Université de Toulouse

# THÈSE

**En vue de l'obtention du**

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**
Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Mathématiques Appliquées

---

**Présentée et soutenue par :**
Marthe Roux

**le :** jeudi 6 décembre 2012

**Titre :**

Modèles de fronts pour films minces

---

**Ecole doctorale :**
Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

**Unité de recherche :**
UMR 5219 IMT - Institut de Mathématiques de Toulouse

**Directeur(s) de Thèse :**

Jean-Paul VILA

**Rapporteurs :**

Marc DAMBRINE
Christian RUYER-QUIL

**Membre(s) du jury :**

Abderrahmane BENDALI
Pascal NOBLE
Christian RUYER-QUIL
Marc DAMBRINE
Jean-Michel ROQUEJOFFRE
Jean-Paul VILA

*"The total force exerted on the solid*
*surface is logathmically infinite :*
***not even Herakles could sink a solid***
*if the physical model were entirely valid,*
*which is not."*

—Huh et Scriven [42]

# Résumé

Dans cette thèse, nous souhaitons décrire la dynamique du front d'avancement d'un film mince s'écoulant sur un plan incliné non rugueux. Nous nous intéressons surtout au problème de point triple situé à l'interface entre la paroi solide, le fluide en mouvement et l'air, par exemple lors de l'écoulement d'une goutte sur une surface inclinée.

Dans une première partie, nous expliquons pourquoi on peut se ramener aux équations de Stokes et pourquoi le problème résultant est mal posé. Pour y remédier, la condition de non-glissement à la paroi est remplacée par une condition de glissement lorsqu'on est proche du front. Ainsi on réussit à trouver une solution dans $H^1$. Puis nous développons la dynamique de l'écoulement à l'amont du front : un film mince. Cet écoulement peut se modéliser sous la forme d'équations de type Saint-Venant sur la hauteur et le débit. Nous justifions cette construction à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant un développement asymptotique en fonction du paramètre onde longue.

Dans la zone du front nous résolvons le système de Stokes stationnaire avec glissement au fond par un développement asymptotique en fonction du nombre capillaire. Le front est divisé en une zone interne près du front et une zone externe loin du front, puis les solutions de chaque zone sont soit raccordées directement (angles dynamique et statique égaux), soit raccordées au moyen d'une zone intermédiaire (angles dynamique et statique différents). Cela nous conduit à deux familles de modèles.

En réunissant les modèles type Saint-Venant et les différents modèles de front, nous obtenons un modèle de Saint-Venant tenant compte de la dynamique du front. À partir de ce modèle à deux équations nous pouvons écrire un modèle plus simple à une équation sur la hauteur. Ce modèle permet d'étendre les modèles existants avec adhérence à des modèles avec glissement. On peut alors réaliser des simulations numériques combinant un front d'avancement et un film mince.

# Abstract

In the present work, we describe the dynamics of a moving contact line for thin films flowing down an inclined plane. Our focus is the problem of triple point located at the interface between the solid wall, the moving fluid and air, for example the spreading of a drop on a plane dry wall (horizontal or inclined) due to gravity and capillarity. In the first part, we explain how we can reduce to the Stokes equations and why the resulting problem is ill-posed. This singularity is removed by permitting the fluid to slip along the wall close to the contact line. Thus we manage to find a solution in $H^1$ constructed by asymptotic expansions.

Then we focus on the upstream dynamic of the flow, which is set to a thin film flow. We develop the classical system of Shallow-water equations (Saint-Venant equations) from the full Navier-Stokes system using the classical long-wavelength expansion. We obtain a set coupled equations for the flow depth and the flow-rate.

In the neightboorhood of the contact line, we develop an asymptotic expansion of the steady Stokes system with slip at bottom in function of the capillary number. The solution in the vicinity of the contact line is developped in the inner region and the outer region. Then, a direct matching can be done (assuming dynamic and static angles are equals) or using an intermediate region (with different angles). This leads to two different families of models.

Bringing together the upstream Shallow-water equations and the contact line models, we write a new Shallow-water model taking into account the dynamic of the moving contact line. Then, we deduce a simplier one-equation model for the film thickness. This model extends existing models with no slip at bottom to models with slip. Direct numerical simulations of the last models are performed, combining a moving contact line and a thin liquid film.

# Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse Jean-Paul Vila qui m'a beaucoup aidé et soutenu au cours de ces années.

Je souhaite aussi dire un grand merci aux enseignants du département de Mathématiques de l'Insa dont Violaine Roussier-Michon, David Sanchez, Abderrahmane Bendali et Stéphane Genieys qui m'ont permis de faire des cours compréhensibles (je l'espère) aux étudiants de l'Insa. Merci aussi à Alain Huard pour avoir eu assez confiance en moi pour me laisser le deuxième amphi de son cours d'analyse numérique et aussi pour ses superbes plants de tomates ! !

Je remercie Bérangère Delourme, Laetitia Carballal-Perdiz, Mélanie Fraisse, Ronan Madec, Marie Walschaerts, Sophie Laurens et Amélie Rambaud pour les séances thé-chocolat et papotage qui m'ont bien fait rigoler et permis de me remotiver.

Pour finir, je tiens à dire combien le soutient de mes parents, ma soeur Hélène, mon oncle Alain et ma tante Nelly ainsi que mes cousines Mathilde et Anne-Lise, a été réconfortant tout le long de ce travail de recherche. Merci aussi à Marc pour m'avoir suportée tout ce temps et pour tous les bons petits plats qu'il m'a préparés avec les bons légumes bio de Sophie Peslier.

Je dois aussi beaucoup à la vache Milka, aux lapins Lindt et aux thés Kusmi Tea !

Merci à tous.

# Table des matières


**Table des figures** xv

**Liste des tableaux** xvii

**Liste des symboles** xix

**0 Introduction générale** 1

**I Introduction aux écoulements du type Navier-Stokes** 7

**1 Écoulements du type Navier-Stokes** 11
- 1.1 Établissement des équations dans le repère cartésien . . . 11
- 1.2 Condition de glissement . . . 14
- 1.3 En coordonnées polaires . . . 16
- 1.4 Décomposition de domaine . . . 19
- 1.5 Changement de repère . . . 22
- 1.6 Principe de la formulation courant . . . 22

**2 Existence et unicité** 23
- 2.1 Problème de Stokes stationnaire avec adhérence au fond . . . 23
  - 2.1.1 Étude variationnelle . . . 24
  - 2.1.2 Solution analytique . . . 25
  - 2.1.3 Expression de l'énergie visqueuse . . . 28
- 2.2 Étude de Solonnikov : Surface libre inconnue . . . 29
- 2.3 Étude de Kröner . . . 30
- 2.4 Passage des équations de Navier-Stokes à celles de Stokes . . . 31
- 2.5 Existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes . . . 32
  - 2.5.1 Décomposition de Leray . . . 32
  - 2.5.2 Opérateur de Stokes . . . 33
  - 2.5.3 Théorème de Leray . . . 34
- 2.6 Justification de la construction d'un modèle Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes . . . 36

**II Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film mince** 39

**3 Modèles Saint-Venant (Shallow-water models)** 43
- 3.1 Équations de Navier-Stokes . . . 44
  - 3.1.1 Équations moyennées . . . 45
  - 3.1.2 Système obtenu . . . 46

3.2 Hypothèse onde longue . . . 46
3.3 Adimensionnement . . . 46
3.3.1 Hypothèses sur l'adimensionnement . . . 47
3.3.2 Système obtenu . . . 48
3.4 Solution uniforme (film de Nusselt) . . . 49
3.5 Développement onde longue . . . 49
3.5.1 Ordre 0 . . . 49
3.5.2 Ordre 1 sur $u_z$ . . . 51
3.6 Écriture sous forme conservative . . . 56
3.7 Modèles obtenus . . . 59

**III Modèles asymptotiques de front d'avancement** **61**

**4 Introduction aux problèmes de front d'avancement** **65**
4.1 Adimensionnement . . . 66
4.2 Équations de volume . . . 67
4.3 Changement de repère . . . 70
4.4 Équation sur la surface libre . . . 71
4.5 Problème complet avec glissement . . . 71
4.6 Formulation courant . . . 73

**5 Modèle de front à deux zones avec un raccord** **75**
5.1 Problème externe . . . 76
5.1.1 Développement asymptotique en $C_{a,f}$ . . . 77
5.1.2 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 78
5.1.3 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 79
5.1.4 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 79
5.1.5 Changement de variable . . . 81
5.2 Problème interne . . . 89
5.2.1 Zoom . . . 89
5.2.2 Développement asymptotique en $C_{a,f}$ . . . 92
5.2.3 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 92
5.2.4 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 93
5.2.5 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 93
5.2.6 Changement de variable . . . 95
5.3 Étude et raccord du problème complet à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 101
5.3.1 Problème externe à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 102
5.3.2 Problème interne à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 107
5.3.3 Raccord de l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 118
5.4 Étude du problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 123
5.4.1 Problème externe à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 123
5.4.2 Problème interne à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 124
5.4.3 Surface libre à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 124
5.4.4 Pression à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 137
5.4.5 Fonction courant à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 139
5.5 Conclusion . . . 140

**6 Modèle de front à trois zones avec deux raccords** **143**
6.1 Rappel des résultats obtenus à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 144

6.1.1 Zone externe . . . 144
6.1.2 Zone interne . . . 144
6.1.3 Raccord . . . 145
6.2 Zone intermédiaire . . . 146
6.2.1 Changement de variable . . . 146
6.2.2 Développement asymptotique . . . 151
6.2.3 Résolution de l'ordre 0 en $\varepsilon^{\lambda=1} = C_{a,f}$ . . . 151
6.2.4 Résolution de l'ordre 1 en $\varepsilon^{\lambda=1} = C_{a,f}$ . . . 158
6.3 Conclusion . . . 161

**IV Application à l'écoulement d'une goutte** **163**

**7 Étude de l'écoulement d'une goutte sur un plan incliné** **167**
7.1 Équations dans le film mince . . . 168
7.1.1 Équations de Navier-Stokes . . . 168
7.1.2 Adimensionnement pour le front . . . 179
7.2 Équations dans la zone proche du front . . . 180
7.2.1 Équations de Navier-Stokes . . . 181
7.2.2 Système Saint-Venant à l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$ . . . 182
7.2.3 Modèle Saint-Venant avec glissement simple . . . 188
7.2.4 Conclusion . . . 189

**8 Modèles de lubrification avec glissement simple** **191**
8.1 Étude des paramètres du modèle . . . 192
8.2 Modèle de type Benney . . . 195
8.2.1 Études de la littérature . . . 195
8.2.2 Application à notre modèle . . . 197
8.2.3 Étude du modèle de Snoeijer [66] . . . 201
8.3 Simulations numériques . . . 202
8.3.1 Écoulement instationnaire . . . 202
8.3.2 Calcul de la forme de l'onde stationnaire . . . 203

**9 Conclusion** **215**

**V Annexes** **217**

**10 Annexe A : Formules utiles** **219**

**11 Annexe B : Transformée de Laplace bilatérale** **227**

**12 Annexe C : Calcul de $L(\varrho)$** **231**

**13 Annexe D : Calcul de $M(\varrho)$** **241**

**14 Annexe E : Calcul de $\Upsilon(\varrho)$** **249**

**15 Annexe F : Calcul de $\partial_\varrho \Upsilon(\varrho)$** **263**

**Bibliographie** **271**

# TABLE DES FIGURES


0.1 Deux types de fronts : formes rectangulaires et “doigts” . . . . . 2
0.2 Front d’avancement du fluide . . . . . 5

1.1 Film liquide sur un plan incliné . . . . . 12
1.2 Orientation des normales et tangentes unitaires aux bords du domaine . . . . . 13
1.3 Ajout de la condition de glissement . . . . . 15
1.4 Représentation du problème étudié . . . . . 17
1.5 Orientation des normales et tangentes unitaires aux bords du domaine . . . . . 18
1.6 Fonction $\chi(r)$ et zones du développement . . . . . 20
1.7 Domaine $\Omega_{int}$ . . . . . 21
1.8 Domaine $\Omega_{ext}$ . . . . . 21
1.9 Domaine de raccord $\Omega_R$ . . . . . 21

2.1 Problème dans un dièdre . . . . . 24
2.2 Représentation de la solution singulière . . . . . 28
2.3 Fluide dans un tube poussé par un piston . . . . . 30

3.1 Film liquide sur un plan incliné . . . . . 44
3.2 Front d’avancement du fluide . . . . . 63

4.1 Changement de repère . . . . . 70

5.1 Domaine $\Omega_{ext}\backslash\Omega_R$ . . . . . 76
5.2 Changement de variables en zone externe . . . . . 82
5.3 Domaine $\Omega_{int}\backslash\Omega_R$ . . . . . 89
5.4 Changement de variables en zone interne . . . . . 95
5.5 Représentation de la solution singulière . . . . . 102
5.6 Configuration de Hocking . . . . . 105
5.7 Raccord de $\theta_0(r,\beta)$ . . . . . 119
5.8 Raccord en deux zones . . . . . 119
5.9 Détermination de l’angle d’équilibre . . . . . 120

6.1 Zones externe, interne et intermédiaire . . . . . 146
6.2 Zone intermédiaire pour $0<\lambda<1$ . . . . . 147
6.3 Zone intermédiaire pour $\lambda=1$ . . . . . 147
6.4 Graphe de $g(\theta)=\frac{1}{2}\mathscr{G}(\theta)$ . . . . . 152
6.5 Comparaison de $\mathscr{G}(\theta)$ et son approximation $\frac{2}{9}\theta^3$ . . . . . 156

7.1 Schéma de l’écoulement d’un liquide initialement confiné . . . . . 168
7.2 Position de $X_f'(t')$ et $h_f'(t')$ . . . . . 172
7.3 Représentation de $h$ en fonction de $\theta(x^*,z^*)$ . . . . . 178

7.4 Évolution de $\frac{\partial \mathscr{A}(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)}$ en fonction de $\theta_{0,ext}(\beta)$ . . . . . 189

8.1 $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}(\beta)$ . . . . . 192
8.2 Domaine de validité de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ . . . . . 193
8.3 $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ . . . . . 193
8.4 $F$ et $\mathscr{A}$ en fonction de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}(\beta)$ . . . . . 194
8.5 $F$ et $\mathscr{A}$ en fonction de $\theta_{0,ext}(\beta)$ . . . . . 194
8.6 $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ . . . . . 199
8.7 $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ . . . . . 200
8.8 Cas sans glissement pour $D(\alpha)=0$ et $b=0.1$ . . . . . 205
8.9 Cas sans glissement pour $D(\alpha)=0$ et $b=0.01$ . . . . . 205
8.10 Cas sans glissement pour $D(\alpha)=0$ et $b=0.001$ . . . . . 206
8.11 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=2.5$, $b=0.1$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 206
8.12 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=2.5$, $b=0.01$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 207
8.13 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=2.5$, $b=0.001$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 207
8.14 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=5$, $b=0.1$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 209
8.15 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=5$, $b=0.01$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 209
8.16 Cas avec glissement pour $D(\alpha)=5$, $b=0.001$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 210
8.17 Cas avec glissement pour $b=0$, $D(\alpha)=0$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 211
8.18 Cas avec glissement pour $b=0$, $D(\alpha)=2.5$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 211
8.19 Cas avec glissement pour $b=0$, $D(\alpha)=5$ et $\mathscr{A}=5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 212

# Liste des tableaux


1.1 Système en coordonnées cartésiennes . . . . . 14
1.2 Système développé en coordonnées cartésiennes . . . . . 14
1.3 Système avec condition de glissement . . . . . 16
1.4 Système développé avec condition de glissement . . . . . 16
1.5 Système complet polaire . . . . . 17
1.6 Système complet polaire développé . . . . . 19

2.1 Problème de Stokes stationnaire dans un dièdre . . . . . 24
2.2 Problème de Stokes stationnaire dans le repère du front . . . . . 25
2.3 Problème de Stokes stationnaire dans un dièdre en formulation courant . . . . . 25

3.1 Système complet cartésien développé . . . . . 44
3.2 Nombres adimensionnels du film mince . . . . . 47

4.1 Système de Navier-Stokes . . . . . 66
4.2 Nombres adimensionnels du front . . . . . 66
4.3 Hypothèse sur les nombres adimensionnels . . . . . 68
4.4 Problème de Stokes dimensionné développé . . . . . 68
4.5 Problème de Stokes adimensionné . . . . . 69
4.6 Problème de Stokes adimensionné développé . . . . . 69
4.7 Problème de Stokes adimensionné dans le repère du front . . . . . 70
4.8 Problème de Stokes adimensionné développé dans le repère du front . . . . . 71

7.1 Position, vitesse, hauteur du front sans glissement . . . . . 179
7.2 Position, vitesse, hauteur du front avec glissement . . . . . 179
7.3 Nombre adimensionnels avec et sans glissement . . . . . 180
7.4 Hypothèses pour le modèle de front . . . . . 180

8.1 Profils obtenus mis à l'échelle pour $D(\alpha) = 2.5$, $\mathscr{A} = 10$ . . . . . 208
8.2 Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $D(\alpha) = 2.5$, $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 208
8.3 Profils obtenus mis à l'échelle pour $D(\alpha) = 5$, $\mathscr{A} = 10$ . . . . . 210
8.4 Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $D(\alpha) = 5$, $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$ . . . . . 210
8.5 Profils obtenus mis à l'échelle pour $b = 0$, $\mathscr{A} = 10$ . . . . . 212
8.6 Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $b = 0$ . . . . . 212

# LISTE DES SYMBOLES

## NOTATIONS GÉNÉRALES

| | | |
|---|---|---|
| $(x, z)$ | Repère cartésien 2D | 12 |
| $U(x, t, z)$ | Vitesse du fluide | 12 |
| $p(x, t, z)$ | Pression du fluide | 12 |
| $h(x, t)$ | Surface libre | 12 |
| $T(x, t, z)$ | Le tenseur des contraintes | 13 |
| $D(U)$ | La partie symétrique du tenseur des contraintes visqueuses | 13 |
| $\mathbb{1}$ | La matrice identité | 13 |
| $\sigma_v$ | Le tenseur des contraintes visqueuses | 13 |
| $\Gamma_1$ | La frontière du domaine représentant la paroi solide | 12 |
| $\Gamma_2$ | La frontière du domaine représentant l'interface du fluide avec l'air | 12 |
| $\omega$ | Inclinaison de la surface solide avec l'horizontale | 11 |
| $\rho$ | Densité du fluide | 13 |
| $\kappa$ | La tension de surface | 13 |
| $\mu$ | Viscosité dynamique du fluide | 13 |
| $\vec{g}$ | La force de gravité | 13 |
| $g_0$ | La constante gravitationnelle | 13 |
| $G(x, z)$ | Fonction définissant la gravité telle que $\vec{g} = -g_0 \nabla G(x, t, z)$ | 13 |
| $\vec{U}_{sl}$ | La vitesse d'avancement de la surface libre | 13 |
| $\mathrm{Courb}(x)$ | La courbure de la surface libre | 13 |
| $p_{atm}$ | La pression atmosphérique au niveau de la surface libre | 13 |
| $\vec{n}$ | La normale unitaire sortante au niveau de la paroi solide | 13 |
| $\vec{t}$ | La tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la paroi solide | 13 |
| $\vec{n}_{sl}$ | La normale unitaire sortante au niveau de la surface libre | 13 |
| $\vec{t}_{sl}$ | La tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la surface libre | 13 |

| | | |
|---|---|---|
| $\kappa_f(h)$ | Fonction représentant le frottement sur la surface solide | 15 |
| $\alpha$ | Valeur maximale de la fonction $\frac{1}{\kappa_f(h)}$ | 15 |
| $\chi$ | Fonction de troncature qui vaut 1 près du front et 0 loin du front | 15 |
| $\mu\alpha$ | La longueur de glissement | 15 |
| $\beta$ | Le coefficient de glissement | 15 |
| $(r,\phi)$ | Repère polaire | 16 |
| $\Omega$ | Domaine occupé par le fluide | 17 |
| $u(r,\phi,t)$ | Vitesse du fluide en coordonnées polaires | 16 |
| $p(r,\phi,t)$ | Pression du fluide en coordonnées polaires | 16 |
| $\theta(r,t)$ | Surface libre en coordonnées polaires | 16 |
| $\vec{U}_{sl}$ | Vitesse moyenne d'avancement du fluide | 16 |
| $h_f(t)$ | La longueur caractéristique du fluide | 17 |
| $\mathrm{Courb}(r)$ | La courbure de la surface libre en coordonnées polaires | 17 |
| $G(r,\phi)$ | défini tel que $\vec{g} = -g_0 \nabla G(r,\phi)$ | 18 |
| $l(\beta)$ | Distance minimale jusqu'à laquelle la description de la solution en variables rapides est valide | 20 |
| $d(\beta)$ | Distance minimale à partir de laquelle la description en variables lentes a un sens | 20 |
| $\Omega_{int}$ | Domaine interne qui est un voisinage de l'origine du repère | 20 |
| $\Omega_{ext}$ | Domaine externe | 21 |
| $\Omega_R$ | Zone de raccord entre les deux domaines précédents | 21 |
| $\psi(r,\phi)$ | La fonction courant associée à $u(r,\phi)$ | 25 |
| $\bar{\varepsilon} = \dfrac{h_0}{L}$ | Paramètre onde longue | 46 |
| $F_r^2$ | Nombre de Froude | 47 |
| $R_e$ | Nombre de Reynolds | 47 |
| $W_e$ | Nombre de Weber | 47 |
| $\dfrac{1}{\kappa_v(h)}$ | Nombre de Froude | 47 |

NOTATIONS SPÉCIFIQUESAU FRONT D'AVANCEMENT

| | | |
|---|---|---|
| $R_{e,f}$ | Le nombre de Reynolds du front | 68 |
| $W_{e,f}$ | Le nombre de Weber du front | 68 |
| $C_{a,f}$ | Le nombre de capillaire du front | 68 |
| $F_f^2$ | Le nombre de Froude au carré du front | 68 |
| $\beta$ | Le coefficient de glissement | 68 |

| | | |
|---|---|---|
| $'_{ext}'$ | Indice désignant les variables externes (lorsqu'il peut y avoir confusion) | 79 |
| $'_{int}'$ | Indice désignant les variables internes (lorsqu'il peut y avoir confusion) | 91 |
| $'_{interm}'$ | Indice désignant les variables de la zone intermédiaire | 155 |
| $\bar{u}_{ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ | Notations définissant le changement de variables permettant de se ramener à un dièdre en zone externe avec $u\left(r,\phi\right)=\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ | 84 |
| $\tau_{ext}\left(\bar{r}\right)$ | Contraintes tangentielles au fond en zone externe | 105 |
| $\bar{\nabla}_0$ | Gradient classique dans le nouveau jeu de coordonnées | 85 |
| $\bar{\nabla}_i$ | Corrections sur le gradient classique, d'ordre $i$ en $C_a$ | 85 |
| $R=\frac{r}{\beta}$ | Variable rapide définie en zone interne | 91 |
| $\breve{u}_{int}\left(R,\phi\right)$ | Notations définissant le passage en variable rapide avec $u\left(r,\phi\right)=\breve{u}\left(R,\phi\right)$ | 92 |
| $\hat{u}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ | Notations définissant le changement de variables permettant de se ramener à un dièdre en zone interne avec $\breve{u}\left(R,\phi\right)=\hat{u}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ | 98 |
| $\tau_{int}\left(r\right)$ | Contraintes tangentielles au fond en zone interne | 111 |
| $\hat{\nabla}_0$ | Gradient classique dans le nouveau jeu de coordonnées | 98 |
| $\hat{\nabla}_i$ | Corrections sur le gradient classique, d'ordre $i$ en $C_a$ | 98 |
| $\mathscr{S}^{\mu}\left(K_{\omega}\right)$ | Espaces des fonctions $S\left(r,\phi\right)$ du type $r^{\mu}f_{\mu}\left(\ln r,\phi\right)$ | 26 |
| $\mathscr{L}\left(\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right)\left(s\right)$ | Transformée de Laplace bilatérale selon $\varrho$ de la fonction $\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$ | 110 |
| $k\left(\varrho\right)$ | Partie des contraintes tangentielles au fond en zone interne | 112 |
| $\mathbf{x}$ | Variable de la zone intermédiaire (ou zone de raccord) | 148 |
| $\lambda$ | Paramètre du changement de variable avec $\lambda\in]0,1]$ | 148 |
| $\mathscr{G}\left(\theta\right)$ | Fonction permettant le raccord en zone intermédiaire à l'ordre 0 en $C_a$ | 154 |

CHAPITRE 0

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les films minces rentrent en jeu dans de nombreux phénomènes naturels tels que les coulées de lave, de boue, avalanches, ruptures de barrages ou le ruissellement d'une goutte. Ils sont aussi présents en biologie par exemple sur la paroi interne des poumons ou à la surface des yeux ainsi que dans des situations physiques et industrielles comme lors de processus de transfert de chaleur ou de masse pour protéger des surfaces ou lors de dépôts de plusieurs couches de pellicules pour des films photographiques.

On les rencontre aussi en aérodynamique lors de problèmes de givrage ou en aéronautique lors d'ingestion d'eau par les moteurs qui conduit à la formation d'une fine couche de liquide sur les parois ainsi que lors de l'injection du carburant dans la chambre de combustion ou dans une tuyère de fusée lors de l'accumulation de carburant. La construction de modèles d'écoulements de fluides en films minces est donc très importante et fait déjà l'objet de nombreuses publications (voir l'article de Oron *et al.* [56] sur la dynamique des films minces ainsi que leur bibliographie).

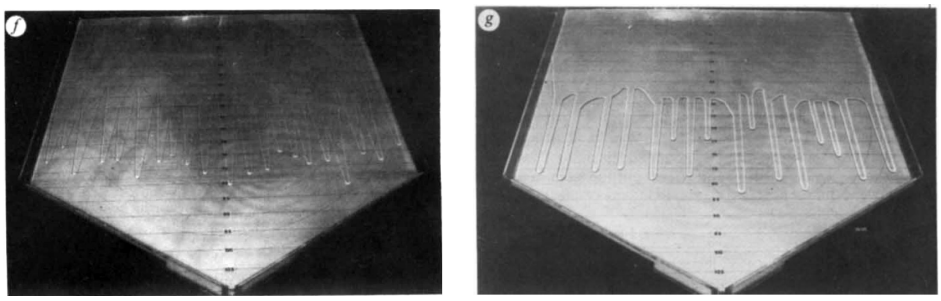
Une partie de ces problèmes concerne les écoulements établis, soumis par exemple à la gravité ou au cisaillement du vent, s'écoulant sur des surfaces rugueuses ou non ainsi que des écoulements mono ou multi-fluides. Une seconde partie concerne l'étude du front d'avancement du fluide qui se forme lors de l'écoulement. C'est ce qui va nous intéresser au cours de cette thèse et plus particulièrement la condition limite associée au front.

En hydrodynamique, la condition limite associée à un fluide s'écoulant sur une paroi solide est généralement une condition de non-glissement ou d'adhérence : la vitesse du fluide à la paroi est nulle. Cette condition est pertinente pour décrire des écoulements à l'échelle macroscopique mais ce n'est plus le cas à des échelles plus petites si l'on se place au niveau d'un point triple (point de contact entre trois domaines différents du type solide/liquide/gaz ou solide/liquide/liquide ou trois liquides). En effet avec cette condition au niveau de la paroi solide, les contraintes au fond sont singulières et ne se raccordent pas avec les contraintes à la surface libre. L'énergie visqueuse à dissiper devient alors infinie.

On peut alors différencier deux cas, celui des fluides à mouillage total et celui des fluides à mouillage partiel (on peut se référer au livre De Gennes *et al.* [19] sur ce sujet). Pour les fluides à mouillage total, le liquide s'étale complètement, l'angle de contact est nul, ce qui fait ainsi diminuer l'énergie superficielle et supprime le problème évoqué précédemment. Ce cas correspond aux écoulement

comportant un film précurseur infini. Il en est de même pour les fluides à film précurseur fini se situant devant le front. L'étalement macroscopique se fait alors sur une surface pré-mouillée et supprime le problème de la ligne de contact (voir l'article de De Gennes [18] sur le mouillage ainsi que sa bibliographie).

Pour les fluides à mouillage partiel qui comportent une ligne de contact bien-définie, on peut discerner les fluides simples qui peuvent s'écouler avec un mouvement de roulement interne, comme les chenilles des chars militaires (cf Dussan V. et Davis [24]) et des mélanges de polymères qui ont tendance à glisser sur la paroi (cf Brochard et De Gennes [11]). En effet au niveau de la ligne de contact du fluide avec la surface solide, trois milieux différents se rencontrent et il y a donc une interface entre la paroi solide, le fluide en mouvement et l'air (qui peut aussi être remplacé par un autre fluide). De plus lors d'écoulements sur une surface solide lisse, on peut observer différents types de fronts d'avancement qui peuvent être réguliers ou former des "doigts" comme on peut le voir dans l'article de Huppert [43] :




Écoulement d'huile de silicone — Écoulement de glycérine

FIGURE 0.1: Deux types de fronts : formes rectangulaires et "doigts"

Il apparaît donc au niveau de la ligne de contact ce que l'on appelle un problème de point triple, là où se rencontrent trois milieux différents, c'est ce problème qui nous intéresse ici et plus particulièrement l'hypothèse qui fait intervenir la notion de glissement du fluide sur la paroi. La condition limite correspondante est alors caractérisée par une longueur, dite "longueur de glissement" qui doit rester petite devant la longueur caractéristique de l'écoulement.

Les premiers a avoir étudié ce problème sont Moffatt [52] en 1964 et Huh et Scriven [42] en 1971 où ils se mettent dans le cas bi-fluide avec une interface plane entre les deux fluides. Ils écrivent alors la solution bien connue du problème avec adhérence au fond et font une analyse d'énergie près du front de manière à montrer que la condition d'adhérence près du front génère une énergie infinie. En 1974, Dussan V. et Davis [24] ont fait une étude expérimentale sur le déplacement de gouttes de miel, de cidre d'abeille ou de glycérine sur une plaque de plexiglas. Ils montrent ici des écoulements bi-fluides dont l'un a un mouvement de roulement près du front et le deuxième dont les particules se trouvant à l'interface entre les deux fluides ou sur le fond en plexiglas partent vers l'intérieur du fluide après être passé par la ligne triple. Ils n'ont donc pas de glissement dans leur étude mais introduisent cette notion dans leur conclusion. En 1975, Hoffman [41] a relié l'angle de contact apparent au nombre capillaire grâce à des expériences sur le déplacement d'un liquide dans un tube capillaire.

La même année, Dussan V. [22] a fait une étude mathématique dans le cas d'un liquide remontant une pente inclinée. Elle y propose, pour la première fois, trois lois de glissement différentes composées de polynômes de $r$ (en coordonnées polaires $(r,\phi)$) pour la zone proche du front. Elle réalise un développement asymptotique suivant différents nombres adimensionnels considérés petits : le nombre Capillaire, le Reynolds et un dernier nombre adimensionnel nommé "angle de contact statique critique normalisé". Elle résout alors au premier ordre ces équations en utilisant la transformée

de Mellin puis raccorde la surface libre entre ces deux zones. Pour conclure, elle propose d'autres types de conditions de glissement faisant intervenir les contraintes normales au fond et introduit la notion de coefficient de glissement.

En 1976, Hocking [37] considère deux fluides, l'un poussant l'autre, ayant une interface plane avec une condition de glissement de Navier (proposée en 1823) qui s'écrit :

$$\vec{u}\cdot\vec{t}+\alpha\,[T\cdot\vec{n}]\cdot\vec{t}=0 \text{ sur la surface solide}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur vitesse, $T$ le tenseur des contraintes, $\alpha\in\mathbb{R}^{+*}$ la longueur de glissement, $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont respectivement la normale unitaire dirigée hors du fluide et la tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la paroi solide. Il résout alors le problème grâce à une transformée de Laplace bilatérale et fait une étude pour différentes inclinaisons données de l'interface. Il étudie aussi le cas d'un écoulement entre deux plaques parallèles avec une interface plane et un écoulement dans un tube.

Greenspan [34] a utilisé un modèle d'angle dynamique lié à la vitesse de la ligne de contact pour étudier le mouvement de gouttes circulaires dans le but d'appliquer ces résultats au mouvement et l'adhésion de cellules en biologie. Tanner [70] a fait un modèle de lubrification à angle petit avec et sans film précurseur. Un angle apparent est observé correspondant au point d'inflexion dans la solution des équations de lubrification. Sa valeur donne un modèle d'angle dynamique et il écrit ici la loi connue sous le nom de loi de Tanner ou loi de Hoffmann-Tanner : $C_a=\frac{\mu U_0}{\sigma}=\text{constante}\times\theta^3\quad(\theta\ll 1)$ où $C_a$ est le nombre Capillaire, $\theta$ l'angle dynamique de contact, $\mu$ la viscosité dynamique, $\sigma$ la tension de surface du fluide et $U_0$ la vitesse moyenne de l'écoulement.

Kafka et Dussan V. [44] ont ensuite étudié le mouvement de deux fluides, l'un déplaçant l'autre dans un capillaire. Ils utilisent la notion d'angle de contact dynamique et d'angle de contact apparent, qu'ils raccordent dans une zone intermédiaire et écrivent une relation entre ces deux angles. Une étude plus complète sur le même thème a été réalisée dans l'article Dussan V. [23] toujours avec du non-glissement, le glissement est introduit à la fin de l'article.

En 1981, Hocking et Rivers [40] ont étudié l'étalement de gouttes sur un plan. Ils résolvent le problème en trois zones, une zone externe avec non-glissement, une zone interne avec glissement et une zone de raccord entre les deux avec une échelle adaptée aux deux représentations et introduisent une relation non linéaire entre les angles externe et interne grâce à la fonction $\mathscr{G}(\beta)=\int_0^\beta\frac{\beta_1-\sin\beta_1\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\mathrm{d}\beta_1$. Leur modèle a été récemment testé numériquement par Reznik et Yarin [60]. Quelques années plus tard, Cox [15] réalise une étude sur un cas bi-fluide. Il y néglige les effets de la gravité et fait un développement asymptotique suivant le nombre Capillaire $C_a$, entre zone interne et zone externe qu'il raccorde en deux zones puis en trois zone dans le cas où $C_a\ln\epsilon^{-1}\sim\mathscr{O}(1)$ quand $C_a\to 0$ et $\epsilon\to 0$ où $\epsilon$ est le coefficient de glissement de son modèle. Il conclut par une relation du même genre que celle de Hocking et Rivers [40] entre les deux angles internes et externes mais il considère que la solution de la zone interne où il y a glissement, est similaire à celle de la zone externe à l'infini car on doit raccorder avec cette solution loin du front d'avancement. Ce qui est une hypothèse que nous n'utiliserons pas dans ce travail.

On peut voir qu'à peut près tout ce qui est présenté dans ce paragraphe avait déjà été présenté dans l'article de 1976 de Voinov [74]. Sur les études multizones, on peut aussi citer De Gennes *et al.* [20] qui étudient un cas de mouillage partiel et considèrent les effets des forces de Van der Waals. Ils réalisent un développement asymptotique en 3 et 4 zones. Les forces de Van der Waals ont une distance de cuttoff de la singularité en $\frac{a}{\theta}$ où $a$ est l'échelle atomique qu'il faut comparer à celle donnée par les modèles de glissement de l'ordre de $a$. Il y aurait donc un effet dominant pour les $\theta$ petits.

On peut alors se référer aux articles suivants sur des études expérimentales avec validation numérique : Ngan et Dussan V. [55] , Dussan V. *et al.* [25], Kondic [45] et Snoeijer *et al.* [68].

Pour des études de la forme de la surface libre, on peut citer Troian *et al.* [71], Goodwin et Homsy [33], Tuck et Schwartz [72], Bertozzi [3], Buckingham *et al.* [12], Hocking [38], Eggers [27], Snoeijer *et al.* [67], Snoeijer [66], Hocking et Davis [39] et Pismen et Eggers [57].

Des études théoriques sur l'existence d'une solution ont notamment été réalisées par Solonnikov [69], Kröner [46] qui considère un fluide poussé dans un tube par un piston, Münch et Wagner [53] et Fontelos et Munoz [29] sur des problèmes de glaciologie.

Dans cette thèse, nous allons étudier le problème situé au niveau de l'interface entre l'air, la surface solide et le liquide. Nous souhaitons poser un cadre mathématique rigoureux à l'étude de ce point triple qui a déjà fait l'objet de beaucoup de publications. L'idée ici est de développer des modèles de fronts en se ramenant aux articles existants et de construire des modèles pour l'étude du front d'avancement de films minces. Ces modèles ferons ensuite l'objet de simulations numériques permettant de tester la validité des modèles et l'influence des paramètres utilisés comme par exemple le coefficient de glissement qui est un des petits paramètres du modèle ainsi que le nombre capillaire et l'angle de contact apparent. Nous nous intéresserons ici au cas d'un écoulement bidimensionnel le long d'un plan incliné, pour un fluide newtonien.

Le modèle usuel consiste à considérer que le fluide adhère sur toute la paroi. Nous montrerons qu'il faut séparer l'écoulement en deux grandes parties distinctes (chapitre 1 page 11) : une zone externe qui correspond à la partie amont et dans laquelle cette condition de non-glissement est valide ; et la zone interne, proche du front, où cette hypothèse ne tient plus (voir la figure 0.2). Dans cette seconde zone, nous proposerons de remplacer la condition d'adhérence par une condition de glissement (condition de Navier [54]). Pour décrire correctement la zone aval, il conviendra de se placer dans le repère polaire associé au front de l'écoulement. De plus, l'écoulement considéré étant incompressible, il sera plus aisé de travailler en formulation « fonction courant ». Ce qui nous permettra de simplifier la résolution du problème. Avec ces outils de base, nous pourrons montrer que le problème de Navier-Stokes, qu'on pourra simplifier en problème de Stokes stationnaire près du front, est mal posé dans le cas de la condition d'adhérence, quelque soit la forme de l'interface (chapitre 2 page 23).

Avant de développer les différents modèles asymptotiques de front, nous décrirons l'écoulement amont « lointain », qui sera vu comme une condition de raccord à l'infini pour le modèle de front (chapitre 3 page 43). Il s'agira donc de décrire un écoulement sans front, infini de chaque côté. Pour cette thèse, nous nous sommes limité au cas des fronts pour films minces. Nous expliquerons comment obtenir un système de type Saint-Venant (Shallow-water models) à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre dont la structure est la suivante :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left(\dfrac{q^2}{h} + p(h)\right)_x - \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h h_{xxx} = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda} h \sin\omega - \dfrac{3q}{h^2}\right) \end{cases}$$

avec $\bar{\beta}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\kappa}$ des nombres adimensionnels. La limite $\bar{\beta} \to 0$ donne alors une équation des ondes sur la hauteur du fluide, on peut se référer aux articles de Lighthill et Whitham [48] et Benney [2] pour plus de détails. Comme le film est par définition mince, et en faisant certaines hypothèses, il sera alors possible de résoudre asymptotiquement les équations de Navier-Stokes autour de la solution d'équilibre. Ce développement se fera par rapport à un petit paramètre $\bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L}$, appelé paramètre onde longue, qui est le rapport entre la hauteur et la longueur caractéristiques du film. La solution ainsi obtenue, injectée dans les équations de Navier-Stokes moyennées sur la hauteur, donnera des modèles à deux équations, de type Saint-Venant, sur la hauteur et le débit.

L'étude d'un film mince (sans front) étant faite, nous étudierons ensuite le problème au niveau du front d'avancement (chapitre 4 page 65), ce qui peut aussi être vu comme le front arrière de l'écou-

lement en prenant la vitesse moyenne du front $\vec{U}_{sl} = -\vec{U}_{sl}$. Ce problème sera étudié en différentes zones, en effet nous allons utiliser une condition de glissement qui permettra d'avoir un glissement du fluide sur le fond solide très près du front mais ce glissement s'annulera ensuite en s'éloignant du front pour retrouver une condition classique d'adhérence. On disposera alors de deux (chapitre 5 page 75) ou trois (chapitre 6 page 143) zones d'études selon les hypothèses de raccord faites :

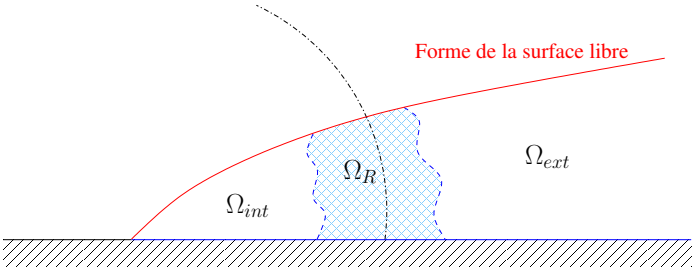



FIGURE 0.2: Front d'avancement du fluide

où $\Omega_{int}$ est la zone interne, proche du front, $\Omega_{ext}$ la zone externe, loin du front (c'est celle qui va se raccorder au film mince), et $\Omega_R$ la zone de raccord qui est commune aux deux zones précédentes.

Nous allons alors utiliser la formulation en fonction courant pour résoudre ces différents problèmes. Nous réaliserons ensuite un développement asymptotique raccordé en fonction d'un second petit paramètre, le nombre capillaire du front $C_{a,f} \ll 1$. Nous passerons ainsi d'un problème de Navier-Stokes aux équations de Stokes stationnaires et nous ferons une étude en deux zones de raccord du front d'avancement si le terme $C_{a,f} \left|\ln \beta\right| \ll 1$, où $\beta$ est le coefficient de glissement et est le troisième petit paramètre de notre modèle. Notons que le nombre capillaire $C_{a,f} = \frac{U_0 \mu}{\kappa}$ est un paramètre qui permet de quantifier la vitesse moyenne du front $U_0$ (avec $\mu$ la viscosité dynamique et $\kappa$ la tension de surface), donc si celui-ci est faible et si $\beta$ n'est pas trop petit, on a alors un raccord assez simple des inconnues. Mais si $C_{a,f} \left|\ln \beta\right| \sim \mathcal{O}(1)$, la zone de glissement est alors plus importante et/ou la vitesse plus élevée, nous serons alors obligés de faire un raccord en trois zones. Dans la zone intermédiaire ou zone de raccord, le glissement constant de la zone proche du front, tendra vers zéro pour se raccorder à la zone loin du front, la zone de non-glissement.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous combinerons l'étude du film mince (cf partie II page 39) ainsi que l'étude du front d'avancement (cf partie III page 61) de manière à pouvoir décrire l'écoulement d'un film liquide mince présentant un front d'avancement. Nous étudierons alors l'écoulement d'une goutte de liquide sur un plan incliné ce qui peut être vu comme une rupture de barrage à une échelle microscopique. Nous proposerons un modèle simplifié de type Saint-Venant avec glissement permettant de retirer la singularité du front et qui nous permet de retrouver un système Saint-Venant classique lorsque l'on fait tendre le terme de glissement vers zéro. Nous nous ramènerons alors à un modèle à une équation sur la hauteur du fluide : équation de Benney associée au modèle de glissement proposé et qui nous permettra de comparer nos résultats notamment à ceux de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71], Whitham [75] qui font une étude sur un modèle basé sur de la lubrification (angle apparent petit) et sans glissement, ce qui les oblige à utiliser un film précurseur dans leur étude. Notre principal apport est le développement de modèles de frottement sur front sec dans le cadre de la théorie de la lubrification, modèles qui sont compatibles avec les modèles existants de la littérature.

PREMIÈRE PARTIE

# INTRODUCTION AUX ÉCOULEMENTS DU TYPE NAVIER-STOKES

Dans cette partie, nous nous intéressons à la dynamique des écoulements en deux dimensions le long d'un plan incliné, pour un fluide newtonien. Nous allons introduire le système d'équations de Navier-Stokes régissant l'écoulement d'un fluide newtonien à surface libre s'écoulant sur un plan incliné et soumis aux effets de la gravité. Ceci va poser la base de tous les calculs effectués par la suite. En effet le modèle usuel consiste à considérer que le fluide adhère sur toute la paroi.

Dans le chapitre 1, nous montrerons qu'il existe différentes conditions limites sur la paroi solide : la condition classique d'adhérence et une condition de glissement (condition de Navier [54]). En effet par la suite, nous verrons que la condition classique d'adhérence au fond n'est pas valide au niveau du front d'avancement d'un fluide. Il faudra donc séparer l'écoulement en deux grandes parties distinctes : une zone externe qui correspond à la partie amont et dans laquelle cette condition de non-glissement est valide ; et la zone interne, proche du front, où nous remplacerons la condition d'adhérence par une condition de glissement (cf partie III page 61). Dans ce chapitre, nous présenterons le système à résoudre en coordonnées polaires qui sont plus pratiques pour décrire correctement la zone aval. De plus, l'écoulement considéré étant incompressible, il sera plus aisé de travailler en formulation « fonction courant ». Ce qui nous permettra de simplifier la résolution du problème.

Dans le chapitre 2 page 23, avec ces outils de base, nous pourrons montrer que le problème de Navier-Stokes, qu'on pourra simplifier en problème de Stokes stationnaire près du front, est mal posé dans le cas de la condition d'adhérence, quelque soit la forme de l'interface. Nous verrons alors que l'énergie visqueuse près du front est infinie d'où la singularité de la solution obtenue avec adhérence au fond. Ce qui justifiera l'utilisation d'un condition de glissement près du front d'avancement du fluide. L'introduction de cette condition nous obligera à faire une étude du problème en différentes zones et ainsi à découper le domaine où se trouve le fluide en deux ou trois sous-domaines d'étude (cf partie III page 61).

CHAPITRE 1

# ÉCOULEMENTS DU TYPE NAVIER-STOKES

Dans ce chapitre, nous allons écrire le système équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions limites nous permettant d'étudier l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible à surface libre s'écoulant sur un plan incliné. Or la condition classique de non-glissement n'est valide que loin du front d'avancement du fluide (cf chapitre 2). Nous introduirons alors la condition de glissement qui remplace la condition d'adhérence au niveau de la surface solide et qui permettra de retirer la singularité présente au niveau du front. Ceci imposera d'étudier le problème sur ces différentes zones séparément puis de les raccorder et ainsi de faire une décomposition du domaine. Nous écrirons alors le système obtenu en coordonnées polaires qui sont plus pratique pour étudier la zone du front et nous nous mettrons dans le repère du fluide pour étudier le problème en formulation courant, ce qui rendra l'étude plus aisée. En effet cela nous permettra dans la suite de séparer la résolution de la vitesse et de la pression.

**Sommaire**


1.1 Établissement des équations dans le repère cartésien . . . . . 11
1.2 Condition de glissement . . . . . 14
1.3 En coordonnées polaires . . . . . 16
1.4 Décomposition de domaine . . . . . 19
1.5 Changement de repère . . . . . 22
1.6 Principe de la formulation courant . . . . . 22


## 1.1 Établissement des équations dans le repère cartésien

On s'intéresse ici à l'écoulement d'un fluide parfait, newtonien et incompressible, sur un plan incliné non rugueux faisant un angle $\omega \in [0, \pi/2]$ avec l'horizontale, sous l'effet de la gravité.

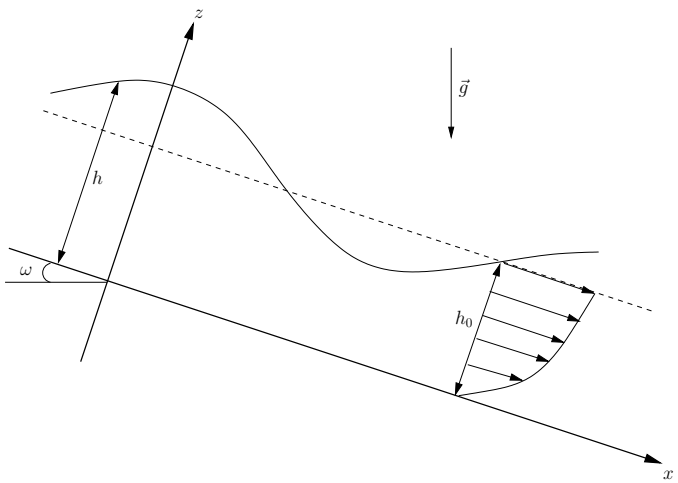



FIGURE 1.1: Film liquide sur un plan incliné

La phase gazeuse au dessus du fluide est supposée sans masse, non visqueuse et soumet le fluide à une pression $p_{atm}$ (qui peut être considérée nulle). Les effets thermiques sont négligés. L'écoulement de ce fluide est donc régi par les équations de Navier-Stokes.

Les équations sont écrites dans le système de coordonnées cartésiennes $(x, z)$. Les inconnues sont la vitesse $U(x,t,z)$, la pression $p(x,t,z)$ du fluide ainsi que la forme de la surface libre $h(x,t)$, c'est-à-dire la forme de l'interface air/fluide. Les équations régissant l'écoulement dans le volume sont :

- **Équation de conservation de la masse :**

$$\left(\text{Eq 1}\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

$$\left(\text{Eq 2}\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$$

Le fluide est soumis aux conditions limites suivantes :

- sur la paroi solide $\Gamma_1$ :
  - **Condition de non-glissement/adhérence :**

$$(1) : U \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

$$(2) : U \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

- à l'interface avec l'air $\Gamma_2$ :
  - **Condition d'imperméabilité :**

$$(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl} \text{ en } z = h(x,t)$$

    Cette condition traduit l'absence de transfert de masse à la surface libre.
  - **Continuité des contraintes :**

$$T \cdot \vec{n}_{sl} = \left(\kappa \text{Courb} - p_{atm}\right) \cdot \vec{n}_{sl} \text{ en } z = h(x,t) \tag{1.1}$$

⋆ **Continuité des contraintes tangentielles :** En réalisant le produit scalaire de l'équation (1.1) avec $\vec{t}_{sl}$, et en utilisant l'orthogonalité de $\vec{n}_{sl}$ et $\vec{t}_{sl}$, on peut écrire :

$$(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \text{ en } z = h(x,t)$$

⋆ **Continuité des contraintes normales :** De même en réalisant le produit scalaire de l'équation (1.1) avec $\vec{n}_{sl}$ :

$$(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = \kappa \text{Courb}(x) - p_{atm} \text{ en } z = h(x,t)$$

où :

- $T(x,t,z) = -p(x,t,z)\mathbb{1} + \mu\left[\nabla U(x,t,z) + (\nabla U(x,t,z))^t\right] = -p(x,t,z)\mathbb{1} + 2\mu D(U(x,t,z))$ est le tenseur des contraintes,
- $D(U) = \frac{1}{2}\left[\nabla U(x,t,z) + (\nabla U(x,t,z))^t\right]$ la partie symétrique du tenseur des contraintes visqueuses,
- $\mathbb{1}$ représente la matrice identité,
- $\sigma_v = \mu\left(\nabla U + (\nabla U)^t\right) = \mu\begin{pmatrix} 2u_x & u_z + w_x \\ u_{z+} w_x & 2w_z \end{pmatrix}$ le tenseur des contraintes visqueuses,
- $\mu$ et $\rho$ sont respectivement la viscosité dynamique et la masse volumique du fluide,
- $\vec{g}$ représente la gravité,$\vec{g} = -g_0\left[\sin\omega\vec{e}_x + \cos\omega\vec{e}_y\right] = -g_0\nabla G(x,z)$ où $g_0$ est la constante gravitationnelle et $G(x,z) = x\sin\omega + z\cos\omega$,
- $\vec{U}_{sl} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_t \end{pmatrix}$ est la vitesse d'avancement de la surface libre,
- $\text{Courb}(x) = \partial^2_{xx} h(x,t)\left(1 + (\partial_x h(x,t))^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ représente la courbure,
- $\kappa$ est la tension de surface,
- $p_{atm}$ est la pression atmosphérique au niveau de la surface libre,
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la paroi solide,
- $\vec{n}_{sl} = \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x h(x,t))^2}}\begin{pmatrix} -\partial_x h(x,t) \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}_{sl} = \frac{1}{\sqrt{1+(\partial_x h(x,t))^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \partial_x h(x,t) \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la surface libre. Elles sont représentés sur la figure 1.2 :

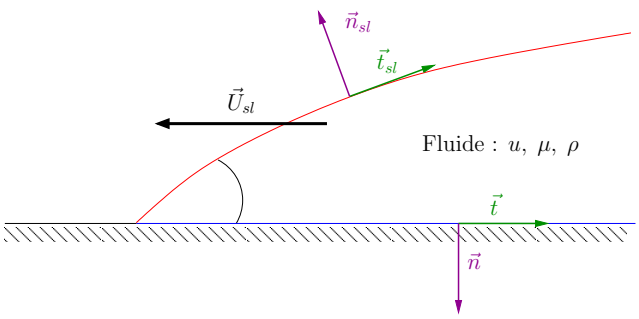



FIGURE 1.2: Orientation des normales et tangentes unitaires aux bords du domaine

On peut donc écrire le problème sous la forme suivante :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de non-glissement :** $(1) : U \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } z = 0$ <br> $(2) : U \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en } z = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl} \text{ en } z = h(x,t)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \text{ en } z = h(x,t)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = \kappa \text{Courb}(x) - p_{atm} \text{ en } z = h(x,t)$ |

TABLE 1.1: Système en coordonnées cartésiennes

où les inconnues sont le champs de vitesse $U(x,t,z)$, la pression $p(x,t,z)$ et la forme de la surface libre $h(x,t)$. Sous forme développée, on a :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de non-glissement :** $(1) : w(x,0) = 0$ <br> $(2) : u(x,0) = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : h_t + u(x,h)\, h_x = w(x,h)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : \left(1 - h_x^2\right)\left(u_z(x,h) + w_x(x,h)\right) - 4 h_x u_x(x,h) = 0$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : -2\mu u_x(x,h) \frac{1+h_x^2}{1-h_x^2} = \kappa h_{xx} \left(1 + h_x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + p(x,h)$ |

TABLE 1.2: Système développé en coordonnées cartésiennes

## 1.2 Condition de glissement

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, on décide de changer la condition limite d'adhérence au fond : $(2) : U \cdot \vec{t} = 0$, qui ne se raccorde pas avec les conditions limites sur la surface libre, par une condition de glissement. Cette condition limite permettra au fluide de glisser sur la paroi près du front d'avancement mais loin du front celui-ci ne glissera plus. On retrouvera alors une condition de non glissement standard. La condition de glissement que nous allons utiliser est aussi appelée **condition de Navier** [54] et s'écrit en dimensionné, telle que :

$$(2) : U \cdot \vec{t} + \frac{1}{\kappa_f(h)} [T \cdot \vec{n}] \cdot \vec{t} = 0 \text{ en } z = 0$$

avec $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, cette condition s'écrit :

- en coordonnées cartésiennes :

$$u - \frac{\mu}{\kappa_f(h)} \partial_z u = 0 \text{ en } z = 0 \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

- en coordonnées polaires :

$$u_r - \frac{\mu}{r\kappa_f(h)} \partial_\phi u_r = 0 \text{ en } \phi = 0 \text{ avec } U = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \end{pmatrix}$$

où $\kappa_f(h)$ est une fonction positive qui représente le frottement au font. $\frac{1}{\kappa_f(h)}$ représente alors le glissement et est une fonction valant une constante notée $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ au niveau du front d'avancement du fluide et 0 loin du front de manière à retrouver une condition de non glissement, c'est à dire :

$$\frac{1}{\kappa_f(h)} = \begin{cases} 0 & \text{pour } z = 0,\ d(\beta) \leq x & \text{loin du front} \\ f(x) & \text{pour } z = 0,\ l(\beta) \leq x < d(\beta) & \\ \alpha & \text{pour } z = 0,\ 0 \leq x < l(\beta) & \text{près du front} \end{cases}$$

où $l(\beta) < d(\beta)$ sont les bornes des zones de l'étude (définie dans la partie 1.4), $\beta$ le coefficient de glissement et $f(x) \in [0, \alpha]$ est une fonction décroissante. On peut donc poser :

$$\frac{1}{\kappa_f(h)} = \alpha\chi(r)$$

avec $\chi$ une fonction de troncature valant 1 près du front et 0 loin du front. Ainsi $\lim_{x \to 0} \frac{\mu}{\kappa_f(h)} = \mu\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ est la longueur de glissement et le coefficient de glissement $\beta$ correspond à cette longueur de glissement adimensionnée.

On est alors dans la configuration suivante :

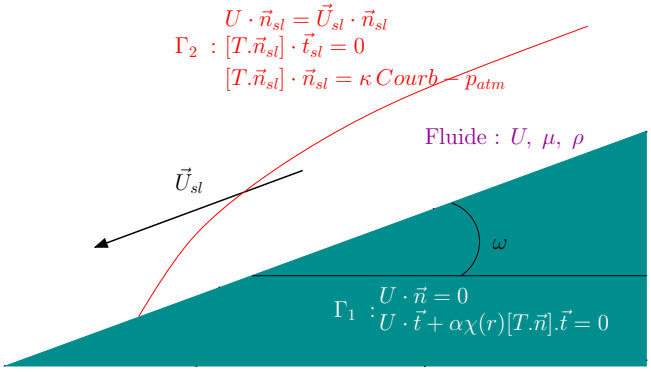



FIGURE 1.3: Ajout de la condition de glissement

*Remarque.* Notons que nous utiliserons les deux notations suivantes pour le glissement : $\alpha\chi(r) = \frac{1}{\kappa_f(h)}$.

Le système avec condition de glissement est alors le suivant :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** $(1) : U \cdot \vec{n} = 0$ en $z = 0$ <br> $(2) : U \cdot \vec{t} + \frac{1}{\kappa_f(h)} [T \cdot \vec{n}] \cdot \vec{t} = 0$ en $z = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl}$ en $z = h(x,t)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0$ en $z = h(x,t)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = \kappa \text{Courb}(x) - p_{atm}$ en $z = h(x,t)$ |

TABLE 1.3: Système avec condition de glissement

Pour $U = (u, w)^T$, sous forme développée, on a :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** $(1) : w(x,0) = 0$ <br> $(2) : u(x,0) + \frac{\mu}{\kappa_f(h)} u_z(x,0) = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : h_t + u(x,h)\, h_x = w(x,h)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : \left(1 - h_x^2\right)(u_z(x,h) + w_x(x,h)) - 4 h_x u_x(x,h) = 0$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : -2\mu u_x(x,h) \frac{1+h_x^2}{1-h_x^2} = \kappa h_{xx} \left(1 + h_x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + p(x,h)$ |

TABLE 1.4: Système développé avec condition de glissement

## 1.3 En coordonnées polaires

Les équations sont maintenant écrites dans le repère polaire $(r, \phi)$ , les inconnues sont la vitesse $u(r, \phi, t)$ et la pression $p(r, \phi, t)$ du fluide ainsi que la forme de la surface libre $\theta(r, t)$ . Sur la figure suivante, on peut observer le front d'avancement d'un fluide de densité $\rho$ et de viscosité dynamique $\mu$, avançant à une vitesse moyenne $\vec{U}_{sl}$ .

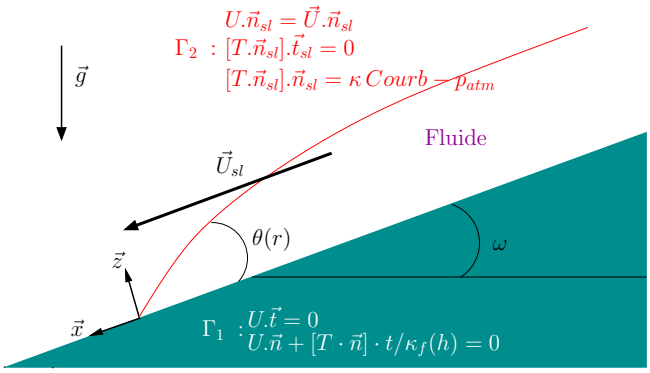



FIGURE 1.4: Représentation du problème étudié

On notera $\Omega$ le domaine occupé par le fluide tel que :

$$\Omega = \left\{ (r, \phi, t) \in \mathbb{R}^{3+} \,/\, t \geq 0\,,\, 0 \leq r \leq h_f(t) \;\text{ et } 0 \leq \phi \leq \theta(r, t) \right\}$$

avec $h_f(t)$ la longueur caractéristique du fluide. Le mouvement du fluide est caractérisé par sa vitesse $U(r, \phi, t)$ et sa pression $p(r, \phi, t)$ qui sont régies par les équations de Navier-Stokes en coordonnées polaires sur le domaine $\Omega$ :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** |
| $(\text{Eq } 1) : \nabla \cdot U(r, \phi, t) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 2) : \partial_t U(r, \phi, t) + \nabla \cdot \left[ U(r, \phi, t) \otimes U(r, \phi, t) - \frac{1}{\rho} T(r, \phi, t) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : U \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| $(2) : U \cdot \vec{t} + \frac{1}{\kappa_f(h)} [T \cdot \vec{n}] \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl}$ en $\phi = \theta(r, t)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta(r, t)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = \kappa \text{Courb}(r, t) - p_{atm}$ en $\phi = \theta(r, t)$ |

TABLE 1.5: Système complet polaire

où :

- $\text{Courb}(r)$ représente la courbure. On sait que la courbure en coordonnées polaires paramétrée par $t$ est telle que :

$$\text{Courb}(t) = \frac{r(t)\,\partial_t r(t)\,\partial^2_{tt}\theta(t) + 2(\partial_t r(t))^2\,\partial_t\theta(t) - \partial_t r(t)\,\partial^2_t r(t)\,\partial_t\theta(t) + r^2(t)\,(\partial_t\theta(t))^3}{\left((\partial_t r(t))^2 + r(t)^2\,(\partial_t\theta(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

or si $t = r$ , alors $\partial_t r(t) = 1$ et $\partial^2_t r(t) = 0$, alors pour un temps donné :

$$\text{Courb}(r) = \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2\,(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ce que l'on retrouve avec la formule suivant en polaire :

$$\text{Courb}\,(r) = -\frac{1}{r}\vec{\nabla}_{(r,\phi)} \cdot (r\vec{n}_{sl})$$

issue de Oron *et al.* [56] après passage en polaire,

- $\vec{g}$ représente la gravité,$\vec{g} = -g_0 \nabla G(r,\phi)$ où $g_0$ est la constante gravitationnelle et $G(r,\phi) = r\sin(\omega+\phi)$,
- $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la paroi solide,
- $\vec{n}_{sl} = \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2(\partial_r\theta(r,t))^2}}\begin{pmatrix} -r\partial_r\theta(r,t) \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}_{sl} = \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2(\partial_r\theta(r,t))^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ r\partial_r\theta(r,t) \end{pmatrix}$ sont respectivement la normale unitaire sortante et la tangente unitaire orientée dans le sens contraire à l'avancement du fluide, au niveau de la surface libre (cf figure 1.5).
- $\vec{U}_{sl} = -u_0\vec{e}_x$ où $u_0 \geq 0$ est la vitesse moyenne du fluide et $\vec{e}_x$ est orienté vers le fluide. On peut remarquer qu'en $\phi = 0$, $\vec{e}_x = \vec{e}_r$ donc $\vec{U}_{sl} = -u_0\vec{e}_r$ en $\phi = 0$.

Les normales et tangentes unitaires aux différentes surfaces sont représentés sur la figure suivante :

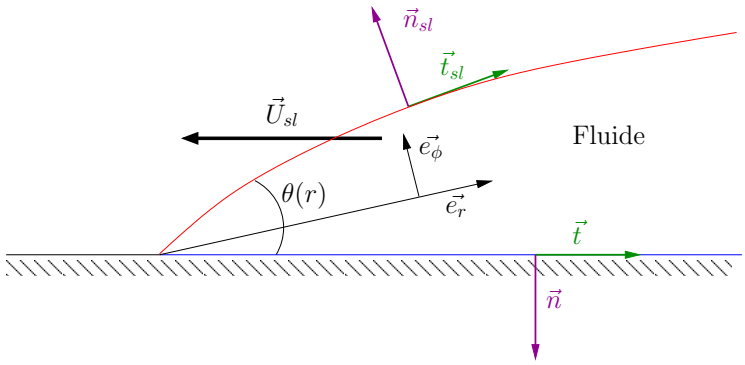



FIGURE 1.5: Orientation des normales et tangentes unitaires aux bords du domaine

*Remarque.* Notons que le gradient de $U$ s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial_r u_r & \frac{1}{r}(\partial_\phi u_r - u_\phi) & \partial_z u_r \\ \partial_r u_\phi & \frac{1}{r}(\partial_\phi u_\phi + u_r) & \partial_z u_\phi \\ \partial_r u_z & \frac{1}{r}\partial_\phi u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix} \text{ où } U(r,\phi,t) = \begin{pmatrix} u_r(r,\phi,t) \\ u_\phi(r,\phi,t) \\ u_z(r,\phi,t) \end{pmatrix}$$

en coordonnées cylindriques et donc en polaire, on a donc $\nabla U = \begin{pmatrix} \partial_r u_r & \frac{1}{r}(\partial_\phi u_r - u_\phi) \\ \partial_r u_\phi & \frac{1}{r}(\partial_\phi u_\phi + u_r) \end{pmatrix}$.

Sous forme développée, le système s'écrit :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse & de quantité de mouvement :** |
| $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : u_\phi(r,0,t) = 0$ |
| $(2) : \frac{\mu}{\kappa_f(h)\, r} \partial_\phi u_r(r,0,t) = u_r(r,0,t)$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : u_\phi(r,\theta(r,t),t) - r\partial_r\theta(r,t)\, u_r(r,\theta(r,t),t) = \vec{U} \cdot \vec{n}_{sl}$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : \quad 0 = \left[1 - r^2 (\partial_r\theta(r,t))^2\right] \left[ \frac{1}{r}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r} u_\phi + \partial_r u_\phi \right](r,\theta(r,t),t)$ |
| $+2\partial_r\theta(r,t) \left[\partial_\phi u_\phi + u_r - r\partial_r u_r\right](r,\theta(r,t),t)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : \frac{2\mu \left\{ r^2 (\partial_r\theta(r,t))^2 \partial_r u_r + \partial_r\theta(r,t) \left[u_\phi - \partial_\phi u_r - r\partial_r u_\phi\right] + \frac{1}{r}\left[u_r + \partial_\phi u_\phi\right] \right\}(r,\theta(r,t),t)}{1 + r^2 (\partial_r(r,t))^2}$ |
| $= \kappa \frac{r\partial^2_{rr}(r,t) + 2\partial_r(r,t) + r^2 (\partial_r(r,t))^3}{\left(1 + (r\partial_r(r,t))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p(r,\theta(r,t),t) - p_{atm}$ |

TABLE 1.6: Système complet polaire développé

## 1.4 Décomposition de domaine

L'introduction de cette condition de glissement nous permet de décomposer le problème en plusieurs zones de résolution qui n'auront pas les même conditions limites. Ce problème est alors divisible en deux sous-problèmes devant être résolus chacun sur une partie du domaine $\Omega$, l'une situé loin du front et l'autre près du front d'avancement du fluide. En effet la condition limite (2) adimensionnée s'écrit :

$$-\beta\chi(r)\left[T(r,0,t)\cdot\vec{n}\right]\cdot\vec{t} = u(r,0,t)\cdot\vec{t} - 1$$

où les bornes $l(\beta)$ et $d(\beta)$ seront à déterminer lors du raccord des solutions. Ainsi près du front, pour $r \in \left[0, l(\beta)\right]$, la condition (2) sera une condition de glissement :

$$-\beta\left[T(r,0,t)\cdot\vec{n}\right]\cdot\vec{t} = u(r,0,t)\cdot\vec{t} - 1$$

loin du front, on aura une condition de non-glissement classique :

$$u(r,0,t)\cdot\vec{t} = 1$$

et dans la zone de raccord, ces deux conditions devront coexister grâce à la fonction de troncature $\chi$.

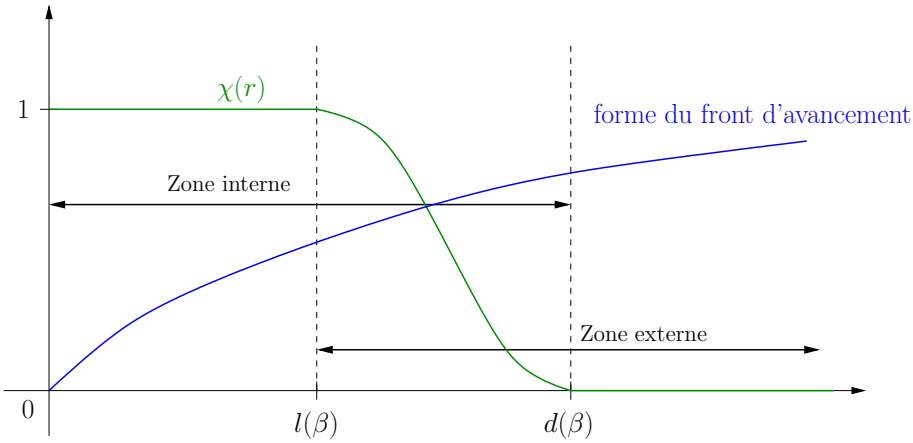



FIGURE 1.6: Fonction $\chi(r)$ et zones du développement

On peut alors diviser le domaine $\Omega = \{(r,\phi,t) \in \mathbb{R}^{3+} / \, t \geq 0 \, , 0 \leq r \leq h_f(t) \;\text{ et } 0 \leq \phi \leq \theta(r,t)\}$ en deux zones principales qui sont chacune caractérisées par une longueur :

- $h_f(t)$ qui est la longueur caractéristique du fluide et
- $\beta = \dfrac{\alpha\mu}{h_f(t)}$ où $\alpha\mu$ est la longueur de glissement et $L$ la longueur caractéristique du front.

Il est difficile de construire une approximation de la solution sur le domaine $\Omega_R$ qui reste valide à l'infini. On introduit alors deux longueurs caractéristiques qui vont nous aider une visualisation plus concrète du domaine extérieur et intérieur et à comprendre comment se fait le raccord entre les descriptions de la solution entre ces différentes zones.

On définit donc les deux longueurs suivantes :

- $l(\beta)$ distance minimale jusqu'à laquelle la description de la solution en variables rapides est valide,
- $d(\beta)$ distance minimale à partir de laquelle la description en variables lentes a un sens (avant ce point, la solution a un comportement qui peut être plus facilement décrit en variables rapides).

Dans ce type de situation, il est naturel de supposer que $l(\beta)$ et $d(\beta)$ sont deux fonctions continues de $\beta$ à valeurs strictement positives vérifiant :

- $0 < l(\beta) < d(\beta) < L$ qui, comme on le verra dans la suite, permet à la zone de recouvrement d'exister,
- $\lim\limits_{\beta\to 0} d(\beta) = 0$ et $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{l(\beta)}{\beta} = +\infty$.

On définit alors ces deux zones telles que :

- $\Omega_{int} = \Omega \cap B_{d(\beta)}$ qui est un voisinage de l'origine, où $B_a = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 / \, |r| \leq a \text{ et } 0 \leq \phi \leq \theta(r)\}$ est un secteur de la boule de $\mathbb{R}^2$ de rayon $a$ et de centre l'origine du repère, pour la norme euclidienne. Ainsi $\Omega_{int} = \{(r,\varphi) \in \Omega / \, r \in [0, d(\beta)] \, , \phi \in [0, \theta(r)]\}$, ce que l'on représente tel que :

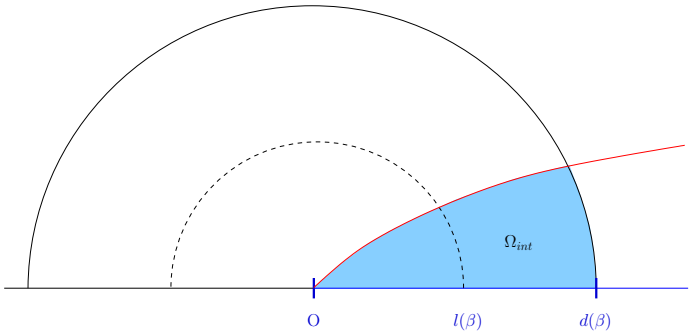



FIGURE 1.7: Domaine $\Omega_{int}$

Dans le domaine $\Omega_{int}$, on écrira les inconnues en fonction de la variable rapide $R = \beta^{-1} r$.

- $\Omega_{ext} = \Omega \setminus B_{l(\beta)}$ le domaine extérieur où l'on cherche un développement asymptotique des inconnues en variables lentes. Donc $\Omega_{ext} = \{(r,\phi) \in \Omega / r \in [l(\beta), +\infty[, \phi \in [0, \theta(r)]\}$, ce que l'on représente tel que :

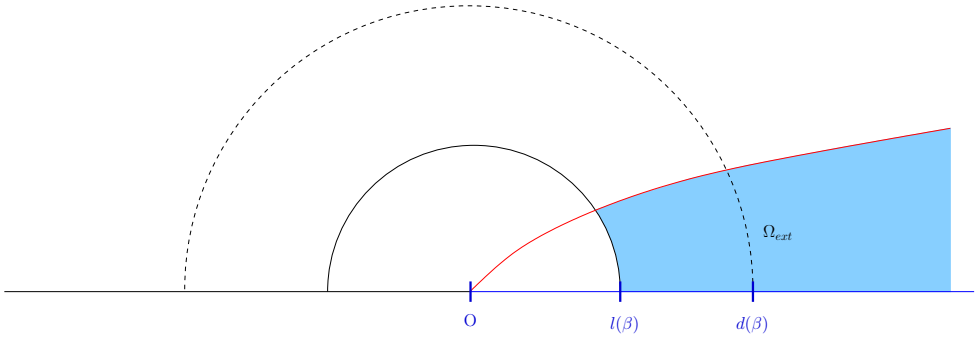



FIGURE 1.8: Domaine $\Omega_{ext}$

Ces deux domaines ont donc une partie commune notée $\Omega_R = \Omega_{int} \cap \Omega_{ext} = \{(r,\phi) \in \Omega / r \in [l(\beta), d(\beta)]\}$ qui est la zone de raccord entre les deux domaines précédents :

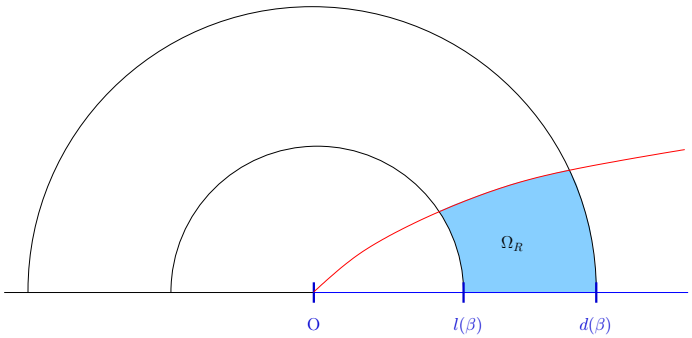



FIGURE 1.9: Domaine de raccord $\Omega_R$

où on a :

$$\begin{aligned} & l(\beta) < r < d(\beta) \text{ et } 0 \leq \phi \leq \theta(r) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{l(\beta)}{\beta} < R < \frac{d(\beta)}{\beta} \text{ et } 0 \leq \phi \leq \theta(r) \end{aligned}$$

Ainsi grâce aux propriétés de $l(\beta)$ et $d(\beta)$, $\lim_{\beta\to 0} r = 0$ et $\lim_{\beta\to 0} R = +\infty$. On s'attend alors à ce que la solution exprimée en variables rapides au voisinage de l'infini se raccorde avec la solution exprimée en variables lentes au voisinage de l'origine.

## 1.5 Changement de repère

Dans la suite, nous utiliserons le changement de repère qui consiste à se mettre dans le repère du fluide. C'est donc la paroi qui va avancer, le fluide ne se déplace plus mais il y a toujours un champ de vitesse $\bar{u}$ à l'intérieur du fluide. On pose donc $\bar{u} = U - \vec{U}_{sl}$ où $\bar{u}$ est la vitesse dans le nouveau repère. Si l'on est en stationnaire, la vitesse normale au bord est alors nulle sur toutes les frontières et les équations de volume ne changent pas.

## 1.6 Principe de la formulation courant

Dans le repère cartésien, pour un fluide incompressible ayant un champ de vitesse $u(x,y,z)$ à divergence nulle, il existe un vecteur potentiel que l'on notera $A(x,y,z)$, tel que :

$$u(x,y,z) = \nabla \wedge A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_y A_z(x,y,z) - \partial_z A_y(x,y,z) \\ \partial_z A_x(x,y,z) - \partial_x A_z(x,y,z) \\ \partial_x A_y(x,y,z) - \partial_y A_x(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Pour un écoulement bidimensionnel, on a $u_z(x,y,z) = 0$ et invariance par translation suivant $z$ c'est à dire $\partial_z = 0$. On peut alors choisir un vecteur potentiel $A(x,y,z) = A(x,y) = (0,0,\psi(x,y))$ ainsi :

$$u(x,y) = \nabla \wedge A(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_y \psi(x,y) \\ -\partial_x \psi(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors faire de même en coordonnées polaires où on aura :

$$u(r,\phi,z) = \nabla \wedge A(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi A_z(r,\phi,z) - \partial_z A_\phi(r,\phi,z) \\ \partial_z A_r(r,\phi,z) - \partial_r A_z(r,\phi,z) \\ \frac{1}{r}\left[\partial_r\left(r A_\phi(r,\phi,z)\right) - \partial_\phi A_r(r,\phi,z)\right] \end{pmatrix}$$

On considère alors un écoulement bidimensionnel avec $u_z(r,\phi,z) = 0$ et invariance par translation suivant $z$ c'est à dire $\partial_z = 0$. On peut alors choisir un vecteur potentiel $A(r,\phi,z) = A(r,\phi) = (0,0,\psi(r,\phi))$ ainsi :

$$u(r,\phi) = \begin{pmatrix} u_r(r,\phi) \\ u_\phi(r,\phi) \\ 0 \end{pmatrix} = \nabla \wedge (\psi(r,\phi)\vec{e}_z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi \psi(r,\phi) \\ -\partial_r \psi(r,\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où on retrouve les mêmes signes qu'en cartésien. Ici on n'utilise pas la composante suivant $z$, on aura donc :

$$u(r,\phi) = \begin{pmatrix} u_r(r,\phi) \\ u_\phi(r,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi \psi(r,\phi) \\ -\partial_r \psi(r,\phi) \end{pmatrix}$$

CHAPITRE 2

# EXISTENCE ET UNICITÉ

Ici nous allons étudier les problèmes se situant au niveau du front d'avancement, en effet les conditions limites appliquées au film mince ne peuvent pas se raccorder en un unique point représentant le contact entre trois milieux solide/liquide/gaz. Nous montrons que la solution obtenue dans un dièdre a une énergie visqueuse infinie et en utilisant les résultats de Solonnikov [69] nous montrerons que pour une surface libre quelconque la condition d'adhérence est de base incompatible avec un front. Nous étudierons ensuite l'utilisation d'une condition de glissement près du front qui permettra le raccord avec la condition d'adhérence loin du front et nous donnera un cadre propre pour construire plus tard différents modèles de front.

**Sommaire**


2.1 Problème de Stokes stationnaire avec adhérence au fond . . . . . **23**
2.1.1 Étude variationnelle . . . . . 24
2.1.2 Solution analytique . . . . . 25
2.1.3 Expression de l'énergie visqueuse . . . . . 28
2.2 Étude de Solonnikov : Surface libre inconnue . . . . . **29**
2.3 Étude de Kröner . . . . . **30**
2.4 Passage des équations de Navier-Stokes à celles de Stokes . . . . . **31**
2.5 Existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes . . . . . **32**
2.5.1 Décomposition de Leray . . . . . 32
2.5.2 Opérateur de Stokes . . . . . 33
2.5.3 Théorème de Leray . . . . . 34
2.6 Justification de la construction d'un modèle Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes . . . . . **36**


## 2.1 Problème de Stokes stationnaire avec adhérence au fond

Pour commencer, étudions le problème de Stokes stationnaire dans le cas ou le fluide adhère à la surface solide. Le problème d'existence et d'unicité se situe plus particulièrement au niveau du front d'avancement du fluide, nous allons donc passer en coordonnées polaires qui sont plus pratiques pour étudier cette zone. L'inconvénient majeur de notre problème est que l'on ne connaît pas la forme de la surface libre du fluide étudié. Une première approche est de considérer dans un premier temps

que cette surface est plane de manière à simplifier le problème pour pouvoir le résoudre, c'est à dire $\theta(r) = \theta$, alors la courbure est nulle et on se situe dans le cas suivant :

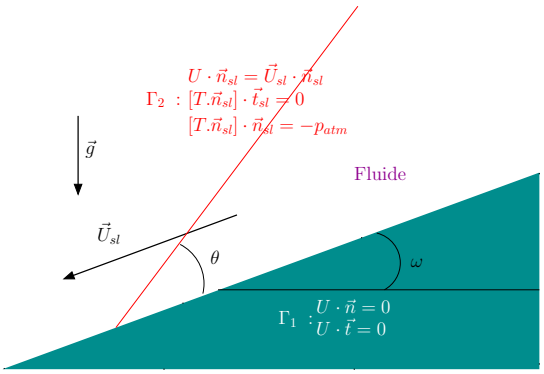



FIGURE 2.1: Problème dans un dièdre

où $\vec{n}_{sl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}_{sl} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, le problème à résoudre est alors :

| |
|---|
| **Équations de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 1) : \nabla \cdot U(r,\phi) = 0$ |
| $(\text{Eq } 2) : \mu \Delta U(r,\phi) - \nabla p(r,\phi) = \rho \vec{g}$ |
| **Condition de non-glissement :** |
| $(1)\,\&\,(2) : U = 0$ en $\phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl}$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = -p_{atm}$ en $\phi = \theta$ |

TABLE 2.1: Problème de Stokes stationnaire dans un dièdre

### 2.1.1 Étude variationnelle

Pour avoir existence et unicité d'une solution $H^1$ à notre problème, il faut que le problème soit variationnel mais aussi que l'on ait continuité des conditions limites. Ici nous sommes dans le cas où l'on considère le problème précédent (2.1). On sait selon le théorème 3.1 page 23 du Lions et Magenes [49] que si $U \in \left(H^1(\Omega)\right)^2$ alors $U \in C^0\left(\Omega; H^{\frac{1}{2}}\right)$. Or ici $u$ n'est pas continue sur $\Gamma$ donc $u_{|\Gamma} \notin H^{\frac{1}{2}}$ et donc on ne peut pas trouver de champ $U \in \left(H^1(\Omega)\right)^2$ pour ce problème. On peut facilement voir que dans le système précédent, il n'y a pas raccord de la vitesse normale sur le bord du domaine, la solution obtenue en résolvant ce système de peut donc pas être dans le domaine $H^1(\Omega)$. On peut aussi observer ce résultat numériquement. Nous allons utiliser la fonction courant pour résoudre ce système.

### 2.1.2 Solution analytique

#### 2.1.2.1 Changement de repère

On décide de changer de repère, on se met alors dans le repère du fluide. C'est donc la paroi qui va avancer, le fluide ne se déplace plus mais il y a toujours un champ de vitesse $\bar{u}$ à l'intérieur du fluide. On pose donc $\bar{u} = U - \vec{U}_{sl}$ où $\bar{u}$ est la vitesse dans le nouveau repère et dans ce cas $\vec{U}_{sl}$ est constant dirigé dans le sens de l'écoulement. Donc on peut prendre $\vec{U}_{sl} = -u_0\vec{e}_x$ avec $u_0$ la vitesse moyenne d'avancement du fluide et on a alors $\vec{U}_{sl}\cdot\vec{n} = 0$ et $\vec{U}_{sl}\cdot\vec{t} = -u_0$. Le problème est le suivant :

| |
|---|
| **Équations de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 1) : \nabla\cdot\bar{u}(r,\phi) = 0$ |
| $(\text{Eq } 2) : \mu\Delta\bar{u}(r,\phi) - \nabla p(r,\phi) = \rho\vec{g}$ |
| **Condition de non-glissement :** |
| $(1) : \bar{u}\cdot\vec{n} = 0$ en $\phi = 0$ |
| $(2) : \bar{u}\cdot\vec{t} = -\vec{U}_{sl}\cdot\vec{t} = u_0$ en $\phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : \bar{u}\cdot\vec{n}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : [T\cdot\vec{n}_{sl}]\cdot\vec{t}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : [T\cdot\vec{n}_{sl}]\cdot\vec{n}_{sl} = \kappa\text{Courb}(r) - p_{atm}$ en $\phi = \theta$ |

TABLE 2.2: Problème de Stokes stationnaire dans le repère du front

#### 2.1.2.2 Passage en formulation courant

Comme $\nabla\cdot u(r,\phi) = 0$ (en omettant les), on peut introduire $\psi(r,\phi)$ la fonction courant associée à $u(r,\phi)$ telle que $u(r,\phi) = (u_r(r,\phi), u_\phi(r,\phi))^T = \text{rot}\,(\psi(r,\phi)\vec{e}_z) = \left(\frac{1}{r}\partial_\phi\psi(r,\phi), -\partial_r\psi(r,\phi)\right)^T$ (voir chapitre 1.6). L'équation (Eq1) est donc directement vérifiée. En appliquant l'opérateur rotationnel et divergence à l'équation (Eq2), on obtient les équations (Eq2.1) et (Eq2.2). Le problème s'écrit alors :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse & de quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 1) : \quad u = \text{rot}\,(\psi(r,\phi)\vec{e}_z)$ |
| $(\text{Eq } 2) : \quad \mu\Delta U(r,\phi) - \nabla p(r,\phi) = \rho\vec{g}$ |
| $(\text{Eq2.1}) : \quad \Delta^2\psi(r,\phi) = 0$ |
| $(\text{Eq2.2}) : \quad \Delta(p + \rho g_0 G)(r,\phi) = 0$ |
| **Condition de non-glissement :** |
| $(1) : \partial_r\psi(r,0) = 0$ en $\phi = 0$ |
| $(2) : \partial_\phi\psi(r,0) = 1$ en $\phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : \partial_r\psi(r,\theta) = 0$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : \partial^2_{\phi\phi}\psi(r,\theta) = 0$ en $\phi = \theta$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : \frac{2C_a}{r}\left[\frac{1}{r}\partial_\phi\psi - \partial^2_{\phi r}\psi\right](r,\theta) = p(r,\theta) - p_{atm}$ en $\phi = \theta$ |

TABLE 2.3: Problème de Stokes stationnaire dans un dièdre en formulation courant

#### 2.1.2.3 Résolution

$\psi(r,\phi)$ est solution d'un bilaplacien sans terme source et doit vérifier les conditions limites suivantes :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1) : & \partial_r \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = 0 \\ (2) : & \partial_\phi \psi(r,\phi) = r \quad \text{en } \phi = 0 \end{cases}$$
$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3) : & \partial_r \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = \theta \\ (4) : & \partial^2_{\phi\phi} \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = \theta \end{cases}$$

Dans la littérature, les auteurs utilisent une résolution par séparation de variables qui permet de trouver la solution dite « singulière ». Nous proposons ici d'utiliser les espaces de singularité présentés par Makhlouf [51] dans sa thèse.

- Introduction aux espaces $S^\mu$ d'Makhlouf
  Sur les domaines de type secteur angulaire $K_\omega$ où $\omega$ est l'angle d'ouverture du domaine, on considère l'espace vectoriel complexe $\mathscr{S}^\mu(K_\omega)$ défini, pour $\mu \in \mathbb{C}$, par Dauge [16] et Caloz *et al.* [13] :

$$\mathscr{S}^\mu(K_\omega) = \left\{ S \in \mathscr{C}^\infty(K_\omega) \,|\, S(r,\phi) = r^\mu \sum_{m=0}^{m<\infty} p_m(\phi) \ln^m r,\ p_m \in \mathscr{C}^\infty([0,\omega]) \right\}, \tag{2.1}$$

  où $\sum_{m=0}^{m<\infty} p_m(\phi) \ln^m r = P(\ln r, \phi)$ désigne un polynôme en $\ln r$ à coefficients $\mathscr{C}^\infty$sur $[0,\omega]$ en $\phi$, il s'agit de la partie logarithmique de $S \in \mathscr{S}^\mu(K_\omega)$.
  Il montre alors que le laplacien est surjectif de l'espace $\mathscr{S}^\mu(K_\omega)$ dans $\mathscr{S}^{\mu-2}(K_\omega)$ et que son noyau est l'espace vectoriel engendré par la famille :

$$\left\{ \partial^n_\lambda r^\lambda \cos(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu}, \partial^n_\lambda r^\lambda \sin(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu} \right\}_{n\geq 0}$$

  On note alors $\mathscr{H}^\mu_n(K_\omega)$ le noyau de l'opérateur $\Delta^n$ dans l'espace $\mathscr{S}^\mu(K_\omega)$ :

$$\mathscr{H}^\mu_n(K_\omega) = \left\{ S \in \mathscr{S}^\mu(K_\omega) \,|\, \Delta^n S = 0 \right\}$$

  donc $\mathscr{H}^\mu_1(K_\omega) = \mathrm{Vect}\left( \left\{ \partial^n_\lambda r^\lambda \cos(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu}, \partial^n_\lambda r^\lambda \sin(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu} \right\}_{n\geq 0} \right)$.
  Le corollaire 3.2.11 de Makhlouf [51] assure que pour tout entier $n$ et tout complexe $\mu$, l'opérateur $\Delta^n$ est une application linéaire surjective de $\mathscr{S}^\mu(K_\omega)$ dans $\mathscr{S}^{\mu-2n}(K_\omega)$.
  Selon la proposition 3.2.15 de Makhlouf [51], soit $n$ un entier $\geq 0$, on a :

$$\mathscr{H}^\mu_n(K_\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} r^{2j} \left( \mathscr{H}^{\mu-2j}_1(K_\omega) \right)$$

  Ainsi selon le corollaire 3.2.16 de Makhlouf [51], soit $r^\mu P(\ln r, \phi)$ un élément de $\mathscr{H}^\mu_n(K_\omega)$. Il existe alors un entier $p$ et des nombres complexes $a^m_j$ et $b^m_j$ pour $0 \leq j \leq p$ et $0 \leq m \leq n-1$ tels que :

$$r^\mu P(\ln r, \phi) = \sum_{m=0}^{n-1} r^{2m} \sum_{j=0}^{p} \left( a^m_j \partial^j_\lambda r^\lambda \cos(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu-2m} + b^m_j \partial^j_\lambda r^\lambda \sin(\lambda\phi)\Big|_{\lambda=\mu-2m} \right)$$

- Calcul de la solution
  On cherche $\psi(r,\phi) \in S^\mu$. Il faut maintenant trouver la valeur de $\mu$. Les fonctions $S$ de l'espace $S^\mu$ peuvent se représenter de manière simpliste telles que :

$$S(r,\phi) \sim r^\mu P(\ln r, \phi)$$

Ainsi le champ de vitesse associé sera de la forme :

$$u(r,\phi) \sim r^{\mu-1} g(\ln r, \phi)$$

où on rappelle que :

$$u(r,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}} \partial_\phi \psi(r,\phi) \\ -\partial_r \psi(r,\phi) \end{pmatrix}$$

Or $\psi(r,\phi)$ représente les singularités de la solution près du front donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mu - 1 \leq 0$ si on veut obtenir une vitesse qui sera singulière proche du front. Cela ne pose pas de problème ici car la solution trouvée ne sera utilisée que loin du front. Si on substitue $\psi(r,\phi)$ par $r^\mu P(\ln r, \phi)$ dans la condition limite (2), on obtient :

$$\begin{array}{lll} (2) & \partial_\phi \psi(r,\phi) = r & \text{en } \phi = 0 \\ \Leftrightarrow & r^\mu P(\ln r, \phi) = r & \end{array}$$

Ainsi $\underline{\mu = 1}$, on cherche alors les $\psi(r,\phi)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(r,\phi) = & \sum_{l=0}^{N} \left[ \partial_\lambda^l r^\lambda \left( a_l^1 \cos(\lambda\phi) + b_l^1 \sin(\lambda\phi) \right) \right] \Big|_{\lambda=\mu} \\ & + \sum_{l=0}^{N} \left[ \partial_\lambda^l r^\lambda \left( a_l^2 \cos((\lambda-2)\phi) + b_l^2 \sin((\lambda-2)\phi) \right) \right] \Big|_{\lambda=\mu} \end{aligned} \tag{2.2}$$

car les solutions singulières (proches du front) du bilaplacien sont à chercher dans cet espace. On prendra $N = 2$, ce qui est suffisant pour trouver la solution unique, on peut faire les calculs avec $N > 2$, ceux-ci sont plus long et compliqués mais mènent à la même solution unique. $\psi(r,\phi)$ doit alors vérifier les conditions limites suivantes :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_0 : & \partial_r \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = 0 \\ (2)_0 : & \partial_\phi \psi(r,\phi) = \bar{r} \quad \text{en } \phi = 0 \end{cases}$$
$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_0 : & \partial_r \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = \theta \\ (4)_0 : & \partial^2_{\phi\phi} \psi(r,\phi) = 0 \quad \text{en } \phi = \theta \end{cases}$$

On a alors comme solution :

$$\psi(r,\phi) = -\frac{r\left[\phi \sin\phi \sin^2\theta + \phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta - \theta\sin\phi\right]}{\theta - \cos\theta\sin\theta}$$

On observe que cette solution ne contient finalement pas de terme en $\ln r$ mais elle reste singulière en $r = 0$. On peut alors écrire l'expression de la vitesse $u(r,\phi)$ :

$$u(r,\phi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\phi + (\phi-\theta)\cos\phi - \cos\theta\sin(\phi-\theta) - \phi\cos\theta\cos(\phi-\theta)}{\cos\theta\sin\theta - \theta} \\ -\dfrac{(\phi-\theta)\sin\phi - \phi\cos\theta\sin(\phi-\theta)}{\cos\theta\sin\theta - \theta} \end{pmatrix}$$

Mais cette solution est non nulle au point $r = 0$, elle est donc singulière en ce point et donc non $H^1$.

La figure suivante donne une représentation de la solution singulière classique $u(r,\phi)$ sur tout le domaine d'étude :

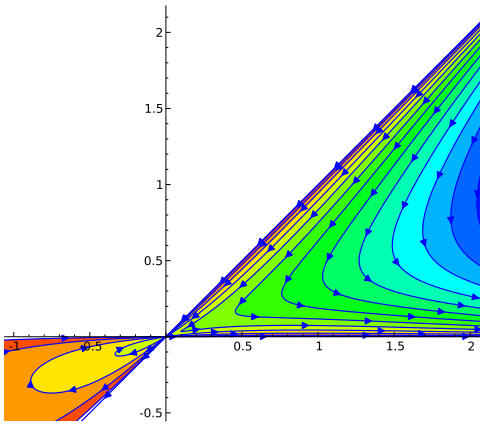



FIGURE 2.2: Représentation de la solution singulière

On observe bien la singularité à l'origine du repère. Ceci sera corrigé grâce à la condition de glissement que l'on a ajoutée après raccord des deux zones d'étude.

### 2.1.3 Expression de l'énergie visqueuse

Pour obtenir l'équation de conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de quantité de mouvement par le vecteur $u$. On obtient alors :

$$\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}\left(u^2\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p.u + g.u + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left(\sigma_v\right).u$$

où $\sigma_v = \mu\left(\nabla u + (\nabla u)^t\right)$. L'énergie visqueuse correspond au terme $\mathrm{div}\left(\sigma_v\right).u$, en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\sigma_v\right).u \quad &= \mu\partial_x\left[u_x\partial_x u_x + u_z\partial_x u_z\right] + \mu\partial_z\left[u_x\partial_z u_x + u_z\partial_z u_z\right] \\ &\quad \underbrace{-\mu\left[(\partial_x u_x)^2 + (\partial_x u_z)^2 + (\partial_z u_x)^2 + (\partial_z u_z)^2\right]}_{=E_v}\end{aligned}$$

Les termes contenus dans le deuxième crochet correspondent à l'énergie visqueuse dissipée que l'on notera $E_v$. Ce terme est à l'origine de l'explosion de l'énergie près du front. On s'intéressera donc à son intégrale près du front c'est à dire sur un domaine borné.

On peut alors calculer ce terme avec la vitesse trouvée précédemment qui faut écrire en coordonnées cartésiennes. On a alors :

$$\begin{aligned}u \quad &= u_r\vec{e}_r + u_\phi\vec{e}_\phi = u_r\left(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_z\right) + u_\phi\left(-\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_z\right) \\ &= \underbrace{\left(u_r\cos\phi - u_\phi\sin\phi\right)}_{=u_x}\vec{e}_x + \underbrace{\left(u_r\sin\phi + u_\phi\cos\phi\right)}_{=u_z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

où on écrit $u_r$ et $u_\phi$ grâce à :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+z^2} \\ \phi = \arctan\frac{z}{x}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \\ \sin\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\end{cases}$$

On a alors $u = (u_x, u_z)^T$ avec :

$$u_x = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta - \theta}\left[\frac{x\sin\theta}{x^2+z^2}\left(z\sin\theta + x\cos\theta\right) + \sin^2\theta\arctan\frac{z}{x} - \theta\right]$$

$$u_z = \frac{1}{\cos\theta\sin\theta - \theta}\left[\frac{x\sin\theta}{x^2+z^2}\left(z\cos\theta - \sin\theta x\right) + \left(\sin\theta - \cos\theta\arctan\frac{z}{x}\right)\sin\theta\right]$$

L'énergie visqueuse s'écrit alors :

$$E_v = -\frac{4\sin^2\theta\left(2x^4+z^4+x^2z^2\right)\left[\left(x^2-z^2\right)\cos^2\theta + 2xz\cos\theta\sin\theta - x^2\right]}{\left(x^8+4x^6z^2+6x^4z^4+4x^2z^6+z^8\right)\left[\theta-\cos\theta\sin\theta\right]^2}$$

On intègre alors $E_v$ sur la hauteur (avec $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) puis sur une largeur $0<x_{min}<x<x_{max}$ :

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}}\left(\int_0^{h=x\tan\theta} E_v\,dz\right)dx = \frac{\sin^2\theta\left[\left(5+\cos^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta + 3\theta\left(\cos^2\theta-3\right)\right](x_{max}-x_{min})}{3\left[\theta-\cos\theta\sin\theta\right]^2}\ln\left(\frac{x_{min}}{x_{max}}\right)$$

où on suppose que $x_{max}$ est un cutoff lié à l'échelle macroscopique de l'écoulement. Quant à $x_{min}$, il représentera un cutoff où la condition de non glissement ne pourra plus s'appliquer. En effet si $x_{min}\to 0$, l'énergie dissipée tendra vers l'infini et la solution du problème ne sera ni $H^1$, ni physique.

## 2.2 Étude de Solonnikov : Surface libre inconnue

Dans un second temps, nous pouvons reprendre la démonstration de Solonnikov [69] où on se place en coordonnées cartésiennes avec la surface libre $h(x)$ variant en fonction de $x$. Ici le fait d'utiliser les équations de Navier-Stokes ou de Stokes ne change pas le résultat. On se place dans le domaine $\Omega_d$ borné par $L$, la ligne verticale définie par $x=d\in\mathbb{R}^{+*}$ ainsi que les frontières $\Gamma_1=\{0<x<d,\ z=0\}$ et $\Gamma_2=\{0<x<d,\ z=h(x)\}$ où $h(x)>0$ pour $x\in(0,d)$ et $h(0)=h'(0)=0$. De plus $\nabla\cdot U=0$ sur $\Omega_d$ , $U=0$ sur $\Gamma_1$ et $U\cdot\vec{n}_{sl}=\vec{U}_{sl}\cdot\vec{n}_{sl}$ sur $\Gamma_2$. Soit $0<\zeta<d$ et $\Omega_\zeta=\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^{2+}/0<z<h(x),\ \ 0<x<\zeta\right\}$. On peut alors intégrer l'équation $\nabla\cdot U=0$ sur $\Omega_\zeta$ (pour $U=(u,w)^T$) :

$$\begin{aligned}0 &= \int\nabla\cdot U\,dx = \int_{\partial\Omega}U\cdot\vec{n}\,ds = \int_{\Gamma_2}U\cdot\vec{n}\,ds + \int_{\Gamma_1}U\cdot\vec{n}\,ds + \int_L U\cdot\vec{n}\,ds\\ &= \int_0^\zeta\vec{U}_{sl}\left(\xi,h(\zeta)\right)\cdot\vec{n}_{sl}\,d\xi + \int_0^{h(\zeta)}u(\zeta,z)\,dz\end{aligned}$$

or $\vec{U}_{sl}\left(\xi,h(\zeta)\right)\cdot\vec{n}_{sl}=a\vec{n}_{sl}$ car la vitesse de la surface libre est constante, de plus $\vec{n}_{sl}=-h'+\mathcal{O}\left(h'^3\right)$, donc si la surface libre varie lentement :

$$0<h(\zeta)=\int_0^\zeta h'(\xi)\,d\xi=\int_0^{h(\zeta)}u(\zeta,z)\,dz\le\left|\int_0^{h(\zeta)}u(\zeta,z)\,dz\right|\le\left|\int_0^{h(\zeta)}\left(\int_0^z\frac{\partial u(\zeta,\xi_2)}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)dz\right|$$

or :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{h(\zeta)}\left(\int_0^z\frac{\partial u(\zeta,\xi_2)}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)dz\right| &\le\left|h^{\frac{1}{2}}(\zeta)\cdot\left(\int_0^{h(\zeta)}\left(\int_0^z\frac{\partial u(\zeta,\xi_2)}{\partial\xi_2}d\xi_2\right)^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\right| && \text{Cauchy-Schwarz}\\ &\le h^{\frac{1}{2}}(\zeta)\left|\int_0^{h(\zeta)}\left(h(\zeta)\int_0^z\left(\frac{\partial u(\zeta,\xi_2)}{\partial\xi_2}\right)^2d\xi_2\right)dz\right|^{\frac{1}{2}} && \text{C-S pour } g=1\\ &\le h^{\frac{1}{2}}(\zeta)\left|h(\zeta)\int_0^{h(\zeta)}\left[\int_0^{h(\zeta)}\left(\frac{\partial u(\zeta,\xi_2)}{\partial\xi_2}\right)^2d\xi_2\right]dz\right|^{\frac{1}{2}} && \text{car } 0<z<h(x)\\ &\le h^{\frac{3}{2}}(\zeta)\left|\int_0^{h(\zeta)}\left(\frac{\partial u(\zeta,z)}{\partial z}\right)^2dz\right|^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité $\int_a^b \left[\int_a^b f(x)\,dx\right] dx = (b-a)\int_a^b f(x)\,dx$. Ainsi :

$$h(\zeta) \leq h^{\frac{3}{2}}(\zeta)\left[\int_0^{h(\zeta)}\left(\frac{\partial u(\zeta,z)}{\partial z}\right)^2 dz\right]^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \int_\varepsilon^d \frac{1}{h(\zeta)}d\zeta \leq \int_{\Omega_d\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla U|^2\,dx$$

Donc comme le terme de gauche tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0$, le terme $\int_{\Omega_d\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla U|^2\,dx$ qui représente l'énergie visqueuse du système (cf 2.1.3), est non-borné ! On remarque que l'on a uniquement utilisé l'équation de conservation de la masse et pas la condition de conservation de quantité de mouvement (autrement dit Navier-Stokes), pour faire cette démonstration. Il suffit donc d'avoir $\nabla\cdot U = 0$ et une condition d'adhérence au fond pour être incompatible avec une solution $U \in H^1(\Omega)$ au niveau du front du film.

## 2.3 Étude de Kröner

On peut se ramener à la démonstration de Kröner [46] où il considère un fluide dans un tube poussé par un piston et glissant sur deux des bords du domaine. La configuration est la suivante :

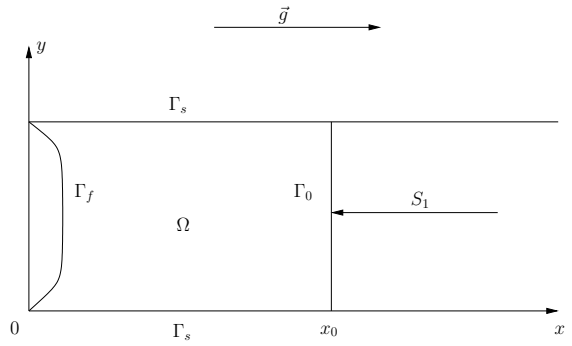



FIGURE 2.3: Fluide dans un tube poussé par un piston

Son système est écrit dans le repère du fluide par les équations de Navier-Stokes tel que :

$$\begin{array}{ll} -\nu\Delta v_i + \rho v\nabla v_i + \partial_i p = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla\cdot v = 0 & \text{dans } \Omega \end{array}$$

où :

$$\begin{array}{l} \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0<y<1, g(y)<x<x_0\right\} \\ \Gamma_s = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0<x<x_0, y\in\{0,1\}\right\} \\ \Gamma_f = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0<y<1, x=g(y)\right\} \\ \Gamma_0 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0<y<1, x=x_0\right\} \end{array}$$

avec les conditions limites :

$$\begin{array}{ll|ll} v\cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_s & v\cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ \nu\partial_n v_\tau + \gamma v_\tau = -\gamma S_1 & \text{sur } \Gamma_s & \tau\sigma_v n = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ v\cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_0 & n\sigma_v n = -H\kappa + \beta g & \text{sur } \Gamma_f \\ \nu\partial_n v_\tau + \gamma_0 v_\tau = 0 & \text{sur } \Gamma_0 & & \\ g(0) = g(1) = 0 & & & \end{array}$$

où :

- $\nu$ est la viscosité cinématique,
- $\rho$ la densité,

- $\sigma_v$ le tenseur des contraintes avec $(\sigma_v)_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right)$ ,
- $S_1$ la vitesse du point de contact,
- $\gamma_0$ et $\gamma$ des coefficients de friction,
- $H$ la courbure moyenne de la surface libre : $H = \left(g'\left(1+g'^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'$,
- $\kappa$ la tension de surface,
- $\beta = \rho g_0$ le produit de la densité et de l'accélération de la gravité
- $\tau$ et $n$ la tangente et la normale unitaire.

On voit alors que $\Gamma_s$ correspond à notre fond avec glissement, $\Gamma_f$ à notre surface libre mais nous n'avons pas de $\Gamma_0$. Il suppose qu'il existe une solution à ce problème et démontre alors l'existence d'une solution asymptotique au problème linéarisé écrit en fonction courant.

## 2.4 Passage des équations de Navier-Stokes à celles de Stokes

Dans l'étude du front faite dans la partie III, nous nous intéresserons aux équations de Stokes stationnaires. Ce problème peut se retrouver à partir des équations de Navier-Stokes classiques :

$$\begin{cases} \nabla\cdot U\left(r,\phi,t\right) = 0 \\ \partial_t U\left(r,\phi,t\right) + \left(U\cdot\nabla\right)U\left(r,\phi,t\right) + \dfrac{1}{\rho}\nabla p\left(r,\phi,t\right) - \nu\Delta U\left(r,\phi,t\right) = \vec{g} \end{cases}$$

en réalisant un adimensionnement tel que le suivant :

$$\begin{aligned} t &= \frac{h_0}{U_0}t^*, \quad U\left(r,\phi\right) = U_0 u^*\left(r^*,\phi\right), \quad \vec{g} = g_0\vec{g}^*, \\ r &= h_0 r^*, \quad p\left(r,\phi\right) = \frac{\kappa}{h_0}p^*\left(r^*,\phi\right), \end{aligned}$$

où $U_0$ et $h_0$ sont respectivement la vitesse caractéristique et la hauteur caractéristique de l'écoulement, $\mu$ la viscosité dynamique, $\kappa$ la tension de surface, $\rho$ la densité et $g_0$ la constante gravitationnelle. Les équations de Navier-Stokes adimensionnée s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla^*\cdot u^*\left(r^*,\phi^*,t^*\right) = 0 \\ R_e\left[\partial_{t^*}u^* + \left(u^*\cdot\nabla^*\right)u^*\right]\left(r^*,\phi^*,t^*\right) + \dfrac{1}{C_a}\nabla^* p^*\left(r^*,\phi^*,t^*\right) - \Delta^* u^*\left(r^*,\phi^*,t^*\right) = -\dfrac{R_e}{F^2}\vec{g}^* \end{cases}$$

Ainsi si on suppose que :

$$\begin{cases} R_e \ll \dfrac{1}{C_a} = \dfrac{R_e}{W_e} \\ R_e \ll 1 \\ R_e \ll \dfrac{R_e}{F^2} \sim \mathcal{O}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_e \ll 1 \\ R_e \sim F^2 \ll 1 \end{cases}$$

On retrouve les équations de Stokes stationnaires, où $R_e = \frac{\rho U_0 h_0}{\mu}$ est le nombre de Reynolds, $C_a = \frac{U_0\mu}{\kappa}$ est le nombre capillaire, $F^2 = \frac{U_0^2}{g_0 h_0}$ le nombre de Froude au carré et $W_e = \frac{\rho U_0^2 h_0}{\kappa}$ le nombre de Weber :

$$\begin{cases} \nabla^*\cdot u^*\left(r^*,\phi^*\right) = 0 \\ \nabla^* p^*\left(r^*,\phi^*\right) = C_a\left[\Delta^* u^*\left(r^*,\phi^*\right) - \nabla^* G^*\left(r^*,\phi^*\right)\right] + \mathcal{O}\left(C_a R_e\right) \end{cases}$$

Nous utiliserons dans la suite de l'hypothèse $C_a \ll 1$, ainsi on aura supposé que :

$$\begin{cases} W_e \ll 1 \\ R_e \sim F^2 \ll 1 \\ \dfrac{W_e}{R_e} = C_a \ll 1 \end{cases} \Leftrightarrow W_e \ll R_e \sim F^2 \ll 1$$

Le fait de supposer que le nombre de Reynolds est petit : $R_e \ll 1$, montre que l'on considère un fluide laminaire, s'écoulant lentement et sans effet de turbulence, on peut alors négliger les termes convectifs non-linéaires (de la forme $(U \cdot \nabla) U$ qui représente l'inertie). Ainsi sous les hypothèses $W_e \ll R_e \sim F^2 \ll 1$ (c'est à dire $C_a \ll 1$), les forces de tension de surface dominent sur les forces de viscosité et d'inertie, ce qui nous permet d'avoir un front d'avancement bien défini. Il nous reste alors deux petits paramètres : $C_a$ et $R_e$.

Nous souhaitons faire, par la suite, un développement asymptotique sur le problème de Stokes obtenu. Il nous faut donc quantifier le produit $C_a\, R_e$ de manière à connaître l'ordre de l'erreur générée en supprimant ces termes. Dans la suite nous ne développerons que l'ordre 0 et l'ordre 1 du développement asymptotique en $C_a$ de ce problème. Il suffit donc de prendre $R_e \sim \mathscr{O}\left(C_a^i\right)$ avec $i \in \mathbb{R}^{+*}$ pour que les termes Navier n'influent pas sur les deux premiers ordres du développement asymptotique en $C_a$.

## 2.5 Existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, nous allons faire un résumé des méthodes permettant, grâce à la base de solution de l'opérateur de Stokes, d'obtenir l'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes. La base de cette démonstration est issue des travaux de Leray [47] datant de 1934 où il introduit la notion de solutions turbulentes qui correspondent en fait aux solutions faibles. Les théorèmes et propositions énoncés ici sont extraits du livre de Boyer et Fabrie [6] dans lequel toutes les démonstrations sont détaillées.

### 2.5.1 Décomposition de Leray

Sur $\Omega$, un ouvert borné, connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, on introduit les trois espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \left\{\varphi \in (\mathscr{D}(\Omega))^d, \nabla \cdot \varphi = 0\right\}, \\ V &= \left\{v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \nabla \cdot v = 0\right\} \\ H &= \left\{v \in \left(L^2(\Omega)\right)^d, \nabla \cdot v = 0,\ \gamma_\nu v = 0\right\}. \end{aligned}$$

où $\mathscr{V}$ est l'ensemble des fonctions vectorielles régulières à support compact dans $\Omega$ à divergence nulle, $V$ est l'adhérence de $\mathscr{V}$ dans $\left(H_0^1(\Omega)\right)^d$, $H$ l'adhérence de $\mathscr{V}$ dans $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ et $\gamma_\nu v$ la trace normale de $v$. $V$ et $H$ sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires respectivement induits par ceux de $\left(H_0^1(\Omega)\right)^d$ et $\left(L^2(\Omega)\right)^d$. On peut maintenant introduire l'espace $H^\perp$ des champs de gradient de fonctions $H^1(\Omega)$ :

$$H^\perp = \left\{v \in \left(L^2(\Omega)\right)^d, \exists p \in H^1(\Omega), v = \nabla p\right\}$$

au sens du produit scalaire de $\left(L^2(\Omega)\right)^d$.

**Définition.** La décomposition :

$$\left(L^2(\Omega)\right)^d = H \overset{\perp}{\oplus} H^\perp$$

est appelée : **décomposition de Leray** de l'espace $\left(L^2(\Omega)\right)^d$. Le projecteur orthogonal dans $\left(L^2(\Omega)\right)^d$ sur $H$ est appelé le **projecteur de Leray** et noté $\mathscr{P}$.

### 2.5.2 Opérateur de Stokes

Pour tout $f \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)^d$, on appelle problème de Stokes, avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla p = f, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot v = 0, & \text{dans } \Omega, \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

où ces équations décrivent l'écoulement laminaire, stationnaire, isotherme, incompressible d'un fluide homogène. L'hypothèse de laminarité exprime le fait que le nombre de Reynolds de l'écoulement est supposé suffisamment faible pour que l'on puisse négliger les termes convectifs non-linéaires (de la forme $(v \cdot \nabla)\, v$). C'est ce que l'on a déjà pu voir dans la partie précédente où un adimensionnement plus simple tel que :

$$t = T t^*,\ r = h_0 r^*,\ U\left(r, \phi\right) = U_0 u^*\left(r^*, \phi\right)$$

permet de ne faire apparaître que le nombre de Reynolds $R_e = \frac{h_0 U_0}{\nu}$ dans les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, & \text{dans } \Omega \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla)\, v + \nabla p - \dfrac{1}{R_e} \Delta v = f, & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

**Théorème.** *Soient $\Omega$ un ouvert borné, connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ et $f \in \left(H^{-1}(\Omega)\right)^d$ alors il existe un unique couple $\left(v, p\right) \in V \times L_0^2(\Omega)$ solution de (2.3).*

Ce théorème se démontre grâce au théorème de Lax-Milgram et la formule de Stokes, en utilisant la forme bilinéaire $a(u, v)$ continue sur $V \times V$ :

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx$$

**Définition.** On peut alors définir l'opérateur $A$ de $V$ dans $V'$ (le dual de $V$) par :

$$\forall (u, v) \in V \times V,\ \langle Av, u \rangle_{V', V} = \int_\Omega \nabla u : \nabla v \, dx$$

L'opérateur $A$ est appelé **l'opérateur de Stokes** et est un isomorphisme de $V$ sur $V'$ d'après le théorème de Lax-Milgram. On peut maintenant considérer $A$ comme un opérateur non-borné dans $H$ de domaine :

$$D(A) = \{u \in V,\ Au \in H\}$$

**Lemme.** *L'opérateur $(A, D(A))$ a un graphe fermé dans $H \times H$.*

**Lemme.** *L'opérateur de Stokes $(A, D(A))$ est auto-adjoint dans $H$.*

On peut donc construire une décomposition spectrale de l'opérateur de Stokes.

**Théorème.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Il existe une suite croissante de nombres réels $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ strictement positifs, qui tend vers $+\infty$, et une suite de fonctions $(w_k)_{k \geq 1}$ orthonormales dans $H$, orthogonales dans $V$ et dans $D(A)$, formant une famille totale de $H$, de $V$, et de $D(A)$ et une suite de fonctions $\left(p_k\right)_{k \geq 1}$ dans $L_0^2(\Omega)$ satisfaisant :*

$$\begin{cases} -\Delta w_k + \nabla p_k = \lambda_k w_k, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot w_k = 0, & \text{dans } \Omega, \\ w_k = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise entre autre les deux théorèmes suivants :

**Théorème.** *Soit $\Omega$ un ouvert lipschitzien connexe de $\mathbb{R}^d$. Soit $f$ dans $\left(H^{-1}(\Omega)\right)^d$ telle que :*

$$\forall \varphi \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \text{ telle que } \nabla \cdot v = 0, \text{ on a } \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = 0$$

*alors il existe un élément $p \in L^2_{loc}(\Omega)$, tel que $f = \nabla p$. De plus, si $\Omega$ est borné, alors $p$ est unique à une constante près et appartient à $L^2(\Omega)$.*

**Théorème.** *(Opérateurs à inverse compact). Soit $H$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur non-borné. On suppose que $A$ est auto-adjoint, bijectif de $D(A)$ sur $H$ et que l'injection canonique de $D(A)$ dans $H$ est compacte. Alors il existe une base hilbertienne $(w_k)_{k\geq 1}$ de $H$ formée de vecteurs propres de $A$, c'est-à-dire tels que pour tout $k \geq 1$ :*

$$w_k \in D(A) \text{ et } A w_k = \lambda_k w_k$$

*Par ailleurs, les valeurs propres $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ sont réelles et on peut les ordonner de sorte que $|\lambda_k|$ soit croissante et tende vers $+\infty$ quand $k$ tend vers l'infini. Enfin les vecteurs propres $(w_k)_{k\geq 1}$ forment une famille orthogonale totale de $D(A)$.*

**Définition.** Un tel système de fonctions s'appelle base spéciale associée à l'opérateur de Stokes $A$ de domaine $D(A)$.

Ce type de fonction est utilisé de manière systématique pour construire des solutions approchées des problèmes étudiés.

### 2.5.3 Théorème de Leray

Soit $\Omega$ un ouvert borné, régulier et connexe de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), un nombre Reynolds $R_e > 0$ fixé, $f$ donnée dans $L^2_{loc}\left([0, +\infty[, \left(H^{-1}(\Omega)\right)^d\right)$ et $v_0$ donné dans $H$. On souhaite trouver un champ vectoriel $v(t,x)$ et un champ scalaire $p(t,x)$ décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible dans un domaine $\Omega$ soumis à un champ de forces volumiques $f$. Cet écoulement est donc décrit par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \nabla \cdot v = 0, & \text{dans } \Omega \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p - \dfrac{1}{R_e} \Delta v = f, & \text{dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \\ v(t=0) = v_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

Nous allons donner quelques résultats sur le terme d'inertie $(v \cdot \nabla) v$.

#### 2.5.3.1 Terme d'inertie

Pour tous $u$, $v$, $w \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$, on définit :

$$b(u, v, w) = \int_\Omega ((u \cdot \nabla) v) \cdot w \, dx = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx.$$

**Lemme.** *La forme trilinéaire $b$ est continue sur $\left(H_0^1(\Omega)\right)^d \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^d \times \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$ et vérifie :*

$$\begin{aligned} &\forall u \in V, \quad \forall v, w \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \quad b(u,v,w) + b(u,w,v) = 0, \\ &\forall u \in V, \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d, \qquad b(u,v,v) = 0. \end{aligned}$$

*De plus, pour tout $u \in V$ et tous $v, w \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^d$ on a :*

$$|b(u,v,w)| \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|u\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|v\|_{L^2}^{1-\frac{d}{4}} \|v\|_{H^1}^{\frac{d}{4}} \|w\|_{H^1}$$

Dans la suite, pour tous $u, v \in V$, on note $B(u,v)$ la forme linéaire continue sur $V$ définie par :

$$\langle B(u,v), w\rangle_{V',V} = b(u,v,w).$$

#### 2.5.3.2 Formulations faibles des équations de Navier-Stokes

Dans le livre de Boyer et Fabrie [6], on nous propose deux types de fonctions test dépendantes ou indépendantes du temps. L'idée principale de Leray [47] est d'utiliser des fonctions tests à divergence nulle et nulles au bords, ce qui permet de faire disparaître la pression des formules. Quelque soient les fonctions tests utilisées, on pourra retrouver la pression en utilisant le théorème de de Rham.

- **Fonctions tests indépendantes du temps**
  Au système (2.4), on associe le problème suivant :
  *Trouver $v \in L^2(]0,T[,V)$ telle que pour tout $\psi \in V$ on a :*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(t)\cdot\psi\,dx + \int_\Omega ((v(t)\cdot\nabla)\,v(t))\cdot\psi\,dx + \frac{1}{R_e}\int_\Omega \nabla v(t) : \nabla\psi\,dx = \left\langle f(t), \psi\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \tag{2.5}$$

  *au sens des distributions de $\mathscr{D}'(]0,T[)$ et telle que $v(0) = v_0$ dans $V'$ au sens faible.*
  Pour établir l'égalité de l'énergie ou l'unicité des solutions, on sera amené à prendre pour fonction test les solutions elles-mêmes ou des différences entre deux solutions. Ceci n'est possible que dans la formulation avec des fonctions tests dépendantes du temps.
- **Fonctions tests dépendantes du temps**
  Au système (2.4), on associe le problème variationnel suivant :
  *Trouver $v \in L^2(]0,T[,V)$ telle que $\frac{dv}{dt} \in L^1\left(]0,T[,V'\right)$ et vérifiant pour toute fonction $\varphi$ dans $\mathscr{C}_c^0(]0,T[,V)$,*

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{dv(t)}{dt}, \varphi(t)\right\rangle_{V',V} dt + \int_0^T \int_\Omega ((v(t)\cdot\nabla)\,v(t))\cdot\varphi(t)\,dx\,dt + \frac{1}{R_e}\int_0^T\int_\Omega \nabla v(t) : \nabla\varphi(t)\,dx\,dt \\ = \int_0^T \left\langle f(t), \varphi(t)\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

  *et telle que $v(0) = v_0$ dans $V'$.*

**Proposition.** ***(Équivalence des formulations)*** *Soient $f \in L^1\left(]0,T[,V'\right)$ et $v \in L^2(]0,T[,V)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*- $v$ admet une dérivée faible $\frac{dv}{dt} \in L^1\left(]0,T[,V'\right)$ et $v$ vérifie (2.6),*
*- $v$ vérifie (2.5).*
*De plus, si $v$ vérifie ces deux assertions équivalentes alors pour presque tout $t$ on a l'égalité suivante dans $V'$ :*

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_e}Av(t) + B(v(t), v(t)) = f(t).$$

#### 2.5.3.3 Énoncé du théorème de Leray

On peut maintenant donner le résultat principal d'existence et d'unicité de solutions (dites « faibles ») pour les équations de Navier-Stokes.

**Théorème.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné connexe et lipschitzien de $\mathbb{R}^d$. Soient $R_e > 0$, $v_0$ donné dans $H$ et $f$ dans $L^2_{loc}\left([0,+\infty[, \left(H^{-1}(\Omega)\right)^d\right)$ alors il existe un couple $(v,p)$ défini sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, solution de (2.4) et tel que pour tout $T > 0$,*

$$(v,p) \in \left(L^\infty(]0,T[,H) \cap L^2(]0,T[,V)\right) \times W^{-1,\infty}\left(]0,T[, L^2_0(\Omega)\right),$$

*et :*

$$\frac{dv}{dt} \in L^{\frac{4}{d}}(]0,T[,V_{-1}) \cap L^2\left(]0,T[, V_{-\frac{d}{2}}\right).$$

• *Si $d = 2$, cette solution est unique et $v$ est continue de $[0,+\infty[$ dans $H$. De plus elle vérifie* ***l'égalité*** *d'énergie suivante pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :*

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2} + \frac{1}{R_e}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau = \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle f(\tau), v(\tau)\rangle_{H^{-1},H^1_0}\,d\tau$$

• *Si $d = 3$, $v$ est continue de $[0,+\infty[$ dans $V_{-\frac{1}{4}}$ et faiblement continue de $[0,+\infty[$ dans $H$. Elle vérifie* ***l'inégalité*** *d'énergie suivante, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ :*

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|^2_{L^2} + \frac{1}{R_e}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|^2_{L^2}\,d\tau \leq \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{L^2} + \int_0^t \langle f(\tau), v(\tau)\rangle_{H^{-1},H^1_0}\,d\tau$$

*L'unicité de telles solutions reste un problème ouvert.*

Ce théorème est entièrement démontré dans le livre de Boyer et Fabrie. Il faut notamment se donner un $T > 0$ quelconque et chercher à résoudre l'une des deux formulations équivalentes (2.5) ou (2.6) sur $[0,T]$, pour cela il faut introduire un problème approché de dimension finie que l'on résout grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. Puis on trouve des estimations sur les solutions de ce problème approché qui sont uniformes par rapport au paramètre d'approximation. On utilise enfin les théorèmes de compacité pour obtenir des convergences fortes et pouvoir passer à la limite dans la formulation approchée, notamment dans le terme non-linéaire. On obtient alors l'existence d'un champ de vitesse $v$.

Nous savons maintenant que les équations de Navier-Stokes 2D ont une unique solution. Dans la suite, nous allons dériver des systèmes de type Saint-Venant, pour cela nous avons besoin de montrer que nous avons le droit de faire cela et que ces systèmes ont bien une solution.

## 2.6 Justification de la construction d'un modèle Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes

Nous allons ici faire un résumé des résultats obtenus par Bresch et Noble [9]. Dans cet article, les auteurs justifient rigoureusement la dérivation de systèmes shallow-water à partir des équations de Navier-Stokes. En effet en 1871, Saint-Venant a écrit son système en se basant sur des considérations physiques pertinentes. Néanmoins il reste à prouver que les solutions du système des équations de Saint-Venant sont bien des solutions des équations de Navier-Stokes. Il y a relativement peu de temps que l'on sait dériver formellement l'écriture des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes pour des écoulements de faible épaisseur.

Les équations de Navier-Stokes décrivent des écoulements horizontaux dus à la variation de la tension de surface du fluide. Ainsi la méthode pour obtenir un système shallow-water à partir de ces équations à surface libre, consiste à intégrer les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement sur la hauteur du fluide. Cette méthode est maintenant bien comprise mais il manque encore des justifications mathématiques sur ces approches. Dans cet article, les auteurs ont justement voulu remédier à ce manque et ont rigoureusement justifié la dérivation de systèmes shallow-water. Notons que la dérivation rigoureuse de tels systèmes est obtenue sous certaines hypothèses techniques nécessaires pour avoir des solutions régulières.

Dans une première partie de l'article, les auteurs adimensionnent les équations de Navier-Stokes à surface libre et adhérence au fond, la solutions est alors formellement développée en fonction du paramètre d'aspect $\varepsilon = \frac{H}{L}$ entre la hauteur caractéristique du fluide $H$ et sa longueur d'onde caractéristique $L$. En substituant le développement asymptotique en $\varepsilon$ des inconnues dans les équations de conservation de la masse et quantité de mouvement moyennées sur la hauteur du fluide, on obtient un système de type shallow-water fermé et un reste qui tend formellement vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. La justification rigoureuse de ce développement asymptotique est réalisée dans deux théorèmes où les auteurs établissent des estimations uniformes dans les espaces classiques de Sobolev, des solutions du système complet des équations de Navier-Stokes par rapport à $\varepsilon$ et ils démontrent qu'alors le reste du système shallow-water tend bien vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Cette preuve résulte du schéma itératif utilisé. La justification mathématique de la dérivation de modèles shallow-water est décrite dans l'article Gerbeau et Perthame [30] et le caractère bien posé de ces systèmes est étudié dans l'article de Bresch et Desjardins [8] et reste un problème ouvert. Cela correspond à une condition de glissement de Navier au fond à la place d'une condition d'adhérence avec une relation particulière entre le nombre de Reynolds et le paramètre d'aspect $\varepsilon$ (aussi nommé paramètre onde longue).

Remarquons aussi que la preuve faite dans l'article Bresch et Noble [9] a été réalisée à partir des équations de Navier-Stokes 2D pour obtenir des systèmes shallow-water 1D mais la généralisation au cas 3D-2D peut être réalisé de la même manière avec des estimations plus élevées sur les dérivées. Notons que la principale hypothèse de cette preuve est que le coefficient de tension de surface n'est pas nul.

Deuxième partie

# Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film mince

Maintenant que le problème est bien posé et avant de développer les différents modèles asymptotiques de front, nous décrirons l'écoulement amont « lointain », qui sera vu comme une condition de raccord à l'infini pour le modèle de front (chapitre 3 page 43). Il s'agira donc de décrire un écoulement sans front, infini de chaque côté. Pour cette thèse, nous nous sommes limité au cas des fronts pour films minces. Nous expliquerons comment obtenir un système de type Saint-Venant (Shallow-water models) à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre en ajoutant ici une condition de glissement au fond de manière à pouvoir introduire un modèle de front avec glissement par la suite.

Puisque le film est par définition mince, et en faisant certaines hypothèses, il sera possible de résoudre asymptotiquement les équations de Navier-Stokes autour de la solution d'équilibre. Ce développement se fera par rapport à un petit paramètre $\bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L}$, appelé paramètre onde longue, qui est le rapport entre la hauteur $h_0$ et la longueur $L$ caractéristiques du film. La solution ainsi obtenue, injectée dans les équations de Navier-Stokes moyennées sur la hauteur, donnera des modèles à deux équations, de type Saint-Venant, sur la hauteur et le débit.

Nous utiliserons alors la méthode de développement asymptotique en fonction de $\bar{\varepsilon}$ et développerons alors les inconnues jusqu'à l'ordre 1 pour écrire un modèle shallow-water d'ordre 0 sous forme conservative avec indifférence matérielle. Ce modèle sera utilisé par la suite avec un modèle de front (développé dans la partie III page 61) pour simuler l'écoulement d'une goutte sur un plan incliné (cf partie IV page 163).

CHAPITRE 3

# MODÈLES SAINT-VENANT (SHALLOW-WATER MODELS)

On souhaite regarder ici l'écoulement en amont du front, qui sera vu comme une condition de raccord à l'infini pour le modèle de front. On s'intéresse donc ici à la dynamique d'un film mince infini de chaque côté sans front. Nous expliquerons comment obtenir un système de type Saint-Venant (Shallow-water models) décrivant le mouvement de films minces, à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre. Pour obtenir un tel système, on part des équations de Navier-Stokes en utilisant la méthode de J.-P. VILA dans Bresch [7] et la thèse de Boutounet [5]. Ainsi comme le film est par définition mince, et en faisant certaines hypothèses d'adimensionnement, il sera possible de résoudre asymptotiquement les équations de Navier-Stokes autour de la solution d'équilibre. Puis grâce à un développement asymptotique par rapport à un petit paramètre $\bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L}$, appelé paramètre onde longue, qui est le rapport entre la hauteur et la longueur caractéristiques du film. La solution ainsi obtenue, injectée dans les équations de Navier-Stokes moyennées sur la hauteur, donnera des modèles à deux équations, de type Saint-Venant, sur la hauteur et le débit.

**Sommaire**


3.1 Équations de Navier-Stokes . . . . . **44**
3.1.1 Équations moyennées . . . . . 45
3.1.2 Système obtenu . . . . . 46
3.2 Hypothèse onde longue . . . . . **46**
3.3 Adimensionnement . . . . . **46**
3.3.1 Hypothèses sur l'adimensionnement . . . . . 47
3.3.2 Système obtenu . . . . . 48
3.4 Solution uniforme (film de Nusselt) . . . . . **49**
3.5 Développement onde longue . . . . . **49**
3.5.1 Ordre 0 . . . . . 49
3.5.2 Ordre 1 sur $u_z$ . . . . . 51
3.6 Écriture sous forme conservative . . . . . **56**
3.7 Modèles obtenus . . . . . **59**

## 3.1 Équations de Navier-Stokes

On rappelle que le problème s'écrit sous forme développée de la manière suivante avec condition de glissement qui permet de retirer la singularité de notre problème initial comme vu précédemment :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot U(x,t,z) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $\left(\text{Eq } 2\right) : \partial_t U(x,t,z) + \nabla \cdot \left[ U(x,t,z) \otimes U(x,t,z) - \frac{1}{\rho} T(x,t,z) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** $(1) : w(x,0) = 0$ <br> $(2) : u(x,0) + \frac{\mu}{\kappa_f(h)} u_z(x,0) = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : h_t + u(x,h)\, h_x = w(x,h)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : \left(1 - h_x^2\right)(u_z(x,h) + w_x(x,h)) - 4 h_x u_x(x,h) = 0$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : -2\mu u_x(x,h) \frac{1+h_x^2}{1-h_x^2} = \kappa h_{xx} \left(1 + h_x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + p(x,h)$ |

TABLE 3.1: Système complet cartésien développé

où les inconnues sont le champs de vitesse $u(x,t,z)$, la pression $p(x,t,z)$ et la forme de la surface libre $h(x,t)$. Les dérivées sont portées en indices. La configuration est donc la suivante :

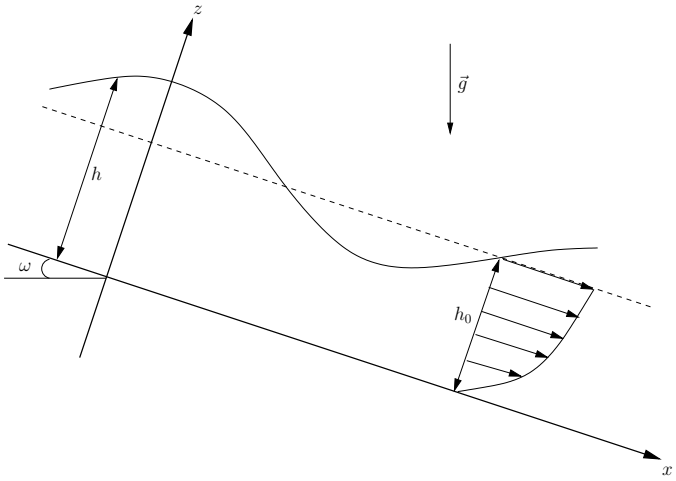



FIGURE 3.1: Film liquide sur un plan incliné

### 3.1.1 Équations moyennées

On pose :

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{h}\int_0^h \varphi dz \Rightarrow \int_0^h \varphi_x dz = \left(\int_0^h \varphi dz\right)_x - \varphi(h)\, h_x = h\bar{\varphi}_x - \varphi(h)\, h_x$$

et $v = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h u dz$.

#### 3.1.1.1 Équation de conservation de la masse

En intégrant l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$(hv)_x - u(x,h)\, h_x + w(x,h) \quad = \quad 0$$

Avec la condition (3), on a :

$$h_t + (hv)_x = 0$$

#### 3.1.1.2 Équation de quantité de mouvement ( première composante )

On intègre maintenant la composante en $x$ de l'équation de quantité de mouvement. Pour le membre de droite, on remarque que :

$$\left(u^2\right)_x + (uw)_z = uu_x + wu_z + u\underbrace{(u_x + w_z)}_{=0}$$

alors :

$$\begin{aligned} &\int_0^h \left(u_t + uu_x + wu_z + \frac{1}{\rho}p_x\right) dz = \int_0^h \left(u_t + \left(u^2\right)_x + (uw)_z + \frac{1}{\rho}p_x\right) dz \\ = \quad & (hv)_t + \left(\int_0^h u^2 dz\right)_x + \frac{1}{\rho}\left(\int_0^h p dz\right)_x - \frac{1}{\rho}p(x,h)\, h_x \end{aligned}$$

Pour le second membre, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^h \left(\frac{\mu}{\rho}(u_{xx} + u_{zz}) + g_0 \sin\omega\right) dz = \int_0^h \left(\frac{\mu}{\rho}(2u_{xx} + (u_{zz} + w_{xz})) + g_0 \sin\omega\right) dz \\ = \quad & 2\frac{\mu}{\rho}\left(\int_0^h u_x dz\right)_x - 2\frac{\mu}{\rho}u_x(x,h)\, h_x + \frac{\mu}{\rho}(u_z(x,h) + w_x(x,h) - u_z(x,0) - w_x(x,0)) + g_0 h \sin\omega \end{aligned}$$

De plus :

$$\frac{1}{\rho}p(x,h)\, h_x - 2\frac{\mu}{\rho}u_x(x,h)\, h_x + \frac{\mu}{\rho}(u_z(x,h) + w_x(x,h) - w_x(x,0)) = -\frac{1}{\rho}\sigma h_x h_{xx}\left(1 + h_x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

En considérant que $w(x,0) = 0 \Rightarrow w_x(x,0) = 0$. On obtient donc :

$$(hv)_t + \left(\int_0^h u^2 dz\right)_x + \frac{1}{\rho}\left(\int_0^h p dz\right)_x + \frac{\kappa}{\rho}\frac{h_x h_{xx}}{\left(1 + h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\frac{\mu}{\rho}\left(\int_0^h u_x dz\right)_x - \frac{\mu}{\rho}u_z(x,0) + g_0 h \sin\omega$$

### 3.1.2 Système obtenu

On a donc obtenu le système :

$$\begin{cases} u_x + w_z = 0 \\ u_t + uu_x + wu_z = -\dfrac{1}{\rho} p_x + \dfrac{\mu}{\rho}(u_{xx} + u_{zz}) + g_0 \sin\omega \\ w_t + uw_x + ww_z = -\dfrac{1}{\rho} p_z + \dfrac{\mu}{\rho}(w_{zz} + w_{xx}) - g_0 \cos\omega \\ u(x,0) = \dfrac{\mu}{\kappa_f(h)} u_z(x,0) \\ w(x,0) = 0 \\ h_t + u(x,h)\, h_x - w(x,h) = 0 \\ 0 = \left(1 - h_x^2\right)(u_z(x,h) + w_x(x,h)) - 4h_x u_x(x,h) \\ p(x,h) + \kappa \dfrac{h_{xx}}{\left(1+h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\mu u_x(x,h) \dfrac{1+h_x^2}{1-h_x^2} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} h_t + \left(\displaystyle\int_0^h u dz\right)_x = 0 \\ \left(\displaystyle\int_0^h u dz\right)_t + \left(\displaystyle\int_0^h u^2 dz\right)_x + \dfrac{1}{\rho}\left(\displaystyle\int_0^h p dz\right)_x + \dfrac{\kappa}{\rho} \dfrac{h_{xx}}{\left(1+h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} h_x \\ \qquad = \left(\dfrac{\mu}{\rho}\displaystyle\int_0^h 2u_x dz\right)_x - \dfrac{\mu}{\rho} u_z(x,0) + g_0 h \sin\omega \end{cases}$$

## 3.2 Hypothèse onde longue

La hauteur $h$ du film étant faible devant son étalement $L$, on a $h \ll L$. Le rapport $\dfrac{h}{L}$ peut donc être utiliser pour simplifier les équations et réaliser des développements de la solution. Cette hypothèse est appelée hypothèse onde longue. On obtient alors une hiérarchie de modèles selon l'ordre de précision souhaité.

## 3.3 Adimensionnement

Les variables adimensionnées seront maintenant notées $\varphi'$ et les variables dimensionnées $\varphi$. On se donne une longueur caractéristique $L$ et une vitesse caractéristique $u_0$ suivant $\vec{x}$. On prend la hauteur du film de la solution de Nusselt $h_0$ comme hauteur caractéristique. On note $\bar{\varepsilon} = \dfrac{h_0}{L}$ . On effectue alors le changement de variables suivant de manière à exprimer les équations (3.1) à l'aide des variables adimensionnées pour réaliser un développement suivant le paramètre onde longue $\bar{\varepsilon}$.

$$t = \frac{L}{u_0} t' \qquad x = Lx' \qquad z = h_0 z' \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L}$$
$$u = u_0 u' \qquad w = \frac{h_0}{L} u_0 w' \qquad p = \rho g_0 h_0 p' \qquad h = h_0 h'$$

On obtient le système (en omettant les ' ) :

$$
\begin{cases}
u_x + w_z = 0 \\
u_t + u u_x + w u_z = -\dfrac{1}{F_r^2} p_x + \dfrac{1}{\bar{\varepsilon} R_e}\left(\bar{\varepsilon}^2 u_{xx} + u_{zz}\right) + \dfrac{1}{\bar{\varepsilon} F_r^2} \sin\omega \\
w_t + u w_x + w w_z = -\dfrac{1}{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2} p_z + \dfrac{1}{\bar{\varepsilon} R_e}\left(w_{zz} + \bar{\varepsilon}^2 w_{xx}\right) - \dfrac{1}{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2} \cos\omega \\
u(x,0) = \dfrac{\mu}{\kappa_f(h)\, h_0} u_z(x,0) \\
w(x,0) = 0 \\
h_t + u(x,h)\, h_x - w(x,h) = 0 \\
0 = \left(1 - \bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)\left(u_z(x,h) + \bar{\varepsilon}^2 w_x(x,h)\right) - 4\bar{\varepsilon}^2 h_x u_x(x,h) \\
\dfrac{1}{F_r^2} p(x,h) + \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{W_e} \dfrac{h_{xx}}{\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\dfrac{\bar{\varepsilon}}{R_e} u_x(x,h) \dfrac{1 + \bar{\varepsilon}^2 h_x^2}{1 - \bar{\varepsilon}^2 h_x^2}
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

$$
\begin{cases}
h_t + \left(\int_0^h u\, dz\right)_x = 0 \\
\left(\displaystyle\int_0^h u\, dz\right)_t + \left(\displaystyle\int_0^h u^2\, dz\right)_x + \dfrac{1}{F_r^2}\left(\displaystyle\int_0^h p\, dz\right)_x + \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{W_e} \dfrac{h_{xx} h_x}{\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
\qquad = \dfrac{\bar{\varepsilon}}{R_e}\left(\int_0^h 2 u_x\, dz\right)_x - \dfrac{1}{\bar{\varepsilon} R_e} u_z(x,0) + \dfrac{1}{\bar{\varepsilon} F_r^2} h \sin\omega
\end{cases}
$$

où on a utilisé les groupes adimensionnels usuels suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de Froude : | $F_r^2 = \dfrac{u_0^2}{g_0 h_0}$ | Nombre de Weber : | $W_e = \dfrac{\rho u_0^2 h_0}{\kappa}$ |
| Nombre de Reynolds : | $R_e = \dfrac{\rho u_0 h_0}{\mu}$ | Glissement : | $\dfrac{1}{\kappa_v(h)} = \dfrac{\mu}{\kappa_f(h)\, h_0}$ |

TABLE 3.2: Nombres adimensionnels du film mince

### 3.3.1 Hypothèses sur l'adimensionnement

À partir du système (3.2), on peut formuler trois hypothèses sur les termes dominants.

- Le terme dominant dans l'équation sur le moment en $z$ doit être la pression hydrostatique :

$$
p_z + \cos\omega = -\bar{\varepsilon}^2 F_r^2 \left(w_t + u w_x + w w_z\right) + \frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e}\left(w_{zz} + \bar{\varepsilon}^2 w_{xx}\right)
$$

  Il faut donc que $\bar{\varepsilon}^2 F_r^2$ et $\frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e}$ soient petits.
- De même en écrivant le terme dominant de l'équation du moment en $x$ :

$$
u_{zz} + \frac{R_e}{F_r^2} \sin\omega = \bar{\varepsilon} R_e \left(u_t + u u_x + w u_z\right) + \frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2} p_x - \bar{\varepsilon}^2 u_{xx}
$$

  Ainsi $\bar{\varepsilon} R_e$ et $\frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2}$ doivent être petits.
- La contrainte normale à la surface libre nous donne :

$$
p(x,h) + \frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e} \frac{h_{xx}}{\left(1 + \bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e} u_x(x,h) \frac{1 + \bar{\varepsilon}^2 h_x^2}{1 - \bar{\varepsilon}^2 h_x^2}
$$

  Or la pression est adimensionnée et donc d'ordre 1. On a donc $\dfrac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e} \approx \mathcal{O}(1)$.

On doit donc avoir $\bar{\varepsilon}^2 F_r^2$, $\frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e}$, $\bar{\varepsilon} R_e$, $\frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e}$ et $\frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2}$ petits quand $\bar{\varepsilon}$ tend vers 0. Nous venons donc d'identifier quatre groupes adimensionnels :

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e} \qquad \bar{\beta} = \bar{\varepsilon} R_e \qquad \bar{\delta} = \frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2} \qquad \bar{\kappa} = \frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e}$$

qui vérifient sous nos hypothèses : $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta} \ll 1, \quad \bar{\kappa} \approx \mathcal{O}(1)$. On peut remarquer que $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}^2 F_r^2$ et $\bar{\alpha}\bar{\delta} = \bar{\varepsilon}^2$. On définit un cinquième groupe adimensionnel pour simplifier l'écriture des équations : $\bar{\lambda} = \dfrac{R_e}{F_r^2} = \sqrt{\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}}}$.

### 3.3.2 Système obtenu

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} u_x + w_z = 0 \\ u_{zz} = -\bar{\lambda}\sin\omega + \bar{\delta} p_x + \bar{\beta}(u_t + u u_x + w u_z) - \bar{\alpha}\bar{\delta} u_{xx} \\ p_z + \cos\omega = \bar{\alpha}\left(w_{zz} + \bar{\varepsilon}^2 w_{xx}\right) - \bar{\alpha}\bar{\beta}(w_t + u w_x + w w_z) \\ u(x,0) = \dfrac{1}{\kappa_v(h)} u_z(x,0) \\ w(x,0) = 0 \\ h_t + u(x,h) h_x - w(x,h) = 0 \\ u_z(x,h) = -\bar{\alpha}\bar{\delta} w_x(x,h) + 4\bar{\alpha}\bar{\delta}\left(1 - \bar{\alpha}\bar{\delta} h_x^2\right)^{-1} h_x u_x(x,h) \\ p(x,h) = -\bar{\kappa}\dfrac{h_{xx}}{\left(1+\bar{\alpha}\bar{\delta} h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\bar{\alpha} u_x(x,h)\dfrac{1+\bar{\alpha}\bar{\delta} h_x^2}{1-\bar{\alpha}\bar{\delta} h_x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_t + \left(\int_0^h u\,dz\right)_x = 0 \\ \left(\displaystyle\int_0^h u\,dz\right)_t + \left(\displaystyle\int_0^h u^2\,dz\right)_x + \dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\left(\displaystyle\int_0^h p\,dz\right)_x + \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\dfrac{h_{xx} h_x}{\left(1+\bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \qquad = \dfrac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\left(\displaystyle\int_0^h 2u_x\,dz\right)_x - \dfrac{1}{\bar{\beta}} u_z(x,0) + \dfrac{1}{\bar{\beta}}\bar{\lambda}\sin\omega h \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, on peut prendre $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\delta} = \bar{\varepsilon}$ c'est à dire $F_r^2 = R_e = \mathcal{O}(1)$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} u_x + w_z = 0 \\ u_{zz} = -\bar{\lambda}\sin\omega + \bar{\varepsilon} p_x + \bar{\varepsilon}(u_t + u u_x + w u_z) - \bar{\varepsilon}^2 u_{xx} \\ p_z + \cos\omega = \bar{\varepsilon}\left(w_{zz} + \bar{\varepsilon}^2 w_{xx}\right) - \bar{\varepsilon}^2(w_t + u w_x + w w_z) \\ u(x,0) = \dfrac{1}{\kappa_v(h)} u_z(x,0) \\ w(x,0) = 0 \\ h_t + u(x,h) h_x - w(x,h) = 0 \\ u_z(x,h) = -\bar{\varepsilon}^2 w_x(x,h) + 4\bar{\varepsilon}^2\left(1 - \bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{-1} h_x u_x(x,h) \\ p(x,h) = -\bar{\kappa}\dfrac{h_{xx}}{\left(1+\bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\bar{\varepsilon} u_x(x,h)\dfrac{1+\bar{\varepsilon}^2 h_x^2}{1-\bar{\varepsilon}^2 h_x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_t + \left(\int_0^h u\,dz\right)_x = 0 \\ \left(\displaystyle\int_0^h u\,dz\right)_t + \left(\displaystyle\int_0^h u^2\,dz\right)_x + \left(\displaystyle\int_0^h p\,dz\right)_x + \bar{\kappa}\dfrac{h_{xx} h_x}{\left(1+\bar{\varepsilon}^2 h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ = \bar{\varepsilon}\left(\displaystyle\int_0^h 2u_x\,dz\right)_x - \dfrac{1}{\bar{\varepsilon}} u_z(x,0) + \dfrac{1}{\bar{\varepsilon}}\bar{\lambda}\sin\omega h \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $\bar{\lambda} = \frac{R_e}{F_r^2} = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\varepsilon}} = 1$ et $\frac{1}{\kappa_v(h)} = \frac{\mu}{\kappa_f(h)h_0}$. On définit alors le débit volumique $q$ par :

$$q = hv = \int_0^h u\,dz$$

## 3.4 Solution uniforme (film de Nusselt)

Le problème stationnaire uniforme est obtenu en posant $\varphi_t = 0$ (stationnarité), $\varphi_x = 0$, $h = h_0$ et $w = 0$ (uniformité) dans le système (2.1). On a donc $h' = \frac{h}{h_0} = 1$. Le système obtenu est donc :

$$\begin{cases} u_{zz}(z) = -\dfrac{R_e}{F_r^2}\sin\omega \\ u_z(1) = 0 \\ u(0) = \dfrac{1}{\kappa_v(h_0)}u_z(0) \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} p_z(z) = -\cos\omega \\ p(1) = 0 \end{cases}$$

Après intégration, on a :

$$\begin{cases} u(z) = \dfrac{R_e}{F_r^2}\sin\omega\left[\left(1-\dfrac{z}{2}\right)z + \dfrac{1}{\kappa_v(h_0)}\right] \\ u_z(z) = \dfrac{R_e}{F_r^2}\sin\omega\,(1-z) \\ w(z) = 0 \\ p(z) = (1-z)\cos\omega \end{cases}$$

Et on a la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{h_0}\int_0^{h_0} u(z)\,dz = \frac{1}{h_0}\frac{R_e}{F_r^2}\sin\omega\int_0^{h_0}\left[\left(1-\frac{z}{2}\right)z + \frac{1}{\kappa_v(h_0)}\right]dz \\ &= \frac{R_e}{F_r^2}\sin\omega\left[\frac{h_0}{2} - \frac{h_0^2}{6} + \frac{1}{\kappa_v(h_0)}\right] \end{aligned}$$

Si le flux uniforme $v_0$ est choisi comme flux de référence ($v_0 = 1$, $h_0 = 1$), on peut alors prendre comme vitesse d'adimensionnement la vitesse moyenne du film de Nusselt :

$$\bar{\lambda}\sin\omega = \frac{R_e}{F_r^2}\sin\omega = \frac{1}{\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{\kappa_v(h_0)}\right]} = \frac{3\kappa_v(h_0 = 1)}{\kappa_v(h_0 = 1) + 3} \tag{3.4}$$

Il reste donc 3 paramètres indépendants pour définir le système ($\omega$, $R_e$ et $W_e$).

## 3.5 Développement onde longue

Dans tout ce qui suit, on notera par un exposant entre parenthèses l'ordre d'approximation de la variable : par exemple $\varphi^{(1)}$ est l'approximation d'ordre 1 de la variable $\varphi$.

### 3.5.1 Ordre 0

Sous les hypothèses formulées dans la section (3.3.1), les paramètres $\bar{\alpha}$,$\bar{\beta}$ et $\bar{\delta}$ sont en $\bar{\varepsilon}^x$, avec $x > 0$. On va donc faire un développement du système adimensionné (3.3) suivant ces paramètres pour obtenir les termes dominants des vitesses et de la pression.

On cherche une solution à l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$ du système précédent. On a donc :

$$\begin{cases} u_{zz}^{(0)} = -\bar{\lambda}\sin\omega \\ u_z^{(0)}(x,h) = 0 \\ \kappa_\nu(h)\, u^{(0)}(x,0) = u_z(x,0) \\ \\ w_z^{(0)} = -u_x^{(0)} \\ w^{(0)}(x,0) = 0 \\ \\ p^{(0)}(x,h) = -\bar{\kappa} h_{xx} \\ p_z^{(0)} + \cos\omega = 0 \\ \\ h_t + u(x,h)\, h_x - w(x,h) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h_t + \left(\int_0^h u\, dz\right)_x = 0 \\ \\ \left(\int_0^h u\, dz\right)_t + \left(\int_0^h u^2\, dz\right)_x + \left(\int_0^h p\, dz\right)_x + \bar{\kappa} h_{xx} h_x \\ = \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h - u_z(x,t,0)\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) \end{cases}$$

avec :

$$u(x,t,z) = u^{(0)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) = \bar{\lambda}\sin\omega\left[\left(h - \frac{z}{2}\right)z + \frac{h}{\kappa_\nu(h)}\right] + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)$$

$$w(x,t,z) = w^{(0)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) = -\bar{\lambda}\sin\omega h_x\left[\frac{z^2}{2} + \frac{z}{\kappa_\nu(h)}\left(1 - \frac{h\kappa_\nu'}{\kappa_\nu(h)}\right)\right] + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)$$

$$p(x,t,z) = p^{(0)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) = -\bar{\kappa} h_{xx} + (h-z)\cos\omega + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)$$

On peut remarquer que $u^{(0)}(x,t,z)$ et $w^{(0)}(x,t,z)$ sont déterminés par la fonction de courant $\psi^{(0)} = \bar{\lambda}\sin\omega z\left(\frac{z}{2}h - \frac{z^2}{6} + \frac{h}{\kappa_\nu(h)}\right)$ tels que $\left(u^{(0)}, w^{(0)}\right)^T = \left(\partial_z\psi^{(0)}, -\partial_x\psi^{(0)}\right)^T$. On peut noter que $\psi^{(0)}(x,t,0) = 0$, on a alors :

$$\psi^{(0)}(x,t,h) = \int_0^h u^{(0)}(x,t,z)\, dz = \frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}$$

Donc :

$$\int_0^h u(x,t,z)\, dz = \psi^{(0)}(x,t,h) = \frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)} + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) = h(x,t)\, v(x,t)$$

et :

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \bar{\lambda}\sin\omega h\left(\frac{1}{3}h + \frac{1}{\kappa_\nu(h)}\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) \\ q(x,t,z) &= h(x,t)\, v(x,t) = \frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)} + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right) \end{aligned}$$

L'équation de fermeture de $h$ s'écrit donc :

$$h_t + \left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\right)_x = \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
q_t &= \bar{\lambda}\sin\omega\left(\frac{1}{3}h^3+\frac{h^2}{\kappa_v(h)}\right)_t+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)=\bar{\lambda}\sin\omega\left(h^2+\frac{h}{\kappa_v}\left(2-\frac{h\kappa_v^{'}}{\kappa_v(h)}\right)\right)h_t+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)\\
&= -\bar{\lambda}\sin\omega\left(h^2+\frac{h}{\kappa_v}\left(2-\frac{h\kappa_v^{'}}{\kappa_v(h)}\right)\right)q_x+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)\\
&= -\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2\left(h^2+\frac{h}{\kappa_v}\left(2-\frac{h\kappa_v^{'}}{\kappa_v(h)}\right)\right)^2h_x+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi on a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^h u^2(x,t,z)\,dz &= \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2\left[\frac{1}{\kappa_v^2(h)}+\frac{2h}{3\kappa_v(h)}+\frac{2h^2}{15}\right]h^3+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)\\
&= hv^2+\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2\frac{h^5}{45}+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)\\
&= hv^2\left[\frac{15(3+2h\kappa_v(h))+6h^2\kappa_v^2(h)}{15(3+2h\kappa_v(h))+5h^2\kappa_v^2(h)}\right]+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

On a aussi :

$$
\int_0^h p(x,t,z)\,dz=-\bar{\kappa}hh_{xx}+\frac{h^2}{2}\cos\omega+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)
$$

et :

$$
u_z(x,t,0)=\bar{\lambda}\sin\omega h+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)=\frac{\kappa_v(h)}{1+\frac{h\kappa_v(h)}{3}}v+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)
$$

On remplace ces termes dans l'équation des moments en $z$ de $h$, on a alors :

$$
\begin{cases}
h_t+\left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3+\frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_v(h)}\right)_x=\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)\\[2ex]
(hv)_t+\left(hv^2\left[\frac{15(3+2h\kappa_v(h))+6h^2\kappa_v^2(h)}{15(3+2h\kappa_v(h))+5h^2\kappa_v^2(h)}\right]\right)_x-\bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx}+\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\cos\omega\left(\frac{h^2}{2}\right)_x\\[2ex]
=\frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h-u_z(x,t,0)\right)+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right)
\end{cases}
$$

où l'estimation de $\frac{1}{\bar{\beta}}u_z(x,t,0)$ n'a pas été utilisée car elle n'est pas suffisamment précise. En effet dans le second membre de cette équation, le terme relatif au coefficient $\frac{1}{\bar{\beta}}$ est connu à l'ordre de précision de $u^{(0)}$, soit $\mathcal{O}(\bar{\beta})$, ce qui donne une précision finale en $\mathcal{O}(1)$, ordre de grandeur des variables adimensionnées.

### 3.5.2 Ordre 1 sur $u_z$

Comme le développement à l'ordre 0 n'est pas suffisant pour établir un modèle à deux équations, on utilise les résultats précédents pour accéder à des approximations plus fines. Ainsi on utilise l'approximation zéro des vitesses et de la pression pour obtenir l'ordre supérieur. On a posé :

$$
\begin{aligned}
u(x,t,z) &= u^{(1)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)\\
w(x,t,z) &= w^{(1)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)\\
p(x,t,z) &= p^{(1)}(x,t,z) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

À l'ordre 1 en $\bar{\varepsilon}$, on a donc le système suivant :

$$
\begin{cases}
u_{zz}^{(1)} = -\bar{\lambda}\sin\omega + \bar{\delta}p_x^{(0)} + \bar{\beta}\left(u_t^{(0)} + u^{(0)}u_x^{(0)} + w^{(0)}u_z^{(0)}\right)\\
u_z^{(1)}(x,t,h) = 0\\
u^{(1)}(x,t,0) = \frac{1}{\kappa_\nu(h)}u_z^{(1)}(x,t,0)\\
w_z^{(1)} = -u_x^{(1)}\\
w^{(1)}(x,t,0) = 0\\
p_z^{(1)} + \cos\omega = \bar{\alpha}w_{zz}^{(0)}\\
p^{(1)}(x,h) = -\bar{\kappa}h_{xx} - 2\bar{\alpha}u_x^{(0)}(x,t,h)\\
h_t + u(x,t,h)h_x - w(x,t,h) = 0
\end{cases}
$$

Ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
u_{zz}^{(1)}(x,t,z) = \quad & -\bar{\lambda}\sin\omega - \bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx} + \bar{\delta}\cos\omega h_x + \bar{\beta}\bar{\lambda}\sin\omega h_t\left(z + \frac{1}{\kappa_\nu(h)} - \frac{h\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^2(h)}\right)\\
& + \bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h_x\left(\frac{z^2}{2}\left(h + \frac{1}{\kappa_\nu(h)} - \frac{h\kappa_\nu'}{\kappa_\nu^2(h)}\right) + \frac{h}{\kappa_\nu(h)}z + \frac{h}{\kappa_\nu(h)}\left(\frac{1}{\kappa_\nu(h)} - \frac{h\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^2(h)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
\begin{aligned}
u_z^{(1)}(x,t,z) = \quad & -\int_z^h u_{zz}^{(1)}dz + \underbrace{u_z^{(1)}(x,t,h)}_{=0}\\
= \quad & \left(\bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx} + \bar{\lambda}\sin\omega\right)(h-z) + \frac{zh_x}{6\kappa_\nu(h)}\left[\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 z^2 + 6\bar{\delta}\cos\omega\kappa_\nu(h)\right]\\
& -\bar{\beta}\cos\omega h h_x + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 zhh_x}{6\kappa_\nu^2(h)}\left[-6 - \kappa_\nu'(h)z^2 + (\kappa_\nu(h))^2 z^2 - 3\kappa_\nu(h)z\right]\\
& + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2 h_x}{2\kappa_\nu^3(h)}\left[-2(\kappa_\nu(h))^2 z + 2\kappa_\nu(h) + \kappa_\nu(h)\kappa_\nu'(h)z^2 + 4\kappa_\nu'(h)z - (\kappa_\nu(h))^3 z^2\right]\\
& + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[-3\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 z + 4(\kappa_\nu(h))^3 + 3(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)z - 6\kappa_\nu(h)\kappa_\nu'(h)\right]\\
& + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[(\kappa_\nu(h))^4 + 3\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 4(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)\right]
\end{aligned}
$$

En $z = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
u_z^{(1)}(x,t,0) = \quad & \bar{\lambda}\sin\omega h + \bar{\delta}\bar{\kappa}hh_{xxx} - \bar{\delta}\cos\omega hh_x + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2 h_x}{\kappa_\nu^2(h)} + \bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x\left[\frac{4}{3\kappa_\nu(h)} - \frac{2\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^3(h)}\right]\\
& + \bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{\kappa_\nu^4(h)} - \frac{4\kappa_\nu'(h)}{3\kappa_\nu^2(h)}\right]
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$u^{(1)}(x,t,z) = \int_0^z u_z^{(1)} dz + \underbrace{u^{(1)}(x,t,0)}_{=\frac{1}{\kappa_\nu} u_z^{(1)}(x,t,0)}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & \left(\bar{\delta}\bar{\kappa} h_{xxx} + \bar{\lambda}\sin\omega\right)\left[\frac{h}{\kappa_\nu(h)} - \frac{z^2}{2} + hz\right] + \frac{z^2\bar{\delta}\cos\omega h_x}{2} + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 z^4 h_x}{24\kappa_\nu(h)} \\
& -\bar{\delta}\cos\omega h h_x\left[z + \frac{1}{\kappa_\nu(h)}\right] + \bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 z^2 h h_x\left[\frac{z^2}{24} - \frac{z^2\kappa_\nu'(h)}{24(\kappa_\nu(h))^2} - \frac{z}{6\kappa_\nu(h)} - \frac{1}{2(\kappa_\nu(h))^2}\right] \\
& +\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2 h_x\left[\frac{z^3\kappa_\nu'(h)}{6(\kappa_\nu(h))^2} - \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{2(\kappa_\nu(h))} + \frac{\kappa_\nu'(h) z^2}{(\kappa_\nu(h))^3} + \frac{z}{(\kappa_\nu(h))^2} + \frac{1}{(\kappa_\nu(h))^3}\right] \\
& +\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x\left[\frac{4z}{3\kappa_\nu(h)} + \frac{z^2\kappa_\nu'(h)}{2(\kappa_\nu(h))^2} + \frac{4}{3(\kappa_\nu(h))^2} - \frac{2\kappa_\nu'(h) z}{(\kappa_\nu(h))^3} - \frac{z^2\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{2(\kappa_\nu(h))^4} - \frac{2\kappa_\nu'(h)}{(\kappa_\nu(h))^4}\right] \\
& +\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x\left[-\frac{4z\kappa_\nu'(h)}{3(\kappa_\nu(h))^2} + \frac{z\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{(\kappa_\nu(h))^4} + \frac{1}{3\kappa_\nu(h)} + \frac{\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{(\kappa_\nu(h))^5} - \frac{4\kappa_\nu'(h)}{3(\kappa_\nu(h))^3} + \frac{z}{3}\right]
\end{aligned}$$

et :

$$w^{(1)}(x,t,z) = -\int_0^z u_x^{(1)} dz + \underbrace{w^{(1)}(x,t,0)}_{=0}$$

La pression s'écrit :

$$\begin{aligned}
p^{(1)}(x,t,z) \quad &= \int_z^h \left(\cos\omega - \bar{\alpha} w_{zz}^{(0)}\right) dz + \underbrace{p^{(1)}(x,t,h)}_{=-\bar{\kappa} h_{xx} - 2\bar{\alpha} u_x^{(0)}(x,t,h)} \\
&= \cos\omega(h-z) - \bar{\kappa} h_{xx} - \bar{\lambda}\sin\omega\bar{\alpha} h_x\left(h + z + \frac{2}{\kappa_\nu(h)}\left(1 - \frac{h\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu(h)}\right)\right)
\end{aligned}$$

Le modèle à une équation devient :

$$h_t = -\left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\right)_x + \mathcal{O}\left(\bar{\beta} + \bar{\delta}\right) = -\bar{\lambda}\sin\omega\left(h + \frac{1}{\kappa_\nu(h)}\left(2 - \frac{h\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^2(h)}\right)\right) h h_x + \mathcal{O}\left(\bar{\beta} + \bar{\delta}\right)$$

De plus on a vu que :

$$v(x,t) = \bar{\lambda}\sin\omega h \frac{\left(\frac{h\kappa_\nu(h)}{3} + 1\right)}{\kappa_\nu(h)} + \mathcal{O}\left(\bar{\beta} + \bar{\delta}\right)$$

Le débit s'écrit donc :

$$
\begin{aligned}
q^{(1)}(x,t,z) &= h^{(1)}(x,t)\, v^{(1)}(x,t) = \int_0^h u^{(1)}(x,t,z)\, dz \\
q(x,t,z) &= \frac{\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)h^2}{\kappa_\nu(h)}\left[\bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx}+\bar{\lambda}\sin\omega-\bar{\delta}\cos\omega h_x\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_\nu^3(h)}+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5\left(\kappa_\nu(h)\right)^2-6\kappa_\nu'(h)\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4\left(\kappa_\nu(h)\right)^4+5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2-10\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2\left(\kappa_\nu(h)\right)^4+5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2-7\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right]+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
v(x,t) = \frac{q(x,t)}{h(x,t,z)} &= \frac{\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)h}{\kappa_\nu(h)}\left[\bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx}+\bar{\lambda}\sin\omega-\bar{\delta}\cos\omega h_x\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2 h_x}{\kappa_\nu^3(h)}+\frac{\bar{\beta}\bar{\lambda}^2 h^3 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5\left(\kappa_\nu(h)\right)^2-6\kappa_\nu'(h)\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4\left(\kappa_\nu(h)\right)^4+5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2-10\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2\left(\kappa_\nu(h)\right)^4+5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2-7\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right]+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}v(x,t) &= \bar{\delta}\bar{\kappa}hh_{xxx}+\bar{\lambda}\sin\omega h-\bar{\delta}\cos\omega hh_x+\frac{3\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2 h_x}{\kappa_\nu^2(h)\left(3+\kappa_\nu(h)h\right)} \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\left(3+\kappa_\nu(h)h\right)}\left[\frac{5}{\kappa_\nu(h)}-\frac{6\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^3(h)}\right]+\frac{3\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{5\left(3+\kappa_\nu(h)h\right)}\left[4+\frac{5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{\kappa_\nu^4(h)}-\frac{10\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu^2(h)}\right] \\
&+\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\left(3+\kappa_\nu(h)h\right)}\left[2\kappa_\nu(h)+\frac{5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2}{\kappa_\nu^3(h)}-\frac{7\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu(h)}\right]+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)
\end{aligned}
$$

On peut donc écrire la vitesse tangentielle en $z=0$ telle que :

$$
u_z(x,t,0)=\frac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}v(x,t)\underbrace{-\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x\left(1+h\left(\kappa_\nu(h)-\frac{\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu(h)}\right)\right)}{15\left(3+\kappa_\nu(h)h\right)}}_{=\tau^{(1)}(x,t)}+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}\right)+\bar{\alpha}\bar{\delta}\right)
$$

On rappelle le à l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$ précédemment obtenu :

$$
\begin{cases}
h_t+\left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3+\frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\right)_x=\mathcal{O}(\bar{\varepsilon}) \\
(hv)_t+\left(hv^2\left[\frac{15\left(3+2h\kappa_\nu(h)\right)+6h^2\kappa_\nu^2(h)}{15\left(3+2h\kappa_\nu(h)\right)+5h^2\kappa_\nu^2(h)}\right]\right)_x-\bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx}+\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\cos\omega\left(\frac{h^2}{2}\right)_x \\
\qquad=\frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h-u_z(x,t,0)\right)+\mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right)
\end{cases}
$$

On utilise maintenant l'expression de $u_z(x,t,0)$ que l'on vient d'obtenir :

$$\begin{cases} h_t + \left(\frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\right)_x = \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}) \\ (hv)_t + \left(hv^2\left[\frac{15(3+2h\kappa_\nu(h))+6h^2\kappa_\nu^2(h)}{15(3+2h\kappa_\nu(h))+5h^2\kappa_\nu^2(h)}\right]\right)_x - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\cos\omega\left(\frac{h^2}{2}\right)_x \\ \quad = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h - \frac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}v(x,t)\right) + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x\left(1+h\left(\kappa_\nu(h)-\frac{\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu(h)}\right)\right)}{15(3+\kappa_\nu(h)h)} + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}$$

or on peut écrire :

$$\left(\frac{q^2}{h}\left[\frac{15(3+2h\kappa_\nu(h))+6h^2\kappa_\nu^2(h)}{15(3+2h\kappa_\nu(h))+5h^2\kappa_\nu^2(h)}\right]\right)_x = a(h,q)h_x + b(h,q)q_x$$

$$\begin{aligned} = \quad & \frac{3}{5}h_x\frac{\left(-2h^3(\kappa_\nu(h))^3 - 14h^2(\kappa_\nu(h))^2 + 2h^3\kappa_\nu(h)\kappa_\nu'(h) - 45h\kappa_\nu(h) - 45\right)v^2}{(3+\kappa_\nu(h)h)\left(9+6\kappa_\nu(h)h+h^2(\kappa_\nu(h))^2\right)} \\ & + \frac{6}{5}q_x\frac{\left(2h^2(\kappa_\nu(h))^2+10h\kappa_\nu(h)+15\right)v}{(3+\kappa_\nu(h)h)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ (hv)_t + a_1(h,q)h_x + b(h,q)q_x - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx} = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h - \frac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}v(x,t)\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(h,q) = \quad & \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\cos\omega h - \frac{3}{5}\frac{\left(2h^3(\kappa_\nu(h))^3+14h^2(\kappa_\nu(h))^2-2h^3\kappa_\nu(h)\kappa_\nu'(h)+45h\kappa_\nu(h)+45\right)}{(3+\kappa_\nu(h)h)^3}\frac{q^2}{h^2} \\ & - \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4\left(1+h\left(\kappa_\nu(h)-\frac{\kappa_\nu'(h)}{\kappa_\nu(h)}\right)\right)}{15(3+\kappa_\nu(h)h)} \\ b(h,q) = \quad & \frac{6}{5}\frac{\left(2h^2(\kappa_\nu(h))^2+10h\kappa_\nu(h)+15\right)}{(3+\kappa_\nu(h)h)^2}\frac{q}{h} \end{aligned}$$

Si $\kappa_\nu(h)$ est constant (ce qui est le cas quand on considère des temps longs), on peut simplifier le système tel que :

$$\begin{cases} h_t + q_x = \mathcal{O}(\bar{\varepsilon}) \\ q_t + a_1(h,q)h_x + b(h,q)q_x - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx} = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega h - \frac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}v(x,t)\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1(h,q) = \quad & \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\cos\omega h - \frac{3}{5}\frac{\left(2h^3\kappa_\nu^3+14h^2\kappa_\nu^2+45h\kappa_\nu+45\right)}{(3+\kappa_\nu h)^3}\frac{q^2}{h^2} - \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4(1+h\kappa_\nu)}{15(3+\kappa_\nu h)} \\ b(h,q) = \quad & \frac{6}{5}\frac{\left(2h^2\kappa_\nu^2+10h\kappa_\nu+15\right)}{(3+\kappa_\nu h)^2}\frac{q}{h} \end{aligned}$$

## 3.6 Écriture sous forme conservative

On a donc un modèle shallow-water du type :

$$\begin{cases} (i) & h_t + q_x = 0 \\ (ii) & q_t + a_1(h,q)\,h_x + b(h,q)\,q_x - \dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\bar{\kappa}\,h h_{xxx} = \dfrac{1}{\bar{\varepsilon}R_e}\left(\bar{\lambda}h\sin\omega - \dfrac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}\dfrac{q}{h}\right) \end{cases}$$

Ce qu'on peut ré-écrire sous la forme :

$$\begin{cases} (i) & h_t + q_x = 0 \\ (ii) & \psi(h,q) = \dfrac{\kappa_\nu(h)\,q}{h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)} = \bar{\lambda}h\sin\omega - \underbrace{\bar{\varepsilon}R_e}_{=\bar{\beta}}\left(q_t + a_1(h,q)\,h_x + b(h,q)\,q_x - \dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\bar{\kappa}\,h h_{xxx}\right) \end{cases}$$

On pose :

$$q(x,t,z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}(x,t,z)$$

alors :[•]

$$\begin{cases} (i) & h_t + \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)_x = 0 \\ (ii) & \psi\left(h, \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right) = \bar{\lambda}\sin\omega h - \bar{\beta}\left(\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)_t + a_1\left(h, \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)h_x\right) \\ & \quad -\bar{\beta}\left(b\left(h, \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)_x - \dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\bar{\kappa}\,h h_{xxx}\right) \end{cases}$$

On peut faire un développement limité de $\psi\left(h, \sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)$ pour $\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}R_e \ll 1$ :

$$\psi\left(h, \sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right) = \psi\left(h, q^{(0)}\right) + \bar{\beta}q^{(1)}\psi_q\left(h, q^{(0)}\right) + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon})$$

de même pour les termes $a_1\left(h, \sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)$ et $b\left(h, \sum_{k=0}^{+\infty}\bar{\beta}^k q^{(k)}\right)$. Donc on a à l'ordre 0 en $\bar{\beta}$ sur $q$ :

$$\psi\left(h, q^{(0)}\right) = \frac{\kappa_\nu(h)\,q^{(0)}}{h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)} = \bar{\lambda}\sin\omega h \Rightarrow q^{(0)} = f(h) = \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)\,h}{3}\right)$$

À l'ordre 1, on a :

$$\begin{cases} (i) & h_t + q_x^{(0)} = 0 \\ (ii) & q^{(1)}\psi_q\left(h, q^{(0)}\right) = -\left(q_t^{(0)} + a_1\left(h, q^{(0)}\right)h_x + b\left(h, q^{(0)}\right)q_x^{(0)} - \dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\bar{\kappa}\,h h_{xxx}\right) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\Rightarrow q^{(1)}(x,t,z) = -\frac{1}{\psi_q\left(h, q^{(0)}\right)}\left(q_t^{(0)} + a_1\left(h, q^{(0)}\right)h_x + b\left(h, q^{(0)}\right)q_x^{(0)} - \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\bar{\kappa}\,h h_{xxx}\right)$$

Or si $q^{(0)}(x,t,z) = f(h)$ :

$$\begin{aligned} q_x^{(0)} &= h_x f_h(h) \\ q_t^{(0)} &= h_t f_h(h) = \left(-q_x^{(0)}\right) f_h(h) = -h_x f_h^2(h) \end{aligned}$$

où on a utilisé :

$$f(h) = \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h^2}{\kappa_\nu(h)}\left(1 + \frac{\kappa_\nu(h)\,h}{3}\right)$$

Alors $q^{(1)}(x,t,z)$ doit vérifier :

$$q^{(1)}(x,t,z) = \frac{h_x}{\psi_q\left(h,q^{(0)}\right)}\left(f_h^2(h) - a_1\left(h,q^{(0)}\right) - b\left(h,q^{(0)}\right) f_h(h)\right) + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{\bar{\kappa}\,h h_{xxx}}{\psi_q\left(h,q^{(0)}\right)}$$

où :

$$\psi_q\left(h,q^{(0)}\right) = \partial_q\left(\frac{\kappa_\nu(h)\,q^{(0)}}{h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}\right) = \frac{\kappa_\nu(h)}{h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}$$

Donc :

$$q^{(1)}(x,t,z) = \frac{h_x h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}{\kappa_\nu(h)}\left(f_h^2(h) - a_1\left(h,q^{(0)}\right) - b\left(h,q^{(0)}\right) f_h(h)\right) + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{\bar{\kappa}\,h^2 h_{xxx}\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}{\kappa_\nu(h)}$$

qui se ré-écrit :

$$q^{(1)}(x,t,z) = \frac{h_x h\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}{\kappa_\nu(h)}\left(f_h^2(h) - a_1\left(h,q^{(0)}\right) - b\left(h,q^{(0)}\right) f_h(h)\right) + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{\bar{\kappa}\,h^2 h_{xxx}\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)}{\kappa_\nu(h)}$$

Et $q^{(1)}(x,t,z)$ doit être égal au $q^{(1)}(x,t,z)$ de (3.5) :

$$\begin{aligned} q^{(1)}(x,t,z) = \; & \frac{\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)h^2}{\kappa_\nu(h)}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\left[\bar{\kappa}\,h_{xxx} - \cos\omega h_x\right] + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5\left(\kappa_\nu(h)\right)^2 - 6\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_\nu^3(h)} + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 10\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 7\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \end{aligned}$$

On a donc comme relation de consistance sur $a_1\left(h,q\right)$ et $b\left(h,q\right)$ :

$$\begin{aligned} & f_h^2(h) - a_1\left(h,q^{(0)}\right) - b\left(h,q^{(0)}\right) f_h(h) \\ = \; & -\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h\cos\omega + \frac{3\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^2}{\kappa_\nu^2(h)\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)} + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3}{\kappa_\nu^3(h)\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)}\left[5\left(\kappa_\nu(h)\right)^2 - 6\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{3\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4}{5\kappa_\nu^4(h)\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)}\left[4\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 10\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5}{5\kappa_\nu^3(h)\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)}\left[2\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 7\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu'(h)\right] \end{aligned}$$

Si on veut avoir l'indifférence matérielle, c'est à dire :

$$q_t + F_x(h,q) - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h h_{xxx} = \frac{1}{\bar{\varepsilon} R_e}\left(\bar{\lambda} h \sin\omega - \frac{\kappa_v(h)}{1+\frac{\kappa_v(h)h}{3}}\frac{q}{h}\right)$$

avec $F(h,q) = hv^2 + p(h) = \frac{q^2}{h} + p(h)$ ainsi $F_x(h,q) = 2\frac{q}{h}q_x + \left(p'(h) - \frac{q^2}{h^2}\right)h_x$ donc :

$$\begin{aligned} a_1(h,q) &= p'(h) - \frac{q^2}{h^2} = p'(h) - \frac{f^2(h)}{h^2} = p'(h) - \frac{(\bar{\lambda}\sin\omega)^2 h^2}{\kappa_v^2(h)}\left(1+\frac{\kappa_v(h)h}{3}\right)^2 \\ b(h,q) &= 2\frac{q}{h} = 2\frac{f(h)}{h} = \frac{2\bar{\lambda} h \sin\omega}{\kappa_v(h)}\left(1+\frac{\kappa_v(h)h}{3}\right) \end{aligned}$$

Si on l'injecte dans l'équation de consistance précédente, on obtient une équation déterminant $p(h)$ et permettant d'écrire le système sous forme conservative :

$$\begin{aligned} p'(h) &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h\cos\omega + \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)\frac{h^2}{(\kappa_v(h))^2}\left[1 - \frac{3}{3+\kappa_v(h)h}\right] \\ &+ \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)\frac{h^3}{\kappa_v(h)}\left[\frac{4}{3} - \frac{5}{3+\kappa_v(h)h} + \frac{2\kappa_v'(h)}{(\kappa_v(h))^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_v(h)h} - 1\right)\right] \\ &+ \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^4\left[\frac{4}{9} - \frac{12}{5}\frac{1}{3+\kappa_v(h)h} + \frac{\left(\kappa_v'(h)\right)^2}{(\kappa_v(h))^4}\left(1 - \frac{3}{3+\kappa_v(h)h}\right) + \frac{2\kappa_v'(h)}{(\kappa_v(h))^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_v(h)h} - \frac{2}{3}\right)\right] \\ &+ \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^5\left[\frac{7}{5}\frac{\kappa_v'(h)}{\kappa_v(h)(3+\kappa_v(h)h)} - \frac{\left(\kappa_v'(h)\right)^2}{(\kappa_v(h))^3(3+\kappa_v(h)h)} - \frac{2}{5}\frac{\kappa_v(h)}{3+\kappa_v(h)h}\right] \end{aligned}$$

Prenons deux exemples :

- Pour $\kappa_v(h) = \frac{\mathscr{A}}{h}$ où $\mathscr{A}$ est une constante (donc $\kappa_v'(h) = \partial_h\kappa_v(h) = -\frac{\mathscr{A}}{h^2}$), alors :

$$p'(h) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h\cos\omega + \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)\frac{h^4}{45}\frac{9+2\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}} \quad \Leftrightarrow \quad p(h) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{h^2}{2}\cos\omega + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2\frac{h^5}{225}\frac{9+2\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}$$

  On obtient alors un système Saint-Venant de la forme :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{h^2}{2}\cos\omega + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2\frac{h^5}{225}\frac{9+2\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}\right)_x - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h h_{xxx} = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda} h\sin\omega - \frac{3\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}\frac{q}{h^2}\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

- Pour $\kappa_v(h) = +\infty$, c'est à dire glissement nul, on a :

$$p'(h) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h\cos\omega + \frac{2}{45}\left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^4 \quad \Leftrightarrow \quad p(h) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{h^2}{2}\cos\omega + \frac{2}{225}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5$$

  On retrouve alors le système de Saint-Venant classique (cf Boutounet [5] et méthode de J.-P. VILA dans le livre de Bresch [7]) sous forme conservative sans glissement :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\frac{h^2}{2}\cos\omega + \frac{2}{225}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5\right)_x - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h h_{xxx} = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda} h\sin\omega - \frac{3q}{h^2}\right) \end{cases} \tag{3.7}$$

  On remarque que le système (3.6) précédent ressemble beaucoup au Saint-Venant que l'on vient d'écrire, seuls deux coefficients sont différents.

## 3.7 Modèles obtenus

Nous disposons alors de deux types de modèles :

- **Modèles de type Benney [2] (à une équation) :**
  - **ordre 0 :**

$$h_t + \bar{\lambda}\sin\omega\left(\frac{1}{3}h^3 + \frac{h^2}{\kappa_\nu(h)}\right)_x = 0$$

  - **ordre 1 :**

$$\begin{aligned}
&h_t + \left(\frac{(3+\kappa_\nu(h)\,h)\,h^2}{3\kappa_\nu(h)}\left[\bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx} + \bar{\lambda}\sin\omega - \bar{\delta}\cos\omega h_x\right]\right)_x \\
&+\left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_\nu^3(h)} + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5\left(\kappa_\nu(h)\right)^2 - 6\kappa_\nu^{'}(h)\right]\right)_x \\
&+\left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu^{'}(h)\right)^2 - 10\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu^{'}(h)\right]\right)_x \\
&+\left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2\left(\kappa_\nu(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_\nu^{'}(h)\right)^2 - 7\left(\kappa_\nu(h)\right)^2\kappa_\nu^{'}(h)\right]\right)_x = 0
\end{aligned}$$

- **Modèle de type shallow-water (à deux équations à l'ordre 0) :**

$$\begin{cases}
h_t + q_x = 0 \\
q_t + \left(\dfrac{q^2}{h} + p(h)\right)_x - \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}hh_{xxx} = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}h\sin\omega - \dfrac{\kappa_\nu(h)}{1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}}\dfrac{q}{h}\right)
\end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
p^{'}(h) \quad &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h\cos\omega + \left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)\frac{h^2}{\left(\kappa_\nu(h)\right)^2}\left[1 - \frac{3}{3+\kappa_\nu(h)\,h}\right] \\
&+\left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)\frac{h^3}{\kappa_\nu(h)}\left[\frac{4}{3} - \frac{5}{3+\kappa_\nu(h)\,h} + \frac{2\kappa_\nu^{'}(h)}{\left(\kappa_\nu(h)\right)^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_\nu(h)\,h} - 1\right)\right] \\
&+\left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^4\left[\frac{4}{9} - \frac{12}{5}\frac{1}{3+\kappa_\nu(h)\,h} + \frac{\left(\kappa_\nu^{'}(h)\right)^2}{\left(\kappa_\nu(h)\right)^4}\left(1 - \frac{3}{3+\kappa_\nu(h)\,h}\right) + \frac{2\kappa_\nu^{'}(h)}{\left(\kappa_\nu(h)\right)^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_\nu(h)\,h} - \frac{2}{3}\right)\right] \\
&+\left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^5\left[\frac{7}{5}\frac{\kappa_\nu^{'}(h)}{\kappa_\nu(h)\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)} - \frac{\left(\kappa_\nu^{'}(h)\right)^2}{\left(\kappa_\nu(h)\right)^3\left(3+\kappa_\nu(h)\,h\right)} - \frac{2}{5}\frac{\kappa_\nu(h)}{3+\kappa_\nu(h)\,h}\right]
\end{aligned}$$

issus des équations de Navier-Stokes adimensionnées :

$$\begin{cases}
u_x + w_z = 0 \\
u_{zz} = -\bar{\lambda}\sin\omega + \bar{\delta}p_x + \bar{\beta}\left(u_t + uu_x + wu_z\right) - \bar{\alpha}\bar{\delta}u_{xx} \\
p_z + \cos\omega = \bar{\alpha}\left(w_{zz} + \bar{\varepsilon}^2 w_{xx}\right) - \bar{\alpha}\bar{\beta}\left(w_t + uw_x + ww_z\right) \\
u(x,0) = \dfrac{1}{\kappa_\nu(h)}u_z(x,0) \\
w(x,0) = 0 \\
h_t + u(x,h)\,h_x - w(x,h) = 0 \\
u_z(x,h) = -\bar{\alpha}\bar{\delta}w_x(x,h) + 4\bar{\alpha}\bar{\delta}\left(1 - \bar{\alpha}\bar{\delta}h_x^2\right)^{-1}h_x u_x(x,h) \\
p(x,h) = -\bar{\kappa}\dfrac{h_{xx}}{\left(1+\bar{\alpha}\bar{\delta}h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - 2\bar{\alpha}u_x(x,h)\dfrac{1+\bar{\alpha}\bar{\delta}h_x^2}{1-\bar{\alpha}\bar{\delta}h_x^2}
\end{cases}$$

Notons que le modèle d'ordre 0 de type Saint-Venant n'est pas moins précis que le modèle d'ordre 1 de type Benney. En effet, on retrouve le modèle de Benney d'ordre 0 en prenant l'ordre 0 en $\bar{\beta}$ du modèle Saint-Venant (cf méthode du paragraphe précédent 3.6), ce qui donne :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q^{(0)}(x,t,z) = \dfrac{\bar{\lambda} h^2 \sin\omega}{\kappa_\nu(h)} + \dfrac{1}{3}\bar{\lambda} h^3 \sin\omega \end{cases}$$

On retrouve aussi le modèle de Benney d'ordre 1 toujours en suivant la même méthode où on a obtenu :

$$\begin{aligned} q^{(1)}(x,t,z) = \; & \frac{\left(1+\frac{\kappa_\nu(h)h}{3}\right)h^2}{\kappa_\nu(h)}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\left[\bar{\kappa} h_{xxx} - \cos\omega h_x\right] + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5(\kappa_\nu(h))^2 - 6\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_\nu^3(h)} + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4(\kappa_\nu(h))^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 10(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)\right] \\ & + \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2(\kappa_\nu(h))^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 7(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)\right] \end{aligned}$$

Ainsi le modèle suivant :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q(x,t,z) = q^{(0)}(x,t,z) + \bar{\beta} q^{(1)}(x,t,z) \end{cases}$$

qui a une erreur en $\mathcal{O}\left(\bar{\beta}^2\right)$, correspond bien au modèle de Benney d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} & h_t + \left(\frac{(3+\kappa_\nu(h)h)h^2}{3\kappa_\nu(h)}\left[\bar{\delta}\bar{\kappa} h_{xxx} + \bar{\lambda}\sin\omega - \bar{\delta}\cos\omega h_x\right]\right)_x \\ & + \left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_\nu^3(h)} + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_\nu^4(h)}\left[5(\kappa_\nu(h))^2 - 6\kappa_\nu'(h)\right]\right)_x \\ & + \left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_\nu^5(h)}\left[4(\kappa_\nu(h))^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 10(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)\right]\right)_x \\ & + \left(\frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_\nu^4(h)}\left[2(\kappa_\nu(h))^4 + 5\left(\kappa_\nu'(h)\right)^2 - 7(\kappa_\nu(h))^2\kappa_\nu'(h)\right]\right)_x = 0 \end{aligned}$$

Le modèle de Saint-Venant d'ordre 0 contient le modèle de Benney d'ordre 1. Pour plus de détails et de modèles, on peut se référer à la thèse de Boutounet [5], aux articles de Ruyer-Quil et Manneville [63, 62, 61] et livre de Bresch [7].

Troisième partie

# Modèles asymptotiques de front d'avancement

Nous avons donc fini l'étude du film mince en amont du front. Maintenant, nous allons construire différents modèles de front d'avancement pour le film mince que nous venons d'étudier. Nous allons étudier le problème proche du front d'avancement (chapitre 4 page 65) où la vitesse d'avancement est $\vec{U}_{adv} = \vec{U}_{sl} = -u_0\vec{e}_x$, ce qui peut aussi être vu comme le front arrière de l'écoulement en prenant la vitesse moyenne du front $\vec{U}_{rec} = \vec{U}_{sl} = u_0\vec{e}_x$ (selon l'orientation de l'axe des abscisses). Ce problème sera étudié en différentes zones, en effet nous allons utiliser une condition de glissement qui permettra d'avoir un glissement du fluide sur le fond solide très près du front mais ce glissement s'annulera ensuite en s'éloignant du front pour retrouver une condition classique d'adhérence. On disposera alors de deux (chapitre 5 page 75) ou trois (chapitre 6 page 143) zones d'études selon les hypothèses de raccord faites :

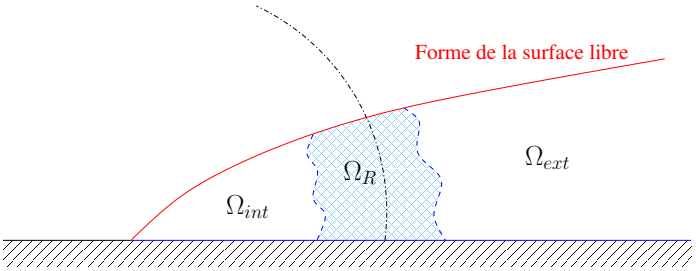



FIGURE 3.2: Front d'avancement du fluide

où $\Omega_{int}$ est la zone interne, proche du front, $\Omega_{ext}$ la zone externe, loin du front (c'est celle qui va se raccorder au film mince), et $\Omega_R$ la zone de raccord qui est commune aux deux zones précédentes. Nous passerons alors d'un problème de Navier-Stokes aux équations de Stokes stationnaires en supposant que le nombre de Reynolds associé à notre écoulement au niveau du front est faible.

Nous réaliserons alors un développement asymptotique raccordé en fonction d'un second petit paramètre, le nombre capillaire du front $C_{a,f} \ll 1$, dans les différentes zones étudiées et nous ferons une étude en deux zones de raccord du front d'avancement si le terme $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$, où $\beta$ est le coefficient de glissement et est le troisième petit paramètre de notre modèle. Notons que le nombre capillaire $C_{a,f} = \frac{U_0\mu}{\kappa}$ est un paramètre qui permet de quantifier la vitesse moyenne du front $U_0$ (avec $\mu$ la viscosité dynamique et $\kappa$ la tension de surface), donc si celle-ci est faible et si $\beta$ n'est pas trop petit, on a alors un raccord assez simple des inconnues. Mais si $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \sim \mathcal{O}(1)$, la zone de glissement est alors plus importante et/ou la vitesse plus élevée, nous serons alors obligés de faire un raccord en trois zones. Dans la zone intermédiaire ou zone de raccord, le glissement constant de la zone proche du front, tendra vers zéro pour se raccorder à la zone loin du front, la zone de non-glissement. Nous aurons donc décrit deux modèles de front, un premier plus simple à deux zones de raccord puis un second à trois zones de raccord (comme on peut le voir chez Cox [15], Hocking [37], Hocking et Rivers [40]).

CHAPITRE 4

# INTRODUCTION AUX PROBLÈMES DE FRONT D'AVANCEMENT

Dans ce chapitre, nous allons expliciter le problème au niveau du front d'avancement du fluide où la condition de glissement est active. Cette condition nous permet d'avoir un glissement donné très près du front qui décroît en s'éloignant du front, jusqu'à ré-obtenir une condition de non-glissement.

Le problème sera donc étudié séparément sur ces deux zones dans la suite. Pour cela et sous certaines hypothèses, nous passerons d'un problème de Navier-Stokes aux équations de Stokes stationnaires et nous réaliserons un adimensionnement du problème que nous résoudrons par développements asymptotiques en fonction d'un petit paramètre : le nombre capillaire du front $C_{a,f}$.

Pour simplifier la résolution du problème, nous l'écrirons dans le repère du fluide et introduirons une équation de la surface libre, qui est une inconnue de notre problème. Enfin nous passerons en formulation courant, ce qui permet de découpler la résolution de la vitesse et de la pression.

**Sommaire**


4.1 Adimensionnement . . . . . 66
4.2 Équations de volume . . . . . 67
4.3 Changement de repère . . . . . 70
4.4 Équation sur la surface libre . . . . . 71
4.5 Problème complet avec glissement . . . . . 71
4.6 Formulation courant . . . . . 73

On repart du système d'équations de Navier-Stokes déjà vu précédemment :

| **Équations de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
|---|
| $(\text{Eq } 1) : \nabla \cdot U(r,\phi,t) = 0$ |
| $(\text{Eq } 2) : \partial_t U(r,\phi,t) + \nabla \cdot \left[ U(r,\phi,t) \otimes U(r,\phi,t) - \frac{1}{\rho} T(r,\phi,t) \right] = \vec{g}$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : U \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| $(2) : U \cdot \vec{t} + \alpha \chi(r) [T \cdot \vec{n}] \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : U \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl} \text{ en } \phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \text{ en } \phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{n}_{sl} = \kappa \text{Courb}(x) - p_{atm} \text{ en } \phi = \theta(r)$ |

TABLE 4.1: Système de Navier-Stokes

où les inconnues sont le champs de vitesse $u(r,\phi)$, la pression $p(r,\phi)$ et la forme de la surface libre $\theta(r)$. Comme introduit dans la partie 1.2 page 14, nous avons pris ici $\frac{1}{\kappa_f(h)} = \alpha\chi(r)$.

Pour étudier le front d'avancement, nous passons des équations de Navier-Stokes aux équations de Stokes stationnaire en gardant une vitesse non-nulle à l'interface. Nous allons réaliser un adimensionnement des équations de Navier-Stokes pour justifier cette simplification du problème.

## 4.1 Adimensionnement

On adimensionne les différentes grandeurs qui apparaissent dans le système en utilisant $\dot{X}_f(t)$ la vitesse caractéristique du front (dimensionnée) et $h_f(t)$ la hauteur caractéristique du front :

$$\begin{aligned}
&t = \frac{h_f(t)}{\dot{X}_f(t)} t^*, && T(r,\phi) = \dot{X}_f(t)\,\mu T^*(r^*,\phi), && \vec{g} = g_0 \vec{g}^* = g_0 \nabla^* G^*(r^*\phi), \\
&r = h_f(t)\, r^*, && p(r,\phi) = \frac{\kappa}{h_f(t)} p^*(r^*,\phi), && \vec{U}_{sl} = -\dot{X}_f(t)\,\vec{U}^*_{sl} \\
&U(r,\phi) = \dot{X}_f(t)\, u^*(r^*,\phi), && p_{atm} = \frac{\kappa}{h_f(t)} p^*_{atm},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\nabla G(r,\phi)$ est sans dimension donc $\nabla G(r,\phi) = \nabla^* G^*(r^*\phi)$. Les variables munies d'une astérisque sont adimensionnées. Et on a alors les relations suivantes :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r}\partial_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{h_{f,d}(t)} \begin{pmatrix} \partial_{r^*} \\ \frac{1}{r^*}\partial_{\phi^*} \end{pmatrix} = \frac{1}{h_f(t)} \nabla^*, \quad \Delta = \frac{1}{h_f^2(t)} \Delta^*$$

On dispose des nombres adimensionnels suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nombre de Reynolds : | $R_{e,f} = \frac{\rho \dot{X}_f(t) h_f(t)}{\mu}$ | Nombre capillaire : | $C_{a,f} = \frac{\dot{X}_f(t)\mu}{\kappa} = \frac{W_{e,f}}{R_{e,f}}$ |
| Nombre de Weber : | $W_{e,f} = \frac{\rho \dot{X}_f^2(t) h_f(t)}{\kappa}$ | Coefficient de glissement : | $\beta = \frac{\alpha\mu}{h_f(t)}$ |
| Nombre de Froude : | $F_f^2 = \frac{\dot{X}_f^2(t)}{g_0 h_f(t)}$ | | |

TABLE 4.2: Nombres adimensionnels du front

où :

- le nombre de Reynolds $R_{e,f}$ est le rapport des forces d'inertie sur les forces de viscosité au niveau du front d'avancement,
- le nombre de Weber $W_{e,f}$ est le rapport des forces d'inertie sur la tension de surface,
- le nombre capillaire $C_{a,f}$ est le rapport des forces de viscosité sur les forces de tension de surface,
- le nombre de Froude au carré $F_f^2$ caractérise le rapport entre les forces liées à la vitesse et la force de pesanteur (la pression hydrostatique) et
- le coefficient de glissement $\beta$ .

## 4.2 Équations de volume

On adimensionne les équations de volume grâce à (4.1) et on obtient :

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot u^* \left(r^*, \phi^*\right) = 0 \\ R_{e,f} \left[\partial_{t^*} u^* + \nabla^* \cdot (u^* \otimes u^*)\right] \left(r^*, \phi^*\right) + \dfrac{1}{C_{a,f}} \nabla^* p^* \left(r^*, \phi^*\right) - \Delta^* u^* \left(r^*, \phi^*\right) = -\dfrac{R_{e,f}}{F_f^2} \nabla^* G^* \left(r^*, \phi^*\right) \end{cases}$$

On retrouve alors les équations de Stokes si :

$$\begin{cases} R_{e,f} \ll \dfrac{1}{C_{a,f}} = \dfrac{R_{e,f}}{W_{e,f}} \\ R_{e,f} \ll 1 \\ R_{e,f} \ll \dfrac{R_{e,f}}{F_f^2} \sim \mathcal{O}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_{e,f} \ll 1 \\ R_{e,f} \sim F_f^2 \ll 1 \end{cases}$$

Nous utiliserons dans la suite de l'hypothèse $C_{a,f} \ll 1$, ainsi on aura supposé que :

$$\begin{cases} W_{e,f} \ll 1 \\ R_{e,f} \sim F_f^2 \ll 1 \\ \dfrac{W_{e,f}}{R_{e,f}} = C_{a,f} \ll 1 \end{cases} \Leftrightarrow W_{e,f} \ll R_{e,f} \sim F_f^2 \ll 1 \Leftrightarrow \text{Inertie} \ll \text{Viscosité} \ll \text{Tension de surface}$$

Le fait de supposer que le nombre de Reynolds est petit : $R_{e,f} \ll 1$, montre que l'on considère un fluide laminaire, s'écoulant lentement et sans effet de turbulence. Ainsi sous les hypothèses $W_{e,f} \ll R_{e,f} \sim F_f^2 \ll 1$ c'est à dire $C_{a,f} \ll 1$, les forces de tension de surface dominent sur les forces de viscosité et d'inertie, ce qui nous permet d'avoir un front d'avancement bien défini.

Il nous reste alors deux petits paramètres : $C_{a,f}$ et $R_{e,f}$. Nous souhaitons par la suite faire un développement asymptotique sur le problème de Stokes obtenu ici :

$$\begin{cases} \nabla^* \cdot u^* \left(r^*, \phi^*\right) = 0 \\ \nabla^* p^* \left(r^*, \phi^*\right) = C_{a,f} \left[\Delta^* u^* \left(r^*, \phi^*\right) - \nabla^* G^* \left(r^*, \phi^*\right)\right] + \mathcal{O}\left(C_{a,f} R_{e,f}\right) \end{cases}$$

où nous avons utilisé le fait que le rapport $\dfrac{R_{e,f}}{F_f^2} \sim \mathcal{O}(1)$. Il nous faut donc quantifier le produit $C_{a,f} R_{e,f}$ de manière à connaître l'ordre de l'erreur générée en supprimant ces termes. Dans la suite nous ne développerons que l'ordre 0 et l'ordre 1 du développement asymptotique en $C_{a,f}$ de ce problème. Il suffit donc de prendre $R_{e,f} \sim \mathcal{O}\left(C_{a,f}^i\right)$ avec $i \in \mathbb{R}^{+*}$ pour que les termes Navier n'influent pas sur les deux premiers ordres du développement asymptotique en $C_{a,f}$. Au final, on a donc posé :

$$\begin{cases} W_{e,f} \ll R_{e,f} \sim F_f^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad C_{a,f} \ll 1 \\ R_{e,f} \sim \mathcal{O}\left(C_{a,f}^i\right) \text{ avec } i \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

TABLE 4.3: Hypothèse sur les nombres adimensionnels

### Problème dimensionné

On obtient alors le problème de Stokes stationnaire (en omettant les « * ») sous forme développée :

| |
|---|
| **Équations de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 1) : \partial_\phi u_\phi = -r\partial_r u_r - u_r$ |
| $(\text{Eq } 2) : \begin{cases} \mu\left(\partial_{rr}^2 u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}^2 u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r\right) - \partial_r p = \rho g \cos(\omega - \phi) \\ \mu\left(\partial_{rr}^2 u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial_{\phi\phi}^2 u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2}u_\phi\right) - \frac{1}{r}\partial_\phi p = \rho g \sin(\omega - \phi) \end{cases}$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : u_\phi(r,0) = 0$ |
| $(2) : \frac{\alpha\mu}{r}\chi(r)\partial_\phi u_r(r,0) = u_r(r,0)$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : u_\phi(r,\theta(r)) - r\partial_r\theta(r)\, u_r(r,\theta(r)) = \vec{U}_{sl}\cdot\vec{n}_{sl}$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : 0 = \left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]\left[\frac{1}{r}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r}u_\phi + \partial_r u_\phi\right](r,\theta(r)) + 2\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi u_\phi + u_r - r\partial_r u_r\right](r,\theta(r))$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : \frac{2\mu\left\{r^2(\partial_r\theta(r))^2\partial_r u_r + \partial_r\theta(r)\left[u_\phi - \partial_\phi u_r - r\partial_r u_\phi\right] + \frac{1}{r}\left[u_r + \partial_\phi u_\phi\right]\right\}(r,\theta(r))}{1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2} = \kappa\frac{r\partial_{rr}^2\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p(r,\theta(r)) - p_{atm}$ |

TABLE 4.4: Problème de Stokes dimensionné développé

### Problème adimensionné

On note $\beta = \frac{\alpha\mu}{h_{f,d}(t)}$ le coefficient de glissement du fluide, on a alors :

| |
|---|
| **Équations de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
| $\left(\text{Eq } 1\right) : \nabla \cdot u\left(r,\phi\right) = 0$ |
| $\left(\text{Eq } 2\right) : \nabla p\left(r,\phi\right) = C_{a,f}\left(\Delta u - \nabla G\right)\left(r,\phi\right)$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : u \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| $(2) : u \cdot \vec{t} + \beta\chi(r)\left[T \cdot \vec{n}\right] \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{en } \phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : u \cdot \vec{n}_{sl} = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl} \text{ en } \phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : \left[T \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \text{ en } \phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : C_{a,f}\left[\left\{\nabla u + (\nabla u)^t\right\} \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{n}_{sl} = \text{Courb}(r) + p - p_{atm} \text{ en } \phi = \theta(r)$ |

TABLE 4.5: Problème de Stokes adimensionné

et sous forme développée :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse & quantité de mouvement :** |
| $\left(\text{Eq } 1\right) : \partial_\phi u_\phi = -r\partial_r u_r - u_r$ |
| $\left(\text{Eq } 2\right) : \begin{cases} C_{a,f}\left(\partial^2_{rr} u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2} u_r\right) - \partial_r p = C_{a,f}\cos\left(\omega - \phi\right) \\ C_{a,f}\left(\partial^2_{rr} u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi} u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2} u_\phi\right) - \frac{1}{r}\partial_\phi p = C_{a,f}\sin\left(\omega - \phi\right) \end{cases}$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : u_\phi(r,0) = 0$ |
| $(2) : \frac{\beta}{r}\chi(r)\partial_\phi u_r(r,0) = u_r(r,0)$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : u_\phi(r,\theta(r)) - r\partial_r\theta(r)\, u_r(r,\theta(r)) = \vec{U}_{sl} \cdot \vec{n}_{sl}$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : 0 = \left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]\left[\frac{1}{r}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r}u_\phi + \partial_r u_\phi\right](r,\theta(r)) + 2\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi u_\phi + u_r - r\partial_r u_r\right](r,\theta(r))$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : \frac{2C_{a,f}\left\{r^2(\partial_r\theta(r))^2\partial_r u_r + \partial_r\theta(r)\left[u_\phi - \partial_\phi u_r - r\partial_r u_\phi\right] + \frac{1}{r}\left[u_r + \partial_\phi u_\phi\right]\right\}(r,\theta(r))}{\left[1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]} = \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p(r,\theta(r)) - p_{atm}$ |

TABLE 4.6: Problème de Stokes adimensionné développé

*Remarque.* On a vu que $\alpha\chi(r) = \frac{1}{\kappa_f(h)}$ alors en adimensionné $\beta\frac{h_{f,d}(t)}{h_0}\chi(r) = \frac{\alpha\mu}{h_{f,d}(t)}\frac{h_{f,d}(t)}{h_0}\chi(r) = \frac{\mu}{\kappa_f(h)h_0} = \frac{1}{\kappa_v(h)}$.

## 4.3 Changement de repère

On se met alors dans le repère du fluide. C'est donc la paroi qui va avancer, le fluide ne se déplace plus mais il y a toujours un champ de vitesse adimensionné $u$ à l'intérieur du fluide. On pose donc $\bar{u} = u - \vec{U}_{sl}$ où $\bar{u}$ est la vitesse dans le nouveau repère et $\vec{U}_{sl} = -\vec{e}_x$ est la vitesse moyenne adimensionnée du fluide, pour plus de simplicité dans les notations nous omettrons les "$^-$" . Le problème est alors le suivant :

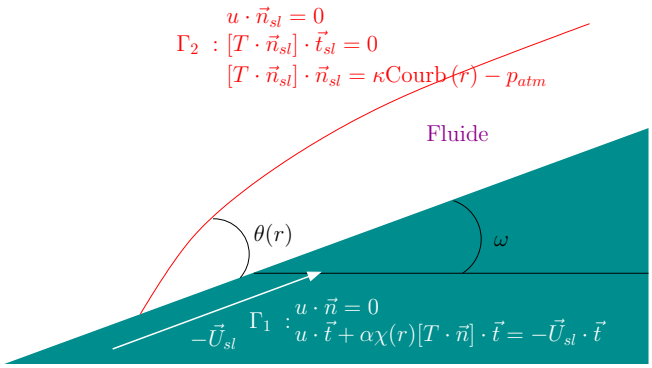



FIGURE 4.1: Changement de repère

Il s'écrit sous forme adimensionnée tel que :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** |
| $(\text{Eq } 1) : \nabla \cdot u(r,\phi) = 0$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** |
| $(\text{Eq } 2) : \nabla p(r,\phi) = C_{a,f}(\Delta u - \nabla G)(r,\phi)$ |
| **Condition de glissement :** |
| $(1) : u \cdot \vec{n} = 0$ en $\phi = 0$ |
| $(2) : u \cdot \vec{t} + \beta\chi(r)[T \cdot \vec{n}] \cdot \vec{t} = 1$ en $\phi = 0$ |
| **Condition d'imperméabilité :** |
| $(3) : u \cdot \vec{n}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** |
| $(4) : [T \cdot \vec{n}_{sl}] \cdot \vec{t}_{sl} = 0$ en $\phi = \theta(r)$ |
| **Continuité des contraintes normales :** |
| $(5) : C_{a,f}\left[\left\{\nabla u + (\nabla u)^t\right\} \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{n}_{sl} = \text{Courb}(r) + p - p_{atm}$ en $\phi = \theta(r)$ |

TABLE 4.7: Problème de Stokes adimensionné dans le repère du front

Le problème sous forme développée est :

| |
|---|
| **Équation de conservation de la masse :** $(\text{Eq } 1) : \partial_\phi u_\phi = -r\partial_r u_r - u_r$ |
| **Équation de quantité de mouvement :** $(\text{Eq } 2) : \begin{cases} \partial_r p = C_{a,f}\left[\left(\partial^2_{rr}u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r\right) - \cos(\omega-\phi)\right] \\ \frac{1}{r}\partial_\phi p = C_{a,f}\left[\left(\partial^2_{rr}u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2}u_\phi\right) - \sin(\omega-\phi)\right] \end{cases}$ |
| **Condition de glissement :** $(1) : u_\phi(r,0) = 0$ <br> $(2) : \frac{\beta}{r}\chi(r)\partial_\phi u_r(r,0) = u_r(r,0) - 1$ |
| **Condition d'imperméabilité :** $(3) : u_\phi(r,\theta(r)) - r\partial_r\theta(r)\, u_r(r,\theta(r)) = 0$ |
| **Continuité des contraintes tangentielles :** $(4) : 0 = \left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]\left[\frac{1}{r}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r}u_\phi + \partial_r u_\phi\right](r,\theta(r)) + 2\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi u_\phi + u_r - r\partial_r u_r\right](r,\theta(r))$ |
| **Continuité des contraintes normales :** $(5) : \frac{2C_{a,f}\left\{r^2(\partial_r\theta(r))^2\partial_r u_r + \partial_r\theta(r)\left[u_\phi - \partial_\phi u_r - r\partial_r u_\phi\right] + \frac{1}{r}\left[u_r + \partial_\phi u_\phi\right]\right\}(r,\theta(r))}{\left[1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]} = \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p(r,\theta(r)) - p_{atm}$ |

TABLE 4.8: Problème de Stokes adimensionné développé dans le repère du front

## 4.4 Équation sur la surface libre

On souhaite avoir un équation sur la surface libre, on dérive alors la condition limite (5) par rapport à $r$, ce qui permet par la suite d'éliminer les termes de pression de cette équation. Ainsi on aura un équation sur la surface libre, uniquement en fonction de la vitesse. On peut écrire la condition (5) telle que :

$$C_{a,f}\left\{\left[\left(\nabla u + \nabla u^T\right)\cdot\vec{n}_{sl}\right]\cdot\vec{n}_{sl}\right\}(r,\theta(r)) = \text{Courb}(r) + p(r,\theta(r)) - p_{atm}$$

$$\Rightarrow \quad 2C_{a,f}d_r\left\{\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right](r,\theta(r))\right\} = d_r\text{Courb}(r) + d_r\left[p(r,\theta(r))\right]$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \partial_r\text{Courb} &= C_{a,f}\left\{2\partial_r\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right] + 2\partial_r\theta(r)\partial_\phi\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right]\right\}(r,\theta(r)) \\ &\quad -C_{a,f}\left\{\left[(\Delta u)_r - \partial_r G\right] + \partial_r\theta(r)\left[r(\Delta u)_\phi - \partial_\phi G\right]\right\}(r,\theta(r))\end{aligned}$$

avec $D(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla u^T\right)$ et où on a utilisé l'équation de volume :

$$\nabla p(r,\phi) = C_{a,f}\Delta u(r,\phi) - C_{a,f}\nabla G(r,\phi)$$

On a ainsi obtenu une équation sur la surface libre qui ne dépend plus que de la vitesse, on notera (6) cette nouvelle équation.

## 4.5 Problème complet avec glissement

Nous allons donc étudier le problème final adimensionné suivant :

- sur $\Omega$ :

$$\begin{aligned} &(\text{Eq } 1): \quad \nabla \cdot u(r,\phi) = 0 \\ &(\text{Eq } 2): \quad \nabla p(r,\phi) = C_{a,f}\left[\Delta u(r,\phi) - \nabla G(r,\phi)\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

- sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$(1): \quad u \cdot \vec{n} = 0$$

$$(2): \quad -\beta\chi(r)\left[T(r,0)\cdot\vec{n}\right]\cdot\vec{t} = u(r,0)\cdot\vec{t} - 1$$

- sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(r)$) :

$$(3): \quad u \cdot \vec{n}_{sl} = 0$$

$$(4): \quad \left[T \cdot \vec{n}_{sl}\right]\cdot\vec{t}_{sl} = 0$$

$$(5): \quad C_{a,f}\left[\left\{\nabla u + (\nabla u)^t\right\}\cdot\vec{n}_{sl}\right]\cdot\vec{n}_{sl} = \text{Courb}(r) + p - p_{atm}$$

$$(6): \quad \partial_r \text{Courb}(r) = C_{a,f}\left\{2\partial_r\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right] + 2\partial_r\theta(r)\,\partial_\phi\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right]\right\}$$

$$-C_{a,f}\left\{\left[(\Delta u)_r - \partial_r G\right] + \partial_r\theta(r)\left[r(\Delta u)_\phi - \partial_\phi G\right]\right\}$$

**Problème sous forme développée :**

- Équations de volume sur $\Omega$ :

$$(\text{Eq } 1): \quad \partial_\phi u_\phi = -r\partial_r u_r - u_r$$

$$(\text{Eq } 2): \quad \partial_r p = C_{a,f}\left[\partial^2_{rr}u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r - \cos(\omega-\phi)\right]$$

$$\frac{1}{r}\partial_\phi p = C_{a,f}\left[\partial^2_{rr}u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2}u_\phi - \sin(\omega-\phi)\right]$$

- Conditions limites sur $\Gamma_1$ (sur la paroi solide, en $\phi = 0$) :

$$(1): u_\phi = 0$$

$$(2): \frac{\beta}{r}\chi(r)\partial_\phi u_r = u_r - 1$$

- Conditions limites sur $\Gamma_2$ (à la surface libre, en $\phi = \theta(r)$) :

$$(3): \quad u_\phi - r\partial_r\theta(r)\,u_r = 0$$

$$(4): \quad 0 = \left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]\left[\frac{1}{r}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r}u_\phi + \partial_r u_\phi\right] + 2\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi u_\phi + u_r - r\partial_r u_r\right]$$

$$(5): \quad \frac{2C_{a,f}\left\{r^2(\partial_r\theta(r))^2\partial_r u_r + \partial_r\theta(r)\left[u_\phi - \partial_\phi u_r - r\partial_r u_\phi\right] + \frac{1}{r}\left[u_r + \partial_\phi u_\phi\right]\right\}}{\left[1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]} = \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p - p_{atm}$$

$$
\begin{aligned}
(6):\quad 0 = & \frac{3\left[r^2\left(\partial_r\theta(r)+r\partial^2_{rr}\theta(r)\right)\partial_r\theta(r)-1\right]\partial^2_{rr}\theta(r)+\left(4+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)r\left(\partial_r\theta(r)\right)^3}{\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^{5/2}} \\
& -\frac{r\partial^3_{rr}\theta(r)}{\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^{3/2}}+C_{a,f}\left[r\partial_r\theta(r)\cos(\omega+\theta(r))+\sin(\omega+\theta(r))\right] \\
& +\frac{C_{a,f}\left(1-r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)\left[\left(1-r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)\partial_r\theta(r)+2r\partial^2_{rr}\theta(r)\right]}{\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^2}\left[\frac{1}{r}u_\phi-\partial_r u_\phi\right] \\
& +C_{a,f}\frac{\left(9r\left(\partial_r\theta(r)\right)^3-8\partial^2_{rr}\theta(r)\right)r^3\partial_r\theta(r)-\left(1+2r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^2}{r^2\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^2}\partial_\phi u_\phi \\
& +C_{a,f}\frac{1-r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}{1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}\left\{\frac{2}{r}\partial^2_{\phi r}u_\phi-\partial^2_{rr}u_r+\left(\frac{1}{r}\partial^2_{\phi\phi}u_\phi-2\partial^2_{\phi r}u_r\right)\partial_r\theta(r)\right\} \\
& -C_{a,f}\frac{3+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}{1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}r\partial_r\theta(r)\partial^2_{rr}u_\phi \\
& -2C_{a,f}\frac{\left[1-r^4\left(\partial_r\theta(r)\right)^4+4r^2\partial_r\theta(r)\left(\partial_r\theta(r)+r\partial^2_{rr}\theta(r)\right)\right]}{r^2\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^2}u_r \\
& +2C_{a,f}\frac{\left(1-r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)\left(r\left(\partial_r\theta(r)\right)^3-\partial^2_{rr}\theta(r)\right)}{\left(1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2\right)^2}\partial_\phi u_r \\
& -C_{a,f}\frac{1+3r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}{1+r^2\left(\partial_r\theta(r)\right)^2}\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r
\end{aligned}
$$

## 4.6 Formulation courant

On passe en formulation courant. En effet cette formulation nous permet de simplifier la résolution des équations.

### Mise en oeuvre

L'équation (Eq1) est vérifiée par définition de $\psi(r,\phi)$ :

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot u(r,\phi) &= \left[\partial_r u_r+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r}\partial_\phi u_\phi\right](r,\phi) \\
&= \left[\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\phi\psi\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\partial_\phi\psi\right)+\frac{1}{r}\partial_\phi\left(-\partial_r\psi\right)\right](r,\phi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On remplace dont l'équation (Eq1) par $u(r,\phi)=\text{rot}\left(\psi(r,\phi)\vec{e}_z\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\partial_\phi\psi(r,\phi)\\ -\partial_r\psi(r,\phi)\end{pmatrix}$. Pour l'équation (Eq2), on obtient :

$$
(\text{Eq2.1}):\text{rot}\left(C_{a,f}\Delta u-\nabla p-C_{a,f}\nabla G\right)(r,\phi)=C_{a,f}\Delta^2\psi(r,\phi)=0
$$

On peut aussi remarquer que si on applique l'opérateur divergence à cette même équation, on a une nouvelle équation de volume :

$$
(\text{Eq2.2}):\nabla\left(C_{a,f}\Delta u-\nabla p-C_{a,f}\nabla G\right)(r,\phi)=\Delta\left(p+C_{a,f}G\right)(r,\phi)=0
$$

or $\Delta G(r,\phi)=0$ ainsi l'équation (Eq2.2) se réduit à $\Delta p(r,\phi)=0$.

### Réécriture du système

Le problème devient alors :

- Équations de volume sur $\Omega$ :

$$\begin{cases} (\text{Eq1}) : & u(r,\phi) = \text{rot}\,\psi(r,\phi) \\ (\text{Eq2}) : & \nabla p(r,\phi) = C_{a,f}\left[\Delta u(r,\phi) - \nabla G(r,\phi)\right] \\ \\ (\text{Eq2.1}) : & \Delta^2\psi(r,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2}) : & \Delta p(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

- Conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$(1) : \partial_r\psi(r,0) = 0$$

$$(2) : \beta\chi(r)\,\partial^2_{\phi\phi}\psi(r,0) = r\partial_\phi\psi(r,0) - r^2$$

- Conditions limites sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(r)$ et où on a simplifié (5) avec (4)) :

$$(3) : \quad \partial_r\psi = -\partial_r\theta(r)\,\partial_\phi\psi$$

$$\begin{aligned}(4) : \quad 0 &= \left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]\left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi + \frac{1}{r}\partial_r\psi - \partial^2_{rr}\psi\right] \\ &+ \frac{4}{r}\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi\psi - r\partial^2_{\phi r}\psi\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) : \quad & \frac{2C_{a,f}}{r^2}\frac{\left[1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]}{\left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]}\left[\partial_\phi\psi - r\partial^2_{\phi r}\psi\right] \\ &= \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p - p_{atm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) : \quad 0 &= \frac{3\left[r^2\left(\partial_r\theta(r) + r\partial^2_{rr}\theta(r)\right)\partial_r\theta(r) - 1\right]\partial^2_{rr}\theta(r) + \left(4 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)r(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)^{5/2}} \\ &- \frac{r\partial^3_{rrr}\theta(r)}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)^{3/2}} + C_{a,f}\left[r\partial_r\theta(r)\cos(\omega + \theta(r)) + \sin(\omega + \theta(r))\right] \\ &- \frac{C_{a,f}}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)r^3}\left[4\partial_\phi\psi + \left(1 + 3r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)\partial^3_{\phi\phi\phi}\psi\right] \\ &+ 3C_{a,f}\frac{1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)r^2}\left[\partial^2_{r\phi}\psi + \partial_r\theta(r)\,\partial^2_{\phi\phi}\psi - r\left(\partial^3_{rr\phi}\psi + \partial_r\theta(r)\,\partial^3_{r\phi\phi}\psi\right)\right] \\ &+ C_{a,f}\frac{3 + r^2(\partial_r\theta(r))^2}{1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2}r\partial_r\theta(r)\,\partial^3_{rrr}\psi\end{aligned}$$

CHAPITRE 5

# MODÈLE DE FRONT À DEUX ZONES AVEC UN RACCORD

On souhaite maintenant construire un premier modèle de front dans un cadre simplifié. Dans une première partie, nous allons étudier le problème loin du front, on réalise alors un développement asymptotique des inconnues en fonction du nombre capillaire $C_{a,f}$ qui est un petit paramètre de notre problème et on écrit les deux premiers ordre en $C_{a,f}$. Au premier ordre du développement, on trouve que l'interface est plane, on peut ainsi faire un changement de variable sur le problème complet en zone externe de manière à ramener l'étude du problème à surface libre à un problème à surface plane et donc considérer que le front du fluide forme un dièdre. On fait alors un développement asymptotique des inconnues ainsi que des opérateurs en fonction du nombre capillaire et on écrit les deux premiers ordres en $C_{a,f}$ du problème. Dans la deuxième partie, on étudie la zone interne, proche du front, où il y a glissement constant sur la paroi solide et on réalise alors exactement la même étude que dans la partie précédente.

La partie suivante permet de construire la solution externe et interne au premier ordre en $C_{a,f}$. La solution externe est obtenue par séparation de variables. Pour la solution interne, on réalise un nouveau changement de variable, puis on utilise la transformée de Laplace bilatérale qui fait alors apparaître une équation intégrale pour calculer les contraintes à la paroi solide. Cette méthode correspond à celle utilisée par Hocking [37] où il considère dès le début du problème que la surface libre est plane et ne fait ensuite l'étude complète que pour certaines valeurs de l'angle de contact. Après avoir étudié le comportement de cette équation intégrale, on pourra alors raccorder les deux solutions entre elles. Enfin nous nous intéresserons à l'ordre suivant du problème en $C_{a,f}$ où nous résoudrons la forme de la surface libre et la pression à cet ordre et dans les deux zones d'étude. Nous poserons alors des conditions de raccords pour ces différentes grandeurs.

Ce premier cas nous permet ainsi de réaliser le raccord des deux premiers ordres du développement asymptotique de la surface libre en faisant l'hypothèse $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$, où $\beta$ est le coefficient de glissement et est le troisième petit paramètre de notre modèle. Notons que le nombre capillaire $C_{a,f} = \frac{U_0\mu}{\kappa}$ est un paramètre qui permet de quantifier la vitesse moyenne du front $U_0$ (avec $\mu$ la viscosité dynamique et $\kappa$ la tension de surface), donc si $C_{a,f}$ est faible et si $\beta$ n'est pas trop petit, on a alors un raccord assez simple des inconnues. Le cas $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \sim \mathcal{O}(1)$ est plus compliqué et sera traité dans le chapitre suivant.

## Sommaire


5.1 Problème externe . . . . . **76**

5.1.1 Développement asymptotique en $C_{a,f}$ . . . . . 77

5.1.2 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 78
5.1.3 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 79
5.1.4 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 79
5.1.5 Changement de variable . . . 81
5.2 Problème interne . . . **89**
5.2.1 Zoom . . . 89
5.2.2 Développement asymptotique en $C_{a,f}$ . . . 92
5.2.3 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 92
5.2.4 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 93
5.2.5 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 93
5.2.6 Changement de variable . . . 95
5.3 Étude et raccord du problème complet à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . **101**
5.3.1 Problème externe à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 102
5.3.2 Problème interne à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 107
5.3.3 Raccord de l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . 118
5.4 Étude du problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . **123**
5.4.1 Problème externe à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 123
5.4.2 Problème interne à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 124
5.4.3 Surface libre à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 124
5.4.4 Pression à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 137
5.4.5 Fonction courant à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ . . . 139
5.5 Conclusion . . . **140**

## 5.1 Problème externe

On se met ici dans le domaine $\Omega_{ext}\backslash\Omega_R$ :

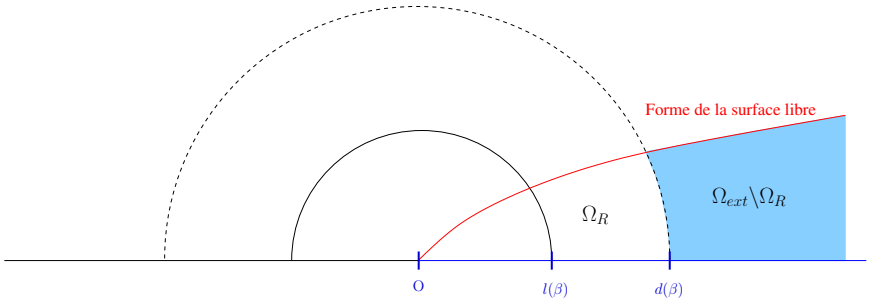



FIGURE 5.1: Domaine $\Omega_{ext}\backslash\Omega_R$

On se situe donc loin du front et le glissement n'est plus visible dans cette zone. On retrouve donc le problème étudié au chapitre 4 mais où l'on a retiré du domaine d'étude la zone où la solution est singulière. Le problème externe adimensionné s'écrit donc :

$$\begin{cases} (\text{Eq1}) : & u_{ext}(r,\phi) = \text{rot}\,\psi_{ext}(r,\phi) \\ (\text{Eq2}) : & C_{a,f}\Delta u_{ext}(r,\phi) = \nabla p_{ext}(r,\phi) + C_{a,f}\nabla G_{ext}(r,\phi) \\ \\ (\text{Eq2.1}) : & \Delta^2\psi_{ext}(r,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2}) : & \Delta p_{ext}(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ où $\chi(r) = 0$ (en $\phi = 0$) :

$$(1) : \partial_r \psi_{ext} = 0$$
$$(2) : \partial_\phi \psi_{ext} = r$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)$) :

$$(3) : \quad \partial_r \psi_{ext} = -\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) \partial_\phi \psi_{ext}$$

$$\begin{aligned}(4) : \quad 0 = & \left[1 - r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]\left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_{ext} + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{ext} - \partial^2_{rr}\psi_{ext}\right] \\ & + \frac{4}{r}\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\left[\partial_\phi \psi_{ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{ext}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) : \quad & \frac{2C_{a,f}}{r^2}\frac{\left[1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]}{\left[1 - r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]}\left[\partial_\phi \psi_{ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{ext}\right] \\ & = \frac{r\partial^2_{rr}\theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) + 2\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^3}{\left(1 + \left(r\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p_{ext} - p_{atm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) : \quad 0 = & \frac{3\left[r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) + r\partial^2_{rr}\theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) - 1\right]\partial^2_{rr}\theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{5/2}} \\ & + \frac{r\left(4 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^3}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{5/2}} - \frac{r\partial^3_{rrr}\theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{3/2}} \\ & + C_{a,f}\left[r\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\cos\left(\omega + \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right) + \sin\left(\omega + \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)\right] \\ & - \frac{C_{a,f}}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right) r^3}\left[4\partial_\phi \psi_{ext} + \left(1 + 3r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)\partial^3_{\phi\phi\phi}\psi_{ext}\right] \\ & + 3C_{a,f}\frac{1 - r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right) r^2}\left[\partial^2_{r\phi}\psi_{ext} + \partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\partial^2_{\phi\phi}\psi_{ext}\right] \\ & - 3rC_{a,f}\frac{1 - r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right) r^2}\left[\partial^3_{rr\phi}\psi_{ext} + \partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\partial^3_{r\phi\phi}\psi_{ext}\right] \\ & + C_{a,f}\frac{3 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{1 + r^2\left(\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2} r\partial_r \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right)\partial^3_{rrr}\psi_{ext}\end{aligned}$$

où les variables avec un '$ext$' sont les variables dans le domaine externe.

### 5.1.1 Développement asymptotique en $C_{a,f}$

On a pu voir que le nombre Capillaire intervient dans l'équation de quantité de mouvement (Eq 2) ainsi que dans les conditions limites (5) et (6). On considère ici que ce nombre est petit, ce qui signifie que la tension de surface est grande et donc que l'on a un front d'avancement.

On écrit les inconnues sous forme de polynômes de $C_{a,f}$ :

$$\begin{cases} u_{ext}\left(r, \phi\right) & = u_{0,ext}\left(r, \phi\right) + C_{a,f}u_{1,ext}\left(r, \phi\right) + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \\ \psi_{ext}\left(r, \phi\right) & = \psi_{0,ext}\left(r, \phi\right) + C_{a,f}\psi_{1,ext}\left(r, \phi\right) + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \\ p_{ext}\left(r, \phi\right) & = p_{0,ext}\left(r, \phi\right) + C_{a,f}p_{1,ext}\left(r, \phi\right) + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \\ \theta_{ext}\left(r, C_{a,f}, \beta\right) & = \theta_{0,ext}\left(r, \beta\right) + C_{a,f}\theta_{1,ext}\left(r, \beta\right) + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \end{cases}$$

Ici grâce au développement asymptotique en $C_{a,f}$, les $\theta_{i,ext}(r,\beta)$ perdent leur dépendance en $C_{a,f}$. Ainsi pour les différents ordres en $C_{a,f}$, on peut écrire les équations de volume que l'on aura à résoudre :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \begin{cases} (\mathrm{Eq1})_j : & u_{j,ext}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{j,ext}(r,\phi) \\ (\mathrm{Eq2})_0 : & \nabla p_{0,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2})_{j+1} : & \nabla p_{j+1,ext}(r,\phi) = \Delta u_{j,ext}(r,\phi) - \nabla G_{j,ext}(r,\phi) \\ (\mathrm{Eq2.1})_j : & \Delta^2 \psi_{j,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2.2})_j : & \Delta p_{j,ext}(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

Pour les conditions limites associées, celles sur $\Gamma_1$ (au fond) sont les mêmes à chaque ordre. Mais sur $\Gamma_2$ (à l'interface avec l'air), les conditions limites à chaque ordre en $C_{a,f}$ ne sont pas aussi simples à écrire car elles mélangent le développement de $\theta_{ext}(r)$ et de $\psi_{ext}(r,\phi)$.

Il faudra alors d'abord connaître le domaine d'étude qui est délimité par la surface libre avant de rechercher les autres inconnues. Ci-dessous, on présente les deux premiers ordres en $C_{a,f}$.

### 5.1.2 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Les équations de volume sont :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq1})_0 : & u_{0,ext}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{0,ext}(r,\phi) \\ (\mathrm{Eq2})_0 : & \nabla p_{0,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2.1})_0 : & \Delta^2 \psi_{0,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2.2})_0 : & \Delta p_{0,ext}(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} (1)_0 &: \partial_r \psi_{0,ext} = 0 \\ (2)_0 &: \partial_\phi \psi_{0,ext} = r \end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta_{0,ext}(r,\beta)$) :

$$(3)_0 : \quad \partial_r \psi_{0,ext} = -\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\,\partial_\phi \psi_{0,ext}$$

$$\begin{aligned} (4)_0 : \quad 0 = & \left[1 - r^2 \left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right] \left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_{0,ext} + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{0,ext} - \partial^2_{rr}\psi_{0,ext}\right] \\ & + \frac{4}{r}\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right] \end{aligned}$$

$$(5)_0 : \quad 0 = \frac{r\partial^2_{rr}\theta_{0,ext}(r,\beta) + 2\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta) + r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^3}{\left(1 + \left(r\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p_{0,ext} - p_{atm}$$

$$\begin{aligned} (6)_0 : \quad 0 = & 3\left[r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta) + r\partial^2_{rr}\theta_{0,ext}(r,\beta)\right)\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta) - 1\right]\partial^2_{rr}\theta_{0,ext}(r,\beta) \\ & + \left(4 + r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right) r\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^3 - r\left(1 + r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right)\partial^3_{rrr}\theta_{0,ext}(r,\beta) \end{aligned}$$

### 5.1.3 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Les équations de volume sont :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq1})_1 : & u_{1,ext}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{1,ext}(r,\phi) \\ (\mathrm{Eq2})_1 : & \Delta u_{0,ext}(r,\phi) = \nabla p_{1,ext}(r,\phi) + \nabla G_{0,ext}(r,\phi) \\ \\ (\mathrm{Eq2.1})_1 : & \Delta^2 \psi_{1,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2.2})_1 : & \Delta p_{1,ext}(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec comme conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} &(1)_1 : \partial_r \psi_{1,ext} = 0 \\ &(2)_1 : \partial_\phi \psi_{1,ext} = 0 \end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta_{0,ext}(r,\beta)$) :

$$(3)_1 : \quad \partial_r \psi_{1,ext} = -\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\,\partial_\phi \psi_{1,ext} - \partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta)\,\partial_\phi \psi_{0,ext}$$

$$\begin{aligned} (4) : \quad 0 = &\left[1 - r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right]\left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_1, ext + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{1,ext} - \partial^2_{rr}\psi_{1,ext}\right] \\ &+ \frac{4}{r}\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\left[\partial_\phi \psi_{1,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{1,ext}\right] \\ &+ \frac{4}{r}\partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta)\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right] \end{aligned}$$

$$(5)_1 : \quad \frac{2}{r^2}\frac{\left[1 + r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right]}{\left[1 - r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right]}\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right] = \mathrm{Courb}_1 + p_1$$

$$\begin{aligned} (6)_1 : \quad &\partial_r \mathrm{Courb}(r)_1 = 2\partial_r\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right]_0 + 2\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\left(\partial_\phi\left[(D(u)\cdot\vec{n}_{sl})\cdot\vec{n}_{sl}\right]\right)_0 \\ &- \left[(\Delta u)_{r,0,ext} - \partial_r G_{0,ext}\right] - \partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\left[r(\Delta u)_{\phi,0,ext} - \partial_\phi G_{0,ext}\right] \end{aligned}$$

### 5.1.4 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

- **Équations nécessaires pour déterminer** $\theta_{0,ext}(r)$ :
  La condition $(6)_0$ correspond à :

$$(\partial_r \mathrm{Courb}(r))_0 = \partial_r \mathrm{Courb}_0(r) = 0$$

  où $\mathrm{Courb}_0(r)$ est l'ordre 0 du développement asymptotique en $C_{a,f}$ de la courbure. Ainsi $\mathrm{Courb}_0$ est une constante et on a alors :

$$\mathrm{Courb}_0(r) = 0 \text{ ou } \mathrm{Courb}_0(r) = C_1 \neq 0$$

  Ce qui veut dire que la surface libre à l'ordre 0, est :
  ◇ soit une droite,
  ◇ soit un cercle.
  Nous ne nous intéressons pas ici aux cas d'un cercle, on considérera donc que la surface libre à l'ordre 0 est une droite et on notera :

$$\theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$$

où $\theta_{0,ext}(\beta)$ est une constante (non déterminée pour le moment) qui dépendra du paramètre $\beta$ de manière à permettre le raccord avec la zone interne. Cette situation correspond au cas d'une goutte à l'équilibre. En effet l'ordre 0 en $C_{a,f}$ correspond à prendre $C_{a,f} = 0$ et donc à avoir une vitesse de l'interface nulle. Nous regardons ici ce qu'il se passe dans la région du front où nous avons fait un zoom (en $r = h_f(t)\, r^*$) sur le front en adimensionnant. Le rayon de courbure effectif est donc beaucoup plus grand que la hauteur de liquide et est donné par l'écoulement amont (film mince pour notre étude). La courbure est donc nulle ici.

- **Équations nécessaires pour déterminer $p_0(r)$ :**
  On peut alors déterminer $p_{0,ext}(r,\phi)$ grâce à l'équation $(\mathrm{Eq2})_0$ et la condition $(5)_0$ :

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{Eq2})_0 : & \nabla p_{0,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\mathrm{Eq2.2})_0 : & \Delta p_{0,ext}(r,\phi) = 0 \\ (5)_0 : & p_{0,ext}\left(r,\theta_{0,ext}(r,\beta)\right) = -\mathrm{Courb}_0(r) + p_{atm} \end{array}$$

  On sait déjà que $\theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$ et donc que $\mathrm{Courb}_0(r) = 0$, ainsi la condition $(5)_0$ se simplifie telle que :

$$(5)_0 : p_{0,ext}\left(r,\theta_{0,ext}(\beta)\right) = p_{atm}$$

  Et directement, on a :

$$p_{0,ext}(r,\phi) = p_{atm}$$

- **Équations nécessaires pour déterminer $\psi_{0,ext}(r)$ :**

$$(\mathrm{Eq2.1})_0 : \Delta^2 \psi_{0,ext}(r,\phi) = 0$$

  avec les conditions limites :

$$\Gamma_1 : \left\{ \begin{array}{l} (1)_0 : \partial_r \psi_{0,ext}(r,0) = 0 \\ (2)_0 : \partial_\phi \psi_{0,ext}(r,0) = r \end{array} \right.$$

$$\Gamma_2 : \left\{ \begin{array}{ll} (3)_0 : & \partial_r \psi_{0,ext}\left(r,\theta_{0,ext}(r,\beta)\right) = -\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\, \partial_\phi \psi_{0,ext}\left(r,\theta_{0,ext}(r,\beta)\right) \\ (4)_0 : & 0 = \left[1 - r^2\left(\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\right)^2\right]\left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_{0,ext} + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{0,ext} - \partial^2_{rr}\psi_{0,ext}\right]\left(r,\theta_{0,ext}(r,\beta)\right) \\ & \quad + \frac{4}{r}\partial_r \theta_{0,ext}(r,\beta)\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right]\left(r,\theta_{0,ext}(r,\beta)\right) \end{array} \right.$$

  On peut simplifier ces équation grâce à ce que l'on a déjà trouvé : $\theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$, ainsi le problème sur $\psi_{0,ext}$ s'écrit :

$$\Omega : \Delta^2 \psi_{0,ext}(r,\phi) = 0$$

$$\Gamma_1 : \left\{ \begin{array}{ll} (1)_0 : \partial_r \psi_{0,ext} = 0 & \text{en } \phi = 0 \\ (2)_0 : \partial_\phi \psi_{0,ext} = r & \text{en } \phi = 0 \end{array} \right.$$

$$\Gamma_2 : \left\{ \begin{array}{lll} (3)_0 : & \partial_r \psi_{0,ext} = 0 & \text{en } \phi = \theta_{0,ext}(\beta) \\ (4)_0 : & 0 = \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_{0,ext} + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{0,ext} - \partial^2_{rr}\psi_{0,ext} & \text{en } \phi = \theta_{0,ext}(\beta) \end{array} \right.$$

  où on peut simplifier la condition (4) avec la condition (3). On a alors :

$$\Omega : \Delta^2 \psi_{0,ext}(r,\phi) = 0$$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_0 : \partial_r \psi_{0,ext} = 0 & \text{en } \phi = 0 \\ (2)_0 : \partial_\phi \psi_{0,ext} = r & \text{en } \phi = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_0 : & \partial_r \psi_{0,ext} = 0 & \text{en } \phi = \theta_{0,ext}(\beta) \\ (4)_0 : & \partial^2_{\phi\phi} \psi_{0,ext} = 0 & \text{en } \phi = \theta_{0,ext}(\beta) \end{cases}$$

- **Équation nécessaire pour déterminer** $u_0(r)$ :

$$(\text{Eq1})_0 : u_{0,ext}(r,\phi) = \text{rot}\, \psi_{0,ext}(r,\phi)$$

- **Ordre 1 :**
On a vu que $\theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$, ainsi Courb $= C_{a,f} \underbrace{\left(r\partial^2_{rr}\theta_{1,ext}(r,\beta) + 2\partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta)\right)}_{=\text{Courb}_1} + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right)$.

On peut donc simplifier ce problème comme il suit :

$$\begin{cases} (\text{Eq1})_1 : & u_{1,ext}(r,\phi) = \text{rot}\, \psi_{1,ext}(r,\phi) \\ (\text{Eq2})_1 : & \Delta u_{0,ext}(r,\phi) = \nabla p_{1,ext}(r,\phi) + \nabla G_{0,ext}(r,\phi) \\ \\ (\text{Eq2.1})_1 : & \Delta^2 \psi_{1,ext}(r,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \Delta p_{1,ext}(r,\phi) = 0 \end{cases}$$

sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} (1)_1 &: \partial_r \psi_{1,ext}(r,0) = 0 \\ (2)_1 &: \partial_\phi \psi_{1,ext}(r,0) = 0 \end{aligned}$$

sur $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned}
(3)_1 : \quad & \partial_r \psi_{1,ext}(r,\theta_{0,ext}(\beta)) = -\partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta)\, \partial_\phi \psi_{0,ext}(r,\theta_{0,ext}(\beta)) \\
(4)_1 : \quad & 0 = \left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi_{1,ext} + \frac{1}{r}\partial_r \psi_{1,ext} - \partial^2_{rr}\psi_{1,ext}\right](r,\theta_{0,ext}(\beta)) \\
& + \frac{4}{r}\partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta)\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right](r,\theta_{0,ext}(\beta)) \\
(5)_1 : \quad & \frac{2}{r^2}\left[\partial_\phi \psi_{0,ext} - r\partial^2_{\phi r}\psi_{0,ext}\right](r,\theta_{0,ext}(\beta)) = r\partial^2_{rr}\theta_{1,ext}(r,\beta) + 2\partial_r \theta_{1,ext}(r,\beta) + p_{1,ext}(r,\theta_{0,ext}) \\
(6)_1 : \quad & 3\partial^2_{rr}\theta_{1,ext}(r,\beta) + r\partial^3_{rrr}\theta_{1,ext}(r,\beta) = \sin(\omega + \theta_{0,ext}(\beta)) \\
& -\frac{1}{r^3}\left\{4\partial_\phi \psi_{0,ext} + \partial^3_{\phi\phi\phi}\psi_{0,ext}\right\}(r,\theta_{0,ext}(\beta)) + \frac{3}{r^2}\left[\partial^2_{r\phi}\psi_{0,ext} - r\partial^3_{rr\phi}\psi_{0,ext}\right](r,\theta_{0,ext}(\beta))
\end{aligned}$$

Ces équations se résolvent dans le même ordre que pour l'ordre 0 en $C_{a,f}$. Cette méthode est détaillée dans la partie 5.1.5.3.

### 5.1.5 Changement de variable

On réalise un changement de variable qui va nous permettre de nous ramener à un domaine en forme de dièdre qui sera fixe au cours des résolutions successives :

$$\xi = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{r} = r \\ \bar{\phi}(r,\phi) = \dfrac{\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)}\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\theta_{1,ext}(r,\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}\phi \end{pmatrix} C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

Ainsi le changement de variable dépend de $\beta$. On a posé : $\phi = \dfrac{\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}\bar{\phi}(r,\phi)$, de manière à se ramener à un dièdre. En effet, $\phi$ variait entre 0 et $\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)$, et $\bar{\phi}(r,\phi)$ variera entre 0 et $\theta_{0,ext}(\beta)$. Le problème est donc maintenant posé dans un dièdre.

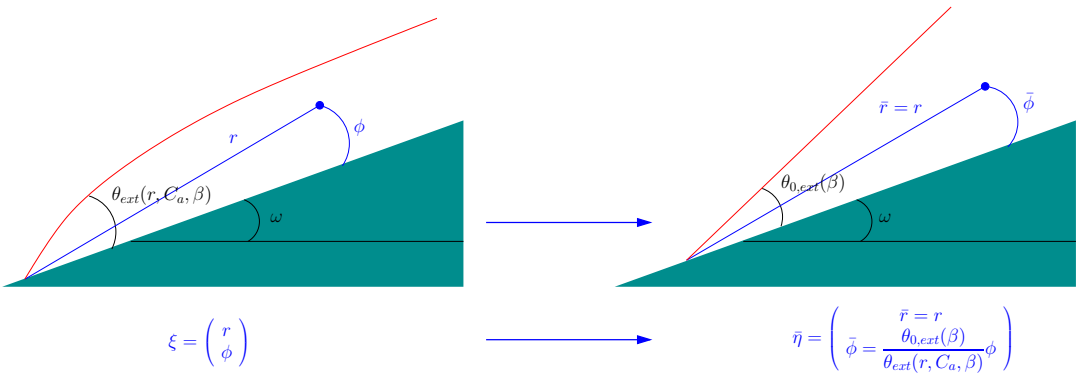



FIGURE 5.2: Changement de variables en zone externe

Et on note $\bar{\eta}$ le changement de variable défini tel que :

$$\bar{\eta} = \left(\bar{r} = r, \bar{\phi} = \frac{\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)}\phi = \phi - \frac{\theta_{1,ext}(r,\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}\phi C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\right)$$

On aura donc la jacobienne du changement de variable :

$$\begin{aligned}
\partial_\xi \bar{\eta} &= \begin{pmatrix} \partial_r \bar{r} & \partial_\phi \bar{r} \\ \partial_r \bar{\phi} & \partial_\phi \bar{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\theta_{0,ext}(\beta)\partial_r \theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)\phi}{\theta_{ext}^2(r, C_{a,f}, \beta)} & \dfrac{\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial_{\bar{r}} \bar{\theta}_{ext}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)\bar{\phi}}{\bar{\theta}_{ext}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)} & \dfrac{\theta_{0,ext}(\beta)}{\bar{\theta}_{ext}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\partial_{\bar{r}} \bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}\bar{\phi} & \dfrac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)} \end{pmatrix} C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

De plus ici nous n'étudions pas les cas de mouillage total, alors $\theta_{0,ext}(\beta) \neq 0$ et donc $\det\left|\partial_\xi \bar{\eta}\right| \neq 0$. Et comme les fonctions utilisées sont $\mathscr{C}^\infty$, $\bar{\eta}$ est donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$ et il décrit bien un changement de variables.

Nous avons donc $u_{ext}(r,\phi) = \bar{u}_{ext}(\bar{\eta}) = \bar{u}_{ext}(\bar{r}, \bar{\phi})$ . Notons que $\theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta) = \bar{\theta}_{ext}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)$ et $\partial_r \theta_{ext}(r, C_{a,f}, \beta) = \partial_{\bar{r}} \bar{\theta}_{ext}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)$.

#### 5.1.5.1 Traitement des opérateurs

Les opérateurs se développent alors eux aussi sous la forme de puissances de $C_{a,f}$ :

$$
\begin{aligned}
\nabla f(r,\phi) &= \bar{\nabla}_0 \bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\nabla}_1 \bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\Delta u(r,\phi) &= \bar{\Delta}_0 \bar{u}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\Delta}_1 \bar{u}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\Delta^2 \psi(r,\phi) &= \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\left[\bar{\Delta}_0\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_1\bar{\Delta}_0\right]\bar{\psi}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\mathrm{rot}\,\psi(r,\phi) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_{a,f}^k \bar{\mathrm{rot}}_k \bar{\psi}(\bar{r},\bar{\phi})
\end{aligned}
$$

où :

- $\bar{\nabla}_0 = \nabla$ est le gradient classique dans le nouveau jeu de coordonnées,
- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\bar{\nabla}_i$ sont des corrections sur le gradient classique.

de même pour les autres opérateurs $\bar{\Delta}_0 = \bar{\Delta}$ et $\bar{\mathrm{rot}}_0 = \bar{\mathrm{rot}}$ qui sont explicités dans la partie 10.2 page 220.

#### 5.1.5.2 Nouvelle écriture du problème

$$
\begin{cases}
(\mathrm{Eq1}): & \bar{u}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{\mathrm{rot}}_0 \bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\mathrm{rot}}_1 \bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
(\mathrm{Eq2}): & C_{a,f}\bar{\Delta}_0 \bar{u}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{\nabla}_0 \bar{p}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\nabla}_1 \bar{p}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\nabla}_0 \bar{G}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
(\mathrm{Eq2.1}): & \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = C_{a,f}\bar{\Delta}_1^2 \bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
(\mathrm{Eq2.2}): & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = C_{a,f}\bar{\Delta}_1 \bar{p}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{cases}
$$

avec $\bar{G}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{r}\sin\left(\omega + \bar{\phi}\dfrac{\bar{\theta}_{ext}(\bar{r},C_{a,f},\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}\right)$ et les conditions limites sur $\Gamma_1$ (au fond en $\bar{\phi} = 0$) :

$$(1): \quad \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{ext}(\bar{r},0) = 0$$

$$(2): \quad \left[1 - \frac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)}C_{a,f}\right]\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{ext}(\bar{r},0) = \bar{r} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

et sur $\Gamma_2$ (à l'interface en $\bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta)$) :

$$(3): \quad \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\theta_{0,ext}(\beta)) = 0$$

$$
\begin{aligned}
(4): \quad \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) &= \frac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}(\bar{r},\theta_{0,ext}(\beta)) \\
&+ C_{a,f}\left[-2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{r}}\bar{\psi} + \left(\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) + \tfrac{3}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\right)\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}\right](\bar{r},\theta_{0,ext}(\beta))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(5): \quad & \frac{2C_{a,f}}{\bar{r}}\left[\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi} - \partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}\right](\bar{r},\theta_{0,ext}(\beta)) \\
&= \left(\bar{r}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) + 2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\right)C_{a,f} + \bar{p}(\bar{r},\theta_{0,ext}(\beta)) - p_{atm} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}
$$

où on a utilisé la condition (3) pour simplifier la (4). La condition limite (6) s'écrit (en $\bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta)$) :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) = \quad & -3\partial_{\bar r\bar r}^2\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \bar r\partial_{\bar r\bar r\bar r}^3\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + \sin\left(\omega+\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) + \frac{3}{\bar r^2}\partial_{\bar r\bar\phi}^2\bar\psi_{ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\
& - \left[\frac{4}{\bar r^3}\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) + \frac{1}{\bar r^3}\partial_{\bar\phi\bar\phi\bar\phi}^3\bar\psi_{ext} + \frac{3}{\bar r}\partial_{\bar\phi\bar r\bar r}^3\bar\psi_{ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\
& + C_{a,f}\left[-3\partial_{\bar r\bar r}^2\theta_{2,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \bar r\partial_{\bar r\bar r\bar r}^3\theta_{2,ext}\left(\bar r,\beta\right) + \left(r\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + \bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\right)\cos\left(\omega+\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)\right] \\
& + \frac{C_{a,f}}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\bar r}\left[\frac{4}{\bar r^2}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - 3\left(\frac{\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\bar r} - \partial_{\bar r\bar r}^2\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\right)\right]\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\right) \\
& + 3C_{a,f}\left[\frac{\partial_{\bar r\bar r}^2\theta_{1,ext}\left(\bar r\right)}{\bar r}\partial_{\bar\phi\bar\phi}^2\bar\psi_{ext} + \frac{1}{\bar r^3}\frac{\theta_{1,ext}\left(\bar r\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\partial_{\bar\phi\bar\phi\bar\phi}^3\bar\psi_{ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\
& + \frac{3C_{a,f}}{\bar r\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\left(2\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \frac{\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\bar r}\right)\partial_{\bar r\bar\phi}^2\bar\psi_{ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\
& + 3C_{a,f}\left[\frac{\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\bar r}\partial_{\bar\phi\bar r\bar r}^3\bar\psi_{ext} + \frac{\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\bar r}\partial_{\bar r\bar\phi\bar\phi}^3\bar\psi_{ext} + \bar r\partial_{\bar r}\theta_{1,ext}\left(\bar r\right)\partial_{\bar r\bar r\bar r}^3\bar\psi_{ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)
\end{aligned}
$$

#### 5.1.5.3 Développement asymptotique en $C_{a,f}$

**Problème étudié** Appliquons le même développement asymptotique que précédemment, sur le problème dans le nouveau jeu de variables. Les équations de volumes s'écrivent comme il suit :

$$
\begin{cases}
\left(\text{Eq1}\right): & \bar u_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) + C_{a,f}\,\bar u_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) \\
& \quad = \bar{\text{rot}}_0\bar\psi_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) + C_{a,f}\left(\bar{\text{rot}}_0\bar\psi_{1,ext} + \bar{\text{rot}}_1\bar\psi_{0,ext}\right)\left(\bar r,\bar\phi\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\left(\text{Eq2}\right): & \bar\nabla_0\bar p_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) + C_{a,f}\left[\bar\nabla_0\bar p_{1,ext} + \bar\nabla_1\bar p_{0,ext}\right]\left(\bar r,\bar\phi\right) \\
& \quad = C_{a,f}\left(\bar\Delta_0\bar u_{0,ext} - \bar\nabla_0\bar G_{0,ext}\right)\left(\bar r,\bar\phi\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\left(\text{Eq2.1}\right): & \bar\Delta_0^2\bar\psi_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) + C_{a,f}\left(\bar\Delta_0^2\bar\psi_{1,ext} + \bar\Delta_1^2\bar\psi_{0,ext}\right)\left(\bar r,\bar\phi\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\left(\text{Eq2.2}\right): & \bar\Delta_0\bar p_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) + C_{a,f}\left(\bar\Delta_0\bar p_{1,ext} + \bar\Delta_1\bar p_{0,ext}\right)\left(\bar r,\bar\phi\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{cases}
$$

où :

$$
\begin{aligned}
& G_{ext}\left(r,\phi\right) &&= r\sin\left(\omega+\phi\right) \\
\Rightarrow\quad & \bar G_{ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) &&= \bar r\sin\left(\omega+\bar\phi\frac{\theta_{ext}\left(r,\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\right) \\
& &&= \sum_{i=0}^{\infty}C_{a,f}^i\bar G_{i,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) \\
& &&= \underbrace{\bar r\sin\left(\omega+\bar\phi\right)}_{=\bar G_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)} + C_{a,f}\underbrace{\bar r\frac{\bar\phi\theta_{1,ext}\left(r,\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\cos\left(\omega+\bar\phi\right)}_{=\bar G_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)} + \sum_{i=2}^{\infty}C_{a,f}^i\bar G_{i,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)
\end{aligned}
$$

La résolution du problème global passera alors par la résolution des sous problèmes plus simples obtenus grâce au développement asymptotique en $C_{a,f}$.

**Étude de l'ordre 0 en $C_{a,f}$** À l'ordre 0 en $C_{a,f}$, le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq1}\right)_0 : & \bar{u}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\text{rot}}_0 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ \left(\text{Eq2}\right)_0 : & \bar{\nabla}_0 \bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \\ \\ \left(\text{Eq2.1}\right)_0 : & \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \\ \left(\text{Eq2.2}\right)_0 : & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_0 : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ (2)_0 : & \partial_{\bar{\phi}} \bar{\psi}_{0,ext} = \bar{r} & \text{en } \bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_0 : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ (4)_0 : & \partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ (5)_0 : & \bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\theta_{0,ext}\right) = p_{atm} & \\ (6)_0 : & \theta_{0,ext}\left(\bar{r},\beta\right) = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) & \end{cases}$$

- On sait déjà que $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$ est une constante selon $\bar{r}$, sa valeur sera donnée par le raccord avec la zone interne et le type d'écoulement que l'on voudra mettre en amont du front.
- On aussi déjà résolu la pression à cet ordre ainsi $\bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = p_{atm}$.
- Puis nous devrons déterminer $\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ avec :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq2.1}\right)_0 : & \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \\ \\ \Gamma_1 : & \begin{cases} (1)_0 : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ (2)_0 : & \partial_{\bar{\phi}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{r} & \text{en } \bar{\phi} = 0 \end{cases} \\ \\ \Gamma_2 : & \begin{cases} (3)_0 : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ (4)_0 : & \partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}} \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \end{cases} \end{cases}$$

- Une fois que cela sera fait, il restera à construire $\bar{u}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ grâce à l'équation : $\left(\text{Eq1}\right)_0$ : $\bar{u}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\text{rot}}_0 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$.

On aura ainsi déterminé toutes les inconnues à l'ordre 0 en $C_{a,f}$.

**<u>Étude de l'ordre 1 en $C_{a,f}$</u>** Pour l'ordre 1 en $C_{a,f}$, la méthode de résolution sera du genre. Le problème à l'ordre 1en $C_{a,f}$ est :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq1}\right)_1 : & \bar{u}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\text{rot}}_0 \bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + \bar{\text{rot}}_1 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ \left(\text{Eq2}\right)_1 : & \bar{\nabla}_0 \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\underbrace{\bar{\nabla}_1 \bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)}_{=0} + \bar{\Delta}_0 \bar{u}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) - \bar{\nabla}_0 \bar{G}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ \\ \left(\text{Eq2.1}\right)_1 : & \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\bar{\Delta}_1^2 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ \left(\text{Eq2.2}\right)_1 : & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\bar{\Delta}_1 \bar{p}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_1 : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ (2)_1 : & \partial_{\bar{\phi}} \bar{\psi}_{1,ext} = \dfrac{\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)} \partial_{\bar{\phi}} \bar{\psi}_{0,ext} & \text{en } \bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_1 : & \partial_{\bar r}\bar\psi_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) = 0 & \text{en } \bar\phi = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ (4)_1 : & \dfrac{1}{\bar r^2}\partial^2_{\bar\phi\bar\phi}\bar\psi_{1,ext} = \dfrac{2}{\bar r^2}\dfrac{\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\partial^2_{\bar\phi\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} & \text{en } \bar\phi = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ & +2\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} & \\ & -\left\{\left[\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \dfrac{1}{\bar r}\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\right] + \dfrac{4}{\bar r}\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\right\}\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} & \\ (5)_1 : & \dfrac{2}{\bar r}\left[\dfrac{1}{\bar r}\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} - \partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) & \text{en } \bar\phi = \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \\ & = \bar p_{1,ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\right) + \bar r\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + 2\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) & \\ (6)_1 : & 0 = -3\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \bar r\partial^3_{\bar r\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + \sin\left(\omega + \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) & \\ & -\dfrac{1}{\bar r^3}\left[4\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} + \partial^3_{\bar\phi\bar\phi\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) & \\ & +\dfrac{3}{\bar r}\left[\dfrac{1}{\bar r}\partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} - \partial^3_{\bar\phi\bar r\bar r}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) & \end{cases}$$

- Ici nous connaissons déjà les inconnues à l'ordre 0, c'est à dire : $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$, $\bar p_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$, $\bar\psi_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$ et $\bar u_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$.
- On peut voir que pour résoudre ces équations, nous aurons besoin de connaître $\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)$. Ceci peut être fait en résolvant la condition $(6)_1$ :

$$\begin{aligned}(6)_1 : \quad & 0 = -3\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) - \bar r\partial^3_{\bar r\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + \sin\left(\omega + \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\ & -\frac{1}{\bar r^3}\left[4\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} + \partial^3_{\bar\phi\bar\phi\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) + \frac{3}{\bar r}\left[\frac{1}{\bar r}\partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} - \partial^3_{\bar\phi\bar r\bar r}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)\end{aligned}$$

- Si nous connaissons $\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)$, nous pouvons alors déterminer $\bar p_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$ avec :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq2}\right)_1 : & \bar\nabla_0\bar p_{,ext1}\left(\bar r,\bar\phi\right) = \bar\Delta_0\bar u_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) - \bar\nabla_0\bar G_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) \\ \left(\text{Eq2.2}\right)_1 : & \bar\Delta_0\bar p_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) = 0 \\ (5)_1 : & \dfrac{2}{\bar r}\left[\dfrac{1}{\bar r}\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} - \partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\right]\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\ & = \bar p_{1,ext}\left(\bar r,\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) + \bar r\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) + 2\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) \end{cases}$$

- Ensuite nous pourrons déterminer $\bar\psi_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$ avec :

$$\left(\text{Eq2.1}\right)_1 : \bar\Delta_0^2\bar\psi_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) = -\bar\Delta_1^2\bar\psi_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right)$$

  - sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} (1)_1 : \quad & \partial_{\bar r}\bar\psi_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) = 0 & \text{en } \bar\phi = 0 \\ (2)_1 : \quad & \partial_{\bar\phi}\bar\psi_{1,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) = \frac{\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)}{\theta_{0,ext}}\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\left(\bar r,\bar\phi\right) & \text{en } \bar\phi = 0 \end{aligned}$$

  - sur $\Gamma_2$ :

$$(3)_1 : \quad \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \qquad \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)$$

$$\begin{aligned}(4)_1 : \quad & \frac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{1,ext} = \frac{2}{\bar{r}^2}\frac{\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} \qquad \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\\ & +2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\\ & -\left\{\left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right) - \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)\right] + \frac{4}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)\right\}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\end{aligned}$$

- Pour finir nous pourrons calculer $\bar{u}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ grâce à l'équation :

$$\left(\text{Eq1}\right)_1 : \bar{u}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\text{rot}}_0\bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + \bar{\text{rot}}_1\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$$

Toutes les inconnues à l'ordre 1 seront alors connues.

**<u>Généralisation de la méthode de résolution</u>** On peut voir que quelque soit l'ordre $j$ considéré, nous disposons des équations de volumes suivantes sur $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
\left(\text{Eq1}\right)_j : \quad & \bar{u}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \sum_{i=0}^{j-1}\bar{\text{rot}}_{j-i}\bar{\psi}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
\left(\text{Eq2}\right)_j : \quad & \bar{\nabla}_0\bar{p}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\sum_{i=0}^{j-1}\bar{\nabla}_{j-i}\bar{p}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + \sum_{i=0}^{j-1}\left(\bar{\Delta}_{j-i-1}\bar{u}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) - \bar{\nabla}_{j-i-1}\bar{G}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right)\\
\left(\text{Eq2.1}\right)_j : \quad & \bar{\Delta}^2_0\bar{\psi}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\sum_{i=0}^{j-1}\bar{\Delta}^2_{j-i}\bar{\psi}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
\left(\text{Eq2.2}\right)_j : \quad & \bar{\Delta}_0\bar{p}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\sum_{i=0}^{j-1}\bar{\Delta}_{j-i}\bar{p}_{i,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}$$

et conditions limites suivantes :

$$\Gamma_1 : \left\{\begin{array}{llll}
(1)_j : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = & 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0\\
(2)_j : & f\left(\bar{\psi}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) = & f\left(\bar{\theta}_{j,ext}\left(\bar{r},\beta\right),\bar{\theta}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\beta\right),...,\theta_{0,ext}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \bar{\phi} = 0\\
 & & \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right),...,\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) &
\end{array}\right.$$

$$\Gamma_2 : \left\{\begin{array}{llll}
(3)_j : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = & 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\\
(4)_j : & f\left(\bar{\psi}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) = & f\left(\bar{\theta}_{j,ext}\left(\bar{r},\beta\right),\bar{\theta}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\beta\right),...,\theta_{0,ext}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\\
 & & \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right),...,\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) & \\
(5)_j : & \bar{p}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = & f\left(\bar{\theta}_{j,ext}\left(\bar{r},\beta\right),\bar{\theta}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\beta\right),...,\theta_{0,ext}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\\
 & & \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right),...,\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) & \\
(6)_j : & f\left(\bar{\theta}_{j,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) = & f\left(\bar{G}_{ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right),\bar{\theta}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\beta\right),...,\theta_{0,ext}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\\
 & & \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right),...,\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right) &
\end{array}\right.$$

Supposons qu'à l'ordre $j$, nous connaissons les inconnues aux ordres précédents c'est à dire que $\forall k \in \mathbb{N}, k < j$, nous connaissons les fonctions $\bar{\theta}_{k,ext}\left(\bar{r},\beta\right)$ ,$\bar{\psi}_{k,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$, $\bar{p}_{k,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ et $\bar{u}_{k,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$.

La résolution du problème se déroule alors en différentes étapes.

- Nous avons tout d'abord besoin de connaître la valeur de $\theta_{j,ext}(\bar{r})$ pour déterminer les autres inconnues. C'est l'équation $(6)_j$ qui nous permet de déterminer cette valeur.

- Puis le sous-système :

$$\begin{cases} (\text{Eq2})_j : & \bar{\nabla}_0 \bar{p}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = -\sum_{i=0}^{j-1} \bar{\nabla}_{j-i} \bar{p}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ & \quad + \sum_{i=0}^{j-1} \left(\bar{\Delta}_{j-i-1} \bar{u}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) - \bar{\nabla}_{j-i-1} \bar{G}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) \\ (\text{Eq2.2})_j : & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = -\sum_{i=0}^{j-1} \bar{\Delta}_{j-i} \bar{p}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ (5)_j : & \bar{p}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = f\left(\bar{\theta}_{j,ext}(\bar{r},\beta), \bar{\theta}_{j-1,ext}(\bar{r},\beta), \ldots, \theta_{0,ext}(\beta), \quad \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta)\right. \\ & \qquad \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}), \ldots, \bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) \end{cases}$$

permet de déterminer $\bar{p}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$.
- On peut ensuite construire $\bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$ grâce au sous-système :

$$\begin{cases} (\text{Eq2.1})_j : \bar{\Delta}_0^2 \bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = -\sum_{i=0}^{j-1} \bar{\Delta}_{j-i}^2 \bar{\psi}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ \Gamma_1 : \begin{cases} (1)_j : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \quad 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ (2)_j : & f\left(\bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) = \quad f\left(\bar{\theta}_{j,ext}(\bar{r},\beta), \bar{\theta}_{j-1,ext}(\bar{r},\beta), \ldots, \theta_{0,ext}(\beta), \right. & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ & \qquad \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}), \ldots, \bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) \end{cases} \\ \Gamma_2 : \begin{cases} (3)_j : & \partial_{\bar{r}} \bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \quad 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta) \\ (4)_j : & f\left(\bar{\psi}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) = \quad f\left(\bar{\theta}_{j,ext}(\bar{r},\beta), \bar{\theta}_{j-1,ext}(\bar{r},\beta), \ldots, \theta_{0,ext}(\beta), \right. & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta) \\ & \qquad \left.\bar{\psi}_{j-1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}), \ldots, \bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\right) \end{cases} \end{cases}$$

On devra chercher les fonctions $\Psi_k(\bar{r},\bar{\phi}) \in S^\mu$ de la forme :

$$\Psi_k(\bar{r},\bar{\phi}) = \sum_{i=0}^{i<+\infty} S_{k,\mu_i}(\bar{r},\bar{\phi}) = \left[S_{k,\mu_0} + S_{k,\mu_1} + \ldots\right](\bar{r},\bar{\phi})$$

où les fonctions $S_{k,\mu_i}(\bar{r},\bar{\phi}) \in S^\mu$ représentent le comportement singulier de $\Psi_k(\bar{r},\bar{\phi})$ près du front (à l'origine du repère, cf 2.1 page 26). Mais cette solution de sera valide que loin du front.
- Enfin l'équation :

$$(\text{Eq1})_j : \bar{u}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \sum_{i=0}^{j-1} \bar{\text{rot}}_{j-i} \bar{\psi}_{i,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$$

donne $\bar{u}_{j,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$.

Nous avons ainsi déterminé toutes les inconnues de cet ordre. On remarque qu'à chaque ordre, le problème se réduit à la résolution d'un bilaplacien dans un dièdre avec terme source, entièrement déterminé grâce aux ordres précédents.

## 5.2 Problème interne

Dans la zone interne $\Omega_{int}\backslash\Omega_R$, on se situe près du front donc le glissement est constant :

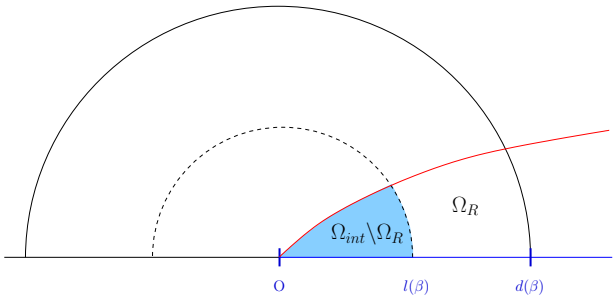



FIGURE 5.3: Domaine $\Omega_{int}\backslash\Omega_R$

On reprend alors le problème complet (4.2) avec $\chi(r) = 1$. Les équations de volume s'écrivent :

$$\Omega : \begin{cases} (\text{Eq } 1) : & \nabla \cdot u_{int}(r,\phi) = 0 \\ (\text{Eq } 2) : & C_{a,f}\Delta u_{int}(r,\phi) - \nabla p_{int}(r,\phi) = C_{a,f}\nabla G_{int}(R,\phi) \end{cases}$$

avec les conditions limites suivantes :

- sur $\Gamma_1$ (au fond en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} (1) : &\quad u_{int} \cdot \vec{n} = 0 \\ (2) : &\quad u_{int}(r,0) \cdot \vec{t} + \beta\left[T_{int}(r,0) \cdot \vec{n}\right] \cdot \vec{t} = 1 \end{aligned}$$

- sur $\Gamma_2$ (à l'interface en $\phi = \theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta)$) :

$$\begin{aligned} (3) : &\quad u_{int} \cdot \vec{n}_{sl} = 0 \\ (4) : &\quad \left[T_{int} \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \\ (5) : &\quad C_{a,f}\left[\left\{\nabla u_{int} + (\nabla u_{int})^t\right\} \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{n}_{sl} = \text{Courb}(r) + p_{int} - p_{atm} \\ (6) : &\quad \partial_r \text{Courb}(r) = 2C_{a,f}\left\{\partial_r\left[(D(u_{int}) \cdot \vec{n}_{sl}) \cdot \vec{n}_{sl}\right] + \partial_r\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta)\,\partial_\phi\left[(D(u_{int}) \cdot \vec{n}_{sl}) \cdot \vec{n}_{sl}\right]\right\} \\ &\qquad -C_{a,f}\left\{(\Delta u_{int})_r - \partial_r G_{int} + \partial_r\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta)\left[r(\Delta u_{int})_\phi - \partial_\phi G_{int}\right]\right\} \end{aligned}$$

où les variables avec un '$_{int}$' sont les variables dans le domaine interne.

### 5.2.1 Zoom

On trouve le problème interne en faisant un zoom sur le problème externe tel que :

$$\xi = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \breve{\xi} = \begin{pmatrix} R = \dfrac{r}{\beta} \\ \phi \end{pmatrix}$$

où on a donc : $r = \beta R$ et $\partial_r = \dfrac{1}{\beta}\partial_R$. Ce qui revient à faire en tout :

- un adimensionnement : $r = h_f(t)\, r^*$ où par abus de notation on a remplacé $r^*$ par $r$,
- zoom : $r^* = \beta R$

Donc :

$$r = h_f(t)\, r^* = h_f(t)\,\beta R = \alpha\mu R$$

où $\alpha\mu$ est la longueur de glissement, cela revient donc à faire un adimensionnement en $\alpha\mu$ sur $r$ et non pas en $h_f(t)$ comme dans le chapitre 1 en 4.1. On appelle $R = \frac{r}{\beta}$ la variable rapide.

Dans la zone interne, on a $\chi(r) = 1$, le problème est donc le suivant :

$$\Omega : \begin{cases} (\text{Eq } 1) : & \nabla \cdot \breve{u}_{int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq } 2) : & C_{a,f}\Delta\breve{u}_{int}(R,\phi) - \beta\nabla\breve{p}_{int}(R,\phi) = \beta^2 C_{a,f}\nabla\breve{G}_{int}(R,\phi) \end{cases}$$

avec les conditions limites suivantes :

- sur $\Gamma_1$ (au fond en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} (1) : & \quad \breve{u}_{int} \cdot \vec{n} = 0 \\ (2) : & \quad \breve{u}_{int}(R,0) \cdot \vec{t} + \left[\left\{\nabla\breve{u}_{int} + \left(\nabla\breve{u}_{int}\right)^t\right\}(R,0) \cdot \vec{n}\right] \cdot \vec{t} = 1 \end{aligned}$$

- sur $\Gamma_2$ (à l'interface en $\phi = \theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta)$) :

$$\begin{aligned} &(3) : \breve{u}_{int} \cdot \vec{n}_{sl} = 0 \\ &(4) : \left[\breve{T}_{int} \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{t}_{sl} = 0 \\ &(5) : C_{a,f}\left[\left\{\nabla\breve{u}_{int} + \left(\nabla\breve{u}_{int}\right)^t\right\}\left(R, \breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)\right) \cdot \vec{n}_{sl}\right] \cdot \vec{n}_{sl} = \overline{\text{Courb}}(R) + \beta\left[\breve{p}_{int} - p_{atm}\right] \\ &(6) : \partial_R \breve{\text{Courb}}_{int}(R) \\ &\quad = C_{a,f}\left\{2\partial_R\left[\left(\breve{D}\left(\breve{u}_{int}\right) \cdot \vec{n}_{sl}\right) \cdot \vec{n}_{sl}\right] + 2\partial_R\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)\,\partial_\phi\left[\left(\breve{D}\left(\breve{u}_{int}\right) \cdot \vec{n}_{sl}\right) \cdot \vec{n}_{sl}\right]\right\} \\ &\quad - C_{a,f}\left\{\left[\left(\Delta\breve{u}_{int}\right)_r - \frac{R_{e,f}}{F_f^2}\partial_R\breve{G}_{int}\right] + \partial_R\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)\left[R(\Delta u)_\phi - \partial_\phi\breve{G}_{int}\right]\right\} \end{aligned}$$

où $G(r,\phi) = r\sin(\omega+\phi) = \beta R\sin(\omega+\phi) = \beta\breve{G}_{int}(R,\phi)$ et donc $\breve{G}_{int}(R,\phi) = R\sin(\omega+\phi)$ et :

$$\text{Courb}(r) = \frac{r\partial^2_{rr}\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta) + 2\partial_r\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta) + r^2\left(\partial_r\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta)\right)^3}{\left(1 + \left(r\partial_r\theta(r, C_{a,f}, \beta)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Courb}(\beta R) = \beta^{-1}\frac{R\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta) + 2\partial_R\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta) + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)\right)^3}{\left(1 + \left(R\partial_R\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Courb}(r) = \beta^{-1}\breve{\text{Courb}}_{int}(R)$$

Les variables zoomées sont désignées par la notation $\breve{}$ et on notera $\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta) = \breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)$. De plus si on passe en fonction courant, on a : $u_{int}(r,\phi) = \text{rot}(\psi_{int}(r,\phi)\,\vec{e}_z) = \frac{1}{\beta}\breve{\text{rot}}(\psi_{int}(r,\phi)\,\vec{e}_z)$ donc pour avoir $u_{int}(r,\phi) = \breve{u}_{int}(R,\phi)$, il faut que $\psi_{int}(r,\phi) = \beta\breve{\psi}_{int}(R,\phi)$ ainsi $\breve{u}(R,\phi) = \breve{\text{rot}}\breve{\psi}_{int}(R,\phi)$ et (en oubliant les $\breve{}$ sur les opérateurs) :

$$\begin{cases} (\text{Eq1}) : & \breve{u}_{int}(R,\phi) = \text{rot}\,\breve{\psi}_{int}(R,\phi) \\ (\text{Eq2}) : & C_{a,f}\Delta\breve{u}_{int}(R,\phi) - \beta\nabla\breve{p}_{int}(R,\phi) = \beta^2 C_{a,f}\nabla\breve{G}_{int}(R,\phi) \\ & \\ (\text{Eq2.1}) : & \Delta^2\breve{\psi}_{int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2}) : & \Delta\breve{p}_{int}(R,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} &(1) : \partial_R\breve{\psi}_{int} = 0 && \text{en } \phi = 0 \\ &(2) : \frac{1}{R}\partial_\phi\breve{\psi}_{int} - \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{int} = 1 && \text{en } \phi = 0 \end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \breve{\theta}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)$) :

$$(3): \quad \partial_R \breve{\psi}_{int} = -\partial_R \breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right) \partial_\phi \breve{\psi}_{int}$$

$$\begin{aligned}(4): \quad 0 = & \left[1 - R^2\left(\partial_R \breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]\left[\frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{int} + \frac{1}{R}\partial_R\breve{\psi}_{int} - \partial^2_{RR}\breve{\psi}_{int}\right] \\ & + \frac{4}{R}\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{int}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5): \quad & \frac{2C_{a,f}}{R^2}\frac{\left[1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]}{\left[1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right]}\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{int}\right] \\ & = \frac{R\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right) + 2\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right) + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^3}{\left(1 + \left(R\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \beta\left[\breve{p}_{int} - p_{atm}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6): \quad 0 = & \frac{3\left[R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right) + R\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right) - 1\right]\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{5/2}} \\ & + \frac{\left(4 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)R\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^3}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{5/2}} \\ & - \frac{R\partial^3_{RRR}\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)^{3/2}} \\ & + \beta^2 C_{a,f}\left[R\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\cos\left(\omega + \breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right) + \sin\left(\omega + \breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)\right] \\ & - \frac{C_{a,f}}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)R^3}\left[4\partial_\phi\breve{\psi}_{int} + \left(1 + 3R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)\partial^3_{\phi\phi\phi}\breve{\psi}_{int}\right] \\ & + 3C_{a,f}\frac{1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)R^2}\left[\partial^2_{R\phi}\breve{\psi}_{int} + \partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{int}\right] \\ & - 3C_{a,f}\frac{1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{\left(1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2\right)R}\left[\partial^3_{RR\phi}\breve{\psi}_{int} + \partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\partial^3_{R\phi\phi}\breve{\psi}_{int}\right] \\ & + C_{a,f}\frac{3 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}{1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\right)^2}R\partial_R\breve{\theta}_{int}\left(R, C_{a,f}, \beta\right)\partial^3_{RRR}\breve{\psi}_{int}\end{aligned}$$

On voit ici apparaître dans les équations, les paramètres adimensionnels $C_{a,f}$ et $\beta$. Comme précédemment nous allons devoir faire un développement asymptotique en $C_{a,f}$.

### 5.2.2 Développement asymptotique en $C_{a,f}$

On écrit les inconnues sous forme de polynômes de $C_{a,f}$ :

$$\begin{cases} \breve{u}_{int}(R,\phi) & = \breve{u}_{0,int}(R,\phi) + C_{a,f}\breve{u}_{1,int}(R,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \breve{\psi}_{int}(R,\phi) & = \breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) + C_{a,f}\breve{\psi}_{1,int}(R,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \breve{p}_{int}(R,\phi) & = \breve{p}_{0,int}(R,\phi) + C_{a,f}\breve{p}_{1,int}(R,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \breve{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta) & = \breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) + C_{a,f}\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \end{cases}$$

Ainsi pour les différents ordres en $C_{a,f}$, on peut écrire les équations de volume que l'on aura à résoudre :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \begin{cases} (\text{Eq1})_j : & \breve{u}_{j,int}(R,\phi) = \text{rot}\,\breve{\psi}_{j,int}(R,\phi) \\ (\text{Eq2})_0 : & \nabla\breve{p}_{0,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2})_j : & \Delta\breve{u}_{j,int}(R,\phi) - \beta\nabla\breve{p}_{j+1,int}(R,\phi) = \beta^2\nabla\breve{G}_{j,int}(R,\phi) \\ & \\ (\text{Eq2.1})_j : & \Delta^2\breve{\psi}_{j,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_j : & \Delta\breve{p}_{j,int}(R,\phi) = 0 \end{cases}$$

Pour les conditions limites associées, celles sur $\Gamma_1$ (au fond) sont les mêmes à chaque ordre. Mais sur $\Gamma_2$ (à l'interface avec l'air), les conditions limites à chaque ordre en $C_{a,f}$ ne sont pas aussi simples à écrire car elles mélangent le développement de $\theta_{int}(r,C_{a,f},\beta)$ et de $\psi_{int}(r,\phi)$.

### 5.2.3 Problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Regardons tout d'abord le problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ :

$$\begin{cases} (\text{Eq1})_0 : & \breve{u}_{0,int}(R,\phi) = \text{rot}\,\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) \\ (\text{Eq2})_0 : & \nabla\breve{p}_{0,int}(R,\phi) = 0 \\ & \\ (\text{Eq2.1})_0 : & \Delta^2\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_0 : & \Delta\breve{p}_{0,int}(R,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en$\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} (1)_0 &: \partial_R\breve{\psi}_{0,int} = 0 \\ (2)_0 &: \frac{1}{R}\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{0,int} = 1 \end{aligned}$$

sur $\Gamma_2$ (en$\phi = \breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)$) :

$$\begin{aligned} (3)_0 :\quad & \partial_R\breve{\psi}_{0,int} = -\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\,\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} \\ (4)_0 :\quad & 0 = \left[1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\right)^2\right]\left[\frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{,int0} + \frac{1}{R}\partial_R\breve{\psi}_{0,int} - \partial^2_{RR}\breve{\psi}_{0,int}\right] \\ & + \frac{4}{R}\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{0,int}\right] \\ (5)_0 :\quad & \text{Courb}_{0,int}(R) = \beta\left[p_{atm} - \breve{p}_{0,int}\right] \\ (6)_0 :\quad & \partial_R\breve{\text{Courb}}_{0,int}(R) = 0 \end{aligned}$$

On peut voir que ce problème dépend du paramètre $\beta$ et cela à chaque ordre du développement asymptotique en $C_{a,f}$. On pourrait donc faire un nouveau développement asymptotique en $\beta$ sur ces problèmes.

### 5.2.4 Problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Comme pour l'ordre 1 du problème externe, on utilise ce que l'on vient de montrer, c'est à dire $\breve{\theta}_0(R,\beta) = \breve{\theta}_0(\beta)$ et on a :

$$\begin{cases} (\text{Eq1})_1 : & \breve{u}_{1,int}(R,\phi) = \text{rot}\,\breve{\psi}_{1,int}(R,\phi) \\ (\text{Eq2})_1 : & \beta\nabla\breve{p}_{1,int}(R,\phi) = \Delta\breve{u}_{0,int}(R,\phi) - \beta^2\nabla\breve{G}_{0,int}(R,\phi) \\ \\ (\text{Eq2.1})_1 : & \Delta^2\breve{\psi}_{1,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \Delta\breve{p}_{1,int}(R,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned} &(1)_1 : \partial_R\breve{\psi}_{1,int} = 0 \\ &(2)_1 : \frac{1}{R}\partial_\phi\breve{\psi}_{1,int} - \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{1,int} = 0 \end{aligned}$$

sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)$) :

$$\begin{aligned}
(3)_1 : \quad & \partial_R\breve{\psi}_{1,int} = -\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\,\partial_\phi\breve{\psi}_{1,int} - \partial_R\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta)\,\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} \\
(4)_1 : \quad & 0 = \left[1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\right)^2\right]\left[\frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{1,int} + \frac{1}{R}\partial_R\breve{\psi}_{1,int} - \partial^2_{RR}\breve{\psi}_{1,int}\right] \\
& + \frac{4}{R}\partial_R\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta)\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{0,int}\right] \\
& + \frac{4}{r}\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{1,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{1,int}\right] \\
(5)_1 : \quad & \frac{2}{R^2}\frac{\left[1 + R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\right)^2\right]}{\left[1 - R^2\left(\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)\right)^2\right]}\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{0,int}\right] = \breve{\text{Courb}}_{1,int}(R) + \beta\breve{p}_{1,int} \\
(6)_1 : \quad & \partial_R\breve{\text{Courb}}_{1,int}(R) \\
& = \left\{2\partial_R\left[\left(\breve{D}\left(\breve{u}_{0,int}\right)\cdot\vec{n}_{sl}\right)\cdot\vec{n}_{sl}\right] + 2\partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,C_{a,f},\beta)\,\partial_\phi\left[\left(\breve{D}\left(\breve{u}_{0,int}\right)\cdot\vec{n}_{sl}\right)\cdot\vec{n}_{sl}\right]\right\} \\
& - \left\{\left[\left(\Delta\breve{u}_{0,int}\right)_r - \frac{R_{e,f}}{F_f^2}\partial_R\breve{G}_{0,int}\right] + \partial_R\breve{\theta}_{0,int}(R,C_{a,f},\beta)\left[R\,(\Delta u)_{\phi,0,int} - \partial_\phi\breve{G}_{0,int}\right]\right\}
\end{aligned}$$

### 5.2.5 Méthode de résolution du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

- **Équations nécessaires pour déterminer $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta)$ :**
  On a la condition suivante :

$$(6)_0 : \partial_R\breve{\text{Courb}}_{0,int}(R) = 0$$

  Ainsi à l'ordre 0, la courbure est une constante, elle peut être nulle ou non. Si elle est non nulle cela signifie que l'interface a une forme arrondie près du front. Cela semble être intéressant

mais la solution calculée ne serait valide que dans cette zone en forme de disque or nous voulons avoir une solution valide à l'infini de manière à pouvoir la raccorder avec la solution trouvée en zone externe.
Le seul choix possible est donc :

$$\breve{\text{Courb}}_{0,int}(R) = 0$$

c'est-à-dire $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$ =constante selon $R$.

- **Équations nécessaires pour déterminer $\breve{p}_{0,int}(R,\phi)$ :**
$\breve{p}_{0,int}(R,\phi)$ est caractérisé par les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (\text{Eq2})_0 : & \nabla \breve{p}_{0,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_0 : & \Delta \breve{p}_{0,int}(R,\phi) = 0 \\ (5)_0 : & 0 = \breve{\text{Courb}}_{0,int}(R) = \beta\left[p_{atm} - \breve{p}_{0,int}(R,\theta_{0,int})\right] \end{array}$$

Donc on trouve que $\breve{p}_{0,int}(R,\phi) = p_{atm}$.

- **Équations nécessaires pour déterminer $\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi)$ :**

$$(\text{Eq2.1})_0 : \Delta^2 \breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) = 0$$

avec les conditions limites simplifiées grâce à $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$ :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_0 : \partial_R \breve{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \phi = 0 \\ (2)_0 : \dfrac{1}{R}\partial_\phi \breve{\psi}_{0,int} - \dfrac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{0,int} = 1 & \text{en } \phi = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_0 : \quad \partial_R \breve{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \phi = \theta_{0,int}(\beta) \\ (4)_0 : \quad \partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \phi = \theta_{0,int}(\beta) \end{cases}$$

et en utilisant la condition $(3)_0$ pour simplifier la condition $(4)_0$.

- **Équations nécessaires pour déterminer $\breve{u}_{0,int}(R,\phi)$ :**

$$(\text{Eq1})_0 : \breve{u}_{0,int}(R,\phi) = \text{rot}\left(\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi)\,\vec{e}_z\right)$$

- **Ordre 1 :**
On a vu que $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$, ainsi $\breve{\text{Courb}} = C_{a,f}\underbrace{\left(r\partial^2_{rr}\breve{\theta}_{1,ext}(r,\beta) + 2\partial_r\breve{\theta}_{1,ext}(r,\beta)\right)}_{=\text{Courb}_1} + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right)$.

On peut donc simplifier ce problème comme il suit :

$$\begin{cases} (\text{Eq1})_1 : & \breve{u}_{1,int}(R,\phi) = \text{rot}\,\breve{\psi}_{1,int}(R,\phi) \\ (\text{Eq2})_1 : & \beta\nabla\breve{p}_{1,int}(R,\phi) = \Delta\breve{u}_{0,int}(R,\phi) - \beta^2\nabla\breve{G}_{0,int}(R,\phi) \\ \\ (\text{Eq2.1})_1 : & \Delta^2\breve{\psi}_{1,int}(R,\phi) = 0 \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \Delta\breve{p}_{1,int}(R,\phi) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned}
&(1)_1 : \partial_R \breve{\psi}_{1,int} = 0 \\
&(2)_1 : \frac{1}{R}\partial_\phi \breve{\psi}_{1,int} - \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{1,int} = 0
\end{aligned}$$

sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta_{0,int}(\beta)$) :

$$\begin{aligned}
(3)_1 :\quad & \partial_R \breve{\psi}_{1,int} = -\partial_R \breve{\theta}_{1,int}(R,\beta)\,\partial_\phi \breve{\psi}_{0,int} \\
(4)_1 :\quad & 0 = \frac{1}{R^2}\partial^2_{\phi\phi}\breve{\psi}_{1,int} + \frac{1}{R}\partial_R\breve{\psi}_{1,int} - \partial^2_{RR}\breve{\psi}_{1,int} + \frac{4}{R}\partial_R\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta)\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{0,int}\right] \\
(5)_1 :\quad & \frac{2}{R^2}\left[\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^2_{\phi R}\breve{\psi}_{0,int}\right] = R\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{1,int} + 2\partial_R\breve{\theta}_{1,int} + \beta\breve{p}_{1,int} \\
(6)_1 :\quad & 3\partial^2_{RR}\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta) + R\partial^3_{RRR}\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta) = \beta^2\sin(\omega + \theta_{0,int}(\beta)) \\
& -\frac{1}{R^3}\left[4\partial_\phi\breve{\psi}_{0,int} + \partial^3_{\phi\phi\phi}\breve{\psi}_{0,int}\right] + \frac{3}{R^2}\left[\partial^2_{R\phi}\breve{\psi}_{0,int} - R\partial^3_{RR\phi}\breve{\psi}_{0,int}\right]
\end{aligned}$$

### 5.2.6 Changement de variable

Nous faisons le même changement de variable que précédemment car l'ordre 0 de la surface libre est le même dans les deux zones. On a donc le changement de variables suivant :

$$\breve{\xi} = \begin{pmatrix} R \\ \phi \end{pmatrix} \to \hat{\eta} = \begin{pmatrix} \hat{R} = R \\ \hat{\phi}(R,\phi) = \dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)}\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \phi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\breve{\theta}_{1,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\phi \end{pmatrix} C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right)$$

où $\phi = \dfrac{\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\hat{\phi}(R,\phi)$, de manière à se ramener à un dièdre. Notons que $\theta_{int}(r, C_{a,f}, \beta) = \breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)$. Ainsi $\phi$ variait entre 0 et $\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta) = \hat{\theta}_{int}(\hat{R}, C_{a,f}, \beta)$, et $\hat{\phi}(R,\phi)$ variera entre 0 et $\theta_{0,int}(\beta)$. Le problème est donc maintenant posé dans un dièdre.

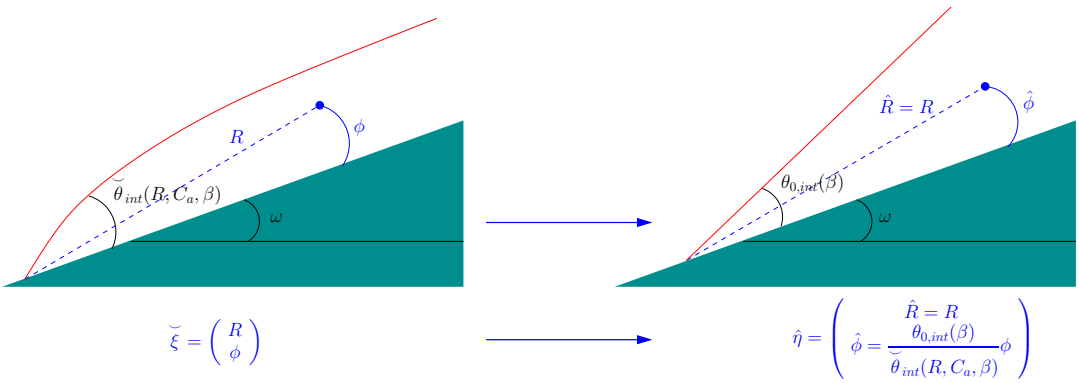



FIGURE 5.4: Changement de variables en zone interne

Et on note $\hat{\eta}$ le changement de variable défini tel que :

$$\hat{\eta} = \left(\hat{R} = R,\ \hat{\phi} = \frac{\theta_{0,int}(\beta)}{\breve{\theta}_{int}(R, C_{a,f}, \beta)}\phi = \phi - \frac{\breve{\theta}_{1,int}(R,\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\phi C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right)\right)$$

On aura donc la jacobienne du changement de variable :

$$\begin{aligned}
\partial_{\breve{\xi}}\hat{\eta} &= \begin{pmatrix} \partial_R\hat{R} & \partial_\phi\hat{R} \\ \partial_R\hat{\phi} & \partial_\phi\hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\theta_{0,int}(\beta)\,\partial_R\breve{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta)\,\phi}{\theta_{int}^2(R,C_{a,f},\beta)} & \dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\breve{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)\,\bar{\phi}}{\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)} & \dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)} \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\bar{\phi} & \dfrac{\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)} \end{pmatrix} C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

De plus ici nous n'étudions pas les cas de mouillage total, alors $\theta_{0,int}(\beta) \neq 0$ et donc $\det\left|\partial_{\breve{\xi}}\hat{\eta}\right| \neq 0$. Et comme les fonctions utilisées sont $\mathscr{C}^\infty$, $\hat{\eta}$ est donc un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$ et il décrit bien un changement de variables.

Et on notera $\breve{u}_{int}(R,\phi) = \hat{u}_{int}(\hat{\eta}(R,\phi)) = \hat{u}_{int}(\hat{R},\hat{\phi})$ .

#### 5.2.6.1 Traitement des opérateurs

Comme au chapitre précédent (cf (5.1.5.1)), les opérateurs vont se développer en séries dépendant du nombre Capillaire. Les expressions seront les mêmes qu'au chapitre précédent, il faudra juste remplacer les $\breve{}$ par des $\hat{}$ et en particulier $R = \hat{R}$.

En particulier pour les dérivées premières, on a :

$$\begin{cases} R \to \hat{R} = R \\ \phi \to \hat{\phi} = \dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)}\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_R &= \partial_{\hat{R}} - \hat{\phi}\dfrac{\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)}{\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)}\partial_{\hat{\phi}} \\ &= \partial_{\hat{R}} - \dfrac{\hat{\phi}}{\theta_{0,int}(\beta)}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\,\partial_{\hat{\phi}}C_{a,f} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \partial_\phi &= \dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\hat{\theta}_{int}(\hat{R},C_{a,f},\beta)}\partial_{\hat{\phi}} = \partial_{\hat{\phi}} - \dfrac{\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}C_{a,f}\partial_{\hat{\phi}} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \end{cases}$$

Si on s'intéresse au gradient, on peut voir qu'il se développera selon la forme suivante :

$$\nabla\breve{f}(R,\phi) = \sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i\,\hat{\nabla}_i\hat{f}(\hat{R},\hat{\phi}) = \hat{\nabla}_0\hat{f}(\hat{R},\hat{\phi}) + C_{a,f}\hat{\nabla}_1\hat{f}(\hat{R},\hat{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

où :

- $\hat{\nabla}_0 = \nabla$ est le gradient classique dans le nouveau jeu de coordonnées,
- $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\hat{\nabla}_i$ sont des corrections sur le gradient classique.

Il en est de même pour les autres opérateurs. Si on regarde plus en détails cette décomposition, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla\breve{f}(R,\phi) &= \nabla\hat{f}(\hat{R},\hat{\phi}) = \begin{pmatrix} \partial_R\hat{f} \\ \dfrac{1}{R}\partial_\phi\hat{f} \end{pmatrix}(\hat{R},\hat{\phi}) = \begin{pmatrix} \partial_{\hat{R}}\hat{f}\,\partial_R\hat{R} + \partial_{\hat{\phi}}\hat{f}\,\partial_R\hat{\phi} \\ \dfrac{1}{R}\left(\partial_{\hat{R}}\hat{f}\,\partial_\phi\hat{R} + \partial_{\hat{\phi}}\hat{f}\,\partial_\phi\hat{\phi}\right) \end{pmatrix}(\hat{R},\hat{\phi}) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\hat{R}}\hat{f} - \dfrac{\varphi\partial_R\hat{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta)}{\hat{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta)}\partial_{\hat{\phi}}\hat{f} \\ \dfrac{1}{\hat{R}}\dfrac{\theta_{0,int}(\beta)}{\hat{\theta}_{int}(R,C_{a,f},\beta)}\partial_{\hat{\phi}}\hat{f} \end{pmatrix}(\hat{R},\hat{\phi})
\end{aligned}$$

$$= \hat{\nabla}\hat{f}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \frac{C_{a,f}}{\hat{\theta}_{int}\left(R,C_{a,f},\beta\right)}\begin{pmatrix} \varphi\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^{i}\partial_R\hat{\theta}_{i+1,int}\left(R,\beta\right) \\ \frac{1}{\hat{R}}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^{i}\hat{\theta}_{i+1,int}\left(R,\beta\right) \end{pmatrix}\partial_{\hat{\phi}}\hat{f}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$$

$$= \hat{\nabla}\hat{f}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \frac{C_{a,f}}{\hat{\theta}_{int}\left(R,C_{a,f},\beta\right)}\begin{pmatrix} \varphi\partial_R\hat{\theta}_{1,int}\left(R,\beta\right) \\ \frac{1}{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(R,\beta\right) \end{pmatrix}\partial_{\hat{\phi}}\hat{f}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

Ainsi on peut voir que les termes correctifs apparaissent à partir de l'ordre 1 en $C_{a,f}$.

#### 5.2.6.2 Nouvelle écriture du problème

$$\begin{cases} \left(\text{Eq1}\right): & \hat{u}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{\text{rot}}_1\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \left(\text{Eq2}\right): & C_{a,f}\hat{\Delta}_0\hat{u}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta\hat{\nabla}_0\hat{p}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta C_{a,f}\hat{\nabla}_1\hat{p}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \beta^2 C_{a,f}\hat{\nabla}_0\hat{G}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \left(\text{Eq2.1}\right): & \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{\Delta}_1^2\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \left(\text{Eq2.2}\right): & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{\Delta}_1\hat{p}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \end{cases}$$

où $\hat{G}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{R}\sin\left(\omega + \hat{\phi}\frac{\hat{\theta}_{int}\left(\hat{R},C_{a,f},\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\right)$ avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$(1): \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},0\right) = 0$$

$$(2): \left(\frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} - \frac{1}{\hat{R}^2}\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^2\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},0\right) + \frac{C_{a,f}}{\hat{R}}\frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\left[\frac{2}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^2\hat{\psi}_{int} - \partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\right]\left(\hat{R},0\right) = 1 + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right)$) :

$$(3): \quad \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) = 0$$

$$\begin{aligned}(4): \quad \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) = & \left(\frac{1}{\hat{R}^2}\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^2\hat{\psi}_{int} - \partial_{\hat{R}\hat{R}}^2\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\ & +2C_{a,f}\left(\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} - \frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\hat{R}^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^2\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\ & +C_{a,f}\left(\partial_{\hat{R}\hat{R}}^2\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \frac{3}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right)\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\ & -4C_{a,f}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5): \quad & \frac{2C_{a,f}}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} - \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\right]\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\ & = C_{a,f}\left(\hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{R}}^2\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right) + \beta\left[\hat{p} - p_{atm}\right] + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\end{aligned}$$

où on a utilisé la condition (3) pour simplifier la (4). La condition (6) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) = \quad & \left(-3\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) - \hat{R}\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right) + \beta^2\sin\left(\omega+\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + \left(\frac{3}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{int} - \frac{4}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} - \frac{1}{\hat{R}^3\theta^2_{0,int}\left(\beta\right)}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} - \frac{3\theta^2_{0,int}\left(\beta\right)}{\hat{R}}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& - C_{a,f}\left(3\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{2,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \hat{R}\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{2,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right) \\
& + C_{a,f}\beta^2\left[\hat{R}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right]\cos\left(\omega+\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + \frac{C_{a,f}}{\hat{R}\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\left[\frac{4\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\hat{R}^2} - 3\left(\frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) - \partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right)\right]\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + 3C_{a,f}\left(\frac{1}{\hat{R}}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} + \hat{R}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + 3C_{a,f}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\left(\frac{1}{\hat{R}^3\theta^3_{0,int}\left(\beta\right)}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int} + \frac{\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\hat{R}}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\right)\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + \frac{3C_{a,f}}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial^3_{\hat{R}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) \\
& + \frac{3C_{a,f}}{\hat{R}\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\left(2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) - \frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\hat{R}}\right)\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)
\end{aligned}
$$

#### 5.2.6.3 Développement asymptotique en $C_{a,f}$

**Problème étudié** On développe les inconnues de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\hat{p}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\hat{\psi}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\hat{\theta}_{int}\left(\hat{R},C_{a,f},\beta\right) &= \theta_{0,int}\left(\beta\right) + C_{a,f}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}
$$

Appliquons ce développement asymptotique sur le problème dans le nouveau jeu de variables, les équations de volumes s'écrivent comme il suit :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\text{Eq1}\right) : \quad \hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\
&\qquad\qquad = \hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\left(\hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{1,int} + \hat{\text{rot}}_1\hat{\psi}_{0,int}\right)\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
&\left(\text{Eq2}\right) : \quad \beta\left[\hat{\nabla}_0\hat{p}_{0,int} + C_{a,f}\left(\hat{\nabla}_0\hat{p}_{1,int} + \hat{\nabla}_1\hat{p}_{0,int}\right)\right]\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\
&\qquad\qquad = C_{a,f}\left(\hat{\Delta}_0\hat{u}_{0,int} - \beta^2\hat{\nabla}_0\hat{G}_{0,int}\right)\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
&\left(\text{Eq2.1}\right) : \quad \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\left[\hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{1,int} + \hat{\Delta}_1^2\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
&\left(\text{Eq2.2}\right) : \quad \hat{\Delta}_0\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\left[\hat{\Delta}_0\hat{p}_{1,int} + \hat{\Delta}_1\hat{p}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}
\right.
$$

où $G_{int}\left(r,\phi\right) = r\sin\left(\omega+\phi\right)$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
\hat{G}_{int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{R}\sin\left(\omega + \varphi\frac{\hat{\theta}_{int}\left(\hat{R},C_{a,f},\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{a,f}\hat{G}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\
&= \hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + C_{a,f}\hat{G}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}
$$

avec :

$$\begin{aligned}\hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{R}\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)\\ \hat{G}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{R}\frac{\varphi\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\cos\left(\omega+\hat{\phi}\right)\end{aligned}$$

La résolution du problème global passera alors par la résolution des sous problèmes plus simples obtenus grâce au développement asymptotique en $C_{a,f}$.

**<u>Écriture de l'ordre</u>** $0$ **<u>en</u>** $C_{a,f}$ Où l'on peut voir que ce problème dépend du petit paramètre $\beta$. Nous aurons besoin ici d'un nouveau développement asymptotique pour résoudre entièrement ce problème.

$$\begin{cases}\left(\text{Eq1}\right)_0: & \hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\\ \left(\text{Eq2}\right)_0: & \hat{\nabla}_0\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=0\\ \\ \left(\text{Eq2.1}\right)_0: & \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=0\\ \left(\text{Eq2.2}\right)_0: & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=0\end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned}&(1)_0: \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=0\\ &(2)_0: \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}=1 && \text{en } \hat{\phi}=0\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned}&(3)_0: \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\\ &(4)_0: \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\end{aligned}$$

Les conditions $(5)_0$ et $(6)_0$ nous redonnent ce que l'on avait déjà c'est à dire :

$$\begin{aligned}\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)&=p_{atm}\\ \hat{\theta}_{0,int}\left(\hat{R},\beta\right)&=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\end{aligned}$$

Il reste à résoudre :

$$\begin{cases}\left(\text{Eq1}\right)_0: & \hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\\ \left(\text{Eq2.1}\right)_0: & \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=0\end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned}&(1)_0: \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=0\\ &(2)_0: \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}=1 && \text{en } \hat{\phi}=0\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned}&(3)_0: \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\\ &(4)_0: \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}=0 && \text{en } \hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\end{aligned}$$

**<u>Écriture de l'ordre</u>** $1$ **<u>en</u>** $C_{a,f}$

$$\begin{cases}\left(\text{Eq1}\right)_1: & \hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)+\hat{\text{rot}}_1\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\\ \left(\text{Eq2}\right)_1: & \beta\hat{\nabla}_0\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{\Delta}_0\hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)-\underbrace{\beta\hat{\nabla}_1\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)}_{=0}-\beta^2\hat{\nabla}_0\hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\\ \\ \left(\text{Eq2.1}\right)_1: & \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=-\hat{\Delta}_1^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\\ \left(\text{Eq2.2}\right)_1: & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=-\hat{\Delta}_1\hat{p}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=0\end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$(1)_1 : \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} = 0 \qquad \text{en } \hat{\phi} = 0$$

$$(2)_1 : \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} = \frac{\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)}{\theta_{0,int}}\left[2\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] \qquad \text{en } \hat{\phi} = 0$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$(3)_1 : \quad \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} = \left(\frac{\hat{\phi} - \theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\right)\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\,\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)$$

$$\begin{aligned}(4)_1 : \quad 0 = {} & \frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} - \partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\ & +2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\left[\frac{\hat{\phi}}{\theta_{0,int}(\beta)} - 2\right]\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \frac{2}{\hat{R}^2}\frac{\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\\ & +\left[\frac{\hat{\phi}}{\theta_{0,int}(\beta)}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) + \frac{3}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\right]\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\end{aligned}$$

$$(5)_1 : \quad \frac{2}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] = \left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\right] + \beta\hat{p}_{1,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)$$

$$\begin{aligned}(6)_1 : \quad & \hat{R}^3\left[3\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) + \hat{R}\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)\right] = \beta^2\hat{R}^3\sin(\omega + \theta_{0,int}(\beta)) \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\ & -4\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - 3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + 3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int}\end{aligned}$$

**Généralisation de la méthode de résolution** On peut voir que quelque soit l'ordre $j$ considéré, nous disposons des équations de volumes suivantes sur $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Eq1})_j : \quad & \hat{u}_{1,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \sum_{i=0}^{j-1}\hat{\mathrm{rot}}_{j-i}\hat{\psi}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi})\\
(\mathrm{Eq2})_j : \quad & \beta\hat{\nabla}_0\hat{p}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = -\beta\sum_{i=0}^{j-1}\bar{\nabla}_{j-i}\hat{p}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi}) + \sum_{i=0}^{j-1}\left(\hat{\Delta}_{j-i-1}\hat{u}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi}) - \beta^2\hat{\nabla}_{j-i-1}\hat{G}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi})\right)\\
(\mathrm{Eq2.1})_j : \quad & \hat{\Delta}^2_0\hat{\psi}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = -\sum_{i=0}^{j-1}\hat{\Delta}^2_{j-i}\hat{\psi}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi})\\
(\mathrm{Eq2.2})_j : \quad & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = -\sum_{i=0}^{j-1}\hat{\Delta}_{j-i}\hat{p}_{i,int}(\hat{R},\hat{\phi})
\end{aligned}$$

et conditions limites suivantes :

$$\Gamma_1 : \left\{\begin{array}{llll}
(1)_j : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = & 0 & \text{en } \hat{\phi} = 0\\
(2)_j : & f(\hat{\psi}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi})) = & f(\hat{\theta}_{j,int}(\hat{R},\beta),\hat{\theta}_{j-1,int}(\hat{R},\beta),\ldots,\theta_{0,int}(\beta), & \text{en } \hat{\phi} = 0\\
 & & \quad \hat{\psi}_{j-1,int}(\hat{R},\hat{\phi}),\ldots,\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})) &
\end{array}\right.$$

$$\Gamma_2 : \left\{\begin{array}{llll}
(3)_j : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = & 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\
(4)_j : & f(\hat{\psi}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi})) = & f(\hat{\theta}_{j,int}(\hat{R},\beta),\hat{\theta}_{j-1,int}(\hat{R},\beta),\ldots,\theta_{0,int}(\beta), & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\
 & & \quad \hat{\psi}_{j-1,int}(\hat{R},\hat{\phi}),\ldots,\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})) & \\
(5)_j : & \hat{p}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = & f(\hat{\theta}_{j,int}(\hat{R},\beta),\hat{\theta}_{j-1,int}(\hat{R},\beta),\ldots,\theta_{0,int}(\beta), & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\
 & & \quad \hat{\psi}_{j-1,int}(\hat{R},\hat{\phi}),\ldots,\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})) & \\
(6)_j : & f(\hat{\theta}_{j,int}(\hat{R},\hat{\phi})) = & f(\hat{G}_{int}(\hat{R},\hat{\phi}),\hat{\theta}_{j-1,int}(\hat{R},\beta),\ldots,\theta_{0,int}(\beta), & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta)\\
 & & \quad \hat{\psi}_{j-1,int}(\hat{R},\hat{\phi}),\ldots,\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})) &
\end{array}\right.$$

Supposons qu'à l'ordre $j$, nous connaissons les inconnues aux ordres précédents c'est à dire que $\forall k \in \mathbb{N}, k < j$, nous connaissons les fonctions $\hat{\theta}_{k,ext}\left(\hat{R},\beta\right)$ ,$\hat{\psi}_{k,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$, $\hat{p}_{k,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ et $\hat{u}_{k,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$.

La résolution du problème se déroule alors en différentes étapes.

- Nous avons tout d'abord besoin de connaître la valeur de $\hat{\theta}_{j,ext}\left(\hat{R},\beta\right)$ pour déterminer les autres inconnues. C'est l'équation $(6)_j$ qui nous permet de déterminer cette valeur.
- Puis le sous-système :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq2}\right)_j : & \beta\hat{\nabla}_0\hat{p}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = -\beta\sum_{i=0}^{j-1}\bar{\nabla}_{j-i}\hat{p}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ & \quad +\sum_{i=0}^{j-1}\left(\hat{\Delta}_{j-i-1}\hat{u}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta^2\hat{\nabla}_{j-i-1}\hat{G}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) \\ \left(\text{Eq2.2}\right)_j : & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = -\sum_{i=0}^{j-1}\hat{\Delta}_{j-i}\hat{p}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ (5)_j : & \hat{p}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = f\left(\hat{\theta}_{j,int}\left(\hat{R},\beta\right),\hat{\theta}_{j-1,int}\left(\hat{R},\beta\right),...,\theta_{0,int}\left(\beta\right),\right. \text{ en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right) \\ & \qquad \left.\hat{\psi}_{j-1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right),...,\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) \end{cases}$$

  permet de déterminer $\hat{p}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$.
- On peut ensuite construire $\hat{\psi}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ grâce au sous-système :

$$\begin{cases} \left(\text{Eq2.1}\right)_j : \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = -\sum_{i=0}^{j-1}\hat{\Delta}_{j-i}^2\hat{\psi}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ \Gamma_1 : \begin{cases} (1)_j : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \quad 0 & \text{en } \hat{\phi} = 0 \\ (2)_j : & f\left(\hat{\psi}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) = \quad f\left(\hat{\theta}_{j,int}\left(\hat{R},\beta\right),\hat{\theta}_{j-1,int}\left(\hat{R},\beta\right),...,\theta_{0,int}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \hat{\phi} = 0 \\ & \qquad \left.\hat{\psi}_{j-1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right),...,\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) \end{cases} \\ \Gamma_2 : \begin{cases} (3)_j : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \quad 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right) \\ (4)_j : & f\left(\hat{\psi}_{j,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) = \quad f\left(\hat{\theta}_{j,int}\left(\hat{R},\beta\right),\hat{\theta}_{j-1,int}\left(\hat{R},\beta\right),...,\theta_{0,int}\left(\beta\right),\right. & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right) \\ & \qquad \left.\hat{\psi}_{j-1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right),...,\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)\right) \end{cases} \end{cases}$$

- Enfin l'équation :

$$\left(\text{Eq1}\right)_j : \hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \sum_{i=0}^{j-1}\hat{\text{rot}}_{j-i}\hat{\psi}_{i,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$$

  donne $\hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$.

Nous avons ainsi déterminé toutes les inconnues de cet ordre.

*Remarque.* On peut voir qu'à chaque ordre, le problème se réduit à la résolution d'un bilaplacien dans un dièdre avec terme source, entièrement déterminé grâce aux ordres précédents.

## 5.3 Étude et raccord du problème complet à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Nous avons déjà écrit le problème externe à l'ordre 0 et déterminé la pression et la forme de la surface libre à cet ordre. Or la surface libre est une inconnue à chaque ordre du développement asymptotique en $C_{a,f}$, elle va donc varier à chaque résolution et le domaine d'étude va donc changer à chaque fois. On réalise alors un changement de variable qui va nous permettre de nous ramener à un domaine en forme de dièdre qui sera fixe au cours des résolutions successives.

### 5.3.1 Problème externe à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

#### 5.3.1.1 Résolution de l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Dans le domaine $\Omega_{ext}\backslash\Omega_R$, la fonction de troncature $\chi(\bar{r})$ est nulle. Ainsi dans cette zone, on retrouve le problème classique avec condition de non glissement au fond :

$$\begin{cases} (\text{Eq1})_0 : & \bar{u}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{\text{rot}}_0\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ (\text{Eq2.1})_0 : & \bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} (1)_0 : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = 0 \\ (2)_0 : & \partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} = \bar{r} & \text{en } \bar{\phi} = 0 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} (3)_0 : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta) \\ (4)_0 : & \partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 & \text{en } \bar{\phi} = \theta_{0,ext}(\beta) \end{cases}$$

Ce problème ne dépend donc plus de $\beta$. Il n'y a donc pas besoin de faire de développement selon cette variable. On utilise alors la méthode de résolution de Makhlouf [51], présentée au chapitre 2 partie 2.1.2.3 page 26. On a alors comme solution :

$$\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \frac{\bar{r}\left[\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)\sin\bar{\phi} + \bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\left(\theta_{0,ext}(\beta)-\bar{\phi}\right)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} \tag{5.1}$$

La figure suivante donne une représentation de la solution singulière classique $\bar{\psi}_{0,ext}$ sur tout le domaine d'étude :

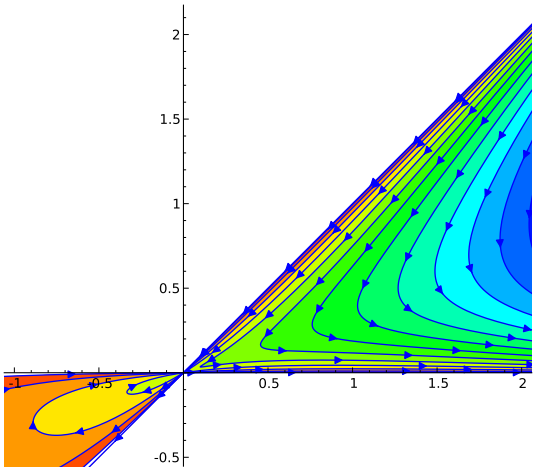



FIGURE 5.5: Représentation de la solution singulière

On observe bien le problème à l'origine du repère. Ceci sera corrigé grâce à la condition de glissement que l'on a ajoutée après raccord des deux zones d'étude.

On peut alors écrire l'expression de la vitesse $\bar{u}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$ :

$$\bar{u}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\bar{\phi} + \left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)\cos\bar{\phi} - \cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right) - \bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\cos\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} \\ -\dfrac{\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)\sin\bar{\phi} - \bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} \end{pmatrix}$$

**Contraintes au fond** Dans la suite de la résolution nous aurons besoin de l'expression des contraintes tangentielles au fond, notons le $\tau_{ext}(\bar{r})$ , après l'adimensionnement et les changements de variables, on trouve :

$$\tau_{ext}(\bar{r}) = [T_{ext}(\bar{r},0)\cdot\vec{n}]\cdot\vec{t} = -\frac{1}{\bar{r}^2}\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\bar{\psi}_{ext}(\bar{r},\bar{\phi})\Big|_{\bar{\phi}=0} = \frac{1}{\bar{r}}k_0^{ext}(\theta_{0,ext}(\beta))$$

ainsi à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ :

$$\begin{aligned}
k_0^{ext}(\theta_{0,ext}(\beta)) &= -\frac{1}{\bar{r}}\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})\Big|_{\bar{\phi}=0} \\
&= \frac{\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\left[(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\bar{\phi}+\bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\bar{\phi})\right]\Big|_{\bar{\phi}=0}}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)} \\
&= \frac{2\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)}
\end{aligned}$$

#### 5.3.1.2 Lien avec la littérature

Vérifions que l'on a bien la même solution singulière que Snoeijer [66], Huh et Scriven [42] et Cox [15].

**Lien avec Snoeijer** Dans son repère, Snoeijer [66] obtient :

$$\psi_0^s(r,\phi) = -\frac{Ur}{\theta-\cos\theta\sin\theta}\left[\theta\cos\theta\sin\phi-\phi\sin\theta\cos\phi\right]$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}
(\bar{v}_0)_r &= U\dfrac{(\cos\phi-\phi\sin\phi)\sin\theta-\theta\cos\theta\cos\phi}{\theta-\cos\theta\sin\theta} \\
(\bar{v}_0)_\phi &= U\dfrac{\theta\sin\phi\cos\theta-\phi\cos\phi\sin\theta}{\theta-\cos\theta\sin\theta}
\end{cases}$$

Pour se remettre dans notre repère, on doit faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases}
\theta = -\theta_{0,ext}(\beta) \\
\phi = \theta+\bar{\phi} = -\theta_{0,ext}(\beta)+\bar{\phi} \quad \text{avec } \theta<0 \\
U = -u_0
\end{cases}$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned}
\psi_0^s(r,\phi) &= -\frac{Ur}{\theta-\cos\theta\sin\theta}\left[\theta\cos\theta\sin\phi-\phi\sin\theta\cos\phi\right] \\
&= -\frac{u_0 r\left[\bar{\phi}\sin\bar{\phi}\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)+\bar{\phi}\cos\bar{\phi}\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)\sin\bar{\phi}\right]}{\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)} \\
&= u_0\bar{\psi}_{0,ext}(r,\bar{\phi})
\end{aligned}$$

On a donc retrouvé la solution singulière de Snoeijer dans un dièdre.

**Lien avec Huh et Scriven** On peut aussi vérifier que la solution trouvée est bien la même que celle de Huh et Scriven [42]. Pour un seul fluide, ils trouvent :

$$\psi_B(r,\phi) = r\left[a_B \sin\theta + b_B \cos\theta + c_B \theta \sin\theta + d_B \theta \cos\theta\right]$$

où ils notent :

$$\begin{cases} a_B = -U - d_B, & d_B = \dfrac{USC}{\phi - SC} \\ b_B = 0, & S = \sin\phi \\ c_B = \dfrac{US^2}{\phi - SC}, & C = \cos\phi \end{cases}$$

alors :

$$a_B = -U - \frac{USC}{\phi - SC} = -U\left(1 + \frac{SC}{\phi - SC}\right) = -\frac{U\phi}{\phi - SC}$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \psi_B(r,\phi) &= r\left[-\frac{U\phi}{\phi - SC}\sin\theta + \frac{US^2}{\phi - SC}\theta\sin\theta + \frac{USC}{\phi - SC}\theta\cos\theta\right] \\ &= \frac{Ur}{\phi - SC}\left[-\phi\sin\theta + S^2\theta\sin\theta + SC\theta\cos\theta\right] \\ &= \frac{Ur}{\phi - \sin\phi\cos\phi}\left[-\phi\sin\theta + \theta\sin^2\phi\sin\theta + \theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi\right] \end{aligned}$$

Pour se remettre dans notre repère, on doit faire le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \theta = \bar{\phi} \\ \phi = \theta_{0,ext}(\beta) \\ U = U_0 \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \psi_B(r,\phi) &= \frac{u_0 r\left[-\theta_{0,ext}(\beta)\sin\bar{\phi} + \bar{\phi}\sin\bar{\phi}\sin^2\theta_{0,ext}(\beta) + \bar{\phi}\cos\bar{\phi}\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)\right]}{\theta_{0,ext}(\beta) - \sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)} \\ &= -u_0\bar{\psi}_{0,ext}(r,\bar{\phi}) \end{aligned}$$

or ils définissent la fonction courant telle que :

$$\begin{cases} v_{Br} = -\dfrac{1}{r}\partial_\theta \psi_B \\ v_{B\theta} = \partial_r \psi_B \end{cases}$$

ce qui est l'inverse de ce que l'on fait ici. Donc leur fonction courant correspond à l'inverse de la notre. Et donc si :

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\partial_\theta \psi \\ u_{\bar{\phi}} = -\partial_r \psi \end{cases}$$

alors la fonction courant nous permettant d'utiliser ces formules est $-\psi_B$. Ce qui correspond encore une fois à $\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$.

**Lien avec Cox** Cox [15] fait une étude bi-fluide mais en prenant son paramètre $\lambda = \frac{\mu_B}{\mu_A} = 0$, on peut passer en mono-fluide et retrouver nos résultats. En effet la vitesse de son fluide $A$ correspond à notre cas et il trouve pour $\lambda = 0$ :

$$\psi_A = r\left(C_A\phi\cos\phi + \left(E_A\phi + F_A\right)\sin\phi\right)$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} C_A & = & -\frac{1}{\Delta}\sin\theta_m\cos\theta_m \\ E_A & = & -\frac{1}{\Delta}\sin^2\theta_m \\ F_A & = & \frac{1}{\Delta}\theta_m \\ \Delta & = & (\theta_m - \sin\theta_m\cos\theta_m) \end{array}$$

Ce qui donne :

$$\psi_A = \frac{r\left(\left(\phi-\theta_m\right)\sin\phi + \phi\cos\theta_m\sin\left(\theta_m-\phi\right)\right)}{\sin\theta_m\cos\theta_m - \theta_m}$$

On retrouve donc bien notre fonction courant avec $\theta_m = \theta_{0,ext}\left(\beta\right)$.

**Lien avec Hocking** Hocking [37] fait une étude bi-fluide avec interface plane en $\theta = 0$. Le premier fluide est pris pour $0 \leq \theta \leq \alpha_1$ où $\theta = \alpha_1$ à la surface libre. Le second fluide est compris dans le secteur $\alpha_2 \leq \theta \leq 0$ où on a $\alpha_2 = \alpha_1 - \pi$. On peut représenter cette configuration de la manière suivante :

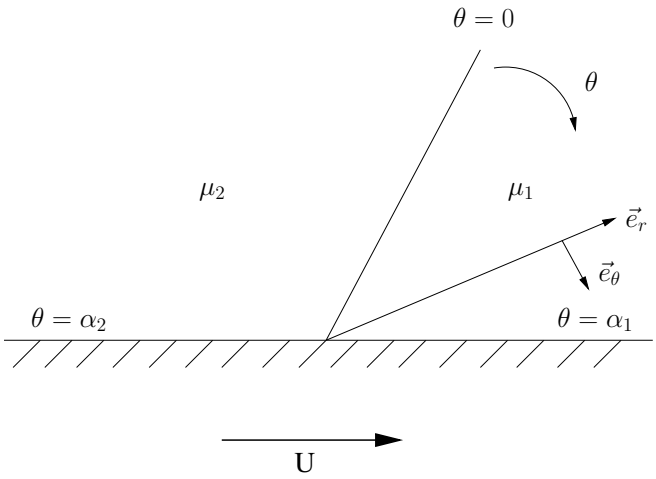



FIGURE 5.6: Configuration de Hocking

Ainsi il prend :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\theta\Psi \\ -\partial_r\Psi \end{pmatrix}$$

et au fond on a :

$$\vec{n} = \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{t} = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le problème exprimé en terme de fonction courant s'écrit :

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]^2\Psi_i=\Delta^2\Psi_i=0} \tag{5.2}$$

et les conditions limites :

$$\Psi_1(r,0) = \Psi_1(r,\alpha_1)=\Psi_2(r,0)=\Psi_2(r,\alpha_2)=0 \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}(r,0) = \frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(r,0) \tag{5.4}$$

$$\mu_1\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\theta^2}(r,0) = \mu_2\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\theta^2}(r,0) \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\theta}(r,\alpha_1)+\frac{c_1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\theta^2}(r,\alpha_1) = U \tag{5.6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta}(r,\alpha_2)-\frac{c_2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial\theta^2}(r,\alpha_2) = -U \tag{5.7}$$

où $c_1, c_2 > 0$ sont les coefficients de glissement des deux fluides. Ici nous considérons qu'il y a non glissement donc on prend $c_1 = c_2 = 0$. Les solutions de ce problème sont de la forme suivante :

$$\boxed{\begin{array}{ll}\Psi_1(r,\theta) & = Ur\hat{\phi}_1(\theta)\\ \Psi_2(r,\theta) & = Ur\hat{\phi}_2(\theta)\end{array}} \tag{5.8}$$

avec :

$$\boxed{\hat{\phi}_i(\theta) = a_i\theta\sin(\theta-\alpha_i)+b_i(\theta-\alpha_i)\sin\theta} \tag{5.9}$$

L'équation (5.2) est satisfaite par cette solution et on détermine les coefficients $a_i$ et $b_i$ grâce aux conditions (5.3)-(5.7).

Les contraintes tangentielles au fond s'écrit :

$$\tau_1 = \frac{\mu_1 U}{r}\hat{k}_1 \text{ et } \tau_2 = \frac{\mu_2 U}{r}\hat{k}_2$$

où :

$$D\hat{k}_1 = 2\mu_1\sin^2\alpha_1\left(\sin^2\alpha_2-\alpha_2^2\right)-2\mu_2\sin^2\alpha_1\left(\sin^2\alpha_2-\alpha_1\alpha_2\right)$$

$$D\hat{k}_2 = 2\mu_2\sin^2\alpha_2\left(\sin^2\alpha_1-\alpha_1^2\right)-2\mu_1\sin^2\alpha_2\left(\sin^2\alpha_1-\alpha_1\alpha_2\right)$$

$$D = \mu_2(\sin\alpha_2\cos\alpha_2-\alpha_2)\left(\sin^2\alpha_1-\alpha_1^2\right)-\mu_1(\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\alpha_1)\left(\sin^2\alpha_2-\alpha_2^2\right)$$

Donc pour passer en mono-fluide, on pose $\mu_2 = 0$, on obtient donc :

$$\tau_1 = -\frac{U\mu_1}{r}\frac{2\sin^2\alpha_1}{(\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\alpha_1)} \geq 0$$

car $\forall\alpha_1\in[0,2\pi]$, $\sin\alpha_1\cos\alpha_1-\alpha_1\leq 0$. De plus $\tau_1 = \frac{\mu_1 U}{r}\hat{k}_1 = \frac{\mu_1 U}{r^2}\partial_\theta^2\Psi_1(r,\alpha_1)$, on peut donc vérifier que notre fonction courant donne le même résultat. Nous avons :

$$\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \frac{\bar{r}}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}\left[\left(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta)\right)\sin\bar{\phi}+\bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\left(\theta_{0,ext}(\beta)-\bar{\phi}\right)\right]$$

On passe donc dans le jeu de variables de Hocking, il a $\theta = \alpha_1+\bar{\phi}$, donc $\bar{\phi} = -\alpha_1+\theta$ ( car $\alpha_1 < 0$ ) et $\theta_{0,ext}(\beta) = -\alpha_1$ :

$$\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\theta) = -\frac{\bar{r}}{\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 - \alpha_1}\left[\theta \sin(\theta-\alpha_1) - (\theta-\alpha_1)\cos\alpha_1 \sin\theta\right]$$

Donc :

$$\tau = \frac{U\mu}{\bar{r}^2}\partial_\theta^2 \bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\alpha_1) = -\frac{U\mu}{\bar{r}}\frac{2\sin^2\alpha_1}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - \alpha_1}$$

On retrouve donc le résultat de Hocking.

### 5.3.2 Problème interne à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Comme pour le cas interne (cf 5.1.5), nous allons nous mettre dans un dièdre pour résoudre le problème dans cette zone.

#### 5.3.2.1 Écriture du problème à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

Après zoom, changement de variable et développement en $C_{a,f}$, on a :

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{Eq1})_0 : & \hat{u}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \hat{\mathrm{rot}}_0 \hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) \\ (\mathrm{Eq2.1})_0 : & \hat{\Delta}_0^2 \hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma_1 : & \left\{ \begin{array}{lll} (1)_0 : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \hat{\phi} = 0 \\ (2)_0 : & \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} = 1 & \text{en } \hat{\phi} = 0 \end{array} \right. \\ \Gamma_2 : & \left\{ \begin{array}{lll} (3)_0 : & \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta) \\ (4)_0 : & \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} = 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}(\beta) \end{array} \right. \end{array} \tag{5.10}$$

Les conditions $(5)_0$ et $(6)_0$ nous redonnent ce que l'on avait déjà c'est à dire :

$$\begin{array}{l} \hat{p}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = p_{atm} \\ \hat{\theta}_{0,int}(\hat{R},\beta) = \hat{\theta}_{0,int}(\hat{R},\beta) = \theta_{0,int}(\beta) \end{array}$$

#### 5.3.2.2 Résolution par transformée de Laplace bilatérale

On utilise ici la méthode de résolution utilisée par Hocking [37] mais uniquement sur l'ordre 0 de notre développement asymptotique. Hocking considère un fluide dans un dièdre (surface libre plane) ce qui correspond bien à l'ordre 0 de notre développement en zone interne et externe. Il utilise aussi la condition de glissement de Navier [54]. Notons qu'il est en bi-fluide, pour faire le lien avec notre étude, il suffit alors de prendre $\mu_2 = 0$ où $\mu_2$ est la viscosité dynamique du deuxième fluide, celui qui est poussé par le fluide 1. Le problème étudié est alors le même. Pour résoudre le problème en zone interne, il fait un changement de variable en posant $\hat{R} = e^{\varrho/c_2}$ et puis une transformée de Laplace bilatérale du problème, ce qui revient à faire une transformée de Mellin. Nous suivrons cependant la méthode de Hocking ici. Notons que $c_2$ est le coefficient de glissement du deuxième fluide qui n'est pas présent dans notre étude, il suffira de prendre $c_2 = 1$. De plus on obtient la même équation intégrale que Hocking sur les contraintes au fond, il fait alors l'étude du problème pour différentes valeurs de l'angle de contact alors que nous resterons dans le cadre général. Notons que nous allons corriger un certains termes de ses développements.

- **Changement de variables :**
  On veut pouvoir raccorder avec la solution externe qui est de la forme $\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{r}\Psi_{ext}(\bar{\phi})$ où :

$$\Psi_{ext}\left(\bar{\phi}\right) = \frac{\left(\bar{\phi} - \theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)\sin\bar{\phi} + \bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right) - \bar{\phi}\right)}{\cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right) - \theta_{0,ext}\left(\beta\right)}$$

On utilise ici la méthode présentée dans l'article de Hocking [37], on pose donc :

$$\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{R}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$$

où $\varrho = \ln\left(\hat{R}\right)$. Ainsi $\hat{R} = e^{\varrho}$ et $\partial_{\hat{R}}\varrho = \frac{1}{\hat{R}}$. Notons que $R$ varie entre 0 et $+\infty$ donc $\varrho$ va varier entre $-\infty$ et $+\infty$. Écrivons le bilaplacien (cf (10.1)) avec ces nouvelles variables, on a alors :

$$\hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = e^{-3\varrho}\left[\partial^4_{\hat{\phi}}\Phi + \partial^4_{\varrho}\Phi + 2\partial^4_{\varrho\varrho\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi + 2\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi - 2\partial^2_{\varrho\varrho}\Phi + \Phi\right]\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$$

Ainsi le problème (5.10) s'écrit dans le nouveau jeu de variables :

$$\left[\partial^4_{\hat{\phi}}\Phi + \partial^4_{\varrho}\Phi + 2\partial^4_{\varrho\varrho\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi + 2\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi - 2\partial^2_{\varrho\varrho}\Phi + \Phi\right]\left(\varrho,\hat{\phi}\right) = 0 \tag{5.11}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{array}{ll} (1)_0 : \Phi + \partial_{\varrho}\Phi = 0 & \text{en } \hat{\phi} = 0 \\ (2)_0 : \partial_{\hat{\phi}}\Phi - e^{-\varrho}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi = 1 & \text{en } \hat{\phi} = 0 \end{array}$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$\begin{array}{ll} (3)_0 : \Phi + \partial_{\varrho}\Phi = 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right) \\ (4)_0 : \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi = 0 & \text{en } \hat{\phi} = \theta_{0,int}\left(\beta\right) \end{array}$$

- **Condition de raccord avec l'externe :**
  Pour que la solution interne puisse se raccorder avec la solution externe, il faut alors que :

$$\Phi\left(+\infty,\hat{\phi}\right) = \Psi_{ext}\left(\varphi\right)$$

  où $\Psi_{ext}\left(\varphi\right)$ est la partie de la solution externe ne dépendant pas de $r$, de plus pour assurer que les contraintes au fond soient finies à l'origine du repère, on doit avoir :

$$\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right) = \mathscr{O}\left(e^{\varrho}\right) \text{ quand } \varrho \to -\infty \tag{5.12}$$

- **Définition de la transformée de Laplace bilatérale :**
  Pour résoudre le problème obtenu après le changement de variable, on applique la transformée de Laplace bilatérale $\mathscr{L}\left(\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right)(s) = \tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)$ appliquée à la variable $\varrho$ et qui permet de passer du « domaine temporel » de $\varrho \in \mathbb{R}$ à l'espace de la nouvelle variable $s$. La seconde variable $\hat{\phi}$ est alors une constante par rapport à la transformée de Laplace bilatérale selon $\varrho$. La transformée est défini par la formule suivante :

$$\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right) = \mathscr{L}\left(\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\varrho}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho$$

  La transformée de Laplace bilatérale est une intégrale impropre qui converge si et seulement si les deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} e^{-s\varrho}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho$ et $\int_{0}^{\infty} e^{-s\varrho}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho$ existent. Ici les conditions imposées sur $\Psi_{ext}\left(\varphi\right)$ quand $\left|\varrho\right| \to \infty$ assurent que la transformée existe pour $0 < \mathrm{Re}\left(s\right) < 1$. De plus la transformée de Laplace bilatérale inverse s'écrit :

$$\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{s\varrho}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)\,ds$$

où il faut choisir $0<\mathrm{Re}\left(s\right)=\epsilon<1$ pour que l'intégrale converge.

- **Application de la transformée de Laplace bilatérale à notre problème :**
La transformée de Laplace bilatérale de l'équation (5.11) s'écrit :

$$\left[\partial_{\hat{\phi}}^{4}\tilde{\Phi}+2\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{2}\tilde{\Phi}+\tilde{\Phi}\right]\left(s,\hat{\phi}\right)+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\varrho}\left[\partial_{\varrho}^{4}\Phi+2\partial_{\varrho\varrho\hat{\phi}\hat{\phi}}^{4}\Phi-2\partial_{\varrho\varrho}^{2}\Phi\right]\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho=0$$

(Un des calculs est développé dans la partie 11.2 page 228). On trouve donc :

$$\mathscr{L}\left(\partial_{\varrho}^{n}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\varrho}\partial_{\varrho}^{n}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho=s^{n}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)$$

$$\text{et}\quad\mathscr{L}\left(\partial_{\varrho\varrho\hat{\phi}\hat{\phi}}^{4}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\varrho}\partial_{\varrho\varrho\hat{\phi}\hat{\phi}}^{4}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\,d\varrho=s^{2}\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)$$

Après transformée de Laplace, l'équation (5.11) s'écrit :

$$\partial_{\hat{\phi}}^{4}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)+2\left(1+s^{2}\right)\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)+\left(s^{2}-1\right)^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=0 \tag{5.13}$$

Nous allons utiliser les conditions $(1)_0$ et $(3)_0$ après transformée de Laplace pour trouver la forme de $\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)$. On résout donc :

$$\begin{aligned}&\partial_{\hat{\phi}}^{4}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)+2\left(1+s^{2}\right)\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)+\left(s^{2}-1\right)^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=0\\ &(1)_0:\quad\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=0 &&\text{en }\hat{\phi}=0\\ &(3)_0:\quad\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=0 &&\text{en }\hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)\end{aligned} \tag{5.14}$$

La solution de 5.14 est donc de la forme :

$$\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=A\left(s\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right)+B\left(s\right)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)$$

On retombe ici sur le même problème que Hocking [37].
*Remarque.* On peut remarquer que l'on ne peut pas appliquer la transformée de Laplace sur la condition $(2)_0$. En effet si on intègre la constante 1, on doit calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s\varrho}\,d\varrho=-\frac{1}{s}\left[e^{-s\varrho}\right]_{\varrho=-\infty}^{\varrho=+\infty}$$

On sait que $0<\mathrm{Re}\left(s\right)<1$, donc pour $\varrho\to-\infty$ cette expression tend vers l'infini, on ne peut donc pas appliquer la transformée de Laplace à ce terme. On laisse alors l'équation $(2)_0$ inchangée.
On utilise la condition $(4)_0$ :

$$\begin{aligned}&0=\partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{2}\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)\Big|_{\hat{\phi}=\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\\ \Leftrightarrow\quad&0=2s\left(A\left(s\right)\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)+B\left(s\right)\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right)\\ \Leftrightarrow\quad&B\left(s\right)=-A\left(s\right)\frac{\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)=A\left(s\right)\left[-\frac{\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)}\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)+\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right)\right]$$

Soit $\tau_{int}(r)$ les contraintes tangentielles au fond. Après l'adimensionnement et les changements de variables, on trouve :

$$\begin{aligned}\tau_{int} &= [T_{int}(r,0)\cdot\vec{n}]\cdot\vec{t} = -\frac{1}{r^2}\,\partial^2_{\phi\phi}\psi_{int}(r,\phi)\Big|_{\phi=0}\\ &= -\frac{1}{\beta\hat{R}^2}\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})\Big|_{\hat{\phi}=0} = -\frac{1}{\beta\hat{R}}\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi(\varrho,\hat{\phi})\Big|_{\hat{\phi}=0} = \frac{1}{\beta\hat{R}}k(\varrho)\end{aligned}$$

Donc $k(\varrho)$ est défini tel que :

$$k(\varrho) = -\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi(\varrho,\hat{\phi})\Big|_{\hat{\phi}=0} \geq 0$$

car les contraintes au fond sont constantes donc le signe de $k(\varrho)$ ne change pas. Or on connaît sa limite à l'infini (cf 5.3.3) et celle-ci est positive.
On note $\tilde{k}(s)$ la transformée de Laplace de $k(\varrho)$ :

$$\tilde{k}(s) = \mathscr{L}(k(\varrho)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\varrho}k(\varrho)\,d\varrho = -\,\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})\Big|_{\hat{\phi}=0}$$

On a :

$$\begin{aligned}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi}) = (s^2+1)\,A(s)&\left[\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)}{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))}\sin(s\hat{\phi})\sin(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)) - \sin(\hat{\phi})\sin(s(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)))\right]\\ +2sA(s)&\left[-\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)}{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))}\cos(s\hat{\phi})\cos(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)) + \cos(\hat{\phi})\cos(s(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)))\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{\Phi}(s,0) = 2sA(s)\left[\frac{\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)}{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))}\right] = -\tilde{k}(s)$$

Donc :

$$A(s) = \frac{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))}{2s\left[\cos^2\theta_{0,int}(\beta) - \cos^2(s\theta_{0,int}(\beta))\right]}\tilde{k}(s) \tag{5.15}$$

$\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi}) = &-\frac{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))\sin(\hat{\phi})\sin(s(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\tilde{k}(s)\\ &+\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin(s\hat{\phi})\sin(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\tilde{k}(s)\end{aligned}$$

Pour finir cette résolution, il faudra trouver $\tilde{k}(s)$.

- **Forme de $\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi})$ :**
  On a $\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \hat{R}\Phi(\varrho,\hat{\phi})$ avec $\Phi(\varrho,\hat{\phi}) = \mathscr{L}^{-1}(\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi}))$ et $\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi}) = \tilde{M}(s,\hat{\phi})\,\tilde{k}(s)$ où :

$$\begin{aligned}\tilde{M}(s,\hat{\phi}) = &-\frac{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))\sin(\hat{\phi})\sin(s(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\\ &+\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin(s\hat{\phi})\sin(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\end{aligned}$$

Donc :

$$\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Phi}\left(s,\hat{\phi}\right)\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\tilde{k}\left(s\right)\right)=M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_{\varrho}k\left(\varrho\right)$$

et :

$$\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{R}\,M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_{\varrho}k\left(\varrho\right)$$

Il reste alors à déterminer $k\left(\varrho\right)$.

#### 5.3.2.3 Équation intégrale sur $k\left(\varrho\right)$

On cherche alors $\tilde{k}\left(s\right)$ la transformée de Laplace de $k\left(\varrho\right)$. La condition de glissement $(2)_0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \partial_{\hat{\phi}}\Phi\left(\varrho,0\right)-e^{-\varrho}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi\left(\varrho,0\right)=1\\
\Leftrightarrow\quad & \partial_{\hat{\phi}}\Phi\left(\varrho,0\right)+e^{-\varrho}k\left(\varrho\right)=1\\
\Leftrightarrow\quad & 1-e^{-\varrho}k\left(\varrho\right)=\partial_{\hat{\phi}}\Phi\left(\varrho,0\right)
\end{aligned}$$

Calculons le terme $\partial_{\hat{\phi}}\tilde{\Phi}\left(s,0\right)$ :

$$\partial_{\hat{\phi}}\tilde{\Phi}\left(s,0\right)=\frac{\left[\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\sin\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-s\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-\cos^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]}\tilde{k}\left(s\right)$$

Notons :

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\left(s\right)&=\frac{\left[\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\sin\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-s\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-\cos^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]}\\
&=\frac{\left[\sin\left(2s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-s\sin\left(2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right]}{2s\left[\cos\left(2s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right]}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\partial_{\hat{\phi}}\tilde{\Phi}\left(s,0\right)=\tilde{L}\left(s\right)\tilde{k}\left(s\right)$$

et par transformée de Laplace inverse :

$$\partial_{\hat{\phi}}\Phi\left(\varrho,0\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{L}\left(s\right)\tilde{k}\left(s\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'$$

où on a utilisé la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{f}\left(s\right)\tilde{g}\left(s\right)\right)&=f\left(\varrho\right)\star_{\varrho}g\left(\varrho\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\varrho'\right)g\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\\
&=\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left(f\left(\varrho\right)\star_{\varrho}g\left(\varrho\right)\right)\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\mathscr{L}\left(f\left(\varrho\right)\right)\mathscr{L}\left(g\left(\varrho\right)\right)\right]\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{s\varrho}\left(\tilde{f}\left(s\right)\tilde{g}\left(s\right)\right)ds
\end{aligned}$$

On a donc aussi :

$$L\left(\varrho\right)=\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{L}\left(s\right)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{s\varrho}\underbrace{\left(\frac{\sin\left(2s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-s\sin\left(2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)}{2s\left[\cos\left(2s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right]}\right)}_{F(s)}ds$$

et finalement, l'équation $(2)_0$ s'écrit :

$$\boxed{1-e^{-\varrho}k\left(\varrho\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'}$$

- **Étude de $L(\varrho)$ :**
  L'intégrale se met sous la forme :

$$\begin{aligned} L(\varrho) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\frac{\sin\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right)-s\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2s\left(\cos\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin\left(2(\epsilon+ix)\theta_{0,int}(\beta)\right)-(\epsilon+ix)\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2(\epsilon+ix)\left(\cos\left(2(\epsilon+ix)\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)dx \end{aligned}$$

  en posant $s=\epsilon+ix$ avec $0<\epsilon<1$, $ds=i\,dx$ et :

$$f(z)=e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin\left(2(\epsilon+iz)\theta_{0,int}(\beta)\right)-(\epsilon+iz)\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2(\epsilon+iz)\left(\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}$$

  L'intégrale se calcule selon :

$$L(\varrho)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)\,dx=2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho)\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_j\right)$$

  Après calcul (cf partie 13 page 241), $L$ s'écrit alors sous la forme suivante :

$$L(\varrho)=\frac{\pi}{2\theta_{0,int}^2(\beta)}\int_{|\varrho|}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sinh\varrho_1}{\cosh\left(\frac{\pi\varrho_1}{\theta_0(\beta)}\right)-1}}_{g(\varrho_1)}d\varrho_1$$

  Or $L(\varrho)$ a une singularité logarithmique quand $\varrho\to 0$, si on fait un développement limité de $g(\varrho_1)$ en $\varrho_1=0$, on a :

$$g(\varrho_1)\sim_{\varrho_1=0}\frac{\varrho_1+\mathcal{O}\left(\varrho_1^3\right)}{\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\varrho_1}{\theta_{0,int}(\beta)}\right)^2+\mathcal{O}\left(\varrho_1^4\right)}\sim_{\varrho_1=0}\frac{\theta_{0,int}^2(\beta)}{2\pi^2\varrho_1}+\mathcal{O}(1)$$

  Et donc si on intègre cette expression, on obtient un $\ln(\varrho_1)$ à évaluer en 0. Pour retirer cette singularité, on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\boxed{1-e^{-\varrho}k(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'+k(\varrho)\int_{-\infty}^{\infty}L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'} \tag{5.16}$$

  Et on a :

$$\begin{aligned} 1\star_\varrho L(\varrho) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}1\times L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'=\int_{-\infty}^{\infty}L\left(\varrho'\right)\times 1\,d\varrho'=\langle 1,L(\varrho)\rangle \\ &= \left\langle\mathscr{L}(\delta)(s),L(\varrho)\right\rangle \\ &= \left\langle\delta,\mathscr{L}\left(L(\varrho)\right)(s)\right\rangle=\langle\delta,F(s)\rangle \\ &= F(0) \end{aligned}$$

  où $\delta$ représente la fonction de Dirac, d'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty}L(\varrho)\,d\varrho=F(0)$$

  avec :

$$F(s) = \mathscr{L}\left(L(\varrho)\right)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(\varrho)\, e^{-s\varrho} d\varrho = \frac{\sin\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right) - s\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2s\left(\cos\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}$$

On fait alors un développement limité de $F(s)$ au voisinage de 0 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\varrho)\, d\varrho = F(0) = \frac{2\theta_{0,int}(\beta) - \sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2\left[1 - \cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]} + \mathscr{O}\left(s^2\right)$$

On peut remarquer que cette expression est identique à celle des contraintes tangentielles au fond de la solution externe. En effet nous avons trouvé dans la zone externe (cf (5.3.3)) :

$$\tau_0^{ext}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}} k_0^{ext}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = -\frac{2\sin^2\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}{\bar{r}\left[\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)\right]} \geq 0$$

car $\forall \alpha \in [0, 2\pi]$, $\quad \sin\alpha\cos\alpha - \alpha \leq 0$. On a donc :

$$k_0^{ext}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = -\frac{2\sin^2\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2\left[1 - \cos\left(2\theta_{0,ext}(\beta)\right)\right]}{2\theta_{0,ext}(\beta) - \sin\left(2\theta_{0,ext}(\beta)\right)}$$

Ainsi :

$$\hat{L} = \int_{-\infty}^{\infty} L(\varrho)\, d\varrho = \int_{-\infty}^{\infty} L\left(\varrho - \varrho'\right) d\varrho' = \left(k_0^{ext}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)^{-1} + \mathscr{O}\left(s^2\right)$$

Notons $\left(k_0^{ext}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)^{-1} = \hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)$, ainsi l'équation intégrale (5.16) devient :

$$\boxed{1 - \left[e^{-\varrho} + \hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right] k(\varrho) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[k\left(\varrho'\right) - k(\varrho)\right] L\left(\varrho - \varrho'\right) d\varrho'} \tag{5.17}$$

Donc :

$$k(\varrho) = \left[e^{-\varrho} + \hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]^{-1} - \left[e^{-\varrho} + \hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[k\left(\varrho'\right) - k(\varrho)\right] L\left(\varrho - \varrho'\right) d\varrho'$$

*Remarque.* Si on fait le calcul de $L(\varrho)$ en posant $\gamma = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}$, $0 < \gamma \leq 1$ alors on trouve (pour les détails du calcul voir partie 12.6 page 237) :

$$\begin{aligned} 2\pi L(\gamma) &= \frac{\sinh|\varrho|}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}} - 1\right)} - \cosh|\varrho| \ln\left(1 - e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) && \text{expression de Hocking} \\ &+ \gamma R(\gamma)\left(-\ln\left(1 - e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) - e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) + \frac{\gamma}{2} e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}} \left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma} - \frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right) && \text{termes supplémentaires} \end{aligned}$$

avec :

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{-|\varrho|}}{1 + \frac{\gamma}{2}} < R(\gamma) < \frac{1}{2}\frac{e^{|\varrho|}}{1 - \frac{\gamma}{2}}$$

Ce qui est presque la formule (3.15) de Hocking [37] ( il a oublié $\cosh(|\varrho|)$ devant $\ln\left(1 - e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)$).

- **Conditions limites en $\pm\infty$ de $k(\varrho)$ :**
  $k$ est solution de l'équation intégrale (5.16) :

$$1 - \left[e^{-\varrho} + \hat{L}\right] k(\varrho) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[k\left(\varrho'\right) - k(\varrho)\right] L\left(\varrho - \varrho'\right) d\varrho' \tag{5.18}$$

On fait la limite en $\varrho \to +\infty$ :

$$\begin{aligned}
1-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{\infty} &= \lim_{\varrho\to+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\right\}\\
&= \lim_{\varrho\to+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'-k(\varrho)\int_{-\infty}^{\infty}L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\right\}\\
&= \lim_{\varrho\to+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho-\varrho'\right)L\left(\varrho'\right)d\varrho'\right\}-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{\infty}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varrho\to+\infty}k\left(\varrho-\varrho'\right)L\left(\varrho'\right)d\varrho'-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{\infty}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}k_{\infty}L\left(\varrho'\right)d\varrho'-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{\infty}\\
&= 0
\end{aligned}$$

(car $\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'=k(\varrho)\star_{\varrho}L(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho-\varrho'\right)L\left(\varrho'\right)d\varrho'$) et où on a noté $k_{\infty}=\lim_{\varrho\to+\infty}k(\varrho)$, on a donc montré que :

$$1-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\lim_{\varrho\to+\infty}k(\varrho)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \lim_{\varrho\to+\infty}k(\varrho)=\frac{1}{\hat{L}}=k_0^{ext}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)=\frac{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)-\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}$$

Donc comme cette condition est vérifiée, on a bien raccord entre les deux zones.
De même en $-\infty$ :

$$1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]k(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'$$

devient :

$$\begin{aligned}
1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]k_{-\infty} &= \lim_{\varrho\to-\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\right\}\\
&= \lim_{\varrho\to-\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'-k(\varrho)\int_{-\infty}^{\infty}L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\right\}\\
&= \lim_{\varrho\to-\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho-\varrho'\right)L\left(\varrho'\right)d\varrho'\right\}-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{-\infty}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varrho\to-\infty}k\left(\varrho-\varrho'\right)L\left(\varrho'\right)d\varrho'-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{-\infty}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}k_{-\infty}L\left(\varrho'\right)d\varrho'-\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)k_{-\infty}\\
&= 0
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
& 1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]k_{-\infty}=0\\
\Leftrightarrow\quad & k_{-\infty}=\tfrac{1}{e^{-\varrho}+\hat{L}}\sim e^{\varrho}\\
\Leftrightarrow\quad & \lim_{\varrho\to-\infty}k(\varrho)=0
\end{aligned}$$

On a donc au final :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\lim_{\varrho\to+\infty}k(\varrho)=\frac{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)-\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}\\
&\lim_{\varrho\to-\infty}k(\varrho)=0
\end{aligned}}$$

Il faudra donc vérifier que ce comportement en $\pm\infty$ de $k(\varrho)$ est compatible avec le raccord entre la zone interne et la zone externe.

- **Étude de l'équation intégrale :**
  Nous allons étudier ici l'équation intégrale que nous avons sur $k(\varrho)$. Le but est d'obtenir un opérateur approximant $k(\varrho)$, sans avoir à résoudre l'équation intégrale. L'équation (5.17) est la suivante :

$$1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]k(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho' \tag{5.19}$$

avec $\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)=\left(k_0^{ext}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}L(\varrho)\,d\varrho=F(0)$ où $L(\beta,\varrho)$ est la transformée bilatérale inverse de :

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\varrho)\,e^{-s\varrho}d\varrho=\frac{\sin\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right)-s\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2s\left(\cos\left(2s\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}$$

On a alors :

$$\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}L(\varrho)\,d\varrho=F(0)=\frac{2\theta_{0,int}(\beta)-\sin\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2\left[1-\cos\left(2\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]}$$

et donc pour $\theta_{0,int}(\beta)=\pi\gamma$ avec $0<\gamma\leq 1$ :

$$\hat{L}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\varrho)\,d\varrho=F(0)=\frac{2\pi\gamma-\sin(2\pi\gamma)}{2\left(1-\cos(2\pi\gamma)\right)}=\frac{\pi\gamma}{3}+\mathcal{O}\left(\gamma^3\right)$$

On rappelle également que $L(\varrho)=\frac{\pi}{4\theta_{0,int}^2(\beta)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_{0,int}(\beta)}\right)-1\right)}dy$ est positive. On cherche une solution avec un comportement à l'infini ($\varrho\to+\infty$) en $\left|k(\varrho)\right|<e^{a\varrho}$ avec à priori $a<1$. On pose :

$$k_0(\varrho)=\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)^{-1}$$

L'équation intégrale (5.19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& 1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]k(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho' \\
\Leftrightarrow\quad & \left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]^{-1}=k(\varrho)+\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\right]^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho' \\
\Leftrightarrow\quad & k_0(\varrho)=k(\varrho)+k_0(\varrho)\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho' \\
\Leftrightarrow\quad & k_0(\varrho)=k(\varrho)+k_0(\varrho)\left[\int_{-\infty}^{\infty}k\left(\varrho'\right)L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'-k(\varrho)\int_{-\infty}^{\infty}L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'\right] \\
\Leftrightarrow\quad & k_0(\varrho)=k(\varrho)+k_0(\varrho)\left[(L\star k)(\varrho)-\hat{L}k(\varrho)\right]
\end{aligned}$$

où encore :

$$k_0(\varrho)=\left(\mathbb{1}-k_0(\varrho)\,T\right).k(\varrho)$$

avec :

$$T.k(\varrho)=\left(L\star_{\varrho}k\right)(\varrho)-\hat{L}k(\varrho)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k(\varrho)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho' \tag{5.20}$$

Regardons le comportement de $k_0(\varrho)=\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)^{-1}$ en $\pm\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
k_0(\varrho)&\longrightarrow_{\varrho\to-\infty}0\\
k_0(\varrho)&\longrightarrow_{\varrho\to+\infty}\frac{1}{\hat{L}}
\end{aligned}$$

Afin de normaliser la solution à l'infini, on change d'inconnue :

$$\overline{k}(\varrho) = \hat{L}k(\varrho)$$

et on introduit :

$$\overline{k}_0(\varrho) = \hat{L}k_0(\varrho) = \hat{L}\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)^{-1}$$

L'équation intégrale s'écrit alors :

$$\overline{k}_0(\varrho) = \left(\mathbb{1} - k_0(\varrho)\,T\right).\overline{k}(\varrho) \tag{5.21}$$

De plus par définition on a : $\left|(L \star k)(\varrho)\right| \leq \hat{L}\,\|k\|_\infty$ ainsi :

$$\left|T.k(\varrho)\right| = \left|\left(L \star_\varrho k\right)(\varrho) - \hat{L}k(\varrho)\right| \leq 2\hat{L}\,\|k\|_\infty$$

et :

$$\left|k_0(\varrho)\,T.k(\varrho)\right| \leq \frac{2\hat{L}}{e^{-\varrho} + \hat{L}}\,\|k\|_\infty$$

Si on pose $X = e^{-\varrho}$, on a $e^{-\varrho} + \hat{L} = X + \hat{L}$ qui tend vers $+\infty$ quand $X \to +\infty$ ainsi pour couper le comportement de $X$ en $+\infty$, on peut ajouter un terme en $\dfrac{\varepsilon}{X}$. Ainsi on introduit $k_{0,\varepsilon}(\varrho)$ l'opérateur tronqué en $+\infty$ de $k_0(\varrho)$ :

$$k_{0,\varepsilon}(\varrho) = \left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)^{-1}$$

où le terme en $\varepsilon e^{\varrho}$ permet de couper le comportement de $e^{-\varrho}$quand $\varrho \to -\infty$. L'opérateur associé normalisé est :

$$\overline{k}_{0,\varepsilon}(\varrho) = \hat{L}\left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)^{-1}$$

On reprend l'équation (5.21), on a alors l'équation intégrale approchée :

$$\overline{k}_0(\varrho) = \left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon}(\varrho)\,T\right).\overline{k}_\varepsilon(\varrho) \tag{5.22}$$

Sachant que la fonction $f(\varrho) = e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}$ atteint son minimum en $\varrho = 2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}$, on a :

$$\left|k_{0,\varepsilon}(\varrho)\,T.k(\varrho)\right| \leq \frac{2\hat{L}}{e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}}\,\|k\|_\infty \leq \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}}\,\|k\|_\infty$$

Ainsi :

$$\left\|k_{0,\varepsilon}T.k\right\|_\infty \leq \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}}\,\|k\|_\infty \tag{5.23}$$

On peut remarquer que :

$$\left\|k_{0,\varepsilon}T.k\right\|_\infty < \|k\|_\infty \text{ si et seulement si } \varepsilon > \frac{\hat{L}^2}{4}$$

L'expression (5.23) nous donne :

$$\left\|k_{0,\varepsilon}T\right\|_\infty \leq \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}} \leq \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}\,\frac{1}{1 + \frac{\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon}}} < \frac{\hat{L}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

et donc pour $\varepsilon > \frac{\hat{L}^2}{4}$, on a $\left\|k_{0,\varepsilon}T\right\|_\infty < 1$ et l'opérateur $\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon}T\right)$ est inversible via la série de Neumann :

$$\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon}T\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(k_{0,\varepsilon}T\right)^n$$

On peut maintenant évaluer $\overline{k}_\varepsilon$ une approximation de $\overline{k}$ en prenant :

$$\overline{k}_0 = \left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right).\overline{k}_\varepsilon = (\mathbb{1} - k_0 T).\overline{k}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\overline{k}_\varepsilon - \overline{k} &= k_{0,\varepsilon} T.\overline{k}_\varepsilon - k_0 T.\overline{k} \\ &= k_{0,\varepsilon} T.\left(\overline{k}_\varepsilon - \overline{k}\right) - \left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right).\left(\overline{k}_\varepsilon - \overline{k}\right) = -\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}\left(\overline{k}_\varepsilon - \overline{k}\right) &= -\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1}\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_{0,\varepsilon} T\right)^n\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} \\ &= -\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} - \left(k_{0,\varepsilon} T\right)\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(k_{0,\varepsilon} T\right)^n\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} \\ &= -\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} - \left(k_{0,\varepsilon} T\right)\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1}.\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} \\ &= -\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} - \left(k_{0,\varepsilon} T\right)\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} \\ &\quad -\left(k_{0,\varepsilon} T\right)^2\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1}.\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k}\end{aligned}$$

On a :

$$k_0 - k_{0,\varepsilon} = \left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)^{-1} - \left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon e^{\varrho}}{\left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)}$$

$$\left\|k_0 - k_{0,\varepsilon}\right\|_\infty = \frac{1}{\hat{L}} \text{ car } \begin{cases} \|k_0\|_\infty = \frac{1}{\hat{L}} \\ \text{et} \\ \left\|k_{0,\varepsilon}\right\|_\infty = 0 \end{cases}$$

De plus on a déjà vu que $\left|T.\overline{k}\right| = \left|\left(L \star_\varrho \overline{k}\right)(\varrho) - \hat{L}\overline{k}(\varrho)\right| \leq 2\hat{L}\left\|\overline{k}\right\|_\infty$, ainsi :

$$\begin{aligned}\left|\left(k_{0,\varepsilon} T\right)\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1}.\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k}\right| &\leq \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}}\,\frac{1}{1 - \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon}+\hat{L}}}\,\frac{1}{\hat{L}}\,2\hat{L}\left\|\overline{k}\right\|_\infty \\ &\leq \frac{4\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} - \hat{L}}\left\|\overline{k}\right\|_\infty\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\left|\left(\overline{k}_\varepsilon - \overline{k}\right)(\varrho)\right| &= \left|-\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k} - \left(k_{0,\varepsilon} T\right)\left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1}.\left(k_0 - k_{0,\varepsilon}\right) T.\overline{k}\right| \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon e^{\varrho}}{\left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)}\hat{L} + \frac{4\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} - \hat{L}}\left\|\overline{k}\right\|_\infty\right)\left\|\overline{k}\right\|_\infty\end{aligned}$$

Sur le domaine $X > 0$, la fonction $X \to \dfrac{\varepsilon X\hat{L}}{\left(\frac{1}{X} + \varepsilon X + \hat{L}\right)\left(\frac{1}{X} + \hat{L}\right)}$ est croissante donc :

$$\begin{aligned}\forall X \leq M,\quad \frac{\varepsilon X\hat{L}}{\left(\frac{1}{X} + \varepsilon X + \hat{L}\right)\left(\frac{1}{X} + \hat{L}\right)} &\leq \frac{\varepsilon M\hat{L}}{\left(\frac{1}{M} + \varepsilon M + \hat{L}\right)\left(\frac{1}{M} + \hat{L}\right)} \\ &\leq \frac{\varepsilon M\hat{L}}{\frac{1}{M^2}\left(1 + \varepsilon M^2 + M\hat{L}\right)\left(1 + M\hat{L}\right)} \\ &\leq \frac{\varepsilon M^3\hat{L}}{\left(1 + \varepsilon M^2 + M\hat{L}\right)\left(1 + M\hat{L}\right)} \\ &\leq \varepsilon M^3\hat{L}\end{aligned}$$

comme $X = e^{\varrho}$, on a :

$$\forall \varrho \leq \ln M,\ \frac{\varepsilon e^{\varrho} \hat{L}}{\left(e^{-\varrho} + \varepsilon e^{\varrho} + \hat{L}\right)\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)} \leq \varepsilon M^3 \hat{L}$$

et :

$$\left|\left(\overline{k}_{\varepsilon} - \overline{k}\right)(\varrho)\right| \leq \left(\varepsilon M^3 \hat{L} + \frac{4\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} - \hat{L}}\right) \left\|\overline{k}\right\|_{\infty}$$

Comme on peut choisir $M$ et $\varepsilon$, cette estimation nous permet de dire que $\overline{k}_{\varepsilon}$ est une bonne approximation de $\overline{k}$ en supposant que $\overline{k}$ existe bien. De plus :

$$\overline{k}_{\varepsilon} = \left(\mathbb{1} - k_{0,\varepsilon} T\right)^{-1} . \overline{k}_0$$

Donc :

$$\left\|\overline{k}_{\varepsilon}\right\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - \frac{2\hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}}} \left\|\overline{k}_0\right\|_{\infty} \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon} + \hat{L}}{2\sqrt{\varepsilon} - \hat{L}}$$

où on rappelle que $\overline{k}_0(\varrho) = \hat{L} k_0(\varrho) = \hat{L}\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)^{-1}$ donc $\left\|\overline{k}_0\right\|_{\infty} \leq 1$.

#### 5.3.2.4 Expression finale de $\hat{\psi}_0\left(\hat{R}, \hat{\phi}\right)$

On a $\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R}, \hat{\phi}\right) = \hat{R}\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right)$ or $\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Phi}\left(s, \hat{\phi}\right)\right)$ et $\tilde{\Phi}\left(s, \hat{\phi}\right) = \tilde{M}\left(s, \hat{\phi}\right) \tilde{k}(s)$ où :

$$\tilde{M}\left(s, \hat{\phi}\right) = -\frac{\left[\cos\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right) \sin\left(\hat{\phi}\right) \sin\left(s\left(\hat{\phi} - \theta_{0,int}(\beta)\right)\right) - \cos\theta_{0,int}(\beta) \sin\left(s\hat{\phi}\right) \sin\left(\hat{\phi} - \theta_{0,int}(\beta)\right)\right]}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}$$

Donc :

$$\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Phi}\left(s, \hat{\phi}\right)\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{M}\left(s, \hat{\phi}\right) \tilde{k}(s)\right) = M\left(\varrho, \hat{\phi}\right) \star_{\varrho} k(\varrho)$$

et :

$$\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R}, \hat{\phi}\right) = \hat{R}\, M\left(\varrho, \hat{\phi}\right) \star_{\varrho} k(\varrho)$$

où $k(\varrho)$ est solution de l'équation intégrale (5.17), on peut aussi utiliser son approximation $\overline{k}_0(\varrho) = \hat{L} k_0(\varrho) = \hat{L}\left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)^{-1}$.

### 5.3.3 Raccord de l'ordre 0 en $C_{a,f}$

On rappelle que le problème initial est divisible en deux sous-problèmes devant être résolus chacun sur une partie du domaine $\Omega$, l'une située loin du front et l'autre près du front d'avancement du fluide.

#### 5.3.3.1 Surface libre

On rappelle que le problème initial est divisible en deux sous-problèmes devant être résolus chacun sur une partie du domaine $\Omega$, l'une situé loin du front et l'autre près du front d'avancement du fluide.

En zone externe, on a trouvé que $\theta_{0,ext}(r, \beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$. Ici la forme de l'interface dépend de $\beta$ car on est à l'échelle du laboratoire et on ne peut pas dire que la forme de l'interface ne dépend pas du glissement.

En zone interne, on se place à l'échelle du glissement, on perd donc cette dépendance et on trouve : $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} &\text{en externe} \quad \theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta) \\ &\text{en interne} \quad \theta_{0,int}(r,\beta) = \breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,int}(\beta) \end{aligned}$$

Ce que l'on peut représenter de la manière suivante (cf figure 5.7) :

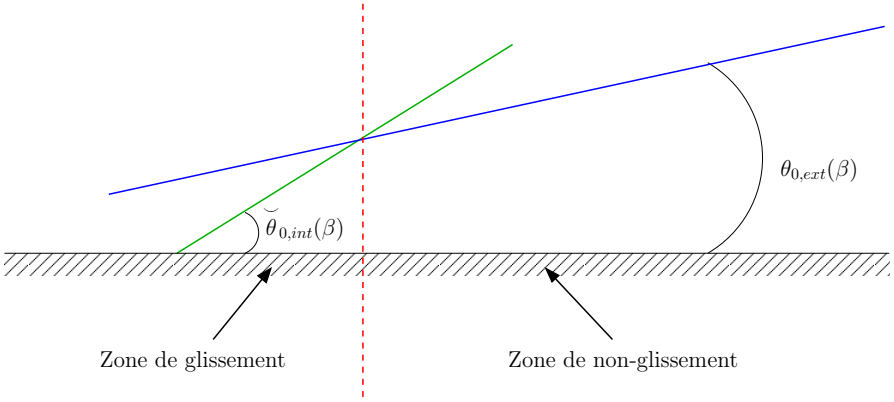



FIGURE 5.7: Raccord de $\theta_0(r,\beta)$

Il y a deux possibilités, soit $\theta_{0,int}(\beta) \neq \theta_{0,ext}(\beta)$ soit $\theta_{0,int}(\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$. Supposons que les deux angles trouvés sont différents c'est-à-dire $\theta_{0,int}(\beta) \neq \theta_{0,ext}(\beta)$, nous devons donc raccorder ces deux valeurs. On voit qu'il faudra raccorder en un seul point, ce qui voudrait dire que l'on passerait directement de la condition de glissement à la condition de non-glissement. Or cela est impossible si l'on cherche une solution $H^1$ au problème.

Il faut donc que $\theta_{0,int}(\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$. Ceci se justifie d'autant plus que l'ordre zéro en $C_{a,f}$ correspond au problème à vitesse nulle, c'est-à-dire le problème stationnaire. Ainsi le fluide ne bouge pas et donc l'angle statique $\theta_{0,int}(\beta)$ est égal à l'angle dynamique $\theta_{0,ext}(\beta)$. Nous garderons comme notation $\breve{\theta}_{0,int}(R,\beta) = \theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_0(\beta)$.

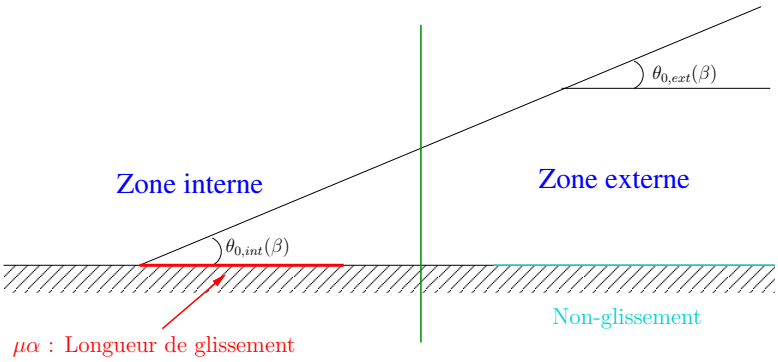



FIGURE 5.8: Raccord en deux zones

Notons que $\theta_0(\beta)$ est l'angle que forme l'interface avec la paroi solide. Il est donné par une loi physique comme celle de Young-Dupré [76].

**Loi de Young-Dupré**

La loi de Young-Dupré est une loi permettant de définir l'angle de contact d'un fluide, on l'appelle aussi angle macroscopique ou statique. L'angle de contact $\theta_E$ est tel que :

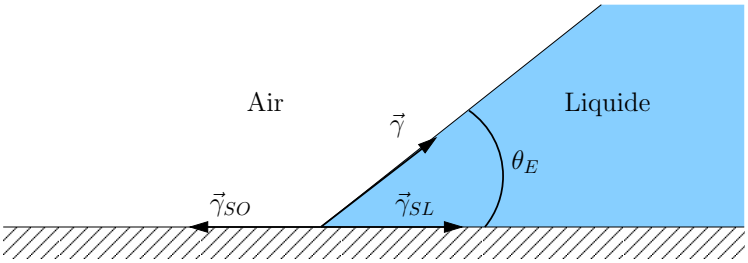



FIGURE 5.9: Détermination de l'angle d'équilibre

où :
- $\vec{\gamma}_{SO}$ représente la tension de surface entre la surface solide et l'air,
- $\vec{\gamma}_{SL}$ la tension de surface entre la surface solide et le liquide,
- $\vec{\gamma}$ la tension de surface entre le liquide et l'air,
- $\theta_E$ l'angle d'équilibre ou angle de contact.

On peut alors introduire le paramètre d'étalement $S$ qui mesure la différence entre l'énergie de surface du substrat sec et mouillé :

$$S = E_{sec}^{substrat} - E_{mouillé}^{substrat} = \gamma_{SO} - \left(\gamma_{SL} + \gamma\right) \tag{5.24}$$

On parle alors de mouillage total lorsque $S > 0$ (angle de contact nul et film d'épaisseur nanoscopique) et de mouillage partiel lorsque $S < 0$ (la goutte ne s'étale pas et forme une calotte sphérique). On peut alors écrire l'état d'équilibre des forces capillaires agissant sur la ligne de contact :

$$\vec{\gamma}_{SO} + \vec{\gamma}_{SL} + \vec{\gamma}\cos\theta_E = 0$$

On obtient alors la **loi de Young-Dupré** [76] :

$$\boxed{\gamma\cos\theta_E = \gamma_{SO} - \gamma_{SL}}$$

Ainsi avec (5.24), on obtient :

$$S = \gamma\left(\cos\theta_E - 1\right)$$

On peut alors voir que l'on ne peut définir $\theta_E$ que si $S \leq 0$, on est donc dans un cas de mouillage partiel. On peut se référer au livre de De Gennes *et al.* [19] pour plus de détails sur ces phénomènes.

#### 5.3.3.2 Fonction courant

Maintenant que $\breve{\theta}_{0,int}\left(R,\beta\right) = \theta_{0,ext}\left(r,\beta\right) = \theta_0\left(\beta\right)$, la fonction courant en zone externe (5.1) s'écrit dans le jeu de variables externe $\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ telle que :

$$\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\frac{\bar{r}\left[\bar{\phi}\sin\bar{\phi}\sin^2\theta_0\left(\beta\right) + \bar{\phi}\cos\bar{\phi}\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right) - \theta_0\left(\beta\right)\sin\bar{\phi}\right]}{\theta_0\left(\beta\right) - \cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}$$

Si on calcule $\tau_0^{ext}$ : les contraintes tangentielles au fond dans cette zone, on a, pour l'ordre 0 en $C_{a,f}$ :

$$\tau_0^{ext}(\bar{r}) = -\frac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\phi\phi}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},0) = -\frac{2\sin^2(\theta_0(\beta))}{\bar{r}\left[\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)\right]} \geq 0$$

car $\forall\alpha\in[0,2\pi]$, $\quad \sin\alpha\cos\alpha-\alpha\leq 0$. On pose alors :

$$k_0^{ext}(\theta_0(\beta)) = -\frac{1}{\bar{r}}\partial^2_{\phi\phi}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},0) = -\frac{2\sin^2(\theta_0(\beta))}{\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)} \geq 0$$

et donc $\tau_0^{ext}(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}}k_0^{ext}(\theta_0(\beta))$.

On ré-écrit alors $\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$ dans les variables de la zone interne $(\varrho,\hat{\phi})$ tel que $\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \beta\hat{\psi}_{0,ext}(\hat{R},\hat{\phi})$ alors :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{0,ext}(\hat{R},\hat{\phi}) &= \frac{\hat{R}\left[(\hat{\phi}-\theta_0(\beta))\sin\hat{\phi}+\hat{\phi}\cos\theta_0(\beta)\sin(\theta_0(\beta)-\hat{\phi})\right]}{\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\\ &= \hat{R}\hat{\Psi}_{ext}(\hat{\phi})\end{aligned}$$

En zone interne, on a $\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \hat{R}\Phi(\varrho,\hat{\phi})$. Le théorème de la valeur finale (11.4) appliqué à $\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})$ (la transformée de Laplace de $\Phi(\varrho,\hat{\phi})$) impose que :

$$\lim_{\varrho\to+\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi}) - \lim_{\varrho\to-\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi}) = \lim_{s\to 0} s\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})$$

or on a posé précédemment (cf (5.12)) que $\Phi(\varrho,\hat{\phi}) \sim_{\varrho\to-\infty} \mathcal{O}(e^{\varrho})$ et donc $\lim_{\varrho\to-\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi}) = 0$ ainsi il faut que :

$$\begin{aligned}&\hat{\Psi}_{ext}(\hat{\phi}) = \lim_{\varrho\to+\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi}) = \lim_{s\to 0} s\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})\\ \Leftrightarrow\quad &\hat{\Psi}_{ext}(\hat{\phi}) = \lim_{s\to 0} s\,A(s)\left[-\frac{\cos\theta_0(\beta)}{\cos(s\theta_0(\beta))}\sin(s\hat{\phi})\sin(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)) + \sin\hat{\phi}\sin(s(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)))\right]\end{aligned}$$

Si on fait un développement limité de cette expression en $s=0$, on trouve :

$$\hat{\Psi}_{ext}(\hat{\phi}) = \lim_{s\to 0} s^2 A(s)\left[(\hat{\phi}-\theta_0(\beta))\sin\hat{\phi}+\hat{\phi}\cos\theta_0(\beta)\sin(\theta_0(\beta)-\hat{\phi})\right] + \mathcal{O}(s^3)$$

Or $\hat{\Psi}_{ext}(\hat{\phi}) = \dfrac{(\hat{\phi}-\theta_0(\beta))\sin\hat{\phi}+\hat{\phi}\cos\theta_0(\beta)\sin(\theta_0(\beta)-\hat{\phi})}{\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}$, ainsi en oubliant le $\mathcal{O}(s^3)$, on a :

$$1 = \left[\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)\right]\lim_{s\to 0} s^2 A(s)$$

Avec (5.15), cette équation devient :

$$1 = \left[\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)\right]\lim_{s\to 0} s\tilde{k}(s)\,\frac{\cos(s\theta_0(\beta))}{2\left[\cos^2\theta_0(\beta)-\cos^2(s\theta_0(\beta))\right]}$$

or $\lim_{s\to 0}\dfrac{\cos(s\theta_0(\beta))}{2\left[\cos^2\theta_0(\beta)-\cos^2(s\theta_0(\beta))\right]} = -\dfrac{1}{2\sin^2\theta_0(\beta)}$ donc :

$$1 = -\frac{\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}{2\sin^2\theta_0(\beta)}\lim_{s\to 0} s\tilde{k}(s)$$

La condition à l'infini s'écrit donc :

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{k}(s) = \lim_{\varrho\to+\infty} k(\varrho) - \lim_{\varrho\to-\infty} k(\varrho) = \frac{2\sin^2\theta_0(\beta)}{\theta_0(\beta)-\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)}$$

Or on a vu que (cf (5.3.2.3)) :

$$\lim_{\varrho\to+\infty} k(\varrho) = \frac{2\sin^2\theta_0(\beta)}{\theta_0(\beta)-\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)}$$

$$\lim_{\varrho\to-\infty} k(\varrho) = 0$$

Donc il y a bien raccord et :

$$\boxed{\lim_{s\to 0} s\tilde{k}(s) = \lim_{\varrho\to+\infty} k(\varrho) = \frac{2\sin^2\theta_0(\beta)}{\theta_0(\beta)-\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)} = k_0^{ext}(\theta_0(\beta)) \geq 0}$$

#### 5.3.3.3 Vitesse

Pour raccorder les vitesses, il nous suffit de vérifier que les conditions limites se raccordent bien. En effet au fond, nous devons raccorder deux conditions limites :

- une condition de glissement près du front :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R}\partial_\phi \breve{u}_{R,0}^{int}(R,0) = \breve{u}_{R,0}^{int}(R,0) - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}} \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) = \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) - 1 \end{aligned}$$

- une condition de non-glissement/adhérence loin du front :

$$\bar{u}_0^{ext}(\bar{r},0)\cdot\vec{t} = 1 \Leftrightarrow \bar{u}_{\bar{r},0}^{ext}(\bar{r},0) = 1$$

On peut ré-écrire cette condition en variables rapides :

$$\hat{u}_{\hat{R},0}^{ext}(\hat{R},0)\cdot\vec{t} = 1$$

Pour raccorder, il faut donc que l'on retrouve la condition de non-glissement quand on fait tendre $\hat{R}$ vers $+\infty$ sur la condition de glissement. On voit clairement que cela revient à montrer que les contraintes tangentielles au fond tendent vers 0 quand $\hat{R}$ tend vers $+\infty$ c'est à dire que $\lim_{\hat{R}\to+\infty} \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}} \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) = 0$. Or :

$$\frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}} \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) = \frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \hat{\psi}_0^{int}(\hat{R},0) = \frac{1}{\hat{R}}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Phi(\varrho,0) = \frac{1}{\hat{R}}k(\varrho)$$

Ainsi :

$$\lim_{\hat{R}\to+\infty} \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}} \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) = \lim_{\varrho\to+\infty} \frac{1}{e^\varrho}k(\varrho)$$

Donc si $\lim_{\varrho\to+\infty} k(\varrho)$ est fixée, on a bien $\lim_{\hat{R}\to+\infty} \frac{1}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}} \hat{u}_{\hat{R},0}^{int}(\hat{R},0) = 0$ et les contraintes au fond sont donc raccordées, la vitesse l'est donc elle aussi.

#### 5.3.3.4 Pression

La pression à l'ordre 0 a déjà été déterminée et vaut dans les deux zones :

$$p_0(r,\phi) = \bar{p}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \hat{p}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = p_{atm}$$

## 5.4 Étude du problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Les différentes inconnues ont déjà été développée en séries de $C_{a,f}$. Nous nous intéressons ici à la résolution du problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$.

### 5.4.1 Problème externe à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Sur $\Omega_{ext}\backslash\Omega_R$, la fonction $\chi(\bar{r})$ est nulle, on a alors le problème suivant sur ce domaine :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq1})_1 : & \bar{u}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \mathrm{r}\bar{\mathrm{o}}\mathrm{t}_0\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathrm{r}\bar{\mathrm{o}}\mathrm{t}_1\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ (\mathrm{Eq2})_1 : & \bar{\nabla}_0\bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{\Delta}_0\bar{u}_0(\bar{r},\bar{\phi}) - \bar{\nabla}_0\bar{G}_0(\bar{r},\bar{\phi}) \\ \\ (\mathrm{Eq2.1})_1 : & \bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = -\bar{\Delta}_1^2\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) \\ (\mathrm{Eq2.2})_1 : & \bar{\Delta}_0\bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (au fond en $\bar{\phi} = 0$) :

$$\begin{aligned} (1)_1 : &\quad \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0 \\ (2)_1 : &\quad \partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{1,ext} = \frac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_0(\beta)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} \end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (à l'interface en $\bar{\phi} = \theta_0(\beta)$) :

$$(3)_1 : \quad \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 0$$

$$\begin{aligned} (4)_1 : \quad & \frac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{1,ext} = \frac{2}{\bar{r}^2}\frac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_0(\beta)}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} - 2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\left(\frac{\bar{\phi}}{\theta_0(\beta)} - 2\right)\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} \\ & - \left\{\frac{\bar{\phi}}{\theta_0(\beta)}\left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) - \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\right] + \frac{4}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\right\}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5)_1 : \quad & \frac{2}{\bar{r}}\left[\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} - \partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\right](\bar{r},\theta_0(\beta)) \\ & = \bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta)) + \bar{r}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) + 2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6)_1 : \quad & 0 = -3\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) - \bar{r}\partial^3_{\bar{r}\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) + \sin(\omega + \theta_0(\beta)) \\ & - \frac{1}{\bar{r}^3}\left[4\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} + \partial^3_{\bar{\phi}\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\right](\bar{r},\theta_0(\beta)) + \frac{3}{\bar{r}}\left[\frac{1}{\bar{r}}\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} - \partial^3_{\bar{\phi}\bar{r}\bar{r}}\bar{\psi}_{0,ext}\right](\bar{r},\theta_0(\beta)) \end{aligned}$$

On remarque que ce problème ne dépend pas du paramètre $\beta$, on ne fera donc pas de développement asymptotique supplémentaire. Nous allons maintenant présenter les calculs des différentes inconnues de l'ordre 1 sachant que l'ordre 0 a été entièrement résolu dans ce qui précède. On peut voir sur les équations précédentes qu'il faut déjà connaître l'ordre 1 en $C_{a,f}$ de la surface libre $\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)$ pour pouvoir ensuite calculer les autres inconnues de l'ordre 1. Pour cela, il nous faut calculer successivement :

- le terme correctif de l'interface $\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)$, puis
- la pression $\bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$,
- la fonction courant $\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$ et finalement
- la vitesse $\bar{u}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$,

à partir de l'ordre 0 précédemment calculé.

### 5.4.2 Problème interne à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Le problème à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ s'écrit :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq1})_1 : & \hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\mathrm{rot}}_0\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \hat{\mathrm{rot}}_1\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ (\mathrm{Eq2})_1 : & \beta\hat{\nabla}_0\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\Delta}_0\hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta^2\hat{\nabla}_0\hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ \\ (\mathrm{Eq2.1})_1 : & \hat{\Delta}_0^2\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = -\hat{\Delta}_1^2\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ (\mathrm{Eq2.2})_1 : & \hat{\Delta}_0\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = 0 \end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$(1)_1 : \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} = 0 \qquad \text{en } \hat{\phi} = 0$$

$$(2)_1 : \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} = \frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)}{\theta_0\left(\beta\right)}\left[2\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] \qquad \text{en } \hat{\phi} = 0$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$(3)_1 : \quad \partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} = \left(\frac{\hat{\phi} - \theta_0\left(\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)}\right)\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right)$$

$$\begin{aligned} (4)_1 : \quad 0 = & \frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{1,int} - \partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{1,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\ & + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\left[\frac{\hat{\phi}}{\theta_0\left(\beta\right)} - 2\right]\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \frac{2}{\hat{R}^2}\frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)}{\theta_0\left(\beta\right)}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} \\ & + \left[\frac{\hat{\phi}}{\hat{\theta}_0}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right) + \frac{3}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\right]\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} \end{aligned}$$

$$(5)_1 : \quad \frac{2}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] = \left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right) + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\right] + \beta\hat{p}_{1,int} \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right)$$

$$\begin{aligned} (6)_1 : \quad & \hat{R}^3\left[3\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right) + \hat{R}\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\right] = \beta^2\hat{R}^3\sin\left(\omega + \theta_0\left(\beta\right)\right) \qquad \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\ & + 3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} - 4\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - 3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} \end{aligned}$$

Pour cela, il nous faut calculer dans l'ordre, comme dans la zone externe, le terme correctif de l'interface $\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)$, puis la pression $\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$, la fonction courant $\hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ et finalement la vitesse $\hat{u}_1\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$, à partir de l'ordre 0 précédemment calculé.

### 5.4.3 Surface libre à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Tout d'abord intéressons nous à la surface libre. En premier, nous allons vérifier que les conditions limites de surface libre en zone interne et externe, sont compatibles. Puis nous calculerons la valeur de $\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)$ et de $\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)$. Enfin nous raccorderons ces deux expressions.

#### 5.4.3.1 Raccord de la condition limite sur la surface libre

Pour raccorder la condition limite de surface libre entre la zone externe et la zone interne, il suffit que la condition limite $(5)_1$ à l'interface se raccorde entre les deux zones. En zone externe, la condition $(5)_1$ s'écrit :

$$\frac{2}{\bar{r}}\left[\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} - \partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\right]\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right) = \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right) + \bar{r}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right) + 2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)$$

Or avec l'expression trouvée à l'ordre 0 de $\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$, on a :

$$\left[\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}-\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\right]\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right)=0$$

ainsi l'équation précédente s'écrit :

$$\bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right)+\bar{r}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)+2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)=0$$

En interne nous avons comme condition $(5)_1$ :

$$\frac{2}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)=\left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)+2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\right]+\beta\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)$$

Pour raccorder avec l'externe, il suffit donc que le terme de gauche de l'équation tendent vers 0 quand $\hat{R}\to+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to+\infty}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)&=\lim_{\varrho\to+\infty}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\partial_{\varrho\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)\\&=-\lim_{\varrho\to+\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\end{aligned}$$

avec $\varrho=\ln\hat{R}$ et $\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)=\hat{R}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)=\hat{R}\,M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)$. Or on ne connaît que la transformée de Laplace bilatérale de $M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$, donc on utilise le théorème de la valeur finale (cf 11.4 page 229) qui nous dit que :

$$\lim_{\varrho\to+\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)-\lim_{\varrho\to-\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)=\lim_{s\to0}s\mathscr{L}\left(\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right)$$

or on a déjà posé que pour que les contraintes soient finies à l'origine du repère, on a :

$$\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)=\mathscr{O}\left(e^{\varrho}\right)\text{ quand }\varrho\to-\infty$$

ainsi il en est de même sur les dérivées et $\lim_{\varrho\to-\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)=0$. Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to+\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)&=\lim_{s\to0}s\mathscr{L}\left(\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right)\\&=\lim_{s\to0}s^2\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\theta_0\left(\beta\right)\right)\tilde{k}\left(s\right)\\&=\lim_{s\to0}\left(s\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)\left(s\tilde{k}\left(s\right)\right)\end{aligned}$$

et on a vu que :

$$\lim_{s\to0}s\,\tilde{k}\left(s\right)=\lim_{\varrho\to+\infty}k\left(\varrho\right)=\frac{2\sin^2\theta_0\left(\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}$$

de plus :

$$\lim_{s\to0}s\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\theta_0\left(\beta\right)\right)=0$$

donc :

$$\lim_{\varrho\to+\infty}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}-\hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)=-\lim_{\varrho\to+\infty}\partial_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\theta_0\left(\beta\right)\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)=0$$

Ainsi en interne, nous avons comme condition limite en l'infini :

$$\lim_{\hat{R}\to+\infty}\left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)+2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R}\right)\right]+\beta\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right)=0$$

Ce qui se raccorde donc bien avec la condition limite en zone externe. Intéressons nous maintenant à l'expression de la surface libre à l'ordre 1 dans les deux zones d'études.

#### 5.4.3.2 Calcul de la surface libre à l'ordre 1 en zone externe

La condition $(6)_1$ s'écrit telle que :

$$\begin{aligned}(6)_1 : \quad 0 &= -3\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta) - \bar r\partial^3_{\bar r\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta) + \sin(\omega+\theta_0(\beta)) \\ &-\frac{1}{\bar r^3}\left[4\partial_{\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} + \partial^3_{\bar\phi\bar\phi\bar\phi}\bar\psi_{0,ext}\right](\bar r,\theta_0(\beta)) + \frac{3}{\bar r}\left[\frac{1}{\bar r}\partial^2_{\bar r\bar\phi}\bar\psi_{0,ext} - \partial^3_{\bar\phi\bar r\bar r}\bar\psi_{0,ext}\right](\bar r,\theta_0(\beta))\end{aligned} \tag{5.25}$$

Dans la zone externe, on connaît $\bar\psi_{0,ext}(\bar r,\bar\phi)$. On peut donc déduire de cette équation, l'expression de $\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta)$ dans la zone externe. Il faudra ensuite regarder le problème à résoudre en interne. On a trouvé que :

$$\bar\psi_{0,ext}(\bar r,\bar\phi) = \frac{\bar r}{\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\left[(\bar\phi-\theta_0(\beta))\sin\bar\phi + \bar\phi\cos\theta_0(\beta)\sin(\theta_0(\beta)-\bar\phi)\right]$$

- **Forme générale de la solution :**
  On veut résoudre l'équation (5.25) qui se ré-écrit telle que :

$$(6)_1 : \partial^3_{\bar r\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta) + \frac{3}{\bar r}\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta) = \frac{1}{\bar r}\left[\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\bar r^2(\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta))}\right] \tag{5.26}$$

  Posons $F(\bar r) = \partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}(\bar r,\beta)$, ainsi l'équation différentielle (5.26) s'écrit :

$$F'(\bar r) + \frac{3}{\bar r}F(\bar r) = \frac{1}{\bar r}\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\bar r^3(\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta))} \tag{5.27}$$

  On applique la méthode de la variation de la constante. En premier cherchons la solution du problème homogène :

$$F'(\bar r) + \frac{3}{\bar r}F(\bar r) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad F(\bar r) = Ke^{-3\ln\bar r} = K\bar r^{-3}$$

  Posons maintenant que $F(\bar r) = K(\bar r)\,\bar r^{-3}$ ainsi l'équation (5.27) s'écrit :

$$\begin{aligned}&\left[K'(\bar r)\,\bar r^{-3} - 3K(\bar r)\,\bar r^{-4}\right] + \frac{3}{\bar r}K(\bar r)\,\bar r^{-3} = \frac{1}{\bar r}\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\bar r^3(\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta))} \\ \Leftrightarrow\quad & K'(\bar r) = \bar r^2\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)} \\ \Leftrightarrow\quad & K(\bar r) - K(b_1) = \int_{b_1}^{\bar r}\left[t^2\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\right]\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow\quad & K(\bar r) = \sin(\omega+\theta_0(\beta))\left[\frac{\bar r^3}{3} - \frac{b_1^3}{3}\right] + \frac{2(\bar r-b_1)\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)} + K(b_1) \\ \Leftrightarrow\quad & K(\bar r) = \frac{1}{3}\sin(\omega+\theta_0(\beta))\,\bar r^3 + \frac{2\bar r\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)} \\ & \underbrace{-b_1\left[\frac{b_1^2}{3}\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\right] + K(b_1)}_{=b_1B+c_1}\end{aligned}$$

  et :

$$\partial^2_{\bar r\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)=F\left(\bar r\right)=\frac{K\left(\bar r\right)}{\bar r^3}=\frac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\frac{1}{\bar r^2}+\frac{b_1B+c_1}{\bar r^3}$$

Le comportement ici en 0 est à raccorder avec la zone interne. Il nous faudra donc 3 conditions limites sur $\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)$ pour pouvoir le calculer. On a alors :

$$\begin{aligned}\partial_{\bar r}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right) &= \int_{b_2}^{\bar r}\left\{\tfrac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)+\tfrac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\tfrac{1}{t^2}+\tfrac{b_1B+c_1}{t^3}\right\}\mathrm{d}t+\partial_{\bar r}\theta_{1,ext}\left(b_2,\beta\right)\\ &=\frac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar r-\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\bar r\left(\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)}-\frac{b_1B+c_1}{2\bar r^2}+\partial_{\bar r}\theta_{1,ext}\left(b_2,\beta\right)\\ &+\frac{b_1B+c_1}{2b_2^2}-\frac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)b_2+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{b_2\left(\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)}\end{aligned}$$

donc $b_2\neq 0$ et :

$$\begin{aligned}&\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)=\\ &\frac{1}{6}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar r^2-\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\bar r+\frac{1}{2\bar r}\underbrace{\left(b_1B+c_1\right)}_{=C_1}\\ &\underbrace{+\left(\frac{b_1B+c_1}{2b_2^2}-\frac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)b_2+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{b_2\left(\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)}+\partial_{\bar r}\theta_{1,ext}\left(b_2,\beta\right)\right)}_{=C_2}\bar r\\ &\left.\begin{aligned}&+\frac{1}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(b_2-\frac{1}{2}b_3\right)b_3+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)\left(\ln b_3-\frac{b_3}{b_2}\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\\ &+b_3\partial_{\bar r}\theta_{1,ext}\left(b_2,\beta\right)-\left(\frac{b_3}{b_2^2}+\frac{1}{b_3}\right)\frac{b_1B+c_1}{2}+\theta_{1,ext}\left(b_3,\beta\right)\end{aligned}\right\}=C_3\end{aligned}$$

et $b_3\neq 0$. On trouve alors :

$$\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)=\frac{\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar r^2}{6}-\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\left(\bar r\right)+\frac{C_1}{2\bar r}+C_2\bar r+C_3$$

où les constantes $C_i$ restent à déterminer. Elle permettront de faire le raccord entre les deux zones.

- **Expression sous une forme semblable à Tanner :**
  On essaie ici de voir si l'expression trouvée pour la surface libre jusqu'à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ peut se comparer à l'étude de Tanner [70]. Ainsi pour $\theta_0\left(\beta\right)\ll 1$, nous avons dans la zone externe :

$$\begin{aligned}&\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\approx\frac{3}{\theta_0^2\left(\beta\right)}\ln\left(\bar r\right)+\mathcal{O}\left(1\right)\\ \Leftrightarrow\quad&\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)\theta_0^2\left(\beta\right)\approx 3\ln\left(\bar r\right)+\mathcal{O}\left(\theta_0^2\left(\beta\right)\right)\end{aligned}$$

  or :

$$\theta^3_{ext}\left(\bar r,C_{a,f},\beta\right)=\left(\theta_0\left(\beta\right)+C_{a,f}\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)+\mathcal{O}\left(C_{a,f}\right)\right)^3=\theta_0^3\left(\beta\right)+3C_{a,f}\theta_0^2\left(\beta\right)\bar\theta_{1,ext}\left(\bar r,\beta\right)+\mathcal{O}\left(C_{a,f}\right)$$

  donc :

$$\theta_{ext}^3\left(\bar{r}, C_{a,f}, \beta\right) = \theta_0^3 + 9C_{a,f}\ln\left(\bar{r}\right) + \mathcal{O}\left(\theta_0^2\left(\beta\right) + C_{a,f}\right)$$

Si on va un ordre plus loin :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right) &\approx \left[\frac{3}{\theta_0^2\left(\beta\right)} + \frac{1}{10}\right]\ln\left(\bar{r}\right) + \frac{\sin\omega\bar{r}^2}{6} + \mathcal{O}\left(\theta_0\left(\beta\right)\right) \\ \Leftrightarrow \quad \bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)\theta_0^2\left(\beta\right) &\approx \left[3 + \frac{1}{10}\theta_0^2\left(\beta\right)\right]\ln\left(\bar{r}\right) + \frac{\sin\omega\bar{r}^2}{6}\theta_0^2\left(\beta\right) + \mathcal{O}\left(\theta_0^3\left(\beta\right)\right) \end{aligned}$$

donc :

$$\theta_{ext}^3\left(\bar{r}, C_{a,f}, \beta\right) = \theta_0^3\left(\beta\right) + 9C_{a,f}\ln\left(\bar{r}\right) + \left(\frac{3}{10}\ln\left(\bar{r}\right) + \frac{\sin\omega\bar{r}^2}{2}\right)\theta_0^2\left(\beta\right)C_{a,f} + \mathcal{O}\left(\theta_0^3\left(\beta\right) + C_{a,f}\right)$$

On a donc une formule du type Tanner uniquement en zone externe qui ne dépend pas de l'interne sauf au travers de $\theta_0\left(\beta\right)$ qui est l'ordre 0 en $C_{a,f}$ de la surface libre en zone interne comme en zone externe.

- **Comparaison avec les résultats de Cox [15] :**
  En externe, Cox trouve que l'interface $\theta$ est telle que :

$$\theta = \{\theta_m + ...\} + Ca\left\{f\left(\theta_m, \lambda\right)\ln\left(r\right) + Q_0^* + ...\right\} + ...$$

où $\theta_m$ est l'angle macroscopique de contact, ce qui correspond à notre $\theta_0\left(\beta\right)$.
De plus la fonction $f$ s'écrit en bi-fluide, telle que :

$$f\left(\theta_m, \lambda\right) = \frac{2\sin\theta_m\left[\lambda^2\left(\theta_m^2 - \sin^2\theta_m\right) + 2\lambda\{\theta_m(\pi-\theta_m) + \sin^2\theta_m\} + \{(\pi-\theta_m)^2 - \sin^2\theta_m\}\right]}{\lambda\left(\theta_m^2 - \sin^2\theta_m\right)\{(\pi-\theta_m) + \sin\theta_m\cos\theta_m\} + \{(\pi-\theta_m)^2 - \sin^2\theta_m\}(\theta_m - \sin\theta_m\cos\theta_m)} \tag{5.28}$$

où $\lambda = \frac{\mu_B}{\mu_A}$ donc pour passer en mono-fluide, on pose $\mu_B = 0$ et $f$ s'écrit :

$$f\left(\theta_m, 0\right) = \frac{2\sin\theta_m}{\theta_m - \sin\theta_m\cos\theta_m}$$

On a donc bien retrouvé la même forme que lui.

#### 5.4.3.3 Calcul de la surface libre à l'ordre 1 en zone interne

La condition limite $(6)_1$ donne :

$$\begin{aligned} (6)_1 : \quad & \hat{R}^3\left[3\partial_{\hat{R}\hat{R}}^2\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}^3\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right] = \beta^2\hat{R}^3\sin\left(\omega + \theta_0\left(\beta\right)\right) \\ & + \left[3\hat{R}\partial_{\hat{\phi}\hat{R}}^2\hat{\psi}_{0,int} - 3\hat{R}^2\partial_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}^3\hat{\psi}_{0,int} - 4\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \partial_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}^3\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\theta_0\left(\beta\right)\right) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Or $\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{R}\,M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)$ avec :

$$\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right) = -\frac{\left[\cos\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi} - \theta_0\left(\beta\right)\right)\right) - \cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi} - \theta_0\left(\beta\right)\right)\right]}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos^2\theta_0\left(\beta\right)\right]}$$

et $\varrho = \ln\left(\hat{R}\right) \Leftrightarrow e^\varrho = \hat{R}$. De plus donc $\partial_y\left(f\star g\right) = \partial_y f\star g = f\star\partial_y g$, les dérivées en $\hat{R}$ peuvent donc être faites sur $k\left(\varrho\right)$ ou $M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$. Nous avons choisit ici de faire toutes les dérivées sur $M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$ pour avoir une écriture plus simple du produit de convolution. Le terme en $\hat{\psi}_{0,int}$ de (5.29) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\left[3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} - 3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} - 4\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right](\hat{R},\theta_0(\beta)) \\
= \quad & \hat{R}\left[3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi}) - 3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi}) - 4\partial_{\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi}) - \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})\right]\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)} \star_\varrho k(\varrho)
\end{aligned}$$

On peut alors écrire l'équation précédente sous la forme :

$$(6)_1 : \partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) + \frac{3}{\hat{R}}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) = \frac{s(\hat{R})}{\hat{R}} \tag{5.30}$$

où :

$$\begin{aligned}
s(\hat{R}) &= \beta^2\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{1}{\hat{R}^2}s_1(\hat{R}) \\
s_1(\hat{R}) &= \left[3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi}) - 3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi}) - 4\partial_{\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi}) - \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})\right]\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)} \star_\varrho k(\varrho)
\end{aligned}$$

et $\varrho = \ln\hat{R}$.

- **Calcul de $\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)$ :**
  Posons $F(\hat{R}) = \partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)$, ainsi l'équation différentielle (5.30) s'écrit :

$$F'(\hat{R}) + \frac{3}{\hat{R}}F(\hat{R}) = \frac{s(\hat{R})}{\hat{R}} \tag{5.31}$$

  On applique la méthode de la variation de la constante. En premier cherchons la solution du problème homogène :

$$F'(\hat{R}) + \frac{3}{\hat{R}}F(\hat{R}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\hat{R}) = Ke^{-3\ln\hat{R}} = K\hat{R}^{-3}$$

  Posons maintenant que $F(\hat{R}) = K(\hat{R})\,\hat{R}^{-3}$ ainsi l'équation (5.31) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\left[K'(\hat{R})\,\hat{R}^{-3} - 3K(\hat{R})\,\hat{R}^{-4}\right] + \frac{3}{\hat{R}}K(\hat{R})\,\hat{R}^{-3} = \frac{s(\hat{R})}{\hat{R}} \\
\Leftrightarrow \quad & K'(\hat{R}) = s(\hat{R})\,\hat{R}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & K(\hat{R}) = \int_{a_1}^{\hat{R}} s(t)\,t^2\,\mathrm{d}t + \underbrace{K(a_1)}_{=C}
\end{aligned}$$

  et :

$$\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) = F(\hat{R}) = \frac{1}{\hat{R}^3}\int_{a_1}^{\hat{R}} s(t)\,t^2\,\mathrm{d}t + \frac{C}{\hat{R}^3}$$

  Il nous faudra donc 3 conditions limites sur $\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)$ pour pouvoir le calculer. Calculons $\frac{1}{\hat{R}^3}\int_0^{\hat{R}} s(t)\,t^2\,\mathrm{d}t$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{R}^3}\int_0^{\hat{R}} s(t)\,t^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\hat{R}^3}\int_{a_1}^{\hat{R}}\left[\beta^2\sin(\omega+\theta_0(\beta)) + \frac{1}{t^2}s_1(t)\right]t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\beta^2}{3}\sin(\omega+\theta_0(\beta))\left[1-\left(\frac{a_1}{\hat{R}}\right)^3\right] + \frac{1}{\hat{R}^3}\left(\int_{a_1}^{\hat{R}} s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

  Et donc :

$$\begin{aligned}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) = & \frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[1-\left(\frac{a_1}{\hat{R}}\right)^3\right]+\frac{1}{\hat{R}^3}\left(\int_{a_1}^{\hat{R}} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)+\frac{C}{\hat{R}^3}\\ = & \frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)+\frac{1}{\hat{R}^3}\left[\int_{a_1}^{\hat{R}} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t-\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)a_1^3+C\right]\end{aligned}$$

Il faudra donc gérer le comportement de $\frac{1}{\hat{R}^3}\left[\int_{a_1}^{\hat{R}} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t-\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)a_1^3+C\right]$ quand $\hat{R}$tend vers 0.

- **Calcul de $\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)$ :**
  On a alors :

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad & \partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)=\int_{a_2}^{\hat{R}}\left[\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[1-\left(\frac{a_1}{T}\right)^3\right]+\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)+\frac{C}{T^3}\right]\mathrm{d}T+\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\\ & =\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[\hat{R}+\frac{a_1^3}{2\hat{R}^2}-a_2-\frac{a_1^3}{2a_2^2}\right]+\int_{a_2}^{\hat{R}}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\\ & +C\left[-\frac{1}{2\hat{R}^2}+\frac{1}{2a_2^2}\right]+\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad & \hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)=\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[\tau+\frac{a_1^3}{2\tau^2}-a_2-\frac{a_1^3}{2a_2^2}\right]+\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau\\ & +\int_{a_3}^{\hat{R}}\left[C\left(-\frac{1}{2\tau^2}+\frac{1}{2a_2^2}\right)+\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\right]\mathrm{d}\tau+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)\\ & =\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[\frac{\hat{R}^2}{2}-\frac{a_1^3}{2\hat{R}}-\left(a_2+\frac{a_1^3}{2a_2^2}\right)\hat{R}-\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_1^3}{2a_3}+\left(a_2+\frac{a_1^3}{2a_2^2}\right)a_3\right]+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)\\ & +\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau+C\left[\frac{1}{2\hat{R}}+\frac{\hat{R}}{2a_2^2}-\frac{1}{2a_3}-\frac{a_3}{2a_2^2}\right]+\left(\hat{R}-a_3\right)\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\end{aligned}$$

On retrouve alors le terme dû à la gravité $\dfrac{\beta^2}{6}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\hat{R}^2$, déjà obtenu dans l'expression de la surface libre en zone externe. On peut poser comme condition limite : $\hat{\theta}_{1,int}\left(0\right)=0$ pour que $\hat{\theta}\left(0,\beta,C_{a,f}\right)=\theta_0\left(\beta\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}0=\hat{\theta}_{1,int}\left(0\right)= & \frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[-\frac{a_1^3}{2\hat{R}}-\frac{a_3^2}{2}+\frac{a_1^3}{2a_3}+\left(a_2+\frac{a_1^3}{2a_2^2}\right)a_3\right]\\ & +\int_{a_3}^{0}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau+C\left[\frac{1}{2\hat{R}}-\frac{1}{2a_3}-\frac{a_3}{2a_2^2}\right]\\ & -a_3\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)\end{aligned}$$

Donc il faut poser $a_1=C=0$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}0=\hat{\theta}_{1,int}\left(0\right)= & a_3\left[\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(a_2-\frac{a_3}{2}\right)-\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\right]\\ & +\int_{a_3}^{0}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_{0}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)\end{aligned}$$

Les constantes $\hat{\theta}_{1,int}(a_3)$ et $\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(a_2)$ vont permettre de régler cette égalité. On a alors :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) = & \frac{\beta^2}{3}\sin(\omega+\theta_0(\beta))\left[\frac{\hat{R}^2}{2}-a_2\hat{R}-\frac{a_3^2}{2}+a_2a_3\right] \\ & +\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau+(\hat{R}-a_3)\,\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(a_2)+\hat{\theta}_{1,int}(a_3)\end{aligned}$$

Il faut alors que $\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau$ soit borné.

- **Étude de $s(\hat{R},\hat{\phi})$, le second membre de l'équation de la surface libre :**
  L'équation que nous étudions est :

$$3\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)+\hat{R}\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)=s(\hat{R},\hat{\phi})$$

où :

$$\begin{aligned}s(\hat{R}) &= \beta^2\sin(\omega+\theta_0(\beta))+\frac{1}{\hat{R}^2}s_1(\hat{R}) \\ s_1(\hat{R}) &= \left[3\hat{R}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi})-3\hat{R}^2\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}M(\varrho,\hat{\phi})-4\partial_{\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})-\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})\right]\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)}\star_\varrho k(\varrho)\end{aligned}$$

Notons :

$$\Upsilon(\varrho)=\left[6\partial^2_{\varrho\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})-3\partial^3_{\hat{\phi}\varrho\varrho}M(\varrho,\hat{\phi})-4\partial_{\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})-\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}M(\varrho,\hat{\phi})\right]\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)}$$

On a alors :

$$s_1(\hat{R})=s_1(e^\varrho)=\Upsilon(\varrho)\star_\varrho k(\varrho)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\tilde{\Upsilon}(s)\times\mathscr{L}[k(\varrho)](s)\right\}(\varrho,\theta_0(\beta))$$

et :

$$\tilde{\Upsilon}(s)=\mathscr{L}(\Upsilon(\varrho))(s)=\left[(-3s^2+6s-4)\,\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}(s,\hat{\phi})-\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{M}(s,\hat{\phi})\right]\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)}$$

or le calcul de $\mathscr{L}[k(\varrho)](s)$ fait intervenir la fonction digamma $\digamma(s)$ qui est la dérivée du logarithme de la fonction $\Gamma$ :

$$\digamma(s)=\frac{\partial(\ln\Gamma(s))}{\partial s}=\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

où $\Gamma$ est la fonction généralisant la définition de la fonction factorielle pour les nombres complexes. Cette écriture n'est pas très facile à utiliser pour la suite, nous préférerons donc utiliser la formule suivante pour ce calcul :

$$s_1(\hat{R})=\Upsilon(\varrho)\star_\varrho k(\varrho)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Upsilon\left(\varrho-\varrho'\right)\cdot k\left(\varrho'\right)d\varrho'$$

avec :

$$\tilde{\Upsilon}(s)=-\frac{(2s^2-6s+1)\,s\cos(s\theta_0(\beta))\sin\theta_0(\beta)+3(2s-1)\cos\theta_0(\beta)\sin(s\theta_0(\beta))}{2s(\cos^2\theta_0(\beta)-\cos^2(s\theta_0(\beta)))}$$

On voudrait être sûr que le terme $\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau$ de $\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta)$ existe :

- Regardons ce qui se passe en $\hat{R}=0$. On suppose qu'en $\hat{R}=0$, $s_1(t)$ se développe comme il suit :

$$s_1\left(\hat{R}\right)=\alpha_0+\alpha_1\hat{R}+\alpha_2\hat{R}^2+\alpha_3\hat{R}^3+\mathcal{O}\left(\hat{R}^4\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{R}^3}\int_0^{\hat{R}} s_1(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\hat{R}^3}\left[\alpha_0 t+\frac{\alpha_1}{2}t^2+\frac{\alpha_2}{3}t^3+\frac{\alpha_3}{4}t^4+\mathcal{O}\left(t^4\right)\right]_0^{\hat{R}}\\ &= \frac{\alpha_0}{\hat{R}^2}+\frac{\alpha_1}{2\hat{R}}+\frac{\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_3}{4}\hat{R}+\mathcal{O}\left(\hat{R}^2\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}&\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau\\ =\;&\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{\alpha_0}{T^2}+\frac{\alpha_1}{2T}+\frac{\alpha_2}{3}+\frac{\alpha_3}{4}T+\mathcal{O}\left(T^2\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau\\ =\;&\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\left[-\frac{\alpha_0}{T}+\frac{\alpha_1}{2}\ln T+\frac{\alpha_2}{3}T+\frac{\alpha_3}{8}T^2+\mathcal{O}\left(T^3\right)\right]_{a_2}^{\tau}\right\}\mathrm{d}\tau\\ =\;&\int_{a_3}^{\hat{R}}\left[-\frac{\alpha_0}{\tau}+\frac{\alpha_1}{2}\ln\tau+\frac{\alpha_2}{3}\tau+\frac{\alpha_3}{8}\tau^2+\left(\frac{\alpha_0}{a_2}-\frac{\alpha_1}{2}\ln a_2-\frac{\alpha_2}{3}a_2-\frac{\alpha_3}{8}a_2^2\right)+\mathcal{O}\left(\tau^3\right)\right]\mathrm{d}\tau\\ =\;&-\alpha_0\ln\hat{R}+\frac{\alpha_1}{2}\left(\hat{R}\ln\hat{R}-\hat{R}\right)+\frac{\alpha_2}{6}\hat{R}^2+\frac{\alpha_3}{24}\hat{R}^3+\left(\frac{\alpha_0}{a_2}-\frac{\alpha_1}{2}\ln a_2-\frac{\alpha_2}{3}a_2-\frac{\alpha_3}{8}a_2^2\right)\hat{R}+\mathcal{O}\left(\hat{R}^4\right)\\ &+\alpha_0\ln a_3-\frac{\alpha_1}{2}\left(a_3\ln a_3-a_3\right)-\frac{\alpha_2}{6}a_3^2-\frac{\alpha_3}{24}a_3^3-\left(\frac{\alpha_0}{a_2}-\frac{\alpha_1}{2}\ln a_2-\frac{\alpha_2}{3}a_2-\frac{\alpha_3}{8}a_2^2\right)a_3\end{aligned}$$

Donc pour qu'en $\hat{R}=0$, il n'y ait pas de problème, il faut que $s_1(0)=\alpha_0=0$. Or :

$$s_1\left(\hat{R}=e^{\varrho}\right)=S_1(\varrho)=\Upsilon(\varrho)\star_{\varrho}k(\varrho)$$

Vérifions que $s_1\left(\hat{R}=0\right)=0$ :

$$s_1\left(\hat{R}=0\right)=S_1\left(\varrho\to-\infty\right)=\lim_{\varrho\to-\infty}\Upsilon(\varrho)\star_{\varrho}k(\varrho)$$

or on sait que $\left|\Upsilon(\varrho)\right|\leq e^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}$ avec $0<\gamma<1$ tel que $\theta_0(\beta)=\pi\gamma$ (cf 14.6 page 258) et on peut prendre :

$$k(\varrho)=k_0(\varrho)+\chi_{[a,b]}(\varrho)=\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)^{-1}+\chi_{[a,b]}(\varrho)$$

où $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ est une fonction bornée qui est non nulle sur $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et nulle en dehors telle que :

$$\chi_{[a,b]}(\varrho)=\begin{cases}0 & \text{pour } \varrho\leq a\\ f(\varrho) & \text{pour } a\leq\varrho\leq b\\ 0 & \text{pour } b\leq\varrho\end{cases}$$

où $f(\varrho)$ est une fonction bornée. $k(\varrho)$ exprimé de cette manière a donc les bons comportements en $\pm\infty$ et la fonction $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ représente les variations que peut avoir $k(\varrho)$ autour de $k_0(\varrho)$. On a alors montré que (cf 10.3 page 226) :

$$\lim_{\varrho\to-\infty}I(\varrho,B\geq1)=\lim_{\varrho\to-\infty}\left[k_0(\varrho)+\chi_{[a,b]}(\varrho)\right]\star e^{-B|\varrho|}\Big|_{B\geq1}=0$$

si $B \in \mathbb{R}$ et $B \geq 1$. Donc $s_1\left(\hat{R}=0\right)=0$ si et seulement si $\left|\Upsilon\left(\varrho\right)\right| \leq e^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|} \leq e^{-|\varrho|}$, il faut donc que :

$$1-\frac{1}{\gamma} \leq -1 \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{1}{2}$$

Ceci impose donc à $\underline{\theta_0\left(\beta\right) \text{ d'être entre 0 et } \frac{\pi}{2}}$.

- Regardons maintenant la limite en $\hat{R} \to +\infty$ :
  En utilisant le théorème de la valeur initiale 11.3 page 228, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\hat{R}\to+\infty} s_1\left(\hat{R}=e^{\varrho}\right) &= \lim_{\varrho\to+\infty} s_1\left(e^{\varrho}\right) = \lim_{\varrho\to+\infty} \Upsilon\left(\varrho\right) \star_{\varrho} k\left(\varrho\right) \\ &= \lim_{s\to 0} s\tilde{\Upsilon}\left(s\right)\tilde{k}\left(s\right) + \lim_{\varrho\to-\infty} \Upsilon\left(\varrho\right) \star_{\varrho} k\left(\varrho\right)\end{aligned}$$

  or $\lim_{\varrho\to-\infty} \Upsilon\left(\varrho\right) \star_{\varrho} k\left(\varrho\right)=0$ car on a fixé que $0<\theta_0\left(\beta\right) \leq \frac{\pi}{2}$ ainsi :

$$\begin{aligned}&\lim_{\hat{R}\to+\infty} s_1\left(\hat{R}=e^{\varrho}\right) = \lim_{s\to 0} s\tilde{k}\left(s\right) \times \lim_{s\to 0} \tilde{\Upsilon}\left(s\right) \\ = &\frac{2\sin^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)-\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)} \times \frac{\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)-3\theta_{0,int}\left(\beta\right)\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{2\sin^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)} \\ = &\frac{\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)-3\theta_{0,int}\left(\beta\right)\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)-\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)} < 0\end{aligned} \tag{5.32}$$

  (comme les limites sont finies). Donc on a pour $\hat{R}$ grand :

$$\begin{aligned}C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left(\int_{a_2}^{\tau}\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau &= \varepsilon B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\int_{a_3}^{e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}}\left(\int_{a_2}^{\tau}\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T 1\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \varepsilon B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\int_{a_3}^{e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}}\left(-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{a_2}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\left[-\varepsilon^{1-b}+\frac{1}{a_2}\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}+\varepsilon\left(\ln a_3-\frac{a_3}{a_2}\right)\right]\end{aligned}$$

  On a un problème sur le terme $\frac{1}{a_2}\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$, or si on prend $a_2 = ae^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$, $\frac{1}{a_2}\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$ tend bien vers 0 quand $\varepsilon \to 0$ mais alors $a_2$ est très grand, il faut donc changer l'intégrale sur $T$ en intégrant de $\tau$ à $a_2$ et non pas l'inverse. On a alors :

$$\begin{aligned}C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left(\int_{\tau}^{a_2}\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T} s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau &= \varepsilon B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\int_{a_3}^{e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}}\left(\int_{\tau}^{ae^{\frac{1}{\varepsilon^b}}}\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T 1\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau \\ &= B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\left[\varepsilon^{1-b}-\frac{\varepsilon}{a}-\varepsilon\left(\ln a_3-\frac{a_3}{a}e^{-\frac{1}{\varepsilon^b}}\right)\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

  Si $a_3$ se comporte bien dans la limite $\varepsilon \to 0$.

Ceci règle les problèmes en 0 et $+\infty$ de ce terme, en dehors de ces points vérifions qu'il n'y a pas de soucis. On peut alors montrer que $s_1\left(\hat{R}=e^{\varrho}\right)$ est une fonction bornée. On a $s_1\left(\hat{R}=e^{\varrho}\right) = S_1\left(\varrho\right) = \Upsilon\left(\varrho\right) \star_{\varrho} k\left(\varrho\right)$ où :

- On peut prendre comme approximation de $k\left(\varrho\right)$ :

$$\tilde{k}\left(\varrho\right) = k_0\left(\varrho\right) + \chi_{[a,b]}\left(\varrho\right) = \left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)^{-1} + \chi_{[a,b]}\left(\varrho\right)$$

où $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ est une fonction bornée qui est non nulle sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et nulle en dehors telle que :

$$\chi_{[a,b]}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varrho \leq a \\ f(\varrho) & \text{pour } a \leq \varrho \leq b \\ 0 & \text{pour } b \leq \varrho \end{cases}$$

où $f(\varrho)$ est une fonction bornée. $\tilde{k}(\varrho)$ a donc les bons comportements en $\pm\infty$ et la fonction $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ représente les variations que peut avoir $k(\varrho)$ autour de $k_0(\varrho)$. Donc $\tilde{k}(\varrho) \in L^\infty(\mathbb{R})$ ainsi on a $k(\varrho) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

- Regardons maintenant la régularité de $\Upsilon(\varrho)$. On a vu (cf 14.1 page 259) que :

$$\begin{aligned} 2\pi\Upsilon(\varrho) = & \frac{1}{\gamma} e^{|\varrho|} \sum_{n>0} (-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}} \frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}} \left[-7 - 2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2 + \frac{6}{\gamma} n\right] \\ & + \frac{1}{\gamma} e^{-|\varrho|} \sum_{n>0} (-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}} \frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}} \left[7 + 2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2 + \frac{6}{\gamma} n\right] \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} g(\varrho,\gamma) = & \frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right) + 2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^3} \left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\left(\frac{1}{1-\gamma} e^{|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}} - e^{-|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}}\right) \\ & + \frac{6}{\gamma^2}\left[\frac{1}{1-\gamma} e^{|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}} + e^{-|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

On peut alors majorer $\Upsilon(\varrho)$ de la manière suivante :

$$|\Upsilon(\varrho)| \leq \frac{1}{2\pi} g(\varrho,\gamma)$$

Ainsi on a montré que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Upsilon(\varrho)|\, d\varrho \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varrho,\gamma)\, d\varrho < +\infty$$

(cf 14.7 page 259).

Ainsi $s_1$ est le résultat de la convolution d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction $L^\infty(\mathbb{R})$, elle est donc $L^\infty(\mathbb{R})$. $s_1$ est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.

- **Étude de $\Upsilon(\varrho)$ :**
  On a :

$$\tilde{\Upsilon}(s) = \frac{(2s^2-6s+1)\, s\cos(s\theta_0(\beta))\sin\theta_0(\beta) + 3(2s-1)\cos\theta_0(\beta)\sin(s\theta_0(\beta))}{s(\cos(2s\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta)))}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Upsilon(\varrho) = \mathscr{L}^{-1}(\tilde{\Upsilon}(s))(\varrho) & = \frac{1}{2i\pi} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho} \tilde{\Upsilon}(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\epsilon+ix)\varrho} \tilde{\Upsilon}(\epsilon+ix)\, dx \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} B(x)\, ds \end{aligned}$$

en posant $s = \epsilon + ix$ avec $0 < \epsilon < 1$, $ds = i\,dx$ et $B(x) = e^{\epsilon\varrho}\tilde{\Upsilon}(\epsilon + ix)$. L'intégrale se calcule alors selon :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} B(x)\,dx = 2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho) \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_j\right)$$

Il faut éventuellement justifier le comportement à l'infini si les pôles tendent vers l'infini. Ainsi après calcul par le théorème des résidus (cf 14 page 249) :

$$\begin{aligned}
\Upsilon(\varrho) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} B(x)\,ds \\
= \quad & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \int_{|\varrho|}^{\infty}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)} + \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 + \frac{7}{2}\right] \frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^2} dy \\
& -\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^4}\left[2\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\coth\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) - \sinh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\right] dy \\
& -\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\cosh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^4}\left[2\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\coth\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) + \sinh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\right] dy \\
& +\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^4 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\sinh\left(y\left(\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}+1\right)\right)}{\left(\cosh\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)^4}\left[\sinh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) - \cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right] dy
\end{aligned}$$

Maintenant que les expressions de la surface libre en zone interne et externe sont connues, il faut raccorder ces deux expressions pour pouvoir continuer la résolution.

#### 5.4.3.4 Raccord de l'ordre 1 de la surface libre

En interne, on a :

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) = \quad & \frac{\beta^2}{3}\sin(\omega + \theta_0(\beta))\left[\frac{\hat{R}^2}{2} - a_2\hat{R} - \frac{a_3^2}{2} + a_2 a_3\right] + \partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(a_2)(\hat{R} - a_3) \\
& + \int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau + \hat{\theta}_{1,int}(a_3)
\end{aligned}$$

En externe, on a :

$$\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) = \frac{\sin(\omega + \theta_0(\beta))\,\bar{r}^2}{6} - \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta) - \theta_0(\beta)}\ln(\bar{r}) + \frac{C_1}{2\bar{r}} + C_2\bar{r} + C_3$$

que l'on peut exprimer en variables internes :

$$\bar{\theta}_{1,ext}(\beta\hat{R},\beta) = \frac{\sin(\omega + \theta_0(\beta))\,\beta^2\hat{R}^2}{6} - \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta) - \theta_0(\beta)}\ln(\beta\hat{R}) + \frac{C_1}{2\beta\hat{R}} + C_2\beta\hat{R} + C_3$$

Pour raccorder, on veut $\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R},\beta) - \bar{\theta}_{1,ext}(\beta\hat{R},\beta) \longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty} 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)-\bar{\theta}_{1,ext}\left(\beta\hat{R},\beta\right)=&\left(\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)-C_2\beta-a_2\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)\hat{R}\\&+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\hat{R}-\frac{C_1}{2\beta\hat{R}}+\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\,\mathrm{d}T\right\}\,\mathrm{d}\tau\\&+a_3\left[\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(a_2-\frac{a_3}{2}\right)-\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\right]\\&+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)+\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\beta-C_3\end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)&=a_2\tfrac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)+C_2\beta\\&=\tfrac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(a_2-\tfrac{a_3}{2}\right)\\\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)&=-\tfrac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\theta_0(\beta)}\ln\beta+C_3\\C_1&=0\end{aligned}$$

ce qui impose $C_2=-\frac{a_3}{6}\beta\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)$, il reste :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)-\bar{\theta}_{1,ext}\left(\beta\hat{R},\beta\right)=&\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\hat{R}\\&+\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\,\mathrm{d}T\right\}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

Il faut alors à annuler :

$$\mathcal{K}=\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\hat{R}+\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\,\mathrm{d}T\right\}\,\mathrm{d}\tau\longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty}0$$

Prenons un $\hat{R}$ grand en fonction de $C_{a,f}$, par exemple $\hat{R}=e^{\frac{1}{C_{a,f}}}$, on sait que :

$$\lim_{\hat{R}\to+\infty}s_1\left(\hat{R}\right)=\frac{\sin\theta_0\left(\beta\right)-3\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}=B\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)$$

on a alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}=&\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\frac{1}{C_{a,f}}+B\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)\int_{a_3}^{e^{\frac{1}{C_{a,f}}}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T 1\,\mathrm{d}t\right)\right]\,\mathrm{d}T\right\}\,\mathrm{d}\tau\\=&\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\frac{1}{C_{a,f}}+B\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(-\frac{1}{C_{a,f}}+\frac{1}{a_2}e^{\frac{1}{C_{a,f}}}+\ln a_3-\frac{a_3}{a_2}\right)\\=&\frac{3\left[\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\sin\theta_0\left(\beta\right)\right]}{C_{a,f}\left(\theta_0\left(\beta\right)-\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)\right)}+B\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(\frac{1}{a_2}e^{\frac{1}{C_{a,f}}}+\ln a_3-\frac{a_3}{a_2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi si $a_2=-\frac{\left(\sin\theta_0(\beta)-3\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)\right)}{3\left(\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)-\sin\theta_0(\beta)\right)}C_{a,f}e^{\frac{1}{C_{a,f}}}$ et $a_3=1$, il reste :

$$\mathcal{K}=-\frac{B\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)}{ae^{\frac{1}{C_{a,f}}}}\underset{C_{a,f}\to 0}{\longrightarrow}0$$

On a donc bien $\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)-\bar{\theta}_{1,ext}\left(\beta\hat{R},\beta\right)\longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty}0$, la surface libre à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ se raccorde donc bien entre les deux zones d'étude.

### 5.4.4 Pression à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Nous pouvons maintenant expliciter la pression dans les deux zones.

#### 5.4.4.1 Calcul de la pression à l'ordre 1 en zone externe

La pression est définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} (\text{Eq2})_1 : & \bar{\nabla}_0 \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\Delta}_0 \bar{u}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) - \bar{\nabla}_0 \bar{G}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \\ (5)_1 : & \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right) = \dfrac{2}{\bar{r}}\left[\dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext} - \partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}\right]\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right) - \bar{r}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right) - 2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right) \end{cases}$$

où $\bar{G}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{r}\sin\left(\omega+\bar{\phi}\right)$ et $\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \frac{\bar{r}\left[\left(\bar{\phi}-\theta_0\left(\beta\right)\right)\sin\bar{\phi}+\bar{\phi}\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(\theta_0\left(\beta\right)-\bar{\phi}\right)\right]}{\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}$ donc on a :

$$\begin{cases} (\text{Eq2})_1 : & \begin{pmatrix} \partial_r \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ \frac{1}{\bar{r}}\partial_\phi \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\dfrac{\sin\bar{\phi}-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(\bar{\phi}-\theta_0\left(\beta\right)\right)}{\bar{r}^2\left(\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)} - \sin\left(\omega+\bar{\phi}\right) \\ 2\dfrac{\cos\bar{\phi}-\cos\theta_0\left(\beta\right)\cos\left(\bar{\phi}-\theta_0\left(\beta\right)\right)}{\bar{r}^2\left(\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)} - \cos\left(\omega+\bar{\phi}\right) \end{pmatrix} \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \bar{\Delta}_0 \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 0 \\ (5)_1 : & \bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\theta_0\left(\beta\right)\right) = -\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar{r} + \dfrac{4\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\left(\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)-2\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar{r}} - 2C_2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = 2\frac{\sin\bar{\phi}-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(\bar{\phi}-\theta_0\left(\beta\right)\right)}{\bar{r}\left(\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)} - \bar{r}\sin\left(\omega+\bar{\phi}\right) - 2C_2$$

#### 5.4.4.2 Calcul de la pression à l'ordre 1 en zone interne

On souhaite ici calculer la pression à l'ordre 1. On a à résoudre :

$$\begin{cases} (\text{Eq2})_1 : & \beta\hat{\nabla}_0 \hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\Delta}_0 \hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta^2\hat{\nabla}_0 \hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ (\text{Eq2.2})_1 : & \hat{\Delta}_0 \hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = 0 \\ (5)_1 : & \dfrac{2}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] = \left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right] + \beta\hat{p}_{1,int} \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \end{cases}$$

On applique la transformée de Laplace bilatérale sur l'équation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} & \beta\hat{\nabla}_0 \hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\Delta}_0 \hat{u}_0\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) - \beta^2\hat{\nabla}_0 \hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \beta\partial_{\hat{R}}\hat{p}_{1,int} = \dfrac{1}{\hat{R}}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \dfrac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \dfrac{1}{\hat{R}^3}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right) \\ \dfrac{\beta}{\hat{R}}\partial_{\hat{\phi}}\hat{p}_{1,int} = -\partial^3_{\hat{R}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} - \dfrac{1}{\hat{R}}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} - \dfrac{1}{\hat{R}^2}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \dfrac{1}{\hat{R}^2}\partial_{\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \dfrac{2}{\hat{R}^3}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \beta^2\cos\left(\omega+\hat{\phi}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

où $\hat{u}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\text{rot}}_0\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$ et $\hat{G}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{R}\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)$. Intéressons nous à la première équation :

$$\begin{aligned} & \beta\partial_{\hat{R}}\hat{p}_{1,int} = \frac{1}{\hat{R}}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{R}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{R}}\hat{\psi}_{0,int} + \frac{1}{\hat{R}^3}\partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \beta\partial_{\varrho}\hat{p}_{1,int} = \frac{1}{e^{2\varrho}}\partial_{\hat{\phi}}\left[\partial^2_{\varrho\varrho}\hat{\psi}_{0,int} + \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right] - e^{\varrho}\beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right) \end{aligned}$$

avec $\varrho = \ln\left(\hat{R}\right)$. De plus $\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{R}\, M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) \star_\varrho k\left(\varrho\right)$ donc on a :

$$\begin{aligned}
& \beta\partial_\varrho \hat{p}_{1,int} = \frac{1}{e^{2\varrho}}\partial_{\hat{\phi}}\left[\partial^2_{\varrho\varrho}\left[e^\varrho\, M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right] + \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}\left[e^\varrho\, M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right]\right] - e^\varrho\beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \beta e^\varrho\partial_\varrho\hat{p}_{1,int} = \partial_{\hat{\phi}}\left[M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + 2\partial_\varrho M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + \partial^2_{\varrho\varrho}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right]\star_\varrho k\left(\varrho\right) - e^{2\varrho}\beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)
\end{aligned}$$

On fait la transformée de Laplace bilatérale de cette équation :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & s\beta\mathscr{L}\left(\hat{p}_{1,int}\right)\left(s-1,\hat{\phi}\right) + \frac{\beta^2\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)}{(s-2)} \\
& = \mathscr{L}\left(\partial_{\hat{\phi}}\left[M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + 2\partial_\varrho M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + \partial^2_{\varrho\varrho}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) + \partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right]\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right)\left(s,\hat{\phi}\right) \\
& = \left[(s+1)^2\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right) + \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\right]\left(s,\hat{\phi}\right)\times\tilde{k}\left(s\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
& \left[(s+1)^2\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right) + \partial^3_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\right]\left(s,\hat{\phi}\right) \\
= \quad & \frac{(s-1)\left[\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right) + (s-1)\hat{\phi}\right) + \sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right) - (s-1)\hat{\phi}\right)\right]}{\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{aligned}
& \beta\tilde{p}_{1,int}\left(s-1,\hat{\phi}\right) + \beta^2\frac{\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)}{s(s-2)} \\
= \quad & \frac{(s-1)\left[\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right) + (s-1)\hat{\phi}\right) + \sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right) - (s-1)\hat{\phi}\right)\right]}{s\left[\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)\right]}\tilde{k}\left(s\right)
\end{aligned}}$$

Pour $\hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right)$, on a donc :

$$\beta\tilde{p}_{1,int}\left(s-1,\theta_0\left(\beta\right)\right) = \frac{2(s-1)\sin\left((s+1)\theta_0\left(\beta\right)\right)}{s\left[\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)\right]}\tilde{k}\left(s\right) - \beta^2\frac{\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)}{s(s-2)}$$

On applique le changement de variable $\hat{R} = e^\varrho$ et la transformée de Laplace bilatérale sur la condition limite $(5)_1$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\hat{R}^2}\left[\partial_{\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{R}\hat{\phi}}\hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \left[\hat{R}\partial^2_{\hat{R}\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + 2\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right] + \beta\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \beta e^\varrho\hat{p}_{1,int}\left(e^\varrho,\hat{\phi}\right) = -\left[\partial^2_{\varrho\varrho}\hat{\theta}_{1,int} + \partial_\varrho\hat{\theta}_{1,int}\right]\left(e^\varrho,\hat{\phi}\right) - 2\partial^2_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right) && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \beta\mathscr{L}\left(e^\varrho\hat{p}_{1,int}\left(e^\varrho,\hat{\phi}\right)\right) = -\mathscr{L}\left(\left(\partial^2_{\varrho\varrho}\hat{\theta}_{1,int} + \partial_\varrho\hat{\theta}_{1,int}\right)\left(e^\varrho,\hat{\phi}\right)\right) + \mathscr{L}\left(-2\partial^2_{\hat{\phi}\varrho}M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_\varrho k\left(\varrho\right)\right) && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \beta\tilde{p}_{1,int}\left(s-1,\hat{\phi}\right) = -s(s+1)\tilde{\theta}_{1,int}\left(s,\beta\right) - 2s\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\tilde{k}\left(s\right) && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$\partial_{\hat{\phi}}\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\Big|_{\hat{\phi}=\theta_0(\beta)} = \frac{\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right) - s\cos\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}{s\left(\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \beta\tilde{p}_{1,int}\left(s-1,\theta_0\left(\beta\right)\right) = -s(s+1)\tilde{\theta}_{1,int}\left(s,\beta\right) \\
& -2\frac{\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right) - s\cos\left(s\theta_0\left(\beta\right)\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right) - \cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}\tilde{k}\left(s\right)
\end{aligned}$$

**Expression de la surface libre en utilisant l'expression de la pression :**

En utilisant la transformée de Laplace de la pression trouvée précédemment à partir de la condition $(5)_1$ :

$$\tilde{\theta}_{1,int}(s,\beta) = -\frac{\beta}{s(s+1)}\tilde{p}_{1,int}(s-1,\theta_0(\beta)) - 2\frac{\cos\theta_0(\beta)\sin(s\theta_0(\beta)) - s\cos(s\theta_0(\beta))\sin\theta_0(\beta)}{s(s+1)(\cos(2s\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta)))}\tilde{k}(s)$$

En utilisant l'expression de $\tilde{p}_{1,int}(s,\theta_0(\beta))$ obtenue grâce à l'équation de volume :

$$\beta\tilde{p}_{1,int}(s-1,\theta_0(\beta)) = \frac{2(s-1)\sin((s+1)\theta_0(\beta))}{s[\cos(2\theta_0(\beta)) - \cos(2s\theta_0(\beta))]}\tilde{k}(s) - \beta^2\frac{\sin(\omega+\theta_0(\beta))}{s(s-2)}$$

la transformée de Laplace bilatérale de la correction à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ de l'interface s'écrit donc :

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\theta}_{1,int}(s,\beta) = & -\frac{2}{s(s+1)}\left[\frac{\cos\theta_0(\beta)\sin(s\theta_0(\beta)) - s\cos(s\theta_0(\beta))\sin\theta_0(\beta)}{\cos(2s\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta))}\right.\\ & \left.+\frac{\beta(s-1)\sin((s+1)\theta_0(\beta))}{s[\cos(2\theta_0(\beta)) - \cos(2s\theta_0(\beta))]}\right]\tilde{k}(s) + \beta^3\frac{\sin(\omega+\theta_0(\beta))}{s^2(s+1)(s-2)}\end{aligned}}$$

#### 5.4.4.3 Raccord de l'ordre 1 de la pression

On a donc trouvé en zone externe :

$$\bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = 2\frac{\sin\bar{\phi} - \cos\theta_0(\beta)\sin(\bar{\phi}-\theta_0(\beta))}{\bar{r}(\cos\theta_0(\beta)\sin\theta_0(\beta) - \theta_0(\beta))} - \bar{r}\sin(\omega+\bar{\phi}) - 2C_2$$

et en zone interne, nous ne disposons que de la transformée de Laplace de la pression à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}&\beta\tilde{p}_{1,int}(s-1,\hat{\phi}) + \beta^2\frac{\sin(\omega+\hat{\phi})}{s(s-2)}\\ = & \frac{(s-1)[\sin(2\theta_0(\beta) + (s-1)\hat{\phi}) + \sin(2s\theta_0(\beta) - (s-1)\hat{\phi})]}{s[\cos(2\theta_0(\beta)) - \cos(2s\theta_0(\beta))]}\tilde{k}(s)\end{aligned}$$

Pour raccorder, il faudrait vérifier que $\hat{p}_{1,int}(\hat{R},\hat{\phi}) - \bar{p}_{1,ext}(\beta\hat{R},\bar{\phi}) \longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty} 0$ avec $\bar{r} = \beta\hat{R}$.

### 5.4.5 Fonction courant à l'ordre 1 en $C_{a,f}$

Il reste alors à calculer la fonction courant à l'ordre 1 en $C_{a,f}$ sur les deux zones. Le système à résoudre en zone externe s'écrit :

$$(\text{Eq2.1})_1 : \bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = -\bar{\Delta}_1^2\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = (\bar{\Delta}_0\bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_1\bar{\Delta}_0)\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$$

avec les conditions limites :

$$\Gamma_1 : \begin{cases}(1)_1 : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},0) = 0\\ (2)_1 : & \partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},0) = \dfrac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_0(\beta)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},0)\end{cases}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases}(3)_1 : & \partial_{\bar{r}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta)) = 0\\ (4)_1 : & \dfrac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{1,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta)) = \dfrac{2}{\bar{r}^2}\dfrac{\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)}{\theta_0(\beta)}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta))\\ & +2\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta)) - \left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta) + \dfrac{3}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{1,ext}(\bar{r},\beta)\right]\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\theta_0(\beta))\end{cases}$$

En zone interne, il faudrait alors résoudre :

$$\left(\text{Eq2.1}\right)_1 : \hat{\Delta}_0^2 \hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = -\hat{\Delta}_1^2 \hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned}
&(1)_1 : \partial_{\hat{R}} \hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = 0 && \text{en } \hat{\phi} = 0 \\
&(2)_1 : \left(\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \hat{\psi}_{1,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}} \hat{\psi}_{1,int}\right)\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)}\left[2\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \hat{\psi}_{0,int} - \hat{R}\partial_{\hat{\phi}} \hat{\psi}_{0,int}\right]\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) && \text{en } \hat{\phi} = 0
\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ :

$$\begin{aligned}
&(3)_1 : \quad \partial_{\hat{R}} \hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = 0 && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\
&(4)_1 : \quad \left(\frac{1}{\hat{R}^2}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \hat{\psi}_{1,int} - \partial^2_{\hat{R}\hat{R}} \hat{\psi}_{1,int}\right)\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = 2\partial_{\hat{R}} \hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\partial_{\hat{R}\hat{\phi}} \hat{\psi}_{0,int} && \text{en } \hat{\phi} = \theta_0\left(\beta\right) \\
&\qquad + \frac{2}{\hat{R}^2}\frac{\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)}\partial^2_{\hat{\phi}\hat{\phi}} \hat{\psi}_{0,int} - \left[\partial^2_{\hat{R}\hat{R}} \hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right) + \frac{3}{\hat{R}}\partial_{\hat{R}} \hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)\right]\partial_{\hat{\phi}} \hat{\psi}_{0,int}
\end{aligned}$$

Ces calculs n'ont cependant pas été réalisés. Et on obtient la vitesse avec :

$$\left(\text{Eq1}\right)_1 : \bar{u}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\text{rot}}_0 \bar{\psi}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + \bar{\text{rot}}_1 \bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$$

et :

$$\left(\text{Eq1}\right)_1 : \hat{u}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) = \hat{\text{rot}}_0 \hat{\psi}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) + \hat{\text{rot}}_1 \hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)$$

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donc construit un modèle à deux zones, une zone interne et une zone externe grâce à un développement asymptotique des variables en fonction du nombre capillaire du front $C_{a,f}$. Au cours de cette étude, l'ordre 0 a été entièrement déterminé et raccordé. Ainsi nous avons pu trouver sous hypothèse que $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$ (cf chapitre 6) :

$$\begin{aligned}
\theta_0\left(\beta\right) &= \theta_{0,int}\left(R,\beta\right) = \theta_{0,ext}\left(r,\beta\right) \\
p_0\left(r,\phi\right) &= p_{atm} = p_{0,int}\left(R,\phi\right) = p_{0,ext}\left(r,\phi\right) \\
\bar{\psi}_{0,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) &= -\frac{\bar{r}\left[\bar{\phi}\sin\bar{\phi}\sin^2\theta_0\left(\beta\right) + \bar{\phi}\cos\bar{\phi}\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right) - \theta_0\left(\beta\right)\sin\bar{\phi}\right]}{\theta_0\left(\beta\right) - \cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)} \\
\hat{\psi}_{0,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right) &= \hat{R}\, M\left(\varrho,\hat{\phi}\right) \star_\varrho k\left(\varrho\right) = \hat{R}\,\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right)\tilde{k}\left(s\right)\right)
\end{aligned}$$

où $\hat{R} = e^{\varrho}$ et la transformée de Laplace bilatérale de $M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)$ :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\right) = \tilde{M}\left(s,\hat{\phi}\right) = \; & \frac{\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi} - \theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) - \cos^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]} \\
& - \frac{\cos\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi} - \theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right)}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) - \cos^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right]}
\end{aligned}$$

et $k\left(\varrho\right)$ solution de l'équation intégrale :

$$1-\left[e^{-\varrho}+\hat{L}\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right)\right]k\left(\varrho\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\left(\varrho'\right)-k\left(\varrho\right)\right]L\left(\varrho-\varrho'\right)d\varrho'$$

*Remarque.* Le raccord est rendu possible grâce au comportement que nous avons imposé lors du calcul de la solution en zone interne (cf (5.12)) où :

$$\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right)=M\left(\varrho,\hat{\phi}\right)\star_{\varrho}k\left(\varrho\right)\underset{\varrho\to-\infty}{\sim}\mathcal{O}\left(e^{\varrho}\right)$$

et grâce au comportement de la fonction représentant les contraintes $k\left(\varrho\right)$ au niveau de la paroi solide (cf (5.3.2.3)) :

$$\lim_{\varrho\to+\infty}k\left(\varrho\right)=\frac{2\sin^2\theta_0\left(\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}$$

$$\lim_{\varrho\to-\infty}k\left(\varrho\right)=0$$

Il y a alors raccord si et seulement si :

$$\lim_{s\to0}s\tilde{k}\left(s\right)=\lim_{\varrho\to+\infty}k\left(\varrho\right)=\frac{2\sin^2\theta_0\left(\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}=k_0^{ext}\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)\geq0$$

Pour l'ordre 1, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la surface libre qui est l'inconnue majeure du problème. Celle-ci a donc été déterminée et raccordée entre les deux zones. Nous avons ainsi pu poser des conditions de raccord sur certains paramètres introduits dans lors de la résolution de l'ordre 0. Nous avons donc obtenu en zone interne :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)=\ &\frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left[\frac{\hat{R}^2}{2}-a_2\hat{R}-\frac{a_3^2}{2}+a_2a_3\right]+\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)\left(\hat{R}-a_3\right)\\&+\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1\left(t\right)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau+\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)\end{aligned}$$

et en zone externe :

$$\bar{\theta}_{1,ext}\left(\bar{r},\beta\right)=\frac{\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\bar{r}^2}{6}-\frac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\left(\bar{r}\right)+\frac{C_1}{2\bar{r}}+C_2\bar{r}+C_3$$

qui se raccordent si $\hat{\theta}_{1,int}\left(\hat{R},\beta\right)-\bar{\theta}_{1,ext}\left(\beta\hat{R},\beta\right)\longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty}0$, ce qui est le cas si on prend :

$$\begin{aligned}\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}\left(a_2\right)&=\tfrac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\left(a_2-\tfrac{1}{2}\right)\\\hat{\theta}_{1,int}\left(a_3\right)&=-\tfrac{2\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\sin\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)}\ln\beta+C_3\\C_1&=0\\C_2&=-\tfrac{1}{6}\beta\sin\left(\omega+\theta_0\left(\beta\right)\right)\\a_2&=-\tfrac{\left(\sin\theta_0\left(\beta\right)-3\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)\right)}{3\left(\theta_0\left(\beta\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)-\sin\theta_0\left(\beta\right)\right)}C_{a,f}e^{\frac{1}{C_{a,f}}}\\a_3&=1\end{aligned}$$

(cf partie 5.4.3.4).

La pression à l'ordre 1 est en zone externe :

$$\bar{p}_{1,ext}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)=2\frac{\sin\bar{\phi}-\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(\bar{\phi}-\theta_0\left(\beta\right)\right)}{\bar{r}\left(\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)-\theta_0\left(\beta\right)\right)}-\bar{r}\sin\left(\omega+\bar{\phi}\right)-2C_2$$

et en zone interne, nous ne disposons que de la transformée de Laplace de la pression à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} & \beta\tilde{p}_{1,int}\left(s-1,\hat{\phi}\right)+\beta^2\frac{\sin\left(\omega+\hat{\phi}\right)}{s\left(s-2\right)} \\ = & \frac{\left(s-1\right)\left[\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)+\left(s-1\right)\hat{\phi}\right)+\sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right)-\left(s-1\right)\hat{\phi}\right)\right]}{s\left[\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)\right]}\tilde{k}\left(s\right) \end{aligned}$$

Pour raccorder, il faudrait vérifier que $\hat{p}_{1,int}\left(\hat{R},\hat{\phi}\right)-\bar{p}_{1,ext}\left(\beta\hat{R},\bar{\phi}\right)\longrightarrow_{\hat{R}\to+\infty}0$ avec $\bar{r}=\beta\hat{R}$. De même pour la fonction courant et la vitesse qui n'ont pas été calculées.

CHAPITRE 6

# MODÈLE DE FRONT À TROIS ZONES AVEC DEUX RACCORDS

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons voir que l'hypothèse $\theta_{0,int}(\beta) = \theta_{0,ext}(\beta) = \theta_0(\beta)$ faite pour le raccord de la surface libre au premier ordre en $C_{a,f}$ n'est vraie que si le terme $C_{a,f}|\ln\beta| \ll 1$. En effet si $C_{a,f}|\ln\beta| \sim \mathcal{O}(1)$, le raccord entre les deux zones doit prendre en compte les termes en $C_{a,f}|\ln\beta|$ qui sont de l'ordre de l'unité, ceci nous impose alors de faire un raccord en trois zones car les deux solutions précédentes ne se raccordent plus de la même manière.

Dans la seconde partie, nous ferons le changement de variable $r = \beta e^{|\ln\beta|^{\lambda}\mathbf{x}}$ de manière à nous placer dans cette nouvelle zone que nous appellerons « zone intermédiaire ». Le paramètre $\lambda \in ]0,1]$ sera à déterminer par la suite. Ce changement de variable est inspiré de celui fait par Hocking et Rivers [40] et Cox [15], il permet de régler le zoom en $\beta$ dans cette zone qui doit se situer entre la zone interne et la zone externe. Nous utiliserons comme pour les autres zones, un développement asymptotique en fonction du nombre capillaire pour résoudre notre problème. Le premier ordre sera alors complètement résolu, ce qui nous permettra de déterminer $\lambda$ en résolvant l'équation de la surface libre puis nous raccorderons cette zone avec les deux autres zones au premier ordre en $C_{a,f}$. On retrouve alors la fonction $\mathcal{G}(\theta)$ déjà introduite par Voinov [74] et Cox [15] notamment. De plus on retrouve alors une expression de la surface libre de la forme de celle de Tanner. Nous calculerons alors la solution à l'ordre suivant et poserons les conditions de raccord.

Notons que cette troisième zone nous permet d'avoir, à l'ordre 0 en $C_{a,f}$, des angles différents dans les zones internes et externes avec des conditions de raccord supplémentaires. Cette étude avec celle à deux zones nous permettent alors d'avoir deux modèles décrivant différents types de fronts selon l'ordre du terme $C_{a,f}|\ln\beta|$ qui permet de quantifier le produit de la vitesse moyenne du front et du glissement imposé près du front.

## Sommaire


6.1 Rappel des résultats obtenus à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ . . . . . **144**
6.1.1 Zone externe . . . . . 144
6.1.2 Zone interne . . . . . 144
6.1.3 Raccord . . . . . 145
6.2 Zone intermédiaire . . . . . **146**
6.2.1 Changement de variable . . . . . 146
6.2.2 Développement asymptotique . . . . . 151

6.2.3 Résolution de l'ordre 0 en $\varepsilon^{\lambda=1} = C_{a,f}$ . . . . . 151
6.2.4 Résolution de l'ordre 1 en $\varepsilon^{\lambda=1} = C_{a,f}$ . . . . . 158
6.3 Conclusion . . . . . **161**

## 6.1 Rappel des résultats obtenus à l'ordre 0 en $C_{a,f}$

On récapitule ici les résultats précédemment obtenus dans le cas où $\theta_{0,int}(r) = \theta_{0,ext}(r)$.

### 6.1.1 Zone externe

Le problème ici ne dépend que du nombre capillaire, on fait donc un développement asymptotique des inconnues en fonction de ce nombre adimensionnel tel que :

$$\begin{cases} u_{ext}(r,\phi) & = u_{0,ext}(r,\phi) + C_{a,f}\, u_{1,ext}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \psi_{ext}(r,\phi) & = \psi_{0,ext}(r,\phi) + C_{a,f}\, \psi_{1,ext}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ p_{ext}(r,\phi) & = p_{0,ext}(r,\phi) + C_{a,f}\, p_{1,ext}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \theta_{ext}(r,C_{a,f},\beta) & = \theta_{0,ext}(r,\beta) + C_{a,f}\, \theta_{1,ext}(r,\beta) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \end{cases}$$

On trouve alors à l'ordre 0 :

- $\theta_{0,ext}(r,\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$,
- $p_{0,ext}(r,\phi) = p_{atm}$,
- $\psi_{0,ext}(r,\phi) = \dfrac{r\left[(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi + \phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$,
- $u_{0,ext}(r,\phi) = \left((u_{0,ext})_r, (u_{0,ext})_\phi\right)^t(r,\phi)$ où :

$$\begin{aligned} (u_{0,ext})_r(r,\phi) = & \frac{\sin\phi + (\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\cos\phi - \cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)} \\ & - \frac{\phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\cos(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)} \end{aligned}$$

$$(u_{0,ext})_\phi(r,\phi) = -\frac{(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi - \phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$$

- tenseur des contraintes au fond : $\tau_{ext}(r) = -\frac{1}{r^2}\,\partial^2_{\phi\phi}\psi(r,\phi)\Big|_{\phi=0} = \frac{1}{r}k_{ext}(r)$ ainsi à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ :

$$k_0^{ext}(r) = -\frac{1}{r}\,\partial^2_{\phi\phi}\psi_0(r,\phi)\Big|_{\phi=0} = k_0^{ext}(\theta_{0,ext}(\beta)) = -\frac{2\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$$

### 6.1.2 Zone interne

On a utilisé :

$$\begin{cases} u_{int}(r,\phi) & = u_{0,int}(r,\phi) + C_{a,f}\, u_{1,int}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \psi_{int}(r,\phi) & = \psi_{0,int}(r,\phi) + C_{a,f}\, \psi_{1,int}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ p_{int}(r,\phi) & = p_{0,int}(r,\phi) + C_{a,f}\, p_{1,int}(r,\phi) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\ \theta_{int}(r,C_{a,f},\beta) & = \theta_{0,int}(r,\beta) + C_{a,f}\, \theta_{1,int}(r,\beta) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \end{cases}$$

On trouve alors à l'ordre 0 :

- $\theta_{0,int}(r,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$,
- $p_{0,int}(r,\phi) = p_{atm}$,
- $\lim\limits_{\varrho\to+\infty} k_{0,int}(\varrho) = \dfrac{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta) - \cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}$
- $\psi_{0,int}(r,\phi) = \beta\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) = \beta\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \beta\hat{R}\, M(\varrho,\hat{\phi}) \star k(\varrho)$ où $\hat{R} = R = \dfrac{r}{\beta}$ où :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(M(\varrho,\hat{\phi})\right)(s,\hat{\phi}) = \tilde{M}(s,\hat{\phi}) = & -\frac{\cos\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)\sin\hat{\phi}\sin\left(s\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\\ & +\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2s\left[\cos^2\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)-\cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}\end{aligned}$$

- $u_{0,int}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{0,int}(r,\phi)$ .

### 6.1.3 Raccord

Si on écrit la surface libre de la zone externe en variables rapides, on a :

$$\begin{aligned}\theta_{ext}(r,\beta) &= \theta_{0,ext}(\beta) + C_{a,f}\theta_{1,ext}(r,\beta) + \mathscr{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\ &= \theta_{0,ext}(\beta) + C_{a,f}\left[-\frac{4\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{\sin\left(2\theta_{0,ext}(\beta)\right)-2\theta_{0,ext}(\beta)}\left(\ln R+\ln\beta\right)+\frac{\sin\left(\omega+\theta_{0,ext}(\beta)\right)\beta^2R^2}{6}\right]\\ &+C_{a,f}\left[\frac{C_1}{2r}+C_2r+C_3\right]+\mathscr{O}\left(C_{a,f}^2\right)\end{aligned}$$

que l'on veut raccorder avec la surface libre en zone interne qui a un développement régulier en $C_{a,f}$ :

$$\begin{aligned}\theta_{int}(r,\beta) &= \theta_{0,int}(\beta) + C_{a,f}\theta_{1,int}(r,\beta) + \mathscr{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\ &= \theta_{0,int}(\beta) + C_{a,f}\left[\frac{\beta^2}{6}\sin\left(\omega+\theta_{0,int}(\beta)\right)R^2 + \iint\frac{1}{R^3}\left(\int s_1(R)\right)+\frac{a}{2R}+bR+d\right]\\ &+\mathscr{O}\left(C_{a,f}^2\right)\end{aligned}$$

On voit que dans l'écriture de la surface libre en zone externe, il y a un terme en $C_{a,f}\ln\beta$. Il faut donc savoir quel est l'ordre de grandeur de ce terme. Deux possibilités se présentent à nous :

- si $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$ alors :
  - soit $\theta_{0,int}(\beta) = \theta_{0,ext}(\beta)$ et on n'a besoin que de deux zones pour le raccord dans la limite $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \longrightarrow 0$,
  - soit $\theta_{0,int}(\beta) \neq \theta_{0,ext}(\beta)$ et il faudra trois zones pour raccorder mais pour ce cas, on pourra se référer au cas 3 zones ci-dessous.

- si $C_{a,f}\ln\beta = \mathscr{O}(1)$, de l'interne, on voit l'externe de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\theta_{ext}(r,\beta) = & \left(\theta_{0,ext}(\beta) - \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)\, C_{a,f}\ln\beta}{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}\right) \\
& + C_{a,f}\frac{\sin(\omega+\theta_{0,ext}(\beta))\,\beta^2 R^2}{6} \\
& + C_{a,f}\left[-\frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}\ln R + \ldots\right] \\
& + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right) \\
\Rightarrow \theta_{0,ext}(r,\beta) & = \Theta_{0,ext}(\beta) = \theta_{0,ext}(\beta) - \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)\, C_{a,f}\ln\beta}{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}
\end{aligned}$$

ce qui ne change pas les développements de la zone externe. Alors on doit raccorder en trois zones.

## 6.2 Zone intermédiaire

On se met dans le cas où $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| = \mathcal{O}(1)$, il faut alors faire un raccord en trois zones pour raccorder la surface libre où $\theta_{0,int}(\beta) \neq \theta_{0,ext}(\beta) + \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)\overbrace{C_{a,f}\left|\ln\beta\right|}^{\sim\mathcal{O}(1)}}{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$.

### 6.2.1 Changement de variable

En s'inspirant de Hocking et Rivers [40] et Cox [15], on pose comme nouvelle variable $\mathbf{x}$ :

$$r = \beta e^{|\ln\beta|^{\lambda}\mathbf{x}} \Leftrightarrow R = e^{|\ln\beta|^{\lambda}\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \frac{\ln\left(\frac{r}{\beta}\right)}{\left|\ln\beta\right|^{\lambda}} = \frac{\ln r + \left|\ln\beta\right|}{\left|\ln\beta\right|^{\lambda}}$$

où le paramètre $\lambda$ doit être dans l'intervalle $]0,1]$ et est laissé libre pour le moment. Pour simplifier les notations, on pose $\varepsilon = \left|\ln\beta\right|^{-1} = C_{a,f}$ , $\varepsilon^{-1} = \left|\ln\beta\right| = C_{a,f}^{-1}$ et $\beta = e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ (car $\ln\beta < 0$) donc :

$$\begin{aligned}
R &= e^{\frac{1}{\varepsilon}} r & \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} &= \varepsilon^{\lambda}\ln r + \varepsilon^{\lambda-1} & \Leftrightarrow \quad r &= e^{-\frac{1}{\varepsilon}} R \\
&= e^{\varepsilon^{-\lambda}\mathbf{x}} & | \quad &= \varepsilon^{\lambda}\ln R & | \quad &= e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}
\end{aligned}$$

#### 6.2.1.1 Existence de la zone intermédiaire

La zone intermédiaire ou zone de raccord est une zone où la solution externe et interne sont toutes deux valides. Il s'agit donc d'une zone de chevauchement où ces deux solutions doivent être raccordée. On a donc (pour $l(\beta) = l(\varepsilon)$ et $d(\beta) = d(\varepsilon)$) :

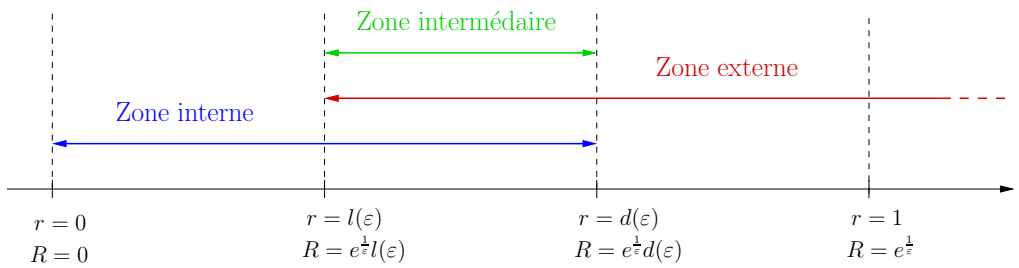



FIGURE 6.1: Zones externe, interne et intermédiaire

Pour vérifier qu'elle existe bien, il faut trouver une zone où $R \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty$ et $r = e^{-\frac{1}{\varepsilon}} R \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Ainsi pour $R(\varepsilon) = e^{\frac{a}{\varepsilon}}$ avec $0 < a < 1$, on a bien $R(\varepsilon) = e^{\frac{a}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty$ et $r(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}} R = e^{\frac{1}{\varepsilon}(a-1)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Il existe donc bien une zone de chevauchement entre ces deux variables (interne et externe).

#### 6.2.1.2 Description de cette zone

Si on choisit $l(\beta) = \beta^{1+p} = e^{-\frac{1+p}{\varepsilon}}$ et $d(\beta) = \beta^{1-q} = e^{-\frac{1-q}{\varepsilon}}$ alors on a bien $0 < l(\beta) < \beta < d(\beta) < 1$ où on met $\beta$ entre les deux bornes car il représente un $\mathcal{O}(1)$ pour la zone interne et nous permet ainsi de localiser cette zone. De plus en prenant ces puissances de $\beta$, on impose :

$$0 < 1 - q < 1 < 1 + p < +\infty$$

et $(p, q) \in \mathbb{Q}^{+*}$ avec $0 < q < 1$ et $\mathbf{x} = \frac{\ln r + |\ln \beta|}{|\ln \beta|^{\lambda}} = \varepsilon^{\lambda} \ln r + \varepsilon^{\lambda-1}$, on a alors :

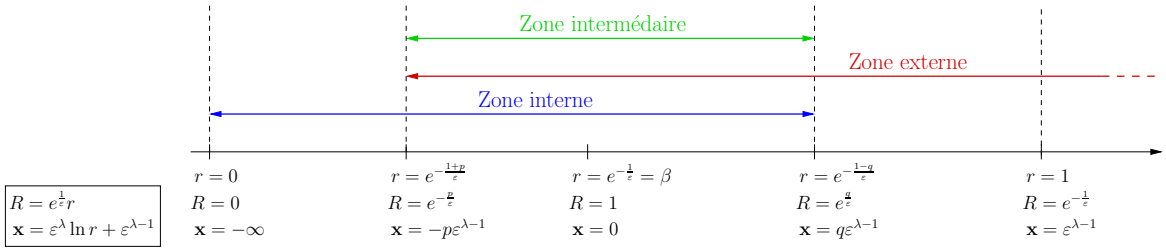



FIGURE 6.2: Zone intermédiaire pour $0 < \lambda < 1$

De plus $|\ln \beta|^{1-\lambda} \underset{\beta\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si $0 < \lambda < 1$. Dans ce cas, on raccorde bien avec l'externe pour $\mathbf{x} \to +\infty$ et avec l'interne pour $\mathbf{x} \to -\infty$.

Si $\lambda = 1$, on regarde les deux côtés à raccorder séparément. Entre la zone interne et intermédiaire, on prend un $R_-(\varepsilon) = e^{\frac{1}{\varepsilon^{b_-}}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty$ avec $0 < b_- < 1$, à ce moment là on a $\mathbf{x}_-(\varepsilon) = \varepsilon \ln(R_-(\varepsilon)) = \varepsilon^{1-b_-} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Entre la zone externe et intermédiaire, on prend $r_+(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon^{b_+}}} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ avec $0 < b_+ < 1$ alors $\mathbf{x}_+(\varepsilon) = \varepsilon \ln(r_+(\varepsilon)) + 1 = -\varepsilon^{1-b_+} + 1 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 1$. Donc le raccord entre la zone interne et la zone intermédiaire se fait pour $R \xrightarrow{\varepsilon\to 0} +\infty$ et $\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ et le raccord entre la zone externe et la zone intermédiaire se fait pour $r \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$ et $\mathbf{x} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 1$.

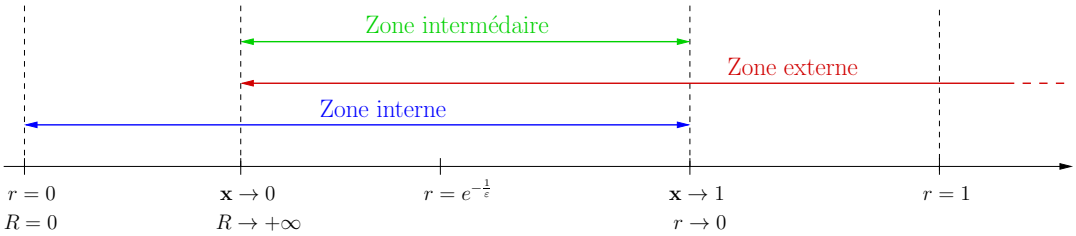



FIGURE 6.3: Zone intermédiaire pour $\lambda = 1$

#### 6.2.1.3 Incidence sur les opérateurs

- Les dérivées en $r$ s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
\partial_r &= \partial_{\mathbf{x}}\partial_r\mathbf{x} = \frac{\varepsilon^\lambda}{r}\partial_{\mathbf{x}} = \varepsilon^\lambda e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\partial_{\mathbf{x}} \\
\partial^2_{rr} &= e^{-\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left(-\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}} + \varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}\right) \\
\partial^3_{rrr} &= e^{-\frac{3}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left(2\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}} - 3\varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}} + \varepsilon^{3\lambda}\partial^3_{\mathbf{xxx}}\right) \\
\partial^4_{rrrr} &= e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left(-6\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}} + 11\varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}} - 6\varepsilon^{3\lambda}\partial^3_{\mathbf{xxx}} + \varepsilon^{4\lambda}\partial^4_{\mathbf{xxxx}}\right)
\end{aligned}$$

- Gradient :

$$\nabla_{(r,\phi)}\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi) = \begin{pmatrix} \partial_r\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi) \\ \frac{1}{r}\partial_\phi\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi) \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\begin{pmatrix} \varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi) \\ \partial_\phi\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi) \end{pmatrix} = \nabla_{(\mathbf{x},\phi)}\mathbf{f}(\mathbf{x},\phi)$$

- Laplacien :

$$\begin{aligned}
\Delta_{(r,\phi)}u(r,\phi) &= \Delta_{(\mathbf{x},\phi)}\mathbf{u}(\mathbf{x},\phi) \\
&= \begin{pmatrix} \partial^2_{rr}u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r \\ \partial^2_{rr}u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2}u_\phi \end{pmatrix}(r,\phi) \\
&= e^{-\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\begin{pmatrix} \varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}u_{\mathbf{x}} + \partial^2_{\phi\phi}u_{\mathbf{x}} - 2\partial_\phi u_\phi - u_{\mathbf{x}} \\ \varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}u_\phi + \partial^2_{\phi\phi}u_\phi + 2\partial_\phi u_{\mathbf{x}} - u_\phi \end{pmatrix}(\mathbf{x},\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{(r,\phi)}p(r,\phi) = \Delta_{(\mathbf{x},\phi)}\mathbf{p}(\mathbf{x},\phi) &= \left(\partial^2_{rr}\mathbf{p} + \frac{1}{r}\partial_r\mathbf{p} + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{p}\right)(\mathbf{x},\phi) \\
&= e^{-\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left(\varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}\mathbf{p} + \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{p}\right)(\mathbf{x},\phi)
\end{aligned}$$

- Bilaplacien :

$$\begin{aligned}
\Delta^2_{(r,\phi)}\psi(r,\phi) &= \Delta^2_{(\mathbf{x},\phi)}\psi(\mathbf{x},\phi) \\
&= \left[\frac{1}{r^4}\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\psi + \frac{2}{r^2}\partial^4_{rr\phi\phi}\psi + \partial^4_{rrrr}\psi + \frac{2}{r}\partial^3_{rrr}\psi - \frac{2}{r^3}\partial^3_{r\phi\phi}\psi\right](r,\phi) \\
&+ \left[\frac{4}{r^4}\partial^2_{\phi\phi}\psi - \frac{1}{r^2}\partial^2_{rr}\psi + \frac{1}{r^3}\partial_r\psi\right](r,\phi) \\
&= e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left[\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\psi + 4\partial^2_{\phi\phi}\psi\right](\mathbf{x},\phi) - 4\varepsilon^\lambda e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\partial^3_{\mathbf{x}\phi\phi}\psi(\mathbf{x},\phi) \\
&+ 2\varepsilon^{2\lambda}e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left[2\partial^2_{\mathbf{xx}}\psi + \partial^4_{\mathbf{x}^2\phi^2}\psi\right](\mathbf{x},\phi) \\
&- 4\varepsilon^{3\lambda}e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\partial^3_{\mathbf{xxx}}\psi(\mathbf{x},\phi) + \varepsilon^{4\lambda}e^{-\frac{4}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\partial^4_{\mathbf{xxxx}}\psi(\mathbf{x},\phi)
\end{aligned}$$

- Rotationnel :

$$\mathrm{rot}_{(r,\phi)}\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi\psi(r,\phi) \\ -\partial_r\psi(r,\phi) \end{pmatrix} = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\begin{pmatrix} \partial_\phi\psi(\mathbf{x},\phi) \\ -\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x},\phi) \end{pmatrix}$$

#### 6.2.1.4 Problème avant changement de variable

$$\begin{cases}
(\mathrm{Eq1}): & u(r,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi\psi(r,\phi) \\ -\partial_r\psi(r,\phi) \end{pmatrix} \\
(\mathrm{Eq2}): & \nabla p(r,\phi) = C_{a,f}\left[\Delta u(r,\phi) - \nabla G(r,\phi)\right] \\
(\mathrm{Eq2.1}): & \Delta^2\psi(r,\phi) = 0 \\
(\mathrm{Eq2.2}): & \Delta p(r,\phi) = 0
\end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned}
&(1): \partial_r\psi(r,0) = 0 \\
&(2): \beta\chi(r)\partial^2_{\phi\phi}\psi(r,0) = r\partial_\phi\psi(r,0) - r^2
\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(r)$) :

$$
\begin{aligned}
(3):\quad & \partial_r \psi = -\partial_r \theta(r)\, \partial_\phi \psi \\
(4):\quad & 0 = \left[1 - r^2 (\partial_r \theta(r))^2\right] \left[\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi + \frac{1}{r}\partial_r\psi - \partial^2_{rr}\psi\right] + \frac{4}{r}\partial_r\theta(r)\left[\partial_\phi\psi - r\partial^2_{\phi r}\psi\right] \\
(5):\quad & \frac{2C_{a,f}}{r^2}\frac{\left[1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]}{\left[1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2\right]}\left[\partial_\phi\psi - r\partial^2_{\phi r}\psi\right] = \frac{r\partial^2_{rr}\theta(r) + 2\partial_r\theta(r) + r^2(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + (r\partial_r\theta(r))^2\right)^{\frac{3}{2}}} + p - p_{atm} \\
(6):\quad & 0 = \frac{3\left[r^2\left(\partial_r\theta(r) + r\partial^2_{rr}\theta(r)\right)\partial_r\theta(r) - 1\right]\partial^2_{rr}\theta(r) + \left(4 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right) r\,(\partial_r\theta(r))^3}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)^{5/2}} \\
& - \frac{r\partial^3_{rrr}\theta(r)}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)^{3/2}} + C_{a,f}\left[r\partial_r\theta(r)\cos(\omega + \theta(r)) + \sin(\omega + \theta(r))\right] \\
& - \frac{C_{a,f}}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right) r^3}\left[4\partial_\phi\psi + \left(1 + 3r^2(\partial_r\theta(r))^2\right)\partial^3_{\phi\phi\phi}\psi\right] \\
& + 3C_{a,f}\frac{1 - r^2(\partial_r\theta(r))^2}{\left(1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2\right) r^2}\left[\partial^2_{r\phi}\psi + \partial_r\theta(r)\partial^2_{\phi\phi}\psi - r\left(\partial^3_{rr\phi}\psi + \partial_r\theta(r)\partial^3_{r\phi\phi}\psi\right)\right] \\
& + C_{a,f}\frac{3 + r^2(\partial_r\theta(r))^2}{1 + r^2(\partial_r\theta(r))^2} r\partial_r\theta(r)\partial^3_{rrr}\psi
\end{aligned}
$$

#### 6.2.1.5 Nouvelle écriture du problème

On fait une mise à l'échelle en posant :

$$
\begin{aligned}
\psi(r,\phi) &= r\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi) \\
u(r,\phi) &= \mathbf{u}(\mathbf{x},\phi) \\
p(r,\phi) &= \mathbf{p}(\mathbf{x},\phi) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\mathbf{h}(\mathbf{x},\phi) + p_{atm} \\
\theta(r) &= \theta(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\text{Eq1}):\quad \mathbf{u}(\mathbf{x},\phi) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\begin{pmatrix}\partial_\phi\psi(\mathbf{x},\phi)\\ -\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x},\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_\phi\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi)\\ -\left(\mathbf{g} + \varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},\phi)\end{pmatrix} \\
&(\text{Eq2}):\quad \begin{pmatrix}\left(-\mathbf{h} + \varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h}\right)(\mathbf{x},\phi)\\ \partial_\phi\mathbf{h}(\mathbf{x},\phi)\end{pmatrix} + e^{\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\varepsilon\begin{pmatrix}\sin(\omega+\phi)\\ \cos(\omega+\phi)\end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad = \varepsilon\begin{pmatrix}\partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g} + \partial_\phi\mathbf{g} + 2\varepsilon^\lambda\partial^2_{\phi\mathbf{x}}\mathbf{g} + \varepsilon^{2\lambda}\partial^3_{\mathbf{x}^2\phi}\mathbf{g} \\ \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g} + \mathbf{g} + \varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g} - \varepsilon^\lambda\partial^3_{\mathbf{x}\phi^2}\mathbf{g} - \varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}\mathbf{g} - \varepsilon^{3\lambda}\partial^3_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}\end{pmatrix}(\mathbf{x},\phi) \\
&(\text{Eq2.1}):\quad 0 = \left[\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g} + 2\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g} + \mathbf{g}\right](\mathbf{x},\phi) + 2\varepsilon^{2\lambda}\left[\partial^4_{\mathbf{x}^2\phi^2}\mathbf{g} - \partial^2_{\mathbf{xx}}\mathbf{g}\right](\mathbf{x},\phi) + \varepsilon^{4\lambda}\partial^4_{\mathbf{xxxx}}\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi) \\
&(\text{Eq2.2}):\quad \left(\mathbf{h} + \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{h} - 2\varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h} + \varepsilon^{2\lambda}\partial^2_{\mathbf{xx}}\mathbf{h}\right)(\mathbf{x},\phi) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$
\begin{aligned}
&(1):\ \left(\mathbf{g} + \varepsilon^\lambda\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},0) = 0 \\
&(2):\ e^{-\varepsilon^{-\lambda}\mathbf{x}}\chi\left(e^{\varepsilon^{-\lambda}\mathbf{x}}\right)\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},0) = \partial_\phi\mathbf{g}(\mathbf{x},0) - 1
\end{aligned}
$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(\mathbf{x})$) :

$$
\begin{aligned}
(3):\quad & \left(\mathbf{g}+\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) = -\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial_{\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(4):\quad & 0 = \left[1-\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]\left[\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}+\mathbf{g}-\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\mathbf{g}\right](\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) - 4\varepsilon^{2\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{2}_{\phi\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(5):\quad & -2\varepsilon^{1+\lambda}\frac{\left[1+\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]}{\left[1-\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]}\partial^{2}_{\mathbf{x}\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) = \frac{\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\theta(\mathbf{x})+\varepsilon^{3\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \mathbf{h}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(6):\quad & 0 = \frac{\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+2\varepsilon^{3\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}-\varepsilon^{3\lambda}\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\theta(\mathbf{x})}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{5/2}}\\
& +\frac{\varepsilon^{5\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{5/2}}\left[3\left(\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}-\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\theta(\mathbf{x})\,\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(r)\right)^{4}\right]\\
& +\varepsilon e^{\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left[\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\cos(\omega+\theta(\mathbf{x}))+\sin(\omega+\theta(\mathbf{x}))\right]\\
& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[\partial_{\phi}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}\right]\\
& -\frac{3\varepsilon^{1+2\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[\partial^{3}_{\phi\mathbf{x}^{2}}\mathbf{g}+\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\mathbf{x}\phi^{2}}\mathbf{g}\right)+\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\left(\partial_{\phi}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}\right)\right]\\
& +\frac{\varepsilon^{1+4\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[3\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}+3\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\partial^{3}_{\phi\mathbf{x}^{2}}\mathbf{g}+\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}\left(-\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}+3\partial^{3}_{\mathbf{x}\phi^{2}}\mathbf{g}\right)\right]\\
& +\frac{\varepsilon^{1+6\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}
\end{aligned}
$$

#### 6.2.1.6 Problème obtenu

Dans la condition de glissement (2), on peut voir intervenir des termes en $e^{-\varepsilon^{-\lambda}\mathbf{x}}$ et $e^{\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}$, avec $0<\beta\ll 1$ or $\beta\to 0 \Leftrightarrow \varepsilon\to 0$ ainsi :

$$
\begin{aligned}
e^{-\varepsilon^{-\lambda}\mathbf{x}}\left(=e^{-|\ln\beta|^{\lambda}\mathbf{x}}\right) & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0\\
e^{\frac{2}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\left(=e^{2|\ln\beta|\left(|\ln\beta|^{-1+\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\right) & \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0
\end{aligned}
$$

donc ces termes sont négligeables. Et comme on est dans le cas où $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| = \mathcal{O}(1)$, on peut prendre $C_{a,f} = \left|\ln\beta\right|^{-1} = \varepsilon$, ce qui donne :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(\mathrm{Eq1}):\quad \mathbf{u}(\mathbf{x},\phi) = \begin{pmatrix} \partial_{\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi)\\ -\left(\mathbf{g}+\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},\phi)\end{pmatrix}\\
&(\mathrm{Eq2}):\quad \begin{pmatrix}\left(-\mathbf{h}+\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h}\right)(\mathbf{x},\phi)\\ \partial_{\phi}\mathbf{h}(\mathbf{x},\phi)\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad = \varepsilon\begin{pmatrix}\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}+\partial_{\phi}\mathbf{g}+2\varepsilon^{\lambda}\partial^{2}_{\phi\mathbf{x}}\mathbf{g}+\varepsilon^{2\lambda}\partial^{3}_{\mathbf{x}^{2}\phi}\mathbf{g}\\ \partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}+\mathbf{g}+\varepsilon^{\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}-\partial^{3}_{\mathbf{x}\phi^{2}}\mathbf{g}\right)-\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\mathbf{g}-\varepsilon^{3\lambda}\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}\end{pmatrix}(\mathbf{x},\phi)\\
&(\mathrm{Eq2.1}):\quad 0 = \left[\partial^{4}_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}+2\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}+\mathbf{g}\right](\mathbf{x},\phi)+2\varepsilon^{2\lambda}\left[\partial^{4}_{\mathbf{x}^{2}\phi^{2}}\mathbf{g}-\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\mathbf{g}\right](\mathbf{x},\phi)+\varepsilon^{4\lambda}\partial^{4}_{\mathbf{xxxx}}\mathbf{g}(\mathbf{x},\phi)\\
&(\mathrm{Eq2.2}):\quad \left(\mathbf{h}+\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{h}-2\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h}+\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\mathbf{h}\right)(\mathbf{x},\phi) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi=0$) :

$$
\begin{aligned}
&(1):\ \left(\mathbf{g}+\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},0) = 0\\
&(2):\ \partial_{\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},0) = 1
\end{aligned}
$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi=\theta(\mathbf{x})$) :

$$
\begin{aligned}
(3):\quad & \left(\mathbf{g}+\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) = -\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial_{\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(4):\quad & 0 = \left[1-\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]\left[\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}+\mathbf{g}-\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\mathbf{g}\right](\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) - 4\varepsilon^{2\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{2}_{\phi\mathbf{x}}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(5):\quad & -2\varepsilon^{\lambda+1}\frac{\left[1+\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]}{\left[1-\left(\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right]}\partial^{2}_{\mathbf{x}\phi}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x})) = \frac{\varepsilon^{\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+\varepsilon^{2\lambda}\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\theta(\mathbf{x})+\varepsilon^{3\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}+\mathbf{h}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
(6):\quad & 0 = \frac{\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+2\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}-\varepsilon^{2\lambda}\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\theta(\mathbf{x})}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{5/2}}\\
& +\frac{\varepsilon^{4\lambda}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})}{\left(1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\right)^{5/2}}\left[3\left(\partial^{2}_{\mathbf{xx}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}-\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\theta(\mathbf{x})\,\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})+\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{4}\right]\\
& -\left\{\frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[\partial_{\phi}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}\right]+\frac{3\varepsilon^{1+\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[\partial^{3}_{\phi\mathbf{x}^{2}}\mathbf{g}+\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\left(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\mathbf{x}\phi^{2}}\mathbf{g}\right)\right]\right\}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
& +\left\{-\frac{3\varepsilon^{1+\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left(\partial_{\phi}\mathbf{g}+\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}\right)+\frac{\varepsilon^{1+3\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left[3\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}+3\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}\partial^{3}_{\phi\mathbf{x}^{2}}\mathbf{g}\right]\right\}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))\\
& +\frac{\varepsilon^{1+3\lambda}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{3}\left(-\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}+3\partial^{3}_{\mathbf{x}\phi^{2}}\mathbf{g}\right)(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))+\frac{\varepsilon^{1+5\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}{1+\varepsilon^{2\lambda}\left(\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\right)^{2}}\partial_{\mathbf{x}}\theta(\mathbf{x})\,\partial^{3}_{\mathbf{xxx}}\mathbf{g}(\mathbf{x},\theta(\mathbf{x}))
\end{aligned}
$$

### 6.2.2 Développement asymptotique

On fait un développement asymptotique des inconnues en fonction de $\varepsilon^{\lambda}$.

### 6.2.3 Résolution de l'ordre 0 en $\varepsilon^{\lambda=1} = C_{a,f}$

À l'ordre 0, les équations de volumes s'écrivent :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\left(\mathrm{Eq1}\right)_0: & \mathbf{u_0}\left(\mathbf{x},\phi\right) = \begin{pmatrix} \partial_{\phi}\mathbf{g}_0\left(\mathbf{x},\phi\right) \\ -\mathbf{g}_0\left(\mathbf{x},\phi\right) \end{pmatrix}\\
\left(\mathrm{Eq2}\right)_0: & \begin{pmatrix} \mathbf{h}_0\left(\mathbf{x},\phi\right) \\ \partial_{\phi}\mathbf{h}_0\left(\mathbf{x},\phi\right) \end{pmatrix} = 0\\
\left(\mathrm{Eq2.1}\right)_0: & \left[\partial^{4}_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0+2\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}_0+\mathbf{g}_0\right]\left(\mathbf{x},\phi\right) = 0\\
\left(\mathrm{Eq2.2}\right)_0: & \left(\mathbf{h}_0+\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{h}_0\right)\left(\mathbf{x},\phi\right) = 0
\end{array}
\right.
$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$
\begin{array}{l}
(1)_0 : \mathbf{g}_0(\mathbf{x},0) = 0\\
(2)_0 : \partial_{\phi}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},0) = 1
\end{array}
$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(\mathbf{x})$) :

$$
\begin{array}{ll}
(3)_0: & \mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = 0\\
(4)_0: & \partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = 0\\
(5)_0: & \mathbf{h}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = 0\\
(6)_0: & \partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) = \varepsilon^{1-\lambda}\left[\partial_{\phi}\mathbf{g}_0+\partial^{3}_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x}))
\end{array}
$$

#### 6.2.3.1 Fonction courant $\mathbf{g_0}\left(\mathbf{x},\phi\right)$

On a :

$$
\left(\mathrm{Eq2.1}\right)_0 : \left[\partial^{4}_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0+2\partial^{2}_{\phi\phi}\mathbf{g}_0+\mathbf{g}_0\right]\left(\mathbf{x},\phi\right) = 0
$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$\begin{aligned}(1)_0 &: \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, 0) = 0\\ (2)_0 &: \partial_\phi \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, 0) = 1\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta(\mathbf{x})$) :

$$\begin{aligned}(3)_0 &: \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \theta_0(\mathbf{x})) = 0\\ (4)_0 &: \quad \partial^2_{\phi\phi} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \theta_0(\mathbf{x})) = 0\end{aligned}$$

Ainsi, on a une équation différentielle ordinaire en $\phi$ à résoudre. Il n'est donc pas nécessaire de connaître $\theta_0(\mathbf{x})$ pour déterminer $\mathbf{g_0}(\mathbf{x}, \phi)$ ici. On trouve alors :

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, \phi) = \frac{(\phi - \theta_0(\mathbf{x}))\sin\phi + \phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin(\theta_0(\mathbf{x}) - \phi)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})}$$

#### 6.2.3.2 Surface libre $\theta_0(\mathbf{x})$

On a avec la condition limite $(6)_0$ :

$$\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) = \varepsilon^{1-\lambda}\left[\partial_\phi \mathbf{g}_0 + \partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0\right](\mathbf{x}, \theta_0(\mathbf{x})) = \frac{2\varepsilon^{1-\lambda}\sin\theta_0(\mathbf{x})}{\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})}$$

Donc pour que les deux expressions soient du même ordre, il faut que $\varepsilon^{1-\lambda} \sim \mathcal{O}(1)$, c'est à dire que $\lambda = 1$. On pose alors la fonction $\mathcal{G}(\theta)$ :

$$\mathcal{G}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$$

où $\frac{1}{\mathcal{G}'(\theta)} = \frac{\sin\theta}{\theta - \cos\theta\sin\theta}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}&\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) = \frac{2\sin\theta_0(\mathbf{x})}{\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})} = \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_0(\mathbf{x}))}\\ \Leftrightarrow\quad &\mathcal{G}(\theta_0(\mathbf{x})) = 2\mathbf{x} + C\end{aligned}$$

*Remarque.* On peut alors voir qu'il s'agit de la même fonction que Cox [15] au coefficient $\frac{1}{2}$ près (pour $\lambda = 0$), on peut alors faire le même graphe que lui :

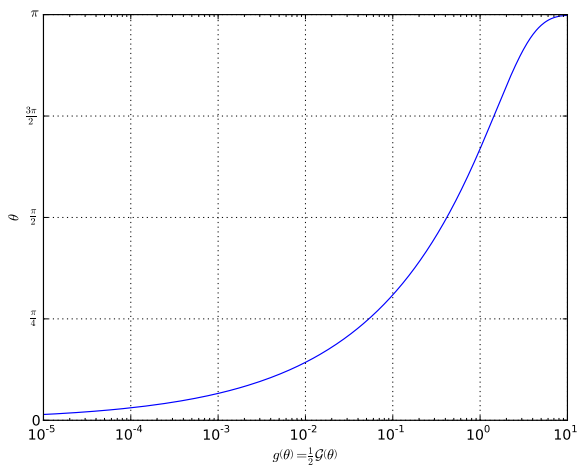



FIGURE 6.4: Graphe de $g(\theta) = \frac{1}{2}\mathcal{G}(\theta)$

On retrouve cette fonction dans de nombreux articles comme Voinov [74], Dussan V. *et al.* [25], Hocking et Rivers [40], Reznik et Yarin [60] ou Snoeijer [66].

#### 6.2.3.3 Vitesse $\mathbf{u_0}(\mathbf{x},\phi)$

La vitesse à l'ordre 0 s'écrit :

$$\mathbf{u_0}(\mathbf{x},\phi) = \begin{pmatrix} -\dfrac{(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)\cos\phi + (\phi\cos\theta_0(\mathbf{x}) - \sin\theta_0(\mathbf{x}))\cos(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})} \\ \\ \dfrac{(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)\sin\phi + \phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin(\phi-\theta_0(\mathbf{x}))}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})} \end{pmatrix}$$

#### 6.2.3.4 Pression $\mathbf{h}_0(\mathbf{x},\phi)$

Et la pression est définie par :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq2})_0 : & \begin{pmatrix} \mathbf{h}_0(\mathbf{x},\phi) \\ \partial_\phi \mathbf{h}_0(\mathbf{x},\phi) \end{pmatrix} = 0 \\ (\mathrm{Eq2.2})_0 : & \left(\mathbf{h}_0 + \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{h}_0\right)(\mathbf{x},\phi) = 0 \\ (5)_0 : & \mathbf{h}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbf{h}_0(\mathbf{x},\phi) = 0$$

avec $\mathbf{p}(\mathbf{x},\phi) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)}\mathbf{h}(\mathbf{x},\phi) + p_{atm}$ donc $\mathbf{p_0}(\mathbf{x},\phi) = p_{atm}$.

#### 6.2.3.5 Raccord

**Raccord de la surface libre**

En zone intermédiaire, on trouve :

$$\theta_{interm}(\mathbf{x}) = \theta_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^\lambda \theta_1(\mathbf{x}) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{2\lambda}\right) = \theta_0(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

où l'indice '$_{interm}$' désigne les variables de la zone intermédiaire et :

$$\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) = \frac{2\sin\theta_0(\mathbf{x})}{\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})} = \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_0(\mathbf{x}))}$$

Et :

$$\mathcal{G}(\theta_{interm}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}(\theta_0(\mathbf{x})) + \mathcal{O}(\varepsilon) = 2\mathbf{x} + C + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

- **Raccord avec l'interne :**
  En zone interne, on a :

$$\begin{aligned} \theta_{int}(\hat{R},\beta,C_{a,f}) &= \theta_{0,int}(\beta) + C_{a,f}\hat{\theta}_1(\hat{R}) + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \\ &= \theta_{0,int}(\beta) + C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \underbrace{C_{a,f}\left\{\frac{\beta^2}{3}\sin(\omega+\theta_0(\beta))\left[\frac{\hat{R}^2}{2} - a_2\hat{R} - \frac{a_3^2}{2} + a_2 a_3\right] + \partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_1(a_2)(\hat{R}-a_3) + \hat{\theta}_1(a_3)\right\}}_{=T} + \mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right) \end{aligned}$$

On veut être sûr que l'ordre 1 en $C_{a,f}$ de $\theta_{int}\left(\hat{R},\beta,C_{a,f}\right)$ ne va pas générer des termes d'ordre 0 dans la zone intermédiaire. Le terme $T$ ne pose pas de problème si $a_2$, $a_3$, $\hat{\theta}_1(a_3)$ et $\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_1(a_2)$ ne sont pas de l'ordre de $C_{a,f}^{-1}$. Il faut donc que nous connaissions le comportement de $C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left(\int_{a_2}^{\tau}\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau$ pour $\hat{R}$ grand dans la zone intermédiaire, c'est à dire pour $\hat{R}=e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$ avec $0<b<1$ ( cf 6.2.1.2) or :

$$\lim_{\hat{R}\to+\infty} s_1\left(\hat{R}\right)=\frac{\sin\theta_{0,int}(\beta)-3\theta_{0,int}(\beta)\cos\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)-\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}=B\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)$$

(cf 5.32 page 133). Donc on a pour $\hat{R}$ grand :

$$C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left(\int_{a_2}^{\tau}\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T}s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau=B\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\left[-\varepsilon^{1-b}+\frac{1}{a_2}\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}+\varepsilon\left(\ln a_3-\frac{a_3}{a_2}\right)\right]$$

Ceci a déjà été réglé dans la partie 5.4.3.3 page 131, on trouve alors :

$$C_{a,f}\int_{a_3}^{\hat{R}}\left(\int_{\tau}^{a_2}\frac{1}{T^3}\left(\int_{a_1}^{T}s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}T\right)\mathrm{d}\tau=B\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\left[\varepsilon^{1-b}-\frac{\varepsilon}{a}-\varepsilon\left(\ln a_3-\frac{a_3}{a}e^{-\frac{1}{\varepsilon^b}}\right)\right]\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0$$

en ayant choisi $a_2=ae^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$, $\frac{1}{a_2}\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon^b}}$ et si $a_3$ se comporte bien dans la limite $\varepsilon\to0$ ( ce coefficient reste à régler lors du raccord à l'ordre 1). On a donc en variables intermédiaires :

$$\theta_{int}(\mathbf{x},\varepsilon)=\theta_{0,int}(\beta)+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

alors :

$$\mathcal{G}\left(\theta_{int}(\mathbf{x},\varepsilon)\right)=\mathcal{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

Pour raccorder avec l'intermédiaire, il faut donc que :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\hat{R}\to+\infty}\theta_{int}\left(\hat{R},\beta,C_{a,f}\right)=\lim_{\mathbf{x}\to0}\theta_{interm}(\mathbf{x})\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{\mathbf{x}\to0}\mathcal{G}\left(\theta_{int}(\mathbf{x},\varepsilon)\right)-\mathcal{G}\left(\theta_{interm}(\mathbf{x})\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{\mathbf{x}\to0}\left(\mathcal{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)+\mathcal{O}(\varepsilon)\right)-(2\mathbf{x}+C+\mathcal{O}(\varepsilon))=0\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{\mathbf{x}\to0}\mathcal{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)-(2\mathbf{x}+C)=0\\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)=C
\end{aligned}$$

- **Raccord avec l'externe :**
  En zone externe, nous avons trouvé précédemment :

$$\begin{aligned}
\theta_{ext}(r,\beta)= & \ \theta_{0,ext}(\beta)+C_{a,f}\theta_{1,ext}(r,\beta)+\mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\
= & \ \theta_{0,ext}(\beta)+C_{a,f}\frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)-\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)}\ln r\\
& +C_{a,f}\left(\frac{\sin\left(\omega+\theta_{0,ext}(\beta)\right)r^2}{6}+C_2r+C_3+\frac{C_1}{2r}\right)+\mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut ré-écrire en variables intermédiaires (où $C_{a,f}=\varepsilon$) :

$$\begin{aligned}
\theta_{ext}(r,\beta) = \quad & \theta_{0,ext}(\beta) + \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta) - \sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta)}(\mathbf{x}-1) \\
& +\varepsilon\left(\frac{\sin(\omega+\theta_{0,ext}(\beta))\, e^{2\left(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-\frac{1}{\varepsilon}\right)}}{6} + C_2 e^{\varepsilon^{-1}\mathbf{x}-\frac{1}{\varepsilon}} + C_3 + \frac{C_1}{2e^{\varepsilon^{-1}(\mathbf{x}-1)}}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
= \quad & \theta_{0,ext}(\beta) + \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_{0,ext}(\beta))}(\mathbf{x}-1) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\mathcal{G}'(\theta)} = \frac{\sin\theta}{\theta - \cos\theta\sin\theta}$. Et donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\theta_{ext}(r,\beta)) &= \mathcal{G}\left(\theta_{0,ext}(\beta) + \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_{0,ext}(\beta))}(\mathbf{x}-1) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) \\
&= \mathcal{G}\left(\theta_{0,ext}(\beta) + \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_{0,ext}(\beta))}(\mathbf{x}-1)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) + \frac{2}{\mathcal{G}'(\theta_{0,ext}(\beta))}(\mathbf{x}-1)\mathcal{G}'(\theta_{0,ext}(\beta)) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) + 2(\mathbf{x}-1) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

En intermédiaire, on a :

$$\mathcal{G}(\theta_{interm}(\mathbf{x})) = \mathcal{G}(\theta_0(\mathbf{x})) + \mathcal{O}(\varepsilon) = 2\mathbf{x} + C + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Si on veut que les deux développements soient valides dans une zone de raccord entre ces deux zones, il faut que :

$$\begin{aligned}
& \lim_{r\to 0}\theta_{ext}(r,\beta) = \lim_{\mathbf{x}\to 1}\theta_{interm}(\mathbf{x}) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{r\to 0}\mathcal{G}(\theta_{ext}(r,\beta)) = \lim_{\mathbf{x}\to 1}\mathcal{G}(\theta_{interm}(\mathbf{x})) \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{\mathbf{x}\to 1}\mathcal{G}(\theta_{ext}(\mathbf{x},\beta)) - \mathcal{G}(\theta_{interm}(\mathbf{x})) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \lim_{\mathbf{x}\to 1}\left(\mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) + 2(\mathbf{x}-1) + \mathcal{O}(\varepsilon)\right) - (2\mathbf{x} + C + \mathcal{O}(\varepsilon)) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) = 2 + C
\end{aligned}$$

- **Finalement :**
  Pour raccorder la zone interne à la zone intermédiaire, il faut que :

$$C = \mathcal{G}(\theta_{0,int}(\beta))$$

de même entre la zone externe et la zone intermédiaire :

$$C = \mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) - 2$$

Donc au final, pour raccorder la surface libre à l'ordre 0, il faut que :

$$\mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) - \mathcal{G}(\theta_{0,int}(\beta)) = 2$$

Si on dimensionne cette relation, on a :

$$\mathcal{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) - \mathcal{G}(\theta_{0,int}(\beta)) = 2C_a|\ln\beta| = 2C_a\left|\ln\left(\frac{\mu\alpha}{h_f}\right)\right| \tag{6.1}$$

où :

$$\mathcal{G}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta \underset{\vartheta\sim 0}{\sim} \int_0^\theta \left(\frac{2}{3}\vartheta^2 + \mathcal{O}(\vartheta^4)\right)\mathrm{d}\vartheta = \frac{2}{9}\theta^3 + \mathcal{O}(\theta^4)$$

Donc on a :

$$\theta_{0,ext}^3(\beta) = \theta_{0,int}^3(\beta) + 9C_a\left|\ln\left(\frac{\mu\alpha}{h_f}\right)\right|$$

On retrouve une loi de Tanner déjà vue par Voinov [74] avec $\beta = \frac{\mu\alpha}{h_f}$ où :

- $\mu\alpha$ est la longueur de glissement et
- $h_f$ est la hauteur du front.

*Remarque.* On peut alors comparer l'approximation de $\mathscr{G}(\theta)$ pour $\theta \ll 1$ et la fonction elle-même pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ :

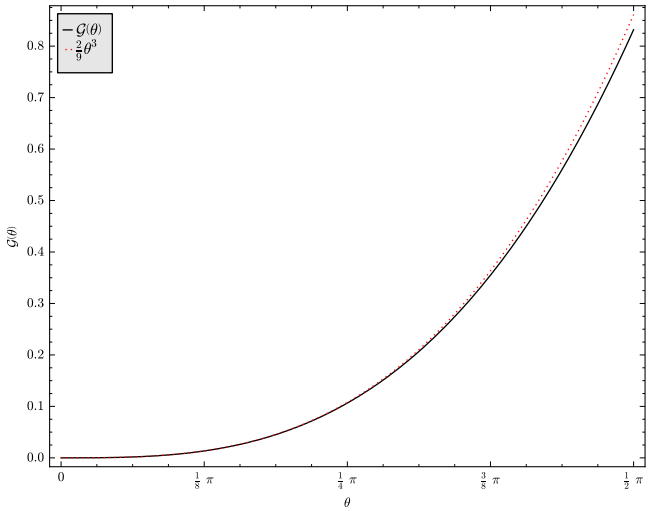



FIGURE 6.5: Comparaison de $\mathscr{G}(\theta)$ et son approximation $\frac{2}{9}\theta^3$

**Raccord des fonctions courant (vitesses)**

- **Raccord interne/intermédiaire :**
  On a $\psi_{0,int}(r,\phi) = \beta\hat{R}\Phi(\varrho,\hat{\phi})$ où $\hat{R} = R = \dfrac{r}{\beta}$ ,$\varrho = \ln\hat{R}$ donc en variables intermédiaires :

$$\psi_{0,int}(r,\phi) = \beta\hat{R}\Phi(\varrho,\phi)$$

que l'on veut raccorder avec :

$$\psi_{0,inter}(\mathbf{x},\phi) = e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\mathrm{g}_0(\mathbf{x},\phi) = \beta\hat{R}\mathrm{g}_0(\mathbf{x},\phi)$$

où :

$$\mathrm{g}_0(\mathbf{x},\phi) = \frac{(\phi-\theta_0(\mathbf{x}))\sin\phi + \phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})}$$

Pour raccorder il faut donc que :

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\frac{(\phi-\theta_0(\mathbf{x}))\sin\phi + \phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})}\right] = \lim_{\varrho\to+\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi})$$

Or le théorème de la valeur finale (11.4) appliqué à $\tilde{\Phi}(s,\hat{\phi})$ (la transformée de Laplace de $\Phi(\varrho,\hat{\phi})$) impose que :

$$\lim_{\varrho\to+\infty}\Phi(\varrho,\hat{\phi}) - \lim_{\varrho\to-\infty}\Phi(\varrho,\phi) = \lim_{s\to 0} s\tilde{\Phi}(s,\phi)$$

or on a posé précédemment (cf (5.12)) que $\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right) \sim_{\varrho\to-\infty} \mathcal{O}\left(e^{\varrho}\right)$ et donc $\lim\limits_{\varrho\to-\infty} \Phi\left(\varrho,\phi\right) = 0$ ainsi il faut que :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\frac{\left(\phi-\theta_0(\mathbf{x})\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\left(\theta_0(\mathbf{x})-\phi\right)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})-\theta_0(\mathbf{x})}\right] \\
= & \lim_{\varrho\to+\infty}\Phi\left(\varrho,\hat{\phi}\right) = \lim_{s\to 0} s\tilde{\Phi}\left(s,\phi\right) \\
= & \lim_{s\to 0} s\,A(s)\left[-\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)}{\cos\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)}\sin\left(s\phi\right)\sin\left(\phi-\theta_{0,int}(\beta)\right)+\sin\hat{\phi}\sin\left(s\left(\phi-\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)\right] \\
= & \lim_{s\to 0} s^2\,A(s)\left[\left(\phi-\theta_{0,int}(\beta)\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\left(\theta_{0,int}(\beta)-\phi\right)\right]+\mathcal{O}\left(s^3\right) \\
= & \left[\left(\phi-\theta_{0,int}(\beta)\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\left(\theta_{0,int}(\beta)-\phi\right)\right]\lim_{s\to 0} s^2\,A(s)
\end{aligned}$$

avec un développement limité de cette expression en $s=0$ et en oubliant le $\mathcal{O}\left(s^3\right)$. Donc si $\lim_{\mathbf{x}\to 0}\theta_0(\mathbf{x}) = \theta_{0,int}(\beta)$, il faut :

$$1 = \lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})-\theta_0(\mathbf{x})\right]\times\lim_{s\to 0} s^2\,A(s)$$

Avec (5.15), cette équation devient :

$$1 = \lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})-\theta_0(\mathbf{x})\right]\times\lim_{s\to 0} s\tilde{k}_{0,int}(s)\,\frac{\cos\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2\left[\cos^2\theta_{0,int}(\beta)-\cos^2\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]}$$

or $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\cos\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)}{2\left[\cos^2\theta_{0,int}(\beta)-\cos^2\left(s\theta_{0,int}(\beta)\right)\right]} = -\dfrac{1}{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}$ donc on veut :

$$1 = -\frac{\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})-\theta_0(\mathbf{x})\right]}{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}\lim_{s\to 0} s\tilde{k}_{0,int}(s)$$

La condition à l'infini s'écrit donc :

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{k}_{0,int}(s) = \lim_{\varrho\to+\infty} k_{0,int}(\varrho) = \frac{2\sin^2\theta_0(\beta)}{\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\theta_0(\mathbf{x})-\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right]}$$

or on a montré que (cf (5.18)) :

$$\lim_{\varrho\to+\infty} k_{0,int}(\varrho) = \frac{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta)-\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}$$

Donc si la surface libre est bien raccordée alors la vitesse l'est aussi.

- **Raccord externe/intermédiaire :**
  On veut que :

$$\lim_{r\to 0}\psi_{0,ext} = \lim_{\mathbf{x}\to 1}\psi_{0,inter}$$

La fonction courant en zone externe (5.1) s'écrit dans le jeu de variables externe $\left(r=\bar{r},\bar{\phi}\right)$ telle que :

$$\psi_{0,ext}(r,\phi) = \frac{r\left[\left(\phi-\theta_{0,ext}(\beta)\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\left(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi\right)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$$

Si on le ré-écrit dans les variables intermédiaires, on a :

$$\begin{aligned}\psi_{0,ext}\left(\mathbf{x},\phi\right) &= e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\frac{\left(\phi-\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)-\phi\right)}{\cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right)-\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\\ &= e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\mathrm{g}_{0,ext}\left(\phi\right)\end{aligned}$$

Et on a :

$$\psi_{0,inter}\left(\mathbf{x},\phi\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\mathrm{g}_0\left(\mathbf{x},\phi\right)=e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(\varepsilon^{1-\lambda}\mathbf{x}-1\right)}\frac{\left(\phi-\theta_0\left(\mathbf{x}\right)\right)\sin\phi+\phi\cos\theta_0\left(\mathbf{x}\right)\sin\left(\theta_0\left(\mathbf{x}\right)-\phi\right)}{\cos\theta_0\left(\mathbf{x}\right)\sin\theta_0\left(\mathbf{x}\right)-\theta_0\left(\mathbf{x}\right)}$$

Il faut donc que $\theta_0\left(\mathbf{x}\right)$ se raccorde avec $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$, ce qui est assuré par la partie précédente.

**Raccord des contraintes**

Tenseur des contraintes au fond : $\tau\left(r\right)=-\frac{1}{r^2}\,\partial^2_{\phi\phi}\psi\left(r,\phi\right)\Big|_{\phi=0}=\frac{1}{r}k\left(r\right)$ ainsi :

$$k_{interm}\left(r\right)=-\frac{1}{r}\,\partial^2_{\phi\phi}\psi\left(r,\phi\right)\Big|_{\phi=0}=-\left[\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_0\left(\mathbf{x},\phi\right)\right]\Big|_{\phi=0}+\mathcal{O}\left(\varepsilon=C_{a,f}\right)$$

donc on a :

$$\begin{aligned}&\text{en interne :} && \lim_{\varrho\to+\infty}k_{0,int}\left(\varrho\right)=\frac{2\sin^2\theta_{0,int}\left(\beta\right)}{\theta_{0,int}\left(\beta\right)-\cos\theta_{0,int}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,int}\left(\beta\right)}\\ &\text{en intermédiaire :} && k_{0,interm}\left(\mathrm{x}\right)=\frac{2\sin^2\theta_0\left(\mathbf{x}\right)}{\theta_0\left(\mathbf{x}\right)-\cos\theta_0\left(\mathbf{x}\right)\sin\theta_0\left(\mathbf{x}\right)}\\ &\text{en externe :} && k_{0,ext}\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)=\frac{2\sin^2\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right)-\cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}\end{aligned}$$

Ainsi si la surface libre est raccordée, les contraintes au fond aussi.

**Raccord de la pression**

On a pu voir que dans les trois zones, la pression à l'ordre 0 est égale à la pression atmosphérique. Elle est donc directement raccordée.

### 6.2.4 Résolution de l'ordre 1 en $\varepsilon^{\lambda=1}=C_{a,f}$

Le système à l'ordre 1 s'écrit :

$$\begin{cases}\left(\mathrm{Eq1}\right)_1: & \mathbf{u_1}\left(\mathbf{x},\phi\right)=\begin{pmatrix}\partial_\phi\mathbf{g}_1\left(\mathbf{x},\phi\right)\\ -\left(\mathbf{g}_1+\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_0\right)\left(\mathbf{x},\phi\right)\end{pmatrix}\\ \left(\mathrm{Eq2}\right)_1: & \begin{pmatrix}\left(-\mathbf{h}_1+\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h}_0\right)\left(\mathbf{x},\phi\right)\\ \partial_\phi\mathbf{h}_1\left(\mathbf{x},\phi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0+\partial_\phi\mathbf{g}_0\\ \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_0+\mathbf{g}_0\end{pmatrix}\left(\mathbf{x},\phi\right)\\ \left(\mathrm{Eq2.1}\right)_1: & 0=\left[\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_1+2\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_1+\mathbf{g}_1\right]\left(\mathbf{x},\phi\right)\\ \left(\mathrm{Eq2.2}\right)_1: & \left(\mathbf{h}_1+\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{h}_1-2\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{h}_0\right)\left(\mathbf{x},\phi\right)=0\end{cases}$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi=0$) :

$$\begin{aligned}&(1)_1:\left(\mathbf{g}_1+\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_0\right)\left(\mathbf{x},0\right)=0\\ &(2)_1:\partial_\phi\mathbf{g}_1\left(\mathbf{x},0\right)=0\end{aligned}$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi=\theta_0\left(\mathbf{x}\right)$) :

$$
\begin{aligned}
(3)_1 :\quad & \mathbf{g}_1(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\theta_1(\mathbf{x})\,\partial_\phi \mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) - \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) - \partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x})\,\partial_\phi \mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) \\
(4)_1 :\quad & \left(\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1\right)(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\theta_1(\mathbf{x})\left(\partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0 + \partial_\phi \mathbf{g}_0\right)(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) \\
(5)_1 :\quad & \mathbf{h}_1(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_1(\mathbf{x})\,\mathbf{h}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) \\
(6)_1 :\quad & \partial_{\mathbf{x}}\theta_1(\mathbf{x}) = \theta_1(\mathbf{x})\left[\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_0 + \partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) + \left[\partial_\phi \mathbf{g}_1 + \partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_1\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x}))
\end{aligned}
$$

#### 6.2.4.1 Fonction courant $\mathbf{g}_1(\mathbf{x},\phi)$

On a :

$$
\left[\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_1 + 2\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1\right](\mathbf{x},\phi) = 0
$$

avec les conditions limites sur $\Gamma_1$ (en $\phi = 0$) :

$$
\begin{aligned}
(1)_1 &: \mathbf{g}_1(\mathbf{x},0) = -\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},0) = 0 \\
(2)_1 &: \partial_\phi \mathbf{g}_1(\mathbf{x},0) = 0
\end{aligned}
$$

et sur $\Gamma_2$ (en $\phi = \theta_0(\mathbf{x})$) :

$$
\begin{aligned}
(3)_1 :\quad & \mathbf{g}_1(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\theta_1(\mathbf{x})\,\partial_\phi \mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) - \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) - \partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x})\,\partial_\phi \mathbf{g}_0(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) \\
(4)_1 :\quad & \left(\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1\right)(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\theta_1(\mathbf{x})\left(\partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0 + \partial_\phi \mathbf{g}_0\right)(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x}))
\end{aligned}
$$

On a donc ici encore une EDO en $\phi$ à résoudre et on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1(\mathbf{x},\phi) = \quad & \frac{\theta_1(\mathbf{x})\left[\sin^2\theta_0(\mathbf{x}) + 2\theta_0^2(\mathbf{x})\right]\cos^2\theta_0(\mathbf{x})\left(\sin\phi - \phi\cos\phi\right)}{\left(\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right)^3} \\
& - \frac{\theta_1(\mathbf{x})\,\theta_0(\mathbf{x})\left[2\left(\cos\theta_0(\mathbf{x})\right)^3\sin\theta_0(\mathbf{x}) + \theta_0(\mathbf{x})\right]\left(\sin\phi - \phi\cos\phi\right)}{\left(\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right)^3} \\
& - \frac{2\theta_1(\mathbf{x})\left[\theta_0(\mathbf{x})\cos^3\theta_0(\mathbf{x}) - \cos^2\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) + \sin\theta_0(\mathbf{x})\right]\cos\theta_0(\mathbf{x})\,\phi\sin\phi}{\left(\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right)^3} \\
& - \frac{2\theta_1(\mathbf{x})\,\theta_0(\mathbf{x})\left[\theta_0(\mathbf{x})\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - 1\right]\phi\sin\phi}{\left(\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right)^3}
\end{aligned}
$$

#### 6.2.4.2 Surface libre $\theta_1(\mathbf{x})$

L'équation de la surface libre est :

$$
\partial_{\mathbf{x}}\theta_1(\mathbf{x}) - \theta_1(\mathbf{x})\underbrace{\left[\partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_0 + \partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x}))}_{=0} = \left[\partial_\phi \mathbf{g}_1 + \partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_1\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x}))
$$

or :

$$
\left[\partial_\phi \mathbf{g}_1 + \partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_1\right](\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = \theta_1(\mathbf{x})\,P(\theta_0(\mathbf{x}))
$$

Alors :

$$
\theta_1(\mathbf{x}) = C_1 e^{\int_0^1 P(\theta_0(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}
$$

avec :

$$
P(\theta_0(\mathbf{x})) = \frac{2\left(-2\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) + \left(2 - \cos^2\theta_0(\mathbf{x})\right)\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin^2\theta_0(\mathbf{x}) + \theta_0^2(\mathbf{x})\cos\theta_0(\mathbf{x})\right)}{\left(\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})\right)^3}
$$

#### 6.2.4.3 Pression $\mathbf{h}_1(\mathbf{x},\phi)$

La pression à l'ordre 1 est déterminée par :

$$\begin{cases} (\mathrm{Eq2})_1 : & \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1(\mathbf{x},\phi) \\ \partial_\phi \mathbf{h}_1(\mathbf{x},\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial^3_{\phi\phi\phi}\mathbf{g}_0 - \partial_\phi \mathbf{g}_0 \\ \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_0 \end{pmatrix}(\mathbf{x},\phi) \\ (\mathrm{Eq2.2})_1 : & \left(\mathbf{h}_1 + \partial^2_{\phi\phi}\mathbf{h}_1\right)(\mathbf{x},\phi) = 0 \\ (5)_1 : & \mathbf{h}_1(\mathbf{x},\theta_0(\mathbf{x})) = -\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

avec $\mathbf{h}_0(\mathbf{x},\phi) = 0$, on a alors en utilisant $(\mathrm{Eq2})_1$ et $(\mathrm{Eq2.2})_1$ :

$$\mathbf{h}_1(\mathbf{x},\phi) = \frac{2\left(\sin\phi - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\left(\phi - \theta_0(\mathbf{x})\right)\right)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})}$$

Ce qui vérifie bien la condition $(5)_1$.

#### 6.2.4.4 Raccord

**Raccord de la surface libre**

En zone intermédiaire, on a à l'ordre 1 :

$$\theta_{1,interm}(\mathbf{x}) = C_1 e^{\int_0^1 P(\theta_{0,interm}(\mathbf{x}))d\mathbf{x}}$$

- **Raccord avec l'interne :**
  Sous réserve que l'ordre 2 ne génère pas des termes à l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,int}(\hat{R}) = & \frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega + \theta_0(\beta)\right)\left[\frac{\hat{R}^2}{2} - a_2\hat{R} - \frac{a_3^2}{2} + a_2 a_3\right] \\ & + \int_{a_3}^{\hat{R}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau + \left(\hat{R} - a_3\right)\partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(a_2) + \hat{\theta}_1(a_3)\end{aligned}$$

  Le coefficient $a_3$ restant permettra alors de régler les conflits possibles. En variables intermédiaires $\left(R = e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \hat{\theta}_{1,int}\left(e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}}\right) = & \frac{\beta^2}{3}\sin\left(\omega + \theta_0(\beta)\right)\left[\frac{e^{2\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}}}{2} - a_2 e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}} - \frac{a_3^2}{2} + a_2 a_3\right] + \partial_{\hat{R}}\hat{\theta}_{1,int}(a_2)\left(e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}} - a_3\right) \\ & + \int_{a_3}^{e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}}}\left\{\int_{a_2}^{\tau}\left[\frac{1}{T^3}\left(\int_0^T s_1(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]\mathrm{d}T\right\}\mathrm{d}\tau + \hat{\theta}_{1,int}(a_3)\end{aligned}$$

- **Raccord avec l'externe :**
  On a :

$$\theta_{1,ext}(\bar{r},\beta) = \frac{\sin\left(\omega + \theta_0(\beta)\right)\bar{r}^2}{6} - \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta) - \theta_0(\beta)}\ln(\bar{r}) + \frac{C_1}{2\bar{r}} + C_2\bar{r} + C_3$$

  En variables intermédiaires $\left(\bar{r} = e^{\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\theta_{1,ext}\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)},\beta\right) = & \frac{\sin\left(\omega + \theta_0(\beta)\right)}{6}e^{\frac{2}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)} - \frac{2\sin\theta_0(\beta)}{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta) - \theta_0(\beta)}\ln\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)}\right) \\ & + \frac{C_1}{2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)} + C_2 e^{\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)} + C_3\end{aligned}$$

- **Finalement :**
  Pour raccorder, il faudra que :

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left[\hat{\theta}_{1,int}\left(e^{\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}}\right)-\theta_{1,interm}(\mathbf{x})\right]=0$$

  et :

$$\lim_{\mathbf{x}\to 1}\left[\theta_{1,ext}\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{x}-1)},\beta\right)-\theta_{1,interm}(\mathbf{x})\right]=0$$

**Raccord de la vitesse et de la pression**

Pour raccorder la pression et la vitesse, il faudra que :

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\mathbf{p}_1(\mathbf{x},\phi)=\lim_{\hat{R}\to+\infty}\hat{p}_{1,int}(\hat{R},\hat{\phi}) \text{ et } \lim_{\mathbf{x}\to 1}\mathbf{p}_1(\mathbf{x},\phi)=\lim_{\bar{r}\to 0}\bar{p}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$$

De même pour la vitesse :

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\mathbf{u}_1(\mathbf{x},\phi)=\lim_{\hat{R}\to+\infty}\hat{u}_{1,int}(\hat{R},\hat{\phi}) \text{ et } \lim_{\mathbf{x}\to 1}\mathbf{u}_1(\mathbf{x},\phi)=\lim_{\bar{r}\to 0}\bar{u}_{1,ext}(\bar{r},\bar{\phi})$$

## 6.3 Conclusion

Dans le chapitre précédent (chapitre 5 page 75), nous étions dans le cas $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|\ll 1$ et nous avons développé les inconnues en fonction du nombre capillaire $C_{a,f}$ de la manière suivante :

$$u(r,\phi)=u_0(r,\phi)+C_{a,f}u_1(r,\phi)+\mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

et étudié les deux zones du front séparément. Nous avons alors trouvé qu'en **zone externe** à l'ordre 0 :

- surface libre : $\theta_{0,ext}(r,\beta)=\theta_{0,ext}(\beta)$,
- pression : $p_{0,ext}(r,\phi)=p_{atm}$,
- fonction courant : $\psi_{0,ext}(r,\phi)=\dfrac{r\left[(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi+\phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$,
- vitesse : $u_{0,ext}(r,\phi)=\left((u_{0,ext})_r,(u_{0,ext})_\phi\right)^t(r,\phi)$ où :

$$\begin{aligned}(u_{0,ext})_r(r,\phi)=&\ \frac{\sin\phi+(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\cos\phi-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}\\&-\frac{\phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\cos(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}\end{aligned}$$

$$(u_{0,ext})_\phi(r,\phi)=-\frac{(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi-\phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$$

- tenseur des contraintes au fond : $\tau_{ext}(r)=-\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}\psi(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=\frac{1}{r}k_{ext}(r)$ ainsi à l'ordre 0 en $C_{a,f}$ :

$$k_0^{ext}(r)=-\frac{1}{r}\partial^2_{\phi\phi}\psi_0(r,\phi)\Big|_{\phi=0}=k_0^{ext}(\theta_{0,ext}(\beta))=-\frac{2\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)-\theta_{0,ext}(\beta)}$$

Et en **zone interne**, nous avons :

- surface libre : $\theta_{0,int}(r,\beta) = \theta_{0,int}(\beta)$,
- pression : $p_{0,int}(r,\phi) = p_{atm}$,
- tenseur des contraintes au fond : $\lim\limits_{\varrho\to+\infty} k_{0,int}(\varrho) = \dfrac{2\sin^2\theta_{0,int}(\beta)}{\theta_{0,int}(\beta) - \cos\theta_{0,int}(\beta)\sin\theta_{0,int}(\beta)}$
- fonction courant : $\psi_{0,int}(r,\phi) = \beta\breve{\psi}_{0,int}(R,\phi) = \beta\hat{\psi}_{0,int}(\hat{R},\hat{\phi}) = \beta\hat{R}\, M(\varrho,\hat{\phi}) \star k(\varrho)$ où $\hat{R} = R = \dfrac{r}{\beta}$ où :

$$\mathscr{L}(M(\varrho,\hat{\phi}))(s,\hat{\phi}) = \tilde{M}(s,\hat{\phi}) = -\frac{\cos(s\theta_{0,int}(\beta))\sin\hat{\phi}\sin(s(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta)))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}$$
$$+\frac{\cos\theta_{0,int}(\beta)\sin(s\hat{\phi})\sin(\hat{\phi}-\theta_{0,int}(\beta))}{2s\left[\cos^2(s\theta_{0,int}(\beta)) - \cos^2\theta_{0,int}(\beta)\right]}$$

- vitesse : $u_{0,int}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{0,int}(r,\phi)$ .

Nous avons montré que ces deux modèles se raccordent sans problème à l'ordre 0 (cf 5.3.3 page 118) ainsi qu'à l'ordre 1 (cf 5.4.3.4 page 135) pour la surface libre.

Dans le cas $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \sim \mathscr{O}(1)$, nous avons donc calculé entièrement l'ordre 0 en $C_{a,f}$ de la **zone intermédiaire** (les autres zones restant inchangées) :

- surface libre : $\partial_{\mathbf{x}}\theta_0(\mathbf{x}) = \dfrac{2\sin\theta_0(\mathbf{x})}{\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})}$ où $\mathbf{x} = \frac{\ln r}{|\ln\beta|} + 1$,
- pression : $p_{0,interm}(r,\phi) = p_{atm}$,
- tenseur des contraintes au fond : $k_{0,interm}(\mathrm{x}) = \dfrac{2\sin^2\theta_0(\mathbf{x})}{\theta_0(\mathbf{x}) - \cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x})}$
- fonction courant : $\psi_{0,interm}(r,\phi) = r\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\phi)$ où :

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\phi) = \frac{(\phi-\theta_0(\mathbf{x}))\sin\phi + \phi\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin(\theta_0(\mathbf{x})-\phi)}{\cos\theta_0(\mathbf{x})\sin\theta_0(\mathbf{x}) - \theta_0(\mathbf{x})}$$

- vitesse : $u_{0,interm}(r,\phi) = \mathrm{rot}\,\psi_{0,interm}(r,\phi)$ .

et pour que la surface libre se raccorde entre les trois zones, il faut que :

$$\mathscr{G}(\theta_{0,ext}(\beta)) - \mathscr{G}(\theta_{0,int}(\beta)) = 2C_{a,f}\left|\ln\beta\right| = 2C_{a,f}\left|\ln\left(\frac{\mu\alpha}{h_f}\right)\right|$$

où $\mathscr{G}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\vartheta-\cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$. Si cette condition est vérifiée, on a alors raccord direct des fonctions courants, de la vitesse et des contraintes à la paroi solide (cf 6.2.3.5). Pour l'ordre 1 en $C_{a,f}$, nous avons calculé les différentes inconnues et posé les conditions de raccords nécessaires entre les trois zones.

Nous avons donc maintenant deux modèles de front complets au premier ordre en $C_{a,f}$ qui posent un cadre clair et réunissent différentes études déjà réalisée telles que celles de Cox [15], Dussan V. [22], Hocking [37], Hocking et Rivers [40], Snoeijer [66], Voinov [74]. Nous allons donc maintenant reprendre l'étude du chapitre 3 page 43qui nous donne un modèle de type Saint-Venant nous permettant de trouver la position, vitesse et hauteur du front. Celles-ci correspondent aux vitesses et hauteurs caractéristiques de l'adimensionnement de cette partie-ci et le modèle Saint-Venant construit correspondra à l'écoulement amont du front que nous venons d'étudier.

Quatrième partie

# Application à l'écoulement d'une goutte

Dans cette partie, nous voulons étudier l'écoulement d'un goutte sur un plan incliné. Il s'agit donc d'un exemple de film mince avec front d'avancement. Nous voulons donc écrire un modèle combinant un modèle Saint-Venant de film mince obtenu dans la partie II page 39 et un modèle de front de la partie III page 61. Dans un premier temps, grâce aux équations de Navier-Stokes, nous allons chercher la position et la vitesse du front qui sont les paramètres de l'adimensionnement du modèle de front de la partie III page 61. Puis nous ferons un changement de variables pour nous mettre dans le repère du front et nous construirons un modèle à une équation sur le front avec glissement à partir duquel nous retrouverons le modèle de lubrification généralisée de Snoeijer [66].

Nous construirons alors un modèle à deux équations de type Saint-Venant (plus stable qu'un modèle à une équation) avec glissement. Un fois le changement de variable fait, nous obtiendrons un modèle à une équation que nous comparerons au modèle de Snoeijer [66] de manière à déterminer une loi de glissement simple que nous injecterons dans le système de Saint-Venant de manière à avoir un modèle simple de film mince avec front.

Après avoir obtenu ce modèle simple, nous étudierons en premier le comportements des différents paramètres du modèle : $C_{a,f}$, $\beta$ et $\theta_{int}$ qui représente l'angle microscopique de la surface libre. Nous nous ramènerons alors à des études de la littérature : Bertozzi et Brenner [4], Troian *et al.* [71], Kondic [45] où les auteurs s'intéressent à des modèles à une équation sans front et avec film précurseur alors que nous avons un modèle de film mince à front sec. Nous ferons alors des simulations numériques dans le même cadre que ceux des articles précédemment cités.

CHAPITRE 7

# ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT D'UNE GOUTTE SUR UN PLAN INCLINÉ

On étudie ici l'écoulement d'une goutte sur un plan incliné sous l'effet de la gravité ce qui peut être vu comme une rupture de barrage d'échelle microscopique. Le but ici est d'appliquer les modèles de fronts d'avancement obtenus dans la partie précédente à la description d'un film mince étudié dans la partie II. Nous allons donc étudier la partie film mince nous permettant de trouver la hauteur, vitesse et position du front. Ces grandeurs interviennent dans l'adimensionnement du front et nous permettront de dire dans quel cas nous pourrons raccorder le film mince à un modèle de front. Puis nous étudierons la zone proche du front, ce qui nous permettra de proposer un modèle simple de type Saint-Venant conjuguant un film mince et un front d'avancement. Ce modèle fera l'objet de tests numériques dans le chapitre suivant.

**Sommaire**


7.1 Équations dans le film mince . . . . . **168**
7.1.1 Équations de Navier-Stokes . . . . . 168
7.1.2 Adimensionnement pour le front . . . . . 179
7.2 Équations dans la zone proche du front . . . . . **180**
7.2.1 Équations de Navier-Stokes . . . . . 181
7.2.2 Système Saint-Venant à l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$ . . . . . 182
7.2.3 Modèle Saint-Venant avec glissement simple . . . . . 188
7.2.4 Conclusion . . . . . 189


On reprend les équations obtenues au chapitre précédent où nous avons supposé que le rapport $\frac{h_0}{L} = \bar{\varepsilon}$ est petit (appelé paramètre onde longue) que l'on applique à un problème d'écoulement microscopique (cf (7.1)).

On étudie ce problème pour des temps suffisamment grand, c'est-à-dire pour $t \gg t_0$ où $t_0$ est le temps initial auquel la "rupture de barrage microscopique" à lieu et où la forme du front n'est pas encore régulière. De cette manière on peut observer un profil de surface régulier. On réalise le même adimensionnement que dans le chapitre précédent :

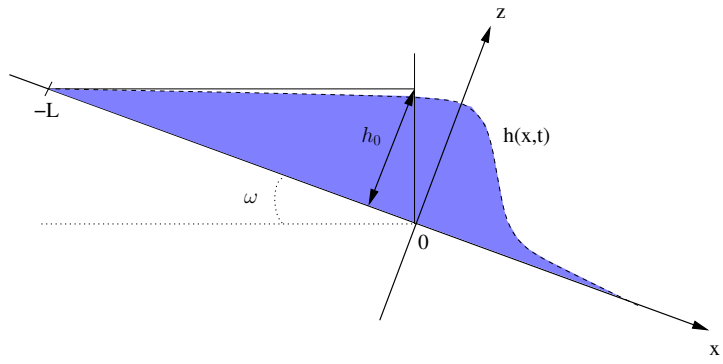



FIGURE 7.1: Schéma de l'écoulement d'un liquide initialement confiné

$$t = \frac{L}{u_0} t' \qquad x = Lx' \qquad z = h_0 z' \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L}$$
$$u = u_0 u' \qquad w = \frac{h_0}{L} u_0 w' \qquad p = \rho g_0 h_0 p' \qquad h = h_0 h'$$

L'écoulement est entraîné principalement par la gravité ainsi on prend $u_0 = \sqrt{g_0 h_0}$ ainsi $F_r^2 = 1$ dans la zone film mince et $\bar{\lambda} = \frac{R_e}{F_r^2} = \frac{\rho g_0 h_0^2}{\mu u_0} = \frac{\rho h_0 \sqrt{g_0 h_0}}{\mu}$. Les nombres adimensionnels s'écrivent alors :

Nombre de Froude : $F_r^2 = \dfrac{u_0^2}{g_0 h_0} = 1$

Nombre de Reynolds : $R_e = \dfrac{\rho u_0 h_0}{\mu} = \dfrac{\rho \sqrt{g_0 h_0} h_0}{\mu}$

Nombre de Weber : $W_e = \dfrac{\rho u_0^2 h_0}{\kappa} = \dfrac{\rho g_0 h_0^2}{\kappa}$

Nombre Capillaire : $C_a = \dfrac{W_e}{R_e} = \dfrac{u_0 \mu}{\kappa} = \dfrac{\mu}{\kappa} \sqrt{g_0 h_0}$

Coefficient de glissement : $\dfrac{1}{\kappa_v(h)} = \dfrac{\mu}{\kappa_f(h) h_0}$

Et nous disposons des groupes adimensionnels suivants :

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{\varepsilon} F_r^2}{R_e} \qquad \bar{\beta} = \bar{\varepsilon} R_e \qquad \bar{\delta} = \frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2} \qquad \bar{\kappa} = \frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e} \qquad \bar{\lambda} = \frac{R_e}{F_r^2} = \sqrt{\frac{\bar{\delta}}{\bar{\alpha}}}$$

qui vérifient $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta} \ll 1$, $\bar{\kappa} \approx \mathcal{O}(1)$ et on a $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}^2 F_r^2$ et $\bar{\alpha}\bar{\delta} = \bar{\varepsilon}^2$.

## 7.1 Équations dans le film mince

On écrit ici les équations adimensionnées caractérisant l'écoulement du film mince où on garde les notations avec les "$'$" car nous ferons ensuite un second adimensionnement annoté avec des "$*$".

### 7.1.1 Équations de Navier-Stokes

Nous avons utilisé dans le chapitre 3 les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} u'_{x'} + w'_{z'} = 0 \\ u'_{t'} + u'u'_{x'} + w'u'_{z'} = -\frac{1}{F_r^2}p'_{x'} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}R_e}\left(\bar{\varepsilon}^2 u'_{x'x'} + u'_{z'z'}\right) + \frac{1}{\bar{\varepsilon}F_r^2}\sin\omega \\ w'_{t'} + u'w'_{x'} + w'w'_{z'} = -\frac{1}{\bar{\varepsilon}^2F_r^2}p'_{z'} + \frac{1}{\bar{\varepsilon}R_e}\left(w'_{z'z'} + \bar{\varepsilon}^2 w'_{x'x'}\right) - \frac{1}{\bar{\varepsilon}^2F_r^2}\cos\omega \\ u'\left(x',0\right) = \frac{1}{\kappa_v(h')}u'_{z'}\left(x',0\right) \\ w'\left(x',0\right) = 0 \\ h'_{t'} + u'\left(x',h'\right)h'_{x'} - w'\left(x',h'\right) = 0 \\ 0 = u'_{z'}\left(x',h'\right) + \bar{\varepsilon}^2 w'_{x'}\left(x',h'\right) - \frac{4\bar{\varepsilon}^2 h'_{x'}}{1-\bar{\varepsilon}^2 h'^2_{x'}}u'_{x'}\left(x',h'\right) \\ p'\left(x',h'\right) + \bar{\kappa}\frac{h'_{x'x'}}{\left(1+\bar{\varepsilon}^2 h'^2_{x'}\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\bar{\varepsilon}\frac{F_r^2}{R_e}u'_{x'}\left(x',h'\right)\frac{1+\bar{\varepsilon}^2 h'^2_{x'}}{1-\bar{\varepsilon}^2 h'^2_{x'}} \end{cases} \tag{7.1}$$

pour construire des modèles à une ou deux équations moyennées sur la hauteur $h'$ et le débit $q'$ du fluide. Le modèle à une équation sur la hauteur du fluide est la suivante :

$$h'_{t'} + q'_{x'} = 0$$

À l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$, le débit $q'$ s'écrit :

$$q' = \frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h'^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h'^2}{\kappa_v(h')} = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(\frac{1}{3}h' + \frac{1}{\kappa_v(h')}\right)$$

on pose :

$$\frac{1}{\kappa_v(h')} = S\left(h'\right)$$

avec $S\left(h'\right)$ une fonction qui décroît plus on s'éloigne du front, c'est à dire quand $h'$ augmente, et qui tend vers une constante au niveau du front. On peut donc poser :

$$S\left(h'\right) = \frac{S}{2+\varphi\left(h'\right)}$$

où $S \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi\left(h'\right)$ est une fonction croissante avec $\lim_{h'\to 0}\varphi\left(h'\right) = 0$ et $\lim_{h'\to+\infty}\varphi\left(h'\right) = +\infty$. Le cas glissement variable : $q'\left(h'\right) \sim_{h'\to 0} \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(\frac{1}{3}h' + \frac{S}{2}\right) \sim_{h'\to 0} \frac{S\bar{\lambda}\sin\omega h'^2}{2}$ est donc un sous cas du glissement variable. Le débit est donc compris entre deux cas limites :

$$\begin{aligned} &\text{Glissement variable :} && q'\left(h'\right) = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(\frac{1}{3}h' + \frac{1}{\kappa_v(h')}\right) \\ &\text{Non-glissement :} && q'\left(h'\right) \sim_{h'\to+\infty} \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h'^3}{3} \end{aligned}$$

On peut alors étudier ces deux cas. Nous allons alors partir de l'équation d'ordre 0 de type Burgers : $h'_{t'} + q'_{x'} = 0$ qui nous permet d'obtenir la vitesse et la position du front en fonction du cas étudiés : non-glissement ou glissement constant. Ceci nous permettra de nous mettre dans le repère du front ainsi grâce à l'ordre suivant nous pourrons obtenir un modèle stationnaire à une équation sur la hauteur du film et décrivant le front .

#### 7.1.1.1 Détermination de la position et la vitesse du front

Tout d'abord déterminons la vitesse et la position du front dans les deux cas présentés.

**Non-glissement :**

On a alors $q'\left(h'\right) = \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h'^3}{3}$ et :

$$h'_{t'} + \left(\frac{\bar{\lambda}\sin\omega h'^3}{3}\right)_{x'} = 0$$

On a comme donnée initiale :

$$\begin{array}{lcll} h(x,0) & = & h_0(x) = (x+L)\frac{h_0}{L} = \left(Lx'+L\right)\frac{h_0}{L} = \left(x'+1\right)h_0 & \text{pour} \quad -L < x < 0 \\ h'_0\left(x'\right) & = & h'\left(x',0\right) = x'+1 & \text{pour} \quad -1 < x' < 0 \end{array}$$

avec $x = Lx'$ et $h = h_0 h'$. On utilise la méthode des caractéristiques. Pour cela on pose :

$$\begin{cases} \dfrac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(x',t'\right) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Or $h'$ ne varie pas le long des caractéristiques donc $h'\left(X\left(t'\right),t'\right) = h'(X(0),0) = h'_0(x_0)$ :

$$\begin{cases} \dfrac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2_0(x_0) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

ainsi :

$$X\left(t'\right) = x_0 + \bar{\lambda}\sin\omega h'^2_0(x_0)\,t' = x_0 + \bar{\lambda}\sin\omega\,(x_0+1)^2\,t'$$

On pose alors :

$$g\left(x',t'\right) = h'\left(X\left(t'\right),t'\right)$$

Puis on dérive $g\left(x',t'\right)$ par rapport au temps.

$$\frac{dg\left(x',t'\right)}{dt'} = \frac{\partial h'\left(X(t'),t'\right)}{\partial t'} + \frac{\partial h'\left(X(t'),t'\right)}{\partial X}\frac{\partial X(t')}{\partial t'} = 0$$

$g\left(x',t'\right)$ est donc invariant par rapport au temps, on a alors :

$$\begin{array}{rcl} g\left(x',t'\right) & = & g\left(x',0\right) = h'(X(0),0) = h'(x_0,0) = h'_0(x_0) \\ h'\left(X\left(t'\right),t'\right) & = & 1+x_0 \end{array}$$

On a donc :

$$h'\left(X\left(t'\right),t'\right) = h'\left(x_0 + \bar{\lambda}\sin\omega\,(x_0+1)^2\,t',t'\right) = 1+x_0$$

La partie lisse de la courbe se situe entre $x' = -1$ et $x' = X'_f\left(t'\right)$, où $X'_f\left(t'\right)$ est la position de la discontinuité du front. Et on a $h' = h'_f\left(t'\right)$ loin du front et $h' = 0$ au niveau du front. On a donc conservation de la masse entre $-1$ et $X'_f(t')$. On a alors :

$$\int_{-1}^{X'_f(t')} h'\left(X\left(t'\right),t'\right)dx' \quad = \quad \int_{-1}^{0} h'_0\left(x'\right)dx' \approx \frac{1}{2}$$

On se met en temps long ainsi on considère $x_0 \ll \bar{\lambda}\sin\omega t'$, on a :

$$X\left(t'\right) \approx \bar{\lambda}\sin\omega\left(1+x_0\right)^2 t' \quad \Rightarrow \quad 1+x_0 \approx \sqrt{\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \int_{-1}^{X_f'\left(t'\right)} h'\left(X\left(t'\right),t'\right)dx' = \int_{-1}^{X_f'\left(t'\right)} \left(1+x_0\right)dx' \\
&= \int_{-1}^{X_f'\left(t'\right)} \sqrt{\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}}dx' = \frac{1}{\sqrt{\bar{\lambda}t'\sin\omega}}\frac{2}{3}\left[X^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{X_f'\left(t'\right)} \\
\Rightarrow X_f'\left(t'\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{4}\sqrt{\bar{\lambda}t'\sin\omega}
\end{aligned}$$

en négligeant la valeur en $-1$ car on est en temps long. On obtient finalement :

$$\begin{aligned}
X_f'\left(t'\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}} \\
\dot{X}_f'\left(t'\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}} t'^{-\frac{2}{3}} \\
h_f'\left(t'\right) &= h'\left(X_f'\left(t'\right),t'\right) = \sqrt{\frac{X_f'\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

où $h_f'\left(t'\right)$ est la hauteur d'eau au niveau du front. Mais cette description ne donne pas finement l'allure du front d'avancement. Il faut donc étudier le deuxième cas. Celui-ci nous donnera donc des vitesses et positions du front plus justes, ce qui nous permettra de faire un changement de variables dans le système de Navier-Stokes de manière à avancer avec le front (cf partie (7.1.2)).

**Glissement variable :**

On a $q'\left(h'\right) = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(\frac{1}{3}h' + \frac{1}{\kappa_v\left(h'\right)}\right)$ et le modèle à une équation s'écrit :

$$h_{t'}' + q_{x'}' = 0$$

A l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$, le débit $q'$ s'écrit :

$$q' = \frac{1}{3}\bar{\lambda}\sin\omega h'^3 + \frac{\bar{\lambda}\sin\omega h'^2}{\kappa_v\left(h'\right)} = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(\frac{1}{3}h' + \frac{1}{\kappa_v\left(h'\right)}\right)$$

On a alors :

$$h_{t'}' + q_{x'}' = h_{t'}' + \bar{\lambda}\sin\omega h'\left(\frac{2}{\kappa_v\left(h'\right)} + h' - \frac{h'\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\kappa_v^2\left(h'\right)}\right)h_{x'}' = 0$$

On a comme donnée initiale : $h(x,0) = h_0(x) = (x+L)\frac{h_0}{L}$ pour $-L < x < 0$ en dimensionné. En adimensionné, on a donc :

$$h_0'\left(x'\right) = x' + 1 \text{ pour} - 1 < x' < 0$$

avec $x = Lx'$ et $h = h_0 h'$. Pour la résolution, on utilise la méthode des caractéristiques. Pour cela on pose :

$$\frac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \bar{\lambda}\sin\omega h'\left(x',t'\right)\left(\frac{2}{\kappa_v\left(h'\left(x',t'\right)\right)} + h'\left(x',t'\right)\left(1-\frac{\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\kappa_v^2\left(h'\right)}\right)\right), \quad X(0) = x_0$$

Or $h'$ ne varie pas le long des caractéristiques donc $h'\left(X\left(t'\right),t'\right) = h'\left(X(0),0\right) = h_0\left(x_0\right)$ :

$$\frac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \bar{\lambda}\sin\omega h_0'\left(x_0\right)\left(\frac{2}{\kappa_v\left(h_0'\left(x_0\right)\right)} + h_0'\left(x_0\right)\left(1-\frac{\partial_{h'}\kappa_v\left(h_0'\left(x_0\right)\right)}{\kappa_v^2\left(h_0'\left(x_0\right)\right)}\right)\right), \quad X(0) = x_0$$

Alors en notant $\kappa_{v,0} = \kappa_v\left(h_0'\left(x_0\right)\right)$ et $\kappa_{v,0}' = \partial_{h'}\kappa_v\left(h_0'\left(x_0\right)\right)$ :

$$X\left(t'\right) = x_0 + \bar{\lambda}t'\sin\omega h_0'\left(x_0\right)\left(\frac{2}{\kappa_{v,0}} + h_0'\left(x_0\right)\left(1-\frac{\kappa_{v,0}'}{\kappa_{v,0}^2}\right)\right)$$

On note :

$$g\left(x',t'\right) = h'\left(X\left(t'\right),t'\right)$$

Puis on dérive $g\left(x',t'\right)$ par rapport au temps :

$$\begin{aligned}\frac{dg\left(x',t'\right)}{dt'} &= \frac{\partial h'\left(X(t'),t'\right)}{\partial t'} + \frac{\partial h'\left(X(t'),t'\right)}{\partial X}\frac{\partial X(t')}{\partial t'} \\ &= h_{t'}'\left(X\left(t'\right),t'\right) + \left(\bar{\lambda}\sin\omega h'^2\left(X(t'),t'\right)\left(\tfrac{1}{3}h'\left(X(t'),t'\right) + \tfrac{1}{\kappa_v(h')}\right)\right)_{x'} = 0\end{aligned}$$

$g\left(x',t'\right)$ est donc invariant par rapport au temps, on a alors :

$$g\left(x',t'\right) = g\left(x',0\right) = h'\left(X(0),0\right) = h'\left(x_0,0\right) = h_0'\left(x_0\right) \quad \Leftrightarrow \quad h'\left(X\left(t'\right),t'\right) = 1 + x_0$$

On a donc :

$$h'\left(X\left(t'\right),t'\right) = h_0'\left(x_0\right) = 1 + x_0 = h'\left(x_0 + \bar{\lambda}t'\sin\omega h_0'\left(x_0\right)\left(\frac{2}{\kappa_{v,0}} + h_0'\left(x_0\right)\left(1-\frac{\kappa_{v,0}'}{\kappa_{v,0}^2}\right)\right),t'\right)$$

La partie lisse de la courbe se situe entre $x' = -1$ et $x' = X_f'\left(t'\right)$, où $X_f'\left(t'\right)$ est la position de la discontinuité du front (cf (7.2)).

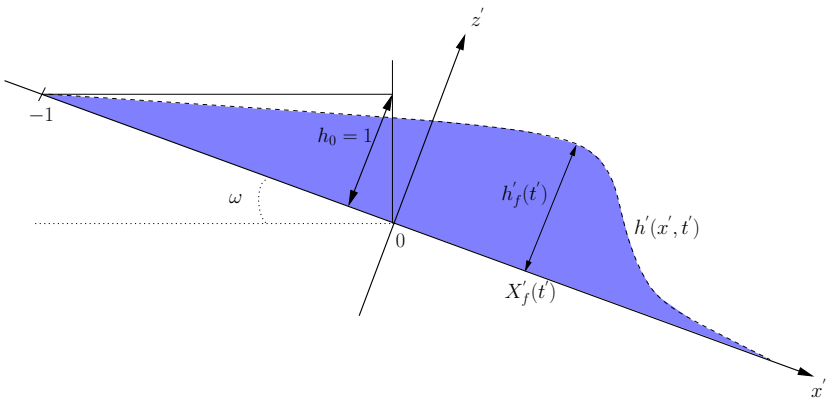



FIGURE 7.2: Position de $X_f'\left(t'\right)$ et $h_f'\left(t'\right)$

Et on a $h'\left(X_f'\left(t'\right),t'\right)=h_f'\left(t'\right)$ avant le front et $h'=0$ au niveau du front. On a donc conservation de la masse entre $-1$ et $X_f'(t')$. On a alors :

$$\int_{-1}^{X_f'(t')} h'\left(X\left(t'\right),t'\right)dx' \quad = \quad \int_{-1}^{0} h_0'\left(x'\right)dx' \approx \frac{1}{2}$$

On considère $x_0 \ll \bar{\lambda}t'\sin\omega$, ainsi on a :

$$X\left(t'\right) \approx \bar{\lambda}t'\sin\omega h_0'(x_0)\left(\frac{2}{\kappa_{v,0}}+h_0'(x_0)\left(1-\frac{\kappa_{v,0}'}{\kappa_{v,0}^2}\right)\right)$$

et :

$$\begin{aligned}
& \bar{\lambda}\sin\omega h_0'(x_0)\left(\frac{2}{\kappa_{v,0}}+h_0'(x_0)\left(1-\frac{\kappa_{v,0}'}{\kappa_{v,0}^2}\right)\right)t'-X\left(t'\right)=0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega h_0'(x_0)}{\kappa_{v,0}}+\bar{\lambda}t'\sin\omega h_0'^2(x_0)\left(\frac{\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'}{\kappa_{v,0}^2}\right)-X\left(t'\right)=0 \\
\Leftrightarrow \quad & h_0'^2(x_0)+\frac{2\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}h_0'(x_0)-\frac{X\left(t'\right)\kappa_{v,0}^2}{\bar{\lambda}t'\sin\omega\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}=0
\end{aligned}$$

$$\Delta=\frac{4\kappa_{v,0}^2}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)^2}\left[1+\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\right]$$

Pour qu'il y ait une solution réelle, il faut que :

$$1+\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\geq 0 \Leftrightarrow \left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\geq -\frac{\bar{\lambda}t'\sin\omega}{X\left(t'\right)} \Leftrightarrow \kappa_{v,0}'\leq\kappa_{v,0}^2+\frac{\bar{\lambda}t'\sin\omega}{X\left(t'\right)}$$

alors :

$$h_0'(x_0)=\frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right]$$

- Étude du signe de $\frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right]$
  si $\bar{\lambda}\sin\omega, t', \kappa_{v,0}>0$ alors :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sgn}\left(\frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right]\right) \\
= \quad & \operatorname{sgn}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\operatorname{sgn}\left(-1+\sqrt{1+\frac{X\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right)
\end{aligned}$$

  - si $\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\geq 0$ alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right]\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1+\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\geq 0
\end{aligned}$$

- si $\left(\kappa_{\nu,0}^2 - \kappa_{\nu,0}^{'}\right) \leq 0$ alors :

$$\frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1+\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right) \leq 0$$

- Étude du signe de $\frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1-\sqrt{1+\frac{X(t')}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right]$

  si $\bar{\lambda}\sin\omega, t^{'}, \kappa_{\nu,0} > 0$ alors on sait que $1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right) \geq 0$ donc :

$$-1-\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)} \leq 0$$

  et :

$$\frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1-\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right) \leq 0$$

Donc si $\kappa_{\nu,0}^2 - \kappa_{\nu,0}^{'} \geq 0$, alors :

$$h_0^{'}(x_0) = \frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right]$$

et si $\kappa_{\nu,0}^2 - \kappa_{\nu,0}^{'} \leq 0$, alors :

$$h_0^{'}(x_0) = \frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right]$$

( $\kappa_{\nu,0}^2 - \kappa_{\nu,0}^{'} = 0 \Leftrightarrow \kappa_{\nu,0} = \frac{1}{C-h'}$). Or $h_0^{'}(x_0)$ est unique et positive donc on est dans le cas $\kappa_{\nu,0}^2 - \kappa_{\nu,0}^{'} \geq 0$, avec :

$$h_0^{'}(x_0) = \frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right]$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \int_{-1}^{X_f(t')} h^{'}\left(X\left(t^{'}\right), t^{'}\right) dx^{'} = \int_{-1}^{X_f^{'}\left(t^{'}\right)} (1+x_0)\, dx^{'} \\
&= \int_{-1}^{X_f^{'}\left(t^{'}\right)} \frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\right] dX \\
&= \frac{\kappa_{\nu,0}}{\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left\{-X_f^{'}\left(t^{'}\right)-1+\frac{2\bar{\lambda}t'}{3\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)}\left[\left(1+\frac{X_f^{'}\left(t^{'}\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1-\frac{1}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{\nu,0}^2-\kappa_{\nu,0}^{'}\right)\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}
\end{aligned}$$

On a donc l'équation suivante sur $X_f^{'}\left(t^{'}\right)$ :

$$\frac{2\bar{\lambda}t'}{3\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left(1+\frac{X_f'\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\right)^{\frac{3}{2}}-X_f'\left(t'\right)=\frac{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}{2\kappa_{v,0}}+1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega\left(1-\frac{1}{\bar{\lambda}t'}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{3\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}$$

Si on pose $A=\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)$, l'équation s'écrit :

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}+\frac{A^{\frac{1}{3}}}{\left(\bar{\lambda}t'\right)^{\frac{1}{3}}}X_f'\left(t'\right)\right)^{\frac{3}{2}}-X_f'\left(t'\right)\sim\frac{A}{2\kappa_{v,0}}+1+\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}}-\frac{A^{\frac{1}{3}}}{\left(\bar{\lambda}t'\right)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

En temps long, on trouve alors :

$$X_f'^2\left(t'\right)\sim 1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}+\mathcal{O}\left(t'^{-2}\right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
& X_f'\left(t'\right)\sim\sqrt{1+\tfrac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}}+\mathcal{O}\left(t'^{-1}\right)\\
\Rightarrow\quad & \dot{X}_f'\left(t'\right)\sim\frac{\bar{\lambda}\sin\omega}{\kappa_{v,0}\sqrt{1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}}}+\mathcal{O}\left(t'^{-2}\right)\sim\left(\bar{\lambda}t'\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Alors la hauteur associée s'écrit :

$$h_f'\left(t'\right)=\frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\left[-1+\sqrt{1+\frac{X_f'\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}\right]$$

En utilisant $X_f'\left(t'\right)$ la position du front en temps long trouvée précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
h_f'\left(t'\right) &\sim-\frac{\kappa_{v,0}}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}+\sqrt{\frac{\kappa_{v,0}^2}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)^2}+\frac{1}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\sqrt{1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}}\frac{\kappa_{v,0}^2}{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}}\\
&\sim\sqrt{\frac{\kappa_{v,0}}{2\bar{\lambda}t'}}-\frac{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}{4\bar{\lambda}t'\sin\omega}+\frac{1}{t'^{3/2}}\frac{\sqrt{2}\kappa_{v,0}}{8\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{3/2}}\left(\sqrt{\kappa_{v,0}}+\frac{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)^2}{\kappa_{v,0}^{3/2}}\right)+\mathcal{O}\left(t'^{-2}\right)\\
&\sim\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Elle peut se simplifier en posant que pour les temps longs, $\kappa_{v,0}$ est constant et $\kappa_{v,0}'=0$ :

$$h_f'\left(t'\right)=-\frac{1}{\kappa_{v,0}}+\frac{1}{\kappa_{v,0}}\sqrt{1+\frac{X_f'\left(t'\right)\kappa_{v,0}^2}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}}$$

Ceci nous donne donc la position du front $X_f'$, la hauteur de fluide en ce point $h_f'$ et la vitesse d'avancement du front $\dot{X}_f'\left(t'\right)$ en fonction des deux cas étudiés :

- Cas non-glissement :

$$\begin{aligned}
\text{Position du front :} \quad X_f'\left(t'\right) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}} \\
\text{Vitesse du front :} \quad \dot{X}_f'\left(t'\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}t'^{-\frac{2}{3}} \\
\text{Hauteur du front :} \quad h_f'\left(t'\right) &= h'\left(X_f'\left(t'\right),t'\right) = \sqrt{\frac{X_f'\left(t'\right)}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{3}}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

- Cas glissement variable :

$$\begin{aligned}
\text{Position du front :} \quad X_f'\left(t'\right) &\sim \sqrt{1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}}+\mathcal{O}\left(t'^{-1}\right) \\
\text{Vitesse du front :} \quad \dot{X}_f'\left(t'\right) &\sim \frac{\bar{\lambda}\sin\omega}{\kappa_{v,0}\sqrt{1+\frac{2\bar{\lambda}t'\sin\omega}{\kappa_{v,0}}}}+\mathcal{O}\left(t'^{-2}\right)\sim\left(\bar{\lambda}t'\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\text{Hauteur du front :} \quad h_f'\left(t'\right) &\sim \sqrt{\frac{\kappa_{v,0}}{2\bar{\lambda}t'}}-\frac{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)}{4\bar{\lambda}t'\sin\omega} \\
&\quad +\frac{1}{t'^{3/2}}\frac{\sqrt{2}\kappa_{v,0}}{8\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{3/2}}\left(\sqrt{\kappa_{v,0}}+\frac{\left(\kappa_{v,0}^2-\kappa_{v,0}'\right)^2}{\kappa_{v,0}^{3/2}}\right)+\mathcal{O}\left(t'^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Nous avons donc obtenu des vitesses $\dot{X}_f'\left(t'\right)$ et positions $X_f'\left(t'\right)$ du front plus justes, ce qui nous permettra de faire un changement de variables dans le système de Navier-Stokes de manière à avancer avec le front (cf partie (7.1.2)). ces valeurs seront aussi utiles dans la zones du front car nous avons construit l'adimensionnement du front en fonction de ces grandeurs (cf 4.1 page 66). Cependant, cette description ne donne pas finement l'allure du front d'avancement. On ne connaît que la position du « haut » du front.

#### 7.1.1.2 Détermination de $h_{x'}'$

Nous allons maintenant déterminer la pente $h_{x'}'$ du front ce qui nous permettra de donner une valeur à l'angle macroscopique $\theta_{0,ext}(\beta)$. On a comme équation de Burgers : $\boxed{h_{t'}'+\left(f\left(h'\right)\right)_{x'}=0}$. La caractéristique s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dfrac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \partial_{h'}f\left(h'\right) \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

De plus en $t'=0$, on a $h'\left(x',t'=0\right)=h_0\left(x'\right)=1+x_0$. Donc sur la caractéristique, on a :

$$h'\left(X\left(t'\right),t'\right)=1+x_0\left(X\left(t'\right),t'\right)$$

Donc :

$$h_X'\left(X\left(t'\right),t'\right)=\frac{\partial x_0\left(X\left(t'\right),t'\right)}{\partial X}$$

La caractéristique nous donne :

$$\frac{dX\left(t'\right)}{dt'} = \frac{X\left(t'\right) - x_0\left(X\left(t'\right), t'\right)}{t'} = \partial_{h'} f\left(h'\left(X\left(t'\right), t'\right)\right) = \partial_{h'} f\left(1 + x_0\left(X\left(t'\right), t'\right)\right)$$

donc $X\left(t'\right) - x_0\left(X\left(t'\right), t'\right) = t'\partial_{h'} f\left(1 + x_0\left(X\left(t'\right), t'\right)\right)$ et en dérivant :

$$\begin{aligned} & 1 - \partial_{x'} x_0\left(x', t'\right) = t'\partial_{x'} x_0\left(x', t'\right)\partial^2_{h'h'} f\left(1 + x_0\left(x', t'\right)\right) \\ \Rightarrow \quad & \partial_{x'} x_0\left(x', t'\right) = h'_{x'}\left(x', t'\right) = \frac{1}{1 + t'\partial^2_{h'h'} f\left(1 + x_0\left(x', t'\right)\right)} = \frac{1}{1 + t'\partial^2_{h'h'} f\left(h_0\left(x'\right)\right)} \end{aligned}$$

- <u>Pour le cas sans glissement : $q' = f\left(h'\right) = \bar{\lambda}\sin\omega h'^2$</u>
  On a donc :

$$h'_{x'}\left(x', t'\right) = \frac{1}{1 + 2\bar{\lambda}t'\sin\omega}$$

  Dans ce cas, $h'_f\left(t'\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{3}}$ alors on peut écrire :

$$h'_{x'}\left(x', t'\right) = \frac{2h'^3_f\left(t'\right)}{2h'^3_f\left(t'\right) + 3}$$

  Si on **redimensionne**, on a :

$$h_x(x,t) = \frac{h_0}{L}\frac{2h_f^3(t)}{2h_f^3(t) + 3} = \frac{h_0}{L\left(1 + 2\frac{u_0}{L}\frac{R_e}{F_r^2}t\sin\omega\right)} = \frac{h_0}{L\left(1 + 2t\frac{\rho g_0 h_0^2}{L\mu}\sin\omega\right)}$$

  et pour $t$ grand :

$$h_x(x,t) = \frac{\mu}{2t\rho g_0 h_0 \sin\omega}$$

  Dans le cas $t$ grand et en **dimensionné**, on a donc :

$$h_f(t) = h_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{t\rho h_0^2 g_0 \sin\omega}{L\mu}\right)^{-\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad h_f^3(t) = \frac{3}{2}Lh_0^2 h_x$$

  On applique alors **l'adimensionnement du front** (7.7) en gardant la précédente expression de $h_x$, on a :

$$h^*_{x^*}\left(x^*, t^*\right) = \frac{\mu\dot{X}_f(t)}{2h_f(t)\rho g_0 h_0 t^* \sin\omega}$$

  En coordonnées polaire, la forme du front est donnée par $\theta_{ext}(r^*) = \theta(x^*, z^*)$, ce qui signifie que $h = |-x|\tan\theta(x,z)$ (en orientant l'axe des $x$ dans le sens de la descente de la pente) :

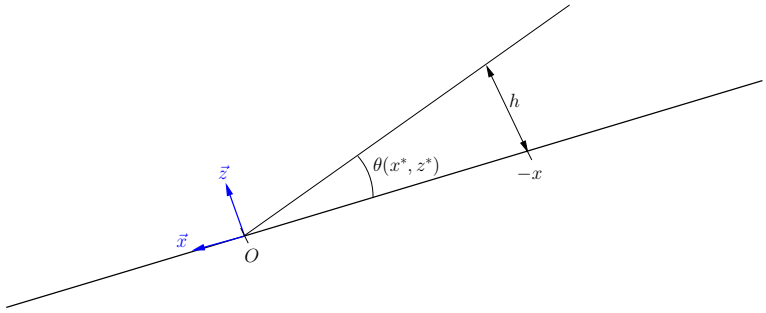



FIGURE 7.3: Représentation de $h$ en fonction de $\theta(x^*, z^*)$

et $\bar{\varepsilon} h^* = |-x^*| \tan\theta(x^*, z^*)$ ainsi :

$$\bar{\varepsilon} h^*_{x^*} = \tan\theta\left(x^*, z^*\right) + x^*\left(1 + \tan^2\theta\left(x^*, z^*\right)\right)\partial_{x^*}\theta\left(x^*, z^*\right) \tag{7.4}$$

On rappelle que dans la zone externe (non-glissement) de l'étude du front d'avancement (cf partie III page 61 et chapitre 5.5 page 140), on a un développement en $C_{a,f}$ de $\theta_{ext}(r^*)$ :

$$\begin{aligned}\theta_{ext}(r^*) = \quad & \theta_{0,ext}(\beta) + C_{a,f}\left[\frac{\sin\left(\omega + \theta_{0,ext}(\beta)\right) r^{*2}}{6} - \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)\ln(r^*)}{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\cos\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}\right] \\ & + C_{a,f}\left[\frac{C_1}{2r^*} + C_2 r^* + C_3\right] + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\end{aligned} \tag{7.5}$$

où $C_{a,f}$ est le nombre capillaire du front. Si l'on veut que ces deux approches : (7.4) et (7.5), soient compatibles, il faut que l'on ait :

$$\begin{aligned} h^*_{x^*}(x^*, t^*) &= \frac{\mu \dot{X}_f(t)}{h_f(t)\rho g_0 h_0} \times \frac{1}{2t^* \sin\omega} = \underbrace{\frac{F_f^2}{R_{e,f}}}_{\sim\mathcal{O}(1)} \times \frac{h_f(t)}{h_0} \times \frac{1}{2t^* \sin\omega} \\ &= \bar{\varepsilon}^{-1}\tan\theta^*\left(x^*, z^*\right) + \bar{\varepsilon}^{-1} x^*\left(1 + \tan^2\theta^*\left(x^*, z^*\right)\right)\underbrace{\partial_{x^*}\theta^*\left(x^*, z^*\right)}_{=\mathcal{O}(C_{a,f})} \\ &= \bar{\varepsilon}^{-1}\tan\theta_{0,ext}(\beta) + \mathcal{O}\left(\bar{\varepsilon}^{-1} C_{a,f}\right)\end{aligned} \tag{7.6}$$

où $\frac{F_f^2}{R_{e,f}} \sim \mathcal{O}(1)$ dans le repère du front. Il faut donc :

$$\frac{h_f(t)}{h_0} \times \frac{1}{2t^* \sin\omega} = \frac{h_f^2(t)}{h_0} \times \frac{1}{2\dot{X}_f(t)\, t \sin\omega} = \tan\theta_{0,ext}(\beta)$$

On a donc une valeur pour l'angle de contact $\theta_{0,ext}(\beta)$ qui dépend de la vitesse du front $\dot{X}_f(t)$ et de la hauteur du front $h_f(t)$.

- <u>Pour le cas glissement pur : $q' = f\left(h'\right) = S\bar{\lambda}\sin\omega h'$</u>

$$\partial^2_{h'h'} f\left(h'\right) = 0$$

On a donc ici $h'_{x'}\left(x', t'\right) = 1 = \bar{\varepsilon}^{-1}\tan\theta_{0,ext}(\beta) + \mathcal{O}\left(\bar{\varepsilon}^{-1} C_{a,f}\right)$. Ce qui impose l'angle de contact.

- <u>Pour le cas avec glissement variable, on a</u> $q' = f\left(h'\right) = \bar{\lambda}\sin\omega h'\left(\frac{2}{\kappa_v(h')} + h' - \frac{h'\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\kappa_v^2(h')}\right)$

Ainsi $h'_{x'}\left(x',t'\right)=\frac{1}{1+t'\partial^2_{h'h'}f\left(h_0\left(x'\right)\right)}=\bar{\varepsilon}^{-1}\tan\theta_{0,ext}\left(\beta\right)+\mathcal{O}\left(\bar{\varepsilon}^{-1}C_{a,f}\right)$ avec :

$$\begin{aligned}\partial^2_{h'h'}f\left(h_0\right) &= \bar{\lambda}\sin\omega\left[2-6\frac{\kappa'_{v,0}}{\kappa^2_{v,0}}+\frac{6}{\kappa^2_{v,0}-\kappa'_{v,0}}\left[-1+\sqrt{1+\frac{x'}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa^2_{v,0}-\kappa'_{v,0}\right)}\right]\left(2\frac{\left(\kappa'_{v,0}\right)^2}{\kappa^2_{v,0}\left(h'\right)}-\frac{\kappa''_{v,0}}{\kappa_{v,0}}\right)\right]\\ &+\frac{\bar{\lambda}\sin\omega}{\left(\kappa^2_{v,0}-\kappa'_{v,0}\right)^2}\left[-1+\sqrt{1+\frac{x'}{\bar{\lambda}t'\sin\omega}\left(\kappa^2_{v,0}-\kappa'_{v,0}\right)}\right]^2\left(\frac{6\kappa''_{v,0}\kappa'_{v,0}}{\kappa_{v,0}}-\kappa'''_{v,0}-\frac{6\left(\kappa'_{v,0}\right)^3}{\kappa^2_{v,0}}\right)\end{aligned}$$

La pente au niveau de l'angle de contact du front et donc l'angle de contact dépend donc directement du modèle de glissement $\kappa_{v,0}$.

Cette expression pourra être utilisée pour lier le modèle de front et celui du film mince. Nous allons maintenant nous mettre dans le repère du front grâce aux calculs de la partie précédente où nous avons déterminé la vitesse, la position et la hauteur du front dans le cas avec ou sans glissement. Ce qui nous permettra ensuite d'écrire un modèle global pour l'écoulement d'une goutte sur un plan incliné.

### 7.1.2 Adimensionnement pour le front

Nous voulons faire un changement de variables pour nous mettre dans le repère du front. La zone film mince nous a donné la position du front $X_f(t)$, sa vitesse $\dot{X}_f(t)$ ainsi que sa hauteur $h_f(t)$ avec ou sans glissement définis tels que (cf (7.2) et (7.1)) :

| | Adimensionné | Dimensionné |
|---|---|---|
| Sans glissement | $X'_f\left(t'\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}$ | $X_f(t)=L\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(t\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}$ |
| | $\dot{X}'_f\left(t'\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}t'^{-\frac{2}{3}}$ | $\dot{X}_f(t)=\frac{L}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{2}{3}}$ |
| | $h'_f\left(t'\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{3}}$ | $h_f(t)=h_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\left(t\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{-\frac{1}{3}}$ |

TABLE 7.1: Position, vitesse, hauteur du front sans glissement

| | Adimensionné | Dimensionné |
|---|---|---|
| Avec glissement | $X'_f\left(t'\right)=\left(S\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ | $X_f(t)=L\left(St\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| | $\dot{X}'_f\left(t'\right)=\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}t'^{-\frac{1}{2}}$ | $\dot{X}_f(t)=\frac{L}{2}\left(S\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}$ |
| | $h'_f\left(t'\right)=\left(S\bar{\lambda}t'\sin\omega\right)^{-\frac{1}{2}}$ | $h_f(t)=h_0\left(St\frac{\rho h_0^2 g_0}{L\mu}\sin\omega\right)^{-\frac{1}{2}}$ |

TABLE 7.2: Position, vitesse, hauteur du front avec glissement

Ces données permettent de nous mettre dans le repère du front et d'avancer avec lui. On pose alors dans notre adimensionnement $u_0 = \dot{X}_f(t)$ et $h_0 = h_f(t)$. On fait alors le changement de variables suivant :

$$x^* = \frac{x' - X_f'\left(t'\right)}{\eta}, \quad t^* = t', \quad z^* = z', \quad u^* = u', \quad w^* = w', \quad p^* = p'$$

avec $\eta$ un paramètre à fixer. Ainsi pour toute fonction $f\left(x', t', z'\right) = F(x^*, t^*, z^*)$, on aura :

$$\partial_{x'} f = \frac{1}{\eta}\partial_{x^*} F, \quad \partial_{t'} f = \partial_{t^*} F - \frac{1}{\eta}\dot{X}_f'(t)\,\partial_{x^*} F \tag{7.7}$$

**Nombres adimensionnels associés**

On peut alors voir que les nombres adimensionnels dans cette zone vaudront :

| | Sans glissement | Avec glissement |
|---|---|---|
| Nombre de Froude : $F_r^2 = \frac{u_0^2}{g_0 h_0}$ : | $F_r^2 = \frac{\bar{\lambda}\sin\omega}{12 g_0 t}$ | $F_r^2 = \frac{\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{3}{2}}}{g_0 t^{\frac{1}{2}}}$ |
| Nombre de Reynolds : $R_e = \frac{\rho u_0 h_0}{\mu}$ : | $R_e = \frac{\rho}{4\mu t}$ | $R_e = \frac{\rho}{\mu t}$ |
| Nombre de Weber : $W_e = \frac{\rho u_0^2 h_0}{\kappa}$ : | $W_e = \frac{\rho\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{5}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \kappa t^{\frac{5}{3}}}$ | $W_e = \frac{\rho\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}}{\kappa t^{\frac{3}{2}}}$ |
| Nombre Capillaire : $C_a = \frac{W_e}{R_e} = \frac{u_0\mu}{\kappa}$ : | $C_a = \frac{\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}\mu}{4^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \kappa t^{\frac{2}{3}}}$ | $C_a = \frac{\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}\mu}{\kappa t^{\frac{1}{2}}}$ |
| Coefficient de glissement : $\frac{1}{\kappa_{v\left(h'\right)}} = \frac{\mu}{\kappa_f(h) h_0}$ : | $\frac{1}{\kappa_{v\left(h'\right)}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{\mu\left(\bar{\lambda} t \sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}}{\kappa_f}$ | $\frac{1}{\kappa_v\left(h'\right)} = \frac{\mu\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{\kappa_f}$ |

TABLE 7.3: Nombre adimensionnels avec et sans glissement

où $\bar{\lambda} = \frac{\rho h_0 \sqrt{g_0 h_0}}{\mu}$. On peut alors voir que pour des temps grands, le nombre capillaire est faible (ce qui sera utile pour la suite). Pour la suite, nous aurons besoin des hypothèses suivantes : $F_r^2 \ll 1$, $W_e \ll R_e \ll 1$ et $\dfrac{W_e}{R_e} = C_a \ll 1$. Or ici, pour $t$ grand, on a bien $F_r^2 \ll 1$ et $C_a \ll 1$, et dans les deux versions (avec ou sans glissement). Les hypothèses sont donc bien vérifiées, on peut donc appliquer les modèles de fronts développés dans la suite.

| Sans glissement | Avec glissement |
|---|---|
| $W_e = \frac{\rho\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{5}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \kappa t^{\frac{5}{3}}} \ll R_e = \frac{\rho}{4\mu t} \ll 1$ | $W_e = \frac{\rho\left(S\bar{\lambda}\sin\omega\right)^{\frac{1}{2}}}{\kappa t^{\frac{3}{2}}} \ll R_e = \frac{\rho}{\mu t} \ll 1$ |

TABLE 7.4: Hypothèses pour le modèle de front

## 7.2 Équations dans la zone proche du front

Dans cette partie, nous repartons des équations de Navier-Stokes adimensionnées (cf chapitre (3)), nous nous mettons dans le repère du front et nous allons chercher à construire un modèle avec glissement à une équation sur la hauteur du film mince. Nous montrerons alors que si le glissement disparaît nous retrouvons l'équation de lubrification généralisée obtenue par Snoeijer [66]. Nous construirons alors un modèle de type Saint-Venant à deux équations avec glissement, nous nous mettrons aussi dans le repère du front ce qui nous ramènera à un modèle à une équation que nous

comparerons à l'équation obtenue grâce aux modèles de fronts développés dans la partie III page 61 et à la méthode de Snoeijer [66]. Nous obtiendrons alors une loi de glissement qui nous permettra de construire un modèle de type Benney (une équation sur la hauteur du film) ou du type Saint-Venant (deux équations sur la hauteur et le débit) décrivant l'écoulement d'une goutte sur un plan incliné. Ce modèle nous permettra dans le chapitre suivant de nous resituer par rapport aux études de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71] et faire des simulations numériques.

### 7.2.1 Équations de Navier-Stokes

On considère le système de Navier-Stokes complet (7.1) (avec adimensionnement du film) et on applique le changement de variables du front (7.7) précédent :

$$\begin{cases} u^*_{x^*} + \eta w^*_{z^*} = 0 \\ \eta u^*_{t^*} + \left(u^* - \dot{X}^*_f(t^*)\right) u^*_{x^*} + \eta w^* u^*_{z^*} = -\dfrac{1}{F_r^2} p^*_{x^*} + \dfrac{\eta}{\bar{\varepsilon} R_e}\left(\dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} u^*_{x^*x^*} + u^*_{z^*z^*}\right) + \dfrac{\eta}{\bar{\varepsilon} F_r^2}\sin\omega \\ \eta w^*_{t^*} + \left(u^* - \dot{X}^*_f(t^*)\right) w^*_{x^*} + \eta w^* w^*_{z^*} = -\dfrac{\eta}{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2} p^*_{z^*} + \dfrac{\eta}{\bar{\varepsilon} R_e}\left(w^*_{z^*z^*} + \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} w^*_{x^*x^*}\right) - \dfrac{\eta}{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}\cos\omega \\ \\ u^*(x^*,0) = \dfrac{1}{\kappa_\nu(h^*)} u^*_{z^*}(x^*,0) \\ w^*(x^*,0) = 0 \\ \eta h^*_{t^*} + \left(u^*(x^*,h^*) - \dot{X}^*_f(t^*)\right) h^*_{x^*} - \eta w^*(x^*,h^*) = 0 \\ 0 = \left(1 - \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^{*2}_{x^*}\right)\left(u^*_{z^*}(x^*,h^*) + \dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta} w^*_{x^*}(x^*,h^*)\right) - 4\dfrac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^*_{x^*} u^*_{x^*}(x^*,h^*) \\ \dfrac{1}{F_r^2} p^*(x^*,h^*) + \dfrac{1}{W_e}\dfrac{\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^*_{x^*x^*}}{\left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^{*2}_{x^*}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2}{R_e}\dfrac{\bar{\varepsilon}}{\eta} u^*_{x^*}(x^*,h^*)\dfrac{1 + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^{*2}_{x^*}}{1 - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\eta^2} h^{*2}_{x^*}} \end{cases}$$

avec $\bar{\kappa} = \frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e}$ et $\dot{X}^*_f(t^*) = \dot{X}'_f\left(t'\right)$. On voit que si l'on veut garder les deux termes du laplacien de la vitesse du même ordre, il faut poser $\eta = \bar{\varepsilon}$ :

$$\begin{cases} u^*_{x^*} + \bar{\varepsilon} w^*_{z^*} = 0 \\ R_e\left(\bar{\varepsilon} u^*_{t^*} + \left(u^* - \dot{X}^*_f(t^*)\right) u^*_{x^*} + \bar{\varepsilon} w^* u^*_{z^*}\right) = \dfrac{R_e}{F_r^2}\left(\sin\omega - p^*_{x^*}\right) + \left(u^*_{x^*x^*} + u^*_{z^*z^*}\right) \\ R_e\left(\bar{\varepsilon} w^*_{t^*} + \left(u^* - \dot{X}^*_f(t^*)\right) w^*_{x^*} + \bar{\varepsilon} w^* w^*_{z^*}\right) = -\dfrac{R_e}{\bar{\varepsilon} F_r^2}\left(\cos\omega + p^*_{z^*}\right) + \left(w^*_{z^*z^*} + w^*_{x^*x^*}\right) \\ \\ u^*(x^*,0) = \dfrac{1}{\kappa_\nu(h^*)} u^*_{z^*}(x^*,0) \\ w^*(x^*,0) = 0 \\ \bar{\varepsilon} h^*_{t^*} + \left(u^*(x^*,h^*) - \dot{X}^*_f(t^*)\right) h^*_{x^*} - \bar{\varepsilon} w^*(x^*,h^*) = 0 \\ 0 = \left(1 - h^{*2}_{x^*}\right)\left(u^*_{z^*}(x^*,h^*) + \bar{\varepsilon} w^*_{x^*}(x^*,h^*)\right) - 4 h^*_{x^*} u^*_{x^*}(x^*,h^*) \\ \dfrac{1}{F_r^2} p^*(x^*,h^*) + \dfrac{1}{W_e}\dfrac{h^*_{x^*x^*}}{\left(1 + h^{*2}_{x^*}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2}{R_e} u^*_{x^*}(x^*,h^*)\dfrac{1 + h^{*2}_{x^*}}{1 - h^{*2}_{x^*}} \end{cases} \tag{7.8}$$

On peut voir que l'on va avoir un décalage dans les ordres en $\bar{\varepsilon}$ entre $u^*$ et $w^*$. On peut se référer à l'article de Luchini et Charru [50] où ils ont eux aussi un décalage entre $u$ et $v$ dans l'équation (3.3a) : $u^{(0)}_x + v^{(1)}_y = 0$. Dans notre cas, il faut cependant faire attention aux conditions limites qui peuvent être

en sur-nombre. On peut aussi poser $\tilde{w} = \bar{\varepsilon} w^*$ pour mettre $w^*$ à la même échelle que $u^*$ mais ce n'est pas ce que l'on veut faire ici. Ainsi si $R_e \ll 1$ et $F_r^2 \ll 1$, on a :

$$\begin{cases} u^*_{x^*} + \bar{\varepsilon} w^*_{z^*} = 0 \\ 0 = \dfrac{R_e}{F_r^2}\left(\sin\omega - p^*_{x^*}\right) + \left(u^*_{x^*x^*} + u^*_{z^*z^*}\right) \\ 0 = -\dfrac{R_e}{\bar{\varepsilon} F_r^2}\left(\cos\omega + p^*_{z^*}\right) + \left(w^*_{z^*z^*} + w^*_{x^*x^*}\right) \\ \\ u^*\left(x^*, 0\right) = \dfrac{1}{\kappa_v\left(h^*\right)} u^*_{z^*}\left(x^*, 0\right) \\ w^*\left(x^*, 0\right) = 0 \\ \bar{\varepsilon} h^*_{t^*} + \left(u^*\left(x^*, h^*\right) - \dot{X}^*_f\left(t^*\right)\right) h^*_{x^*} - \bar{\varepsilon} w^*\left(x^*, h^*\right) = 0 \\ 0 = \left(1 - h^{*2}_{x^*}\right)\left(u^*_{z^*}\left(x^*, h^*\right) + \bar{\varepsilon} w^*_{x^*}\left(x^*, h^*\right)\right) - 4 h^*_{x^*} u^*_{x^*}\left(x^*, h^*\right) \\ \dfrac{1}{F_r^2} p^*\left(x^*, h^*\right) + \dfrac{1}{W_e} \dfrac{h^*_{x^*x^*}}{\left(1 + h^{*2}_{x^*}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2}{R_e} u^*_{x^*}\left(x^*, h^*\right) \dfrac{1 + h^{*2}_{x^*}}{1 - h^{*2}_{x^*}} \end{cases}$$

On trouve donc un problème de Stokes stationnaire. On peut vérifier en revenant, après l'adimensionnement et le changement de repère réalisé, aux équations dimensionnées :

$$\begin{cases} u_x + w_z = 0 \\ 0 = \rho g_0 \sin\omega - p_x + \mu\left(u_{xx} + u_{zz}\right) \\ 0 = -\rho g_0 \cos\omega - p_z + \mu\left(w_{zz} + w_{xx}\right) \\ \\ u\left(x, 0\right) = \dfrac{\mu}{\kappa_f\left(h\right)} u_z\left(x, 0\right) \\ w\left(x, 0\right) = 0 \\ h_t + u\left(x, h\right) h_x - w\left(x, h\right) = 0 \\ 0 = \left(1 - h_x^2\right)\left(u_z\left(x, h\right) + w_x\left(x, h\right)\right) - 4 h_x u_x\left(x, h\right) \\ p\left(x, h\right) + \kappa \dfrac{h_{xx}}{\left(1 + h_x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -2\mu u_x\left(x, h\right) \dfrac{1 + h_x^2}{1 - h_x^2} \end{cases}$$

On retrouve bien du Stokes stationnaire classique donc si on fait l'adimensionnement du front, on retrouvera bien le système utilisé lors de cette résolution. On peut alors regarder ce que l'adimensionnement et le changement de repère ont fait sur $x$ :

- adimensionnement : $x = Lx'$ (ou $x'$ est la variable dimensionnée),
- changement de repère :

$$x^* = \frac{x' - X'_f\left(t'\right)}{\bar{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad x' = \bar{\varepsilon} x^* + X'_f\left(t'\right)$$

Donc au final on a appliqué :

$$x = Lx' = h_0 x^* + L X'_f\left(t'\right) = h_0 x^* + X_f\left(t\right)$$

On a donc dimensionné $x$ en $h_0 = h_f\left(t\right)$ et on s'est mis dans le repère du front avec $X_f\left(t\right)$.

### 7.2.2 Système Saint-Venant à l'ordre 0 en $\bar{\varepsilon}$

On souhaite ici construire un modèle combinant un modèle de film mince et un modèle de front. On écrit le système adimensionné d'équations de Saint-Venant :

$$\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left(\dfrac{q'^2}{h'} + p\left(h'\right)\right)_{x'} - \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h' h'_{x'x'x'} = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda} h' \sin\omega - \dfrac{\kappa_v\left(h'\right)}{1+\frac{\kappa_v(h')h'}{3}}\dfrac{q'}{h'}\right) \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} & \partial_{h'} p\left(h'\right) \\ = \; & \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h' \cos\omega + \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{h'^2}{\left(\kappa_v\left(h'\right)\right)^2}\left[1 - \frac{3}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'}\right] \\ & + \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{h'^3}{\kappa_v\left(h'\right)}\left[\frac{4}{3} - \frac{5}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'} + \frac{2\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\left(\kappa_v\left(h'\right)\right)^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'} - 1\right)\right] \\ & + \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h'^4 \left[\frac{4}{9} - \frac{12}{5}\frac{1}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'} + \frac{\left(\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)\right)^2}{\left(\kappa_v\left(h'\right)\right)^4}\left(1 - \frac{3}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'}\right) + \frac{2\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\left(\kappa_v\left(h'\right)\right)^2}\left(\frac{3}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'} - \frac{2}{3}\right)\right] \\ & + \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h'^5 \left[\frac{7}{5}\frac{\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)}{\kappa_v\left(h'\right)\left(3+\kappa_v\left(h'\right)h'\right)} - \frac{\left(\partial_{h'}\kappa_v\left(h'\right)\right)^2}{\left(\kappa_v\left(h'\right)\right)^3\left(3+\kappa_v\left(h'\right)h'\right)} - \frac{2}{5}\frac{\kappa_v\left(h'\right)}{3+\kappa_v\left(h'\right)h'}\right] \end{aligned}$$

On applique le changement de variables du front (7.7) sur les équations de Saint-Venant avec $\bar{\varepsilon} = \eta$, où on utilise les nombres adimensionnels pour pouvoir redimensionner facilement et on obtient :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} h^*_{t^*} + \left(h^*\left(v - \dot{X}^*_f\left(t^*\right)\right)\right)_{x^*} = 0 \\ \bar{\varepsilon} q^*_{t^*} - \dot{X}^*_f\left(t^*\right) q^*_{x^*} + \dfrac{2q^*}{h^*} q^*_{x^*} + \left(\partial_{h^*} p\left(h^*\right) - \dfrac{q^{*2}}{h^{*2}}\right) h^*_{x^*} - \dfrac{1}{W_e} h^* h^*_{x^*x^*x^*} \\ \qquad = \dfrac{1}{R_e}\left(\dfrac{R_e}{F_r^2} h^* \sin\omega - \dfrac{\kappa_v\left(h^*\right)}{1+\frac{\kappa_v(h^*)h^*}{3}}\dfrac{q^*}{h^*}\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\varepsilon}^2\right) \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \left(h^*\left(v - \dot{X}^*_f\left(t^*\right)\right)\right)_{x^*} = \left(q^* - h^* \dot{X}^*_f\left(t^*\right)\right)_{x^*} = 0 \\ \left(\dfrac{2q^*}{h^*} - \dot{X}^*_f\left(t^*\right)\right) q^*_{x^*} + \left(\partial_{h^*} p\left(h^*\right) - \dfrac{q^{*2}}{h^{*2}}\right) h^*_{x^*} - \dfrac{h^* h^*_{x^*x^*x^*}}{W_e} = \dfrac{1}{R_e}\left(\dfrac{R_e}{F_r^2} h^* \sin\omega - \dfrac{\kappa_v\left(h^*\right)}{1+\frac{\kappa_v(h^*)h^*}{3}}\dfrac{q^*}{h^*}\right) \end{cases}$$

donc $q^{*(0)} = h^* v^{(0)} = h^* \dot{X}^*_f\left(t^*\right)$. On retrouve alors $u_0 = \dot{X}_f\left(t\right)$ en prenant la vitesse moyenne $u_0$ de l'écoulement égale à $v^{(0)}$. Ce qui donne dans la seconde équation :

$$\partial_{h^*} p\left(h^*\right) h^*_{x^*} - \frac{h^* h^*_{x^*x^*x^*}}{W_e} = \frac{1}{R_e}\left(\frac{R_e h^* \sin\omega}{F_r^2} - \frac{\dot{X}^*_f\left(t^*\right)\kappa_v\left(h^*\right)}{1+\frac{\kappa_v(h^*)h^*}{3}}\right) \tag{7.9}$$

On peut supposer que $\partial_{h^*} p\left(h^*\right)$ est constant, si on prend $\frac{1}{W_e} = 0$ et $h^*$ petit dans cette équation et $\kappa_v\left(h^*\right) \to +\infty$. Le terme $\frac{\kappa_v(h^*)}{1+\frac{\kappa_v(h^*)h^*}{3}} = \frac{3\kappa_v(h^*)}{3+\kappa_v(h^*)h^*} \to \frac{3}{h^*} \to +\infty$ et donc $h^*_{x^*} \to +\infty$ : la pente de la surface libre sera infinie. On souhaite donc conserver ce comportement.

On peut noter que $\kappa_v\left(h^*\right)$ représente le frottement et $\frac{1}{\kappa_v(h^*)}$ représente le glissement donc :

$$\frac{1}{\kappa_v(h^*)} \underset{h^*\to h_f^*}{\longrightarrow} 0 \qquad \kappa_v(h^*) \underset{h^*\to h_f^*}{\longrightarrow} +\infty$$
$$\underset{h^*\to 0}{\longrightarrow} \beta \qquad \underset{h^*\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\beta}$$

Le but ici est d'obtenir une équation sur la hauteur du fluide. On peut alors dans un premier temps regarder les résultats de Snoeijer [66].

#### 7.2.2.1 Utilisation de la méthode de Snoeijer [66] pour avoir une équation sur $h$

On utilise ici les résultats de la partie III page 61 et notamment ceux de l'ordre 0 en $C_{a,f}$ de la zone externe 5.3.1.1 page 102. On reprend la première équation de l'équation de quantité de mouvement au niveau de la surface libre :

$$\partial_r p_{ext}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = C_{a,f}\left[(\Delta u_{ext})_r - \partial_r G_{ext}\right]\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)}$$

en utilisant la solution trouvée à l'ordre 0 comme approximation de la vitesse :

$$u_{ext}(r,\phi) = \text{rot}\,\psi_{0,ext}(r,\phi) + \mathcal{O}(C_{a,f})$$

Il faut donc construire le terme $(\Delta u_{ext})_r$ avec l'expression de la fonction courant :

$$\bar{\psi}_{0,ext}(\bar{r},\bar{\phi}) = \frac{\bar{r}\left[(\bar{\phi}-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\bar{\phi} + \bar{\phi}\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\bar{\phi})\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}$$

qui se remet dans les coordonnées $(r,\phi)$ grâce à la relation $\bar{\phi} = \dfrac{\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{ext}(r,C_{a,f},\beta)}\phi$ tel que :

$$\psi_{0,ext}(r,\phi) = \frac{r\left[(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi + \phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}$$

On a alors :

$$u_{ext}(r,\phi) = \begin{pmatrix} u_r(r,\phi) \\ u_\phi(r,\phi) \end{pmatrix} = \text{rot}\,\psi_{0,ext}(r,\phi) + \mathcal{O}(C_{a,f})$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sin\phi + (\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\cos\phi + \cos\theta_{0,ext}(\beta)\left[\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi) - \phi\cos(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi)\right]}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} \\ \dfrac{-(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))\sin\phi - \phi\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\theta_{0,ext}(\beta)-\phi)}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(C_{a,f})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}(\Delta u_{ext})_r &= \Delta u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r = \underbrace{\partial^2_{rr}u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r}_{=0} + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r \\ &= -\frac{2}{r^2}\left[\frac{\sin\phi - \cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin(\phi-\theta_{0,ext}(\beta))}{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta) - \theta_{0,ext}(\beta)}\right] + \mathcal{O}(C_{a,f})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta u_{ext})_r|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{r^2\left[\theta_{0,ext}(\beta) - \cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]} + \mathcal{O}(C_{a,f})$$

L'équation s'écrit alors :

$$\partial_r p_{ext}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2C_{a,f}\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{r^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]} - C_{a,f}\,\partial_r G_{ext}|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

($u_0 = \dot{X}_f(t)$et $L = h_f(t)$) que l'on peut écrire sous forme dimensionnée telle que :

$$\partial_r p_{ext}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2u_0\mu\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{r^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]} - \varrho g\,\partial_r G_{ext}|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

On retrouve bien l'expression de Snoeijer où pour lui les forces extérieures (gravité) s'écrivent $\Phi = -\varrho g x$ car son écoulement se fait sur un plan à la verticale. Ici nous avons alors $\Phi|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = -\varrho g\, G_{ext}|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)}$ où $G_{ext}(r,\phi) = r\sin(\omega+\phi)$, on retrouve l'expression de Snoeijer pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ et en notant que son $U = -u_0$.

On repasse alors en coordonnées cartésiennes $x = r\cos\phi$ et à l'interface nous avons : $\frac{h}{r} = \sin\theta_{0,ext}(\beta) + \mathcal{O}(C_{a,f})$, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\partial_r p_{ext}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2u_0\mu\sin\theta_{0,ext}(\beta)}{r^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]} - \partial_r\Phi|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\left(\partial_r x\partial_x p_{ext} + \partial_r z\partial_z p_{ext}\right)\big|_{z=h} = \frac{2u_0\mu\sin^3\theta_{0,ext}(\beta)}{h^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]}\\
&\quad - \left(\partial_r x\partial_x\Phi + \partial_r z\partial_z\Phi\right)|_{z=h} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\cos\theta_{0,ext}(\beta)\,\partial_x p_{ext}\big|_{z=h} + \sin\theta_{0,ext}(\beta)\,\partial_z p_{ext}\big|_{z=h} = \frac{2u_0\mu\sin^3\theta_{0,ext}(\beta)}{h^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]}\\
&\quad - \cos\theta_{0,ext}(\beta)\,(\partial_x\Phi)|_{z=h} - \sin\theta_{0,ext}(\beta)\,(\partial_z\Phi)|_{z=h} + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{\kappa}d_x\left(p_{ext}(x,h)\right) = \frac{2u_0\mu\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)\tan\theta_{0,ext}(\beta)}{\kappa h^2\left[\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)\right]} - \frac{1}{\kappa}d_x\left(\Phi(x,h)\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

avec $h = x\tan\theta_{0,ext}(\beta)$. La condition de continuité des contraintes tangentielles adimensionnée à l'interface nous donne :

$$C_{a,f}\left[\left\{\nabla u_{ext} + (\nabla u_{ext})^t\right\}\cdot\vec{n}_{sl}\right]\cdot\vec{n}_{sl}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \mathrm{Courb}(r) + p_{ext}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} - p_{atm}$$

or :

$$\left[\left\{\nabla u_{ext} + (\nabla u_{ext})^t\right\}\cdot\vec{n}_{sl}\right]\cdot\vec{n}_{sl}\big|_{\phi=\theta_{0,ext}(\beta)} = \mathcal{O}(C_{a,f})$$

Donc, en coordonnées cartésiennes :

$$p_{ext}\big|_{z=h} = p_{atm} - \mathrm{Courb}(x) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

Ainsi si on dérive l'équation précédente dimensionnée :

$$d_x\left(p_{ext}(x,h)\right) = -\kappa\partial_x\mathrm{Courb}(x) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)$$

Donc en posant $F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)\tan\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)}$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa}d_x\left(p_{ext}(x,h)\right) = \frac{2u_0\mu}{\kappa h^2}F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) - \frac{1}{\kappa}d_x\left(\Phi(x,h)\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)\\
\Leftrightarrow\quad &\partial_x\mathrm{Courb}(x) = -\frac{3C_{a,f}}{h^2}F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) + \frac{1}{\kappa}d_x\left(\Phi(x,h)\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned} \tag{7.10}$$

où le coefficient $U/U^* = -1$ car il a posé $U_{adv} = -U^*$ et nous $U_{adv} = u_0$. On retrouve donc la même expression que Snoeijer que nous allons utiliser comme référence dans le paragraphe suivant. Cette équation sur la courbure de la surface libre est basée sur de la lubrification avec angle quelconque mais adhérence au fond, il n'y a pas de modèle de front. Nous allons maintenant essayer de construire une équation du même type avec un modèle de glissement.

#### 7.2.2.2 Pour $\kappa_\nu(h^*)$ régulier en $h^*$

Nous souhaitons ici proposer un modèle à une équation sur la hauteur du fluide avec un modèle de glissement. On peut poser $\kappa_\nu(h^*) = h^{*\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ainsi l'équation (7.9) devient :

$$\partial_{h^*} p\left(h^*\right) h^*_{x^*} - \frac{1}{W_e} h^* h^*_{x^* x^* x^*} = \frac{1}{R_e}\left(\frac{R_e}{F_r^2} h^* \sin\omega - \frac{\dot{X}^*_f(t^*)\, h^{*\alpha}}{1+\frac{h^{*1+\alpha}}{3}}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\partial_{h^*} p(h^*) \quad &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h^* \cos\omega + \frac{2}{3}\left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{h^{*(3-\alpha)}\left(2h^{*(1+\alpha)} - 3\alpha\right)}{3+h^{*(1+\alpha)}} \\
&+ \frac{1}{45}\left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h^{*3} \frac{45\alpha^2 + 20h^{*(2+\alpha)} - 60\alpha h^* + 90\alpha h^{*(-\alpha)} - 48h^*}{3+h^{*(1+\alpha)}} \\
&+ \frac{1}{5}\left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h^{*5} \frac{21\alpha - 5\alpha^2 + (7\alpha-6)\, h^{*(1+\alpha)} - 15\alpha^2 h^{*(-1-\alpha)} - 2h^{*2(1+\alpha)}}{\left(3h^* + h^{*(2+\alpha)}\right)\left(3+h^{*(1+\alpha)}\right)}
\end{aligned}$$

Pour $h^*$ petit et $-\frac{7}{2} \leq \alpha \leq 3$, les termes dominants sont :

$$\partial_{h^*} p\left(h^*\right) = \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h^* \cos\omega - \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{\alpha^2 h^{*(3-\alpha)}}{3}$$

Donc dans un premier temps, on peut supposer que $\kappa_\nu(h^*)$ est constant et sa dérivée aussi, donc on a à résoudre :

$$\partial_{h^*} p\left(h^*\right) h^*_{x^*} - \frac{h^* h^*_{x^* x^* x^*}}{W_e} = \frac{1}{R_e}\left(\frac{R_e h^* \sin\omega}{F_r^2} - \frac{\dot{X}^*_f(t^*)\, \kappa_\nu(h^*)}{1+\frac{\kappa_\nu(h^*)h^*}{3}}\right)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\partial_{h^*} p(h^*) \quad &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h^* \cos\omega + \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{h^{*2}}{\left(\kappa_\nu(h^*)\right)^2}\left[1 - \frac{3}{3+\kappa_\nu(h^*)\, h^*}\right] \\
&+ \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) \frac{h^{*3}}{\kappa_\nu(h^*)}\left[\frac{4}{3} - \frac{5}{3+\kappa_\nu(h^*)\, h^*}\right] \\
&+ \left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h^{*4}\left[\frac{4}{9} - \frac{12}{5}\frac{1}{3+\kappa_\nu(h^*)\, h^*}\right] \\
&- \frac{2}{5}\left(\bar{\lambda}^2 \sin^2\omega\right) h^{*5}\left[\frac{\kappa_\nu(h^*)}{3+\kappa_\nu(h^*)\, h^*}\right]
\end{aligned}$$

à l'ordre 2 en $h^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{h^*} p(h^*) \quad &= \frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h^* \cos\omega + \mathcal{O}\left(h^{*2}\right) \\
\frac{R_e}{F_r^2} h^* \sin\omega - \frac{\kappa_\nu(h^*)}{1+\frac{\kappa_\nu(h^*)h^*}{3}} \dot{X}^*_f\left(t^*\right) \quad &= -\kappa_\nu\left(h^*\right) \dot{X}^*_f\left(t^*\right) + \left(\frac{R_e}{F_r^2}\sin\omega + \frac{\kappa_\nu^2(h^*)\, \dot{X}^*_f(t^*)}{3}\right) h^* + \mathcal{O}\left(h^{*2}\right)
\end{aligned}$$

donc l'équation s'écrit :

$$h^*_{x^*x^*x^*} = \frac{W_e}{F_r^2}\underbrace{\left(\cos\omega h^*_{x^*} - \sin\omega\right)}_{=-\vec{g}^*=-\text{gravité}} + \frac{W_e}{R_e}\kappa_v\left(h^*\right)\dot{X}^*_f\left(t^*\right)\left(\frac{1}{h^*} - \frac{\kappa_v\left(h^*\right)}{3}\right) + \mathcal{O}\left(h^{*2}\right)$$

On redimensionne avec $\frac{1}{\kappa_v(h^*)} = \frac{\mu}{\kappa_f(h)h_0}$, $u_0\dot{X}^*_f\left(t^*\right) = \dot{X}_f\left(t\right)$ et $x = h_0x^* + X_f\left(t\right)$, on trouve alors (en oubliant le $\mathcal{O}\left(h^{*2}\right)$) :

$$\boxed{h_{xxx} = \frac{\kappa_f\left(h\right)\dot{X}_f\left(t\right)}{\kappa}\left(\frac{1}{h} - \frac{\kappa_f\left(h\right)}{3\mu}\right) - \frac{\rho g_0}{\kappa}\left(\sin\omega - \cos\omega h_x\right)}$$

On compare alors à l'équation (7.10) dans le dièdre en externe :

$$\partial_x\text{Courb}\left(x\right) = -\frac{3C_{a,f}}{h^2}F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) + \frac{1}{\kappa}d_x\left(\Phi\left(x,h\right)\right)$$

où $\nabla\Phi = -\varrho g_0\vec{g}$ et $F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = \frac{2}{3}\frac{\sin^2\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\tan\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right) - \cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right)} \geq 1$ pour $0 < \theta_{0,ext}\left(\beta\right) < \frac{\pi}{2}$ et $F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) < 0$ pour $\frac{\pi}{2} < \theta_{0,ext}\left(\beta\right) \leq \pi$, mais $\theta_{0,ext}\left(\beta\right) > \frac{\pi}{2}$ n'a pas de sens pour un écoulement film mince. On peut remarquer que le modèle de glissement microscopique intervient au travers de $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$ par la loi de raccord à 3 zones.

Donc pour que les deux approches soient compatibles, il faut que :

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa_f\left(h\right)\dot{X}_f\left(t\right)}{\kappa}\left(\frac{1}{h} - \frac{\kappa_f\left(h\right)}{3\mu}\right) = -\frac{3C_{a,f}}{h^2}F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) \\
\Leftrightarrow\quad & \kappa_f^2\left(h\right) - \frac{3\mu\kappa_f\left(h\right)}{h} - \frac{9\mu\kappa C_{a,f}}{h^2\dot{X}_f\left(t\right)}F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \kappa_f^2\left(h\right) - \frac{3\mu}{h}\kappa_f\left(h\right) - \frac{9\mu^2}{h^2}F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

or :

$$\Delta = \frac{9\mu^2}{h^2}\left(1 + 4F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)\right) \geq 0 \text{ pour } \theta_{0,ext} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$$

donc on trouve une loi de glissement macroscopique :

$$\boxed{\frac{\kappa_f\left(h\right)}{\mu} = \frac{3}{2h}\left[1 + \sqrt{1 + 4F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)}\right] = \frac{\mathcal{A}}{h}}$$

La longueur de glissement associée est :

$$L_{gliss} = \frac{\mu}{\kappa_f\left(h\right)} = \frac{2h}{3\left[1 + \sqrt{1 + 4F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)}\right]} \underset{\theta_{0,ext}(\beta)\ll 1}{\sim} \frac{2h}{3\left[1 + \sqrt{5}\right]}$$

où $F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = \frac{2}{3}\frac{\sin^2\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\tan\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right) - \cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right)} \underset{\theta_{0,ext}(\beta)\ll 1}{\sim} 1 + \frac{1}{5}\theta^2_{0,ext}\left(\beta\right) + \mathcal{O}\left(\theta^4_{0,ext}\left(\beta\right)\right)$ et $\theta_{0,ext}\left(\beta\right) = \tan^{-1}\left(h_x\right)$.

*Remarque.* Pour un glissement nul ($\kappa_v(h^*) \to +\infty$), on a :

$$\left[\frac{1}{F_r^2}h^*\cos\omega + \frac{2}{45}\left(\bar{\lambda}^2\sin^2\omega\right)h^{*4}\right]h^*_{x^*} - \frac{1}{W_e}h^*h^*_{x^*x^*x^*} = \frac{1}{R_e}\left(\frac{R_e}{F_r^2}h^*\sin\omega - \frac{3\dot{X}_f^*(t^*)}{h^*}\right) + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon})$$

De plus si l'on néglige la tension de surface, on peut voir que pour $h^*$ petit, la pente est infinie. Or on ne peut donc pas négliger la tension de surface si facilement !

### 7.2.3 Modèle Saint-Venant avec glissement simple

Nous avons donc obtenu une loi de glissement à partir des équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant précédemment construits. On peut alors noter que $\kappa_v\left(h'\right) = \frac{h_0\kappa_f(h)}{\mu} = \frac{\mathscr{A}h_0}{h} = \frac{\mathscr{A}h_0}{h_0h'} = \frac{\mathscr{A}}{h'}$ or on a déjà étudié ce cas dans la partie 3.6 page 56 et trouvé le système de Saint-Venant associé (à l'ordre 0) sous forme conservative :

$$\boxed{\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left(\dfrac{q'^2}{h'} + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h'^5\left(\dfrac{9+2\mathscr{A}}{225(3+\mathscr{A})}\right) + \dfrac{h'^2\cos\omega}{2F_r^2}\right)_{x'} - \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h'h'_{x'x'x'} \\ \qquad = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}h'\sin\omega - \dfrac{3\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}\dfrac{q'}{h'^2}\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\dfrac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}} \tag{7.11}$$

avec $\mathscr{A} = \frac{3}{2}\left[1+\sqrt{1+4F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}\right]$, $F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = \frac{2}{3}\frac{\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)\tan\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)}$ et $\theta_{0,ext}(\beta)$ l'angle de contact du front. Donc $\mathscr{A}$ dépend de $\theta_{0,ext}(\beta)$ et nous savons que la surface libre vérifie $h(x,t) = |-x|\tan\theta_{0,ext}(\beta)$ et donc que la pente de la surface libre adimensionnée est $h'_{x'}\left(x',t'\right) = \bar{\varepsilon}^{-1}\tan\theta_{0,ext}(\beta) + \mathcal{O}\left(\bar{\varepsilon}^{-1}C_{a,f}\right)$ (cf équation 7.6 page 178) ainsi on a : $\theta_{0,ext}(\beta) = \tan^{-1}\left(\bar{\varepsilon}h'_{x'}\right)$. Donc $\mathscr{A}$ s'écrit :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = \mathscr{A}\left(\tan^{-1}\left(\bar{\varepsilon}h'_{x'}\right)\right) = \mathscr{A}_0 + \tan^{-1}\left(\bar{\varepsilon}h'_{x'}\right)\left.\frac{\partial\mathscr{A}(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)} + \ldots$$

où $\mathscr{A}(0) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{45}+3\right) = \mathscr{A}_0$, le modèle est alors :

$$\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left(\dfrac{q'^2}{h'} + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h'^5\left(\dfrac{9+2\mathscr{A}_0}{225(3+\mathscr{A}_0)}\right) + \dfrac{h'^2\cos\omega}{2F_r^2}\right)_{x'} - \bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h'h'_{x'x'x'} \\ \qquad = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}h'\sin\omega - \dfrac{3\mathscr{A}_0}{3+\mathscr{A}_0}\dfrac{q'}{h'^2}\right) - \dfrac{9\bar{\varepsilon}h'_{x'}}{\bar{\beta}(3+\mathscr{A}_0)^2}\left.\dfrac{\partial\mathscr{A}(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)}\dfrac{q'}{h'^2} + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\dfrac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}$$

avec $\tan^{-1}\left(\bar{\varepsilon}h'_{x'}\right) \approx \bar{\varepsilon}h'_{x'}$ (hors de la zone du front). De plus à l'ordre 0, on a : $\bar{\lambda}h'\sin\omega - \frac{3\mathscr{A}_0}{3+\mathscr{A}_0}\frac{q'}{h'^2} = \mathcal{O}(\bar{\varepsilon})$ donc $q' = \bar{\lambda}h'^3\sin\omega\frac{3+\mathscr{A}_0}{3\mathscr{A}_0} + \mathcal{O}(\bar{\varepsilon})$ ainsi :

$$\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left(\dfrac{q'^2}{h'} + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h'^5\left(\dfrac{9+2\mathscr{A}_0}{225(3+\mathscr{A}_0)}\right) + \left(1 + \dfrac{6\tan\omega}{\mathscr{A}_0(3+\mathscr{A}_0)}\left.\dfrac{\partial\mathscr{A}(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)}\right)\dfrac{\cos\omega}{2F_r^2}h'^2\right)_{x'} \\ \qquad -\bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h'h'_{x'x'x'} = \dfrac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}h'\sin\omega - \dfrac{3\mathscr{A}_0}{3+\mathscr{A}_0}\dfrac{q'}{h'^2}\right) + \mathcal{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\dfrac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases}$$

Il y a donc un terme correctif supplémentaire sur la pression. On peut voir que pour des angles petits ce terme est faible :

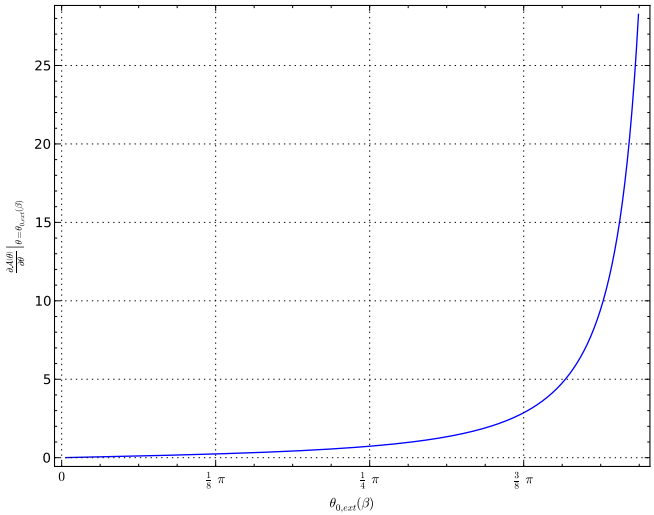



FIGURE 7.4: Évolution de $\left.\frac{\partial \mathscr{A}(\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)}$ en fonction de $\theta_{0,ext}(\beta)$

### 7.2.4 Conclusion

Le modèle final s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left( \dfrac{q'^2}{h'} + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h'^5 \left( \dfrac{9+2\mathscr{A}_0}{225\,(3+\mathscr{A}_0)} \right) + \left( 1 + \dfrac{6\tan\omega}{\mathscr{A}_0\,(3+\mathscr{A}_0)} \left.\dfrac{\partial \mathscr{A}(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_{0,ext}(\beta)} \right) \dfrac{\cos\omega}{2F_r^2} h'^2 \right)_{x'} \\ \qquad -\bar{\kappa}\dfrac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}} h' h'_{x'x'x'} = \dfrac{1}{\bar{\beta}} \left( \bar{\lambda} h' \sin\omega - \dfrac{3\mathscr{A}_0}{3+\mathscr{A}_0} \dfrac{q'}{h'^2} \right) + \mathscr{O}\left( \bar{\beta} + \bar{\delta} + \dfrac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}} \right) \end{cases}} \tag{7.12}$$

où apparaît une correction dans le terme de pression hydrostatique et qui peut-être vu comme un correctif de l'inclinaison du fond. Toutefois on peut raisonnablement considérer cette correction comme faible lorsque l'angle dynamique (ou apparent) n'est pas trop grand.

Le chapitre suivant va donc porter sur l'étude du modèle (7.12) avec $\mathscr{A}$ constant, de manière théorique et numérique. Nous nous comparerons aux modèles existants de la littérature (études de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71], Whitham [75]). Notons que le système incluant le terme correctif en pression (i.e. $\mathscr{A}$ non constant) n'est pas plus compliqué à étudier, mais rajouterait de la lourdeur au modèle. Nous n'étudierons donc pas son influence dans ce travail.

CHAPITRE 8

# MODÈLES DE LUBRIFICATION AVEC GLISSEMENT SIMPLE

Dans le chapitre précédent, nous avons trouvé un modèle simple de glissement : $\kappa_f(h) = \frac{3\mu}{2h}\left[1+\sqrt{1+4F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}\right] = \frac{\mathscr{A}\mu}{h}$ ( $S(h) = \frac{1}{\kappa_f(h)}$ ) avec $\mathscr{A} = \frac{3}{2}\left[1+\sqrt{1+4F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}\right]$. On note que $\mathscr{A}$ est sans dimension et $F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)$ est une fonction que l'on retrouve dans la formulation de Snoeijer [66]. On peut alors la ré-écrire en utilisant la fonction $\mathscr{G}$ ainsi :

$$\begin{aligned} F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) &= \frac{2}{3}\frac{\sin^2\theta_{0,ext}(\beta)\tan\theta_{0,ext}(\beta)}{\theta_{0,ext}(\beta)-\cos\theta_{0,ext}(\beta)\sin\theta_{0,ext}(\beta)} = \frac{2}{3}\frac{\sin\theta_{0,ext}(\beta)\tan\theta_{0,ext}(\beta)}{\mathscr{G}'\left(\theta_{0,ext}\right)} \\ &= \frac{2}{3}\frac{\cos\theta_{0,ext}(\beta)\tan^2\theta_{0,ext}(\beta)}{\mathscr{G}'\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)} \end{aligned}$$

On utilise maintenant la relation issue du raccord de la surface libre en trois zones : $\mathscr{G}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) - \mathscr{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right) = 2C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ ainsi $\theta_{0,ext} = \mathscr{G}^{-1}\left(\mathscr{G}\left(\theta_{0,int}\right) + 2C_{a,f}\left|\ln\beta\right|\right)$ et donc :

$$F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) = F\left(\mathscr{G}^{-1}\left(\mathscr{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right) + 2C_{a,f}\left|\ln\beta\right|\right)\right)$$

et est donc constante. Dans ce chapitre, nous allons étudier l'influence des paramètres : $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$, $\theta_{0,int}(\beta)$, $\theta_{0,ext}(\beta)$ sur le modèle. Puis nous étudierons les modèles de la littérature : Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71], Whitham [75] de manière à nous resituer par rapport à leurs résultats. Nous ferons alors des simulations numériques sur notre modèle en y ajoutant un film précurseur comme cela est fait dans les articles cités et nous testerons aussi ce modèle sur front sec.

## Sommaire


8.1 Étude des paramètres du modèle . . . . . **192**
8.2 Modèle de type Benney . . . . . **195**
8.2.1 Études de la littérature . . . . . 195
8.2.2 Application à notre modèle . . . . . 197
8.2.3 Étude du modèle de Snoeijer [66] . . . . . 201
8.3 Simulations numériques . . . . . **202**
8.3.1 Écoulement instationnaire . . . . . 202
8.3.2 Calcul de la forme de l'onde stationnaire . . . . . 203

On peut noter que $\kappa_v\left(h'\right) = \frac{h_0\kappa_f(h)}{\mu} = \frac{\mathscr{A}h_0}{h} = \frac{\mathscr{A}h_0}{h_0h'} = \frac{\mathscr{A}}{h'}$ or on a déjà étudié ce cas dans la partie 3.6 page 56 et trouvé le système de Saint-Venant associé (à l'ordre 0) sous forme conservative (en excluant le terme correctif en pression) :

$$\begin{cases} h'_{t'} + q'_{x'} = 0 \\ q'_{t'} + \left(\frac{q'^2}{h'} + \left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h'^5\left(\frac{9+2\mathscr{A}}{225\left(3+\mathscr{A}\right)}\right) + \frac{h'^2\cos\omega}{2F_r^2}\right)_{x'} - \bar{\kappa}\frac{\bar{\delta}}{\bar{\beta}}h'h'_{x'x'x'} \\ \quad = \frac{1}{\bar{\beta}}\left(\bar{\lambda}h'\sin\omega - \frac{3\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}\frac{q'}{h'^2}\right) + \mathscr{O}\left(\bar{\beta}+\bar{\delta}+\frac{\bar{\alpha}\bar{\delta}}{\bar{\beta}}\right) \end{cases} \tag{8.1}$$

On peut alors redimensionner les équations :

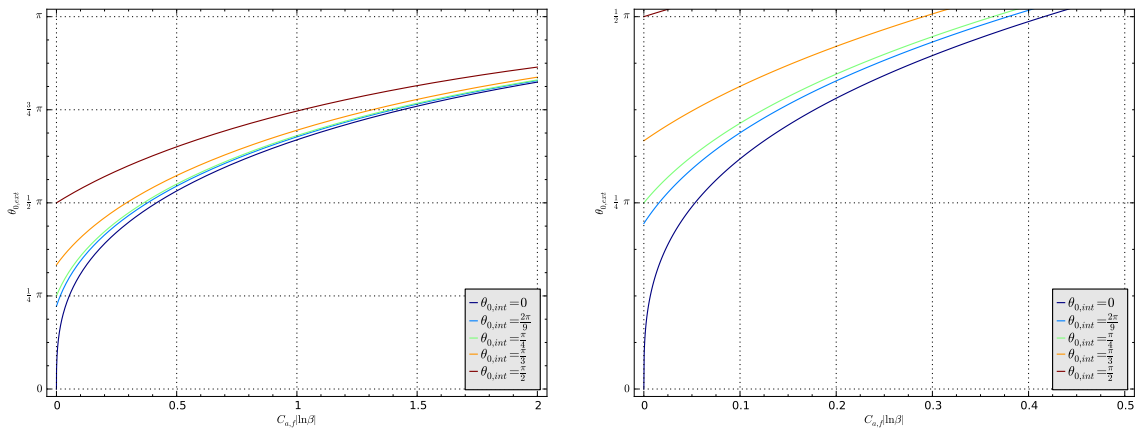
$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left(\frac{q^2}{h} + \left(\frac{g_0\rho}{\mu}\sin\omega\right)^2 h^5\left(\frac{9+2\mathscr{A}}{225\left(3+\mathscr{A}\right)}\right) + g_0\frac{h^2\cos\omega}{2}\right)_{x'} - \frac{\kappa}{\rho}hh_{xxx} \\ \quad = g_0h\sin\omega - \frac{\mu}{\rho}\frac{3\mathscr{A}}{3+\mathscr{A}}\frac{q}{h^2} + \mathscr{O}\left(\bar{\varepsilon}^2u_0^2\right) \end{cases}$$

## 8.1 Étude des paramètres du modèle

On a donc besoin de connaître le comportement de $\mathscr{A}$ en fonction de $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$. Or la condition de raccord à trois zones (6.1) du front donne :

$$\theta_{0,ext}\left(\beta\right) = \mathscr{G}^{-1}\left(\mathscr{G}\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) + 2C_{a,f}\left|\ln\beta\right|\right) = \mathscr{G}^{-1}\left(\mathscr{G}\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) + 2\frac{\dot{X}_f\left(t\right)\mu}{\kappa}\left|\ln\left(\frac{\alpha\mu}{h_f\left(t\right)}\right)\right|\right)$$

avec $\mathscr{G}\left(\theta\right) = \int_0^\theta \frac{\vartheta-\cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$ et $\theta_{0,int}\left(\beta\right)$ est l'angle statique, il est donné par la loi de Young-Dupré [76] (cf partie 5.3.3.1 page 120) et $\dot{X}_f\left(t\right)$ est la vitesse du front donné par le Saint-Venant et le paramètre $\frac{\alpha\mu}{h_f(t)}$ sera fixé dans le modèle (glissement macroscopique). On peut alors regarder l'évolution de $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$ en fonction de la valeur de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}\left(\beta\right)$ :




(a) (b)

FIGURE 8.1: $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$ en fonction de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}\left(\beta\right)$

On retrouve le graphe de Cox [15] où lui avait pris $\theta_{0,int}\left(\beta\right) = \theta_w = 40° = \frac{2\pi}{9}$. On observe alors que rapidement $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$ devient plus grand que $\frac{\pi}{2}$, ce qui ne convient pas aux films minces qui

nous intéressent ici, on n'utilisera que des valeurs de $\theta_{0,ext}(\beta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la zone du graphe qui nous intéresse est sur la figure 8.1 (b). On peut voir que dans le cas $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$, on retrouve le résultat du développement à 2 zones avec $\theta_{0,int}(\beta) \sim \theta_{0,ext}(\beta)$. Ainsi on a trouvé une plage de validité pour le paramètre $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| = \frac{1}{2}\left(\mathscr{G}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) - \mathscr{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)$ en fonction de l'angle microscopique $\theta_{0,int}(\beta)$ de la forme :

$$0 \leq C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \leq \frac{1}{2}\left(\mathscr{G}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathscr{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right)\right)$$

On peut observer ce domaine de validité sur le graphe (8.2). On peut voir que plus $\theta_{0,int}(\beta)$ est petit,

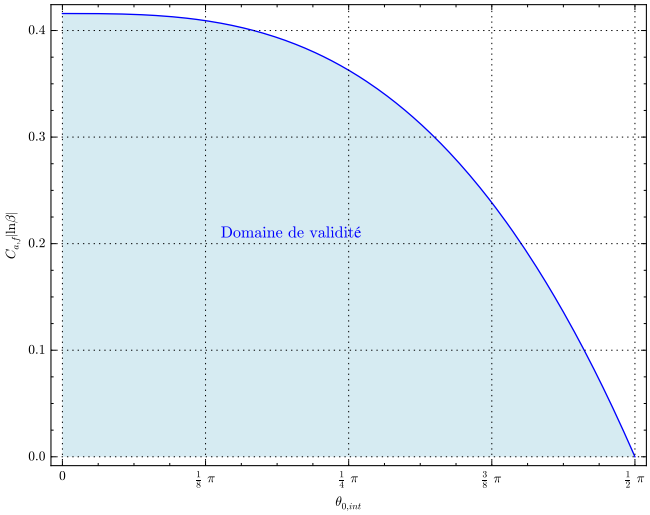



FIGURE 8.2: Domaine de validité de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$

plus l'intervalle de valeur acceptables pour $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ est grand mais la valeur maximale de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ est 0.42 (valeur pour $\theta_{0,int}(\beta) = 0$). On peut alors afficher les valeurs de $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différents $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ :

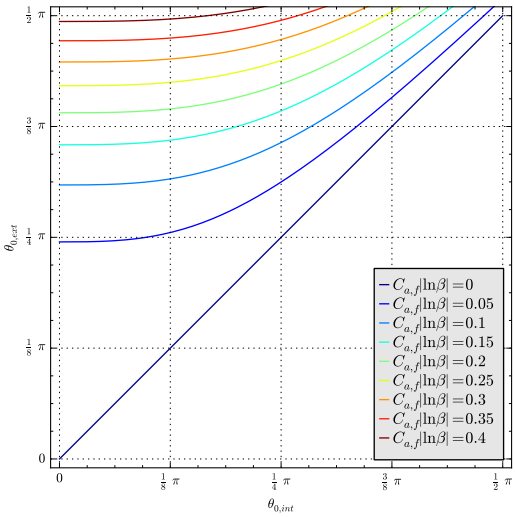



FIGURE 8.3: $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$

On voit alors que pour des vitesses faibles ( $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| = 0$ ) les deux angles sont égaux, pour des vitesses plus grandes, l'écart entre les deux angles augmente rapidement.

Si on s'intéresse maintenant à la fonction $F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sin^2\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\tan\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}{\theta_{0,ext}\left(\beta\right) - \cos\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\sin\theta_{0,ext}\left(\beta\right)}$ , on peut la représenter en fonction de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}\left(\beta\right)$ :

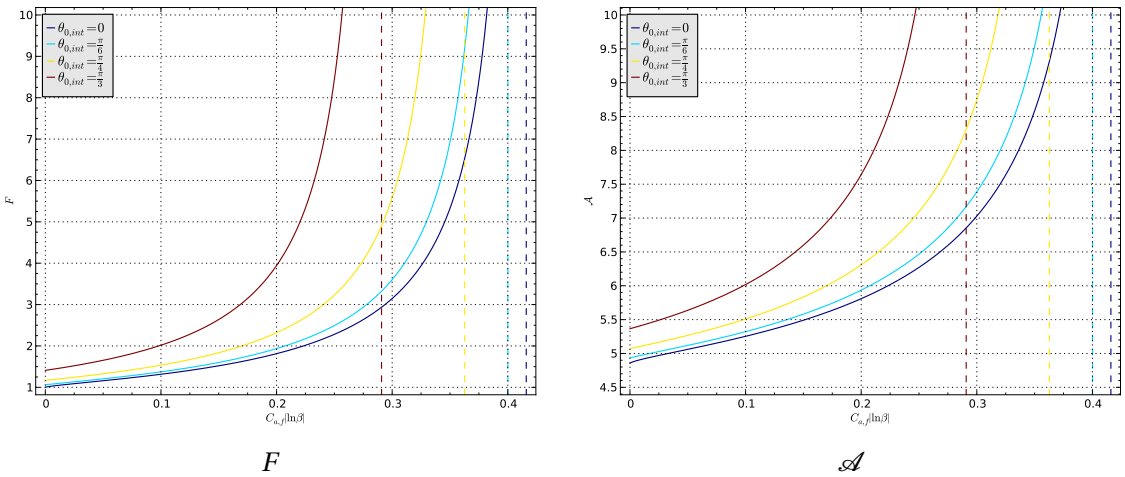



FIGURE 8.4: $F$ et $\mathscr{A}$ en fonction de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour différentes valeurs de $\theta_{0,int}\left(\beta\right)$

On voit que la fonction $F$ à une valeur limite de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ pour laquelle elle tend vers l'infini (les asymptotes associées sont représentée en pointillés de la même couleur).

On peut observer le comportement de $\mathscr{A} = \dfrac{3}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4F\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right)}\right]$ pour les mêmes données sur le deuxième graphique de la figure (8.4). On peut alors voir que $\mathscr{A} \to +\infty$ quand on atteint une vitesse suffisamment élevée, on est donc dans des régimes de vitesses où notre modèle de glissement n'est plus valide. On peut voir que dans ce cas, on retrouve le système de Saint-Venant standard sans glissement (3.7). Or comme on le voit sur le graphe suivant $\mathscr{A} \to +\infty$ quand $\theta_{0,ext}\left(\beta\right) \to \frac{\pi}{2}$ :

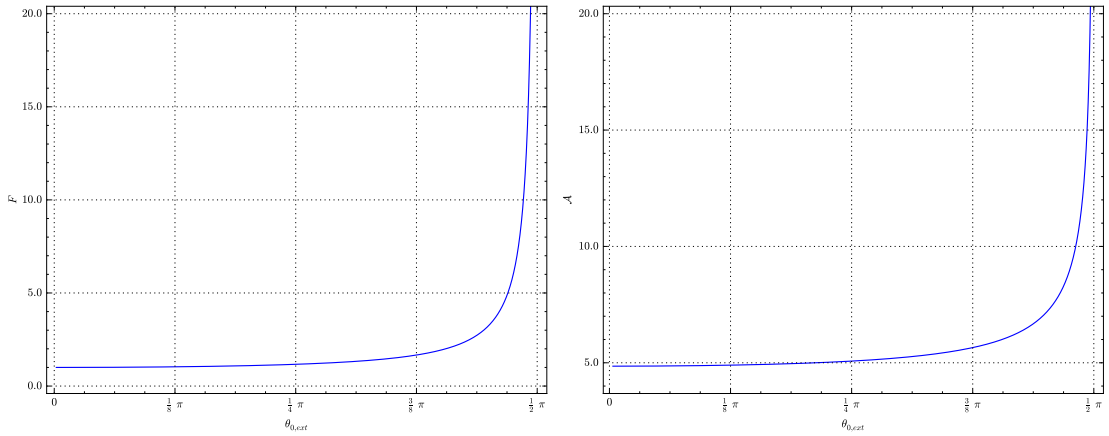



FIGURE 8.5: $F$ et $\mathscr{A}$ en fonction de $\theta_{0,ext}\left(\beta\right)$

ce qui correspond au cas d'un front droit et aussi au fait que le paramètre $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ est très grand et donc vitesse très grande, on sort donc du domaine de validité de nos modèles de fronts. Notons que $\lim\limits_{\theta_{0,ext}(\beta)\to 0} F = 1$ et $\lim\limits_{\theta_{0,ext}(\beta)\to 0} \mathscr{A} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{45} + 3\right) \approx 4.85$.

*Remarque.* On peut alors étudier la stabilité du modèle Saint-Venant, on trouve facilement que la condition nécessaire de stabilité est :

$$R_e < \frac{5\left(\mathscr{A}^2+6\mathscr{A}+9\right)\mathscr{A}\cot\omega}{6\mathscr{A}^3+37\mathscr{A}^2+75\mathscr{A}+45}$$

On peut alors remarquer que si on fait tendre $\mathscr{A} \to +\infty$, on fait disparaître le glissement, on trouve alors la condition de stabilité du modèle de Saint-Venant classique :

$$R_e < \frac{5\left(\mathscr{A}^2+6\mathscr{A}+9\right)\mathscr{A}\cot\omega}{6\mathscr{A}^3+37\mathscr{A}^2+75\mathscr{A}+45} \underset{\mathscr{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{5}{6}\cot\omega$$

Ce résultat se retrouve directement à partir de l'équation de Benney associée à ce modèle.

Nous allons maintenant étudier le modèle de type Benney associé à ce modèle de glissement simple. En effet celui-ci est plus simple à coder et nous pouvons nous comparer aux études de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71], ce qui n'est pas le cas pour le modèle Saint-Venant proposé.

## 8.2 Modèle de type Benney

Dans cette partie, nous allons présenter les études déjà réalisées et montrer en quoi notre modèle est diffèrent et permet d'étudier plus finement le problème au niveau du front.

### 8.2.1 Études de la littérature

Bertozzi et Brenner [4] dans leur article, reprennent l'étude de Troian *et al.* [71], ils cherchent la vitesse et la pression selon la théorie de lubrification (adhérence et angles dynamiques petits) et doivent résoudre (cf film uniforme de Nusselt section 3.4 page 49 sans glissement) :

$$\begin{cases} u_y(y) = -\dfrac{\rho g_0}{\eta}\sin\alpha \\ u_y(h) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} p_y(y) = -\rho g_0 \cos\alpha \\ p(h) = -\gamma\nabla^2 h + p_0 \end{cases}$$

où $\alpha$ est l'inclinaison de la paroi solide, $\gamma$ leur tension de surface, $\eta$ leur viscosité dynamique, $\nabla^2 h$ la courbure et $p_0$ la pression atmosphérique. On trouve alors :

$$\begin{aligned} u\left(x,y,t\right) &= \tfrac{\rho g_0}{\eta}\sin\alpha\left(h(x,t)-\tfrac{y}{2}\right)y \\ p\left(x,y,t\right) &= -\rho g_0\cos\alpha\left(y-h\right)-\gamma\nabla^2 h+p_0 \end{aligned}$$

Ils utilisent alors les équations de Stokes stationnaires :

$$\begin{aligned} &(i) \quad \nabla\cdot u = 0 \\ &(ii) \quad \nabla p = \eta\Delta u + \rho\vec{g} = \eta\Delta u + \rho g_0 \sin\alpha\vec{x} \end{aligned}$$

L'équation des moments en $x$ s'écrit :

$$p_x = \eta u_{yy} + \rho g_0 \sin\alpha\vec{x}$$

et intégrant deux fois selon $y$, on trouve :

$$u = P_x\frac{y^2}{2\eta} - \frac{y^2}{2\eta}\rho g_0\sin\alpha\vec{x} + A_1 y + B_1$$

où $A_1$et $B_1$ sont des constantes d'intégration et en notant que $p_x = \left(-\rho g_0 \cos\alpha \left(y-h\right) - \gamma\nabla^2 h + p_0\right)_x = \left(\rho g_0 \cos\alpha h - \gamma\nabla^2 h\right)_x = P_x$. Or $u(0) = 0$ donc $B_1 = 0$ et $u_y(h) = 0$ donc :

$$u_y\left(y=h\right) = \underbrace{P_x}_{\text{fonction de x}} \frac{h}{\eta} - \frac{h}{\eta}\rho g_0 \sin\alpha + A_1 = 0$$

et on a :

$$u = \frac{1}{\eta}\left(P_x - \rho g_0 \sin\alpha\right)\left(\frac{y^2}{2} - hy\right)$$

Ainsi :

$$V = \frac{1}{h}\int_0^h u dy = -\frac{h^2}{3\eta}\left(P_x - \rho g_0 \sin\alpha\right)$$

De plus en intégrant l'équation de conservation de la masse sur la hauteur du fluide, on a déjà vu que l'on obtient (cf 3.1.1.1 page 45) :

$$h_t + \nabla\cdot(hV) = 0$$

ce qui se récrit tel que :

$$\boxed{3\eta h_t + \left(h^3\left(\gamma h_{xxx} - \rho g_0 \cos\alpha h_x\right) + \rho g_0 \sin\alpha h^3\right)_x = 0}$$

On adimensionne alors les inconnues tel que (cf Kondic [45]) :

$$h = H_N \bar{h},\ x = l\bar{x},\ y = l\bar{y},\ t = \frac{l}{U}\bar{t}$$

et on obtient :

$$3\eta U h_t + H_N^2\left(\frac{H_N}{l}h^3\left(\frac{\gamma}{l^2}h_{xxx} - \rho g_0 \cos\alpha h_x\right) + \rho g_0 \sin\alpha h^3\right)_x = 0$$

Si on pose de plus :

$$l = \left(\frac{a^2 H_N}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{3}},\ \frac{l}{U} = \frac{3\eta a^2 l}{\gamma H_N^2 \sin\alpha},\ a = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g_0}}$$

alors on a :

$$\boxed{h_t + \left(h^3\left(h_{xxx} - D(\alpha)h_x\right) + h^3\right)_x = 0} \tag{8.2}$$

avec $D(\alpha) = (3C_a)^{\frac{1}{3}}\cot\alpha$. Cherchons maintenant les « Travelling waves » de ce problème (avec un film précurseur d'épaisseur $b \ll 1$) : on cherche $h\left(x,y,t\right) = h_0(X) = h_0(x-Ut)$, donc $h_t = -Uh_0^{'}$ et $h_x = h_0^{'}$ :

$$-Uh_0^{'} + \left(h_0^3\right)^{'} + \left(h_0^3\left(h_0^{'''} - D(\alpha)h_0^{'}\right)\right)^{'} = 0$$

On intègre une fois selon $X$ pour obtenir :

$$\boxed{-Uh_0 + h_0^3 + h_0^3\left(h_0^{'''} - D(\alpha)h_0^{'}\right) = d}$$

où $d$ est une constante d'intégration. On pose comme condition limite :

$$\begin{array}{lll} h_0 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1, & h_0^{'} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0, & h_0^{'''} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \\ h_0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} b, & h_0^{'} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, & h_0^{'''} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}$$

où $b$ est l'épaisseur du film précurseur. Pour $x \to -\infty$, l'équation devient : $-U+1 = d$ et pour $x \to +\infty$, $-Ub + b^3 = d$ ainsi on retrouve :

$$\begin{cases} d = -b\frac{1-b^2}{1-b} \\ U = \frac{1-b^3}{1-b} \end{cases}$$

### 8.2.2 Application à notre modèle

Nous souhaitons maintenant construire un modèle similaire à celui de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45] à partir du modèle de film mince avec front obtenu dans le chapitre précédent. Nous avons déjà écrit un modèle d'ordre 1 de type Benney (cf 3.7 page 59) :

$$\begin{aligned} & h_t + \left( \frac{(3+\kappa_v(h))\,h^2}{3\kappa_v(h)} \left[\bar{\delta}\bar{\kappa} h_{xxx} + \bar{\lambda}\sin\omega - \bar{\delta}\cos\omega h_x\right] \right)_x \\ & + \left( \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^3 h_x}{\kappa_v^3(h)} + \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^4 h_x}{3\kappa_v^4(h)} \left[5\left(\kappa_v(h)\right)^2 - 6\kappa_v^{'}(h)\right] \right)_x \\ & + \left( \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^5 h_x}{5\kappa_v^5(h)} \left[4\left(\kappa_v(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_v^{'}(h)\right)^2 - 10\left(\kappa_v(h)\right)^2 \kappa_v^{'}(h)\right] \right)_x \\ & + \left( \frac{\bar{\beta}\left(\bar{\lambda}\sin\omega\right)^2 h^6 h_x}{15\kappa_v^4(h)} \left[2\left(\kappa_v(h)\right)^4 + 5\left(\kappa_v^{'}(h)\right)^2 - 7\left(\kappa_v(h)\right)^2 \kappa_v^{'}(h)\right] \right)_x = 0 \end{aligned}$$

Pour $\kappa_v(h) = \frac{\mathscr{A}}{h}$ et $\mathscr{A} = \frac{3}{2}\left[1 + \sqrt{1 + 4F\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right)}\right]$, on a alors :

$$\begin{aligned} & h_t + \left( h^3 + \frac{(3+\mathscr{A})}{3\mathscr{A}} h^3 \left[\bar{\delta}\bar{\kappa} h_{xxx} - \bar{\delta}\cos\omega h_x\right] \right)_x \\ & + \bar{\beta}\left( h^6 h_x \frac{3\left(2\mathscr{A}^3 + 19\mathscr{A}^2 + 60\mathscr{A} + 60\right)}{5\mathscr{A}\left(\mathscr{A}+3\right)^2} \right)_x = 0 \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on peut voir que les auteurs utilisent les équations de Stokes en considérant que l'écoulement est laminaire et donc que le nombre de Reynolds est négligeable. Ici nous voyons apparaître dans notre équation un terme en $\bar{\beta} = \bar{\varepsilon} R_e$, on pourrait garder ce terme visqueux mais nous souhaitons ne conserver ici que les termes Stokes en retirant les termes Navier. On peut donc faire la même hypothèse que précédemment en posant $R_e \ll 1$ ce qui revient à négliger le terme en $\bar{\beta}$, on a donc :

$$h_t + \left( h^3 + \frac{(3+\mathscr{A})}{3\mathscr{A}} h^3 \left[\bar{\delta}\bar{\kappa} h_{xxx} - \bar{\delta}\cos\omega h_x\right] \right)_x = 0 \tag{8.3}$$

où on rappelle que $\kappa_v^{'}(h) = -\frac{\mathscr{A}}{h^2}$ et $\bar{\lambda}\sin\omega = \frac{3\kappa_v(h_0=1)}{\kappa_v(h_0=1)+3} = \frac{3\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}$.

#### 8.2.2.1 Ondes stationnaires

Cherchons maintenant les « Travelling waves » de ce problème (avec un film précurseur d'épaisseur $b \ll 1$) : on cherche $h(x,y,t) = \bar{h}(X) = \bar{h}(x - u_0 t)$, donc $h_t = -u_0 \bar{h}^{'}$ et $h_x = \bar{h}^{'}$ :

$$-u_0 \bar{h}^{'} + \left( \frac{3+\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3} \bar{h}^3 + \frac{(3+\mathscr{A})}{3\mathscr{A}} \bar{h}^3 \left[\bar{\delta}\bar{\kappa}\bar{h}^{'''} - \bar{\delta}\cos\omega \bar{h}^{'}\right] \right)^{'} = 0$$

On intègre une fois selon $X$ :

$$-u_0\bar{h}+\frac{3+\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\bar{h}^3+\frac{(3+\mathscr{A})}{3\mathscr{A}}\bar{h}^3\left[\bar{\delta}\bar{\kappa}\bar{h}'''-\bar{\delta}\cos\omega\bar{h}'\right]=d$$

où $d$ une constante d'intégration. On rappelle que (cf 3.3.1 page 47 et 3.2 page 47) :

$$\bar{\delta}=\frac{\bar{\varepsilon}R_e}{F_r^2}=\frac{h_0^3g_0\rho}{Lu_0\mu},\qquad \bar{\kappa}=\frac{\bar{\varepsilon}^2F_r^2}{W_e}=\frac{\kappa}{g_0\rho L^2},\qquad \bar{\lambda}=\frac{R_e}{F_r^2}=\frac{\rho g_0h_0^2}{\mu u_0}$$

et :

$$\bar{\lambda}\sin\omega=\frac{R_e}{F_r^2}\sin\omega=\frac{\rho h_0^2g_0}{\mu u_0}\sin\omega=\frac{3\kappa_v(h_0=1)}{\kappa_v(h_0=1)+3}=\frac{3\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}$$

donc :

$$u_0=\frac{h_0^2(\mathscr{A}+3)\rho g_0\sin\omega}{3\mathscr{A}\mu}$$

Ainsi l'équation devient :

$$-u_0\bar{h}+\bar{h}^3+\bar{h}^3\left[\frac{\kappa h_0}{L^3\rho g_0\sin\omega}\bar{h}'''-\frac{h_0}{L}\cot\omega\bar{h}'\right]=d$$

Si on veut trouver une forme similaire à Bertozzi et Brenner [4], on peut poser :

$$L=\left(\frac{\kappa h_0}{\rho g_0\sin\omega}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Ce qui fixe la valeur de $\bar{\varepsilon}=\frac{h_0}{L}=\left(\frac{\rho g_0\sin\omega h_0^2}{\kappa}\right)^{\frac{1}{3}}$. Ainsi on obtient (en utilisant $\rho g_0\sin\omega=\frac{3\mathscr{A}\mu u_0}{h_0^2(\mathscr{A}+3)}$) :

$$\boxed{-u_0\bar{h}+\bar{h}^3\bar{h}'''-\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}D(\omega)\bar{h}^3\bar{h}'+\bar{h}^3=d}\tag{8.4}$$

avec $D(\omega)=(3C_a)^{\frac{1}{3}}\cot\omega$. On pose alors comme condition limite :

$$\begin{array}{lll}\bar{h}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}1, & \bar{h}'\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0, & \bar{h}'''\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0\\ \bar{h}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}b, & \bar{h}'\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0, & \bar{h}'''\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0\end{array}$$

où $b$ est l'épaisseur du film précurseur. Pour $x\to-\infty$, l'équation devient :

$$-u_0+1=d$$

et pour $x\to+\infty$ :

$$-u_0b+b^3=d$$

ainsi on retrouve les valeurs de Bertozzi et Brenner [4] :

$$\begin{cases}d=-b\frac{1-b^2}{1-b}=-b(1+b)\\ u_0=\frac{1-b^3}{1-b}=1+b+b^2\end{cases}$$

Notons que si $\mathscr{A}\to+\infty$ (adhérence au fond), on retrouve l'équation de Bertozzi et Brenner [4] :

$$-u_0\bar{h}+\bar{h}^3\bar{h}'''-(3C_a)^{\frac{1}{3}}\cot\omega\bar{h}^3\bar{h}'+\bar{h}^3=d$$

#### 8.2.2.2 Comportement du nouveau coefficient

Nous avons obtenu un modèle stationnaire (8.4) où on peut voir que seul le coefficient $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}$ est nouveau. Ce paramètre fait intervenir le glissement près du front, nous allons ici étudier son influence dans l'équation. Notons que lorsque ce paramètre vaut 1 nous retrouvons l'équation de Bertozzi et Brenner [4].

Dans la limite où l'angle dynamique $\theta_{0,ext}(\beta)$ s'annule, nous avons $\mathscr{A}(\theta_{0,ext}=0)=\mathscr{A}_0=\frac{\sqrt{45}+3}{2}\approx 4.85$, nous pouvons alors écrire un modèle très simple (où pour ne pas alourdir les notations, on écrit $h$ au lieu de $\bar{h}$) :

$$-u_0 h + h^3 h''' - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega)\, h^3 h' + h^3 = d$$

avec $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}\approx 0.62$ et $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 0.852$ ce qui est déjà assez proche de 1.

Nous pouvons aussi utiliser $\mathscr{A}_m=5$ comme approximation de $\mathscr{A}_0$ avec 3% d'erreur, le modèle est alors encore plus simple à écrire :

$$-u_0 h + h^3 h''' - \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega)\, h^3 h' + h^3 = d$$

où $\left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\approx 0.855$ (3% de plus que pour $\mathscr{A}_0$), le modèle est donc très proche de celui avec $\mathscr{A}_0$. Cependant cela nous permet une plus grande plage de validité pour la valeur de $\theta_{0,ext}(\beta)$. On peut voir sur la figure suivante que pour $0\le\theta_{0,ext}(\beta)\le 0.67$, $\mathscr{A}\in[\mathscr{A}_0,\mathscr{A}_m=5]$ (tirets rouges) :

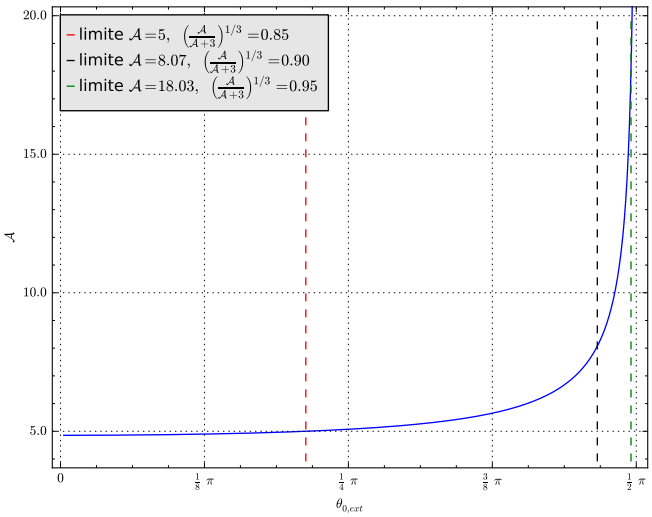



FIGURE 8.6: $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$

Nous avons aussi tracé les limites où le coefficient $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}$ est très proche de 1, en tirets noirs $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}=0.90$ et en vert $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}=0.95$. On peut alors voir que le modèle simple proposé couvre plus du tiers du domaine ($0\le\theta_{0,ext}(\beta)\le 0.67$) et que le modèle sans glissement est valide à partir de $\theta_{0,ext}(\beta)\approx 1.46\approx\frac{15\pi}{16}$ (pour $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}=0.90$) ou $\theta_{0,ext}(\beta)\approx 1.56$ (pour $\left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}}=0.95$). Notons que le modèle avec $\mathscr{A}_0$ n'a que 4.5% d'erreur si nous l'utilisons jusque $\theta_{0,ext}(\beta)=\frac{\pi}{4}$, nous couvrons alors la moitié du domaine de $\theta_{0,ext}(\beta)$.

Nous avons donc vu que le paramètre $\mathscr{A}$ dépend de $\theta_{0,ext}(\beta)$ mais celui-ci dépend de la valeur de $\theta_{0,int}(\beta)$ et de celle du terme $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$. Dans le cas où $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|\ll 1$, nous avons vu que $\theta_{0,ext}(\beta)\approx$

$\theta_{0,int}(\beta)$ (modèle de front à deux zones de raccord) donc si nous sommes dans ce cas, nous avons la même plage de validité du modèle pour $\theta_{0,int}(\beta)$ que pour $\theta_{0,ext}(\beta)$. Mais si $C_{a,f}|\ln\beta| = \mathcal{O}(1)$ (modèle de front à trois zones de raccord), nous avons la relation suivante :

$$\theta_{0,ext}(\beta) = \mathcal{G}^{-1}\left(\mathcal{G}\left(\theta_{0,int}(\beta)\right) + 2C_{a,f}|\ln\beta|\right)$$

avec $\mathcal{G}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$, ainsi si le modèle est valide pour $0 \leq \theta_{0,ext}(\beta) \leq \frac{\pi}{4}$, on aura $0 \leq \theta_{0,int}(\beta) \leq \mathcal{G}^{-1}\left(\mathcal{G}\left(\theta_{0,ext}(\beta)\right) - 2C_{a,f}|\ln\beta|\right) \leq \frac{\pi}{4}$, ce que l'on a représenté sur le graphique suivant :

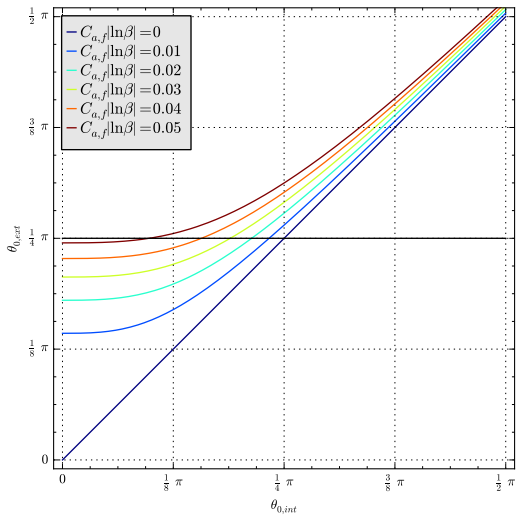



FIGURE 8.7: $\theta_{0,ext}(\beta)$ en fonction de $\theta_{0,int}(\beta)$ pour différentes valeurs de $C_{a,f}|\ln\beta|$

Pour des angles dynamiques tels que $0 \leq \theta_{0,ext}(\beta) \leq \frac{\pi}{4}$, on peut donc poser $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + a + \mathcal{O}(a^2)$, nous pouvons donc utiliser une version simplifiée de l'équation (8.4) :

$$-u_0 h + h^3 h''' - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{4a}{3\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+3\right)}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega)\, h^3 h' + h^3 = d \tag{8.5}$$

avec :

$$\begin{cases} d = -b\frac{1-b^2}{1-b} = -b(1+b) \\ u_0 = \frac{1-b^3}{1-b} = 1 + b + b^2 \end{cases}$$

et $b$ la hauteur du film précurseur.

#### 8.2.2.3 Écoulement instationnaire

Nous souhaitons maintenant faire des tests numériques sur l'équation (8.4) or comme l'explique Kondic [45] dans son article, il faudrait utiliser une méthode de tir non-linéaire pour cela or il est beaucoup plus aisé de résoudre l'équation instationnaire obtenue avec les hypothèses précédentes. Reprenons le modèle à une équation instationnaire (8.3) précédente :

$$h_t + \left(h^3\left[1 + \frac{(3+\mathcal{A})}{3\mathcal{A}}\bar{\delta}\bar{\kappa}h_{xxx} - \frac{(3+\mathcal{A})}{3\mathcal{A}}\bar{\delta}\cos\omega h_x\right]\right)_x = 0$$

Appliquons les hypothèses précédentes :

$$\bar{\delta} = \frac{\bar{\varepsilon} R_e}{F_r^2} = \frac{h_0^3 g_0 \rho}{L u_0 \mu}, \qquad \bar{\kappa} = \frac{\bar{\varepsilon}^2 F_r^2}{W_e} = \frac{\kappa}{g_0 \rho L^2}, \qquad u_0 = \frac{h_0^2 (\mathscr{A}+3) \rho g_0 \sin\omega}{3\mathscr{A}\mu}, \qquad L = \left(\frac{\kappa h_0}{\rho g_0 \sin\omega}\right)^{\frac{1}{3}}$$

donc :

$$h_t + \left(h^3 \left[1 + h_{xxx} - \left(\frac{3\mathscr{A} C_a}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}} \cot\omega h_x\right]\right)_x = 0$$

Posons $D(\omega) = (3C_a)^{\frac{1}{3}} \cot\omega$. Nous obtenons alors un modèle de la forme de Bertozzi et Brenner [4] :

$$\boxed{h_t + \left(h^3 \left[1 + h_{xxx} - \left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega) h_x\right]\right)_x = 0} \tag{8.6}$$

Notons que leur modèle n'est valide que pour une condition d'adhérence au fond. Nous retrouvons exactement leur modèle en passant à la limite $\mathscr{A} \underset{\theta_{0,ext}(\beta)\to\pi/2}{\longrightarrow} +\infty$ (où $\theta_{0,ext}(\beta)$ est l'angle dynamique, macroscopique) :

$$h_t + \left(h^3 \left[1 + h_{xxx} - D(\omega) h_x\right]\right)_x = 0$$

### 8.2.3 Étude du modèle de Snoeijer [66]

Dans son article Snoeijer [66] propose une équation de lubrification généralisée où il peut utiliser de grands angles dynamiques. Celle-ci s'écrit :

$$\partial_x \kappa = \frac{3C_a}{h^2} \frac{U}{U^*} F(\theta) + \frac{1}{\gamma} \partial_x \Phi(z=h)$$

où $\kappa = \frac{\partial_{xx} h}{(1+(\partial_x h)^2)^{\frac{3}{2}}}$ est la courbure, $U/U^*$ la vitesse d'avancement adimensionnée, $F(\theta_{0,ext}(\beta)) = \frac{2}{3} \frac{\sin^2\theta \tan\theta}{\theta - \cos\theta \sin\theta}$, $\gamma$ la tension de surface et $\Phi$ la gravité. Nous pouvons la récrire avec nos notations :

$$h_{xxx} - \frac{3C_a}{h^2} \frac{U}{U^*} F(\theta_{0,ext}(\beta)) + \frac{\rho g_0 \sin\omega}{\kappa} - \frac{\rho g_0}{\kappa} \cos\omega h_x = 0$$

Nous adimensionnons alors cette équation et utilisons les mêmes hypothèses que Bertozzi et Brenner [4] ( $L = \left(\frac{\kappa h_0}{\rho g_0 \sin\omega}\right)^{\frac{1}{3}}$ ) :

$$h_{xxx} - \frac{3\kappa C_a}{h_0^2 h^2 \rho g_0 \sin\omega} \frac{U}{U^*} F(\theta_{0,ext}(\beta)) + 1 - h_0 \left(\frac{\rho g_0 \sin\omega}{\kappa h_0}\right)^{\frac{1}{3}} \cot\omega h_x = 0$$

De plus nous avons $\rho g_0 h_0^2 \sin\omega = 3\mu u_0$, et $U = U_{adv} = U^*$ ainsi l'équation devient :

$$h^3 \left(h_{xxx} + 1 - (3C_a)^{\frac{1}{3}} \cot\omega h_x\right) - F(\theta_{0,ext}(\beta)) h = 0 \tag{8.7}$$

où $F(\theta_{0,ext}(\beta))$ représente la vitesse d'avancement du front. Par ailleurs, Bertozzi et Brenner ont travaillé avec l'hypothèse de lubrification, c'est-à-dire avec de petits angles, pour lesquels $F(\theta_{0,ext}(\beta) \ll 1) = 1$. Cette équation est valide pour des grandes valeurs de $\theta_{0,ext}$, mais présente la même structure que les modèles de lubrification classique.

Le modèle de lubrification de Bertozzi et Brenner [4], qui prend en compte un film précurseur d'épaisseur $b$ s'écrit :

$$h_0^3 \left(h_0''' + 1 - D(\alpha) h_0'\right) - U h_0 = d \tag{8.8}$$

Sans film précurseur, la vitesse d'avancée vaut $U = 1$ et la constante d'intégration $d = 0$. Ce modèle n'est valide que pour des petits angles.

Dans la limite du film précurseur de hauteur nulle, l'équation (8.8) est similaire à l'équation (8.7) dans la limite angle petit, et s'écrivent donc tous deux sous la forme :

$$h_0^3\left(h_0''' + 1 - D(\alpha)\, h_0'\right) - h_0 = 0$$

Ces deux modèles, bien que valides pour des gammes de valeurs de $\theta_{0,ext}(\beta)$ différentes ont en commun une même structure. En effet, cette structure est celle du modèle que nous proposons (8.4), mais qui lui est valide pour toutes les valeurs de $0 \leq \theta_{0,ext}(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$.

## 8.3 Simulations numériques

Nous allons maintenant réaliser des tests numériques sur les modèles construit précédemment.

### 8.3.1 Écoulement instationnaire

On reprend ici l'étude faite par Kondic [45] qui a retrouvé les résultats de Bertozzi et Brenner [4] et Troian *et al.* [71] en faisant des simulations numériques sur l'équation instationnaire (8.2) :

$$h_t = -\left(h^3 h_{xxx}\right)_x + D(\alpha)\left(h^3 h_x\right)_x - \left(h^3\right)_x$$

où on prendra comme conditions limites :

$$\begin{aligned} &h(0,t) = 1 \\ &h(L_x,t) = b \\ &h_x(0,t) = h_x(L_x,t) = 0 \end{aligned}$$

L'état initial utilisé pour les tests est une marche de hauteur 1 avec un film précurseur de hauteur $b$. Dans leurs simulations les auteurs utilisent différentes valeurs pour les paramètres $D(\alpha) = \{0, 1, 2.5, 5\}$ et $b = \left\{10^{-1},\ 10^{-2},\ 10^{-3}\right\}$. Le domaine d'étude est défini pour $0 \leq x \leq L_x$. On le divise en $N_x$ intervalles de longueur $\Delta x = {}^{L_x}/_{N_x}$ où les nœuds $x_i$ sont définis tels que $x_i = i\Delta x,\ i = 0, \ldots, N_x$. Notons $h_i(t)$ l'approximation de $h(x_i, t)$ ainsi l'équation s'écrit :

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = f_i, \quad i = 0, \ldots, N_x$$

où $f_i$ est la discrétisation du second membre de l'équation au point $x_i$. Le schéma en temps utilisé est un schéma explicite en temps :

$$\frac{h_i(t+\Delta t) - h_i(t)}{\Delta t} = f_i, \quad i = 0, \ldots, N_x$$

où $\Delta t$ est le pas de temps et est choisi par rapport au second membre. Le terme le plus instable de l'équation est $\left(h^3 h_{xxx}\right)_x$ ainsi la condition CFL sera de la forme : $\Delta t < C(\Delta x)^4$ avec $C \in [0,1]$. On aurait pu utiliser un schéma implicite pour avoir une condition CFL moins restrictive mais le schéma explicite est très satisfaisant.

Pour le second membre, nous utilisons les propositions faites par Kondic [45]. Il faut utiliser une discrétisation pour le terme en $g(h) = h^3$. Notons $a(s_1, s_2)$ sa discrétisation. Plusieurs propositions sont faites :

$$\begin{aligned} & a(s_1,s_2) = \tfrac{1}{2}\left[g(s_1) + g(s_2)\right] && = \tfrac{1}{2}\left[s_1^3 + s_2^3\right] \\ \text{ou} \quad & a(s_1,s_2) = g\left(\tfrac{1}{2}(s_1+s_2)\right) && = \left(\tfrac{1}{2}(s_1+s_2)\right)^3 \end{aligned}$$

Une dernière écriture de $a$ est proposée par Bertozzi [3], celle-ci permet de dissiper l'entropie du modèle et de préserver la positivité de la solution numérique. On a alors :

$$a(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{s_1 - s_2}{G'(s_1) - G'(s_2)} & \text{si } s_1 \neq s_2 \\ g(s_1) & \text{si } s_1 = s_2 \end{cases}$$

où $G''(h) = 1/g(h) = 1/h^3$ donc $G'(h) = -1/2h^2 + cste$ donc on a :

$$a(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{2s_2^2 s_1^2}{s_1 + s_2} & \text{si } s_1 \neq s_2 \\ s_1^3 & \text{si } s_1 = s_2 \end{cases}$$

or pour $s_1 = s_2$, $\frac{2s_2^2 s_1^2}{s_1+s_2} = s_1^3$ donc $a(s_1, s_2) = \frac{2s_2^2 s_1^2}{s_1+s_2}$.

On définit les dérivées avant et arrière en espace telles que :

$$h_{x,i} = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x}, \quad h_{\bar{x},i} = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x}$$

Ainsi les différents termes du second membre sont discrétisés tels que :

$$\begin{aligned} &\left(h^3 h_{xxx}\right)_{x,i} \approx \left(a(h_{i-1}, h_i)\, h_{\bar{x}x\bar{x},i}\right)_x \\ &\left(h^3 h_x\right)_{x,i} \approx \left(a(h_{i+1}, h_i)\, h_{x,i}\right)_{\bar{x}} \\ &\left(h^3\right)_{x,i} \approx \frac{h_{i+1}^3 - h_{i-1}^3}{2\Delta x} \end{aligned}$$

On a donc :

$$f_i = -\left(a(h_{i-1}, h_i)\, h_{\bar{x}x\bar{x},i}\right)_x + D(\alpha)\left(a(h_{i+1}, h_i)\, h_{x,i}\right)_{\bar{x}} - \frac{h_{i+1}^3 - h_{i-1}^3}{2\Delta x}$$

Le schéma est donc le suivant :

$$\frac{h_i^{N+1} - h_i^N}{\Delta t} = -\left(a(h_{i-1}, h_i)\, h_{\bar{x}x\bar{x},i}\right)_x + D(\alpha)\left(a(h_{i+1}, h_i)\, h_{x,i}\right)_{\bar{x}} - \frac{h_{i+1}^3 - h_{i-1}^3}{2\Delta x}, \quad i = 0, \ldots, N_x$$

en notant $h_i^N = h_i(t_N)$ pour $N \in [0, N_t]$ et $N_t = T_{max}/\Delta t$. Cette méthode a été codée avec succès ainsi que la méthode implicite exposée par Kondic [45]. Nous avons ainsi pu retrouver les résultats de l'article, qui toutefois sont plus qualitatifs que quantitatifs. En effet, pour bien développer l'onde stationnaire, il faut mailler une grande longueur, et calculer la solution sur des temps longs. Cette méthode est donc plus coûteuse et moins précise que le calcul direct de la forme de l'onde stationnaire au moyen de l'EDO (8.4).

### 8.3.2 Calcul de la forme de l'onde stationnaire

L'équation différentielle ordinaire (8.4) vérifiée par $h$ peut se mettre sous la forme (où pour ne pas alourdir les notations, on écrit $h$ au lieu de $\bar{h}$) :

$$F(h) = h^3 \left( h''' - \left( \frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A} + 3} \right)^{\frac{1}{3}} D(\omega)\, h' + 1 \right) - u_0 h - d = 0 \tag{8.9}$$

où $D(\omega) = (3C_a)^{\frac{1}{3}} \cot\omega$. On impose à gauche un film uniforme et non-perturbé (de surface libre plane) et de hauteur 1 (puisqu'adimensionné), et à droite un film précurseur de faible hauteur :

$$x \longrightarrow -\infty : h = 1 \quad ; \quad x \longrightarrow +\infty : \begin{cases} h = b \ll 1 \\ h' = 0 \end{cases} \tag{8.10}$$

L'équation à résoudre est un problème aux limites.

#### 8.3.2.1 Schéma numérique

On se place dans le domaine $x \in [0, L]$ avec $L$ suffisamment grand, et le problème à résoudre (8.4)-(8.10) devient :

$$\begin{cases} F(h(x)) = 0 & 0 < x < L \\ h = 1 & x = 0 \\ h = b,\ h' = 0 & x = L \end{cases}$$

On divise l'intervalle $[0, L]$ en $N-1$ intervalles de taille $\Delta x = \frac{L}{N-1}$. Les nœuds $x_i$ du maillage sont donnés par $x_i = i\Delta x,\ i = 0, ..., N-1$. Les approximations d'ordre 2 des dérivées intervenant dans le calcul de $F$ s'écrivent alors :

$$h'''(x_i) = \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2\Delta x^3} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

et :

$$h'(x_i) = \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$$

Une approximation de $F$ au point $i$ s'écrit alors :

$$F_i = h_i^3 \left( \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + 2h_{i-1} - h_{i-2}}{2\Delta x^3} - \left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega) \frac{h_{i+1} - h_{i-1}}{2\Delta x} + 1 \right) - u_0 h_i - d, \qquad i = 2 \ldots N-3.$$

Aux bords, on impose la hauteur :

$$F_0 = 1 - h_0 \text{ et } F_{N-1} = b - h_{N-1}.$$

La condition de dérivée nulle à droite s'écrit sous forme discrète :

$$h'(x_{N-1}) = \frac{h_N - h_{N-2}}{2\Delta x} = 0,$$

ce qui fait apparaître un point fantôme $h_N = h_{N-2}$, qui permet de calculer $F_{N-2}$ :

$$F_{N-2} = h_{N-2}^3 \left( \frac{-2h_{N-1} + h_{N-2} + 2h_{N-3} - h_{N-4}}{2\Delta x^3} - \left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega) \frac{h_{N-1} - h_{N-3}}{2\Delta x} + 1 \right) - u_0 h_{N-1} - d$$

À gauche on utilise une formule décentrée pour calculer $F_1$ :

$$F_1 = h_1^3 \left( \frac{-3h_0 + 10h_1 - 12h_2 + 6h_3 - h_4}{2\Delta x^3} - \left(\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{A}+3}\right)^{\frac{1}{3}} D(\omega) \frac{h_2 - h_0}{2\Delta x} + 1 \right) - U h_1 - d$$

Le problème (8.4)-(8.10) discrétisé par différences finies donne un système non-linéaire de $N$ équations à résoudre. Pour cela on utilise un algorithme de Newton, puisqu'on peut écrire la jacobienne facilement : $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial h_j}$. On peut remarquer que $J$ est une matrice bande de taille $6 \times N$, ce qui permet d'optimiser son stockage et son inversion. La méthode itérative de résolution se met sous la forme :

$$h^{(0)} = h_0$$
$$h^{(k+1)} = h^{(k)} - s^{(k)} \delta^{(k)},\ k \geq 0$$

où $h_0$ est une estimation initiale de la solution, $\delta^{(k)}$ est la direction de descente et $s^{(k)}$ représente la taille du pas (1 pour l'algorithme de Newton classique). On résout l'équation suivante pour trouver la direction de descente :

$$J\left(h^{(k)}\right) \delta^{(k)} = F\left(h^{(k)}\right),\ k \geq 0$$

et on itère avec un pas $s^{(k)}$, $(0 \leq s^{(k)} \leq 1)$ tel que $F\left(h^{(k)} - s^{(k)}\delta^{(k)}\right) \leq F\left(h^{(k)}\right)$, ce qui permet d'assurer une convergence monotone.

#### 8.3.2.2 Résultats

Nous avons retrouvé les résultats de Bertozzi et Brenner [4] où les hauteurs maximales sont représentées dans la figure 4 de leur article. Pour $\underline{D(\alpha) = 0}$, notre modèle n'est pas actif, on retrouve alors les résultats de Bertozzi et Brenner [4] et de Kondic [45] :

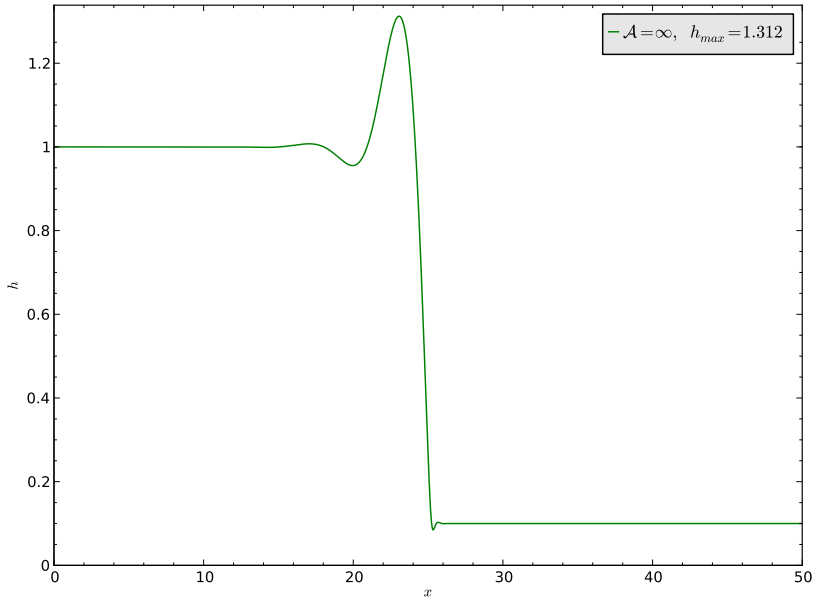



FIGURE 8.8: Cas sans glissement pour $D(\alpha) = 0$ et $b = 0.1$

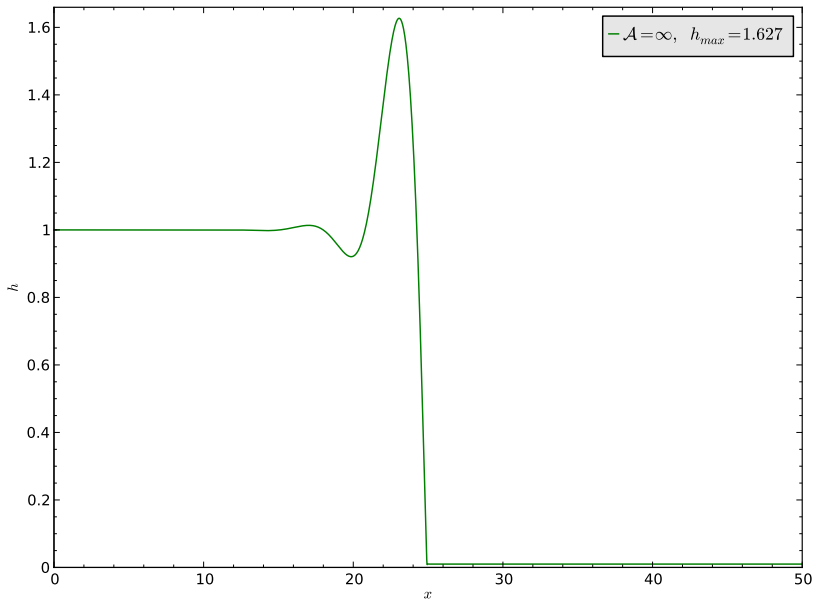



FIGURE 8.9: Cas sans glissement pour $D(\alpha) = 0$ et $b = 0.01$

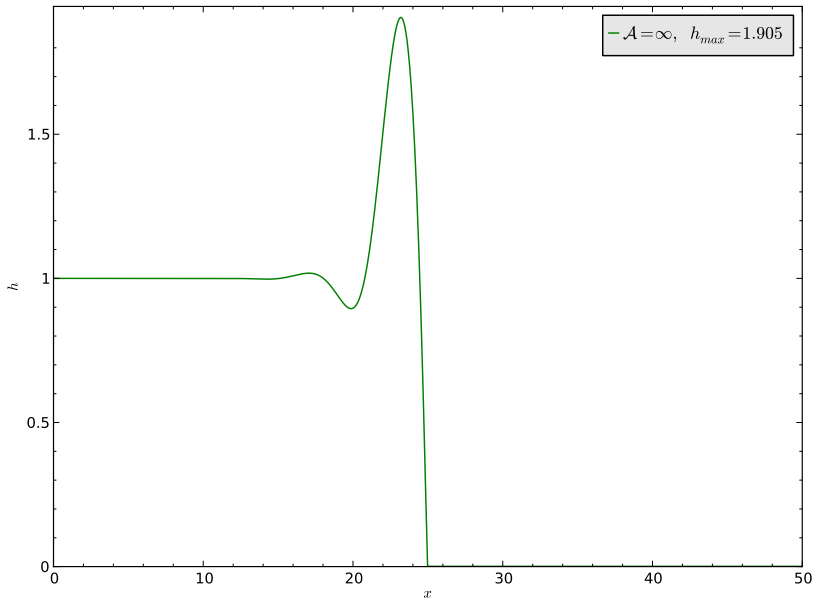



FIGURE 8.10: Cas sans glissement pour $D(\alpha) = 0$ et $b = 0.001$

Nous avons alors testé le modèle (8.4) pour $\underline{D(\alpha) = 2.5}$ avec $\mathscr{A} = +\infty$ (modèle sans glissement), $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m = 5\,(\approx \mathscr{A}_0)$ et $\mathscr{A} = 10$ pour avoir une valeur intermédiaire de $\mathscr{A}$ (cf figures (8.11)-(8.13)) :

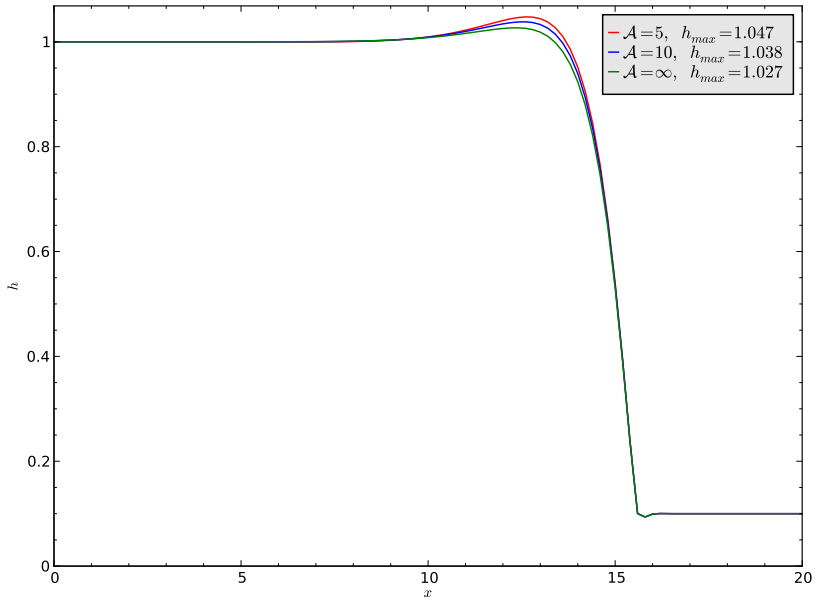



FIGURE 8.11: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 2.5$, $b = 0.1$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

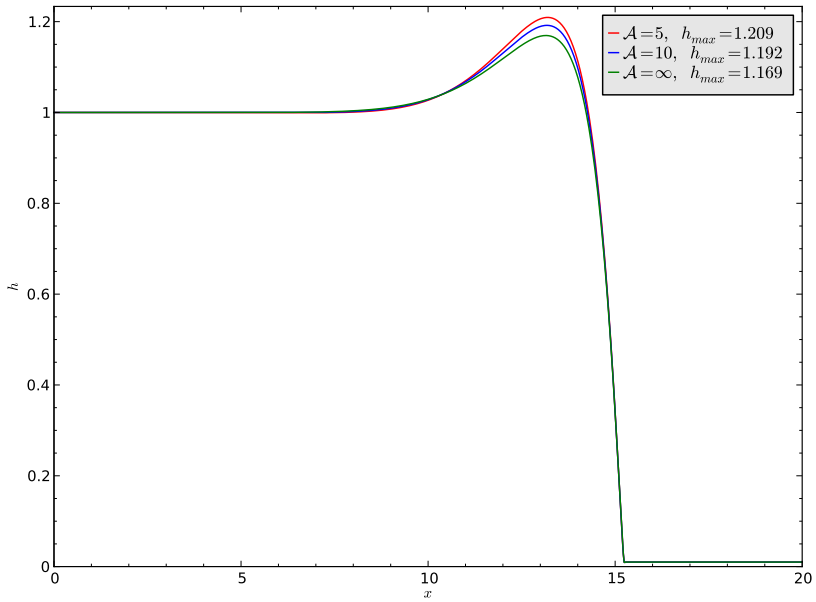



FIGURE 8.12: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 2.5$, $b = 0.01$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

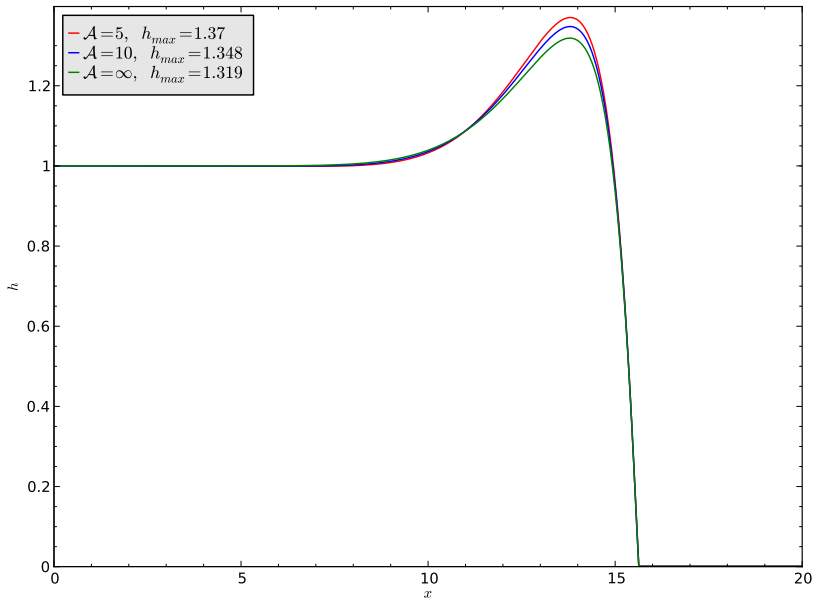



FIGURE 8.13: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 2.5$, $b = 0.001$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

On peut voir les profils mis à l'échelle (cf tableau (8.1)) :

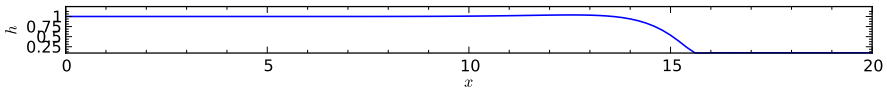
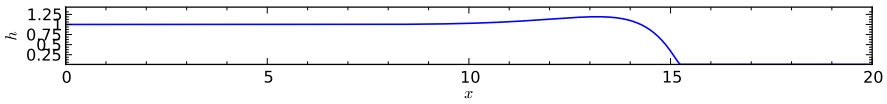
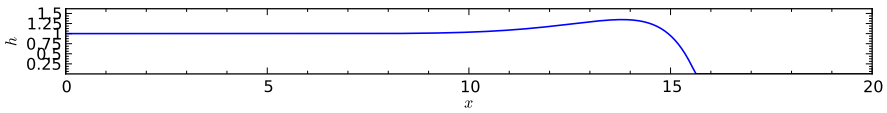
| | |
|---|---|
| $b = 0.1$ |   |
| $b = 0.01$ |   |
| $b = 0.001$ |   |

TABLE 8.1: Profils obtenus mis à l'échelle pour $D(\alpha) = 2.5$, $\mathscr{A} = 10$

Nous voyons qu'avec notre modèle les hauteurs maximales sont plus élevées (cf tableau (8.2)) :

| | $b = 0.1$ | $b = 0.01$ | $b = 0.001$ |
|---|---|---|---|
| $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m = 5$ | $h_{max} = 1.047$ | $h_{max} = 1.209$ | $h_{max} = 1.37$ |
| $\mathscr{A} = 10$ | $h_{max} = 1.038$ | $h_{max} = 1.192$ | $h_{max} = 1.348$ |
| $\mathscr{A} = +\infty$ | $h_{max} = 1.027$ | $h_{max} = 1.169$ | $h_{max} = 1.319$ |
| écart max en % | 1.95% | 3.4% | 3.9% |

TABLE 8.2: Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $D(\alpha) = 2.5$, $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

Il y a donc de 2,22% à 4% d'augmentation de la hauteur maximale lorsque l'on ajoute du glissement au modèle.

Nous avons aussi fait des tests avec $\underline{D(\alpha) = 5}$ qui est le cas limite pour $D(\alpha)$ c'est à dire que lorsqu'on l'augmente encore la forme de la surface libre ne change presque plus. Nous avons alors obtenu les résultats suivants (cf figure (8.14)-(8.3)) :

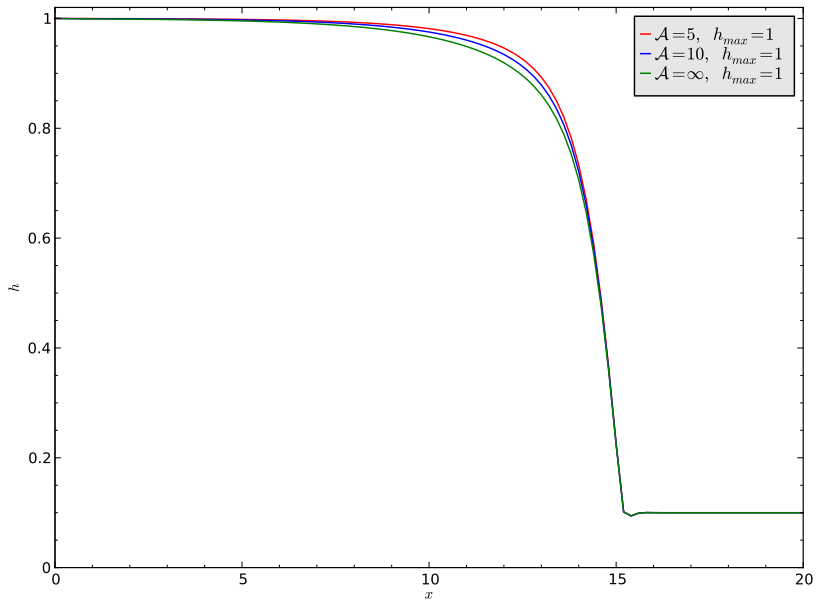



FIGURE 8.14: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 5$, $b = 0.1$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

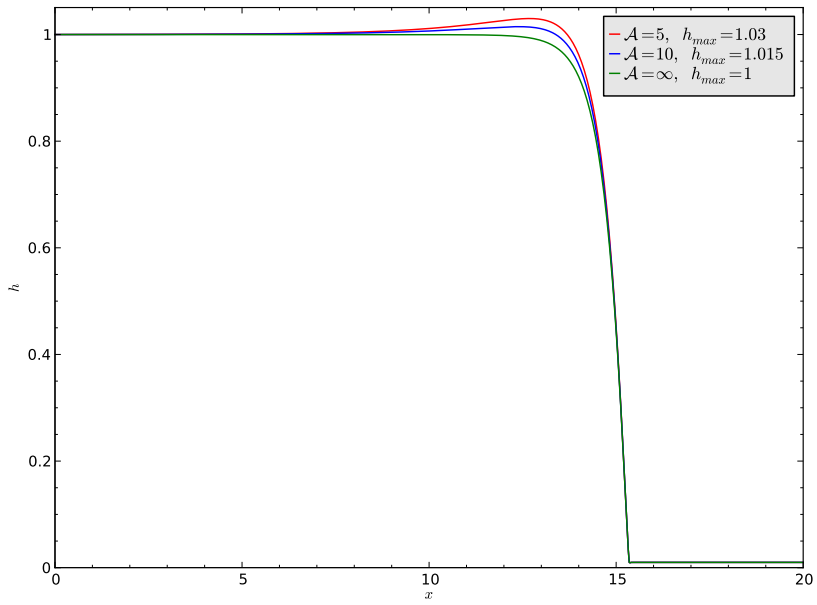



FIGURE 8.15: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 5$, $b = 0.01$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

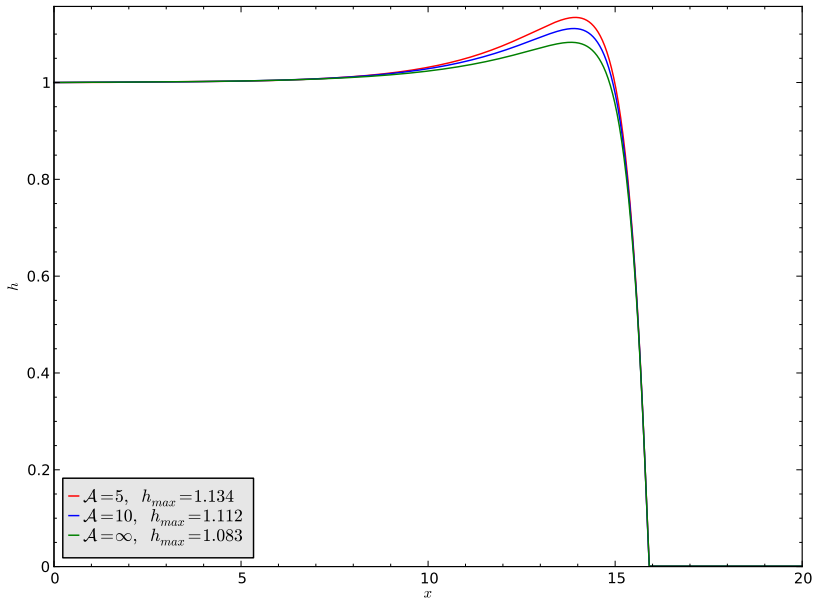



FIGURE 8.16: Cas avec glissement pour $D(\alpha) = 5$, $b = 0.001$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

On peut voir les profils mis à l'échelle :

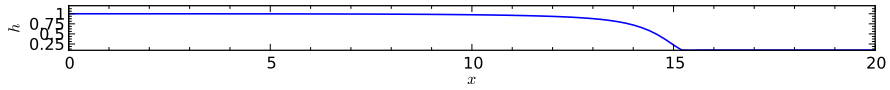
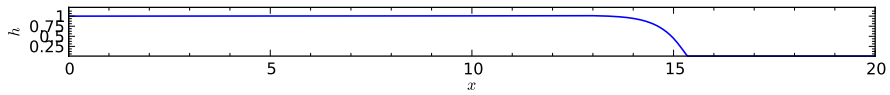
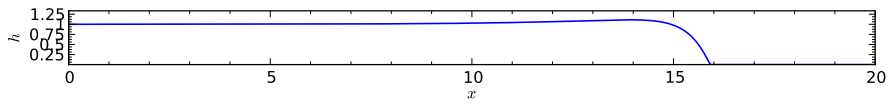
| | |
|---|---|
| $b = 0.1$ |  |
| $b = 0.01$ |  |
| $b = 0.001$ |  |

TABLE 8.3: Profils obtenus mis à l'échelle pour $D(\alpha) = 5$, $\mathscr{A} = 10$

Les hauteurs obtenues avec le nouveau modèle sont là aussi plus élevées (cf tableau (8.4)).

| | $b = 0.1$ | $b = 0.01$ | $b = 0.001$ |
|---|---|---|---|
| $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m = 5$ | $h_{max} = 1.$ | $h_{max} = 1.03$ | $h_{max} = 1.134$ |
| $\mathscr{A} = 10$ | $h_{max} = 1.$ | $h_{max} = 1.015$ | $h_{max} = 1.112$ |
| $\mathscr{A} = +\infty$ | $h_{max} = 1.$ | $h_{max} = 1.$ | $h_{max} = 1.083$ |
| écart en % | 0% | 3% | 4.7% |

TABLE 8.4: Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $D(\alpha) = 5$, $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

On a donc jusqu'à environ 5% d'écart entre le nouveau modèle avec glissement et le modèle classique. On peut voir que plus $b$ diminue plus la hauteur augmente, elle est d'autant plus grande que $\mathscr{A}$ est petit, or $\mathscr{A}_0$ est la valeur minimale de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}_{max} = +\infty$ qui est le cas sans glissement donc la bosse obtenue pour n'importe quelle valeur de $\mathscr{A}$ sera contenue entre la courbe verte et la courbe rouge.

Nous avons aussi testé les modèles sans film précurseur ($b = 0$) pour différentes valeurs de $D(\alpha)$ (cf figures (8.17)-(8.5)) :

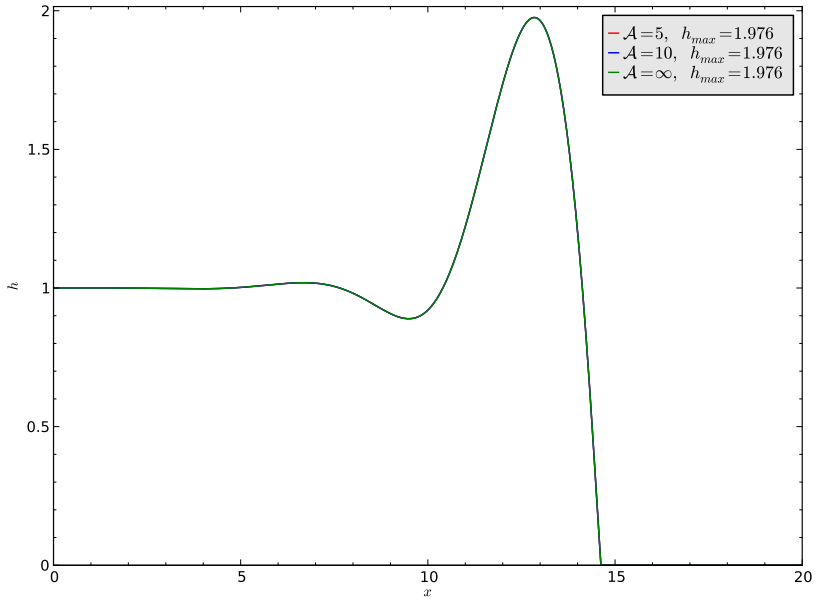



FIGURE 8.17: Cas avec glissement pour $b = 0$, $D(\alpha) = 0$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

Les trois courbes sont confondues car le modèle de glissement n'est pas actif quand $D(\alpha) = 0$. Pour $D(\alpha) = 2.5$, on a :

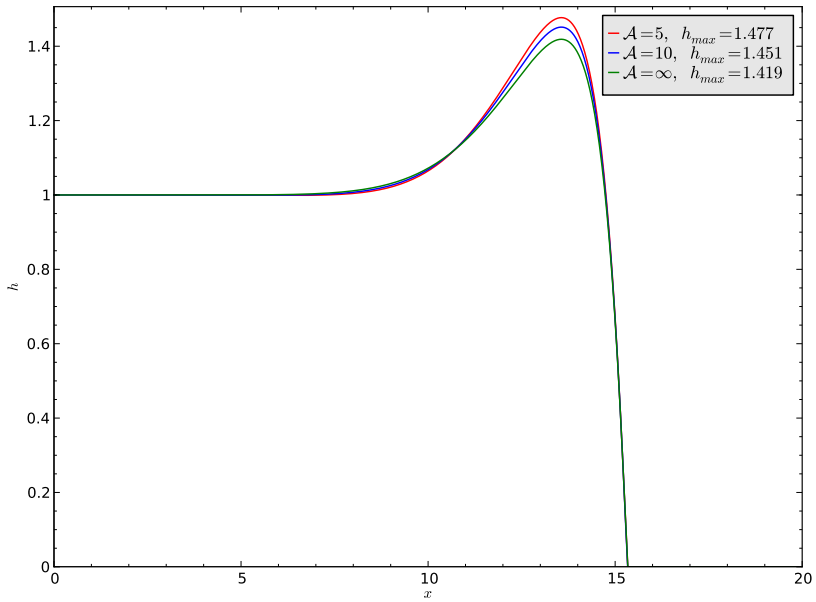



FIGURE 8.18: Cas avec glissement pour $b = 0$, $D(\alpha) = 2.5$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

Pour $D(\alpha) = 5$, on a :

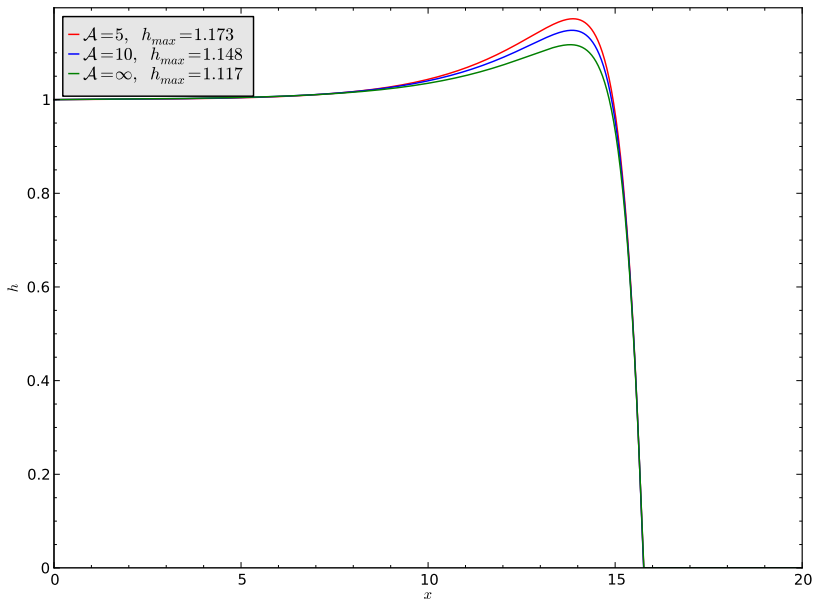



FIGURE 8.19: Cas avec glissement pour $b = 0$, $D(\alpha) = 5$ et $\mathscr{A} = 5,\ 10,\ +\infty$

On peut voir les profils mis à l'échelle :

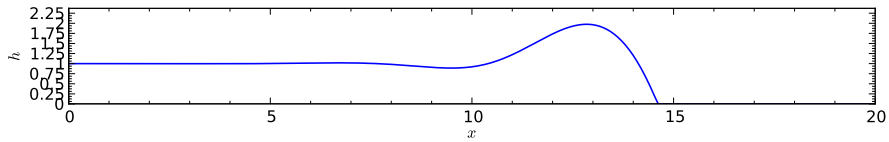
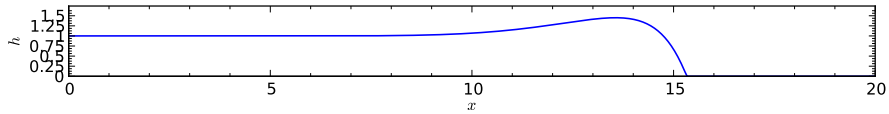
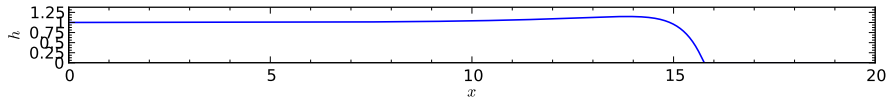
| | |
|---|---|
| $D(\alpha) = 0$ |  |
| $D(\alpha) = 2.5$ |  |
| $D(\alpha) = 5$ |  |

TABLE 8.5: Profils obtenus mis à l'échelle pour $b = 0$, $\mathscr{A} = 10$

Les hauteurs obtenues avec le nouveau modèle sont là aussi plus élevées (cf (8.6)) :

| | $D(\alpha) = 0$ | $D(\alpha) = 2.5$ | $D(\alpha) = 5$ |
|---|---|---|---|
| $\mathscr{A} = \mathscr{A}_m = 5$ | $h_{max} = 1.976$ | $h_{max} = 1.477$ | $h_{max} = 1.173$ |
| $\mathscr{A} = 10$ | $h_{max} = 1.976$ | $h_{max} = 1.451$ | $h_{max} = 1.148$ |
| $\mathscr{A} = +\infty$ | $h_{max} = 1.976$ | $h_{max} = 1.419$ | $h_{max} = 1.117$ |
| écart en % | 0% | 4.1% | 5% |

TABLE 8.6: Hauteurs maximales dans le cas avec glissement pour $b = 0$

On peut voir que pour $D(\alpha) = 0$, les trois courbes se superposent, en effet dans ce cas notre modèle n'est pas activé mais on trouve ici la hauteur maximale atteinte par le modèle. En effet dans la

littérature, on peut voir que la plus grosse bosse est obtenue pour une pente nulle, on a donc comme hauteur maximale $h = 1.976$. Ainsi quelque soit le modèle utilisé, la bosse n'ira pas plus haut que cette valeur.

Pour des pentes plus importantes, on peut observer que le comportement reste le même que précédemment. Notre modèle simplifié donne une hauteur maximale dans chaque cas. On remarque alors la hauteur de la bosse diminue lorsque $D(\alpha)$ augmente ou que le film précurseur s'affine. Nous avons réalisé des test pour des $D(\alpha)$ plus grand mais dans ces cas il n'y a plus de bosse, comme cela est dit dans la littérature. Nous n'avons donc pas présenté ces résultats peu intéressant.

Les études de Bertozzi et Brenner [4], Kondic [45], Troian *et al.* [71] sont basées sur des modèles de lubrification (donc angle de apparent faible) avec film précurseur car ils ne modélisent pas les phénomènes du front (surtout la singularité du point triple). Notre modèle quant à lui, contient une loi de glissement pour retirer la singularité du front, ce qui nous permet de ne pas utiliser de film précurseur. Nous avons cependant réalisé des tests numériques avec film précurseur pour comparer nos résultats aux leurs. Nous avons pu voir que la hauteur maximale obtenue avec notre modèle est 5% plus élevée que celle du modèle de Bertozzi et Brenner [4], ce qui reste raisonnable. De plus nous avons donc obtenu des résultats pour des angles apparents assez grand ($0 \leq \theta_{0,ext}(\beta) \leq \frac{\pi}{4}$) et nous avons vu qu'il suffit de changer le paramètre $\mathscr{A}$ pour tester de plus grand angles. Notre modèle est donc valide pour n'importe quel angle apparent $\theta_{0,ext}(\beta)$ et angle statique $\theta_{0,int}(\beta)$, et sans film précurseur.

Dans cette dernière partie de la thèse, nous avons donc construit un modèle Saint-Venant avec un glissement macroscopique de longueur $L_{gliss} = \frac{h}{\mathscr{A}(\theta_{0,ext}(\beta))}$, appliqué à l'écoulement d'une goutte. Le glissement est donc valide dans la région du front. Pour retrouver une condition d'adhérence loin du front, il faudrait alors ajouter une fonction de troncature à notre fonction de glissement : $\kappa_v\left(h'\right) = \frac{\mathscr{A}(\theta_{0,ext}(\beta))}{h'}$, en posant :

$$\kappa_v\left(h'\right) = \begin{cases} \frac{\mathscr{A}(\theta_{0,ext}(\beta))}{h'} & \text{pour } h' \text{ petit} : 0 \leq h' \ll h_f \quad : \text{zone du front} \\ +\infty & \text{pour } h'_{x'} \text{ petit} \quad : \text{zone film mince} \end{cases}$$

Ce qui permet de retrouver un modèle avec adhérence loin du front. Cependant nous avons aussi construit un modèle de glissement microscopique de longueur $\beta h_f = \alpha\mu \ll L_{gliss}$ (celui de la partie III page 61) qui est introduit au travers de la loi de glissement utilisée et qui nous permet de voir quels angles microscopiques et macroscopiques sont acceptables dans la limite de validité $C_{a,f}\left|\ln\beta\right|$ au plus en $\mathscr{O}(1)$. Ce glissement microscopique est basé sur une zone externe avec adhérence, une zone intermédiaire avec glissement variable et une zone interne avec glissement constant. Or on sort de la zone intermédiaire lorsque $\mathbf{x} \to 1$, ce qui correspond à $r = e^{\frac{1}{C_{a,f}}(\mathbf{x}-1)} \to 1$ ce qui donne en dimensionné $r \to h_f$ donc on sort de la zone de glissement microscopique quand $r > h_f(t)$ , ce qui est valide par rapport au $\kappa_v\left(h'\right)$ proposé plus haut. Le modèle de Saint-Venant avec glissement proposé simule donc bien le modèle de front.

CHAPITRE 9

# CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons voulu modéliser le front d'avancement d'un écoulement liquide à surface libre, sur une paroi solide soumis aux effets de la gravité. Or au niveau du front d'avancement, la condition d'adhérence au fond n'est pas valide. nous avons donc introduit une condition de glissement permettant de régler ce problème et nous avons ensuite voulu modéliser l'écoulement d'un film mince avec un front d'avancement.

Pour cela, dans la première partie de cette thèse, nous avons posé le système d'équation de Navier-Stokes régissant l'écoulement d'un fluide Newtonien incompressible sur un plan incliné. Nous avons montré que ce problème avec condition d'adhérence au fond est mal posé au niveau du front d'avancement du fluide (cf Solonnikov [69], Leray [47], Oron *et al.* [56]...) et génère une énergie visqueuse infinie au niveau du point triple, point de rencontre entre trois milieux différents : le fluide, l'air et la paroi solide. Pour remédier à ce problème, nous avons introduit une condition de glissement de type Navier au niveau du front d'avancement, qui dégénère en une condition d'adhérence quand on s'éloigne du front, ainsi le raccord des conditions limites est assuré et le point triple ne génère plus de singularité. Nous avons alors montré grâce au théorème de Leray, l'existence de solutions faibles aux équations de Navier-Stokes et l'étude rigoureuse réalisée dans l'article de Bresch et Noble [9] nous permet de construire des modèles d'écoulement de faible épaisseur (de type Saint-Venant) à partir des équations de Navier-Stokes.

Ainsi la deuxième partie de ce manuscrit a été dédiée à l'étude d'écoulement de faible épaisseur sans front d'avancement avec un terme de glissement au fond. Nous sommes partis des équations de Navier-Stokes incompressibles avec condition de glissement de Navier (on peut citer l'article de Samanta *et al.* [64] qui étudie cette condition de glissement) que nous avons adimensionnées et intégrées sur la hauteur pour obtenir un système d'équations de type Saint-Venant. Nous avons alors utilisé le paramètre onde longue $\bar{\varepsilon} = \frac{h_0}{L} \ll 1$ pour réaliser un développement asymptotique des inconnues autour d'une solution d'équilibre (solution de Nusselt) et nous avons construit des modèles de type Benney (à une équation) sur la hauteur du fluide et de type Saint-Venant (à deux équations) sous forme conservative, sur la hauteur et le débit du fluide, d'ordre 0 et d'ordre 1 en $\bar{\varepsilon}$. Nous avons donc obtenu des modèles d'écoulement fluide avec glissement au fond qui pourront être raccordés avec un modèle de front.

Dans la troisième partie, nous avons alors construit des modèles de front indépendamment du type d'écoulement considéré en amont. Nous nous sommes donc mis dans le repère du front en coordonnées polaires. Comme nous considérons un écoulement laminaire, à faible nombre de Reynolds, nous avons pu nous ramener aux équations de Stokes au niveau du front et passer en formulation courant. Cela nous a permis de faire apparaître le nombre capillaire du front dans notre système. Nous avons alors réalisé un développement asymptotique des inconnues en fonction du nombre capillaire du front $C_{a,f} \ll 1$ qui caractérise la vitesse moyenne de l'écoulement. Nous avons alors pu montrer qu'au premier ordre en $C_{a,f}$, la surface libre est une droite ainsi nous avons réalisé un changement de repère qui nous a permis de positionner le problème dans un dièdre (et plus dans un domaine à frontière variable) à tous les ordres du développement asymptotique. Ce changement de géométrie du problème nous permet de construire les différents ordre du développement asymptotique dans un domaine fixé connu, la surface libre devient une inconnue intervenant dans les équations mais ne pose plus du problème sur le domaine du fluide.

L'étude du front a alors été divisée en deux parties parallèles, il a fallu étudier le problème loin du front (qui sera à raccorder avec l'écoulement fluide en amont) et étudier le problème proche du front. En effet ces deux problèmes ne disposent pas des mêmes équations, en particulier, la condition au fond est la condition d'adhérence classique dans le problème loin du front (problème externe) et près du front (problème interne) cette condition est une condition de glissement constant où le coefficient de glissement $\beta$ est faible. Entre ces deux zones se situe une zone de raccord où nous devons vérifier que les deux approches précédentes sont bien en accord. Nous avons donc construit deux modèles différents de front : un modèle à deux zones si le terme $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \ll 1$ et un modèle en trois zones si le terme $C_{a,f}\left|\ln\beta\right| \sim \mathcal{O}(1)$. Ces deux modèles ont été entièrement construits et raccordés au premier ordre en $C_{a,f}$ : le modèle à deux zones se raccorde si la pente de la surface libre au premier ordre est la même en zone interne et externe, le modèle à trois zones se raccorde si on a : $\mathcal{G}\left(\theta_{0,ext}\left(\beta\right)\right) - \mathcal{G}\left(\theta_{0,int}\left(\beta\right)\right) = 2C_a\left|\ln\beta\right| = 2C_a\left|\ln\left(\frac{\mu\alpha}{h_f}\right)\right|$ où $\mathcal{G}(\theta) = \int_0^\theta \frac{\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta}{\sin\vartheta}\mathrm{d}\vartheta$. Ces résultats peuvent être retrouvés par morceaux à partir des articles de Dussan V. [22], Cox [15], Hocking [37], Voinov [74], Hocking et Rivers [40], en effet ils imposent soit une surface libre plane, soit une loi de glissement particulière... ils ne font pas d'étude générale. Ici nous avons posé un cadre complet et global pour cette étude avec surface libre quelconque et loi de glissement à déterminer. Nous retrouvons les résultats de ces articles simplement grâce à une analyse asymptotique permettant de concevoir des modèles de frottement dans un cadre rigoureux.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous avons voulu combiner les deux études précédentes de manière à pouvoir décrire l'écoulement d'un film liquide mince présentant un front d'avancement. Nous nous sommes donc placés dans le cas de l'écoulement d'une goutte de liquide ce qui peut être vu comme une rupture de barrage à une échelle microscopique. Nous avons alors réussit à écrire un modèle simplifié de type Saint-Venant qui lorsque l'on fait tendre le terme de glissement vers zéro nous permet de retrouver un Saint-Venant classique. Il s'agit donc d'un modèle crédible à tester numériquement. Nous avons cependant eu des difficultés à coder ce modèle Saint-Venant, nous avons donc préféré nous ramener à un modèle de type Benney à une équation sur la hauteur du fluide construit à partir du modèle Saint-Venant précédent. Nous avons alors retrouvé les résultats de la littérature lorsque l'on ne met pas de glissement et avec un film précurseur. Pour le modèle avec glissement simple, nous obtenons des profils similaires à ceux sans glissement mais ayant une hauteur maximale entre 2% et 5% plus haute que celle obtenue sans glissement avec ou sans film précurseur.

Il faudrait donc maintenant tester le modèle Saint-Venant obtenu et ensuite écrire et tester des lois de glissement plus complexes. Nous pourrons aussi nous intéresser au cas 3D où l'on peut observer des phénomènes de pincement ou « fingering » au niveau du front d'avancement du fluide.

Cinquième partie

# Annexes

CHAPITRE 10

# ANNEXE A : FORMULES UTILES

**Sommaire**


10.1 Écriture du bilaplacien cylindrique & polaire . . . . . **219**
10.2 Écriture des nouveaux opérateurs . . . . . **220**
10.2.1 Gradient . . . . . 220
10.2.2 Laplacien . . . . . 221
10.2.3 Bilaplacien . . . . . 222
10.2.4 Rotationnel . . . . . 223
10.3 Fonctions hyperboliques . . . . . **223**
10.4 Calcul de convergence . . . . . **224**
10.4.1 Calcul de $I_0(\rho, B)$ . . . . . 224
10.4.2 Calcul de $I_1(\rho, B)$ . . . . . 225
10.4.3 Calcul de $I_2(\rho, B)$ . . . . . 225
10.4.4 Conclusion . . . . . 226


## 10.1 Écriture du bilaplacien cylindrique & polaire

Le bilaplacien en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta^2\psi(r,\phi,z) = & \left[\frac{1}{r^3}\partial_r\psi - \frac{1}{r^2}\partial^2_{rr}\psi + \frac{2}{r}\partial^3_{rrr}\psi + \frac{2}{r}\partial^3_{rzz}\psi + \partial^4_{rrrr}\psi + 2\partial^4_{rrzz}\psi\right](r,\phi,z) \\ & + \left[\frac{2}{r^2}\partial^4_{zz\phi\phi}\psi + \partial^4_{zzzz}\psi - \frac{2}{r^3}\partial^3_{r\phi\phi}\psi + \frac{2}{r^2}\partial^4_{rr\phi\phi}\psi + \frac{4}{r^4}\partial^2_{\phi\phi}\psi + \frac{1}{r^4}\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\psi\right](r,\phi,z)\end{aligned}$$

En coordonnées polaires (2D), nous utilisons :

$$\begin{aligned}\Delta^2\psi(r,\phi) = & \left[\frac{1}{r^4}\partial^4_{\phi\phi\phi\phi}\psi + \frac{2}{r^2}\partial^4_{rr\phi\phi}\psi + \partial^4_{rrrr}\psi + \frac{2}{r}\partial^3_{rrr}\psi - \frac{2}{r^3}\partial^3_{r\phi\phi}\psi\right](r,\phi) \\ & + \left[\frac{4}{r^4}\partial^2_{\phi\phi}\psi - \frac{1}{r^2}\partial^2_{rr}\psi + \frac{1}{r^3}\partial_r\psi\right](r,\phi)\end{aligned} \tag{10.1}$$

## 10.2 Écriture des nouveaux opérateurs

$$\xi = \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{r} = r \\ \bar{\phi}(r,\phi) = \dfrac{\theta_0(\beta)}{\theta(r, C_{a,f}, \beta)}\phi \end{pmatrix}$$

### 10.2.1 Gradient

Si on s'intéresse plus particulièrement au gradient, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla f(r,\phi) &= \begin{pmatrix} \partial_r f \\ \dfrac{1}{r}\partial_\phi f \end{pmatrix}(r,\phi) = \begin{pmatrix} \partial_r \bar{f} \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_\phi \bar{f} \end{pmatrix}(\bar{r},\bar{\phi}) = \begin{pmatrix} \partial_{\bar{r}}\bar{f} - \bar{\phi}\dfrac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f} \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\dfrac{\theta_0(\beta)}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f} \end{pmatrix}(\bar{r},\bar{\phi}) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{r}}\bar{f} - C_{a,f}\bar{\phi}\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta)}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f} \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\left[1 - C_{a,f}\dfrac{\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta)}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\right]\partial_{\bar{\phi}}\bar{f} \end{pmatrix}(\bar{r},\bar{\phi}) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{\bar{r}}\bar{f} \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f} \end{pmatrix}(\bar{r},\bar{\phi}) - \frac{C_{a,f}}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\begin{pmatrix} \bar{\phi}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla f(r,\phi) = \underbrace{\bar{\nabla}\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi})}_{=\bar{\nabla}_0\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi})} - \frac{C_{a,f}}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\begin{pmatrix} \bar{\phi}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi})$$

On notera :

$$\Rightarrow \nabla f(r,\phi) = \sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \bar{\nabla}_i \bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) = \bar{\nabla}_0\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) + C_{a,f}\bar{\nabla}_1\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) + \ldots$$

où :
- $\bar{\nabla}_0$ est le gradient classique dans le nouveau jeu de coordonnées,
- $\forall i \in \mathbb{N}^*, \bar{\nabla}_i$ sont des corrections sur le gradient classique.

Si on fait le développement asymptotique de $\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\nabla f(r,\phi) &= \bar{\nabla}_0\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) - \frac{C_{a,f}}{\bar{\theta}(\bar{r}, C_{a,f}, \beta)}\begin{pmatrix} \bar{\phi}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\sum_{i=0}^{+\infty} C_{a,f}^i \bar{\theta}_{i+1}(\bar{r},\beta) \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) \\
&= \bar{\nabla}_0\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) - \frac{C_{a,f}}{\theta_0(\beta)}\begin{pmatrix} \bar{\phi}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1(\bar{r},\beta) \\ \dfrac{1}{\bar{r}}\bar{\theta}_1(\bar{r},\beta) \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f}(\bar{r},\bar{\phi}) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{\nabla}_1 \bar{f}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = -\frac{1}{\theta_0\left(\beta\right)}\begin{pmatrix} \bar{\phi}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right) \\ \frac{1}{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right) \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{f}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \tag{10.2}$$

### 10.2.2 Laplacien

On peut alors regarder le Laplacien :

$$\Rightarrow \quad \Delta u\left(r,\phi\right) = \begin{pmatrix} \partial^2_{rr}u_r + \frac{1}{r}\partial_r u_r + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_r - \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_\phi - \frac{1}{r^2}u_r \\ \partial^2_{rr}u_\phi + \frac{1}{r}\partial_r u_\phi + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi\phi}u_\phi + \frac{2}{r^2}\partial_\phi u_r - \frac{1}{r^2}u_\phi \end{pmatrix}\left(r,\phi\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\Delta}\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) - \frac{2C_{a,f}}{\bar{r}^2\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&- \frac{2\bar{\phi}C_{a,f}}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)\partial_{\bar{\phi}}\left[\partial_{\bar{r}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right] \\
&+ \frac{2C_{a,f}}{\bar{r}^2\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)\begin{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{\phi}}\\ -\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{r}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&- \frac{\bar{\phi}C_{a,f}}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right) + \frac{1}{\bar{r}}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)\right]\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&+ \frac{C_{a,f}}{\theta^2\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left[\bar{\phi}^2\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)^2 + \frac{1}{\bar{r}^2}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)^2\right]\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&+ \frac{2\bar{\phi}C_{a,f}}{\theta^2\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}C^i_{a,f}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right)\right)^2\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \Delta u\left(r,\phi\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}C^i_{a,f}\bar{\Delta}_i\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&= \bar{\Delta}_0\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + C_{a,f}\bar{\Delta}_1\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + C^2_{a,f}\bar{\Delta}_2\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) + \mathcal{O}\left(C^3_{a,f}\right)
\end{aligned}$$

où :

- $\bar{\Delta}_0\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \bar{\Delta}\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ est le Laplacien classique dans le nouveau jeu de coordonnées,
- $\forall i \in \mathbb{N}^*, \bar{\Delta}_i$ sont des corrections sur le Laplacien classique tels que :
  - $\bar{\Delta}_1\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_1\bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \quad & -\frac{2}{\theta_0\left(\beta\right)\bar{r}^2}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
& -\frac{2\bar{\phi}}{\theta_0\left(\beta\right)}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\partial_{\bar{\phi}}\left[\partial_{\bar{r}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right] \\
& +\frac{2}{\theta_0\left(\beta\right)\bar{r}^2}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\begin{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{\phi}}\\ -\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{r}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
& -\frac{1}{\theta_0\left(\beta\right)}\bar{\phi}\left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right) + \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\right]\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}$$

- $\bar{\Delta}_2 \bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$ :

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Delta}_2 \bar{u}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) = \\
&+\frac{2\bar{\theta}_1^2\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_0^2\left(\beta\right)\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\frac{2\bar{\phi}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_0^2\left(\beta\right)}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{r}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&-\frac{2\bar{\theta}_1^2\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_0^2\left(\beta\right)\bar{r}^2}\begin{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{\phi}}\\ -\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{r}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\frac{\bar{\phi}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_0^2\left(\beta\right)}\left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)+\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\right]\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&-\frac{2}{\theta_0\left(\beta\right)\bar{r}^2}\bar{\theta}_2\left(\bar{r},\beta\right)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)-\frac{2\bar{\phi}}{\theta_0\left(\beta\right)}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_2\left(\bar{r},\beta\right)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{r}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&+\frac{2\bar{\theta}_2\left(\bar{r},\beta\right)}{\theta_0\left(\beta\right)\bar{r}^2}\begin{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{\phi}}\\ -\partial_{\bar{\phi}}\bar{u}_{\bar{r}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)-\frac{\bar{\phi}}{\theta_0\left(\beta\right)}\left[\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_2\left(\bar{r},\beta\right)+\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_2\left(\bar{r},\beta\right)\right]\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&+\frac{1}{\theta_0^2\left(\beta\right)}\left[\bar{\phi}^2\left(\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\right)^2+\frac{\bar{\theta}_1^2\left(\bar{r},\beta\right)}{\bar{r}^2}\right]\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&+\frac{2\bar{\phi}}{\theta_0^2\left(\beta\right)}\left(\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\right)^2\partial_{\bar{\phi}}\begin{pmatrix}\bar{u}_{\bar{r}}\\ \bar{u}_{\bar{\phi}}\end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}
$$

Laplacien d'une fonction :

$$
\begin{aligned}
\Delta\psi\left(r,\phi\right) &= \Delta\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)=\left(\partial^2_{r^2}+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial^2_{\phi^2}\right)\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&=\left(\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\psi}-2\bar{\phi}\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}\right)\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&\quad+\left(\left(\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\right)^2\bar{\phi}^2+\frac{1}{\bar{r}^2}\left(\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\right)^2\right)\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\psi}-\bar{\phi}\left(\frac{\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}-2\left(\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\right)^2+\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{r}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\right)\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}\right)\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&=\underbrace{\left(\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\psi}+\frac{1}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}+\frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{r}}\bar{\psi}\right)}_{=\bar{\Delta}_0}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\\
&\quad\underbrace{-\frac{C_{a,f}}{\theta_0\left(\beta\right)}\left[2\left(\bar{\phi}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)\partial^2_{\bar{r}\bar{\phi}}\bar{\psi}+\frac{\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)}{\bar{r}^2}\partial^2_{\bar{\phi}\bar{\phi}}\bar{\psi}\right)+\bar{\phi}\left(\partial^2_{\bar{r}\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)+\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right)}{\bar{r}}\right)\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}\right]}_{=C_{a,f}\bar{\Delta}_1}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\mathcal{O}\left(C^2_{a,f}\right)
\end{aligned}
$$

### 10.2.3 Bilaplacien

De même pour le bilaplacien :

$$
\begin{aligned}
\Delta^2\psi\left(r,\phi\right) &= \sum_{j=0}^{\infty}C^j_{a,f}\bar{\Delta}_j\left[\sum_{i=0}^{\infty}C^i_{a,f}\bar{\Delta}_i\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}C^{i+j}_{a,f}\bar{\Delta}_j\left[\bar{\Delta}_i\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right]\\
&=\bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+C_{a,f}\sum_{i=0}^{\infty}C^i_{a,f}\bar{\Delta}_0\left[\bar{\Delta}_{i+1}\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right]+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}C^{i+j}_{a,f}\bar{\Delta}_j\left[\bar{\Delta}_i\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right]\\
&=\bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+C_{a,f}\left[\bar{\Delta}_0\bar{\Delta}_1+\bar{\Delta}_1\bar{\Delta}_0\right]\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\ldots\\
&=\bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}C^k_{a,f}\left[\sum_{i+j=k}\left(\bar{\Delta}_j\bar{\Delta}_i\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\right)\right],\quad\forall\left(i,j,k\right)\in\mathbb{N},0\le i,j\le k\\
&=\bar{\Delta}_0^2\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}C^k_{a,f}\bar{\Delta}_k^2\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}
$$

### 10.2.4 Rotationnel

L'opérateur rotationnel devient (en utilisant les résultats obtenus pour le gradient) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\psi\left(r,\phi\right)\vec{e}_z\right) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\phi\psi\left(r,\phi\right) \\ -\partial_r\psi\left(r,\phi\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\partial_\phi\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ -\partial_r\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi} \\ -\partial_{\bar{r}}\bar{\psi}+\bar{\phi}\frac{\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi} \\ -\partial_{\bar{r}}\bar{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) - \frac{C_{a,f}}{\bar{\theta}\left(\bar{r},C_{a,f},\beta\right)}\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\sum_{i=0}^{+\infty}C_{a,f}^i\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right) \\ -\bar{\phi}\sum_{i=0}^{+\infty}C_{a,f}^i\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_{i+1}\left(\bar{r},\beta\right) \\ 0 \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)
\end{aligned}$$

où l'opérateur $\bar{\mathrm{rot}}_0$ est le rotationnel classique :

$$\bar{\mathrm{rot}}_0\left(\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\vec{e}_z\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi} \\ -\partial_{\bar{r}}\bar{\psi} \\ 0 \end{pmatrix}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$$

Les opérateurs $\bar{\mathrm{rot}}_1$, $\bar{\mathrm{rot}}_2$ ... sont des corrections d'ordre 1, 2 etc en $C_{a,f}$ sur le rotationnel classique avec notamment :

$$\bar{\mathrm{rot}}_1\left(\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\vec{e}_z\right) = -\frac{1}{\bar{\theta}_0\left(\beta\right)}\begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right) \\ -\bar{\phi}\partial_{\bar{r}}\bar{\theta}_1\left(\bar{r},\beta\right) \\ 0 \end{pmatrix}\partial_{\bar{\phi}}\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\left(\psi\left(r,\phi\right)\vec{e}_z\right) &= \bar{\mathrm{rot}}\left(\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\vec{e}_z\right) = \sum_{k=0}^{\infty}C_{a,f}^k\bar{\mathrm{rot}}_k\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right) \\
&= \bar{\mathrm{rot}}_0\left(\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\vec{e}_z\right) + C_{a,f}\bar{\mathrm{rot}}_1\left(\bar{\psi}\left(\bar{r},\bar{\phi}\right)\vec{e}_z\right) + \mathcal{O}\left(C_{a,f}^2\right)
\end{aligned}$$

## 10.3 Fonctions hyperboliques

Petits rappels sur les fonctions hyperboliques :

$$\begin{array}{ll}
\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} & e^y = \cosh y + \sinh y \\
\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} & e^{-y} = \cosh y - \sinh y
\end{array}$$

et :

$$
\begin{aligned}
\frac{1-e^a}{1+e^a} &= -\frac{e^a-1}{e^a+1} = -\frac{e^{-\frac{a}{2}}\left(e^a-1\right)}{e^{-\frac{a}{2}}\left(e^a+1\right)} = -\frac{e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{a}{2}}}{e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}} = -\coth\frac{a}{2} \\
\frac{e^a}{\left(e^a+1\right)^2} &= \frac{1}{e^{-a}\left(e^a+1\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{a}{2}}\left(e^a+1\right)\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(2\cosh\frac{a}{2}\right)^2} \\
\frac{e^a}{\left(e^a-1\right)^2} &= \frac{1}{e^{-a}\left(e^a-1\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{a}{2}}\left(e^a-1\right)\right)^2} = \frac{1}{\left(e^{\frac{a}{2}}-e^{-\frac{a}{2}}\right)^2} = \frac{1}{\left(2\sinh\frac{a}{2}\right)^2} \\
\frac{e^{2a}}{\left(e^a+1\right)^4} &= \frac{1}{e^{-2a}\left(e^a+1\right)^4} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{a}{2}}\left(e^a+1\right)\right)^4} = \frac{1}{\left(e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}\right)^4} = \frac{1}{\left(2\cosh\frac{a}{2}\right)^4}
\end{aligned}
$$

## 10.4 Calcul de convergence

On veut savoir quelles sont les restrictions sur $B \in \mathbb{R}^+$ pour que $k(\varrho) \star e^{-B|\varrho|}$ converge vers 0 quand $\varrho \to -\infty$. On utilise alors comme approximation de $k(\varrho)$ :

$$\tilde{k}(\varrho) = k_0(\varrho) + \chi_{[a,b]}(\varrho) = \left(e^{-\varrho} + \hat{L}\right)^{-1} + \chi_{[a,b]}(\varrho)$$

où $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ est une fonction bornée qui est non nulle sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et nulle en dehors telle que :

$$\chi_{[a,b]}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \varrho \leq a \\ f(\varrho) & \text{pour } a \leq \varrho \leq b \\ 0 & \text{pour } b \leq \varrho \end{cases}$$

où $f(\varrho)$ est une fonction bornée. $\tilde{k}(\varrho)$ a donc les bons comportements en $\pm\infty$ et la fonction $\chi_{[a,b]}(\varrho)$ représente les variations que peut avoir $k(\varrho)$ autour de $k_0(\varrho)$.

On étudie alors l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
I(\varrho,B) &= \left[k_0(\varrho) + \chi_{[a,b]}(\varrho)\right] \star e^{-B|\varrho|} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}\left(\varrho-\varrho'\right) e^{-B\left|\varrho'\right|} d\varrho' + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-B\left|\varrho'\right|}}{e^{-(\varrho-\varrho')}+\hat{L}} d\varrho' \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}\left(\varrho-\varrho'\right) e^{-B\left|\varrho'\right|} d\varrho'}_{=I_0(\varrho,B)} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-B\left|\varrho'\right|}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}} d\varrho'}_{=I_1(\varrho,B)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-B\left|\varrho'\right|}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}} d\varrho'}_{=I_2(\varrho,B)}
\end{aligned}
$$

### 10.4.1 Calcul de $I_0(\varrho,B)$

$$I_0(\varrho,B) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[a,b]}\left(\varrho-\varrho'\right) e^{-B\left|\varrho'\right|} d\varrho' = \int_{\varrho-b}^{\varrho-a} f\left(\varrho-\varrho'\right) e^{-B\left|\varrho'\right|} d\varrho'$$

On utilise alors le fait que $f(\varrho)$ est bornée par $M > 0$ :

$$\left|I_0(\varrho,B)\right| \leq M \int_{\varrho-b}^{\varrho-a} e^{-B\left|\varrho'\right|} d\varrho'$$

or on va s'intéresser à la limite quand $\varrho \to -\infty$ donc $\varrho - b \leq \varrho' \leq \varrho - a < 0$ et on a :

$$
\begin{aligned}
\left|I_0(\varrho,B)\right| &\leq M \int_{\varrho-b}^{\varrho-a} e^{B\varrho'} d\varrho' &&\leq \frac{M}{B}\left[e^{B\varrho'}\right]_{\varrho-b}^{\varrho-a} \\
&\leq \frac{M}{B}\left[e^{B\varrho}e^{-Ba} - e^{B\varrho}e^{-Bb}\right] &&\leq \frac{M}{B}e^{B\varrho}\left[e^{-Ba} - e^{-Bb}\right]
\end{aligned}
$$

avec $\boxed{B>0}$. Donc :

$$\lim_{\varrho\to-\infty} I_0\left(\varrho,B\right)=0$$

### 10.4.2 Calcul de $I_1\left(\varrho,B\right)$

On a donc $\varrho^{'}\geq 0$ et :

$$0\leq I_1\left(\varrho,B\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-B\left|\varrho^{'}\right|}}{e^{\varrho^{'}-\varrho}+\hat{L}}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-B\varrho^{'}}}{e^{\varrho^{'}-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'}\leq\int_0^{+\infty}\frac{e^{-B\varrho^{'}}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'}$$

car :

$$\begin{array}{rcl}\varrho^{'}\geq 0 & \Leftrightarrow & \varrho^{'}-\rho\geq-\rho\\ \Leftrightarrow\quad e^{\varrho^{'}-\rho}\geq e^{-\rho} & \Leftrightarrow & e^{\varrho^{'}-\rho}+\hat{L}\geq e^{-\rho}+\hat{L}\end{array}$$

avec $\hat{L}\geq 0$, de plus :

$$\begin{array}{lll}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-B\varrho^{'}}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'} & \displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{t}\frac{e^{-B\varrho^{'}}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'} & \displaystyle=\frac{1}{e^{-\varrho}+\hat{L}}\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{e^{-B\varrho^{'}}}{B}\right]_0^t\\ & \displaystyle=\frac{1}{B\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}\lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-Bt}+1\right]_0^t & \displaystyle=\frac{1}{B\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}\end{array}$$

si et seulement si $\boxed{B>0}$, donc :

$$0\leq I_1\left(\varrho,B\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-B\left|\varrho^{'}\right|}}{e^{-(\varrho-\varrho^{'})}+\hat{L}}d\varrho^{'}\leq\frac{1}{B\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}$$

On s'intéresse au comportement quand $\varrho\to-\infty$, on a alors :

$$0\leq I_1\left(\varrho,B\right)\leq\frac{1}{B\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}\underset{\varrho\to-\infty}{\longrightarrow}0$$

### 10.4.3 Calcul de $I_2\left(\varrho,B\right)$

On a donc $\varrho^{'}\leq 0$ et avec un changement de variable tel que $r=-\varrho^{'}$ :

$$\begin{array}{lll}0\leq I_2\left(\varrho,B\right) & \displaystyle=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-B\left|\varrho^{'}\right|}}{e^{\varrho^{'}-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'} & \displaystyle=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{B\varrho^{'}}}{e^{\varrho^{'}-\varrho}+\hat{L}}d\varrho^{'}\\ & \displaystyle=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-Br}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr & \displaystyle=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{t}\frac{e^{-Br}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr\end{array}$$

On a alors :

$$\int_0^{t}\frac{e^{-Br}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr=\int_0^{t}\frac{e^{-Br}e^{r}}{\left(e^{-r-\varrho}+\hat{L}\right)e^{r}}dr=\int_0^{t}\frac{e^{r(1-B)}}{e^{-\varrho}+\hat{L}e^{r}}dr\leq\int_0^{t}\frac{e^{r(1-B)}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}dr$$

car :

$$r\geq 0\Leftrightarrow e^{r}\geq 1\Leftrightarrow\hat{L}e^{r}\geq\hat{L}$$

et :

$$\int_0^t \frac{e^{r(1-B)}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}dr = \frac{1}{e^{-\varrho}+\hat{L}}\left[\frac{e^{r(1-B)}}{1-B}\right]_0^t = \frac{\left[1-e^{t(1-B)}\right]}{(B-1)\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}$$

si $B \neq 1$ alors :

$$\begin{aligned}
0 \leq I_2(\varrho, B) &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-B\left|\varrho'\right|}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}}d\varrho' &&= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{e^{-Br}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr \\
&\leq \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{e^{-r(B-1)}}{e^{-\varrho}+\hat{L}}dr &&\leq \lim_{t\to+\infty}\frac{\left[1-e^{-t(B-1)}\right]}{(B-1)\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)} \\
&\leq \frac{1}{(B-1)\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}
\end{aligned}$$

si $\boxed{B>1}$, on a donc :

$$0 \leq I_2(\varrho, B) = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-B\left|\varrho'\right|}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}}d\varrho' \leq \frac{1}{(B-1)\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)}$$

On s'intéresse au comportement quand $\varrho \to -\infty$, on a alors :

$$0 \leq I_2(\varrho, B) \leq \frac{1}{(B-1)\left(e^{-\varrho}+\hat{L}\right)} \underset{\varrho\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour $\boxed{B=1}$, on a :

$$\begin{aligned}
0 \leq I_1(\varrho, 1) &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\left|\varrho'\right|}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}}d\varrho' = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{B\varrho'}}{e^{\varrho'-\varrho}+\hat{L}}d\varrho' = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr \\
&= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{e^{-r}}{e^{-r-\varrho}+\hat{L}}dr = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{e^{-\varrho}+\hat{L}e^{r}}dr \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{\varrho}\ln\left(\mathrm{e}^{-\varrho}+L\mathrm{e}^{t}\right)+e^{\varrho}t+e^{\varrho}\ln\left(\mathrm{e}^{-\varrho}+L\right)\right] \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[te^{\varrho}+e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)-e^{\varrho}\ln\left(1+L\mathrm{e}^{t+\varrho}\right)\right] \\
&= e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)+e^{\varrho}\lim_{t\to+\infty}\left[t-\ln\left(1+L\mathrm{e}^{t+\varrho}\right)\right] \\
&= e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)+e^{\varrho}\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^{t}}{1+L\mathrm{e}^{t+\varrho}}\right)\right] \\
&= e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)+e^{\varrho}\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{e^{-t}+L\mathrm{e}^{\varrho}}\right)\right] \\
&= e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)-e^{\varrho}\ln\left(L\mathrm{e}^{\varrho}\right)
\end{aligned}$$

donc :

$$0 \leq I_2(\varrho, 1) = e^{\varrho}\ln\left(1+Le^{\varrho}\right)-e^{\varrho}\ln\left(L\mathrm{e}^{\varrho}\right) \underset{\varrho\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

### 10.4.4 Conclusion

Ainsi pour $B \in \mathbb{R}$ et $\boxed{B \geq 1}$, on a :

$$\left|I(\varrho, B)\right| \leq \left|I_0(\varrho, B)\right| + \left|I_1(\varrho, B)\right| + \left|I_2(\varrho, B)\right| \underset{\varrho\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc :

$$\lim_{\varrho\to-\infty} I(\varrho, B \geq 1) = \lim_{\varrho\to-\infty}\left[k_0(\varrho)+\chi_{[a,b]}(\varrho)\right] \star e^{-B|\varrho|}\Big|_{B\geq 1} = 0 \tag{10.3}$$

CHAPITRE 11

# ANNEXE B : TRANSFORMÉE DE LAPLACE BILATÉRALE

**Sommaire**


11.1 Définition . . . . . **227**
11.2 Propriétés . . . . . **228**
11.2.1 Avec IPP . . . . . 228
11.2.2 Avec fonctions de Dirac . . . . . 228
11.3 Théorème de la valeur initiale . . . . . **228**
11.4 Théorème de la valeur finale . . . . . **229**


## 11.1 Définition

La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction $f$ de la variable réelle est la fonction $\tilde{f}$ de la variable complexe définie par :

$$\tilde{f}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Cette intégrale converge pour $\alpha < \mathrm{Re}(s) < \beta, -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$ , c'est-à-dire pour $s$ appartenant à une bande de convergence dans le plan complexe (au lieu de $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ , $\alpha$ désignant alors l'abscisse de convergence, dans le cas de la transformée monolatérale). De façon précise, dans le cadre de la théorie des distributions, cette transformée "converge" pour toutes les valeurs les valeurs de $s$ pour lesquelles $t \mapsto e^{-\mathrm{Re}(s)t} f(t)$ (en notation abusive) est une distribution tempérée et admet donc une transformée de Fourier.

De plus la transformée de Laplace bilatérale inverse s'écrit :

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{f}(s)\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} e^{st} \tilde{f}(s)\, ds$$

où il faut choisir $\epsilon$ pour que l'intégrale converge.

## 11.2 Propriétés

On veut calculer $\mathscr{L}\{\partial_\varrho \Phi\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\varrho} \partial_\varrho \Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) d\varrho$. Pour cela, on peut utiliser les deux méthodes suivantes.

### 11.2.1 Avec IPP

On a :

$$\mathscr{L}\{\partial_\varrho \Phi\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\varrho} \partial_\varrho \Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) d\varrho = \left[e^{-s\varrho}\Phi\right]_{\varrho=-\infty}^{\varrho=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(-s\, e^{-s\varrho}\Phi\right) d\varrho$$

où on a posé : $\begin{cases} u = \Phi & , v = e^{-s\varrho} \\ u' = \partial_\varrho \Phi & , v' = -s\, e^{-s\varrho} \end{cases}$. On a alors en $+\infty$, $\lim\limits_{\varrho \to +\infty} e^{-s\varrho} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$ et on sait que $\lim\limits_{\varrho \to +\infty} \Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) = \Psi_{ext}(\varphi)$, ainsi $\lim\limits_{\varrho \to +\infty} e^{-s\varrho}\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) = 0$.

De même pour la limite en $-\infty$, on sait que $\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) = \mathscr{O}\left(e^{\varrho}\right)$ quand $\varrho \to -\infty$ donc on aura $e^{-s\varrho}\,\partial_\varrho \Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) \sim_{\varrho \to -\infty} e^{\varrho(1-s)}$ ce qui tend vers zéro si et seulement si $\mathrm{Re}(s) < 1$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\varrho} \partial_\varrho \Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right) d\varrho = s \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-s\varrho}\Phi\left(\varrho, \hat{\phi}\right)\right) d\varrho = s\tilde{\Phi}\left(s, \hat{\phi}\right)$$

### 11.2.2 Avec fonctions de Dirac

Si $\delta(t)$ est la fonction de Dirac, on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{\partial_t \delta(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \partial_t \delta(t)\, dt = \left\langle \partial_t \delta(t), e^{-st} \right\rangle = -\left\langle \delta(t), \partial_t \left(e^{-st}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \delta(t), s e^{-st} \right\rangle = s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \delta(t)\, dt = s \left(e^{-st}\right)\Big|_{t=0} = s \end{aligned}$$

où $\langle\rangle$ désigne le produit de dualité et ou on a utilisé le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\, dt = f(0)$. On a alors pour toute dérivée de $\delta(t)$ :

$$\mathscr{L}\{\partial_t^{(n)} \delta(t)\}(s) = s^n$$

De plus :

$$\mathscr{L}\{f \star g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s) \times \mathscr{L}\{g\}(s)$$

ainsi :

$$\mathscr{L}\{\partial_t^{(n)} g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\partial_t^{(n)} \delta(t) \star g(t)\}(s) = \mathscr{L}\{\partial_t^{(n)} \delta(t)\}(s) \times \mathscr{L}\{g\}(s) = s^n \tilde{g}(s)$$

## 11.3 Théorème de la valeur initiale

Le théorème de la valeur initiale pour la transformée de Laplace bilatérale s'écrit :

$$\lim_{s \to +\infty} s\tilde{f}(s) = f\left(0^+\right) - f\left(0^-\right)$$

Une première preuve a été faite par Chang [14]. Une démonstration plus simple a été ensuite faite par Rao et Ahmed [58].

## 11.4 Théorème de la valeur finale

La transformée de Laplace bilatérale s'écrit :

$$\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Selon ce qui précéde, on a :

$$s\tilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Donc si on passe à la limite quand $s \to 0$ :

- si $f$ est continue en 0

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{f}(s) = \lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - \lim_{t\to-\infty} f(t)$$

- si $f$ est discontinue en 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} s\tilde{f}(s) &= \lim_{s\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to 0} \left[ \int_{-\infty}^{0} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] \\
&= \lim_{s\to 0} \left[ \int_{0}^{+\infty} \frac{df(-\tau)}{d(-\tau)} e^{s\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] \\
&= \lim_{s\to 0} \left[ -\int_{0}^{+\infty} \frac{df(-\tau)}{d\tau} e^{s\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] \\
&= -\int_{0}^{+\infty} \frac{df(-\tau)}{d\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{t\to+\infty} f(t) - \lim_{t\to-\infty} f(t) + f(0^-) - f\left(0^+\right)
\end{aligned}$$

On considère ici que nos fonctions sont continues en 0, on a alors :

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{f}(s) = \lim_{t\to+\infty} f(t) - \lim_{t\to-\infty} f(t)$$

CHAPITRE 12

# ANNEXE C : CALCUL DE $L(\varrho)$

## Sommaire


12.1 Pôles de $f(z)$ . . . . . **232**
12.2 Résidus . . . . . **232**
12.2.1 Type 1 . . . . . 232
12.2.2 Type 2 . . . . . 232
12.3 Calcul de l'intégrale . . . . . **233**
12.3.1 Cas $\varrho > 0$ . . . . . 233
12.3.2 Cas $\varrho < 0$ . . . . . 236
12.4 Forme finale . . . . . **237**
12.5 Singularité logarithmique de $L(\varrho)$ . . . . . **237**
12.6 Comportement quand $\theta_0(\beta) \to 0$ . . . . . **237**


L'intégrale se met sous la forme :

$$\begin{aligned} L(\varrho) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\frac{\sin(2s\theta_0(\beta)) - s\sin(2\theta_0(\beta))}{2s(\cos(2s\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta)))}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin(2(\epsilon+ix)\theta_0(\beta)) - (\epsilon+ix)\sin(2\theta_0(\beta))}{2(\epsilon+ix)(\cos(2(\epsilon+ix)\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta)))}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)dx \end{aligned}$$

en posant $s = \epsilon + ix$ avec $0 < \epsilon < 1$, $ds = i\,dx$ et :

$$f(z) = e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)) - (\epsilon+iz)\sin(2\theta_0(\beta))}{2(\epsilon+iz)(\cos(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)) - \cos(2\theta_0(\beta)))}$$

L'intégrale se calcule selon :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)\,dx = 2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho)\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_j\right)$$

Il faut éventuellement justifier le comportement à l'infini si les pôles tendent vers l'infini.

## 12.1 Pôles de $f(z)$

Si $\epsilon + iz$ est un point regulier, les points qui posent problèmes sont ceux qui annulent le dénominateur c'est à dire les points $z$ tels que :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\epsilon+iz)\theta_0(\beta)=\theta_0(\beta)+n\pi \\ \text{ou} \\ (\epsilon+iz)\theta_0(\beta)=-\theta_0(\beta)+n\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=i\left(\epsilon-1-\dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \\ \text{ou} \\ z=i\left(\epsilon+1-\dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \end{cases}$$

Étudions ces deux cas séparement.

## 12.2 Résidus

### 12.2.1 Type 1

Cherchons $z_n$ tel que

$$z_n=i\left(\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)=2\theta_0(\beta)+2n\pi$$

Ainsi :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)$$

On fait un DL en $z=z_n$ :

$$\begin{aligned} \cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right) &= -2i(z-z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)+o(z-z_n) \\ &= -2i(z-z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)+o(z-z_n) \end{aligned}$$

avec $\epsilon+iz_n=1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n\right) &= \lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)e^{i\varrho z} \\ &= e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin\left(2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)-(\epsilon+iz_n)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)}{-4(\epsilon+iz_n)i\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)}e^{i\varrho z_n} \\ &= -\frac{i}{4\theta_0(\beta)}\frac{n}{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+n\right)}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)} \end{aligned}$$

### 12.2.2 Type 2

Cherchons $z_n^{'}$ tel que

$$z_n^{'}=i\left(\epsilon+1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)=-2\theta_0(\beta)+2n\pi$$

Ainsi :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\right)$$

On fait un DL en $z = z_n^{'}$ :

$$\begin{aligned}\cos\left(2\left(\epsilon+iz\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right) &= -2i\left(z-z_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)+o\left(z-z_n^{'}\right)\\ &= 2i\left(z-z_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)+o\left(z-z_n^{'}\right)\end{aligned}$$

avec $\epsilon + iz_n^{'} = -1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f\left(z\right),z_n^{'}\right) &= \lim_{z\to z_n^{'}}\left(z-z_n^{'}\right)f\left(z\right)e^{i\varrho z}\\ &= e^{\epsilon\varrho}\frac{\sin\left(2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)-\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}{4i\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}e^{i\varrho z_n^{'}}\\ &= \frac{i}{4\theta_0\left(\beta\right)}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}e^{\varrho\left(-1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\end{aligned}$$

## 12.3 Calcul de l'intégrale

### 12.3.1 Cas $\varrho > 0$

#### 12.3.1.1 Termes de type 1

On remarque que l'on a :

$$\begin{cases}0\le\theta_0\left(\beta\right)\le\pi\\ 0<\mathrm{Re}\left(s\right)=\epsilon<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\le 1\\ -1<\epsilon-1<0\end{cases}\Rightarrow -1<-\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\pi}<\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\pi}\left(\epsilon-1\right)<0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f\left(z\right),z_n\right) &= \sum_{\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}>0}\left[\frac{\pi}{2\theta_0\left(\beta\right)}\frac{n}{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+n\right)}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\right]\\ = \frac{\pi}{2\theta_0\left(\beta\right)}e^{\varrho}\sum_{0>n}\left[\frac{n}{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+n\right)}e^{\frac{\varrho n\pi}{\theta_0(\beta)}}\right] &= \frac{\pi}{2\theta_0\left(\beta\right)}e^{\varrho}\sum_{n>0}\left[\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}\right]\end{aligned}$$

Pour $n + a > 0$, on a :

$$z^a\int_z^{\infty}x^{-(1+a)}x^{-n}dx = z^a\left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^{\infty} = \frac{z^{-n}}{n+a}$$

$$\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Alors :

$$\begin{aligned}e^{\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} &= e^{\varrho}\sum_{n>0}n\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{-\left(1-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}x^{-n}dx\\ &= \sum_{n>0}n\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{-\left(1-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}x^{-n}dx = \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{-\left(1-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\sum_{n>0}nx^{-n}dx\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x\sum_{n\geq 0}x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n>0}x^n\right)\\ &= \sum_{n>0}nx^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n>0}nx^n\\ \Rightarrow \quad \sum_{n>0}nx^n &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

si et seulement si $|x|<1$ car :

$$\sum_{n\geq 0}^{k-1}aq^n = \frac{1-q^n}{1-q}a \Rightarrow \sum_{n\geq 0}^{k-1}x^n = \frac{1-x^n}{1-x} \Rightarrow \sum_{n\geq 0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x} \text{ si } |x|<1$$

Ainsi :

$$\Rightarrow \sum_{n>0}nx^{-n} = \sum_{n>0}n\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\frac{1}{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x}{(x-1)^2} \tag{12.1}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x>1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho>0$. Donc :

$$e^{\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{-(1-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})}\frac{x}{(x-1)^2}dx = \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}\frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x-1)^2}dx$$

Avec $y=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x=e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}\frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x-1)^2}dx = \int_{\varrho}^{\infty}\frac{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\int_{\varrho}^{\infty}e^y\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy$$

Donc :

$$e^{\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\int_{\varrho}^{\infty}e^y\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy \tag{12.2}$$

et finalement :

$$2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n\right) = \frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)}\int_{\varrho}^{\infty}e^y\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy$$

#### 12.3.1.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0\leq\theta_0(\beta)\leq\frac{\pi}{2}$, on a $0<\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1)<1$ donc :

$$\begin{aligned}2i\pi\sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n'\right) &= -\sum_{\epsilon+1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}>0}\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}e^{\varrho\left(-1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\\ &= -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}e^{-\varrho}\sum_{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1)>n}\frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^n = -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}e^{-\varrho}\sum_{n\geq 0}\frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}\\ &= -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}e^{-\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}\end{aligned}$$

Pour $n+a>0$, on a comme précédemment :

$$z^a\int_z^\infty x^{-(1+a)}x^{-n}dx = z^a\left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^\infty = \frac{z^{-n}}{n+a}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
e^{-\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} &= e^{-\varrho}\sum_{n>0}n\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})}x^{-n}dx\\
= \sum_{n>0}n\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})}x^{-n}dx &= \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})}\sum_{n>0}nx^{-n}dx
\end{aligned}$$

Et en utilisant (12.1) :

$$e^{-\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})}\frac{x}{(x-1)^2}dx = \int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x-1)^2}dx$$

Avec $y=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x=e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x}=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$

$$\int_{e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}^\infty \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x-1)^2}dx = \int_\varrho^\infty \frac{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\alpha}}-1\right)^2}\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\int_\varrho^\infty e^{-y}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy$$

$$e^{-\varrho}\sum_{n>0}\frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\int_\varrho^\infty e^{-y}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy \tag{12.3}$$

et finalement :

$$2i\pi\sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0}\mathrm{Res}(e^{i\varrho z}f(z),z_n') = -\frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty e^{-y}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix}f(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{sgn}(\varrho)\left[2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n\right)+2i\pi\sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n'\right)\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty e^y\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy-\frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty e^{-y}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy\right]\\
&= \frac{\pi}{2\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2}dy = \frac{\pi}{2\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty\frac{\sinh y}{4\left(\sinh\left(y\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^2}dy\\
&= \frac{\pi}{4\theta_0^2(\beta)}\int_\varrho^\infty\frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)}dy
\end{aligned}$$

### 12.3.2 Cas $\varrho < 0$

#### 12.3.2.1 Termes de type 1

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \pi$, on a $0 > \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) > -1$ :

$$\begin{aligned} 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) &= \sum_{\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}<0} \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} \frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)} \\ = \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} e^{\varrho} \sum_{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon-1)<n} \frac{n}{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+n} e^{\varrho\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}} &= \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} e^{\varrho} \sum_{0<n} \frac{n}{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+n} \left(e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Ce terme a déjà été calculé, on peut appliquer (12.3) en échangeant $\varrho$ et $-\varrho$, ce qui donne ici :

$$e^{\varrho} \sum_{n>0} \frac{n}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left(e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} \frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2} dy \tag{12.4}$$

et finalement

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) = \frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} \frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2} dy$$

#### 12.3.2.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon + 1) < 1$ :

$$\begin{aligned} 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n')>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right) &= -\sum_{\epsilon+1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}<0} \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} \frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} e^{\varrho\left(-1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)} \\ = -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} e^{-\varrho} \sum_{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1)<n} \frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left(e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{n} &= -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} e^{-\varrho} \sum_{n>0} \frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left(e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} \end{aligned}$$

Ce terme a déjà été calculé, on peut appliquer (12.2) en échangeant $\varrho$ et $-\varrho$, ce qui donne ici :

$$e^{-\varrho} \sum_{n>0} \frac{n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left(e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} \frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2} dy$$

et :

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right) = -\frac{\pi^2}{2\theta_0^2(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} \frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)^2} dy$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x) dx \\ = &\frac{1}{2\pi} \mathrm{sgn}(\varrho) \left[ 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) + 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right) \right] \\ = &\frac{\pi}{4\theta_0^2(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} \frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)} dy \end{aligned}$$

## 12.4 Forme finale

La formule finale est alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\frac{\sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-s\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}{2s\left(\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}ds=\frac{\pi}{4\theta_0^2\left(\beta\right)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)}dy$$

Ainsi $L$ s'écrit sous la forme suivante :

$$L\left(\varrho\right)=\frac{\pi}{2\theta_0^2\left(\beta\right)}\int_{|\varrho|}^{+\infty}\underbrace{\frac{\sinh\varrho_1}{\cosh\left(\frac{\pi\varrho_1}{\theta_0(\beta)}\right)-1}}_{g(\varrho_1)}d\varrho_1$$

donc $L\left(\varrho\right)$ est paire.

## 12.5 Singularité logarithmique de $L\left(\varrho\right)$

Or $L\left(\varrho\right)$ a une singularité logarithmique quand $\varrho\to 0$, si on fait un développement limité de $g\left(\varrho_1\right)$ en $\varrho_1=0$, on a :

$$g\left(\varrho_1\right)\sim_{\varrho_1=0}\frac{\varrho_1+\mathcal{O}\left(\varrho_1^3\right)}{\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\varrho_1}{\theta_0(\beta)}\right)^2+\mathcal{O}\left(\varrho_1^4\right)}\sim_{\varrho_1=0}\frac{\theta_0^2\left(\beta\right)}{2\pi^2\varrho_1}+\mathcal{O}\left(1\right)$$

Et donc si on intègre cette expression, on obtient un $\ln\left(\varrho_1\right)$ à évaluer en 0.

## 12.6 Comportement quand $\theta_0\left(\beta\right)\to 0$

On introduit $\gamma=\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}$ avec $0<\gamma\leq 1$ alors :

$$L\left(\varrho\right)=\frac{\pi}{4\theta_0^2\left(\beta\right)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)}dy=\frac{1}{4\pi\beta}\int_{\frac{|\varrho|}{\gamma}}^{\infty}\frac{\sinh\gamma x}{\left(\cosh\left(x\right)-1\right)}dx$$

$L\left(\gamma,\varrho\right)$ est paire en $\varrho$ et positive. On calcule $\hat{L}\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)$ :

$$\begin{aligned}\hat{L}\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)&=\int_{-\infty}^{+\infty}L\left(\gamma,\varrho'\right)d\varrho'=2\int_{-\infty}^{0}L\left(\gamma,\varrho'\right)d\varrho'\\&=\frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}e^{s\varrho}\frac{\sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-s\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}{2s\left(\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}ds\,d\varrho\\&=\frac{1}{i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\sin\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-s\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}{2s^2\left(\cos\left(2s\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,dx\end{aligned}$$

avec

$$g(x)=\frac{\sin\left(2\left(\epsilon+ix\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)-\left(\epsilon+ix\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)}{2\left(\epsilon+ix\right)^2\left(\cos\left(2\left(\epsilon+ix\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}$$

Mais le plus simple est de revenir à la forme série :

$$\begin{aligned}
2\pi L(\gamma) &= \frac{1}{2\gamma}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{n}{n-\gamma}\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n - \frac{1}{2\gamma}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{n}{(n+\gamma)}\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n \\
&= \frac{1}{2\gamma}\left(e^{|\varrho|}-e^{-|\varrho|}\right)\sum_{n>0}\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n + \frac{1}{2}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{1}{n-\gamma}\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n \\
&+\frac{1}{2}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{1}{(n+\gamma)}\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n \\
&= \frac{\sinh(|\varrho|)}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)} + \frac{1}{2}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n} + \frac{1}{2}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n} \\
&= \frac{\sinh(|\varrho|)}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)} + e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\frac{1}{2}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right) \\
&+\frac{1}{2}e^{|\varrho|}\sum_{n>1}\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n} + \frac{1}{2}e^{-|\varrho|}\sum_{n>1}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n}
\end{aligned}$$

On pose :

$$K(\gamma) = \frac{1}{2}e^{|\varrho|}\sum_{n>1}\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n} + \frac{1}{2}e^{-|\varrho|}\sum_{n>1}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n}$$

en tenant compte pour $n > 1$ de :

$$1 < \frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}} \leq \frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}, \text{ et } \frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}} \leq \frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}} < 1$$

et :

$$\sum_{n>1}\frac{\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^n}{n} = -\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) - e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}$$

On a :

$$\begin{aligned}
K(\gamma) &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) \\
&< \left(\cosh(|\varrho|)+\frac{1}{4}\frac{\gamma}{1-\frac{\gamma}{2}}e^{|\varrho|}\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
K(\gamma) &> \frac{1}{2}\left(e^{|\varrho|}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right) \\
&> \left(\cosh(|\varrho|)-\frac{1}{4}\frac{\gamma}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
2\pi L(\gamma) = &\frac{\sinh(|\varrho|)}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)} + e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\frac{1}{2}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right) \\
&+\left(\cosh(|\varrho|)+\gamma R(\gamma)\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

Mais :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right)=\cosh\left(|\varrho|\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}-\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
2\pi L(\gamma) &= \frac{\sinh\left(|\varrho|\right)}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}+e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(\cosh\left(|\varrho|\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}-\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right)\right)\\
&+\left(\cosh\left(|\varrho|\right)+\gamma R(\gamma)\right)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)\\
&= \frac{\sinh\left(|\varrho|\right)}{\gamma\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}-\cosh\left(|\varrho|\right)\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)+\gamma R(\gamma)\left(-\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)\\
&+\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\gamma}-\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\gamma}\right)
\end{aligned}$$

avec :

$$-\frac{1}{2}\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{2}}<R(\gamma)<\frac{1}{2}\frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{2}}$$

Ce qui est presque la formule (3.15) de Hocking [37] ( il a oublié $\cosh\left(|\varrho|\right)$ devant $\ln\left(1-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)$).

CHAPITRE 13

# ANNEXE D : CALCUL DE $M(\varrho)$

## Sommaire


13.1 Pôles de $f(z)$ . . . . . **242**
13.2 Résidus . . . . . **242**
13.2.1 Type 1 . . . . . 242
13.2.2 Type 2 . . . . . 243
13.3 Calcul de l'intégrale . . . . . **243**
13.3.1 Cas $\varrho > 0$ . . . . . 243
13.3.2 Cas $\varrho < 0$ . . . . . 245
13.4 Forme finale . . . . . **247**


On a :

$$\tilde{M}(s,\hat{\phi}) = -\frac{\left[\cos\left(s\theta_0(\beta)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right)-\cos\theta_0(\beta)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right]}{s\left[\cos\left(2s\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]}$$

L'intégrale se met sous la forme :

$$\begin{aligned} M(\varrho) &= -\frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\frac{\left[\cos\left(s\theta_0(\beta)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left(s\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right)-\cos\theta_0(\beta)\sin\left(s\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right]}{s\left[\cos\left(2s\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]}ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)dx \end{aligned}$$

en posant $s = \epsilon + ix$ avec $0 < \epsilon < 1$, $ds = i\,dx$ et :

$$\begin{aligned} f(z) &= -e^{\epsilon\varrho}\frac{\cos\left((\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left((\epsilon+iz)\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right)}{(\epsilon+iz)\left[\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]} \\ &\quad + e^{\epsilon\varrho}\frac{\cos\theta_0(\beta)\sin\left((\epsilon+iz)\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)}{(\epsilon+iz)\left[\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]} \end{aligned}$$

L'intégrale se calcule selon :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}f(x)\,dx = 2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho)\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_j\right)$$

Il faut éventuellement justifier le comportement à l'infini si les pôles tendent vers l'infini.

## 13.1 Pôles de $f(z)$

Si $\epsilon + iz$ est un point regulier, les points qui posent problèmes sont ceux qui annulent le dénominateur c'est à dire les points $z$ tels que :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\epsilon+iz)\theta_0(\beta)=\theta_0(\beta)+n\pi \\ \text{ou} \\ (\epsilon+iz)\theta_0(\beta)=-\theta_0(\beta)+n\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=i\left(\epsilon-1-\dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \\ \text{ou} \\ z=i\left(\epsilon+1-\dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \end{cases}$$

Étudions ces deux cas séparement.

## 13.2 Résidus

### 13.2.1 Type 1

Cherchons $z_n$ tel que

$$z_n=i\left(\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)=2\theta_0(\beta)+2n\pi$$

Ainsi :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)$$

On fait un DL en $z=z_n$ :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)=-2i(z-z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2(\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)+o(z-z_n)$$

$$=-2i(z-z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)+o(z-z_n)$$

avec $\epsilon+iz_n=1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z),z_n\right) &= \lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)e^{i\varrho z} \\
&= -e^{\epsilon\varrho}\frac{\cos\left((\epsilon+iz_n)\theta_0(\beta)\right)\sin\left(\hat{\phi}\right)\sin\left((\epsilon+iz_n)\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)\right)}{(\epsilon+iz_n)\left[-2i\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]}e^{i\varrho z_n} \\
&\quad +e^{\epsilon\varrho}\frac{\cos\theta_0(\beta)\sin\left((\epsilon+iz_n)\hat{\phi}\right)\sin\left(\hat{\phi}-\theta_0(\beta)\right)}{(\epsilon+iz_n)\left[-2i\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)\right]}e^{i\varrho z_n} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{4i\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}e^{\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\varrho}
\end{aligned}$$

### 13.2.2 Type 2

Cherchons $z_n^{'}$ tel que

$$z_n^{'} = i\left(\epsilon + 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2\left(\epsilon + iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta) = -2\theta_0(\beta) + 2n\pi$$

Ainsi :

$$\cos\left(2(\epsilon + iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right) = \cos\left(2(\epsilon + iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\left(\epsilon + iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\right)$$

On fait un DL en $z = z_n^{'}$ :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(2(\epsilon + iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right) = -2i\left(z - z_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\sin\left(2\left(\epsilon + iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\right) + o\left(z - z_n^{'}\right)\\
&= 2i\left(z - z_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right) + o\left(z - z_n^{'}\right)
\end{aligned}$$

avec $\epsilon + iz_n^{'} = -1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n^{'}\right) = \lim_{z \to z_n^{'}} \left(z - z_n^{'}\right) f(z)\, e^{i\varrho z} = -\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{4i\left(-\theta_0(\beta) + n\pi\right)} e^{\left(-1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\varrho}$$

## 13.3 Calcul de l'intégrale

### 13.3.1 Cas $\varrho > 0$

#### 13.3.1.1 Termes de type 1

On remarque que l'on a :

$$\begin{cases} 0 \le \theta_0(\beta) \le \pi \\ 0 < \mathrm{Re}(s) = \epsilon < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} \le 1 \\ -1 < \epsilon - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < -\frac{\theta_0(\beta)}{\pi} < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) < 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n) > 0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) &= \sum_{\epsilon - 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)} > 0} \left[\frac{\pi \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{2\left(\theta_0(\beta) + n\pi\right)} e^{\left(1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\varrho}\right]\\
= \frac{\pi}{2} e^{\varrho} \sum_{0 > \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) > n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{\theta_0(\beta) + n\pi} e^{\frac{\varrho n\pi}{\theta_0(\beta)}}\right] &= \frac{\pi}{2} e^{\varrho} \sum_{0 > n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{\theta_0(\beta) + n\pi} e^{\frac{\varrho n\pi}{\theta_0(\beta)}}\right]\\
= \frac{1}{2} e^{\varrho} \sum_{n > 0} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\right]
\end{aligned}$$

Pour $n + a > 0$, on a :

$$z^a \int_z^{\infty} x^{-(1+a)} x^{-n}\, dx = z^a \left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^{\infty} = \frac{z^{-n}}{n+a}$$

$$\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi} - 1\right)} x^{-n}\, dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Alors :

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) = \tfrac{1}{2} e^{\varrho} \sum_{n>0} \left[ \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) \left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)} x^{-n} dx \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)} \left[ \sum_{n>0} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) x^{-n} \right] dx = \frac{\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}{2} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1} dx$$

avec :

$$\sum_{n>0} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) x^{-n} = \frac{x \sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1}$$

On pose $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} \ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dx$ alors :

$$dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dy$$

$x = e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = \varrho$ et finalement :

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}{2} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^2 - 2e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1} \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dy$$

$$= \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}{4\theta_0(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^y}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)} dy$$

#### 13.3.1.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0 \le \theta_0(\beta) \le \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1) < 1$ donc :

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right) = -\frac{\pi e^{-\varrho}}{2} \sum_{\epsilon+1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}>0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{-\theta_0(\beta)+n\pi} e^{\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\varrho}$$

$$= -\frac{\pi e^{-\varrho}}{2} \sum_{n<0} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{-\theta_0(\beta)+n\pi} e^{\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\varrho} = -\frac{e^{-\varrho}}{2} \sum_{n>0} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{\left(n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}$$

Pour $n+a>0$, on a comme précédemment :

$$z^a \int_z^{\infty} x^{-(1+a)} x^{-n} dx = z^a \left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^{\infty} = \frac{z^{-n}}{n+a}$$

$$\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \int_{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}^{\infty} x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})} x^{-n} dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Alors :

$$2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right) = -\frac{e^{-\varrho}}{2} \left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi})} \left[\sum_{n>0} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) x^{-n}\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left[\sum_{n>0} \sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right) x^{-n}\right] dx = -\frac{\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}{2} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1} dx$$

Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy$$

et $x = e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = \varrho$. Finalement :

$$2i\pi\sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n'\right) = -\frac{\pi}{4\theta_0(\beta)}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{\varrho}^{\infty}\frac{e^{-y}}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}dy$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix}f(x)dx\\
=\ &\frac{1}{2\pi}\underbrace{\mathrm{sgn}(\varrho)}_{=1}\left[2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n\right)+2i\pi\sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n'\right)\right]\\
=\ &\frac{1}{4\theta_0(\beta)}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{\varrho}^{\infty}\frac{\sinh y}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}dy
\end{aligned}$$

### 13.3.2 Cas $\varrho < 0$

#### 13.3.2.1 Termes de type 1

On remarque que pour $0 \le \theta_0(\beta) \le \pi$, on a $0 > \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) > -1$ :

$$\begin{aligned}
&2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n\right) = \pi e^{\varrho}\sum_{\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}<0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)}{2\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}e^{\frac{n\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\\
=\ &\frac{e^{\varrho}}{2}\sum_{n>0}\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)\frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}
\end{aligned}$$

On peut appliquer :

$$e^{\varrho}\int_{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}^{\infty}x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

en substituant $-\varrho$ à $\varrho$ ainsi :

$$e^{-\varrho}\int_{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}^{\infty}x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

ce qui donne ici :

$$\begin{aligned}
&2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n\right) = \frac{1}{2}\int_{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}^{\infty}x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left[\sum_{n>0}\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)x^{-n}\right]dx\\
=\ &\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}^{\infty}\frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1}dx
\end{aligned}$$

Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy$$

$x = e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = -\varrho$ et finalement :

$$2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n\right) = \frac{\pi}{4\theta_0(\beta)}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{-\varrho}^{\infty}\frac{e^{-y}}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}dy$$

#### 13.3.2.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0 \le \theta_0(\beta) \le \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1) < 1$ :

$$\begin{aligned}
2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n')>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n'\right) &= -\frac{e^{-\varrho}}{2}\sum_{\epsilon+1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}<0}\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)\frac{e^{\frac{n\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \\
&= -\frac{e^{-\varrho}}{2}\sum_{n>0}\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)\frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}
\end{aligned}$$

On peut appliquer :

$$e^{-\varrho}\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

en substituant $-\varrho$ à $\varrho$ ainsi :

$$e^{\varrho}\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

on a :

$$\begin{aligned}
2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n')>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n'\right) &= -\frac{1}{2}\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)}\left[\sum_{n>0}\sin\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\hat{\phi}\right)x^{-n}\right]dx \\
&= -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}\frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{x^2-2x\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)+1}dx
\end{aligned}$$

Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy$$

avec $x = e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = -\varrho$, on a :

$$2i\pi\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n')>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}f(z), z_n'\right) = -\frac{\pi}{4\theta_0(\beta)}\sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{-\varrho}^{\infty}\frac{e^{y}}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-\cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}dy$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)\,dx \\
= \quad & \frac{1}{2\pi}\underbrace{\operatorname{sgn}(\varrho)}_{=-1}\left[2i\pi \sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_n)>0} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n\right) + 2i\pi \sum_{\operatorname{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_n'\right)\right] \\
= \quad & \frac{1}{4\theta_0(\beta)} \sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{-\varrho}^{\infty} \frac{\sinh y}{\cosh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}\,dy
\end{aligned}
$$

## 13.4 Forme finale

La formule finale est alors :

$$
\begin{aligned}
M(\varrho,\hat{\phi}) = \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[2i\pi \operatorname{sgn}(\varrho) \sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_j)>0} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z} f(z), z_j\right)\right] \\
= \quad & \frac{1}{2\theta_0(\beta)} \sin\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)\int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\sinh y}{\cosh\left(y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\hat{\phi}}{\theta_0(\beta)}\right)}\,dy
\end{aligned}
$$

et $M(\varrho,\hat{\phi})$ est une fonction paire.

CHAPITRE 14

# ANNEXE E : CALCUL DE $\Upsilon(\varrho)$

## Sommaire


14.1 Pôles de $B(z)$ . . . . . **250**
14.2 Résidus . . . . . **250**
14.2.1 Type 1 . . . . . 250
14.2.2 Type 2 . . . . . 250
14.3 Calcul de l'intégrale . . . . . **251**
14.3.1 Cas $\varrho > 0$ . . . . . 251
14.3.2 Cas $\varrho < 0$ . . . . . 253
14.4 Forme finale . . . . . **254**
14.5 Pour $0 < \gamma < 1$ . . . . . **256**
14.6 Majoration de $\Upsilon(\varrho)$ . . . . . **258**
14.7 $\Upsilon$ est $L^1$ . . . . . **259**


On a :

$$\tilde{\Upsilon}(s) = \frac{\left(2s^2 - 6s + 1\right) s\cos\left(s\theta_0(\beta)\right)\sin\theta_0(\beta) + 3(2s-1)\cos\theta_0(\beta)\sin\left(s\theta_0(\beta)\right)}{s\left(\cos\left(2s\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right)}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\Upsilon(\varrho) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\tilde{\Upsilon}(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\epsilon+ix)\varrho}\tilde{\Upsilon}(\epsilon+ix)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}B(x)\,ds\end{aligned}$$

en posant $s = \epsilon + ix$ avec $0 < \epsilon < 1$, $ds = i\,dx$ et $B(x) = e^{\epsilon\varrho}\tilde{\Upsilon}(\epsilon + ix)$.
L'intégrale se calcule alors selon :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}B(x)\,dx = 2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho)\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}B(z), z_j\right)$$

Il faut éventuellement justifier le comportement à l'infini si les pôles tendent vers l'infini.

## 14.1 Pôles de $B(z)$

Les pôles de $B$ sont les mêmes que ceux de la fonction $f(z)$ lors du calcul de $L(\varrho)$ dans la partie (5.3.2.3). Donc les pôles de $B$ sont les points :

$$\begin{cases} z = i\left(\epsilon - 1 - \dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \\ \text{ou} \\ z = i\left(\epsilon + 1 - \dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \end{cases}$$

## 14.2 Résidus

### 14.2.1 Type 1

Cherchons $z_n$ tel que :

$$z_n = i\left(\epsilon - 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2(\epsilon + iz_n)\theta_0(\beta) = 2\theta_0(\beta) + 2n\pi$$

Ainsi en faisant un DL en $z = z_n$ :

$$\begin{aligned} &\cos\left(2(\epsilon + iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right) = \cos\left(2(\epsilon + iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2(\epsilon + iz_n)\theta_0(\beta)\right) \\ &= -2i(z - z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2(\epsilon + iz_n)\theta_0(\beta)\right) + o(z - z_n) = -2i(z - z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right) + o(z - z_n) \end{aligned}$$

avec $\epsilon + iz_n = 1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}B(z), z_n\right) = \lim_{z\to z_n}(z - z_n)B(z)e^{i\varrho z} \\ = \;& ie^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\left[\frac{\left(2\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 - 6\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)+1\right)\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\cos\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)\sin\theta_0(\beta)}{2\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)}\right] \\ &+ ie^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\left[\frac{3\left(2\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)\cos\theta_0(\beta)\sin\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}{2\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)}\right] \\ = \;& \frac{(-1)^n ni\pi}{2\theta_0(\beta)\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right]e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{cases} \cos\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right) = (-1)^n\cos\theta_0(\beta) \\ \sin\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right) = (-1)^n\sin\theta_0(\beta) \\ \dfrac{\sin\theta_0(\beta)\cos\theta_0(\beta)}{\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

### 14.2.2 Type 2

Cherchons $z_n'$ tel que :

$$z_n' = i\left(\epsilon + 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2\left(\epsilon + iz_n'\right)\theta_0(\beta) = -2\theta_0(\beta) + 2n\pi$$

Ainsi en faisant un DL en $z = z_n'$ :

$$\cos\left(2\left(\epsilon+iz\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)-\cos\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)=2i\left(z-z_n^{'}\right)\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)+o\left(z-z_n^{'}\right)$$

avec $\epsilon+iz_n^{'}=-1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}B\left(z\right),z_n^{'}\right)=\lim_{z\to z_n^{'}}\left(z-z_n^{'}\right)B\left(z\right)e^{i\varrho z}\\
=\;& e^{\left(iz_n^{'}+\epsilon\right)\varrho}\frac{\left(2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)^2-6\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)+1\right)\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\cos\left(\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)\sin\theta_0\left(\beta\right)}{\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\left(2i\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}\\
&+e^{\left(iz_n^{'}+\epsilon\right)\varrho}\frac{\left(6\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)-3\right)\cos\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\theta_0\left(\beta\right)\right)}{\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\left(2i\theta_0\left(\beta\right)\sin\left(2\theta_0\left(\beta\right)\right)\right)}\\
=\;& \frac{(-1)^n\,in\pi}{4\theta_0\left(\beta\right)\left(\theta_0\left(\beta\right)-n\pi\right)}e^{\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)\varrho}\left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0\left(\beta\right)}\right)^2-12\frac{n\pi}{\theta_0\left(\beta\right)}+13\right]
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
\cos\left(-\theta_0\left(\beta\right)+n\pi\right)&=(-1)^n\cos\theta_0\left(\beta\right)\\
\sin\left(-\theta_0\left(\beta\right)+n\pi\right)&=(-1)^{n+1}\sin\left(\theta_0\left(\beta\right)\right)
\end{aligned}$$

## 14.3 Calcul de l'intégrale

### 14.3.1 Cas $\varrho>0$

#### 14.3.1.1 Termes de type 1

On remarque que l'on a :

$$\begin{cases}0\le\theta_0\left(\beta\right)\le\pi\\0<\operatorname{Re}\left(s\right)=\epsilon<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\le1\\-1<\epsilon-1<0\end{cases}\Rightarrow-1<-\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\pi}<\frac{\theta_0\left(\beta\right)}{\pi}\left(\epsilon-1\right)<0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&2i\pi\sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_n)>0}\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}B\left(z\right),z_n\right)\\
&=2i\pi\sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_n)>0}\left[\frac{(-1)^n\,ni\pi}{2\theta_0\left(\beta\right)\left(\theta_0\left(\beta\right)+n\pi\right)}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{n\pi}{\theta_0\left(\beta\right)}\right)^2\right]e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\right]\\
&=\frac{\pi}{\theta_0\left(\beta\right)}e^{\varrho}\sum_{n>0}\left[\frac{(-1)^{1-n}\,n}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{n\pi}{\theta_0\left(\beta\right)}\right)^2\right]\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}\right]
\end{aligned}$$

Pour $n+a>0$, on a :

$$z^a\int_z^{\infty}x^{-(1+a)}x^{-n}dx=z^a\left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^{\infty}=\frac{z^{-n}}{n+a}$$

alors :

$$e^{-\varrho}\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty}x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)}x^{-n}dx=\frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n\right) \\
= & \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} e^{\varrho} \sum_{n>0} (-1)^{1-n} n \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] e^{-\varrho} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)} x^{-n} dx \\
= & \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1\right)} \left\{\sum_{n>0} (-1)^{1-n} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] n x^{-n}\right\} dx \\
= & \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x+1)^2} dx - 6\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+1}}{(x+1)^4} dx
\end{aligned}
$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{\varrho \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho > 0$. Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} \ln x$, $x = e^{y \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} \frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} e^{-y \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dx$ alors :

$$
\begin{aligned}
\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x+1)^2} dx &= \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}+1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2} dy \\
\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+1}}{(x+1)^4} dx &= \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}+1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^4} dy
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n\right) \\
= & \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}+1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \frac{6e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2}\right] dy
\end{aligned}
$$

#### 14.3.1.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1) < 1$ donc :

$$
\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n'\right) \\
= & -\frac{\pi e^{-\varrho}}{2\theta_0(\beta)} \sum_{1>(\epsilon+1)\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}>n} \left[\frac{(-1)^{n+1} n}{\left(n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 - 12\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)} + 13\right] e^{\left(\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}\right)n}\right] \\
= & -\frac{\pi e^{-\varrho}}{2\theta_0(\beta)} \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1} n}{\left(n + \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 + 12\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)} + 13\right] \left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}
\end{aligned}
$$

Pour $n + a > 0$, on a comme précédemment :

$$
z^a \int_z^{\infty} x^{-(1+a)} x^{-n} dx = z^a \left[-\frac{z^{-a-n}}{n+a}\right]_z^{\infty} = \frac{z^{-n}}{n+a}
$$

alors :

$$
e^{\varrho} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} x^{-n} dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n + \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}
$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n'\right) \\
= & -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} \sum_{n>0} (-1)^{n+1} n \left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 + 12\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)} + 13\right] \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} x^{-n} dx \\
= & -\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x+1)^2} \left\{\frac{2\pi^2}{\theta_0^2(\beta)} + 13 + \frac{12\pi}{\theta_0(\beta)(x+1)^2}\left[x^2 - \frac{x\pi}{\theta_0(\beta)} - 1\right]\right\} dx
\end{aligned}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho > 0$. Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dx$ alors :

$$\begin{aligned}
2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n'\right) = & -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \left[\frac{2\pi^2}{\theta_0^2(\beta)} + 13\right] \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2} dy \\
& -6\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^4} \left[e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} - \frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\pi}{\theta_0(\beta)} - 1\right] dy
\end{aligned}$$

### 14.3.2 Cas $\varrho < 0$

#### 14.3.2.1 Termes de type 1

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \pi$, on a $-1 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) < 0$ :

$$\begin{aligned}
2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n\right) = & \; 2i\pi \sum_{\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}<0} \left\{\frac{(-1)^n n i\pi}{2\theta_0(\beta)\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\right\} \\
= & \; \frac{\pi e^{\varrho}}{\theta_0(\beta)} \sum_{0<n} \left\{(-1)^{n+1} n \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] \frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n + \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\right\}
\end{aligned}$$

Pour $n + a > 0$, on a comme précédemment :

$$z^a \int_z^{\infty} x^{-(1+a)} x^{-n} dx = \frac{z^{-n}}{n+a}$$

alors :

$$e^{-\varrho} \int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} x^{-n} dx = \frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n + \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} B(z), z_n\right) \\
= & \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} \sum_{n>0} \left\{(-1)^{n+1} n \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\right] x^{-n}\right\} dx \\
= & \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{\theta_0^2(\beta)}\right) \int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x+1)^2} dx - 6\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} \frac{x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}}{(x+1)^4} dx
\end{aligned}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho < 0$. Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}B(z), z_n\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \int_{-\varrho}^{\infty} \frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2}\left\{\left(1+\frac{2\pi^2}{\theta_0^2(\beta)}\right)-\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\frac{12}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^2}\right\}dy
\end{aligned}$$

#### 14.3.2.2 Termes de type 2

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1) < 1$ :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho' z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}B(z), z_n'\right) \\
= & \frac{\pi e^{-\varrho}}{2\theta_0(\beta)} \sum_{(\epsilon+1)\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}<n} \left\{(-1)^n n\left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 - 12\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}+13\right]\frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{\left(n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)}\right\} \\
= & \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1}\sum_{n>0}\left\{(-1)^n n x^{-n}\left[2\left(\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2-12\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}+13\right]\right\}dx \\
= & \frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\left\{\frac{12\pi}{\theta_0(\beta)(1+x)^3}\left[\frac{x\pi}{\theta_0(\beta)(1+x)}+x-1\right]-\frac{1}{(1+x)^2}\left[13+\frac{2\pi^2}{\theta_0^2(\beta)}\right]\right\}dx
\end{aligned}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{-\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho < 0$. Et où on a utilisé :

$$e^{\varrho}\int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}-1}x^{-n}dx = \frac{\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho' z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}B(z), z_n'\right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3\int_{-\varrho}^{\infty} e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}+1\right)}\left\{\frac{12}{\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^3}\left[\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right]\right\}dy \\
& -\frac{1}{2}\left[13+\frac{2\pi^2}{\theta_0^2(\beta)}\right]\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2\int_{-\varrho}^{\infty}\frac{e^{y\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}+1\right)}}{\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^2}dy
\end{aligned}$$

## 14.4 Forme finale

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} B(x)\, ds \\
= \quad & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \int_{|\varrho|}^{\infty}\left[-\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)} + \left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 + \frac{7}{2}\right] \frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^2} dy \\
& -\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\sinh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^4}\left[2\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\coth\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) - \sinh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\right] dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^3 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\cosh y}{\left(\cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right)^4}\left[2\cosh^2\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\coth\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) + \sinh\left(\frac{y\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\right] dy \\
& +\frac{3}{8\pi}\left(\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^4 \int_{|\varrho|}^{\infty} \frac{\sinh\left(y\left(\frac{\pi}{2\theta_0(\beta)}+1\right)\right)}{\left(\cosh\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)^4}\left[\sinh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right) - \cosh\left(\frac{y\pi}{2\theta_0(\beta)}\right)\right] dy
\end{aligned}$$

Pour $\theta_0(\beta) = \pi\gamma$ avec $0 < \gamma \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) = \frac{1}{2\pi\gamma^2}\int_{|\varrho|}^{\infty}\left[-\frac{3}{4\gamma^2}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{y}{2\gamma}\right)} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{7}{2}\right]\frac{\sinh y}{\cosh^2\left(\frac{y}{2\gamma}\right)} dy \\
& -\frac{3}{8\pi\gamma^3}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\sinh y}{\cosh^4\left(\frac{y}{2\gamma}\right)}\left[2\cosh^2\left(\frac{y}{2\gamma}\right)\coth\left(\frac{y}{2\gamma}\right) - \sinh\left(\frac{y}{\gamma}\right)\right] dy \\
& -\frac{3}{8\pi\gamma^3}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\cosh y}{\cosh^4\left(\frac{y}{2\gamma}\right)}\left[2\cosh^2\left(\frac{y}{2\gamma}\right)\coth\left(\frac{y}{2\gamma}\right) + \sinh\left(\frac{y}{\gamma}\right)\right] dy \\
& +\frac{3}{8\pi\gamma^4}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{\sinh\left(y\left(\frac{1}{2\gamma}+1\right)\right)}{\cosh^4\left(\frac{y}{2\gamma}\right)}\left[\sinh\left(\frac{y}{2\gamma}\right) - \cosh\left(\frac{y}{2\gamma}\right)\right] dy
\end{aligned}$$

Changement de variable $y = \gamma x$ avec $0 < \gamma \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) = \frac{1}{2\pi\gamma}\int_{\frac{|\varrho|}{\gamma}}^{\infty}\left[-\frac{3}{4\gamma^2}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{7}{2}\right]\frac{\sinh\gamma x}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\
& -\frac{3}{8\pi\gamma^2}\int_{\frac{|\varrho|}{\gamma}}^{\infty}\frac{\sinh\gamma x}{\cosh^4\left(\frac{x}{2}\right)}\left[2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)\coth\left(\frac{x}{2}\right) - \sinh(x)\right] dx \\
& -\frac{3}{8\pi\gamma^2}\int_{\frac{|\varrho|}{\gamma}}^{\infty}\frac{\cosh\gamma x}{\cosh^4\left(\frac{x}{2}\right)}\left[2\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)\coth\left(\frac{x}{2}\right)\sinh(x)\right] dx \\
& +\frac{3}{8\pi\gamma^3}\int_{\frac{|\varrho|}{\gamma}}^{\infty}\frac{\sinh\left(x\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)\right)}{\cosh^4\left(\frac{x}{2}\right)}\left[\sinh\left(\frac{x}{2}\right) - \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\right] dx
\end{aligned}$$

## 14.5 Pour $0<\gamma<1$

On revient à l'écriture sous forme de séries :

$$\begin{aligned}
2\pi\Upsilon(\varrho) = & \frac{1}{\gamma}\sum_{n>0}(-1)^{n+1}ne^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}-\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right]\left[7+2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2\right] \\
& +\frac{6}{\gamma^2}\sum_{n>0}(-1)^n n^2 e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}+\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}\right] \\
= & \frac{2}{\gamma}\frac{\sinh|\varrho|}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)}\left[\frac{2}{\gamma^2}\frac{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2}+7\right]-\frac{12}{\gamma^2}\cosh|\varrho|\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2} \\
& +\sum_{n>0}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left[\left(2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+7\right)\left(\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)+6\frac{n}{\gamma}\left(-\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)\right] \\
= & \frac{2}{\gamma}\left[\frac{1}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)}\left[\frac{2}{\gamma^2}\frac{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2}+7\right]+\frac{7\gamma^2-4}{\left(1-\gamma^2\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}\right]\sinh|\varrho| \\
& +\frac{2}{\gamma^2}\left[\frac{\gamma^2+2}{\left(1-\gamma^2\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}-6\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2}\right]\cosh|\varrho| \\
& +\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left[\left(2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+7\right)\left(\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)+6\frac{n}{\gamma}\left(-\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)\right]
\end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned}
K(\gamma,\varrho) & =\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left[\left(2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+7\right)\left(\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)+6\frac{n}{\gamma}\left(-\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}+\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right)\right] \\
& =\frac{2}{\gamma^2}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}n\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{n}}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{n}}\right)+7\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\frac{1}{n}\left(\frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{n}}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{n}}\right) \\
& +\frac{6}{\gamma}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left(-\frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{n}}+\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{n}}\right)
\end{aligned}$$

or :

$$\sum_{n>1}(-1)^{n+1}n\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}=-\frac{e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+2}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2},\qquad \sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}=-\frac{e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}},$$

$$\sum_{n>1}\frac{(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}}{n}=\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)-e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}$$

et :

$$\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}<\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\leq 1 \text{ et } 1<\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\leq\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}$$

alors :

$$\begin{aligned}
K(\gamma,\varrho) < & \frac{2}{\gamma^2}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n} n\left(\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right)+7\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right)\\
& +\frac{6}{\gamma}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left(-\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right)\\
< & 2\cosh|\varrho|\left[-\frac{\left(7\gamma^2+6\gamma+2\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+4+6\gamma+14\gamma^2+7\gamma^2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^2\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\right]\\
& +\frac{1}{1-\frac{\gamma}{2}}\left[\frac{\left(11-3\gamma-7\frac{\gamma^2}{2}\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+10-3\gamma-7\gamma^2-7\frac{\gamma^2}{2}e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\frac{\gamma}{2}\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\right]e^{|\varrho|}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
K(\gamma,\varrho) > & \frac{2}{\gamma^2}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n} n\left(e^{|\varrho|}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\right)+7\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\frac{1}{n}\left(e^{|\varrho|}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\right)\\
& +\frac{6}{\gamma}\sum_{n>1}(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^{-n}\left(-e^{|\varrho|}+\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\right)\\
> & 2\cosh|\varrho|\left[-\frac{\left(2-6\gamma+7\gamma^2\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+4-6\gamma+14\gamma^2+7\gamma^2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^2\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\right]\\
& -\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}}e^{-|\varrho|}\left[\frac{\left(11+3\gamma-7\frac{\gamma^2}{2}\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+10+3\gamma-7\gamma^2-7\frac{\gamma^2}{2}e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\frac{\gamma}{2}\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi si on note :

$$\begin{aligned}
D_1(\gamma,\varrho) &= -\frac{\left(2+7\gamma^2\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+4+14\gamma^2+7\gamma^2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^2\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\underset{\varrho\to+\infty}{\longrightarrow}0\\
D_2(\gamma,\varrho) &= \frac{1+e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}\underset{\varrho\to+\infty}{\longrightarrow}0\\
D_3(\gamma,\varrho) &= \frac{\left(11-7\frac{\gamma^2}{2}\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+10-7\gamma^2-7\frac{\gamma^2}{2}e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}+7\frac{\gamma}{2}\ln\left(e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\underset{\varrho\to+\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
2\cosh|\varrho|\left(D_1(\gamma,\varrho)+\frac{6}{\gamma}D_2(\gamma,\varrho)\right)-\frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{2}}\left(3D_2(\gamma,\varrho)+D_3(\gamma,\varrho)\right) &< K(\gamma,\varrho)\\
K(\gamma,\varrho) < 2\cosh|\varrho|\left(D_1(\gamma,\varrho)-\frac{6}{\gamma}D_2(\gamma,\varrho)\right)+\frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{2}}\left(-3D_2(\gamma,\varrho)+D_3(\gamma,\varrho)\right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$K(\gamma,\varrho) = 2\cosh|\varrho| D_1(\gamma,\varrho) + R(\gamma,\varrho)$$

et :

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \frac{12}{\gamma}\cosh|\varrho| D_2(\gamma,\varrho) - \frac{e^{-|\varrho|}}{1+\frac{\gamma}{2}}\left(3D_2(\gamma,\varrho) + D_3(\gamma,\varrho)\right) < R(\gamma,\varrho) \\
& R(\gamma,\varrho) < -\frac{12}{\gamma}\cosh|\varrho| D_2(\gamma,\varrho) + \frac{e^{|\varrho|}}{1-\frac{\gamma}{2}}\left(-3D_2(\gamma,\varrho) + D_3(\gamma,\varrho)\right)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
2\pi\Upsilon(\varrho) = \quad & \frac{2}{\gamma}\left[\frac{1}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)}\left[\frac{2}{\gamma^2}\frac{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2}+7\right]+\frac{7\gamma^2-4}{\left(1-\gamma^2\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}\right]\sinh|\varrho| \\
& + \left[\frac{2\left(\gamma^2+2\right)e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^2\left(1-\gamma^2\right)} - \frac{12e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2} + 2D_1(\gamma,\varrho)\right]\cosh|\varrho| + R(\gamma,\varrho)
\end{aligned}$$

Comme $0<\gamma<1$, $R(\gamma,\varrho)$ est borné et $\Upsilon(\varrho)$ aussi, on a alors :

$$\Upsilon(\varrho) \underset{\varrho\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$2\pi\Upsilon(\varrho) \underset{\varrho\to 0}{\longrightarrow} \frac{2}{\gamma^2\left(\gamma^2-1\right)} + \frac{6-14\gamma^2}{\gamma^2-1} + 14\ln 2 + R(\gamma,0)$$

et :

$$\frac{3+6\gamma+7\gamma^2}{2\gamma(\gamma+2)} - \frac{7\gamma\ln 2}{\gamma+2} < R(\gamma,0) < \frac{3-6\gamma+7\gamma^2}{2\gamma(\gamma-2)} - \frac{7\gamma\ln 2}{\gamma-2}$$

## 14.6 Majoration de $\Upsilon(\varrho)$

On aura besoin de borner $\Upsilon(\varrho)$ donc pour $\varrho$ grand on a :

$$\begin{aligned}
\left|2\pi\Upsilon(\varrho)\right| \leq \quad & \left|\frac{7\gamma^4-7\gamma^3+7\gamma^2-6\gamma+2}{\gamma^3(1-\gamma)}\right| e^{|\varrho|\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} + \left|\frac{2+7\gamma^2}{\gamma^2}\right| e^{|\varrho|\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)} \\
& + \left|\frac{2+4\gamma+14\gamma^3}{\gamma^3}\right| e^{|\varrho|\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)} + \left|\frac{2-4\gamma-14\gamma^3}{\gamma^3}\right| e^{|\varrho|\left(-1-\frac{2}{\gamma}\right)} \\
& + \left|\frac{7\gamma^4+7\gamma^3+7\gamma^2+6\gamma+2}{\gamma^3(1+\gamma)}\right| e^{|\varrho|\left(-1-\frac{1}{\gamma}\right)} + \left|\frac{2+7\gamma^2}{\gamma^2}\right| e^{|\varrho|\left(-1-\frac{3}{\gamma}\right)} + \left|R(\gamma,\varrho)\right|
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
D_1(\gamma,\varrho) &= -\frac{2+7\gamma^2}{\gamma^2}e^{-\frac{3|\varrho|}{\gamma}} - \frac{4+14\gamma^2}{\gamma^2}e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}} - 7e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}} \\
D_2(\gamma,\varrho) &= e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}} + e^{-\frac{3|\varrho|}{\gamma}} \\
D_3(\gamma,\varrho) &= \frac{11-7\frac{\gamma^2}{2}}{\gamma}e^{-\frac{3|\varrho|}{\gamma}} + \frac{10-7\gamma^2}{\gamma}e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}} - \frac{7}{2}\gamma e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}
\end{aligned}$$

ainsi pour l'encadrement de $R(\gamma,\varrho)$ :

$$\begin{cases} R(\gamma,\varrho) & > \dfrac{6}{\gamma}\left[e^{|\varrho|\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)}+e^{|\varrho|\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)}\right]+\dfrac{2\left(7\gamma^2-4\right)}{\gamma(2+\gamma)}e^{-|\varrho|\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)} \\ & \quad +\dfrac{-10+7\gamma^2}{\gamma(2+\gamma)}e^{-|\varrho|\left(1+\frac{3}{\gamma}\right)}+\dfrac{7\gamma}{2+\gamma}e^{-|\varrho|\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} \\ R(\gamma,\varrho) & < -\dfrac{6}{\gamma}\left[e^{-|\varrho|\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)}+e^{-|\varrho|\left(1+\frac{3}{\gamma}\right)}\right]+\dfrac{2\left(7\gamma^2-4\right)}{\gamma(\gamma-2)}e^{|\varrho|\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)} \\ & \quad +\dfrac{-10+7\gamma^2}{\gamma(\gamma-2)}e^{|\varrho|\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)}-\dfrac{7\gamma}{2-\gamma}e^{|\varrho|\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} \end{cases}$$

Donc comme $0<\gamma<1$, on a $-\infty<-\frac{1}{\gamma}<-1$ et :

$$\begin{array}{lll} -\infty<1-\frac{1}{\gamma}<0, & -\infty<-1-\frac{1}{\gamma}<-2, & -\infty<1-\frac{2}{\gamma}<-1, \\ -\infty<-1-\frac{2}{\gamma}<-3, & -\infty<1-\frac{3}{\gamma}<-2, & -\infty<-1-\frac{3}{\gamma}<-4 \end{array}$$

ainsi on peut dire que $\left|2\pi\Upsilon(\varrho)\right|\leq e^{-\alpha|\varrho|}$ si :

$$\begin{array}{lll} -\infty<-\left(-1+\frac{1}{\gamma}\right)\leq-\alpha, & -\infty<-\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)<-2\leq-\alpha, & -\infty<-\left(-1+\frac{2}{\gamma}\right)<-1\leq-\alpha, \\ -\infty<-\left(1+\frac{2}{\gamma}\right)<-3\leq-\alpha, & -\infty<-\left(-1+\frac{3}{\gamma}\right)<-2\leq-\alpha, & -\infty<-\left(1+\frac{3}{\gamma}\right)<-4\leq-\alpha \end{array}$$

On peut alors poser $\alpha=-1+\frac{1}{\gamma}$, on a alors $\left|2\pi\Upsilon(\varrho)\right|\leq e^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}$ où on rappele que $0<\gamma<1$ est tel que $\theta_0(\beta)=\pi\gamma$.

## 14.7 ϒ est $L^1$

On revient à l'écriture sous forme de séries :

$$\begin{aligned} & 2\pi\Upsilon(\varrho)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\varrho}B(x)\,ds \\ = & \frac{1}{\gamma}\sum_{n>0}(-1)^{n+1}ne^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}-\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}\right]\left[7+2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2\right]+\frac{6}{\gamma^2}\sum_{n>0}(-1)^n n^2e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[\frac{e^{-|\varrho|}}{n+\gamma}+\frac{e^{|\varrho|}}{n-\gamma}\right] \\ = & \frac{1}{\gamma}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}(-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\left[-7-2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+\frac{6}{\gamma}n\right]+\frac{1}{\gamma}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}(-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\left[7+2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+\frac{6}{\gamma}n\right] \end{aligned} \tag{14.1}$$

or :

$$\begin{aligned} \sum_{n>0}(-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[-7-2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+\frac{6}{\gamma}n\right] & =\frac{\left(7\gamma^2-6\gamma+2\right)e^{\frac{2|\varrho|}{\gamma}}+2\left(7\gamma^2-3\gamma-1\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+7\gamma^2}{\left(1+3e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+3e^{\frac{2|\varrho|}{\gamma}}+e^{\frac{3|\varrho|}{\gamma}}\right)\gamma^2} \\ & =\frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2-6\gamma e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3\gamma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n>0}(-1)^n e^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[7+2\left(\frac{n}{\gamma}\right)^2+\frac{6}{\gamma}n\right] &= -\frac{2\left(7\gamma^2+3\gamma-1\right)e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+\left(7\gamma^2+6\gamma+2\right)e^{\frac{2|\varrho|}{\gamma}}+7\gamma^2}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3\gamma^2}\\ &= -\frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2+6\gamma e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3\gamma^2}\end{aligned}$$

pour $n>0$ : $\quad \frac{1}{1+\gamma}<\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}\leq 1$ et $1<\frac{1}{1-\frac{\gamma}{n}}\leq\frac{1}{1-\gamma}$

donc :

$$\begin{aligned}\left|2\pi\mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho)\right| \leq\ & \frac{1}{\gamma^3(1-\gamma)}e^{|\varrho|}\left|\frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2-6\gamma e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3}\right|\\ &+\frac{1}{\gamma^3}e^{-|\varrho|}\left|\frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2+6\gamma e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3}\right|\\ \leq\ & \frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\gamma^3\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3}\underbrace{\left|\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|}-e^{-|\varrho|}\right|}_{=h(\varrho,\gamma)}\\ &+\frac{6}{\gamma^2}\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}\left[\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right]\end{aligned}$$

or :

$$h(\varrho,\gamma)=\begin{cases}\text{pour } \varrho<0: & \frac{1}{1-\gamma}e^{-\varrho}-e^{\varrho}\\ \text{pour } \varrho\geq 0: & \frac{1}{1-\gamma}e^{\varrho}-e^{-\varrho}\end{cases}$$

On remarque que $h(\varrho,\gamma)$ est paire, il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$, on a alors :

$$\forall\varrho\in\mathbb{R}^+,\ \partial_\varrho h(\varrho,\gamma)=\underbrace{\frac{1}{1-\gamma}}_{\geq 0}e^{\varrho}+e^{-\varrho}\geq 0$$

Donc $h(\varrho,\gamma)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$et croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car $h(\varrho,\gamma)$ est paire). Son minimum se situe donc en $\varrho=0$ et $h(\varrho=0,\gamma)=\frac{\gamma}{1-\gamma}>0$ donc $\forall\varrho\in\mathbb{R},\ h(\varrho,\gamma)>0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\left|2\pi\Upsilon(\varrho)\right| \leq\ & \frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^2+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)}{\gamma^3\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^3}\left(\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|}-e^{-|\varrho|}\right)+\frac{6}{\gamma^2}\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(1+e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right)^2}\left[\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|}+e^{-|\varrho|}\right]\\ \leq\ & \frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^3}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\left(\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}}-e^{-|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}}\right)+\frac{6}{\gamma^2}\left[\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+e^{-|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right]\end{aligned}$$

Notons :

$$g(\varrho,\gamma)=\frac{7\gamma^2\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)+2e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\gamma^3}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)\left(\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}}-e^{-|\varrho|-\frac{3|\varrho|}{\gamma}}\right)+\frac{6}{\gamma^2}\left[\frac{1}{1-\gamma}e^{|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+e^{-|\varrho|-\frac{|\varrho|}{\gamma}}\right]$$

qui est une fonction paire, on peut la réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}g(\varrho,\gamma)=\quad&-\left[\frac{7}{(\gamma-1)\gamma}+\frac{6}{(\gamma-1)\gamma^2}+\frac{2}{(\gamma-1)\gamma^3}\right]e^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)|\rho|}-\left[\frac{14}{(\gamma-1)\gamma}+\frac{2}{(\gamma-1)\gamma^3}\right]e^{\left(1-\frac{2}{\gamma}\right)|\rho|}\\&-\frac{7}{(\gamma-1)\gamma}e^{\left(1-\frac{3}{\gamma}\right)|\rho|}+\left[-\frac{7}{\gamma}+\frac{6}{\gamma^2}-\frac{2}{\gamma^3}\right]e^{\left(-1-\frac{1}{\gamma}\right)|\rho|}-\left[\frac{2}{\gamma^3}+\frac{14}{\gamma}\right]e^{\left(-1-\frac{2}{\gamma}\right)|\rho|}-\frac{7}{\gamma}e^{\left(-1-\frac{3}{\gamma}\right)|\rho|}\end{aligned}$$

on a donc une expression en exponentielles avec les puissances suivantes :

$$\left(1-\tfrac{1}{\gamma}\right)|\rho|,\quad\left(1-\tfrac{2}{\gamma}\right)|\rho|,\quad\left(1-\tfrac{3}{\gamma}\right)|\rho|,\quad\left(-1-\tfrac{1}{\gamma}\right)|\rho|,\quad\left(-1-\tfrac{2}{\gamma}\right)|\rho|,\quad\left(-1-\tfrac{3}{\gamma}\right)|\rho|$$

donc comme $0<\gamma\leq\frac{1}{2}$, on a $-\infty<-\frac{1}{\gamma}\leq-2$ et :

$$\begin{aligned}&-\infty<1-\tfrac{1}{\gamma}\leq-1,\qquad-\infty<-1-\tfrac{1}{\gamma}\leq-3,\qquad-\infty<1-\tfrac{2}{\gamma}\leq-3,\\&-\infty<-1-\tfrac{2}{\gamma}\leq-5,\qquad-\infty<1-\tfrac{3}{\gamma}\leq-5,\qquad-\infty<-1-\tfrac{3}{\gamma}\leq-7\end{aligned}$$

donc tous ces termes sont intégrables et $g(\varrho,\gamma)$ est donc intégrable. Ainsi $g(\varrho,\gamma)\in L^1(\mathbb{R})$. On a alors montré que :

$$|\Upsilon(\varrho)|\leq\frac{1}{2\pi}g(\varrho,\gamma)$$

Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Upsilon(\varrho)|\,\mathrm{d}\varrho\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(\varrho,\gamma)\,\mathrm{d}\varrho<+\infty$$

Donc $\Upsilon(\varrho)\in L^1(\mathbb{R})$.

CHAPITRE 15

# ANNEXE F : CALCUL DE $\partial_\varrho \Upsilon(\varrho)$

**Sommaire**


15.1 Pôles . . . . . **264**
15.2 Résidus . . . . . **264**
15.2.1 Type 1 . . . . . 264
15.2.2 Type 2 . . . . . 264
15.3 Calcul de l'intégrale . . . . . **265**
15.3.1 Cas $\varrho > 0$ : Termes de type 1 . . . . . 265
15.3.2 Cas $\varrho > 0$ : Termes de type 2 . . . . . 266
15.3.3 Cas $\varrho < 0$ : Termes de type 1 . . . . . 267
15.3.4 Cas $\varrho < 0$ : Termes de type 2 . . . . . 267
15.4 Forme finale . . . . . **268**
15.5 Écriture sous forme de série . . . . . **268**
15.5.1 Comportement en $\varrho \to -\infty$ . . . . . 268


On a :

$$\Upsilon(\varrho) = \mathscr{L}^{-1}\left(\tilde{\Upsilon}(s)\right)(\varrho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\tilde{\Upsilon}(s)\,ds$$

avec :

$$\tilde{\Upsilon}(s) = \frac{\left(2s^2-6s+1\right)s\cos\left(s\theta_0(\beta)\right)\sin\theta_0(\beta)+3(2s-1)\cos\theta_0(\beta)\sin\left(s\theta_0(\beta)\right)}{s\left(\cos\left(2s\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)\right)}$$

donc :

$$\partial_\varrho\Upsilon(\varrho) = \partial_\varrho\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} e^{s\varrho}\tilde{\Upsilon}(s)\,ds\right] = \frac{1}{2i\pi}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} se^{s\varrho}\tilde{\Upsilon}(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho}H(x)\,dx$$

en notant :

$$\begin{aligned}
H(x) &= (\epsilon + ix)\, e^{\epsilon\varrho}\tilde{\Upsilon}(\epsilon + ix) \\
&= e^{\epsilon\varrho}\frac{\left(2(\epsilon+ix)^2 - 6(\epsilon+ix)+1\right)(\epsilon+ix)\cos\left((\epsilon+ix)\theta_0(\beta)\right)\sin\theta_0(\beta)}{\cos\left(2(\epsilon+ix)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)} \\
&+ e^{\epsilon\varrho}\frac{3(2(\epsilon+ix)-1)\cos\theta_0(\beta)\sin\left((\epsilon+ix)\theta_0(\beta)\right)}{\cos\left(2(\epsilon+ix)\theta_0(\beta)\right)-\cos\left(2\theta_0(\beta)\right)}
\end{aligned}$$

## 15.1 Pôles

Les pôles de $H$ sont les points :

$$\begin{cases} z = i\left(\epsilon - 1 - \dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \\ \text{ou} \\ z = i\left(\epsilon + 1 - \dfrac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \end{cases}$$

## 15.2 Résidus

### 15.2.1 Type 1

Cherchons $z_n$ tel que :

$$z_n = i\left(\epsilon - 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2(\epsilon + iz_n)\theta_0(\beta) = 2\theta_0(\beta) + 2n\pi$$

Ainsi en faisant un DL en $z = z_n$ :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right) = -2i(z-z_n)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right) + o(z-z_n)$$

avec $\epsilon + iz_n = 1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}H(z), z_n\right) = \lim_{z\to z_n}(z-z_n)H(z)e^{i\varrho z} \\
= &-\frac{1}{2i}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\frac{\left(2\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^2 - 6\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)+1\right)\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\cos\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)\sin\theta_0(\beta)}{\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)} \\
&-\frac{3}{2i}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\frac{\left(2\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)-1\right)\cos\theta_0(\beta)\sin\left(\theta_0(\beta)+n\pi\right)}{\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)} \\
= &-\frac{(-1)^n n\pi\left(\theta_0^2(\beta)+2n^2\pi^2\right)}{4i\theta_0^4(\beta)}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}
\end{aligned}$$

### 15.2.2 Type 2

Cherchons $z_n^{'}$ tel que :

$$z_n^{'} = i\left(\epsilon + 1 - \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right) \Leftrightarrow 2\left(\epsilon + iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta) = -2\theta_0(\beta) + 2n\pi$$

Ainsi en faisant un DL en $z = z_n^{'}$ :

$$\cos\left(2(\epsilon+iz)\theta_0(\beta)\right) - \cos\left(2\theta_0(\beta)\right) = 2i\left(z - z_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right) + o\left(z - z_n^{'}\right)$$

avec $\epsilon + iz_n^{'} = -1 + \frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}H(z), z_n^{'}\right) = \lim_{z\to z_n^{'}}\left(z - z_n^{'}\right)H(z)\,e^{i\varrho z} \\
= \;& e^{\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\varrho}\frac{\left(2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)^2 - 6\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)+1\right)\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\cos\left(\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\right)\sin\theta_0(\beta)}{2i\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)} \\
&+ e^{\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\varrho}\frac{3\left(2\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)-1\right)\cos\theta_0(\beta)\sin\left(\left(\epsilon+iz_n^{'}\right)\theta_0(\beta)\right)}{2i\theta_0(\beta)\sin\left(2\theta_0(\beta)\right)} \\
= \;& \frac{(-1)^n\, n\pi\left(13\theta_0^2(\beta) - 12n\pi\theta_0(\beta) + 2n^2\pi^2\right)}{4i\theta_0^4(\beta)}e^{\left(-1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)\varrho}
\end{aligned}$$

## 15.3 Calcul de l'intégrale

### 15.3.1 Cas $\varrho > 0$ : Termes de type 1

On remarque que l'on a :

$$\begin{cases} 0 \le \theta_0(\beta) \le \pi \\ 0 < \operatorname{Re}(s) = \epsilon < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} \le 1 \\ -1 < \epsilon - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < -\frac{\theta_0(\beta)}{\pi} < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) < 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
&2i\pi \sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_n)>0} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}H(z), z_n\right) \\
&= 2i\pi \sum_{\epsilon-1-\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}>0}\left[-\frac{(-1)^n\, n\pi\left(\theta_0^2(\beta)+2n^2\pi^2\right)}{4i\theta_0^4(\beta)}e^{\varrho\left(1+\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\right)}\right] \\
&= \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)}e^{\varrho}\sum_{n>0}\left[(-1)^{-n}\, n\left(\theta_0^2(\beta)+2n^2\pi^2\right)\left(n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)\frac{e^{\left(\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^{-n}}}{n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\right] \\
&= -\frac{\pi\left(2\pi^2+\theta^2\right)}{2\theta_0^4(\beta)}\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}\left[\frac{\pi\left(x^3-1\right)-\theta\left(x^3+1\right)}{(x+1)^5}\right]dx \\
&+ \frac{\pi}{2\theta_0^4(\beta)}\int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}+1\right)}\left[\frac{\left(22\pi^2-\theta^2\right)\pi(x-1)-3\left(2\pi^2-\theta^2\right)\theta(x+1)}{(x+1)^5}\right]dx
\end{aligned}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho > 0$. Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dx$ alors $dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}dy$ et $x = e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = \varrho$ ainsi :

$$\begin{aligned}
&2i\pi \sum_{\operatorname{Im}(\varrho z_n)>0} \operatorname{Res}\left(e^{i\varrho z}H(z), z_n\right) \\
&= -\frac{\pi^2\left(2\pi^2+\theta^2\right)}{2\theta_0^5(\beta)}\int_{\varrho}^{\infty} e^{y}e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\left[\frac{\pi\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)-\theta\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right]dy \\
&+ \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)}\int_{\varrho}^{\infty} e^{y}e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}}\left[\frac{\left(22\pi^2-\theta^2\right)\pi\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)-3\left(2\pi^2-\theta^2\right)\theta\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right]dy
\end{aligned}$$

### 15.3.2 Cas $\varrho > 0$ : Termes de type 2

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon+1) < 1$ donc :

$$\begin{aligned}
&2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} G(z), z_n'\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)} e^{-\varrho} \sum_{1>(\epsilon+1)\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}>n} (-1)^n n\left(13\theta_0^2(\beta) - 12n\pi\theta_0(\beta) + 2n^2\pi^2\right) e^{\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\varrho} \\
&= \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)} e^{-\varrho} \sum_{n>0} (-1)^{-n+1} n\left(13\theta_0^2(\beta) + 12n\pi\theta_0(\beta) + 2n^2\pi^2\right) e^{\left(\frac{\pi\varrho}{\theta_0(\beta)}\right)^{-n}} \\
&= \frac{\pi}{2\theta_0^4(\beta)} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \left[\frac{\pi\left(2\pi^2+25\theta_0^2\right)\left(x^3-1\right) + \theta_0\left(14\pi^2+13\theta_0^2\right)\left(x^3+1\right)}{(x+1)^5}\right] dx \\
&+ \frac{\pi}{2\theta_0^4(\beta)} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{1-\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}} \left[\frac{\left(22\pi^3-25\pi\theta_0^2\right)(1-x) - \left(42\pi^2\theta_0 - 39\theta_0^3\right)(1+x)}{(x+1)^5}\right] dx
\end{aligned}$$

avec :

$$e^{\varrho} \int_{e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{-\left(1+\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right)} x^{-n} dx = \frac{\left(e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n}}{n + \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}}$$

Cette dernière formule n'a de sens que pour $x > 1$, ce qui sera vérifié pour $x > e^{\varrho\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ si $\varrho > 0$. Avec $y = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\ln x$, $x = e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}$ et donc $dy = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\frac{dx}{x} = \frac{\theta_0(\beta)}{\pi} e^{-y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dx$ alors $dx = \frac{\pi}{\theta_0(\beta)} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} dy$ et $x = e^{\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}} \Rightarrow y = \varrho$ ainsi :

$$\begin{aligned}
&2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} H(z), z_n'\right) \\
&= \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(2\pi^2+25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right) + \theta_0\left(14\pi^2+13\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{(x+1)^5}\right] dy \\
&+ \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{y\left(2\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}-1\right)} \left[\frac{\left(22\pi^3-25\pi\theta_0^2\right)\left(1-e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right) - \left(42\pi^2\theta_0-39\theta_0^3\right)\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right] dy
\end{aligned}$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} H(x) dx = -\frac{\pi\left(2\pi^2+\theta^2\right)}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right) - \theta\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right] dy \\
&+ \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\left(22\pi^2-\theta^2\right)\pi\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right) - 3\left(2\pi^2-\theta^2\right)\theta\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right] dy \\
&+ \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(2\pi^2+25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right) + \theta_0\left(14\pi^2+13\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)}{(x+1)^5}\right] dy \\
&+ \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\left(22\pi^3-25\pi\theta_0^2\right)\left(1-e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right) - \left(42\pi^2\theta_0-39\theta_0^3\right)\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\right] dy
\end{aligned}$$

### 15.3.3 Cas $\varrho < 0$ : Termes de type 1

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \pi$, on a $0 > \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon - 1) > -1$ :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_n)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} H(z), z_n\right) \\
= & \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)} e^{\varrho} \sum_{n>-1} (-1)^{n+1} n\left(\theta_0^2(\beta) + 2n^2\pi^2\right)\left(e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} \\
= & \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(22\pi^2 - \theta_0^2\right)\left(1 - e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right) - 3\theta_0\left(2\pi^2 - \theta_0^2\right)\left(1 + e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy \\
& + \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \frac{\left(2\pi^2 + \theta_0^2\right)\left(\pi\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) + \theta_0\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5} dy
\end{aligned}$$

### 15.3.4 Cas $\varrho < 0$ : Termes de type 2

On remarque que pour $0 \leq \theta_0(\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, on a $0 < \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}(\epsilon + 1) < 1$ :

$$\begin{aligned}
& 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\left(\varrho z_n'\right)>0} \mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z} H(z), z_n'\right) \\
= & \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)} e^{-\varrho} \sum_{0<(\epsilon+1)\frac{\theta_0(\beta)}{\pi}<n} (-1)^n n\left(13\theta_0^2(\beta) - 12n\pi\theta_0(\beta) + 2n^2\pi^2\right) e^{\frac{n\pi}{\theta_0(\beta)}\varrho} \\
= & \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)} \int_{e^{-\frac{\varrho\pi}{\theta_0(\beta)}}}^{\infty} x^{\left(\frac{\theta_0(\beta)}{\pi} - 1\right)} \left[\sum_{n>0} (-1)^n n\left(13\theta_0^2(\beta) - 12n\pi\theta_0(\beta) + 2n^2\pi^2\right)\left(n - \frac{\theta_0(\beta)}{\pi}\right) x^{-n}\right] dx \\
= & -\frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(2\pi^2 + 25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) - \theta_0\left(14\pi^2 + 13\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy \\
& + \frac{\pi^2}{2\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(22\pi^2 - 25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) - \left(42\pi^2\theta_0 - 39\theta_0^3\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy
\end{aligned}$$

On obtient enfin en sommant les 2 termes (avec $\mathrm{sgn}(\varrho) = -1$) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} H(x)\,dx = & -\frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(22\pi^2 - \theta_0^2\right)\left(1 - e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right) - 3\theta_0\left(2\pi^2 - \theta_0^2\right)\left(1 + e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy \\
& - \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{-y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \frac{\left(2\pi^2 + \theta_0^2\right)\left(\pi\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) + \theta_0\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5} dy \\
& + \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(2\pi^2 + 25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) - \theta_0\left(14\pi^2 + 13\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy \\
& - \frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)} \int_{-\varrho}^{\infty} e^{y} e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}} \left[\frac{\pi\left(22\pi^2 - 25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} - 1\right) - \left(42\pi^2\theta_0 - 39\theta_0^3\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}} + 1\right)^5}\right] dy
\end{aligned}$$

## 15.4 Forme finale

La formule finale est alors :

$$\begin{aligned}
\partial_\varrho \Upsilon(\varrho) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\varrho} H(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[2i\pi\,\mathrm{sgn}(\varrho)\sum_{\mathrm{Im}(\varrho z_j)>0}\mathrm{Res}\left(e^{i\varrho z}H(z), z_j\right)\right] \\
&= -\frac{\pi\left(2\pi^2+\theta_0^2\right)}{4\theta_0^5(\beta)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\left[\pi\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)\left(e^y+e^{-y}\right)-\theta_0\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)\left(e^y-e^{-y}\right)\right]dy \\
&+\frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\left[\pi\left(22\pi^2-\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)\left(e^y+e^{-y}\right)-3\theta_0\left(2\pi^2-\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)\left(e^y-e^{-y}\right)\right]dy \\
&+\frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\left[\pi\left(2\pi^2+25\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}-1\right)\left(e^y+e^{-y}\right)-\theta_0\left(14\pi^2+13\theta_0^2\right)\left(e^{y\frac{3\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)\left(e^y-e^{-y}\right)\right]dy \\
&+\frac{\pi}{4\theta_0^5(\beta)}\int_{|\varrho|}^{\infty}\frac{e^{y\frac{2\pi}{\theta_0(\beta)}}}{\left(e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}+1\right)^5}\left[\pi\left(22\pi^2-25\theta_0^2\right)\left(1-e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)-\theta_0\left(42\pi^2-39\theta_0^2\right)\left(1+e^{y\frac{\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)\right]dy
\end{aligned}$$

## 15.5 Écriture sous forme de série

$$\begin{aligned}
2\pi\partial_\varrho\Upsilon(\varrho) = \;& \frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}\left[(-1)^{-n}n\left(\theta_0^2(\beta)+2n^2\pi^2\right)e^{\left(\frac{|\varrho|\pi}{\theta_0(\beta)}\right)^{-n}}\right] \\
&+\frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}(-1)^{-n+1}n\left(13\theta_0^2(\beta)+12n\pi\theta_0(\beta)+2n^2\pi^2\right)e^{\left(\frac{\pi|\varrho|}{\theta_0(\beta)}\right)^{-n}} \\
&-\frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)}e^{-|\varrho|}\sum_{n>0}(-1)^{n+1}n\left(\theta_0^2(\beta)+2n^2\pi^2\right)\left(e^{\frac{|\varrho|\pi}{\theta_0(\beta)}}\right)^{-n} \\
&-\frac{\pi^2}{2\theta_0^4(\beta)}e^{|\varrho|}\sum_{n>0}(-1)^{n}n\left(13\theta_0^2(\beta)-12n\pi\theta_0(\beta)+2n^2\pi^2\right)e^{-\frac{n\pi|\varrho|}{\theta_0(\beta)}} \\
=\;& \frac{12\pi^2}{\theta_0^2(\beta)}\sum_{n>0}(-1)^n ne^{-\frac{n\pi|\varrho|}{\theta_0(\beta)}}\left[-\cosh|\varrho|+\frac{\pi n}{\theta_0(\beta)}\sinh|\varrho|\right]
\end{aligned}$$

Pour $\theta_0(\beta)=\pi\gamma$ avec $0<\gamma<1$ :

$$\begin{aligned}
2\pi\partial_\varrho\Upsilon(\varrho) &= \frac{12}{\gamma^3}\sum_{n>0}(-1)^n ne^{-\frac{n|\varrho|}{\gamma}}\left[-\gamma\cosh|\varrho|+n\sinh|\varrho|\right] \\
&= \frac{6}{\gamma^3}\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{e^{|\varrho|}\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^3}\left[\gamma\left(e^{2|\varrho|}+1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)-\left(e^{2|\varrho|}-1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)\right]
\end{aligned}$$

$\partial_\varrho\Upsilon(\varrho)\geq 0$ ssi $\gamma\left(e^{2|\varrho|}+1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)-\left(e^{2|\varrho|}-1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)\geq 0.$

### 15.5.1 Comportement en $\varrho\to-\infty$

On s'intéresse à la limite quand $\varrho\to-\infty$ ($\varrho<0$) et plus particulièrement au terme :

$$e^{-\varrho}\partial_\varrho\Upsilon(\varrho)=e^{|\varrho|}\partial_\varrho\Upsilon(\varrho)$$

ainsi :

$$e^{|\varrho|}\partial_\varrho \Upsilon(\varrho) = \frac{3}{\pi\gamma^3}\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^3}\left[\gamma\left(e^{2|\varrho|}+1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)-\left(e^{2|\varrho|}-1\right)\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}-1\right)\right]$$

alors :

$$\left|e^{|\varrho|}\partial_\varrho \Upsilon(\varrho)\right| = \frac{3}{\pi\gamma^3}\frac{e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}}{\left(e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+1\right)^3}\left|(\gamma-1)\,e^{\left(2+\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}+(\gamma+1)\,e^{2|\varrho|}+(\gamma+1)\,e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+\gamma-1\right|$$

et quand $\varrho \to -\infty$ :

$$\begin{aligned}
\left|e^{|\varrho|}\partial_\varrho \Upsilon(\varrho)\right| &\sim \frac{3}{\pi\gamma^3}e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}}\left|(\gamma-1)\,e^{\left(2+\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}+(\gamma+1)\,e^{2|\varrho|}+(\gamma+1)\,e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+\gamma-1\right| \\
&\leq \frac{3}{\pi\gamma^3}e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}}\left(|\gamma-1|\,e^{\left(2+\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}+|\gamma+1|\,e^{2|\varrho|}+|\gamma+1|\,e^{\frac{|\varrho|}{\gamma}}+|\gamma-1|\right) \\
&\leq \frac{3}{\pi\gamma^3}\left(|\gamma-1|\,e^{\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}+|\gamma+1|\,e^{\left(2-\frac{2}{\gamma}\right)|\varrho|}+|\gamma+1|\,e^{-\frac{|\varrho|}{\gamma}}+|\gamma-1|\,e^{-\frac{2|\varrho|}{\gamma}}\right) \\
&\leq \frac{3}{\pi\gamma^3}|\gamma-1|\,e^{\left(2-\frac{1}{\gamma}\right)|\varrho|}
\end{aligned}$$

# BIBLIOGRAPHIE


[1] G. ALLAIRE : *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique.* Palaiseau , Éd. de l'École Polytechnique, 2007.

[2] DJ BENNEY : Long waves on liquidfilms. *J. Math. and Phys*, 45(2), 1966. (Cité pages 4 et 59.)

[3] A. BERTOZZI : The mathematics of moving contact lines in thin liquid films. *Notices AMS*, 45:689–697, 1998. URL http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.130.4774&rep=rep1&type=pdf. (Cité pages 4 et 203.)

[4] A.L. BERTOZZI et M.P. BRENNER : Linear stability and transient growth in driven contact lines. *Physics of Fluids*, 9(3):530–539, 1997. (Cité pages 5, 165, 181, 189, 191, 195, 197, 198, 199, 201, 202, 205 et 213.)

[5] M. BOUTOUNET : *Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince.* Thèse de doctorat, Aéronautique et Astronautique, 2011. (Cité pages 43, 58 et 60.)

[6] F. BOYER et P. FABRIE : *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles.* Mathématiques & applications. Springer, 2005. ISBN 9783540298182. URL http://books.google.com/books?id=Q7T4xRcsEYYC. (Cité pages 32, 35 et 36.)

[7] D. BRESCH : Shallow-Water Equations and Related Topics. *Handbook of Differential Equations*, 2009. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00385946. (Cité pages 43, 58 et 60.)

[8] D. BRESCH et B. DESJARDINS : Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1-2):211–223, 2003. (Cité page 37.)

[9] D. BRESCH et P. NOBLE : Mathematical justification of a shallow water model. *Methods ans Applications in Analysis*, 14:87–118, 2007. (Cité pages 36, 37 et 215.)

[10] H. BRÉZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 1999. ISBN 9782100043149. URL http://books.google.com/books?id=aykKPQAACAAJ.

[11] F. BROCHARD et P. G. DE GENNES : Spreading laws for liquid polymer droplets : interpretation of the " foot ". *Journal de Physique Lettres*, 45(12):597–602, 1984. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00232387. (Cité page 2.)

[12] R. BUCKINGHAM, M. SHEARER et A. BERTOZZI : Thin film traveling waves and the navier slip condition. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(2):722–744, 2002. ISSN 00361399. URL http://www.jstor.org/stable/3648790. (Cité page 4.)

[13] G. CALOZ, M. COSTABEL, M. DAUGE et G. VIAL : Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptotic Analysis*, 50(1):121–173, 2006. URL http://hal.inria.fr/docs/00/00/19/63/PDF/CaCoDaVi04.pdf. (Cité page 26.)

[14] S. S. L. CHANG : An extension of the initial value theorem and its application to random signal analysis. *Proceedings of the IEEE*, 56(4):764, april 1968. ISSN 0018-9219. URL http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1448314. (Cité page 228.)

[15] R. G. COX : The dynamics of the spreading of liquids on a solid surface. part 1. viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 168(-1):169–194, 1986. URL http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=392079&fulltextType=RA&fileId=S0022112086000332. (Cité pages 3, 63, 103, 105, 128, 143, 146, 152, 162, 192 et 216.)

[16] M. DAUGE : Elliptic boundary value problems on corner domains. *Lecture notes in mathematics*, (1341), 1988. (Cité page 26.)

[17] R. DAUTRAY, J. L. LIONS et M. ARTOLA : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. MASSON, 1984.

[18] P. G. DE GENNES : Wetting : statics and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 57:827–863, Jul 1985. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.57.827. (Cité page 2.)

[19] P. G. DE GENNES, F. BROCHARD et D. QUÉRÉ : *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002. (Cité pages 1 et 120.)

[20] P. G. DE GENNES, X. HUA et P. LEVINSON : Dynamics of wetting : local contact angles. *Journal of Fluid Mechanics*, 212:55–63, 1990. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112090001859. (Cité page 3.)

[21] J. A. DIEZ, L. KONDIC et A. BERTOZZI : Global models for moving contact lines. *Phys. Rev. E*, 63:011208, 2000. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.011208.

[22] E. B. DUSSAN V. : The moving contact line : the slip boundary condition. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(04):665–684, 1976. URL http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=401065&fulltextType=RA&fileId=S0022112076002838. (Cité pages 2, 162 et 216.)

[23] E. B. DUSSAN V. : On the spreading of liquids on solid surfaces : static and dynamic contact lines. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11(1):371–400, 1979. URL http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fl.11.010179.002103. (Cité page 3.)

[24] E. B. DUSSAN V. et S. H. DAVIS : On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 65(01):71–95, 1974. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112074001261. (Cité page 2.)

[25] E. B. DUSSAN V., E. RAMÉ et S. GAROFF : On identifying the appropriate boundary conditions at a moving contact line : an experimental investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 230:97–116, 1991. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112091000721. (Cité pages 4 et 153.)

[26] G. DUVAUT et J. L. LIONS : *Les inéquations en mécanique et en physique*. Numéro vol. 1 *in* Travaux et recherches mathématiques. Dunod, 1972. URL http://books.google.com/books?id=eqfQAAAAMAAJ.

[27] J. EGGERS : Toward a description of contact line motion at higher capillary numbers. *Physics of Fluids*, 16(9):3491–3494, 2004. URL http://link.aip.org/link/?PHF/16/3491/1. (Cité page 4.)

[28] J. EGGERS et H. A. STONE : Characteristic lengths at moving contact lines for a perfectly wetting fluid : the influence of speed on the dynamic contact angle. *Journal of Fluid Mechanics*, 505:309–321, 2004. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112004008663.

[29] M. A. FONTELOS et A. I. MUNOZ : A free boundary problem in glaciology : The motion of grounding lines. *Interfaces and free boundaries*, 9(1), 2007. URL http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/afontelo/grounding_line.pdf. (Cité page 4.)

[30] J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME : Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1):89–102, 2001. ISSN 1531-3492. URL http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2001.1.89. (Cité page 37.)

[31] L. GIACOMELLI et F. OTTO : Droplet spreading : Intermediate scaling law by pde methods. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 55(2):217–254, 2002. ISSN 1097-0312. URL http://dx.doi.org/10.1002/cpa.10017.

[32] V. GIRAULT et P. A. RAVIART : *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*. Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, 1986. ISBN 9783540157960. URL http://books.google.com/books?id=BVfvAAAAMAAJ.

[33] R. GOODWIN et G. M. HOMSY : Viscous flow down a slope in the vicinity of a contact line. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 3(4):515–528, 1991. URL http://link.aip.org/link/?PFA/3/515/1. (Cité page 4.)

[34] H. P. GREENSPAN : On the motion of a small viscous droplet that wets a surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 84(01):125–143, 1978. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112078000075. (Cité page 3.)

[35] E. GUYON, J.P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique physique*. EDP sciences, 2001.

[36] P. J. HALEY et M. J. MIKSIS : The effect of the contact line on droplet spreading. *Journal of Fluid Mechanics*, 223:57–81, 1991. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112091001337.

[37] L. M. HOCKING : A moving fluid interface. part 2. the removal of the force singularity by a slip flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 79(02):209–229, 1977. URL http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=379375&fulltextType=RA&fileId=S0022112077000123. (Cité pages 3, 63, 75, 105, 107, 108, 109, 113, 162, 216 et 239.)

[38] L. M. HOCKING : Contact angles and inertia for liquid bounded by an oscillating plate. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 56(2):271–288, 2003. URL http://qjmam.oxfordjournals.org/content/56/2/271.abstract. (Cité page 4.)

[39] L. M. HOCKING et S. H. DAVIS : Inertial effects in time-dependent motion of thin films and drops. *Journal of Fluid Mechanics*, 467:1–17, 2002. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112002008637. (Cité page 4.)

[40] L. M. HOCKING et A. D. RIVERS : The spreading of a drop by capillary action. *Journal of Fluid Mechanics*, 121:425–442, 1982. URL http://168.150.242.130/Research/LiteratureGuide/FluidMechanicsContactLines/HockingRiversJFM_82.pdf. (Cité pages 3, 63, 143, 146, 153, 162 et 216.)

[41] R. L. HOFFMAN : A study of the advancing interface. i. interface shape in liquid-gas systems. *Journal of Colloid and Interface Science*, 50(2):228 – 241, 1975. ISSN 0021-9797. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021979775902258. (Cité page 2.)

[42] C. HUH et L. E. SCRIVEN : Hydrodynamic model of steady movement of a solid / liquid / fluid contact line. *Journal of Colloid and Interface Science*, 35(1):85–101, 1971. URL http://www.ekayasolutions.com/Research/LiteratureGuide/DynamicContactLines/HuScrivenJCIS_71.pdf. (Cité pages iii, 2, 103 et 104.)

[43] H. E. HUPPERT : Flow and instability of a viscous current down a slope. *Nature(London)*, 300:427–429, 1982. URL http://www.itg.cam.ac.uk/people/heh/Paper49.pdf. (Cité page 2.)

[44] F. Y. KAFKA et E. B. DUSSAN V. : On the interpretation of dynamic contact angles in capillaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 95(03):539–565, 1979. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112079001592. (Cité page 3.)

[45] L. KONDIC : Instabilities in gravity driven flow of thin fluid films. *SIAM Review*, 45(1):95–115, 2003. ISSN 00361445. URL http://www.jstor.org/stable/25054370. (Cité pages 4, 5, 165, 181, 189, 191, 195, 196, 197, 200, 202, 203, 205 et 213.)

[46] D. KRÖNER : Asymptotic expansions for a flow with a dynamic contact angle. *The Navier-Stokes Equations Theory and Numerical Methods*, pages 49–59, 1990. (Cité pages 4 et 30.)

[47] J. LERAY : Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta mathematica*, 63 (1):193–248, 1934. (Cité pages xi, 23, 32, 34, 35 et 215.)

[48] M. J. LIGHTHILL et G. B. WHITHAM : On kinematic waves. i. flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178): 281–316, 1955. URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/229/1178/281.abstract. (Cité page 4.)

[49] J. L. LIONS et E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes et applications , Vol1*. DUNOD, 1968. (Cité page 24.)

[50] P. LUCHINI et F. CHARRU : The phase lead of shear stress in shallow-water flow over a perturbed bottom. *Journal of Fluid Mechanics*, 665:516–539, 2010. (Cité page 181.)

[51] A. MAKHLOUF : *Justification et amélioration de modèles d'antennes patch par la méthode des développements asymptotiques raccordés*. Thèse de doctorat, INSA de Toulouse, 2008. URL http://eprint.insa-toulouse.fr/archive/00000277/. (Cité pages 26 et 102.)

[52] H. K. MOFFATT : Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech*, 18(1):1–18, 1964. URL http://www.igf.fuw.edu.pl/KB/HKM/PDF/HKM_007_s.pdf. (Cité page 2.)

[53] A. MÜNCH et B. A. WAGNER : Numerical and asymptotic results on the linear stability of a thin film spreading down a slope of small inclination. *European Journal of Applied Mathematics*, 10 (03):297–318, 1999. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0956792599003769. (Cité page 4.)

[54] C. L. M. H. NAVIER : Mémoire sur les lois du mouvement des fluids. *Mem. Acad. Sci. Inst. Fr.*, 6:432–6, 1823. (Cité pages 4, 9, 14 et 107.)

[55] C. G. NGAN et E. B. DUSSAN V. : On the dynamics of liquid spreading on solid surfaces. *Journal of Fluid Mechanics*, 209:191–226, 1989. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112089003071. (Cité page 4.)

[56] A. ORON, S. H. DAVIS et S. G. BANKOFF : Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3):931–980, Jul 1997. URL http://rmp.aps.org/abstract/RMP/v69/i3/p931_1. (Cité pages 1, 18 et 215.)

[57] L. M. PISMEN et J. EGGERS : Solvability condition for the moving contact line. *Phys. Rev. E*, 78: 056304, 2008. URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.056304. (Cité page 4.)

[58] K. R. RAO et N. AHMED : Initial value theorem for the bilateral laplace transform. *Proceedings of the IEEE*, 56(11):2079, nov 1968. ISSN 0018-9219. URL http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1448732. (Cité page 228.)

[59] P. A. RAVIART et J. M. THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Dunod, 2004. ISBN 9782100486458. URL http://books.google.com/books?id=93VYPwAACAAJ.

[60] S. N. REZNIK et A. L. YARIN : Spreading of a viscous drop due to gravity and capillarity on a horizontal or an inclined dry wall. *Physics of Fluids*, 14(1):118–132, 2002. URL http://link.aip.org/link/?PHF/14/118/1. (Cité pages 3 et 153.)

[61] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Modeling film flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 6:277–292, 1998. URL http://dx.doi.org/10.1007/s100510050550. (Cité page 60.)

[62] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Improved modeling of flows down inclined planes. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 15:357–369, 2000. URL http://dx.doi.org/10.1007/s100510051137. (Cité page 60.)

[63] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. *Physics of Fluids*, 14(1):170–183, 2002. URL http://link.aip.org/link/?PHF/14/170/1. (Cité page 60.)

[64] A. SAMANTA, C. RUYER-QUIL et B. GOYEAU : A falling film down a slippery inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 684:353–383, 2011. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112011003041. (Cité page 215.)

[65] M. SBRAGAGLIA, K. SUGIYAMA et L. BIFERALE : Wetting failure and contact line dynamics in a couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 614:471–493, 2008. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112008003649.

[66] J. H. SNOEIJER : Free-surface flows with large slopes : Beyond lubrication theory. *Physics of Fluids*, 18(2):021701–+, février 2006. URL http://pof.aip.org/resource/1/phfle6/v18/i2/p021701_s1. (Cité pages xiii, 4, 103, 153, 162, 165, 180, 181, 184, 191 et 201.)

[67] J. H. SNOEIJER, B. ANDREOTTI, G. DELON et M. FERMIGIER : Relaxation of a dewetting contact line. part 1. a full-scale hydrodynamic calculation. *Journal of Fluid Mechanics*, 579:63–83, 2007. URL http://dx.doi.org/10.1017/S0022112007005216. (Cité page 4.)

[68] J. H. SNOEIJER, E. RIO, N. Le GRAND et L. LIMAT : Self-similar flow and contact line geometry at the rear of cornered drops. *Physics of Fluids*, 17(7):072101, 2005. URL http://link.aip.org/link/?PHF/17/072101/1. (Cité page 4.)

[69] V. A. SOLONNIKOV : On some free boundary problems for the navier-stokes equations with moving contact points and lines. *Mathematische Annalen*, 302(1):743–772, 1995. URL http://www.springerlink.com/index/G4327R76346U1383.pdf. (Cité pages xi, 4, 23, 29 et 215.)

[70] L. H. TANNER : The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. *Journal of Physics D : Applied Physics*, 12:1473–1484, 1979. URL http://iopscience.iop.org/0022-3727/12/9/009. (Cité pages 3, 127 et 143.)

[71] S. M. TROIAN, E. HERBOLZHEIMER, S. A. SAFRAN et J. F. JOANNY : Fingering instabilities of driven spreading films. *EPL (Europhysics Letters)*, 10:25–30, 1989. URL http://iopscience.iop.org/0295-5075/10/1/005. (Cité pages 4, 5, 165, 181, 189, 191, 195, 202 et 213.)

[72] E. O. TUCK et L. W. SCHWARTZ : A numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows. *SIAM Review*, 32(3):453–469, 1990. ISSN 00361445. URL http://www.jstor.org/stable/2031615. (Cité page 4.)

[73] J. P. VILA : Thin Films Models and Shallow Water equations. Notes personnelles.

[74] O. V. VOINOV : Hydrodynamics of wetting. *Fluid Dynamics*, 11:714–721, 1976. ISSN 0015-4628. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01012963. 10.1007/BF01012963. (Cité pages 3, 143, 153, 156, 162 et 216.)

[75] G. B. WHITHAM : The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 227(1170): 399–407, 1955. URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/227/1170/399.abstract. (Cité pages 5, 189 et 191.)

[76] T. YOUNG : Philosophical transactions of the royal society of london. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 1805. URL http://www.jstor.org/stable/10.2307/107159. (Cité pages 119, 120 et 192.)