Aix-Marseille Université
École Doctorale en Mathématiques et Informatique de Marseille — E.D. 184

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université d'Aix-Marseille.
Spécialité : Mathématiques

par
Laurent BATTISTI
sous la direction de
Karl OELJEKLAUS

Titre :

Variétés toriques à éventail infini et construction de nouvelles variétés complexes compactes : quotients de groupes de Lie complexes et discrets.

soutenue publiquement le 10/12/2012 à Marseille.

JURY :

Georges DLOUSSKY	Professeur, Aix-Marseille Université - LATP	*Examinateur*
Jean-Jacques LOEB	Professeur, Université d'Angers - LAREMA	*Rapporteur*
Laurent MEERSSEMAN	Professeur, Université de Bourgogne - IMB	*Rapporteur*
Karl OELJEKLAUS	Professeur, Aix-Marseille Université - LATP	*Directeur de thèse*
Andrei TELEMAN	Professeur, Aix-Marseille Université - LATP	*Examinateur*
Matei TOMA	Professeur, Université de Lorraine - IEC	*Examinateur*
David TROTMAN	Professeur, Aix-Marseille Université - LATP	*Examinateur*

Le financement de cette thèse a été assuré par la Région Provence-Alpes-Côte d'Azur, dans le cadre d'une Bourse Régionale.

« Your time is limited, so don't waste it living someone else's life. Don't be trapped by dogma — which is living with the results of other people's thinking. Don't let the noise of others' opinions drown out your own inner voice. And most important, have the courage to follow your heart and intuition. They somehow already know what you truly want to become. Everything else is secondary. »

(S. Jobs, 2005)

Table des matières

Introduction **7**
Présentation . . . 7
Remerciements . . . 8

1 Un résultat sur les surfaces de Kato **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.2 Préliminaires . . . 11
1.3 La variété $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ est de Stein . . . 13
1.3.1 Réduction du problème. . . . 13
1.3.2 La paire $(B \setminus \{\zeta = 0\}, \varphi(B \setminus \{\zeta = 0\}))$ est de Runge . . . 14
1.3.3 Une généralisation . . . 19
1.4 Invariants . . . 20

2 Rappels **25**
2.1 Introduction . . . 25
2.2 Groupes de Cousin . . . 25
2.3 Rappels sur les variétés toriques . . . 26
2.3.1 Préliminaires . . . 26
2.3.2 Variétés affines toriques . . . 28
2.3.2.1 Cônes . . . 28
2.3.2.2 Variété affine torique associée à un cône . . . 30
2.3.3 Variété torique associée à un éventail . . . 32
2.3.4 Action du tore . . . 35
2.3.5 Premières propriétés des variétés toriques . . . 36
2.3.6 Morphismes toriques . . . 37
2.3.7 Sous-variétés d'une variété torique . . . 38

3 Variétés à coins généralisées **39**
3.1 Introduction . . . 39
3.2 La variété à coins d'un éventail . . . 39
3.2.1 Définition de la variété à coins associée à un éventail . . . 39
3.2.2 La topologie d'une variété à coins . . . 41
3.2.3 Lien avec les variétés à coins au sens usuel . . . 45

4 Variétés LVMB et quotients de variétés toriques **49**
4.1 Introduction . . . 49
4.2 Description des variétés LVMB en termes de géométrie torique . . . 51
4.2.1 La construction de Bosio . . . 51

4.2.2 Le point de vue torique . . . 52
4.2.2.1 Résultats préliminaires . . . 52
4.2.2.2 Passage d'une donnée LVMB à une donnée torique . . . 54
4.2.2.3 Passage d'une donnée torique à une donnée LVMB . . . 56
4.2.3 Une correspondance entre les données LVMB et toriques . . . 57
4.3 Détecter les données LVM parmi les données LVMB . . . 57
4.4 Quand deux variétés LVMB sont-elles biholomorphes ? . . . 63
4.5 Une généralisation de la construction de Bosio . . . 65
4.5.1 Détecter tous les ouverts à quotient compact . . . 65
4.5.2 Une généralisation . . . 66

5 Une nouvelle classe de variétés complexes compactes non kählériennes 69
5.1 Introduction . . . 69
5.2 Construction de nouvelles variétés . . . 69
5.2.1 Préliminaires . . . 69
5.2.2 Début de la construction . . . 73
5.2.3 Invariants . . . 79
5.2.4 Un exemple . . . 80

6 Dimension algébrique des variétés OT 83
6.1 Introduction . . . 83
6.2 Un résultat de Vogt . . . 83
6.2.1 Généralisation . . . 83
6.2.1.1 Préliminaires . . . 83
6.2.1.2 Généralisation des résultats de Vogt . . . 85
6.2.2 Application aux variétés OT. . . . 92
6.2.2.1 Préliminaires . . . 92
6.2.2.2 Dimension algébrique . . . 93
6.2.3 Une classe spéciale de groupes de Cousin . . . 95
6.2.3.1 Introduction . . . 95
6.2.3.2 Préliminaires . . . 95
6.2.3.3 Une classe de groupes de Cousin vérifiant la condition n°2 96

Conclusion 99

Bibliographie 101

Index 104

Introduction

Présentation

Les premiers objets de la géométrie algébrique et de la géométrie différentielle ont été introduits indépendamment par Fermat et Descartes avec la notion de "coordonnées cartésiennes". Cependant, les découvertes en géométrie durant l'Antiquité avaient d'une certaine façon préparé la voie à l'étude des variétés algébriques, avec par exemple l'étude des coniques, et de nombreuses courbes planes.

La géométrie algébrique constitue néanmoins un domaine de recherche actuellement encore très actif. Ces dernières années, de nouvelles méthodes de géométrie algébrique ont mené à des progrès inattendus et significatifs dans d'autres branches des mathématiques comme la théorie des nombres, la cryptographie, les codes correcteurs, la combinatoire, les statistiques et la robotique.

Les interactions entre la géométrie algébrique et d'autres domaines lui confèrent un intérêt tout particulier même si, bien évidemment, de très nombreux autres sujets mathématiques bénéficient également de cette qualité essentielle.

La théorie des variétés toriques trouve son origine dans les travaux de Demazure, Mumford, Satake et Oda. Ce sont des variétés algébriques pour lesquelles on peut relier des propriétés géométriques importantes à des propriétés combinatoires portant sur des cônes dans des espaces vectoriels réels.

Les variétés toriques présentent l'avantage de fournir un moyen relativement commode et concret d'étudier de nombreux phénomènes et propriétés en géométrie algébrique. Certains problèmes de géométrie algébrique ont une solution particulièrement simple et élégante dans cette classe de variétés.

La classe des variétés toriques est également à la base de la construction de nombreuses variétés complexes, par exemple certaines surfaces de la classe VII de Kodaira, les variétés LVMB (dues à López de Medrano, Verjovsky, Meersseman et Bosio, voir [26], [27], [5]) ou encore les variétés obtenues par G. K. Sankaran dans [33]. L'objet du chapitre 5 est notamment d'étendre cette dernière construction.

*
* *

Cette thèse est organisée comme suit. Dans le premier chapitre, on démontre un résultat concernant les surfaces de Kato intermédiaires. Ce sont des surfaces de la classe VII de Kodaira, c'est-à-dire les surfaces complexes compactes dont le premier nombre de Betti vaut 1. On montre que le revêtement universel $\widetilde{S}$ d'une surface de Kato S privé de la pré-image $\widetilde{D}$ des courbes rationnelles D de S est de Stein.

Dans le second chapitre, on rappelle brièvement les notions de base sur les groupes de Cousin et les variétés toriques, qui serviront aux chapitres suivants.

Dans le troisième chapitre, on généralise la notion de "variété à coins" associée à un éventail et on en donne quelques propriétés de base que nous utiliserons par la suite. La variété à coins d'une variété torique X_Δ est le quotient de cette variété par le sous-groupe $(\mathbb{S}^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ qui agit sur X_Δ. On peut donner une description de nature plus "combinatoire" de cet espace en le construisant directement à partir de l'éventail Δ. Il se trouve que cette construction ne fait pas appel à la rationalité des vecteurs qui engendrent les cônes de Δ ; on ôte donc cette hypothèse de rationalité dans ce chapitre et, étant donné un éventail Δ, on construit un espace topologique $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ qui nous sera utile dans les deux chapitres suivants pour comprendre l'action de certains sous-groupes fermés de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur des variétés toriques.

Dans le quatrième chapitre, on donne une nouvelle présentation de la construction des variétés LVMB. Bosio a généralisé dans [5] une construction de variétés complexes compactes due à López de Medrano, Verjovsky et Meersseman (appelées variétés LVM) : étant donné un ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et le choix d'une famille $\mathcal{L}$ de formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$, on construit une action propre de $\mathbb{C}^m$ sur U qui donne un quotient compact. Notre objectif est de substituer à l'ouvert U la donnée d'un sous-éventail Δ de l'éventail de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et à la famille $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dont la projection π associée est injective sur le support de Δ. Ensuite, on "détecte" les variétés LVM parmi les variétés LVMB à l'aide d'un critère sur l'éventail $\pi(\Delta)$, à savoir sa polytopalité. Enfin on montre que la construction de Bosio est la plus générale, dans le sens où un ouvert de l'espace projectif dont le quotient par un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*)^n$ isomorphe à $\mathbb{C}^m$ est compact est nécessairement stable par $(\mathbb{C}^*)^n$. Dans ce chapitre on fait appel à la variété à coins $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$, notamment pour comprendre l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U.

Le chapitre suivant est consacré à la construction de nouvelles variétés complexes compactes, en utilisant une méthode due à Sankaran ([33]), qui consiste à faire agir un groupe discret sur un ouvert U d'une variété torique, afin d'obtenir un quotient compact. L'idée ici est de remplacer l'ouvert U par le quotient d'une variété torique par un sous-groupe de Lie fermé de $(\mathbb{C}^*)^n$. Ici encore, l'étude des variétés à coins "sans rationalité" s'avère très importante.

Le dernier chapitre est consacré à la démonstration d'un résultat concernant les variétés Oeljeklaus-Toma, à savoir qu'on établit que la dimension algébrique de ces variétés est nulle. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'extension d'un résultat de Vogt concernant les groupes de Cousin à certains ouverts de groupes de Cousin ; ensuite on utilise cette généralisation pour démontrer le résultat annoncé.

Remerciements

Tout d'abord je souhaite remercier mon directeur de thèse, Karl Oeljeklaus, sans qui l'élaboration de ce travail n'aurait pas été possible. Son aide indéfectible, sa confiance et sa patience m'ont été particulièrement précieuses tout au long de l'élaboration de ma thèse ;

il a toujours été présent pour répondre à mes questions, il a su me guider, m'encourager et me donner goût à un sujet passionnant.

Je remercie également Jean-Jacques Loeb et Laurent Meersseman d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, mais aussi pour leurs remarques très pertinentes sur mon travail, leur relecture attentive et les échanges fructueux que j'ai eus avec eux.

Je voudrais également remercier Georges Dloussky, Andrei Teleman, Matei Toma et David Trotman qui m'ont fait le plaisir d'être membres de mon jury et pour leurs remarques concernant ma thèse.

Mes remerciements vont également à mes collègues de bureau, Saurabh, Slah et Tarek, pour les moments passés en leur compagnie. Je remercie aussi toutes les personnes que j'ai côtoyées au CMI durant ces trois années pour leur efficacité redoutable et leurs encouragements incessants : Émilie, Gisèle, Marie-Christine, Sonia, Valérie, Hassan, Julien, Kai, Norbert, Tino.

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à Pauline et à mes parents pour leur soutien au cours de ce travail. Depuis toujours, Francine et Jean-Dominique m'ont soutenu et encouragé sans jamais défaillir au cours de toutes mes entreprises, y compris mes études, merci ! Sans oublier Lino (Groumpf !), évidemment.

Chapitre 1

Un résultat sur les surfaces de Kato

1.1 Introduction

Les surfaces de la classe VII de Kodaira sont les surfaces complexes compactes dont le premier nombre de Betti vaut 1 et de dimension de Kodaira égale à $-\infty$; on appelle surface de la classe VII_0 une surface de la classe VII qui est minimale. Le cas de ces surfaces dont le second nombre de Betti b_2 est nul est entièrement compris, il s'agit nécessairement d'une surface de Hopf ou d'une surface d'Inoue et le cas $b_2 > 0$ est toujours étudié actuellement ; il a été conjecturé qu'elles contiennent toutes une coquille sphérique globale. La preuve de ce résultat terminerait la classification des surfaces complexes compactes non-Kählériennes.

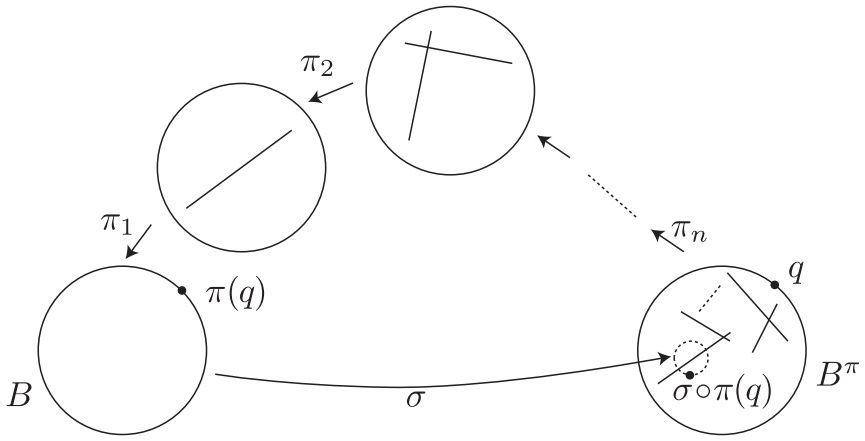
Les surfaces à coquille sphérique globale, qui nous intéressent ici, peuvent être obtenues selon un procédé dû à Kato (voir [23]), que l'on rappelle dans la section suivante. Ces surfaces se divisent en trois classes, les surfaces d'Enoki, d'Inoue-Hirzebruch et enfin les surfaces intermédiaires.

Étant donnés une surface minimale S à coquille sphérique globale, D le diviseur maximal de S formé des $b_2(S)$ courbes rationnelles de S et $\varpi : \widetilde{S} \to S$ le revêtement universel de S, nous allons démontrer que $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ (où $\widetilde{D} = \varpi^{-1}(D)$) est une variété de Stein. Ce résultat était déjà connu pour les surfaces d'Enoki et d'Inoue-Hirzebruch ; nous allons le montrer dans le cas des surfaces intermédiaires. Dans la dernière partie et toujours dans le cas des surfaces intermédiaires, on donne une condition pour que le fibré tangent holomorphe de la variété $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ soit holomorphiquement trivialisable, à savoir que la surface S soit d'indice 1.

1.2 Préliminaires

On dit qu'une surface compacte S contient une coquille sphérique globale s'il existe une application qui envoie biholomorphiquement un voisinage de la sphère $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ dans S et telle que le complémentaire dans S de l'image de la sphère par cette application soit connexe.

Toute surface contenant une coquille sphérique globale peut être obtenue de la façon suivante : étant données une succession finie d'éclatements $\pi_1, ..., \pi_n$ de la boule unité B de $\mathbb{C}^2$ au-dessus de 0 et $\pi := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n : B^\pi \to B$ la composée de ces éclatements, ainsi qu'une application $\sigma : \overline{B} \to B^\pi$ biholomorphe sur un voisinage de $\overline{B}$, on recolle les deux



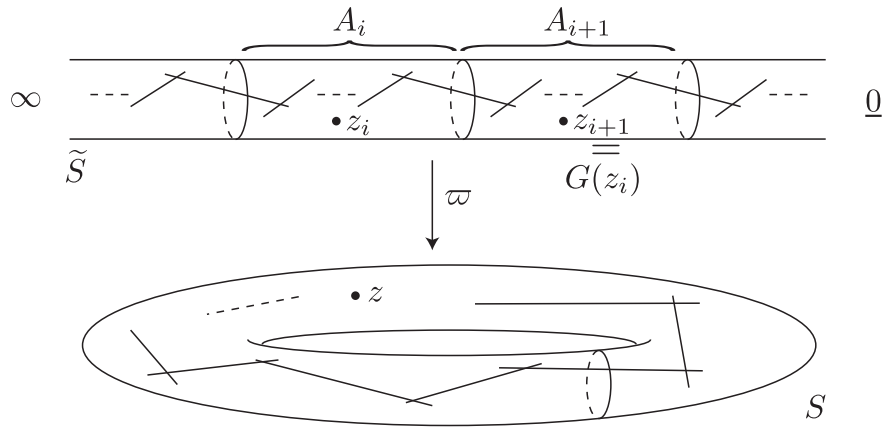
bords de $\mathrm{Ann}(\pi,\sigma) := B^\pi \setminus \sigma(\overline{B})$ à l'aide de l'application $\sigma\circ\pi$:

La surface obtenue possède un groupe fondamental isomorphe à $\mathbb{Z}$ et son second nombre de Betti est égal à n (voir [10]). Il s'agit d'une construction due à Kato [23]. Dans la suite, on appellera surface de Kato une surface complexe compacte minimale contenant une coquille sphérique globale, dont le second nombre de Betti est non nul.

Dans [10], Dloussky étudie le germe contractant d'application holomorphe $\varphi = \pi\circ\sigma$: $B \to B$ associé à la construction précédente. Ce germe détermine à isomorphisme près la surface étudiée (proposition 3.16 loc. cit.).

Soit S une surface de Kato ; on note D le diviseur maximal de S formé des $b_2(S)$ courbes de S, $\widetilde{S}$ le revêtement universel de S et $\widetilde{D}$ la préimage de D dans $\widetilde{S}$.

Suivant les notations de [10], on obtient la surface $\widetilde{S}$ en recollant une infinité d'anneaux A_i ($i \in \mathbb{Z}$) isomorphes à $\mathrm{Ann}(\pi,\sigma)$, en identifiant le bord pseudo-concave de A_i au bord pseudo-convexe de A_{i+1} via l'application $\sigma\circ\pi$. La surface $\widetilde{S}$ possède deux bouts, notés $\underline{0}$ et ∞, le bout $\underline{0}$ possédant une base de voisinages ouverts strictement pseudo-convexes (les $\bigcup_{i\geqslant j} A_i$ pour $j \in \mathbb{Z}$) et le second une base de voisinages strictement pseudo-concaves (les $\bigcup_{i\leqslant j} A_i$ pour $j \in \mathbb{Z}$). Enfin on définit un automorphisme G de $\widetilde{S}$ en posant $G(z_i) := z_{i+1}$ où z_i et z_{i+1} sont les images dans A_i et A_{i+1} respectivement d'un même point $z \in \mathrm{Ann}(\pi,\sigma)$.



Fixons une courbe compacte C de $\widetilde{S}$ avec $C \subset A_0$. On note $(\widehat{S}_C, p_C)$ l'effondrement

de $\widetilde{S}$ sur la courbe C, c'est-à-dire la donnée d'une surface $\widehat{S}_C$ n'ayant qu'un bout, d'une application holomorphe p_C de $\widetilde{S}$ dans $\widehat{S}_C$, biholomorphe sur un voisinage du bout ∞ dans $\widetilde{S}$ sur un voisinage du bout de $\widehat{S}_C$, telles que $\widehat{C} = p_C(C)$ soit une courbe d'auto-intersection -1.

La proposition 3.4 de [10] nous assure l'existence d'une telle application p_C pour toute courbe compacte C de $\widetilde{S}$, et d'un point $\widehat{0}_C \in \widehat{C}$ tel que p_C soit également biholomorphe entre $\widetilde{S} \setminus p_C^{-1}(\widehat{0}_C)$ et $\widehat{S}_C \setminus \{\widehat{0}_C\}$.

De plus, la restriction de p_C au complémentaire de $\widetilde{D}$ est un biholomorphisme entre $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ et $\widehat{S}_C \setminus p_C(\widetilde{D})$. Enfin, il existe une application holomorphe F_C de $\widehat{S}_C \setminus \{\widehat{0}_C\}$ dans lui-même, contractante en $\widehat{0}_C$, conjuguée à φ et biholomorphe sur $\widehat{S}_C \setminus p_C(\widetilde{D})$.

1.3 La variété $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ est de Stein

Les surfaces de Kato se divisent en trois classes : les surfaces d'Enoki, d'Inoue - Hirzebruch et enfin les surfaces intermédiaires (voir [13]).

Dans le cas des surfaces d'Inoue-Hirzebruch et celles d'Enoki, le fait que $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ soit de Stein est déjà connu : pour une surface d'Inoue-Hirzebruch, la variété $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ est un domaine de Reinhardt holomorphiquement convexe (voir [37], proposition 2.2) tandis que pour une surface d'Enoki, on a $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ qui sont bien dans chaque cas des variétés de Stein. Il reste donc à étudier le cas des surfaces intermédiaires.

Favre a donné dans [16] des formes normales pour les germes contractants d'applications holomorphes et on peut en particulier donner la forme du germe associé à une surface intermédiaire, à savoir qu'une telle surface est associée au germe φ de $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ donné par

$$(z, \zeta) \mapsto (\lambda \zeta^s z + P(\zeta) + c_{\frac{sk}{k-1}} \zeta^{\frac{sk}{k-1}}, \zeta^k) \tag{1.1}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $k, s \in \mathbb{N}$ avec $k > 1$ et $s > 0$, et $P(\zeta) = c_j \zeta^j + ... + c_s \zeta^s$ avec les conditions suivantes : $0 < j < k$, $j \leqslant s$, $c_j = 1$, $c_{\frac{sk}{k-1}} = 0$ quand $\frac{sk}{k-1} \notin \mathbb{Z}$ ou $\lambda \neq 1$ et enfin $\text{pgcd}\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$. On trouve dans [30] une condition pour que deux tels germes soient conjugués (et déterminent donc deux surfaces isomorphes).

L'objectif de cette section est de démontrer, dans le cas de surfaces intermédiaires, le

Théorème 1.3.1 *La surface $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$ est de Stein.*

Dans un premier temps (section 1.3.1), on montre qu'il est suffisant de se ramener à la situation du théorème 1.3.2 énoncé ci-dessous. Pour cela, nous allons écrire notre surface comme réunion croissante d'ouverts et nous verrons que seule une hypothèse manque *a priori* pour pouvoir effectivement appliquer ce théorème, à savoir que chaque paire constituée de deux tels ouverts consécutifs est de Runge. C'est dans la section 1.3.2 qu'on prouve que cette hypothèse est bien vérifiée.

1.3.1 Réduction du problème.

Reprenons les notations précédentes et donnons-nous un germe de la forme (1.1). On regarde la surface intermédiaire S associée et on choisit une courbe C de $\widetilde{S}$ donnée par

la proposition 3.16 de [10] ; quitte à renuméroter les A_i on suppose que $C \subset A_0$. Notre objectif est de prouver que la variété $\widehat{S}_C \setminus p_C(\widetilde{D})$ est de Stein, en utilisant le théorème suivant (voir [22], théorème 10 p. 215) :

Théorème 1.3.2 *Soient X un espace analytique complexe et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-espaces de X qui soient de Stein. Supposons que $X = \bigcup X_i$ et que chaque paire (X_{i+1}, X_i) est de Runge, i.e. l'ensemble $\mathcal{O}(X_{i+1})|_{X_i}$ des restrictions à X_i des applications holomorphes sur X_{i+1} est dense dans $\mathcal{O}(X_i)$. Alors X est de Stein.*

Notons :
- $\widehat{A}_i := p_C(A_i)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et
- $\mathcal{A}_i := p_C(\bigcup_{j\geqslant i} A_j)$ pour $i \leqslant 0$,

de sorte qu'on a $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i-1}$ et $\widehat{S}_C \setminus p_C(\widetilde{D}) = \bigcup_{i\leqslant 0} \mathcal{A}_i \setminus p_C(\widetilde{D})$.

Chaque $\mathcal{A}_i \setminus p_C(\widetilde{D})$ est strictement pseudo-convexe, donc de Stein. De plus, on a $F_C(\widehat{A}_i) = \widehat{A}_{i+1}$ pour $i \leqslant -1$, car le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S} & \xrightarrow{G} & \widetilde{S} \\ {\scriptstyle p_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_C} \\ \widehat{S}_C & \xrightarrow[F_C]{} & \widehat{S}_C \end{array}$$

est commutatif (c.f. [10], proposition 3.9). Ainsi, on a

$$F_C(\mathcal{A}_{i-1} \setminus p_C(\widetilde{D})) = \mathcal{A}_i \setminus p_C(\widetilde{D}) \tag{1.2}$$

Supposons établi le fait que la paire $(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D}), F_C(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D})))$ est de Runge. Alors la paire $(\mathcal{A}_{-1} \setminus p_C(\widetilde{D}), \mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D}))$ est automatiquement de Runge par l'égalité (1.2) ci-dessus, et par récurrence chaque paire $(\mathcal{A}_{i-1} \setminus p_C(\widetilde{D}), \mathcal{A}_i \setminus p_C(\widetilde{D}))$ est de Runge. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème 1.3.2 qui nous dit que la réunion des $\mathcal{A}_i \setminus p_C(\widetilde{D})$ est de Stein.

Le problème est donc ramené à montrer que le couple $(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D}), F_C(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D})))$ est de Runge.

Remarque 1.3.3 L'ensemble $\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D})$ est biholomorphe à une boule ouverte centrée en 0 privée d'une droite complexe. En effet, on peut écrire $\varphi = \pi \circ \sigma$ où π est une succession d'éclatements de la boule au-dessus de $0 \in \mathbb{C}^2$, $\sigma : \overline{B} \to \pi^{-1}(B)$ est une application définie sur un voisinage de $\overline{B}$ et biholomorphe sur son image, et φ est de la forme normale (1.1). Par le choix de la courbe C, la proposition 3.16 p. 33 de [10] nous donne l'isomorphisme $\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D}) \cong B \setminus \varphi^{-1}(0)$ et en utilisant la forme de φ, on voit que $\varphi^{-1}(0) = \{\zeta = 0\}$.

Finalement, démontrer que $(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D}), F_C(\mathcal{A}_0 \setminus p_C(\widetilde{D})))$ est de Runge revient à prouver que c'est le cas de la paire $(B \setminus \{\zeta = 0\}, \varphi(B \setminus \{\zeta = 0\}))$ pour une boule $B \subset \mathbb{C}^2$ centrée en 0 (en notant (z, ζ) les coordonnées de $\mathbb{C}^2$). C'est l'objet de la section suivante.

1.3.2 La paire $(B \setminus \{\zeta = 0\}, \varphi(B \setminus \{\zeta = 0\}))$ est de Runge

Etant donné un germe φ de la forme (1.1), introduisons en premier lieu quelques notations :

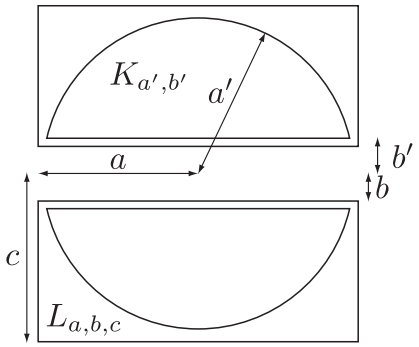
1. Remarquons tout d'abord que chaque point de $\mathbb{C} \times \Delta^*$ possède exactement k antécédents par φ, où Δ^* est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ privé de 0. Notons g l'automorphisme de $\mathbb{C} \times \Delta^*$ suivant :
$$g : (z, \zeta) \mapsto \left(\varepsilon^{-s} z + \frac{P(\zeta) - P(\varepsilon\zeta)}{\lambda \varepsilon^s \zeta^s}, \varepsilon\zeta \right)$$
où ε est une racine primitive k-ième de l'unité, de sorte que $\varphi \circ g = \varphi$. Pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, on a
$$g^\ell(z, \zeta) = \left((\varepsilon^\ell)^{-s} z + \frac{P(\zeta) - P(\varepsilon^\ell\zeta)}{\lambda (\varepsilon^\ell)^s \zeta^s}, \varepsilon^\ell \zeta \right)$$
et $g^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. L'automorphisme g permute les antécédents d'un même point de l'application φ.

2. On notera également $q(z, \zeta)$ le polynôme $z \prod_{\ell=1}^{k-1} a_\ell(z, \zeta) \zeta^{n_\ell}$ où $a_\ell(z, \zeta)$ est la première composante de $g^\ell(z, \zeta)$ et $n_\ell = s - \min\{n | c_n(1 - (\varepsilon^\ell)^n) \neq 0\}$, qui est bien défini et positif ou nul vu la dernière hypothèse sur les coefficients de P, à savoir $\operatorname{pgcd}\{k, m \mid c_m \neq 0\} = 1$. Le polynôme $q(z, \zeta)$ est en particulier de la forme $q(z, \zeta) = z(c + \epsilon(z, \zeta))$ où $\epsilon(z, \zeta) \xrightarrow[(z,\zeta)\to(0,0)]{} 0$ et $c \neq 0$.

3. Pour $\eta > 0$, on note U_η l'ouvert $\{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 \mid |q(z, \zeta)| < \eta\}$. Soient a, b et c trois réels strictement positifs, on définit les ensembles
$$K_{a,b} := \{(z, \zeta) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |\zeta|^2 \leqslant a^2, |\zeta| \geqslant b\} = \overline{B(0, a)} \cap \{|\zeta| \geqslant b\}$$
et
$$L_{a,b,c} := \overline{\mathbb{D}(0, a)} \times \overline{\mathbb{A}_{b,c}}$$
(où $\mathbb{A}_{b,c}$ est l'anneau ouvert centré en 0 de rayons $b < c$). Enfin, on pose
$$\mathcal{K}_{a,b} := \bigcup_{\ell=0}^{k-1} g^\ell(K_{a,b})$$
et
$$\mathcal{L}_{a,b,c} := \bigcup_{\ell=0}^{k-1} g^\ell(L_{a,b,c}).$$

Remarque 1.3.4 Pour a, b et c assez petits, les compacts $g^\ell(L_{a,b,c})$ (resp. $g^\ell(K_{a,b})$) sont disjoints deux à deux : ceci est une conséquence du fait que la fonction φ est localement injective autour de l'origine de $\mathbb{C}^2$, ce qui est démontré, par exemple, dans [13], section 5. En particulier, les ensembles $\mathcal{L}_{a,b,c}$ et $\mathcal{K}_{a,b}$ possèdent chacun k composantes connexes. D'autre part, on a $K_{a',b'} \subset L_{a,b,c}$ pour $b' \geqslant b$ et $a' \leqslant \min\{a, c\}$, ce qui entraîne notamment $\mathcal{K}_{a',b'} \subset \mathcal{L}_{a,b,c}$.

Enfin, pour $\eta > 0$ fixé, il existe $A_\eta > 0$ tel que pour tous réels t et δ avec $0 < t < \delta < A_\eta$, on ait $\mathcal{L}_{\delta,t,\delta} \subset U_\eta$: en calculant $|q(z, \zeta)|$ pour $(z, \zeta) \in \mathcal{L}_{\delta,t,\delta}$ on voit qu'il suffit de choisir δ assez petit pour avoir
$$|\delta| \prod_{\ell=1}^{k-1} (|\delta^{n_\ell+1}| + 2(|c_{s-n_\ell}| + |c_{s-n_\ell+1}|\delta + ... + |c_s|\delta^{n_\ell})/\lambda) < \eta. \tag{1.3}$$



On appelle $V_{\eta,\delta}$ l'ensemble $U_\eta \cap \{|\zeta| \leqslant \delta\}$.

Proposition 1.3.5 *Pour $\delta > 0$ assez petit et pour tout $\varepsilon_1 \in]0, \delta[$, le compact $\mathcal{K}_{\delta,\varepsilon_1}$ est holomorphiquement convexe.*

Preuve : En premier lieu, remarquons que l'enveloppe holomorphiquement convexe de $V_{\eta,\delta}$ est l'adhérence $\overline{V}_{\eta,\delta}$ de cet ensemble. On note :

- $\widehat{\mathcal{K}}_{\delta,\varepsilon_1}$ l'enveloppe holomorphiquement convexe de $\mathcal{K}_{\delta,\varepsilon_1}$,
- $\widehat{\mathcal{K}}^\ell_{\delta,\varepsilon_1}$ (resp. $\overline{V}^\ell_{\eta,\delta}$) la composante connexe de $\widehat{\mathcal{K}}_{\delta,\varepsilon_1}$ (resp. $\overline{V}_{\eta,\delta}$) qui contient $g^\ell(K_{\delta,\varepsilon_1})$, pour $\ell \in \{0, ..., k-1\}$.

Étape 1 : Montrons tout d'abord que pour η et δ assez petits et pour tout $\varepsilon_1 < \delta$, on a $\overline{V}^0_{\eta,\delta} \cap \mathcal{K}_{\delta,\varepsilon_1} = K_{\delta,\varepsilon_1}$, autrement dit que la composante connexe de $\overline{V}_{\eta,\delta}$ qui contient K_{δ,ε_1} ne rencontre aucune autre composante de $\mathcal{K}_{\delta,\varepsilon_1}$.

Soient $\delta > \varepsilon_1 > 0$. Pour $\ell \in \{1, ..., k-1\}$, on a

$$g^\ell(K_{\delta,\varepsilon_1}) \subset g^\ell(L_{\delta,\varepsilon_1,\delta}) = (g^{k-\ell})^{-1}(L_{\delta,\varepsilon_1,\delta}) = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2 \mid |a_{k-\ell}(z,\zeta)| \leqslant \delta, |\zeta| \in [\varepsilon_1, \delta]\}.$$

En particulier, pour $(z,\zeta) \in g^\ell(L_{\delta,\varepsilon_1,\delta})$, on a $z = \dfrac{P(\varepsilon^{k-\ell}\zeta) - P(\zeta)}{\lambda\zeta^s} + w$ où $|w| \leqslant \delta$. En développant, cette égalité devient

$$\begin{aligned} z = \ \lambda^{-1}\zeta^{-n_\ell}\big(c_{s-n_\ell}((\varepsilon^{-\ell})^{s-n_\ell} - 1) + c_{s-n_\ell+1}((\varepsilon^{-\ell})^{s-n_\ell+1} - 1)\zeta + ... \\ ... + c_s((\varepsilon^{-\ell})^s - 1)\zeta^{n_\ell}\big) + w. \end{aligned}$$

Autrement dit, si $n_\ell > 0$, z est de la forme

$$\lambda^{-1}\zeta^{-n_\ell}((c_{s-n_\ell}((\varepsilon^{-\ell})^{s-n_\ell} - 1) + \zeta R_\ell(\zeta, w))$$

où R_ℓ est un polynôme et par définition de n_ℓ, le terme $c_{s-n_\ell}((\varepsilon^{-\ell})^{s-n_\ell} - 1)$ est non nul.

Grâce à cette dernière expression de z, on voit que lorsque $n_\ell > 0$, pour n'importe quelle constante $C > 0$ et lorsque δ est assez petit, tout élément $(z,\zeta) \in g^\ell(L_{\delta,\varepsilon_1,\delta})$ vérifie $|z| > C$.

Dans le cas où $n_\ell = 0$ (donc $c_s \neq 0$), on a $|z| = |\lambda^{-1}(c_s((\varepsilon^{-\ell})^s - 1)) + w|$ est supérieur à une constante non nulle pour δ assez petit.

Posons alors $\alpha := \frac{1}{2}\min_{\ell}\{|c_s((\varepsilon^\ell)^s - 1)| \mid \ell s \not\equiv 0[k]\}$ si $c_s \neq 0$ et $\alpha := 1$ sinon. Par ce qui précède, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tous $\delta < A$ et $\varepsilon_1 < \delta$ on ait, pour chaque $\ell \in \{1, ..., k-1\}$ et tout élément (z, ζ) de $g^\ell(L_{\delta,\varepsilon_1,\delta})$, l'inégalité

$$|z| \geqslant \alpha. \tag{1.4}$$

Fixons désormais $\eta > 0$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $2\eta/|c| < \alpha$ (où $c \neq 0$ est le facteur de z dans le développement limité de q en $(0,0)$, à savoir $q(z,\zeta) = z(c + \epsilon(z,\zeta))$), et
2. $|c + \epsilon(z,\zeta)| > |c|/2$ pour tout $(z,\zeta) \in \mathbb{D}(0, 3\eta/|c|) \times \overline{\mathbb{D}(0, 3\eta/|c|)}$.

Choisissons maintenant $\delta < \min\{A, A_\eta, 2\eta/|c|\}$ et $\varepsilon_1 \in]0, \delta[$. Alors on a $\mathcal{L}_{\delta,\varepsilon_1,\delta} \subset U_\eta$ (remarque 1.3.4) et l'inégalité (1.4) ci-dessus est vérifiée.

Pour tout $|z| \leqslant \delta$ et $|\zeta| \in [\varepsilon_1, \delta]$ on a $(z,\zeta) \in K_{\delta,\varepsilon_1} \subset \overline{V}^0_{\eta,\delta}$. Soit maintenant $\ell \in \{1, ..., k-1\}$ et (z,ζ) un point de $g^\ell(K)$, on a $|z| \geqslant \alpha$ et ceci entraîne que $(z,\zeta) \notin \overline{V}^0_{\eta,\delta}$.

En effet, supposons le contraire : la projection de $\overline{V}^0_{\eta,\delta}$ sur la première coordonnée étant connexe, et comme $\delta < 2\eta/|c| < \alpha$, il devrait exister un élément $(z',\zeta') \in \overline{V}^0_{\eta,\delta}$ avec $|z'| = 2\eta/|c|$, ce qui est impossible puisque dans ce cas $|q(z',\zeta')| > \dfrac{2\eta}{|c|}(|c|/2) = \eta$.

Ainsi, la composante connexe $\overline{V}^0_{\eta,\delta}$ de $\overline{V}_{\eta,\delta}$ qui contient K_{δ,ε_1} ne rencontre aucune autre composante de $\mathcal{K}_{\delta,\varepsilon_1}$, ce qu'il fallait démontrer.

À partir de maintenant, on omet les indices δ, ε_1.

Étape 2 : Montrons à présent que $\widehat{\mathcal{K}}^0 = K$. Par l'étape 1, et comme $\widehat{\mathcal{K}}^0 \subset \overline{V}^0$, on sait que $\widehat{\mathcal{K}}^0$ ne rencontre pas d'autre composante de $\mathcal{K}$ que l'ensemble K lui-même.
Soit $(z_0,\zeta_0) \in \widehat{\mathcal{K}}^0 \setminus K$. On suppose que $|\zeta_0| \geqslant \varepsilon_1$ (sinon $(z_0,\zeta_0) \notin \widehat{\mathcal{K}}$), donc nécessairement $|z_0|^2 + |\zeta_0|^2 > \delta^2$. Comme la boule fermée $\overline{B} := \overline{B(0,\delta)}$ est holomorphiquement convexe dans $\mathbb{C}^2$, il existe une fonction h holomorphe sur $\mathbb{C}^2$ telle que $|h(z_0,\zeta_0)| > \|h\|_{\overline{B}}$. Notons respectivement m_0 et $m_{\overline{B}}$ les quantités $|h(z_0,\zeta_0)|$ et $\|h\|_{\overline{B}}$, ainsi que $m_{\widehat{\mathcal{K}}}$ la quantité $\|h\|_{\widehat{\mathcal{K}}}$, qui est finie puisque $\widehat{\mathcal{K}}$ est compact.

Considérons la fonction $\chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}$ définie sur $\widehat{\mathcal{K}}$ valant 1 sur $\widehat{\mathcal{K}}^0$ (en particulier sur K) et 0 sur $\widehat{\mathcal{K}} \setminus \widehat{\mathcal{K}}^0$ (en particulier sur $g^\ell(K)$ pour $\ell \not\equiv 0[k]$).

Le théorème 6' p. 213 de [22] nous dit que la fonction $\chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}$ est limite uniforme sur $\widehat{\mathcal{K}}$ de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \times \Delta^*$. Soit donc f une fonction holomorphe vérifiant $\|f - \chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}\|_{\widehat{\mathcal{K}}} < \varepsilon'$ avec $\varepsilon' < \min\left\{\dfrac{m_0}{m_{\widehat{\mathcal{K}}} + m_0}, \dfrac{m_0 - m_{\overline{B}}}{m_0 + m_{\overline{B}}}\right\}$ et appelons F l'application $(z,\zeta) \mapsto h(z,\zeta)f(z,\zeta)$.

Pour $(z_\ell,\zeta_\ell) \in g^\ell(K)$ (avec $\ell \in \{1, ..., k-1\}$), on a l'inégalité

$$|F(z_\ell,\zeta_\ell)| \leqslant \|F - h\chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}\|_{\widehat{\mathcal{K}}} + |h(z_\ell,\zeta_\ell)\chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}(z_\ell,\zeta_\ell)|.$$

Le second terme du membre de droite est nul ; quant au premier, il est majoré par $m_{\widehat{\mathcal{K}}}\varepsilon'$. De plus, on a $|F(z_0,\zeta_0)| = m_0|f(z_0,\zeta_0)| > m_0(1-\varepsilon')$ d'une part, et pour tout $(z,\zeta) \in K$

on a

$$|F(z,\zeta)| \leqslant |h(z,\zeta)\left(f(z,\zeta) - \chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}(z,\zeta)\right)| + |h(z,\zeta)\chi_{\widehat{\mathcal{K}}^0}(z,\zeta)|$$

donc $|F(z,\zeta)| \leqslant m_{\overline{B}}\varepsilon' + m_{\overline{B}}$ d'autre part. Le choix de ε' nous assure que l'on a l'inégalité $\max\{m_{\widehat{\mathcal{K}}}\varepsilon', m_{\overline{B}}(\varepsilon'+1)\} < m_0(1-\varepsilon')$. Autrement dit, nous avons montré que $(z_0,\zeta_0) \notin \widehat{\mathcal{K}}$, d'où une contradiction. Ainsi, on a bien établi que $\widehat{\mathcal{K}}^0 = K$.

Étape 3 : Il nous reste à conclure. Remarquons que l'enveloppe holomorphe convexe $\widehat{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{K}$ est également stable par g et supposons qu'il existe $\ell_0 \in \{1,...,k-1\}$ et un point $(z_{\ell_0},\zeta_{\ell_0}) \in \widehat{\mathcal{K}}^{\ell_0} \setminus g^{\ell_0}(K)$. Alors on a les inclusions suivantes :

$$K \subset g^{-\ell_0}(\widehat{\mathcal{K}}^{\ell_0}) \subset \widehat{\mathcal{K}}^0,$$

la dernière inclusion provenant du fait que la continuité de g entraîne la connexité de $g^{-\ell_0}(\widehat{\mathcal{K}}^{\ell_0})$. On a donc $g^{-\ell_0}(z_{\ell_0},\zeta_{\ell_0}) \in \widehat{\mathcal{K}}^0 = K$, d'où une contradiction.
Finalement, on a établi que $\bigcup_{\ell=0}^{k-1} \widehat{\mathcal{K}}^{\ell} = \mathcal{K}$. Comme $\mathcal{K}$ est une réunion de composantes connexes de $\widehat{\mathcal{K}}$, c'est un sous-ensemble ouvert et fermé de $\widehat{\mathcal{K}}$, donc holomorphiquement convexe par le corollaire 8 p. 214 de [22]. Finalement on a établi $\mathcal{K} = \widehat{\mathcal{K}}$. ■

Notons $\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}\times\Delta^*$ et $\varphi^*(\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*))$ l'algèbre des éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)$ invariants par le groupe $g^{\mathbb{Z}}$. Si A est une algèbre de fonctions holomorphes, on note $\widehat{\mathcal{K}}^A$ l'enveloppe de $\mathcal{K}$ par rapport à l'algèbre A. On a montré que $\widehat{\mathcal{K}}^{\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)} = \mathcal{K}$.

Corollaire 1.3.6 *On a* $\widehat{\mathcal{K}}^{\varphi^*(\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*))} = \mathcal{K}$.

Preuve : En effet, pour $x \notin \mathcal{K}$, on a :

$$\widehat{(g^{\mathbb{Z}}.x)\cup\mathcal{K}}^{\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)} = (g^{\mathbb{Z}}.x)\cup\mathcal{K}. \tag{1.5}$$

Ceci découle du fait que si $p \notin \mathcal{K}$, pour $q \notin \{p\}\cup\mathcal{K}$, il existe $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)$ telle que $\|f_1\|_{\mathcal{K}} < f_1(q)$. Après avoir éventuellement multiplié f_1 par une constante, on peut supposer que $f_1(q) = 1$. Comme $p \neq q$, il existe également une fonction $f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)$ qui vérifie $f_2(p) = 0$, $f_2(q) \neq 0$ et $\|f_2\|_{\mathcal{K}} \leqslant 1/2$; quitte à remplacer f_1 par des puissances d'elle-même, on peut supposer que $\|f_1\|_{\mathcal{K}} \leqslant |f_2(q)|$ et dans ce cas on a $\|f_1 f_2\|_{\mathcal{K}\cup\{p\}} < |f_1(q)f_2(q)|$. Ainsi, on a $\widehat{\{p\}\cup\mathcal{K}}^{\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)} = \{p\}\cup\mathcal{K}$; par conséquent, en ajoutant un nombre fini de points à $\mathcal{K}$ l'ensemble obtenu reste holomorphiquement convexe, et on a bien l'égalité (1.5).

On considère alors la fonction f qui vaut 1 sur $g^{\mathbb{Z}}.x$ et 0 sur $\mathcal{K}$, qui est holomorphe sur $(g^{\mathbb{Z}}.x)\cup\mathcal{K}$. Alors (théorème 6' p. 213 de [22]) il existe une fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*)$ telle que $\|f-h\| < 1/2$.

En définissant la fonction holomorphe $H := \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(h\circ g^j)$, il sort que l'on a

$$|H(x) - 1| < 1/2$$

tandis que pour tout $y \in \mathcal{K}$, on a $|H(y)| < 1/2$, donc $x \notin \widehat{\mathcal{K}}^{\varphi^*(\mathcal{O}(\mathbb{C}\times\Delta^*))}$. ■

Corollaire 1.3.7 *Soit δ un réel positif donné par la proposition 1.3.5. Alors, la paire*

$$(B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\}, \varphi(B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\}))$$

est de Runge.

Preuve : On se donne un compact A de $\varphi(B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\})$, il est inclus dans un certain $\varphi(\mathcal{K}_{\delta-1/p,1/q})$ (pour p et q assez grands et avec $\delta > 1/p + 1/q$). L'enveloppe de A par rapport à l'algèbre des fonctions holomorphes sur $B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\}$ est incluse dans $\varphi(\mathcal{K}_{\delta-1/p,1/q})$ par le corollaire 1.3.6, donc compacte. Ainsi $\varphi(B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\})$ est holomorphiquement convexe par rapport aux fonctions holomorphes de $B(0,\delta) \setminus \{\zeta = 0\}$, ce qui nous donne la conclusion ([22], corollaire 9 p. 214). ■

1.3.3 Une généralisation

Soit φ un germe de $(\mathbb{C}^3, 0)$ dans $(\mathbb{C}^3, 0)$ donné par

$$(z, \zeta, \xi) \mapsto (\lambda \zeta^r \xi^s z + P(\zeta, \xi), \zeta^k, \xi^\ell) \tag{1.6}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $k, \ell, r, s \in \mathbb{N}$ avec $k, \ell > 1$, $\operatorname{pgcd}(k, \ell) = 1$ et $r, s > 0$, et

$$P(\zeta, \xi) = \sum_{i_1=j_1}^{r} \sum_{i_2=j_2}^{s} c_{i_1,i_2} \zeta^{i_1} \xi^{i_2}$$

avec les conditions suivantes : $0 < j_1 < k$, $0 < j_2 < \ell$, $j_1 \leqslant r$, $j_2 \leqslant s$ et $c_{j_1,j_2} \neq 0$.

Nous ajoutons une hypothèse supplémentaire, à savoir que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{U}_k$ (racines k-ièmes de l'unité) et $\tau \in \mathbb{U}_\ell$ avec $\varepsilon\tau \neq 1$ [1], il existe des entiers n et m et un polynôme Q avec $Q(0,0) \neq 0$, tels que l'on ait l'égalité :

$$P(\zeta, \xi) - P(\varepsilon\zeta, \tau\xi) = \zeta^n \xi^m Q(\zeta, \xi). \tag{1.7}$$

Donnons quelques classes d'exemples de polynômes vérifiant cette dernière condition :

1. $P(\zeta, \xi) = \sum_{p=1}^{\min(r,s)} a_p \zeta^p \xi^p$ avec ou bien $\operatorname{pgcd}\{k, p \mid a_p \neq 0\} = 1$, ou bien $\operatorname{pgcd}\{\ell, p \mid a_p \neq 0\} = 1$,
2. $P(\zeta, \xi) = \zeta^{s'} \sum_{p=1}^{r} a_p \xi^p$ avec $\operatorname{pgcd}\{\ell, p \mid a_p \neq 0\} = 1$ et $1 \leqslant s' \leqslant s$,
3. P de la forme précédente, mais en intervertissant les rôles de ζ et ξ.

Etant données ε_k et τ_ℓ deux racines primitives k-ième et ℓ-ième de l'unité respectivement, notons g l'automorphisme de $\mathbb{C} \times (\Delta^*)^2$ qui à (z, ζ, ξ) associe

$$\underbrace{(\varepsilon_k^{-r} \tau_\ell^{-s} z + \frac{P(\zeta, \xi) - P(\varepsilon_k \zeta, \tau_\ell \xi)}{\lambda \varepsilon_k^r \tau_\ell^s \zeta^r \xi^s}}_{a_{k,l}(z,\zeta,\xi)}, \varepsilon_k \zeta, \tau_\ell \xi),$$

1. Comme k et ℓ sont premiers entre eux, ceci revient à dire que ε et τ ne sont pas simultanément égaux à 1.

et X l'ensemble $B(0,1) \setminus \{\zeta\xi = 0\}$. La condition (1.7) permet d'adapter le raisonnement de la preuve de la proposition 1.3.5 et de ses deux corollaires dans cette situation, en posant cette fois-ci

$$q(z,\zeta,\xi) = z\prod_{i=1}^{k-1}\prod_{j=1}^{\ell-1} a_{k,\ell}(z,\zeta,\xi)\zeta^{n_k}\xi^{m_\ell}.$$

Ainsi la paire $(X, \varphi(X))$ est de Runge. On obtient alors une variété de Stein en recollant une infinité dénombrable de copies de $X \setminus \varphi(X)$ grâce à l'application φ. Il est possible de généraliser cette dernière construction en prenant un germe de $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ dans lui-même, défini cette fois par $(z, \zeta_1, ..., \zeta_n) \mapsto (\lambda\zeta_1^{s_1}...\zeta_n^{s_n}z + P(\zeta_1, ..., \zeta_n), \zeta_1^{k_1}, ..., \zeta_n^{k_n})$ avec des conditions directement analogues à celles données ci-dessus.

1.4 Invariants

Revenons à présent à notre situation de départ. On note désormais X la variété $\widetilde{S} \setminus \widetilde{D}$. Etant donné un groupe G, on appelle **espace $K(G,1)$** tout espace topologique connexe dont le groupe fondamental est isomorphe à G et qui possède un revêtement universel contractile.

Exemple 1.4.1 Le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est un espace $K(\mathbb{Z}, 1)$.

Remarquons tout d'abord que la variété X est un espace $K(\mathbb{Z}[\frac{1}{k}], 1)$. En effet, $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ et son revêtement universel $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ (c.f. [11] et [17]) est contractile.

Le théorème I de [14] (pp. 482-483) nous dit alors que les groupes de cohomologie de X sont isomorphes à ceux du groupe $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout groupe G, on a un isomorphisme entre $H^n(X, G)$ et $H^n(\mathbb{Z}[\frac{1}{k}], G)$. De plus, on sait (loc. cit. pp. 488-489) que le groupe $H^2(\mathbb{Z}[\frac{1}{k}], G)$ est isomorphe au groupe des extensions centrales de $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ par G. Une extension centrale est la donnée d'une extension de groupe

$$0 \to G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \to 0$$

où E est un groupe avec $i(G) \subset Z(E)$, le centre de E.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la

Proposition 1.4.2 *Le groupe $H^2(X, \mathbb{C})$ est trivial.*

Preuve : Par ce qui précède, il suffit de montrer qu'une extension centrale E de $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ par $\mathbb{C}$ est nécessairement triviale, i.e. isomorphe au produit cartésien $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. Soit donc E une telle extension :

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{k}] \to 0.$$

Montrons que E est abélien. Soient $x, y \in E$ et $a \in \mathbb{N}$ tels que $p(x)$ et $p(y)$ appartiennent tous deux à $\frac{1}{k^a}\mathbb{Z} := \{\frac{n}{k^a}, n \in \mathbb{Z}\}$ qui est un sous-groupe de $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ isomorphe à $\mathbb{Z}$.
L'extension E induit une extension $F := p^{-1}(\frac{1}{k^a}\mathbb{Z})$ de $\frac{1}{k^a}\mathbb{Z}$ par $\mathbb{C}$, donc une extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{C}$:

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{i'} F \xrightarrow{p'} \mathbb{Z} \to 0$$

Il existe une section $s : \mathbb{Z} \to F$ (on choisit $s(1) \in p'^{-1}(1)$ et on pose $s(n) = ns(1)$ pour $n \in \mathbb{Z}$) donc F est produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{C}$, donné par $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}))$.

L'extension F étant elle aussi centrale, $\sigma \equiv 1$ est l'unique possibilité, i.e. F est abélien (il est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}$) donc x et y commutent. Ainsi, E est abélien.

Il existe des sections $s : \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \mapsto E$. Pour construire l'une d'elles, fixons $x_0 \in p^{-1}(1)$. Comme $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}] \cong E/i(\mathbb{C})$, il existe $x_1' \in p^{-1}(1/k)$ tel que $kx_1' = x_0 + i(w)$ avec $w \in \mathbb{C}$. On pose alors $x_1 := x_1' - i(w/k)$ et on a $kx_1 = x_0$; on définit ainsi par récurrence les $x_i \in p^{-1}(1/k^i)$ vérifiant $kx_{i+1} = x_i$, et notre section est donnée par $s(n/k^a) = nx_a$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N}$. L'existence d'une telle section nous dit que E est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ donné par $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\frac{1}{k}], \mathrm{Aut}(\mathbb{C}))$. Le groupe E étant abélien, on a nécessairement $\sigma \equiv 1$, i.e. E est isomorphe au produit $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$. ■

Remarque 1.4.3 Le groupe $H^2(X, \mathbb{Z})$ n'est pas trivial ; il contient des éléments de torsion et des éléments qui ne sont pas d'ordre fini. Le morphisme ρ de la preuve du lemme 1.4.8 ci-après fournit un exemple d'élément de torsion, puisqu'on peut voir que ρ^{k-1} admet un logarithme (voir définition 1.4.7 ci-dessous). Pour ce qui est des éléments qui ne sont pas d'ordre fini, donnons-en un exemple. Considérons le groupe $\mathbb{Z}[\frac{1}{6}]$. On a un isomorphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z}[\frac{1}{6}]/\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/\mathbb{Z}$ et une injection i de ce groupe (le 3-groupe de Prüfer) dans $\mathbb{S}^1$. Alors on peut voir que $\rho := i \circ \varphi$ n'est pas d'ordre fini dans $H^2(X, \mathbb{Z})$. Ainsi, le groupe $H^2(X, \mathbb{Z})$ possède des éléments d'ordre infini dont l'image est nulle dans $H^2(X, \mathbb{Q})$, ceci est conséquence du fait que le groupe $H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ n'est pas finiment engendré (voir [6], théorème 4 p. 144).

Étant donnée une surface intermédiaire S et son germe associé sous la forme normale (1.1), on définit l'indice de S comme le plus petit entier m tel que $k-1$ divise ms (voir [30]).

Il existe un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ sur X défini par la 1-forme holomorphe $\omega = \dfrac{d\zeta}{\zeta}$, qui ne s'annule nulle part (c.f. [12]). De façon équivalente, les feuilles de ce feuilletage sont les ensembles $\{\zeta = const.\}$. Dans le cas où S est d'indice 1, i.e. lorsque $k-1$ divise s, il existe un champ de vecteurs tangent à ce feuilletage qui ne s'annule nulle part, autrement dit on a le

Lemme 1.4.4 *Lorsque la surface S est d'indice 1, le fibré tangent au feuilletage $T\mathcal{F}$ est holomorphiquement trivialisable.*

Preuve : Pour prouver cela, nous montrons qu'il suffit de considérer le champ de vecteurs V sur X induit par le champ de vecteurs $\widetilde{V} = \zeta^{\frac{s}{k-1}} \frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{C} \times \Delta^*$, tangent au feuilletage de $\mathbb{C} \times \Delta^*$ défini par ω.

En effet, d'une part on remarque que X est le quotient de $\mathbb{C} \times \Delta^*$ par G où $G \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]/\mathbb{Z}$ est le groupe formé des automorphismes de $\mathbb{C} \times \Delta^*$ de la forme $g_{k^n}^{\ell}(z, \zeta) = (z\varepsilon_{k^n}^{-\ell s \frac{k^n-1}{k-1}} +$

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda^{n-i-1} \zeta^{sk^{i+1}\frac{k^{n-i-1}-1}{k-1}} (P(\zeta^{k^i}) - \varepsilon_{k^n}^{-\ell s k^{i+1}\frac{k^{n-i-1}-1}{k-1}} P((\varepsilon_{k^n}^{\ell}\zeta)^{k^i}))}{\lambda^n (\varepsilon_{k^n}^{\ell}\zeta)^{s\frac{k^n-1}{k-1}}}, \varepsilon_{k^n}^{\ell}\zeta)$$

pour $n \in \mathbb{N}, \ell \in \{0, ..., k^n - 1\}$ et avec $\varepsilon_{k^n} = e^{\frac{2i\pi}{k^n}}$. Ceci provient du fait que X est le quotient de $\mathbb{C} \times \mathbb{H}_g$ par le groupe $\{\gamma^n \gamma_1^{\ell} \gamma^{-n} \mid n, \ell \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ où $\mathbb{H}_g = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) < 0\}$, $\gamma(z, w) = (\lambda z e^{sw} + P(e^w), kw)$ et $\gamma_1(z, w) = (z, w + 2i\pi)$ (voir [12], proposition 2.3 et

section 4). On considère alors le quotient par le sous-groupe $\{\gamma^n\gamma_1^{k^n\ell}\gamma^{-n} \mid n,\ell \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ ce qui nous donne bien $X = (\mathbb{C}\times\Delta^*)/G$.

D'autre part, un champ de vecteurs $\widetilde{V}$ défini sur $\mathbb{C}\times\Delta^*$ induit un champ de vecteurs tangent à X lorsqu'il est invariant par le groupe G, i.e. s'il vérifie :

$$D(g_{k^n}^\ell)_{z,\zeta}(\widetilde{V}(z,\zeta)) = \widetilde{V}(g_{k^n}^\ell(z,\zeta)). \tag{1.8}$$

Cette condition est bien vérifiée par $\widetilde{V}$ puisque l'on a l'égalité $\varepsilon_{k^n}^{-\ell s\frac{k^n-1}{k-1}}\zeta^{\frac{s}{k-1}} = (\varepsilon_{k^n}^\ell\zeta)^{\frac{s}{k-1}}$. Comme $\omega(\widetilde{V}) = 0$, on a bien montré que $V \in H^0(X, T\mathcal{F})$. ■

Remarque 1.4.5 On peut montrer qu'un champ de vecteurs sur X de la forme $f(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}$ (où f est une holomorphe ne s'annulant nulle part) existe bien si et seulement si la surface S est d'indice 1, autrement dit on a une équivalence dans le lemme précédent. C'est une conséquence de la condition (1.8) et le raisonnement est analogue à celui qui sera fait dans le lemme 1.4.8.

La trivialité du fibré $T\mathcal{F}$ entraine celle du fibré tangent TX, ce que nous voyons à présent.

Lemme 1.4.6 *Lorsque le fibré $T\mathcal{F}$ est holomorphiquement trivialisable, le fibré tangent holomorphe TX de X l'est aussi.*

Preuve : Étant donné que nous avons une section holomorphe globale V de $T\mathcal{F}$, il nous suffit d'exhiber un deuxième champ de vecteurs global, linéairement indépendant de V en chaque point. Par définition, on peut trouver un recouvrement de X par des ouverts U_i et sur chacun d'eux un champ de vecteurs W_i qui soit linéairement indépendant de V sur U_i. Quitte à remplacer W_i par $W_i/\omega(W_i)$ on peut supposer que $\omega(W_i) \equiv 1$ sur U_i, de sorte que $\omega(W_{i,j}) = 0$ sur $U_{i,j} := U_i \cap U_j$, où l'on a posé $W_{i,j} := W_i - W_j$. La famille $(W_{i,j})$ forme donc un cocyle de $H^1(X, T\mathcal{F})$ qui est aussi un cobord par le théorème B de Cartan. Ainsi il existe un champ de vecteurs Z_i sur chaque U_i tel que $Z_i - Z_j = W_{i,j}$. Posons $\widetilde{Y}_i := W_i - Z_i$, de sorte que $\widetilde{Y}_i = \widetilde{Y}_j$ sur $U_{i,j}$, i.e. les $\widetilde{Y}_i$ se recollent en une section holomorphe globale de TX. Nous avons deux champs de vecteurs V et $\widetilde{Y}$ vérifiant $\omega(V) \equiv 0$ et $\omega(\widetilde{Y}) \equiv 1$, ce qui nous assure qu'ils sont linéairement indépendants en chaque point de la variété étudiée. ■

Nous voulons à présent établir un lien entre le fait que S soit d'indice 1 et la trivialité du fibré canonique de X.

On considère la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \to 0$ de faisceaux, qui donne lieu à la suite exacte longue de cohomologie $\cdots \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathbb{C}^*) \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{C}) \to \cdots$. Toujours d'après le théorème I de [14], on a les isomorphismes

$$H^1(X,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{k}\right],\mathbb{Z}) = 0,$$
$$H^1(X,\mathbb{C}^*) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{k}\right],\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}^*$$

et

$$H^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{k}\right],\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

D'autre part le groupe $H^2(X,\mathbb{C})$ est trivial, d'où l'on tire finalement la suite exacte courte

$$0 \to H^1(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{e^{2i\pi\cdot}} H^1(X,\mathbb{C}^*) \xrightarrow{c} H^2(X,\mathbb{Z}) \to 0.$$

Définition 1.4.7 *On dira qu'un élément ρ de $H^1(X,\mathbb{C}^*)$ admet un logarithme lorsqu'il existe un morphisme ρ' de $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $e^{2i\pi\rho'}=\rho$.*

Ainsi, l'image par c d'un élément $\rho \in H^1(X,\mathbb{C}^*)$ est triviale dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ si et seulement si ρ admet un logarithme ρ'.

Lemme 1.4.8 *Si le fibré canonique de X est holomorphiquement trivialisable, alors la surface S est d'indice* 1.

Preuve : Le fibré canonique de X est le fibré des 2-formes holomorphes sur X ; raisonnons par l'absurde et supposons qu'il est holomorphiquement trivialisable et que la surface S n'est pas d'indice 1. Alors il existe une 2-forme holomorphe globale sur X qui ne s'annule nulle part. Une telle forme provient d'une 2-forme holomorphe sur le revêtement $\mathbb{C}\times\Delta^*$ de X donnée par $f(z,\zeta)dz\wedge d\zeta$ (où f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\times\Delta^*$ qui ne s'annule nulle part) qui soit stable par le groupe $G=\{g^\alpha_{k^n} \mid n\in\mathbb{N},\alpha\in\{0,...,k^n-1\}\}$, i.e. vérifie l'équation

$$(g^\alpha_{k^n})^*(f(z,\zeta)dz\wedge d\zeta)=f(z,\zeta)dz\wedge d\zeta$$

(pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\{0,...,k^n-1\}$). Ceci donne la condition suivante sur la fonction f :

$$e^{2i\pi\frac{\alpha}{k^n}(s\frac{k^n-1}{k-1}-1)}f(z,\zeta)=f(g^\alpha_{k^n}(z,\zeta)). \tag{1.9}$$

Considérons l'homomorphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc}\rho: & \mathbb{Z}[\frac{1}{k}] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1. \\ & \frac{\alpha}{k^n} & \longmapsto & e^{2i\pi\frac{\alpha}{k^n}(s\frac{k^n-1}{k-1}-1)}\end{array}$$

Il induit un fibré plat[2] L_ρ au-dessus de X, qui est holomorphiquement trivialisable si et seulement si ρ admet un logarithme, puisque $H^1(X,\mathcal{O}^*)\cong H^2(X,\mathbb{Z})$ car X est de Stein. Étant donné que la fonction f vérifie la condition (1.9) ci-dessus, elle définit une section holomorphe du fibré plat L_ρ au-dessus de X.

Ainsi pour pouvoir aboutir à une contradiction, il nous reste à voir que ρ n'admet pas de logarithme (et donc qu'une telle fonction f n'existe pas).

Remarquons tout d'abord que l'application $\sigma:\frac{\alpha}{k^n}\mapsto e^{2i\pi\frac{-\alpha}{k^n}(\frac{s}{k-1}+1)}$ est un homomorphisme de $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ dans $\mathbb{S}^1$ qui admet un logarithme. Ainsi, ρ admet un logarithme si et seulement si l'homomorphisme $\varphi:=\rho/\sigma:\frac{\alpha}{k^n}\mapsto e^{2i\pi\frac{\alpha s}{k-1}}$ admet un logarithme.

Soit m l'indice de la surface S. Comme $k-1$ n'est pas un diviseur de s, le noyau de φ est précisément $m\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ et cet homomorphisme n'admet donc pas de logarithme. En effet, si un tel morphisme ρ' existait, sa restriction à $m\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ serait un homomorphisme à valeurs dans $\mathbb{Z}$, nécessairement trivial. On aurait alors $m.\rho\left(\frac{1}{k^n}\right)=0$, i.e. $\rho\left(\frac{1}{k^n}\right)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. ■

Remarque 1.4.9 On a en fait une équivalence dans le lemme précédent. Lorsque la surface S est d'indice 1, on considère la forme $\zeta^{-(\frac{s}{k-1}+1)}dz\wedge d\zeta$, qui trivialise le fibré canonique.

Les trois lemmes précédents ont en particulier comme conséquence la

2. Ce fibré est la projection par rapport à la première coordonnée du quotient de $\widetilde{X}\times\mathbb{C}$ par l'action de $\pi_1(X)$ sur cet espace (définie par $g.(x,z):=(g.x,\rho(g).z)$ pour $g\in\pi_1(X),x\in\widetilde{X}$ et $z\in\mathbb{C}$, où $\widetilde{X}=\mathbb{C}\times\Delta^*$ est le revêtement universel de X).

Proposition 1.4.10 *Soient S une surface intermédiaire et $X = \widetilde{S}\backslash\widetilde{D}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La surface S est d'indice* 1,
2. *Le fibré tangent au feuilletage $T\mathcal{F}$ de X est holomorphiquement trivialisable,*
3. *Le fibré tangent holomorphe TX de X est holomorphiquement trivialisable.*

Preuve : Vu les lemmes 1.4.4 et 1.4.6, il suffit de montrer que la troisième assertion entraine la première. C'est une conséquence du lemme 1.4.8, car si S n'est pas d'indice 1, le fibré canonique de X n'est pas holomorphiquement trivialisable. Dans ce cas, le fibré cotangent de X et donc le fibré tangent TX ne le sont pas non plus. ■

Remarque 1.4.11 Le problème suivant demeure non résolu actuellement (voir [19]) : une variété de Stein de dimension n dont le fibré tangent holomorphe est holomorphiquement trivialisable est-elle nécessairement un domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^n$? Nous ne connaissons pas la réponse pour les surfaces de Stein que l'on vient de considérer.

Chapitre 2

Rappels

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on effectue de brefs rappels sur des groupes de Lie particuliers, appelés « groupes de Cousin » et les variétés toriques. Les preuves sont omises, sauf lorsqu'elles seront utilisées par la suite.

2.2 Groupes de Cousin

Pour commencer, on rappelle les définitions et résultats essentiels concernant les groupes de Cousin. Ces groupes sont appelés ainsi en l'honneur de Pierre Cousin qui, le premier, a étudié ces groupes dans son article de 1910 ([8]). Pour les détails des démonstrations en particulier, en renvoie à [1].

Définition 2.2.1 *On appelle* ***groupe de Cousin*** *un groupe de Lie complexe connexe commutatif qui n'admet pas de fonction holomorphe non constante.*

Définition 2.2.2 *Un* ***réseau*** $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ *est un sous-groupe discret de* $\mathbb{R}^m$.

Proposition 2.2.3 *Tout groupe de Lie complexe commutatif connexe est isomorphe au quotient* $\mathbb{C}^n/\Lambda$ *où* Λ *est un réseau de* $\mathbb{C}^n$.

Soit $\mathbb{C}^n/\Lambda$ un groupe de Lie complexe commutatif connexe et $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ l'application quotient. On note :

- $\mathbb{R}_\Lambda$ le sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^n$ engendré par Λ,
- $\mathbb{C}_\Lambda := \mathbb{R}_\Lambda + i\mathbb{R}_\Lambda$,
- $M\mathbb{C}_\Lambda := \mathbb{R}_\Lambda \cap i\mathbb{R}_\Lambda$,
- $K_\Lambda := \pi(\mathbb{R}_\Lambda)$ (le **sous-groupe maximal compact de $\mathbb{C}^n/\Lambda$**) et
- $K_{0,\Lambda} := \pi(M\mathbb{C}_\Lambda)$ (le **sous-groupe maximal connexe complexe de K_Λ**).

Avec ces notations, on énonce les deux propositions suivantes :

Proposition 2.2.4 *Soit* $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ *un réseau.*

1. *Si le rang complexe de* Λ*, qu'on note* m*, est strictement inférieur à* n*, alors*

$$\mathbb{C}^n/\Lambda \cong \mathbb{C}^{n-m} \oplus \mathbb{C}^m/\Lambda.$$

2. *Si $m = n$ et si $K_{0,\Lambda}$ n'est pas dense dans K_Λ, alors il existe $m' < n$ tel que*

$$\mathbb{C}^n/\Lambda \cong (\mathbb{C}^*)^{m'} \oplus (\mathbb{C}^{n-m'}/\Gamma),$$

où $\Gamma \subset \mathbb{C}^{n-m'}$ est un réseau de rang complexe $n - m'$ et le sous-groupe $K_{0,\Gamma}$ est dense dans K_Γ.

Proposition 2.2.5 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ un réseau de rang complexe n. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathbb{C}^n/\Lambda$ est un groupe de Cousin ;*
2. *Il n'existe pas d'élément $\sigma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que que le produit scalaire $\langle \sigma, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$;*
3. *Le sous-groupe $K_{0,\Lambda}$ est dense dans K_Λ.*

Ces propositions ont comme conséquence l'unicité dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.6 (Remmert-Morimoto) *Tout groupe de Lie complexe abélien connexe est isomorphe à un produit $\mathbb{C}^\ell \times (\mathbb{C}^*)^m \times C$ où C est un groupe de Cousin et cette décomposition est unique à isomorphisme près.*

Notons le lemme suivant, dont la preuve est une conséquence de celle de l'implication "3. $\Rightarrow$ 1." de la proposition 2.2.5 ci-dessus :

Lemme 2.2.7 *Soit U un ouvert d'un groupe de Cousin $\mathbb{C}^n/\Lambda$ qui est stable sous l'action du sous-groupe maximal compact K_Λ, alors U n'admet pas de fonction holomorphe non constante.*

Preuve : Soit $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ la projection et soit $\widetilde{U} := \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^n$. Soit f une fonction holomorphe sur U et soient $x_0 \in U$ et $\widetilde{x_0} \in \pi^{-1}(x_0)$. La fonction f est bornée sur $K_\Lambda.x_0$ donc $f \circ \pi$ est constante sur $M\mathbb{C}_\Lambda + \widetilde{x_0} \subset \mathbb{R}_\Lambda + \widetilde{x_0}$, ce qui implique que f est constante sur $K_\Lambda.x_0$ car $\mathbb{C}^n/\Lambda$ est de Cousin donc $K_{0,\Lambda}$ est dense dans K_Λ. Finalement, $f \circ \pi$ est constante sur $\mathbb{R}_\Lambda + \widetilde{x_0}$ donc aussi sur l'intersection de $\widetilde{U}$ et de l'espace vectoriel complexe engendré par $\mathbb{R}_\Lambda + \widetilde{x_0}$, c'est-à-dire sur $\widetilde{U} \cap \mathbb{C}^n = \widetilde{U}$. ■

2.3 Rappels sur les variétés toriques

2.3.1 Préliminaires

Nous rappelons brièvement quelques propriétés fondamentales en géométrie algébrique qui servent à la construction des variétés toriques.

Soit $\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[T_1, ..., T_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.1 *Si $A = \{f_1, ..., f_r\} \subset \mathbb{C}[T]$, alors l'ensemble*

$$V(A) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid f_1(x) = ... = f_r(x) = 0\}$$

*est l'**ensemble algébrique** défini par A.*
*Inversement, si $X \subset \mathbb{C}^n$ alors l'ensemble $\mathcal{I}(X) := \{f \in \mathbb{C}[T] \mid f_{|X} \equiv 0\}$ est un idéal, c'est l'**idéal annulateur** de X.*
*Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathbb{C}[T]$ et $\mathcal{I}_V$ est l'idéal annulateur de $V(\mathcal{I})$, alors on appelle l'anneau $R_V := \mathbb{C}[T]/\mathcal{I}_V$ l'**anneau de coordonnées** de $V(\mathcal{I})$.*

Si on note $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathbb{C}[T]$ engendré par A, alors on a $V(\mathcal{I}) = V(A)$.

Remarque 2.3.2 Soit $f \in \mathbb{R}_V$, alors deux polynômes $g \in f$ et $g' \in f$ définissent la même application $g_{|V} : V \to \mathbb{C}$. On peut interpréter les éléments de R_V comme les restrictions des fonctions polynomiales de $\mathbb{C}^n$ (et inversement). En particulier, les $\overline{T}_j$ (c'est-à-dire les classes des monômes T_j) sont les restrictions des fonctions coordonnées, ce qui explique le nom d'anneau de coordonnées.

Théorème 2.3.3 (Nullstellensatz de Hilbert) *Avec les notations précédentes on a l'égalité* $\mathcal{I}(V(\mathcal{J})) = \sqrt{\mathcal{J}}$ *pour tout idéal* $\mathcal{J}$ *de* $\mathbb{C}[T]$.

Ce théorème a comme corollaire

Corollaire 2.3.4 (Version faible du Nullstellensatz) *Tout idéal maximal de* $\mathbb{C}[T]$ *est de la forme* $\mathfrak{m}_x = \mathbb{C}[T](T_1 - x_1) + ... + \mathbb{C}[T](T_n - x_n)$ *pour un unique point* $x = (x_1, ..., x_n)$ *de* $\mathbb{C}^n$ *et réciproquement tout idéal de cette forme est maximal. En particulier, les idéaux maximaux de* $\mathbb{C}[T]$ *sont finiment engendrés.*
Il existe une bijection entre les points $x \in \mathbb{C}^n$, *les idéaux maximaux* $\mathfrak{m}_x$ *de* $\mathbb{C}[T]$ *et les homomorphismes d'évaluation* $\varphi_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[T] & \longrightarrow & \mathbb{C}. \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Remarque 2.3.5 En particulier, $\mathbb{C}^n$ est en bijection avec les homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathbb{C}[T]$ dans $\mathbb{C}$, puisque ceux-ci sont uniquement déterminés par leurs noyaux, qui sont des idéaux maximaux.

On a également le théorème :

Théorème 2.3.6 *Si* V *est un ensemble algébrique d'anneau de coordonnées* R_V, *alors il existe des bijections entre* V, *les idéaux maximaux de* R_V *et les homomorphismes de* $\mathbb{C}$*-algèbre de* R_V *dans* $\mathbb{C}$.

Définition 2.3.7 *L'ensemble des idéaux maximaux d'un anneau* R *est appelé le* ***spectre maximal*** *de* R *et on le notera* $\mathrm{spec}(R)$.

On peut définir une topologie sur un ensemble algébrique, la topologie de Zariski.

Définition 2.3.8 *Un sous-ensemble d'un ensemble algébrique* X *est un* ***fermé de Zariski*** *de* X *si c'est un sous-ensemble algébrique de* X. *Un* ***ouvert de Zariski*** *sera le complémentaire d'un fermé de Zariski, et on définit une topologie sur* X, *appelée* ***topologie de Zariski*** *de* X.

Enfin, et pour fixer les conventions, notons les deux définitions suivantes :

Définition 2.3.9 *Un* ***semi-groupe*** *est un ensemble* S *non vide muni d'une loi interne associative, et c'est un* ***monoïde*** *si cette loi est commutative, possède un élément neutre et si tout élément est régulier par rapport à cette loi (i.e.* $s + x = t + x$ *entraîne* $s = t$ *pour tous* s, x *et* $t \in S$, *si on a noté* $+$ *la loi de* S*).*

Dans la suite, N désigne un $\mathbb{Z}$-module libre de dimension finie, $N_{\mathbb{R}}$ est l'espace vectoriel $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}}$ désigne le dual de $N_{\mathbb{R}}$ et M désigne le $\mathbb{Z}$-module dual de N, i.e. $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$.

2.3.2 Variétés affines toriques

2.3.2.1 Cônes

Les cônes sont très importants pour l'étude des variétés toriques notamment parce qu'ils sont à la base de leur définition. Nous énonçons ici quelques propriétés relativement "classiques" des cônes, souvent héritées de l'étude des ensembles convexes. On se rendra compte par la suite que des propriétés au niveau des variétés toriques seront étroitement liées aux propriétés des cônes qui servent à les définir.

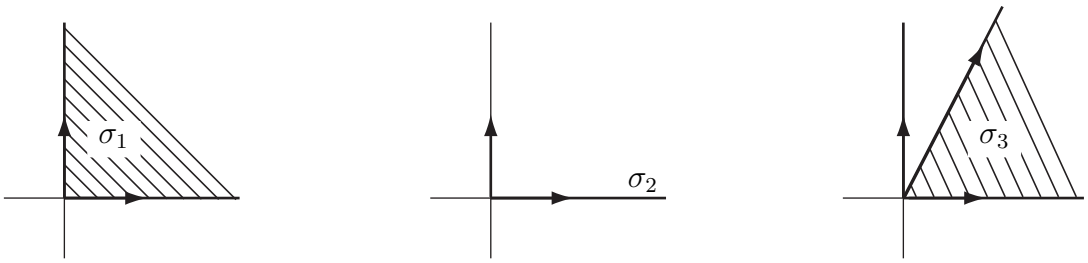
Définition 2.3.10 *Un sous-ensemble σ d'un espace vectoriel réel $N_{\mathbb{R}}$ de dimension n est un **cône** s'il est invariant par toute homothétie centrée en 0 et de rapport positif, i.e. s'il vérifie : $\forall x \in \sigma$, $\forall \lambda > 0$, $\lambda.x \in \sigma$. On appelle **dimension** de σ et on note $\dim \sigma$ la dimension du sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ.*

Définition 2.3.11 *Un cône est **polyédral convexe** s'il s'écrit*

$$\sigma = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, ..., \lambda_r \geqslant 0\},$$

*avec $v_1, ..., v_r \in N_{\mathbb{R}}$, et il est dit **simplicial** si les $v_1, ..., v_r$ sont linéairement indépendants. Un cône est dit **saillant** s'il ne contient aucun sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$. Enfin, un cône est **rationnel** s'il est polyédral convexe avec $v_1, ..., v_r \in N$.*

Exemple 2.3.12 Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors les ensembles $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$, $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1$ et $\sigma_3 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(e_1 + 2e_2)$ sont des cônes polyédraux de $\mathbb{Z}^2$.



Sauf mention contraire, les cônes que nous utiliserons dans la suite seront toujours polyédraux convexes.

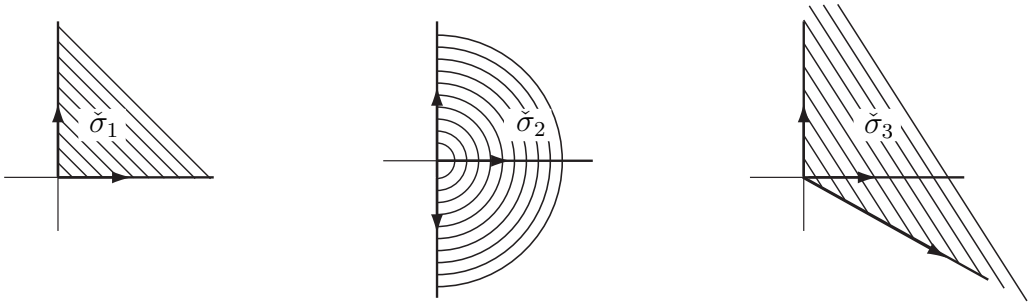
Définition 2.3.13 *Le **dual** d'un cône σ, noté $\check{\sigma}$, est l'ensemble $\{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u, v\rangle \geqslant 0$ pour tout $v \in \sigma\}$.*

Définition 2.3.14 *Une **face** d'un cône σ est un ensemble de la forme $\sigma \cap u^{\perp}$ pour un élément u de $\check{\sigma}$. Si τ est une face de σ, on écrira $\tau < \sigma$.*

Remarque 2.3.15 Si σ est un cône, c'est également une face de lui-même (il suffit de prendre $u = 0$ dans la définition). S'il est saillant, $\{0\}$ en est aussi une face.

Listons maintenant quelques propriétés des cônes que nous réutiliserons dans la suite.

Proposition 2.3.16 *1. Si σ est un cône (resp. rationnel), $\check{\sigma}$ est un cône (resp. rationnel).*



2. *Si σ est un cône, on a $\check{\check{\sigma}} = \sigma$.*
3. *Si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, alors $\check{\sigma} = \check{\sigma}_1 \cap \check{\sigma}_2$.*

Exemple 2.3.17 En reprenant les notations de l'exemple 2.3.12, (et en notant (e_1^*, e_2^*) la base duale de (e_1, e_2)) on a : $\check{\sigma}_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1^* + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2^*$, $\check{\sigma}_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1^* + \mathbb{R}e_2^*$ et $\check{\sigma}_3 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(2e_1^* - e_2^*) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2^*$.

Lemme 2.3.18

1. *Si $\tau < \sigma$ alors $\check{\sigma} < \check{\tau}$. L'intersection de deux faces d'un même cône est une face de ce cône, et toute face d'une face d'un cône est une face de ce cône.*
2. *Si $\tau = \sigma \cap u^\perp$ est une face de σ, alors $\check{\tau} = \check{\sigma} + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-u)$.*
3. *Si τ est une face de σ, alors $\check{\sigma} \cap \tau^\perp$ est une face de $\check{\sigma}$ avec* $\dim(\tau) + \dim(\check{\sigma} \cap \tau^\perp) = n$.

Définition 2.3.19 *L'**intérieur relatif** d'un cône σ est l'intérieur topologique de σ vu comme sous-ensemble de l'espace affine engendré par σ. On note* $\mathrm{relint}(\sigma)$ *cet ensemble.*

Théorème 2.3.20 *Soient σ et σ' deux cônes convexes dans un espace vectoriel $N_\mathbb{R}$. Alors* $\mathrm{relint}(\sigma)$ *et* $\mathrm{relint}(\sigma')$ *sont disjoints si et seulement si il existe une forme linéaire $u \neq 0$ sur $N_\mathbb{R}$ telle que σ soit contenu dans le demi-espace $\{x \in N_\mathbb{R} \mid u(x) \geqslant 0\}$ et $\sigma' \subset \{x \in N_\mathbb{R} \mid u(x) \leqslant 0\}$, et telle qu'on n'ait pas simultanément σ et $\sigma' \subset u^\perp$.*

Il s'agit d'une conséquence du théorème de séparation d'ensembles convexes.

Théorème 2.3.21 *Soit σ un cône polyédral convexe saillant dans $N_\mathbb{R}$. Alors on a les propriétés suivantes :*

i) l'ensemble $\mathcal{S}_\sigma := M \cap \check{\sigma}$ est un sous-semi-groupe additif de M, contenant 0.

*ii) $\mathcal{S}_\sigma$ est engendré comme semi-groupe par un nombre fini d'éléments (c'est le **lemme de Gordan**)*

iii) le groupe engendré par $\mathcal{S}_\sigma$ est M tout entier

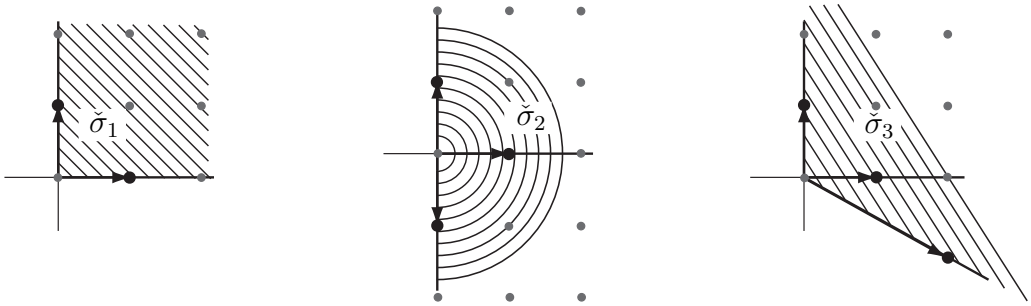
*iv) $\mathcal{S}_\sigma$ est **saturé**, c'est-à-dire : $\forall c \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\forall m \in M$, si $cm \in \mathcal{S}_\sigma$ alors $m \in \mathcal{S}_\sigma$*

De plus, tout sous-semi-groupe additif de M vérifiant les propriétés i) à iv) ci-dessus est de la forme $\mathcal{S}_\sigma$ pour un cône σ de $N_\mathbb{R}$.

Les assertions i) et ii) sont conséquences immédiates des définitions. Pour les points ii) et iii) on renvoie à [28].

Si $\mathcal{S}_\sigma$ est engendré par $(a_1, ..., a_k)$, alors les éléments $u_i := z^{a_i}$ engendrent l'algèbre $\mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] := \mathbb{C}[u_1, ..., u_k]$.

Exemple 2.3.22 Avec les notations de l'exemple 2.3.12, $\mathcal{S}_{\sigma_1}$ est engendré par (e_1^*, e_2^*), $\mathcal{S}_{\sigma_2}$ par $(e_1^*, e_2^*, -e_2^*)$ et $\mathcal{S}_{\sigma_3}$ par $(2e_1^* - e_2^*, e_1^*, e_2^*)$.



Proposition 2.3.23 *L'ensemble des faces d'une cône polyédral convexe σ de $N_{\mathbb{R}}$ est un ensemble fini. La plus petite face de σ est $\sigma \cap (-\sigma)$, qui est le plus grand $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ contenu dans σ.*

Lemme 2.3.24 *Soit σ un cône de dimension n (dans un espace $N_{\mathbb{R}}$ de dimension n). Alors $\sigma = \sigma_0 + U$ où σ_0 est un cône saillant et U est un sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$, avec $\dim(\sigma) = \dim(\sigma_0) + \dim(U)$. Si de plus σ est rationnel, on peut choisir σ_0 et U rationnels (i.e. il existe une base de U formée d'éléments de N). On notera* $\mathrm{cospan}(\sigma) := U$.

2.3.2.2 Variété affine torique associée à un cône

Soit $R := \mathbb{C}[T_1, ..., T_{2n}]$ l'anneau des polynômes à $2n$ indéterminées à coefficients dans $\mathbb{C}$, pour n un entier supérieur ou égal à 1. Alors l'ensemble $\mathfrak{a} := R(T_1T_{n+1} - 1) + ... + R(T_nT_{2n} - 1)$ est un idéal de R. Notons z_i la classe de T_i modulo $\mathfrak{a}$ (et 1 la classe de 1 modulo $\mathfrak{a}$). On a alors pour $i \in [\![1, n]\!]$: $z_iz_{n+i} = 1$, i.e. z_i est inversible pour $i \in [\![1, n]\!]$, d'inverse $z_i^{-1} = z_{n+i}$.

Définition 2.3.25 *On appelle **polynômes de Laurent** les éléments de*

$$\mathbb{C}[z_1, ...z_n, z_1^{-1}, ..., z_n^{-1}] = R/\mathfrak{a}$$

*et on note $\mathbb{C}[z, z^{-1}] = R/\mathfrak{a}$. Les polynômes de Laurent de la forme $\lambda z_1^{\alpha_1}...z_n^{\alpha_n}$ pour $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ sont appelés **monômes de Laurent**, et on les note λz^a avec $a = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$.*

Remarque 2.3.26 L'ensemble des monômes de Laurent unitaires (i.e. avec $\lambda = 1$) est un groupe pour la multiplication.

Lemme 2.3.27 *Avec les notations précédentes, l'application* $\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}[z, z^{-1}] \\ a & \longmapsto & z^a \end{array}$
est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{Z}^n, +)$ et le groupe multiplicatif des monômes de Laurent unitaires.

Définition 2.3.28 *Le **support** d'un polynôme de Laurent $f = \sum \lambda_a z^a$ est l'ensemble* $\mathrm{supp}(f) := \{a \in \mathbb{Z}^n \mid \lambda_a \neq 0\}$.

On appellera **algèbre monomiale** un anneau de polynômes de Laurent qui est une $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par des monômes de Laurent.

Lemme 2.3.29 *L'anneau $R_\sigma = \{f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \mid \mathrm{supp}(f) \subset \sigma\}$ est une algèbre monomiale engendrée par une famille finie d'éléments.*

Définition 2.3.30 *Pour un cône σ, le spectre maximal X_σ de R_σ est appelé la* ***variété affine torique*** *(abstraite) associée au cône σ.*

Exemple 2.3.31 Pour le cône $\sigma = \mathbb{R}^n$ (avec $N = \mathbb{Z}^n$ et $N_\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$) on trouve $R_\sigma = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, qu'on peut réaliser comme l'ensemble $\{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \forall i, z_i \neq 0\} = (\mathbb{C}^*)^n$. On appelle cet ensemble le **tore** (complexe) **de dimension n**.

Définition 2.3.32 *On munit le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ d'une loi de groupe, à savoir le produit composante par composante.*

Le lemme suivant nous sera utile à plusieurs reprises, toujours dans l'idée d'utiliser la correspondance entre points de $\mathbb{C}^n$ et homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres (remarque 2.3.5).

Lemme 2.3.33 *Soit $r = \dim N$. Les groupes $T_N := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{C}^*)$ et $(\mathbb{C}^*)^r$ sont isomorphes.*

Théorème 2.3.34 *Soit σ un cône dans $\mathbb{R}^n$ et $A = (a_1, ..., a_k)$ un système de générateurs du monoïde $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$. La variété affine torique abstraite X_σ est réalisée comme variété algébrique par $V(\mathfrak{a}_A)$ dans $\mathbb{C}^k$, où $\mathfrak{a}_A$ est un idéal (dépendant de A) de $\mathbb{C}[T_1, ..., T_k]$, engendré par un nombre fini d'éléments de la forme $T^\nu - T^\mu$.*

Remarque 2.3.35 Si on prend le cône dual $\check{\sigma}$, on remarque que $R_{\check{\sigma}} = \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma]$.

Nous avons vu que l'ensemble $V(\mathfrak{a}_A)$ est en bijection avec l'ensemble des idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de l'anneau $\mathbb{C}[T]$ qui contiennent $\mathfrak{a}_A$ et aussi avec l'ensemble des idéaux $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}_A$ de l'anneau R_σ, qui est l'anneau de coordonnées $R_{V(\mathfrak{a}_A)}$. Ainsi les générateurs $u_1, ..., u_k$ de R_σ sont les fonctions coordonnées de X_σ dans $\mathbb{C}^k$. Un point $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{C}^k$ appartient à $V(\mathfrak{a}_A)$, donc à la réalisation géométrique de X_σ, si et seulement si x vérifie $P(x) = 0$ pour chaque générateur P de $\mathfrak{a}_A$, dont on a donné la forme.

Remarque 2.3.36 Nous verrons (lemme 2.3.40) qu'à isomorphisme torique près (voir la définition un peu plus loin), la réalisation géométrique de X_σ est en fait indépendante du choix des générateurs de $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$, i.e. indépendante de A.

Exemple 2.3.37 Donnons quelques exemples dans $\mathbb{R}^2$. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
α) Considérons le cône $\sigma = \mathrm{pos}(\{e_1, e_2\}) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$ dans $\mathbb{Z}^2$. Le monoïde $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ est engendré par $A = (e_1, e_2)$, et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, donc $\mathfrak{a}_A = 0$, et $V(\mathfrak{a}_A)$ ("=" X_σ) $= \mathbb{C}^2$.
β) Regardons maintenant le cône $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}e_2$. Le monoïde $\sigma \cap \mathbb{Z}^2$ est engendré par $A = (e_1, e_2, -e_2)$, donc $\mathfrak{a}_A = \langle T_2T_3 - 1\rangle$ et $V(\mathfrak{a}_A) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_2z_3 = 1\} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
γ) Enfin, si $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(2e_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$, on prend $A = (e_1, e_2, 2e_1 - e_2)$ et l'idéal $\mathfrak{a}_A$ est $\langle T_1^2 - T_2T_3\rangle$, d'où $V(\mathfrak{a}_A) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1^2 = z_2z_3\}$.
δ) Pour illustrer la remarque précédente, considérons enfin à nouveau le cône $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$ et choisissons $A = (e_1, e_2, e_1 + e_2)$ comme système de générateurs. Dans ce cas, on trouve $\mathfrak{a}_A = \langle T_1T_2 - T_3\rangle$ et $V(\mathfrak{a}_A) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1z_2 = z_3\}$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}^2$ via l'application $\varphi(z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_1z_2)$ d'inverse $\psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$.

Avant de continuer, énonçons le théorème suivant, qui nous dit que tout variété affine torique de dimension n contient le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ comme sous-ensemble ouvert et qu'il agit de façon naturelle sur cette variété. Cette action est très importante, et nous y reviendrons un peu plus tard.

Théorème 2.3.38 *Soit $A = (a_1, ..., a_n)$ un système de générateurs du monoïde $\sigma \cap \mathbb{Z}^n$ et posons $V = V(\mathfrak{a}_A)$ (et $T = (\mathbb{C}^*)^n$). Alors :*

i) l'application $\gamma : \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & V \\ (t_1, ..., t_n) & \longmapsto & (t^{a_1}, ..., t^{a_k}) \end{array}$ *est une bijection entre T et le sous-ensemble ouvert $V \cap (\mathbb{C}^*)^k$ de V.*

ii) pour tout $x \in V$ et tout $t \in T$, le point $t.x := (t^{a_1}x_1, ..., t^{a_k}x_k)$ appartient à V.

Définition 2.3.39 *Soit $\Phi : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^m$ une application monomiale (i.e. chaque composante non nulle de $\Phi(x)$ est un monôme en les coordonnées de x) et soient $X_\sigma \subset \mathbb{C}^k$ et $X_{\sigma'} \subset \mathbb{C}^m$ deux variétés affines toriques. Si $\Phi(X_\sigma) \subset X_{\sigma'}$, alors la restriction φ de Φ à X_σ est un morphisme (de variétés algébriques), qu'on appelle un* ***morphisme affine torique****. Si φ est bijective d'inverse un morphisme affine torique, on dit que φ est un* ***isomorphisme affine torique****, et on dit que X_σ et $X_{\sigma'}$ sont isomorphes. Si $\sigma = \sigma'$, on appelle φ un* ***changement de coordonnées****.*

Remarquons qu'un morphisme torique est continu (et même holomorphe) pour la topologie induite par l'espace ambiant, puisque ses coordonnées sont polynomiales. En particulier, deux variétés affines toriques isomorphes sont homéomorphes (et même biholomorphes).

Lemme 2.3.40 *Soient $R_\sigma \cong \mathbb{C}[u_1, ..., u_k] = \mathbb{C}[\xi]/\mathfrak{a}$ et $R_\sigma \cong \mathbb{C}[v_1, ..., v_\ell] = \mathbb{C}[\eta]/\mathfrak{a}'$ deux représentations de R_σ comme anneau de coordonnées (sur deux réalisations géométriques de X_σ), alors il existe un changement de coordonnées entre $(u_1, ...u_k)$ et $(v_1, ..., v_\ell)$, qui rend isomorphes (au sens de la définition précédente) les deux réalisations géométriques de X_σ.*

Remarque 2.3.41 Dorénavant, on appellera "variété affine torique" toute réalisation d'une variété affine torique abstraite X_σ et on la notera également X_σ.

Remarque 2.3.42 On a une propriété analogue à celle énoncée dans le lemme précédent pour les morphismes toriques, à savoir qu'un morphisme torique entre deux variétés affines toriques $\varphi : X_\sigma \to X_{\sigma'}$ détermine de façon unique un homomorphisme monomial $\varphi^* : R_{\sigma'} \to R_\sigma$.

Enfin nous avons un théorème que nous réutiliserons au moment de l'étude des singularités des variétés toriques :

Théorème 2.3.43 *Soit σ un cône rationnel de dimension n dans $\mathbb{R}^n$. On décompose $\sigma = \sigma_0 + U$ (lemme 2.3.24), et on pose $d := n - \dim(\sigma_0)$. Alors la variété torique affine X_σ a la structure de produit cartésien suivante : $X_\sigma \cong X_{\sigma_0} \times (\mathbb{C}^*)^d$; en particulier si σ est régulier (déf. 2.3.68) alors $X_\sigma \cong \mathbb{C}^{n-d} \times (\mathbb{C}^*)^d$.*

Remarque 2.3.44 En utilisant ce théorème, on retrouve bien les résultats obtenus à l'exemple 2.3.37.

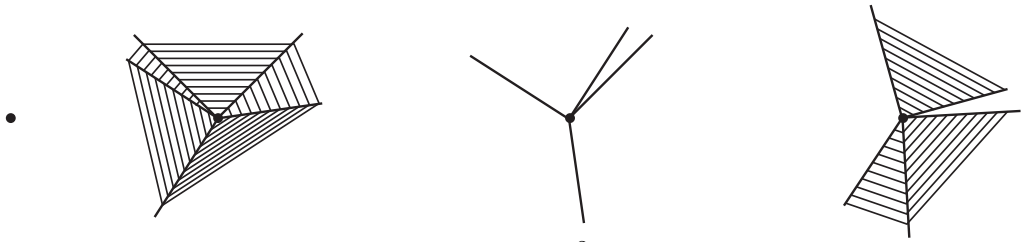
2.3.3 Variété torique associée à un éventail

Pour construire une variété torique, nous allons recoller des variétés affines toriques. Pour ce faire, il nous faut une notion supplémentaire, celle d'éventail. Ici encore, N désigne un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n fini. Rappelons qu'on note $\mathcal{S}_\sigma = M \cap \check{\sigma}$.

Définition 2.3.45 *Un ensemble (non vide) Δ de cônes polyédraux convexes rationnels saillants dans $N_{\mathbb{R}}$ est un **éventail** de N s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *toute face d'un cône de Δ est élément de Δ*
2. *l'intersection de deux cônes de Δ est une face commune de ces cônes*

Exemple 2.3.46 L'ensemble des faces d'un cône est un éventail.



Des éventails dans $\mathbb{R}^2$

Remarque 2.3.47 Soulignons ici qu'on ne demande pas qu'un éventail compte nécessairement un nombre fini de cônes, comme c'était le cas à l'origine (voir [24] par exemple).

Définition 2.3.48 *On appelle **support** d'un éventail Δ de N l'ensemble $\bigcup_{\sigma\in\Delta}\sigma$, qu'on note $|\Delta|$. Un éventail est dit **complet** si son support est $N_{\mathbb{R}}$ tout entier et **simplicial** si tous ses cônes sont simpliciaux.*

Le principe de construction est le suivant. On se donne un éventail Δ, et on considère la variété $X_{\check\sigma}$ associée au dual de chaque cône σ de l'éventail. Le fait que les cônes soient saillants assure que leurs cônes duaux sont tous de même dimension n. Si τ est une face de σ, alors $\check\sigma$ est une face de $\check\tau$. L'inclusion canonique $i_{\tau,\sigma} : R_{\check\sigma} \to R_{\check\tau}$ induit un morphisme torique $\varphi_{\tau,\sigma} : X_{\check\tau} \to X_{\check\sigma}$ (voir la remarque 2.3.42). La restriction de cette application au tore inclus dans chacune des deux variétés est un isomorphisme (c'est l'application $(x_1, ..., x_k, x_{k+1}) \mapsto (x_1, ..., x_k)$ de $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$ dans $(\mathbb{C}^*)^k$). Nous voulons montrer que $\varphi_{\tau,\sigma}$ est injective et ouverte, ce qui nous permettra de "recoller" deux variétés affines toriques $X_{\check\sigma}$ et $X_{\check\sigma'}$ le long de l'ouvert correspondant à la face commune $\tau := \sigma \cap \sigma'$.

Pour montrer qu'il s'agit bien d'une application ouverte, prenons m dans $\check\sigma$ tel que $\tau = \sigma \cap m^\perp$ (c'est la définition d'une face). Ainsi (lemme 2.3.18) $\check\tau = \check\sigma + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-m)$, ce qui donne $\mathcal{S}_\tau = \mathcal{S}_\sigma + \mathbb{Z}_{\geqslant 0}(-m)$. Le monoïde $\mathcal{S}_\tau$ est donc obtenu à partir de $\mathcal{S}_\sigma$ en lui adjoignant un générateur, $-m$. Choisissons une famille $(a_1, ..., a_k)$ génératrice de $\mathcal{S}_\sigma$; quitte à ajouter un élément à cette famille, on peut supposer que $m = a_k$. Le monoïde $\mathcal{S}_\tau$ est engendré par la famille $(a_1, ..., a_k, a_{k+1})$ avec $a_{k+1} = -m$. Les relations entre ces générateurs sont donc : d'une part, les relations entre les générateurs $a_1, ..., a_k$ et la relation supplémentaire $a_k + a_{k+1} = 0$ d'autre part. Cela se traduit dans $R_{\check\sigma} = \mathbb{C}[u_1, ..., u_k]$ et $R_{\check\tau} = \mathbb{C}[u_1, ..., u_k, u_{k+1}]$ par la relation supplémentaire $u_k u_{k+1} = 1$ dans $R_{\check\tau}$. Comme les u_i sont les fonctions coordonnées sur $X_{\check\sigma}$ et $X_{\check\tau}$, cela signifie que l'application p_{k+1} :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} & \longrightarrow & \mathbb{C}^k \\ (x_1, ..., x_k, x_{k+1}) & \longmapsto & (x_1, ..., x_k) \end{array}$$

identifie $X_{\check\tau}$ à l'ouvert $\{u_k \neq 0\}$ de $X_{\check\sigma}$.

Avec les notations précédentes, on a montré :

Lemme 2.3.49 $X_{\check\tau} \cong X_{\check\sigma} \backslash \{u_k = 0\}$

Ainsi, étant donnés deux cônes σ, σ' ayant une face commune τ, si on note $(v_1, ..., v_\ell)$ un système de coordonnées sur $X_{\check{\sigma}'}$, on a deux isomorphismes $X_{\check{\tau}} \cong X_{\check{\sigma}}\backslash\{u_k = 0\}$ et $X_{\check{\tau}} \cong X_{\check{\sigma}'}\backslash\{v_\ell = 0\}$ qui donnent un isomorphisme $\varphi_{\sigma,\sigma'} : X_{\check{\sigma}}\backslash\{u_k = 0\} \cong X_{\check{\sigma}'}\backslash\{v_\ell = 0\}$.

Définition 2.3.50 *Soit Δ un éventail de N. La **variété torique associée à Δ**, notée $X_{\Delta,N}$ (ou X_Δ quand il n'y a pas d'ambiguïté sur N), est le quotient de l'ensemble $\bigsqcup_{\sigma\in\Delta} X_{\check{\sigma}}$ pour la relation qui identifie deux points $x \in X_{\check{\sigma}}$ et $x' \in X_{\check{\sigma}'}$ lorsque $\varphi_{\sigma,\sigma'}(x) = x'$.*

On munit chaque $X_{\check{\sigma}}$ de la topologie induite par $\mathbb{C}^n$ (dite "complexe") et X_Δ de la topologie quotient. En particulier, les (quotients de) $X_{\check{\sigma}}$ sont des ouverts de X_Δ.

Théorème 2.3.51 *Soit Δ un éventail. La variété torique X_Δ associée est séparée.*

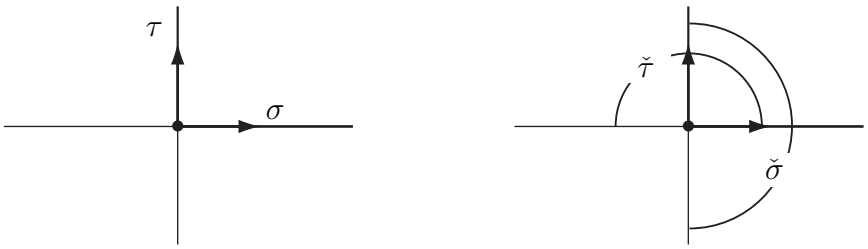
Exemple 2.3.52 L'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: on considère l'éventail $\Delta = \{\sigma_1, \{0\}, \sigma_2\}$ dans $\mathbb{R}$, où $e_1 = 1$, $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1$ et $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_1)$.

On trouve $R_{\check{\sigma}_1} = \mathbb{C}[z]$, $R_{\check{\sigma}_2} = \mathbb{C}[z^{-1}]$ et $R_{\{\check{0}\}} = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. On a $X_{\check{\sigma}_1} \cong \mathbb{C}$, $X_{\check{\sigma}_2} \cong \mathbb{C}$ et $X_{\{\check{0}\}} \cong \mathbb{C}^*$. L'isomorphisme entre $X_{\check{\sigma}_1}\backslash\{z = 0\}$ et $X_{\check{\sigma}_2}\backslash\{z^{-1} = 0\}$ est donné par $\varphi(z) = z^{-1}$. La variété obtenue est donc le quotient de $\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C} = \mathbb{C} \times \{1, 2\}$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x, 1)$ à $(1/x, 2)$ lorsque $x \neq 0$. Notons $cl(x, i)$ la classe de (x, i) pour cette relation d'équivalence. Pour voir que X_Δ est bien la droite projective complexe, on regarde l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & X_\Delta & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ & cl(x,i) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} [x:1] & \text{si } i = 1 \\ [1:x] & \text{si } i = 2 \end{array} \right. \end{array}$$

qui est un homéomorphisme.

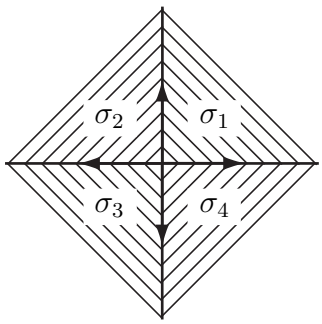
Exemple 2.3.53 Regardons l'éventail $\Delta := \{\sigma, \tau, \{0\}\}$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1$ et $\tau = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$.



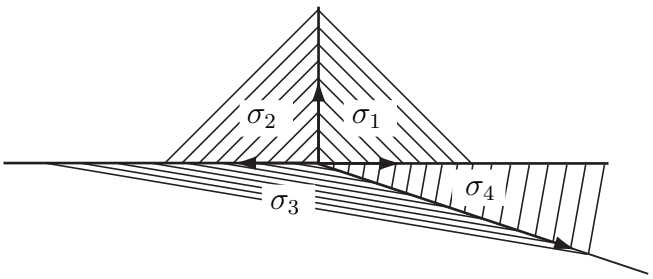
On a $R_{\check{\sigma}} = \mathbb{C}[z_1, z_2, z_2^{-1}]$ et $R_{\check{\tau}} = \mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, z_2]$. L'isomorphisme entre $X_{\check{\sigma}}\backslash\{z_1 = 0\}$ et $X_{\check{\tau}}\backslash\{z_2 = 0\}$ est donné par $\varphi(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$. La variété X_Δ est obtenue en recollant $X_{\check{\sigma}} \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et $X_{\check{\tau}} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ le long de leur ouvert commun $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Ainsi X_Δ est le quotient de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*) \sqcup (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$ par la relation d'équivalence qui identifie $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ avec $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, i.e. c'est $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \sqcup (\{0\} \times \mathbb{C}) \sqcup (\mathbb{C} \times \{0\}) = \mathbb{C}^2\backslash\{(0, 0)\}$.

Exemple 2.3.54 On obtient la variété $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec l'éventail Δ engendré par les cônes $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$, $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_1)$, $\sigma_3 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_1) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_2)$, et $\sigma_4 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_2) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1$.

Exemple 2.3.55 On construit la **surface Hirzebruch** $\mathcal{H}_k$, pour $k \in \mathbb{Z}$ en considérant l'éventail engendré par les cônes $\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2$, $\sigma_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_2 + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_1)$, $\sigma_3 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-e_1) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(ke_1 - e_2)$ et $\sigma_4 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(ke_1 - e_2) + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1$. C'est une hypersurface de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \{([\eta_0, \eta_1], [\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2])\}$ donnée par l'équation $\eta_0^k\zeta_0 = \eta_1^k\zeta_1$.



L'éventail de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$...



... et celui de $\mathcal{H}_k$.

Exemple 2.3.56 On obtient l'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ en considérant la variété torique associée à l'éventail formé des cônes $\sigma_0 = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_n$, et $\sigma_i = \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1 + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_{i-1} + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_{i+1} + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}e_n + \mathbb{R}_{\geqslant 0}(-(e_1 + ... + e_n))$ et de leurs faces.

Lemme 2.3.57 *Chaque variété affine torique $X_{\check{\sigma}}$ contient le tore T comme ensemble ouvert dense, pour la topologie usuelle ou la topologie de Zariski.*

De plus, tous ces tores plongés sont identifiés via les applications de recollement. Par conséquent, on a le lemme suivant, toujours dans le cas d'un éventail Δ de $(N \cong)\mathbb{Z}^n$:

Lemme 2.3.58 *Il existe une injection ouverte du tore T dans X_Δ, et T (identifié à son image) est dense dans X_Δ.*

2.3.4 Action du tore

Soit σ un cône saillant dans $\mathbb{R}^n$ (de sorte que $\check{\sigma}$ est de dimension n) et soit $A = (a_1, ..., a_k)$ un système de générateurs de $\mathcal{S}_\sigma$. Le choix de A détermine une réalisation géométrique V de $X_{\check{\sigma}}$ comme sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^k$, et on sait (théorème 2.3.38) que l'application de $(\mathbb{C}^*)^n$ dans $\mathbb{C}^k$ qui à t associe $(t^{a_1}, ..., t^{a_k})$ est une bijection entre $(\mathbb{C}^*)^n$ et l'ouvert dense $V \cap (\mathbb{C}^*)^k$ de V. On sait également (encore par le théorème 2.3.38) que pour tout élément $t \in (\mathbb{C}^*)^n$ et tout $x = (x_1, ..., x_k) \in V$, on a $t.x := (t^{a_1}x_1, ..., t^{a_k}x_k) \in V$. L'application de $(\mathbb{C}^*)^n \times V \to V$ qui à (x, t) associe $t.x$ définit donc une action du groupe $(\mathbb{C}^*)^n$ sur V, qui étend l'action naturelle du groupe $(\mathbb{C}^*)^n$ sur lui-même. Le tore plongé $V \cap (\mathbb{C}^*)^k$ est une orbite pour cette action, on l'appelle la "grande" orbite.

Cette action est indépendante du choix de A. En effet, si $(u_1, ..., u_k)$ et $(v_1, ..., v_\ell)$ sont deux systèmes de coordonnées de deux réalisations V et V' de $X_{\check{\sigma}}$ correspondant à deux systèmes de générateurs de $\mathcal{S}_\sigma$, il existe un isomorphisme torique $\varphi : V \to V'$ (avec $v_j = \lambda_j u_1^{\alpha_{j,1}} ... u_k^{\alpha_{j,k}}$).

Alors on voit que pour tout $x = (x_1, ..., x_k) \in V$, si on note $\varphi(x) = (y_1, ..., y_\ell) \in V'$, pour tout $t \in (\mathbb{C}^*)^n$, la i-ème coordonnée de $\varphi(t^{a_1}x_1, ..., t^{a_k}x_k)$ est $\lambda_i t^{a_1\alpha_{i,1}}x_1^{\alpha_{i,1}}...t^{a_k\alpha_{i,k}}x_k^{\alpha_{i,k}} = t^{a'_i}y_i$, i.e. finalement on trouve $\varphi(t^{a_1}x_1, ..., t^{a_k}x_k) = (t^{a'_1}y_1, ..., t^{a'_\ell}y_\ell)$, c'est-à-dire $\varphi(t.x) = t.\varphi(x)$.

Théorème 2.3.59 *Avec les notations précédentes, l'application*

$$\begin{array}{ccc} T \times X_{\check{\sigma}} & \longrightarrow & X_{\check{\sigma}} \\ (t, x) & \longmapsto & t.x := (t^{a_1}x_1, ..., t^{a_k}x_k) \end{array}$$

définit une action du tore sur la variété affine torique $X_{\check{\sigma}}$, appelée ***action naturelle du tore****. Elle étend l'action du tore sur lui-même. Le tore plongé est une orbite pour cette action, c'est la* ***grande orbite****.*

Théorème 2.3.60 *Soit Δ un éventail dans $\mathbb{R}^n$. L'action naturelle du tore sur chaque variété affine torique $X_{\check{\sigma}}$ pour $\sigma \in \Delta$ est compatible avec les applications de recollement et fournit ainsi une action (encore appelée "naturelle") du tore sur la variété torique X_Δ. Encore une fois, cette action étend celle du tore sur lui-même, et le tore plongé est une orbite pour cette action, encore appelée la* ***grande orbite****.*
De plus, pour les deux topologies dont on a muni X_Δ, l'action du tore est continue, la grande orbite est un sous-ensemble ouvert, dense.

2.3.5 Premières propriétés des variétés toriques

Rappelons que nous avons une correspondance

$$\mathbb{C}^k \leftrightarrow \operatorname{spec} \mathbb{C}[\xi] \leftrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}-\text{alg.}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$$

Ainsi, chaque point $x = (x_1, ..., x_n)$ correspond à un (unique) idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathbb{C}[\xi]$ et à un unique homomorphisme d'algèbres $\varphi : \mathbb{C}[\xi] \to \mathbb{C}$ tel que $\ker \varphi = \mathfrak{m}_x$, c'est-à-dire que $\varphi(P) = P(x)$. De plus, pour un cône σ donné, le spectre maximal $\operatorname{spec} \mathbb{C}[\mathcal{S}_\sigma] = \operatorname{spec} R_{\check{\sigma}}$ est en bijection avec l'ensemble $\operatorname{Hom}_{s.g.}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$ des homomorphismes de semi-groupes de $\mathcal{S}_\sigma$ dans $\mathbb{C}$ (où l'on voit $\mathbb{C}$ comme un semi-groupe pour la multiplication). Dans ce cas, si $\varphi \in \operatorname{Hom}_{s.g.}(\mathcal{S}_\sigma, \mathbb{C})$ le point $x \in X_{\check{\sigma}}$ correspondant vérifie $\varphi(a) = z^a(x)$ pour tout $a \in \mathcal{S}_\sigma$. En particulier, si $(a_1, ..., a_k)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}_\sigma$, alors $\varphi(a_i)$ est la i-ème coordonnée de x.

Définition 2.3.61 *Soit σ un cône et $X_{\check{\sigma}}$ la variété affine torique associée à son cône dual. À chaque face τ de σ correspond un point noté x_τ, appelé* ***point distingué****, correspondant à l'homomorphisme de semi-groupes suivant, défini sur les générateurs a de $\mathcal{S}_\sigma$ par :*

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \tau^\perp \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 2.3.62 *Soient σ un cône et τ une face de celui-ci. Alors l'orbite du point distingué x_τ pour l'action du tore sur $X_{\check{\sigma}}$ est notée* $\operatorname{orb}(\tau)$.

On a le théorème suivant (une preuve figure dans [28]), qui caractérise les orbites d'une variété torique sous l'action du tore :

Théorème 2.3.63 *Soit Δ un éventail et X_Δ la variété torique associée. Chaque orbite de X_Δ sous l'action de T_N est de la forme* $\mathrm{orb}(\sigma)$ *pour un certain $\sigma \in \Delta$, et Δ est en bijection avec l'ensemble des orbites de X_Δ pour cette action. De plus, on a :*

i) $\mathrm{orb}(\{0\}) = U_{\{0\}} = T_N$

ii) Pour tout $\sigma \in \Delta$, $\dim \mathrm{orb}(\sigma) = \dim N_\mathbb{R} - \dim \sigma$ *et* $\mathrm{orb}(\sigma) \cong (\mathbb{C}^*)^{\dim N_\mathbb{R} - \dim \sigma}$

iii) Pour $\sigma, \tau \in \Delta$, τ est une face de σ si et seulement si $\mathrm{orb}(\sigma) \subset \overline{\mathrm{orb}(\tau)}$

iv) Pour $\sigma \in \Delta$, $\mathrm{orb}(\sigma)$ *est l'unique orbite fermée pour l'action de T_N dans $X_{\check{\sigma}}$ et on a* $X_{\check{\sigma}} = \bigsqcup_{\tau < \sigma} \mathrm{orb}(\tau)$

Remarque 2.3.64 En particulier, un point fixe de X_Δ pour l'action du tore correspond à un cône de dimension n (et réciproquement).

Exemple 2.3.65 L'espace projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ (vu comme variété torique, voir l'exemple 2.3.56) est ainsi constitué de 7 orbites sous l'action du tore : la grande orbite, trois orbites homéomorphes à $\mathbb{C}^*$, correspondant aux trois cônes de dimension 1, et trois points fixes, correspondant aux trois cônes de dimension 2.

Théorème 2.3.66 *Soit Δ un éventail d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $N_\mathbb{R}$ de dimension n, et X_Δ la variété torique associée. Alors X_Δ est compacte si et seulement si Δ est fini et complet.*

Théorème 2.3.67 *Soit Δ un éventail dans N. Le groupe fondamental de la variété torique associée X_Δ est canoniquement isomorphe à N/N' où N' est le sous-groupe de N engendré par $\bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \cap N$.*

Définition 2.3.68 *Un cône est dit* ***régulier*** *s'il existe une $\mathbb{Z}$-base $\{n_1, ..., n_r\}$ de N et $s \leqslant r$ tel que $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0} n_1 + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0} n_s$. Si tous les cônes d'un éventail sont réguliers, on dit également que l'éventail est régulier.*

Définition 2.3.69 *Un point $x \in X_\Delta$ est dit* ***singulier*** *si pour un certain $\sigma \in \Delta$ avec $x \in X_{\check{\sigma}}$, on n'a pas $X_{\check{\sigma}} \cong \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ pour un certain k. La variété X_Δ est* ***lisse*** *si elle n'a pas de point singulier.*

Remarquons que si x est singulier, alors tous les points de l'orbite de ce point sous l'action du tore sont singuliers.

Théorème 2.3.70 *La variété torique X_Δ associée à un éventail Δ dans un réseau N est lisse si et seulement si l'éventail Δ est régulier. Dans ce cas, l'adhérence de chaque orbite* $\mathrm{orb}(\sigma)$ *(sous l'action du tore) est également lisse.*

La condition suffisante est une conséquence du théorème 2.3.43. La condition nécessaire est prouvée dans [28].

Exemple 2.3.71 Par exemple, la surface de Hirzebruch $\mathcal{H}_k$ (pour $|k| > 1$) n'est pas lisse.

2.3.6 Morphismes toriques

Théorème 2.3.72 *Soient Δ un éventail de $\mathbb{R}^n$ et Δ' un éventail de $\mathbb{R}^r$, et soit $L_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$ une application linéaire qui envoie $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}^r$, et qui induise une application entre éventails $L : \Delta \longrightarrow \Delta'$ (i.e. telle que $\forall \sigma \in \Delta$, $\exists \sigma' \in \Delta'$ vérifiant $L(\sigma) \subset \sigma'$). Alors L s'étend de façon naturelle en une application $\psi : X_\Delta \longrightarrow X_{\Delta'}$ dont la restriction à chaque $X_{\check{\sigma}}$ est un morphisme affine torique. En particulier, cette application est continue pour la topologie de Zariski et holomorphe pour la topologie standard de X_Δ et $X_{\Delta'}$*

Définition 2.3.73 *On appelle ψ un* ***morphisme torique*** *et L une* ***application entre éventails****.*

Théorème 2.3.74 *Soit $L : \Delta' \to \Delta$ une application entre éventails. Le morphisme torique associé est propre si et seulement si pour tout $\sigma \in \Delta$, l'ensemble $\Delta'_\sigma := \{\sigma' \in \Delta' \mid L(\sigma') \subset \sigma\}$ est fini et $L^{-1}(\sigma) = |\Delta'_\sigma|$.*

Ce théorème est démontré dans [28]. On peut le voir comme une généralisation du théorème 2.3.66.

2.3.7 Sous-variétés d'une variété torique

Soient $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ un éventail, X_Δ la variété torique associée à cet éventail et $\sigma \in \Delta$ un cône. Nous pouvons décrire l'ensemble $\overline{\mathrm{orb}(\sigma)}$ comme variété torique ; en effet, on obtient son éventail de la façon suivante : on note Δ' l'ensemble des cônes de Δ qui contiennent σ comme face (en particulier $\sigma \in \Delta'$), puis on projette Δ' par le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient σ. On obtient alors un éventail qu'on note Σ et $X_\Sigma \cong \overline{\mathrm{orb}(\sigma)}$.

Chapitre 3

Variétés à coins généralisées

3.1 Introduction

La définition principale de cette section (la *variété à coins* d'un éventail et sa topologie) est une définition de base dans la théorie des variétés toriques (voir le chapitre 2, ou encore [2] et [28] par exemple). Ici nous étendons cette définition à un éventail en omettant la condition de rationalité, c'est-à-dire que les vecteurs engendrant les cônes avec lesquels on travaille ne sont pas nécessairement situés dans un réseau d'un espace vectoriel. Nous allons également donner des propriétés basiques de la topologie de la variété à coins associée à un éventail, propriétés qui se révéleront utiles dans les chapitres suivants.

3.2 La variété à coins d'un éventail

3.2.1 Définition de la variété à coins associée à un éventail

Soit $N_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension n. On rappelle que les définitions de cône et d'éventail dans $N_{\mathbb{R}}$ (voir la section 2.3) en omettant la condition de rationnalité sont toujours valides.

Soit Δ un éventail de $N_{\mathbb{R}}$. Pour chaque cône $\sigma \in \Delta$, $L(\sigma)$ est le sous-espace vectoriel de $N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ et on notera $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ n'importe quel supplémentaire de $L(\sigma)$ dans $N_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $N_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}^{\sigma} \oplus L(\sigma)$). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $N_{\mathbb{R}}$ et écrivons la décomposition $x_n = y_n + z_n \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma} \oplus L(\sigma)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 3.2.1 *Étant donné un éventail Δ, on appelle $\boldsymbol{\mathcal{N}_{\Delta}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $N_{\mathbb{R}}$ telles qu'il existe un cône $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \Delta$ vérifiant :*

- *il existe un point $y \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ et*
- *pour tout $w \in L(\sigma)$, il existe un entier p tel que $z_n \in w + \sigma$ pour tout $n \geqslant p$.*

À ce stade, nous pouvons formuler deux remarques :

Remarque 3.2.2 L'ensemble $\mathcal{N}_{\Delta}$ est bien défini, c'est-à-dire que sa définition ne dépend pas du choix d'un sous-espace supplémentaire $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ de $L(\sigma)$ pour chaque $\sigma \in \Delta$. En effet, étant donné un cône σ, soient $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ et $N_{\mathbb{R}}^{\prime\sigma}$ deux espaces supplémentaires de $L(\sigma)$. Écrivons les deux décompositions $x_n = y_n + z_n \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma} \oplus L(\sigma)$ et $x_n = y'_n + z'_n \in N_{\mathbb{R}}^{\prime\sigma} \oplus L(\sigma)$ pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $N_{\mathbb{R}}$. Un calcul direct montre que si les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont aux conditions de la définition précédente, alors $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les vérifient également.

Remarque 3.2.3 Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}_\Delta$ est une suite bornée de $N_\mathbb{R}$, alors nécessairement $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{0\}$.

Le lemme qui suit montre l'unicité de $\sigma \in \Delta$ satisfaisant aux conditions de la définition précédente.

Lemme 3.2.4 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}_\Delta$. Alors, le cône $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est unique.*

Preuve : Supposons qu'il existe deux cônes distincts $\sigma, \sigma' \in \Delta$ qui vérifient tous les deux les conditions de la définition 3.2.1. Leur intersection τ est une face de chacun de ces deux cônes et on peut supposer que c'est une face propre d'au moins l'un d'entre eux, disons $\tau \neq \sigma$, car sinon $\tau = \sigma = \sigma'$ et on a terminé.

Écrivons les deux décompositions $x_n = y_n + z_n = y'_n + z'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ correspondant à σ et σ' respectivement. La condition sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour σ signifie que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ainsi elle est bornée ; par conséquent, il existe un ensemble compact K_σ et un entier p tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $K_\sigma + \sigma$ pour $n \geqslant p$; de même, il existe un ensemble compact $K_{\sigma'}$ et un entier p' tel que les éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit tous situés dans $K_{\sigma'} + \sigma'$ dès que $n \geqslant p'$.

Ainsi, il existe un compact K tel que tous les éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient (pour $n \geqslant \max(p, p')$) dans l'intersection de $K + \sigma$ et $K + \sigma'$. Choisissons w dans un supplémentaire V de $L(\tau)$ dans $L(\sigma)$ tel que les ensembles $w + \sigma$ et σ' aient une intersection vide. C'est toujours possible puisque τ est une face propre de σ, donc $\dim L(\tau) + 1 \leqslant \dim L(\sigma)$. À présent, choisissons $\lambda > 0$ assez grand pour que les ensembles $K + \lambda w + \sigma$ et $K + \sigma'$ aient aussi une intersection vide. Par définition de $\mathcal{N}_\Delta$, il existe un entier p'' tel que les éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient aussi tous dans $K + \lambda w + \sigma$ et $K + \sigma'$ pour $n \geqslant p''$. C'est une contradiction. ■

À présent on définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{N}_\Delta$. En conservant les notations précédentes, on donne la définition suivante :

Définition 3.2.5 *Deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{N}_\Delta$ sont équivalentes lorsque $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sigma((x'_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $y - y' \in L(\sigma)$. Dans ce cas, nous écrirons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on notera $y + \infty \cdot \sigma$ la classe d'équivalence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
*La **variété à coins de Δ** est le quotient de $\mathcal{N}_\Delta$ par cette relation d'équivalence. On note $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ cet espace.*

À chaque $x \in N_\mathbb{R}$ et chaque cône $\sigma \in \Delta$, on associe un élément de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$, noté $x + \infty \cdot \sigma$. C'est la classe d'équivalence de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{N}_\Delta$ telle que $y = p(x)$ où $p(x)$ est la projection de x sur un sous-espace supplémentaire de $L(\sigma)$.

On utilisera les conventions $x + \infty \cdot \{0\} = x$ et $x + \infty \cdot \sigma = x' + \infty \cdot \sigma$ pour deux points $x, x' \in N_\mathbb{R}$ avec $x - x' \in L(\sigma)$.

Remarque 3.2.6 L'espace vectoriel $N_\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de la variété à coins de Δ. Pour $x \in N_\mathbb{R}$, on considère simplement la suite constante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $x_n = x$. On note encore $N_\mathbb{R}$ l'image de $N_\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) = \mathcal{N}_\Delta/\sim$ et on spécifiera $N_\mathbb{R} \subset \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ si nécessaire. Remarquons que tout cône σ, vu comme sous-ensemble de $N_\mathbb{R}$, est alors aussi un sous-ensemble de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$.

Remarque 3.2.7 Comme on peut s'y attendre, si Δ est un éventail rationnel et X_Δ est la variété torique associée, l'ensemble $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est homéomorphe au quotient $X_\Delta/(\mathbb{S}^1)^n$, i.e. la variété à coins de X_Δ. Pour ce fait, on renvoie à [2], section I.1.

3.2.2 La topologie d'une variété à coins

À présent que nous avons défini la variété à coins associée à un éventail dans notre cadre, nous munissons cet espace d'une topologie et nous démontrons ensuite quelques propriétés de cette topologie que nous utiliserons par la suite. Certaines de ces propriétés ont un énoncé très proche de ce que l'on connaît déjà pour les variétés toriques : par exemple, il existe une action (naturelle) de $N_{\mathbb{R}}$ sur la variété à coins d'un éventail qui étend l'action de $N_{\mathbb{R}}$ sur lui-même et cette variété à coins est compacte si et seulement si l'éventail considéré est fini et complet.

Comme précédemment, on fixe un éventail Δ (non nécessairement rationnel) d'un espace vectoriel réel $N_{\mathbb{R}}$.

Définition 3.2.8 *On munit $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ d'une topologie de la façon suivante : une base de voisinages d'un point $y + \infty \cdot \sigma \in \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est la collection des ensembles*

$$U_{\varepsilon,w}(y + \infty \cdot \sigma) := \bigcup_{\tau < \sigma} (y + w + B_\varepsilon + \sigma + \infty \cdot \tau),$$

pour $\varepsilon > 0$ et $w \in L(\sigma)$ (B_ε désigne la boule ouverte de rayon ε centrée en 0 dans $N_{\mathbb{R}}$).

La figure 3.1 représente un éventail $\Delta = \{\{0\}, \tau, \tau_1, \tau_2, \sigma\}$ de $\mathbb{R}^2$, la variété à coins associée et le voisinage de l'un des points de cette variété à coins.

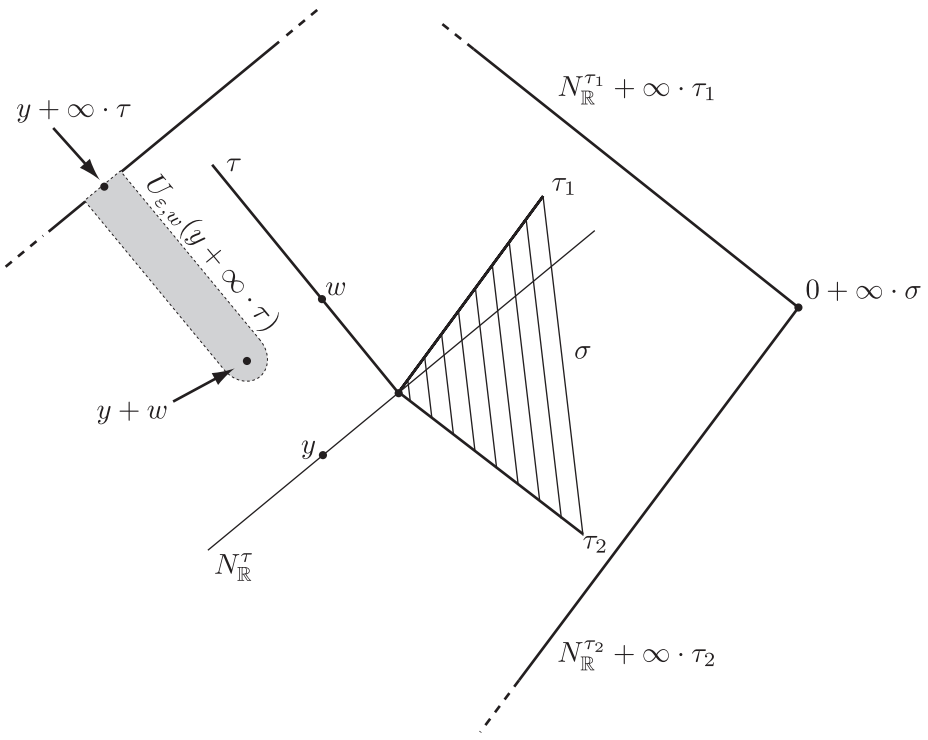


FIGURE 3.1 – Un éventail et sa variété à coins

Lemme 3.2.9 *L'espace $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ possède une action continue naturelle de $N_{\mathbb{R}}$ qui étend l'action de $N_{\mathbb{R}}$ sur lui-même.*

Preuve : Soit $y + \infty \cdot \sigma \in \mathcal{M}c(\Delta)$ (ce point étant y si $\sigma = \{0\}$ ou $0 + \infty \cdot \sigma$ si σ est de dimension n) et $x \in N_{\mathbb{R}}$. Posons

$$x.(y + \infty \cdot \sigma) := p(x) + y + \infty \cdot \sigma,$$

où $p(x)$ est la projection de x sur le sous-espace vectoriel $N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$. Cette action est clairement continue. ■

Le lemme suivant est clair et c'est encore une fois l'analogue du cas d'une variété torique :

Lemme 3.2.10 *L'espace $\mathcal{M}c(\Delta)$ se décompose comme réunion d'orbites sous l'action de $N_{\mathbb{R}}$ et chaque orbite est de la forme $N_{\mathbb{R}}^{\sigma} + \infty \cdot \sigma$ pour un cône $\sigma \in \Delta$.*

Remarque 3.2.11 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathcal{N}_{\Delta}$ et $y + \infty \cdot \sigma$ sa classe d'équivalence dans $\mathcal{M}c(\Delta)$. Il est aisé de remarquer que si l'on considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une suite de points dans $\mathcal{M}c(\Delta)$, alors elle converge vers $y + \infty \cdot \sigma$.

Lemme 3.2.12 *Soit σ un cône d'un éventail Δ. Alors l'adhérence S de $\sigma \subset \mathcal{M}c(\Delta)$ dans $\mathcal{M}c(\Delta)$ est un compact.*

Preuve : On considère une suite d'éléments de S, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Appelons $\mathcal{S} := S \setminus \sigma$ et écrivons S comme l'union disjointe $S = \sigma \sqcup \mathcal{S}$. Nous pouvons distinguer deux cas.

α) En premier lieu, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une infinité d'éléments dans σ. Après une éventuelle extraction de sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses termes dans cet ensemble. Alors, ou bien la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a terminé, ou bien elle n'est pas bornée. Dans ce cas, après une autre extraction de sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, où $\|\cdot\|$ est une norme sur $N_{\mathbb{R}}$. Notons $\tau_1, ..., \tau_r$ une famille de vecteurs générateurs de σ, et écrivons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = x_{1,n}\tau_1 + ... + x_{r,n}\tau_r. \tag{3.1}$$

Remarquons que cette décomposition n'est pas nécessairement unique (en fait ce n'est le cas que lorsque σ est simplicial). Puisque la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, l'une au moins des suites $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (pour $i \in \{1, ..., r\}$) est également non bornée. Supposons (pour simplifier l'écriture) que les j premières suites $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées et que les $r - j$ dernières $(x_{j+1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne le sont pas. Considérons le cône engendré par $\tau_{j+1}, ..., \tau_r$. On appelle ce cône κ s'il s'agit d'une face propre de σ, sinon on pose $\kappa := \sigma$. La suite $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc admet une sous-suite convergente, disons $(x_{1,\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. De la même façon, la suite $(x_{2,\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc on peut en extraire une sous-suite convergente, et ainsi de suite. Après avoir extrait des sous-suites un nombre fini de fois, on peut ainsi supposer que $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que $(x_{j+1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{r,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.

Posons $y_n := \pi(x_{1,n}\tau_1 + ... + x_{j,n}\tau_j)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où π est la projection sur un supplémentaire $N_{\mathbb{R}}^{\kappa}$ de $L(\kappa)$ et notons y la limite de cette suite. Remarquons que si $\kappa = \sigma$, on a $y_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrivons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n + z_n$ with $z_n = x_n - y_n$. On voit que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in L(\kappa)$ ainsi la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{N}_{\Delta}$. En effet, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, à valeurs dans un supplémentaire $N_{\mathbb{R}}^{\kappa}$ de $L(\kappa)$ et la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $w \in L(\kappa)$, l'existence d'un rang p tel que pour tout

$n \geqslant p$, on ait $z_n \in w + \kappa$. Le lemme 3.2.4 nous dit que κ est unique, ainsi le fait que la décomposition (3.1) ci-dessus ne soit pas unique est sans conséquence sur notre raisonnement. D'après la remarque 3.2.11, nous avons démontré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente de limite $y + \infty \cdot \kappa \in S$.

β) À présent, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une infinité de termes dans $\mathcal{S}$. Comme précédemment, après une éventuelle extraction de sous-suite, on peut supposer que tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se trouvent dans $\mathcal{S}$. De la partie α) de la preuve nous déduisons que chaque élément de $\mathcal{S}$ est de la forme $\pi(y)+\infty\cdot\kappa$ où $y \in \sigma$, κ est une face de σ et π est la projection sur un supplémentaire $N_{\mathbb{R}}^{\kappa}$ de $L(\kappa)$ (en particulier, $y = 0$ si $\kappa = \sigma$). Puisque σ ne possède qu'un nombre fini de faces, après une éventuelle extraction de sous-suite si nécessaire, on peut supposer qu'il y a une unique face κ de σ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x_n = y_n + \infty \cdot \kappa$ avec $y_n \in \pi(\sigma)$. Si $\kappa = \sigma$, la suite est constante donc le résultat est démontré. À présent, supposons que κ soit une face propre de σ. Comme précédemment, on note $\tau_1, ..., \tau_r$ une famille de générateurs de σ, la face κ étant engendrée sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ par $\tau_{j+1}, ..., \tau_r$. Nous utilisons à présent le même raisonnement que dans la partie α), cette fois-ci appliqué à la la suite

$$y_n = y_{1,n}\pi(\tau_1) + ... + y_{j,n}\pi(\tau_j)$$

(remarquons que puisque κ est une face de σ, $\pi(\sigma)$ est un cône de $N_{\mathbb{R}}^{\kappa}$). Comme précédemment, il existe un entier $\ell \in \{1, ..., j+1\}$ tel que les suites $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (y_{\ell,n})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes (aucune d'entre elles n'étant convergente si $\ell = j+1$ par convention), $(y_{\ell+1,n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (y_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes et on voit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ vers un point $y' + \infty \cdot \kappa'$ où κ' est ou bien la face propre de σ engendrée par $\tau_\ell, ..., \tau_r$, ou bien le cône σ lui-même (et κ est une face de κ' dans chaque cas). Ceci termine la preuve. ■

Nous démontrons à présent la proposition suivante, qui étend simplement ce que l'on connait déjà dans le cas d'une variété torique :

Proposition 3.2.13 *La variété à coins associée à un éventail Δ de $N_{\mathbb{R}}$ est compacte si et seulement si Δ est fini et complet.*

Preuve : Si l'on suppose que Δ est fini et complet, le résultat est une conséquence du lemme 3.2.12.
Supposons à présent que $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ soit compacte. D'abord, supposons que Δ ne soit pas fini et fixons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ avec $x_n \in N_{\mathbb{R}} + \infty \cdot \sigma_n$ et $\sigma_n \neq \sigma_p$ pour $n \neq p$. La définition de la topologie de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ nous dit que si une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente, alors une sous-suite de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deviendrait constante à partir d'un certain rang, une contradiction.

À présent que nous savons que Δ est fini, supposons qu'il ne soit pas complet. Il existe alors un vecteur $v \in N_{\mathbb{R}}$ tel que l'on ait $\mathbb{R}_{\geqslant 0}v \subset N_{\mathbb{R}} \setminus |\Delta|$. Nous pouvons affirmer que la suite $(nv)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune sous-suite convergente dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$. Si c'était le cas, sa limite serait un élément de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) \setminus N_{\mathbb{R}}$, i.e. il existerait $\sigma \in \Delta$ et $y \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} nv = y + \infty \cdot \sigma$. La définition de la topologie nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour $n \geqslant p$, $nv \in \bigcup\limits_{\tau<\sigma}(y + B_\varepsilon + \sigma + \infty \cdot \tau)$, i.e. $nv \in y + B_\varepsilon + \sigma$. C'est impossible puisque pour tous $y \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ et $\varepsilon > 0$, l'ensemble $(y + B_\varepsilon + \sigma) \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}v$

est borné. En effet, c'est un ensemble convexe (comme intersection de convexes) donc connexe, ce qui signifie que c'est un intervalle de $\mathbb{R}_{\geqslant 0}v$. Si c'était un ensemble non borné, ceci signifierait que $\mathbb{R}_{\geqslant a}v \subset y + B_\varepsilon + \sigma$ pour un réel $a \geqslant 0$ convenable. Alors, on aurait $av \in (y + B_\varepsilon + \sigma) \setminus \sigma$ (puisque $v \notin \sigma$) et on aboutirait à une contradiction puisque chaque point de $(y + B_\varepsilon + \sigma) \setminus \sigma$ est envoyé en dehors de $y + B_\varepsilon + \sigma$ par des homothéties de centre 0 et de rapport assez grand. Nous avons donc établi que $(nv)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de sous-suite convergente et que $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ n'est pas compacte si Δ n'est pas complet. ■

De la même façon, les lemmes suivants sont des analogues du cas torique :

Lemme 3.2.14 *Soient Δ un éventail de $N_\mathbb{R}$, $\sigma \in \Delta$ et $x \in N_\mathbb{R}$. Alors on a*

$$x \in \mathrm{relint}(\sigma) \Leftrightarrow nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \infty \cdot \sigma \in \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta).$$

Preuve : Pour la condition nécessaire, on considère un voisinage

$$U_{\varepsilon,w}(0 + \infty \cdot \sigma) = \bigcup_{\tau<\sigma} (w + B_\varepsilon + \sigma + \infty \cdot \tau)$$

de $0 + \infty \cdot \sigma$ avec $\varepsilon > 0$ et $w \in L(\sigma)$. Comme $x \in \mathrm{relint}(\sigma)$ il est clair que $nx \in w + B_\varepsilon + \sigma$ pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Pour la condition suffisante, on remarque que pour tout $\varepsilon > 0$, on doit avoir $nx \in B_\varepsilon + \sigma$ à partir d'un certain rang, i.e. $x \in B_\varepsilon + \sigma$, donc $x \in \sigma$. Ou bien $x \in \mathrm{relint}(\sigma)$ et on a terminé, ou bien $x \in \mathrm{relint}(\tau)$ où τ est une face propre de σ. Alors $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 + \infty \cdot \tau$ par la première partie et on obtient une contradiction puisque $\tau \neq \sigma$. ■

Ce lemme a pour conséquence le critère suivant :

Lemme 3.2.15 *Soient Δ un éventail de $N_\mathbb{R}$, σ un cône de Δ et $x \in N_\mathbb{R}$. Alors on a*

$$x \in \sigma \Leftrightarrow \textit{il existe une face } \tau < \sigma \textit{ avec } nx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \infty \cdot \tau \in \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta).$$

Preuve : On remarque que $\sigma = \bigcup_{\tau<\sigma} \mathrm{relint}(\tau)$. ■

En outre, on a :

Lemme 3.2.16 *Soient Δ un éventail de $N_\mathbb{R}$ et $\sigma, \tau \in \Delta$ deux cônes. Alors τ est une face de σ si et seulement si l'adhérence de $N_\mathbb{R} + \infty \cdot \tau$ contient $N_\mathbb{R} + \infty \cdot \sigma$.*

Preuve : Supposons que τ soit une face de σ et soit $p = x + \infty \cdot \sigma \in N_\mathbb{R} + \infty \cdot \sigma$. Soit $a \in \mathrm{relint}(\sigma)$, alors la suite $(na + x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ par le lemme précédent. Ceci signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $w \in L(\sigma)$, il existe un entier N tel que l'on ait $na + x \in x + w + B_\varepsilon + \sigma$ pour $n \geqslant N$. En particulier, on a $na + x + \infty \cdot \tau \in x + w + B_\varepsilon + \sigma + \infty \cdot \tau$ pour $n \geqslant N$, i.e. la suite $(na + x + \infty \cdot \tau)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $N_\mathbb{R} + \infty \cdot \tau$ converge vers p.

Réciproquement, si l'adhérence de $N_\mathbb{R} + \infty \cdot \tau$ contient $N_\mathbb{R} + \infty \cdot \sigma$, soit $p = x + \infty \cdot \sigma \in N_\mathbb{R} + \infty \cdot \sigma$; il existe une suite d'éléments de la forme $p_n = x_n + \infty \cdot \tau$ qui converge vers p. Par définition de la topologie de $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$, ceci signifie que pour $\varepsilon > 0$, il existe une face μ de σ et un entier N tels que $p_n \in B_\varepsilon + x + \sigma + \infty \cdot \mu$ pour $n \geqslant N$. Comme $p_n = x_n + \infty \cdot \tau$, on a nécessairement $\tau = \mu$ par le lemme 3.2.4, donc τ est une face de σ. ■

Définition 3.2.17 *Soit Δ un éventail (constitué de cônes non nécessairement rationnels) et G un groupe discret admettant une représentation fidèle dans $N_{\mathbb{R}}$. On dira que G* ***agit*** *sur Δ si pour tout cône $\sigma \in \Delta$ et tout $g \in G$, $g(\sigma) \in \Delta$; cette action sera dite* ***libre*** *si $g(\sigma) \neq \sigma$ lorsque g n'est pas l'élément neutre de G et σ est un cône de Δ, différent du cône trivial, et* ***proprement discontinue*** *si pour tout $\sigma \in \Delta$, l'ensemble $\{g \in G \mid (g(\sigma) \cap \sigma) \setminus \{0\} \neq \emptyset\}$ est fini.*

Définition 3.2.18 *Pour un éventail Δ on note $|\Delta|$ le* ***support*** *de Δ, c'est-à-dire la réunion (dans $N_{\mathbb{R}}$) de tous ses cônes). On note également $|\Delta|^*$ l'ensemble $|\Delta| \setminus \{0\}$ et $|\Delta|^{*c}$ le complémentaire de cet ensemble dans $N_{\mathbb{R}}$.*

Théorème 3.2.19 *Soit Δ un éventail (constitué de cônes non nécessairement rationnels) et G un groupe discret agissant sur Δ de façon libre et proprement discontinue, alors cette action induit sur l'ensemble $X := \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) \setminus |\Delta|^{*c}$ une action de G libre et proprement discontinue.*

Preuve : Soit $x \in X$; si $x \in |\Delta|^* \subset \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$, on pose $g.x := g(x)$; si $x = y + \infty \cdot \sigma$ pour un cône $\sigma \in \Delta$ et $y \in N_{\mathbb{R}}^{\sigma}$, dans ce cas on pose $g.x = p(g(y)) + \infty \cdot g(\sigma)$ où p désigne la projection $N_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}^{g(\sigma)}$ parallèlement à $L(g(\sigma))$.

Vérifions tout d'abord que cette action est libre : si $x \in |\Delta|^*$, il existe un cône $\sigma \in \Delta$ tel que $x \in \sigma$; par hypothèse sur l'action du groupe, on a $g(\sigma) \neq \sigma$ lorsque g est non trivial, donc si $g.x = x$ on a $x \in g(\sigma) \cap \sigma$, c'est-à-dire $x \in \tau_1$ où τ_1 est une face propre de σ ; on alors $x \in g(\tau_1) \cap \tau_1 = \tau_2$ où τ_2 est une face propre de τ_1, on ne peut itérer ce raisonnement qu'un nombre fini de fois et on obtient nécessairement que $x = 0$, une contradiction.

Pour un élément g non trivial, si $x = y + \infty \cdot \sigma$ et $\sigma \neq \{0\}$, $g(\sigma) \neq \sigma$ et on a nécessairement $g.x \neq x$ (par l'unicité donnée dans le lemme 3.2.4). Le fait que l'action est proprement discontinue est clair sur $|\Delta|^*$ et par suite sur X tout entier. ■

Remarque 3.2.20 On peut affaiblir les hypothèses du théorème précédent, à savoir que l'on peut autoriser $g(\sigma) = \sigma$ pour un élément non trivial du groupe G ; dans ce cas il faut rajouter l'hypothèse que g est sans point fixe sur l'intersection d'un supplémentaire de $L(\sigma)$ et de $|\Delta|^*$, et l'action sera libre sur $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) \setminus (|\Delta|^* \setminus \sigma)^c$. On généralise ceci pour un nombre quelconque de cônes σ qui seraient fixes sous l'action d'éléments non triviaux du groupe G.

3.2.3 Lien avec les variétés à coins au sens usuel

Avant de continuer, on rappelle ici la définition d'une variété à coins topologique donnée dans [25] et on voit qu'avec une hypothèse technique sur Δ, l'espace $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est une variété à coins topologique (i.e. au sens de [25]).

Définition 3.2.21 ([25], chap. 10) *On appelle $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs ayant toutes leurs coordonnées positives. Soit M un espace topologique. Une* ***carte à coins*** *est une paire (U, φ) où U est un ouvert de M et φ est un homéomorphisme*

entre U et un ouvert $\widetilde{U}$ de $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ (pour la topologie induite). Deux cartes à coins (U,φ) et (V,ψ) seront dites ***compatibles*** *si la composition $\varphi\circ\psi^{-1} : \psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$ est la restriction à $\psi(U\cap V)$ d'une application continue définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous appellerons* ***variété à coins topologique*** *tout espace topologique muni d'un atlas de cartes à coins compatibles.*

Proposition 3.2.22 *Soit Δ un éventail simplicial. L'espace $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ muni de la topologie définie en 3.2.8 est une variété à coins topologique.*

Preuve : Pour un point de $N_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{N}/\sim$, une base de voisinages est simplement donnée par $y+B_\varepsilon$ pour $\varepsilon>0$. Il suffit donc d'étudier ce qui se passe pour les points "rajoutés à l'infini". Soit donc $\sigma=\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_1+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_m$ un cône non nul de Δ et $y\in N^\sigma_{\mathbb{R}}$. Fixons $w\in L(\sigma)$ et $\varepsilon>0$. Définissons une application

$$\varphi : U_{\varepsilon,w}(y+\infty\cdot\sigma)\to\overline{\mathbb{R}^n_+}$$

qui sera notre carte. Remarquons d'abord que l'hypothèse sur Δ nous dit que $(v_1,...,v_m)$ est une famille libre, donc il existe des vecteurs $v_{m+1},...,v_n\in N_{\mathbb{R}}$ tels que $(v_1,...,v_n)$ soit une base de $N_{\mathbb{R}}$. Notons $N^\sigma_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel engendré par la famille $(v_{m+1},...,v_n)$, c'est un supplémentaire de $L(\sigma)$. Pour un élément $x\in N_{\mathbb{R}}$ on notera x_i la i-ème composante de x dans la base $(v_1,...,v_n)$. Notons $(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $\tau<\sigma$ et $x\in y+w+B_\varepsilon+\sigma+\infty\cdot\tau$, on a $\tau=\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_1}+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_k}$ (avec $k\leqslant m$) et $x=y+w+\delta+k+\infty\cdot\tau$ avec $\delta\in B_\varepsilon$ et $k\in\sigma$, donc

$$x=\sum_{i=1}^n z_iv_i+\infty\cdot\tau$$

où $z=y+w+\delta+k$. On pose alors :

$$\varphi(x)=\sum_{i\notin\{i_1,...,i_k\}}e^{-z_i}e_i.$$

En utilisant le lemme 3.2.4, il est aisé de remarquer que deux ouverts $U_{\varepsilon,w}(y+\infty\cdot\sigma)$ et $V_{\varepsilon',w'}(y'+\infty\cdot\sigma')$ ne peuvent avoir une intersection non vide que dans $N_{\mathbb{R}}$ et dans $N^\tau_{\mathbb{R}}+\infty\cdot\tau$ pour τ une face commune de σ et σ'. En effet, si $x+\infty\cdot\tau=x'+\infty\cdot\tau'$ avec $\tau<\sigma$ et $\tau'<\sigma'$, on doit avoir $\tau=\tau'$, et $x-x'\in L(\tau)$.

Alors, si $\sigma=\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_1+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_m$ (et $(v_{m+1},...,v_n)$ permet d'obtenir une base de $N_{\mathbb{R}}$) et $\sigma'=\mathbb{R}_{\geqslant 0}v'_1+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v'_{m'}$ (et $(v'_{m'+1},...,v'_n)$ permet d'obtenir une base de $N_{\mathbb{R}}$), on note :

- τ le cône $\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_1}+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_k}=\mathbb{R}_{\geqslant 0}v'_{j_1}+...+\mathbb{R}_{\geqslant 0}v'_{j_k}$, qui est une face commune de ces deux cônes,
- φ et ψ les cartes respectives,
- ε une permutation de $\{1,...,n\}$ qui envoie i_ℓ sur j_ℓ pour $\ell=1,...,k$ et qui est l'identité sur $\{1,...,n\}\setminus\{i_1,...,i_k,j_1,...,j_k\}$.

On a alors, pour $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$ dans $\psi(U \cap V)$:

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi^{-1}(x) &= \varphi\left(\sum_{i \notin \{j_1,...,j_k\}} -\log(x_i) v'_i + \infty \cdot \tau\right) \\
&= \varphi\left(\sum_{i \notin \{i_1,...,i_k\}} \left(\sum_{j=1}^{n} -\log(x_j^{a_{i,j}})\right) v_i + \infty \cdot \tau\right) \\
&= \sum_{i \notin \{i_1,...,i_k\}} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log(x_j^{a_{i,j}})\right) e_i = \sum_{i \notin \{i_1,...,i_k\}} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}}\right) e_i,
\end{aligned}$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice de passage de $(v_1, ..., v_n)$ à $(v'_{\varepsilon(1)}, ..., v'_{\varepsilon(n)})$. Cette application est bien la restriction d'une application continue d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. ■

Chapitre 4

Variétés LVMB et quotients de variétés toriques

4.1 Introduction

Dans leur article [26], López de Medrano et Verjovsky on découvert une famille de variétés complexes compactes, obtenues comme quotient d'un ouvert dense U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par l'action d'un groupe de Lie complexe isomorphe à $\mathbb{C}$. Cette construction a ensuite été étendue au cas d'une action de $\mathbb{C}^m$ (où m est un entier non nul) par Meersseman dans [27] et ces nouvelles variétés sont appelées **variétés LVM**.

Ensuite, Bosio a généralisé dans [5] la construction de Meersseman en autorisant d'autres actions de $\mathbb{C}^m$ sur certains ouverts denses de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et les variétés qu'il obtient sont appelées **variétés LVMB**. En résumé, étant donné une famille $\mathcal{E}_{m,n}$ de sous-ensembles de $\{0, ..., n\}$ à $2m+1$ éléments (on suppose que n et m sont des entiers non nuls avec $2m \leqslant n$) et une famille $\mathcal{L}$ de $n+1$ formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$ satisfaisant certaines conditions, Bosio associe à $\mathcal{E}_{m,n}$ un ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et à $\mathcal{L}$ une action de $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, de telle sorte que le quotient $U/\mathbb{C}^m$ soit une variété complexe compacte. On dit que la paire $(\mathcal{E}_{m,n}, \mathcal{L})$ est une **donnée LVMB** et que c'est une **donnée LVM** si la variété obtenue est une variété LVM. Nous rappellerons les détails de cette construction plus tard.

Le premier objectif de ce chapitre est de décrire la construction de Bosio en termes de géométrie torique. Nous voyons comment déterminer un éventail Δ de $\mathbb{R}^n$ tel que la variété torique associée soit l'ouvert U et nous voyons ensuite comment la projection de cet éventail par un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $2m$ aide à comprendre l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U. Grossièrement parlant, l'ensemble $\mathcal{E}_{m,n}$ correspondra à l'éventail Δ et le choix des formes linéaires sur $\mathbb{C}^m$ "donnera" le sous-espace $\mathbb{R}^{2m}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous allons voir que la réciproque fonctionne également, i.e. avec des conditions adaptées sur un éventail Δ et le choix d'un sous-espace de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^n$, nous obtiendrons une donnée LVMB. Au final, on a l'énoncé suivant :

Théorème 4.2.2. *i) Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{n,m})$ une donnée* LVMB. *Alors il existe une paire (E, Δ) où E est un sous-espace vectoriel de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^n$ et Δ est un sous-éventail de l'éventail $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

a) la projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ est injective sur le support $|\Delta|$ de Δ,

b) l'éventail $\pi(\Delta)$ est complet dans $\mathbb{R}^n/E$, i.e. $|\pi(\Delta)| = \mathbb{R}^n/E$.

ii) Réciproquement, étant donné une paire (E, Δ) ayant les deux propriétés ci-dessus, on

obtient une donnée LVMB.

Pour la preuve de ce théorème, nous allons utiliser la notion de *variété à coins généralisée* du chapitre 3.

Dans [38], [31] and [35], d'autres descriptions de la construction des variétés LVMB sont données. Voyons brièvement comment ces constructions et celle présentée ici sont liées. On garde les notations précédentes. Dans [38], à partir d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^{n-2m}$ et d'une *configuration triangulable* (qu'on peut voir comme un encodage combinatoire d'un éventail), on obtient un éventail simplicial complet (non nécessairement rationnel) avec lequel on peut récupérer l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U. Dans [31], on munit une variété moment-angle provenant d'un éventail simplicial complet (non nécessairement rationnel) d'une structure complexe, qui coïncide au cas LVM si l'éventail est polytopal. Finalement dans [35], on part de la remarque qu'il existe une action naturelle d'un tore compact réel sur une variété LVM ; ensuite on associe à cette variété un polytope en regardant le quotient de la variété par cette action. Dans le cas d'une variété LVMB, on associe un objet plus général (a rationally starshaped sphere), qui se trouve être le polytope précédemment défini si la variété est LVM. Dans ces trois descriptions, l'éventail considéré correspond à l'éventail projeté $\pi(\Delta)$ du théorème 4.2.2. Un avantage de voir cet éventail comme l'éventail projeté d'un sous-éventail convenable de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est qu'avec ce point de vue, il est plus naturel de récupérer l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U.

Dans son article [5], Bosio fournit également un critère pour décider lorsqu'une donnée LVMB est une donnée LVM ou pas. Le second objectif de ce chapitre est de traduire ce critère dans notre "version" torique de la construction, ce qui mène au théorème suivant :

Théorème 4.3.13. *Soient $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée* LVMB *et (E, Δ) la paire obtenue par le théorème 4.2.2. Alors, $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée* LVM *si et seulement si la projection par rapport à E de l'éventail Δ est un éventail polytopal.*

Finalement, nous utiliserons ce critère pour montrer que si deux variétés LVMB, disons X et Y, sont biholomorphes et si X est une variété LVM, alors Y est aussi une variété LVM. Cette question a été posée par Cupit-Foutou et Zaffran dans [9], où une réponse partielle est fournie (remarque (ii), p. 786). Nous y répondons avec le théorème 4.4.2 :

Théorème 4.4.2. *Soient $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ et $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m',n'})$ deux données* LVMB *qui donnent lieu a deux variétés* LVMB *biholomorphes, alors $n = n'$, $m = m'$ et $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée* LVM *si et seulement si $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m,n})$ est une donnée* LVM.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la première partie, nous utilisons la théorie des variétés à coins "généralisées" du chapitre 3 pour démontrer le théorème 4.2.2 après avoir rappelé en détails la construction de Bosio. Nous étudions également le cas où deux données LVMB donnent la même paire (E, Δ). Ceci nous mène à un énoncé de correspondance entre l'ensemble de ces paires (E, Δ) et le quotient de l'ensemble des données LVMB par une relation d'équivalence convenable. Dans la seconde partie nous détectons les données LVM parmi les données LVMB en démontrant le théorème 4.3.13 et dans la troisième partie nous utilisons ce critère pour obtenir le théorème 4.4.2.

4.2 Description des variétés LVMB en termes de géométrie torique

Dans cette section nous donnons une description en termes de géométrie torique de la construction de Bosio. Pour cette construction, nous avons besoin d'un ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et d'un groupe de Lie complexe G de dimension m (où $2m \leqslant n$) tels que le quotient U/G soit une variété complexe compacte. Nous rappelons en premier lieu cette construction, ensuite nous voyons comment associer un éventail Δ à l'ouvert U, un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ au groupe G et nous voyons comment la variété à coins de l'éventail Δ permet d'obtenir des informations sur l'action de G et l'application quotient $U \to U/G$.

4.2.1 La construction de Bosio

Le procédé de construction que nous décrivons ici est dû à Bosio et il étend les travaux de Meersseman (voir [5] et [27] respectivement).

Soient m, n des entiers naturels non nuls tels que $2m \leqslant n$; soit $\mathcal{L} := (\ell_0, ..., \ell_n)$ une famille de $n+1$ formes linéaires de $\mathbb{C}^m$ telle que chaque sous-famille à $2m+1$ éléments de $\mathcal{L}$ forme une base affine réelle de $(\mathbb{C}^m)^*$, où $(\mathbb{C}^m)^*$ désigne le dual de $\mathbb{C}^m$. Appelons $\mathcal{E}_{m,n}$ une famille de sous-ensembles de $\{0, ..., n\}$, chacun de ces ensembles comptant $2m+1$ éléments. Pour tout $P \in \mathcal{E}_{m,n}$, soit $\mathcal{L}_P$ la sous-famille de $\mathcal{L}$ correspondante. Nous nous intéressons aux deux conditions suivantes sur $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}_{m,n}$:

- si pour tout $P \in \mathcal{E}_{m,n}$ et tout $i \in \{0, ..., n\}$, il existe $j \in P$ tel que $(P \setminus \{j\}) \cup \{i\} \in \mathcal{E}_{m,n}$, on dit que $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ vérifie le **PEUR** (pour **p**rincipe d'**e**xistence et d'**u**nicité du **r**emplaçant),
- si pour tous $P, Q \in \mathcal{E}_{m,n}$, les intérieurs des enveloppes convexes de $\mathcal{L}_P$ et $\mathcal{L}_Q$ possèdent une intersection non vide, on dit que $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ vérifie la **condition d'imbrication**.

Une **donnée LVMB** est une paire $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ satisfaisant à ces deux conditions. Suivant la notation de Bosio, on dit qu'un entier $i \in \{0, ..., n\}$ est **indispensable** si $i \in P$ pour tout $P \in \mathcal{E}_{m,n}$. Si i est indispensable, on dira aussi que ℓ_i est indispensable.

Étant donné une paire $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ (i.e. non nécessairement une donnée LVMB, c'est-à-dire ne satisfaisant pas nécessairement le PEUR et la condition d'imbrication), on définit un sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ ainsi qu'une action sur cet ouvert par un groupe de Lie complexe G isomorphe à $\mathbb{C}^m$ et on voit sous quelle condition le quotient U/G existe et est une variété complexe compacte :

En premier lieu, appelons U l'ensemble (ouvert) des points $z = [z_0 : ... : z_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ tels qu'il existe $P_z \in \mathcal{E}_{m,n}$ satisfaisant la condition : pour tout $i \in P_z, z_i \neq 0$.

La seconde étape consiste à définir une action de $G \cong \mathbb{C}^m$ sur U par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^m \times U & \longrightarrow & U \\ (Z, [z_0 : ... : z_n]) & \longmapsto & [\exp(\ell_0(Z))z_0 : ... : \exp(\ell_n(Z))z_n]. \end{array}$$

Bosio caractérise la cocompacité de cette action sur U et le fait qu'elle soit propre à l'aide du PEUR et de la condition d'imbrication, c'est le lemme suivant :

Lemme 4.2.1 *L'action de G sur U est propre si et seulement si $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ satisfait la condition d'imbrication.*
Si cette action est propre, elle est cocompacte[1] *si et seulement si $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ vérifie le* PEUR.

Autrement dit, le quotient $X_{n,m} := U/G$ est une variété complexe compacte si et seulement si $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée LVMB. Dans ce cas, la variété $X_{n,m}$ est de dimension complexe $n - m$ et on dit que c'est une **variété LVMB**.

4.2.2 Le point de vue torique

Il est bien connu que l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est une variété torique donnée par l'éventail $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ de $\mathbb{R}^n$ constitué des $n+1$ cônes engendrés par n des $n+1$ vecteurs $e_1, ..., e_n, -(e_1 + ... + e_n)$ (où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$) et leurs faces (voir les rappels au chapitre 2). On dit qu'un éventail Δ est un **sous-éventail** de $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ si chaque cône $\sigma \in \Delta$ est un cône de $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$.

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.2.2 *i) Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{n,m})$ une donnée* LVMB. *Alors il existe une paire (E, Δ) où E est un sous-espace vectoriel de dimension $2m$ de $\mathbb{R}^n$ et Δ est un sous-éventail de l'éventail $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*
a) la projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ est injective sur le support $|\Delta|$ de Δ,
b) l'éventail $\pi(\Delta)$ est complet dans $\mathbb{R}^n/E$, i.e. $|\pi(\Delta)| = \mathbb{R}^n/E$.
ii) Réciproquement, étant donné une paire (E, Δ) ayant les deux propriétés ci-dessus, on obtient une donnée LVMB.

4.2.2.1 Résultats préliminaires

Nous allons démontrer les deux points de ce théorème séparément dans les deux prochaines sous-sections, mais avant cela nous devons donner quelques énoncés préliminaires. Nous voyons comment les deux conditions de la première partie de l'énoncé de ce théorème sont reliées au PEUR et à la condition d'imbrication.

Les deux lemmes qui suivent sont respectivement des traductions de la première et de la seconde partie du lemme 4.2.1 dans notre contexte torique, dans le sens où ils caractérisent la propreté et la cocompacité de l'action d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ sur une variété à coins par des conditions sur l'éventail qui définit cette variété à coins :

Lemme 4.2.3 (Propreté) *Soient Δ un éventail de $\mathbb{R}^n$ et $E \cong \mathbb{R}^k$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors l'espace E agit sur $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ et cette action est propre si et seulement si la restriction de l'application quotient $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E$ au support $|\Delta|$ de Δ est injective.*

Preuve : D'abord, supposons que π ne soit pas injective sur $|\Delta|$, i.e. il existe deux cônes σ_1 et $\sigma_2 \in \Delta$ et $x \in \sigma_1$, $y \in \sigma_2$ tels que $y - x \in E$. On sait que les adhérences K_1 et K_2

1. On dit qu'un groupe topologique G agit sur un espace X de façon **cocompacte** si l'espace topologique quotient X/G est compact.

dans $\mathcal{M}c(\Delta)$ de σ_1 et σ_2 respectivement sont des sous-ensembles compacts (lemme 3.2.12). Écrivons alors, pour $\lambda \geqslant 1$, l'égalité $\lambda(y-x)+\lambda x = \lambda y$. Le premier terme est un élément de E, le second appartient à K_1 et le troisième à K_2, ce qui nous dit que l'ensemble $\{t \in E \mid tK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ n'est pas borné et ceci entraîne que l'action de E sur $\mathcal{M}c(\Delta)$ n'est pas propre.

Réciproquement, supposons à présent que E n'agisse pas proprement sur $\mathcal{M}c(\Delta)$. Cela signifie qu'il existe deux sous-ensembles compacts K_1 et K_2 de $\mathcal{M}c(\Delta)$ tels que l'ensemble $\mathcal{E} := \{t \in E \mid tK_1 \cap K_2 \neq \emptyset\}$ ne soit pas borné. Introduisons la notation suivante, pour $\sigma \in \Delta$ et $i = 1, 2$:

$$U_i^\sigma := K_i \cap (\mathbb{R}^n + \infty \cdot \sigma).$$

Puisque les ensembles K_i sont compacts, il existe seulement un nombre fini de cônes $\sigma \in \Delta$ vérifiant $U_i^\sigma \neq \emptyset$. On appelle Δ' la collection de ces cônes.

Nous avons alors $K_i = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta'} U_i^\sigma$. L'action de E induit une action sur chaque composante $\mathbb{R}^n + \infty \cdot \sigma$ pour $\sigma \in \Delta$, ce qui mène à la décomposition suivante :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\sigma \in \Delta'} \{t \in E \mid tU_1^\sigma \cap U_1^\sigma \neq \emptyset\}.$$

Puisque l'ensemble Δ' est fini, il existe un cône $\sigma \in \Delta'$ tel que l'ensemble

$$\mathcal{E}^\sigma := \{t \in E \mid tU_1^\sigma \cap U_1^\sigma \neq \emptyset\}$$

ne soit pas borné. En conséquence de quoi il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}^\sigma$ avec $\|t_n\| \to +\infty$.

Si $E \cap L(\sigma) \neq \{0\}$, nous avons terminé. En effet, dans ce cas il existe $x = \lambda_1\tau_1 + ... + \lambda_k\tau_k \in E$ où les τ_i's sont des vecteurs générateurs de σ.

On écrit alors

$$x = \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \lambda_i\tau_i - \sum_{\lambda_j < 0} (-\lambda_j)\tau_j = x^+ - x^-,$$

où les vecteurs x^+ et x^- sont tous deux dans $|\Delta|$, ce qui montre que l'application quotient π n'est pas injective sur $|\Delta|$.

Supposons à présent que $E \cap L(\sigma) = \{0\}$. On s'intéresse à la composante $\mathbb{R}^n + \infty \cdot \sigma \cong \mathbb{R}^n/L(\sigma) = N_\mathbb{R}^\sigma$.

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de U_1^σ et U_1^σ respectivement (l'une d'entre elles au moins étant non bornée, lorsque ces suites sont vues comme sous-ensembles de $N_\mathbb{R}^\sigma$) vérifiant $t_n + x_n = y_n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'elles sont convergentes (K_1 étant K_2 des ensembles compacts), de limites respectives $x_0 + \infty \cdot \widetilde{\sigma_1}$ et $y_0 + \infty \cdot \widetilde{\sigma_2}$ où $\sigma < \widetilde{\sigma_i}$ pour $i = 1, 2$ (avec éventuellement $\widetilde{\sigma_i} = \sigma$ pour au plus un indice i). La définition de la topologie de $\mathcal{M}c(\Delta)$ nous dit alors que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, on ait $x_n \in x_0 + B_\varepsilon + \widetilde{\sigma_1} + \infty \cdot \sigma$ et $y_n \in y_0 + B_\varepsilon + \widetilde{\sigma_2} + \infty \cdot \sigma$.

On peut alors écrire $x_n = x_0 + x_{\varepsilon,n} + x_n^{\widetilde{\sigma_1}} + \infty \cdot \sigma$ et $y_n = y_0 + y_{\varepsilon,n} + y_n^{\widetilde{\sigma_2}} + \infty \cdot \sigma$ où $x_{\varepsilon,n}, y_{\varepsilon,n} \in B_\varepsilon$ et $x_n^{\widetilde{\sigma_1}} \in \widetilde{\sigma_1}$, $y_n^{\widetilde{\sigma_2}} \in \widetilde{\sigma_2}$.

La relation $t_n + x_n = y_n$ signifie

$$t_n = p(t_n) = p(y_0 - x_0 + y_{\varepsilon,n} - x_{\varepsilon,n}) + p(y_n^{\widetilde{\sigma_2}} - x_n^{\widetilde{\sigma_1}}),$$

où p est la projection de $\mathbb{R}^n = E \oplus F \oplus L(\sigma)$ sur $E \oplus F$ parallèlement à $L(\sigma)$. Rappelons que $\|t_n\| \to +\infty$. On écrit à présent

$$\frac{t_n}{\|t_n\|} = \frac{p(y_0 - x_0 + y_{\varepsilon,n} - x_{\varepsilon,n})}{\|t_n\|} + \frac{p(y_n^{\widetilde{\sigma_2}} - x_n^{\widetilde{\sigma_1}})}{\|t_n\|}.$$

Remarquons d'abord que la suite $t_n/\|t_n\|$ est bornée, donc on peut supposer qu'elle converge vers un certain élément $t \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Remarquons également que la suite $(p(y_0 - x_0 + y_{\varepsilon,n} - x_{\varepsilon,n}))/\|t_n\|$ converge vers 0, ce qui a pour conséquence le fait que la suite $(p(y_n^{\widetilde{\sigma_2}} - x_n^{\widetilde{\sigma_1}}))/\|t_n\|$ soit également convergente vers t. Puisque la somme de Minkowski de deux cônes fermés est fermée, on sait que $t \in p(\widetilde{\sigma_2} - \widetilde{\sigma_1})$. Ainsi $t = y - x$ avec $x \in p(\widetilde{\sigma_1})$ et $y \in p(\widetilde{\sigma_2})$. De plus, il existe $z_1 = \lambda_1\tau_1 + ... + \lambda_k\tau_k \in L(\sigma)$ tel que $x + z_1 \in \widetilde{\sigma_1}$. Alors pour tout $z_1' = \mu_1\tau_1 + ... + \mu_k\tau_k$ avec $\mu_i \geqslant \lambda_i$, on a $x + z_1' \in \widetilde{\sigma_1}$. De même, il existe $z_2 \in L(\sigma)$ vérifiant $y + z_2 \in \widetilde{\sigma_2}$ et pour tout $z_2' = \mu_1'\tau_1 + ... + \mu_k'\tau_k$ avec $\mu_i' \geqslant \lambda_i$, nous aurons $y + z_2' \in \widetilde{\sigma_2}$. Finalement, ceci entraîne qu'il existe $w \in \sigma$ tel que $y + w \in \widetilde{\sigma_2}$ et $x + w \in \widetilde{\sigma_1}$. Ceci nous mène à $t = (y + w) - (x + w) \in \widetilde{\sigma_2} - \widetilde{\sigma_1}$, ce qui entraine la non-injectivité de π sur $|\Delta|$. ■

Pour le second lemme, nous devons définir le PEUR pour un ensemble de cônes :

Définition 4.2.4 *Soit Δ un ensemble de cônes dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (ici on ne suppose pas nécessairement que Δ soit un éventail) et $V := \{v_1, ..., v_p\}$ un ensemble de vecteurs générateurs de Δ (c'est-à-dire, chaque cône de Δ est engendré sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ par une sous-famille de V). On dit que Δ **vérifie le PEUR** si pour chaque cône $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_1} + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_k} \in \Delta$ et chaque $\ell \in \{1, ..., k\}$, il existe $j \in \{1, ..., p\} \setminus \{i_1, ..., i_k\}$ tel que $\sigma' := \mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_1} + ... + \widehat{\mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_\ell}} + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}v_{i_k} + \mathbb{R}_{\geqslant 0}v_j \in \Delta$.*

Remarque 4.2.5 Comme on peut le voir, le PEUR est la même condition que celle donnée dans la proposition 2.2 de [35].

Lemme 4.2.6 (Cocompacité) *Soient Δ un éventail simplicial de $\mathbb{R}^n$ (i.e. tous ses cônes sont simpliciaux) et $E \cong \mathbb{R}^k$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Supposons que l'application quotient $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E$ soit injective sur $|\Delta|$. Considérons l'ensemble $\Delta_{\max}$ de tous les cônes de Δ de dimension maximale. Alors $\pi(\Delta)$ est complet si et seulement si les cônes de $\Delta_{\max}$ sont de dimension $n - k$ et $\Delta_{\max}$ vérifie le* PEUR.

Preuve : L'assertion est claire. ■

4.2.2.2 Passage d'une donnée LVMB à une donnée torique

Dans cette sous-section nous démontrons la partie *i)* du théorème 4.2.2. Nous voyons comment il est possible de récupérer une information torique à partir d'une donnée LVMB.

Soient $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée LVMB et U l'ouvert de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ correspondant (voir section 4.2.1). Nous voulons trouver un couple (E, Δ) (où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $2m$ et Δ est un éventail de $\mathbb{R}^n$) satisfaisant aux conditions *a)* et *b)* du théorème 4.2.2. Considérons l'éventail $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ dans $\mathbb{R}^n$ définissant la variété torique $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$: ses rayons générateurs sont les vecteurs $\{e_1, ..., e_n, -(e_1 + ... + e_n)\}$ où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On appelle $e_0 := -(e_1 + ... + e_n)$ et à chaque $P \in \mathcal{E}_{m,n}$ on

associe le cône simplicial σ_P de dimension $n-2m$ engendré par les $n-2m$ vecteurs e_i vérifiant $i \notin P$. Un calcul direct permet de voir que l'ouvert U est la variété torique définie par le sous-éventail de $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ formé des cônes $\{\sigma_P, P \in \mathcal{E}\}$ et leurs faces. Appelons Δ cet éventail.

À présent que nous avons un candidat pour notre éventail Δ, nous devons détecter le sous-espace vectoriel $E \cong \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^n$. Pour ce faire, nous avons besoin d'un lemme préliminaire. Puisque $\mathbb{C}^m$ agit sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par $Z.[z_0 : ... : z_n] = [\exp(\ell_0(Z))z_0 : ... : \exp(\ell_n(Z))z_n]$, nous voyons $\mathbb{C}^m$ comme un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*)^n$ *via* l'injection

$$Z \mapsto (\exp(\ell_1(Z) - \ell_0(Z)), ..., \exp(\ell_n(Z) - \ell_0(Z))).$$

Lemme 4.2.7 *L'intersection des deux sous-groupes $\mathbb{C}^m$ et $(\mathbb{S}^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ est triviale.*

Preuve : Choisissons $P \in \mathcal{E}_{m,n}$. Un élément Z de $\mathbb{C}^m \cap (\mathbb{S}^1)^n$ doit satisfaire à

$$\ell_k(Z) - \ell_0(Z) \in i\mathbb{R}, \text{ pour tout } k \in P\,;$$

ainsi nous avons $\Re(\ell_0(Z)) = \Re(\ell_k(Z))$ pour tout $k \in P$. Ceci signifie que $Z = 0$ puisque $\{\ell_k, k \in P\}$ est une $\mathbb{R}$-base affine de $(\mathbb{C}^m)^*$. ■

À présent nous appelons $E \cong \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^n$ l'image de $\mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}^*)^n$ par l'application ord :

$$\begin{array}{rccc} \text{ord} : & (\mathbb{C}^*)^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (z_1, ..., z_n) & \mapsto & (-\log|z_1|, ..., -\log|z_n|), \end{array}$$

qui est injective sur $\mathbb{C}^m$ par le lemme précédent. Un calcul aisé montre qu'une base de ce sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est donnée par les $2m$ vecteurs suivants :

$$X_k = \begin{pmatrix} \Re(\ell_{1,k} - \ell_{0,k}) \\ \vdots \\ \Re(\ell_{n,k} - \ell_{0,k}) \end{pmatrix}, Y_k = \begin{pmatrix} \Im(\ell_{1,k} - \ell_{0,k}) \\ \vdots \\ \Im(\ell_{n,k} - \ell_{0,k}) \end{pmatrix}, k \in \{1, ..., m\}, \tag{4.1}$$

où $\ell_{i,k}$ est la k-ème composante de ℓ_i.

À présent que nous avons à notre disposition un couple candidat (E, Δ), il nous reste à montrer qu'il vérifie les propriétés désirées. Pour cela, remarquons d'abord que, comme conséquence de (4.1), nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U = X_\Delta & \xrightarrow{(\mathbb{S}^1)^n} & \mathcal{M}c(\Delta) \\ \Big\downarrow \mathbb{C}^m & & \Big\downarrow E = \text{ord}(\mathbb{C}^m) \cong \mathbb{R}^{2m} \\ X & \xrightarrow[q((\mathbb{S}^1)^n) \cong (\mathbb{S}^1)^n]{} & \mathcal{M}c(\pi(\Delta)), \end{array} \tag{4.2}$$

où $\text{ord} : (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n/(\mathbb{S}^1)^n$ et $q : (\mathbb{C}^*)^n \to (\mathbb{C}^*)^n/\mathbb{C}^m$ sont les applications quotient.

Appelons $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ l'application quotient par rapport à E. Le fait que le quotient $\mathcal{M}c(\Delta)/E$ soit homéomorphe à $\mathcal{M}c(\pi(\Delta))$ se vérifie aisément. En effet, l'homéomorphisme est l'application $\widetilde{\pi}$ qui envoie l'orbite de $y + \infty \cdot \sigma$ sur $\pi(y) + \infty \cdot \pi(\sigma)$.

La bijectivité est une conséquence de l'injectivité de π sur $|\Delta|$. Pour montrer que cette application est ouverte, on considère un ouvert U de $\mathcal{M}c(\Delta)/E$ et un point $\widetilde{\pi}(x) = \widetilde{x} \in \widetilde{\pi}(U)$. Alors, il existe $\sigma \in \Delta$, $z + \infty \cdot \sigma \in \mathcal{M}c(\Delta)$, $\varepsilon > 0$ et $w \in L(\sigma)$ tels que l'on ait $p(z + \infty \cdot \sigma) = x$ et $U_{\varepsilon,w}(z + \infty \cdot \sigma) \subset p^{-1}(U)$ (voir la définition 3.2.8). L'ensemble $V := p(U_{\varepsilon,w}(z + \infty \cdot \sigma))$ contient x, c'est un sous-ensemble de U et on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\pi}(V) &= \widetilde{\pi}(p(\bigcup_{\tau<\sigma} z + w + B_\varepsilon + \sigma + \infty \cdot \tau)) \\ &= \bigcup_{\tau<\sigma} \pi(z) + \pi(w) + \pi(B_\varepsilon) + \pi(\sigma) + \infty \cdot \pi(\tau) \\ &= \bigcup_{\pi(\tau)<\pi(\sigma)} \pi(z) + \pi(w) + \pi(B_\varepsilon) + \pi(\sigma) + \infty \cdot \pi(\tau).\end{aligned}$$

La dernière union est indexée sur $\pi(\tau) < \pi(\sigma)$ puisque π est injective sur $|\Delta|$. Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $\delta > 0$ assez petit, l'ouvert $U_{\delta,\pi(w)}(\pi(z) + \infty \cdot \pi(\sigma))$ est un sous-ensemble de $\widetilde{\pi}(V) \subset \widetilde{\pi}(U)$ qui contient $\pi(z) + \infty \cdot \pi(\sigma) = \widetilde{x}$.

Puisque le sous-groupe $(\mathbb{S}^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ est compact, la propreté de l'action de $\mathbb{C}^m$ sur U est équivalente à la propreté de l'action de E sur $\mathcal{M}c(\Delta)$, qui à son tour est équivalente au fait que π soit injective sur $|\Delta|$ d'après le lemme 4.2.3. De plus, $\mathcal{M}c(\pi(\Delta))$ est compacte puisque X l'est, et la complétude de l'éventail $\pi(\Delta)$ est à présent une conséquence de la proposition 3.2.13. Par le lemme 4.2.6, on voit à présent que les conditions *a*) et *b*) du théorème 4.2.2 sont satisfaites par la paire (E, Δ), ainsi la partie *i*) de ce théorème est démontrée.

Exemple 4.2.8 Les tores complexes sont obtenus comme variétés LVMB, ils correspondent au "cas limite" où $n = 2m$. On voit qu'à toute donnée LVMB donnant lieu à un tore complexe on ne peut qu'associer une seule paire (E, Δ), à savoir $(\mathbb{R}^n, \{0\})$.

4.2.2.3 Passage d'une donnée torique à une donnée LVMB

Nous démontrons à présent la partie *ii*) du théorème 4.2.2. Supposons donnés un sous-éventail Δ de $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ et un sous-espace vectoriel $E \cong \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions *a*) et *b*) du théorème 4.2.2. Pour récupérer une donnée LVMB, nous devons d'abord choisir $U = X_\Delta$. Pour $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_{i_1} + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_{i_{n-2m}} \in \Delta$ un cône de dimension maximale $n - 2m$, définissons $P_\sigma := \{0, ..., n\} \setminus \{i_1, ..., i_{n-2m}\}$ et $\mathcal{E}_{m,n} := \{P_\sigma, \sigma \in \Delta \text{ de dimension } n - 2m\}$. Il est clair que U est l'ouvert correspondant à $\mathcal{E}_{m,n}$ (comme défini à la section 4.2.1).

Nous devons à présent voir comment l'on retrouve l'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}$ et vérifier si la paire $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est bien une donnée LVMB.

Dans ce but, nous fixons tout d'abord une base de $E \cong \mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^n$ que l'on écrit sous la forme d'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,2m}(\mathbb{R})$. On définit ensuite $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{C}^m$ en prenant chacune des n lignes de A et en les envoyant vers $\mathbb{C}^m$ *via* l'application $(x_1, ..., x_{2m}) \mapsto (x_1, ..., x_m) + i(x_{m+1}, ..., x_{2m})$ (appelons ces vecteurs $\ell_1, ..., \ell_n$), auxquels on adjoint le vecteur nul de $\mathbb{C}^m$. Appelons ce dernier vecteur ℓ_0 et posons $\mathcal{L} = \{\ell_0, ..., \ell_n\}$.

On considère à présent la paire $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$. D'après le lemme 4.2.3 on sait que l'action de $\mathbb{C}^m$ est propre sur X_Δ, ce qui signifie que la condition d'imbrication est satisfaite. Puisque $\pi(\Delta)$ est complet, le lemme 4.2.6 nous dit que l'ensemble de tous les cônes de dimension $n - 2m$ de Δ vérifie le PEUR, donc c'est aussi le cas de $\mathcal{E}_{m,n}$. Finalement, les

deux conditions de Bosio sont satisfaites, i.e. la paire $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée LVMB.

4.2.3 Une correspondance entre les données LVMB et toriques

Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée LVMB. Dans la preuve du théorème 4.2.2, nous avons associé à cette donnée un unique couple (E, Δ) où E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $2m$ et Δ est un éventail de $\mathbb{R}^n$.

Comme le montre la preuve du théorème 4.2.2, il est possible que deux données LVMB différentes donnent la même paire (E, Δ) (par exemple, en prenant les conjugués des formes linéaires). Nous discutons de ce fait à présent.

Soient $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ et $(\mathcal{L}', \mathcal{E'}_{m',n'})$ deux données LVMB et soient (E, Δ), (E', Δ') leurs paires associées par le théorème 4.2.2. Si $(E, \Delta) = (E', \Delta')$, on a $n = n'$ et $m = m'$ puisque les dimensions de E et E' et de leurs espaces ambiants sont égales respectivement. De plus, on voit que $\mathcal{E}_{m,n} = \mathcal{E'}_{m',n'}$ puisqu'il est clair au vu de la preuve du théorème 4.2.2 que pour un sous-éventail Δ de l'éventail de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique ensemble associé $\mathcal{E}_{m,n}$. D'un autre côté, le fait que $E = E'$ n'implique pas que l'ont ait nécessairement $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$, mais cela nous dit qu'il existe un automorphisme affine réel de $\mathbb{R}^{2m} \cong (\mathbb{C}^m)^*$ envoyant chaque $\ell_i \in \mathcal{L}$ sur un élément $\ell'_{i'} \in \mathcal{L}'$.

Appelons $\mathcal{P}$ l'ensemble des couples (E, Δ) tels que E et Δ satisfont aux conditions a) et b) du théorème 4.2.2. Définissons une relation d'équivalence (qu'on note $\approx$) sur l'ensemble des données LVMB, en posant $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n}) \approx (\mathcal{L}', \mathcal{E'}_{m',n'})$ si et seulement si $\mathcal{E}_{m,n} = \mathcal{E'}_{m',n'}$ et s'il existe un automorphisme affine réel de $\mathbb{R}^{2m} \cong (\mathbb{C}^m)^*$ tel que sa restriction à $\mathcal{L}$ soit une bijection avec $\mathcal{L}'$. La discussion qui précède nous conduit naturellement à l'énoncé suivant :

Proposition 4.2.9 *Il existe une correspondance bijective*

$$\{\textit{Données} \text{ LVMB}\}/\approx \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{P}.$$

Il est à présent très naturel de se demander quand est-ce que deux données LVMB donnent lieu à la même variété (à biholomorphisme près). L'objet de la section 4.4 sera de discuter cette question.

4.3 Détecter les données LVM parmi les données LVMB

Dans [27], Meersseman exhibe une méthode de construction de variétés complexes compactes, appelées **variétés LVM**. Bosio montre que ces variétés peuvent être obtenues par sa procédure et il donne un critère pour détecter lorsqu'une donnée LVMB conduit à une variété LVM. C'est la proposition 1.3 dans [5], dont nous rappelons à présent l'énoncé.

Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée LVMB et définissons $\mathcal{O}$ comme étant l'ensemble des points de $(\mathbb{C}^m)^*$ (l'espace vectoriel dual de $\mathbb{C}^m$) qui ne sont dans l'enveloppe convexe d'aucune famille de $2m$ éléments de $\mathcal{L}$.

Proposition 4.3.1 *Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ une donnée* LVMB*, on obtient une variété* LVM *si et seulement s'il existe une composante connexe bornée O de $\mathcal{O}$ telle que $\mathcal{E}_{m,n}$ est la collection des sous-ensembles P de $\{1, ..., n\}$ à $2m+1$ éléments ayant la propriété que l'enveloppe convexe de $\mathcal{L}_P$ contienne O.*

Définition 4.3.2 *On dit qu'une donnée* LVMB *est une* ***donnée* LVM** *si elle satisfait à la condition précédente.*

Remarquons que la proposition 4.3.1 peut être reformulée comme suit :

Proposition 4.3.3 *Une donnée* LVMB $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ *est une donnée* LVM *si et seulement si*

$$\bigcap_{P\in\mathcal{E}_{m,n}} \mathring{C}_P \neq \emptyset,$$

où $\mathring{C}_P$ *est l'intérieur de l'enveloppe convexe de* $\mathcal{L}_P$*.*

Dans [9], Cupit-Foutou et Zaffran donnent une autre caractérisation des données LVM parmi les données LVMB avec une hypothèse supplémentaire, appelée "condition (K)", voir pour cela la proposition 3.2 dans [9]. (On dit qu'une donnée LVMB $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ vérifie la condition (K) s'il existe un automorphisme affine de $(\mathbb{C}^m)^*$ qui envoie chaque $\ell_i \in \mathcal{L}$ sur un vecteur à coefficients entiers.) La théorème 4.3.13 ci-dessous peut être considéré comme une généralisation de leur résultat. Avant de l'énoncer et d'en donner une preuve, nous devons rappeler quelques définitions et énoncés préliminaires.

Définition 4.3.4 *Un éventail* Δ *est appelé* ***fortement polytopal*** *(pour alléger l'écriture, dans la suite on écrira simplement* ***polytopal****) s'il existe un polytope* P *contenant* 0 *dans on intérieur, tel que l'éventail* Δ *soit l'ensemble des cônes engendrés par les faces de* P*.*

Exemple 4.3.5 Tout éventail complet de $\mathbb{R}^2$ est polytopal.

Exemple 4.3.6 Pour une variété torique compacte, la projectivité de celle-ci est équivalente à la polytopalité de son éventail. Fulton fournit dans [20] (exercice de la page 71) un exemple dû à Demazure de variété torique non projective de dimension 3, ce qui nous fournit ainsi un exemple d'éventail (rationnel) de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas polytopal. On prend l'éventail complet simplicial Δ dont les rayons sont $v_1 := -e_1$, $v_2 := -e_2$, $v_3 := -e_3$, $v_4 := e_1 + e_2 + e_3$, $v_5 := \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, $v_6 := \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$, $v_7 := \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (voir la figure 4.1).

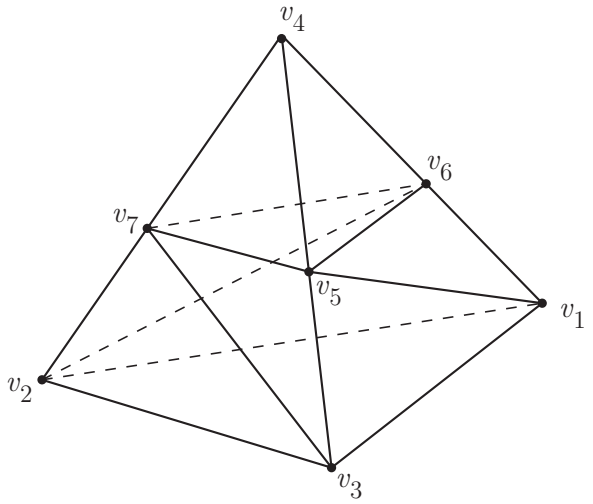


FIGURE 4.1 – Un éventail non polytopal dans $\mathbb{R}^3$

Remarque 4.3.7 Le logiciel Macaulay (`http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`) possède une fonction `isPolytopal` qui permet de déterminer si un éventail rationnel est polytopal ou non.

Shephard a donné dans [34] un critère de polytopalité pour un éventail, nous le rappelons à présent.

Définition 4.3.8 *(Voir par exemple [21] ou [15].) Soit $X = (x_1, ..., x_r) \in \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs et A la matrice dont les colonnes sont les éléments de X (ainsi, A est une matrice avec r colonnes et n lignes). Supposons également que* $\dim \operatorname{Aff} X = n$ *où* $\operatorname{Aff} X$ *est l'enveloppe affine de X. Soient $(\alpha_1, ..., \alpha_{r-n})$ une base du noyau de la matrice A et B la matrice à $r - n$ colonnes et r lignes dont les colonnes sont les vecteurs α_i. La famille $\overline{X} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_r) \subset \mathbb{R}^{r-n}$ de vecteurs donnée par les lignes de B est appelée* ***une transformée de Gale*** *de X.*

Remarquons qu'on ne peut pas parler de *la* transformée de Gale d'une famille X, puisque la construction dépend du choix de la base du noyau de A.

Nous avons le lemme suivant (voir par exemple [15]) :

Lemme 4.3.9 *Soit $X = (x_1, ..., x_r)$ une famille de vecteurs comme dans la définition précédente et soit $\overline{X} = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_r)$ une transformée de Gale de X. Remarquons que X est une transformée de Gale de $\overline{X}$. Alors $\sum_{i=1}^{r} \overline{x}_i = 0$ (resp. $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$) si et seulement si les vecteurs x_i (resp. $\overline{x}_i$) sont tous situés dans un même hyperplan $H \subset \mathbb{R}^n$ (resp. $\subset \mathbb{R}^{r-n}$) ne contenant pas* 0.

Définition 4.3.10 *Soit $X = (x_1, ..., x_r)$ une famille de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ qui engendre positivement l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier (i.e. $\mathbb{R}_{\geqslant 0}x_1 + ... + \mathbb{R}_{\geqslant 0}x_r = \mathbb{R}^n$). Choisissons une famille convenable $\lambda_i > 0$ telle que $\sum \lambda_i x_i = 0$ (ceci est toujours possible, voir [34], p. 258). Choisissons une transformée de Gale de la famille $(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_r x_r)$ dont la dernière coordonnée soit toujours égale à* 1 *et appelons une telle famille une* ***transformée de Shephard*** *of X. On la note $\widehat{X} = (\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_r)$.*

Considérons à présent un éventail complet Δ de $\mathbb{R}^n$ et supposons que $X = (x_1, ..., x_r)$ est une famille de vecteurs qui engendre les rayons de Δ. Si $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}x_{i_1} + \cdots + \mathbb{R}_{\geqslant 0}x_{i_p}$ est un cône de Δ de dimension (maximale) n, on note $\mathring{C}(\sigma)$ l'intérieur relatif de l'envelope convexe de $\widehat{X} \setminus \{\widehat{x}_{i_1}, ..., \widehat{x}_{i_p}\}$. Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.11 (Critère de Shephard) *Avec les notations ci-dessus, l'éventail Δ est polytopal si et seulement si*

$$\bigcap_{\sigma \in \Delta_{\max}} \mathring{C}(\sigma) \neq \emptyset,$$

où $\Delta_{\max}$ est l'ensemble des cônes de Δ de dimension maximale n.

Exemple 4.3.12 On peut appliquer ce critère à l'exemple 4.3.6. Une transformée de Shephard des vecteurs $2v_1$, $2v_2$, $2v_3$, v_4, v_5, v_6 est par exemple donnée par les vecteurs $\widehat{v}_1 := (1, 0, 0)$, $\widehat{v}_2 := (0, 1, 0)$, $\widehat{v}_3 := (0, 0, 1)$, $\widehat{v}_4 := (2, -2, 2)$, $\widehat{v}_5 := (0, 4, -4)$, $\widehat{v}_6 := (-4, 4, 0)$ et $\widehat{v}_7 := (0, 0, 0)$. Si on appelle σ_1, σ_2 et σ_3 les cônes engendrés par $(v_1, v_5, v_6), (v_1, v_2, v_6), (v_2, v_3, v_7)$ respectivement, on peut voir que l'intersection

$$\mathring{C}(\sigma_1) \cap \mathring{C}(\sigma_2) \cap \mathring{C}(\sigma_3) \subset \mathbb{R}^3$$

est vide.

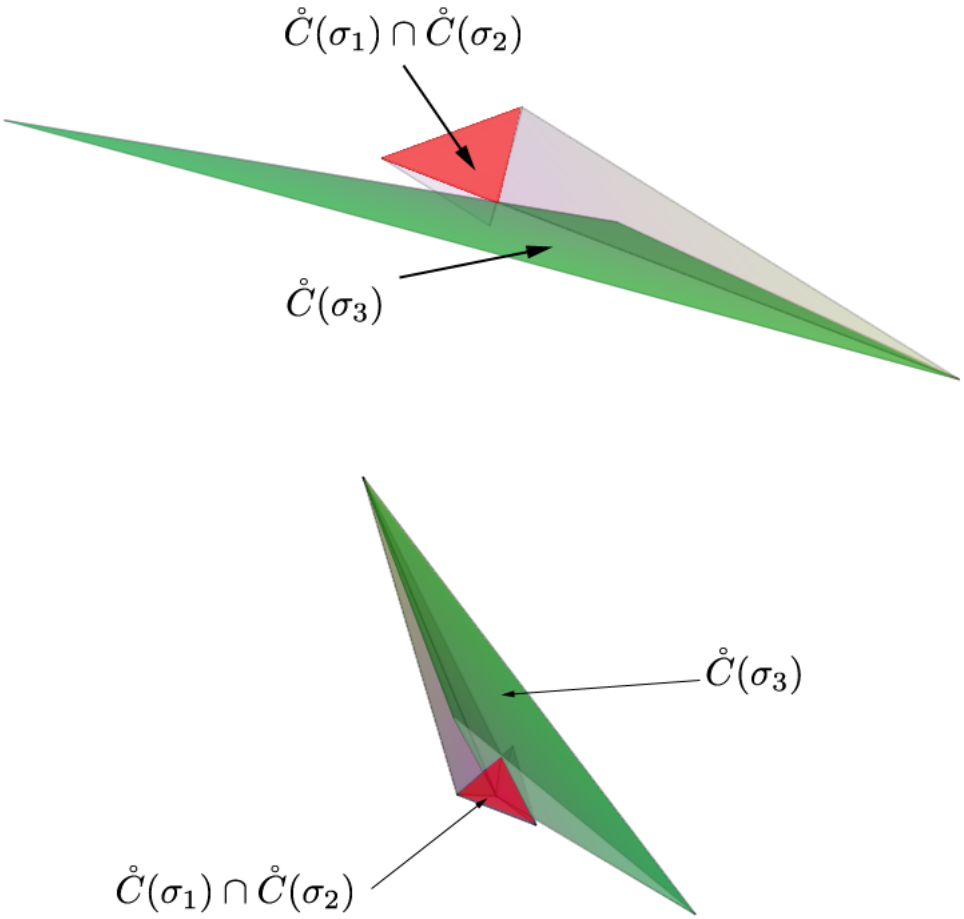


FIGURE 4.2 – Les enveloppes convexes $\mathring{C}(\sigma_1), \mathring{C}(\sigma_2)$, et $\mathring{C}(\sigma_3)$ (dans $\mathbb{R}^3$).

Pour la définition et le théorème précédents, on renvoie à [34]. Nous sommes à présent en mesure de démontrer :

Théorème 4.3.13 *Soient* $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ *une donnée* LVMB *et* (E, Δ) *la paire obtenue par le théorème 4.2.2. Alors,* $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ *est une donnée* LVM *si et seulement si la projection par rapport à* E *de l'éventail* Δ *est un éventail polytopal.*

Preuve : Formons une base de $\mathbb{R}^n$ dont les $2m$ premiers vecteurs sont les vecteurs X_k, Y_k définis dans l'équation (4.1) qui engendrent E et, comme $n-2m$ derniers vecteurs, n'importe lesquels de la base canonique. Appelons $\mathcal{B}'$ cette base et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}' = (X_1, ..., Y_{2m}, e_{i_1}, ..., e_{i_{n-2m}}).$$

Nous avons la décomposition en somme directe $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ où $F \cong \mathbb{R}^{n-2m}$. La projection sur F parallèlement à E est donnée par la matrice $\Pi := J_{n,m}P^{-1}$ où P est la matrice inversible dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ et

$$J_{n,m} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-2m,2m} & I_{n-2m} \end{array} \right).$$

(Ici, $0_{n-2m,2m}$ est la matrice nulle à $n-2m$ lignes et $2m$ colonnes, et I_{n-2m} est la matrice identité de taille $n-2m$.) On voit à présent que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ et $e_0 = -(e_1+...+e_n)$

sont envoyés par Π respectivement sur les n colonnes de Π et l'opposé de leur somme.

On sépare à présent les cas, selon le nombre d'éléments indispensables ℓ_i (remarquons qu'il peut y avoir entre 0 et $2m$ éléments ℓ_i indispensables).

D'abord, supposons qu'il n'y a aucun élément indispensable ℓ_i. Il est clair que les vecteurs $(\Pi.e_0, \Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$ engendrent les rayons de l'éventail (complet) projeté $\pi(\Delta)$ de $F \cong \mathbb{R}^{n-2m}$. Il est également direct de vérifier qu'une transformée de Shephard de cette famille de vecteurs est donnée par les vecteurs $\widehat{\ell_i} := (\ell_i, 1) \in \mathbb{R}^{2m+1}$, pour $i = 0, ..., n$. À présent, l'utilisation consécutive des critères de Shephard et Bosio (théorème 4.3.11 et proposition 4.3.1) donne l'équivalence entre la polytopalité de $\pi(\Delta)$ et le fait que $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ soit LVM.

Supposons à présent qu'il y ait exactement un élément indispensable, disons ℓ_0. Tout d'abord, remarquons que ceci entraine que les cônes de dimension 1 de l'éventail Δ sont engendrés par l'un des vecteurs $e_1, ..., e_n$ (et jamais e_0). Ensuite, pour caractériser la polytopalité de $\pi(\Delta)$, on doit calculer une transformée de Shephard de $(\Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$, ce que l'on fait en deux étapes. D'abord, on projette les vecteurs $\widehat{\ell_i}$ (pour $i = 1, .., n$) par rapport à $\mathbb{R}.\widehat{\ell_0}$. Cette procédure donne une transformée de Gale de $(\Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$. Rappelons que les vecteurs $\widehat{\ell_i}$ appartiennent tous à l'hyperplan affine

$$H := \{(x_1, ..., x_{2m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+1} \mid x_{2m+1} = 1\},$$

donc on peut définir H_0 comme étant l'hyperplan $H - \widehat{\ell_0}$, alors on voit que H_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2m+1}$ et que $\widehat{\ell_0} \notin H_0$. Appelons $\pi_0 : \mathbb{R}^{2m+1} \to H_0$ la projection par rapport à $\mathbb{R}.\widehat{\ell_0}$. Munissons H d'une structure d'espace vectoriel en choisissant $\widehat{\ell_0}$ comme origine, alors la restriction de π_0 entre H et H_0 est un isomorphisme. Remarquons que si ℓ_0 est indispensable, il est impossible que ℓ_0 soit un élément de l'enveloppe convexe de $\{\ell_1, ..., \ell_n\}$. En effet, puisque $(\Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$ engendre positivement $\mathbb{R}^{n-2m}$, on a $\pi_0(\widehat{\ell_0}) \notin \text{conv}(\pi_0(\widehat{\ell_1}), ..., \pi_0(\widehat{\ell_n}))$ (voir [34]). Ainsi, il existe un hyperplan H_0' of H_0 contenant $2m$ éléments de $\{\pi_0(\widehat{\ell_1}), ..., \pi_0(\widehat{\ell_n})\}$, séparant $\pi_0(\widehat{\ell_0}) = 0 \in H_0$ et $\{\pi_0(\widehat{\ell_1}), ..., \pi_0(\widehat{\ell_n})\}$. Voir la figure 4.3 pour une image de cette situation.

La seconde étape à suivre pour obtenir une transformée de Shephard de $(\Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$ est de multiplier chaque vecteur de $(\pi_0(\widehat{\ell_1}), ..., \pi_0(\widehat{\ell_n}))$ par des scalaires convenables de sorte qu'ils soient tous situés dans H_0'. Appelons $\mathcal{L}' := (\ell_1', ..., \ell_n')$ les vecteurs obtenus de cette façon-. Remarquons que toute famille de $2m$ vecteurs de cet ensemble forme une base affine de H_0'. Pour $P = (0, i_1, ..., i_{2m}) \in \mathcal{E}_{m,n}$, appelons $P' := (i_1, ..., i_{2m})$ et notons $\mathcal{E}'_{m,n}$ l'ensemble $\{P' \mid P \in \mathcal{E}_{m,n}\}$. Il est clair que $\mathcal{E}'_{m,n}$ vérifie encore le PEUR (avec $\{1, ..., n\}$ à la place de $\{0, ..., n\}$). Montrons qu'à un point dans l'enveloppe convexe d'une famille de points de $\mathcal{L}_P$ il est possible d'associer un point dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{L}'_{P'}$ et réciproquement ; ceci prouve que la condition d'imbrication est également satisfaite par $(\mathcal{L}', \mathcal{E}'_{m,n})$. Supposons que $x_0 \in \text{conv}(\mathcal{L}'_{P'})$ pour $P' \in \mathcal{E}'_{m,n}$, alors le point $\frac{1}{2}x_0$ est un élément de $\text{conv}(\mathcal{L}_P)$. Réciproquement si $x_0 \in \text{conv}(\mathcal{L}_P)$ (pour $P \in \mathcal{E}_{m,n}$), il exist un unique $\lambda > 0$ (qui ne dépend pas de P) tel que $\lambda x_0 \in H_0'$. Écrivons $x_0 = \sum_{j=1}^{2m} \lambda_j \beta_{i_j} \ell'_{i_j}$ (où

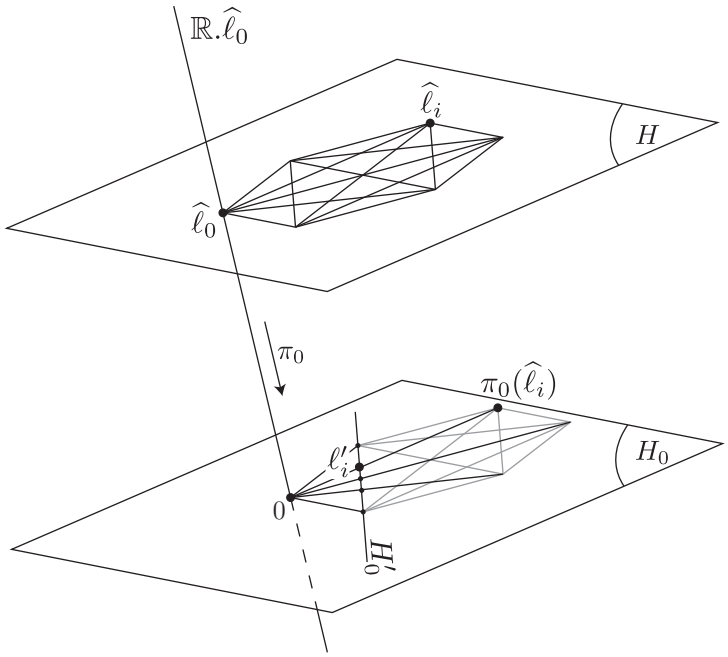


FIGURE 4.3 – La projection π_0

pour tout $j \in \{1, ..., 2m\}$, on a $\beta_{i_j}\ell'_{i_j} = \pi_0(\widehat{\ell_{i_j}})$, $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_j \lambda_j = 1$) et $\lambda x_0 = \sum_{j=1}^{2m} \alpha_j \ell'_{i_j}$ avec $\sum_j \alpha_j = 1$. Puisque tout sous-famille de $\mathcal{L}'$ à $2m$ éléments est une $\mathbb{R}$-base affine de H'_0, on a $\lambda\lambda_j\beta_{i_j} = \alpha_j$, ainsi $\alpha_j \geqslant 0$ pour tout j, c'est-à-dire $\lambda x_0 \in \mathrm{conv}(\mathcal{L}'_{P'})$.

Une conséquence importante de cette remarque est également que $\bigcap_{P' \in \mathcal{E}'_{m,n}} \mathrm{conv}(\mathcal{L}'_{P'}) \neq \emptyset$ si et seulement si $\bigcap_{P \in \mathcal{E}_{m,n}} \mathrm{conv}(\mathcal{L}_P) \neq \emptyset$.

À présent, les critères de Shephard et Bosio appliqués successivement à la transformée de Shephard que nous avons calculée nous donne que $\pi(\Delta)$ est polytopal si et seulement si $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est LVM.

Le même raisonnement s'applique à présent s'il y a jusqu'à $2m-1$ indispensable ℓ_i's, disons $\ell_0, ..., \ell_k$, en appliquant la méthode précédente "recursivement" : pour calculer une transformée de Shephard de $(\Pi.e_{k+1}, ..., \Pi.e_n)$, on peut calculer une transformée de Shephard de $(\Pi.e_1, ..., \Pi.e_n)$ comme ci-dessus, ensuite la projeter par rapport à $\mathbb{R}.\widehat{\Pi.e_1}$ et multiplier par les scalaires convenables, ce qui donne une transformée de Shephard de $(\Pi.e_2, ..., \Pi.e_n)$ et ainsi de suite. Appelons $(\mathcal{L}^{(j)}, \mathcal{E}^{(j)}_{m,n})$ les familles obtenues à chaque étape (for $j = 1, ..., k+1$) et $(\mathcal{L}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)}_{m,n}) := (\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$. Remarquons (tout comme ci-dessus) que pour $j = 1, ..., k+1$, l'intersection $\bigcap_{P \in \mathcal{E}^{(j)}_{m,n}} \mathrm{conv}(\mathcal{L}^{(j)}_P)$ est non vide si et seulement si $\bigcap_{P \in \mathcal{E}^{(j-1)}_{m,n}} \mathrm{conv}(\mathcal{L}^{(j-1)}_P)$ est non vide. Alors, en utilisant les critères de Shephard et Bosio à nouveau, on obtient le résultat.

Finalement, supposons qu'il y ait $2m$ éléments indispensables, disons $\{0, ..., 2m-1\}$ pour alléger l'écriture. Le PEUR force alors que

$$\mathcal{E}_{m,n} = \{(0, ..., 2m-1, j) \mid j \in \{2m, ..., n\}\}.$$

La seconde condition de Bosio (imbrication) entraine que l'hyperplan H contenant l'ensemble $\{\ell_0, ..., \ell_{2m-1}\}$ est un hyperplan supportant le polytope obtenu comme enveloppe convexe de $\mathcal{L}$. Comme on peut aisément le voir, il y a exactement une composante connexe bornée O de $\mathcal{O}$ telle que $\text{Aff}(\overline{O} \cap H) = H$, et cette composante se trouve dans l'intersection de toutes les enveloppes convexes de $\{\mathcal{L}_P, P \in \mathcal{E}_{m,n}\}$, ainsi la donnée LVMB que l'on considère est une donnée LVM par la proposition 4.3.1. De plus, le fait qu'il y ait $2m$ éléments indispensables nous dit que l'éventail projeté possède exactement $n+1-2m$ rayons générateurs et chaque cône de dimension maximale est engendré par $n-2m$ vecteurs. Un tel éventail complet de $\mathbb{R}^{n-2m}$ est toujours polytopal (c'est l'éventail associé à un $n-2m$-simplexe de $\mathbb{R}^{n-2m}$). ■

4.4 Quand deux variétés LVMB sont-elles biholomorphes ?

Il est possible que deux données LVMB différentes donnent lieu à deux variétés biholomorphes, c'est pourquoi nous faisons la distinction entre *donnée* et *variété* LVMB. Dans cette section, on démontre que si une variété LVMB $X_{n,m}$ construite à partir d'une donnée LVMB $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ est biholomorphe à une variété LVM, alors la donnée $(\mathcal{L}, \mathcal{E}_{m,n})$ elle-même est LVM. Ce problème a été posé (et résolu en partie) par Cupit-Foutou et Zaffran dans [9]. Pour la preuve, nous allons avoir recours au critère fourni par le théorème 4.3.13.

Nous étudions à présent le cas où deux données LVMB $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m_1,n_1})$ et $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m_2,n_2})$ donnent lieu à la même variété (à biholomorphisme près).

Soit X une variété LVMB. Appelons $A := Aut_{\mathcal{O}}(X)^o$ la composante connexe de l'élément neutre du groupe des automorphismes holomorphes de X, qui est un groupe de Lie complexe car X est compacte (c'est un résultat de Bochner et Montgomery, voir [4]).

Nous démontrons en premier lieu le lemme suivant :

Lemme 4.4.1 *Soient $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m_1,n_1})$ et $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m_2,n_2})$ deux données* LVMB *telles que les variétés* LVMB *associées soient biholomorphes. Alors on a $m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$.*

Preuve : Supposons que X_1 et X_2 soient deux variétés LVMB biholomorphes, obtenues comme quotient de deux ouverts $U_1 \subset \mathbb{P}^{n_1}(\mathbb{C})$ et $U_2 \subset \mathbb{P}^{n_2}(\mathbb{C})$ par deux sous-groupes fermés $H_1 \cong \mathbb{C}^{m_1} \subset (\mathbb{C}^*)^{n_1}$ et $H_2 \cong \mathbb{C}^{m_2} \subset (\mathbb{C}^*)^{n_2}$. Appelons φ un biholomorphisme entre X_1 et X_2. Il induit un isomorphisme

$$\varphi^* : Aut_{\mathcal{O}}(X_2)^o =: A_2 \to A_1 := Aut_{\mathcal{O}}(X_1)^o,$$

donné par $\varphi^*(g) = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$.

Alors, $G_i := (\mathbb{C}^*)^{n_i}/H_i$ est un sous-groupe de A_i et possède une orbite ouverte dense $G_i.x_i \subset X_i$ pour $i = 1, 2$ (voir [5], proposition 2.4). Appelons $\pi_i : (\mathbb{C}^*)^{n_i} \to (\mathbb{C}^*)^{n_i}/H_i$ les deux applications quotient. À présent le sous-groupe $T_1 := \pi_1((\mathbb{S}^1)^{n_1}) \subset G_1$ (resp. $T_2 = \pi_2((\mathbb{S}^1)^{n_2}) \subset G_2$) est contenu dans un tore maximal compact A_1 (resp. A_2), disons $\widetilde{T}_1$ (resp. $\widetilde{T}_2$). Les deux tores maximaux $\widetilde{T}_1$ et $\varphi^*(\widetilde{T}_2)$ de A_1 sont conjugués (voir, par exemple, [7]) donc, à conjugaison près, on peut supposer que T_1 et $\varphi^*(T_2)$ sont contenus dans le même tore maximal compact $\widetilde{T}$ de A_1. À présent on note $\widetilde{T}^{\mathbb{C}}$ la complexification de $\widetilde{T}$, et G_1 et $\varphi^*(G_2)$ sont tous deux des sous-groupes de Lie de $\widetilde{T}^{\mathbb{C}}$ (puisque $T_i^{\mathbb{C}} = G_i$ pour $i = 1, 2$).

Supposons que l'on ait $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{T}^{\mathbb{C}} > \dim_{\mathbb{C}} G_1 = \dim_{\mathbb{C}} X_1$, alors l'action de A_1 n'est plus effective (en effet, dans ce cas il existe un élément non trivial $f \in \widetilde{T}^{\mathbb{C}}$ tel que $f(x_1) = x_1$ et puisque $\widetilde{T}^{\mathbb{C}}$ est abélien (et contient G_1), f est l'application identité sur tout $G_1.x_1$, donc sur tout X_1 par prolongement analytique), une contradiction. Donc on a nécessairement $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{T}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} G_1 = \dim_{\mathbb{C}} \varphi^*(G_2)$ et $G_1 = \varphi^*(G_2)$. En particulier, ces deux groupes de Lie possèdent des groupes fondamentaux isomorphes, $\mathbb{Z}^{n_1}$ et $\mathbb{Z}^{n_2}$ respectivement, ce qui conduit à $n_1 = n_2$ et puisque $n_1 - m_2 = n_2 - m_2$, on a également $m_1 = m_2$. ■

À présent on démontre le théorème suivant :

Théorème 4.4.2 *Soient $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ et $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m',n'})$ deux données* LVMB *menant à deux variétés* LVMB *biholomorphes, alors on a $n = n'$, $m = m'$ et $(\mathcal{L}_1, \mathcal{E}_{m,n})$ est une donnée* LVM *si et seulement si $(\mathcal{L}_2, \mathcal{E}'_{m,n})$ est une donnée* LVM.

Preuve : On garde les notations de la preuve précédente. À conjugaison près, on peut supposer que $(\varphi^{-1})^*(G_1) = G_2$ et $\varphi(G_1.x_1) = G_2.x_2$, où $G_i.x_i$ est l'orbite ouverte dense de l'action de G_i sur X_i. Appelons (E, Δ) et (E', Δ') les données toriques associées respectivement à ces deux données LVMB et soient $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E$ et $\pi' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E'$ les projections correspondantes.

Les tores compacts maximaux des groupes G_1 et G_2 sont isomorphes à $(\mathbb{S}^1)^n$, donc la restriction de $(\varphi^{-1})^*$ à ces tores maximaux est donnée par une matrice $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ et elle s'étend en un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*)^n$ que nous appellerons $\widetilde{\varphi}$.

En passant aux algèbres de Lie, on voit aisément que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^*)^n & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & (\mathbb{C}^*)^n \\ {\scriptstyle \iota_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2} \\ U_1 & & U_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ X_1 & \xrightarrow[\varphi]{} & X_2, \end{array} \tag{4.3}$$

où ι_1 et ι_2 sont les injections canoniques.

En considérant le quotient par $(\mathbb{S}^1)^n$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad A \quad} & \mathbb{R}^n \\ \iota_1 \downarrow & & \downarrow \iota_2 \\ \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) & & \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta') \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta)) & \xrightarrow[\widehat{\varphi}]{} & \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi'(\Delta')), \end{array} \tag{4.4}$$

où $\widehat{\varphi}$ est un homéomorphisme (voir le diagramme 4.2 de la section 4.2.2.2). La commutativité de ce diagramme nous dit que la restriction de A entre $\mathbb{R}^n/E \subset \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$ et $\mathbb{R}^n/E' \subset \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi'(\Delta'))$ est linéaire. On note A' cette application linéaire. Montrons alors que $\widehat{\varphi}$ est équivariante par rapport à l'action de $\mathbb{R}^n/E$, c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$ et tout $t \in \mathbb{R}^n/E$, on a $\widehat{\varphi}(t+p) = A'.t + \widehat{\varphi}(p)$. Cette égalité est claire si $p \in \mathbb{R}^n/E$ puisque l'on sait que $\widehat{\varphi} = A'$ sur $\mathbb{R}^n/E$. Si $p = x + \infty \cdot \sigma$ pour un cône $\sigma \in \Delta$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n/E$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$ et dans ce cas, pour $t \in \mathbb{R}^n/E$, la suite $(t+x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $t+p$ dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\widehat{\varphi}(t+x_n) = A'.t + \widehat{\varphi}(x_n)$ et comme $\widehat{\varphi}$ est continue, on obtient bien le résultat souhaité.

De l'équivariance de $\widehat{\varphi}$ par rapport à A', on déduit que pour chaque cône $\sigma \in \pi(\Delta)$, il existe $\sigma' \in \pi'(\Delta')$ tel que $\widehat{\varphi}(\mathbb{R}^n/E + \infty\cdot\sigma) \subset \mathbb{R}^n/E' + \infty\cdot\sigma'$. Si τ est une face de σ, on note τ' le cône de $\pi'(\Delta')$ correspondant. Alors, le lemme 3.2.16 nous dit que l'adhérence de $\mathbb{R}^n/E + \infty\cdot\tau$ contient $\mathbb{R}^n/E + \infty\cdot\sigma$; la continuité de $\widehat{\varphi}$ nous dit qu'alors l'adhérence de $\mathbb{R}^n/E' + \infty\cdot\tau'$ contient $\mathbb{R}^n/E' + \infty\cdot\sigma'$, i.e. τ' est une face de σ'.

Soit σ un cône de $\pi(\Delta)$, on note encore σ' le cône de $\pi'(\Delta')$ tel que $\widehat{\varphi}(\mathbb{R}^n/E + \infty\cdot\sigma) \subset \mathbb{R}^n/E' + \infty\cdot\sigma'$. Pour tout $x \in \sigma$, le lemme 3.2.15 nous dit que $(nx)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0+\infty\cdot\tau$ dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$ pour une face τ de σ ; comme $\widehat{\varphi}$ est continue, la suite $(\widehat{\varphi}(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\widehat{\varphi}(0+\infty\cdot\tau) = 0+\infty\cdot\tau'$ pour un certain cône $\tau' \in \pi'(\Delta')$ (qui ne dépend que de τ). Comme $\widehat{\varphi}(nx) = n\widehat{\varphi}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par linéarité de $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}^n/E$, le lemme 3.2.15 nous dit que $\widehat{\varphi}(x) \in \tau' \subset \sigma'$.

Au final, l'application linéaire inversible A' entre $\mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ et $\mathbb{R}^n/E' \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ envoie $\pi(\Delta)$ sur $\pi'(\Delta')$. Ceci signifie que ces deux éventails sont polytopaux simultanément et la conclusion découle à présent du théorème 4.3.13. ■

4.5 Une généralisation de la construction de Bosio

4.5.1 Détecter tous les ouverts à quotient compact

Le théorème suivant nous dit que la construction de Bosio est la plus générale dans ce contexte, dans le sens où tout ouvert $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ muni d'une action d'un sous-groupe fermé de $(\mathbb{C}^*)^n$ isomorphe à $\mathbb{C}^m$ tel que le quotient soit une variété complexe compacte est en fait donné par un sous-éventail de $\Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$.

Théorème 4.5.1 *Soient $G \cong \mathbb{C}^m \subset (\mathbb{C}^*)^n$ un sous-groupe fermé et $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ un ouvert tel que U/G soit une variété complexe compacte. Alors U est stable sous l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$, donc donné par un sous-éventail de l'éventail de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.*

Preuve : Soit π l'application quotient $\pi : U \to U/G$ et soit $v_1, ..., v_n$ une base de l'algèbre de Lie de $(\mathbb{C}^*)^n$ telle que $v_1, ..., v_m$ soit une base de l'algèbre de Lie de G. On définit les champs de vecteurs $v_1^*, ..., v_n^*$ sur U/G par $v_i^*(x) := d\pi_y(v_i(y))$ pour $x \in U/G$ et $y \in \pi^{-1}(x)$. Le vecteur $v_i^*(x)$ est bien défini : en effet, si $y' = g.y \in \pi^{-1}(x)$ (pour $g \in G$), on a :

$$\begin{aligned} d\pi_{y'}(v_i(y')) &= d\pi_{g.y}(v_i(g.y)) \\ &= d(\pi \circ g)_y(v_i(y)) \\ &= d\pi_y(v_i(y)) \\ &= v_i^*(x). \end{aligned}$$

Puisque U est stable par G, il suffit de montrer que U est invariant sous l'action de $v_{m+1}, ..., v_n$; ceci nous assurera qu'il est invariant sous l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$.

Écrivons $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ comme réunion (finie) disjointe d'orbites sous l'action du groupe $(\mathbb{C}^*)^n$ à l'aide du théorème 2.3.63 :

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}} \mathrm{orb}(\sigma).$$

Pour chaque $\sigma \in \Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ on note $U(\sigma) := \mathrm{orb}(\sigma) \cap U$, ce qui nous donne une partition de U. Rappelons que $\mathrm{orb}(\sigma) \cong (\mathbb{C}^*)^{n-\dim\sigma}$ et que pour $x \in \mathrm{orb}(\sigma)$, le sous-groupe T_σ stabilisateur de x pour l'action de $(\mathbb{C}^*)^n$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^{\dim(\sigma)}$. Comme l'action de $G \cong \mathbb{C}^m$ est propre sur U, elle est libre donc si $U(\sigma) \neq \emptyset$ on a nécessairement $G \cap T_\sigma = \{1\}$ et G est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*)^{n-\dim(\sigma)}$.

À présent on fixe un cône $\sigma \in \Delta_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}$ tel que $U(\sigma) \neq \emptyset$ et on note $k := n - \dim(\sigma)$. On appelle $p : (\mathbb{C}^*)^k \to (\mathbb{C}^*)^k/G$ l'application quotient et on définit les champs de vecteurs $v_i^\bullet$ sur $(\mathbb{C}^*)^k/G$ de façon analogue aux v_i^*, i.e. on pose $v_i^\bullet(x) := dp_y(v_i(y))$ pour $x \in (\mathbb{C}^*)^k/G$ et $y \in p^{-1}(x)$. Les ouverts $p(U(\sigma)) \subset (\mathbb{C}^*)^k/G$ et $\pi(U(\sigma)) \subset U/G$ sont biholomorphes et les champs de vecteurs v_i^* et $v_i^\bullet$ coïncident sur ces ouverts. Comme la variété U/G est compacte, les champs de vecteurs v_i^* sont intégrables sur U/G.
Pour tout σ et tout $x \in U(\sigma)$, l'espace tangent $T_x(U(\sigma))$ est engendré par les vecteurs $v_i(x), i = 1, ..., n$. En particulier, l'action de G sur U respecte cette partition (i.e. chaque $U(\sigma)$ est localement stable sous l'action de G) et induit une partition de $X = U/G$ donnée par les $\pi(U(\sigma))$: pour tout σ et tout $x \in \pi(U(\sigma))$, l'espace $T_x(\pi(U(\sigma)))$ est engendré par les vecteurs $v_i^*(x), i = m+1, ..., n$ (car les m premiers s'annulent). Puisque $\pi(U(\sigma))$ est localement stable sous l'action des champs de vecteurs v_i^*, ils sont intégrables sur $\pi(U(\sigma))$. Ainsi, les champs de vecteurs $v_i^\bullet$ sont intégrables sur l'ouvert (non vide) $p(U(\sigma)) \subset (\mathbb{C}^*)^k/G$ pour $i = m+1, ..., n$ et comme ils engendrent l'algèbre de Lie de $(\mathbb{C}^*)^k/G$, on a $p(U(\sigma)) = (\mathbb{C}^*)^k/G$. Ainsi, $U(\sigma) = \mathrm{orb}(\sigma)$ puisque $U(\sigma)$ est stable sous l'action de G et pour tout $x \in \mathrm{orb}(\sigma)$ il existe $y \in U(\sigma)$ et $g \in G$ tels que $g.y = x$.

■

4.5.2 Une généralisation

À la lumière de la preuve du théorème 4.5.1, où l'unique propriété de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ utilisée est le fait qu'il s'agit d'une variété torique compacte, on peut étudier un ouvert "torique" de n'importe quelle variété torique compacte :

Théorème 4.5.2 *Soit Δ un éventail rationnel fini de $\mathbb{R}^n$ et $E \cong \mathbb{R}^{2m}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ tel que :*

- l'application quotient $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/E \cong \mathbb{R}^{n-2m}$ soit injective sur $|\Delta|$,

- l'éventail $\pi(\Delta)$ soit complet dans $\mathbb{R}^n/E$, i.e. $|\pi(\Delta)| = \mathbb{R}^n/E$.

On définit un sous-groupe fermé $G \cong \mathbb{C}^m$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ de la même façon qu'à la section 4.2.2.3. Alors, le quotient X_Δ/G existe c'est une variété complexe compacte.

Preuve : Puisque Δ est fini on peut construire un éventail rationnel complet Δ' contenant Δ comme sous-éventail. Le groupe G agit proprement et librement sur X_Δ par le lemme 4.2.3 donc on sait que le quotient X_Δ/G est une variété complexe. La compacité est une conséquence de la complétude de $\pi(\Delta)$. ■

Chapitre 5

Une nouvelle classe de variétés complexes compactes non kählériennes

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons de nouvelles variétés complexes compactes non-Kählériennes en utilisant à la fois l'approche de Sankaran ([33]) et de Bosio ([5]). Pour construire ses variétés, Sankaran fait agir de façon libre et proprement discontinue un groupe W sur un ouvert U d'une variété torique, de sorte que le quotient soit compact. Bosio fait, lui, agir un sous-groupe de Lie G de $(\mathbb{C}^*)^n$ sur un ouvert V de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Nous allons "combiner" les deux méthodes de la façon suivante : en premier lieu, on munit une certaine variété torique X_Δ de l'action d'un sous-groupe de Lie G de $(\mathbb{C}^*)^n$ de sorte que le quotient X de X_Δ par G existe, puis on fait agir sur un ouvert de X un groupe discret W.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 5.2.1, on introduit des notations et des résultats qui serviront à la construction des variétés, qui fait l'objet de la section suivante. On établit dans la section 5.2.3 que les variétés obtenues ont leur dimension de Kodaira égale à $-\infty$; on obtient également une minoration pour la dimension de l'espace $H^1(\mathcal{O})$ de celles-ci, minoration qui nous permet d'établir qu'elles sont non-Kählériennes. Enfin, on donne un exemple dans la section 5.2.4.

5.2 Construction de nouvelles variétés

5.2.1 Préliminaires

Pour commencer, on introduit des notations et des résultats que nous réutiliserons par la suite. Plusieurs résultats sont dus à Sankaran ([33]) et on n'en redonne les démonstrations que s'il est nécessaire de les adapter à notre contexte.

Soit x un nombre réel algébrique de degré n. On note $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ le polynôme minimal (unitaire, à coefficients rationnels) de x.

Le corps $K := \mathbb{Q}[X]/\langle P\rangle$ admet $n = s + 2t$ plongements distincts dans $\mathbb{C}$ et on note $\sigma_1, ..., \sigma_s$ les plongements réels et $\sigma_{s+1}, ..., \sigma_n$ les plongements complexes, ordonnés de telle sorte que l'on ait $\sigma_{s+i} = \bar{\sigma}_{s+t+i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$. On suppose que s et t sont strictement

positifs.

Nous allons noter σ l'application

$$\begin{array}{rccl} \sigma: & K & \longrightarrow & \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^{2t} \\ & k & \longmapsto & (\sigma_1(k), ..., \sigma_s(k), \sigma_{s+1}(k), ..., \sigma_n(k)). \end{array}$$

On note $\mathcal{O}_K$ les entiers algébriques de K et on désignera encore par $\mathcal{O}_K$ le réseau $\sigma(\mathcal{O}_K) \subset \mathbb{C}^n$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Notons $\mathcal{O}_K^*$ l'ensemble des unités de K, le théorème de Dirichlet nous dit que $\mathcal{O}_K^* \cong \mathbb{Z}^{s+t-1}$. On fait agir chaque élément $\eta \in \mathcal{O}_K^*$ sur $\mathbb{C}^n$ comme suit :

$$\eta \cdot (z_1, ..., z_n) := (\sigma_1(\eta)z_1, ..., \sigma_n(\eta)z_n).$$

On considère le sous-espace vectoriel $H := \{(0, ..., 0, z_1, ..., z_t) \mid z_1, ..., z_t \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^t$ de $\mathbb{C}^n$ et on appelle π_H la projection $\pi_H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{s+t}$ de noyau H donnée par

$$\begin{array}{rccl} \pi_H: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^{s+t} \\ & (z_1, ..., z_{s+t}, z_{s+t+1}, ..., z_n) & \longmapsto & (z_1, ..., z_{s+t}). \end{array}$$

Lemme 5.2.1 *L'application π_H est injective sur $\sigma(\mathcal{O}_K)$.*

Preuve : Il suffit de vérifier que $H \cap \sigma(\mathcal{O}_K) = \{0\}$, ce qui est clair car les σ_i sont des plongements. ■

Appelons $\pi_{\mathcal{O}_K}$ la projection $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\sigma(\mathcal{O}_K)$, alors on a :

Corollaire 5.2.2 *Le quotient du groupe de Lie $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n/\sigma(\mathcal{O}_K)$ par $\pi_{\mathcal{O}_K}(H)$ est un groupe de Cousin qu'on notera C_0. On appellera p l'application quotient $p : (\mathbb{C}^*)^n \to C_0$.*

Preuve : Par le lemme 5.2.1 précédent, le quotient de $(\mathbb{C}^*)^n = \mathbb{C}^n/\sigma(\mathcal{O}_K)$ par $\pi_{\mathcal{O}_K}(H)$ est isomorphe au quotient de $\mathbb{C}^{s+t} = \mathbb{C}^n/H$ par $\pi_H(\sigma(\mathcal{O}_K))$. Ce dernier est un groupe de Cousin par le lemme 2.4 de [29]. ■

Pour $\eta \in \mathcal{O}_K^*$, on pose $\eta_i := \sigma_i(\eta)$ si $i \in \{1, ..., s\}$ et $\eta_i := |\tau_i(\eta)|$ si $i \in \{s+1, ..., s+t\}$. On a alors le théorème suivant, dû à Sankaran (théorème 2.1, [33]) :

Théorème 5.2.3 *Pour $b \in \{1, ..., s\}$, il existe un sous-groupe $W < \mathcal{O}_K^{*,+}$ de rang b vérifiant la condition suivante, qu'on appelle "**hypothèse C**" : pour tout $\eta \neq 1 \in W$, il existe $i \leqslant b$ tel que $\eta_i > \eta_j$ pour tout $j > b$, ou bien $\eta_i < \eta_j$ pour tout $j > b$.*

Preuve : On pose $g := s + t - b$ et à chaque $\eta \in \mathcal{O}_K^{*,+}$ on associe un point de $\mathbb{R}^{bg}$ grâce à l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_b: & \mathcal{O}_K^{*,+} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{bg} \\ & & & \begin{pmatrix} \log(\eta_1/\eta_{b+1}) & \cdots & \log(\eta_1/\eta_{s+t}) \\ \vdots & \log(\eta_i/\eta_{b+j}) & \vdots \\ \log(\eta_b/\eta_{b+1}) & \cdots & \log(\eta_b/\eta_{s+t}) \end{pmatrix} \\ & \eta & \longmapsto & \end{array}$$

et on appelle $\pi_{i,b}$ (pour $i \in \{1, ..., b\}$) les b projections

$$\begin{array}{rccc} \pi_{i,b} : & \mathbb{R}^{bg} & \longrightarrow & \mathbb{R}^g \\ & (t_{i,j}) & \longmapsto & (t_{i,j})_{j=1..g} \end{array}$$

(i.e. π_i associe à un élément de $\mathbb{R}^{bg}$ écrit sous forme de matrice sa i-ème ligne).

L'hypothèse C signifie que pour tout $\eta \neq 1 \in W$, il existe $i \in \{1, ..., b\}$ tel que $\pi_i(\eta) \in Q := \{(x_1, ..., x_g) \in \mathbb{R}^g \mid \text{les } x_i \text{ sont tous de même signe et non nuls}\}$.

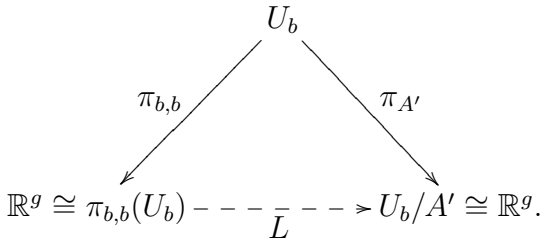
On notera U_b l'espace $\varphi_b(\mathcal{O}_K^{*,+}) \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{s+t-1} \subset \mathbb{R}^{bg}$.

Pour démontrer l'existence de W de rang b vérifiant l'hypothèse C, il suffit de trouver un sous-espace A de U_b de dimension b : pour $b = 1$ c'est clair, on prend pour A une droite passant par n'importe quel point de Q.

Supposons le résultat établi au rang $b-1$, il existe alors un sous-espace A' de U_{b-1} de dimension $b-1$ vérifiant la condition :

$$\forall x \in A', \text{ il existe } i \in \{1, ..., b-1\} \text{ tel que } \pi_{i,b-1}(x) \in Q_{b-1}.$$

Pour chaque $x \in A'$, l'entier i satisfait alors à $\pi_{i,b}(x) \in Q_b$.
Fixons à présent une projection parallèlement à A', $\pi_{A'} : U_b \to \mathbb{R}^g$; il existe une application $L \in GL_g(\mathbb{R})$ qui fasse commuter le diagramme suivant :



On regarde alors $Q_{A'} := L(Q_b)$; on prend une droite $\ell \subset Q_{A'} \cup \{0\}$, et l'espace $A := \pi_{A'}^{-1}(\ell)$ convient. En effet, soit $x \in A$. Ou bien $x \in A'$, et dans ce cas, il existe un entier $i \in \{1, ..., b\}$ tel que $\pi_{i,b}(x) \in Q_b$; sinon, $\pi_{A'}(x) \in \ell \subset Q_{A'}$ et comme $\pi_{A'}(x) = L(\pi_{b,b}(x))$, ceci signifie que $\pi_{b,b}(x) \in Q_b$, d'où la conclusion. ■

Soit $b \in \{1, ..., s\}$ et W comme dans le théorème précédent ; ce groupe agit alors sur $\mathbb{C}^n$ en stabilisant le réseau $\sigma(\mathcal{O}_K)$, et il agit aussi sur $\mathbb{C}^{s+t}$ en stabilisant l'image $\pi_H(\sigma(\mathcal{O}_K))$ du réseau $\sigma(\mathcal{O}_K)$.

On fixe une base d'entiers de K et on appelle $\mathcal{B}_K := (v_1, ..., v_n)$ la base de $\mathbb{C}^n$ correspondante. On note E l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs de $\mathcal{B}_K$, $\mathcal{B} := (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{B}'$ la base

$$(e_1, ..., e_s, e_{s+1} + e_{s+t+1}, -i(e_{s+1} - e_{s+t+1}), ..., e_{s+t} + e_{s+2t}, -i(e_{s+t} - e_{s+2t})).$$

Dans cette dernière base, la matrice d'un élément $\eta \in \mathcal{O}_K^*$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\eta) & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sigma_s(\eta) & & & & & & \\ & & & \Re(\sigma_{s+t+1}(\eta)) & -\Im(\sigma_{s+t+1}(\eta)) & & & & \\ & & & \Im(\sigma_{s+t+1}(\eta)) & \Re(\sigma_{s+t+1}(\eta)) & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \Re(\sigma_n(\eta)) & -\Im(\sigma_n(\eta)) \\ 0 & & & & & & \Im(\sigma_n(\eta)) & \Re(\sigma_n(\eta)) \end{pmatrix}.$$

De plus, l'espace E est l'espace vectoriel engendré (sur $\mathbb{R}$) par les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Pour le voir, il suffit de montrer le

Lemme 5.2.4 *Soit $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_K$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors tous les coefficients de $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}'}$ sont réels, autrement dit, on a $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Preuve : Remarquons que $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et que les $2t$ dernières colonnes de $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}}$ sont conjuguées deux à deux tandis que les s premières sont réelles. Ainsi, les coefficients des vecteurs $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}} e_j$ pour $j \in \{1, ..., s\}$ sont réels. À présent, notons $\overline{h_1}, ..., \overline{h_t}, h_1, ..., h_t$ les $2t$ dernières colonnes de $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}}$. On trouve alors que $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}}(e_{s+j} + e_{s+t+j}) = 2\Re(h_j)$ et $P_{\mathcal{B}_K,\mathcal{B}}(-i(e_{s+j} - e_{s+t+j})) = -2\Im(h_j)$ pour $j \in \{1, ..., t\}$. Le lemme est ainsi démontré. ■

On notera $\widetilde{H}$ l'espace vectoriel réel engendré par les $2t$ derniers vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. C'est un sous-espace vectoriel de E, de dimension $2t$.

Remarque 5.2.5 L'écriture de la matrice d'un élément $\eta \in W$ dans la base $\mathcal{B}'$ montre qu'un tel élément induit une application linéaire de l'espace vectoriel réel $E \cong \mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs de $\mathcal{B}_K$, et que cette application induit une application linéaire sur le quotient $E/\widetilde{H} \cong \mathbb{R}^s$, donnée par $\eta : (x_1, ..., x_s) \mapsto (\sigma_1(\eta)x_1, ..., \sigma_s(\eta)x_s)$. D'autre part, on a $\widetilde{H} \cap \sigma(\mathcal{O}_K) = \{0\}$.

À présent, nous écrivons le sous-espace vectoriel H dans la base $\mathcal{B}_K$; il est engendré par la famille de t vecteurs qu'on note $(h_1, ..., h_t)$, où h_i est le vecteur e_{s+t+i} de la base canonique écrit dans la base $\mathcal{B}_K$ (en suivant les notations du lemme 5.2.4).

On regarde alors le groupe H comme sous-groupe fermé du groupe $\mathbb{C}^n/\sigma(\mathcal{O}_K) \cong (\mathbb{C}^*)^n$, via l'application :

$$\begin{array}{rccl} \iota : & H & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^n \\ & (z_1, ..., z_t) & \longmapsto & (\exp(2i\pi \sum_{i=1}^{t} h_{i,1} z_i), ..., \exp(2i\pi \sum_{i=1}^{t} h_{i,n} z_i)), \end{array} \tag{5.1}$$

où $h_{i,j}$ est la j-ème coordonnée du vecteur h_i. On notera encore H l'image du sous-espace H par cette application.

Lemme 5.2.6 *Les sous-groupes H et $(\mathbb{S}^1)^n$ de $(\mathbb{C}^*)^n$ ont une intersection triviale.*

Preuve : Un élément de cette intersection correspond à un élément du sous-espace vectoriel H satisfaisant à l'équation matricielle

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_K} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_t \end{pmatrix}$$

où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_K}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_K$ et les x_i sont des réels. Chaque vecteur de la base $\mathcal{B}_K$ a ses i-ème et $(i+t)$-ème composantes conjuguées (pour $i \in \{s+1, ..., s+t\}$). Comme les x_i sont réels, ce doit être encore le cas pour le vecteur $(0, ..., 0, z_1, ..., z_t)$ donc $z_1 = ... = z_t = 0$. ■

Le quotient de $(\mathbb{C}^*)^n$ par $(\mathbb{S}^1)^n$ est donné par l'application

$$\begin{array}{rccc} \text{ord} : & (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (z_1, ..., z_n) & \longmapsto & (-\log|z_1|, ..., -\log|z_n|). \end{array}$$

À l'aide de l'équation (5.1), on voit que l'espace $\text{ord}(H) \cong \mathbb{R}^{2t}$ est engendré par les $2t$ vecteurs $\Re(h_j)$ et $\Im(h_j)$ (pour $j \in \{1, ..., t\}$), c'est-à-dire que cet espace est le sous-espace $\widetilde{H}$ de E.

5.2.2 Début de la construction

Dans l'espace vectoriel E, nous désirons construire un éventail (relativement au réseau $\mathcal{O}_K \subset E$) qui soit W-invariant, dont l'image du support par la projection $\pi_{\widetilde{H}}$ soit incluse (on précisera par la suite) dans un cône ouvert dégénéré propre $\Omega \subset \pi_{\widetilde{H}}(E) \cong \mathbb{R}^s$ stable par W (*dégénéré* ici signifie que l'adhérence de ce cône contient un sous-espace vectoriel). Comme la projection $\pi_{\widetilde{H}}$ est injective sur le réseau et W-équivariante, il suffit de trouver un éventail dans $\pi_{\widetilde{H}}(E)$ relativement à $\pi_{\widetilde{H}}(\mathcal{O}_K)$ vérifiant ces conditions et le relever via l'application $\pi_{\widetilde{H}}$.

Pour ce faire, nous reprenons le cheminement de Sankaran (voir [33]). Les résultats non démontrés sont ceux dont la preuve s'adapte sans aucune modification.

Appelons Ω un cône ouvert remplissant les conditions ci-dessus, nous allons le décrire :

Lemme 5.2.7 *L'espace vectoriel N de dimension maximale contenu dans l'adhérence de Ω est de la forme*

$$N = \{x \in \mathbb{R}^s \mid \sigma_{i_1}(x) = \cdots = \sigma_{i_{s-h}}(x) = 0\},$$

avec $h > 0$.

Remarque 5.2.8 Quitte à renuméroter les σ_i, on peut supposer que N est en fait l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^s \mid \sigma_1(x) = \cdots = \sigma_{s-h}(x) = 0\}.$$

Ceci nous permet de décrire précisément l'ensemble Ω :

Lemme 5.2.9 *On a l'égalité* $\Omega = N \times L_+$ *avec*

$$L = \{x \in \mathbb{R}^s \mid \sigma_{s-h+1}(x) = ... = \sigma_s(x) = 0\}$$

et

$$L_+ = \{x \in L \mid \pm\sigma_i(x) > 0, i \in \{1, ..., s-h\}\}.$$

Quitte à composer par un élément convenable de $\mathcal{O}_K^*$, on peut supposer que $L_+ = \{x \in L \mid \sigma_i(x) > 0, i \in \{1, ..., s-h\}\}$.
À présent, on choisit un entier $h \in \{1, ..., s-1\}$ et on regarde le cône Ω donné par le lemme 5.2.9. Afin que L_+/W puisse être une variété compacte, nous allons imposer que le rang de W, à savoir b, soit égal à la dimension de L, à savoir $s-h$. En particulier, on a donc $1 \leqslant b < s$. Ainsi, étant donné un entier $b \in \{1, ..., s-1\}$, le théorème 5.2.3 nous assure de l'existence d'un sous-groupe W de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ vérifiant la condition donnée dans ce même théorème.

Proposition 5.2.10 *L'action du groupe* W *sur* Ω *est libre et proprement discontinue.*

Proposition 5.2.11 *Si* $C \subset \Omega \cup \{0\}$ *est un cône non dégénéré fermé, pour tout* $\eta \in W$ *on a :* $\bigcap_{a \in \mathbb{Z}} \eta^a C \subset L_+$.

Remarque 5.2.12 On rappelle le principe de la preuve donnée par Sankaran : il existe un réel $\delta > 0$ tel que

$$C \subset C_\delta := \{v \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{b} v_i^2 \geqslant \delta \sum_{j>b} v_j^2\}. \tag{5.2}$$

Alors on a terminé si l'on établit la proposition pour C_δ, et ceci s'obtient en remarquant qu'il existe $N > 1$ et $a \in \mathbb{N}$ tels que $\eta^k C_\delta \subset C_{N^k\delta}$ pour $k > a$. Une remarque cruciale pour la suite de notre construction est que l'on peut choisir les constantes a et N indépendamment de $\eta \in W$. On renvoie pour cela à la démonstration du théorème 2.4 de [33].

Remarque 5.2.13 Ici l'hypothèse C et le fait que $b < s$ sont nécessaires pour la preuve.

Théorème 5.2.14 *Il existe un éventail infini* Δ' *de* $\mathbb{R}^s$ *stable sous l'action de* W *dont le support* $|\Delta'|$ *est* $(\Omega \setminus L_+) \cup \{0\}$ *et tel que* Δ'/W *soit un ensemble fini de cônes.*

On pose alors $\Delta := \pi_{\widetilde{H}}^{-1}(\Delta')$. C'est un éventail de E relativement à $\mathcal{O}_K$, et on considère la variété torique associée à Δ, qu'on note X_Δ.

Lemme 5.2.15 *L'action du groupe* H *sur* X_Δ *est libre et propre.*

Preuve : Afin de voir que l'action de H sur X_Δ est propre, on observe tout d'abord que l'action du groupe $\widetilde{H} = \mathrm{ord}(H) \cong H$ sur $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est propre (c'est le lemme 5.2.6 qui nous dit que $\mathrm{ord}(H) \cong \widetilde{H}$). Ceci découle du lemme 4.2.3 et du fait que la projection π de E par rapport à $\widetilde{H}$ est injective sur $|\Delta|$. Il est clair que l'action de H sur X_Δ est propre si et seulement si l'action de $\widetilde{H}$ sur $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est propre car $(\mathbb{S}^1)^n$ est compact.

À présent, le fait que l'action est libre est clair, puisque le stabilisateur sous l'action de H d'un point $x \in X_\Delta$ est un compact (c'est l'ensemble $\{z \in H \mid z.\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset\}$), et

un sous-groupe compact de $H \cong \mathbb{C}^t$ est nécessairement trivial. ■

Par conséquent, le quotient $X := X_\Delta/H$ est une variété et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_\Delta & \xrightarrow{(\mathbb{S}^1)^n} & \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta) \\ \Big\downarrow H \cong \mathbb{C}^t & & \Big\downarrow \mathrm{ord}(H) = \widetilde{H} \cong \mathbb{R}^{2t} \\ X & \xrightarrow[p((\mathbb{S}^1)^n) \cong (\mathbb{S}^1)^n]{} & \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi_{\widetilde{H}}(\Delta)) \end{array} \tag{5.3}$$

Le fait que le quotient $\mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)/\widetilde{H}$ soit homéomorphe à $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi_{\widetilde{H}}(\Delta))$ se vérifie de la même façon qu'à la section 4.2.2.2, page 55.

Lemme 5.2.16 *Le groupe $W \cong \mathbb{Z}^b$ agit sur X.*

Preuve : Pour cela, nous allons voir que le groupe W "normalise" le sous-groupe $H \cong \mathbb{C}^t$ de $(\mathbb{C}^*)^n$, c'est-à-dire qu'une orbite de X_Δ sous l'action de H est envoyée par un élément de W sur une orbite sous l'action de H.
Un calcul montre que, pour un élément $\eta \in W$, l'isomorphisme torique associé (encore noté η) vérifie, pour tout élément $x \in X_\Delta$ et $z = (z_1, ..., z_t) \in \mathbb{C}^t$:

$$\eta(\iota(z) \cdot x) = \iota(\sigma_{s+t+1}(\eta)z_1, ..., \sigma_{s+t+t}(\eta)z_t) \cdot \eta(x).$$

En effet, l'application η est équivariante par rapport à l'application :

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\eta} : & (\mathbb{C}^*)^n & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*)^n \\ & (t_1, ..., t_n) & \longmapsto & (t_1^{a_{1,1}} \cdots t_n^{a_{1,n}}, ..., t_1^{a_{i,1}} \cdots t_n^{a_{i,n}}, ..., t_1^{a_{n,1}} \cdots t_n^{a_{n,n}}) \end{array}$$

où $a_{i,j}$ est l'élément (i, j) de la matrice de η dans la base $\mathcal{B}_K$ (voir par exemple [15], théorème 6.4 page 244). Ceci signifie qu'on a l'égalité $\eta(\iota(z) \cdot x) = \tilde{\eta}(\iota(z)) \cdot \eta(x)$. Le fait que $\tilde{\eta}(\iota(z)) = \iota(\sigma_{s+t+1}(\eta)z_1, ..., \sigma_{s+t+t}(\eta)z_t)$ est clair vu la définition de ι (équation 5.1). ■

Le groupe $p((\mathbb{S}^1)^n) \cong (\mathbb{S}^1)^n$ agit sur X et on note $q : X \to \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi_{\widetilde{H}}(\Delta))$ l'application quotient pour cette action.

Lemme 5.2.17 *L'application q est équivariante par rapport à l'action du groupe W.*

Preuve : Il nous faut montrer qu'il existe une application φ telle que pour tout $\eta \in W$ et $x \in X$, $q(\eta \cdot x) = \varphi(\eta) \cdot q(x)$. Pour un élément $x \in X_\Delta$, on notera $[x] := H.x$ et pour $x \in \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ on notera $[x]' := \widetilde{H}.x$ l'orbite de x. Soient donc $x := [x_0]$ un élément de $X = X_\Delta/H$ et $\eta \in W$; on a : $q(\eta \cdot [x_0]) = q([\eta x_0]) = [\mathrm{ord}(\eta x_0)]'$ par le lemme 5.2.16 et la commutativité du diagramme (5.3), où ord : $X_\Delta \to \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ est l'application quotient correspondant à l'action de $(\mathbb{S}^1)^n$ sur X_Δ.
Vérifions la propriété sur le grand ouvert $(\mathbb{C}^*)^n$ de X_Δ. La projection de $E \subset \mathcal{M}\mathrm{c}(\Delta)$ par l'espace $\widetilde{H}$ s'écrit, dans la base $\mathcal{B}'$, comme la projection sur les s premières coordonnées. On a :

$$\mathrm{ord}(x_0) \quad = \quad -\frac{1}{2\pi}\left(\log|x_1|, ..., \log|x_n|\right),$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(\eta x_0) &= -\frac{1}{2\pi}(\log(|x_1^{a_{1,1}}\cdots x_n^{a_{1,n}}|),...,\log(|x_1^{a_{n,1}}\cdots x_n^{a_{n,n}}|)) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{i=1}^n a_{1,i}\log|x_i|,...,\sum_{i=1}^n a_{n,i}\log|x_i|\right) \\ &= \eta\cdot\mathrm{ord}(x_0).\end{aligned}$$

Par densité du grand ouvert $(\mathbb{C}^*)^n$ dans la variété X_Δ, ceci est encore vrai sur tout X_Δ. On en déduit alors que $q(\eta\cdot[x_0]) = q([\eta x_0]) = [\mathrm{ord}(\eta x_0)]' = [\eta\,\mathrm{ord}(x_0)]' = \eta[\mathrm{ord}(x_0)]' = \eta q([x_0])$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Notons $\eta_1,...,\eta_b$ une famille de générateurs de W. Quitte à prendre leurs inverses si nécessaire, on peut supposer que chacun d'entre eux vérifie ce qui nous appellerons l'**hypothèse C$^+$**, à savoir $\bigcap_{a\in\mathbb{N}} \eta_i^a C \subset L_+$ pour tout $i\in\{1,...,b\}$ et tout cône $C\subset\Omega\cup\{0\}$ non dégénéré fermé (voir la remarque 5.2.12 qui suit la proposition 5.2.11). Considérons le sous-espace affine

$$H_0(\cong\mathbb{R}^{s-b}) := \{(\underbrace{1,...,1}_{b\text{ fois}},x_1,...,x_{s-b}) \mid x_1,...,x_{s-b}\in\mathbb{R}\}\subset E/\widetilde{H}\cong\mathbb{R}^s,$$

et notons $H_i := \eta_i(H_0)$ pour i compris entre 1 et b. On appelle alors B l'enveloppe convexe de $H_0, H_1, ..., H_b$.

Lemme 5.2.18 *Notons B_b la projection de l'ensemble B défini ci-dessus sur les b premières coordonnées. Alors on a l'égalité d'ensembles $\bigcup_{\eta\in W}\eta(B_b) = (\mathbb{R}_*^+)^b$ et l'ensemble $\bigcup_{\eta\in W\setminus W^1}\eta(B_b)$ est borné, où W^1 désigne l'ensemble des éléments de W dont l'une au moins des b premières composantes est supérieure ou égale à 1.*

Preuve : La première assertion est simplement une conséquence du fait que W est un réseau dans $\mathbb{R}^b$. Quant à la seconde, elle découle du fait que tout élément η de $W\setminus W^1$ vérifie $\eta_i<1$ pour tout $i\in\{1,...,b\}$. ■

Lemme 5.2.19 *L'action de W sur $\mathcal{U} := \mathcal{M}\mathrm{c}(\pi_{\widetilde{H}}(\Delta))\setminus|\Omega|^{*c}$ est libre, proprement discontinue et possède un domaine fondamental compact. C'est donc aussi le cas pour l'action de W sur la préimage $U := q^{-1}(\mathcal{U})$ dans X.*

Preuve : Le fait que l'action soit libre et proprement discontinue découle du théorème 3.2.19. Par le théorème 5.2.14, il existe un ensemble fini de cônes $\Sigma := \{\sigma_1,...,\sigma_d\}$ tel que $W\cdot\Sigma = \Delta'$. On garde les notations introduites précédemment, c'est-à-dire que $\eta_1,...,\eta_b$ est une famille de générateurs de W vérifiant l'hypothèse C$^+$ et B est le même ensemble que celui défini ci-dessus. On considère l'adhérence $\overline{D}$ (dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi_{\widetilde{H}}(\Delta))$) de l'ensemble

$$D := \underbrace{\left(\bigcup_{\eta\in W^+}\eta(|\Sigma|)\cap B\right)}_{D_1}\cup\underbrace{\left(|\Sigma|\cap\bigcup_{\eta\in W^1}\eta(B)\right)}_{D_2}$$

où $|\Sigma|$ désigne la réunion des cônes de Σ, W^+ est l'ensemble des éléments η de W vérifiant l'hypothèse C^+ auquel on ajoute l'élément neutre de W et W^1 est l'ensemble des éléments de W dont l'une au moins des b premières composantes est supérieure ou égale à 1. Remarquons en particulier qu'on a $W^+ \subset W^1$. La figure 5.1 est une illustration de l'ensemble $\overline{D}$ pour $s = 2$ et $b = 1$.

Pour conclure la preuve de ce lemme, il suffit de démontrer que $\overline{D}$ est un domaine fon-

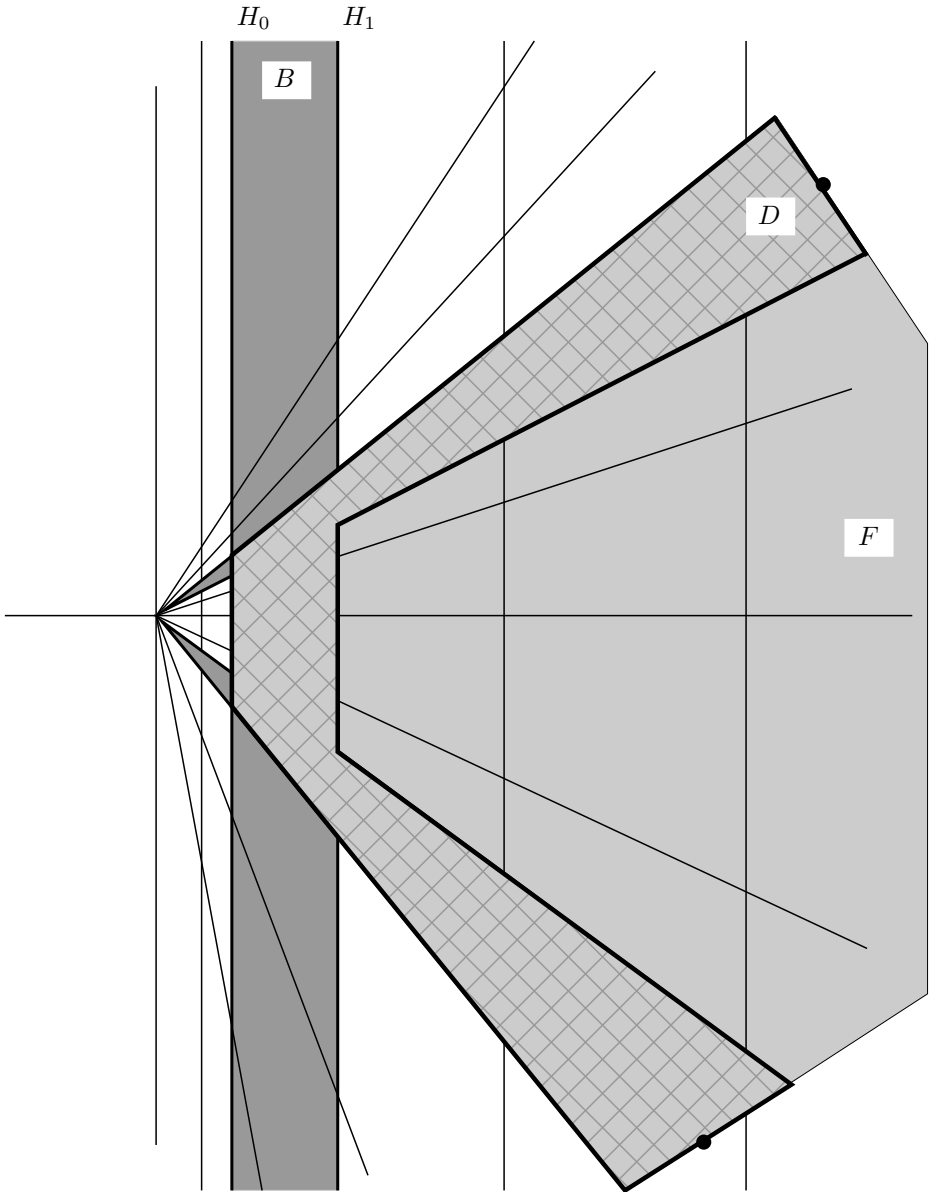


FIGURE 5.1 – Le domaine fondamental $\overline{D}$.

damental compact pour l'action de W.

Pour la compacité, remarquons en premier lieu que l'ensemble D_1 est borné. C'est une conséquence de la preuve de la proposition 5.2.11. En effet, en les b premières coordonnées un élément de D_1 est clairement borné vu la définition de B, tandis que pour les $s - b$

dernières coordonnées, on observe (voir la remarque 5.2.12) que $\eta^a C_\delta \subset C_{N^a\delta}$ pour $a \in \mathbb{N}$ assez grand, $\delta > 0$ et $N > 1$. Ainsi, les éléments de D_1 sont situés dans un cône C_δ pour un $\delta > 0$ bien choisi. La forme de C_δ (voir l'égalité (5.2)) montre que si les b premières coordonnées sont bornées (ce qui est le cas), nécessairement les $s - b$ dernières le sont également.

Intéressons-nous à présent à l'ensemble D_2. Son adhérence est la réunion des adhérences des ensembles $\sigma \cap \bigcup_{\eta \in W^1} \eta(B)$ pour $\sigma \in \Sigma$. Un tel ensemble est alors inclus dans $\sigma \setminus B(0, C)$ pour une constante $C > 0$. En effet, soient $x = (x_1, ..., x_s) \in B$ et $\eta \in W^1$. Supposons que $\eta_1 \geqslant 1$ (pour chaque $\eta \in W^1$, il existe un entier $i \leqslant b$ tel que $\eta_i \geqslant 1$) ; on a alors les inégalités suivantes :

$$\|\eta(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{s} \eta_i^2 x_i^2 \geqslant \eta_1^2 x_1^2 \geqslant x_1^2 \geqslant \min_{y \in B} y_1^2 > 0.$$

La dernière inégalité provient du fait que la projection de l'ensemble B sur les b premières coordonnées est un compact de $\mathbb{R}^b$ ne contenant aucun point dont l'une des coordonnées est nulle. Ainsi les constantes $C_i := \min_{y \in B} y_i^2$ pour $i \in \{1, ..., b\}$ sont toutes strictement positives ; si l'on note C la racine carrée de la plus petite de ces constantes, on obtient finalement l'inégalité : $\|\eta(x)\| \geqslant C$. Ainsi l'adhérence de D_2 est compacte, par le lemme 3.2.12.

Montrons à présent qu'il s'agit bien d'un domaine fondamental.

Pour le voir, on remarque tout d'abord que pour tout $x \in \Omega \setminus L_+$, il existe deux éléments η et $\eta' \in W$ tels que $x \in \eta(|\Sigma|) \cap \eta'(B)$. À présent (et si $\eta \neq \eta'$), on a ou bien $\eta^{-1}\eta' \in W^+ \subset W^1$ ou bien $\eta\eta'^{-1} \in W^+$. On a alors respectivement ou bien $\eta^{-1}(x) \in |\Sigma| \cap \eta^{-1}\eta'(B)$ ou bien $\eta'^{-1}(x) \in \eta\eta'^{-1}(|\Sigma|) \cap B$. Si $x \in L_+$, c'est le lemme 5.2.18 qui permet de conclure, car $B \cap L_+ \subset \overline{D}$.

Il reste à traiter le cas des points situés sur les composantes "à l'infini". Par la seconde conclusion du lemme 5.2.18, on sait qu'il existe une constante $C' > C$ telle que pour tout cône σ de notre éventail, on ait

$$\sigma \setminus B(0, C') = \left(\sigma \cap \bigcup_{\eta \in W^1} \eta(B) \right) \setminus B(0, C').$$

Soit $x = y + \infty \cdot \tau$ un élément d'une telle composante à l'infini. Introduisons quelques notations : soit π la projection de $\mathbb{R}^s$ sur $(\mathbb{R}^s)^\tau$ parallèlement à $L(\tau)$, soit σ le cône de dimension s comprenant τ comme face et tel que $\pi(y) \in \pi(\sigma)$, et soit $g \in W$ tel que $g(\sigma) \in \Sigma$ (l'existence d'un tel g provient de la définition de Σ). On a :

$$g(x) = g(y) + \infty \cdot g(\tau).$$

Quitte à remplacer y par $y + w$ avec $w \in L(\tau)$, on peut supposer que $y \in \sigma$, donc $g(y) \in g(\sigma)$ et on obtient la conclusion. Il reste simplement à prouver l'existence de σ. Pour cela, on considère un ensemble de générateurs $\{v_1, ..., v_k\}$ du cône τ, de sorte que l'on ait

$$\tau = \mathbb{R}_{\geqslant 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geqslant 0} v_k.$$

On s'intéresse alors à la boule ouverte de rayon $\varepsilon > 0$ centrée autour du point $v_0 := v_1 + \cdots + v_k \in \tau$. Étant donné que le support de notre éventail est l'ensemble $(\Omega \setminus L_+) \cup \{0\}$,

il existe un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $B(v_0, \varepsilon) \subset \Omega \setminus L_+$. Ensuite, quitte à choisir un $\varepsilon > 0$ plus petit, on peut supposer que $B(v_0, \varepsilon)$ n'a d'intersection non vide qu'avec des cônes contenant τ comme face. Ceci provient du fait que l'action de W est libre. On a terminé, puisqu'alors

$$B(v_0, \varepsilon) = B(v_0, \varepsilon) \cap \bigcup_{\substack{\sigma > \tau \\ \dim \sigma = s}} \sigma.$$

L'image de $B(v_0, \varepsilon)$ par la projection π est un voisinage ouvert de $0 \in \pi(\mathbb{R}^s)$ et l'ensemble $\pi(\bigcup_{\substack{\sigma > \tau \\ \dim \sigma = s}} \sigma)$ est une union de cônes, donc il est préservé par les homothéties de rapport positif. Par conséquent $\pi(\bigcup_{\substack{\sigma > \tau \\ \dim \sigma = s}} \sigma) = \pi(\mathbb{R}^s)$ et il existe un cône $\sigma \in \Sigma$ contenant τ comme face et tel que l'on ait $\pi(y) \in \pi(\sigma)$. ■

Comme conséquence du lemme précédent, nous obtenons la

Proposition 5.2.20 *Le quotient $Y := U/W$ est une variété complexe compacte de dimension $s + t$.*

Remarque 5.2.21 Avant de conclure cette section, regardons de plus près l'ensemble U. Il contient une partie du groupe de Cousin C_0 comme ouvert dense (on note $U_0 := U \cap C_0$ cet ouvert) et on lui rajoute des diviseurs à l'infini pour "compactifier" le quotient de U_0 par W. En fait, ces diviseurs sont des variétés LVMB "généralisées" au sens du théorème 4.5.2. En effet, la préimage de $U \setminus U_0$ dans X_Δ est l'ensemble $\bigcup_{\sigma \in \Delta \setminus \{0\}} \mathrm{ord}(\sigma)$. Soit $\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0} v$ un cône de dimension 1 de Δ, avec $v \in \sigma(\mathcal{O}_K)$. Alors, la variété torique $\overline{\mathrm{orb}(\sigma)}$ est obtenue en projetant l'ensemble des cônes de Δ qui contiennent σ comme face (on note Δ' cet ensemble) par $L(\sigma)$ (voir section 2.3.7). On note $\pi_\sigma : E \cong \mathbb{R}^n \to E/L(\sigma) \cong \mathbb{R}^{n-1}$ cette projection. Ceci nous donne un éventail fini $\pi_\sigma(\Delta')$ de $E/L(\sigma)$ et comme l'espace H intersecte trivialement $\sigma(\mathcal{O}_K)$, les images de H et $\sigma(\mathcal{O}_K)$ par π_σ ont aussi une intersection triviale dans $E/L(\sigma)$. Notons $\pi_{\widetilde{H},1}$ la projection de $E/L(\sigma)$ par rapport à $\pi_\sigma(H)$; elle est injective sur $|\pi_\sigma(\Delta')|$. On sait que l'éventail $\pi_{\widetilde{H},1}(\pi_\sigma(\Delta'))$ est complet car l'adhérence de σ dans $\mathcal{M}\mathrm{c}(\pi(\Delta))$ est compacte par le lemme 3.2.12. Toutes les hypothèses du théorème 4.5.2 sont donc bien satisfaites.

5.2.3 Invariants

Lemme 5.2.22 *L'ouvert U n'admet pas de fonction holomorphe non constante.*

Preuve : La variété X contient le groupe de Lie C_0 comme ouvert dense (voir corollaire 5.2.2). Comme $U_0 = U \cap C_0$ est un ouvert du groupe de Cousin C_0 stable par le sous-groupe maximal compact de C_0 (isomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$), il ne possède pas de fonction holomorphe non constante par le lemme 2.2.7. ■

Proposition 5.2.23 *La dimension de Kodaira de Y est $-\infty$.*

Preuve : On appelle ρ l'application de W dans $\mathbb{C}^*$ qui à $\gamma \in W$ associe le produit $\sigma_1(\gamma) \times \cdots \times \sigma_m(\gamma)$ où $m = s+t$. Soient $X_1, ..., X_m$ les champs de vecteurs sur X qui forment

une base de TX et qui vérifient, pour tout $\gamma \in W$, l'égalité $\gamma^*(X_i) = \sigma_i(\gamma)X_i$. On appelle $\omega_1, ..., \omega_m$ leurs 1-formes duales respectives. Pour un élément $\gamma \in W$ et $i \in \{1, ..., m\}$, on a alors $\gamma^*(\omega_i) = \sigma_i^{-1}(\gamma)\omega_i$ car $\gamma : X \to X$ est holomorphe donc $\gamma^*(\omega_i)$ reste la 1-forme duale de $\gamma^*(X_i)$. On a en particulier

$$\gamma^*(X_1 \wedge \cdots \wedge X_m) = \rho(\gamma).X_1 \wedge \cdots \wedge X_m$$

et

$$\gamma^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m) = \rho(\gamma)^{-1}.\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m.$$

On appelle τ le pushforward sur Y de $X_1 \wedge \cdots \wedge X_m$, c'est un élément de $\Gamma_{\mathcal{O}}(Y, K_Y^{-1} \otimes L_\rho)$ où L_ρ est le fibré plat au-dessus de Y associé à ρ.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{kod}(Y) \geqslant -1$, i.e. qu'il existe une section holomorphe du fibré K_Y^k pour un entier $k \geqslant 1$, qu'on appelle ω. Alors τ^k est un élément de $\Gamma_{\mathcal{O}}(Y, K_Y^{-k} \otimes L_\rho^k)$ et $f := \omega(\tau^k) \in \Gamma_{\mathcal{O}}(Y, L_\rho^k)$ est une fonction holomorphe, qui se relève en une fonction holomorphe $\widetilde{f} : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $\widetilde{f}(\gamma(p)) = \rho(\gamma)^k \widetilde{f}(p)$ pour tout $p \in U$ et $\gamma \in W$. Comme U n'admet pas de fonction holomorphe non constante, la fonction $\widetilde{f}$ est nécessairement constante égale à 0 et f aussi. De plus, τ^k n'est pas identiquement nul sur un ouvert dense de Y, ω est également non nulle sur un ouvert de Y, donc $\omega(\tau^k) = f$ ne peut pas être identiquement nulle, une contradiction. ■

Proposition 5.2.24 *On a la minoration suivante :* $\dim H^1(Y, \mathcal{O}) \geqslant b$.

Preuve : Soit $\rho : W \to \mathbb{C}$ un morphisme de groupes. Nous allons construire un $\mathbb{C}$-fibré principal au-dessus de Y à partir de ρ et montrer que la trivialité de ce fibré entraîne celle de ρ, ce qui donnera l'inégalité souhaitée. On considère l'action de W sur le produit $U \times \mathbb{C}$ définie par

$$\sigma.(u, w) := (\sigma(u), w + \rho(\sigma))$$

pour $\sigma \in W$, $u \in U$ et $w \in \mathbb{C}$. Le quotient $F := (U \times \mathbb{C})/W$ est un $\mathbb{C}$-fibré principal au-dessus de Y, l'action de $\mathbb{C}$ sur un élément $[u, w] := W.(u, w) \in F$ étant donnée par $z.[u, w] := [u, w + z]$. Si le fibré F est trivial, il possède une section globale, c'est-à-dire qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ vérifiant l'égalité $f(\sigma(u)) = f(u) - \rho(\sigma)$ pour tout $\sigma \in W$ et $u \in U$. La fonction f étant constante, on trouve que $\rho \equiv 0$. ■

Corollaire 5.2.25 *La variété Y est non-kählérienne.*

Preuve : Si Y était de Kähler, on aurait une contradiction avec la proposition précédente, car cela entrainerait $b_1(Y) = b \geqslant 2b$. ■

5.2.4 Un exemple

Nous allons reprendre la constructions précédente avec un exemple concret ; le corps K choisi est de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ et est associé à un nombre algébrique α qui est un nombre de Salem.

Définition 5.2.26 *On appelle* ***nombre de Salem*** *tout nombre réel algébrique $\gamma > 1$ tel que tous ses conjugués (les autres racines de son polynôme minimal) aient un module inférieur ou égal à 1, avec égalité pour au moins l'un d'entre eux.*

Remarque 5.2.27 En utilisant le fait qu'il possède une racine de module 1, on démontre aisément que le polynôme minimal P d'un nombre de Salem γ est un palindrome, c'est-à-dire qu'il vérifie l'égalité $X^{\deg P}P(1/X) = P(X)$, ce qui entraîne que les racines de P sont γ, $1/\gamma$ et des nombres complexes de module 1. En particulier, le polynôme minimal d'un nombre de Salem est de degré supérieur ou égal à 4 et un nombre de Salem est nécessairement une unité de degré pair.

Exemple 5.2.28 *(Voir [3], p. 85)* On peut décrire tous les polynômes de degré 4 qui sont polynômes minimaux d'un nombre de Salem ; ce sont les polynômes de la forme $X^4 + q_1X^3 + q_2X^2 + q_1X + 1$ avec $2(q_1 - 1) < q_2 < -2(q_1 + 1)$. Le plus petit nombre de Salem de degré 4 a pour polynôme minimal $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$.

On considère le polynôme $P(X) := X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$. Ses racines sont $\alpha \approx 1{,}722$ (il s'agit d'une valeur tronquée), α^{-1}, β et $\bar{\beta}$ où β est un nombre complexe de module 1. On note $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ et τ_2 les plongements associés du corps $K := \mathbb{Q}[X]/\langle P\rangle$ dans $\mathbb{R}$ (pour les deux premiers) et $\mathbb{C}$ pour les deux derniers (qui sont conjugués).

Une base d'entiers de K est $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$, ce qui nous donne (via l'application σ) la base de $\mathbb{C}^4$ suivante : $\boxed{\mathcal{B}_K = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha^{-1}\\\beta\\\overline{\beta}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha^2\\\alpha^{-2}\\\beta^2\\\overline{\beta}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha^3\\\alpha^{-3}\\\beta^3\\\overline{\beta}^3\end{pmatrix}\right)}$.

De plus, le groupe $\mathcal{O}_K^*$ est engendré par les deux unités α et $1 - \alpha$. Comme $s = 2$, on a nécessairement $\Omega = N \times L_+$ avec $h = \dim N = 1 = \dim L = b$ (on renvoie au lemme 5.2.7 pour les notations). On vérifie aisément que le sous-groupe $\boxed{W = \langle\alpha\rangle_{\mathbb{Z}}}$ de $\mathcal{O}_K^*$ vérifie l'hypothèse C (et est de rang $\boxed{b = 1}$).

On note M la matrice diagonale $\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\0 & \alpha^{-1} & 0 & 0\\0 & 0 & \beta & 0\\0 & 0 & 0 & \overline{\beta}\end{pmatrix}$. L'action de W sur $\mathbb{C}^4$ est donnée par cette matrice.

Dans la base $\mathcal{B}_K$, l'application associée à la matrice M s'écrit

$$C := \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Il s'agit de la matrice compagnon associée au polynôme P.

On considère le sous-groupe $H := \{(0, 0, 0, z) \in \mathbb{C}^4 \mid z \in \mathbb{C}\}$ de $\mathbb{C}^4$ agissant additivement (donné dans la base canonique).

La matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}_K$ est une matrice de Vandermonde. Par conséquent, on sait facilement l'inverser :

Lemme 5.2.29 *L'inverse d'une matrice de Vandermonde*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

(avec les x_i différents deux à deux) est la matrice dont l'élément (i,j) est donné par :

$$\frac{(-1)^{(n-1)-i} e_{(n-1)-i}(x_0, x_1, ..., \widehat{x_j}, ..., x_{n-1})}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(\widehat{x_j - x_j})...(x_j - x_{n-1})},$$

où e_k est la k-ème fonction symétrique élémentaire à $n-1$ variables.

Ainsi, dans la base $\mathcal{B}_K$, le groupe H s'écrit $\{(-\beta z, \beta(1-\beta)z, (\overline{\beta}-1)z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ et le plongement $\iota : H \to (\mathbb{C}^*)^n$ est donné par

$$\boxed{\iota(z) = (e^{-2i\pi\beta z}, e^{2i\pi\beta(1-\beta)z}, e^{2i\pi(\overline{\beta}-1)z}, e^{2i\pi z})}.$$

On cherche un éventail de $\mathbb{R}^2$ dont les cônes sont engendrés par des éléments de $\pi_{\widetilde{H}}(\mathcal{O}_K)$ et qui soit invariant sous l'action de W. Le cône $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est le demi-plan ouvert $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$.

On prend par exemple les cônes σ_1 et σ_2 engendrés respectivement (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$) par les vecteurs $(1,1)$, (α, α^{-1}) pour le premier et $(1,-1)$, $(\alpha, -\alpha^{-1})$ pour le second. Pour une illustration de la situation dans $\mathbb{R}^2$ on renvoie à la figure 5.1.

Pour conclure, remarquons que les diviseurs rajoutés à U_0 pour que le quotient par W soit compact sont des chaînes de surfaces de Hopf. En effet, soit $\sigma \in \Delta \subset E \cong \mathbb{R}^4$ un cône de dimension 1. On remarque que le quotient de $\overline{\mathrm{orb}(\sigma)}$ par H est nécessairement une surface de Hopf par le théorème de Potters concernant la classification des surfaces complexes compactes presque homogènes ([32]).

Chapitre 6

Dimension algébrique des variétés OT

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons généraliser les résultats d'un article de C. Vogt (voir [36]). Son article traite des fibrés en droites au-dessus de groupes Cousin et nous allons nous restreindre au cas d'un *ouvert* d'un groupe de Cousin dont le relevé dans $\mathbb{C}^n$ est un domaine convexe. La plupart des preuves données ici sont des adaptations directes de [36] et [1] et on signalera les modifications importantes des démonstrations originales au fur et à mesure. L'objectif est ensuite d'utiliser les résultats obtenus au cas des variétés OT, pour montrer que leur dimension algébrique est nulle.

6.2 Un résultat de Vogt

6.2.1 Généralisation

6.2.1.1 Préliminaires

Dans la suite, on étudie un domaine (i.e. un ouvert connexe) U d'un groupe de Cousin $X \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$ dont la préimage $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$ dans $\mathbb{C}^n$ est un domaine convexe (où $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Lambda$ est l'application quotient). En particulier, U n'admet pas de fonction holomorphe non constante (c'est le lemme 2.2.7) et $\widetilde{U}$ est stable par $\mathbb{R}\Lambda$ et est de Stein.

Définition 6.2.1 *Un* ***facteur d'automorphie*** *sur $\widetilde{U}$ est une application $\alpha : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ qui vérifie :*

a) $\alpha_\lambda : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ (où $\alpha_\lambda(z) := \alpha(\lambda, z)$) est holomorphe pour tout $\lambda \in \Lambda$,

b) $\alpha(0, z) = 1$ pour tout $z \in \widetilde{U}$,

c) $\alpha(\lambda + \lambda', z) = \alpha(\lambda, z + \lambda')\alpha(\lambda', z)$ pour tous $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $z \in \widetilde{U}$.

Si α est un facteur d'automorphie, il existe pour chaque $\lambda \in \Lambda$ une fonction holomorphe $a_\lambda : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ (unique à une constante $2i\pi k_\lambda$ près, avec $k_\lambda \in \mathbb{Z}$) telle que $\alpha(\lambda, z) = \exp(a_\lambda(z))$. On notera $a(\lambda, z) := a_\lambda(z)$.

Définition 6.2.2 *Une application $a : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ est appelée un* ***sommant d'automorphie*** *si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $a_\lambda : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe pour tout* $\lambda \in \Lambda$,

b) $a(0,z) = 0$ *pour tout* $z \in \widetilde{U}$,

c) $a(\lambda+\lambda',z) = a(\lambda,z+\lambda') + a(\lambda',z)$ *pour tous* $\lambda,\lambda' \in \Lambda$ *et* $z \in \widetilde{U}$.

Si $L \xrightarrow{p} U$ est un fibré en droites holomorphe, alors le pull-back

$$\pi^*L := \widetilde{U} \times_U L = \{(z,v) \in \widetilde{U} \times L \mid \pi(z) = p(v)\}$$

est un fibré en droites holomorphe au-dessus de $\widetilde{U}$ et donc analytiquement trivial car $\widetilde{U}$ est de Stein. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \pi^*L & \longrightarrow & \widetilde{U} \times \mathbb{C} \\ (z,v) & \longmapsto & (z,\varphi_z(v)) \end{array}$ une trivialisation de π^*L. Alors l'application α définie par $\alpha : \begin{array}{ccc} \Lambda \times \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (\lambda,z) & \longmapsto & \varphi_{z+\lambda}\varphi_z^{-1} \end{array}$ est un facteur d'automorphie.

Si $\psi : \begin{array}{ccc} \pi^*L & \longrightarrow & \widetilde{U} \times \mathbb{C} \\ (z,v) & \longmapsto & (z,\psi_z(v)) \end{array}$ est une autre trivialisation de π^*L, l'application $h : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ qui à z associe $\psi_z\varphi_z^{-1}$ est holomorphe. Si β est le facteur d'automorphie associé à ψ, alors on a l'égalité

$$\beta(\lambda,z) = h(z+\lambda)\alpha(\lambda,z)h^{-1}(z). \tag{6.1}$$

Ceci nous amène à introduire la définition suivante :

Définition 6.2.3 *Deux facteurs d'automorphie* α *et* β *sont dits* ***équivalents*** *s'il existe une fonction holomorphe* $h : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ *telle que l'équation (6.1) soit satisfaite.*

À chaque fibré en droites L sur U on a associé une unique classe d'équivalence de facteurs d'automorphie. Si $\alpha : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ est un facteur d'automorphie, on construit un fibré en droites L sur U en regardant le quotient de $\widetilde{U} \times \mathbb{C}$ par l'action de Λ définit comme suit :

$$\lambda.(z,v) := (z+\lambda, \alpha(\lambda,z)v)$$

pour $\lambda \in \Lambda, z \in \widetilde{U}$ et $v \in \mathbb{C}$.

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.4 *Il existe une bijection entre les classes d'équivalence de facteurs d'automorphie et les classes d'isomorphismes de fibrés en droites au-dessus de* U.

Enfin, nous allons utiliser deux formes "normales" pour le réseau définissant les groupes de Cousin qu'on étudie (voir [36], propositions 1 et 2) :

Proposition 6.2.5 *Soit* $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ *un groupe de Cousin. Alors* $r = n+m$ *avec* $1 \leqslant m \leqslant n$ *et :*

1. *Le groupe de Cousin* X *possède une base de périodes (i.e. une base de* Λ*) de la forme* $P = (I_n \ S)$ *; un réseau* Λ *défini par une telle matrice donne un groupe de Cousin si et seulement si* ${}^t\sigma S \notin \mathbb{Z}^m$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.
2. *Le groupe de Cousin* X *possède une base de périodes de la forme* $P = \begin{pmatrix} 0 & T \\ I_{n-m} & R \end{pmatrix}$ *où* $T = (I_m \ S)$ *est la base de périodes d'un tore complexe de dimension* m *et* R *est une matrice réelle ; un réseau* Λ *défini par une telle matrice donne un groupe de Cousin si et seulement si* ${}^t\sigma R \notin \mathbb{Z}^{2m}$ *pour tout* $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-m} \setminus \{0\}$.

6.2.1.2 Généralisation des résultats de Vogt

Proposition 6.2.6 *Soit $L \xrightarrow{p} U$ un fibré en droites décrit par un facteur d'automorphie $\alpha : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit*

$$\begin{array}{rccc} a_\lambda : & \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & a(\lambda, z) \end{array}$$

une fonction holomorphe telle que $\alpha(\lambda, z) = \exp(a(\lambda, z))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le fibré en droites L est topologiquement trivial,

b) il existe un sommant d'automorphie $b : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ tel que $\alpha(\lambda, z) = \exp(b(\lambda, z))$.

Preuve : Montrons l'implication $\boxed{a) \Rightarrow b)}$: comme L est topologiquement trivial, il existe une section continue $s : U \to L$ qui ne s'annule jamais. Alors il existe une fonction continue $f : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^*$ telle que $f(z + \lambda) = \alpha_\lambda(z) f(z)$ pour tous $\lambda \in \Lambda$, $z \in \widetilde{U}$. Soit $h : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue avec $f = \exp(h)$. On a alors $h(z + \lambda) = a_\lambda(z) + h(z) + 2i\pi k_\lambda$ où $k_\lambda \in \mathbb{Z}$. En posant $b(\lambda, z) := a_\lambda(z) + 2i\pi k_\lambda$, on obtient un sommant d'automorphie qui définit le même facteur d'automorphie que a.

À présent, démontrons l'implication $\boxed{b) \Rightarrow a)}$: il suffit de montrer qu'il existe une fonction continue $h : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ vérifiant $h(z + \lambda) = a_\lambda(z) + h(z)$. Soit $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement localement fini de U tel que $\pi^{-1}(U_j) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} V_j + \lambda$, avec la condition que la restriction de π à chaque $V_j + \lambda$ soit un biholomorphisme avec U_j. On pose $\tau_j : (\pi|_{V_j})^{-1} : U_j \to V_j$ et on appelle $(p_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement U_j. On définit alors h_j sur $\widetilde{U}$ de la façon suivante : soit $z \in \widetilde{U}$. S'il existe un élément $\lambda \in \Lambda$ tel que $z \in V_j + \lambda$, alors on définit $u := \tau_j^{-1}(z)$ et on pose $h_j(z) := p_j(u) a_\lambda(\tau_j(u))$, sinon on pose $h_j(z) := 0$. Comme a est un sommant d'automorphie, on obtient que $h := \sum_j h_j$ vérifie la condition voulue. ■

Proposition 6.2.7 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ un réseau dont la base est donnée sous la forme $(I_n \ S)$. Alors tout sommant d'automorphie $b : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ est équivalent à un sommant d'automorphie $a : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ avec les propriétés suivantes :*

a) $a(\sigma, z) = 0$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n$,

b) pour tout $\lambda \in \Lambda$ la fonction holomorphe $a_\lambda : \begin{array}{rcl} \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a(\lambda, z) \end{array}$ est $\mathbb{Z}^n$-périodique.

Preuve : La projection $\pi : \mathbb{C}^n \to X$ se factorise via $\mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^n$:

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\pi_1} X,$$

avec $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$. Remarquons que $\pi_2(\widetilde{U})$ est de Stein (par le théorème de Grauert-Docquier). Soit L le fibré en droites défini par le sommant d'automorphie b. Par la proposition précédente, L est topologiquement trivial et donc $\pi_1^* L$ aussi. Puisque tout fibré en droites topologiquement trivial sur une variété de Stein est holomorphiquement trivial, on peut choisir une trivialisation de $\pi^* L$ comme le pullback d'une trivialisation de $\pi_1^* L$. Le sommant d'automorphie $a : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ défini en utilisant cette trivialisation est équivalent à b et vérifie la condition $a)$. La condition $b)$ découle de $a)$ en utilisant la définition

d'un sommant d'automorphie. ■

Remarque 6.2.8 Afin que la preuve de Vogt soit toujours valide, il est important de remarquer que $\pi_2(\widetilde{U})$ est de Stein.

Proposition 6.2.9 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ un réseau dont la base est donnée sous la forme*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & T \\ I_{n-m} & R \end{pmatrix},$$

et tel que $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ soit un groupe de Cousin. Alors tout sommant d'automorphie $b : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ est équivalent à un sommant d'automorphie $a : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

a) $a(\lambda, z) = a(\lambda, z_{m+1}, ..., z_n)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$,

b) $a(\lambda, z) = 0$ pour $\lambda \in \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$,

c) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction holomorphe $a_\lambda : \begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a(\lambda, z) \end{array}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$-périodique.

Preuve : Il suffit de construire une fonction holomorphe $g : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ avec $b(\lambda, z) = g(z+\lambda) + a(\lambda, z) - g(z)$ (par définition de l'équivalence de deux sommants d'automorphie). Pour avoir la condition a), la fonction g doit vérifier

$$\frac{\partial g}{\partial z_j}(z + \lambda) - \frac{\partial g}{\partial z_j}(z) = \frac{\partial b}{\partial z_j}(\lambda, z), \text{ pour } j \in \{1, ..., m\}.$$

L'existence d'une telle fonction g découle de celle d'une application holomorphe

$$h = (h_1, ..., h_m) : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^m$$

vérifiant

$$\begin{aligned} h_j(z + \lambda) - h_j(z) &= \frac{\partial b}{\partial z_j}(\lambda, z), \\ \frac{\partial h_j}{\partial z_i} &= \frac{\partial h_i}{\partial z_j}, \text{ pour } i, j \in \{1, ..., m\}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Pour construire ces fonctions h_j, on se ramène à une base de Λ sous la forme $(I_n \ S_1)$ par un changement de coordonnées linéaire. Dans les nouvelles coordonnées, on peut supposer que b est comme dans la proposition précédente. À l'aide des conditions données par (6.2), on obtient h comme une série de Fourier formelle dans les nouvelles coordonnées, puis nous devrons montrer qu'elle converge sur $\widetilde{U}$.

Soit $T = (I_m \ S)$ et $R = (R_1 \ R_2)$. On pose

$$A := \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -R_1 & I_{n-m} \end{pmatrix}, \text{ et } A_1 := \begin{pmatrix} I_m \\ -R_1 \end{pmatrix}.$$

Dans les coordonnées $w := Az$, une base de Λ est donnée par

$$AP = \begin{pmatrix} 0 & I_m & S \\ I_{n-m} & 0 & -R_1 S + R_2 \end{pmatrix}.$$

Le sommant d'automorphie b correspond au sommant d'automorphie

$$\begin{array}{rccc} b^* : & A\Lambda \times \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C}. \\ & (A\lambda, w) & \longmapsto & b(\lambda, A^{-1}w) \end{array}$$

On peut encore supposer que b^* est comme dans la proposition précédente et alors ces conditions s'expriment comme suit pour b :

a) $b(\lambda, z) = 0$ pour $\lambda \in A^{-1}\mathbb{Z}^n$ où $A^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ R_1 & I_{n-m} \end{pmatrix}$,

b) la fonction $b_\lambda : \begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & b(\lambda, z) \end{array}$ est $A^{-1}\mathbb{Z}^n$-périodique (en particulier cette fonction est $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$-périodique) pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Ainsi, on peut supposer que les conditions b) et c) de la proposition sont déjà vérifiées par le facteur d'automorphie donné b. Nous allons construire une fonction holomorphe $\mathbb{Z}^n$-périodique

$$h^* = (h_1^*, ..., h_m^*) : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^m$$

telle que

$$\begin{array}{r} h^*(w + q_j) - h^*(w) = (\operatorname{grad} b^*)(q_j, w)A_1, \text{ pour } j \in \{1, ..., m\} \\ Dh^* \cdot A_1 \text{ est symétrique,} \end{array} \tag{6.3}$$

où $Q := (q_1, ..., q_m) = \begin{pmatrix} S \\ -R_1S + R_2 \end{pmatrix}$ sont les m dernières colonnes de AP, et où Dh^* est la matrice jacobienne (complexe) de h^*.
La fonction $h : \begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ z & \longmapsto & h^*(Az) \end{array}$ est alors holomorphe, $A^{-1}\mathbb{Z}^n$-périodique et vérifie (6.2).
En développant en série de Fourier

$$\begin{aligned} b^*(q_j, w) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} b_{j,\sigma} \exp(2i\pi^t \sigma w), \\ h^*(w) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}^n} h_\sigma \exp(2i\pi^t \sigma w), \text{ où } h_\sigma = (h_{1,\sigma}, ..., h_{m,\sigma}), \end{aligned}$$

en reportant dans (6.3) et en identifiant les coefficients, on obtient :

$$h_\sigma(\exp(2i\pi^t \sigma q_j) - 1) = 2i\pi^t \sigma A_1 b_{j,\sigma}, \text{ pour } \sigma \in \mathbb{Z}^n \text{ et } j \in \{1, ..., m\}.$$

Pour $\sigma = 0$, ceci est vérifié pour tout h_0. Pour $\sigma \neq 0$, il existe un certain $j = j_\sigma$ tel que $\exp(2i\pi^t \sigma q_{j_\sigma}) - 1 \neq 0$ par la proposition 2.2.5. Posons

$$h_\sigma := \frac{2i\pi^t \sigma A_1 b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi^t \sigma q_j) - 1}$$

pour un tel j (c'est un vecteur à 1 ligne et m colonnes). Il découle de la partie c) de la définition d'un sommant d'automorphie (définition 6.2.2) que h_σ ne dépend pas du choix de j. En effet, b^* étant un sommant d'automorphie, on a

$$\begin{aligned} b^*(q_i + q_j, w) &= b^*(q_i, w + q_j) + b^*(q_j, w) \\ &= b^*(q_j, w + q_i) + b^*(q_i, w); \end{aligned}$$

en identifiant les coefficients du développement en série de Fourier de b^* on obtient bien l'indépendance de h_σ en fonction de j.
Ainsi,

$$h^*(w) := \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}} h_\sigma \exp(2i\pi {}^t\sigma w)$$

(avec les h_σ que l'on vient de définir) est une solution formelle de (6.3), qui vérifie aussi la condition que Dh^*A_1 soit symétrique. Il reste à prouver la convergence de cette série sur $\widetilde{U}$. Pour cela nous allons majorer les coefficients h_σ (en norme) par les coefficients d'une série de Fourier convergente. On considère la matrice

$$\begin{aligned} h_\sigma\Im(S) &= \frac{2i\pi b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1}\ {}^t\sigma A_1\Im(S) \\ &= \frac{2i\pi b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1}\ {}^t\sigma \begin{pmatrix} \Im(S) \\ -R_1\Im(S) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2i\pi b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1}\ {}^t\sigma\Im(Q). \end{aligned}$$

Finalement, on a l'égalité de matrices suivantes :

$$h_\sigma\Im(S) = \frac{2i\pi {}^t\sigma\Im(Q)b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1}.$$

Si $\exp(2i\pi {}^t\sigma q_k)-1$ est nul pour un certain k alors c'est aussi le cas de ${}^t\sigma\Im(q_k)$ qui est la k-ème composante $(h_\sigma\Im(S))_k$ du vecteur $h_\sigma\Im(S)$.

Si $\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1\neq 0$, alors

$$(h_\sigma\Im(S))_j = \frac{2i\pi {}^t\sigma\Im(q_j)b_{j,\sigma}}{\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1}.$$

Les nombres $c_{j,\sigma} := {}^t\sigma\Im(q_j)b_{j,\sigma}$ sont les coefficients de la série de Fourier de la fonction $(\operatorname{grad} b^*)(q_j,w)\Im(q_j)$, qui converge sur $\widetilde{U}$. Fixons $0<\varepsilon<1$, si $|\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1|\geqslant\varepsilon$, alors

$$|(h_\sigma\Im(S))_j|\leqslant C_1|c_{j,\sigma}|,$$

avec $C_1=2\pi\varepsilon^{-1}$. Si $|\exp(2i\pi {}^t\sigma q_j)-1|<\varepsilon$, alors

$$\ln(1-\varepsilon) < 2\pi {}^t\sigma\Im(q_j) < \ln(1+\varepsilon).$$

Ainsi $|(h_\sigma\Im(S))_j| \leqslant \left|\dfrac{2\pi {}^t\sigma\Im(q_j)}{\exp(-2\pi {}^t\sigma\Im(q_j))-1}\right| |b_{j,\sigma}| \leqslant C_2|b_{j,\sigma}|$, puisque la fonction $x\mapsto -x/(\exp(x)-1)$ est bornée sur $[\ln(1-\varepsilon),\ln(1+\varepsilon)]$. Si on pose

$$d_\sigma := \max_{j\in\{1,\dots,m\}}\{|c_{j,\sigma}|,|b_{j,\sigma}|\},$$

alors les d_σ sont les coefficients d'une série de Fourier qui converge sur $\widetilde{U}$ et puisque $\Im(S)\in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ on a

$$\|h_\sigma\|\leqslant C_3\|h_\sigma\Im(S)\|\leqslant Cd_\sigma.$$

Ainsi la série de Fourier de h^* converge sur $\widetilde{U}$; nous avons donc construit une fonction $h : \widetilde{U} \to \mathbb{C}^m$ qui est $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$-périodique et qui vérifie (6.3). On définit alors la fonction $g : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) := \sum_{j=1}^{m} \left(\int_0^1 h_j(tz_1, ..., tz_m, z_{m+1}, ..., z_n)dt \right) z_j.$$

Cette fonction est bien définie sur $\widetilde{U}$ puisque $\widetilde{U}$ est stable par $\mathbb{R}\Lambda$, donc en particulier par $\mathbb{R}\Lambda \cap i\mathbb{R}\Lambda = \mathbb{C}^m_\Lambda$ (qui est égal à $\{(z_1, ..., z_m, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n\}$ pour ces coordonnées). La fonction g est holomorphe, $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$-périodique et on a $\dfrac{\partial g}{\partial z_k} = h_k$ pour $k \in \{1, ..., m\}$ donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k}(g(z+\lambda) - g(z)) &= h_k(z+\lambda) - h_k(z) \\ &= \frac{\partial b}{\partial z_k}(\lambda, z) \text{ pour } \lambda \in P \text{ et } k \in \{1, ..., m\}. \end{aligned}$$

On en déduit que $a(\lambda, z) := -g(z+\lambda) + b(\lambda, z) + g(z)$ ne dépend pas des m premières coordonnées ; le sommant d'automorphie a ainsi défini est donc équivalent à b et vérifie les propriétés voulues. ■

Théorème 6.2.10 *Soit U un ouvert d'un groupe de Cousin $X \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$ dont la préimage $\widetilde{U}$ dans $\mathbb{C}^n$ est un domaine convexe ; alors si L est un fibré en droites topologiquement trivial sur U, on a $H^0(U, L) \neq 0$ si et seulement si L est holomorphiquement trivial.*

Preuve : La condition suffisante est claire, on regarde donc la condition nécessaire. On choisit la "seconde forme normale" du réseau . Puisque L est topologiquement trivial, la proposition 6.2.6 nous dit qu'il provient d'un sommant d'automorphie $a : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$. Par la proposition 6.2.9 ci-dessus, on peut supposer que l'on a les deux conditions suivantes :

- $a(\lambda, z) = a(\lambda, z_{m+1}, ..., z_n)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et
- $a_\lambda : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a(\lambda, z)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{Z}^{n-m} \end{pmatrix}$–périodique pour tout λ.

Alors on développe a_λ en série de Fourier :

$$a_\lambda(z) = \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}^{n-m}} a_{\lambda,\sigma} e^{2i\pi^t \sigma.(z_{m+1}, ..., z_n)}.$$

Puisque a est un sommant d'automorphie, nous avons (pour tous $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ et tout $z \in \mathbb{C}^n$) :

$$a_\lambda(z + \lambda') + a_{\lambda'}(z) = a_{\lambda'}(z + \lambda) + a_\lambda(z)$$

d'où :

$$a_{\lambda,\sigma}(1 - e^{2i\pi^t \sigma \lambda'_2}) = a_{\lambda',\sigma}(1 - e^{2i\pi^t \sigma \lambda_2})$$

pour $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ (et où λ_2 [resp. λ'_2] désigne le $(n-m)$-uplet formé des $n-m$ dernières coordonnées de λ [resp. λ']).

On veut étendre l'application a à $\mathbb{R}\Lambda \times \widetilde{U}$, de sorte qu'elle vérifie

$$a(x + x', z) = a(x, z + x') + a(x', z) \text{ pour } x, x' \in \mathbb{R}\Lambda, z \in \mathbb{C}^n. \tag{6.4}$$

Pour un élément de $\mathbb{R}\Lambda$ de la forme $x = r\lambda$, on définit

$$a(x,z) := \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}^{n-m}} a_{\lambda,\sigma}\frac{1-e^{2i\pi r\,{}^t\sigma\lambda_2}}{1-e^{2i\pi\,{}^t\sigma\lambda_2}}e^{2i\pi\,{}^t\sigma(z_{m+1},\ldots,z_n)}.$$

Si ${}^t\sigma\lambda_2 \in \mathbb{Z}$, alors le quotient dans cette définition est remplacé par la quantité

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{irt}}{1-e^{it}} = r.$$

On voit alors que la série définissant $a(x,z)$ est convergente car pour un réel r fixé, les facteurs par lesquels on a multiplié les coefficients de la série de Fourier de a_λ sont uniformément bornés (par r).

À présent pour un élément quelconque $x = \sum_{j=1}^{n+m} r_j\lambda_j$ de $\mathbb{R}\Lambda$, on définit $a(x,z)$ à l'aide de l'équation (6.4). L'application a ainsi construite est différentiable.

Considérons à présent une section s de L. Nous allons montrer que si s s'annule en un point, alors elle est identiquement nulle. Cette section correspond à une fonction holomorphe $f : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$, vérifiant

$$f(z+\lambda) = e^{a(\lambda,z)}f(z) \tag{6.5}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Soit à présent $z_0 \in \widetilde{U}$, on s'intéresse à l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} t_{z_0} : & \mathbb{R}\Lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}. \\ & x & \longmapsto & f(z_0+x)e^{-a(x,z_0)} \end{array}$$

Alors, pour $\lambda \in \Lambda$, on a :

$$\begin{aligned} t_{z_0}(x+\lambda) &= f(z_0+x+\lambda)e^{-a(x+\lambda,z_0)} \\ &= f(z_0+x)e^{a(\lambda,z_0+x)-a(x+\lambda,z_0)} \\ &= f(z_0+x)e^{-a(x,z_0)} \\ &= t_{z_0}(x). \end{aligned}$$

Ainsi t_{z_0} est une fonction Λ-périodique donc bornée par une constante C_{z_0}. Il en découle que pour $x \in \mathbb{R}\Lambda$,

$$|f(z_0+x)| \leqslant C_{z_0}|e^{a(x,z_0)}| = C_{z_0}e^{\Re a(x,z_0)}. \tag{6.6}$$

On veut que sur $\mathbb{C}^m_\Lambda$, le sous-espace complexe maximal contenu dans $\mathbb{R}\Lambda$, la fonction $x \mapsto \Re a(x,z_0)$ soit bornée. Pour cela nous allons modifier quelque peu l'application a. Il existe une unique application linéaire $g_{z_0} : \mathbb{C}^m_\Lambda \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\Re(g_{z_0}(\lambda_1)) = \Re(a(\lambda_1,z_0))$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

On considère alors le sommant d'automorphie $\widetilde{a}_{z_0} : \Lambda \times \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ défini par :

$$\widetilde{a}_{z_0}(\lambda,z) = a(\lambda,z) - g_{z_0}(z+\lambda) + g_{z_0}(z) = a(\lambda,z) - g_{z_0}(\lambda),$$

il définit le même fibré en droites que a. Ainsi, quitte à remplacer a par $\widetilde{a}_{z_0}$, on peut à présent supposer que $\Re(a(\lambda_1,z_0)) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Pour $x \in \mathbb{C}^m_\Lambda$ et $\lambda \in P$, on a

$$\begin{aligned} a(x+\lambda_1,z_0) &= a(x,z_0+\lambda_1) + a(\lambda_1,z_0) \\ &= a(x,z_0) + a(\lambda_1,z_0) \end{aligned}$$

(puisque par hypothèse sur a, en son second argument elle ne dépend que des $n-m$ dernières coordonnées), donc la restriction de $\Re a$ à $\mathbb{C}^m_\Lambda \times \{z_0\}$ est $\widetilde{T}.\mathbb{Z}^{2m}$-périodique donc bornée. Ainsi, la restriction de $f(z_0 + \cdot\,)$ à $\mathbb{C}^m_\Lambda$ est une fonction holomorphe bornée donc constante et ceci pour tout élément z_0 de $\widetilde{U}$. On en déduit alors que f est indépendante des m premières coordonnées ; on peut donc voir f comme une fonction holomorphe sur $\widetilde{U}_2 = \{z_2 \mid z \in \widetilde{U}\}$. Les zéros de f sont $(I_{n-m}R)$-invariants, vu la condition (6.5). Comme $\mathbb{C}^n/\Lambda$ est un groupe de Cousin, il n'existe pas d'élément $\sigma \in \mathbb{Z}^{n-m} \setminus \{0\}$ avec ${}^t\sigma R \in \mathbb{Z}^{2m}$ donc le groupe engendré par $(I_{n-m}R)$ est dense dans $\mathbb{R}^{n-m}$. Il en découle que si $f(w) = 0$ pour un élément $w \in \widetilde{U}_2$, f est nulle sur $w + \mathbb{R}^{n-m}$ donc sur l'intersection de $\widetilde{U}_2$ et du sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^{n-m}$ engendré par $w + \mathbb{R}^{n-m}$, i.e. $\widetilde{U}_2 \cap \mathbb{C}^{n-m} = \widetilde{U}_2$. Ainsi, si s est une section non identiquement nulle de L, elle ne s'annule jamais et donc L est holomorphiquement trivial. ■

Pour terminer, nous démontrons un lemme qui est une traduction de la proposition précédente et qui nous sera utile dans la section suivante :

Lemme 6.2.11 *Soit U un ouvert d'un groupe de Cousin $X \cong \mathbb{C}^n/\Lambda$ dont la préimage $\widetilde{U}$ dans $\mathbb{C}^n$ est un domaine convexe et soit D un diviseur de U. Soit L le fibré en droites au-dessus de U associé à D. Alors L n'est pas topologiquement trivial, i.e. sa première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(U, \mathbb{Z})$ est non nulle.*

Preuve : Supposons que L soit topologiquement trivial. Par le théorème 6.2.10, comme il possède une section (non identiquement nulle) s_1 donnée par D, il est holomorphiquement trivial. Cela signifie qu'il possède une section holomorphe s_2 qui ne s'annule jamais. Le quotient s_1/s_2 est une fonction holomorphe non constante sur U (puisque s_1 s'annule sur D et pas en dehors de D), une contradiction. On peut également remarquer que s_1 s'annule sur D donc est identiquement nulle par la preuve du théorème précédent, ce qui mène directement à une contradiction. ■

6.2.2 Application aux variétés OT.

L'objectif de cette section est de démontrer que la dimension algébrique d'une variété OT est nulle. On rappelle d'abord brièvement la construction de ces variétés, puis on démontre ce résultat en mettant en applications ceux de la section précédente : le théorème 6.2.10 en particulier.

6.2.2.1 Préliminaires

Soit K un corps de nombres de degré n sur $\mathbb{Q}$; on reprend les notations de la section 5.2.1 (en particulier, s désigne le nombre de plongements réels de K et $2t$ est le nombre de plongements complexes de K, de sorte que $n = s + 2t$). On suppose que s et t sont non nuls. Alors $\sigma(\mathcal{O}_K)$ est un réseau de rang n dans $\mathbb{C}^m$ (où l'on a posé $m := s+t$) donc on a une action proprement discontinue de $\sigma(\mathcal{O}_K)$ sur $\mathbb{C}^m$. On définit également $l : \mathcal{O}_K^{*,+} \to \mathbb{R}^m$ par

$$l(a) = (\log|\sigma_1(a)|, ..., \log|\sigma_s(a)|, 2\log|\sigma_{s+1}(a)|, ..., 2\log|\sigma_m(a)|).$$

Par le théorème des unités de Dirichlet, $l(\mathcal{O}_K^{*,+})$ est un réseau dans l'espace vectoriel $L := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i = 0\}$. La projection $pr : L \to \mathbb{R}^s$ donnée par les s premières coordonnées est surjective donc il existe des sous-groupes A de rang s de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ tels que $pr(l(A))$ soit un réseau dans $\mathbb{R}^s$ de rang s. On dira qu'un tel A est **admissible**. On regarde alors le quotient $X := X(K, A) = (\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/(A \ltimes \mathcal{O}_K)$; c'est une variété complexe compacte de dimension m. On dira que c'est une **variété d'Oeljeklaus-Toma**, ou encore **variété OT**.

On sait ([29], lemme 2.4) que $\mathbb{C}^m/\sigma(\mathcal{O}_K)$ n'admet pas de fonctions holomorphes non constantes. Autrement dit, le groupe de Lie $C := \mathbb{C}^m/\sigma(\mathcal{O}_K)$ est un groupe de Cousin.

Avant de conclure cette partie préliminaire, nous avons également besoin de l'énoncé de deux lemmes (démontrés dans [29]), ainsi que d'une définition :

Lemme 6.2.12 *Soit A un sous-groupe de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ qui n'est pas contenu dans $\mathbb{Z}$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'action de A sur $\mathcal{O}_K$ admet un sous-module propre (non trivial) invariant de rang plus petit,*
2. *Il existe une extension de corps intermédiaire $\mathbb{Q} \subset K' \subset K$ avec $A \subset \mathcal{O}_{K'}^{*,+}$.*

Ce lemme mène à la définition suivante :

Définition 6.2.13 *On dit que $X(K, A)$ est **de type simple** si A ne vérifie pas l'une des deux conditions équivalentes du lemme précédent.*

Enfin, énonçons un lemme qui nous servira dans la section suivante :

Lemme 6.2.14 *Soit $\mathbb{Q} \subset K' \subset K$ une extension intermédiaire avec $A \subset \mathcal{O}_{K'}^{*,+}$ un sous-groupe admissible pour K. Soient $s', 2t'$ le nombre de plongements réels et complexes de K'. Alors $s = s'$, $t' > 0$ et A est admissible pour K'.*

Pour de plus amples détails, on renvoie à [29].

6.2.2.2 Dimension algébrique

Pour commencer on démontre le résultat annoncé dans le cas où la variété considérée est de type simple. Nous utiliserons ce résultat pour la preuve dans le cas général.

Proposition 6.2.15 *Soit X une variété OT de type simple. Alors la dimension algébrique de X est nulle.*

Preuve : Nous allons montrer que X ne possède aucun diviseur irréductible. Soit D un diviseur irréductible de X, de multiplicité 1. On regarde $X = X(K, A)$ comme le quotient de $U := (\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/\sigma(\mathcal{O}_K)$ (qui est difféomorphe à $(\mathbb{R}_{>0})^s \times (\mathbb{S}^1)^n$) par $A \cong \mathbb{Z}^s$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[p]{A \cong \mathbb{Z}^s} & X \\ {\scriptstyle (\mathbb{S}^1)^{s+2t}}\downarrow{\scriptstyle q} & & {\scriptstyle q'}\downarrow{\scriptstyle (\mathbb{S}^1)^{s+2t}} \\ (\mathbb{R}_{>0})^s & \xrightarrow[\mathbb{Z}^s]{p'} & (\mathbb{S}^1)^s \end{array} \tag{6.7}$$

Comme X est simple, $\dim H^2(X) = \binom{s}{2} = \dim H^2((\mathbb{S}^1)^s)$. Ainsi la première classe de Chern $c_1(L(D))$ du fibré en droites $L(D)$ au-dessus de X associé à D est le pull-back par q' d'un élément $\omega \in H^2((\mathbb{S}^1)^s, \mathbb{Z})$ (le fait que l'application $(q')^* : H^2((\mathbb{S}^1)^s, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ soit injective est établi dans la preuve de la proposition 2.3 de [29]). La commutativité du diagramme (6.7) entraîne que le pull-back $\widetilde{\omega}$ au-dessus de U de ω par $q' \circ p$ est le même que le pull-back par $p' \circ q$ de ω. Or, $(p')^*(\omega)$ est nul puisque $H^2((\mathbb{R}_{>0})^s, \mathbb{Z}) = 0$, donc c'est aussi le cas de $\widetilde{\omega}$. Ceci est une contradiction avec le lemme 6.2.11, puisque $\widetilde{\omega} = c_1(\widetilde{L}(D))$ où $\widetilde{L}(D)$ est le fibré associé au diviseur $p^{-1}(D)$ de U. ■

À présent on peut ôter l'hypothèse sur X d'être simple :

Théorème 6.2.16 *Soit X une variété OT. Alors la dimension algébrique de X est nulle.*

Preuve : Par la proposition 6.2.15, on peut supposer que X n'est pas de type simple. Ainsi il existe une extension de corps $\mathbb{Q} \subset K' \subset K$ avec $A \subset \mathcal{O}_{K'}^{*,+}$ et on note s' (respectivement $2t'$) le nombre de plongements réels (respectivement complexes) de K'. Comme A est admissible pour K, on a $s = s'$ et A est admissible pour K' (c'est le lemme 6.2.14 qui nous l'assure). On peut, sans restreindre la généralité, supposer que K' est le plus petit sous-corps de K qui vérifie $A \subset \mathcal{O}_{K'}^{*,+}$. Notons $\sigma_1, ..., \sigma_s, \sigma_{s+1}, ..., \sigma_{s+t}, \bar{\sigma}_{s+1}, ..., \bar{\sigma}_{s+t}$ les $s+2t$ plongements de K et $\sigma'_1, ..., \sigma'_s, \sigma'_{s+1}, ..., \sigma'_{s+t'}, \bar{\sigma}'_{s+1}, ..., \bar{\sigma}'_{s+t'}$ les $s+2t'$ plongements de K'.

Comme précédemment, on note

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathcal{O}_K & \longrightarrow & \mathbb{C}^{s+t} \\ & a & \longmapsto & (\sigma_1(a), ..., \sigma_{s+t}(a)). \end{array}$$

On regarde le sous-espace vectoriel $V_{K'}$ de $\mathbb{C}^{s+t}$ engendré par $\sigma(\mathcal{O}_{K'})$

On note également C (resp. C') le groupe de Cousin $\mathbb{C}^{s+t}/\sigma(\mathcal{O}_K)$ (resp. $V_{K'}/\sigma(\mathcal{O}_{K'})$). Le groupe C' est un sous-groupe de Lie de C. Nous allons étudier les deux ouverts $U := (\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t)/\sigma(\mathcal{O}_K)$ et $U' := ((\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t) \cap V_{K'})/\sigma(\mathcal{O}_{K'})$. Les quotients U/A et U'/A sont deux variétés OT, qu'on appelle X et X' respectivement ; de plus, X' est de type simple par l'hypothèse que l'on a faite sur K' et c'est une sous-variété de X.

Regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \hookrightarrow & C & \overset{q}{\twoheadrightarrow} & C/C' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & U' & \hookrightarrow & U & \longrightarrow & q(U) & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & & & \\ & & X' & \overset{i}{\hookrightarrow} & X & & & & \end{array} \tag{6.8}$$

Soit D un diviseur irréductible (de multiplicité 1) de X, on regarde $L(D)$ le fibré en droites holomorphe associé ; il induit par restriction un fibré $L' := i^*L(D)$ sur X'.

Comme X' est de type simple, le fibré $(p')^*(L')$ au-dessus de U' est topologiquement trivial (ceci se démontre comme dans la preuve de la proposition 6.2.15). Le sous-groupe maximal complexe $H' \cong \mathbb{C}^{t'}$ du tore maximal compact $T' \cong (\mathbb{S}^1)^{s+2t'}$ de C' est un sous-groupe du sous-groupe maximal complexe $H \cong \mathbb{C}^t$ du tore maximal compact $T \cong (\mathbb{S}^1)^{s+2t}$ de C. On note B un sous-groupe connexe complexe de dimension complexe $t - t'$ de T tel que $B \times H' \cong H$. Comme B est un sous-groupe de T il agit sur U et il agit transitivement sur les feuilles du U'-feuilletage de U, ce feuilletage est induit par le C'-feuilletage de C. On a également une action de B sur $H^2(U, \mathbb{Z})$ qui est triviale car ce groupe est discret et B est connexe. En particulier, on a $b^*c_1(L) = c_1(L)$ pour tout fibré en droites L au-dessus de U et tout $b \in B$.

Notons $\widetilde{D} := p^{-1}(D)$, c'est un diviseur de U. On veut montrer un "résultat intermédiaire" qui est que le diviseur $\widetilde{D}$ est saturé par les feuilles du U'-feuilletage de U :
On a $c_1(L(\widetilde{D})) = p^*(c_1(L(D))) \in H^2(U, \mathbb{Z})$. Comme le diagramme (6.8) commute, on a $c_1(L(\widetilde{D})|_{U'}) = c_1(L(\widetilde{D}))|_{U'} = c_1(p^*L') = 0 = c_1(b^*L(\widetilde{D}))|_{U'}$. On regarde alors $b(\widetilde{D}) \cap U'$, trois cas sont possibles. Ou bien cette intersection est U', ou bien vide (ces deux cas nous conviennent), ou bien c'est un diviseur de U'. Cette dernière possibilité est exclue, car dans ce cas $c_1(b^*L(\widetilde{D}))|_{U'}$ est non nul par le lemme 6.2.11, ce qui est en contradiction avec le calcul précédent. Nous avons bien démontré que $\widetilde{D}$ est saturé par les feuilles du U'-feuilletage de U.

Soit $f \in \mathcal{M}(X)$ une fonction méromorphe sur X, alors f se relève en une fonction méromorphe sur U invariante par A (encore notée $f \in \mathcal{M}^A(U)$). Le "résultat intermédiaire" du paragraphe précédent nous dit que les ensembles de niveau de f sont saturés par le U'-feuilletage de U donc f est constante sur les feuilles du U'-feuilletage de U. Ainsi, f induit une application sur $q(U) = C/C'$ (cette égalité provient du fait que les feuilles du U'-feuilletage de U sont en correspondance biunivoque avec celles du C'-feuilletage de C) donc se relève en une fonction méromorphe sur C, qui est invariante par le groupe $A \ltimes C'$; on note encore $f \in \mathcal{M}^{A\ltimes C'}(C)$ cette fonction ; on a en fait établi que $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}^{A\ltimes C'}(C)$.

Comme le groupe $\mathcal{O}_K^{*,+}$ est commutatif, l'action de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ sur U induit une action de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ sur X ; l'action de $\mathcal{O}_K^{*,+}$ sur $\mathcal{M}(X)$ correspond à celle sur $\mathcal{M}^{A\ltimes C'}(C)$. On voit f comme élément de $\mathcal{M}^{A\ltimes C'}(C)$: pour tout $\eta \in \mathcal{O}_K^{*,+}$ on pose $f_\eta(x) := f(\eta^{-1}x)$. Alors pour

tout $x \in C$, on a $f_\eta(x+C') = f_\eta(x)$ i.e. f est stable par C' et par $\eta^{-1}C'$. Soit J le plus petit sous-groupe complexe connexe de C contenant C' et $\eta C'$ pour tout $\eta \in \mathcal{O}_K^{*,+}$. Si J est un sous-groupe propre de C, son sous-groupe maximal compact est défini par un sous-réseau de $\mathcal{O}_K$ qui est stable par $\mathcal{O}_K^{*,+}$, ce qui est impossible car il n'existe aucun sous-réseau de $\mathcal{O}_K$ stable par $\mathcal{O}_K^{*,+}$. En effet, si c'était le cas, comme $\mathcal{O}_K^{*,+}$ contient un élément primitif de K, cet élément devrait avoir un polynôme minimal de degré strictement inférieur à celui de K, une contradiction. Finalement, $J = C$ et f est constante sur C tout entier. ■

6.2.3 Une classe spéciale de groupes de Cousin

6.2.3.1 Introduction

Dans son article [36], Vogt exhibe une classe spéciale de groupes de Cousin X, plus précisément il démontre [1] :

Théorème 6.2.17 *Soit $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ un groupe de Cousin. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'espace $H^1(X, \mathcal{O})$ est de dimension finie.*
2. *Soit $P = (I_n\ S)$ une base de périodes pour Λ. Alors il existe des constantes $C > 0$ et $a \geqslant 0$ telles que $\|{}^t\sigma S + {}^t\tau\| \geqslant C\exp(-a|\sigma|)$ pour tout $\sigma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ et tout $\tau \in \mathbb{Z}^m$, où $n+m$ est le rang de Λ.*

Soit α un nombre algébrique irrationnel. Vogt a démontré dans son article que le réseau donné par $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ définit un groupe de Cousin qui vérifie la condition n°2. L'objectif de cette section est d'établir que si un groupe de Cousin est défini par un réseau dont tous les vecteurs ont des nombres algébriques comme coordonnées, il appartient à cette classe (car il vérifie la condition n°2). Comme conséquence de ce résultat, les groupes de Cousin qui apparaissent dans la construction des variétés OT font partie de cette classe de groupes de Cousin.

6.2.3.2 Préliminaires

On rappelle un énoncé de généralisation du théorème de Liouville qui figure dans [18] (théorème 1.5, page 27) :

Théorème 6.2.18 *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ des nombres algébriques, de degrés respectifs n_k, avec $\deg \mathbb{Q}(\alpha_1, ..., \alpha_m) = n$, et soit*

$$P(z_1, ..., z_m) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{N_m} a_{k_1,...,k_m} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m} \in \mathbb{Z}[z_1, ..., z_m].$$

Si $P(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ est non nul, alors on a l'inégalité

$$|P(\alpha_1, ..., \alpha_m)| \geqslant L(P)^{1-\delta n} \prod_{k=1}^{m} L(\alpha_k)^{-\delta N_k n/n_k},$$

1. Le théorème qu'il énonce (voir [36], p. 208) comporte en tout 8 assertions qui sont équivalentes, on n'en cite ici que deux.

avec $\delta = 1$ si tous les α_i sont réels, $\delta = 1/2$ sinon et où $L(P)$ désigne la somme des valeurs absolues des coefficients de P (et $L(\alpha)$ est la quantité $L(\mu)$, le polynôme μ étant le polynôme minimal de α).

6.2.3.3 Une classe de groupes de Cousin vérifiant la condition n°2

Nous allons démontrer :

Théorème 6.2.19 *Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ un réseau tel que $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ soit un groupe de Cousin et admettant une base de périodes dont tous les coefficients sont des nombres algébriques, alors X vérifie la condition 2 du théorème 6.2.17.*

Preuve : Choisissons une base $(x_1, ..., x_{n+m})$ de Λ dont tous les coefficients sont des nombres algébriques, qu'on écrit sous forme de vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{1,n} \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} \alpha_{n+m,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n+m,n} \end{pmatrix}.$$

Une base de périodes de X est donnée par la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & & \alpha_{n+m,1} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \alpha_{1,n} & & \alpha_{n+m,n} \end{pmatrix}.$$

Soit A la matrice définie comme suit :

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & & \alpha_{n,1} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \alpha_{1,n} & & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible et la matrice $A^{-1}P$ définit un groupe de Cousin isomorphe à X. La nouvelle base de périodes est alors

$$P' := A^{-1}P = (I_n \ S)$$

où I_n est la matrice identité de taille n et $S = (s_{i,j})$ est une matrice à n lignes et m colonnes dont tous les coefficients sont des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$.

Pour vérifier la condition 2 du théorème 6.2.17, il nous faut vérifier qu'il existe des constantes $C > 0$ et $a \geqslant 0$ telles que pour tous $\mu \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ et $\nu \in \mathbb{Z}^m$, on ait

$$\|{}^t\mu S + {}^t\nu\| \geqslant C \exp(-a|\mu|).$$

Il est suffisant d'établir cette inégalité pour une composante quelconque (non nulle) du vecteur ${}^t\mu S + {}^t\nu$ (car on considère ensuite la norme infinie de ce vecteur, qui est non nul car on sait que ${}^t\mu S \notin \mathbb{Z}^m$). Notons ${}^t\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ et ${}^t\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$, alors la k-ème composante du vecteur ${}^t\mu S + {}^t\nu$ (pour $k \in \{1, ..., m\}$) est

$$\mu_1 s_{1,k} + \cdots + \mu_n s_{n,k} + \nu_k.$$

Nous allons à présent distinguer les deux cas suivants : ou bien $|\nu_k| \leqslant 2|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|$, ou bien on a l'inégalité contraire.

Étudions le premier cas, à savoir $|\nu_k| \leqslant 2|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|$. Par le théorème 6.2.18, nous avons l'inégalité

$$|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}+\nu_k| \geqslant C(|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|+|\nu_k|)^p,$$

où $C>0$ et $p<0$ sont des constantes indépendantes de μ et τ. (Rappelons qu'on a supposé que $\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}+\nu_k$ est non nul). Par hypothèse sur ν_k, on a alors

$$\begin{aligned}(|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|+|\nu_k|)^p &\geqslant (|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|+2|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|)^p\\ &\geqslant C'(|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|)^p\\ &\geqslant C'\exp(-|p|(|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|)),\end{aligned}$$

où C' ne dépend pas de μ ni de ν, ce qu'il fallait démontrer.

Reste à étudier le second cas, à savoir $|\nu_k| > 2|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|$. La seconde inégalité triangulaire s'écrit :

$$\begin{aligned}|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}+\nu_k| &\geqslant \Big||\nu_k|-|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|\Big|\\ &= |\nu_k|-|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|\\ &\geqslant |\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|.\end{aligned}$$

Si $\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}$ est nul, on a alors $|\nu_k| \geqslant 1$ et on a terminé ; sinon, on peut minorer à nouveau la quantité $|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}|$ à l'aide du théorème 6.2.18 :

$$\begin{aligned}|\mu_1 s_{1,k}+\cdots+\mu_n s_{n,k}| &\geqslant \mathcal{C}(|\mu_1|+\cdots+|\mu_n|)^q\\ &\geqslant \mathcal{C}\exp(-|q|(|\mu_1|+\cdots|\mu_n|))\end{aligned}$$

où $\mathcal{C}>0$ et $q<0$ sont des constantes indépendantes de μ et τ. ■

Application
On rappelle que dans le cadre de la construction d'une variété OT, le groupe $C = \mathbb{C}^m/\sigma(\mathcal{O}_K)$ est un groupe de Cousin. Comme corollaire du théorème 6.2.19, on a :

Corollaire 6.2.20 *Le groupe de Cousin C vérifie la condition 2 du théorème 6.2.17.*

Conclusion

Le travail effectué dans cette thèse amène des pistes de recherche qui en sont un prolongement possible, nous les proposons ici.

Pour ce qui est du premier chapitre, rappelons que nous avons évoqué une question laissée ouverte qui est de savoir si les surfaces de Stein que l'on a considérées sont un domaine de Riemann au-dessus de $\mathbb{C}^2$. Une autre voie d'exploration possible est d'étudier plus en détails les variétés construites dans la section 1.3.3.

Concernant les variétés à coins "généralisées", il est possible d'établir d'autres résultats concernant leur topologie en continuant de prolonger le cas torique. Il serait également intéressant de faire le lien avec d'autres définitions de variété à coins comme on l'a fait dans la section 3.2.3.

On sait que toute variété LVM possède un feuilletage transversalement Kähler et c'est, avec la condition (K), une caractérisation des variétés LVM parmi les variétés LVMB démontrée dans [9]. Dans ce même article, il est conjecturé que la généralisation de cette caractérisation sans la condition (K) est vraie. Battaglia et Zaffran ont annoncé dans [38] un résultat dont ils espèrent qu'il mènera à la preuve de cette conjecture. Avec la nouvelle description donnée ici, il est sans doute possible d'aborder le problème sous un autre angle. Il serait également intéressant d'étudier la "généralisation" des variétés LVMB (reprenant la même construction, mais en remplaçant l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par une autre variété torique compacte) ; on peut se demander quelles sont les propriétés vérifiées par ces variétés et si ce sont déjà d'autres variétés connues.

Pour ce qui est des variétés construites dans le chapitre 5, il reste de nombreux invariants à déterminer (la dimension algébrique, la dimension de $H^1(\mathcal{O})$, les groupes de cohomologie...) et des propriétés à explorer.

À propos des variétés OT, une piste intéressante à explorer est le calcul du second nombre de Betti de ces variétés, dans le cas non simple (le résultat est établi dans le cas simple, voir [29]) ; le problème semble pouvoir être réduit à un résultat de théorie des nombres.

Bibliographie

[1] Y. Abe and K. Kopfermann, *Toroidal groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1759, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Line bundles, cohomology and quasi-abelian varieties.

[2] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, and Y.-S. Tai, *Smooth compactifications of locally symmetric varieties*, second ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] M.-J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, and J.-P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[4] S. Bochner and D. Montgomery, *Groups on analytic manifolds*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 659–669.

[5] F. Bosio, *Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no. 5, 1259–1297.

[6] R. Bott and J. Heitsch, *A remark on the integral cohomology of $b\gamma_q$*, Topology **11** (1972), 141–146.

[7] T. Bröcker and T. tom Dieck, *Representations of compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1985.

[8] P. Cousin, *Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables*, Acta Math. **33** (1910), no. 1, 105–232.

[9] S. Cupit-Foutou and D. Zaffran, *Non-Kähler manifolds and GIT-quotients*, Math. Z. **257** (2007), no. 4, 783–797.

[10] G. Dloussky, *Structure des surfaces de Kato*, Mémoires de la S.M.F. 2e série **14** (1984), ii+120 pp.

[11] G. Dloussky and K. Oeljeklaus, *Vector fields and foliations on compact surfaces of class VII_0.*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), no. 5, 1503–1545.

[12] G. Dloussky, K. Oeljeklaus, and M. Toma, *Surfaces de la classe* VII_0 *admettant un champ de vecteurs, ii*, Commentarii Mathematici Helvetici **76** (2001), no. 4, 640–664.

[13] ———, *Class* VII_0 *surfaces with* b_2 *curves*, Tohoku Math. Journal **55** (2003), 283–309.

[14] S. Eilenberg and S. MacLane, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Annals of Mathematics **46** (1945), no. 3, 480–509.

[15] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 168, Springer-Verlag, New York, 1996.

[16] Ch. Favre, *Classification of 2-dimensional contracting rigid germs*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **79** (2000), 475–514.

[17] ———, *Dynamique des applications rationnelles*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud, 2002.

[18] N. I. Feldman and Yu. V. Nesterenko, *Transcendental numbers*, Number theory, IV, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 44, Springer, 1998, pp. 1–345.

[19] F. Forstnerič, *Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds*, Acta Mathematica **191** (2003), no. 2, 143–189.

[20] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[21] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 221, Springer-Verlag, New York, 2003, Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.

[22] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, 1965.

[23] Ma. Kato, *Compact complex manifolds containing "global" spherical shells*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Tokyo (1978), 45–84.

[24] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings i*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 339, Springer, 1972.

[25] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer-Verlag, New York, 2003.

[26] S. López de Medrano and A. Verjovsky, *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **28** (1997), no. 2, 253–269.

[27] L. Meersseman, *A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension*, Math. Ann. **317** (2000), no. 1, 79–115.

[28] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988, An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.

[29] K. Oeljeklaus and M. Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161–171.

[30] K. Oeljeklaus and M. Toma, *Logarithmic moduli spaces for surfaces of class* VII, Mathematische Annalen **341** (2008), 323–345.

[31] T. Panov and Y. Ustinovksy, *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*, Mosc. Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172, 216. MR 2952429

[32] J. Potters, *On almost homogeneous compact complex analytic surfaces*, Invent. Math. **8** (1969), 244–266.

[33] G. K. Sankaran, *A class of non-Kähler complex manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **41** (1989), no. 1, 43–64.

[34] G. C. Shephard, *Spherical complexes and radial projections of polytopes*, Israel J. Math. **9** (1971), 257–262.

[35] J. Tambour, *LVMB manifolds and simplicial spheres*, Ann. Inst. Fourier (to appear), arXiv :1006.1797.

[36] C. Vogt, *Line bundles on toroidal groups*, J. Reine Angew. Math. **335** (1982), 197–215.

[37] D. Zaffran, *Serre problem and Inoue-Hirzebruch surfaces*, Mathematische Annalen **319** (2001), 395–420.

[38] D. Zaffran and F. Battaglia, *Foliations modelling nonrational simplicial toric varieties*, arXiv :1108.1637 (2011).

Index

application entre éventails, 38

carte à coins, 45
cône polyédral convexe (rationnel), 28
cône simplicial, 28
critère de Shephard, 59

donnée LVMB, 51
dual d'un cône, 28

espace $K(G, 1)$, 20
éventail polytopal, 58
éventail simplicial, 33

face d'un cône, 28
facteur d'automorphie, 83
fibré plat associé à une représentation du groupe fondamental, 23

groupe de Cousin, 25

inverse d'une matrice de Vandermonde, 82

lemme de Gordan, 29

monoïde, 27
morphisme torique, 38

$\mathcal{N}_\Delta$, 39
nombre de Salem, 80
Nullstellensatz, 27

polynôme de Laurent, 30

semi-groupe, 27
sommant d'automorphie, 83
sous-groupe maximal compact, 25
sous-groupe maximal complexe, 25
support d'un éventail, 45

topologie de la variété à coins d'un éventail, 41
transformée de Gale, 59
transformée de Shephard, 59

variété à coins d'un éventail, 40

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines classes de variétés complexes compactes non kählériennes.

On regarde d'abord la classe des surfaces de Kato. Étant donnés une surface de Kato minimale S, D le diviseur maximal de S formé des courbes rationnelles de S et $\varpi : \tilde{S} \to S$ le revêtement universel de S, on démontre que $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ est une variété de Stein.

Les variétés LVMB sont la seconde classe de variétés non kählériennes étudiées. Ces variétés complexes sont obtenues en quotientant un ouvert U de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ par un sous-groupe de Lie fermé G de $(\mathbb{C}^*)^n$ de dimension m. On reformule ce procédé en remplaçant U par la donnée d'un sous-éventail de celui de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et G par un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ convenable.

On construit ensuite de nouvelles variétés complexes compactes non kählériennes en combinant une méthode due à Sankaran et celle donnant les variétés LVMB. Sankaran considère un ouvert U d'une variété torique dont le quotient par un groupe W discret est une variété compacte. Ici, on munit une certaine variété torique Y de l'action d'un sous-groupe de Lie G de $(\mathbb{C}^*)^n$ de sorte que le quotient X de Y par G soit une variété, puis on quotiente un ouvert de X par un groupe discret W analogue à celui de Sankaran.

Enfin, on étudie les variétés OT, une autre classe de variétés non kählériennes, dont on démontre que leur dimension algébrique est nulle. Ces variétés sont obtenues comme quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^m$ par le produit semi-direct du réseau des entiers d'une extension de corps finie K de $\mathbb{Q}$ et d'un sous-groupe des unités de K bien choisi.

Summary

In this thesis we study certain classes of complex compact non-Kähler manifolds.

We first look at the class of Kato surfaces. Given a minimal Kato surface S, D the divisor consisting of all rational curves of S and $\varpi : \tilde{S} \to S$ the universal covering of S, we show that $\tilde{S} \setminus \varpi^{-1}(D)$ is a Stein manifold.

LVMB manifolds are the second class of non-Kähler manifolds that we study here. These complex compact manifolds are obtained as quotient of an open subset U of $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ by a closed Lie subgroup G of $(\mathbb{C}^*)^n$ of dimension m. We reformulate this procedure by replacing U by the choice of a subfan of the fan of $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ and G by a suitable vector subspace of $\mathbb{R}^n$.

We then build new complex compact non Kähler manifolds by combining a method of Sankaran and the one giving LVMB manifolds. Sankaran considers an open subset U of a toric manifold whose quotient by a discrete group W is a compact manifold. Here, we endow some toric manifold Y with the action of a Lie subgroup G of $(\mathbb{C}^*)^n$ such that the quotient X of Y by G is a manifold, and we take the quotient of an open subset of X by a discrete group W similar to Sankaran's one.

Finally, we consider OT manifolds, another class of non-Kähler manifolds, and we show that their algebraic dimension is 0. These manifolds are obtained as quotient of an open subset of $\mathbb{C}^m$ by the semi-direct product of the lattice of integers of a finite field extension K over $\mathbb{Q}$ and a subgroup of units of K well-chosen.