

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Raducu CHERMANEANU

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

Spécialité : Mécanique et ingénierie

Représentation de la variabilité des propriétés mécaniques d'un CMO à l'échelle microscopique. Méthodes de construction des distributions statistiques

Soutenue le 15 février 2012

Après avis de :

Mme. N. GODIN	Maître de Conférences (HDR) à l'INSA - Lyon	Rapporteur
M. F. MERAGHNI	Professeur des Universités à Arts et Métiers ParisTech, CER Metz	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

Mme. N. GODIN	Maître de Conférences (HDR) à l'INSA - Lyon	Rapporteur
M. F. MERAGHNI	Professeur des Universités à Arts et Métiers ParisTech, CER Metz	Rapporteur
M. O. POLIT	Professeur des Universités à l'Université Paris Ouest Nanterre	Président
M. M. NOUILLANT	Professeur des Universités à l'Université Bordeaux 1	Examineur
M. L. GUILLAUMAT	Professeur des Universités à Arts et Métiers ParisTech, CER d'Angers	Directeur de thèse
M. F. DAU	Maître de Conférences à Arts et Métiers ParisTech, CER de Bordeaux	Co-directeur de thèse

*“Ne te fie pas à ta propre intelligence,
mais place toute ta confiance dans le
Seigneur. Appuie-toi sur Lui dans tout ce
que tu entreprends et Il guidera tes pas.”
La Bible - Proverbes 3 : 5,6.*

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé en grande partie au Laboratoire Matériaux Endommagement Fiabilité et Ingénierie des Procédés (LAMEFIP) de Bordeaux, actuellement assimilé par l'Institut de Mécanique (I2M). À ce titre, je remercie Monsieur le Professeur Ivan Iordanoff, directeur du laboratoire, de m'avoir permis d'effectuer ce travail dans de bonnes conditions.

Je tiens à adresser tout d'abord mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse, Messieurs Laurent Guillaumat, Professeur des Universités à Arts et Métiers ParisTech, CER d'Angers et Frédéric Dau, Maître de Conférences à Arts et Métiers ParisTech, CER de Bordeaux, pour m'avoir confié le sujet de cette thèse de doctorat. Leurs conseils scientifiques rigoureux, leur expérience ainsi que leur esprit critique, m'ont permis d'enrichir mes connaissances et de mener à bien ce projet. Je leur suis également reconnaissant de m'avoir témoigné leur soutien pendant les moments difficiles que j'ai traversés durant cette période.

À Madame Nathalie Godin ainsi qu'à Monsieur Fodil Meraghni je les remercie vivement d'avoir accepté d'être rapporteurs et de juger ce travail. Merci à Monsieur Olivier Polit qui m'a fait l'honneur de présider le jury. Je remercie également Monsieur Michel Nouillant d'avoir complété le collège d'examineurs.

Puisqu'une thèse suppose maints échanges et réunions scientifiques, je salue à cet égard l'intervention et l'apport des personnes suivantes : Ivan Iordanoff, Arnaud Alzina, Ludovic Ballère, Pierre Pineau, Nicolas Lefèvre, Yann Duplessis Kergomard, Jean-Luc Charles, Camille Robert et Etienne Prulière.

Je souhaite également remercier l'ensemble du personnel enseignant du laboratoire LAMEFIP. Je suis en particulier reconnaissant à Catherine Froustey et à Madalina Calamaz Gogonet. Vos encouragements ainsi que votre soutien précieux ont été bienvenus dans les moments les plus difficiles.

Je remercie tous les doctorants, post doctorants et stagiaires pour les bons moments passés ensemble. J'ai une pensée particulière ici pour : Daniel Iliescu, Nejeh Jemal, Rubén Pérez Mora, Mahuampy Salazar Garcia, Erwan Delvat, Atidel Ghorbel, Alexandre Delord, Aurélie Le Quiniou, Sébastien Denneulin, Mohamed Elmay, Damien André, Inigo Terrero, Mohamed Jebahi, Laurent Maheo et Guillaume Tirand. Un grand merci à toi, Younes. Ton amitié m'a beaucoup apporté sur le plan personnel. Maxime, merci pour tout ce que tu as fait pour moi.

Je n'oublie pas l'ensemble du personnel auxiliaire du laboratoire qui a contribué également à mon bien-être. Marinette et Annie, merci pour votre professionnalisme et qualité humaine. Christophe, je te suis reconnaissant de m'avoir initié dans le monde du sport et du français. Jojo, les "bébé hours" de bavardage en anglais me manqueront. Merci pour ta bonne humeur et bienveillance. Baroucel, merci pour les bleus que tu m'as faits :). Mathieu, merci pour ton aide et j'apprécie la patience que tu as eue avec moi. J'adresse un merci au documentaliste Laurent Tournie pour sa promptitude. Je termine en remerciant Jean-Marie et les deux Francis pour leur bonne humeur qu'ils m'ont apportée durant ces années.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes collègues d'Angers Antoine Despeyroux, Guillaume Malvault et Vincent Couanet pour tout leur soutien et investissement. Votre amitié m'honore. Je remercie également Monsieur Abdelhak Ambari, Professeur à l'ENSAM

d'Angers, pour son accueil chaleureux au sein du laboratoire et pour sa qualité humaine. Je n'oublie pas de remercier Monsieur Patrick Bony-Ménard, responsable des doctorants à l'ENSAM d'Angers, pour sa disponibilité, son professionnalisme et son aide.

Aux membres de l'Église Adventiste du Septième Jour d'Angers j'exprime ma reconnaissance pour leur soutien et encouragement. Merci aux couples : Helder et Manuela Pereira, Guy et Annick Redureau, Gérard et Sylvie Horecka, Daniel et Josiane Thauvin, Etienne et Arlette Portier ainsi que Jean-Pierre et Josette François. Un merci particulier au couple Luc et Danièle Lemarchand pour m'avoir permis de finir ma thèse dans des conditions plus que décentes.

Une pensée spéciale à mes amis proches Thiago Neves Santos, Marianna Tancredi et Gilberto Pimentel Junior sans qui, la vie dans la résidence universitaire, aurait été morne et sans couleur. Merci pour les moments uniques que l'on a passés ensemble. J'exprime ma reconnaissance la plus profonde à Daniel Calamaz Gogonet pour son aide et ses encouragements. À Amadeo Mignea ainsi qu'à toute sa famille j'exprime mes remerciements les plus distingués pour m'avoir soutenu et écouté. Un merci spécial à Mihai Caleap pour l'appui qu'il m'a accordé au début de cette thèse.

C'est avec grande joie que je partage cette réussite avec la famille Girea : Eugen, Geanina et Radu. Merci pour votre amitié et soutien !

Enfin, je dédie ce travail à mon frère, Cosmin, à ma sœur, Irina, à ma mère, Aneta, à ma grand-mère, Teodora, ainsi qu'à mon beau-frère, Marius. Merci de n'avoir jamais cessé de m'encourager et de penser à moi !

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art	5
1.1 Introduction	5
1.2 Le matériau composite : un matériau naturellement dispersé	6
1.2.1 Définition et historique	6
1.2.2 Les renforts et les matrices	6
1.2.3 Le procédé d'élaboration	7
1.3 Méthodes d'homogénéisation	11
1.3.1 Les méthodes analytiques et leurs limites	11
1.3.2 Les méthodes numériques	16
1.4 Méta-modèle et modèle d'apprentissage	25
1.4.1 Principe d'un méta-modèle	25
1.4.2 Chaos polynomial	25
1.4.3 Réseau de neurones de type perceptron multicouche	27
1.5 Tests d'ajustement d'une loi de probabilité	32
1.5.1 Test de Kolmogorov	32
1.5.2 Test du χ^2	34
1.6 Conclusions	35
2 Analyse morphologique de la microstructure d'un CMO	37
2.1 Introduction	37
2.2 Diamètre des fibres	37
2.3 Identification de cellules	43
2.4 Distinction entre cellule et VER	46
2.5 Caractérisation des cellules	47
2.5.1 Angle α entre les fibres	47
2.5.2 Distance d_c entre la fibre centrale et les fibres alentours	49
2.5.3 La largeur l et la longueur L des cellules	50
2.6 Conclusions	51
3 Modélisation numérique et analyse de sensibilité des propriétés homogénéisées des cellules	53
3.1 Introduction	53
3.2 Matériau virtuel	54
3.3 Homogénéisation numérique	56
3.3.1 Désavantage de l'utilisation des KUBC	56
3.3.2 L'intérêt de l'emploi des MBC	59
3.4 Études de sensibilité des modules équivalents	62

3.4.1	Dépendance au maillage	62
3.4.2	Sensibilité à la géométrie de la fibre	64
3.4.3	Sensibilité à différentes variables aléatoires	67
3.4.4	Sensibilité à la position des fibres	70
3.4.5	Sensibilité à la géométrie de la section droite de la cellule pour une fraction volumique donnée	71
3.5	Conclusions	73
4	Distributions statistiques des propriétés homogénéisées des cellules	75
4.1	Introduction	75
4.2	Distribution pour chaque type de cellule	75
4.3	Réduction du temps de calcul	78
4.3.1	Représentativité des entrées	79
4.3.2	L'approximation des distributions des sorties après apprentissage	88
4.3.3	Qualité de l'approximation	94
4.3.4	Apports du réseau de neurones	100
4.4	Conclusions	103
	Conclusion générale	105
	Perspectives	109
	Bibliographie	119
	Appendices	121
A	Histogrammes des distributions des entrées situées dans les fichiers d'appren- tissage considérés	123
A. 1	Histogrammes des distributions de E_m	123
A. 2	Histogrammes des distributions de ν_f	125
A. 3	Histogrammes des distributions de ν_m	127
A. 4	Histogrammes des distributions de V_f	129
B	Histogrammes des distributions des sorties obtenues par l'approximation du réseau de neurones pour tous les fichiers d'apprentissage considérés	131
B. 1	Histogrammes des distributions de E_y	131
B. 2	Histogrammes des distributions de G_{xy}	133
B. 3	Histogrammes des distributions de G_{yz}	134
B. 4	Histogrammes des distributions de ν_{xy}	136
B. 5	Histogrammes des distributions de ν_{yz}	138
C	Résultats du test de Kolmogorov pour les entrées situées dans les fichiers d'apprentissage considérés	141
D	Résultats du test du χ^2 pour les entrées situées dans les fichiers d'apprentis- sage considérés	145

Introduction

Aujourd’hui, les matériaux composites sont très largement utilisés, notamment dans la réalisation de structures aéronautiques, grâce à leurs nombreux avantages fonctionnels. Leurs caractéristiques mécaniques spécifiques (propriétés/masse volumique) nettement supérieures à d’autres matériaux plus classiques, tels que l’acier ou l’aluminium et la réalisation de formes complexes, font de ces matériaux des candidats très compétitifs dans de nombreux secteurs au-delà de l’aéronautique. Toutefois, ces matériaux présentent à différentes échelles d’observation des propriétés morphologiques et mécaniques dispersées du fait de leur forte hétérogénéité naturelle. Le procédé de fabrication des pièces ainsi que les propriétés des constituants élémentaires en sont les principaux responsables.

Trois niveaux (ou échelles) d’observation sont usuellement considérés dans les matériaux composites : l’échelle microscopique (fibres et matrice), l’échelle mésoscopique (pli) et enfin l’échelle macroscopique (stratification de plis). Chaque échelle présente des sources de variabilité qui sont caractéristiques de chacune d’entre elles.

Ainsi, à l’échelle microscopique, le diamètre et les propriétés mécaniques des fibres, leur répartition dans la matrice ainsi que ses propriétés peuvent être pris en compte. En ce qui concerne l’échelle mésoscopique, la présence de porosités et le désalignement des fibres sont aussi sources de variabilité des propriétés mécaniques. Finalement à l’échelle macroscopique, l’angle d’orientation du pli influence fortement les propriétés mécaniques du composite.

Toutes ces sources de variabilité se propagent à travers les échelles et génèrent finalement des comportements mécaniques dispersés à l’échelle de la structure. Leur prise en considération s’avère pertinente pour le concepteur, désireux d’obtenir un indicateur de la fiabilité du matériau ou de la structure composite qu’il conçoit. Ainsi, disposer d’un indice de fiabilité ou évaluer une probabilité d’occurrence des modes de défaillances pouvant apparaître aux différentes échelles (microscopique, mésoscopique ou macroscopique), est un réel atout. Pour cela, diverses méthodes fiabilistes, généralement classées en deux grandes familles, sont utilisées : les méthodes basées sur des simulations de type Monte Carlo et celles recourant à des approximations de type FORM (First Order Reliability Method) ou SORM (Second Order Reliability Method).

Ce travail de recherche s’inscrit dans une logique globale de mise en place d’une chaîne de calculs mécano-fiabilistes au service des structures réalisées en composites, en intégrant la variabilité dès l’échelle microscopique et jusqu’à l’échelle de la structure, Figure 1.

Pour cela, la construction de lois de distribution des propriétés mécaniques représentatives en fonction des aléas considérés aux différentes échelles, est une première étape indispensable.

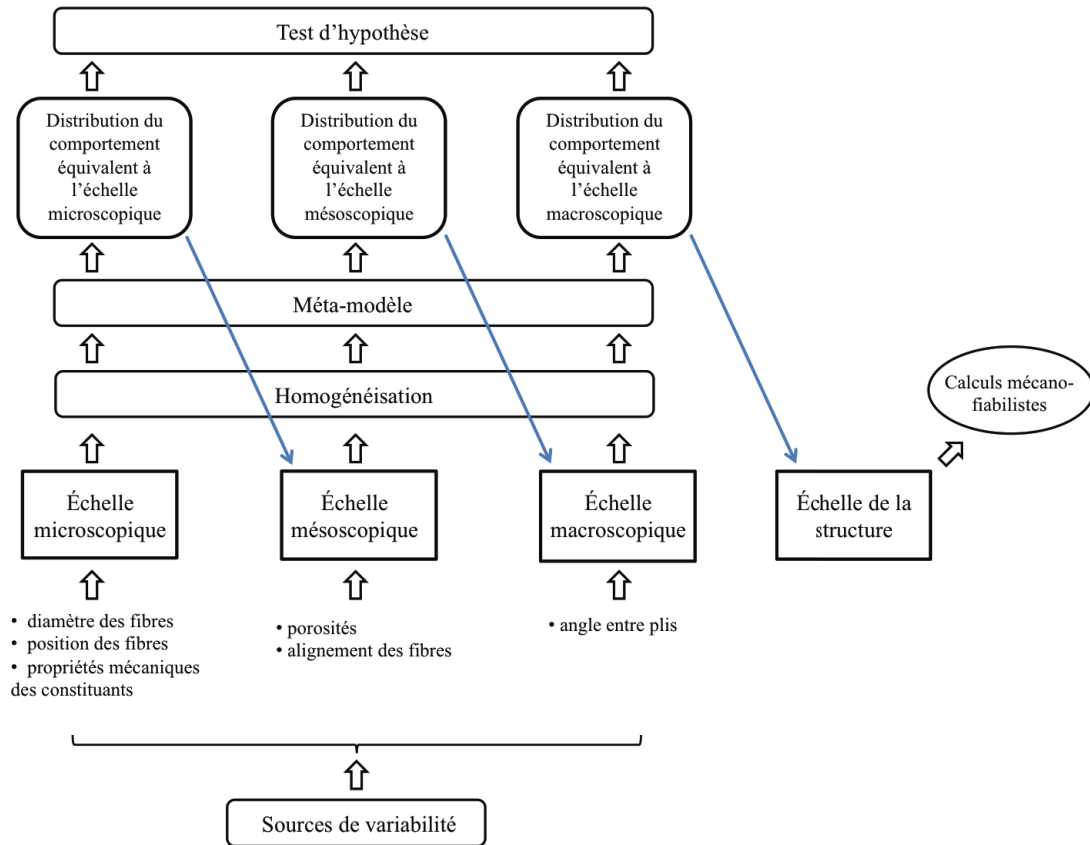


FIGURE 1: Cadre général

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse concernent principalement la représentation de la variabilité à l'échelle microscopique, l'aspect mécano-fiabiliste n'y étant pas abordé. La construction des distributions statistiques du comportement mécanique homogénéisé du matériau à l'échelle des fibres et de la matrice, en fonction de la variabilité existante à cette échelle, ainsi que l'optimisation du temps de calcul nécessaire à leur obtention, sont recherchées.

Le mémoire se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre s'appuie sur une analyse bibliographique pour présenter l'état de l'art des différents aspects exploités dans ce travail. Il présente d'abord différents modes d'élaboration des matériaux composites et les principales sources de variabilité qu'ils peuvent introduire. Puis, une présentation des méthodes d'homogénéisation utilisées pour l'estimation de leur comportement équivalent ainsi qu'une description des méta-modèles couramment employés pour la construction des distributions statistiques du comportement équivalent, en minimisant le coût de calcul numérique, sont proposées. Enfin, les tests d'hypothèse les plus fréquemment utilisés pour l'identification de ces distributions sont présentés.

Le deuxième chapitre repose sur l'analyse morphologique de la microstructure en travaillant sur une coupe d'un matériau composite à fibre de carbone et à matrice époxy. Elle vise à caractériser la variabilité géométrique du milieu hétérogène à l'échelle des constituants élémentaires. L'évolution du diamètre des fibres ainsi que l'organisation des fibres entre elles sont en particulier analysées et permettent de faire émerger des motifs d'arrangements de fibres regroupés en cellules. Six types différents de cellules sont alors identifiés. Leur caractérisation permet de proposer des cellules virtuelles, pour établir des lois de distribution du comportement équivalent par type d'arrangement.

Le troisième chapitre traite de la modélisation numérique des cellules identifiées dans le chapitre précédent. Pour chaque type mis en évidence, une cellule virtuelle est générée à partir des paramètres caractéristiques relevant de l'analyse morphologique. Le comportement équivalent de celle-ci est alors obtenu par homogénéisation. Une analyse de sensibilité de ce comportement homogénéisé à différents paramètres géométriques et matériels est également proposée. Cela permet de limiter le nombre de paramètres pertinents à considérer et donc de réduire le temps de calcul dans le processus d'élaboration des distributions statistiques du comportement mécanique équivalent décrit dans le chapitre suivant.

Le quatrième chapitre est justement consacré à la construction des distributions statistiques du comportement homogénéisé de chaque type de cellule virtuelle en fonction de la variabilité des paramètres pertinents pour cette échelle ainsi qu'à la réduction du temps de calcul nécessaire à leur obtention.

Pour conclure ce document, une synthèse des apports ainsi que des voies d'améliorations et de poursuites sont proposées.

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Le matériau composite : un matériau naturellement dispersé	6
1.2.1	Définition et historique	6
1.2.2	Les renforts et les matrices	6
1.2.3	Le procédé d'élaboration	7
1.3	Méthodes d'homogénéisation	11
1.3.1	Les méthodes analytiques et leurs limites	11
1.3.2	Les méthodes numériques	16
1.4	Méta-modèle et modèle d'apprentissage	25
1.4.1	Principe d'un méta-modèle	25
1.4.2	Chaos polynomial	25
1.4.3	Réseau de neurones de type perceptron multicouche	27
1.5	Tests d'ajustement d'une loi de probabilité	32
1.5.1	Test de Kolmogorov	32
1.5.2	Test du χ^2	34
1.6	Conclusions	35

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, une analyse bibliographique sur les méthodes et outils, utilisés et développés dans ce travail, est proposée. Un inventaire des sources de variabilité inhérentes aux procédés d'élaboration des matériaux composites est d'abord réalisé avant de présenter les méthodes d'homogénéisation les plus usuelles ainsi que leur limite d'application. Les méta-modèles couramment employés pour la construction de distributions statistiques de comportement équivalent, en minimisant le temps de calcul, sont également décrits. Enfin, les tests d'hypothèse les plus fréquemment utilisés pour l'identification de ces distributions sont présentés.

1.2 Le matériau composite : un matériau naturellement dispersé

1.2.1 Définition et historique

Un matériau composite se compose d'une phase discontinue (appelée renfort ou matériau renforçant) répartie dans une phase continue (dénommée matrice), Figure 1.1. Cette phase discontinue possède habituellement des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue.

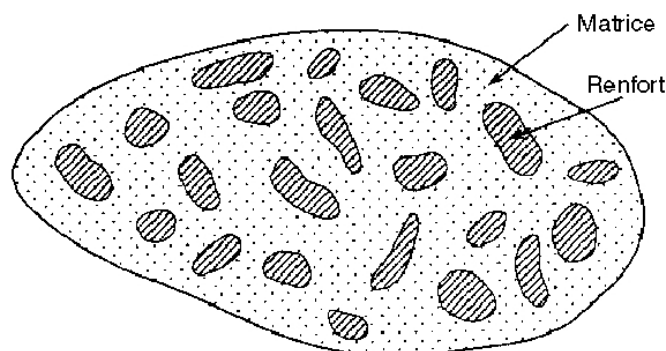


FIGURE 1.1: Matériau composite

Le mélange de ces deux phases conduit à de nouveaux matériaux. Ces matériaux ainsi obtenus sont hétérogènes et généralement anisotropes. Le matériau composite considéré dans ce travail est un matériau composite à matrice organique (CMO) et à fibres longues.

Le premier matériau composite naturel utilisé par l'humanité fut le bois. Parmi les premiers composites fabriqués par l'homme, nous énumérons les arcs mongols (2000 ans av. J.-C.), le torchis (mélange d'argile et de paille) et les sabres japonais traditionnels à partir de *VIII^{ième}* siècle (assemblage de fines lames métalliques). En 1823, Charles Macintosh crée l'imperméable en recouvrant du tissu (coton) avec du caoutchouc et en 1829, François Hennebique dépose le brevet du béton armé.

Aujourd'hui, notamment grâce à leurs propriétés mécaniques spécifiques nettement supérieures à celles des matériaux plus usuels tels que l'acier ou l'aluminium, les composites trouvent leurs principales applications dans le transport aérien (civil et militaire), maritime et ferroviaire, le bâtiment, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs. Le secteur automobile est également intéressé par ces matériaux, mais seulement pour des voitures sportives, car les cadences de production et les coûts ne sont pas encore compatibles avec une production de masse.

1.2.2 Les renforts et les matrices

Le renfort, assure la bonne tenue mécanique de ces matériaux. Il se présente généralement sous la forme de fibres, dont l'orientation au sein du composite dépend principalement de la direction du chargement mécanique à supporter.

Les caractéristiques recherchées pour les fibres sont : rigidité et résistance mécanique élevée (fibres Haut Module (HM) ou Haute Résistance (HR)) ainsi qu'une forte compatibilité physico-chimique avec les matrices. Les principaux types de fibres utilisés sont les fibres de verre, d'aramide (kevlar) et de carbone. Le mode d'élaboration des fibres peut induire des variations de leur diamètre, influentes sur leurs propriétés mécaniques.

La matrice maintient les fibres dans la bonne direction, distribue les efforts entre elles, fournit une résistance à la propagation de fissures et conditionne les propriétés de cisaillement du composite. En général, elle limite la température d'utilisation du composite dans le cas de matrices organiques. Celle-ci est aussi facilement déformable et assure en partie la protection chimique des fibres.

Les matrices se classifient en :

- **matrices organiques** :
 - résines thermoplastiques : ce sont des résines recyclables car leur processus de polymérisation est réversible ;
 - résines thermodurcissables : polyesters, phénoliques, mélamines, silicones, polyuréthanes, époxydes. Elles sont difficilement recyclables, du fait du processus de polymérisation irréversible. Leur mise en oeuvre aisée permet notamment la réalisation de pièces de grandes tailles. C'est la raison pour laquelle elles sont principalement utilisées pour la fabrication de pièces en composites ;
- **matrices minérales** : carbures de silicium et carbone. Elles permettent d'atteindre de hautes températures et sont surtout utilisées dans le domaine du spatial et du freinage ;
- **matrices métalliques** : alliages d'aluminium, titane et magnésium. Elles offrent une résistance mécanique élevée et possèdent pour certaines un bon comportement à haute température. Pour cela, elles sont utilisées dans l'aéronautique pour des pièces dans les moteurs à réaction.

1.2.3 Le procédé d'élaboration

Le mode d'élaboration des matériaux composites est principalement responsable des comportements mécaniques dispersés. Un inventaire des sources de variabilité spécifiques aux procédés de fabrication les plus employés, parmi lesquels le moulage au contact, le moulage par projection, le moulage sous vide, le moulage par injection et enfin le moulage sous presse, est proposé dans ce paragraphe.

Le moulage au contact [1] et celui par projection [2] sont des procédés manuels de fabrication des matériaux composites. Ces procédés sont qualifiés de manuels car, pour l'élaboration d'une pièce, ils font appel à une succession d'opérations à la main dont le résultat dépend principalement du facteur humain (l'habileté, l'entraînement et la conscience professionnelle de l'opérateur). Aujourd'hui, la technique par projection a fait l'objet de développement et peut être fortement automatisée.

Le moulage au contact permet la réalisation de pièces, notamment de grandes tailles, à partir de résines thermodurcissables, sans gestion de la pression exercée sur la structure (absence de vide par exemple). Le principe de ce procédé, Figure 1.2, consiste à déposer sur un moule préalablement lustré une couche de surface (gel-coat) d'une épaisseur de 0,3 à 0,4 mm qui joue un rôle d'isolation vis-à-vis de l'environnement et de finition. Puis, après la gélification de cette première couche, le renfort se dépose sur le moule et s'imprègne de résine liquide pour être mis en forme progressivement à l'aide de pinceaux ou de rouleaux. Par contre, durant cette opération, une grande quantité d'air est emprisonnée dans la résine

et deviendra de la porosité après polymérisation. Pour la limiter, un outil spécifique peut être utilisé et s'appelle un débuleur. À chaque couche, l'ensemble fibres et résine est comprimé avec ce débuleur pour chasser le maximum d'air, en faisant bien pénétrer la résine dans le renfort. Il en restera cependant une proportion non négligeable dépendant principalement du soin de l'opérateur.

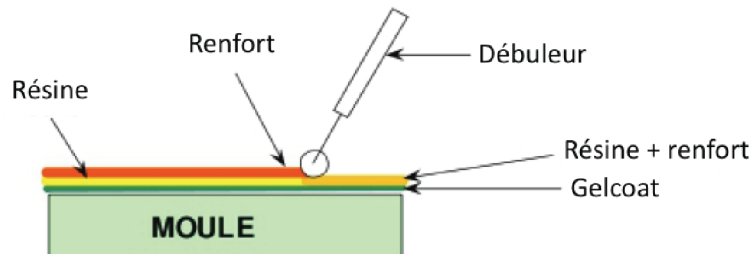


FIGURE 1.2: Principe du moulage au contact

Le nombre de couches à déposer, leur orientation ainsi que leur nature dépendent des caractéristiques mécaniques visées pour la pièce. La dépose des plis, qui est manuelle, peut induire des désalignements et provoquer ainsi des variations importantes du comportement mécanique du matériau [3]. Après la dépose des différentes couches, l'ensemble durcit à température ambiante ou à l'étuve, pour accélérer le processus de polymérisation. Lorsque le durcissement est suffisamment avancé, la pièce peut être démoulée, détournée et usinée si besoin (l'usinage devenant ainsi une nouvelle source de variabilité des propriétés mécaniques, paragraphe ??).

La technique du moulage par projection peut être considérée comme une évolution du procédé manuel de moulage au contact. Son principe, Figure 1.3, consiste à utiliser un pistolet qui projette simultanément, en un même point du moule, un mélange de fibres courtes et de résine. Cette technique de projection permet de couvrir rapidement de grandes surfaces de géométrie complexe et de renforcer préférentiellement certaines parties de la pièce à fabriquer. L'inconvénient majeur réside dans l'utilisation exclusive de fibres courtes.

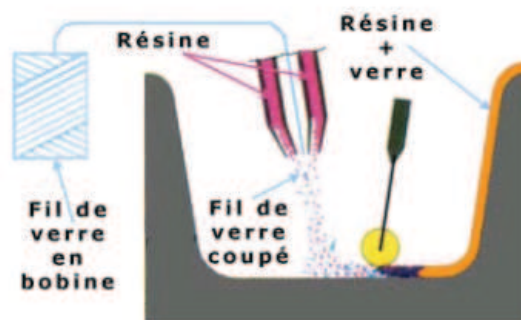


FIGURE 1.3: Principe du moulage par projection

La suite du processus est identique à la technique du moulage au contact : durcissement, démoulage, finitions. Des baignoires, des piscines, des cuves ou des coques de bateaux sont fabriquées, par exemple, avec cette technologie. La qualité de la projection dépend de l'opérateur et de son habilité, puisque cette opération nécessite toujours un débullage manuel pour éviter les bulles d'air. Toutefois, une quantité non négligeable de porosités restera emprisonnée dans la pièce.

Dans le cas du moulage sous vide [4], l'imprégnation de la résine dans le renfort se réalise grâce à l'action du vide. Le renfort est disposé à l'intérieur du moule et la résine est introduite en même temps que le renfort, Figure 1.4a.

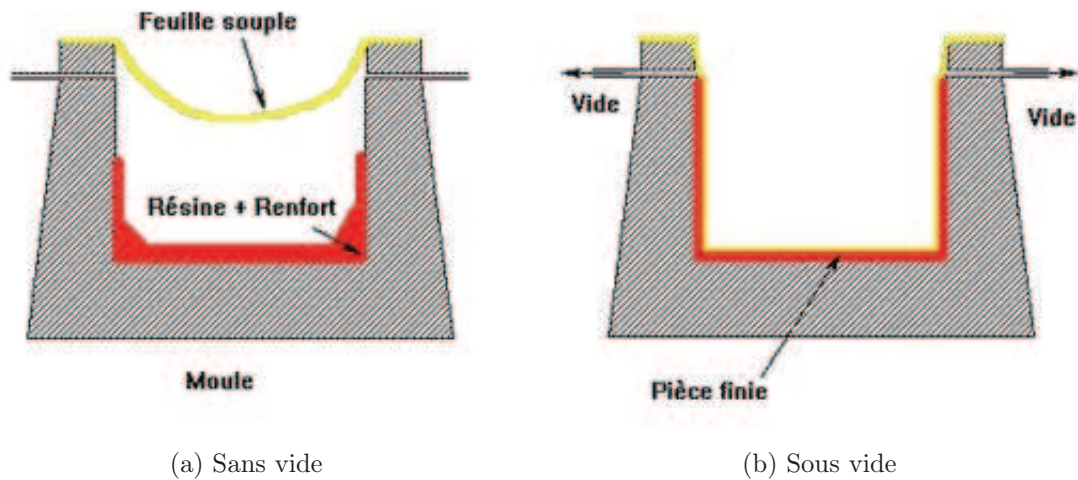


FIGURE 1.4: Principe du moulage sous vide

Dans ce procédé, la résine est aspirée dans le renfort après avoir créé le vide entre le moule et une feuille souple en élastomère, Figure 1.4b, ou un contre-moule léger. Dans tous les cas, la répartition de la résine et la qualité de l'imprégnation du renfort résultent de l'application du vide. Cependant, même si le taux de porosités obtenu par cette technique est généralement inférieur à celui obtenu par le moulage au contact, il subsiste.

Le moulage par injection [5], appelé aussi Resin Transfert Moulding (RTM), consiste à injecter de la résine liquide dans une empreinte fermée, constituée d'un moule et d'un contre-moule, Figure 1.5.

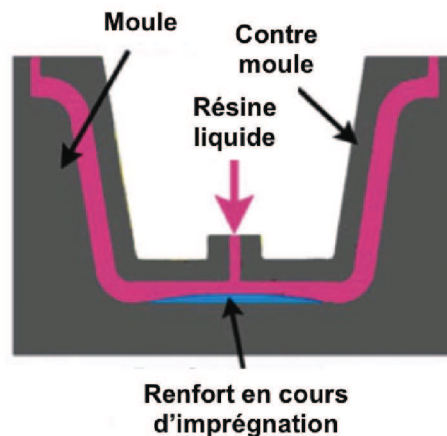


FIGURE 1.5: Principe du moulage par injection

Une fois le système solidement fermé, la résine est injectée à travers le renfort, à l'aide d'une machine d'injection, jusqu'au remplissage complet de l'empreinte. Après le durcissement de la résine, le moule est ouvert et la pièce est démoulée. La bonne conception de l'ensemble moule-contre-moule est un facteur décisif de la réussite du moulage par injection. Avec cette technique il n'est pas toujours facile de maîtriser la bonne orientation des fibres qui, durant l'injection, peuvent plus ou moins se désaligner. Des porosités peuvent également apparaître durant ce procédé d'élaboration, mais le taux reste faible par rapport aux techniques manuelles.

Les pièces réalisées à travers le moulage sous presse [1] sont obtenues à l'aide d'une compression entre un moule et un contre-moule rigides, Figure 1.6.

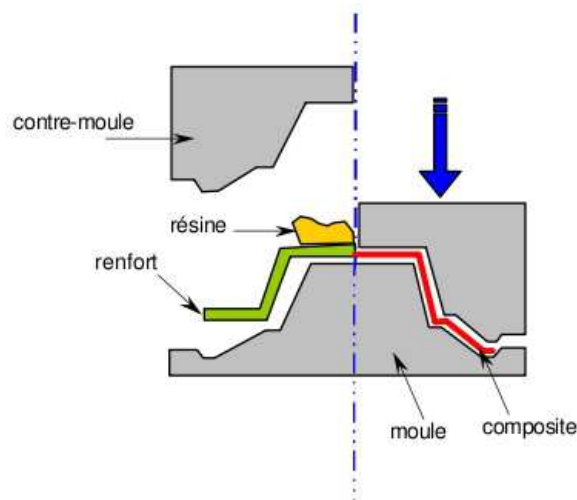


FIGURE 1.6: Principe du moulage à la presse

Lorsque le système des deux moules est ouvert, le renfort est posé sur la partie inférieure du moule et la résine thermodurcissable en état liquide est versée en vrac sur le renfort. Une fois le moule fermé sous pression, la résine se diffuse au sein du renfort dans l'empreinte. Le durcissement de la résine s'effectue sans apport de chaleur dans le cas "à froid" ou à une température comprise entre 100 et 150 °C dans le cas "à chaud". Une fois que la résine est durcie, le moule est ouvert et la pièce est extraite. Durant ce procédé, les fibres peuvent également se désaligner.

Les défauts identifiés dans les procédés d'élaboration des matériaux composites, précédemment présentés, constituent des sources de dispersion sur leurs propriétés mécaniques et sont principalement : les porosités, le désalignement des fibres et des plis. Les porosités représentent un des défauts de fabrication le plus fréquent et pénalisant dans les matériaux composites [6], puisque chaque trou représente un site d'amorçage de fissures. Leur présence, même à une fraction volumique faible, peut dégrader d'une manière significative les propriétés du matériau [7]. Par exemple, les stratifiées contenant plus de 5 % de porosités sont considérées inutilisables pour des applications aérospatiales [8]. La géométrie, la taille, la fraction volumique et la distribution spatiale jouent un rôle sur la nocivité des porosités [9]. La géométrie de la porosité influe plus particulièrement sur le comportement anisotrope du matériau [10].

Malgré leur contribution certaine sur la dispersion des propriétés mécaniques des matériaux composites, les défauts évoqués ne seront pas considérés dans le cadre de ce travail, les matériaux étant supposés sains.

1.3 Méthodes d'homogénéisation

Afin d'estimer le comportement mécanique équivalent du matériau composite en tenant compte de son hétérogénéité apportée par le mélange des constituants élémentaires, un inventaire des méthodes d'homogénéisation les plus utilisées est maintenant proposé.

1.3.1 Les méthodes analytiques et leurs limites

1.3.1.1 Les bornes de Hashin et Hill des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, géométrie et arrangement des fibres. La détermination de bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie.

Parmi les divers travaux effectués à ce propos, les travaux de Z. Hashin [11] et R. Hill [12], effectués dans le cas de fibres de différents diamètres, réparties au hasard, avec une fraction volumique donnée, sont à mentionner. Dans ce cas, les limites sur les cinq modules indépendants sont donnés par les relations 1.1 à 1.5. Précisons qu'ici x est la direction selon la longueur des fibres tandis que y et z sont les directions dans le plan transverse.

$$K_m + \frac{f_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{f_m}{K_m + G_m}} \leq K_x \leq K_f + \frac{f_m}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{f_f}{K_f + G_f}} \quad (1.1)$$

$$G_m + \frac{f_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + f_m \frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)}} \leq G_{yz} \leq G_f + \frac{f_m}{\frac{1}{G_m - G_f} + f_f \frac{K_f + 2G_f}{2G_f(K_f + G_f)}} \quad (1.2)$$

$$G_m + \frac{f_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{f_m}{2G_m}} \leq G_{xy} \leq G_f + \frac{f_m}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{f_f}{2G_f}} \quad (1.3)$$

$$\frac{f_f f_m}{\frac{f_f}{K_m} + \frac{f_m}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{E_x - f_f E_f - f_m E_m}{4(\nu_f - \nu_m)^2} \leq \frac{f_f f_m}{\frac{f_m}{K_f} + \frac{f_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}} \quad (1.4)$$

$$\frac{f_f f_m}{\frac{f_f}{K_m} + \frac{f_m}{K_f} + \frac{1}{G_m}} \leq \frac{\nu_{xy} - f_f \nu_f - f_m \nu_m}{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)} \leq \frac{f_f f_m}{\frac{f_m}{K_f} + \frac{f_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}} \quad (1.5)$$

Les relations 1.1, 1.2 et 1.3 donnent un encadrement respectivement pour le module de compression latérale du composite K_x , le module de cisaillement transversal G_{yz} et longitudinal G_{xy} . Les dernières relations 1.4 et 1.5 sont des encadrements pour le module d'Young longitudinal E_x et pour le coefficient de Poisson longitudinal ν_{xy} . Dans toutes les relations, 1.1 à 1.5, f_f et f_m représentent respectivement la fraction volumique de fibres et de la matrice tandis que $K_i = \frac{E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}$, $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$ et ν_i , $i = f, m$ sont respectivement le module de compression latérale, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson de la fibre et de la matrice. D'autre part, Z. Hashin et B.W. Rosen [13] ont effectués des travaux analogues dans le cas de fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal.

Une comparaison [14] entre les modules calculés avec les relations analytiques précédentes et ceux obtenus expérimentalement montre que :

- le module d'Young longitudinal E_x est bien décrit par sa borne inférieure calculée à partir de la relation 1.4. Elle peut être aussi facilement obtenue grâce à la loi des mélanges, relation 1.6, plus simple à utiliser :

$$E_x = E_f f_f + E_m f_m \quad (1.6)$$

- le coefficient de Poisson longitudinal ν_{xy} est également bien décrit par sa borne inférieure qui intervient dans la relation 1.5. La loi des mélanges, relation 1.7, permet également de l'obtenir simplement :

$$\nu_{xy} = \nu_f f_f + \nu_m f_m \quad (1.7)$$

- le module de compression latérale K_x est bien décrit par sa borne inférieure, relation 1.1 ;
- le module de cisaillement longitudinal G_{xy} ainsi que le module de cisaillement transversal G_{yz} sont également bien décrits par leurs bornes inférieures données dans les relations 1.3 et 1.2 respectivement.

Un premier inconvénient de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne donne aucune information concernant le module d'Young transversal E_y et le coefficient de Poisson transversal ν_{yz} . Afin de compléter ce manque d'information, les relations analytiques [14] suivantes peuvent être employées pour calculer ces deux modules :

$$E_y = \frac{2}{\frac{1}{2K_x} + \frac{1}{2G_{yz}} + 2\frac{\nu_{xy}^2}{E_x}} \quad (1.8)$$

$$\nu_{yz} = \frac{E_y}{2G_{yz}} - 1 \quad (1.9)$$

Celles-ci sont obtenues en considérant dans la loi de Hooke pour un matériau isotrope transverse [14] un champ connu de contraintes afin de simuler des essais de traction uniaxiale, de cisaillement et de compression latérale sans déformation longitudinale.

Un deuxième inconvénient de cette méthode réside dans l'impossibilité de prendre en compte le comportement isotrope transverse de la fibre (cas de la fibre de carbone par exemple) car, lorsque les relations 1.1 - 1.5 ont été déterminées, Hashin et Hill ont fait l'hypothèse de fibres isotropes.

Enfin, pour le calcul des modules, les relations analytiques suivantes, que l'on va appeler désormais les relations de Hashin et Hill, sont retenues et données dans le Tableau 1.1.

Module estimé	Relation analytique utilisée
E_x	$E_f f_f + E_m f_m$
E_y	$\frac{2}{\frac{1}{2K_x} + \frac{1}{2G_{yz}} + 2\frac{\nu_{xy}^2}{E_x}}$
G_{xy}	$G_m + \frac{f_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{f_m}{2G_m}}$
G_{yz}	$G_m + \frac{f_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + f_m \frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)}}$
ν_{xy}	$\nu_f f_f + \nu_m f_m$
ν_{yz}	$\frac{E_y}{2G_{yz}} - 1$

TABLE 1.1: Relations analytiques de Hashin et Hill pour les modules équivalents

Ces relations seront utilisées afin de situer les résultats issus de l'homogénéisation numérique faisant l'objet du chapitre 3.

1.3.1.2 Les bornes de Voigt et Reuss

Cette méthode d'homogénéisation permet d'obtenir les valeurs extrêmes des coefficients C_{ij} de la matrice de raideur : une borne inférieure (Reuss) ainsi qu'une borne supérieure (Voigt). Le matériau pris en compte est biphasé (fibre et matrice) et l'homogénéisation porte sur un volume élémentaire représentatif (VER). Cette notion est évidemment limitée dans le cas des matériaux composites pour lesquels, à l'échelle microscopique, cette représentativité est discutable. Ce modèle analytique repose sur les hypothèses [15] simplificatrices suivantes :

- le comportement mécanique des fibres et de la matrice est considéré élastique linéaire ;
- la matrice est considérée isotrope et les fibres isotropes ou isotropes transverses ;
- les fibres sont axisymétriques, de formes et dimensions identiques et peuvent être caractérisées par le rapport l/d (l -longueur, d -diamètre) ;
- les fibres et la matrice restent bien liées par leur interface pendant leur déformation ;

la décohésion fibre-matrice et la microfissuration de la matrice ne sont pas considérées.

Les équations constitutives des deux phases élastiques linéaires (fibre et matrice) sont alors données par :

$$\sigma_f = C_f : \varepsilon_f \quad \text{et} \quad \sigma_m = C_m : \varepsilon_m \quad (1.10)$$

où σ désigne le tenseur des contraintes (ordre 2), ε le tenseur des déformations (ordre 2) et C le tenseur des rigidités (ordre 4). Les indices f et m rappellent respectivement la fibre et la matrice.

La contrainte moyenne globale $\bar{\sigma}$ et la déformation moyenne globale $\bar{\varepsilon}$ rapportées au volume V du VER se calculent par :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV \quad (1.11)$$

Le fait que le matériau soit biphasé sans porosités, nous permet d'écrire que $V = V_f + V_m$. Les contraintes moyennes rapportées au volume des fibres V_f et au volume de la matrice V_m s'écrivent alors :

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} \sigma dV \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_m = \frac{1}{V_m} \int_{V_m} \sigma dV \quad (1.12)$$

Les déformations moyennes $\bar{\varepsilon}_f$ et $\bar{\varepsilon}_m$ se définissent de manière similaire. La relation entre la contrainte moyenne globale $\bar{\sigma}$ et les contraintes moyennes $\bar{\sigma}_f$ et $\bar{\sigma}_m$ se déduit simplement des relations 1.11 et 1.12 :

$$\bar{\sigma} = f_f \bar{\sigma}_f + f_m \bar{\sigma}_m \quad (1.13)$$

où f_f et f_m sont respectivement la fraction volumiques de fibres et de matrice. Une relation similaire peut alors être obtenue entre la déformation moyenne globale $\bar{\varepsilon}$ et les déformations moyennes $\bar{\varepsilon}_f$ et $\bar{\varepsilon}_m$:

$$\bar{\varepsilon} = f_f \bar{\varepsilon}_f + f_m \bar{\varepsilon}_m \quad (1.14)$$

Les relations entre la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ et la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}$ sont :

$$\bar{\sigma} = C : \bar{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \bar{\varepsilon} = S : \bar{\sigma} \quad (1.15)$$

où $S = C^{-1}$ désigne le tenseur des souplesses.

Un concept important introduit par Hill [16] est la notion de tenseur de localisation des déformations noté A et de concentration des contraintes noté B :

$$\bar{\varepsilon}_f = A : \bar{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_f = B : \bar{\sigma} \quad (1.16)$$

Les tenseurs A et B sont d'ordre 4. En combinant les relations 1.10, 1.13, 1.14, 1.15 et 1.16, il vient :

$$C = C_m + f_f (C_f - C_m) A \quad \text{et} \quad S = S_m + f_f (S_f - S_m) B \quad (1.17)$$

Voigt suppose que la déformation dans chaque phase est identique à la déformation macroscopique appliquée $\bar{\varepsilon}$. En exploitant cette hypothèse dans la relation 1.16, le tenseur A devient : $A = I$ où I est le tenseur unité d'ordre 4. En utilisant la relation 1.17, l'expression qui décrit la borne supérieure pour C est :

$$C^{Voigt} = f_f C_f + f_m C_m \quad (1.18)$$

D'autre part, Reuss suppose lui que la contrainte dans chaque phase est identique à la contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$. En exploitant cette hypothèse dans la relation 1.16, le tenseur B devient : $B = I$. En utilisant la relation 1.17, l'expression de la borne inférieure pour C est donnée par :

$$S^{Reuss} = f_f S_f + f_m S_m \quad (1.19)$$

Les deux approches conduisent alors à un encadrement du tenseur des constantes d'élasticité effectives C du matériau hétérogène. Les bornes sont valides quelle que soit la microstructure du matériau étudié car elles ne tiennent compte que de la fraction volumique de chaque phase ainsi que des propriétés des matériaux constituants.

1.3.1.3 Modèle d'Eshelby

Le modèle d'Eshelby [17, 18] s'utilise dans le cas où la fraction volumique des inclusions est faible (jusqu'à 1% du volume total) [15]. L'interaction entre phases est alors supposée négligeable. Ainsi, le tenseur de localisation de déformations A , qui apparaît dans la relation 1.17, calculé par Eshelby, peut s'exprimer alors par :

$$A = A^{Eshelby} = [I + E S_m (C_f - C_m)]^{-1} \quad (1.20)$$

où E est le tenseur d'Eshelby [19] qui dépend des propriétés de la matrice ainsi que de la forme et de l'orientation de l'inclusion. Les composants du tenseur d'Eshelby pour des fibres cylindriques sont :

$$E_{ijkl} = \frac{4\nu_m - 1}{8(1 - \nu_m)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{3 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (1.21)$$

$$E_{3j3l} = \frac{1}{4} \delta_{lj} \quad (1.22)$$

$$E_{ij33} = \frac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} \delta_{ij} \quad (1.23)$$

où ν_m est le coefficient de Poisson de la matrice et δ_{ij} est le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

Le modèle d'Eshelby donne des résultats précis uniquement pour des matériaux pour lesquels la fraction volumique de fibres est faible tandis que les matériaux étudiés dans ce travail possèdent des fractions volumiques des fibres de l'ordre de 55 %, de loin supérieures à celles employées dans ce modèle.

1.3.1.4 Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka [20, 15] postule que lorsque des particules identiques de fraction volumique f_f sont présentes dans le matériau composite, la déformation moyenne $\bar{\varepsilon}_f$ est donnée par la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon}_f = A^{Eshelby} \bar{\varepsilon}_m \quad (1.24)$$

Les rigidités s'expriment alors à l'aide de la relation 1.17 en employant pour A l'expression suivante :

$$A = A^{MT} = A^{Eshelby} [(1 - f_f) I + f_f A^{Eshelby}]^{-1} \quad (1.25)$$

Ce modèle a les limites suivantes :

- l'expression analytique à l'aide de laquelle les coefficients C_{ij} se calculent, ne rend pas compte de la distribution spatiale des fibres ;
- les résultats ne sont plus satisfaisants pour des fractions volumiques de fibres supérieures à 60 % [21].

1.3.1.5 Équations de Halpin-Tsai

Les équations générales de Halpin-Tsai [22] permettent de prédire les modules d'un matériau composite unidirectionnel en intégrant des informations spatiales :

$$M_c = M_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{\frac{M_f}{M_m} - 1}{\frac{M_f}{M_m} + \xi} \quad (1.26)$$

Dans ces équations :

- M_c représente le module considéré du composite homogénéisé : E_y , G_{xy} ou ν_{yz} ;
- M_f est le module correspondant aux fibres : E_f , G_f ou ν_f ;
- M_m est le module correspondant à la matrice : E_m , G_m , ou ν_m .

Le facteur ξ permet de quantifier le renfort. Il dépend de la géométrie des fibres, de leur arrangement et du module considéré. La grandeur V_f représente la fraction volumique de fibres. La difficulté d'utilisation de la relation 1.26 réside dans la détermination des valeurs appropriées de ξ . Halpin et Tsai l'ont déterminé dans le cas d'un composite unidirectionnel avec des fibres cylindriques réparties selon un arrangement carré et pour une fraction volumique de 55 % : $\xi=2$ pour le calcul de E_y et $\xi=1$ pour le calcul de G_{xy} .

1.3.1.6 Modèle de Cox

Ce modèle [23] permet de déterminer certains modules d'un matériau composite en tenant compte du rayon r de la fibre et de la distance R entre les fibres centre à centre :

$$M_c = M_f V_f \left[1 - \frac{\tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\frac{\beta l}{2}} \right] + M_m V_m \quad \text{où} \quad \beta = \left[\frac{2\pi G_m}{M_f A_f \ln\left(\frac{R}{r}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

où G_m est le module de cisaillement de la matrice, A_f est l'aire de la section droite de la fibre tandis que l désigne sa longueur. Selon l'arrangement des fibres (arrangement hexagonal ou carré), R prend différentes valeurs. Ce modèle s'utilise dans le cas des matériaux avec une structure périodique.

Un regard d'ensemble sur les méthodes d'homogénéisation analytiques rappelées ici, dévoile les limites d'application de la plus part d'entre elles du fait de la nature aléatoire des matériaux composites considérés dans ce travail. En effet, elles ne prennent pas en compte la position aléatoire des fibres.

Par conséquent, l'utilisation d'une méthode numérique d'homogénéisation s'avère plus indiquée pour l'estimation du comportement équivalent dans le cas de structures aléatoires.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons les méthodes numériques d'homogénéisation les plus courantes et précisons celles retenues par la suite.

1.3.2 Les méthodes numériques

1.3.2.1 Méthode asymptotique d'homogénéisation

Cette méthode d'homogénéisation [24, 25] s'applique pour des composites présentant une structure périodique (plaques perforées, nid d'abeille, etc.) ou pour les milieux pour lesquels la répartition des composantes est assez régulière. Ainsi, cette méthode considère que la cellule élémentaire représentative est répétable selon chaque direction principale du matériau composite. Les cellules élémentaires qui sont utilisées en général sont : carrée, hexagonale [25] ou avec un arrangement aléatoire de fibres [26] en 2D, et cubique, parallélépipédique ainsi que cylindrique [14] en 3D.

Avec cette méthode, il suffit juste de calculer les propriétés équivalentes d'une seule cellule pour connaître les propriétés mécaniques équivalentes du matériau composite considéré. Dans ce travail, nous souhaitons justement sortir de l'hypothèse de périodicité et prendre en compte la structure aléatoire du milieu composite dans son ensemble.

1.3.2.2 La méthode Embedded Cell Approach

Cette méthode [27, 28] est une méthode numérique dont l'idée de base est d'introduire le milieu hétérogène dont nous cherchons à déterminer les propriétés effectives, dans un milieu homogène équivalent. Les propriétés initiales du matériau homogène sont choisies aléatoirement. Ensuite, un calcul d'homogénéisation est réalisé sur le maillage complet de

cet ensemble. En effectuant les moyennes des contraintes dans la zone hétérogène pour chacun des chargements élémentaires, une première estimation des propriétés de cette zone est obtenue.

Ces propriétés sont ensuite affectées au matériau homogène et la procédure est réitérée jusqu'à convergence donc, lorsque les propriétés de cette zone n'évoluent plus [29]. Le matériau homogène a alors les mêmes propriétés effectives que celles du milieu hétérogène.

Le grand avantage de cette méthode est qu'elle permet d'estimer les propriétés effectives d'une microstructure sans se préoccuper des effets de bords introduits par des conditions plus classiques de déformations ou de contraintes homogènes au contour.

1.3.2.3 Méthode basée sur l'application de conditions aux limites cinématiques uniformes (KUBC)

C'est une méthode classique qui utilise des conditions aux limites cinématiques uniformes (Kinematic Uniform Boundary Conditions ou KUBC) [30]. Elles traduisent un déplacement appliqué sur les frontières du volume considéré, relié à la déformation moyenne. Conformément au lemme de Hill-Mandel [31], le principe d'équivalence énergétique entre l'énergie de déformation élastique d'un milieu hétérogène et l'énergie de déformation élastique du milieu homogène équivalent est ensuite appliqué.

Aucune hypothèse d'orthotropie ou d'isotropie transverse n'est faite vis-à-vis du volume hétérogène étudié. L'intérêt d'une modélisation numérique éléments finis (EF) réalisée en 3D sera justement d'avoir un avis critique vis-à-vis de ces hypothèses. Ainsi, le volume considéré ne présente aucune symétrie particulière. Il faut donc calculer 21 coefficients de rigidité C_{ij} , selon la notation de Voigt [14], afin de déterminer complètement la loi de comportement élastique linéaire dont il est question ici, relation 1.28. Pour déterminer ces coefficients, la méthode nécessite d'effectuer 21 cas de chargements différents sur les bords du volume considéré.

Afin de caractériser le volume homogène équivalent, il faut connaître les champs de contraintes et de déformations moyens, respectivement notés σ et ε , associés à ce milieu homogène.

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (1.28)$$

Dans la relation 1.28, σ_i et ε_i désignent respectivement les composants du champ de contrainte et de déformation moyens qui s'écrivent de façon matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

Compte tenu de 1.28, l'énergie de déformation élastique W pour un milieu de volume V s'exprime par :

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j V \quad (1.30)$$

ou encore en adoptant la convention d'Einstein :

$$2W = \left[\sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^6 C_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \right) \right] V \quad (1.31)$$

En développant la relation 1.31, les 21 coefficients C_{ij} à déterminer apparaissent ici explicitement :

$$\begin{aligned} 2W = & (C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2C_{13}\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2C_{14}\varepsilon_1\varepsilon_4 + 2C_{15}\varepsilon_1\varepsilon_5 + 2C_{16}\varepsilon_1\varepsilon_6 + \\ & + C_{22}\varepsilon_2^2 + 2C_{23}\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2C_{24}\varepsilon_2\varepsilon_4 + 2C_{25}\varepsilon_2\varepsilon_5 + 2C_{26}\varepsilon_2\varepsilon_6 + \\ & + C_{33}\varepsilon_3^2 + 2C_{34}\varepsilon_3\varepsilon_4 + 2C_{35}\varepsilon_3\varepsilon_5 + 2C_{36}\varepsilon_3\varepsilon_6 + \\ & + C_{44}\varepsilon_4^2 + 2C_{45}\varepsilon_4\varepsilon_5 + 2C_{46}\varepsilon_4\varepsilon_6 + \\ & + C_{55}\varepsilon_5^2 + 2C_{56}\varepsilon_5\varepsilon_6 + \\ & + C_{66}\varepsilon_6^2)V \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ils sont alors identifiés en introduisant des jeux de conditions aux limites KUBC appropriées. Pour chaque cas de chargement, la partie gauche de la relation 1.32 est alors évaluée numériquement pour le milieu hétérogène. D'abord, les coefficients C_{ii} sont calculés puis les C_{ij} tels que $i \neq j$. L'exemple du calcul des coefficients C_{11} , C_{44} et C_{12} est donné ci-après.

Pour le calcul du coefficient C_{11} , sur la frontière ∂V du volume considéré, les conditions aux limites cinématiques uniformes suivantes sont imposées :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x) = x\varepsilon \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1(x)}{\partial x} = \varepsilon \neq 0 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Ainsi, la relation 1.33, compte tenu de 1.32, permet d'obtenir le coefficient C_{11} :

$$C_{11} = \frac{2W}{\varepsilon^2 V} \quad (1.34)$$

Pour le calcul de C_{44} , les conditions aux limites cinématiques uniformes imposées sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = u_2(z) = z\varepsilon \\ u_3 = u_3(y) = y\varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = 2\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_2(z)}{\partial z} + \frac{\partial u_3(y)}{\partial y} \right] = 2\varepsilon \neq 0 \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Ainsi, la relation 1.32, compte tenu de 1.35, permet alors d'obtenir :

$$C_{44} = \frac{W}{2\varepsilon^2 V} \quad (1.36)$$

Le coefficient C_{12} quant à lui s'obtient à partir des coefficients C_{11} et C_{22} préalablement déterminés, en imposant les conditions aux limites cinématiques uniformes suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x) = x\varepsilon \\ u_2 = u_2(y) = y\varepsilon \\ u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1(x)}{\partial x} = \varepsilon \neq 0 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2(y)}{\partial y} = \varepsilon \neq 0 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

La relation 1.32 permet alors d'obtenir :

$$C_{12} = \frac{W}{\varepsilon^2 V} - \frac{C_{11} + C_{22}}{2} \quad (1.38)$$

1.3.2.4 Méthode basée sur l'application de conditions aux limites mixtes (MBC)

Cette méthode, employée par C.T. Sun [32], est celle adoptée dans nos travaux. Elle utilise des conditions aux limites à la fois en déplacement et effort, dites mixtes (Mixtes Boundary Conditions ou MBC), pour la détermination des six modules caractérisant le comportement équivalent : les modules d'Young (E_x et E_y), les modules de cisaillement (G_{xy} et G_{yz}) ainsi que les coefficients de Poisson (ν_{xy} et ν_{yz}).

Quatre cas de chargement différents sur un volume considéré de dimensions l , L et e suffisent pour déterminer les modules précédents. Ces chargements s'inspirent de ceux mis en oeuvre lors de la réalisation d'essais mécaniques de caractérisation.

Pour le calcul du module d'Young longitudinal E_x et pour le coefficient de Poisson ν_{xy} , les MBC suivantes sont appliquées, Figure 1.7 :

$$u(0, y, z) = 0 \quad (1.39)$$

$$u(e, y, z) = \delta_1 \quad (1.40)$$

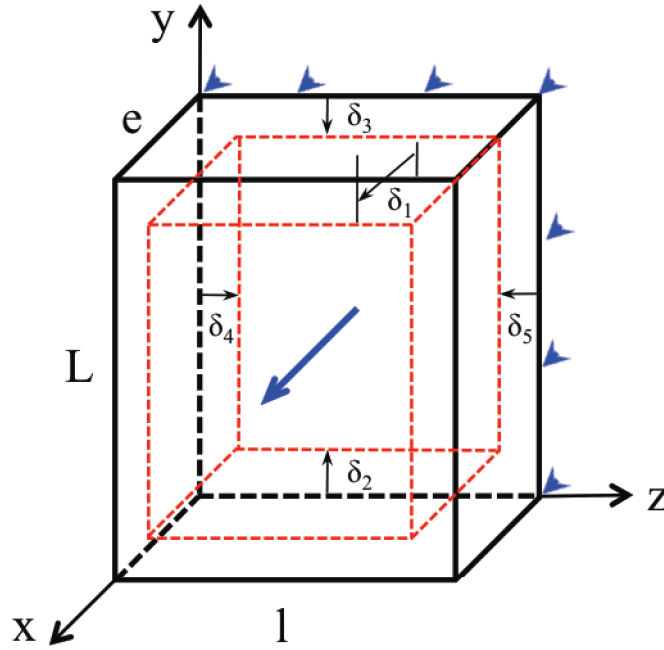
$$v(x, 0, z) = \delta_2 \quad (1.41)$$

$$v(x, L, z) = \delta_3 \quad (1.42)$$

$$w(x, y, 0) = \delta_4 \quad (1.43)$$

$$w(x, y, l) = \delta_5 \quad (1.44)$$

où u , v et w sont les composantes du vecteur déplacement selon la direction respective x , y et z .


 FIGURE 1.7: Chargement pour le calcul de E_x et ν_{xy}

La relation 1.39 traduit le fait que le déplacement selon la direction x de tous les noeuds situés sur la face $x = 0$ du volume est imposé nul. Une force F_1 s'applique sur la face $x = e$, selon x . Les relations 1.40 - 1.44 forcent un déplacement identique δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 et δ_5 respectivement sur les faces $x = e$, $y = 0$, $y = L$, $z = 0$ et $z = l$. Le déplacement d'un seul nœud situé sur la face $x = 0$ du volume est également bloqué selon les directions y et z pour supprimer tout mouvement de corps rigide. Les déplacements δ_1 , δ_2 et δ_3 , obtenus après l'application du chargement, permettent de calculer les valeurs de E_x et ν_{xy} :

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{F_1 e}{l L \delta_1} \quad (1.45)$$

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{(\delta_2 + \delta_3) e}{L \delta_1} \quad (1.46)$$

Le deuxième cas de chargement nous permet d'obtenir les expressions pour E_y et ν_{yz} . Les MBC qui s'appliquent dans ce cas sont décrites par les relations suivantes :

$$u(0, y, z) = \delta_1 \quad (1.47)$$

$$u(e, y, z) = \delta_2 \quad (1.48)$$

$$v(x, 0, z) = 0 \quad (1.49)$$

$$v(x, L, z) = \delta_3 \quad (1.50)$$

$$w(x, y, 0) = \delta_4 \quad (1.51)$$

$$w(x, y, l) = \delta_5 \quad (1.52)$$

Une force F_2 s'applique sur la face $y = L$, dans le sens positif de l'axe y , Figure 1.8.

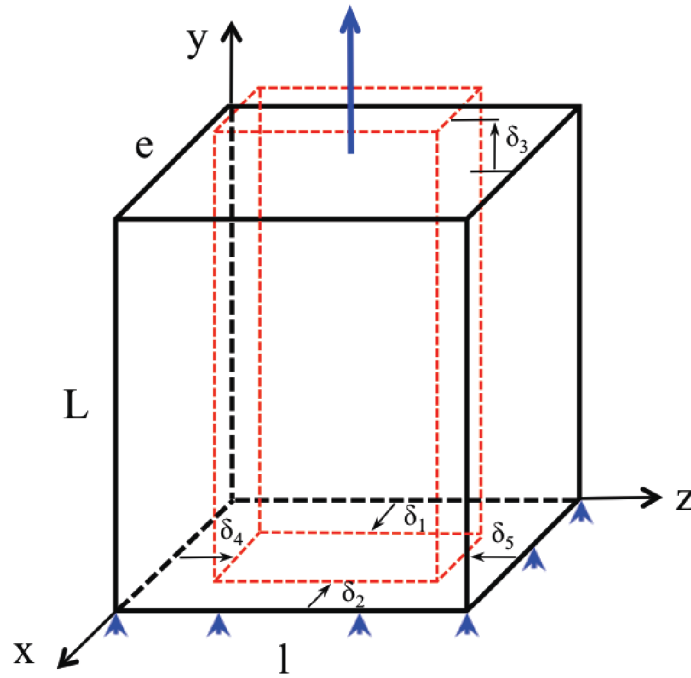


FIGURE 1.8: Chargement pour le calcul de E_y et ν_{yz}

Cette fois-ci, le déplacement selon la direction y de tous les noeuds situés sur la face $y = 0$ est imposé nul, relation 1.49. Afin d'éviter un mouvement de corps rigide, le déplacement d'un seul noeud situé à l'intérieur de la face $y = 0$ est bloqué selon les directions x et z . Les relations 1.53 et 1.54 donnent alors les valeurs de E_y et ν_{yz} :

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} = \frac{F_2 L}{e l \delta_3} \quad (1.53)$$

$$\nu_{yz} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_y} = \frac{(\delta_4 + \delta_5) L}{l \delta_3} \quad (1.54)$$

Le troisième cas de chargement nous permet de calculer le module de cisaillement longitudinal G_{xy} . Les MBC qui sont utilisées dans ce cas sont plus complexes et données par les relations suivantes :

$$u(x, 0, z) = 0 \quad (1.55)$$

$$v(x, 0, z) = 0 \quad (1.56)$$

$$w(x, 0, z) = 0 \quad (1.57)$$

$$u(x, L, z) = \delta \quad (1.58)$$

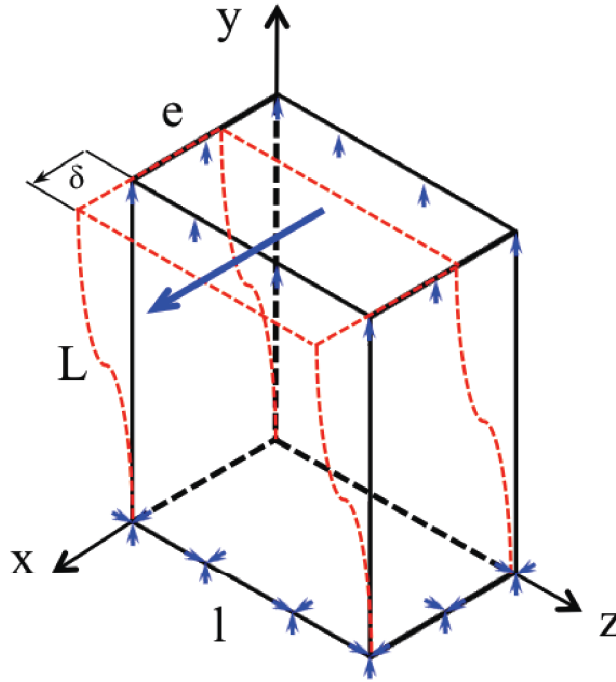
$$v(x, L, z) = 0 \quad (1.59)$$

$$u(0, y, z) = u(e, y, z) \quad (1.60)$$

$$v(0, y, z) = v(e, y, z) \quad (1.61)$$

$$w(0, y, z) = w(e, y, z) \quad (1.62)$$

Les premières conditions aux limites 1.55 - 1.57 traduisent le blocage de tous les noeuds existants sur la face $y = 0$ du volume selon les trois directions. Cela implique l'existence au moins d'un nœud sur cette face dont le déplacement selon les trois directions est nul, le mouvement de corps solide étant ainsi évité. Les conditions aux limites 1.58 et 1.59 imposent que tous les nœuds situés sur la face $y = L$ aient un déplacement nul selon la direction y et un même déplacement δ selon la direction x qui sera calculé après le chargement, Figure 1.9.


 FIGURE 1.9: Chargement pour le calcul de G_{xy}

Les relations 1.60 - 1.62 signifient le fait que chaque paire de nœuds situés “en miroir” sur les faces $x = 0$ et $x = e$ doivent avoir le même déplacement selon x , y et z pendant le chargement. Sur la face $y = L$ s’applique une force F_3 dans le sens positif de l’axe x . Après le chargement, le déplacement δ est tiré du calcul et le module de cisaillement G_{xy} peut alors se calculer à l’aide de la relation 1.63 :

$$G_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{F_3 L}{e l \delta} \quad (1.63)$$

dont γ_{xy} est la déformation du cisaillement longitudinal.

Enfin, pour le dernier cas de chargement, afin de calculer le module de cisaillement transversal G_{yz} , les MBC suivantes sont utilisées :

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (1.64)$$

$$v(x, y, 0) = 0 \quad (1.65)$$

$$w(x, y, 0) = 0 \quad (1.66)$$

$$v(x, y, l) = \delta \quad (1.67)$$

$$w(x, y, l) = 0 \quad (1.68)$$

$$u(x, 0, z) = u(x, L, z) \quad (1.69)$$

$$v(x, 0, z) = v(x, L, z) \quad (1.70)$$

$$w(x, 0, z) = w(x, L, z) \quad (1.71)$$

Les conditions aux limites 1.64 - 1.66 assurent le blocage de tous les nœuds situés sur la surface $z = 0$ selon toutes les directions ce qui implique l'existence d'au moins un nœud dont le déplacement est nul selon ces trois directions. Comme dans le cas précédent, le mouvement de corps solide est évité. Les conditions aux limites 1.67 et 1.68 imposent que tous les nœuds situés sur la face $z = l$ aient un déplacement nul selon la direction z et qu'ils aient un même déplacement δ selon la direction y qui sera calculé après le chargement, Figure 1.10.

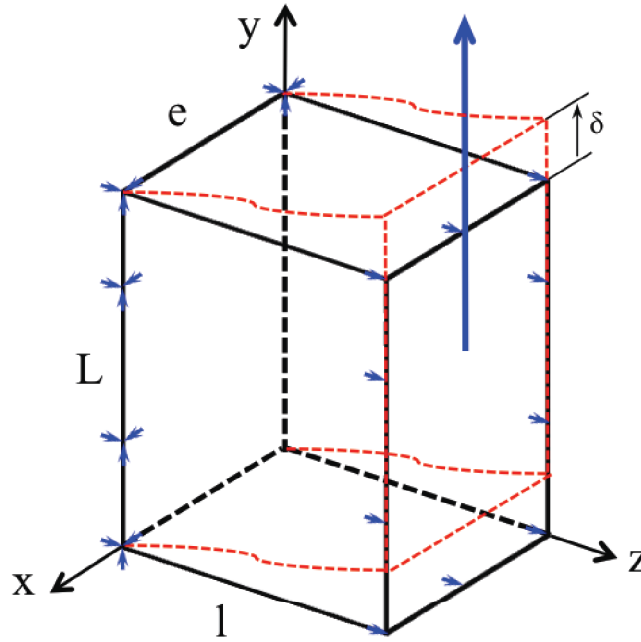


FIGURE 1.10: Chargement pour le calcul de G_{yz}

Les trois dernières conditions aux limites 1.69 - 1.71 sont appliquées, comme dans le cas précédent, aux nœuds situés “en miroir”, sur les faces $y = 0$ et $y = L$. En plus de ces conditions aux limites, sur la face $z = l$ s'applique une force F_4 de cisaillement transversal, dans le sens positif de l'axe y . Après le chargement, le module de cisaillement G_{yz} se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$G_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{F_4 l}{e L \delta} \quad (1.72)$$

dont γ_{yz} est la déformation du cisaillement transversal.

Parmi toutes les méthodes numériques d'homogénéisation présentées, uniquement les deux dernières sont retenues. La méthode basée sur l'application des conditions aux limites cinématiques uniformes, déjà programmée dans le cadre du laboratoire, a été d'abord utilisée. Cependant, du fait de la lourdeur des calculs associée à une vitesse de convergence très faible, nous avons par la suite choisi d'employer la méthode qui utilise des conditions aux limites mixtes, permettant une convergence beaucoup plus rapide. Ces aspects sont mieux détaillés dans le paragraphe 3.3 du chapitre 3.

1.4 Méta-modèle et modèle d'apprentissage

La prise en compte de la variabilité pour le dimensionnement fiable d'un système donné passe d'une part, par la construction des lois de distribution des paramètres d'entrée du système et d'autre part, par la mise en œuvre d'un modèle de représentation permettant de construire efficacement les lois de distribution des paramètres de sortie. Le recours à l'emploi de méta-modèles s'avère particulièrement avantageux lorsqu'il s'agit de construire des lois de distribution du fait du gain significatif en temps de calcul qu'ils offrent. Dans ce cadre-là, les polynômes issus du chaos polynomial et les réseaux de neurones de type perceptron multicouche sont considérés dans ce travail et seront présentés dans ce paragraphe.

1.4.1 Principe d'un méta-modèle

Le principe d'un méta-modèle (type surface de réponse) [33] est d'approximer la fonction qui relie les réponses d'un modèle mécanique, souvent obtenues par un calcul EF, aux variations des paramètres d'entrée considérés incertains. L'intérêt de son utilisation réside dans le gain de temps de calcul en particulier lorsqu'il s'agit de construire une distribution de ces réponses en fonction d'un nombre d'entrées variables. En effet, il est beaucoup plus rapide de calculer la valeur d'un polynôme que de réaliser un calcul éléments finis complexe.

On distingue deux classes [34] de modèles de surface de réponse :

- modèles simples :
 - surface polynomiale dont les données d'entrée sont déterministes ;
 - surface polynomiale dont les données d'entrée sont aléatoires : chaos polynomial ;
- modèles évolués : réseaux de neurones

La construction d'une surface de réponse passe par 4 étapes :

- le choix de la classe du modèle ;
- le choix du plan d'expérience adéquat ;
- l'identification des coefficients d'approximation du méta-modèle, cette opération étant étroitement liée à la précédente ;
- validation de la surface de réponse.

1.4.2 Chaos polynomial

Contrairement à la surface polynomiale qui utilise des entrées déterministes, le chaos polynomial présente un intérêt particulier pour nous dans le cas où les entrées du modèle sont des variables aléatoires décrites par différentes lois de distribution. Le principe de

base de la construction d'une surface de réponse par chaos polynomial est de décomposer la fonction réponse R sur une base de polynômes ψ_i de degré p , intéressante pour ses propriétés d'orthogonalité par rapport à la mesure gaussienne [35] :

$$R(\xi) = \sum_{i=0}^{B-1} c_i \psi_i(\xi) + \varepsilon(\xi) \quad (1.73)$$

où c_i sont les coefficients de l'approximation, ε représente l'erreur de l'approximation et $\xi = \xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_M)$ sont les M variables aléatoires d'entrée exprimées dans l'espace standard des variables aléatoires centrées réduites (de moyenne 0 et d'écart-type 1).

La dimension de la base du chaos, donnée par la relation 1.74, dépend du nombre des variables M et du degré p . Elle donne le nombre de coefficients c_i à identifier ainsi que le nombre de polynômes ψ_i .

$$B = \frac{(M+p)!}{M!p!} \quad (1.74)$$

Dans le cas d'un chaos polynomial de dimension M et d'ordre p , les polynômes ψ_i sont des produits de polynômes particuliers φ_{α_j} :

$$\psi_i(\xi) = \prod_{j=1}^M \varphi_{\alpha_j}(\xi_j) \quad (1.75)$$

tels que $\sum_{j=1}^M \alpha_j \leq p$, $\alpha_j \in [0, p]$.

Selon le type de distribution des variables aléatoires, les polynômes φ_{α_j} peuvent être des polynômes d'Hermite, de Laguerre, de Legendre, etc. Par exemple, si les variables suivent des lois de distribution normales, les polynômes φ_{α_j} sont des polynômes de type Hermite [36] dont la forme générale se définit à l'aide de la relation 1.76 :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \quad (1.76)$$

où n désigne le degré du polynôme.

Enfin, les coefficients de l'approximation c_i peuvent être déterminés par une méthode de régression de type moindres carrés [36], fréquemment utilisée.

Le chaos polynomial s'avère coûteux lorsque plusieurs réponses (sorties) du modèle mécanique sont étudiées en fonction des paramètres d'entrée variables. Dans ce cas, il faut considérer autant de surfaces de chaos que de réponses et identifier séparément, pour chacune d'entre elles, les coefficients de l'approximation. Afin de surmonter cet inconvénient, l'emploi d'un réseau de neurones de type perceptron multicouches, semble mieux adapté.

1.4.3 Réseau de neurones de type perceptron multicouche

Cette méthode [37] permet l'approximation d'une ou de plusieurs réponses en même temps, en fonction d'un nombre d'entrées variables et s'inspire du fonctionnement du cerveau humain. Elle est basée sur un apprentissage à partir d'un nombre donné de réalisations entrées-sorties.

Un neurone formel est une représentation mathématique et informatique d'un neurone biologique. Il possède généralement plusieurs entrées et une sortie, Figure 1.11. Le rôle du neurone est d'intégrer toute l'information contenue dans un vecteur d'entrée $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_r) \in R^r = \underbrace{R \times R \times \dots \times R}_{r \text{ fois}}$ afin de produire une valeur de sortie y .

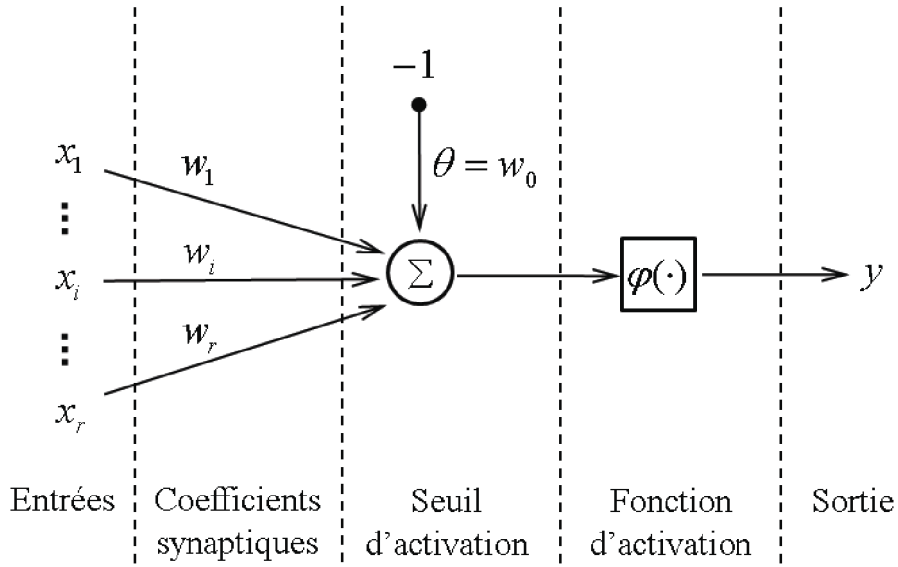


FIGURE 1.11: Modèle d'un neurone formel

Cette fonction de transfert entre les entrées du neurone et sa sortie tient compte du fait que des connexions plus ou moins excitatrices relient le neurone à chacune des entrées $x_i, i = 1, 2, \dots, r$. Le comportement d'une connexion est déterminé par son coefficient synaptique, ou poids synaptique, w_i . Un coefficient synaptique w_i élevé tente d'activer le neurone pour l'entrée x_i , tandis qu'à l'inverse, un coefficient synaptique faible, cherche plutôt à l'inhiber.

Le niveau d'activation total du neurone se détermine en réalisant une somme des entrées pondérées par leurs coefficients synaptiques. Lorsque ce niveau est supérieur ou égal à son seuil d'activation, $\sum_{i=1}^r x_i w_i \geq \theta$, le neurone s'active. Dans le cas contraire, il s'inhibe. Mentionnons que le seuil d'activation θ est aussi appelé le biais du neurone. Il est en fait le poids synaptique w_0 d'une entrée supplémentaire x_0 dans le neurone. Cette entrée est choisie égale à -1 .

En résumant, nous pouvons écrire de manière plus formelle que le neurone cherche à réaliser une transformation telle que :

$$\forall (x \in R^r) \mapsto y = \varphi \left(\sum_{i=1}^r x_i w_i - \theta \right) = \varphi \left(\sum_{i=0}^r x_i w_i \right) \in I \quad (1.77)$$

où φ est la fonction d'activation du neurone et I est l'intervalle de variation de ses valeurs. Parmi les fonctions d'activation, la fonction sigmoïde et tangente hyperbolique sont celles les plus utilisées, Figure 1.12.

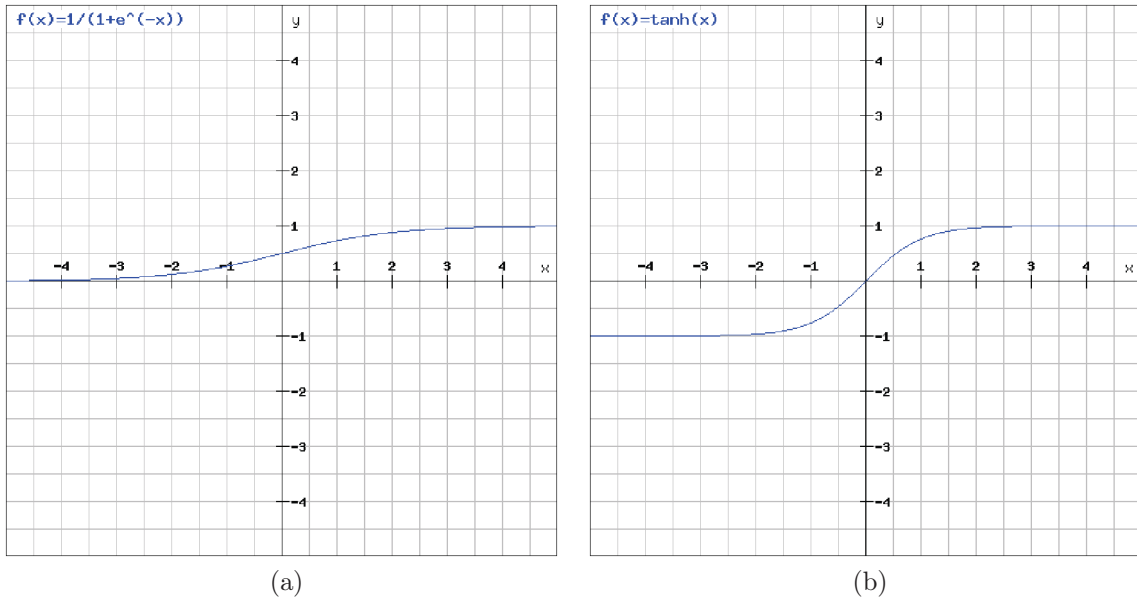


FIGURE 1.12: Fonctions d'activation : (a) sigmoïde, (b) tangente hyperbolique

Pour le cas de la fonction sigmoïde $I = (0, 1)$ tandis que pour la fonction tangente hyperbolique $I = (-1, 1)$.

L'expression analytique de la fonction sigmoïde et tangente hyperbolique est donnée dans la relation 1.78 et 1.79 respectivement :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1.78)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (1.79)$$

Dans notre étude, nous avons choisi la fonction d'activation sigmoïde. La raison pour laquelle nous avons fait ce choix est que la dérivée de celle-ci intervient dans le calcul de la dérivée partielle de l'erreur [38] commise par le réseau de neurones et est manifestement plus simple à effectuer que celle de la fonction tangente hyperbolique.

Un réseau de neurones de type perceptron multicouche est en général composé d'un ensemble de neurones organisés en couches et où l'information voyage dans un seul sens : de la couche d'entrée vers la couche de sortie. Dans la Figure 1.13, nous donnons l'exemple d'un réseau contenant une couche d'entrée, deux couches cachées et une couche de sortie. La couche d'entrée représente toujours la couche virtuelle associée aux entrées du système. Elle ne contient aucun neurone. Les couches suivantes sont des couches de neurones. Dans l'exemple illustré, il y a trois entrées, quatre neurones sur la première couche cachée, trois neurones sur la deuxième et quatre neurones sur la couche de sortie. Cela correspond à une structure du réseau notée [3,4,3,4].

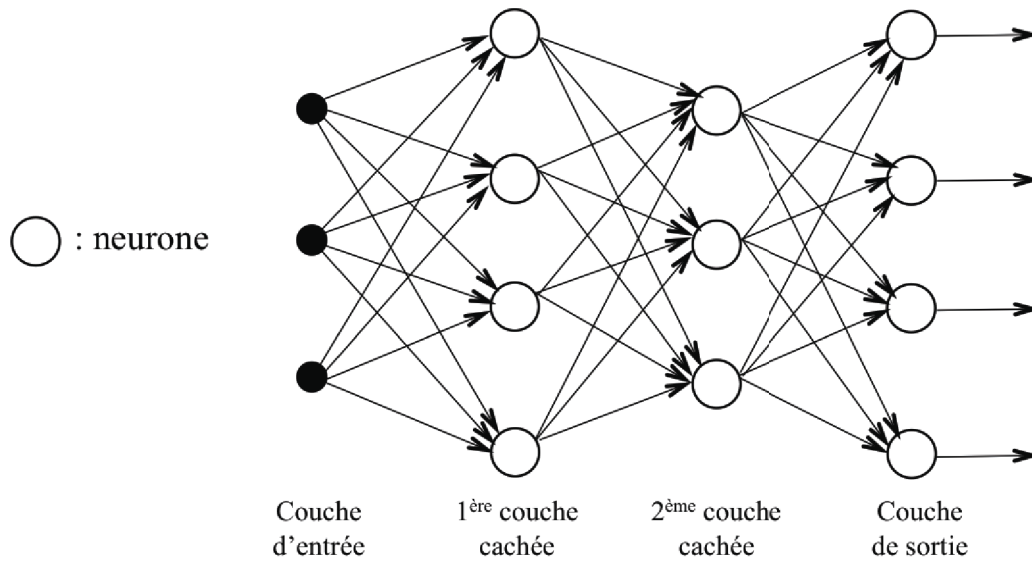


FIGURE 1.13: Exemple d'un réseau de type perceptron multicouche

Les sorties des neurones de la dernière couche correspondent toujours aux sorties du système. Dans le cas général, un réseau de neurones peut posséder un nombre de couches quelconque et un nombre de neurones (ou d'entrées) par couche également quelconque. Les neurones sont reliés entre eux par des connexions pondérées. Ce sont les poids synaptiques qui gouvernent le fonctionnement du réseau et "programment" une application de l'espace des entrées vers l'espace des sorties à l'aide d'une transformation non linéaire.

Le réseau de neurones utilise un algorithme d'apprentissage (ou d'entraînement) qui consiste à modifier les poids synaptiques en fonction d'un nombre de réalisations (exemples) d'entrées-sorties. Le but de cet apprentissage est de permettre au réseau de neurones d'apprendre à partir de ces exemples et puis de généraliser dans les limites du domaine d'apprentissage. Le réseau est fonctionnel lorsque les poids synaptiques trouvés représentent aux mieux les sorties.

Une étape indispensable dans l'utilisation du réseau de neurones est la normalisation des valeurs des entrées ainsi que le traitement des valeurs des sorties des exemples. En effet, les valeurs des entrées sont centrées et réduites, en suivant une distribution normale de moyenne 0 et d'écart-type 1. Cette transformation se réalise à l'aide de la relation 1.80 suivante :

$$x' = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \quad (1.80)$$

dont x désigne l'entrée avant la transformation, μ_x sa moyenne et σ_x son écart-type.

La nécessité de cette transformation se comprend mieux en examinant les résultats que produirait la fonction d'activation sigmoïde telle que celle décrite par la Figure 1.12a. Toute valeur au-delà de 3 produira toujours un résultat proche de 1. La réponse de la fonction dévient très peu sensible à l'intensité de l'activation : une activation de 4 donnera sensiblement la même réponse qu'une activation de 15, c'est-à-dire un résultat très proche de l'unité. Dans ce cas, la qualité de l'apprentissage est compromise.

Quant aux valeurs des sorties des exemples, elles doivent être réduites entre les valeurs 0 et 1 afin de pouvoir les comparer avec celles des sorties calculées par le réseau de neurones,

à leur tour comprises entre 0 et 1 du fait de la fonction sigmoïde. La transformation utilisée dans ce cas est celle décrite par la relation 1.81 :

$$d' = \frac{d - \min_d}{\max_d - \min_d} \quad (1.81)$$

où d est la sortie de l'exemple avant la transformation tandis que $\min_d$ et $\max_d$ sont respectivement le minimum et le maximum de cette sortie.

Considérons le cas général d'un réseau de neurones avec p entrées et q sorties. Soit le couple $(x(n), d(n))$ désignant le n - ième exemple d'entraînement du réseau (n - ième itération) où :

$$x(n) = (x_1(n), \dots, x_p(n)) \text{ et } d(n) = (d_1(n), \dots, d_q(n)) \quad (1.82)$$

correspondent respectivement aux p entrées et aux q sorties désirées.

L'algorithme d'apprentissage consiste à mesurer l'erreur entre les sorties désirées $d(n)$ (de l'exemple) et les sorties $y(n)$ calculées par le réseau :

$$y(n) = (y_1(n), \dots, y_q(n)) \quad (1.83)$$

Soit k la taille du fichier d'apprentissage (TFA). Elle représente le nombre de jeux d'entrées-sorties à partir desquels le réseau doit apprendre. Dans ce fichier, il y a donc k valeurs pour chacune des p entrées et k valeurs pour chacune des q sorties. Lorsque le réseau a parcouru tout le fichier d'apprentissage, cela signifie qu'il a fini une époque de dimension k . L'époque est ensuite reprise un nombre t de fois. Le nombre total d'itérations du réseau est donné par le nombre $k * t$.

Après chaque époque, la somme des erreurs observées sur l'ensemble des neurones de sortie, équation 1.86, est évaluée. Si cette erreur est inférieure à la valeur 10^{-2} , fixée par l'utilisateur, l'algorithme d'apprentissage s'arrête. Sinon, les poids synaptiques sont modifiés et l'apprentissage continue jusqu'à ce que la condition précédente soit satisfaite. Si après avoir repris l'époque t fois, cette condition n'est encore pas vérifiée, l'apprentissage est à nouveau relancé.

Parmi les algorithmes d'apprentissage [39, 40, 41], l'algorithme RPROP (Resilient Propagation) est reconnu comme un des plus performants ; c'est celui-ci que nous emploierons par la suite. C'est un algorithme d'optimisation du premier ordre, en "mode batch", créé par Martin Riedmiller et Heinrich Braun en 1995. Utilisé en "mode batch" signifie que les poids synaptiques du réseau sont modifiés après chaque époque durant l'apprentissage, contrairement au mode "en ligne" qui nécessite la modification des poids synaptiques après chaque itération et qui est spécifique à d'autres algorithmes.

Soit l'erreur observée $e_j(n)$ pour le neurone de sortie j à l'itération n :

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \quad (1.84)$$

où $d_j(n)$ correspond à la sortie désirée du neurone j tandis que $y_j(n)$ à sa sortie calculée par le réseau.

L'erreur observée sur l'ensemble C des neurones de sortie pour l'itération n , encore appelée l'erreur quadratique, est donnée par :

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (1.85)$$

L'erreur totale de l'époque courante l , $l = 1, \dots, t$ se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$E(l) = \sum_{n=1}^k \varepsilon(n) \quad (1.86)$$

Le principe de base de l'algorithme RPROP est qu'il modifie les poids synaptiques du réseau afin de minimiser la fonction erreur E . Cette fonction est une hyper surface qui dépend des poids synaptiques du réseau. Lors de l'apprentissage, le signe de la dérivée partielle de l'erreur $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$ par rapport à chacun des poids synaptiques est évalué [42] et chacun de ces poids est indépendamment modifié, w_{ij} étant le poids synaptique entre le neurone i et j . Une condition nécessaire pour que la fonction erreur soit dérivable partiellement est que la fonction d'activation soit différentiable. Cette condition est vérifiée puisque la fonction d'activation sigmoïde choisie est différentiable.

La modification des poids est réalisée par l'intermédiaire d'un coefficient d'apprentissage $\Delta_{ij}(l)$ défini par les relations 1.87 :

$$\Delta_{ij}(l) = \begin{cases} \eta^- * \Delta_{ij}(l-1), & \text{si } \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l-1) * \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l) < 0 \\ \eta^+ * \Delta_{ij}(l-1), & \text{si } \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l-1) * \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l) > 0 \\ \Delta_{ij}(l-1), & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.87)$$

Celui-ci évolue au cours du processus d'apprentissage à l'aide d'un facteur constant : η^- pour la diminution et η^+ pour l'augmentation. En général, η^- est fixé à 0,5, η^+ à 1,2 et tout au début, pour la première époque, tous les coefficients d'apprentissage Δ_{ij} sont fixés à une valeur initiale $\Delta_0 = 0, 1$. Le choix de ces paramètres n'est pas critique concernant la vitesse de convergence de l'algorithme [41].

Pour chaque poids, s'il y a un changement de signe de la dérivée partielle $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l)$ à l'époque courante l , comparée à celle de l'époque précédente $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l-1)$, cela signifie que la valeur du coefficient d'apprentissage de l'époque précédente $\Delta_{ij}(l-1)$ a été grande, ce qui a déterminé l'algorithme de rater un minimum local de la fonction erreur. Afin de s'approcher de ce minimum, le coefficient d'apprentissage est diminué par le facteur η^- .

Lorsque l'époque courante l produit le même signe de la dérivée partielle $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$, le coefficient d'apprentissage est augmenté par le facteur η^+ pour accélérer la convergence de l'algorithme vers le minimum local de la fonction erreur.

Finalement, chacun des poids synaptiques est réévalué et modifié suivant son propre coefficient d'apprentissage dans la direction opposée à celle de la dérivée partielle de l'erreur $\frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l)$:

$$w_{ij}(l+1) = w_{ij}(l) + \Delta w_{ij}(l) \quad (1.88)$$

où $\Delta w_{ij}(l)$ exprime la variation du poids w_{ij} :

$$\Delta w_{ij}(l) = \begin{cases} -\Delta_{ij}(l) & , \text{ si } \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l) > 0 \\ +\Delta_{ij}(l) & , \text{ si } \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}(l) < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.89)$$

Après l'apprentissage, les poids synaptiques correspondants à la moindre erreur E sont retenus et le réseau est désormais opérationnel et permet, dans notre cas, d'obtenir de manière efficace les distributions des sorties en fonction de la variabilité des entrées.

Nous rappelons que l'avantage de l'utilisation du réseau de neurones par rapport au chaos polynomial réside dans le fait qu'à la fin de l'apprentissage toutes les sorties du modèle sont en même temps approximées en fonction des paramètres d'entrée. Du fait de cet avantage, nous avons décidé d'utiliser le réseau de neurones en tant que méta-modèle pour la construction des distributions statistiques du comportement équivalent du matériau à l'échelle des constituants élémentaires. Pour l'identification du type de ces distributions, des tests d'hypothèse sont employés. Les plus utilisés d'entre eux font l'objet du paragraphe qui suit.

1.5 Tests d'ajustement d'une loi de probabilité

Le principe général d'un test d'ajustement (ou test d'hypothèse) d'une loi de distribution statistique théorique à un échantillon consiste à vérifier si la répartition de l'échantillon peut être décrite par cette loi théorique. Parmi les tests d'ajustement les plus répandus citons : le test de Kolmogorov [43] ainsi que le test du χ^2 [44]. Ils seront présentés ici.

Pour chaque test d'ajustement, un paramètre statistique s est calculé et sa valeur est comparée à une valeur tabulée s_{tab} . Cette dernière valeur dépend d'un seuil de signification α du test (ou niveau de confiance $1 - \alpha$) et, selon le test, de la taille de l'échantillon analysé ou du nombre de classes issues des valeurs de l'échantillon. L'hypothèse du test est souvent notée H_0 et appelée hypothèse nulle. Elle postule qu'il n'existe pas de différence entre la distribution observée et celle théorique attendue. Le seuil de signification α se traduit comme étant le risque que l'hypothèse H_0 soit fausse alors qu'elle a été acceptée. Après le calcul du paramètre statistique s , deux cas possibles se distinguent :

- si $s \leq s_{tab}$, l'hypothèse H_0 est acceptée avec un risque d'erreur de α ;
- si $s > s_{tab}$, l'hypothèse H_0 est rejetée avec un niveau de confiance de $1 - \alpha$.

1.5.1 Test de Kolmogorov

Considérons un échantillon de n valeurs observées : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Le nombre de ces valeurs définit la taille de l'échantillon. Supposons la fonction de répartition de l'échantillon inconnue. Celle-ci peut être calculée à partir des valeurs observées à l'aide de la relation 1.90 suivante [45] :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_i \leq x < x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 1, & x_n \leq x \end{cases} \quad (1.90)$$

Le test compare la fonction de répartition empirique F_n de l'échantillon avec la fonction de répartition théorique T_X de la loi de distribution théorique attendue et calcule l'écart maximal entre elles. Afin de pouvoir réaliser cette comparaison, l'expression analytique explicite de la fonction de répartition théorique T_X doit être connue. Elle se définit à l'aide de la relation 1.91 suivante :

$$T_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t, \theta) dt \quad (1.91)$$

où f_X représente la fonction de densité de probabilité de la loi de distribution théorique caractérisée par les paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Par exemple, dans le cas d'une loi de distribution théorique normale $\theta_1 = \mu$ et $\theta_2 = \sigma$ (μ et σ étant respectivement la moyenne et l'écart type de la loi de distribution normale).

Bien que l'expression analytique de la fonction f_X soit connue pour chaque type de distribution théorique étudiée, sa connaissance reste pourtant incomplète si les valeurs des paramètres θ_1 et θ_2 ne sont pas connues. Une méconnaissance de la fonction f_X implique donc indirectement une méconnaissance de la fonction de répartition théorique T_X .

La détermination des valeurs de ces paramètres se fait en fonction des valeurs de l'échantillon et s'appelle l'ajustement de la loi de distribution théorique à l'échantillon empirique étudié. Pour l'estimation de ces paramètres, la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance [45] peut être utilisée. Elle consiste dans un premier temps à définir la fonction de vraisemblance L , donnée dans la relation 1.92, et de chercher son maximum :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i, \theta) \quad (1.92)$$

Etant donné que le calcul de ce maximum passe d'abord par le calcul d'une dérivée de la fonction L , il est préférable d'utiliser à sa place la fonction de logvraisemblance, définie dans la relation 1.93, car ainsi le produit se transforme en somme, ce qui est plus simple à dériver :

$$l(\theta) = \log(L(\theta)) = \sum_{i=1}^n \log(f_X(x_i, \theta)) \quad (1.93)$$

L'estimateur de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, noté $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, représente un $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ qui maximise la fonction $l(\theta)$. Il se calcule à l'aide des conditions données par la relation 1.94 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta) = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_2 \end{cases} \quad (1.94)$$

Après la détermination de la fonction T_X , le test permet de calculer, à l'aide de la relation 1.95, la valeur d'un paramètre noté K_n :

$$K_n = \max(K_n^-, K_n^+) \quad (1.95)$$

où

$$K_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left(T_X(x_i) - \frac{i-1}{n} \right) \quad (1.96)$$

$$K_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - T_X(x_i) \right) \quad (1.97)$$

Cette valeur se compare ensuite avec une valeur tabulée $K_n(\alpha)$ [46] qui dépend de la taille n de l'échantillon et du risque d'erreur α choisi pour le test. La valeur $K_n(\alpha)$ est indépendante du choix du type de la distribution statistique théorique avec laquelle est comparée celle de l'échantillon empirique.

Si $K_n \leq K_n(\alpha)$, l'hypothèse nulle H_0 est acceptée avec le risque d'erreur α . Dans le cas contraire, l'hypothèse nulle H_0 est rejetée avec un niveau de confiance $1 - \alpha$. Ce test existe aussi sous une autre forme, appelé Kolmogorov-Smirnov [47], permettant de tester si deux échantillons empiriques ont des distributions identiques.

1.5.2 Test du χ^2

Afin d'appliquer ce test, les valeurs de l'échantillon sont d'abord ordonnées selon un ordre croissant, puis regroupées en k classes. Ainsi, un effectif (nombre) n_i de valeurs correspond à chaque classe i . Le test du χ^2 consiste à comparer le classement des données disponibles au classement d'une loi théorique en intégrant toutes les classes définies. Pour cela, la valeur d'un paramètre noté χ_{cal}^2 est calculée à l'aide de la relation 1.98 :

$$\chi_{cal}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (1.98)$$

Cette valeur représente la somme des carrés des différences entre les effectifs observés n_i et les effectifs théoriques attendus np_i divisés par ces effectifs théoriques, dont p_i est la probabilité théorique de la classe i . Cette probabilité peut être obtenue par la relation 1.99 :

$$p_i = T_X(x_{i+1}) - T_X(x_i) \quad (1.99)$$

où T_X représente la fonction de répartition théorique tandis que x_i et x_{i+1} sont respectivement la limite inférieure et supérieure de la classe i .

Cette valeur est ensuite comparée à une valeur tabulée $\chi_{k-1}^2(\alpha)$ qui dépend du risque d'erreur α du test ainsi que d'un nombre $k - 1$ qui correspond au nombre de degrés de liberté. Si $\chi_{cal}^2 \leq \chi_{k-1}^2(\alpha)$, l'hypothèse nulle H_0 est acceptée avec un risque d'erreur α . Dans le cas contraire, l'hypothèse est rejetée avec un niveau de confiance $1 - \alpha$.

Une condition d'application [48] de ce test est que tous les effectifs théoriques np_i doivent être supérieurs ou égaux à 1, avec au moins 80 % d'entre eux supérieurs ou égaux à 5. Cette condition rend parfois compliquée l'application du test puisqu'il faut choisir à travers quelques essais le nombre approprié k de classes qui satisfasse la condition précédemment énoncée. En outre, lorsque la taille de l'échantillon analysé est petite, il n'est pas toujours possible de grouper ses valeurs en un nombre de classes de sorte que la condition demandée soit vérifiée. Par conséquent, l'utilisation du test du χ^2 se prête plutôt à des échantillons de grande taille.

Dans la référence [43], il est indiqué que le test de Kolmogorov est meilleur que le test du χ^2 puisqu'il considère les valeurs de l'échantillon séparées les unes des autres tandis que le test du χ^2 nécessite une division de ces valeurs en sous-groupes, ce qui engendre une perte d'information. De plus, le test de Kolmogorov peut être utilisé pour tester des échantillons de petite taille. Néanmoins, les deux tests seront employés par la suite afin de conforter les résultats.

1.6 Conclusions

Les défauts introduits par les procédés d'élaboration des matériaux composites constituent des sources de dispersion sur leurs propriétés mécaniques et sont : les porosités, le désalignement des fibres ainsi que l'angle d'orientation des plis superposés. Bien que la prise en compte de cette variabilité s'avère nécessaire lors de l'estimation du comportement équivalent du matériau composite, aucune de ces sources de variabilité n'est prise en compte dans ce travail car le matériau a été supposé sain.

Toutefois, la microstructure du matériau dévoile clairement une variabilité morphologique. Cette variabilité, étudiée dans le chapitre 2, associée à celle des propriétés mécaniques des matériaux constituants, permettra d'établir des lois de distributions du comportement équivalent du matériau composite par homogénéisation à l'échelle des constituants élémentaires.

L'analyse des limites d'application des méthodes analytiques d'homogénéisation par rapport à la nature aléatoire des matériaux composites nous a conduits à adopter des méthodes numériques d'homogénéisation.

Finalement, afin de construire les distributions du comportement équivalent du matériau composite en fonction de la variabilité considérée avec un coût de calcul numérique raisonnable, le réseau de neurones de type perceptron multicouches sera employé. Pour l'identification de ces distributions, les tests de Kolmogorov ainsi que celui du χ^2 seront mis en oeuvre.

Chapitre 2

Analyse morphologique de la microstructure d'un CMO

Sommaire

2.1	Introduction	37
2.2	Diamètre des fibres	37
2.3	Identification de cellules	43
2.4	Distinction entre cellule et VER	46
2.5	Caractérisation des cellules	47
2.5.1	Angle α entre les fibres	47
2.5.2	Distance d_c entre la fibre centrale et les fibres alentours	49
2.5.3	La largeur l et la longueur L des cellules	50
2.6	Conclusions	51

2.1 Introduction

Le deuxième chapitre propose une analyse morphologique effectuée sur la microstructure d'une coupe d'un matériau composite à fibres de carbone T800 HB et à matrice époxy. La caractérisation de la variabilité géométrique du milieu hétérogène à l'échelle des constituants élémentaires est visée. L'évolution du diamètre des fibres ainsi que l'organisation des fibres les unes par rapport aux autres sont en particulier analysées. Six types différents de motifs d'arrangement de fibres regroupés en cellules sont ainsi identifiés. Leur caractérisation à partir des critères géométriques est présentée à la fin de ce chapitre.

2.2 Diamètre des fibres

Dans ce paragraphe, une analyse de la variabilité du diamètre de la fibre de carbone, réalisée sur une population de 200 fibres, est proposée.

Mesure du diamètre

Cette analyse est effectuée à partir d'une micrographie, Figure 2.1, issue d'une coupe d'une portion de fil d'un matériau composite à fibres de carbone T800 HB et matrice époxy. La micrographie a été supposée représentative de la microstructure du matériau analysé. Ce

matériau a été tiré d'une structure réalisée par enroulement filamentaire. Il a été confirmé que les fibres de carbone n'ont pas une géométrie de section droite circulaire constante. En effet, le profil de la section droite est très variable en dimensions et peut être plutôt approché par un profil elliptique, caractérisé par un petit diamètre d et un grand diamètre D .

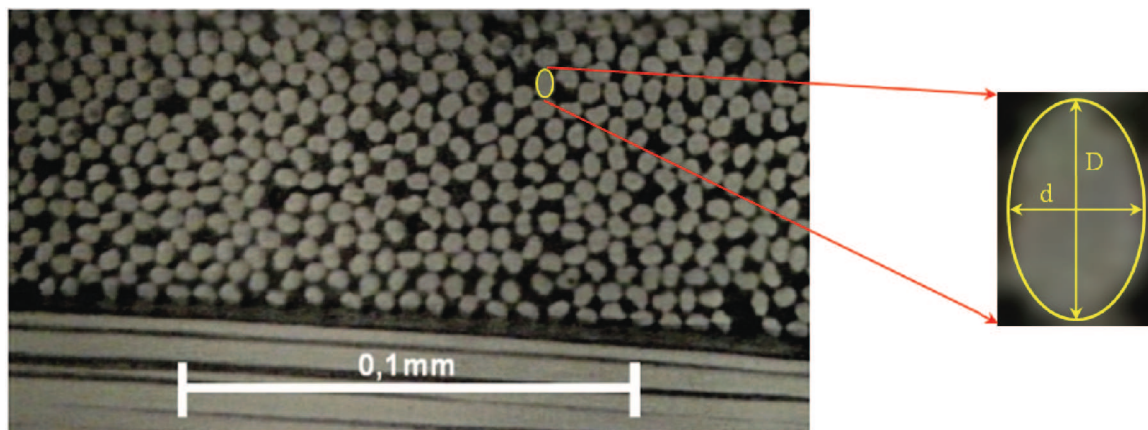


FIGURE 2.1: Micrographie du fil T800 HB

La géométrie quasiment elliptique observée ici peut être exacerbée par la façon dont l'échantillon a été prélevé. Cet échantillon provient d'une micrographie réalisée dans le cadre d'un travail de recherche présenté dans le mémoire de thèse de Ballère L. [49].

L'ensemble des valeurs mesurées pour chacun des diamètres (d et D) présente une dispersion dont l'allure est celle donnée dans la Figure 2.2.

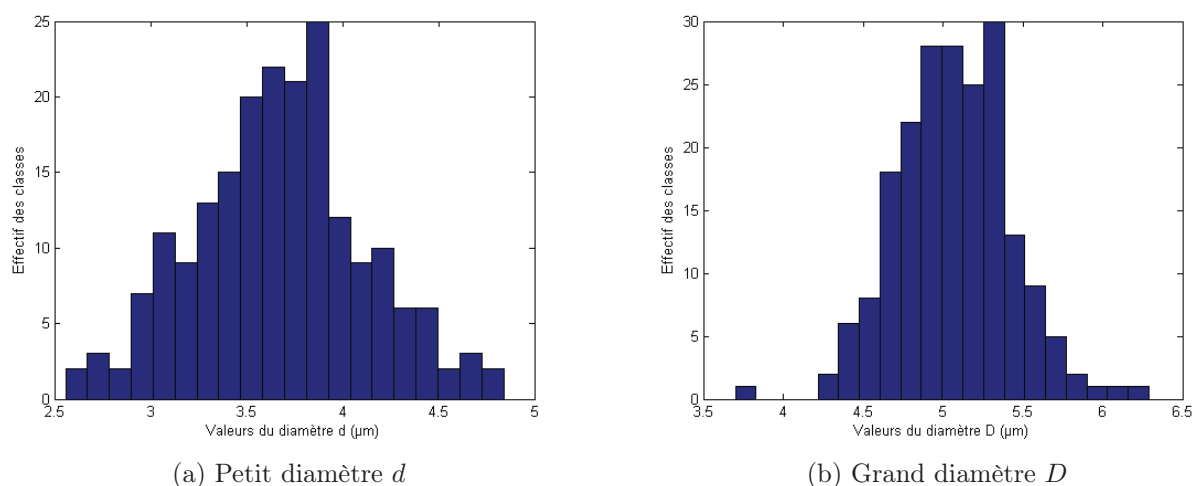


FIGURE 2.2: Histogrammes de classes des diamètres

La distribution de ces valeurs peut être caractérisée, dans un premier temps, par les deux premiers moments statistiques : la moyenne et l'écart-type, présentés dans le Tableau 2.1.

Diamètre étudié	Moments statistiques de la distribution	
	Moyenne (µm)	Écart-type (µm)
d	3,68	0,45
D	5,07	0,36

TABLE 2.1: Caractérisation de la distribution statistique des diamètres

Les deux diamètres des fibres constituent donc les premiers paramètres géométriques identifiés. La connaissance de la nature de leur distribution est importante dans l'esprit de ce travail. Afin de l'identifier, les valeurs mesurées ont fait l'objet d'une analyse statistique. Leur normalité est vérifiée ici, en employant d'abord le test de la droite de Henry, dont le principe est décrit maintenant.

Principe du test de la droite de Henry

Si X est une variable aléatoire gaussienne (normale) de moyenne m et d'écart-type σ , appartenant à l'espace physique et T est une variable aléatoire normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart-type 1), appartenant à l'espace standard (ou centré réduit), à travers une transformation isoprobabiliste, qui assure le passage entre les deux espaces, la relation 2.1 peut s'écrire :

$$F(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = P(T \leq t) = \Phi(t) \quad (2.1)$$

ou encore :

$$t = \Phi^{-1}[F(x)] \quad (2.2)$$

où F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X . Elle représente la probabilité que cette variable prenne des valeurs inférieures ou égales à la valeur x . Quant à la fonction Φ , elle désigne la fonction de répartition de la variable normale centrée réduite T .

Considérons maintenant un nombre n de valeurs mesurées, dont la fonction de répartition F est supposée inconnue. Sa définition de probabilité, lui confère la possibilité d'être estimée. Pour cela, les valeurs sont d'abord ordonnées selon un ordre croissant et puis regroupées en k intervalles de largeurs égales, appelés classes de valeurs. Notons x_i la limite supérieure de la classe i et n_i l'effectif de cette classe (ou le nombre de valeurs présentes dans la classe i), $i = 1, 2, \dots, k$. Les valeurs de la fonction F dans les limites supérieures x_i des classes sont ensuite estimées par :

$$F(x_i) = \sum_{p=1}^i \frac{n_p}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.3)$$

Les valeurs t_i sont telles que $t_i = \Phi^{-1}[F(x_i)]$. Il est important d'éviter que $F(x_i)$ prenne la valeur 1 puisque, conformément aux propriétés de la fonction de répartition Φ , cela impliquerait que t_i soit ∞ . Ce problème s'élimine en remplaçant le dénominateur de la fraction présente dans la relation 2.3 par la valeur $n+1$:

$$F(x_i) = \sum_{p=1}^i \frac{n_p}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.4)$$

Les couples (x_i, t_i) peuvent alors être représentés sur un graphique. Puis, la droite d'équation $t = \frac{x-m}{\sigma}$, appelée la droite de Henry, est tracée. Si les points (x_i, t_i) se disposent sur cette droite, alors cela signifie que les valeurs mesurées suivent une loi normale de moyenne m et d'écart-type σ .

Application du test de la droite de Henry à distribution des diamètres

Dans le cas du petit diamètre d , Figure 2.3, les résultats montrent que les points sont relativement bien alignés par rapport à la droite de Henry. Cela nous permet de considérer que les valeurs suivent une loi normale.

Quant au grand diamètre D , les points extrêmes sont nettement désalignés par rapport à cette droite. Cela signifie que les valeurs situées notamment sur les queues de la distribution ne sont pas normalement distribuées.

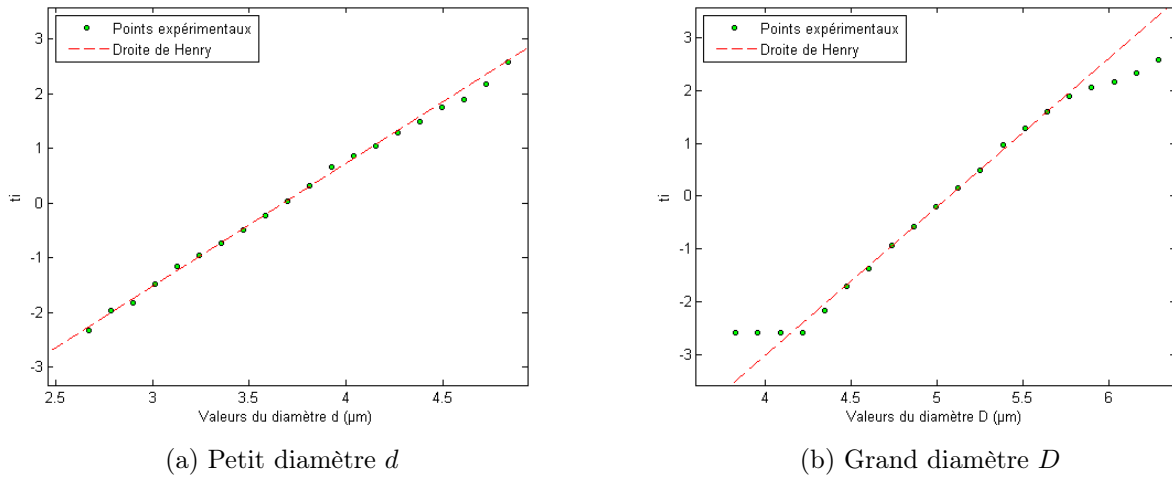


FIGURE 2.3: Test de normalité de la droite de Henry pour les valeurs des diamètres

Afin de tirer une conclusion concernant le type de distribution représentant les valeurs de ces deux diamètres, des investigations supplémentaires ont été faites. Le test de Kolmogorov, dont le principe de fonctionnement est décrit dans le chapitre 1, est maintenant employé.

Application du test de Kolmogorov à distribution des diamètres

La valeur calculée à travers ce test d'hypothèse est comparée avec une valeur tabulée dépendant d'un risque d'erreur (5 %) ainsi que de la taille de l'échantillon analysé (200). Considérant ces deux données, la valeur tabulée est de 0,0961 et ne dépend pas du type de la distribution théorique avec laquelle l'échantillon se compare. Si la valeur calculée par le test est inférieure à cette valeur tabulée, la distribution théorique testée est acceptée au risque de 5 %, sinon elle est rejetée avec au niveau de confiance de 95 %.

Six distributions théoriques sont testées : normale (notée : N), uniforme (U), log-normale (LN), Gamma (G), Weibull (W) et Rayleigh (R). Ces distributions peuvent avoir des formes très proches les unes des autres, selon leurs paramètres. Cependant, l'intérêt de les considérer est que certaines peuvent être dissymétriques et d'autres non. Cette stratégie ouvre donc un

maximum de possibilités. Les résultats du test sont présentés dans le Tableau 2.2. Seules les distributions pour lesquelles la valeur calculée par le test est inférieure à celle tabulée sont reportées.

Nous observons qu'il y a une compétition entre la loi normale, Gamma, log-normale et Weibull pour chacun des diamètres étudiés. C'est-à-dire que la valeur calculée par le test pour ces quatre distributions est inférieure à la valeur tabulée 0,0961. Bien qu'il soit connu que la distribution normale est une distribution symétrique tandis que les distributions Gamma, log-normale et Weibull sont dissymétriques, Figures 2.4 et 2.5, leur compétition pourrait s'expliquer par le fait que pour certaines valeurs des paramètres qui décrivent ces distributions, elles ont toutes approximativement la même forme. Néanmoins, une seule distribution est désignée la plus compatible, celle caractérisée par la plus petite valeur calculée par le test et donnée en gras dans le Tableau 2.2 ci-dessous.

Échantillon analysé	Valeurs calculées par le test de Kolmogorov pour chaque distribution théorique testée						Valeur tabulée
	N	G	LN	U	W	R	
<i>d</i>	0,0496	0,0658	0,0740	0,1818	0,0804	0,4249	0,0961
<i>D</i>	0,0543	0,0624	0,0671	0,2725	0,0896	0,5067	

TABLE 2.2: Distribution statistique théorique retenue pour chaque diamètre analysé

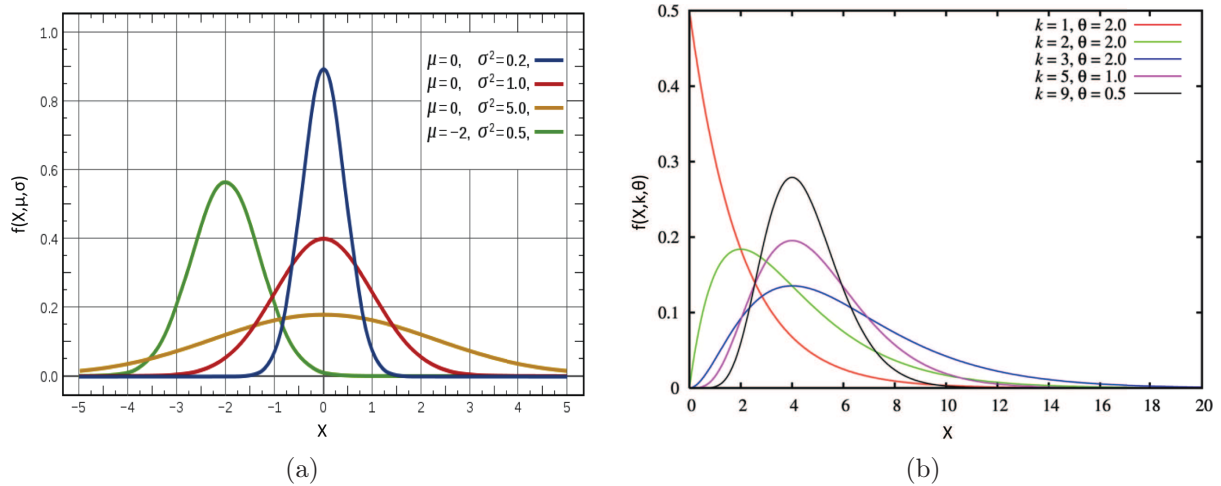


FIGURE 2.4: Distribution : (a) normale, (b) Gamma

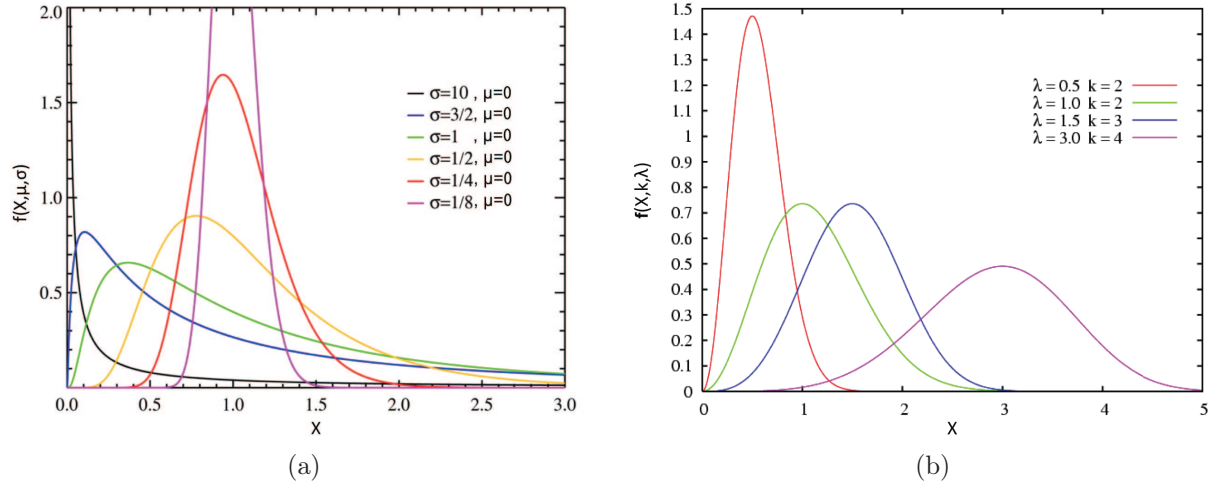


FIGURE 2.5: Distribution : (a) log-normale, (b) Weibull

Les paramètres qui caractérisent chacune des distributions précédemment illustrées, interviennent dans l'expression analytique de la fonction densité de probabilité f associée à chacune d'entre elles. Les relations 2.5, 2.6, 2.8 et 2.9 définissent la fonction densité de probabilité de la distribution normale, Gamma, log-normale et Weibull respectivement :

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \quad (2.5)$$

$$f(x, k, \theta) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k}, \quad x \in [0, +\infty], k \in \mathbb{R}^+, \theta \in \mathbb{R}^+ \quad (2.6)$$

où Γ est la fonction Gamma [50] définie par la relation 2.7 :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in [0, +\infty] \quad (2.7)$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2}\right]}, \quad x \in [0, +\infty], \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+ \quad (2.8)$$

$$f(x, k, \lambda) = \left(\frac{k}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad x \in [0, +\infty], \lambda \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}^+ \quad (2.9)$$

L'application de ce test d'hypothèse nous confirme avec un risque d'erreur de 5 % que les deux diamètres suivent une distribution normale, chacune caractérisée par les deux premiers moments statistiques donnés dans le Tableau 2.1.

2.3 Identification de cellules

Dans ce chapitre, la disposition des fibres les unes par rapport aux autres est également analysée afin d'en tirer des configurations types. Cette étude est réalisée sur la même micrographie que celle utilisée pour l'analyse du diamètre des fibres, Figure 2.6a. La zone d'étude, en pointillé, a été binarisée à l'aide de l'outil " Image J " et les fibres ont été numérotées pour finalement obtenir l'image de travail présentée dans la Figure 2.6b.

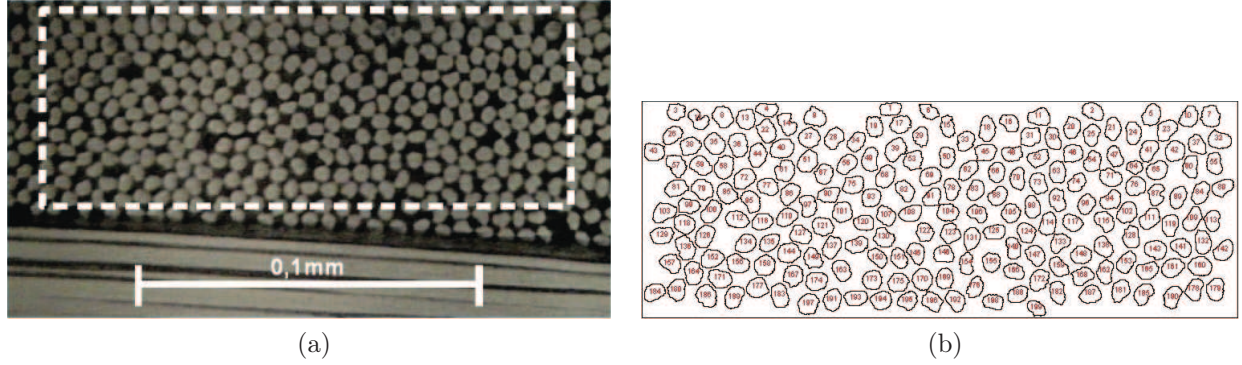


FIGURE 2.6: (a) micrographie, (b) microstructure après traitement d'image

La disposition des fibres, à l'exception de celles présentes sur les bords, est définie en déterminant pour chaque fibre : le nombre de fibres voisines, leur distance à la fibre centrale ainsi que l'angle entre deux fibres consécutives entourant la fibre centrale. Comme en témoigne la Figure 2.7, six différents types de cellules se distinguent alors par le nombre de fibres entourant la fibre centrale. Une cellule de type i désigne une cellule avec un nombre de i fibres entourant la fibre centrale.

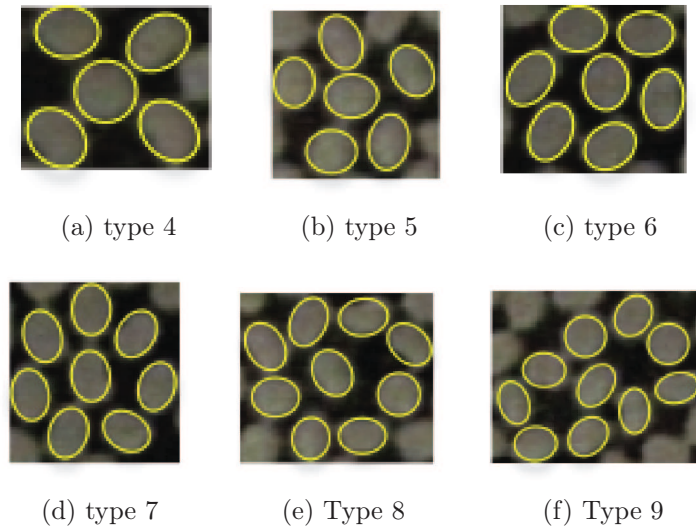


FIGURE 2.7: Types de cellules identifiées

Un nombre total de 140 cellules ont ainsi été analysées dont : 2 cellules de type 4, 23 cellules de type 5, 59 cellules de type 6, 43 cellules de type 7, 12 cellules de type 8 et une cellule de type 9. La proportion (pourcentage) de chacun des six types de cellules se calcule à l'aide de l'expression suivante :

$$\text{pourcentage cellule type } i = 100 * \text{nombre cellules type } i / \text{nombre total cellules} \quad (2.10)$$

Comme en témoigne la Figure 2.8, les cellules de type 5, 6 et 7 sont les plus nombreuses, la cellule de type 6 étant majoritaire. Cette dernière, représente la configuration permettant la compaction maximale de cylindres de diamètres identiques, comme cela va être montré ci-dessous.

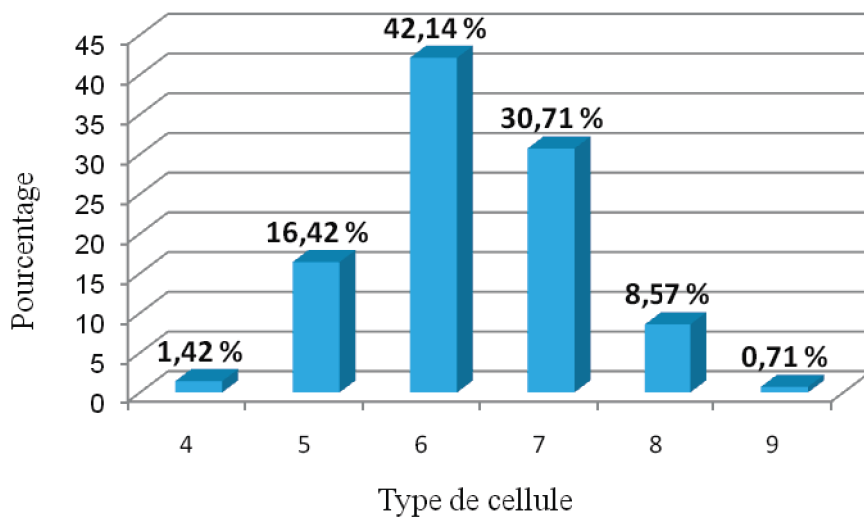


FIGURE 2.8: Proportion de chaque type de cellule

Afin d'approfondir cet aspect, une étude d'influence de la variation du diamètre des fibres sur leur mode d'empilement est réalisée en employant un modèle d'éléments discrets 2D. Les sections droites des fibres sont modélisées par des disques dont le diamètre est tiré au hasard, en suivant une distribution uniforme. Le diamètre varie autour de sa moyenne avec un pourcent p .

Quatre pourcentages p sont choisis dans cette étude : 0 %, 5 %, 15 % et 20 %. Pour chacun de ces cas, l'ensemble des fibres est compacté à l'aide d'une pression appliquée selon y , Figure 2.9.

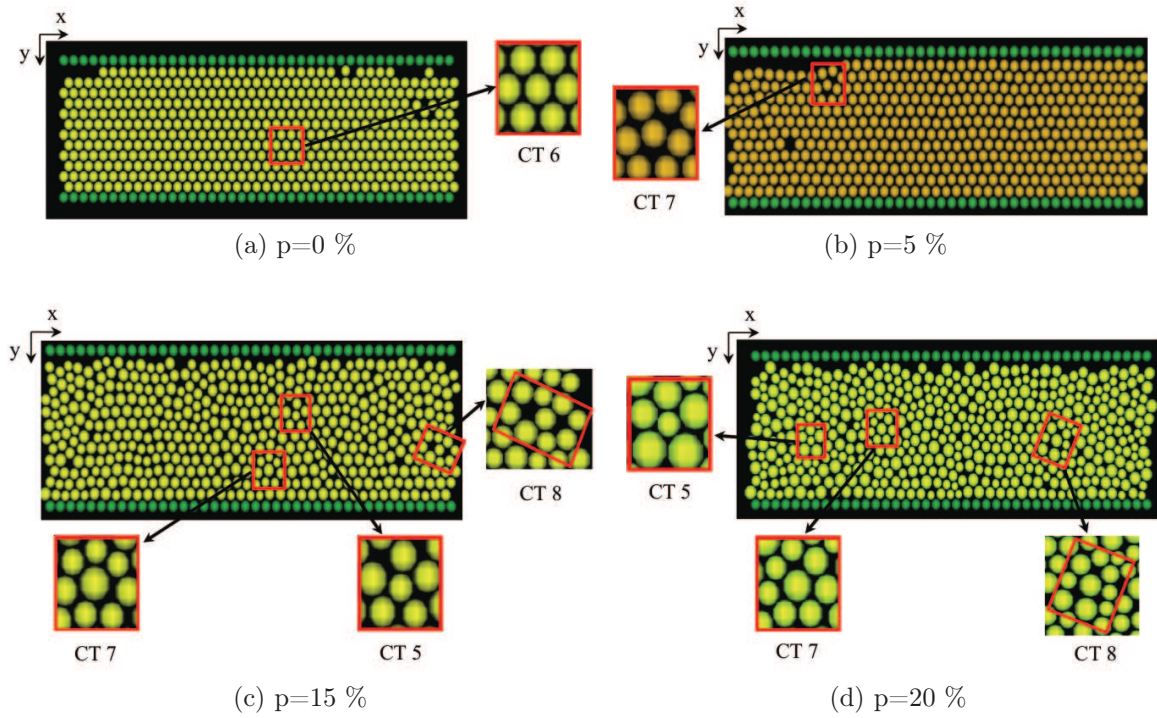


FIGURE 2.9: Modes d'empilement des fibres obtenus pour différentes amplitudes de variation du diamètre

Lorsque le diamètre des fibres est constant, leur empilement est régulier et se caractérise par la présence de cellules de type 6 uniquement, Figure 2.9a. Plus ce diamètre est dispersé, plus les fibres s'arrangent différemment les unes par rapport aux autres. Comme en témoigne la Figure 2.9b, une variation de 5 % du diamètre a une faible influence sur l'empilement des fibres. Seule une cellule de type 7 apparaît en plus des cellules de type 6.

Quand la dispersion du diamètre augmente, Figures 2.9c et 2.9d, des cellules de type 5 et 8 apparaissent en plus des cellules de type 6 et 7. La proportion de chaque type de cellule, pour ces deux derniers cas, est donnée dans les Figures 2.10a et 2.10b. Cette statistique est effectuée sur une population totale de 366 cellules identifiées.

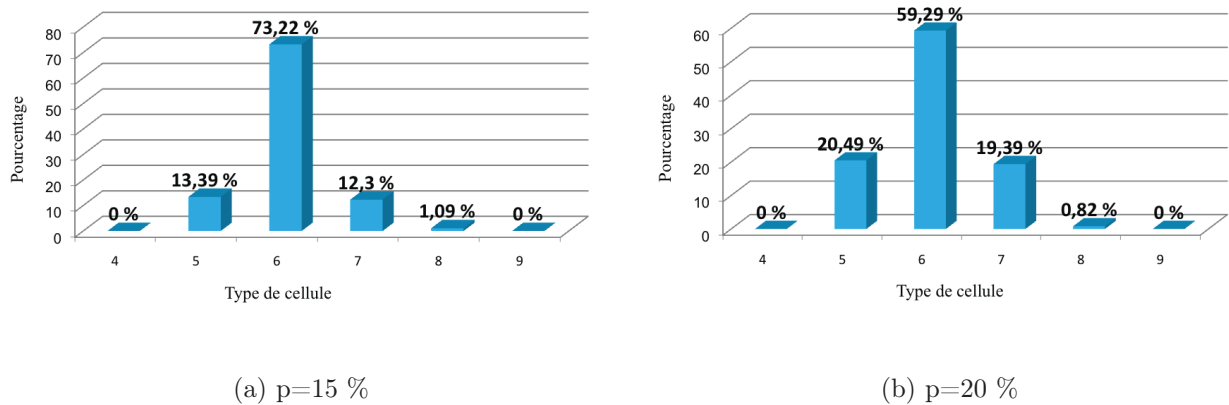


FIGURE 2.10: Évolution du pourcentage des types de cellules avec l'amplitude de la dispersion du diamètre

Il est remarquable que les cellules de type 5, 6 et 7 sont toujours les plus nombreuses et la cellule de type 6 reste majoritaire.

Les résultats de cette étude confirment alors l'influence de la variation du diamètre des fibres sur les modes d'empilement.

2.4 Distinction entre cellule et VER

La détermination du VER est largement discutée dans la littérature [30, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. Il représente un volume de matière hétérogène, contenant suffisamment d'informations sur la microstructure, pour être représentatif du milieu étudié.

Certains auteurs [32] font l'hypothèse classique d'un arrangement régulier carré ou hexagonal de fibres dans la matrice, dont les VER associés sont ceux présentés dans la Figure 2.11.

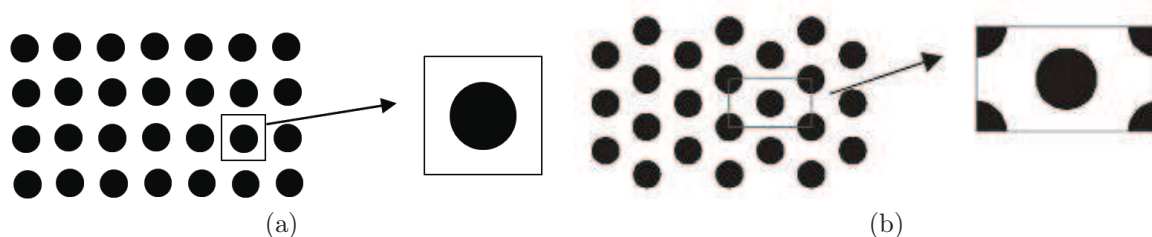


FIGURE 2.11: Arrangement carré et hexagonal des fibres et leur VER associé

Néanmoins, une simple analyse de la morphologie d'un matériau composite unidirectionnel montre que les fibres sont plutôt aléatoirement réparties, favorisant ainsi l'existence de zones plus ou moins riches en fibres ou en résine, Figure 2.12.

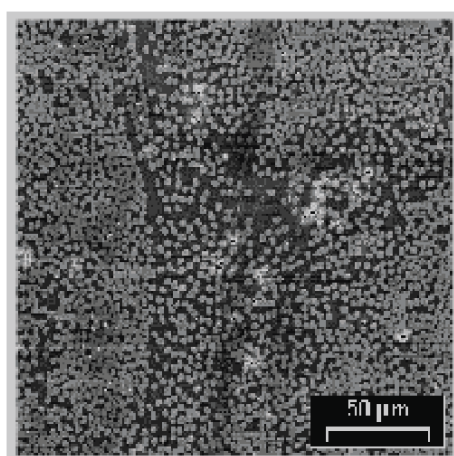


FIGURE 2.12: Distribution des fibres dans la matrice pour un matériau unidirectionnel [58]

D'autres auteurs [24], essaient de reproduire la morphologie réelle en considérant une structure périodique dont le VER associé est représenté par un carré contenant plusieurs fibres aléatoirement réparties, ayant des diamètres différents, Figure 2.13.

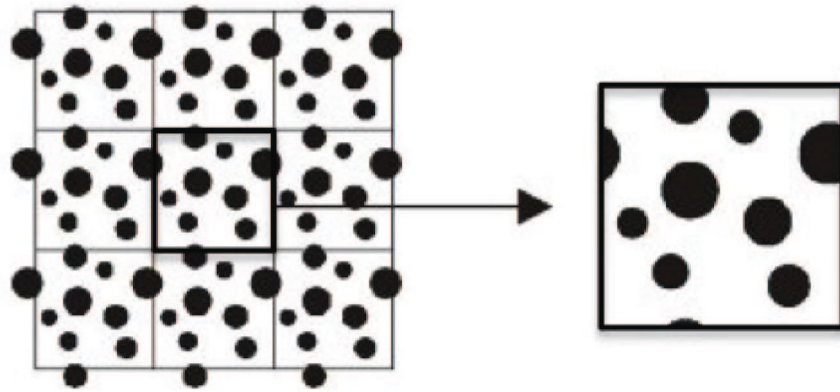


FIGURE 2.13: Arrangement aléatoire de fibres et leur VER associé

L'estimation des dimensions du VER se fait généralement de façon numérique. Afin de déterminer ces dimensions, certains auteurs se basent sur la convergence des propriétés effectives [59, 60]. Différentes tailles croissantes sont considérées, en gardant la même fraction volumique de fibres que celle du matériau de base, jusqu'à convergence des propriétés effectives. Les dimensions retenues pour le VER sont celles pour lesquelles la convergence des propriétés est atteinte.

D'autres auteurs [53, 61, 62] utilisent la vérification du lemme de Hill-Mandel. Dans ce cas, le lemme s'évalue pour chacune de ces dimensions. Les dimensions pour lesquelles le lemme est vérifié sont considérées en tant que dimensions du VER.

Dans ce travail, nous ne nous intéressons pas à la recherche de VER, mais à l'identification de cellules, telles que présentées dans le paragraphe 2.3. Les cellules identifiées à partir de l'analyse morphologique sont des zones de matériau qui se caractérisent par des paramètres géométriques variables. L'identification de cette variabilité pour chaque type de cellule est uniquement visée ici et présentée dans la section suivante.

La variabilité des propriétés mécaniques équivalentes du matériau composite à l'échelle des constituants élémentaires (fibres et matrice) sera prise en compte par l'intermédiaire de ces cellules. En outre, leur considération constitue un moyen de transport de cette variabilité depuis cette échelle vers l'échelle mésoscopique.

2.5 Caractérisation des cellules

Pour chaque type de cellule identifiée précédemment, quatre paramètres sont mesurés : l'angle α entre deux fibres consécutives entourant la fibre centrale, la distance d_c entre les centres des fibres adjacentes au centre de la fibre centrale, la largeur l ainsi que la hauteur L de la cellule. La mesure de ces paramètres est réalisée à l'aide de l'outil d'analyse d'images Image J.

La connaissance du domaine de variabilité de ces paramètres sera par la suite exploitée pour générer des cellules virtuelles nécessaires à l'obtention des lois de distribution.

2.5.1 Angle α entre les fibres

L'angle α est défini à partir des points A, B et C, Figure 2.14. Pour une cellule de type i , i angles α sont mesurés. La mesure est répétée pour l'ensemble des cellules d'un même type et pour chaque type de cellule.

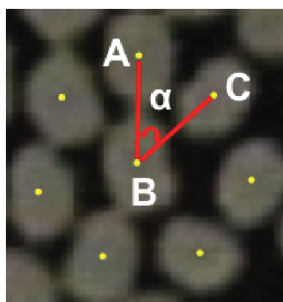


FIGURE 2.14: Définition de l'angle α entre les fibres

La distribution des valeurs de l'angle α , pour chaque type de cellule, est caractérisée par une moyenne, un écart-type et un coefficient de variation (CV), donnés dans le Tableau 2.3. Pour chaque type de cellule, les valeurs moyennes de cet angle sont très proches de valeurs théoriques extraites d'une géométrie de polygone régulier.

Type de cellule	Moyenne de l'angle α (°)		Erreur relative (%)	Écart-type (°)	CV (%)
	mesuré	théorique			
4	89,72	90,00	0,31	17,67	19,69
5	70,56	72,00	2,00	15,36	21,77
6	60,23	60,00	0,38	14,05	23,32
7	52,88	51,40	2,88	13,88	26,25
8	45,66	45,00	1,47	15,21	33,31
9	40,71	40,00	1,78	14,00	34,39

TABLE 2.3: Moyennes, écart-types et coefficients de variation des angles α mesurés

Ces valeurs moyennes diminuent évidemment lorsque le type de cellule augmente, Figure 2.15. Il est remarquable que le coefficient de variation des valeurs de cet angle connaît une croissance avec le type de la cellule.

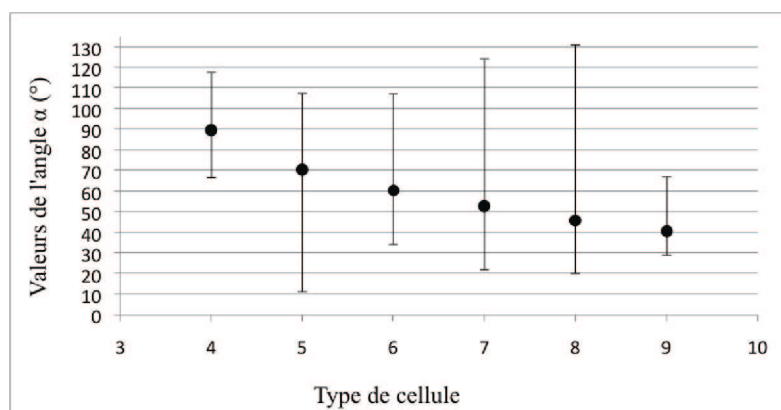


FIGURE 2.15: Évolution de α avec le type de la cellule

Le paramètre géométrique variable α sera utilisé dans la modélisation numérique de chaque type de cellule.

2.5.2 Distance d_c entre la fibre centrale et les fibres alentours

Le deuxième paramètre mesuré pour chaque type de cellule est la distance d_c entre les centres des fibres périphériques et le centre de la fibre centrale, Figure 2.16. Ces centres sont difficiles à identifier avec rigueur. Ils représentent les centres de masse des sections des fibres et ont été déterminés à l'œil nu.

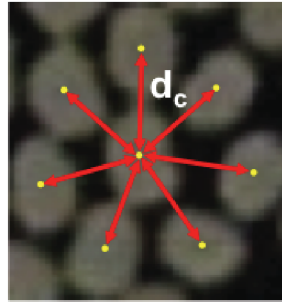


FIGURE 2.16: Définition de la distance d_c à la fibre centrale

La moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation des valeurs mesurées pour chaque type de cellule, Tableau 2.4, montrent que cette distance croît avec le nombre de fibres autour de la fibre centrale, Figure 2.17.

Type de cellule	Distance d_c		
	Moyenne (μm)	Écart-type (μm)	CV (%)
4	5,60	0,42	7,50
5	5,61	0,67	11,94
6	6,05	0,99	16,36
7	6,50	1,30	20,00
8	7,02	1,69	24,07
9	7,37	1,92	26,05

TABLE 2.4: Moyennes, écart-types et coefficients de variation de la distance d_c

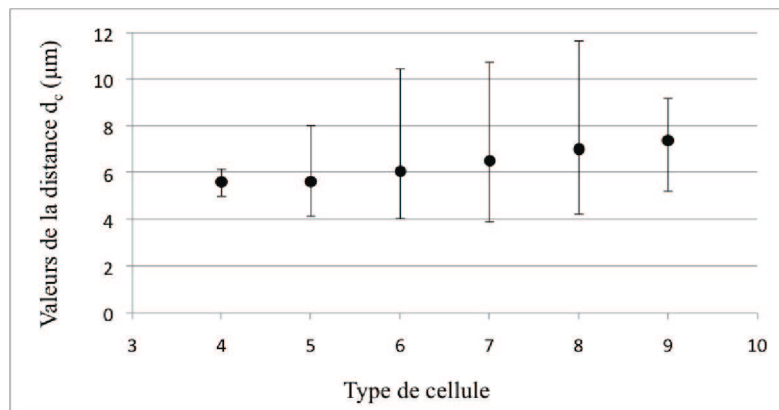


FIGURE 2.17: Évolution de d_c avec le type de la cellule

Cette évolution peut s'expliquer par le fait que lorsque le nombre de fibres périphériques augmente, elles ont tendance à s'écarter de la fibre centrale. Comme dans le cas précédent, le coefficient de variation croît avec le type de la cellule.

La distance d_c sera également utilisée dans la modélisation numérique de chaque type de cellule.

2.5.3 La largeur l et la longueur L des cellules

Les deux derniers paramètres mesurés pour chaque type de cellule sont leur largeur l ainsi que leur longueur L , Figure 2.18. Cette longueur et cette largeur doivent définir un rectangle qui encadre entièrement toutes les fibres de la cellule, quelle que soit l'orientation de la cellule.

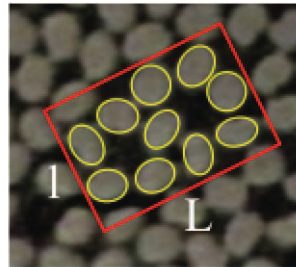


FIGURE 2.18: Définition de longueur L et de la largeur l de la cellule

La moyenne, l'écart-type et le coefficient de variation des valeurs mesurées, pour chaque type de cellule, sont présentés dans le Tableau 2.5.

Type de cellule	Largeur l			Longueur L		
	Moyenne (μm)	Écart-type (μm)	CV (%)	Moyenne (μm)	Écart-type (μm)	CV (%)
4	12,99	1,32	10,16	14,74	0,78	5,29
5	12,44	0,92	7,40	15,09	1,12	7,42
6	13,21	1,17	8,86	16,90	1,43	8,46
7	14,01	1,28	9,14	17,35	1,45	8,36
8	14,27	1,38	9,67	19,58	1,71	8,73
9	11,98	-	-	20,83	-	-

TABLE 2.5: Moyennes, écart-types et coefficients de variation des côtés mesurés

La valeur moyenne de la longueur L croît avec le type de cellule, Figure 2.19b. Ce résultat s'explique simplement par le fait que plus les fibres autour de la fibre centrale sont nombreuses, plus elles s'écartent de la fibre centrale, favorisant ainsi l'augmentation de la longueur de la cellule.

Quant à la largeur l , la Figure 2.19a révèle une valeur moyenne pour la cellule de type 4 plus grande que pour celle de type 5 et une valeur pour la cellule de type 9 plus petite que pour tous les autres types de cellules. Ces résultats pourraient s'expliquer par le fait qu'il n'y a pas un nombre suffisant de cellules de type 4 et de type 9 pour être significatif.

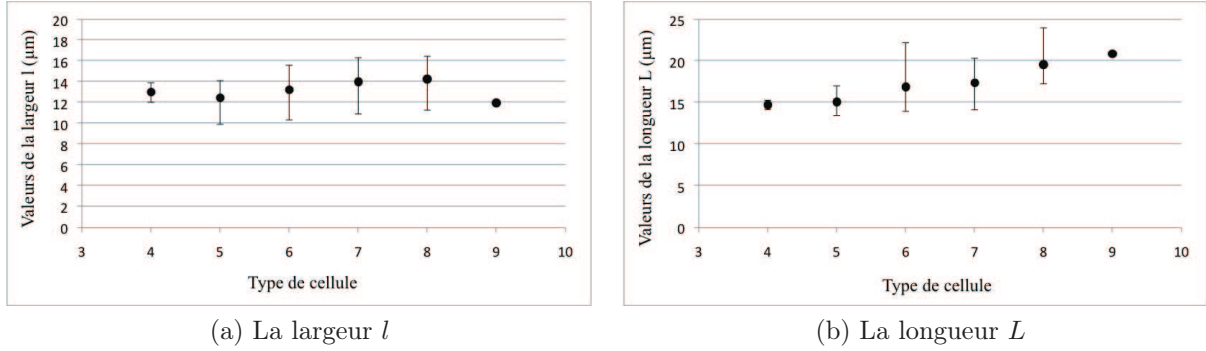


FIGURE 2.19: Évolution de la largeur l et de la longueur L avec le type de la cellule

Ces deux derniers paramètres géométriques analysés participeront également à la modélisation numérique de chaque type de cellule.

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre, une analyse morphologique de la microstructure d'une coupe d'une structure composite à fibres de carbone T800 HB et à matrice époxy, obtenue par enroulement filamentaire, a été présentée. Elle a permis de caractériser la variabilité géométrique des constituants élémentaires du matériau hétérogène.

Les diamètres d'une population de 200 fibres ont été mesurés. L'application du test de Kolmogorov sur les valeurs mesurées nous a permis de tirer la conclusion que les valeurs du petit diamètre d ainsi que celles du grand diamètre D suivent une loi de distribution normale respectivement de moyenne 3,68 μm et d'écart-type 0,45 μm et de moyenne 5,07 μm et d'écart-type de 0,36 μm .

Nous avons mis en évidence que la variation du diamètre des fibres influe sur leur arrangement dans le matériau composite, d'où l'apparition de plusieurs types de cellules.

La disposition des fibres les unes par rapport aux autres a été ensuite étudiée, en identifiant ainsi six types de motifs d'arrangement de fibres regroupés en cellules. Ces cellules ont été caractérisées en fonction d'un nombre de paramètres géométriques : l'angle α , la distance d_c , la largeur l ainsi que la longueur L de la cellule.

Cette caractérisation permet de proposer des cellules virtuelles afin d'établir des lois de distribution statistiques du comportement équivalent par type de cellule.

Chapitre 3

Modélisation numérique et analyse de sensibilité des propriétés homogénéisées des cellules

Sommaire

3.1	Introduction	53
3.2	Matériau virtuel	54
3.3	Homogénéisation numérique	56
3.3.1	Désavantage de l'utilisation des KUBC	56
3.3.2	L'intérêt de l'emploi des MBC	59
3.4	Études de sensibilité des modules équivalents	62
3.4.1	Dépendance au maillage	62
3.4.2	Sensibilité à la géométrie de la fibre	64
3.4.3	Sensibilité à différentes variables aléatoires	67
3.4.4	Sensibilité à la position des fibres	70
3.4.5	Sensibilité à la géométrie de la section droite de la cellule pour une fraction volumique donnée	71
3.5	Conclusions	73

3.1 Introduction

Le troisième chapitre traite de la modélisation numérique des cellules. Pour chaque type de cellule identifiée, une cellule virtuelle est générée à partir des paramètres caractéristiques révélés et quantifiés par l'analyse morphologique. Le comportement équivalent de ces cellules virtuelles est alors obtenu par des techniques d'homogénéisation. Une analyse de sensibilité du comportement homogénéisé à différents paramètres géométriques et matériaux est également proposée afin de simplifier la modélisation numérique des cellules ainsi que de réduire le nombre de paramètres variables. Cela devra conduire à une réduction du temps de calcul nécessaire à l'élaboration des lois de distribution des propriétés mécaniques équivalentes.

3.2 Matériau virtuel

L'analyse morphologique présentée au chapitre 2 a permis d'identifier six types différents de cellules. Il est rappelé que le type de la cellule correspond au nombre de fibres périphériques localisées autour d'une fibre centrale. Les sections droites des cellules modélisées sont présentées dans la Figure 3.1.

La modélisation 3D est due à la façon dont le milieu mésoscopique virtuel 3D (un pli) sera reconstruit à partir de ces cellules dans l'objectif général de transporter la variabilité dès l'échelle des constituants élémentaires vers les échelles supérieures. Dans cette reconstruction, chaque cellule sera vue comme un élément fini avec les propriétés homogénéisées. La profondeur du pli (troisième direction) sera choisie comme un multiple de l'épaisseur (selon x) de ces cellules. Une épaisseur (profondeur) $e=5\text{ }\mu\text{m}$ est choisie pour chaque type de cellule. Le choix de cette valeur est justifié dans le paragraphe 3.3.2.

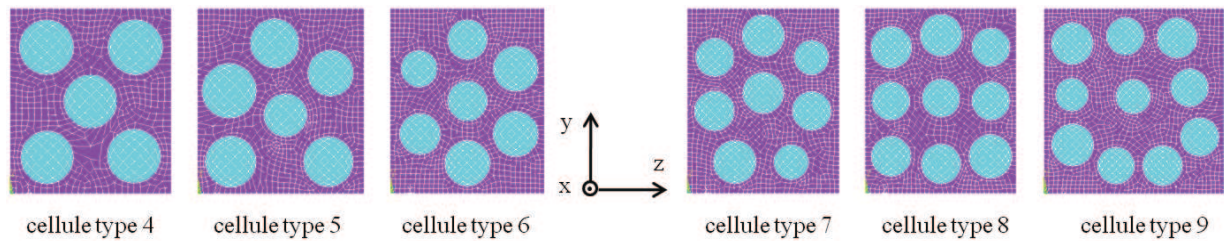


FIGURE 3.1: Section droite des cellules virtuelles 3D

La construction de la géométrie des cellules virtuelles est maintenant présentée. Afin de simplifier la construction du modèle, la section droite des fibres est choisie circulaire et non pas elliptique. L'influence du passage de la géométrie elliptique à circulaire sur le comportement équivalent de la cellule virtuelle est détaillée dans le paragraphe 3.4.2.

Le diamètre de la fibre circulaire est déterminé en considérant une équivalence entre l'aire de sa section droite et celle de la fibre réelle elliptique. Cela revient à employer la relation 3.13. Dans la cellule, le diamètre de chaque fibre est tiré au hasard selon une distribution normale de moyenne $4,31\text{ }\mu\text{m}$ et d'écart-type $0,32\text{ }\mu\text{m}$. Le choix de ces paramètres est justifié dans le paragraphe 3.4.2.

Étant donné que la position des fibres dans la cellule a une influence relativement faible sur son comportement équivalent, paragraphe 3.4.3, les centres des fibres ont été fixés afin de simplifier la modélisation numérique. Les valeurs de leurs coordonnées dans le plan $x=0$ ont été choisies de sorte que les fibres ne se chevauchent pas entre elles et qu'elles ne sortent pas de la cellule.

La cellule est d'abord construite comme un rectangle de largeur l (suivant z) et de longueur L (suivant y) dans le plan $x=0$. Les sections droites des fibres sont générées comme des disques dans le même plan. Le volume de la cellule est ensuite obtenu par l'extrusion de ces surfaces selon le sens positif de l'axe x et maillé.

Les EF utilisés sont des hexaèdres de type SOLID45, à 8 nœuds, avec trois degrés de liberté pour chaque nœud et une interpolation linéaire. Le maillage réalisé est piloté par une taille moyenne élémentaire fixée à $0,5\text{ }\mu\text{m}$. Le choix de cette taille est justifié dans le paragraphe 3.4.1.

Afin de réduire le nombre de variables aléatoires qui participeront à la construction de la distribution statistique du comportement équivalent des cellules, nous avons fait l'hypothèse de fibres isotropes. Dans ce cas, leurs propriétés mécaniques avec celles de la matrice ont été choisies de la littérature [14] et sont données dans le Tableau 3.1 :

Module d'Young fibre	Coefficient de Poisson fibre	Module d'Young matrice	Coefficient de Poisson matrice
E_f	ν_f	E_m	ν_m
390 GPa	0,35	4,5 GPa	0,40

TABLE 3.1: Propriétés mécaniques des fibres et de la matrice

Dans le Tableau 3.2 ci-dessous, les valeurs de la largeur l ainsi que de la longueur L de chaque type de cellule sont présentées. À l'exception de la cellule de type 4, ces dimensions sont choisies plus grandes que leur valeur moyenne mesurée expérimentalement et présentée au chapitre 2. L'écart relatif entre la valeur moyenne des mesures et celle de la modélisation est calculé par rapport à la valeur moyenne des mesures.

Type de cellule	Valeurs de la largeur l (μm)		Écart relatif (%)	Valeurs de la longueur L (μm)		Écart relatif (%)
	Moyenne des mesures	Modélisation		Moyenne des mesures	Modélisation	
4	12,99	12,99	0	14,74	14,74	0
5	12,44	15,10	21,38	15,09	16,70	10,67
6	13,21	16,00	21,12	16,90	19,00	12,43
7	14,01	16,50	17,77	17,35	20,00	15,27
8	14,27	16,50	15,63	19,58	20,00	2,15
9	11,98	20,50	71,12	20,83	21,00	0,82

TABLE 3.2: Dimensions des cellules mesurées et modélisées

La raison pour laquelle ces valeurs sont modifiées, est reliée directement à la variation du diamètre des fibres. En effet, lorsque le diamètre des fibres devient grand, elles peuvent se chevaucher voire sortir des limites de la cellule.

Une telle modification engendre une diminution de la fraction volumique moyenne de fibres pour chaque type de cellule modélisée par rapport à celle moyenne estimée lors de l'analyse morphologique, Tableau 3.3. Cette dernière fraction volumique a été calculée sans prendre en compte les morceaux de fibres qui peuvent exister dans chaque type de cellule identifiée, Figure 3.2. L'écart relatif est calculé par rapport à la valeur moyenne de la fraction volumique de fibres mesurée.

Type de cellule	Moyenne de la fraction volumique de fibres (%)		Écart relatif (%)
	Mesures	Modélisation	
4	38,91	38,11	2,06
5	46,82	34,88	25,50
6	45,91	33,73	24,90
7	48,91	35,49	27,44
8	46,78	40,07	14,34
9	60,00	34,13	43,12

TABLE 3.3: Fraction volumique des cellules mesurées et modélisées

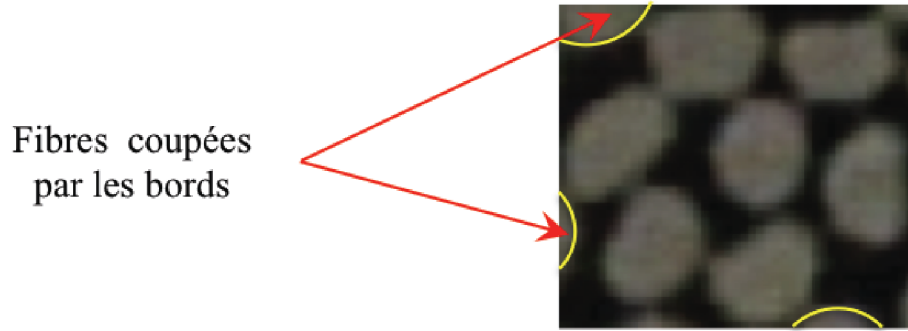


FIGURE 3.2: Exemple de fibres coupées dans une cellule de type 6

Dans la modélisation numérique, seules les fibres entières sont considérées dans une cellule.

Le désalignement des fibres dans le pli n'est pas pris en compte explicitement dans la modélisation des cellules du fait de leur longueur trop faible (de l'ordre de leur diamètre) pour simuler une quelconque variation angulaire. Par contre, il sera possible de le faire en utilisant des matrices de rotations [14] qui réalisent une rotation du repère dans lequel la loi de comportement équivalent des cellules est exprimée.

3.3 Homogénéisation numérique

Dans le chapitre 1, les méthodes d'homogénéisation habituellement employées ainsi que leurs limites par rapport au type de matériau étudié sont présentées. Parmi celles-ci, il a été retenu juste deux méthodes numériques d'homogénéisation qui permettent d'estimer le comportement équivalent des cellules virtuelles. Il s'agit de la méthode qui emploie des conditions aux limites uniformes cinématiques (KUBC) ainsi que celle qui utilise des conditions aux limites mixtes (MBC).

Le désavantage de l'utilisation des KUBC ainsi que l'intérêt de l'emploi des MBC sont par la suite présentés.

3.3.1 Désavantage de l'utilisation des KUBC

La méthode présentée dans le paragraphe 1.3.2.3 du chapitre 1 (utilisant des KUBC), déjà implémentée dans d'autres travaux menés au laboratoire, a été d'abord employée.

Comme la cellule virtuelle est modélisée en 3D, il faut s'assurer que la dimension de la troisième direction (selon la profondeur) n'a pas d'influence sur les propriétés équivalentes calculées. Pour cela, une étude de sensibilité des constantes de rigidité C_{ij} à la profondeur e de la cellule virtuelle de type 6 est effectuée. Dix profondeurs différentes de taille progressive sont alors considérées : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 50, 100 et 200 μm .

La Figure 3.3 présente l'évolution du pourcentage des constantes de rigidité en fonction de la profondeur e . Ce pourcentage est calculé par rapport à la valeur maximale de ces constantes et est donné dans le Tableau 3.4. Les valeurs sont normalisées par rapport à l'épaisseur 1 μm .

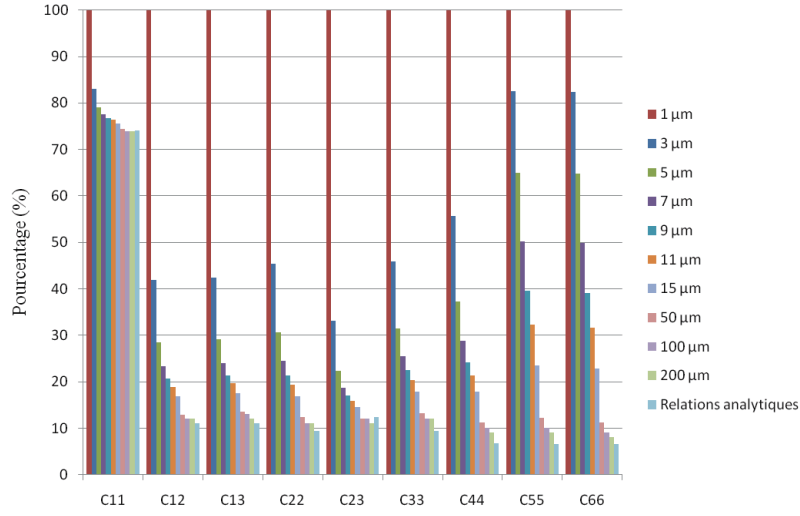


FIGURE 3.3: Évolution du pourcentage des modules d'élasticité C_{ij} en fonction de la profondeur de la cellule

Profondeur étudiée (µm)	Pourcentage des constantes de rigidité (%)								
	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100
3	83	42	42	45	33	46	56	83	82
5	79	29	29	31	22	31	37	65	65
7	78	23	24	25	19	26	29	50	50
9	77	21	21	21	17	22	24	40	39
11	76	19	20	19	16	20	21	32	32
15	76	17	17	17	15	18	18	24	23
50	74	13	14	12	12	13	11	12	11
100	74	12	13	11	12	12	10	10	9
200	74	12	12	11	11	12	9	9	8
Relations analytiques [14]	74	11	11	9	12	9	7	7	7

TABLE 3.4: Pourcentage des constantes de rigidité

Les résultats obtenus avec cette méthode d'homogénéisation témoignent d'une forte sensibilité des coefficients de rigidité à la profondeur de la cellule. Leur convergence est atteinte pour de fortes épaisseurs, ce qui est très pénalisant dans la construction des distributions du comportement équivalent des cellules. Les indices 1, 2 et 3 représentent respectivement les directions x, y et z.

Les résultats des calculs numériques sont ensuite situés par rapport à ceux donnés par les relations analytiques [14] suivantes :

$$C_{11} = E_x + 4\nu_{xy}^2 K_x \quad (3.1)$$

$$C_{12} = 2K_x\nu_{xy} \quad (3.2)$$

$$C_{22} = G_{yz} + K_x \quad (3.3)$$

$$C_{23} = -G_{yz} + K_x \quad (3.4)$$

$$C_{55} = G_{xy} \quad (3.5)$$

Ces relations définissent une liaison entre les coefficients de rigidité et les modules équivalents. Elles sont obtenues en considérant dans la loi de Hooke pour un matériau isotrope transverse un champ connu de contraintes afin de simuler des essais de traction uniaxiale, de cisaillement ou de compression latérale sans déformation longitudinale. L'isotropie transverse du matériau fait que $C_{12} = C_{13}$, $C_{22} = C_{33}$, $C_{55} = C_{66}$, et $C_{44} = \frac{C_{22}-C_{23}}{2}$. L'estimation des coefficients C_{ij} à travers les relations 3.1 - 3.5 passe d'abord par le calcul des modules E_x , K_x , G_{xy} , G_{yz} et ν_{xy} à l'aide des relations de Hashin et Hill présentées au chapitre 1.

Il est remarquable que les résultats des calculs numériques surestiment en général ceux obtenus par les relations analytiques précédentes, quelle que soit l'épaisseur considérée.

Afin de valider cette méthode d'homogénéisation, une étude de sensibilité similaire est effectuée sur une cellule identique dont les fibres et la matrice ont des propriétés mécaniques identiques. Finalement cela revient à considérer un milieu isotrope.

Dans la Figure 3.4 nous n'observons plus aucune variation des coefficients de rigidité C_{ij} . Cette fois les résultats des calculs numériques ne surestiment plus ceux obtenus par les relations analytiques.

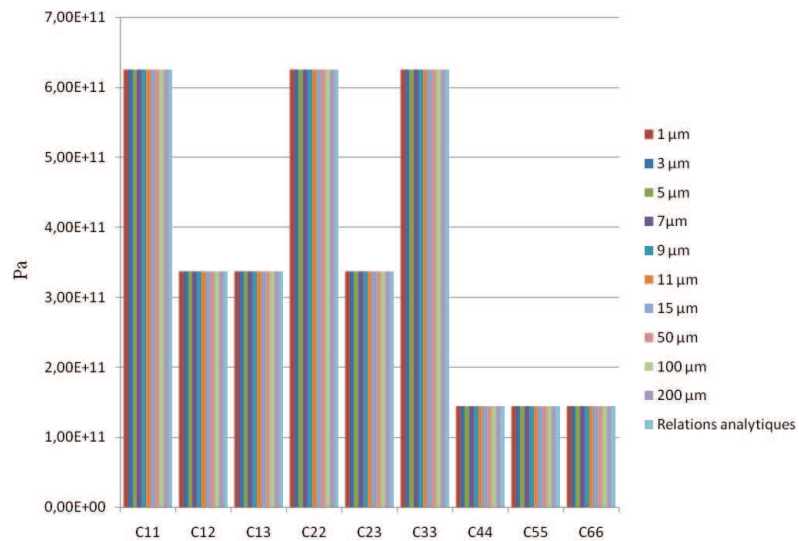


FIGURE 3.4: Évolution des constantes de rigidité en fonction de différentes épaisseurs

La variation des coefficients de rigidité avec la profondeur de la cellule s'explique par le type de conditions aux limites employées. En effet, la littérature [30] montre bien que le choix des conditions aux limites utilisées pour estimer le comportement équivalent joue un rôle important. Les conditions aux limites usuellement utilisées sont les conditions aux limites uniformes cinématiques (KUBC), statiquement uniformes (SUBC), périodiques (PBC) et mixtes (MBC). Ainsi, il est montré qu'à volume de cellule, fraction volumique de fibres et propriétés des matériaux identiques, les KUBC et les SUBC surestiment et sous-estiment respectivement le comportement équivalent de la cellule tandis que les PBC ou MBC diminuent ces effets en réalisant une convergence rapide du comportement équivalent.

Lorsque les KUBC ou SUBC sont employées, il est indiqué d'utiliser des volumes significatifs pour les cellules afin d'assurer la convergence de leurs propriétés effectives, ce qui peut augmenter significativement le temps de calcul. Par exemple, dans le cas de la première étude de sensibilité précédente, le temps de calcul nécessaire à l'obtention des constantes de rigidité pour l'épaisseur de 200 μm est d'environ 12 heures et le nombre total de degrés de liberté est de 1 771 596. En revanche, lorsque les PBC ou MBC sont utilisées, la convergence des propriétés effectives des cellules est rapide, sans être obligés de considérer des volumes significatifs, dans ce cas l'économie du temps de calcul est assurée.

La convergence lente des propriétés équivalentes de la cellule virtuelle avec sa profondeur constituant le désavantage de l'utilisation des KUBC, une nouvelle méthode, qui emploie des MBC, est par la suite analysée.

3.3.2 L'intérêt de l'emploi des MBC

A travers cette nouvelle méthode d'homogénéisation qui est décrite dans le paragraphe 1.3.2.4 du chapitre 1, la même étude de sensibilité est effectuée par rapport à la profondeur de la cellule. Les résultats obtenus sont ensuite comparés à ceux obtenus à l'aide de la méthode d'homogénéisation qui utilise des KUBC.

L'intérêt de cette comparaison est de vérifier si nous retrouvons bien les résultats de la littérature qui montrent que lorsque les KUBC sont employées, les constantes d'élasticité surestiment celles obtenues en employant des MBC et que le temps pour atteindre la convergence est en faveur des MBC.

Étant donné que la méthode d'homogénéisation qui emploie des KUBC exprime le comportement équivalent de la cellule virtuelle en coefficients de rigidité C_{ij} et que la méthode d'homogénéisation qui utilise des MBC calcule les modules équivalents, nous avons transformé les constantes de rigidité en modules équivalents à l'aide des relations [14] suivantes :

$$E_x = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \quad (3.6)$$

$$E_y = C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (3.7)$$

$$G_{xy} = C_{66} \quad (3.8)$$

$$G_{yz} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} \quad (3.9)$$

$$v_{xy} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \quad (3.10)$$

$$v_{yz} = \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \quad (3.11)$$

Ces relations représentent les relations inverses de celles qui ont été décrites précédemment en 3.1 - 3.5. Les résultats de cette comparaison sont ensuite comparés aux relations analytiques de Hashin et Hill présentées au chapitre 1.

Les Figures 3.5 - 3.7 suivantes présentent les résultats de la comparaison des valeurs des modules équivalents en fonction de la profondeur de la cellule.

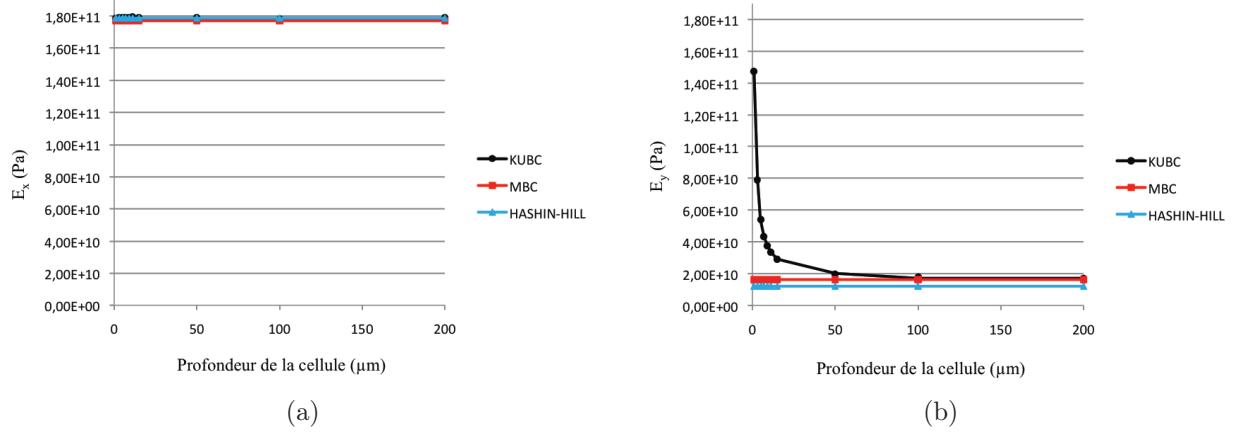


FIGURE 3.5: Modules d'Young : (a) E_x , (b) E_y

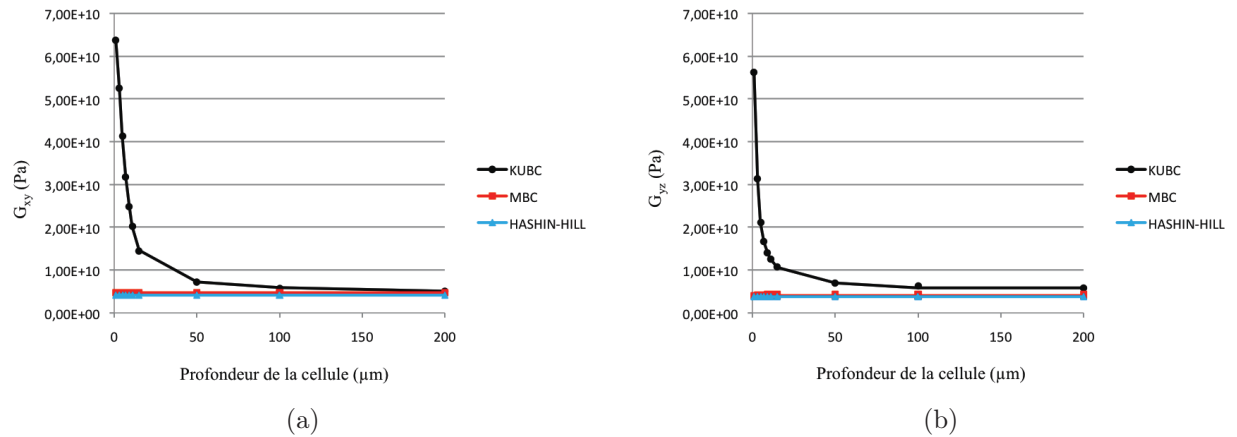
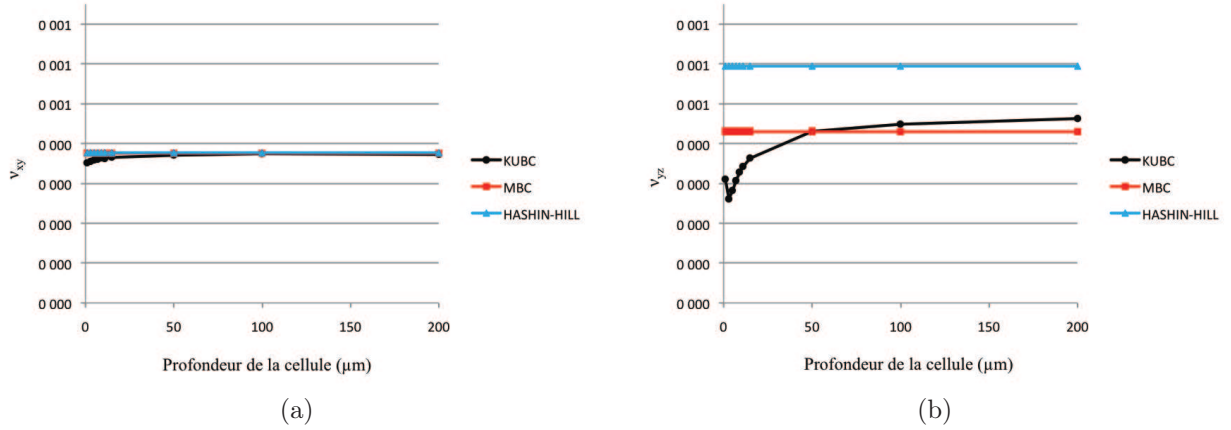


FIGURE 3.6: Modules de cisaillement : (a) G_{xy} , (b) G_{yz}

FIGURE 3.7: Coefficients de Poisson : (a) ν_{xy} , (b) ν_{yz}

Sans surprise, les résultats obtenus pour le module d'Young longitudinal E_x ainsi que pour le coefficient de Poisson ν_{xy} montrent que l'épaisseur de la cellule n'a pas une influence significative sur ces modules. En effet, les fibres sont chargées suivant leur axe, donc leur longueur n'a aucune influence.

Quant au module d'Young transversal E_y et les modules de cisaillement G_{xy} et G_{yz} , les valeurs correspondantes aux KUBC, pour de petites épaisseurs, surestiment toujours celles trouvées avec les MBC, ce qui confirme les résultats déjà existants dans la littérature [30].

Toutefois, pour le coefficient de Poisson ν_{yz} , jusqu'à une épaisseur de 50 μm , les résultats obtenus avec MBC sont sous-estimées par rapport à ceux obtenus avec les KUBC, tandis qu'au-delà de cette épaisseur elles sont surestimées.

Il est aussi remarquable de constater que les résultats obtenus à l'aide de la méthode d'homogénéisation qui emploie des MBC sont plus proches de ceux prédits par les relations analytiques de Hashin et Hill que ceux calculés à l'aide de l'autre méthode. L'écart relatif exprimé en % entre les valeurs obtenues à l'aide des MBC et celles estimées avec ces relations est donné dans le Tableau 3.5.

Modules équivalents	Écart relatif (%)
E_x	1,0
E_y	34,0
G_{xy}	14,0
G_{yz}	7,0
ν_{xy}	0,3
ν_{yz}	27,0

TABLE 3.5: Écart relatif entre les résultats obtenus avec les MBC et les relations de Hashin et Hill

Les écarts relatifs des modules E_y , G_{xy} et ν_{yz} sont manifestement supérieures à ceux des autres modules. Une situation similaire est rencontrée dans la littérature [14] où une comparaison entre un nombre de modules déterminés expérimentalement et leurs valeurs estimées avec les relations analytiques de Hill et Hashin, dans le cas d'un matériau composite

à matrice époxy et à fibres de carbone unidirectionnelles, est faite. Les résultats montrent que l'écart relatif entre la valeur expérimentale et celle calculée par la relation analytique est de 20 % dans le cas du module d'Young transversal E_y et de 5 % pour le coefficient de cisaillement longitudinal G_{xy} . Cet exemple confirme que l'existence d'un écart significatif entre les valeurs expérimentales et celles calculées à travers les relations analytiques est réelle pour ces deux modules.

Aucune information concernant la valeur expérimentale du coefficient de Poisson ν_{yz} n'est donnée dans cet exemple, la comparaison avec sa valeur analytique est donc impossible. Néanmoins, son écart relatif important présenté au Tableau 3.5 pourrait être dû au fait que sa relation analytique 1.9, présentée au chapitre 1, intègre dans son expression le module d'Young E_y , à son tour caractérisé par un écart important.

Les résultats obtenus à travers l'utilisation des MBC au cours de l'étude de sensibilité confirment ceux existants dans la littérature. En effet, l'utilisation des MBC favorise la rapidité de la convergence des propriétés effectives calculées. Leurs valeurs se stabilisent pour de faibles profondeurs, de l'ordre de 5 μm , ce qui correspond à un temps de calcul d'environ une minute.

En conclusion, la méthode numérique d'homogénéisation qui emploie des MBC se révèle beaucoup plus rapide et plus précise dans l'estimation des propriétés équivalentes. Elle est donc retenue pour la suite de cette étude.

3.4 Études de sensibilité des modules équivalents

Dans ce paragraphe, une série d'études de sensibilité des modules équivalents des cellules à un nombre de paramètres géométriques et matériels, est proposée. Les modules sont calculés à l'aide de la méthode numérique d'homogénéisation retenue.

L'objectif de ces études est de simplifier la modélisation numérique des cellules ainsi que de réduire le nombre de paramètres variables considérés, pour obtenir une réduction du temps de calcul nécessaire à l'élaboration des lois de distribution du comportement équivalent.

Les paramètres géométriques analysés sont : la géométrie de la section droite des fibres et la géométrie de la section droite de la cellule virtuelle tandis que ceux matériels sont : le diamètre Φ des fibres, la position des fibres et leurs propriétés mécaniques ainsi que celles de la matrice (le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν des fibres et de la matrice). La cellule de type 6 est utilisée car elle est la plus représentative dans la distribution statistique.

3.4.1 Dépendance au maillage

Cette étude vise à vérifier la sensibilité des modules à la finesse du maillage afin de l'optimiser pour réduire le temps de calcul.

Dans la Figure 3.8, trois différentes finesses de maillage sont adoptées pour une cellule de type 6. Le maillage utilisé est un maillage piloté par une taille moyenne élémentaire. Les tailles sont de 0,5 μm , 0,35 μm et 0,25 μm , respectivement associées aux finesses de maillage 1, 2 et 3. Rappelons que les EF utilisés sont des hexaèdres de type SOLID45, à 8 nœuds, avec trois degrés de liberté pour chaque nœud et une interpolation linéaire.

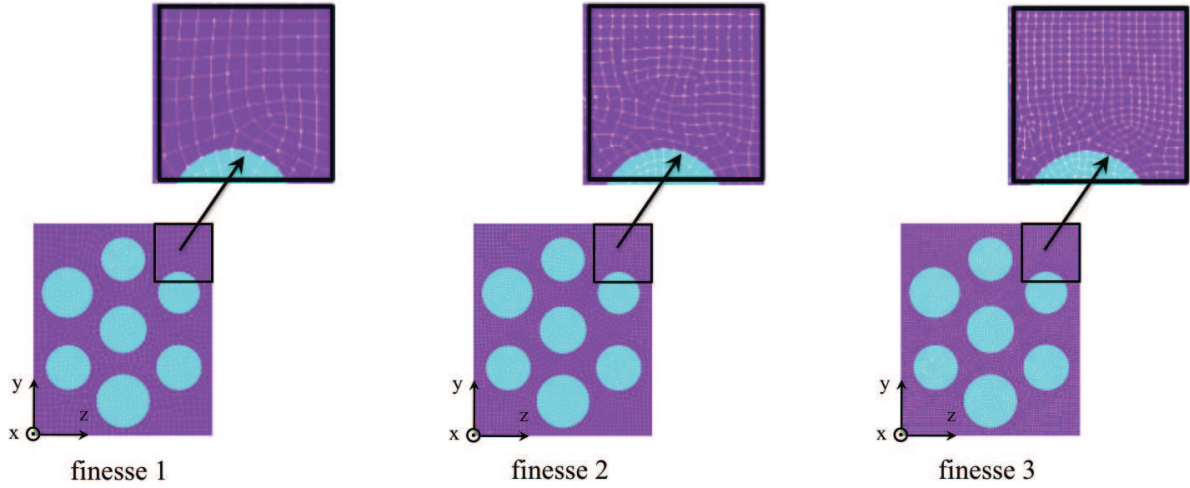


FIGURE 3.8: Différentes finesse du maillage pour une cellule de type 6 (section droite)

Dans le Tableau 3.6, les écarts relatifs des modules équivalents sont donnés. Ils sont calculés par rapport à la valeur minimale de chaque module.

Finesse du maillage	Écart relatif des modules (%)					
	E_x	E_y	G_{xy}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{yz}
finesse 1	0	0,05	0	0,33	0,02	0
finesse 2	0,37	0,01	0,09	0,15	0,01	0,18
finesse 3	0,56	0	0,16	0	0	0,25

TABLE 3.6: Écart relatif des modules équivalents par rapport à la valeur minimale de chaque module

Nous observons que la finesse du maillage fait varier très peu les modules équivalents. L'écart relatif maximal est de 0,56 % pour E_x , 0,05 % pour E_y , 0,16 % pour G_{xy} , 0,33 % pour G_{yz} , 0,02 % pour ν_{xy} et 0,25 % pour ν_{yz} . Le temps de calcul correspondant à chaque finesse du maillage est donné dans le Tableau 3.7.

Finesse du maillage	Nombre de ddl	Temps de calcul
finesse 1	50 919	58''
finesse 2	147 552	4' 41''
finesse 3	355 635	20' 41''

TABLE 3.7: Temps de calcul pour différentes finesse du maillage

Le premier niveau de raffinement du maillage semble être un bon choix concernant le temps de calcul. Ce niveau est donc retenu pour la suite.

3.4.2 Sensibilité à la géométrie de la fibre

L'objectif de cette étude est de valider le choix de la géométrie circulaire pour la section droite des fibres, plus facile à modéliser, alors que les observations microscopiques montrent une géométrie quasiment elliptique.

Pour cela, deux modélisations sont entreprises en considérant deux géométries de section droite des fibres : circulaire ou elliptique, Figure 3.9. Les deux cellules sont de section carrée, en conservant les mêmes dimensions, la même fraction volumique de fibres et les mêmes propriétés des matériaux constitutifs.

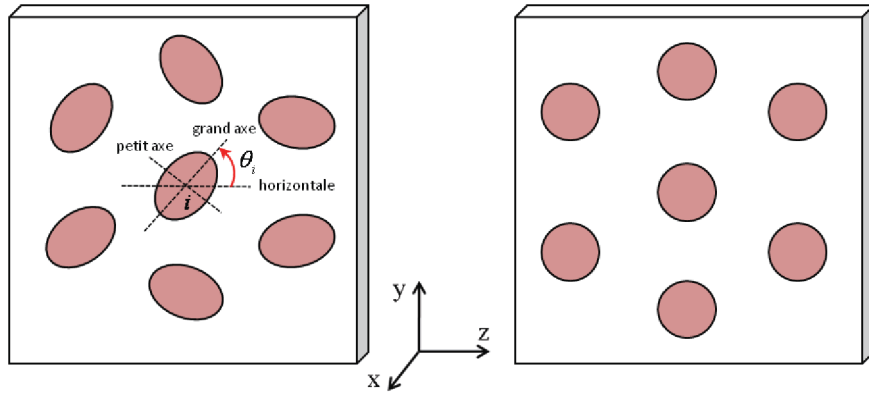


FIGURE 3.9: Géométrie elliptique et circulaire des fibres

Chaque fibre elliptique i est caractérisée par un angle θ_i défini entre la direction horizontale et le grand axe de la fibre elliptique dans le sens trigonométrique (anti-horaire) :

$$\theta_i = (\text{axe horizontale}; \widehat{\text{grand axe ellipse}}), i = 1, 2, \dots, 7 \quad (3.12)$$

Ses valeurs sont tirées aléatoirement entre 0 et 180 degrés selon une loi uniforme. Les coordonnées du centre des fibres elliptique et circulaire sont les mêmes. Le rayon R des fibres circulaires, relation 3.13, est déterminé de sorte que les deux cellules aient la même fraction volumique de fibres.

$$R = \sqrt{ab} \quad (3.13)$$

où a et b sont respectivement le petit et le grand demi-axe d'une ellipse.

Afin de vérifier si l'orientation des fibres elliptiques influe significativement sur le comportement équivalent de la cellule, trois calculs numériques éléments finis d'homogénéisation C1, C2 et C3 sont réalisés, en faisant varier l'angle θ_i de chaque fibre, Figure 3.10. Les valeurs de ces angles sont données dans le Tableau 3.8.

Les résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus par l'homogénéisation faite pour la géométrie circulaire et situés par rapport aux relations analytiques de Hashin et Hill, Tableau 3.9.

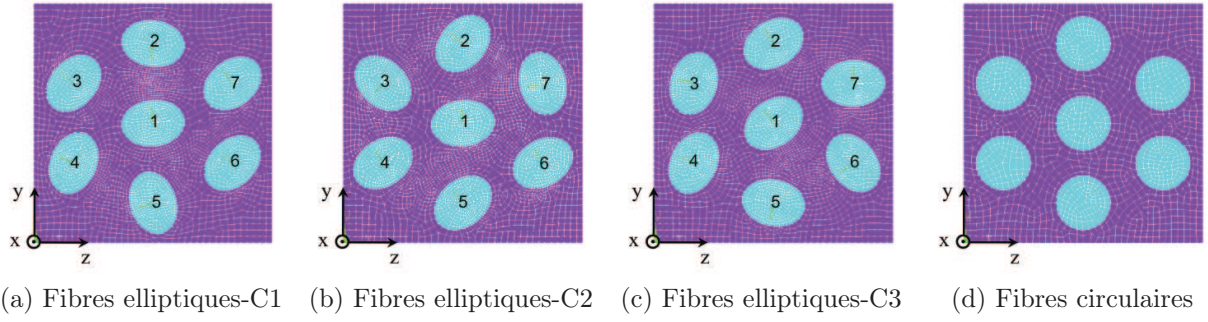


FIGURE 3.10: Section droite des cellules modélisées

Référence calcul	Valeurs des angles (°)						
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
C1	6,54	172,10	48,56	66,82	107,48	42,85	37,15
C2	6,46	49,81	137,28	32,93	40,01	30,22	103,16
C3	35,29	29,96	73,85	64,96	168,77	127,58	1,31

TABLE 3.8: Valeurs des angles pour la géométrie elliptique des fibres

Modules équivalents	Géométrie circulaire	Géométrie elliptique			Relations de Hashin et Hill
		C1	C2	C3	
$E_x(GPa)$	113,330	113,710	113,710	113,710	114,250
$E_y(GPa)$	9,450	9,320	9,270	9,290	8,620
$G_{xy}(GPa)$	2,900	2,990	3,020	2,980	2,850
$G_{yz}(GPa)$	2,610	2,640	2,650	2,630	2,680
ν_{xy}	0,384	0,385	0,385	0,385	0,386
ν_{yz}	0,570	0,572	0,570	0,569	0,611

TABLE 3.9: Comparaison des valeurs des modules équivalents

Modules équivalents	Écart relatif des modules (%)				
	Géométrie circulaire	Géométrie elliptique			Relations de Hashin et Hill
		C1	C2	C3	
E_x	0	0,3	0,3	0,3	0,8
E_y	0	1,4	1,9	1,7	8,8
G_{xy}	0	3,1	4,1	2,8	1,7
G_{yz}	0	1,2	1,5	0,8	2,7
ν_{xy}	0	0,3	0,3	0,3	0,5
ν_{yz}	0	0,4	0	0,2	7,2

TABLE 3.10: Écart relatif des modules équivalents par rapport à la géométrie circulaire des fibres

L'écart relatif des valeurs des modules, présenté dans le Tableau 3.10, est calculé par rapport aux valeurs correspondantes à la géométrie circulaire.

Nous pouvons constater que les modules équivalents pour les deux géométries ont des valeurs relativement proches. L'écart relatif le plus important est de : 0,3 % pour le module E_x , 1,9 % pour E_y , 4,1 % pour G_{xy} , 1,5 % pour G_{yz} , 0,3 % pour ν_{xy} et 0,4 % pour ν_{yz} .

Les valeurs du module d'Young E_x et celles du coefficient de Poisson ν_{xy} sont de l'ordre de grandeur de celles données par les relations analytiques de Hashin et Hill. Il en est de même pour les valeurs des modules G_{xy} et G_{yz} comparées aux valeurs données par ces relations analytiques. Cependant, l'écart relatif moyen entre les valeurs homogénéisées et celles analytiques pour les modules E_y et ν_{yz} est respectivement d'environ 8 % et 7 %, Tableau 3.10.

En conclusion, nous estimons que la géométrie des fibres ne joue pas un rôle majeur sur le comportement équivalent de la cellule et donc la modélisation numérique peut être simplifiée en utilisant désormais la géométrie la plus simple, soit la circulaire. Dans ce cas, la fibre circulaire est caractérisée par un diamètre $\Phi = 2R$. Les valeurs de ce diamètre se déterminent en utilisant la relation 3.13 où $a = \frac{d}{2}$ et $b = \frac{D}{2}$ afin de conserver la même aire de la section droite de la fibre elliptique. Il est rappelé que d et D sont respectivement le petit et le grand diamètre de la fibre elliptique dont les valeurs ont été mesurées dans l'analyse morphologique présentée au chapitre 2.

Étant donné que le diamètre Φ des fibres fait partie de l'ensemble des variables aléatoires qui participeront à la construction des distributions statistiques des modules équivalents de la cellule virtuelle, nous avons testé le type de la distribution de ses valeurs. D'abord, le test de la droite de Henry est employé afin de vérifier la normalité des valeurs. Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 3.11.

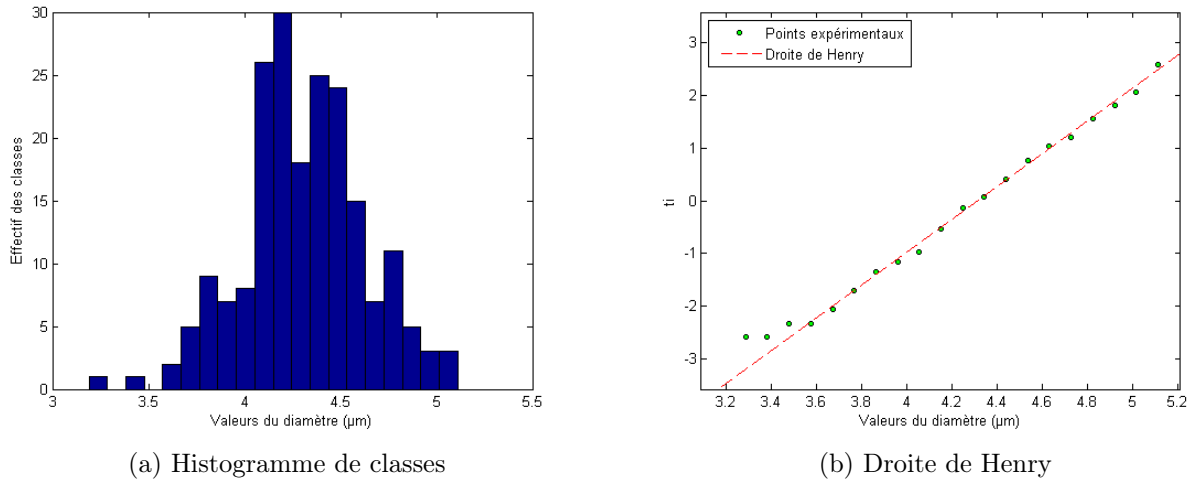


FIGURE 3.11: Le diamètre Φ

Nous observons que les points sont relativement bien alignés par rapport à cette droite. Avant de tirer une conclusion concernant la normalité des valeurs analysées, une investigation supplémentaire est faite en utilisant le test de Kolmogorov dont le principe de fonctionnement est décrit dans le chapitre 1. Le risque d'erreur du test est choisi à 5 % et les distributions théoriques testées sont identiques à celles abordées dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2. La valeur tabulée avec laquelle se compare celle calculée par le test est de 0,0961 et dépend seulement de la taille de l'échantillon (200) analysé et du risque d'erreur choisi. Si la valeur

calculée par le test est inférieure à cette valeur tabulée, la distribution théorique testée est acceptée avec un risque de 5 %, sinon elle est rejetée avec un niveau de confiance de 95 %. Finalement, la distribution théorique retenue correspond à la plus compatible parmi toutes celles testées et est donnée en gras dans le Tableau 3.11 ci-dessous.

Échantillon analysé	Valeurs calculées par le test de Kolmogorov pour chaque distribution théorique testée						Valeur tabulée
	N	G	LN	U	W	R	
Φ	0,0527	0,0567	0,0598	0,2881	0,0692	0,4976	0,0961

TABLE 3.11: Distribution statistique théorique retenue pour l'échantillon analysé

Les résultats de ce test d'hypothèse confirment avec un risque d'erreur de 5 % que le diamètre de la fibre circulaire Φ peut être décrit par une loi normale de moyenne 4,31 μm et d'écart-type 0,32 μm .

3.4.3 Sensibilité à différentes variables aléatoires

Les variables aléatoires qui sont considérées dans cette étude sont : le diamètre des fibres, la position des fibres et les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice, Tableau 3.12.

Afin de réaliser cette étude, la variable aléatoire dont l'influence est étudiée est variée en suivant une distribution uniforme tandis que le reste des variables sont fixées. Le tirage uniforme de la variable étudiée est fait en sorte d'obtenir un écart relatif de 15 % autour d'une valeur fixée. Cette variabilité a été d'abord identifiée pour le diamètre des fibres et puis imposée pour le reste des variables. La valeur fixée pour le diamètre des fibres a été choisie identique à celle moyenne identifiée dans le paragraphe précédent tandis que la valeur fixée des propriétés mécaniques des fibres et de la matrice a été estimée à partir de données issues de la littérature [14]. Pour chaque analyse de sensibilité, 600 simulations numériques EF sont effectuées.

Variable aléatoire étudiée	Nature	Valeur fixée	Écart relatif par rapport à la valeur fixée (%)
Φ	diamètre fibre	4,31 μm	15
(x_t, y_t)	position du centre des fibres	-	-
E_f	module d'Young fibre	390 GPa	15
ν_f	coefficient de Poisson fibre	0,35	15
E_m	module d'Young matrice	4,5 GPa	15
ν_m	coefficient de Poisson matrice	0,40	15

TABLE 3.12: Variables aléatoires étudiées

La notion d'incertitude relative est maintenant introduite. Elle sera utilisée plus tard afin de situer les résultats de cette étude.

Si x est une grandeur physique et Δx son incertitude, alors x est compris entre $x - \Delta x$ et $x + \Delta x$. Dans ce cas, Δx est une quantité positive qui s'exprime avec la même unité que x et s'appelle incertitude absolue. L'incertitude relative est définie comme le rapport $\frac{\Delta x}{x}$ et s'exprime souvent en pourcents.

Considérons maintenant une grandeur physique y dépendant de n autres grandeurs physiques :

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.14)$$

L'incertitude relative de y peut être calculée à l'aide de la relation 3.15 suivante :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{y} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial y}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \right) \quad (3.15)$$

où $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ sont les incertitudes absolues de chacune des grandeurs physiques x_i .

Pour éviter que les fibres ne se chevauchent ou qu'elles ne soient coupées par les bords de la cellule lors de l'étude de la position des fibres, l'algorithme Random Sequential Adsorption (RSA) [63] est employé. Cet algorithme s'utilise dans le plan $(y - z)$. La première étape de cet algorithme consiste à générer selon une distribution uniforme les coordonnées (y_1, z_1) du centre de la section droite de la première fibre circulaire. Afin d'éviter que la fibre coupe un des bords de la cellule, Figure 3.12, y_1 et z_1 sont générés entre les limites suivantes :

$$\varepsilon + R \leq y_1 \leq L - \varepsilon - R \quad (3.16)$$

$$\varepsilon + R \leq z_1 \leq l - \varepsilon - R \quad (3.17)$$

où R et ε sont respectivement le rayon de la première fibre et la tolérance nécessaire pour que la fibre ne coupe pas un des bords de la cellule. Les fibres sont considérées en ayant le même diamètre. Les grandeurs l et L sont respectivement la largeur et la longueur de la cellule, considérées identiques dans cette étude.

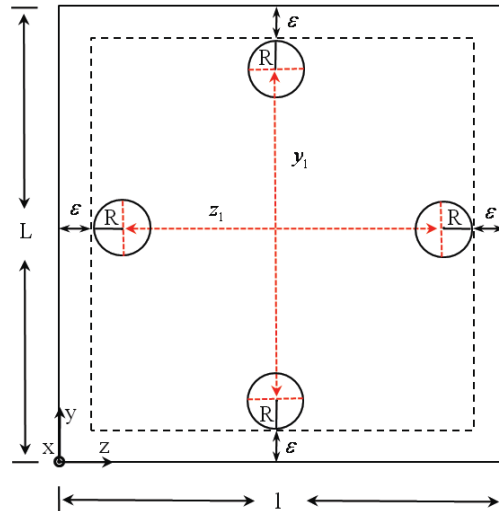


FIGURE 3.12: Limites de variation des coordonnées du centre de la première fibre

En respectant le critère précédent, un nouveau couple (y_2, z_2) est généré en vérifiant que cette nouvelle fibre ne chevauche pas les fibres déjà placées (pour l'instant une seule). S'il n'y a pas de chevauchement, un nouveau couple de coordonnées est généré en respectant ces critères. Ce processus est répété jusqu'à ce que le nombre de fibres souhaité dans la cellule soit atteint.

Dans la Figure 3.13, l'évolution de l'incertitude relative de chacun des modules équivalents en fonction de chacune des variables aléatoires est présentée.

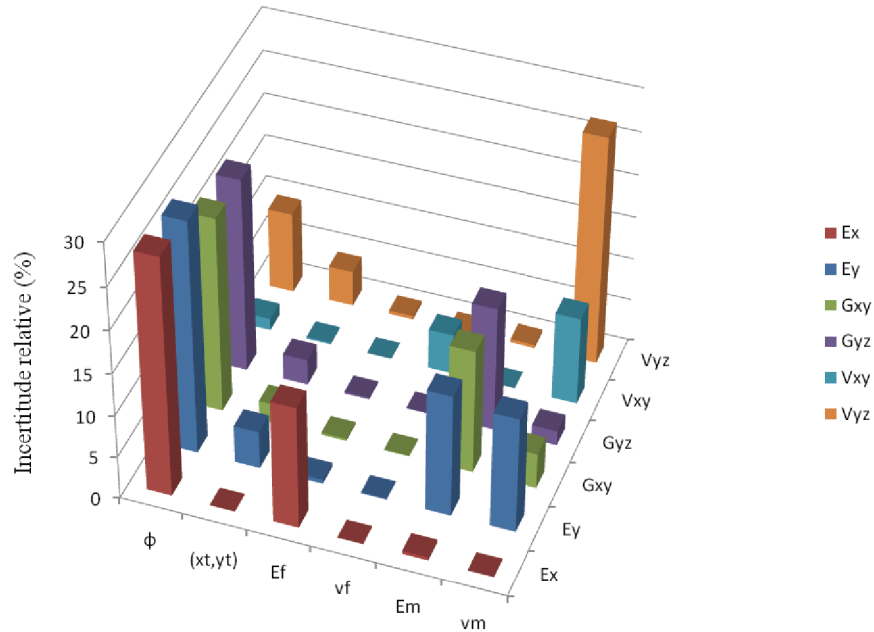


FIGURE 3.13: Influence des variables aléatoires sur les modules équivalents

Nous observons que la majorité des modules ont une sensibilité relativement élevée à la variation du diamètre Φ des fibres, donc de la fraction volumique de fibres, ce qui est un résultat attendu. Les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice, dans leur ensemble, ont une influence significative sur les modules, Tableau 3.13, ce qui était également attendu. En revanche, il est à noter que la position des fibres n'influe pratiquement pas le module E_x et influe très peu sur le coefficient de Poisson ν_{xy} . Cependant, elle a une influence non négligeable sur le reste des modules équivalents.

Variable aléatoire étudiée	Incertitude relative des modules (%)					
	E_x	E_y	G_{xy}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{yz}
Φ	28,13	27,40	23,01	22,84	1,37	9,55
(x_t, y_t)	0,00001	4,42	2,31	3,01	0,20	4,16
E_f	14,46	0,46	0,26	0,20	0,002	0,39
ν_f	0,006	0,11	0,07	0,05	4,73	0,09
E_m	0,36	14,38	14,57	14,63	0,002	0,38
ν_m	0,007	13,61	4,14	1,69	10,34	26,89

TABLE 3.13: Incertitude relative des modules équivalents

Afin de situer une partie des résultats obtenus précédemment, les incertitudes relatives des modules E_x et ν_{xy} sont calculées à l'aide de la relation 3.15, en employant respectivement la loi des mélanges 1.6 et 1.7. Ainsi, l'incertitude relative obtenue pour le module d'Young E_x est de 28,53 % pour la variation de Φ , 14,59 % pour la variation de E_f et 0,36 % pour la variation de E_m . Quant au coefficient de Poisson ν_{xy} , l'incertitude relative est de 1,23 % pour la variation de Φ , 4,30 % pour la variation de ν_f et 10,56 % pour la variation de ν_m . Ces résultats sont très proches des résultats présentés au Tableau 3.13.

L'étude de sensibilité fournit donc des indications intéressantes sur les variables pertinentes à conserver pour la construction des distributions statistiques du comportement équivalent des cellules. Les variables aléatoires retenues sont : le diamètre Φ des fibres (la fraction volumique de fibres), le module d'Young des fibres et de la matrice (E_f et E_m) ainsi que leurs coefficients de Poisson (ν_f et ν_m).

Même si l'influence de la position des fibres sur l'ensemble des modules n'est pas insignifiante, cette variable ne sera pas conservée afin de réduire le nombre de variables aléatoires dans la construction des distributions du comportement équivalent des cellules. Autrement dit, les centres des fibres seront fixés dans la cellule durant les simulations numériques EF.

Étant donné que la position des fibres dépend directement des paramètres géométriques α et d_c , présentés au chapitre 2, et qu'elle est fixée, la variabilité de ces paramètres ne sera pas considérée dans la modélisation numérique.

Néanmoins, nous soupçonnons que l'influence relativement réduite de la position des fibres sur les modules, trouvée dans cette étude, est due au fait que compte tenu du nombre de fibres et de l'espace disponible, la position des centres n'a pas pu beaucoup varier. Il devrait en être autrement pour une géométrie différente de cellule dont les fibres ont plus d'espace à changer leur position, d'où l'étude de sensibilité qui suit.

3.4.4 Sensibilité à la position des fibres

Dans le paragraphe 3.4.3, il a été montré que la position des fibres dans la cellule a une influence relativement faible sur le comportement équivalent de la cellule. L'analyse de sensibilité qui fait l'objet de ce paragraphe a pour but de vérifier si ce constat reste valide lorsque les fibres ont la possibilité de varier la position de leur centre dans des cellules de géométrie différente de celles testées jusqu'à présent.

Plusieurs modes de répartition des fibres, Figure 3.14, dans une cellule de section droite rectangulaire sont alors considérées. La longueur L , la largeur l et la profondeur e de la cellule sont respectivement de 16 μm , 100 μm et 3 μm .

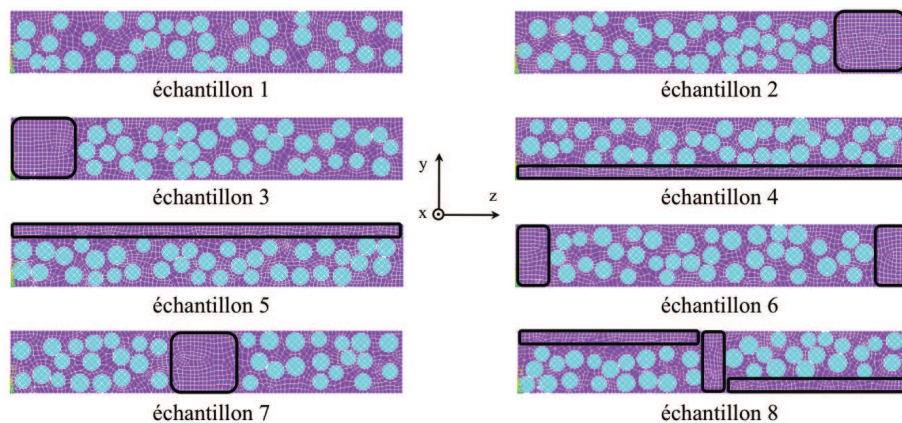


FIGURE 3.14: Différents modes de répartition des fibres



FIGURE 3.15: Zone sans fibres

Pour chaque échantillon, la fraction volumique de fibres et les propriétés des fibres et de la matrice sont identiques. L'incertitude relative de chacun des modules équivalents, exprimée en pourcents, est présentée dans le Tableau 3.14. Elle est calculée par rapport à la médiane des valeurs de ces modules.

Incrtitude relative des modules (%)					
E_x	E_y	G_{xy}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{yz}
0	7,06	11,33	2,61	0,93	6,06

TABLE 3.14: Incrtitude relative des modules équivalents

Comme dans l'étude présentée dans le paragraphe 3.4.3, nous pouvons observer que parmi les six modules équivalents, les quatre plus sensibles à la position des fibres sont : E_y , G_{xy} , G_{yz} ainsi que ν_{yz} . Comme précédemment, le module d'Young E_x est insensible à la position des fibres et le coefficient de Poisson ν_{xy} reste lui aussi globalement insensible.

Visiblement, les résultats de Tableau 3.14 sont globalement supérieurs à ceux correspondants présentés au Tableau 3.13. Cela confirme que l'influence de la position des fibres est plus significative lorsque la position de celles-ci peut varier sur des distances plus grandes.

3.4.5 Sensibilité à la géométrie de la section droite de la cellule pour une fraction volumique donnée

Le but de cette étude est de regarder si la géométrie et les dimensions de la section droite de la cellule joue un rôle important sur l'évaluation des constantes d'élasticité.

Neuf volumes à géométrie de section droite différente sont considérés : carrée (Figure 3.16), rectangulaire verticale (Figure 3.17a) et rectangulaire horizontale (Figure 3.17b).

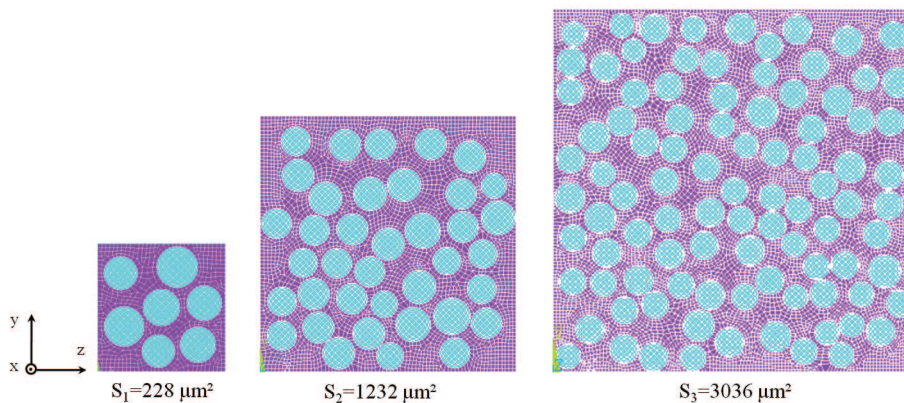


FIGURE 3.16: Sections droites carrées

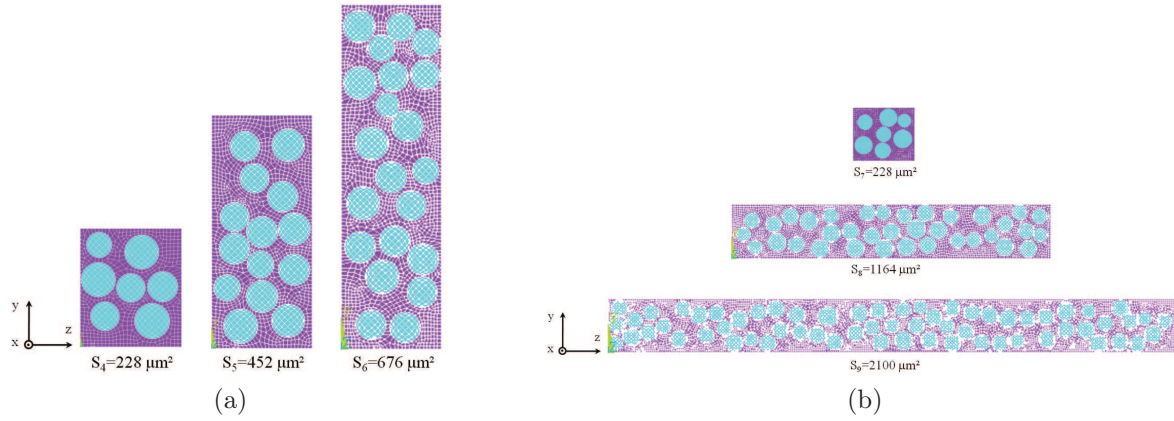


FIGURE 3.17: Sections droites rectangulaires : (a) verticales, (b) horizontales

Les dimensions de ces volumes sont données dans le Tableau 3.15, S_i , $i = 1, 2, \dots, 9$ représentant l'aire de la section droite de chacun de ces volumes. Chaque volume a la même fraction volumique de fibres et les mêmes propriétés des matériaux constituants.

Géométrie de la section droite		Dimensions des volumes (μm)		
		longueur L	largeur l	profondeur e
Carrée	S_1	15	15	3
	S_2	35	35	
	S_3	55	55	
Rectangulaire verticale	S_4	16	14	
	S_5	32	14	
	S_6	48	14	
Rectangulaire horizontale	S_7	14	16	
	S_8	14	83	
	S_9	14	150	

TABLE 3.15: Dimensions de chaque volume considéré

Dans le Tableau 3.16, l'écart relatif des valeurs des modules équivalents est présenté. Il est exprimé en pourcents et est calculé par rapport à la valeur minimale de chacun des modules.

Section étudiée	Écart relatif des modules					
	E_x	E_y	G_{xy}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{yz}
S1	0	15,1	5,7	9,6	1,4	0
S2	0	12,1	6,8	16,4	0,8	12,8
S3	0	0	8,6	14,3	1,4	16,9
S4	0	9,0	8,4	12,2	1,6	5,2
S5	0	32,4	0	13,3	0	6,8
S6	0	20,6	6,4	14,8	0,5	8,1
S7	0	34,2	0	0	0,3	1,1
S8	0	9,7	6,8	6,8	0,8	15,5
S9	0	7,6	11,4	4,9	1,1	11,3

TABLE 3.16: Écart relatif des modules équivalents

Il est remarquable de constater qu'il existe une sensibilité des modules équivalents à la géométrie de la section droite de la cellule. Les plus affectées sont toujours E_y , G_{xy} , G_{yz} ainsi que ν_{yz} . Dans le Tableau 3.16, nous observons qu'en dehors de E_x et de ν_{xy} , les autres modules ont un écart relatif maximal important de l'ordre de : 34 % pour E_y , 11 % pour G_{xy} , 16 % pour G_{yz} et 17 % pour ν_{yz} .

En outre, l'écart entre ces quatre derniers modules équivalents correspondants à la première géométrie carrée S_1 et ceux correspondants à la première géométrie rectangulaire verticale S_4 n'est pas négligeable. En effet, il est d'environ : 6 % pour E_y , 3% pour G_{xy} , 3% pour G_{yz} et 5 % pour ν_{yz} . Par conséquent, une modélisation de la cellule selon une géométrie carrée, plus simple à utiliser dans la reconstruction du pli, pourrait engendrer des variations non négligeables sur son comportement équivalent.

3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté la modélisation numérique des cellules selon une approche de type matériau virtuel s'appuyant sur l'analyse morphologique réalisée au chapitre 2.

Le choix de la méthode numérique d'homogénéisation a été fait en fonction du type des conditions aux limites employées puisqu'il s'est avéré qu'il joue un rôle important sur la précision de l'estimation du comportement homogénéisé de la cellule virtuelle. En effet, l'utilisation des conditions aux limites KUBC nécessite la considération d'une grande profondeur de la cellule virtuelle afin d'assurer la convergence de son comportement équivalent, or cela n'est pas envisageable du point de vue du temps de calcul. En revanche, lorsque les MBC sont utilisées, la convergence des propriétés effectives de la cellule est plus rapide. Dans ce cas, l'économie du temps de calcul est assurée. La méthode numérique d'homogénéisation qui emploie des MBC a été retenue et elle sera utilisée pour la construction des distributions statistiques du comportement équivalent de chacune des cellules.

Après avoir choisi la méthode numérique d'homogénéisation la mieux adaptée, quelques études de sensibilité des modules équivalents à un nombre de paramètres géométriques et matériels ont été réalisées. Ces études ont visé de simplifier la modélisation numérique des cellules ainsi que de réduire le nombre de paramètres variables, dans l'objectif d'alléger les coûts des futures simulations numériques. Les paramètres géométriques qui ont été analysés

sont : la géométrie de la section droite des fibres et la géométrie de la section droite de la cellule virtuelle tandis que ceux matériels sont : Φ , E_f , ν_f , E_m , ν_m et la position du centre des fibres.

D'abord, il a été constaté que la géométrie de la section droite des fibres n'a pas une influence significative sur les modules équivalents. Les fibres seront modélisées désormais en utilisant la géométrie la plus simple, soit circulaire. Les valeurs du diamètre Φ des fibres circulaires suivent une loi de distribution normale de moyenne 4,31 μm et d'écart-type 0,32 μm .

L'étude de sensibilité des modules à différents paramètres matériels aléatoires a montré que le plus influent est le diamètre des fibres (fraction volumique des fibres). L'ensemble des propriétés mécaniques des fibres et de la matrice influent aussi significativement sur les modules effectifs. Quant à la position des fibres, elle est un paramètre dont l'influence sur les modules devient plus significative au fur et à mesure que les fibres ont la possibilité de faire varier la position de leur centre sur des distances plus grandes. Néanmoins, afin de réduire le nombre de variables aléatoires qui participeront à la construction des distributions statistiques des modules équivalents, la position des fibres est négligée et les centres des fibres seront fixés pendant les simulations numériques EF. Finalement, les paramètres variables retenus qui seront utilisés dans la construction des distributions statistiques du comportement équivalent par chaque type de cellule sont : Φ , E_f , ν_f , E_m , et ν_m .

Étant donné qu'une des poursuites de ce travail réside dans le transport de la variabilité dès l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique, le milieu mésoscopique sera construit à partir des cellules virtuelles identifiées dans l'analyse morphologique. Sa construction serait plus facile si toutes les cellules avaient une géométrie carrée de mêmes dimensions. Cependant, comme il a été montré dans l'étude de sensibilité à la géométrie de la section droite de la cellule, une modélisation de la cellule selon une géométrie carrée pourrait engendrer des variations non négligeables sur son comportement.

Le niveau de raffinement choisi pour le maillage correspond à une taille moyenne élémentaire de 0,5 μm . Cette taille permet un temps de calcul d'environ une minute.

Dans le chapitre suivant, l'élaboration des distributions statistiques du comportement équivalent pour chaque type de cellule virtuelle sera présentée. Une démarche basée sur la notion de réseaux de neurones permet de construire la distribution de leur comportement équivalent en réalisant un nombre réduit de calculs numériques EF.

Chapitre 4

Distributions statistiques des propriétés homogénéisées des cellules

Sommaire

4.1	Introduction	75
4.2	Distribution pour chaque type de cellule	75
4.3	Réduction du temps de calcul	78
4.3.1	Représentativité des entrées	79
4.3.2	L'approximation des distributions des sorties après apprentissage .	88
4.3.3	Qualité de l'approximation	94
4.3.4	Apports du réseau de neurones	100
4.4	Conclusions	103

4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, la construction de la distribution statistique du comportement homogénéisé de chaque type de cellule virtuelle en fonction de la variabilité des paramètres retenus à cette échelle est présentée. Afin de réduire les temps de calcul nécessaires à l'obtention de ces distributions, une démarche utilisant des réseaux de neurones est également proposée. L'identification des distributions (nature et paramètres) obtenues à travers des calculs numériques EF ainsi que de celles issues du réseau de neurones est faite en employant des tests d'hypothèse.

4.2 Distribution pour chaque type de cellule

Pour chaque type de cellule virtuelle considérée dans le chapitre 3, 600 calculs numériques EF ont été effectués. Ce nombre est jugé suffisant pour évaluer les deux premiers moments statistiques d'une distribution avec une bonne confiance : la moyenne et l'écart-type. Les résultats nombreux qui seront ainsi obtenus permettront également d'obtenir des informations intéressantes sur les queues de distribution.

Pour chaque simulation, le comportement mécanique équivalent des cellules traduit par les six modules équivalents E_x , E_y , G_{xy} , G_{yz} , ν_{xy} et ν_{yz} est estimé par homogénéisation en fonction de cinq variables matériau : le module d'Young des fibres E_f et de la matrice E_m ,

le coefficient de Poisson des fibres ν_f et de la matrice ν_m ainsi que le diamètre Φ de chacune des fibres.

Sachant que les résultats des mesures expérimentales montrent qu'en général les variables ont une tendance à s'organiser selon une distribution normale, nous avons choisi de l'utiliser pour représenter la variation de ces paramètres. Dans le Tableau 4.1, la moyenne, l'écart-type ainsi que le coefficient de variation de chacun des paramètres sont donnés.

Paramètre variable	Signification	Loi de variation	Moyenne	Écart-type	Coefficient de variation (%)
Φ	diamètre fibre	Normale	4,31 μm	0,32 μm	7,42
E_f	module d'Young fibre	Normale	390 GPa	28,94 GPa	7,42
ν_f	coefficient de Poisson fibre	Normale	0,35	0,03	7,42
E_m	module d'Young matrice	Normale	4,50 GPa	0,33 GPa	7,42
ν_m	coefficient de Poisson matrice	Normale	0,40	0,03	7,42

TABLE 4.1: Paramètres variables et leurs lois de distribution

Rappelons que l'influence de la position des fibres est négligée dans la construction des cellules, les centres des fibres étant fixés.

Après l'obtention des distributions de chacune des sorties (E_x , E_y , G_{xy} , G_{yz} , ν_{xy} et ν_{yz}), pour chaque type de cellule (type 4, 5, 6, 7, 8 et 9), un test d'hypothèse est réalisé afin d'identifier leur nature. Le test de Kolmogorov, décrit dans le chapitre 1, est employé.

Les valeurs obtenues à travers ce test d'hypothèse sont ensuite comparées avec une valeur tabulée dépendant d'un risque d'erreur (5 %) ainsi que de la taille de l'échantillon analysé (600). La valeur tabulée correspondante à ces deux données est de 0,0555 et ne dépend pas du type de la distribution théorique avec laquelle l'échantillon se compare. Si la valeur calculée par le test est inférieure à cette valeur tabulée, la distribution théorique testée est acceptée au risque de 5 %, sinon elle est rejetée avec au niveau de confiance de 95 %. Les distributions théoriques testées sont identiques à celles utilisées dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2 : normale (N), uniforme (U), log-normale (LN), Gamma (G), Weibull (W) et Rayleigh (R).

Les résultats du test sont présentés dans le Tableau 4.2. Seules les distributions pour lesquelles la valeur calculée par le test est inférieure à celle tabulée sont reportées. La valeur en gras correspond à la distribution théorique la plus compatible avec celle issue des calculs numériques EF. En complément, la moyenne et l'écart-type de chaque échantillon analysé sont calculés.

Type de cellule	Résultats du test de Kolmogorov pour chacune des six sorties											
	E_x			E_y			G_{xy}			G_{yz}		
	N	G	LN	N	G	LN	N	G	LN	N	G	LN
4	0,0384	0,0338	0,0334	0,0590	0,0420	0,0338	0,0329	0,0239	0,0283	0,0448	0,0319	0,0259
	U : 0,2115	W : 0,0592	R : 0,4773	U : 0,3495	W : 0,1003	R : 0,4476	U : 0,1960	W : 0,0633	R : 0,4532	U : 0,3062	W : 0,0786	R : 0,4468
	σ : 1,51e+11	σ : 1,43e+10	σ : 1,51e+9	σ : 1,18e+10	σ : 1,15e+9	σ : 3,62e+9	σ : 3,70e+8	σ : 3,73 e+9	σ : 4,22e+8	σ : 0,0204	σ : 0,3794	σ : 0,0204
5	0,0253	0,0235	0,0227	0,0550	0,0398	0,0322	0,0345	0,0315	0,0378	0,0379	0,0249	0,0230
	U : 0,1976	W : 0,0667	R : 0,4910	U : 0,3445	W : 0,0871	R : 0,4577	U : 0,2123	W : 0,0723	R : 0,4703	U : 0,3048	W : 0,0741	R : 0,4727
	σ : 1,38e+11	σ : 1,16e+10	σ : 1,22e+9	σ : 1,06e+10	σ : 1,13e+9	σ : 3,41e+9	σ : 3,27e+8	σ : 3,43e+9	σ : 3,37e+8	σ : 0,0211	σ : 0,3827	σ : 0,0211
6	0,0407	0,0293	0,0237	0,0530	0,0404	0,0338	0,0363	0,0260	0,0378	0,0333	0,0220	0,0228
	U : 0,1990	W : 0,0761	R : 0,4867	U : 0,2782	W : 0,0715	R : 0,4580	U : 0,2173	W : 0,0734	R : 0,4761	U : 0,1714	W : 0,0599	R : 0,4808
	σ : 1,13e+10	σ : 1,13e+10	σ : 1,13e+9	σ : 1,03e+10	σ : 1,13e+9	σ : 3,42e+9	σ : 3,13e+8	σ : 3,22e+9	σ : 2,88e+8	σ : 0,0362	σ : 0,0318	σ : 0,0231
7	0,0296	0,0250	0,0283	0,0383	0,0298	0,0272	0,0222	0,0304	0,0364	0,0161	0,0242	0,0298
	U : 0,2222	W : 0,0716	R : 0,4830	U : 0,3995	W : 0,0985	R : 0,4421	U : 0,2233	W : 0,0630	R : 0,4637	U : 0,3122	W : 0,0560	R : 0,4713
	σ : 1,40e+11	σ : 1,18e+10	σ : 1,35e+9	σ : 1,14e+10	σ : 1,35e+9	σ : 3,44e+9	σ : 3,10e+8	σ : 3,15e+9	σ : 2,71e+8	σ : 0,0369	σ : 0,0318	σ : 0,3807
8	0,0245	0,0250	0,0294	0,0562	0,0402	0,0320	0,0475	0,0343	0,0277	0,0406	0,0293	0,0248
	U : 0,2067	W : 0,0668	R : 0,4795	U : 0,3030	W : 0,0821	R : 0,4352	U : 0,2541	W : 0,0820	R : 0,4658	U : 0,2499	W : 0,0848	R : 0,4798
	σ : 1,58e+11	σ : 1,31e+10	σ : 1,82e+9	σ : 1,38e+10	σ : 1,82e+9	σ : 4,12e+9	σ : 4,11e+8	σ : 3,29e+9	σ : 2,87e+8	σ : 0,0282	σ : 0,0334	σ : 0,0358
9	0,0288	0,0259	0,0266	0,0341	0,0250	0,0214	0,0287	0,0207	0,0173	0,0233	0,0178	0,0167
	U : 0,2726	W : 0,0605	R : 0,4860	U : 0,3885	W : 0,0949	R : 0,4610	U : 0,2617	W : 0,0758	R : 0,4882	U : 0,2456	W : 0,0720	R : 0,4925
	σ : 1,09e+10	σ : 1,35e+11	σ : 1,24e+9	σ : 1,12e+10	σ : 1,24e+9	σ : 3,24e+9	σ : 2,93e+8	σ : 2,94e+9	σ : 2,44e+8	σ : 0,0219	σ : 0,0201	σ : 0,0208
	N : 0,0465	G : 0,0325	LN : 0,0263	N : 0,0582	G : 0,0392	LN : 0,0311	N : 0,0445	G : 0,0326	LN : 0,0277	N : 0,1968	G : 0,0615	LN : 0,0253
	U : 0,3882	W : 0,0893	R : 0,4302	U : 0,2711	W : 0,0929	R : 0,3937	U : 0,3429	W : 0,0693	R : 0,4109	U : 0,1848	W : 0,0687	R : 0,5278
	σ : 0,0760	σ : 0,0753	σ : 0,0782	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753	σ : 0,0753

TABLE 4.2: Distribution théorique la plus compatible avec celle issue des calculs numériques

Nous observons qu'il y a globalement une compétition entre la loi normale, Gamma et log-normale pour chaque sortie de chaque type de cellule. C'est-à-dire que la valeur calculée par le test pour ces trois distributions est inférieure à la valeur tabulée 0,0555. L'explication de cette compétition a été donnée dans le paragraphe 2.2 du chapitre 2. Finalement, une seule distribution est désignée la plus compatible, celle caractérisée par la plus petite valeur calculée par le test.

Le temps de calcul pour réaliser les 600 calculs numériques EF, nécessaire à l'obtention des distributions statistiques du comportement équivalent de chaque type de cellule, est présenté dans le Tableau 4.3.

Type de cellule	Temps de calcul
4	6h 37'
5	9h 46'
6	12h 34'
7	14h
8	14h
9	20h 50'

TABLE 4.3: Temps de l'obtention des distributions numériques

L'augmentation du temps de calcul avec le type de la cellule peut s'expliquer par le fait que les dimensions de la cellule modélisée sont plus grandes au fur et à mesure que le nombre de fibres augmente. Ces dimensions ont été présentées au chapitre 3.

Afin de diminuer ce temps dans la construction des distributions des propriétés élastiques, nous proposons de calculer moins de configurations par des calculs EF et d'utiliser une méthode d'apprentissage par réseaux de neurones (méta-modèle) pour en calculer beaucoup plus dans un temps relativement court.

4.3 Réduction du temps de calcul

Dans ce paragraphe, une démarche générale pour la construction de la distribution du comportement équivalent des cellules virtuelles en réalisant un nombre réduit de calculs numériques EF est présentée, Figure 4.1. Cette démarche s'appuie sur la méthode d'apprentissage par réseaux de neurones que nous avons présentée au premier chapitre. Seule la cellule de type 6 est utilisée pour illustrer la démarche.

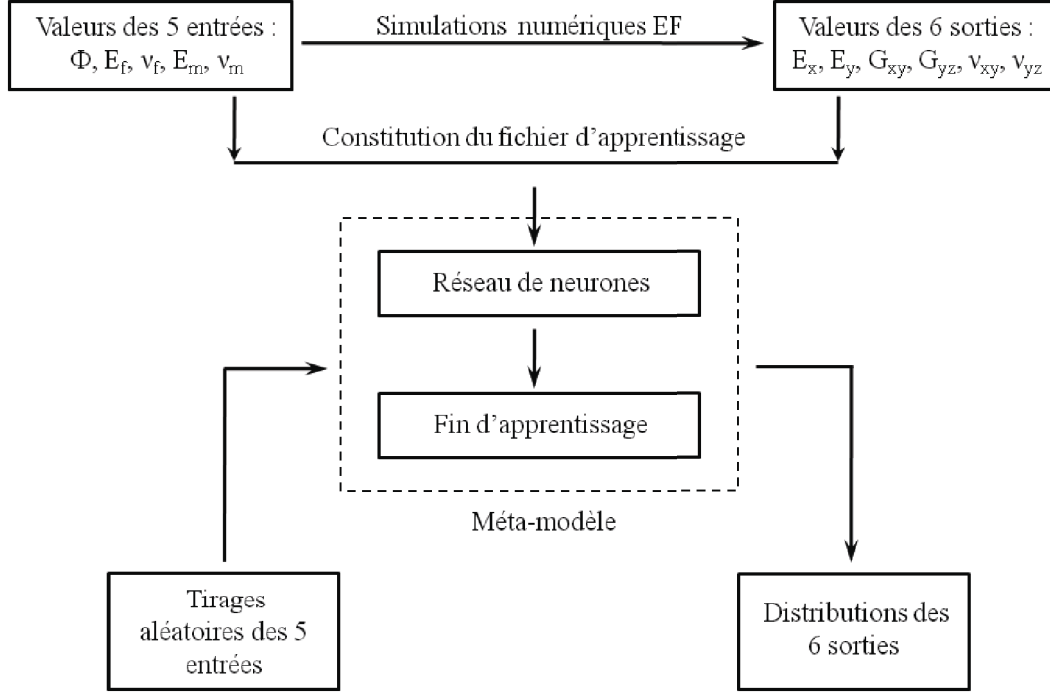


FIGURE 4.1: Objectif de la démarche

Le principe de la démarche consiste à considérer pour les entrées du méta-modèle quelques jeux des 5 paramètres définissant les calculs EF afin d'obtenir les valeurs correspondantes des 6 sorties caractérisant le comportement équivalent de la cellule virtuelle. Ainsi, pour un jeu des 5 données d'entrée Φ, E_f, ν_f, E_m et ν_m , un jeu des 6 propriétés mécaniques équivalentes $E_x, E_y, G_{xy}, G_{yz}, \nu_{xy}$ et ν_{yz} est obtenu.

L'ensemble de jeux 5 entrées-6 sorties constitue un fichier d'apprentissage de 11 colonnes et d'autant de lignes que de jeux considérés. Le nombre de lignes désigne la taille du fichier d'apprentissage (TFA). Celui-ci est utilisé pour la phase d'apprentissage du réseau de neurones.

Une fois l'apprentissage réalisé, il est possible de générer autant de jeux de sorties que désiré. Pour cela, des jeux de 5 valeurs représentant les données matériaux sont construits par des tirages aléatoires respectant des distributions identifiées. Ces entrées sont ensuite injectées dans le réseau de neurones afin d'obtenir autant de séries de 6 valeurs représentant les propriétés mécaniques équivalentes. Cela permet donc d'enrichir la distribution statistique de chacune des 6 sorties, sans passer par des calculs numériques EF supplémentaires.

4.3.1 Représentativité des entrées

Le choix du nombre de jeux pour les valeurs des entrées situées dans le fichier d'apprentissage doit se faire de telle sorte que l'ensemble de ces valeurs soit représentatif des distributions qui seraient trouvées si le nombre de jeux était plus important. L'aspect représentativité doit être pris en considération puisque les tirages aléatoires des entrées qui s'effectuent à posteriori de l'apprentissage doivent s'inspirer des distributions des entrées qui se trouvent dans le fichier d'apprentissage.

L'identification d'un nombre minimal de jeux de données d'entrée qui assure cette représentativité s'avère alors pertinente afin de limiter les coûts liés au temps de calcul des modèles numériques et/ou aux mesures expérimentales. Toutefois, le problème de la repré-

sentativité reste difficile à aborder puisqu'il n'est pas toujours facile d'avoir accès à une base plus riche de données d'entrée, notamment parce qu'elle n'est pas disponible.

Par conséquent, trouver une modalité d'identifier le nombre minimal de jeux qui assure la représentativité des entrées en l'absence d'une base plus riche de données d'entrée constitue un réel défi et fait l'objet des études suivantes.

Nous avons effectué 1000 calculs EF pour la cellule de type 6. Cela implique le tirage de 1000 valeurs selon leur loi de distribution pour chacune des 5 entrées ainsi que 1000 valeurs calculées pour chacune des 6 sorties. Ces 1000 valeurs de l'ensemble entrées-sorties sont utilisées ici en tant que valeurs (distributions) de référence. Les distributions de référence des entrées sont employées afin d'étudier la représentativité tandis que celles des sorties seront utilisées afin d'apprécier la qualité de l'approximation réalisée par le réseau de neurones.

Parmi les 1000 valeurs de l'ensemble entrées-sorties de référence, nous avons construit des fichiers d'apprentissage de différentes tailles afin d'étudier la sensibilité à ce paramètre. Les tailles retenues sont : 10, 50, 100, 200 et 300. Pour chacun d'entre eux, l'échantillon est prélevé de manière aléatoire parmi les 1000 valeurs entrées-sorties calculées. Afin de vérifier la reproductibilité des résultats, nous avons établi trois fichiers d'apprentissage différents pour chacune de ces tailles, appelés "sets" et identifiés par les étiquettes set1, set2 et set3.

L'étude de la représentativité des entrées situées dans tous ces fichiers d'apprentissage est faite en comparant le type de leur loi statistique avec celle de référence, en abordant deux voies parallèles : l'utilisation du test de Kolmogorov et l'utilisation du test du χ^2 . La sensibilité des résultats par rapport au test employé est également visée.

4.3.1.1 Utilisation du test de Kolmogorov dans l'étude de la représentativité des entrées

Pour l'étude de la représentativité des entrées, nous avons d'abord utilisé le test de Kolmogorov pour toutes les tailles et les sets associés. Le risque d'erreur du test est choisi à 5 % et les distributions théoriques testées sont identiques à celles abordées précédemment. Les valeurs tabulées, Tableau 4.4, avec lesquelles se comparent celles calculées par le test dépendent de la taille de chaque échantillon analysé et du risque d'erreur, comme expliqué précédemment.

Taille échantillon	Valeur tabulée
10	0,4092
50	0,1884
100	0,1340
200	0,0961
300	0,0785
1000	0,0430

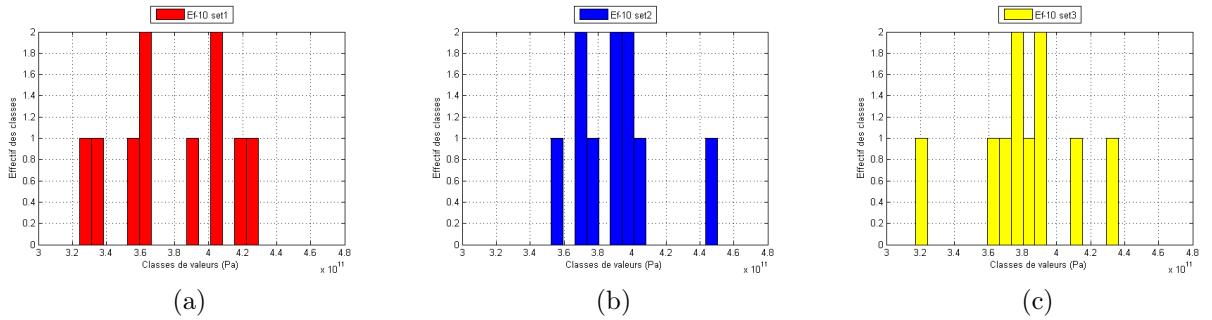
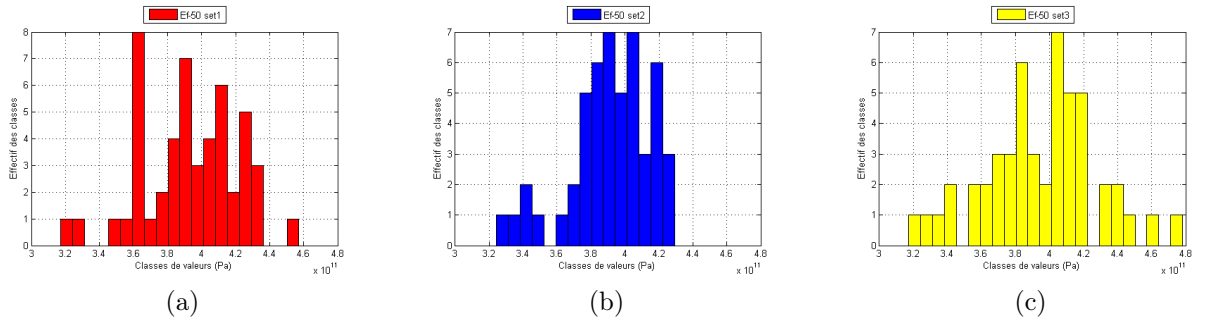
TABLE 4.4: Valeurs tabulées caractéristiques de chaque taille de l'échantillon analysé

Les distributions statistiques retenues par ce test sont ensuite comparées avec celles de référence de taille 1000 afin d'apprécier leur représentativité et sont données dans le Tableau 4.5. En ce qui concerne la valeur du paramètre calculé par ce test pour chacune des six distributions statistiques théoriques testées, le lecteur peut consulter l'annexe C.

Taille du fichier des entrées	Résultats du test de Kolmogorov pour chacune des cinq entrées				
	E_f	E_m	ν_f	ν_m	V_f
10_set1	U	G	W	N	LN
10_set2	G	N	G	LN	LN
10_set3	G	LN	N	LN	LN
50_set1	W	LN	LN	G	N
50_set2	W	LN	N	G	LN
50_set3	N	LN	LN	W	N
100_set1	W	LN	G	N	LN
100_set2	LN	LN	W	W	LN
100_set3	G	G	LN	N	LN
200_set1	N	G	G	LN	G
200_set2	LN	LN	N	N	LN
200_set3	N	G	G	N	LN
300_set1	N	G	N	G	G
300_set2	N	G et LN	N	N	LN
300_set3	N	LN	N	G	N
1000	N	LN	N	LN	G

TABLE 4.5: Distribution statistique théorique retenue pour chaque entrée de chaque fichier analysé

Dans les Figures 4.2 - 4.7, seuls les histogrammes des distributions pour l'entrée E_f sont donnés. Les histogrammes des autres entrées sont donnés dans l'annexe A.


 FIGURE 4.2: Histogrammes des distributions de E_f pour la taille de 10

 FIGURE 4.3: Histogrammes des distributions de E_f pour la taille de 50

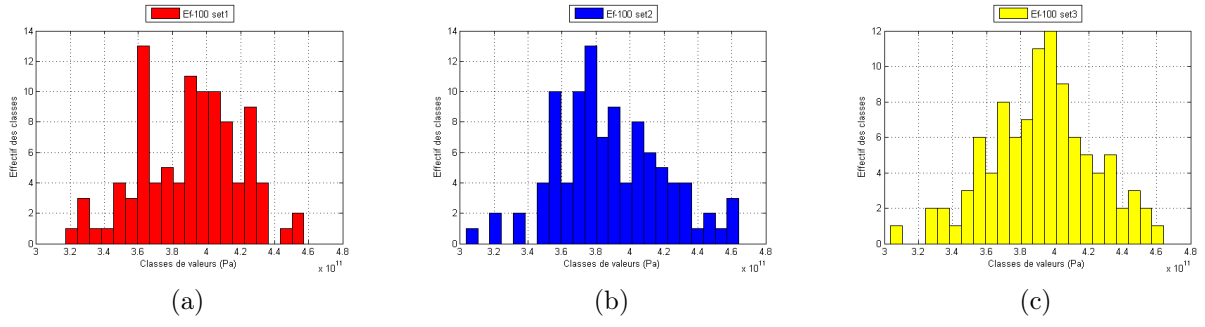


FIGURE 4.4: Histogrammes des distributions de E_f pour la taille de 100

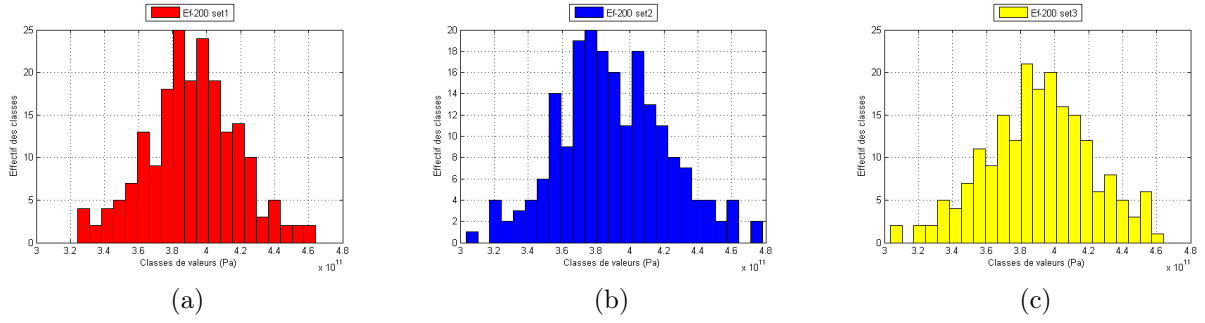


FIGURE 4.5: Histogrammes des distributions de E_f pour la taille de 200

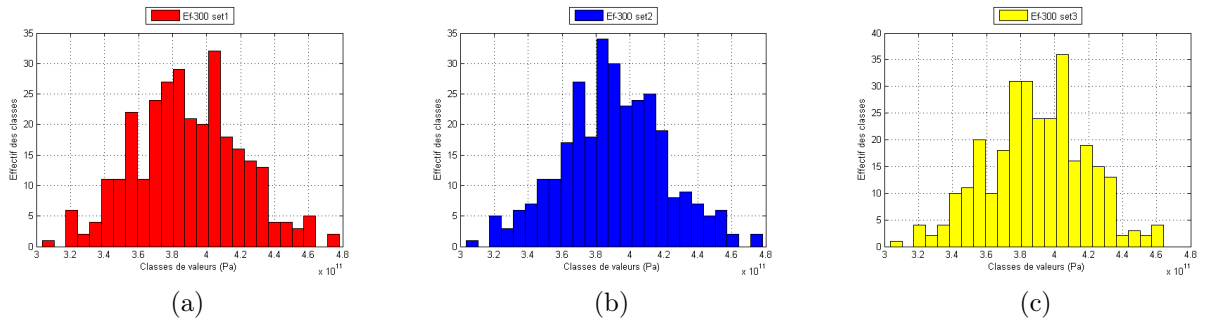


FIGURE 4.6: Histogrammes des distributions de E_f pour la taille de 300

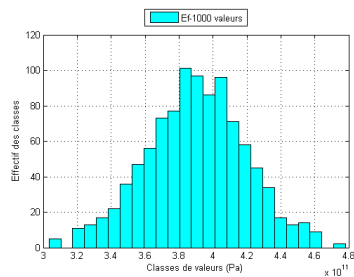


FIGURE 4.7: Histogramme de la distribution de E_f de référence

Les distributions identifiées par le test de Kolmogorov, pour toutes les tailles étudiées, ne sont pas toujours identiques à celles de référence. C'est-à-dire qu'elles ne sont pas représentatives. En effet, pour les petites tailles 10 et 50, cette incompatibilité peut être directement attribuée au nombre insuffisant de valeurs qui constituent ces échantillons.

En ce qui concerne les échantillons de taille supérieure soit : 100, 200 et 300 valeurs, nous n'avons pas toujours obtenu des distributions statistiques identiques à celles de référence. Il est possible que la persistance de l'incompatibilité puisse s'expliquer par la nature aléatoire du prélèvement de ces échantillons parmi les 1000 valeurs de référence. Il suffit qu'une classe soit anormalement représentée pour modifier le résultat du test.

En dehors de l'aspect aléatoire du prélèvement, notamment pour les échantillons de grande taille, l'incompatibilité pourrait être également due à la sensibilité du test employé, compte tenu de la "malformation" de la distribution de l'échantillon analysé.

À cet égard, une étude de sensibilité de ce test par rapport à l'allure de la distribution de l'échantillon analysé est proposée par la suite. Pour cela, 500 valeurs sont aléatoirement générées avec Matlab selon une distribution normale de moyenne 10 et d'écart-type 1. De cette distribution, dite de référence, des valeurs sont progressivement enlevées de sa partie gauche (ou queue gauche de la distribution). Le pourcentage de valeurs enlevées (PVE) est de 2, 3 et 6 %.

Dans les Figures 4.8 et 4.9, l'histogramme de la distribution de référence ainsi que ceux des trois nouvelles distributions obtenues après le retrait de ces valeurs sont présentés. Les résultats du test de Kolmogorov appliqué sur chacune de ces distributions, pour un risque d'erreur de 5 %, sont donnés dans le Tableau 4.6.

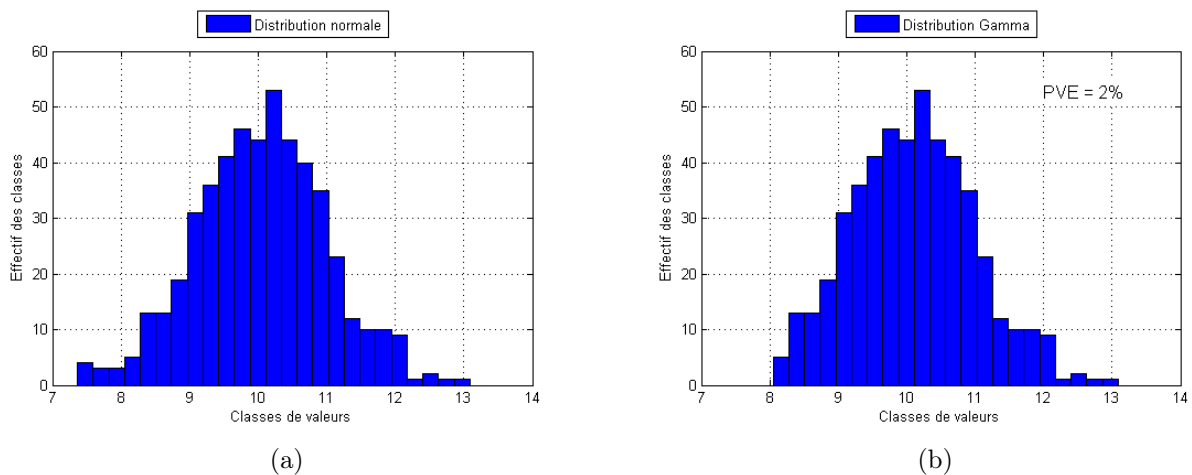


FIGURE 4.8: Histogrammes des distributions statistiques testées : (a) référence, (b) nouvelle distribution 1 (PVE=2 %)

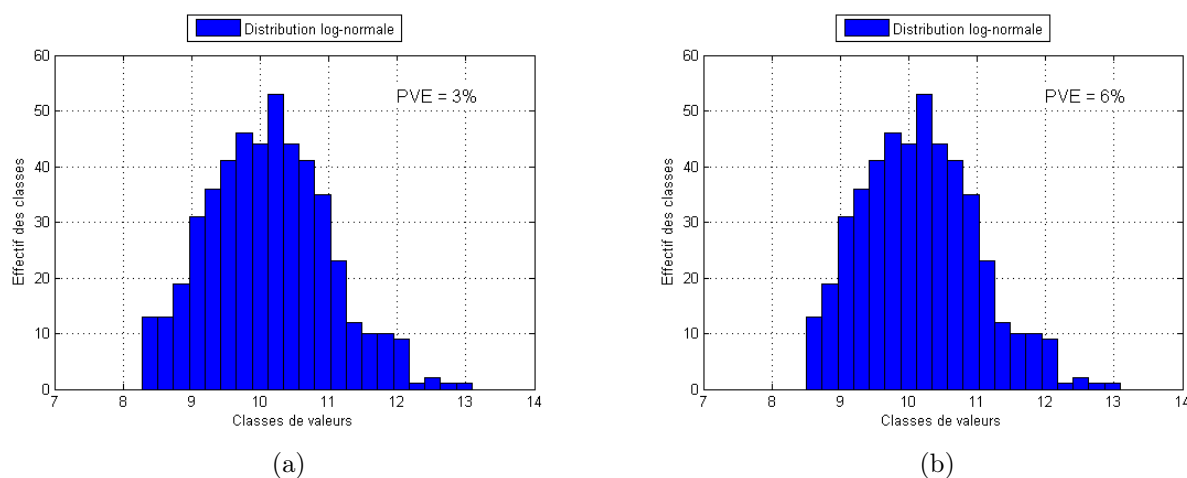


FIGURE 4.9: Histogrammes des distributions statistiques testées : (a) nouvelle distribution 2 (PVE=3 %), (b) nouvelle distribution 3 (PVE=6 %)

Échantillon analysé	Résultats du test de Kolmogorov		Valeur tabulée
Distribution normale de référence	N : 0,0187 G : 0,0294 LN : 0,0357 m : 10,0469	U : 0,2349 W : 0,0593 R : 0,4608 σ : 0,9453	0,0608
PVE=2%	N : 0,0221 G : 0,0175 LN : 0,0229 m : 10,0951	U : 0,2784 W : 0,0660 R : 0,4775 σ : 0,8916	0,0614
PVE=3%	N : 0,0264 G : 0,0219 LN : 0,0197 m : 10,1151	U : 0,2954 W : 0,0687 R : 0,4864 σ : 0,8739	0,0617
PVE=6%	N : 0,0335 G : 0,0314 LN : 0,0298 m : 10,1623	U : 0,3134 W : 0,0775 R : 0,5034 σ : 0,8374	0,0626

TABLE 4.6: Sensibilité du test de Kolmogorov à l'allure de la distribution de l'échantillon

Cette étude confirme la sensibilité du test de Kolmogorov à l'allure de la distribution de l'échantillon analysé. En effet, il suffit que seulement 2 % des valeurs de la distribution de référence soient retirées dans une même zone pour que le test identifie une distribution différente de celle de référence, même si globalement, cette nouvelle distribution est quasiment identique à celle-ci.

Afin de limiter l'influence du choix du test statistique, la représentativité des entrées est par la suite étudiée en employant un autre test d'hypothèse, le test du χ^2 .

4.3.1.2 Utilisation du test du χ^2 dans l'étude de la représentativité des entrées

Dans cette nouvelle étude, le risque d'erreur α du test du χ^2 est choisi à 5 % et les distributions théoriques testées sont identiques à celles abordées précédemment. Afin que la condition d'applicabilité de ce test soit satisfaite, il a fallu grouper les valeurs des échantillons analysés en un nombre k de classes. Ainsi, pour les échantillons de taille 10, leurs valeurs ont été groupées en 2 classes, pour ceux de taille 50 en 4 classes et pour le reste des échantillons en 5 classes. La valeur tabulée $\chi^2_{k-1}(\alpha)$ avec laquelle se compare celle calculée par le test dépend du risque d'erreur ainsi que du nombre de classes, Tableau 4.7.

Taille échantillons	k	$\chi^2_{k-1}(\alpha)$
10	2	3,84
50	4	7,82
100, 200, 300 et 1000	5	9,49

TABLE 4.7: Valeurs tabulées pour chaque nombre de classes

Comme précédemment, les distributions statistiques retenues par ce test sont ensuite comparées avec celles de référence de taille 1000 afin d'apprécier leur représentativité et sont données dans le Tableau 4.8. En ce qui concerne la valeur du paramètre calculé par ce nouveau test pour chacune des six distributions statistiques théoriques testées, le lecteur peut consulter cette fois-ci l'annexe D.

Taille du fichier des entrées	Résultats du test du χ^2 pour chacune des cinq entrées				
	E_f	E_m	ν_f	ν_m	V_f
10_set1	U	G	N	LN	LN
10_set2	G	W	G	N	W
10_set3	W	W	LN	N	G
50_set1	W	N	LN	N	W
50_set2	W	LN	N	N	LN
50_set3	W	G	G	W	N
100_set1	W	LN	N	W	LN
100_set2	G	LN	W	N	N
100_set3	N	LN	LN	LN	LN
200_set1	N	G	G	N	LN
200_set2	LN	LN	N	N	N
200_set3	N	LN	LN	N	LN
300_set1	G	G	N	LN	N
300_set2	G	LN	LN	LN	LN
300_set3	N	G	N	LN	N
1000	N	LN	N	LN	G

TABLE 4.8: Distribution statistique théorique retenue pour chaque entrée de chaque fichier analysé

Les résultats obtenus à travers ce nouveau test ne sont que partiellement identiques à ceux obtenus par le test de Kolmogorov. Nous identifions donc une sensibilité des résultats au test d'hypothèse employé.

Comme avec le test de Kolmogorov, la sensibilité du test du χ^2 par rapport à l'allure de la distribution de l'échantillon analysé est aussi étudiée. Nous considérons pour cela le même exemple que celui employé dans le cas du test de Kolmogorov. Le risque d'erreur du test est choisi à 5 % et les valeurs des échantillons analysés sont groupées en 5 classes. Les résultats obtenus, Tableau 4.9, montrent que ce test présente aussi une sensibilité significative à l'allure de la distribution de l'échantillon analysé.

Échantillon analysé	Résultats du test du χ^2		Valeur tabulée
Distribution normale de référence	N : 1,5071 G : 2,1102 LN : 3,4042 m : 10,0469	U : 306,6400 W : 26,8165 R : 1,34e+3 σ : 0,9453	9,49
PVE=2%	N : 0,9451 G : 0,7057 LN : 1,2550 m : 10,0951	U : 257,9592 W : 25,9048 R : 1,39e+3 σ : 0,8916	9,49
PVE=3%	N : 2,2879 G : 1,3549 LN : 1,5240 m : 10,1151	U : 240 W : 27,9614 R : 1,36e+3 σ : 0,8739	9,49
PVE=6%	N : 1,5709 G : 1,0863 LN : 1,2327 m : 10,1623	U : 228,2119 W : 19,4448 R : 1,31e+3 σ : 0,8374	9,49

TABLE 4.9: Sensibilité du test de χ^2 à l'allure de la distribution de l'échantillon

Après toutes ces études nous pouvons conclure que le type de la distribution statistique identifiée pour les valeurs d'une entrée de taille quelconque dépend de la façon dont elles sont prélevées parmi les valeurs de la distribution de référence ainsi que du test d'hypothèse employé.

4.3.1.3 Hypothèse simplificatrice pour la représentativité des entrées

Le problème de la représentativité des entrées n'est pas encore résolu. Bien que dans notre travail la distribution de référence de chacune des entrées soit connue et décrite par les 1000 valeurs, rappelons que l'intérêt de ce travail est de donner une solution générale au problème, sans connaître avec précision la distribution de référence.

Ayant soulevé ce problème et sachant qu'en général les mesures de grandeurs physiques sont susceptibles de s'organiser selon une distribution normale, nous recommandons de faire l'hypothèse simplificatrice de considérer les distributions des variables d'entrée situées dans le fichier d'apprentissage comme normales et que leur distribution de référence est supposée connue et également normale. Les moyennes, écart-types ainsi que les limites du domaine de variation des distributions de référence sont supposés identiques à ceux déterminés pour

les distributions des entrées situées dans le fichier d'apprentissage. Les distributions peuvent donc être enrichies par des tirages aléatoires en conformité à l'hypothèse énoncée précédemment.

Malgré les risques que cette hypothèse comporte, nous considérons que c'est le meilleur moyen de résoudre ce problème de la représentativité des entrées en l'absence de la connaissance de la distribution de référence.

Pour rechercher le nombre minimal de valeurs des entrées situées dans le fichier d'apprentissage nécessaire et suffisant pour être représentatif, plusieurs tirages aléatoires sont considérés suivant une distribution normale de moyenne 10 et d'écart-type 1. Les tailles des tirages sont de 10, 50, 100, 200, 300, 500, 1000, 5000 et 10 000. Pour chaque tirage, la moyenne et l'écart-type sont calculés et la confirmation du type de la distribution est faite à l'aide du test de Kolmogorov dont le niveau de risque est choisi à 5 %, Tableau 4.10.

Taille du tirage	Moyenne / Écart-type	Résultats du test de Kolmogorov		Valeur tabulée
10	m=9,9814 ; $\sigma = 0,5801$	N : 0,1730 G : 0,1881 LN : 0,1775	U : 0,2082 W : 0,1776 R : 0,5700	0,4092
50	m=10,0379 ; $\sigma = 0,9983$	N : 0,0965 G : 0,1094 LN : 0,1143	U : 0,2589 W : 0,1141 R : 0,4682	0,1884
100	m=10,1446 ; $\sigma = 0,9625$	N : 0,0764 G : 0,0825 LN : 0,0836	U : 0,1914 W : 0,0904 R : 0,4982	0,1340
200	m=9,9808 ; $\sigma = 0,9922$	N : 0,0467 G : 0,0527 LN : 0,0592	U : 0,2837 W : 0,0832 R : 0,4615	0,0961
300	m=10,0193 ; $\sigma = 0,9811$	N : 0,0226 G : 0,0257 LN : 0,0314	U : 0,1957 W : 0,0556 R : 0,4559	0,0785
500	m=10,0469 ; $\sigma = 0,9453$	N : 0,0187 G : 0,0294 LN : 0,0357	U : 0,2349 W : 0,0593 R : 0,4608	0,0608
1000	m=10,0260 ; $\sigma = 0,9601$	N : 0,0190 G : 0,0260 LN : 0,0308	U : 0,2109 W : 0,0435 R : 0,4593	0,0430
5000	m=10,0201 ; $\sigma = 0,9949$	N : 0,0082 G : 0,0171 LN : 0,0238	U : 0,2432 W : 0,0505 R : 0,4514	0,0192
10 000	m=10,0017 ; $\sigma = 0,9915$	N : 0,0071 G : 0,0174 LN : 0,0238	U : 0,2404 W : 0,0481 R : 0,4525	0,0136

TABLE 4.10: Tirages de différentes tailles d'une distribution normale

Les tirages pour les séries de petites tailles soit 10 et 50 ont été réalisés plusieurs fois. Dans la plupart des cas, il a été constaté que la moyenne et l'écart-type de l'échantillon de taille 10, estimés après tirage, ne sont pas identiques aux paramètres initialement imposés tandis que pour celui de taille 50 ces paramètres sont beaucoup plus proches.

Par conséquent, la taille minimale de l'échantillon à partir de laquelle une bonne représentativité de la moyenne et de l'écart-type de la distribution de référence est atteinte, est 50. Il faudrait donc au moins disposer de ce nombre de données par paramètre d'entrée. Néanmoins, ce nombre reste quand même élevé lorsque les valeurs des cinq entrées s'obtiennent par des mesures expérimentales.

Selon le critère de représentativité adopté, la construction des distributions de référence d'entrée, réalisée par des tirages aléatoires, doit être effectuée sur la base de moyennes et écart-types identiques à ceux identifiés pour les fichiers d'apprentissage de taille 50. Ces tirages doivent, en plus, se limiter au domaine de variation des entrées situées dans le fichier d'apprentissage. L'importance de cet aspect sera discutée par la suite.

Les entrées de référence ainsi obtenues sont ensuite injectées dans le réseau de neurones après apprentissage pour l'obtention des distributions statistiques des 6 sorties qui caractérisent le comportement équivalent de la cellule.

Après s'être intéressé à la représentativité des entrées, l'approximation des distributions des sorties réalisée à travers le réseau de neurones est présentée dans le paragraphe suivant.

4.3.2 L'approximation des distributions des sorties après apprentissage

Les distributions statistiques représentant les sorties obtenues après apprentissage par le réseau de neurones sont analysées dans ce paragraphe. L'apprentissage est fait pour toutes les TFA et sets considérés précédemment. Pour l'obtention des distributions statistiques des sorties, les 1000 valeurs des entrées (obtenues par EF) sont injectées dans le réseau après chaque apprentissage.

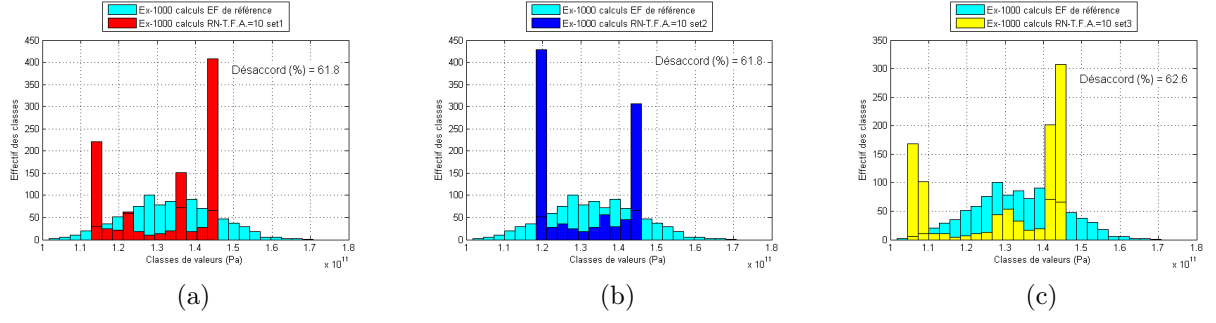
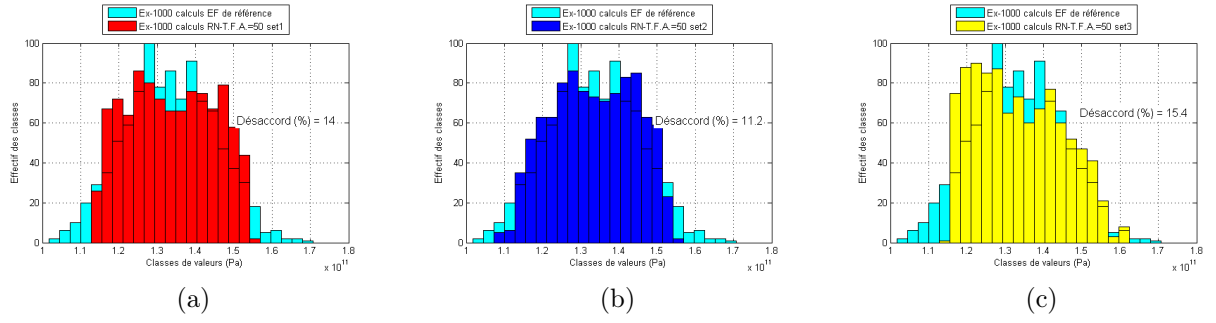
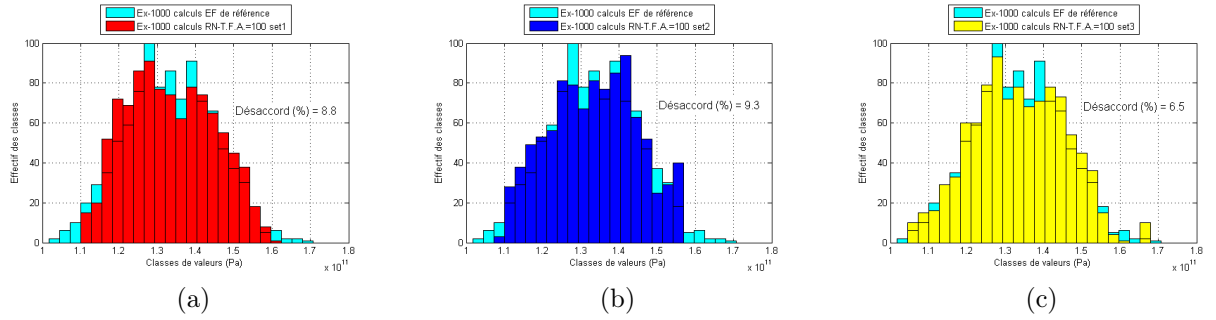
La structure du réseau de neurones utilisé est [5,9,6]. Elle correspond à 5 entrées (Φ , E_f , ν_f , E_m , ν_m), une couche cachée contenant neuf neurones et six sorties (E_x , E_y , G_{xy} , G_{yz} , ν_{xy} , ν_{yz}).

Les Figures 4.10 - 4.14 représentent les histogrammes des distributions obtenues pour E_x avec tous les différents fichiers d'apprentissage utilisés. Quant aux autres sorties, leurs histogrammes sont donnés dans l'annexe B.

La différence entre la distribution de référence et celle approximée est quantifiée grâce à un indicateur développé dans ce travail, appelé désaccord, exprimé en pourcents, qui se calcule à l'aide de l'expression 4.1 :

$$Désaccord (\%) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{25} |n_{Référence}(i) - n_{RN}(i)|}{1000} * 100 \quad (4.1)$$

où $n_{Référence}(i)$ et $n_{RN}(i)$ sont respectivement le nombre de valeurs situées dans la classe i pour la distribution de référence et le nombre de valeurs situées dans la même classe pour la distribution approximée par le réseau de neurones. Ce paramètre est calculé par rapport à l'ensemble (2000) des valeurs des deux distributions : de référence et approximée. Il permet d'apprécier le nombre de valeurs qui manquent et qui sont en plus par rapport à la distribution de référence.


 FIGURE 4.10: Histogrammes des distributions de E_x pour une TFA de 10

 FIGURE 4.11: Histogrammes des distributions de E_x pour une TFA de 50

 FIGURE 4.12: Histogrammes des distributions de E_x pour une TFA de 100

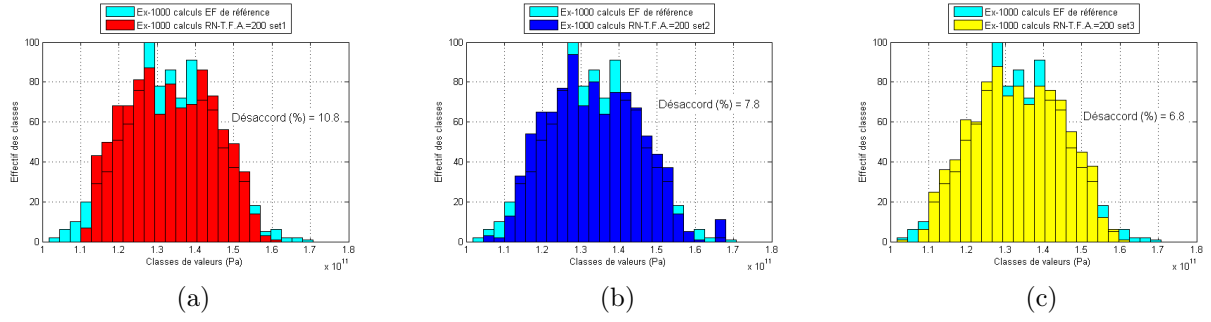


FIGURE 4.13: Histogrammes des distributions de E_x pour une TFA de 200

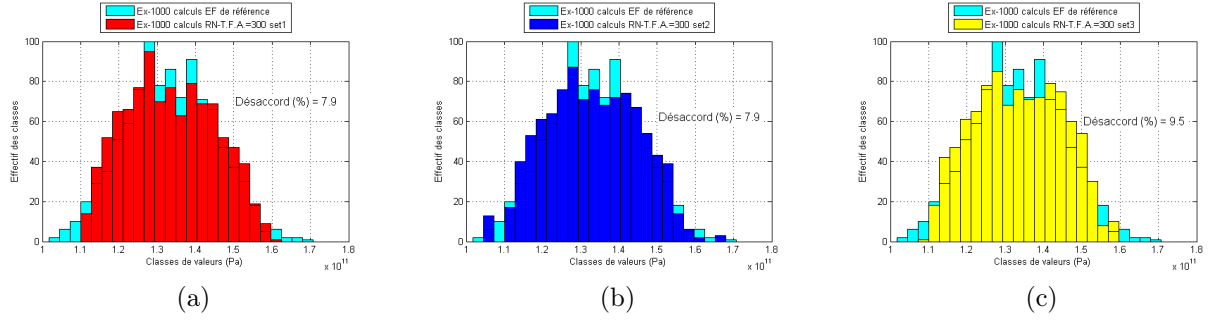


FIGURE 4.14: Histogrammes des distributions de E_x pour une TFA de 300

Il est remarquable de constater que pour une TFA de 10, l'approximation soit très mauvaise. La distribution approximée enregistre un désaccord par rapport à celle de référence d'environ 60 %. Cela peut être attribué à la pauvreté des informations situées dans le fichier d'apprentissage.

L'approximation correspondante à des fichiers d'apprentissage de taille supérieure (50, 100, 200, 300) est meilleure. Ce résultat attendu est normal puisque lorsque la base d'apprentissage devient plus riche, la qualité de l'approximation devient également meilleure.

Il est aussi observable que pour une TFA de 10, la majorité des valeurs de la distribution approximée sont concentrées uniquement dans quelques classes de valeurs localisées principalement sur les extrémités. L'hypothèse retenue concerne le rôle de la fonction sigmoïde qui est utilisée dans le réseau de neurones et qui permet de donner des résultats stationnaires en dehors de la zone d'apprentissage.

Afin de vérifier cette hypothèse, nous nous plaçons dans un cas d'apprentissage pour lequel les expressions analytiques de deux fonctions de référence à approximer sont parfaitement connues, relations 4.2 et 4.3. Ce choix permet d'introduire une fonction linéaire et non-linéaire.

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3 \quad (4.2)$$

$$z = 4x + 1 \quad (4.3)$$

Un ensemble de 100 valeurs pour x est créé en allant de 1 à 100. Pour chacune d'entre elles, les fonctions y et z sont calculées, les valeurs ainsi obtenues constituant les distributions de référence. Elles seront utilisées pour apprécier la qualité de l'approximation issue du réseau de neurones.

Un réseau de neurones de structure $[1,4,2]$ est utilisé afin de réaliser cette approximation. Cette structure correspond à une entrée pour la variable x , une couche cachée contenant quatre neurones et deux sorties pour y et z . Six fichiers d'apprentissage de différentes tailles sont considérés : TFA=2, 5, 7, 10, 20 et 50, en balayant à chaque fois une zone d'apprentissage différente sur le domaine des fonctions de référence représenté par $x \in [1, 100]$. Après la phase d'apprentissage, les résultats de l'approximation pour les deux sorties y et z sont comparés à ceux de la référence et donnés dans les Figures 4.15 et 4.16.

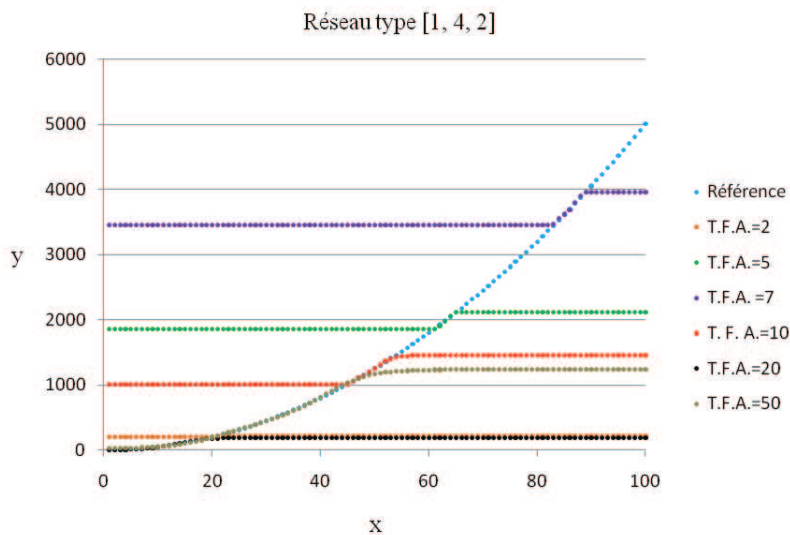


FIGURE 4.15: Approximation de la fonction analytique de référence y

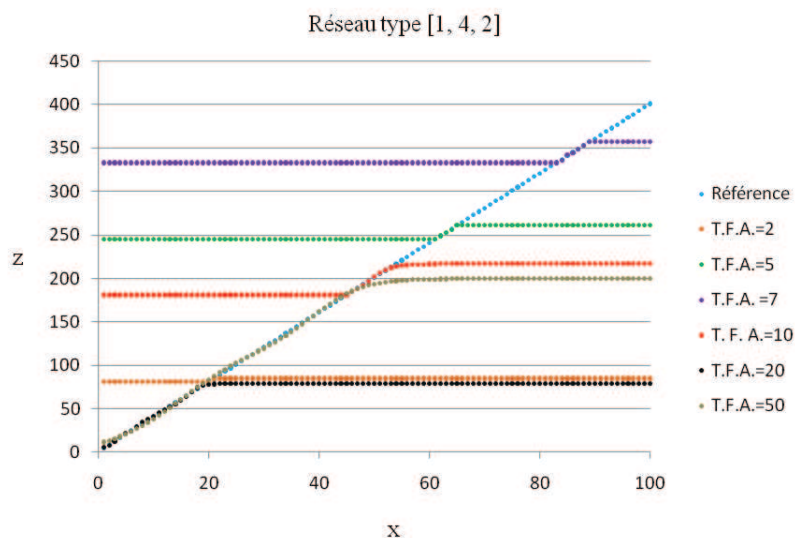


FIGURE 4.16: Approximation de la fonction analytique de référence z

Il est remarquable de constater que quelle que soit la taille du fichier d'apprentissage utilisé, la zone dont la fonction approximée se confond avec celle de référence correspond à la zone d'apprentissage tandis que la zone de désaccord est associée à un domaine complémentaire sur lequel aucun apprentissage n'a été réalisé.

Ainsi, pour toutes les valeurs de x qui sont injectées dans le réseau après l'apprentissage, appartenant à la zone complémentaire, le réseau n'est pas capable de généraliser des réponses pour y et z de manière à les faire suivre leurs courbes de référence, puisqu'il n'a pas appris sur cette zone.

Néanmoins, la façon dont le réseau génère ces réponses dans la zone complémentaire n'est pas quelconque. En effet, dès-que les limites du domaine d'apprentissage sont dépassées, les valeurs générées par le réseau deviennent constantes au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ces limites. L'explication de ce fait est que la fonction d'activation des neurones appartenant à la couche de sortie est la fonction sigmoïde évoquée plus haut. Pendant l'apprentissage, cette fonction est adaptée à la fonction de référence, sur la zone d'apprentissage. En dehors de cette zone, cette fonction n'étant pas adaptée à la fonction de référence, elle suit son allure normale de sigmoïde, Figure 1.12. Cela explique le cumul de valeurs constantes aux limites du domaine étudié en provoquant dans les histogrammes deux classes importantes à ses deux extrémités, comme en témoigne la Figure 4.17, où sont représentés les histogrammes pour y et z dans le cas de l'apprentissage pour TFA=10.

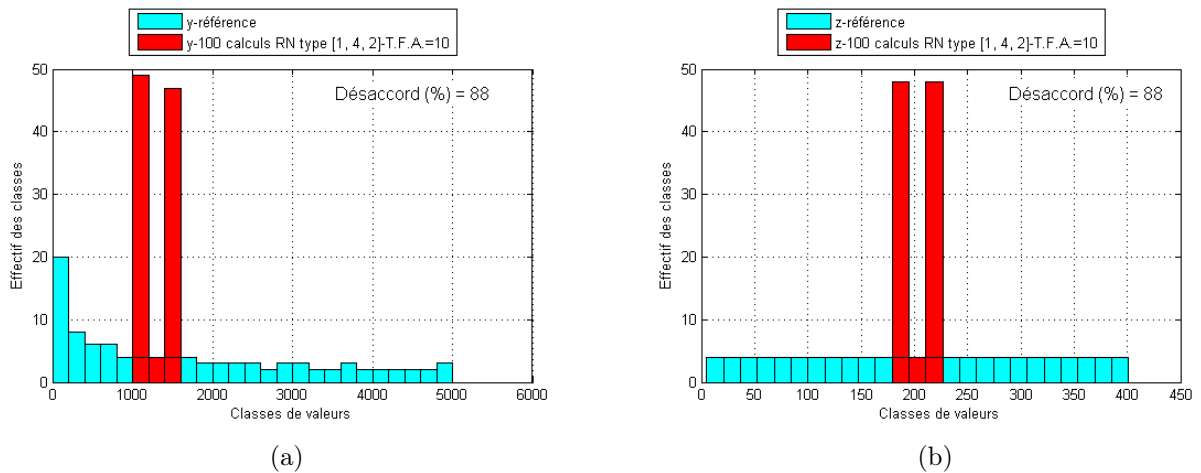


FIGURE 4.17: Histogrammes des distributions de référence et celles approximées : (a) y , (b) z

Une vérification est également proposée pour une fonction z plus complexe (description tridimensionnelle), relation 4.4, dépendant de deux variables x et y et dont l'expression analytique est simplement le produit des deux précédentes :

$$z = \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)(4y + 1) \quad (4.4)$$

Les variables x et y prennent des valeurs de 1 à 100 et pour chaque paire (x,y) la fonction z est ensuite évaluée. Pour l'approximation de cette fonction analytique, un réseau de neurones de structure $[2,3,1]$ est employé. Cela correspond à deux entrées (x, y) , une

couche cachée à trois neurones et une sortie z . Le fichier d'apprentissage est choisi de sorte qu'il balaie le domaine de la fonction analytique de référence sur la zone comprise entre les valeurs 40 à 60 de chacune des variables d'entrée x et y . Le graphique de cette fonction ainsi que celui de son approximation sont donnés respectivement dans les Figures 4.18 et 4.19. Les histogrammes associés sont présentées dans la Figure 4.20.

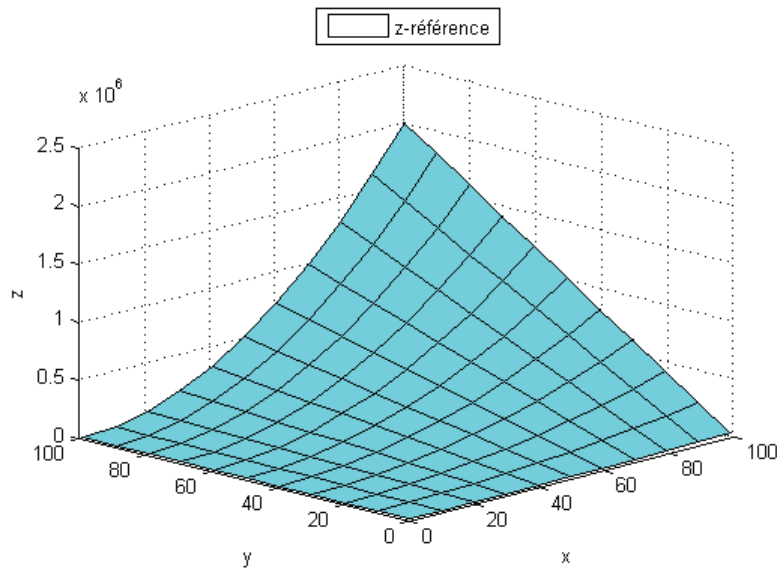


FIGURE 4.18: Fonction analytique de référence z

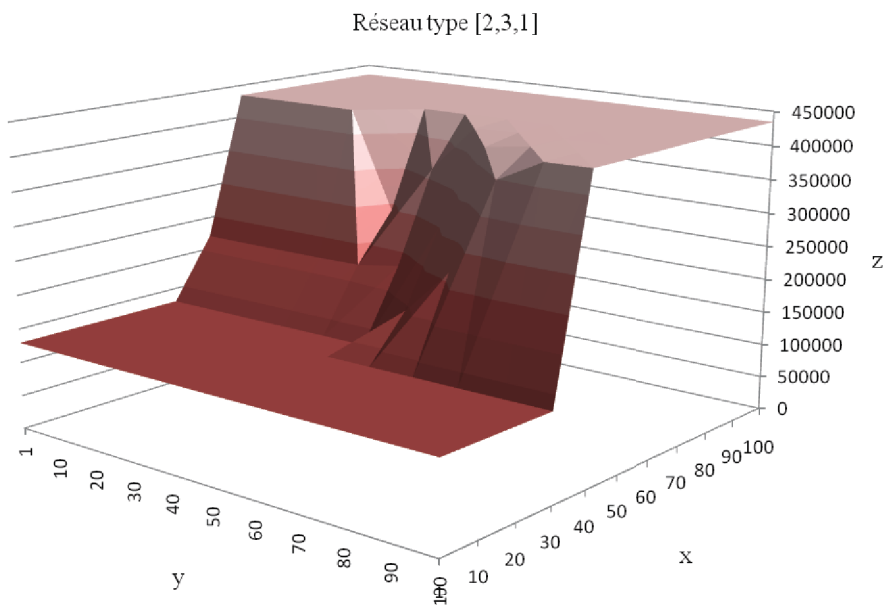


FIGURE 4.19: Approximation de la fonction analytique de référence z

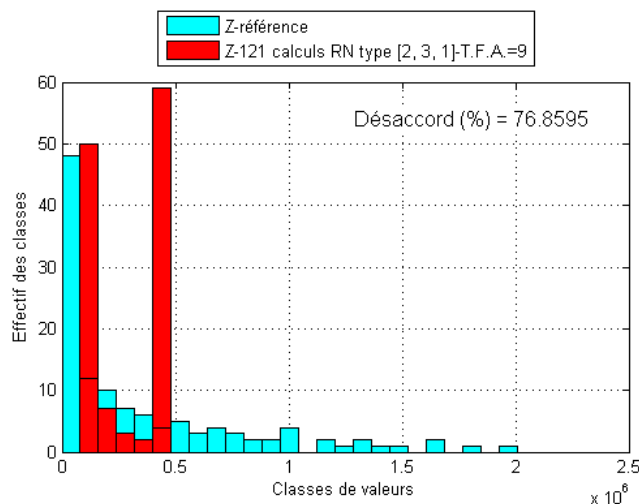


FIGURE 4.20: Histogrammes de la fonction de référence et celle approximée

Le graphique de la fonction approximée présente un creux correspondant au domaine sur lequel l'apprentissage est effectué tandis qu'en dehors de cette zone il présente une allure sigmoïde.

Les investigations faites sur ces exemples particuliers nous permettent de conclure que les valeurs des entrées qui sont introduites dans le réseau en dehors de la zone d'apprentissage vont produire des sorties probablement erronées. L'extrapolation est donc à proscrire. Cela implique également qu'il faut veiller à ce que les tirages aléatoires des données d'entrée (pour construire les distributions de référence) se fasse bien dans le domaine de l'apprentissage.

D'autre part, il faut souligner que le temps de calcul nécessaire à l'obtention de la distribution du comportement équivalent de la cellule de type 6 est fortement diminué par l'utilisation du réseau de neurones. Il est d'environ 20 heures pour 1000 calculs numériques EF et d'environ une heure dans le cas d'un apprentissage réalisé avec un fichier de taille 50. La réduction du temps de calcul est dans ce cas d'environ 95 %.

Dans le paragraphe suivant, nous allons étudier quels sont les facteurs influents sur la qualité de l'approximation par réseau de neurones.

4.3.3 Qualité de l'approximation

Dans ce paragraphe nous allons étudier les paramètres qui influent la qualité de l'approximation dont : la répartition des points d'apprentissage par rapport au domaine de la fonction de référence ainsi que la structure du réseau de neurones, notée SRN par la suite.

Afin de pouvoir plus facilement fournir des interprétations graphiques, l'étude de ces paramètres est réalisée en considérant des cas particuliers de fonctions de référence à une variable. Ces fonctions sont celles utilisées précédemment et rappelées dans les relations 4.2 et 4.3.

4.3.3.1 Influence de la répartition des points d'apprentissage par rapport au domaine de la fonction de référence

Nous avons vu dans le paragraphe 4.3.2 que lorsque les points d'apprentissage couvrent uniquement une zone restreinte du domaine de la fonction de référence, l'approximation est

correcte sur cette zone tandis qu'en dehors le modèle est inexploitable. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons donc à l'influence de la répartition des points d'apprentissage sur l'ensemble du domaine sur la qualité de l'approximation.

Deux situations extrêmes sont alors considérées : la première où les points d'apprentissage sont équirépartis sur tout le domaine de la fonction de référence, Figure 4.21, et la deuxième situation lorsque ces points sont équirépartis sur les extrémités de son domaine, Figure 4.23. Les histogrammes correspondant à ces deux situations sont donnés respectivement dans les Figures 4.22 et 4.24.

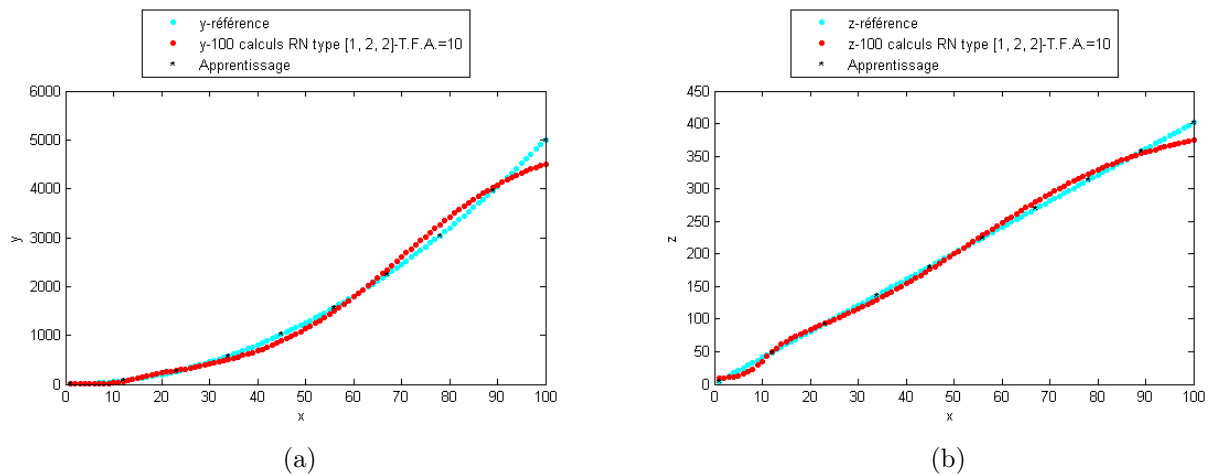


FIGURE 4.21: Points équirépartis sur l'ensemble du domaine de référence : (a) y, (b) z

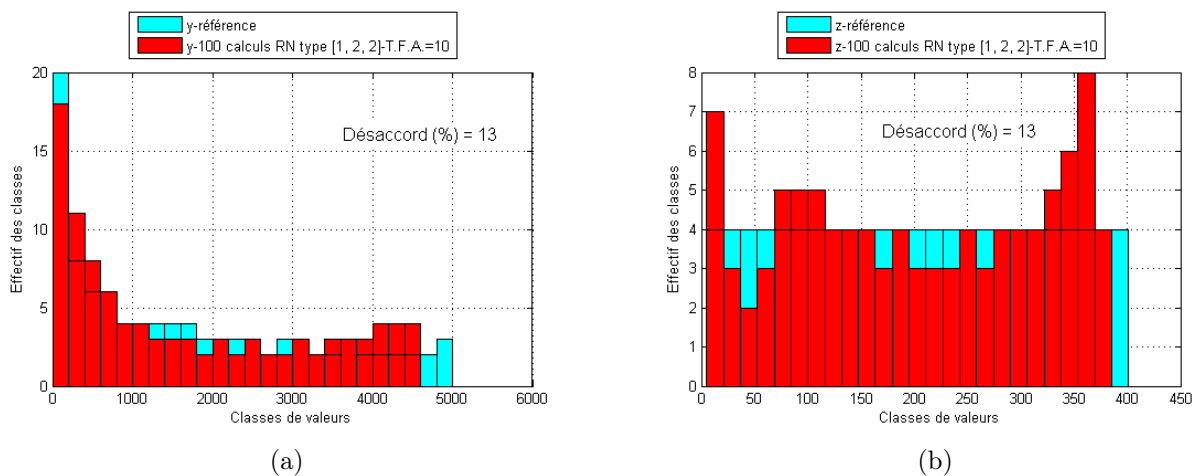


FIGURE 4.22: Points équirépartis sur l'ensemble du domaine de référence : (a) y, (b) z

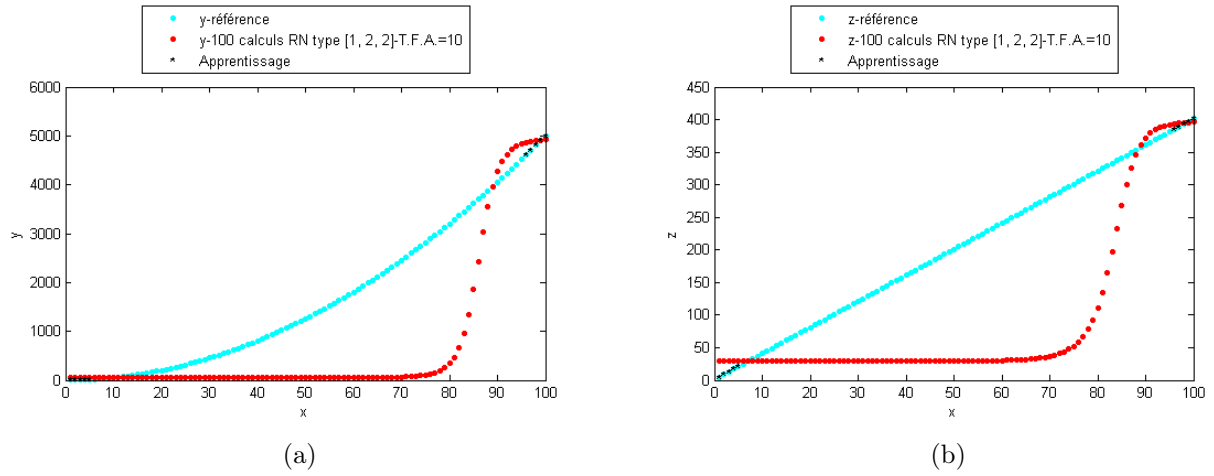


FIGURE 4.23: Points d'apprentissage répartis sur les extrémités du domaine de référence : (a) y, (b) z

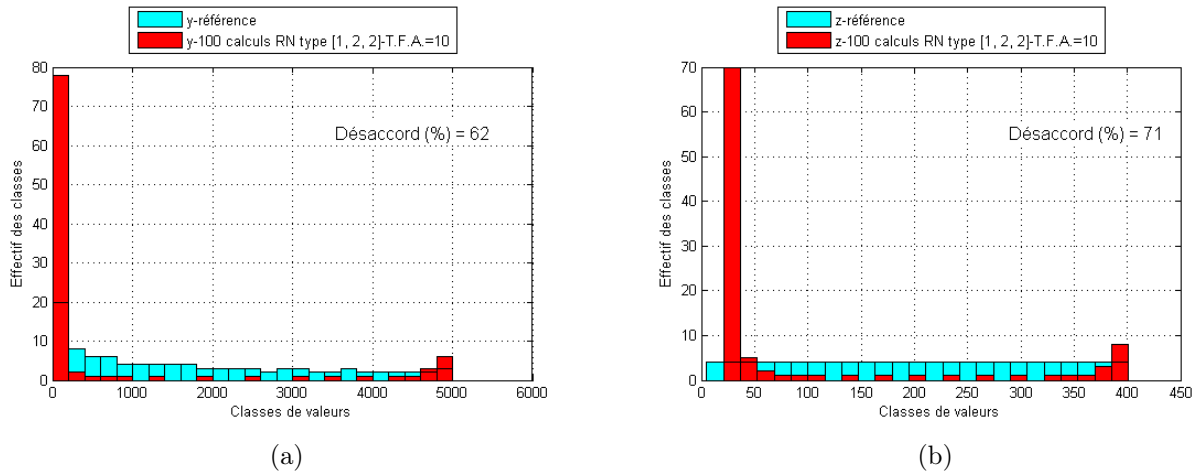


FIGURE 4.24: Points d'apprentissage répartis sur les extrémités du domaine de référence : (a) y, (b) z

La qualité de l'approximation est évidemment meilleure dans la première situation où les points d'apprentissage sont distribués uniformément sur le domaine de la fonction de référence. Il est donc important que les entrées situées dans le fichier d'apprentissage aient une répartition la plus uniforme possible entre leurs valeurs extrêmes.

Le fait de considérer un nombre minimal de 50 valeurs pour chacune des cinq entrées doit permettre statistiquement d'appliquer cette équirépartition.

4.3.3.2 Influence de la structure du réseau de neurones

Comme il a été présenté au chapitre 1, à chaque SRN correspond un nombre de poids synaptiques. Ils sont l'équivalent des coefficients à déterminer pour un polynôme. Si leur

nombre augmente, cela est équivalent à dire que le degré du polynôme croît, donc qu'il sera possible d'approximer des surfaces plus complexes. Les différentes façons de faire augmenter le nombre des poids synaptiques sont : ajouter des neurones sur les couches cachées ou ajouter des couches cachées supplémentaires [37].

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'influence de la configuration de la SRN sur la qualité de l'approximation. Huit SRN sont alors considérées : $[1,2,2]$, $[1,4,2]$, $[1,6,2]$, $[1,8,2]$, $[1,12,2]$, $[1,16,2]$, $[1,2,2,2]$ et $[1,10,10,10,2]$. Toutes les SRN comportent une entrée pour la variable x et deux sorties pour y et z . Leur choix a été fait de sorte d'augmenter progressivement le nombre de poids synaptiques en ajoutant des neurones sur la couche cachée et en augmentant le nombre de couches cachées. Pour chaque SRN, le même fichier d'apprentissage est utilisé et les points d'apprentissage sont équirépartis sur le domaine de la fonction de référence. Les résultats de l'approximation des fonctions analytiques de référence y et z pour ces différentes SRN sont donnés dans les Figures 4.25 - 4.32.

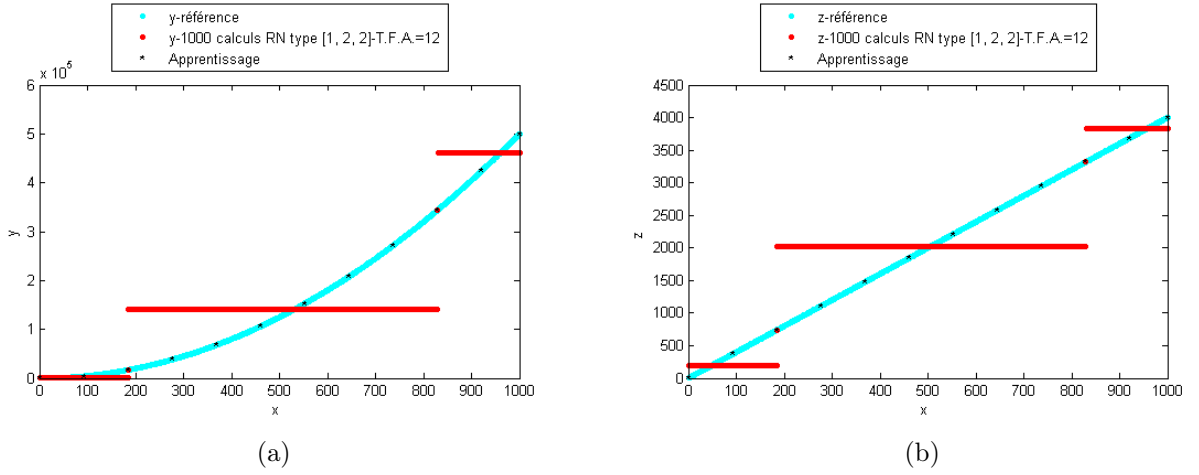


FIGURE 4.25: Réseau de neurones de structure $[1,2,2]$. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

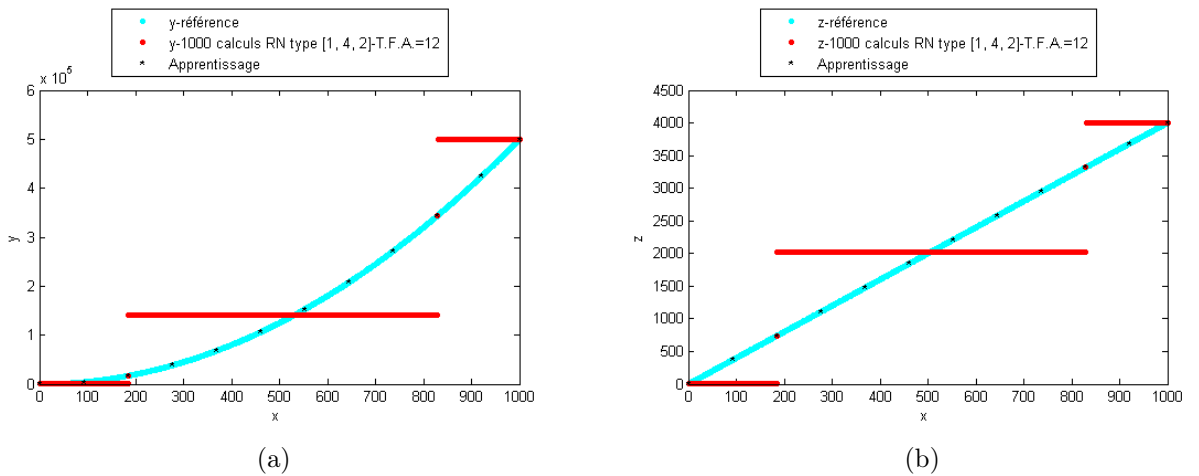


FIGURE 4.26: Réseau de neurones de structure $[1,4,2]$. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

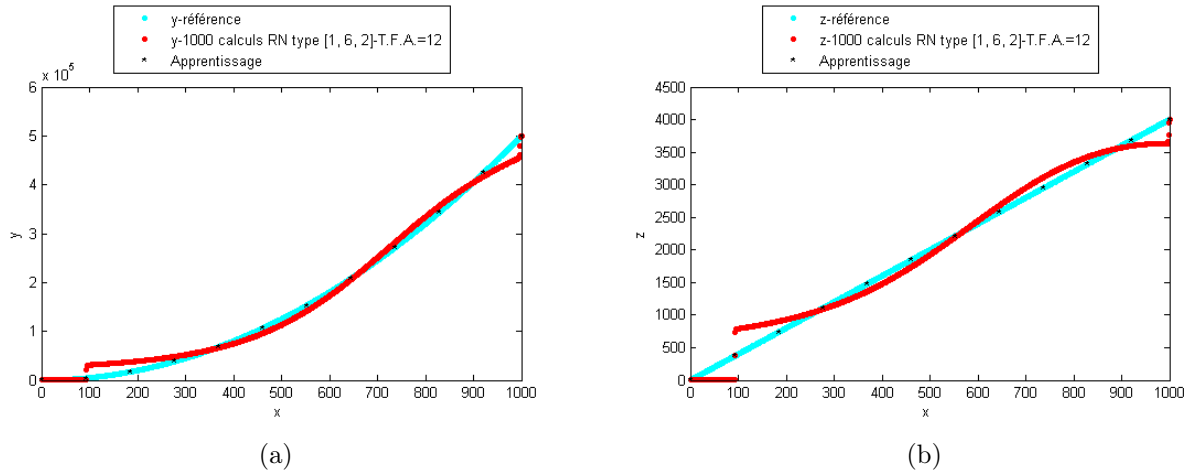


FIGURE 4.27: Réseau de neurones de structure [1,6,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

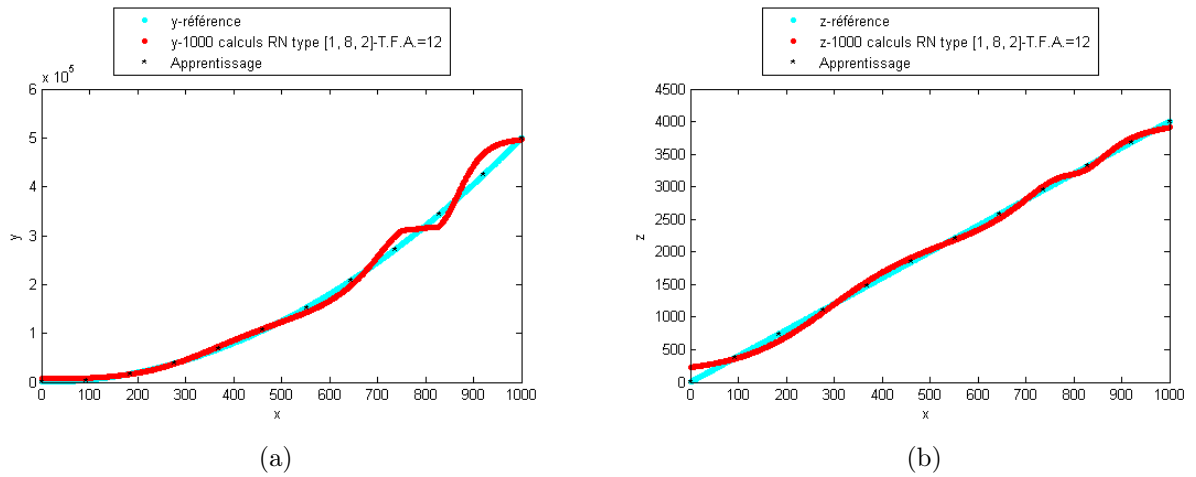


FIGURE 4.28: Réseau de neurones de structure [1,8,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

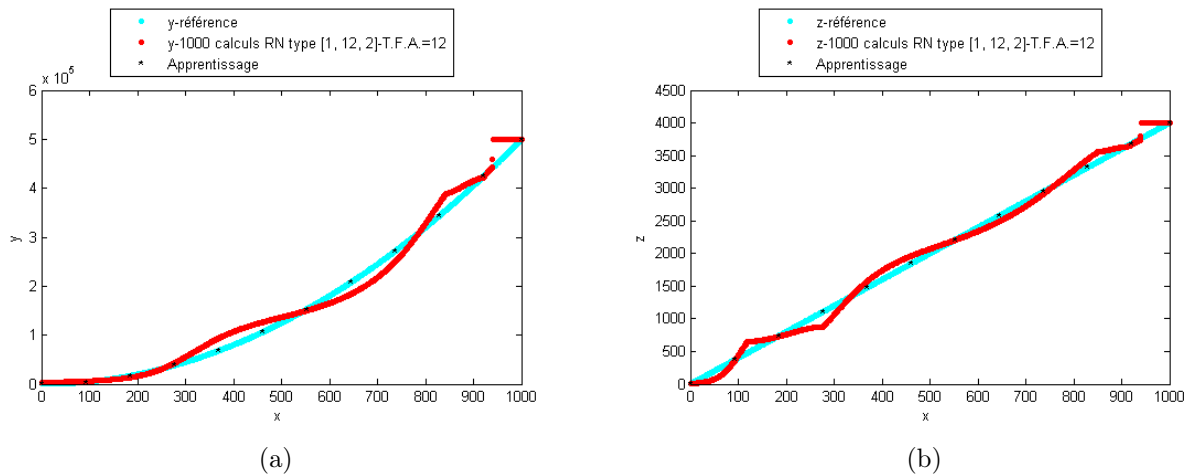


FIGURE 4.29: Réseau de neurones de structure [1,12,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

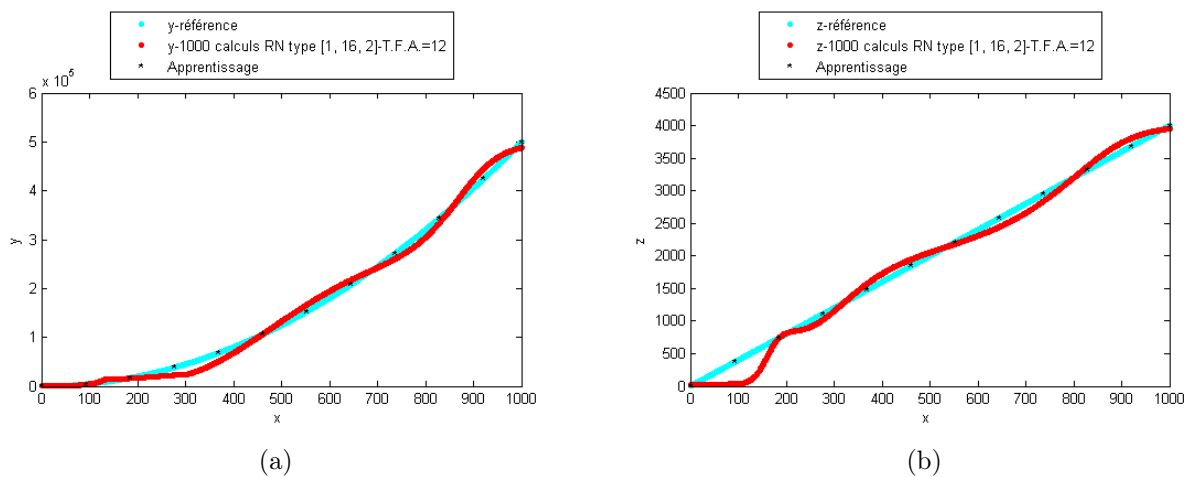


FIGURE 4.30: Réseau de neurones de structure [1,16,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

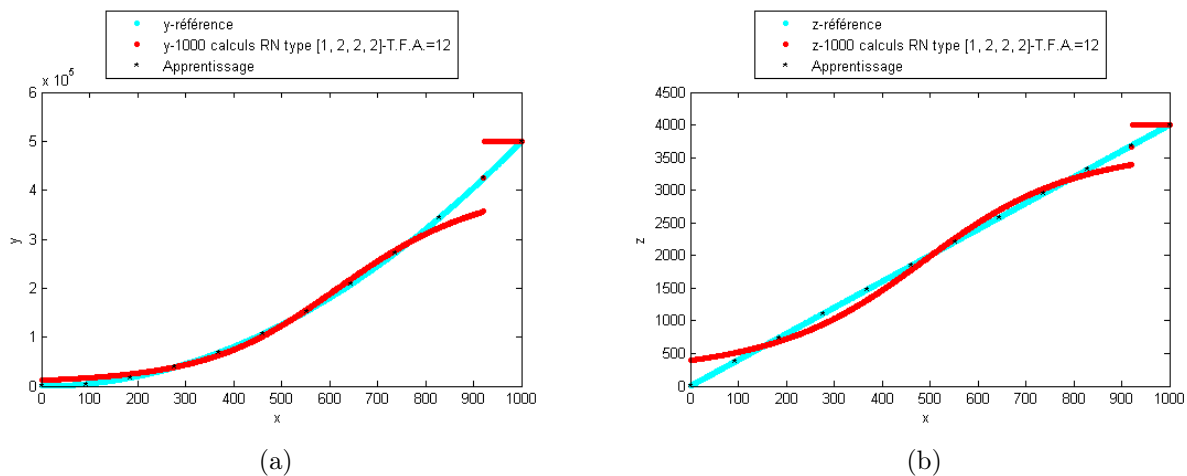


FIGURE 4.31: Réseau de neurones de structure [1,2,2,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

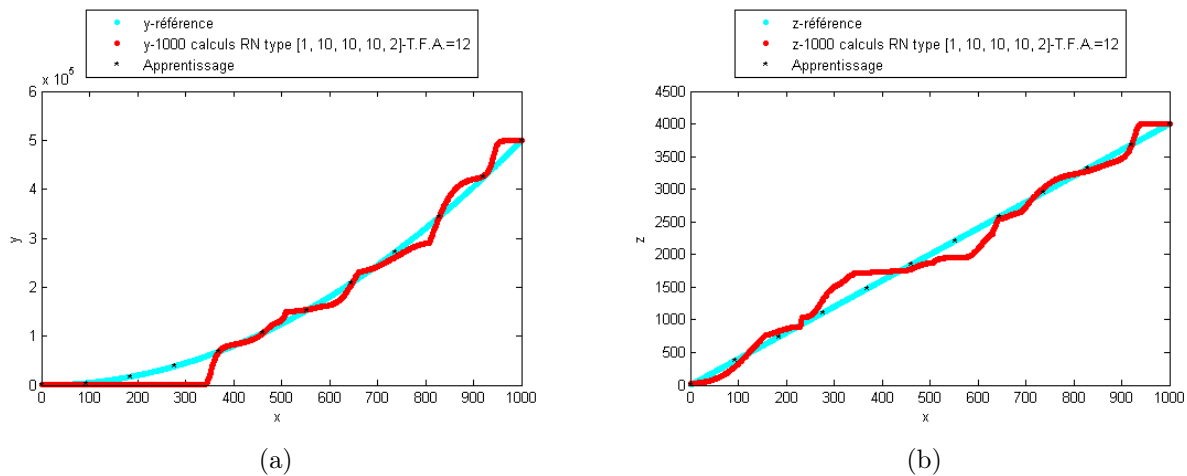


FIGURE 4.32: Réseau de neurones de structure [1,10,10,10,2]. Approximation de la fonction analytique de référence : (a) y , (b) z

Manifestement, la structure du réseau employé influe sur la qualité de l'approximation. Il faut donc choisir une structure qui produise la meilleure approximation possible. Cependant, il est impossible de donner à l'heure actuelle une règle générale qui permette d'établir la SRN la plus appropriée à l'expression analytique de la fonction de référence à approximer. Il s'avère donc nécessaire de faire plusieurs essais avec différentes SRN afin d'identifier celle qui produit la meilleure approximation.

Bien que dans notre approche la distribution de référence de chacune des six sorties issue des 1000 calculs numériques EF soit connue, nous rappelons que l'intérêt est d'obtenir une approximation sans connaissance à-priori et donc sans faire, par exemple, les 1000 calculs numériques EF.

4.3.4 Apports du réseau de neurones

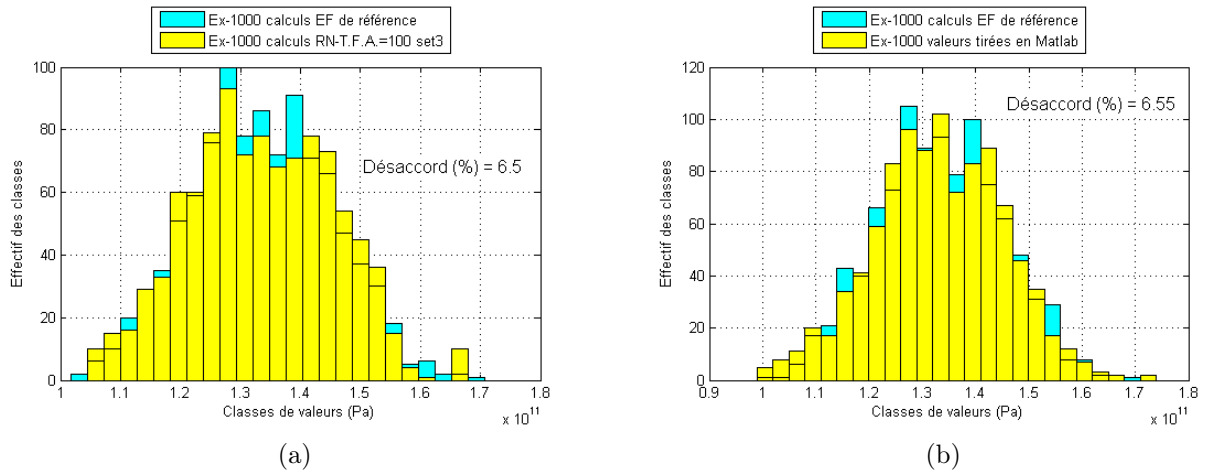
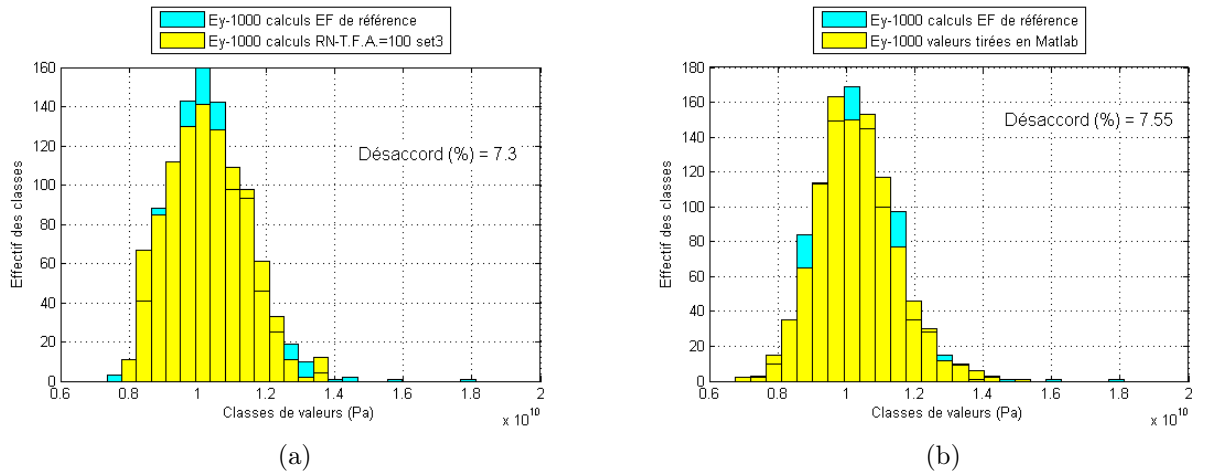
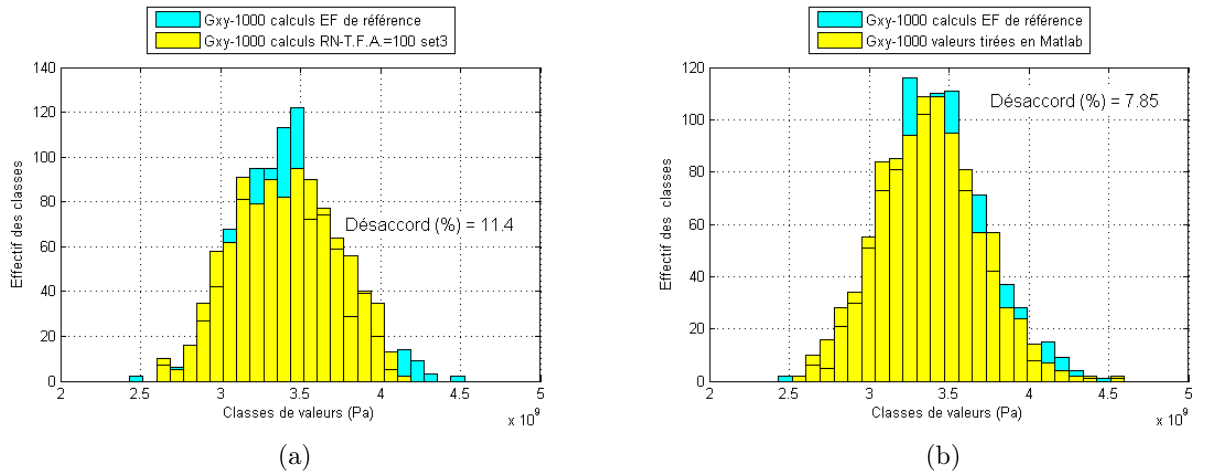
L'utilisation des réseaux de neurones apporte un autre élément fondamental dans notre démarche de construction des distributions des propriétés élastiques E_x , E_y , G_{xy} , G_{yz} , ν_{xy} et ν_{yz} . En effet, le réseau de neurones doit être vu comme représentant une fonction de transfert du matériau, qui traduit les propriétés des constituants élémentaires en propriétés homogénéisées du matériau à l'échelle des cellules, tout en gardant une cohérence physique pour les valeurs calculées. Il est cependant possible d'obtenir les distributions de sortie à l'aide d'une alternative plus rapide. En effet, celles-ci pourraient être obtenues autrement, en identifiant d'abord par un test d'hypothèse le type des distributions des sorties situées dans le fichier d'apprentissage. Puis, sans plus passer par l'apprentissage, des tirages aléatoires respectant les distributions identifiées pourraient être faits afin d'obtenir ces distributions.

La comparaison entre ces deux approches est par la suite proposée. Pour cela, un des fichiers d'apprentissage de taille 100 est choisi. Le test de Kolmogorov est employé à un niveau de risque de 5 % afin d'identifier le type de la distribution statistique de chacune des sorties. Les distributions identifiées sont données dans le Tableau 4.11.

Sorties	Distributions identifiées
E_x	N
E_y	LN
G_{xy}	G
G_{yz}	LN
ν_{xy}	LN
ν_{yz}	LN

TABLE 4.11: Distributions statistiques des sorties du fichier d'apprentissage

A partir de ces résultats, pour chacune des sorties, 1000 tirages aléatoires sont effectués avec Matlab, en respectant la distribution statistique identifiée par le test d'hypothèse. En parallèle, sont calculées les 1000 valeurs de chacune de ces sorties à travers le réseau de neurones dont l'apprentissage est fait sur le fichier d'apprentissage de taille 100. Les Figures 4.33 - 4.38 suivantes présentent les résultats de ces deux cas comparés avec la distribution de référence issue des seuls calculs par EF.


 FIGURE 4.33: Approximation E_x par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

 FIGURE 4.34: Approximation E_y par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

 FIGURE 4.35: Approximation G_{xy} par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

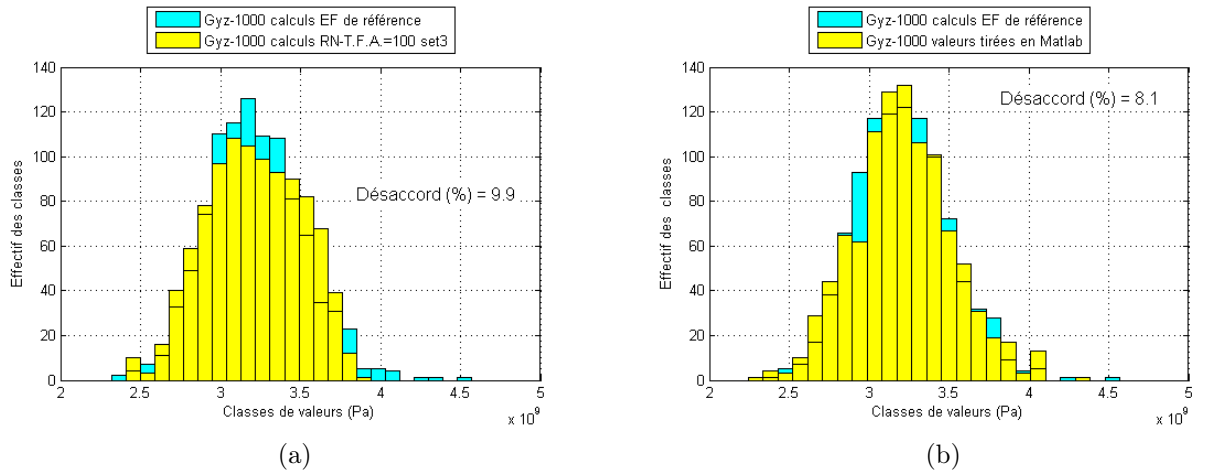


FIGURE 4.36: Approximation G_{yz} par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

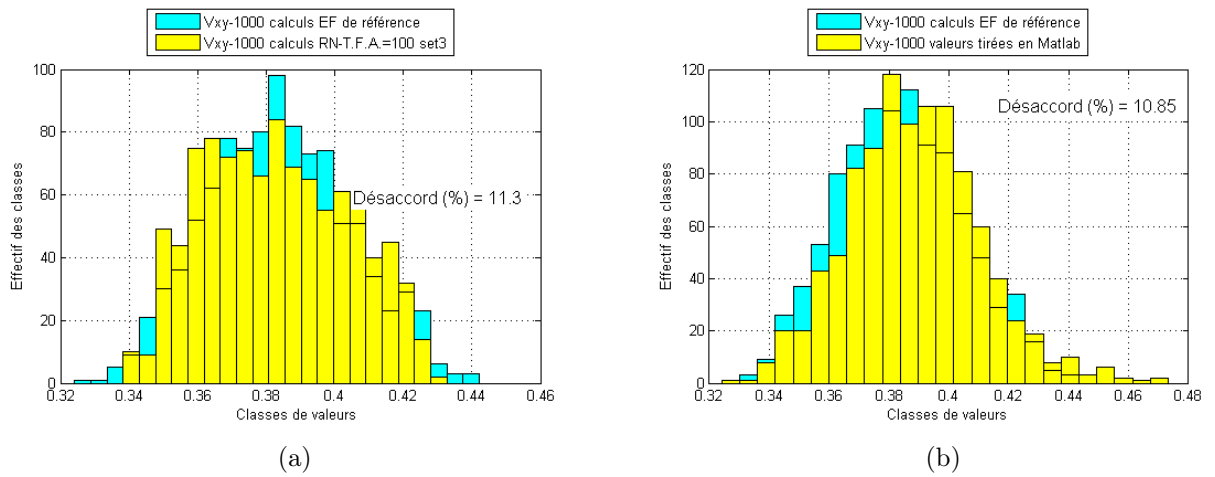


FIGURE 4.37: Approximation ν_{xy} par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

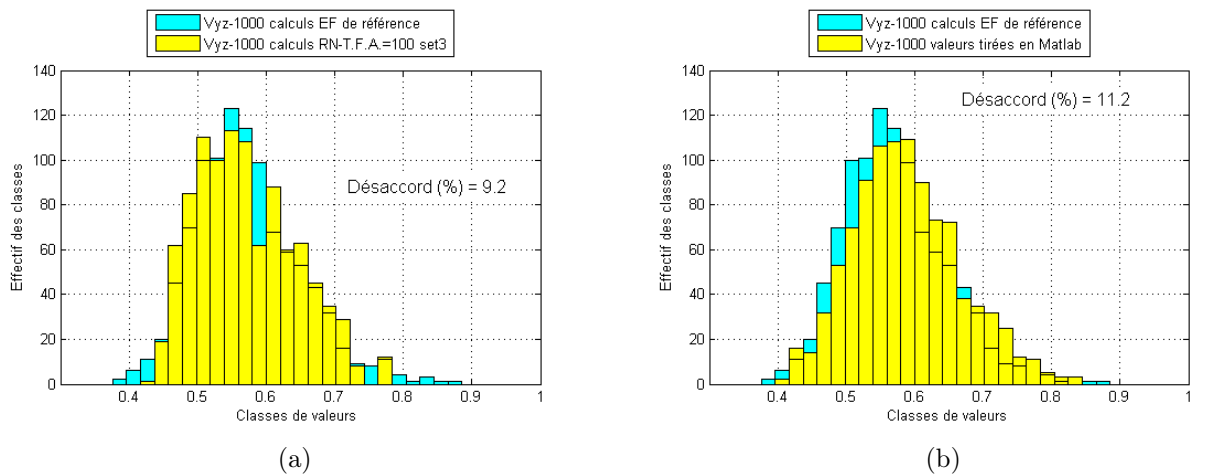


FIGURE 4.38: Approximation ν_{yz} par : (a) réseau de neurones, (b) alternative

La qualité de l'approximation obtenue par l'alternative proposée est globalement comparable à celle obtenue à travers l'approximation du réseau de neurones. Néanmoins, même si cette nouvelle approche conduit plus rapidement à l'obtention des distributions des sorties en évitant l'apprentissage, elle a un grand désavantage. Il réside dans l'impossibilité d'établir une correspondance entre une sortie quelconque et un jeu d'entrées. En revanche, lorsque le réseau de neurones est utilisé, pour n'importe quelle valeur d'une sortie il est possible d'identifier le jeu d'entrées qui l'a physiquement générée. L'intérêt de l'utilisation des réseaux de neurones réside justement dans l'existence de cette traçabilité qui caractérise le matériau virtuel et le relie à une physique.

4.4 Conclusions

La construction par 600 calculs numériques EF de la distribution statistique du comportement équivalent de chaque type de cellule virtuelle en fonction de la variabilité des paramètres retenus à cette échelle, nécessite un temps de calcul assez élevé. Afin de réduire ce temps de calcul, une démarche basée sur les réseaux de neurones a été proposée pour la construction de la distribution du comportement équivalent des cellules. Cette démarche a été illustrée sur une cellule de type 6.

Son principe consiste à constituer à l'aide d'un minimum de simulations un fichier d'apprentissage utilisé par la suite par le réseau de neurones.

Ce nombre minimum de calculs est conditionné par la représentativité des entrées. Sa détermination s'avère être un problème difficile à surmonter puisqu'il n'est pas toujours facile d'accéder à un nombre plus riche de mesures des entrées pour évaluer cette représentativité. Afin de franchir cette difficulté et sachant que les mesures sont susceptibles en général de s'organiser selon une distribution normale, l'hypothèse de distributions connues et normales est retenue. Leurs moyennes, écart-types ainsi que les limites du domaine de variation sont supposés identiques à ceux déterminés pour les entrées du fichier d'apprentissage, établi à partir des simulations EF. Dans ce cas, le nombre minimum d'entrées qui assure leur représentativité est fixé à 50. Toutefois, ce nombre reste élevé lorsque les entrées s'obtiennent expérimentalement.

Il a été montré que les tests d'hypothèse utilisés sont sensibles à de petites variations de la distribution statistique testée. Les résultats des tests sont aussi dépendants du type de test employé.

En suivant l'hypothèse faite de distribution normale, des tirages aléatoires pour chacune des entrées sont réalisés. Les valeurs ainsi obtenues sont ensuite introduites dans le réseau, après son apprentissage, afin d'obtenir les distributions des sorties.

Il a été constaté que parmi ces valeurs, pour celles qui se trouvent en dehors du domaine d'apprentissage, le réseau n'est pas capable de généraliser des réponses de manière satisfaisante puisqu'il n'a pas appris sur cette région du domaine. Afin de ne pas compromettre la qualité de l'approximation, il est alors important de considérer que les limites des tirages des entrées, réalisés après apprentissage, soient identiques à celles des entrées situées dans le fichier d'apprentissage.

La qualité de l'approximation dépend également de la répartition des points d'apprentissage sur le domaine de la fonction de référence ainsi que de la SRN. Il est important que ces points soient répartis sur tout ce domaine et non juste sur une zone de ce domaine. Le fait de considérer un nombre de 50 valeurs pour chacune des entrées, évite que ces points soient groupés dans une seule zone entre la valeur minimale et maximale de chacun d'entre eux.

La structure du réseau de neurones a une influence évidente sur la qualité de l'approximation. Toutefois, il est impossible à l'heure actuelle de donner une règle générale qui permette d'identifier la SRN en fonction de la forme analytique de la fonction de référence à approximer. Il est donc nécessaire de faire plusieurs essais avec différentes SRN afin d'identifier quelle est celle qui produit la meilleure approximation de cette fonction.

Le temps de calcul nécessaire à l'obtention de la distribution du comportement équivalent de la cellule de type 6 a été fortement diminué par l'utilisation du réseau de neurones, soit environ 95 %.

Lorsque la méthode qui utilise les réseaux de neurones est tributaire à un modèle EF, elle s'avère limitée puisque dans ce cas la distribution de référence des sorties est inconnue. La seule façon de l'obtenir est de réaliser des calculs numériques EF en intégrant les entrées qui sont générées aléatoirement après l'apprentissage, or cela n'est pas envisageable d'un point de vue temps de calcul.

Bien que le fait d'effectuer des tirages aléatoires suivant des distributions statistiques identifiées pour les sorties, à partir du fichier d'apprentissage, soit considéré comme une alternative intéressante à la méthode utilisant les réseaux de neurones, présente néanmoins un inconvénient majeur : il est impossible d'établir une correspondance entre une sortie quelconque et un jeu d'entrées, puisque les entrées n'ont pas participé à l'obtention de cette sortie. La physique n'est alors pas considérée.

L'intérêt de l'utilisation du réseau de neurones réside, au contraire, dans le maintien d'une traçabilité : pour n'importe quelle valeur d'une sortie, il est possible d'identifier précisément le jeu d'entrées qui l'a générée. Cela permet par exemple d'étudier la sensibilité des sorties à chacune des variables d'entrée.

Conclusion générale

S'inscrivant dans le cadre général de la mise en place d'une chaîne de calculs mécano-fiabilistes, intégrant la variabilité dès l'échelle microscopique, ce travail de recherche a consisté à explorer et à mettre en œuvre des moyens de construction de distributions statistiques représentant le comportement homogénéisé de cellules ancrées à des motifs identifiés dans la microstructure. Le gain de temps nécessaire à l'obtention de ces distributions a été clairement recherché.

Dans le premier chapitre, il a été démontré que le mode d'élaboration des matériaux composites constitue une des sources principales d'apparition de la variabilité. En effet, les défauts fréquemment générés qui sont : les porosités, le désalignement des fibres ainsi que l'angle d'empilement des plis, s'avèrent être responsables de la dispersion de leurs propriétés mécaniques. Bien que la présence de tous ces défauts influe sur le comportement mécanique du matériau composite, ils n'ont pas été considérés dans le cadre de ce travail, le matériau étudié étant supposé sain. Toutefois, la microstructure de ce matériau nous a dévoilé une variabilité morphologique : le diamètre des fibres et l'organisation des fibres les unes par rapport aux autres. Cette variabilité, étudiée dans le deuxième chapitre, avec celle des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs, ont été intégrées dans la construction des distributions du comportement équivalent du matériau composite à cette échelle.

L'analyse des limites d'application des méthodes analytiques d'homogénéisation pour estimer le comportement par rapport à la nature aléatoire des matériaux composites, nous a conduits à adopter des méthodes numériques d'homogénéisation. Pour la construction des distributions du comportement équivalent du matériau composite en fonction d'un nombre de paramètres variables, avec un coût de calcul numérique raisonnable, le réseau de neurones de type perceptron multicouches a été choisi. Ce choix s'est révélé pertinent par la possibilité qu'il offre de prendre en compte, en même temps, plusieurs réponses en fonction des paramètres d'entrée incertains. Par ailleurs, les tests d'hypothèse de Kolmogorov ainsi que celui du χ^2 ont été choisis pour l'identification du type des distributions statistiques du comportement homogénéisé.

Dans le deuxième chapitre, une analyse morphologique de la microstructure d'une coupe d'un matériau composite à fibre de carbone T800 HB et à matrice époxy a été réalisée. Cela afin d'identifier et de caractériser la variabilité géométrique du milieu hétérogène à l'échelle des fibres et de la matrice. L'évolution du diamètre des fibres ainsi que l'organisation des fibres les unes par rapport aux autres ont été particulièrement regardées. En effet, les mesures effectuées sur les diamètres d'une population de 200 fibres nous ont permis de constater que le profil de leur section droite est très variable en dimensions. Celui-ci a été approché par un profil elliptique, caractérisé par un petit diamètre d et un grand diamètre D . L'ensemble des valeurs mesurées pour chacun de ces diamètres nous a permis de constater que le petit diamètre d varie selon une distribution normale de moyenne 3,68 μm et d'écart-type 0,45 μm tandis que le grand diamètre D varie également selon une distribution normale de moyenne 5,07 μm et d'écart-type 0,36 μm . Nous avons mis en évidence que la variation des sections

droites des fibres pilote l'empilement des fibres dans le matériau composite, d'où la variété des types de cellules mises en évidence.

Six types différents de motifs d'arrangement de fibres regroupés en cellules ont pu être ainsi identifiés. La cellule est constituée d'une fibre centrale avec autour de 4 à 9 fibres. Ces cellules ont été ensuite décrites à l'aide de paramètres géométriques caractéristiques suivants : l'angle α entre les fibres, la distance d_c entre le centre de la fibre centrale et le centre des fibres qui l'entourent ainsi que la longueur L et la largeur l de la cellule. L'analyse de la variation de ces paramètres a permis de proposer des cellules virtuelles, pour l'élaboration des lois de distribution du comportement équivalent par type de cellule. La considération de ces cellules constitue, de plus, un moyen de transport de la variabilité depuis l'échelle des constituants élémentaires vers l'échelle mésoscopique.

Le troisième chapitre a traité de la modélisation numérique des cellules. Pour chaque type de cellule identifiée dans l'analyse morphologique, une cellule virtuelle a été générée. Le comportement équivalent de chaque cellule virtuelle a été alors obtenu par homogénéisation.

Guidés par les résultats de la littérature, une méthode numérique d'homogénéisation, employant des conditions aux limites mixtes, a été retenue. En effet, lorsque les conditions aux limites uniformes cinématiques ont été utilisées, les résultats obtenus ont témoigné d'une forte sensibilité des constantes d'élasticité à la profondeur de la cellule. Leur convergence a été atteinte pour une grande épaisseur, de l'ordre de 200 μm , ce qui correspond à un temps de calcul d'environ 12 heures. Cela s'est avéré très pénalisant dans la démarche d'élaboration de distributions statistiques du comportement équivalent de la cellule, qui nécessite de nombreuses simulations numériques. Ce désavantage nous a donc orientés vers le choix de conditions aux limites mixtes. Dans ce cas, les propriétés équivalentes se sont stabilisées à une profondeur de 5 μm , soit un temps de calcul d'environ une minute. Cela nous a permis alors de bénéficier d'un gain significatif de temps de calcul numérique dans l'élaboration des distributions statistiques de ces propriétés équivalentes.

Une analyse de sensibilité du comportement homogénéisé à différents paramètres géométriques et matériels a été effectuée par la suite. Son intérêt a été d'alléger la modélisation numérique des cellules ainsi que de retenir les paramètres variables les plus pertinents, vis-à-vis de l'objectif de la réduction du temps de calcul nécessaire à l'élaboration des lois de distribution des modules équivalents. Les paramètres géométriques qui ont été analysés sont : la géométrie de la section droite des fibres et la géométrie de la section droite de la cellule virtuelle, tandis que ceux matériels sont : Φ , E_f , ν_f , E_m , ν_m et la position du centre des fibres. Il a ainsi été constaté que la géométrie de la section droite des fibres de carbone n'a pas une influence significative sur le comportement homogénéisé. Par conséquent, les fibres ont été modélisées en utilisant la géométrie la plus simple, soit celle circulaire. Pour les valeurs du diamètre Φ , une loi de distribution normale de moyenne 4,31 μm et d'écart-type 0,32 μm a été identifiée.

Parmi les paramètres matériaux variables étudiés (Φ , E_f , ν_f , E_m , ν_m , la position du centre des fibres), le plus influent sur les modules équivalents est le diamètre des fibres, directement lié à la fraction volumique des fibres. L'ensemble des propriétés mécaniques des fibres et de la matrice influent aussi significativement sur ces modules. Quant à la position des fibres, nous avons constaté qu'elle est un paramètre dont l'influence sur les modules devient plus significative au fur et à mesure que la position du centre des fibres peut varier sur des distances plus grandes. Toutefois, afin de réduire le nombre de variables aléatoires qui ont été utilisées dans la construction de la distribution statistique du comportement équivalent de chaque type de cellule, la position des fibres n'a pas été considérée et les centres des fibres ont été fixés pour les simulations numériques. Uniquement cinq paramètres variables ont été

finallement retenus pour la construction des distributions du comportement équivalent des cellules : Φ , E_f , ν_f , E_m et ν_m .

Une des poursuites de ce travail de recherche réside dans le transport de la variabilité de l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique. Afin de réaliser ce transport, le milieu mésoscopique sera construit à partir des cellules virtuelles identifiées dans l'analyse morphologique. Sa construction serait facilitée si toutes les cellules avaient une géométrie carrée, de mêmes dimensions. Cependant, il a été montré dans l'étude de sensibilité à la géométrie de la section droite de la cellule, qu'une modélisation de la cellule selon une géométrie carrée pourrait engendrer des variations non négligeables sur son comportement.

Une étude de sensibilité des modules équivalents à la finesse du maillage a également été réalisée. Le niveau de raffinement choisi pour le maillage correspond à une taille moyenne élémentaire de 0,5 μm . Le choix de cette taille correspond à un temps de calcul d'environ une minute.

Dans le dernier chapitre, la construction de la distribution statistique du comportement homogénéisé de chaque type de cellule virtuelle, en fonction des paramètres variables retenus à cette échelle, a été réalisée à l'aide de 600 calculs numériques EF. Le temps de calcul nécessaire à leur obtention s'est révélé important : 6h 37' pour la cellule de type 4 (4 fibres autour de la fibre centrale), 9h 46' pour la cellule de type 5, 12h 34' pour la cellule de type 6, 14 h pour la cellule de type 7, 14 h pour la cellule de type 8 et 20h 50' pour la cellule de type 9.

Pour réduire ce temps de calcul, une démarche s'appuyant sur des réseaux de neurones a été proposée. Elle a été illustrée sur une cellule de type 6. Son principe réside dans la constitution à l'aide d'un minimum de simulations numériques EF d'un fichier d'apprentissage, utilisé par le réseau pour son apprentissage. Ce fichier contient un nombre minimum de jeux 5 entrées-6 sorties. Les 5 entrées Φ , E_f , ν_f , E_m et ν_m désignent les paramètres aléatoires retenus tandis que les 6 sorties E_x , E_y , G_{xy} , G_{yz} , ν_{xy} et ν_{yz} caractérisent le comportement équivalent de la cellule virtuelle. Le nombre minimum de simulations numériques EF est conditionné par la représentativité des entrées. Sa détermination s'avère être un problème difficile à surmonter lorsque les entrées s'obtiennent par des mesures expérimentales, souvent coûteuses en temps, puisque dans ce cas il n'est pas facile d'accéder à un nombre plus riche de mesures de celles-ci pour évaluer cette représentativité. Nous nous sommes donc intéressés à proposer une solution générale à ce problème. Pour cela, sachant que les mesures sont susceptibles en général de s'organiser selon une distribution normale, nous avons fait l'hypothèse simplificatrice de distributions connues et normales. Ainsi, tant les distributions des entrées situées dans le fichier d'apprentissage que celles des entrées qui se trouveraient si le nombre de leurs mesures était augmenté, sont supposées normales. Leurs moyennes, écart-types ainsi que les limites du domaine de variation ont été supposés identiques à ceux déterminés pour les entrées du fichier d'apprentissage, établi à partir des simulations EF. Dans ce cas, le nombre minimal d'entrées qui assure leur représentativité a été fixé à 50. Nous considérons que ce nombre reste quand même élevé lorsque les entrées s'obtiennent expérimentalement.

En suivant l'hypothèse faite, il est possible de réaliser des tirages aléatoires selon des distributions normales pour chacune des entrées. Les valeurs ainsi obtenues sont ensuite introduites dans le réseau, après apprentissage, pour obtenir les distributions des sorties. Nous avons constaté que parmi ces valeurs, pour celles qui se trouvent en dehors du domaine d'apprentissage, le réseau n'est pas capable de généraliser les réponses de manière satisfaisante, puisqu'il n'a pas appris en dehors de ce domaine. Afin de ne pas compromettre la qualité de l'approximation, il est alors important de considérer que les limites des tirages

des entrées, réalisés après apprentissage, soient identiques à celles des entrées situées dans le fichier d'apprentissage.

Pour un cas particulier de fonctions de référence des sorties connues, nous avons montré que la qualité de l'approximation dépend également de la répartition des points d'apprentissage sur le domaine de la fonction de référence ainsi que de la structure du réseau de neurones retenue. Il est important que ces points soient le mieux répartis possible sur tout le domaine et non juste sur une zone de ce domaine. Le fait de considérer un nombre de 50 valeurs pour chacune des entrées, évite que ces points soient groupés dans une seule zone.

Quant à la structure du réseau de neurones, elle a une influence évidente sur la qualité de l'approximation. Toutefois, il est impossible à l'heure actuelle de donner une règle générale qui permette de l'identifier en fonction de la forme analytique de la fonction de référence à approximer. Il est donc nécessaire de faire plusieurs essais, avec différentes structures, afin d'identifier quelle est celle qui produit la meilleure approximation de cette fonction.

Étant tributaire à un modèle EF, cette approche qui utilise les réseaux de neurones s'avère limitée, puisque dans ce cas la distribution de référence des sorties est inconnue. La seule façon de l'obtenir est de réaliser des calculs numériques EF en intégrant les entrées qui sont générées aléatoirement après l'apprentissage, or cela n'est pas envisageable d'un point de vue temps de calcul. Toutefois, il est possible de réaliser l'approximation sans connaître cette distribution de référence, mais le risque est d'obtenir une " approximation aveugle ", puisqu'il sera impossible de quantifier le désaccord entre la distribution approximée et celle de référence.

Une alternative intéressante à cette approche a été finalement mise en évidence. En effet, des tirages aléatoires suivant les distributions statistiques identifiées pour les sorties situées dans le fichier d'apprentissage, ont été réalisés. Les distributions des sorties ainsi obtenues, sont comparables à celles obtenues par un apprentissage préalable. Cependant, cette alternative présente un inconvénient majeur : il est impossible d'établir une correspondance entre une sortie quelconque et un jeu d'entrées, puisque les entrées n'ont pas participé à l'obtention de celle-ci. L'intérêt de l'utilisation du réseau de neurones réside, au contraire, dans le maintien d'une traçabilité : pour n'importe quelle valeur d'une sortie, il est possible d'identifier précisément le jeu d'entrées qui l'a générée. Cela permet par exemple d'étudier la sensibilité des sorties à chacune des variables d'entrée.

Malgré les points délicats soulevés précédemment, le temps de calcul nécessaire à l'obtention de la distribution du comportement équivalent de la cellule de type 6 a été fortement diminué par l'utilisation du réseau de neurones. Il est passé d'environ 20 heures pour 1000 calculs numériques EF de référence à environ une heure dans le cas d'un apprentissage réalisé avec un fichier d'apprentissage de taille 50, soit un gain de temps d'environ 95 %.

Les améliorations qui peuvent être amenées à ce travail de recherche, concernent les aspects suivants :

- rendre robuste et fiable l'approche par modèle d'apprentissage (réseau de neurones) ;
- reconsidérer la variation de la position des fibres dans la construction des distributions des propriétés élastiques des cellules ;
- réaliser des mesures expérimentales des propriétés mécaniques des fibres et de la matrice ;
- prendre en compte l'anisotropie de la fibre de carbone ;
- intégrer dans la modélisation des cellules les morceaux des fibres qui ont été négligés.

Cette thèse ouvre de nombreuses perspectives de travaux à réaliser, présentées dans la section suivante.

Perspectives

Nous rappelons que le matériau étudié dans ce travail de recherche a été considéré comme un matériau sain. Les distributions statistiques du comportement équivalent des cellules, identifiées dans l'analyse morphologique, ont été déterminées sans intégrer de défauts de fabrication tels que les porosités ou la décohésion fibre-matrice. L'influence de la prise en considération de ces défauts tant sur le comportement équivalent que sur la cartographie du champ de contraintes, à l'échelle des cellules, est par la suite étudiée.

Pour cela, une cellule de type 6 saine est d'abord considérée. Puis, dans la même cellule, un nombre variable de porosités ainsi qu'une décohésion fibre-matrice sont introduites. La fraction volumique de fibres est d'environ 34 % tandis que celle des porosités et de la décohésion est fixée à 2 %. Les porosités sont modélisées avec une géométrie sphérique, Figures 4.39 et 4.40.

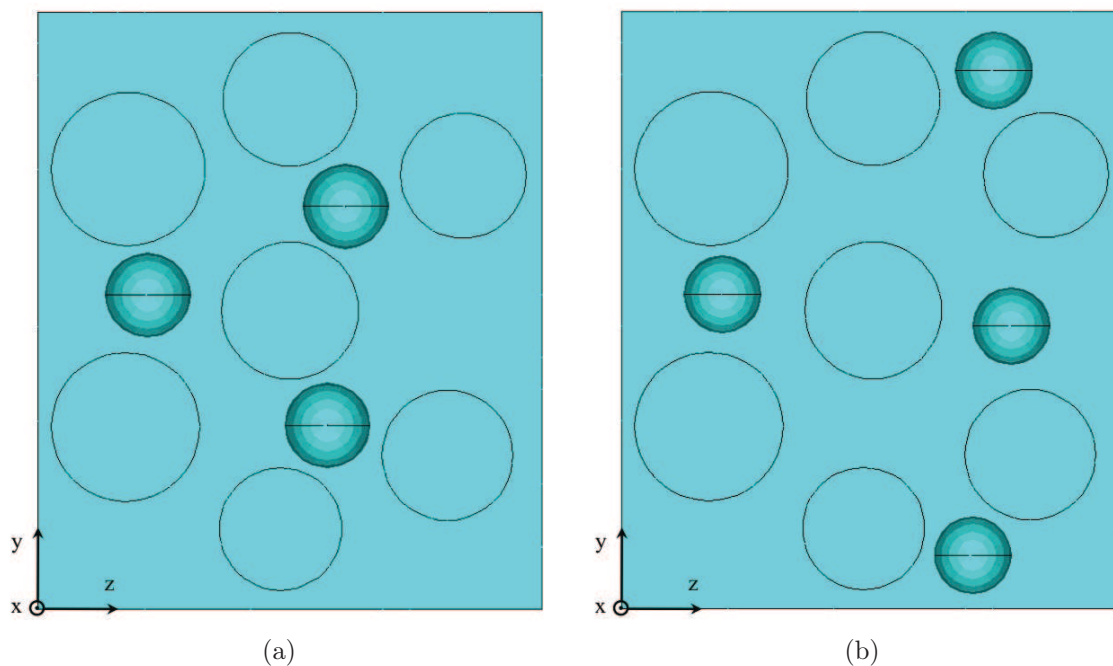


FIGURE 4.39: Image cellule type 6 avec : (a) 3 porosités, (b) 4 porosités

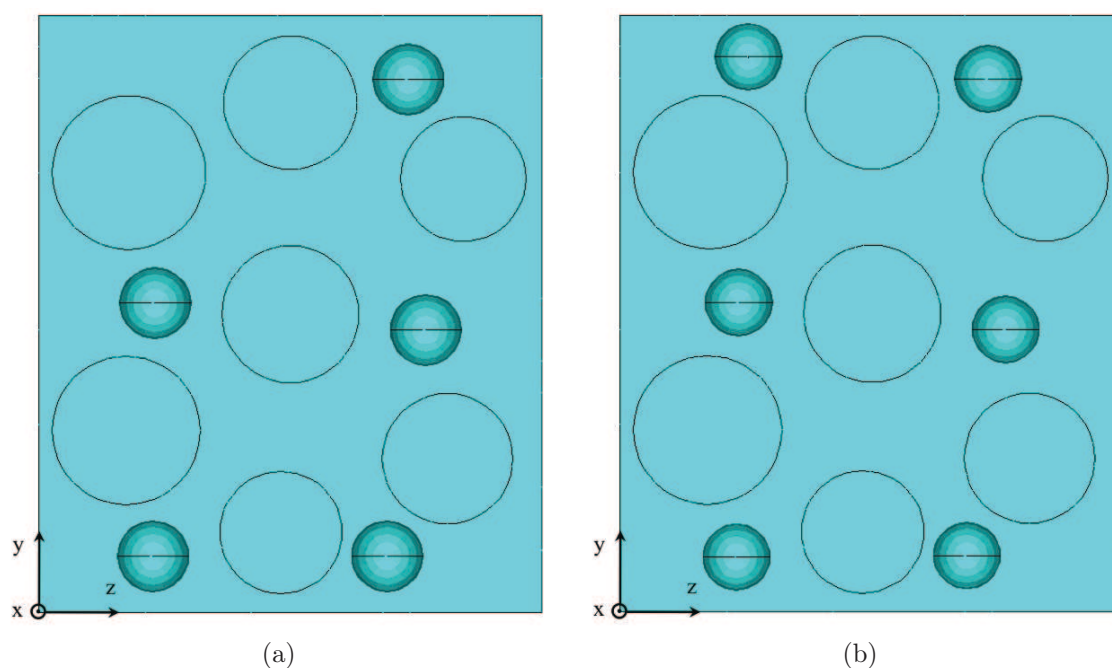


FIGURE 4.40: Image cellule type 6 avec : (a) 5 porosités, (b) 6 porosités

Quant à la décohésion fibre-matrice, elle est modélisée par une couronne cylindrique autour de la fibre centrale. Les propriétés mécaniques des phases considérées sont données dans le Tableau 4.12. Celles des porosités et de la décohésion sont choisies plus petites que celles des fibres et de la matrice. Les indices f , m , p et d désignent respectivement les fibres, la matrice, les porosités et la décohésion.

Cas étudié	Propriétés mécaniques des phases considérées		
	Fibres	Matrice	Porosités / Décohésion
Cellule de type 6 saine	$E_f = 390 \text{ GPa}$ $\nu_f = 0,35$	$E_m = 4,5 \text{ GPa}$ $\nu_m = 0,40$	-
Cellule de type 6 avec 3 porosités			$E_{p/d} = 0,1 \text{ Pa}$ $\nu_{p/d} = 10^{-6}$
Cellule de type 6 avec 4 porosités			
Cellule de type 6 avec 5 porosités			
Cellule de type 6 avec 6 porosités			
Cellule de type 6 avec 1 décohésion			

TABLE 4.12: Tableau comparatif des propriétés mécaniques des phases considérées

Pour chaque cas étudié, un calcul d'homogénéisation est effectué. Les modules équivalents déterminés sont présentés dans le Tableau 4.13.

Cas étudié	Modules équivalents					
	$E_x(GPa)$	$E_y(GPa)$	$G_{xy}(GPa)$	$G_{yz}(GPa)$	ν_{xy}	ν_{yz}
Cellule de type 6 saine	134,15	10,36	3,56	3,37	0,383	0,543
Cellule de type 6 avec 3 porosités	134,02	9,66	3,46	3,30	0,378	0,527
Cellule de type 6 avec 4 porosités	134,02	9,90	3,46	3,29	0,379	0,528
Cellule de type 6 avec 5 porosités	134,02	9,91	3,46	3,29	0,380	0,528
Cellule de type 6 avec 6 porosités	134,02	9,90	3,46	3,29	0,379	0,527
Cellule de type 6 avec 1 décohésion	133,99	7,93	2,88	2,54	0,386	0,461

TABLE 4.13: Tableau comparatif des modules équivalents calculés pour chaque cas étudié

L'écart relatif de chaque module équivalent par rapport au cas de la cellule saine est donné dans le Tableau 4.14.

Cas étudié	Écart relatif (%)					
	E_x	E_y	G_{xy}	G_{yz}	ν_{xy}	ν_{yz}
Cellule de type 6 saine	0	0	0	0	0	0
Cellule de type 6 avec 3 porosités	0,10	6,76	2,73	2,23	1,31	2,95
Cellule de type 6 avec 4 porosités	0,10	4,45	2,67	2,43	1,04	2,76
Cellule de type 6 avec 5 porosités	0,10	4,38	2,70	2,31	0,78	2,76
Cellule de type 6 avec 6 porosités	0,10	4,43	2,64	2,46	1,04	2,95
Cellule de type 6 avec 1 décohésion	0,12	23,44	19,03	24,51	0,78	15,10

TABLE 4.14: Tableau comparatif des écarts relatifs

Il est intéressant de constater que l'introduction d'un taux de porosités de 2 % détermine une décroissance relativement faible des modules équivalents, Tableau 4.13. Cette décroissance traduit un assouplissement de la cellule. Nous observons également qu'à cette fraction volumique de porosités, l'influence de la variabilité du nombre de porosités sur le comportement homogénéisé est relativement négligeable, Tableau 4.14.

En ce qui concerne la décohésion fibre-matrice considérée, son influence sur le comportement équivalent est plus significative que celle des porosités, la cellule étant dans ce cas encore plus assouplie.

La prise en compte supplémentaire d'un taux variable de décohésions fibre-matrice et/ou d'un taux variable de porosités, par rapport aux paramètres variables retenus à cette échelle, s'avère donc importante dans l'estimation du comportement équivalent des cellules et fera l'objet des futurs travaux. L'introduction des porosités pourrait être aussi faite et à l'échelle mésoscopique.

L'influence de ces défauts de fabrication sur le champ de contraintes hétérogènes a été également étudiée. Dans les Figures 4.41 - 4.43, le champ de contraintes σ_{yy} pour les cas précédemment abordés, est présenté. Il a été obtenu en appliquant des conditions aux limites identiques avec celles utilisées pour le calcul du module E_y , relations 1.48 - 1.53.

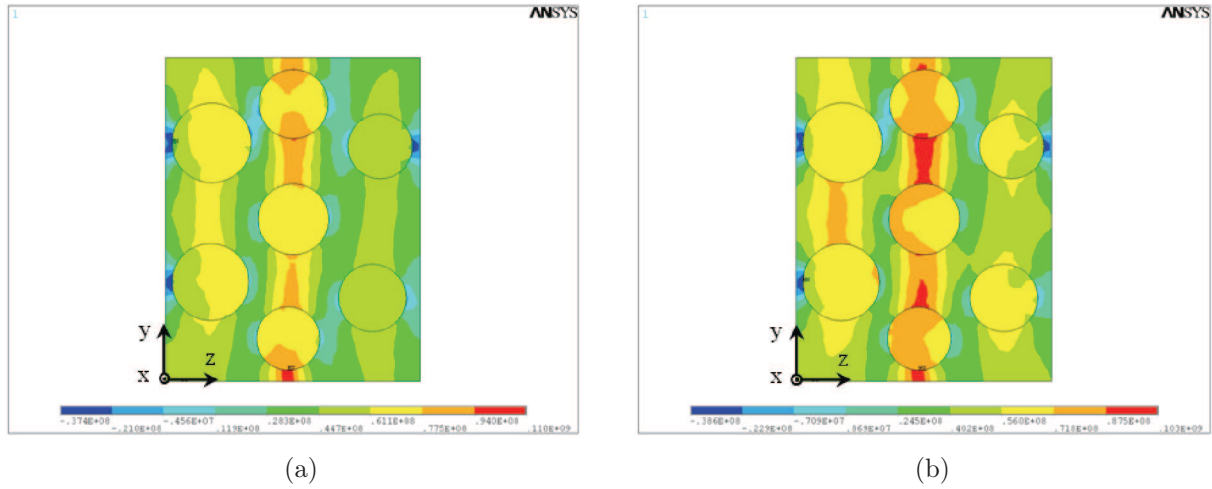


FIGURE 4.41: Champ de contraintes σ_{yy} ; cellule de type 6 : (a) saine, (b) avec 3 porosités

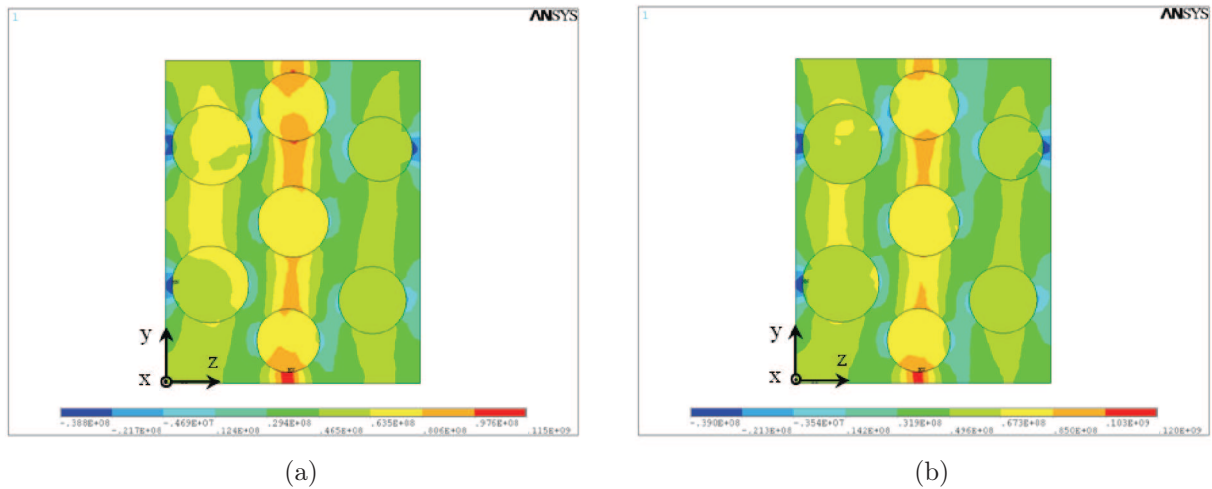


FIGURE 4.42: Champ de contraintes σ_{yy} ; cellule de type 6 : (a) avec 4 porosités, (b) avec 5 porosités

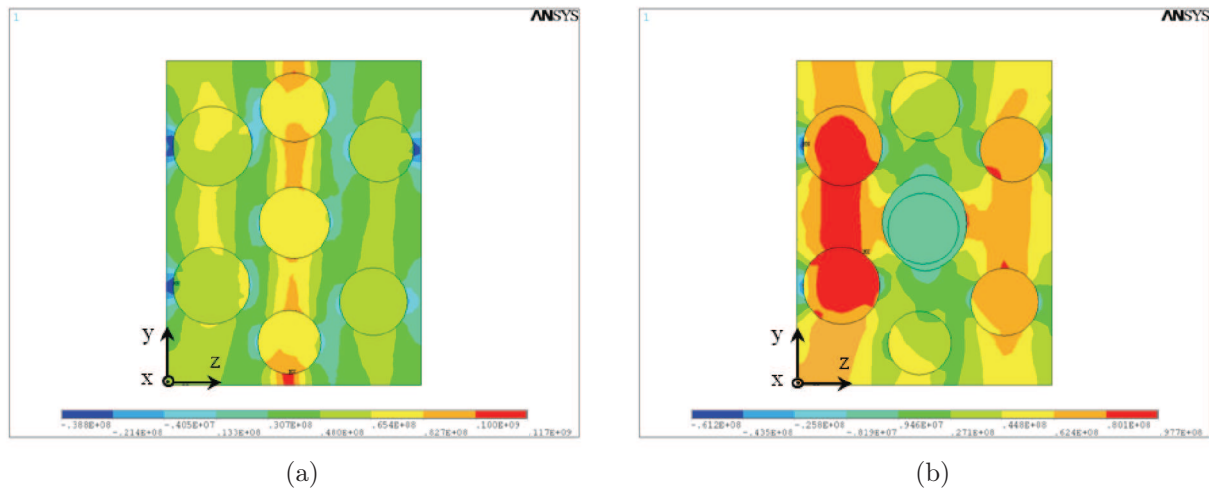


FIGURE 4.43: Champ de contraintes σ_{yy} ; cellule de type 6 : (a) avec 6 porosités, (b) avec 1 décohésion

Le maximum de cette contrainte, pour chaque cas étudié, ainsi que l'écart relatif par rapport à celui de la cellule saine sont donnés dans le Tableau 4.15.

Cas étudié	Maximum de la contrainte σ_{yy} (MPa)	Écart relatif du maximum (%)
Cellule de type 6 saine	110,39	0
Cellule de type 6 avec 3 porosités	103,32	6,40
Cellule de type 6 avec 4 porosités	114,66	3,87
Cellule de type 6 avec 5 porosités	120,41	9,08
Cellule de type 6 avec 6 porosités	117,47	6,41
Cellule de type 6 avec 1 décohésion	97,73	11,47

TABLE 4.15: Tableau comparatif des maximums de la contraintes σ_{yy} et leur écart relatif

Si l'influence de la variabilité du nombre de porosités s'est avérée être relativement négligeable sur le comportement équivalent de la cellule, elle a une influence significative sur la cartographie des contraintes ainsi que sur le niveau maximal de la contrainte hétérogène σ_{yy} et donc sur l'endommagement de la cellule. En outre, la décohésion influe plus sur le champ de contraintes σ_{yy} que les porosités.

Complémentairement à cette étude, il serait intéressant d'étudier l'influence de la position et de la géométrie de la porosité sur le champ de contraintes hétérogènes.

L'évaluation de l'endommagement à l'échelle de la cellule, en fonction de la variabilité retenue à cette échelle ainsi qu'en fonction de la variabilité de ces défauts, fera également

l'objet des futures investigations. De plus, il est important de pouvoir évaluer cet endommagement aux échelles supérieures, d'où la nécessité du dialogue entre toutes les échelles.

Bibliographie

- [1] Bourban P.-E., Carlsson L., Mercier J. P., Manson J.-A. E. *Matériaux composites à matrice organique. Constituants, procédés, propriétés, 15 ième édition*. Traité des matériaux, 2004.
- [2] Sanjay K. M. *Materials Product and Process*. Composites Manufacturing, 2001.
- [3] Dau F., Alzina A., Guillaumat L. Uncertainties propagations of composite mechanical properties from micro to macro scale. In *Proceedings of the 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13), Stockholm, 2-5 Juin 2008*.
- [4] Reyne M. *Technologie des composites, 2ième édition*. Traité des Nouvelles Technologies. Série Matériaux, 1995.
- [5] Cognard P. *Les applications industrielles des matériaux composites, volume I*. Les "Manuels professionnels", 1989.
- [6] Strong A. B. Fundamentals of composites manufacturing. Materials, method and applications. Dearborn, 1989.
- [7] Judd N. C. W., Wright W. W. Voids and their effects on the mechanical properties of composites. SAMPE J 1978 :10-4.
- [8] The composite materials handbook MIL 17, vol 3. West Conshohocken (PA)/ ASTM International, 2002.
- [9] Huang H., Talreja R. Effects of void geometry on elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 65(13) :1964–1981, 2005.
- [10] Gelebart L., Colin C. Effects of porosity on the elastic behavior of cvi sic/sic composites. *Journal of Nuclear Materials*, 386-388 :82–85, 2009.
- [11] Hashin Z. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13(3) :119–134, 1965.
- [12] Hill R. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials : Elastic behaviour. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 12(4) :199–212, 1964.
- [13] Hashin Z., Rosen B. W. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. In *J. Appl. Mech*, 223-232, juin 1964.
- [14] Berthelot J.-M. *Comportement mécanique et analyse des structures*. Série mécanique, 1996.

- [15] Tucker III C. L., Liang E. Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites : Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 59(5) :655–671, 1999.
- [16] Hill R. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5) :357–372, 1963.
- [17] Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc Roy Soc A*, 241 :376–396, 1957.
- [18] Eshelby J. D. Elastic inclusions and inhomogeneities. *Progress in Solid Mechanics*, vol. 2. Amsterdam : North-Holland :89–140, 1961.
- [19] Cheng Z.-Q., He L.-H. Micropolar elastic fields due to a circular cylindrical inclusion. *International Journal of Engineering Science*, 35(7) :659–668, 1997.
- [20] Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5) :571–574, 1973.
- [21] Kwon P., Dharan C. K. H. Effective moduli of high volume fraction particulate composites. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(3) :1141–1147, 1995.
- [22] Michaud F. *Rhéologie de panneaux composites bois/thermoplastiques sous chargement thermomécanique*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2003.
- [23] Rafic Y. *Matériaux Composites, Cours, 2008*, ([http ://www.ryounes.net/cours/ MC V.pdf](http://www.ryounes.net/cours/MC V.pdf)).
- [24] Berger H., Gabbert U., Koppe H., Rodriguez-Ramos R., Bravo-Castillero J., Guinovart-Diaz R., Otero J. A., Maugin G. A. Finite element and asymptotic homogenisation methods applied to smart composite materials. *Computational Mechanics*, 33 :61–67, 2003.
- [25] Guinovart-Diaz R., Bravo-Castillero J., Rodriguez-Ramos R., Martinez-Rosaldo R., Serania F., Navarrete M. Modeling of elastic transversely isotropic composite using the asymptotic homogenisation method. Some comparisons with other models. *Materials Letters*, 56 :889–894, 2002.
- [26] Berger H., Kari S., Gabbert U., Rodriguez-Ramos R., Bravo-Castillero J., Guinovart-Diaz R. A comprehensive numerical homogenisation technique for calculating effective coefficients of uniaxial piezoelectric fibre composites. *Materials Science and Engineering : A*, 412(1-2) :53–60, 2005. International Conference on Recent Advances in Composite Materials.
- [27] Trias D., Costa J., Mayugo J. A., Hurtado J. E. Random models versus periodic models for fibre reinforced composites. *Computational Materials Science*, 38(2) :316–324, 2006.
- [28] Brockenbrough J. R., Suresh S., Wienecke H. A. Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers : geometrical effects of fiber distribution and shape. *Acta Metallurgica et Materialia*, 39(5) :735–752, 1991.
- [29] Couegnât G. *Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2008.

-
- [30] Kanit T., Forest S., Galliet I., Mounoury V., Jeulin D. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14) :3647–3679, 2003.
- [31] Bornet M., Bretheau T., Gilormini P. *Homogeneisation in Mechanical Materials*. Paris, 2001.
- [32] Sun C. T., Vaidya R. S. Prediction of composite properties from a representative volume element. *Composites Science and Technology*, 56(2) :171–179, 1996.
- [33] Romero V. J., Swiler L. P., Giunta A. A. Construction of response surfaces based on progressive-lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation. *Structural Safety*, 26(2) :201–219, 2004.
- [34] Formation. Surfaces de réponse pour l'ingénierie numérique. PHIMECA, 2008.
- [35] Berveiller M. *Éléments finis stochastiques : approche intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. PhD thesis, Institut Français de Mécanique Avancée, 2005.
- [36] Rousseaux A. Construction des surfaces de réponse sur le chaos polynomial. Projet d'expertise, LAMEFIP, 2008.
- [37] Lefèvre N. L'utilisation des réseaux de neurones pour la construction de lois de distribution ; application aux propriétés des matériaux composites. Projet d'expertise, LAMEFIP, 2010.
- [38] Parizeau M. Le perceptron multicouche et son algorithme de rétropropagation des erreurs. Université Laval, 2004.
- [39] Plagianakos V. P., Magoulas G. D., Vrahatis M. N. Learning Rate Adaptation In Stochastic Gradient Descent. United Kingdom : Brunel University, 2001.
- [40] Pfister M., Rojas R. Speeding Up Backpropagation. A Comparison Of Orthogonal Techniques. Berlin : Freie Universitat Berlin, Institut Fur Informatik, 1993.
- [41] Riedmiller M., Braun H. A Fast Adaptative Learning Algorithm. Karlsruhe : University Of Karlsruhe. Technical Report, 1995.
- [42] Haykin S. *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*. IEEE Press, 1994.
- [43] Massey F. J. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 46 :68–78, 1951.
- [44] Grais B. *Méthodes statistiques*. Paris, 2003.
- [45] Saporta G. *Probabilités, analyse de données et statistiques*. Paris, 2006.
- [46] Lemoine C. *Contribution à l'analyse statistique des mesures en chambre réverbérante à brassage de modes. Applications à la détermination de l'efficacité de brassage et de l'incertitude de mesure dans un contexte CEM et radiofréquences*. PhD thesis, École Doctorale Matisse. Institut d'électronique et de télécommunications de Rennes. Université Européenne de Bretagne, 2008.

- [47] Ferignac P. Test de Kolmogorov-Smirnov sur la validité d'une fonction de distribution. *Revue de statistique appliquée*, Tome 10, N.4, 1962.
- [48] Weiss N. A. Introduction à la statistique, 5ième édition. Addison Wesley Longman New York, 1999.
- [49] Ballère L. *Tolérance aux dommages par impacts de structures courbes composites. Effets d'échelles*. PhD thesis, ENSAM de Bordeaux, 2008.
- [50] Protasov K. *Analyse statistique des données expérimentales*. Grenoble Sciences, 2002.
- [51] Shan Z., Gokhale A. M. Representative volume element for non-uniform microstructure. *Computational Materials Science*, 24 :361–379, 2002.
- [52] Swaminathan S., Ghosh S., Pagano N. J. Statistically equivalent representative volume elements for unidirectional composite microstructures : Part i-without damage. *Journal of Composite Materials*, 40 :583–604, 2006.
- [53] Trias D., Costa J., Turon A., Hurtado J. E. Determination of the critical size of a statistical representative volume element (srve) for carbon reinforced polymers. *Acta Materials Letters*, 54 :3471–84, 2006.
- [54] Pyrz R., Bochenek B. Topological disorder of microstructure and its relation to the stress field. *International Journal of Solids and Structures*, 35(19) :2413–2427, 1998.
- [55] Grufman C., Ellyin F. Determining a representative volume element capturing the morphology of fibre reinforced polymer composites. *Composites Science and Technology*, 67(3-4) :766–775, 2007.
- [56] Gitman I. M., Askes H., Sluys L. J. Representative volume : Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(16) :2518–2534, 2007.
- [57] Ostoja-Starzewski M. Material spatial randomness : From statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(2) :112–132, 2006.
- [58] Gornet L. Comportement mécanique des matériaux et des structures composites : modélisation de l'endommagement et de la rupture. Colloques GcM. École Centrale Nantes, 2003.
- [59] Gusev A. A. Representative volume element size for elastic composites : A numerical study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9) :1449–1459, 1997.
- [60] Terada K., Hori M., Kyoya T., Kikuchi N. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. *International Journal of Solids and Structures*, 37(16) :2285–2311, 2000.
- [61] Ostoja-Starzewski M., Sheng P. Y., Jasiuk I. Damage patterns and constitutive response of random matrix-inclusion composites. *Engineering Fracture Mechanics*, 58(5-6) :581–606, 1997.
- [62] Ostoja-Starzewski M. Random field models of heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 35(19) :2429–2455, 1998.

- [63] Kari S., Berger H., Gabbert U. Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites. *Computational Materials Science*, 39(1) :198–204, 2007. Proceedings of the 15th International Workshop on Computational Mechanics of Materials, The 15th International Workshop on Computational Mechanics of Materials.

Appendices

Annexe A

Histogrammes des distributions des entrées situées dans les fichiers d'apprentissage considérés

A.1 Histogrammes des distributions de E_m

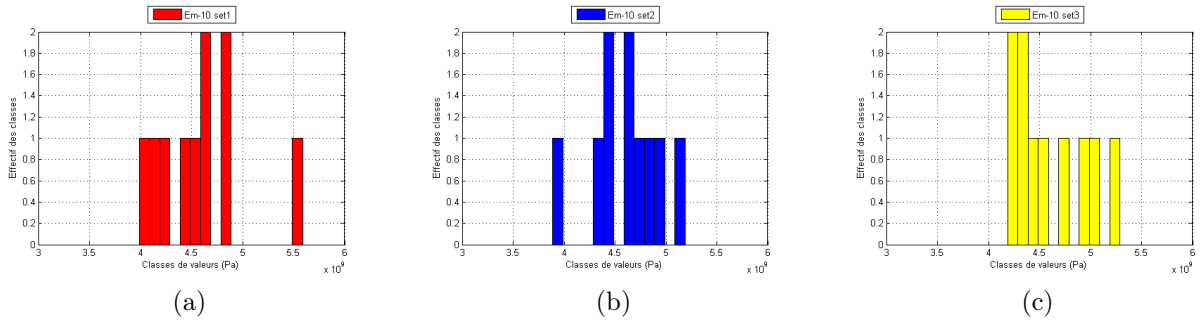


FIGURE 44: Histogrammes des distributions de E_m pour la taille de 10

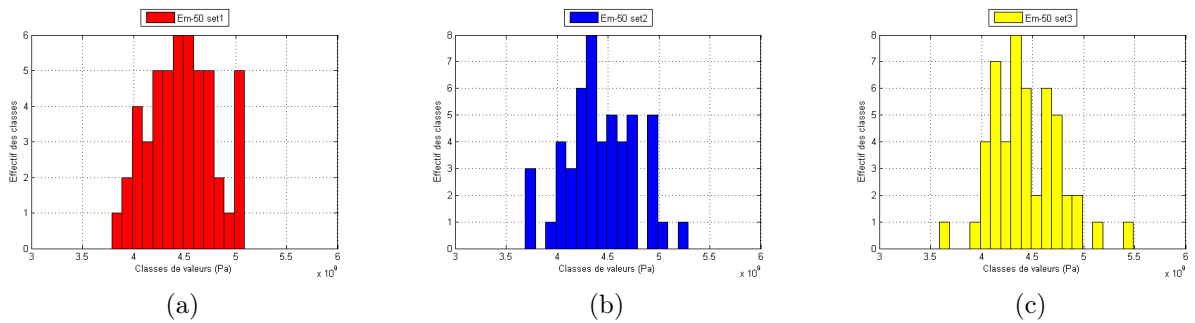


FIGURE 45: Histogrammes des distributions de E_m pour la taille de 50

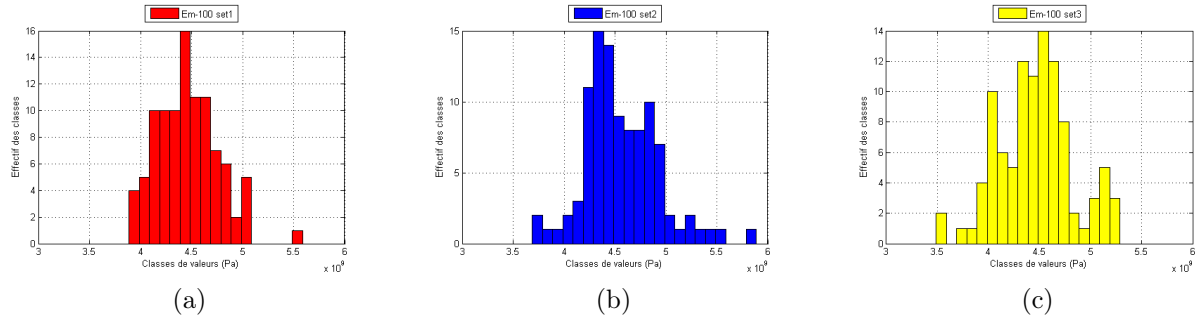


FIGURE 46: Histogrammes des distributions de E_m pour la taille de 100

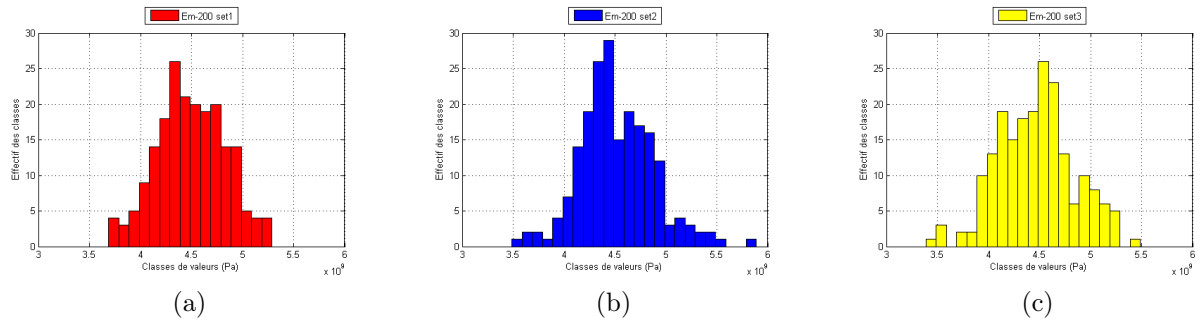


FIGURE 47: Histogrammes des distributions de E_m pour la taille de 200

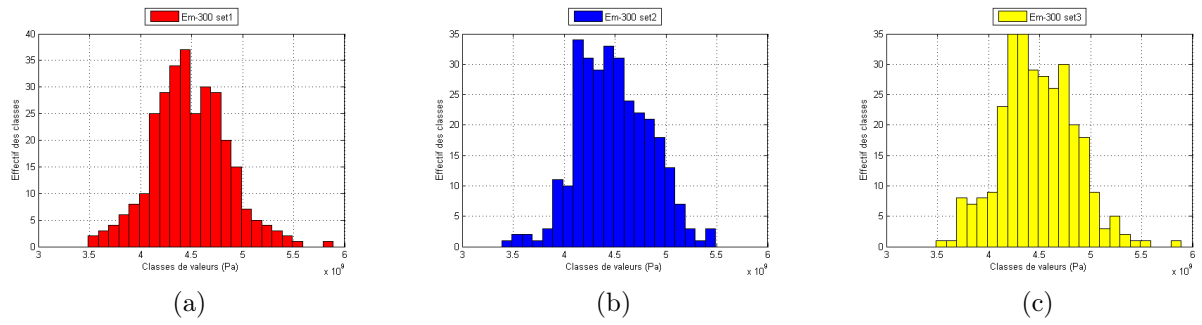


FIGURE 48: Histogrammes des distributions de E_m pour la taille de 300

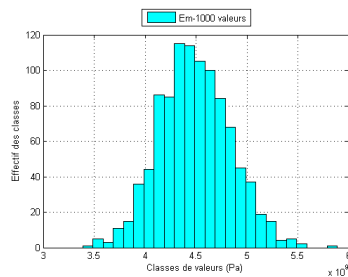


FIGURE 49: Histogramme de la distribution de E_m de référence

A.2 Histogrammes des distributions de ν_f

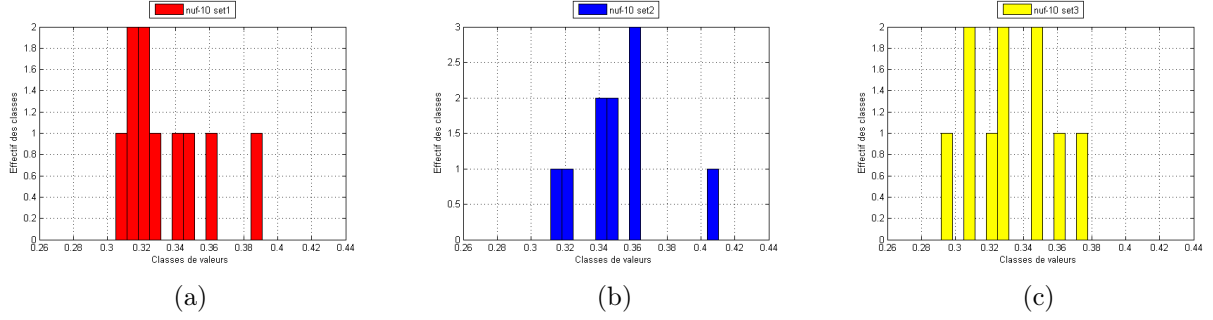


FIGURE 50: Histogrammes des distributions de ν_f pour la taille de 10

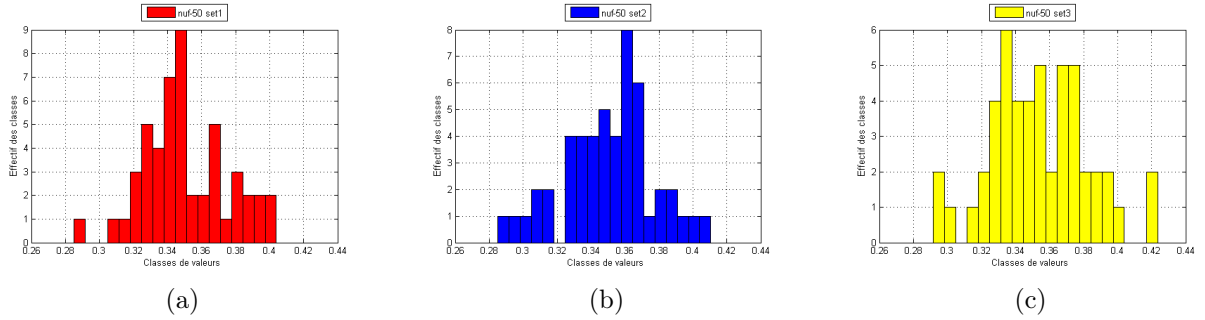


FIGURE 51: Histogrammes des distributions de ν_f pour la taille de 50

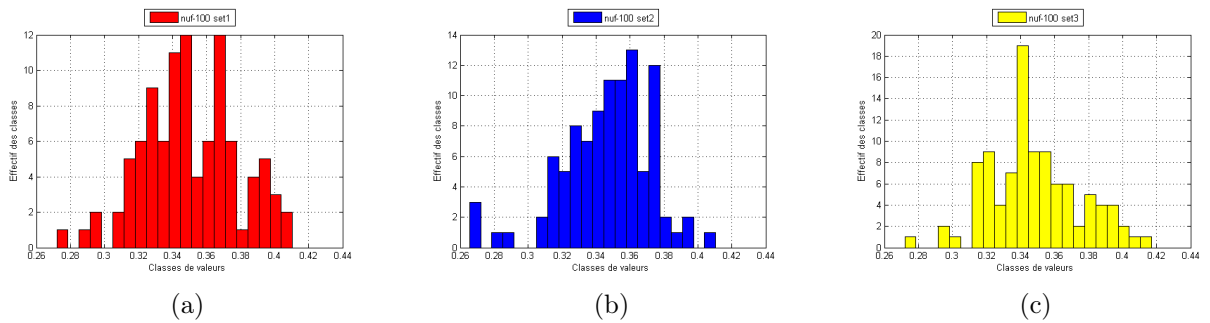


FIGURE 52: Histogrammes des distributions de ν_f pour la taille de 100

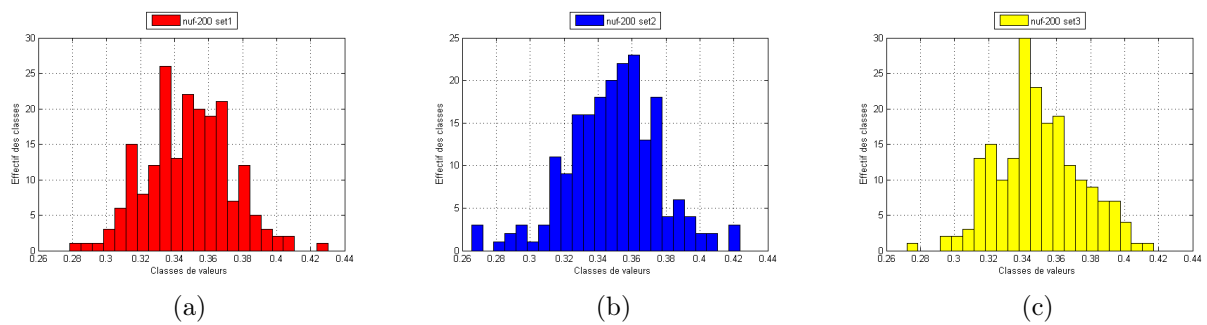


FIGURE 53: Histogrammes des distributions de ν_f pour la taille de 200

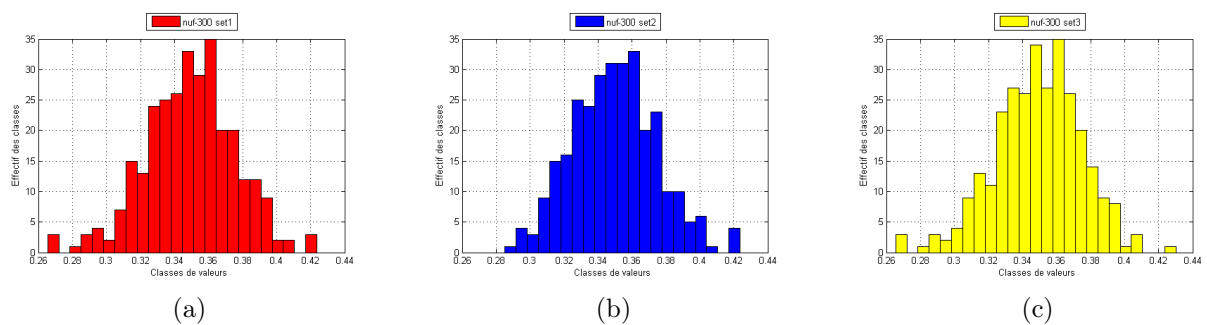


FIGURE 54: Histogrammes des distributions de ν_f pour la taille de 300

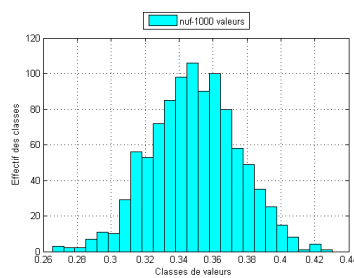


FIGURE 55: Histogramme de la distribution de ν_f de référence

A.3 Histogrammes des distributions de ν_m

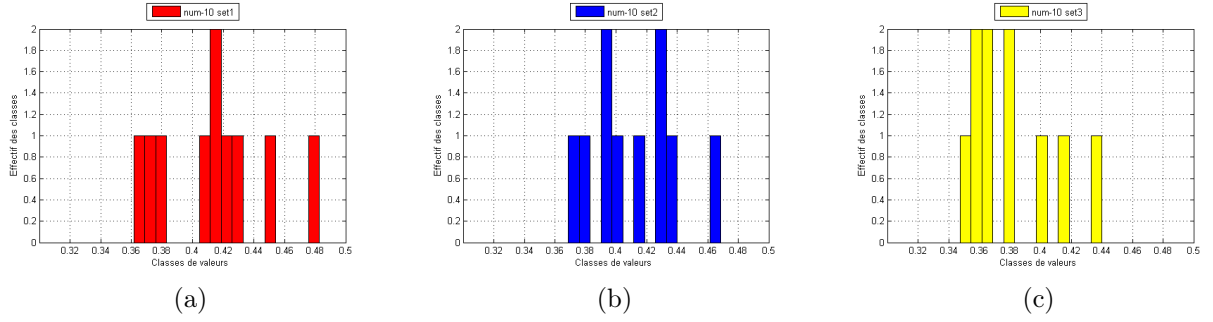


FIGURE 56: Histogrammes des distributions de ν_m pour la taille de 10

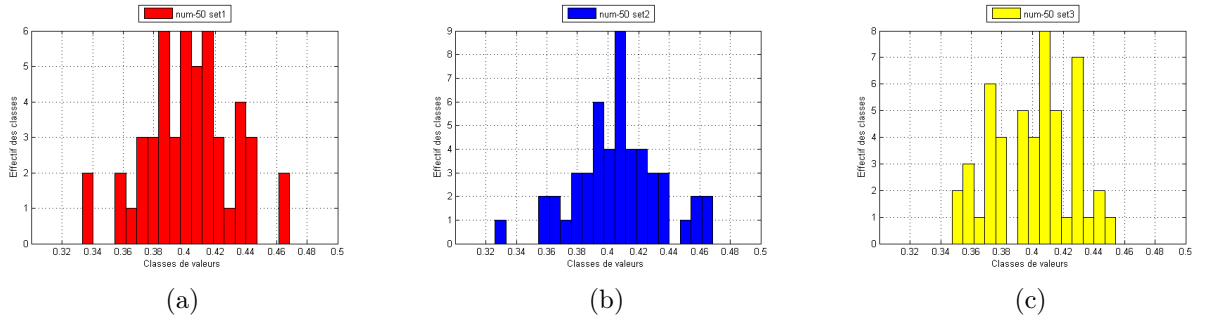


FIGURE 57: Histogrammes des distributions de ν_m pour la taille de 50

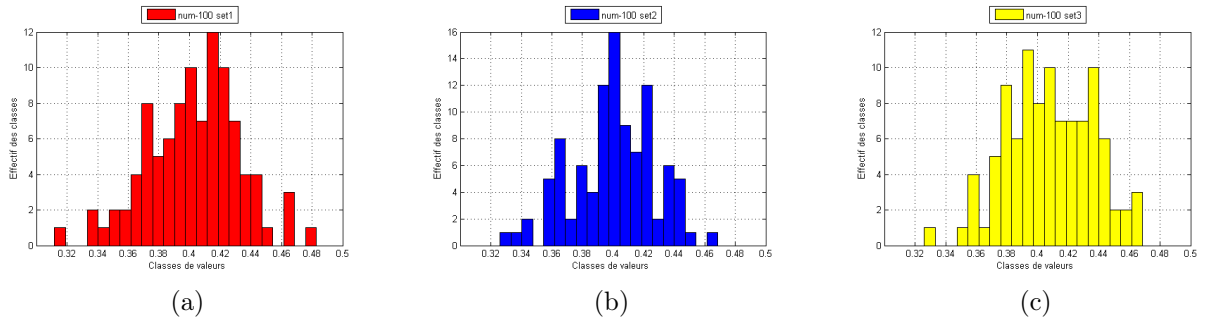
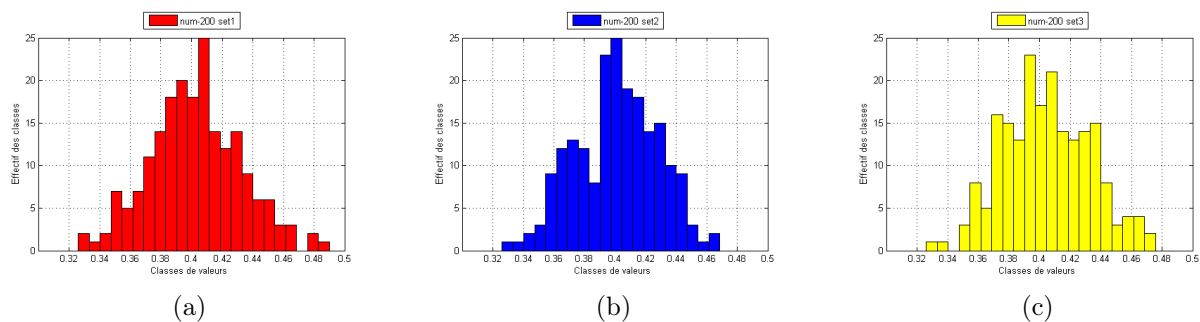
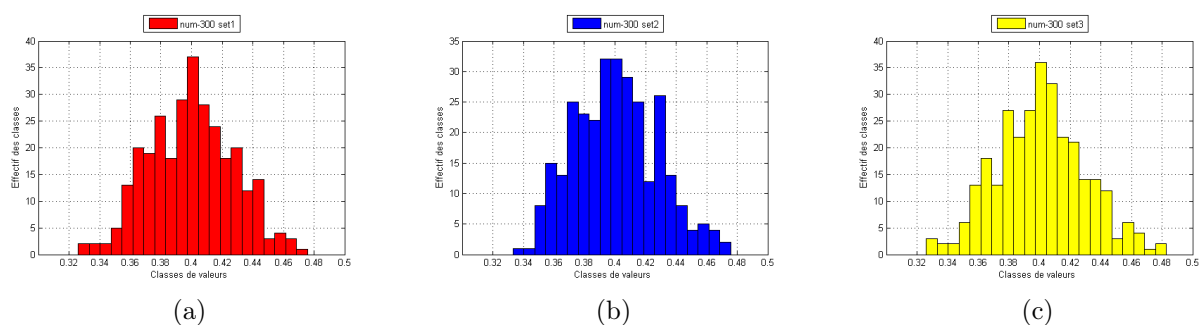
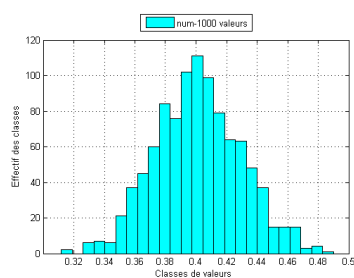


FIGURE 58: Histogrammes des distributions de ν_m pour la taille de 100

FIGURE 59: Histogrammes des distributions de ν_m pour la taille de 200FIGURE 60: Histogrammes des distributions de ν_m pour la taille de 300FIGURE 61: Histogramme de la distribution de ν_m de référence

A.4 Histogrammes des distributions de V_f

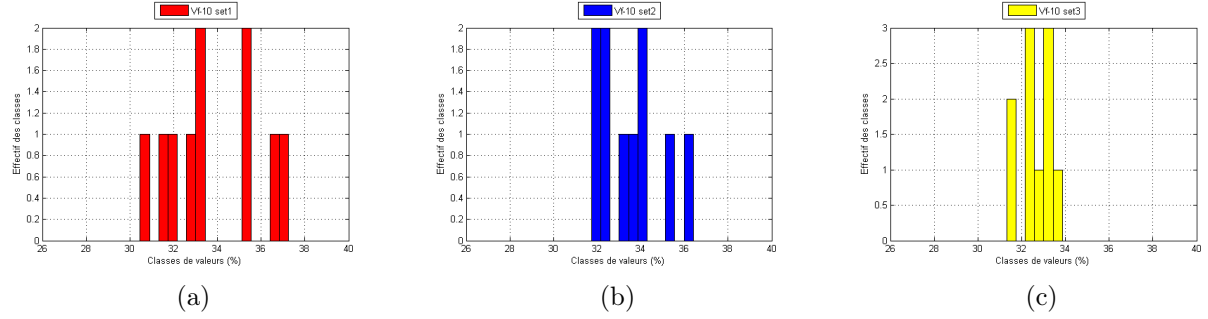


FIGURE 62: Histogrammes des distributions de V_f pour la taille de 10

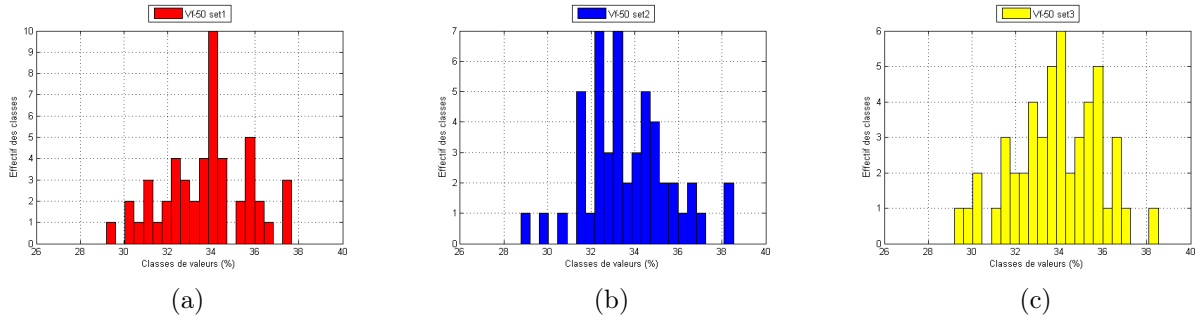


FIGURE 63: Histogrammes des distributions de V_f pour la taille de 50

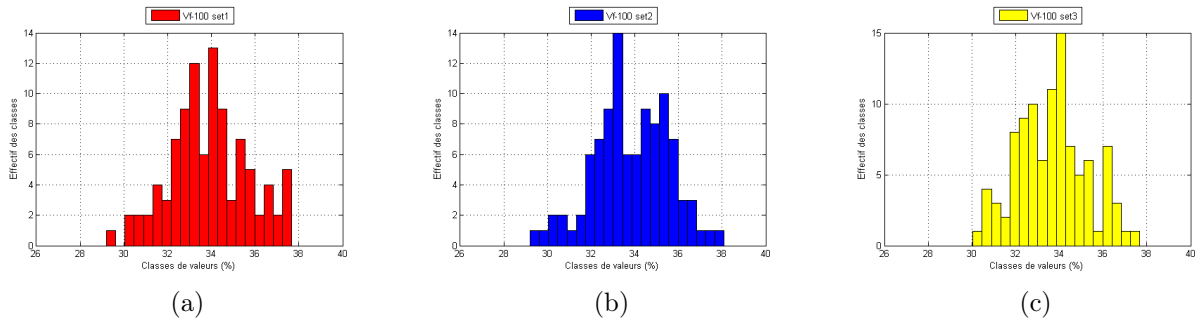


FIGURE 64: Histogrammes des distributions de V_f pour la taille de 100

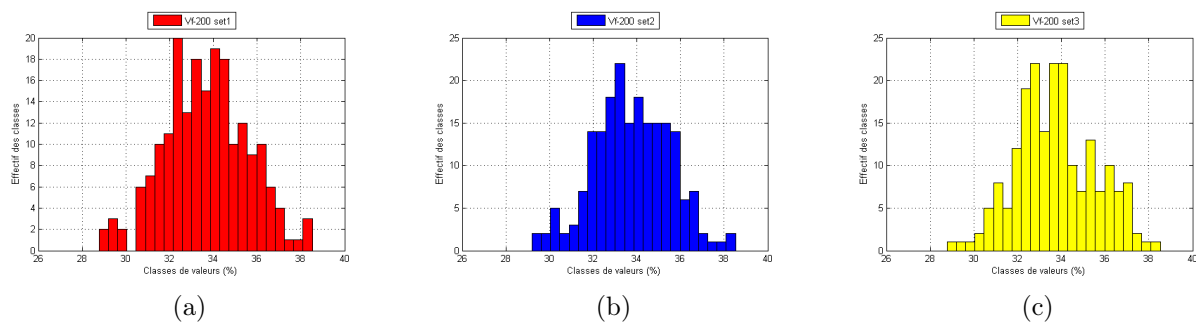


FIGURE 65: Histogrammes des distributions de V_f pour la taille de 200

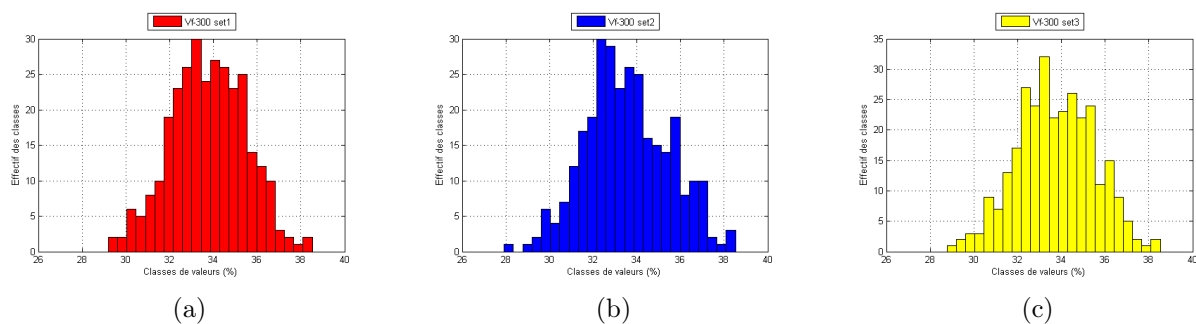


FIGURE 66: Histogrammes des distributions de V_f pour la taille de 300

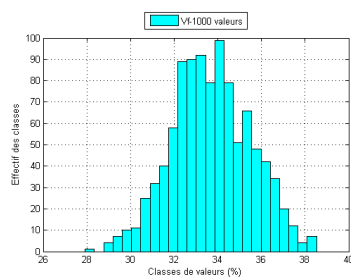


FIGURE 67: Histogramme de la distribution de V_f de référence

Annexe B

Histogrammes des distributions des sorties obtenues par l'approximation du réseau de neurones pour tous les fichiers d'apprentissage considérés

B.1 Histogrammes des distributions de E_y

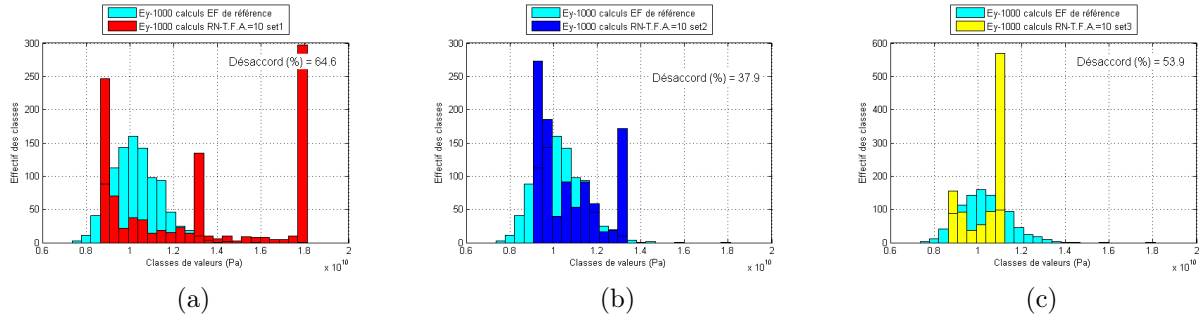


FIGURE 68: Histogrammes des distributions de E_y pour une TFA de 10

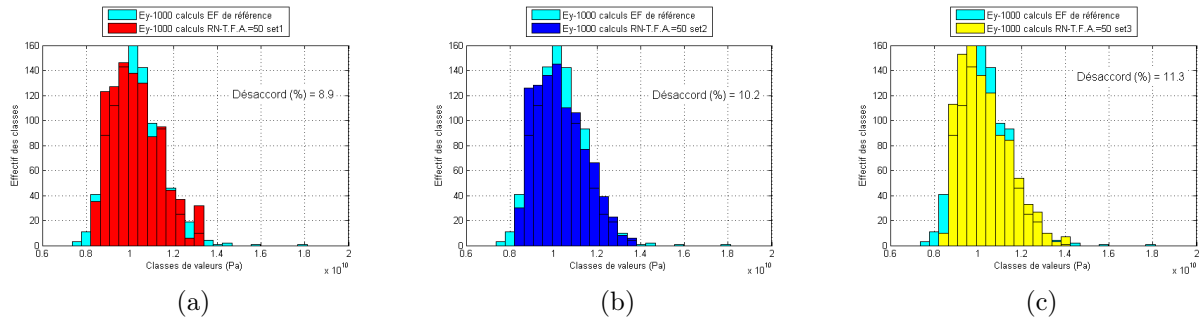
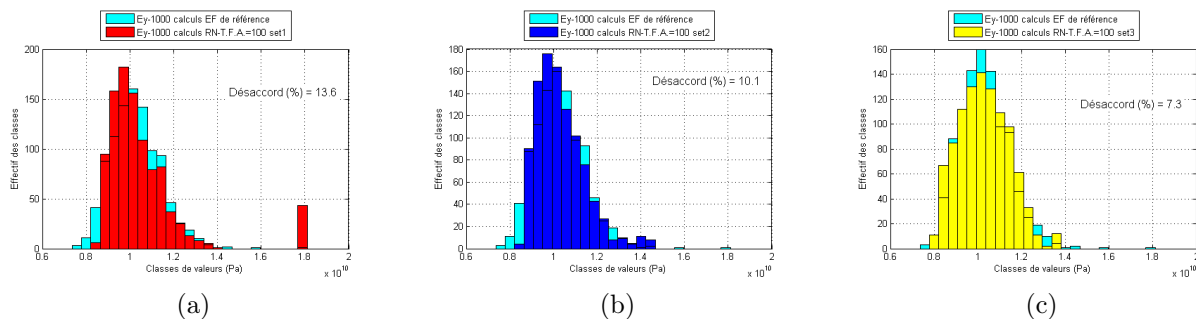
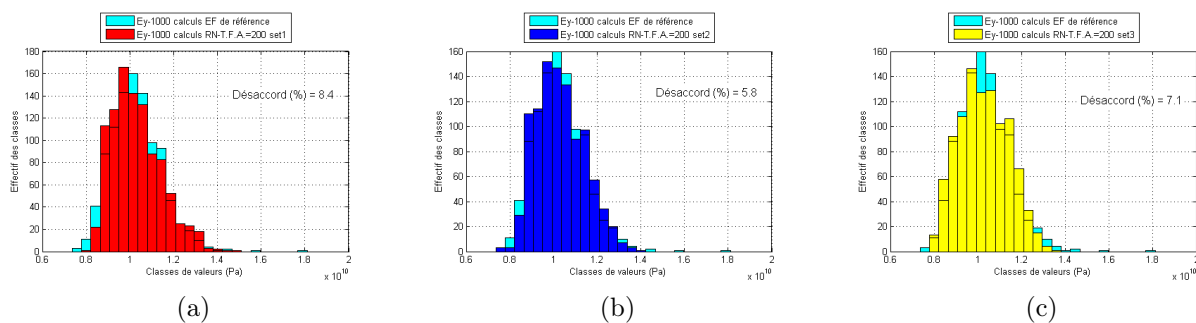
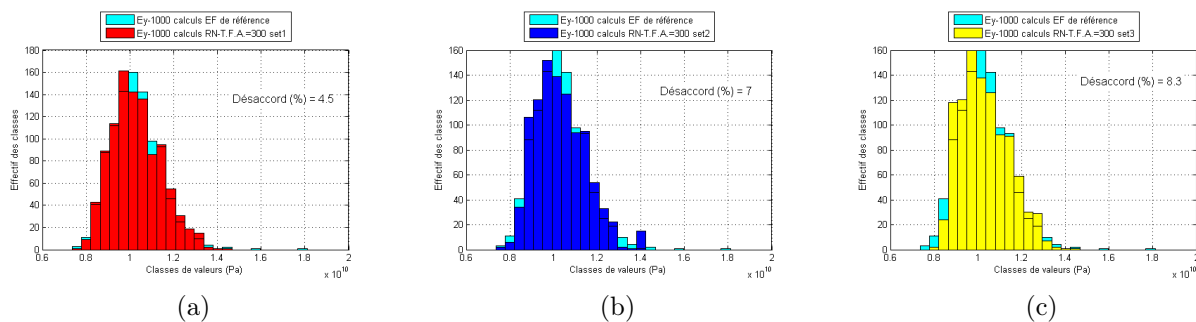


FIGURE 69: Histogrammes des distributions de E_y pour une TFA de 50

FIGURE 70: Histogrammes des distributions de E_y pour une TFA de 100FIGURE 71: Histogrammes des distributions de E_y pour une TFA de 200FIGURE 72: Histogrammes des distributions de E_y pour une TFA de 300

B.2 Histogrammes des distributions de G_{xy}

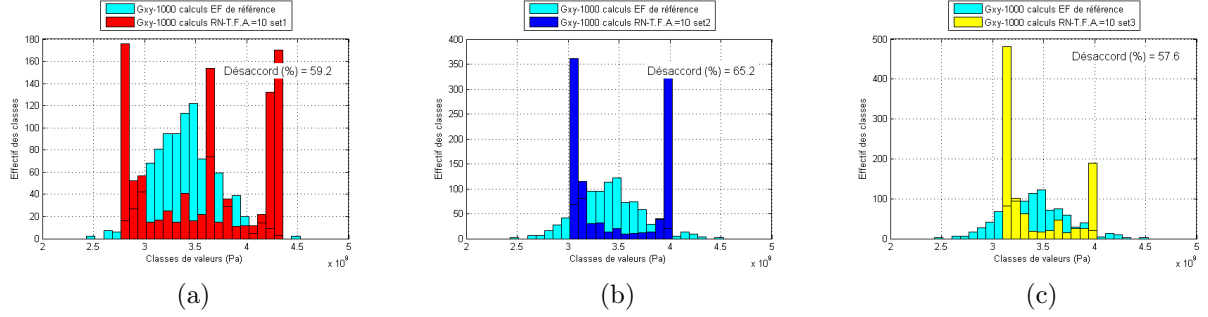


FIGURE 73: Histogrammes des distributions de G_{xy} pour une TFA de 10

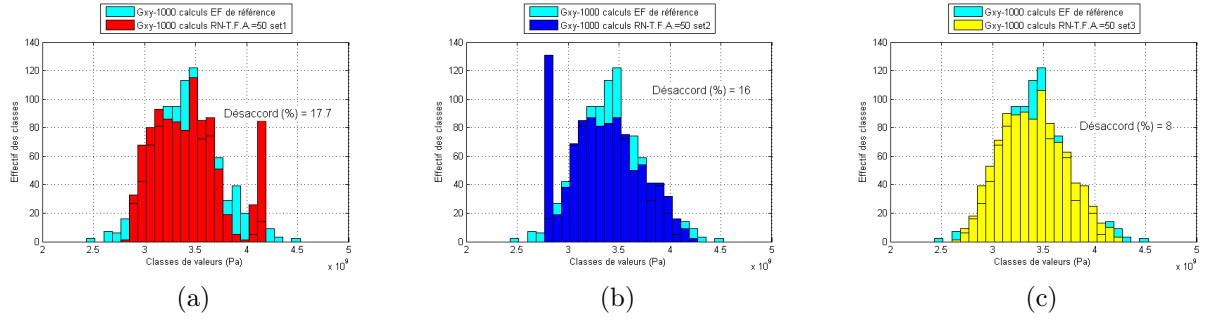


FIGURE 74: Histogrammes des distributions de G_{xy} pour une TFA de 50

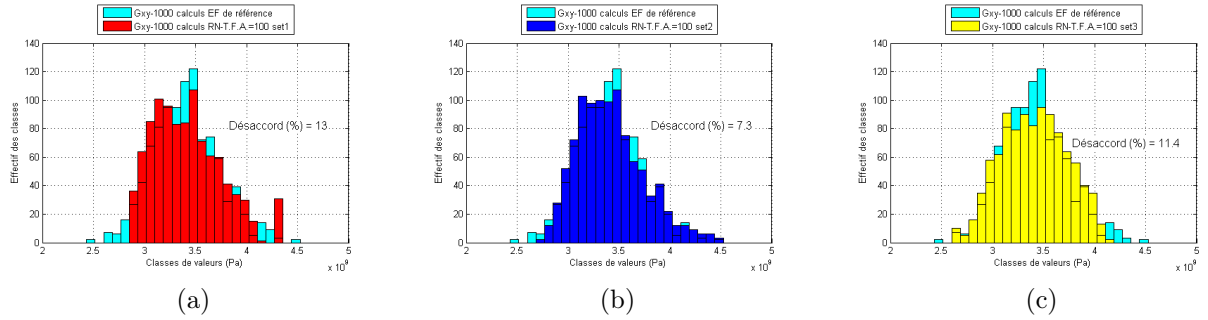
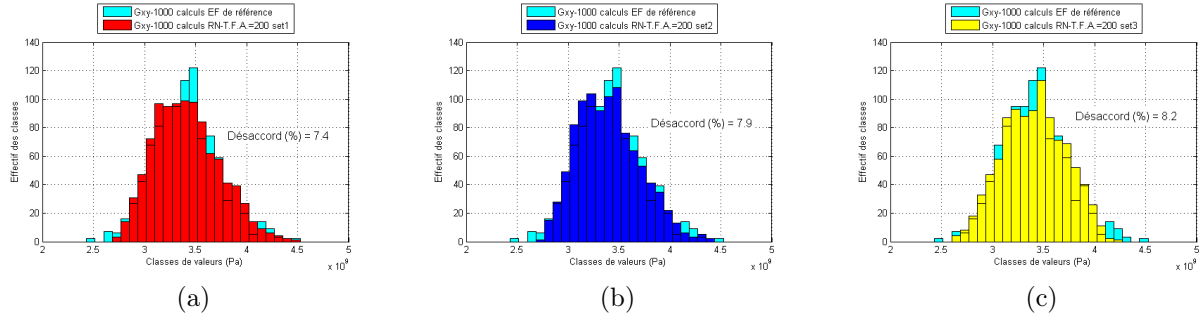
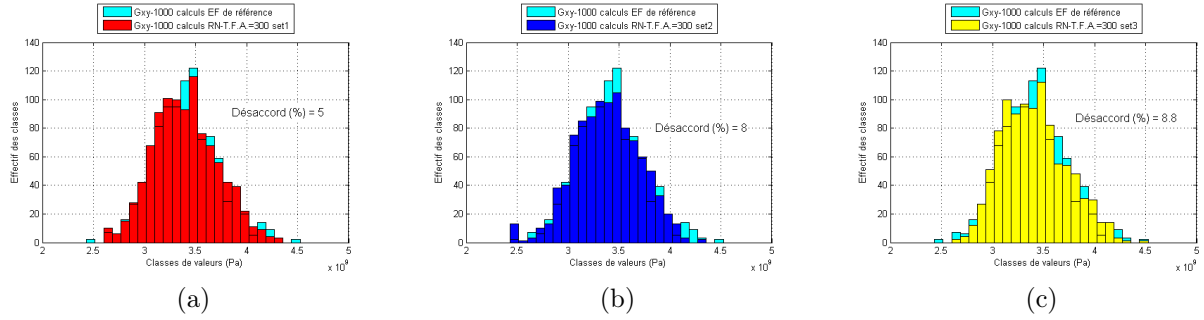
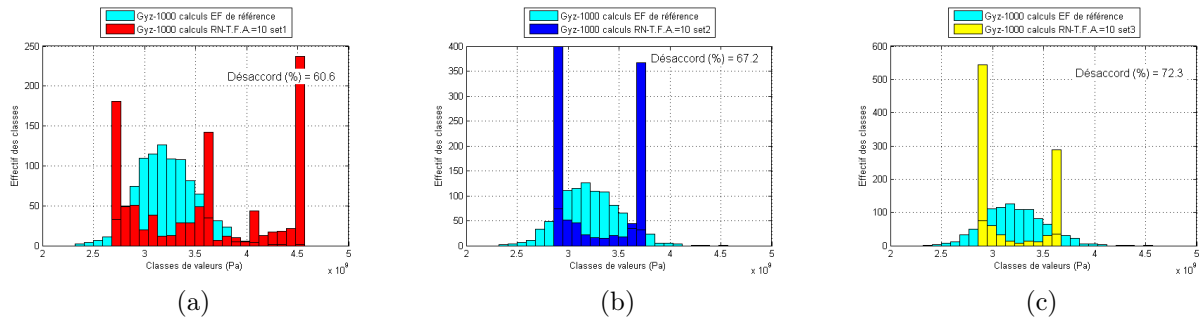
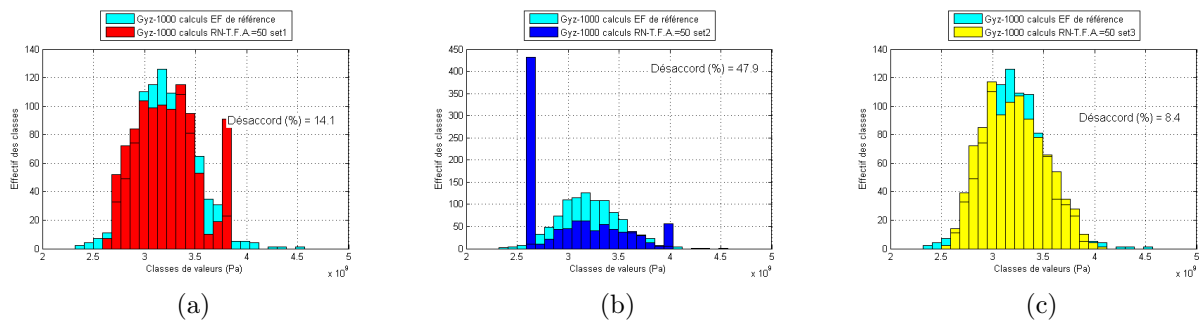
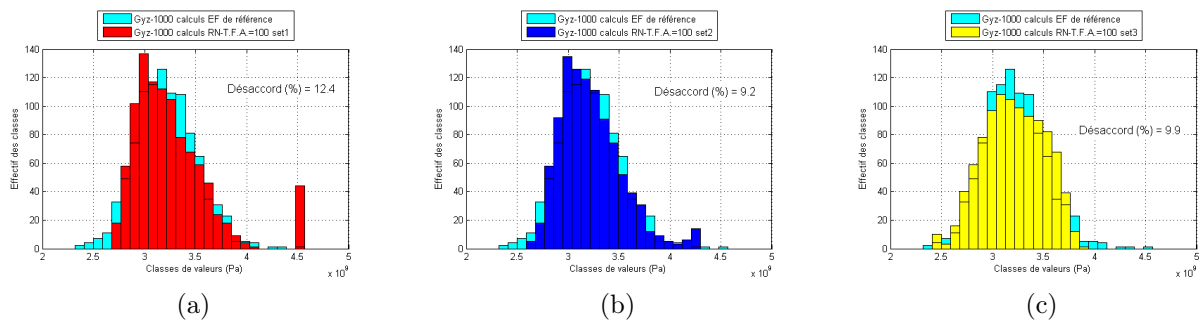
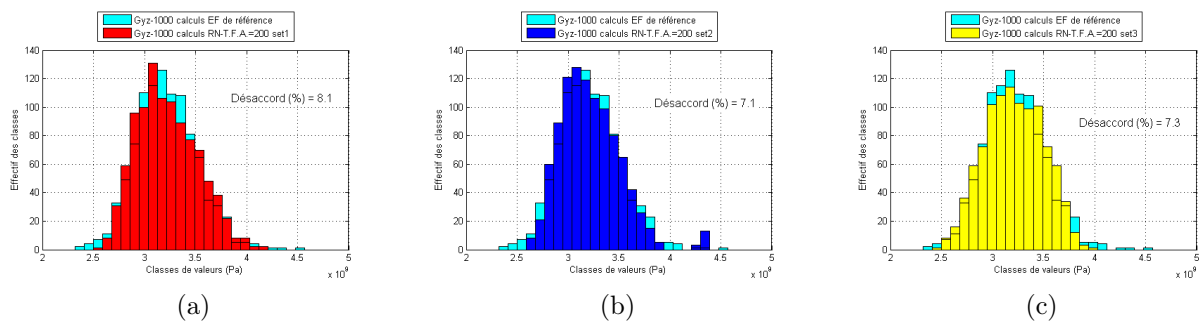


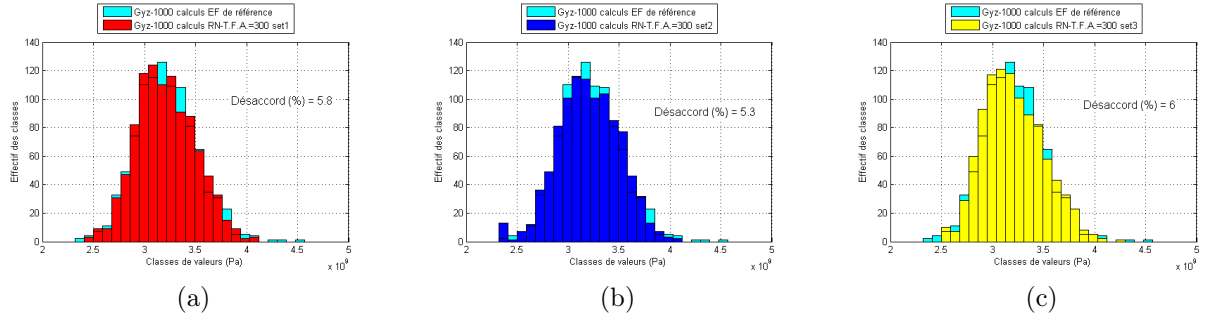
FIGURE 75: Histogrammes des distributions de G_{xy} pour une TFA de 100

FIGURE 76: Histogrammes des distributions de G_{xy} pour une TFA de 200FIGURE 77: Histogrammes des distributions de G_{xy} pour une TFA de 300

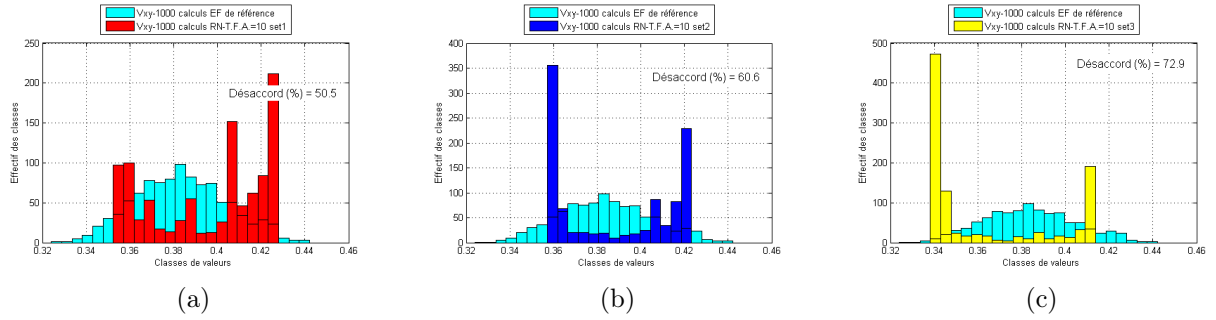
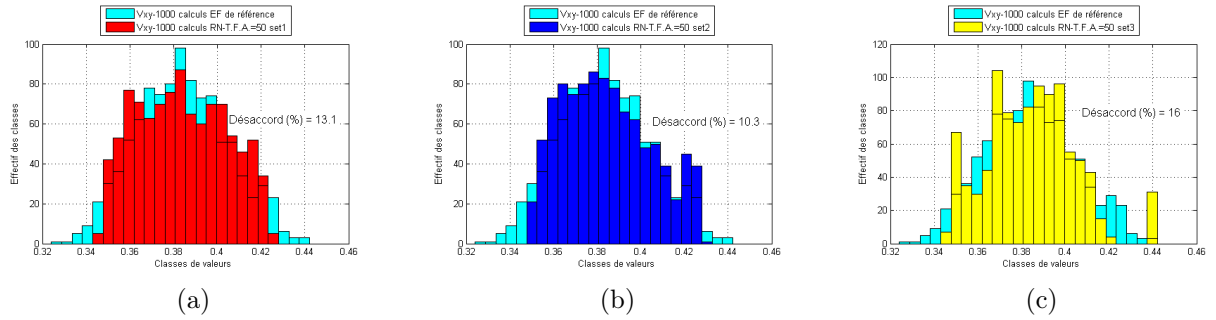
B.3 Histogrammes des distributions de G_{yz}

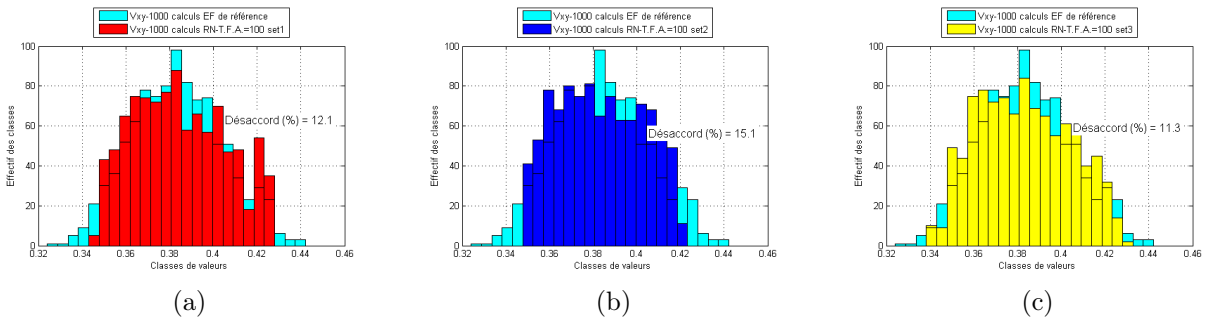
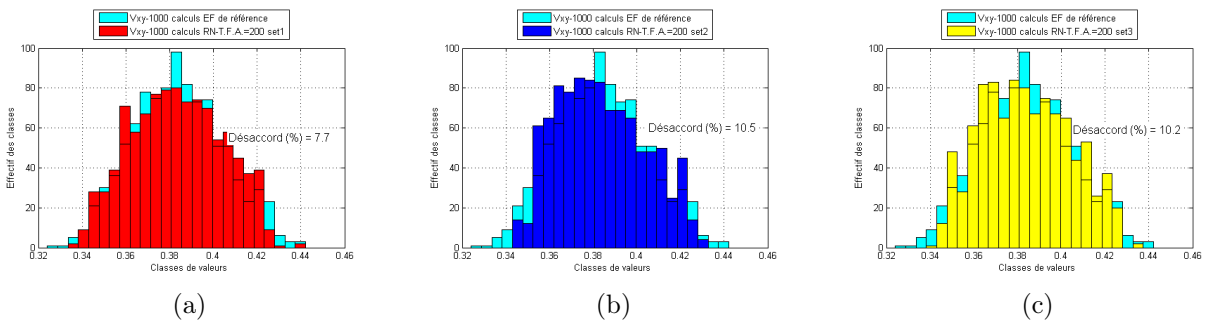
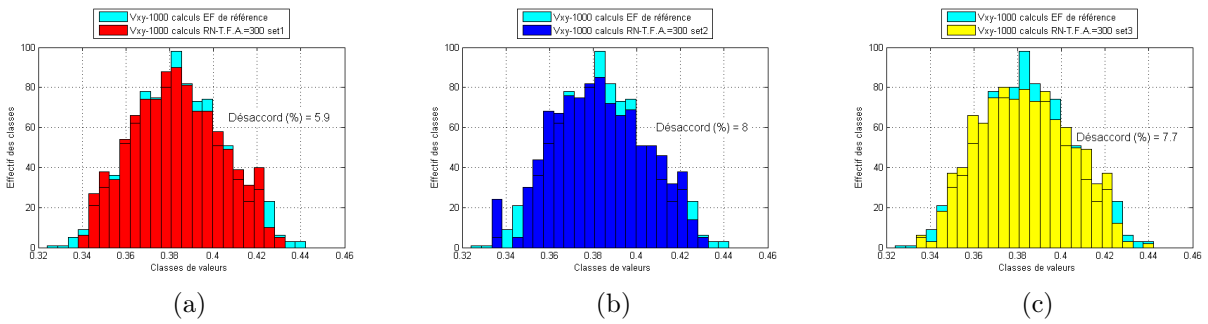
FIGURE 78: Histogrammes des distributions de G_{yz} pour une TFA de 10

FIGURE 79: Histogrammes des distributions de G_{yz} pour une TFA de 50FIGURE 80: Histogrammes des distributions de G_{yz} pour une TFA de 100FIGURE 81: Histogrammes des distributions de G_{yz} pour une TFA de 200

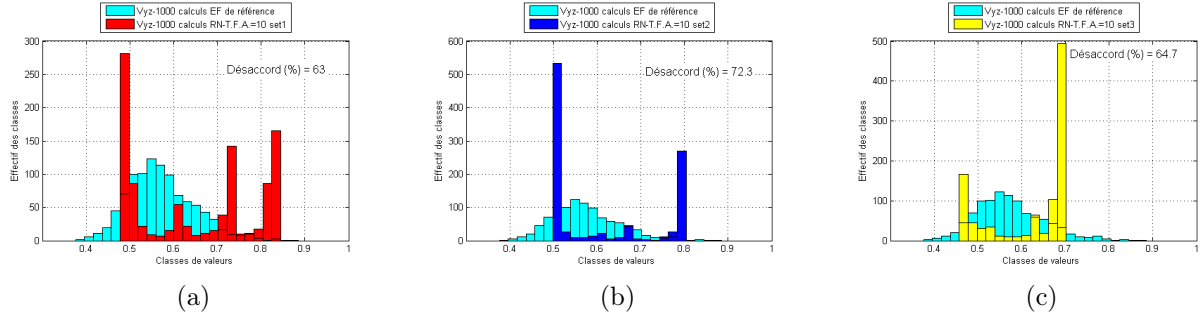
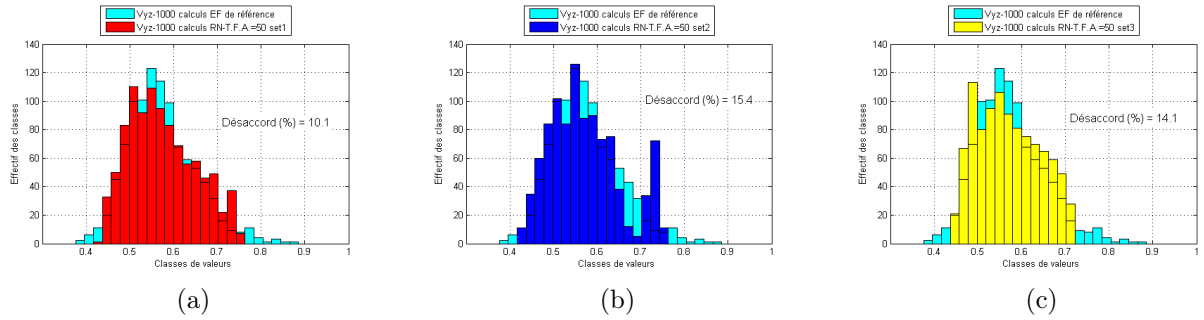
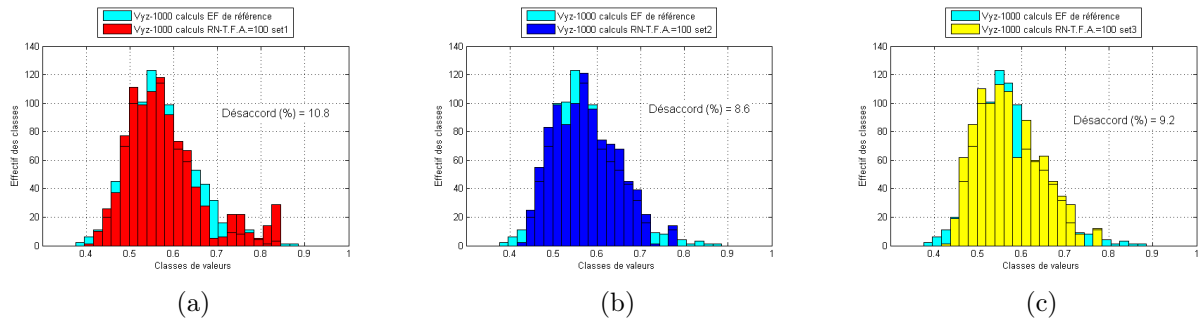
FIGURE 82: Histogrammes des distributions de G_{yz} pour une TFA de 300

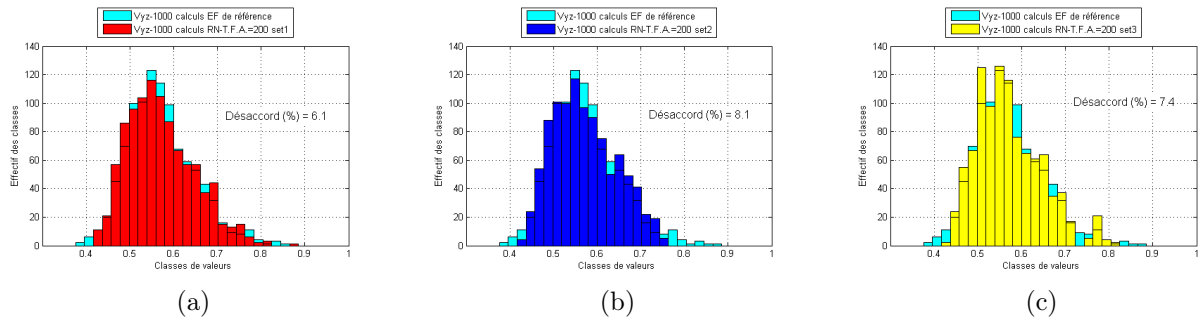
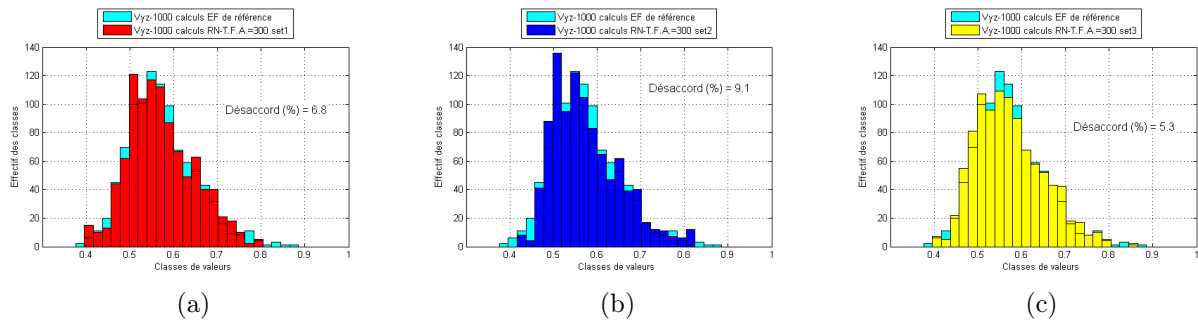
B.4 Histogrammes des distributions de ν_{xy}

FIGURE 83: Histogrammes des distributions de ν_{xy} pour une TFA de 10FIGURE 84: Histogrammes des distributions de ν_{xy} pour une TFA de 50

FIGURE 85: Histogrammes des distributions de ν_{xy} pour une TFA de 100FIGURE 86: Histogrammes des distributions de ν_{xy} pour une TFA de 200FIGURE 87: Histogrammes des distributions de ν_{xy} pour une TFA de 300

B.5 Histogrammes des distributions de ν_{yz}

FIGURE 88: Histogrammes des distributions de ν_{yz} pour la taille de 10FIGURE 89: Histogrammes des distributions de ν_{yz} pour la taille de 50FIGURE 90: Histogrammes des distributions de ν_{yz} pour la taille de 100

FIGURE 91: Histogrammes des distributions de ν_{yz} pour la taille de 200FIGURE 92: Histogrammes des distributions de ν_{yz} pour la taille de 300

Annexe C

Résultats du test de Kolmogorov pour
les entrées situées dans les fichiers
d'apprentissage considérés

Taille du fichier des entrées	Résultats du test de Kolmogorov pour chacune des cinq entrées									
	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
10_set1	N : 0,1860 G : 0,1868 LN : 0,1738 m : 3,81e+11 σ : 3,40e+10	U : 0,1665 W : 0,2265 R : 0,5272 σ : 3,40e+10	N : 0,1883 G : 0,1679 LN : 0,1738 m : 4,60e+9 σ : 4,22e+8	U : 0,3696 W : 0,2335 R : 0,5353 σ : 4,22e+8	N : 0,2219 G : 0,2319 LN : 0,2210 m : 0,3345 σ : 0,0242	U : 0,3445 W : 0,2075 R : 0,5711 σ : 0,0242	N : 0,1246 G : 0,1393 LN : 0,1355 m : 0,4144 σ : 0,0349	U : 0,2394 W : 0,1590 R : 0,5408 σ : 0,0349	N : 0,2145 G : 0,2138 LN : 0,2048 m : 33,74 σ : 2,21	U : 0,2213 W : 0,2512 R : 0,5623 σ : 2,21
10_set2	N : 0,2173 G : 0,2005 LN : 0,2063 m : 3,90e+11 σ : 2,45e+10	U : 0,3811 W : 0,2673 R : 0,5621 σ : 2,45e+10	N : 0,1062 G : 0,1116 LN : 0,1154 m : 4,62e+9 σ : 3,44e+8	U : 0,1682 W : 0,1126 R : 0,5220 σ : 3,44e+8	N : 0,2350 G : 0,2182 LN : 0,2230 m : 0,3502 σ : 0,0250	U : 0,3914 W : 0,2813 R : 0,5528 σ : 0,0250	U : 0,2130 W : 0,1637 R : 0,5514 σ : 0,0296	N : 0,1694 G : 0,1812 LN : 0,1692 m : 33,47 σ : 1,44	U : 0,2681 W : 0,1911 R : 0,5954 σ : 1,44	U : 0,2681 W : 0,1911 R : 0,5954 σ : 1,44
10_set3	N : 0,1946 G : 0,1814 LN : 0,1848 m : 3,81e+11 σ : 2,93e+10	U : 0,2544 W : 0,2354 R : 0,5074 σ : 2,93e+10	N : 0,2188 G : 0,2261 LN : 0,2140 m : 4,62e+9 σ : 3,72e+8	U : 0,3010 W : 0,2286 R : 0,5605 σ : 3,72e+8	N : 0,1272 G : 0,1433 LN : 0,1348 m : 0,3320 σ : 0,0253	U : 0,1527 W : 0,1683 R : 0,5412 σ : 0,0253	U : 0,2462 G : 0,2409 LN : 0,2349 m : 0,3821 σ : 0,0278	N : 0,1927 G : 0,2046 LN : 0,1919 m : 32,71 σ : 0,76	U : 0,2914 W : 0,2097 R : 0,6003 σ : 0,76	U : 0,2914 W : 0,2097 R : 0,6003 σ : 0,76
50_set1	N : 0,0835 G : 0,0838 LN : 0,0801 m : 3,93e+11 σ : 2,81e+10	U : 0,2076 W : 0,0762 R : 0,5041 σ : 2,81e+10	N : 0,0532 G : 0,0544 LN : 0,0526 m : 4,48e+9 σ : 3,20e+8	U : 0,1175 W : 0,1007 R : 0,5169 σ : 3,20e+8	N : 0,1224 G : 0,1131 LN : 0,1085 m : 0,3505 σ : 0,0249	U : 0,2242 W : 0,1629 R : 0,5097 σ : 0,0249	N : 0,0678 G : 0,0624 LN : 0,0631 m : 0,4029 σ : 0,0281	U : 0,1913 W : 0,1058 R : 0,4986 σ : 0,0281	N : 0,0955 G : 0,1030 LN : 0,1067 m : 33,75 σ : 1,93	U : 0,1677 W : 0,1179 R : 0,5287 σ : 1,93
50_set2	N : 0,1023 G : 0,1106 LN : 0,1163 m : 3,91e+11 σ : 2,42e+10	U : 0,3186 W : 0,0676 R : 0,5029 σ : 2,42e+10	N : 0,1012 G : 0,0913 LN : 0,0859 m : 4,43e+9 σ : 3,50e+8	U : 0,1655 W : 0,1356 R : 0,4989 σ : 3,50e+8	N : 0,0703 G : 0,0794 LN : 0,0821 m : 0,3500 σ : 0,0260	U : 0,1651 W : 0,0964 R : 0,4956 σ : 0,0260	N : 0,0761 G : 0,0676 LN : 0,0725 m : 0,4070 σ : 0,0280	U : 0,2599 W : 0,1231 R : 0,5213 σ : 0,0280	N : 0,0950 G : 0,0892 LN : 0,0849 m : 33,66 σ : 1,95	U : 0,1813 W : 0,1137 R : 0,5257 σ : 1,95
50_set3	N : 0,0853 G : 0,0957 LN : 0,0990 m : 3,94e+11 σ : 3,31e+10	U : 0,2161 W : 0,1020 R : 0,4813 σ : 3,31e+10	N : 0,0901 G : 0,0839 LN : 0,0789 m : 4,48e+9 σ : 3,29e+8	U : 0,2309 W : 0,1099 R : 0,5215 σ : 3,29e+8	N : 0,0719 G : 0,0669 LN : 0,0616 m : 0,3545 σ : 0,0288	U : 0,1811 W : 0,0921 R : 0,4966 σ : 0,0288	N : 0,0813 G : 0,0902 LN : 0,0942 m : 0,4001 σ : 0,0268	U : 0,1209 W : 0,0717 R : 0,5298 σ : 0,0268	N : 0,0673 G : 0,0724 LN : 0,0717 m : 33,86 σ : 1,98	U : 0,1609 W : 0,0944 R : 0,5334 σ : 1,98
1000	N : 0,0156 G : 0,0248 LN : 0,0296 m : 3,90e+11 σ : 2,95e+10	U : 0,1952 W : 0,0502 R : 0,4860 σ : 2,95e+10	N : 0,0235 G : 0,0137 LN : 0,0135 m : 4,49e+9 σ : 3,51e+8	U : 0,2809 W : 0,0662 R : 0,4914 σ : 3,51e+8	N : 0,0190 G : 0,0254 LN : 0,0296 m : 0,3497 σ : 0,0258	U : 0,2177 W : 0,0533 R : 0,4981 σ : 0,0258	N : 0,0241 G : 0,0159 LN : 0,0144 m : 0,4015 σ : 0,0283	U : 0,2079 W : 0,0720 R : 0,5057 σ : 0,0283	N : 0,0280 G : 0,0250 LN : 0,0252 m : 33,70 σ : 1,81	U : 0,2343 W : 0,0684 R : 0,5273 σ : 1,81

TABLE 16: Distribution théorique la plus compatible avec celle des entrées pour les échantillons de taille 10, 50 et 1000

Résultats du test de Kolmogorov pour chacune des cinq entrées										
Taille du fichier des entrées	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
	N : 0,0777 G : 0,0833 LN : 0,0880 m : 3,91e+11	U : 0,1534 W : 0,0733 R : 0,4943 σ : 2,94e+10	N : 0,0650 G : 0,0558 LN : 0,0516 m : 4,48e+9	U : 0,3347 W : 0,1001 R : 0,5352 σ : 2,99e+8	N : 0,0525 G : 0,0487 LN : 0,0502 m : 0,3500	U : 0,2289 W : 0,0955 R : 0,4893 σ : 0,0277	N : 0,0523 G : 0,0605 LN : 0,0635 m : 0,4028	U : 0,2261 W : 0,0741 R : 0,4910 σ : 0,0301	N : 0,0544 G : 0,0489 LN : 0,0452 m : 33,90	U : 0,2094 W : 0,1018 R : 0,5324 σ : 1,79
100_set1										
100_set2										
100_set3										
200_set1										
200_set2										
200_set3										
1000										

TABLE 17: Distribution théorique la plus compatible avec celle des entrées pour les échantillons de taille 100, 200 et 1000

Taille du fichier des entrées	Résultats du test de Kolmogorov pour chacune des cinq entrées									
	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
300_set1	N : 0,0315 G : 0,0321 LN : 0,0361 m : 3,89e+11	U : 0,1880 W : 0,0579 R : 0,4857 σ : 3,15e+10	N : 0,0350 G : 0,0333 LN : 0,0334 m : 4,49e+9	U : 0,3271 W : 0,0825 R : 0,4827 σ : 3,65e+8	N : 0,0326 G : 0,0415 LN : 0,0464 m : 0,3492	U : 0,2306 W : 0,0675 R : 0,4914 σ : 0,0265	N : 0,0313 G : 0,0294 LN : 0,0339 m : 0,4000	U : 0,1555 W : 0,0738 R : 0,5118 σ : 0,0277	N : 0,0339 G : 0,0309 LN : 0,0330 m : 33,76	U : 0,1860 W : 0,0625 R : 0,5358 σ : 1,70
300_set2	N : 0,0242 G : 0,0298 LN : 0,0347 m : 3,90e+11	U : 0,2067 W : 0,0623 R : 0,4849 σ : 3,04e+10	N : 0,0331 G : 0,0309 LN : 0,0309 m : 4,49e+9	U : 0,2336 W : 0,0742 R : 0,4975 σ : 3,59e+8	N : 0,0224 G : 0,0251 LN : 0,0262 m : 0,3499	U : 0,2158 W : 0,0703 R : 0,5076 σ : 0,0251	N : 0,0368 G : 0,0396 LN : 0,0402 m : 0,4007	U : 0,1781 W : 0,0741 R : 0,5216 σ : 0,0274	N : 0,0428 G : 0,0368 LN : 0,0334 m : 33,55	U : 0,2263 W : 0,0866 R : 0,5329 σ : 1,91
300_set3	N : 0,0326 G : 0,0412 LN : 0,0451 m : 3,90e+11	U : 0,2005 W : 0,0550 R : 0,4955 σ : 2,90e+10	N : 0,0435 G : 0,0339 LN : 0,0330 m : 4,49e+9	U : 0,3198 W : 0,0805 R : 0,4835 σ : 3,65e+8	N : 0,0425 G : 0,0508 LN : 0,0545 m : 0,3490	U : 0,2125 W : 0,0546 R : 0,4912 σ : 0,0257	N : 0,0375 G : 0,0311 LN : 0,0355 m : 0,4009	U : 0,1817 W : 0,0857 R : 0,5062 σ : 0,0286	N : 0,0420 G : 0,0431 LN : 0,0452 m : 33,71	U : 0,1678 W : 0,0722 R : 0,5309 σ : 1,76
1000	N : 0,0156 G : 0,0248 LN : 0,0296 m : 3,90e+11	U : 0,1952 W : 0,0502 R : 0,4860 σ : 2,95e+10	N : 0,0235 G : 0,0137 LN : 0,0135 m : 4,49e+9	U : 0,2809 W : 0,0662 R : 0,4914 σ : 3,51e+8	N : 0,0190 G : 0,0254 LN : 0,0296 m : 0,3497	U : 0,2177 W : 0,0533 R : 0,4981 σ : 0,0258	N : 0,0241 G : 0,0159 LN : 0,0144 m : 0,4015	U : 0,2079 W : 0,0720 R : 0,5057 σ : 0,0283	N : 0,0280 G : 0,0250 LN : 0,0252 m : 33,70	U : 0,2343 W : 0,0684 R : 0,5273 σ : 1,81

TABLE 18: Distribution théorique la plus compatibles avec celle des entrées pour les échantillons de taille 300 et 1000

Annexe D

Résultats du test du χ^2 pour les entrées situées dans les fichiers d'apprentissage considérés

Taille du fichier des entrées	Résultats du test du χ^2 pour chacune des cinq entrées									
	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
10_set1	N : 0,1063 G : 0,1116 LN : 0,1907 m : 3,81e+11	U : 5,05e-3 W : 0,1517 R : 0,1980 σ : 3,40e+10	N : 0,0157 G : 0,0015 LN : 0,0030 m : 4,60e+9	U : 1,6000 W : 0,1823 R : 3,7482 σ : 4,22e+8	N : 0,0042 G : 0,0193 LN : 0,0201 m : 0,3345	U : 1,6000 W : 0,1214 R : 6,7713 σ : 0,0242	N : 0,2500 G : 0,1659 LN : 0,1518 m : 0,4144	U : 1,6000 W : 0,6541 R : 4,7901 σ : 0,0349	N : 0,1225 G : 0,0933 LN : 0,0874 m : 33,74	U : 0,4000 W : 0,4807 R : 17,4232 σ : 2,21
10_set2	N : 0,8199 G : 0,6626 LN : 0,6814 m : 3,90e+11	U : 3,6000 W : 1,4700 R : 2,3072 σ : 2,45e+10	N : 0,2961 G : 0,3338 LN : 0,4549 m : 4,62e+9	U : 0,4000 W : 0,0202 R : 29,6194 σ : 3,44e+8	N : 0,8566 G : 0,6903 LN : 0,7019 m : 0,3502	U : 3,6000 W : 1,4835 R : 1,8754 σ : 0,0250	N : 0,0143 G : 0,0311 LN : 0,0456 m : 0,4120	U : 0,4000 W : 0,0739 R : 12,6298 σ : 0,0296	N : 0,1374 G : 0,1753 LN : 0,1916 m : 33,47	U : 0,4000 W : 0,0119 R : 29,4328 σ : 1,44
10_set3	N : 0,2392 G : 0,2839 LN : 0,3853 m : 3,81e+11	U : 0,4000 W : 0,0338 R : 25,3568 σ : 2,93e+10	N : 0,0717 G : 0,1046 LN : 0,1449 m : 4,62e+9	U : 0,4000 W : 0,0494 R : 14,1732 σ : 3,72e+8	N : 0,0708 G : 0,0424 LN : 0,0379 m : 0,3320	U : 0,4000 W : 0,3568 R : 11,9728 σ : 0,0253	N : 0,0097 G : 0,0418 LN : 0,0405 m : 0,3821	U : 1,6000 W : 0,0856 R : 6,8498 σ : 0,0278	N : 0,8879 G : 0,7515 LN : 0,9688 m : 32,71	U : 1,6000 W : 0,0841 R : 182,8266 σ : 0,76
50_set1	N : 0,7882 G : 1,0886 LN : 1,2761 m : 3,93e+11	U : 14,4800 W : 0,6725 R : 203,8651 σ : 2,81e+10	N : 1,3659 G : 1,6807 LN : 1,7621 m : 4,48e+9	U : 4,5600 W : 1,3996 R : 190,9466 σ : 3,20e+8	N : 1,1293 G : 0,9000 LN : 0,8484 m : 0,3505	U : 14,9600 W : 4,5111 R : 204,3606 σ : 0,0249	N : 1,1554 G : 1,2097 LN : 1,2259 m : 0,4029	U : 12,5600 W : 2,5547 R : 199,7757 σ : 0,0281	N : 4,4047 G : 5,1788 LN : 5,2006 m : 33,75	U : 6,4800 W : 0,8117 R : 227,1448 σ : 1,93
50_set2	N : 7,8892 G : 8,9248 LN : 9,1906 m : 3,91e+11	U : 22,0000 W : 3,8507 R : 299,9077 σ : 2,42e+10	N : 1,9533 G : 1,7162 LN : 1,5515 m : 4,43e+9	U : 12,2400 W : 4,5361 R : 166,1180 σ : 3,50e+8	N : 0,2638 G : 0,5000 LN : 0,6083 m : 0,3500	U : 11,9200 W : 0,4359 R : 175,5541 σ : 0,0260	N : 0,3915 G : 0,7189 LN : 0,8734 m : 0,4070	U : 18,3200 W : 1,0777 R : 215,1218 σ : 0,0280	N : 1,4464 G : 1,2388 LN : 1,2260 m : 33,66	U : 18,8000 W : 5,4449 R : 269,8833 σ : 1,95
50_set3	N : 0,9093 G : 1,3433 LN : 1,6510 m : 3,94e+11	U : 16,4000 W : 0,6983 R : 161,1524 σ : 3,31e+10	N : 0,6506 G : 0,4986 LN : 0,6136 m : 4,48e+9	U : 26,3200 W : 4,5548 R : 197,5001 σ : 3,29e+8	N : 0,5929 G : 0,3720 LN : 0,3778 m : 0,3545	U : 15,1200 W : 3,5612 R : 171,9185 σ : 0,0288	N : 3,9314 G : 4,5664 LN : 4,6959 m : 0,4001	U : 6,4800 W : 1,2552 R : 189,4173 σ : 0,0268	N : 0,0633 G : 0,1069 LN : 0,1352 m : 33,86	U : 11,9200 W : 1,0494 R : 238,4241 σ : 1,98
1000	N : 2,3371 G : 5,2043 LN : 7,8820 m : 3,90e+11	U : 588,95 W : 46,0984 R : 3,60e+3 σ : 2,95e+10	N : 5,1483 G : 0,5940 LN : 0,0932 m : 4,49e+9	U : 857,4300 W : 107,7829 R : 3,37e+3 σ : 3,51e+8	N : 0,0594 G : 2,3594 LN : 4,8465 m : 0,3497	U : 701,5800 W : 48,4933 R : 3,70e+3 σ :	N : 6,0363 G : 1,5280 LN : 0,4548 m : 0,4015	U : 662,5600 W : 82,5296 R : 3,87e+3 σ : 0,0283	N : 5,6822 G : 4,9242 LN : 5,1871 m : 33,70	U : 586,8300 W : 69,8513 R : 5,59e+3 σ : 1,81

TABLE 19: Distribution théorique la plus compatible avec celle des entrées pour les échantillons de taille 10, 50 et 1000

Taille du fichier des entrées	Résultats du test du χ^2 pour chacune des cinq entrées									
	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
100_set1	N : 2,2509 G : 3,2252 LN : 3,6786 m : 3,91e+11	U : 22,6122 W : 0,6891 R : 359,6586 σ : 2,94e+10	N : 1,3239 G : 0,7965 LN : 0,6171 m : 4,48e+9	U : 57,1020 W : 8,9878 R : 376,9042 σ : 2,99e+8	N : 2,2750 G : 2,4170 LN : 2,4959 m : 0,3500	U : 34,0408 W : 5,9769 R : 343,4483 σ : 0,0277	N : 1,8666 G : 3,1720 LN : 3,8853 m : 0,4028	U : 54,3469 W : 1,5318 R : 376,2563 σ : 0,0301	N : 2,1052 G : 2,0719 LN : 2,0534 m : 33,90	U : 33,6327 W : 8,0665 R : 590,5475 σ : 1,79
100_set2	N : 1,3630 G : 1,1499 LN : 1,1509 m : 3,88e+11	U : 41,1000 W : 7,3005 R : 347,9238 σ : 3,16e+10	N : 8,3070 G : 5,8094 LN : 4,8481 m : 4,56e+9	U : 85,3000 W : 26,5019 R : 400,0985 σ : 3,61e+8	N : 10,2929 G : 13,0397 LN : 14,3843 m : 0,3459	U : 64,2000 W : 2,2570 R : 424,5185 σ : 0,0263	N : 0,8003 G : 1,1800 LN : 1,4739 m : 0,4003	U : 43,3000 W : 3,4639 R : 447,2081 σ : 0,0270	N : 0,7649 G : 1,1837 LN : 1,3756 m : 33,83	U : 32,4000 W : 2,1883 R : 600,1171 σ : 1,70
100_set3	N : 0,5574 G : 1,2087 LN : 1,6591 m : 3,93e+11	U : 44,3000 W : 2,9180 R : 372,4035 σ : 3,08e+10	N : 2,2613 G : 1,6778 LN : 1,4584 m : 4,46e+9	U : 32,5000 W : 9,0536 R : 338,9406 σ : 3,65e+8	N : 7,1062 G : 6,3216 LN : 5,9190 m : 0,3481	U : 50,9000 W : 15,3083 R : 381,3518 σ : 0,0268	N : 1,0410 G : 0,9355 LN : 0,9246 m : 0,4078	U : 31,4000 W : 5,7267 R : 416,8301 σ : 0,0280	N : 1,9950 G : 1,6042 LN : 1,3781 m : 33,65	U : 25,5000 W : 9,8950 R : 632,7724 σ : 1,60
200_set1	N : 1,7832 G : 2,1547 LN : 2,5046 m : 3,92e+11	U : 86,7000 W : 10,4836 R : 870,4513 σ : 2,69e+10	N : 2,5168 G : 2,3584 LN : 2,4099 m : 4,50e+9	U : 56,0500 W : 11,3409 R : 722,4799 σ : 3,36e+8	N : 0,7908 G : 0,6879 LN : 0,8384 m : 0,3486	U : 118,7000 W : 13,6248 R : 776,7013 σ : 0,0248	N : 0,3928 G : 1,0942 LN : 1,6402 m : 0,4028	U : 99,6500 W : 8,0667 R : 755,7384 σ : 0,0294	N : 0,6566 G : 0,2065 LN : 0,1064 m : 33,67	U : 76,9500 W : 14,3688 R : 1,06e+3 σ : 1,90
200_set2	N : 1,9912 G : 0,8769 LN : 0,5415 m : 3,89e+11	U : 89,8500 W : 15,7998 R : 638,5675 σ : 3,22e+10	N : 6,7928 G : 4,4154 LN : 3,7390 m : 4,52e+9	U : 174,3500 W : 35,3004 R : 746,8638 σ : 3,60e+8	N : 2,5694 G : 4,5433 LN : 5,6723 m : 0,3488	U : 112,1000 W : 6,1877 R : 697,2392 σ : 0,0273	N : 0,4241 G : 1,0317 LN : 1,4128 m : 0,4013	U : 69,8500 W : 5,7695 R : 825,8417 σ : 0,0271	N : 2,0507 G : 2,0591 LN : 2,0973 m : 33,78	U : 68,8500 W : 11,2608 R : 1,12e+3 σ : 1,73
200_set3	N : 0,7244 G : 1,7741 LN : 2,4943 m : 3,91e+11	U : 79,1000 W : 5,4579 R : 707,4255 σ : 3,09e+10	N : 5,6351 G : 3,9855 LN : 3,3227 m : 4,46e+9	U : 88,6000 W : 19,8196 R : 620,1665 σ : 3,73e+8	N : 6,7211 G : 5,2533 LN : 4,6106 m : 0,3496	U : 102,6000 W : 22,4038 R : 772,2644 σ : 0,0250	N : 1,6867 G : 1,9572 LN : 2,2284 m : 0,4046	U : 68,8500 W : 9,5391 R : 802,8418 σ : 0,0280	N : 6,2986 G : 5,2632 LN : 4,7521 m : 33,74	U : 78,0000 W : 22,9646 R : 1,11e+3 σ : 1,82
1000	N : 2,3371 G : 5,2043 LN : 7,8820 m : 3,90e+11	U : 588,95 W : 46,0984 R : 3,60e+3 σ : 2,95e+10	N : 5,1483 G : 0,5940 LN : 0,0932 m : 4,49e+9	U : 857,4300 W : 107,7829 R : 3,37e+3 σ : 3,51e+8	N : 0,0594 G : 2,3594 LN : 4,8465 m : 0,3497	U : 701,5800 W : 48,4933 R : 3,70e+3 σ :	N : 6,0363 G : 1,5280 LN : 0,4548 m : 0,4015	U : 662,5600 W : 82,5296 R : 3,87e+3 σ : 0,0283	N : 5,6822 G : 4,9242 LN : 5,1871 m : 33,70	U : 586,8300 W : 69,8513 R : 5,59e+3 σ : 1,81

TABLE 20: Distribution théorique la plus compatible avec celle des entrées pour les échantillons de taille 100, 200 et 1000

Taille du fichier des entrées	Résultats du test du χ^2 pour chacune des cinq entrées									
	E_f		E_m		ν_f		ν_m		V_f	
300_set1	N : 0,8334 G : 0,1546 LN : 0,2050 m : 3,89e+11	U : 150,7667 W : 19,2079 R : 1,01e+3 σ : 3,15e+10	N : 2,5517 G : 1,7780 LN : 1,9386 m : 4,49e+9	U : 234,9333 W : 29,3549 R : 1,02e+3 σ : 3,65e+8	N : 2,1277 G : 4,4800 LN : 5,9713 m : 0,3492	U : 172,9667 W : 9,3272 R : 1,06e+3 σ :	N : 3,7972 G : 2,2016 LN : 1,6496 m : 0,4000	U : 115,5333 W : 25,9247 R : 1,21e+3 σ : 0,0277	N : 1,6436 G : 1,9880 LN : 2,2054 m : 33,76	U : 107,4000 W : 12,8262 R : 1,69e+3 σ : 1,70
300_set2	N : 0,6412 G : 0,2356 LN : 0,4042 m : 3,90e+11	U : 155,1000 W : 18,6858 R : 1,06e+3 σ : 3,04e+10	N : 1,5107 G : 0,3677 LN : 0,1789 m : 4,49e+9	U : 165,7667 W : 20,5065 R : 988,6763 σ : 3,59e+8	N : 1,6176 G : 0,6332 LN : 0,4166 m : 0,3499	U : 139,6000 W : 22,0805 R : 1,15e+3 σ : 0,0251	N : 2,1652 G : 1,1908 LN : 0,8643 m : 0,4007	U : 92,5333 W : 20,2795 R : 1,19e+3 σ : 0,0274	N : 7,4231 G : 6,5425 LN : 6,2196 m : 33,55	U : 151,2333 W : 29,7546 R : 1,58e+3 σ : 1,91
300_set3	N : 1,8044 G : 3,2492 LN : 4,3258 m : 3,90e+11	U : 150,4000 W : 9,8544 R : 1,15e+3 σ : 2,90e+10	N : 1,8210 G : 1,0953 LN : 1,2758 m : 4,49e+9	U : 231,2333 W : 27,9679 R : 1,02e+3 σ : 3,65e+8	N : 2,9777 G : 5,7173 LN : 7,4762 m : 0,3490	U : 230,6000 W : 8,6952 R : 1,17e+3 σ : 0,0257	N : 1,0268 G : 0,2387 LN : 0,1240 m : 0,4009	U : 134,1000 W : 20,3527 R : 1,17e+3 σ : 0,0286	N : 1,7710 G : 2,2979 LN : 2,6487 m : 33,71	U : 117,4667 W : 12,7102 R : 1,65e+3 σ : 1,76
1000	N : 2,3371 G : 5,2043 LN : 7,8820 m : 3,90e+11	U : 588,95 W : 46,0984 R : 3,60e+3 σ : 2,95e+10	N : 5,1483 G : 0,5940 LN : 0,0932 m : 4,49e+9	U : 857,4300 W : 107,7829 R : 3,37e+3 σ : 3,51e+8	N : 0,0594 G : 2,3594 LN : 4,8465 m : 0,3497	U : 701,5800 W : 48,4933 R : 3,70e+3 σ :	N : 6,0363 G : 1,5280 LN : 0,4548 m : 0,4015	U : 662,5600 W : 82,5296 R : 3,87e+3 σ : 0,0283	N : 5,6822 G : 4,9242 LN : 5,1871 m : 33,70	U : 586,8300 W : 69,8513 R : 5,59e+3 σ : 1,81

TABLE 21: Distribution théorique la plus compatible avec celle des entrées pour les échantillons de taille 300 et 1000

Représentation de la variabilité des propriétés mécaniques d'un CMO à l'échelle microscopique. Méthodes de construction des distributions statistiques

Résumé : Aujourd'hui, les matériaux composites sont très largement utilisés, notamment dans la réalisation de structures aéronautiques, grâce à leurs nombreux avantages fonctionnels. Leurs caractéristiques mécaniques spécifiques (propriétés/masse volumique) nettement supérieures à d'autres matériaux plus classiques, tels que l'acier ou l'aluminium et la réalisation de formes complexes, font de ces matériaux des candidats très compétitifs dans de nombreux secteurs au-delà de l'aéronautique. Toutefois, ces matériaux présentent à différentes échelles d'observation des sources de variabilité caractéristiques à chacune d'entre elles. Le procédé de fabrication des pièces ainsi que les propriétés des constituants élémentaires en sont les principaux responsables. Trois niveaux (ou échelles) d'observation sont usuellement considérés dans les matériaux composites : l'échelle microscopique (fibres et matrice), l'échelle mésoscopique (pli) et enfin l'échelle macroscopique (stratification de plis). Les sources de variabilité se propagent à travers les échelles et génèrent finalement des comportements mécaniques dispersés à l'échelle de la structure. La prise en considération de cette variabilité s'avère alors pertinente pour le concepteur, désireux d'obtenir un indicateur de la fiabilité du matériau ou de la structure composite qu'il conçoit. Pour cela, il est nécessaire de transférer à moindre coût de calcul cette variabilité dès l'échelle microscopique et jusqu'à l'échelle de la structure. La construction de lois de distribution des propriétés mécaniques équivalentes en fonction de la variabilité présente à chaque échelle est alors indispensable. L'objectif de ce travail de recherche a été d'élaborer des distributions du comportement homogénéisé du matériau à l'échelle des fibres et de la matrice en fonction de la variabilité existante à cette échelle. La réduction du temps de calcul nécessaire à leur obtention a été également visée. À partir d'une observation microscopique réalisée sur une coupe d'un CMO, la variabilité morphologique du milieu hétérogène a été caractérisée et six types différents de motifs d'arrangements de fibres regroupés en cellules ont ainsi été identifiés. Des cellules virtuelles ont été générées et proposées pour établir des lois de distribution du comportement équivalent par type de cellule, en fonction des paramètres variables pertinents retenus à cette échelle. En ce qui concerne la réduction du temps de calcul nécessaire à l'élaboration de ces lois de distribution, une démarche reposant sur l'utilisation des réseaux de neurones a été proposée. Cette démarche a été illustrée sur une cellule de type 6 et pour un nombre de 1000 calculs EF de référence. La réduction du temps de calcul s'est avérée significative. Le gain du temps a été d'environ 95 %.

Mots-clés : matériaux composites, variabilité, matériau virtuel, homogénéisation, distributions statistiques, méta-modèle, réduction du temps de calcul.

Representation of CMO mechanical properties variability at the microscopic scale. Building methods of the statistical distributions

Abstract : Nowadays, composite materials are very widely used, notably in the domain of aeronautical structures, thanks to their numerous functional benefits. Their specific mechanical properties (properties/density) far superior to those of conventional materials, such as steel or aluminum and the realization of complex shapes, make these materials perfect candidates in many areas beyond aviation. However, these materials present at different observation scales sources of variability peculiar to each one. The manufacturing process and the properties of the elementary constituents are in fact the principal cause of these sources of variability. Three levels (or scales) of observation are usually considered regarding composite materials: the microscopic scale (fibers and matrix), the mesoscopic scale (ply) and finally the macroscopic scale (laminated material). The sources of variability propagate through the scales and finally generate dispersed mechanical behaviors at the structure scale. Taking into consideration these sources is proved to be a relevant work by the designer, which in turn will allow him to calculate an indicator of the composite structure reliability that he is conceiving. To be able to do the latter work, it is necessary to transfer this variability at a lower computational cost from the microscopic level up to the structure scale. The construction of equivalent mechanical properties distributions according to the variability present at each scale is then essential. The objective of this research work was to build statistical distributions of the homogenized behavior of the material at the scale of fibers and matrix, according to the existing variability at this scale. Minimizing the computation time required for obtaining these distributions was another important objective. From a microscopic observation made on a section of a CMO, the morphological variability of the heterogeneous medium has been characterized and six different types of arrangements patterns of fibers grouped into cells have been identified. Virtual cells have been developed and suggested, in order to build the equivalent behavior distribution by cell type, according to the relevant variables selected at this scale. Now, in order to minimize the computing time required for the creation of these distributions, an approach based on neural networks was proposed. This approach was used for a type 6 cell and for a number of 1000 FE calculations. Hence, the reduction of the computation time was significant, at an approximate rate of 95 %.

Keywords : composite materials, variability, virtual material, homogenization, statistical distributions, metamodel, minimizing computation time.