



UNIVERSITÉ D'ORLÉANS



École doctorale MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE,  
PHYSIQUE THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES (MIPTIS)

Laboratoire : MAPMO

**THÈSE** présentée par :

**Minh Hoang LE**

soutenue le 26 novembre 2012

pour obtenir le grade de : Docteur de l'université d'Orléans

Discipline : Mathématiques Appliquées

**MODÉLISATION MULTI-ÉCHELLE ET SIMULATION NUMÉRIQUE  
DE L'ÉROSION DES SOLS DE LA PARCELLE AU BASSIN VERSANT**

**THÈSE dirigée par :**

CERDAN Olivier  
CORDIER Stéphane  
LUCAS Carine  
SOCHALA Pierre

Ingénieur de recherche, BRGM  
Professeur, Université d'Orléans  
Maître de conférence, Université d'Orléans  
Ingénieur de recherche, BRGM

**RAPPORTEURS :**

SAINTE-MARIE Jacques  
VAN-OOST Kristof

Directeur de recherche, Université Paris VI  
Professeur, Université catholique de Louvain

**JURY :**

CERDAN Olivier  
CORDIER Stéphane  
LAGREE Pierre-Yves

Ingénieur de recherche, BRGM  
Professeur, Université d'Orléans  
Directeur de recherche, Université Paris VI  
Président du jury

LUCAS Carine  
SAINTE-MARIE Jacques  
VAN-OOST Kristof

Maître de conférence, Université d'Orléans  
Directeur de recherche, Université Paris VI  
Professeur, Université catholique de Louvain



« *Tous les modèles sont faux, certains sont utiles*<sup>1</sup> »  
George Box.

---

<sup>1</sup>Cela ne signifie pas que les modèles ne sont pas importants, nous en utilisons tous les jours : ils le sont moins que les hommes.

Les dervises Shadok



POURQUOI FAIRE SIMPLE  
QUAND ON PEUT FAIRE  
COMPLIQUE ?!

# Remerciements

Cette thèse a été effectuée au BRGM et au MAPMO. Ces années furent pour moi une réelle expérience scientifique, professionnelle et humaine. Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont contribué à ma formation, qui m'ont conseillé et qui m'ont soutenu pendant ces années de thèse. Sans leur soutien, ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement Olivier CERDAN, Stéphane CORDIER, Carine LUCAS et Pierre SOCHALA d'avoir encadré cette thèse. La pertinence de leurs conseils ont permis de progresser toutes ces années. J'ai également très apprécié l'investissement d'Olivier DELESTRE tout au long de cette thèse. Sa rigueur dans l'analyse du travail et ses relectures attentives ont grandement contribué à la qualité de ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Jaques SAINT-MARIE et Kristof VAN OOST d'avoir rapporté cette thèse. Leurs commentaires ont permis d'améliorer la précision de ce mémoire. Merci également à Vincent GUINOT et Pierre-Yves LAGRÉE qui ont accepté de participer au jury.

L'avancée des travaux a été régulièrement présentée et discutée au cours des réunions du comité de pilotage de thèse. Je remercie Christophe BERTHON, Alexandre ERN, Pierre-Yves LAGRÉE, Olivier PLANCHON d'y avoir participé. Ces rencontres ont aussi été pour moi l'occasion de connaître leurs thématiques de recherche des uns et des autres et de confronter les démarches scientifiques. Je remercie également à Olivier BRIVOIS pour les discussions très utiles en mécanique des fluides qu'on a eu lors le travail bibliographique de la thèse.

Les expérimentations sur le terrain nécessitent une grande expérience et un savoir-faire très précieux. J'adresse tous mes remerciements aux membres de l'équipe DREAM du projet Biocrust, en particulier à Jean-François DESPARTS, Eliot DUCLUZEAU, Oumarou MALAM ISSA, de m'avoir passé la basse des données expérimentales ainsi que ses nombreux conseils concernant la gamme des valeurs de chaque paramètre. J'ai également bénéficié une échange extrêmement riche avec Frédéric DARBOUX sur le jeu de paramètre du modèle de ruissellement et d'érosion.

La programmation orienté objet en C++ du code (et son débogage !) représente une partie importante de la thèse. Un très grand merci Christian LAGUERRE, Hélène COULON pour ses conseils, ses encouragements, ses analyses attentives, sa disponibilité et sa gentillesse. J'espère que l'avenir nous permettra de poursuivre cette coopération.

J'ai aussi eu la chance à soutirer un maximum d'informations au cours de discussions plus ou moins informelles avec différents chercheurs croisés au cours de cette thèse. Un très grand merci à Tomas MORALES DE LUNA, Enrique FERNANDEZ NIETO et Jean DE DIEU

ZABSONRÉ de ses nombreux conseils, ses écoutes sur les questions de modélisation et de méthode numérique.

Marie-France GRESPIER, Anne LIGER, Marie-Laurence PONCET et Isabelle FRANCHET ont assurées les aspects administratifs de ce travail toujours dans la bonne humeur, merci à elles.

Enfin, je remercie à mes parents, ma famille et tous mes amis qui sont toujours à mes côtés pendant ces longues années études.

# Résumé

L'érosion hydrique est un phénomène naturel qui représente un risque important pour les espaces agricoles et les zones situées à l'aval : pertes en terre, coulées de boue, turbidité et pollution des eaux. L'érosion des sols résulte de nombreux processus qui jouent au niveau de trois phases : le détachement des particules, le transport solide et la sédimentation. La modélisation de ces processus se situe aux interfaces de domaines scientifiques variés et nécessite une approche multidisciplinaire. Le modèle à base physique, basé sur le principe de conservation, est reconnu comme un outil efficace pour prédire ce phénomène. L'objectif global de ce travail est d'étudier une modélisation multi échelle et de développer une méthode adaptée pour la simulation numérique du processus d'érosion à l'échelle du bassin versant.

Après avoir passé en revue les différents modèles existants, nous dérivons une solution analytique non triviale pour le système couplé modélisant le transport de sédiments par charriage. Ensuite, nous étudions l'hyperbolicité de ce système avec diverses lois de sédimentation proposées dans la littérature. Concernant le schéma numérique, nous présentons le domaine de validité de la méthode de splitting, pour les équations modélisant l'écoulement et celle décrivant l'évolution du fond. Pour la modélisation du transport en suspension à l'échelle de la parcelle, nous présentons un système d'équations couplant les mécanismes d'infiltration, de ruissellement et le transport de plusieurs classes de sédiments. L'implémentation et des tests de validation d'un schéma d'ordre élevé et de volumes finis bien équilibré sont également présentés. Ensuite, nous discutons sur l'application et la calibration du modèle avec des données expérimentales sur dix parcelles au Niger. Dans le but d'aboutir la simulation à l'échelle du bassin versant, nous développons une modélisation multi échelle dans laquelle nous intégrons le taux d'inondation dans les équations d'évolution afin de prendre en compte l'effet à petite échelle de la microtopographie. Au niveau numérique, nous étudions deux schémas bien équilibrés : le schéma de Roe basé sur un chemin conservatif, et le schéma avec reconstruction hydrostatique généralisée. Enfin, nous présentons une première application du modèle avec les données expérimentales du bassin versant de Ganspoel qui nécessite la parallélisation du code.

**Mots clés :** Ruissellement, érosion, charriage, suspension, modélisation multi échelle, taux d'inondation, système hyperbolique, équations de Saint-Venant avec porosité, modèle d'Hair-sine et Rose, méthode de volumes finis, schéma bien équilibré, calcul parallèle, MPI, SkelGIS.



# Abstract

Surface runoff and soil erosion are a natural phenomenon representing a significant risk to agricultural domain and downstream areas: loss of soil, turbidity and water pollution. Soil erosion is the result of many processes playing in three stages: detachment of particles, transport and sedimentation. Modelling of these processes locate at the interface of various scientific fields and requires a multidisciplinary approach. Physically-based model, relying on the principle of conservation, is recognized as an effective tool to predict this phenomenon. The overall objective of this thesis is to study a multiscale modelling and to develop a suitable method for the numerical simulation of soil erosion on catchment scale.

After reviewing the various existing models, we derive an analytical solution for the non-trivial coupled system modelling the bedload transport. Next, we study the hyperbolicity of the system with different sedimentation laws found in the literature. Relating to the numerical method, we present the validity domain of the time splitting method, consisting in solving separately the Shallow-Water system (modelling the flow routing) during a first time step for a fixed bed and updating afterward the topography on a second step using the Exner equation. On the modelling of transport in suspension at the plot scale, we present a system coupling the mechanisms of infiltration, runoff and transport of several classes of sediment. Numerical implementation and validation tests of a high order well-balanced finite volume scheme are also presented. Then, we discuss on the model application and calibration using experimental data on ten  $1 \text{ m}^2$  plots of crusted soil in Niger. In order to achieve the simulation at the catchment scale, we develop a multiscale modelling in which we integrate the inundation ratio in the evolution equations to take into account the small-scale effect of the microtopography. On the numerical method, we study two well-balanced schemes: the first one is the Roe scheme based on a path conservative, and the second one is the scheme using a generalized hydrostatic reconstruction. Finally, we present a first model application with experimental data of the Ganspoel catchment where the parallel computing is also motivated.

**Key words:** Overland flow, soil erosion, bedload, suspension, multiscale modelling, inundation ratio, hyperbolic system of conservation laws, Shallow-Water equations with porosity, Hairsine and Rose's model, finite volume method, well-balanced scheme, parallel computing, MPI, SkelGIS.



# Table des matières

|                                                                                    |           |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                                                                | <b>1</b>  |
| <b>1 Soil erosion and physically-based models: A review</b>                        | <b>7</b>  |
| 1.1 Process of soil erosion by water . . . . .                                     | 7         |
| 1.2 Overland flow modelling . . . . .                                              | 8         |
| 1.3 Infiltration modelling . . . . .                                               | 9         |
| 1.4 Erosion modelling . . . . .                                                    | 10        |
| 1.4.1 Mass-conservation equations for sediment . . . . .                           | 11        |
| 1.4.2 Threshold motion and settling velocity . . . . .                             | 11        |
| 1.4.3 Bedload sediment transport . . . . .                                         | 14        |
| 1.4.4 Suspended sediment transport . . . . .                                       | 16        |
| 1.4.5 Sediment transport capacity . . . . .                                        | 19        |
| 1.4.6 Rainfall detachment . . . . .                                                | 20        |
| 1.5 Conclusion . . . . .                                                           | 21        |
| <b>2 Theoretical studies and numerical analysis of bedload transport modelling</b> | <b>23</b> |
| 2.1 An analytical solution . . . . .                                               | 23        |
| 2.1.1 Solution of the equations . . . . .                                          | 24        |
| 2.1.2 Numerical experiments . . . . .                                              | 26        |
| 2.2 Domain of hyperbolicity . . . . .                                              | 26        |
| 2.3 Time-splitting method . . . . .                                                | 30        |
| 2.4 Numerical results . . . . .                                                    | 32        |
| 2.4.1 Description of the numerical schemes . . . . .                               | 33        |
| 2.4.2 Numerical tests . . . . .                                                    | 34        |
| 2.5 Conclusion . . . . .                                                           | 39        |

|                                                                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3 A numerical scheme for a multi-class suspended sediment transport model: derivation and validation on experimental data</b> | <b>43</b>  |
| 3.1 A multi-class suspended sediment transport model . . . . .                                                                   | 43         |
| 3.2 Numerical method . . . . .                                                                                                   | 45         |
| 3.2.1 Hydrostatic reconstruction method . . . . .                                                                                | 48         |
| 3.2.2 Second-order extension . . . . .                                                                                           | 50         |
| 3.2.3 Friction treatment . . . . .                                                                                               | 51         |
| 3.2.4 Erosion treatment . . . . .                                                                                                | 52         |
| 3.2.5 Erosion module . . . . .                                                                                                   | 54         |
| 3.3 Experiment design . . . . .                                                                                                  | 55         |
| 3.4 Numerical simulations and parameter calibration . . . . .                                                                    | 58         |
| 3.5 Conclusion . . . . .                                                                                                         | 65         |
| <b>4 Intégration du taux d'inondation pour la modélisation à l'échelle du bassin versant</b>                                     | <b>67</b>  |
| 4.1 Caractérisation de la microtopographie . . . . .                                                                             | 68         |
| 4.2 Interprétation probabiliste du taux d'inondation . . . . .                                                                   | 70         |
| 4.3 Équations d'évolution . . . . .                                                                                              | 72         |
| 4.4 Méthode numérique . . . . .                                                                                                  | 76         |
| 4.4.1 Schéma de Roe associé à un chemin conservatif . . . . .                                                                    | 80         |
| 4.4.2 Schéma avec reconstruction hydrostatique . . . . .                                                                         | 85         |
| 4.4.3 Condition aux limites . . . . .                                                                                            | 88         |
| 4.4.4 Tests numériques . . . . .                                                                                                 | 89         |
| 4.4.5 Extension à l'ordre 2 . . . . .                                                                                            | 94         |
| 4.5 Conclusion . . . . .                                                                                                         | 99         |
| <b>5 Un premier test sur le bassin versant de Ganspoel et parallélisation</b>                                                    | <b>101</b> |
| 5.1 Un premier test sur le bassin versant de Ganspoel . . . . .                                                                  | 101        |
| 5.1.1 Préparation des données . . . . .                                                                                          | 103        |
| 5.1.2 Résultat de la simulation . . . . .                                                                                        | 106        |
| 5.2 Moyens informatiques nécessaires . . . . .                                                                                   | 110        |
| 5.2.1 Du calcul séquentiel au calcul parallèle . . . . .                                                                         | 110        |
| 5.2.2 Calcul parallèle à l'aide de la librairie SkelGIS . . . . .                                                                | 111        |
| 5.3 Conclusion . . . . .                                                                                                         | 114        |
| <b>Conclusions et perspectives</b>                                                                                               | <b>117</b> |

---

|                                                  |            |
|--------------------------------------------------|------------|
| <b>Valorisations et compétences acquises</b>     | <b>121</b> |
| <b>A Importation du projet dans Code::Blocks</b> | <b>123</b> |
| <b>Bibliographie</b>                             | <b>130</b> |



# Introduction

L'érosion des sols se développe lorsque les eaux, venant de l'amont et/ou de la pluie ne pouvant plus s'infiltrer dans le sol, ruissellent sur la parcelle en emportant les particules de terre. Ce phénomène naturel représente un risque important pour les espaces agricoles et les zones situées à l'aval : pertes en terre, coulées de boue, turbidité et pollution des eaux. Il existe un besoin important de connaissance de la répartition spatiale de l'érosion des sols de la part des responsables de l'aménagement du territoire et des gestionnaires de l'environnement.

L'étude des processus d'érosion se situe aux interfaces de domaines scientifiques variés et nécessite une approche multidisciplinaire. Les caractéristiques des précipitations et des écoulements de surface constituent le premier déterminant de la réponse érosive. Les caractéristiques pédologiques de la surface déterminent directement les processus de détachement qui entraînent la perte du capital sol et sa dégradation au travers de la perte d'éléments essentiels affectant ses propriétés physiques et biochimiques. L'effet du relief qui affecte la nature et l'intensité de l'érosion, notamment au travers de facteurs comme la longueur, la convexité ou l'intensité de la pente. Enfin, en terrain agricole, les pratiques agricoles et les rotations culturales en interaction avec le climat participent à la dynamique saisonnière de l'érosion. Les facteurs et processus appartenant à ces différents domaines interagissent non linéairement dans l'espace et le temps, rendant complexe la formalisation des processus élémentaires de l'érosion [38].

L'érosion des sols résulte de nombreux processus qui jouent au niveau de trois phases : le détachement des particules, le transport solide et la sédimentation. Quelle que soit l'échelle d'étude, du mètre carré au bassin versant de centaines de milliers de kilomètres carrés, on retrouve partout ces trois phases de l'érosion, mais avec des intensités différentes. Le phénomène d'érosion résulte de l'interaction entre de nombreux paramètres, dont certains sont permanents comme ceux relatifs au sol ou à la topographie, alors que d'autres évoluent dans le temps, comme l'occupation du sol, ou présentent un caractère aléatoire comme les précipitations [117]. La modélisation pose donc à la fois le problème de l'échelle et de la collecte de données.

Il existe une large palette de modèles pour simuler les processus d'érosion. Ces modèles diffèrent en termes de complexité, d'objectif, de description des processus élémentaires et de demande en données d'entrée. En général, on classe les modèles en trois grandes catégories, en fonction des processus physiques décrits par le modèle, des algorithmes décrivant ces processus et de la dépendance du modèle aux données d'entrée : *empirique ou statistique*, *conceptuel* et *à base physique*. Les différences entre les modèles ne sont pas forcément tranchées et la distinction entre les différentes classes reste donc subjective. Ces logiciels peuvent être composés de modules qui mélangent les différentes catégories de modèles.

Les études plus récentes sur la modélisation des processus de l'érosion se sont notamment tournées vers les modèles à base physique - les approches plus déterministes basées sur la description des processus physiques au travers de modèles mathématiques. L'avantage de ces types de modèles réside dans leur potentiel à décrire la dynamique des composants élémentaires de la réponse érosive. Par contre, il n'est ainsi pas du tout évident que tous les processus qui interviennent dans l'érosion des sols et leurs interactions complexes puissent être modélisés physiquement.

## Description générale

Cette thèse a été proposée afin d'étudier et de simuler les processus érosifs à l'échelle de la parcelle, ainsi qu'aux échelles du bassin versant. Ce travail, effectué au BRGM & au MAPMO depuis le mois de novembre 2009, s'inscrit dans l'optique d'une approche à base physique. Plus précisément, les processus d'érosion sont décrits à partir du principe de conservation (de masse et de quantité de mouvement). Le système obtenu, constitué par des équations aux dérivées partielles (EDP), est ensuite résolu par un schéma numérique adapté.

Le ruissellement d'eau de pluie est typiquement caractérisé par le fait que la couche d'eau est peu épaisse par rapport aux dimensions du domaine considéré (parcelle ou bassin versant). En général, ce type d'écoulement (à surface libre en eaux peu profondes) est souvent modélisé par les équations de Saint-Venant [50], d'où leur appellation d'anglaise "Shallow Water equations". Certains modèles simplifiés comme l'approximation d'onde cinématique ou celle de l'onde diffusive peuvent être utilisés afin de diminuer la complexité au niveau de résolution numérique et/ou de baisser le coût de la simulation. L'érosion et le transport de sédiments sont rajoutés *a posteriori* par une (des) équation(s) de conservation de la masse avec des termes sources représentant l'arrachement et la sédimentation.

Il y avait, dans les années récentes, des avancements importants sur la méthode numérique pour résoudre les équations de Saint-Venant, en particulier les schémas de volumes finis bien équilibrés (voir e.g [11, 19, 20, 26, 35, 54, 86, 122, 183]). D'autre part, la puissance de l'ordinateur a largement évoluée, surtout grâce aux techniques de calcul parallèle, permettant d'envisager les gros calculs. Alors dans l'esprit "pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué", nous avons l'opportunité d'aboutir à une modélisation plus déterministe des processus érosifs pour laquelle l'écoulement est décrit par les équations de Saint-Venant et pas par une forme simplifiée. Ensuite, nous intéressons au développement d'un code parallèle afin de profiter de manière efficace des ressources de calcul existantes.

Les équations de conservation de masse ajoutées au système de Saint-Venant afin de décrire l'érosion, sont établies en fonction du mode de transport de sédiments. Pour les faibles vitesses du cours d'eau, rien ne se passe au fond et les matériaux solides restent au repos. Pour les vitesses plus élevées, les matériaux solides se déplacent sur le fond en roulant, en glissant ou en effectuant des bonds successifs. Les grains se déplacent *à une vitesse nettement inférieure à celle de l'eau*. Ce phénomène est appelé charriage. Pour des vitesses encore plus élevées, les matériaux prélevés sur le fond sont emportés par le courant. Les grains se déplacent *à la vitesse de l'eau au voisinage du grain*. Ce phénomène est appelé transport en suspension. Pour une vitesse donnée, il y a simultanément transport par charriage des matériaux les plus lourds et transport en suspension des matériaux plus légers. Dans les rivières à graviers, le transport solide se fait essentiellement par charriage ; mais dans les rivières à sable ou sur les

sols cultivés, le transport par suspension peut constituer la quasi-totalité du transport (voir figure 1).

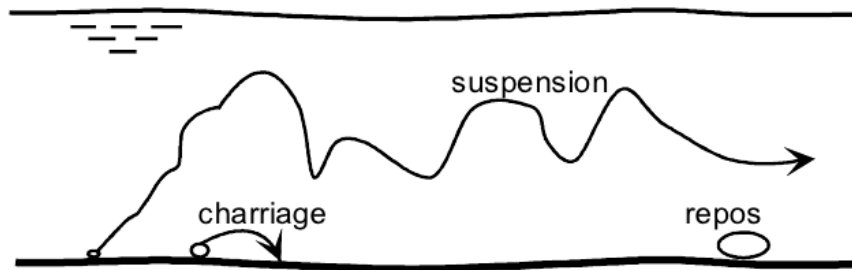


FIGURE 1 – Mode de transport solide (dessin de Degoutte [52]).

Pour le cas où le transport par charriage est majeur, l'érosion est souvent modélisée par le système couplé constitué des équations de Saint-Venant et de celle d'Exner. Le flux solide est donné par des lois empiriques. Ce type d'érosion a particulièrement attiré l'attention des physiciens et des numériciens ces dernières années (voir e.g. [40, 58, 59, 90, 114]). Plusieurs schémas numériques ont été proposés (voir e.g. [12, 36, 57]). Nos contributions à ce thème consistent à : (i) dériver une nouvelle solution analytique non triviale, (ii) étudier l'hyperbolicité du système couplé de Saint-Venant & Exner, (iii) clarifier le domaine de validité de la technique de *splitting*.

Contrairement au cas de l'érosion par charriage, la modélisation des processus d'érosion liés au transport en suspension reste encore peu envisagée par la communauté mathématique et numérique malgré ses vastes applications. En effet, ce type d'érosion est prépondérant pour les surfaces agricoles avec le ruissellement Hortonien. Il existe une multitude de logiciels permettant la modélisation de ce type d'érosion pour laquelle les lois de détachement et de sédimentation sont souvent empiriques. Certains logiciels ont été développés depuis les années 90 comme LISEM, WEPP, EUROSEM, PSEM\_2D, etc, mais plutôt par des non-numériciens. A l'exception de PSEM\_2D, la plupart de ces logiciels décrivent le ruissellement par l'approximation d'onde cinématique. La direction de l'écoulement d'une cellule à l'autre est alors déterminée de manière intuitive en fonction de la topographie de ses 8 voisines. Les schémas numériques utilisés sont souvent du type différence finis et garantissent très rarement la positivité de la hauteur d'eau.

Très récemment (en 2009), Heng et al. [95] ont considéré un modèle assez avancé : un système couplé des équations de Saint-Venant 1D avec plusieurs équations de conservation de masse pour décrire le transport en suspension de multi-classes de sédiments à l'échelle de la parcelle. Les termes source représentant le détachement et la sédimentation sont données par les équations d'Hairsine & Rose [91, 92]. Un schéma du type MUSCL-hancock a été développé et validé. Motivé par cette approche, nous avons développé un système couplé pour le cas 2D. Sur la base du code FullSWOF\_2D, développé dans le cadre de la thèse de Delestre [53], nous avons implémenté et validé un schéma numérique bien équilibré avec reconstruction hydrostatique [11]. Le transport de sédiments est traité de manière couplé avec l'écoulement.

Ensuite, nous avons appliqué ce code sur des expériences effectuées sur 10 parcelles au Niger. Le résultat obtenu est très satisfaisant.

Afin de parachever la simulation des processus d'érosion par la suspension à l'échelle du bassin versant, nous avons étudié un modèle multi-échelles permettant d'intégrer le taux d'inondation de chaque cellule dans la simulation à l'échelle macroscopique. Cette approche nous conduit à utiliser les équations de Saint-Venant avec porosité pour décrire le ruissellement. Le taux d'inondation joue le rôle d'une porosité effective et isotrope de l'écoulement. Notons que les équations de Saint-Venant avec porosité sont souvent utilisées pour la modélisation macroscopique des inondations urbaines où le facteur de porosité représente le taux d'occupation du sol par les bâtiments. Dans ces applications, la porosité n'est qu'un paramètre spatial (voir e.g. [70, 87, 88, 97, 98, 163]). Cependant, le taux d'inondation dans notre cas évolue au cours du temps. Nous avons modifié les équations d'Hairsine et Rose afin de prendre en compte le taux d'inondation et ensuite les avons couplées aux équations de Saint-Venant avec porosité permettant de former un système complet modélisant l'érosion.

## Présentation des chapitres

Après avoir présenté les thématiques principales de cette thèse, nous détaillons ci-dessous le contenu de chacun des 5 chapitres qui la composent.

Tout d'abord, dans le **chapitre 1**, nous présentons une revue concernant le problème de modélisation des processus d'érosion des sols. Ce chapitre donne une description détaillée des différents modèles pour le ruissellement, l'infiltration, le transport par charriage ainsi que le transport en suspension. Nous rappelons certaines notions de base, comme le seuil de mise en mouvement, la capacité de transport, la vitesse de sédimentation, etc. En particulier, plusieurs lois empiriques pour calculer le débit solide, le taux de détachement par le ruissellement ou par l'effet splash de la pluie ont été présentées.

Le **chapitre 2** concerne les études théoriques et numériques du système modélisant le transport par charriage dont la version 1D la plus simple (sans frottement) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh\partial_x z_b, \\ \partial_t z_b + \partial_x q_b = 0. \end{cases}$$

Les solutions analytiques sont essentielles dans la phase de validation d'un schéma numérique. Cependant, les solutions exactes de ce système sont très rares dans la littérature. A nos connaissances, une solution asymptotique dérivée par Hudson [102] est souvent utilisée pour la validation des schémas numériques. Nous présentons tout d'abord la dérivation d'une nouvelle solution analytique non triviale de ce système.

Dans le même chapitre, nous discutons de l'hyperbolicité du système couplé pour différentes lois de débit solide (Grass, Meyer Peter & Müller, etc). En effet, il est bien connu que le système est toujours hyperbolique avec le débit solide de Grass (voir e.g. [103]), cependant la propriété de l'hyperbolicité n'a pas été clarifiée dans le cas d'un flux général. Nous avons montré la condition nécessaire et suffisante concernant cette propriété. Suite à cette étude, nous avons pu démontrer que l'hyperbolicité est toujours maintenue quand  $|u| < 6\sqrt{gh}$ , *i.e.*

six fois supercritique. Cette condition est souvent vérifiée par la plupart des écoulements dans la réalité.

Un autre sujet abordé dans ce chapitre est la validité du splitting. *i.e.* résoudre les équations de Saint-Venant sur le fond fixe puis mettre à jour l'évolution du fond par l'équation d'Exner. Grâce à l'étude de la structure de solution, nous avons montré, de manière théorique et numérique, que la condition de CFL pour les équations de Saint-Venant ne suffit pas à garantir la stabilité du système couplé et par conséquent le splitting peut produire des instabilités numériques. Une autre remarque importante est que le splitting n'est plus adapté dans le cas où l'écoulement devient supercritique, par exemple le cas des antidunes.

**Le chapitre 3** s'intéresse au développement et à la validation d'un modèle 2D complet modélisant l'érosion et le transport en suspension d'une multi-classe de sédiments

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = R - I_r, \\ \partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh(\nabla z_b + S_f), \\ \partial_t(hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i, \\ \partial_t m_i = d_i - e_{ri} - r_{ri}, \\ \partial_t z_b = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i). \end{cases}$$

Nous présentons étape par étape la construction du schéma numérique, ainsi que la mise en œuvre de la partie d'érosion comme un module de FullSWOF\_2D. L'application du code à la reproduction de l'érosion sur 10 parcelle au Niger avec des données expérimentales est présentée. Enfin, des travaux de calibration et d'étude de sensibilité ont été menés.

**Le chapitre 4** présente la partie la plus importante de cette thèse : la simulation à l'échelle du bassin versant. Nous montrons tout d'abord l'intérêt et la nécessité de la prise en compte du taux d'inondation, noté par la fonction  $a(h)$ , de la cellule dans la simulation à l'échelle macroscopique. En considérant la topographie exacte  $z_b(x, y)$  comme une variable aléatoire, nous donnons une interprétation probabiliste de  $a(h)$  comme la fonction de répartition de  $z_b$ .

Ensuite, nous avons modifié le système d'équations du chapitre 3 afin d'intégrer le taux d'inondation  $a$  permettant de prendre en compte la co-existence de la partie sèche et mouillée dans une même cellule lors la résolution numérique

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = R - I_r, \\ \partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a - gh(\nabla z_b + S_f), \\ \partial_t(hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = a(e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i), \\ \partial_t m_i = a(d_i - e_{ri} - r_{ri}) + (1-a)\tilde{e}_i, \\ \partial_t z_b = -\frac{a}{(1-\phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i). \end{cases}$$

Le système modifié a la forme d'un système hyperbolique de lois de conservation avec termes sources. De manière naturelle, la stratégie présentée dans le chapitre 3 pour coupler la pluie, l'infiltration, le frottement et l'érosion avec le ruissellement reste encore valable. Cependant, la construction d'un schéma numérique permettant d'une résolution propre de deux premières équations, modélisant le ruissellement (il s'agit d'équations de Saint-Venant avec porosité), présente deux difficultés majeures : la dépendance spatiale du flux et les produits

non-conservatifs apparaissant dans le terme source. Basé sur la théorie de chemin conservatif proposée par Dal Maso et al. [48], nous avons construit un schéma de Roe généralisé qui préserve au moins les états d'équilibre du lac au repos. Un schéma avec reconstruction hydrostatique est également implémenté et comparé avec le premier à l'aide des solutions analytiques. Étant donnés les résultats des tests et la complexité de la mise en œuvre, nous avons finalement adopté le schéma avec reconstruction hydrostatique pour notre application.

**Le chapitre 5** présente une première application du modèle développé au chapitre 4 sur la base de données expérimentales du bassin versant de Ganpoel en Belgique. Nous allons également aborder un travail effectué récemment dans le cadre du CEMRACS 2012, ainsi que ses perspectives concernant le développement d'un code parallèle à partir de la version séquentielle à l'aide de la librairie SkelGIS.

# Chapter 1

## Soil erosion and physically-based models: A review

### 1.1 Process of soil erosion by water

Soil erosion is the complex phenomenon affected by many factors such as climate, topography, soil characteristics, vegetation and anthropogenic activities such as cultivation practices. Erosion process can be described in three stages: detachment, transport and deposition. The detachment occurs when the flow shear stress or the kinetic energy of raindrop exceeds the cohesive strength of the soil particles. Once detached, the sediments can be transported downstream as non-cohesive sediment before its deposition. Raindrop impact and surface runoff are two of the most important detachment agents. During a rainfall event, raindrop contributes in detachment by changing the critical condition of particle detachment and increases the flow resistance. As flow depth increases in the downstream direction, raindrop impacts on erosion decreases.

Soil erosion is a two-phase process and there are important interactions between the water (liquid phase) and the sediment (solid phase) as in Fig. 1.1.

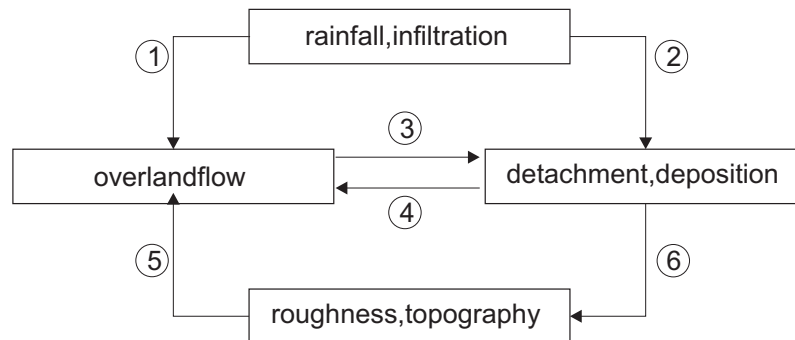


Figure 1.1: Recapitulate scheme of soil erosion processes.

(1) Rainfall and infiltration are the source and sink controlling the flow. (2) It takes part in detachment, transport and deposition of sediments *via* raindrop impact and rain-splash

when the water depth is limited. Infiltration has sometimes an important influence on the soil erodibility and can cause sediment generation. (3) The detachment of soil particles is mainly caused by the friction between water and the bed surface. (4,5) The flow is directly influenced by the presence of the solid phase also by the bed slope. (6) The topography and the roughness of the bed are finally modified by the detachment and the deposition of particles.

As soil erosion by water continues to be a serious problem throughout the world, the development of improved soil erosion prediction technology is required. With the increase of computing powers in the last years, there has been a rapid increase in the erosion and sediment transport simulations through the use of computer models. These models differ in terms of complexity, processes considered, and data required. In general, models can be classed in three different classes: empirical, conceptual or physically based. Empirical models are generally the simplest of all three model types. They are based primarily on the analysis of observations and characterize response from these data. Conceptual models are typically based on the representation of a catchment as a series of internal storages. They tend to include a general description of catchment processes, without including the specific details of process interactions. Physically based models are constructed by using the principle of conservation. In general, these equations are derived at small scale under physical assumptions. Physically based models often consider simultaneously sediment transport and deposition processes by using the sediment transport capacity concept [130]. For instance, the Universal Soil Loss Equation (USLE [178]) is a typical empirical model which is based on a large amount of data from the United States. The hydrological part of the Areal Nonpoint Source Watershed Environmental Response Simulation (ANSWERS [17]) is a conceptual process. The KINematic Runoff and EROSION model (KINEROS [179]) is a deterministic-conceptual model. The Water Erosion Prediction Project (WEPP [138]), the LIMburg Soil Erosion model (LISEM [49]) and the European Soil Erosion model (EUROSEM [135]) are some examples for physically based erosion and sediment transport models.

## 1.2 Overland flow modelling

Free-surface flows are often modeled by the Shallow Water Equations also called Saint-Venant equations which express the mass and momentum conservation. The Saint-Venant equations are obtained from the three dimensional incompressible Navier–Stokes equations by assuming the hydrostatic pressure and averaging on the vertical direction (see e.g. [68, 129]). In two space dimensions, the conservative form is

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h\vec{v}) = R - I_r, \\ \partial_t(h\vec{v}) + \operatorname{div}(h\vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla\left(\frac{gh^2}{2}\right) = -gh(\nabla z_b + S_f), \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $h$  is the water depth,  $\vec{v} = (u, v)$  the flow velocity,  $R$  the rainfall intensity,  $I_r$  the infiltration rate,  $g$  the gravitational acceleration and  $z_b$  the bed surface elevation. The friction term  $S_f$  can be estimated by several empirical relations. The most common used are the Chezy, the Darcy-Weisbach and the Manning-Strickler laws (see e.g. [97]):

$$S_f = \frac{|\vec{v}|}{C_h^2 h}, \quad S_f = \frac{f|\vec{v}|}{8gh} \quad \text{and} \quad S_f = \frac{n^2 |\vec{v}|}{h^{4/3}}, \quad (1.2)$$

where  $C_h$  is the Chezy's coefficient,  $f$  the Darcy-Weisbach's coefficient and  $n$  the Manning's coefficient.

Different terms of the momentum equation can be neglected in some cases leading to simplified forms. There are the kinematic wave, diffusive wave, steady wave and gravity wave (see e.g. [137]):

$$\underbrace{\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2)}_{\text{gravity wave}} + \underbrace{\partial_x\left(\frac{gh^2}{2}\right)}_{\text{diffusive wave}} = \underbrace{-gh(\partial_x z_b + S_f)}_{\text{kinematic wave}}.$$

Among these approximations, the diffusive wave and the kinematic wave are frequently used to simulate the overland flows because the acceleration terms in the momentum equation can be often neglected. The kinematic wave approximation is especially preferred in many hydraulic model since the only unknown is the water-depth. Nevertheless, this approximation is not valid if the bed slope is null.

### 1.3 Infiltration modelling

Infiltration is a three-dimensional process, but often treated as a one-dimensional problem. If the air pressure does not affect the subsurface flow, the more general model to describe the infiltration process is the Richards equation [150] which writes in the one-dimensional case is

$$\partial_t \theta(\psi) - \partial_z [K(\psi)(\partial_z \psi + 1)] = 0, \quad (1.3)$$

where the water content  $\theta(\psi)$  and the hydraulic conductivity  $K(\psi)$  are considered as functions of the hydraulic head  $\psi$  (see e.g. [30, 175]). In this approach, the infiltration capacity  $I_c$  is equal to the normal velocity at the soil surface estimated by the Darcy's law,

$$I_c(t) = -K(\psi) (\partial_z \psi + 1).$$

Note that all the water is infiltrated over the time interval  $[t, t + \delta t]$  if the water depth is smaller than  $I_c(t)\delta t$ . So, the infiltration rate  $I_r$  is equal to  $\min\{I_c(t), h(t)/\delta t\}$  over the time interval  $[t, t + \delta t]$ . The Richards equation is non linear and simplified models can be considered to reduce the complexity of numerical solver:

1. The Green–Ampt model [85] considers an homogeneous soil profile and a uniform distribution of the initial water content,

$$I_c(t) = K_s \left[ 1 + \frac{(h + \psi)(\theta_s - \theta_i)}{I(t)} \right], \quad (1.4)$$

where  $I(t) = \int_0^t I_c(\xi) d\xi$  is the cumulative infiltration quantity,  $K_s$  the saturated hydraulic conductivity of the soil,  $\theta_s$  the saturated water content and  $\theta_i$  the initial water content.

2. The Horton model [101] considers the infiltration capacity as a decreasing function of time which takes the limit value  $i_s$  at saturation,

$$I_c(t) = i_s + (i_0 - i_s) \exp(-kt), \quad (1.5)$$

where  $i_0$  is the initial infiltration,  $i_s$  the saturation infiltration and  $k$  a parameter.

3. The Philip model [146] solves the Richards equation by considering the wetting profiles and the cumulated infiltration as a power series in  $t^{1/2}$ . With the truncated form, the infiltration capacity is

$$I_c(t) = K_s + s(\theta_i, \theta_s) t^{-1/2}, \quad (1.6)$$

where  $s(\theta_i, \theta_s)$  is the sorptivity.

4. The Smith–Parlange model [162] is particularly used for strong variation of the hydraulic conductivity near the saturation,

$$I_c(t) = K_s \frac{e^{\alpha(t)}}{e^{\alpha(t)} - 1}, \quad \alpha(t) = \frac{I(t)}{(\theta_s - \theta_i)G} \quad (1.7)$$

where  $G$  is the effective capillary drive.

## 1.4 Erosion modelling

Erosion is caused by the detachment, the transport and the deposition of soil particles. The movement of sediments occurs in two main modes called bedload and suspended load as in figure 1.2. The bedload particles are located in a few grain diameters thick layer situated on the soil. The velocities of these particles are less than the flow velocity. At the opposite, the suspended particles are transported in the flow without contact with the bed. Sediments finer than 0.2 mm which are transported in suspension are rarely included/considered in bedload. The distinction between these two modes of sediment transport is blurred because they occur together.

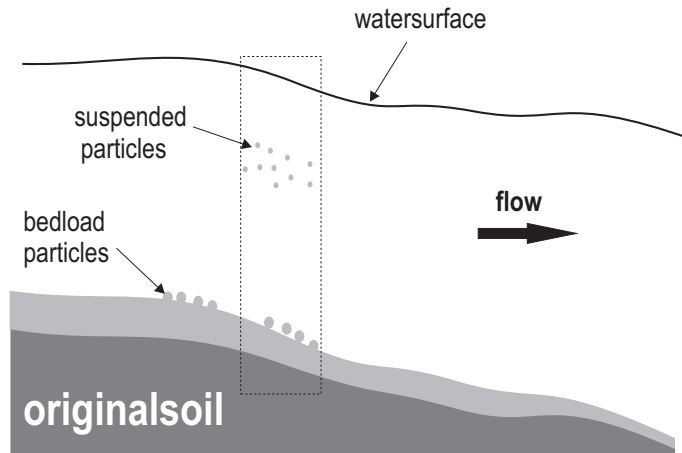


Figure 1.2: Sediment transport modes.

### 1.4.1 Mass-conservation equations for sediment

Equations of evolution are based on the principle of mass conservation for the sediments to describe (i) the variation of the bed surface elevation  $z_b$  and (ii) the sediment concentration in the flow. We will assume that the sediment concentration is sufficiently low to neglect the sediments storage in water. The variation of  $z_b$  is only caused by the variation of the bedload flux and the vertical exchange, namely the detachment and the deposition of the sediments as in figure 1.3. The mass conservation equation for the sediment layer also called Exner [67]

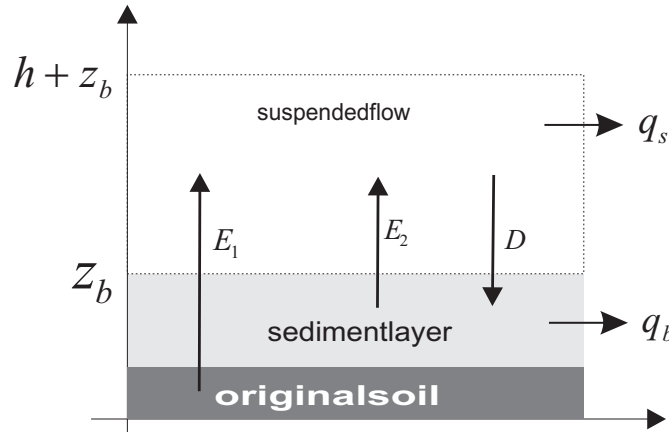


Figure 1.3: Conservation of sediments.

equation is

$$(1 - \phi)\partial_t z_b + \text{div}(q_b) = \frac{1}{\rho_s}(D - E), \quad (1.8)$$

where  $\phi$  is the soil porosity and  $q_b$  the bedload flux, *i.e.* the volume of bedload particles transported per unit width and time,  $\rho_s$  the sediment density,  $D$  the deposition rate,  $E$  the detachment rate into suspended flow. Assuming that the velocities of the suspended particles are equal to those of water, the mass conservation equation of suspended sediments is

$$\partial_t(ch) + \text{div}(ch\vec{v}) = E - D. \quad (1.9)$$

where  $c$  is the total concentration of suspended sediment.

In reality, the sediment layer is composed of several type of grains with a wide range size. A more realistic erosion model should require a more advanced form of the mass conservation of sediments to integrate the variability of the grain size. This consists in rewriting equation (1.9) for each sediment class and in taking into account the interactions between them as we will see later with the Hairsine–Rose model [91, 92].

### 1.4.2 Threshold motion and settling velocity

The bottom shear stress  $\tau_b$ , defined as the force of water acting on the bed during its routing, and the shear velocity  $v^*$  are the essential parameters to estimate the detachment rate. In the case of steady uniform flow, they are defined as

$$\tau_b = \rho_w g h S_f \quad \text{and} \quad v^* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho_w}},$$

where  $\rho_w$  is the density of water (see e.g. [41]). The principle to initiate the motion of sediments is that  $\tau_b$  has to be exceed a threshold value  $\tau_{cr}$  and the principle to entrain these sediments into suspension is that  $v^*$  has to be exceed the settling velocity  $v_f$  (see [118]). The Rouse number  $R_o = v^*/v_f$  is commonly used to separate the type of movement as in table 1.1. Hence, the determination of  $\tau_{cr}$  and  $v_f$  is required to quantify the rate of

| Transport mode  | Julien [110]      | Merten et al. [131] |
|-----------------|-------------------|---------------------|
| No motion       | $R_o < 0.2$       | –                   |
| Bedload         | $0.2 < R_o < 0.4$ | $R_o < 0.5$         |
| Mixed transport | $0.4 < R_o < 2.5$ | $0.5 < R_o < 5/3$   |
| Suspension      | $R_o > 2.5$       | $R_o > 5/3$         |

Table 1.1: Threshold for different mode of transport.

detachment and deposition. These threshold values depend on the sediment characteristics and their dimensionless forms  $\tau_{\star cr}$  and  $v_f^*$  are used:

$$\tau_{cr}^* = \frac{\tau_{cr}}{\gamma g d_s} \quad \text{and} \quad v_f^* = \frac{v_f}{\sqrt{(s-1)gd_s}},$$

where  $\gamma = \rho_s - \rho_w$  is the submerged particle density,  $s = \rho_s/\rho_w$  the relative density of sediment particles and  $d_s$  the sediment diameter. The well-known Shields diagram (Fig. 1.4) represents the dimensionless shear stress  $Re_\star$  as a function of the Reynolds number:  $Re_\star = v_{cr}^* d_s/\nu$  where  $v_{cr}^* = (\tau_{cr}/\rho_w)^{0.5}$  is the critical shear velocity and  $\nu$  the kinematic viscosity. A drawback of this diagram is that  $v_{cr}^*$  appears in the Reynolds number. Consequently, the critical shear stress can not be determined directly from the Shields curve. Many authors estimate  $\tau_{cr}^*$  as an explicit function of the dimensionless grain diameter  $d_\star$  defined as

$$d_\star = \left[ \frac{(s-1)g}{\nu^2} \right]^{1/3} d_s.$$

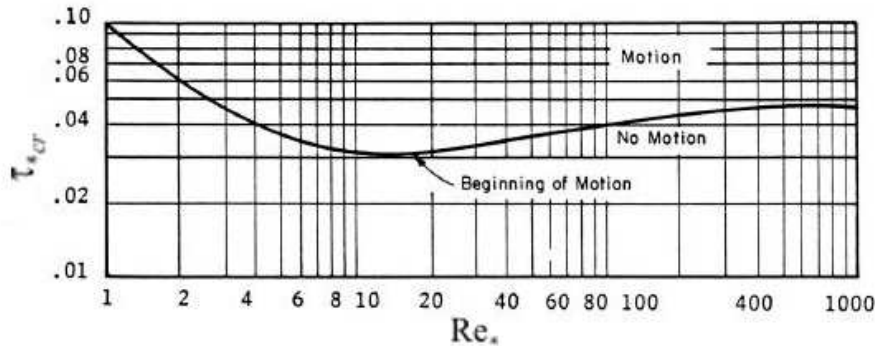


Figure 1.4: Shields's diagram [159].

Some of these explicit relationships can be found in [18]:

1. Bonnefille [25]

$$\tau_{cr}^* = \begin{cases} 0.118d_*^{-0.468} & d_* < 2.33 \\ 0.137d_*^{-0.648} & 2.33 \leq d_* < 9.15 \\ 0.063d_*^{-0.298} & 9.15 \leq d_* < 15.28 \\ 0.9d_*^{0.424} & 15.28 \leq d_* < 58.3 \end{cases} \quad (1.10)$$

2. Paphitis [143]

$$\tau_{cr}^* = \frac{0.273}{1 + 1.2d_*} + 0.046(1 - 0.57 \exp(-0.02d_*)), \quad (0.01 < \text{Re}_* < 10^4) \quad (1.11)$$

3. Sheppard and Renna [158]

$$\tau_{cr}^* = \begin{cases} 0.25 + 0.1d_*^{0.5} & 0.1 < d_* < 3 \\ 0.0023d_* - 0.000378d_* \ln d_* + 0.23/d_* - 0.005 & 3 < d_* < 150 \\ 0.0575 & d_* \geq 150 \end{cases} \quad (1.12)$$

Some experimental values of  $\tau_{cr}$ ,  $\tau_{cr}^*$  and  $v_{cr}^*$  for different type of sediments are indicated in table 1.2.

| Type           | $d_s(\text{mm})$ | $\tau_{cr}$ (Pa) | $\tau_{cr}^*(-)$ | $v_{cr}^*$ (m/s) |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| <i>Boulder</i> |                  |                  |                  |                  |
| very coarse    | $> 32$           | 26               | 0.05             | 0.16             |
| coarse         | $> 16$           | 12               | 0.047            | 0.11             |
| medium         | $> 8$            | 5.7              | 0.044            | 0.074            |
| fine           | $> 4$            | 2.71             | 0.042            | 0.052            |
| very fine      | $> 2$            | 1.26             | 0.039            | 0.036            |
| <i>Sand</i>    |                  |                  |                  |                  |
| very coarse    | $> 1$            | 0.47             | 0.029            | 0.0216           |
| coarse         | $> 0.5$          | 0.27             | 0.033            | 0.0164           |
| medium         | $> 0.25$         | 0.194            | 0.048            | 0.0139           |
| fine           | $> 0.125$        | 0.145            | 0.072            | 0.0120           |
| very fine      | $> 0.0625$       | 0.11             | 0.109            | 0.0105           |
| <i>Silt</i>    |                  |                  |                  |                  |
| coarse         | $> 0.031$        | 0.165            | 0.083            | 0.0091           |
| medium         | $> 0.016$        | 0.25             | 0.065            | 0.0080           |

Table 1.2: Threshold motion of sediments given by Julien [110]

The settling velocity  $v_f$  depends on the size and the shape of sediment. Its also depends on the density and the viscosity of the fluid. For a spherical grain, the balance between the gravitational force and the drag force obtained by the Stokes formula (valid at low Reynolds number) leads to the following theoretical expression,

$$v_f = \frac{(s-1)gd_s^2}{18\nu}. \quad (1.13)$$

Note that a more general formula can be considered by introducing the drag coefficient. For natural grains, Zanke [182], Julien [110] and Soulsby [166] developed three similar formulas to predict the settling velocity which can be expressed as

$$v_f^* = \frac{a}{S_*} [(1 + bS_*^2)^{0.5} - 1], \quad (1.14)$$

where  $S_* = \frac{d_s}{4\nu} \sqrt{(s-1)gd_s}$  the fluid-sediment parameter introduced by Madsen and Grant [128] and  $(a, b)$  are coefficients which take the values (2.5, 0.16) for Zanke, (2.0, 0.222) for Julien and (2.59, 0.156) for Soulsby. The different values of  $(a, b)$  are due to the different data sets used in their respective empirical derivations.

### 1.4.3 Bedload sediment transport

In the bedload models, the variation of the bed surface elevation is only caused by the horizontal exchange of the bed sediments and the expression of bedload flux  $q_b$  is necessary to close the model. This model is often applied for granular non-cohesive sediments under steady uni-directional flows. The Exner equation without source terms is coupled with the one-dimensional Saint-Venant equations,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = R - I_r, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) = -gh(\partial_x z_b + S_f), \\ (1 - \phi)\partial_t z_b + \partial_x(q_b) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Many researches have developed different empirical formulæ to predict and to estimate  $q_b$ . One of the simplest expression was proposed by Grass [84] where  $q_b$  is a function of the flow velocity and a dimensional  $A_g$  constant, called interaction constant, that encompasses the effects of grain size and kinematic viscosity and is usually determined from experimental data:

$$q_b = A_g u |u|^{m_g - 1}, \quad 1 \leq m_g \leq 4. \quad (1.16)$$

The usual value of the exponent  $m_g$  is set to  $m_g = 3$ . If  $A_g = 0$  then we have a solid bed (no sediment transport) and we recover the standard shallow water equations. When  $A_g$  is near zero, there is a small interaction between the fluid and the bed, while if  $A_g$  is near one the interaction is larger. Note that one of the main characteristics of this model is that the critical shear stress  $\tau_{cr}$  is set to zero, so the sediment movement begins at the same instant that beginning fluid motion.

In practice,  $q_b$  is usually represented under the non-dimensional form as a function of the dimensionless shear stress  $\tau_b^*$ , *i.e.*

$$q_b = q_b^* \sqrt{(s-1)gd_s^3}, \quad q_b^* = q_b^*(\tau_b^*), \quad \tau_b^* = \frac{\tau_b}{\gamma gd_s}.$$

Some empirical formulæ, cited in [72] and illustrated by figure 1.5, are

1. Meyer-Peter and Müller [132]

$$q_b^* = 8(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^{1.5} \quad (1.17)$$

where  $\tau_{cr}^* = 0.047$ . This formula is used with uniform coarse sand and gravel (0.4 – 29 mm).

2. Einstein [62]

$$q_b^* = \frac{1}{43.5} \left( \frac{P_s}{1 - P_s} \right) \quad \text{with } P_s = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-(0.413/\tau_b^*)-2}^{(0.413/\tau_b^*)-2} e^{-t^2} dt, \quad (1.18)$$

where  $P_s$  is the probability that a particle is carried along. This relation is used for uniform sand and gravel.

3. Bagnold [13]

$$q_b^* = 17(\tau_b^* - \tau_{cr}^*) [(\tau_b^*)^{0.5} - (\tau_{cr}^*)^{0.5}], \quad (1.19)$$

where  $\tau_{cr}^* = 0.05$ . This equation is used with uniform material ranging from 0.3 to 0.7 mm.

4. Yalin [180]

$$q_b^* = a_1 S \sqrt{\tau_b^*} \left[ 1 - \frac{1}{a_2 S} \ln(1 + a_2 S) \right] \quad (1.20)$$

where  $a_1 = 0.635$ ,  $a_2 = 2.45(\rho_w/\rho_s)^{0.4}(\tau_{cr}^*)^{0.5}$  and  $S = \tau_b^*/\tau_{cr}^* - 1$  also called the excess shear stress.

5. Van-Rijn [172, 173, 174]

$$q_b^* = \frac{0.005}{C_D^{1.7}} \left( \frac{d_s}{h} \right)^{0.2} (\tau_b^*)^{0.5} [(\tau_b^*)^{0.5} - (\tau_{cr}^*)^{0.5}]^{2.4}, \quad (1.21)$$

where  $C_D$  is the drag coefficient. This equation is used with grain ranging from 0.2 to 2 mm.

6. Nielsen [139]

$$q_b^* = 12(\tau_b^*)^{0.5}(\tau_b^* - \tau_{cr}^*). \quad (1.22)$$

This equation is used with uniform sand and gravel material ranging from 0.69 to 28.7 mm.

7. Camenen and Larson [31]

$$q_b^* = 12(\tau_b^*)^{1.5} \exp \left( -4.5 \frac{\tau_{cr}^*}{\tau_b^*} \right). \quad (1.23)$$

where  $\tau_{cr}^* = 0.05$ . Note that this exponential relationship leads to low sediment transport when  $\tau_b^* \approx \tau_{cr}^*$ .

**Remark.** Classical formulæ for bedload transport do not take into account gravity effects. As a consequence, particles located at the advancing front of a dune do not fall due to gravity as the motion of particles only depends on the hydrodynamical variables. This means that vertical profiles may be observed in numerical simulations which are not found in physical situations, for example at the front of an advancing dune. In order to obtain more realistic profiles, a diffusion term may be added to the third equation of (1.15) or one could consider a modification of the classical formulæ by including gravity effects as it was done in [134].

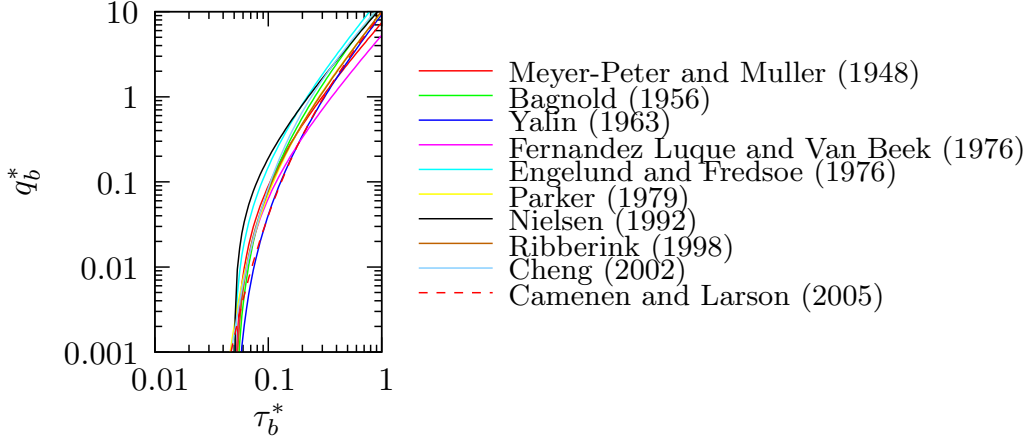


Figure 1.5: Plot of several bedload functions found in the literature,  $\tau_{cr}^* = 0.05$ .

#### 1.4.4 Suspended sediment transport

In the context of suspended transport, the variation of the bed surface elevation is only caused by the vertical exchange of the sediments between the suspended flow and the bed. The entrainment and the deposition rate are necessary to close the model. In this case, the sediment layer is assimilated to the deposited layer and the full coupled system is

$$\begin{cases} \partial_t h + \text{div}(h\vec{v}) = R - I_r, \\ \partial_t(h\vec{v}) + \text{div}(h\vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh(\nabla z_b + S_f), \\ \partial_t(ch) + \text{div}(ch\vec{v}) = E - D, \\ (1 - \phi)\partial_t z_b = \frac{1}{\rho_s}(D - E). \end{cases} \quad (1.24)$$

Remark that the system (1.24) is only valid for low concentrations, since the presence of the sediments in the flow modify the property of water. For high concentrations, the Saint-Venant equations must be reformulated with the mixed density of sediment-water (see e.g. [160]).

Several approaches can be used to estimate the source terms  $E$  and  $D$ . The first ones is based on the transport capacity concept, *i.e.* the maximum sediment rate transportable by the flow, and calculate simultaneously the detachment and the deposition rates. The second one uses energetic concept and the third one uses the transport-distance concept. These last two approaches quantify separately the detachment and the deposition rates. According to Govers et al. [83], although the concepts used by these approaches are different, the final results may often be similar.

In the models based on the transport capacity  $T_c$ , the detachment and the deposition depend on the suspended load denoted by  $q_s \stackrel{\text{def}}{=} cq$ . Indeed, the detachment occurs when  $T_c$  exceeds  $q_s$  whereas the deposition occurs when  $q_s$  exceeds  $T_c$ . The transport is possible whatever the value of  $q_s$  as indicated in table 1.3.

1. Foster and Meyer [71] were the first to propose a model estimating the soil erosion in a one-dimensional rill segment under a steady state, *i.e.*  $\partial_t ch = 0$  in (1.24). The principle

| Case        | detachment  | transport | deposition  |
|-------------|-------------|-----------|-------------|
| $T_c < q_s$ | $\emptyset$ | ✓         | ✓           |
| $T_c = q_s$ | $\emptyset$ | ✓         | $\emptyset$ |
| $T_c > q_s$ | ✓           | ✓         | $\emptyset$ |

Table 1.3: Movement mode of sediment [2]

of this approach, illustrated by figure 1.6, is that the quantity  $E - D$  normalized by its maximum value  $D_c$  is in equilibrium with the quantity of suspended sediments normalized by its maximum value  $T_c$  as follows

$$\frac{E - D}{D_c} + \frac{q_s}{T_c} = 1 \quad \Rightarrow \quad E - D = D_c \left( 1 - \frac{q_s}{T_c} \right). \quad (1.25)$$

The rill detachment capacity  $D_c$  is defined as

$$D_c = K_e(\tau_b - \tau_{cr})^b, \quad (1.26)$$

where  $K_e$  is the soil erodibility and  $b$  an exponent (typically  $b = 1$ ). Other expressions of  $D_c$  can also be used. Elliot and Laffin [63], Wicks and Bathurst [177], Lei et al. [120] proposed respectively

$$D_c = K(\omega - \omega_{cr}), \quad D_c = K_f \left( \frac{\tau_b}{\tau_{cr}} - 1 \right), \quad \text{and} \quad D_c = kC_h P_s h^{0.5} S_0^{1.5}. \quad (1.27)$$

where  $\omega = \tau_b |\vec{v}|$  is the stream power, *i.e.* the runoff energy available per unit area of the bed and  $\omega_{cr}$  a critical value depending on the soil properties and  $C_h$  is the Chezy roughness coefficient. The coefficients  $K, K_f$  and  $k$  express the soil erodibility. Recall that  $P_s$ , defined in (1.18), is the probability that a particle is entrained.

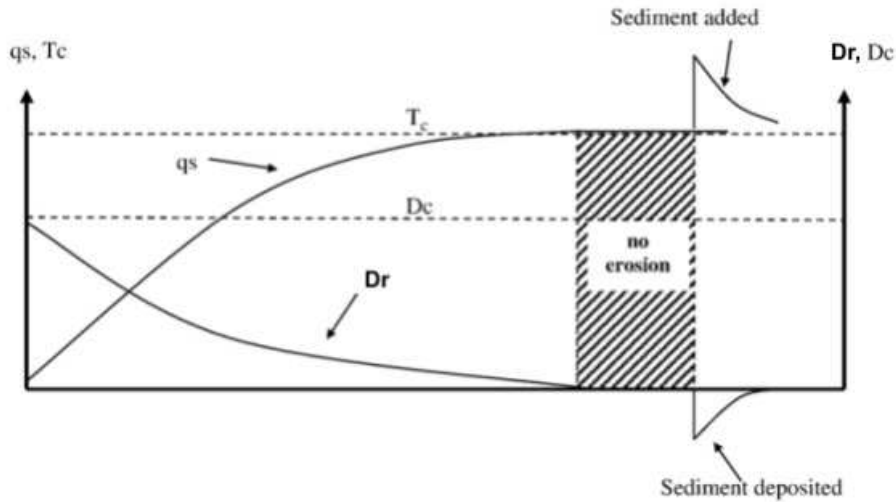


Figure 1.6: Foster and Meyer's approach [83] for transport and detachment.

The quantity  $E - D$  for the deposition case is

$$E - D = \frac{0.5v_f}{q}(T_c - q_s). \quad (1.28)$$

Equations (1.25,1.26) and (1.28) are integrated in WEPP [138]. It has also been used recently in PSEM\_2D [140].

2. Blau et al. [24] proposed

$$E - D = c_g A(T_c - q_s), \quad (1.29)$$

where  $A$  is the rill cross-sectional area and  $c_g$  the transfer rate coefficient depending on the soil cohesion and representing the soil erosion resistance in the model. Equation (1.29) is used in KINEROS [179].

3. Other models estimate the detachment and the deposition rate as a function of the settling velocity

$$E - D = \eta w_q v_f (TC - C), \quad (1.30)$$

where  $\eta$  is the flow detachment efficiency coefficient,  $w_q$  the width of flow,  $C$  the volumetric sediment concentration and  $TC$  the volumetric transport capacity defined from the stream power theory of Bagnold [14] and Yang [181]

$$TC = a(\omega - \omega_{cr})^b \quad \text{with } a = \left(\frac{d_{50} + 5}{0.32}\right)^{-0.6} \text{ and } b = \left(\frac{d_{50} + 5}{300}\right)^{0.25}, \quad (1.31)$$

where  $d_{50}$  is the median diameter of sediments. Equations (1.30) and (1.31) are integrated in EUROSEM [135] and LISEM [49].

4. Hairsine and Rose [91, 92] proposed a model based on an energetic approach which has the two following specificities: (i) a re-detachment of the particles from the deposited layer is considered, (ii) the detachment, the re-detachment and the deposition are different according to the type of sediment. So, the mass conservation equations (1.8) and (1.9) are considered for each type of sediment. The detachment and the re-detachment occur when  $\omega$  exceeds  $\omega_{cr}$ . This approach supposed that a fraction  $F$  of the available stream power  $\omega - \omega_{cr}$  is used in the detachment and the re-detachment. The detachment rate  $e_i$  of the  $i$ -th type of sediments, characterized by their settling velocity  $v_{fi}$ , is

$$e_i = (1 - H)p_i \frac{F(\omega - \omega_{cr})}{J}, \quad (1.32)$$

where  $H$  is the fractional of the original soil shielded by the deposited layer,  $p_i$  the proportion of  $i$ -th class in original soil and  $J$  the energy expended in entraining a unit mass of cohesive sediment. The re-detachment rate  $e_{ri}$  is

$$e_{ri} = H \frac{m_i}{m_T} \frac{F(\omega - \omega_{cr})}{\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} gh}, \quad (1.33)$$

where  $m_T = \sum_i^N m_i$  is the total mass of the deposited layer per unit area and  $N$  the number of sediment classes. The deposition rate  $d_i$  is

$$d_i = c_i v_{fi}. \quad (1.34)$$

Although the sediment load  $q_s$  does not directly affect the soil detachment, the detachment rate does decrease downstream because a sediment deposition layer gradually protects the rill bed [83]. This approach is used into GUEST [92] and KYERMO [99, 100].

### 1.4.5 Sediment transport capacity

The sediment transport capacity is a fundamental concept of the physically based model of soil erosion, which limits the quantities of sediments able to be transported. The most common expressions of the transport capacity are

1. Foster and Meyer [71]

$$T_c = \eta(\tau_b - \tau_{cr})^k, \quad (1.35)$$

where  $\eta$  is the soil erodibility coefficient and  $k$  an exponent.

2. Yalin [180]

$$T_c = A(s - 1)\rho_s^{0.5}\tau_b^{0.5}gd_s, \quad (1.36)$$

where  $A = a_1S[1 - \frac{1}{a_2S}\ln(1 + a_2S)]$  with  $a_1$ ,  $a_2$  and  $S$  defined in (1.20). The coefficient  $A$  is calibrated using experimental data collected in channels or rivers. By using a large number of tests, Alonso et al. [3] have showed that this equation is the best formula to predict the sediment transport capacity. The following modified version is used in WEPP

$$T_c = K_t\tau_b^{1.5} \quad (1.37)$$

where  $K_t$  is the transport coefficient.

3. Low [124]

$$T_c = \frac{6.42}{(s - 1)^{0.5}}(\tau^* - \tau_{cr}^*)\rho_s d_s v S_0^{0.6}. \quad (1.38)$$

This equation is a modified version of the Smart's formula [161] to account the density effects. If the flow depth is constant, equation (1.38) can be rewritten as the product of the stream power  $\omega$  and a stream power coefficient  $K_{SP}$ ,

$$T_c = \omega K_{SP}, \quad \text{with } K_{SP} = \frac{6.42\gamma S_0^{0.6}}{(s - 1)^{1.5}} \left(1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_b}\right). \quad (1.39)$$

According to Govers [82], this formula is interesting, because it is the only formula using experimental data obtained on steep slopes.

4. Govers [81, 82]

$$T_c = 0.01227 \frac{\tau_b^{2.457}}{d_s^{0.0811}} \left(1 - \frac{\tau_{cr}}{\tau_b}\right)^{2.457}. \quad (1.40)$$

This equation is derived from experimental investigations (436 runs) of five well-sorted quartz mixtures (having a median diameter  $d_{50}$  ranging from 0.058 to 1.098 mm) with slopes ranging from 1.7 to 21%.

Ferro [69] evaluated these transport capacity equations, studied the influence of the rainfall and proposed several critical shear stress values.

### 1.4.6 Rainfall detachment

The rainfall detachment is another fundamental concept used in soil erosion modelling. The detachment rate by raindrop impact increases with the rainfall intensity and varies with the water depth. Palmer [142] showed that the influence of the raindrop impact on the soil detachment increases until a critical depth, approximately equal to one raindrop diameter, and decreases after. More precisely, Proffitt et al. [148] showed that the transport rate decreases linearly with the water depth limiting in three raindrop diameters and becomes negligible afterward. Torri et al. [169] studied the inverse relationships existing between the soil detachment and the soil cohesion.

Kinnell [113] separates four detachment and transport processes associated to the rainfall detachment:

1. Raindrop detachment with splash transport (RDST),
2. Raindrop detachment with raindrop-induced flow transport (RDRIFT),
3. Raindrop detachment with flow transport (RDFT),
4. Flow detachment with flow transport (FDFT).

Obviously, many processes can operate simultaneously in the same eroding areas. The RDST often operates at the onset of a storm when little or no surface water flow occurs. Splash moves soil particles radially away from the site of detachment. The RDRIFT occurs when the energy of flow is too weak to move soil particles unless raindrops impacting the flow disturb the bed. The raindrop impacts lift particles into the flow in the downstream direction. The RDFT occurs when the stream power is equal to or greater than the critical stream power necessary to the flow for moving particles. Both RDRIFT and RDFT occur often simultaneously: coarse particles are transported by RDRIFT and fine particles by RDFT. The rainfall detachment effect in the RDFT case is specially interested because of its contribution to the total transport capacity and to the total sediment detachment rate. The following expressions are often applied to estimate the rainfall detachment rate  $E_r$ ,

1. Li [123]

$$E_r = kR(1 - h/z_m), \quad (1.41)$$

where  $k$  is an erodibility parameter,  $R$  the rainfall intensity and  $z_m = 3 \times 2.23 \times R^{0.182}$  the maximal water depth that the raindrop can penetrate.

2. Nearing et al. [138]

$$E_r = kR_e^2 C_g C_c S_0, \quad (1.42)$$

where  $R_e$  the effective rainfall intensity,  $C_g$  the ground cover effect adjustment factor and  $C_c$  the canopy cover effect adjustment factor. A more simple form of this equation was firstly proposed by Foster and Meyer [71] to estimate the interrill erosion.

3. Kinnell [112]

$$E_r = kRqS_0. \quad (1.43)$$

This equation explored the interrill erosion data of WEPP and the process is presented by a quantification of interactions between the flow intensity, the flow discharge and the bed slope.

4. Poesen and Savat [147]

$$E_r = kK_E e^{-bh}, \quad (1.44)$$

where  $K_E$  is the kinetic energy of the raindrops impacting the ground surface,  $b$  an exponent (typically  $b = 2.0$ ). The exponential factor represents the dampening of splash detachment due to the water depth. This equation is used into EUROSEM.

5. Hairsine and Rose [91]

$$E_{ir} = a_d H R^p \frac{m_i}{m_T} + a(1 - H) \frac{R^p}{N} \quad (1.45)$$

where  $E_{ir}$  is the rainfall detachment rate for the  $i$ -th sediment class,  $a_d$  and  $a$  the detachability coefficients of the deposited layer and the original soil respectively, and  $p$  an exponent. Others parameters are defined as in equations (1.32) & (1.33).

Guy et al. [89] proposed an additional term due to the rainfall in the transport capacity,

$$T_r = 4.409 \times 10^6 R^{2.014} S_0^{0.865}. \quad (1.46)$$

According to Everaert [66], the rainfall influence on the transport capacity depends also on the grains-size. It can be negligible for fine sediments.

## 1.5 Conclusion

The principle of physically based models is the conservation laws. The models simplify the nature in formulating the erosion and sediment transport processes. Most of existing models are deterministic approaches where the erosion and sediment transport processes are formulated by deterministic differential equations. These equations describe the *local temporal and spatial evolution* of hydrodynamic variables and sediment quantities. Nevertheless, almost formulæ of sediment quantification, such as bed load transport rate, detachment rate, transport capacity or threshold motion are formulated in the permanent, unidirectional and uniform conditions (grain size, flow regime, bed slope). Consequently, these expressions are quietly *the global results* (rate per unit width per time for example) and less consistent with local phenomenon.

The Shallow-Water equations are formulated in conditions of a low bed slope and flow velocity. The fluid-sediment interactions are expressed by the coupling between erosion and sediment transport equations in flow routing system. In such a coupling, output of the hydrological model are often used as input for the erosion part. This treatment clearly considered a fixed bed during the flow routing in each time step. Moreover, such resolution are particularly less admissible in the context of charged flows by the sediment.

As the difficulties due to natural complexity (dimensions of flows, temporal and spatial scales, thresholds of movement and transport of sediments), the restriction to unidirectional flow and the homogeneity assumptions are commonly used in the models. Thus, model predictions are subject to errors as a result of the inconsistency of scale between measured parameters and the way they are used in the model.

The complexity of each model depends on its quantification of sub-agents contributing to processes and the number of empirical parameters required. Consequently, all models are empirical. The use of empirical laws is thus always needed in a physically based model.

Physically based models require a large amount of input data and consequently can be difficult to use. A large number of parameters in these models will have to be determined through calibration in sparse data situations. A major uncertainty associated with model structure arises due to parameter identifiability.

It is clear that all threshold values are never deterministic and it must be represented by a distribution of value. The measured values are only valid in particular configurations which are often less coherent with the real condition of natural milieu. Its domain of validity is limited by experiment conditions where it is obtained.

Given the large number of models available, the question is which model to use, where and when to use it. The first and most important step in deciding on a modelling approach is to determine the question that a model is intended to address. Model selection should have spatio-temporal scales suited to the purpose of the study and should be expected to have the expected accuracy required for this purpose. The difference between scale of processes, scale of modelling and scale of experiment must be looked at the validity of the model.

## Chapter 2

# Theoretical studies and numerical analysis of bedload transport modelling

This chapter corresponds to two published articles: “*An analytical solution of the shallow water system coupled to the Exner equation*” [22] and “*Bedload transport in shallow water models: Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help*” [45].

In the previous chapter we saw that there is a large variety of equations to model the various *phenomena* playing a role in soil erosion. In this chapter we are interested in the Exner equation without source term, with a sediment flux function of the type of Grass, Meyer-Peter and Müller, etc, coupled with the one dimensional Shallow-Water equations. More precisely, this chapter is divided into two parts: obtaining an analytical solution and the study of a mathematical property - the hyperbolicity domain of the system.

In a first time, we seek to find an exact smooth solution for system (1.15). This solution is valid for a large family of sedimentation laws. One of the main interest of this solution is the derivation of numerical benchmarks to validate approximation methods. We also present a numerical example for the model of Grass.

In a second time, we show that for some sedimentation laws like the well-known Meyer-Peter and Müller model, the system is hyperbolic and, thus, linearly stable, only under some constraints on the velocity. In practical situations, this condition is hopefully fulfilled. Numerical approximations of such system are often based on a splitting method, solving first Shallow-Water equations on a time step and updating afterwards the topography. It is shown that this strategy can create spurious/unphysical oscillations, which are related to the study of hyperbolicity. Using an upper bound of the largest eigenvalue may improve the results although the instabilities cannot be always avoided, for example in supercritical regions.

### 2.1 An analytical solution

We consider system (1.15) modelling the bedload transport in shallow flows. We derive an analytical solution without the source terms related to the lateral inflow  $R - I_r$  and the

friction  $S_f$ . Note that this term can be treated separately by a system of ordinary differential equations without adding numerical oscillations (in an semi-implicit way for example). The efficiency of a numerical solution relies on the computation of the governing system composed by the Shallow-Water equations with topography and the Exner equation. Assuming  $\phi = 0$  (impermeable soils) for the sake of simplicity, this governing system can be rewritten as

$$\partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x z_b = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t z_b + \partial_x q_b = 0. \quad (2.3)$$

Many numerical schemes have been developed to solve system (2.1-2.3) and two basic approaches have been adopted as a common practice, namely, the *coupled* and *decoupled* approach that we shall discuss in the sequence. The validation of such schemes by an analytical solution is a simple way to ensure their working. Nevertheless, analytical solutions are not proposed in the literature. Up to our knowledge, asymptotic solutions derived by Hudson [102] are in general adopted to perform some comparisons with approximated solutions. These solutions are derived for the Grass model where the interaction constant  $A_g$  is smaller than  $10^{-2}$  (see e.g. [36]). Here, we propose hereafter a non-obvious analytical solution in the steady state condition of flow for several sediment flux functions.

### 2.1.1 Solution of the equations

We consider  $q_b$  as a function of the dimensionless bottom shear stress  $\tau_b^*$ . The empirical expressions (1.16-1.23) of  $q_b$  can be expressed under the form

$$q_b = \kappa(\tau_b^* - \tau_{cr}^*)^p \sqrt{(s-1)gd_s^3}, \quad (2.4)$$

where  $\kappa$  and  $p$  are constants. Using the friction law of Darcy-Weisbach (1.2),  $\tau_b^*$  is given by

$$\tau_b^* = \frac{fu^2}{8(s-1)gd_s}, \quad (2.5)$$

where  $f$  is the friction coefficient,  $s = \rho_s/\rho_w$  the relative density of sediment in water. Hence, the expression (2.4) can be written in the simple form

$$q_b = Au_e^{2p}, \quad (2.6)$$

where the effective velocity  $u_e$  and the interaction coefficient  $A$  are defined by

$$\begin{cases} u_e^2 = u^2 - u_{cr}^2, \\ u_{cr}^2 = \tau_{cr}^* \left[ \frac{f}{8(s-1)gd_s} \right]^{-1}, \\ A = \kappa \left[ \frac{f}{8(s-1)gd_s} \right]^p \sqrt{(s-1)gd_s^3}. \end{cases} \quad (2.7)$$

**Remark.** The Grass model, equation (1.16) with  $m_g = 3$ , is one of the simplest case by using  $p = 3/2$ ,  $\tau_{cr}^* = 0$  and an empirical coefficient  $A_g$  instead of  $A$ . The Meyer-Peter & Müller model (1.17) is one of the most applied by using  $p = 3/2$ ,  $\kappa = 8$ ,  $\tau_{cr}^* = 0.047$ . The following result is valid for all models rewriting in form (2.6-2.7).

**Proposition 2.1.** *Assume that  $q_b$  is defined by (2.4). For a given uniform discharge  $q = hu$  such that  $\tau_b^* > \tau_{cr}^*$ , system (2.1-2.3) has the following analytical unsteady solution*

$$\begin{cases} u_e^2 = \left( \frac{\alpha x + \beta}{A} \right)^{1/p}, \\ u = \sqrt{u_e^2 + u_{cr}^2}, h = q/u, \\ z_b^0 = -\frac{u^3 + 2gq}{2gu} + C, \\ z_b = -\alpha t + z_b^0, \end{cases} \quad (2.8)$$

where  $\alpha$ (m/s),  $\beta$ (m<sup>2</sup>/s),  $C$ (m) are constants and  $A$ (s<sup>2</sup>/m),  $u_{cr}$ (m/s) are defined by (2.7).

*Proof.* We are here concerned by the smooth solution. In view of the assumption  $q = \text{cst}$ , equations (2.1-2.3) reduce to

$$\begin{aligned} \partial_t h &= 0, \\ \partial_x(q^2/h) + gh\partial_x H &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\partial_t H + \partial_x q_b = 0, \quad (2.10)$$

where  $H = h + z$  is the free surface elevation. Differentiating equation (2.9) with respect to  $t$  and then equation (2.10) with respect to  $x$ , we obtain

$$\begin{aligned} \partial_{xt} H &= 0, \\ \partial_x^2 q_b &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Thank to (2.4) and (2.5) we can consider  $q_b$  as function of  $u$  or, since  $q = hu$ , as a function of  $h$  and  $q$ , *i.e.*  $q_b = q_b(h, q)$ , to have  $\frac{\partial q_b}{\partial t} = \frac{\partial q_b}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_b}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = 0$ , so  $q_b$  is not time-depending. The expression of  $q_b$  is obtained by (2.11) under the form

$$q_b = \alpha x + \beta, \quad (2.12)$$

where  $\alpha$  and  $\beta$  are constant. From (2.3), we obtain  $\partial_t z_b = -\partial_x q_b = -\alpha$  to write

$$z_b = -\alpha t + z_b^0(x). \quad (2.13)$$

Moreover, from (2.6) we deduce the effective velocity as follows:

$$u_e^2 = \left( \frac{\alpha x + \beta}{A} \right)^{1/p}.$$

Plugging (2.13) into the momentum equation (2.9) and using a direct calculation, we have

$$\partial_x z_b^0 = \left[ \frac{q}{u^2} - \frac{u}{g} \right] \partial_x u \Rightarrow z_b^0 = -\frac{u^3 + 2gq}{2gu} + C$$

which concludes the proof.

**Remark.** As  $h$  and  $u$  are stationary, the initial condition of (2.8) is  $(h, u, z_b^0)$ . Moreover, the solution  $(h, u)$  applied to the Grass model, *i.e.*  $u \stackrel{\text{def}}{=} u_e$ , is also an analytical solution of the Shallow-Water equations with the variable topography  $z_b^0$ . Concerning the Shallow-Water model without time variations of the topography, other solutions can be found in [55].

### 2.1.2 Numerical experiments

In this section, we test the validity of the solution derived in the previous section in the case of the Grass model using  $q = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $A_g = \alpha = \beta = 0.005$  and  $C = 1$ . To solve system (2.1-2.3) in the coupled way, *i.e.* the water flow and bed movement are calculated and discretized simultaneously, several schemes are available: the modified version of Roe's scheme proposed by Castro-Díaz et al. [36] in the framework of path-conservative schemes, the relaxation-type schemes proposed by Delis and Papoglou [57] or recently by Audusse et al. [12] consisting in the introduction of auxiliary variables and leads to a larger, but more suitable system. Both of these finite volume schemes produced very accurate results.

We had the chance to use the relaxation code developed by the work of [12] (written in Fortran 90). Equations (2.1-2.3) are approached by the following relaxation system:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \pi) + gh\partial_x z_b = 0 \\ \partial_t \pi + u\partial_x \pi + \frac{\alpha^2}{h}\partial_x u = \frac{1}{\epsilon} \left( \pi - \frac{gh^2}{2} \right) \\ \partial_t z_b + \partial_x q_r = 0 \\ \partial_t q_r + \left( \frac{\beta^2}{h^2} - u^2 \right) \partial_x z_b + 2u\partial_x q_r = \frac{1}{\epsilon}(q_r - q_b), \end{cases} \quad (2.14)$$

where  $\pi$  is the relaxation of the hydrostatic pressure,  $q_s$  the relaxation of sediment flux and  $\epsilon$  the relaxation parameter. The parameters  $\alpha$  and  $\beta$  have to be chosen sufficiently large to ensure the stability of the model. The equilibrium state is reached when  $\epsilon \rightarrow 0$  resulting  $\pi \rightarrow \frac{gh^2}{2}$  and  $q_r \rightarrow q_b$ . The main advantage of relaxation system (2.14) is that all the eigenvalues are easy to compute whatever the sediment flux  $q_b$  is and they are ordered whatever the choice of  $\alpha$  and  $\beta$  is, provided  $\alpha \neq \beta$ . Moreover all the fields are linearly degenerated and then the solution of the Riemann problem is easy to compute.

We plotted in figure 2.1 the free surface, the eroded topography and also the flow velocity at  $T = 7s$ , with 500 cells, Courant–Friedrichs–Lewy condition (recalled hereafter) is  $\text{CFL} = 1$ . There is a good agreement between numerical solution and those analytical. We only notice little difference on the velocity, near the inflow boundary.

We obtained an analytical solution for coupled system (2.1-2.3) modelling the soil erosion phenomenon in shallow flows via bedload transport. This solution is stationary and valid for a large family of empirical expressions quantifying sediment flux, when using the Darcy–Weisbach formula to calculate the friction. The numerical test applied with the Grass model, as an example, justified its contribution as a simple and efficient method for validation of numerical schemes.

## 2.2 Domain of hyperbolicity

After studying the existence and the expression of an analytical solution of system (2.1-2.3), now we are interested in studying its domain of hyperbolicity. This study will allow us to state in particular under what conditions the solution of system is linearly stable.

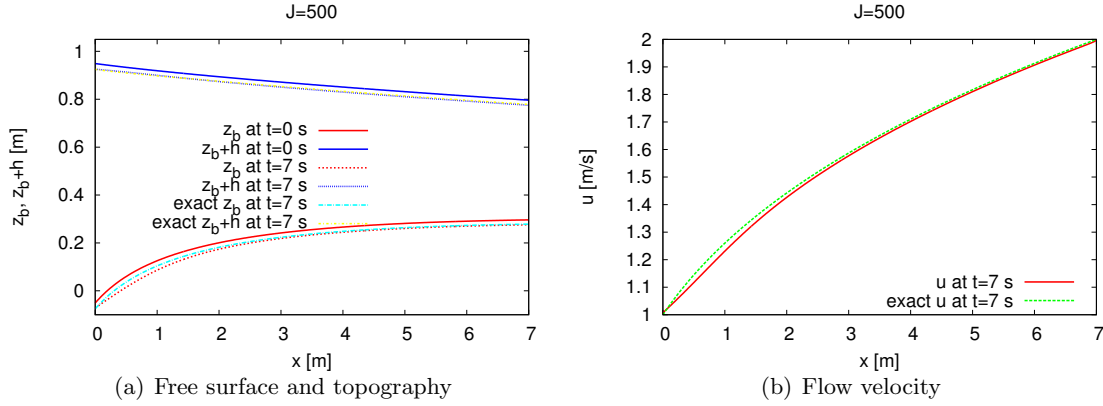


Figure 2.1: Comparison between the exact solution and the relaxation method.

System (2.1-2.3) can be considered as an hyperbolic system with a non-conservative term

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = B(W) \partial_x W, \quad (2.15)$$

where

$$W = \begin{pmatrix} h \\ q \\ z_b \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ q_b \end{pmatrix}, \quad B(W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -gh \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finally, we rewrite (2.15) as a non-conservative hyperbolic system

$$\partial_t W + A(W) \partial_x W = 0 \quad (2.16)$$

where  $A(W) = D_W F - B(W)$  is the matrix of transport coefficients. An important property of (2.16) is the hyperbolicity (see e.g. [75]) which requires the matrix  $A(W)$  to be  $\mathbb{R}$ -diagonalizable (or strictly hyperbolic when eigenvalues are distinct).

Let us quickly give an interpretation of this property as a stability condition for the linearized system. Assume that  $W$  is a small wave perturbation of a constant state  $W_0$ , *i.e.* of the form

$$W(x, t) = W_0 + \epsilon W_1 e^{i(kx - \omega t)}; \quad \epsilon \ll 1.$$

This is a solution of the linearized problem

$$-i\omega W_1 + A(W_0)(ik)W_1 = 0$$

if and only if  $W_1$  is an eigenvector of  $A(W_0)$  associated to the eigenvalue  $\left(\frac{\omega}{k}\right)$ . In other words, if one can write any arbitrary perturbation  $W_1$  as a linear combination of eigenvectors of  $A(W_0)$  associated with a real velocity, the solution will propagate without amplification of the perturbation. On the contrary, if any of the eigenvalues are complex, this will lead to instability.

Let us remark that these eigenvalues are also important when using explicit upwind schemes to ensure stability. Indeed, the time step, for a constant mesh size  $\Delta x$ , has to satisfy

the so called Courant–Friedrichs–Lewy condition (CFL condition in what follows), (see [26, 75] and references therein)

$$|\lambda_{\max}| \Delta t < \Delta x \quad (2.17)$$

where  $|\lambda_{\max}|$  is the maximum of the modulus of the eigenvalues or in other words,  $\lambda_{\max}$  is the maximum velocity for propagation of information. We recall that when using finite volume schemes technique to solve (2.15) or (2.16), this condition can be seen as the definition of a time step sufficiently small so that the different Riemann problems at each intercell do not interact between each other, that is, information of each Riemann problem does not cross more than one cell.

We are concerned here by the hyperbolicity of system (2.16) for the different models proposed of bedload flux  $q_b$ , *i.e.* equations (1.16)–(1.23). It is well known that, for Grass model, the system is always hyperbolic [36]. Nevertheless, to our knowledge, the study of the hyperbolicity of system (2.1–2.3) for more general bedload fluxes has not been done. Indeed, Castro–Díaz et al. [36] stated numerically that the hyperbolicity property may be lost in some cases for the Meyer–Peter and Müller bedload flux. Moreover, it would be interesting to have an easier way to know if one would find complex eigenvalues or not rather than computing directly the roots of characteristic polynomial. Proposition 2.2 will give an answer to this fact and states a necessary and sufficient condition for system (2.1–2.3) to be hyperbolic for the different bedload fluxes proposed before.

The matrix of transport coefficients  $A(W)$  is given by

$$A(W) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & gh \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

with  $a = \frac{\partial q_b}{\partial h}$  and  $b = \frac{\partial q_b}{\partial q}$ . The characteristic polynomial of  $A(W)$  can be written as

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -u^2 + gh & 2u - \lambda \end{vmatrix} - gh \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= -\lambda[(u - \lambda)^2 - gh] + gh(b\lambda + a). \end{aligned}$$

System (2.16) is thus strictly hyperbolic if and only if  $p_A(\lambda)$  has three different solutions noted by  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . In other words if the curve  $f(\lambda) = \lambda[(u - \lambda)^2 - gh]$  and the line  $d(\lambda) = gh(b\lambda + a)$  have three points of intersection. This is illustrated in figure 2.2 for the case of a subcritical flow.

Let us find relations between  $a$  and  $b$  in the different bedload formulæ proposed before:

- Grass:  $q_b = A_g u |u|^{m-1}$

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{q}{h} &\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{1}{h}; & \frac{\partial u}{\partial h} &= -\frac{q}{h^2}. \\ \frac{\partial q_b}{\partial q} &= \frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q}; & \frac{\partial q_b}{\partial h} &= \frac{\partial q_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial q_b}{\partial h} = -\frac{q}{h} \frac{\partial q_b}{\partial q}$$

- Meyer–Peter and Müller, Fernández Luque and Van Beek, Nielsen, Ribberink, Camenen and Larson:  $q_b = q_b(\tau_b)$

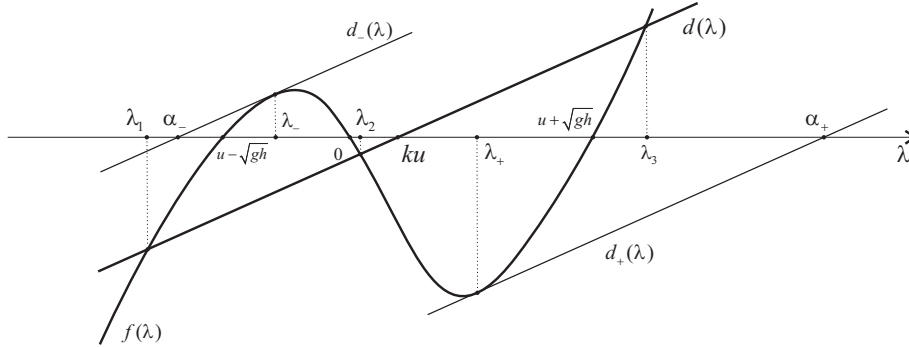


Figure 2.2: Eigenvalues of the transport coefficients matrix.

**Darcy-Weisbach:**  $\tau_b = \rho gh \frac{fu|u|}{8gh} = \alpha u|u|$  ( $\alpha = \text{cst}$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_b}{\partial q} &= \frac{\partial q_b}{\partial \tau_b} \frac{\partial \tau_b}{\partial q} = \frac{\partial q_b}{\partial \tau_b} \frac{\partial \tau_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial q} \\ \frac{\partial q_b}{\partial h} &= \frac{\partial q_b}{\partial \tau_b} \frac{\partial \tau_b}{\partial h} = \frac{\partial q_b}{\partial \tau_b} \frac{\partial \tau_b}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial q_b}{\partial h} = -\frac{q}{h} \frac{\partial q_b}{\partial q}$$

**Manning:**  $\tau_b = \rho gh \frac{n^2 u|u|}{h^{4/3}} = \alpha \frac{u|u|}{h^{1/3}} = \alpha \frac{q|q|}{h^{7/3}}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_b}{\partial q} &= \frac{2\alpha|q|}{h^{7/3}} \\ \frac{\partial \tau_b}{\partial h} &= -\frac{7}{6} \frac{q}{h} \frac{2\alpha|q|}{h^{7/3}} = -\frac{7}{6} \frac{q}{h} \frac{\partial \tau_b}{\partial q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial q_b}{\partial h} = -\frac{7}{6} \frac{q}{h} \frac{\partial q_b}{\partial q}$$

Thus, we can summarize that we have two types of relation:  $a = -ub$  or  $a = -\frac{7}{6}ub$ . We shall assume that  $b > 0$ , since sediment rate increases with that of the flow. The line  $d(\lambda)$  can be rewritten as  $d(\lambda) = ghb(\lambda - ku)$  with  $k = 1$  or  $k = 7/6$  (depending on the choice of friction law) and we shall assume the slope  $ghb$  to be positive.

**Proposition 2.2.** *Consider system (2.16) with  $q_b = q_b(h, q)$  such that*

$$\frac{\partial q_b}{\partial h} = -k \frac{q}{h} \frac{\partial q_b}{\partial q}.$$

*For a given state  $(h, q)$ , the system is strictly hyperbolic if and only if*

$$\alpha_- < ku < \alpha_+, \quad (2.18)$$

*where  $\alpha_{\pm}$  is defined by expression (2.20). More explicitly,*

- *In the case  $k = 1$  (or  $a = -ub$ ), the system is always strictly hyperbolic.*
- *In the case  $k = 7/6$  (or  $a = -\frac{7}{6}ub$ ), a sufficient condition for system (2.16) to be strictly hyperbolic is*

$$|u| < 6\sqrt{gh}. \quad (2.19)$$

*Proof.* For simplicity, let us consider the case  $u > 0$  so  $a = -kub < 0$ . The case  $u < 0$  can be treated with the same arguments. We define the two tangents of the curve  $f(\lambda)$  which are parallel to  $d(\lambda)$ . Their intersections with  $f(\lambda)$  are characterized by  $f'(\lambda) = ghb$  which yields to two values of  $\lambda$  of the form

$$\lambda_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2u \pm \sqrt{u^2 + 3(gh + ghb)}}{3}.$$

The two tangents are such that  $d_{\pm}(\lambda_{\pm}) = f(\lambda_{\pm})$ . This implies that the equations for the tangents are given by

$$d_{\pm}(\lambda) = ghb(\lambda - \alpha_{\pm})$$

with

$$\alpha_{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\pm} - \frac{f(\lambda_{\pm})}{ghb}. \quad (2.20)$$

The roots of  $p_A(\lambda)$  which correspond to the eigenvalues of  $A(W)$  are given as the intersection of  $f(\lambda)$  and  $d(\lambda)$  (see again figure 2.2). Recall that  $f(\lambda)$  is a third order polynomial with roots  $\{0, u \pm \sqrt{gh}\}$ . The equation  $p_A(\lambda) = d(\lambda) - f(\lambda)$  will have 3 distinct solutions if and only if the line  $d(\lambda)$  lies in between  $d_-(\lambda)$  and  $d_+(\lambda)$ . This can be equivalently written as  $\alpha_- < ku < \alpha_+$ .

It can be checked that we always have  $\alpha_- < u - \sqrt{gh} < u < u + \sqrt{gh} < \alpha_+$  so the system is always hyperbolic in the case  $k = 1$ . In the case  $k = 7/6$ , if  $|u| < 6\sqrt{gh}$ , we have  $u - \sqrt{gh} < \frac{7}{6}u < u + \sqrt{gh}$  and thus the hyperbolicity condition is verified which concludes the proof.

Note that similar arguments have been used in [42–44] to characterize the hyperbolicity domains for systems of moments equations arising in plasma physics.

**Remark.** Condition (2.18) is interesting, because it gives a necessary and sufficient condition to check if the model remains hyperbolic without computing the eigenvalues. Moreover, condition (2.19) shows that the model is indeed hyperbolic in most physical situations. For instance, figure 2.3 shows the region where condition (2.18) is satisfied, in function of the water depth  $h(\text{m})$  and the flow velocity  $u(\text{m/s})$ , for the Meyer–Peter and Müller formula with values  $\tau_{cr}^* = 0.47$ ,  $\rho_s = 2612$  and  $n = 0.0196$ . Nevertheless, the value  $\tau_{cr}^* = 0.47$  is related to the very fine particles (see table 1.2), which are often transported directly in suspension rather than in bedload.

## 2.3 Time-splitting method

The strategy of time-splitting (also called decoupled approach) consists in solving separately the shallow water system (2.1-2.2) during a first time step for a fixed topography  $z_b$ , and updating afterward the topography on a second step using the Exner equation (2.3). Such approach seems natural as the variation of topography is slow compared to the characteristic time associated to hydrodynamical variables.

Using a time-splitting strategy allows to minimize computational costs and makes it easier to implement the codes for different bedload fluxes in a modular way. This approach has been widely used in the industry. For example the softwares developed at EDF-RD are based on an

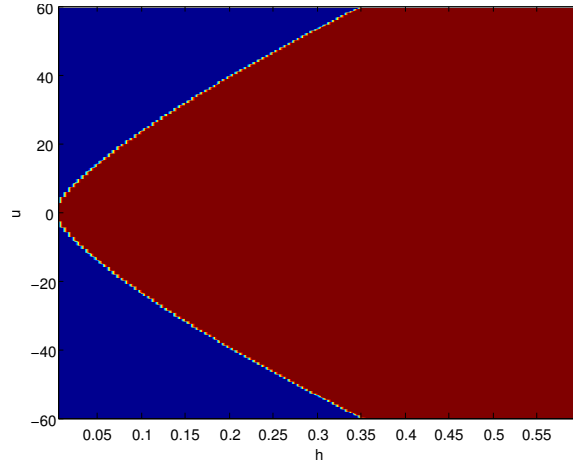


Figure 2.3: Hyperbolicity region (in red) for Meyer-Peter &amp; Müller.

uncoupled resolution of the system using the softwares MASCARET [79] (for hydraulic part) and COURLIS [23] (for Exner equation). However, it is a known fact that such an approach is not the better one as this may result in numerical instabilities, see for instance [32, 102]. The main reason is related to the bad approximation of the true eigenvalues of the system. We shall propose in next section different numerical tests in order to study how reducing CFL condition or the new of a new upper bound detailed in the following may help. More explicitly:

1. As explained by (2.17), the stability condition for Shallow-Water equations (2.1-2.2) only requires the CFL limitation associated with

$$\left(|u| + \sqrt{gh}\right) \Delta t < \Delta x. \quad (2.21)$$

Remark that this CFL condition is not enough to ensure the stability condition (2.17) for the full coupled system (2.1-2.3) because the maximum eigenvalue  $\lambda_3$  of the matrix of transport coefficients  $A(W)$  is always larger than  $|u| + \sqrt{gh}$  (see figure 2.2). This may lead to numerical instabilities in some numerical simulations when a splitting technique is used. These instabilities are less frequent or do not exist if the numerical scheme used is sufficiently diffusive. For instance, when Lax–Friedrichs scheme is used it is very difficult to find instabilities while for Roe type schemes they are easily found. We recall that something similar has been studied in [33] and [27], where the splitting technique for the two-layer shallow water system was studied. In [32] a comparison between coupled and decoupled schemes have also been done.

Instead of computing the exact eigenvalues of  $A(W)$ , an upper bound  $\lambda_3^0$  of  $\lambda_3$  may be used, defined as the intersection of  $d(\lambda)$  and the tangent  $d_T(\lambda)$  of  $f(\lambda)$  at  $u + \sqrt{gh}$  (see figure 2.4)

$$d_T(\lambda) = f'(u + \sqrt{gh})(\lambda - u - \sqrt{gh}).$$

The upper bound  $\lambda_3^0$  is thus of the form

$$\lambda_3^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(u + \sqrt{gh})f'(u + \sqrt{gh}) + gha}{f'(u + \sqrt{gh}) - ghb}. \quad (2.22)$$

This value can be used to impose a CFL condition associated to the full coupled system (2.1-2.3). With this upper-bound the true CFL condition is now granted. Never-

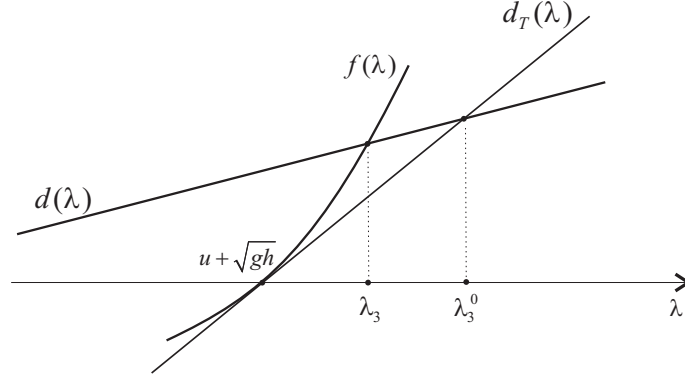


Figure 2.4: Upper bound first order of the maximum eigenvalue.

theless we remark that now the true maximum propagation speed is overestimated. It will be interesting to study the splitting technique when this estimation is used.

2. Another problem is related to the sign of eigenvalues of the matrix  $A(W)$ . It is known that there always exists a negative eigenvalue even in the supercritical case (see [32, 125, 136]). Indeed, rewriting the characteristic polynomial  $p_A(\lambda)$  in form

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

the product of three eigenvalues, in the case  $u > 0$ , satisfies

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = p_A(0) = gha < 0.$$

This means that in a supercritical flow, *i.e.*  $|u| > \sqrt{gh}$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  are positive and consequently  $\lambda_1 < 0$ . This can be interpreted as a wave propagating upstream. The use of splitting strategy in such situation cannot take into account this information as we would have  $0 < u - \sqrt{gh} < u + \sqrt{gh}$ . This will lead to numerical instabilities when using splitting method with upwind schemes.

Above analysis showed that the time-splitting approach may be used for subcritical flows, but the CFL condition must be carefully chosen. On the other hand, this approach becomes less appropriate for supercritical flows, since the wave propagating upstream has not been taken into account.

## 2.4 Numerical results

In what follows we present numerical results illustrating two mentioned problems with time-splitting approach. We first present the numerical scheme and then the numerical tests. In order to limit numerical diffusion, the Roe scheme was adopted for the two methods: coupled and decoupled.

### 2.4.1 Description of the numerical schemes

Considering a set of computing cells  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . We shall assume that these cells have a constant size  $\Delta x$  and that  $x_{i+1/2} = i\Delta x$ . The point  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$  is the center of the cell  $I_i$ . Let  $\Delta t$  be the time step and  $t^n = n\Delta t$ .

We denote by  $W_i^n$  the approximation of the cell averages of the exact solution

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t^n) dx.$$

We consider two different approaches for (2.1-2.3):

- Decoupled approach (*i.e. splitting*): We use a Roe scheme for the Shallow-Water equations (2.1-2.2) and we choose an upwinding technique based on the sign of velocity for the Exner equation (2.3), that is,

$$W_i^{n+1/2} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ A_{i-1/2}^+ (W_i^n - W_{i-1}^n) + A_{i+1/2}^- (W_{i+1}^n - W_i^n) \right],$$

where

$$A_{i+1/2} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ gh_{i+1/2}^n - u_{i+1/2}^n & 2u_{i+1/2}^n & gh_{i+1/2}^n \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

is a Roe matrix for the shallow water system with non-flat topography, and then

$$h_i^{n+1} = h_i^{n+1/2}, \quad u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2}$$

$$(z_b)_i^{n+1} = (z_b)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (q_b)_{i+1/2}^{n+1} - (q_b)_{i-1/2}^{n+1} \right],$$

with

$$(q_b)_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} q_b(h_i^{n+1}, q_i^{n+1}), & \text{if } u_{i+1/2} \geq 0, \\ q_b(h_{i+1}^{n+1}, q_{i+1}^{n+1}), & \text{if } u_{i+1/2} < 0, \end{cases}$$

and  $u_{i+1/2}$  the velocity at the interface of the cells  $i$  and  $i + 1$ , for instance the value used in the Roe's matrix. In particular, the usual definitions

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad u_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}}, \quad (2.23)$$

are taken, which correspond to the choice of segments as the path connecting two different states. See [33, 145, 170] for further details.

- Coupled Scheme: We use a Roe scheme too, not only for Shallow-Water equations but for the full coupled system (2.1-2.3), which can be written in the form

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{i-1/2}^+ (W_i^n - W_{i-1}^n) + A_{i+1/2}^- (W_{i+1}^n - W_i^n)), \quad (2.24)$$

where

$$A_{i+1/2} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ gh_{i+1/2}^n - u_{i+1/2}^n & 2u_{i+1/2}^n & gh_{i+1/2}^n \\ -\kappa u_{i+1/2}^n b_{i+1/2}^n & b_{i+1/2}^n & 0 \end{array} \right)$$

is assumed to be a Roe matrix for the coupled system in the particular case that

$$\frac{\partial q_b}{\partial h} = -k \frac{q}{h} \frac{\partial q_b}{\partial q}.$$

**Remark.** As it was stated in [36] it is possible to write a Roe matrix for to Grass model with (2.23) and

$$b_{i+1/2}^n = \frac{A_g(\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}})}{\sqrt{h_i}h_{i+1} + \sqrt{h_{i+1}}h_i} \sum_{k=0}^{m_g-1} (u_{i+1})^k (u_i)^{m_g-1-k}$$

For other models considered in this work, it is not always possible to obtain an explicit formula and its implementation is very costly. So, in practice the following approximation is used

$$b_{i+1/2}^n = \frac{\partial q_b}{\partial(hu)}(h_{i+1/2}, h_{i+1/2}u_{i+1/2}).$$

As a consequence, we are using an approximated Roe matrix and we cannot use directly schemes in the form (2.24), but rather equivalent expressions based on the physical flux function  $F(W)$ , as it is done in [36].

In order to compute the eigenstructure of matrix  $A_{i+1/2}$ , one could use the Cardano–Vieta’s formula (see [176]). Once the eigenvalues are known, one could express the eigenvectors as functions of these eigenvalues (see [133]). Nevertheless, numerical simulations in next section have been carried out by computing numerically the eigenstructure of  $A_{i+1/2}$ .

## 2.4.2 Numerical tests

In what follows and unless said otherwise, the computational domain is discretized using 400 cells. Boundary conditions have been set by defining a ghost cell duplicated from the first and last cell respectively for each time step. We shall take the usual value  $m_g = 3$  for Grass model.

First, we shall show a case where the splitting technique gives the same result as the fully coupled scheme. Let us consider as initial condition a regular *subcritical steady state* for the classical shallow water system given by

$$\begin{cases} q(x, t = 0) = 0.5, \\ z_b(x, t = 0) = 0.1 + 0.1e^{-(x-5)^2}, \\ \frac{u^2}{2} + g(h + z_b) = 6.386. \end{cases} \quad (2.25)$$

The water surface and topography corresponding to this initial condition are shown in figure 2.5. We shall consider Grass model with  $A_g = 0.005$  expressing a weak interaction of water-sediment.

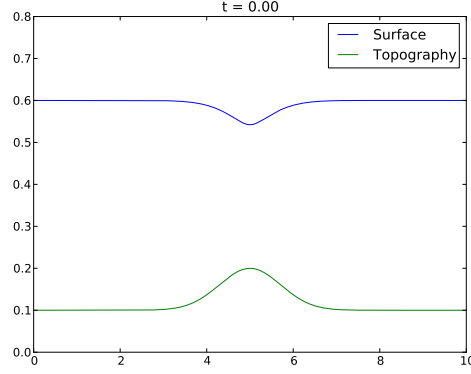
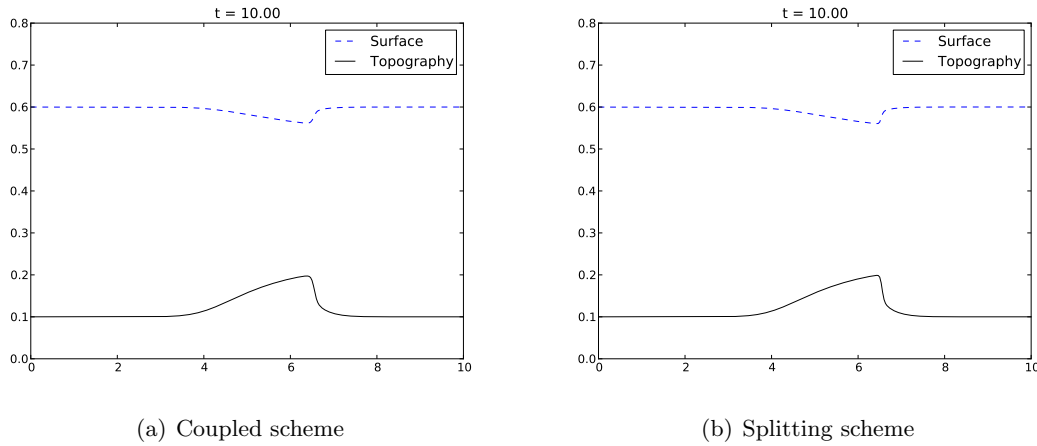


Figure 2.5: Initial condition for (2.25).

Figure 2.6: Solution for (2.25) with  $A_g = 0.005$ .

As we see in figure 2.6, no major differences are observed between the two schemes. Both simulations have been computed with  $\text{CFL} = 0.95$  and in the case of the splitting scheme, (2.21) has been used for the CFL condition. Table 2.1 shows the comparison between the solutions computed with both schemes and a reference solution given by the computation on a grid with 3200 points. We remark that CPU time for the splitting technique is smaller (16.73s) than the CPU time for coupled scheme (19.06s) which is due to the fact that the spectral decomposition of the matrices  $A_{i+1/2}$  is computed numerically in the case of the coupled scheme.

Now, consider the same initial condition (2.25), but set  $A_g = 0.07$  corresponding to a stronger interaction of water-sediment. We remark in figure 2.7 that some instabilities arise when using the splitting scheme with (2.21) which disappear if the CFL is reduced. This is not the case when the coupled scheme is used as we see in figure 2.8.

Doing the same computation with the splitting scheme and using now the new upper bound (2.22) gives similar results, but now  $\text{CFL} = 0.95$  can be used as it is shown in figure 2.9.

| # points            | 50     | 100    | 200    | 400    |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|
| Coupled scheme      |        |        |        |        |
| $L^1$ error in $h$  | 0.1056 | 0.0534 | 0.0264 | 0.0126 |
| $L^1$ error in $hu$ | 0.1026 | 0.0503 | 0.0244 | 0.0114 |
| $L^1$ error in $z$  | 0.0385 | 0.0204 | 0.0107 | 0.0051 |
| Splitting           |        |        |        |        |
| $L^1$ error in $h$  | 0.1021 | 0.0503 | 0.0240 | 0.0111 |
| $L^1$ error in $hu$ | 0.1067 | 0.0534 | 0.0269 | 0.0135 |
| $L^1$ error in $z$  | 0.0330 | 0.0167 | 0.0084 | 0.0038 |

Table 2.1: Comparison at time  $t = 10$  between numerical solutions computed with a Roe scheme for the full system and a splitting scheme and a reference solution computed on a grid with 3200 points.

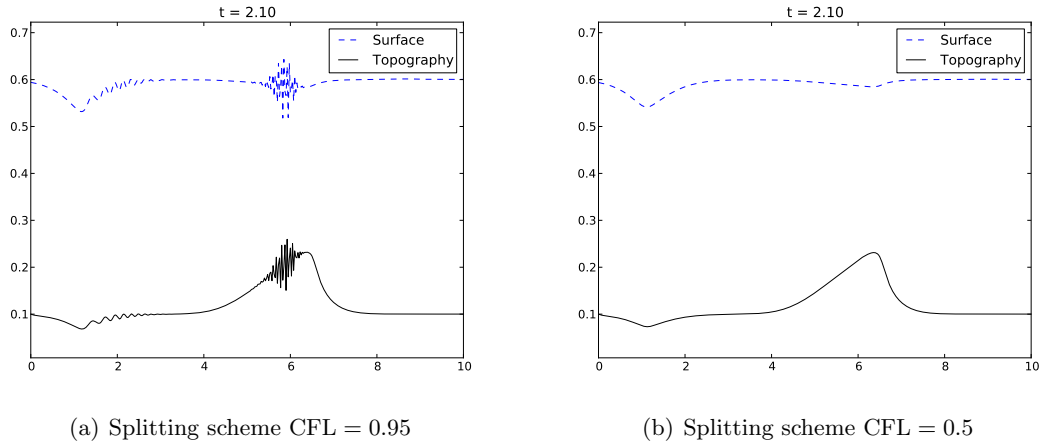


Figure 2.7: Solution for (2.25) with  $A_g = 0.07$ .

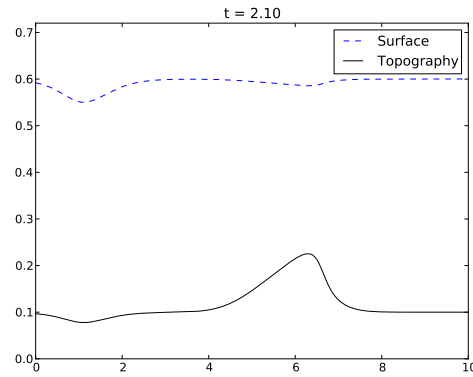


Figure 2.8: Solution for (2.25),  $A_g = 0.07$  with a coupled scheme.

Remark that still some oscillations may be seen in the topography with the splitting scheme.

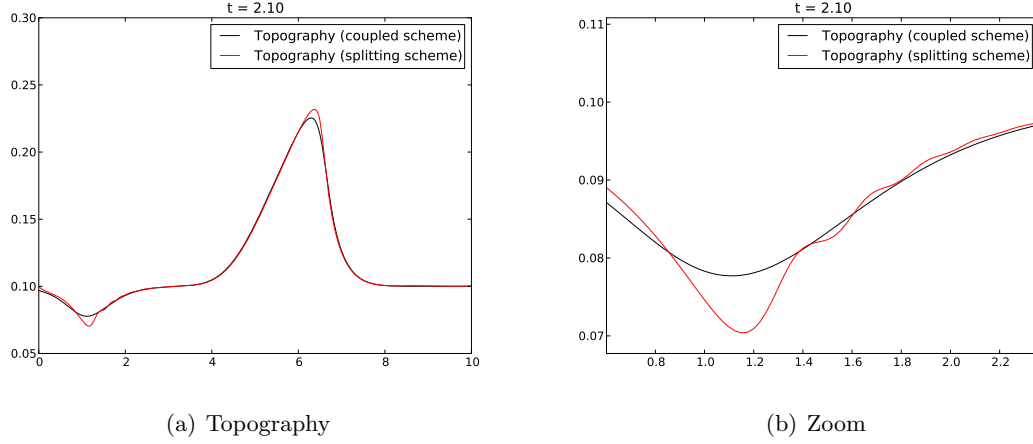


Figure 2.9: Comparison of splitting scheme using (2.22) and coupled scheme for (2.25) with  $A_g = 0.07$  and  $CFL = 0.5$ .

The main difference between the run with  $A_g = 0.005$  and  $A_g = 0.07$  is that, in the second case, the true eigenvalues of the full system are far from the approximations  $u + \sqrt{gh}$  and  $u - \sqrt{gh}$  given by the splitting scheme. In particular, the maximum of the modulus of the eigenvalue is larger than  $|u| + \sqrt{gh}$ . This implies that a CFL condition close to 1 should not be used with the splitting scheme (see figure 2.10). This is the reason why the upper bound (2.22) works in general better than (2.21).

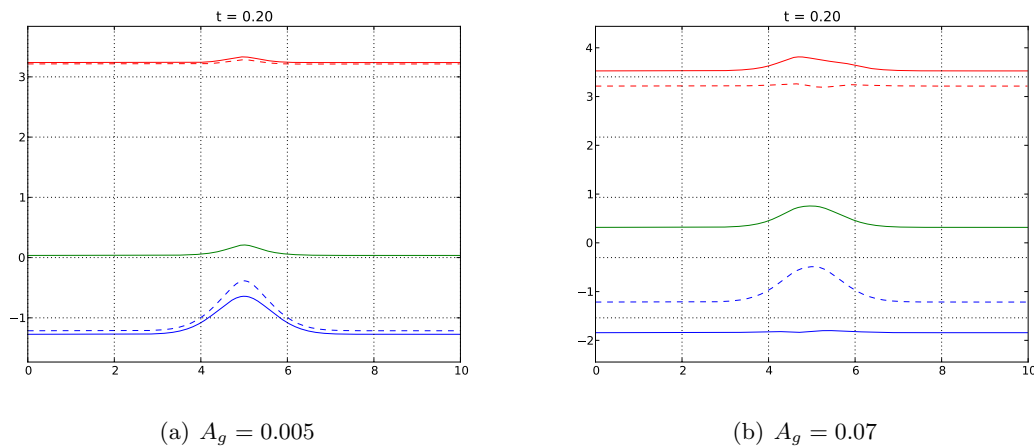


Figure 2.10: Eigenvalues for (2.25). True eigenvalues of the system (Continuous line) and  $u \pm \sqrt{gh}$  approximation (Dashed line).

In previous examples, we have used Grass model. Nevertheless, conclusions are not exclusive to such model and may be observed if we use any other formula for the bedload flux.

The main difference observed between the different models is the strength of the interaction between the water and sediment. The stronger the interaction is, the more likely to find oscillations. For instance, the Meyer–Peter and Müller formula models a weak interaction between water and sediment, so that numerical instabilities due to splitting techniques are less frequent. Nevertheless, we may find that the splitting technique fails. For example, consider the initial condition (2.25), but now impose  $q(x = 0, t) = 0.8$ . For the Meyer–Peter and Müller parameters we take  $\tau_{cr}^* = 0.47$ ,  $\rho_s = 2612$  and  $n = 0.095$ . As we see in figures 2.11 and 2.12, oscillations remain even for smaller CFL values. Remark that using too small CFL condition is not a good idea in general as this would add numerical diffusion and increase the CPU time. For instance, using  $\text{CFL} = 0.125$  we need 48.44 seconds of CPU time while the coupled scheme with  $\text{CFL} = 0.95$  only needs 9.35 seconds. Remark that even using the new bound (2.22), we need to reduce CFL although in general this upper bound gives better results than (2.21).

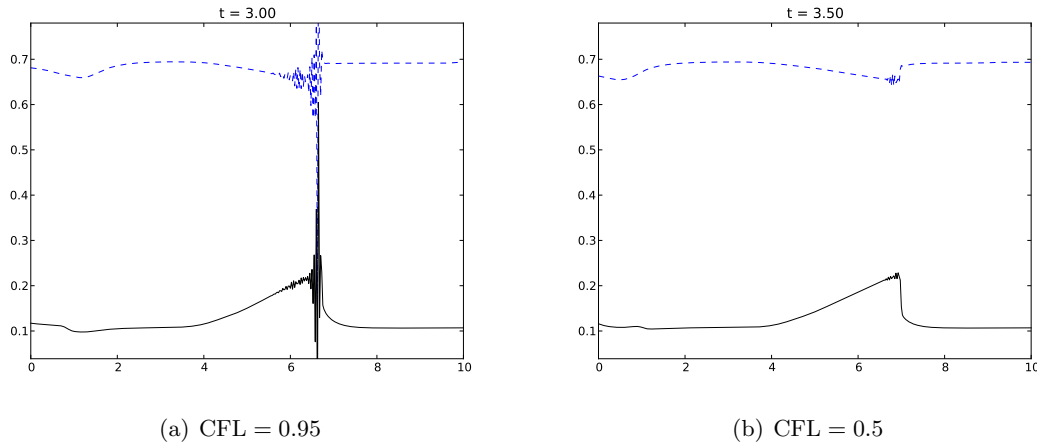


Figure 2.11: An example using Meyer–Peter and Müller bedload flux with a splitting technique and (2.21).

Now, let us consider an example with subcritical and supercritical regions. In order to do so, we begin with the initial condition

$$\begin{cases} q(x, t = 0) = 0.6, \\ z_b(x, t = 0) = 0.1 + 0.1e^{-(x-5)^2}, \\ h(x, t = 0) + z_b(x, t = 0) = 0.4. \end{cases} \quad (2.26)$$

We solve the shallow water system ( $A_g = 0.0$ ) with this initial data until a steady state solution is reached (see figure 2.13). Once the steady state is reached, we let the sediment to evolve by using a Grass model with  $A_g = 0.0005$ . Figure 2.14 shows that again we find instabilities by using the splitting technique with (2.21). These instabilities remain even for  $\text{CFL} = 0.05$  (which requires almost 20 times the CPU time required for  $\text{CFL} = 0.95$  with the coupled scheme). Using (2.22) the result obtained is similar. Note that these instabilities do not appear when using the full coupled system even for  $\text{CFL} = 0.95$  as it is shown in figure 2.15. This is due to the already known fact that one obtains always a negative eigenvalue even in supercritical regions. As we see in figure 2.16, in the supercritical region

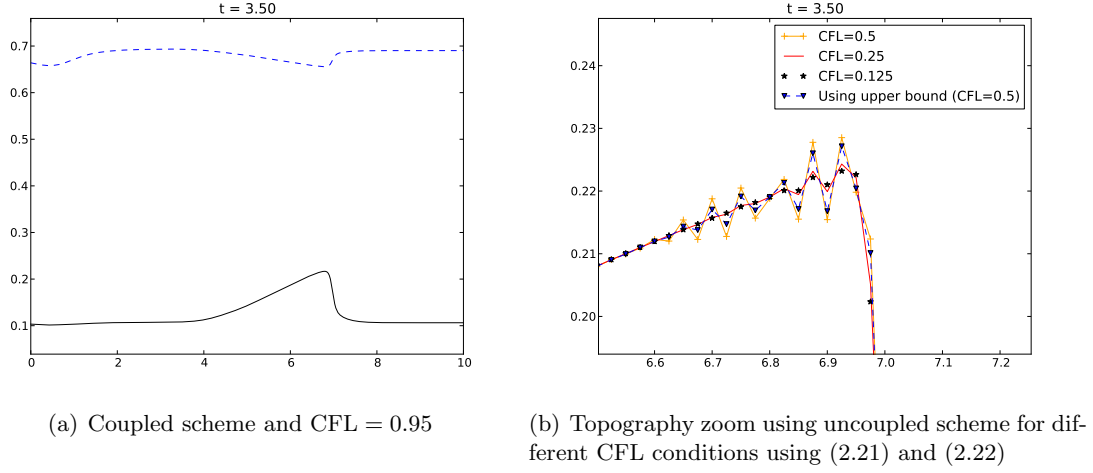


Figure 2.12: An example using Meyer–Peter and Müller bedload flux.

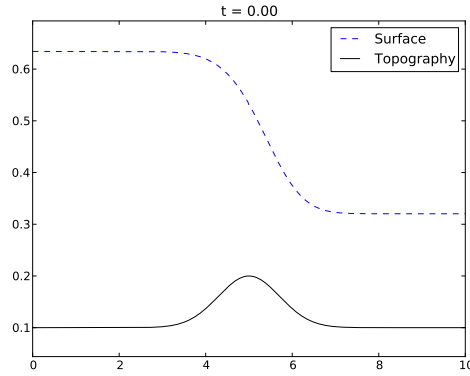


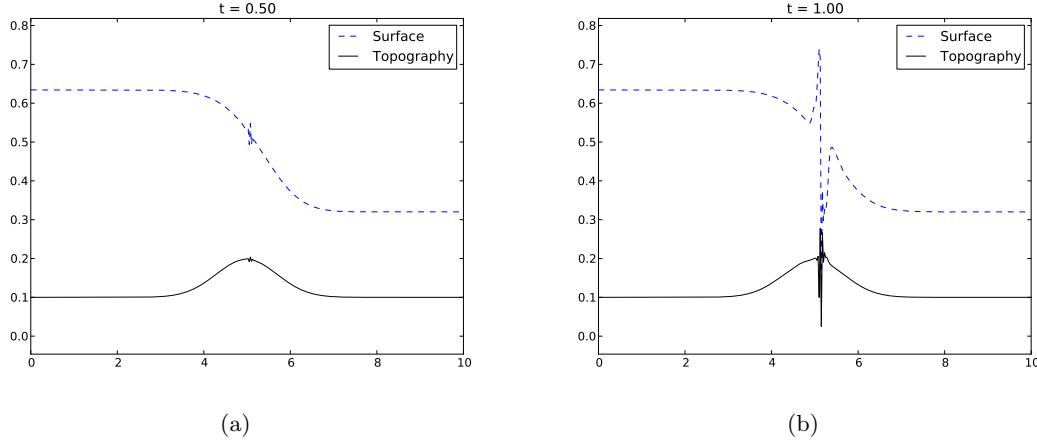
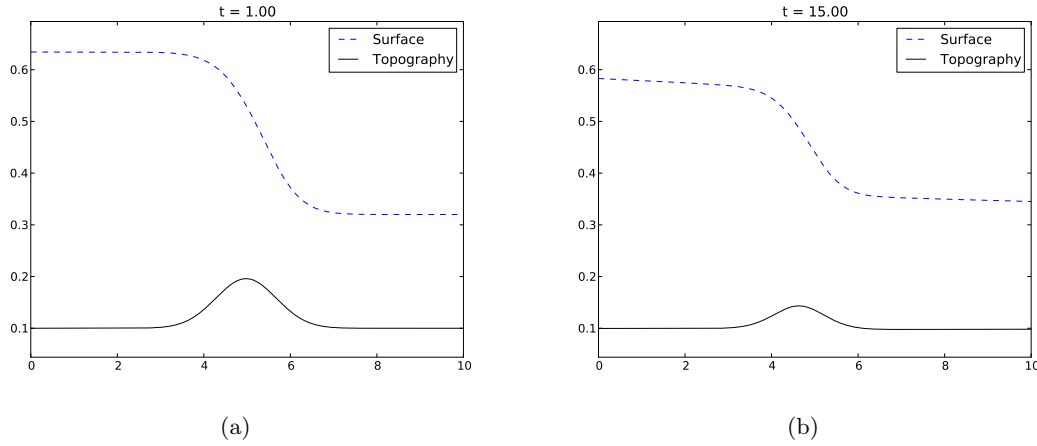
Figure 2.13: Transcritical steady-state for shallow water system.

we obtain that  $u \pm \sqrt{gh}$  is always positive, while there exists a negative eigenvalue. As a consequence, the time-splitting method with upwind scheme does not take into account the information traveling backwards in general which explains the instabilities in the simulation shown before.

## 2.5 Conclusion

The sediment transport by bedload in shallow flows is often modeled by the coupled system (1.15) of the Saint-Venant and Exner equations. The bedload flux, required by Exner equation, is often given by empirical formulæ (1.16-1.23). The coupled system is an hyperbolic model with source terms and often computed by numerical scheme.

We derived a non-obvious analytical solution (2.8) for the coupled system that validate with a larger family of bedload flux formulæ when using the Darcy-Weisbach to calculate

Figure 2.14: Solution for (2.26) with  $A_g = 0.0005$  using splitting scheme.Figure 2.15: Solution for (2.26) with  $A_g = 0.0005$  using full system.

the friction. With some (rare) analytical solutions in literature, this solution is a simple and efficient way to validate numerical scheme modelling bedload transport by water.

Exner equation coupled with Shallow-Water equations results as a system that may lose hyperbolicity in some cases, at least theoretically. A practical criteria has been introduced for the study of the hyperbolicity region. Nevertheless, the system remains hyperbolic in most of physical situations for classical definitions of the bedload flux.

It might seem natural to use a splitting approach by solving first the shallow water system and then updating the topography (with a fluid-structure approach). But even using a robust and well-balanced numerical scheme for shallow-water system, the splitting technique may produce unphysical instabilities. In some cases, the resulting instabilities may be avoided by reducing the CFL condition and using the upper bound (2.22) works better in general than (2.21). Nevertheless, one can observe that in certain cases these instabilities cannot be avoided with the splitting technique. Thus, in order to obtain a robust numerical scheme the

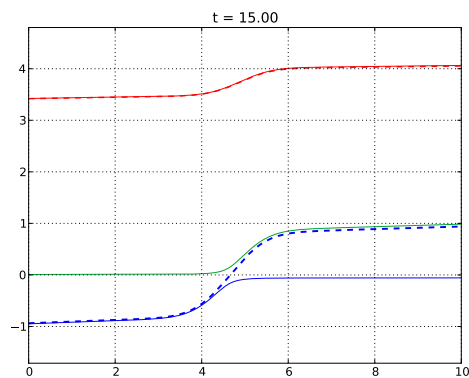


Figure 2.16: Eigenvalues for (2.26). True eigenvalues of the system (Continuous line) and  $u \pm \sqrt{gh}$  approximation (Dashed line).

full system must be considered and a coupled numerical scheme must be used.



## Chapter 3

# A numerical scheme for a multi-class suspended sediment transport model: derivation and validation on experimental data

Soil erosion and sediment transport due to rainfall and overland flow can have adverse effects on surface water quality. The erodibility of a soil depends on its particles size distribution. In particular, it is well known that clay and silt particles are preferentially transported by overland flow. Thus, it is important to predict not only the total sediment fluxes or topography evolution but also the particle size distribution of the eroded sediment.

Hairsine and Rose model [91, 92], illustrated by figure 3.1, considers erosion and deposition processes separately, with the net outcome being the difference between these two process groups. It also models the development of a deposited layer that differs from the original soil in its cohesion and particle size distribution. This allows us to model dynamical changes in erodibility and particle size distribution of the eroded soil.

This chapter is devoted to the development and validation of a numerical model predicting soil erosion in the context of suspended transport. The model allows us to simulate complex scenarios of soil erosion over a non-uniform microtopography where the erosion processes due to raindrop impact and surface runoff are concurrently active. The surface runoff is modelled by the two-dimensional Shallow-Water system and the erosion part is described by the full Hairsine and Rose equations. This coupled system is solved numerically by a finite volume method. Next, we present the application du code to simulate the erosion on crusted soil in the western region of Niger.

### 3.1 A multi-class suspended sediment transport model

We are interested in simulating overland flow and soil erosion during rainfall events. The detached sediments are transported by suspension, *i.e.* without contact with the bed. The model must be able to simulate the overland flow on non-uniform topography involving

multiple concurrent erosion processes. Precisely, it describes simultaneous detachment and entrainment on the original soil also re-detachment, re-entrainment and deposition on the deposited layer of a multi-class sediment mix.

The coupled system (3.1-3.5) of two-dimensional Shallow-Water equations with Hairsine and Rose equations, which express the mass and momentum conservation, is chosen to describe overland flow and erosion processes with multiple sediment classes (see e.g. [68, 91, 92, 129]). The conservative form is

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = R - I_r, \quad (3.1)$$

$$\partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh(\nabla z_b + S_f), \quad (3.2)$$

$$\partial_t(hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i, \quad (3.3)$$

$$\partial_t m_i = d_i - e_{ri} - r_{ri}, \quad (3.4)$$

$$\partial_t z_b = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i), \quad (3.5)$$

where  $h$  is the water depth,  $\mathbf{v} = (u, v)$  the horizontal velocity of flow,  $R$  the rainfall intensity,  $I_r$  the infiltration rate,  $g$  the gravitational acceleration,  $z_b$  the bed surface elevation and  $\phi$  the bed porosity. We denoted by  $\mathbf{q} = h\mathbf{v}$  the water flux. The friction term  $S_f$  can be estimated by several empirical relations and we adopt those of Manning in this work, *i.e.*  $S_f = n^2 |\mathbf{q}| |\mathbf{q}| h^{-10/3}$  where  $n$  is Manning's roughness coefficient. For the  $i$ -th sediment class characterised by its settling velocity ( $v_{fi}$ ),  $c_i$  is the concentration in mass,  $m_i$  their mass in deposited layer,  $e_i$  (resp.  $r_i$ ) rainsplash detachment (resp. flow entrainment) rate on original soil,  $e_{ri}$  (resp.  $r_{ri}$ ) rainsplash re-detachment (resp. flow re-entrainment) rate on deposited layer and  $d_i$  the deposition rate (figure 3.1). These source terms are evaluated by the Hairsine

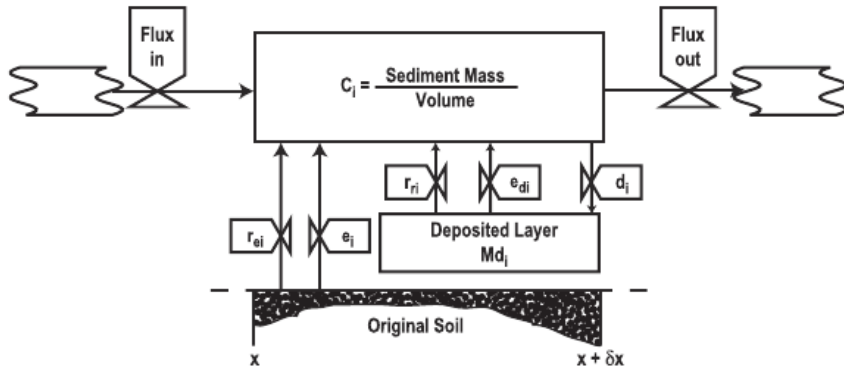


Figure 3.1: Forrester diagram (after [91, 92]) of processes interacting between the original soil, deposited layer and sediment in overland flow.

and Rose model

$$d_i = c_i v_{fi}, \quad (3.6)$$

$$e_i = (1 - H)p_i a R, \quad e_{ri} = H \frac{m_i}{m_T} a_d R, \quad (3.7)$$

$$r_i = (1 - H)p_i \frac{F(\omega - \omega_{cr})}{J}, \quad r_{ri} = H \frac{m_i}{m_T} \frac{F(\omega - \omega_{cr})}{\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} gh}, \quad (3.8)$$

where  $a$  and  $a_d$  are the detachability of original soil and deposited layer respectively,  $\rho_w$  (resp.  $\rho_s$ ) the water (resp. sediment) density,  $p_i$  the fraction of  $i$ -th class in the original soil,  $\omega = |\tau| \mathbf{v} = \rho_w g |S_f| \mathbf{q}$  the stream power,  $\omega_{cr}$  the critical value at incipient motion,  $F$  the fraction of excess stream power effective in entrainment and re-entrainment,  $J$  the energy expended in entraining a unit mass of cohesive sediment,  $m_T = \sum_{i=1}^N m_i$  the total deposited sediment mass per unit area,  $H = \min\{1, m_T/m_T^*\}$  the fractional shielding of the original soil by the deposited layer, and  $m_T^*$  the mass of deposited sediment required to shield completely the original soil.

### 3.2 Numerical method

Finite volume schemes are known to be robust for the numerical simulation of hyperbolic system of conservation laws. The one-dimensional form of (3.1-3.5) has been implemented recently in [95] using the MUSCL-Hancock scheme in context of finite volume method. The difference with our approach consists in the numerical treatment of equations (3.1-3.3) modelling the shallow flow on a non-flat topography and sediment transport as we will see later. The numerical solver is performed step by step as follows: (1) computing the coupled system of Shallow-Water equations without sediment transport equations; (2) adding friction using a semi-implicit scheme; (3) adding the sources terms of rain, infiltration, soil erosion and topographical evolution. In what follows, we present in detail each step of the numerical solver used.

Denoting  $\mathbf{U} = [h, h\mathbf{v}, hc_1, \dots, hc_N, m_1, \dots, m_N, z_b]^T$  the conservative variable of system (3.1-3.5), in which  $N$  is the number of sediment classes. The Strang-splitting in time method (see e.g. [106]) allows us to compute the evolution of  $\mathbf{U}$  during  $[t^n, t^{n+1}]$  as

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{S}^{\Delta t/2} \mathcal{L}^{\Delta t} \mathcal{S}^{\Delta t/2}(\mathbf{U}^n), \quad (3.9)$$

where  $\Delta t$  is the time-step,  $(\mathcal{L})$  and  $(\mathcal{S})$  consist respectively in the transport and the erosion-deposition processes:

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t (h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh(\nabla z_b + S_f), \\ \partial_t (hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

and

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \partial_t h = R - I_r, \\ \partial_t (hc_i) = e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i, \\ \partial_t m_i = d_i - e_{ri} - r_{ri} \\ \partial_t z_b = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i). \end{cases} \quad (3.11)$$

For system (3.10), the friction source term will be accounted in a separate step using a semi-implicit strategy following [29]. Hence, we present firstly numerical solver of (3.10) without friction. The system can be rewritten in the form

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + \partial_y G(W) = S(W), \quad (3.12)$$

where

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \\ hc_1 \\ \vdots \\ hc_N \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \\ huc_1 \\ \vdots \\ huc_N \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ hvc_1 \\ \vdots \\ hvc_N \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x z_b \\ -gh\partial_y z_b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Using Cartesian mesh and denoting  $W_{jk}^n$  the cell-centered approximation of the exact solution on the cell  $C_{jk} = [(j-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x] \times [(k-1/2)\Delta y, (k+1/2)\Delta y]$ , *i.e.*

$$W_{jk}^n \cong \frac{1}{|C_{jk}|} \int_{C_{jk}} W(x, y, t^n) dx dy.$$

The two dimensional scheme of system (3.12) writes

$$W_{jk}^{n+1} - W_{jk}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2,k} - F_{j-1/2,k}) + \frac{\Delta t}{\Delta y} (G_{j,k+1/2} - G_{j,k-1/2}) = S_{jk},$$

where  $F_{j\pm 1/2,k}$ ,  $G_{j,k\pm 1/2}$  are the numerical fluxes through the cell interfaces and  $S_{jk}$  a cell-discretization of the source term. Due to the property of invariance by rotation of (3.12), the fluxes  $F_{j\pm 1/2,k}$  and  $G_{j,k\pm 1/2}$  have the same formula. Hence, we only describe the numerical scheme for the one dimensional problem.

The Riemann problem of the homogeneous system at the cell-interface  $(j+1/2, k)$  is

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{if } x < 0 \\ W_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.13)$$

where  $W_L = W_{j,k}$ ,  $W_R = W_{j+1,k}$ . The eigenvalues of Jacobian matrix  $\partial_W F$  (corresponding to the wave speeds of the system) are

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}, \quad \lambda_{3,\dots,N+3} = u.$$

The corresponding eigenvectors are

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ v \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ v \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{r}_{N+3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The structure of auto-similar solution  $W(x/t; W_L, W_R)$  in the plan  $(x, t)$  is as depicted in figure 3.2. From left to right, the waves separate four constant states  $W_L, W_1, W_2$  and  $W_R$ .

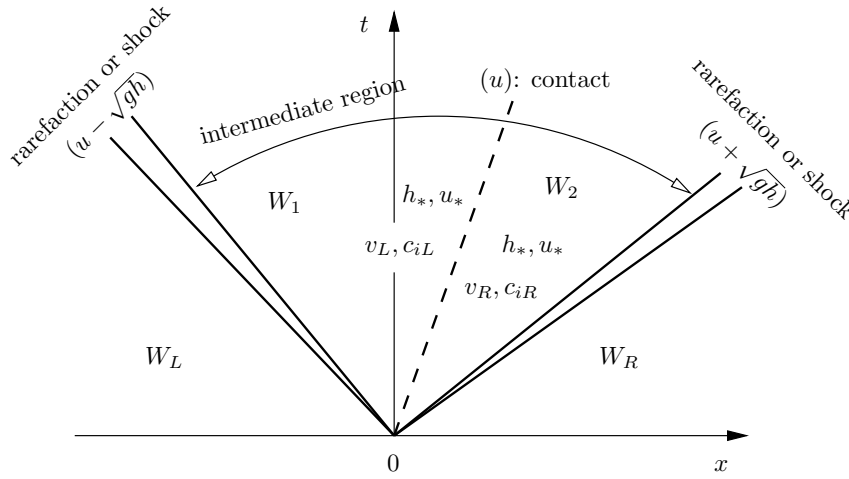


Figure 3.2: Structure of Riemann problem (3.13) in the plan  $(x, t)$

The waves associated with the  $\vec{r}_{3,\dots,N+3}$  characteristic fields are a contact discontinuity and those associated with the  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  characteristic fields will be either rarefaction waves (smooth) or shock waves (discontinuities).

Recall that in the exact solution of (3.13), the values of the water depth  $h$  and the normal velocity  $u$  do not change across the contact waves, *i.e.*  $h = h_*$  and  $u = u_*$  in the intermediate region, while the tangential velocity components  $v$  and any passive scalar quantity  $c_i$  advected with the fluid do not change across the non-linear waves but do change, discontinuously, across the contact wave. Thus, given an approximate solution  $u_*$ , the solution for  $v$  and  $c_i$  is

$$v(x, t), c_i(x, t) = \begin{cases} v_L, c_{iL} & \text{if } \frac{x}{t} \leq u_* \\ v_R, c_{iR} & \text{if } \frac{x}{t} > u_*. \end{cases}$$

It is very important that the approximate solution of the Riemann problem preserves correctly this behaviour. Moreover

$$F^h \geq 0 \text{ if and only if } u^* \geq 0,$$

where  $F^h$  is the numerical flux corresponding to  $h$ . So a natural choice of numerical fluxes

corresponding to variables  $hv$  and  $hc_i$  are

$$\begin{aligned} F^{hv}(W_L, W_R) &= \begin{cases} F^h v_L & \text{if } F^h \geq 0, \\ F^h v_R & \text{if } F^h < 0, \end{cases} \\ F^{hc_i}(W_L, W_R) &= \begin{cases} F^h c_{iL} & \text{if } F^h \geq 0, \\ F^h c_{iR} & \text{if } F^h < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Using (3.14) to compute  $F_{j\pm 1/2}^{hv}$  and  $F_{j\pm 1/2}^{hc_i}$ , the corresponding numerical scheme is

$$\begin{aligned} (hv)_j^{n+1} - (hv)_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{hv} - F_{j-1/2}^{hv}) &= 0 \\ (hc_i)_j^{n+1} - (hc_i)_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{hc_i} - F_{j-1/2}^{hc_i}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

We are now concerned with the numerical scheme of the one dimensional Shallow-Water equations with topography

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x z_b = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

This system has been studied by many authors (see. e.g. [26, 168] and references therein). A delicate problem is to design a numerical scheme which can preserve exactly the steady states, *i.e.* the exact functions  $h, u$  satisfying

$$\begin{cases} hu = \text{cst}, \\ u^2/2 + g(h + z_b) = \text{cst}, \end{cases} \quad (3.17)$$

or at least the steady state of lake at rest

$$\begin{cases} u = 0, \\ h + z_b = \text{cst}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Such a scheme is called a *well-balanced* scheme, since Greenberg and LeRoux [86]. Among the possible solutions, we are interested to use the hydrostatic reconstruction technique developed by Audusse [9], Audusse et al. [11] which is known to be a simple and efficient way to achieve the well-balanced properties. As this method will also be used in the next chapter, we recall briefly in the following the principle and the associated numerical scheme. See [26] for further description.

### 3.2.1 Hydrostatic reconstruction method

Using now the notation  $W = (h, hu)$ ,  $F(W) = (hu, hu^2 + gh^2/2)$  and denoting  $W_j = W_{j,k}$ ,  $W_{j+1} = W_{j+1,k}$ , we consider the first order three point non-conservative scheme of (3.16) under the form

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2L} - F_{j-1/2R}) = 0, \quad (3.19)$$

where the left and right numerical fluxes are defined by

$$F_{j+1/2L} \stackrel{\text{def}}{=} F_L(W_j, W_{j+1}, \Delta z_{bj+1/2}), \quad F_{j+1/2R} \stackrel{\text{def}}{=} F_R(W_j, W_{j+1}, \Delta z_{bj+1/2})$$

and  $\Delta z_{bj+1/2} = z_{bj+1} - z_{bj}$ .

Denoting  $F_L(W_L, W_R, \Delta z_b) = (F_L^h, F_L^{hu})$  and  $F_R(W_L, W_R, \Delta z_b) = (F_R^h, F_R^{hu})$ , the following conditions must be verified

1. Conservativity of the water height:

$$F_L^h(W_L, W_R, \Delta z_b) = F_R^h(W_L, W_R, \Delta z_b) = F^h(W_L, W_R, \Delta z_b), \quad (3.20)$$

where  $\Delta z_b = z_{bR} - z_{bL}$ .

2. Consistency with homogeneous system:

$$\begin{aligned} F^h(W, W, 0) &= hu \\ F_L^{hu}(W, W, 0) &= F_R^{hu}(W, W, 0) = hu^2 + gh^2/2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

3. Asymptotic conservativity/consistency with the source

$$F_R^{hu}(W_L, W_R, \Delta z_b) - F_L^{hu}(W_L, W_R, \Delta z_b) = -gh\Delta z_b + o(\Delta z_b) \quad (3.22)$$

as  $W_L, W_R \rightarrow W$  and  $\Delta z_b \rightarrow 0$ .

4. Well-balancing: given the discrete steady states  $(W_L, W_R, z_{bL}, z_{bR})$ , *i.e.* verifying (3.17) or (3.18), the corresponding numerical fluxes must satisfy

$$\begin{aligned} F_L(W_L, W_R, \Delta z_b) &= F(W_L), \\ F_R(W_L, W_R, \Delta z_b) &= F(W_R). \end{aligned} \quad (3.23)$$

The hydrostatic reconstruction method is motivated for nearly hydrostatic flows, *i.e.*  $u \ll \sqrt{gh}$ . In that case, the steady states (3.17) are replaced by simpler relations

$$\begin{cases} u = \text{cst}, \\ h + z_b = \text{cst}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Note that when  $u = 0$ , (3.24) coincides with the steady state at rest (3.18).

Given the discrete data  $(W_j, W_{j+1}, z_{bj}, z_{bj+1})$ , the hydrostatic reconstruction method consists in defining the numerical fluxes  $F_{j+1/2L,R}$  by carrying out the two following steps:

1. Computation of the reconstructed water height according to (3.24)

$$\begin{aligned} h_{j+1/2L} &= \max(0, h_j + z_{bj} - z_{bj+1/2}) \\ h_{j+1/2R} &= \max(0, h_{j+1} + z_{bj+1} - z_{bj+1/2}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

where  $z_{bj+1/2} = \max(z_{bj}, z_{bj+1})$ . The associated reconstructed states are defined as  $W_{j+1/2L} = (h_{j+1/2L}, h_{j+1/2L}u_j)$ ,  $W_{j+1/2R} = (h_{j+1/2R}, h_{j+1/2R}u_{j+1})$ .

2. Definition of the numerical fluxes based on the reconstructed states

$$\begin{aligned} F_{j+1/2L} &= \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(h_j^2 - h_{j+1/2L}^2) \end{pmatrix} \\ F_{j+1/2R} &= \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2}(h_{j+1}^2 - h_{j+1/2R}^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

where  $\mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R})$  is a consistent numerical flux for Shallow Water equations without topographical source term.

**Proposition 3.1** (Bouchut [26]). *Consider a consistent numerical flux  $\mathcal{F}$  for the homogeneous Shallow-Water equations that preserves nonnegativity of the density by interface. Then the scheme defined by the numerical fluxes (3.25, 3.26)*

- *is conservative in water height,*
- *is consistent with the Shallow-Water equations (3.16),*
- *preserves the nonnegativity of  $h$  by interface,*
- *preserves the steady states at rest.*

*Proof.* It is obvious that the numerical fluxes given by (3.26) verify (3.20), (3.21) and the well-balanced condition (3.23) for the steady state at rest (3.18). To check (3.22), we have, considering (3.25)

$$\begin{aligned} F_{j+1/2R}^{hu} - F_{j+1/2L}^{hu} &= \frac{g}{2}(h_{j+1}^2 - h_{j+1/2R}^2 + h_{j+1/2L}^2 - h_j^2) \\ &= gh\Delta z_{bj+1/2} + o(\Delta z_{bj+1/2}) \end{aligned}$$

when  $h_j, h_{j+1} \rightarrow h$  and  $\Delta z_{bj+1/2} \rightarrow 0$ .

About the homogeneous flux  $\mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R})$ , we can use any consistent numerical flux, for example the one of Godunov, Rusanov, HLL, Roe or the one obtained by the kinetic or the relaxation methods. In this work, we used the HLL flux [94] which is known to be a simple and efficient solver for both accuracy and implementation aspects. It is written as

$$\mathcal{F}(W_L, W_R) = \begin{cases} F(W_L) & \text{if } 0 \leq S_L, \\ \frac{S_R F(W_L) - S_L F(W_R) + S_L S_R (W_R - W_L)}{S_R - S_L} & \text{if } S_L < 0 < S_R, \\ F(W_R) & \text{if } S_R < 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

where the approximation of slowest and fastest wave speeds  $S_{L,R}$  can be given by

$$S_L = \min_{W=W_L, W_R} (\lambda_1(W), \lambda_2(W)), \quad S_R = \max_{W=W_L, W_R} (\lambda_1(W), \lambda_2(W)).$$

We refer to [15] for further discussion on the wave speed estimates. Note that the combination of (3.27) and (3.14) is equivalent to use the HLLC solver [167].

### 3.2.2 Second-order extension

Starting from the first-order method, *i.e.* procedure (3.25, 3.26, 3.19) and then (3.14, 3.15), a common way to obtain a second-order extension on space is to compute the fluxes (3.26, 3.14) from limited reconstructed values on both sides of each interface denoted  $\{W_{j+1/2\pm}, z_{bj+1/2\pm}\}$  rather than cell-centered values  $\{W_j, z_{bj}\}$ . In other words, we replace  $(W_j, z_{bj})$  by  $(W_{j+1/2-}, z_{bj+1/2-})$  and  $(W_{j+1}, z_{bj+1})$  by  $(W_{j+1/2+}, z_{bj+1/2+})$  in expressions (3.25, 3.26). Moreover, scheme (3.19) needs to be modified by adding a cell-centered term denoted  $Fc_j$  to preserve the consistency. So the modified scheme is written as

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2L} - F_{j-1/2R} - Fc_j) = 0. \quad (3.28)$$

In [53], the author has studied numerically the efficiency of several limited reconstruction operators (MUSCL, ENO and modified ENO). MUSCL has been recommended for numerical methods in the context of shallow flows on cultivated soils. The reconstruction applied to the water height  $h$  is written as

$$h_{j-1/2+} = h_j - \frac{\Delta x}{2} Dh_j, \quad h_{j+1/2-} = h_j + \frac{\Delta x}{2} Dh_j, \quad (3.29)$$

where the MUSCL operator  $Dh_j$  is defined by

$$Dh_j = \text{minmod} \left( \frac{h_j - h_{j-1}}{\Delta x}, \frac{h_{j+1} - h_j}{\Delta x} \right), \quad \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{if } a, b \geq 0 \\ \max(a, b) & \text{if } a, b \leq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Note that (3.29) maintains the conservation property

$$\frac{1}{2}(h_{j-1/2+} + h_{j+1/2-}) = h_j.$$

An analogous of (3.29) has been also applied to the free surface  $z_s = h + z_b$  to deduce the topography  $z_{bj-1/2+} = z_{sj-1/2+} - h_{j-1/2+}$  and  $z_{bj+1/2-} = z_{sj+1/2-} - h_{j+1/2-}$ . Then, the reconstruction has been applied on  $u$  (resp. on  $v$  and  $c_i$ ) as follows

$$u_{j-1/2+} = u_j - \frac{h_{j+1/2-}}{h_j} \frac{\Delta x}{2} Du_j, \quad u_{j+1/2-} = u_j + \frac{h_{j-1/2+}}{h_j} \frac{\Delta x}{2} Du_j, \quad (3.30)$$

which maintains the conservation property of  $hu$  (resp.  $hv$  and  $hc_i$ )

$$\frac{1}{2}(h_{j-1/2+}u_{j-1/2+} + h_{j+1/2-}u_{j+1/2-}) = h_j u_j.$$

Finally, a simple well-balanced choice for the cell-centered source term in (3.28) is

$$Fc_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2}(h_{j-1/2+} + h_{j+1/2-})\Delta z_{bj} \end{pmatrix},$$

where  $\Delta z_{bj} = z_{bj+1/2-} - z_{bj-1/2+}$ .

### 3.2.3 Friction treatment

Considering now the one dimensional Shallow Water equations with friction source term

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0 \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x z_b = -ghS_{fx}, \end{cases} \quad (3.31)$$

where  $S_{fx} = \frac{n^2 u |\mathbf{v}|}{h^{4/3}}$  and  $\mathbf{v} = (u, v)$ . The friction can be treated numerically by at least two different ways.

The first one, namely the apparent topography method, consists in writing the friction term as  $S_{fx} = \partial_x z_f$ . System (3.31) becomes (3.16) in which we replace  $z_b$  by the apparent

topography  $z_{app} = z_b + z_f$ . Note that, by definition  $S_{fx}$  depends on  $(h, \mathbf{v})$  as well as the new topography  $z_{app}$ . Nevertheless, as  $S_{fx}$  is not *a priori* bounded for small water heights, the wet/dry transitions are very difficult to simulate. So this method is not convenient for our point of view.

The second one, namely the fractional method, is the method that we adopt for our work. It consists in rewriting (3.31) under the form

$$\begin{cases} \partial_t W = \Phi(W), \\ \partial_t(hu) = -ghS_{fx}, \end{cases}$$

where the first equation represents system (3.16). A modified semi-implicit Euler scheme can be used to discretize the second equation (see [29]):

$$\frac{(hu)^{n+1} - (hu)_*^{n+1}}{\Delta t} = -gn^2 \frac{(hu)^{n+1} |\mathbf{v}^n|}{(h^{n+1})^{4/3}}$$

which leads to

$$(hu)^{n+1} = \frac{(hu)_*^{n+1}}{1 + g\Delta t \frac{n^2 |\mathbf{v}^n|}{(h^{n+1})^{4/3}}}, \quad (3.32)$$

where  $(hu)_*^{n+1}$  is the flux in water obtained with (3.16) and  $\mathbf{v}^n = (u, v)^n$ . Although the fractional discretization was used, the semi-implicit treatment preserves the positivity of water height and the steady state at rest as well. In [53], the author compared numerically these two methods and stated that the semi-implicit treatment is more stable than the apparent topography method at wet/dry transitions.

Recently, Berthon et al. [21] proposed a relevant modification of the HLL solver (3.27) to build a scheme which takes into account the friction term. The resulting scheme is shown to preserve the positivity of  $h$  and does not change the CFL condition. This scheme is particularly efficient for wet/dry transition simulation. The studying and application of this new method into our numerical solver is in process.

Finally, the second order accuracy in time of the first stage ( $\mathcal{L}$ ) is recovered by applying the Heun's method (second order Runge Kutta TVD). Rewriting (3.10) under the form

$$\partial_t \mathbf{U} = \mathcal{A}(\mathbf{U}).$$

The Heun's method to obtain  $\mathbf{U}^{n+1}$  from  $\mathbf{U}^n$  is

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^* &= \mathbf{U}^n + \mathcal{A}(\mathbf{U}^n), \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \frac{\mathcal{A}(\mathbf{U}^n) + \mathcal{A}(\mathbf{U}^*)}{2}. \end{aligned}$$

### 3.2.4 Erosion treatment

System (3.11), composed by ordinary differential equations modelling erosion-deposition stage, can be computed directly by using an explicit Euler's method. Nevertheless, this system requires a special treatment for each situation: before-ponding or after-ponding. These cases are differentiated at  $t = t_p$  called time-to-ponding. By definition,  $t_p$  is the moment

during rainfall event when free water first appears at the soil surface. It denotes a period beyond which both runoff and erosion may be initiated.

**Before-ponding.** Sediment detached by raindrop impact in this period is not transported (assuming that the transport by rain-splash is negligible), but accumulates into the non-cohesive layer (deposited layer) on the soil surface. Equations (3.11) reduce to

$$\frac{\partial m_i}{\partial t} = e_i. \quad (3.33)$$

This period is treated numerically by setting  $hc_i = 0$  and incrementing  $m_i$  at each time step while  $h^n \leq h_p$ , a small artificial threshold to distinguish between ponding and non-ponding in the numerical model

$$\left. \begin{aligned} (hc_i)^{n+1} &= 0 \\ (m_i)^{n+1} &= m_i^n + e_i^n \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \text{if } h^n \leq h_p. \quad (3.34)$$

Note that by summing equation (3.33) over all  $N$  sediment classes and denoting  $m_T = \sum_{i=1}^N m_i$ , we get

$$\frac{\partial m_T}{\partial t} = (1 - H)aR. \quad (3.35)$$

Given the initial condition  $m_T = 0$  at  $t = 0$ , the exact solution of (3.35) is

$$m_T(t) = m_T^* \left[ 1 - \exp \left( -\frac{aR}{m_T^*} t \right) \right]. \quad (3.36)$$

This equality expresses that the mass of loose sediment on the soil surface approaches the critical mass required to shield completely the original soil; and the rate, at which  $m_T^*$  is approached, increases with the ratio of  $aR/m_T^*$ . Figure 3.3 presents the behaviour of  $m_T(t)$  during the before-ponding period with  $m_T^* = 2 \text{ kg/m}^2$ ,  $a = 60 \text{ kg/m}^3$  and  $R = 120 \text{ mm/h}$ .

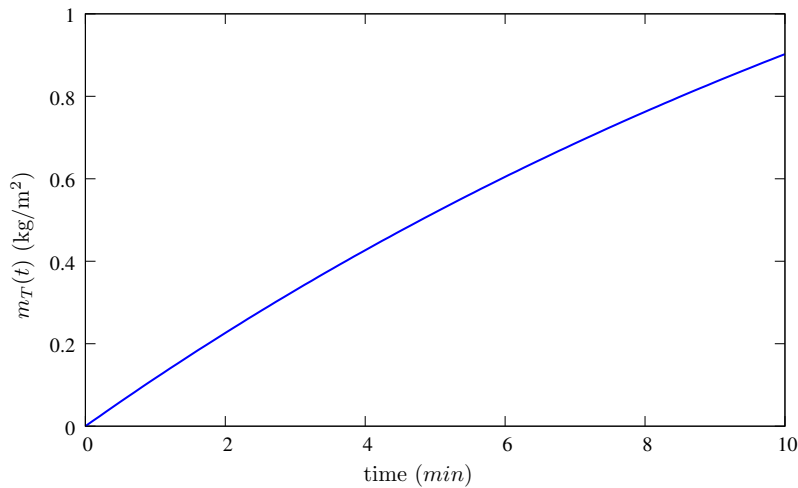


Figure 3.3: Behaviour of function  $m_T(t)$  during the before-ponding period.

**After-ponding.** When  $h^n > h_p$ , the surface runoff starts transporting detached sediment, but only particles whose diameter satisfies  $d_{s_i} < h^n$  can be suspended in flow. On the

contrary, larger particles verifying  $d_{s_i} \geq h^n$  must be assimilated into deposited layer. The numerical scheme with a time step  $\Delta t$  for (3.11) can be written as

$$\begin{aligned}
 & \bullet \text{ if } d_{s_i} \geq h^n, \begin{cases} (hc_i)^{n+1} = 0 \\ m_i^{n+1} = m_i^n + (ch_i)^n + \Delta t e_i^n \end{cases} \\
 & \bullet \text{ if } d_{s_i} < h^n, \begin{cases} (hc_i)^{n+1} = (hc_i)^n + \Delta t(e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i)^n \\ (m_i)^{n+1} = m_i^n + \Delta t(d_i - e_{ri} - r_{ri})^n \end{cases} \\
 & z_b^{n+1} = z_b^n - \frac{\Delta t}{(1-\phi)\rho_s} \sum_{\{i \mid d_{s_i} < h\}} (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i)^n.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

From numerical point of view, besides the usual CFL condition associating to the HLL solver, *i.e.*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|S_L|, |S_R|) \leq 1, \tag{3.38}$$

the erosion model adds another restriction on time step. Physically, the amount of sediment deposited over a time increment cannot be greater than that in the flow, *i.e.*

$$\Delta t \leq \frac{(hc_i)^n}{d_i^n} = \frac{h^n}{v_{fi}}. \tag{3.39}$$

This additional CFL condition has to be verified for each sediment classes verifying  $d_{s_i} < h$  and over all computation cells. According to [96], in the context of overland flow characterized by very small flow depth, the time step will often be controlled by this criterion. Practically, it is preferable to keep only the main CFL condition (3.38) as the time-step criteria. So we can relax  $d_i$  by using the maximal deposition rate  $d_i^n = \min(d_i^n, (hc_i)^n/\Delta t)$ . This eliminates (3.39) and consequently only (3.38) is required.

### 3.2.5 Erosion module

Our numerical implementation inherits from the code FullSWOF\_2D (Full Shallow Water equations for Overland Flow), written in ANSI C++ and developed in the framework of the multi-disciplinary project METHODE ANR-07-BLAN-0232 (see <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/soft/FullSWOF/>). FullSWOF\_2D solves the two dimensional Shallow-Water equations (3.1,3.2) at the second order in time and space using the hydrostatic reconstruction technique presented in section 3.2.1. For our work, we have implemented the erosion part as a library (plug-in) of FullSWOF\_2D.

Note that procedure (3.15), (3.34) and (3.37) are the same for all sediment classes. Thanks to this property, we construct firstly a C++ class namely *HR\_Element*, where the Hair-sine and Rose equations are written for one sediment. *HR\_Element* has private members  $d_{s_i}$ ,  $v_{fi}$ ,  $p_i$ ,  $c_i$ ,  $m_i$ , private functions  $e_i$ ,  $e_{ri}$ ,  $r_i$ ,  $r_{ri}$ ,  $d_i$  and methods (3.15, 3.34, 3.37). Moreover, these methods need the *HR\_Friction* class to calculate the stream power  $\omega$ . Then, a derived class C++, namely *HR\_Multi.Elements*, containing  $N$  objects of the type *HR\_Element* is used to simulate  $N$  sediment classes. Finally, the erosion part is plugged in FullSWOF\_2D by procedure (3.9) to solve the total coupled system (see figure 3.4).

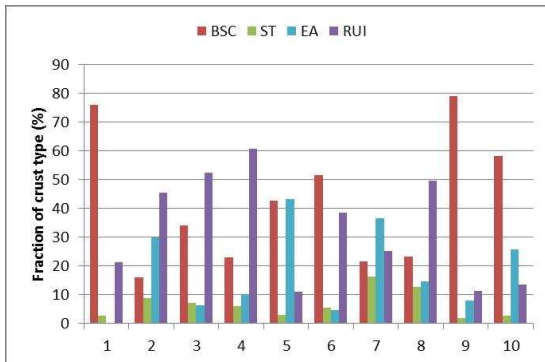




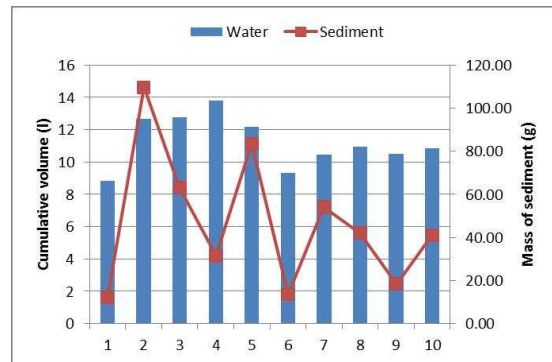
| Type      | Plot | Slope (%)  | BSC (%)      | ST (%)       | RUI (%)      | EA (%)       | $t_p$ (s)    | $V_{obs}$ (l) | $M_{obs}$ (g) |
|-----------|------|------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
| BSC<br>ST | 1    | 3          | 76.07        | 2.69         | 21.24        | 0.00         | 51.0         | 8.83          | 12.25         |
|           | 5    | 5          | 42.78        | 2.89         | 11.01        | 43.32        | 42.6         | 12.18         | 83.42         |
|           | 6    | 3          | 51.62        | 5.37         | 38.39        | 4.62         | 43.8         | 9.31          | 13.66         |
|           | 9    | 4          | 79.11        | 1.79         | 11.24        | 7.86         | 33.0         | 10.49         | 18.45         |
|           | 10   | 3          | 58.11        | 2.59         | 13.52        | 25.78        | 64.8         | 10.84         | 41.07         |
|           | Mean | <b>3.6</b> | <b>61.54</b> | <b>3.07</b>  | <b>18.08</b> | <b>16.32</b> | <b>47.04</b> | <b>10.33</b>  | <b>33.77</b>  |
| BSC<br>EA | 2    | 4          | 15.93        | 8.97         | 45.47        | 29.81        | 33.0         | 12.68         | 109.74        |
|           | 3    | 4          | 33.93        | 7.23         | 52.46        | 6.38         | 24.6         | 12.57         | 62.69         |
|           | 4    | 5          | 23.01        | 6.01         | 60.82        | 10.16        | 34.8         | 13.81         | 31.51         |
|           | 7    | 4          | 21.69        | 16.39        | 25.29        | 36.63        | 66.0         | 10.45         | 54.10         |
|           | 8    | 6          | 23.15        | 12.69        | 49.63        | 14.53        | 42.6         | 10.95         | 42.05         |
|           | Mean | <b>4.6</b> | <b>23.54</b> | <b>10.26</b> | <b>46.73</b> | <b>19.50</b> | <b>40.2</b>  | <b>12.09</b>  | <b>60.02</b>  |

Table 3.1: Plot characteristics and observed runoff and erosion for the second rainfall event ( $t_p$ : time-to-ponding,  $V_{obs}$ : cumulative volume,  $M_{obs}$ : total detached sediments).

For a first observation on table 3.1, we find that the plots type BSC/ST have an important fraction of BSC crusts (61.54%) while the runoff crusts are the most important in the plots type BSC/EA (46.73%). Moreover, the rates of surface runoff and soil erosion on the first group are smaller than those on the second in accordance with the finding of Issa et al. [105]. Intuitively, we find that the BSC/ST crusts restrict the surface runoff and soil erosion contrary to the BSC/ST and RUI crusts. Nevertheless, for each plot, we find no significant impact of a factor (crust type, slope) on surface runoff and soil erosion since this depends rather on multi-factors. On figure 3.7, from a plot to other, the variation of surface runoff and soil erosion are different. We can think about the impact of spatial distribution of each crust type, the microtopography or the particle size distribution. Taking into account these informations required an advanced tool that we will try in the next section with presented model.



(a) Fraction of each crust type for the ten plots



(b) Cumulative volume and detached sediments

Figure 3.7: Description of the crust types (a) and experiment results (b).

### 3.4 Numerical simulations and parameter calibration

The first rainfall event is performed to homogenise the initial condition between the different plots; that is to say, to avoid too much crust type evolution during these events and to avoid too much differences in initial soil water content. Therefore, we only simulate the second rainfall event.

The Green and Ampt model [85] was used to calculate the infiltration rate in the continuity equation (3.1)

$$I_r(t) = \begin{cases} R & \text{if } t \leq t_p \\ K_s + K_s \frac{(\psi + h)(\theta_s - \theta_i)}{I(t)} & \text{if } t > t_p \end{cases} \quad (3.40)$$

where  $K_s$  is the saturated hydraulic conductivity coefficients,  $\theta_i$  (resp.  $\theta_s$ ) the initial (resp. saturated) water content,  $\psi$  the hydraulic head,  $I(t) = \int_0^t I_r(\xi) d\xi$  the cumulative infiltration and  $t_p$  the time-to-ponding.

Our strategy is that, in the first time, the topography evolution due to erosion was assumed to be low compared to those of  $(h, \mathbf{v})$ . Hence the surface runoff can be considered independently with soil erosion, *i.e.* equation (3.5) is neglected. The parameterization was carried out in two stages: we calibrate firstly the friction and infiltration parameters using the Shallow-Water equations without erosion. Once this is reached, the next step is now to calibrate the erosion parameters still trying to keep values that are consistent with what is typically measured. The accuracy of numerical simulations was evaluated by using Root Mean Square Error (RMSE) and Nash-Sutcliffe coefficient (CE) (see e.g. [93, 115])

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{V}_i)^2}, \quad \text{CE} = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{V}_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2} \quad (3.41)$$

where  $n$  is the number of samples,  $\hat{V}$  the computed value,  $V$  the corresponding measured value and  $\bar{V}$  its average value overall  $n$  samples.

Starting with Green-Ampt equation (3.40). By setting  $h = 0$  and note that  $I_r = R$  during the before-ponding period, we obtain

$$Rt_p = I|_{t=t_p} = \frac{\psi(\theta_s - \theta_i)}{R/K_s - 1}.$$

Based on published data of  $K_s$ ,  $\psi$ ,  $\theta_s$  (see e.g. [28, 65, 149]) and the measured value of  $t_p$  (table 3.1), we define a first set of homogeneous parameter values for all the plots. When  $t > t_p$ , we do the same for the Manning coefficient. Next we spatialize the friction and  $K_s$  in function of crust types based on its physical behaviour. Finally, we adjust these parameters one by one and evaluate the simulation result by criteria (3.41) to choose the best parameter set. Calibrated parameters and corresponding simulation results are presented in tables 3.2 and 3.3.

Figure 3.8 showed that the simulations are generally coherent with what is typically measured in the field, especially for the relative difference between the different types of

| $\theta_s$<br>(-)          | $\psi$<br>(m) | $a_{d0}$<br>(kg/m <sup>3</sup> ) | $F$<br>(-) | $\omega_{cr}$<br>(W/m <sup>2</sup> ) | $h_0$<br>(mm) | $m_{T0}^*$<br>(kg/m <sup>2</sup> ) |
|----------------------------|---------------|----------------------------------|------------|--------------------------------------|---------------|------------------------------------|
| 0.437                      | 0.05          | 1300                             | 0.1        | $1.6 \times 10^{-3}$                 | 0.6           | 2.2                                |
| Crust type                 |               | BSC/ST                           | BSC/EA     | ST                                   | EA            | RUI                                |
| $K_s$ (mm/h)               |               | 15                               | 5          | 10                                   | 3             | 7                                  |
| Manning (-)                |               | 0.03                             | 0.03       | 0.015                                | 0.01          | 0.02                               |
| $a_0$ (kg/m <sup>3</sup> ) |               | 3                                | 3          | 28                                   | 25            | 7                                  |

Table 3.2: Calibrated runoff and erosion parameters according to the different crust types.

|              | P1    | P2    | P3    | P4    | P5    | P6    | P7    | P8    | P9    | P10   |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Water (l)    | 8.81  | 13.03 | 13.11 | 13.65 | 12.01 | 9.27  | 12.07 | 11.36 | 12.09 | 10.77 |
| Sediment (g) | 11.43 | 84.08 | 57.28 | 46.96 | 82.77 | 19.82 | 76.08 | 60.85 | 18.23 | 36.69 |

Table 3.3: Simulation results

crust. Especially, simulation result presents a good agreement with observation except those on the plots 7 and 9. We obtain  $RMSE = 0.75(l)$ ,  $CE = 0.75$  on 10 plots and this becomes  $RMSE = 0.25(l)$ ,  $CE = 0.98$  by removing plots 7 and 9. Particularly, figures 3.10 and 3.11 show that the simulation can reproduce the behaviour of both water flux and cumulative volume on 8 plots of the type BSC/ST and BSC/EA. From experiment observation, the plot 1 is the one with the less runoff, while the plot 4 is the one with the most runoff. We found again the same conclusion with the simulation. A sensitivity analysis on the  $K_s$  parameter has also been performed for all 10 plot (figure 3.9). The sensitivity relating to each soil crust type depends strongly on its fraction on the plot. Relating on the plots 7 and 9, experiment data presents some contradictions with physical behaviour of crust types. In fact, we find from table 3.1 that the plot 9 has the largest fraction of BSC/ST while  $t_p$  is the smallest. The plot 7 belongs to BSC/EA group while  $t_p$  is the largest among overall 10 plots. For this reason, we will not try to improve the simulation result for these two plots.

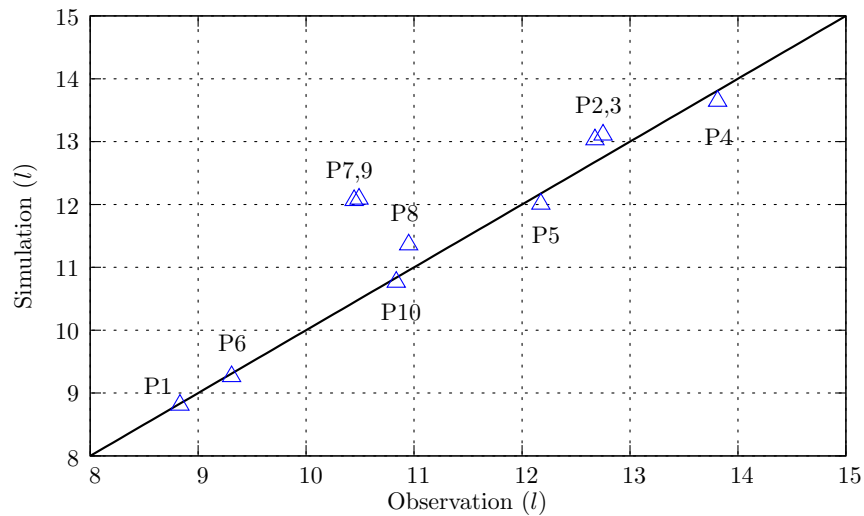


Figure 3.8: Observed against simulated runoff volume at the outlet of the ten plots.

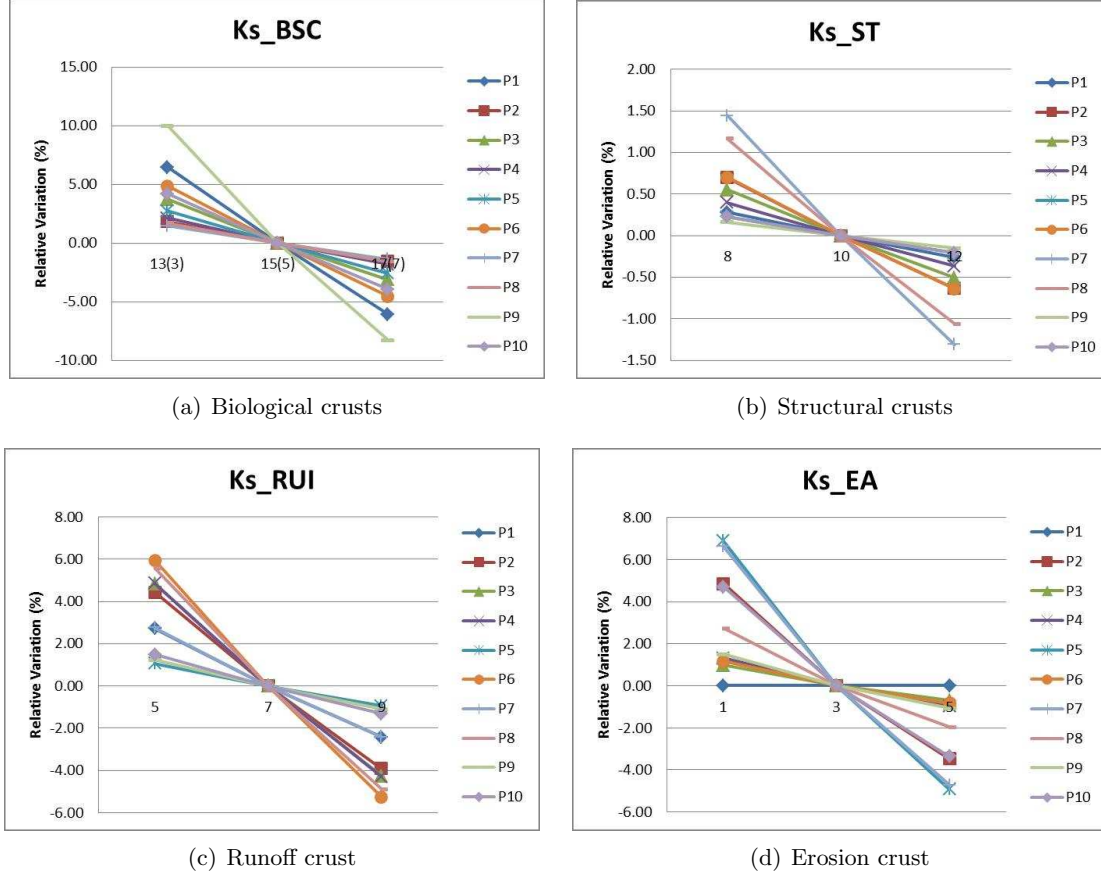


Figure 3.9: Sensitivity of the parameter  $K_s$ .

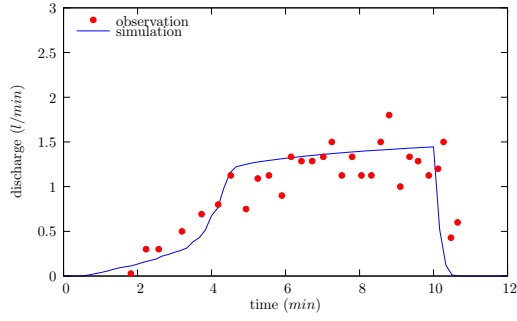
To simulate soil erosion with multiple sediment classes, the model requires the grain size. Table 3.4 presents the result of particle size distribution analysis. The simulation was taken 4 classes of sediments in which we used  $d_s = 300\mu m$  to represent coarse sands,  $d_s = 59\mu m$  for fine sands,  $d_s = 26\mu m$  for silts and  $d_s = 5\mu m$  for clays. The settling velocities were calculated by the Cheng's formula [39]

$$\frac{v_f d_s}{\nu} = \left( \sqrt{25 + 1.2d_*^2} - 5 \right)^{1.5}, \quad (3.42)$$

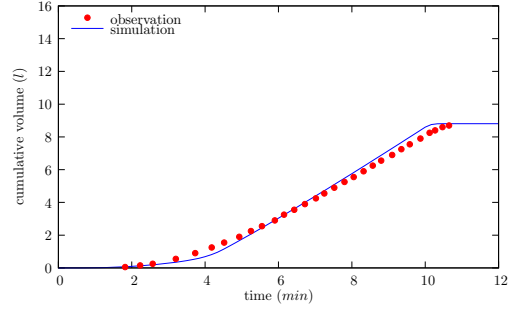
where  $\nu$  is the kinematic viscosity and  $d_*$  the dimensionless particle diameter. Remark in table 3.4 that there was no data for plot 8 and thus we decided to use the average value of another sediment classes.

The Hairsine and Rose model has a number of parameters that are difficult to measure accurately. Nonetheless, since every parameter has physical meaning, we may restrict the parameter space within reasonable bounds (see e.g. [96, 156]).

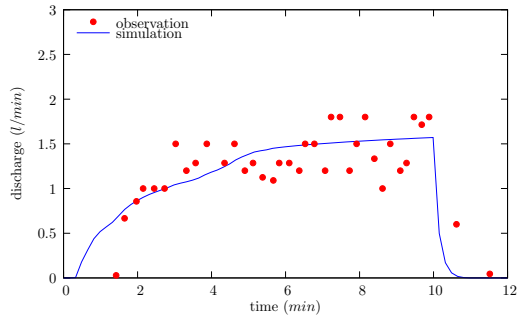
Soil detachment by raindrop impact is known to vary with flow depth and the mass of deposited sediment required to shield the original soil decreases with decreasing rainfall erosivity. We adopt in this work a simple law mentioned in [96] to evaluate the coefficients



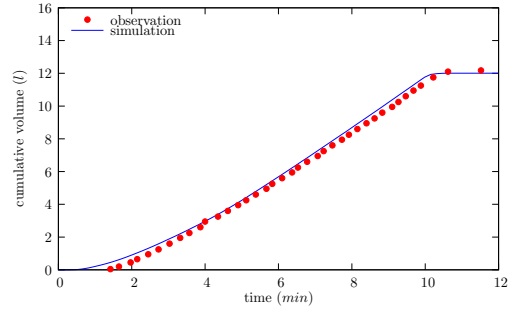
(a) Plot 1



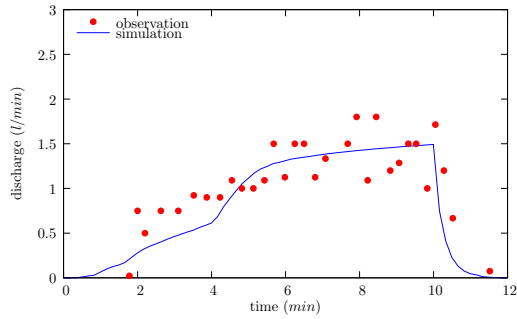
(b) Plot 1



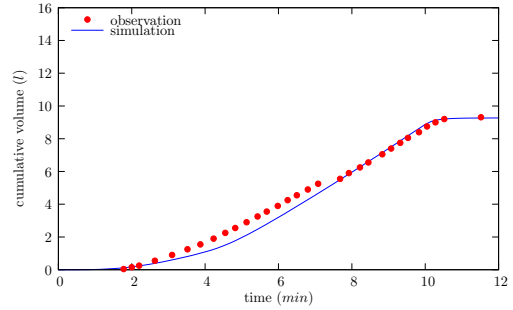
(c) Plot 5



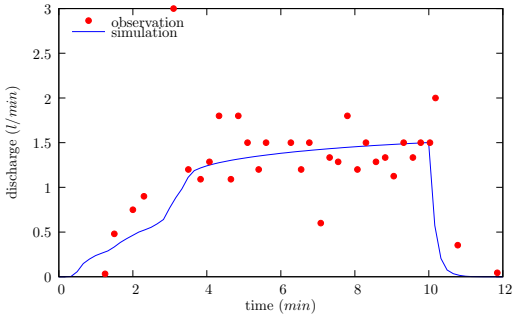
(d) Plot 5



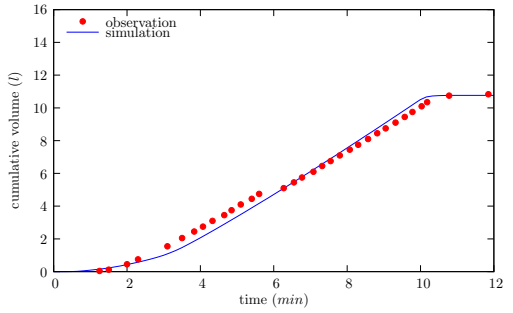
(e) Plot 6



(f) Plot 6

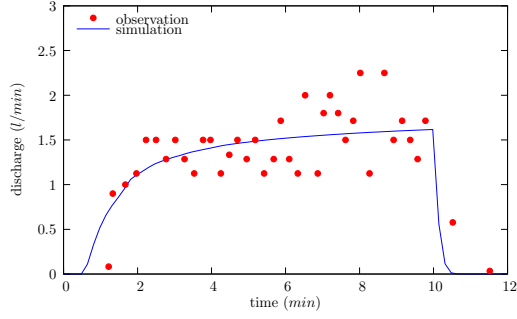


(g) Plot 10

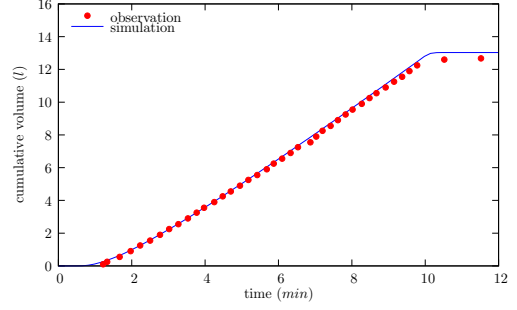


(h) Plot 10

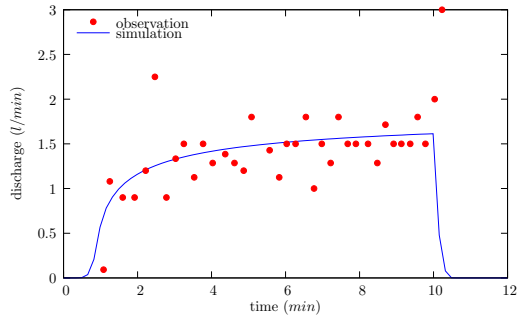
Figure 3.10: Water discharge and cumulative volume on the plots type BSC/ST.



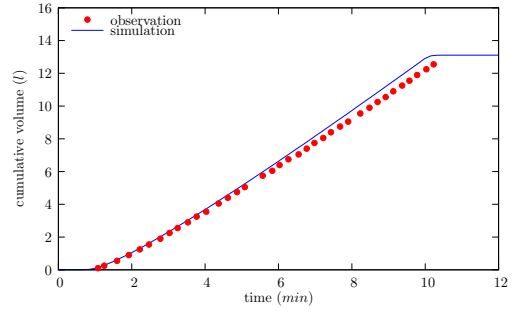
(a) Plot 2



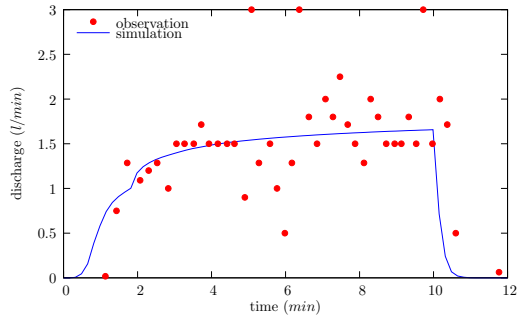
(b) Plot 2



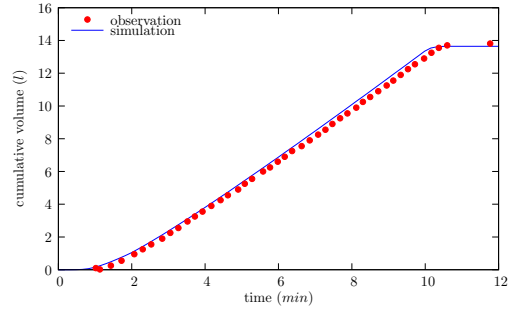
(c) Plot 3



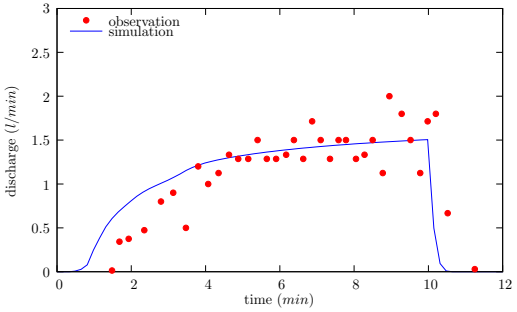
(d) Plot 3



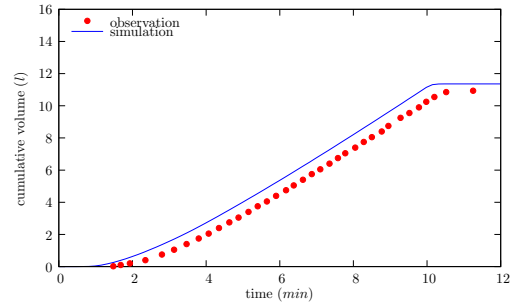
(e) Plot 4



(f) Plot 4



(g) Plot 8



(h) Plot 8

Figure 3.11: Water discharge and cumulative volume on the plots type BSC/EA.

| Plot | Coarse sand (%)<br>(200 – 2000 $\mu$ m) | Fine sand (%)<br>(50 – 200 $\mu$ m) | Silt (%)<br>(20 – 50 $\mu$ m) | Clay (%)<br>( $\leq$ 20 $\mu$ m) |
|------|-----------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1    | 37.7                                    | 53.0                                | 3.4                           | 5.9                              |
| 2    | 37.3                                    | 48.8                                | 6.0                           | 7.9                              |
| 3    | 39.9                                    | 47.1                                | 5.4                           | 7.6                              |
| 4    | 41.3                                    | 47.3                                | 4.6                           | 6.8                              |
| 5    | 41.1                                    | 47.5                                | 4.7                           | 6.7                              |
| 6    | 45.6                                    | 43.3                                | 4.4                           | 6.7                              |
| 7    | 48.2                                    | 40.0                                | 4.6                           | 7.2                              |
| 8    | —                                       | —                                   | —                             | —                                |
| 9    | 42.8                                    | 47.8                                | 3.3                           | 6.1                              |
| 10   | 48.4                                    | 42.7                                | 3.4                           | 5.5                              |

Table 3.4: Particle size distribution.

$a$ ,  $a_d$  and  $m_T^*$  in function of  $h$  as

$$\begin{pmatrix} a \\ a_d \\ m_T^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_{d0} \\ m_{T0}^* \end{pmatrix} \times \begin{cases} 1 & \text{if } h \leq h_0 \\ (h_0/h)^b & \text{if } h > h_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

where  $a_0$  (resp.  $a_{d0}$ ) is the detachability of the original soil (resp. deposited layer),  $m_{T0}^*$  the critical mass equal to 2.2 kgm<sup>-2</sup> in our simulations,  $h_0$  a threshold depth and  $b$  a positive constant. Heng *et al* [96] found that the model is relatively insensitive to  $b$ . The value  $b = 1$  was used in our studies and we set  $h_0 = 0.6$  mm. The parameter  $J$  is related to  $a_0$  and we used  $J = 15000/a_0$  as mentioned in [96].

The above rationalisation reduces the number of independent parameters in the Hairsine and Rose model to:  $a_0$ ,  $a_{d0}$ ,  $\omega_{cr}$  and  $F$ . Based on published data in [96, 156], we defined firstly a set of homogeneous values of these parameters. The first simulation results were in the same range with those observed in the field. Next we spatialized  $a_0$  in function of the crust type and adjusted  $a_0$ ,  $a_{d0}$ ,  $\omega_{cr}$ ,  $F$  one by one by criteria (3.41) to choose the best value. See again tables 3.2 for the calibrated parameters and table 3.3 for simulation result. Note that although the methodology is simple, the calibration required a lot of simulations.

Figure 3.12 presents the coherence between the simulation result and those of experiment. Although the crust evolution was neglected and the measured detachment rates on 10 plots are very different (from 12.25 to 109.74(g)), the simulation was able to reproduce this behaviour. Applying (3.41), we obtain RMES = 13.51(g), CE = 0.80 for 10 plots. If we do not take into account the plot 7 and 9, we obtain better coherence RMES = 12.95(g), CE = 0.83.

The rainsplash detachment parameter  $a_0$  has been found to be the most sensitive to soil erosion in this experiment. Figure 3.13 presents a simple sensitivity analysis for  $a_0$  by using a perturbation around calibrated values. We found again the same conclusion with those presented in the case of surface runoff, *i.e.* the sensitivity relating to each crust type depend strongly on its fraction in the plot. Moreover, we found that the BSC and RUI are the most sensitive contrary to ST crusts.

Finally, we have compared the total splash detachment rate  $\sum e_i$  with those measured at the outlet of the plot. In fact, the splash detachment is often known to be the first

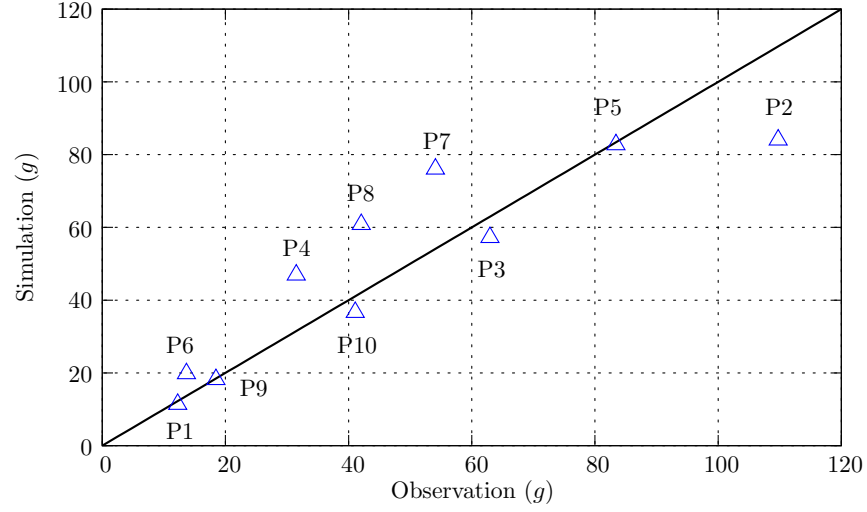


Figure 3.12: Observed against simulated erosion mass at the outlet of the ten plots.

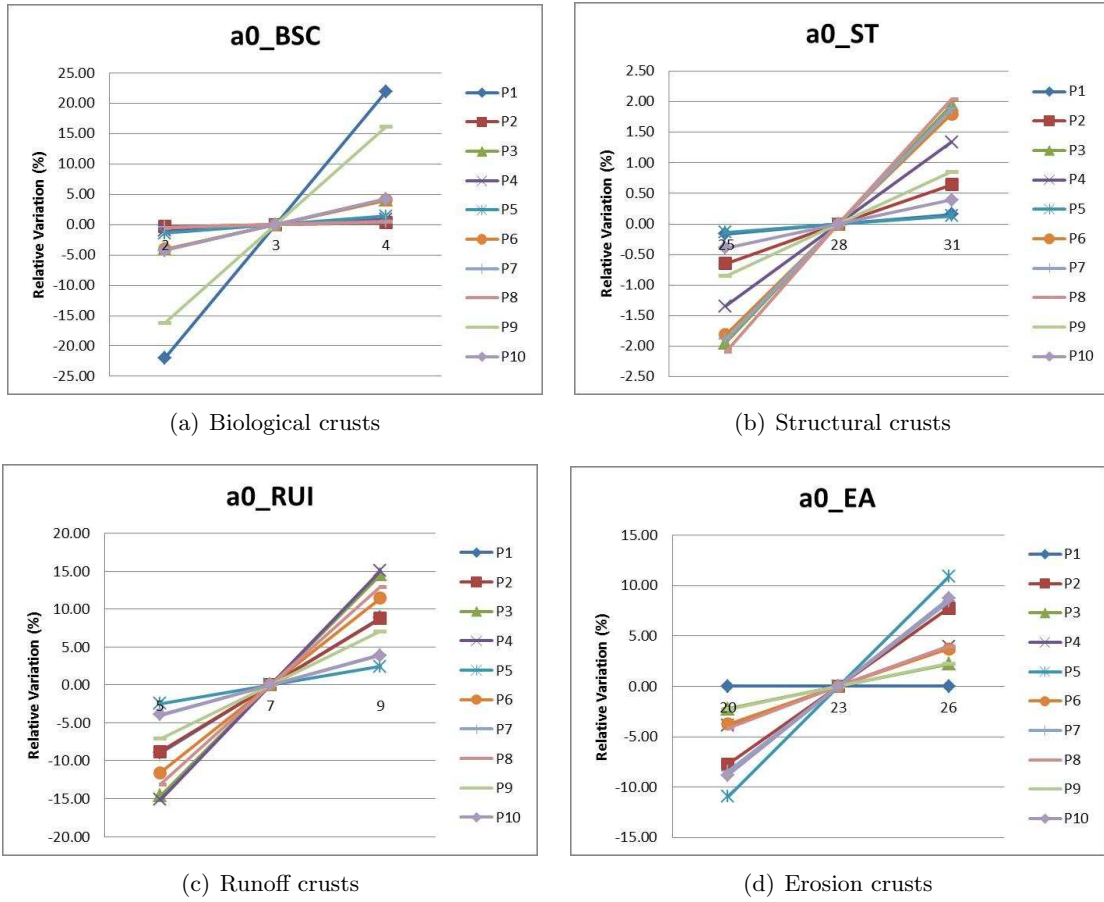


Figure 3.13: Sensitivity of the parameter  $a_0$ .

explicative factor of erosion rate at plot scale. Using calibrated parameters, the total rate of splash detachment is from 4 to 5 times of those measured (figure 3.14a). An average value coefficient of determination  $R^2 = 0.56$  shows again that the splash detachment is an important factor but not sufficient to predict erosion even at plot scale. Using our model, which includes a dynamic runoff transport routine, the prediction result is in the same range of those measured and  $R^2 = 0.81$  (figure 3.14b). This justifies the necessity to take into account the sediment transport in soil erosion modelling even at the square meter scale.

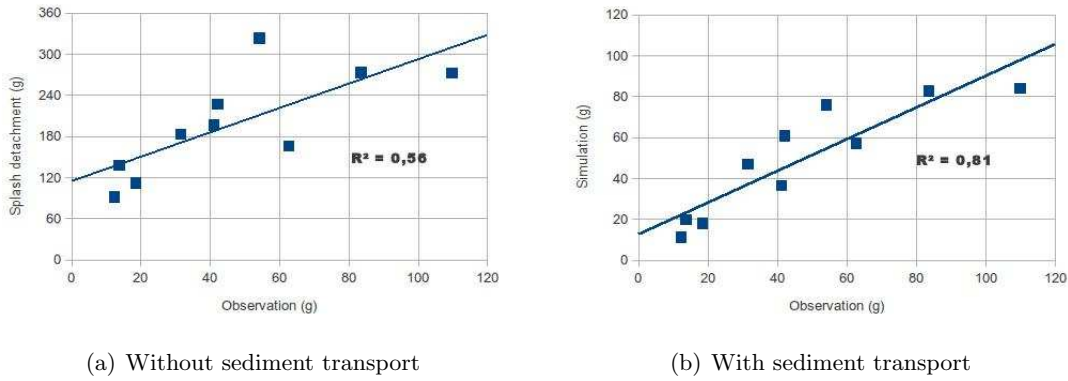


Figure 3.14: Erosion rate calculated with and without sediment transport.

### 3.5 Conclusion

The two-dimensional Shallow-Water system coupled to the Hairsine and Rose equations can be used to simulate surface runoff and soil erosion phenomenon under various conditions. A numerical implementation of the coupled system using a well-balanced finite volume scheme has been presented. Especially, the hydrostatic reconstruction and the HLL solver have been adopted as a simple and robust way to archive the well-balanced property and to capture the contact discontinuities relating to sediment transport by suspension. The proposed numerical implementation allows us to take into account heterogeneity feature of soil as the microtopography and the particle size distribution.

The simulation using experimental data required parameter calibration and the computed results on ten plots show a good agreement with those observations on the field. By using a one-at-time sensitivity analysis, we also showed that the parameters relating to biological crusts are very sensitive and thus require a careful calibration. We also showed that the splash detachment is an important factor, but not sufficient to predict erosion even at the plot scale.

In the case of crusted soils, some improvements of the model can be implemented: using the effective hydraulic conductivity instead of  $K_s$  (see e.g. [65]) to take into account the effect of a two-layer soil (crust and subcrust); using the effective settling velocity  $v_f$  could allow to integrate the splash transport (see e.g. [108]); and finally spatially distributing the particle size distribution in function of physical soil crust type since, for example, the runoff crusts

are often composed by coarse particles while the fine particles are usually found in structural crusts.

## Chapitre 4

# Intégration du taux d'inondation pour la modélisation à l'échelle du bassin versant

Dans le chapitre précédent, nous avons développé un outil numérique pour simuler le ruissellement et l'érosion de plusieurs classes de sédiments en suspension. Néanmoins, comme le ruissellement et l'érosion sont des processus spatiaux à petite échelle, nous avons besoin d'une résolution suffisamment précise de la topographie. Par conséquent, le code développé était plutôt adapté à des applications à l'échelle de la parcelle.

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la simulation du processus d'érosion à l'échelle du bassin versant. Par définition, le bassin versant est un domaine dans lequel tous les écoulements des eaux convergent vers un même point que l'on nomme exutoire de ce bassin. Deux bassins versants sont séparés par une ligne de crête topographique appelée ligne de partage des eaux. Ces lignes sont des frontières naturelles dessinées par le relief. Les gouttes de pluie tombant d'un côté ou de l'autre d'une ligne de partage des eaux alimenteront des bassins versants limitrophes (figures 4.1, 4.2).

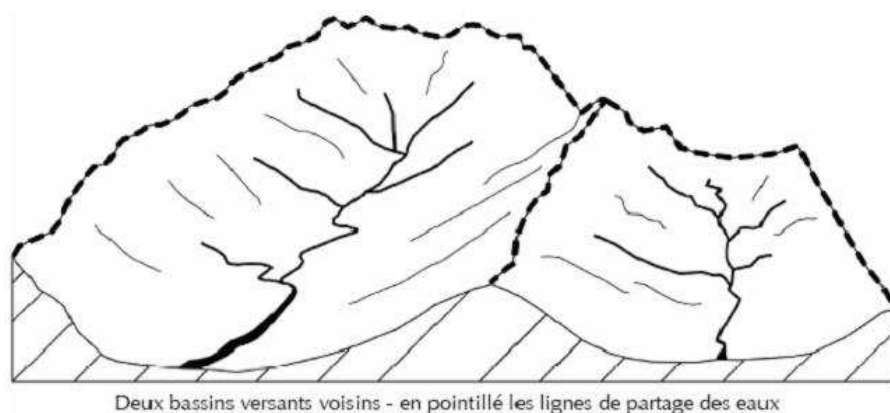


FIGURE 4.1 – Illustration du bassin versant (source : cahier pédagogique n°5 - Agence de l'eau Loire-Bretagne).



FIGURE 4.2 – Ligne de partage des eaux est la frontière entre deux bassins versants (photo de Guillaume Brialon).

Les données dont nous disposons à l'échelle du bassin versant présentent souvent des caractéristiques qui sont problématiques pour la simulation avec un modèle à base physique, par exemple l'application directe du code développé au chapitre 3. En effet, la résolution spatiale des données de terrain (le modèle numérique de terrain ou MNT) est faible, typiquement de l'ordre de 5 – 10 mètres, et la base de données est parfois volumineuse (pour un grand bassin versant). Plus précisément, la résolution du MNT pose le problème de la prise en compte de la microtopographie (les micro-variations de la surface du sol), qui peut avoir des effets importants sur les processus hydrologiques et d'érosion (par exemple les détails de la topographie à l'échelle du centimètre sont essentiels pour l'érosion). Le volume des données nous conduit à des simulations qui sont très coûteuses au niveau du temps de calcul ou des ressources en mémoire. Par ailleurs la recherche et la calibration des paramètres de modèle ne sont pas toujours facile à envisager. C'est pourquoi des modèles empiriques ou conceptuels sont souvent utilisés pour ce type de simulation.

Dans un premier temps, nous proposons une approche multi échelle qui modélise le processus à l'échelle macroscopique et qui, en même temps, prend en compte l'effet à petite échelle de la microtopographie. Plus précisément, nous allons caractériser localement la microtopographie par une fonction notée  $a(h)$  représentant le taux d'inondation, puis l'intégrer dans les équations d'évolutions (3.1-3.5). Ensuite, nous étudierons le système modifié et construirons un schéma numérique adapté. Nous concluons le chapitre par des tests de validation numérique.

## 4.1 Caractérisation de la microtopographie

Les microtopographies ont une importance reconnue dans les processus hydrologiques puisqu'elles permettent le stockage superficiel d'une partie de l'eau. Quand le ruissellement a lieu, les microtopographies définissent la largeur et la direction des écoulements. Ceci influe non seulement sur l'hydrogramme de la crue, mais aussi sur la capacité de détachement et de transport de sédiments et donc sur l'érosion qui en résulte (voir e.g. [5–7, 64]).

Parmi les trois types d'érosion observée sur un bassin versant (l'érosion en nappe, l'érosion en rigole et l'érosion en ravine) et dans le contexte du ruissellement Hortonien (le ruissellement apparaît lorsque les intensités de pluie dépassent la capacité d'infiltration des sols), la microtopographie occupe un rôle majeur pour le deuxième type. En effet, l'érosion en rigoles résulte de la concentration du ruissellement en petits canaux appelés rigoles (figure 4.3). Notons que la surface est partiellement inondée et la vitesse locale de l'écoulement dans la rigole est souvent plus importante que la vitesse moyenne sur toute la cellule considérée. Or l'érosion est un phénomène à seuil c'est-à-dire qu'elle a lieu quand la vitesse de l'écoulement dépasse une valeur critique. Comme les rigoles sont souvent à l'échelle non-résolue au niveau du MNT, la simulation risque de donner de mauvais résultats pour le processus d'érosion.



FIGURE 4.3 – Erosion en rigole (source : internet).

En général on ne connaît pas explicitement la microtopographie. Elle est souvent représentée de manière indirecte soit par l'écart-type si la distribution est aléatoire, soit par l'occupation du sol si l'hétérogénéité est orientée (figure 4.4). Il est donc important de trouver un moyen de prendre en compte implicitement l'effet des microtopographies tout en conservant un niveau de résolution spatiale raisonnable.

Pour traiter l'effet sous-maille de la microtopographie, nous allons nous intéresser à deux points. Tout d'abord nous allons calculer la capacité de rétention superficielle, qui est une valeur seuil d'une zone donnée au-dessus de laquelle les micro-dépressions de surface débordent et le ruissellement commence. La seconde partie sera l'intégration, dans les équations de l'écoulement, d'un indicateur représentant la partie effectivement occupée par l'eau. Ce dernier sera noté  $a(h)$ , et il exprime le taux d'inondation de la cellule par rapport à une hauteur moyenne  $h$  donnée. Cette fonction est également appelée la *porosité effective* de l'écoulement dans la cellule.

Par définition, la fonction  $a(h)$  croît en  $h$  et varie de 0 à 1. Sa forme précise dépend de la microtopographie. Pour le cas d'une distribution aléatoire, cette fonction est fortement liée à l'écart-type. A titre d'exemple, une loi exponentielle a été proposée dans [107, 111] à partir



FIGURE 4.4 – Labour en sillons d'un champ de pommes de terre (photo d'O. Cerdan).

de 362 observations avec le coefficient de corrélation  $R^2 = 0.99$

$$a(h) = 1 - e^{-\alpha h}, \quad \alpha = 1.406 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{-0.942}, \quad (4.1)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type de la microtopographie et  $\sigma_0 = 1\text{mm}$  (voir figure 4.5).

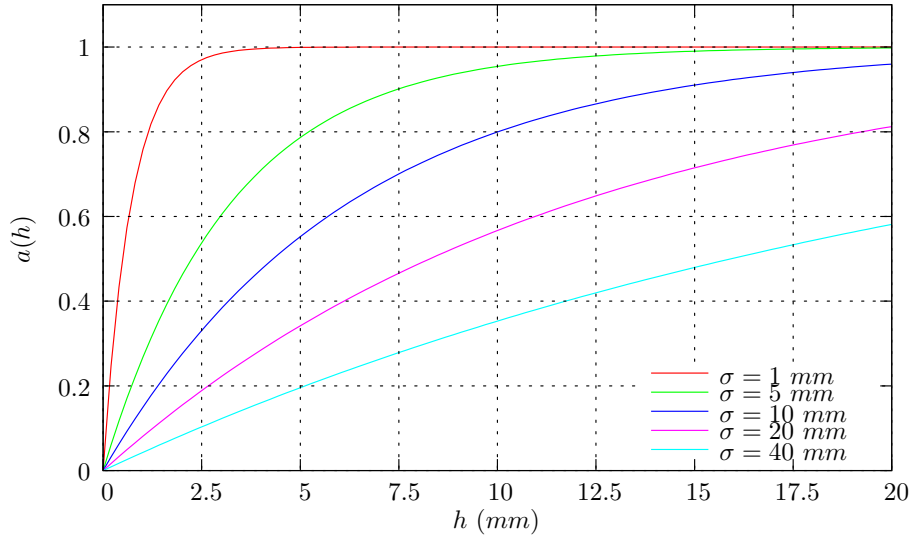


FIGURE 4.5 – Comportement de  $a(h) = 1 - e^{-\alpha h}$  pour différentes valeurs de l'écart-type de la microtopographie.

## 4.2 Interprétation probabiliste du taux d'inondation

Nous pouvons donner une définition mathématique de taux d'inondation  $a(h)$ , à l'aide du concept de *Surface Représentative Élémentaire* (SRE) introduit par Bear [16], encore appelé

Representative Elementary Area en anglais. Une SRE est une unité élémentaire du bassin dont la taille permet une variabilité intra-élément négligeable par rapport à la variabilité inter-élément en terme de caractéristiques physiques. En d'autres mots, nous pouvons caractériser l'écoulement dans chaque SRE par une hauteur d'eau et une vitesse moyenne. Nous nous intéressons dans ce travail au cas où la SRE est partiellement inondée. Définissons maintenant le taux d'inondation d'une SRE en supposant  $h$  est la hauteur d'eau moyenne associée.

Introduisons tout d'abord la fonction indicatrice  $\varphi(x, y, z)$  caractérisant le fond  $z_b$ . Cette fonction est quelque fois appelée la fonction de phase pour les écoulements multiphasiques (voir e.g. [60])

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > z_b(x, y), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Considérons une SRE  $A$  dont  $h$  est la hauteur d'eau moyenne (la définition rigoureuse sera donnée plus tard),  $z_s$  est le niveau de la surface libre correspondant (supposé presque constant dans  $A$ ). On définit l'opérateur "moyenne sur  $A$ ", associé à  $\varphi$ , d'une quantité microscopique  $\mu(x, y, z)$  par

$$\langle \mu \varphi \rangle (z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|A|} \int_A \mu \varphi(x, y, z) dx dy, \quad (4.3)$$

et en particulier le taux d'inondation de  $A$  est

$$a(h) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \varphi \rangle (z_s) = \frac{1}{|A|} \int_A \varphi(x, y, z_s) dx dy. \quad (4.4)$$

Par la définition (4.4),  $\langle \varphi \rangle (z)$  peut être considéré comme la probabilité que l'élévation locale  $z_b(x, y)$ ,  $(x, y) \in A$  ne soit pas dépassée par l'attitude  $z$ , *i.e.*

$$\langle \varphi \rangle (z) = \mathbb{P}(z_b \leq z). \quad (4.5)$$

De cette manière, la dérivée  $f(z) = \partial_z \langle \varphi \rangle (z)$  n'est autre que la densité de probabilité de la variable aléatoire  $z_b$ . On peut maintenant réécrire  $a(h)$  en tant que fonction de répartition

$$a(h) = \mathbb{F}_{z_b}(z_s) = \int_{-\infty}^{z_s} f(z) dz. \quad (4.6)$$

La hauteur d'eau moyenne sur  $A$  peut être définie par

$$h = h(z_s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\inf\{z_b \mid (x, y) \in A\}}^{z_s} \langle \varphi \rangle (z) dz = \int_{-\infty}^{z_s} \langle \varphi \rangle (z) dz = \int_{-\infty}^{z_s} \mathbb{F}_{z_b}(z) dz \quad (4.7)$$

puisque  $\varphi$  est à support dans l'intervalle  $(\inf\{z_b \mid (x, y) \in A\}, +\infty)$ . Grâce à (4.6, 4.7), on obtient  $\left. \frac{\partial h}{\partial z_s} \right|_{z=z_s} = \mathbb{F}_{z_b}(z_s) = a(h) > 0$ , ce qui nous permet d'affirmer que la fonction inverse  $z_s = z_s(h)$  est bien définie.

Pour terminer cette partie, nous donnons un exemple typique cité dans [51]. Supposons que  $z_b$  suive la loi normale centrée réduite, *i.e.*  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ . Par (4.6), la valeur de  $a(h)$  correspondant au niveau de la surface libre  $z_s$  est

$$a(h) = \mathbb{F}_{z_b}(z_s) = \int_{-\infty}^{z_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{z_s}{\sqrt{2}} \right) \right], \quad (4.8)$$

où  $\text{erf}(\cdot)$  est appelée la fonction d'erreur. La hauteur d'eau moyenne peut être donnée explicitement par un calcul direct de (4.7) tenant en compte une propriété particulière de la fonction de densité  $f'(z) = -zf(z)$ , on obtient :

$$h = z_s a(h) + f(z_s). \quad (4.9)$$

Par un changement de variable, on peut générer (4.8) et (4.9) pour le cas d'une distribution gaussienne  $z_b \sim \mathcal{N}(\bar{z}_b, \sigma^2)$  dont la fonction de densité est  $\tilde{f}(z) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{z - \bar{z}_b}{\sigma}\right)$  (voir figure 4.6) :

$$a(h) = \int_{-\infty}^{z_s} \tilde{f}(z) dz = \int_{-\infty}^{\frac{z_s - \bar{z}_b}{\sigma}} f(z) dz, \quad (4.10)$$

$$\frac{h}{\sigma} = \frac{z_s - \bar{z}_b}{\sigma} a(h) + f\left(\frac{z_s - \bar{z}_b}{\sigma}\right). \quad (4.11)$$

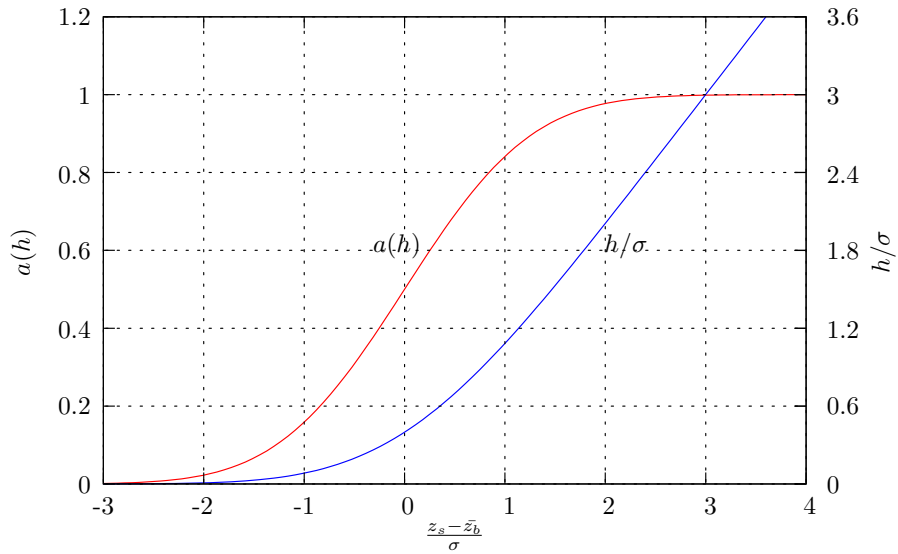


FIGURE 4.6 – Comportement de la fonction  $a(h)$  pour le cas d'une distribution gaussienne  $z_b \sim \mathcal{N}(\bar{z}_b, \sigma^2)$ .

### 4.3 Équations d'évolution

Afin de donner une illustration intuitive de l'intégration du taux d'inondation  $a(h)$  dans le système des équations d'évolution du type Saint-Venant, nous considérons une configuration très simple, mais réaliste : une topographie composée d'inter-rigoles (interrill en anglais) et d'un petit canal au milieu (figure 4.7). En négligeant le transfert de quantité de mouvement latéral entre les inter-rigoles et le canal, l'écoulement peut donc être considéré comme quasi-unidimensionnel. Le modèle hydrologique décrivant ce phénomène est bien connu, quelquefois

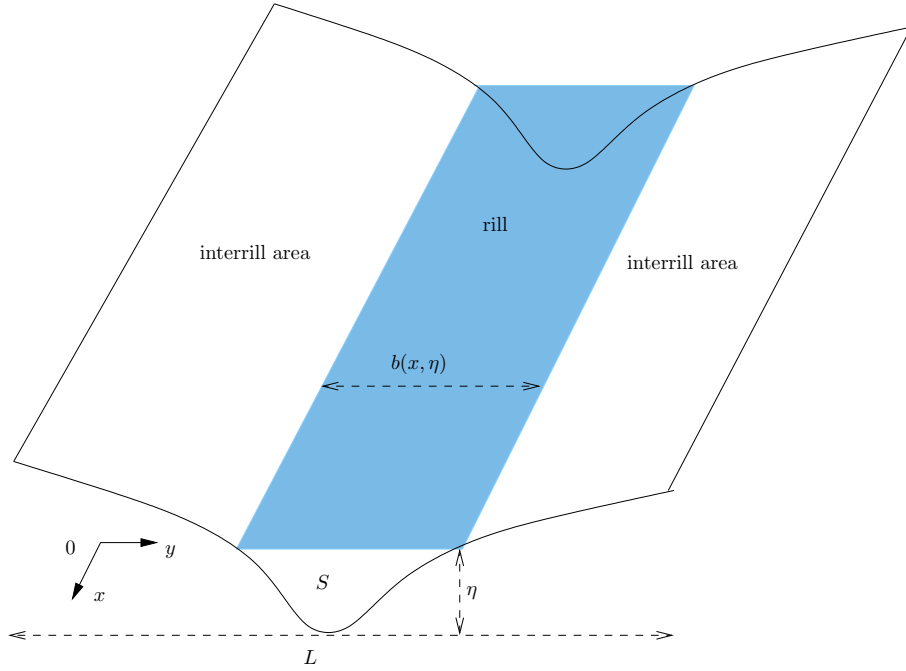


FIGURE 4.7 – Cas d'une topographie composée par des inter-rigoles et un petit canal.

appelé les équations de Saint-Venant 1.5D (voir e.g. [41, 47, 73, 79, 80])

$$\begin{cases} \partial_t S + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left( \frac{Q^2}{S} \right) + gS \partial_x z_s = -gSS_f, \end{cases} \quad (4.12)$$

où ses variables sont  $S$  et  $Q$  représentant la section hydraulique (en  $\text{m}^2$ ) et le débit (en  $\text{m}^3/\text{s}$ ) de l'écoulement :

$$S(x, t) = \int_0^\eta b(x, w) dw, \quad Q(x, t) = S(x, t)u(x, t),$$

avec  $\eta(x, t)$  la profondeur locale,  $b(x, w)$  la largeur du canal au niveau  $w$  (revoir la figure 4.7), et  $u$  représentant la vitesse moyenne de l'écoulement. Le système (4.12) peut se réécrire sous forme conservative en développant le terme de pression  $gS \partial_x z_s$

$$\begin{cases} \partial_t S + \partial_x Q = 0, \\ \partial_t Q + \partial_x \left( \frac{Q^2}{S} + gI_1 \right) = gI_2 - gS(\partial_x z_b + S_f). \end{cases} \quad (4.13)$$

Le terme  $gI_1$  prend en compte la pression hydrostatique et  $gI_2$  représente la force de pression causée par l'évolution longitudinale de la largeur de canal. Plus précisément

$$I_1 = \int_0^\eta (\eta - w)b(x, w)dw, \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^\eta (\eta - w)\partial_x b(x, w)dw.$$

Nous supposons que le domaine est de largeur  $L$  fixée. La hauteur d'eau moyenne  $h$  et le flux  $q$  sont définis par

$$h = \frac{S}{L}, \quad \text{et} \quad q = \frac{Q}{L} = hu. \quad (4.14)$$

Alors, le taux d'inondation  $a$  en  $x$ , correspondant à la hauteur moyenne  $h$  peut être défini intuitivement comme le ratio entre largeur de l'écoulement et celle du domaine, *i.e.*

$$a(x, h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b(x, \eta)}{L}. \quad (4.15)$$

En divisant les deux équations du système (4.13) par  $L$ , on obtient les équations d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gI_1}{L}\right) = \frac{gI_2}{L} - gh(\partial_x z_b + S_f). \end{cases} \quad (4.16)$$

où le taux d'inondation  $a$  a été pris en compte de manière implicite dans les termes  $gI_1/L$  et  $gI_2/L$ . Notons que pour le cas où  $a(x, h)$  est constante égale à 1, nous avons  $gI_1/L = gh^2/2$ ,  $I_2 = 0$  et alors nous retrouvons la version 1D habituelle des équations de Saint-Venant qui décrivent l'écoulement dans un canal rectangulaire prismatique. Comme le calcul des intégrales  $I_1$  et  $I_2$  nécessite en général de connaître le profil géométrique du canal, nous allons considérer une configuration particulière pourtant moins restrictive, il s'agit du canal rectangulaire non-prismatique, *i.e.*  $b(x, w) = b(x)$  et  $\partial_x b \neq 0$ , ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{S}{b}, \\ \frac{gI_1}{L} &= \frac{g\eta^2 b}{2L} = \frac{gS^2}{2L^2} \frac{L}{b} = \frac{gh^2}{2a}, \\ \frac{gI_2}{L} &= \frac{g\eta^2 \partial_x b}{2L} = \frac{gS^2 \partial_x b}{2Lb^2} = \frac{gh^2}{2a^2} \partial_x a. \end{aligned}$$

Le système (4.16) devient donc

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2a}\right) = \frac{gh^2}{2a^2} \partial_x a - gh(\partial_x z_b + S_f). \end{cases} \quad (4.17)$$

De manière intuitive, nous pouvons généraliser le système (4.17) au cas bidimensionnel en remplaçant les opérateurs de dérivation par la divergence et le gradient. Notons que pour le cas bidimensionnel, les variables macroscopiques  $(h, \mathbf{q})$  représentent la hauteur d'eau moyenne et le flux sur une SRE. Le flux  $\mathbf{q}$  est défini grâce à l'opérateur de moyenne (4.3)

$$\mathbf{q} = \int_{-\infty}^{z_s} \langle \tilde{\mathbf{v}} \varphi \rangle(z) dz, \quad (4.18)$$

où  $\tilde{\mathbf{v}}$  est la vitesse locale dans la SRE. Ensuite, nous pouvons définir la vitesse moyenne  $\mathbf{v} = (u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{q}/h$ . Le taux d'inondation est maintenant noté  $a(\mathbf{x}, h)$ , où  $\mathbf{x} = (x, y)$  caractérise la coordonnée spatiale de la SRE à l'échelle macroscopique.

Defina [51] a été le premier à présenter une dérivation rigoureuse des équations d'évolution de  $(h, \mathbf{q})$  à partir du système de Navier-Stokes 3D avec l'hypothèse de la pression hydrostatique et l'utilisation du concept de SRE. Il y est fait l'hypothèse que toutes les parties inondées dans une SRE sont connectées (subgrid connectedness assumption) ainsi le niveau de la surface libre  $z_s$  dans une SRE est presque constant. Nous multiplions tout d'abord les équations

de Navier-Stokes avec  $\varphi$  puis nous appliquons l'opérateur (4.3) afin de moyenner sur la SRE. Cette procédure peut s'interpréter comme étant application du *filtrage* (4.3) aux équations de Navier-Stokes (voir e.g. [155]). Ensuite, nous les intégrons selon la verticale à l'aide de (4.7, 4.18) comme cela est fait pour la dérivation de Saint-Venant classique [74, 129]. Nous renvoyons à [51] pour une description détaillée de chaque étape de la dérivation. Les équations obtenues consistent avec la version 1D, *i.e.* le système (4.12)

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\vec{v}) = 0, \\ \partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + gh\nabla z_s = -ghS_f. \end{cases} \quad (4.19)$$

Notons que dans (4.19), nous avons négligé le terme de turbulence et de dispersion. Toujours comme le cas 1D, le taux d'inondation a été pris en compte implicitement dans le terme de pression  $gh\nabla z_s$  et nous devons connaître le profil géométrique de la SRE pour pouvoir représenter explicitement cette pression en fonction de  $h$ ,  $z_b$  et  $a(\mathbf{x}, h)$ . Une autre remarque peut être faite : le système (4.19) ne prend pas en compte les flaques superficielles. En effet, par l'hypothèse de la connectivité des parties inondées, la variable  $h$  dans ce système représente uniquement la quantité d'eau disponible pour l'écoulement. Dans le cas contraire,  $a(\mathbf{x}, h)$  doit être remplacée par  $a(\mathbf{x}, h_0 + h)$  où  $h_0$  symbolise la quantité d'eau stockée par les flaques superficielles. Or avec érosion qui modifie la microtopographie, la valeur de  $h_0$  peut évoluer en temps. De cette manière,  $a(\mathbf{x}, h_0 + h)$  évolue non seulement avec  $h$ , mais aussi par l'érosion.

D'un point de vue numérique et pratique, il est préférable d'effectuer séparément le calcul de l'évolution de  $a(\mathbf{x}, h_0 + h)$  avec du calcul des variables hydrodynamiques  $(h, \mathbf{q})$ . Autrement dit, nous pouvons utiliser un *splitting* qui consiste à considérer que  $a(\mathbf{x}, h_0 + h) := a(\mathbf{x})$  est un paramètre spatial à chaque itération en temps de la résolution numérique du système (4.19). Cette stratégie peut s'interpréter comme l'utilisation, pour modéliser le fond, d'un canal à profil rectangulaire non-prismatique selon les directions  $x$  et  $y$ , à chaque itération en temps. Comme dans le cas 1D, cette configuration particulière implique  $z_s = h/a + z_b$  qui nous permet de réécrire le terme de pression  $gh\nabla z_s$  sous la forme

$$gh\nabla z_s = \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) - \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a + gh\nabla z_b.$$

En résumé, nous avons approché le système (4.19) à chaque pas de temps par un système plus simple souvent appelé *équations de Saint-Venant avec porosité* (voir e.g. [97, 98])

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\vec{v}) = 0, \\ \partial_t(h\vec{v}) + \nabla \cdot (h\vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a - gh(\nabla z_b + S_f), \end{cases} \quad (4.20)$$

qui n'est autre que la version bidimensionnelle du système (4.17) présenté ci-dessus. La mise à jour du taux d'inondation  $a(\mathbf{x})$  est faite à la fin de chaque itération, en utilisant la nouvelle valeur de  $h$ , éventuellement complétée par une loi d'évolution de la microtopographie. Notons que le système (4.20) est souvent utilisé pour la modélisation macroscopique des inondations urbaines où le taux de couvert artificiel du sol (par exemple des bâtiments) est représenté par un facteur de porosité isotrope  $a(\mathbf{x})$ . Comme la paroi des bâtiments est verticale, la porosité n'est qu'un paramètre spatial (voir e.g. [70, 87, 88, 97, 163]). Par ailleurs, une dérivation directe du système (4.20) à partir du principe de conservation, avec l'hypothèse  $a = a(\mathbf{x})$ , peut également se retrouver dans [88, 157].

Comme dans le chapitre 3, nous utilisons les équations d'Hairsine et Rose pour modéliser l'érosion causée par la pluie et par le ruissellement, *i.e.* équations (3.6, 3.7, 3.8). Néanmoins, la coexistence de la partie sèche et partie inondée dans une même SRE nécessite certaines modifications par rapport aux équations (3.3, 3.4, 3.5) de conservation de la masse des sédiments suite aux remarques évidentes suivantes : (i) la suspension n'a lieu que sur la partie inondée ; (ii) l'arrachement par splash atteint sa valeur maximale, notée  $\tilde{e}_i = (1 - H)p_i a_0 R$ , sur la partie sèche. Le coefficient d'arrachement  $a_0$  est défini comme dans (3.43). Avec le terme source de pluie et l'infiltration, le système complet que nous adoptons dans ce chapitre est

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = R - I_r, \quad (4.21)$$

$$\partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a - gh(\nabla z_b + S_f), \quad (4.22)$$

$$\partial_t(hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = a(e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i), \quad (4.23)$$

$$\partial_t m_i = a(d_i - e_{ri} - r_{ri}) + (1 - a)\tilde{e}_i, \quad (4.24)$$

$$\partial_t z_b = -\frac{a}{(1 - \phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i). \quad (4.25)$$

Notons en plus que la variable  $h$  qui apparaît dans les termes sources donnés par les équations (3.6, 3.7, 3.8) doit être remplacé par  $h/a$ , *i.e.* la hauteur d'eau moyenne sur la partie inondée. Une version simplifiée du système (4.21-4.25) a été utilisée récemment dans [109] pour modéliser l'effet de la couverture du sol par les fragments de roches sur le processus d'érosion.

## 4.4 Méthode numérique

Dans cette section, nous étudions et proposons un schéma volumes finis pour la résolution du système (4.21-4.25). Comme dans le chapitre 3, nous utilisons le splitting de Strang (3.9) pour résoudre séparément la phase du ruissellement et du transport de sédiment ( $\mathcal{L}$ ) et celle d'érosion et de dépôt ( $\mathcal{S}$ ). Pour le cas du système considéré, ces deux opérateurs sont

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t(h\mathbf{v}) + \nabla \cdot (h\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a - gh(\nabla z_b + S_f), \\ \partial_t(hc_i) + \nabla \cdot (h\mathbf{v}c_i) = 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} \partial_t h = R - I_r, \\ \partial_t(hc_i) = a(e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i), \\ \partial_t m_i = a(d_i - e_{ri} - r_{ri}) + (1 - a)\tilde{e}_i, \\ \partial_t z_b = -\frac{a}{(1 - \phi)\rho_s} \sum_{i=1}^N (e_i + e_{ri} + r_i + r_{ri} - d_i). \end{cases} \quad (4.27)$$

Effectuons les mêmes raisonnements que dans le chapitre 3 pour ( $\mathcal{L}$ ) et ( $\mathcal{S}$ ), nous construisons pas à pas le schéma numérique complet :

- Résolution de ( $\mathcal{L}$ ) :

1. Résoudre les équations de Saint-Venant avec porosité

$$\begin{cases} \partial_t h + \nabla \cdot (h\vec{v}) = 0, \\ \partial_t(h\vec{v}) + \nabla \cdot (h\vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \nabla a - gh \nabla z_b. \end{cases} \quad (4.28)$$

2. Rajouter le frottement par le traitement semi-implicite

$$(h\vec{v})^{n+1} = \frac{(h\vec{v})_*^{n+1}}{1 + g\Delta t \frac{n^2 |\mathbf{v}^n|}{(R_h^{n+1})^{4/3}}}, \quad (4.29)$$

où  $(h\vec{v})_*^{n+1}$  est obtenu par (4.28) et  $R_h = \frac{h}{a + 2h/a}$  est le rayon hydraulique.

Notons que grâce à la disposition du taux d'inondation, nous avons pu améliorer l'approximation du rayon hydraulique au lieu de prendre  $R_h = h$  comme dans (1.2).

3. Résoudre  $N$  équations du transport de sédiment

$$(hc_i)_{j,k}^{n+1} - (hc_i)_{j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{j+1/2,k}^{hc_i} - F_{j-1/2,k}^{hc_i} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( G_{j,k+1/2}^{hc_i} - G_{j,k-1/2}^{hc_i} \right) = 0,$$

où les flux  $F_{j\pm 1/2,k}^{hc_i}$  et  $G_{j,k\pm 1/2}^{hc_i}$  sont calculés à l'aide de l'expression (3.14) du chapitre 3.

- Résoudre les équations différentielles ordinaires ( $\mathcal{S}$ ) par le schéma d'Euler explicite comme cela est fait dans les expressions (3.34, 3.37) du chapitre 3.
- Faire évoluer le comportement du taux d'inondation  $a$ , causée par l'érosion, par une loi adaptée.

Il nous faut donc préciser : (i) le schéma numérique du système de Saint-Venant avec porosité et (ii) la loi d'évolution du taux d'inondation. Pour ce premier, notons que (4.28) est invariant par rotation. Grâce à cette propriété, il nous suffit de construire le schéma numérique pour le système 1D

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \partial_x a - gh \partial_x z_b, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(huv) = 0. \end{cases}$$

Dans la troisième équation, la vitesse tangentielle  $v$  est convectée par l'écoulement. Nous pouvons donc la traiter comme le transport de sédiment abordé précédemment. Dans ce qui suit, nous nous limitons alors au système constitué des deux premières équations

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2a} \right) = \frac{gh^2}{2a^2} \partial_x a - gh \partial_x z_b. \end{cases} \quad (4.30)$$

Afin d'écrire la méthode numérique, nous réécrivons (4.30) sous la forme vectorielle

$$\partial_t W + \partial_x F(W, \sigma) = S(W, \sigma) \partial_x \sigma + \frac{\partial F}{\partial \sigma} \partial_x \sigma, \quad (4.31)$$

dans laquelle nous avons utilisé les notations

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} a \\ z_b \end{pmatrix}, \quad F(W, \sigma) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2a} \end{pmatrix},$$

$$S(W, \sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{gh^2}{a^2} & -gh \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{gh^2}{2a^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Concernant le caractère bien posé du système (4.31) lors d'une discontinuité spatiale de  $\sigma$ , deux remarques importantes doivent être faites : (i) la fonction flux  $F(W, \sigma)$  a une dépendance spatiale, ceci est lié au problème de couplage à l'interface de deux systèmes de conservation dont l'aspect théorique et numérique est le sujet de plusieurs recherches. Ce sujet reste encore ouvert à ce jour (voir e.g. [10, 76, 77] et ses références) ; (ii) les produits non-conservatifs du membre de droite posent des difficultés mathématiques [48]. Toutefois, la discontinuité spatiale de  $\sigma$  est inévitable du point de vue de l'application et de la méthode numérique, par exemple quand on approche numériquement le taux d'inondation  $a$  et la topographie  $z_b$  par des fonctions constantes par morceaux.

Dans le cadre de cette thèse, nous abordons ce problème du point de vue numérique. Précisément, la dépendance spatiale du flux  $F(W, \sigma)$  peut être supprimée ou éliminée formellement en considérant  $\sigma$  en tant que variable du système au lieu d'un paramètre. En effet, en rajoutant l'équation triviale  $\partial_t \sigma = 0$ , nous remplaçons (4.31) par le système quasi-linéaire suivant

$$\partial_t V + \mathcal{A}(V) \partial_x V = 0, \tag{4.32}$$

où nous avons  $V = (W, \sigma)$  et

$$\mathcal{A}(V) = \left( \begin{array}{c|c} A(V) & -S(V) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad A(V) = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{gh}{a} - u^2 & 2u \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{A}$  sont

$$\lambda_1(V) = u - c, \quad \lambda_2(V) = u + c, \quad \lambda_{3,4} = 0,$$

où  $c \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh/a}$  est la célérité d'onde. Notons qu'une valeur  $a < 1$  implique  $c > \sqrt{gh}$ , c'est le cas où la microtopographie diminue la section hydraulique et donc augmente la vitesse de l'écoulement. Les 1- et 2- champs, correspondants à  $\lambda_{1,2}$ , sont vraiment non-linéaires, tandis que les 3- et 4- champs, correspondants à  $\lambda_{3,4}$ , sont linéairement dégénérés.

Considérons le problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t V + \mathcal{A}(V) \partial_x V = 0, \\ V(x, 0) = \begin{cases} V_L & \text{si } x < 0, \\ V_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \tag{4.34}$$

Il nous faut préciser la définition du produit non-conservatif  $\mathcal{A}(V) \partial_x V$  quand une solution faible  $V$  présente des discontinuités. Dans cette perspective, nous nous intéressons à la

définition de Dal Maso et al. [48], dans laquelle  $\mathcal{A}(V)\partial_x V$  est interprété comme la mesure de Borel associée à une famille de *chemin conservatif* (encore appelé “path-conservative” en anglais).

Nous rappelons rapidement le concept de chemin conservatif permettant de donner une définition rigoureuse pour le produit non-conservatif. Voir [48, 78, 144] pour plus de détails.

**Définition 4.1.** Soit  $\Omega$  l'espace des états, un **chemin conservatif**  $\Phi(s; V_L, V_R)$  est une famille d'applications lipschitziennes  $\Phi : [0, 1] \times \Omega^2 \rightarrow \Omega$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- $\Phi(0; V_L, V_R) = V_L$  et  $\Phi(1; V_L, V_R) = V_R$ ,
- pour toute partie  $\mathcal{O}$  bornée de  $\Omega$ , il existe  $k$  tel que  $\forall s \in [0, 1], \forall V_L, V_R \in \mathcal{O} :$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; V_L, V_R) \right| \leq k |V_L - V_R|,$$

- pour toute partie  $\mathcal{O}$  bornée de  $\Omega$ , il existe  $K$  tel que  $\forall s \in [0, 1], \forall V_L^{1,2}, V_R^{1,2} \in \mathcal{O} :$

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; V_L^1, V_R^1) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; V_L^2, V_R^2) \right| \leq K(|V_L^1 - V_L^2| + |V_R^1 - V_R^2|).$$

**Théorème 4.1** (Dal Maso, LeFloch, Murat). Soit  $\Phi$  un chemin conservatif au sens de la définition précédente. Soit  $V \in BV([a, b], \mathbb{R}^N)$  et  $\mathcal{A} : ]a, b[ \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction bornée, i.e.

$$\forall X \subset \mathbb{R}^N \text{ bornée, } \exists C > 0 : \forall V \in X, \forall x \in ]a, b[, |\mathcal{A}(V, x)| \leq C.$$

Alors il existe une unique mesure de Borel  $\mu$  sur  $]a, b[$  caractérisée par les propriétés suivantes :

- Si  $x \mapsto V(x)$  est un ouvert  $B \subset ]a, b[$ , alors

$$\mu(B) = \int_B \mathcal{A}(V, x) \partial_x V dx.$$

- Si  $x_0 \in ]a, b[$  est un point de discontinuité de  $x \mapsto V(x)$  et  $V_L = V(x_0^-)$ ,  $V_R = V(x_0^+)$ , alors

$$\mu(\{x_0\}) = \left\{ \int_0^1 \mathcal{A}(x_0, \Phi(s; V_L, V_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; V_L, V_R) ds \right\} \cdot \delta_{x_0},$$

où  $\delta_{x_0}$  est la masse de Dirac au point  $x_0$ .

La mesure  $\mu$  définie de cette manière est appelée le produit non-conservatif de  $\mathcal{A}(V)$  par  $\partial_x V$  et on l'écrit  $\mu = [\mathcal{A}(V)\partial_x V]_\Phi$ . S'il existe un flux  $V \mapsto \mathcal{F}(V) \in C^1(\mathbb{R}^N)$  tel que  $\mathcal{A}(V)$  est le jacobien de  $\mathcal{F}$ , alors  $[\mathcal{A}(V)\partial_x V]_\Phi = \partial_x \mathcal{F}(V)$  et ne dépend pas du chemin conservatif  $\Phi$ .

À travers une discontinuité séparée par  $(V_L, V_R)$ , la solution faible vérifie la condition de Rankine-Hugoniot généralisée

$$\zeta(V_R - V_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; V_L, V_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; V_L, V_R) ds,$$

où  $\zeta$  est la vitesse de déplacement de la discontinuité dans le plan  $(x, t)$ . Dans le cas du système (4.31) et en notant  $\Phi = (\Phi_W, \Phi_\sigma)$ , cette condition devient

$$\begin{cases} \zeta(W_R - W_L) = F(W_R, \sigma_R) - F(W_L, \sigma_L) - S_\Phi(V_L, V_R) - T_\Phi(V_L, V_R), \\ \zeta(\sigma_R - \sigma_L) = 0, \end{cases} \quad (4.35)$$

où les termes  $S_\Phi$  et  $T_\Phi$  sont définis par

$$\begin{aligned} S_\Phi(V_L, V_R) &= \int_0^1 S(\Phi) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial s}(s; V_L, V_R) ds, \\ T_\Phi(V_L, V_R) &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\Phi) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial s}(s; V_L, V_R) ds. \end{aligned}$$

Nous présentons dans la suite deux schémas bien équilibrés permettant de résoudre le problème de Riemann (4.34) pour les équations de Saint-Venant avec porosité (4.31). Le premier est le schéma de Roe associé à un chemin conservatif. Le deuxième est dans l'esprit de la reconstruction hydrostatique. La comparaison de ces deux schémas en terme de précision et d'efficacité sera également présentée dans la suite.

#### 4.4.1 Schéma de Roe associé à un chemin conservatif

Le schéma de Roe peut être vu comme une approximation naturelle du système quasi-linéaire (4.32) qui consiste à remplacer localement  $\mathcal{A}(V)$  par la linéarisation  $\mathcal{A}_\Psi(V_L, V_R)$ , appelée la matrice de Roe généralisée, satisfaisant les propriétés suivantes (voir e.g. [170])

- (hyperbolicité)  $\mathcal{A}_\Psi(V_L, V_R)$  est diagonalisable
- (consistance)  $\mathcal{A}_\Psi(V, V) = \mathcal{A}(V)$  pour tout  $V \in \Omega$
- (conservation) pour chaque  $V_L, V_R \in \Omega$

$$\mathcal{A}_\Psi(V_L, V_R) \cdot (V_R - V_L) = \int_0^1 [\mathcal{A}(\Psi(s; V_L, V_R))] \frac{\partial \Psi}{\partial s}(s; V_L, V_R) ds. \quad (4.36)$$

Une fois  $\mathcal{A}_{j+1/2} = \mathcal{A}_\Psi(V_j^n, V_{j+1}^n)$  définie pour chaque l'interface, on introduit ensuite les matrices suivantes

- $|\mathcal{A}_{j+1/2}| = \underbrace{\left( \sum_{k=1}^N \text{sgn}(\lambda_k) r_k \otimes l_k \right)}_{\mathcal{P}_{j+1/2}} \mathcal{A}_{j+1/2} = \mathcal{P}_{j+1/2} \cdot \mathcal{A}_{j+1/2}$
- $\mathcal{A}_{j+1/2}^\pm = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{j+1/2} \pm |\mathcal{A}_{j+1/2}|) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{j+1/2} \pm \mathcal{P}_{j+1/2} \cdot \mathcal{A}_{j+1/2})$

où  $\{\lambda_k, l_k, r_k\}$  sont les valeurs propres, vecteurs propres à gauche et à droite de  $\mathcal{A}_{j+1/2}$ . Sous la condition de CFL 1/2, le schéma de Roe d'ordre 1 pour le système (4.32) peut s'écrire sous la forme

$$V_j^{n+1} - V_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{A}_{j+1/2}^-(V_{j+1}^n - V_j^n) + \mathcal{A}_{j-1/2}^+(V_j^n - V_{j-1}^n) \right) = 0. \quad (4.37)$$

Il est naturel d'écrire la matrice de Roe  $\mathcal{A}_{j+1/2}$  sous la même forme que  $\mathcal{A}(V)$  :

$$\mathcal{A}_{j+1/2} = \left( \begin{array}{c|c} A_{j+1/2} & -S_{j+1/2} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad (4.38)$$

où  $A_{j+1/2}$  et  $S_{j+1/2}$  seront définies plus tard. La propriété de conservation (4.36) implique

$$\begin{aligned} & A_{j+1/2}(W_{j+1} - W_j) - S_{j+1/2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \\ &= F(W_{j+1}, \sigma_{j+1}) - F(W_j, \sigma_j) - \int_0^1 S(\Psi) \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial s} ds - \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\Psi) \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Alors, il convient de définir  $S_{j+1/2}$  telle que

$$S_{j+1/2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j) = \int_0^1 S(\Psi) \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial s} ds. \quad (4.40)$$

Afin de définir  $A_{j+1/2}$ , on introduit un terme supplémentaire  $T_{j+1/2}$  défini par

$$T_{j+1/2} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\Psi) \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial s} ds. \quad (4.41)$$

Grâce à (4.39), la matrice  $A_{j+1/2}$  est définie par

$$A_{j+1/2}(W_{j+1} - W_j) = F(W_{j+1}, \sigma_{j+1}) - F(W_j, \sigma_j) - T_{j+1/2}. \quad (4.42)$$

Supposons qu'il existe un  $\sigma_{j+1/2}$  intermédiaire tel que

$$T_{j+1/2} = F(W_{j+1}, \sigma_{j+1}) - F(W_{j+1}, \sigma_{j+1/2}) + F(W_j, \sigma_{j+1/2}) - F(W_j, \sigma_j). \quad (4.43)$$

L'équation (4.42) devient

$$A_{j+1/2}(W_{j+1} - W_j) = F(W_{j+1}, \sigma_{j+1/2}) - F(W_j, \sigma_{j+1/2}). \quad (4.44)$$

Cela veut dire que  $A_{j+1/2}$  est bien la matrice de Roe usuelle [151] du système de conservation

$$\partial_t W + \partial_x F(W, \sigma) = 0$$

dans lequel on considère  $\sigma = \sigma_{j+1/2}$  en tant que paramètre constant. Cette remarque nous suggère de déterminer la matrice  $A_{j+1/2}$  après avoir calculé  $\sigma_{j+1/2}$ .

Utilisons les définitions (4.38, 4.40, 4.41, 4.44), le schéma de Roe (4.37) pour la variable  $W$  peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} W_j^{n+1} = W_j^n &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j-1/2} - F_{j+1/2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( P_{j-1/2}^+ S_{j-1/2}(\sigma_j - \sigma_{j-1}) + P_{j+1/2}^- S_{j+1/2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \right) \\ &+ \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{j-1/2} + T_{j+1/2}), \end{aligned} \quad (4.45)$$

avec

- $F_{j+1/2} = \frac{1}{2} (F(W_j^n, \sigma_j) + F(W_{j+1}^n, \sigma_{j+1})) - \frac{1}{2} |A_{j+1/2}| (W_{j+1}^n - W_j^n)$
- $P_{j+1/2}^\pm = A_{j+1/2}^\pm A_{j+1/2}^{-1} = \frac{1}{2} (A_{j+1/2} \pm |A_{j+1/2}|) A_{j+1/2}^{-1}.$

Parlons maintenant du choix du chemin conservatif  $\Psi$  qui sert à calculer les termes  $S_{j+1/2}$ ,  $T_{j+1/2}$  à l'aide des équations (4.40) et (4.41). Pour des solutions  $V = (W, \sigma)$  régulières (ondes de détente) ou discontinues mais avec  $\sigma = \text{cst}$  (le cas d'un choc), nous avons vu, par (4.35), que la définition de la matrice  $\mathcal{A}_\Psi(V_L, V_R)$  ne dépend pas du choix de  $\Psi$ . C'est pour quoi nous pouvons prendre, par exemple, la famille des segments dans l'espace des états comme le chemin conservatif connectant les deux états intermédiaires constants d'une onde de choc ou de détente. Alors, il nous reste à définir  $\Psi$  pour le cas des solutions discontinues avec  $\sigma_L \neq \sigma_R$ . Pour une telle solution, la vitesse de propagation associée  $\zeta$  doit être nulle pour que la condition de Rankine-Hugoniot (4.35) soit vérifiée. Autrement dit, c'est une discontinuité stationnaire. Par conséquent, le choix d'un chemin conservatif adapté est fortement lié à l'étude des solutions stationnaires qui sont des fonctions  $V$  satisfaisant

$$\mathcal{A}(V) \cdot \partial_x V = 0.$$

Alors 0 est une valeur propre de  $\mathcal{A}(V)$  et  $\partial_x V$  le vecteur propre associé. Une solution stationnaire  $V$  appartient donc à la courbe intégrale  $(\Gamma)$  du  $k$ -champ linéairement dégénéré correspondant à la valeur propre nulle. Pour le cas du système (4.30), les 3- et 4- champs sont linéairement dégénérés. La courbe intégrale est simplement donnée par la loi de Bernoulli généralisée

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} hu = \text{cst}, \\ u^2/2 + g(h/a + z_b) = \text{cst}, \end{cases} \quad (4.46)$$

ou en particulier l'équilibre hydrostatique généralisé

$$(\Gamma_0) \quad \begin{cases} u = 0, \\ h/a + z_b = \text{cst}, \end{cases} \quad (4.47)$$

qui correspond à l'équilibre du lac au repos. Il est donc naturel de définir  $\Psi$  comme une paramétrisation de  $(\Gamma)$  limitée par deux états  $V_L^*, V_R^*$  de la discontinuité de contact stationnaire (voir figure 4.9). Ce choix est en fait optimal puisque les états d'équilibre sont capturés de manière exacte par le schéma numérique. Néanmoins, la matrice de Roe associée n'est pas toujours simple à calculer puisqu'il faut connaître les états intermédiaires apparaissant dans la structure de la solution (figure 4.8). Autrement dit, il faut résoudre de manière exacte le problème de Riemann (4.34).

Dans ce travail, nous nous limitons à construire un schéma permettant de capturer au minimum l'état d'équilibre du lac au repos (4.47). En s'inspirant de l'idée développée dans [145], on définit tout d'abord le chemin  $\tilde{\Psi}$  comme la famille des segments pour la variable  $\tilde{V} \stackrel{\text{def}}{=} (h, hu, H, z_b)$  avec  $H = h/a$  et ensuite on en déduit le chemin  $\Psi$  pour  $V$ . Plus précisément, nous avons choisi

$$\Psi(s; V_L, V_R) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} h(s; V_L, V_R) = h_L + s(h_R - h_L), \\ hu(s; V_L, V_R) = hu_L + s(hu_R - hu_L), \\ H(s; V_L, V_R) = H_L + s(H_R - H_L), \\ a(s; V_L, V_R) = \frac{h_L + s(h_R - h_L)}{H_L + s(H_R - H_L)}, \\ z_b(s; V_L, V_R) = z_{bL} + s(z_{bR} - z_{bL}). \end{cases} \quad (4.48)$$

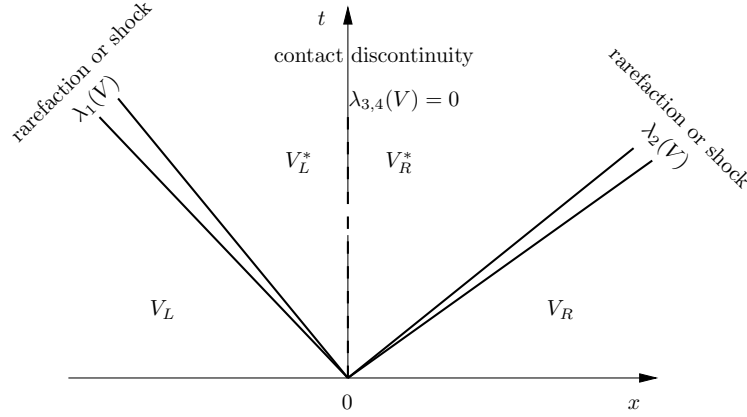
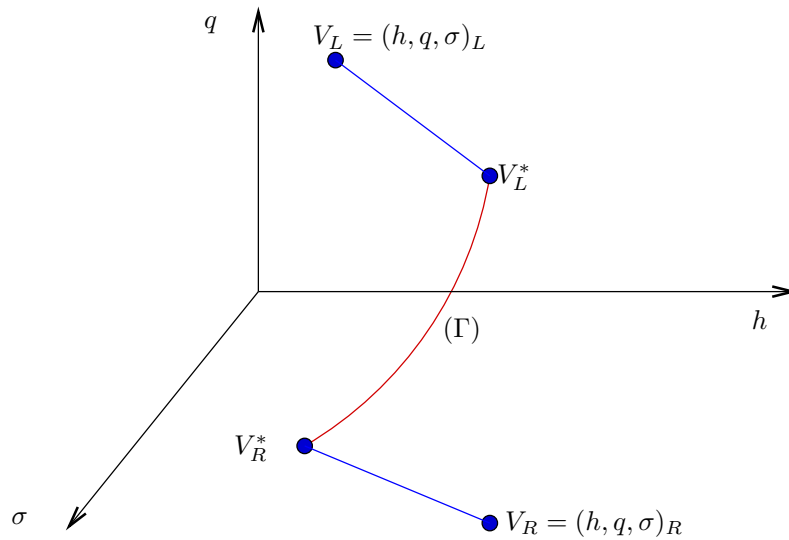


FIGURE 4.8 – Structure de la solution du problème de Riemann (4.34).

FIGURE 4.9 – Choix optimal pour le chemin conservatif  $\Psi(s; V_L, V_R)$ .

Bien que  $\Psi$  soit défini de telle manière qu'il ne soit pas une paramétrisation de la courbe d'intégrale  $(\Gamma)$  dans le cas général, les états stationnaires sont capturés à l'ordre 2. En particulier, la solution correspondant à l'équilibre du lac au repos est exactement capturée puisque dans ce cas, la donnée  $V_L, V_R$  appartient à  $(\Gamma_0)$  dont  $\Psi(s; V_L, V_R)$  est un arc limité par  $V_L, V_R$ .

Utilisons la notation de moyenne arithmétique et de saut

$$\begin{aligned} \{\alpha\} &= (\alpha_j + \alpha_{j+1})/2, \\ [\beta] &= \beta_{j+1} - \beta_j, \end{aligned}$$

et remarquons les égalités triviales

$$[\alpha]\{\beta\} - \{\alpha\}[\beta] = \alpha_{j+1}\beta_j - \alpha_j\beta_{j+1}, \quad [\alpha]\{\beta\} - \{\alpha\}[\beta] = [\alpha\beta],$$

le choix (4.48) comme chemin conservatif du schéma nous permet à calculer facilement  $S_{j+1/2}$ ,  $T_{j+1/2}$  à partir des définitions (4.40) et (4.41)

$$\begin{aligned} S_{j+1/2}(\sigma_{j+1} - \sigma_j) &= \int_0^1 S(\Psi) \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_{zb} \end{bmatrix} ds \\ &= g \begin{bmatrix} 0 \\ \{H\}[h] - \{h\}[H] - \{h\}[z_b] \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} T_{j+1/2} &= \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\Psi) \frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_{zb} \end{bmatrix} ds \\ &= -\frac{g}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \{H\}[h] - \{h\}[H] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

L'égalité (4.43) est vérifiée en utilisant

$$a_{j+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\{h\}}{\{H\}}. \quad (4.51)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{h_{j+1}^2}{a_{j+1}} - \frac{h_j^2}{a_j} - \frac{h_{j+1}^2 - h_j^2}{a_{j+1/2}} &= h_{j+1}H_{j+1} - h_jH_j - \frac{(h_{j+1} + h_j)(h_{j+1} - h_j)}{a_{j+1/2}} \\ &= \{h\}[H] + [h]\{H\} - \frac{2[h]\{h\}\{H\}}{\{h\}} \\ &= -(\{H\}[h] - \{h\}[H]). \end{aligned}$$

Pour calculer  $F_{j+1/2}$  et  $P_{j+1/2}^\pm$ , on définit la matrice de Roe  $A_{j+1/2}$  vérifiant (4.44)

$$A_{j+1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_{j+1/2}^2 - u_{j+1/2}^2 & 2u_{j+1/2} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{j+1/2} &= \{h\} = \frac{h_{j+1} + h_j}{2}, \\ c_{j+1/2} &= \sqrt{g\{H\}} = \sqrt{\frac{gh_{j+1/2}}{a_{j+1/2}}}, \\ u_{j+1/2} &= \frac{\{u\sqrt{h}\}}{\{\sqrt{h}\}} = \frac{u_{j+1}\sqrt{h_{j+1}} + u_j\sqrt{h_j}}{\sqrt{h_{j+1}} + \sqrt{h_j}}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_1 = u_{j+1/2} - c_{j+1/2}$ ,  $\lambda_2 = u_{j+1/2} + c_{j+1/2}$  et les vecteurs propres associés sont

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Il nous faut enfin la correction entropique pour les points critiques. En effet, un désavantage du schéma de Roe est qu'il capture des solutions non-entropiques autour des points critiques,

*i.e.* quand  $\lambda_1 \rightarrow 0$  ou  $\lambda_2 \rightarrow 0$ . Il est donc nécessaire de modifier l'approximation du problème de Riemann dans ces cas. Parmi des solutions proposées, nous nous intéressons à la méthode de l'entropie fixe proposée par Harten-Hyman (voir e.g. [121]), souvent utilisé, par exemple dans Goutal and Maurel [79], comme une façon simple et efficace pour traiter les points critiques. Introduisons  $\lambda_{1,2}^g = u_j \mp c_j$ ,  $\lambda_{1,2}^d = u_{j+1} \mp c_{j+1}$ , la correction consiste à remplacer  $\lambda_k < \epsilon$ ,  $k = 1, 2$  par la valeur modifiée notée  $\tilde{\lambda}_k$  avec

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^d \left( \frac{\lambda_k - \lambda_k^g}{\lambda_k^d - \lambda_k^g} \right). \quad (4.53)$$

Dans les tests présentés à la section 4.4.4, nous utilisons le seuil  $\epsilon = 10^{-3}$ .

#### 4.4.2 Schéma avec reconstruction hydrostatique

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 3, la méthode de reconstruction hydrostatique est en particulier adaptée à l'approximation numérique des modèles de type Saint-Venant avec termes sources quand le nombre de Froude vérifie  $Fr \ll 1$ . L'idée est de représenter localement la contribution de terme source comme le gradient discret d'un flux hydrostatique de la quantité de mouvement (aux interfaces de la cellule). En effet, supposons que  $h_*$  et  $a_*$  soient la hauteur d'eau et le taux d'inondation associés à la limite asymptotique du système (4.30), *i.e.* nous avons l'équilibre entre la pression hydrostatique et le terme source. L'équation de quantité de mouvement devient

$$\partial_x \left( \frac{gh_*^2}{2a_*} \right) = \frac{gh_*^2}{2a_*^2} \partial_x a_* - gh_* \partial_x z_b.$$

Alors, l'approximation du terme source sur la cellule  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  est donnée par

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \left( \frac{gh_*^2}{2a_*^2} \partial_x a_* - gh_* \partial_x z_b \right) dx = \frac{gh_{j+1/2L}^2}{2a_{j+1/2}} - \frac{gh_{j-1/2R}^2}{2a_{j-1/2}}. \quad (4.54)$$

Notons que nous avons défini un taux d'inondation constant des deux côtés de chaque interface pour le calcul l'état de l'équilibre discret du lac au repos, *i.e.*  $a_{j+1/2} \stackrel{\text{def}}{=} a_{j+1/2L} = a_{j+1/2R}$ .

Étant donnée  $\{W_j, a_j, z_{bj}\}$ , la méthode de reconstruction hydrostatique consiste en général à effectuer successivement les deux étapes suivantes (voir [26]) :

1. **Calcul des hauteurs d'eau reconstruites**  $h_{j+1/2L,R}$  aux interfaces de la cellule basée sur l'équilibre du lac au repos

$$\begin{aligned} h_{j+1/2L} &= \max(0, h_j/a_j + z_{bj} - z_{bj+1/2})a_{j+1/2}, \\ h_{j+1/2R} &= \max(0, h_{j+1}/a_{j+1} + z_{bj+1} - z_{bj+1/2})a_{j+1/2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dans (4.55), la valeur intermédiaire  $\sigma_{j+1/2} = (a, z_b)_{j+1/2}$  est définie comme

$$\begin{aligned} a_{j+1/2} &= \min(a_j, a_{j+1}), \\ z_{bj+1/2} &= \max(z_{bj}, z_{bj+1}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ensuite, les états reconstruits associés sont définis comme étant

$$\begin{aligned} W_{j+1/2L} &= (h_{j+1/2L}, h_{j+1/2L}u_j), \\ W_{j+1/2R} &= (h_{j+1/2R}, h_{j+1/2R}u_{j+1}). \end{aligned} \quad (4.57)$$

## 2. Définition du flux numérique à partir des états $W_{j+1/2L}$ , $W_{j+1/2R}$

$$\begin{aligned} F_{j+1/2L} &= \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left( \frac{h_j^2}{a_j} - \frac{h_{j+1/2L}^2}{a_{j+1/2}} \right) \end{pmatrix}, \\ F_{j+1/2R} &= \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left( \frac{h_{j+1}^2}{a_{j+1}} - \frac{h_{j+1/2R}^2}{a_{j+1/2}} \right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $\mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2})$  est un flux consistant du système homogène

$$\partial_t W + \partial_x F(W, \sigma_{j+1/2}) = 0 \quad (4.59)$$

pour lequel nous considérons  $\sigma_{j+1/2}$  comme étant un paramètre constant. Enfin, le schéma numérique d'ordre 1 s'écrit :

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2L} - F_{j-1/2R}) = 0. \quad (4.60)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle est extrêmement simple et très robuste. Par construction, le schéma numérique préserve exactement l'état d'équilibre du lac au repos [26]. Par ailleurs, le choix d'un flux HLL, par exemple, comme flux consistant  $\mathcal{F}$  permet d'éviter tout traitement particulier pour les points critiques comme nous l'avons fait avec le schéma de Roe.

Nous pouvons remarquer que la reconstruction hydrostatique peut s'interpréter comme étant un choix particulier de chemin conservatif. Nous donnons dans ce qui suit une description rapide pour le cas du système de Saint-Venant avec porosité (4.31). Voir [35] pour une explication dans le cas général.

Considérons le contexte où  $Fr \ll 1$  (condition théorique pour la reconstruction hydrostatique), la loi de Bernoulli généralisée (4.46) peut être remplacée par une relation plus simple qui s'écrit

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} u = \text{cst}, \\ h/a + z_b = \text{cst}. \end{cases} \quad (4.61)$$

Partons de la donnée initiale  $V_L = (W, \sigma)_j^n$  et  $V_R = (W, \sigma)_{j+1}^n$ , nous définissons un  $\sigma_* = (a, z_b)_{j+1/2}$  intermédiaire comme (4.56). Supposons  $\Gamma^L$  (resp.  $\Gamma^R$ ) la courbe intégrale partant de  $V_L$  (resp.  $V_R$ ) correspondant à l'équilibre simplifié (4.61). Ces courbes coupent l'hyperplan  $\sigma = \sigma_*$  en  $V_{L,R}^* = (W_{L,R}^*, \sigma_*)$  dans l'espace des états  $h, q, \sigma$  avec  $W_{L,R}^* = W_{j+1/2L,R}$  définis par (4.57). Le chemin conservatif choisi est

$$\Psi(s; V_L, V_R) = \Psi^L \cup \Psi_* \cup \Psi^R, \quad (4.62)$$

avec

- $\Psi^L$  : l'arc de  $\Gamma^L$  limité par  $(V_L, V_L^*)$ ,
- $\Psi_*(s; V_L^*, V_R^*) = V_L^* + s(V_R^* - V_L^*)$ ,
- $\Psi^R$  : l'arc de  $\Gamma^R$  limité par  $(V_R^*, V_R)$ .

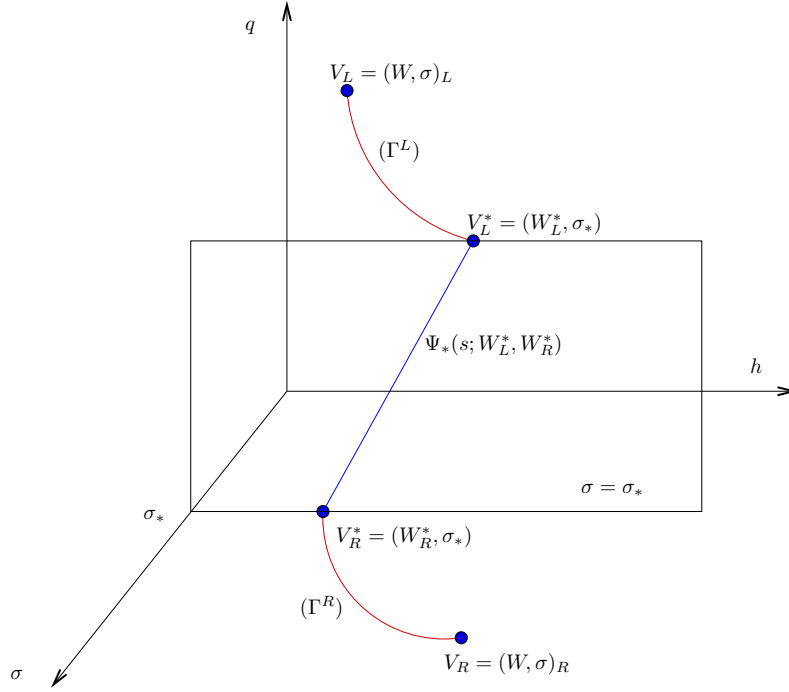


FIGURE 4.10 – Interprétation de la reconstruction hydrostatique comme le choix d'un chemin conservatif (d'après [35]).

Réécrivons (4.31) sous la forme plus compacte

$$\partial_t W + \partial_x F(W, \sigma) = \tilde{S}(W, \sigma) \partial_x \sigma, \quad (4.63)$$

où le terme source est  $\tilde{S}(W, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} (S + \partial_\sigma F)(W, \sigma)$  et le produit non-conservatif est bien défini à l'aide du chemin  $\Psi$  comme (4.62). Sous la condition CFL 1/2, le schéma numérique basé sur  $\Psi$  peut s'écrire sous la forme

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{j-1/2}^+ + D_{j+1/2}^- \right), \quad (4.64)$$

où

$$D_{j+1/2}^- = \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2}) - F(W_j^n, \sigma_j) - \int_0^1 \tilde{S}(\Psi^L) \frac{\partial \Psi_\sigma^L}{\partial s} ds, \quad (4.65)$$

$$D_{j+1/2}^+ = F(W_{j+1}^n, \sigma_{j+1}) - \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2}) - \int_0^1 \tilde{S}(\Psi^R) \frac{\partial \Psi_\sigma^R}{\partial s} ds. \quad (4.66)$$

Rappelons que  $\mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2})$  est toujours le flux consistant du système homogène (4.59), ce qui vient du fait que  $\sigma = \sigma_*$  le long du chemin  $\Psi_*$  et donc le terme source de (4.63) disparaît sur  $\Psi_*$ . Grâce aux définitions de  $\Psi^L$ ,  $\Psi^R$  et par un changement de variable

$s \mapsto x$ , les termes d'intégration dans (4.65, 4.66) peuvent être calculés comme (4.54), *i.e.*

$$\int_0^1 \tilde{S}(\Psi^L) \frac{\partial \Psi_\sigma^L}{\partial s} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \frac{gh_{j+1/2L}^2}{2a_{j+1/2}} - \frac{gh_j^2}{2a_j} \right) \end{pmatrix},$$

$$\int_0^1 \tilde{S}(\Psi^R) \frac{\partial \Psi_\sigma^R}{\partial s} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \frac{gh_{j+1}^2}{2a_{j+1}} - \frac{gh_{j+1/2R}^2}{2a_{j+1/2}} \right) \end{pmatrix}.$$

Enfin, nous retrouvons le schéma (4.60) avec

$$F_{j+1/2L} = F(W_j^n, \sigma_j) + D_{j+1/2}^-,$$

$$F_{j+1/2R} = F(W_{j+1}^n, \sigma_{j+1}) - D_{j+1/2}^+.$$

### 4.4.3 Condition aux limites

Nous terminerons le schéma numérique en abordant le problème du traitement de la condition aux limites pour le système (4.30). Supposons que le domaine  $[0, L]$  soit discrétisé en  $J$  cellules de taille  $\Delta x$ . Pour appliquer, par exemple, le schéma (4.60) nous devons connaître les flux aux bords  $F_{1/2R}$  et  $F_{J+1/2L}$  (figure 4.11). Le calcul de  $F_{1/2R}$ , resp.  $F_{J+1/2L}$ , dépend en général de l'état  $(W_1, \sigma_1)$ , resp.  $(W_J, \sigma_J)$ , et du type de condition aux limites choisi. Nous nous intéressons aux quatre types suivants : bord transparent (libre), bord réflexif (mur), hauteur  $h$  imposée et/ou débit  $q$  imposé.

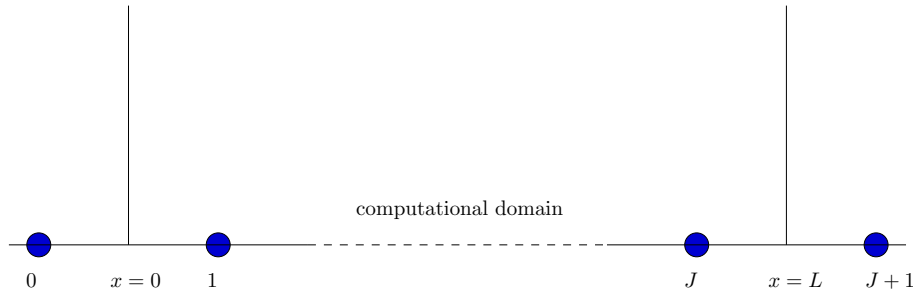


FIGURE 4.11 – Cellules fictives à l'extérieur du domaine de calcul.

Une fois qu'un type de condition a été choisi pour le bord, nous allons traiter la condition sur ce bord en donnant la valeur adaptée sur la cellule fictive. Considérons le système (4.63) et supposons sans perte de généralité que nous sommes sur le bord gauche, *i.e.* l'interface  $x = 0$  pour simplifier. Il convient de prendre  $\sigma_0 = \sigma_1$ . Cela nous permet de ramener (4.63) vers un système de loi de conservation sans le terme source  $\tilde{S}(W, \sigma) \partial_x \sigma$ . Le problème de Riemann devient

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W, \sigma_1) = 0, \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_0 & \text{si } x < 0, \\ W_1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.67)$$

Le traitement de la condition aux limites est maintenant identique au cas du système de Saint-Venant homogène (voir par exemple [29]). Rappelons rapidement le calcul de  $W_0 = (h_0, q_0)$  en fonction du type de condition aux limites :

1. bord transparent (libre)

$$\begin{cases} h_0 = h_1, \\ q_0 = q_1. \end{cases} \quad (4.68)$$

2. bord réflexif (mur)

$$\begin{cases} h_0 = h_1, \\ q_0 = -q_1. \end{cases} \quad (4.69)$$

3. hauteur  $h_0$  imposée : nous déduisons  $q_0$  en utilisant le premier invariant de Riemann  $w_1 = u - 2c$ , *i.e.*

$$\frac{q_0}{h_0} - 2\sqrt{\frac{gh_0}{a_1}} = \frac{q_1}{h_1} - 2\sqrt{\frac{gh_1}{a_1}} \Rightarrow q_0 = h_0 \left( \frac{q_1}{h_1} - 2\sqrt{\frac{gh_1}{a_1}} + 2\sqrt{\frac{gh_0}{a_1}} \right). \quad (4.70)$$

Pour le bord à droite, nous utilisons le deuxième invariant de Riemann  $w_2 = u + 2c$ .

4. débit  $q_0$  imposé : nous déduisons  $h_0$  en résolvant (4.70) par une méthode itérative comme celle de Newton.

#### 4.4.4 Tests numériques

La validation numérique est toujours l'étape importante avant toute application d'un code. À notre connaissance, il y a pour l'instant peu de solutions analytiques pour le système 1D des équations de Saint-Venant avec porosité (4.30). Nous nous intéressons à deux validations importantes : la première pour vérifier la propriété bien équilibrée du schéma, la deuxième pour valider le schéma sur une famille de solutions exactes du système (4.13) obtenues à l'état stationnaire pour plusieurs conditions d'écoulement. Cette dernière série de cas test est souvent appelée solutions pseudo-2D de MacDonald (voir [55, 126, 127]). Dans ce qui suit, nous comparons les deux schémas d'ordre 1 mentionnés ci-dessus sur des tests numériques. Sur les figures 4.12, 4.15-4.18, le terme "path-conservatif scheme" fait référence au schéma de Roe tandis que le terme "hydrostatic reconstruction scheme" se réfère au schéma avec la reconstruction hydrostatique et l'utilisation du flux HLL. La condition initiale et celle aux limites seront précisées pour chaque cas test.

**L'équilibre du lac au repos.** Ce premier cas test a pour le but de vérifier la préservation de l'état d'équilibre hydrostatique. Considérons un domaine de longueur  $L = 20m$  discrétisé en  $J = 200$  cellules, donc  $\Delta x = 0.1m$ . On se donne une condition initiale très simple vérifiant l'équilibre (4.47) et avec une discontinuité au milieu du domaine, *i.e.* en  $x_0 = 10m$

$$V(x, 0) = \begin{cases} V_L & \text{si } x < x_0, \\ V_R & \text{si } x > x_0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_L = 0.75, \quad q_L = 0, \quad a_L = 0.5, \quad z_{bL} = 0.5, \\ h_R = 1, \quad q_R = 0, \quad a_R = 1, \quad z_{bR} = 1. \end{cases}$$

Notons que  $h_L/a_L + z_{bL} = h_R/a_R + z_{bR} = 2$  et donc  $V_L$  et  $V_R$  appartiennent à une même courbe intégrale  $\Gamma_0$ . Par conséquent, cet état d'équilibre doit être préservé par tous les deux schémas. Une condition libre (type Neumann) est imposée aux bords gauche et droite. La figure 4.12 présente le résultat numérique à  $T = 60s$ , nous vérifions que la solution stationnaire a bien été capturée par les deux schémas numériques considérés.

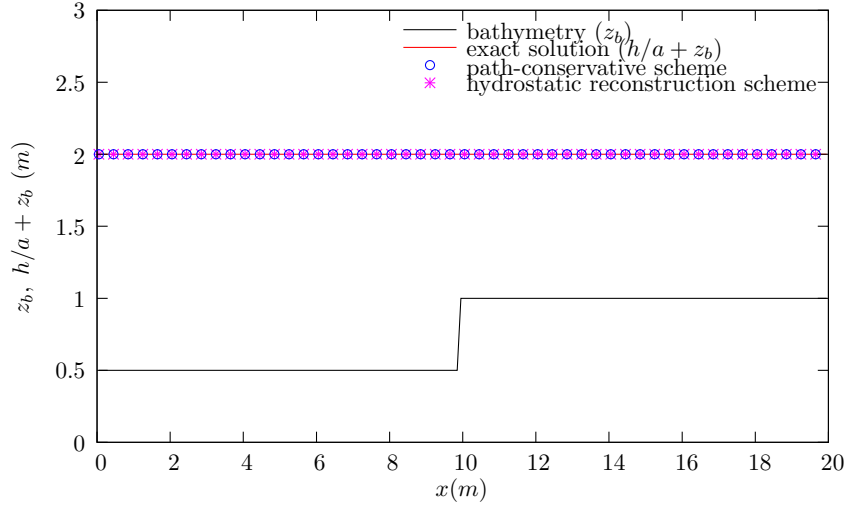


FIGURE 4.12 – Equilibre du lac au repos.

**Les solutions de MacDonald.** La famille de ces solutions a été dérivée pour le système (4.13) où le frottement est calculé par la loi de Manning. Certaines solutions de MacDonald sont basées sur des écoulements stationnaire dans des canaux non-prismatiques à section rectangulaire (comme illustré sur la figure 4.13). Rappelons que les parois du canal sont verticales, donc la largeur de l'écoulement  $b(x, \eta)$  n'est qu'une fonction spatiale, *i.e.*  $b(x, \eta) = b(x)$  avec la notation présentée précédemment à la figure 4.7. Prenons une longueur 200 mètres, la fonction  $b(x)$  est donnée par

$$b(x) = 10 - 5 \exp \left( -10 \left( \frac{x}{200} - \frac{1}{2} \right)^2 \right), \quad 0 \leq x \leq 200.$$

Grâce à la forme particulière du canal considéré, nous pouvons ramener le système (4.13) sous la forme du système des équations de Saint-Venant avec porosité 1D (4.17) comme nous avons expliqué dans la section 4.3. Prenons  $L = 10m$ , nous pouvons alors remplacer la topographie 2D (figure 4.13) par une topographie 1D et un taux d'inondation (ou une porosité spatiale)  $a = a(x) = b(x)/L$  (voir figure 4.14). Notons que  $a$  n'est qu'une fonction spatiale et donc elle vérifie l'hypothèse  $\partial_t \sigma = 0$  de nos schémas numériques. C'est pourquoi les solutions de MacDonald peuvent servir à la validation notre méthode numérique.

Les solutions analytiques sont dérivées à l'état d'équilibre avec un débit constant  $Q = 20m^3/s$  et un coefficient de Manning  $n = 0.03m^{-1/3}s$ . La pente locale  $S_0 = -\partial_x z_b$  est une fonction explicite du débit  $Q$ , de la largeur  $b(x)$  et de la hauteur d'eau  $\eta = h/a$  de la partie inondée. Par conséquent, la topographie  $z_b$  varie avec  $\eta$  et peut être calculée comme l'intégrale de  $S_0$ . Comme l'écoulement atteint l'état stationnaire,  $\eta(x, t) = \eta(x)$  n'est qu'une fonction spatiale. La pente  $S_0(x)$  est donnée par

$$S_0(x) = \left( 1 - \frac{Q^2}{g\eta^3(x)b^2(x)} \right) \eta'(x) + Q^2 n^2 \frac{(b(x) + 2\eta(x))^{4/3}}{\eta^{10/3}(x)b^{10/3}(x)} - \frac{Q^2 b'(x)}{g\eta^2(x)b^3(x)}.$$

Dans tout nos tests, nous avons discrétisé le domaine de calcul avec 200 cellules, donc le pas d'espace est  $\Delta x = 1m$ . Nous prenons une condition de  $CFL = 0.4$  et nous utilisons un

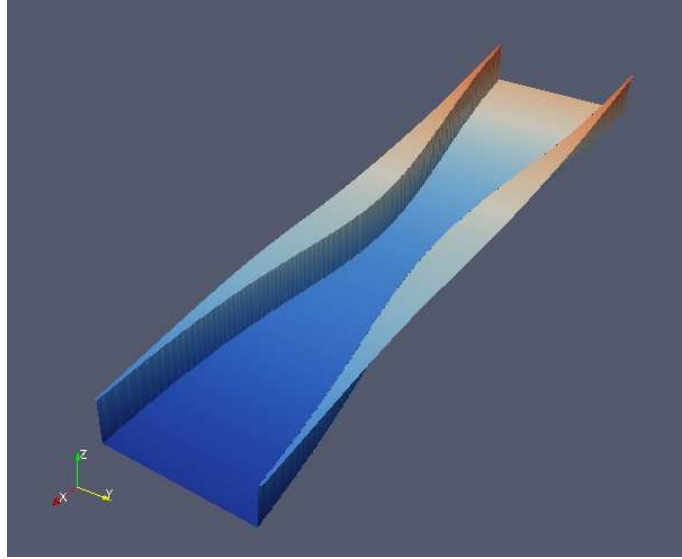
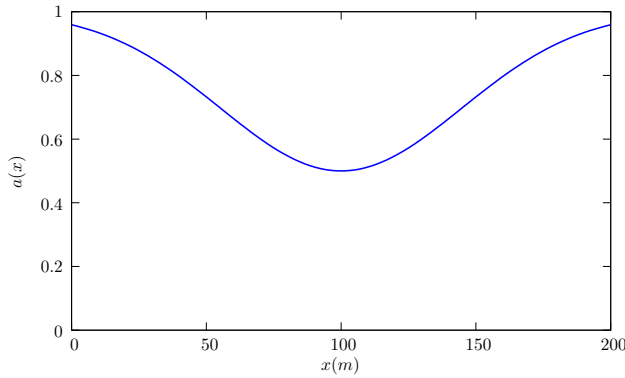
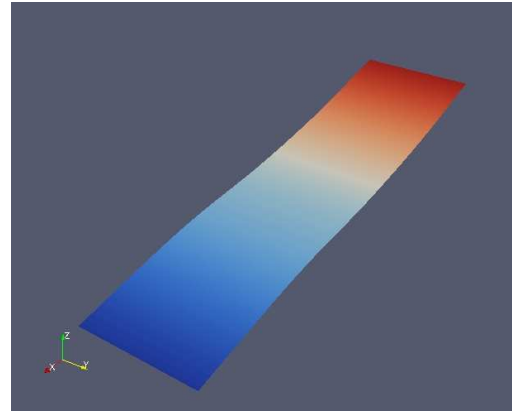


FIGURE 4.13 – Vue en 2D du canal à largeur variable.

(a) La fonction  $a(h) = a(x)$  associée

(b) La topographie 1D

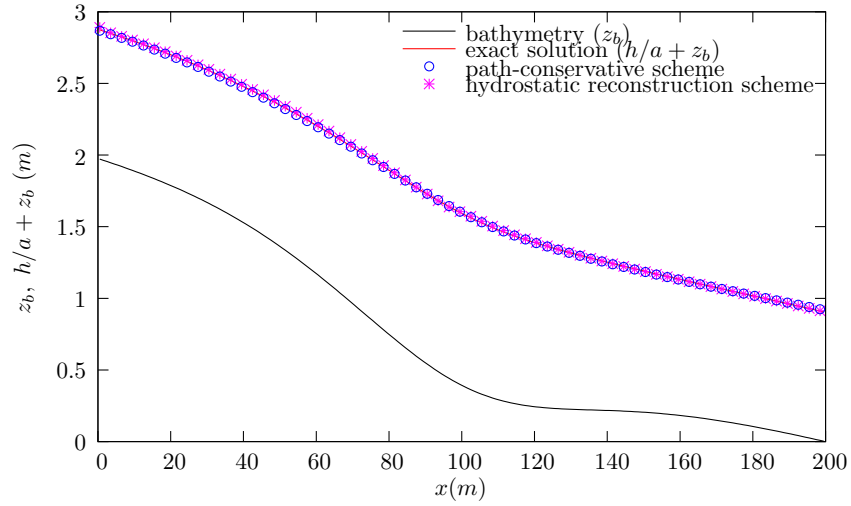
FIGURE 4.14 – Interprétation de la configuration du canal pseudo 2D comme la combinaison d'une topographie 1D et d'une fonction  $a(x)$  associée.

temps final  $T = 300s$  pour que l'état stationnaire soit atteint. Toutes les solutions analytiques ont été générées à l'aide du code SWASHES [55]. Rappelons que le frottement a été traité par le schéma semi-implicite (4.29). Notons que le chemin conservatif ainsi que la méthode de reconstruction hydrostatique n'ont pas été conçus pour capturer les solutions de MacDonald ( $q = Q/L \neq 0$ ) de manière exacte.

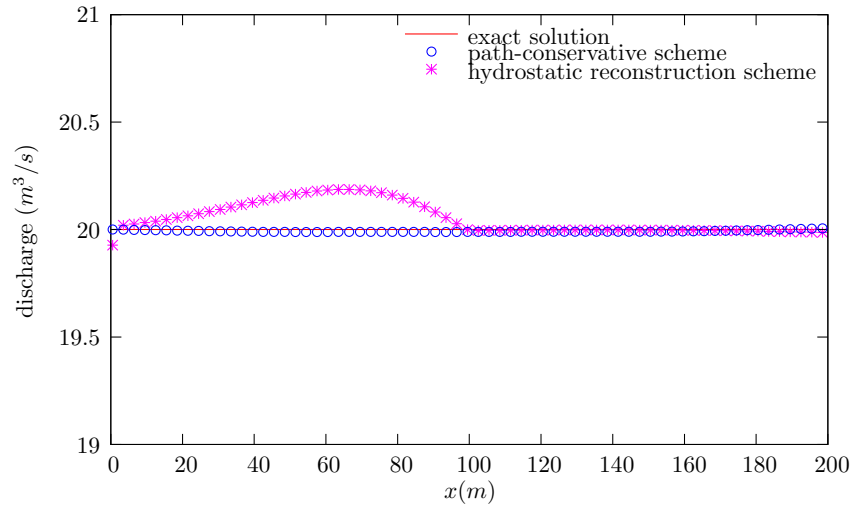
- Régime fluvial ( $Fr \leq 1$ ) :
  - Conditions initiales :  $\eta(x, 0) = \max(0.902021 - z_b(x), 0)$  et  $u(x, 0) = 0$
  - Débit imposé sur le bord gauche  $Q(0, t) = 20\text{m}^3/\text{s}$

- Hauteur imposée sur le bord droit  $\eta(200, t) = 0.902021\text{m}$ .

La figure 4.15 montre que la solution numérique approche bien la solution analytique dans les deux cas. Nous remarquons que le schéma de Roe approche mieux le débit exact que le schéma avec reconstruction hydrostatique.



(a) niveau de la surface libre  $h/a + z_b$

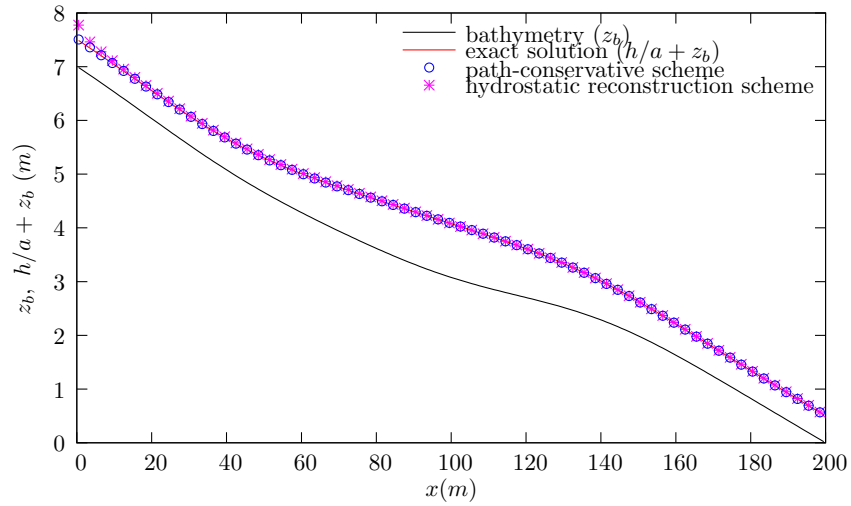
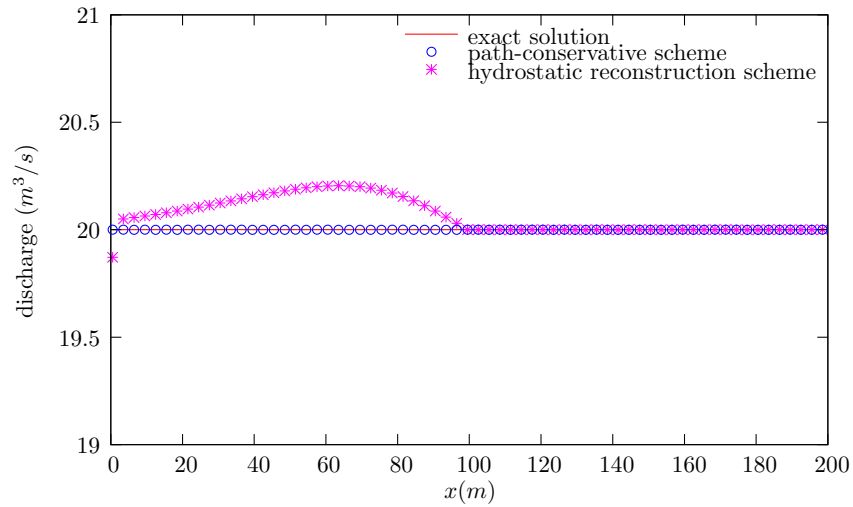


(b) débit stationnaire

FIGURE 4.15 – Régime fluvial.

- Régime torrentiel ( $Fr \geq 1$ ) :
  - Conditions initiales :  $\eta(x, 0) = 0$  et  $u(x, 0) = 0$
  - Débit imposé sur le bord gauche  $Q(0, t) = 20\text{m}^3/\text{s}$
  - Hauteur imposée sur le bord gauche  $\eta(0, t) = 0.503369\text{m}$ .

Sur la figure 4.16 nous retrouvons la même conclusion que pour le régime fluvial. De plus, nous constatons que la solution calculée par le schéma avec reconstruction hydrostatique est légèrement moins précise sur le bord gauche (du côté amont).

(a) niveau de la surface libre  $h/a + z_b$ 

(b) débit stationnaire

FIGURE 4.16 – Régime torrentiel.

- Écoulement fluvial puis torrentiel avec une transition régulière :
  - Conditions initiales :  $\eta(x, 0) = 0$  et  $u(x, 0) = 0$
  - Débit imposé sur le bord gauche  $Q(0, t) = 20 \text{ m}^3/\text{s}$

Comme nous l'avons signalé précédemment, un défaut du schéma de Roe est qu'il capture également des solutions non entropiques autour des points critiques (quand  $Fr = 1$ ). Avec la correction entropique présentée, nous pouvons limiter ce défaut. La

figure 4.17 illustre cette remarque. Toutefois, cela ne pose pas de problème pour le schéma de reconstruction hydrostatique combiné avec l'utilisation d'un flux HLL.

- Écoulement transcritique avec ressaut hydraulique : dans ce test, le niveau de la surface libre présente une discontinuité. Il y a également une transition discontinue du régime torrentiel vers le régime fluvial au niveau de cette discontinuité.
  - Conditions initiales :  $\eta(x, 0) = \max(1.49924 - z_b(x), 0)$  et  $u(x, 0) = 0$
  - Débit imposé sur le bord gauche  $Q(0, t) = 20\text{m}^3/\text{s}$
  - Hauteur imposée sur le bord gauche  $\eta(0, t) = 0.7\text{m}$
  - Hauteur imposée sur le bord droit  $\eta(200, t) = 1.49924\text{m}$

Nous trouvons que le niveau de la surface libre est bien calculé par les deux schémas (figure 4.18), une légère différence dans les solutions numériques peut être observée au niveau de la discontinuité. Par contre, on observe une différence plus importante au niveau du débit.

A partir des tests numériques présentés, on constate que le schéma de Roe basé sur le chemin conservatif (4.48) est légèrement plus précis que le schéma avec reconstruction hydrostatique utilisant le flux HLL. Il convient de signaler que la reconstruction hydrostatique peut également s'interpréter comme un choix de chemin conservatif (comme mentionné dans [35]). Nous avons donc vérifié numériquement que le type de chemin conservatif choisi joue un rôle majeur sur la qualité du schéma numérique. Cette remarque est également discutée dans [1].

Concernant le temps de calcul, le schéma de Roe prend environs 10s, tandis que le deuxième prend 6s, *i.e.* le schéma avec reconstruction hydrostatique est plus efficace en terme de performance. En effectuant quelques modifications mineures, nous obtenons facilement le schéma avec reconstruction hydrostatique adapté à notre système (4.17) à partir d'un schéma de même type résolvant les équations de Saint-Venant classique, comme le cas du logiciel FullSWOF\_2D. Alors que la méthode de chemin conservatif nécessite le développement d'un nouveau code. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous n'adopterons que le schéma avec reconstruction hydrostatique pour l'extension à l'ordre 2.

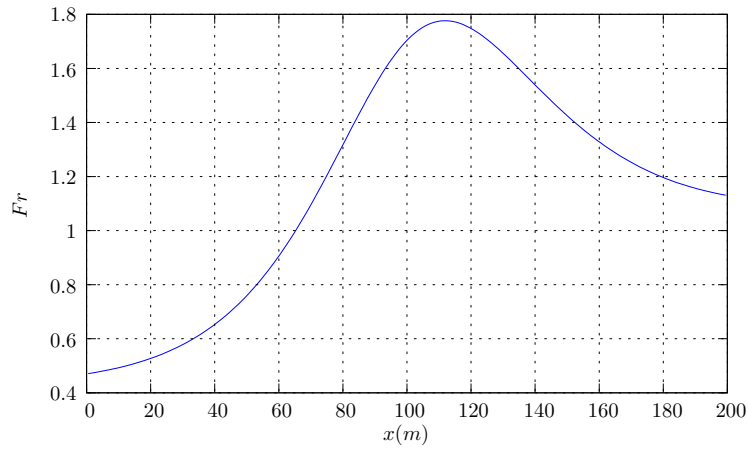
#### 4.4.5 Extension à l'ordre 2

Le schéma d'ordre 2 en temps peut être obtenu facilement en utilisant la méthode de Heun comme au chapitre 3. Nous ne présentons alors ici que l'extension à l'ordre 2 en espace.

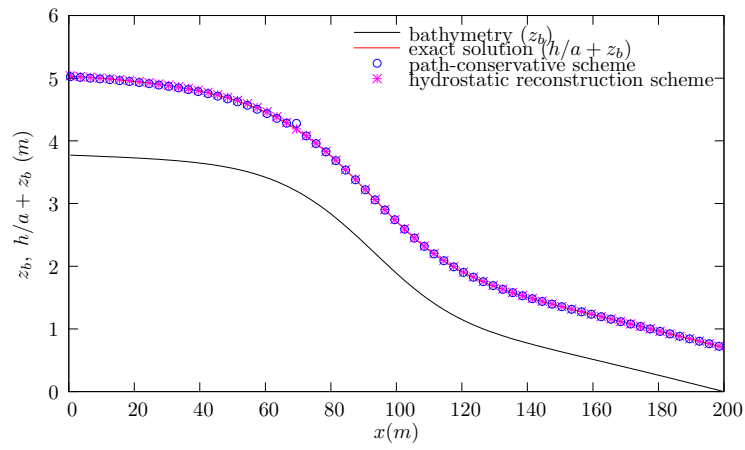
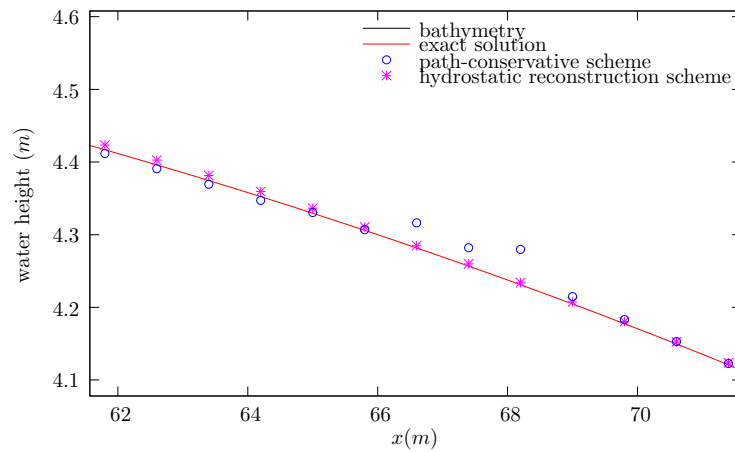
Nous construirons tout d'abord les valeurs reconstruites notées  $\{W_{j+1/2\pm}, \sigma_{j+1/2\pm}\}$  à chaque interface à partir des données  $\{W_j, \sigma_j\}$  par un opérateur de reconstruction d'ordre 2. Dans ce travail, nous utilisons la reconstruction MUSCL avec le limiteur Minmod mentionné au chapitre 3. Afin de préserver la propriété de conservation, nous procédons à la reconstruction de  $(W, \sigma)$  à l'interface comme suit :

- Reconstruction de la hauteur d'eau moyenne  $h$

$$h_{j-1/2+} = h_j - \frac{\Delta x}{2} Dh_j, \quad h_{j+1/2-} = h_j + \frac{\Delta x}{2} Dh_j.$$

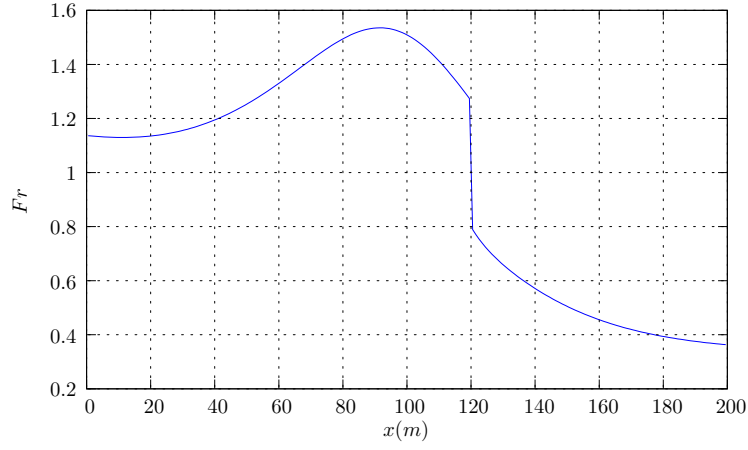


(a) nombre de Froude

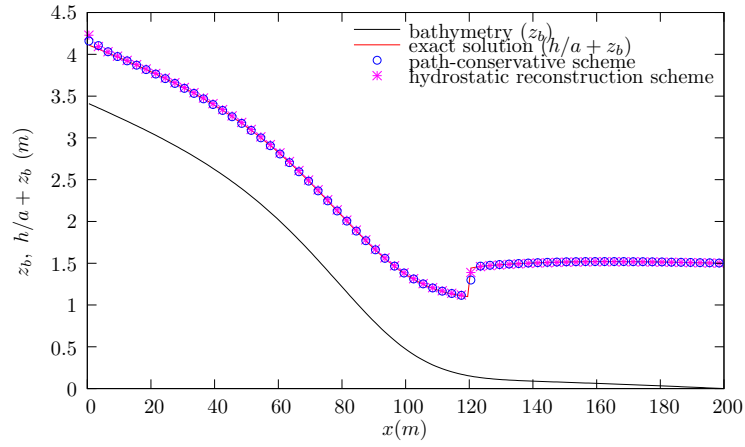
(b) niveau de la surface libre  $h/a + z_b$ 

(c) Zoom au point critique

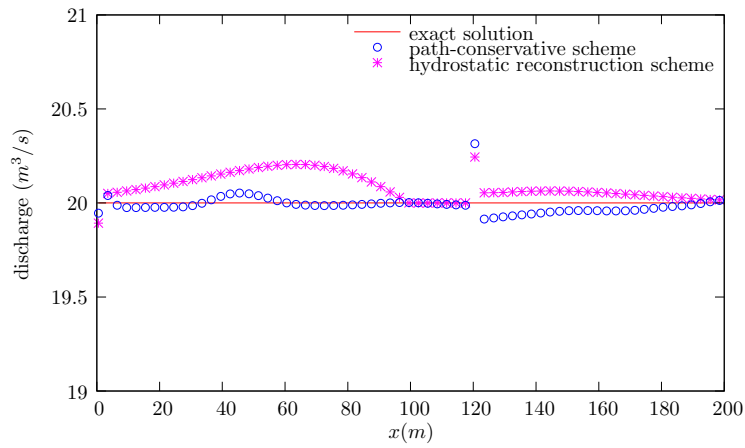
FIGURE 4.17 – Transition d'un écoulement fluvial en écoulement torrentiel.



(a) nombre de Froude



(b) niveau de la surface libre  $h/a + z_b$



(c) débit stationnaire

FIGURE 4.18 – Écoulement transcritique avec ressaut hydraulique.

- Reconstruction de la vitesse  $u$  telle que la quantité  $hu$  soit conservée

$$u_{j-1/2+} = u_j - \frac{h_{j+1/2-}}{h_j} \frac{\Delta x}{2} Du_j, \quad u_{j+1/2-} = u_j + \frac{h_{j-1/2+}}{h_j} \frac{\Delta x}{2} Du_j.$$

- Reconstruction du taux d'inondation  $a$  via la variable  $H = h/a$

$$\begin{aligned} H_{j-1/2+} &= H_j - \frac{\Delta x}{2} DH_j, & a_{j-1/2+} &= h_{j-1/2+}/H_{j-1/2+}, \\ H_{j+1/2-} &= H_j + \frac{\Delta x}{2} DH_j, & a_{j+1/2-} &= h_{j+1/2-}/H_{j+1/2-}. \end{aligned}$$

- Reconstruction de la topographie  $z_b$  via le niveau de la surface libre  $z_s = h/a + z_b$

$$\begin{aligned} z_{sj-1/2+} &= z_{sj} - \frac{\Delta x}{2} Dz_{sj}, & z_{bj-1/2+} &= z_{sj-1/2+} - H_{j-1/2+}, \\ z_{sj+1/2-} &= z_{sj} + \frac{\Delta x}{2} Dz_{sj}, & z_{bj+1/2-} &= z_{sj+1/2-} - H_{j+1/2-}. \end{aligned}$$

Cette reconstruction préserve de plus l'équilibre du lac au repos, *i.e.* si la donnée  $\{W, \sigma\}_j$  vérifie l'état stationnaire du lac au repos, il en est de même pour la variable reconstruite  $\{W, \sigma\}_{j+1/2\pm}$ . Une telle reconstruction est dite bien équilibrée.

Ensuite, nous effectuons la reconstruction hydrostatique (4.55) avec le choix (4.56) pour  $\sigma_{j+1/2}$ , mais cette fois la reconstruction est faite sur les variables  $(W, \sigma)_{j+1/2\pm}$ , pour obtenir la variable  $W_{j+1/2L,R}$  comme la reconstruction (4.57). Enfin, le schéma d'ordre 2 en espace est obtenu à partir (4.60) en y rajoutant le flux centré  $Fc_j$  bien choisi afin de garantir la consistance. Le schéma s'écrit

$$W_j^{n+1} - W_j^n + \frac{\Delta x}{\Delta t} (F_{j+1/2L} - F_{j-1/2R} - Fc_j), \quad (4.71)$$

où les flux  $F_{j+1/2L,R}$  sont définis comme dans (4.58), *i.e.*

$$\begin{aligned} F_{j+1/2L} &= \mathcal{F}(W_{j+1/2L}, W_{j+1/2R}, \sigma_{j+1/2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left( \frac{h_{j+1/2-}^2}{a_{j+1/2-}} - \frac{h_{j+1/2L}^2}{a_{j+1/2}} \right) \end{pmatrix}, \\ F_{j-1/2R} &= \mathcal{F}(W_{j-1/2L}, W_{j-1/2R}, \sigma_{j-1/2}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} \left( \frac{h_{j-1/2+}^2}{a_{j-1/2+}} - \frac{h_{j-1/2R}^2}{a_{j-1/2}} \right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Il est important de signaler que le flux centré  $Fc_j$ , rajouté au schéma d'ordre 2, doit à la fois garantir la consistance et maintenir la propriété bien équilibré du schéma (4.71), *i.e.*

$$Fc(W_L, W_R; \sigma_L, \sigma_R) = F(W_R, \sigma_R) - F(W_L, \sigma_L), \quad (4.73)$$

si  $(W_L, W_R, \sigma_L, \sigma_R)$  vérifie localement l'état d'équilibre du lac au repos. Pour cela, Bouchut [26, page 104] a proposé de prendre  $Fc_j$  comme une modification de la différence  $F_{j+1/2L} - F_{j-1/2R}$  de (4.72). Partons des variables reconstruites  $(W, \sigma)_{j-1/2+}$  et  $(W, \sigma)_{j+1/2-}$  aux deux interfaces de la cellule, nous effectuons successivement les étapes suivantes :

- Définition d'une valeur intermédiaire  $\sigma_j^* = (a_j^*, z_{bj}^*)$  avec

$$a_j^* = \sqrt{a_{j-1/2+} a_{j+1/2-}}, \quad \text{et} \quad z_{bj}^* = \frac{z_{bj-1/2+} + z_{bj+1/2-}}{2}.$$

- Reconstruction hydrostatatique associée à  $\sigma_j^*$

$$h_{jL} = \max \left( 0, \frac{h_{j-1/2+}}{a_{j-1/2+}} + z_{bj-1/2+} - z_{bj}^* \right) a_j^*,$$

$$h_{jR} = \max \left( 0, \frac{h_{j+1/2-}}{a_{j+1/2-}} + z_{bj+1/2-} - z_{bj}^* \right) a_j^*.$$

- Définition du flux centré  $Fc_j = Fc(W_{j-1/2+}, W_{j+1/2-}; \sigma_{j-1/2+}, \sigma_{j+1/2-})$

$$Fc_j = \left( \frac{0}{\frac{g}{2} \left( \frac{h_{j+1/2-}^2}{a_{j+1/2-}} - \frac{h_{jR}^2}{a_j^*} - \frac{h_{j-1/2+}^2}{a_{j-1/2+}} + \frac{h_{jL}^2}{a_j^*} \right)} \right). \quad (4.74)$$

Le flux centré  $Fc_j$  défini par (4.74) permet de garantir la consistance, ainsi que la propriété bien équilibré du schéma d'ordre 2. En effet, supposons que  $\{W, \sigma\}_j$  vérifie l'état d'équilibre du lac au repos, il en est de même pour la variable reconstruite  $\{W, \sigma\}_{j+1/2\pm}$ . En particulier nous avons

$$\frac{h_{j-1/2+}^2}{a_{j-1/2+}} + z_{bj-1/2+} = \frac{h_{j+1/2-}^2}{a_{j+1/2-}} + z_{bj+1/2-},$$

ce qui implique  $h_{jL} = h_{jR}$ . Par définition (4.74), nous obtenons dans ce cas

$$Fc_j = F(W_{j+1/2-}, \sigma_{j+1/2-}) - F(W_{j-1/2+}, \sigma_{j-1/2+}),$$

d'où vient la propriété bien équilibré (4.73).

Enfin, cette l'extension à l'ordre 2 permet de mieux capturer les solutions stationnaires par rapport au schéma d'ordre 1. Revenons, par exemple, au cas test d'un écoulement fluvial présenté à la section 4.4.4. Sur la figure 4.19, le schéma d'ordre 2 présente une amélioration importante au niveau du débit de l'écoulement.

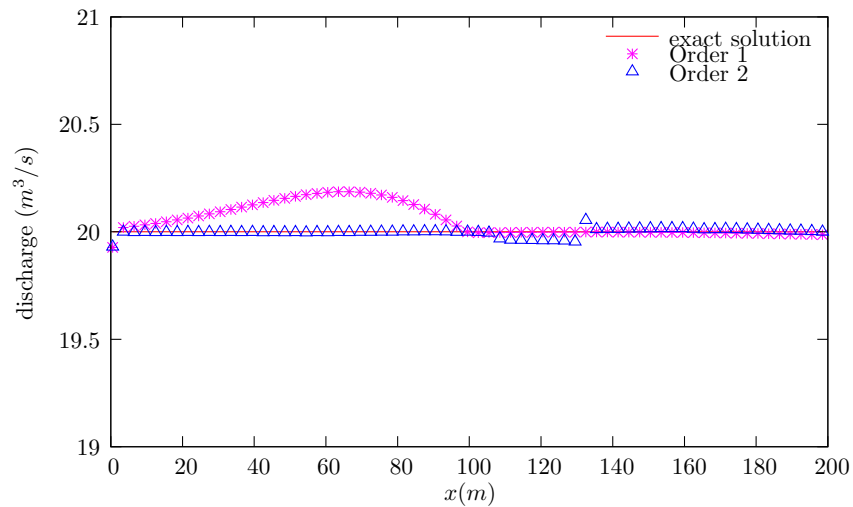


FIGURE 4.19 – Régime fluvial.

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un nouveau modèle physique et la méthode numérique associée pour la modélisation du processus d'érosion à l'échelle du bassin versant. L'effet à petite échelle de la microtopographie est intégré dans la modélisation macroscopique via la fonction  $a(h)$  représentant le taux d'inondation de chaque cellule. En considérant la (micro)topographie exacte  $z_b$  comme une variable aléatoire, nous avons donné une interprétation probabiliste de  $a(h)$  comme étant la fonction de répartition de  $z_b$ .

À l'aide du concept de Surface Représentative Élémentaire (SRE), nous avons donnée une définition mathématique de la variable conservative macroscopique  $(h, \mathbf{q})$  représentant la hauteur d'eau et le flux sur la SRE. Ensuite, les équations d'évolutions de  $(h, \mathbf{q})$  ont été présentées pour le cas 1D et 2D. Nous y ajoutons les équations de Hairsine et Rose, mais cette fois-ci avec  $a(h)$  pour modéliser l'érosion et le transport multi-classes des sédiments.

En découplant l'évolution de  $a(h)$  de celle de  $(h, \mathbf{q})$ , les équations d'évolution pour  $(h, \mathbf{q})$  deviennent alors des équations qui constituent le système de Saint-Venant avec porosité, souvent utilisées pour la modélisation macroscopique des écoulements dans des milieux urbains. Nous avons discuté le caractère bien posé du système quand  $a(h)$  et/ou  $z_b$  présentent des discontinuités spatiales. Nous avons également rappelé la théorie des chemins conservatifs permettant de définir rigoureusement les produits conservatifs apparaissant dans le système. Le problème de Riemann associé est approché tout d'abord par un schéma de Roe basé sur un chemin conservatif adapté, puis par un schéma avec reconstruction hydrostatique généralisée. Nous avons identifié ces deux schémas en interprétant la reconstruction hydrostatique comme le choix d'un chemin conservatif. La validation et la comparaison de ces deux schémas ont été présentées à l'aide des solutions analytiques de MacDonald. Les résultats obtenus, ainsi que le logiciel que nous avons déjà à notre disposition (FullSWOF\_2D), nous ont conduit à adopter le schéma avec reconstruction hydrostatique. Son extension à l'ordre 2 est ainsi rendue plus aisée que celle du schéma basé sur les chemins conservatifs.



## Chapitre 5

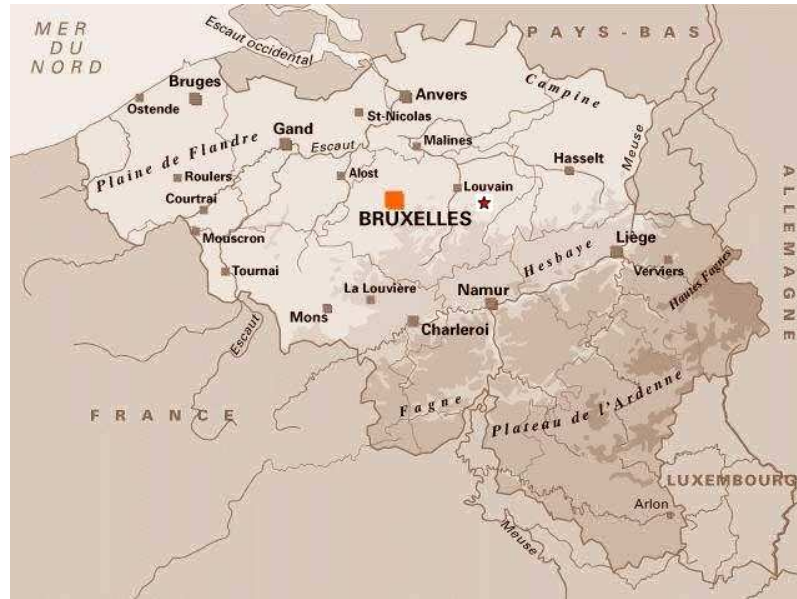
# Un premier test sur le bassin versant de Ganspoel et parallélisation

Dans le chapitre 4, nous avons proposé un modèle pour la simulation du ruissellement et de l'érosion à l'échelle du bassin versant et avons développé la méthode numérique associée. Il est intéressant, grâce à cet outil, de réaliser une vraie application avec les données d'un bassin versant réel pour tester et évaluer les limites de ce modèle. Néanmoins, le modèle développé nécessite de fournir de nombreux paramètres physiques pour lancer une simulation. La majorité de ces paramètres sont hétérogènes, leur identification sur un bassin versant est une étape importante, quelquefois délicate, qui doit être faite avant la simulation numérique. C'est pourquoi nous nous limitons, dans le cadre de la thèse, à ne simuler que le ruissellement pour lequel nous devons chercher et caler uniquement la fonction  $a(h)$ , le coefficient de friction ainsi que les paramètres du modèle d'infiltration. Ce travail sera réalisé sur le bassin versant de Ganspoel, en Belgique.

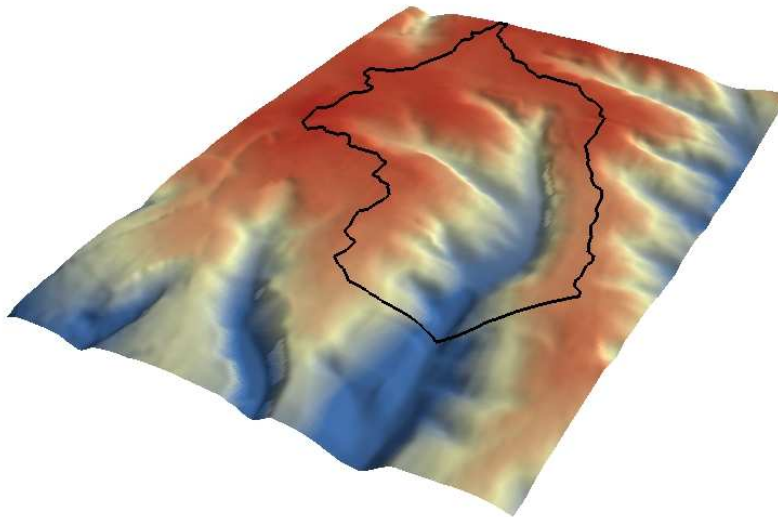
De plus, ces simulations doivent être réalisées avec des données volumineuses. C'est pourquoi, dans une seconde partie, nous abordons le problème du calcul haut performance. Nous avons construit une version parallèle du code à partir du code séquentiel existant. Concernant l'outil de parallélisation, nous utilisons la librairie SkelGIS. Ce travail a été réalisé en collaboration avec H. Coullon (LIFO & GeoHyd) lors de l'école d'été CEMRACS 2012. Nous présentons tout d'abord la parallélisation du code FullSWOF\_2D et puis nous comparons ses performances à celles de la version MPI classique réalisée par C. Laguerre & O. Delestre.

### 5.1 Un premier test sur le bassin versant de Ganspoel

Le bassin versant de Ganspoel est situé en Belgique centrale, à l'est de Louvain. La localisation précise du bassin versant est ( $50^{\circ}48'N$ ,  $4^{\circ}35'E$ ). La zone de drainage de Ganspoel a une superficie de 117 hectares délimitée par la ligne de partage des eaux (figure 5.1). Nous donnons par la suite une description rapide du bassin versant sur lequel nous allons simuler un événement pluvieux ayant eu lieu au 11/07/1997. Nous renvoyons à la référence [141] pour une description plus détaillée.



(a) Localisation du bassin versant



(b) MNT du bassin versant avec sa ligne de partage des eaux

FIGURE 5.1 – Bassin versant de Ganspoel.

Le bassin versant de Ganspoel est caractérisé par une topographie régulière dont la pente varie entre 0% et 20%. La texture du sol est assez homogène, donc les paramètres physiques variables dans le bassin versant sont plutôt liés à l'occupation du sol. Les parcelles sont majoritairement composées des sols cultivés. Le reste sont des routes, des bâtiments et des forêts. Les récoltes les plus importantes sont le blé, l'orge, le maïs, la betterave à sucre et la

pomme de terre (figure 5.2).

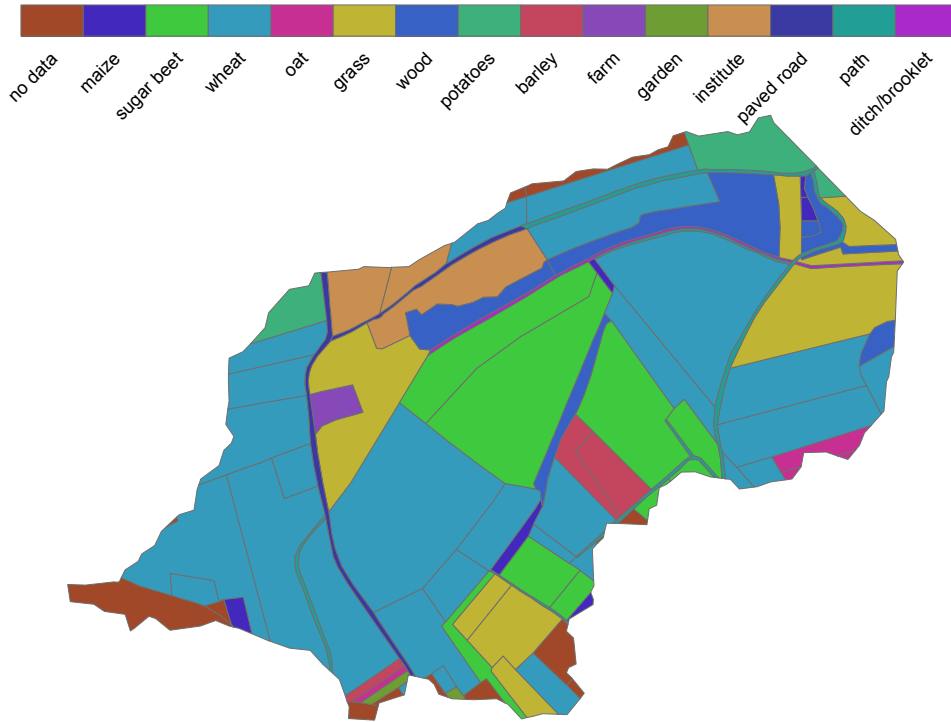


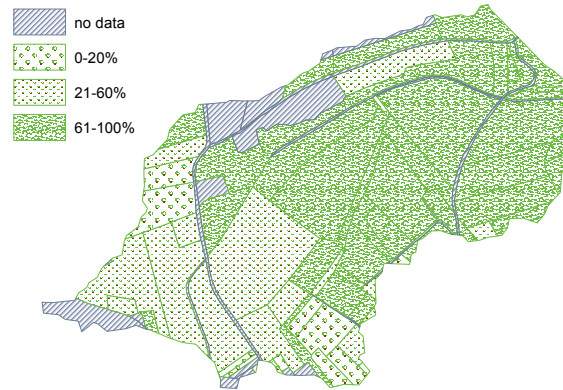
FIGURE 5.2 – Occupation du sol en juillet 1997.

Concernant les données, nous avons la description détaillée de l’occupation de sol, le taux de couvert végétal, la rugosité aléatoire et l’état des croûtes superficielles (figure 5.3).

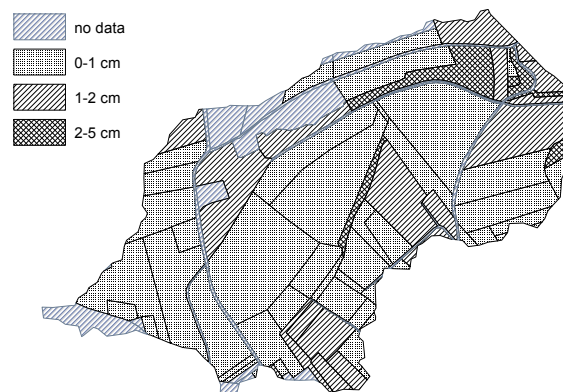
Une difficulté majeure est que nous n’avons aucun paramètre physique, sauf le MNT du bassin versant, pour un lancement direct de la simulation avec le modèle développé au chapitre 4. L’étape préliminaire consiste donc à identifier les paramètres nécessaires à partir des bases de données présentées par la figure 5.3. Dans l’objectif de simuler le ruissellement sur le bassin versant, nous devons déterminer la fonction  $a(h)$  représentant le taux d’inondation de chaque cellule, la capacité de rétention superficielle (caractérisée par un seuil  $h_0$  sur la hauteur d’eau), le coefficient de Manning  $n$ , la conductivité hydraulique à saturation  $K_s$ , l’humidité initiale  $\theta_i$  et à saturation  $\theta_s$ , et enfin le potentiel matriciel au niveau du front d’humectation  $\psi$ .

### 5.1.1 Préparation des données

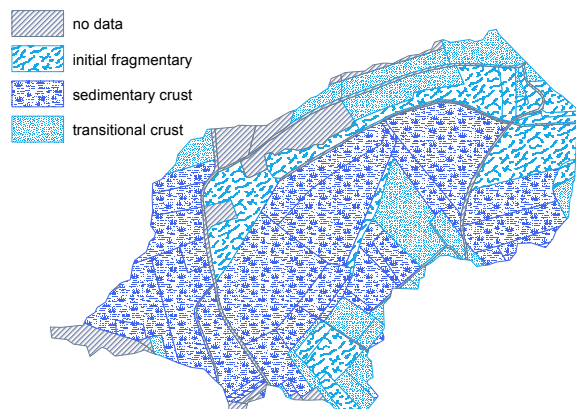
**Le taux d’inondation.** Comme la plupart des parcelles sont cultivées, la microtopographie est plus ou moins orientée. Il est donc possible de construire/caler une “bonne” fonction  $a(h)$  pour chaque parcelle à partir des données d’occupation du sol. Néanmoins, ce travail demande



(a) taux de couvert végétal



(b) rugosité aléatoire



(c) croûtes superficielles

FIGURE 5.3 – Données de l'état de la surface du sol.

une observation plus détaillée du sol, par exemple la forme géométrique, ainsi que la direction des sillons. C'est pourquoi nous admettons pour ce premier test une distribution aléatoire de la microtopographie et nous utilisons la loi empirique (4.1) mentionnée au chapitre 4. L'écart-type utilisé est la valeur centrale de chaque catégorie de rugosité, *i.e.*  $\sigma = 0.5, 1.5, 3.5$  cm (figure 5.4).

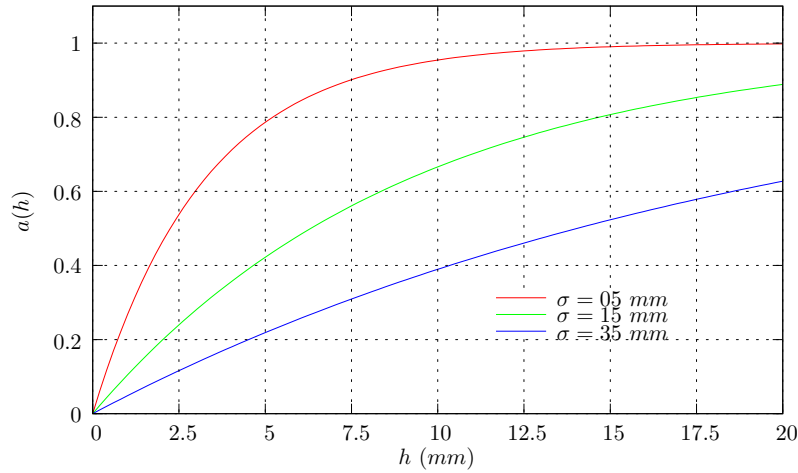


FIGURE 5.4 – Taux d'inondation donné par une loi exponentielle (d'après [107, 111]).

**La capacité de rétention superficielle.** Avant que le ruissellement ne se produise, les micro-dépressions de surface doivent déborder. La valeur seuil  $h_0$  correspondant à ce débordement dépend à la fois du taux de couvert végétal et de la rugosité à la surface du sol. Dans notre test,  $h_0 = h_I + h_D$  où  $h_I$  est le potentiel d'interception,  $h_D$  est le potentiel de détention. Les valeurs de ces variables, proposées dans [37], sont données par la table 5.1. On obtient alors une valeur seuil minimale  $h_{0\min} = 1$  mm. Nous retrouvons, sur la figure 5.4, une hypothèse habituelle (qui est faite par exemple dans LISEM [49]) qui stipule que le ruissellement commence quand le taux d'inondation atteint à peu près 10%.

|                        |          |          |           |
|------------------------|----------|----------|-----------|
| Couvert végétal        | 0 – 20%  | 21 – 60% | 61 – 100% |
| Interception ( $h_I$ ) | 0        | 1        | 2         |
| Rugosité               | 0 – 1 cm | 1 – 2 cm | 2 – 5 cm  |
| Détention ( $h_D$ )    | 1        | 3        | 5         |

TABLE 5.1 – Capacité de rétention superficielle (en mm).

**L'infiltration.** Le sol est limoneux ce qui permet de prendre  $\psi = 0.15\text{m}$ ,  $\theta_s = 0.47$  comme valeurs constantes sur tout le bassin versant (voir e.g. [149]). Le coefficient  $K_s$  est spatialisé autour d'une valeur centrale  $K_s = 6\text{mm/h}$ , proposée dans [152], pour chaque parcelle en fonction de la rugosité, le couvert végétal et le type de croûte superficielle (avec notations  $F0$  : initial fragmentary,  $F2$  : sedimentary crust,  $F12$  : transitional crust - voir [37]) comme dans la table 5.2. Pour l'humidité initiale, il est clair qu'elle est hétérogène à l'échelle du bassin versant. Ce paramètre dépend de plusieurs facteurs comme les épisodes de pluie précédents, la topographie, la température, etc. L'estimation de ce paramètre est donc compliquée et cela

ne constitue pas l'objectif de notre travail. Nous choisissons donc pour l'instant de prendre une valeur constante  $\theta_i = 0.4$  sur tout le bassin versant, d'après [152]. Enfin, l'algorithme 1 présente le traitement de l'infiltration avec la rétention superficielle.

| Rugosité | Couvert végétal | $F0$ | $F12$ | $F2$ |
|----------|-----------------|------|-------|------|
| 2 – 5 cm | 61 – 100%       | 25   | 12    | 6    |
|          | 21 – 60%        | 25   | 6     | 3    |
|          | 0 – 20%         | 25   | 6     | 3    |
| 1 – 2 cm | 61 – 100%       | 25   | 6     | 3    |
|          | 21 – 60%        | 25   | 6     | 3    |
|          | 0 – 20%         | 12   | 3     | 1    |
| 0 – 1 cm | 61 – 100%       | 25   | 6     | 3    |
|          | 21 – 60%        | 12   | 3     | 1    |
|          | 0 – 20%         | 6    | 3     | 1    |

TABLE 5.2 – Spatialisation du coefficient  $K_s$  (en mm/h)

**Le frottement.** Partons d'une valeur maximale  $n = 0.035$  proposée dans [41] pour les sols limoneux (Haplic Luvisol [141]). Le coefficient de Manning est considéré comme homogène pour chaque parcelle, mais il devient hétérogène d'une parcelle à l'autre. La spatialisation est basée sur la rugosité et le taux de couvert végétal comme dans la table 5.3

| Rugosité | Couvert végétal | Manning |
|----------|-----------------|---------|
| 2 – 5 cm | 61 – 100%       | 0.035   |
|          | 21 – 60%        | 0.030   |
|          | 0 – 20%         | 0.026   |
| 1 – 2 cm | 61 – 100%       | 0.025   |
|          | 21 – 60%        | 0.024   |
|          | 0 – 20%         | 0.023   |
| 0 – 1 cm | 61 – 100%       | 0.022   |
|          | 21 – 60%        | 0.021   |
|          | 0 – 20%         | 0.020   |

TABLE 5.3 – Spatialisation du coefficient de Manning

Notons que l'exutoire du bassin versant se trouve à l'intérieur de la carte de MNT donnée (revoir la figure 5.1b) et le bord du bassin versant (formé par les lignes de partage des eaux) est irrégulier. Comme le code travaille sur une grille cartésienne, *i.e.* un maillage structuré, nous avons alors extrait, dans un rectangle, la partie du MNT qui nous intéresse (figure 5.5). Puis, nous mettons une valeur  $K_s$  importante sur les zones se trouvant à l'extérieur du bassin versant afin que toute l'eau apportée à l'extérieur du bassin s'infilte. Donc, la quantité d'eau arrivant au bord à droite est exactement celle qui sort à l'exutoire.

### 5.1.2 Résultat de la simulation

Nous avons choisi de simuler l'événement pluvieux ayant eu lieu le 11/07/1997. L'événement a été surveillé de 16h20 à 19h46, soit 3 heures et 26 minutes. En fait, la seule raison pour

---

**Algorithme 1** Traitement de l'infiltration avec la rétention superficielle

---

**Entrées :**

- 1:   •  $h^n$  : hauteur d'eau obtenue par la résolution du système de Saint-Venant avec porosité (c'est la quantité de l'eau disponible pour l'écoulement)
- $h_r$  : quantité de l'eau stockée par les micro-dépressions de surface
- $R$  : intensité de la pluie

**Sorties :**

- 2:   •  $h^n = h_{mod}$  : hauteur d'eau modifiée après l'infiltration
- $a$  : taux d'inondation
- 3: **pour**  $j = 1$  à NxCell,  $k = 1$  à NyCell **faire** ▷ Boucle en espace
  1. Calcul de la hauteur d'eau totale

$$h_{tot} = \Delta t R + h^n + h_r.$$

2. Calcul de la capacité d'infiltration

$$I_r = K_s \left( 1 + \frac{(h_{tot} + \psi)(\theta_s - \theta_i)}{I} \right).$$

3. Calcul de la quantité infiltrée  $\Delta I$  et la hauteur d'eau modifiée après l'infiltration

- Si  $h_{tot} - \Delta t I_r \leq 0$  : toute eau s'infiltré

$$\begin{aligned} \Delta I &= h_{tot}, \\ h_r &= 0, \\ h_{mod} &= 0. \end{aligned}$$

- Si  $0 < h_{tot} - \Delta t I_r \leq h_0$  : stockage dans les micro-dépressions de surface

$$\begin{aligned} \Delta I &= \Delta t I_r, \\ h_r &= h_{tot} - \Delta I, \\ h_{mod} &= 0. \end{aligned}$$

- Si  $h_0 < h_{tot} - \Delta t I_r$  : ruissellement de surface

$$\begin{aligned} \Delta I &= \Delta t I_r, \\ h_r &= h_0, \\ h_{mod} &= h_{tot} - h_0. \end{aligned}$$

4. Calcul du taux d'inondation et mise à jour de  $h^n$

$$\begin{aligned} a &= a(h_r + h_{mod}), \\ h^n &= h_{mod}. \end{aligned}$$

- 4: **fin pour**
-

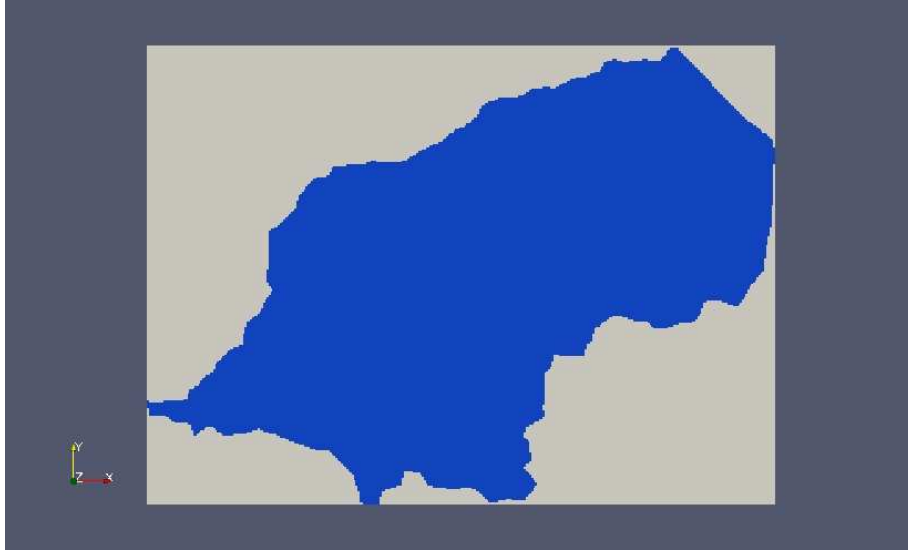


FIGURE 5.5 – Domaine pour la simulation.

laquelle nous nous intéressons à cet événement est que la durée de l'expérience permet de réaliser certaines simulations avec la version séquentielle de notre code dans le temps limite restant de la fin de cette thèse.

Une pluie courte de 35 minutes au début apporte d'eau sur le bassin versant. L'intensité de la pluie fluctue légèrement autour de  $30\text{mm/h}$  (voir la diagramme 5.6).

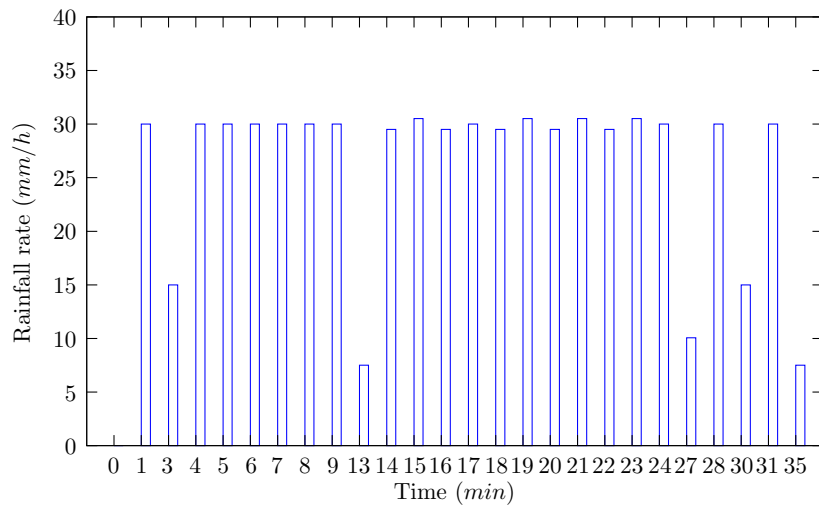


FIGURE 5.6 – Intensité de la pluie.

La figure 5.7 présente la visualisation de la simulation après  $t = 30$  minutes, *i.e.* à 16h50 en temps réel. Nous observons comme attendu que les vitesses les plus élevées sont principalement localisées au niveau des cours d'eau. Comme prévu, le taux d'inondation est très variables sur le bassin versant en fonction de la hauteur d'eau moyenne et de l'écart-type de

la rugosité. Sauf aux niveaux des cours d'eau principaux pour lesquels la surface est quasi-inondée, le taux d'inondation sur les rigoles et les inter-rigoles est assez faible, de l'ordre de moins 50%, ce qui nous montre qu'une simulation utilisant le modèle de Saint-Venant classique, *i.e.* sans  $a(h)$ , est moins adaptée.



(a) Hauteur d'eau et vitesse



(b) Répartition du taux d'inondation

FIGURE 5.7 – Visualisation de la simulation à l'instant  $t = 30$  minutes.

L'hydrogramme 5.8 présente le débit mesuré à l'exutoire du bassin versant. Avec les paramètres mentionnés à la section 5.1.1, la simulation (intitulée *first simulation*) permet de retrouver le profil de la courbe expérimentale ce qui justifie la faisabilité de notre modèle pour ce type d'application. Une calibration est sans doute nécessaire afin d'améliorer ce premier résultat, mais cela n'est pas à priori l'objectif de la thèse. En effet, en prenant  $K_s = 18$  et 9 à la place des valeurs 25 et 12 dans la table 5.2, la seconde simulation présente une amélioration significative. Nous trouvons cependant, pour ces deux simulations, que le débit observé (i) augmente plus tôt et (ii) diminue plus tard que celui simulé. Le retard au début de la courbe simulée peut s'interpréter par le fait que les endroits imperméables (qui favorisent le

ruissellement de surface), comme les bâtiments, les routes (revoir la carte de l'occupation du sol 5.2), n'ont pas été pris en compte dans la table 5.2 pour déterminer la paramètre  $K_s$ . La conductivité à saturation  $K_s$  a une influence importante sur l'hydrogramme comme constater dans [154]. Enfin, la diminution rapide du débit à l'exutoire après l'événement pluvieux peut être également due à la non modélisation du phénomène d'exfiltration éventuellement présente à l'intérieur du bassin versant. En effet, le modèle d'infiltration de Green-Ampt ne modélise pas ce phénomène d'exfiltration.

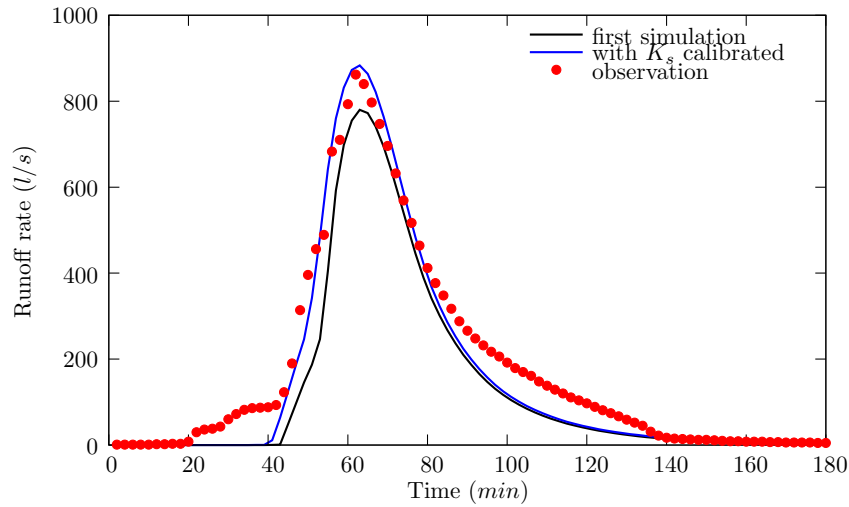


FIGURE 5.8 – Débit à l'exutoire du bassin versant.

## 5.2 Moyens informatiques nécessaires

### 5.2.1 Du calcul séquentiel au calcul parallèle

La simulation numérique du processus d'érosion exige souvent de grandes ressources de calcul. Le grand nombre d'équations à résoudre pour ce genre d'applications engendre l'épuisement des ressources des machines traditionnelles en terme de capacité de mémoire, d'où le vif intérêt pour le calcul parallèle, ainsi que la distribution de données qui ont le potentiel de repousser les limites des systèmes existants en mémoire et en puissance de calcul. L'apport du calcul parallèle devient particulièrement présent pour les simulations des événements qui durent assez longtemps à l'échelle des bassins versants, *i.e.* quand le nombre d'itérations en temps et la taille du maillage deviennent importants.

Le calcul parallèle est également très intéressant pour étudier et valider un nouveau modèle multi-échelles sur une grille grossière. C'est en particulier le cas pour le modèle du chapitre 4 pour lequel nous avons cherché à intégrer le taux d'inondation (un effet important à petite échelle de la microtopographie) dans la modélisation macroscopique. En effet, nous pouvons évaluer la validation de ce modèle macroscopique en comparant ses résultats avec une solution de référence, donnée par le code FullSWOF, calculée sur une topographie à très haute résolution. Cette dernière nécessite un calcul parallèle pour que le temps de simulation et/ou la ressource en mémoire ne soient prohibitifs.

Enfin, il est préférable d'avoir un code parallèle pour des travaux de calibration ou d'étude de sensibilité des paramètres. Comme le modèle à base physique contient souvent un nombre important de paramètres qui sont difficiles à mesurer exactement par l'expérience, la calibration sera nécessaire afin d'identifier la bonne plage de valeurs. Ensuite, une étude de sensibilité est utile pour comprendre l'impact de chaque paramètre sur le processus physique. Cette stratégie demande souvent plusieurs simulations. Des calculs trop longs et le manque de temps impliquent souvent de se contenter de quelques tests, alors qu'un programme plus rapide permettrait de lancer beaucoup plus de tests dans la même durée, rendant le résultat bien meilleur. À titre d'exemple, nous avons effectué plus de 1000 simulations (sur un code non parallélisé) sur l'expérience présentée à la section 3.4 du chapitre 3, afin de caler l'ensemble des paramètres du ruissellement et de l'érosion. En utilisant le code séquentiel sur la grappe du BRGM, chaque simulation a duré environ 3 heures pour 12 minutes de temps réel.

### 5.2.2 Calcul parallèle à l'aide de la librairie SkelGIS

La décomposition de domaine est particulièrement adaptée pour le calcul parallèle. Avec cette approche, le problème d'échange de données entre les sous-domaines pendant le calcul doit être bien traité afin d'obtenir le même résultat que celui de la version séquentielle (figure 5.9). Toutefois, le parallélisme est un domaine complexe de l'informatique et il nécessite à la fois de bonnes connaissances de la programmation générale et des bibliothèques de parallélisme mais également une connaissance solide du fonctionnement des processeurs et de la gestion de la mémoire.

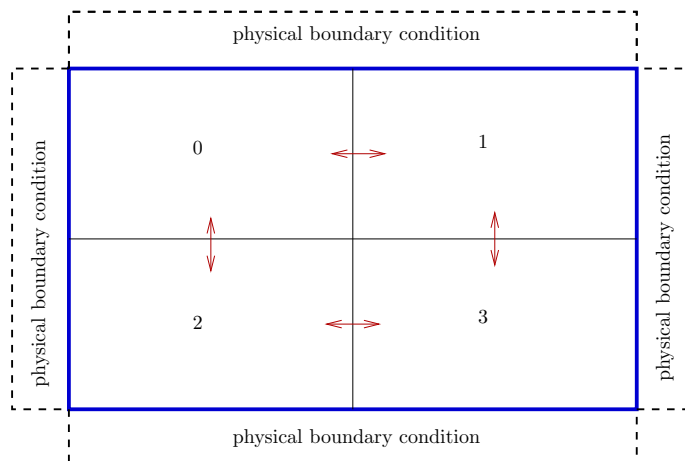


FIGURE 5.9 – Décomposition de domaine et l'échange de donnée entre les sous-domaines.

N'étant pas spécialiste en programmation MPI, nous nous intéressons, en collaboration avec H. Coullon, à l'utilisation d'outils de parallélisation automatique comme SkelGIS - une librairie de squelettes algorithmiques parallèles écrite en C++ et développée par le LIFO et GeoHyd. Cette librairie fonctionne avec du MPI mais, par l'intermédiaire de concepts de programmation de haut niveau, elle cache tout l'aspect parallèle et ne propose que des interfaces séquentielles (squelettes) à l'utilisateur. En utilisant les squelettes et les outils de la librairie, un code séquentiel est écrit, mais l'utilisateur obtient une application parallèle.

La décomposition de domaine MPI est effectuée automatiquement, ainsi que les échanges nécessaires entre les processeurs (voir [46] pour plus de détails).

Le principe de cette librairie est qu'elle met en place une matrice distribuée bidimensionnelle appelée *Dmatrix*. L'utilisateur définit de façon séquentielle sa fonction  $f : M \mapsto M$  où  $M$  est une *Dmatrix*. Dans notre cas, la fonction  $f$  représente un opérateur du schéma numérique (comme le calcul du flux, ou de la reconstruction hydrostatique etc). Le squelette de programmation va effectuer une distribution par blocs de la matrice générale de façon transparente pour l'utilisateur et la fonction  $f$  sera appliquée en parallèle sur chacun des blocs (sous-domaine). L'utilisateur programme donc la fonction  $f$  sur  $M$ , tout comme s'il codait une fonction séquentielle sur une matrice standard. Pour parcourir la matrice distribuée, SkelGIS a mis au point un itérateur. Son fonctionnement est le même qu'un itérateur de la librairie standard C++. Au moment où nous réalisons ce travail, la librairie SkelGIS en est à sa première version et demande à être enrichie. Mais elle permet déjà d'obtenir des performances très intéressantes, comme nous le présenterons dans la suite.

La mise en œuvre d'un code parallèle à partir de la version séquentielle existante a été initiée récemment dans le cadre du projet FullSWOF au CEMRACS 2012. Nous avons commencé avec le code FullSWOF\_2D. L'implémentation du schéma d'ordre 1 en temps et en espace avec SkelGIS a été réalisée pendant une semaine en collaboration avec H. Coullon (LIFO & GeoHyd). Notons que la librairie restera toujours moins efficace qu'une version très optimisée en MPI (ou openMP etc) car il y a des surcoûts pour cacher le parallélisme (templates, appels de fonctions etc).

Pour un premier test, nous avons simulé une rupture de barrage cylindrique sur 16 processeurs, sur la grappe du CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques), et comparé avec le calcul séquentiel. Sur la figure 5.10, chaque sous-domaine est coloré par une couleur différente. Nous observons que SkelGIS a bien géré l'échange des données entre les sous-domaines.

Il est maintenant intéressant d'analyser les performances de la version parallèle. La définition de la notion d'accélération est celle donnée par Amdahl [4] : l'accélération parallèle ("*speedup*") est le rapport entre  $t_1$  le temps nécessaire pour exécuter un programme sur un seul processus et  $t_p$  le temps nécessaire pour l'exécuter en parallèle sur  $p$  processus, *i.e.*

$$\text{SpeedUp} = \frac{t_1}{t_p}.$$

Il est évident que l'accélération maximale possible est égale au nombre de processeurs utilisés, *i.e.* la courbe de speedup idéale est de la forme  $y = x$ . L'efficacité de la parallélisation d'un code est le rapport entre l'accélération et le nombre de processeurs utilisés en parallèle.

Nous effectuons toujours la rupture de barrage cylindrique, mais avec plusieurs configurations comme dans la table 5.4. Notons que les tests 1 et 2 permettent également de voir l'impact de la taille de domaine sur l'accélération, tandis que les tests 3 et 4 ont pour but l'évaluation de l'impact du nombre d'itérations en temps sur l'accélération. En même temps, nous avons comparé les performances de notre version parallèle avec une version MPI développée par C. Laguerre & O. Delestre. Les tests 1 et 2 ont été calculés sur la grappe du CIRM tandis que le calcul des tests 3 et 4 ont été réalisés sur la grappe de GéoHyd.

Sur la figure 5.11, le test 1 montre, comme prévu, que SkelGIS est moins bon en terme de temps d'exécution au départ (sur 1 processeur), mais a un meilleur speedup qui permet

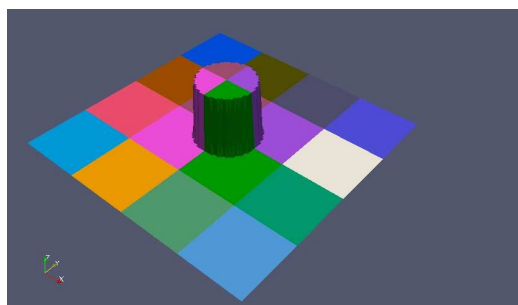
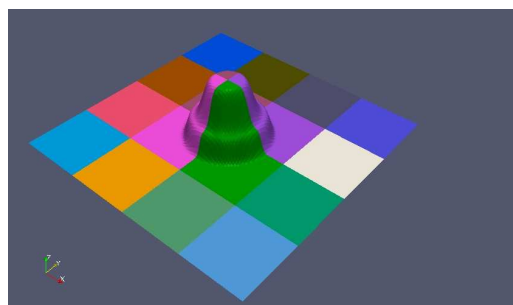
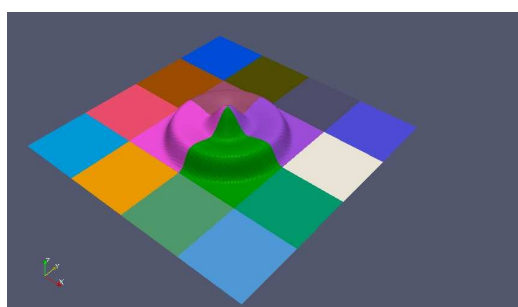
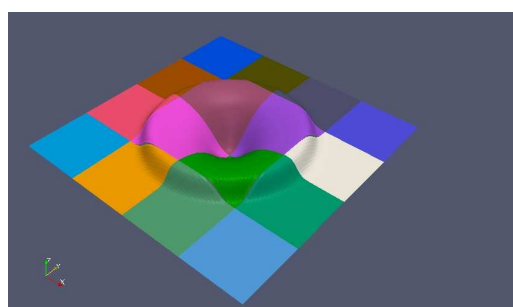
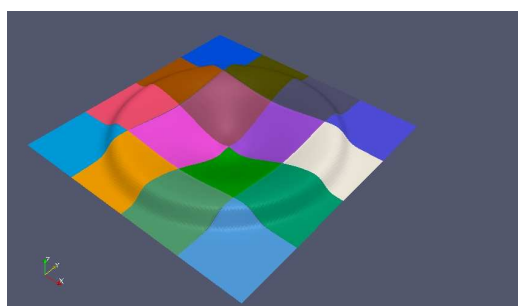
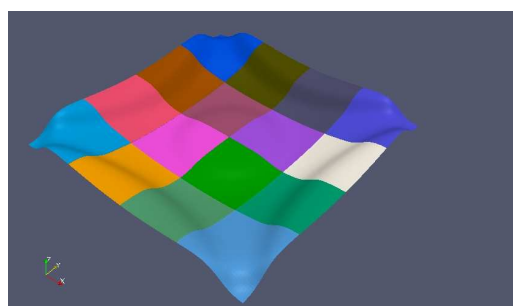
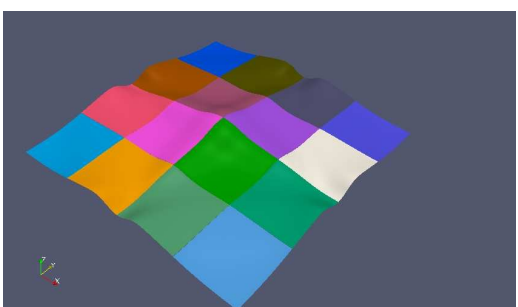
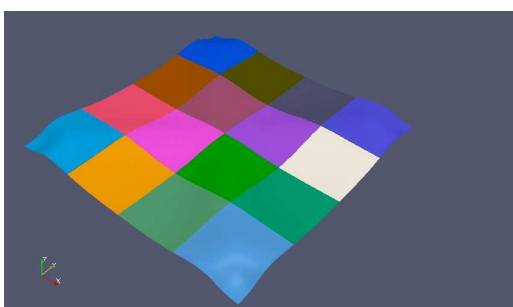
(a)  $t = 0s$ (b)  $t = 0.1s$ (c)  $t = 0.3s$ (d)  $t = 0.6s$ (e)  $t = 1s$ (f)  $t = 1.8s$ (g)  $t = 3.4s$ (h)  $t = 5s$ 

FIGURE 5.10 – Simulation en parallèle sur 16 processeurs, à l'aide de la librairie SkelGIS, d'une rupture de barrage cylindrique.

|        | Nombre de mailles    | Nombre d'itérations | Nombre de processeurs |
|--------|----------------------|---------------------|-----------------------|
| Test 1 | $1280 \times 1280$   | 5000                | 1, 4, 8, 16, 32, 64   |
| Test 2 | $12800 \times 12800$ | 5000                | 64, 128, 256, 512     |
| Test 3 | $5120 \times 5120$   | 5000                | 8, 16, 32, 64         |
| Test 4 | $5120 \times 5120$   | 20000               | 8, 16, 32, 64         |

TABLE 5.4 – Configuration des benchmarks

de rattraper assez vite en temps d'exécution la version MPI. Sur un plus grand nombre de processeurs l'écart deviendrait plus grand entre les temps d'exécution. Dans ce test, le speedup de SkelGIS est meilleur que celui de MPI. Le test 2 justifie l'impact important de la taille du domaine sur l'accélération puisque le speedup de la version SkelGIS devient moins bon que celui de la version MPI. A noter que l'on est quand même relativement loin de l'accélération idéale dans les deux cas, mais les speedups sont linéaires. Pour les tests 3 et 4, on observe que le nombre d'itérations influence peu l'accélération de la version parallèle. Remarque pour les tests 2, 3, 4 : ce sont des résultats relatifs, c'est à dire que le speedup n'est pas établi par rapport au temps d'exécution sur 1 processeur, mais par rapport à 64 (test 2) ou 8 (test 3, 4) processeurs.

### 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une première application de notre modèle multi échelle sur le bassin versant de Ganspoel en Belgique. Le résultat de la simulation illustre la faisabilité et présente la perspective de notre approche bien que le code en soit encore à sa première version. Néanmoins, la recherche de paramètres demandés par le modèle, à l'échelle du bassin versant, est une étape importante et quelquefois très délicate. A l'échelle du bassin versant, il est également intéressant de modéliser l'exfiltration. Nous pouvons alors penser à un modèle plus avancé que celui de Green-Ampt, par exemple résoudre l'équation de Richards (1.3) comme ce qui a été fait dans [164, 165] ou d'effectuer une modification du modèle de Green-Ampt.

La simulation à l'échelle du bassin versant demande une ressource en mémoire très importante, ce qui fait appel au développement d'un code parallèle. Cette démarche est faite en collaboration avec le LIFO & GeoHyd pour utiliser la librairie SkelGIS, nous sommes à la première étape de cette direction. Les premiers tests réalisés au CEMRACS 2012 présentent l'intérêt indéniable de cette démarche.

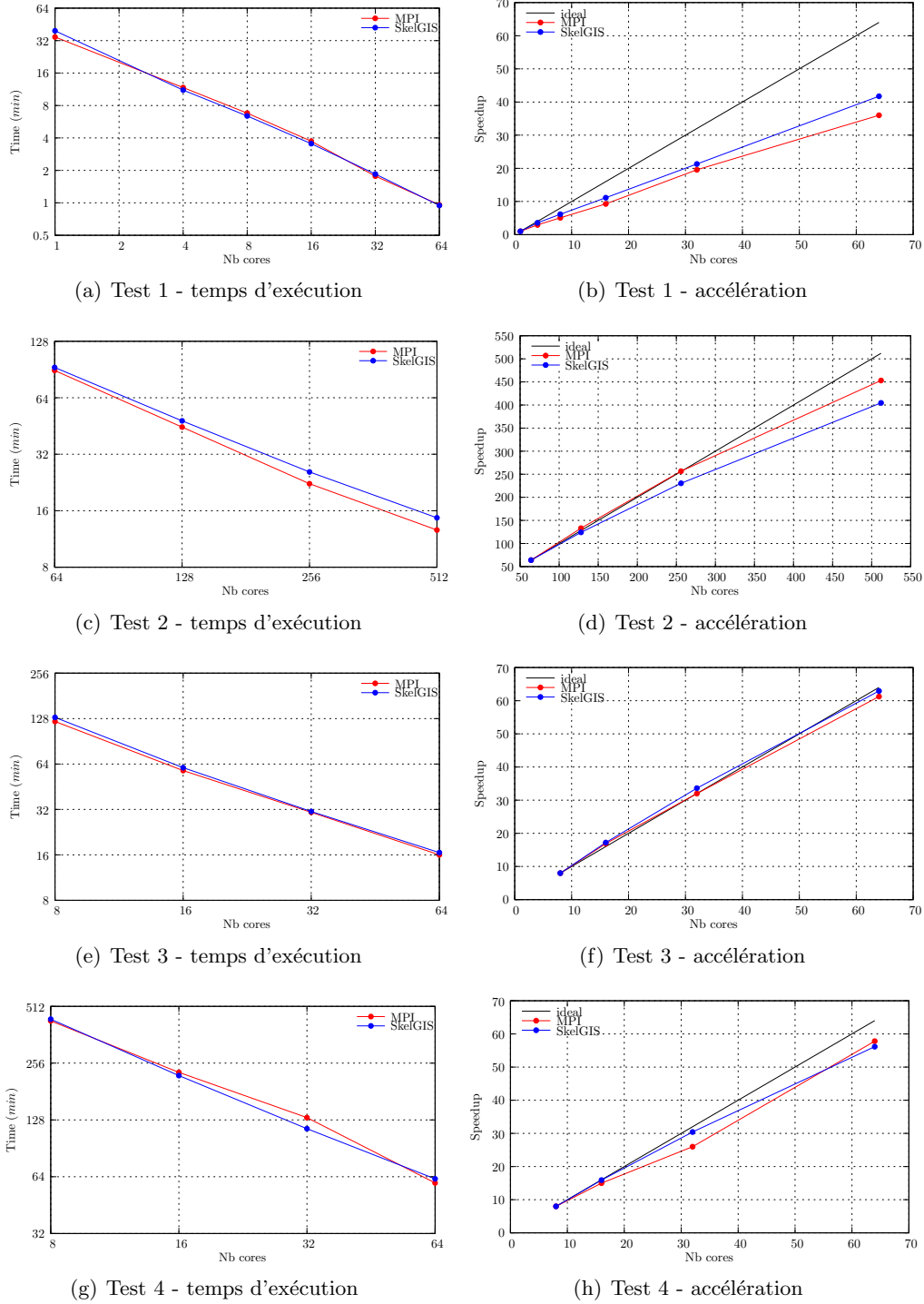


FIGURE 5.11 – Efficacité de l'outil de parallélisation par MPI classique et par la librairie SkelGIS pour FullSWOF\_2D.



# Conclusions et perspectives

Nous avons abordé le problème de modélisation et de simulation numérique de l'érosion des sols. Comme l'étude des processus d'érosion se situe aux interfaces de domaines scientifiques variés, le travail de cette thèse a fait appel à des recherches et des collaborations multidisciplinaires. Nous avons vu que la complexité de ce phénomène naturel engendre une large variété de modèles de type empirique, conceptuel ou à base physique. Nous avons choisi d'étudier le problème de modélisation par la voie des approches à base physique. Comme elles reposent sur le principe de conservation, ceci permet d'avoir une reproduction plus fidèle de la réalité. En particulier, nous avons l'opportunité de bénéficier des avancements très récents des méthodes numériques développées pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation.

Les équations de Saint-Venant, dont les variables sont la hauteur d'eau et la vitesse moyenne, sont particulièrement adaptées pour décrire des écoulements en eau peu profonde. Ce système est ensuite couplé avec les équations de conservation de masse de sédiments décrivant l'évolution de la concentration en sédiment et de la topographie par l'érosion. Ces équations sont complétées par les lois de fermeture représentant le débit des matériaux solides transportés en charriage, le taux d'arrachement par le ruissellement et/ou par la pluie et la sédimentation pour le cas du transport en suspension. Le premier chapitre de la thèse, nous a donné une vue globale sur la diversité des lois existantes permettant de guider notre choix de modélisation.

Dans le chapitre 2, nous avons regroupé les formules de débit solide, pour le cas de charriage, sous une forme générique et puis dérivé une nouvelle solution analytique du système couplé des équations de Saint-Venant & Exner. La validité de l'hyperbolicité du système est également démontrée pour plusieurs lois de transport solides ; à l'exception du cas de Grass, pour lequel l'hyperbolicité est toujours garantie. Le système peut quand même perdre l'hyperbolicité dans le cas général. En même temps, nous examinons la validité du *splitting* qui est la stratégie des schémas à deux pas de temps, *i.e.* résoudre les équations de Saint-Venant avec un fond fixe et ensuite mettre à jour l'évolution du fond par l'équation d'Exner. Grâce à l'étude de la structure de la solution, nous avons montré, de manières théorique et numérique, que la condition de CFL pour les équations de Saint-Venant ne suffit pas à garantir la stabilité du système couplé. Par ailleurs, le *splitting* n'est plus adapté dans le cas où l'écoulement devient supercritique, par exemple dans le cas des antidunes.

Nous pouvons proposer quelques travaux dans la lignée de ce travail. La modélisation du transport par charriage avec le système 1.15 présente certaines limites. En effet, les écoulements en rivière, qui sont souvent liés au transport solide par charriage, ont une épaisseur de lame d'eau assez importante pour que la vitesse du fluide autour des grains soit assez éloignée de sa valeur moyenne obtenue par le système de Saint-Venant. Or, le charriage a lieu quand

la contrainte de cisaillement au fond dépasse le seuil de mise en mouvement des grains. Il est donc intéressant de remplacer les équations de Saint-Venant par un modèle plus avancé, par exemple le *système de Saint-Venant multi couche* [8, 12], afin de bien décrire le profil vertical de la vitesse qui permet, par conséquent, de mieux approcher la *vraie* contrainte de cisaillement. Un autre point à étudier concerne les flux solides comme ceux de Grass, Meyer Peter et Müller etc : ces flux, qui s'écrivent sous la forme  $q_{sat} = \alpha(\tau^* - \tau_{cr}^*)_+^\beta$ , sont dits *flux saturés* puisqu'ils ont été dérivés sous l'hypothèse d'un écoulement permanent stationnaire sur un fond à pente faible. Ces hypothèses sont très restrictives du point de vue de l'application. Il est donc préférable de (i) rajouter l'effet de la pente dans  $q_{sat}$ , par exemple

$$q_{sat} = \alpha(\tau^* - \tau_{cr}^* - \gamma \partial_x z_b)_+^\beta,$$

et de (ii) remplacer  $q_{sat}$  par un *flux instantané*  $q_b$ , *i.e.* non homogène en temps et en espace. D'après l'idée de Lagrée [116], le flux  $q_b$  peut être donné par

$$l_{sat} \frac{\partial q_b}{\partial x} + q_b = q_{sat},$$

où le paramètre  $l_{sat}$  est appelé *longueur de saturation* qui peut s'interpréter comme la longueur nécessaire pour que le court d'eau soit saturé par les sédiments, *i.e.* le flux  $q_b$  vaut  $q_{sat}$ . Avec ce nouveau flux  $q_b$ , les études théoriques ainsi que les méthodes numériques pour le système couplé 1.15 seront reposées.

Au chapitre 3, nous avons construit un modèle, et le schéma numérique associé, pour simuler l'érosion et le transport en suspension de sédiments. Grâce aux équations d'Hairsine et Rose, nous avons pu modéliser en plus la sélectivité des grains pendant le processus érosif, ce qui est connu comme un avancement important du modèle d'Hairsine et Rose par rapport aux autres modèles (ceux de Foster [71], Blau et al. [24], Morgan et al. [135], De Roo et al. [49]). Par conséquent, cette approche permet de prédire également la perte en nutriment des sols cultivés qui s'adsorbent uniquement sur les grains les plus petits. Un schéma couplé utilisant le flux HLLC et la reconstruction hydrostatique a été mis en place. Sur la base du logiciel FullSWOF.2D, nous avons implémenté le module d'érosion. Ensuite, le code a été testé avec les données expérimentales de dix parcelles d'1 m<sup>2</sup> au Niger. Les résultats des simulations, sur le taux de sédiment à l'exutoire, ont justifié l'utilité de notre modèle pour ce type d'application. La prochaine étape de ce travail est d'évaluer la sélectivité de grain du modèle en comparant le résultat de simulation avec celui donné par l'analyse granulométrique de l'expérience, *i.e.* l'opération consistant à étudier la répartition des différents grains d'un échantillon, en fonction de leurs caractéristiques (poids, taille, ...). Une autre étape importante est d'étudier et quantifier la propagation des incertitudes paramétriques au travers du modèle d'érosion. En effet, le modèle d'Hairsine et Rose nécessite un certain nombre de paramètres d'entrée qui sont généralement calibrés grâce à des jeux de données observées. Il existe donc une source d'incertitude non négligeable, qui peut limiter les capacités prédictives du modèle. Concernant ce sujet, les travaux de Rousseau [153], démarrés en même temps que cette thèse, contribuent à la connaissance de la quantification des incertitudes du modèle.

Dans le chapitre 4, nous avons développé une modélisation multi échelle pour les simulations à l'échelle du bassin versant où la résolution spatiale n'est souvent pas suffisamment précise, afin de représenter les microtopographies à la surface du sol. Le taux d'inondation, un indicateur important à petite échelle, a été intégré dans la modélisation macroscopique. Cette approche nous a conduit à utiliser les équations de Saint-Venant avec porosité (pour décrire

le ruissellement) et modifier les équations d'Hairsine et Rose, afin de prendre en compte la co-existence de la partie sèche et mouillée dans une même cellule lors la résolution numérique. Le problème concernant la dépendance spatiale et la définition mathématique des produits non-conservatifs, apparaissant dans les équations de Saint-Venant avec porosité, nécessite d'être clarifié afin de développer proprement le schéma numérique. Basé sur la théorie de chemin conservatif, nous avons tout d'abord construit un schéma de Roe bien équilibré. Un autre schéma avec une reconstruction hydrostatique généralisée est également implémenté et comparé avec le premier. Etant donnés les résultats des tests et la complexité de la mise en œuvre, pour notre application, nous avons finalement adopté le schéma avec reconstruction hydrostatique.

En ce qui concerne le taux d'inondation  $a(x, h)$ , notons que nous l'avons considéré comme une porosité isotrope et effective. Il est alors nécessaire de construire une stratégie efficace permettant de déduire  $a(x, h)$  à partir de l'hétérogénéité de la microtopographie. Puis, cette fonction doit être calée pour chaque application, puisque par définition, elle n'est qu'un terme effectif. Pour finir sur le taux d'inondation, mais d'un point de vue plus théorique, nous pourrions nous pencher sur l'obtention d'une équation d'évolution en temps de  $a(x, h)$  causée par l'érosion (qui modifie les caractéristiques de la microtopographie). La fonction  $a(x, h)$  sera plutôt notée  $a(t, x, h)$ . Comme cette évolution a lieu à l'échelle de la microtopographie, une approche du type cinétique peut être envisagée dans laquelle nous considérons  $a(t, x, h)$  comme une fonction de densité.

Concernant la méthode numérique pour le système de Saint-Venant avec porosité (4.30), il serait possible, pour compléter cette étude, de monter à un ordre plus élevé le schéma de Roe (4.45) associé au chemin conservatif (4.48) (par exemple le schéma de type WENO-Roe comme ce qui est fait dans [34] pour le cas du système de Saint-Venant classique). Nous avons vu, par les tests présentés à la section 4.4.4, que le schéma de Roe présente une qualité intéressante en terme de précision. Par ailleurs, nous sommes bien convaincus que la reconstruction hydrostatique, pour laquelle nous avons utilisé la valeur intermédiaire  $\sigma_{j+1/2} = (a, z_b)_{j+1/2}$  définie par (4.56), est moins adaptée dès lors que  $a$  et/ou  $z_b$  présente/nt une forte discontinuité (voir par exemple une discussion plus détaillée dans [56]). Au niveau du développement du code, il est très intéressant d'enrichir le logiciel FullSWOF en y rajoutant le schéma de Roe, ce que nous n'avons pas eu le temps de réaliser pendant le temps limite de la thèse. Toujours au sujet du développement d'une modélisation macroscopique à l'échelle du bassin versant, il est extrêmement important de prendre en compte des eaux d'exfiltration. Contrairement à ce qui se passe à l'échelle de la parcelle, le phénomène d'exfiltration peut être non négligeable à l'échelle des bassins versants puisque à un moment donné, les eaux souterraines peuvent éventuellement remonter à la surface à un autre endroit, mais dans le même bassin versant.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous avons réalisé une première application de notre modèle multi échelle pour simuler le ruissellement de l'événement pluvieux du 11/07/1997 sur le bassin versant de Ganspoel (en Belgique). Bien que le code en soit encore à la première version, nous avons déjà pu simuler le profil du débit à l'exutoire du bassin versant pour un événement réel. Les prochains travaux dans la lignée de ce travail sont de tester le modèle avec érosion sur plusieurs données expérimentales du bassin versant. En effet, l'objectif principal pour lequel nous avons intégré le taux d'inondation aux équations de Saint-Venant est plutôt d'améliorer la prédiction de la vitesse de l'écoulement en espérant que ceci apportera un avantage important sur le calcul du taux d'érosion. Enfin, nous avons présenté

la nécessité de développer un code parallèle. Nous nous intéressons à l'utilité de la librairie SkelGIS comme un outil de parallélisation automatique. Les premiers résultats concernant l'efficacité de cet outil de parallélisation ont montré la faisabilité et l'intérêt d'une approche parallèle. Néanmoins, le développement de la version parallèle d'un code complexe avec SkelGIS, comme tout d'autre outil de parallélisation, n'est pas toujours facile et quelquefois, il nécessite un effort important sur la programmation.

Nous terminons les perspectives en parlant des autres applications du modèle développé dans la thèse et son code associé. En négligeant l'évolution de la topographie due à l'érosion, le modèle de transport en suspension développé au chapitre 3 et 4 peut servir directement à la simulation du transport de polluants à l'échelle des parcelles ou du bassin versant. Cette thèse a également contribué à l'élaboration de deux schémas numériques pour les équations de Saint-Venant avec porosité (4.20) qui sont appliqués habituellement à la modélisation des inondations urbaines. Toujours avec ce modèle mais en considérant la version 1D (4.30) et en enlevant le terme de topographie dans l'équation de quantité de mouvement (ce qui consiste à considérer un  $z_b$  constant), le système obtenu a la forme d'un modèle important de la dynamique des milieux continus qui décrit l'évolution d'un fluide dans un tuyau (nozzle flow). La fonction spatiale  $a(x)$  dans ce cas peut s'interpréter comme la section du tuyau. Le schéma de Roe (4.45) avec le choix du chemin conservatif (4.48) donne de bons résultats, même pour le cas délicat où la section  $a(x)$  est discontinue (voir e.g. [119]).

# Valorisations et compétences acquises

## Publications

**parues :** S. Cordier, M.H. Le et T. Morales de Luna, *Bedload transport in shallow water models : why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help*, Advances in Water Resources, 34(8), p. 980-989, 2011.

C. Berthon, S. Cordier, O. Delestre et M.H. Le, *An analytical solution of shallow water system coupled to Exner's equation*, Comptes Rendus Mathématiques, 350(3-4), p. 183-186, 2012.

**à soumettre :** M.H. Le, B. Cheviron, O. Cerdan, S. Cordier et P. Sochala, *A review of physically based modeling of soil erosion by water*.

**en préparation :** avec O. Cerdan, S. Cordier, C. Lucas et P. Sochala, *Upscaling the influence of microtopography when modeling overland flow and soil erosion*.

## Communications orales

CANUM 2012 *Upscaling the influence of microtopography when modeling overland flow and soil erosion*, Superbess, Puy-de-Dôme, 21-25/05/2012.

24/11/2011 *Modélisation numérique de l'érosion des sols*, Journée des doctorants, Blois

SMAI 2011 *Modélisation numérique de l'érosion des sols à l'aide d'une approche multi-classe*, Guidel, Bretagne 23-27/05/2011.

RST 2010 *Modélisation de l'érosion par le ruissellement : méthodes numériques et applications*, Bordeaux, 25-29/10/2010.

## Posters

- EGU 2012    *Calibration of a physically based soil erosion model for different kind of biological soil*, Vienne (Autriche), 22 – 27 Mai 2012.
- HYPNUM 2011    *Integrating the microtopography into Shallow Water Equations*, Roscoff, Bretagne, 19 – 23 Septembre 2011.
- EGU 2010    *Physically based-models of soil erosion by water*, Vienne (Autriche), 02 – 07 Mai 2010.

## Participation

- 01-11 Août 2012    CEMRACS, Marseille, Bouches du Rhône
- 13 Décembre 2010    15e journée du projet CASCIMODOT, Orléans
- 21-23 Juin 2011    Colloque final de l'ANR Methode, Orléans
- 06-10 Juin 2011    Finite Volumes for Complex Applications VI, Prague
- 03 Décembre 2010    13e journée du projet CASCIMODOT, Orléans
- 20-24 Septembre 2010    Numerical Methods for Water Particles Interactions, Villetaneuse

## Codes

- Module d'érosion pour FullSWOF\_2D (chapitre 3)
- Code pour la simulation à l'échelle du bassin versant (chapitre 4)

## Compétences acquises

- En analyse numérique : maîtriser les méthodes numériques récentes pour les équations du type Saint-Venant comme la reconstruction hydrostatique, le schéma de Roe avec chemin conservatif.
- En hydrologie : avoir une culture générale sur les processus hydrologiques et d'érosion, les modèles à base physique.
- En informatique et programmation : se familiariser avec le logiciel géographique ArcGIS, maîtriser les techniques de base pour la programmation en objet C++ et notion de base de la bibliothèque de parallélisation MPI.

## Annexe A

# Importation du projet dans Code::Blocks

Nous allons donner ici les différentes étapes permettant d'importer le projet FullSWOF\_2D dans le logiciel de développement Code::Blocks. Cette note est rédigée en collaboration avec O. Delestre.

1. Lancer Code::Blocks, la fenêtre 1 s'affiche.
2. Cliquer sur le bouton *Create a new project* (figure A.1).

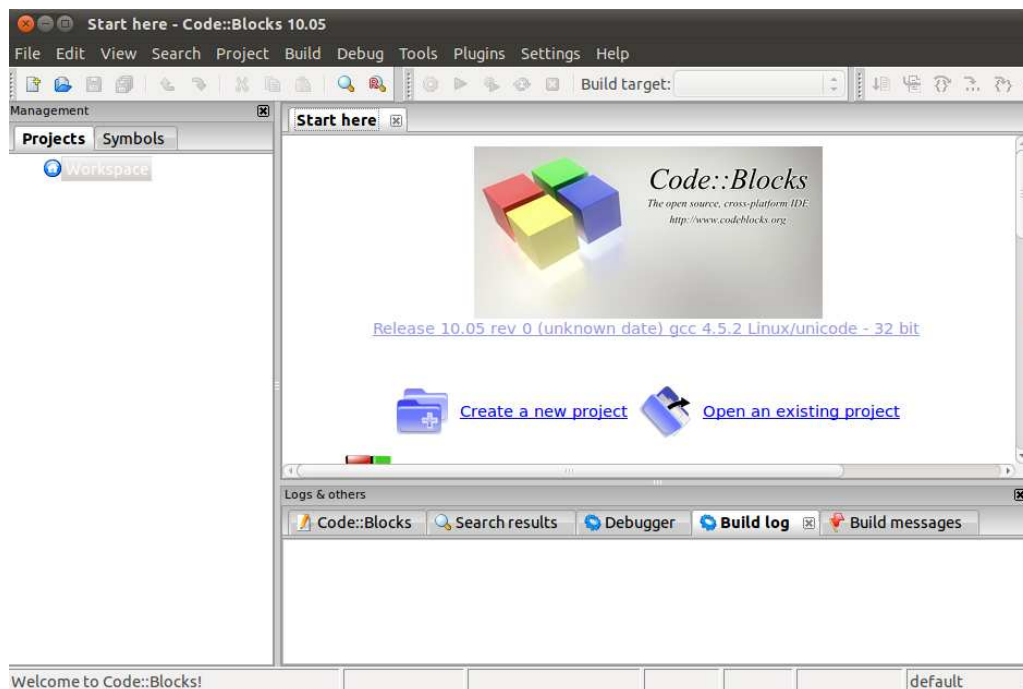


FIGURE A.1 –

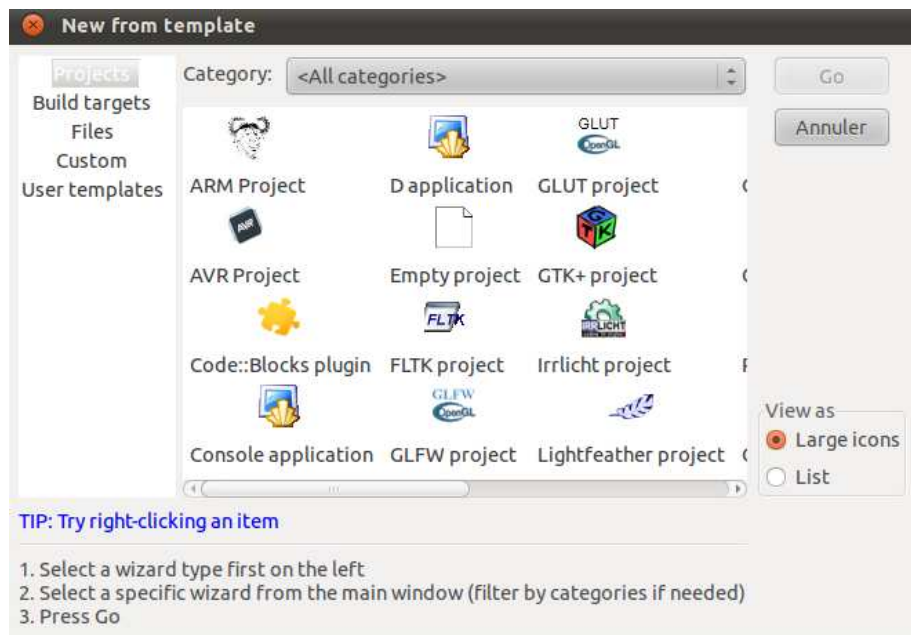


FIGURE A.2 –

3. Cliquer sur *Empty project* puis sur le bouton *Go* (figure A.2).
4. Une fenêtre *Empty project* s'ouvre. Remplir le titre du projet dans le champ *Project title*. Dans le champ *Folder to create project in* spécifier la localisation du répertoire FullSWOF\_2D/Exp01 (qui contient les répertoires Inputs et Outputs) que vous avez téléchargé. Laisser le champ *Project filename* par défaut et dans *Resulting filename* supprimer le FullSWOF\_2D en doublon. Puis cliquer sur le bouton *next* (figure A.3).
5. Dans le champ *Compiler*, le compilateur peut être changé. Il est conseillé d'utiliser le compilateur suggéré par défaut. Deux modes de compilation sont proposés : *Debug* et *Release*. Laisser les champs inchangés. Enfin cliquer sur *Finish* (figure A.4).
6. Le projet FullSWOF\_2D apparaît sur la gauche dans la liste des projets (*Workspace*). Nous importons tous les fichiers en cliquant sur le menu *Project* → *Add files recursively...*
7. La fenêtre *Add files recursively...* s'ouvre. Rester dans le répertoire spécifié précédemment (contenant toutes les sources). Cliquer sur *Ouvrir* (figure A.5).
8. Une liste de fichiers à importer dans le projet apparaît : *Multiple selection*. Tous les fichiers *.cpp* et *.hpp* ont été listés. Cliquer sur *Valider* (figure A.6).
9. Laisser les champs cochés par défaut (*Debug* et *Release*) puis cliquer sur *Valider* (figure A.7).
10. On voit alors apparaître à gauche dans la colonne *Workspace* toute l'architecture du projet FullSWOF\_2D (figure A.8).

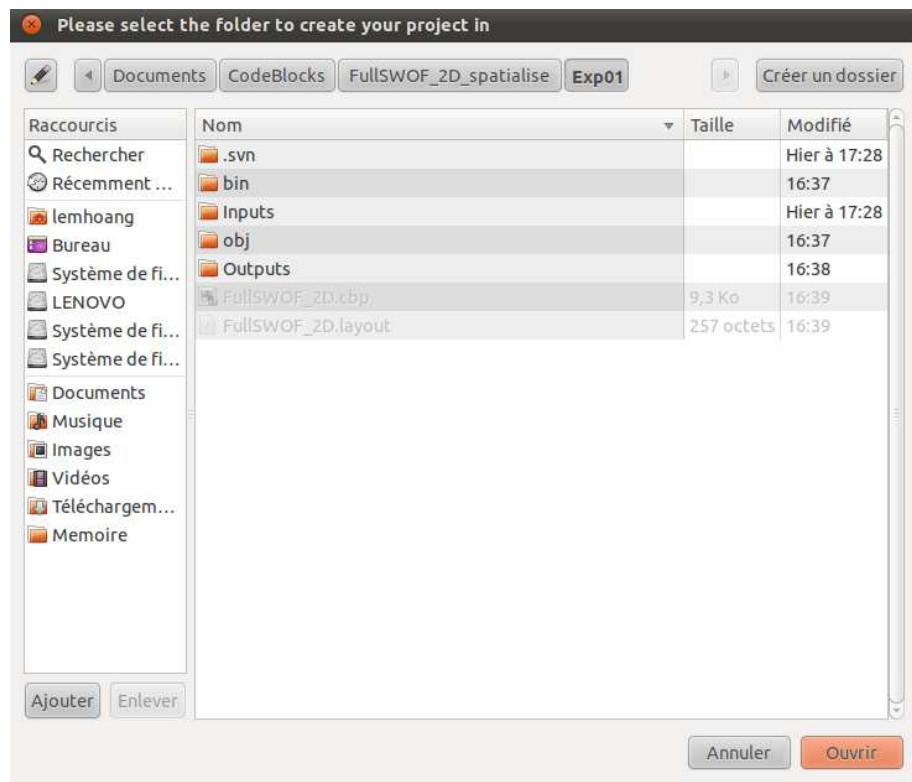


FIGURE A.3 –

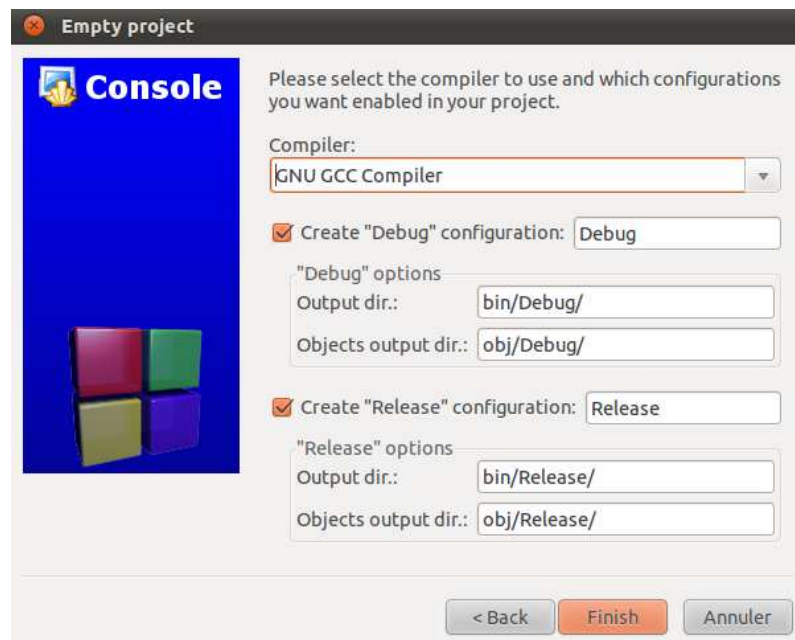


FIGURE A.4 –

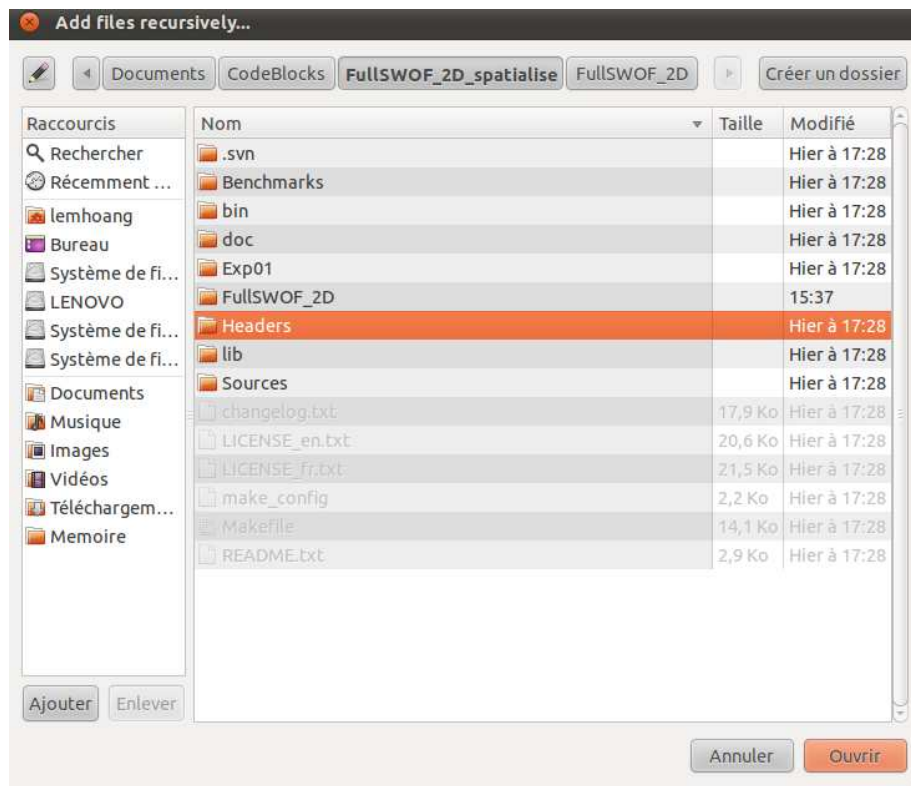


FIGURE A.5 –



FIGURE A.6 –

11. Afin de permettre la compilation, il faut préciser les chemins des différents includes du code. Pour cela cliquer sur *Project* → *Build options...*. Une fenêtre *Project build option* s'ouvre. Cliquer sur l'onglet *Search directories* puis sur le bouton *Add* du sous-onglet *Compiler*. Une fenêtre *Add directory* s'ouvre (figure A.9).
12. Cliquer sur ... (*Browse*), double cliquer sur le répertoire *Headers*, puis *libboundary-conditions* puis cliquer sur le bouton *Ouvrir* (figure A.10). Une fenêtre *Question* apparaît demandant *Keep this as a relative path ?*, cliquer sur *Oui* puis *Valider*. Répéter l'opération pour tous les autres sous répertoires (*libflux*, *libfrictions*, ...). Une fois l'opération achevée, on obtient la fenêtre A.11. Cliquer sur *Valider*.



FIGURE A.7 –

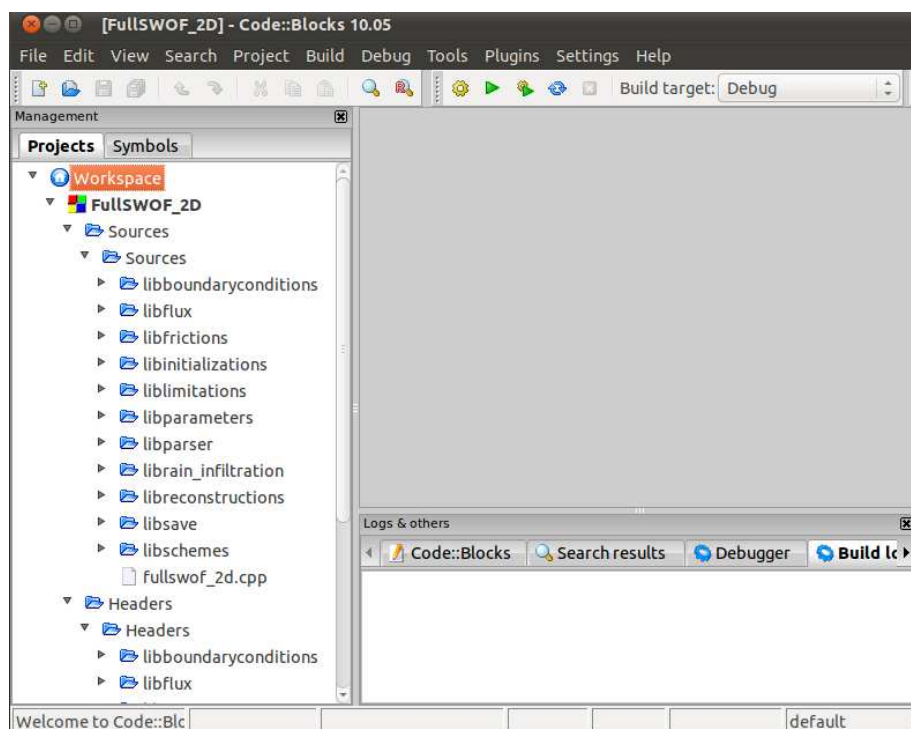


FIGURE A.8 –

13. Le projet est totalement créé et importé. Il est maintenant possible de compiler le code à l'aide du bouton build. On peut observer l'évolution de la compilation dans la fenêtre *Build log*. Quand celle-ci est achevée, l'état de la compilation apparaît dans l'onglet *Build messages* (figure A.12). Il est maintenant très aisé de compléter le code. Pour exécuter le programme avec Code::Blocks, il faut cliquer sur le bouton *Run* de la barre d'outils. Le logiciel utilisera le fichier *parameters.txt* se trouvant dans le sous répertoire *Exp01/Inputs*.

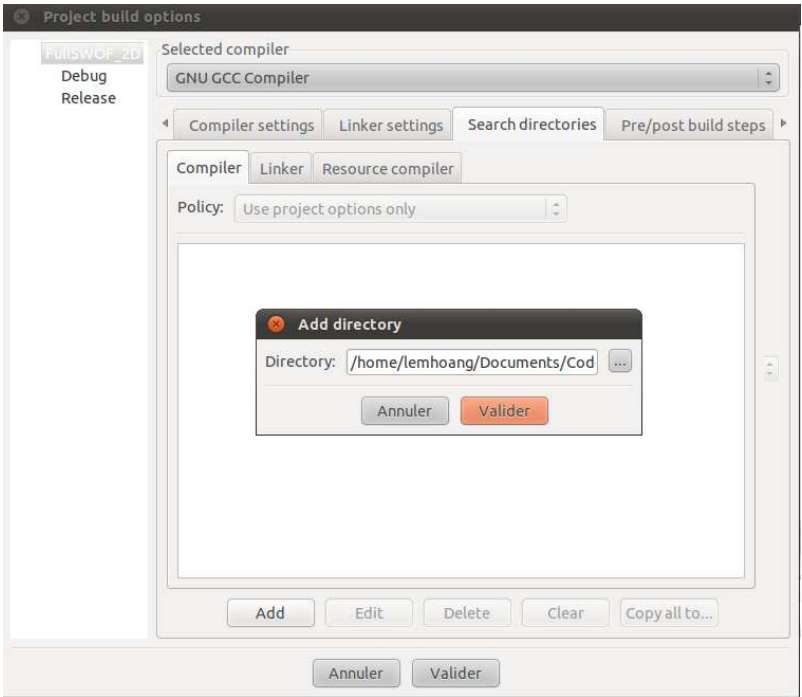


FIGURE A.9 –

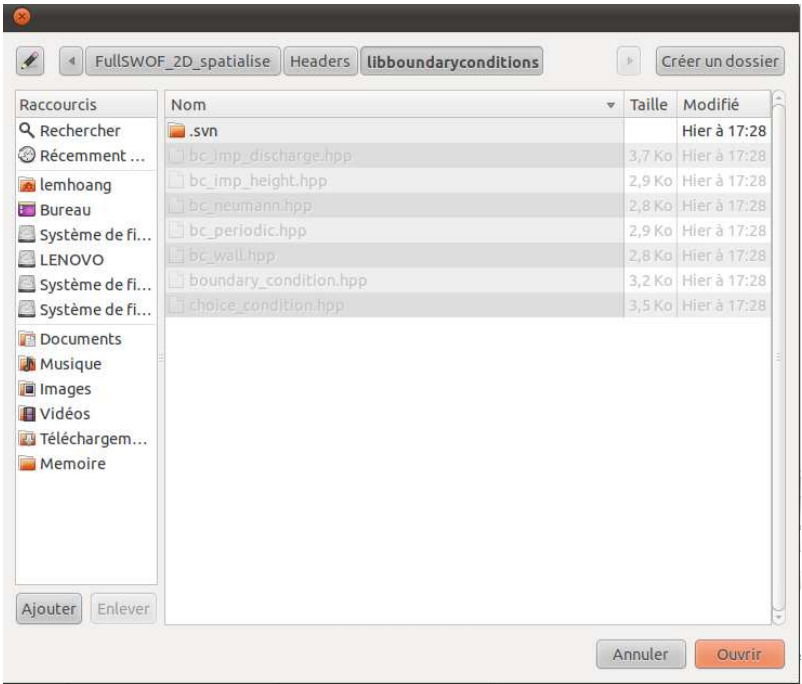


FIGURE A.10 –

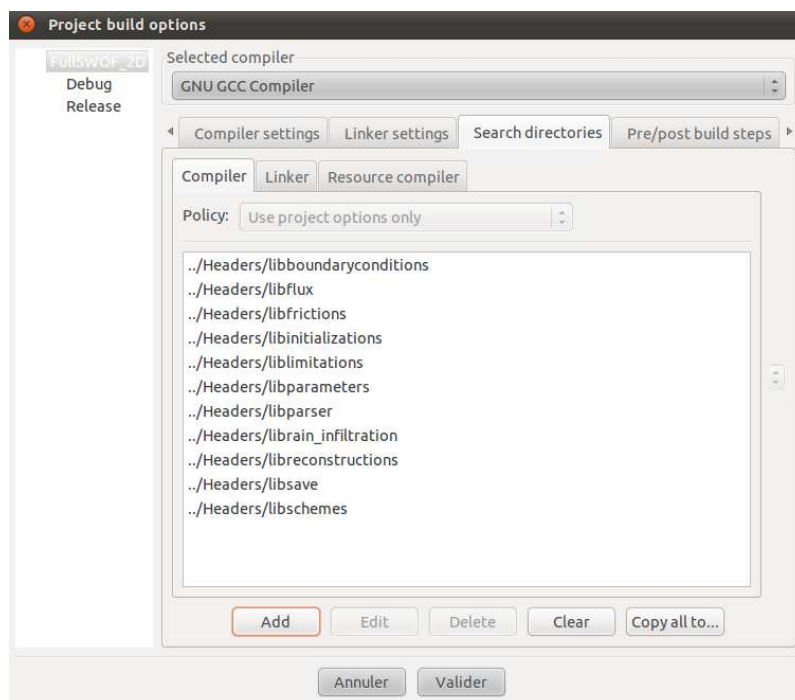


FIGURE A.11 –

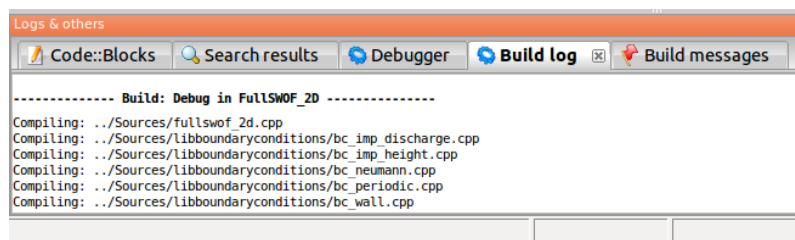


FIGURE A.12 –



# Bibliographie

- [1] R. Abgrall and S. Karni. A comment on the computation of non-conservative products. *Journal of Computational Physics*, 229(8) :2759–2763, 2010. ISSN 0021-9991. doi : 10.1016/j.jcp.2009.12.015.
- [2] H. Aksoy and M. L. Kavvas. A review of hillslope and watershed scale erosion and sediment transport models. *Catena*, 64 :247–271, 2005.
- [3] C.V. Alonso, W.H. Neibling, and G.R. Foster. Estimating sediment transport capacity in watershed modeling. *Trans. ASAE*, 24 :1211–1220, 1226, 1981.
- [4] G.M. Amdahl. Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities. In *Proceedings of the April 18-20, 1967, spring joint computer conference*, AFIPS '67 (Spring), pages 483–485, New York, NY, USA, 1967. ACM. doi : 10.1145/1465482.1465560.
- [5] M. Antoine, M. Javaux, and C.L. Bielders. What indicators can capture runoff-relevant connectivity properties of the micro-topography at the plot scale? *Advances in Water Resources*, 32(8) :1297–1310, 2009. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2009.05.006.
- [6] M. Antoine, M. Javaux, and C.L. Bielders. Integrating subgrid connectivity properties of the micro-topography in distributed runoff models, at the interrill scale. *Journal of Hydrology*, 403(3–4) :213–223, 2011. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2011.03.027.
- [7] W.M. Appels, P. W. Bogaart, and S.E.A.T.M. van der Zee. Influence of spatial variations of microtopography and infiltration on surface runoff and field scale hydrological connectivity. *Advances in Water Resources*, 34(2) :303–313, 2011. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2010.12.003.
- [8] E. Audusse. A multilayer Saint-Venant model. Technical Report 5249, INRIA, July 2004.
- [9] E. Audusse. *Modélisation hyperbolique et analyse numérique pour les écoulements en eaux peu profondes*. PhD thesis, Université Paris VI – Pierre et Marie Curie, 14September 2004. 196 pages.
- [10] E. Audusse and B. Perthame. Uniqueness for scalar conservation laws with discontinuous flux via adapted entropies. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section : A Mathematics*, 135(02) :253–265, 2005. doi : 10.1017/S0308210500003863.

- [11] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065, 2004. doi : 10.1137/S1064827503431090.
- [12] E. Audusse, C. Chalons, O. Delestre, N. Goutal, M. Jodeau, J. Sainte-Marie, and B. Spinewine. Sediment transport modelling : Three layer models and relaxation schemes. In ESAIM, editor, *CEMRACS*, 2011.
- [13] R.A. Bagnold. The flow of cohesionless grains in fluids. *Phil. Trans. R. Soc. London, Series A*, 964 :235–297, 1956.
- [14] R.A. Bagnold. *An approach to the sediment transport problem from general physics*. USGS Prof. Pap. 442-I. U.S. Gov. Print. Office, Washington, DC, 1966.
- [15] P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, and D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the hllc riemann solver. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(6) :1553–1570, November 1997. ISSN 1064-8275. doi : 10.1137/S1064827593260140.
- [16] J. Bear. *Dynamic of Fluids in Porous Media*. Dover Publication Inc., New York, 1988.
- [17] D.B. Beasley and L.F. Huggins. *ANSWEsRS user’s manual*. Dep. of Agric., Eng. Purdue Univ., West Lafayette, 1982.
- [18] A.A. Beheshti and B. Ataie-Ashtiani. Analysis of threshold and incipient conditions for sediment movement. *Coastal Engineering*, 55 :423–430, 2008.
- [19] F. Benkhaldoun and M. Seaïd. A simple finite volume method for the shallow water equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234 :58–72, 2010. doi : 10.1016/j.cam.2009.12.005.
- [20] A. Bermúdez, A. Dervieux, J.-A. Desideri, and M. Elena Vázquez. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1-2) :49–72, 1998. ISSN 0045-7825. doi : DOI:10.1016/S0045-7825(97)85625-3.
- [21] C. Berthon, F. Marche, and R. Turpault. An efficient scheme on wet/dry transitions for shallow water equations with friction. *Computers & Fluids*, 48(1) :192–201, 2011. ISSN 0045-7930. doi : 10.1016/j.compfluid.2011.04.011.
- [22] C. Berthon, S. Cordier, O. Delestre, and M.-H. Le. An analytical solution of the shallow water system coupled to the exner equation. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(3–4) : 183–186, 2012. ISSN 1631-073X. doi : 10.1016/j.crma.2012.01.007.
- [23] C. Bertier, J.-P. Bouchard, and L. Dumond. One dimensional model for reservoir sedimentation management. In *Proceedings of Int. Conf. River Flow*, pages 615–624, 2002.
- [24] J.B. Blau, D.A. Woolhiser, and L.J. Lane. Identification of erosion model parameters. *Transactions of the Asae*, 31(3) :839–845, 1988.
- [25] R. Bonnefille. *Essais de synthese des lois de debut d’entrainement des sediment sous l’action d’un courant en regime uniform*. Bull. Du CREC, No. 5, Chatou, 1963.

- [26] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, volume 2/2004. Birkhäuser Basel, 2004. doi : 10.1007/b95203.
- [27] F. Bouchut and T. Morales de Luna. An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis (ESAIM : M2AN)*, 42 :683–698, jun 2008. doi : 10.1051/m2an:2008019.
- [28] D.L. Brakensiek and W.J. Rawls. Agricultural management effects on soil water processes part ii : Green and ampt parameters for crusting soils. *Transactions of the ASAE*, 26(6) :1753–1757, 1983.
- [29] M.-O. Bristeau and Benoît Coussin. Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes. Technical Report 4282, INRIA, October 2001.
- [30] R.H. Brooks and A.T. Corey. Hydraulic properties of porous media. *Fort Collins, Colorado : Colorado State University. Hydrology paper*, 3 :27, 1964.
- [31] B. Camenen and M. Larson. A general formula for non-cohesive bed load sediment transport. *Estuarine Coastal and Shelf Science*, 63 :249–260, 2005.
- [32] Z. Cao, R. Day, and S. Egashira. Coupled and decoupled numerical modeling of flow and morphological evolution in alluvial rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128 (3) :306–321, March 2002. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:3(306).
- [33] M. Castro, J. Macías, and C. Parés. A  $Q$ -scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(1) :107–127, 2001. ISSN 0764-583X.
- [34] M. Castro, J.M. Gallardo, and C. Parés. High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow-water systems. *Math. Comp.*, 75(255) :1103–1134, 2006.
- [35] M.J. Castro, A. Pardo, and C. Parés. Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(12) :2065–2113, 2007.
- [36] M.J. Castro-Díaz, E.D. Fernández-Nieto, and A.M. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computers & Fluids*, 37(3) :299–316, March 2008. ISSN 0045-7930. doi : 10.1016/j.compfluid.2007.07.017.
- [37] O. Cerdan, V. Souchère, V. Lecomte, A. Couturier, and Y. Le Bissonnais. Incorporating soil surface crusting processes in an expert-based runoff model : Sealing and Transfer by Runoff and Erosion related to Agricultural Management. *Catena*, 46 :189–2005, 2002.
- [38] O. Cerdan, Y. L. Le Bissonnais, V. Souchère, C. King, V. Antoni, N. Surdyk, I. Dubus, D. Arrouays, and J.F. Desparts. Guide méthodologique pour un zonage départemental de l'érosion des sols. Rapport BRGM-RP-55104-FR, 2006. 85 pp., 24 ill.

- [39] N.S. Cheng. Simplified settling velocity formula for sediment particle. *J. Hydraul. Eng.*, 123(2) :149–152, 1997.
- [40] N.S. Cheng. Analysis of bedload transport in laminar flows. *Adv. Water Resour.*, 27 : 937–942, 2004.
- [41] V.T. Chow, D.R. Maidment, and L.W. Mays. *Applied Hydrology*. McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [42] S. Cordier. Hyperbolicity of grad’s extension of hydrodynamic models of ionospheric plasma. part one : The single species case. *Math. Models and Methods in Applied Science (M3AS)*, 4(5) :625–645, 1994.
- [43] S. Cordier. Hyperbolicity of grad’s extension of hydrodynamic models of ionospheric plasma. part two : The two species case. *Math. Models and Methods in Applied Science (M3AS)*, 4(5) :647–667, 1994.
- [44] S. Cordier. Hyperbolicity of the hydrodynamical model of plasmas under the quasineutrality hypothesis. *Math. Models in Appl. Sci. (M2AS)*, 18 :627–647, 1995.
- [45] S. Cordier, M.-H. Le, and T. Morales de Luna. Bedload transport in shallow water models : Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Advances in Water Resources*, 34(8) :980 – 989, 2011.
- [46] H. Coullon and S. Limet. Une librairie de squelettes algorithmiques par blocs sur structure de données 2d. Conférence en IngénierE du Logiciel (CIEL), Rennes, France, Juin 2012.
- [47] J.A. Cunge, F.M. Holly, and A. Verwey. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman, London, 1980.
- [48] G. Dal Maso, P.G. Lefloch, and F. Murat. Definition and weak stability of nonconservative products. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 74(6) :483–548, 1995. ISSN 0021-7824.
- [49] A.P.J. De Roo, C.G. Wesseling, and C.J. Ritsema. LISEM : A single-event physically based hydrological and soil erosion model for drainage basins. I : theory, input and output. *Hydrological Processes*, 10(8) :1107–1117, 1996.
- [50] Adhémar Jean-Claude de Saint Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 73 :147–154, 1871.
- [51] A. Defina. Two-dimensional shallow flow equations for partially dry areas. *Water Resour. Res.*, 36(11) :3251–3264, 2000. ISSN 0043-1397.
- [52] G. Degoutte. Cours d’hydraulique, dynamique et morphologie fluviale, available from [http ://www.agroparistech.fr/coursenligne/hydraulique/hydraulique.html](http://www.agroparistech.fr/coursenligne/hydraulique/hydraulique.html).
- [53] O. Delestre. *Simulation du ruissellement d’eau de pluie sur des surfaces agricoles/ rain water overland flow on agricultural fields simulation*. PhD thesis, Université d’Orléans (in French), available from TEL : [tel.archives-ouvertes.fr/INSMI/tel-00531377/fr](http://tel.archives-ouvertes.fr/INSMI/tel-00531377/fr), July 2010.

- [54] O. Delestre and F. Marche. A numerical scheme for a viscous shallow water model with friction. *J. Sci. Comput.*, DOI 10.1007/s10915-010-9393-y, 2010.
- [55] O. Delestre, C. Lucas, P.-A. Ksinant, F. Darboux, C. Laguerre, T.N.T. Vo, F. James, and S. Cordier. Swashes : a library of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. Submitted, 2011.
- [56] O. Delestre, S. Cordier, F. Darboux, and F. James. A limitation of the hydrostatic reconstruction technique for shallow water equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(13–14) :677–681, 2012. ISSN 1631-073X. doi : 10.1016/j.crma.2012.08.004.
- [57] A.I. Delis and I. Papoglou. Relaxation approximation to bedload sediment transport. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 213 :521–546, 2008.
- [58] O. Devauchelle. *Écoulements de surface et érosion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2007.
- [59] O. Devauchelle, C. Jossierand, P.-Y. Lagrée, and S. Zaleski. Morphodynamic modeling of erodible laminar channels. *Phys. Rev. E*, 76 :056318, Nov 2007. doi : 10.1103/PhysRevE.76.056318.
- [60] D.A. Drew. Mathematical modeling of two-phase flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 15(1) :261–291, 1983. doi : 10.1146/annurev.fl.15.010183.001401.
- [61] E. Ducluzeau. Impact des croûtes biologiques en zone sahélienne : Caractérisation et modélisation des processus de ruissellement et d’érosion en milieu sahélien encroûté. Master’s thesis, Université Paris 7, 2010.
- [62] H. Einstein. *The bed-load function for sediment transportation in open channel flows*. USDA Soil Conservation Service, Technical Bulletin, No. 1026, 1950.
- [63] W.J. Elliot and J.M. Laflen. A process-based rill erosion model. *Transactions of the ASAE*, 36(1) :35–72, 1977.
- [64] M. Esteves and O. Planchon. Effects of soil microtopography on overland flow and infiltration in cultivated plots. *Annales Geophysicae*, 16(2) :523, 1998.
- [65] M. Esteves, X. Faucher, S. Galle, and M. Vauclin. Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values. *Journal of Hydrology*, 228 :265–282, 2000.
- [66] W. Everaert. Empirical relations for the sediment transport capacity of interrill flow. *Earth Surf. Process. Landf.*, 16 :513–532, 1998.
- [67] F.M. Exner. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen. *Sitzungsber., Akad. Wissenschaften*, pt. IIa :Bd. 134, 1925.
- [68] S. Ferrari and F. Saleri. A new two-dimensional shallow water model including pressure effects and slow varying bottom topography. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38 (2) :211–234, 2004.
- [69] V. Ferro. Evaluating overland flow sediment transport capacity. *Hydrological Processes*, 12(12) :1895–1910, 1998. ISSN 1099-1085.

- [70] P. Finaud-Guyot, C. Delenne, J. Lhomme, V. Guinot, and C. Llovel. An approximate-state riemann solver for the two-dimensional shallow water equations with porosity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 62(12) :1299–1331, 2010. ISSN 1097-0363. doi : 10.1002/fld.2066.
- [71] G.R. Foster and L.D. Meyer. Transport of particles by shallow flow. *Trans. ASAE*, 19 : 99–102, 1972.
- [72] M. Garcia. *Sedimentation engineering : Processes, measurements, modeling and practice*. ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice No. 110, 2008.
- [73] P. Garcia-Navarro and M. E. Vazquez-Cendon. On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computers & Fluids*, 29 :951–979, 2000. ISSN 0045-7930. doi : DOI:10.1016/S0045-7930(99)00038-9.
- [74] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1) :89–102, 2001. ISSN 1531-3492.
- [75] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*, volume Applied Mathematical Sciences 118. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [76] E. Godlewski and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : I. the scalar case. *Numerische Mathematik*, 97 : 81–130, 2004. ISSN 0029-599X. 10.1007/s00211-002-0438-5.
- [77] E. Godlewski, K.-C. Le Thanh, and P.-A. Raviart. The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : Ii. the case of systems. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(04) :649–692, 2005. doi : 10.1051/m2an:2005029.
- [78] L. Gosse. A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(9-10) :135–159, 2000. ISSN 0898-1221. doi : DOI:10.1016/S0898-1221(00)00093-6.
- [79] N. Goutal and F. Maurel. A finite volume solver for 1D shallow-water equations applied to an actual river. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 38 :1–19, 2002. doi : 10.1002/fld.201.
- [80] N. Goutal and J. Sainte-Marie. A kinetic interpretation of the section-averaged saint-venant system for natural river hydraulics. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(7) :914–938, 2011. ISSN 1097-0363. doi : 10.1002/fld.2401.
- [81] G. Govers. Empirical relationships for the transport capacity of overland flow. *IAHS Publication*, -(No. 189) :45–63, 1990.
- [82] G. Govers. Evaluation of transporting capacity formulae for overland flow. *Overland flow : hydraulics and erosion mechanics.*, - :243–273, 1992.
- [83] G. Govers, J. Poesen, A. Knapen, G. Gyssels, and J. Nachtergaele. Resistance of soils to concentrated flow erosion : A review. *Earth-Science Reviews*, 80 :75–109, 2007.

- [84] A.J. Grass. Sediment transport by waves and currents. *SERC London Cent. Mar. Technol*, Report No. FL29, 1981.
- [85] W.H. Green and G.A. Ampt. Studies on soil physics. *The Journal of Agricultural Science*, 4 :1–24, 1911.
- [86] J. M. Greenberg and A.-Y. LeRoux. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33 : 1–16, 1996.
- [87] V. Guinot. Multiple porosity shallow water models for macroscopic modelling of urban floods. *Advances in Water Resources*, 37(0) :40–72, 2012. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2011.11.002.
- [88] V. Guinot and S. Soares-Frazão. Flux and source term discretization in two-dimensional shallow water models with porosity on unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50(3) :309–345, 2006. ISSN 1097-0363. doi : 10.1002/fld.1059.
- [89] B.T Guy, R.P Rudra, and W.T Dickinson. *Process-oriented research on soil erosion and overland flow*. Parsons, J. and Abrahams, A. D. (eds) Overland Flow, 1992.
- [90] Alireza Habibzadeh and Mohammad Hossein Omid. Bedload resistance in supercritical flow. *International Journal of Sediment Research*, 24(4) :400–409, 2009.
- [91] P.B. Hairsine and C.W. Rose. Rainfall detachment and deposition : Sediment transport in the absence of flow-driven processes. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 55(2) :320–324, 1991.
- [92] P.B. Hairsine and C.W. Rose. Modeling water erosion due to overland flow using physical principles. II : rill flow. *Water Resources Research*, 28 :245–250, 1992.
- [93] M.J. Hall. How well does your model fit the data? *Journal of Hydroinformatics*, 3(1) : 49–55, 2001.
- [94] Amiram Harten, Peter D. Lax, and Bram van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :35–61, January 1983.
- [95] B.C.P. Heng, G.C. Sander, and C.F. Scott. Modeling overland flow and soil erosion on nonuniform hillslopes : A finite volume scheme. *Water Resour. Res.*, 45(5) :W05423–, May 2009. ISSN 0043-1397.
- [96] B.C.P. Heng, G.C. Sander, A. Armstrong, J.N. Quinton, J.H. Chandler, and C.F. Scott. Modeling the dynamics of soil erosion and size-selective sediment transport over nonuniform topography in flume-scale experiments. *Water Resour. Res.*, 47(2) :W02513–, February 2011. ISSN 0043-1397.
- [97] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamics of Free Surface Flows : Modelling with the Finite Element Method*. 2007.

- [98] J.-M. Hervouet, R. Samie, and B. Moreau. Modelling urban areas in dam-break flood-wave numerical simulations. In *Proceedings of the International Seminar and Workshop on Rescue Actions Based on Dam-break Flow Analysis, Seinäjoki, Finland, 1–6 October, 2000*.
- [99] M.C. Hirschi and B.J. Barfield. Kyermo a physically based research erosion model, part 1 : Model development. *Transactions of the ASAE*, 31 :804–813, 1988.
- [100] M.C. Hirschi and B.J. Barfield. Kyermo a physically based research erosion model, part 2 : Analysis and testing. *Transactions of the ASAE*, 31 :814–820, 1988.
- [101] R.E. Horton. The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Trans. Am. Geophys. Union*, 14 :446–460, 1933.
- [102] J. Hudson. *Numerical technics for morphodynamic modelling*. PhD thesis, University of Whiteknights, 2001.
- [103] J. Hudson and P.K. Sweby. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport. *J. Sci. Comput.*, 19(1-3) :225–252, December 2003. ISSN 0885-7474. doi : 10.1023/A:1025304008907.
- [104] O. Malam Issa, J. Trichet, C. Défarge, A. Couté, and C. Valentin. Morphology and microstructure of microbiotic soil crusts on a tiger bush sequence (niger, sahel). *CATENA*, 37(1–2) :175–196, 1999. ISSN 0341-8162. doi : 10.1016/S0341-8162(99)00052-1.
- [105] O. Malam Issa, C. Valentin, J.L. Rajot, O. Cerdan, J.-F. Desprats, and T. Bouchet. Runoff generation fostered by physical and biological crusts in semi-arid sandy soils. *Geoderma*, 167–168(0) :22–29, 2011. ISSN 0016-7061. doi : 10.1016/j.geoderma.2011.09.013.
- [106] T. Jahnke and C. Lubich. Error bounds for exponential operator splittings. *BIT Numerical Mathematics*, 40 :735–744, 2000. ISSN 0006-3835. 10.1023/A :1022396519656.
- [107] V.G. Jetten and A.P.J. De Roo. *Spatial analysis of erosion conservation measures with LISEM*. Number 5. R. Harmon and W.W. Doe (eds) Landscape Erosion and Evolution Modeling. New York : Kluwer Academic/Plenum, 2001.
- [108] S. Jomaa, D.A. Barry, G.C. Sander, J.-Y. Parlange, B.C.P. Heng, and H.J. Tromp-van Meerveld. One-Dimensional Hairsine-Rose Erosion Model : Parameter Consistency for Soil Erosion in the Presence of Rainfall Splash. 2009.
- [109] S. Jomaa, D. A. Barry, B. C. P. Heng, A. Brovelli, G. C. Sander, and J.-Y. Parlange. Influence of rock fragment coverage on soil erosion and hydrological response : Laboratory flume experiments and modeling. *Water Resour. Res.*, 48(5) :W05535–, May 2012. ISSN 0043-1397.
- [110] Y.P. Julien. *Erosion and sedimentation*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1995.
- [111] E. C. Kamphorst, V. Jetten, J. Guérif, J. Pitkänen, B. V. Iversen, J. T. Douglas, and A. Paz. Predicting depressional storage from soil surface roughness. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 64(5) :1749–1758, 2000. doi : 10.2136/sssaj2000.6451749x.

- [112] P.I.A. Kinnell. Interrill erodibilities based on the rainfall intensity flow discharge erosivity factor. *Aust. J. Soil Res*, 31 :319–32, 1993.
- [113] P.I.A. Kinnell. Raindrop-impact-induced erosion processes and prediction : a review. *Hydrological Processes*, 19 :2815–2844, 2005.
- [114] K.K.J. Kouakou and P.-Y. Lagrée. Stability of an erodible bed in various shear flows. *Eur. Phys. J. B*, 47(1) :115–125, 2005. doi : 10.1140/epjb/e2005-00296-x.
- [115] P. Krause, D. P. Boyle, and F. Bäse. Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. *Advances in Geosciences*, 5 :89–97, 2005.
- [116] P.-Y. Lagrée. A triple deck model of ripple formation and evolution. *Physics of Fluids*, 15(8) :2355–2368, 2003. doi : 10.1063/1.1588305.
- [117] Y. Le Bissonnais, S. Cros-Cayot, and C. Gascuel-Odoux. Topographic variation of aggregate stability at field scale : effect on runoff and erosion. *Agronomie*, 22 :489–501, 2002.
- [118] J.P. Le Roux. Grains in motion : A review. *Sedimentary Geology*, 178(3–4) :285–313, 2005. ISSN 0037-0738. doi : 10.1016/j.sedgeo.2005.05.009.
- [119] P.G. Lefloch and M.D. Thanh. The riemann problem for fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section. *Computers & Fluids*, 1(4) :763–797, 2003.
- [120] T.W. Lei, M.A. Nearing, K. Haghighi, and V.F. Bralts. Rill erosion and morphological evolution : a simulation model. *Water Resources Research*, 34 :3157–3168, 1998.
- [121] R.J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in mathematics ETH Zurich. 1992. ISBN 3-7643-2464-3, 0-8176-2464-3 (U.S.).
- [122] R.J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods : The quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of Computational Physics*, 146(1) :346–365, 1998. ISSN 0021-9991. doi : DOI:10.1006/jcph.1998.6058.
- [123] R.M. Li. *Modeling of rivers : Water and sediment routing from watersheds*. Edited by H. W. Shen and Wiley, New York, 1979.
- [124] H.S. Low. Effect of sediment density on bed-load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115 :124–138, 1989.
- [125] Dennis A. Lyn. Unsteady sediment-transport modeling. *Journal of Hydraulic Engineering*, 113(1) :1–15, January 1987. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(1987)113:1(1).
- [126] I. MacDonald. *Analysis and computation of steady open channel flow*. PhD thesis, University of Reading–Department of mathematics, September 1996.
- [127] I. MacDonald, M. J. Baines, N. K. Nichols, and P. G. Samuels. Analytic benchmark solutions for open-channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(11) :1041–1045, November 1997.
- [128] O.S. Madsen and W.D. Grant. *Quantitative description of sediment transport for waves*. Proc., 15th Coastal Eng. Conf., ASCE, New York, 1976.

- [129] F. Marche. Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 26 :49–63, 2007. doi : 10.1016/j.euromechflu.2006.04.007.
- [130] W.S. Merritt, R.A. Letcher, and A.J. Jakeman. A review of erosion and sediment transport models. *Environm. Model. Software*, 18(8-9) :761–799, 2003.
- [131] G.H. Merten, M.A. Nearing, and A.L.O. Borges. Effect of sediment load on soil detachment and deposition in rills. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 65 :861–868, 2001.
- [132] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formulas for bed-load transport. In *2nd meeting IAHSR, Stockholm, Sweden*, pages 1–26, 1948.
- [133] T. Morales de Luna, M.J. Castro Díaz, C. Parés, and E.D. Fernández Nieto. On a shallow water model for the simulation of turbidity currents. *Communications in Computational Physics*, 6(4) :848–882, 2009.
- [134] T. Morales de Luna, M.J. Castro Díaz, and C. Parés. A duality method for sediment transport based on a modified meyer-peter & müller model. *To appear in Journal of Scientific Computing*, 2010. doi : 10.1007/s10915-010-9447-1.
- [135] R.P.C. Morgan, J.N. Quinton, R.E. Smith, G. Govers, J.W.A. Poesen, K. Auerswald, G. Chisci, D. Torri, and M.E. Styczen. The european soil erosion model (EUROSEM) : a dynamic approach for predicting sediment transport from fields and small catchments. *Earth Surface Processes and Landforms*, 23(6) :527–544, 1998.
- [136] P.H. Morris and D.J. Williams. Relative celerities of mobile bed flows with finite solids concentrations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(6) :311–315, June 1996. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9429(1996)122:6(311).
- [137] R. Moussa and C. Bocquillon. Criteria for the choice of flood-routing methods in natural channels. *Journal Of Hydrology*, 186(1-4) :1–30, 1996.
- [138] M.A. Nearing, G.R. Foster, L.J. Lane, and S.C. Finkner. A process-based soil erosion model for usda-water erosion prediction project technology. *Trans. ASAE*, 35 :1587–1593, 1989.
- [139] P. Nielsen. *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*. World Scientific Pub Co Inc, August 1992. ISBN 9810204736.
- [140] G. Nord and M. Esteves. Psem-2d : A physically based model of erosion processes at the plot scale. *Water Resources Research*, 41 :08407, 2005.
- [141] K. Van Oost, G. Govers, O. Cerdan, D. Thauré, A. Van Rompaey, A. Steegen, J. Nachtergaele, I. Takken, and J. Poesen. Spatially distributed data for erosion model calibration and validation : The ganspoel and kinderveld datasets. *CATENA*, 61(2–3) : 105–121, 2005. ISSN 0341-8162. doi : 10.1016/j.catena.2005.03.001.
- [142] R.S. Palmer. The influence of a thin water layer on waterdrop impact forces. *IAHS Publ.*, 65 :141–148, 1964.

- [143] D. Paphitis. Sediment movement under unidirectional flows : an assessment of empirical threshold curves. *Coastal Engineering*, 43 :227–245, 2001.
- [144] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(1) :300–321 (electronic), 2006. ISSN 0036-1429.
- [145] C. Parés and M.J. Castro. On the well-balance property of Roe’s method for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(5) :821–852, 2004. ISSN 0764-583X.
- [146] J. R. Philip. The theory of infiltration : 1. the infiltration equation and its solution. *Soil Science*, 83 :345–357, 1957.
- [147] J. Poesen and J. Savat. Detachment and transportation of loose sediments by raindrop splash. part ii. *Catena*, 8 :11–19, 1981.
- [148] A.P.B. Proffitt, C.W. Rose, and P.B. Hairsine. Rainfall detachment and deposition : experiments with low slopes and significant water depths. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 29 : 671–683, 1991.
- [149] J.H. Richard. *Hydrology Handbook*. ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice. American Society of Civil Engineers, 1996. ISBN 9780784401385.
- [150] L.A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1 : 318–333, November 1931.
- [151] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43(2) :357–372, 1981. ISSN 0021-9991. doi : 10.1016/0021-9991(81)90128-5.
- [152] A.P.J. De Roo and V.G. Jetten. Calibrating and validating the lise model for two data sets from the netherlands and south africa. *CATENA*, 37(3–4) :477–493, 1999. ISSN 0341-8162. doi : 10.1016/S0341-8162(99)00034-X.
- [153] M. Rousseau. *Quantification des incertitudes dans la modélisation du ruissellement et de l’érosion*. PhD thesis, École des Ponts ParisTech, 2012.
- [154] M. Rousseau, O. Cerdan, A. Ern, O. Le Maître, and P. Sochala. Study of overland flow with uncertain infiltration using stochastic tools. *Advances in Water Resources*, 38(0) : 1–12, 2012. ISSN 0309-1708. doi : 10.1016/j.advwatres.2011.12.004.
- [155] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible*. Mathématiques et Applications, Vol. 30, 1998.
- [156] G.C. Sander, P.B. Hairsine, C.W. Rose, D. Cassidy, J.-Y. Parlange, W.L. Hogarth, and I.G. Lisle. Unsteady soil erosion model, analytical solutions and comparison with experimental results. *Journal of Hydrology*, 178(1–4) :351–367, 1996. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/0022-1694(95)02810-2.
- [157] B.F. Sanders, J.E. Schubert, and H.A. Gallegos. Integral formulation of shallow-water equations with anisotropic porosity for urban flood modeling. *Journal of Hydrology*, 362(1–2) :19–38, 2008. ISSN 0022-1694. doi : 10.1016/j.jhydrol.2008.08.009.

- [158] D. Max Sheppard and R. Renna. *Florida Bridge Scour Manual*. Department of Transportation, 605 Suwannee Street, Tallahassee, FL 323990450, 2005.
- [159] A. Shields. Application of similarity principles and turbulence research to bedload movement. *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, 26 :5–24, 1936.
- [160] G. Simpson and S. Castelltort. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Computers and Geosciences*, 32 :1600–1614, 2006.
- [161] G.M. Smart. Sediment transport formula for steep channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110 :267–276, 1984.
- [162] R.E. Smith and J.Y. Parlange. A parameter efficient hydrologic infiltration model. *Water Resource Research*, 14 :533–538, 1978.
- [163] S. Soares-Frazão, J. Lhomme, V. Guinot, and Y. Zech. Two-dimensional shallow-water model with porosity for urban flood modelling. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1) : 45–64, 2008. doi : 10.1080/00221686.2008.9521842.
- [164] P. Sochala. *Méthodes numériques pour les écoulements souterrains et couplage avec le ruissellement*. PhD thesis, École Nationale des Ponts et Chaussées, December 2008.
- [165] P. Sochala, A. Ern, and S. Piperno. Mass conservative bdf-discontinuous galerkin/explicit finite volume schemes for coupling subsurface and overland flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27-29) :2122–2136, 2009. ISSN 0045-7825. doi : DOI:10.1016/j.cma.2009.02.024.
- [166] R. L. Soulsby. Dynamics of marine sands—a manual for practical applications. Technical report, Thomas Telford, 250pp, 1997.
- [167] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997. ISBN 3-540-61676-4. A practical introduction.
- [168] E.F. Toro. *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*. Wiley and Sons Ltd., 2001.
- [169] D. Torri, M. Sfalanga, M. Del-Sette, and Firenze. Splash detachment : runoff depth and soil cohesion. *Catena*, 49 :149–155, 1987.
- [170] I. Toumi. A weak formulation of Roe’s approximate Riemann solver. *J. Comput. Phys.*, 102(2) :360–373, 1992. ISSN 0021-9991.
- [171] C. Valentin and L.-M. Bresson. Morphology, genesis and classification of surface crusts in loamy and sandy soils. *Geoderma*, 55(3–4) :225–245, 1992. ISSN 0016-7061. doi : 10.1016/0016-7061(92)90085-L.
- [172] L.C. Van-Rijn. Sediment transport (i) : bed load transport. *J. Hydraul. Div., Proc. ASCE*, 110 :1431–1456, 1984.
- [173] L.C. Van-Rijn. Sediment transport (ii) : suspended load transport. *J. Hydraul. Div., Proc. ASCE*, 111 :1613–1641, 1984.

- 
- [174] L.C. Van-Rijn. Sediment transport (iii) : bed forms and alluvial roughness. *J. Hydraul. Div., Proc. ASCE*, 112 :1733–1754, 1984.
- [175] T. Vogel, M.Th. Van Genuchten, and M. Cislerova. Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions. *Advances in Water Resources*, 24 :133–144, 2001.
- [176] E.W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition*. Chapman & Hall, 2 edition, December 2002. ISBN 1584883472.
- [177] J.M. Wicks and J.C. Bathurst. Shesed : A physically-based, distributed erosion and sediment yield component for the she hydrological modelling system. *Journal of Hydrology*, 175 :213–238, 1996.
- [178] W.H. Wischmeier and D.D. Smith. *Predicting rainfall erosion losses*. Agricultural Handbook Washington U. S. D. A., 1978.
- [179] D.A. Woolhiser, R.E. Smith, and D.C. Goodrich. KINEROS, a kinematic runoff and erosion model : documentation and user manual. ars-77. Technical report, USDA-Agricultural Research Service, 1990.
- [180] Y.S. Yalin. An expression for bed-load transportation. *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 89 :221–250, 1963.
- [181] C.T. Yang. Incipient motion and sediment transport. *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 99 :1679–1703, 1973.
- [182] U. Zanke. Berechnung der sinkgeschwindigkeiten von sedimenten. *Mitt. des Franzius-Instituts für Wasserbau, Technical University, Hannover, Germany*, 46(243), 1977.
- [183] J. G. Zhou, D. M. Causon, C. G. Mingham, and D. M. Ingram. The surface gradient method for treatment of source terms in the shallow-water equations. *Journal of Computational Physics*, 168 :1–25, 2001. doi : 10.1006/jcph.2000.6670.

Minh Hoang LE

**Modélisation multi-échelle et simulation numérique  
de l'érosion des sols de la parcelle au bassin versant**

**Résumé :**

L'objectif global de ce travail est d'étudier une modélisation multi échelle et de développer une méthode adaptée pour la simulation numérique du processus d'érosion à l'échelle du bassin versant. Après avoir passé en revue les différents modèles existants, nous dérivons une solution analytique non triviale pour le système couplé modélisant le transport de sédiments par charriage. Ensuite, nous étudions l'hyperbolicité de ce système avec diverses lois de sédimentation proposées dans la littérature. Concernant le schéma numérique, nous présentons le domaine de validité de la méthode de splitting, pour les équations modélisant l'écoulement et celle décrivant l'évolution du fond. Pour la modélisation du transport en suspension à l'échelle de la parcelle, nous présentons un système d'équations couplant les mécanismes d'infiltration, de ruissellement et le transport de plusieurs classes de sédiments. L'implémentation et des tests de validation d'un schéma d'ordre élevé et de volumes finis bien équilibré sont également présentés. Ensuite, nous discutons sur l'application et la calibration du modèle avec des données expérimentales sur dix parcelles au Niger. Dans le but d'aboutir la simulation à l'échelle du bassin versant, nous développons une modélisation multi échelle dans laquelle nous intégrons le taux d'inondation dans les équations d'évolution afin de prendre en compte l'effet à petite échelle de la microtopographie. Au niveau numérique, nous étudions deux schémas bien équilibrés : le schéma de Roe basé sur un chemin conservatif, et le schéma avec reconstruction hydrostatique généralisée. Enfin, nous présentons une première application du modèle avec les données expérimentales du bassin versant de Ganspoel qui nécessite la parallélisation du code.

**Mots clés :** Ruissellement, érosion, charriage, suspension, modélisation multi échelle, taux d'inondation, système hyperbolique, équations de Saint-Venant avec porosité, modèle d'Hairsine et Rose, méthode de volumes finis, schéma bien équilibré, calcul parallèle, MPI, SkelGIS.

**Multiscale modelling and numerical simulation of soil erosion by water  
from the plot scale to the catchment scale**

**Abstract :**

The overall objective of this thesis is to study a multiscale modelling and to develop a suitable method for the numerical simulation of soil erosion on catchment scale. After reviewing the various existing models, we derive an analytical solution for the non-trivial coupled system modelling the bedload transport. Next, we study the hyperbolicity of the system with different sedimentation laws found in the literature. Relating to the numerical method, we present the validity domain of the time splitting method, consisting in solving separately the Shallow-Water system (modelling the flow routing) during a first time step for a fixed bed and updating afterward the topography on a second step using the Exner equation. On the modelling of transport in suspension at the plot scale, we present a system coupling the mechanisms of infiltration, runoff and transport of several classes of sediment. Numerical implementation and validation tests of a high order well-balanced finite volume scheme are also presented. Then, we discuss on the model application and calibration using experimental data on ten 1 m<sup>2</sup> plots of crusted soil in Niger. In order to achieve the simulation at the catchment scale, we develop a multiscale modelling in which we integrate the inundation ratio in the evolution equations to take into account the small-scale effect of the microtopography. On the numerical method, we study two well-balanced schemes : the first one is the Roe scheme based on a path conservative, and the second one is the scheme using a generalized hydrostatic reconstruction. Finally, we present a first model application with experimental data of the Ganspoel catchment where the parallel computing is also motivated.

**Key words :** Overland flow, soil erosion, bedload, suspension, multiscale modelling, inundation ratio, hyperbolic system of conservation laws, Shallow-Water equations with porosity, Hairsine and Rose's model, finite volume method, well-balanced scheme, parallel computing, MPI, SkelGIS.



MAPMO UMR 6628, Fédération Denis Poisson  
Université d'Orléans, UFR Sciences  
Bâtiment de mathématiques - Route de Chartres  
B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2  
FRANCE

