AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Nancy-Université Université Nancy 2 **UFR mathématiques et informatique**

Département de formation doctorale en informatique ECOLE DOCTORALE IAEM Lorraine

Problèmes classiques en vision par ordinateur et en géométrie algorithmique revisités via la géométrie des droites

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 décembre 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Nancy 2

(spécialité informatique)

par

Guillaume Batog

Rapporteurs :	Olivier Devillers, directeur de recherche, Inria Sophia Antipolis Peter Sturm, directeur de recherche, Inria Grenoble
Examinateurs :	Saïd Benachour, professeur, Université Nancy 2 Éric Colin de Verdière, chargé de recherche, CNRS Pierrick Gaudry, directeur de recherche, CNRS Günter Rote, professeur, Freie Universität Berlin
Directeurs de thèse :	Xavier Goaoc, chargé de recherche, Inria Nancy Sylvain Petitjean, directeur de recherche, Inria Nancy

Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et ses Applications – UMR 7503

Loria

Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.

Félix Klein, thèse [31, p.49], 1868

Résumé

Systématiser : tel est le leitmotiv des résultats de cette thèse portant sur trois domaines d'étude en vision et en géométrie algorithmique. Dans le premier, nous étendons toute la machinerie du modèle sténopé des appareils photos classiques à un ensemble d'appareils photo (deux fentes, à balayage, oblique, une fente) jusqu'à présent étudiés séparément suivant différentes approches. Dans le deuxième, nous généralisons avec peu d'efforts aux convexes de $\mathbb{R}^3$ l'étude des épinglages de droites ou de boules, menée différemment selon la nature des objets considérés. Dans le troisième, nous tentons de dégager une approche systématique pour élaborer des stratégies d'évaluation polynomiale de prédicats géométriques, les méthodes actuelles étant bien souvent spécifiques à chaque prédicat étudié.

De tels objectifs ne peuvent être atteints sans un certain investissement mathématique dans l'étude des congruences linéaires de droites, des propriétés différentielles des ensembles de tangentes à des convexes et de la théorie des invariants algébriques, respectivement. Ces outils ou leurs utilisations reposent sur la géométrie des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, construite dans la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle mais pas complètement assimilée en géométrie algorithmique et dont nous proposons une synthèse adaptée aux besoins de la communauté.

Mots clés : géométrie des droites, modèle d'appareil photo, théorie des transversales géométriques, théorie des invariants, prédicat géométrique

Abstract

Systematize is the leitmotiv of the results in this thesis. Three problems are studied in the field of computer vision and computational geometry. In the first one, we extend all the machinery of the pinhole model for classical cameras to a whole set of cameras (two-slit, pushbroom, oblique, pencil), which were separately studied with different approaches. In the second one, we generalize to convex bodies in $\mathbb{R}^3$ the work on pinning lines by lines or balls, which had so far been tackled by techniques intimately linked to the geometry of the objects. In the third one, we attempt to work out a systematic approach in place of problem-specific methods in order to build polynomial evaluation trees for geometric predicates.

Such goals could not be reached without a mathematical investigation in the study of linear line congruences, differential properties of sets of tangent lines to a convex and classical invariant theory respectively. These tools or their uses are mostly based on line geometry in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. This geometry was designed in the second half of the 19$^{\text{th}}$ century but its full power has not yet been used by the computational geometry community. This thesis therefore also serves as an extended tutorial.

Keywords : line geometry, camera model, geometric transversal theory, invariant theory, geometric predicates

Cette thèse est l'aboutissement d'une longue formation par et pour la recherche, initiée dès juin 2004 au sein de l'équipe-projet Vegas Inria. Je remercie ses membres (permanents, thésards, stagiaires, secrétaires) pour leur accueil, leur disponibilité, leur sympathie. Je suis très reconnaissant de toute l'aide matérielle et humaine dont j'ai pu bénéficier. Merci à Xavier Goaoc pour m'avoir épaulé tout au long de mon cursus universitaire.

Table des matières

Résumé iii

Notations ix

Introduction 1

I Préliminaires sur la géométrie des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 7

Avant-propos historique 9

1 Espace des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 13
1.1 Représentation 13
1.2 Géométrie 19
1.3 Linéarité 25

2 Congruences linéaires de droites 33
2.1 Congruences linéaires projectives 33
2.2 Flots linéaires 44
2.3 Congruences linéaires euclidiennes 51

II Quelques problèmes classiques en vision par ordinateur et en géométrie algorithmique 63

3 Appareils photo linéaires 65
3.1 Introduction 65
3.2 Appareil photo linéaire (non calibré) 68
3.3 Appareil photo linéaire calibré 71
3.4 Compléments 78

4 Étude différentielle des ensembles de tangentes et de transversales à des convexes 89
4.1 Introduction 89
4.2 Variétés des tangentes et des transversales à un convexe 90
4.3 Intersection transverse de variétés de droites tangentes 96
4.4 Épinglage d'une droite par des convexes 100

5 Prédicats géométriques 113
5.1 Introduction 113

5.2 Quelques éléments de la théorie des invariants 115
5.3 Intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 120
5.4 Droites transversales à des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 123
5.5 Compléments sur l'intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ 127

Conclusions et perspectives **133**

Annexes **137**

A Topologie de $\mathbb{G}$ **139**

B Regulus **141**
B.1 Définition 141
B.2 Propriétés 141
B.3 Hyperboloïde support 143

C Algèbre de Grassmann-Cayley **145**
C.1 Modèle des grassmanniennes 146
C.2 Les trois opérateurs 147
C.3 Quelques démonstrations pédestres 150

D Compléments sur les ensembles de tangentes et de transversales à un convexe **153**
D.1 Résultats de régularité 153
D.2 Approximations au premier ordre 155

Résumé **164**

Notations

Algèbre linéaire. Quelques prérequis d'algèbre linéaire de premier cycle universitaire sont nécessaires pour la lecture de ce manuscrit. Seules seront utiles les notions dont nous présentons les notations ci-dessous.

$\mathbb{R}^n$	espace vectoriel ou affine réel de dimension n canonique
x, y, a, b,...	vecteur de $\mathbb{R}^n$
$\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$,...	vecteur de $\mathbb{R}^3$
O, A, B, C, ...	point de $\mathbb{R}^3$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	vecteur de $\mathbb{R}^3$ formé par les points A et B
$(x_1, \ldots, x_n)$	coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$
$(x_0, \ldots, x_n)$	coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$
$(x : y)$	concaténation en ligne des coordonnées des vecteurs x et y
$x \cdot y$	produit scalaire canonique de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$
$x \times y$	produit vectoriel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^3$
E, F, H,...	sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (sous-espace en abrégé)
$\mathrm{E} + \mathrm{F}$	somme des sous-espaces E et F
$\dim \mathrm{E}$	dimension du sous-espace E
Vect X	sous-espace engendré par le sous-ensemble $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^n$
M, P,...	matrice carrée de taille n, identifiée à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé
I_n	matrice identité de taille n
$\begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & \cdots & \mathrm{M}_k \end{pmatrix}$	concaténation en ligne de matrices ou vecteurs colonnes possédant le même nombre de lignes, notation similaire pour la concaténation en colonne
Ker M, Im M	noyau et image de l'endomorphisme M
$\mathrm{M}x$, $\mathrm{M}(x)$	image du vecteur x par l'endomorphisme M
E(M)	union des sous-espaces propres de M
$\mathscr{B}$	base de $\mathbb{R}^n$
$x_{\mathfrak{t}}$, $x_{\mathfrak{r}}$, $x_{\mathfrak{n}}$	vecteur colonne représentant x dans la base terrestre, rétinale, normalisée respectivement
$\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$	matrice de l'endomorphisme M représenté dans la base normalisée

Géométrie projective. Nous supposons le lecteur familier avec la géométrie projective. Toutefois, quelques rappels parsèment le premier chapitre, dès que nous avons besoin d'un outil. Nous pouvons conseiller la lecture d'ouvrages traitant du sujet : Tauvel [94], Samuel [85] ou Berger [7].

$\mathbb{P}^n$	espace projectif réel de dimension n
$(\mathbb{P}^n)_{\mathbb{C}}$	espace projectif complexe de dimension n
$\mathrm{X}_{\mathbb{C}}$	injection d'un objet de $\mathbb{P}^n$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$
$[x]$	point projectif de $\mathbb{P}^n$ associé au vecteur $x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$
$[\mathrm{X}]$	sous-ensemble de $\mathbb{P}^n$ associé au sous-ensemble homogène $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ avec $[\{0\}] = \varnothing$ par convention
$\widetilde{\mathrm{X}}$	homogénéisé d'un sous-ensemble $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{P}^n$, c'est-à-dire $\mathrm{X} = [\widetilde{\mathrm{X}}]$
$[\mathrm{M}]$	transformation projective de $\mathbb{P}^n$ associée à l'endomorphisme M de $\mathbb{R}^{n+1}$
$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$	coordonnées homogènes d'un point de $\mathbb{P}^n$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$
$[x : y]$	notation abrégée pour $[(x : y)]$
E, F, H,...	sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n$ (sous-espaces en abrégé)
$\mathrm{E} + \mathrm{F}$	somme des sous-espaces E et F, c'est-à-dire $[\widetilde{\mathrm{E}} + \widetilde{\mathrm{F}}]$
Proj X	sous-espace engendré par le sous-ensemble $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{P}^n$
$\uplus$	union disjointe

Algèbre extérieure. L'annexe C présente l'essentiel sur les algèbres extérieures. Nul besoin de la lire comme un prérequis, les outils servant dans nos travaux sont introduits au fur et à mesure au cours du premier chapitre.

$(\Lambda\mathbb{R}^n, \vee, \wedge, \star)$	algèbre de Hodge sur $\mathbb{R}^n$
$\Lambda^k\mathbb{R}^n$	k^{e} puissance extérieure de $\mathbb{R}^n$
$\star$	opérateur de Hodge
$\Lambda^k\mathrm{M}$	matrice des mineurs de taille k de M

Ensembles de droites de $\mathbb{P}^3$. Nous présentons ici des conventions de notations dans ce manuscrit, plus que des notations à part entière. Nous sommes attachés à la notation $\mathbb{G}$ pour l'ensemble des droites droites de $\mathbb{P}^3$ afin de rendre à Hermann Grassmann un hommage qui lui est dû.

q	forme quadratique sur $\mathbb{R}^6$ définie par $q(x) = x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_6$
$\mathbb{G}$	ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$, identifié à la quadrique de $\mathbb{P}^5$ définie par q

ζ	point de $\mathbb{P}^5$ de coordonnées homogènes $[\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta}]$
$\zeta^\star$	dual de Hodge de ζ de coordonnées homogènes $[\overrightarrow{\eta} : \overrightarrow{v}]$
ℓ	droite de $\mathbb{P}^3$ vue comme un point de $\mathbb{G}$
(AB)	droite affine de $\mathbb{R}^3$ passant par les points A et B (distincts)
$[x \vee y]$	droite de $\mathbb{P}^3$ passant par les points $[x]$ et $[y]$ (distincts)
$\mathcal{L}$	ensemble de droites de $\mathbb{P}^3$ vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{G}$
$\mathcal{L}^\bullet$	union des supports dans $\mathbb{P}^3$ des droites de $\mathcal{L}$
$\mathcal{H}$	hyperboloïde de $\mathbb{P}^3$
$\mathcal{R}$	un regulus d'un hyperboloïde $\mathcal{H}$, c'est-à-dire $\mathcal{R}^\bullet = \mathcal{H}$
$\mathcal{R}^\circ$	regulus dual de $\mathcal{R}$
X°	orthogonal d'un sous-ensemble $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{P}^5$ relativement à q
$\mathcal{L}\mathrm{X}$	ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$ dont les supports sont inclus dans un sous-ensemble $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{P}^3$
$\mathcal{L}_\mathrm{M}$	ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$ engendrées par une application linéaire M de $\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire de la forme $[x \vee \mathrm{A}x]$ avec $x \in \mathbb{R}^4 \backslash \mathrm{E(M)}$

Introduction

Dans cette thèse d'informatique théorique, nous nous intéressons à divers problèmes sur les droites intervenant en géométrie algorithmique et en vision. Objets fondamentaux de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace, les droites sont souvent utilisées comme un *outil* en tant que tel pour établir des propriétés géométriques (théorème de Thalès, géométrie du triangle, ...), pour représenter des ensembles mathématiques (via l'algèbre linéaire) ou pour modéliser des phénomènes physiques (mouvement rectiligne, rayon lumineux, ...). Concernant les problèmes étudiés dans cette thèse, les droites ou leurs ensembles constituent un *objet d'étude* en soi. Étonnamment, les travaux actuels en géométrie algorithmique ou en vision ne tiennent pas pleinement compte de cet aspect, usant de moyens détournés ou spécifiques à des situations particulières pour aboutir à des résultats. Partant de ce constat, le principe général guidant cette thèse consiste à introduire des outils géométriques *adéquats* pour les droites afin de mieux *systématiser* les approches en vue d'aborder les problèmes sur les droites.

Plan de la thèse. Un géomètre-algorithmicien recherchant des ressources qui lui seraient utiles en géométrie des droites se retrouve généralement tiraillé entre deux situations. D'un côté, il trouve une littérature abondante sur l'étude générale des variétés grassmanniennes (représentant les sous-espaces vectoriels de dimension fixée dans $\mathbb{R}^n$), présentée sous le formalisme peu digeste de la géométrie algébrique moderne. D'un autre côté, il dispose de nombreux tutoriels sur les coordonnées de Plücker (paramétrant l'espace des droites de $\mathbb{R}^3$), très limités, calculatoires et plutôt orientés pour l'infographie. La géométrie classique des droites a été largement étudiée entre le milieu du XIX$^{\text{e}}$ et le début du XX$^{\text{e}}$ siècle, avec des contributions dispersées et difficilement accessibles de nos jours. C'est pourquoi il a paru nécessaire de la remettre à plat dans la partie I à travers une présentation géométrique à destination des géomètres-algorithmiciens.

Le « matériel » de la géométrie des droites apporte une nouvelle façon d'aborder plusieurs problèmes géométriques étudiés en vision ou en géométrie algorithmique. Dans tous les cas, cette approche conduit à retrouver, unifier voire généraliser des résultats existants et fournit des pistes intéressantes pour poursuivre l'étude de ces problèmes, développés dans la partie II.

Le premier problème (chapitre 3) concerne la modélisation mathématique d'une classe d'appareils photographiques qui ont intéressé la recherche en vision depuis la fin des années 90. Bien souvent, l'étude classique de ces appareils (formules de projection, stéréo-vision, ...) était menée par type d'appareil, avec des techniques à première vue distinctes. Plusieurs solutions ont été proposées pour unifier les modèles. Toutefois, notre modèle, dit *linéaire*, permet d'obtenir des formules à la fois closes et compactes, paramétrées par le type de l'appareil photo, ce qui permet entre autres d'établir des formules de stéréo-vision entre appareils de types possiblement distincts.

Le deuxième problème (chapitre 4) aborde l'étude de l'épinglage d'une droite par des convexes de $\mathbb{R}^3$ (c.-à-d. la droite est isolée dans l'ensemble des droites transversales aux convexes), initiée au début des années 2000 en géométrie algorithmique, essentiellement pour des boules disjointes puis récemment pour des droites. Les techniques et points de vue adoptés ouvrent peu de perspectives de généralisation à des classes plus larges de convexes. Grâce à une étude différentielle *locale* des ensembles de droites tangentes à un convexe, nous élargissons le champ d'étude des épinglages aux convexes ronds (de classe $\mathscr{C}^2$ et de courbure de Gauss strictement positive en tout point du bord) et aux cylindres convexes.

Le troisième et dernier problème (chapitre 5) s'intéresse à deux prédicats géométriques, l'un portant sur le nombre de droites transversales à k droites données de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, l'autre sur la vacuité

de l'intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Des solutions algorithmiques spécifiques ont déjà été proposées pour ces problèmes. Ici, nous explorons la théorie des invariants afin d'obtenir de façon plus systématique des polynômes « d'origine géométrique » dont les valeurs en les entrées du prédicat permettent de décider la sortie retournée par celui-ci.

Contributions générales. Celles-ci s'articulent autour de trois grands axes, communs à tous les problèmes abordés, les contributions spécifiques étant présentées au début des chapitres correspondants.

1. Poser les outils Un gros travail de défrichage en amont des problèmes a été nécessaire pour repérer les outils mathématiques pertinents à destination du géomètre algorithmicien. Ainsi, nous avons regroupé sous un même chapeau un ensemble le plus complet possible de résultats sur la géométrie des droites de $\mathbb{P}^3$, indépendamment de toute théorie mathématique de haut niveau afin que le tout soit accessible à la communauté de géométrie algorithmique. Dans cette même perspective, nous avons identifié un panel de techniques effectives de calcul d'invariants, dont on illustre la pertinence sur des exemples de prédicats. Enfin, nous avons établi des propriétés différentielles de base sur les ensembles de droites tangentes et transversales à des convexes de $\mathbb{R}^3$ (régularité, approximation au premier ordre, condition d'intersection transverse) pour pouvoir aborder sous un nouvel angle les questions de géométrie des transversales.

2. Unifier les modèles Cette contribution est centrale dans nos travaux sur les appareils photo linéaires. Après avoir remarqué que les ensembles de droites sous-jacents à différents appareils appartiennent à la classe des *congruences linéaires* et après avoir établi l'équivalence de plusieurs représentations de ces congruences, nous introduisons le modèle d'appareil photo linéaire qui unifie de nombreux modèles existants [69, 27, 110, 44, 80]. En particulier, nous considérons deux invariants euclidiens communs à tous les types de congruence ce qui permet d'obtenir des formules unifiées de projection et de stéréo-vision et de concevoir une implémentation commune de ces appareils sous Pbrt [70] (logiciel de rendu d'images de synthèse). Avec un impact moins important, des résultats unificateurs apparaissent également dans nos travaux sur les tangentes à des convexes où l'on peut considérer en même temps des convexes ronds, des cylindres et des polyèdres. En outre, nous établissons l'équivalence entre deux notions d'épinglages, différentes à première vue (stabilité [16] et 1$^{\text{er}}$ ordre [1]).

3. Généraliser les approches C'est la contribution centrale des travaux de cette thèse, résultant tout naturellement des deux contributions précédentes. Dans le premier problème, nous étendons toute la machinerie du modèle sténopé des appareils photos classiques (bases normalisées, projections, matrices fondamentale et essentielle) aux appareils photo linéaires. Cette contribution participe au travail de synthèse sur les modèles d'appareils photo mené dans l'état de l'art de Sturm *et al.* [92]. Dans le deuxième problème, nous généralisons aux convexes de $\mathbb{R}^3$ l'étude des épinglages de droites ou de boules, en systématisant sans effort les techniques combinatoires de l'article *Lines pinning lines* [1]. Dans le troisième problème, nous tentons de dégager une approche systématique pour élaborer des stratégies d'évaluation polynomiale de prédicats géométriques, dans la continuité des travaux de Petitjean [76].

Guide de lecture. Les sections, paragraphes ou démonstrations pouvant être sautés en première lecture sont marqués par une étoile dans la marge comme ici. Les notations mathématiques, introduites les premières fois où elles sont utilisées, sont rappelées en début de manuscrit. Enfin, le lecteur plutôt intéressé par l'étude des épinglages de droites par des convexes (chapitre 4) ou des prédicats géométriques (chapitre 5) peut s'épargner la lecture des chapitres 2 et 3. Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous proposons un petit avant-propos historique sur la géométrie des droites.

☆

Première partie

Préliminaires sur la géométrie des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Avant-propos historique

Cet avant-propos retrace un petit historique sur la géométrie des droites, de l'Antiquité jusqu'à nos jours, en se focalisant notamment sur les domaines nous concernant, à savoir la vision par ordinateur et la géométrie algorithmique. Il ne se veut en aucun cas exhaustif, cela nécessiterait un travail de recherche à part entière. Seulement, cet historique semble peu abordé[1], car d'abord peu populaire auprès de la communauté scientifique. C'est pourquoi, il a semblé opportun de regrouper dans un petit préambule les informations glanées ici ou là[2], pour le plus grand plaisir de l'auteur !

La ligne droite. Que ce soit pour calculer des surfaces ou pour réaliser des constructions architecturales, les Égyptiens, Indiens, Chinois ou Grecs ont manipulé lignes droites et arcs de cercle afin d'établir les premiers résultats de la géométrie [18]. Dans ses *Éléments*, Euclide (325–265 av. JC) formalise la notion de ligne droite (dans le plan et l'espace) : c'est « une ligne également placée entre ses points » (définition 4) où une ligne est définie comme « une longueur sans largeur » (définition 2). Le premier axiome de la géométrie d'Euclide postule que par deux points distincts passe une unique ligne droite. Malgré la grande intuition qu'on peut avoir d'une ligne droite, il n'est pas possible d'en donner une définition *ex nihilo* à partir de la donnée de deux points distincts. D'ailleurs, les différentes définitions intrinsèques proposées jusqu'au XVIII^{e} siècle restent tout aussi imprécises que celle d'Euclide (quelques citations amusantes sont répertoriées sur la page web [111]), comme en témoigne D'Alembert dans son *Encyclopédie* :

> « Une courbe est, dit-on, une ligne dont les différents points sont dans différentes directions, ou sont différemment situés les uns par rapport aux autres. [...] Courbe, ajoute-t-on, pris en ce sens, est opposé à ligne droite dont les points sont tous situés de la même manière les uns par rapport aux autres. On trouvera peut-être chacune de ces définitions peu précise ; et on n'aura pas tort. »

L'essor de la géométrie analytique à partir du XVII^{e} siècle a déjà permis de définir une droite à l'aide d'équations relativement à un système de coordonnées. Pour s'abstraire de ces coordonnées, il faut attendre le développement de l'algèbre vectorielle, initiée par Hermann Grassmann [39] (1809–1877) et popularisée par Guiseppe Peano [71] (1858–1932), à l'origine des définitions couramment introduites en 1er cycle universitaire. De façon plus radicale, David Hilbert (1862–1943) évite de définir les droites en les incorporant (en tant qu'*éléments de la Géométrie plane* ou *de l'espace*) dans une axiomatisation de la géométrie [48]. Les axiomes d'*association* postulent alors que :

- deux points distincts déterminent une droite ;
- deux points distincts quelconques d'une droite déterminent cette droite ;
- sur toute droite, il y a au moins deux points.

Pour en savoir davantage sur les différentes définitions d'une ligne droite au cours de l'Histoire, on peut consulter la synthèse [9] de Rudolf Bkouche.

[1] Signalons par exemple l'article de 3 pages dédié à Julius Plücker dans l'ouvrage de Collette [18] où il n'est fait mention de ses travaux sur les droites que dans un petit paragraphe !

[2] Mentionnons *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk`.

Le temps des pionniers (1810–1930). Le début du XIX^{e} siècle marque des grandes avancées en géométrie projective plane, notamment en ce qui concerne le principe de dualité point/droite. C'est ainsi la première fois qu'est systématisée la notion d'*ensembles de droites*, placés au même plan que les ensembles de points. Une polémique a entouré la paternité de ces découvertes entre Joseph Gergonne (1771–1859) et Jean-Victor Poncelet (1788–1867). Le premier a introduit progressivement les concepts de polaire d'un point dans divers articles de ses *Annales de Mathématiques*, notamment dans une solution au problème d'Apollonius en 1816 [33]. Le second a publié un traité complet de géométrie projective en 1822 [81], mettant à plat la notion de dualité. Julius Plücker (1801–1868) quant à lui fut le premier en 1828 à considérer le dual d'une courbe du plan [78] comme l'ensemble de ses droites tangentes.

Dans l'espace projectif à trois dimensions, Plücker poursuit des travaux sur les droites en annonçant explicitement vouloir les considérer comme des éléments de base, au même titre que les points : *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* est publié en 1868 dans un premier volume [79]. Plücker y introduit six coordonnées pour décrire une droite de l'espace, appelées aujourd'hui *coordonnées de Plücker*. Dans le second volume, édité par son élève Félix Klein (1849–1925), il considère des ensembles de droites en tant que tels, définis à l'aide de contraintes sur leur coordonnées. Lorsqu'il y en a deux indépendantes, on parle de *congruences de droites* pour ces ensembles.

Klein a poursuivi les travaux sur les droites, dans l'esprit de son programme d'Erlangen d'algébrisation de la géométrie. Ses contributions rien que dans ce domaine sont si nombreuses au point que tout un recueil leur est entièrement dédié [31]. En 1872, dans *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie* [31, p.106], Klein identifie pour la première fois l'ensemble des droites projectives comme une quadrique d'un espace projectif à 5 dimensions sur laquelle agissent des transformations projectives induites par celles de l'espace de départ de dimension 3 : il a introduit une *géométrie des droites*.

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5.

Diese Aussage findet in dem folgenden Verhalten der Linienkoordinaten p_{ik} ihre eigentliche Begründung. Für die Koordinaten p_{ik} hat man:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Damit sich nun zwei Gerade, p und p', schneiden, muß sein:

$$\sum_1^6 \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \cdot p'_{ik} = 0.$$

Infolgedessen kann man den folgenden Satz aufstellen, den ich bereits gelegentlich mitteilte[10]):

Setzt man statt der Linienkoordinaten p_{ik} beliebige lineare Funktionen derselben, die nur der einen Bedingung genügen sollen, die Mannigfaltigkeit $M_4^{(2)}$:

$$P = 0$$

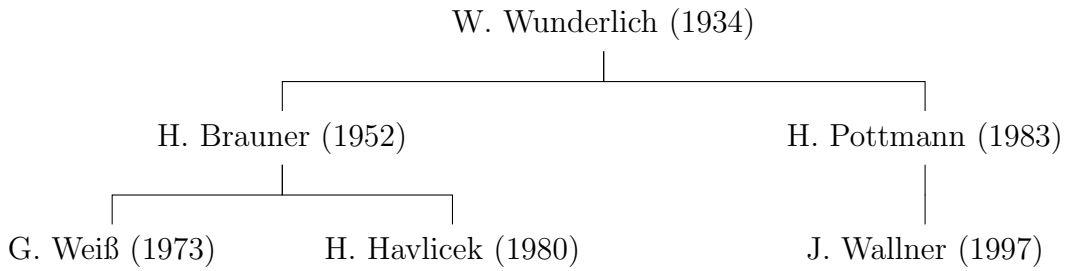
in sich überzuführen, so hat man eine kollineare oder eine dualistische (reziproke) Umformung des Linienraumes. Andererseits erhält man auf diesem Weg alle solchen kollinearen und reziproken Umformungen.

Klein a également poursuivi l'étude des congruences algébriques de droites, qu'on peut distinguer par leur *ordre* (nombre de droites passant par un point générique) et leur *classe* (nombre de droites contenues dans un plan générique). L'étude de telles congruences, notamment leur classification, a fait l'objet d'écrits encyclopédiques en allemand [93, 109]. Signalons toutefois l'existence de quelques publications en anglais datant du début du XX^{e} siècle et présentant de façon plus synthétique et plus moderne les résultats essentiels sur la géométrie des droites [54, 101].

Terminons enfin avec la contribution majeure de Hermann Grassmann (1809–1877) qui, dès 1844, a posé les prémices d'algèbre linéaire et de l'algèbre extérieure [39] en introduisant des opérations d'addition sur les sous-espaces vectoriels. Ses travaux beaucoup plus généraux que ceux de Plücker sur les droites n'ont trouvé que peu d'écho à l'époque, à tel point que Klein réintroduisit indépendamment ces outils algébriques près d'un demi-siècle plus tard ! Actuellement, les espaces de sous-espaces vectoriels sont appelés *variétés grassmanniennes*, en hommage aux travaux de Grassmann.

La fuite en avant algébriste. Nous ne nous étendrons pas sur le sujet, à défaut de pouvoir comprendre les ressorts de la géométrie algébrique. Le fait est que l'algébrisation de la géométrie dans la seconde moitié du XX^{e} siècle a conduit à un mouvement de généralisation globale des mathématiques dans lequel la géométrie des droites s'est retrouvée noyée, et donc délaissée. Signalons par exemple que la référence courante sur la géométrie des droites utilisée par les géomètres algébristes date de 1953 [50, Chap. XIV].

L'école viennoise. Parallèlement au déploiement tentaculaire de la géométrie algébrique dans les mathématiques contemporaines, certains ont continué à investiguer des problèmes sous l'angle de la géométrie *classique*, *réelle* et *différentielle*, assurant ainsi une transmission des savoirs géométriques dans la communauté mathématique. En ce qui concerne la géométrie des droites, on distingue plus particulièrement une « école de recherche » à l'Université Technique de Vienne (Autriche), dont les acteurs principaux figurent dans l'arbre[3] ci-dessous :



Brauner a rédigé de nombreux articles sur la géométrie des droites, inspiré des travaux de Wunderlich sur la théorie des vissages, et des monographies en géométrie projective, différentielle, constructive et architecturale (où interviennent surfaces réglées et développables). Il étudie en particulier les transformations projectives de l'espace qui engendrent des congruences elliptiques (dont nous généralisons l'étude à l'ensemble des congruences dans le chapitre 2). Weiß a complété le panorama en publiant une série de trois articles[4] sur l'aspect euclidien de la géométrie des droites. Havlicek s'est intéressé aux applications « linéaires » envoyant l'espace des droites sur un espace projectif et aux aspects affines et axiomatiques de la géométrie des droites. L'ensemble de ces travaux ont été rédigés quasi-exclusivement en allemand, ce qui a légèrement limité leur diffusion auprès de la communauté non-germanophone. C'est pourquoi *la* référence bibliographique du moment est attribuée à Pottmann et Wallner dans la monographie *Computational Line Geometry* [82], s'appuyant sur les travaux de l'école viennoise et faisant une large place aux applications.

[3] Ces données proviennent du *Mathematics Genealogy Project*. `http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu` Les dates indiquent les années de soutenance de thèse.

[4] auxquels je n'ai pas réussi à avoir accès.

De nouvelles applications. Au-delà des aspects théoriques entourant la géométrie des droites, celle-ci est rapidement devenue un outil en tant que tel pour de nombreuses applications en informatique.

Dès la fin du XIX^{e} siècle, les points en-dehors de la quadrique de Klein, modèle des droites de l'espace, s'interprètent comme des *vissages*[5] et sont utilisés en cinématique pour représenter des mouvements ou des moments de systèmes de forces [13]. En robotique, la théorie sous-jacente de l'algèbre extérieure facilite énormément la caractérisation des positions appelées *critiques* d'un robot série-parallèle [104], positions correspondant physiquement à des situations de blocage, de perte de contrôle, de changement du nombre de degrés de liberté... Par exemple, un robot parallèle à six bras est en position critique lorsque les coordonnées de Plücker des droites supports des bras sont linéairement dépendantes. Cette approche permet également d'étudier plus particulièrement les systèmes rigides.

En infographie, l'utilisation de coordonnées de Plücker semble avoir été initiée au début des années 90. Teller [95] les introduit pour calculer les zones de pénombre dans une scène constituée de portails[6] (objets polygonaux possédant un trou). Ces travaux sont motivés par la modélisation des scènes de jeux vidéo d'aventure, en plein essor à cette époque. Pellegrini [72] apporte une solution algorithmique, via les coordonnées de Plücker, au problème du lancer de rayon dans une scène de triangles, à savoir déterminer efficacement le premier triangle rencontré par un rayon. Ces résultats permettent d'accélérer les techniques de rendu par images de synthèse. Grâce à ces avancées, la communauté d'infographie a rapidement adopté les coordonnées de Plücker, comme en témoigne la multitude de tutoriels sur cet outil, bien souvent réduits à une simple trousse de secours : définition, orientation relative de deux droites et intersection d'une droite et d'un triangle. L'ouvrage de Stolfi [90] fournit un catalogue complet des formules liant les coordonnées de points, de droites et de plans.

Parallèlement, la géométrie des droites a également fait son apparition dans les travaux en géométrie algorithmique. Le point de vue est alors beaucoup plus algorithmique, où l'idée consiste à représenter les objets géométriques manipulés dans des structures de données qui permettent d'effectuer de nombreuses requêtes sur ces objets avec le moins possible de calculs. Stolfi [90] fournit un catalogue complet de primitives géométriques faisant intervenir les coordonnées de points, de droites et de plans. Pellegrini [72] et Chazelle et al. [15] sont les premiers de la communauté à utiliser la géométrie de l'espace des droites pour plusieurs problèmes concernant les positions relatives de droites orientées (configurations isotopes, descriptions combinatoires,...). L'état de l'art de Pellegrini [73] regroupe l'ensemble des résultats dans ce domaine.

Conclusion. Quoique plus ancienne, la géométrie des droites a souffert de l'explosion de l'algèbre linéaire et de la géométrie algébrique, pour lesquelles il existe une littérature très vaste. À moins d'appartenir à une lignée de géomètres initiés, cette géométrie s'avère souvent être un outil providentiel pour résoudre ses propres problèmes plutôt qu'un outil allant de soi, comme peuvent l'être aujourd'hui les espaces vectoriels par exemple. Le peu de monographies modernes et la prépondérance de la langue allemande dans les publications sur le sujet font que la géométrie des droites est largement inconnue du grand public. C'est pourquoi il nous est apparu opportun de prendre le temps de présenter en deux chapitres, sous un angle nouveau, les différents outils de la géométrie des droites qui seront utilisés par la suite.

[5] Schraube, screw
[6] En anglais, *portals*

Chapitre 1

Espace des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Ce chapitre préliminaire constitue un tour d'horizon sur l'espace $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ($\mathbb{P}^3$ en abrégé) qui s'articule en trois temps. Dans la section 1.1, nous introduisons de manière classique les coordonnées de Plücker d'une droite projective et différents modèles de $\mathbb{G}$ (ou d'un sous-ensemble affine) qui en découlent. Dans la section 1.2, nous étudions la géométrie de $\mathbb{G}$ à travers la théorie des formes quadratiques. L'originalité de cette section réside dans sa présentation algébrique conduisant à des démonstrations intuitives et élégantes (car sans calculs), tout en restant accessible à un étudiant de licence. Dans la section 1.3, nous introduisons la notion de dépendance linéaire entre droites et donnons une classification projective des ensembles linéaires de droites. Contrairement à l'approche du haut vers le bas suivie par Pottmann et Wallner [82, chap. 3], nous proposons une étude plus unifiée de ces ensembles linéaires.

1.1 Représentation

En géométrie, on peut vouloir introduire des coordonnées pour représenter des objets afin de mieux les manipuler, via des calculs sur ordinateur par exemple. L'objet principal de cette section consiste à décrire des systèmes de coordonnées sur les droites. La section 1.1.1 introduit les coordonnées de Plücker. Elles fournissent un modèle algébrique lisse de l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$ à travers la quadrique de Klein de $\mathbb{P}^5$, modèle qui est utilisé tout au long du manuscrit. La section 1.1.2 donne une interprétation géométrique des coordonnées de Plücker de droites affines, grâce à laquelle on démontre simplement les principales propriétés sur ces coordonnées. Au cours de ce chapitre, cette interprétation simplificatrice permet de s'abstraire, si besoin est, de quelques résultats techniques concernant l'algèbre de Grassmann-Cayley (annexe C). Enfin, la section 1.1.3 s'intéresse aux paramétrisations linéaires par $\mathbb{R}^4$ de l'ensemble des droites affines non parallèles à un plan donné.

Notations. Nous invitons le lecteur à se référer à la liste de notations en début de manuscrit si besoin. Rappelons la principale d'entre elles : étant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, on note $[x]$ le point projectif de $\mathbb{P}^n$ associé, c'est-à-dire l'image de x par la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^n$. Les coordonnées homogènes de $[x]$ sont notées $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$.

1.1.1 Droites projectives

La droite comme élément. Une *droite projective* de $\mathbb{P}^3$ (*droite de* $\mathbb{P}^3$ ou *droite* en abrégé) est un sous-espace projectif de dimension 1. On note $\mathbb{G}$ l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$. Dans tout le manuscrit, une distinction de notation est faite entre la droite $\ell \in \mathbb{G}$ vue comme un élément de l'ensemble $\mathbb{G}$ des droites et son *support* $\ell^\varsigma \subset \mathbb{P}^3$ vu comme un ensemble de points de $\mathbb{P}^3$.

Dans le texte, on omet parfois de préciser « le support » lorsqu'aucune ambiguïté n'est possible : par exemple, on dit que deux droites se coupent (sont sécantes), qu'une droite coupe (passe par) un ensemble de $\mathbb{P}^3$, etc. Par extension, on définit le *support* $\mathcal{L}^{\varsigma} \subset \mathbb{P}^3$ d'un ensemble de droites $\mathcal{L} \subset \mathbb{G}$ comme l'union des supports des droites de $\mathcal{L}$. Remarquons qu'une droite ℓ est entièrement déterminée par son support ℓ^{ς}, ce qui n'est pas forcément le cas pour des ensembles de droites : un hyperboloïde[1] est le support de deux familles possibles de droites (cf. annexe B).

Coordonnées de Plücker. La donnée de deux points distincts $[a]$ et $[b]$ de $\mathbb{P}^3$ (avec $a, b \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$) définit entièrement une droite $\ell([a],[b])$ par

$$\ell([a],[b])^{\varsigma} = \{[\lambda\, a + \mu\, b] \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\} = \mathrm{Proj}\,\{[a];[b]\}.$$

Dans ce paragraphe, on définit des coordonnées pour une droite $\ell([a],[b])$ en fonction de $[a]$ et $[b]$ qui ne dépendent pas du couple de points distincts choisis sur $\ell([a],[b])^{\varsigma}$.

Considérons une base (e_0, e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^4$. Pour deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^4$ non colinéaires de coordonnées respectives $(a_0, \ldots, a_3)$ et $(b_0, \ldots, b_3)$, on définit le *produit extérieur* [2] de a et b, noté $a \vee b$, par

$$a \vee b = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \zeta_0 = a_0b_1 - a_1b_0 & \zeta_3 = a_2b_3 - a_3b_2 \\ \zeta_1 = a_0b_2 - a_2b_0 & \zeta_4 = a_3b_1 - a_1b_3 \\ \zeta_2 = a_0b_3 - a_3b_0 & \zeta_5 = a_1b_2 - a_2b_1 \end{cases}.$$

Ces coordonnées correspondent aux déterminants 2×2 de la matrice formée des deux vecteurs colonnes a et b. Ainsi, $a \vee b$ est nul si et seulement si a et b sont colinéaires, c'est-à-dire $[a] = [b]$. En outre, $a \vee b$ est homogène en a et b. Par conséquent, la fonction

$$\begin{cases} \left(\mathbb{P}^3\right)^2 & \longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ ([a],[b]) & \longmapsto [a \vee b] \end{cases}$$

est bien définie pour tout couple de points distincts de $\mathbb{P}^3$. Enfin, considérons la paire $([\alpha_1\, a + \beta_1\, b], [\alpha_2\, a + \beta_2\, b])$ définissant la droite $\ell([a],[b])$, avec le déterminant $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ non nul pour que les points soient distincts. Puisque $\vee$ est bilinéaire et antisymétrique,

$$\left[(\alpha_1\, a + \beta_1\, b) \vee (\alpha_2\, a + \beta_2\, b)\right] = \left[\alpha_1\alpha_2 \underbrace{a \vee a}_{=0} + \beta_1\beta_2 \underbrace{b \vee b}_{=0} + \underbrace{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}_{\neq 0}\, a \vee b\right] = [a \vee b].$$

Finalement, la fonction

$$\gamma\colon \begin{cases} \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ \ell \longmapsto [a \vee b] \ \text{ avec } \ell = \ell([a],[b]) \end{cases}$$

est bien définie et est appelée *application de Plücker*. On définit les *coordonnées de Plücker* d'une droite $\ell \in \mathbb{G}$ relativement à la base $(e_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ comme (les coordonnées homogènes de) l'image de ℓ par l'application de Plücker. Insistons sur le fait que les coordonnées de Plücker dépendent d'une base homogène de $\mathbb{P}^3$. La section 1.2.3 détaillera l'effet d'un changement de base de $\mathbb{P}^3$ sur ces coordonnées. Terminons par le lemme qui suit justifiant l'emploi du terme « coordonnées ».

[1] La distinction entre hyperboloïde à une ou deux nappes est d'ordre affine : projectivement, un hyperboloïde à une nappe est un hyperboloïde tandis qu'un hyperboloïde à deux nappes est une sphère. Dans toute la suite, on appelle hyperboloïde un hyperboloïde projectif ou un hyperboloïde affine à une nappe.

[2] Le produit extérieur est, en fait, un opérateur beaucoup plus général défini dans le cadre de l'algèbre extérieure (cf. annexe C).

Lemme 1.1.
L'application de Plücker γ est injective.

La démonstration résulte des propriétés du produit extérieur général présentées dans l'annexe C (notamment la relation (C.4)). Nous présentons en annexe (lemme C.3) l'analogue pédestre de cette démonstration. Comme nous le verrons dans la section 1.1.2 suivante, ce résultat est immédiat lorsqu'on se restreint à l'ensemble des droites affines.

Quadrique de Klein. D'après le lemme 1.1, on peut identifier l'ensemble des droites $\mathbb{G}$ à son image par l'application de Plücker qui est un sous-ensemble de $\mathbb{P}^5$. Le lemme suivant assure qu'il s'agit d'une quadrique, appelée *quadrique de Klein* :

Proposition 1.2.
L'image de l'application de Plücker γ est une quadrique définie par

$$q(\zeta) = \zeta_0\,\zeta_3 + \zeta_1\,\zeta_4 + \zeta_2\,\zeta_5 = 0.$$

Démonstration. Soit $\ell([a],[b])$ une droite de $\mathbb{G}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^4$ non colinéaires. Considérons la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & a & b \end{pmatrix}$ de rang 2 et calculons son déterminant (qui est nul) par blocs suivant les deux premières colonnes à l'aide de la formule (C.7). Les mineurs de taille 2 qui interviennent sont exactement les coordonnées de Plücker $[\zeta_0 : \cdots : \zeta_6]$ de $[a \vee b]$ et satisfont exactement la relation

$$\det(\mathrm{M}) = 2\,(\zeta_0\,\zeta_3 + \zeta_1\,\zeta_4 + \zeta_2\,\zeta_5) = 0.$$

Ainsi, $\gamma(\mathbb{G})$ est inclus dans la quadrique de Klein.

Réciproquement, soit $[\zeta]$ un point de $\mathbb{P}^5$ appartenant à la quadrique de Klein, de coordonnées $[\zeta_0 : \cdots : \zeta_5]$. Considérons les quatre vecteurs suivants :

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \qquad a_1 = \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ 0 \\ -\zeta_5 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} \qquad a_2 = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_5 \\ 0 \\ -\zeta_3 \end{pmatrix} \qquad a_3 = \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ -\zeta_4 \\ \zeta_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Au moins deux de ces vecteurs ne sont pas colinéaires car $(\zeta_0, \ldots, \zeta_5) \neq 0$ (par exemple, a_0 et a_1 si $\zeta_0 \neq 0$), notons-les x et y. On vérifie par le calcul que $[x \vee y] = [\zeta]$. Par exemple, si $\zeta_0 \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} \zeta_0 \\ 0 \\ -\zeta_5 \\ \zeta_4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\zeta_0}^2 \\ \zeta_0\zeta_1 \\ \zeta_0\zeta_2 \\ -\zeta_2\zeta_5 - \zeta_1\zeta_4 \\ \zeta_0\zeta_4 \\ \zeta_0\zeta_5 \end{pmatrix} = \zeta_0 \begin{pmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, tout point de la quadrique de Klein représente les coordonnées de Plücker d'une droite de $\mathbb{G}$. □

En corollaire de cette proposition, on peut considérer les identifications suivantes :

> Dans toute la suite du manuscrit, on identifie une droite $\ell \in \mathbb{G}$ définie par deux points distincts $[x]$ et $[y]$ et ses coordonnées de Plücker $[x \vee y]$. Par extension, on identifie $\mathbb{G}$ à la quadrique de Klein de $\mathbb{P}^5$.

Structure de $\mathbb{G}$. La quadrique de Klein est définie par une forme quadratique q non dégénérée donc $\mathbb{G}$ est une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^5$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.[3] Ainsi, il existe un hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ en tout point ℓ, noté $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G}$. La règle de dédoublement des variables pour la forme quadratique q fournit une équation de l'hyperplan tangent $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G}$:

$$\zeta_3\, x_0 + \zeta_4\, x_1 + \zeta_5\, x_2 + \zeta_0\, x_3 + \zeta_1\, x_4 + \zeta_2\, x_5 = 0 \tag{1.1}$$

où $\ell = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_5]$. La topologie de $\mathbb{G}$ est alors définie comme la topologie la moins fine engendrée par les intersections avec $\mathbb{G}$ des ouverts de $\mathbb{P}^5$. Comment ces ouverts s'interprètent-ils géométriquement dans $\mathbb{P}^3$, c'est-à-dire en termes de supports des droites ? L'objet de l'annexe A est de répondre à cette question, en particulier de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.3.

> *La topologie de $\mathbb{G}$ est engendrée par les ouverts définis par les ensembles de droites dont les supports passent par deux ouverts de $\mathbb{P}^3$.*

1.1.2 Droites affines

Une *droite affine* de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace affine de dimension 1. Elle est entièrement déterminée par la donnée de deux points distincts A et B, son support ℓ^ς étant l'ensemble des barycentres de ces points :

$$\ell^\varsigma = \{\, t\,\mathrm{A} + (1-t)\,\mathrm{B} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Elle est également caractérisée par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (non nul) :

$$\ell^\varsigma = \left\{\, \mathrm{A} + t\,\overrightarrow{u} \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$

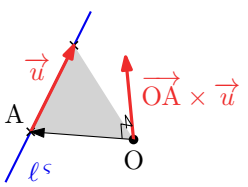
Liens avec le cadre projectif. L'espace affine $\mathbb{R}^3$ se plonge naturellement dans l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ grâce à l'identification suivante : à un point A de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (a_1, a_2, a_3) est associé le point $[a]$ de $\mathbb{P}^3$ de coordonnées homogènes $[1 : a_1 : a_2 : a_3]$. L'ensemble des points de $\mathbb{P}^3$ de coordonnées homogènes $[0 : x_1 : x_2 : x_3]$ forme un plan appelé *plan à l'infini*, modélisé par les directions des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, à un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_1, u_2, u_3) est associé le point projectif $[u]$ de coordonnées homogènes $[0 : u_1 : u_2 : u_3]$. On constate alors que les deux définitions d'une droite affine ne sont que des spécialisations de la définition d'une droite projective.

Interprétation géométrique des coordonnées de Plücker. Considérons une droite ℓ caractérisée par un point A de $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$. À partir de l'identification précédente, $[a \vee u]$ sont les coordonnées de Plücker de ℓ. Par définition du produit extérieur, on obtient

$$[a \vee u] = \left[\overrightarrow{u} : \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u}\right]$$

où $\times$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. Ainsi, les coordonnées de Plücker de ℓ ont une interprétation géométrique simple : c'est la concaténation des coordonnées

- d'un vecteur directeur de la droite ℓ^ς ;
- et du moment de ce vecteur par rapport à l'origine.



[3] Autrement dit, l'homogénéisé $\widetilde{\mathbb{G}}$ (privé de 0) est une hypersurface différentielle de $\mathbb{R}^6$. Un sous-espace projectif [H] est tangent à $\mathbb{G}$ en $[x]$ si et seulement si H est tangent à $\widetilde{\mathbb{G}}$ en x.

Conséquences immédiates. Redémontrons sous forme de petits lemmes quelques propriétés des coordonnées de Plücker de droites dans le cadre affine grâce aux propriétés du produit vectoriel $\times$.

Lemme 1.4.
Les coordonnées de Plücker d'une droite affine ne dépendent ni du vecteur la dirigeant, ni du point y appartenant.

Démonstration. Soit ℓ une droite donnée par le point A et le vecteur $\overrightarrow{u}$. Ses coordonnées de Plücker $[a \vee u]$ sont homogènes en $\overrightarrow{u}$. De plus, pour tout point M sur ℓ^{ς},

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{AM}} \times \overrightarrow{u}}_{=0} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u}$$

donc le vecteur moment ne dépend pas du point M choisi sur ℓ^{ς}. □

Lemme 1.5.
La restriction aux droites affines de l'application de Plücker γ est injective.

Démonstration. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux droites affines définies comme précédemment par $(\mathrm{A}_1, \overrightarrow{u_1})$ et $(\mathrm{A}_2, \overrightarrow{u_2})$ respectivement. Si $\gamma(\ell_1) = \gamma(\ell_2)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \lambda\, \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \times \overrightarrow{u_1} = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \times \overrightarrow{u_2} \end{cases}.$$

La première égalité implique que ${\ell_1}^{\varsigma}$ et ${\ell_2}^{\varsigma}$ sont parallèles. La seconde égalité se réécrit

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \times \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \times \lambda\, \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \times \overrightarrow{u_1} \qquad \text{d'où} \qquad \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \times \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$. Comme A_1 appartient à ${\ell_1}^{\varsigma}$, A_2 aussi ce qui implique que les droites parallèles ${\ell_1}^{\varsigma}$ et ${\ell_2}^{\varsigma}$ sont sécantes donc elles sont égales, c.-à-d. $\ell_1 = \ell_2$. □

Lemme 1.6.
L'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^3$ est en bijection avec la quadrique de Klein privée du sous-espace projectif de dimension 2 d'équation $\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$.

Démonstration. Par propriété du produit vectoriel, $\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u}\right) = 0$ donc les coordonnées de Plücker d'une droite affine vérifient la relation de Plücker de la proposition 1.2. Réciproquement, soit $[\zeta]$ un point de la quadrique de Klein de coordonnées $[\zeta_0 : \cdots : \zeta_5]$ avec $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \neq (0, 0, 0)$. Montrons que $[\zeta]$ représente une droite affine. Notons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ et $(\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5)$ respectivement. Considérons le point A défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{\|u\|^2}.$$

Les coordonnées de Plücker de la droite définie par A et $\overrightarrow{u}$ sont données par

$$[a \vee u] = \left[\overrightarrow{u} : \overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u}\right].$$

D'après la formule du double produit vectoriel,

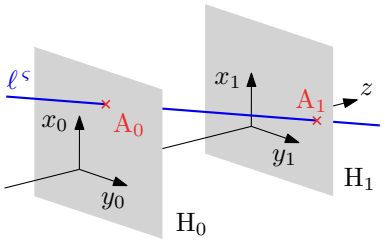
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \times \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}{\|u\|^2}\, \overrightarrow{v} - \Big(\underbrace{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}_{=0}\Big)\, \frac{\overrightarrow{u}}{\|u\|^2} = \overrightarrow{v}$$

car $[\zeta]$ appartient à la quadrique de Klein. Ainsi, $[a \vee u] = [\zeta]$ représente une droite. □

1.1.3 Paramétrisations par $\mathbb{R}^4$

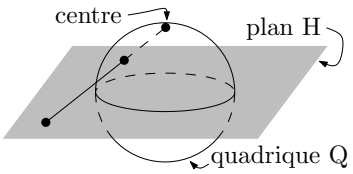
Dans cette section, nous présentons une paramétrisation classique par $\mathbb{R}^4$ de l'ensemble des droites affines qui ne sont pas parallèles à un plan donné. Puis, nous en donnons une définition intrinsèque en remarquant qu'il s'agit simplement d'une projection stéréographique de $\mathbb{G}$ sur un hyperplan de $\mathbb{P}^5$. Les éléments de cette section seront utiles au cours du chapitre 4.

Paramétrisation classique par deux plans. Supposons que $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère affine $(\mathrm{O}; x, y, z)$ et notons H_i $(i \in \{0,1\})$ le plan d'équation $z = i$ et $\mathbb{G}_{/\!/}$ l'ensemble des droites affines qui ne sont pas parallèles à H_0. Toute droite $\ell \in \mathbb{G}_{/\!/}$ coupe chaque H_i en un unique point A_i respectivement. En notant (x_i, y_i, i) les coordonnées de A_i, le point (x_0, y_0, x_1, y_1) de $\mathbb{R}^4$ représente ℓ et toute droite $\ell \in \mathbb{G}_{/\!/}$ possède un unique représentant dans $\mathbb{R}^4$, d'où la bijection



$$\psi_{/\!/} : \begin{cases} \mathbb{G}_{/\!/} & \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ \ell & \longmapsto (x_0, y_0, x_1, y_1) \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \ell^s \cap \mathrm{H}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ i \end{pmatrix}.$$

☆ **Projection stéréographique de $\mathbb{G}$.** Une *projection stéréographique* d'une quadrique lisse Q de $\mathbb{P}^n$ sur un hyperplan H de $\mathbb{P}^n$ la restriction à Q d'une projection centrale sur H dont le centre (disjoint de H) est un point de la quadrique Q. La projection stéréographique est notée ψ et la projection centrale sous-jacente $\widetilde{\psi}$.



Considérons ici la quadrique $\mathbb{G}$ de $\mathbb{P}^5$ et ℓ_∞ un point de $\mathbb{G}$. Toute droite L de $\mathbb{P}^5$ passant par ℓ_∞ et qui n'est pas tangente à $\mathbb{G}$ en ℓ_∞ coupe la quadrique $\mathbb{G}$ en un unique autre point, qui se projette sur H par ψ. En notant $\mathbb{T}_{\ell_\infty}\mathbb{G}$ l'hyperplan de $\mathbb{P}^5$ tangent à $\mathbb{G}$ en ℓ_∞, on en déduit que ψ réalise une bijection entre $\mathbb{G}_{\ell_\infty} = \mathbb{G} \backslash \mathbb{T}_{\ell_\infty}$ et $\mathrm{H} \backslash \mathbb{T}_{\ell_\infty}\mathbb{G}$, ce dernier ensemble étant isomorphe à $\mathbb{R}^4$. On note alors $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty} = \psi(\mathbb{G}_{\ell_\infty})$. En résumé,

$$\boxed{\psi : \mathbb{G}_{\ell_\infty} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\ell_\infty} \hookrightarrow \mathbb{P}^4 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\psi} : \mathbb{P}^5 \backslash \{\ell_\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^4}$$

Remarquons que la projection stéréographique ψ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme car c'est la restriction bijective d'une transformation projective.

Le lemme 1.10 de la section suivante assure que $\mathbb{G} \cap \mathbb{T}_{\ell_\infty}\mathbb{G}$ est l'ensemble des droites transversales à ℓ_∞. Lorsqu'on considère des droites affines de $\mathbb{R}^3$, on choisit traditionnellement une droite à l'infini pour ℓ_∞. Ainsi, $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ est l'ensemble des droites affines qui coupent deux plans parallèles distincts de $\mathbb{R}^3$ contenant la droite ℓ_∞ à l'infini. À un changement de coordonnées près, on retrouve l'application $\psi_{/\!/}$ du paragraphe précédent.

Terminons par le lemme technique suivant, conséquence directe des propriétés sur les projections centrales, qui sera utile au chapitre 4 pour identifier des sous-espaces affines de $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$.

Lemme 1.7.

Soit H *un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}^5$ *de dimension* k *qui n'est pas inclus dans* $\mathbb{T}_{\ell_\infty}\mathbb{G}$. *Alors* $\widetilde{\psi}(\mathrm{H}) \cap \mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ *avec*

$$\dim\left(\widetilde{\psi}(\mathrm{H}) \cap \mathbb{R}^4_{\ell_\infty}\right) = \begin{cases} k & \text{si } \ell_\infty \notin \mathrm{H} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Réciproquement, si H *est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ *de dimension* k, *alors* $\psi^{-1}(\mathrm{H})$ *est l'intersection de* $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ *avec un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}^5$ *de dimension* $k+1$. □

1.2 Géométrie

Le fait que l'espace des droites $\mathbb{G}$ soit modélisé par une quadrique de $\mathbb{P}^5$ induit une géométrie « riche » sur $\mathbb{G}$ issue de la géométrie des espaces quadratiques. Les chapitres V et VIII de Perrin [74] en sont une excellente introduction, mais ne sont absolument pas nécessaires pour comprendre cette section. En effet, on y introduit des outils comme l'orthogonalité (section 1.2.1) et les isométries (section 1.2.3) qui généralisent les objets correspondants en géométrie euclidienne classique, avec de nombreux points communs. En outre, ces outils ont une interprétation géométrique directe dans $\mathbb{P}^3$: l'orthogonalité traduit la transversalité d'ensembles de droites dans $\mathbb{P}^3$ et les isométries (positives) de $\mathbb{P}^5$ relativement à $\mathbb{G}$ sont induites par des transformations projectives de $\mathbb{P}^3$. Dans cette section, nous tentons de décrire la géométrie de $\mathbb{G}$ de façon la plus large possible, en s'attachant à interpréter géométriquement dans $\mathbb{P}^3$ les objets issus de la théorie des formes quadratiques. On note q la forme quadratique définissant la quadrique de Klein dans $\mathbb{P}^5$:

$$q(\zeta) = \zeta_0\,\zeta_3 + \zeta_1\,\zeta_4 + \zeta_2\,\zeta_5$$

1.2.1 Orthogonalité induite par $\mathbb{G}$

À la forme quadratique q définissant la quadrique de Klein $\mathbb{G}$ est associée la forme bilinéaire symétrique [4] $\odot$ donnée par

$$\zeta \odot \zeta' = \zeta_0\,\zeta'_3 + \zeta_1\,\zeta'_4 + \zeta_2\,\zeta'_5 + \zeta'_0\,\zeta_3 + \zeta'_1\,\zeta_4 + \zeta'_2\,\zeta_5.$$

Comme $\odot$ est bilinéaire, la nullité de $[a]\odot[b]$ est bien définie pour deux points $[a]$ et $[b]$ dans $\mathbb{P}^5$, en particulier pour deux droites ℓ et ℓ' de $\mathbb{G}$. Dans ce dernier cas, cela correspond exactement à l'intersection des supports des droites dans $\mathbb{P}^3$:

Lemme 1.8.

$\ell \odot \ell' = 0 \iff \ell^{\varsigma} \cap \ell'^{\varsigma} \neq \varnothing$

Démonstration. Choisissons deux points sur chacune des droites ℓ^{ς} et ℓ'^{ς} et écrivons leur coordonnées homogènes sous forme d'une matrice M de taille 4×4. Les droites ℓ^{ς} et ℓ'^{ς} se coupent si et seulement si $\det \mathrm{M} = 0$ (les quatres points sont linéairement dépendants). En utilisant la formule (C.7) du déterminant par blocs 2×2, on obtient exactement la quantité $\ell \odot \ell'$. □

La forme bilinéaire symétrique $\odot$ définit naturellement une notion d'*orthogonalité* :

$$\mathrm{A}^{\circ} = \{\, v \in \mathbb{P}^5 \mid \forall\, a \in \mathrm{A} \quad a \odot v = 0 \,\}.$$

D'après le lemme 1.8, $\{\ell\}^{\circ} \cap \mathbb{G}$ est exactement l'ensemble des droites transversales à ℓ. L'orthogonalité relativement à $\odot$ satisfait de nombreuses propriétés identiques à celles de l'orthogonalité dans les espaces euclidiens :

Proposition 1.9.

(i) $\mathrm{A} \longmapsto \mathrm{A}^{\circ}$ *est décroissante pour l'inclusion.*
(ii) Si A *est un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}^5$ *de dimension* k*, alors* A° *est un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}^5$ *de dimension* $4 - k$*.*

[4] appelée *side operator* en anglais

> *(iii) Si* A *et* B *sont deux sous-espaces projectifs de* $\mathbb{P}^5$ *et* X *un sous-ensemble de* $\mathbb{P}^5$*, alors*
> $$(\mathrm{A}^\circ)^\circ = \mathrm{A} \qquad (\mathrm{A}+\mathrm{B})^\circ = \mathrm{A}^\circ \cap \mathrm{B}^\circ \qquad (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})^\circ = \mathrm{A}^\circ + \mathrm{B}^\circ \qquad \mathrm{X}^\circ = (\mathrm{Proj\ X})^\circ$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la théorie des formes quadratiques (non dégénérées), voir l'ouvrage de Perrin [74, V.3] par exemple. □

Ces propriétés seront utiles lors de l'étude des ensembles linéaires de droites à la section 1.3. Signalons enfin une différence fondamentale avec l'orthogonalité définie par un produit scalaire : A et A° ne sont pas nécessairement en somme directe. Par exemple, $\{\ell\} \subseteq \{\ell\}^\circ$ puisque toute droite se coupe à elle-même. Il s'agit en fait d'une situation dégénérée :

Lemme 1.10.

> *L'ensemble des droites transversales à une droite* ℓ *de* $\mathbb{P}^3$ *est obtenu comme la section de la quadrique de Klein* $\mathbb{G}$ *avec son hyperplan tangent en* ℓ*. Autrement dit,*
> $$\{\ell\}^\circ = \{v \in \mathbb{P}^5 \mid \ell \odot v = 0\} = \mathbb{T}_\ell\mathbb{G}.$$

Démonstration. L'équation de l'hyperplan tangent $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G}$ à la quadrique $\mathbb{G}$ en ℓ est obtenue par la formule de duplication des variables dans la forme quadratique q définissant $\mathbb{G}$, c'est-à-dire $\ell \odot \zeta = 0$ avec $[\zeta] \in \mathbb{P}^5$: on obtient alors que $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G} = \{\ell\}^\circ$. D'après le lemme 1.8, on conclut que $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G} \cap \mathbb{G}$ est l'ensemble des droites transversales à ℓ. □

1.2.2 Sous-espaces inclus dans $\mathbb{G}$

Nous décrivons dans cette section les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^5$ inclus dans la quadrique de Klein $\mathbb{G}$. De tels ensembles[5] jouent un rôle central dans l'étude de la géométrie de $\mathbb{G}$ (cf. démonstration du théorème 1.14) et représentent des ensembles élémentaires de droites. Commençons par observer la propriété suivante :

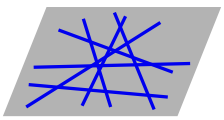
Lemme 1.11.

> *Un sous-espace projectif* H *inclus dans* $\mathbb{G}$ *vérifie la propriété* (P) *suivante :*
> $$(\mathrm{P}) : \text{« } \textit{Toute paire de droites de } \mathrm{H} \subseteq \mathbb{G} \textit{ se coupent.} \text{ »}$$

Démonstration. Le sous-espace projectif H est tangent à $\mathbb{G}$ en chacun de ses points[6] donc il vérifie la propriété (P) d'après le lemme 1.10. □

À présent, caractérisons géométriquement les ensembles *maximaux* de droites vérifiant la propriété (P). Commençons avec un ensemble E_3 de trois droites vérifiant (P) et notons E un ensemble maximal de droites vérifiant (P) et contenant E_3. Il existe trois configurations possibles pour E_3 :

- Les trois droites sont coplanaires non concourantes. Notons π le plan support des droites. Alors toute droite de E doit être incluse dans le plan π. Réciproquement, l'ensemble des droites incluses dans π vérifie (P). Ainsi, E est égal à ce dernier ensemble, appelé *champ*[7] *de droites de support* π.

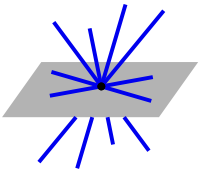


[5] Ce sont des objets classiques de la géométrie des formes quadratiques, appelés sous-espaces totalement isotropes.

[6] Les droites tangentes aux chemins lisses inclus dans l'homogénéisé $\widetilde{\mathrm{H}}$ de H sont contenues dans $\widetilde{\mathrm{H}}$.

[7] *line field* en anglais et *Strahlenfeld* en allemand

- Les trois droites sont concourantes non coplanaires. Notons x le point d'intersection. Alors toute droite de E doit passer par x. Réciproquement, l'ensemble des droites passant par x vérifie (P). Ainsi, E est égal à ce dernier ensemble, appelé *bouquet*[8] *de droites de centre* x.



- Les trois droites sont concourantes et coplanaires. En ajoutant une droite contenue dans π ou passant par x, on se ramène à l'une des situations précédentes, même si des droites passant par x et incluses dans π ont été préalablement ajoutées.

Enfin, en partant d'un ensemble d'une ou de deux droites, on obtient ces mêmes ensembles maximaux (bouquets et champs de droites). Le lemme suivant les caractérise dans $\mathbb{G}$.

Lemme 1.12.

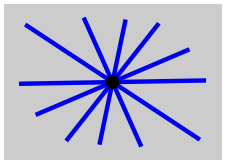
Soit H *un sous-ensemble de* $\mathbb{G}$*. Alors,* H *est un sous-ensemble maximal de* $\mathbb{G}$ *vérifiant la propriété* (P) *si et seulement si* H *est un plan projectif inclus dans* $\mathbb{G}$*. Dans ce cas,* H *représente soit un bouquet de droites, soit un champ de droites.*

Démonstration. D'abord, $\mathrm{H} \subseteq \mathbb{G}$ vérifie (P) si et seulement si $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}^\circ$. Dans ce cas, comme H° est un sous-espace projectif, $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{Proj}\,\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}^\circ$. Ainsi, si H est maximal, c'est un sous-espace projectif, de dimension au moins 2 d'après l'étude géométrique précédente. Or $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^\circ$ implique que $\dim \mathrm{H} \leqslant 2$ d'après la proposition 1.9 *(ii)*. On conclut que H est un plan.

Réciproquement, si H est un sous-espace inclus dans $\mathbb{G}$, alors $q_{|\mathrm{H}}$ et $\odot_{|\mathrm{H}}$ sont identiquement nuls donc $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{H}^\circ$, c.-à-d. H vérifie (P). Comme $\dim \mathrm{H} = 2$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}^\circ$ (proposition 1.9 *(ii)*) donc H est maximal pour la propriété (P).

Enfin, la seconde partie du lemme découle de l'étude géométrique précédant l'énoncé du lemme. □

Revenons à la caractérisation des sous-espaces projectifs inclus dans $\mathbb{G}$. D'après les lemmes 1.11 et 1.12, tout sous-espace projectif inclus dans $\mathbb{G}$ est de dimension au plus 2. D'après le lemme 1.12, il ne reste plus qu'à caractériser les ensembles de droites formant une droite L incluse dans $\mathbb{G}$. D'après le lemme 1.11, elle vérifie la propriété (P) donc contient deux droites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 qui sont concourantes. En particulier, $\mathrm{L} = \mathrm{Proj}\,\{\ell_1; \ell_2\}$. Notons x le point d'intersection de ces deux droites et π le plan de $\mathbb{P}^3$ les contenant. Les deux droites ℓ_1 et ℓ_2 appartiennent au bouquet de droites P_1 centré en x et au champ de droites P_2 de plan support π. Or l'intersection de P_1 et P_2 représente l'ensemble des droites concourantes en x et contenues dans π, appelé *faisceau*[9] *de droites de centre* x *et de support* π. Nécessairement, $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 = \mathrm{L}$ pour des raisons de dimension.



Proposition 1.13.

Les sous-espaces projectifs inclus dans $\mathbb{G}$ *sont de dimension au plus 2 : les plans représentent des bouquets ou des champs de droites, les droites représentent des faisceaux de droites.* □

[8] *line bundle* en anglais et *Strahlenbündel* en allemand

[9] *line pencil* en anglais et *Strahlenbüschel* en allemand ; à ne pas confondre avec les faisceaux en géométrie algébrique (*sheaf* en anglais)

1.2.3 Transformations préservant $\mathbb{G}$

L'ensemble $\mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ des transformations projectives de $\mathbb{P}^3$ agit sur l'ensembles des points de $\mathbb{P}^3$. Cette action définit la « géométrie projective » de $\mathbb{P}^3$. Comme une transformation projective préserve les alignements, cette géométrie induit une géométrie des droites où $\mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ agit sur l'ensemble $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}^3$. Cette action a la propriété d'induire une transformation projective dans $\mathbb{P}^5$ (cf. relations 1.3). Plus généralement, nous considérons dans cette section la géométrie de $\mathbb{G}$ via l'action du groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}^5$ préservant globalement $\mathbb{G}$. Nous la caractérisons en termes de transformations de $\mathbb{P}^3$ (théorème 1.14) puis en termes de similitudes relativement à la forme quadratique q définissant $\mathbb{G}$ (théorème 1.15).

Transformations de $\mathbb{G}$ induites par $\mathbb{P}\mathrm{GL}_4$. Une transformation projective $[\mathrm{M}] \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ envoie toute droite sur une droite et préserve les incidences donc elle induit une bijection sur $\mathbb{G}$. Plus précisément (cf. annexe C), $[\mathrm{M}]$ induit la transformation projective $[\Lambda^2 \mathrm{M}]$ de $\mathbb{P}^5$ qui préserve globalement $\mathbb{G}$. Elle satisfait la relation

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^4 \qquad \big(\Lambda^2 \mathrm{M}\big)(x \vee y) = (\mathrm{M}x) \vee (\mathrm{M}y) \tag{1.2}$$

La matrice de $\Lambda^2 \mathrm{M}$ est formée des mineurs 2×2 de la matrice M. Donnons-en une expression plus pratique, en écrivant la matrice M sous la forme

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & {}^t\overrightarrow{u} \\ \hline \overrightarrow{t} & \mathrm{P} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{u}, \overrightarrow{t} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \mathrm{P} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

Pour une transformation affine par exemple, $\alpha = 1$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Considérons deux points $[a] = [a_0 : \overrightarrow{a}]$ et $[b] = [b_0 : \overrightarrow{b}]$ distincts de $\mathbb{P}^3$. En reprenant les formules du produit extérieur, on obtient

$$[a \vee b] = \Big[a_0 \overrightarrow{b} - b_0 \overrightarrow{a} : \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\Big] = \big[\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta}\big].$$

Calculons les coordonnées de Plücker $[\mathrm{M}a \vee \mathrm{M}b] = [\overrightarrow{v}' : \overrightarrow{\eta}']$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}' &= \big(\alpha\, a_0 + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}\big)\ \Big(b_0 \overrightarrow{t} + \mathrm{P}(\overrightarrow{b})\Big) - \Big(\alpha\, b_0 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{b})\Big)\ \Big(a_0 \overrightarrow{t} + \mathrm{P}(\overrightarrow{a})\Big) \\ &= \alpha\, \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\, \overrightarrow{t} + \mathrm{P}\Big((\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{b})\, \overrightarrow{a}\Big) \end{aligned}$$

et $$\overrightarrow{\eta}' = (a_0 \overrightarrow{t} + \mathrm{P}\overrightarrow{a}) \times (b_0 \overrightarrow{t} + \mathrm{P}\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{t} \times \mathrm{P}(\overrightarrow{u}) + \mathrm{P}\overrightarrow{a} \times \mathrm{P}\overrightarrow{b}.$$

D'après les formules (C.9) et (C.10) sur les produits vectoriels, on obtient l'expression suivante de $\Lambda^2\mathrm{M}$:

$$\big(\Lambda^2\mathrm{M}\big)(\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta}) = (\overrightarrow{v}' : \overrightarrow{\eta}') \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overrightarrow{v}' = \alpha\, \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) + \mathrm{P}(\overrightarrow{\eta} \times \overrightarrow{u}) - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})\ \overrightarrow{t} \\ \overrightarrow{\eta}' = \overrightarrow{t} \times \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) + (\mathrm{Com}\,\mathrm{P})(\overrightarrow{\eta}) \end{cases} \tag{1.3}$$

où $\mathrm{Com}\,\mathrm{P}$ désigne la *comatrice* de P (matrice des mineurs de taille $n-1$ pour une matrice carrée de taille n).

Transformation induite par la dualité de $\mathbb{P}^3$. Rappelons que la dualité de $\mathbb{P}^3$, notée $\cdot^\star$, envoie un point $[a]$ de coordonnées $[a_0 : \cdots : a_3]$ sur l'hyperplan $[a]^*$ d'équation $a_0x_0 + \cdots + a_3x_3 = 0$. Les propriétés de cette dualité impliquent que le dual ℓ^* d'une droite ℓ engendrée par deux points distincts $[a]$ et $[b]$ est supportée par l'intersection des deux hyperplans distincts $[a]^*$ et $[b]^*$. D'après le lemme C.2 et la formule (C.12), la dualité $\cdot^*$ induit sur les coordonnées de Plücker l'opérateur d'échange $\star : [\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta}] \mapsto [\overrightarrow{\eta} : \overrightarrow{v}]$, c.-à-d. si $[\zeta]$ sont les coordonnées de Plücker de ℓ, alors $[\star\zeta]$ sont celles de ℓ^*. Cette propriété peut être prouvée de façon élémentaire pour les droites affines de $\mathbb{R}^3$ (cf. lemme C.4). Remarquons que cette dualité envoie des bouquets de droites sur des champs de droites, ce qui manquait aux transformations projectives de $\mathbb{P}^3$ pour caractériser la géométrie de $\mathbb{G}$:

Théorème 1.14.

> *Les transformations projectives de $\mathbb{P}^5$ préservant globalement $\mathbb{G}$ sont exactement celles induites par les transformations projectives de $\mathbb{P}^3$ ou leurs composées avec la dualité de $\mathbb{P}^3$.*

Démonstration. D'après l'étude de cette section, les transformations projectives [M] de $\mathbb{P}^3$ ou leurs composées avec la dualité de $\mathbb{P}^3$ induisent des transformations projectives de $\mathbb{P}^5$ de la forme $\star^\varepsilon \circ [\Lambda^2\mathrm{M}]$ (avec $\varepsilon \in \{0; 1\}$) qui préservent globalement $\mathbb{G}$.

Réciproquement, soit f une transformation projective préservant globalement $\mathbb{G}$. Supposons que f préserve globalement les familles de plans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ contenus dans $\mathbb{G}$, représentant les bouquets et les champs de droites respectivement.

1. Construisons l'application g de $\mathbb{P}^3$ (bien) définie par $f(\pi_x) = \pi_{g(x)}$ où π_x désigne le plan de $\mathcal{N}$ représentant le bouquet de droites centré en x.
2. Montrons que g est projective. Trois points x, y et z sont alignés dans $\mathbb{P}^3$ si et seulement si les plans π_x, π_y et π_z de $\mathbb{P}^5$ sont concourants en un point. Comme f préserve les incidences, g préserve les alignements ce qui prouve que g est projective d'après le théorème fondamental de la géométrie projective.
3. Enfin, g induit f : si g envoie la droite ℓ^ς passant par x et y sur la droite $(\ell')^\varsigma$ passant par x' et y', alors f envoie $\{\ell\} = \pi_x \cap \pi_y$ sur $\{\ell'\} = \pi_{x'} \cap \pi_{y'}$ par définition de g.

Pour finir, si f échange les familles de plans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$, alors $\star \circ f$ les préserve globalement. D'après ce qui vient d'être montré, $\star \circ f$ est induite par une transformation projective g de $\mathbb{P}^3$. Puisque $\star^2$ vaut l'identité, f est induite par la composée de g avec la dualité de $\mathbb{P}^3$. □

Groupe des similitudes pour q. Rappelons que la quadrique de Klein $\mathbb{G}$ est définie par la forme quadratique q où ☆

$$q(\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{X} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{Q} = \left(\begin{array}{c|c} & \mathrm{I}_3 \\ \hline \mathrm{I}_3 & \end{array}\right).$$

Une transformation $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_6$ est une *similitude* pour q s'il existe $\mu(\mathrm{M}) \in \mathbb{R}^*$, appelé *multiplicateur* de M, tel que ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{Q}\,\mathrm{M} = \mu(\mathrm{M})\,\mathrm{Q}$. L'ensemble des similitudes pour q forme un sous-groupe de GL_6 noté $\mathrm{GO}_6(q)$. Par définition, toute similitude de $\mathrm{GO}_6(q)$ préserve globalement $\widetilde{\mathbb{G}}$ et conserve l'orthogonalité pour $\odot$. Réciproquement, toute transformation de GL_6 qui préserve globalement $\widetilde{\mathbb{G}}$ ou qui conserve l'orthogonalité pour $\odot$ est une similitude pour q (cf. [74, V.7]). Par conséquent, $\mathbb{P}\mathrm{GO}_6(q)$ est le groupe des transformations projectives de $\mathbb{P}^5$ préservant globalement $\mathbb{G}$.

L'ensemble des similitudes de multiplicateur 1 forme un sous-groupe $\mathrm{O}_6(q)$ de $\mathrm{GO}_6(q)$ appelé groupe des *isométries* de q. Puisque $\mu : \mathrm{M} \mapsto \mu(\mathrm{M})$ est un morphisme de groupes, on obtient la suite exacte courte

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{O}_6(q) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{GO}_6(q) & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \left(\begin{array}{c|c} \lambda \mathrm{I}_3 & \\ \hline & \mathrm{I}_3 \end{array}\right) & \xleftarrow{\varphi} & \lambda & & \end{array}$$

où φ est un morphisme vérifiant $\mu(\varphi(\lambda)) = \lambda$. Par conséquent, $\mathrm{GO}_6(q)$ a une structure de produit semi-direct :

$$\mathrm{GO}_6(q) = \mathrm{O}_6(q) \rtimes_\varphi \mathbb{R}^* = \left\{ \mathrm{M}\,\varphi(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \mathrm{M} \in \mathrm{O}_6(q) \right\}$$

de loi de groupe $\quad (\mathrm{M}, \lambda) \cdot (\mathrm{M}', \lambda') = \left(\mathrm{M}\,\varphi(\lambda)\mathrm{M}'\varphi(\lambda^{-1}) \ , \ \lambda\lambda' \right).$

Pour une isométrie M, ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{Q}\mathrm{M} = \mathrm{Q}$ d'où $\det \mathrm{M} = \pm 1$. L'ensemble des isométries de déterminant 1 forme un sous-groupe $\mathrm{SO}_6(q)$ de $\mathrm{O}_6(q)$ appelé groupe des *rotations* de q. Puisque det est un morphisme de groupes, on obtient la suite exacte courte

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{SO}_6(q) & \xrightarrow{\iota} & \mathrm{O}_6(q) & \xrightarrow{\det} & \{\pm 1\} & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \left(\begin{array}{c|c} & \mathrm{I}_3 \\ \hline \mathrm{I}_3 & \end{array}\right)^\varepsilon & \xleftarrow{\phi} & \varepsilon & & \end{array} .$$

La proposition suivante identifie les transformations de $\mathbb{P}^3$ induisant ces sous-groupes :

Théorème 1.15.

L'opérateur Λ^2 induit les isomorphismes de groupes suivants :

$$\mathrm{SL}_4 \simeq \mathrm{SO}_6(q) \qquad \mathrm{GL}_4 \simeq \mathrm{SO}_6(q) \rtimes_\varphi \mathbb{R}^* \qquad \mathbb{P}\mathrm{GL}_4 \simeq \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q) \rtimes_{[\varphi]} \{\pm 1\}$$

Démonstration. Notons tout d'abord que $\Lambda^2 : \mathrm{GL}_4 \longrightarrow \mathrm{GL}_6$ est un morphisme de groupes : d'après la relation 1.2, pour tous $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{GL}_4$, les transformations linéaires $(\Lambda^2\mathrm{M}) \circ (\Lambda^2\mathrm{N})$ et $\Lambda^2(\mathrm{MN})$ coïncident sur $\widetilde{\mathbb{G}}$ donc elles sont égales. En outre, Λ^2 est injectif car l'identité est la seule transformation de $\mathbb{P}^3$ qui préserve globalement chacune des droites de $\mathbb{P}^3$.

Soit $\mathrm{S} \in \mathrm{GO}_6(q)$. D'après le théorème 1.14, il existe $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_4$ et $\varepsilon \in \{0; 1\}$ tels que $\mathrm{S} = \star^\varepsilon \circ \Lambda^2\mathrm{M}$.

- La matrice de l'opérateur $\star$ est égale à $\left(\begin{smallmatrix} & \mathrm{I}_3 \\ \mathrm{I}_3 & \end{smallmatrix}\right)$, de déterminant -1 et de multiplicateur 1.
- D'après le théorème de Sylvester-Franke (voir [98] pour une démonstration élémentaire), $\det \Lambda^2\mathrm{M} = (\det \mathrm{M})^3$. En outre, à l'aide d'un calcul de déterminant sur ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{Q}\mathrm{P} = \mu(\mathrm{P})\mathrm{Q}$, on obtient $\mu(\Lambda^2\mathrm{M}) = \pm \det \mathrm{M}$. En fait[10], $\mu(\Lambda^2\mathrm{M}) = + \det \mathrm{M}$.

Par conséquent, $\det \mathrm{S} = (-1)^\varepsilon (\det \mathrm{M})^3$ et $\mu(\mathrm{S}) = \det \mathrm{M}$ donc S est une isométrie positive pour q si et seulement si $\varepsilon = 0$ et $\det \mathrm{M} = 1$. Autrement dit, $\mathrm{SO}_6(q) = \Lambda^2\mathrm{SL}_4$. L'injectivité de Λ^2 permet de déduire le premier isomorphisme du théorème.

Le deuxième isomorphisme résulte de la décomposition en produit semi-direct de GL_4 :

$$\mathrm{GL}_4 = \mathrm{SL}_4 \rtimes_{\varphi'} \mathbb{R}^* = \left\{ \mathrm{M}\,\varphi'(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \mathrm{M} \in \mathrm{SL}_4 \right\} \quad \text{avec} \quad \varphi'(\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \\ \hline & \mathrm{I}_3 \end{array}\right)$$

et de la multiplicativité de Λ^2 et de l'égalité $\Lambda^2\varphi'(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Enfin, le troisième isomorphisme découle du passage au quotient dans le deuxième. □

[10] Il s'agit d'un résultat de géométrie projective orientée dans $\mathbb{P}^3$: le signe de $\odot$ encode la position relative de deux droites orientées, préservée en appliquant une transformation positive (cf. l'ouvrage de Stolfi [90]).

1.3 Linéarité

L'ensemble des droites $\mathbb{G}$ étant plongé dans l'espace projectif $\mathbb{P}^5$, une notion naturelle de dépendance linéaire entre les droites résulte de celle entre les points de $\mathbb{P}^5$. Dans cette section, nous étudions les ensembles linéaires de droites (c.-à-d. stables par combinaisons linéaires) à l'aide des outils présentés dans la section précédente. Après avoir introduit les premiers exemples fondamentaux de tels ensembles (section 1.3.1), nous tirons profit du théorème de Witt sur les formes quadratiques pour obtenir une classification projective des ensembles linéaires de droites (section 1.3.2).

1.3.1 Ensembles linéaires de droites

Après avoir introduit les ensembles linéaires de droites et les définitions associées, nous donnons des premiers exemples de tels ensembles et utilisons ces objets pour décrire les ensembles de droites transversales à des droites de $\mathbb{P}^3$, en guise d'illustration et de prologue à la section 1.3.2.

Définitions. Un *ensemble linéaire de droites* $\mathcal{L}$ est obtenu comme l'intersection de la Grassmannienne $\mathbb{G}$ avec un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^5$. On dit que $\mathcal{L}$ est *engendré* par un sous-ensemble $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ si $\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \text{Proj } \mathcal{L}'$. Le cardinal minimal d'une famille $\mathcal{L}'$ qui engendre $\mathcal{L}$ est appelé *rang* de $\mathcal{L}$ et noté $\text{rg } \mathcal{L}$. Remarquons que

$$\text{rg } \mathcal{L} = 1 + \dim(\text{Proj } \mathcal{L}).$$

L'ensemble vide de droites est de rang 0. L'ensemble $\mathbb{G}$ de toutes les droites est de rang 6 puisque $\mathbb{G}$ est inclus dans $\mathbb{P}^5$ et non contenu dans un sous-espace strict. Un ensemble de droites est dit *linéairement indépendant* lorsque son cardinal est égal au rang de l'ensemble de droites qu'il engendre.

Ensembles de rang $\leqslant 2$. Considérons les ensembles linéaires de droites $\mathcal{L}$ obtenus par intersection de $\mathbb{G}$ avec une droite H de $\mathbb{P}^5$. Comme $\mathbb{G}$ est une quadrique, on obtient les quatres types suivants :

- H est disjoint de $\mathbb{G}$: $\mathcal{L}$ est vide (sur $\mathbb{R}$) et de rang 0 ;
- H coupe $\mathbb{G}$ en deux points distincts : $\mathcal{L}$ représente deux droites non concourantes et est de rang 2 ;
- H est tangente à $\mathbb{G}$: $\mathcal{L}$ est réduit à une droite et est de rang 1 ;
- H est inclus dans $\mathbb{G}$: $\mathcal{L}$ représente un faisceau de droites et est de rang 2.

Remarquons qu'il n'y a pas d'égalité automatique entre la dimension de H et le rang de $\mathcal{L}$. De même, ces quantités ne permettent pas de déduire la dimension de $\mathcal{L}$ (vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{G}$).

Transversales à k droites. D'après le lemme 1.10, l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites transversales à k droites $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ de $\mathbb{P}^3$ est linéaire car c'est l'intersection avec $\mathbb{G}$ des k espaces tangents $\mathbb{T}_{\ell_i}\mathbb{G}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Décrivons un peu plus en détail ces ensembles $\mathcal{L}$ de droites dans $\mathbb{P}^3$. On suppose que les k droites $\{\ell_1, \dots, \ell_k\}$ sont linéairement indépendantes. D'après le lemme 1.8 et la proposition 1.9, $\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \text{H}$ avec $\text{H} = \{\ell_1, \dots, \ell_k\}^\circ$ de dimension $5 - k$. ([11])

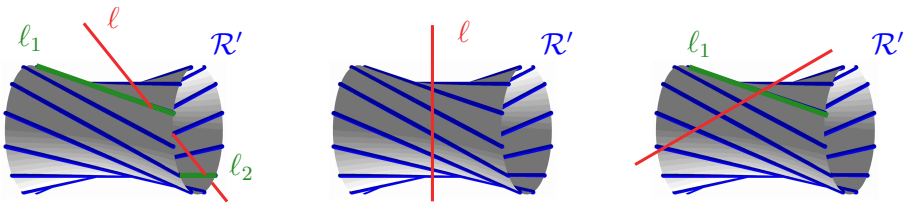
[11] Dans la section 1.2.2 a été étudié la situation où H est complètement inclus dans $\mathbb{G}$ et de dimension maximale, ce qui correspond à un cas particulier où $k = 3$.

$k = 1$ $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites transversales à une droite donnée. Cet ensemble est appelé *complexe singulier* de droites.

$k = 2$ On obtient un ensemble $\mathcal{L}$ de droites appelé *congruence hyperbolique* si les deux droites ℓ_1 et ℓ_2 ne sont pas concourantes, *congruence dégénérée* sinon.

$k = 3$ Si les trois droites sont coplanaires, respectivement concourantes, alors $\mathcal{L}$ est un champ de droites, respectivement un bouquet de droites, donc rg $\mathcal{L} = 3$. Sinon, on obtient exactement la définition d'un *regulus* pour $\mathcal{L}$ (cf. annexe B).

$k = 4$ Soit $\mathcal{R}$ le regulus défini par $\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$. S'il n'est pas dégénéré, alors la quatrième droite $\ell_4 \notin \mathcal{R}$ coupe son support $\mathcal{R}^\varsigma$ (hyperboloïde) en 2, 1 ou 0 points. Comme par tout point de $\mathcal{R}^\varsigma$ passe une unique droite de $\mathcal{R}$ (lemme B.2), $\mathcal{L}$ représente un ensemble de 2, 1 ou 0 droites.



Si $\mathcal{R}$ est dégénéré, alors une situation supplémentaire apparaît lorsque ℓ_4 passe par un (seul) centre des deux faisceaux de $\mathcal{R}$: $\mathcal{L}$ représente alors ce faisceau de droite. Ainsi, on obtient tous les ensembles linéaires de rang au plus 2 obtenus précédemment.

$k = 5$ En observant les configurations de quatre droites $\mathrm{E} = \{\ell_1, \ldots, \ell_4\}$ précédentes, on en déduit que l'ajout d'une cinquième droite ℓ_5 linéairement indépendante à E coupe 0 ou 1 droite transversale aux droites de E. Ainsi, $\mathcal{L}$ est soit vide, soit réduit à une droite.

$k = 6$ Ici, $\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \varnothing = \varnothing$: l'ensemble des droites transversales à 6 droites linéairement indépendantes est vide.

1.3.2 Classification projective

L'objectif de cette section est de donner une classification des ensembles linéaires de droites modulo l'équivalence suivante : deux ensembles linéaires de droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont *projectivement équivalents* s'il existe une transformation projective de $\mathbb{P}^3$ qui induit une bijection entre $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Cette classification s'établit en deux étapes : on donne d'abord un critère d'équivalence projective, via le théorème de Witt, qui permet ensuite d'énumérer les différents ensembles linéaires de droites possibles (voir table 1.1). Dans cette section, q désigne la forme quadratique de Klein définie par

$$q(x) = x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_6.$$

Critère d'équivalence projective. D'après le théorème 1.15, les transformations de $\mathbb{P}^3$ induisent exactement le groupe de transformations $\mathrm{G} = \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q) \rtimes_{[\varphi]} \{\pm 1\}$ dans $\mathbb{P}^5$, sous-groupe du groupe des similitudes de $\mathbb{P}^5$ relativement à q. Par définition, deux ensembles linéaires de droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont projectivement équivalents si et seulement s'il existe une similitude de G qui envoie $\mathcal{L}_1$ sur $\mathcal{L}_2$, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une similitude de G qui envoie Proj $\mathcal{L}_1$ sur Proj $\mathcal{L}_2$ (car $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont des sections de $\mathbb{G}$ par des sous-espaces projectifs). Ceci est un problème classique de géométrie des espaces quadratiques, en particulier pour le sous-groupe des isométries. Le théorème de Witt [8, 13.7.1 et 13.7.9] fournit une caractérisation des

sous-espaces isométriques pour une forme quadratique en termes de signature[12]. Rappelons que la signature d'une forme quadratique q' sur $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un couple (n_+, n_-) défini par

$$n_+ = \max\big\{ \dim \mathrm{H} \mid \forall\, x \in \mathrm{H}\backslash\{0\} \quad q(x) > 0\big\}$$

et

$$n_- = \max\big\{ \dim \mathrm{H} \mid \forall\, x \in \mathrm{H}\backslash\{0\} \quad q(x) < 0\big\}$$

où H désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Cette définition s'étend dans un espace projectif, avec q' homogène de degré 2, en considérant son homogénéisé. Pour la forme quadratique de Klein, le théorème de Witt se reformule comme suit :

Théorème 1.16 (Théorème de Witt dans $\mathbb{G}$)**.**

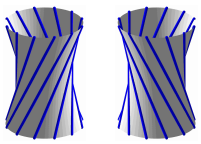
Soient H *et* H′ *deux sous-espaces projectifs de* $\mathbb{P}^5$ *de même dimension* k*. Il existe* $u \in \mathbb{P}\mathrm{O}_6(q)$ *tel que* $u(\mathrm{H}) = \mathrm{H}'$ *si et seulement si les formes quadratiques restreintes* $q_{|\mathrm{H}}$ *et* $q_{|\mathrm{H}'}$ *ont même signature. Excepté le cas où* H *et* H′ *sont des plans projectifs inclus dans* $\mathbb{G}$ *(c.-à-d. représentant un bouquet ou un champ de droites), on peut choisir* $u \in \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q)$*.*

Ainsi, le théorème de Witt fournit une caractérisation de l'équivalence des ensembles linéaires de droites pour les transformations projectives de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_4 \simeq \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q)$. Remarquons que le cas exceptionnel de ce théorème correspond au fait qu'aucune transformation projective de $\mathbb{P}^3$ ne peut envoyer un champ de droites sur un bouquet de droites. Lorsqu'on considère l'ensemble des transformations projectives de $\mathbb{P}^3$, l'invariant sur les ensembles linéaires de droites n'est plus la signature (n_+, n_-) mais la signature non signée $\{n_+; n_-\}$:

Corollaire 1.17.

Deux ensembles linéaires de droites $\mathcal{L}_1$ *et* $\mathcal{L}_2$ *de même rang, qui ne sont ni des bouquets ni des champs de droites, sont projectivement équivalents si et seulement si* $q_{|\mathrm{Proj}\ \mathcal{L}_1}$ *et* $q_{|\mathrm{Proj}\ \mathcal{L}_2}$ *ont même signature non signée.*

Considérons par exemple les deux reguli ci-contre. Ils sont clairement projectivement équivalents via une symétrie hyperplane. Par contre, il n'existe aucune transformation positive qui envoie l'un sur l'autre (les signatures signées associées sont inversées, cf. paragraphe suivant).



Démonstration. D'après le théorème 1.15, $\mathbb{P}\mathrm{GL}_4 \simeq \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q) \rtimes_{[\varphi]} \{\pm 1\}$ diffère de $\mathbb{P}\mathrm{SL}_4 \simeq \mathbb{P}\mathrm{SO}_6(q)$ de similitudes (positives) de multiplicateur négatif $-\mu$ (avec $\mu > 0$). Par définition, ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{Q}\mathrm{M} = -\mu\,\mathrm{Q}$. Par conséquent, si $q_{|\mathrm{H}}$ est de signature (n_+, n_-), alors $q_{|\mathrm{M(H)}}$ est de signature (n_-, n_+) par définition de la signature. Réciproquement, si $q_{|\mathrm{H}}$ et $q_{|\mathrm{H}'}$ sont de signatures respectivement (n_+, n_-) et (n_-, n_+), on construit H″ image de H′ par une similitude de multiplicateur négatif. Puis il existe une isométrie positive qui envoie H″ sur H d'après le théorème de Witt (sauf dans le cas exceptionnel). Ainsi, il existe une transformation de $\mathbb{P}^5$ induite par une transformation projective de $\mathbb{P}^3$ envoyant H′ sur H. □

Énumération des ensembles linéaires. Il s'agit à présent de décrire les différents types d'intersection possibles entre un sous-espace projectif H de $\mathbb{P}^5$ et la quadrique de Klein $\mathbb{G}$, c'est-à-dire les signatures non signées des quadriques obtenues. On obtient alors toutes les classes projectives des ensembles linéaires de droites d'après le corollaire 1.17. La classification est présentée

[12] Dans un espace euclidien, l'action du groupe des isométries sur les k-sous-espaces est transitive.

dans la table 1.1. Dans toute la suite, on dit que H est de type (a, b) pour signifier que $q_{|_{\mathrm{H}}}$ est de signature (a, b). À équivalence projective près, les types (a, b) et (b, a) sont les mêmes (corollaire 1.17).

Avant de déterminer les types possibles pour chaque dimension de H, exposons trois propriétés qui découlent directement de la théorie des formes quadratiques.

(P1) Si deux sous-espaces ont même type, il en est de même pour leurs orthogonaux.

Démonstration. En effet, une similitude f commute avec l'orthogonalité ($f(\mathrm{H}^\circ) = f(\mathrm{H})^\circ$) et on conclut avec le théorème de Witt. En particulier, il y a autant de types d'intersection pour $\dim \mathrm{H} = k$ et $\dim \mathrm{H} = 4 - k$ (cf. la symétrie de la table 1.1 par rapport à la ligne de rang 3). □

(P2) Tout sous-espace est de type (a, b) avec $a, b \leqslant 3$.

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de la définition de la signature : q est de signature $(3, 3)$ et n_+ et n_- décroissent par restriction. □

(P3) Si H est de dimension k et de type (a, b), alors H° est de dimension $k' = 4 - k$ et de type (a', b') avec $k' - (a' + b') = k - (a + b)$. Si cette quantité vaut -1, alors $(a', b') = (3 - a, 3 - b)$.

Démonstration. La quantité $k - (a + b)$ représente la dimension maximale d'un sous-espace F de H sur lequel q est identiquement nulle, autrement dit $\mathrm{F} = \mathrm{H} \cap \mathrm{H}^\circ$ d'où $k' - (a' + b') = k - (a + b)$. Si cette quantité vaut -1, alors H et H° sont supplémentaires dans $\mathbb{P}^5$. Dans une base adaptée à $\mathrm{H} \oplus \mathrm{H}^\circ$, la matrice de q s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Mat } q_{|_{\mathrm{H}}} & \\ \hline & \text{Mat } q_{|_{\mathrm{H}^\circ}} \end{array}\right).$$

Ainsi, $(a + a', b + b') = (3, 3)$ par définition de la signature. □

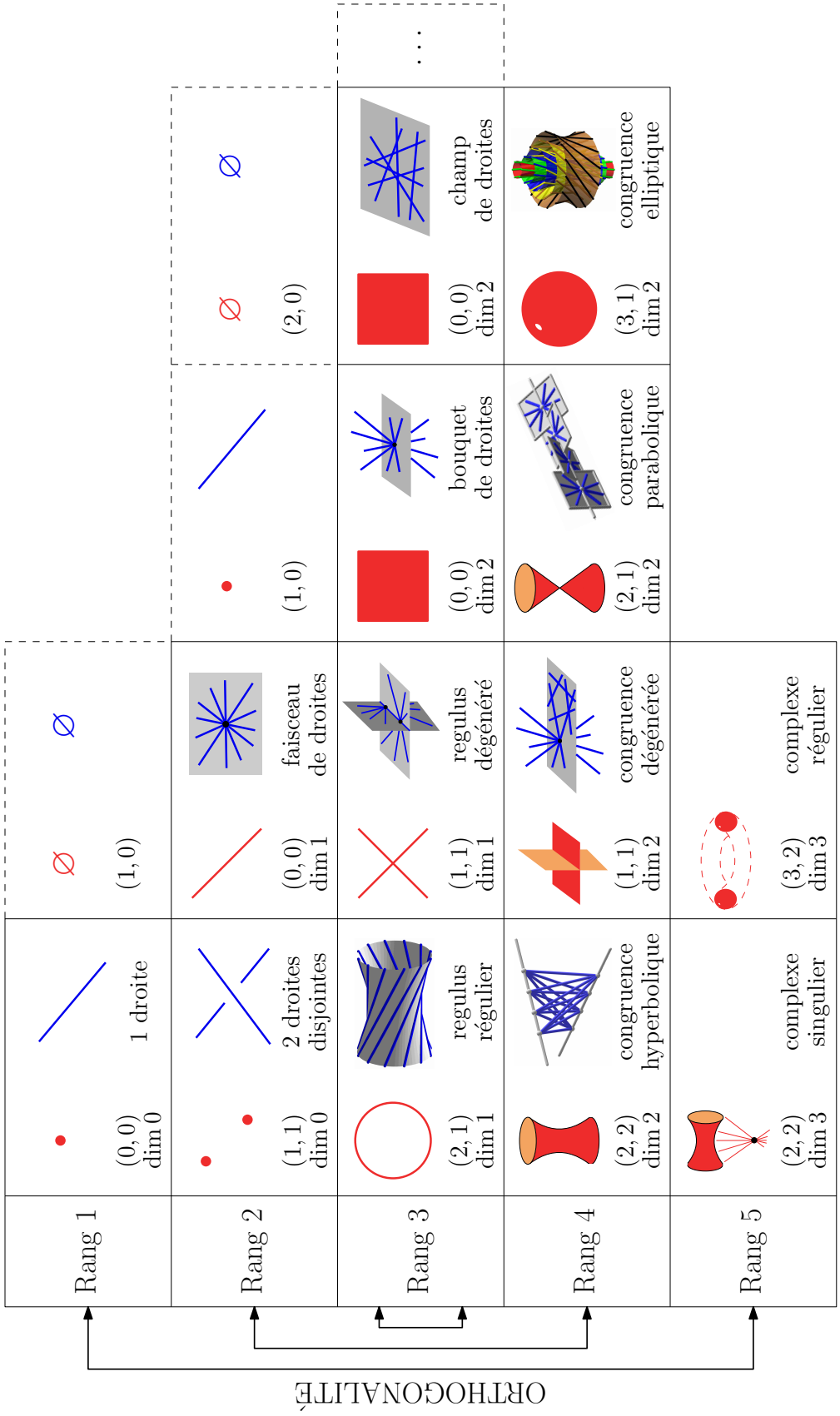
Déterminons à présent les types de H suivant sa dimension.

dim 0 et 1 Ce cas a déjà été discuté à la section 1.3.1 (ensemble de rang $\leqslant 2$). Il correspond aux deux premières lignes de la table 1.1.

dim 4 D'après la propriété (P1), le type de H est caractérisé par celui de H° (réduit à un point).

- H° est un point de $\mathbb{P}^5 \backslash \mathbb{G}$ donc de type $(1, 0)$. Alors H est de type $(3, 2)$ (propriété (P3)). L'ensemble de droites $\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \mathrm{H}$ est appelé *complexe régulier*. Sa géométrie n'est pas étudiée dans cette thèse[13].
- H° est un point $\{\ell\}$ de $\mathbb{G}$ donc de type $(0, 0)$. Alors H est de type $(3, 1)$ ou $(2, 2)$ (propriété (P3)). D'après le lemme 1.10, H est l'espace tangent à $\mathbb{G}$ en ℓ et $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est l'ensemble des droites transversales à ℓ, appelé *complexe singulier*. Cet ensemble de droites contient des bouquets de droites, représentés par des plans projectifs de $\mathbb{P}^5$. Nécessaire, H est de type $(2, 2)$ (une quadrique de $\mathbb{P}^4$ de signature $(3, 1)$ est un cône de sommet réduit à un point s'appuyant sur une sphère donc elle ne contient pas de plans projectifs).

[13] Dans un espace euclidien, un complexe régulier est formé des droites orthogonales aux trajectoires d'un vissage [82, section 3.1.2]



TAB. 1.1: Classification projective des ensembles linéaires de droites

Les ensembles linéaires de droites sont présentés en ligne suivant leur rang. Sont omis l'ensemble vide de droites de rang 0 et l'ensemble $\mathbb{G}$ de rang 6. Au rang k, l'ensemble obtenu est l'intersection de $\mathbb{G}$ avec un sous-espace H de dimension $k-1$. Dans chaque case, on représente en rouge à gauche l'ensemble de droites $H \cap \mathbb{G}$ et en bleu à droite les supports des droites. Les cases en tirets correspondent à la situation où $\mathrm{Proj}\,(H \cap \mathbb{G})$ est un sous-espace strict de H. Le type de $H^\circ \cap \mathbb{G}$ se lit en colonne.

dim 3 D'après la propriété (P1), le type de H est caractérisé par celui de la droite H° de $\mathbb{P}^5$, autrement dit par la position relative de H° par rapport à $\mathbb{G}$:

- H° coupe $\mathbb{G}$ en exactement deux points donc est de type $(1,1)$. Alors H est de type $(2,2)$ (propriété (P3)). D'après l'étude de transversalité à la section 1.3.1, $H \cap \mathbb{G}$ représente une *congruence hyperbolique*.
- H° est disjointe de $\mathbb{G}$ donc est de type $(2,0)$. Alors H est de type $(3,1)$ (propriété (P3)). L'ensemble linéaire de droites obtenu est appelé *congruence elliptique*. Sa nature géométrique est décrite au chapitre suivant.
- H° est tangente à $\mathbb{G}$ en un seul point ℓ donc est de type $(1,0)$. Alors H est de type $(3,0)$ ou $(2,1)$ (propriété (P3)). Supposons que H est de type $(3,0)$, alors $H+H^\circ$ est de dimension 4 et de type $(3,b)$ d'après la propriété (P2). D'après l'étude en dimension 4, $H + H^\circ$ est nécessairement de type $(3,2)$ donc $q_{|_{H+H^\circ}}$ est non dégénérée ce qui est absurde puisque ℓ appartient à $H \cap H^\circ$. Ainsi, H est de type $(2,1)$. L'ensemble $\mathcal{L} = H \cap \mathbb{G}$ obtenu est appelé *congruence parabolique*. Sa nature géométrique est décrite au chapitre suivant.
- H° est une droite incluse dans $\mathbb{G}$. D'après l'étude de transversalité à la section 1.3.1, $H \cap \mathbb{G}$ représente une *congruence dégénérée* donc deux plans dans H. Ainsi, H est de type $(1,1)$.

La nature des quadriques $H \cap \mathbb{G}$ permet alors de conclure que

Lemme 1.18.

Lorsque $\dim H = 3$*, on a* $\mathrm{Proj}\,(H \cap \mathbb{G}) = H$. □

dim 2 Ici, H° est lui-même de dimension 2. Contrairement aux cas précédents, on ne connaît pas a priori le nombre de types existants. Les signatures possibles sont $(2,1)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(1,0)$ et $(0,0)$.

- Les cas inintéressants : $(2,0)$ et $(1,0)$. Ils représentent des ensembles de droites de rang < 3 (une droite et un faisceau de droites respectivement). Ces cas existent bien : dans l'espace H' de dimension 3 engendré par une congruence parabolique, considérer un plan H passant par le sommet du cône $H' \cap \mathbb{G}$, d'intersection avec le cône réduite à un point ou à une droite respectivement.
- Le cas exclu du théorème de Witt : $(0,0)$. Il s'agit des bouquets et des champs de droites, qui ne sont clairement pas projectivement équivalents. En revanche, deux bouquets de droites ou deux champs de droites sont projectivement équivalents.
- Les reguli : $(2,1)$ et $(1,1)$. Dans ce cas, $H \cap \mathbb{G}$ est respectivement un cercle ou deux droites et représente un regulus d'après le lemme suivant. Rappelons qu'un regulus est défini comme l'ensemble des droites transversales à 3 droites non concourantes et non coplanaires, qu'un regulus dégénéré est constitué de deux faisceaux de droites non coplanaires et qu'un regulus régulier est formé de droites deux à deux disjointes et de support un hyperboloïde.

Lemme 1.19.

Un ensemble de droites $\mathcal{R}$ *forme un regulus si et seulement s'il existe un plan projectif* H *de* $\mathbb{P}^5$ *de type* $(2,1)$ *ou* $(1,1)$ *tel que* $\mathcal{R} = H \cap \mathbb{G}$*. En particulier,* $\mathcal{R}$ *est dégénéré si et seulement si* H *est de type* $(1,1)$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R}$ un regulus. Par définition, c'est l'ensemble des droites transversales à un ensemble L de trois droites non concourantes et non coplanaires donc $\mathcal{R} = \mathbb{G} \cap \mathrm{L}^\circ$ avec $\dim \mathrm{L}^\circ = 2$. Puisqu'un regulus n'est ni réduit à une droite (type $(2,0)$), ni un faisceau de droites (type $(1,0)$), ni un bouquet ou un champ de droites (type $(0,0)$), L° est nécessairement de type $(2,1)$ ou $(1,1)$.

Réciproquement, soit H un plan projectif de $\mathbb{P}^5$. Si H est de type $(1,1)$, alors $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est l'union de deux faisceaux non coplanaires ayant une droite en commun : on reconnaît un regulus dégénéré. Si H est de type $(2,1)$, alors H° est de type $(2,1)$ d'après la propriété (P3). On peut alors choisir un ensemble L de trois droites tel que $\mathrm{Proj}\ \mathrm{L} = \mathrm{H}^\circ$. Ainsi, $\mathrm{H} = \mathrm{L}^\circ$ donc $\mathrm{H} \cap \mathbb{G} = \mathcal{R}$ est un regulus. Comme $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est un cercle, il ne contient aucune droite de $\mathbb{P}^5$ donc aucun faisceau de droites de $\mathbb{P}^3$: $\mathcal{R}$ est régulier. □

Ceci conclut l'énumération des classes projectives d'ensembles linéaires de droites, résumée dans la table 1.1.

Chapitre 2

Congruences linéaires de droites

L'objectif de ce chapitre consiste à étudier la géométrie des congruences linéaires de droites, où une *congruence de droites* désigne un sous-ensemble de $\mathbb{G}$ de dimension 2 et où la *linéarité* se réfère à la notion correspondante développée dans le chapitre 1. Cette étude traite à la fois les cadres projectif et euclidien.

La section 2.1 concerne les congruences linéaires projectives. Elle rassemble deux points de vue sur ces ensembles de droites, souvent séparés mais équivalents : l'un algébrique dans le modèle présenté au chapitre 1, l'autre purement géométrique via la *construction de faisceaux et reguli*. Nous nous appuyons sur cette double approche pour établir aisément des propriétés géométriques connues sur les congruences linéaires.

La section 2.2 introduit un nouvel outil appelé *flot linéaire* pour représenter une congruence linéaire. Il s'agit d'une application projective de $\mathbb{P}^3$ préservant globalement chacune des droites de la congruence. Cet outil était partiellement connu, pour un certain type de congruence linéaire. Nous le présentons ici pour la première fois dans un cadre complètement unifié.

La section 2.3 concerne les congruences linéaires euclidiennes. Nous mettons en évidence deux invariants euclidiens, présentés ici comme les extrema d'une *fonction de pas* définie sur l'orthogonal d'une congruence linéaire. Nous les employons comme un nouvel outil pour décrire la géométrie euclidienne des congruences linéaires et pour traiter de façon systématique l'ensemble des types de congruences linéaires, ce dont nous avons besoin pour obtenir les résultats unifiés du chapitre 3 sur les appareils photo linéaires.

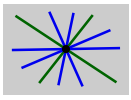
2.1 Congruences linéaires projectives

Cette section relativement longue se fixe l'objectif de familiariser le lecteur avec les congruences linéaires, objet d'étude de ce chapitre et outil géométrique du chapitre suivant. Pour ce faire, nous présentons un procédé de construction purement géométrique d'ensembles de droites appelé *construction par faisceaux et reguli* (section 2.1.1) et connu au début du XX$^{\text{e}}$ siècle [101]. Nous décrivons la construction de ces ensembles de droites à partir de quatre droites données (section 2.1.2), ensembles qui s'avèrent être exactement les congruences linéaires (section 2.1.3). Outre l'intuition qu'il apporte, ce point de vue géométrique permet également d'établir aisément plusieurs propriétés sur les congruences linéaires (section 2.1.4). Enfin, cette section se termine par l'introduction de *bases projectives normalisées* dans lesquelles les coordonnées de Plücker d'une base de droites pour une congruence linéaire s'expriment simplement (section 2.1.5).

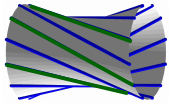
2.1.1 Construction par faisceaux et reguli

Définition. Une droite ℓ de $\mathbb{P}^3$ est dite *engendrée par faisceau et regulus* (ou *engendrée* en abrégé) à partir d'une famille $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ de droites de $\mathbb{P}^3$ s'il existe une famille $(\ell_{k+1}, \dots, \ell_{k+p})$ de droites de $\mathbb{P}^3$ avec $\ell = \ell_{k+p}$ telle que, pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$, la droite ℓ_{k+i} appartient

- soit au faisceau engendré par deux droites concourantes de $\{\ell_1; \dots; \ell_{k+i-1}\}$, c'est-à-dire à l'ensemble des droites concourantes avec ces deux droites et contenues dans le plan défini par ces deux droites.



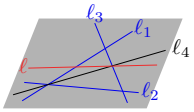
- soit au regulus engendré par trois droites de $\{\ell_1; \dots; \ell_{k+i-1}\}$ non concourantes et non coplanaires, c'est-à-dire à l'ensemble des droites transversales aux droites transversales à ces trois droites (cf. annexe B).



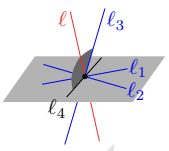
Un ensemble de droites tel qu'aucune droite n'est engendrée à partir des autres est dit *indépendant*. Un sous-ensemble $\mathcal{L}'$ d'un ensemble $\mathcal{L}$ de droites *engendre* $\mathcal{L}$ si toutes les droites de $\mathcal{L}$ sont FR-engendrées à partir de $\mathcal{L}'$. Le *rang* de $\mathcal{L}$ (lorsqu'il est défini) est le nombre minimum de droites qui engendrent $\mathcal{L}$. En fait, ces notions coïncident avec celles définies pour les congruences linéaires (section 1.3.1). Plus particulièrement, nous montrerons dans la section 2.1.3 que les congruences linéaires de rang 4 sont exactement les ensembles de droites de rang 4 engendrés par faisceaux et reguli. Avant de les décrire géométriquement (section 2.1.2), il est utile de déterminer celles de rang au plus 3.

Rang $\leqslant$ 2. L'ensemble vide est l'unique ensemble de rang 0 ($k = 0$ dans la définition) et les ensembles réduits à une seule droite sont les ensembles de rang 1. Soit $\mathcal{L}$ un ensemble engendré par deux droites indépendantes, donc distinctes. Si celles-ci ne sont pas concourantes, alors on ne peut définir de faisceau à partir de ces deux droites donc $\mathcal{L}$ est réduit à ces deux droites. Si elles se coupent, alors toute droite du faisceau qu'elles définissent appartient à $\mathcal{L}$. Comme les droites de tout triplet du faisceau sont concourantes, on ne peut pas définir de regulus. Dans ce cas, $\mathcal{L}$ est un faisceau. Ainsi, les ensembles de droites de rang 2 sont les faisceaux et les paires de droites non concourantes.

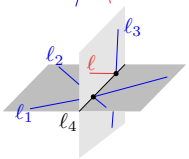
Rang 3. Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de rang 3 engendré par trois droites indépendantes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, donc n'appartenant pas à un même faisceau.



- Si les droites $\{\ell_1; \ell_2; \ell_3\}$ sont deux à deux non concourantes, alors elles engendrent un regulus non dégénéré $\mathcal{R}$ et tout triplet de droites de $\mathcal{R}$ engendre $\mathcal{R}$. Comme les droites de $\mathcal{R}$ sont deux à deux non concourantes, $\mathcal{L} = \mathcal{R}$.



- Dans les autres cas, on construit par faisceaux des reguli dégénérés, des bouquets et des champs de droites comme l'illustre la figure ci-contre (ℓ_4 appartient au faisceau de ℓ_1 et ℓ_2 et ℓ à celui de ℓ_4 et ℓ_3).



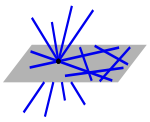
2.1.2 Géométrie des ensembles de droites de rang 4

Dans cette section, nous décrivons la géométrie des ensembles de droites engendrés par faisceaux et reguli de rang 4, qui s'avéreront être les congruences linéaires de rang 4. Il en existe quatre types, appelés dégénéré, hyperbolique, elliptique et parabolique (proposition 2.6). Nous redémontrons essentiellement les résultats de 1910 de Veblen et Young [101, chap. XI] en réorganisant et détaillant les démonstrations, ceci dans un souci de complétude.

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de rang 4 engendré par quatre droites indépendantes. Autrement dit, $\mathcal{L}$ est engendré par la première droite, notée ℓ, et l'ensemble $\mathcal{R}$ de rang 3 engendré par les trois dernières droites. Comme $\mathcal{L}$ est de rang 4, ℓ n'appartient pas à $\mathcal{R}$. Supposons dans un premier temps que $\mathcal{R}$ est un champ ou un bouquet de droites. Des constructions identiques à celles apparaissant pour le rang 3 permettent de déduire les résultats suivants. Si $\mathcal{R}$ est un bouquet de droites de centre x, alors $\mathcal{L}$ est l'union de $\mathcal{R}$ et du champ de droites de support engendré par x et ℓ. Si $\mathcal{R}$ est un champ de droites de support coupant ℓ en x, alors $\mathcal{L}$ est l'union de $\mathcal{R}$ et du bouquet de droites de centre x. Réciproquement,

Lemme 2.1 (Type dégénéré)**.**

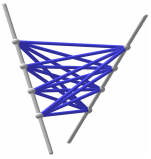
> *L'union d'un bouquet et d'un champ de droites tel que le centre du premier appartient au plan support du second est engendré par faisceaux et reguli et est de rang 4. Il est dit de type* dégénéré.



Supposons dans un second temps que $\mathcal{R}$ est un regulus (régulier ou dégénéré). Notons $\mathcal{R}'$ son regulus dual, c'est-à-dire l'ensemble des droites transversales à toutes les droites de $\mathcal{R}$ (cf. annexe B). Soit la droite ℓ est une droite de $\mathcal{R}'$, soit ℓ coupe exactement k droites de $\mathcal{R}'$ avec $k \leqslant 2$, soit ℓ coupe une infinité de droites de $\mathcal{R}$ lorsque $\mathcal{R}$ est dégénéré (cf. lemme B.4). Les trois lemmes suivants décrivent la géométrie de $\mathcal{L}$ pour k égal à 2, 0 et 1 respectivement. Le cas $\ell \in \mathcal{R}'$ est traité ensuite.

Lemme 2.2 (Type hyperbolique)**.**

> *Si ℓ coupe deux droites ℓ'_1 et ℓ'_2 de $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites transversales à ℓ'_1 et ℓ'_2. Réciproquement, l'ensemble des transversales à deux droites non concourantes données est engendré par faisceaux et reguli et est de rang 4. Il est dit de type* hyperbolique.

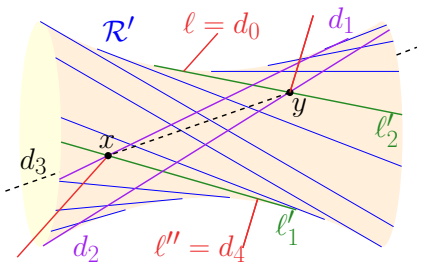


Démonstration. Commençons avec les deux observations suivantes avec ℓ'' une droite transversale à ℓ'_1 et ℓ'_2.

1. Soit d l'unique droite de $\mathcal{R}$ passant par $\ell'' \cap \ell'_1$. Comme ℓ'' et d coupent ℓ'_2, toutes les droites du faisceau défini par d et ℓ'' coupent ℓ'_2.
2. Soit $\mathcal{R}_1$ le regulus engendré par ℓ'' et deux droites de $\mathcal{R}$ (telles que ces droites et ℓ'' ne soient pas coplanaires) : ℓ'_1 et ℓ'_2 coupent ces trois droites. D'après le lemme B.4, elles coupent toutes les droites de $\mathcal{R}_1$.

Ainsi, on montre par récurrence sur le nombre d'étapes de construction par faisceau et regulus que toute droite engendrée par ℓ et $\mathcal{R}$ est transversale à ℓ'_1 et ℓ'_2.

Réciproquement, soit ℓ'' une droite transversale à ℓ'_1 et ℓ'_2. La figure ci-contre illustre la construction : $d_0 = \ell$, d_1 est l'unique droite de $\mathcal{R}$ passant par $\{x\} = \ell \cap \ell'_1$, d_2 est l'unique droite de $\mathcal{R}$ passant par $\{y\} = \ell'' \cap \ell'_2$. D'après l'observation 1 précédente, $d_3 = (xy)$ appartient au faisceau de d_0 et d_1, puis $d_4 = \ell''$ appartient au faisceau de d_2 et d_3.

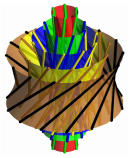


Finalement, l'ensemble des droites transversales à ℓ'_1 et ℓ'_2 est exactement l'ensemble engendré par ℓ et $\mathcal{R}$ donc c'est $\mathcal{L}$, ce qui prouve la première partie du lemme.

Remarquons que ℓ'_1 et ℓ'_2 sont nécessairement non concourantes, que $\mathcal{R}$ soit régulier ou pas. Ainsi, la construction précédente permet de conclure que tout ensemble de droites $\mathcal{L}$ de type hyperbolique est engendré par faisceaux et reguli à partir de n'importe quel quadruplet de droites de $\mathcal{L}$ indépendantes. □

Lemme 2.3 (Type elliptique)**.**

> *Si ℓ ne coupe aucune droite de $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites réelles transversales à deux droites complexes conjuguées disjointes. Réciproquement, tout ensemble de ce type, dite* elliptique*, est engendré par faisceaux et reguli et est de rang 4.*



Démonstration. En se plaçant dans le cadre complexe, $\ell_{\mathbb{C}}$ coupe exactement deux droites complexes conjuguées $(\ell'_1)_{\mathbb{C}}$ et $(\ell'_2)_{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{R}'_{\mathbb{C}}$ Remarquons qu'être engendré par faisceaux et reguli dans le cadre réel est équivalent à être engendré par faisceaux et reguli dans le cadre complexe en utilisant uniquement des droites complexes stables par conjugaison. Il suffit alors d'appliquer au cadre complexe les constructions de la démonstration du lemme précédent en remarquant qu'on manipule uniquement des droites transversales aux droites conjuguées $(\ell'_1)_{\mathbb{C}}$ et $(\ell'_2)_{\mathbb{C}}$, donc stables par conjugaison. □

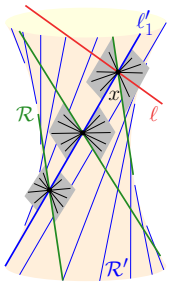
Lemme 2.4 (Type parabolique)**.**

> *Si ℓ coupe une seule droite ℓ'_1 de $\mathcal{R}'$, alors $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites tangentes à l'hyperboloïde support de $\mathcal{R}$ le long de ℓ'_1. Réciproquement, l'ensemble $\mathcal{L}$ des droites tangentes à un hyperboloïde le long d'une droite, appelée* axe *de $\mathcal{L}$, est engendré par faisceaux et reguli et est de rang 4. Il est dit de type* parabolique*.*



De façon plus visuelle, un ensemble $\mathcal{L}$ de droites de type parabolique est constitué de faisceaux de droites contenant l'axe de $\mathcal{L}$. Le « mode de rotation » de ces faisceau autour de cet axe est déterminé par une corrélation qui à un point de l'axe associe le plan support de l'unique faisceau de $\mathcal{L}$ centré en ce point (cf. lemme B.8).

Démonstration. Dans un premier temps, considérons le cas où $\mathcal{R}$ est régulier et notons $\mathcal{H}$ son hyperboloïde support. Alors ℓ est tangente à $\mathcal{H}$ en un point $x \in \ell'_1$, donc ℓ'_1 appartient au faisceau défini par ℓ et l'unique droite de $\mathcal{R}$ passant par x. Ce faisceau est contenu dans $\mathcal{L}$ et représente l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{H}$ en x. En utilisant le même raisonnement en tout point x de $\ell'_1 \in \mathcal{L}$, on obtient que l'ensemble $\widetilde{\mathcal{L}}$ des droites tangentes à $\mathcal{H}$ le long de ℓ'_1 (ℓ'_1 inclus) est contenu dans $\mathcal{L}$.



Réciproquement, montrons que $\widetilde{\mathcal{L}}$ est stable par faisceau et regulus. C'est immédiat pour les faisceaux et pour les reguli dégénérés (deux droites de $\mathcal{L}$ qui se coupent appartiennent à un faisceau centré en un point de ℓ'_1). Considérons trois droites $\{d_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ deux à deux disjointes de $\widetilde{\mathcal{L}}$, de point d'intersection $\{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ avec ℓ'_1 respectivement, et l'hyperboloïde $\mathcal{H}_1$ support du regulus $\mathcal{R}_1$ engendré par les droites $\{d_i\}$. Puisque ℓ'_1 coupe les $\{d_i\}$, ℓ'_1 appartient au dual de $\mathcal{R}_1$ (d'après le lemme B.4) et toutes les droites de $\mathcal{R}_1$ sont tangentes à $\mathcal{H}_1$ le long de ℓ'_1 (car incluses dans $\mathcal{H}_1$). Ces droites permettent de définir de façon unique la corrélation de $\mathcal{H}_1$ le long de ℓ'_1 (cf.

lemme B.8). Cette corrélation coïncide sur les trois points $\{x_i\}$ avec celle de $\mathcal{H}$ le long de ℓ_1', donc coïncide sur ℓ_1' tout entier. Ainsi, l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{H}_1$ le long de ℓ_1' est exactement $\widetilde{\mathcal{L}}$, en particulier $\mathcal{R}_1 \subseteq \widetilde{\mathcal{L}}$, donc $\widetilde{\mathcal{L}}$ est stable par regulus, ce qui conclut que $\mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$.

Dans le cas où $\mathcal{R}$ est dégénéré, ℓ_1' est la droite commune des deux faisceaux constituant $\mathcal{R}$. On se ramène à la situation précédente en considérant le regulus engendré par ℓ et deux droites disjointes de chacun des faisceaux de $\mathcal{R}$, ce qui conclut la première partie du lemme. Pour la réciproque, un ensemble de droites $\mathcal{L}$ de type parabolique est défini à partir d'un hyperboloïde $\mathcal{H}$ et d'une droite ℓ incluse dans $\mathcal{H}$. D'après la construction précédente, $\mathcal{L}$ est engendrée par faisceaux et reguli à partir de ℓ et du regulus de support $\mathcal{H}$ ne contenant pas ℓ. □

Le corollaire suivant caractérise l'ensemble des hyperboloïdes définissant un même ensemble de droites de type parabolique :

Corollaire 2.5.

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble de droites de type parabolique, d'axe ℓ_1. $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites tangentes à un hyperboloïde $\mathcal{H}$ le long de ℓ_1 si et seulement si $\mathcal{H}$ est le support d'un regulus régulier contenu dans $\mathcal{L}$.

Démonstration. Si $\mathcal{H}$ est le support d'un régulus régulier $\mathcal{R}$ contenu dans $\mathcal{L}$, alors ℓ_1 appartient au dual de $\mathcal{R}$. D'une part, $\ell_1 \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. D'autre part, ℓ_1 est indépendant de $\mathcal{R}$. D'après le lemme 2.4, $\mathcal{L}$ est engendré par faisceaux et regulus à partir de $\mathcal{R}$ et ℓ_1. Réciproquement, si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{H}$ le long de ℓ, notons $\mathcal{R}$ le regulus de support $\mathcal{H}$ ne contenant pas ℓ_1. Toutes les droites de $\mathcal{R}$ sont tangentes à $\mathcal{H}$ le long de ℓ_1 donc $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$. □

Terminons par traiter les derniers cas. Si ℓ appartient au dual de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ régulier, la première partie de la démonstration du corollaire 2.5 montre que l'ensemble $\mathcal{L}$ engendré par $\mathcal{R}$ et ℓ est de type parabolique. Si ℓ coupe une infinité de droites de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ dégénéré ($\ell \in \mathcal{R}'$ en est un cas particulier), alors ℓ engendre un champ ou un bouquet de droites avec toutes les droites de $\mathcal{R}$ que coupe ℓ puis on engendre un bouquet ou un champ de droites avec les droites restantes de $\mathcal{R}$ pour obtenir une congruence de type dégénérée. Finalement,

Proposition 2.6.

Les ensembles de droites de rang 4 engendrés par faisceaux et reguli sont exactement les ensembles de droites de type dégénéré, hyperbolique, elliptique et parabolique. □

2.1.3 Équivalence entre congruences linéaires et congruences engendrées par faisceaux et reguli

À ce stade, nous avons construit par faisceaux et reguli des ensembles de droites de rang 4 et de dimension 2. Il s'agit en fait des congruences linéaires de rang 4 comme l'atteste plus généralement le théorème suivant, dont la démonstration est l'objet de cette section.

Théorème 2.7.

Tout congruence de droites engendrée par faisceau et reguli est une congruence linéaire et réciproquement. Les congruences linéaires sont exactement les bouquets de droites, les champs de droites, les ensembles de droites de type dégénéré, hyperbolique, elliptique et parabolique.

Démonstration. Rappelons qu'un ensemble linéaire de droites est appelé congruence lorsqu'il est de dimension 2. D'après la table 1.1, les congruences linéaires sont exactement les bouquets de droites, les champs de droites et les ensembles linéaires de droites $\mathcal{L}$ de rang 4. Remarquons déjà que les bouquets et champs de droites sont engendrés par faisceaux et reguli (section 2.1.1). Montrons qu'il en est de même pour une congruence linéaire $\mathcal{L}$ de rang 4, définie par $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ avec H un sous-espace projectif de $\mathbb{P}^5$ de dimension 3. L'orthogonal H° est une droite de $\mathbb{P}^5$ dont la position relative vis-à-vis de la quadrique $\mathbb{G}$ est d'un des types suivants :

- H° est inclus dans $\mathbb{G}$ donc correspond à un faisceau de droites dans $\mathbb{P}^3$. Ainsi, $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ représente l'ensemble des droites transversales à ce faisceau dans $\mathbb{P}^3$, c'est-à-dire l'union du bouquet de droites de même centre que celui du faisceau et d'un champ de droites de même support que celui du faisceau. D'après le lemme 2.1, on retrouve l'ensemble de droites de type dégénéré.
- H° coupe $\mathbb{G}$ en deux points (réels) ℓ_1 et ℓ_2. Ainsi, $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ représente l'ensemble des droites transversales à ${\ell_1}^\varsigma$ et ${\ell_2}^\varsigma$ dans $\mathbb{P}^3$. D'après le lemme 2.2), on retrouve l'ensemble de droites de type hyperbolique.
- H° est disjoint de $\mathbb{G}$ donc $(\mathrm{H}_\mathbb{C})^\circ$ coupe $\mathbb{G}_\mathbb{C}$ en deux points complexes ${\ell_\mathbb{C}}^\varsigma$ et ${\overline{\ell}_\mathbb{C}}^\varsigma$ conjugués. Ainsi, $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ représente l'ensemble des droites réelles transversales à $\ell_\mathbb{C}$ et $\overline{\ell}_\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$. D'après le lemme 2.3, on retrouve l'ensemble de droites de type elliptique.
- H° coupe la quadrique $\mathbb{G}$ en un seul point ℓ donc y est tangent. La proposition 2.8 en fin de section permet de conclure avec le lemme 2.4 que $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est un ensemble de droites de type parabolique.

Par conséquent, toute congruence linéaire est engendrée par faisceaux et reguli.

Puisque les faisceaux et les reguli sont des ensembles linéaires de droites (cf. section 1.3) et que l'opérateur Proj est associatif, on en déduit que tout ensemble de droites engendré par faisceaux et reguli est linéaire. Ainsi, toute congruence engendrée par faisceaux et reguli est une congruence linéaire ce qui conclut la démonstration de l'équivalence du théorème. Enfin, notons que tous les bouquets de droites, tous les champs de droites et tous les ensembles de droites engendrés par faisceaux et reguli de rang 4 sont de dimension 2, donc ce sont exactement les congruences linéaires. □

Terminons cette section avec la dernière proposition à démontrer :

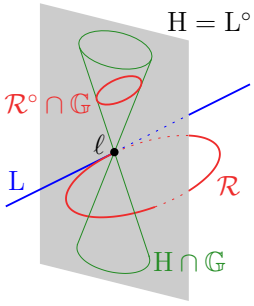
☆ **Proposition 2.8.**

Soient L *une droite de* $\mathbb{P}^5$ *tangente à* $\mathbb{G}$ *en* ℓ *(non incluse dans* $\mathbb{G}$*),* $\mathrm{H} = \mathrm{L}^\circ$ *son orthogonal et* $\mathcal{R}$ *un regulus non dégénéré contenant* ℓ*. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ *représente l'ensemble des droites tangentes à l'hyperboloïde* ${\mathcal{R}}^\varsigma$ *le long de* ${\ell}^\varsigma$*.*

(ii) La droite L *est tangente à* $\mathcal{R}$ *en* ℓ *(dans* $\mathbb{P}^5$*).*

(iii) Le regulus dual de $\mathcal{R}$ *est inclus dans* $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$*.*



Remarquons que l'équivalence entre *(i)* et *(iii)* traduit celle du corollaire 2.5. Rappelons quelques propriétés sur les reguli (cf. annexe B) :

- un regulus non dégénéré $\mathcal{R}$ est une conique lisse inclus dans un plan de $\mathbb{P}^5$ (lemme 1.19), ce plan est Proj $\mathcal{R}$;

- le regulus dual $\mathcal{R}'$ d'un regulus $\mathcal{R}$ est l'ensemble des transversales aux droites de $\mathcal{R}$, autrement dit $\mathcal{R}' = \mathcal{R}^\circ \cap \mathbb{G}$ (lemme B.4) ;
- un hyperboloïde $\mathcal{H}$ est à la fois le support d'un regulus $\mathcal{R}$ et de son dual $\mathcal{R}'$, autrement dit $\mathcal{H} = \mathcal{R}^\varsigma = \mathcal{R}'^\varsigma$ (proposition B.6).

Commençons par énoncer un lemme qui caractérise dans $\mathbb{P}^5$ la condition pour une droite de $\mathbb{P}^3$ d'être tangente à un hyperboloïde.

Lemme 2.9.

Avec les notations de la proposition 2.8, notons ℓ' une droite distincte de ℓ coupant ℓ. La droite ℓ'^ς est tangente à l'hyperboloïde $\mathcal{R}^\varsigma$ en un point de ℓ^ς si et seulement si $\{\ell'\}^\circ$ contient la tangente de $\mathcal{R}$ en ℓ (dans $\mathbb{P}^5$).

Démonstration. Supposons que ℓ' appartient au regulus dual $\mathcal{R}' = \mathcal{R}^\circ \cap \mathbb{G}$.

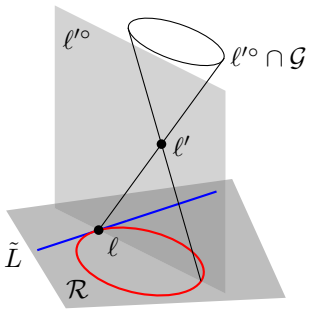
1. Le support ℓ'^ς de ℓ' est inclus dans $\mathcal{R}'^\varsigma = \mathcal{R}^\varsigma$ donc est tangent à $\mathcal{R}^\varsigma$ en un point de ℓ^ς.
2. D'après la proposition 1.9, $\operatorname{Proj}\mathcal{R} = (\mathcal{R}^\circ)^\circ \subseteq \{\ell'\}^\circ$. En particulier, $\{\ell'\}^\circ$ contient la tangente de $\mathcal{R}$ en ℓ.

Finalement, les deux assertions de l'équivalence du lemme sont vérifiées dans ce cas.

Supposons que $\ell' \notin \mathcal{R}^\circ$. La droite ℓ'^ς est tangente à $\mathcal{R}^\varsigma$ en un point de ℓ^ς si et seulement si ℓ' coupe une unique droite de $\mathcal{R}$ (à savoir ℓ), ce qui est équivalent à $\{\ell'\}^\circ \cap \mathcal{R} = \{\ell\}$. Puisque $\mathcal{R} \subseteq \operatorname{Proj}\mathcal{R}$,

$$\{\ell'\}^\circ \cap \mathcal{R} = (\operatorname{Proj}\mathcal{R}) \cap \{\ell'\}^\circ \cap \mathcal{R} = \widetilde{\mathrm{L}} \cap \mathcal{R}$$

avec $\widetilde{\mathrm{L}} = (\operatorname{Proj}\mathcal{R}) \cap \{\ell'\}^\circ$. C'est une droite d'après la formule des dimensions (en effet, $\ell' \notin \mathcal{R}^\circ$ implique $\operatorname{Proj}\mathcal{R} \not\subseteq \{\ell'\}^\circ$) et elle contient ℓ. Puisque $\mathcal{R}$ est une conique lisse, la droite $\widetilde{\mathrm{L}}$ est tangente à $\mathcal{R}$ en ℓ si et seulement si $\widetilde{\mathrm{L}}$ coupe $\mathcal{R}$ en l'unique point ℓ, ce qui est équivalent à $\{\ell'\}^\circ \cap \mathcal{R} = \{\ell\}$. L'équivalence du lemme est prouvée. □



Démonstration de la proposition 2.8. On démontre les deux équivalences suivantes.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii). D'après le lemme 2.9, $\mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ représente l'ensemble des droites tangentes à $\mathcal{R}^\varsigma$ le long de ℓ^ς si et seulement si $(\mathrm{H} \cap \mathbb{G})^\circ$ contient la tangente de $\mathcal{R}$ en ℓ. Comme $\operatorname{Proj}(\mathrm{H} \cap \mathbb{G}) = \mathrm{H}$ (lemme 1.18), $(\mathrm{H} \cap \mathbb{G})^\circ = \mathrm{H}^\circ = \mathrm{L}$ ce qui prouve l'équivalence.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii). Par définition, L coupe $\mathbb{G}$ en un seul point $\ell \in \mathcal{R}$. Ainsi, L est tangente à $\mathcal{R}$ en ℓ si et seulement si

$$\mathrm{L} \subseteq \operatorname{Proj}\mathcal{R} \iff \mathrm{H} = \mathrm{L}^\circ \supseteq (\operatorname{Proj}\mathcal{R})^\circ \iff \mathrm{H} \cap \mathbb{G} \supseteq (\operatorname{Proj}\mathcal{R})^\circ \cap \mathbb{G} = \mathcal{R}^\circ \cap \mathbb{G} = \mathcal{R}'$$

avec $\mathcal{R}'$ le regulus dual de $\mathcal{R}$ (on utilise que le fait que $\operatorname{Proj}(\mathrm{H} \cap \mathbb{G}) = \mathrm{H}$ et $\operatorname{Proj}\mathcal{R}' = (\operatorname{Proj}\mathcal{R})^\circ$ pour la dernière équivalence). □

2.1.4 Propriétés

Ayant à disposition deux outils pour caractériser les congruences linéaires (construction par faisceaux et reguli et linéarité dans $\mathbb{P}^5$), nous pouvons profiter de ce choix pour établir à moindre coût quelques propriétés projectives des congruences linéaires.

Droites focales. Une droite de $\mathbb{P}^3$ est dite *focale* pour une congruence linéaire $\mathcal{L}$ si elle est transversale à toutes les droites de $\mathcal{L}$. D'après la géométrie des congruences linéaires ou en raisonnant à l'aide de l'orthogonal $\mathcal{L}^\circ$, on obtient la description suivante des droites focales :

- Toutes les droites d'un bouquet ou d'un champ de droites sont focales.
- Une congruence dégénérée possède un faisceau de droites focales constitué des droites contenues à la fois dans le bouquet et le champ de droites de la congruence (cf. lemme 2.2).
- Une congruence hyperbolique possède exactement deux droites focales qui la caractérisent entièrement (lemme 2.2).
- Une congruence elliptique ne possède aucune droite focale réelle mais en possède deux complexes conjuguées qui la caractérisent entièrement (lemme 2.3).
- Une congruence parabolique $\mathcal{L}$ possède une seule droite focale qui est l'unique droite commune aux faisceaux constituant $\mathcal{L}$ (c.-à-d. la droite de tangence d'un hyperboloïde définissant $\mathcal{L}$, cf. lemme 2.4). Cette droite est appelé *axe* de $\mathcal{L}$.

Remarquons que la géométrie des droites focales d'une congruence caractérise le type projectif de la congruence et que les droites focales d'une congruence parabolique ou dégénérée appartiennent à la congruence.

Ordre et classe. [1] Un ensemble $\mathcal{L}$ de droites est d'*ordre 1* si, pour presque tout point x de $\mathbb{P}^3$, il existe une unique droite de $\mathcal{L}$ passant par x. Un point ne vérifiant pas cette propriété est dit *ambigu*. Un ensemble $\mathcal{L}$ de droites est de *classe 1* si, pour presque tout plan π de $\mathbb{P}^3$, il existe une unique droite de $\mathcal{L}$ contenue dans π. Un plan ne vérifiant pas cette propriété est dit *ambigu*.

Proposition 2.10.

> *Une congruence linéaire de rang 4 est d'ordre 1 et de classe 1. Les points ambigus sont ceux appartenant à une droite focale. Les plans ambigus sont ceux contenant une droite focale.*

Démonstration. Le résultat est élémentaire pour une congruence hyperbolique et dégénérée.

Pour une congruence elliptique $\mathcal{L}$, on se place dans le cadre complexe. Notons $(\ell_1)_\mathbb{C}$ et $(\ell_2)_\mathbb{C}$ les deux droites focales (disjointes) complexes conjuguées de $\mathcal{L}$. Par tout point réel $[x]$ de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ passe une unique droite $\ell_\mathbb{C}$ de $\mathcal{L}_\mathbb{C}$ coupant chacune des droites $(\ell_1)_\mathbb{C}$ et $(\ell_2)_\mathbb{C}$ en $[a_1]$ et $[a_2]$ respectivement. À des coefficients multiplicatifs près, on peut supposer que $x = a_1 + a_2$. Or $x = \overline{x} = \overline{a_1} + \overline{a_2}$ avec $\overline{a_1} \in (\ell_2)_\mathbb{C}$ et $\overline{a_2} \in (\ell_1)_\mathbb{C}$. Par unicité de la droite $\ell_\mathbb{C}$, on obtient $[a_1] = [\overline{a_2}]$. Ainsi, $[x] = [a_1 + \overline{a_1}]$ et $[\mathrm{i}(a_1 - \overline{a_1})]$ sont deux points réels distincts de $\ell_\mathbb{C}$, donc cette droite est réelle, notée ℓ. Finalement, ℓ est l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par x.

Tout plan réel π de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ coupe chacune des droites $(\ell_1)_\mathbb{C}$ et $(\ell_2)_\mathbb{C}$ en un unique point (sinon π doit contenir ces deux droites car stable par conjugaison). Ces deux points d'intersection sont conjugués et définissent une unique droite de $\mathcal{L}$ contenue dans π.

Considérons enfin une congruence parabolique $\mathcal{L}$ d'axe d définie à partir d'un hyperboloïde $\mathcal{H}$. Soit x un point hors de d. L'intersection de $\mathcal{H}$ avec le plan π engendré par x et d contient d

[1] Les notions d'ordre et classe sont définies de manière générale pour des congruences algébriques de droites complexes [93, 6]. Par exemple, l'ensemble des droites transversales à la « cubique tordue » de paramétrisation $[\lambda : \mu] \mapsto [\lambda^3 : \lambda^2\mu : \lambda\mu^2 : \mu^3]$ est une congruence d'ordre 1 et de classe 3 (une courbe de $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$ de degré k coupe génériquement un plan en k points).

donc est composée de deux droites, d et d'. En notant y le point d'intersection de d et d', π est tangent à $\mathcal{H}$ uniquement au point y. Ainsi, (xy) est l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par x.

Soit π un plan ne contenant pas l'axe d : notons y son point d'intersection avec d. Une droite de $\mathcal{L}$ contenue dans π passe nécessairement par y. Le plan tangent à $\mathcal{H}$ en y contient l'axe donc est distinct de π. Son intersection avec π est donc l'unique droite de $\mathcal{L}$ contenue dans π.

Dans tous les cas, on obtient que tous les points n'appartenant pas à une droite focale ne sont pas ambigus et que tous les plans ne contenant pas une droite focale ne sont pas ambigus. La géométrie des congruences donne directement la réciproque. □

Lemme 2.11.

Les ensembles linéaires d'ordre 1 sont exactement les congruences linéaires qui ne sont pas des champs de droites.

Démonstration. Les ensembles linéaires de rang au plus 3 qui ne sont pas des bouquets de droites ne sont clairement pas d'ordre 1 (cf. table 1.1). Les bouquets de droites sont d'ordre 1. Il en est de même pour les congruences linéaires de rang 4 d'après la proposition 2.10. Soit $\mathcal{L}$ un ensemble linéaire de droites de rang au moins 5. Alors $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ avec H un sous-espace projectif de dimension au moins 4. Pour tout plan P, la formule des dimensions donne

$$\dim \mathrm{H} \cap \mathrm{P} = \dim \mathrm{H} + \dim \mathrm{P} - \dim(\mathrm{H} \cap \mathrm{P}) \geqslant 4 + 2 - 5 = 1$$

Ainsi, l'intersection de tout plan de $\mathbb{P}^5$ avec H contient au moins une droite de $\mathbb{P}^5$. En considérant des plans représentant des bouquets de droites, on en déduit que par tout point de $\mathbb{P}^3$ passe au moins un faisceau de droites de $\mathcal{L}$ donc $\mathcal{L}$ n'est pas d'ordre 1, ce qui conclut la démonstration du lemme. □

Lemme 2.12.

Soient $\mathcal{L}$ une congruence FR-linéaire de rang 4 et d une droite de $\mathbb{P}^3$ n'appartenant pas à $\mathcal{L}$ et qui n'est pas une droite focale de $\mathcal{L}$. L'ensemble des droites de $\mathcal{L}$ coupant d forme un regulus. Il est dégénéré si et seulement si d coupe une droite focale.

Démonstration. Remarquons d'abord que d est incluse dans le plan support d'un faisceau de droites contenu dans $\mathcal{L}$ si et seulement si d coupe une droite focale (en observant la géométrie des congruences autres qu'elliptiques, ces dernières n'ayant aucun point ambigu).

La droite d possède au plus un point ambigu par hypothèse. En chacun de ses autres points x passe une unique droite ℓ_x de $\mathcal{L}$ d'après la proposition 2.10 (distincte de d car $d \notin \mathcal{L}$). Deux situations se présentent :

- Deux droites ℓ_{x_1} et ℓ_{x_2} se coupent. Comme $\mathcal{L}$ est stable par faisceau, toutes les droites ℓ_x appartiennent à un même faisceau. Ainsi, d est incluse dans le plan support d'un faisceau contenu dans $\mathcal{L}$. D'après la remarque préliminaire, d possède un point ambigu depuis lequel passe un second faisceau de droites de $\mathcal{L}$. Finalement, l'ensemble des droites de $\mathcal{L}$ transversales à d forme un regulus dégénéré.
- Les droites ℓ_x sont deux à deux disjointes. D'après la remarque préliminaire, d ne coupe aucune droite focale (donc ne possède aucun point ambigu). Comme $\mathcal{L}$ est stable par regulus, toutes les droites ℓ_x appartiennent à un même regulus régulier et ce sont exactement les droites de $\mathcal{L}$ transversales à d. □

2.1.5 Bases normalisées projectives

Soit $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ une congruence linéaire de rang 4. Une base $\mathscr{B} = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ homogène de $\mathbb{P}^3$ est dite *normalisée pour* $\mathcal{L}$ si une base $(\zeta_{\mathrm{n}}^i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ de H dans $\mathscr{B}$ est donnée par

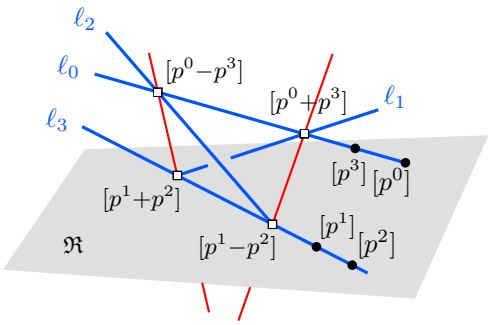
$$\begin{cases} \zeta_{\mathrm{n}}^0 = p^0 \vee p^3 \\ \zeta_{\mathrm{n}}^1 = \nu\,(p^0 \vee p^2) + (p^3 \vee p^1) \\ \zeta_{\mathrm{n}}^2 = \varepsilon\,(p^0 \vee p^1) + (p^2 \vee p^3) \\ \zeta_{\mathrm{n}}^3 = p^1 \vee p^2 \end{cases} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \widetilde{\mathcal{P}} = \mathrm{Mat}\,(\zeta_{\mathrm{n}}^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ε, $\nu \in \{-1, 0, 1\}$.

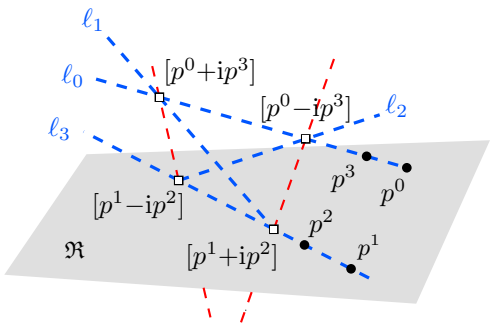
Montrons qu'il existe une base projective normalisée pour toute congruence de rang 4. Plus précisément, la proposition suivante décrit quelques contraintes pour qu'une base d'un plan $\mathfrak{R}$ donné s'étende en une base normalisée de $\mathcal{L}$. Ces conditions sont en fait maximales mais nous n'insisterons pas plus sur cet aspect-là.

Proposition 2.13 (Existence de bases projectives normalisées)**.**

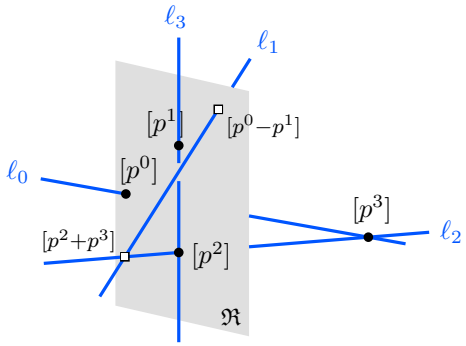
> *Soient $\mathcal{L}$ une congruence linéaire de rang 4 et $\mathfrak{R}$ un plan qui ne contient qu'une seule droite ℓ de $\mathcal{L}$. Pour tous points a et b non ambigus de $\mathfrak{R}$ tels que $a \notin \ell$ et $b \in \ell$, il existe une base projective (p^0, p^1, p^2, p^3) de $\mathbb{P}^3$ normalisée pour $\mathcal{L}$ telle que $[p^0] = a$, $[p^1] = b$ et $[p^2] \in \ell$.*



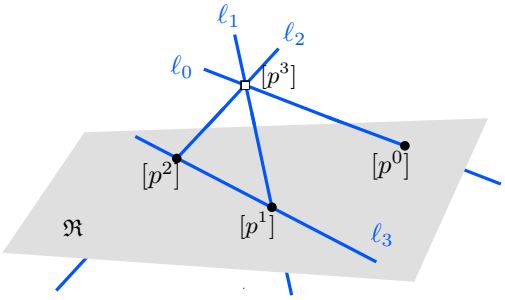
(a) Congruence hyperbolique



(b) Congruence elliptique (les droites sont complexes)



(c) Congruence parabolique



(d) Congruence dégénérée

FIG. 2.1: Bases projectives normalisées et bases de droites associées.

Démonstration. La démonstration se déroule suivant le type de la congruence linéaire. Dans chacun des cas, on choisit des valeurs particulières pour ε et ν.

Cas hyperbolique. ($\varepsilon = -1$, $\nu = 1$) Soient $[u]$ et $[v]$ les deux points d'intersection de ℓ avec les deux droites focales de $\mathcal{L}$. Quitte à considérer des multiples de u et v, on peut supposer que $p^1 = u + v$. On définit alors $p^2 = u - v$. De même, en notant $[u']$ et $[v']$ les points d'intersection avec les deux droites focales de l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par $[p^0]$ avec $p^0 = u' + v'$, on définit $p^3 = u' - v'$. Une base de droites de $\mathcal{L}$ est donnée par (cf. figure 2.1a) :

$$\begin{cases} \zeta^0 = (p^0 - p^3) \vee (p^0 + p^3) = 2\,\zeta^0_{\mathrm{n}} \\ \zeta^1 = (p^0 + p^3) \vee (p^1 + p^2) = \zeta^1_{\mathrm{n}} - \zeta^2_{\mathrm{n}} \\ \zeta^2 = (p^0 - p^3) \vee (p^1 - p^2) = -\zeta^1_{\mathrm{n}} - \zeta^2_{\mathrm{n}} \\ \zeta^3 = (p^1 - p^2) \vee (p^1 + p^2) = 2\,\zeta^3_{\mathrm{n}} \end{cases}$$

donc $(\zeta^i_{\mathrm{n}})_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ est bien une base de H.

Cas elliptique. ($\varepsilon = 1$, $\nu = 1$) On raisonne comme dans le cas hyperbolique en se plaçant dans le cadre complexe : deux points d'intersection d'une droite réelle ℓ de $\mathcal{L}$ coupe les deux droites focales complexes conjuguées en les points $[u + \mathrm{i}\,v]$ et $[u - \mathrm{i}v]$. Quitte à multiplier $u + \mathrm{i}v$ par un complexe, on peut supposer que $p^1 = u$ et on pose $p^2 = v$. On définit p^3 à partir de p^0 de la même manière. Une base de droites (complexes) de $\mathcal{L}$ est donnée par (cf. figure 2.1b) :

$$\begin{cases} \zeta^0 = (p^0 - \mathrm{i}\,p^3) \vee (p^0 + \mathrm{i}\,p^3) = 2\mathrm{i}\,\zeta^0_{\mathrm{n}} \\ \zeta^1 = (p^0 + \mathrm{i}\,p^3) \vee (p^1 + \mathrm{i}\,p^2) = \zeta^2_{\mathrm{n}} + \mathrm{i}\,\zeta^1_{\mathrm{n}} \\ \zeta^2 = (p^0 - \mathrm{i}\,p^3) \vee (p^1 - \mathrm{i}\,p^2) = \zeta^2_{\mathrm{n}} - \mathrm{i}\zeta^1_{\mathrm{n}} \\ \zeta^3 = (p^1 - \mathrm{i}p^2) \vee (p^1 + \mathrm{i}p^2) = 2\mathrm{i}\,\zeta^3_{\mathrm{n}} \end{cases}$$

donc $(\zeta^i_{\mathrm{n}})_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ est une base de $\mathrm{H}_{\mathbb{C}}$ donc de H puisque ses éléments sont réels.

Cas parabolique. ($\varepsilon = 0$, $\nu = 1$) Soient $[u]$, resp. $[v]$, resp. $[w]$, le point d'intersection de la droite focale avec l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par $[p^1]$, resp. $[p^0]$, resp. $[p^0 - p^1]$. Quitte à considérer des multiples de u, v et w, on peut supposer que $w = u + v$. On pose alors $p^2 = u$ et $p^3 = v$. Une base de droites de $\mathcal{L}$ est donnée par (cf. figure 2.1c) :

$$\begin{cases} \zeta^0 = p^0 \vee p^3 = \zeta^0_{\mathrm{n}} \\ \zeta^1 = (p^0 - p^1) \vee (p^2 + p^3) = \zeta^0_{\mathrm{n}} + \zeta^1_{\mathrm{n}} - \zeta^3_{\mathrm{n}} \\ \zeta^2 = p^2 \vee p^3 = \zeta^2_{\mathrm{n}} \\ \zeta^3 = p^1 \vee p^2 = \zeta^3_{\mathrm{n}} \end{cases}$$

donc $(\zeta^i_{\mathrm{n}})_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ est bien une base de H.

Cas dégénéré. ($\varepsilon = 0$, $\nu = 0$) Soit $[p^3]$ le centre du bouquet contenu dans $\mathcal{L}$ et $[p^2]$ n'importe quel point de ℓ, distinct de $[p^1]$. Il est immédiat que (ζ^i_{n}) est une base de droites pour $\mathcal{L}$ (cf. figure 2.1d) ce qui conclut la démonstration de la proposition 2.13. □

2.2 Flots linéaires

Dans cette section, nous proposons une représentation fonctionnelle d'une congruence linéaire d'ordre 1 à l'aide d'une application linéaire appelée *flot linéaire* ayant la propriété de préserver globalement chacune des droites de la congruence. La théorème de représentation par flot est énoncé en section 2.2.1, prouvé en section 2.2.2 et précisé en section 2.2.3. Ces deux dernières sections peuvent être omises en première relecture.

2.2.1 Définition et théorème de représentation

Notations et rappels. Une application projective [M] de $\mathbb{P}^n$ est entièrement déterminée par une matrice M de $\mathbb{R}^{n+1}$ à un coefficient multiplicatif non nul près. On note E(M) l'union des sous-espaces propres de M. On emploie également le terme de sous-espace propre pour l'application projective [M] correspondante. Le polynôme minimal d'une application linéaire M est le polynôme unitaire de degré minimum qui annule M. Lorsque M est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$, Λ^2M est l'application linéaire de $\mathbb{R}^6$ vérifiant (cf. annexe C)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^4 \qquad (\Lambda^2\mathrm{M})(x \vee y) = (\mathrm{M}x) \vee (\mathrm{M}y) \tag{2.1}$$

Flot linéaire. Une application linéaire M de $\mathbb{R}^4$ induit l'ensemble de droites :

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} = \{\, [x \vee \mathrm{M}x] \mid x \notin \mathrm{E(M)} \} \subseteq \mathbb{G}.$$

Étant donné un ensemble de droites $\mathcal{L}$ de $\mathbb{P}^3$, s'il existe une application linéaire M de $\mathbb{R}^4$ telle que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{M}$, on dit que M est un *flot linéaire* pour l'ensemble de droites $\mathcal{L}$.

Lemme 2.14.
Soit $\mathrm{N} = \lambda\,\mathrm{PMP}^{-1} + \nu\mathrm{I}_4$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\nu \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_4$, *alors* $\mathcal{L}_\mathrm{N} = [\Lambda^2\mathrm{P}]\,\mathcal{L}_\mathrm{M}$.

Démonstration. Notons $\mathrm{N}' = \mathrm{PMP}^{-1}$. D'après la relation (2.1) et à l'aide du changement de variable $y = \mathrm{P}x$,

$$[\Lambda^2\mathrm{P}]\,\mathcal{L}_\mathrm{M} = \left\{\, [\mathrm{P}x \vee \mathrm{PM}x] \;\middle|\; x \notin \mathrm{E(M)} \,\right\} = \left\{\, [y \vee \mathrm{PMP}^{-1}y] \;\middle|\; y \notin \mathrm{P(E(M))} = \mathrm{E(PMP}^{-1}) \,\right\} = \mathcal{L}_{\mathrm{N}'}$$

Puisque $x \vee (\mathrm{N}'x + \nu\, x) = x \vee \mathrm{N}'x$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{N}') = \mathrm{E}(\mathrm{N}' + \nu\mathrm{I}_4)$, on obtient $\mathcal{L}_{\mathrm{N}'} = \mathcal{L}_\mathrm{N}$. □

En choisissant $\mathrm{P} = \mathrm{I}_4$ et ν tel que $-\nu$ n'est pas une valeur propre de M, on en déduit que, pour tout flot M, il existe un flot inversible N tel que $\mathcal{L}_\mathrm{M} = \mathcal{L}_\mathrm{N}$.

Réduit d'une congruence linéaire. Introduisons un objet apparaissant dans le théorème de représentation par flot. Rappelons qu'une congruence linéaire est un ensemble linéaire de droites de rang 4, un bouquet de droites ou un champ de droites. Le *lieu d'ambiguïté* d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ est l'ensemble des points de $\mathbb{P}^3$ ambigus pour $\mathcal{L}$ (cf. section 2.1.4). Le *réduit* d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ est obtenu à partir de $\mathcal{L}$ en enlevant toutes les droites contenues dans le lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ est une congruence hyperbolique, elliptique ou un bouquet de droites, alors elle est égale à son réduit. Si $\mathcal{L}$ est parabolique, on enlève seulement son axe pour obtenir son réduit. Si $\mathcal{L}$ est dégénérée, on enlève tout le champ de droites de $\mathcal{L}$: on obtient un bouquet de droites privé d'un faisceau. Enfin, le réduit d'un champ de droites est vide car toutes les droites du champ sont incluses dans le lieu d'ambiguïté. C'est pourquoi nous ne considérons que les congruences linéaires d'ordre 1 dans cette section.

Théorème de représentation par flot. Énonçons à présent le résultat principal de cette section dont la démonstration est donnée en section 2.2.2.

Théorème 2.15 (Théorème de représentation par flot des congruences linéaires)**.**

Les ensembles de droites $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ induits par une application linéaire M *de polynôme minimal π_{M} de degré 2 sont exactement les réduits des congruences linéaires $\mathcal{L}$ d'ordre 1. Plus précisément,*

(i) lorsque M *est inversible, $\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \mathrm{Ker}\,(\Lambda^2\mathrm{M} - \pi_{\mathrm{M}}(0)\,\mathrm{I}_6)$;*

(ii) le type de $\mathcal{L}$ est entièrement déterminé par le signe du discriminant de π_{M} et les dimensions des sous-espaces propres associés (cf. table 2.1).

Mis à part dans la démonstration de ce théorème, on ne distingue plus une congruence de son réduit et on dit que M est un flot linéaire pour une congruence $\mathcal{L}$ d'ordre 1 lorsque $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est le réduit de $\mathcal{L}$.

Dans la table 2.1, les formes réduites des flots linéaires possèdent des écritures distinctes suivant le type de la congruence engendrée. La proposition qui suit propose une écriture unifiée d'*un* flot linéaire dans une base projective normalisée.

Proposition 2.16 (Flot linéaire en base projective normalisée)**.**

Un flot linéaire d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ de rang 4 s'exprime, dans une base projective normalisée associée de paramètres ε, $\nu \in \{-1, 0, 1\}$, par la matrice

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} & & & -\nu\,\varepsilon \\ & & \varepsilon & \\ & -\nu & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

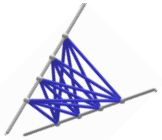
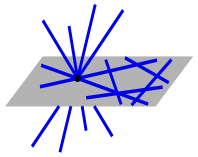
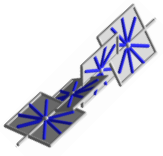
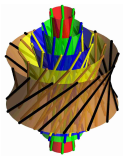
Le polynôme minimal $\pi_{\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}}$ de $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ vaut $\mathrm{X}^2 + \varepsilon\,\nu$. D'après la table 2.1, le type de la congruence est donné par le signe de ε et ν :

$\varepsilon\,\nu > 0$	$\longrightarrow$	elliptique	$\varepsilon = 0$	ou bien	$\nu = 0$	$\longrightarrow$	parabolique
$\varepsilon\,\nu < 0$	$\longrightarrow$	hyperbolique	$\varepsilon = \nu = 0$			$\longrightarrow$	dégénéré

Démonstration. Une base normalisée pour une congruence $\mathcal{L}$ fournit une base $(\zeta^i_{\mathfrak{n}})_{0\leqslant i\leqslant 3}$ du sous-espace H où $\mathcal{L} = [\mathrm{H}] \cap \mathbb{G}$ (cf. section 2.1.5). La matrice $\mathrm{M}'_{\mathfrak{n}} = \mathrm{M}_{\mathfrak{n}} + 2\,\mathrm{I}_4$ est inversible de polynôme minimal $\pi_{\mathrm{M}'_{\mathfrak{n}}} = \mathrm{X}^2 - 4\mathrm{X} + 4 + \varepsilon\,\nu$. D'après le lemme 2.14, $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ et $\mathrm{M}'_{\mathfrak{n}}$ sont des flots linéaires d'une même congruence $\mathcal{L}'$. D'après le théorème 2.15, $\mathcal{L}' = \mathbb{G} \cap [\mathrm{Ker}\,(\Lambda^2\mathrm{M}'_{\mathfrak{n}} - (\varepsilon\,\nu + 4)\,\mathrm{I}_6)]$. Après calculs,

$$\mathrm{P} = \Lambda^2\mathrm{M}'_{\mathfrak{n}} - (\varepsilon\,\nu + 4)\,\mathrm{I}_6 = \begin{pmatrix} -\nu\varepsilon & 2\varepsilon & 0 & \nu\varepsilon^2 & -2\nu\varepsilon & 0 \\ -2\nu & -\nu\varepsilon & 0 & 2\nu\varepsilon & \varepsilon\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & -2 & 0 & -\nu\varepsilon & 2\nu & 0 \\ 2 & \varepsilon & 0 & -2\varepsilon & -\nu\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{P}\zeta^i_{\mathfrak{n}} = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$ donc $(\zeta^i_{\mathfrak{n}})_{0\leqslant i\leqslant 3}$ est une base de $\mathrm{Ker}\ \mathrm{M} = \mathrm{H}'$. Ainsi, $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$ et $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ est bien un flot linéaire pour $\mathcal{L}$. □

π_{A}	Dimensions des sous-espaces propres de A	Forme réduite $\mathrm{A}_{(\alpha,\beta)}$	Lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}_{\mathrm{A}}$	Congruence linéaire associée
$(\mathrm{X}-\alpha)\,(\mathrm{X}-\beta)$	1 et 3	$\left(\begin{array}{c\|c} \alpha\mathrm{I}_3 & 0 \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right)$	le point $[e_3]$	bouquet de droites 
$(\mathrm{X}-\alpha)\,(\mathrm{X}-\beta)$	2 et 2	$\left(\begin{array}{c\|c} \alpha\mathrm{I}_2 & 0 \\ \hline 0 & \beta\mathrm{I}_2 \end{array}\right)$	les deux droites $[e_0 \vee e_1]$ et $[e_2 \vee e_3]$	hyperbolique 
$(\mathrm{X}-\alpha)^2$	3	$\left(\begin{array}{c\|cc} \alpha\mathrm{I}_2 & 0 & \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ & 1 & \alpha \end{array}\right)$	le plan $[e_0 \vee e_1 \vee e_3]$	dégénérée 
$(\mathrm{X}-\alpha)^2$	2	$\left(\begin{array}{cc\|cc} \alpha & 0 & 0 & \\ 1 & \alpha & & \\ \hline 0 & & \alpha & 0 \\ & & 1 & \alpha \end{array}\right)$	la droite $[e_1 \vee e_3]$	parabolique 
$(\mathrm{X}-\alpha)^2+\beta^2$	–	$\left(\begin{array}{cc\|cc} \alpha & \beta & 0 & \\ -\beta & \alpha & & \\ \hline 0 & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{array}\right)$	$\varnothing$	elliptique 

TAB. 2.1: Flots linéaires d'une congruence linéaire d'ordre 1.

2.2.2 Preuve du théorème de représentation ☆

La démonstration du théorème 2.15 se déroule en 3 temps :

❶ On démontre le lemme 2.17, noyau dur du théorème, qui découle essentiellement de la relation (2.1). On met en évidence le point (i) du théorème. À ce stade, on conclut que l'ensemble de droites $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$, induit par une application linéaire M dont le polynôme minimal est de degré 2, est « tout proche » d'être une congruence linéaire $\mathcal{L}$ d'ordre 1, « à un lieu d'ambiguïté près ».

❷ Cette étape consiste à montrer que $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est bien le réduit de $\mathcal{L}$ par une étude au cas par cas du lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}$. Pour cela, on considère une forme réduite de Jordan pour M. C'est au cours de cette étape qu'apparaît la caractérisation du type de $\mathcal{L}$ (point (ii) du théorème).

❸ On démontre la réciproque, à savoir que tout réduit d'une congruence linéaire est induit par un flot linéaire.

Lemme 2.17 (Étape ❶)**.**

Soit M *inversible avec* $\deg \pi_{\mathrm{M}} = 2$*. Alors* $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ *est inclus dans une congruence linéaire de droites* $\mathcal{L}$ *d'ordre 1. Plus précisément, le lieu d'ambiguïté de* $\mathcal{L}$ *est inclus dans* [E(M)]*,*

$$\mathcal{L} = \mathbb{G} \cap \mathrm{Ker}\,(\Lambda^2\mathrm{M} - \pi_{\mathrm{M}}(0)\,\mathrm{I}_6) \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$$

où $\mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ *est l'ensemble des droites de* $\mathbb{P}^3$ *incluses dans un sous-espace propre de* [M]*.*

Démonstration. Notons $\pi_{\mathrm{M}} = \mathrm{X}^2 + \mu\mathrm{X} + \nu$. Comme M est inversible, $\nu = \pi_{\mathrm{M}}(0) \neq 0$. La bilinéarité de $\vee$ et l'égalité $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{M}) = 0$ (théorème de Cayley-Hamilton) impliquent

$$\forall\, x \notin \mathrm{E}(\mathrm{M}) \quad (\Lambda^2\mathrm{M})(x \vee \mathrm{M}x) = \mathrm{M}x \vee \mathrm{M}^2x = -\mathrm{M}x \vee (\mu\,\mathrm{M}x + \nu\,x) = \pi_{\mathrm{M}}(0)(x \vee \mathrm{M}x) \quad (2.2)$$

Ainsi, $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} \subseteq \mathrm{H}_{\mathrm{M}} \cap \mathbb{G} = \mathcal{L}$ en notant $\mathrm{H}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Ker}\,(\Lambda^2\mathrm{M} - \pi_{\mathrm{M}}(0)\,\mathrm{I}_6)$ donc $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est inclus dans l'ensemble linéaire de droites $\mathcal{L}$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \uplus \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$. L'union est disjointe car les points de [E(M)] sont fixés par M. Soit $[x \vee y] \in \mathcal{L} = \mathrm{H}_{\mathrm{M}} \cap \mathbb{G}$. Distinguons trois cas.

- Soit $x \notin \mathrm{E}(\mathrm{M})$. Par définition de H_{M}, $(\Lambda^2\mathrm{M})(x \vee y) = \mathrm{M}x \vee \mathrm{M}y = \pi_{\mathrm{M}}(0)\,(x \vee y)$. Comme $\pi_{\mathrm{M}}(0) \neq 0$, $[\mathrm{M}x] \in [x \vee y]$ donc $[x \vee y] = [x \vee \mathrm{M}x] \in \mathcal{L}_{\mathrm{M}}$. Le raisonnement est symétrique pour $y \notin \mathrm{E}(\mathrm{M})$.
- Si x et y sont deux vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes $\lambda_x \neq \lambda_y$, alors $z = x + y \notin \mathrm{E}(\mathrm{M})$ et $z \vee \mathrm{M}z = x \vee \mathrm{M}y + y \vee \mathrm{M}x = (\lambda_y - \lambda_x)\,(x \vee y)$. Ainsi, $[x \vee y] = [z \vee \mathrm{M}z] \in \mathcal{L}_{\mathrm{M}}$.
- Si x et y sont deux vecteurs propres indépendants pour la même valeur propre λ, alors $[x \vee y] \in \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$.

Par conséquent, $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \uplus \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ d'où $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$.

Enfin, l'égalité (2.2) implique que [M] préserve globalement chacune des droites de $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$. De ce fait, si deux droites distinctes de $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ se coupent en $[x]$, alors $[x]$ est un point fixe de [M] donc $x \in \mathrm{E}(\mathrm{M})$. Comme $\deg \pi_{\mathrm{M}} > 1$, [E(M)] est de mesure nulle dans $\mathbb{P}^3$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est d'ordre 1 (il passe au moins une droite par tout point $[x] \notin [\mathrm{E}(\mathrm{M})]$) et de lieu d'ambiguïté inclus dans [E(M)]. Puisque l'ajout de droites dans [E(M)] n'affecte pas l'ordre, $\mathcal{L}$ est également d'ordre 1 et son lieu d'ambiguïté est inclus dans [E(M)]. D'après le lemme 2.11, $\mathcal{L}$ est une congruence linéaire. □

❷ Conservons les notations du lemme 2.17. L'objectif à présent est de montrer que $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ est le réduit de $\mathcal{L}$, autrement dit que l'union des supports des droites de $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ est le lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}$. Pour cela, nous allons considérer une forme réduite de Jordan d'une matrice M de polynôme minimal π_{M} de degré 2. On peut supposer M inversible d'après le lemme 2.14.

Notations. Dans ce qui suit, l'expression de $\Lambda^2\mathrm{M}$ est calculée dans la base de $\Lambda^2\mathbb{R}^4$:

$$\zeta_1 = e_0 \vee e_1 \qquad \zeta_2 = e_0 \vee e_2 \qquad \zeta_3 = e_0 \vee e_3 \qquad \zeta_4 = e_2 \vee e_3 \qquad \zeta_5 = e_3 \vee e_1 \qquad \zeta_6 = e_1 \vee e_2$$

Le sous-espace H_{M} dénote $[\mathrm{Ker}\,(\Lambda^2\mathrm{M} - \pi_{\mathrm{M}}(0)\,\mathrm{I}_6)]$ et les numéros de cas correspondent aux situations énumérées dans la table 2.1.

1. π_{M} possède deux valeurs propres réelles $\alpha \neq \beta$, c.-à-d. π_{M} est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples annulant M donc M est diagonalisable. Dans ce cas, la paire des dimensions des sous-espaces propres correspondants vaut $(1, 3)$ ou $(2, 2)$.

   Cas 1. $\Lambda^2\mathrm{M} = \mathrm{Diag}(\alpha^2, \alpha^2, \alpha\beta, \alpha\beta, \alpha\beta, \alpha^2)$ et $\pi_{\mathrm{M}}(0) = \alpha\beta$ avec $\pi_{\mathrm{M}}(0) \neq \alpha^2$ car $\alpha \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Proj}\,\{[\zeta_3]; [\zeta_4]; [\zeta_5]\}$ est de dimension 2 et contient le bouquet de droites de centre $[e_3]$ donc $\mathcal{L}$ est ce bouquet. De plus, $\mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \mathrm{Proj}\,\{[\zeta_1]; [\zeta_2]; [\zeta_6]\}$ est disjoint de H_{M} donc $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L}$ et est bien le réduit de $\mathcal{L}$.

   Cas 2. $\Lambda^2\mathrm{M} = \mathrm{Diag}(\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\beta, \beta^2, \alpha\beta, \alpha\beta)$ et $\pi_{\mathrm{M}}(0) = \alpha\beta$ avec $\pi_{\mathrm{M}}(0) \notin \{\alpha^2, \beta^2\}$ car $\alpha\beta \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Proj}\,\{[\zeta_2]; [\zeta_3]; [\zeta_5]; [\zeta_6]\}$ est de dimension 3 et contient l'ensemble de droites $[(\mathbb{R}e_0 + \mathbb{R}e_1) \vee (\mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3)]$ donc $\mathcal{L}$ est une congruence hyperbolique de droites focales $[\zeta_1]$ et $[\zeta_6]$. De plus, $\mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \{[\zeta_1]; [\zeta_6]\}$ disjoint de H_{M} donc $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L}$ et est bien le réduit de $\mathcal{L}$.

2. π_{M} possède une racine réelle double α. D'après le théorème de réduction de Jordan, M est semblable à une matrice diagonale par blocs $\mathrm{Diag}(\mathrm{J}_1, ..., \mathrm{J}_p)$ avec J_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ un bloc de Jordan de taille au plus 2 car $\mathrm{M} - \alpha\mathrm{I}_4$ est nilpotente d'ordre 2. Autrement dit, J_k vaut (α) ou $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{smallmatrix}\right)$. On obtient les deux formes de la table 2.1 suivant que l'espace propre est de dimension 2 ou 3 :

   Cas 3. $$\Lambda^2\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & & & & \\ & \alpha^2 & & & & \\ & \alpha & \alpha^2 & & & \\ & & & \alpha^2 & & \\ & & & & \alpha^2 & -\alpha \\ & & & & & \alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \pi_{\mathrm{M}}(0) = \alpha^2 \neq 0$$

   donc $$\mathrm{H}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Proj}\,\{[\zeta_1]; [\zeta_3]; [\zeta_4]; [\zeta_5]\}$$

   On remarque que H_{M} contient le bouquet de droites centré en $[e_3]$ et le champ de droites de support $[e_0 \vee e_1 \vee e_3]$ donc $\mathcal{L}$ est une congruence dégénérée. Ce champ est exactement $\mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ donc $\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L} \backslash \mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ et est bien le réduit de $\mathcal{L}$.

   Cas 4. $$\Lambda^2\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & & & & & \\ & \alpha^2 & & & & \\ & & \alpha^2 & & & \\ & & & \alpha^2 & & \\ & -1 & -\alpha & & \alpha^2 & -\alpha \\ & \alpha & & & & \alpha^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \pi_{\mathrm{M}}(0) = \alpha^2 \neq 0$$

   donc $$\mathrm{H}_{\mathrm{M}} = \mathrm{Proj}\,\{[\zeta_1]; [\zeta_4]; [\zeta_5]; [\zeta_3 - \zeta_6]\}$$

   est de dimension 3. D'après le lemme 2.17, le lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}$ est inclus dans $\mathcal{L}\mathrm{E}(\mathrm{M})$ réduit à $\{[\zeta_5]\}$. On vérifie que

   $$\zeta_5 \odot \zeta_1 = \zeta_5 \odot \zeta_4 = \zeta_5 \odot \zeta_5 = \zeta_5 \odot (\zeta_3 - \zeta_6) = 0$$

donc $\mathrm{H_M} \subseteq \{[\zeta_5]\}^\circ$. Ainsi, $\mathcal{L}$ est une congruence parabolique d'axe $[\zeta_5]$ et $\mathcal{L}_\mathrm{M} = \mathcal{L}\backslash\mathcal{L}\mathrm{E(M)}$ est bien le réduit de $\mathcal{L}$.

3. π_M possède deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_\pm = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ donc M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Comme M est réelle, les deux sous-espaces propres sont conjugués donc de dimension 2. Dans une base complexe $\mathscr{B}' = (u, \overline{u}, v, \overline{v})$, la matrice de M est diagonale égale à $\mathrm{Diag}(\lambda_+, \lambda_-, \lambda_+, \lambda_-)$. En considérant le changement de base $\mathscr{B}' \longrightarrow \mathscr{B} = (e_i)$ où $u = e_1 + \mathrm{i}e_2$ et $v = e_3 + \mathrm{i}e_4$, la matrice de M dans la base réelle $\mathscr{B}$ a la forme souhaitée. En effet, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \mathrm{i}\beta & 0 \\ 0 & \alpha - \mathrm{i}\beta \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Cas 5. Ici $[\mathrm{E(M)}] = \varnothing$ donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{M}$ et c'est une congruence elliptique (c'est la seule congruence dont le lieu d'ambiguïté est vide).

❸ Il ne reste plus qu'à montrer que tout réduit d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ d'ordre 1 est un flot linéaire. L'étude précédente montre que pour tout *type* T de congruence linéaire d'ordre 1, il existe $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_4$ avec π_M de degré 2 et une congruence $\mathcal{L}$ de type T tels que $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ est le réduit de $\mathcal{L}$. D'après le corollaire 1.17, toute congruence linéaire $\mathcal{L}'$ de type T est projectivement équivalente à $\mathcal{L}$, autrement dit, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_4$ tel que $\mathcal{L}' = [\Lambda^2\mathrm{P}]\,\mathcal{L}$. Montrons que $\mathcal{L}_\mathrm{N}$ est le réduit de $\mathcal{L}'$ où $\mathrm{N} = \mathrm{PMP}^{-1}$. D'après le lemme 2.14, $\mathcal{L}_\mathrm{N} = [\Lambda^2\mathrm{P}]\,\mathcal{L}_\mathrm{M}$. Si le type T correspond aux cas hyperbolique, elliptique ou bouquet de droites, une congruence est égale à son réduit ce qui permet de conclure. Si le type T correspond aux cas parabolique ou dégénéré, le lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ (une droite ou un plan respectivement) est nécessairement envoyé par P sur celui de $\mathcal{L}_\mathrm{N}$, donc l'ensemble L des droites incluses dans l'un est envoyé par P sur l'ensemble L′ des droites incluses dans l'autre. Ainsi,

$$\mathcal{L}' = [\Lambda^2\mathrm{P}]\,(\mathcal{L}_\mathrm{M} \uplus \mathrm{L}) = \mathcal{L}_\mathrm{N} \uplus \mathrm{L}'$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 2.15. □

2.2.3 Ensemble des flots d'une congruence donnée ☆

Dans cette section, nous déterminons l'ensemble des flots linéaires qui induisent une congruence linéaire donnée afin de préciser la nature de l'équivalence intervenant dans le théorème de représentation par flot (théorème 2.15). De tels flots préservent globalement chacune des droites de $\mathcal{L}$. Leur étude s'avérera utile en section 3.4.1 (pour caractériser les plans rétinaux sur lesquels se forment des images projectivement équivalentes, pour une congruence $\mathcal{L}$ fixée). Dans le théorème suivant, on dit que [M] est un *flot projectif* pour $\mathcal{L}$ lorsque M est un flot linéaire pour $\mathcal{L}$.

Proposition 2.18 (Flots projectifs d'une congruence linéaire donnée)**.**

L'ensemble des flots projectifs d'une congruence linéaire de rang 4 est en bijection avec

- $\mathbb{P}^1$ *pour les types hyperbolique et elliptique,*
- $\mathbb{R}^1$ *pour les types parabolique et dégénéré.*

Plus précisément, il existe une matrice P *inversible telle que la bijection s'écrit* $[\alpha : \beta] \mapsto [\mathrm{P}\,\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}\,\mathrm{P}^{-1}]$ *avec* $\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}$ *la forme réduite correspondante de la table 2.1 (avec* $\beta = 1$ *pour les types parabolique et dégénéré).*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ une congruence linéaire de rang 4. D'après le théorème 2.15, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{P}^3$ dans laquelle $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\widetilde{\mathrm{M}}}$ avec $\widetilde{\mathrm{M}}$ une forme réduite de la table 2.1.

Remarquons d'abord que, dans tous les cas et pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, il existe (λ, ν) dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)} = \lambda\,\mathrm{M}_0 + \nu\,\mathrm{I}_4$. D'après le lemme 2.14, $\mathcal{L}_{\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}} = \mathcal{L}_{\widetilde{\mathrm{M}}} = \mathcal{L}$. Réciproquement, soit M un flot linéaire pour $\mathcal{L}$, exprimé dans la base $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$. Montrons qu'il existe (α, β) tel que $\mathrm{M} = \mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}$. Rappelons que $\mathrm{E}(\mathrm{M})$ désigne l'union des sous-espaces propres de M. Comme M et $\widetilde{\mathrm{M}}$ sont le flot d'une même congruence, $\mathrm{E}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{M}})$ (c'est l'union des supports des droites focales de $\mathcal{L}$).

Type hyperbolique. $[\mathrm{E}(\mathrm{M})]$ est l'union des droites focales $[e_0 \vee e_1]$ et $[e_2 \vee e_3]$ donc M est de la forme $\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}$ pour le type hyperbolique.

Type elliptique. $[\mathrm{E}(\mathrm{M})_{\mathbb{C}}]$ est l'union des droites focales complexes conjuguées

$$[(e_1 + \mathrm{i}\,e_2) \vee (e_3 + \mathrm{i}\,e_4)] \qquad \text{et} \qquad [(e_1 - \mathrm{i}\,e_2) \vee (e_3 - \mathrm{i}\,e_4)]$$

donc M est de la forme $\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}$ pour le type elliptique (cf. item 3 page 49).

Type parabolique. $[\mathrm{E}(\mathrm{M})]$ est la droite focale $[e_1 \vee e_3]$, π_{M} est de la forme $(\mathrm{X} - \alpha)^2$ et $\mathcal{L}$ contient les droites $[e_0 \vee e_1]$ et $[e_2 \vee e_3]$ donc la matrice de M dans $\mathscr{B}$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & \beta' & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ \beta & \alpha & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \alpha & \gamma' \\ & & \gamma & \alpha \end{array}\right) \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{array}{lll} \beta = 0 & \text{ou} & \beta' = 0 \\ \gamma = 0 & \text{ou} & \gamma' = 0 \end{array}\right.$$

(les « ou » sont exclusifs). Considérons l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par $[e_0 + e_2]$. Notons $\widetilde{\mathrm{M}} = \mathrm{M}_{(\widetilde{\alpha},1)}$.

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{M}}(e_0 + e_2) &= \widetilde{\alpha}\,(e_0 + e_2) + (e_1 + e_3) \\ \mathrm{M}(e_0 + e_2) &= \alpha\,(e_0 + e_2) + \beta\,e_1 + \gamma\,e_3 \end{aligned}$$

Nécessairement, les vecteurs $(e_0 + e_2)$, $\widetilde{\mathrm{M}}(e_0 + e_2)$ et $\mathrm{M}(e_0 + e_2)$ sont liées donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \widetilde{\alpha} & 1 & \widetilde{\alpha} & 1 \\ \alpha & \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang maximal, ce qui est équivalent à $\beta = \gamma$.

□

Corollaire 2.19.

Soit $\mathcal{L}$ une congruence linéaire d'ordre 1.

(i) Soient $[x]$ et $[y]$ deux points distincts de $\mathbb{P}^3$ avec $[x]$ non ambigu pour $\mathcal{L}$. Les points $[x]$ et $[y]$ appartiennent à une même droite de $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe un flot linéaire M *pour $\mathcal{L}$ tel que* $\mathrm{M}(x) = y$.

(ii) Supposons $\mathcal{L}$ de rang 4. Soient π_1 et π_2 deux plans distincts de $\mathbb{P}^3$ avec π_1 contenant une unique droite de $\mathcal{L}$. Les plans π_1 et π_2 partagent une même droite de $\mathcal{L}$ si et seulement s'il existe un flot linéaire M *pour $\mathcal{L}$ tel que* $[\mathrm{M}]$ *envoie π_1 sur π_2.*

Cette dernière équivalence induit celle de la proposition 3.10 concernant la caractérisation des rétines d'images projectivement équivalentes pour une congruence $\mathcal{L}$ fixée.

Démonstration. Commençons par montrer le point (i). Si $\mathrm{M}(x) = y$, alors la droite $[x \vee y]$ appartient à $\mathcal{L}$ par définition d'un flot linéaire. Réciproquement, notons $\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}$ la famille des flots linéaires pour $\mathcal{L}$ (cf. proposition 2.18, $\beta = 1$ pour les types parabolique et dégénéré). À l'aide des formes réduites de la table 2.1, on trouve

$$\mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} \alpha\, x + (\beta - \alpha)\, \mathrm{M}_{[0:1]}(x) & \text{pour les types bouquet et hyperbolique} \\ \alpha\, x + \mathrm{M}_{[0:1]}(x) & \text{pour les types parabolique et dégénéré} \\ \alpha\, x + \beta\, \mathrm{M}_{[0:1]}(x) & \text{pour le type elliptique} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout point $[y]$ distinct de $[x]$ et appartenant à la droite $[x \vee \mathrm{M}_{(0,1)}(x)]$ de $\mathcal{L}$ ($[x]$ est non-ambigu), il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ tel que $y = \mathrm{M}_{(\alpha,\beta)}(x)$. Il suffit enfin de raisonner par dualité dans $\mathbb{P}^3$ pour le point (ii) en notant que, si M est un flot linéaire pour $\mathcal{L}$, alors ${}^t\mathrm{M}$ est un flot linéaire pour $\mathcal{L}^\star$ (le polynôme minimal est invariant par transposée). □

2.3 Congruences linéaires euclidiennes

Dans le chapitre 1, nous considérions des ensembles de droites de $\mathbb{P}^3$ et nous avons établi que deux congruences d'un même type sont projectivement équivalentes. Dans cette section, nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien et nous nous attachons à donner une description euclidienne *intrinsèque* d'une congruence linéaire. Nous distinguons les congruences linéaires *affinement génériques* pour lesquelles aucune droite focale ne se trouve dans le plan infini.

Dans la section 2.3.1, nous introduisons une *fonction de pas* définie sur l'orthogonal $\mathcal{L}^\circ$ d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ et étudions ses extrema, qui sont en fait des invariants euclidiens pour $\mathcal{L}$. Dans la section 2.3.2, nous construisons, de façon unifiée pour les congruences affinement génériques, des bases euclidiennes dites *normalisées*, dans lesquelles l'expression d'un flot linéaire est très simple (comme en section 2.1.5 dans le cadre projectif). Enfin, dans la section 2.3.3, nous faisons le lien entre la géométrie euclidienne des congruences linéaires et leurs invariants euclidiens via les flots linéaires précédents.

2.3.1 Fonction de pas

Dans cette section, nous définissons une fonction de pas sur l'orthogonal $\mathcal{L}^\circ$ d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ et nous étudions les extrema de cette fonction. Notons $\mathbb{G}_\infty$ l'ensemble des droites situées dans le plan infini. Rappelons la convention de plongement de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{P}^3$ (section 1.1.2) : un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ est identifié au point $[v] = [0 : \overrightarrow{v}]$ de $\mathbb{P}^3$ et un point A de $\mathbb{R}^3$ est identifié au point $[a] = [1 : \overrightarrow{\mathrm{OA}}]$ de $\mathbb{P}^3$. Pour l'origine O d'un repère, on note $[o] = [e_0]$.

Fonction de pas. Soit $\zeta = (\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta})$ un point de $\mathbb{R}^6$ avec $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Définissons la quantité

$$p(\zeta) = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\eta}}{\| \overrightarrow{v} \|^2} = \frac{1}{2}\, \frac{\zeta \odot \zeta}{\| \overrightarrow{v} \|^2}$$

Elle est homogène en ζ donc elle définit une fonction p sur $\mathbb{P}^5 \backslash \mathbb{G}_\infty$ appelée *fonction de pas*. Par définition, $p(\zeta) = 0$ si et seulement si $[\zeta]$ représente une droite. Intuitivement, $p(\zeta)$ évalue un « défaut » pour $[\zeta]$ à représenter les coordonnées de Plücker d'une droite. Le lemme suivant assure que les valeurs de la fonction de pas ne dépendent pas de la base euclidienne (directe) de $\mathbb{R}^3$ sous-jacente à l'identification de $\mathbb{G}$ et de la quadrique de Klein (cf. section 1.1.1).

Lemme 2.20.

La fonction de pas est un invariant euclidien dans le sens suivant : toute isométrie affine positive[2] [M] *de* $\mathbb{R}^3$ *induit une transformation projective* $[\Lambda^2\mathrm{M}]$ *de* $\mathbb{P}^5$ *qui laisse invariant la fonction de pas, c.-à-d.*

$$\forall\,[\zeta] \in \mathbb{P}^5 \setminus \mathbb{G}_\infty \qquad p\big((\Lambda^2\mathrm{M})\,\zeta\big) = p(\zeta)$$

Lorsque l'isométrie est négative, la valeur absolue de la fonction de pas est préservée.

Démonstration. Notons $\zeta = (\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta})$ et $\zeta' = (\overrightarrow{v}' : \overrightarrow{\eta}') = (\Lambda^2\mathrm{M})\,(\zeta)$ avec [M] une isométrie affine positive de $\mathbb{R}^3$. D'après les équations (1.3),

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}' = \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) \\ \overrightarrow{\eta}' = \overrightarrow{t} \times \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) + (\mathrm{Com}\,\mathrm{P})(\overrightarrow{\eta}) \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & {}^t\overrightarrow{0} \\ \hline \overrightarrow{t} & \mathrm{P} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{P} \in \mathrm{SO}_3$$

Calculons $p(\zeta')$. D'une part, $\|\overrightarrow{v}'\|^2 = \|\mathrm{P}(\overrightarrow{v})\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2$ car P est une isométrie. D'autre part,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{\eta}' &= \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) \cdot \big(\overrightarrow{t} \times \mathrm{P}(\overrightarrow{v})\big) + \mathrm{P}(\overrightarrow{v}) \cdot (\mathrm{Com}\,\mathrm{P})(\overrightarrow{\eta}) \\ &= \overrightarrow{0} + \Big[{}^t(\mathrm{Com}\,\mathrm{P})\ \mathrm{P}(\overrightarrow{v})\Big] \cdot \overrightarrow{\eta} = (\det \mathrm{P})\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\eta} \end{aligned}$$

En conclusion, $p(\zeta') = p(\zeta)$ si $\det \mathrm{P} = 1$ et $|p(\zeta')| = |p(\zeta)|$ si $\det \mathrm{P} = -1$. □

Fonction de pas d'une congruence. Soit $\mathcal{L}$ une congruence linéaire de rang 4. Son orthogonal $\mathcal{L}^\circ$ est une droite de $\mathbb{P}^5$. La *fonction de pas de la congruence* $\mathcal{L}$ est simplement la restriction de p à la droite $\mathcal{L}^\circ$, encore notée p. Notons $[\mathrm{A}] = [\overrightarrow{v_a} : \overrightarrow{\eta_a}]$ et $[\mathrm{B}] = [\overrightarrow{v_b} : \overrightarrow{\eta_b}]$ deux points distincts de la droite $\mathcal{L}^\circ$. Une paramétrisation de cette droite est donnée par

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}^\circ \\ \phi \longmapsto [\mathrm{C}_\phi] = \big[(\cos\phi)\,\mathrm{A} + (\sin\phi)\,\mathrm{B}\big] = \begin{bmatrix} \cos\phi\ \overrightarrow{v_a} + \sin\phi\ \overrightarrow{v_b} \\ \cos\phi\ \overrightarrow{\eta_a} + \sin\phi\ \overrightarrow{\eta_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_\phi} \\ \overrightarrow{\eta_\phi} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.3}$$

Cette paramétrisation est π-périodique. On définit alors $p : \phi \mapsto p(\phi) = p(\mathrm{C}_\phi)$. Étudions les extréma de cette fonction.

Cas affinement générique. Supposons ici que $\mathcal{L}$ ne possède aucune droite dans le plan infini. Les vecteurs $\overrightarrow{v_\phi}$ pour ces valeurs de ϕ sont non nuls et forment un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si bien que, dans la paramétrisation (2.3), on peut supposer que $(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_b})$ forme une famille orthonormée. De ce fait, $[\mathrm{A}] = [\mathrm{C}_0]$, $[\mathrm{B}] = [\mathrm{C}_{\pi/2}]$, ϕ est égal à l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{v_a}, \overrightarrow{v_\phi})}$ et $\|\overrightarrow{v_\phi}\| = 1$. Ainsi, la fonction de pas de $\mathcal{L}$ s'exprime par

$$p(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_\phi} \cdot \overrightarrow{\eta_\phi}}{\|\overrightarrow{v_\phi}\|^2} = \frac{1}{2}\,(\sin 2\phi)\,\mathrm{A} \odot \mathrm{B} + (\cos^2\phi)\,\mathfrak{p}_\mathrm{A} + (\sin^2\phi)\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} \tag{2.4}$$

où on note $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = \mathrm{A} \odot \mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B} = \mathrm{B} \odot \mathrm{B}$. Les extrema de la fonction pas sont décrits dans le lemme qui suit, où on appelle *axe* de $[\zeta] \in \mathbb{P}^5$ la droite $\Delta(\zeta)$ de $\mathbb{P}^3$ de coordonnées de Plücker[3]

$$\Delta(\zeta) = [\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta} - p(\zeta)\ \overrightarrow{v}]. \tag{2.5}$$

[2] déplacement, *rigid motion* en anglais

[3] Remarquons que le couple de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ obtenu dans $\Delta(\zeta)$ n'est rien d'autre qu'une orthogonalisation de Schmidt de la famille $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\eta})$.

Proposition 2.21.

La fonction de pas p d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ affinement générique possède au moins deux extrema sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Les axes de deux points de $\mathcal{L}^\circ$ en lesquels p est extrémale sont concourants et orthogonaux.

Démonstration. Puisque p est π-périodique, considérons $\phi \in \,]-\pi/2\,;\pi/2\,]$. La dérivée de la fonction $\phi \mapsto p(\phi)$ s'exprime par

$$p'(\phi) = (\cos 2\phi)\,\mathrm{A} \odot \mathrm{B} + (\mathfrak{p}_\mathrm{B} - \mathfrak{p}_\mathrm{A})\,\sin 2\phi \tag{2.6}$$

Elle est identiquement nulle si et seulement si $\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = 0$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B} - \mathfrak{p}_\mathrm{A} = 0$. Dans ce cas, le pas est constant sur $\mathcal{L}^\circ$ donc extrémal en [A] et [B]. Si $\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = 0$, p est extrémal uniquement en [A] et [B]. Si $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = \mathfrak{p}_\mathrm{B}$, p est extrémal uniquement en $[\mathrm{C}_{-\pi/4}]$ et $[\mathrm{C}_{\pi/4}]$. Dans les cas restants,

$$p'(\phi) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \tan 2\phi = \frac{\mathrm{A} \odot \mathrm{B}}{\mathfrak{p}_\mathrm{B} - \mathfrak{p}_\mathrm{A}}$$

Comme tan est π-périodique et que $\tan : \,]-\pi/2\,;\pi/2\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ est bijective, p est extrémal exactement en deux points $[\mathrm{C}_\phi]$ et $[\mathrm{C}_{\phi+\pi/2}]$.

Dans tous les cas, les deux points de $\mathcal{L}^\circ$ dont le pas est extrémal ont des axes orthogonaux. Ainsi, choisissons ces deux points pour A et B d'où $\overrightarrow{v_a} \cdot \overrightarrow{v_b} = 0$ (axes orthogonaux) et $p'(0) = p'(\pi/2) = 0$ (pas extrémal). D'après l'égalité (2.6), on en déduit que $\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = 0$. Montrons que les axes de [A] et [B], de coordonnées de Plücker données par (2.5), se coupent :

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_a} \\ \overrightarrow{\eta_a} - p(0)\,\overrightarrow{v_a} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \overrightarrow{v_b} \\ \overrightarrow{\eta_b} - p(\pi/2)\,\overrightarrow{v_b} \end{pmatrix} = \underbrace{\mathrm{A} \odot \mathrm{B}}_{=0} - (p(0) + p(\pi/2))\,\underbrace{\overrightarrow{v_a} \cdot \overrightarrow{v_b}}_{=0} = 0$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Si A et B sont deux points de $\mathcal{L}$ en lesquels la fonction pas est extrémale, l'équation (2.4) se réécrit alors

$$\boxed{p(\phi) = \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\cos^2\phi + \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,\sin^2\phi}$$

Dans toute la suite, nous notons $\{\mathfrak{p}_\mathrm{A}, \mathfrak{p}_\mathrm{B}\}$ les deux valeurs de pas extrêmes (éventuellement égaux). D'après le lemme 2.20, ce sont des invariants euclidiens de la congruence $\mathcal{L}$.

Cas non affinement générique. Considérons une congruence linéaire $\mathcal{L}$ non affinement générique. Deux cas se produisent : soit la droite $\mathcal{L}^\circ$ est contenue dans le plan $\mathbb{G}_\infty$ ($\mathcal{L}$ est une congruence dégénérée dont les droites affines sont parallèles entre elles), auquel cas la fonction de pas de $\mathcal{L}$ n'est pas définie ; soit la droite $\mathcal{L}^\circ$ coupe $\mathbb{G}_\infty$ en un unique point [A], auquel cas la fonction de pas de $\mathcal{L}$ est définie sur $\mathcal{L}^\circ\backslash\{[\mathrm{A}]\}$. Ce dernier cas correspond aux congruences hyperbolique, parabolique et dégénérée dont exactement une droite focale se trouve dans le plan infini. Dans toute la suite, on exclut de l'étude les congruences dégénérées dont une seule droite focale se trouve à l'infini car sans intérêt particulier dans le chapitre 3.

La paramétrisation de la droite $\mathcal{L}^\circ$ de $\mathbb{P}^5$ fournie par l'équation (2.3) se réécrit

$$\phi \;\longmapsto\; [\mathrm{C}_\phi] = \big[(\cos\phi)\,\mathrm{A} + (\sin\phi)\,\mathrm{B}\big] = \begin{bmatrix} \sin\phi\,\overrightarrow{v_b} \\ \cos\phi\,\overrightarrow{\eta_a} + \sin\phi\,\overrightarrow{\eta_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_\phi} \\ \overrightarrow{\eta_\phi} \end{bmatrix}$$

avec $\overrightarrow{\eta_a} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v_b} \neq \overrightarrow{0}$. On peut supposer que $\|\overrightarrow{\eta_a}\| = \|\overrightarrow{v_b}\| = 1$. L'expression du pas sur $\mathcal{L}^\circ\backslash\,\{[\mathrm{A}]\}$ vaut alors

$$p(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_\phi} \cdot \overrightarrow{\eta_\phi}}{\|\overrightarrow{v_\phi}\|^2} = \frac{\sin\phi\,\cos\phi}{(\sin\phi)^2}\,\big(\overrightarrow{v_b} \cdot \overrightarrow{\eta_a}\big) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{v_b} \odot \overrightarrow{\eta_b} = \operatorname{cotan}\,\phi\;(\mathrm{A} \odot \mathrm{B}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{B} \odot \mathrm{B}. \tag{2.7}$$

Affinement générique	Affinement non générique		
	parabolique	hyperbolique	dégénéré(*)
$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \mathfrak{p}_B & \\ -\mathfrak{p}_A & & \\ & -\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & & \\ \mathfrak{p} & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & & \\ & 1 & -\sin 2\theta \\ & \sin 2\theta & -1 \\ & & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

TAB. 2.2: Flots normalisés pour les congruences linéaires euclidiennes.

(*) Toutes les droites focales sont dans le plan infini. La congruence euclidienne correspondante est un bouquet de droites parallèles.

Lemme 2.22.

La fonction de pas d'une congruence hyperbolique non affinement générique ne possède pas d'extremum. La fonction de pas d'une congruence parabolique non affinement générique est constante et non identiquement nulle.

Démonstration. Remarquons que $\mathrm{A} \odot \mathrm{B} = 0$ si et seulement si la droite $\mathcal{L}^\circ$ est tangente à $\mathbb{G}$ en le point [A]. C'est le cas pour une congruence parabolique et cela ne l'est pas pour une congruence hyperbolique. L'équation (2.7) permet de conclure sur la nature des extrema de la fonction pas. Dans le cas parabolique, on obtient de plus que $p(\phi) = (\mathrm{B} \odot \mathrm{B})/2$ qui est bien non nul car [A] est le seul point de $\mathcal{L}^\circ$ appartenant à $\mathbb{G}$. □

Pour une congruence parabolique non affinement générique, on note $\mathfrak{p}$ la valeur constante de la fonction pas. D'après le lemme 2.20, c'est un invariant euclidien de la congruence.

2.3.2 Bases normalisées euclidiennes

À partir de l'étude de la fonction de pas d'une congruence de la section précédente, invariante par tout déplacement de la congruence, nous construisons des bases euclidiennes dites *normalisées*, c'est-à-dire adaptées à la géométrie interne d'une congruence, indépendamment de sa position dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Dans une telle base, la matrice d'un flot linéaire d'une congruence s'exprime très simplement à l'aide des pas extrémaux $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$ (ou d'autres invariants euclidiens dans le cas non affinement générique). La table 2.2 regroupe les expressions de ces flots.

Congruence affinement générique. Soit $\mathcal{L}$ une congruence linéaire euclidienne de rang 4 affinement générique. Soient [A] et [B] deux points de la droite $\mathcal{L}^\circ$ de $\mathbb{P}^5$ en lesquels la fonction de pas p est extrémale (proposition 2.21). Une base euclidienne $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{P}^3$ est dite *normalisée pour* $\mathcal{L}$ si O est le point d'intersection des axes orthogonaux de direction $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ associés aux deux points [A] et [B] de $\mathcal{L}^\circ$ respectivement. Remarquons qu'une base normalisée est unique pour $\mathcal{L}$, à un changement d'orientation près (choix de $\overrightarrow{e_3}$), à moins que le pas soit constant sur $\mathcal{L}^\circ$, c'est-à-dire $\mathfrak{p}_A = \mathfrak{p}_B$. Dans ce cas, toute base obtenue par rotation de la base normalisée autour de l'axe $[e_0 \vee e_3]$ convient.

L'interprétation géométrique de ces bases et de leurs pas extremaux associés est présentée à la section 2.3.3. L'expression du flot linéaire d'une congruence dans une base euclidienne normalisée sera d'une aide précieuse pour faire le lien entre la géométrie euclidienne de la congruence et ses pas extremaux.

Théorème 2.23 (Flot linéaire en base euclidienne normalisée (cas affinement générique))**.**

Un flot linéaire d'une congruence linéaire affinement générique de rang 4 de pas extrémaux $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$ s'exprime, dans une base euclidienne normalisée associée, par la matrice

$$M_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \mathfrak{p}_B & \\ & -\mathfrak{p}_A & & \\ -\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B & & & \end{pmatrix}$$

Démonstration. Considérons une telle congruence $\mathcal{L} = H \cap \mathbb{G}$ avec [A] et [B] deux points engendrant $\mathcal{L}^\circ = H^\circ$ de pas extrémaux $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$. Dans la base euclidienne normalisée, les axes de [A] et [B] ont pour coordonnées de Plücker $[\overrightarrow{e_1} : \overrightarrow{0}]$ et $[\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{0}]$. D'après la formule (2.5), on en déduit que $[A] = [\overrightarrow{e_1} : \mathfrak{p}_A\,\overrightarrow{e_1}]$ et $[B] = [\overrightarrow{e_2} : \mathfrak{p}_B\,\overrightarrow{e_2}]$. On vérifie par le calcul que le polynôme minimal de $M_{\mathfrak{n}}$ est $X^2 + \mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B$ donc sa valeur en 0 vaut $\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B$. D'après le théorème 2.15, $M_{\mathfrak{n}}$ est un flot linéaire pour la congruence $\mathcal{L}' = \mathbb{G} \cap [\mathrm{Ker}\,(\Lambda^2 M_{\mathfrak{n}} - \mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B\,I_6)]$ (à condition que $\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B \neq 0$). Calculons

$$\Lambda^2 M_{\mathfrak{n}} - \mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B I_6 = -\begin{pmatrix} \mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B & 0 & 0 & \mathfrak{p}_B & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B & 0 & 0 & \mathfrak{p}_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {\mathfrak{p}_A}^2\mathfrak{p}_B & 0 & 0 & \mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}_A{\mathfrak{p}_B}^2 & 0 & 0 & \mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathfrak{p}_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathfrak{p}_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base homogène de $[\mathrm{Ker}\,(\Lambda^2 M_n - \mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B\,I_6)]$ noté H' (il en est de même par continuité lorsque $\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B = 0$). Ces points sont orthogonaux pour $\odot$ avec les deux points $[A] = [\overrightarrow{e_1} : \mathfrak{p}_A\,\overrightarrow{e_1}]$ et $[B] = [\overrightarrow{e_2} : \mathfrak{p}_B\,\overrightarrow{e_2}]$ de H° donc $H'^\circ = H^\circ$ par dimension. Ainsi, $H' = H$ et $M_{\mathfrak{n}}$ est bien un flot linéaire pour $\mathcal{L}$. □

Traitons à présent les trois situations non affinement génériques. Pour la congruence parabolique, nous pouvons encore nous appuyer sur la fonction de pas pour construire une base euclidienne normalisée. Pour les congruences hyperbolique et dégénérée, soit la fonction de pas associée ne possède aucun extremum, soit elle n'est pas du tout définie. Dans ces cas-là, puisque la géométrie des congruences est facile à décrire, nous construisons directement une base dans laquelle la matrice d'un flot linéaire s'exprime simplement et nous qualifions à nouveau ces bases de normalisées.

Congruence parabolique, droite focale à l'infini. Soit $\mathcal{L}$ une telle congruence parabolique. D'après l'étude de la section précédente 2.3.1, la droite focale a pour coordonnées de Plücker $[A] = [\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_1}]$ (on choisit $\|\overrightarrow{e_1}\| = 1$), les axes des points de $\mathcal{L}^\circ \backslash \{[A]\}$ ont même direction $\overrightarrow{e_2}$ (on choisit $\|\overrightarrow{e_2}\| = 1$ et $\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = 0$ car la droite $\mathcal{L}^\circ$ de $\mathbb{P}^5$ est tangente à $\mathbb{G}$ en [A]. Une *base euclidienne normalisée* (directe) pour $\mathcal{L}$ est donnée par $\mathscr{B} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ avec $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$ et l'origine O sur une droite de $\mathcal{L}$ de direction $\overrightarrow{e_3}$. Le lemme suivant assure qu'une telle base existe, décrit l'ensemble des bases possibles et exprime la matrice d'un flot linéaire de $\mathcal{L}$ dans une telle base.

Lemme 2.24.

Soit $\mathcal{L}$ une congruence parabolique affinement non générique d'invariant euclidien $\mathfrak{p}$.

(i) Il existe une base euclidienne normalisée $\mathscr{B} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $\mathcal{L}$.

(ii) *Toute base normalisée pour $\mathcal{L}$ s'obtient à partir de $\mathscr{B}$ par une translation de vecteur dans* Vect $\{\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$.

(iii) *Une matrice d'un flot linéaire pour $\mathcal{L}$ exprimée dans $\mathscr{B}$ s'écrit*

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 1 & & \\ & & \mathfrak{p} \end{pmatrix}$$

L'interprétation géométrique d'une telle base normalisée sera présentée à la section 2.3.3.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base définie comme dans le paragraphe précédant ce lemme, mais en considérant un point O quelconque de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la droite $\mathcal{L}^\circ$ de $\mathbb{P}^5$ est engendrée par les deux points $[\mathrm{A}] = [0 : \overrightarrow{e_1}]$ (la droite focale) et $[\mathrm{B}] = [\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{\eta_b}]$. D'après la formule (1.3), une translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ induit des nouvelles coordonnées pour les points de $\mathcal{L}^\circ$: $[\mathrm{A}] = [0 : \overrightarrow{e_1}]$ et $[\mathrm{B}] = [\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{\eta_b}]$. Quitte à translater l'origine O, on peut supposer que $\overrightarrow{\eta_b} = \lambda\, \overrightarrow{e_2}$. Puisque $p(\mathrm{B}) = \mathfrak{p}$, on obtient $\lambda = \mathfrak{p}$. Ainsi, comme $(\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{0}) \odot \mathrm{A} = (\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{0}) \odot \mathrm{B} = 0$, on en déduit que l'origine O se trouve sur une droite de $\mathcal{L}$ de direction $\overrightarrow{e_3}$, ce qui prouve le point (i). En outre,

$$\mathcal{L}^\circ = \mathrm{Proj}\, \{[\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_1}]\,;\, [\overrightarrow{e_2} : \mathfrak{p}\, \overrightarrow{e_2}]\}$$

On obtient immédiatement que le sous-espace projectif H défini par $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est engendré par les quatre points de $\mathbb{P}^5$

$$\left[\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_1}\right] \qquad \left[\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{0}\right] \qquad \left[\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_3}\right] \quad \text{et} \quad \left[\overrightarrow{e_2} : -\mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\, \overrightarrow{e_2}\right]$$

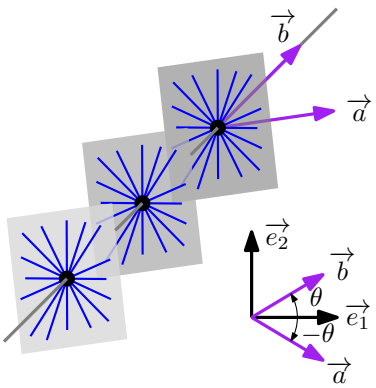
(ii) D'après la formule (1.3), une translation de vecteur $\overrightarrow{t}$ transforme ces quatre points en les quatres autres points

$$\left[\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_1}\right] \qquad \left[\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{e_3}\right] \qquad \left[\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_3}\right] \quad \text{et} \quad \left[\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{t} \times \overrightarrow{e_2} - \mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\, \overrightarrow{e_2}\right]$$

Remarquons que ces quatre nouveaux points engendrent H si et seulement si $\overrightarrow{t}$ appartient à Vect $\{\overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\}$ ce qui prouve le point (ii).

(iii) On vérifie par le calcul que H est le noyau de $[\Lambda^2(\mathrm{M}_{\mathfrak{n}} + \mathrm{I}_4) - \mathrm{I}_6]$ donc $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ est un flot linéaire pour $\mathcal{L}$ d'après le théorème de représentation par flot (theorème 2.15). □

Congruence hyperbolique, droite focale à l'infini. Pour une telle congruence $\mathcal{L}$, l'étude de la fonction de pas sur $\mathcal{L}^\circ$ n'apporte aucune information utile pour trouver une base euclidienne naturelle pour $\mathcal{L}$. Heureusement, la géométrie de $\mathcal{L}$ est simple (cf. figure ci-contre). Notons $\overrightarrow{a}$ une normale au plan affine contenant la droite focale à l'infini et $\overrightarrow{b}$ un vecteur directeur de la droite focale affine. Ils forment un angle 2θ avec $\theta \in \left]\, 0\,; \pi/4\,\right[$. Ce paramètre θ est un invariant euclidien pour $\mathcal{L}$ puisque les isométries préservent les angles. Une base euclidienne $\mathscr{B} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est dite *normalisée* pour $\mathcal{L}$ si l'origine O appartient à la droite focale affine et



$$\overrightarrow{a} = \cos\theta\, \overrightarrow{e_1} - \sin\theta\, \overrightarrow{e_2} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{b} = \cos\theta\, \overrightarrow{e_1} + \sin\theta\, \overrightarrow{e_2}$$

Lemme 2.25.

Soit $\mathcal{L}$ une congruence hyperbolique affinement non générique d'invariant euclidien θ. La matrice d'un flot linéaire exprimé dans une base normalisée euclidienne pour $\mathcal{L}$ s'écrit

$$\mathrm{M}_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & & & \\ & 1 & -\sin 2\theta & \\ & \sin 2\theta & -1 & \\ & & & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Démonstration. Dans une telle base $\mathscr{B}$, les droites focales ont pour coordonnées de Plücker

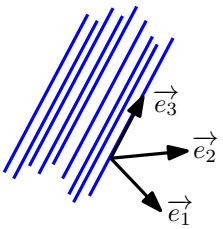
$$[\cos\theta\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{0}] \qquad \text{et} \qquad [\overrightarrow{0} : \cos\theta\,\overrightarrow{e_1} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_2}]$$

Une base du sous-espace H défini par $\mathcal{L} = \mathrm{H} \cap \mathbb{G}$ est alors formée des quatre points

$$[\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{0}] \quad [\overrightarrow{0} : \overrightarrow{e_3}] \quad [\overrightarrow{0} : \sin\theta\,\overrightarrow{e_1} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_2}] \qquad \text{et} \qquad [\sin\theta\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_2} : \overrightarrow{0}]$$

On vérifie après calculs que le polynôme minimal de $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ vaut $\mathrm{X}^2 - \cos(2\theta)^2$ et que H est exactement le noyau de $[\Lambda^2 \mathrm{M}_{\mathfrak{n}} + \cos(2\theta)^2\,\mathrm{I}_6]$. Ainsi, $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ est un flot linéaire pour $\mathcal{L}$ [4]. □

Congruence dégénérée, droites focales à l'infini. Une base $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est dite *normalisée* pour une telle congruence $\mathcal{L}$ si $\overrightarrow{e_3}$ dirige les droites de $\mathcal{L}$, l'origine et les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ pouvant être choisis arbitrairement (de façon à former une base orthonormée, cf. figure ci-contre). Considérons le flot linéaire $[\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}]$ qui envoie tout point de $\mathbb{R}^3$ sur le centre à l'infini. Dans une base normalisée, sa matrice s'écrit



$$\mathrm{M}_{\mathfrak{n}} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

2.3.3 Géométrie et pas extrémaux

Dans la section précédente, nous avons introduit « algébriquement » des bases euclidiennes normalisées fournies avec des invariants euclidiens ($\mathfrak{p}_{\mathrm{A}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathrm{B}}$, ou $\mathfrak{p}$). Dans cette section, nous décrivons géométriquement ces bases et faisons le lien entre la géométrie euclidienne des congruences et les invariants euclidiens obtenus, notamment pour les congruences affinement génériques (cf. synthèse de la figure 2.2). Nous en déduisons une classification euclidienne des congruences linéaires affinement génériques à l'aide de ces invariants (théorème 2.30).

Soient $\mathcal{L}$ une congruence linéaire euclidienne de rang 4 affinement générique, $\mathfrak{p}_{\mathrm{A}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathrm{B}}$ ses pas extrémaux et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base euclidienne normalisée correspondante. Rappelons que la fonction pas sur $\mathcal{L}^\circ$ est donnée par

$$p(\phi) = p(\mathrm{C}_\phi) = \mathfrak{p}_{\mathrm{A}}\,\cos^2\phi + \mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\,\sin^2\phi$$

où $\phi \mapsto [\mathrm{C}_\phi]$ est une paramétrisation de $\mathcal{L}^\circ$ (équation (2.3)) et où ϕ représente l'angle orienté entre $\overrightarrow{e_1}$ et la direction $\overrightarrow{v_\phi}$ de l'axe de $[\mathrm{C}_\phi]$. Dans ce qui suit, nous traitons successivement chacun

[4] Un tel flot linéaire est obtenu grâce à un changement de coordonnées adéquat à partir d'une forme réduite donnée dans la table 2.1.

des types de congruences linéaires en fonction du nombre de solutions possibles de $p(\phi) = 0$, c.-à-d. du nombre de droites focales que la congruence $\mathcal{L}$ possède.

Congruence hyperbolique ($\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B < 0$)**.** L'équation $p(\phi) = 0$ possède exactement deux solutions, pour $\phi \in]-\pi/2\,;\pi/2]$, si et seulement si $\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B < 0$. Dans ce cas, $\tan^2\phi = -\mathfrak{p}_A/\mathfrak{p}_B$. Choisissons la droite focale ℓ correspondant à $\phi > 0$. Ainsi, $\tan\phi = \sqrt{-\mathfrak{p}_A/\mathfrak{p}_B}$. D'après la formule (2.5), les coordonnées de Plücker de ℓ sont données par

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_\phi} \\ \overrightarrow{\eta_\phi} - p_\phi \overrightarrow{v_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi\,\overrightarrow{e_1} + \sin\phi\,\overrightarrow{e_2} \\ \mathfrak{p}_A\cos\phi\,\overrightarrow{e_1} + \mathfrak{p}_B\sin\phi\,\overrightarrow{e_2} \end{bmatrix}$$

Ainsi, la droite ℓ est perpendiculaire à l'axe (Oz) (la direction de ℓ est dans Vect $\{\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$) et le coupe ($\ell \odot [\overrightarrow{e_3} : \overrightarrow{0}] = 0$). Notons alors d la coordonnée en z du point d'intersection de ℓ avec (Oz) et supposons la base normalisée directe. Les composantes des coordonnées de Plücker de ℓ vérifient la relation

$$\mathfrak{p}_A\cos\phi\,\overrightarrow{e_1} + \mathfrak{p}_B\sin\phi\,\overrightarrow{e_2} = d\,\overrightarrow{e_3} \times \left(\cos\phi\,\overrightarrow{e_1} + \sin\phi\,\overrightarrow{e_2}\right) = d\cos\phi\,\overrightarrow{e_2} - d\sin\phi\,\overrightarrow{e_1}$$

Ainsi, $\qquad \mathfrak{p}_A\cos\phi = -d\sin\phi \qquad$ et $\qquad \mathfrak{p}_B\sin\phi = d\cos\phi$

d'où $$d = \mathfrak{p}_B\sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_A}{\mathfrak{p}_B}} = -\mathfrak{p}_A\sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_B}{\mathfrak{p}_A}} = \begin{cases} \sqrt{-\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B} & \text{si } \mathfrak{p}_A < 0 \text{ et } \mathfrak{p}_B > 0 \\ -\sqrt{-\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B} & \text{sinon} \end{cases}$$

La figure 2.2a illustre la position des deux droites focales. Remarquons que l'échange de $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$ induit sur $\mathcal{L}$ une symétrie orthogonale par rapport au plan $z = 0$. Finalement, nous venons de prouver le lemme suivant :

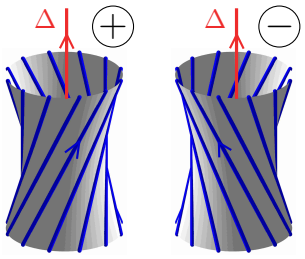
Lemme 2.26 (Description euclidienne des congruences hyperboliques)**.**

Soit $\mathcal{L}$ une congruence hyperbolique de pas extrémaux $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$ avec $|\mathfrak{p}_A| \leqslant |\mathfrak{p}_B|$. La distance $2d$ et l'angle 2ϕ entre les droites focales sont donnés par

$$\tan\phi = \sqrt{-\frac{\mathfrak{p}_A}{\mathfrak{p}_B}} \qquad \textit{et} \qquad d = \sqrt{-\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B}$$ □

Congruence elliptique ($\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B > 0$)**.** L'équation $p(\phi) = 0$ ne possède aucune solution si et seulement si $\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B > 0$. En suivant le même raisonnement que précédemment dans un cadre complexe, on obtient que les droites focales complexes conjuguées d'une congruence elliptique de pas extrémaux $\mathfrak{p}_A$ et $\mathfrak{p}_B$ sont à une distance hermitienne valant $2\mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{p}_A\mathfrak{p}_B}$ et forment un angle complexe $2\mathrm{i}\sqrt{\mathfrak{p}_A/\mathfrak{p}_B}$ ($|\mathfrak{p}_A| \leqslant |\mathfrak{p}_B|$).

Le lemme suivant décrit un peu plus géométriquement les congruences elliptiques euclidiennes comme l'union des réglages d'une famille d'hyperboloïdes homothétiques. Une famille de réglages d'un hyperboloïde $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^3$ est dite *orientée positivement* si, dans une base orthonormée directe, $\Delta \odot \ell \geqslant 0$ pour tout réglage ℓ de la famille, où Δ est l'axe de $\mathcal{H}$ et Δ et ℓ sont orientés de façon à avoir des directions de produit scalaire positif.



Lemme 2.27 (Description euclidienne des congruences elliptiques)**.**

Soit $\mathcal{L}$ une congruence elliptique de pas extrémaux $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$. L'ensemble des droites finies de $\mathcal{L}$ s'obtient comme la réunion des familles de réglages, orientées positivement si $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ sont positifs, négativement sinon, de la famille $(\mathrm{Q}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ d'hyperboloïdes, possiblement dégénérés, d'équation dans une base euclidienne normalisée associée à $\mathcal{L}$

$$\mathrm{Q}_\lambda \;:\quad \mathfrak{p}_\mathrm{A}\, x^2 + \mathfrak{p}_\mathrm{B}\, y^2 - \frac{\lambda}{\mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\mathfrak{p}_\mathrm{B}}\, z^2 = \lambda$$

Remarquons que $\mathcal{L}$ possède une symétrie de révolution autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ lorsque $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = \mathfrak{p}_\mathrm{B}$, que l'échange de $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ induit sur $\mathcal{L}$ une rotation d'angle droit autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$ et que le passage à l'opposé de $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ induit une réflexion selon le plan d'équation $z = 0$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base euclidienne normalisée pour $\mathcal{L}$. Considérons la famille $(\mathrm{C}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de coniques du plan $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ d'équation

$$\mathrm{C}_\lambda \;:\quad \mathfrak{p}_\mathrm{A}\, {x_0}^2 + \mathfrak{p}_\mathrm{B}\, {y_0}^2 = \lambda$$

La réunion de ces coniques forme une partition du plan affine $z = 0$. Puisque le lieu d'ambiguïté de $\mathcal{L}$ est vide et d'après la forme du flot linéaire $\mathrm{M}_\mathfrak{n}$ donné au théorème 2.23, les droites affines de $\mathcal{L}$ sont exactement les droites passant par le point $(x_0, y_0, 0)$ et de direction $(-\mathfrak{p}_\mathrm{B}\, y_0, \mathfrak{p}_\mathrm{A}\, x_0, \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\mathfrak{p}_\mathrm{B})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ fixé. Une paramétrisation dans $\mathscr{B}$ de la surface réglée formée des droites de $\mathcal{L}$ passant par C_λ est donnée par

$$\begin{cases} x = x_0 - t\,\mathfrak{p}_\mathrm{B}\, y_0 \\ y = y_0 + t\,\mathfrak{p}_\mathrm{A}\, x_0 \\ z = t\,\mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } (x_0, y_0) \in \mathrm{C}_\lambda$$

Un calcul rapide montre que cette paramétrisation vérifie Q_λ. Enfin, le produit $\odot$ entre l'axe $(\mathrm{O}z)$ de Q_λ et toute droite de $\mathcal{L}$ contenue dans Q_λ de direction $\overrightarrow{u}$ vérifiant $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_3} = \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} > 0$ vaut $\mathfrak{p}_\mathrm{A}\, {x_0}^2 + \mathfrak{p}_\mathrm{B}\, {y_0}^2$. Ainsi, la seule famille de réglages de Q_λ contenue dans $\mathcal{L}$ est orientée positivement si $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ sont positifs, négativement sinon. □

Congruence parabolique ($\mathfrak{p}_\mathrm{A}\mathfrak{p}_\mathrm{B} = 0$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{A} \neq \mathfrak{p}_\mathrm{B}$)**.** L'équation $p(\phi) = 0$ possède exactement une solution, pour $\phi \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right]$, si et seulement si $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = 0$ ou (exclusif) $\mathfrak{p}_\mathrm{B} = 0$. Supposons que $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = 0$, alors la droite focale de $\mathcal{L}$ est l'axe $(\mathrm{O}x)$. Notons π la corrélation associée à $\mathcal{L}$ qui envoie le point d'abscisse x de la droite focale sur la direction $\pi(x)$ du plan support du faisceau de droites de $\mathcal{L}$ centré en ce point (comme ce plan contient l'origine, son point dual est un vecteur). Le lemme suivant donne une expression de cette corrélation en fonction de $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$, permettant ainsi d'interpréter géométriquement cette quantité : la « vitesse » de rotation des faisceaux de droites croît avec $1/|\mathfrak{p}_\mathrm{B}|$ et le signe de $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ détermine le sens de rotation (cf. Fig. 2.2e). Ce lemme décrit également les hyperboloïdes tels que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des droites tangentes le long d'un des réglages.

Lemme 2.28 (Description euclidienne des congruences paraboliques)**.**

Soit $\mathcal{L}$ une congruence parabolique de pas extremaux $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = 0$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$. Dans une base euclidienne normalisée $\mathscr{B}$ pour $\mathcal{L}$, la corrélation (affine) π associée à $\mathcal{L}$ s'exprime par $x \mapsto (0, -\mathfrak{p}_\mathrm{B}, x)$. La congruence $\mathcal{L}$ représente l'ensemble des droites tangentes à un hyperboloïde Q le long de l'axe $(\mathrm{O}x)$ si et seulement si Q est représenté dans $\mathscr{B}$ par une

équation de la forme

$$\mathrm{Q} \;:\quad a\,y^2 + b\,z^2 + 2c\,yz - \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,y + xz = 0 \qquad (a,b,c \in \mathbb{R})$$

Démonstration. Considérons un point $[1 : 0 : y : 1]$ de la droite définie par $x = 0$ et $z = 1$. Son image par le flot linéaire fournie par le théorème 2.23 est le point $[1 : y\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} : 0 : 0]$ de la droite focale. Ainsi, la droite passant par $[1 : x : 0 : 0]$ et $[1 : 0 : x/\mathfrak{p}_\mathrm{B} : 1]$ appartient à $\mathcal{L}$ et on construit $\pi(x) = \overrightarrow{e_1} \times (-x, x/\mathfrak{p}_\mathrm{B}, 1) = (0, -1, x/\mathfrak{p}_\mathrm{B}) = (0, -\mathfrak{p}_\mathrm{B}, x)$.

Soit Q une quadrique définie dans la base $\mathscr{B}$ par une matrice symétrique $\mathrm{B} = (b_{i,j})$, c.-à-d. d'équation $b_{0,0} + b_{1,1}\,x^2 + \cdots + 2b_{0,1}\,x + 2b_{1,2}\,xy + \cdots$. Elle contient l'axe $(\mathrm{O}x)$ si et seulement si $b_{1,1}\,x^2 + 2b_{1,0}\,x + b_{0,0} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'où $b_{1,1} = b_{1,0} = b_{0,0} = 0$. Le dual du plan tangent à Q en M est donné par BM. Pour $\mathrm{M} = [1 : x : 0 : 0]$, on obtient un vecteur, de coordonnées $(0, 0, a_{1,2}\,x + a_{0,2}, a_{1,3}\,x + a_{0,3})$, colinéaire à $\pi(x)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a_{1,2}\,x + a_{0,2} = -\lambda\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} \\ a_{1,3}\,x + a_{0,3} = \lambda\,x \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_{1,2} = a_{0,3} = 0 \\ a_{0,2} = -\lambda\,\mathfrak{p}_\mathrm{B} \\ a_{1,3} = \lambda \end{cases}$$

On obtient ainsi l'équation du lemme pour Q et la réciproque est immédiate. □

Pour une congruence parabolique $\mathcal{L}$ non affinement générique où la droite focale est à l'infini, la situation est analogue. Les éléments d'une base euclidienne normalisée $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $\mathcal{L}$ ont l'interprétation géométrique suivante (cf. figure 2.2f) :

- le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ est normal à tout plan affine contenant la droite focale de $\mathcal{L}$;
- le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ est la direction limite des droites de $\mathcal{L}$ « à l'infini » ;
- l'origine O est contenue dans le plan supportant faisceau de $\mathcal{L}$ composé des droites parallèles de directions orthogonales à la direction limite $\overrightarrow{e_2}$.

Lemme 2.29.

Soit $\mathcal{L}$ une congruence parabolique de droite focale à l'infini et d'invariant euclidien $\mathfrak{p}$. En coordonnées normalisées, $\mathcal{L}$ est l'union pour $\lambda \in \mathbb{R}$ des faisceaux de droites parallèles de plan support d'équation $x = \lambda$ et de direction $(0, \lambda, \mathfrak{p})$.

Démonstration. En coordonnées normalisées, l'image de tout point $[1 : x : y : 0]$ du plan d'équation $z = 0$ par le flot liénaire $\mathrm{M}_\mathfrak{n}$ fourni par le lemme 2.24 vaut $[0 : 0 : x : \mathfrak{p}]$. □

La figure 2.2f représente la géométrie de ces congruences paraboliques particulières. L'interprétation de $\mathfrak{p}$ est analogue à celle dans le cas général : la « vitesse » de rotation des directions de droites parallèles croît avec $1/|\mathfrak{p}|$ et le signe de $\mathfrak{p}$ indique le sens de rotation de ces droites.

Congruence dégénérée ($\mathfrak{p}_\mathrm{A} = \mathfrak{p}_\mathrm{B} = 0$)**.** Une base normalisée $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $\mathcal{L}$ satisfait moins de contraintes : O est le centre du bouquet contenu dans $\mathcal{L}$ et Vect $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dirige le plan support du champ de droites de $\mathcal{L}$. L'étude de ce cas facile n'est pas sans intérêt : on utilise une congruence dégénérée pour représenter un bouquet de droites dans notre implémentation logicielle sous Pbrt (section 3.4.2).

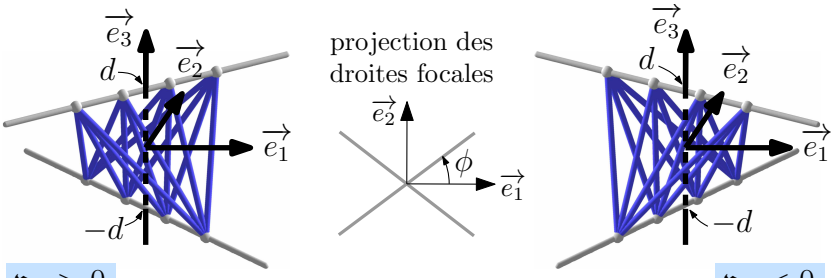
Synthèse. À présent, nous disposons d'une description géométrique de toutes les congruences linéaires affinement génériques, ce qui nous permet d'établir dans le lemme suivant une classification euclidienne de ces dernières en terme de pas extrémaux. On dit que deux congruences euclidiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont *isométriques* s'il existe une isométrie affine [M] de $\mathbb{R}^3$ telle que $[\Lambda^2 \mathrm{M}]$ induit une bijection entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$. Lorsque [M] est positive, on dit que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont *positivement isométriques*.

Théorème 2.30.

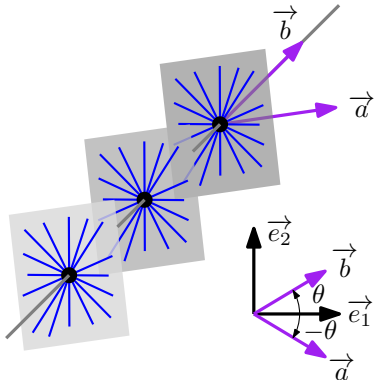
Deux congruences linéaires euclidiennes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ de rang 4 affinement génériques de pas extrémaux $\{\mathfrak{p}_\mathrm{A}, \mathfrak{p}_\mathrm{B}\}$ et $\{\mathfrak{p}'_\mathrm{A}, \mathfrak{p}'_\mathrm{B}\}$ respectivement sont isométriques (resp. positivement isométriques) si et seulement si $\{|\mathfrak{p}_\mathrm{A}|, |\mathfrak{p}_\mathrm{B}|\} = \{|\mathfrak{p}'_\mathrm{A}|, |\mathfrak{p}'_\mathrm{B}|\}$ (resp. $\{\mathfrak{p}_\mathrm{A}, \mathfrak{p}_\mathrm{B}\} = \{\mathfrak{p}'_\mathrm{A}, \mathfrak{p}'_\mathrm{B}\}$).

Démonstration. D'après le lemme 2.20, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont positivement isométriques (resp. isométriques) si leurs paires de pas extrémaux (resp. leurs paires de valeurs absolues des pas extrémaux) sont identiques. Réciproquement, l'étude de cette section (résumée dans la figure 2.2) montre que la donnée d'une paire $\{\mathfrak{p}_\mathrm{A}, \mathfrak{p}_\mathrm{B}\}$ de pas extrémaux décrit entièrement une congruence linéaire $\mathcal{L}$ à partir d'une base euclidienne *directe*. Par conséquent, si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont les mêmes paires de pas extrémaux, alors $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont positivement isométriques via l'isométrie positive qui envoie la base euclidienne directe de $\mathcal{L}$ sur celle de $\mathcal{L}'$. Enfin, on observe que le passage à l'opposé dans $\mathfrak{p}_\mathrm{A}$ et $\mathfrak{p}_\mathrm{B}$ induit une réflexion suivant le plan d'équation $z = 0$ dans une base normalisée. Ainsi, avec le raisonnement pour le cas positif, on en déduit que deux congruences linéaires possèdant les mêmes paires de valeurs absolues de pas extrémaux sont isométriques. □

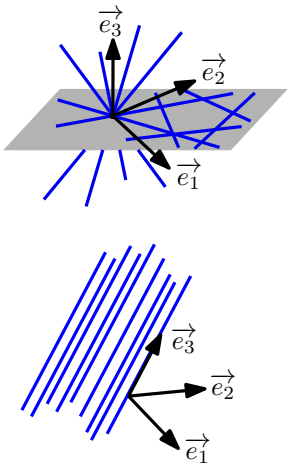
Voici que s'achève la caractérisation de toutes les congruences euclidiennes, de leurs bases normalisées et de leurs invariants euclidiens associés. La figure 2.2 propose un résumé de toutes les configurations géométriques possibles.



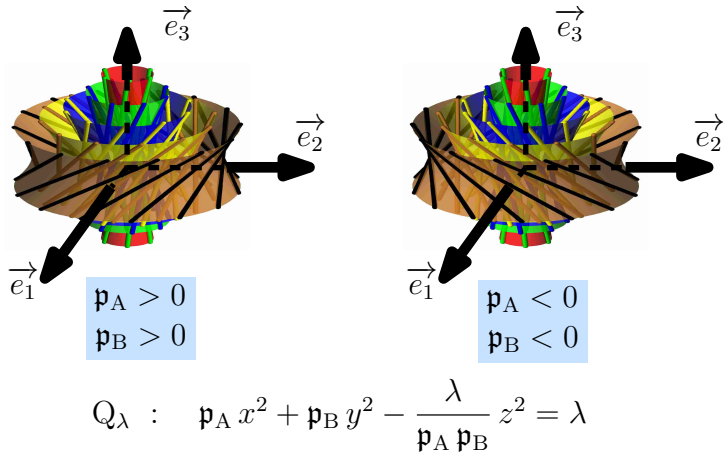
(a) Congruence hyperbolique



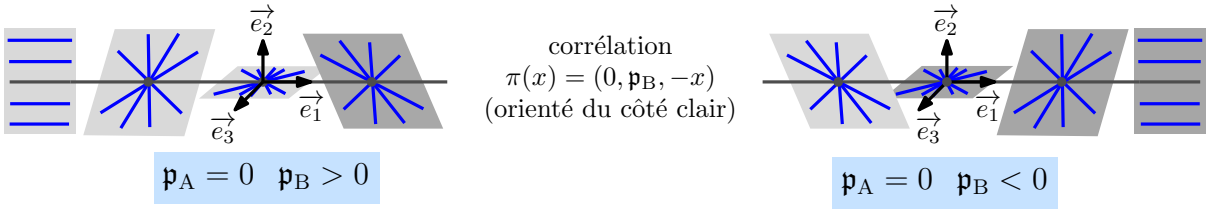
(b) Congruence hyperbolique, droite focale à l'infini



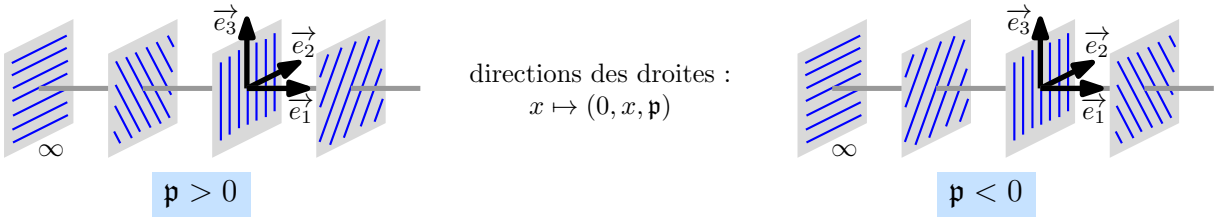
(c) Congruence dégénérée



(d) Congruence elliptique



(e) Congruence parabolique



(f) Congruence parabolique, droite focale à l'infini

FIG. 2.2: Description euclidienne des congruences linéaires : invariants et bases normalisées

Deuxième partie

Quelques problèmes classiques en vision par ordinateur et en géométrie algorithmique

Chapitre 3

Appareils photo linéaires

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un modèle géométrique d'appareils photo appelé *appareil photo linéaire* reposant sur les congruences linéaires de droites introduites au chapitre 2. Ce modèle représente une demi-douzaine d'appareils physiques ou imaginés apparus autour des années 2000 [69, 27, 110, 44, 106] et étend directement le cadre d'étude classique du sténopé [30, 46]. Après avoir présenté un rapide état de l'art sur ces appareils et la problématique entourant leur modélisation (section 3.1), nous introduisons notre modèle linéaire dans lequel nous exprimons les projections directes et inverses et les relations de stéréo-vision, d'abord dans le cas général (section 3.2), puis dans le cas d'appareils calibrés (section 3.3). Nous terminons par quelques compléments sur la géométrie des images obtenues (section 3.4.1) et sur une implémentation du modèle linéaire sous Pbrt (section 3.4.2).

3.1 Introduction

Après avoir présenté rapidement les appareils physiques étudiés et leurs applications en vision par ordinateur, nous faisons un état de l'art sur l'étude *théorique* de modèles pour ces appareils.

Des appareils aux origines variées. La figure 3.1 illustre les différents types d'appareils physiques étudiés. Excepté pour les sténopés et les appareils à balayage linéaire représentant respectivement les appareils photo grand public et les appareils embarqués dans les avions ou les satellites, les autres appareils ont été « découverts » comme des modèles dans des directions de recherche bien ciblées. Dans la construction de panoramas, une technique consiste à déplacer un appareil photo classique en extrayant à chaque intervalle de temps une bande de pixels, bandes ensuite recollées pour former une image. Un cas particulier de ce procédé est modélisé par un appareil photo à deux fentes [110]. L'appareil photo linéaire oblique est apparu dans les travaux théoriques de Pajdlà [69] se focalisant sur les configurations de stéréo-vision entre deux ensembles de droites obliques (ensemble de droites deux à deux disjointes remplissant l'espace). Enfin, l'appareil photo à une fente est apparu pour la première fois comme un cas particulier théorique dans la formalisation d'un modèle général d'appareils photo linéaires par Yu et McMillan [106]. Nous avons construit la première réalisation physique de cet appareil, avec l'aide technique de Mickael Lavandier[1]. Tous les modèles de ces appareils servent à de nombreuses applications (voir l'état de l'art de Yu *et al.* [108]), de la stéréo-vision entre panoramas à l'étude des images réfléchies sur un miroir en passant par les fausses animations[2].

[1] Université de Poitiers, IUT de génie mécanique.

[2] *faux animations* en anglais

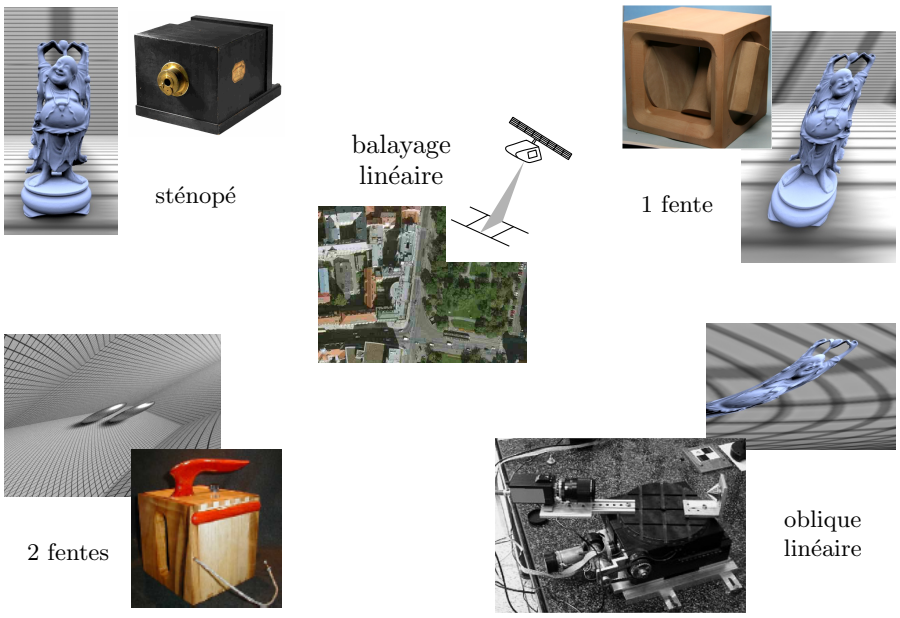
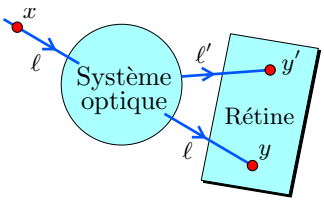


FIG. 3.1: Exemples d'appareils photo linéaires et d'images formées

Un modèle idéal d'appareil physique. Il est nécessaire de modéliser un appareil physique pour pouvoir « calculer » avec. Le modèle idéal de Grossberg et Nayar [40] est naturel et sous-jacent à tous les modèles proposés jusqu'à présent pour l'étude théorique des appareils considérés ici. Donnons-en une description rapide. Un appareil photo physique comporte deux composantes : son *système optique* et sa *rétine*. La première fait converger la lumière sur la seconde où l'on mesure l'énergie lumineuse. Puisque la propagation de la lumière est rectiligne dans un milieu homogène, il est physiquement acceptable de modéliser géométriquement le processus de formation d'image à l'aide de droites. Plus précisément, à tout point x dans le champ de vue, on associe l'unique droite ℓ, support du rayon lumineux *primaire* passant par x qui, après la traversée (possiblement compliquée) du système optique, change de direction pour devenir un rayon *secondaire* de support ℓ' dont l'intersection y' avec la rétine représente l'image du point x. Suivant le principe de réversibilité en optique géométrique, on associe réciproquement à tout point y' de la rétine l'unique droite ℓ' qui détermine de façon unique la droite ℓ contenant les points du champ de vue d'image x. Étant connus les paramètres physiques du système optique, donc la transformation du rayon primaire ℓ en le rayon secondaire ℓ', on peut considérer que l'image du point x se trouve en y le long du rayon primaire ℓ.



Un appareil, un modèle. Les premières études d'appareils photo non centraux ont commencé à se focaliser sur un seul type d'appareil à la fois, conduisant ainsi à une multitude de modèles. Concernant les appareils photo considérés dans ce chapitre, ce phénomène est assez récent. En 1997, Gupta et Hartley [44] proposent un modèle pour les appareils photo à balayage linéaire (*pushbroom camera* en anglais) correspondant à des congruences hyperboliques dont une droite focale se situe dans le plan infini. Ils obtiennent des formules de projection directe et indirecte compactes ayant la même structure que nos formules et en dérivent des formules de stéréo-vision. L'étude des appareils photo à deux fentes (*two-slit* ou *X-slit camera* en anglais) s'est effectuée par observations successives : après une première formalisation mathématique par Pajdlà [68],

Feldman *et al.* [27] obtiennent des formules analogues à (3.7) pour la projection inverse et à (3.8) pour la relation de stéréo-vision, tandis que Zomet *et al.* [110] explicitent des formules de projection directe afin d'analyser les distorsions dans les images. Enfin, l'appareil photo elliptique apparaît dans les travaux de Pajdlà [69] sur les ensembles *obliques* de droites (droites deux à deux distinctes) où un flot linéaire est introduit pour la première fois.

Modèles unifiés. L'unification de tous ces modèles d'appareil photo a été réalisée en 2004 par Yu et Mc Millan [106] sous le modèle appelé *General Linear Camera (GLC)*, reposant sur la paramétrisation des droites à l'aide de deux plans parallèles (cf. section 1.1.3), facile à manipuler d'un point de vue applicatif mais peu pratique d'un point de vue théorique : ils proposent trois ans plus tard [107] des formules closes de projection directe assez lourdes (notre étude géométrique de la section 3.4.1 simplifie et améliore leurs conclusions obtenues avec ces formules). Sturm [91] utilise les coordonnées de Plücker pour établir des relations de stéréo-vision entre deux appareils photo linéaires (affines et de même type). Il obtient des matrices essentielles de taille au plus 6×6. Ponce [80] poursuit en ce sens (et dans le cadre projectif) en tirant profit du calcul extérieur (cf. annexe C) et en introduisant un flot linéaire particulier pour chaque type de congruence (exprimé dans une base « adaptée »). Il obtient d'une part des matrices essentielles de taille au plus 5×5 et d'autre part des formules closes et générales (le plan rétinal et sa base ne sont pas contraints) de projection directe et inverse qui s'obtiennent simplement. Les travaux de ce chapitre (et du précédent) consistent à consolider et systématiser cette approche à travers les contributions suivantes :

CONTRIBUTIONS

- Introduction d'un modèle unifié appelé *appareil photo linéaire*, dans la continuité des travaux de Ponce [80].
- Étude *euclidienne* des appareils photo linéaires.
- *Extension directe* des notions classiques de paramètres intrinsèques et extrinsèques, de matrices fondamentale et essentielle.
- Stéréo-vision entre deux appareils photo linéaires de *n'importe quels* types avec des matrices essentielles *compactes* de taille au plus 4×4.
- Caractérisation *complète* des flots linéaires et application pour une *implémentation unifiée* sous PBRT des appareils photo linéaires.

Une partie de ces travaux a fait l'objet d'une publication en conférence [5] avec la collaboration de Xavier Goaoc et Jean Ponce. Une publication dans un journal est prévue, où s'ajoutera l'aspect euclidien des appareils photo linéaires.

Taxonomie des modèles. Face à la multiplication des appareils physiques et de leurs modèles, il convient de s'interroger sur ce qui les caractérise. Vers la fin des années 2000, Yu *et al.* [108] ont dégagé trois propriétés pour un appareil photo : l'ensemble sous-jacent des rayons est de dimension 2, continu et d'ordre 1, ce qui est le cas pour notre modèle. Très récemment, Sturm *et al.* [92] ont élaboré une synthèse complète sur les différents modèles d'appareils photo et sur les diverses méthodes employées pour l'étude de concepts fondamentaux en vision (stéréo-vision, calibration, reconstruction). Selon leur classification, l'appareil photo linéaire est un modèle *global*, dans le sens où le rayon associé à un point de la rétine ne dépend que des coordonnées de ce point et d'un ensemble de paramètres globaux représentant la congruence linéaire $\mathcal{L}$ sous-

jacente. Ce type de modèle se distingue d'un modèle *local*, où les paramètres varient suivant les zones de la rétine, et d'un modèle *discret*, où les paramètres sont spécifiques à chaque pixel. Tandis qu'un modèle discret permet de représenter n'importe quel type d'appareil physique, un modèle global est suffisamment général pour pouvoir décrire les propriétés de l'appareil modélisé à l'aide de formules.

3.2 Appareil photo linéaire (non calibré)

Dans cette section, nous introduisons le modèle d'appareil photo linéaire en lui-même. D'abord géométriquement (section 3.2.1) à l'aide d'une congruence linéaire et d'un plan rétinal sur lesquels nous définissons, comme pour le sténopé, les projections directe et inverse et la correspondance stéréoscopique entre deux points images de deux appareils. Puis analytiquement (section 3.2.2) en s'appuyant sur la représentation par flot linéaire des congruences linéaires, ce qui permet d'obtenir des formules générales de projection et de stéréoscopie.

3.2.1 Le modèle géométrique

Approche « sac de droites ». Dans le modèle idéal présenté en section 3.1, il existe une fonction ϕ qui, à tout point x du champ de vue, associe la droite ℓ, support de l'unique rayon (primaire) passant par x. Notons $\mathcal{L} = \{\phi(x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ l'ensemble des droites supports des rayons primaires de l'appareil. La propagation rectiligne de la lumière implique l'invariance de ϕ le long des droites de $\mathcal{L}$: $\phi(y) = \phi(x)$ pour tout $y \in \phi(x)$. Ainsi, en considérant que le champ de vue de l'appareil est volumique, on en déduit intuitivement que $\mathcal{L}$ forme une *congruence de droites*, c'est-à-dire un ensemble de droites de dimension 2 (vu comme un sous-ensemble de l'espace des droites $\mathbb{G}$). Dans ce chapitre, nous considérons un modèle où $\mathcal{L}$ est une congruence linéaire de droites.

Appareil photo linéaire. Un *appareil photo linéaire* est un modèle décrit par deux objets géométriques :

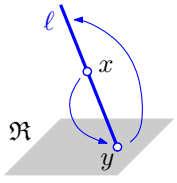
- une congruence de droites notée $\mathcal{L}$ représentant les supports des rayons primaires,
- un plan noté $\mathfrak{R}$ représentant la rétine.



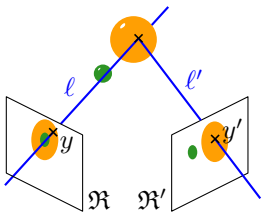
Le *type* et le *rang* d'un appareil photo linéaire sont ceux de sa congruence linéaire sous-jacente $\mathcal{L}$ (cf. table 1.1). Rappelons qu'une congruence linéaire est soit de rang 3 (type bouquet ou champ de droites), soit de rang 4 (type hyperbolique, parabolique, elliptique ou dégénéré). Les appareils de type champ de droites sont exclus de l'étude (le champ de vision est contenu dans un plan). Un appareil de type bouquet de droites est un *sténopé*. Un appareil photo linéaire est dit *central* s'il est de type dégénéré ou sténopé, *non-central* sinon.

Fonction de projection et stéréo-vision. Dans ce modèle, les projections attachées à l'appareil photo sont construites ainsi :

- la *projection directe* $x \mapsto y$ consiste à prendre l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par x et à considérer ensuite son point d'intersection y avec $\mathfrak{R}$;
- la *projection inverse* $y \mapsto \ell$ consiste à sélectionner l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par le point y de $\mathfrak{R}$.



L'unicité de la droite dans les définitions de projection provient du fait que les congruences linéaires considérées sont d'ordre 1 (proposition 2.10). L'ensemble des points pour lesquels l'unicité n'est pas vérifiée est appelé *lieu ambigu*. Il est de mesure nulle et modélise des éléments caractéristiques des appareils physiques (centre optique d'un appareil photo classique, les fentes d'un appareil photo à deux fentes, etc.). Les projections directe et inverse sont définies en-dehors du lieu d'ambigüité. Dans toute la suite, nous considérons une rétine *générique*, c'est-à-dire ne contenant qu'une seule droite de la congruence $\mathcal{L}$. Cette situation est effectivement générique puisque les congruences linéaires considérées sont de classe 1 (proposition 2.10). Dans les faits, une rétine générique ne doit pas contenir de droite focale de $\mathcal{L}$.



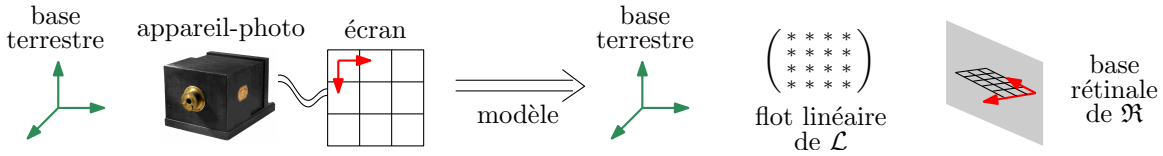
Étant donné deux appareils photo linéaires de rang 4 (pas nécessairement du même type), deux points y et y' sur chacune des rétines sont en correspondance stéréoscopique lorsque ce sont les projections directes d'un même point de l'espace. Autrement dit, leurs projections inverses ℓ et ℓ' sont deux droites qui se coupent, soit

$$\ell \odot \ell' = 0 \tag{3.1}$$

3.2.2 Le modèle analytique

Bases et flot linéaire. Ayant à disposition un appareil photo linéaire constitué d'une congruence linéaire $\mathcal{L}$ et d'une rétine $\mathfrak{R}$ (cf. section 3.2.1), nous souhaitons pouvoir manipuler commodément ce modèle grâce à des coordonnées. Un modèle analytique d'un appareil photo est la donnée des trois objets suivants :

- une base terrestre $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormée de l'espace où l'appareil photo se situe ;
- une base rétinale $(\mathrm{O}_{\mathfrak{R}}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$ de $\mathfrak{R}$, non nécessairement orthonormée[3], qui définit entièrement $\mathfrak{R}$ lorsque ses éléments sont exprimés dans la base terrestre ;
- un flot linéaire M pour $\mathcal{L}$, exprimé dans la base terrestre, qui détermine entièrement $\mathcal{L}$.



D'après le théorème 2.15, toute congruence $\mathcal{L}$ d'ordre 1 est représentée par un flot linéaire, c.-à-d. une application linéaire M telle que toute droite de $\mathcal{L}$ est engendrée par un point x et son image Mx et réciproquement. Pour mener les calculs, nous considérons des bases homogènes (e_0, e_1, e_2, e_3) et (y_0, y_1, y_2) associées aux bases terrestre et rétinale respectivement[4]. Le flot linéaire M s'exprime alors à l'aide d'une matrice carrée de taille 4. Les coordonnées de Plücker d'une droite sont exprimées relativement à la base terrestre. Il n'est pas toujours nécessaire de considérer une base terrestre orthonormée, comme c'est le cas dans la suite de cette section[5].

[3] L'écran sur lequel on observe les images est constitué d'un réseau de pixels. À ce réseau correspond un réseau de capteurs de lumière sur la rétine. Une base rétinale est choisie de façon à engendrer ce réseau. Son origine est traditionnellement placée « au centre » du réseau. Un tel choix facilite la manipulation de coordonnées en pixels sur l'écran-même. À cause des imperfections de fabrication, le réseau de capteurs n'est pas nécessairement orthogonal.

[4] Rappelons que $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base homogène associée à la base affine $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ lorsque $[e_0] = [1 : \mathrm{O}]$ et $[e_i] = [0 : \overrightarrow{e_i}]$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

[5] La nature orthonormée d'une base terrestre interviendra dans la section 3.3 afin de réduire le nombre de paramètres extrinsèques pour un appareil photo linéaire euclidien.

Avant d'établir les formules de projection dans le modèle analytique, mentionnons quelques formules de changement de coordonnées utiles pour la suite.

Changements de coordonnées. Les vecteurs coordonnées dans la base terrestre sont indicés par la lettre $\mathfrak{t}$ et ceux dans la base rétinale par la lettre $\mathfrak{r}$. Nous omettons ces indices lorsque le choix de la base n'importe pas. Pour un point $[u]$ du plan rétinal $\mathfrak{R}$, les formules de changement de coordonnées entre les bases terrestre et rétinale s'expriment par

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} {\mathrm{Y}_{z_{\mathfrak{t}}}}^{-1} u_{\mathfrak{t}} \qquad \text{et} \qquad u_{\mathfrak{t}} = \mathrm{Y}_{z_{\mathfrak{t}}} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{r}} \tag{3.2}$$

où $\mathrm{Y}_{z_{\mathfrak{t}}}$ est la matrice de vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} y_{0\mathfrak{t}} & y_{1\mathfrak{t}} & y_{2\mathfrak{t}} & z_{\mathfrak{t}} \end{pmatrix}$ avec z linéairement indépendant des vecteurs de $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2}$. Un choix canonique pour z peut être le point dual $\star(y_0 \vee y_1 \vee y_2)$ (formules (C.11) et (C.12)). Enfin, un changement de base terrestre $x' = \mathrm{P}x$ induit les transformations suivantes sur le flot linéaire M et les coordonnées de Plücker ζ :

$$\mathrm{M}' = \mathrm{PMP}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \zeta' = (\Lambda^2 \mathrm{M})(\zeta) \tag{3.3}$$

Projection directe. Dans le modèle analytique, la projection directe $x_{\mathfrak{t}} \mapsto u_{\mathfrak{r}}$ associe aux coordonnées terrestres d'un point $[x]$ de la scène, non ambigu pour $\mathcal{L}$, les coordonnées rétinales de la projection directe $[u]$ de $[x]$ sur $\mathfrak{R}$. Par définition, l'unique droite ℓ passant par un point $[x]$ non-ambigu est donnée par $[x \vee \mathrm{M}x]$. Son point d'intersection $[u]$ avec la rétine $\mathfrak{R}$ a pour coordonnées

$$u = (\det \mathrm{Y}_{\mathrm{M}x})\, x - (\det \mathrm{Y}_x)\, \mathrm{M}x \tag{3.4}$$

Démonstration. Vérifions que le point $[u]$ donné par cette expression appartient à ℓ et à $\mathfrak{R}$. Déjà, u est combinaison linéaire de x et $\mathrm{M}x$ donc $[u] \in \ell$. Ensuite,

$$\det \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & u \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & (\det \mathrm{Y}_{\mathrm{M}x})\, x \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & (\det \mathrm{Y}_x)\, \mathrm{M}x \end{pmatrix} = 0$$

donc u est engendré par $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2}$ c.-à-d. $[u] \in \mathfrak{R}$. Enfin, $u = 0$ si et seulement si $[x]$ est ambigu (c.-à-d. x est propre pour M) ou $[x]$ appartient à l'unique droite de $\mathcal{L}$ incluse dans $\mathfrak{R}$ (c.-à-d. $\det \mathrm{Y}_{\mathrm{M}x} = \det \mathrm{Y}_x = 0$). □

La relation (3.4) est en fait une conséquence directe de la formule C.13. En considérant la base terrestre donnée par le modèle analytique, nous obtenons les coordonnées rétinales de $[u]$ par la formule suivante (avec $[z] \notin \mathfrak{R}$) :

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \left[(\det \mathrm{Y}_{\mathrm{M}_{\mathfrak{t}} x_{\mathfrak{t}}})\, {\mathrm{Y}_{z_{\mathfrak{t}}}}^{-1} x_{\mathfrak{t}} - (\det \mathrm{Y}_{x_{\mathfrak{t}}})\, {\mathrm{Y}_{z_{\mathfrak{t}}}}^{-1} \mathrm{M}_{\mathfrak{t}} x_{\mathfrak{t}} \right] \tag{3.5}$$

Projection inverse. Dans le modèle analytique, la projection inverse $u_{\mathfrak{r}} \mapsto \zeta_{\mathfrak{t}}$ associe aux coordonnées rétinales d'un point u de $\mathfrak{R}$ les coordonnées de Plücker relativement à la base terrestre de l'unique droite $[\zeta]$ de $\mathcal{L}$ passant par $[u]$, à savoir

$$\zeta_{\mathfrak{t}} = u_{\mathfrak{t}} \vee \mathrm{M}_{\mathfrak{t}}\, u_{\mathfrak{t}} = \left(\sum_{i=0}^{2} u_{\mathfrak{r}i}\, y_{i\mathfrak{t}} \right) \vee \left(\sum_{i=0}^{2} u_{\mathfrak{r}i}\, \mathrm{M}_{\mathfrak{t}} y_{i\mathfrak{t}} \right) = \sum_{i=0}^{2} \frac{{u_{\mathfrak{r}i}}^2}{2}\, \zeta_{\mathfrak{t}}^{ii} + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant 2} u_{\mathfrak{r}i}\, u_{\mathfrak{r}j}\, \zeta_{\mathfrak{t}}^{ij} \tag{3.6}$$

avec $\zeta^{ij} = y_i \vee \mathrm{M}y_j + y_j \vee \mathrm{M}y_i$. Autrement dit, $\zeta_{\mathfrak{t}}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des 6 éléments $(\zeta_{\mathfrak{t}}^{ij})$ de $\mathbb{R}^6$ (ne représentant pas forcément une droite de $\mathbb{P}^3$). Définissons la matrice $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{t}}$ de taille 6×6 et la fonction $\mu : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ par

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{t}} = \begin{pmatrix} \zeta^{00} & \zeta^{01} & \zeta^{02} & \zeta^{11} & \zeta^{12} & \zeta^{22} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mu(t_0, t_1, t_2) = {}^t \begin{pmatrix} {t_0}^2 & t_0 t_1 & t_0 t_2 & {t_1}^2 & t_1 t_2 & {t_2}^2 \end{pmatrix}$$

La formule de projection inverse se réécrit matriciellement comme

$$\zeta_{\mathfrak{t}} = \widetilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{t}}\, \mu(u_{\mathfrak{r}}) \tag{3.7}$$

Remarquons que la fonction μ ne dépend aucunement de l'appareil photo linéaire et que $\widetilde{\mathcal{P}}_{\mathfrak{t}}$ est de rang 4 car la congruence $\mathcal{L}$ est obtenue comme la section de $\mathbb{G}$ par un sous-espace de $\mathbb{P}^5$ de dimension 3 (autrement dit, $\zeta_{\mathfrak{t}}$ ne dépend que de 4 paramètres).

Stéréo-vision. Il s'agit simplement de réécrire la relation (3.1) à l'aide de la formule 3.7 :

Théorème 3.1 (Stéréo-vision, version non calibrée)**.**

Soient deux appareils photo linéaires. Il existe une matrice $\mathcal{F}$ de taille 6×6 et de rang au plus 4 telle que deux points rétinaux $[u]$ et $[u']$ pour chacun des appareils photo sont en correspondance stéréoscopique si et seulement si $u_{\mathfrak{r}}$ et $u'_{\mathfrak{r}}$ satisfont la relation

$$^t\mu(u_{\mathfrak{r}})\ \mathcal{F}\, \mu(u'_{\mathfrak{r}}) = 0 \tag{3.8}$$

La matrice $\mathcal{F}$ est appelé matrice fondamentale *de la paire d'appareils photo.*

Démonstration. Notons $\star$ l'opérateur de Hodge sur $\mathbb{R}^6$ qui échange les trois premières et trois dernières coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{R}^6$:

$$\star(\overrightarrow{v} : \overrightarrow{\eta}) = (\overrightarrow{\eta} : \overrightarrow{v}).$$

Pour une matrice M de taille $6 \times k$, notons $\mathrm{M}^\star$ la matrice obtenue en appliquant l'opérateur $\star$ à chacune de ses colonnes. Remarquons que pour une matrice M' de taille $k \times k'$, $(\mathrm{MM}')^\star = \mathrm{M}^\star\mathrm{M}'$. Enfin, notons $[\zeta]$ et $[\zeta']$ les projections inverses de $[u]$ et $[u']$ pour chacun des appareils photo respectivement. D'après la relation (3.1) et la formule (3.7), on obtient

$$0 = \zeta_{\mathfrak{t}} \odot \zeta'_{\mathfrak{t}} = \zeta_{\mathfrak{t}} \cdot {\star}\zeta'_{\mathfrak{t}} = {}^t\mu(u_{\mathfrak{r}})\ \underbrace{{}^t\widetilde{\mathcal{P}}\,\widetilde{\mathcal{P}'}^\star}_{\mathcal{F}}\ \mu(u'_{\mathfrak{r}})$$

d'où la relation du théorème. La matrice $\mathcal{F}$ est bien de rang au plus 4 car c'est le produit de deux matrices de rang 4. □

3.3 Appareil photo linéaire calibré

Un modèle analytique d'un appareil photo linéaire est lié à une base terrestre donnée. Par conséquent, considérer une autre base terrestre ou déplacer l'appareil photo modifie *toutes* les « quantités » définissant le modèle : les coefficients de la matrice du flot de la congruence linéaire sous-jacente et les coordonnées des vecteurs de la base rétinale. Dans le cadre classique du sténopé, deux types de paramètres sont distingués : les paramètres *intrinsèques* qui encodent la géométrie interne du sténopé et les paramètres *extrinsèques* qui encodent la position du sténopé dans l'espace. L'idée derrière cette distinction consiste à fixer une fois pour toute les paramètres intrinsèques[6] après une phase de *calibration* afin de réduire les inconnues aux seuls paramètres extrinsèques lors de l'utilisation de l'appareil. Cette réduction permet par exemple de diminuer le nombre d'appariements nécessaires entre deux images pour faire de la reconstruction : 8 dans le cas non calibré à l'aide de la matrice fondamentale, 6 dans le cas calibré à l'aide de la matrice essentielle.

[6] du moins, pour toute la durée de son utilisation, en supposant que les paramètres intrinsèques ne varient pas durant celle-ci

Dans cette section, nous proposons un raffinement du modèle analytique de la section 3.2.2 en étendant les notions de paramètres intrinsèques et extrinsèques aux appareils photo linéaires (section 3.3.1) puis en exprimant les formules de projection et de stéréo-vision à l'aide de ces paramètres (section 3.3.2).

3.3.1 Paramètres intrinsèques et extrinsèques

Approche pour le sténopé. On définit une base euclidienne normalisée $(p_0, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_3})$ de la manière suivante (cf. figure 3.2). Le point p_0 est le centre du bouquet de droites sous-jacent au sténopé. Le vecteur $\overrightarrow{p_3}$ est normal à la rétine $\mathfrak{R}$. Le vecteur $\overrightarrow{p_1}$ est colinéaire au premier vecteur $\overrightarrow{y_1}$ de la base rétinale. Décrivons les paramètres du sténopé.

- Les paramètres *extrinsèques* encodent la position de l'appareil photo dans la scène, autrement dit la position de la base normalisée par rapport à la base terrestre. Comme ces bases sont orthonormées (de même orientation), il suffit d'appliquer une isométrie W pour passer de l'une à l'autre, caractérisée par une rotation (3 paramètres) et une translation (3 paramètres). La relation entre les coordonnées dans ces bases d'un même point x de l'espace s'écrit :

$$x_{\mathfrak{t}} = \mathrm{W}\, x_{\mathfrak{n}}$$

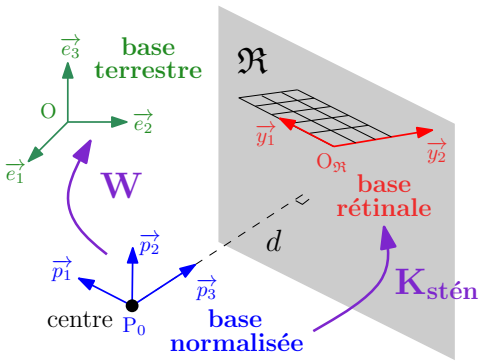


FIG. 3.2: Paramètres d'un sténopé

- Les paramètres *intrinsèques* encodent la position de la base rétinale par rapport à la base normalisée. La relation entre les coordonnées d'un point de la rétine dans ces bases s'écrit :

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{K}_{\text{sten}}\, u_{\mathfrak{n}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{K}_{\text{sten}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & \alpha_1 & \beta & 0 \\ \tau_2 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  K_{sten} est la composée d'une application linéaire envoyant $\overrightarrow{y_2}$ sur un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{p_2}$ (paramètre β), de deux affinités pour normaliser les vecteurs obtenus (paramètres α_i) et d'une translation envoyant y_0 sur p_0 (paramètres τ_i et d), d'où un total de 6 paramètres. Nous verrons à la section 3.3.2 à la suite du théorème 3.4 que le paramètre d « disparaît » dans les paramètres α_i et β lorsqu'on exprime la formule de projection directe. C'est pourquoi on considère que le sténopé ne possède que 5 paramètres intrinsèques.

Bouquet de droites parallèles. Lorsque le centre est situé à l'infini (appareil photo orthographique), la base normalisée est choisie de telle manière que son origine coïncide avec celle de la base rétinale. Dans ce cas, $\tau_1 = \tau_2 = d = 0$. En revanche, le centre $[0 : \overrightarrow{c}]$ n'est pas forcément $[0 : \overrightarrow{e_3}]$, c'est pourquoi il faut considérer 2 nouveaux paramètres $u_i = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{e_i}$ avec $i = 1, 2$. La matrice des paramètres intrinsèques est alors de la forme $\mathrm{K}_{\text{ortho}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta & u_1 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est courant de dire qu'un appareil photo orthographique possède uniquement 3 paramètres intrinsèques : en fait, on suppose implicitement que $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{e_3}$.

Paramètres	intrinsèques				extrins.
Type	ell.	hyp.	par.	central	tous
Cadre euclidien	11 10 ($\mathfrak{p}_a$=$\mathfrak{p}_b$)	11 9 (∞)	10 8 (∞)	5	6
Cadre projectif	5			0	15

TAB. 3.1: Nombre de paramètres d'un appareil photo linéaire.
Le symbole (∞) indique qu'une droite focale est située à l'infini.

Bases normalisées euclidiennes. Ces bases sont définies dans le chapitre 2 (cf. figure 2.2). Les paramètres extrinsèques représentent à nouveau l'isométrie envoyant la base normalisée sur la base terrestre, soit 6 paramètres. Pour les paramètres intrinsèques, on se ramène à la situation du sténopé à une rotation R près[7] du plan rétinal de la figure 3.2 :

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{K}_{\mathrm{eucl}}\, u_{\mathfrak{n}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{K}_{\mathrm{eucl}} = \mathrm{K}_{\mathrm{sténo}}\, \mathrm{R}$$

où
$$\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient $6 + 3 = 9$ paramètres, auxquels il faut ajouter les invariants euclidiens de la congruence de droites sous-jacente à l'appareil photo : $\mathfrak{p}_{\mathrm{A}}$ et $\mathfrak{p}_{\mathrm{B}}$ dans le cas affinement générique, $\mathfrak{p}$ et α pour les cas non génériques parabolique et hyperbolique respectivement, aucun pour le cas dégénéré. Finalement, nous obtenons au plus 11 paramètres intrinsèques (table 3.1). Dans certaines situations, il existe des degrés de liberté dans le choix d'une base normalisée pour une congruence linéaire donnée. Pour un choix adéquat, on peut annuler des paramètres de $\mathrm{K}_{\mathrm{eucl}}$.

- Cas hyperbolique non générique : d'après le lemme 2.25, l'origine O d'une base normalisée peut être choisie arbitrairement sur la droite focale finie. Ainsi, on peut supposer l'une des situations suivantes : O appartient au plan rétinal $\mathfrak{R}$ (d'où $d = 0$) ou la projection orthogonale de O sur $\mathfrak{R}$ appartient à l'une des droites passant par Y_0 et dirigée par $\overrightarrow{y_1}$ ou $\overrightarrow{y_2}$ (d'où $\tau_2 = 0$ ou $\tau_1 = 0$ respectivement). Ainsi, on obtient 9 paramètres intrinsèques.
- Cas parabolique non générique : d'après le lemme 2.24, l'origine O d'une base normalisée peut être choisie arbitrairement dans un plan particulier π (cf. figure 2.2f). Le plan rétinal $\mathfrak{R}$ ne peut pas être parallèle à ce plan, sinon il contient la droite focale à l'infini. Ainsi, on choisit O dans l'intersection $\mathfrak{R} \cap \pi$ telle que O appartient à l'un des axes de la base rétinale, d'où $d = \tau_1 = 0$ ou $d = \tau_2 = 0$, donc on obtient 8 paramètres intrinsèques.
- Cas dégénéré de centre fini : l'étude d'une congruence dégénérée $\mathcal{L}$ en elle-même n'est pas intéréssante. En revanche, on peut utiliser $\mathcal{L}$ pour modéliser le bouquet de droites sous-jacent à un sténopé : le centre de $\mathcal{L}$ est celui du sténopé et le plan support du champ de droites de $\mathcal{L}$ est parallèle au plan rétinal $\mathfrak{R}$. Avec la liberté de choix d'une base normalisée, nous sommes exactement ramenés à la situation du sténopé ! C'est pourquoi,

> Dans toute la suite, nous considérons que la congruence sous-jacente à un sténopé est de type dégénéré avec le plan support du champ de droites parallèle au plan rétinal.

[7] Les angles (φ, θ, ψ) sont appelés *angles d'Euler*.

- Bouquet de droites parallèles : nous modélisons également un appareil photo orthographique avec une congruence dégénérée dont le champ de droites focales est situé à l'infini. Toute base euclidienne $(\mathrm{P}_0, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_3})$ telle que $\overrightarrow{p_3}$ est une direction des droites de la congruence est alors normalisée pour cette congruence. Ainsi, on peut choisir $\mathrm{P}_0 = \mathrm{O}_{\mathfrak{R}}$ (d'où $d = \tau_1 = \tau_2 = 0$) et on peut supposer que $\overrightarrow{p_2}$ est une direction du plan rétinal (d'où $\varphi = 0$). Finalement, on obtient 5 paramètres intrinsèques (α_1, α_2, β, θ et ψ).

Bases normalisées projectives. Ces bases sont définies à la section 2.1.5. La figure 2.2 résume l'ensemble des configurations. Ici, la base normalisée n'est pas nécessairement orthogonale. Ainsi, la transformation W n'est plus une isométrie mais une transformation projective générale de $\mathbb{P}^3$: les paramètres extrinsèques sont donc au nombre de 15.

D'après la proposition 2.13, il existe une base normalisée $(p_i)_{0 \leqslant i \leqslant 4}$ telle que (p_0, p_1, p_2) engendre la rétine $\mathfrak{R}$, p_0 coïncide avec l'origine y_0 de la base rétinale[8] et les points p_0, y_1, p_1 sont alignés. Ainsi, le changement de base entre coordonnées normalisées et rétinales s'écrit

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{K}_{\mathrm{proj}}\, u_{\mathfrak{n}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{K}_{\mathrm{proj}} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, on obtient 5 paramètres intrinsèques projectifs. Les quantités ε et ν intervenant dans la section 2.1.5 ne sont pas comptabilisées comme des paramètres car elles sont fixées par le type de l'appareil photo.

$\nu = 1$	$\varepsilon = 1$	elliptique
	$\varepsilon = -1$	hyperbolique
	$\varepsilon = 0$	parabolique
$\nu = 0$	$\varepsilon = 0$	dégénéré

Finalement, l'ensemble des observations de cette section est résumé dans la table 3.1 indiquant le nombre de paramètres d'un appareil photo linéaire suivant son type et le cadre géométrique d'étude (euclidien ou projectif).

3.3.2 Formules de projection : version calibrée

Comme dans la section 3.2.2 (version non calibrée), nous exprimons des formules de projection directe, inverse et des relations de stéréo-vision entre deux appareils photo linéaires. Lorsque le contexte est bien identifié ou lorsque la distinction n'est pas nécessaire, nous écrivons K et W pour désigner respectivement les paramètres intrinsèques et extrinsèques d'un appareil photo linéaire, qu'il s'agisse du cadre projectif ou euclidien. Le lemme suivant unifie l'écriture des formules de changement de coordonnées dans les différents cadres, obtenues dans la section 3.3.1.

Lemme 3.2.

Les formules de changement de coordonnées entre bases terrestre, rétinale et normalisée s'écrivent

$$x_{\mathfrak{t}} = \mathrm{W}\, x_{\mathfrak{n}} \qquad u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{K}\, u_{\mathfrak{n}} \qquad u_{\mathfrak{n}} = \mathrm{K}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{r}} \qquad \square$$

[8] Un tel choix est possible si tant est que y_0 ne se trouve pas sur l'unique droite ℓ de $\mathcal{L}$ contenue dans $\mathfrak{R}$. En pratique, dans un appareil physique, aucun capteur de la rétine ne se trouve sur la droite modélisée par ℓ.

Projectif	Affinement générique	Affinement non générique		
		parabolique	hyperbolique	dégénéré(*)
$\begin{pmatrix} & \varepsilon & -\nu\varepsilon \\ 1 & -\nu & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & -\mathfrak{p}_A & \mathfrak{p}_B \\ -\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ \mathfrak{p} & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & & \\ & 1 & -\sin 2\theta \\ & \sin 2\theta & -1 \\ & & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}$

TAB. 3.2: Flot linéaire normalisé suivant le type.

(*) Toutes les droites focales sont dans le plan infini. La congruence euclidienne correspondante est un bouquet de droites parallèles.

Dans toute la suite, notons $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ le flot linéaire normalisé représentant la congruence linéaire $\mathcal{L}$ sous-jacente à l'appareil photo. À nouveau, nous ne faisons aucune distinction dans la notation selon le type de $\mathcal{L}$. La table 3.2 regroupe les différentes expressions de $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ suivant le type de $\mathcal{L}$.

Projection directe. La formule (3.4) est également valable en coordonnées normalisées :

$$u_{\mathfrak{n}} = \det\begin{pmatrix} y_{0\mathfrak{n}} & y_{1\mathfrak{n}} & y_{2\mathfrak{n}} & \mathrm{M}_{\mathfrak{n}}x_{\mathfrak{n}}\end{pmatrix} x_{\mathfrak{n}} - \det\begin{pmatrix} y_{0\mathfrak{n}} & y_{1\mathfrak{n}} & y_{2\mathfrak{n}} & x_{\mathfrak{n}}\end{pmatrix} \mathrm{M}_{\mathfrak{n}}x_{\mathfrak{n}}$$

Par définition de K, $$\mathrm{K}\begin{pmatrix} y_{0\mathfrak{n}} & y_{1\mathfrak{n}} & y_{2\mathfrak{n}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_3 \\ 0\end{pmatrix}$$

À la constante $(\det \mathrm{K}^{-1})$ près, $u_{\mathfrak{n}} = \big(\mathrm{K}\mathrm{A}_{\mathfrak{n}}x_{\mathfrak{n}}\big)_3\, x_{\mathfrak{n}} - \big(\mathrm{K}x_{\mathfrak{n}}\big)_3\, \mathrm{A}_{\mathfrak{n}}x_{\mathfrak{n}}$

D'après (3.5), $$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_3 & 0\end{pmatrix} \mathrm{K}\Big[\big(\mathrm{K}\mathrm{A}_{\mathfrak{n}}\mathrm{W}^{-1}x_{\mathfrak{t}}\big)_3\, \mathrm{W}^{-1}x_{\mathfrak{t}} - \big(\mathrm{K}\mathrm{W}^{-1}x_{\mathfrak{t}}\big)_3\, \mathrm{A}_{\mathfrak{n}}\mathrm{W}^{-1}x_{\mathfrak{t}}\Big] \tag{3.9}$$

Simplifions à présent cette formule suivant que l'on considère des bases normalisées projectives ou euclidiennes.

Théorème 3.3 (Projection directe avec paramètres projectifs)**.**

La formule de projection directe pour un appareil photo linéaire de rang 4 de paramètres projectifs W, K *et* (ε, ν) *s'écrit*

$$u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_3 & 0\end{pmatrix} \mathrm{K}\,\pi_{\mathfrak{n}}\big(\mathrm{W}^{-1}\,x_{\mathfrak{t}}\big) \qquad \textit{avec} \qquad \pi_{\mathfrak{n}}(x) = \begin{pmatrix} {x_0}^2 + \nu\,\varepsilon\,{x_3}^2 \\ x_0x_1 - \varepsilon\,x_2x_3 \\ x_0x_2 + \nu\,x_1x_3 \\ 0\end{pmatrix}$$

La fonction $\pi_{\mathfrak{n}}$ représente la projection directe exprimée en coordonnées normalisées. Remarquons que pour le type dégénéré ($\varepsilon = \nu = 0$), on obtient $\pi_{\mathfrak{n}}(x) = x_0\ {}^t\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0\end{pmatrix}$, ce qui correspond bien à une projection centrale définie en-dehors du plan $x_0 = 0$, support du champ de droites contenu dans la congruence dégénérée.

Démonstration. D'après la formule (3.9), $u_{\mathfrak{r}} = \begin{pmatrix}\mathrm{I}_3 & 0\end{pmatrix} \mathrm{K}\,\pi_{\mathfrak{n}}\big(\mathrm{W}^{-1}\,x_{\mathfrak{t}}\big)$ avec

$$\pi_{\mathfrak{n}}(x) = \big(\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}x\big)_3\, x - x_3\, \mathrm{M}_{\mathfrak{n}}x$$

puisque $\big(\mathrm{K}\,u\big)_3 = u_3$ d'après l'expression de $\mathrm{K}_{\mathrm{proj}}$. La matrice $\mathrm{M}_{\mathfrak{n}}$ vaut $\begin{pmatrix} & \varepsilon & -\varepsilon\nu \\ 1 & -\nu & \end{pmatrix}$. On obtient alors l'expression attendue pour $\pi_{\mathfrak{n}}$ après calculs. □

Théorème 3.4 (Projection directe avec paramètres euclidiens)**.**

La formule de projection directe pour un appareil photo linéaire affinement générique de rang 4 de paramètres euclidiens W, K *(comprenant d, φ et θ) et* $(\mathfrak{p}_\mathrm{A}, \mathfrak{p}_\mathrm{B})$ *s'écrit*

$$u_\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{K}\, \pi_\mathfrak{n}\big(\mathrm{W}^{-1}\, x_\mathfrak{t}\big)$$

avec

$$\pi_\mathfrak{n}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta & \sin\varphi\,\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,\cos\varphi\,\cos\theta & d & \sin\varphi\,\cos\theta \\ 0 & -d & \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\cos\varphi\,\cos\theta & \sin\theta \\ -d & \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,\sin\theta & -\mathfrak{p}_\mathrm{A}\,\sin\varphi\,\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\mathrm{A}\mathfrak{p}_\mathrm{B}\,{x_0}^2 + {x_3}^2 \\ \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,x_0x_1 + x_2x_3 \\ \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,x_0x_2 - x_1x_3 \\ \mathfrak{p}_\mathrm{A}\,{x_1}^2 + \mathfrak{p}_\mathrm{B}\,{x_2}^2 \end{pmatrix}$$

Démonstration. La démonstration est identique au théorème précédent, excepté que les paramètres intrinsèques K apparaissent dans l'expression de $\pi_\mathfrak{n}$:

$$\pi_\mathfrak{n}(x) = \big(\mathrm{K}\mathrm{A}_\mathfrak{n}x\big)_3\, x - \big(\mathrm{K}\,x\big)_3\, \mathrm{A}_\mathfrak{n}x$$

Avec les expressions de K_eucl et de $\mathrm{M}_\mathfrak{n}$, on vérifie à l'aide d'un logiciel de calcul formel que l'expression de $\pi_\mathfrak{n}$ coïncide avec celle du théorème. □

Dans le cas dégénéré (modélisant un sténopé), $\mathfrak{p}_\mathrm{A} = \mathfrak{p}_\mathrm{B} = 0$ et $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\mathrm{sténo}$ (d'où $\theta = \varphi = 0$). Après calculs, l'expression de $u_\mathfrak{r}$ vaut (avec x exprimé en coordonnées normalisées) :

$$u_\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} x_3 \\ \tau_1\, x_3 - d\alpha_1\, x_1 - d\beta\, x_2 \\ \tau_2\, x_3 - d\alpha_2\, x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha'_1 & \beta' & \tau_1 \\ 0 & 0 & \alpha'_2 & \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en remplaçant les paramètres α_1, α_2 et β par $\alpha'_1 = -\alpha_1/d$, $\alpha'_2 = -\alpha_2/d$ et $\beta' = -\beta/d$ respectivement, on obtient exactement 5 paramètres intrinsèques décrivant la projection directe d'un sténopé.

Pour les appareils photo qui ne sont pas affinement génériques (droite focale ou centre à l'infini), il existe des formules analogues qu'on construit grâce aux flots linéaires de la table 3.2.

Projection inverse. Dans la formule (3.7) de projection inverse (version non calibrée), les vecteurs colonnes $(\zeta^{ij})_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant 2}$ de la matrice $\widetilde{\mathcal{P}}_\mathfrak{t}$ engendrent le sous-espace H définissant la congruence $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L} = [\mathrm{H}] \cap \mathbb{G}$. Cependant, ils ne forment pas une base de H. Si $\mathcal{L}$ est de rang 4, il existe une base $(\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ de H dans laquelle on peut décomposer les coordonnées de Plücker ζ de toute droite de $\mathcal{L}$. En notant $\widetilde{\mathcal{P}_④}$ la matrice 6×4 des vecteurs-colonnes $(\zeta^i)_{0\leqslant i\leqslant 3}$, on en déduit qu'il existe une fonction $\mu_④ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ telle que

$$\zeta_\mathfrak{t} = \widetilde{\mathcal{P}_④}\, \mu_④(u_\mathfrak{r})$$

avec $\mu_④$ quadratique : en effet, il suffit d'écrire les éléments (ζ^{ij}) comme des combinaisons linéaires des (ζ^i) puis de réécrire la relation (3.7). Les bases normalisées associées à un appareil photo linéaire offrent la possibilité d'exprimer simplement une base normalisée de H encodée dans une matrice $\widetilde{\mathcal{P}_\mathfrak{n}}$ de taille 6×4. L'expression de la fonction $\mu_\mathfrak{n}$ correspondante fait l'objet des deux théorèmes suivants.

Théorème 3.5 (Projection inverse avec paramètres projectifs)**.**

La formule de projection inverse pour un appareil photo linéaire de rang 4 de paramètres projectifs W, K *et* (ε, ν) *s'écrit*

$$\zeta_{\mathfrak{t}} = (\Lambda^2 \mathrm{W})\, \widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\, \mu_{\mathfrak{n}} \left(\mathrm{K}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{r}} \right)$$

avec $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $\mu_{\mathfrak{n}}(u_0, u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} {u_0}^2 \\ u_0\, u_1 \\ u_0\, u_2 \\ \nu\, {u_1}^2 + \varepsilon\, {u_2}^2 \end{pmatrix}$

Pour une base normalisée (p_0, p_1, p_2, p_3), on appelle *rétine normalisée* le plan engendré par (p_0, p_1, p_2). La fonction $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\, \mu_{\mathfrak{n}}$ représente la projection inverse exprimée dans la base normalisée, pour la rétine normalisée. Remarquons que la fonction $\mu_{\mathfrak{n}}$ dépend uniquement du type de l'appareil photo linéaire. Pour $\varepsilon = \nu = 0$, on retrouve la nature linéaire de la projection inverse pour le sténopé. Dans ce cas, comme la dernière coordonnée de $\mu_{\mathfrak{n}}$ est nulle, on peut considérer que $\mu_{\mathfrak{n}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et ne considérer que les trois premières colonnes de $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}$. [9]

Démonstration. Notons (p_0, p_1, p_2, p_3) une base normalisée pour un appareil photo linéaire et $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}}$ un flot linéaire de la congruence $\mathcal{L}$ sous-jacente. Considérons dans un premier temps la rétine normalisée. D'après la relation (3.6), les coordonnées de Plücker $\zeta_{\mathfrak{n}}$ dans la base normalisée de l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par $u_{\mathfrak{n}} = u_0\, p_0 + u_1\, p_1 + u_2\, p_2$ s'expriment par $\zeta_{\mathfrak{n}} = u_{\mathfrak{n}} \vee \mathrm{A}_{\mathfrak{n}}\, u_{\mathfrak{n}}$. Après calculs, on trouve

$$\zeta_{\mathfrak{n}} = \widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\, \mu_{\mathfrak{n}} \big(\begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 & 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{n}} \big)$$

D'après le lemme 3.2, on obtient la formule du théorème. □

Théorème 3.6 (Projection inverse avec paramètres euclidiens)**.**

La formule de projection inverse pour un appareil photo linéaire de rang 4 de paramètres euclidiens W, K *et* $(\mathfrak{p}_{\mathrm{A}}, \mathfrak{p}_{\mathrm{B}})$ *s'écrit*

$$\zeta_{\mathfrak{t}} = (\Lambda^2 \mathrm{W})\, \widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\, \mu_{\mathfrak{n}} \left(\mathrm{K}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{r}} \right)$$

avec $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{p}_{\mathrm{A}} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{p}_{\mathrm{B}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mu_{\mathfrak{n}}(u_0, u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\mathrm{A}} \mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\, {u_0}^2 + {u_3}^2 \\ \mathfrak{p}_{\mathrm{A}}\, u_0 u_1 + u_2 u_3 \\ \mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\, u_0 u_2 - u_1 u_3 \\ \mathfrak{p}_{\mathrm{A}}\, {u_1}^2 + \mathfrak{p}_{\mathrm{B}}\, {u_2}^2 \end{pmatrix}$

Démonstration. La démonstration est la même que dans le cas projectif, seuls changent les calculs. □

Pour les congruences non affinement génériques, on établit le même type de formule avec toujours $\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}$ de taille 6×4 et $\mu_n : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ quadratique.

[9] En considérant un flot linéaire du bouquet de droites de rang 3, on obtient directement ces objets.

Stéréo-vision. Comme dans le cas non calibré, il s'agit simplement de réécrire la relation $\zeta_{\mathfrak{t}} \odot \zeta'_{\mathfrak{t}}$ (équation (3.1)) à l'aide des formules de projection inverse que nous venons d'établir :

Théorème 3.7 (Stéréo-vision pour appareils calibrés)**.**

Soient deux appareils photo linéaires calibrés, tous deux projectifs ou euclidiens, de paramètres intrinsèques K *et* K′ *respectivement, de rang* k *et* k' *respectivement (c.-à-d. 3 pour le sténopé et 4 sinon). Il existe une matrice* $\mathcal{E}$ *de taille* $k \times k'$ *telle que deux points rétinaux* $[u]$ *et* $[u']$ *pour chacun des appareils photo sont en correspondance stéréoscopique si et seulement si* $u_{\mathfrak{t}}$ *et* $u'_{\mathfrak{t}}$ *satisfont la relation*

$$ {}^{t}\mu_{\mathfrak{n}} \left(\mathrm{K}^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u_{\mathfrak{r}} \right) \mathcal{E}\, \mu'_{\mathfrak{n}} \left(\mathrm{K}'^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_3 \\ 0 \end{pmatrix} u'_{\mathfrak{r}} \right) = 0 $$

La matrice $\mathcal{E}$ *est appelé* matrice essentielle *de la paire d'appareils photo calibrés. Plus précisément, il existe une transformation* $\mathcal{W}$*, projective ou euclidienne suivant le cas, telle que*

$$ \mathcal{E} = {}^{t}\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\ {}^{t}(\Lambda^2 \mathcal{W})\ \widetilde{\mathcal{P}'^{\star}_{\mathfrak{n}}} $$

où $\mathcal{P}^{\star}$ *signifie que les trois dernières lignes de* $\mathcal{P}$ *sont échangées avec les trois premières.*

Comme dans le cadre du sténopé, 6 appariements suffisent pour déterminer entièrement la relation de stéréo-vision entre deux appareils photo linéaires euclidiens.

Démonstration. Avec le même raisonnement que dans la démonstration du cas non calibré (théorème 3.1) et les mêmes notations, les théorèmes 3.5 (cadre projectif) et 3.6 (cadre euclidien) permettent d'obtenir la formule du théorème avec

$$ \mathcal{E} = {}^{t}\widetilde{\mathcal{P}_{\mathfrak{n}}}\ {}^{t}(\Lambda^2 \mathrm{W})\, (\Lambda^2 \mathrm{W}')^{\star}\, \widetilde{\mathcal{P}'_{\mathfrak{n}}} $$

qui est bien de la bonne taille. En choisissant pour base terrestre la seconde base normalisée, on obtient $\mathrm{W}' = \mathrm{I}_4$ d'où $(\Lambda^2 \mathrm{W}')^{\star} \widetilde{\mathcal{P}'_{\mathfrak{n}}} = \widetilde{\mathcal{P}'^{\star}_{\mathfrak{n}}}$. Ainsi, en posant $\mathcal{W} = \mathrm{W}$, on retrouve l'expression de $\mathcal{E}$ du théorème. □

3.4 Compléments

Cette section regroupe deux compléments sur les appareils photo linéaires. Le premier aborde d'un point de vue géométrique l'étude des images obtenues. Le second propose une implémentation de ces appareils pour produire des images.

☆ 3.4.1 Géométrie des images

Pour un sténopé, la formation d'images sur la rétine s'obtient par une projection centrale. Puisque cette transformation est projective, on en déduit deux propriétés classiques des sténopés:

- l'image de toute droite ne passant pas par le centre est une droite ;
- les images formées sur deux rétines disjointes du centre sont projectivement équivalentes.

Ces propriétés s'observent sur quelques simulations (cf. figures 3.3 et 3.6) et sont également vérifiées pour un appareil photo de type dégénéré. En revanche, pour un appareil photo non central, nous montrons dans cette section que l'image d'une droite est génériquement une conique lisse et que les images formées sur deux plans rétinaux n'ayant aucune droite de la congruence sous-jacente en commun ne sont pas projectivement équivalentes, comme l'illustrent les simulations de la figure 3.3.

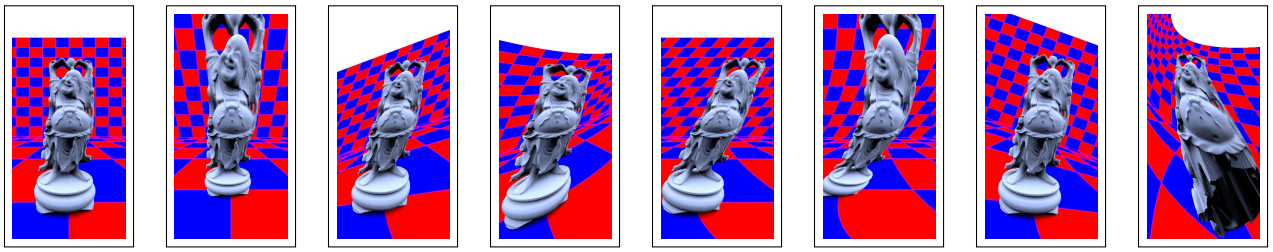


FIG. 3.3: Images formées sur deux rétines pour une même congruence linéaire.

Projection directe quadratique. Soit un appareil photo linéaire de congruence linéaire $\mathcal{L}$ de rang 4 et de rétine (générique) $\mathfrak{R}$. Notons ℓ l'unique droite de $\mathcal{L}$ incluse dans $\mathfrak{R}$ ($\mathcal{L}$ est de classe 1) et π la projection directe pour l'appareil photo (modèle géométrique). Afin d'avoir une première idée de la nature d'une telle projection, déterminons l'image d'une droite d de $\mathbb{P}^3$ par π. Si $d = \ell$ ou que d est inclus dans le lieu d'ambiguïté, l'image de d n'est pas définie. Si $d \in \mathcal{L}\backslash\{\ell\}$ et n'est pas inclus dans le lieu d'ambiguïté, d se projette en un point, à savoir $d \cap \mathfrak{R}$. Le lemme suivant décrit les autres cas.

Proposition 3.8 (Projection d'une droite)**.**

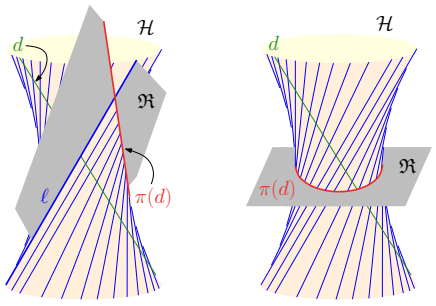
> *Soit $d \notin \mathcal{L}$ non ambiguë. Si d coupe le lieu ambigu, alors $\pi(d)$ est une droite ou un point. Si d coupe ℓ sans couper le lieu ambigu, alors $\pi(d)$ est une droite. Sinon, $\pi(d)$ est une conique lisse. Dans tous les cas, π s'étend continûment sur toute la droite d.*

Démonstration. Considérons l'ensemble H des droites de $\mathcal{L}$ coupant d.

Supposons d'abord que d coupe le lieu d'ambiguïté. D'après le lemme 2.12, H est un regulus dégénéré. Nécessairement, d est contenu dans le plan support P d'un des deux faisceaux de H, noté H_1. Ainsi, $\pi(d)$ est la droite d'intersection de P avec $\mathfrak{R}$ (générique) et, pour tout $x \in d$, $\pi(x)$ est le point d'intersection de $\mathfrak{R}$ avec l'unique droite de H_1 passant par x.

Supposons à présent que d est disjoint du lieu d'ambiguïté. D'après le lemme 2.12, H est un regulus régulier et d appartient au regulus dual de H. Ainsi, tout point x de d qui n'appartient pas à ℓ est envoyé sur le point d'intersection de $\mathfrak{R}$ avec l'unique droite de H passant par x (les droites de H sont deux à deux disjointes car H est régulier) donc $\pi(d)$ est inclus dans $\mathfrak{R} \cap \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H} = \mathrm{H}^{\varsigma}$ l'union des supports des droites de H.

- Si $\mathfrak{R}$ est tangent à $\mathcal{H}$ (figure de gauche), alors $\mathfrak{R} \cap \mathcal{H}$ est l'union de deux droites, l'une étant ℓ, l'autre étant l'image de d par π. Dans ce cas, d coupe ℓ en un point sur lequel on peut prolonger π par continuité.
- Sinon (figure de droite), $\mathfrak{R} \cap \mathcal{H}$ est une conique lisse et c'est l'image de π par d. Dans ce cas, ℓ n'appartient pas à H et d est disjointe de ℓ. □



Nous obtenons ainsi un démonstration géométrique de la nature quadratique de la projection directe d'un appareil photo linéaire non-central :

Corollaire 3.9.

> *La projection directe π est quadratique.*

Démonstration. La proposition 3.8 assure que π envoie génériquement toute droite sur une conique. Il ne reste plus qu'à vérifier que π est bien algébrique. Il s'agit en fait de la composée de deux fonctions quadratiques : d'une part, $x \mapsto x \vee \mathrm{M}x$ qui à un point $x \in \mathbb{P}^3$ non ambigu associe l'unique droite de $\mathcal{L}$ passant par x (où M est un flot linéaire pour $\mathcal{L}$) ; d'autre part, $\ell \mapsto \ell \wedge \mathfrak{R}$ qui à une droite ℓ (de support non contenu dans $\mathfrak{R}$) associe son point d'intersection avec $\mathfrak{R}$ (formule (C.13))[10]. □

Les formules (3.4) (page 70) ou (3.9) (page 75) fournissaient déjà une démonstration analytique de la nature quadratique de la projection directe.

Équivalence projective de rétines. Dans ce paragraphe, nous parlons de *projection le long d'une congruence $\mathcal{L}$ sur une rétine $\mathfrak{R}$* pour désigner une projection directe définie par $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{R}$. Soit $\mathcal{L}$ une congruence de rang 4 non dégénérée. Puisque la projection le long de $\mathcal{L}$ est quadratique, sa restriction à une rétine l'est également génériquement. Ainsi, les images formées sur deux rétines pour une même congruence $\mathcal{L}$ ne sont génériquement pas projectivement équivalentes, contrairement au sténopé. Pour s'en convaincre, considérons une droite d' incluse dans une rétine $\mathfrak{R}_1$, l'hyperboloïde $\mathcal{H}$ supportant le regulus des droites de $\mathcal{L}$ passant par d', une droite d incluse dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{R}_2$ une rétine coupant $\mathcal{H}$ en une conique lisse (cf. illustration de la démonstration de la proposition 3.8) : la droite d se projette le long de $\mathcal{L}$ en une droite sur $\mathfrak{R}_1$ et en une conique lisse sur $\mathfrak{R}_2$.

Toutefois, la proposition suivante caractérise des faisceaux de rétines sur lesquelles les images formées sont *projectivement équivalentes*, c'est-à-dire que, pour deux rétines $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$, il existe une transformation projective $f : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$ telle que $\pi_2 = f \circ \pi_1$ avec π_i la projection sur $\mathfrak{R}_i$ le long de $\mathcal{L}$. Nécessairement, f est la restriction de π_2 à $\mathfrak{R}_1$ (les points x, $\pi_1(x)$ et $\pi_2(x)$ sont alignés pour tout point x non ambigu).

Proposition 3.10 (Caractérisation des rétines d'images projectivement équivalentes)**.**

> *Pour une congruence linéaire $\mathcal{L}$ de rang 4 non dégénérée, les images formées sur deux rétines génériques sont projectivement équivalentes si et seulement si ces rétines ont une même droite de $\mathcal{L}$ en commun.*

Démonstration. Supposons que les rétines $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ partagent la même droite de $\mathcal{L}$. D'après le corollaire 2.19, il existe un flot linéaire M pour $\mathcal{L}$ tel que $\mathrm{M}(\mathfrak{R}_1) = \mathfrak{R}_2$. Puisque M préserve globalement chacune des droites de $\mathcal{L}$, les restrictions à $\mathfrak{R}_1$ de M et π_2 coïncident donc $\pi_2 = \mathrm{M} \circ \pi_1$. Une seconde démonstration consiste à remarquer que toute droite de $\mathfrak{R}_1$ se projette en une droite sur $\mathfrak{R}_2$ d'après la proposition 3.8 donc $\pi_{2|_{\mathfrak{R}_1}}$ est projective d'après le théorème fondamental de la géométrie projective.

Réciproquement, si $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ ne partagent pas la même droite de $\mathcal{L}$, alors presque toute droite de $\mathfrak{R}_1$ se projette en une conique lisse sur $\mathfrak{R}_2$ d'après la proposition 3.8. Ainsi, la restriction de π_2 à $\mathfrak{R}_1$ n'est pas une transformation projective. □

Événements visuels. L'équivalence projective est une propriété très forte sur les images. En vision par ordinateur, des notions plus faibles d'équivalence sur les images (lisse, topologique,...) peuvent être considérées pour la construction de structures de visibilité [20, 3, 83]. Le « squelette » d'une telle structure est défini à partir des positions de l'appareil photo depuis lequel on

[10] Remarquons que, sans la proposition 3.8, on peut simplement conclure que la composée de ces deux fonctions est de degré 4, comme l'avaient obtenu Yu *et al.* [107].

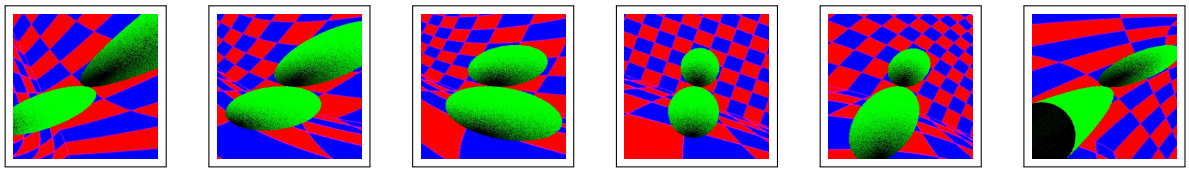


FIG. 3.4: Invariabilité d'un événement visuel par déplacement de la rétine

Les images sont obtenues à partir d'un appareil photo elliptique dont la rétine a été déplacée. Le rayon de la congruence sous-jacente issu du pixel central est bitangent aux deux sphères vertes disjointes, contenu dans un plan bitangent. La topologie du contour apparent des sphères reste invariante autour de ce rayon (sommet de degré 4).

observe un *événement visuel*, c'est-à-dire l'image obtenue par un léger déplacement de l'appareil n'est plus équivalente (au sens choisi) avec celle obtenue dans la position initiale de l'appareil. Par exemple, dans une scène constituée de deux boules tangentes extérieurement et pour un sténopé dont le centre se situe sur une droite bitangente dans un plan bitangent aux deux boules, on observe un changement de topologie du contour des objets en déplaçant le sténopé au dessus et en dessous de ce plan bitangent.

Une question est de savoir si la notion d'événement visuel est bien définie pour les appareils photo linéaires. Pour le sténopé, on ne se soucie pas de la position de la rétine par rapport au bouquet de droites sous-jacente à cause de l'équivalence projective des images formées. Pour les appareils photo non centraux, on doit en tenir compte. En se restreignant à des zones « admissibles » sur une rétine, on peut montrer que tout déplacement local de la rétine n'induit aucun changement topologique sur l'image d'une scène (cf. figure 3.4). Cette invariance n'est plus vraie au voisinage d'un point ambigu de la rétine : pour les images de la figure 3.7 avec $\varphi = \pm 60^\circ$, on repère un pincement de l'image au niveau du point d'intersection de la rétine avec une droite focale.

3.4.2 Implémentation dans Pbrt

Dans cette section, nous présentons une implémentation des appareils photo linéaires sous PBRT, logiciel de rendu basé sur la technique de lancer de rayon regroupant un ensemble de techniques algorithmiques avancées et récentes. Il est développé en C++ par M. Pharr et G. Humphreys pour une utilisation académique sous license GNU-GPL. En outre, une interface de programmation est disponible pour pouvoir étendre le logiciel avec ses propres plugiciels.

Nous avons implémenté les appareils photo linéaires à l'intérieur d'une unique classe `LinearCamera`, d'une trentaine de lignes de code effectif. Celle-ci hérite de la classe abstraite `ProjectiveCamera` (dans laquelle on peut définir le sténopé), elle-même héritant de la classe abstraite `Camera`, la plus générale pour définir un appareil photo quelconque. Ces deux dernières classes se trouvent par défaut dans `pbrt`.

La classe `ProjectiveCamera` comporte des attributs encodant les paramètres représentant l'appareil photo dans une base normalisée euclidienne :

- `RasterToCamera` correspond à la transformation K^{-1} (paramètres intrinsèques) qui envoie les coordonnées rétinales[11] d'un point de la rétine sur ses coordonnées dans la base normalisée.

[11] Ces coordonnées s'expriment en pixels d'où l'utilisation du terme *raster*, synonyme de *bitmap*, désignant un tableau de pixels.

```
1  GenerateRay(Sample sample, Ray *ray) {

3      Point pras = Point(sample.X,sample.Y,0);
       Point pcam = RasterToCamera(pras);
5
       ray->o = pcam;
7      ray->d = Normalize(Flow(pcam)-pcam);
       if  ( Dot(ray->d,Vview) < 0 )
9          ray->d = -(ray->d);

11     /* Reglage des bornes du rayon */

13     CameraToWorld(*ray,ray);}
```

Programme 3.1: Génération de rayon

- `CameraToWorld` correspond à la transformation W (paramètres extrinsèques) qui envoie les coordonnées normalisées d'un point de la scène sur ses coordonnées terrestres.

Nous avons introduit deux attributs supplémentaires dans la classe `LinearCamera` :

- `Vview` représente un vecteur normal de la rétine en coordonnées normalisées, pointant vers la scène à observer.
- `Flow` correspond à un flot linéaire de la congruence linéaire de droites $\mathcal{L}$ sous-jacente à l'appareil photo linéaire. Par exemple, dans le cas affinement générique, sa matrice en coordonnées normalisées s'écrit

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \mathfrak{p}_B & \\ -\mathfrak{p}_A & & \\ -\mathfrak{p}_A\,\mathfrak{p}_B & & \end{pmatrix}$$

  où $\{\mathfrak{p}_A;\mathfrak{p}_B\}$ sont les paramètres euclidiens de $\mathcal{L}$.

Enfin, la classe `ProjectiveCamera` impose de définir la méthode `GenerateRay`, fondement de la technique de lancer de rayon. Notre implémentation de cette méthode est présentée dans le programme 3.1. Étant donné un pixel `sample` (représentant un point u de la rétine), il s'agit de construire le rayon `ray`, en coordonnées terrestres, dont le support est l'unique droite de la congruence sous-jacente passant par u. On le construit d'abord en coordonnées normalisées avant d'effectuer le changement de base terrestre (ligne 13). Son origine `o` est le point de la rétine (lignes 3–6) et son vecteur directeur `d` unitaire pointant vers la scène est construit simplement[12] via le flot linéaire `Flow` (lignes 7–9). Enfin, les autres réglages du rayon (ligne 11) sont communs à tout autre appareil photo.

Exemples. La figure 3.5 représente la configuration de la scène utilisée pour les exemples des figures 3.6 à 3.9. $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ représente la base terrestre et $(P_0, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_3})$ une base

[12] Si `Flow(pcam)` est un vecteur (ce qui est possible car le flot est une homographie), il ne faut pas soustraire `pcam`. Si `pcam` est un point fixe de `Flow`, la direction n'est pas définie. Ces cas sont traités sans aucune difficulté particulière dans notre implémentation.

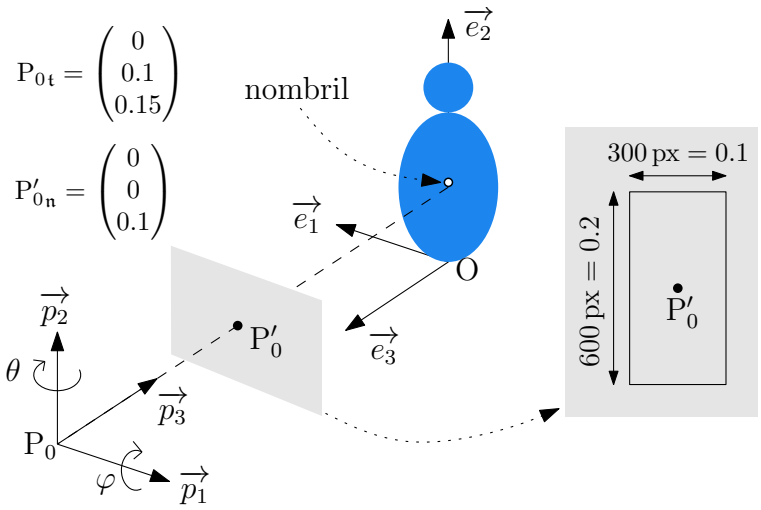


FIG. 3.5: Configuration de la scène pour les exemples.

normalisée de l'appareil photo. Dans cette dernière base, la rétine normalisée $(P_0, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ subit une rotation d'angle φ autour de $\overrightarrow{p_1}$, d'angle θ autour de $\overrightarrow{p_2}$ puis une translation de P_0 à P'_0 (les bases sous `pbrt` sont orientées négativement). Visuellement, il semble que « les déformations sont minimales » lorsque la rétine est parallèle à la rétine normalisée.

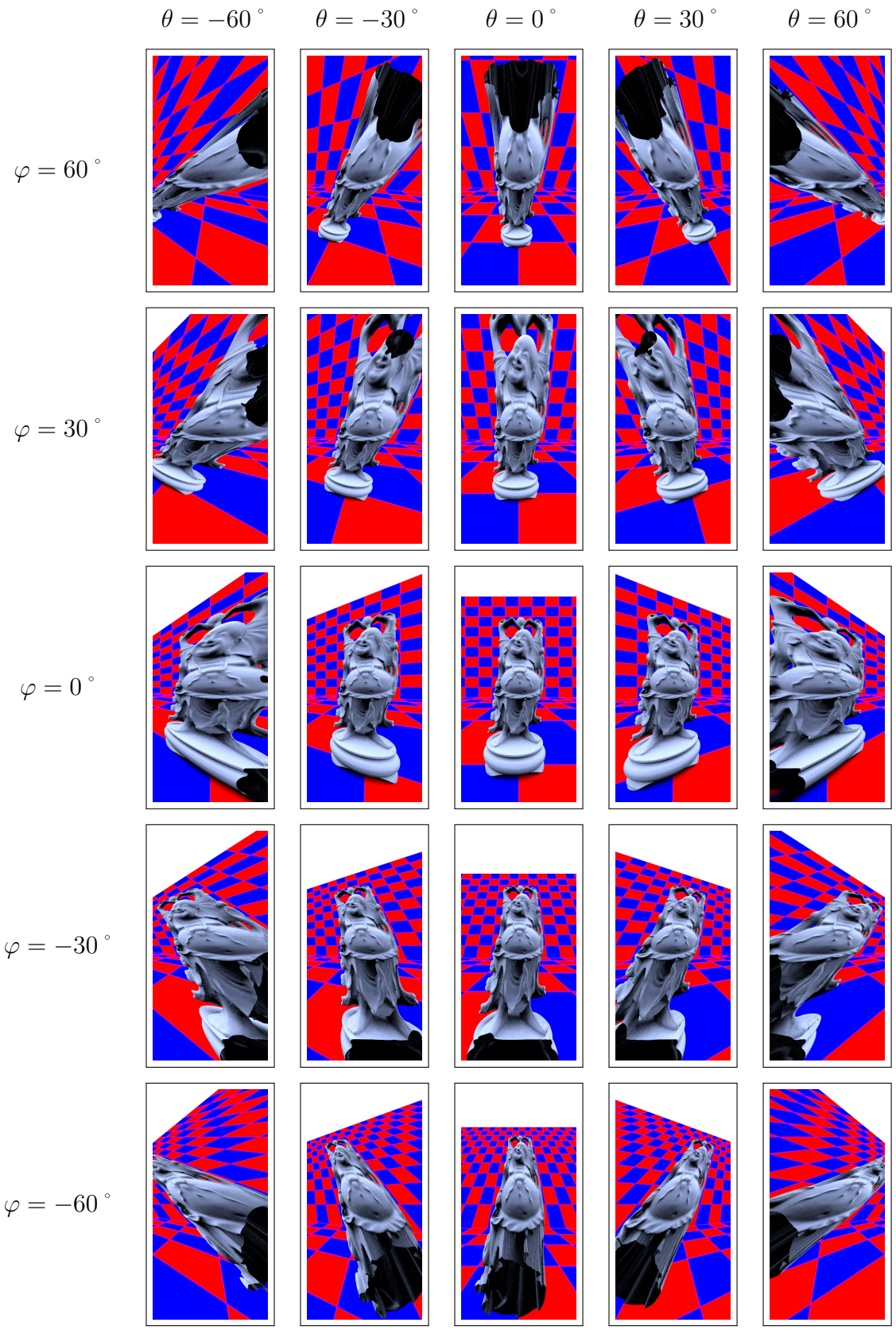


FIG. 3.6: Appareil photo dégénéré ou sténopé ($\mathfrak{p}_A = \mathfrak{p}_B = 0$)

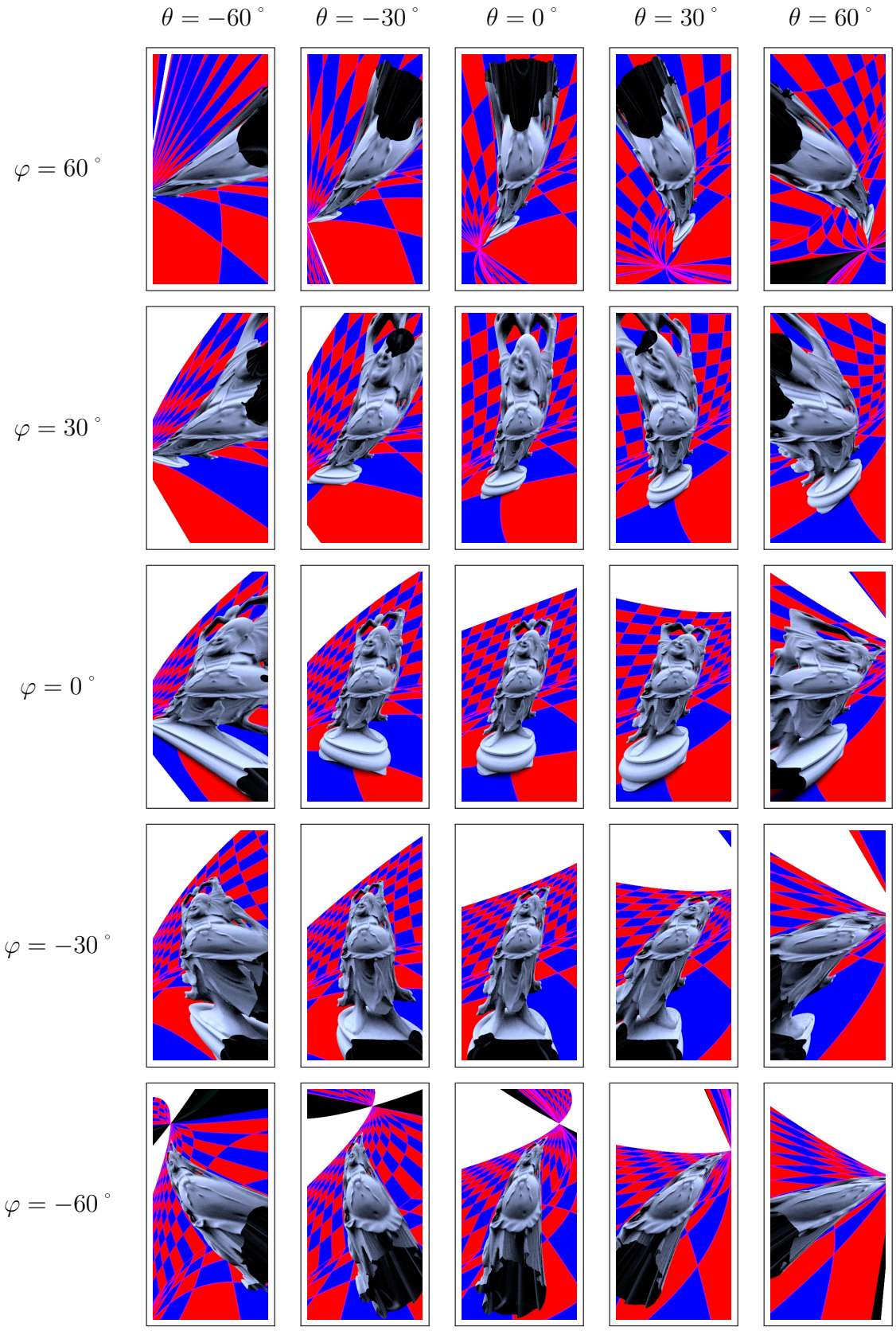


FIG. 3.7: Appareil photo hyperbolique ($\mathfrak{p}_A = -0.04$, $\mathfrak{p}_B = 0.04$)

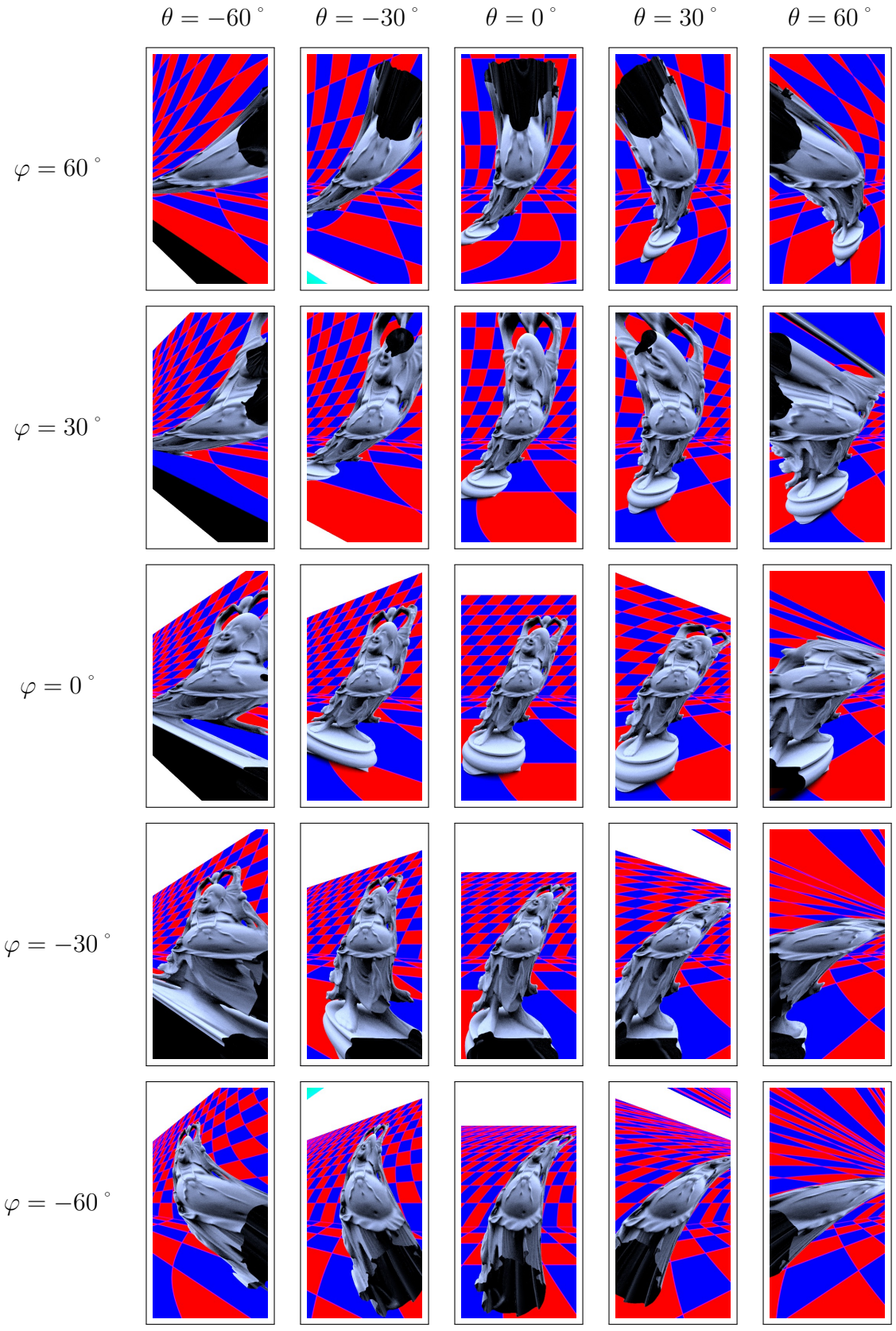


FIG. 3.8: Appareil photo parabolique ($\mathfrak{p}_A = 0$, $\mathfrak{p}_B = 0.1$)

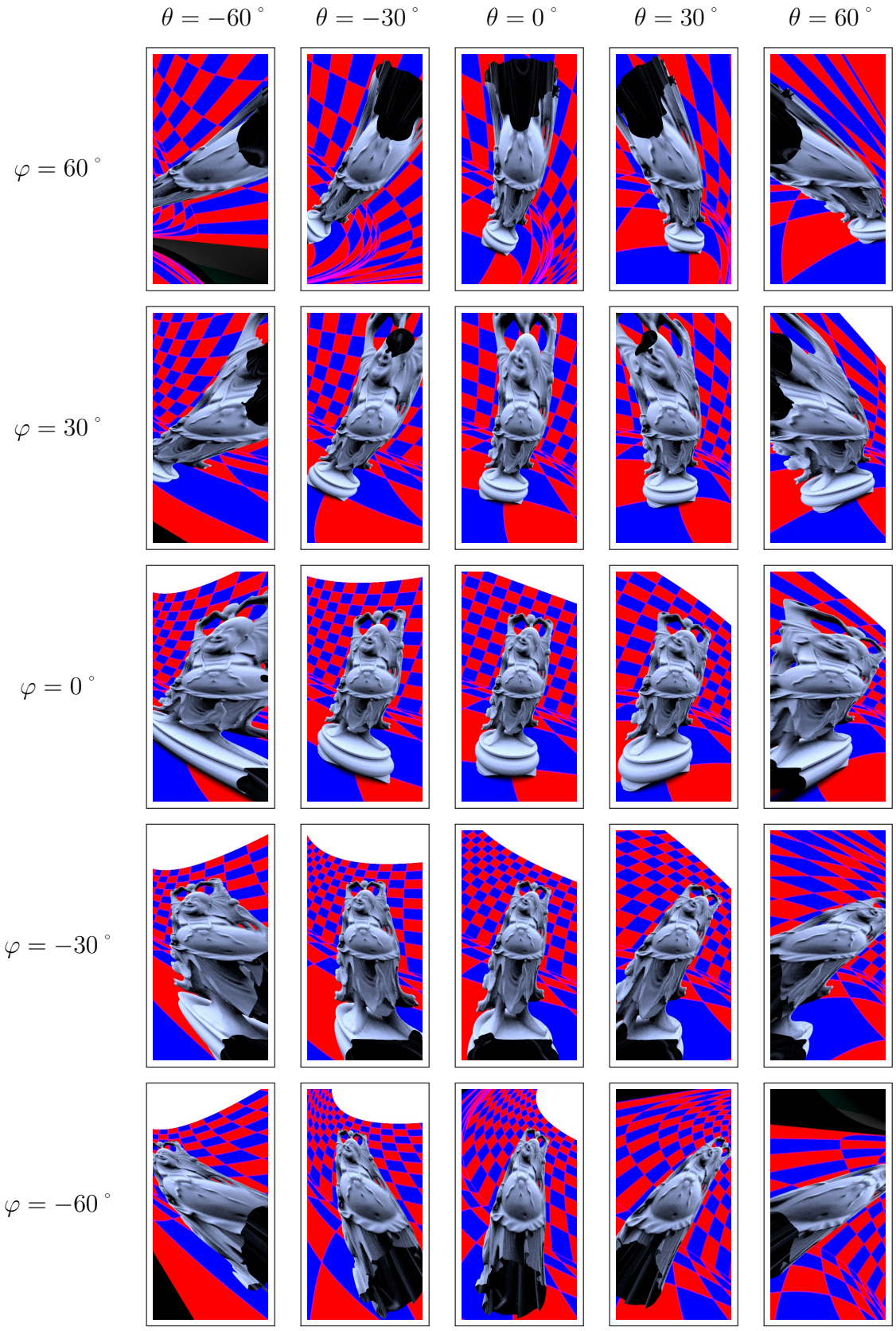


FIG. 3.9: Appareil photo elliptique ($\mathfrak{p}_A = 0.04$, $\mathfrak{p}_B = 0.04$)

Chapitre 4

Étude différentielle des ensembles de tangentes et de transversales à des convexes

4.1 Introduction

Après nous être focalisés sur les congruences linéaires de droites et leur utilisation en vision au cours des chapitres 2 et 3, nous élargissons à présent notre étude à des ensembles de droites intervenant en théorie des transversales géométriques[1], une branche combinatoire de la géométrie algorithmique. Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre géométrique introduit au chapitre 1, auquel nous apportons des éléments de géométrie différentielle pour tenter d'aborder d'une nouvelle façon les problèmes actuels de géométrie des transversales.

Considérons par exemple le problème suivant : étant donné 4 boules distinctes de $\mathbb{R}^3$, à quelle condition sur leurs centres et leurs rayons possèdent-elles une infinité de droites tangentes ? La caractérisation de telles configurations dégénérées est motivée par des problèmes algorithmiques reposant sur le calcul exact d'« arrangements » (diagrammes de Voronoï de droites dans $\mathbb{R}^3$, complexes de visibilité dans $\mathbb{R}^4$, ...) L'étude des tangentes à 4 boules a progressé seulement à partir des années 2000, d'abord pour les boules de rayon unité [62], puis pour les configurations possédant un nombre fini de tangentes [96] (à l'aide d'outils de géométrie algébrique dans $\mathbb{G}$). La réponse à la question posée est apportée par Borcea *et al.* [11]. Il s'agit des configurations de 4 boules dont les centres sont alignés et vérifiant l'une des conditions suivantes :

- l'intersection des quatre boules est un cercle, éventuellement réduit à un point ;
- chacune des quatre boules est tangente le long d'un cercle à un même hyperboloïde de révolution d'axe contenant les centres.

Les méthodes employées pour obtenir ces résultats reposent sur la géométrie algébrique classique en exploitant complètement la géométrie particulière de la boule. Il s'avère qu'elles fournissent peu de pistes envisageables pour une généralisation, même avec des ellipsoïdes. Une approche plus systématique consiste à voir les ensembles de tangentes de convexes lisses comme des sous-variétés différentielles de $\mathbb{G}$. D'après les résultats classiques de transversalité différentielle, on peut déduire sans effort des conditions nécessaires de dégénérescence. Par exemple, si une droite tangente à quatre convexes ronds disjoints n'est pas isolée dans l'ensemble des tangentes à ces convexes, alors il existe un hyperboloïde tangent à chacun des convexes en leur point de contact avec la droite. Cette condition est à rapprocher de celle pour les boules et laisse supposer qu'une démonstration alternative différentielle est envisageable.

[1] *geometric transversal theory* en anglais, de code 52A32 dans la classification AMS, [36].

Plus généralement, la théorie des transversales géométriques consiste à étudier les propriétés d'intersection d'objets d'une certaine classe (convexes, translatés d'un compact, ensemble des droites transversales d'objets d'une certaine classe, ...), notamment des propriétés combinatoires « à la Helly »[2]. En adoptant un point de vue *différentiel* sur les objets considérés, on peut d'une part tirer profit des propriétés classiques d'intersection transverse en géométrie différentielle et d'autre part initier une approche alternative de généralisation des résultats du domaine, comme l'exemple précédent a pu l'illustrer. Un des objectifs de ce chapitre 4 consiste à mettre à plat des outils différentiels pour les ensembles de droites tangentes et transversales à des convexes. Ces outils n'ont jamais été véritablement pris en compte dans cette branche récente de recherche, issue des communautés de géométrie convexe, discrète et algorithmique.

Dans ce chapitre, nous nous attaquons plus particulièrement à l'étude de l'épinglage d'une droite par des convexes dits ronds (c.-à-d. de classe $\mathscr{C}^2$ et de courbure de Gauss strictement positive en tout point du bord) où une droite est dite épinglée par une famille de convexes si elle est isolée dans l'ensemble des droites transversales à ces convexes. Les résultats obtenus ne sont pas spectaculaires en soi : nous mettons en évidence l'équivalence entre les deux notions d'épinglage au premier ordre [1] et d'épinglage stable [16], nous généralisons au cas des convexes ronds les nombres de Helly correspondants à ces notions pour des droites et des boules de $\mathbb{R}^3$, nous proposons une nouvelle condition suffisante pour l'épinglage d'une droite par quatre convexes. Toutefois, la démarche suivie est originale et constitue la réelle contribution de ce chapitre, qu'on peut résumer ainsi :

Contributions

- Asseoir les bases de géométrie différentielle pour les ensembles de droites tangentes et transversales à des convexes de $\mathbb{R}^3$.
- Étendre les techniques de l'article *Lines pinning lines* [1] à des convexes ronds via cette approche différentielle.
- Ouvrir des perspectives d'étude pour les épinglages en ciblant les configurations de convexes à étudier.

La suite de ce chapitre s'organise comme suit : après avoir étudié la régularité de l'ensemble des droites tangentes à un convexe lisse et son approximation au premier ordre (section 4.2), nous caractérisons géométriquement la condition de transversalité d'une famille de variétés de droites tangentes à un convexe (section 4.3). Nous abordons ensuite le problème de caractériser les épinglages d'une droite par des convexes (section 4.4) à l'aune de ce cadre différentiel,

4.2 Variétés des tangentes et des transversales à un convexe

Après avoir introduit quelques définitions et propriétés préliminaires (section 4.2.1), nous présentons différents résultats, locaux ou globaux, sur la régularité de l'ensemble des droites tangentes ou transversales à un convexe (section 4.2.2). Puis, nous nous intéressons au moyen d'approximer localement au premier ordre le « volume » des transversales à un convexe (section 4.2.3) grâce à la paramétrisation de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ présentée à la section 1.1.3. Ces résultats n'ont rien de surprenant, sauf qu'ils semblent manquer dans la littérature (aucune mention, par exemple,

[2]Le théorème de Helly (1913) énonce que toute famille d'au moins $d+1$ convexes de $\mathbb{R}^d$ a une intersection non vide si et seulement si toute sous-famille de $d+1$ convexes a une intersection non vide.

dans le *Handbook of convex geometry* [42]). Ceux de la section 4.2.3 systématisent des lemmes de l'article *Lines pinning lines* [1] en les replaçant dans le cadre de $\mathbb{G}$. Avant de commencer, voici un avant-propos sur quelques pré-requis et raccourcis employés dans ce chapitre.

Géométrie différentielle projective. Les bases de la géométrie différentielle des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ seront supposées connues, c'est-à-dire ce qui correspond aux vingt premières pages de l'ouvrage [43] (fonctions $\mathscr{C}^k$, espace tangent, théorème des fonctions implicites). Au cours de ce chapitre, nous travaillons parfois dans un cadre projectif (convexes de $\mathbb{P}^3$, espace des droites $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{P}^5$) et nous employons le raccourci suivant : un sous-ensemble X d'un espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une *sous-variété différentielle de* $\mathbb{P}^n$ *de classe* $\mathscr{C}^k$ lorsque son homogénéisé $\widetilde{\mathrm{X}}$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^{n+1}$ de classe $\mathscr{C}^k$, excepté à l'origine 0. Par exemple, $\mathbb{G}$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{P}^5$ car $\widetilde{\mathbb{G}} = q^{-1}(\{0\})$ avec $q(x) = x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_5$ de gradient non nul en-dehors de l'origine. Les notions d'espace tangent et de régularité $\mathscr{C}^k$ dans $\mathbb{R}^n$ se transposent naturellement dans $\mathbb{P}^n$. En particulier, une *sous-variété différentielle de* $\mathbb{G}$ est une sous-variété de $\mathbb{P}^5$ contenue dans $\mathbb{G}$. Dans ce chapitre, toutes ces notions ne concernent que les sous-ensembles de $\mathbb{G}$, les convexes étant des sous-ensembles de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. L'ouvrage de Pottmann et Wallner [82] propose une présentation accessible de ces notions. Le lecteur préférant une définition plus rigoureuse en terme de variétés abstraites pourra se référer à l'ouvrage de Morris [49]. Parfois, nous utilisons le raccourci *variété* pour désigner une sous-variété.

4.2.1 Définitions et propriétés préliminaires

Convexe. Un ensemble K de $\mathbb{R}^3$ est *convexe* si pour toute paire de points de K le segment les joignant est inclus dans K. Dans tout ce chapitre, nous considérons des convexes de $\mathbb{R}^3$ d'intérieur non vide (ensembles « volumiques ») et compacts (fermés et bornés). On note $\mathring{\mathrm{K}}$ l'intérieur et $\partial\mathrm{K} = \mathrm{K}\backslash\mathring{\mathrm{K}}$ le bord d'un convexe K.

Droites tangentes. Un plan H de $\mathbb{R}^3$ est dit *support* à K si $\mathrm{K}\cap\mathrm{H}$ est non vide et K est contenu dans un demi-espace délimité par H. Si de plus $x \in \mathrm{K}\cap\mathrm{H}$, on dit que le plan H est *support à* K *en* x. Le convexe K est dit *strictement convexe* si chaque plan support a une intersection avec K réduite à un point. Une droite est dite *tangente* à K si elle coupe K et est contenue dans un plan support à K. On note $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ le sous-ensemble de $\mathbb{G}$ des droites tangentes à K.

Droites transversales. Une droite ℓ est dite *transversale* à un convexe K si elle le coupe (de même pour n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$). On note $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ le sous-ensemble de $\mathbb{G}$ des droites transversales à K. Son bord est formé des droites tangentes à K :

Lemme 4.1.
$\partial\mathcal{V}(\mathrm{K}) = \mathcal{L}(\mathrm{K})$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si une droite ℓ passe par un point intérieur $x \in \mathring{\mathrm{K}}$, alors ℓ appartient à l'intérieur de $\mathcal{V}(\mathrm{K})$. Montrons que $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ est contenu dans $\partial\mathcal{V}(\mathrm{K})$. Soit ℓ une droite tangente à K en le point x. Elle est contenue dans un hyperplan support H à K. En translatant ℓ dans le demi-espace ouvert délimité par H et ne rencontrant pas K, nous obtenons que ℓ est arbitrairement proche de droites de ${}^{\mathrm{c}}\mathcal{V}(\mathrm{K})$. Comme $\ell \in \mathcal{V}(\mathrm{K})$, on en déduit que $\ell \in \partial\mathcal{V}(\mathrm{K})$ donc $\mathcal{L}(\mathrm{K}) \subseteq \partial\mathcal{V}(\mathrm{K})$.

Réciproquement, soit $\ell \in \partial\mathcal{V}(\mathrm{K})$. Considérons les projections K_1 et p_1 de K et ℓ respectivement sur $\ell^\perp$ parallèlement à ℓ. Le point p_1 appartient au bord de K_1 sinon $\ell \in \mathring{\mathcal{V}}(\mathrm{K})$ d'après la remarque préliminaire de la démonstration. Notons ℓ_1 la droite support à K_1 en p_1. Le plan engendré par ℓ et ℓ_1 est support à K donc ℓ est tangente à K. Ainsi, $\partial\mathcal{V}(\mathrm{K}) \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{K})$. □

Régularité. On peut définir la régularité du bord d'un convexe K de deux façons équivalentes d'après le théorème [51, Thm 1] : le bord $\partial\mathrm{K}$ d'un convexe K est une sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) si et seulement si la fonction de jauge

$$\rho_{\mathrm{K}}(x) = \inf\{\, t \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists\, y \in \mathrm{K} \qquad x = t\,(y - x_0)\,\}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}^3$, avec $x_0 \in \mathring{\mathrm{K}}$ fixé. On dit alors que K est *de classe* $\mathscr{C}^k$. Dans ce cas, K possède un unique plan support en chacun des points de son bord qui correspond exactement à son plan tangent. Ainsi, la notion de tangence définie précédemment pour une droite coïncide avec sa notion différentielle.

La régularité de la fonction de jauge ne dépend pas du point intérieur x_0 choisi. Dans toute la suite de la section 4.2, on suppose que $\mathring{\mathrm{K}}$ contient l'origine et $x_0 = 0$. Remarquons que $\partial\mathrm{K} = {\rho_{\mathrm{K}}}^{-1}(1)$. Grâce aux fonctions de jauge, on montre facilement que les bords de deux convexes lisses sont difféomorphes (lemme 4.2) et que les plans tangents d'un convexe de classe $\mathscr{C}^k$ varient de façon $\mathscr{C}^{k-1}$ (lemme 4.3).

Lemme 4.2.

Soient K_1 *et* K_2 *deux convexes* $\mathscr{C}^k$ *($k \geqslant 1$) contenant l'origine. La fonction* $\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2} : \begin{cases} \partial\mathrm{K}_1 \longrightarrow \partial\mathrm{K}_2 \\ \overrightarrow{x} \longmapsto \overrightarrow{x}/\rho_{\mathrm{K}_2}(\overrightarrow{x}) \end{cases}$ *réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.*

Démonstration. La fonction $\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et injective (car $0 \in \mathring{\mathrm{K}}_1$) d'inverse $\varphi_{\mathrm{K}_2\to\mathrm{K}_1}$ de classe $\mathscr{C}^k$ et injective par symétrie. □

Lemme 4.3.

Soit K *un convexe de classe* $\mathscr{C}^k$ *($k \geqslant 1$). La fonction* g_{K} *qui à un point du bord* $\partial\mathrm{K}$ *associe son plan tangent (vu comme un point par dualité) est de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$.

Démonstration. Le point dual d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$ passant par le point A et de normale $\overrightarrow{n}$ est décrit par ses coordonnées homogènes égales à $\left[-\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{n} : \overrightarrow{n}\right]$. Pour un plan tangent à K en $x \in \partial\mathrm{K}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x$ et $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \rho_{\mathrm{K}}(x)$. Puisque ρ_{K} est de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit immédiatement que la fonction g_{K} est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. □

Ordre de contact. On dit qu'une droite ℓ a un *contact d'ordre p* avec $\partial\mathrm{K}$ en x lorsqu'elle a un contact d'ordre p avec la courbe $\Gamma_{\ell,x}$ obtenue comme l'intersection de $\partial\mathrm{K}$ avec le plan contenant ℓ et la normale à $\partial\mathrm{K}$ en x. Le contact est d'ordre 2 lorsque $\Gamma_{\ell,x}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et a une courbure nulle en x, ce qui est équivalent à la condition

$${}^t\overrightarrow{\ell}\,\Big(\operatorname{Hess}\rho_{\mathrm{K}}(x)\Big)\,\overrightarrow{\ell} = 0$$

comme conséquence du théorème [51, Thm 1], où $\overrightarrow{\ell}$ désigne une direction de ℓ et $\operatorname{Hess}\rho_{\mathrm{K}}(x)$ la matrice hessienne de la fonction de jauge ρ_{K} en x. Un convexe de classe au moins $\mathscr{C}^2$ est

dit *rond* si toutes ses droites tangentes ont un contact d'ordre au plus 1 avec son bord[3]. Un convexe strictement convexe n'est pas forcément rond : considérons par exemple le convexe de bord d'équation $z = (x^2 + y^2)^2$ en coordonnées cartésiennes. Il est strictement convexe en 0 mais trop « plat » au voisinage de 0 pour être rond.

L'ordre de contact d'une droite tangente à un convexe intervient uniquement dans la démonstration du lemme suivant :

Lemme 4.4.

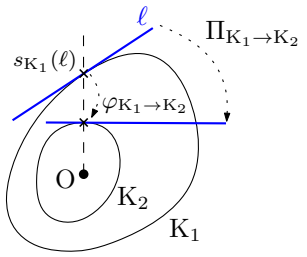
Soit K *un convexe de classe* $\mathscr{C}^k$ *(*$k \geqslant 2$*) et* ℓ_0 *une droite tangente à* K *ayant un contact d'ordre au plus 1. Dans un voisinage de* ℓ_0 *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{K})$*, la fonction qui à une droite associe son unique point de contact avec* $\partial\mathrm{K}$ *est de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$*.*

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe D. Il est clair que la condition de stricte convexité est nécessaire, d'une part pour définir un unique point de contact, d'autre part pour obtenir rien que la continuité du point de contact (considérer l'exemple d'une droite contenue dans le plan support d'une face d'un cube). En revanche, la condition sur l'ordre de contact intervient dans l'application d'un théorème des fonctions implicites. Il se peut que cette condition soit un artefact de démonstration.

4.2.2 Résultats de régularité

Cette section regroupe un ensemble de résultats sur l'ensemble de tangentes à un convexe : c'est une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}$ lorsque le convexe est rond (théorème 4.5), il est lisse presque partout pour les polyèdres (proposition D.2) et c'est une sous-variété topologique de dimension 3 dans le cas général (proposition D.3).

Étant donné deux convexes ronds K_1 et K_2 (contenant l'origine dans leur intérieur), décrivons une application $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ envoyant les droites tangentes de K_1 sur celles de K_2. Soit $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{K}_1)$. Considérons le plan engendré par ℓ et l'origine O. La figure ci-contre représente la coupe des convexes K_1 et K_2 dans ce plan. « Projetons » sur K_2 le point de contact $s_{\mathrm{K}_1}(\ell)$ de ℓ sur K_1 à l'aide de la fonction $\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ du lemme 4.2. On définit alors $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}(\ell)$ comme la droite tangente de K_2 passant par $\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}\big(s_{\mathrm{K}_1}(\ell)\big)$ et contenue dans le plan de coupe. Nous allons montrer que $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ réalise un difféomorphisme entre $\mathcal{L}(\mathrm{K}_1)$ et $\mathcal{L}(\mathrm{K}_2)$. En choisissant pour K_2 la sphère unité $\mathbb{S}^2$, dont l'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{S}^2)$ des droites tangentes est une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}$, on en déduit le théorème suivant :



Théorème 4.5.

L'ensemble des droites tangentes à un convexe rond de classe $\mathscr{C}^k$ *(*$k \geqslant 2$*) est une sous-variété différentielle de* $\mathbb{G}$ *de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$ *difféomorphe au fibré tangent en droites de la sphère unité* $\mathbb{S}^2$*.*

Démonstration. Soient K_1 et K_2 deux convexes ronds de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 2$). La fonction $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ introduite précédemment s'exprime par la formule suivante :

$$\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}(\ell) = (\mathrm{O} \mathbin{\widetilde{\vee}} \ell) \mathbin{\widetilde{\wedge}} g_{\mathrm{K}_2}\Big(\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}\big(s_{\mathrm{K}_1}(\ell)\big)\Big)$$

[3]Autrement dit, le bord d'un convexe rond a une courbure de Gauss strictement positive en tous ses points.

où s_{K_1} est la fonction « point de contact » de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ du lemme 4.4 ; $\varphi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ la fonction « projection de jauge » de classe $\mathscr{C}^k$ du lemme 4.2 ; g_{K_2} la fonction « plan tangent » de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ du lemme 4.3. L'opérateur $\widetilde{\wedge}$ dénote la droite d'intersection des deux plans opérandes et l'opérateur $\widetilde{\vee}$ le plan engendré par les deux opérandes. Ces opérateurs sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ car ils s'expriment polynomialement dans l'algèbre extérieure $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ (cf. annexe C). Par composition, $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$.

Puisque K_1 et K_2 jouent un rôle symétrique, $\Pi_{\mathrm{K}_2\to\mathrm{K}_1}$ est également de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ et est un inverse pour $\Pi_{\mathrm{K}_1\to\mathrm{K}_2}$. Par conséquent, $\mathcal{L}(\mathrm{K}_1)$ et $\mathcal{L}(\mathrm{K}_2)$ sont $\mathscr{C}^{k-1}$-difféomorphes. Choisissons à présent la sphère unité $\mathbb{S}^2$ pour K_2. On vérifie que les coordonnées de Plücker des droites tangentes à $\mathbb{S}^2$ sont exactement les solutions (non nulles) du système

$$\begin{cases} \zeta_0\zeta_3 + \zeta_1\zeta_4 + \zeta_2\zeta_5 = 0 \\ {\zeta_0}^2 + {\zeta_1}^2 + {\zeta_2}^2 = {\zeta_3}^2 + {\zeta_4}^2 + {\zeta_5}^2 \end{cases}$$

La paire des hypersurfaces correspondantes est transverse (cf. section 4.3.1, les gradients sont colinéaires uniquement à l'origine) donc $\mathcal{L}(\mathbb{S}^2)$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}$ (cf. lemme 4.11) de classe $\mathscr{C}^\infty$. Finalement, $\mathcal{L}(\mathrm{K}_1)$ est $\mathscr{C}^{k-1}$-difféomorphe à une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}$, donc c'est une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}$. □

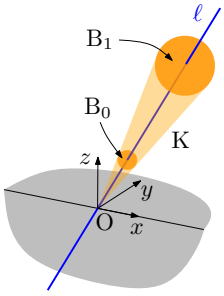
Quitte à considérer de bons voisinages, il est possible de raffiner le résultat du théorème 4.5, localement autour d'une droite ayant un contact d'ordre au plus 1 avec un convexe. Ceci permettra de travailler avec des objets non nécessairement strictement convexes, comme des cylindres par exemple, lors de l'étude des épinglages au cours de la section 4.4.

Corollaire 4.6.

Soit K *un convexe de classe* $\mathscr{C}^k$ *(*$k \geqslant 2$*) et* ℓ *une droite tangente à* K *ayant un contact d'ordre au plus 1. Il existe un voisinage* U *de* ℓ *tel que* $\mathrm{U} \cap \mathcal{L}(\mathrm{K})$ *est une sous-variété différentielle de* $\mathbb{G}$ *de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$ *de dimension 3.*

Démonstration. La continuité de $(x, \overrightarrow{u}) \mapsto {}^t\overrightarrow{u}\left(\operatorname{Hess}\rho_{\mathrm{K}}(x)\right)\overrightarrow{u}$ permet d'obtenir l'existence d'une petite boule ouverte centrée en un point de ℓ suffisamment loin de K et d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant le point de contact de ℓ avec K tel que l'ensemble des droites transversales à ces deux ouverts forme un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ dans $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ constitué de droites ayant un contact d'ordre au plus 1 sur K. D'après la démonstration du théorème 4.5, la restriction de $\Pi_{\mathrm{K}\to\mathbb{S}^2}$ sur $\mathcal{V}$ induit un $\mathscr{C}^{k-1}$-difféomorphisme sur son image, sous-variété différentielle de $\mathcal{L}(\mathbb{S}^2)$, ce qui conclut la démonstration du corollaire. □

Bien que non lisses, les polyèdres sont des objets suffisamment simples pour étudier leur ensemble de droites tangentes. Toute droite tangente ℓ à un polyèdre P est transversale à l'une de ses arêtes. Si la droite ℓ n'est ni contenue dans le plan support d'une face de P, ni incidente à un sommet de P, alors toute droite dans un voisinage de ℓ est transversale à une unique et même arête e de P. Il suffit par exemple de considérer les droites transversales aux deux boules ouvertes B_0 et B_1 comme dans la figure ci-contre, en plaçant B_0, resp. B_1, suffisamment près, resp. loin, de l'arête e. Puisque l'ensemble des droites transversales à la droite ℓ_e supportant e est un cône lisse de centre $\{\ell_e\}$ (cf. chapitre 1), l'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ des droites tangentes à P est lisse au voisinage de ℓ. En revanche, le caractère lisse de $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ disparaît au voisinage de toute droite passant par un sommet ou contenu dans le plan support d'une face de P (proposition D.2).



Dans toute la suite de ce chapitre, lorsque nous considérons une droite ℓ tangente à un convexe K, nous sous-entendons que la variété $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ est lisse en ℓ.

4.2.3 Approximations au premier ordre

Dans cette section, nous donnons une interprétation géométrique des approximations au premier ordre des ensembles $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ et $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ au voisinage d'une droite $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{K})$. En outre, nous réutilisons des objets mathématiques introduits pour des droites dans l'article *Lines pinning lines* [1].

Sous-espace tangent. Soit ℓ un point lisse de $\mathcal{L}(\mathrm{K})$. Une approximation au premier ordre de $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ au voisinage de ℓ est fournie par le sous-espace tangent $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K})$ de $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ en ℓ, de dimension 3 d'après le corollaire 4.6. Ainsi, $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K}) \cap \mathbb{G}$ est une congruence linéaire, de type parabolique ou dégénéré

Lemme 4.7.

Soit ℓ une droite tangente à un convexe K *de classe $\mathscr{C}^2$ ayant un contact en x d'ordre au plus* 1. *L'ensemble $\mathbb{G} \cap \mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K})$ est la congruence dégénérée constituée du bouquet de droites centré en x et du champ de droites supporté par le plan tangent π à* K *en x. Autrement dit, c'est l'ensemble des transversales aux droites du faisceau centré en x et de support π.*

En corollaire de ce résultat, l'approximation au premier ordre de $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ au voisinage de ℓ ne dépend que du plan support de K contenant ℓ et du point de contact x de ℓ avec K. En termes rapides, on peut dire que cette approximation au premier ordre ne dépend que de l'approximation au premier ordre de K au voisinage de x.

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe D. Remarquons que ce résultat s'étend immédiatement à un polyèdre K puisque $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K}) \cap \mathbb{G}$ contient un ouvert du champ de droites supporté par le plan support de K contenant ℓ.

Corollaire 4.8.

Sous les hypothèses et avec les notations du lemme 4.7, $\big(\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K})\big)^\circ$ est le faisceau des droites tangentes à K *en x contenant ℓ, de support π.*

Démonstration. Voir la table 1.1. □

Demi-volume approximant. Soit ℓ un point lisse de $\mathcal{L}(\mathrm{K}) = \partial\mathcal{V}(\mathrm{K})$. Une approximation du « volume » $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ au premier ordre au voisinage de ℓ consisterait en un « demi-espace » de bord $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K})$. Cependant, un tel demi-espace ne peut pas être défini ni dans $\mathbb{G}$, qui est courbe, ni dans $\mathbb{P}^5$ car $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(\mathrm{K})$ n'est pas un hyperplan. C'est pourquoi, nous définissons un demi-volume approximant dans le « linéarisé » $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ défini à la section 1.1.3 (avec ℓ_∞ une droite dans le plan infini ne coupant pas ℓ). Ce linéarisé représente un (gros) voisinage de ℓ dans $\mathbb{G}$ et s'obtient par une projection stéréographique ψ de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ (ensemble des droites affines qui ne sont pas parallèles au plan affine contenant ℓ_∞). Ainsi, nous considérons le projeté $\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \psi\left(\mathcal{V}(\mathrm{K})\right)$ dans $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ de l'ensemble $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ des droites transversales à K. Nous définissons le *demi-volume approximant* $\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell)$ de $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ en ℓ comme le demi-espace de $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ de bord $\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K})$ et ayant même normale sortante que $\mathrm{V}(\mathrm{K})$ en $\psi(\ell)$. L'objectif à présent est de décrire géométriquement l'ensemble des droites de $\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell)$. Commençons d'abord par son bord $\partial\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell) = \mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K})$.

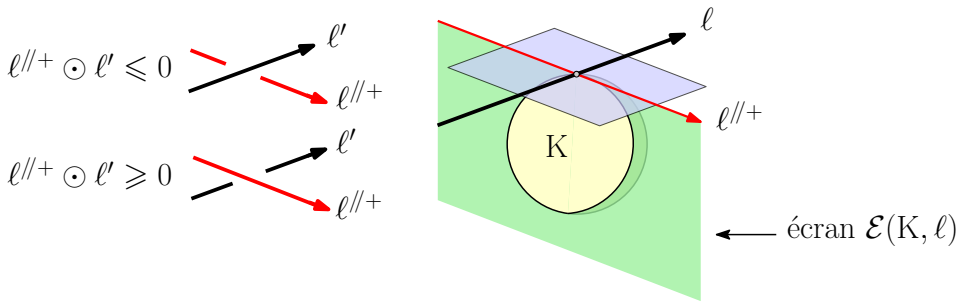


FIG. 4.1: Orientation d'une contrainte.

Lemme 4.9.

Le bord du demi-volume approximant de $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ en ℓ est constitué des droites affines transversales à la droite $\ell^{/\!/}$ coupant ℓ_∞ et tangente à K *en le point de contact de ℓ avec* K.

La démonstration est donnée en annexe D. Dans l'article *Lines pinning lines* [1], la droite $\ell^{/\!/}$ est notée $\ell^\perp$ car il s'agit de la droite orthogonale à ℓ tangente à K en x. En effet, une projection stéréographique particulière est considérée dans cet article.

En quelque sorte, la droite $\ell^{/\!/}$ encode le plan tangent π du bord du convexe K au point de contact x de ℓ avec K : le point x est le point d'intersection de ℓ et $\ell^{/\!/}$; le plan π est engendré par ℓ et $\ell^{/\!/}$. Ainsi, le lemme précédent assure tout naturellement que l'objet $\ell^{/\!/}$ représentant une approximation au premier ordre de ∂K caractérise entièrement une approximation au premier ordre de la variété $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ des droites tangentes à K.

Pour faire de même en passant aux « volumes » K et $\mathcal{V}(\mathrm{K})$, nous considérons des droites affines orientées. Tout d'abord, nous orientons les droites de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ de façon cohérente[4] pour obtenir l'ensemble de droites orientées $\mathbb{G}^+_{\ell_\infty}$. L'orientation $\ell^{/\!/+}$ de $\ell^{/\!/}$ va permettre d'encoder le demi-espace approximant K au point de contact x de ℓ avec K : considérons le demi-plan délimité par $\ell^{/\!/}$, parallèle à un plan contenant ℓ_∞ et d'intersection avec K non réduite au point x (cf. figure 4.1). Ce demi-plan est noté $\mathcal{E}^{/\!/}(\mathrm{K}, \ell)$ et est appelé *écran*. La droite $\ell^{/\!/+}$, appelée *contrainte*, doit alors vérifier la condition suivante : toute droite $\ell' \in \mathbb{G}^+_{\ell_\infty}$ transversale à l'écran $\mathcal{E}^{/\!/}(\mathrm{K}, \ell)$ *respecte* la contrainte $\ell^{/\!/+}$, c'est-à-dire $\ell^{/\!/+} \odot \ell' \geqslant 0$. Tout naturellement, nous obtenons :

Proposition 4.10.

Le demi-volume approximant de $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ en ℓ représente l'ensemble des droites affines respectant la contrainte $\ell^{/\!/+}$, c'est-à-dire coupant l'écran associé.

La démonstration est donnée en annexe D.

4.3 Intersection transverse de variétés de droites tangentes

Dans cette section, nous nous intéressons à un mode « générique » d'intersection des variétés de droites étudiées dans la section 4.2, appelé *intersection transverse*. Cette notion classique de géométrie différentielle [43] fournit un résultat naturel sur la dimension de l'intersection. Ce point de vue via l'intersection de variétés de droites peut être adopté dans divers problèmes de la théorie des droites transversales, comme la caractérisation de la dimension de l'ensemble des

[4] Considérer deux plans parallèles distincts contenant ℓ_∞. Toutes les droites de $\mathbb{G}^+_{\ell_\infty}$ doivent intersecter le même plan en premier.

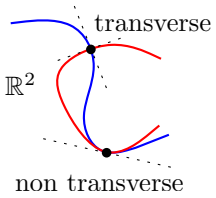
droites tangentes à quatre boules (voir l'introduction, section 4.1) ou des zones d'événements visuels d'une scène de convexes[5]. Lorsque les intersections sont transverses, la conclusion sur la dimension est alors immédiate : l'ensemble des quadritangentes est fini et les zones d'événements visuels sont des surfaces.

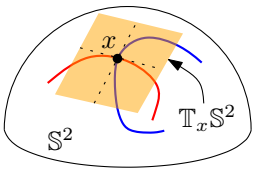
Après avoir rappelé la définition générale de la transversalité d'une famille de sous-variétés lisses et identifié cette notion dans le cadre de la géométrie de $\mathbb{G}$ pour des sous-variétés de droites tangentes à des convexes (section 4.3.1), nous donnons une caractérisation géométrique dans $\mathbb{P}^3$ de la condition de transversalité de ces sous-variétés (section 4.3.2).

4.3.1 Définitions et propriétés préliminaires

Deux sous-variétés lisses M et N d'une variété lisse R sont *transverses en* $x \in \mathrm{M} \cap \mathrm{N}$ *dans* R lorsque $\mathbb{T}_x(\mathrm{M}) + \mathbb{T}_x(\mathrm{N}) = \mathbb{T}_x(\mathrm{R})$ où $\mathbb{T}_x(\mathrm{M})$ l'espace tangent de M en x. Quand $\mathrm{R} = \mathbb{R}^d$, on dit simplement que M et N sont transverses en x. Si M et N sont transverses dans R en tout point de $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$, on dit que M et N sont *transverses dans* R. Avec cette définition, deux sous-variétés lisses de R disjointes sont transverses dans R.

Illustrons ces définitions par quelques exemples. Dans le plan ($\mathrm{R} = \mathbb{R}^2$), deux courbes lisses sont transverses en x si leurs tangentes en x ne coïncident pas. Il en est de même pour deux courbes lisses dans la sphère $\mathbb{S}^2 (= \mathrm{R})$. Dans ce cas, les tangentes des courbes en x engendrent le plan tangent à $\mathbb{S}^2$ en x. Dans $\mathrm{R} = \mathbb{R}^3$, deux courbes lisses ne sont jamais transverses pour des raisons de dimension. En revanche, une courbe et une surface ou deux surfaces peuvent être transverses.





Supposons à présent que R est de dimension d et considérons $(\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k)$ une famille de sous-variétés de R de dimension $d-1$ ([6]), avec $k \leqslant d$. Cette famille est *transverse en* $x \in \cap_i \mathrm{M}_i$ *dans* R si

$$\forall\, p \in \{1, \ldots, k-1\} \qquad \left(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant p} \mathbb{T}_x(\mathrm{M}_i) \right) + \mathbb{T}_x(\mathrm{M}_{p+1}) = \mathbb{T}_x(\mathrm{R})$$

Cette condition (portant sur des hypersurfaces de R) est équivalente à l'indépendance linéaire des directions normales des hyperplans $\mathbb{T}_x(\mathrm{M}_i)$ dans $\mathbb{T}_x(\mathrm{R})$. Le lemme suivant donne la dimension de l'intersection d'une famille d'hypersurfaces transverses :

Lemme 4.11 ([43, chap.1 §5])**.**

Si elle est non vide, l'intersection M *d'une famille de* k *hypersurfaces lisses transverses dans une variété lisse* R *de dimension* d*, avec* $k \leqslant d$*, est une sous-variété lisse de* R *de dimension* $d-k$*. Dans ce cas,* $\mathbb{T}_x(\mathrm{M}) = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathbb{T}_x(\mathrm{M}_i)$ *pour tout* $x \in \mathrm{M}$*.* □

[5] Pour des convexes deux à deux disjoints, les zones d'événements visuels (couramment qualifiées de surfaces) sont incluses dans l'union des supports des droites tritangentes et des droites bitangentes limite aux convexes [20].

[6] La définition qui va suivre se généralise pour des sous-variétés de R de n'importe quelle dimension, mais nous n'en avons pas besoin.

Intéressons-nous maintenant au cas où $\mathrm{R} = \mathbb{G}$ et les sous-variétés M_i sont les sous-variétés $\mathcal{L}(\mathrm{K}_i)$ de droites tangentes à des convexes K_i. Le lemme 4.12 suivant reformule la condition de transversalité de k sous-variétés $\mathcal{L}(\mathrm{K}_i)$.

Lemme 4.12.

Soient $1 \leqslant k \leqslant 3$ et ℓ une droite tangente à une famille $(\mathrm{K}, \mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_k)$ de convexes de $\mathbb{R}^3$ telle que $(\mathcal{L}(\mathrm{K}_1), \ldots, \mathcal{L}(\mathrm{K}_k))$ est transverse en ℓ dans $\mathbb{G}$. Les ensembles $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ et $\bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{L}(\mathrm{K}_j)$ ne sont pas transverses en ℓ dans $\mathbb{G}$ si et seulement si $\big(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K})\big)^\circ$ est inclus dans le sous-espace projectif $\underset{1\leqslant j\leqslant k}{+} \big(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}_i)\big)^\circ$ de dimension k.

Démonstration. La condition de non-transversalité énoncée dans le lemme s'écrit

$$\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}) + \mathbb{T}_\ell \bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{L}(\mathrm{K}_j) \subsetneq \mathbb{T}_\ell \mathbb{G} \qquad \text{c.-à-d.} \qquad \big(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K})\big)^\circ \cap \left(\mathbb{T}_\ell \bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{L}(\mathrm{K}_j)\right)^\circ \supsetneq \{\ell\}$$

(cf. proposition 1.9 et lemme 1.10). D'après le corollaire 4.8, $(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}))^\circ$ est le faisceau des droites tangentes à K en x contenant ℓ : c'est un sous-espace projectif de dimension 1 inclus dans $\mathbb{G}$. Puisque l'intersection précédente est un sous-espace projectif de dimension au moins 1, la condition de non-transversalité du lemme est équivalente à

$$\big(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K})\big)^\circ \subseteq \left(\mathbb{T}_\ell \bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{L}(\mathrm{K}_j)\right)^\circ$$

Puisque la famille $(\mathcal{L}(\mathrm{K}_1), \ldots, \mathcal{L}(\mathrm{K}_k))$ est transverse en ℓ, le lemme 4.11 assure que $\mathbb{T}_\ell \bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{L}(\mathrm{K}_j)$ est de dimension $4-k$ et égal à $\bigcap_{1\leqslant j\leqslant k} \mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}_j)$. Son orthogonal est de dimension $4-(4-k) = k$ et égal à $\underset{1\leqslant j\leqslant k}{+} \big(\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}_i)\big)^\circ$ d'après la proposition 1.9. □

4.3.2 Interprétation géométrique dans $\mathbb{P}^3$

Étant donné $\mathcal{K}$ une famille de convexes et ℓ une droite tangente à ces convexes, nous souhaitons caractériser les positions de $\mathcal{K}$ et ℓ pour lesquelles la famille $(\mathcal{L}(\mathrm{K}))_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}$ des variétés de droites tangentes est transverse en ℓ. Considérons les cinq situations géométriques suivantes, illustrées à la figure 4.2 :

1. Il existe deux convexes tangents en un point par lequel passe ℓ.

2a. Il existe trois convexes concourants en un point par lequel passe ℓ.

2b. Il existe trois convexes possédant un même plan tangent contenant ℓ.

3a. Il existe quatre convexes K_a, K_b, K_c et K_d tels que ℓ est contenu dans un plan tangent commun à K_a et K_b et passe par un point d'intersection de K_c et K_d.

3b. Il existe quatre convexes tangents à une quadrique lisse réglée en quatre points de ℓ (inclus dans la quadrique).

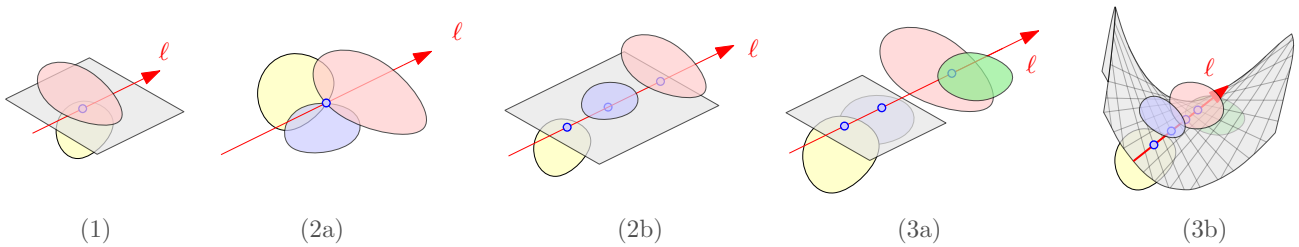


FIG. 4.2: Configurations géométriques de non-transversalité.

Ces cinq situations correspondent exactement aux cas de non-tranversalité :

Proposition 4.13.

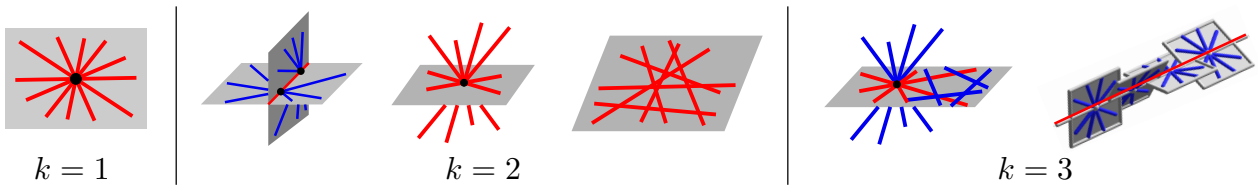
> *Une droite ℓ tangente à une famille $\mathcal{K}$ de convexes vérifie l'une des conditions géométriques précédentes si et seulement s'il existe une sous-famille $\widetilde{\mathcal{K}}$ de cardinal au plus 4 dont la famille des variétés de droites tangentes n'est pas transverse en ℓ dans $\mathbb{G}$.*

La démonstration proposée ici est une traduction en langage différentiel de celle de [1, Lemma 15] : tandis que nous raisonnons sur l'intersection des espaces tangents dans $\mathbb{G}$, Aronov *et al.* raisonnent sur les normales sortantes aux demi-volumes approximants dans $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$. Nous reviendrons sur ce dernier point de vue dans la section suivante.

Démonstration. Soit $\widetilde{\mathcal{K}}$ une sous-famille de $\mathcal{K}$ telle que la famille $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}}) = (\mathcal{L}(\mathrm{K}))_{\mathrm{K}\in\widetilde{\mathcal{K}}}$ n'est pas transverse en ℓ dans $\mathbb{G}$. Quitte à enlever et réordonner des convexes, on peut supposer que $\widetilde{\mathcal{K}} = (\mathrm{K}_0, \dots, \mathrm{K}_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant 3$ et $(\mathcal{L}(\mathrm{K}_1), \dots, \mathcal{L}(\mathrm{K}_k))$ transverse en ℓ dans $\mathbb{G}$. D'après le lemme 4.12,

$$\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}}) \text{ non transverse en } \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_0 \subseteq \mathop{+}_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{F}_j$$

avec $\mathcal{F}_j$ le faisceau des droites tangentes à K_j en x_j contenant ℓ, de support π_j. En outre, . Caractérisons géométriquement cette inclusion pour $1 \leqslant k \leqslant 3$ successivement (la démonstration ressemble à une démonstration par récurrence). Puisque $\mathop{+}_{1\leqslant j\leqslant k} \mathcal{F}_j$ est de dimension k, les seuls cas possibles pour son intersection avec $\mathbb{G}$, notée $\mathcal{I}$, sont énumérés ci-dessous :



($k = 1$) L'ensemble $\mathcal{I}$ est réduit au faisceau $\mathcal{F}_1$. Ainsi, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$ si et seulement si $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$. Autrement dit, $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}})$ n'est pas transverse en ℓ si et seulement si la condition 1 est vérifiée.

($k = 2$) L'ensemble $\mathcal{I}$ est engendré par les deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Trois cas sont possibles concernant leurs positions respectives.

- $x_1 \neq x_2$ et $\pi_1 \neq \pi_2$ donc $\mathcal{I} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Ainsi, $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$ si et seulement si $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_i$ avec $i \in \{1, 2\}$, c'est-à-dire que la condition 1 est vérifiée pour $\widetilde{\mathrm{K}}$.
- $x_1 = x_2$ et $\pi_1 \neq \pi_2$ donc $\mathcal{I}$ est le bouquet de droites centré en x_1. Si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$, alors $x_1 = x_2 = x_3$ et la condition 2a est vérifiée pour $\widetilde{\mathrm{K}}$.

- $x_1 \neq x_2$ et $\pi_1 = \pi_2$ donc $\mathcal{I}$ est le champ de droites de support π_1. Si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$, alors $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ et la condition 2b est vérifiée pour $\widetilde{\mathrm{K}}$.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que la famille $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}})$ n'est pas transverse en ℓ lorsqu'une des conditions 1, 2a ou 2b est satisfaite pour $\widetilde{\mathrm{K}}$.

($k = 3$) L'ensemble $\mathcal{I}$ est engendré par les trois faisceaux $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$. D'après le cas précédent, chacun des ensembles $\{x_1, x_2, x_3\}$ et $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ est de cardinal au moins 2 par transversalité de $(\mathcal{L}(\mathrm{K}_1), \mathcal{L}(\mathrm{K}_2), \mathcal{L}(\mathrm{K}_3))$.

- Supposons $x_1 = x_2$, donc $\pi_1 \neq \pi_2$ et $x_3 \neq x_1$ par transversalité. Alors $\mathcal{I}$ est la congruence dégénérée de centre x_1 et de support π_3. Si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$, alors soit $x_0 = x_1$ et la condition 2a est vérifiée, soit $\pi_0 = \pi_3$ et la condition 3a est vérifiée.
- Supposons $\pi_1 = \pi_2$. On montre de même que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$ implique que la condition 2b ou 3a est vérifiée.
- Supposons les x_j et les π_j deux à deux distincts ($1 \leqslant j \leqslant 3$). Alors les $\mathcal{F}_j$ engendrent une congruence parabolique $\mathcal{I}$ d'axe ℓ. Si $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{I}$, alors les quadriques définissant la congruence parabolique $\mathcal{I}$ sont tangentes à chacun des convexes de $\widetilde{\mathcal{K}}$ le long de ℓ (les plans tangents coïncident en chacun des points de contact) donc la condition 3b est vérifiée.

Réciproquement, on vérifie immédiatement que la famille $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}})$ n'est pas transverse en ℓ lorsqu'une des conditions 3a et 3b est satisfaite pour $\widetilde{\mathrm{K}}$.

Finalement, $\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{K}})$ n'est pas transverse en ℓ si et seulement si $\widetilde{\mathcal{K}}$ vérifie une des conditions géométriques 1, 2a, 2b, 3a, 3b. □

4.4 Épinglage d'une droite par des convexes

Cette section s'intéresse à la caractérisation de l'épinglage d'une droite par des convexes de $\mathbb{R}^3$. Deux types d'épinglage sont distingués : ceux qui sont stables et ceux qui sont instables par une perturbation des convexes (section 4.4.1). L'étude des premiers, introduits récemment par Cheong *et al.* [16], repose en fait sur une étude combinatoire au premier ordre des ensembles de droites transversales aux convexes (section 4.4.2), ce qui revient à systématiser sans effort aux convexes les résultats de *Lines pinning lines* [1] (section 4.4.3). L'étude des seconds est plus délicate, nous nous limitons à donner un nouvel exemple de configuration instable (section 4.4.4).

4.4.1 Définitions

Épinglage. Une droite ℓ est dite *épinglée* par une famille (finie) $\mathcal{K}$ d'objets de $\mathbb{R}^3$ lorsqu'elle est isolée dans l'ensemble des droites transversales aux objets de $\mathcal{K}$; cette famille $\mathcal{K}$ est alors appelée *épinglage* de ℓ. Dans ce cas, on dit que la configuration $(\mathcal{K}, \ell)$ *réalise* un épinglage. Notons $\mathcal{V}(\mathrm{K})$ le sous-ensemble de $\mathbb{G}$ des droites transversales à l'objet K. La droite ℓ est épinglée par la famille $\mathcal{K}$ si, et seulement si, il existe un voisinage U de ℓ dans $\mathbb{G}$ tel que

$$\mathrm{U} \cap \bigcap_{\mathrm{K} \in \mathcal{K}} \mathcal{V}(\mathrm{K}) = \{\ell\}$$

Remarquons qu'on peut définir l'épinglage de façon équivalente dans $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ avec les volumes de transversales $\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \psi(\mathcal{V}(\mathrm{K}))$ pour tout $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$ car ψ est un homéomorphisme (cf. section 4.2.3).

Un épinglage $\mathcal{K}$ d'une droite ℓ (vérifiant une propriété $\mathscr{P}$) est dit *minimal* (*pour la propriété* $\mathscr{P}$) si aucun sous-ensemble strict de $\mathcal{K}$ n'est un épinglage de ℓ (vérifiant la propriété $\mathscr{P}$).

Stabilité. Une *perturbation* d'un convexe K le long de ℓ consiste à appliquer sur K un vissage d'axe ℓ, c.-à-d. la composée d'une rotation d'axe ℓ et d'une translation le long de ℓ. Une perturbation d'une famille $\mathcal{K}$ de convexes est la donnée d'une famille de perturbations pour chacun des convexes de $\mathcal{K}$. Un épinglage $\mathcal{K}$ d'une droite ℓ est dit *stable* si toute perturbation de $\mathcal{K}$ suffisamment petite est un épinglage de ℓ.

Dans toute la suite, nous considérons des *configurations* $(\mathcal{K}, \ell)$ d'une droite ℓ tangente aux objets d'une famille $\mathcal{K}$ constituée de convexes de $\mathbb{R}^3$ dont les ensembles de tangentes sont lisses au voisinage de ℓ. Il peut s'agir de convexes strictement convexes de classe $\mathscr{C}^2$, de cylindres (où ℓ a un contact d'ordre au plus 1), de polyèdres (où ℓ est tangente en au plus une arête), ...

4.4.2 Rappels géométriques

Cette section est dédiée à des préliminaires géométriques, ne faisant aucunement mention des épinglages. Nous reconduisons et reformulons ici l'approche de l'article *Lines pinning lines* [1, sections 4.1 et 4.2] sur les approximations au premier ordre des « volumes » de transversales aux convexes (cf. section 4.2.3). Certains résultats purement géométriques sont rappelés afin de rendre complète l'exposition du sujet.

H-cône et N-cône. Notons $\mathcal{H}(\mathcal{K}, \ell)$ ($\mathcal{H}$ en abrégé) l'ensemble des demi-volumes approximants $\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell)$ pour $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$. Le H-*cône* de $(\mathcal{K}, \ell)$, noté $\mathfrak{H}(\mathcal{K}, \ell)$ ($\mathfrak{H}$ en abrégé), est le cône positif de $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ formé par l'intersection des demi-espaces de $\mathcal{H}$.

Par analogie avec les définitions sur les polytopes (H-représentations et V-représentations), considérons la version duale du H-cône. Notons $\mathcal{N}(\mathcal{K}, \ell)$ ($\mathcal{N}$ en abrégé) l'ensemble des normales sortantes $\overrightarrow{n}(\mathrm{K}, \ell)$ aux demi-espaces $\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell)$ pour $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$. Le N-*cône* de $(\mathcal{K}, \ell)$, noté $\mathfrak{N}(\mathcal{K}, \ell)$ ($\mathfrak{N}$ en abrégé), est le cône de $\mathbb{R}^4$ positivement engendré par les normales de $\mathcal{N}$.

Précisons la dualité entre les H-cônes et N-cônes dans le lemme suivant. Notons $\langle \mathfrak{H} \rangle$ le plus petit sous-espace affine contenant $\mathfrak{H}$, $\rangle \mathfrak{N} \langle$ le plus grand sous-espace vectoriel inclus dans $\mathfrak{N}$ et $\cdot^\perp$ l'orthogonal euclidien.

Lemme 4.14.

- $\langle \mathfrak{H} \rangle = \{\ell\} + \rangle \mathfrak{N} \langle^\perp$
- $\dim \langle \mathfrak{H} \rangle + \dim \rangle \mathfrak{N} \langle = 4$
- $\mathfrak{N} = \rangle \mathfrak{N} \langle \iff \mathfrak{H} = \langle \mathfrak{H} \rangle$

Démonstration. Les deux premiers points sont une conséquence directe des résultats de dualité entre H-représentations et V-représentations de polytopes [47]. L'équivalence du dernier point s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} = \rangle \mathfrak{N} \langle \iff \mathfrak{N} \subseteq \rangle \mathfrak{N} \langle &\iff \forall\, \overrightarrow{n} \in \mathcal{N} \quad \overrightarrow{n} \in \rangle \mathfrak{N} \langle \\
&\iff \forall\, \overrightarrow{n} \in \mathcal{N} \quad \overrightarrow{n} \in \big(\langle \mathfrak{H} \rangle - \{\ell\}\big)^\perp \\
&\iff \forall\, h \in \mathcal{H} \quad h \supseteq \langle \mathfrak{H} \rangle \iff \mathfrak{H} \supseteq \langle \mathfrak{H} \rangle \iff \mathfrak{H} = \langle \mathfrak{H} \rangle
\end{aligned}$$ □

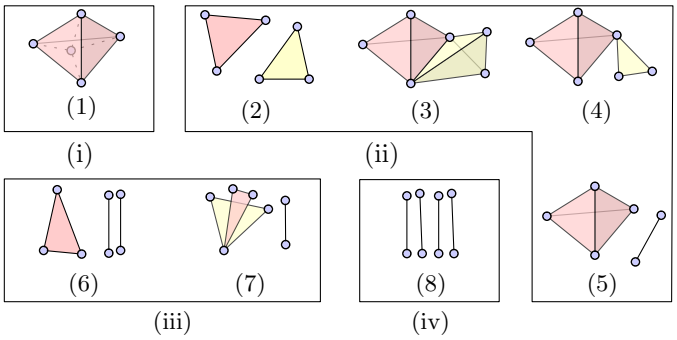


FIG. 4.3: Familles minimales pour $\mathcal{N}$ entourant l'origine dans $\mathbb{R}^4$.

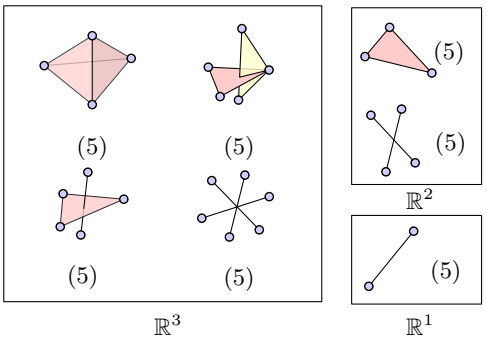


FIG. 4.4: Familles minimales pour $\mathcal{N}$ entourant l'origine dans $\mathbb{R}^k$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

(1)	Un bloc de type 5.
(2a)	Deux blocs $3^{\mid}$ définissant des plans distincts.
(2b)	Deux blocs $3^{\times}$ définissant des points distincts.
(3a)	Deux blocs $4^{\mid}$ partageant deux contraintes et définissant deux quadriques.
(3b)	Deux blocs $4^{\times}$ partageant deux contraintes et définissant soit deux plans distincts, soit deux points distincts.
(3c)	Un bloc $4^{\mid}$ et un bloc $4^{\times}$ partageant deux contraintes.
(4a)	Un bloc $4^{\mid}$ et un bloc $3^{\mid}$ partageant une contrainte.
(4b)	Un bloc $4^{\mid}$ et un bloc $3^{\times}$ partageant une contrainte.
(4c)	Un bloc $4^{\times}$ et un bloc $3^{\mid}$ partageant une contrainte et définissant deux plans distincts.
(4d)	Un bloc $4^{\times}$ et un bloc $3^{\times}$ partageant une contrainte et définissant deux points distincts.
(5a)	Un bloc $4^{\mid}$ et un bloc 2 dont les contraintes ne sont pas contenues dans la quadrique définie par le premier.
(5b)	Un bloc $4^{\times}$ et un bloc 2 dont les contraintes ne sont ni coplanaires avec le plan, ni concourantes avec le point, définis par le premier.
(6a)	Un bloc $3^{\mid}$ et deux blocs 2 de contraintes non concourantes qui ne sont pas coplanaires avec le plan défini par le premier.
(6b)	Un bloc $3^{\times}$ et deux blocs 2 de contraintes non concourantes, aucune paire n'étant concourante avec le point défini par le premier.
(7)	Un bloc $3^{\mid}$ et un bloc $3^{\times}$ partageant une contrainte, et un bloc 2 dont les contraintes sont ni coplanaires avec le plan défini par le bloc $3^{\mid}$, ni concourantes avec le point défini par le bloc $3^{\times}$.
(8)	Quatre blocs 2 dont les contraintes ne sont pas contenues dans un même hyperboloïde.

TAB. 4.1: Épinglages stables minimaux pour la stabilité (pour le premier ordre).

Blocs. Lorsque $\mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de dimension k, on dit que la famille des normales $\mathcal{N}$ *entoure l'origine dans* $\mathbb{R}^k$; autrement dit, l'origine appartient à l'intérieur relatif de l'enveloppe convexe de $\mathcal{N}$. Une configuration $(\mathcal{K}, \ell)$ vérifiant cette condition est appelée *bloc*. Donnons une caractérisation géométrique simple des blocs en termes de contraintes. Rappelons qu'une contrainte pour un convexe K et une droite ℓ est la donnée d'une droite orientée encodant la position de K par rapport à ℓ (cf. section 4.2.3).

Lemme 4.15.

Pour une configuration $(\mathcal{K}, \ell)$, la famille des normales $\mathcal{N}$ entoure l'origine dans son enveloppe convexe si et seulement si l'ensemble $\psi^{-1}(\mathfrak{H})$ des droites respectant les contraintes de $(\mathcal{K}, \ell)$ est exactement l'ensemble des droites transversales à ces contraintes.

Démonstration. Rappelons que la proposition 4.10 assure que $\psi^{-1}(\mathfrak{H})$ est l'ensemble des droites respectant les contraintes de $(\mathcal{K}, \ell)$.

Remarquons que $\mathcal{N}$ entoure l'origine dans son enveloppe $\langle\mathcal{N}\rangle$ si et seulement si $\rangle\mathfrak{N}\langle = \mathfrak{N}$. Ainsi, d'après le lemme 4.14, $\mathcal{N}$ entoure l'origine dans son enveloppe affine si et seulement si $\mathfrak{H}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$. Dans ce cas, $\mathfrak{H}$ est l'intersection des bords des demi-espaces de $\mathcal{H}$. D'après le lemme 4.9, $\psi^{-1}(\mathfrak{H})$ est exactement l'ensemble des transversales aux contraintes de $(\mathcal{K}, \ell)$. □

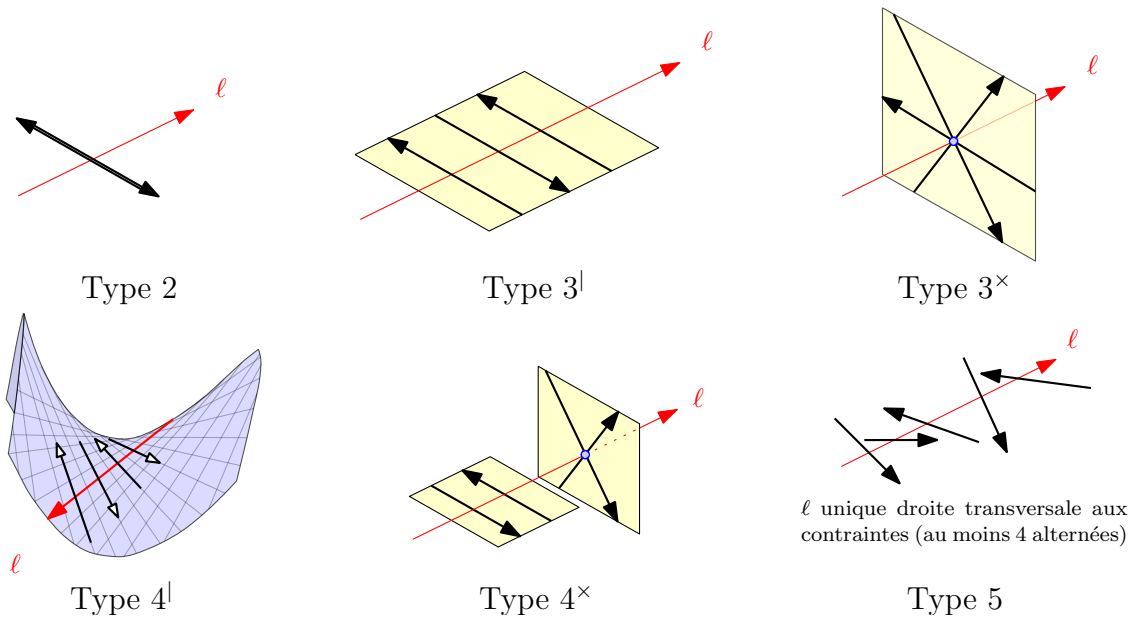


FIG. 4.5: Classification des blocs représentés par leurs contraintes.

Blocs minimaux. Déterminons les blocs constitués d'un nombre minimal de convexes. Le théorème de Steinitz [84, Lemma 2a][7] assure que le cardinal d'une famille minimale entourant l'origine dans $\mathbb{R}^k$ est compris entre $k+1$ et $2k$. Ici, on obtient que $\operatorname{Card}\mathcal{N} \in \{5,6,7,8\}$. La figure 4.3 représente les différentes configurations minimales possibles pour $\mathcal{N}$: les points représentent les vecteurs de $\mathcal{N}$, tout simplexe de dimension k entoure l'origine dans $\mathbb{R}^k$ et deux simplexes « disjoints » dans cette représentation sont contenus dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ en somme directe. Le simplexe en (1) est de dimension 4. Nous renvoyons au théorème [1, Theorem 5] pour une démonstration géométrique et élémentaire de cette caractérisation (de même pour la classification de la figure 4.4). En réalité, il existe une dernière configuration de vecteurs entourant l'origine dans $\mathbb{R}^4$: il s'agit de trois triangles partageant un même sommet (configuration notée (*)). Nous justifierons au cours du prochain paragraphe qu'elle ne peut pas être realisée par un ensemble de normales $\mathcal{N}(\mathcal{K},\ell)$ obtenue à partir d'une droite ℓ tangente aux convexes d'une famille $\mathcal{K}$.


(*)

Blocs de type k. Commençons par identifier les configurations de k convexes $\mathcal{K}$ et d'une droite ℓ pour lesquels l'ensemble de normales $\mathcal{N}(\mathcal{K},\ell)$ forme un simplexe de dimension $k-1$ entourant l'origine dans $\mathbb{R}^k$. Une telle configuration est appelée *bloc de type k*. La classification de ces blocs est fournie par le lemme [1, Lemma 16] et est illustrée dans la figure 4.5. Pour obtenir cette classification, remarquons qu'un bloc $(\mathcal{K},\ell)$ de type 5 représente une situation où la famille $(\mathrm{V}(\mathrm{K}))_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}$ est transverse en $\psi(\ell)$ dans $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ tandis que les blocs de type au plus 4 correspondent aux situations géométriques de la figure 4.2 où les contraintes sont orientées de façon à ce que seules les droites transversales aux contraintes satisfassent ces contraintes (lemme 4.15).

Poursuivons rapidement l'interprétation géométrique des configurations de la figure 4.3. Il suffit de faire correspondre un bloc de type k à chaque simplexe de dimension $k-1$ tout en

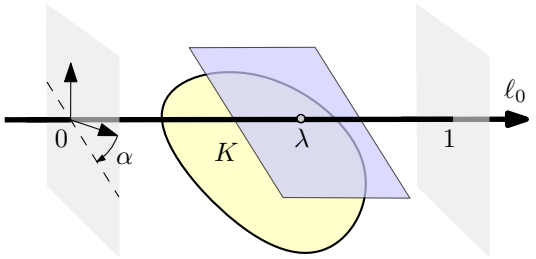
[7] À ne pas confondre avec le théorème du même nom plus connu en théorie des graphes : tout graphe planaire maximal 3-connecté est le 1-squelette d'un polytope de R^3.

écartant les arrangements de blocs incompatibles : par exemple, deux blocs de type $3^{\times}$ ou deux blocs de type $3^{|}$ engendrent un cône $\mathfrak{N}$ de dimension 2. Ainsi, dans la configuration (7), les blocs de type 3 sont de nature distincte. C'est pourquoi entre autres la configuration (*) n'est pas réalisable. Les positions des simplexes dans la figure 4.3 induisent également d'autres conditions géométriques portant sur les contraintes. Nous ne les détaillons pas ici et renvoyons à la table 4.1 et à la démonstration du théorème [1, Theorem 6].

Perturbation du N-cône. Dans la définition d'un épinglage stable, on pourrait définir une perturbation de façon beaucoup plus générale en imposant seulement aux convexes de rester tangents à la droite ℓ. Une telle perturbation générale induit une transformation du N-cône $\mathfrak{N}$. Il s'avère que cette transformation est induite par des vissages. En effet, une normale $\overrightarrow{n}(\mathrm{K}, \ell)$ de l'ensemble des tangentes $\mathrm{H}(\mathrm{K}, \ell)$ à un convexe K en $\psi(\ell)$ ne dépend que du point de contact x de ℓ sur K et du plan tangent π de K en x d'après le lemme 4.7. En outre, les vissages agissent transitivement sur de tels couples (x, π). Par conséquent, les vissages suffisent pour l'étude des perturbations du N-cône $\mathfrak{N}$.

Explicitons l'effet d'un vissage sur une normale $\overrightarrow{n}$ dans $\mathcal{N}$. À un changement de coordonnées près, une paramétrisation des normales possibles (à un coefficient multiplicatif non nul près) intervenant dans $\mathcal{N}$ est donnée par ([1])

$$\overrightarrow{n}(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\cos\alpha \\ (1-\lambda)\sin\alpha \\ \lambda\cos\alpha \\ \lambda\sin\alpha \end{pmatrix}$$



où λ désigne la coordonnée du point de contact de K sur ℓ et α un angle d'inclinaison du plan tangent à K en x (cf. figure ci-dessus). Un vissage fait varier λ via une translation et α via une rotation. Ainsi, l'ensemble des normales possibles pour $\mathcal{N}$ est exactement le cône Q (privé de 0) défini par

$$\mathrm{Q} : \; x_1x_2 - x_0x_3 = 0$$

En conclusion, cette discussion aboutit au lemme suivant :

Lemme 4.16.

Toute perturbation dans le cône $\mathrm{Q}\setminus\{0\}$ *d'une normale* $\overrightarrow{n}(\mathrm{K}, \ell)$ *est induite par un vissage de* K *et réciproquement.* □

4.4.3 Classification des épinglages stables

Après l'intermède combinatoire de la section précédente, revenons à l'étude des épinglages. Cette section se focalise sur les épinglages stables. Nous donnons une classification des épinglages stables minimaux pour la stabilité (théorème 4.19), extension directe aux convexes des résultats sur les droites [1]. Ce résultat fournit une caractérisation « à la Helly » des épinglages stables : un épinglage est stable si et seulement s'il existe un sous-épinglage stable de taille au plus 8. Outre ce résultat, nous profitons de cette section pour faire un tour d'horizon des différentes notions de minimalité sur les épinglages stables, afin de mieux les appréhender.

Épinglage stable minimal pour la stabilité. Introduisons tout d'abord la notion d'épinglage au premier ordre qui s'avérera être équivalente à la notion d'épinglage stable.

Lemme-Définition 4.17 (Épinglage au premier ordre)**.**

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *Les normales de* $(\mathcal{K}, \ell)$ *entourent l'origine dans* $\mathbb{R}^4$ *(*$\dim\langle\mathfrak{N}\rangle = 4$*).*

(*ii*) *La droite* ℓ *est l'unique droite satisfaisant les contraintes adaptées de* $(\mathcal{K}, \ell)$*.*

(*iii*) *La famille* $\mathcal{E}^{/\!/}(\mathcal{K})$ *d'écrans épingle la droite* ℓ*.*

Lorsqu'une de ces conditions est vérifiée, la droite ℓ *est épinglée par* $\mathcal{K}$*. On dit alors que* $\mathcal{K}$ *est un* épinglage au premier ordre *pour* ℓ*.*

L'équivalence entre les trois assertions du lemme font écho au point de vue adopté dans l'article *Lines pinning lines* [1]. C'est dans cet article qu'a été introduit la notion d'épinglage au premier ordre.

Démonstration. L'équivalence entre (*i*) et (*ii*) provient du lemme 4.15. L'équivalence entre (*ii*) et (*iii*) est élémentaire. Montrons que la condition (*i*) implique que ℓ est épinglée par $\mathcal{K}$. Supposons que l'origine est entourée par les $\overrightarrow{n}(\mathrm{K})$ dans $\mathbb{R}^4$ avec $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$. Supposons par l'absurde que l'origine n'est pas isolée dans $\mathfrak{V} = \cap_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\mathrm{V}(\mathrm{K})$ où $\mathrm{V}(\mathrm{K})$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ représentant les droites affines transversales au convexe K. Puisque $\mathbb{S}^3$ est compact, on peut supposer qu'il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{V}\backslash\{\psi(\ell)\}$ qui converge vers l'origine et telle que $(\overrightarrow{0p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une direction $\overrightarrow{u}$. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{n}(\mathrm{K})$ entourent l'origine dans $\mathbb{R}^4$, il existe $\mathrm{K}_0 \in \mathcal{K}$ tel que $\overrightarrow{n}(\mathrm{K}_0) \cdot \overrightarrow{u} > 0$ d'où $p_n \notin \mathrm{V}(\mathrm{K}_0)$ pour tout n suffisamment grand, ce qui contredit le fait que $p_n \in \mathfrak{V}$. □

Remarquons qu'un épinglage au premier ordre est stable. En effet, étant donné un ensemble $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{K}, \ell)$ de normales entourant l'origine dans $\mathbb{R}^4$, toute perturbation locale de $\mathcal{N}$ préserve cette propriété. Ainsi, toute perturbation locale de $\mathcal{K}$ produit une famille qui épingle ℓ au premier ordre d'après le lemme 4.17 donc $\mathcal{K}$ est un épinglage stable. La réciproque nécessite un contrôle plus fin des normales de $\mathcal{N}$ en vertu du lemme 4.16 :

Proposition 4.18.

Un épinglage est au premier ordre si et seulement s'il est stable.

Démonstration. Il ne reste plus qu'à prouver qu'un épinglage stable est au premier ordre. Montrons la contraposée. Soit $\mathcal{K}$ un épinglage de ℓ qui n'est pas au premier ordre. Nécessairement, $\dim\rangle\mathfrak{N}\langle \leqslant 3$ d'après le lemme 4.17. Ainsi, il existe un demi-espace H de $\mathbb{R}^4$ contenant le N-cône $\mathfrak{N}$ et dont le bord $\partial\mathrm{H}$ vérifie $\partial\mathrm{H} \cap \mathfrak{N} = \rangle\mathfrak{N}\langle$.

Considérons deux types de normales dans $\mathcal{N}$: celles contenues dans $\mathrm{H}\backslash\partial\mathrm{H}$ et celles contenues dans $\partial\mathrm{H}$, donc dans $\rangle\mathfrak{N}\langle$. Les premières restent dans l'ouvert $\mathrm{H}\backslash\partial\mathrm{H}$ pour toute perturbation locale des convexes correspondants. Pour les secondes, nous montrons au prochain paragraphe qu'il existe une perturbation infiniment petite des convexes correspondants telle que ces normales se retrouvent dans $\mathrm{H}\backslash\partial\mathrm{H}$. Dans ce cas, le N-cône $\mathfrak{N}'$ obtenu vérifie $\rangle\mathfrak{N}'\langle = \{0\}$ ce qui veut dire que la famille perturbée n'épingle plus ℓ (choisir un chemin partant de l'origine de direction appartenant à l'intérieur du cône $\mathfrak{N}'$). Par conséquent, l'épinglage $\mathcal{K}$ n'est pas stable. □

En corollaire de la proposition 4.18, du lemme 4.17 et de la classification de la table 4.1 des blocs dont les normales entourent minimalement l'origine dans $\mathbb{R}^4$, on obtient le théorème :

Théorème 4.19.

Tout épinglage stable minimal pour cette propriété est de taille au plus 8. La table 4.1 donne une classification de tels épinglages. □

Épinglage minimalement stable. Un épinglage $\mathcal{K}$ est dit *minimalement stable* si toute perturbation de $\mathcal{K}$ suffisamment petite est un épinglage minimal de ℓ. Un épinglage minimalement stable est minimal par définition.

Lemme 4.20.

Un épinglage est minimalement stable si et seulement si c'est un bloc de type 5.

Remarquons qu'un bloc de type 5 est exactement un épinglage minimal tel que les variétés de tangentes s'intersectent transversalement. Ainsi, un épinglage minimalement stable correspond à une situation générique parmi tous les épinglages.

Démonstration. Considérons un bloc de type 5, c.-à-d. un ensemble de 5 convexes dont les normales de $\mathfrak{N}$ forment un simplexe entourant l'origine dans $\mathbb{R}^4$. Toute perturbation locale de ces normales forme également un bloc de type 5. Comme un bloc de type 5 réalise un épinglage minimal, on en déduit qu'un bloc de type 5 est minimalement stable.

Réciproquement, un épinglage minimalement stable est en particulier stable, donc du premier ordre (proposition 4.18). Supposons que l'épinglage n'est pas un bloc de type 5. Puisqu'il est minimal (par définition), il est de cardinal au moins 6 (cf. table 4.1). Pour une perturbation générique, il existe une sous-famille réalisant un bloc de type 5, donc un sous-épinglage de taille $5 < 6$ ce qui contredit le fait que l'épinglage initial est minimalement stable. Ainsi, ce dernier est un bloc de type 5. □

Épinglage stable minimal. Entre les épinglages minimalement stables et les épinglages stables minimaux pour la stabilité, il existe la catégorie strictement intermédiaire des épinglages stables et minimaux. Pour s'en assurer, considérons les deux exemples suivants d'épinglages stables :

1. Considérons un bloc constitué de deux blocs de type $3^{\times}$. Cet épinglage (stable mais non minimalement stable) est minimal. En effet, si on enlève un convexe d'un bloc $3^{\times}$, il suffit de perturber continûment la droite épinglée en continuant à couper les deux autres convexes de ce bloc et à passer par le point de concours des convexes de l'autre bloc $3^{\times}$.
2. Considérons un bloc constitué de deux blocs de type $3^{|}$ avec des objets strictement convexes. Cet épinglage (stable mais non minimalement stable) n'est pas minimal. En effet, un seul de ces blocs $3^{|}$ réalise un épinglage[8].

Une étude complète des épinglages stables minimaux nécessite alors de caractériser les épinglages instables.

[8] Une démonstration repose sur la continuité du point de contact d'une droite tangente à un convexe rond. On considère des voisinages des convexes en les points de contact avec la droite épinglée ℓ puis on justifie que toute droite non contenue dans le plan tangent commun aux trois convexes ne peut couper qu'au plus deux de ces voisinages.

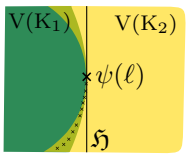
4.4.4 Quelques éclairages sur les épinglages instables

Dans cette section, nous initions une première étude des épinglages instables par des convexes, en nous intéressant plus particulièrement aux blocs de type $4^|$ (figure 4.5) où quatre convexes sont alternativement tangents à un hyperboloïde le long d'une de ses droites (*configuration hyperboloïdale alternée*). Nous donnons une condition suffisante d'épinglage pour une telle configuration. Cette nouvelle condition a le mérite d'être indépendante de la condition traditionnellement utilisée selon laquelle les convexes doivent être deux à deux globalement disjoints, ce qui laisse penser que tout reste à découvrir.

Commençons par énoncer un lemme général sur les épinglages :

Lemme 4.21.

Soit $(\mathcal{K}, \ell)$ une configuration de convexes. Notons $\mathrm{V}(\mathrm{K}) \subseteq \mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ le volume des droites transversales au convexe $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$. La droite ℓ n'est pas épinglée par $\mathcal{K}$ si et seulement s'il existe une suite de points de $\cap_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\mathrm{V}(\mathrm{K})\setminus\{\psi(\ell)\}$ qui converge vers $\psi(\ell)$ avec une direction limite appartenant à $(\mathfrak{H} - \{\psi(\ell)\})\setminus\{0\}$.



Moralité : le H-cône ne suffit plus pour l'étude des épinglages instables, il est nécessaire de considérer la position relative de $\cap_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\mathrm{V}(\mathrm{K})$ par rapport à son H-cône $\mathfrak{H}$, comme l'ont fait Aronov *et al.* [1] pour les droites. La figure ci-contre montre une illustration en 2D où $\psi(\ell)$ est isolé dans le H-cône mais ne l'est plus dans $\cap_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\mathrm{V}(\mathrm{K})$.

Démonstration. Supposons que la droite ℓ n'est pas épinglée. Notons $\mathfrak{V} = \cap_{\mathrm{K}\in\mathcal{K}}\mathrm{V}(\mathrm{K})$. Il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{V}\setminus\{\psi(\ell)\}$ qui converge vers $\psi(\ell)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\overrightarrow{\psi(\ell)p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans le compact $\mathbb{S}^3$ (après normalisation) possède une direction limite $\overrightarrow{d} \neq \overrightarrow{0}$. Comme $p_n \in \mathrm{V}(\mathrm{K})$ pour tout $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$, on en déduit que $\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}(\mathrm{K}, \ell) \leqslant 0$ pour tout $\mathrm{K} \in \mathcal{K}$ (où $\overrightarrow{n}(\mathrm{K})$ désigne la normale sortante de $\mathrm{V}(\mathrm{K})$ en $\psi(\ell)$), c.-à-d. $\overrightarrow{d}$ appartient au H-cône vectoriel $\mathfrak{H} - \{\psi(\ell)\}$. La réciproque est immédiate. □

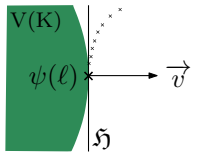
Configuration hyperboloïdale alternée. Il s'agit d'un bloc simplicial de type $4^|$. Le lemme suivant donne une condition suffisante pour qu'un tel bloc réalise un épinglage.

Lemme 4.22.

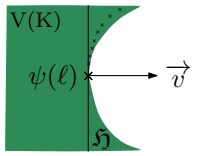
Soit $(\mathcal{K}, \ell)$ une configuration hyperboloïdale alternée. Supposons que, pour tout convexe K de $\mathcal{K}$, la droite ℓ est isolée dans l'ensemble des transversales à K et à la contrainte associée. Alors ℓ est épinglée par $\mathcal{K}$.

Ce lemme reste valide si l'on suppose simplement que $(\mathcal{K}, \ell)$ est un bloc. Toutefois, la condition suffisante du lemme ne peut être vérifée que pour des blocs de type $4^|$, dommage…

Démonstration. Le H-cône $\mathfrak{H}$ d'une configuration $(\mathcal{K}, \ell)$ hyperboloïdale alternée est une droite. D'après le lemme 4.15, l'hypothèse du lemme sur la droite ℓ se traduit dans $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ par le fait que $\psi(\ell)$ est isolé dans $\mathrm{V}(\mathrm{K}) \cap \mathfrak{H}$ pour tout convexe K de $\mathcal{K}$. Nous en déduisons une propriété utile pour la suite de la démonstration : pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\mathfrak{H}$ tel que $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}(\mathrm{K}) > 0$, le demi-plan ouvert délimité par $\mathfrak{H}$ et contenant $\overrightarrow{v}$ est localement disjoint de $\mathrm{V}(\mathrm{K})$.



$\psi(\ell)$ isolé dans $\mathrm{V(K)} \cap \mathfrak{H}$



$\psi(\ell)$ non isolé dans $\mathrm{V(K)} \cap \mathfrak{H}$

Supposons par l'absurde que ℓ n'est pas épinglée par $\mathcal{K}$. D'après le lemme 4.21, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{V}\backslash\{\psi(\ell)\}$ qui converge vers $\psi(\ell)$ et de direction limite $\vec{d}$, une direction de la droite $\mathfrak{H}$. Notons $\vec{u_n} = \overrightarrow{\psi(\ell)p_n}$ et $\vec{v_n}$ le vecteur normalisé de la projection orthogonale de $\vec{u_n}$ sur $\mathfrak{H}^\perp = \mathfrak{N}$ (de dimension 3). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\vec{v_n}$ converge vers $\vec{v} \in \mathfrak{N}$. Puisque $\mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel (de dimension 3), la famille des normales $\mathcal{N}$ entoure l'origine dans $\mathfrak{N}$. Ainsi, il existe $\mathrm{K}_0 \in \mathcal{K}$ tel que $\vec{v} \cdot \vec{n}(\mathrm{K}_0) > 0$, d'où, pour tout n assez grand, $\vec{v_n} \cdot \vec{n}(\mathrm{K}_0) = \vec{u_n} \cdot \vec{n}(\mathrm{K}_0) > 0$. Autrement dit, d'après la remarque en début de démonstration, $p_n \notin \mathrm{V}(\mathrm{K}_0)$ pour tout n assez grand ce qui contredit le fait que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathfrak{V}$. □

Reformulons dans un cadre euclidien la condition suffisante du lemme précédent. Commençons par une définition. Pour $x \in \partial\mathrm{K}$, notons $\gamma_1(x)$ et $\gamma_2(x)$ les courbures principales de $\partial\mathrm{K}$ en x. Le *rayon* $r(x)$ *de* K *en* $x \in \partial\mathrm{K}$ est le minimum de $1/|\gamma_1(x)|$ et $1/|\gamma_2(x)|$. Ainsi, toute sphère tangente à $\partial\mathrm{K}$ en x et de rayon strictement inférieur à $r(x)$ possède un seule point d'intersection avec $\partial\mathrm{K}$ au voisinage de x.

Soit $(\mathcal{K}, \ell)$ un bloc de type $4^|$. Pour chaque convexe K de $\mathcal{K}$, considérons le faisceau de droites centré en le point de contact de K avec ℓ et supporté par le plan tangent de K en ce point de contact. Ces quatres faisceaux engendrent une congruence parabolique $\mathcal{L}$, dite *associée* à la configuration $(\mathcal{K}, \ell)$, qui est l'ensemble des droites tangentes le long de ℓ du paraboloïde hyperbolique engendré par les quatres contraintes adaptées (et ce, pour n'importe quel choix de paramétrisation $\psi : \mathbb{G}_{\ell_\infty} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$). À une congruence parabolique correspond un unique invariant euclidien $\mathfrak{p} \neq 0$ caractérisant la « vitesse de rotation » des faisceaux de droites autour de la droite focale ℓ (cf. lemme 2.28).

Corollaire 4.23.

Soit $(\mathcal{K}, \ell)$ une configuration hyperboloïdale alternée et $\mathfrak{p}$ l'invariant euclidien de la congruence parabolique associée. Pour que ℓ soit épinglée par $\mathcal{K}$, il suffit que les rayons des convexes de $\mathcal{K}$ en leur point de contact avec ℓ soient strictement inférieurs à $|\mathfrak{p}|$. Dans ce cas, on dit que $(\mathcal{K}, \ell)$ respecte la condition $(\mathscr{P})$.

Plus généralement, une configuration respecte la condition $(\mathscr{P})$ si chacune de ses sous-configurations hyperboloïdales alternées la respectent. La condition $(\mathscr{P})$ du lemme peut être relâchée, suivant la position du point de contact du convexe avec la droite tangente considérée : par exemple, dans un repère orthonormée adapté de la droite, le rayon $r(x)$ de K en x peut satisfaire la condition $r(x) < |\mathfrak{p}| + x^2/|\mathfrak{p}|$ (voir la démonstration du lemme).

Démonstration. En considérant la paramétrisation $\psi_{/\!/}$ de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ par deux plans parallèles, orthogonaux à ℓ, la condition suffisante du lemme 4.22 se reformule ainsi : chaque convexe de $\mathcal{K}$ coupe le paraboloïde hyperbolique $\mathcal{H}$ en un seul point au voisinage de ℓ, où $\mathcal{H}$ est le support de l'ensemble des droites transversales aux contraintes (orthogonales) de $(\mathcal{K}, \ell)$.

D'après le lemme 2.28, une équation de $\mathcal{H}$ est donnée par

$$(\mathcal{H}) \ : \ xz - \mathfrak{p}\, y = 0$$

dans une base orthonormée normalisée où la droite ℓ est représentée par l'axe (Ox) (cf. chapitre 2). Quitte à appliquer une réflexion par rapport au plan (xOy), on peut supposer $\mathfrak{p} > 0$. D'après les formules classiques de géométrie différentielle[9], les courbures principales $\mathcal{H}$ en un point de ℓ d'abscisse x sont opposées l'une de l'autre et données par

$$\pm\,\gamma(x) = \pm\,\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}^2 + x^2}$$

Ainsi, un convexe K tangent à ℓ en x coupe $\mathcal{H}$ en le seul point x dans son voisinage si son rayon $r(x)$ en x vérifie

$$r(x) \leqslant \frac{1}{\gamma(x)} = \mathfrak{p} + \frac{x^2}{\mathfrak{p}}.$$

Une condition suffisante plus forte, indépendante de x, consiste simplement à écrire que le rayon de K en son point de contact avec ℓ est inférieur à $\mathfrak{p}$. □

Comparons à présent la condition $(\mathscr{P})$ avec la condition globale de disjonction deux à deux des convexes. Il s'avère qu'aucune ne « phagocyte » l'autre. Voici deux exemples qui illustrent cette indépendance des conditions :

- Considérons quatre boules deux à deux disjointes en position hyperboloïdale alternée le long d'une droite ℓ. En considérant le tétraèdre formé par les centres de ces boules et en raisonnant avec les cônes des directions des droites transversales à des triplets de boules, on peut démontrer que la droite ℓ est épinglée par ces quatre boules [34]. Toutefois, elles ne vérifient pas nécessairement la propriété $(\mathscr{P})$ (figure 4.6, à gauche).
- Soient quatre convexes en position hyperboloïdale alternée le long d'une droite ℓ qui vérifient la condition $(\mathscr{P})$. Quitte à rapprocher deux d'entre eux situés « du même côté » de l'hyperboloïde en préservant la propriété $(\mathscr{P})$, on obtient une configuration de convexes qui épingle ℓ d'après le corollaire 4.23 mais sans être deux à deux disjoints (figure 4.6, à droite).

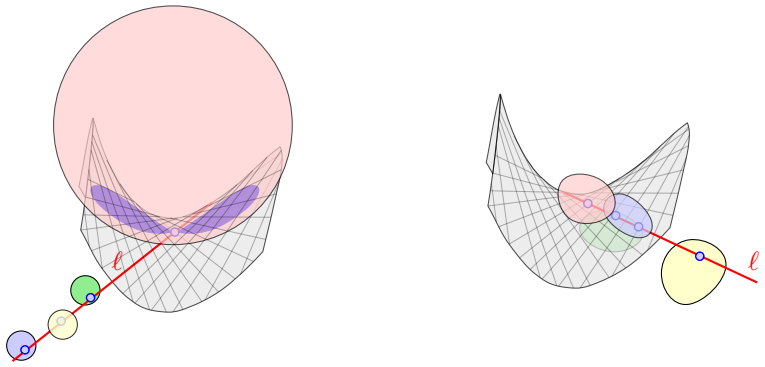


FIG. 4.6: Comparaisons de la condition $(\mathscr{P})$ et de la condition de disjonction globale deux à deux pour des convexes en position hyperboloïdale alternée.

Dans la figure de gauche, les 4 boules sont deux à deux disjointes mais la boule rouge ne respecte pas la condition $(\mathscr{P})$ (elle « traverse » le paraboloïde hyperbolique représenté en gris). Dans la figure de droite, les 4 convexes respectent la condition $(\mathscr{P})$ mais ils ne sont pas deux à deux disjoints.

[9] En un point d'une surface définie implicitement par $f(x, y, z) = 0$, de normale notée $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, les courbures principales γ_1 et γ_2 s'obtiennent à partir de la courbure moyenne $\text{J} = \gamma_1 + \gamma_2 = \text{div}\, \overrightarrow{n}$ [103, (5) p.225] et de la courbure de Gauss $\text{K} = \gamma_1\gamma_2$ avec $2\text{K} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{n} + \text{J}^2$ [103, (15) p.231].

Notes bibliographiques

Dans ces notes, nous situons les approches et quelques résultats spécifiques de ce chapitre dans le contexte des travaux précédents sur les épinglages de droites dans $\mathbb{R}^3$ [1, 12, 17, 35, 16].

Approche dans $\mathbb{G}$ vs $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ ou $\mathbb{P}^2$. Cette approche s'inscrit dans la continuité du point de vue adopté tout au long de cette thèse, à savoir tirer profit de la géométrie de $\mathbb{G}$. Par exemple, la caractérisation géométrique des configurations transversales de convexes est établie à la proposition 4.13 à l'aide des ensembles linéaires de droites introduits au chapitre 1 alors qu'une démonstration « isomorphe » développée dans le lemme [1, Lm. 15] se place dans le cadre d'une paramétrisation $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$.

Nous utilisons une telle paramétrisation de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ par $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ pour pouvoir donner un sens à une approximation au premier ordre d'un volume de droites transversales (cf. section 4.2.3). Toutefois, au lieu de considérer la paramétrisation particulière $\psi_{/\!/}$ comme dans l'article [1], nous avons choisi de considérer n'importe quelle paramétrisation ψ afin de ne pas accorder une trop grande importance géométrique à l'orthogonalité des *contraintes orthogonales*.

Remarquons que, dans les travaux précédents [52, 12, 17, 35] portant sur des boules ou des ovaloïdes, on se préserve de travailler dans l'espace des droites $\mathbb{G}$ en considérant sa projection dans l'espace des directions $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$, de dimension 2. Ces travaux s'appuient sur l'étude des *cônes de direction* des transversales à k convexes ($k \geqslant 3$), outils faciles à décrire mais aux propriétés parfois délicates : les directions de droites tangentes à des convexes n'appartiennent pas forcément au bord du cône des directions des transversales à ces convexes.

Étude locale vs globale. Dans ce chapitre, nous avons privilégié une étude différentielle des variétés de tangentes et de transversales à des convexes afin de pouvoir raisonner *localement* autour d'une droite considérée. En effet, ceci est justifié par la définition locale de l'épinglage d'une droite. En outre, cette approche a l'avantage de la généralité : les résultats au premier ordre sur les épinglages de droites [1] ont été étendus ici sans effort à des convexes ronds. Cette même démarche différentielle, sur les cônes de direction, avait déjà permis de généraliser aux ovaloïdes des résultats sur des boules [35]. Inversement, l'étude des épinglages dans les travaux précédents est menée *globalement* en raison de la nature géométrique simple des objets considérés. La complétude des résultats obtenus est alors contrebalancée par l'impossibilité d'étendre les techniques à des convexes plus généraux.

Dans l'article [1] portant sur les droites, l'espace $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ est plongé en une quadrique $\mathfrak{M}$ d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ où la condition d'intersection d'une droite avec un écran se traduit par une inégalité *linéaire*. L'étude de l'épinglage revient alors à considérer la position relative d'un cône polyédrique avec $\mathfrak{M}$. La généralisation de cette technique, reposant sur un plongement « à la Véronèse », est inexploitable en pratique : rien que pour des boules, il faudrait plonger $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ dans un espace de dimension prohibitif.

Dans les travaux de Borcea *et al.* [12, 17] portant sur des boules *deux à deux disjointes*, les résultats d'épinglage reposent entièrement sur la convexité du cône des directions, établies à l'aide de calculs algébriques sur les équations des boules. Une généralisation à des convexes algébriques ne fait qu'alourdir ces calculs. En outre, l'hypothèse globale de disjonction des objets est justifiée uniquement par la condition technique de convexité du cône des directions, alors que celle-ci est trop restrictive pour l'étude des épinglages, au regard des exemples présentés au cours de la section 4.4.4.

Épinglages au premier ordre et stabilité. La notion d'épinglage stable a été introduite par Cheong *et al.* [16] pour obtenir une borne inférieure sur le nombre de Helly pour les transversales[10] de boules deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^d$. Ces travaux ont inspiré ceux d'Aronov *et al.* [1] sur les épinglages par des droites de $\mathbb{R}^3$ où la notion d'épinglage au premier ordre a été proposée. Il suffisait simplement de recoller les bons morceaux pour observer que les deux notions sont équivalentes.

Ces notions ont une interprétation naturelle en robotique dans les problèmes d'immobilisation d'objets par des bras robotisés[11], la droite représentant l'objet à saisir et les convexes modélisant les doigts du bras robotisé. La stabilité d'un épinglage assure alors une immobilisation insensible aux erreurs d'approximation du placement des doigts (cf. la notion de *efficient grasping* développée par Kirkpatrick *et al.* [57]).

Quelle borne de Helly pour les épinglages ? Le nombre de Helly pour les épinglages par des objets d'un type donné est défini comme le maximum du cardinal d'un épinglage miminal. Pour des convexes généraux, et même pour des translatés d'un compact général, ce nombre de Helly est infini [53]. Plus les contraintes sont fortes sur les objets, plus les résultats sont raffinés :

- Tout épinglage minimal par des boules deux à deux disjointes de $\mathbb{R}^{2d-1}$ est de taille au plus $2d-1$ [12, 17] et cette borne est atteinte [16].
- Le nombre de Helly est égal à 8 pour des droites de $\mathbb{R}^3$, ce nombre est réduit à 6 si on exclut les configurations où deux droites sont concourantes et coplanaires avec la droite épinglée [1].
- Tout épinglage minimal par une famille de semi-algébriques lisses strictement convexes de $\mathbb{R}^3$ ne comportant aucune paire d'objets extérieurement tangents en un point de la droite épinglée est de taille au plus 12 [35].

Ce résultat s'étend immédiatement aux convexes ronds en encadrant localement chacun des convexes par deux boules. En particulier, le nombre de Helly est borné par 12 pour des convexes localement disjoints. Toutefois, on ne connaît aucun épinglement minimal de taille au moins 7 avec des convexes localement disjoints. D'après l'étude de ce chapitre, de telles configurations sont à chercher parmi les blocs de type $4^{/\!/}$, avec éventuellement un seul convexe hors de ce bloc.

D'autres questions subsistent pour des objets plus simples comme les cylindres de $\mathbb{R}^3$. Ces derniers entrent dans le cadre d'étude de ce chapitre (à condition de considérer des droites tangentes en un unique point lisse de ceux-ci) mais ne peuvent être approximés localement ni par des boules, ni par des écrans. Malgré leur simplicité, rien n'indique si le nombre de Helly est borné pour des configurations de cylindres localement disjoints. La question est également ouverte pour des convexes généraux de $\mathbb{R}^3$ deux à deux disjoints.

[10] Pour des objets d'un type donné, il s'agit du plus petit entier k tel que la propriété de Helly est vérifiée : une famille d'objets est d'intersection vide si et seulement s'il existe une sous-famille de taille k d'intersection vide.

[11] *grasping theory* en anglais [64]

Chapitre 5

Prédicats géométriques

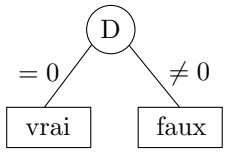
5.1 Introduction

En géométrie algorithmique, on implémente souvent en arithmétique flottante des algorithmes fondés sur la géométrie de $\mathbb{R}^n$. À cause des imprécisions dans les calculs, les programmes conçus peuvent retourner des résultats incorrects, voire ne pas terminer pour certaines entrées. Ce problème de *correction* est manifeste dans les programmes implémentant un problème de décision où les seuls résultats possibles sont vrai ou faux : la moindre erreur numérique apparemment légère peut causer une erreur « grossière » [56]. Ici, nous nous intéressons plus particulièrement aux *prédicats géométriques*. Un prédicat est une « boîte noire » possédant une entrée et une sortie à valeur dans un ensemble discret ($\{\text{vrai}, \text{faux}\}$, $\mathbb{N}$, ...), la sortie dépendant d'une question portant sur les entrées. Par exemple :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} \underline{\text{Entrée}} & \text{les coordonnées de quatre points de } \mathbb{R}^2 \\ \underline{\text{Sortie}} & \text{vrai si les quatre points sont cocycliques, faux sinon} \end{cases}$$

Comment obtenir une implémentation correcte d'un prédicat ? Tout d'abord, il est essentiel de ne pas confondre construction et décision. Dans l'exemple du prédicat $\mathscr{P}$, une première approche consiste à calculer le centre et le rayon du cercle circonscrit aux trois premiers points et à décider si le quatrième point appartient à ce cercle. Une seconde approche se réduit à tester l'annulation du déterminant D suivant :

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 & {x_2}^2 + {y_2}^2 & {x_3}^2 + {y_3}^2 & {x_4}^2 + {y_4}^2 \end{vmatrix}$$



Dans un problème de décision, il n'est pas nécessaire de construire des objets intermédiaires pour répondre à la question, d'autant plus que ces constructions sont sensibles aux approximations numériques. Dans l'exemple précédent, il a suffit d'évaluer un seul polynôme en les entrées du prédicat. Plus généralement, nous nous intéressons aux *stratégies d'évaluation polynomiale* d'un prédicat géométrique qui consistent à calculer des polynômes en les entrées du prédicat en organisant ces calculs sous forme d'un algorithme (pouvant prendre la forme d'un arbre de décision). La correction de telles stratégies est garantie dans le cadre du modèle du calcul exact [105].

En contrepartie d'assurer la correction des programmes, le calcul exact est coûteux[1] par rapport au calcul numérique traditionnel. Certes, il est possible d'utiliser des techniques de

[1] Le calcul exact nécessite de recourir à des types de données assez lourds, comme les entiers longs ou les représentations de nombres algébriques par la donnée d'un polynôme annulateur et d'un intervalle d'isolation.

filtrage [61] d'approximation afin de limiter le recours au calcul exact pour les « cas limite », mais ces derniers sont inévitables. Le coût d'une stratégie d'évaluation dépend donc de celui du calcul exact. Il peut être mesuré par la profondeur du calcul, par la « complexité » des polynômes intervenant dans l'algorithme (degré, nombre de coefficients, ...). Ces aspects sont décrits dans l'ouvrage de Bürgisser *et al.* [14]. Nous ne nous aventurons pas dans ces considérations, fortement dépendantes du modèle de calcul considéré [2]. L'objectif principal de ce chapitre repose surtout sur la recherche de polynômes (de « faible » degré) pour élaborer une stratégie d'évaluation d'un prédicat.

Une approche immédiate pour trouver de tels polynômes consiste à « mettre le problème en équation » et à en extraire des contraintes polynomiales qui caractérisent les solutions de ces équations. Il faut porter une attention particulière à la formulation analytique du problème, au risque d'obtenir des polynômes denses de haut degré. Considérons par exemple le problème de compter le nombre de droites transversales à quatres droites de $\mathbb{R}^3$, chaque droite étant donnée par les coordonnées d'une paire de points qui l'engendrent. Il peut y en avoir 0, 1, 2 ou une infinité : en effet, cela correspond au nombre de points d'intersection de la quatrième droite avec l'hyperboloïde engendré par les trois premières droites (lorsque celles-ci ne sont pas concourantes ou coplanaires). Tandis qu'une approche naïve fournit des polynômes de degré 24 en les coordonnées des points d'entrée [26], le prédicat peut être évalué avec des polynômes de degré au plus 12 [21]. Cet écart peut devenir plus conséquent : pour ordonner deux plans autour d'une droite ℓ donnée, chacun contenant une droite transversale à trois droites données (pour chaque plan) et ℓ, le degré maximum 144 obtenu naïvement [26] s'effondre à 36 [21] ! Ces deux approches *ad hoc* fournissent des polynômes dont la « complexité » dépend fortement de la formulation analytique du problème.

Une approche plus satisfaisante pour éviter ce phénomène pourrait reposer sur la « géométrie » sous-jacente au prédicat, de nature plus intrinsèque. Dans cette perspective, Petitjean [76] propose d'utiliser la théorie des invariants pour traiter le prédicat portant sur le type d'intersection réel de deux coniques projectives du plan (quatre points simples, deux points doubles, un point quadruple, etc. il existe 12 types au total). Quelles sont les symétries du problème ? Étant donné deux coniques, on observe que le type de leur intersection est inchangé si une transformation projective leur est appliquée simultanément. On conclut de même en échangeant les deux coniques ou, plus généralement, en remplaçant leurs équations par des combinaisons linéaires de celles-ci. Toutes ces « symétries » forment un ensemble structuré appelé *groupe*, qui *agit* sur les couples de coniques : tout élément de ce groupe envoie un couple de coniques sur un autre possédant le même type d'intersection. Tous les couples de coniques obtenus de la sorte à partir d'un couple fixé forment une *orbite* de l'*action du groupe*. La théorie des invariants fournit des polynômes dont les valeurs discriminent ces orbites, donc les types d'intersection des coniques.

Dans la continuité des travaux de Petitjean [76], nous poursuivons l'exploration de la théorie des invariants (section 5.2) en déployant la méthode algébrique précédente dans deux nouvelles situations. La première concerne l'étude du type d'intersection de deux quadriques réelles (section 5.3) où nous ciblons les polynômes à considérer pour construire une stratégie d'évaluation du prédicat. La seconde porte sur le nombre de droites réelles transversales à quatre droites réelles de $\mathbb{P}^3$ (section 5.4). Nous retrouvons de manière géométrique un polynôme obtenu de façon *ad hoc* par Devillers *et al.* [21]. En outre, le fait même de manipuler des droites a demandé

[2] Ne pas tenir compte de la multiplicité des modèles « mène tout droit au mur », *dixit* Daniel Lazard.

de mettre en place de nouveaux outils, tant géométriques (c'est tout le propos du chapitre 1) qu'algorithmiques (à travers l'écriture symbolique d'invariants). Finalement,

CONTRIBUTIONS

> En prolongeant le travail de Petitjean [76] sur deux nouveaux prédicats géométriques, nous éprouvons la pertinence de la méthode algébrique, parfois avec succès, et élargissons un peu plus l'éventail des outils disponibles pour l'étude des prédicats en géométrie algorithmique.

La dernière section de ce chapitre (section 5.5) propose un petit complément sur le problème de vacuité de l'intersection de deux quadriques réelles de $\mathbb{P}^3$, où nous tentons une approche via la géométrie algébrique des courbes réelles de genre 1. La partie des travaux concernant les transversales à quatre droites de $\mathbb{P}^3$ a fait l'objet d'une communication dans un workshop européen de géométrie algorithmique (EuroCG 2010 [4]).

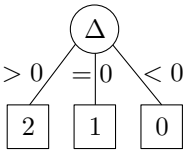
5.2 Quelques éléments de la théorie des invariants

Cette section présente de façon très générale les aspects de la théorie des invariants qui seront utiles dans ce chapitre. Nous commençons tout d'abord par introduire informellement sur un exemple les outils mathématiques en présence (section 5.2.1), avant de définir les invariants et covariants polynomiaux d'une action de groupe (section 5.2.2). Puis nous présentons un procédé de construction d'invariants polynomiaux (section 5.2.3).

5.2.1 Un exemple classique

Afin d'illustrer les notions mathématiques utilisées dans ce chapitre, considérons le prédicat $\mathscr{P}$ suivant :

$$\mathscr{P} : \begin{cases} \underline{\text{Entrée}} & \text{les coefficients } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ d'un trinôme du} \\ & \text{second degré } f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \text{ (avec } a \neq 0) \\ \underline{\text{Sortie}} & \text{le nombre de racines réelles de } f \end{cases}$$



Il est bien connu qu'une stratégie d'évaluation polynomiale pour $\mathscr{P}$ consiste à déterminer le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Ce polynôme est en fait un « invariant » comme nous allons l'expliquer.

Considérons le graphe de la fonction f : c'est une parabole qui coupe l'axe des abscisses en le nombre de racines réelles de f. Remarquons qu'une translation ou une affinité horizontales de cette parabole représente un trinôme $\overline{f}$ qui possède le même nombre de racines réelles que f. Le trinôme $\overline{f}$ s'obtient formellement à partir de f à l'aide d'un changement de coordonnées affines $\varphi_{(\alpha,\beta)} : x \mapsto \alpha\,x + \beta$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. L'ensemble G des changements de coordonnées affines est stable par composition :

$$\varphi_{(\alpha,\beta)} \circ \varphi_{(\alpha',\beta')} = \varphi_{(\alpha\alpha',\alpha\beta'+\beta)}$$

On dit que G est un *groupe de transformations* et qu'il *agit* sur l'ensemble des trinômes du second degré, noté X : le changement de coordonnées $\varphi \in \mathrm{G}$ « transforme » le trinôme $f \in \mathrm{X}$ en

le trinôme $\overline{f} = f \circ \varphi$. On note $\rho(\varphi)(f) = f \circ \varphi$. L'expression complète de cette transformation est donnée par

$$\rho(\varphi_{(\alpha,\beta)})(ax^2+bx+c) = \overline{a}\,x^2 + \overline{b}\,x + \overline{c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{a} = \alpha^2 a \\ \overline{b} = 2\alpha\beta a + \alpha b \\ \overline{c} = \beta^2 a + \beta b + c \end{cases}$$

L'objet ρ qui à tout élément de G associe une application de X dans X (qui est en fait une bijection) est appelé *action du groupe* G *sur* X.

Reformulons la remarque géométrique précédente sur les paraboles avec l'action ρ : pour deux trinômes $f, \overline{f} \in \mathrm{X}$, s'il existe un changement de coordonnées $\varphi \in \mathrm{G}$ tel que $\rho(\varphi)(f) = \overline{f}$ (on dit que f et $\overline{f}$ appartiennent à une même *orbite* pour ρ), alors f et $\overline{f}$ ont le même nombre de racines. On peut démontrer que l'action ρ possède exactement deux ensembles d'orbites indicées par $a \in \mathbb{R}$ contenant respectivement les trinômes x^2+a et $-x^2-a$. En d'autres termes, l'action ρ partitionne l'ensemble X des trinômes en paquets (les orbites) de trinômes ayant le même nombre de racines, donc même sortie pour le prédicat $\mathscr{P}$. En un certain sens, l'action de groupe ρ est un objet mathématique « adapté » à $\mathscr{P}$.[3]

Terminons enfin avec le lien entre le discriminant Δ et l'action de groupe ρ. Soient deux trinômes $f, \overline{f} \in \mathrm{X}$ appartenant à une même orbite pour ρ, à savoir il existe $\varphi_{(\alpha,\beta)} \in \mathrm{G}$ tel que $\rho(\varphi_{(\alpha,\beta)})(f) = \overline{f}$, alors les discriminants respectifs Δ et $\overline{\Delta}$ de f et $\overline{f}$ satisfont la relation

$$\overline{\Delta} = \overline{b}^2 - 4\overline{a}\,\overline{c} = \alpha^2\,(b^2-4ac) = \alpha^2\,\Delta$$

Cette égalité traduit le fait que Δ est un *invariant polynomial* pour l'action de groupe ρ. Le facteur α^2 représente en fait une puissance du déterminant de l'application affine[4] $\varphi_{(\alpha,\beta)}$. Puisque cette puissance est positive, on en déduit que le signe de Δ est invariant sur chacune des orbites de ρ, sur lesquelles les réponses du prédicat $\mathscr{P}$ sont invariantes. On en déduit immédiatement la stratégie d'évaluation de $\mathscr{P}$ en évaluant Δ pour un seul trinôme de chaque orbite. Remarquons dans cet exemple qu'un invariant peut avoir le même signe ou la même valeur sur des orbites distinctes et qu'il n'est nul besoin de discriminer toutes les orbites de l'action ρ (ce qui peut s'avérer difficile), mais seulement les ensembles d'orbites ayant différentes sorties pour le prédicat $\mathscr{P}$. Plus généralement, un procédé de construction « semi-automatique » d'une stratégie d'évaluation polynomiale pour un prédicat est présenté à la section 5.3.

5.2.2 Invariants polynomiaux

Cette section regroupe l'ensemble des définitions sur les actions de groupe et leurs invariants et covariants. Souvent, ces définitions possèdent des énoncés beaucoup plus généraux [23, 59]. Toutefois, nous nous contentons d'énoncés restreints qui nous suffiront pour ce chapitre.

Groupe. Un *groupe de transformations* est un sous-ensemble de GL_n (ensemble des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$) ou $\mathbb{P}\mathrm{GL}_n$ (ensemble des transformations projectives de $\mathbb{P}^{n-1}$) contenant l'identité et stable par composition. Plus généralement, un *groupe* $(\mathrm{G}, \cdot)$ est la donnée d'un ensemble G et d'une loi binaire de composition interne $\cdot$ tels que $\cdot$ est associative, G possède un élément neutre pour $\cdot$ (noté 1), G est stable pour $\cdot$ et tout élément de G possède un inverse

[3] Si l'on considère des trinômes homogénéisés et l'action du groupe des homographies de la droite projective sur ceux-ci, on obtient exactement 3 orbites (deux trinômes f et $-f$ représentant un même objet projectif).

[4] À savoir le déterminant de l'application linéaire sous-jacente.

pour $\cdot$. Dans toute la suite, on note simplement G pour un groupe, qu'on peut considérer comme un groupe de transformations (muni de la composition) à titre d'exemple.

Action de groupe. L'*action* ρ d'un groupe G sur un ensemble X est noté $\rho : \mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{X}$ et est définie comme une application qui à $g \in \mathrm{G}$ associe une bijection $\rho(g)$ sur X satisfaisant les propriétés suivantes : $\rho(1)$ est l'identité sur X et $\rho(gg') = \rho(g) \circ \rho(g')$ pour tous $g, g' \in \mathrm{G}$. Considérons un élément $x \in \mathrm{X}$ fixé et formons l'ensemble des éléments $y \in \mathrm{G}$ obtenus en appliquant à x les transformations $\rho(g)$ pour $g \in \mathrm{G}$: cet ensemble définit l'*orbite de* x pour ρ. Les orbites de ρ forment une partition de X.

Une action de groupe ρ *linéaire* (resp. $[\rho]$ *projective*) d'un groupe G sur un espace vectoriel V (resp. un espace projectif [V]) est une action de groupe telle que $\rho(g)$ est linéaire (resp. $[\rho(g)]$ projectif) pour tout $g \in \mathrm{G}$. Une telle action[5] est parfois notée $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ (resp. $[\rho] : \mathrm{G} \to \mathbb{P}\mathrm{GL(V)}$). Les actions de groupe considérées dans ce chapitre sont essentiellement linéaires ou projectives.

Exemples. Donnons deux exemples classiques d'action de groupe linéaire sur les polynômes et les tenseurs antisymétriques. On fixe $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ et G désigne un sous-groupe de GL_n.

- Notons $\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes à n variables de degré k (ou *formes n-aires de degré k*).[6] Le groupe G agit sur $\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)$ par l'action S^k_n définie par
$$\forall\, (f, g) \in \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{G} \qquad \mathrm{S}^k_n(g)(f) = f \circ g.$$
Il s'agit simplement de l'effet d'un changement de coordonnées de $\mathbb{R}^n$ sur un polynôme. L'action de l'exemple de la section 5.2.1 est le pendant affine de l'action S^2_2.
- Notons $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel engendré par les extenseurs d'ordre k, où un extenseur $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$ représente le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ (cf. annexe C). Le groupe G agit sur $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ par l'action $\wedge^k_n$ définie sur les extenseurs par
$$\wedge^k_n(g)(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k) = g(x_1) \vee g(x_2) \vee \cdots \vee g(x_k)$$
En d'autres termes, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est envoyé sur son image par g. Dans le chapitre 1, nous avons introduit l'action $\wedge^2_4$ qui agit sur les droites de $\mathbb{P}^3$ (c.-à-d. les plans de $\mathbb{R}^4$).

Invariant. Soient G un sous-groupe de GL_n et $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ une action de groupe linéaire. Un polynôme homogène P sur V est un *invariant (relatif)* pour ρ s'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que
$$\forall\, (g, v) \in \mathrm{G} \times \mathrm{V} \quad \mathrm{P}(\rho(g)(v)) = (\det g)^\lambda\, \mathrm{P}(v)$$
L'entier λ est appelé *ordre* de l'invariant. Un invariant d'ordre 0 est dit *absolu*. Lorsque G est un sous-groupe de SL_n (transformations de déterminant 1), tout invariant est absolu.

Lemme 5.1.

> *Un invariant absolu (resp. le signe d'un invariant relatif d'ordre pair) pour une action de groupe est constant sur chacune des orbites de cette action.*

Démonstration. Immédiat. □

[5] Dans la littérature, on dit que V est une *représentation linéaire* de G.

[6] Tout comme on distingue un polynôme de sa fonction polynomiale associée, il en est de même pour les formes n-aires de degré k. En toute rigueur, $\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^{n*})$ est aux fonctions polynomiales ce que $\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)$ est aux polynômes. Dans ce chapitre, nous mélangeons allègrement ces deux notions ($\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{S}^k(\mathbb{R}^{n*})$ sont isomorphes).

Exemples. La forme quadratique de Klein $a_0a_3 + a_1a_4 + a_2a_5$ est un invariant polynomial pour les objets $a \in \Lambda^2\mathbb{R}^4$ sous l'action $\wedge_4^2$. Elle est nulle sur l'ensemble des extenseurs de $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ (à savoir sur l'homogénéisé de l'ensemble $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}^3$). Pour tout $k, n \geqslant 1$, le discriminant est un invariant pour l'action S_n^k.

Covariant. Soient G un sous-groupe de GL_n et $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ une action de groupe linéaire. Un *covariant pour ρ (de type (k, n))* est une application polynomiale homogène $\psi : \mathrm{V} \to \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)$ « équivariante » sous les actions de ρ et S_n^k, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall\, (g, v) \in \mathrm{G} \times \mathrm{V} \qquad \psi\big(\rho(g)(v)\big) = (\det g)^\lambda\, \mathrm{S}_n^k(g)\big(\psi(v)\big)$$

L'entier λ est appelé *ordre* du covariant, le degré d de ψ est le *degré* du covariant. Lorsque $k = 0$, ψ est un invariant pour l'action ρ.

Remarquons que, pour tout $v \in \mathrm{V}$, $\psi(v)$ est un polynôme homogène de degré k sur $\mathbb{R}^n$ dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré d sur V, c.-à-d. $\psi(v) \in \big(\mathrm{K}^d[\mathrm{V}]\big)^k[\mathbb{R}^n]$. Notons $\psi \sim_v 0$ la condition que le polynôme $\psi(v)$ est identiquement nul pour $v \in \mathrm{V}$. D'après la définition d'un covariant, cette condition est invariante sur les orbites de ρ :

Lemme 5.2.
Soit ψ un covariant pour une action de groupe ρ sur V. *S'il existe $v \in \mathrm{V}$ tel que $\psi \sim_v 0$, alors $\psi \sim_{v'} 0$ pour tout v' dans l'orbite de v sous l'action ρ.*

Démonstration. Immédiat. □

Exemple. Pour $k \geqslant 2$, le *hessien* Hess est un exemple de covariant de type $((k-2)n, n)$ pour l'action S_n^k :

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{où} \qquad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

Hess est de degré n et d'ordre $(k-2)n$. Pour $n = 2$, il s'avère que $\mathrm{Hess} \sim_f 0$ si et seulement si f est la k-ième puissance d'une forme linéaire [66, Prop. 2.23]. Le *résultant* et le *jacobien* sont d'autres covariants classiques sur les polynômes.

Remarque. À la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ et au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, les invariants et covariants ont été définis dans le cadre des formes n-aires [7]. On distinguait alors les covariants des *contravariants* suivant qu'un groupe agissait sur un espace vectoriel ou son dual, les *concomitants* étant un mélange de covariants et de contravariants. Toutes ces notions se traduisent en termes de covariants dans le sens moderne. L'ouvrage d'Olver [66] les présente de façon accessible.

5.2.3 Génération d'invariants

Nous présentons dans cette section les « théorèmes fondamentaux » de la théorie des invariants [23, 37, 59, 66] affirmant que l'ensemble des invariants pour certaines actions de groupes forme une algèbre finiment engendrée. Ces résultats sont présentés classiquement dans le cadre complexe $\mathbb{C}$. Nous expliquons rapidement comment transposer certains de ces résultats à $\mathbb{R}$. Enfin, nous présentons un procédé effectif de construction d'invariants dû à Grosshans *et al.* [41], que nous avons implémenté, fondé sur une écriture *symbolique* des invariants.

[7] Voir par exemple l'ouvrage complet et en anglais de Grace et Young [38] pour avoir une idée des connaissances sur la théorie des invariants à cette époque.

Algèbre des invariants. L'ensemble des invariants pour une action du groupe G sur l'espace vectoriel V forme une algèbre graduée par l'ordre des invariants. Lorsqu'on considère un groupe G inclus dans SL_n (déterminant 1), l'ordre n'a plus aucun sens et on obtient simplement une algèbre des invariants, notée $\mathbb{R}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}}$. La théorie classique des invariants[8] s'attache à trouver des systèmes (finis ou non) de générateurs de l'algèbre des invariants et des systèmes (finis ou non) de relations entre invariants (*syzygies*).[9] Les résultats classiques sont énoncés dans $\mathbb{C}$ [66] ou dans un corps K algébriquement clos [23, 37, 59] ou de caractéristique nulle [58]. La même démarche s'applique également pour les covariants.

Bien souvent, nous disposons de résultats sur des actions de groupes *complexes* fournissant un ensemble de générateurs *réels* de l'algèbre des invariants. Remarquons qu'un groupe réel $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans son « compactifié » $\mathrm{G}' \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il pourrait donc y avoir plus d'invariants réels que complexes[10]. Grâce au lemme suivant, il est souvent possible de conclure naturellement que les générateurs réels obtenus par une action de groupe complexe engendrent l'algèbre des invariants pour l'action réelle correspondante.

Lemme 5.3.

> *Considérons une action linéaire d'un groupe* $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{GL}_n$ *sur un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* V*. Si* G *est Zariski-dense dans un groupe* $\mathrm{G}' \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et si la* $\mathbb{C}$*-algèbre des invariants* $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}'}$ *est* $\mathbb{C}$*-engendrée par un ensemble* $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}[\mathrm{V}]$ *de polynômes réels, alors* $\mathbb{R}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}}$ *est* $\mathbb{R}$*-engendrée par* E*. Ce résultat se reformule de même pour les covariants.*

L'utilisation de cette propriété sera implicite au cours des sections suivantes de ce chapitre.

Démonstration. D'une part, $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}} = \left(\mathbb{R}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}}\right)_{\mathbb{C}}$ ([58, 1.5 Ex.29]). D'autre part, $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}} = \mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}'}$ par densité ([58, 1.3 Ex.16]). Ainsi, $\mathbb{C}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}'} = \left(\mathbb{R}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}}\right)_{\mathbb{C}}$ donc $\mathbb{R}[\mathrm{V}]^{\mathrm{G}}$ est $\mathbb{R}$-engendré par E.

Pour les covariants de type (k, n) d'une action ρ de $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{GL}_n$ sur V, on peut se ramener à la situation précédente en considérant les invariants $\mathrm{P}(v, x_1, \ldots, x_k)$ de l'action ρ' de G sur $\mathrm{V} \times (\mathbb{R}^n)^k$ définie par $\rho'(g)(v, x_1, \ldots, x_k) = (\rho(g)(v), g(x_1), \ldots, g(x_k))$. En égalant les variables $x_1, \ldots, x_k$ dans P, on construit le covariant $v \mapsto \mathrm{P}(v, x, \ldots, x)$. □

Écriture symbolique.[11] À la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle, Aronhold et Clebsch ont employé une notation *symbolique* compacte pour décrire les invariants de polynômes [67], dont l'écriture sous forme développée prend beaucoup de place sans pour autant révéler de structure apparente. Cette écriture symbolique a été largement utilisée à l'époque mais elle fut mal comprise[12]. Grâce à un formalisme algébrique poussé, Grosshans *et al.* [41] ont soigneusement défini cette écriture et l'ont étendue pour représenter des tenseurs symétriques et antisymétriques sur $\mathbb{R}^n$ (n fixé). Une écriture symbolique pour ces tenseurs de $\mathbb{R}^n$ est constituée d'un *monôme de cro-*

[8] Il existe deux branches d'étude des invariants : CIT ou *classical invariant theory* axée sur l'algèbre des invariants et GIT ou *geometric invariant theory* axée sur le « quotient » induit par l'action de groupe.

[9] Étant donné une action de groupe, les résultats correspondants portent classiquement le nom de *premier* (resp. *second*) *théorème fondamental* (FFT et SFT en anglais).

[10] Intuitivement, plus un groupe est petit pour une action, moins il y apporte de contraintes pour qu'un polynôme soit invariant pour cette action.

[11] Nous faisons ici une présentation extrêmement simplifiée de cet outil, les détails de son fonctionnement dépassant largement le cadre de ce chapitre.

[12] "Classical invariant theorists failed to distinguish between a vector u and a symbol α representing u, and used the same notation for both. [...] Small wonder that few invariants should have been computed by such a technique." [41, p.xviii]

chets $[a_1a_2\cdots a_n]\,[b_1b_2\cdots b_n]\cdots$ où chaque crochet contient un mot de n lettres. Deux types de lettres sont distinguées :

- celles représentant des polynômes : une lettre représentant un objet de $\mathrm{S}^k\mathbb{R}^n$ doit apparaître exactement k fois dans le monôme de crochets et au plus une fois dans chacun des crochets ;
- celles représentant des extenseurs : une lettre α représentant un objet de $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ doit apparaître exactement k fois dans le monôme de crochets. La lettre $\alpha^{(p)}$ peut remplacer le produit de p lettres α (à un coefficient multiplicatif près).

Le passage d'une écriture symbolique à une écriture polynomiale s'effectue grâce à un *opérateur ombral* (*umbral operator* en anglais). Cet opérateur fournit des invariants polynomiaux pour l'action ρ du groupe GL_n sur un espace vectoriel V de la forme

$$\mathrm{V} = \Lambda^{k_1}\mathbb{R}^n \times \cdots \times \Lambda^{k_r}\mathbb{R}^n \times \mathrm{S}^{h_1}\mathbb{R}^n \times \cdots \mathrm{S}^{h_p}\mathbb{R}^n$$

(où ρ agit sur $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ via $\wedge^k_n$ et sur $\mathrm{S}^k\mathbb{R}^n$ via S^k_n).

Exemples. Si α et β représentent un même objet de $\Lambda^2\mathbb{R}^4$, l'écriture symbolique $[\alpha^{(2)}\beta^{(2)}]$ représente la forme quadratique de Klein $q(x) = x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_5$ définie sur $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ (isomorphe à $\mathbb{R}^6$). Si $a_1, \ldots, a_n$ sont les lettres d'un même polynôme homogène f à n variables de degré k, l'écriture symbolique $[a_1 \ldots a_n]^n$ (n crochets) représente le discriminant de f (à un coefficient multiplicatif près). De façon générale,

Théorème 5.4 ([41, Thm 16 et 18])**.**

> *Tout invariant pour l'action ρ s'obtient comme l'image par l'opérateur ombral d'un monôme de crochets et réciproquement. L'ordre de l'invariant obtenu est égal au nombre de crochets dans le monôme de crochet.* □

Il en est de même pour obtenir les covariants de ρ : on utilise des lettres $u, v, \ldots$ représentant des vecteurs de $\Lambda^1\mathbb{R}^n$ pour modéliser les variables d'un covariant polynomial.

5.3 Intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Dans cette section, nous déroulons sur les quadriques le procédé général de Petitjean sur les coniques [76] pour tenter d'obtenir, à l'aide d'invariants pour une action de groupe, des polynômes discriminant les entrées du prédicat $\mathscr{P}_\cap$ suivant :

$$\mathscr{P}_\cap : \begin{cases} \underline{\text{Entrée}} & \text{deux matrices symétriques réelles de taille 4 définissant deux quadriques réelles de } \mathbb{P}^3 \\ \underline{\text{Sortie}} & \text{le type topologique réel de l'intersection des deux quadriques} \end{cases}$$

Expliquons les notions mathématiques intervenant dans ce prédicat. Une matrice S symétrique de taille 4 définit une forme quadratique (homogène) q_S sur $\mathbb{R}^4$ par $q_\mathrm{S}(x) = {}^t x\,\mathrm{S}\,x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$. La *quadrique* définie par S ou q_S, notée $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$, est l'ensemble des points de $\mathbb{P}^3$ qui annulent $[q_\mathrm{S}]$:

$$\mathcal{Q}_\mathrm{S} = \big\{\, [x] \in \mathbb{P}^3 \mid q_\mathrm{S}(x) = 0 \big\}.$$

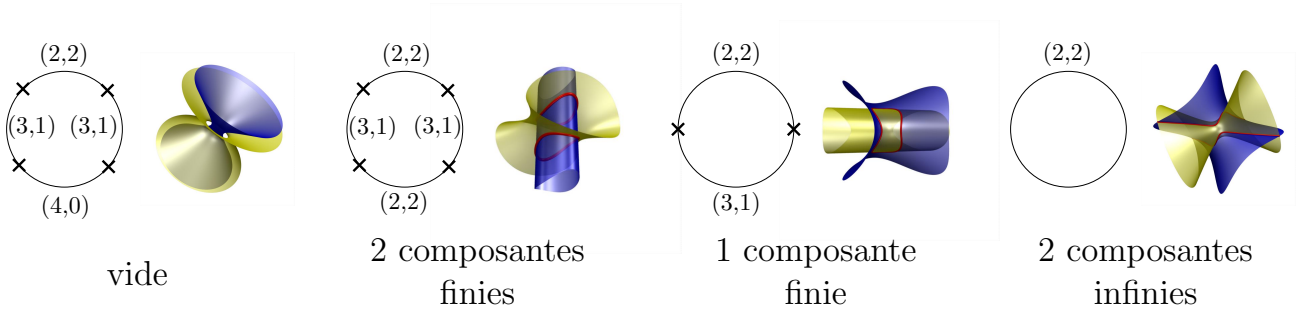


FIG. 5.1: Intersection de deux quadriques en position générique.

Le cercle (homéomorphe à une droite projective) schématise un faisceau de quadriques, celles dégénérées étant représentées par des croix, entre lesquelles nous indiquons la signature des quadriques correspondantes.

Il existe un nombre fini de type topologique réel possible pour l'intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3$ [24]. La figure 5.1 illustre les quatre types possibles dans le cas générique[13].

Plusieurs solutions algorithmiques ont déjà été proposées pour répondre au prédicat $\mathscr{P}_\cap$, mais aucune sous la forme d'un arbre d'évaluation polynomiale de profondeur *bornée uniformément* en les entrées du prédicat (voir la section 5.5 pour un état de l'art à ce sujet), autrement dit en évaluant un nombre fini de polynômes ne dépendant pas de la taille des entrées.

Voici à présent les différentes étapes de la méthode algébrique, employée pour le prédicat $\mathscr{P}_\cap$.

Étape 1 : *Exhiber les symétries du problème, c'est-à-dire des transformations sur les entrées* X *du prédicat* $\mathscr{P}$ *qui laissent invariantes les sorties du prédicat. Les modéliser par l'action d'un groupe* G *(représentant exactement ces transformations) agissant sur* X *par* $\psi : \mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{X}$.

Le lemme suivant découle immédiatement de la définition d'une action de groupe. La « démonstration » proposée donne simplement un éclairage formel sur l'énoncé de cette première étape.

Lemme 5.5.

Deux entrées du prédicat $\mathscr{P}$ *appartenant à une même orbite de* ψ *ont même sortie.*

Démonstration. Soient x et x' dans X appartenant à une même orbite de ψ, c'est-à-dire qu'il existe une transformation $g \in \mathrm{G}$ telle que $\psi(g)(x) = x'$. Par définition de G, la sortie du prédicat $\mathscr{P}$ est invariante par $\psi(g)(\cdot)$ donc x et x' ont même sortie. □

L'ensemble X des entrées du prédicat $\mathscr{P}_\cap$ est constitué des paires de matrices (S, T) symétriques réelles définissant deux quadriques réelles $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{Q}_\mathrm{T}$ de $\mathbb{P}^3$. Tout d'abord, un changement de coordonnées dans $\mathbb{P}^3$ ne modifie pas la nature de l'intersection $\mathcal{Q}_\mathrm{S} \cap \mathcal{Q}_\mathrm{T}$. Ainsi, considérons l'action $\psi_1 : \mathrm{GL}_4 \circlearrowleft \mathrm{X}$ définie par

$$\psi_1(\mathrm{M})\big((\mathrm{S}, \mathrm{T})\big) = ({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\,\mathrm{M},\ {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{T}\,\mathrm{M})$$

Ensuite, remarquons que les points x d'intersection de deux quadriques définies par q_S et q_T satisfont le système suivant :

$$\begin{cases} q_\mathrm{S}(x) = 0 \\ q_\mathrm{T}(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1\, q_\mathrm{S}(x) + \mu_1\, q_\mathrm{T}(x) = 0 \\ \lambda_2\, q_\mathrm{S}(x) + \mu_2\, q_\mathrm{T}(x) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5.1}$$

[13] C'est-à-dire lorsque l'équation déterminantielle (5.2) (définie plus loin) possède 4 racines réelles ou complexes deux à deux distinctes.

Ainsi, l'intersection-même $\mathcal{Q}_\mathrm{S} \cap \mathcal{Q}_\mathrm{T}$ est préservée en choisissant n'importe quelle paire de quadriques distinctes dans l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{Q}_{\lambda \mathrm{S} + \mu \mathrm{T}} \mid [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1\}$$

appelé *faisceau de quadriques* engendré par $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{Q}_\mathrm{T}$. Le choix quelconque d'une paire de quadriques dans ce faisceau est modélisé par l'action de groupe $\psi_2 : \mathrm{GL}_2 \circlearrowleft \mathrm{X}$ définie par

$$\psi_2 \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \right) \big((\mathrm{S}, \mathrm{T}) \big) = (\lambda_1 \, \mathrm{S} + \mu_1 \, \mathrm{T}, \lambda_2 \, \mathrm{S} + \mu_2 \, \mathrm{T})$$

Finalement, on construit l'action $\psi : \mathrm{GL}_4 \times \mathrm{GL}_2 \circlearrowleft \mathrm{X}$, modélisant la « géométrie des faisceaux », définie par

$$\psi(\mathrm{M}, \mathrm{M}') = \psi_1(\mathrm{M}) \circ \psi_2(\mathrm{M}') = \psi_2(\mathrm{M}') \circ \psi_1(\mathrm{M})$$

Étape 2 : *Utiliser des techniques effectives appropriées ou des théorèmes déjà établis pour obtenir des invariants polynomiaux pour ψ.*

L'action initiale ψ a été étudiée depuis bien longtemps [55, 97] et nous en connaissons un système générateur d'invariants et de covariants. Tout d'abord, les invariants pour ψ sont exactement ceux de l'équation déterminantielle

$$\mathrm{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda \, \mathrm{S} + \mu \, \mathrm{T}) = a \, \lambda^4 + 4b \, \lambda^3 \mu + 6c \, \lambda^2 \mu^2 + 4d \, \lambda \mu^3 + e \, \mu^4 \tag{5.2}$$

avec $a, \ldots, e \in \mathbb{R}$, donc ce sont les invariants pour l'action S_2^4 sur les polynômes homogènes à deux variables de degré 4. L'algèbre des invariants pour S_2^4 est engendrée par les deux polynômes suivants [19, section 4.1] :

$$\begin{cases} c_4 = 12 \, ae - 3 \, bd + c^2 \\ c_6 = \dfrac{1}{2} \left(72 \, ace - 27 \, ad^2 - 27 \, b^2 e + 9 \, bcd - 2 \, c^3 \right) \end{cases} \tag{5.3}$$

c_4 est d'ordre 4 et c_6 est d'ordre 6. En 1947, Todd fournit un système générateur de 20 covariants de degré au moins 4 [97, p.487].

Étape 3 : *Construire une stratégie d'évaluation polynomiale du prédicat en déterminant les orbites discriminées par les invariants précédemment obtenus.*

Plusieurs obstacles ne permettent pas d'étendre directement aux quadriques la méthode générale des coniques [76]. Premièrement, l'action ψ possède une infinité d'orbites. En effet, la quantité

$$j = 1728 \, \frac{{c_4}^3}{{c_4}^3 - {c_6}^2} \tag{5.4}$$

est un invariant absolu pour ψ (car ${c_4}^3$ et ${c_4}^3 - {c_6}^2$ sont des invariants de même ordre, 12), appelé j-invariant, et tout réel j est le j-invariant d'une paire de quadriques (cf. section 5.5). Ainsi, la méthode qui consiste à évaluer les invariants pour un seul élément de chaque orbite n'est pas applicable ici.

Deuxièmement, les invariants de ψ ne sont même pas suffisant pour discriminer des situations géométriques génériques. Plus précisément, aucun polynôme qui ne s'exprime qu'en fonction des coefficients de l'équation déterminantielle ne peut discriminer les deux situations génériques où

l'intersection est soit vide, soit constituée de deux composantes connexes. En effet, voici un exemple de deux paires de quadriques en configuration générique définies par les équations

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0 \\ {x_0}^2 + 2\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 + 6\,x_2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0x_1 - {x_2}^2 = 0 \\ 4\,{x_3}^2 - 4\,x_0x_2 + \dfrac{7}{2}\,x_1x_2 - \dfrac{3}{4}\,{x_1}^2 = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

La première paire a une intersection vide, la seconde possède deux composantes connexes.[14] Pourtant, les deux paires ont la même équation déterminantielle :

$$\mathrm{D}(\lambda,\mu) = \lambda^3\mu - 14\,\lambda\mu^3 + 12\,\mu^4.$$

Troisièmement, le résultat sur les coniques repose sur le calcul de la signature d'un covariant quadratique. Or ici, pour l'action ψ, tous les covariants sont de degré au moins 4. En outre, nous manquons de critères réels analogues à la signature pour des formes n-aires de degré au moins 3 ... la nature *réelle* de la question posée est une véritable pierre d'achoppement de l'approche fondée sur la théorie des invariants, intrinsèquement *complexe*.

Pour conclure. Malgré les difficultés pointées dans cette section, une piste reste encore ouverte. Dans le cas particulier où une quadrique a pour équation $x_0x_1 - x_2x_3 = 0$, l'intersection des quadriques est modélisée par l'ensemble des zéros d'une forme biquadratique f définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Sa nature topologique est déterminée par l'évaluation d'invariants et de covariants de f (pour l'action classique de $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$), ce qui résout le problème de vacuité dans ce cas particulier. Dans les travaux de Petitjean sur les coniques fondés sur cette technique [76], ces invariants et covariants « remontent » dans l'espace des quadriques afin d'obtenir des polynômes pour des paires de coniques générales. L'affaire est plus compliquée pour les quadriques.

La section 5.5 poursuit la discussion sur le prédicat $\mathscr{P}_\cap$, en-dehors du cadre de la théorie des invariants et de la méthode générale présentée dans ce chapitre.

5.4 Droites transversales à des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

Dans cette section, nous déroulons à nouveau la méthode générale à base d'invariants mais sur de nouveaux objets, les droites réelles de $\mathbb{P}^3$, ce qui soulève des difficultés supplémentaires par rapport à l'étude des coniques ou des quadriques. Voici le prédicat considéré ici :

$$\mathscr{P}_4 : \begin{cases} \underline{\text{Entrée}} & \text{les coordonnées de Plücker } (\zeta_1,\ldots,\zeta_4) \text{ de quatre droites } (\ell_1,\ldots,\ell_4) \\ & \text{de } \mathbb{P}^3 \text{ linéairement indépendantes} \\ \underline{\text{Sortie}} & \text{le nombre de droites transversales aux droites } (\ell_1,\ldots,\ell_4) \end{cases}$$

Rappelons que la notion de linéarité sur les droites correspond à celle sur leurs coordonnées de Plücker (section 1.1.3) et que la sortie du prédicat $\mathscr{P}_4$ appartient à $\{0,1,2,\infty\}$ (page 26, $k=4$). À la fin de ce procédé géométrique, nous obtiendrons un polynôme identique à l'un de ceux obtenus de façon *ad hoc* par Devillers *et al.* [21] pour ce prédicat $\mathscr{P}_4$.

Étape 1. Ici, l'ensemble X des entrées de $\mathscr{P}_4$ est un sous-ensemble Zariski-dense de $\mathbb{G}^4$. Cherchons les symétries du problème.

[14] On peut le vérifier à l'aide du logiciel QI disponible en ligne à l'adresse :
`http://www.loria.fr/equipes/vegas/qi/server/index.html`.

Tout d'abord, observons que l'ordre sur les droites en entrée ne change pas le nombre de leurs transversales. Ainsi, on peut considérer l'action ψ_1 du groupe des permutations $\mathfrak{S}_4$ à 4 éléments sur X définie par

$$\psi_1(\sigma)(\zeta_1, \ldots, \zeta_4) = (\zeta_{\sigma(1)}, \ldots, \zeta_{\sigma(4)})$$

Ensuite, toute transformation projective de $\mathbb{P}^3$ préserve les incidences entre droites et il en est de même pour les corrélations. D'après le théorème 1.14, ces transformations induisent, sur les coordonnées de Plücker, exactement les similitudes préservant la quadrique de Klein $\mathbb{G}$. Ces dernières forment un groupe noté $\mathbb{P}\mathrm{GO}_6(q)$ (où $q(x) = x_0x_3 + x_1x_4 + x_2x_5$, page 23) qui agit trivialement sur les entrées de $\mathscr{P}_4$ par l'action $\psi_2 : \mathbb{P}\mathrm{GO}_6(q) \circlearrowleft \mathrm{X}$ définie par

$$\psi_2(g)(\zeta_1, \ldots, \zeta_4) = (g(\zeta_1), \ldots, g(\zeta_4))$$

Finalement, on considère le groupe de symétries $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{P}\mathrm{GO}_6(q)$ et l'action $\psi : \mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{X}$ définie par $\psi(\sigma, g) = \psi_1(\sigma) \circ \psi_2(g)$. D'un point de vue géométrique, l'action ψ encode la « géométrie (projective) » des ensembles de quatre droites de $\mathbb{P}^3$.

Deux problèmes se posent avec cette action de groupe. D'une part, ψ n'est pas classique ce qui rend difficile le passage à l'étape 2 : le groupe est un produit cartésien et il agit sur un espace X qui est loin d'être un projectif (ou linéaire). D'autre part, la géométrie du problème ne se réduit pas à la géométrie des ensembles de quatre droites. En effet, toutes les combinaisons linéaires de ces quatres droites préservent la sortie du prédicat (lemme 1.10). C'est pourquoi, il est nécessaire de « coder » les entrées de $\mathscr{P}_4$ dans un espace qui reflète mieux la géométrie du problème. Formalisons ceci sous forme d'une étape intermédiaire.

Étape 1bis : *Construire un codage des entrées $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et une action $\rho : \mathrm{G} \circlearrowleft \mathrm{Y}$ tels que*

1. *deux entrées du prédicat $\mathscr{P}$ ayant la même image par π ont la même sortie ;*
2. *ρ « simule » l'action ψ sur Y, c'est-à-dire :*

$$\forall\, (g, x) \in \mathrm{G} \times \mathrm{X} \qquad \rho(g)(\pi(x)) = \pi\big(\psi(g)(x)\big)$$

Les conditions 1 et 2 imposent seulement que ρ satisfasse la même propriété que ψ :

Lemme 5.6.

> *Si $\pi(x)$ et $\pi(x')$ appartiennent à la même orbite pour ρ, alors le prédicat $\mathscr{P}$ retourne les mêmes sorties pour x et x'.*

Démonstration. D'après la propriété 2, $\pi(x)$ et $\pi(x')$ sont dans la même orbite pour ρ si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que

$$\pi(x') = \rho(g)(\pi(x)) = \pi\big(\underbrace{\psi(g)(x)}_{x''}\big)$$

D'après la propriété 1, x' et x'' ont la même sortie pour $\mathscr{P}$. D'après le lemme 5.5, x et x'' ont également la même sortie pour $\mathscr{P}$, ce qui conclut la démonstration par transitivité. □

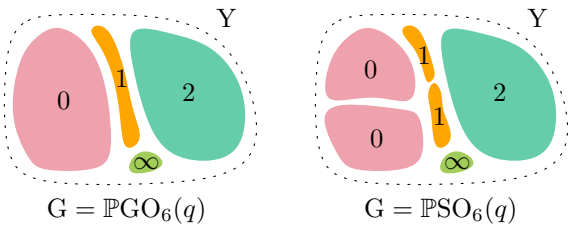
D'après le lemme 1.10, les droites transversales à une famille de droites $x \in \mathrm{X}$ sont exactement celles qui sont orthogonales (pour la géométrie des droites, c.-à-d. via l'opérateur $\odot$) au sous-espace $\mathrm{H} = \mathrm{Proj}\ x$ engendré par les droites de x, c'est-à-dire $\mathrm{H}^\circ \cap \mathbb{G}$. Ainsi, considérons le codage $\pi : x \mapsto \mathrm{H}$ (cf. annexe C) :

$$\pi(x) = \big[\det x_{0123} : \det x_{0124} : \det x_{0125} : \det x_{0234} : \ldots : \det x_{2345}\big]$$

où $\det x_{ijkl}$ est le mineur de la matrice colonne x de taille 6×4 de laquelle on extrait les lignes

$H^\circ \cap \mathbb{G}$	$H \cap \mathbb{G}$	signature de $q_{\vert H}$
2 points	hyperboloïde	$(2,2)$
0 point	ellipsoïde	$(3,1)$ ou $(1,3)$
1 point	cône	$(2,1)$ ou $(1,2)$
une droite	double plan	$(1,1)$

TAB. 5.1: Types projectifs de $H = \mathrm{Proj}\ x$ pour $x \in X$ (q définit $\mathbb{G}$).



$G = \mathbb{P}GO_6(q)$ $\quad$ $G = \mathbb{P}SO_6(q)$

FIG. 5.2: Orbites de ρ suivant G.

d'indice i, j, k, l. Notons Y est la grassmannienne $\mathbb{G}_{4,6}$ des sous-espaces de $\mathbb{P}^5$ de dimension 3. D'après le lemme 1.18, tout sous-espace $H \in \mathbb{G}_{4,6}$ est linéairement engendré par quatre points de $\mathbb{G}$ donc $Y = \pi(X)$. Ainsi, le codage π vérifie bien la propriété 1 de l'étape 2.

À cause du codage π, l'action ψ_1 de $\mathfrak{S}_4$ sur X induit une action triviale sur Y puisque

$$\forall\,(\sigma, x) \in \mathfrak{S}_4 \times X \qquad \pi\big(\psi_1(\sigma)(x)\big) = \pi(x)$$

C'est pourquoi on peut remplacer simplement G par $\mathbb{P}GO_6(q)$. Puisque ψ_2 est l'action identité de $\mathbb{P}GO_6(q)$ sur $X \subseteq (\mathbb{R}^6)^4$, l'action ρ induite sur Y est définie par $\rho(g) = \wedge^4_6 g$ (cf. annexe C), autrement dit

$$(\wedge^4_6 g)(\zeta_1 \vee \zeta_2 \vee \zeta_3 \vee \zeta_4) = g(\zeta_1) \vee g(\zeta_2) \vee g(\zeta_3) \vee g(\zeta_4)$$

donc la propriété 2 de l'étape 2 est vérifiée.

D'après le théorème de Witt (corollaire 1.17), les orbites de ρ sont caractérisées par la signature non signée de $q_{\vert H}$ pour $H \in \mathbb{G}_{4,6}$ (la forme quadratique q définit $\mathbb{G}$). On a obtenu à la section 1.3.2 qu'il existe exactement 4 orbites pour ρ, caractérisées aussi par le type d'intersection avec $\mathbb{G}$ de la droite orthogonale H° (cf. table 5.1) : soit elle est contenue dans $\mathbb{G}$, soit elle coupe $\mathbb{G}$ en 0, 1 ou 2 points. Ainsi, la propriété 3 de l'étape 2 est vérifiée. En outre, le cardinal de $H^\circ \cap \mathbb{G}$ est égal au nombre de transversales des droites considérées en entrée du prédicat.

Faisons la constatation suivante : plus le groupe de symétries est « petit », plus le nombre d'orbites est « grand ». Par exemple, en considérant les isométries directes $\mathbb{P}SO_6(q)$ au lieu de $\mathbb{P}GO_6(q)$, on obtient 6 orbites au lieu de 4 pour ρ (figure 5.2). En effet, le théorème de Witt (théorème 1.16) assure que ces orbites sont caractérisées par la signature (signée) de $q_{\vert H}$ pour $H \in \mathbb{G}_{4,6}$.

Étape 2. Considérons l'action linéaire $\widetilde{\rho} : SO_6(q) \to GL(\Lambda^4\mathbb{R}^6)$ et construisons des invariants et covariants homogènes pour $\widetilde{\rho}$ à l'aide de la méthode symbolique. Notons α et β des lettres représentant un même objet y de $\Lambda^4\mathbb{R}^6$ (de dimension 15), a et b des lettres représentant un même objet de $S^2\mathbb{R}^6$ pour simuler le groupe $SO_6(q)$ [41, p.54] et u et v des lettres représentant un même objet x de $\mathbb{R}^6$ (isomorphe à $\Lambda^1\mathbb{R}^6$). Pour construire des polynômes de crochets dont les images par l'opérateur ombral sont non nulles, on dispose des contraintes suivantes : les crochets sont de taille 6, chaque lettre pour $\Lambda^4\mathbb{R}^6$ doit apparaître exactement 4 fois et chaque lettre pour $S^2\mathbb{R}^6$ deux fois (dans des crochets différents). Après tâtonnements, on trouve un invariant Δ et un covariant Cov :

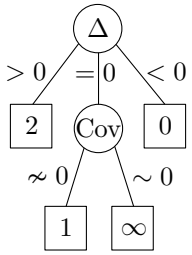
$$\Delta = \big[\alpha^{(4)}ab\big]\,\big[\beta^{(4)}ab\big] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Cov} = \big[\alpha^{(4)}au\big]\,\big[\beta^{(4)}av\big]$$

tous deux d'ordre 2. Ainsi, le signe de Δ est invariant sous l'action projective $[\widetilde{\rho}] = \rho$. Les expressions développées sont les suivantes :

$$\Delta(y) = {y_4}^2 + {y_8}^2 + {y_{13}}^2 - 2\,y_1y_{10} - 2\,y_{14}y_2 - 2\,y_3y_{15} + 2\,y_7y_5 + 2\,y_{11}y_6 + 2\,y_{12}y_9$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(y)(x) = \quad & (y_{11}y_{14} + y_{12}y_{15})\,{x_0}^2 + (y_7y_{10} - y_9y_{15})\,{x_1}^2 - (y_5y_{10} + y_6y_{14})\,{x_2}^2 \\
- \quad & (y_2y_6 + y_3y_9)\,{x_3}^2 + (y_{12}y_3 - y_1y_5)\,{x_4}^2 + (y_{11}y_2 + y_7y_1)\,{x_5}^2 \\
+ \; & (y_{13}y_{15} - y_7y_{14} - y_{11}y_{10} - y_8y_{15})\,x_0x_1 + (y_4y_{14} + y_5y_{15} - y_{13}y_{14} - y_{12}y_{10})\,x_0x_2 \\
+ \; & (y_1y_{14} - y_{13}y_{12} - y_{12}y_8 - y_{11}y_5)\,x_0x_4 + (y_{11}y_4 + y_{11}y_{13} + y_{12}y_7 + y_1y_{15})\,x_0x_5 \\
+ \; & (y_6y_{15} + y_9y_{14} - y_{10}y_4 + y_8y_{10})\,x_1x_2 + (y_2y_{10} - y_7y_6 - y_9y_{13} - y_8y_9)\,x_1x_3 \\
+ \; & (y_{15}y_2 - y_{11}y_9 - y_7y_4 - y_7y_8)\,x_1x_5 + (y_6y_4 + y_6y_{13} + y_5y_9 + y_3y_{10})\,x_2x_3 \\
+ \; & (y_3y_{14} - y_{12}y_6 - y_5y_8 - y_5y_4)\,x_2x_4 + (-y_3y_{13} + y_5y_2 + y_8y_3 + y_6y_1)\,x_3x_4 \\
+ \; & (y_2y_{13} + y_1y_9 - y_4y_2 - y_7y_3)\,x_3x_5 + (y_4y_1 - y_{12}y_2 - y_8y_1 - y_{11}y_3)\,x_4x_5 \\
+ \; & ({y_{13}}^2 - y_{15}y_3 - y_{14}y_2 + y_{12}y_9 + y_6y_{11})\,x_0x_3 \\
+ \; & ({y_8}^2 + y_5y_7 - y_{15}y_3 + y_{12}y_9 - y_{10}y_1)\,x_1x_4 \\
+ \; & ({y_4}^2 - y_{14}y_2 - y_{10}y_1 + y_5y_7 + y_6y_{11})\,x_2x_5
\end{aligned}$$

Étape 3 : Puisque l'action ρ possède un nombre fini d'orbites et que le signe de Δ et la nullité de Cov sont invariants sur chaque orbite, il suffit d'évaluer les polynômes Δ et Cov sur *un seul* représentant de chaque orbite et constater si des situations géométriques sont discriminées. On obtient l'arbre d'évaluation polynomiale ci-contre pour le prédicat $\mathscr{P}_4$.



Comparaisons avec les travaux de Devillers et al. [21]. Tout d'abord, le prédicat considéré est légèrement différent : les entrées sont constituées de paires de coordonnées homogènes de points de $\mathbb{P}^3$ engendrant les droites étudiées alors que nous travaillons directement sur les coordonnées de Plücker de ces droites, quadratiques en les coordonnées des points. Dans la suite, nous donnons les degrés des polynômes homogènes exprimés selon les coordonnées des points et nous indiquons le degré dans le cas où on se restreint aux points affines (où on peut fixer une coordonnée homogène à 1). Nous obtenons le même polynôme[15] Δ, de degré 16 (12 en affine) pour discriminer les configurations à 0 et 2 transversales. Tandis que notre covariant Cov consiste à évaluer 21 (petits) polynômes de degré 16 (12 en affine), Devillers *et al.* évaluent 3 polynômes de degré 8 (6 en affine) qui sont des déterminants 2×2 d'opérations $\odot$ de droites formées par les points en entrée (pas forcément les droites qu'on souhaite représenter). Par conséquent, ces polynômes ne peuvent pas être obtenus à l'aide d'invariants ou de covariants pour l'action de groupe que nous avons considérée puisqu'ils ne s'expriment pas en fonction des coordonnées de Plücker des droites en entrée.[16] Remarquons tout de même que ce sont des invariants pour l'action classique de $\mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ sur les points de $\mathbb{P}^3$.

Pour conclure. Il semblerait que les configurations de sorties « génériques » pour un prédicat soient naturellement discriminées par les invariants d'une action de groupe encodant la géométrie sous-jacente au prédicat (géométrie des ensembles linéaires de droites ici). Ainsi, l'approche via la théorie des invariants permettrait de construire les polynômes essentiels et suffisants, issus de la géométrie du problème. En outre, elle fournit au moins un cadre théorique solide pour

[15] Normal puisqu'il s'agit du discriminant de la quadrique obtenue comme l'intersection de $\mathbb{G}$ avec le sous-espace projectif de $\mathbb{P}^5$ engendré par les quatre droites.

[16] Les polynômes possèdent trop de variables et de coefficients pour qu'on puisse les comparer (naïvement peut-être) sous Maple.

tenter d'aborder les questions d'optimalité des stratégies d'évaluation d'un prédicat. À partir du moment où l'on connaît une description de l'algèbre homogène des invariants polynomiaux d'une action de groupe[17], il est possible de justifier assez facilement la minimalité du degré d'un polynôme invariant discriminant deux situations géométriques.

5.5 Additif sur l'intersection de deux quadriques de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ☆

Dans cette section, nous complétons l'étude du prédicat d'intersection $\mathscr{P}_\cap$ de deux quadriques de $\mathbb{P}^3$ (section 5.3) et nous concentrons plus particulièrement sur le prédicat de vacuité

$$\mathscr{P}_\varnothing : \begin{cases} \underline{\text{Entrée}} & \text{deux matrices symétriques réelles de taille 4 définissant} \\ & \text{deux quadriques réelles de } \mathbb{P}^3 \text{ en configuration générique} \\ \underline{\text{Sortie}} & \text{vrai si les deux quadriques ont une intersection vide,} \\ & \text{faux sinon} \end{cases}$$

Rappelons qu'une paire de quadriques est en configuration *générique* lorsque l'équation déterminantielle (5.2) possède quatre racines (réelles ou complexes) deux à deux distinctes.

L'objectif est de construire un algorithme d'évaluation polynomiale pour $\mathscr{P}$ dont la profondeur de calcul est uniformément bornée en les entrées. Un tel algorithme existe (théorème 5.7) mais il ne semble pas avoir été découvert, pas même pour un ensemble de dimension maximale des entrées[18], comme en témoigne le petit état de l'art sur la question dans la section 5.5.1. Dans la section 5.5.2, nous nous aventurons du côté de la théorie algébrique des courbes elliptiques *réelles*, dont un modèle, dit de Jacobi, est exactement la donnée de deux quadriques de $\mathbb{P}^3$. Nous comparons les classes d'isomorphisme algébrique réel entre les courbes d'intersection des quadriques et les orbites (de faisceaux) de paires de quadriques pour l'action de groupe étudiée à la section 5.3, ce qui nous permet de constater que la géométrie algébrique apporte un autre éclairage sur le problème sans pour autant le trivialiser.

5.5.1 Petit état de l'art

Cette section regroupe un petit état de l'art sur les résultats de classification des faisceaux de quadriques de $\mathbb{P}^3$ (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, génériques ou pas) et sur les solutions algorithmiques proposées pour le prédicat $\mathscr{P}_\varnothing$.

Classification des faisceaux. Étant donné deux matrices symétriques S et T définissant deux quadriques $\mathcal{Q}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{Q}_\mathrm{T}$, le faisceau engendré par S et T est constitué des quadriques $\mathcal{Q}_{\lambda\,\mathrm{S}+\mu\,\mathrm{T}}$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'équation déterminantielle de S et T est donnée par $\mathrm{D}(\lambda, \mu) = \det(\lambda\,\mathrm{S} + \mu\,\mathrm{T})$.

Tu *et al.* [99] ont décrit les quatre types topologiques correspondants aux situations génériques (figure 5.1) grâce à un théorème de réduction simultanée de deux formes quadratiques, dû à Uhlig [100]. Dans le cas non générique, la classification projective des faisceaux *complexes*

[17] Pour l'action de groupe ρ de notre exemple, il semblerait que l'algèbre des invariants soit engendrée par Δ (d'après ce qu'a pu m'en dire Jerzy Weyman, en utilisant l'outil des *quivers* [89]).

[18] Pour des boules, point de difficulté.

est connue depuis Segre [86] à la fin du XIX^{e} siècle (lorsque $\mathrm{D}(\lambda, \mu)$ n'est pas identiquement nulle). La nature des racines de l'équation déterminantielle ne suffit plus à caractériser les faisceaux, ni même la nature des quadriques dégénérées du faisceau : Segre traduit sous forme de symboles ([1111] pour le cas générique) les conditions d'annulation des mineurs de la matrice $\lambda\mathrm{S} + \mu\mathrm{T}$ pour $\mathrm{D}(\lambda, \mu) = 0$ (voir l'ouvrage de Hodge et Pedoe [50] pour une référence plus accessible). Géométriquement, un faisceau de quadriques est représenté par une droite dans l'espace $\mathbb{P}^9$ des quadriques de $\mathbb{P}^3$ (une matrice symétrique de $\mathbb{K}^4$ est uniquement déterminée par 10 coefficients) : il s'agit donc simplement de décrire le type d'intersection du faisceau avec les sous-variétés de $\mathbb{P}^9$ des quadriques de rang 3, 2 et 1 (Dimca [22]). Enfin, le cas réel a été entièrement traité récemment par Dupont *et al.* [24].

Le problème du vide. Revenons au prédicat $\mathscr{P}_{\varnothing}$. La classification de Dupont *et al.* [24] identifie exactement 4 types de faisceaux sur 55 dont les quadriques ont une intersection vide. Ce sont exactement ceux qui possèdent une quadrique vide (de signature $(4, 0)$). Cette caractérisation était établie dès les années 30 par Finsler [28] (voir l'article de Majindar [63] pour une exposition plus moderne du résultat). Il est possible de l'exploiter algorithmiquement à l'aide d'une technique d'isolation des racines de l'équation déterminantelle : il suffit alors de calculer la signature d'une quadrique quelconque entre chacune de ces racines et de tester si elle est de signature $(4, 0)$ ou $(0, 4)$ [60]. Certes, cet algorithme permet d'évaluer le prédicat $\mathscr{P}_{\varnothing}$, il peut se réécrire en un arbre d'évaluation polynomiale, mais sa profondeur n'est pas bornée uniformément en toutes les entrées possibles : plus les racines de l'équation déterminantielle sont proches entre elles, plus les calculs deviennent nombreux [25].

Wang *et al.* [102] se sont restreints à des paires d'ellipsoïdes affines : ils ont caractérisé l'existence d'un plan séparateur pour deux ellipsoïdes volumiques (condition plus restrictive que la vacuité d'intersection des surfaces) par l'existence de deux racines distinctes strictement positives pour l'équation déterminantielle correspondante. Malheureusement, toute approche reposant uniquement sur l'équation déterminantielle ne peut apporter de solution au problème de vacuité, comme nous l'avons remarqué dans la section 5.3.

Finalement, il semble qu'aucune solution algorithmique n'ait été découverte pour évaluer polynomialement le prédicat $\mathscr{P}_{\varnothing}$ à l'aide d'un arbre uniformément borné en les entrées. Montrons avant toute chose qu'une telle solution existe :

Théorème 5.7.

> *Il existe un arbre d'évaluation polynomiale de profondeur uniformément bornée en les entrées permettant d'évaluer le prédicat $\mathscr{P}_{\varnothing}$ de vacuité de l'intersection de deux quadriques en configuration générique.*

Démonstration. Notons $\mathrm{Mod} \subset \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^9$ l'ensemble des paires de quadriques en configuration générique. C'est un ensemble semi-algébrique défini par $\Delta \neq 0$ avec Δ le discriminant de l'équation déterminantielle d'une paire de quadriques. Ainsi, Mod contient un nombre fini de composantes connexes semi-algébriques [10, Thm.2.4.5]. Notons $\mathscr{X}$ une telle composante et $\mathrm{Mod}_0 \subset \mathrm{Mod}$ l'ensemble des paires de quadriques d'intersection vide. Puisque Mod_0 est un ouvert-fermé de Mod, $\mathscr{X}$ est soit inclus dans Mod_0, soit disjoint de Mod_0 donc Mod_0 est une union finie de semi-algébriques donc est semi-algébrique. □

5.5.2 Du côté des courbes elliptiques

Dans cette section, nous abordons l'étude du prédicat $\mathscr{P}_\varnothing$ via la géométrie algébrique, notamment les courbes elliptiques apparaissant comme les intersections de deux quadriques. Ce contexte nécessite de reconsidérer quelques notations : les objets mathématiques définis dans $\mathbb{C}$ ne sont plus indicés et un objet $\mathcal{O}$ défini dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{O}/\mathbb{R}$.

Courbes elliptiques complexes. Notons $\phi = (q_1, q_2)$ la donnée de deux formes quadratiques non proportionnelles sur $\mathbb{P}^3$, $\mathrm{V}_\phi = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid q_1(x) = q_2(x) = 0\}$ et C_ϕ la courbe algébrique projective définie par l'algèbre homogène $\mathbb{C}[x_0, ..., x_3]/\mathrm{I}(\{q_1; q_2\})$ où $\mathrm{I}(\mathcal{E})$ désigne l'idéal engendré par l'ensemble $\mathcal{E}$. Dans le cas générique, C_ϕ est lisse, irréductible et de genre 1. D'après le Nullstellensatz, $\mathrm{I}(\mathrm{V}_\phi) = \mathrm{C}_\phi$. Ainsi, on peut identifier la courbe abstraite C_ϕ et la courbe $\mathrm{V}_\phi \subset \mathbb{P}^3$. Lorsqu'on distingue un point $\mathrm{O} \in \mathrm{C}_\phi$, on obtient une *courbe elliptique* notée $(\mathrm{C}_\phi, \mathrm{O})$. Il existe plusieurs notions d'équivalence sur tous ces objets :

- ϕ et ϕ' sont *équivalents* si, et seulement si, il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_4$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{GL}_2$ tels que $\phi' = (\mathrm{A} \cdot q_1, \mathrm{A} \cdot q_2)\mathrm{B}$ où $(\mathrm{A} \cdot q)(x) = q({}^t\mathrm{A}x\mathrm{A})$: autrement dit, ϕ et ϕ' appartiennent à la même orbite pour l'action ψ de la section 5.3. Il s'agit d'une équivalence projective des faisceaux de quadriques.
- C_ϕ et $\mathrm{C}_{\phi'}$ sont *projectivement équivalents* s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{PGL}_4$ tel que $\mathrm{V}_{\phi'} = \mathrm{P}(\mathrm{V}_\phi)$: il s'agit de l'équivalence projective des courbes de base des faisceaux de quadriques.
- C_ϕ et $\mathrm{C}_{\phi'}$ sont *isomorphes* s'il existe deux fonctions régulières[19] $\mathrm{C}_\phi \to \mathrm{C}_{\phi'}$ et $\mathrm{C}_{\phi'} \to \mathrm{C}_\phi$ inverses l'une de l'autre : cette équivalence relève de la géométrie algébrique.
- $(\mathrm{C}_\phi, \mathrm{O})$ et $(\mathrm{C}_{\phi'}, \mathrm{O}')$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de C_ϕ dans $\mathrm{C}_{\phi'}$ qui envoie O sur O′.

Dans $\mathbb{C}$, ces différentes notions d'équivalence coïncident :

Théorème 5.8 ([29])**.**

> *Les courbes C_ϕ et $\mathrm{C}_{\phi'}$ sont isomorphes si et seulement si elles sont projectivement équivalentes si et seulement si ϕ et ϕ' sont équivalents.* □

Ainsi, les orbites de faisceaux génériques de quadriques sont entièrement caractérisées par le j-invariant de la courbe d'intersection (5.4).

Courbes réelles de genre 1. En géométrie algébrique, on définit une courbe algébrique réelle non plus comme l'ensemble des zéros de polynômes réels mais plutôt comme l'ensemble $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ des points réels d'une courbe algébrique complexe C, à savoir $\mathrm{C}/\mathbb{R} = \{p \in \mathrm{C} \mid p^\sigma = p\}$ où σ représente la conjugaison complexe. On dit que deux courbes réelles $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}'/\mathbb{R}$ sont *isomorphes* si, et seulement si, il existe un isomorphisme *réel* entre les courbes complexes C et C′. Ce formalisme permet de manipuler des courbes algébriques réelles vides. Les autres notions complexes du paragraphe précédent (équivalences, j-invariant) se transposent aussi au cas réel.

Retour aux intersections réelles de paires de quadriques : ce sont exactement les courbes algébriques réelles $\mathrm{C}_\phi/\mathbb{R}$, de genre 1, possiblement vides. Identifions les classes d'isomorphisme

[19] Sans entrer dans les détails, une fonction régulière sur une variété projective est localement définie par des fonctions polynomiales homogènes (cf. [45]).

réel pour ces courbes et comparons-les aux classes d'équivalence de faisceaux. La table 5.2 résume les relations entre ces deux notions (on exclut de l'étude les cas exceptionnels $j = 0$ et $j = 1728$, non représentatifs pour notre problème).

Montrons que l'équivalence du théorème 5.8 n'est plus satisfaite pour des courbes réelles. Tout d'abord, si $\phi/\mathbb{R}$ et $\phi'/\mathbb{R}$ sont équivalents, alors $\mathrm{C}_\phi/\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}_{\phi'}/\mathbb{R}$ sont projectivement équivalentes et isomorphes. La réciproque n'est plus vraie. Par exemple, considérons les deux courbes suivantes :

$$\mathrm{C}_{\phi_1} : \begin{cases} 2\,x_1x_2 + 2\,x_0x_3 = 0 \\ a\,{x_1}^2 + a\,{x_2}^2 + b\,{x_3}^2 - b\,{x_0}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{D}(\lambda,\mu) = \lambda^4 + (a^2+b^2)\,\lambda^2\mu^2 + a^2b^2\,\mu^4 \\ c_4 = 14\,a^2b^2 + a^4b^4 \\ c_6 = 33\,a^2b^2(a^2+b^2) - a^6 - b^6 \end{cases}$$

$$\mathrm{C}_{\phi_2} : \begin{cases} x_0x_1 - {x_2}^2 = 0 \\ {x_3}^2 + x_0x_2 - \dfrac{16}{3}\,c_4\,x_1x_2 + \dfrac{128}{27}\,c_6\,{x_1}^2 = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{D}(\lambda,\mu) = \dfrac{\mu}{4}\left[\lambda^3 - \dfrac{16}{3}\,c_4\,\lambda\mu^2 - \dfrac{128}{27}\,c_6\mu^3\right] \\ {c_4}^3 - {c_6}^2 > 0 \end{cases}$$

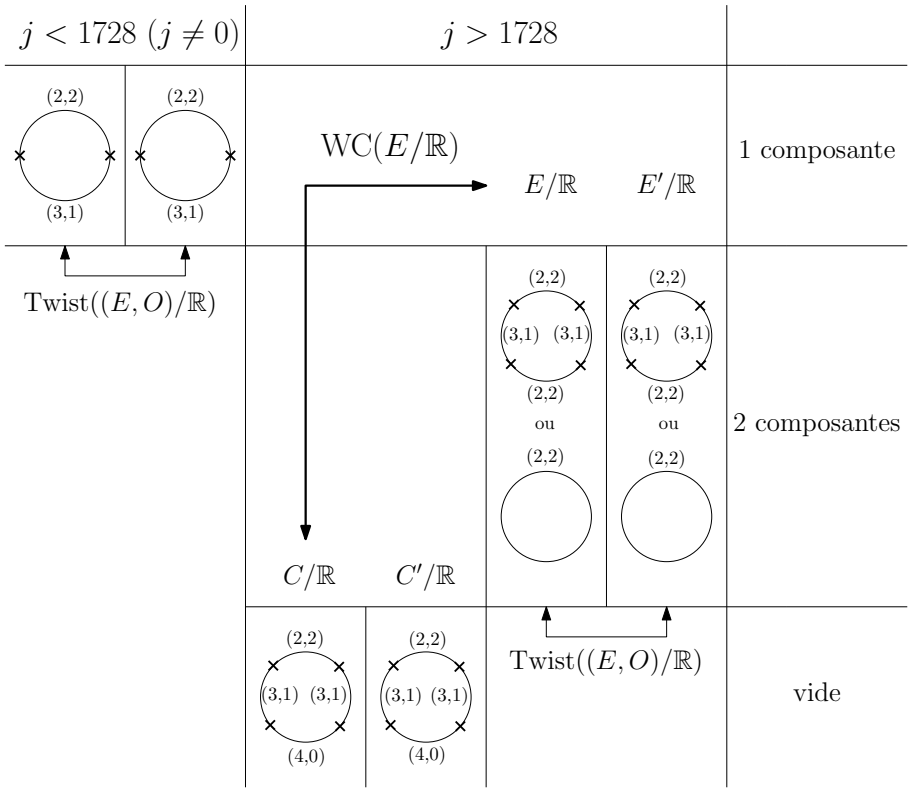
Les deux paires de quadriques ϕ_1 et ϕ_2 ont les mêmes invariants c_4 et c_6 (pour C_{ϕ_2}, les coefficients c_4 et c_6 sont donnés dans C_{ϕ_1} par leur expressions en fonction de a et b) et leurs intersections sont non vides donc $\mathrm{C}_{\phi_1}/\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}_{\phi_2}/\mathbb{R}$ sont deux courbes réelles isomorphes ([88, prop. V.2.2]). En revanche, leurs équations déterminantielles ne possèdent pas le même nombre de racines réelles (0 pour ϕ_1 et 4 pour ϕ_2) donc $\phi_1/\mathbb{R}$ et $\phi_2/\mathbb{R}$ ne sont pas équivalents. Ce phénomène s'explique par le fait que la notion de composante finie ou infinie dépend du plongement de cette composante, et non de sa nature algébrique.

Ce résultat négatif n'empêche aucunement de poursuivre l'étude des classes d'isomorphisme réel de courbes réelles de genre 1 en essayant de voir ce qui distingue les courbes vides des autres. La fin de cette section rappelle brièvement les outils en présence pour constater la difficulté de la question.

Pour toute courbe non vide $\mathrm{E}/\mathbb{R}$, d'invariants c_4 et c_6 tels que $j \notin \{0; 1728\}$, il existe une courbe $\mathrm{E}'/\mathbb{R}$ d'invariants $c'_4 = c_4$ et $c'_6 = -c_6$, qui a donc même j-invariant que $\mathrm{E}/\mathbb{R}$ (donc E et E′ sont isomorphes) mais qui n'est pas isomorphe à $\mathrm{E}'/\mathbb{R}$. La courbe $\mathrm{E}'/\mathbb{R}$ est appelée *twist* de $\mathrm{E}/\mathbb{R}$. Pour j fixé ($j \notin \{0; 1728\}$), il existe exactement deux classes d'isomorphisme réel où une courbe de l'une des classes est un twist d'une courbe de l'autre.

Toute courbe $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ lisse de genre 1 (possiblement vide) est isomorphe sur $\mathbb{C}$ à une courbe réelle $\mathrm{E}/\mathbb{R}$ non vide de genre 1. Quitte à considérer un twist de $\mathrm{E}/\mathbb{R}$, on obtient que le groupe[20] E agit sur C par une action de groupe algébrique simplement transitive définie sur $\mathbb{R}$: on dit que $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ est un *espace homogène principal pour* $\mathrm{E}/\mathbb{R}$. Deux espaces homogènes $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ et $\mathrm{C}'/\mathbb{R}$ pour $\mathrm{E}/\mathbb{R}$ sont *équivalents* s'il existe un isomorphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ défini sur $\mathbb{R}$ qui est compatible avec les actions de E sur C et C′. L'ensemble des classes d'équivalence forment un groupe $\mathrm{WC}(\mathrm{E}/\mathbb{R})$, appelé *groupe de Weil-Châtelet*. Il est à noter que $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ est dans la classe triviale (celle contenant $\mathrm{E}/\mathbb{R}$) si et seulement si $\mathrm{C}/\mathbb{R}$ est non vide ([88, prop X.3.3]). Ainsi, le problème de décision de la vacuité de l'intersection de deux quadriques se réduit au test à zéro dans un groupe de Weil-Châtelet, soit aucune approche triviale cachée pour notre problème du côté des courbes elliptiques.

[20] Une courbe elliptique est canoniquement munie d'une structure de groupe à partir d'un point de base donné.



TAB. 5.2: Classes d'isomorphisme réel des courbes d'intersection de deux quadriques en configuration générique (et $j \notin \{0; 1728\}$).

Pour j fixé, il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme réel : 2 pour $j < 1728$ et $j \neq 0$, 4 pour $j > 1728$, 6 pour $j = 0$ et 4 pour $j = 1728$ (non renseignés dans la figure). Remarquons que, dans le cas où la courbe d'intersection est constituée de deux composantes connexes, il existe deux types de faisceaux : ceux où l'équation déterminantielle $\mathrm{D}(\lambda, \mu)$ possède 4 racines réelles et ceux où $\mathrm{D}(\lambda, \mu)$ n'en possède aucune.

Conclusions et perspectives

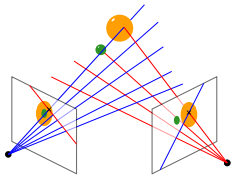
Durant cette thèse, j'ai eu l'occasion de réfléchir sur trois problèmes de vision par ordinateur ou de géométrie algorithmique faisant intervenir la géométrie des droites et s'inscrivant dans une même démarche d'unification et/ou de généralisation de diverses approches sur les sujets. J'ai pu y appporter des réponses plus ou moins abouties. Pour les appareils photo linéaires, les solutions proposées sont a priori complètes : la théorie « préhistorique » des sténopés a été étendue, que ce soit dans le cadre projectif ou euclidien. Pour les épinglages de droites par des convexes, il manque encore l'étude de configurations géométriques particulières. Toutefois, tout un cadre d'étude différentielle a été mis en place et a permis de délimiter les zones de recherches. Enfin, pour les prédicats géométriques, la tâche fut plus difficile, la simplicité de l'exemple des transversales à quatre droites ayant caché toute une forêt de difficultés théoriques. Mes travaux se sont donc restreints à des expérimentations mathématiques. Malgré tout, ces problèmes ouvrent la voie à de nombreuses perspectives, présentées ci-après.

Droites de $\mathbb{P}^n$. Plusieurs résultats de cette thèse s'étendent sans difficulté majeure aux ensembles de droites de l'espace projectif réel de dimension n ($n \geqslant 3$).

Tout d'abord, la grassmannienne $\mathbb{G}_n$ des droites de $\mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble algébrique lisse de $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}$ avec $\mathrm{N} = (n+1)(n+2)/2$. En considérant des sections de $\mathbb{G}_n$ isomorphes à $\mathbb{G}_3$, on montre que l'ensemble des droites transversales à une droite ℓ donnée est obtenu comme l'intersection du sous-espace tangent de $\mathbb{G}_n$ en ℓ avec $\mathbb{G}_n$. À nouveau, on peut s'intéresser aux ensembles linéaires de droites de $\mathbb{P}^n$, c'est-à-dire aux ensembles obtenus comme l'intersection d'un sous-espace de $\mathbb{P}^{\mathrm{N}}$ avec $\mathbb{G}_n$. Piontkowski *et al.* [77] ont étudié les intersections hyperplanes de $\mathbb{G}_n$ dans le cadre complexe. De notre côté, nous avons observé que les applications linéaires de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont le polynôme minimal est de degré 2 engendrent (comme pour les flots linéaires du chapitre 2) toute une variété d'ensembles linéaires de droites de $\mathbb{G}_n$ de dimension $\dim \mathbb{G}_n - 2 = 2n - 4$. Reste à savoir si on les obtient tous.

L'étude des transversales et des tangentes à des convexes de $\mathbb{R}^n$ peut également être menée dans un cadre différentiel pour $n \geqslant 4$. D'une part, nous remarquons que l'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ des tangentes à un convexe rond K de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété différentielle de $\mathbb{G}_n$. D'autre part, il semble[21] que l'espace $\mathbb{T}_\ell \mathcal{L}(\mathrm{K}) \cap \mathbb{G}_n$ représente l'ensemble des droites passant par le point de tangence x de ℓ avec K et des droites contenues dans l'hyperplan tangent de K en x et coupant ℓ. De ce fait, une meilleure connaissance des ensembles linéaires de droites de $\mathbb{P}^n$ permettrait d'obtenir une caractérisation géométrique des configurations génériques de convexes comme au chapitre 4 (section 4.3.2).

Appareils photo algébriques. Une caractéristique du sténopé qui n'est pas étudiée dans cette thèse concerne la propriété suivante des *surfaces épipolaires* : étant donné deux points rétinaux en correspondance stéréoscopique pour deux sténopés, chacun appartient à une droite obtenue comme la projection directe de la droite projection inverse de l'autre.

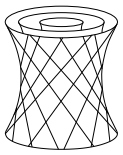


Les projections inverses de chacune de ces droites constituent deux faisceaux ayant même plan support, la surface épipolaire. Seitz et Kim [87] remarquent que cette situation se généralise aux paires d'appareils photo pour lesquels on obtient des surfaces épipolaires hyperboloïdales (éventuellement dégénérées)[22]. Feldman *et al.* [27] caractérisent cette situation pour les appareils

[21] La démonstration n'est pas encore rédigée.

[22] En effet, ce sont les seules surfaces non planes de $\mathbb{R}^3$ qui sont doublement réglées (Fuchs et Tabachnikov [32, Lecture 16] donnent une démonstration élémentaire de ce résultat).

photo hyperboliques[23], Pajdlà [69] pour les appareils photo elliptiques (et obliques en général) où l'on obtient des hyperboloïdes concentriques doublement réglés.



Dans ces situations, au lieu de considérer deux appareils photo, l'idée est de considérer l'union des congruences sous-jacentes pour n'en former qu'une seule. Dans le cas elliptique, on obtient une *congruence algébrique* d'ordre 2 et de classe 2. Il existe toute une zoologie des congruences algébriques d'ordre 2 [93, 109] qui pourraient modéliser de nouveaux appareils photo « stéréo » dont l'intérêt serait de permettre une reconstruction automatique d'une scène. À cause de la géométrie particulière de l'ensemble de droites sous-jacent, des applications seraient possibles en métrologie pour effectuer des mesures de pièces inaccessibles (comme dans les conduites d'un moteur par exemple).

Un moyen d'aborder l'étude des congruences algébriques consiste à tenter de généraliser l'approche de cette thèse via la géométrie des droites, développée pour les congruences et appareils photo linéaires. Une question naturelle est de savoir si l'on peut représenter une congruence algébrique à l'aide d'un flot et si l'on peut caractériser de tels flots le cas échéant. Pour quelques exemples, nous obtenons des flots analytiques, la recherche dans cette direction étant encore à l'état embryonnaire.

Invariants semi-algébriques. Face aux difficultés rencontrées rien que pour l'étude de l'intersection de deux quadriques réelles, nous pourrions nous interroger sur la validité d'une approche portant exclusivement sur la théorie des invariants algébriques, intrinsèquement liée au cadre complexe. Remarquons que le type réel d'une quadrique est caractérisé par sa *signature*, que le type d'intersection de deux coniques du plan l'est par la signature de leur bezoutien [75]. Une signature est un invariant mais il n'est pas algébrique. On peut la déterminer en évaluant le signe de quantités polynomiales[24]. La nature de ces polynômes, pris isolément, nous est inconnue. Toutefois, ils forment tous ensemble un invariant *semi-algébrique*. Quid alors d'une théorie des invariants semi-algébriques dans le contexte de la géométrie algébrique réelle [10] ? Existe-t-il des théorèmes de génération de tels invariants comme dans le cadre algébrique ? De telles questions sont-elles pertinentes ? Toutes ces interrogations dépassent largement le cadre de nos seules connaissances, une collaboration avec des mathématiciens du domaine serait alors nécessaire pour explorer cette voie.

[23] Les deux appareils ont une droite focale en commun ou les droites focales de l'un sont transversales aux droites focales de l'autre.

[24] On applique la règle des signes de Descartes au polynôme caractéristique de la matrice symétrique de la forme quadratique considérée [65].

Annexes

Annexe A

Topologie de $\mathbb{G}$

L'objectif de cette annexe est de prouver que les espaces topologiques $\mathbb{G}'$ et $\mathbb{G}_{\text{Klein}}$ sont homéomorphes où l'on note

- $\mathbb{G}$ l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$ (ensemble « nu », sans aucune structure) ;
- $\mathbb{G}_{\text{Klein}}$ la quadrique de Klein de $\mathbb{P}^5$ munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{P}^5$ ([1]) ;
- $\mathbb{G}' = (\mathbb{G}, \mathcal{O})$ l'espace topologique d'ensemble $\mathbb{G}$ et de topologie $\mathcal{O}$ engendrée par les *ouverts de base* définis comme les ensembles de droites passant par deux ouverts de $\mathbb{P}^3$.

Dans le chapitre 1, on définit l'application de Plücker $\gamma : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}_{\text{Klein}}$ et on montre qu'elle réalise une bijection (lemme 1.1 et proposition 1.2). Montrons que γ réalise un homéomorphisme entre $\mathbb{G}'$ et $\mathbb{G}_{\text{Klein}}$.

Notons Δ l'ensemble des couples $([x],[x])$ pour $[x]$ appartenant à $\mathbb{P}^3$ et $\psi([x],[y])$ la droite définie à partir des deux points distincts $[x]$ et $[y]$ de $\mathbb{P}^3$. L'application

$$\psi\colon \begin{cases} (\mathbb{P}^3)^2\backslash\Delta \longrightarrow \mathbb{G}' \\ ([x],[y]) \longmapsto \psi([x],[y]) \end{cases}$$

est surjective (par définition d'une droite projective de $\mathbb{P}^3$) et continue (l'image réciproque par ψ d'un ouvert de base de $\mathbb{G}$ est un pavé ouvert de $(\mathbb{P}^3)^2\backslash\Delta$). En d'autres termes, $\mathbb{G}'$ est homéomorphe à l'espace quotient $\big((\mathbb{P}^3)^2\backslash\Delta\big)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence induite par ψ :

$$u \sim v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi(u) = \psi(v)$$

Ainsi, $\gamma : \mathbb{G}' \longrightarrow \mathbb{G}_{\text{Klein}}$ est continue si et seulement si $\gamma \circ \psi : (\mathbb{P}^3)^2\backslash \longrightarrow \mathbb{G}_{\text{Klein}}$ l'est. Or l'application $\gamma \circ \psi : ([x],[y]) \mapsto [x \vee y]$ est continue car ses composantes homogènes sont des fonctions polynomiales donc γ est continue sur $\mathbb{G}'$.

Il reste à montrer que la réciproque γ^{-1} est continue. Le lemme A.1 assure que $\mathbb{G}'$ est compact donc[2] γ est un homéomorphisme. Ainsi, la proposition 1.3 est prouvée.

Lemme A.1.
L'espace topologique $\mathbb{G}'$ est compact.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathbb{G}'$ est séparé, c'est-à-dire que, pour deux droites distinctes ℓ_1 et ℓ_2, il existe deux ouverts U_1 et U_2 disjoints de $\mathbb{G}'$ contenant respectivement ℓ_1 et ℓ_2. Pour chaque droite ℓ_i, on construit deux boules centrées en deux points distincts de ℓ_i[ς].

[1] On considère la topologie de $\mathbb{P}^n$ induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $\mathbb{R}^{n+1}$.
[2] Une bijection continue définie sur un compact est un homéomorphisme.

L'ensemble des droites coupant ces deux boules forme un ouvert de base U_i contenant ℓ_i. En réduisant le rayon de ces boules et en les éloignant suffisamment les unes des autres, on obtient deux ouverts U_1 et U_2 disjoints.

Utilisons le critère de Weierstrass pour montrer la compacité de $\mathbb{G}'$. Soient $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de droites et $(\mathrm{P}^1, \mathrm{P}^2, \mathrm{P}^3, \mathrm{P}^4)$ quatre plans de $\mathbb{P}^3$ en position générique (leur intersection est vide). Quitte à extraire une sous-suite, supposons dans un premier temps que ${\ell_n}^\varsigma$ n'est contenue dans aucun de ces plans pour tout $n \in \mathbb{N}$. Notons x_n^i le point d'intersection de ${\ell_n}^\varsigma$ avec P^i. Puisque chacun des plans P^i est un compact de $\mathbb{P}^3$, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall\, i \in \{1,2,3,4\} \qquad x^i_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^i$$

Comme les plans $(\mathrm{P}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ sont en position générique, l'ensemble $\{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ contient au moins deux éléments, x^1 et x^2 par exemple. Pour n suffisamment grand, $\ell_{\varphi(n)} = \psi(x^1_{\varphi(n)}, x^2_{\varphi(n)})$ (avec ψ définie plus haut). Par continuité de ψ, la sous-suite $(\ell_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Il reste à traiter le cas où presque toute droite de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenue dans un plan de $(\mathrm{P}^i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que ${\ell_n}^\varsigma \subset \mathrm{P}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un raisonnement analogue en considérant trois droites de P^1 en position générique, on montre l'existence d'une sous-suite convergente de $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Annexe B

Regulus

Cette annexe présente un ensemble de propriétés sur les reguli que nous établissons à l'aide de techniques très élémentaires fondées essentiellement sur les relations d'incidence entre droites projectives de $\mathbb{P}^3$.

B.1 Définition

On appelle *regulus* l'ensemble des droites transversales à trois droites non concourantes et non coplanaires. Il est dit *dégénéré* lorsque deux de ces trois droites se coupent. On dit que le regulus est *défini* par ces trois droites. Vérifions que cette définition a un sens.

Lemme B.1.
Un regulus est non vide.

Démonstration. Notons ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 les trois droites (distinctes) définissant un regulus $\mathcal{R}$.

- *Cas dégénéré* (cf. figure B.1 à droite). Supposons que ℓ_1 et ℓ_2 se coupent en x, alors ℓ_3 n'est pas contenu dans le plan π support de ℓ_1 et ℓ_2 et ne passe pas par x. Notons π' le plan défini par ℓ_3 et x, et x' le point d'intersection de ℓ_3 avec π. Alors $\mathcal{R}$ est exactement l'union des deux faisceaux de droites de drapeaux (x', π) et (x, π').
- *Cas non dégénéré.* Les droites ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont deux à deux disjointes. Soit x un point de ℓ_1 et considérons le plan défini par x et ℓ_2 : il coupe ℓ_3 en un unique point y, sinon ℓ_2 et ℓ_3 se coupent. Ainsi, $\ell_x = (xy)$ est l'unique droite transversale aux droites (ℓ_i) passant par x. $\mathcal{R}$ est donc une famille de droites à un paramètre. □

Nous démontrons plus loin que l'union des supports des droites d'un regulus non dégénéré forme un hyperboloïde à une nappe (cf. figure B.1). Pour cela, voici quelques propriétés de ces regulus, dont les démonstrations sont purement géométriques.

B.2 Propriétés

Lemme B.2.
Les droites d'un regulus non dégénéré sont deux à deux disjointes.

Démonstration. Soient d et d' deux droites distinctes d'un regulus $\mathcal{R}$ défini par ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Supposons qu'elles se coupent en x. Par définition, chaque droite ℓ_i est transversale à d et d', donc soit est contenue dans le plan support de d et d', soit contient x. Ainsi, au moins deux des droites (ℓ_i) se coupent, d'où $\mathcal{R}$ est dégénéré, ce qui prouve le lemme par contraposée. □

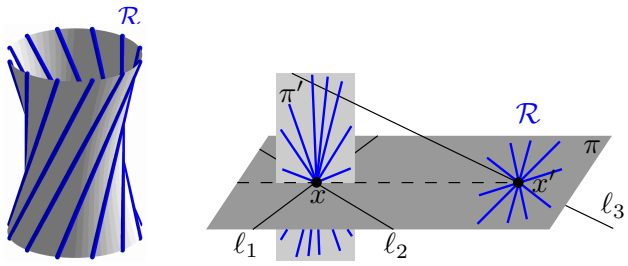


FIG. B.1: Regulus non dégénéré (à gauche) et dégénéré (à droite)

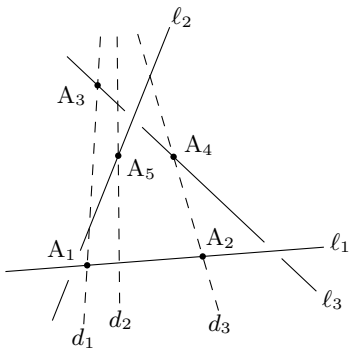


FIG. B.2

Corollaire B.3.

Soient E *et* E′ *deux triplets de droites deux à deux disjointes. Il existe une transformation projective* $g \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ *qui envoie* E *sur* E′.

Démonstration. Considérons trois transversales d_1, d_2, d_3 de $\mathrm{E} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, distinctes d'après le lemme B.2. On définit les points $\mathrm{A}_1, ..., \mathrm{A}_5$ comme sur la figure B.2. On fait de même pour le triplet E′. Soit $g \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ l'unique transformation projective qui envoie A_i sur A'_i pour tout $i = 1...5$. Alors g envoie ℓ_1 sur ℓ'_1, ℓ_3 sur ℓ'_3, d_1 sur d'_1 et d_3 sur d'_3. En considérant à présent le regulus défini par d_1, d_2, d_3, le lemme B.2 assure que ℓ_2 est l'unique droite transversale aux deux droites d_1 et d_3 passant par A_5 (idem pour ℓ'_2). Puisque $g(\mathrm{A}_5) = \mathrm{A}'_5$ et que g préserve les incidences, g envoie ℓ_2 sur ℓ'_2. □

Lemme B.4.

Si une droite coupe trois droites non coplanaires d'un regulus $\mathcal{R}$*, elle coupe toutes les droites de* $\mathcal{R}$*. Par conséquent,*

(i) l'ensemble des droites transversales aux droites de $\mathcal{R}$ *forme un regulus, appelé le* regulus dual *de* $\mathcal{R}$ *;*

(ii) une droite de $\mathbb{P}^3$ *appartient soit à* $\mathcal{R}$*, soit à son dual, ou bien coupe au plus 2 droites de* $\mathcal{R}$ *(ou bien passe par le centre d'un des faisceaux de* $\mathcal{R}$ *s'il est dégénéré).*

Ce lemme permet alors de définir le regulus engendré par trois droites :

Définition B.5. *Soit* E *un ensemble de trois droites non concourantes et non coplanaires. Le regulus* engendré *par* E *est le regulus dual du regulus défini par* E.

Démonstration du lemme B.4. Soient $\mathcal{R}$ défini par ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et d_1, d_2, d_3 trois droites non coplanaires de $\mathcal{R}$ (donc transversales aux (ℓ_i)). Considérons ℓ une droite transversale aux (d_i) et d une droite de $\mathcal{R}$ distincte des (d_i). Montrons que ℓ et d se coupent. Cela s'observe immédiatement dans le cas des reguli dégénérés. Dans le cas non dégénéré, considérons la transformation projective $g \in \mathbb{P}\mathrm{GL}_4$ envoyant (d_1, d_2, d_3) sur (d_1, d_2, d) d'après le corollaire B.3. Elle préserve globalement ℓ car les points $\ell \cap d_1$ et $\ell \cap d_2$ sont fixés. Ainsi, elle envoie $\ell \cap d_3$ sur $\ell \cap d$, ce qui prouve la première partie du lemme.

Par conséquent, l'ensemble des transversales à $\mathcal{R}$ est exactement l'ensemble des transversales à trois de ses droites non concourantes et non coplanaires. C'est un regulus par définition, ce qui vérifie le point *(i)*.

Soit ℓ une droite n'appartenant ni à $\mathcal{R}$, ni à son dual : elle coupe un nombre fini de droites de $\mathcal{R}$ (excepté le cas où $\mathcal{R}$ est dégénéré et ℓ passe par un centre des faisceaux). D'après la première partie du lemme, elle ne peut en couper qu'au plus deux, ce qui vérifie le point *(ii)*. □

B.3 Hyperboloïde support

Proposition B.6.

L'union des supports des droites d'un regulus $\mathcal{R}$ non dégénéré forme un hyperboloïde $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{P}^3$.

Démonstration. Admis. □

Notons que l'hyperboloïde est l'unique surface lisse de $\mathbb{P}^3$ doublement réglée (à équivalence projective près) [32, Lecture 16]. Une équation réduite d'un hyperboloïde est donnée par $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$. Énonçons au passage quelques propriétés des plans tangents à un hyperboloïde.

Lemme B.7.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperboloïde support d'un regulus $\mathcal{R}$ non dégénéré. L'intersection de $\mathcal{H}$ avec un de ses plans tangents est constituée d'une droite de $\mathcal{R}$ et d'une autre de son dual.

Démonstration. Admis. □

Lemme B.8.

Soit ℓ une droite de support inclus dans un hyperboloïde $\mathcal{H}$. L'application qui à un point x de ℓ associe le plan tangent à $\mathcal{H}$ en x est une corrélation.

Démonstration. Admis. □

Annexe C

Algèbre de Grassmann-Cayley

« The computational power of the double algebra, first intuited by Hermann Grassmann, was obscured in the later development of exterior algebra in this century by the distinction between the exterior algebra of a vector space V and the exterior algebra of its dual space V*. It has been our purpose to restore Grassmann's original ideas to their full geometrical power. »
Barnabei, Brini, Rota (1985, [2])

Nous présentons dans cette annexe quelques éléments fondamentaux à propos des algèbres de Grassmann-Cayley. On pourra se référer au résumé complet de Barnabei *et al.* [2] sur le sujet. Une algèbre de Grassmann-Cayley $\Lambda(\mathrm{V})$ permet d'affecter un système de coordonnées (appelées *coordonnées grassmanniennes*) à l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V fixé de dimension finie n (dans toute la suite, le corps de base est $\mathbb{R}$). Trois opérateurs sont définis sur ces coordonnées :

- l'*opérateur de jointure* $\vee$ (*join operator* en anglais) modélisant la somme directe $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ de deux sous-espaces vectoriels E et F (autrement dit, $\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{0\}$) ;
- l'*opérateur de rencontre* $\wedge$ (*meet operator* en anglais) modélisant l'intersection transverse $\mathrm{E} \pitchfork \mathrm{F}$ de deux sous-espaces vectoriels E et F (autrement dit, $\mathrm{E} + \mathrm{F} = \mathrm{V}$) ;
- l'*opérateur de Hodge* $\star$ modélisant le dual $\mathrm{E}*$ d'un espace vectoriel E où [1]

$$\mathrm{E}^* = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{V} \mid \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E} \quad a_1\, x_1 + \cdots + a_n\, x_n = 0\} \tag{C.1}$$

Notations. Soient M une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$ et $k \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!]$ un entier. Notons Φ_k^n l'ensemble des k-uplets d'entiers de $[\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ deux à deux distincts rangés dans l'ordre croissant. Quelques raccourcis : $((n))$ désigne l'unique élément de Φ_n^n et $\widehat{i}$ l'élément de Φ_{n-1}^n ne comportant pas l'entier i.

Pour $\varphi \in \Phi_k^n$, on note ${}^{\mathrm{c}}\varphi$ l'élément de Φ_{n-k}^n dont les entiers sont exactement ceux de $[\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ qui n'apparaissent pas dans φ. Par exemple,

$$\varphi = (1, 2, 4, 6) \in \Phi_4^7 \qquad \text{et} \qquad {}^{\mathrm{c}}\phi = (3, 5, 7) \in \Phi_3^7$$

[1] En toute rigueur, le dual de E est l'ensemble des formes linéaires sur V qui s'annulent sur E. L'espace vectoriel des formes linéaires sur V est isomorphe à V. Notre définition (qui n'est pas intrinsèque) s'appuie sur un tel isomorphisme.

Le produit cartésien de φ et ${}^{\mathrm{c}}\varphi$ s'identifie alors à une permutation de $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$: on note $\varepsilon(\varphi)$ la signature de cette permutation. Dans l'exemple précédent,

$$\varphi \times {}^{\mathrm{c}}\varphi = (1,2,4,6,3,5,7) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\varphi) = -1$$

Enfin, pour $\varphi, \varphi' \in \Phi_k^n$, notons $\det(\mathrm{M})_{\varphi,\varphi'}$ le déterminant de la sous-matrice de M par extraction (dans l'ordre) des lignes indicées par les entiers de φ et des colonnes indicées par les entiers de φ'.

C.1 Modèle des grassmanniennes

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de l'espace vectoriel[2] $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathbb{G}_{k,n}$. Un tel ensemble est appelé *grassmannienne*. Grâce à la projection canonique $\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$, les grassmanniennes représentent également les ensembles de sous-espaces projectifs d'un espace projectif fixé. Pour $k = 2$ et $n = 4$, $\mathbb{G}_2^4$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^3$, noté $\mathbb{G}$ dans le manuscrit, dont les coordonnées sont appelées *coordonnées de Plücker*.

Algèbre extérieure. L'*algèbre extérieure* $(\Lambda(\mathbb{R}^n), +, \vee, \cdot)$ est l'algèbre la plus générale contenant $\mathbb{R}^n$ et muni d'un opérateur $\vee$ associatif, antisymétrique et bilinéaire. [3] L'opérateur $\vee$ est appelé *produit extérieur*. L'algèbre extérieure est graduée :

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) = \textstyle\bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$$

où $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est le sous-espace vectoriel de $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ engendré par les produits extérieurs de k éléments de $\mathbb{R}^n$. Celui-ci est de dimension $\binom{n}{k}$: en effet, si on note $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$, une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\{e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_k} \,|\, 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqslant n\} \tag{C.2}$$

On note $e_{\vee\, j_1 \cdots j_k} = e_{j_1} \vee \cdots \vee e_{j_k}$. Remarquons que $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ pour $k > n$ à cause de l'antisymétrie de $\vee$. On identifie $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)$ à $\mathbb{R}$ et $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ à $\mathbb{R}^n$. L'algèbre extérieure $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ est donc de dimension 2^n. Les coordonnées d'un élément de $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ relativement aux bases précédentes sont appelées *coordonnées grassmanniennes*.

Extenseurs. Par multilinéarité et antisymétrie de $\vee$, le produit extérieur de k vecteurs $a_1, \ldots, a_k$ de $\mathbb{R}^n$ s'exprime à l'aide des mineurs d'ordre k de la matrice de ces vecteurs

$$a_1 \vee \cdots \vee a_k = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} \begin{vmatrix} a_{j_1 1} & a_{j_1 2} & \ldots & a_{j_1 k} \\ a_{j_2 1} & a_{j_2 2} & \ldots & a_{j_2 k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j_k 1} & a_{j_k 2} & \ldots & a_{j_k k} \end{vmatrix} e_{j_1} \vee \cdots \vee e_{j_k} = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n} a_{\vee\, j_1 \cdots j_k}\, e_{\vee\, j_1 \ldots j_k} \tag{C.3}$$

Par conséquent, $a_1 \vee \cdots \vee a_k$ est non nul si et seulement si ces vecteurs sont linéairement indépendants. Dans ce cas, $\mathrm{A} = a_1 \vee \cdots \vee a_k$ est appelé *extenseur d'ordre k*.

[2] Ce qui suit est également valable pour des espaces vectoriels plus généraux.

[3] Pour simplifier la présentation, nous définissons ici l'algèbre extérieure par générateurs et relations. Formellement, elle s'obtient comme le quotient de l'algèbre tensorielle sur $\mathbb{R}^n$ par l'idéal engendré par les éléments $v \otimes v$ avec $v \in \mathbb{R}^n$.

Grassmanniennes. Notons $[\mathrm{A}]'$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs d'un extenseur A d'ordre k. Déterminons l'ensemble des extenseurs B tels que $[\mathrm{A}]' = [\mathrm{B}]'$. Remarquons déjà que

$$[\mathrm{A}]' = \{v \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathrm{A} \vee v = 0\} \tag{C.4}$$

Ainsi, les vecteurs composant l'extenseur B forment nécessairement une base de $[\mathrm{A}]'$. En notant $\mathrm{M_A}$ et $\mathrm{M_B}$ les matrices colonnes des vecteurs de A et B respectivement, on obtient l'existence d'une matrice Q inversible de taille k telle que $\mathrm{M_A} = \mathrm{M_B}\,\mathrm{Q}$. D'après la formule (C.3), on en déduit que $\mathrm{A} = (\det \mathrm{Q})\,\mathrm{B}$. Finalement, le point projectif [A] représente le sous-espace vectoriel $[\mathrm{A}]'$, identifié à [A]. La grassmannienne $\mathbb{G}_{k,n}$ est alors exactement le quotient projectif de l'ensemble des extenseurs d'ordre k de $\Lambda(\mathbb{R}^n)$. Elle s'obtient comme l'intersection de quadriques de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ définies par les *relations de Plücker*.

Puissance extérieure. Le groupe GL_n des transformations linéaires de $\mathbb{R}^n$ agit sur les extenseurs d'ordre k via l'action de groupe $\wedge_n^k$ suivante : pour tout $g \in \mathrm{GL}_n$, il existe une bijection $\wedge_n^k g$ de l'ensemble des extenseurs d'ordre k vérifiant

$$\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n \qquad (\wedge_n^k g)(a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k) = g(a_1) \vee g(a_2) \vee \cdots \vee g(a_k) \tag{C.5}$$

Autrement dit, $\wedge_n^k g$ traduit sur les extenseurs d'ordre k la transformation g sur les sous-espaces vectoriels de dimension k :

$$\big[(\wedge_n^k g)(\mathrm{A})\big] = g([\mathrm{A}])$$

En développant la relation (C.5), on s'aperçoit que $\wedge_n^k g$ s'étend en une application linéaire sur $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Les coefficients de sa matrice dans la base (C.2) sont donnés par les mineurs correspondants de taille k de la matrice de g dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

C.2 Les trois opérateurs

Opérateur de jointure. L'opérateur de jointure n'est rien d'autre que la restriction du produit extérieur aux extenseurs. D'après la relation (C.4), l'interprétation géométrique sur les sous-espaces vectoriels correspondants est donnée par la relation

$$\boxed{[\mathrm{A} \vee \mathrm{B}] = [\mathrm{A}] \oplus [\mathrm{B}]}$$

où A et B sont deux extenseurs tels que $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \neq 0$. Les coordonnées grassmanniennes de $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ s'obtiennent à partir de celles de A et B grâce à la relation (C.3) et à la formule (C.6) de déterminant par blocs.

Corollaire : formule du déterminant par blocs. Pour $\varphi \in \Phi_k^n$ fixé, la formule du déterminant de M par blocs suivant les colonnes indicées par ϕ s'écrit

$$\det \mathrm{M} = \varepsilon(\varphi) \sum_{\varphi' \in \Phi_k^n} \varepsilon(\varphi')\, \det(\mathrm{M})_{\varphi,\varphi'}\, \det(\mathrm{M})_{{}^{\mathrm{c}}\varphi,{}^{\mathrm{c}}\varphi'} \tag{C.6}$$

Les formules de développement par ligne sont similaires. Par exemple, pour $k = 2$, $n = 4$ et $\varphi = (1, 2)$, en notant $p_{i,j} = \det(\mathrm{M})_{(1,2),(i,j)}$ et $q_{i,j} = \det(\mathrm{M})_{(3,4),(i,j)}$, on obtient

$$\det \mathrm{M} = p_{1,2}q_{3,4} - p_{1,3}q_{2,4} + p_{1,4}q_{2,3} + q_{1,2}p_{3,4} - q_{1,3}p_{2,4} + q_{1,4}p_{2,3} \tag{C.7}$$

Pour $k = 1$, on obtient le développement classique par rapport à une colonne (*Laplace expansion* en anglais).

Opérateur de rencontre. On introduit à présent l'opérateur de rencontre $\wedge$ afin d'obtenir un analogue de l'encadré précédent pour l'intersection de sous-espaces vectoriels. Soient A et B deux extenseurs d'ordre j et k respectivement. Si $j+k<n$, alors $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}=0$, sinon

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\wedge\mathrm{B} &= \sum_{\varphi\in\Phi^{j}_{n-k}} \varepsilon(\varphi)\,\det(a_{\varphi(1)},\dots,a_{\varphi(n-k)},b_1,...,b_k)\;a_{^{\mathrm{c}}\varphi(n-k+1)}\vee\ldots\vee a_{^{\mathrm{c}}\varphi(j)}\\ &= \sum_{\varphi\in\Phi^{k}_{n-j}} \varepsilon(\varphi)\,\det(a_1,\dots,a_j,b_{\varphi(1)},...,b_{\varphi(n-j)})\;b_{^{\mathrm{c}}\varphi(n-j+1)}\vee\ldots\vee a_{^{\mathrm{c}}\varphi(k)}\end{aligned}$$

On montre l'égalité des deux formules car ce sont les expressions de deux formes $(j+k)$-multilinéaires en $(a_1,\dots,a_j,b_1,\dots,b_k)$ qui coïncident pour les vecteurs de base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On admet aussi que $\wedge$ est associatif et bilinéaire. Ainsi, $(\Lambda(\mathbb{R}^n),+,\vee,\wedge,\cdot)$ possède une structure de double algèbre pour les deux opérateurs $\vee$ et $\wedge$, appelée *algèbre de Grassmann-Cayley*. Il n'existe toutefois aucune relation de distributivité entre ces deux opérateurs. Terminons par le lemme donnant l'interprétation géométrique de l'opérateur de rencontre :

Lemme C.1.

Soient A *et* B *deux extenseurs d'ordre j et k respectivement tels que* $[\mathrm{A}]+[\mathrm{B}]=\mathbb{R}^n$. *Alors* $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}$ *est un extenseur d'ordre $j+k-n$ et il satisfait la relation*

$$\boxed{[\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}]=[\mathrm{A}]\pitchfork[\mathrm{B}]}$$

Démonstration. En raisonnant matriciellement comme pour le produit extérieur, remarquons que l'expression $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}$ ne diffère que d'un coefficient multiplicatif pour n'importe quel choix de vecteurs pour les extenseurs A et B engendrant les mêmes sous-espaces [A] et [B] respectivement. Ainsi, en notant $(c_1,\dots,c_d)$ une base de $[\mathrm{A}]\pitchfork[\mathrm{B}]$ (avec $d=j+k-n$), considérons (à un coefficient multiplicatif près)

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}=c_1\vee\cdots\vee c_d\vee a_1\vee\cdots\vee a_{j-d}\\ \text{et}\qquad&\mathrm{B}=c_1\vee\cdots\vee c_d\vee b_1\vee\cdots\vee b_{k-d}\end{aligned}$$

Quelle que soit la formule utilisée pour $\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}$, on obtient un multiple de $c_1\vee\cdots\vee c_d$, qui est un extenseur représentant le sous-espace $[\mathrm{A}]\pitchfork[\mathrm{B}]$. □

Opérateur de Hodge. On définit d'abord l'opérateur de Hodge $\star$ sur les vecteurs de base de $\Lambda(\mathbb{R}^n)$:

$$\star\, e_{\vee\,\varphi(1)\ldots\varphi(k)}=\varepsilon(\varphi)\,e_{\vee\,^{\mathrm{c}}\varphi(k+1)\ldots^{\mathrm{c}}\varphi(n)}$$

L'opérateur $\star$ est ensuite étendu sur $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ entier par linéarité. Il traduit la dualité classique droite/hyperplan vectoriel dans $\mathbb{R}^n$:

Lemme C.2.

Soit A *un extenseur d'ordre k. Alors* $\star$A *est un extenseur d'ordre $n-k$ et vérifie*

$$\boxed{[\star\mathrm{A}]=[\mathrm{A}]^*}$$

Démonstration. Commençons par le cas où A est un extenseur d'ordre 1. Par convenance, notons-le $a=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$. Pour $v\in\mathbb{R}^n$, calculons

$$\star a\vee v=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\,(\star e_i)\right)\vee\left(\sum_{i=1}^{n}v_i\,e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\left((-1)^i\,e_{\widehat{i}}\vee e_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)\,e_{((n))}$$

Ainsi, $$\star a \vee v = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

On obtient l'équation de l'hyperplan $[a]^\star$. En considérant $n-1$ vecteurs $v^1, v^2, \ldots, v^{n-1}$ de cet hyperplan, on peut montrer par le calcul que $\star a$ est un multiple de $v^1 \vee v^2 \vee \cdots \vee v^{n-1}$. On en déduit que $\star a$ est un extenseur d'ordre $n-1$ et que $[\star a] = [a]^*$.

Considérons à présent un extenseur A d'ordre k noté $\mathrm{A} = a_1 \vee \cdots \vee a_k$. Les applications

$$(a_1, \ldots, a_k) \longmapsto \star(a_1 \vee \cdots \vee a_k) \qquad \text{et} \qquad (a_1, \ldots, a_k) \longmapsto (\star a_1) \wedge \cdots \wedge (\star a_k)$$

sont multilinéaires et on vérifie qu'elles coïncident pour les vecteurs de base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Ainsi,

$$\star(a_1 \vee \cdots \vee a_k) = (\star a_1) \wedge \cdots \wedge (\star a_k) \tag{C.8}$$

D'après le lemme C.1 et la première partie de cette démonstration, on obtient que $\star\mathrm{A}$ est un extenseur d'ordre $n-k$ et que

$$[\star \mathrm{A}] = [\star(a_1 \vee \cdots \vee a_k)] = \bigwedge_{i=1}^{k} [\star a_i] = \bigwedge_{i=1}^{k} [a_i]^* = [\mathrm{A}]^*$$

d'après les propriétés du dual $\cdot^*$. □

Produit vectoriel. Dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ de deux vecteurs est défini par

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \star\left(\overrightarrow{a} \vee \overrightarrow{b}\right)$$

Rappelons quelques formules sur les produits vectoriels :

$$\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) \times \overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a})\ \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{b})\ \overrightarrow{a} \tag{C.9}$$

$$\mathrm{P}\overrightarrow{a} \times \mathrm{P}\overrightarrow{b} = (\mathrm{Com}\,\mathrm{P})\,(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \tag{C.10}$$

Formulaire dans $\mathbb{P}^3$. Il s'agit un formulaire dans l'algèbre $\Lambda(\mathbb{R}^4)$. Les éléments de $\Lambda^k\mathbb{R}^4$ sont exprimés dans la base (C.2) où les éléments sont rangés par indices croissants lexicographiquement. Attention, les coordonnées de Plücker introduites dans le chapitre 1 sont données par $(\ell_{01}, \ell_{02}, \ell_{03}, \ell_{23}, -\ell_{13}, \ell_{12})$.

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad a \vee b = \begin{pmatrix} \det(a,b)_{(0,1)} \\ \det(a,b)_{(0,2)} \\ \det(a,b)_{(0,3)} \\ \det(a,b)_{(1,2)} \\ \det(a,b)_{(1,3)} \\ \det(a,b)_{(2,3)} \end{pmatrix} \qquad a \vee b \vee c = \begin{pmatrix} \det(a,b,c)_{\widehat{3}} \\ \det(a,b,c)_{\widehat{2}} \\ \det(a,b,c)_{\widehat{1}} \\ \det(a,b,c)_{\widehat{0}} \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

$$\star a = \begin{pmatrix} a_3 \\ -a_2 \\ -a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \star\ \ell = \begin{pmatrix} \ell_{23} \\ -\ell_{13} \\ \ell_{12} \\ \ell_{03} \\ -\ell_{02} \\ \ell_{01} \end{pmatrix} \qquad \star\ p = \begin{pmatrix} -p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ -p_0 \end{pmatrix} \tag{C.12}$$

$$\ell \wedge p = \begin{pmatrix} 0 & \ell_{01} & -\ell_{02} & \ell_{03} \\ \ell_{01} & 0 & \ell_{12} & -\ell_{13} \\ -\ell_{02} & \ell_{12} & 0 & \ell_{23} \\ \ell_{03} & -\ell_{13} & \ell_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} \qquad p \wedge q = \begin{pmatrix} \det(p,q)_{(0,1)} \\ \det(p,q)_{(0,2)} \\ \det(p,q)_{(1,2)} \\ \det(p,q)_{(0,3)} \\ \det(p,q)_{(1,3)} \\ \det(p,q)_{(2,3)} \end{pmatrix} \tag{C.13}$$

$$\ell \vee a = a \vee \ell = \begin{pmatrix} 0 & \ell_{01} & \ell_{02} & \ell_{12} \\ \ell_{01} & 0 & \ell_{03} & \ell_{13} \\ \ell_{02} & \ell_{03} & 0 & \ell_{23} \\ \ell_{12} & \ell_{13} & \ell_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ -a_0 \end{pmatrix} \qquad a \vee p = -p \vee a = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \, a_i \, p_{\widehat{i}}$$

C.3 Quelques démonstrations pédestres

Une introduction à la géométrie des droites ne nécessite pas d'introduire tout le formalisme de l'algèbre de Grassmann-Cayley. Dans le chapitre 1, nous avons fait le choix de présenter uniquement les extenseurs d'ordre 2, ce qui suffit largement pour obtenir les résultats dont nous avons besoin. Parfois, certaines démonstrations sont assez laborieuses lorsqu'on se réduit à ce cadre. Nous les regroupons dans cette section.

Dans la section C.1, nous obtenons que deux sous-espaces distincts ont des coordonnées grassmanniennes distinctes. Le lemme suivant correspond au cas des droites. Sa démonstration n'utilise pas le produit extérieur de trois vecteurs.

Lemme C.3.
L'application de Plücker γ est injective.

Démonstration. Soit $\ell = [a \vee b]'$ une droite définie par deux points distincts $[a]$ et $[b]$ de $\mathbb{P}^3$. Un point $[x]$ appartient à ℓ^ς si et seulement si la matrice de vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a & b & x \end{pmatrix}$ est de rang 2, si et seulement si tous ses mineurs de taille 3 sont nuls. En développant ces mineurs par rapport à la dernière colonne et en notant $\gamma(\ell) = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_5]$, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & \zeta_3 & -\zeta_4 & \zeta_5 \\ -\zeta_3 & 0 & \zeta_2 & -\zeta_1 \\ \zeta_4 & \zeta_2 & 0 & -\zeta_0 \\ -\zeta_5 & \zeta_1 & \zeta_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque les coordonnées $(\zeta_0, \ldots, \zeta_5)$ ne sont pas toutes nulles, remarquons que ce système est de rang au moins 2. Par conséquent, l'ensemble des solutions de ce système est exactement

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid [x] \in \ell^\varsigma\}$$

Pour deux droites ℓ_1 et ℓ_2 données, on en déduit :

$$\gamma(\ell_1) = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_6] = \gamma(\ell_2) \quad \Longrightarrow \quad {\ell_1}^\varsigma = \ell^\varsigma = {\ell_2}^\varsigma$$

Sachant que $\ell_1 = \ell_2 \iff {\ell_1}^\varsigma = {\ell_2}^\varsigma$, on en conclut que γ est injective. □

Le lemme suivant décrit les coordonnées de Plücker du dual d'une droite affine ℓ de $\mathbb{R}^3$ en fonction de celle de ℓ, en utilisant simplement la notion classique de dualité dans $\mathbb{R}^3$ (découlant de celle dans $\mathbb{P}^3$, cf. définition C.1).

Lemme C.4.

Soit ℓ une droite affine ne passant pas par l'origine, de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et de moment $\overrightarrow{\eta}$. Alors, la droite duale ℓ^* est une droite affine ne passant pas par l'origine, de vecteur directeur $\overrightarrow{\eta}$ et de moment $\overrightarrow{v}$.

Démonstration. [4] Soient A et B deux points distincts de ℓ. La droite duale ℓ^* est l'intersection des deux hyperplans A^* et B^*. D'après la définition (C.1), $\star A$ est le plan orthogonal à la droite (OA) passant par le point A′ défini par $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}/\|OA\|^2$. Ainsi, $\ell^* = A^* \cap B^*$ a une direction orthogonale à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ donc est dirigée par $\overrightarrow{\eta}$.

Calculons maintenant le moment $\overrightarrow{\eta}'$ de la droite ℓ^*. Notons M un point de ℓ et M′ un point de ℓ'. On obtient

$$\overrightarrow{\eta}' = \overrightarrow{OM'} \times \overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{OM'} \times (\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM})\,\overrightarrow{v} \tag{C.14}$$

Choisissons M la projection orthogonale de O sur ℓ et M′ l'intersection de $\star\ell$ avec le plan π engendré par O, A et B (cf. figure ci-contre). Remarquons que

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{a}\,a = -1$$

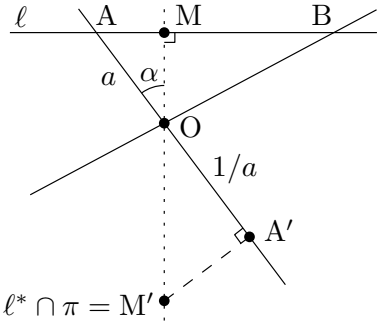
idem avec B. Ainsi, $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. On en déduit d'une part que $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ et d'autre part que O, M et M′ sont alignés. Par conséquent, l'équation (C.14) se réduit à

$$\overrightarrow{\eta}' = -(\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM})\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{OM}\|\,\|\overrightarrow{OM'}\|\,\overrightarrow{v}$$

Enfin, en notant α l'angle indiqué sur la figure, on calcule

$$\|\overrightarrow{OM}\|\,\|\overrightarrow{OM'}\| = a\cos\alpha \times \frac{1/a}{\cos\alpha} = 1$$

Finalement, $\overrightarrow{\eta}' = \overrightarrow{v}$ donc $(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{v})$ sont des coordonnées de Plücker de ℓ^*. □



[4] Comme la démonstration se déroule exclusivement dans $\mathbb{R}^3$, on s'abstrait de la notation ℓ^ς pour le support d'une droite ℓ.

Annexe D

Compléments sur les ensembles de tangentes et de transversales à un convexe

Cette section apporte des démonstrations et des compléments sur les résultats de la section 4.2 portant sur l'étude de la régularité des ensembles de tangentes à un convexe (section D.1) et de leurs sous-espaces approximants au premier ordre (section D.2). Nous ne rappelons aucune notation et renvoyons directement à la section 4.2.

D.1 Résultats de régularité

Cette section regroupe trois résultats de régularité sur l'ensemble des tangentes à un convexe lorsque : le convexe est rond (proposition D.1), le convexe est un polyèdre (proposition D.2), le convexe est quelconque (proposition D.3).

Proposition D.1.

> *Soit* K *un convexe de classe* $\mathscr{C}^k$ *(*$k \geqslant 2$*) et* ℓ_0 *une droite tangente à* K *ayant un contact d'ordre au plus 1. Dans un voisinage de* ℓ_0 *dans* $\mathcal{L}(\mathrm{K})$*, la fonction qui à une droite associe son unique point de contact avec* $\partial\mathrm{K}$ *est de classe* $\mathscr{C}^{k-1}$*.*

Démonstration. Montrons que s est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. Remarquons d'abord que c'est la restriction à V de la fonction $\widetilde{s} : \mathbb{G} \to \mathbb{R}^3$ définie dans un voisinage W de ℓ_0 par

$$\widetilde{s}(\ell) = \operatorname{argmin} \{ \rho_{\mathrm{K}}(x) \mid x \in \ell \}$$

où ρ_{K} est la fonction de gauge associée à K, donc de classe $\mathscr{C}^k$. Considérons la paramétrisation $\psi : (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{G}$ par deux plans parallèles orthogonaux à ℓ_0 (cf. chapitre 1) : $\psi(u, v)$ est la droite passant par les points $\mathrm{M}_1(u)$ et $\mathrm{M}_2(v)$ avec $\psi(0, 0) = \ell_0$. La fonction ψ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme localement autour de ℓ_0. Ainsi, il suffit de montrer que $\widetilde{s} \circ \psi$ est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ au voisinage de $(0, 0)$ pour que $\widetilde{s}$, donc s, le soit au voisinage de ℓ_0.

Définissons
$$f : \begin{cases} (\mathbb{R}^2)^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, t) \longmapsto \rho_{\mathrm{K}}\big((1-t)\,\mathrm{M}_1(u) + t\,\mathrm{M}_2(v)\big) \end{cases}$$

qui est bien de classe $\mathscr{C}^k$. Notons $\overrightarrow{d}(u, v) = \overrightarrow{\mathrm{M}_1(u)\mathrm{M}_2(v)}$ une direction de la droite $\psi(u, v)$. Considérons alors

$$g(u, v, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(u, v, t) = \overrightarrow{d}(u, v) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \rho_{\mathrm{K}}(f(u, v, t))$$

Par définition, $\quad \widetilde{s}\circ\psi(u,v) = (1-t)\,\mathrm{M}_1(u) + t\,\mathrm{M}_2(v) \quad \Longleftrightarrow \quad g(u,v,t) = 0$

Vérifions les hypothèses du théorème des fonctions implicites pour exprimer t en fonction de (u,v) lorsque $g(u,v,t)=0$. D'abord, g est de classe $\mathscr{C}^{k-1}$, avec $k-1 \geqslant 1$. Notons t_0 le paramètre correspondant au point de contact $s(\ell_0) = (1-t_0)\,\mathrm{M}_1(u) + t_0\,\mathrm{M}_2(v)$ de ℓ_0 avec K. Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0,0,t_0) = \overset{t}{\overrightarrow{d}}(0,0)\ \Big(\mathrm{Hess}\,\rho_{\mathrm{K}}(s(\ell_0))\Big)\ \overrightarrow{d}(0,0) \neq 0$$

car la droite ℓ_0 n'a pas un contact d'ordre 2 avec K. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $h : (\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{k-1}$ dans un voisinage de $(0,0)$ telle que

$$g(u,v,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = h(u,v) \qquad \text{(localement)}$$

Ainsi, $\widetilde{s}\circ\psi(u,v) = (1-h(u,v))\,\mathrm{M}_1(u) + h(u,v)\,\mathrm{M}_2(u,v)$ au voisinage de $(0,0)$ donc $\widetilde{s}\circ\psi$ y est bien de classe $\mathscr{C}^{k-1}$. □

Proposition D.2.

Soient P *un polyèdre convexe de* $\mathbb{R}^3$ *et* ℓ *une droite tangente à* P. *L'ensemble* $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ *des droites tangentes à* P *est lisse au voisinage de* ℓ *si et seulement si* $\ell \cap \mathrm{P}$ *est réduit à un point intérieur d'une arête de* P.

Démonstration. Le cas où ℓ coupe P en un unique point intérieur à une arête a déjà été traité. Considérons le cas où ℓ est contenue dans le plan support π d'une face f de P et ne rencontre que deux arêtes e_1 et e_2 de P. L'ensemble $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ des tangentes de P est formé, localement autour de ℓ, du recollement des deux ensembles de transversales T_i à e_1 le long du champ de droites de support π. Montrons que ce recollement n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$. Rappelons que T_i est un cône de $\mathbb{P}^5$, de centre $\{e_i\}$, de signature $(2,2)$, doublement réglé par des plans représentant respectivement des bouquets et des champs de droites. Ainsi, l'espace tangent $\mathrm{H}_i = \mathbb{T}_\ell \mathrm{T}_i$ est de dimension 3 et est engendré par la congruence dégénérée formée du champ de droites de support π et du bouquet de droites centré en x_i, point d'intersection de ℓ avec e_i. Par conséquent, les espaces tangents H_1 et H_2 ne coïncident pas ($x_1 \neq x_2$) donc $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ n'est pas lisse au voisinage de ℓ. Le cas où la droite ℓ passe par un sommet de P sans être contenu dans le plan support d'une face de P est dual du cas précédent donc $\mathcal{L}(\mathrm{P})$ n'est pas lisse au voisinage de ℓ. Enfin, les cas restants sont limites des deux précédents, donc on conclut de même. □

Proposition D.3.

Soit K *un convexe de* $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{L}(\mathrm{K})$ *est une variété topologique de dimension 3.*

Sketch de démonstration. Soit V_0 un voisinage compact de la direction $u_0 \in \mathbb{S}^2$ (u_0 à l'intérieur de V_0). Pour tout $u \in \mathrm{V}_0$, on considère la silhouette X_u de K depuis u qui est exactement le bord de la projection orthogonale de K sur $u^\perp$: c'est une courbe convexe. Supposons que les plans $u^\perp$ sont munis de repères orthonormés « compatibles ». Alors, il existe une paramétrisation polaire $\theta \mapsto \rho(u,\theta)$ de la silhouette X_u avec $\theta \in \mathbb{S}^1$. À tout point de X_u correspond une unique droite tangente à K de direction u, on la note $\ell(u,\theta)$. Construisons la fonction

$$\ell\colon \begin{cases} \mathrm{V}_0 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{G} \\ (u,\theta) \longmapsto \ell(u,\theta) \end{cases}$$

Son image est exactement le sous-ensemble $\mathrm{T} \subset \mathcal{L}(\mathrm{K})$ des droites tangentes à K de direction dans V_0. En effet, à toute droite ℓ tangente à K de direction $u \in \mathrm{V}_0$ correspond un unique

point de X_u, intersection de la droite ℓ avec $u^\perp$. Ainsi, ℓ réalise une bijection entre $V_0 \times \mathbb{S}^1$ et T. De plus, ℓ^{-1} est clairement continue (c'est la restriction de la fonction intersection d'une droite avec son plan orthogonal passant par O). Pour montrer que ℓ est continue, il suffit de montrer que T est compact. [1] D'abord, $T = \mathcal{L}(K) \cap \mathbb{G}(V_0)$ avec $\mathbb{G}(V_0)$ l'ensemble des droites projectives passant par un point de V_0 (fermé de $\mathbb{P}^3$) : c'est un fermé d'après la topologie naturelle sur $\mathbb{G}$ (chapitre 1). De plus, $\mathcal{L}(K)$ est un fermé.[2] Ainsi, T est un fermé du compact $\mathbb{G}$ donc c'est un compact et il est homéomorphe à $V_0 \times \mathbb{S}^1$. Enfin, pour toute droite $d \in \mathcal{L}(K)$, on peut construire un voisinage ouvert de $\mathcal{L}(K)$ contenant d, contenu dans un fermé de la forme T, dont l'image réciproque par ℓ est un ouvert de $V_0 \times \mathbb{S}^1$ homéomorphe à $\mathbb{R}^3$ ce qui conclut la démonstration. □

D.2 Approximations au premier ordre

Cette section regroupe les démonstrations de résultats de la section 4.2.3 sur les espaces tangents de $\mathcal{L}(K)$ et les demi-volumes approximants de $\mathcal{V}(K)$.

Démonstration du lemme 4.7. D'après le corollaire 4.6, $\mathcal{L}(K)$ est localement une variété lisse autour de ℓ et son espace tangent $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$ est de dimension 3. Comme il est inclus dans $\mathbb{T}_\ell\mathbb{G}$, son intersection avec la quadrique $\mathbb{G}$ est dégénérée. D'après la table 1.1, $\mathbb{G} \cap \mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$ est une congruence soit parabolique, soit dégénérée. Montrons que $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$ contient le bouquet de droites centré en x, auquel cas $\mathbb{G} \cap \mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$ est une congruence dégénérée.

Considérons un plan π contenant la droite ℓ et un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à ℓ. Il coupe ∂K en une courbe $\mathcal{C}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Lorsque $\overrightarrow{n}$ appartient à un voisinage suffisamment petit de la normale de ∂K en x, la courbure de $\mathcal{C}$ en x est strictement positive, par définition de l'ordre de contact de ℓ en x et par continuité de la courbure (K est de classe $\mathscr{C}^2$ localement autour de x). Dans le repère $(x, \overrightarrow{d}(\ell), \overrightarrow{n})$, la courbe $\mathcal{C}$ est le graphe d'une fonction $t \mapsto f(t)$ de classe $\mathscr{C}^2$ avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. Considérons une paramétrisation γ des droites tangentes à $\mathcal{C}$ dans π avec $\gamma(0) = \ell$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ f(t) \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\,f'(t) - f(t) \\ -f'(t) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} t\,f''(t) \\ -f''(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, γ est régulière en 0 d'où $\mathbb{T}_{\gamma(0)}\gamma = \{\,{}^t(0, \alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$: c'est exactement le faisceau de droites centré en x et de support π et il est contenu dans $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$. En faisant varier $\overrightarrow{n}$, on obtient un ensemble de faisceaux centrés en x contenus dans $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$ et engendrant le bouquet de droites centré en x, donc ce bouquet est inclus dans $\mathbb{T}_\ell\mathcal{L}(K)$. □

Démonstration du lemme 4.9. Il s'agit de déterminer l'ensemble

$$\psi^{-1}\big(\mathbb{T}_{\psi(\ell)}V(K)\big) = \mathbb{G}_{\ell_\infty} \cap \widetilde{\psi}^{-1}\big(\mathbb{T}_{\psi(\ell)}V(K)\big)$$

où $\widetilde{\psi}$ est la projection centrale sous-jacente à ψ définie sur $\mathbb{P}^5 \backslash \{\ell_\infty\}$. D'une part, puisque $\widetilde{\psi}$ est une submersion,

$$\widetilde{\psi}\big(\mathbb{T}_\ell\mathcal{V}(K)\big) = \mathbb{T}_{\widetilde{\psi}(\ell)}\widetilde{\psi}\big(\mathcal{V}(K)\big) = \mathbb{T}_{\psi(\ell)}V(K).$$

[1] En effet, l'image réciproque d'un fermé de T, donc un compact, est un compact de $V_0 \times \mathbb{S}^1$ (car ℓ^{-1} est continue), donc un fermé. C'est une caractérisation de la continuité de ℓ.

[2] Ceci résulte de la caractérisation séquentielle des fermés : si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de droites tangentes de limite d non tangente, alors soit d est disjointe de K, soit elle coupe l'intérieur de K et on trouve un voisinage de d constitué de droites non tangentes dans les deux cas, absurde.

D'autre part, d'après le lemme 4.7, l'espace tangent $\mathbb{T}_\ell\mathcal{V}(\mathrm{K}_i)$ de dimension 3 est engendré par l'ensemble des droites transversales à un faisceau $\mathcal{F}$. D'après le lemme 1.10,

$$\mathbb{T}_\ell\mathcal{V}(\mathrm{K}) = \bigcap_{\ell'\in\mathcal{F}} \mathbb{T}_{\ell'}\mathbb{G}.$$

Finalement, $$\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \widetilde{\psi}\Big(\bigcap_{\ell'\in\mathcal{F}} \mathbb{T}_{\ell'}\mathbb{G}\Big) \subseteq \bigcap_{\ell'\in\mathcal{F}} \widetilde{\psi}\big(\mathbb{T}_{\ell'}\mathbb{G}\big).$$

Pour tout $\ell' \in \mathcal{F}$, $\mathbb{T}_{\ell'}\mathbb{G}$ est un sous-espace projectif de dimension 4 de $\mathbb{P}^5$. D'après le lemme 1.7, $\widetilde{\psi}\big(\mathbb{T}_{\ell'}\mathbb{G}\big)$ est de dimension 3 si $\ell' = \ell^{/\!/}$ et est égal à $\mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$ sinon, car $\ell_i^{/\!/}$ est la seule droite de $\mathcal{F}$ coupant ℓ_∞. Ainsi,

$$\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K}) \subseteq \widetilde{\psi}\big(\mathbb{T}_{\ell^{/\!/}}\mathbb{G}\big)$$

et on a égalité pour des raisons de dimension. On en déduit que le sous-espace $\widetilde{\psi}^{-1}\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K})$ de dimension 4 contient le sous-espace $\mathbb{T}_{\ell^{/\!/}}\mathbb{G}$ de dimension 4, donc lui est égal. Finalement,

$$\psi^{-1}(\partial\mathrm{H}(\mathrm{K},\ell)) = \psi^{-1}\big(\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K})\big) = \mathbb{G}_{\ell_\infty} \cap \widetilde{\psi}^{-1}\big(\mathbb{T}_{\psi(\ell)}\mathrm{V}(\mathrm{K})\big) = \mathbb{G}_{\ell_\infty} \cap \mathbb{T}_{\ell^{/\!/}}\mathbb{G}$$

ce qui représente exactement l'ensemble des droites affines transversales à $\ell^{/\!/}$. □

Démonstration de la proposition 4.10. Dans cette démonstration, considérons la restriction de $\widetilde{\psi}$ (notée identiquement) :

$$\widetilde{\psi} : \mathbb{R}^5_{\ell_\infty} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\ell_\infty}$$

où $\mathbb{R}^5_{\ell_\infty} = \mathbb{P}^5 \backslash \mathbb{T}_{\ell_\infty}\mathbb{G}$ est une section affine de $\mathbb{P}^5$ dans laquelle on peut interpréter le signe de l'opérateur $\odot$. Puisque $\widetilde{\psi}$ est une application affine, $\widetilde{\psi}^{-1}(\mathrm{H}(\mathrm{K}))$ est un demi-espace de $\mathbb{R}^5_{\ell_\infty}$, de bord $\mathbb{T}_{\ell^{/\!/}}\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ d'après le lemme 4.9. Ainsi, $\psi^{-1}(\mathrm{H}(\mathrm{K}))$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{G}_{\ell_\infty}$ ayant même signe pour l'opérateur $\odot$ avec $\ell^{/\!/+}$, ce signe étant positif (considérer un faisceau de droites parallèles contenant ℓ et de plan support ne contenant pas $\ell^{/\!/}$), donc $\psi^{-1}(\mathrm{H}(\mathrm{K}))$ est l'ensemble des droites affines respectant la contrainte $\ell^{/\!/+}$. □

Bibliographie

[1] Boris Aronov, Otfried Cheong, Xavier Goaoc, and Günter Rote. Lines pinning lines. *Discrete and Computational Geometry*, 45(2) :230–260, 2011. doi:10.1007/s00454-008-9130-6.

[2] Marilena Barnabei, Andrea Brini, and Gian-Carlo Rota. On the exterior calculus of invariant theory. *Journal of Algebra*, 96 :120–160, 1985.

[3] Guillaume Batog. *Événements visuels de polyèdres*. Master thesis, ENS de Cachan, 2008. `http://www.loria.fr/~batog`.

[4] Guillaume Batog. From invariants to predicates : example of line transversals to lines. In *26th European Workshop on Computational Geometry - EuroCG 2010*, Dortmund, Allemagne, 2010. `http://hal.inria.fr/inria-00517885/en/`.

[5] Guillaume Batog, Xavier Goaoc, and Jean Ponce. Admissible linear map models of linear cameras. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1578–1585, 2010. doi:10.1109/CVPR.2010.5539784.

[6] V. Benić and S. Gorjanc. (1,n) congruences. *KOG*, 10 :5–12, 2006.

[7] Marcel Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer, 1996.

[8] Marcel Berger. *Geometry II*. Universitext. Springer, 1996.

[9] Rudolf Bkouche. Qu'est-ce qu'une ligne droite ? In *Histoire du calcul de la géométrie à l'algèbre*, pages 173–186. Vuibert, 2009.

[10] Jacek Bochnak, Michel Coste, and Marie-Françoise Roy. *Real Algebraic Geometry*, volume 36 of *Ergenisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, 1998.

[11] Ciprian Borcea, Xavier Goaoc, Sylvain Lazard, and Sylvain Petitjean. Common tangents to spheres in $\mathbb{R}^3$. *Discrete and Computational Geometry*, 35 :287–300, 2006. doi:10.1007/s00454-005-1230-y.

[12] Cyprian Borcea, Xavier Goaoc, and Sylvain Petitjean. Line transversals to disjoint balls. *Discrete and Computational Geometry*, 39 :158–173, 2008.

[13] O. Bottima and B. Roth. *Theoretical Kinematics*. North-Holland, 1979.

[14] Peter Bürgisser, Michael Clausen, and M. Amin Shokrollahi. *Algebraic Complexity Theory*, volume 315 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1997.

[15] B. Chazelle, H. Edelsbrunner, L. J. Guibas, M. Sharir, and J. Stolfi. Lines in space : Combinatorics and algorithms. *Algorithmica*, 15 :428–447, 1996. doi:10.1007/BF01955043.

[16] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, and Andreas Holmsen. Lower bounds to Helly numbers of line transversals to disjoint congruent balls. *Israël Journal of Mathematics*, 2010. À paraître. `http://arxiv.org/abs/0906.2924`.

[17] Otfried Cheong, Xavier Goaoc, Andreas Holmsen, and Sylvain Petitjean. Helly-type theorems for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete and Computational Geometry*, 39 :194–212, 2008. doi:10.1007/s00454-007-9022-1.

[18] Jean-Paul Collette. *Histoire des mathématiques*. Vuibert, 1979.

[19] J. E. Cremona. Reduction of binary cubic and quartic forms. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 2 :62–92, 1999. doi:10.1112/S1461157000000073.

[20] Julien Demouth. *Événements visuels de convexes et limites d'ombres*. PhD thesis, Université Nancy II, 2008. `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00342717/en/`.

[21] Olivier Devillers, Marc Glisse, and Sylvain Lazard. Predicates for line transversals to lines and line segments in three-dimensional space. In *Proc. 24th ACM Symp. Computat. Geom.*, pages 174–181, 2008.

[22] Alexandru Dimca. A geometric approach to the classification of pencils of quadrics. *Geometriae Dedicata*, 14 :105–111, 1983.

[23] Igor Dolgachev. *Lectures on Invariant Theory*, volume 296 of *London Mathematical Society lecture notes series*. Cambridge University Press, 2003.

[24] Laurent Dupont, Daniel Lazard, Sylvain Lazard, and Sylvain Petitjean. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics : II. A classification of pencils. *Journal of Symbolic Computation*, 43(3) :192 – 215, 2008. doi:10.1016/j.jsc.2007.10.012.

[25] Arno Eigenwillig, Vikram Sharma, and Chee K. Yap. Almost tight recursion tree bounds for the Descartes method. In *Proceedings of the 2006 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, pages 71–78, 2006. `http://doi.acm.org/10.1145/1145768.1145786`.

[26] Hazel Everett, Sylvain Lazard, Bill Lenhart, and Linqiao Zhang. On the degree of standard geometric predicates for line transversals in 3D. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 42(5) :484–494, 2009.

[27] Doron Feldman, Tomas Pajdla, and Daphna Weinshall. On the epipolar geometry of the crossed-slits projection. In *Proceedings of the 5th IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 988–995, 2003. doi:10.1109/ICCV.2003.1238456.

[28] P. Finsler. Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen. *Comment. Math. Helv.*, 9 :188–192, 1936/1937.

[29] Tom Fisher. The invariants of a genus one curve. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 97(3) :753–782, 2008. doi:10.1112/plms/pdn021.

[30] David A. Forsyth and Jean Ponce. *Computer Vision : A Modern Approach*. Prentice Hall, 2002.

[31] R. Fricke and A. Ostrowski, editors. *Felix Klein gesammelte mathematische Abhandlungen*, volume 1 : Zur Liniengeometrie. Springer, 1921. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243240503`.

[32] Dimtry Fuchs and Serge Tabachnikov. *Mathematical Omnibus : Thirty Lectures on Classic Mathematics*. American Mathematical Society, 2007.

[33] Joseph Gergonne. Géométrie analytique. Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan. *Annales de Gergonne*, 7 :289–303, 1816–1817. `http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1816-1817__7__289_0`.

[34] Xavier Goaoc. communication personnelle.

[35] Xavier Goaoc, Stefan König, and Sylvain Petitjean. Pinning a line by balls or ovaloids in $\mathbb{R}^3$. *Discrete and Computational Geometry*, 45 :303–320, 2011. doi:10.1007/s00454-010-9297-5.

[36] J. E. Goodman and R. Pollack. Geometric Transversal Theory. In *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2002. `http://eom.springer.de/g/g130050.htm`.

[37] Roe Goodman and Nollan R. Wallach. *Representations and Invariants of the Classical Groups*. Cambridge University Press, 1998.

[38] J. H. Grace and A. Young. *The Algebra of Invariants*. Cambridge University Press, 1904.

[39] Hermann Grassmann. *Die lineale Ausdehnungslehre*. Verlag von Otto Wigand, 1844. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN=PPN534901565`.

[40] M.D. Grossberg and S.K. Nayar. The raxel imaging model and ray-based calibration. *IJCV*, 61(2) :119–137, 2005. doi:10.1023/B :VISI.0000043754.56350.10.

[41] Frank D. Grosshans, Gian-Carlo Rota, and Joel A. Stein. *Invariant Theory and Superalgebras*, volume 69 of *CBMS Region. Conf. Ser. Math.* AMS, 1987.

[42] P. M. Gruber and J. M. Wills, editors. *Handbook of Convex Geometry*. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.

[43] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[44] R. Gupta and R. Hartley. Linear pushbroom cameras. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(9) :963–975, 1997. doi:10.1109/34.615446.

[45] Joe Harris. *Algebraic Geometry, A First Course*. Number 133 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[46] R. Hartley and A. Zisserman. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2004.

[47] M. Henk, J. Richter-Gebert, and G. M. Ziegler. Basic properties of convex polytopes. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 16, pages 355–382. Chapmen & Hall/CRC, 2nd edition, 2004.

[48] David Hilbert. *Les principes fondamentaux de la géométrie*. Gauthier-Villars, 1900. Traduit par L. Laugel, `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k996866`.

[49] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer-Verlag, 1976.

[50] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of Algebraic Geometry*, volume 2. Cambridge University Press, 2nde edition, 1994. doi:10.1017/CBO9780511623899.

[51] Richard B. Holmes. Smoothness of certain metric projections on Hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society*, 184 :87–100, 1973.

[52] A. Holmsen, M. Katchalski, and T. Lewis. A Helly-type theorem for line transversals to disjoint unit balls. *Discrete and Computational Geometry*, 29 :595–602, 2003. doi:10.1007/s00454-002-0793-0.

[53] Andreas Holmsen and Jiri Matousek. No Helly theorem for stabbing translates by lines in $\mathbb{R}^3$. *Discrete & Computational Geometry*, 31 :405–410, 2004. doi:10.1007/s00454-003-0796-5.

[54] C. M. Jessop. *A Treatise on the Line Complex*. Chelsea Pub. Co., New York, 1969. Réédition de l'ouvrage de 1903.

[55] E. Kasner. The invariant theory of the inversion group : geometry upon a quadric surface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1(4) :430–498, 1900. `http://www.jstor.org/stable/1986367`.

[56] Lutz Kettner, Kurt Mehlhorn, Sylvain Pion, Stefan Schirra, and Chee Yap. Classroom examples of robustness problems in geometric computations. *Computational Geometry*, 40(1) :61 – 78, 2008. doi:10.1016/j.comgeo.2007.06.003.

[57] David Kirkpatrick, Bhubaneswar Mishra, and Chee-Keng Yap. Quantitative Steinitz's theorems with applications to multifingered grasping. *Discrete and Computational Geometry*, 7 :295–318, 1992.

[58] Hanspeter Kraft and Claudio Procesi. Classical Invariant Theory – A Primer. Manuscrit non publié. `www.math.unibas.ch/~kraft/Papers/KP-Primer.pdf`, 1996.

[59] Hanspeter Kraft, Peter Slodowy, and Tonny Albert Springer. *Algebraic Transformation Groups and Invariant Theory*. Birkhäuser, 1989.

[60] Sylvain Lazard, Luis Peñaranda, and Sylvain Petitjean. Intersecting quadrics : an efficient and exact implementation. In *Proc. of SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry)*, pages 419–428, 2004.

[61] C. Li, S. Pion, and C.K. Yap. Recent progress in exact geometric computation. *Journal of Logic and Algebraic Programming*, 64(1) :85 – 111, 2005. doi:10.1016/j.jlap.2004.07.006.

[62] I. G. Macdonald, J. Pach, and T. Theobald. Common tangents to four unit balls in $\mathbb{R}^3$. *Discrete and Computational Geometry*, 26 :1–17, 2001. doi:10.1007/s004540010090.

[63] K. N. Majindar. Linear combinations of Hermitian and real symmetric matrices. *Linear algebra and its applications*, 25 :95–105, 1979.

[64] X. Markenscoff, L. Ni, and C. H. Papadimitriou. The geometry of grasping. *Internat. J. Robot. Res.*, 9 :61–74, 1990.

[65] Maurice Mignotte. *Mathématiques pour le calcul formel*. PUF, 1989.

[66] Peter J. Olver. *Classical Invariant Theory*, volume 44 of *London Mathematical Society Student Text*. Cambridge University Press, 1999.

[67] W. F. Osgood. The symbolic notation of Aronhold and Clebsch. *American Journal of Mathematics*, 14 :251–261, 1892.

[68] T. Pajdla. Geometry of two-slit camera. Technical report ctu-cmp-2002-02, Center for Machine Perception, Czech Technical University, Prague, 2002.

[69] Tomáš Pajdla. Stereo with oblique cameras. *International Journal of Computer Vision*, 47 :161–170, 2002. doi:10.1023/A :1014593824520.

[70] PBRT : Physically based ray tracing. `http://www.pbrt.org`.

[71] Giuseppe Peano. *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*. Fratelli Bocca, 1888.
`http://mathematica.sns.it/opere/138/`.

[72] M. Pellegrini. Ray shooting on triangles in 3-space. *Algorithmica*, 9 :471–494, 1993. doi:10.1007/BF01187036.

[73] Marco Pellegrini. Ray shooting and lines in space. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pages 599–616. CRC Press LLC, 2^{nd} edition, 2004.

[74] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Capes/Agreg Mathématiques. Ellipses, 1995.

[75] Sylvain Petitjean. Characterizing the intersection pattern of two conics : a Bezoutian-based approach, 2009.

[76] Sylvain Petitjean. Invariant-based characterization of the relative position of two projectives conics. In Ioannis Z. Emiris, Frank Sottile, and Thorsten Theobald, editors, *Nonlinear Computational Geometry*, volume 151 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 189–220. Springer, 2009.

[77] J. Piontkowski and A. Van de Ven. The automorphism group of linear sections of the Grassmannians $\mathbb{G}(1, n)$. *Documenta Mathematica*, 4 :623–664, 1999.

[78] Julius Plücker. *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. G. D. Baedeker, 1828. `http://www.archive.org/details/analytischgeome03plgoog`.

[79] Julius Plücker. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der Geraden Linie als Raumelement*. B. G. Teubner, 1868 (volume 1) et 1869 (volume 2, édité par Félix Klein). `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN309216206`.

[80] Jean Ponce. What is a camera ? In *Proceedings of the 22nd IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 1526–1533, 2009. doi:10.1109/CVPR.2009.5206668.

[81] Jean-Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire, 1822. `http://docnum.u-strasbg.fr/u?/coll7,24653`.

[82] Helmut Pottmann and Johannes Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer-Verlag, 2001.

[83] J. H. Rieger. On the classification of views of piecewise smooth objects. *Image and Vision Computing*, 5(2) :91–97, 1987. doi:10.1016/0262-8856(87)90033-3.

[84] C. V. Robinson. Spherical theorems of Helly type and congruence indices of spherical caps. *American Journal of Mathematics*, 64 :260–272, 1942.

[85] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. PUF, 1986.

[86] C. Segre. Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino*, 36(2) :3–86, 1883.

[87] Steven M. Seitz and Jiwon Kim. The space of all stereo images. *International Journal of Computer Vision*, 48 :21–38, 2002. doi:10.1023/A :1014851111084.

[88] Joseph H. Silverman. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*. Number 151 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[89] A. Skowroński and J. Weyman. The algebras of semi-invariants of quivers. *Transform. Groups*, 5(4) :361–402, 2000.

[90] Jorge Stolfi. *Oriented Projective Geometry : A Framework for Geometric Computations*. Academic Press, 1991.

[91] Peter Sturm. Multi-view geometry for general camera models. In *Proc. CVPR*, volume 1, pages 206–212, 2005.

[92] Peter Sturm, Srikumar Ramalingam, Jean-Philippe Tardif, Simone Gasparini, and João Barreto. Camera models and fundamental concepts used in geometric computer vision. *Foundations and Trends in Computer Graphics and Vision*, 6 :1–183, 2011. doi:10.1561/0600000023.

[93] Rudolf Sturm. *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*. B. G. Teubner, 1892 (vol. 1), 1893 (vol. 2), 1896 (vol. 3). `http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;idno=00980002` `http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;idno=00980003` `http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;idno=04250002`,.

[94] Patrice Tauvel. *Géométrie*. Sciences Sup. Dunod, 2e edition, 2005.

[95] Seth J. Teller. Computing the antipenumbra of an area light source. In *Proceedings of the 19th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, SIGGRAPH '92, pages 139–148, 1992. doi:10.1145/133994.134029.

[96] Thorsten Theobald. An enumerative geometric framework for algorithmic line problems in $\mathbb{R}^3$. *SIAM Journal of Computing*, 31 :1212–1228, 2004.

[97] J. A. Todd. Combinants of a pencil of quadric surfaces, I. *Proc. cambridge Philos. Soc.*, 43 :475–487, 1947.

[98] Leonard Tornheim. The Sylvester-Franke theorem. *The American Mathematical Monthly*, 59(6) :pp. 389–391, 1952. `http://www.jstor.org/stable/2306811`.

[99] C. Tu, W. Wang, and J. Wang. Classifying the nonsingular intersection curve of two quadric surfaces. In *Proc. of GMP'02 (Geometric Modeling and Processing)*, pages 23–32, 2002.

[100] F. Uhlig. A canonical form for a pair of real symmetric matrices that generate a nonsingular pencil. *Linear Algebra and Its Applications*, 14 :189–209, 1976.

[101] Oswald Veblen and John W. Young. *Projective Geometry*, volume 1. Blaisdell Publishing Co., 1910.

[102] Wenping Wang, Jiaye Wang, and Myung-Soo Kim. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. *Computer Aided Geometric Design*, 18(6) :531–539, 2001.

[103] C. E. Weatherburn. *Differential Geometry of Three Dimensions*, volume 1. Cambridge University Press, 5e edition, 1955.

[104] Meil L. Whyte. Grassmann-Cayley algebra and robotics applications. In *Handbook of Geometric Computing*, pages 629–658. Springer, 2005.

[105] Chee K. Yap. Robust geometric computation. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 41, pages 927–952. Chapmen & Hall/CRC, 2nd edition, 2004.

[106] Jingyi Yu and Leonard McMillan. General linear cameras. In Tomás Pajdla and Jirí Matas, editors, *Computer Vision - ECCV 2004*, volume 3022 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 14–27. Springer Berlin / Heidelberg, 2004. doi:10.1007/978-3-540-24671-8_2.

[107] Jingyi Yu and Leonard McMillan. Multiperspective projection and collineation. In *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 580–587, 2005. doi:10.1109/ICCV.2005.161.

[108] Jingyi Yu, Leonard McMillan, and Peter Sturm. Multiperspective modeling, rendering, and imaging. In *ACM SIGGRAPH ASIA 2008 courses*, SIGGRAPH Asia '08, pages 50 :1–50 :36. ACM, 2008. doi:10.1145/1508044.1508094.

[109] Konrad Zindler. Algebraische Liniengeometrie. In *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, volume 3 :2 :2a*, pages 973–1228. B. G. Teubner, 1921. `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN36060997X`.

[110] A. Zomet, D. Feldman, S. Peleg, and D. Weinshall. Mosaicing new views : The crossed-slits projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(6) :741–754, 2003. doi:10.1109/TPAMI.2003.1201823.

[111] Julien Élie. Ligne droite (page web). `http://www.trigofacile.com/maths/euclide/livre1/definitions/1-def4.htm`.

Résumé

Systématiser : tel est le leitmotiv des résultats de cette thèse portant sur trois domaines d'étude en vision et en géométrie algorithmique. Dans le premier, nous étendons toute la machinerie du modèle sténopé des appareils photos classiques à un ensemble d'appareils photo (deux fentes, à balayage, oblique, une fente) jusqu'à présent étudiés séparément suivant différentes approches. Dans le deuxième, nous généralisons avec peu d'efforts aux convexes de $\mathbb{R}^3$ l'étude des épinglages de droites ou de boules, menée différemment selon la nature des objets considérés. Dans le troisième, nous tentons de dégager une approche systématique pour élaborer des stratégies d'évaluation polynomiale de prédicats géométriques, les méthodes actuelles étant bien souvent spécifiques à chaque prédicat étudié.

De tels objectifs ne peuvent être atteints sans un certain investissement mathématique dans l'étude des congruences linéaires de droites, des propriétés différentielles des ensembles de tangentes à des convexes et de la théorie des invariants algébriques, respectivement. Ces outils ou leurs utilisations reposent sur la géométrie des droites de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, construite dans la seconde moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle mais pas complètement assimilée en géométrie algorithmique et dont nous proposons une synthèse adaptée aux besoins de la communauté.

Mots clés : géométrie des droites, modèle d'appareil photo, théorie des transversales géométriques, théorie des invariants, prédicat géométrique

Abstract

Systematize is the leitmotiv of the results in this thesis. Three problems are studied in the field of computer vision and computational geometry. In the first one, we extend all the machinery of the pinhole model for classical cameras to a whole set of cameras (two-slit, pushbroom, oblique, pencil), which were separately studied with different approaches. In the second one, we generalize to convex bodies in $\mathbb{R}^3$ the work on pinning lines by lines or balls, which had so far been tackled by techniques intimately linked to the geometry of the objects. In the third one, we attempt to work out a systematic approach in place of problem-specific methods in order to build polynomial evaluation trees for geometric predicates.

Such goals could not be reached without a mathematical investigation in the study of linear line congruences, differential properties of sets of tangent lines to a convex and classical invariant theory respectively. These tools or their uses are mostly based on line geometry in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. This geometry was designed in the second half of the 19$^{\text{th}}$ century but its full power has not yet been used by the computational geometry community. This thesis therefore also serves as an extended tutorial.

Keywords : line geometry, camera model, geometric transversal theory, invariant theory, geometric predicates