l'étude de stabilité de la boucle fermée :

$$V = \frac{\sigma^2(\underline{x}, t)}{2} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 \quad (2.36)$$

avec : γ_1 et γ_2 sont deux constantes d'apprentissage positives. $\underline{\dot{\theta}} = \underline{\dot{\theta}} - \underline{\dot{\theta}}^*$, $\underline{\dot{\theta}}^*$ est la valeur optimale de $\underline{\dot{\theta}}$,

La dérivée de V est donnée par :

$$\dot{V} = \dot{\sigma}(\underline{x}, t)\sigma(\underline{x}, t) + \frac{1}{\gamma_1}\underline{\dot{\theta}}_1^T\dot{\underline{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\underline{\dot{\theta}}_2^T\dot{\underline{\theta}}_2 \quad (2.37)$$

En substituant la commande proposée dans la dérivée de la surface de glissement (2.22), on obtient :

$$\dot{\sigma}(\underline{x}, t) = \delta_\sigma + y_r^{(n)} - f_0(\underline{x}) - g_0(\underline{x}) \times g_0^{-1}(\underline{x})[\delta_\sigma - f_0(\underline{x}) + y_r^{(n)} + \hat{u}_1(\sigma) + \hat{u}_2(\sigma)] - D \quad (2.38)$$

en simplifiant l'équation (2.38), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(\underline{x}, t) &= -\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) - D \\ &= -\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_1^*(\sigma) + \hat{u}_1^*(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) - \hat{u}_2^*(\sigma) + \hat{u}_2^*(\sigma) - D \end{aligned} \quad (2.39)$$

où $\hat{u}_1^*(\sigma)$ et $\hat{u}_2^*(\sigma)$ sont les approximateurs optimums qui doivent vérifier :

$$|\hat{u}_1^*(\sigma)| + |\hat{u}_2^*(\sigma)| = \left| |\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5}\underline{\dot{\theta}}_2^T\underline{\xi}(\sigma) \right| + \left| \underline{\dot{\theta}}_1^*T\underline{\xi}(\sigma)t_c \right| \geq D_M + \eta \quad (2.40)$$

En substituant leurs expressions dans (2.39) nous obtenons :

$$\dot{\sigma}(\underline{x}, t) = -(\underline{\dot{\theta}}_1 - \underline{\dot{\theta}}_1^*)^T \underline{\xi}(\sigma)t_c - (\underline{\dot{\theta}}_2 - \underline{\dot{\theta}}_2^*)^T |\sigma|^{0.5}\underline{\xi}(\sigma) - \hat{u}_2^*(\sigma) - \hat{u}_1^*(\sigma) - D \quad (2.41)$$

La substitution de (2.41) dans (2.37), permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma(\underline{x}, t)(\hat{u}_2^*(\sigma) + \hat{u}_1^*(\sigma)) + \frac{1}{\gamma_1}\underline{\dot{\theta}}_1^T \left(\dot{\underline{\theta}}_1 - \gamma_1\sigma(\underline{x}, t)\underline{\xi}(\sigma)t_c \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2}\underline{\dot{\theta}}_2^T \left(\dot{\underline{\theta}}_2 - \gamma_2\sigma(\underline{x}, t)|\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5}\underline{\xi}(\sigma) \right) - D\sigma(\underline{x}, t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

En choisissant les lois d'adaptations suivantes :

$$\dot{\underline{\theta}}_1 = \gamma_1\sigma(\underline{x}, t)\underline{\xi}(\sigma)t_c \quad (2.43)$$

$$\dot{\underline{\theta}}_2 = \gamma_2\sigma(\underline{x}, t)|\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5}\underline{\xi}(\sigma) \quad (2.44)$$

la dérivée de V devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma(\underline{x}, t)(\hat{u}_2^*(\sigma) + \hat{u}_1^*(\sigma)) - \sigma(\underline{x}, t)D \\ &= -\sigma(\underline{x}, t) \left(|\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5}\beta^* \text{sign}(\sigma) + \alpha^* t_c \text{sign}(\sigma) \right) - \sigma(\underline{x}, t)D \end{aligned} \quad (2.45)$$

Comme α^* et β^* sont les approximations optimales de α et β qui vérifient :

$$\alpha^* t_c + \beta^* |\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5} \geq D_M + \eta \quad (2.46)$$

d'où la dérivée de la fonction de Lyapunov (2.45) peut être donnée par l'inégalité suivante :

$$\dot{V} = -\sigma(\underline{x}, t)D - (\alpha^* t_c + \beta^* |\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5}) |\sigma(\underline{x}, t)| \leq 0 \quad (2.47)$$

Cette inégalité (2.47) confirme la validité analytique de l'approche proposée à assurer la stabilité et la robustesse d'un système non linéaire commandé en boucle fermée. De plus, sa simplicité permet une implementation en temps réel.

L'implementation en temps réel de cette approche peut se faire en deux étapes :

Hors ligne

- Choisir la pente de la surface de glissement λ .
- Choisir les fonctions d'appartenance du modèle nominal et des systèmes adaptatifs flous ainsi que leurs constantes d'apprentissages γ_1 et γ_2 .

En ligne

- Ajuster les paramètres de $\underline{\theta}_1$ et $\underline{\theta}_2$ en utilisant les lois d'adaptation (2.43) et (2.44).
- Calculer la loi de commande (2.31) en introduisant $f_0(\underline{x})$ et $g_0(\underline{x})$.

La procédure pour l'implémentation de l'approche proposée est résumée par le schéma bloc de la figure (2.2).

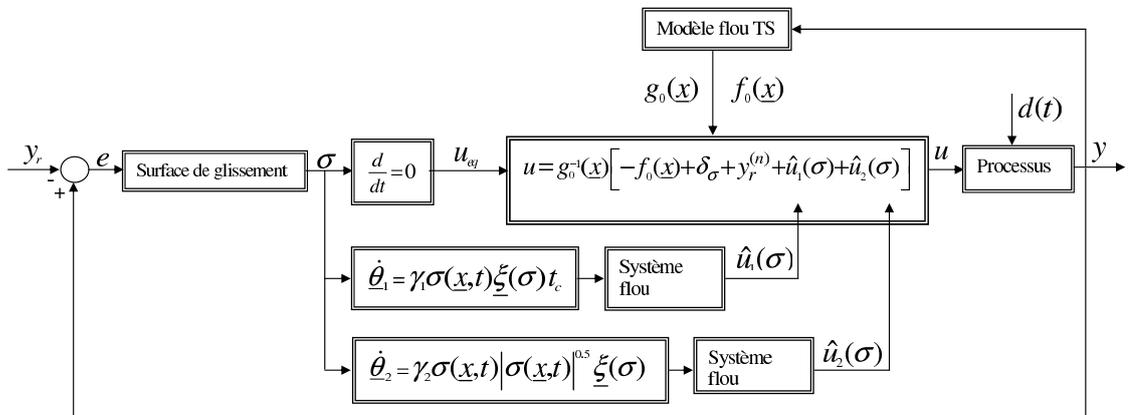


FIGURE 2.2 – Schéma bloc de la commande proposée.

2.8.1 Cas d'un système multi-entrées multi-sorties

Afin de généraliser la commande floue par modes glissants d'ordre deux au cas des systèmes multivariables, on considère une classe des systèmes MIMO décrite par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots\dots \\ \dot{x}_{n_1-1} = x_{n_1} \\ \dot{x}_{n_1} = f_1(X) + \sum_{i=1}^p g_{1i}(X)u_i + d_1 \\ \dot{x}_{n_1+1} = x_{n_1+2} \\ \dots\dots \\ \dot{x}_{n_2+n_1} = f_2(X) + \sum_{i=1}^p g_{2i}(X)u_i + d_2 \\ \dot{x}_{n_2+n_1+1} = x_{n_2+n_1+2} \\ \dots\dots \\ \dot{x}_{n_p+\dots+n_2+n_1} = f_p(X) + \sum_{i=1}^p g_{pi}(X)u_i + d_p \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Où $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ représente le vecteur d'état mesurable, $n_1 + \dots + n_p = n$, $\underline{u} = [u_1, \dots, u_p]^T \in \mathbb{R}^p$ est l'entrée de commande, $f_i(X)$ et $g_{ij}(X)$ sont des fonctions non linéaires partiellement ou totalement inconnues.

Si l'on considère les perturbations externes qui peuvent agir sur le système et uniquement les dynamiques ou la commande intervient, le système (2.48) peut être donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\underline{x}} = F(X) + G(X)\underline{u} + \underline{d} \\ \underline{y} = X \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Où $\underline{\dot{x}} = [x_{n_1}, x_{n_2+n_1}, \dots, x_{n_p+\dots+n_2+n_1}]^T$ est le vecteur regroupant les dynamiques $n^{\text{ème}}$ du système (2.48), $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_p(X)]^T \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur de fonctions non linéaires et $G(X) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est une matrice pleine des fonctions non linéaires $g_{ij}(X)$. \underline{y} et \underline{u} sont respectivement la sortie et l'entrée du système. $\underline{d} = [d_1, d_2, \dots, d_p]$ représente le vecteur de perturbations externes, qui est inconnu mais borné $\|\underline{d}\| \leq \Delta_{\underline{d}}$. On considère que $F(X)$ et $G(X)$ sont donnés par la somme de leurs fonctions nominales auxquelles se

rajoutent des incertitudes inconnues mais bornées.

$$\begin{cases} F(X) = F_0(X) + \Delta F(X); \|\Delta F(X)\| < \Delta_F \\ G(X) = G_0(X) + \Delta G(X); \|\Delta G(X)\| < \Delta_G \end{cases} \quad (2.50)$$

où Δ_F et Δ_G sont deux constantes positives. En substituant (2.50) dans (2.49), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = F_0(X) + G_0(X)\underline{u} + \underline{D} \\ \underline{y} = X \end{cases} \quad (2.51)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{D} = \Delta F(X) + \Delta G(X)\underline{u} + \underline{d} \\ D_M = \Delta_F + \Delta_G u_M + \Delta_d, \quad \|\underline{u}\| \leq u_M \end{cases} \quad (2.52)$$

On suppose que le système est contrôlable et que $G(X)^{-1}$ existe. Comme dans le cas monovariable le modèle nominal du système est construit à l'aide d'un système flou type-2 intervalle de Takagi-Sugeno, qui exploite les modèles locaux linéaire du processus. L'information sur les modèles locaux est fusionnée avec des règles Si-Alors de la forme [MEH10b],[MEH10a] :

SI x_1 est \tilde{H}_1^i et x_2 est \tilde{H}_2^i et..... et x_n est \tilde{H}_n^i ALORS

$$\dot{\underline{x}} = A_i(n_1 : n_p, 1 : n)X + B_i(n_1 : n_p, 1 : p)\underline{u} \quad (2.53)$$

Où $\tilde{H}_j^i, (j = 1, 2, \dots, n)$ est le $j^{\text{ème}}$ ensemble flou de type-2 intervalle de la $i^{\text{ème}}$ règle, $A(n_1 : n_p, 1 : n)$ et $B(n_1 : n_p, 1 : p)$ sont respectivement les matrices réduites de $A^{n \times n}$ et $B^{n \times p}$ avec $A(n_1 : n_p, 1 : n) = A(I, J)_{\substack{1 \leq I \leq n_p \\ 1 \leq J \leq n}}$ et $B(n_1 : n_p, 1 : p) = B(I, J)_{\substack{1 \leq I \leq n_p \\ 1 \leq J \leq p}}$, qui veut dire qu'on considère toutes les colonnes et uniquement les lignes qui correspondent à $I = n_1, n_2, \dots, n_p$.

Pour une paire (X, \underline{u}) donnée, le modèle flou résultant du système apparaît comme la moyenne pondérée des modèles locaux :

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^R w^i [A_i(n_1 : n_p, 1 : n)X + B_i(n_1 : n_p, 1 : p)\underline{u}]}{\sum_{i=1}^R w^i} \quad (2.54)$$

Si l'on note par $F_0(X) = \left[\frac{\sum_{i=1}^R w^i A_i(n_1 : n_p, 1 : n)X}{\sum_{i=1}^R w^i} \right]$ et $G_0(X) = \left[\frac{\sum_{i=1}^R w^i B_i(n_1 : n_p, 1 : p)}{\sum_{i=1}^R w^i} \right]$, alors le modèle nominal flou sera donné par :

$$\dot{\underline{x}} = F_0(X) + G_0(X)\underline{u} \quad (2.55)$$

Notre objectif est de forcer la sortie du système \underline{y} à suivre une trajectoire de référence \underline{y}_r tout en maintenant la stabilité du système en boucle fermée malgré la présence de perturbations et d'incertitudes. En conséquence, nous devons garantir que $\underline{e} \rightarrow 0|_{t \rightarrow \infty}$, avec $\underline{e} = \underline{y} - \underline{y}_r$.

Afin d'atteindre les objectifs de commande, nous considérons la surface de glissement :

$$\underline{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p] \in \mathbb{R}^p \quad (2.56)$$

En généralisant la surface de glissement donnée par Slotine [SL91], cette notation vectorielle peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda \right)^{(n_i-1)} \underline{e} \\ &= \sum_{k=0}^{n_i-1} \frac{(n_i-1)!}{k!(n_i-k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n_i-k-1)} \Lambda^k \underline{e} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$\Lambda = \text{diag}[\lambda_i]$, $1 \leq i \leq p$, est une matrice diagonale ($p \times p$). λ_i sont les pentes positives des sous-surfaces de glissements.

Proposition 2 [MEH10a],[MEH10b]

Pour garantir la stabilité globale en boucle fermée du système (2.49), et assurer la convergence vers zéro de l'erreur de poursuite, nous proposons la loi de commande suivante :

$$\underline{u} = G_0(X)^{-1}[-F_0(X) + \delta_{\underline{\sigma}} + \underline{y}_r^{(n_i)} + \hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma}) + \hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma})] \quad (2.58)$$

Les expressions des vecteurs de commande $\hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma})$ et $\hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma})$ sont comme suit :

$$\hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma}) = \Theta_1^T \Psi(\underline{\sigma}) t_c \quad (2.59)$$

$$\hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma}) = (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{(\frac{1}{2})}) \Theta_2^T \Psi(\underline{\sigma}) \quad (2.60)$$

Où $\delta_{\underline{\sigma}} = \sum_{k=1}^{n_i-1} \frac{(n_i-1)!}{k!(n_i-k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n_i-k-1)} \Lambda^k \dot{\underline{e}}$, $\Theta_1^T = [\underline{\theta}_{11}, \underline{\theta}_{12}, \dots, \underline{\theta}_{1p}]$, $\Theta_2^T = [\underline{\theta}_{21}, \underline{\theta}_{22}, \dots, \underline{\theta}_{2p}]$, $\Psi(\underline{\sigma}) = \text{diag}[\underline{\xi}_i]$ et $\text{diag}|\underline{\sigma}|^{(\frac{1}{2})} = \text{diag} [|\sigma_i|^{(\frac{1}{2})}]$, ($i = 1, \dots, p$), p est le nombre des sous surfaces de glissement. Θ désigne le vecteur des paramètres ajustables et Ψ une matrice diagonale des vecteurs de la régression.

$\hat{u}_1(\underline{\sigma})$ et $\hat{u}_2(\underline{\sigma})$ approximent les deux composantes de haute fréquence \underline{u}_1 et \underline{u}_2 du Super Twisting :

$$\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} \int_0^t \alpha_1 \text{sign}(\sigma_1) dt \\ \dots \\ \int_0^t \alpha_p \text{sign}(\sigma_p) dt \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 |\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_1) \\ \dots \\ \beta_m |\sigma_p|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_p) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

avec α_i et β_i ($i = 1, \dots, p$) sont les gains du Super-Twisting. $\underline{u}_1(\underline{\sigma})$ et $\underline{u}_2(\underline{\sigma})$ sont constitués par des systèmes flous type-2 intervalles, ils ont comme unique entrée les sous-surfaces de glissement σ_i et en sortie ils délivrent la valeur optimale des gains de commande qui vérifient : $|\underline{u}_1^*| = \underline{\alpha}^* t_c$ et $|\underline{u}_2^*| = \underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{(\frac{1}{2})}$, avec $\underline{\alpha}^* = [\alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*]^T$ et $\underline{\beta}^* = [\beta_1^*, \dots, \beta_p^*]^T$, t_c désigne le temps de convergence qui nous permet d'arriver au voisinage de ϑ , qui est défini par :

$$\|\sigma\| \leq \vartheta \quad (2.62)$$

Avec :

$$t_c = \begin{cases} t & \text{si } \|\sigma\| > \vartheta \\ t_\vartheta & \text{si } \|\sigma\| \leq \vartheta \end{cases} \quad (2.63)$$

Étant donné que t_c est inconnu à priori, à partir de $t = 0$ on pose $t_c = t$ jusqu'à atteindre $\|\sigma\| = \vartheta$. Dans ce cas, t_c prend la valeur de t qui correspond à l'instant où $\|\sigma\| = \vartheta$.

Démonstration 2 Pour ajuster Θ_1 et Θ_2 nous devons déduire leurs lois adaptatives.

L'estimation de leurs paramètres optimaux est donnée par :

$$\Theta_1^* = \arg \min_{\Theta_1 \in \Omega_{u_1}} \left(\sup_{\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^p} \|\hat{u}_1(\underline{\sigma} | \Theta_1) - \underline{u}_1\| \right) \quad (2.64)$$

$$\Theta_2^* = \arg \min_{\Theta_2 \in \Omega_{u_2}} \left(\sup_{\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^p} \|\hat{u}_2(\underline{\sigma} | \Theta_2) - \underline{u}_2\| \right) \quad (2.65)$$

Ω_{u_1} et Ω_{u_2} sont respectivement deux ensembles de contrainte pour Θ_1 et Θ_2 , ils sont donnés par :

$$\Omega_{u_1} = \{ \Theta_1 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varepsilon \leq \|\Theta_1\| \leq M_{u_1} \} \quad (2.66)$$

$$\Omega_{u_2} = \{ \Theta_2 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \varepsilon \leq \|\Theta_2\| \leq M_{u_2} \} \quad (2.67)$$

avec ε , $M_{\underline{u}_1}$ et $M_{\underline{u}_2}$ sont les bornes des paramètres estimés. Les valeurs des paramètres des deux vecteurs Θ_1 et Θ_2 évoluent entre leurs deux bornes. Dans le cas où il y a possibilité qu'ils atteignent les bornes, leurs lois adaptatives peuvent être modifiées en rajoutant des projections [Wan94].

Pour l'étude de la stabilité en boucle fermée, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2}\underline{\sigma}^T \underline{\sigma} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\Theta}_1^T \tilde{\Theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\Theta}_2^T \tilde{\Theta}_2 \quad (2.68)$$

Avec : γ_1 et γ_2 sont deux constantes positives. $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$, Θ^* est le vecteur des valeurs optimales de Θ .

En dérivant l'équation (2.68), on obtient :

$$\dot{V}(t) = \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\Theta}_1^T \dot{\tilde{\Theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\Theta}_2^T \dot{\tilde{\Theta}}_2 \quad (2.69)$$

En dérivant la surface de glissement (2.57), on obtient :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \delta_{\underline{\sigma}} + \underline{y}_r^{(n_i)} - F_0(X) - G_0(X)\underline{u} - \underline{D} \quad (2.70)$$

En substituant la commande (2.58) dans la dérivée de la surface de glissement (2.70), on aura :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= -\hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma}) - \underline{D} \\ &= -\hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma}) + \hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma}) - \underline{D} \end{aligned} \quad (2.71)$$

où $\hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma})$ et $\hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma})$ sont les approximateurs optimums vérifiant :

$$\|\hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma})\| + \|\hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma})\| = \|(\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}})\Theta_2^{*T}\Psi(\underline{\sigma})\| + \|\Theta_1^{*T}\Psi(\underline{\sigma})t_c\| \geq D_M + \eta \quad (2.72)$$

Comme dans le cas SISO, la dérivée de la surface de glissement peut être écrite sous la forme :

$$\dot{\underline{\sigma}} = -(\Theta_1 - \Theta_1^*)^T \Psi(\underline{\sigma})t_c - (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}})(\Theta_2 - \Theta_2^*)^T \Psi(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma}) - \hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma}) - \underline{D} \quad (2.73)$$

La substitution de (2.73) dans (2.69), nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\underline{\sigma}^T (\hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma})) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\Theta}_1^T \left(\dot{\tilde{\Theta}}_1 - \gamma_1 \underline{\sigma}^T \Psi(\underline{\sigma})t_c \right) + \\ &\quad \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\Theta}_2^T \left(\dot{\tilde{\Theta}}_2 - \gamma_2 \underline{\sigma}^T (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}})\Psi(\underline{\sigma}) \right) - \underline{\sigma}^T \underline{D} \end{aligned} \quad (2.74)$$

En choisissant les lois d'adaptations suivantes :

$$\dot{\Theta}_1 = \gamma_1 \underline{\sigma}^T \Psi(\underline{\sigma}) t_c \quad (2.75)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \gamma_2 \underline{\sigma}^T (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}) \Psi(\underline{\sigma}) \quad (2.76)$$

l'équation (2.74) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\underline{\sigma}^T (\hat{\underline{u}}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{\underline{u}}_1^*(\underline{\sigma})) - \underline{\sigma}^T \underline{D} \\ &= \underline{\sigma}^T \underline{D} - \underline{\sigma}^T \left(\underline{\alpha}^* t_c \text{sign}(\underline{\sigma}) + \underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\underline{\sigma}) \right) \end{aligned}$$

Comme $\underline{\alpha}^*$ et $\underline{\beta}^*$ sont les approximations optimales de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ qui vérifient :

$$\|\underline{\alpha}^* t_c\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \geq D_M + \eta \quad (2.77)$$

d'où la dérivée de la fonction de Lyapunov (2.77) peut être donnée par l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\|\underline{\sigma}\| \|\underline{D}\| - \|\underline{\sigma}\| \left(\|\underline{\alpha}^* t_c\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \right) \\ &\leq -\|\underline{\sigma}^T\| D_M - \|\underline{\sigma}\| \left(\|\underline{\alpha}^* t_c\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \right) \leq 0 \quad (2.78) \end{aligned}$$

Nous constatons d'après l'inégalité (2.78) que la surface de glissement est attractive et que la condition d'attractivité $\underline{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}}$ est toujours satisfaite, donc l'erreur de poursuite convergera vers zéro en un temps fini. Utkin a démontré dans [Utk77] que, quand le système atteint la surface, il restera dessus pour rejoindre l'origine de phase. Ainsi la commande proposée permet d'assurer la robustesse et la convergence du système non linéaire MIMO d'ordre n décrit par (2.49).

2.9 Simulations et résultats

2.9.1 Cas d'un système mono-entrée mono-sortie

Pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche proposée et évaluer ses performances, la commande (2.31) et celle introduite par Levant (2.24) sont appliquées à un bras actionné par un moteur à courant continu. Ce système électromécanique représenté par la figure (2.3) se compose d'un bras de longueur l et de masse m . q est l'angle de rotation du bras

par rapport à la verticale. La dynamique du système est décrite par l'équation différentielle du 3^{eme} ordre suivante :

$$\begin{cases} q^{(3)} = f_0(q, \dot{q}, \ddot{q}) + g_0 u + D \\ f_0(q, \dot{q}, \ddot{q}) = -\frac{R}{L}\ddot{q} - \left(\frac{K_b N^2 K_t}{m l^2 L} + \frac{g}{l} \cos(q)\right) \dot{q} - \frac{Rg}{lL} \sin(q) \\ g_0 = \frac{K_t N}{m l^2 L} \end{cases} \quad (2.79)$$

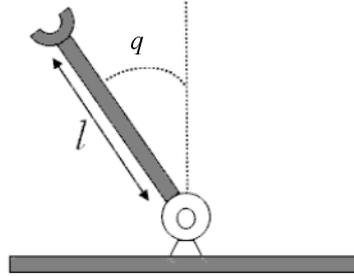


FIGURE 2.3 – Bras de robot avec un moteur à courant continu

Où $q^{(3)}$, \ddot{q} et \dot{q} sont les dérivées successives de l'angle q . La définition et la valeur des paramètres g, L, R, N, K_b et K_t sont données par le Tableau (2.1). $D = d + \Delta f + \Delta g$ est la somme des perturbations externes et des incertitudes du modèle. Comme dans [MEH10c],[MEH12] le modèle nominal flou est obtenu en utilisant deux règles décrivant la dynamique du système autour des points de fonctionnements 0 et $\pm \frac{\pi}{2}$.

Règle1 : Si $x_1(t)$ est proche de 0

Alors

$$\begin{cases} \underline{x}^{(3)}(t) = A_1(3, 1 : 3)\underline{x}(t) + B_1(3)u(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \end{cases} \quad (2.80)$$

Règle2 : Si $x_1(t)$ est proche de $\pm \pi/2$

Alors

$$\begin{cases} \underline{x}^{(3)}(t) = A_2(3, 1 : 3)\underline{x}(t) + B_2(3)u(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) \end{cases} \quad (2.81)$$

Où :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Rg}{lL} & -\frac{g}{l} - \frac{K_b N^2 K_t}{m l^2 L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t N}{m l^2 L} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Rg}{lL} & -\frac{K_b N^2 K_t}{m l^2 L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t N}{m l^2 L} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & \dot{q} & \ddot{q} \end{bmatrix}$$

Masse du bras	$m = 2Kg$
Gravité	$g = 9.81m/s^2$
Longueur du bras	$l = 0.5m$
Résistance	$R = 1.5\Omega$
Inductance	$L = 0.05H$
Constante FEM	$K_b = 0.2$
Constante du couple moteur	$K_t = 0.3$
Rapport de réduction	$N = 60$

TABLE 2.1 – Les paramètres du modèle

Comme le système (2.79) est d'ordre $n = 3$ et d'après l'équation (2.20), la surface de glissement sera donnée par : $\sigma = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2 e$. Afin de tester les performances des deux commandes (2.24) et (2.31), nous supposons que le système est atteint de la perturbation $d(t) = \sin(3t) + \sin(2t) + \psi$ et de la variation de masse $d_m = 0.02(\sin(2t) + \sin(3t))$, où ψ est un signal carré d'amplitude ± 1 et de période 1 seconde. A partir de l'état initial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, le système bras-moteur est commandé afin de contraindre l'angle de rotation du bras q et sa vitesse \dot{q} à suivre respectivement les trajectoires de référence $y_r = \sin(2t)$ et $\dot{y}_r = 2\cos(2t)$. Pour la simulation, nous choisissons les valeurs des gains $\alpha = 65$, $\beta = 55$ pour la commande (2.24). Ce choix, satisfait largement les conditions suffisantes (2.26). Les constantes d'apprentissage sont fixées à $\gamma_1 = 60$ et $\gamma_2 = 80$ pour la commande proposée (2.31). Les valeurs de ces constantes nous garantissent une adaptation rapide et le maintien de la non linéarité des deux approximateurs. La pente de la surface de glissement a été fixée à $\lambda = 7$.

Pour construire le modèle nominal flou comme donné par l'équation (2.9) nous avons choisi 3 ensembles flou type-2 intervalle en fonction de l'angle de rotation x_1 . Ces ensembles de type Gaussien sont donnés par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{\tilde{H}_1^i} = \frac{1}{1+(\exp(-5(x_1-(0.4+c_1))))} \\ \mu_{\tilde{H}_2^i} = \exp(-(5+c_2)(x_1^2)) \\ \mu_{\tilde{H}_3^i} = \frac{1}{1+(\exp(5(x_1+(0.4+c_1))))} \end{array} \right. \quad (2.82)$$

avec $c_1 \in [0, 0.2]$ et $c_2 \in [0, 0.2]$ désignent les degrés d'incertitudes.

De même, pour générer les deux systèmes flous adaptatifs qui nous permettent d'approximer u_1 et u_2 , nous avons considéré 3 ensembles flous type-2 intervalle en fonction de la variable de glissement σ : Négative, Zéro et Positive. La transition entre la phase d'approche et celle de glissement le long de la surface σ s'effectue quand la valeur de celle-ci est nulle. Par conséquent, l'étude faite par Hamzaoui et al. dans [HMEZ03] a montré que plus le support de la fonction d'appartenance correspondant à l'ensemble flou Zéro est petit, meilleure est la poursuite. Afin de garantir les bonnes performances de poursuite tout en lissant le signal de commande, l'ensemble flou triangulaire correspondant à l'ensemble Zéro a été choisi avec une largeur de base 1 ± 0.05 . La figure (2.4) montre l'allure de ces ensembles.

Le choix des ensembles gaussiens pour le modèle nominal nous garantit plus de flexibilité dans le passage d'un modèle local à un autre, tandis que les ensembles triangulaires pour les contrôleurs flous nous permet d'avoir plus de précision.

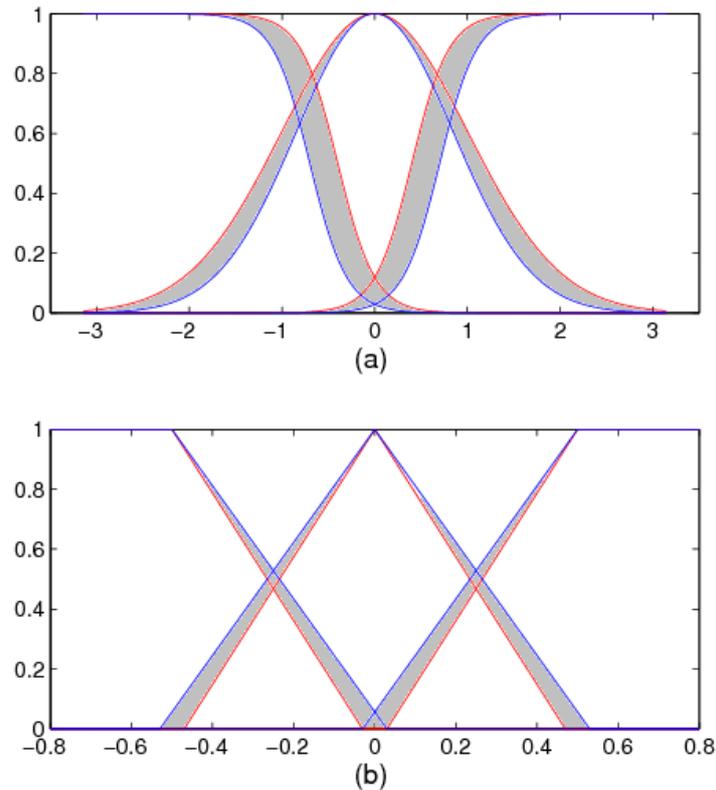


FIGURE 2.4 – Fonctions d'appartenance intervalle floues de type-2 de : (a) x_1 du modèle nominal, (b) σ des systèmes adaptatifs.

Les figures (2.5) et (2.6) sont obtenues par simulation en utilisant la loi de commande (2.24). La figure (2.5) montre une bonne performance de poursuite de trajectoires en position et en vitesse. Les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ convergent rapidement vers leurs références $y_r(t)$ et $\dot{y}_r(t)$. La figure (2.6) représente l'allure du signal de commande. Le zoom de cette figure affirme qu'il y a une variation du signal de commande, malgré qu'elle soit de faible amplitude en comparaison aux modes glissants d'ordre 1, elle est persistante.

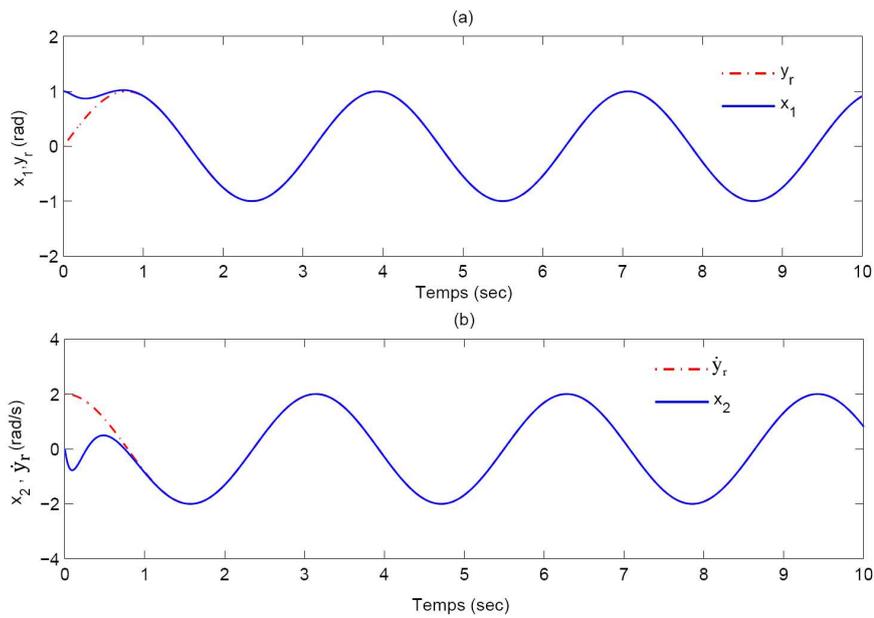


FIGURE 2.5 – Les trajectoires du système en utilisant la loi de commande (2.24) : (a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (a) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).

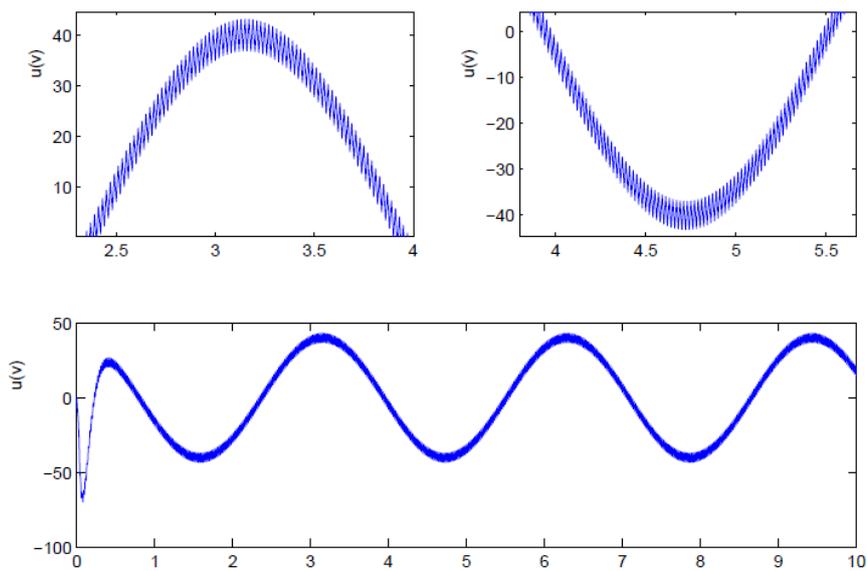


FIGURE 2.6 – Le signal de commande en utilisant la loi (2.24).

Les résultats de simulations en utilisant la commande proposée (2.31) sont donnés par les figures (2.7-2.9). L'analyse de la figure (2.7) confirme une convergence rapide des

états $x_1(t)$, $x_2(t)$ vers leurs références $y_r(t)$, $\dot{y}_r(t)$. Cette constatation est renforcée par la figure (2.8-b), qui représente la convergence de l'erreur quadratique de poursuite vers zéro. L'approche proposée, comme le montre la figure (2.8-a), nous permet d'avoir un signal de commande lisse sans aucune variation en plus de la réduction de l'énergie au démarrage. La figure (2.9-a) représente la convergence de $(\sigma, \dot{\sigma})$ dans le plan de phase. Contrairement à l'algorithme du Super-Twisting, la trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ converge directement vers l'origine de phase sans aucun Twisting, et cela grâce à la valeur optimale des gains de commande et notamment de \hat{u}_1^* et \hat{u}_2^* . L'algorithme de base tel qu'il a été introduit par Levant est caractérisé par des Twistings dans le plan de phase du second ordre de glissement $(\sigma, \dot{\sigma})$. Dans ce cas, la convergence en temps fini de $(\sigma, \dot{\sigma})$ vers l'origine est caractérisée par un nombre infini de rotations, à savoir que les amplitudes des vibrations le long des axes ainsi que le temps de rotation diminue en progression géométrique [PB02]. La figure (2.9-b) montre la convergence rapide de σ vers zéro malgré sa grande amplitude à $t = 0$.

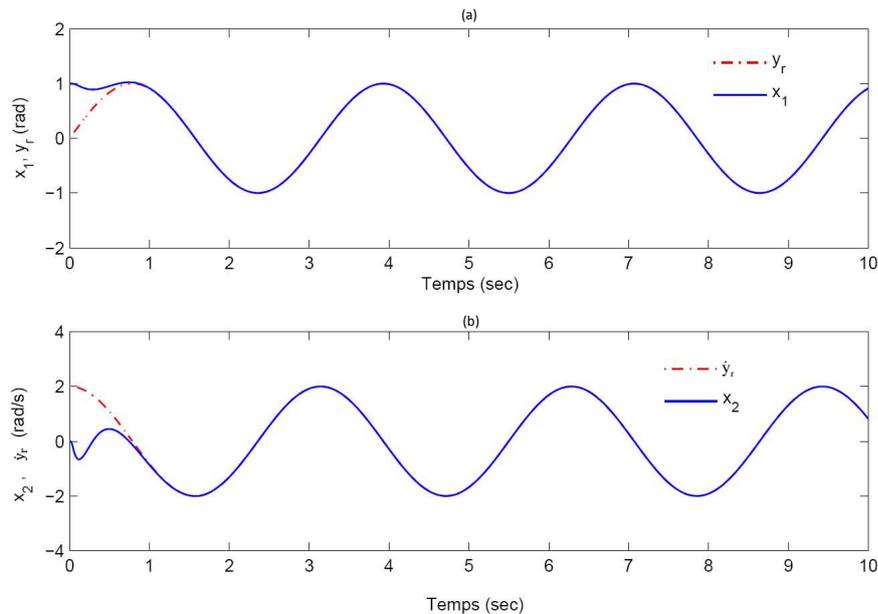


FIGURE 2.7 – Les trajectoires du système en utilisant la commande proposée (2.31) : (a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (a) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).

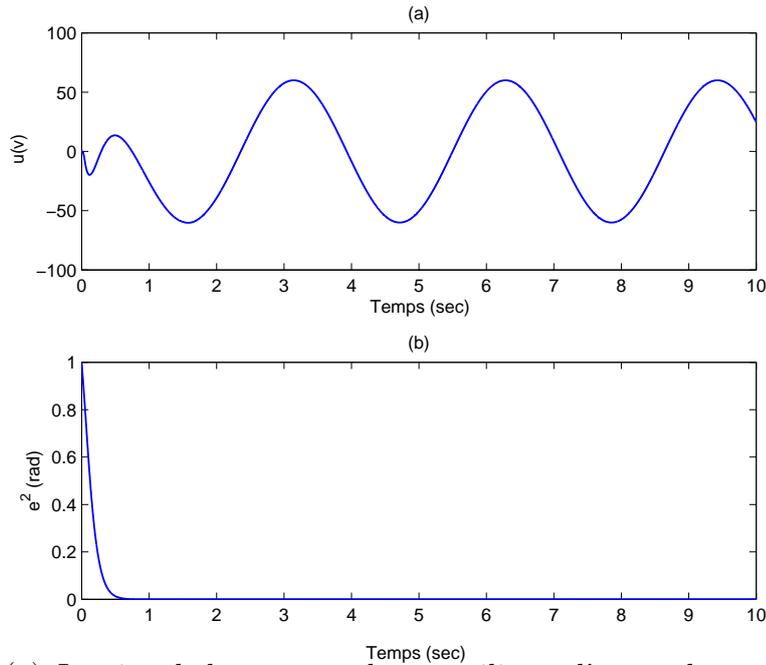


FIGURE 2.8 – (a) Le signal de commande en utilisant l'approche proposée (2.31). (b) L'erreur quadratique de poursuite.

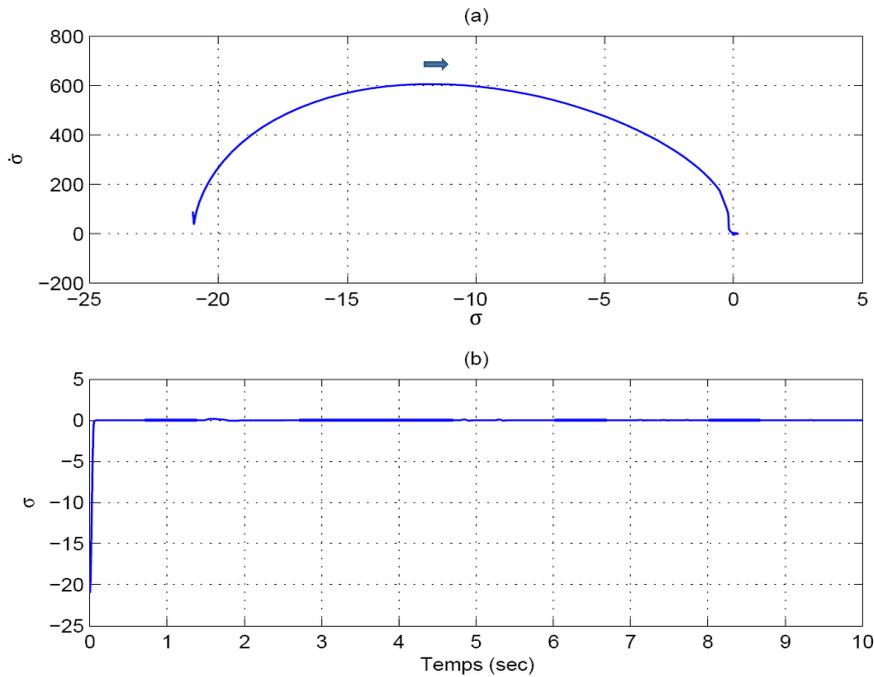


FIGURE 2.9 – (a) La trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ dans la plan de phase, (b) La surface σ .

Simulation en considérant une autre référence

Pour vérifier l'aptitude de l'approche proposée à assurer de bonnes performances de poursuite de trajectoire, nous avons considéré un autre type de référence pour la simulation. Les références de poursuite de trajectoire en position et en vitesse sont choisies comme respectivement $y_r(t) = \cos(t) + \cos(2t)$ et $\dot{y}_r(t) = -\sin(t) - 2\sin(2t)$. La simulation est faite en maintenant le même réglage des constantes et en soumettant le système aux mêmes perturbations.

Les résultats de simulation confirment la convergence rapide des états $(x_1(t), x_2(t))$ vers leurs références (figure (2.10)) et l'erreur quadratique de poursuite en position vers zéro (figure (2.11-b)). Le signal de commande ne manifeste aucune variation (figure (2.11-a)). Aussi comme dans le cas précédent, la trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ (figure (2.12-a)) converge directement vers l'origine dans le plan de phase sans aucun Twisting. La surface de glissement σ converge rapidement vers zéro en dépit de sa valeur initiale $\sigma(0) = 44$.

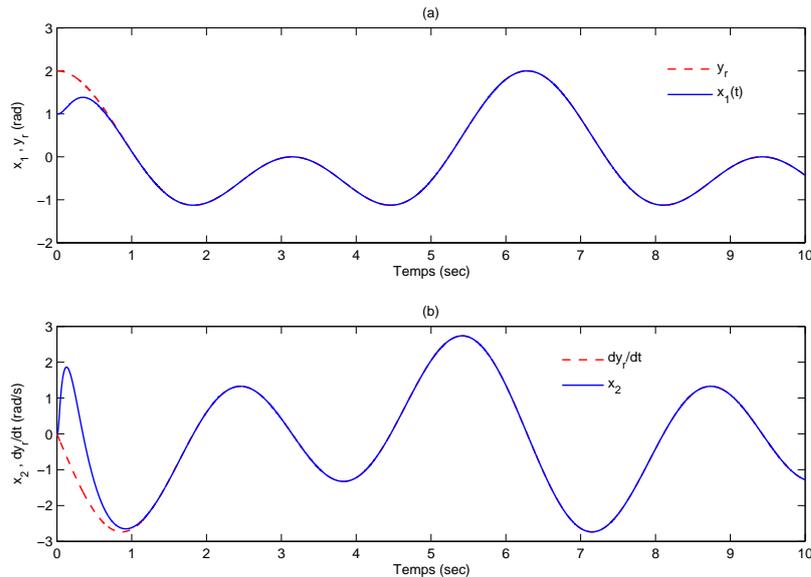


FIGURE 2.10 – Les trajectoires du système en utilisant la commande proposée (2.31) : (a) l'état $x_1(t)$ (ligne continue) et sa référence $y_r(t)$ (ligne discontinue), (b) l'état $x_2(t)$ (ligne continue) et sa référence $\dot{y}_r(t)$ (ligne discontinue).

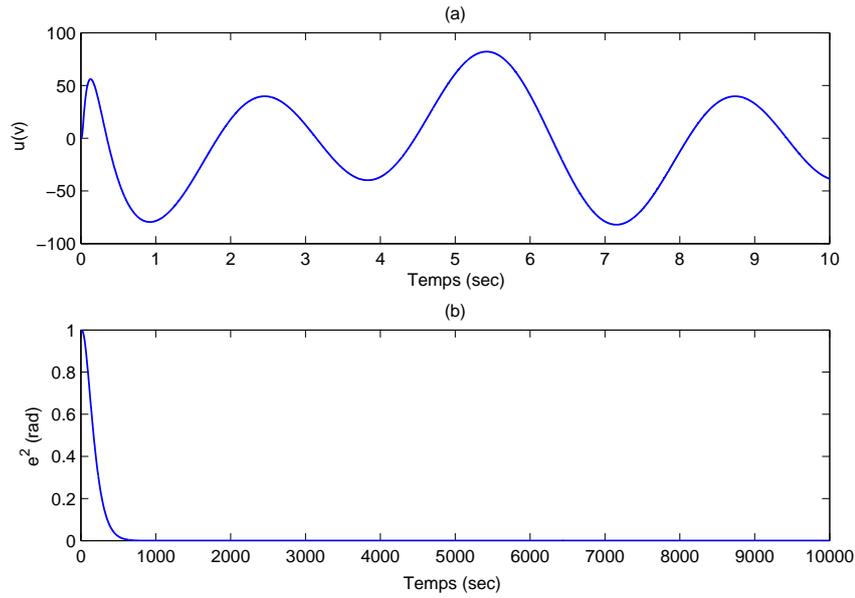


FIGURE 2.11 – Le signal de commande en utilisant l'approche proposée (2.31).

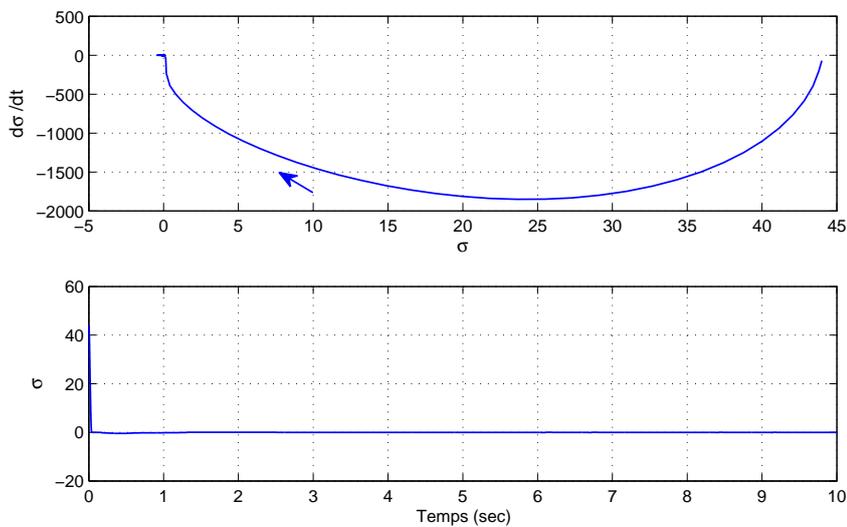


FIGURE 2.12 – (a) La trajectoire de $(\sigma, \dot{\sigma})$ dans la plan de phase, (b) La surface de glissement σ .

2.9.2 Cas d'un système multi-entrées multi-sorties

Pour tester et comparer les performances de l'approche proposée (2.58) à celle donnée par Levant, cette dernière a été généralisée au cas des systèmes MIMO. L'extension de la commande (2.24) au cas des systèmes MIMO d'ordre n est donnée dans [MEH10b] et [MEH10a], dans ce cas, la commande peut être écrite comme suit :

$$\underline{u} = G(X)^{-1}[-F_0(X) + \delta_{\underline{\sigma}} + \underline{y}_r^{(n)} + \int_0^t \underline{\dot{u}}_1 + \underline{u}_2] \quad (2.83)$$

Où $\underline{\dot{u}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{u}_{11} \\ \dots \\ \dot{u}_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \text{sign}(\sigma_1) \\ \dots \\ \alpha_p \text{sign}(\sigma_p) \end{bmatrix}$ et $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ \dots \\ u_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 |\sigma_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_1) \\ \dots \\ \beta_p |\sigma_p|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_p) \end{bmatrix}$, α_i et β_i sont les gains du Super-Twisting ($i = 1, \dots, p$).

L'exemple d'application que nous avons considéré est un bras de robot à deux articulations (figure (2.13)). La dynamique du système est décrite par l'équation suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \underline{u}(q) + \underline{D} \quad (2.84)$$

$$\text{Avec : } M(q) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) \\ m_2l_1l_2(s_1s_2 + c_1c_2) & m_2l_2^2 \end{bmatrix},$$

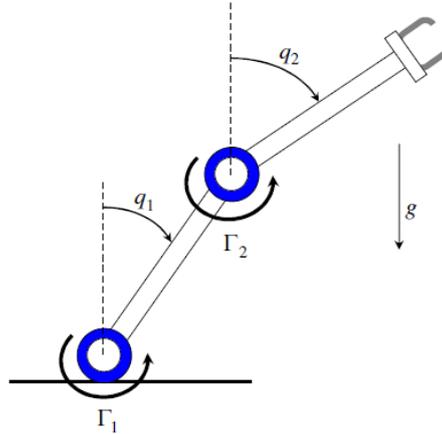


FIGURE 2.13 – Bras de robot à deux articulations.

$$C(q, \dot{q}) = m_2l_1l_2(c_1s_2 - s_1c_2) \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, G(q) = \begin{bmatrix} -(m_1 + m_2)l_1gs_1 \\ -m_2l_2gs_2 \end{bmatrix} \text{ et } q = [q_1, q_2]^T,$$

q_1, q_2 (rad) sont les coordonnées généralisées, $M(q)$ est la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})$ est la matrice des forces centripètes et de coriolis, \underline{D} est la somme des perturbations externes et des incertitudes du modèle, $\underline{u}(q)$ est le vecteur couple de commande. Les autres paramètres du robot sont : $m_1 = 1(kg)$, $m_2 = 1(kg)$, $l_1 = 1(m)$, $l_2 = 1(m)$, $g = 9.8(m/s^2)$, $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, $i = 1, 2$. Afin d'avoir une représentation d'état, on fait le changement : $x_1 = q_1$, $x_3 = q_2$ pour les positions et $x_2 = \dot{q}_1$, $x_4 = \dot{q}_2$ pour les vitesses angulaires. Dans ce cas le système (2.84) peut être réécrit dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_1(x) + g_{11}(x)u_{11} + g_{12}u_{21} + D_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + g_{21}(x)u_{12} + g_{22}u_{22} + D_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \quad (2.85)$$

où

$$f_1(x) = \frac{(s_1 c_2 - c_1 s_2)}{l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2] \times [m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) x_2^2 - m_2 l_2^2 x_4^2]} + \frac{1}{l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2] \times [(m_1 + m_2) l_2 g s_1 - m_2 l_2 g s_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)]},$$

$$f_2(x) = \frac{(s_1 c_2 - c_1 s_2)}{l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2] \times [-(m_1 + m_2) l_1 x_2^2 + m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2) x_4^2]} + \frac{1}{l_1 l_2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2] \times [-(m_1 + m_2) l_1 g s_1 (s_1 s_2 + c_1 c_2) + (m_1 + m_2) l_1 g s_2]},$$

$$\begin{aligned}
 g_{11}(x) &= \frac{m_2 l_2^2}{m_2 l_1^2 l_2^2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2]}, \\
 g_{12}(x) &= \frac{-m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2]}, \\
 g_{21}(x) &= \frac{-m_2 l_1 l_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)}{m_2 l_1^2 l_2^2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2]}, \\
 g_{22}(x) &= \frac{(m_1 + m_2) l_1^2}{m_2 l_1^2 l_2^2 [(m_1 + m_2) - m_2 (s_1 s_2 + c_1 c_2)^2]}, \\
 D_1 &= (\Delta f_1(x) + \Delta g_{11}(x)\Gamma_1 + \Delta g_{12}(x)\Gamma_2) + d_1, \\
 D_2 &= (\Delta f_2(x) + \Delta g_{21}(x)\Gamma_1 + \Delta g_{22}(x)\Gamma_2) + d_2.
 \end{aligned}$$

Nous supposons que x_1 et x_3 sont compris dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme dans [TCU01],[MEH10b], le modèle nominal flou du système (2.84) est obtenu en utilisant les neuf règles décrivant sa dynamique autour des points de fonctionnement $x_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ et $x_3 = \pm \frac{\pi}{2}$:

Règle1 : Si x_1 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1(2 : 4, 1 : 4)X + B_1(2 : 4, 1 : 2)u \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.86)$$

Règle2 : Si x_1 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de 0 **Alors**

$$\begin{cases} \dot{x} = A_2(2 : 4, 1 : 4)X + B_2(2 : 4, 1 : 2)u \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.87)$$

Règle3 : Si x_1 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de $\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{x} = A_3(2 : 4, 1 : 4)X + B_3(2 : 4, 1 : 2)u \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.88)$$

Règle4 : Si x_1 est proche de 0 et x_3 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{x} = A_4(2 : 4, 1 : 4)X + B_4(2 : 4, 1 : 2)u \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.89)$$

Règle5 : Si x_1 est proche de 0 et x_3 est proche de 0 **Alors**

$$\begin{cases} \dot{x} = A_5(2 : 4, 1 : 4)X + B_5(2 : 4, 1 : 2)u \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.90)$$

Règle6 : Si x_1 est proche de 0 et x_3 est proche de $\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_6(2 : 4, 1 : 4)X + B_6(2 : 4, 1 : 2)\underline{u} \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.91)$$

Règle7 : Si x_1 est proche de $\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de $-\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_7(2 : 4, 1 : 4)X + B_7(2 : 4, 1 : 2)\underline{u} \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.92)$$

Règle8 : Si x_1 est proche de $\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de 0 **Alors**

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_8(2 : 4, 1 : 4)X + B_8(2 : 4, 1 : 2)\underline{u} \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.93)$$

Règle9 : Si x_1 est proche de $\frac{\pi}{2}$ et x_3 est proche de $\frac{\pi}{2}$ **Alors**

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A_9(2 : 4, 1 : 4)X + B_9(2 : 4, 1 : 2)\underline{u} \\ y(t) = CX \end{cases} \quad (2.94)$$

avec $X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $\dot{\underline{x}} = [\ddot{x}_1, \ddot{x}_3]^T$, $\underline{u} = [u_1, u_2]^T$, $u_1 = u_{11} + u_{21}$ et $u_2 = u_{12} + u_{22}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5.929 & -0.001 & -0.315 & -8.4 \times 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6.859 & 0.002 & 3.155 & -6.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.0428 & -0.0011 & 0.1791 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.3436 & 0.0313 & 2.5611 & 1.14 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.2728 & 0.003 & 0.4339 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.1041 & 0.0158 & -1.0574 & -3.2 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.4536 & 0.0017 & 1.2427 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.1873 & -0.0306 & 5.1911 & -1.8 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11.1336 & 0 & -1.8145 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -9.0918 & 0 & 9.1638 & 0 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.1702 & -0.001 & 1.687 & -0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.3559 & 0.0314 & 4.5298 & 1.1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.1206 & -0.0041 & 0.6205 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.8794 & -0.0193 & -1.0119 & 4.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3.6421 & 0.0018 & 0.0721 & 0.0002 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2.429 & -0.0305 & 2.9832 & -1.9 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.2933 & -0.0009 & -0.2188 & -1.2 \times 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -7.4649 & 0.0024 & 3.2693 & -9.2 \times 10^{-6} \end{bmatrix}, B_{1,5,9} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B_{2,4,6,8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{3,7} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = I_{4 \times 4}.$$

Comme les sous-systèmes du modèle (2.84) sont d'ordre deux et en se référant à l'équation (2.57), la surface de glissement sera donnée par : $\sigma = [\dot{e}_1 + \lambda_1 e_1, \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2]^T$. Pour construire le modèle nominal, nous avons choisi trois ensembles flous intervalles pour chacune des variables x_1 et x_3 , qui sont donnés par les équations :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{H}_{1j}^i} = \frac{1}{1 + (\exp(1.8(\frac{x_z + (0.61 + c_1)}{\frac{\pi}{16}})))} \\ \mu_{\tilde{H}_{2j}^i} = \exp(-(\frac{x_z}{(4.5 + c_2)})^2) \\ \mu_{\tilde{H}_{3j}^i} = \frac{1}{1 + (\exp(-1.8(\frac{x_z + (-0.61 - c_1)}{\frac{\pi}{16}})))} \end{cases} \quad (2.95)$$

($z = 1, 3$), $c_1 \in [0, 0.2]$ et $c_2 \in [0, 1]$ désignent le degré d'incertitude, $j = 1, 2$ désigne le sous système correspondant. De même, pour générer les quatre systèmes flous adaptatifs qui nous permettent d'approximer u_{11}, u_{12} et u_{21}, u_{22} nous avons considéré trois ensembles flous type-2 intervalle en fonction des deux variables de glissement σ_1 et σ_2 : Négative, Zéro et Positive. La figure (2.14) montre l'allure de ces ensembles. On suppose que chacune des masses est atteinte d'une variation de la forme : $dm = 0.2 \sin(2t) + 0.5 \sin(3t)$. Nous soumettons le système à une perturbation externe $\underline{d} = [\sin(2t) + \sin(3t), \sin(2t) + \sin(3t)]^T$. Afin de respecter les conditions suffisantes de convergence du Super-Twisting, la stabilité de la surface de glissement et garantir une adaptation rapide avec le maintien de la non linéarité des approximateurs flous, les autres constantes sont fixées comme suit : $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 10, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 7, \beta_1 = 15, \beta_2 = 15, \gamma_1 = 15$ et $\gamma_2 = 20$. On suppose que le système est à l'état initial $X(0) = [1, 0, 1, 0]^T$. La commande appliquée devra forcer les états (x_1, x_3) et (x_2, x_4) à suivre respectivement les trajectoires de référence $y_r = \sin(2t)$ et $\dot{y}_r = 2 \cos(2t)$.

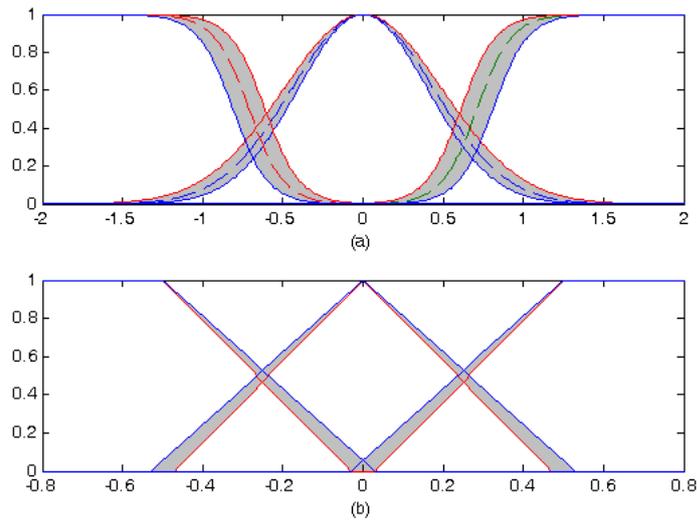


FIGURE 2.14 – (a) Fonctions d'appartenance intervalle flou de type-2 de : (a) x_1 et x_3 du modèle nominal, (b) σ_1 et σ_2 des systèmes adaptatifs.

Pour illustrer l'efficacité de notre approche, nous avons effectué des simulations en premier temps en utilisant la loi de commande (2.83) et en second temps l'approche proposée (2.58).

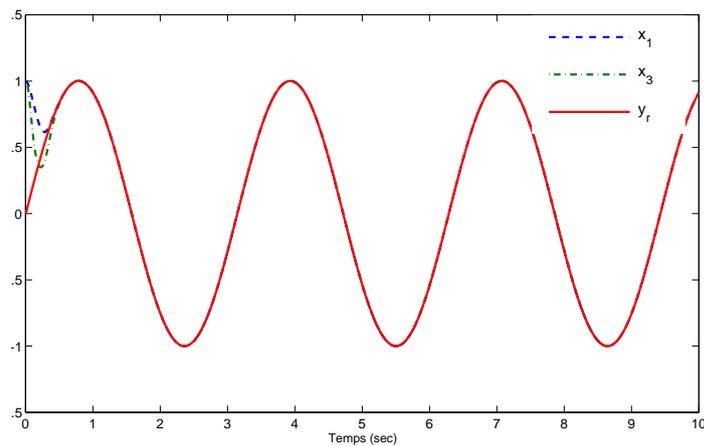


FIGURE 2.15 – Poursuite de trajectoire de x_1 et x_3 .

Les figures (2.15-2.17) sont obtenues en utilisant la loi de commande (2.83). La figure (2.15) montre une bonne poursuite de trajectoire des deux états x_1 et x_3 . La figure (2.16) caractérise les vitesses angulaires, le zoom sur cette figure montre des variations des deux signaux x_2 et x_4 .

La figure (2.17) donne les signaux de commande qui manifestent des variations (du chattering).

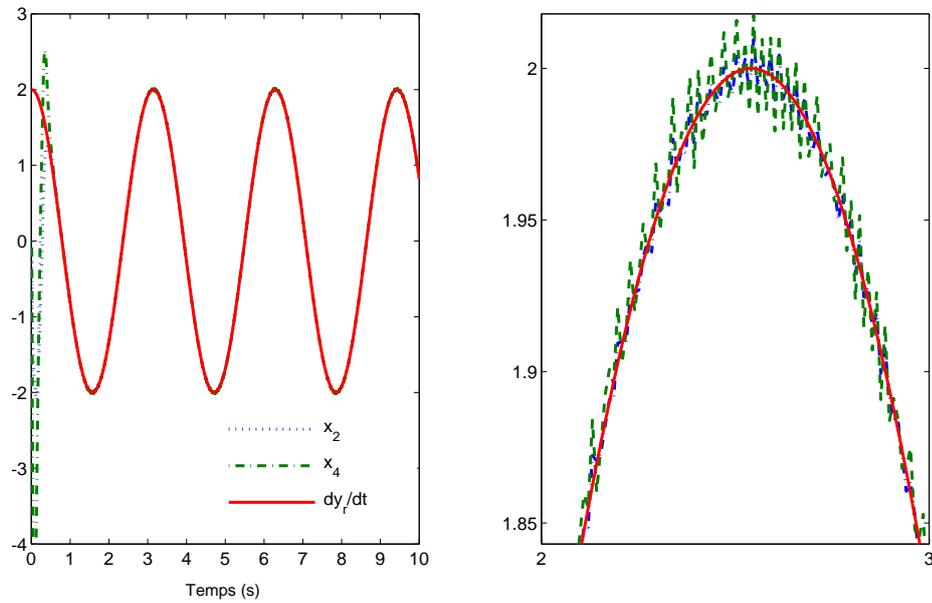


FIGURE 2.16 – Poursuite de trajectoire de x_2 et x_4 .

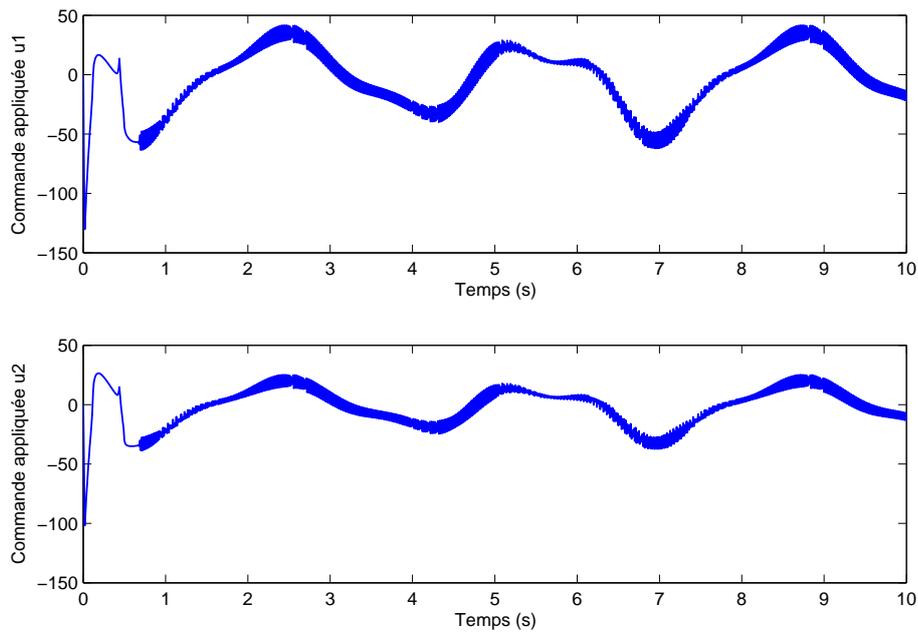


FIGURE 2.17 – Les signaux de commande en utilisant la loi (2.83)

Les figures (2.18-2.22) sont obtenues en utilisant la loi de commande proposée (2.58).

Nous constatons que cette commande assure de bonnes performances en poursuite de trajectoire (figure (2.18)). Le zoom sur les signaux des vitesses angulaires (figure (2.19)) montre qu'ils ne manifestent aucune variation. La figure (2.20) montre que les couples appliqués au bras du robot sont lisses et ne manifestent aucune variation. Comme dans le cas SISO, les deux sous-surfaces de glissements convergent rapidement vers zéro (figure 2.21). La figure (2.22) décrit le comportement des signaux de commandes issus des systèmes adaptatifs. Nous constatons qu'au démarrage les signaux sont à amplitudes plus importantes, ce qui correspond à la phase où les sous-surfaces de glissements sont loin de l'origine de phase. Au fur et à mesure que les surfaces convergent, les amplitudes des signaux diminuent. Le signal global de commande est optimisé grâce à la valeur optimale de ses gains, ce qui lui permet de réagir différemment à chaque situation (avec perturbation ou sans perturbation) et phase (approche ou glissement).

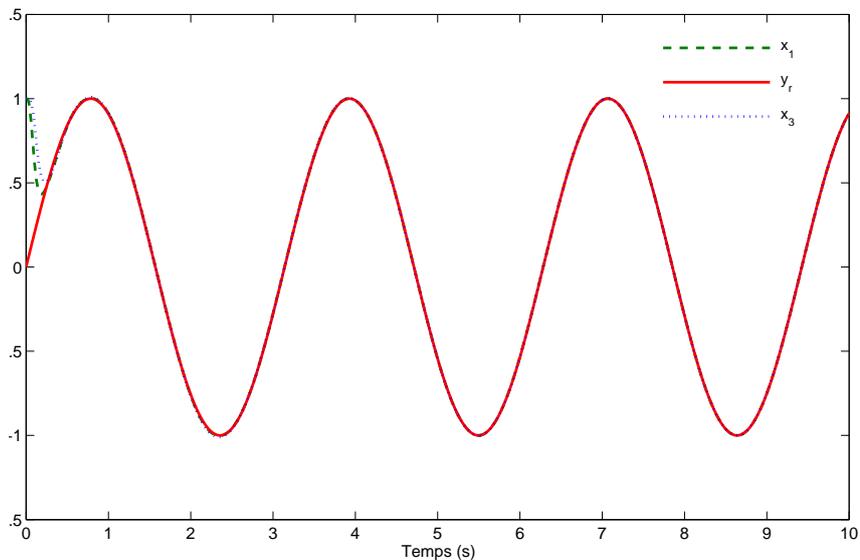


FIGURE 2.18 – Poursuite de trajectoire de x_1 et x_3 .

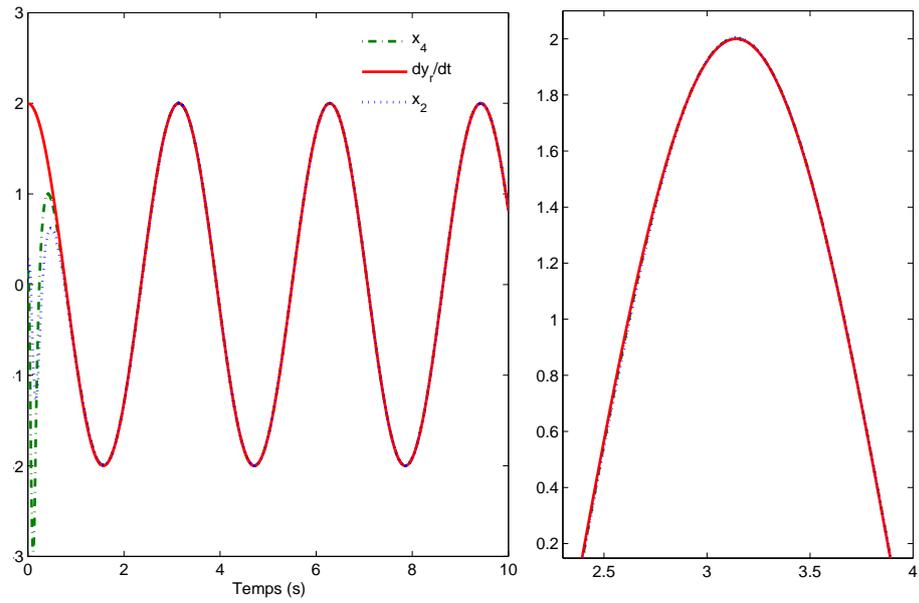


FIGURE 2.19 – Poursuite de trajectoire de x_2 et x_4 .

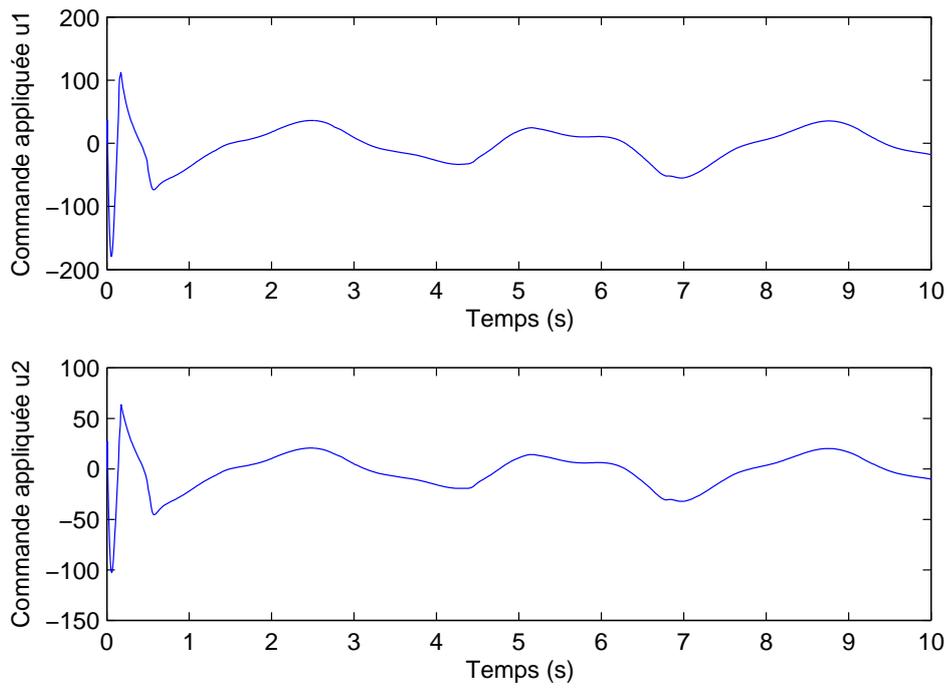


FIGURE 2.20 – Les signaux de commande en utilisant l'approche proposée (2.58).

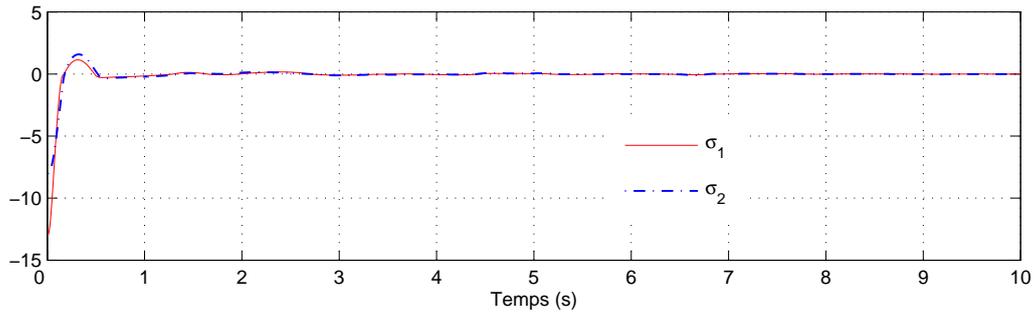


FIGURE 2.21 – Les sous-surfaces de glissements.

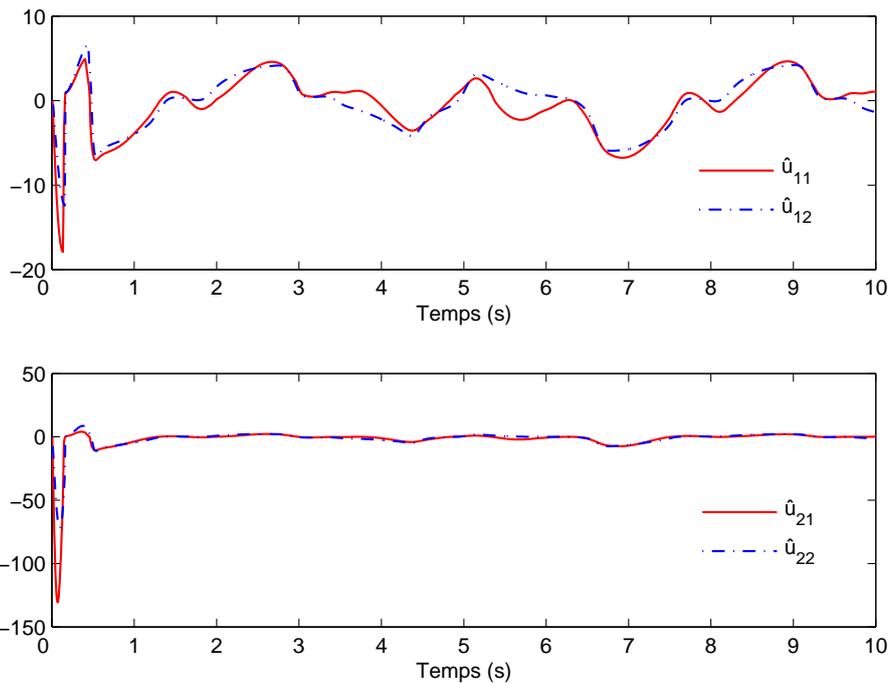


FIGURE 2.22 – Les signaux de commandes adaptatifs : (a) $\hat{u}_{11}^*, \hat{u}_{12}^*$, (b) $\hat{u}_{21}^*, \hat{u}_{22}^*$ (Nm).

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de poursuite des systèmes non linéaires perturbés. Comme l'information nécessaire sur le modèle nominal pour le calcul de la commande est supposée être partielle, ce dernier a été reconstruit en utilisant un système flou type-2. Ce modèle nominal flou proprement dit exploite les modèles locaux du système

obtenus par linéarisation autour de certains points de fonctionnements. Pour une paire (état, commande) donnée, le modèle flou va apparaître comme une moyenne pondérée des modèles locaux.

La commande par modes glissants, en raison de sa réputation en terme de robustesse et simplicité a été adoptée pour satisfaire nos objectifs de commande. Pour permettre au lecteur de se familiariser facilement avec la commande par modes glissants, nous avons présenté cette méthode étape par étape. En effet, après avoir introduit le concept de base de cette commande ainsi que le choix de la surface de glissement, nous avons décrit les différentes étapes pour la construction de la commande par modes glissants d'ordre un. Ensuite nous avons souligné le problème majeur de cette commande qui est le chattering. Pour éliminer, ou du moins diminuer ce phénomène, nous avons présenté quelques solutions pour y remédier à ce niveau. Cependant, les performances de ces méthodes sont à discuter.

Dans un second temps, nous avons introduit la commande par modes glissants d'ordre supérieure ainsi que certaines notions essentielles. En plus de conserver la robustesse, les modes glissants d'ordre supérieur se distinguent par rapport à ceux d'ordre un, par leur aptitude à atténuer le chattering. La généralisation des modes glissants d'ordre un aux modes glissants d'ordre supérieur, est caractérisée par le choix d'une commande discontinue agissant non pas sur la surface de glissement mais sur ses dérivées supérieures. Malgré les performances qu'ils manifestent, ils sont pénalisés par l'information élevée dont ils ont besoin sur les variables du système, et celles impliquées dans le calcul de la surface de glissement et de ses dérivées.

Pour profiter des avantages de la commande par modes glissants d'ordre supérieur tout en optimisant le nombre de capteurs nécessaire pour la mise en oeuvre de la commande, nous avons limité notre étude au cas des modes glissants d'ordre deux. Parmi les commandes qui ont connu un succès dans cette catégorie, nous avons considéré l'algorithme du Super-Twisting. Il se distingue par le fait qu'il agit sur la surface de glissement et sa dérivée afin de les annuler, sachant qu'il nécessite uniquement l'information sur la surface qui apparaît dans les termes de la loi de commande. Cependant, la difficulté de cet algorithme apparaît dans le choix de la valeur des gains de commande. Des conditions suffisantes ont

été introduites par Levant [Lev93] afin de simplifier ce choix. Mais pour avoir des valeurs optimales de ces gains, la connaissance des bornes supérieures des perturbations et des incertitudes du système ainsi que de leurs dérivées sont nécessaires. Néanmoins, même si nous résolvons ce problème, la présence de la fonction signe engendre des variations du signal de commande. A noter que ce choix a un impact direct sur l'optimisation de l'énergie du signal de commande, la réduction de chattering et même la stabilité de la boucle fermée.

Pour apporter une solution aux limites de l'algorithme du Super-Twisting, précisément au choix des gains de commande, nous avons substitué la partie discontinue de commande par deux système flous type-2 adaptatifs. Ces système flous ont comme unique entrée la variable de glissement et délivrent en sortie à chaque instant la valeur optimale des gains de commandes. Ceci nous permet d'éliminer la variation du signal de commande, d'optimiser son énergie et de mieux incorporer les incertitudes du modèle et les perturbations du système. Afin de mettre en avant les avantages de cette approche par rapport à celle introduite par Levant, un exemple de simulation et une étude comparative ont été présentés.

L'approche proposée a été généralisée pour le cas des systèmes multivariables. Afin de comparer ses performances à celle donnée par Levant, l'algorithme du Super-Twisting a été généralisé pour le cas des systèmes MIMO. Les deux approches ont été utilisées pour commander un bras à deux articulations. Les résultats ont confirmé les performances et les avantages de notre approche. Néanmoins le temps de convergence t_c qui apparaît dans $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_1(\underline{\sigma})$ est inconnu, il est uniquement imposé. Afin de pallier ce problème, nous proposons d'exploiter le concept de l'*Integral Sliding Mode* tel qu'il a été introduit par Lagrouche [LPG07] pour fixer à priori t_c .

Commande floue par modes glissants à base de l'*Integral Sliding Mode*

3.1 Introduction

La majorité des commandes par modes glissants d'ordre supérieur ont un souci au niveau du temps de convergence, qui est généralement borné mais pas connu *à priori*. En prenant comme objectif fixer l'état final à atteindre par le système, dans [LPG06],[PGL05] les auteurs ont proposé d'associer à la commande par modes glissants d'ordre supérieur un critère linéaire quadratique. Cependant, cette technique est entachée de deux inconvénients : le premier concerne la convergence qui n'est assurée qu'au voisinage de l'origine, ce qui empêche d'avoir un régime glissant exact. Le second, comme dans le cas classique, est en relation avec le temps de convergence, qui est uniquement borné. Ces problèmes sont résolus dans [PGL08],[LPG07] où la surface de glissement et ses dérivées convergent vers zéro en un temps fixé d'avance. Ces spécificités résultent du fait que le temps de convergence ne dépend pas du système, mais uniquement de la condition initiale de la variable de glissement et de ses dérivées. Lagrouche et al. [LPG07] ont proposé une commande à base de l'*Integral Sliding Mode* [US96], qui fait appel à un système auxiliaire ; qui a pour tâche le calcul d'un terme de correction de la surface de glissement. Avec cette nouvelle méthode, la commande se compose de deux parties : une discontinue qui force l'établissement d'un régime glissant sur la surface dite intégrale et assure la robustesse de

la boucle fermée. L'autre, issue d'une commande optimale par retour d'état, stabilise à zéro la dynamique d'ordre r de la représentation d'état de la surface et de ses dérivées. Cette dernière composante a deux dynamiques : pour $t \in [0 \ t_f]$, on lui associe un terme de forçage δ qui fait converger la surface et ses dérivées ; à $t > t_f$, il sera supprimé. Cette méthode a fait ses preuves dans des applications en temps-réel, notamment sur des systèmes électropneumatiques [GPBG09],[Gir07]. Mais, comme toute commande par modes glissants d'ordre supérieur, elle nécessite une information sur les dérivées supérieures de la surface. De plus, le gain de commande est choisi fixe avec une amplitude élevée permettant d'assurer la condition d'attractivité.

Afin de résoudre le problème du choix de la valeur du temps de convergence t_c qui apparaît dans la loi de commande proposée (2.31) et généralisée (2.58), on va considérer dans un premier temps le travail établi dans [LPG07]. Dans un second temps, on s'intéressera au cas des modes glissants d'ordre deux, ce qui va nous permettre de réduire l'ordre de la surface modifiée. Afin de mieux approprier l'étude au cas des systèmes de degré relatif égal à un, un cas particulier de la surface augmentée va être considéré.

Dans ce chapitre, la commande par modes glissants floue d'ordre deux proposée dans le chapitre précédent sera perfectionnée en adoptant le concept de l'*Integral Sliding Mode*. Les deux cas SISO et MIMO seront abordés pour la synthèse de nouvelles commandes. L'étude de la stabilité de la boucle fermée sera faite dans les deux cas en choisissant une fonction de Lyapunov. Afin de montrer les performances de ces nouvelles approches, des résultats de simulations seront présentés.

3.2 Commande par modes glissants floue à base de l'*Integral Sliding Mode*

Considérons le système non linéaire SISO d'ordre n (2.5) et la surface de glissement donnée par Slotine (2.12). Une commande par modes glissants d'ordre supérieur aura pour objectif de satisfaire la contrainte $\sigma(\underline{x}, t) = \dots = \sigma^{r-1}(\underline{x}, t) = 0$ et de la maintenir à l'aide d'une commande par retour d'état discontinue, ainsi que de contraindre les trajectoires

du système (2.5) à évoluer dans l'ensemble de glissement d'ordre r :

$$\sigma^r = \{\underline{x} | \sigma(\underline{x}, t) = \dot{\sigma}(\underline{x}, t) = \dots = \sigma^{r-1}(\underline{x}, t) = 0\}, r \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

Cet ensemble est non vide et admet une solution au sens de Filippov [FA88]. La commande par modes glissants d'ordre r nous permet de stabiliser à zéro en un temps fini la variable de glissement et ses $(r - 1)$ dérivées. L'expression de σ^r en fonction des variables du système et de la commande est donnée par :

$$\sigma^r = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)u \quad (3.2)$$

Nous supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

Hypothèse 3 *Le degré relatif du système (2.5) est constant et connu. La dynamique de ses zéros est stable.*

Hypothèse 4 *Les fonctions $\phi(\cdot)$ et $\gamma(\cdot)$ sont incertaines mais bornées, et sans perte de généralité, le signe du gain de commande $\gamma(\cdot)$ est connu et constant. Ainsi, il existe trois constantes $K_m \in \mathbb{R}^{+*}$, $K_M \in \mathbb{R}^{+*}$, $C_0 \in \mathbb{R}^+$ de telle sorte que $0 < K_m < \gamma < K_M$, $|\phi| \leq C_0$.*

Cette dernière hypothèse laisse à considérer que les résultats sont locaux [LPG07]. L'approche que l'on propose dans cette partie va permettre de lever cette restriction.

Le problème de la commande par modes glissants d'ordre r du système (2.5) par rapport à la variable de glissement σ est alors équivalent à la stabilisation en temps fini du système entrée-sortie incertain [LPG07] :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dot{z}_r = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)u \end{cases} \quad (3.3)$$

Avec $1 \leq i \leq r - 1$ et $\underline{z} = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_r]^T := [\sigma \quad \dot{\sigma} \quad \dots \quad \sigma^{(r-1)}]^T$ est un changement de variables.

Le système (3.3) peut être vu comme un système linéaire incertain. La loi de commande est composée de deux termes. Le premier appelé commande idéale [US96] est continu et stabilise en un temps fini le système (3.3) à l'origine quand il n'y a pas d'incertitudes. Le

deuxième terme discontinu est synthétisé de telle sorte que les incertitudes soient compensées et rejetées pour tout $t \geq 0$. En appliquant les deux commandes simultanément, les trajectoires du système (3.3) sont stabilisées à $\underline{z} = 0$ en un temps fini $t = t_f$, qui est connu a priori et fixé d'avance.

3.2.1 Synthèse de la partie continue de la commande

Considérons le système (3.3) qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dot{z}_r = \underbrace{\phi(\cdot) + [\gamma(\cdot) - 1]u}_{\beta} + u \end{cases} \quad (3.4)$$

pour $1 \leq i \leq r - 1$, devient

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dot{z}_r = \beta(\cdot) + u \end{cases} \quad (3.5)$$

La commande globale avec ses deux composantes continue et discontinue est donnée par :

$$u = u_0 + u_{dis} \quad (3.6)$$

La synthèse de la commande continue est réalisée en considérant $\beta(\cdot) = 0$. Dans ce cas, on n'aura pas besoin de la composante u_{dis} pour compenser les incertitudes. La commande devient $u = u_0$, et le système (3.5) devient :

$$\dot{\underline{z}} = A\underline{z} + Bu_0 \quad (3.7)$$

où A et B sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix}_{r \times r}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1}.$$

Considérons que $\underline{z}(0)$ est connu. L'objectif sera de synthétiser une commande u_0 permettant, en partant de l'état initial $\underline{z}(0)$, d'obtenir $\underline{z}(t_f) = 0$ à l'instant $t = t_f < +\infty$ fixé a priori en minimisant le critère

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \underline{z}^T Q \underline{z} + u_0^2 dt \quad (3.8)$$

Avec Q une matrice de pondération définie positive. Une solution pour ce problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 [Rek64] *Soit le système linéaire (3.7) où la paire (A,B) est commandable. Une loi de commande u_0 minimisant le critère (3.8) et stabilisant le système (3.7) en $\underline{z}(t) = 0$ à $t = t_f$ pour la condition initiale $\underline{z}(0)$ bornée, est donnée par (avec $0 \leq t \leq t_f < +\infty$)*

$$u_0 = -B^T M \underline{z}(t) + B^T \delta(t) \quad (3.9)$$

avec $\delta(t)$ et M sont définis par

$$\begin{cases} \dot{\delta} = -(A^T - MBB^T)\delta \\ 0 = MA + A^T M - MBB^T M + Q \end{cases} \quad (3.10)$$

La première partie de la commande $-B^T M \underline{z}(t)$ est une commande par retour d'état avec un placement de pôles robuste calculée en résolvant l'équation de Riccati (la seconde équation du système (3.10)); la seconde partie de la commande $B^T \delta(t)$ est un terme qui permet aux trajectoires du système (3.7) de converger vers l'origine en un temps fini t_f . La condition initiale $\delta(0)$ est choisie de manière à satisfaire la condition finale $\underline{z}(t_f) = 0$ (la démarche sera détaillée dans la section simulations et résultats). Une fois que le point d'équilibre $\underline{z} = 0$ est atteint à $t = t_f$, le terme de forçage $\delta(t)$ sera supprimé. Ainsi la loi de commande devient $u_0 = -B^T M \underline{z}$ pour tout $t > t_f$ [Rek64]. Finalement, pour atteindre $\underline{z} = 0$ en un temps fini t_f et y maintenir le système (3.7) pour tout $t > t_f$, la condition est que u_0 puisse avoir deux dynamiques [Rek64] :

$$u_0 = \begin{cases} -B^T M \underline{z}(t) + B^T \delta(t) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_f \\ -B^T M \underline{z}(t) & \text{pour } t > t_f \end{cases} \quad (3.11)$$

Si l'on note par \underline{z}_0 la solution du système (3.7) sous la commande u_0 telle qu'elle est définie par (3.11), sa dynamique sera décrite par :

$$\dot{\underline{z}}_0 = A \underline{z}_0 + B u_0 \quad (3.12)$$

En tenant compte de $\underline{z}_0(t_f) = 0$ et de la commande u_0 (comme elle est définie par (3.11)), on va avoir pour tout $t > t_f$ le point d'équilibre stable $\dot{\underline{z}}_0 = 0$ et $\underline{z}_0 = 0$.

3.2.2 Synthèse de la surface *Integral Sliding Mode*

En remplaçant par les deux parties continue et discontinue de la commande dans le système (3.5), on obtient

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} \\ \dot{z}_r = \beta(\cdot) + u_0 + u_{dis} \end{cases} \quad (3.13)$$

Afin d'atteindre nos objectifs, la commande de type *Integral Sliding Mode* est utilisée [US96]. L'originalité de cette méthode réside dans le choix de la surface de glissement. En effet, celle-ci est choisie de telle sorte que les trajectoires du système démarrent et évoluent dessus dès l'instant initial $t = 0$, ce qui induit un régime glissant sans phase d'approche [US96],[LPG07]. Pour la synthèse de cette surface, considérons la variable de glissement $\sigma \in \mathbb{R}$ définie par

$$\sigma = \sigma_0 + \zeta \quad (3.14)$$

σ_0 peut être choisi comme une combinaison linéaire des variables d'états du système (3.13). $\zeta \in \mathbb{R}$ est le terme intégral. Pour déterminer toutes les équations régissant le système sur la surface de glissement, la méthode de la commande équivalente est utilisée [US96]. La dérivée première de la surface de glissement σ par rapport au temps s'écrit

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial z}(Az + Bu_0) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial z_r}(u_{dis} + \beta(\cdot)) + \dot{\zeta} \quad (3.15)$$

La condition suffisante assurant $\dot{\sigma} = 0$ pour tout $t \geq 0$ est de choisir la commande équivalente u_{eq} de u_{dis} comme suit

$$u_{eq} = -\beta(\cdot) \quad (3.16)$$

et la dérivée de la partie intégrale

$$\dot{\zeta} = -\frac{\partial \sigma_0}{\partial z}(Az + Bu_0) \quad (3.17)$$

avec comme état initial $\zeta(0) = -\sigma_0(z(0))$. Le choix de $\zeta(0)$ est imposé par la condition requise $\sigma(0) = 0$.

Dans ce travail, afin de simplifier la mise en œuvre et l'implémentation de la méthode, nous considérons le cas particulier

$$\sigma_0 = z_r \longrightarrow \dot{\sigma} = u + \beta(\cdot) + \dot{\zeta} \quad (3.18)$$

Dans ce cas, pour vérifier la condition (3.16) il suffit de choisir :

$$\dot{\zeta} = -u_0, \zeta(0) = -z_r(0) \quad (3.19)$$

Le choix de ce cas particulier de la surface de glissement est plus approprié pour la commande et l'étude des systèmes non linéaires avec un degré relatif égal à un. De plus, ce choix nous permettra de simplifier le calcul et de réduire l'effort pour une implémentation en temps-réel.

3.2.3 Synthèse de la commande discontinue avec l'approche proposée

Afin de résoudre le problème du choix du temps de convergence t_c et de profiter des avantages de la commande à base de l'Integral Sliding Mode, la commande proposée (2.31) sera améliorée en adoptant ce nouveau concept.

Proposition 3 [MEH11b],[MEH11a]

La partie discontinue de la commande (2.31) n'est autre que la somme des sorties des deux systèmes flou type-2 intervalle $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$, qui permettent de substituer les deux termes du Super-Twisting u_1 et u_2 (équation (2.19)). Dans cette partie, nous conservons leurs structures telles qu'elles sont définies par l'équation (2.28). En guise de rappel, l'expression de ces deux termes de commande est $\hat{u}_1(\sigma) = \theta_1^T \underline{\xi}(\sigma) t_c$ et $\hat{u}_2(\sigma) = |\sigma|^{\frac{1}{2}} \theta_2^T \underline{\xi}(\sigma)$. Le temps de convergence qui est inconnu dans [MEH10c],[MEH10b],[MEH12] est parfaitement connu et choisi à priori à être $t_c = t_f$.

En tenant compte de $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$, la commande u_{dis} peut être écrite comme suit :

$$u_{dis} = -\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) \quad (3.20)$$

Ainsi, en substituant les différentes parties par leurs définitions respectives, la commande proposée s'écrit :

$$u = u_0 + u_{eq} - \hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) \quad (3.21)$$

Les hypothèses et la structure des deux termes $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$ et également le calcul de la valeur optimale de leur partie adaptative (équations (2.32-2.33)) restent les mêmes, tel qu'on l'a introduit dans la partie proposition 1.

Démonstration 3 Pour l'étude de la stabilité de la boucle fermée du système avec cette nouvelle commande, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^T \tilde{\theta}_2 \quad (3.22)$$

Avec : $\tilde{\theta} = \underline{\theta} - \underline{\theta}^*$, $\underline{\theta}^*$ est la valeur optimale de $\underline{\theta}$, γ_1 et γ_2 sont deux constantes positives d'apprentissage.

La dérivée temporelle de V est :

$$\dot{V} = \dot{\sigma} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2^T \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (3.23)$$

En tenant compte des choix (3.18) et (3.19), et après substitution de la commande proposée dans la dérivée de la surface de glissement, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) - D \\ &= -\hat{u}_1(\sigma) - \hat{u}_1^*(\sigma) + \hat{u}_1^*(\sigma) - \hat{u}_2(\sigma) - \hat{u}_2^*(\sigma) + \hat{u}_2^*(\sigma) - D \end{aligned} \quad (3.24)$$

où $\hat{u}_2^*(\sigma) = |\sigma|^{\frac{1}{2}} \underline{\theta}_2^{*T} \underline{\xi}(\sigma)$ et $\hat{u}_1^*(\sigma) = \underline{\theta}_1^{*T} \underline{\xi}(\sigma) t_f$ sont les approximateurs optimums qui vérifient :

$$|\hat{u}_1^*(\sigma)| + |\hat{u}_2^*(\sigma)| = \left| |\sigma(x, t)|^{0.5} \underline{\theta}_2^{*T} \underline{\xi}(\sigma) \right| + \left| \underline{\theta}_1^{*T} \underline{\xi}(\sigma) t_c \right| \geq D_M + \eta \quad (3.25)$$

En substituant leurs expressions dans (3.24), la dérivée de la surface devient :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -(\underline{\theta}_1 - \underline{\theta}_1^*)^T \underline{\xi}(\sigma) t_f - (\underline{\theta}_2 - \underline{\theta}_2^*)^T |\sigma|^{\frac{1}{2}} \underline{\xi}(\sigma) \\ &\quad - \hat{u}_2^*(\sigma) - \hat{u}_1^*(\sigma) - D \end{aligned} \quad (3.26)$$

En substituant (3.26) dans (3.23), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sigma (\hat{u}_2^*(\sigma) + \hat{u}_1^*(\sigma)) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1^T \left(\dot{\tilde{\theta}}_1 - \gamma_1 \sigma \underline{\xi}(\sigma) t_f \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2^T \left(\dot{\tilde{\theta}}_2 - \gamma_2 \sigma |\sigma|^{\frac{1}{2}} \underline{\xi}(\sigma) \right) - D\sigma \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si l'on choisit les lois d'adaptation suivantes :

$$\dot{\tilde{\theta}}_1 = \gamma_1 \sigma \underline{\xi}(\sigma) t_f \quad (3.28)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}_2 = \gamma_2 \sigma |\sigma|^{\frac{1}{2}} \underline{\xi}(\sigma) \quad (3.29)$$

on obtient :

$$\dot{V} = -\sigma D - \left(\alpha^* t_f + \beta^* |\sigma|^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right) |\sigma| \quad (3.30)$$

Comme α^* et β^* sont les approximations optimales de α et β qui vérifient :

$$\alpha^* t_f + \beta^* |\sigma(\underline{x}, t)|^{0.5} \geq D_M + \eta \quad (3.31)$$

dans ce cas la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.30) peut être donnée par l'inégalité suivante :

$$\dot{V} = -\sigma D - \left(\alpha^* t_f + \beta^* |\sigma|^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right) |\sigma| \leq 0 \quad (3.32)$$

Ainsi, on peut affirmer que la commande proposée (3.21) peut assurer la robustesse et la stabilité d'un système non linéaire perturbé en boucle fermée.

Les différentes étapes pour la mise en oeuvre de la commande peuvent être organisées en deux phases, comme résumé par le schéma suivant :

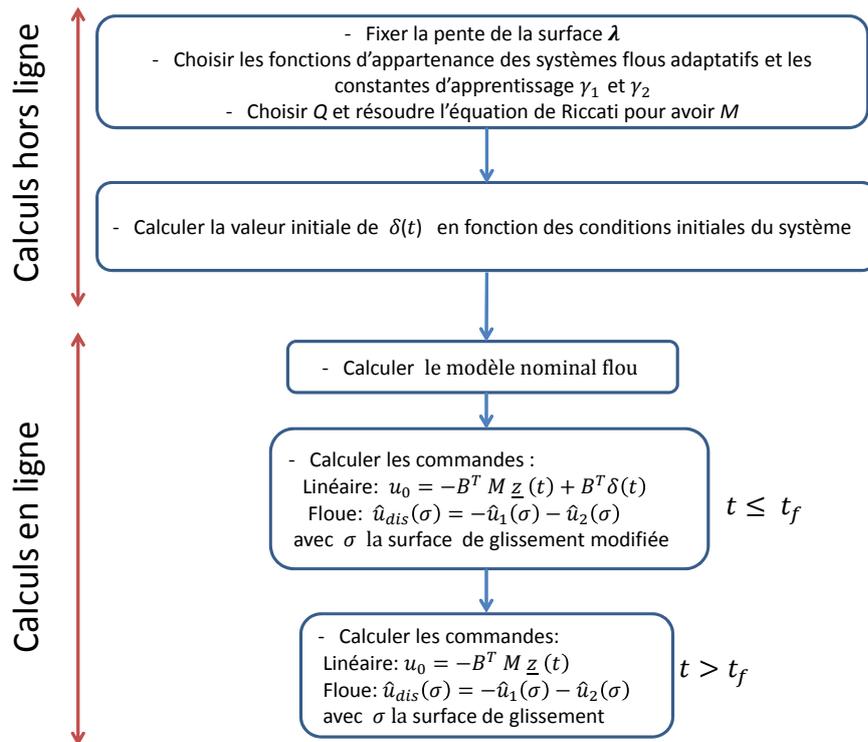


FIGURE 3.1 – Etapes de calcul de la commande *Integral Sliding Mode* floue

Remarque 3 Théoriquement le choix de t_f n'est pas limité tant qu'il est fini tel que $0 < t_f < \infty$. Cependant, un choix d'une valeur petite de t_f engendre une commande à grande amplitude. D'un point de vue pratique, on doit lier t_f aux limitations physiques de la commande et des dynamiques du système à commander [LPG07]. Cette réflexion a été constatée dans notre implémentation en temps-réel (voir chapitre 4) et dans d'autres travaux [GPBG09].

3.3 Généralisation de la méthode au cas multivariables

Pour généraliser l'approche proposée à base de l'Integral Sliding Mode au cas des systèmes MIMO d'ordre n , nous considérons le système (2.51) dont le modèle nominal est donné par (2.55). En choisissant comme surface de glissement celle de Slotine généralisée (2.57), l'objectif de la commande sera de forcer la sortie du système \underline{y} à suivre une trajectoire de référence \underline{y}_d tout en assurant la contrainte $\underline{\sigma}(X, t) = 0$. Ceci est réalisable grâce à une commande par retour d'état discontinue qui permet de forcer les trajectoires du système (2.51) à évoluer dans l'ensemble de glissement d'ordre r_i :

$$\underline{\sigma}^{r_i} = \{X | \underline{\sigma}(X, t) = \dot{\underline{\sigma}}(X, t) = \dots = \underline{\sigma}^{r_i-1}(X, t) = 0\}, i = 1, \dots, p, r_i \in \mathbb{N} \quad (3.33)$$

Similairement au cas SISO, cet ensemble est non vide et admet une solution au sens de Filippov [FA88]. Le régime glissant qui s'établit en $\underline{\sigma}^{r_i}$ et en fonction des sous-variables de glissement σ_i , quelque soit le degré relatif de ces sous-surfaces de glissement on note $\underline{\sigma}^{r_i} = [\sigma_1^{r_1} \ \sigma_2^{r_2} \ \dots \ \sigma_p^{r_p}]^T$, avec $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, p$, p désigne aussi le nombre des sous systèmes.

Pour le calcul de la surface de glissement globale, nous utilisons la formule de Slotine généralisée au cas MIMO (2.57). Dans ce cas et quelque soit l'ordre des sous systèmes du modèle (2.49), on va avoir le même degré relatif de chaque sous surface de glissement, d'où on peut écrire : $\underline{\sigma}^r = [\sigma_1^r \ \sigma_2^r \ \dots \ \sigma_p^r]^T$, avec $r \in \mathbb{N}$.

La commande par modes glissants d'ordre r permet de stabiliser à zéro les sous-surfaces de glissement σ_i ainsi que leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre $r - 1$. L'expression $\underline{\sigma}^r$

donnée par (3.33) peut être réécrite comme suit :

$$\underline{\sigma}^{(r)} = \underline{\phi}(\cdot) + \bar{\gamma}(\cdot)\underline{u} \quad (3.34)$$

avec $\bar{\gamma}(\cdot) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ est une matrice inversible à $\gamma_{ij}(\cdot)$ éléments, $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p$.

Pour avoir une représentation d'état en fonction des variables de glissement et de leurs dérivées de chaque sous système, nous étendons le système (3.3) au cas MIMO [MEH11c] :

$$\begin{cases} Z_j = Z_{j+1} \\ \dot{Z}_r = \underline{\phi}(\cdot) + \bar{\gamma}(\cdot)\underline{u} \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\text{Où pour } 1 \leq j \leq r-1, Z_1 = \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ \vdots \\ z_{1p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_p \end{bmatrix}, Z_2 = \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \\ \vdots \\ z_{2p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_p \end{bmatrix}, \dots, Z_{r-1} =$$

$$\begin{bmatrix} z_{r1} \\ z_{r2} \\ \vdots \\ z_{rp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{(r-1)} \\ \sigma_2^{(r-1)} \\ \vdots \\ \sigma_p^{(r-1)} \end{bmatrix}.$$

Les éléments $\phi_i(\cdot)$ du vecteur $\underline{\phi}(\cdot)$ et $\gamma_{ij}(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires qui vérifient les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5 *Les degrés relatifs des sous systèmes du système global (3.34) est constant et connu. La dynamique de leurs zéros est stable.*

Hypothèse 6 *Les fonctions $\phi_i(\cdot)$ et $\gamma_{ij}(\cdot)$ sont incertaines mais bornées, le signe des gains de commande $\gamma_i(\cdot)$ est connu et constant. Dans ce cas, il existe les constantes $K_m^{ij} \in \mathbb{R}^{+*}$, $K_M^{ij} \in \mathbb{R}^{+*}$, $C_0^{ij} \in \mathbb{R}^+$ tel que $0 < K_m^{ij} < \gamma_{ij}(\cdot) < K_M^{ij}$, $|\phi_{ij}(\cdot)| \leq C_0^{ij}$.*

On note par $\underline{Z} = \left[Z_1^T, Z_2^T, \dots, Z_r^T \right]^T$ le vecteur global regroupant la mise sous forme d'état de chaque sous système. En partant de $\underline{Z}(0)$, afin d'assurer la convergence des trajectoires de $\underline{Z}(t)$ en un temps fini t_f , la commande par *Integral Sliding Mode* est utilisée. La partie continue de cette commande va stabiliser le système (3.35) en absence d'incertitudes, alors que la partie discontinue compense et rejette les perturbations du système à $t \geq 0$.

3.3.1 Synthèse de la partie continue de commande

Considérons le système (3.35) qui peut être réécrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{Z}_j = Z_{j+1} \\ \dot{Z}_r = \underbrace{\phi(\cdot) + [\bar{\gamma}(\cdot) - I]\underline{u}}_{\underline{\beta}(\cdot)} + \underline{u} \end{cases} \quad (3.36)$$

avec I est une matrice identité de dimension $p \times p$, pour $1 \leq j \leq r - 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{Z}_j = Z_{j+1} \\ \dot{Z}_r = \underline{\beta}(\cdot) + \underline{u} \end{cases} \quad (3.37)$$

L'expression de la commande avec ses deux composantes est donnée par :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_{dis} \quad (3.38)$$

où \underline{u}_0 désigne la commande idéale (continue) et \underline{u}_{dis} la commande *Integral Sliding Mode*. La synthèse de \underline{u}_0 est réalisée en considérant le cas où $\underline{\beta}(\cdot) = 0$. La commande globale \underline{u} sera alors $\underline{u} = \underline{u}_0$. Dans ce cas, chaque composante $u_{0i}, (i = 1, \dots, p)$ de \underline{u}_0 va agir distinctement sur la sous surface qui lui est destinée, de plus le fait que \underline{u}_0 n'est dépendante que de la condition initiale de chaque sous surface de glissement, cela nous permet de réduire l'étude à chaque sous système séparément. La représentation d'état de chaque sous surface et de ses dérivée sera donnée par :

$$\dot{z}_i = A_i z_i + B_i u_{0i} \quad (3.39)$$

où A_i et B_i sont définies par :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \end{bmatrix}_{r \times r}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1}, \quad z_i^T = [z_{1i} \quad z_{2i} \quad \dots \quad z_{ri}].$$

En partant de l'état initial de chaque sous système $z_i(0)$, et dans l'objectif de ramener le système (3.39) à l'état $z_i(t) = 0$ en un temps fini et borné $t = t_f$, la commande idéale est synthétisée de façon à optimiser le critère quadratique suivant :

$$J_i = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} z_i^T Q_i z_i + u_{0i}^2 dt \quad (3.40)$$

avec $t_f < +\infty$, $|\underline{z}_i(0)| < +\infty$ et Q_i est une matrice symétrique et positive, dont le choix est conditionné par la contrainte $\underline{z}_i(t_f) = 0$.

Pour synthétiser la commande u_{0i} , nous avons adapté le théorème 1 au cas d'un système MIMO. La réécriture de ce théorème peut être donnée comme suit :

Nous considérons que la paire (A, B) du système (3.39) est commandable. Les lois de commande u_{0i} minimisant le critère (3.40) et stabilisant le système (3.39) en $\underline{z}_i(t) = 0$ à $t = t_f$ pour une condition initiale bornée $\underline{z}_i(0)$ est donnée par (pour tout $0 \leq t \leq t_f < +\infty$) :

$$u_{0i} = -B_i M_i \underline{z}_i(t) + B_i \delta_i(t) \quad (3.41)$$

où $\delta_i(t)$ et M_i sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{\delta}_i = -(A_i - M_i B_i B_i^T) \delta_i \\ 0 = M_i A_i + A_i^T M_i - M_i B_i B_i^T M_i + Q_i \end{cases} \quad (3.42)$$

La condition initiale $\delta_i(0)$ de $\delta_i(t)$ est choisie de telle sorte à avoir la condition finale $\underline{z}_i(t_f) = 0$. Le terme u_{0i} est conçu de façon à faire converger le système (3.39) vers $\underline{z}_i(t) = 0$ à $t = t_f$. En plus de faire converger le système, la commande u_{0i} a la capacité de le maintenir au point d'équilibre $\underline{z}_i = 0$. Ceci nous permet de supprimer le terme de forçage $\delta_i(t)$ à $t = t_f$ et d'écrire : $u_{0i} = -B_i^T M_i \underline{z}_i$ pour $t > t_f$.

Finalement, la condition pour atteindre l'état $\underline{z}_i(t) = 0$ à $t = t_f$ et de maintenir le système (3.39) en ce point pour tout $t > t_f$ est que u_{0i} puisse avoir deux dynamiques :

$$u_{0i} = \begin{cases} -B_i^T M_i \underline{z}_i(t) + B_i^T \delta_i(t), 0 \leq t \leq t_f \\ -B_i^T M_i \underline{z}_i(t), t > t_f \end{cases} \quad (3.43)$$

3.3.2 Synthèse de la surface *Integral Sliding Mode*

Considérons le système (3.37), après substitution des deux parties de commande continue et discontinue nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{Z}_j = Z_{j+1} \\ \dot{Z}_r = \underline{\beta}(\cdot) + \underline{u}_0 + \underline{u}_{dis} \end{cases} \quad (3.44)$$

Pour garantir que \underline{u}_{dis} rejette la perturbation $\underline{\beta}(\cdot)$ pour tout $t \geq 0$, la surface de glissement est calculée en faisant appel au concept de l'Integral Sliding Mode :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_0 + \underline{\zeta} \quad (3.45)$$

Avec $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^p$, $\underline{\sigma}_0^T = [\sigma_{01}, \dots, \sigma_{0p}]$ est un vecteur de sous surfaces en fonction des variables d'états du système (2.49), il est calculé en utilisant la surface généralisée de Slotine (2.57). $\underline{\zeta}^T = [\zeta_1, \dots, \zeta_p]$ est le vecteur des termes intégrals. Pour décrire la dynamique du système sur la surface de glissement, la méthode de la commande équivalente est utilisée.

Comme dans le cas SISO et afin de simplifier les calculs et l'implémentation de l'approche, nous considérons le cas particulier :

$$\underline{\sigma}_0 = Z_r \quad (3.46)$$

En dérivant l'équation (3.45) on obtient :

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{u} + \underline{\beta}(\cdot) + \dot{\underline{\zeta}} \quad (3.47)$$

Pour assurer que $\dot{\underline{\sigma}} = 0$ pour tout $t \geq 0$, il suffit de choisir la commande équivalente \underline{u}_{eq} de \underline{u}_{dis} comme suit :

$$\underline{u}_{eq} = -\underline{\beta}(\cdot) \quad (3.48)$$

Le choix de la condition initiale de $\underline{\zeta}(0)$ est liée à la condition requise $\dot{\underline{\sigma}}(0) = 0$, dans ce cas, la condition (3.48) sera validée en choisissant :

$$\dot{\underline{\zeta}} = -\underline{u}_0, \underline{\zeta}(0) = -Z_r(0) \quad (3.49)$$

3.3.3 Synthèse de la commande discontinue avec l'approche proposée

Dans cette partie, le problème du choix du temps de convergence t_c de la commande (2.58) est résolu grâce au concept de l'Integral Sliding Mode.

Proposition 4 [MEH11c]

La partie qu'on appelle la commande discontinue n'est autre que la somme des deux vecteurs issus des systèmes flou type-2 intervalles $\hat{\underline{u}}_1(\underline{\sigma})$ et $\hat{\underline{u}}_2(\underline{\sigma})$, qui permettent de substituer les deux termes \underline{u}_1 et \underline{u}_2 du Super-Twisting (équation (2.61)). Dans cette partie,

nous conservons leurs structures telles qu'elles sont définies par les équations (2.59) et (2.60) respectivement. En guise de rappel, leurs expressions sont : $\hat{u}_1(\underline{\sigma}) = \Theta_1^T \Psi(\underline{\sigma}) t_c$ et $\hat{u}_2(\underline{\sigma}) = (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}) \Theta_2^T \Psi(\underline{\sigma})$. La solution pour le temps de convergence qui est inconnu dans [MEH10b],[MEH10a] est de le choisir égal à l'instant final $t_c = t_f$.

En tenant compte de $\hat{u}_1(\underline{\sigma})$ et $\hat{u}_2(\underline{\sigma})$, \underline{u}_{dis} peut être exprimée par :

$$\underline{u}_{dis} = -\hat{u}_1(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2(\underline{\sigma}) \quad (3.50)$$

En substituant par les différentes parties, la commande globale sera donnée par :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{u}_{eq} - \hat{u}_1(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2(\underline{\sigma}) \quad (3.51)$$

Les hypothèses et la structure des deux termes $\hat{u}_1(\underline{\sigma})$ et $\hat{u}_2(\underline{\sigma})$ données dans la proposition 2 et également le calcul concernant la valeur optimale de leur partie adaptative (équations (2.64-2.63)) sont maintenues.

Démonstration 4 Pour l'étude de la stabilité de la boucle fermée du système avec l'approche que nous proposons, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{\sigma} + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\Theta}_1^T \tilde{\Theta}_1 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\Theta}_2^T \tilde{\Theta}_2 \quad (3.52)$$

Avec $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$, Θ^* est le vecteur à valeurs optimales de Θ , γ_1 et γ_2 sont deux constantes positives d'apprentissages. En dérivant (3.52), on obtient :

$$\dot{V}(t) = \underline{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\Theta}_1^T \dot{\tilde{\Theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\Theta}_2^T \dot{\tilde{\Theta}}_2 \quad (3.53)$$

En tenant compte des choix (3.48) et (3.49) et en remplaçant la commande proposée dans la dérivée de la surface de glissement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}} &= -\hat{u}_1(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2(\underline{\sigma}) - \underline{D} \\ &= -\hat{u}_1(\underline{\sigma}) - \hat{u}_1^*(\underline{\sigma}) + \hat{u}_1^*(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) - \underline{D} \end{aligned} \quad (3.54)$$

où $\hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) = (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}) \Theta_2^{*T} \Psi(\underline{\sigma})$ et $\hat{u}_1^*(\underline{\sigma}) = \Theta_1^{*T} \Psi(\underline{\sigma}) t_f$ sont les approximateurs optimums vérifiant :

$$\|\hat{u}_1^*(\underline{\sigma})\| + \|\hat{u}_2^*(\underline{\sigma})\| = \|(\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}) \Theta_2^{*T} \Psi(\underline{\sigma})\| + \|\Theta_1^{*T} \Psi(\underline{\sigma}) t_f\| \geq D_M + \eta \quad (3.55)$$

En tenant compte de $\hat{u}_1^*(\underline{\sigma})$ et $\hat{u}_2^*(\underline{\sigma})$, la dérivée de la surface devient :

$$\dot{\underline{\sigma}} = -(\Theta_1 - \Theta_1^*)^T \Psi(\underline{\sigma}) t_f - \left(\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right) (\Theta_2 - \Theta_2^*)^T \Psi(\underline{\sigma}) - \hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) - \hat{u}_1^*(\underline{\sigma}) - \underline{D} \quad (3.56)$$

En substituant (3.56) dans (3.53), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\underline{\sigma}^T (\hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{u}_1^*(\underline{\sigma})) + \frac{\dot{\Theta}_1^T}{\gamma_1} \left(\dot{\Theta}_1 - \gamma_1 \underline{\sigma}^T \Psi t_f \right) \\ & + \frac{\dot{\Theta}_2^T}{\gamma_2} \left(\dot{\Theta}_2 - \gamma_2 \underline{\sigma}^T (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\left(\frac{1}{2}\right)}) \Psi \right) - \underline{\sigma}^T \underline{D} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Si nous choisissons les lois d'adaptations suivantes :

$$\dot{\Theta}_1 = \gamma_1 \underline{\sigma}^T \Psi(\underline{\sigma}) t_f \quad (3.58)$$

$$\dot{\Theta}_2 = \gamma_2 \underline{\sigma}^T (\text{diag}|\underline{\sigma}|^{\left(\frac{1}{2}\right)}) \Psi(\underline{\sigma}) \quad (3.59)$$

l'équation (3.57) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & = -\underline{\sigma}^T (\hat{u}_2^*(\underline{\sigma}) + \hat{u}_1^*(\underline{\sigma})) - \underline{\sigma}^T \underline{D} \\ & = \underline{\sigma}^T \underline{D} - \underline{\sigma}^T \left(\underline{\alpha}^* t_c \text{sign}(\underline{\sigma}) + \underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\underline{\sigma}) \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Comme $\underline{\alpha}^*$ et $\underline{\beta}^{*T}$ sont les approximations optimales de $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ qui vérifient :

$$\|\underline{\alpha}^* t_c\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \geq D_M + \eta \quad (3.61)$$

d'où la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.60) peut être donnée par l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq -\|\underline{\sigma}\| \|\underline{D}\| - \|\underline{\sigma}\| \left(\|\underline{\alpha}^* t_f\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \right) \\ & \leq -\|\underline{\sigma}\| D_M - \|\underline{\sigma}\| \left(\|\underline{\alpha}^* t_f\| + \|\underline{\beta}^{*T} \text{diag}|\underline{\sigma}|^{\frac{1}{2}}\| \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Nous constatons d'après l'inégalité (3.62) que la surface de glissement est attractive et que la condition d'attractivité $\underline{\sigma}^T \dot{\underline{\sigma}}$ est toujours satisfaite, donc l'erreur de poursuite convergera vers zéro en un temps fini. Ainsi, on peut confirmer que la stabilité globale d'un système MIMO décrit par l'équation (2.51) en boucle fermée est garantie par l'approche proposée.

3.4 Simulation et Résultats

3.4.1 Cas d'un système SISO

Pour tester les performances de l'approche proposée (3.34), nous considérons le système à une seule articulation, actionné par un moteur à courant continu tel qu'il a été modélisé par le système non linéaire (2.79). Pour la simulation, nous gardons les mêmes valeurs des paramètres et les mêmes règles pour la construction du modèle nominal.

Le système sera commandé pour contraindre les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à suivre les trajectoires de références $y_r(t) = \sin(2t)$ et $\dot{y}_r(t) = 2\cos(2t)$ respectivement. On suppose que la masse est soumise à une variation de la forme $dm = 0.02m(\sin(2t) + \sin(3t))$, et que le système est perturbé par un signal $d = \sin(3t)$. En se référant à la surface de glissement donnée par Slotine et comme l'ordre du système est $n = 3$, la surface de glissement sera donnée par : $\sigma = \ddot{e} + 2\lambda\dot{e} + \lambda^2e$. e est l'erreur de poursuite en position ($e = x_1 - y_r$), \dot{e} est l'erreur de poursuite en vitesse ($\dot{e} = x_2 - \dot{y}_r$). Pour construire le modèle nominal flou comme donné par (2.9), nous avons défini trois ensembles flous type-2 intervalle en fonction de la position $x_1(t)$. De même, pour générer les deux systèmes flous adaptatifs qui nous permettent de calculer $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$, nous avons considéré cinq ensembles flous type-2 intervalles en fonction de la variable de glissement σ : Négative, Petit négative, Zéro, Petit positive, Positive. La largeur de base des ensembles triangulaires autour de zéro a pour objectif de donner une meilleure précision au voisinage de ce point. Les ensembles flous de type-2 utilisés pour construire le modèle nominal sont donnés par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{H}_1^i} = 1 / (1 + \exp(1,8(x_1(t) + (0,61 + c_1)) / (\frac{\pi}{16}))) \\ \mu_{\tilde{H}_2^i} = \exp\left(-\left(x_1(t) / \left(\frac{\pi}{4,5+c_2}\right)^2\right)\right) \\ \mu_{\tilde{H}_3^i} = 1 / (1 + \exp(-1,8(x_1(t) + (0,61 + c_1)) / (\frac{\pi}{16}))) \end{cases} \quad (3.63)$$

où c_1 et c_2 désignent le degré d'incertitude. Ils sont choisis comme donné par les intervalles : $c_1 \in [0, 0.2]$ et $c_2 \in [0, 1]$. De même, les ensembles antécédents des deux systèmes adaptatifs sont obtenus en rajoutant un degré d'incertitude. Les figures (3.2-a) et (3.2-b) montrent l'allure de ces ensembles flous.

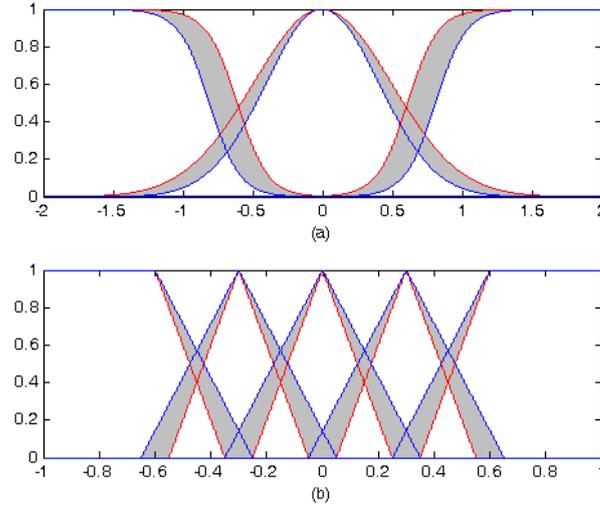


FIGURE 3.2 – Fonctions d'appartenance intervalles flous de type-2 :(a) $x_1(t)$ du modèle nominal ; (b) σ des deux systèmes adaptatifs.

La dérivée par rapport au temps de σ est donnée par $\dot{\sigma} = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)u$, avec $\phi(\cdot) = -y_r^{(3)} + f_0(x) + 2\lambda\ddot{e} + \lambda^2 e$ et $\gamma(\cdot) = g_0(x)$. Soit $z = \sigma$, $A = [0]$ et $B = [1]$. la commande par modes glissants d'ordre 2 est équivalente à la stabilisation en temps fini de :

$$\dot{z} = Az + Bu + [\phi(\cdot) + (\gamma(\cdot) - 1)u] \quad (3.64)$$

Pour la simulation, on choisit $t_f = 0.5s$ et on suppose que le système est à l'état initial $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (les autres constantes sont choisies comme suit : $\lambda = 20$, $\gamma_1 = 80$ et $\gamma_2 = 40$). Ceci nous ramène à avoir la valeur initiale de z , $z(0) = -320$. Comme mentionné dans [Rek64],[LPG07], la condition initiale de δ est calculée afin d'annuler la surface de glissement $\sigma = 0$ exactement à $t = t_f = 0.5s$.

La première étape pour la mise en œuvre de la commande par Integral Sliding Mode consiste à résoudre l'équation de Riccati (seconde ligne de l'équation (3.10)) en choisissant la matrice symétrique positive Q . La solution de cette équation donne la valeur de la matrice M . Dans notre exemple, nous avons choisi $Q = [10]$ ce qui implique que $M = 3.1623$. La deuxième étape consiste à déterminer $\delta(0)$ tel que $z(t_f) = 0$. À partir de la première ligne de l'équation (3.10), on peut avoir :

$$\delta(t) = e^{A_m t} \delta(0) \quad (3.65)$$

avec $A_m = -[A^T - MBB^T]$. En supposant que $t \leq t_f$, et à partir des équations (3.7) et (3.10), on trouve :

$$\dot{z} = -A_m^T z + BB^T e^{A_m t} \delta(0) \quad (3.66)$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $e^{A_m^T t}$, l'équation devient

$$\begin{aligned} e^{A_m^T t} \dot{z} + e^{A_m^T t} A_m^T z &= e^{A_m^T t} BB^T e^{A_m t} \delta(0) \\ \Rightarrow [[e^{A_m^T t}]^T z(t)] &= e^{A_m^T t} BB^T e^{A_m t} \delta(0) \end{aligned} \quad (3.67)$$

En intégrant cette dernière équation de $t = 0$ à $t = t_f$, avec $z(t_f) = 0$, on obtient :

$$z(0) = \left[- \int_0^{t_f} e^{A_m^T t} BB^T e^{A_m t} dt \right] \delta(0) \quad (3.68)$$

$H = [\int_0^{t_f} e^{A_m^T t} BB^T e^{A_m t} dt]$ est le grammien partiel d'atteignabilité. Ainsi, la condition initiale $\delta(0)$ assurant $z(t_f) = 0$ sera calculée par $\delta(0) = -H^{-1}z(0)$. H est évalué en utilisant l'algorithme de Vanloan [VL78], son code MATLAB est donné dans [dL00] sous le nom de la fonction grampar. Après calcul, on obtient $\delta(0) = 89.4549$. Les figure (3.3) et

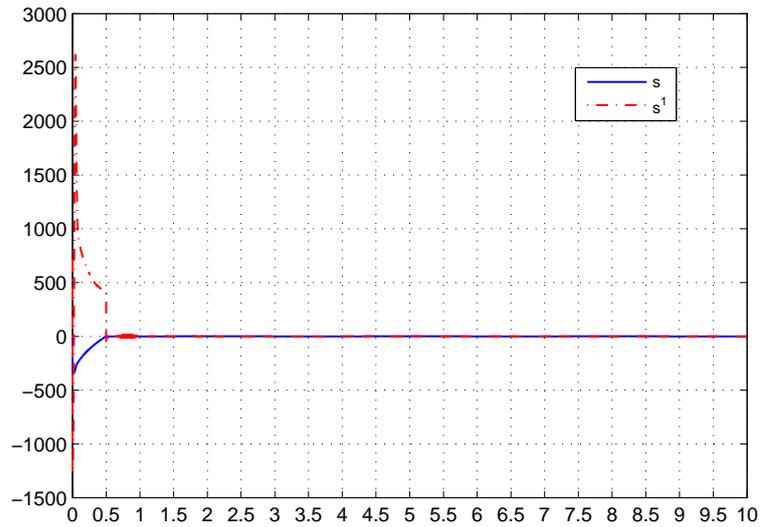


FIGURE 3.3 – La surface de glissement $\sigma = s$ et sa dérivée $\dot{\sigma} = \dot{s}$.

(3.4-a) montrent la convergence de σ , $\dot{\sigma}$ et de l'erreur quadratique de poursuite e vers zéro exactement à l'instant 0.5s. La figure (3.4-b) représente le signal de commande où l'on remarque qu'il est lisse et ne manifeste aucune variation brusque. La figure (3.5) montre

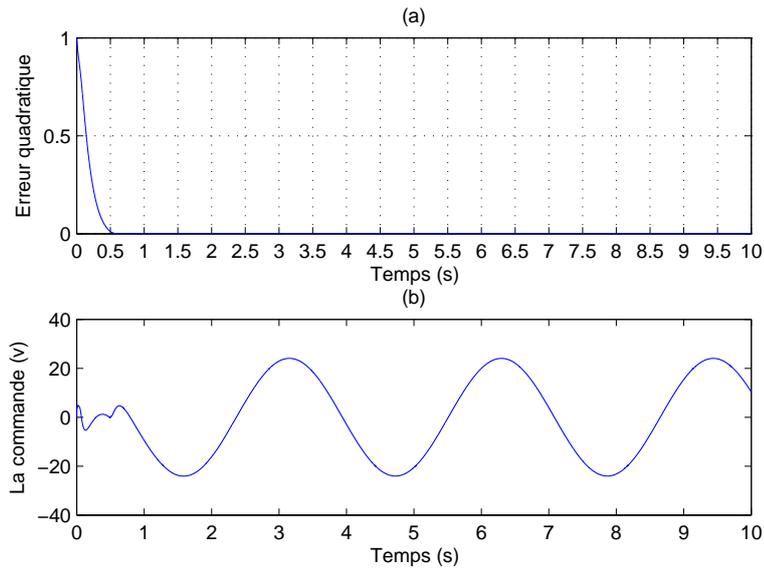


FIGURE 3.4 – (a) Erreur quadratique de position; (b) Effort appliqué u (v).

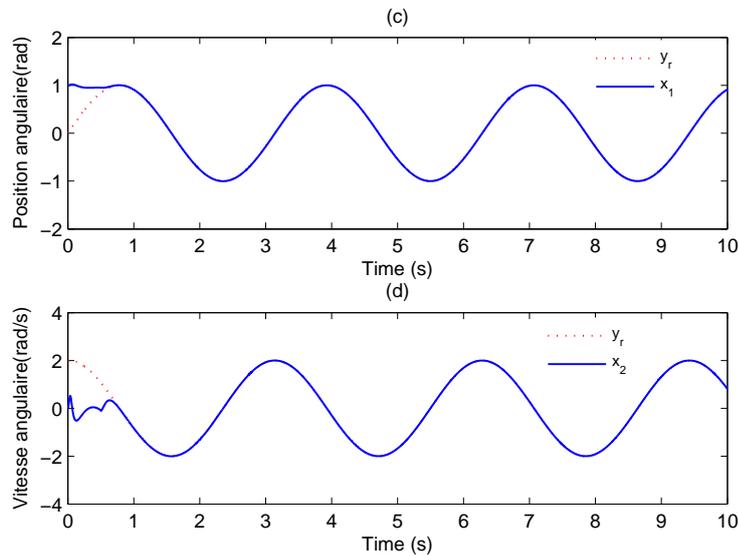


FIGURE 3.5 – (c) La position angulaire $x_1(t)$ (trait continu) et sa trajectoire de référence y_r (trait discontinu);(d) La vitesse angulaire $x_2(t)$ (trait continu) et sa trajectoire de référence \dot{y}_r (trait discontinu).

les bonnes performances de poursuite en position et en vitesse. Les états $(x_1(t), x_2(t))$ convergent rapidement vers leurs références (y_r, \dot{y}_r) . Le signal de vitesse ne manifeste pas de variations contrairement à celui que l'on obtient en utilisant l'algorithme du Super-

Twisting tel qu'il est donné par Levant [MEH10b],[MEH12].

3.4.2 Cas d'un système MIMO

Dans cette partie, l'approche généralisée (3.51) est utilisée pour commander un système non linéaire multivariables. Le système qu'on a considéré est le bras manipulateur à deux articulations de la figure (2.13), dont la dynamique est décrite par le système (2.85). Le modèle nominal flou est construit en utilisant les mêmes 9 règles et valeurs des matrices présentées dans le *chapitre 2*.

On note par $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ et $\underline{u} = [u_1 \ u_2]^T$ respectivement le vecteur d'état et l'entrée de commande. Le système est commandé afin d'assurer que l'état X suit la trajectoire de référence $\underline{y}_r = [\sin(2t) \ 2\cos(2t) \ \sin(2t) \ 2\cos(2t)]^T$. Pour calculer la surface de glissement nous utilisons l'équation (2.57). Comme les sous systèmes sont d'ordre 2, la surface de glissement est donnée par : $\underline{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2]^T = [\dot{e}_1 + \lambda_1 e_1, \dot{e}_2 + \lambda_2 e_2]^T$. e_1 et e_2 sont les erreurs de poursuite en positions ($e_1 = x_1 - \underline{y}_r(1), e_2 = x_3 - \underline{y}_r(3)$), \dot{e}_1 et \dot{e}_2 sont les erreurs de poursuite de vitesses ($\dot{e}_1 = x_2 - \underline{y}_r(2), \dot{e}_2 = x_4 - \underline{y}_r(4)$).

Pour construire le modèle nominal flou du système, nous avons considéré 3 ensembles flous type-2 intervalles pour chacune des variables d'états x_1 et x_2 . Les équations décrivant ces ensembles sont données par :

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{H}_{1j}^i} = \frac{1}{1+(\exp(1.8(\frac{x_\epsilon + (0.61+c_1)}{\frac{\pi}{16}})))} \\ \mu_{\tilde{H}_{2j}^i} = \exp(-(\frac{x_\epsilon}{(4.5+c_2)})^2) \\ \mu_{\tilde{H}_{3j}^i} = \frac{1}{1+(\exp(-1.8(\frac{x_\epsilon + (-0.61-c_1)}{\frac{\pi}{16}})))} \end{cases} \quad (3.69)$$

avec $\epsilon = 1, 3$, $c_1 \in [0, 0.2]$, $c_2 \in [0, 1]$ et $j = 1, 2$ désigne la correspondance ensemble sous-système. De même, pour générer les 4 systèmes flous adaptatifs qui nous permettent d'approximer u_{11}, u_{12}, u_{21} et u_{22} , nous avons choisi 5 ensembles flous type-2 intervalles : Négatif, Petit Négatif, Zéro, Petit Positif, Positif pour chacune des sous-variables de glissement σ_1 et σ_2 . La forme de ces ensembles est donnée par la figure (3.6). Nous supposons que les deux masses des deux bras sont entachées d'une variation $dm_j = m_j(0.2\sin(2t) + 0.5\sin(3t))$, et que le système est soumis à une perturbation externe de la forme $\underline{d} = [0, \sin(2t) + \sin(3t), 0, \sin(2t) + \sin(3t)]^T$. Afin de garantir un régime

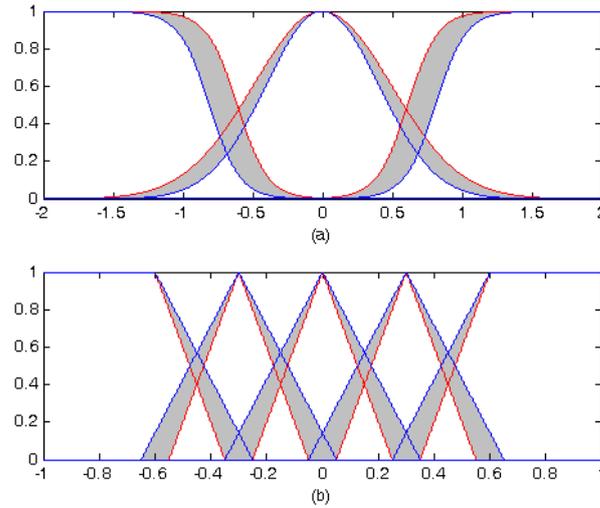


FIGURE 3.6 – Fonctions d'appartenance intervalles flous de type-2 :(a) de $x_1(t)$ et $x_3(t)$ du modèle nominal, (b) de σ_1 et σ_2 des systèmes adaptatifs.

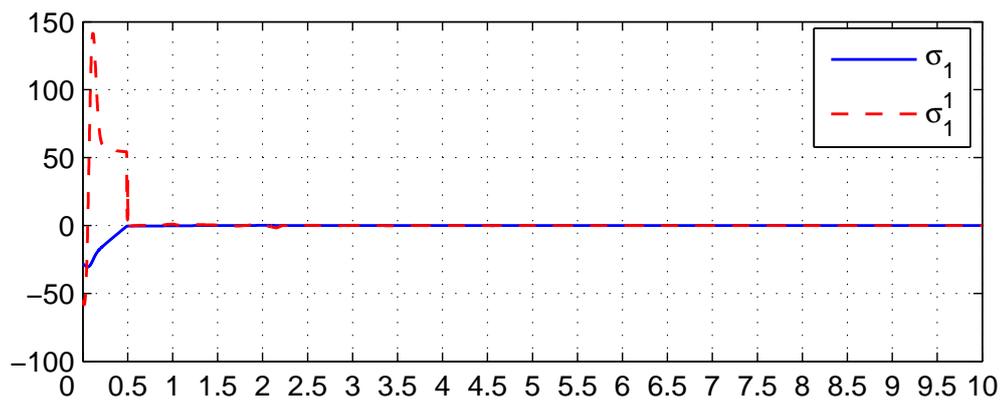
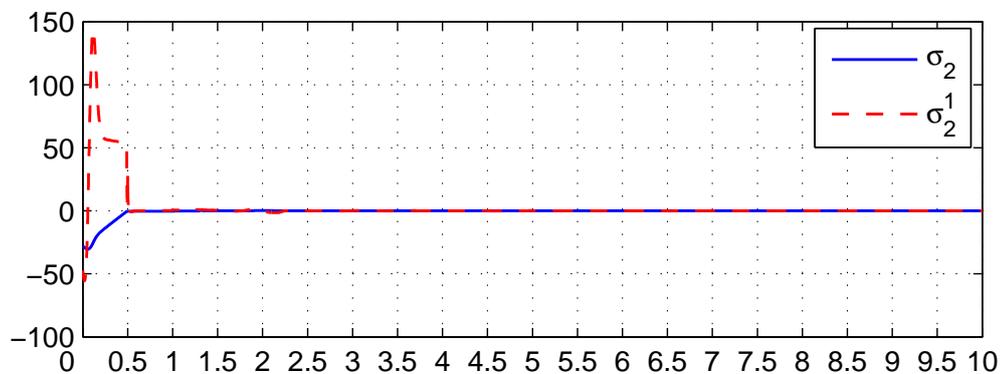
transitoire réduit et un apprentissage rapide, nous avons choisi les valeurs des paramètres de la commande comme suit : $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 18$, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 25$.

Soit $z_1 = \sigma_1$ et $z_2 = \sigma_2$. Comme les sous systèmes sont de degré relatif $r_1 = r_2 = 1$, nous allons avoir $A_1 = A_2 = [0]$ et $B_1 = B_2 = [1]$. Nous choisissons l'instant final et de convergence $t_f = 0.5s$. Nous considérons que le système est à l'état initial $X(0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$, ce qui nous ramène à avoir $z_1(0) = z_2(0) = -28$. Comme pour le cas SISO, les conditions initiales de $\delta_1(t)$ et $\delta_2(t)$ sont calculées afin d'annuler les sous-variables de glissement $\sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t)$ à l'instant $t = t_f = 0.5s$. Après avoir choisi les poids Q_i , la première étape pour la mise en œuvre de la commande consiste à résoudre l'équation de Riccati (la seconde ligne du système (3.42)). La solution de cette équation est M_i . Pour cet exemple numérique, on choisit $Q_1 = Q_2 = [10]$, ce qui nous permet d'avoir $M_1 = M_2 = 3.1623$. Sachant que $z_1(0), z_2(0)$ sont bornés, la seconde étape consistera à calculer $\delta_1(0), \delta_2(0)$ qui nous permettent d'avoir $z_1(t_f) = z_2(t_f) = 0$. Ces conditions initiales sont calculées en utilisant le Grammien partiel d'atteignabilité :

$$\delta_j(0) = -H_i^{-1}z_i(0) \quad (3.70)$$

Après calcul, on trouve $\delta_1 = \delta_2 = 32.5907$.

Les figures (3.7-3.9) caractérisent la convergence vers zéro de $\sigma_1, \dot{\sigma}_1, \sigma_2, \dot{\sigma}_2$ et des deux erreurs de poursuite en position à exactement 0.5s. Les figures (3.10) et (3.11) montrent qu'il y a une bonne performance de poursuite de trajectoire des deux articulations. Les quatre sorties du système correspondant à l'état X convergent rapidement vers leurs références. La figure (3.12) donne les deux couples de commandes appliqués au système, on remarque l'absence de tout phénomène de chattering et qu'ils sont parfaitement lisses.

FIGURE 3.7 – La sous-surface de glissement σ_1 et sa dérivée $\dot{\sigma}_1$.FIGURE 3.8 – La sous-surface de glissement σ_2 et sa dérivée $\dot{\sigma}_2$.

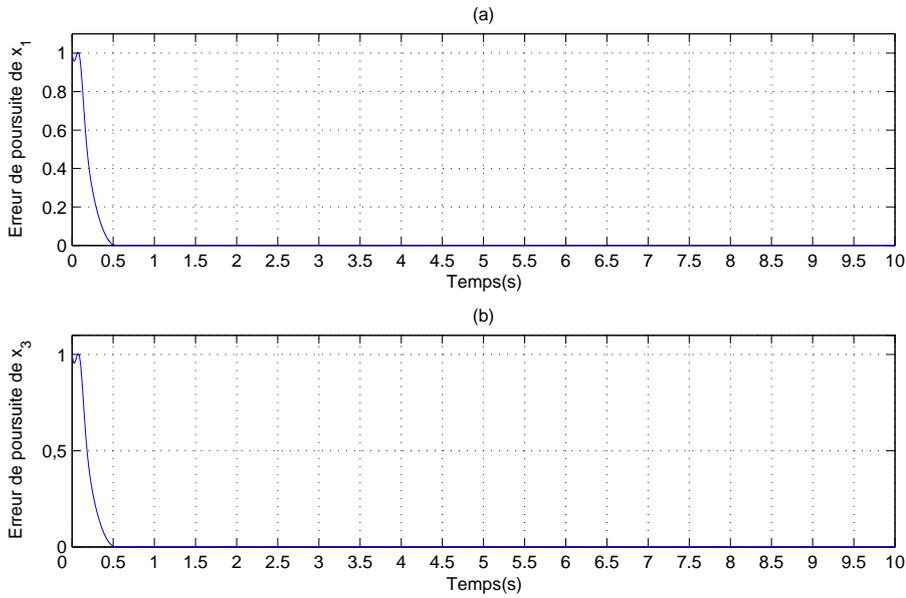


FIGURE 3.9 – Les erreurs quadratiques de poursuite en position : (a) de x_1 , (b) de x_3 .

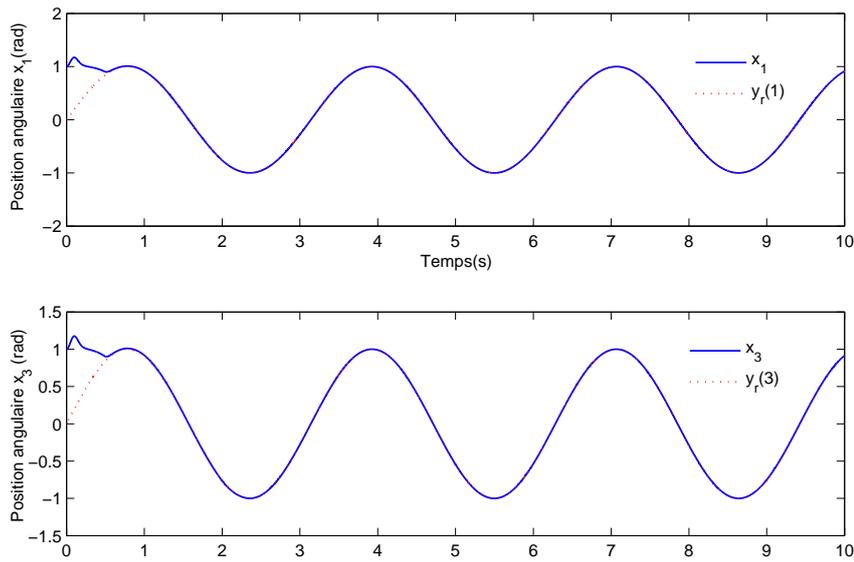


FIGURE 3.10 – (a) La position angulaire x_1 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(1)$ (ligne discontinue), (b) La position angulaire x_3 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(3)$ (ligne discontinue).

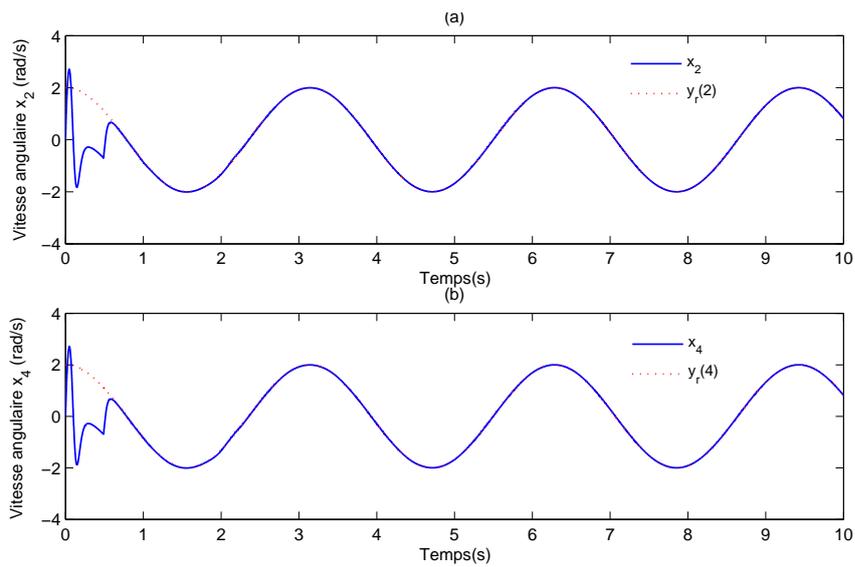


FIGURE 3.11 – (a) La vitesse angulaire x_2 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(2)$ (ligne discontinue), (b) La vitesse angulaire x_4 (ligne continue) et sa trajectoire de référence $y_r(4)$ (ligne discontinue).

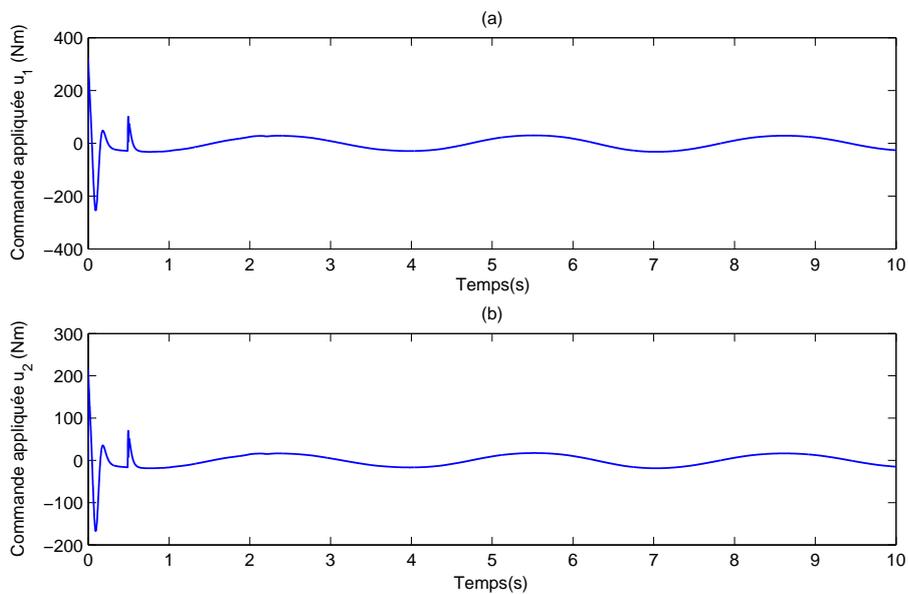


FIGURE 3.12 – Les deux couples de commandes appliquées : (a) $u_1(Nm)$, (b) $u_2(Nm)$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons apporté une solution pour le problème évoqué dans la conclusion du deuxième chapitre. En effet la difficulté du choix du temps de convergence t_c a été résolue en introduisant le concept de l'*Integral Sliding Mode*. Ce concept associé à une commande optimale avec un temps de convergence fini a été introduit dans [LPG07]. Dans ce travail, la commande discontinue est en fonction de la somme de la dérivée à l'ordre $(r - 1)$ de la surface de glissement à laquelle se rajoute un terme integral. Cette nouvelle surface est appelée la "surface modifiée". Il est à noter qu'à ce niveau, la difficulté réside dans l'effort du calcul de la partie continue de commande. En effet, en agissant sur la dynamique d'ordre r de la surface, ceci va nous ramener à manipuler des matrices et à résoudre des équations différentielles qui sont exprimées en fonction des variables du système. Dans notre étude, la commande proposée à base des modes glissants d'ordre deux a été considérée avec le cas particulier $\sigma_0 = z_r$. Cette considération nous a permis de simplifier le calcul, car cela nous ramène à manipuler des constantes et des poids, ce qui est plus judicieux pour une implémentation en temps-réel. La partie idéale de commande avec ses deux dynamiques, permet de faire converger à zéro la surface de glissement et ses dérivées en un temps fini et choisi à priori t_f . Dans ce cas la solution pour le temps de convergence t_c est tout simplement de choisir $t_c = t_f$. Dès que le système arrive sur la surface de glissement pour $t > t_f$, la terme de forçage de u_0 sera supprimé. La condition initiale de ce terme est calculée avec une étape en amont en considérant la valeur initiale de la variable de glissement et ses dérivées.

La difficulté du choix des gains de commande, qui assurent la stabilité de la boucle fermée et la transition entre la phase d'approche et celle de glissement est résolue en introduisant des systèmes flous adaptatifs. A chaque instant, en ayant comme unique entrée la variable de glissement, ces systèmes délivrent en sortie les valeurs optimales des gains de commande. Leur ajustement est assuré par des lois d'adaptations qui dérivent de l'étude de stabilité. L'approche proposée pour la commande des systèmes SISO d'ordre n a été généralisée pour le cas des systèmes MIMO d'ordre n .

L'approche que nous avons introduit (3.21) et celle généralisée (3.51) sont utilisées

sur deux exemples numériques. Les résultats ont confirmé la bonne performance des deux méthodes à assurer une convergence rapide de la sortie des deux systèmes vers leurs références, la robustesse de la boucle et à faire converger les surfaces de glissement et leurs dérivées ainsi que les erreurs de poursuite à zéro exactement à l'instant t_f choisi.

4

Validation expérimentale

4.1 Introduction

Entre théorie et pratique, on constate souvent qu'il y a un grand fossé. D'ailleurs lors de nos tests et implémentations, nous avons avant tout constaté à quel point la fameuse phrase d'Einstein : «La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi ! » a beaucoup de sens et de signification.

En effet, lors de la construction d'une commande et la modélisation d'un système physique, nous imposons souvent des hypothèses simplificatrices. Cette méthodologie est dictée par la complexité des phénomènes qui caractérisent le système, et parfois même, la médiocrité de l'information dont on dispose. Les contraintes qu'on se fixe, nous ramènent à avoir un modèle non unique.

Afin de tester les performances d'une commande, on passe souvent par une étape de validation sur un exemple de simulation. Cependant, une simulation ne peut pas refléter complètement la réalité physique du système. De plus, les contraintes technologiques comme : les erreurs de mesure liées aux capteurs, le temps d'échantillonnage, le retard, le temps de traitement des données, les bruits de mesure, etc sont souvent négligés.

La validation sur un système réel d'une approche est certes une étape difficile, mais elle nous permet de mesurer réellement son efficacité et sa crédibilité. De plus, elle nous

permet aussi de revoir certaines hypothèses de modélisation, ce qui va nous permettre de nous rapprocher plus du modèle réel.

Ce chapitre est dédié à la validation en temps-réel des deux approches proposées sur un banc d'essais dont on dispose au laboratoire. Avant de passer à l'étape d'implémentation des commandes et de présentation des résultats, une description brève du banc d'essais sera présentée.

4.2 Banc d'essais

Le banc d'essais a été réalisé dans notre composante AUTO du laboratoire CReSTIC à l'IUT de Troyes. Il est constitué d'un moteur à courant continu, d'un réducteur, d'un codeur absolu, d'un bras, d'un amplificateur de tension, d'un module dSpace 1104 et d'un ordinateur équipé des logiciels Control Desk et Matlab. Une photo du banc d'essais ainsi qu'un schéma synoptique sont donnés respectivement par les figures (4.1) et (4.2). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter l'annexe A.

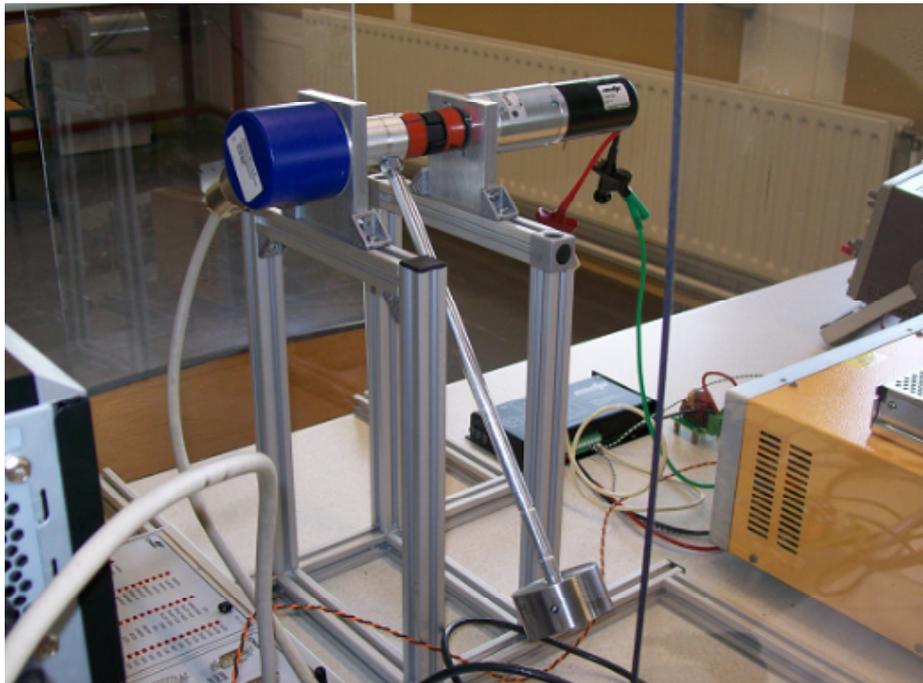


FIGURE 4.1 – Banc d'essais.

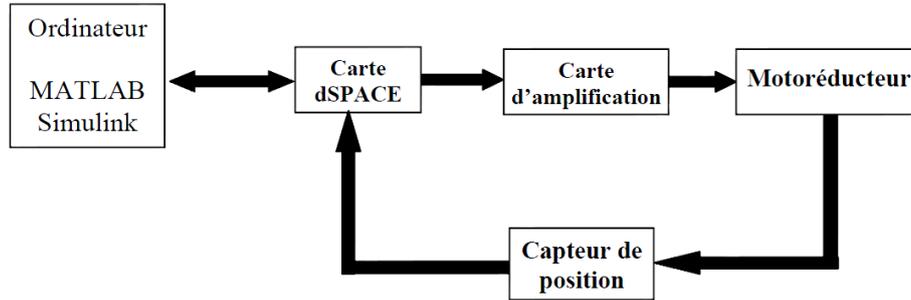


FIGURE 4.2 – Schéma synoptique du banc d'essais.

4.3 Implémentation de la commande (2.31)

Le moto-réducteur a la même dynamique que celle décrite par l'équation (2.79). Pour valider la commande, nous avons effectué d'abord des essais à vide ensuite avec une charge et une résistance manuelle. La charge utilisée sera le bras de longueur $l = 40 \text{ cm}$ auquel on ajoute une masse $m = 0.5 \text{ kg}$. $D = d + \Delta f + \Delta g$ sera sous la forme d'une opposition manuelle au mouvement du bras, et les incertitudes du modèle qui seront la somme des erreurs d'identification et la variation de la résistance caractérisée par l'effet Joule. Comme pour la simulation, le modèle nominal flou est obtenu en utilisant 2 règles décrivant la dynamique du système autour des points de fonctionnement 0 et $\pm \frac{\pi}{2}$. Les valeurs des matrices des modèles locaux sont obtenues par identification en utilisant la toolbox

de MATLAB. Les valeurs de ces matrices sont : $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0172 & -10.03 & -0.007 \end{bmatrix}$,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.0172 & -1.03 & -0.007 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}^T.$$

Pour construire le modèle nominal nous avons utilisé trois ensembles flous type-2 intervalles en fonction de $x_1(t)$. De même, pour calculer $\hat{u}_1(\sigma)$ et $\hat{u}_2(\sigma)$, nous avons généré

deux systèmes flous type-2 adaptatifs en considérant trois ensembles flous en fonction de la variable de glissement σ . L'allure des ensembles flous impliqués dans la construction des systèmes adaptatifs et du modèle sont donnés respectivement par la figure (4.3-a) et (4.3-b). Le choix des ensembles flous type-2 triangulaires est dicté par la capacité limitée de calcul de la carte dspace 1104. Les ensembles Gaussiens nécessitent plus de temps et de capacité de calcul.

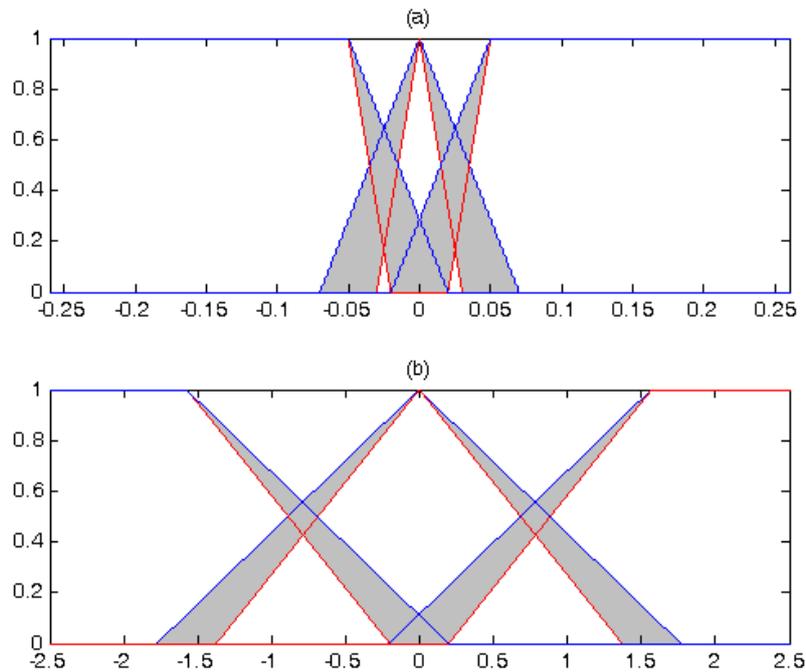


FIGURE 4.3 – Ensemble flous type-2 intervalles : (a) en fonction de σ des systèmes adaptatifs, (b) en fonction de $x_1(t)$ du modèle nominal.

L'objectif sera de commander le système pour que les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ suivent respectivement les trajectoires de références : $y_r(t) = 1.5\sin(t)$ et $\dot{y}_r(t) = 1.5\cos(t)$. Les autres constantes sont choisies comme suit : $\lambda = 6$ pour la pente de la surface de glissement, $\gamma_1 = 34$ et $\gamma_2 = 4$ pour les constantes d'apprentissage des systèmes adaptatifs et le pas d'échantillonnage égal à 0.1 ms . Le choix de ces valeurs nous permet d'avoir un calcul rapide, et de respecter le compromis entre le pas d'échantillonnage et la vitesse de variation des paramètres du système.

Il est à noter que toutes les expérimentations qui suivent, ont été faites après avoir

mis en marche le moteur pour au moins 15mn. Cette période est suffisante pour chauffer la résistance et l'inductance, ce qui crée une sorte d'incertitude. De plus, le bras souffre d'un jeu et des frottements importants en absence d'un accouplement, ce qui crée un inconvénient lors du changement du sens de rotation du moteur.

4.3.1 Essai sans charge

L'essai à vide a été réalisé pour valider la commande (2.31) et le modèle nominal flou. Les résultats sont donnés par les figures (4.4 - 4.8). La poursuite en position et en vitesse, comme illustré par les figures (4.7) et (4.8), montrent une haute précision avec un bref temps de réponse du système. Si nous observons les erreurs de poursuites en position (4.5) et en vitesse (4.6), il est facile de conclure qu'ils sont inférieurs en pourcentage respectivement à 2% et 2.8%. La figure (4.4) donne la tension appliquée au moto-réducteur. On remarque que le signal ne manifeste aucune variation et qu'il est optimisé grâce aux valeurs optimales de $u_1^*(\sigma)$ et $u_2^*(\sigma)$. Le signal de commande varie entre -10 (volt) et $+10$ (volt).

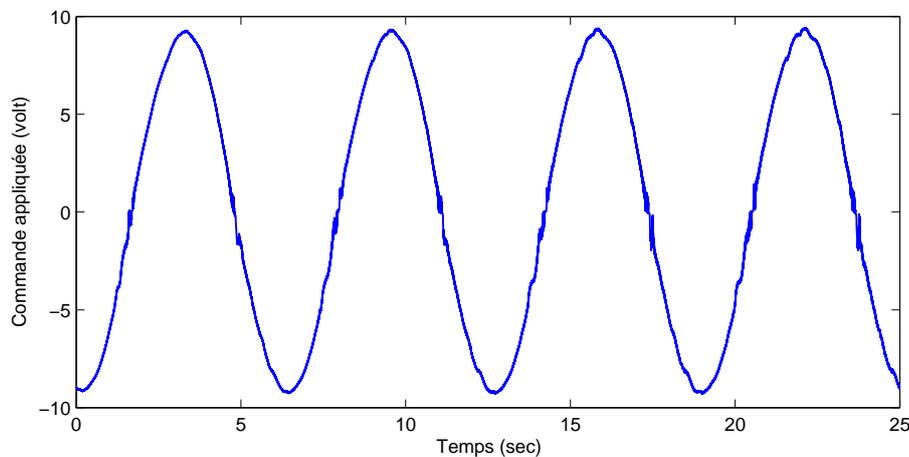


FIGURE 4.4 – Le signal de commande sans charge.

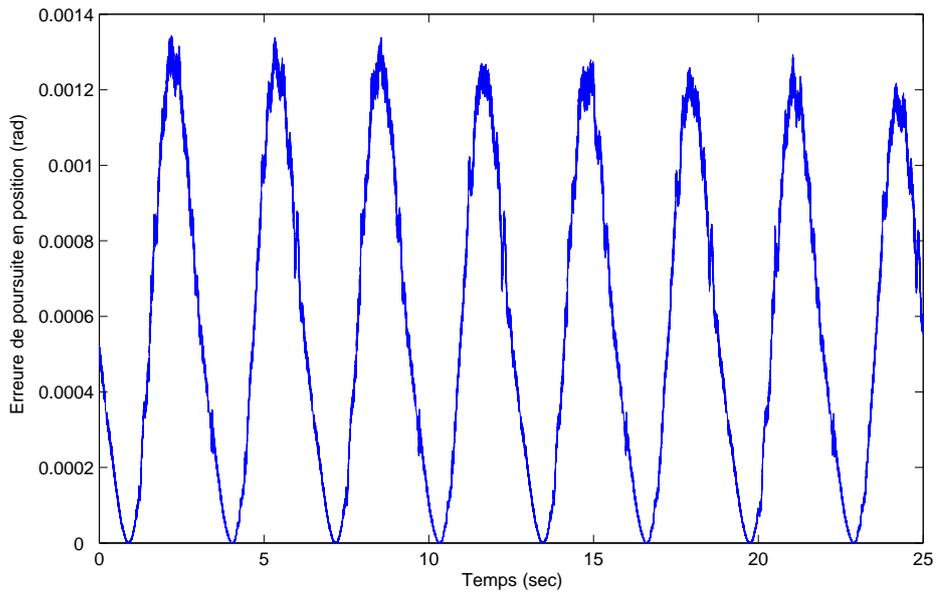


FIGURE 4.5 – L'erreur quadratique de poursuite en position sans charge.

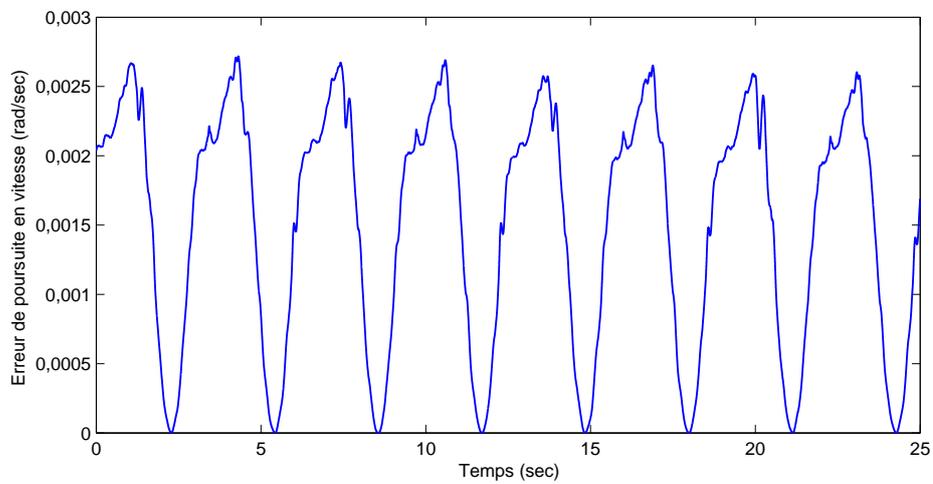


FIGURE 4.6 – L'erreur quadratique de poursuite en vitesse sans charge.

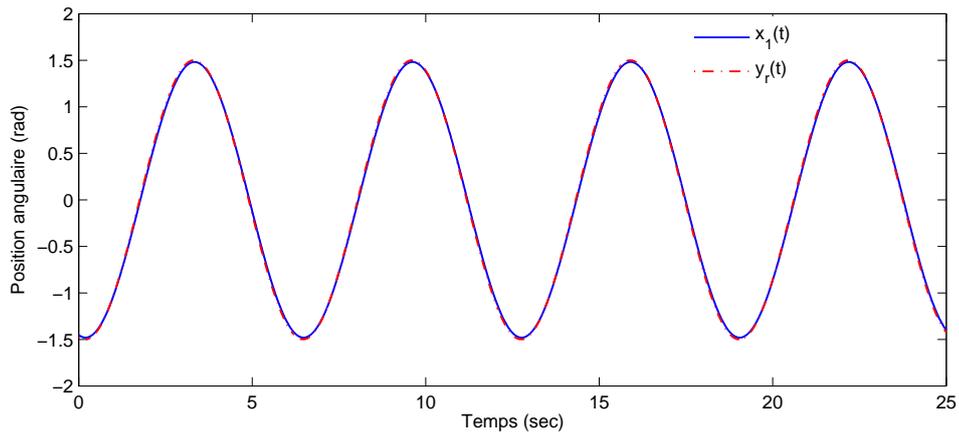


FIGURE 4.7 – La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) sans charge.

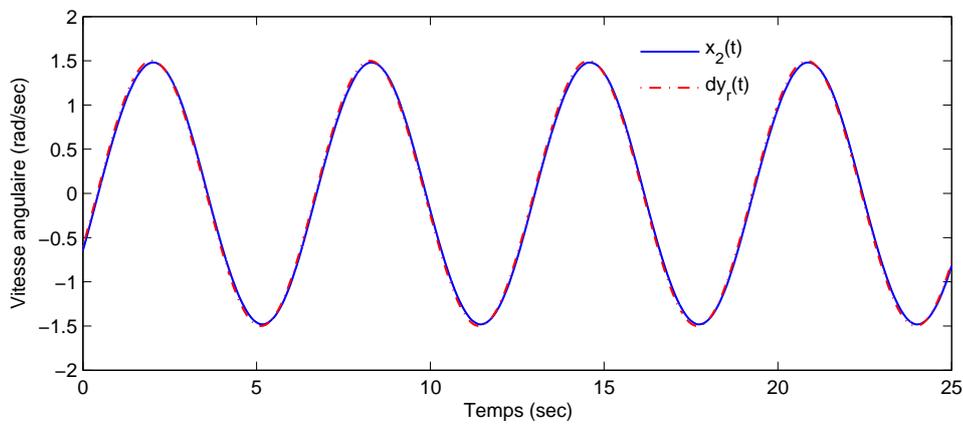


FIGURE 4.8 – La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) sans charge.

4.3.2 Essai avec charge

Les figures (4.9 - 4.18) sont obtenues en appliquant la charge m et en soumettant le système à une opposition manuelle cyclique de 3 sec et 4 sec. Cette force appliquée agit en contre-sens du mouvement du bras à la limite du blocage. Deux conditions initiales différentes pour la position et la vitesse sont représentées par les figures (4.12), (4.13) et (4.17), (4.18). On peut constater facilement que les trajectoires de position et de vitesse

rejoignent rapidement leurs références. Il est clair aussi, que la robustesse de l'approche proposée rend l'effet des perturbations négligeable. De plus, le signal de commande n'est atteint d'aucune forme de discontinuité ou de variation. D'après les figures (4.9) et (4.14), en régime permanent le signal de commande est inclus dans l'intervall $]-10, 10[$. Les erreurs quadratiques de poursuite sont données par les figures (4.10) et (4.11), qui montrent que les erreurs de poursuite en pourcentage sont inférieures respectivement à 2.5 % pour la position et à 3.5 % pour la vitesse.

Bien que la position initiale est $x_1(t) = 5.4 \text{ rad}$ et la vitesse initiale est $x_2(t) = 13 \text{ rad/sec}$ (figure (4.17) et (4.18)), la commande force les trajectoires du système à rejoindre leurs références dans un délai bref, comme illustré par les figures (4.15) et (4.16).

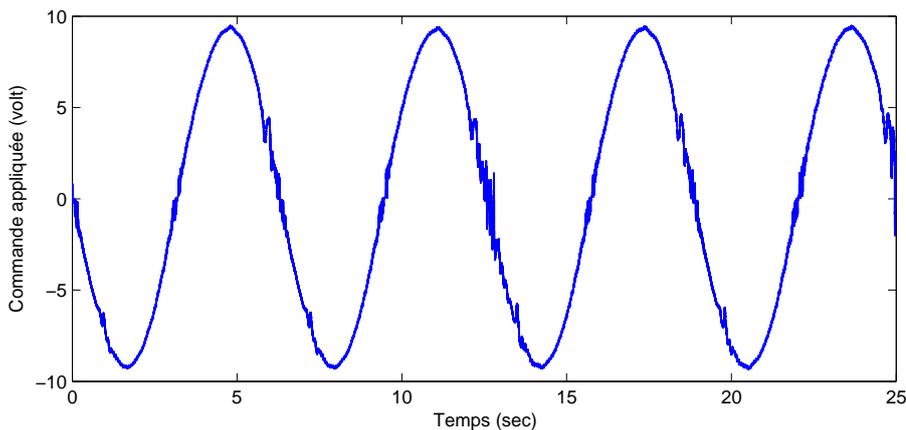


FIGURE 4.9 – Le signal de commande avec charge et opposition.

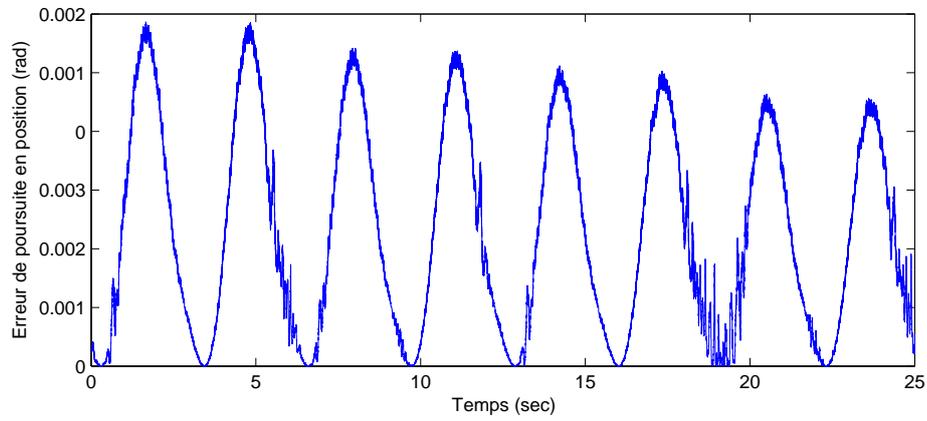


FIGURE 4.10 – L'erreur quadratique de poursuite en position avec charge et opposition.

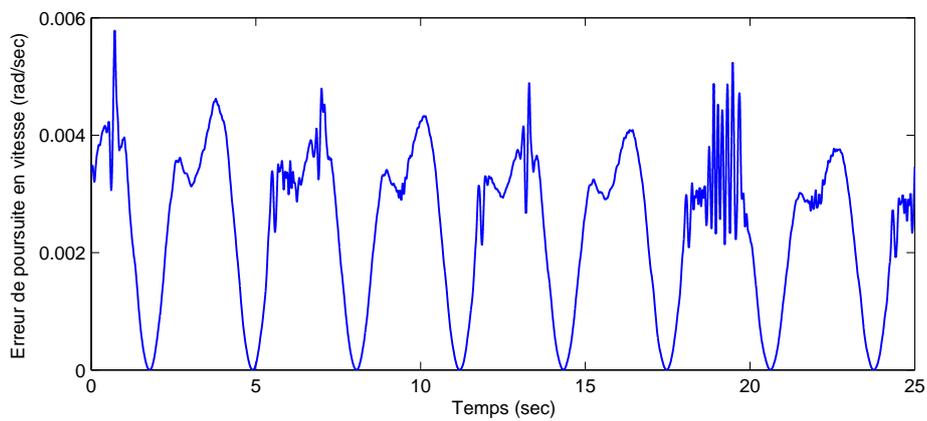


FIGURE 4.11 – L'erreur quadratique de poursuite en vitesse avec charge et opposition.

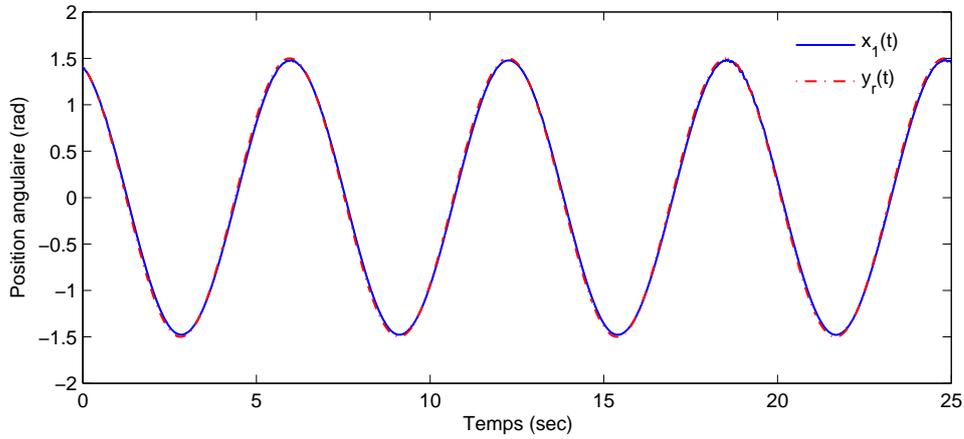


FIGURE 4.12 – La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) avec charge et opposition.

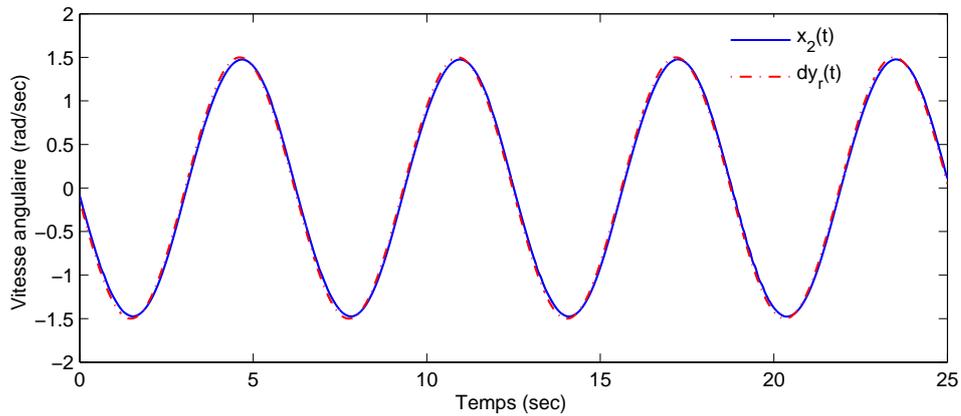


FIGURE 4.13 – La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) avec charge et opposition.

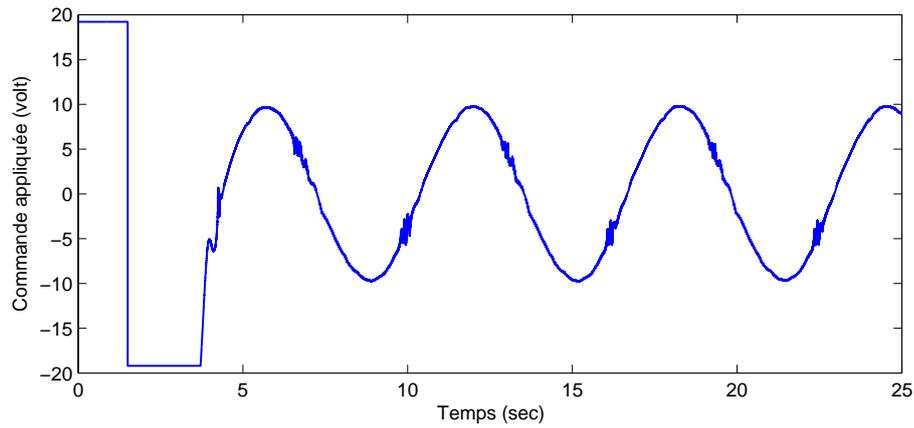


FIGURE 4.14 – Le signal de commande avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$.

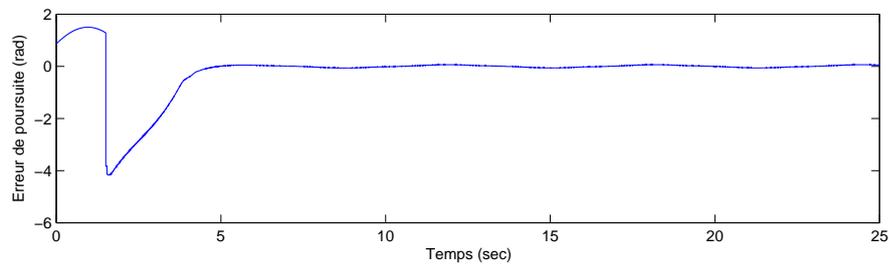


FIGURE 4.15 – L'erreur de poursuite en position avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$.

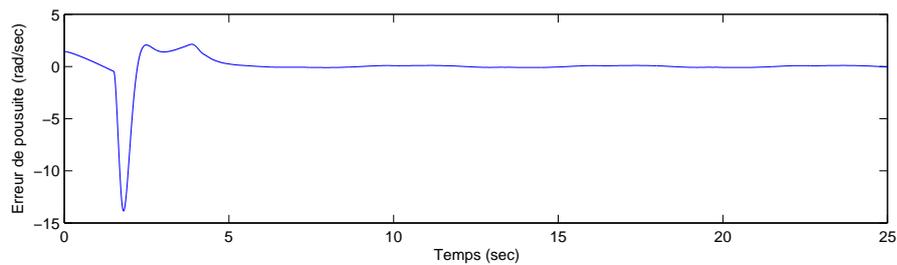


FIGURE 4.16 – L'erreur de poursuite en vitesse avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$.

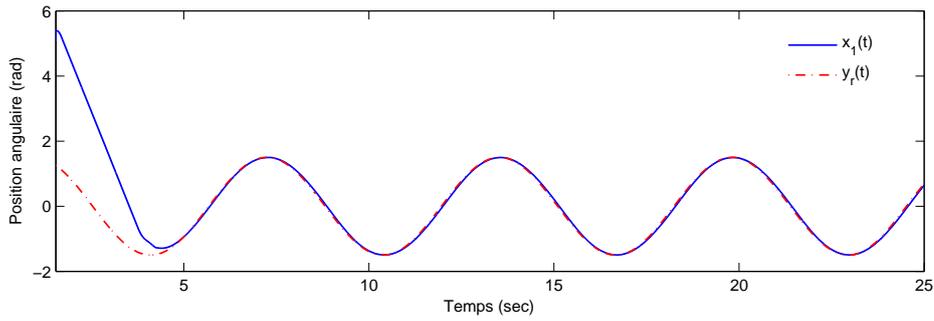


FIGURE 4.17 – La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue) avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$.

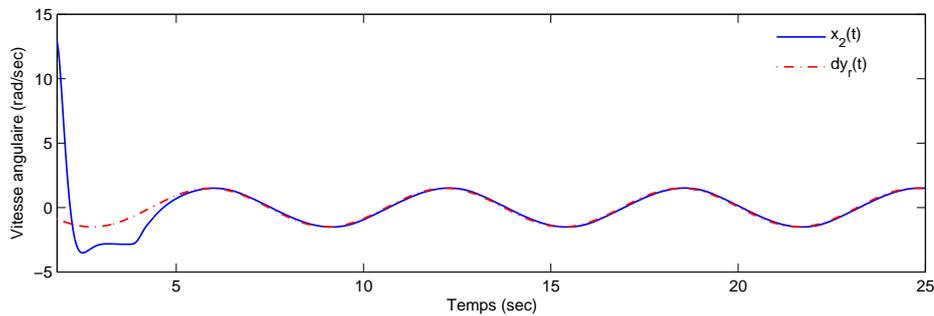


FIGURE 4.18 – La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue) avec charge, opposition et état initial $x_1(0) = 5.4 \text{ rad}$ et $x_2(0) = 13 \text{ rad/sec}$.

4.4 Implémentation de la commande (3.21)

Pour valider expérimentalement la commande (3.21), nous utilisons les mêmes matrices des modèles locaux et la pente de la surface de glissement. Quant aux constantes d'apprentissage, nous choisissons les nouvelles valeurs $\gamma_1 = 10$ et $\gamma_2 = 8$. Les essais sont établis avec la charge m . A partir de l'instant $t = 4.5 \text{ sec}$, le bras sera soumis à une force manuelle opposante au sens de rotation du manipulateur. Cette opposition sera d'un cycle de 3 sec.

Pour construire le modèle nominal flou, nous définissons aussi trois ensembles flous type-2 intervalles triangulaires en fonction de la position $x_1(t)$. Pour générer les deux systèmes adaptatifs flous qui calculent \hat{u}_1 et \hat{u}_2 , nous définissons cinq ensembles flous type-2 intervalles triangulaires en fonction de la variable de glissement σ : Négatif, Petit

Négatif, Zéro, Petit Positif, Positif. La forme des ensembles flous antécédents du modèle nominal est donnée dans la figure (4.19-b), et celle des ensembles antécédents des systèmes adaptatifs par la figure (4.19-a).

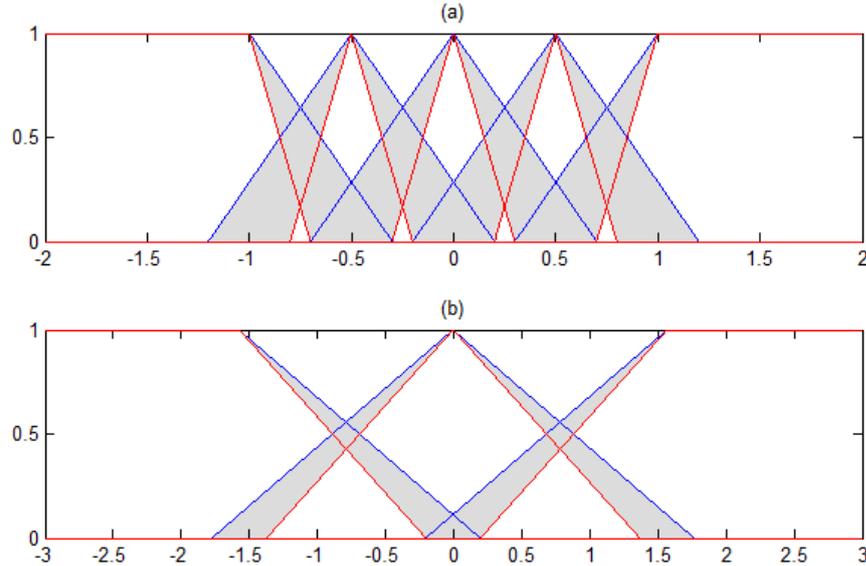


FIGURE 4.19 – Ensemble flous type-2 intervalles : (a) en fonction de σ des systèmes adaptatifs, (b) en fonction de $x_1(t)$ du modèle nominal.

Le moto-réducteur est commandé dans l'objectif de contraindre les états du système $x_1(t)$ et $x_2(t)$ à suivre les trajectoires de référence respectives $y_r(t) = 1.5 \sin(t)$ et $\dot{y}_r(t) = 1.5 \cos(t)$, et de forcer l'erreur de poursuite en position et en vitesse ainsi que la variable de glissement et sa dérivée à converger vers zéro à l'instant final choisi $t_f = 1$ seconde.

Le système à $t = 0$ a comme position initiale $x_1(0) = 0.15$ rad et vitesse initiale $x_2(0) = 0.31$ rad/sec, ce qui implique que $z(0) = -484.666$. Pour la résolution de l'équation de Riccati (seconde ligne du système (3.10)), nous choisissons comme valeur pour le poids $Q = [10]$. Après résolution de cette équation, on obtient $M = 3.1623$. En suivant la même procédure que pour l'exemple de simulation dans le chapitre trois, connaissant $z(0)$, la valeur de $\delta(0)$ est calculée afin d'avoir à l'instant final $z(t_f) = 0$. Pour avoir cette valeur, nous utilisons l'équation (3.68). Après calcul, nous obtenons $\delta(0) = 135.4867$.

Les résultats de l'implémentation de la commande (3.21) sont donnés par les figures

(4.20-4.25). La figure (4.20) caractérise la convergence de la surface de glissement σ et sa dérivée $\dot{\sigma}$ au voisinage de zéro. Nous constatons que les deux signaux prennent la plus petite valeur au voisinage de l'origine à exactement 1 seconde, qui correspond à l'instant final t_f que nous avons fixé.

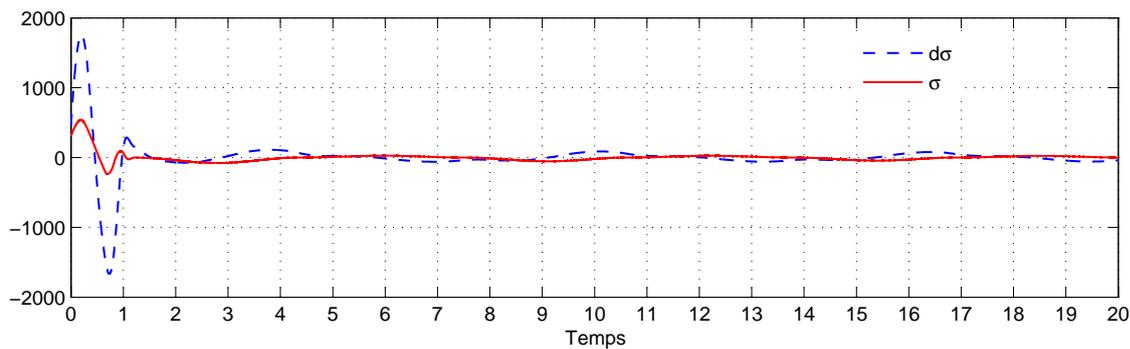


FIGURE 4.20 – La surface de glissement σ (ligne continue) et sa dérivée $\dot{\sigma}$.

La figure (4.21) représente la convergence vers zéro des trajectoires des erreurs quadratiques de position et de vitesse. Les deux signaux atteignent leur meilleure valeur à exactement 1 seconde, ce qui représente l'un des objectifs de commande fixés. Nous constatons aussi que les trajectoires de σ , $\dot{\sigma}$, e^2 et \dot{e}^2 oscillent dans un voisinage très réduit de zéro après $t \geq t_f$.

La figure (4.22) représente le zoom des signaux de la figure (4.21). Nous concluons que les erreurs de poursuite en pourcentage sont inférieures respectivement à 2.1% pour la position et à 2.9% pour la vitesse.

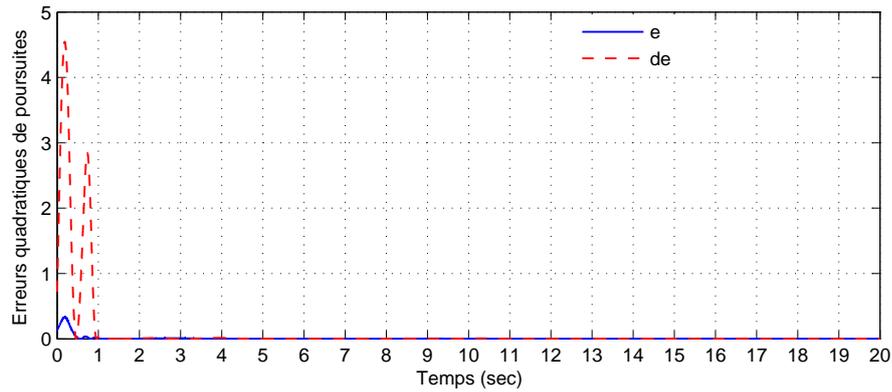


FIGURE 4.21 – Erreur quadratique de poursuite en position (ligne continue) et de vitesse (ligne discontinue).

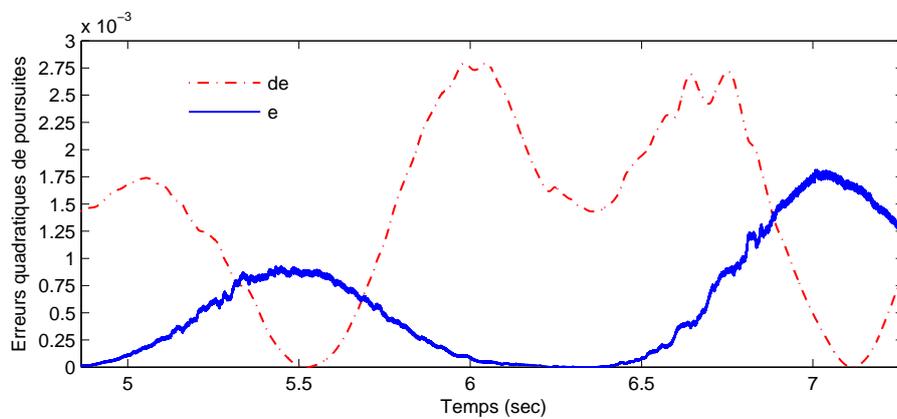


FIGURE 4.22 – Zoom sur la trajectoire des erreurs quadratiques de poursuites.

La figure (4.23) montre le signal de commande appliqué en tension. On remarque l'absence de toute variation brusque et que les sollicitations de commande au démarrage sont raisonnables. Les seuls points de variations correspondent aux instants d'application de la force d'opposition manuelle. Après $t = t_f = 1 \text{ sec}$, le signal de commande sera contraint dans l'intervalle ouvert $] -10, 10[\text{ (volt)}$. Comme la condition d'invariance $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ est purement théorique, la tension appliquée au moto-réducteur est optimisée grâce à la valeur optimale de $u_1^*(\sigma)$ et $u_2^*(\sigma)$.

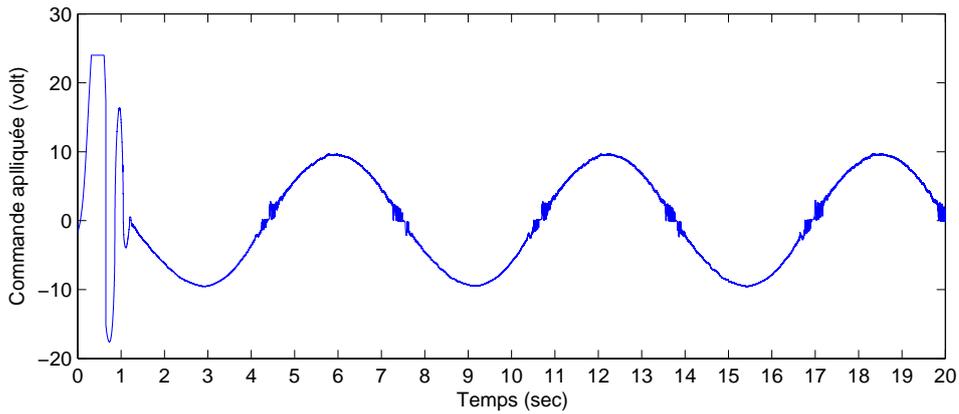


FIGURE 4.23 – Le signal de commande.

La poursuite de trajectoires en position et vitesse, comme illustré par les figures (4.24) et (4.25), reflète une précision de poursuite avec un temps de réponse bref. Les états $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du système rejoignent leurs références et restent alignés à $t \geq t_f$.

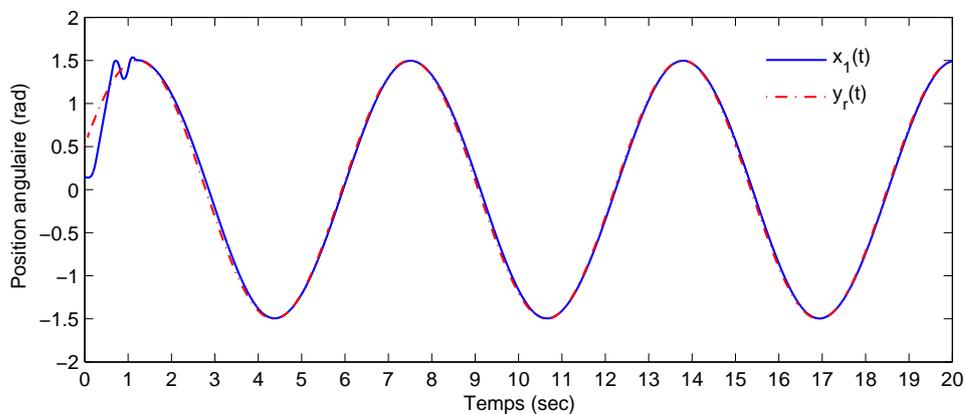


FIGURE 4.24 – La poursuite en position du bras ($x_1(t)$ ligne continue, $y_r(t)$ ligne discontinue).

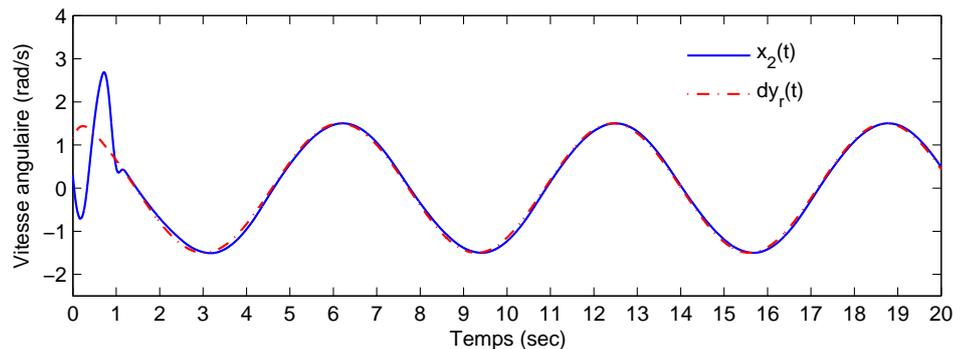


FIGURE 4.25 – La poursuite en vitesse du bras ($x_2(t)$ ligne continue, $\dot{y}_r(t)$ ligne discontinue).

4.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons validé les lois de commande (2.31) et (3.21) en temps réel sur un banc d'essais dont nous disposons. L'expérimentation a été réalisée sur moteur réducteur associé à un bras pouvant entraîner une charge. Nous avons utilisé dans un premier temps la commande (2.31), ensuite la commande (3.21). Malgré la présence de plusieurs formes d'incertitudes et de perturbations, les deux commandes proposées ont assuré une bonne poursuite de trajectoire en vitesse et en position du système. En plus d'assurer la robustesse en boucle fermée, elles ont pu faire converger les erreurs de poursuites, la surface de glissement et sa dérivée au voisinage de zéro. Les résultats obtenus nous ont permis de montrer que la condition d'invariance n'est réalisable que théoriquement. Grâce aux deux systèmes adaptatifs flous nous avons pu optimiser le signal de commande. Malgré la pauvre information dont ils ont besoin (uniquement connaître la valeur de la variable de glissement), ils délivrent la valeur optimale des gains de commande. Ceci nous permet de réaliser une commande par modes glissants d'ordre deux assurant la convergence des erreurs et des surfaces aux voisinages de zéro, avec un coup minimal. Les résultats de l'implémentation nous affirment qu'avec un nombre limité de modèles locaux émergés dans quelques règles floues est suffisant pour reproduire le comportement de tout un système, ou d'au moins l'approcher.

Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse, nous avons traité le problème de suivi de trajectoire des systèmes non linéaires dont le modèle nominal est reconstruit à l'aide d'un système flou de type-2 TS. Cette contribution traite principalement la synthèse de commande robuste pour la classe des systèmes incertains et perturbés. Les approches élaborées se basent sur un mélange de trois concepts et techniques, à savoir les systèmes flou de type-2 pour leur aptitude à prendre en compte la modélisation d'incertitudes, les modes glissants d'ordre deux qui nous permettent d'avoir plus de précision, d'atténuer le chattering et de minimiser le nombre de capteurs nécessaires pour la mise en oeuvre de la commande. Ensuite, l'*integral sliding mode* a été introduit pour résoudre le problème du choix du temps de convergence et pour garantir une arrivée sur la surface de glissement en un temps final choisi à priori. Les commandes proposées sont construites à base d'un modèle nominal flou type-2 TS, qui exploite les modèles linéaires du système autour de certains points de fonctionnement.

Dans le chapitre un, nous avons mené une étude bibliographique, partant du concept de la logique floue type-2 jusqu'à la synthèse d'un modèle nominal flou type-2 TS, ce qui nous a permis de présenter un état de l'art sur les principaux résultats de la littérature concernant l'usage des systèmes flous. Dans cette partie, nous avons détaillé les différentes parties et étapes pour la construction d'un système flou type-2. Ensuite, nous nous sommes focalisés sur la construction d'un modèle nominal d'un système non linéaire incertain. Le choix s'est posé sur l'usage d'un système flou type-2 TS pour reproduire le comportement nominal. Ce dernier exploite les modèles locaux linéaires du système autour de certains points de fonctionnement. Le modèle nominal flou a été exploité par la suite dans les différentes approches que nous avons développées.

Après un aperçu sur le concept et les systèmes flous type-2, dans le chapitre deux,

nous avons abordé le problème de poursuite de trajectoires des systèmes non linéaires incertains. Cette partie vise à montrer l'intérêt de l'usage d'une commande à base des modes glissants. Dans un premier temps, nous avons détaillé la synthèse d'une commande par modes glissants d'ordre un. Les problèmes majeurs dont souffre cette méthode, ont été cités ainsi que les solutions qui sont proposées dans la littérature. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux modes glissants d'ordres supérieurs, qui représentent une généralisation des modes glissants classiques. Parmi les différentes catégories, les algorithmes de commande à base des modes glissants d'ordre deux sont largement distingués. En raison de ses performances, l'algorithme du Super-Twisting a fait l'objet principal de notre étude. Sa grande réputation est dû à sa robustesse et la non nécessité d'information sur la première dérivée de la surface de glissement. Cependant, l'étude menée dans cette partie a montré :

- Qu'il atténue mais n'élimine pas le chattering.
- Comme tout algorithme de la même catégorie, la valeur optimale des gains de commande est difficile à déterminer, bien qu'elle ait un impact sur l'optimisation de l'énergie du signal de commande et même sur la stabilité de la boucle fermée.

Pour résoudre ce problème, nous avons substitué les deux termes du Super-Twisting par deux systèmes flous type-2 adaptatifs, qui conservent la structure originale de l'algorithme. Ces deux systèmes ont comme unique entrée la surface de glissement et délivrent en sortie à chaque instant la valeur optimale des gains de commande. Ensuite, nous avons généralisé cette approche au cas des systèmes non linéaires multivariables. Deux études de comparaisons ont été menées sur deux exemples de simulation pour valider les approches et montrer leur efficacité par rapport à l'algorithme d'origine.

Pour améliorer les performances et résoudre le souci du choix du temps de convergence, qui apparaît dans la loi de commande des approches proposées, dans le chapitre trois, nous avons introduit le concept de l'*Integral Sliding Mode*. Avec cette nouvelle méthode, la commande se compose de deux parties : une partie discontinue qui force l'établissement d'un régime glissant sur la surface dite intégrale et assure la robustesse de la boucle fermée. L'autre partie, issue d'une commande optimale par retour d'état stabilise à zéro la dynamique d'ordre r de la représentation d'état de la surface et de ses dérivées. Ainsi, la

nouvelle surface de glissement va être augmentée en lui rajoutant un terme de correction dit intégral. La composante continue de commande, grâce à un terme de forçage qui lui est associé, permet de fixer à priori le temps d'arrivée sur la surface de glissement. Une fois la valeur initiale de la surface et de ses dérivées sont calculées, la manipulation de la transition entre phase d'approche et de glissement est achevée en optimisant un critère quadratique. L'approche proposée est ensuite généralisée au cas des systèmes non linéaires multivariables. Pour valider les deux approches, elles ont été appliquées pour commander en poursuite les deux exemples de simulation du chapitre deux.

Le chapitre quatre a été consacré à la validation expérimentale des deux contributions du chapitre deux et trois, qui sont destinées aux systèmes mono-entrée mono-sortie. Les implémentations en temps-réel, ont été réalisées sur un banc d'essais, qui a été réalisé dans notre laboratoire (Composante Auto du CRestic). Les résultats ont permis de confirmer ceux obtenus par simulations. Les erreurs de poursuite en vitesse et en position ne dépassent pas respectivement 3.5% et 2.5%. La méthode à base de l'intégral sliding mode permet d'arriver au voisinage de la surface et d'y rester exactement à l'instant final fixé, ce qui a permis d'améliorer la précision et de réduire les erreurs de poursuite en vitesse à 2.9% et celle de position à 2.1%.

Par ailleurs, un certain nombre de perspectives sont envisageables à ce travail. A court-terme, il s'agit d'intégrer un observateur, dans le cas où les états du système activant les prémisses du modèle nominal flou ne sont pas disponibles à la mesure.

Les travaux menés dans cette thèse pourront être étendus à tous les algorithmes de commande à base des modes glissants d'ordre deux. De nos jours, il n'y a aucune méthode qui a été proposée pour le calcul des valeurs optimales des gains de commandes. L'adaptation de nos approches se fera en tenant compte de la structure de chaque algorithme afin de conserver ses qualités de robustesse et de stabilité.

Au niveau des commandes par modes glissants à temps fini de convergence en général, et pour l'approche proposée dans le chapitre trois en particulier, nous envisageons de proposer une méthode analytique pour le calcul de la valeur optimale du temps final de convergence. Car à notre connaissance, la seule orientation et explication valable concernant son choix dans la littérature est : "Théoriquement le choix du temps de convergence n'est pas

limité tant qu'il est fini. Cependant, un choix d'une valeur petite engendre une commande à grande amplitude. D'un point de vue pratique, on doit le lier aux limitations physiques de la commande et des dynamiques du système à commander" [LPG07],[GPBG09]. Le calcul se fera avec une étape en amont lors du calcul de la valeur initiale du terme de forçage. La méthode sera à base du calcul des variations avec une fonction coût quadratique à minimiser. Ce calcul a été utilisé par la communauté des systèmes à événements discrets et hybrides, pour le calcul des instants optimaux de commutations des systèmes hybrides à commutations commandées [Ben00],[Man08],[Gap05].

A

Banc d'essais

A.1 Module dSPACE DS1104

Le module dSPACE 1104 est un produit de la société dSPACE, il se compose de deux parties :

1. Une carte d'interface équipée d'un processeur DSP reliant le panneau de contrôle à l'ordinateur. Elle permet l'acquisition des données qui seront traitées sur le calculateur, afin de les renvoyer sur les autres éléments du banc (voir figure (A.1)).
2. Un panneau de contrôle composé de 16 prises BNC permettant de convertir en numérique des données analogiques avant de les transmettre à la carte. Il contient aussi 16 sorties délivrant en analogique les signaux numériques issus de la carte. Sur le panneau on trouve également une connexion MLI, deux connexions pour codeur et une connexion entrée-sortie numérique, deux connexions séries RS232 et RS422 (voir figure (A.2)).



FIGURE A.1 – Carte dSPACE DS1104 R&R.

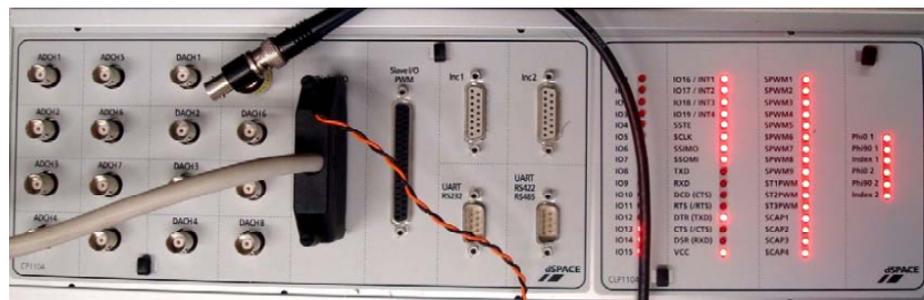


FIGURE A.2 – Panneau de contrôle dSPACE DS1104.

A.2 Amplificateur de tension

Un amplificateur de gain égal à trois a été introduit entre le panneau et le moteur à courant continu (voir figure (A.3)). Ce dispositif intermédiaire nous a permis de résoudre le problème de rapport de tension. En effet, le module dSPACE fournit uniquement une tension incluse dans l'intervalle $[-10, 10]$ (*volts*), alors que le moteur accepte une alimentation entre -24 (*volts*) et 24 (*volts*). De plus, il ne fournit que des courants faibles.

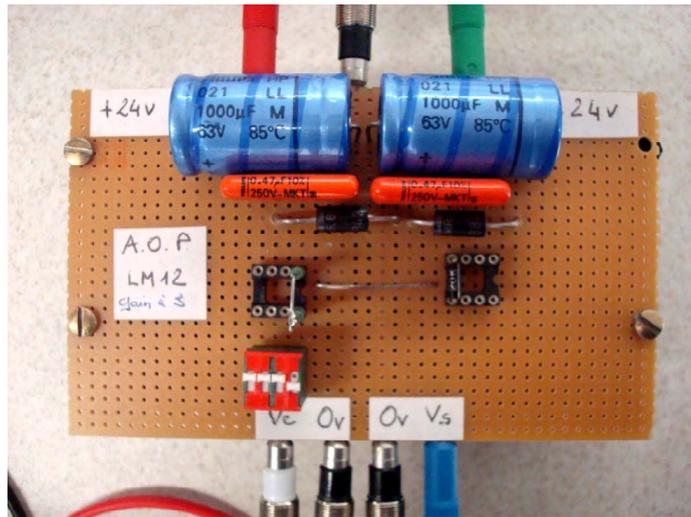


FIGURE A.3 – Amplificateur de tension.

A.3 Capteur de position

La seule information dont on dispose sur le moteur (éventuellement le bras) est la position. Cette donnée nous est délivrée par un codeur absolu. La mesure est délivrée sous une forme numérique en codage gray sur 13 bits.

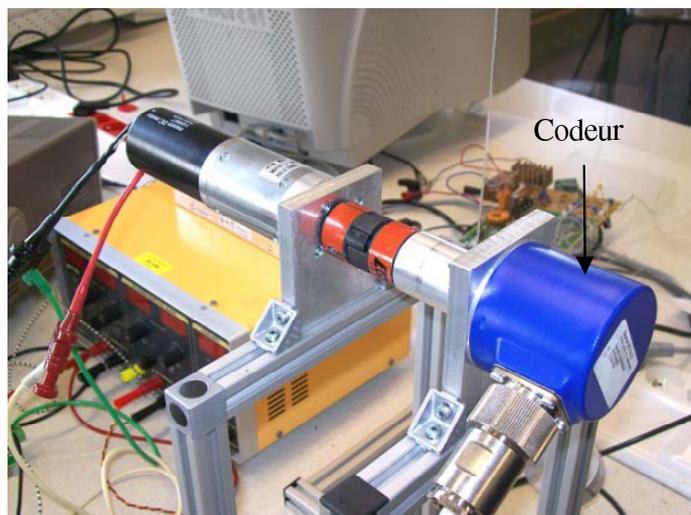


FIGURE A.4 – Moteur et codeur absolu.

Sur les figures (A.4) et (A.4), on peut visualiser le codeur et son branchement au

panneau de contrôle. Le point zéro qui correspond à la position verticale (0 rad) a été obtenu après quelques tests.

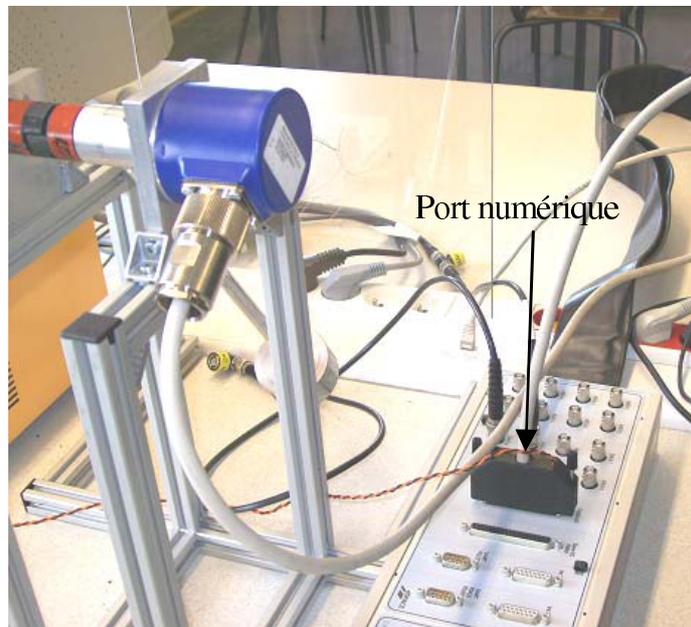


FIGURE A.5 – Branchement du codeur sur un port numérique.

A.4 Moto-réducteur

Beaucoup de machines électromécaniques nécessitent un couple de démarrage élevé. Le moteur à courant continu, par nature, possède une caractéristique couple/vitesse de pente importante, ce qui permet de vaincre un couple résistant élevé, et d'absorber facilement les à-coups de charges. D'autre part, la miniaturisation recherchée par les concepteurs trouve dans le moteur à courant continu une solution idéale, car il présente un rendement élevé, par rapport aux autres technologies. Un moteur à courant continu se compose de deux parties : électrique et mécanique. Cette machine avec le réducteur de vitesse (rapport de réduction N), peut être représentée par le schéma de la figure (A.6).

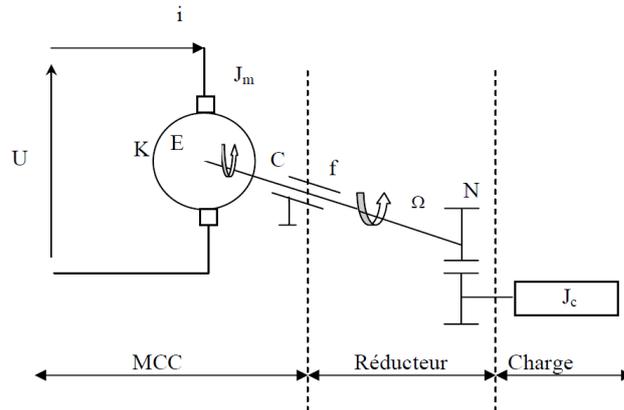


FIGURE A.6 – Schéma d'un moto-réducteur+charge.

La partie électrique du MCC est formée par :

- U : tension d'alimentation,
- i : courant dans l'induit du moteur,
- R : résistance de l'induit,
- L : inductance de l'induit,
- K : constance de f.c.é.m du moteur.

La partie mécanique du MCC est formée par :

- f : coefficient de frottement visqueux du moteur,
- J_m : inertie du moteur,
- N : rapport de réduction,
- J_c : inertie de la charge,
- C : couple électromécanique.

A.5 Caractéristiques techniques

La validation expérimentale est faite en considérant le moto-réducteur RE040G/PLG42S. Ses spécifications techniques sont données par la figure (A.7).

Motoréducteur Courant Continu
Motoréducteur RE40G/PLG42S
 POTENCIA : 0,58 Nm > 14 Nm



SPECIFICATIONS TECHNIQUES

		24V/0256
Rapport de réduction		256
Nombre d'étages		3
Rendement		0.7
Vitesse à vide	tr/mn	30
Vitesse en charge	tr/mn	29
Couple nominal	Nm	14
Courant nominal	A	2.7

GENERALITES

Commutation		Graphite
Nombre de lames au collecteur		13
Aimant		Terres rares néodym fer bore
Type de réducteur		Planétaire
Paliers		Roulements à billes
Matière des pignons :		
étage d'entrée		Delrin
étage de sortie		Métal
Charge axiale maximum	N	150
Jeu axial maximum	mm	0.3
Charge radiale maximum	N	250
à une distance de la face de :	mm	20
Jeu radial	mm	0
à une distance de la face de :	mm	25
Force de chassage	N	150
Jeu angulaire à vide	°	1
Jeu angulaire en charge	°	1.5
Température ambiante mini de fonctionnement	°C	0
Température ambiante maxi de fonctionnement	°C	60
Poids minimum	g	1020

FIGURE A.7 – Caractéristiques techniques du moto-réducteur RE40G/PLG42S.

L'ensemble moto-réducteur, bras et codeur peut être représenté par le schéma de la figure (A.8.)

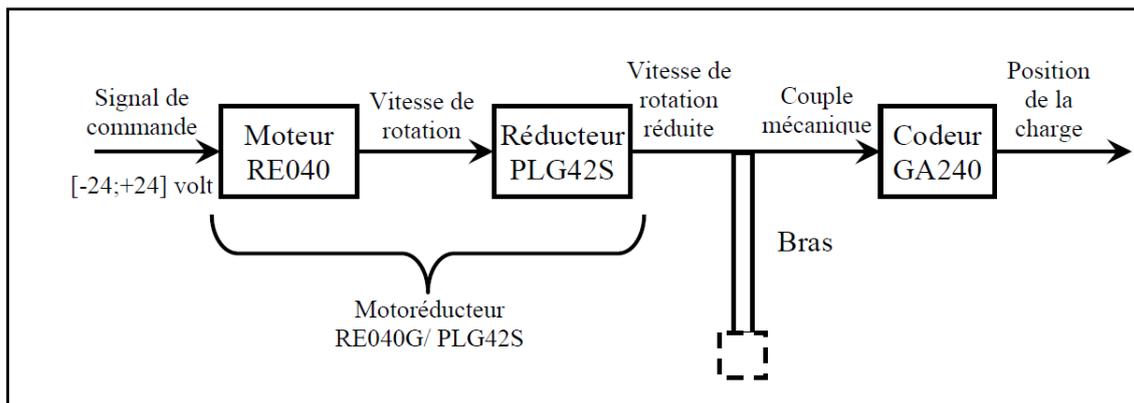


FIGURE A.8 – Caractéristiques techniques du moto-réducteur RE40G/PLG42S.

A.6 MATLAB et Simulink

Avant d'expliquer le côté logiciel, du côté matériel, nous avons utilisé un ordinateur HP doté d'un processeur Intel core duo de fréquence 3 GHz, 2 Go de mémoire et un système d'exploitation Windows XP pro SP3.

L'un des logiciels utilisés est MATLAB (version R2006b), ce produit très répandu, est avancé comme outil de calcul pour les problèmes scientifiques. L'extension graphique de MATLAB s'appelle SIMULINK. Cette partie permet de travailler avec des diagrammes et d'utiliser des fonctions prêtes ou personnalisées sous forme de blocs. Comme pour la lecture de la mesure de position du bras lorsque le moteur tourne à une certaine vitesse, nous avons établi le schéma bloc présenté par la figure (A.9).

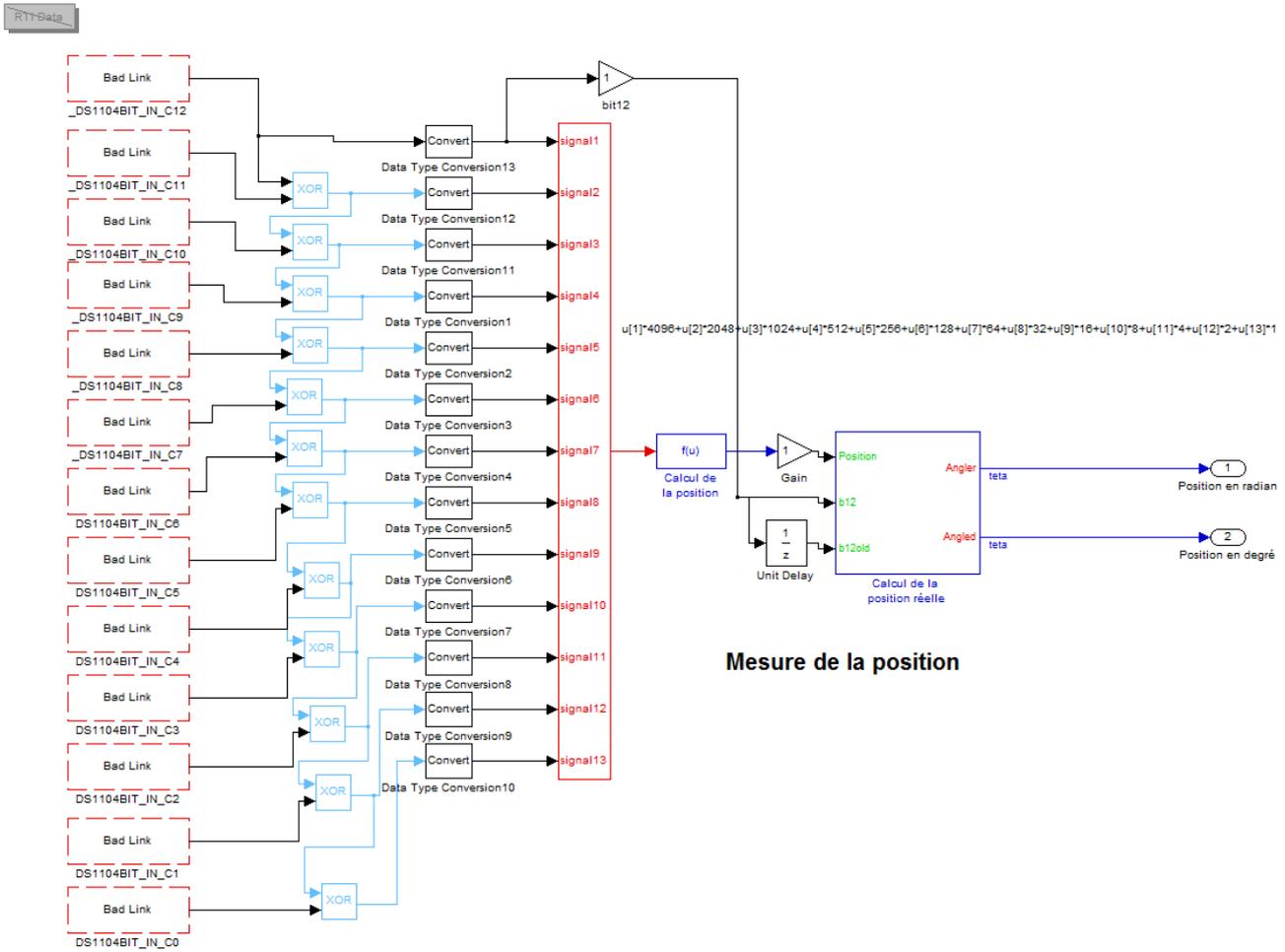


FIGURE A.9 – Le calcul de la position avec Simulink.

A.7 ControlDesk

Ce logiciel est considéré comme une plate-forme sur laquelle une simulation est gérée, tout comme MATLAB. À partir de cet environnement, nous pouvons lire, écrire, configurer, suivre et automatiser la partie expérimentale. La figure (A.10) représente une partie de l'usage de ce logiciel.

Le Sélecteur de fichiers affiche uniquement certains types de fichiers avec certaines extensions : .mdl (fichier de Modèle SIMULINK), .ppc (fichier Compilé d'objet pour être exécuté sur le DS1104) et .SDF (fichier de description du système). A noter que le fichier .SDF contient des références au fichier exécutable (de type soit .mdl ou .ppc) et au fichier

de description variable (TRC). Cette interface permet aussi de créer et d'afficher des mises en page, ainsi d'éditer en texte ou en langage C.

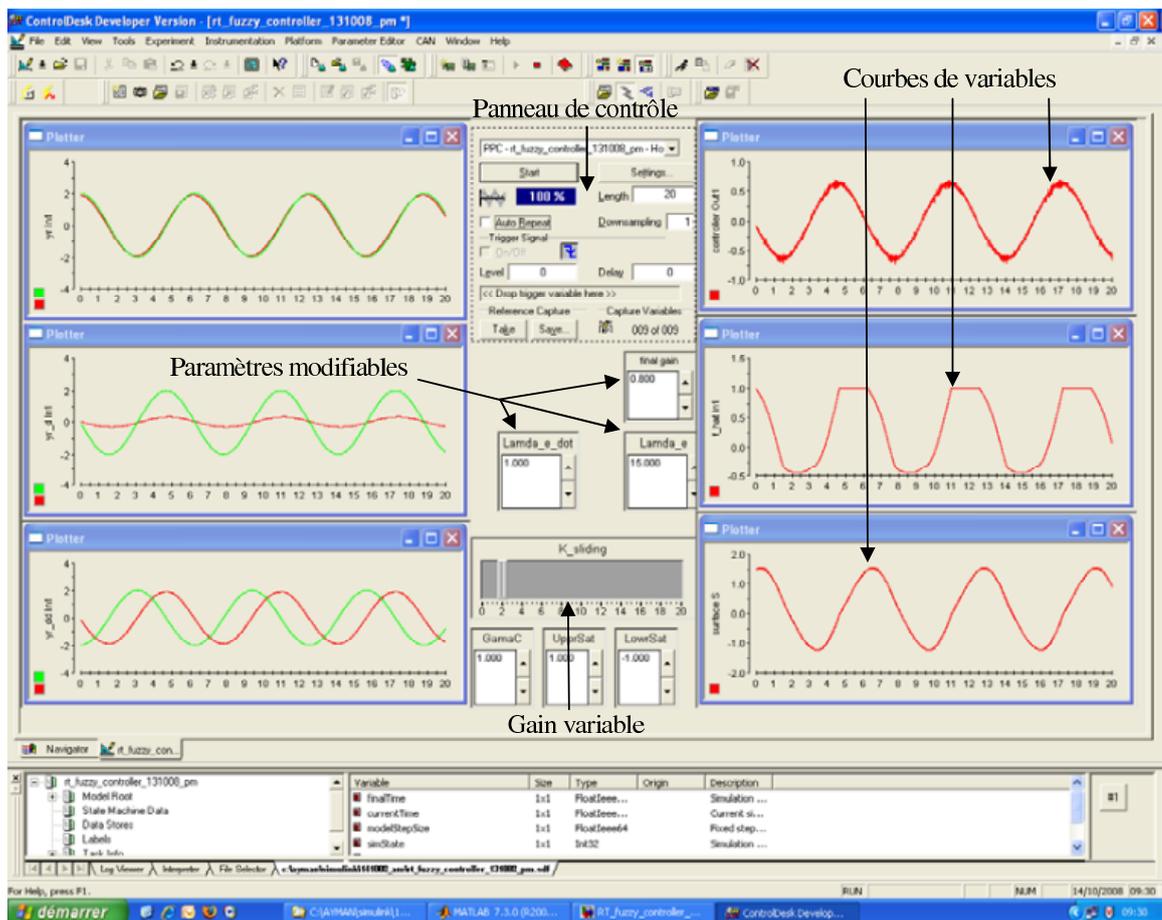


FIGURE A.10 – Une fenêtre de traitement avec ControlDesk.

Les deux parties, logiciel et matériel, utilisés pour la validation en temps-réel dans notre étude peuvent être liés comme donné par le schéma de la figure (A.11).

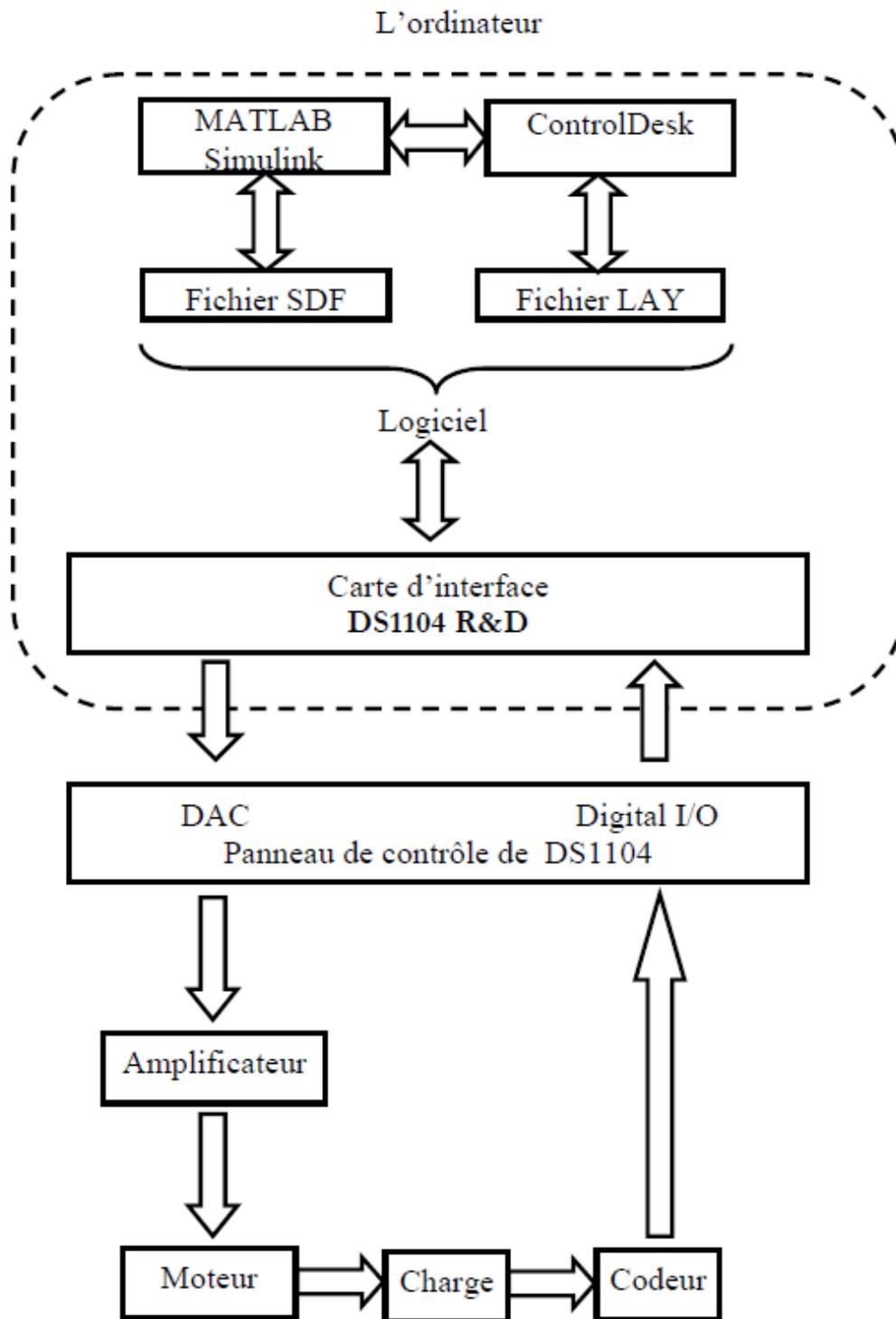


FIGURE A.11 – Schéma global du banc d'essais.

Bibliographie

- [AW89] K.J. Aström and B. Wittenmark. *Adaptive control*. Addison-Wesley, 1989.
- [BBKU85] A.G Bondarev, S.A Bondarev, N.E Kostyleva, and V.I Utkin. Sliding mode in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control*, 6 :49–64, 1985.
- [Ben00] C. Benoit. *Commande de systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Université d’Angers, 2000.
- [BFLU99] G. Bartolini, A. Ferrara, A. Levant, and E. Usai. On second order sliding mode controllers. *Variable structure systems, sliding mode and nonlinear control*, pages 329–350, 1999.
- [BFU97] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems. *Automatica*, 33(12) :2203–2212, 1997.
- [BI92a] F. Bouslama and A. Ichikawa. Application of limit fuzzy controllers to stability analysis. *Fuzzy sets and systems*, 49(2) :103–120, 1992.
- [BI92b] F. Bouslama and A. Ichikawa. Fuzzy control rules and their natural control laws. *Fuzzy Sets and Systems*, 48(1) :65–86, 1992.
- [BKT09] P. Baranyi, P. Korondi, and K. Tanaka. Parallel distributed compensation based stabilization of a 3-DOF RC helicopter : a tensor product transformation based approach. *Journal of Advanced Computational Intelligence Vol*, 13(1), 2009.
- [BMM10] M. Biglarbegian, W.W. Melek, and J.M. Mendel. On the stability of interval type-2 tsk fuzzy logic control systems. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 40(3) :798–818, 2010.

- [Bou00] R. Boukezzoula. *Commande floue d'une classe de systèmes non linéaires : application au problème de suivi de trajectoire*. PhD thesis, Université de Chambéry, 2000.
- [BR86] W. Baumann and W. Rugh. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(1) :40–46, 1986.
- [Bre10] V. Bregeault. *Quelques contributions à la théorie de la commande par modes glissants*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2010.
- [Buc90] J.J. Buckley. Fuzzy controller : further limit theorems for linear control rules. *Fuzzy Sets and Systems*, 36(2) :225–233, 1990.
- [Can03] R.H. Cannon. *Dynamics of physical systems*. McGraw-Hill, New York, 2003.
- [CGD⁺00] F.Z. Chaoui, F. Giri, J.M. Dion, L. Dugard, M. M-Saad, and L. Dugard. Direct adaptive control subject to input amplitude constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(3) :485–490, 2000.
- [CGM01] F.Z. Chaoui, F. Giri, and M. M'saad. Adaptive control of input-constrained type-1 plants stabilization and tracking. *Automatica*, 37(2) :197–203, 2001.
- [CM08] O. Castillo and P. Melin. *Type-2 fuzzy logic : theory and applications*. Springer Verlag, 2008.
- [CSGB07] K. Chafaa, L. Saidi, M. Ghanai, and K. Benmahammed. Indirect adaptive interval type-2 fuzzy control for nonlinear systems. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 2(2) :106–119, 2007.
- [CTU00] B.S. Chen, C.S. Tseng, and H.J. Uang. Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems : an LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(3) :249–265, 2000.
- [CZ72] S.S.L. Chang and L.A. Zadeh. On fuzzy mapping and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2(1) :30–34, 1972.
- [DFL05] J. Davila, L. Fridman, and A. Levant. Second-order sliding-mode observer for mechanical systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(11) :1785–1789, 2005.

-
- [dL00] P. de Larminat. *Contrôle d'état standard*. Hermès Science Publications, 2000.
- [EHZ06] N. Essounbouli, A. Hamzaoui, and J. Zaytoon. Fuzzy sliding mode control for a class of nonlinear continuous systems. *International Journal of Computer Applications in Technology, Inderscience*, 25(2) :174–182, 2006.
- [EKL86] S.V. Emelyanov, S.K. Korovin, and L.V. Levantovskiy. A drift algorithm in control of uncertain processes. *Pob. Control Info. Theory.*, 15(6) :425–438, 1986.
- [EKL96] S.V. Emel'yanov, S.K. Korovin, and A. Levant. High-order sliding modes in control systems. *Computational Mathematics and Modeling*, 7(3) :294–318, 1996.
- [Ess04] N. Essounbouli. *Commande adaptative floue robuste des systèmes non linéaires incertains*. PhD thesis, CReSTIC, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2004.
- [FA88] A.F. Filippov and F.M. Arscott. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, volume 18. Springer, 1988.
- [FGT07] L. Foulloy, S. Galichet, and A. Titli. *Commande floue 2 : de l'approximation à l'apprentissage (Traité IC2, série systèmes automatisés)[e-book]*. Hermes Scienes, 2007.
- [FK96] R.A. Freeman and P.V. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design : State-Space and Lyapunov Techniques*. Birkhauser, 1996.
- [FL02] L. Fridman and A. Levant. *Sliding Mode Control In Engineering*, chapter 3 : Higher-order Sliding Modes. Marcel Dekker, 2002.
- [Fur90] K. Furuta. Sliding mode control of a discrete system. *Systems & Control Letters*, 14(2) :145–152, 1990.
- [Gap05] M. Gapaillard. *Représentation, commande et idendification de systèmes hybrides*. PhD thesis, Université d'Angers, 2005.
- [Gas00] K. Gasso. *Identification des systèmes dynamiques non-lneaires : approche multi-modèles*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Lorraine, 2000.

- [GBM09] K. Guelton, T. Bouarar, and N. Manamanni. Robust dynamic output feedback fuzzy Lyapunov stabilization of Takagi-Sugeno systems—A descriptor redundancy approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(19) :2796–2811, 2009.
- [GEH08] K. Guesmi, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Systematic design approach of fuzzy pid stabilizer for dc-dc converters. *Energy Conversion and Management*, 49(10) :2880–2889, 2008.
- [GF95] S. Galichet and L. Foulloy. Fuzzy controllers : synthesis and equivalences. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 3(2) :140–148, 1995.
- [Gir07] A. Girin. *Contribution à la commande non linéaire d'un système électropneumatique pour une utilisation aéronautique : application sur un benchmark dédié*. PhD thesis, Université de Nantes et Ecole Centrale de Nantes, 2007.
- [GMBR99] K. Gasso, G. Mourot, A. Boukhriss, and J. Ragot. Optimisation de la structure d'un modèle de takagi-sugeno. *Actes des rencontres francophones LFA'99, Valenciennes*, pages 233–240, 1999.
- [GMR02] K. Gasso, G. Mourot, and J. Ragot. Structure identification of multiple models with output error local models. In *15th IFAC World Congress on Automatic Control, Barcelona, Spain*, 2002.
- [GPBG09] A. Girin, F. Plestan, X. Brun, and A. Glumineau. High-order sliding-mode controllers of an electropneumatic actuator : Application to an aeronautic benchmark. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 17(3) :633–645, 2009.
- [Hag04] H.A. Hagra. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 12(4) :524–539, 2004.
- [Haj97] S. Hajri. *Commande dynamique par mode glissant Application à la robustification des systèmes complexes*. PhD thesis, Université des sciences et technologie de Lille, 1997.
- [HBS04] K.M. Hangos, J. Bokor, and G. Szederkényi. *Analysis and control of nonlinear process systems*. Springer Verlag, London, 2004.

-
- [HEBZ04] A. Hamzaoui, N. Essounbouli, K. Benmahammed, and J. Zaytoon. State observer based robust adaptive fuzzy controller for nonlinear uncertain and perturbed systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics*, 34(2) :942–950, 2004.
- [HEH⁺11] A. Hussain, N. Essounbouli, A. Hamzaoui, F. Nollet, and J. Zaytoon. Type-2 fuzzy sliding mode control without reaching phase for nonlinear system. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 24(1) :23–38, February 2011.
- [HEZ03] A. Hamzaoui, N. Essounbouli, and J. Zaytoon. Fuzzy sliding mode control for uncertain siso systems. In *IFAC Conf. on Intelligent Control Systems and Signal Processing*, pages 233–238, Faro, Portugal, April 2003. Elsevier-Oxford.
- [HEZ04] A. Hamzaoui, N. Essounbouli, and J. Zaytoon. Fuzzy sliding mode control with fuzzy switching function for nonlinear uncertain mimo systems. *Journal of Systems and Control Engineering*, 218 :287–297, 2004.
- [HLL⁺08] M.Y. Hsiao, T.H.S. Li, J.Z. Lee, C.H. Chao, and S.H. Tsai. Design of interval type-2 fuzzy sliding-mode controller. *Information Sciences*, 178(6) :1696–1716, 2008.
- [HMEZ03] A. Hamzaoui, N. Manamanni, N. Essounbouli, and J. Zaytoon. Switching controller’s synthesis : combination of a sliding mode and h-infinity control by a fuzzy supervisor. In *IFAC Conf. on Analysis and Design of Hybrid Systems*, pages 247–252, Saint-Malo, June 2003. Elsevier.
- [Hus08] Ayman Hussain. *Contribution à la commande adaptative robuste par modes glissants*. PhD thesis, CReSTIC, Université de Reims Champagne-Ardenne, France, 2008.
- [HWR09] H.F. Ho, Y.K. Wong, and A.B. Rad. Adaptive fuzzy sliding mode control with chattering elimination for nonlinear siso systems. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 17(7) :1199–1210, 2009.
- [Isi95] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, 1995.
- [KG02] H.K. Khalil and J.W. Grizzle. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice-Hall, New Jersey, 2002.

- [KM98a] N. N. Karnik and J. M. Mendel. An introduction to type-2 fuzzy logic systems. Technical report, Univ. Southern California, 1998.
- [KM98b] N.N. Karnik and J.M. Mendel. Type-2 fuzzy logic systems : type-reduction. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, volume 2, pages 2046–2051. IEEE, 1998.
- [KML99] N.N. Karnik, J.M. Mendel, and Q. Liang. Type-2 fuzzy logic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6) :643–658, 1999.
- [Kos94] B. Kosko. Fuzzy systems as universal approximators. *IEEE transactions on computers*, pages 1329–1333, 1994.
- [KY96] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems : selected papers by Lotfi A. Zadeh*. World Scientific Pub Co Inc, 1996.
- [KZHE06] F. Khaber, K. Zehar, A. Hamzaoui, and N. Essounbouli. New stable adaptive fuzzy approach to control uncertain nonlinear siso systems. *International Journal of Systems Science*, 37(7) :437–445, June 2006.
- [LC02] W.S. Lin and C.S. Chen. Robust adaptive sliding mode control using fuzzy modelling for a class of uncertain mimo nonlinear systems. *IEE on Control Theory and Applications*, 149(3) :193–201, 2002.
- [Lev85] LV Levantovsky. Second order sliding algorithms : their realization. *Dynamics of Heterogeneous Systems*, pages 32–43, 1985.
- [Lev93] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *Int. J. Control*, 58(6) :1247–1263, 1993.
- [Lev98] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3) :379–384, 1998.
- [Lev01] A. Levant. Universal single-input-single-output (siso) sliding-mode controllers with finite-time convergence. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(9) :1447–1451, 2001.
- [Lev03] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76, 9(10) :924–941, 2003.

-
- [Lev05] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41(5) :823–830, 2005.
- [LKM00] Q. Liang, N.N. Karnik, and J.M. Mendel. Connection admission control in ATM networks using survey-based type-2 fuzzy logic systems. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C : Applications and Reviews, IEEE Transactions on*, 30(3) :329–339, 2000.
- [LM00] Q. Liang and J.M. Mendel. Interval type-2 fuzzy logic systems : Theory and design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5) :535–550, 2000.
- [LN09] HK Lam and M. Narimani. Stability analysis and performance design for fuzzy-model-based control system under imperfect premise matching. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 17(4) :949–961, 2009.
- [LPG04] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Higher order sliding mode control based on optimal linear quadratic control and integral sliding mode. In *IFAC symposium on nonlinear control systems NOLCOS'04, Stuttgart, Germany, 2004*.
- [LPG06] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control*, chapter Practical higher order sliding mode control : optimal control based approach and application to electromechanical systems., page 334. Springer-Verlag, 2006.
- [LPG07] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43(3) :531–537, 2007.
- [MA75] E.H. Mamdani and S. Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1) :1–13, 1975.
- [Mam74] E.H. Mamdani. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proc. Iee*, 121(12) :1585–1588, 1974.
- [Mam76] E.H. Mamdani. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6) :669–678, 1976.

- [Mam77] E.H. Mamdani. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *IEEE Transactions on Computers*, pages 1182–1191, 1977.
- [Man08] M. Manceur. Commande hybride optimale d'un pont roulant. Master's thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [MEH10a] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Commande floue type-2 par modes glissants d'ordre deux à gains adaptatifs d'un système multivariable incertain. In *Les rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, Lannion, France, November 2010.
- [MEH10b] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Mimo second order sliding mode fuzzy type-2 control. In *2010 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, Istanbul, TURKEY, October 2010.
- [MEH10c] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Robust smooth sliding type-2 interval fuzzy control for uncertain system. In *2010 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Barcelone, Espagne, July 2010.
- [MEH11a] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Commande par modes glissants d'ordre supérieur à gains adaptatifs flous type-2 sans phase d'approche. In *4èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS*, Marseille - France, June 2011.
- [MEH11b] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Higher order sliding fuzzy type-2 interval control for siso uncertain nonlinear systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Taipei, Taiwan,, June 2011.
- [MEH11c] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Two order sliding fuzzy type-2 control based on integral sliding mode for mimo systems. In *the 7th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and les Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, Aix-Les-Bains, France, July 2011.
- [MEH12] M. Manceur, N. Essounbouli, and A. Hamzaoui. Second Order Sliding Fuzzy Interval Type-2 Control For Uncertain System With Real Application. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(2) :262–275, 2012.

-
- [MEHN10] Malik Manceur, Najib Essounbouli, Abdelaziz Hamzaoui, and Frédéric Nollet. Commande floue robuste par modes glissants d'un système non linéaire incertain et perturbé. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nancy, France, June 2010.
- [Men95] J.M. Mendel. Fuzzy logic systems for engineering : a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 83(3) :345–377, 1995.
- [Men00] J.M. Mendel. Uncertainty, fuzzy logic, and signal processing. *Signal Processing*, 80(6) :913–933, 2000.
- [Men01] J.M. Mendel. *Uncertain rule-based fuzzy logic systems : introduction and new directions*. Prentice-Hall, 2001.
- [Men02] J.M. Mendel. An architecture for making judgments using computing with words. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 12(3) :325–336, 2002.
- [Men03] J.M. Mendel. Type-2 fuzzy sets : some questions and answers. *IEEE Neural Networks Society*, pages 10–13, 2003.
- [Men07] J.M. Mendel. Type-2 fuzzy sets and systems : an overview. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2(1) :20–29, 2007.
- [Men10] J.M. Mendel. A quantitative comparison of interval type-2 and type-1 fuzzy logic systems : First results. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–8. IEEE, 2010.
- [MJ02] J.M. Mendel and R.I.B. John. Type-2 fuzzy sets made simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(2) :117–127, 2002.
- [MMG⁺09] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, and TM Guerra. Output feedback LMI tracking control conditions with H [infinity] criterion for uncertain and disturbed TS models. *Information Sciences*, 179(4) :446–457, 2009.
- [MO08] J.A. Moreno and M. Osorio. A lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 2856–2861. IEEE, 2008.

- [Mon05] B. Monsouri. *Contribution à la synthèse de lois de commandes en poursuite de trajectoire pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno incertains*. PhD thesis, CReSTIC, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2005.
- [Mor01] Y. Morère. *Mise en oeuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, LAMIH-SF, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2001.
- [MP99] R.K. Mudi and N.R. Pal. A robust self-tuning scheme for PI-and PD-type fuzzy controllers. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 7(1) :2–16, 1999.
- [MW76] P.J. MacVicar-Whelan. Fuzzy sets for man-machine interaction. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6) :687–697, 1976.
- [NKMM01] N. N. Karnik and J. M. Mendel. Operations on type-2 fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2) :327–348, 2001.
- [NRJ09] N. Noroozi, M. Roopaei, and M.Z. Jahromi. Adaptive fuzzy sliding mode control scheme for uncertain systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(11) :3978–3992, 2009.
- [PB02] W. Perruquetti and J.P. Barbot. *Sliding mode control in engineering*. Marcel Dekker, 2002.
- [PGL05] F. Plestan, A. Glumineau, and S. Laghrouche. Multivariable practical higher order sliding mode control. In *IEEE Conference on Decision and Control CDC'05*, Sevilla, Spain, 2005.
- [PGL08] F. Plestan, A. Glumineau, and S. Laghrouche. A new algorithm for high-order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18(4-5) :441–453, 2008.
- [QTC11] S.C. Qu, Y. Tian, and C. Chen. Fuzzy PID Control for Intelligent Smartcar System with CCD Camera. *Key Engineering Materials*, 467 :433–436, 2011.
- [Rek64] Z. Rekasius. An alternate approach to the fixed terminal point regulator problem. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 9(3) :290–292, 1964.
- [RO03] Y. Sellami R. Ouiguini, R. Bouzid. Une commande robuste par mode glissant

-
- flou Appliquée à la poursuite de trajectoire d'un robot mobile non holonome. In *CISTEMA '2003, Tlemcen, Algeria, 2003*.
- [SB89] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*. Prentice-Hall, Inc., 1989.
- [SBV07] E.N. Sanchez, H.M. Becerra, and C.M. Velez. Combining fuzzy, PID and regulation control for an autonomous mini-helicopter. *Information Sciences*, 177(10) :1999–2022, 2007.
- [SK88] M. Sugeno and G. Kang. Structure identification of fuzzy model . *Fuzzy Sets and Systems*, 28(1) :15–33, 1988.
- [SL91] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*, volume 461. Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [Spi07] J.M. Spiewak. *Contribution à la coordination de flottille de véhicules sous-marins autonomes*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2007.
- [SS94] C.Y. Su and Y. Stepanenko. Adaptive control of a class of nonlinear systems with fuzzy logic. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 2(4) :285–294, 1994.
- [SSL07] Y.B. Shtessel, I.A. Shkolnikov, and A. Levant. Smooth second-order sliding modes : Missile guidance application. *Automatica*, 43(8) :1470–1476, 2007.
- [TCU01] C.S. Tseng, B.S. Chen, and H.J. Uang. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via TS fuzzy model. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 9(3) :381–392, 2001.
- [TIW98] K. Tanaka, T. Ikeda, and H.O. Wang. Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :250–265, 1998.
- [TM87] K.L. Tang and R.J. Mulholland. Comparing fuzzy logic with classical controller designs. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 17(6) :1085–1087, 1987.
- [TS85] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control. *IEEE Transactions on Systems Man, and Cybernetics*, 15(1) :116–132, 1985.

- [TS92] K. Tanaka and M. Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2) :135–156, 1992.
- [TS95] K. Tanaka and M. Sano. Trajectory stabilization of a model car via fuzzy control. *Fuzzy Sets and Systems*, 70(2-3) :155–170, 1995.
- [TT00] C.W. Tao and J.S. Taur. Flexible complexity reduced PID-like fuzzy controllers. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 30(4) :510–516, 2000.
- [TW01] K. Tanaka and H.O. Wang. *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. Wiley-Interscience, 2001.
- [US96] V. Utkin and J. Shi. Integral sliding mode in systems operating under uncertainty conditions. In *Decision and Control, 1996., Proceedings of the 35th IEEE*, volume 4, pages 4591–4596. IEEE, Kobe, Japan, 1996.
- [Utk77] V. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 22(2) :212–222, 1977.
- [Utk92] V.I. Utkin. *Sliding modes in control and optimization*, volume 2. Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [VL78] C. Van-Loan. Computing integrals involving the matrix exponential. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 23(3) :395–404, 1978.
- [Wan93] L.X. Wang. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 1(2) :146–155, 1993.
- [Wan94] L.X. Wang. *Adaptive fuzzy systems and control- Design and stability analysis(Book)*. Prentice Hall, 1994.
- [WM02] H. Wu and J.M. Mendel. Uncertainty bounds and their use in the design of interval type-2 fuzzy logic systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 10(5) :622–639, 2002.
- [WM09] D. Wu and J.M. Mendel. Enhanced karnik–mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(4) :923–934, 2009.

-
- [WM10] D. Wu and J.M. Mendel. Examining the continuity of type-1 and interval type-2 fuzzy logic systems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1–8, 2010.
- [WTG95] H.O. Wang, K. Tanaka, and M. Griffin. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. In *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems and The Second International Fuzzy Engineering Symposium*, volume 2, pages 531–538, 1995.
- [WTG96] H.O. Wang, K. Tanaka, and M.F. Griffin. An approach to fuzzy control of nonlinear systems : Stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 4(1) :14–23, 1996.
- [WYZ98] Y. Wu and X. Yuand Zhihong. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems. *Systems & Control Letters*, 34(5) :281–287, 1998.
- [YMW98] X. Yu, Z. Man, and B. Wu. Design of fuzzy sliding-mode control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 95(3) :295–306, 1998.
- [YUO99] K.D. Young, V.I. Utkin, and Ü. Ozgüner. A control engineer’s guide to sliding mode control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 7(3) :328–342, 1999.
- [Zad65] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3) :338–353, 1965.
- [Zad73] L.A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decesion process. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 3 :28–44, 1973.
- [ZLZ01] J.M. Zhang, R.H. Li, and P.A. Zhang. Stability analysis and systematic design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 120(1) :65–72, 2001.
- [ZZX00] K. Zeng, N.Y. Zhang, and W.L. Xu. A comparative study on sufficient conditions for takagi-sugeno fuzzy systems as universal approximators. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(6) :773–780, 2000.

Résumé

Le travail de la thèse traite le problème de suivi de trajectoires des systèmes non linéaires incertains, dont le modèle nominal est construit à l'aide d'un système flou TS (Takagi-Sugeno) de type-2. Ce dernier, exploite les modèles locaux du système obtenus par linéarisation autour de certains points de fonctionnement. La commande développée est basée sur les modes glissants d'ordre deux avec Super-Twisting. Nous avons proposé deux systèmes flous type-2 adaptatifs, qui ont comme unique entrée la surface de glissement, pour résoudre le problème du calcul de la valeur optimale des gains de la commande. Des résultats de simulation ont permis de comparer les performances de l'approche proposée avec la méthode classique. Ensuite, nous avons introduit le concept de l'intégral sliding mode pour imposer à priori le temps d'arrivée sur la surface de glissement. Les approches proposées sont généralisées aux cas des systèmes multivariables. Plusieurs résultats par simulation et implémentation en temps réel sont présentés pour illustrer les performances des approches développées.

Mots-clés: système non linéaire incertain, modes glissants d'ordre supérieur, *integral sliding mode*, logique floue type-2, système flou type-2 T-S, modèle nominal.

Abstract

This work deals with a fuzzy tracking control design for uncertain nonlinear dynamic system with external disturbances and using a TS (Takagi-Sugeno) fuzzy model description. The control is based on the Super-Twisting algorithm, which is among of second order sliding mode control. Moreover, two adaptive fuzzy type-2 systems have been introduced to generate the two Super-Twisting signals to avoid both the chattering and the constraint on the knowledge of disturbances and uncertainties upper bounds. These adaptive fuzzy type-2 systems has only one input : the sliding surface, and one output : the optimale values of the control gains, which are hard to compute with the original algorithm. Simulation results are obtained in order to compare the performances of the proposed method to that given by Levant. Then, we have introduced the integral sliding mode concept to impose in advance the convergence time and the arrival on the sliding surface. The proposed approaches are generalized to the case of multivariable systems. Several results in simulation and in real time using a benchmark are obtained to validate and to confirm the performances of our contributions.

Keywords: uncertain nonlinear system, higher order sliding mode, integral sliding mode, type-2 fuzzy logic, fuzzy type-2 T-S system , nominal model.

