

N° d'ordre : 4235

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par **Abderemane MOHAMED ELARIF**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE ET INGÉNIERIE

**Évaluation et contrôle non destructifs des barreaux
et plaques par génération acoustique induite par
absorption de micro-ondes**

Soutenue le 22 Mars 2011

Après avis de :

M. M. LETHIECQ, Professeur, Université François Rabelais de Tours
M. B. PERRIN, Directeur de recherche, Université Paris VI

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

M. C. ARISTEGUI, Professeur, Université de Bordeaux
M. O. GIRAUDO, Ingénieur ONERA, Châtillon
M. M. LETHIECQ, Professeur, Université François Rabelais de Tours
M. B. PERRIN, Directeur de recherche, Université Paris VI
M. C. BACON, Professeur, Université de Bordeaux

**Président
Examineurs**

- 2011 -

*À Ar-Rahmâne
Merci*

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été conduits au sein du groupe Acoustique Ultrasonore (AcU) du Laboratoire de Mécanique Physique de l'Université de Bordeaux I, devenu depuis Janvier 2011 le département Acoustique Physique (APy) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux.

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur M. Deschamps, Directeur de Recherche au CNRS, de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire.

J'aimerais adresser mes très chaleureux remerciements aux membres du jury :

à Monsieur C. Aristegui, Professeur à l'Université de Bordeaux, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury d'examen,

à Monsieur B. Perrin, Directeur de recherche à l'Université Paris VI, Monsieur M. Lethiecq, Professeur à l'Université François Rabelais de Tours et Monsieur O. Giraud, Ingénieur ONERA à Châtillon, d'avoir accepté de rapporter et d'examiner mon manuscrit, de l'intérêt qu'ils y ont porté et des remarques positives qu'ils ont pu mentionner dans leurs rapports et lors de la soutenance,

à Monsieur C. Bacon, Professeur à l'Université de Bordeaux, de m'avoir fait confiance durant ces années de thèse et de sa disponibilité. Ses conseils ainsi que ses qualités humaines ont participé pleinement au bon déroulement de ces travaux.

Mes remerciements vont au défunt B. Hosten, ancien Directeur de recherche au CNRS, de m'avoir encadré au début de ma thèse et de son intérêt sur cette thématique.

Merci à mes parents : A. Mohamed, G. Athoumani, à M. Maoulida et sa femme pour votre participation active à mon éducation et votre soutien moral permanent ; à ma charmante épouse M. Naifata pour ta patience tout au long de ces dernières années et à notre grande famille.

Je remercie toutes les personnes du LMP qui ont participé directement ou indirectement à ce travail : les permanents M. Castaings, A. Meziane et les autres, B. Desdoudin et S. Guit pour les démarches administratives et leurs joies de vivre, les thésards M. Masmoudi, M. Koabaz, N. Ben Salem, E. Bousquet, J. Dubois et en particulier mes anciens et nouveaux collègues de bureau : D. Segur, B. Lecrom, L. Moreau, H. Lourme, M. Ducouso, T. Valier-Brasier, J. Higuët, B. Mascaro, T. Kouadio, S. Raetz et A. Abbas pour les bons moments passés ensemble. Je vous souhaite une meilleure vie future et une bonne réussite professionnelle.

Évaluation et contrôle non destructifs de barreaux et plaques par génération acoustique induite par absorption de micro-ondes

Résumé :

De nombreuses études ont été menées jusqu'ici afin d'analyser l'apport de la technique de génération acoustique par micro-ondes dans le domaine de l'évaluation et du contrôle non destructifs des structures mécaniques. Le caractère entièrement sans contact de cette nouvelle technique en ferait un moyen pouvant être adopté pour générer aisément des ondes acoustiques dans les matériaux diélectriques absorbants. Ce travail porte d'abord sur l'étude des vibrations latérales engendrées dans les barreaux viscoélastiques placés dans un guide d'ondes électromagnétiques contenant une ouverture sur l'une des faces latérales et soumis à de brèves excitations de micro-ondes. Un modèle paramétrique prédit la forme de l'élévation de la température à l'intérieur de l'échantillon. Ses résultats soulignent que l'utilisation des guides partiellement ouverts provoque une distribution asymétrique de la température générant ainsi des modes de flexion. Par ailleurs, un modèle numérique tridimensionnel par éléments finis a permis de mettre en évidence l'existence d'autres modes liés aux déformations des sections-droites lorsqu'elles sont soumises à une brusque dilatation thermique. Ensuite, l'élaboration de méthodes directes pour compléter l'évaluation des propriétés viscoélastiques des mêmes barreaux placés dans les guides conventionnels est considérée. Différents modèles analytiques sont construits pour analyser l'effet du coefficient de Poisson sur le rapport des vibrations induites dans les directions latérale et longitudinale d'une part, et sur la dispersion des ondes acoustiques de type traction compression d'autre part. Un algorithme d'optimisation permettant d'estimer le coefficient de Poisson et la partie réelle de la lenteur à valeurs complexes par une méthode inverse est élaboré puis appliqué dans le cas concret de deux barreaux polymériques. Enfin, une étude analytique et numérique par éléments finis est menée afin d'analyser les vibrations générées sur un défaut circulaire (trou) contenu dans une plaque et chauffé localement par des micro-ondes. Deux approches acoustiques sont construites pour prédire la forme de la zone chauffée par une température uniforme ou gaussienne. Une relation directe entre la taille du défaut et les fréquences de certains pics qui apparaissent sur les spectres des vibrations de la plaque ont été mises en évidence. Celle-ci conviendrait à l'élaboration d'une méthode inverse permettant de dimensionner ces types de défauts.

Mots clés : Génération acoustique – Micro-ondes – Thermoélasticité – Guides électromagnétiques rainurés – Modes de flexion – Coefficient de Poisson – Évaluation non destructive (END) – Contrôle non destructif (CND).

Nondestructive evaluation and testing of bars and plates by means of acoustic waves generated by microwaves absorption

Abstract:

Many studies in the field of both nondestructive evaluation and testing of mechanical structures have been conducted so far by analyzing the contribution of the microwaves induce acoustic technique. This new non-contact technique can be easily adopted to generate acoustic waves in non-conducting materials. This work begins with studying the lateral vibrations generated within viscoelastic bars hold inside grooved electromagnetic waveguides and subjected to short microwave irradiations. A parametrical model is established in order to predict the shape of the temperature rise within the sample. Results emphasize the fact that these types of waveguides generate a sudden asymmetric temperature rise, which produces some flexural modes. Besides, the development of a 3D numerical model allow the prediction of new vibration modes which are related to the deformations of the bar cross-sections during the sudden thermal heating. Then, direct methods are developed to complete the assessment of the viscoelastic properties of bars placed inside conventional electromagnetic waveguides. Different analytical models are proposed to study the effects of the Poisson ratio either on the ratio between lateral and longitudinal vibrations or on the dispersion of longitudinal waves. An optimization algorithm that allows the Poisson ratio and the real part of the complex slowness evaluation by means of dispersion curves is elaborate before being applied in the specific case of two polymeric bars. Finally, analytical and numerical finite element methods are conducted to analyze the acoustic waves generated by a circular defect (hole) contained in a plate and heated locally by microwaves. Two acoustic approaches are performed to predict the temperature rise form. Furthermore, a nondestructive testing method is highlighted by a direct relationship between the size of the defect and the frequencies of some peaks that appear on the velocity spectra of the plate. This method could be applied to set up an inverse procedure that can be used to size these kinds of defects.

Keywords: Acoustic waves – Microwaves – Thermoelasticity – Grooved electromagnetic waveguides – Flexural vibrations – Poisson ratio – Nondestructive evaluation (NDE) – Nondestructive testing (NDT).

Table des matières

Introduction.....	1
I. Vibrations transversales des barreaux viscoélastiques soumis à une température asymétrique induite par une absorption de micro-ondes.....	9
I.1. Introduction	10
I.2. Procédures expérimentales.....	11
I.2.1. Montage expérimental	11
I.2.2. Résultats expérimentaux et discussion	14
I.3. Modèle analytique unidimensionnel.....	16
I.3.1. Hypothèse d'un profil de température uniforme sur une section-droite.....	16
I.3.2. Modélisation du couplage thermomécanique	18
I.3.3. Simulation analytique : résultats et discussion	21
I.4. Modèles numériques par éléments finis	22
I.4.1. Modélisation tridimensionnelle des vibrations du barreau.....	22
I.4.2. Modélisation bidimensionnelle des vibrations d'une section-droite du barreau : méthode SAFE.....	24
I.4.3. Simulations numériques : résultats et discussion.....	26
I.5. Étude des deux premiers modes $m_f^i, i = 1,2$.....	27
I.5.1. Hypothèse : modes générés par la présence de la rainure sur le guide d'ondes.....	28
I.5.2. Validation expérimentale.....	28
I.5.3. Validation théorique	29
I.5.3.1. Calcul du spectre de la puissance des ondes électromagnétiques	29
I.5.3.2. Calcul du spectre de l'élévation locale de la température	31
I.5.3.3. Étude analytique des modes de flexion	34
I.6. Étude des modes $m_L^i, i = 1,2$.....	36
I.7. Étude numérique du mode m_T^1	37
I.8. Conclusion.....	39
I.9. Références	40
II. Génération acoustique par micro-ondes pour l'évaluation non destructive de barreaux viscoélastiques.....	43
II.1. Introduction.....	44
II.2. Théorie	45
II.2.1. Analyse de l'effet Poisson.....	45
II.2.2. Analyse de la dispersion des ondes acoustiques longitudinales.....	46
II.2.3. Application numérique des méthodes de caractérisation	49

II.2.3.1. Méthode de caractérisation basée sur le rapport des vibrations	49
II.2.3.2. Méthode de caractérisation basée sur la dispersion des ondes longitudinales	52
II.3. Application dans le cas de deux barreaux polymériques	53
II.3.1. Dispositif expérimental	53
II.3.2. Validation expérimentale des méthodes basées sur les courbes de dispersion	55
II.4. Conclusion.....	57
II.5. Références.....	58
III. Génération acoustique par micro-ondes pour le contrôle non destructif de plaques 59	
III.1. Introduction	60
III.2. Modélisation analytique	63
III.2.1. Vibrations radiales des structures circulaires soumises localement à une élévation de température.....	63
III.2.2. Anneau soumis à une distribution uniforme de la température	64
III.2.3. Disque plein soumis à une élévation uniforme de la température	66
III.3. Modélisation numérique par éléments finis (EF).....	78
III.3.1 Formulation 2D pour les plaques en état plan de contraintes	68
III.3.2 Formulation 3D dans le cas d'une répartition axisymétrique de la température ...	69
III.3.3 Validation numérique des modèles analytiques.....	70
III.4. Méthode d'estimation de la zone thermique S_{Th}.....	72
III.4.1 Cas d'une élévation uniforme de la température	72
III.4.2 Cas d'une élévation non uniforme de la température	73
III.5. Étude de la génération acoustique du trou	75
III.5.1. Cas d'une plaque très mince soumise localement au centre à une élévation uniforme de la température	76
III.5.2. Spectre des vibrations générées sur le trou dans le cas d'une plaque 3D soumise à une température gaussienne	81
III.5.2.1. Analyse des deux pics P3 et P4.....	84
III.5.2.2. Analyse des deux pics P1 et P2.....	87
III.5.2.3. Méthode de contrôle non destructif des défauts circulaires.....	98
III.6. Application dans le cas d'une plaque mince en polymère.....	90
III.6.1. Procédure expérimentale pour la caractérisation de la forme de la répartition gaussienne de la température	90
III.6.2. Procédure expérimentale pour le contrôle non destructif	92
III.7. Conclusion.....	94
III.8. Références.....	95
Conclusions et perspectives	97

Annexes.....	103
A. Identification des coefficients des matrices intervenant dans le formalisme 3D de COMSOL MULTIPHYSICS.....	103
B. Formalisme utilisé pour implémenter la méthode SAFE dans COMSOL MULTIPHYSICS.....	105
C. Calcul de la valeur moyenne sur une période électromagnétique du flux du vecteur de Poynting.....	109
D. Méthodes pour chercher l'expression analytique de la solution particulière de l'équation de Bessel inhomogène d'ordre 1.....	113
D.1. Cas d'un anneau	113
D.2. Cas d'un disque	114
E. Validation des modèles analytiques d'un anneau et d'un disque soumis à une distribution uniforme de la température.....	117
E.1. Cas d'un anneau.....	117
E.2. Cas d'un disque.....	119

Introduction

L'histoire des micro-ondes (ondes électromagnétiques à hautes fréquences) ne débuta réellement qu'à la fin du 19^{ème} siècle avec les travaux de James Maxwell [1] qui formula les bases de la théorie électromagnétique moderne. En 1867, l'allemand H. Hertz [2] valida la théorie de Maxwell en démontrant expérimentalement que les ondes électromagnétiques se propageaient à vitesse finie. En 1897, Rayleigh [3] montra mathématiquement la possibilité de faire propager des « vagues » (c'est-à-dire l'ensemble des modes transverses électriques *TE* et transverses magnétiques *TM*) à l'intérieur d'un « tube creux métallique » connu aujourd'hui sous le nom de guide d'ondes électromagnétiques. Puis, un peu plus tard dans les années 30, les travaux de R. A. Waston-Watt, G. C. Southworth, W. L. Barrow et P. Smith ont permis de développer la technologie des radio-transmetteurs. Toutes les avancées rapides qui ont émergé durant la Seconde Guerre Mondiale dans le domaine de la recherche et du développement des radars et des technologies associées peuvent être consultées dans la référence [4]. Ensuite, les travaux de W. Doherty [5] marqua le début de la fabrication des émetteurs de micro-ondes à hautes puissances, conduisant à l'émergence durant la Seconde Guerre Mondiale des premiers grands transmetteurs d'impulsions radars par micro-ondes : les magnétrons.

En outre, après cette période, l'ingénieur P. Spencer s'est aperçu, en examinant un magnétron lors d'un projet de recherche, qu'une barre de chocolat qui était dans sa poche avait fondu. Ce phénomène intéressa Spencer qui mena directement une autre expérience où cette fois-ci quelques grains de maïs avaient été déposés près du tube où se propageaient des ondes électromagnétiques. Il les a observés pendant que ces derniers éclataient. Ces études lui ont permis de conclure par la suite que ce phénomène était dû à une exposition d'énergie à basse densité de micro-ondes élevant la température de l'échantillon irradié. Parallèlement dans la même période, ce phénomène de conversion des micro-ondes en ondes acoustiques a aussi été étudié à cause de ses effets sur l'homme. En 1947, des radaristes ont affirmé entendre des cliquetis, des bourdonnements et des sifflements pendant qu'ils opéraient sur des radars. Quelques temps après, les expériences d'A. Frey [6][7] puis d'A. Guy et de C. K. Chou [8] ont montré que les micro-ondes faisaient réagir mécaniquement, par une série de minuscules échauffements et refroidissements, des cellules très sensibles situées dans l'oreille interne. Ce phénomène aboutissait à la génération d'ondes acoustiques audibles, sources des différents « clicks ». Ils parlaient alors de « l'effet Frey ». Ces minuscules échauffements et refroidissements du matériau s'expliquent par une polarisation de la matière engendrée par les interactions entre les ondes électromagnétiques et les molécules. En effet, lorsque les ondes électromagnétiques agissent sur la matière en changeant de sens, les électrons ou les

molécules suivent l'orientation du champ électrique d'excitation. Le changement rapide à très hautes fréquences des cycles d'excitation électromagnétique génère de la distorsion et de la friction à l'intérieur de la structure microscopique de la matière provoquant ainsi une élévation brusque de la température au sein du matériau irradié. Ensuite, cette chaleur se transforme, par couplage thermoélastique, en énergie mécanique. La Figure 1 décrit brièvement le principe de génération acoustique par micro-ondes.

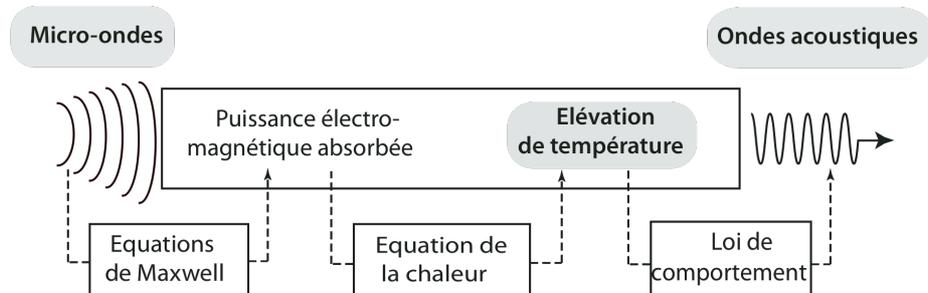


Figure 1 : schéma du principe de génération acoustique par micro-ondes.

Par ailleurs, étant données les fortes demandes présentées à la science par les industries aéronautique et nucléaire, beaucoup de scientifiques se sont intéressés à la résolution de divers problèmes faisant intervenir ce couplage thermoélastique. J. Duhamel [9] postula le couplage des champs de température et de déformation. Puis, W. Voigt [10] et H. Jeffrey [11] introduisirent l'équation élargie de la conductibilité thermique. Un exposé général et détaillé de cette équation se trouve dans les travaux de M. A. Biot [12] et de P. Chadwick [13]. J. H. Weiner [14] avança un exposé sur l'unicité de la solution. M. Lessens [15] et R. Hetnarski [16] ont respectivement donné une solution du problème appliqué au demi-espace thermoélastique chauffé à la surface ou excité par une force mécanique. J. E. Michaels [17] traita, pour sa part, le cas unidimensionnel en proposant une fonction approchant le profil de l'élévation thermique dans le matériau mais ne vérifiant pas l'équation de la chaleur. Quant à R. M. White [18], il proposa en 1962 une solution satisfaisant l'équation de la chaleur dans le cas des structures unidimensionnelles. Cette résolution fut ensuite détaillée par D. E. Borth et C. A. Cain [19] dans le cas de la génération acoustique dans les matériaux irradiés par micro-ondes.

Dans la suite, la génération acoustique par chauffage rapide des matériaux utilisa principalement la technique de génération par Laser [20]-[23]. Il est admis dans ce cas que la profondeur de pénétration de l'énergie électromagnétique dans le matériau est généralement faible le long de l'épaisseur d'un échantillon de taille centimétrique que celle qui serait liée à une absorption de micro-ondes. Par conséquent, l'élévation thermique induite prend un profil exponentiel rapidement décroissant et les ondes acoustiques ne sont générées qu'autour du point d'impact. Par contre, la génération acoustique par micro-ondes est quasiment volumique dans la plupart des matériaux peu absorbants et les phénomènes acoustiques obtenus sont en général vibratoires pour une structure peu absorbante et de taille centimétrique alors qu'ils sont propagatifs dans le cas d'une excitation par Laser ou par transducteur ultrasonore à

hautes fréquences.

Après avoir longtemps servi aux télécommunications par radar, les micro-ondes pulsées ont été appliquées dans le domaine médical où elles ont notamment servi à mettre en place de méthodes de génération acoustique favorisant le développement de l'imagerie médicale des tissus vivants [24]-[27], en chimie pour la mesure de l'acidité relative du papier [28] et la caractérisation des solutions aqueuses [29]. Durant ces dernières années, le département Acoustique Physique (APy) de l'Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) cherche à étendre son champ d'application dans le domaine de la mécanique, plus particulièrement dans la caractérisation et le contrôle non destructifs de certaines structures mécaniques. L'étude commença par la modélisation analytique et la validation expérimentale de la génération acoustique dans un barreau unidimensionnel irradié par des micro-ondes pulsées [30]. En 1998, le thème de recherche a été poursuivi lors de la thèse d'E. Guilloriot [31] qui étudia la génération acoustique au sein des barreaux unidimensionnels homogènes et stratifiés. Ce travail a d'abord porté sur l'analyse de l'influence de différents profils de la température (profils linéaires, exponentiels...) sur les réponses acoustiques générées au sein des échantillons. Comme ces derniers s'inséraient parfaitement dans les guides d'ondes électromagnétiques, il a été possible aussi de modéliser analytiquement la conversion de la puissance électromagnétique absorbée dans le matériau en énergie thermique [32]. Cette conversion a été calculée à travers les équations de Maxwell en tenant compte de la puissance du générateur de micro-ondes et des propriétés électromagnétiques du milieu absorbant. L'équation de la chaleur a ensuite permis de prédire l'expression de l'augmentation de la température en fonction des propriétés thermiques du milieu. La technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées a été appliquée dans les références [33]-[35] pour simuler analytiquement les ondes acoustiques générées dans les barreaux unidimensionnelles homogènes et multicouches, dans les matériaux composites stratifiés formés de fibres de carbone moulées dans des matrices de résine époxy. Les résultats ont révélé l'importance de l'orientation de la polarisation des ondes électromagnétiques par rapport à celle du renfort [35]. La méthode de génération acoustique par micro-ondes a d'autre part été appliquée à l'évaluation non destructive des propriétés mécaniques (module d'Young E^* à valeurs complexes) et électromagnétiques (permittivité diélectrique ϵ^* à valeurs complexes) de matériaux viscoélastiques se présentant sous la forme de barreaux unidimensionnels [32]-[37]. Par ailleurs, l'absorption de micro-ondes étant favorisée par la présence d'eau dans les échantillons irradiés, une étude a été menée afin de caractériser l'effet de l'humidité dans les barreaux en bois. Les résultats ont indiqué que les propriétés mécaniques et thermoélastiques du matériau dépendaient fortement de sa teneur en eau [37]. Enfin, dans le but de transférer cette nouvelle technique en milieu industriel, une méthode sans contact de contrôle non destructif de produits alimentaires (des sucettes Chupa Chups) a été mise en œuvre. Cependant, même si les résultats étaient très concluants, le transfert technologique n'a malheureusement pas pu se concrétiser en raison de la fermeture du site de production.

Puis s'en suivirent en 2003 les travaux de A. R. Hadj Henni qui étudia la génération d'ondes acoustiques par micro-ondes dans les matériaux piézoélectriques [38][39]. Les

résultats obtenus ont montré une bonne concordance entre les fréquences de résonance expérimentales des barreaux piézoélectriques excités en « circuit fermé » et en « circuit ouvert » par tension électrique et par une source de micro-ondes. Néanmoins, ces fréquences variaient lorsqu'on passait du « circuit fermé » au « circuit ouvert » du fait du changement de E^* apparent en fonction des conditions électriques aux limites imposées sur les barreaux. Le modèle a aussi permis de développer une procédure d'évaluation non destructive des caractéristiques mécaniques et piézoélectriques de l'échantillon utilisé. Ensuite l'étude des vibrations dans le plan des plaques viscoélastiques circulaires ou elliptiques (pleines ou trouées) soumises à une température uniforme sur tout le volume fut abordée dans les références [40]-[41] au moyen de séries infinies de produits de fonctions de Mathieu angulaires et radiales, des séries de fonctions infinies trigonométriques et des fonctions de Bessel. Les modèles obtenus ont été validés numériquement par la méthode des éléments finis. Leur validation par rapport aux résultats expérimentaux a favorisé la mise en place de procédures d'estimation des caractéristiques mécaniques et géométriques des matériaux constituant les plaques. Enfin une étude portant sur l'influence de l'humidité sur les propriétés mécaniques de différents disques de béton a été abordée et une méthode de caractérisation du coefficient de Poisson ν a été mise en place dans la référence [40].

Notre travail s'inscrit dans cette thématique et dans la continuité des travaux effectués au laboratoire, notamment au travers des thèses de E. Guilliorit [31] et A. R. Hadj Henni [38]. Il sera abordé en développant des nouveaux outils analytiques, numériques par éléments finis (EF) et expérimentaux afin de mieux modéliser la génération acoustique dans les barreaux et les plaques lorsqu'ils sont soumis à une excitation de micro-ondes pulsées. Une attention particulière sera portée à l'application des résultats obtenus pour l'évaluation et le contrôle non destructifs de barreaux et plaques viscoélastiques.

Premièrement, le Chapitre I portera sur l'étude des ondes acoustiques générées dans les barreaux placés dans des guides d'ondes électromagnétiques partiellement ouverts sur une des côtés latéraux et soumis à un rayonnement de micro-ondes. Ce nouveau montage expérimental non conventionnel sera conçu pour étudier les déformations transversales des barreaux. Précisons ici que le terme « transversales » ou généralement l'adjectif « transversal » sera utilisé afin de désigner tout champ acoustique mesuré expérimentalement ou déterminé théoriquement sur un point matériel situé sur la face latérale du barreau directement en contact avec le côté du guide d'ondes électromagnétiques contenant l'ouverture. L'objectif initial de ce dispositif est d'analyser si ces vibrations transversales pourraient favoriser la mise en place de méthodes directes facilitant l'évaluation non destructive de ν et de ε^* . Les premiers résultats expérimentaux obtenus indiqueront des phénomènes non prévisibles ni par les dispositifs conventionnels ultérieurs ni par les modèles unidimensionnels décrits dans les références [33]-[36]. De ce fait, l'étude développée dans ce Chapitre se focalisera sur l'élaboration de modèles analytiques et numériques par éléments finis facilitant la compréhension et l'interprétation de ces phénomènes physiques. Ces modèles présentés dans la référence [42] seront construits en émettant des hypothèses sur la répartition des champs de contraintes dans les échantillons testés et/ou sur la forme de la

répartition du champ de température induite par l'absorption de micro-ondes à l'intérieur des échantillons.

Puis le Chapitre II sera consacré à l'évaluation non destructive des barreaux viscoélastiques soumis à des micro-ondes pulsées en supposant que l'élévation de température est proche de celle calculée analytiquement dans le cas des guides d'ondes conventionnels. Différentes approches analytiques et numériques permettant de caractériser ν seront analysées. L'objectif sera de compléter les méthodes de caractérisation de barreaux viscoélastiques homogènes développées dans [32]. Un modèle analytique sera proposé afin de décrire l'effet de ν sur le rapport entre les vibrations transversales et longitudinales du barreau. Puis d'autres modèles (analytique et semi analytique par éléments finis) seront présentés pour modéliser l'effet de ν et de la lenteur S^* à valeurs complexes sur la vitesse de propagation des ondes acoustiques longitudinales de traction et compression. Ces modèles seront confrontés d'abord à un cas numérique afin de choisir celui qui sera le mieux adapté à l'estimation de ν . La méthode retenue sera alors appliquée à un cas pratique expérimental.

Enfin, le Chapitre III étendra la technique de génération acoustique par micro-ondes pulsées au contrôle sans contact et non destructif de plaques polymériques contenant des défauts circulaires (trous) à travers leurs épaisseurs. La référence [38] a brièvement montré l'existence d'une relation simple liant les dimensions du trou (défaut) à une caractéristique du spectre des vibrations radiales calculées sur la circonférence du trou. Dans un cadre de contrôle non destructif, l'exploitation de cette relation pourrait *a priori* être avantageuse par rapport à certaines méthodes ultrasonores utilisant des transducteurs piézoélectriques. La raison est qu'il est parfois difficile de soustraire l'information contenue dans le champ acoustique lié au défaut à cause des multiples interactions entre les ondes mécaniques (incidentes et réfléchies) qui se propagent dans la structure. De ce fait, notre but sera d'étudier puis d'approfondir cette relation afin de construire une méthode inverse facilitant l'identification et la caractérisation des défauts circulaires traversant l'épaisseur des plaques. L'approche utilisée pour étudier le problème thermoélastique sera différente de celle développée dans les références [38]-[40]. L'équation de Navier décrivant les mouvements des échantillons dans leur plan radial sera adoptée mais en affinant l'hypothèse de l'uniformité de l'élévation de la température sur toute la structure. Deux hypothèses seront considérées dans ce Chapitre : d'une part celle d'une élévation locale et uniforme de la température sur une zone limitée de la plaque et de taille variable, et d'autre part celle d'une répartition radiale de forme gaussienne. La première permettra de résoudre théoriquement, grâce à un modèle unidimensionnel, les équations des vibrations radiales. La deuxième sera résolue numériquement par éléments finis. La résolution numérique facilitera aussi l'étude tridimensionnelle des vibrations des échantillons et la prise en compte de défauts de diverses formes géométriques. Ces modèles seront dans un premier temps appliqués pour estimer, par une méthode acoustique inverse, la forme spatiale de l'élévation de température facilitant la reproduction du champ acoustique réelle mesuré expérimentalement lors du processus de contrôle non destructif des plaques viscoélastiques. Différentes méthodes analytiques et numérique par éléments finis seront mise en place pour exhiber une relation directe liant les

dimensions du défaut à certaines caractéristiques des spectres des vibrations générées au voisinage de la zone d'irradiation.

Références

- [1] J. C. Maxwell, “*A dynamical theory of the electromagnetic field*”, Proceedings of the Royal Society, vol. **13**, p. 531-536 (1864).
- [2] H. Hertz, “*Untersuchungen ueber die ausbreitung der elektrischen kraft*”, *Investigations on the Propagation of Electrical Energy*, Johann Ambrosius Barth Edition, Leipzig (1892).
- [3] L. Rayleigh, “*On the propagation of electric waves along cylindrical conductors*”, Philosophical Magazine, vol. **43**, p. 125-132 (1897).
- [4] MIT Radiation Laboratory Series, 28 volumes on 2 CD-ROMs, Artech House (1999).
- [5] W. H. Doherty, “*A new high efficiency power amplifier for modulated waves*”, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, vol. **24**, p. 1163-1182 (1936).
- [6] A. H. Frey, “*Human auditory system response to modulated electromagnetic energy*”, Journal of Applied Physiology, vol. **17**(4), p. 689-692 (1962).
- [7] A. H. Frey, “*Behavioral biophysics*”, Psychological Bulletin, vol. **63**(5), p. 322-337 (1965).
- [8] C. K. Chou and A. W. Guy, “*Auditory perception of radio-frequency electromagnetic fields*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **71**(6), p. 1321-1334 (1982).
- [9] J. M. C. Duhamel, “*Seconde mémoire sur les phénomènes thermomécaniques*”, Journal de l'École Polytechnique, vol. **15**, p. 1-57 (1837).
- [10] W. Voigt, “*Lehrbuch der kristallphysik*”, Teubner Verlag Edition, Leipzig (1910).
- [11] H. Jeffreys, “*The thermodynamics of an elastic solid*”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. **26**, p. 101-106 (1930).
- [12] M. A. Biot, “*Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*”, Journal of Applied Physics, vol. **27**, p. 240-253 (1956).
- [13] P. Chadwick, “*Thermoelasticity: the dynamical theory*”, Progress in Solid Mechanics, vol. **1**, p. 263-328 (1960).
- [14] J. H. Weiner, “*A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem*”, Journal of Applied Mathematics, vol. **15**, p. 102-105 (1957).
- [15] M. Lessen, “*Thermoelasticity and thermal shock*”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. **5**, p. 57-61 (1956).
- [16] R. Hetnarski, “*Coupled one-dimensional thermal shock problem for small times*”, Archiwum Mechaniki Stosowanej, vol. **13**(2), p. 295-306 (1961).

-
- [17] J. E. Michaels, “*Thermally induced elastic wave propagation in slender bars*”, Proceedings 3rd US National Congress on Applied Mechanics (American Society Mechanical Engineers New York), vol. **209**, p. 209-213 (1958).
- [18] R. M. White, “*Generation of elastic waves by transient surface heating*”, Journal of Applied Physics, vol. **34**(12), p. 3559-3567 (1963).
- [19] D. E. Borth and C. A. Cain, “*Theoretical analysis of acoustic signal generation in materials irradiated with microwave energy*”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques MTT, vol. **25**(11), 944-954 (1977).
- [20] C. Thomsen, H. T. Grahn, H. J. Maris and T. Tauc, “*Surface generation and detection of phonons by picosecond light pulses*”, Physical Review B, vol. **34**(6), p. 4129-4138 (1986).
- [21] B. Perrin, B. Bonello, J. C. Jeannet and E. Romanet, “*Picosecond ultrasonic study of metallic multilayers*”, Physica B, vol. **219-220**, p. 681-683 (1996).
- [22] B. Perrin, B. Bonello, J. C. Jeannet and E. Romanet, “*Application of the hypersound ultrasonic technique to the study of the elastic and time-resolved thermal properties of materials*”, Ultrasonics, vol. **35**, p. 223-231 (1997).
- [23] C. Rossignol, J. M. Rampnoux, M. Perton, B. Audoin and S. Dilhaire, “*Generation and detection of shear acoustic waves in metal sub-micrometric films with ultra-short laser pulses*”, Physical Review Letters, vol. **94**(16), p. 166-106 (2005).
- [24] L. V. Wang, X. Zhao, H. Sun and G. Ku, “*Microwave-induced acoustic imaging of biological tissues*”, Review of Scientific Instruments, vol. **70**(9), p. 3744-3748 (1994).
- [25] R. A. Kruger, K. K. Kopecky, A. M. Aisen, D. R. Reinecke, G. A. Kruger and W. L. Kiser, “*Thermoacoustic CT with radio waves: a medical imaging paradigm*”, Radiology, vol. **211**, p. 275-278 (1999).
- [26] R. A. Kruger, W. L. Kiser, D. R. Reinecke and G. A. Kruger, “*Application of thermoacoustic computed tomography to breast imaging*”, Proceeding SPIE, vol. **3659**, p. 426-430 (1999).
- [27] R. A. Kruger, D. R. Reinecke and G. A. Kruger, “*Thermoacoustic computed tomography*”, Medical Physics, vol. **26**(9), p. 1832-1837 (1999).
- [28] R. S. Pemberton, M. C. Depew and J. K. S. Wan, “*A microwave-induced acoustic technique for the monitoring of relative paper acidity: the protective effect of lignin*”, Instrumentation Science and Technology, vol. **24**(3), p. 219-234 (1996).
- [29] J. K. S. Wan, H. Sauren, J. C. Wren and R. S. Pemberton, “*Microwave Induced phenomenon: a potential analytical sensor for ionic conducting materials in aqueous and organic media*”, Spectroscopy Letters, vol. **26**(7), p. 1231-1240 (1993).
- [30] C. Bacon, B. Hosten and P. A. Bernard, “*Acoustic wave generation in viscoelastic rods by time-gated microwaves*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **106**(1), p. 195-201 (1999).
- [31] E. Guilliorit, “*Génération d’ondes acoustiques par micro-ondes impulsives*”, Thèse de doctorat, n° d’ordre 2421, Université Bordeaux 1 (2001).
-

- [32] C. Bacon, E. Guilliorit, B. Hosten and D. Chimenti, “*Acoustic waves generated by pulsed microwaves in viscoelastic rods: modeling and experimental verification*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **110**(3), p. 1398-1407 (2001).
- [33] C. Bacon, B. Hosten and E. Guilliorit, “*One dimensional prediction of the acoustic waves generated in a multilayer viscoelastic body by microwave irradiation*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **238**(5), p. 853-867 (2000).
- [34] E. Guilliorit, C. Bacon and B. Hosten, “*Prediction of the generation of acoustic waves due to the penetration of pulsed microwaves in multilayer media*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **112**(1), p. 65-74 (2002).
- [35] E. Guilliorit, B. Hosten, C. Bacon and D. E. Chimenti, “*Microwave excitation of ultrasound in graphite-fiber reinforced composite plates*”, Ultrasonics, vol. **41**, p. 97-103 (2003).
- [36] B. Hosten and C. Bacon, “*Measurement of complex Young moduli of composite materials by time-gated microwaves*”, AIP Conference Proceedings, vol. **509**, p. 1113-1120 (2000).
- [37] C. Bacon, E. Guilliorit and B. Hosten, “*An acoustic-microwave method for the study of the mechanical influence of moisture content in materials*”, Journal of Applied Mechanics, vol. **70**, p. 268-274 (2003).
- [38] A. R. Hadj Hanni, “*Vibrations des structures générées par micro-ondes pulsées : application à l'évaluation non-destructive*”, Thèse de doctorat, n° d'ordre 3213, Université Bordeaux 1 (2006).
- [39] A. R. Hadj Hanni, C. Bacon and B. Hosten, “*Acoustic generation in piezoelectric materials by microwave excitation*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **118**(6), p. 2281-2288 (2005).
- [40] A. R. Hadj Hanni, C. Bacon and B. Hosten, “*In-plane vibration of thin circular structures submitted to pulsed microwave*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **119**(6), p. 3782-3792 (2006).
- [41] A. R. Hadj Hanni and C. Bacon, “*In-plane vibration of thin elliptic plates submitted to uniform pulsed microwave irradiations*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **299**(1-2), p. 298-313 (2006).
- [42] A. Mohamed Elarif, C. Bacon and B. Hosten, “*Transverse vibrations of viscoelastic bars subjected to an asymmetric temperature distribution induced by a microwave source*”, Experimental Mechanics (acceptée pour publication) (2010).

Chapitre I

Vibrations transversales de barreaux visco-élastiques soumis à une température asymétrique induite par une absorption de micro-ondes.

I.1. Introduction	10
I.2. Procédures expérimentales	11
I.2.1. Montage expérimental.....	11
I.2.2. Résultats expérimentaux et discussion	14
I.3. Modèle analytique unidimensionnel	16
I.3.1. Hypothèse d'un profil de température uniforme sur une section-droite	16
I.3.2. Modélisation du couplage thermomécanique.....	18
I.3.3. Simulation analytique : résultats et discussion.....	21
I.4. Modèles numériques par éléments finis	22
I.4.1. Modélisation tridimensionnelle des vibrations du barreau.....	22
I.4.2. Modélisation bidimensionnelle des vibrations d'une section-droite du barreau : méthode SAFE	24
I.4.3. Simulations numériques : résultats et discussion	26
I.5. Études des deux premiers modes $m_T^i, i = 1,2$	27
I.5.1. Hypothèse : modes générés par la présence de la rainure	28
I.5.2. Validation expérimentale	28
I.5.3. Validation théorique	29
I.5.3.1. Calcul du spectre de la puissance des ondes électromagnétiques.....	29
I.5.3.2. Calcul du spectre de l'élévation locale de la température.....	31
I.5.3.3. Étude analytique des modes de flexion.....	34
I.6. Étude des modes de vibration $m_T^i, i = 1,2,\dots$	36
I.7. Étude numérique du mode m_T^1	37
I.8. Conclusion	39
I.9. Références	40

I.1. Introduction

L'avancée scientifique et technologique de ces dernières années a favorisé l'émergence d'une nouvelle technique de génération d'ondes acoustiques dans les matériaux diélectriques. Cette technique est celle de la génération acoustique par micro-ondes pulsées (MIA : Microwave Induced Acoustic). Des récents travaux [I.1]-[I.6] ont montré qu'il est possible de l'appliquer pour générer des ondes acoustiques le long de barreaux diélectriques isotropes ou composites. Cependant ces études se limitaient seulement aux déformations axiales de traction compression mesurées à l'extrémité de l'échantillon. L'objectif de ce Chapitre sera d'étendre ces travaux en étudiant le comportement vibratoire du barreau dans une de ses directions transversales. Ce choix a été initialement motivé par la recherche d'une méthode d'évaluation de certaines propriétés du matériau constituant le barreau irradié, et en particulier l'estimation de son coefficient de Poisson ν .

La mesure expérimentale des déformations transversales d'un barreau viscoélastique homogène, entièrement placé à l'intérieur d'un guide d'ondes électromagnétiques et subissant des impulsions de micro-ondes a nécessité la réalisation d'une ouverture d'épaisseur millimétrique (rainure) le long de l'une de ses côtés latéraux. Cette rainure permet d'acquérir grâce à un vélocimètre Laser la vitesse transversale des particules situées à la surface de l'échantillon. Les résultats expérimentaux obtenus avec ce guide d'ondes rainuré (guide non conventionnel) sont dans un premier temps analysés avant d'être comparés à ceux obtenus avec le même dispositif mais en remplaçant le guide rainuré par un guide troué. Ce dernier est conçu afin de se rapprocher non seulement du guide complètement fermé sur les faces latérales (guide d'ondes conventionnel). Il favorisera donc la mise en évidence expérimentale de l'effet de la rainure sur les vibrations transversales du barreau. Rappelons que tout au long de ce Chapitre, l'adjectif « transversal » sera utilisé d'une façon un peu abusif afin de désigner tout champ acoustique mesuré expérimentalement ou calculé théoriquement sur un point matériel situé sur la face latérale du barreau directement en contact avec la rainure. Les résultats expérimentaux montrent que le spectre de la vitesse transversale (obtenu avec le guide rainuré) contient plus de pics que celui obtenu avec le guide troué. De plus, l'utilisation du modèle analytique unidimensionnel décrit dans la référence [I.1] ne permet pas de prédire certains pics présents sur ce spectre. Il est donc important de développer de nouveaux modèles analytiques et numériques par éléments finis permettant d'interpréter l'origine et la nature physique de ces pics, puis d'examiner si ces derniers peuvent être exploités dans la mesure du possible pour estimer les propriétés viscoélastiques et électromagnétiques de l'échantillon.

Une première étape consistera à formuler des hypothèses concernant la forme de la distribution de température induite au sein de l'échantillon par l'absorption de micro-ondes. L'analyse des effets de la source thermique sur les vibrations du barreau sera faite en considérant le modèle analytique unidimensionnel développé dans la référence [I.1]. Ce modèle est basé sur l'hypothèse d'un état de contrainte uniaxiale et sur la prise en compte de la moyenne de l'élévation de la température sur une section-droite de l'échantillon.

Cependant, comme ce modèle analytique unidimensionnel ne prend pas en considération la structure tridimensionnelle réelle de l'échantillon, un modèle numérique par éléments finis (EF) sera élaboré afin de le valider, de le compléter et d'étudier ses limites.

Ensuite, une nouvelle approche s'appuyant sur une combinaison de modèles analytiques et numériques par éléments finis présentés dans la référence [I.7] sera abordée afin de prendre en compte l'effet de la rainure sur les vibrations du barreau. Elle sera basée sur une étude « paramétrique » de l'effet de la rainure sur la perturbation du champ électromagnétique stationnaire à l'intérieur de l'échantillon. Rappelons que d'après le processus de génération acoustique par micro-ondes pulsées présenté sur la Figure 1, la forme des ondes acoustiques générées par le couplage thermoélastique dépendra intrinsèquement de la forme spatiale de l'élévation thermique, qui dépend elle-même de la façon dont se propage l'énergie électromagnétique à l'intérieur du matériau. Or, l'altération de la symétrie de la structure géométrique du guide d'ondes électromagnétiques par l'ouverture latérale peut *a priori* modifier la nature de la propagation des ondes électromagnétiques au sein de l'échantillon. De cette façon, il est tout à fait naturel de supposer que la rainure pourrait induire une autre forme de distribution spatiale de la température que celle qui serait obtenue avec un guide non rainuré.

I.2. Procédures expérimentales

Avant-propos : cette section donne une vue d'ensemble du dispositif expérimental utilisé pour générer et mesurer les vibrations transversales du barreau. La chaîne d'acquisition sera décrite dans la section I.2.1 et les résultats seront présentés dans la section I.2.2.

I.2.1. Montage expérimental

Le dispositif expérimental est décrit sur la Figure I.1 et comprend :

- Un générateur de salves (ou **GDF**) permettant de choisir le nombre d'impulsions. Les limitations du générateur de micro-ondes imposent une durée d'impulsions maximale égale à $\tau = 1 \mu s$ et une période entre chaque impulsion égale à $\tau_{imp} = 1,2 \mu s$ (cf. Figure I.2). De ce fait, pour augmenter l'énergie électromagnétique envoyée à l'échantillon pendant cette courte durée, il est donc nécessaire d'utiliser n impulsions de durée $\tau = 1 \mu s$ et de période $\tau_{imp} = 1,2 \mu s$. Ceci correspond au maximum d'énergie que le générateur peut émettre sur un temps très court. Ces n impulsions constituent ce qui est appelé « une salve ». Ensuite, si l'excitation veut se faire à la résonance d'une structure, la fréquence de répétitions des N salves peut être adaptée à la fréquence de résonance de la structure en agissant sur la durée entre deux salves $\tau_r = 1/f_r$.

- Un générateur de micro-ondes (ou **magnétron**) qui émet les ondes électromagnétiques à la fréquence de $9,41 GHz$. La puissance incidente moyenne sur une période

électromagnétique est égale à $\bar{P}_i = 5,5 \text{ kW}$. Ces ondes se propagent dans un guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire de section-droite $S = 23 \times 11 \text{ mm}^2$ favorisant la propagation du mode électrique transverse fondamental TE_{10} (cf. [I.2] et [I.3]).

- Un **adaptateur d'impédance** utilisé pour réduire le taux d'ondes électromagnétiques stationnaires piégées dans le guide.

L'échantillon est placé entièrement dans un guide d'ondes de section rectangulaire métallique, démontable, supposé parfaitement conducteur et possédant une rainure sur un de ses côtés. Les vibrations du barreau sont mesurées à l'aide de :

- Deux **accéléromètres** piézo-électriques miniatures. L'un de type Brüel & Kjaer 4374, de masse $0,65 \text{ g}$ et de sensibilité $0,129 \text{ pC/ms}^{-2}$, utilisable dans la gamme de fréquences inférieure à 30 kHz et relié à un amplificateur de charge (de type Brüel & Kjaer 2525). Ce dernier filtre puis amplifie le signal de l'accélération avant de l'envoyer à un oscilloscope de type Lecroy 9410. L'autre de type Dytran modèle 3224A₁, de masse $0,2 \text{ g}$ et de sensibilité 10 mV/g est utilisable dans la gamme de fréquences inférieure à 100 kHz . Néanmoins, comme les dimensions des ouvertures du guide sont petites par rapport à celles des deux accéléromètres, les mesures transversales faites à l'aide de ces deux capteurs nécessiteront de placer une partie du barreau hors du guide d'ondes.

- Un **vélocimètre Laser** (de type Polytec OFV 353) qui mesure la vitesse du déplacement matériel à la surface de la barre. Une mince couche de papier réfléchissant est déposée sur le point de mesure afin de maximiser le signal optique du Laser dont la sensibilité est ajustée à 5 mm/s/V . Un amplificateur (de type Electronic instrument 3627) filtre le signal avant de l'envoyer à un ordinateur pour un dernier post traitement.

Ce dispositif est assisté par un ordinateur qui permet non seulement de synchroniser le magnétron avec le générateur de fonctions mais aussi de post-traiter les signaux temporels acquis par les capteurs. Un logiciel « Acoustic microwaves » développé au laboratoire permet ensuite d'obtenir le spectre de la vitesse ou de l'accélération mesurée respectivement par le Laser ou l'accéléromètre en effectuant les transformées de Fourier des réponses acoustiques acquises par capteurs. Dans tout ce manuscrit, le terme « transformée de Fourier » désignera la transformée de Fourier temporelle des vibrations prédites théoriquement par les modèles analytiques ou numériques par éléments finis. L'échantillon testé est un barreau viscoélastique isotrope fait d'un matériau polymérique de type PVC. Ses dimensions géométriques sont indiquées sur la Figure I.3. Ce matériau a été choisi car certaines de ses propriétés mécaniques et électromagnétiques sont connues dans la littérature [I.1]-[I.3]. Suivant l'intérêt des mesures à effectuer, le barreau sera placé soit dans le guide d'ondes rainuré (guide non conventionnel), soit dans un guide possédant un trou de 3 mm de diamètre. Ce dernier est illustré sur la Figure I.4. La rainure et le trou ont été conçus afin d'y faire passer le faisceau du vélocimètre Laser et mesurer ainsi la vitesse de la barre dans la direction e_x lorsque celle-ci vibre sous l'effet du couplage thermoélastique engendré par l'absorption de micro-ondes à l'intérieur du barreau. De plus, l'utilisation du guide rainuré permettra, si cela

s'avère nécessaire, d'analyser l'évolution des amplitudes des différents modes de vibrations le long du barreau en déplaçant le point de mesure le long de la rainure.

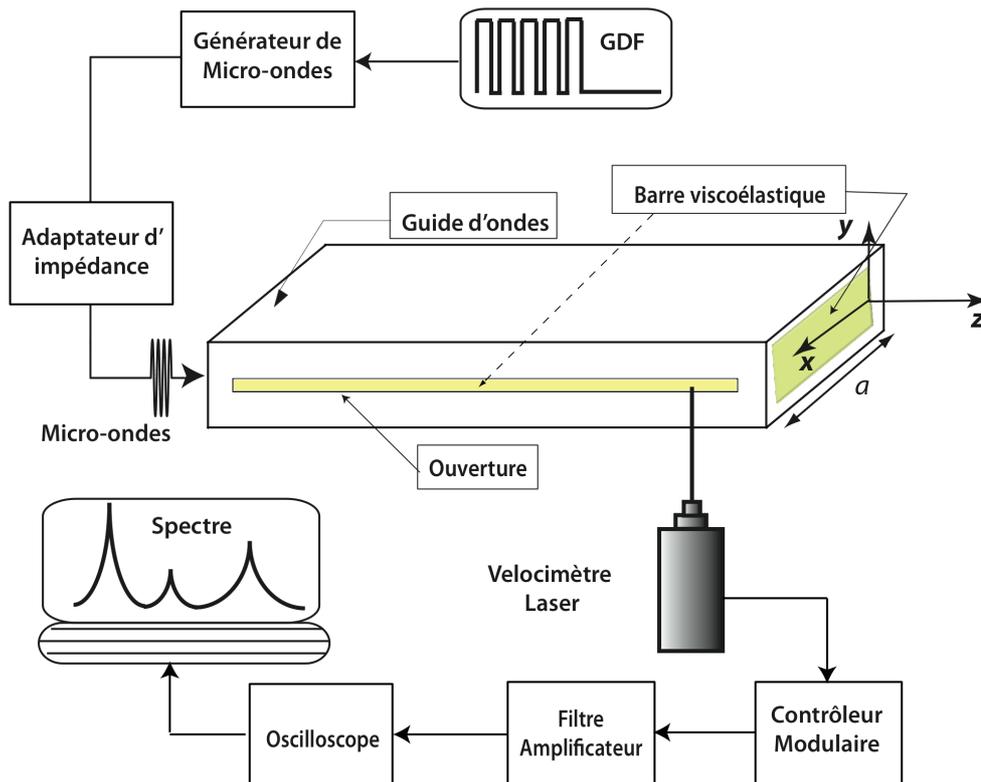


Figure I.1 : *dispositif expérimental.*

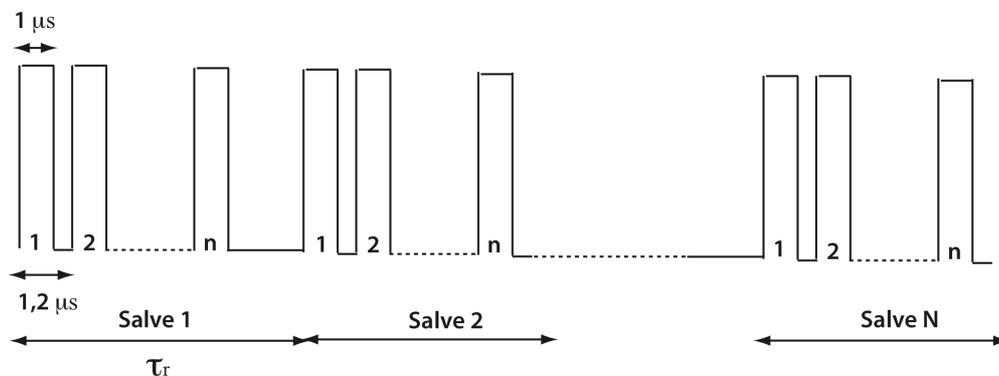


Figure I.2 : *définition des paramètres du générateur de fonctions.*

Quant au trou, il a été réalisé non seulement pour se rapprocher au cas du guide complètement fermé (auquel cas nous pouvons appliquer les modèles analytiques présents dans la littérature) mais aussi pour analyser expérimentalement l'effet de la rainure. Un réflecteur métallique peut être placé à l'extrémité des guides d'ondes. Il sera utilisé pour augmenter la puissance électromagnétique au sein du matériau en réfléchissant les ondes électromagnétiques incidentes. Le barreau est soumis à une irradiation de micro-ondes composée d'une salve de 30 impulsions. La salve est répétée toutes les 200 ms afin de moyennner temporellement la vitesse ou l'accélération expérimentale mesurée. Cette procédure favorise l'élimination partielle des oscillations parasites présentes sur la réponse temporelle

des vibrations transversales et qui sont induites par la chaîne d'acquisition et l'environnement extérieur

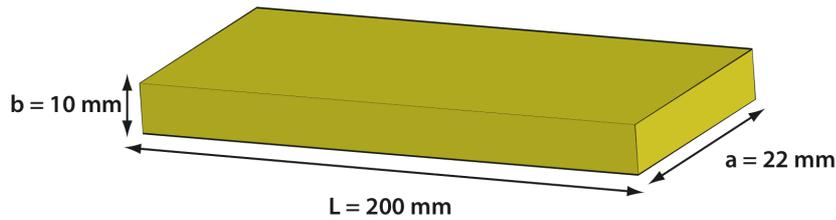


Figure I.3 : dimensions géométriques du barreau en PVC.

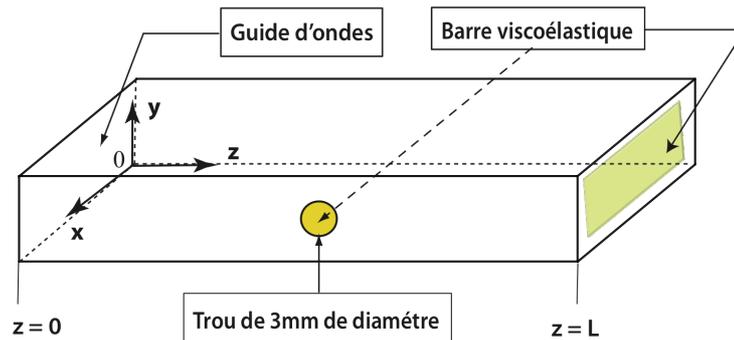
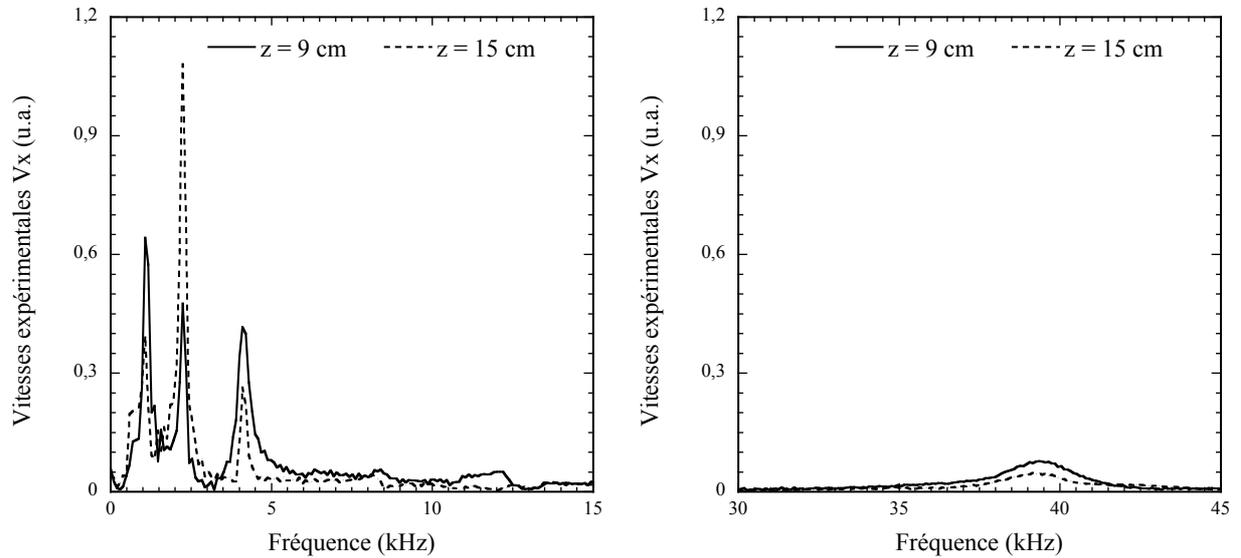
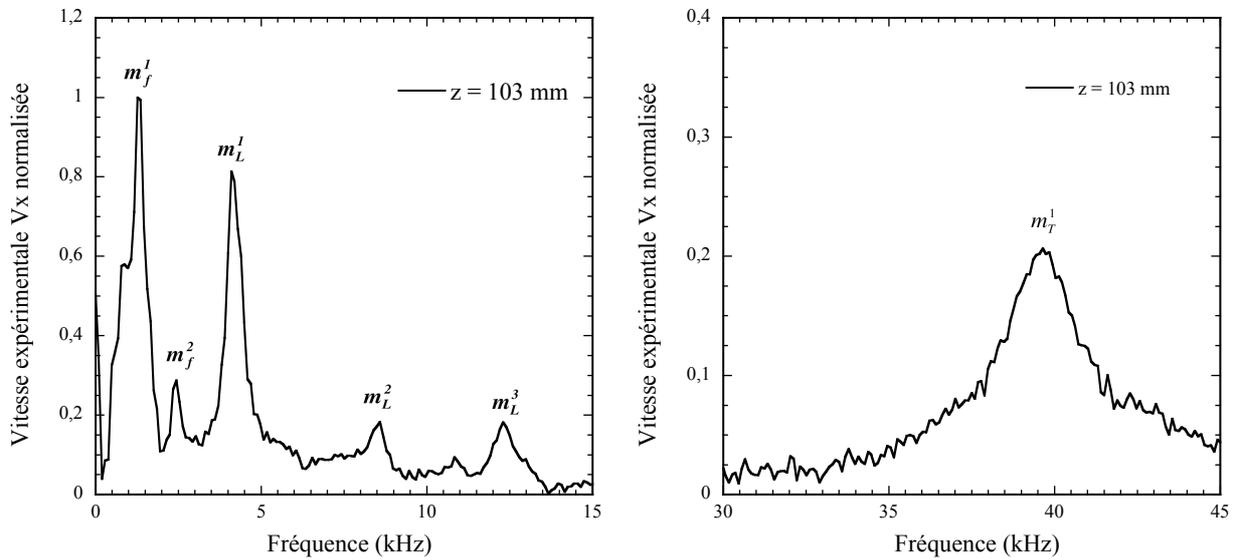


Figure I.4 : schéma du barreau viscoélastique placé dans le guide troué.

I.2.2. Résultats expérimentaux et discussion

Les premières mesures expérimentales obtenues avec le guide rainuré concernent la vitesse mesurée par le vélocimètre Laser sur la face du barreau située en $x = a$. Les résultats sont présentés sur la Figure I.5. Nous constatons que le spectre fait apparaître différents modes de vibration transversale indiqués par les différents pics présents sur le spectre. L'objectif sera de les analyser afin de comprendre les phénomènes physiques responsables de leur génération. Pour simplifier l'étude, chaque mode sera identifié en utilisant la nomenclature de la Figure I.6. Nous constatons que le spectre représenté sur cette figure et mesuré à la position $z = 103 \text{ mm}$ permet de bien faire apparaître certains pics non présents sur celui de la Figure I.5. Les 3 premiers modes m_f^1 , m_f^2 et m_L^1 sont situés respectivement au voisinage des fréquences de résonances $f_f^1 = 1 \text{ kHz}$, $f_f^2 = 2,3 \text{ kHz}$, $f_L^1 = 4 \text{ kHz}$ et le dernier à la fréquence de $f_T^1 = 39 \text{ kHz}$. L'analyse du phénomène physique responsable de la génération de certains modes de vibration peut se faire expérimentalement en comparant le spectre longitudinal (mesuré à l'extrémité du barreau) au spectre transversal. Cette démarche permet d'identifier ceux qui correspondent à la propagation des modes longitudinaux. Les résultats représentés sur la Figure I.7 montrent que les modes $m_L^i, i=1,2,\dots$ correspondent aux modes longitudinaux. Par contre, rien pour l'instant ne permet d'expliquer l'origine des autres modes qui apparaissent sur ces spectres.

Figure I.5 : spectres de la vitesse V_x mesurée à différentes positions le long du barreau.Figure I.6 : définition et nomenclature des modes de vibration mesurés expérimentalement dans la direction e_x .

Synthèse : les résultats expérimentaux obtenus dans cette section permettent de conclure qu'un barreau viscoélastique isotrope placé dans un guide d'ondes présentant une rainure sur l'une des petites faces latérales et soumis à des impulsions de micro-ondes est le siège de plusieurs modes de vibrations transversales. Certains d'entre eux (les modes $m_L^i, i = 1, 2, \dots$) semblent *a priori* correspondre aux modes axiaux de traction compression se propageant le long du barreau. Par contre rien pour l'instant ne permet d'interpréter les phénomènes physiques responsables de la génération des autres modes. Pour les étudier, il faut donc formuler les hypothèses adéquates puis les valider expérimentalement par le biais de modèles analytiques et numériques par éléments finis.

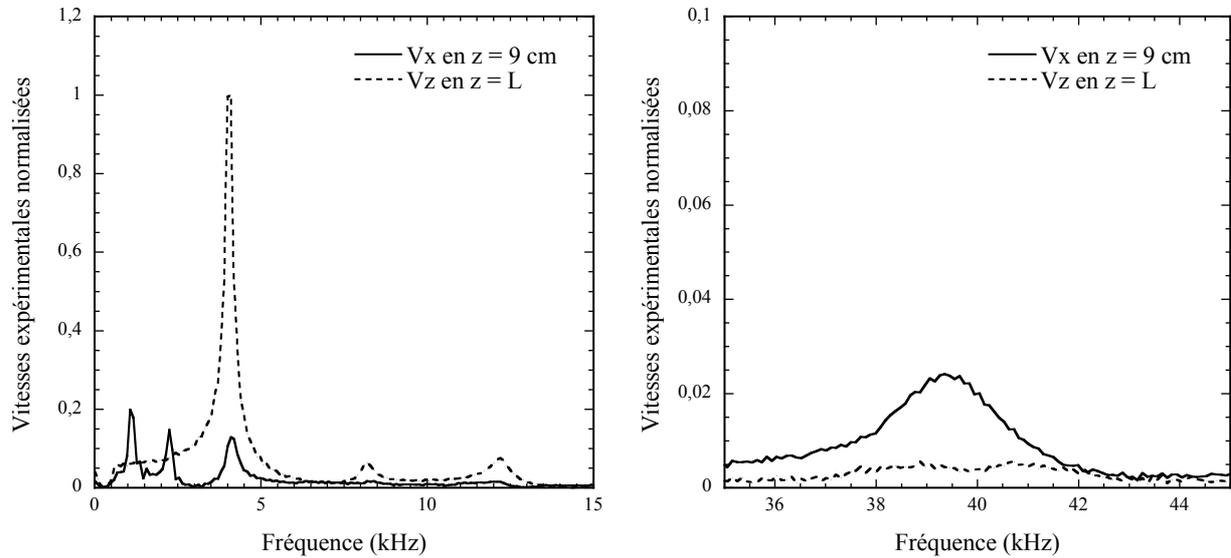


Figure I.7 : comparaison des spectres expérimentaux des vitesses V_z et V_x normalisées par rapport au spectre de la vitesse V_z .

I.3. Modèle analytique unidimensionnel

Avant-propos : cette section présente un modèle analytique unidimensionnel basé sur l'hypothèse suivante : étant donnée l'ouverture millimétrique du guide, ce dernier rainuré peut approximativement être assimilé au guide complètement fermé sur les cotés latérales. Cette hypothèse revient à négliger les effets de la rainure sur la distribution des champs électromagnétiques à l'intérieur du barreau. Dans ce cas, le modèle analytique développée dans la référence [I.1] pourra être de nouveau utilisée dans la section I.3.1 pour exprimer l'élévation de la température au sein du barreau. Puis cette quantité sera employée dans la section I.3.2 pour expliciter les expressions analytiques des déformations transversales induites par effet Poisson. Enfin, la section I.3.3 présentera les résultats du modèle analytique en les comparant à ceux obtenus expérimentalement.

I.3.1. Hypothèse d'un profil de température uniforme sur une section-droite

Pour mettre en place le modèle analytique 1D décrivant les vibrations transversales du barreau soumis à une excitation de micro-ondes, nous avons supposé que les effets de la rainure sur la propagation de l'énergie électromagnétique au sein du barreau sont négligeables. De cette façon, le modèle théorique de l'élévation thermique décrit dans les références [I.1]-[I.3] peut de nouveau être considéré. Il est obtenu en prenant la moyenne spatiale (sur une section-droite de l'échantillon) de l'élévation brusque de la température θ . Nous rappelons ci-dessous son expression qui est donnée dans le domaine de Fourier par la relation :

$$\tilde{\theta}(z, \omega) = \tilde{r}(\omega) K \sum_{j=1}^4 C_j e^{a_j z} \quad (\text{I.1})$$

où $\tilde{r}(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction décrivant l'élévation temporelle de la température, K, C_j, a_j (donnés dans dans les références [I.1]-[I.3]) sont des coefficients dépendant de la puissance électromagnétique moyenne incidente, des caractéristiques thermiques et électromagnétiques du matériau irradié et de la présence ou pas d'un réflecteur métallique à l'extrémité du guide d'ondes contenant l'échantillon, et ω est la pulsation reliée à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$.

Il est admis que l'élévation temporelle $r(t)$ de la température induite par une impulsion de micro-ondes de courte durée τ (pendant laquelle la conduction thermique est négligeable), peut être exprimée sous la forme :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/\tau & 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & t > \tau. \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Pour tout $\omega > 0$, sa transformée de Fourier $\tilde{r}(\omega)$ s'écrit :

$$\tilde{r}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 \tau} (1 - e^{-i\omega \tau}). \quad (\text{I.3})$$

De même, la fonction $\tilde{r}(\omega)$ correspondant dans le domaine spectral à l'accroissement de la température due à une salve de n impulsions séparées d'une durée τ_{imp} peut être donnée par :

$$\tilde{r}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 \tau} (1 - e^{-i\omega \tau}) \sum_{m=1}^n e^{-i\omega(m-1)\tau_{imp}}. \quad (\text{I.4})$$

Dans une perspective d'utilisation de N salves de période τ_r et contenant chacune n impulsions de période τ_{imp} , la fonction $\tilde{r}(\omega)$ peut être exprimée sous la forme :

$$\tilde{r}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 \tau} (1 - e^{-i\omega \tau}) \sum_{p=1}^n e^{-i\omega(p-1)\tau_{imp}} \sum_{q=1}^N e^{-i\omega(q-1)\tau_r}. \quad (\text{I.5})$$

La Figure I.8 représente les profils spatiaux de l'élévation thermique le long du barreau en se plaçant dans deux configurations. Nous remarquons qu'*a priori* la répartition thermique dépend de la présence ou pas d'un réflecteur à l'extrémité de celui-ci. Plus précisément, nous observons que l'amplitude est plus importante dans le cas d'un réflecteur que dans le cas contraire. En outre, Les résultats de cette figure soulignent aussi que l'amplitude de la température oscille le long du barreau tout en décroissant. Cette observation est en adéquation avec les résultats expérimentaux obtenus par E. V. Ratnikov [I.8] dans le cas d'un matériau diélectrique peu absorbant. Ces oscillations traduisent les interférences électromagnétiques présentes dans le barreau.

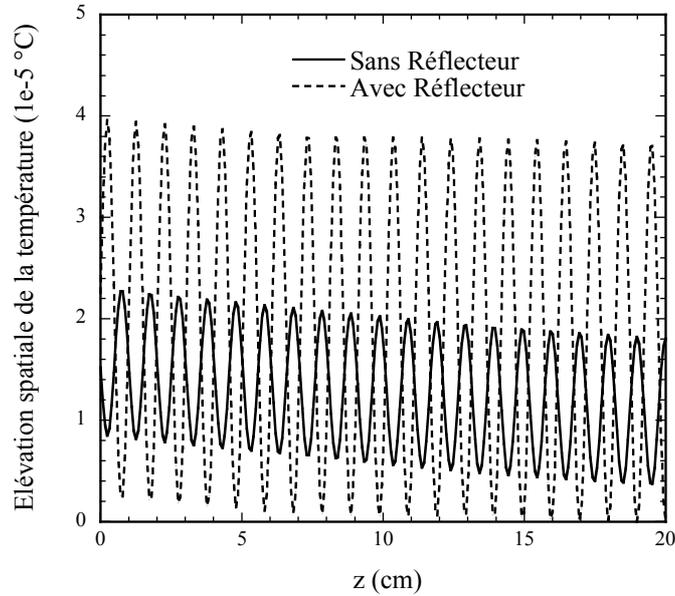


Figure I.8 : variations spatiales de l'élévation de la température moyenne sur une section-droite le long du barreau.

I.3.2. Modélisation du couplage thermomécanique

Dans cette partie, nous examinons analytiquement les vibrations transversales générées par la brusque élévation de température $\tilde{\theta}$ donnée par la relation (I.1). Ces déformations se font au sein d'un barreau viscoélastique isotrope de longueur $L=200$ mm, de section-droite $A=22 \times 10$ mm², de caractéristiques mécaniques : E^* (le module d'Young qui sera considéré tout le temps à valeurs complexes pour tenir compte de la viscosité du matériau), ν (le coefficient de Poisson à valeur réelle) et ρ (la masse volumique), de caractéristiques thermiques : α (le coefficient de dilatation thermique) et C_m (la chaleur massique) ; et de caractéristique électromagnétique : ε^* (la permittivité diélectrique qui sera supposée tout le temps à valeurs complexes afin de tenir compte de l'atténuation des ondes électromagnétiques se propageant dans le matériau). La coordonnée axiale de la première extrémité est $z=0$ et celle de la seconde est $z=L$. Ces deux extrémités sont libres de toute contrainte extérieure comme cela est montré sur la Figure I.9. À partir du temps $t=0$, la surface libre située en $z=0$ de l'échantillon est irradiée uniformément par des micro-ondes. L'absorption de la puissance des ondes électromagnétiques dans le matériau crée un gradient de température $\tilde{\theta}$ qui dépend des caractéristiques électromagnétiques et thermiques du milieu irradié. En se référant aux travaux effectués dans les références [I.1]-[I.3] dans le cas d'un barreau en état de contrainte uniaxiale, le spectre des petites déformations longitudinales $\tilde{\varepsilon}(z,\omega)$ satisfait l'équation (I.6) suivante :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(z,\omega)}{\partial z^2} + (\omega S^*)^2 \tilde{\varepsilon}(z,\omega) - \alpha \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(z,\omega)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.6})$$

où $S^{*2} = \rho/E^*$ est la lenteur à valeurs complexes et $\tilde{\theta}(z,\omega)$ est la transformée de Fourier de l'élévation de température.

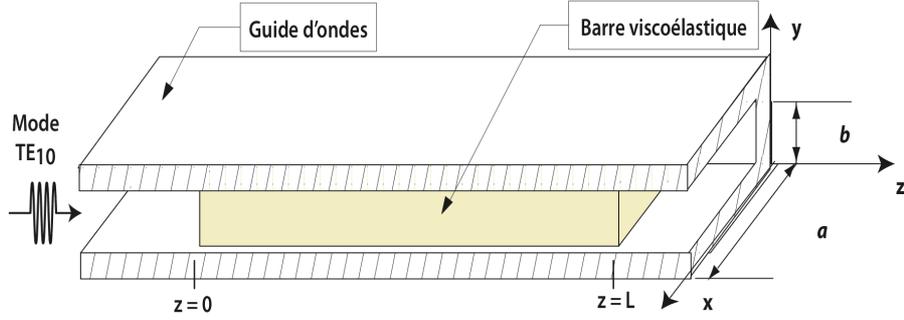


Figure I.9 : vue coupée du dispositif {guide d'ondes + échantillon irradié} où la face du guide contenant la rainure et située en $x = a$ n'a pas été représentée.

L'équation (I.6) est une équation d'onde caractérisée par la vitesse de propagation v_ϕ égale à $v_\phi = 1/S'$ où S' est la partie réelle de la lenteur S^* . Notons l'absence de phénomène de dispersion puisque v_ϕ ne dépend pas de la fréquence (hypothèse d'un barreau unidimensionnel). De même, [I.1]-[I.3] ont montré que les forces de contraintes axiales sont liées aux accélérations axiales le long du barreau par la relation :

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_z \\ \tilde{a}_z \end{bmatrix} = P(z) \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{a}_1 \end{bmatrix} + G(z) \quad (\text{I.7})$$

où \tilde{F}_z et \tilde{F}_1 sont les forces normales respectivement appliquées sur les faces situées en z et en $z=0$, \tilde{a}_z et \tilde{a}_1 sont les accélérations normales respectivement calculées sur les faces situées en z et en $z=0$, la matrice $P(z)$ et le vecteur $G(z)$ sont définis respectivement par les matrices :

$$P(z) = \begin{bmatrix} \cos(S^* \omega z) & \frac{\rho A}{S^* \omega} \sin(S^* \omega z) \\ -\frac{\rho A}{S^* \omega} \sin(S^* \omega z) & \cos(S^* \omega z) \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

$$G(z) = \alpha r(\omega) K \omega^2 k'_z(\omega_0) k''_z(\omega_0) \begin{bmatrix} \frac{\rho A}{S^* \omega} \sum_{k=1}^4 \frac{C_k}{a_k^2 + \omega^2 S^{*2}} (\omega S^* c(z) + a_k s(z) - \omega S^* e^{a_k z}) \\ \sum_{k=1}^4 \frac{C_k}{a_k^2 + \omega^2 S^{*2}} (-\omega S^* c(z) + a_k c(z) - a_k e^{a_k z}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.9})$$

où $c(z) = \cos(S^* \omega z)$ et $s(z) = \sin(S^* \omega z)$.

Notons dans les équations (I.8) et (I.9) que la matrice $P(z)$ est liée à la propagation des ondes mécaniques alors que le vecteur $G(z)$ est lié au profil spatial de la température, donc à la génération des ondes acoustiques. Sachant que les interfaces situées en $z=0$ et $z=L$ sont libres alors la contrainte axiale normale $\tilde{\sigma}_{zz}$ y est nulle et par conséquent les forces normales \tilde{F}_1 et \tilde{F}_L aussi. Dans ce cas, les accélérations axiales \tilde{a}_1 et \tilde{a}_z calculées sur les sections-

droites repérées respectivement par les coordonnées $z=0$ et z et la force normale \tilde{F}_z s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= -\frac{G_1^{(L)}}{P_{12}^{(L)}} \\ \tilde{F}_z &= -P_{12}^{(z)} \tilde{a}_1 + G_1^{(z)} \\ \tilde{a}_z &= -P_{22}^{(z)} \tilde{a}_1 + G_2^{(z)}.\end{aligned}\quad (\text{I.10})$$

Par suite, en utilisant ces différentes expressions, le spectre de l'accélération $\tilde{a}_z(z=L, \omega)$ à l'extrémité du barreau se met sous la forme :

$$\tilde{a}_z(z=L, \omega) = -P_{22}^{(L)} \frac{G_1^{(L)}}{P_{12}^{(L)}} + G_2^{(L)}.\quad (\text{I.11})$$

Rappelons que les relations (I.6) à (I.11) ont déjà été formulées dans la référence [I.1] et vont être utilisées dans la suite pour construire le modèle analytique des déformations transversales générées par effet Poisson.

Ainsi, en supposant l'hypothèse d'un état de contrainte uniaxiale, la déformation transversale $\tilde{\epsilon}_{xx}(z, \omega)$ dans la direction e_x s'obtient alors en écrivant la loi de comportement mécanique suivant :

$$\tilde{\epsilon}_{xx}(z, \omega) = -\nu \frac{\tilde{\sigma}_{zz}(z, \omega)}{E^*} + \alpha \tilde{\theta}(z, \omega).\quad (\text{I.12})$$

L'expression (I.12) peut se réécrire en termes de déplacement transversal u_x dans la direction e_x sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{u}_x(z, \omega)}{\partial x} = -\nu \frac{\tilde{\sigma}_{zz}(z, \omega)}{E^*} + \alpha \tilde{\theta}(z, \omega).\quad (\text{I.13})$$

Par ailleurs, étant donnée la symétrie des effets de la température sur une section-droite du barreau et celle de la géométrie de l'échantillon lui-même, nous pouvons supposer que le déplacement transversal u_x vérifie sur les faces du barreau l'égalité :

$$u_x|_{x=0} = -u_x|_{x=a}.\quad (\text{I.14})$$

Sachant que le membre de droite de l'expression (I.13) ne dépend pas de la coordonnée x , alors le déplacement transversal peut s'obtenir en intégrant l'équation (I.13) sur toute la largeur. En procédant de cette manière, le déplacement transversal u_x s'exprime finalement sous la forme :

$$\tilde{u}_x|_{x=0} = -\frac{a}{2} \left(-\nu \frac{\tilde{\sigma}_{zz}(z, \omega)}{E^*} + \alpha \tilde{\theta}(z, \omega) \right).\quad (\text{I.15})$$

La connaissance de u_x permet ensuite de déduire l'expression analytique (I.16) de la vitesse transversale :

$$\tilde{v}_x|_{x=0} = -i\omega \frac{a}{2} \left(-\nu \frac{\tilde{\sigma}_{xx}(z, \omega)}{E^*} + \alpha \tilde{\theta}(z, \omega) \right).\quad (\text{I.16})$$

Or, étant donné que la contrainte axiale est donnée par la relation $\tilde{\sigma}_{zz} = \tilde{F}_z(z, \omega)/A$, alors l'expression de la vitesse transversale du modèle analytique 1D se réécrit finalement sous la forme :

$$\tilde{v}_x|_{x=0} = -i\omega \frac{a}{2} \left(-\nu \frac{\tilde{F}_z(z, \omega)}{AE^*} + \alpha \tilde{\theta}(z, \omega) \right). \quad (I.17)$$

I.3.3. Simulation analytique : résultats et discussion

Considérons le même barreau viscoélastique isotrope présenté sur la Figure I.3. Supposons pour simplifier qu'il est fait d'un matériau de coefficient de Poisson $\nu = 0,35$, de masse volumique $\rho = 1380 \text{ kg.m}^{-3}$, de module d'Young $E^* = (3,5 + 0,17i) \text{ GPa}$ et de permittivité relative $\epsilon_r^* = 2,67 - 0,02i$. Ces deux dernières valeurs sont des estimations obtenues dans [I.1]-[I.3] dans le cas réel d'un barreau en PVC. En comparant sur la Figure I.10 le spectre normalisé de la vitesse V_x mesurée expérimentalement en $z = 103 \text{ mm}$ et celui calculé avec le modèle analytique, nous remarquons que ce dernier arrive à prédire les modes $m_L^i, i = 1, 2, \dots$. Ce résultat prouve que ces modes sont liés à l'effet Poisson et pourraient être exploités pour élaborer, dans la mesure du possible, une méthode d'évaluation de ν . Par exemple, cette méthode pourrait s'appuyer *a priori* sur l'étude de l'influence de ν sur le rapport des spectres des vibrations mesurées d'une part à l'extrémité du barreau et d'autre part dans la direction transversale. Une telle démarche sera traitée un peu plus loin dans le Chapitre II où plusieurs méthodes seront élaborées pour évaluer le coefficient de Poisson des barreaux viscoélastiques. Nous constatons que les résultats obtenus avec le modèle analytique (I.17) ne permettent pas d'expliquer l'origine de ces modes transversaux : m_f^1, m_f^2 et m_T^1 . Par conséquent, il faut reformuler d'autres hypothèses tenant compte de la nature physique du problème. Pour commencer, nous pouvons supposer que ces modes (m_f^1, m_f^2 et m_T^1) sont générés par la structure tridimensionnelle réelle de l'échantillon dans la mesure où celle-ci a été négligée lors de l'élaboration du modèle analytique unidimensionnel. Cependant, les simulations numériques par EF seront faites en considérant toujours la forme de l'élévation de température $\tilde{\theta}(z, \omega)$ donnée par l'équation (I.1) et qui correspond au cas d'un guide fermé. Les simulations numériques EF des vibrations du barreau seront faites en utilisant le logiciel COMSOL MULTIPHYSICS de calcul par éléments finis.

Synthèse : les résultats de cette section indiquent que les modes de vibrations $m_L^i, i = 1, 2, \dots$ sont des modes axiaux de traction compression induits par effet Poisson dans la direction latérale e_x . Par contre, il semble que les hypothèses formulées jusqu'ici ne permettent pas d'interpréter les phénomènes physiques favorisant la génération des autres modes de vibrations transversales. Par conséquent, d'autres hypothèses seront reformulées dans la suite afin de se rapprocher d'une modélisation plus réaliste reflétant la réalité expérimentale.

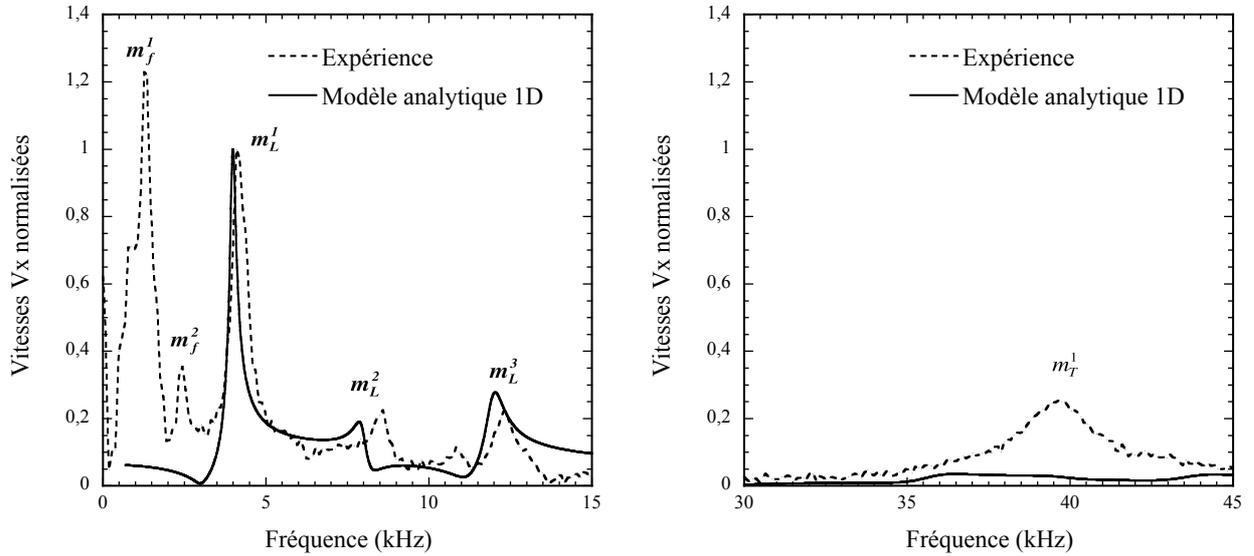


Figure I.10 : comparaison spectrale de la vitesse V_x (normalisée) prédite par le modèle analytique unidimensionnel et celle mesurée expérimentalement en $z = 103$ mm.

I.4. Modèles numériques par éléments finis

Avant-propos : cette section présente le modèle numérique tridimensionnel (3D) par éléments finis (EF) appliqué pour analyser si, contrairement au modèle analytique 1D, la prise en compte des effets d'inertie tridimensionnels du barreau peut faciliter l'interprétation des autres modes transversaux. Cependant, l'hypothèse de la forme (I.1) de la température sera conservée. La section I.4.1 présentera le formalisme utilisé pour résoudre numériquement par éléments finis l'équation aux dérivées partielles dérivant du problème thermoélastique associé. Puis la section I.4.2 introduira les méthodes semi analytiques par éléments finis (SAFE methods). Ces dernières nous serviront à interpréter numériquement la nature physique de certains modes de vibration.

I.4.1. Modélisation tridimensionnelle des vibrations du barreau

COMSOL MULTIPHYSICS [I.9] (connu sous l'ancienne appellation FEMLAB) est un code de calcul par éléments finis qui facilite l'analyse et la simulation numérique des phénomènes physiques et multi physiques. De plus, il offre la possibilité d'implémenter différents modèles en suivant un formalisme bien spécifique. Ce formalisme se fait à travers une écriture matricielle générale des équations de Navier sous la forme :

$$\begin{cases} e \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c \nabla c + \alpha u - \gamma) + \beta \nabla u + a u = f & \text{dans } \Omega \\ (c \nabla c + \alpha u - \gamma) \cdot \mathbf{n} + q u = g & \text{sur } \partial \Omega \\ h u = r & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

où $u = (u_j), j = 1 \dots m$ est le vecteur solution et m le nombre de ses composantes, $\nabla = (\partial/\partial x_i), i = 1 \dots p$ est l'opérateur gradient et p le nombre de dimensions spatiales, $a, d, e, h,$ et q sont des matrices $m \times m, c$ est une matrice $m \times m$ dont les éléments sont aussi des matrices $p \times p, f, g$ et r sont des vecteurs à m composantes, n est le vecteur normal aux frontières unitaire et dirigé vers l'extérieur, γ est un vecteur à m composantes dont les éléments sont des vecteurs à p composantes, α, β sont des matrices $m \times m$ dont les éléments sont des vecteurs à p composantes, Ω est le domaine intérieur du barreau, et $\partial\Omega$ sont les frontières (faces) du barreau. Le système (I.18) peut se réécrire sous la forme indicielle suivante :

$$\begin{cases} e_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + d_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - \left(\alpha_{ijk} - \beta_{ijk} + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ - \left(\frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial x_k} - a_{ij} \right) u_j + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k} = f_i & \text{dans } \Omega \\ c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_k + \alpha_{ijk} u_j n_k - \gamma_{ik} n_k + q_{ij} u_j = g_i & \text{sur } \partial\Omega \\ h_{ij} u_j = r_i & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

L'implémentation du modèle passe impérativement par l'identification des coefficients matriciels apparaissant dans le système (I.19) et dépendant de la nature du phénomène physique étudié.

L'étude des petites déformations dues à une source de température $\tilde{\theta}(z, \omega)$ au sein d'un barreau s'écrit simplement dans le domaine de Fourier sous la forme :

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} - C_{ikjl} \alpha_{jl} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{I.20})$$

où C_{ijkl} représente les composantes de la matrice de rigidité à valeurs complexes et \tilde{u} est la transformée de Fourier du vecteur des déplacements. À cette équation, il faut ajouter les équations qui traduisent les conditions aux limites sur les frontières. Celles-ci sont de types Neumann et s'écrivent sous la forme :

$$T_i = \tilde{\sigma}_{ik} n_k = \left(C_{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} - C_{ikjl} \alpha_{jl} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} \right) n_k \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{I.21})$$

où $T_i = \tilde{\sigma}_{ik} n_k$ sont les composantes du vecteur des contraintes sur $\partial\Omega$.

En outre, ayant supposé que la barre peut coulisser sans frottement à l'intérieur du guide d'ondes, alors ses surfaces peuvent être supposées comme libres de toute contrainte mécanique. Cette condition se traduit par la nullité des composantes $T_i = \sigma_{ik} n_k$ sur les frontières de l'échantillon. Dans ce cas, les vibrations tridimensionnelles du barreau peuvent être décrites numériquement par le système d'équations :

$$\begin{cases} C_{ijkl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} - C_{ikjl} \alpha_{jl} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ T_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Notons que la permutation des indices j et k dans les coefficients C_{ijkl} permet d'identifier les coefficients c_{ijkl} qui apparaissent dans le système (I.19). De même la comparaison entre les équations (I.19) et (I.22) permet d'exprimer les composantes des matrices c, α, γ, q et g par les relations :

$$c_{ijkl} = C_{ijkl} \cdot \gamma_{ik} = C_{ijkl} \alpha_{jl} \tilde{\theta}, \quad q_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad g_i = 0 \quad \text{avec} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (\text{I.23})$$

L'Annexe A décrit la méthodologie appliquée pour obtenir les composantes de ces différentes matrices.

L'identification de ces matrices suffit à définir complètement dans COMSOL MULTIPHYSICS le modèle numérique tridimensionnel correspondant à une sollicitation thermique donnée. Cependant, son inconvénient est qu'il nécessite la connaissance de l'expression analytique du champ thermique induit par l'excitation électromagnétique. C'est pour cela que nous avons mis en place une alternative basée sur les méthodes semi analytiques par éléments finis (méthodes SAFE). Leur intérêt est qu'elles permettent de prédire tous les différents modes qui peuvent être générés dans la structure, indépendamment de la distribution thermique. De plus, elles donnent la possibilité de réduire d'une façon significative le temps de calculs numériques en adoptant une discrétisation bidimensionnelle (2D) du barreau au lieu d'un maillage 3D.

I.4.2. Modélisation bidimensionnelle des vibrations d'une section-droite du barreau : méthode SAFE

Une méthode SAFE sera appliquée pour étudier numériquement à une fréquence donnée la nature de certains modes de vibration induits par la propagation au sein de l'échantillon d'ondes acoustiques. Considérons sur la Figure I.11 le cas d'une onde acoustique qui se propage dans la direction e_z à la pulsation ω . Le champ de déplacement \mathbf{u} peut être décomposé sous la forme :

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y) e^{i(kz - \omega t)} \quad (\text{I.24})$$

où $\mathbf{U}(x, y)$ est le vecteur contenant les amplitudes du champ de déplacement dans la section-droite et k est le nombre d'onde dans la direction de propagation e_z .

En l'absence de toute source d'excitation thermique dans le solide ($\tilde{\theta} = 0$), l'équation (I.22) décrivant les vibrations propres du barreau se met simplement sous la forme :

$$\begin{cases} C_{pqil} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_q \partial x_l} + \rho \omega^2 u_p = 0 & \text{dans } \Omega \\ T_p = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

avec $j, p = 1, 2, 3$ et $l, q = 1, 2$.

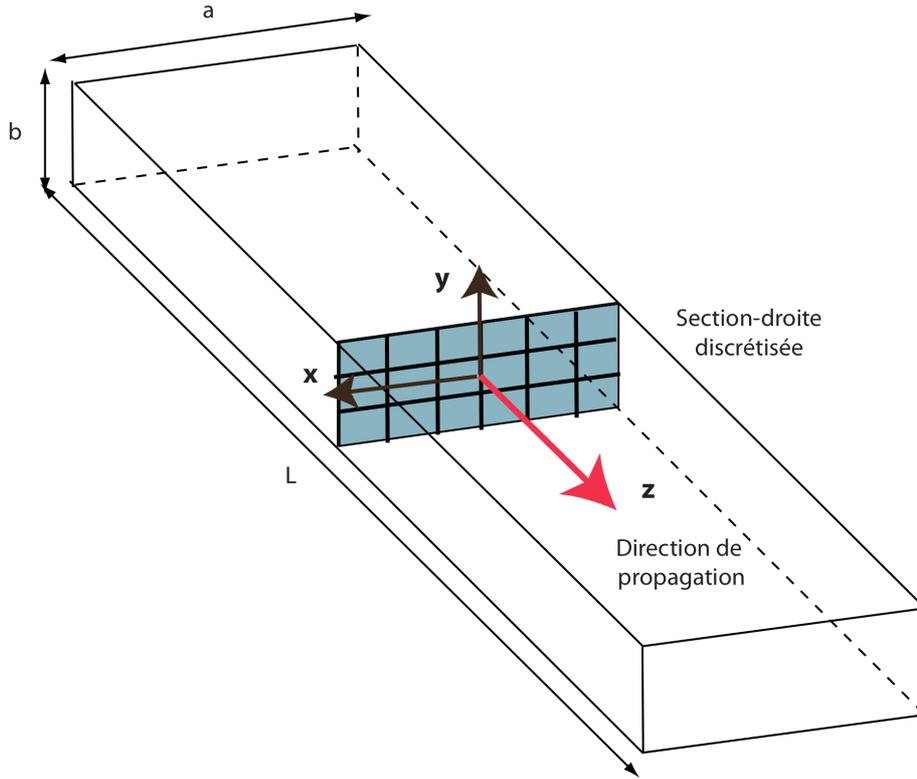


Figure I.11 : illustration du principe de la méthode SAFE appliquée au barreau de longueur L .

Puis, en décomposant le vecteur déplacement \mathbf{u} sous la forme $\mathbf{u} = (U_1, U_2, U_3, kU_1, kU_2, kU_3)$ et en remplaçant les expressions des composantes $(u_p), p = 1 \dots 3$ du champ \mathbf{u} dans (I.25), nous obtenons le système d'équations décrivant les mouvements libres du barreau :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{pqil} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_q \partial x_l} + i(C_{p3jq} + C_{pqj3}) \frac{\partial(kU_j)}{\partial x_q} - kC_{p3j3}(kU_j) + \rho\omega^2 U_j \delta_{pj} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T_p = C_{pqil} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_q + iC_{pqj3}(kU_j) n_q = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

La discrétisation et la résolution du système d'équations (I.26) peuvent être directement faites sur COMSOL MULTIPHYSICS en utilisant le formalisme indiqué en Annexe B. La connaissance des modes propres U_M associés chacun à un nombre d'onde k^M permet par la suite d'interpréter la nature physique de chaque mode en visualisant sa déformée ou en calculant sa vitesse de phase par la relation :

$$v_\phi^M = \frac{\omega}{k^M} \quad (\text{I.27})$$

où k^M est le nombre d'onde du mode longitudinal calculé par la méthode SAFE.

I.4.3. Simulations numériques : résultats et discussion

Généralement, toute exploitation d'une solution numérique suppose avant tout qu'elle soit consistante et stable. Ces deux propriétés sont conditionnées par le choix d'un maillage raffiné surtout si les vibrations s'effectuent en hautes fréquences. Par conséquent, avant d'interpréter les résultats numériques obtenus, il est judicieux d'étudier l'effet du maillage sur le spectre numérique des vibrations du barreau. Naturellement, comme la géométrie de l'échantillon est parallélépipédique, alors un maillage quadrangle semble être le mieux adapté à ce type de problème. Un maillage quadrangle de référence 4-2-35 a été choisi afin d'analyser l'influence du maillage sur le spectre. Il signifie que l'échantillon est maillé en utilisant 4 éléments sur la largeur $a = 22$ mm, 2 éléments sur l'épaisseur $b = 10$ mm et 35 éléments sur la longueur $L = 200$ mm. Puis le nombre d'éléments dans une direction est augmenté en fixant le nombre d'éléments dans les autres directions.

Pour simplifier, nous choisissons par exemple d'étudier l'influence du maillage sur la largeur du barreau en multipliant par 2 le nombre d'éléments dans cette direction. La Figure I.12 représente ces deux discrétisations.

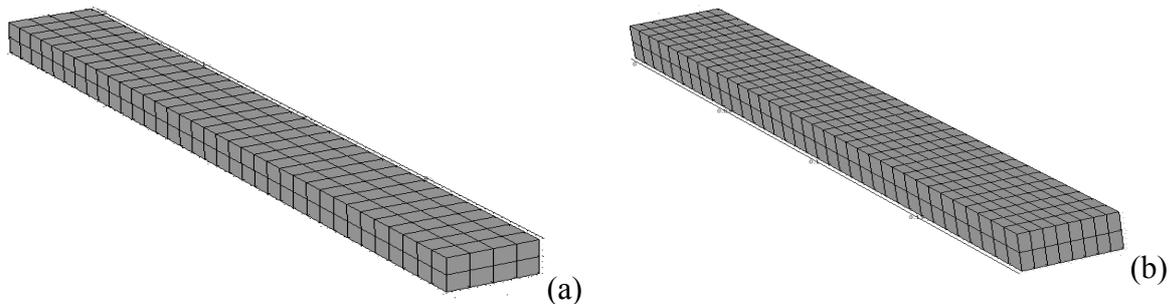


Figure I.12 : maillage du barreau : (a) maillage 4-2-35 ; (b) maillage 8-2-35.

Les résultats numériques regroupés sur la Figure I.13 montrent qu'en dessous de la fréquence de 50 kHz, un maillage quadrangle moins raffiné de type 4-2-35 semble être suffisant pour obtenir une solution numérique convergente et stable. Le même constat a été observé en agissant de même sur les autres directions de l'échantillon.

La Figure I.14 compare la vitesse transversale obtenue numériquement avec ce maillage de référence à celle mesurée expérimentalement. Nous constatons que, contrairement au modèle analytique unidimensionnel, le modèle numérique tridimensionnel prédit dans la gamme de fréquences inférieure à 50 kHz un pic semblable à m_T^1 et situé environ à la fréquence de 37,5 kHz. De ce fait, ce pic est lié directement aux effets vibratoires induits par la structure tridimensionnelle du barreau. Toutefois, notons la présence d'une petite variation entre les fréquences de résonance (du pic m_T^1) prédites dans chaque simulation (expérience et modèle EF 3D). Cette variation pourrait s'expliquer en partie, d'une part par un mauvais choix des paramètres mécaniques (en particulier de E^* et de ν) utilisées pour réaliser la simulation numérique, et d'autre part leur dépendance possible par rapport à la fréquence des vibrations. Par contre, nous constatons toujours que la prise en compte de la structure réelle du barreau ne permet pas d'expliquer l'origine des deux premiers pics m_f^1 et m_f^2 .

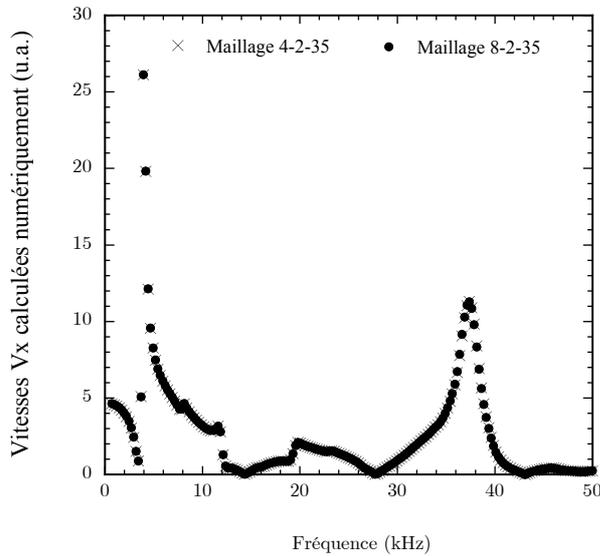


Figure I.13 : influence du nombre d'éléments du maillage sur le spectre de la vitesse V_x déterminée numériquement en $z = 15$ cm sur la face située en $x = a$

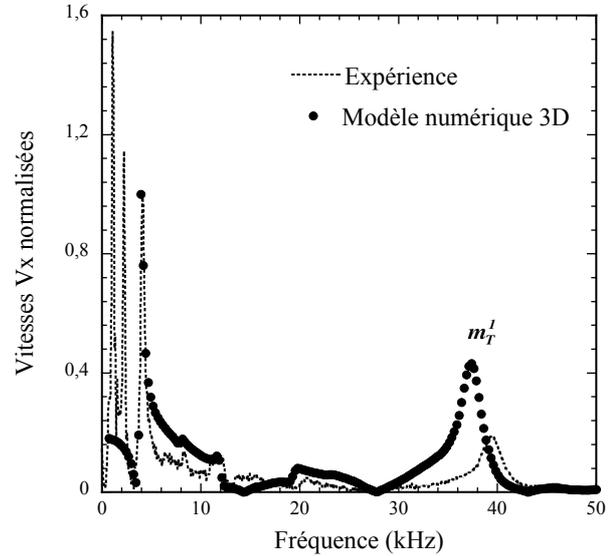


Figure I.14 : comparaison spectrale de la vitesse V_x normalisée et prédite par le modèle numérique tridimensionnel à celle mesurée expérimentalement.

Synthèse : les résultats du modèle numérique tridimensionnel n'ont réussi à prédire que les modes m_L^1 et m_T^1 dans le cas où le modèle de température considéré est celui donné par la relation (I.1). Donc, ce dernier mode est directement lié à la structure tridimensionnelle du barreau. Toutefois, rien ne permet pour l'instant de quantifier le phénomène physique responsable de sa génération.

I.5. Études des deux premiers modes m_f^i , $i = 1, 2$

Avant-propos : nous venons de voir que l'hypothèse d'une température symétrique (liée à la non prise en compte de l'effet de la rainure sur la distribution des champs électromagnétiques à l'intérieur du barreau) ne permet pas de prédire analytiquement ou numériquement par éléments finis les deux premiers modes expérimentaux m_f^1 et m_f^2 . Par conséquent, il est tout à fait possible de penser que ces modes soient induits par la présence de la rainure sur le guide d'ondes. Pour valider cette hypothèse, nous allons analyser dans la section I.5.1 l'effet de la rainure sur la forme de la distribution spatiale de la température en comparant expérimentalement dans la section I.5.2 les vibrations transversales mesurées via un guide troué de 3 mm et le guide rainuré. Le guide troué a été conçu afin de se rapprocher du guide complètement fermé. Puis les sections I.5.3 et I.5.4 présenteront une résolution « paramétrique » des équations de Maxwell et celle de la chaleur en tenant compte de l'ouverture du guide. Enfin, la section I.5.4 développera un modèle analytique permettant de confirmer la nature des modes m_f^1 et m_f^2 .

I.5.1. Hypothèse : modes générés par la présence de la rainure

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'hypothèse d'une élévation thermique donnée par la relation (I.1) ne permet ni analytiquement (grâce à l'hypothèse d'une contrainte axiale uniforme) ni numériquement (via la prise en compte des effets tridimensionnels du barreau) de retrouver les deux premiers pics expérimentaux m_f^1 et m_f^2 . Par conséquent, il faut reformuler d'autres hypothèses tenant compte réellement du phénomène physique mis en jeu, à savoir, les interactions entre les ondes électromagnétiques et l'ensemble du système formé par l'échantillon et le guide d'ondes métallique. Généralement, la modélisation de la génération d'ondes acoustiques par micro-ondes peut être principalement ramenée à la modélisation thermoélastique de l'effet de l'élévation brusque de la température induite par l'absorption de micro-ondes sur les déformations mécaniques [I.1]-[I.3]. Or l'expression de celle-ci dépend fortement des interactions entre le champ électromagnétique et la structure métallique du guide d'ondes, plus précisément, au phénomène qui tend à confiner l'énergie électromagnétique dans le guide. Il est donc évident que ce confinement sera lié à la forme des guides d'ondes utilisés. Les guides fermés correspondent au cas où l'énergie électromagnétique est bornée dans les directions transverses, et les guides rainurés au cas où le milieu de propagation est partiellement borné. Dans ce cas, l'énergie électromagnétique est partiellement confinée à l'intérieur du barreau et l'expression de la puissance électromagnétique peut être modifiée et par la suite aussi l'expression de l'élévation thermique.

I.5.2. Validation expérimentale

Cette hypothèse peut être directement vérifiée expérimentalement en se plaçant dans la configuration de la Figure I.1 mais en remplaçant le guide rainuré par le guide troué. La comparaison sur la Figure I.15 des spectres des vitesses transversales obtenues avec les deux guides d'ondes montre effectivement que la rainure favorise la génération des modes m_f^1 et m_f^2 . Il devient donc indispensable de modéliser plus finement le problème physique mis en jeu en incluant dans le terme source les effets de la rainure sur la distribution spatiale du champ thermique. De ce fait, il faut reformuler les différentes méthodes directes ayant conduit au calcul de l'expression (I.1) de la température.

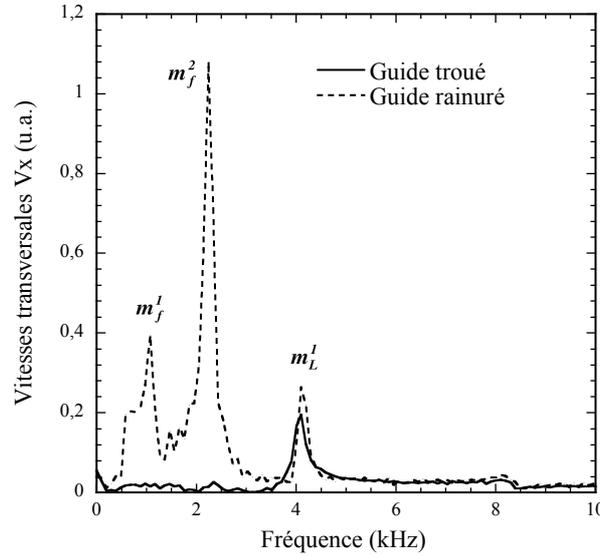


Figure I.15 : comparaison des spectres des vitesses expérimentales V_x obtenues avec les deux guides d'ondes et mesurées sur le barreau en $z = 15\text{cm}$ et sur la face située en $x = a$.

I.5.3. Validation théorique

I.5.3.1. Calcul du spectre de la puissance des ondes électromagnétiques

Dans la suite, afin d'interpréter l'origine des deux premiers modes m_f^1 et m_f^2 , une résolution « paramétrique » des équations de Maxwell sera proposée en considérant les nouvelles conditions aux limites imposées par l'ouverture latérale du guide d'ondes. Pour cela, le problème de la propagation des ondes électromagnétiques le long du barreau viscoélastique de longueur L et de section-droite rectangulaire A , placé entièrement à l'intérieur du guide d'ondes électromagnétiques rainuré est considéré. En supposant que le matériau composant le barreau est dépourvu de courants et de charges électriques, les équations de Maxwell peuvent se réécrire dans ce cas sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0, \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\mu_0 \omega \tilde{\mathbf{H}}, \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = i\epsilon^* \omega \tilde{\mathbf{E}} \text{ dans } \Omega \\ \tilde{E}_x|_{x=0} = \tilde{E}_y|_{y=0} = \tilde{E}_y|_{y=b} = 0, \tilde{E}_x|_{x=a} = \tilde{E}_T \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

où $\tilde{\mathbf{E}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ sont respectivement les transformées de Fourier du champ électrique \mathbf{E} et du champ magnétique \mathbf{H} , \tilde{E}_T est la composante tangentielle de la transformée de Fourier du champ $\tilde{\mathbf{E}}$ au voisinage de l'ouverture du guide et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

La formulation (I.28) des équations de Maxwell implique nécessairement que la propagation des ondes électromagnétiques dans le barreau doit être considéré comme semi infinie. Dans ce cas, pour résoudre ce genre de problème, il aurait fallu passer par exemple par des méthodes utilisant les conditions aux limites artificielles (ABCs : Artificial Boundary Conditions methods). Ces méthodes décrites dans les références [I.10]-[I.15] permettent de bien poser le problème (I.28) en simulant la perturbation du champ électromagnétique à

l'intérieur du barreau par la propagation d'une partie des ondes électromagnétiques à travers la rainure. Toutefois, elles ne seront pas appliquées dans cette partie étant donné que leur utilisation nécessite la mise en place des théories souvent « lourdes ». Par contre, comme l'objectif de cette section est de présenter des modèles simples permettant l'interprétation physique des modes m_f^1 et m_f^2 , alors une méthode « paramétrique » basée sur celle décrite dans [I.1]-[I.4] sera adoptée afin d'exprimer empiriquement la forme des champs électromagnétiques. Nous rappelons ci-dessous ses points importants.

Il est admis dans [I.1]-[I.4] qu'en considérant une onde transverse électrique TE qui se propage (suivant \mathbf{e}_z) dans un guide d'ondes électromagnétiques à section-droite rectangulaire, les solutions générales du système (I.28) peuvent se mettre sous la forme :

$$\tilde{E}(x,y,z,\omega) = \begin{cases} \tilde{E}_x(x,y,z,\omega) = a_x(x,y)\tilde{F}(z,\omega)\tilde{E}_i(\omega) \\ \tilde{E}_y(x,y,z,\omega) = a_y(x,y)\tilde{F}(z,\omega)\tilde{E}_i(\omega) \\ \tilde{E}_z(x,y,z,\omega) = 0 \end{cases} \quad (I.29)$$

$$\tilde{H}(x,y,z,\omega) = \begin{cases} \tilde{H}_x(x,y,z,\omega) = -a_y(x,y)\tilde{G}(z,\omega)Y(\omega)\tilde{E}_i(\omega) \\ \tilde{H}_y(x,y,z,\omega) = a_x(x,y)\tilde{G}(z,\omega)Y(\omega)\tilde{E}_i(\omega) \\ \tilde{H}_z(x,y,z,\omega) = (i\omega\epsilon^*)^{-1}(\partial_x\tilde{E}_y - \partial_y\tilde{E}_x) \end{cases}$$

où $E_i(\omega)$ est le spectre du champ électrique incident, $a_x(x,y)$ et $a_y(x,y)$ sont les fonctions qui dépendent des conditions aux limites des champs électromagnétiques sur les parois du guide, $\tilde{F}(z,\omega) = t(\omega)e^{-ik_z z} + r(\omega)e^{ik_z z}$ et $\tilde{G}(z,\omega) = t(\omega)e^{-ik_z z} - r(\omega)e^{ik_z z}$ sont des fonctions qui traduisent la dépendance des champs électrique et magnétique le long du barreau, $t(\omega)$ et $r(\omega)$ (dont les expressions sont données dans la référence [I.1]) sont les coefficients de transmission et de réflexion des ondes électromagnétiques et $Y(\omega) = k_z / \omega\mu_0$ est l'admittance électromagnétique.

Toutes ces fonctions sont généralement connues sauf $a_x(x,y)$ et $a_y(x,y)$. Leurs expressions peuvent être déterminées en décomposant la composante \tilde{H}_z suivant :

$$\tilde{H}_z(x,y,z,\omega) = \tilde{H}_0(x,y,\omega)e^{-ik_z z}. \quad (I.30)$$

En projetant la deuxième relation de l'équation (I.28) sur \mathbf{e}_z , nous constatons que la fonction \tilde{H}_0 satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{H}_0}{\partial y^2} - k_z^2 \tilde{H}_0 = -\omega^2 \epsilon^* \mu_0 \tilde{H}_0 \quad (I.31)$$

dont la solution générale peut être cherchée sous la forme :

$$\tilde{H}_0(x,y,\omega) = (A(\omega)e^{-ik_x x} + B(\omega)e^{ik_x x})(C(\omega)e^{-ik_y y} + D(\omega)e^{ik_y y}) \quad (I.32)$$

où k_x et k_y sont les nombre d'onde dans la direction \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y .

Les guides d'ondes utilisés sont faits d'un matériau métallique conducteur. En choisissant des conditions aux limites de type guide d'ondes complètement ouvert sur la face transversale située en $x = a$, les relations de continuité des champs électromagnétiques à travers l'interface échantillon/guide métallique imposent que la composante suivant \mathbf{e}_x du champ

électrique soit nulle sur les faces $y = 0$ et $y = b$; et que celle du champ électrique suivant e_y soit nulle sur la face $x = 0$. Dans ce cas, nous obtenons que :

$$C(\omega) = D(\omega), k_y = \frac{n\pi}{b}, A(\omega) = B(\omega). \quad (\text{I.33})$$

Notons que les conditions aux limites ne permettent pas d'exhiber une expression de k_x étant donné la non connaissance de la forme des champs électromagnétiques à proximité du côté du guide d'ondes rainuré. À titre indicatif, si ce côté était parfaitement fermé, alors nous aurions trouvé que $k_x = m\pi/a, m \in N$.

Par la suite, nous pouvons déduire l'expression (I.34) de \tilde{H}_z :

$$\tilde{H}_z(x, y, z, \omega) = \tilde{H}(\omega) \cos(k_x x) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-ik_z z}. \quad (\text{I.34})$$

Ensuite, les expressions de $a_x(x, y)$ et de $a_y(x, y)$ sont obtenues par identification des deux expressions (I.29) et (I.34) de \tilde{H}_z :

$$\begin{aligned} a_x(x, y) &= -\frac{n\pi}{bk_x} \cos(k_x x) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \\ a_y(x, y) &= \sin(k_x x) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Supposons que le mode transverse électrique dominant est le mode fondamental correspondant au cas où $n = 0$, alors seules les composantes \tilde{E}_y et \tilde{H}_x sont non nulles. Elles valent :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_y(x, y, \omega) &= \sin(k_x x) \tilde{F}(z, \omega) \tilde{E}_i(\omega) \\ \tilde{H}_x(x, y, \omega) &= -\sin(k_x x) \tilde{G}(z, \omega) Y(\omega) \tilde{E}_i(\omega). \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

Connaissant ces expressions, la densité de puissance électromagnétique peut être exprimée simplement en utilisant la relation $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ (où \wedge désigne le produit vectoriel). Celle-ci se met dans le domaine fréquentiel sous la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}(x, y, z, \omega) = \frac{\sin^2(k_x x)}{2\pi} [\tilde{F}(z, \omega) \tilde{E}_i(\omega) * \tilde{G}(z, \omega) Y(\omega) \tilde{E}_i(\omega)] \quad (\text{I.37})$$

où $*$ désigne le produit de convolution entre les deux champs \tilde{E}_y et \tilde{H}_x .

I.5.3.2. Calcul du spectre de l'élevation locale de la température

Les impulsions électromagnétiques étant de courte durée, alors la conduction thermique peut être négligée. Dans ce cas, l'équation de la chaleur appliquée à un élément de volume élémentaire $dV = dS \cdot dz$ s'écrit :

$$\rho C_m \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \pi}{\partial z} \quad (\text{I.38})$$

où C_m désigne la chaleur massique du barreau.

L'intégration de l'équation (I.38) sur une période électromagnétique T_0 permet d'expliciter l'expression de l'élevation de la température suivante :

$$\theta(x, z, T_0) = -\frac{1}{\rho C_m} \int_0^{T_0} \frac{\partial \pi}{\partial z} dt = -\frac{2\pi}{\omega_0 \rho C_m} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}. \quad (\text{I.39})$$

où $\bar{\pi}$ est la valeur moyenne sur T_0 de la densité de puissance électromagnétique.

Or, en dérivant l'équation (I.37) par rapport à z , le gradient de $\bar{\pi}$ le long du barreau devient :

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{\sin^2(k_x x)}{2\pi} \left[\frac{\partial \tilde{F}(z, \omega)}{\partial z} \tilde{E}_i(\omega) * \tilde{G}(z, \omega) \tilde{Y}(\omega) \tilde{E}_i(\omega) + \tilde{F}(z, \omega) \tilde{E}_i(\omega) * \frac{\partial \tilde{G}(z, \omega)}{\partial z} \tilde{Y}(\omega) \tilde{E}_i(\omega) \right] \quad (\text{I.40})$$

puis, en suivant le même raisonnement que celui décrit dans [I.1]-[I.4], nous montrons que ce gradient admet cette expression analytique :

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{\sin^2(k_x x)}{2\pi} \left[\frac{i\pi}{2\mu_0 \omega_0} E_{i0}^2 F(z, \omega_0) F(z, -\omega_0) (k_z^2(-\omega_0) - k_z^2(\omega_0)) \right]. \quad (\text{I.41})$$

Cette relation a été établie en supposant une onde électromagnétique monochromatique de fréquence f_0 . Les calculs permettant d'obtenir cette expression sont explicités en Annexe C.

Par ailleurs, d'après [I.1]-[I.4], la puissance électromagnétique moyenne sur T_0 transportée par l'onde électromagnétique incidente peut être donnée par :

$$\bar{P}_i = \frac{k'_{iz}(\omega_0)}{2\mu_0 \omega_0} \frac{ab}{2} E_{i0}^2. \quad (\text{I.42})$$

Enfin, l'expression (I.41) s'écrit simplement sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z}(x, z, \omega) = \frac{\bar{P}_i \sin^2(k_x x)}{ab k'_{iz}} \left[k'_z(\omega_0) k''_z(\omega_0) \sum_{j=1}^4 C_j e^{a_j z} \right] \quad (\text{I.43})$$

où les expressions de C_j et a_j sont données dans [I.1]-[I.4].

Par suite, en remplaçant la relation (I.43) dans (I.39), l'élévation de la température pendant une période T_0 est donnée par :

$$\tilde{\theta}(x, z, \omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0 \rho C_m} \frac{\bar{P}_i \sin^2(k_x x)}{ab k'_{iz}} \left[k'_z(\omega_0) k''_z(\omega_0) \sum_{j=1}^4 C_j e^{a_j z} \right]. \quad (\text{I.44})$$

Notons que la relation (I.44) a presque la même forme que celle (I.1) donnée dans les références [I.1]-[I.4]. Toutefois, la différence provient du terme dépendant de la variable x et du paramètre réel k_x inconnu qui dépend forcément des conditions aux limites des champs électromagnétiques au voisinage de la rainure. L'étude de ces conditions peut se faire en exploitant la continuité des composantes du champ électromagnétique sur l'interface échantillon/air. Cette dernière méthode suppose la connaissance *a priori* du champ électromagnétique externe régnant au voisinage de l'ouverture du guide. Nous choisissons de simplifier l'étude en faisant varier empiriquement le paramètre k_x puis en examinant ensuite son influence sur l'évolution de la température suivant x (c'est-à-dire sur la section-droite du barreau) et sur le spectre des vibrations calculées numériquement par EF dans la direction latérale. La Figure I.16-a représente les évolutions de la fonction $x \rightarrow \sin^2(k_x \cdot x)$ correspondant aux trois valeurs suivantes : $k_x = 54 \text{ m}^{-1}$, $k_x = 105 \text{ m}^{-1}$ et $k_x = \pi/a \text{ m}^{-1} = 142,8 \text{ m}^{-1}$.

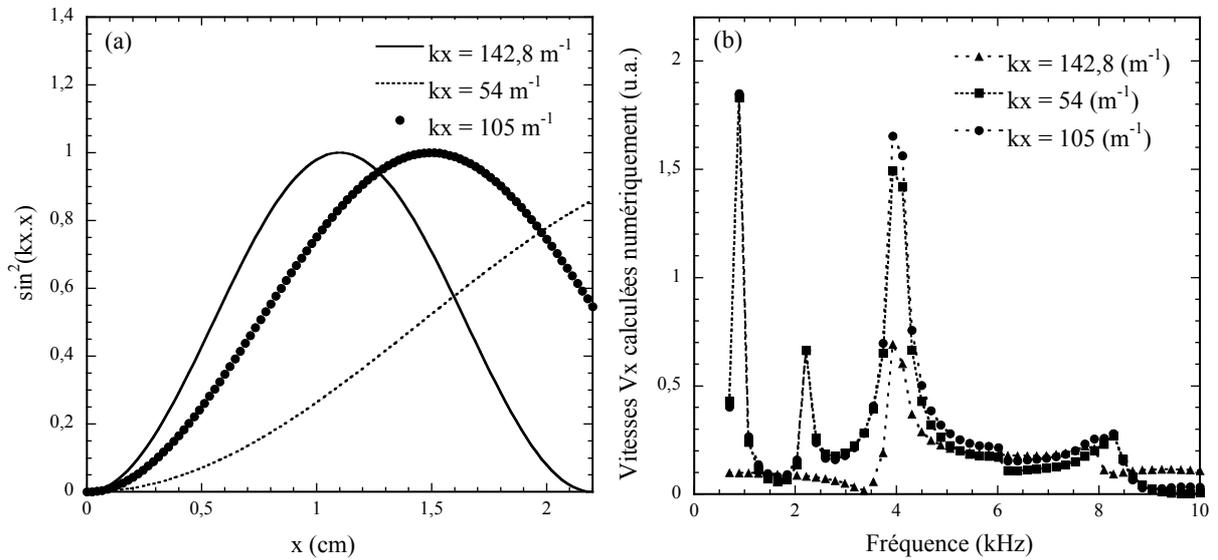


Figure I.16 : influence de la valeur du paramètre k_x : (a) sur le profil spatial de la température sur une section-droite, (b) sur le spectre de la vitesse numérique transversale.

Nous constatons que les évolutions de la température par rapport à x est différente suivant les valeurs du paramètre k_x . Par exemple, Elle admet un profil parfaitement symétrique si k_x est égal à π/a (ou en général si $k_x = m(\pi/a)$, $m \in \mathbb{N}$) alors qu'elle prend un profil asymétrique suivant x dans le cas contraire. En outre, la Figure I.16-b compare les spectres des vitesses du barreau obtenus numériquement par EF en utilisant comme source thermique les différentes formes de température illustrées sur la Figure I.16. Nous remarquons que les modes de vibration situés autour des fréquences 1 kHz et 2 kHz ne sont générés que lorsque le profil de la température prend une forme asymétrique sur la section-droite c'est-à-dire le cas où la structure du guide serait altérée par la présence d'une ouverture. La représentation numérique sur la Figure I.17 des déformées du barreau à ces fréquences laisse supposer que ces pics correspondent à des modes de flexion.

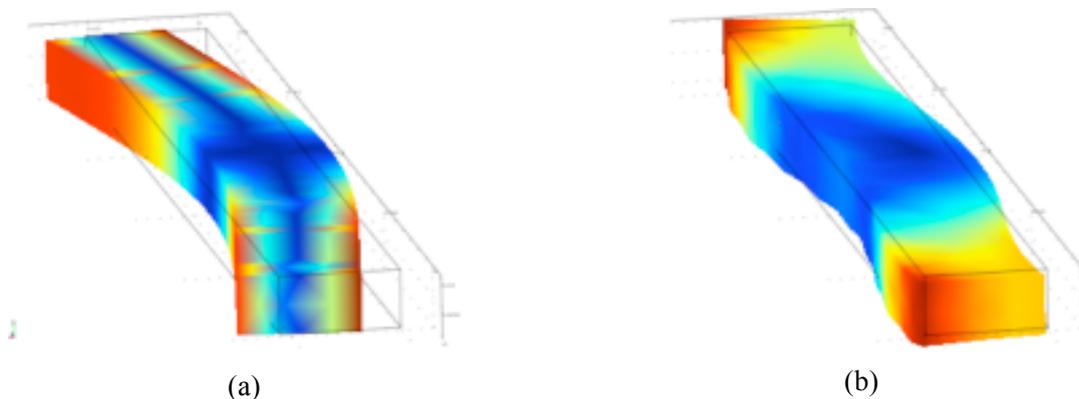


Figure I.17 : déformées numériques du barreau : (a) 1^{er} mode ; (b) 2^{ème} mode.

Dans la suite, nous allons vérifier cette hypothèse en effectuant une étude analytique des modes de flexion du barreau.

I.5.3.3. Étude analytique des modes de flexion

Nous avons constaté expérimentalement dans la section I.5.2 que les deux premiers modes étaient dus à la présence de la rainure (voir Figure I.15). Puis, la résolution « paramétrique » du problème de conversion de l'énergie électromagnétique en chaleur a indiqué que la rainure pourrait engendrer une répartition asymétrique de la température sur les sections-droites du barreau irradié (cf. Figure I.16). Enfin, compte tenu des formes des déformées du barreau représentées sur la Figure I.17, nous souhaitons montrer grâce à un calcul analytique que les deux premiers modes transversaux correspondent à des modes de flexion. Pour cela, le barreau est mécaniquement assimilé à une poutre d'Euler-Bernoulli. Supposons que les différentes sollicitations mécaniques et thermiques du barreau induisent un moment fléchissant entraînant des déplacements de très faibles amplitudes par rapport aux dimensions latérales du barreau. D'après [I.16], l'équation décrivant les vibrations induites par la propagation d'un mode de flexion peut s'écrire simplement sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u_f(z,t)}{\partial t^2} + \gamma^2 \frac{\partial^4 u_f(z,t)}{\partial z^4} = 0 \quad (\text{I.45})$$

où u_f est la flèche générée dans la direction \mathbf{e}_x et $\gamma = \frac{EI_y}{\rho S}$ est un terme qui dépend des caractéristiques géométriques et mécaniques du barreau.

En prenant sa transformée de Fourier, nous obtenons l'équation :

$$\frac{\partial^4 \tilde{u}(z,\omega)}{\partial z^4} - k_f^4 \tilde{u}(z,\omega) = 0 \quad (\text{I.46})$$

où le terme $k_f^4 = (\omega/\gamma)^2$ décrivant la relation de dispersion peut s'écrire simplement sous la forme :

$$k_f = \sqrt[4]{\frac{12\rho}{E^* a^2}} \sqrt{\omega}. \quad (\text{I.47})$$

La solution générale de l'équation (I.46) est donnée par la relation :

$$\tilde{u}(z,\omega) = A \sin(k_f z) + B \cos(k_f z) + C \operatorname{sh}(k_f z) + D \operatorname{ch}(k_f z). \quad (\text{I.48})$$

À une fréquence donnée, cette solution fait intervenir quatre constantes d'intégration calculées à partir des conditions aux limites imposées sur les extrémités du barreau. Puisque la barre est libre de toute contrainte, alors le moment fléchissant et l'effort tranchant sont nuls en $z = 0$ et en $z = L$. Ces conditions se traduisent théoriquement par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}(z=0,\omega) &= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}(z=L,\omega) = 0 \\ \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial z^3}(z=0,\omega) &= \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial z^3}(z=L,\omega) = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

Ces équations permettent ensuite de montrer que les constantes A , B , C et D sont solutions du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\cos(k_f L) & \sin(k_f L) & ch(k_f L) & sh(k_f L) \\ -\sin(k_f L) & \cos(k_f L) & sh(k_f L) & ch(k_f L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = 0. \quad (I.50)$$

Ce système n'admet une solution proportionnelle à un constant arbitraire que si son déterminant est nul. Cette condition donne l'équation aux modes propres k_f^i :

$$\cos(k_f^i L) ch(k_f^i L) = 1 \quad (I.51)$$

reliés aux pulsations propres ω_f^i par la relation de dispersion (I.47).

En posant $\chi_i = k_f^i L$, l'équation (I.51) revient à chercher les χ_i qui vérifient :

$$\cos(\chi_i) = \frac{1}{ch(\chi_i)}. \quad (I.52)$$

Par suite, à cause de la décroissance rapide du cosinus hyperbolique, l'équation aux modes propres (I.51) se réduit à $\cos(\chi_i) = 0$ au-delà des deux premiers modes. Ceci permet d'estimer facilement sur le Tableau I.1 les premières valeurs de χ_i qui vérifient (I.51).

χ_i	4,73	7,85	11	14,14
k_f^i	23,7	39,3	55	70,7
ω_f^i ($\times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	0,6	1,7	3,1	5,0
f_f^i (kHz)	0,90	2,5	4,9	8,0

Tableau I.1 : paramètres théoriques des premiers modes propres de flexion d'un barreau de longueur 200 mm.

Nous constatons que les deux premiers modes de flexion ont des fréquences de vibration théoriques voisines de celles obtenues expérimentalement. Par ailleurs, en effectuant parallèlement une étude numérique basée cette fois-ci sur la méthode SAFE, nous avons pu identifier un mode de flexion associé au nombre d'onde $k_{SAFE} = (24,0 - 0,3i) \text{ m}^{-1}$ dont la partie réelle est voisine de la valeur théorique $k_{théo} = 23,7 \text{ m}^{-1}$. Donc, tous ces résultats confirment que les deux premiers modes obtenus expérimentalement seraient des modes de flexion induits par le chargement asymétrique de la température provoqué par la présence de la rainure sur le guide d'ondes électromagnétiques.

Synthèse : la résolution « paramétrique » des équations de Maxwell avec les nouvelles conditions aux limites des champs électromagnétiques (à savoir la prise en compte de l'effet de la rainure faite sur le guide d'ondes) a permis de montrer que les premiers modes transversaux m_f^1 et m_f^2 étaient des modes de flexion.

I.6. Étude des modes $m_L^i, i = 1, 2, \dots$

Les résultats de la Figure I.7 et I.10 suggèrent que les modes $m_L^i, i = 1, 2, \dots$ sont dus aux ondes acoustiques qui se propagent le long du barreau. La Figure I.18 montre les spectres des vibrations transversales obtenus avec le champ de température uniforme (I.1) sur la section-droite. Nous observons que les fréquences de résonance des modes présents sur ces spectres sont proches de celles des modes $m_L^i, i = 1, 2, \dots$. Cependant, la comparaison fait apparaître des variations concernant les amplitudes et les fréquences des pics. Les variations en fréquence sont dues aux effets dispersifs de la structure. Effectivement, la Figure I.19 montre que la vitesse de phase prédite numériquement par la méthode SAFE varie en fonction de la fréquence contrairement à celle du modèle analytique 1D.

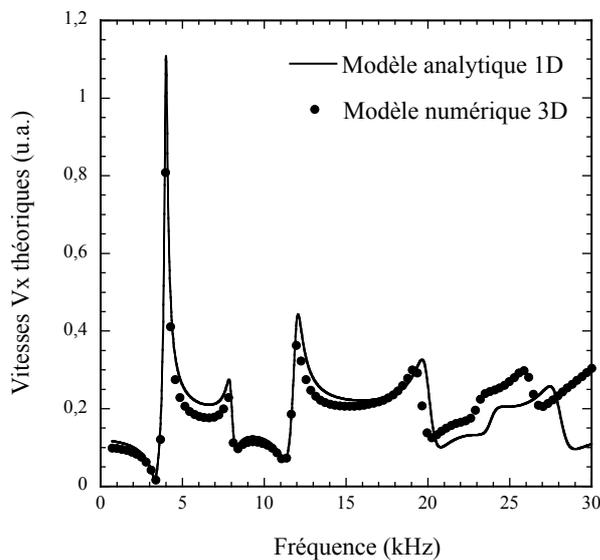


Figure I.18 : spectres des vitesses V_x déterminées en $z=15\text{ cm}$ et prédites par les modèles analytique 1D et numérique 3D.

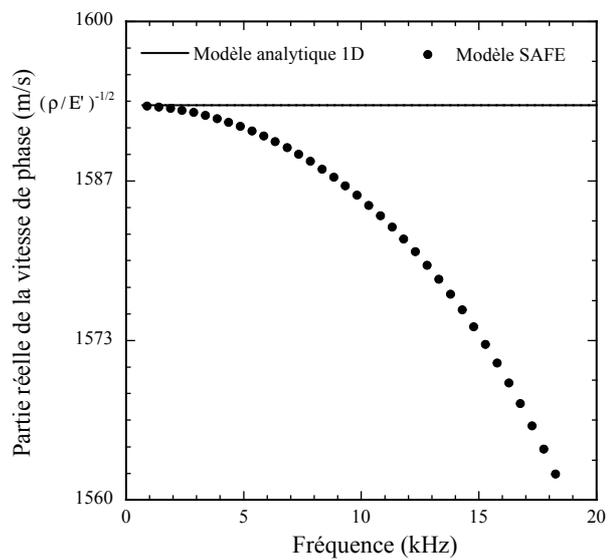


Figure I.19 : comparaison des courbes de dispersions prédites par le modèle analytique unidimensionnel et le modèle SAFE.

Synthèse : cette partie montre que les modes de vibration $m_L^i, i = 1, 2, \dots$ sont générés par les ondes acoustiques longitudinales. Donc, ils sont liés à l'effet Poisson. Par ailleurs, la comparaison entre les résultats issus du modèle analytique 1D et ceux prédits par la méthode numérique SAFE ont fait apparaître des variations liées à la dispersion de la structure mécanique du barreau.

I.7. Étude numérique du mode m_T^1

Avant-propos : dans cette partie, nous limitons l'étude numérique au mode de vibration m_T^1 qui serait lié, d'après les résultats du modèle numérique 3D de la section I.4.3, à la prise en compte de la structure tridimensionnelle réelle du barreau. La section I.7.1 mettra en évidence que ce mode n'est lié ni à la propagation des modes longitudinaux, ni à la forme de la distribution de la température dans l'échantillon et ni à la présence de la rainure. C'est pourquoi la section I.7.2 analysera l'hypothèse que ce mode est généré par les déformations des sections-droites lorsqu'elles sont soumises à une brusque dilatation thermique.

Étant donnés les différents phénomènes physiques et mécaniques mis en jeu dans la génération acoustique par micro-ondes pulsées, différentes hypothèses peuvent être formulées pour interpréter l'origine du mode m_T^1 . Elles consistent à supposer qu'il est lié, soit à la propagation des ondes acoustiques le long du barreau, soit aux oscillations de la température le long du barreau, ou bien soit aux brusque dilatations des sections-droites lorsqu'elles sont soumises à une élévation thermique rapide.

La validité de la première hypothèse peut être faite en comparant les spectres des vibrations transversales obtenus pour différentes longueurs L du barreau. En effet, si le mode m_T^1 est lié à la propagation d'ondes acoustiques longitudinales alors sa fréquence propre devrait varier avec la longueur L du barreau. Les résultats obtenus sur la Figure I.20 dans le cas de la distribution donnée par l'expression (I.1) montrent que ce pic n'est pratiquement pas sensible à une diminution de L .

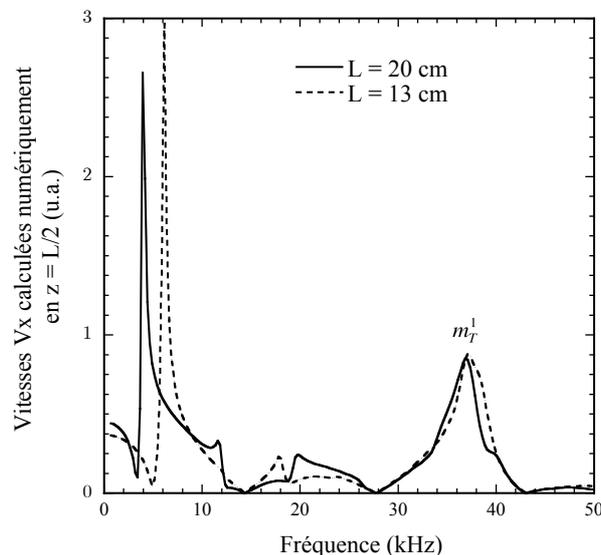


Figure I.20 : étude numérique des effets de la longueur du barreau sur le spectre de la vitesse V_x (cas d'un guide fermé).

Ce résultat prouve que le mode m_T^1 n'est pas lié à la propagation acoustique le long du barreau. De même nous pouvons vérifier les effets des oscillations de la température sur la forme de m_T^1 en comparant numériquement les spectres des vibrations générées par une

source thermique uniforme valant par exemple $\tilde{\theta}(\omega) = 10^{-5} \cdot \tilde{r}(\omega)$ sur tout le volume du barreau et celle donnée par la relation (I.1). Nous remarquons sur la Figure I.21 que ce mode n'est pas lié non plus à la forme spatiale de la température. En outre, il est possible de vérifier expérimentalement que ce pic n'est pas dû à la rainure présente sur le guide d'ondes électromagnétiques puisque les résultats expérimentaux de la Figure I.22 montrent qu'il est présent sur le spectre obtenu avec les deux guides d'ondes. Tous ces résultats mènent à penser que ce mode lié à la structure tridimensionnelle du barreau est généré par les vibrations des sections-droites soumises à une brusque dilatation thermique. Nous proposons donc dans la suite de modéliser numériquement par éléments finis les vibrations d'une section-droite du barreau soumise à une brusque élévation uniforme de la température. Une telle démarche permet de supprimer les déformations latérales induites par la propagation longitudinale des différentes ondes mécaniques et électromagnétiques. Le choix simplifié d'une température uniforme est justifié par le fait que la forme de la température n'a aucun effet sur la génération de ce mode de vibration.

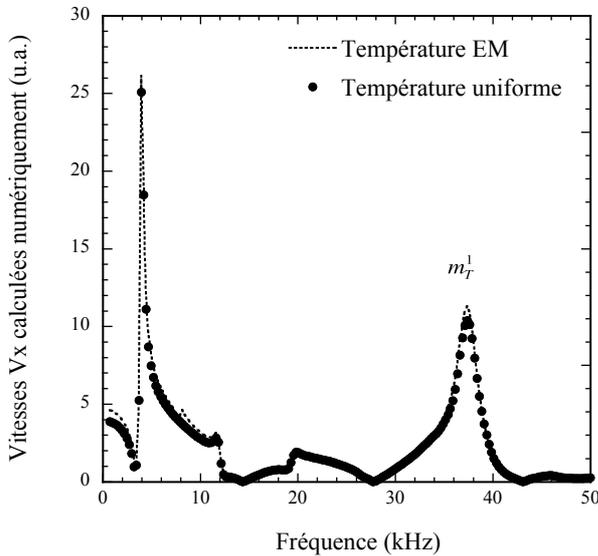


Figure I.21 : étude numérique des effets des oscillations de la température sur le spectre de la vitesse V_x dans le cas d'un guide d'ondes fermé.

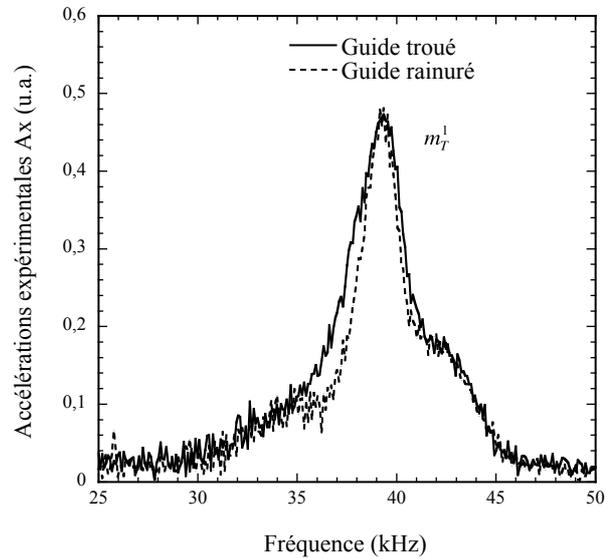


Figure I.22 : étude expérimentale des effets de la forme du guide d'ondes sur le mode m_T^1 .

Lorsqu'une section-droite est soumise à une élévation brusque et uniforme de la température exprimée par $\tilde{\theta}(\omega) = 10^{-5} \cdot \tilde{r}(\omega)$, elle se dilate brusquement en générant des vibrations. Ces vibrations mécaniques sont analytiquement décrites par les équations (I.22) où les indices i, j, k et l valent $i, j, k, l = 1, 2$ et les composantes de la matrice c valent :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} \\ C_{61} & C_{66} \end{pmatrix} & c_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} \\ C_{66} & C_{62} \end{pmatrix} \\ c_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} \\ C_{21} & C_{26} \end{pmatrix} & c_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} \\ C_{26} & C_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.53})$$

L'identification des coefficients précédents permet de simuler numériquement les vibrations de la section-droite. Son maillage est réalisé en choisissant des éléments quadrangles. La Figure I.23 compare le spectre numérique obtenu à celui du modèle numérique 3D décrit dans la section I.4.1. La forme de l'élévation de la température prise en compte dans ce modèle numérique 3D est celle qui est donnée par l'expression (I.1). Nous remarquons que ces deux modèles numériques prédisent le même mode m_T^1 et que celui-ci correspond au premier mode de vibration de la section-droite. Sa déformée à sa fréquence de résonance est illustrée sur la Figure I.24.

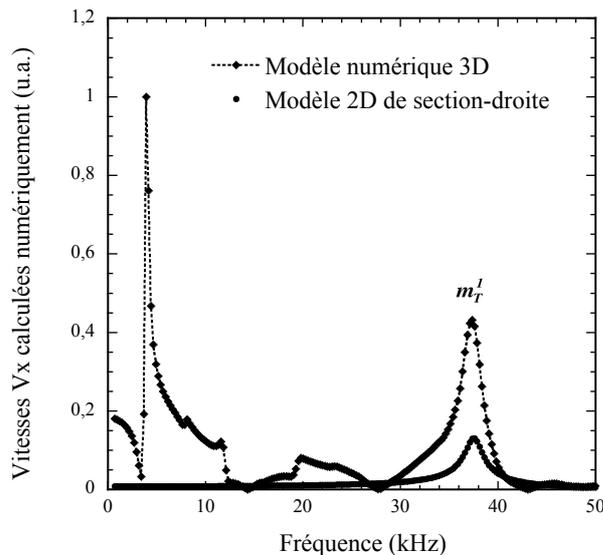


Figure I.23 : comparaison des spectres des vitesses V_x calculées numériquement par les modèles EF 2D et 3D.

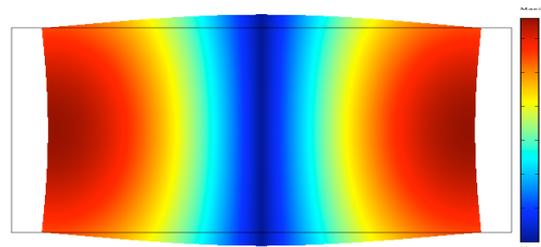


Figure I.24 : déformée de la section-droite du barreau à la fréquence de résonance du mode m_T^1 .

Synthèse : nous avons pu démontrer numériquement dans cette section grâce au modèle numérique 2D que le mode expérimental m_T^1 est lié aux vibrations des sections-droites du barreau induites par la brusque dilatation thermique.

I.8. Conclusion

Dans ce Chapitre, nous avons analysé et interprété les résultats expérimentaux obtenus lors de l'étude des déformations transversales d'un barreau en PVC inséré dans un guide d'ondes électromagnétiques rainuré soumis à une irradiation de micro-ondes. Le spectre des vibrations transversales a été étudié en utilisant des méthodes analytiques unidimensionnelles et numériques (3D et 2D) par éléments finis. Ainsi, il a été établi que le spectre expérimental obtenu est composé de modes de flexion générés par la rainure faite sur le guide d'ondes contenant l'échantillon. La présence de l'ouverture introduisait une modification des champs électromagnétiques à l'intérieur de l'échantillon. Ce changement induisait une distribution

asymétrique de la température sur la section-droite de l'échantillon. Par la suite, cette dissymétrie de température favorisait la génération des contraintes dissymétriques susceptible de faire fléchir la barre. Nous avons prouvé aussi que le spectre contenait des modes liés aux ondes mécaniques longitudinales de traction-compression qui se propagent le long du barreau et qui engendrent par effet Poisson des déplacements transversaux. Enfin, il a été démontré que le spectre des vibrations générées dans la direction latérale faisait apparaître de modes liés aux déformations des sections-droites lorsqu'elles sont soumises à une brusque dilatation thermique. Ces derniers modes sont indépendants des ondes acoustiques qui se propagent le long du barreau.

Ce travail a l'intérêt de montrer que les déformations des barreaux soumis à des impulsions de micro-ondes sont sensibles aux ouvertures latérales faites sur les guides d'ondes électromagnétiques. Ces guides non conventionnels favorisent la génération de modes de flexion de l'échantillon. Donc, suivant le but recherché, ces modes peuvent être soit avantageux, soit contraignants pour l'expérimentateur. Par exemple, dans un cadre d'évaluation non destructive des propriétés du matériau constituant le barreau, il est tout à fait naturel de penser que, plus le spectre contient des pics de résonance (indiquant la génération et la propagation de modes de vibration au sein du barreau), plus il sera aisé de trouver des relations liant la forme de ces pics à certaines propriétés du matériau. Dans notre cas, l'identification des deux premiers modes de flexion aurait pu par la suite faciliter la mise en place d'une procédure d'estimation du module d'Young du barreau en exploitant directement la relation de dispersion mise en évidence. Cependant elle n'a pas été faite ici dans la mesure où ce paramètre pouvait être évaluée facilement et avec une bonne précision en appliquant certaines méthodes décrites dans la littérature. En outre, l'analyse numérique par éléments finis des vibrations dans la direction latérale du barreau a permis, contrairement aux études analytiques faites jusqu'ici, de mettre en évidence de nouveaux modes de vibration liés à la prise en compte de la structure tridimensionnelle réelle du barreau. Ces modèles numériques construits et validés pourraient être aussi appliqués aux cas des barreaux anisotropes.

I.9. Références

- [I.1] C. Bacon, E. Guilliorit, B. Hosten and D. Chimenti, "*Acoustic waves generated by pulsed microwaves in viscoelastic rods: modeling and experimental verification*", Journal of the Acoustical Society of America, vol. **110**(3), p. 1398-1407 (2001).
- [I.2] B. Hosten and C. Bacon, "*Measurement of complex young moduli of composite material by time-gated microwaves*", AIP Conference Proceedings, vol. **509**, p. 1113-1120 (2000).
- [I.3] E. Guilliorit, "*Génération d'ondes acoustiques par micro-ondes impulsionnelles*", Thèse de doctorat, n° d'ordre 2421, Université Bordeaux 1 (2001).

-
- [I.4] E. Guilliorit, C. Bacon and B. Hosten, “*Génération d’ondes acoustiques par micro-ondes impulsives*”, 14^{ème} Congrès Français de Mécanique, n° 91 sur CD-Rom, Toulouse (1999).
- [I.5] C. Bacon, B. Hosten and E. Guilliorit, “*One-dimensional prediction of the acoustic waves generated in a multilayer viscoelastic body by microwave irradiation*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **238**(5), p. 853-867 (2000).
- [I.6] B. Hosten and P. A. Bernard, “*Ultrasonic wave generation by time-gated microwaves*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **104**, p. 860-866 (1998).
- [I.7] A. Mohamed Elarif, C. Bacon and B. Hosten, “*Transverse vibrations of viscoelastic bars subjected to an asymmetric temperature distribution induced by a microwave source*”, Experimental Mechanics (accepté pour Publication) (2010).
- [I.8] E. V. Ratnikov, “*A waveguide chamber for measurements of temperature distributions in raw materials under microwave heating*”, Instruments and Experimental Techniques, vol. **44**(5), p. 690-692 (2001).
- [I.9] COMSOL MULTIPHYSICS, User’s Guide, Version 3.2 (2005).
- [I.10] B. Enquist and A. Majda, “*Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*”, Mathematics of Computation, vol. **31**(139), p. 629-651 (1977).
- [I.11] G. Mur, “*Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations*”, IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, vol. **EMC-23**(4), p. 377-382 (1981).
- [I.12] R. L. Higdon, “*Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation*”, Mathematics of Computation, vol. **40**(179), p. 65-90 (1987).
- [I.13] A. Bendali and L. Halpern, “*Conditions aux limites absorbantes pour le système de Maxwell dans le vide en dimension 3*”, Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris, vol. **307**(20), p. 1011-1013 (1988).
- [I.14] P. Joly and B. Mercier, “*Une nouvelle condition transparente d’ordre 2 pour les équations de Maxwell en dimension 3*”, Rapport INRIA, n° 1047 (1989).
- [I.15] X. Antoine, A. Arnold, C. Besse, M. Ehrhardt and A. Schädle, “*A review of transparent and artificial boundary conditions techniques for linear and non linear Schrodinger equations*”, Communication in Computational Physics, vol. **4**(4), p. 729-796 (2008).
- [I.16] J. C. Snowdon, “*Vibration and shock in damped mechanical systems*”, John Wiley and Sons, New York (1968).

Chapitre II

Génération acoustique par micro-ondes pour l'évaluation non destructive de barreaux visco-élastiques

II.1. Introduction	44
II.2. Théorie.....	45
II.2.1. Analyse de l'effet Poisson.....	45
II.2.2. Analyse de la dispersion des ondes acoustiques longitudinales.....	46
II.2.3. Application numérique des méthodes de caractérisation	49
II.2.3.1. Méthode de caractérisation basée sur le rapport des vibrations	49
II.2.3.2 Méthode de caractérisation basée sur la dispersion des ondes longitudinales....	52
II.3. Application dans le cas de deux barreaux polymériques.....	53
II.3.1. Dispositif expérimental	53
II.3.2. Validation expérimentale des méthodes basées sur les courbes de dispersion	55
II.4. Conclusion.....	57
II.5. Références	58

II.1. Introduction

Les matériaux viscoélastiques jouent un rôle important dans le domaine de l'aéronautique, de l'automobile et du génie civil où ils sont le plus souvent utilisés dans des structures soumises à des fortes contraintes mécaniques. Leur intérêt est d'atténuer, grâce à l'effet visqueux, certaines vibrations parasites générées à l'intérieur. Parfois, ils peuvent être aussi combinés à d'autres matériaux composites, par exemple les tôles sandwichs, afin de leur conférer certaines propriétés mécaniques bien spécifiques. Indépendamment des matériaux viscoélastiques destinés à dissiper de l'énergie mécanique, la plupart des matériaux polymériques (par exemple les matériaux polymériques isotropes ou composites à base de polymères) ont un comportement viscoélastique qu'il est important de quantifier. C'est le cas en particulier lorsqu'ils sont soumis à des vibrations, des chocs et de la propagation d'ondes mécaniques en haute fréquence. De ce fait, il est important d'élaborer des méthodes d'évaluation rapide afin de caractériser leurs propriétés mécaniques, thermiques et électromagnétiques dans la gamme de fréquences la plus large possible. Une telle démarche permettra de choisir le matériau adapté à l'étude et/ou à l'exploitation d'un phénomène mécanique donné. Néanmoins, elle nécessitera la mise en place des outils analytiques, numériques par éléments finis et expérimentaux capables de fournir de telles informations.

Les récents travaux [II.1]-[II.4] ont montré qu'en utilisant la technique de génération acoustique par micro-ondes, il est possible d'évaluer expérimentalement le module d'Young E^* et la permittivité ε^* d'un barreau viscoélastique isotrope. Cependant, aucune méthode n'a été mise en place jusqu'ici pour évaluer le coefficient de Poisson ν du même échantillon. Or la caractérisation de ce paramètre favorisera la connaissance des différentes composantes des matrices de rigidité des échantillons testés. De plus, une telle procédure permettra de compléter les travaux cités ci-dessus. Ainsi, nous avons choisi d'orienter la présente étude vers la recherche de méthodes acoustiques permettant d'estimer ν . Ces méthodes favoriseront par la suite la caractérisation de la matrice de rigidité du barreau dans une gamme de fréquences proche de celle qui a servi à évaluer E^* . Pour y arriver, le modèle analytique unidimensionnel décrit dans la section I.3 sera appliqué pour étudier directement l'effet de ν sur le rapport entre les déformations transversale et longitudinale de l'échantillon. Par ailleurs, comme les guides rainurés entraînent la génération en basses fréquences de modes de flexion dont les fréquences propres ne dépendent pas de ν , alors ces derniers seront remplacés par les guides troués. Deux modèles (analytique et numérique par éléments finis) seront aussi appliqués pour examiner l'influence de ν sur la dispersion des ondes acoustiques longitudinales. Le premier sera basé sur la théorie de Love traitant la propagation acoustique le long des barreaux finis [II.5][II.6]. Quant au deuxième, il s'appuiera sur le calcul numérique des courbes de dispersions par la méthode SAFE décrite dans la section I.4.2. Les résultats des différents modèles seront confrontés afin d'identifier celui qui donnerait les estimations les plus adéquates.

II.2. Théorie

Avant-propos : nous avons mis en évidence dans la section I.3.3 du Chapitre I que lorsque le guide d'ondes contenant l'échantillon est fermé (ou troué), les mouvements axiaux de traction compression du barreau entraîne par effet Poisson un déplacement de la matière dans les directions transverses. La section II.2.1 présentera un modèle analytique décrivant l'influence du coefficient de Poisson sur le rapport des vibrations transversale et axiale. Puis, la section II.2.2 élaborera deux méthodes analytique et numérique qui analysent l'effet de ν sur la dispersion des ondes acoustiques longitudinales. Une validation numérique des différentes approches mises en place pour l'évaluation de ν sera faite dans la section II.2.3. Son objectif sera d'analyser les avantages et les limites de chaque méthode.

II.2.1. Analyse de l'effet Poisson

Dans cette section, nous allons exploiter l'effet Poisson pour élaborer dans la mesure du possible une méthode permettant d'estimer théoriquement le coefficient ν des barreaux viscoélastiques soumis à une irradiation de micro-ondes. Une façon plus simple d'y arriver est de tirer profit de l'effet Poisson c'est-à-dire d'étudier l'effet de ν sur le rapport des amplitudes des spectres des déformations transversale et axiale. Par exemple, la valeur \tilde{R} de ce rapport peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{R}(\omega) := \frac{\tilde{a}_x(z=L/2, \omega)}{\tilde{a}_z(z=L, \omega)} \quad (\text{II.1})$$

où $\tilde{a}_x(z=L/2, \omega)$ et $\tilde{a}_z(z=L, \omega)$ sont respectivement les accélérations transversale et longitudinale calculées respectivement au milieu et à l'extrémité du barreau en utilisant les relations $\tilde{a}_x(z, \omega) = i \omega \tilde{v}_x(z, \omega)$ (avec $\tilde{v}_x(z, \omega)$ donnée par l'expression (I.17)) et (I.11).

En remplaçant l'expression analytique (I.17) dans (II.1), l'expression de \tilde{R} se met sous la forme :

$$\tilde{R}(\omega) = -\frac{a\omega^2}{2\tilde{a}_z(z=L, \omega)} \left(-\nu \frac{\tilde{F}_z(z=L/2, \omega)}{AE^*} + \alpha \tilde{\theta}(z=L/2, \omega) \right) \quad (\text{II.2})$$

où la force normale $\tilde{F}_z(z=L/2, \omega)$ et l'accélération à l'extrémité du barreau $\tilde{a}_z(z=L, \omega)$ sont données par les équation (I.10) et (I.11).

Après avoir simplifié l'expression (II.2), les calculs montrent que le rapport \tilde{R} varie linéairement en fonction de ν suivant la relation :

$$\tilde{R}(p, \nu, \omega) = \tilde{R}_a(p, \omega)\nu + \tilde{R}_b(p, \omega) \quad (\text{II.3})$$

où les fonctions $\tilde{R}_a(p, \omega)$ et $\tilde{R}_b(p, \omega)$ sont données par les expressions :

$$\tilde{R}_a(p, \omega) = \frac{a\omega^2}{2AE^*} \frac{\tilde{F}_z(z=L/2, \omega)}{\tilde{a}_z(z=L, \omega)} \quad (\text{II.4})$$

$$\tilde{R}_b(p, \omega) = -\frac{a \alpha \omega^2 \tilde{\theta}(z = L/2, \omega)}{2 \tilde{a}_z(z = L, \omega)}. \quad (\text{II.5})$$

Le vecteur p désigne les différents paramètres qui peuvent influencer les spectres des vibrations transversale et longitudinale. Nous constatons qu'en remplaçant la quantité $\tilde{R}(p, \nu, \omega)$ par le rapport expérimental, la relation (II.3) peut *a priori* être appliquée pour estimer le coefficient ν à condition que les autres propriétés du matériau soient entièrement connus ou que les fonctions $\tilde{R}_a(p, \omega)$ et $\tilde{R}_b(p, \omega)$ soient très peu sensibles à leurs variations.

Synthèse : en utilisant les résultats du modèle unidimensionnel analytique du Chapitre I, nous avons démontré dans cette section que le rapport entre les amplitudes maximales des spectres des vibrations transversales déterminées au milieu du barreau et longitudinales déterminées à l'extrémité du barreau dépend linéairement de ν . Cette quantité pourrait donc *a priori* être utilisée pour élaborer une méthode inverse permettant d'estimer le coefficient ν des barreaux viscoélastiques. Cependant, étant donné que le modèle repose sur des hypothèses simplificatrices, il est important de développer aussi d'autres modèles analytique et numérique plus proches de la réalité expérimentale.

II.2.2. Analyse de la dispersion des ondes acoustiques longitudinales

Considérons numériquement un barreau viscoélastique isotrope dont les propriétés géométriques, mécaniques, thermiques et électromagnétiques sont celles décrites dans le Tableau III.1 :

E^* (GPa)	ρ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	ν	ε_r^*	L (mm)	A (mm \times mm)	α ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)
3,5 + 0.17 i	1380	0,4	2,67-0,02 i	200	22 x 10	$8 \cdot 10^{-5}$

Tableau II.1 : propriétés du barreau viscoélastique utilisées dans les simulations.

Précisons ici que les valeurs de E^* et de ε_r^* sont des estimations obtenues en appliquant les méthodes d'optimisation décrites dans les références [II.1] et [II.4]. Il faut se rappeler que le modèle analytique unidimensionnel (I.6) a été construit en négligeant implicitement l'influence des effets tridimensionnels du barreau sur les vibrations longitudinales. Or, en comparant sur la Figure II.1 les spectres des accélérations longitudinaux déterminées à l'extrémité du barreau par les deux modèles (analytique 1D et numérique 3D), nous remarquons l'existence d'une certaine fréquence au-delà de laquelle le spectre prédit par le modèle analytique ne coïncide pas avec celui du modèle numérique 3D. Précisément, plus la fréquence augmente et plus les fréquences des pics prédites par le modèle numérique 3D sont sensiblement inférieures à celles obtenues avec le modèle analytique classique. Ces résultats permettent de déduire directement que ces variations sont liées en partie au phénomène dispersif induit par la structure géométrique du barreau.

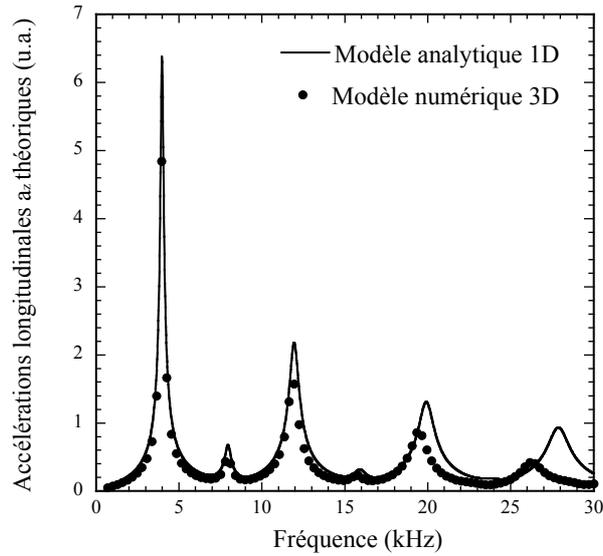


Figure II.1 : comparaison des spectres des accélérations longitudinales calculées analytiquement et numériquement par EF à l'extrémité du barreau viscoélastique isotrope.

Ce phénomène qui a déjà été analysé sur la Figure I.19 tend à décaler (en hautes fréquences) les fréquences des pics prédits par le modèle numérique 3D par rapport à celles du modèle analytique. Généralement, la fréquence de résonance d'un mode longitudinal d'un barreau de longueur L libre de toute contrainte externe est liée à sa vitesse de propagation par la relation discrète (II.6) :

$$f_i = i \frac{v_\phi^i}{2L} \quad (\text{II.6})$$

où f_i est la fréquence de résonance du $i^{\text{ème}}$ mode longitudinal et v_ϕ^i est sa vitesse de propagation.

Dans la théorie élémentaire classique des vibrations longitudinales d'un barreau de « longueur infinie », les fréquences propres des modes longitudinaux sont équidistants du fait que la vitesse de propagation des différents modes est constant et vaut $v_\phi = \sqrt{E^*/\rho}$. Par contre, nous constatons que celles qui sont obtenues par le modèle numérique 3D ne sont pas équidistantes à cause de la variation de la vitesse de propagation de chaque mode longitudinal en fonction de la fréquence. Il est donc important de tenir compte de ce phénomène pour corriger le modèle analytique unidimensionnel décrit par l'équation (I.6). Pour cela, nous allons d'abord introduire un modèle analytique basé sur la théorie développée par E. H. Love [II.5][II.6]. Elle peut être appliquée à tout barreau viscoélastique isotrope dont les dimensions latérales ne sont pas négligeables par rapport aux longueurs d'ondes acoustiques. Pour une excitation sinusoïdale, l'équation qui décrit la propagation des petites déformations longitudinales $\tilde{\epsilon}_{zz}$ dues à une source thermique $\tilde{\theta}(z, \omega)$ s'écrit simplement sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}(z, \omega)}{\partial z^2} + \omega^2 S_{Love}^{*2} \tilde{\varepsilon}(z, \omega) - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II.7})$$

où $S_{Love}^{*2} = S^{*2} / 1 - (S^* \omega v r)^2$ est la nouvelle expression de la lenteur et r est le rayon de giration d'une section-droite du barreau par rapport à l'axe e_z . Ce dernier est lié au moment polaire de la section-droite (par rapport à l'axe e_z) par la relation $r^2 = I_z / A$ avec $I_z = (a^2 + b^2)A/12$ est le moment polaire de la section-droite par rapport à l'axe e_z .

Les relations (I.6) et (II.7) ont la même forme mais la seule différence provient de l'apparition du terme $\zeta = (1 - (S^* \omega v r)^2)$ dans S_{Love}^* . Ce terme inclut les effets d'inertie de la section-droite du barreau. Ainsi, l'équation d'onde (II.7) est caractérisée par la vitesse de phase v_ϕ^{Love} :

$$v_\phi^{Love}(\omega) = \frac{\sqrt{1 - (\omega S^* v r)^2}}{S^*}. \quad (\text{II.8})$$

Notons que la connaissance de la vitesse de phase v_ϕ d'un mode longitudinal du barreau à une fréquence donnée et de S^* permettra *a priori* d'inverser cette relation pour estimer le coefficient v . En outre, étant donné que les équations (I.6) et (II.7) ont la même forme, alors la méthode analytique décrite dans la section I.3.2 peut être appliquée ici pour déterminer les nouvelles expressions analytiques des spectres des vibrations longitudinales de l'échantillon. Pour y parvenir, il suffit de remplacer dans toutes les équations (I.6) à (I.17) la lenteur S^* par la nouvelle expression de S_{Love}^* . La Figure II.2 montre les accélérations calculées théoriquement à l'extrémité du barreau par les trois modèles.

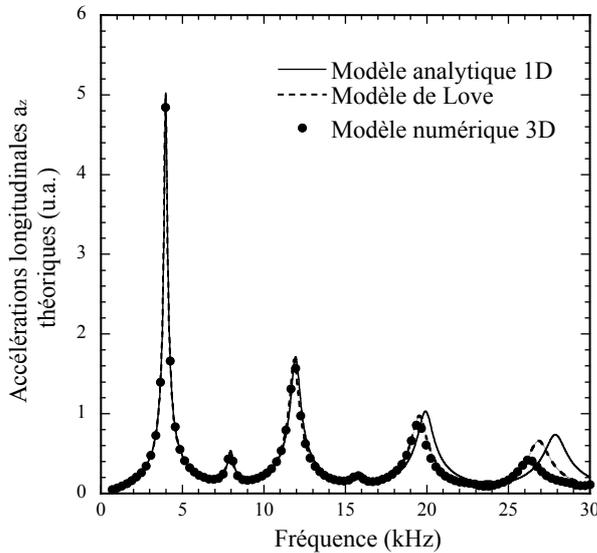


Figure II.2 : comparaison des spectres des accélérations déterminées à l'extrémité du barreau par les différents modèles.

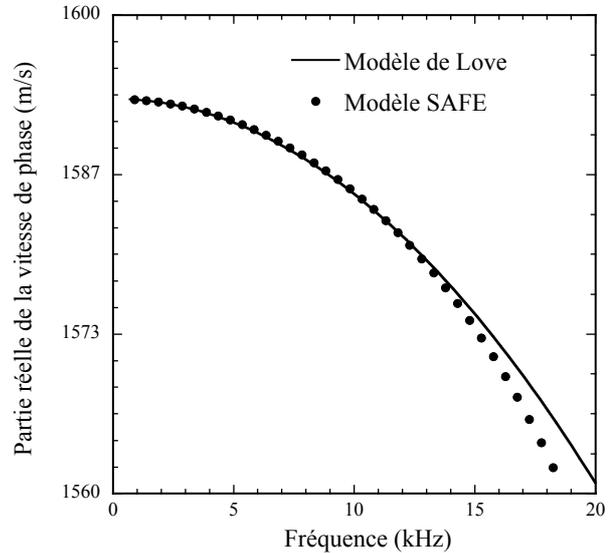


Figure II.3 : comparaison des parties réelles des vitesses de phase obtenues par le modèle de Love et le modèle SAFE.

Nous observons que le spectre prédit par le modèle de Love approche mieux le spectre calculé numériquement par EF que celui qui est déterminé avec le modèle analytique unidimensionnel élémentaire. Par ailleurs, en comparant sur la Figure II.3 la vitesse de phase déterminée par le modèle de Love à celle calculée numériquement par la méthode SAFE

présentée dans la section I.4.2 du Chapitre I, nous remarquons que les parties réelles des vitesses de phase prédites par chaque modèle (Love et SAFE) sont proches dans la gamme de fréquences inférieure à 13 kHz environ. Par contre, plus la fréquence augmente, plus le modèle de Love s'éloigne du modèle SAFE. Ces variations sont dues aux phénomènes dispersifs du barreau qui deviennent de plus en plus important au fur et à mesure que la fréquence augmente.

Synthèse : le modèle analytique basé sur l'approximation de Love a permis d'améliorer la modélisation analytique des vibrations longitudinales d'un barreau soumis à une élévation de température. Ses résultats indiquent la possibilité de construire une méthode de caractérisation du coefficient ν des barreaux viscoélastiques par le biais des courbes de dispersion des ondes longitudinales.

II.2.3. Application numérique des méthodes de caractérisation

Dans cette section, le spectre de l'accélération calculée numériquement par éléments finis et qui est représenté sur la Figure II.2 est considéré pour illustrer la méthode d'évaluation non destructive. Rappelons que la température prise en compte dans cette simulation est celle qui correspond au cas d'un guide d'ondes électromagnétiques fermé sans réflecteur. Le calcul numérique du spectre des vibrations est fait sur l'intervalle $[0,1\text{kHz} - 20\text{kHz}]$ discrétisée avec un pas en fréquence égal à 83Hz. Dans la suite, l'objectif est d'exploiter les spectres numériques obtenus par cette simulation afin de valider au moins numériquement les différentes approches élaborées précédemment pour évaluer ν .

II.2.3.1. Méthode de caractérisation basée sur le rapport des vibrations

Cette partie tente de valider l'approche analytique utilisée dans la section II.2.1. Pour cela, nous allons d'abord examiner les effets des autres paramètres mécaniques et électromagnétiques du matériau sur les quantités \tilde{R}_a et \tilde{R}_b . Les expressions (II.4) et (II.5) indiquent que ces deux quantités ne dépendent pas du coefficient de dilatation thermique α et de la valeur moyenne de la puissance électromagnétique incidente \bar{P}_i puisqu'elles apparaissent linéairement dans les composantes du vecteur G données par l'expression (I.9). Néanmoins, les expressions de \tilde{R}_a et de \tilde{R}_b peuvent varier plus ou moins par rapport aux dimensions géométriques de l'échantillon, aux valeurs de E^* et de ε_r^* . De ce fait, il est important d'étudier la sensibilité de ces deux quantités par rapport à ces deux paramètres et plus particulièrement par rapport à ε_r^* puisque sa valeur est généralement mal estimée avec une très bonne précision. Pour simplifier, nous avons choisi d'exprimer les quantités \tilde{R}_a et \tilde{R}_b à la fréquence de résonance f_R du mode fondamental longitudinal.

Les résultats graphiques représentés sur les Figures II.4 à II.7 montrent que $\tilde{R}_a(\omega_R)$ n'est pratiquement pas sensible à des petites perturbations de E^* et de ε_r^* . Par contre la quantité $\tilde{R}_b(\omega_R)$ est peu sensible à E^* mais particulièrement plus à ε_r^* .

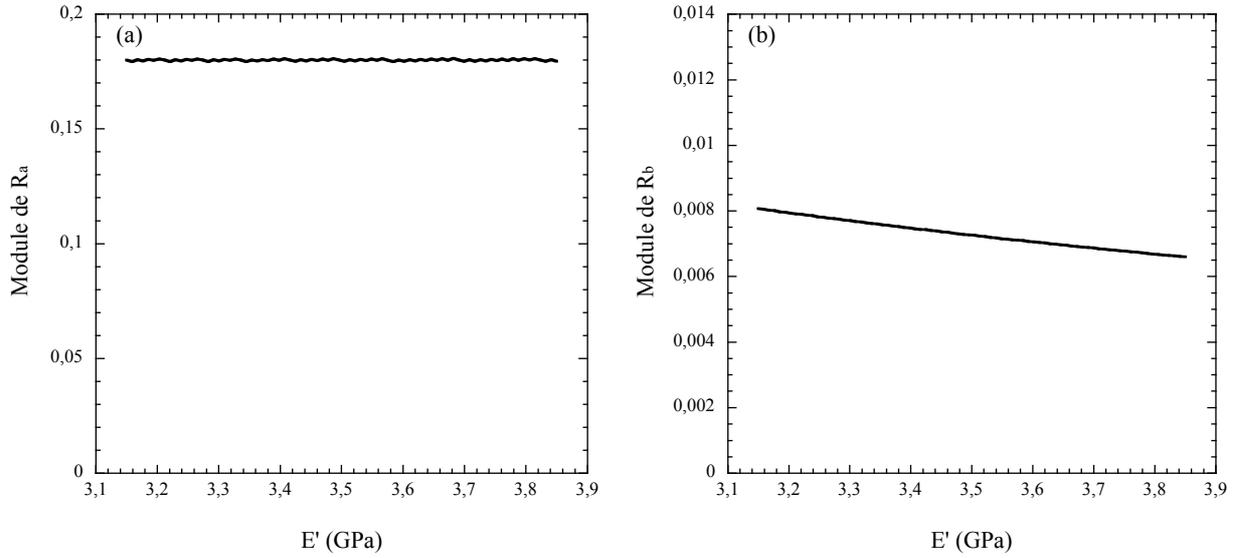


Figure II.4 : effets d'une petite variation de la valeur de E' sur : (a) le module de R_a , (b) le module de R_b .

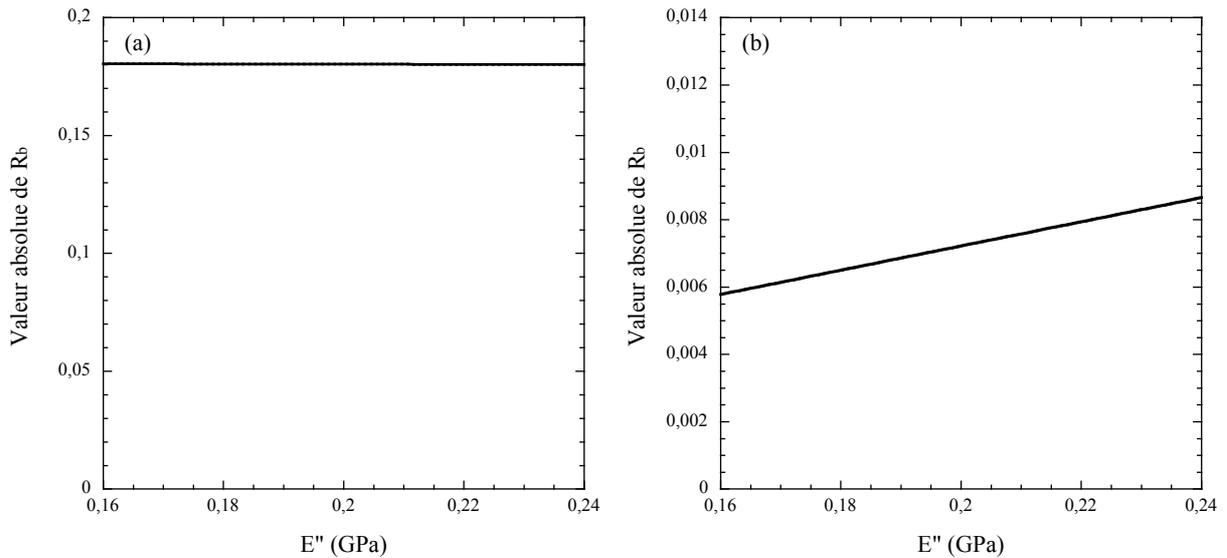


Figure II.5 : effets d'une petite variation de la valeur de E'' sur : (a) le module de R_a , (b) le module de R_b .

Notons dans ce dernier cas que $\tilde{R}_b(\omega_R)$ oscille avec un écart maximum environ égal à $\Delta_{\varepsilon_r} R_b \approx 0,008$. Maintenant, la question est de savoir si cette variation peut induire des erreurs significatives sur l'estimation de ν . D'après (II.3), le coefficient ν peut *a priori* être estimé directement en appliquant la relation :

$$\nu = \frac{R_{Exp}(\omega_R) - R_b(\omega_R, p)}{R_a(\omega_R)}. \quad (\text{II.9})$$

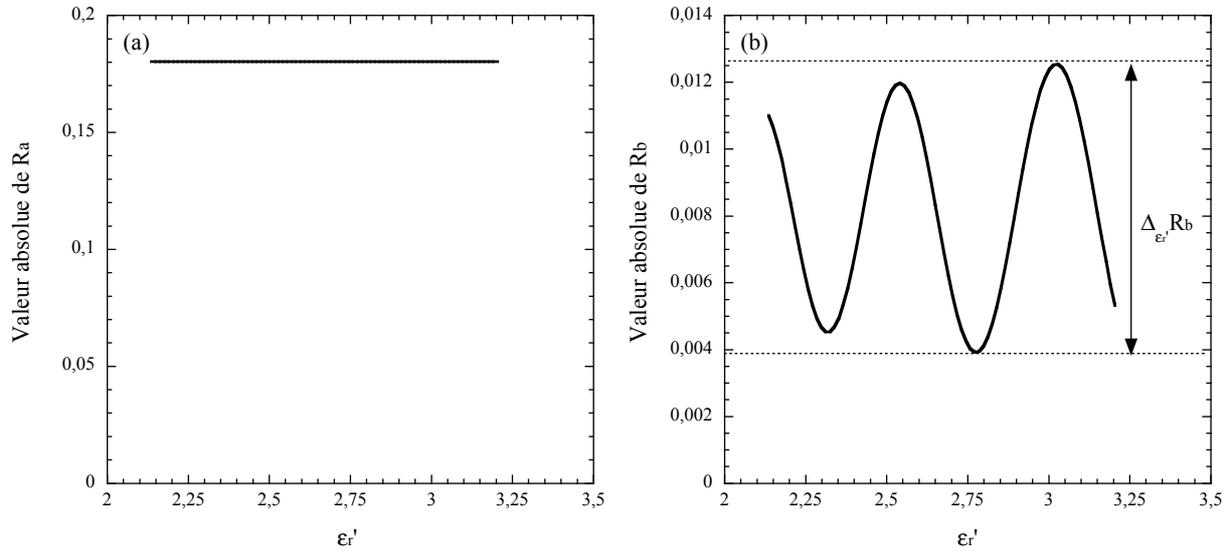


Figure II.6 : effets d'une petite variation de la valeur de ϵ_r' sur : (a) le module de Ra, (b) le module de Rb.

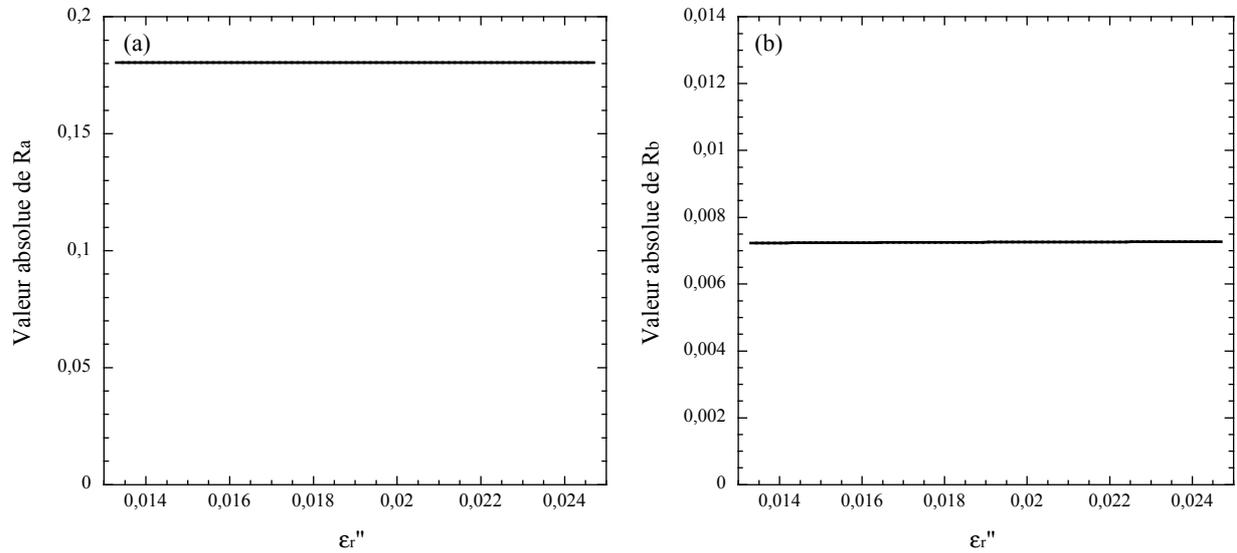


Figure II.7 : effets d'une petite variation de la valeur de ϵ_r'' sur : (a) le module de Ra, (b) le module de Rb.

Or, l'étude graphique précédent a indiqué que seule la quantité \tilde{R}_b est relativement sensible à une variation de ϵ_r' . Par conséquent, l'application de la relation (II.9) pour estimer v nécessite d'abord d'analyser l'effet d'une erreur relative de ϵ_r' sur l'estimation de v . Une telle analyse est indispensable dans la mesure où il n'existe pas pour l'instant de méthodes basées sur la technique de génération acoustique par micro-ondes permettant d'estimer ce paramètre avec une très bonne précision. Partant de la relation (II.9), il est facile de montrer que l'erreur relative induite sur l'estimation de v peut s'exprimer analytiquement sous la forme :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta R_{Exp}}{v R_a} + \frac{\Delta R_b}{v R_a}. \quad (\text{II.10})$$

Le premier terme représente l'erreur liée aux mesures expérimentales alors que le deuxième représente celle qui est due à la sensibilité de \tilde{R}_b par rapport aux caractéristiques du matériau constituant le barreau, et en particulier par rapport à ϵ' . En utilisant les résultats des Figures II.4 à II.7 et d'après la relation (II.11), nous obtenons que l'erreur relative $\Delta v/v$ donnée par :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta R_{Exp}}{vR_a} + 11,4\% \quad (\text{II.11})$$

est au moins égale à 11%. Ce résultat souligne que la non connaissance précise des propriétés mécaniques et surtout électromagnétiques du barreau rend cette méthode inappropriée pour estimer v avec une bonne précision.

II.2.3.2 Méthode de caractérisation basée sur la dispersion des ondes longitudinales

La relation (II.8) indique que le coefficient v influence la vitesse de phase des ondes longitudinales. Donc nous pouvons l'utiliser pour analyser son effet sur l'évolution des courbes de dispersion des ondes longitudinales. La Figure II.8 montre effectivement que cette dépendance n'est pas négligeable et qu'elle peut servir à l'élaboration d'une méthode d'estimation de v . Cette méthode peut être décrite graphiquement de la façon suivante : dans le cas d'une simulation numérique (ou expérimentale) des vibrations longitudinales du barreau, le spectre obtenu permet directement d'identifier les fréquences de résonance f_i des $i^{\text{ème}}$ modes longitudinaux. Puis, la connaissance des f_i permet, grâce à la relation (II.6), de déterminer les vitesses de propagation v_ϕ^i des modes associés.

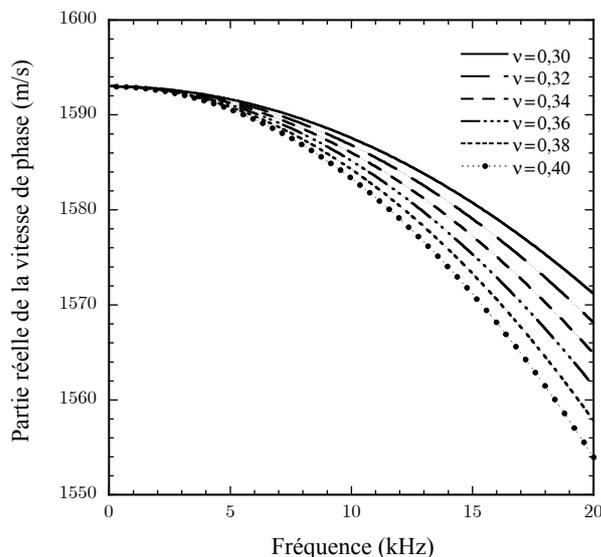


Figure II.8 : effets de v sur la courbe de dispersion prédite par le modèle de Love.

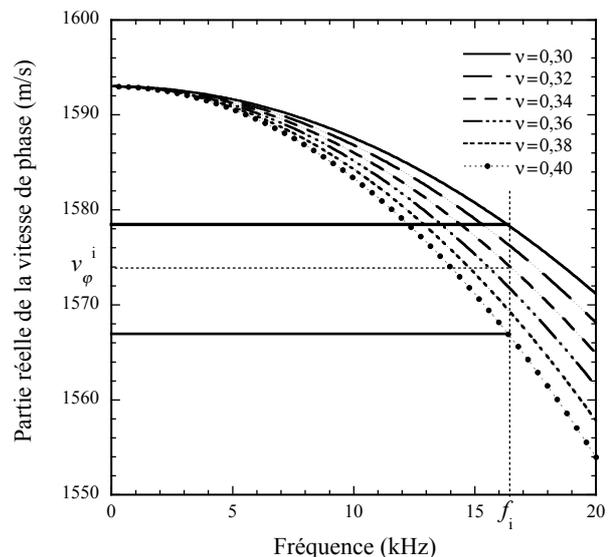


Figure II.9 : méthode graphique d'estimation de v .

Par la suite, comme cela est illustrée sur la Figure II.9, en rapportant le couple (f_i, v_ϕ^i) sur les courbes de dispersions, il est alors possible d'estimer la valeur de v qui décrit au mieux

les résultats de la simulation. Par contre, sa fréquence doit être la plus grande possible pour espérer obtenir une bonne estimation de ν . L'avantage de cette méthode par rapport au précédent est qu'elle ne fait intervenir que la lenteur S^* du matériau et la longueur du barreau et non en aucun cas à la permittivité du matériau. Toutefois, pour qu'elle soit précise, la procédure expérimentale devra permettre de déterminer les valeurs des fréquences de résonance des différents modes longitudinaux avec une bonne précision.

Synthèse : dans cette section, nous avons analysé différentes approches analytiques permettant d'évaluer le coefficient de Poisson d'un barreau viscoélastique isotrope soumis à des micro-ondes pulsées. Les résultats ont montré que la méthodologie basée sur le rapport \tilde{R} ne pouvait pas être appliquée à cause des erreurs liées à la non connaissance précise de la valeur de la partie réelle de la permittivité du matériau. Par contre, celles utilisant la dispersion des ondes longitudinales semblent être les mieux appropriées pour l'évaluation du coefficient ν dans la mesure où elle ne fait pas intervenir ce paramètre. Nous allons donc par la suite les appliquer dans le cas réel de deux barreaux polymériques.

II.3. Application dans le cas de deux barreaux polymériques

Avant-propos : cette section présente le montage expérimental réalisé pour la caractérisation du coefficient ν des barreaux viscoélastiques isotropes soumis à des impulsions de micro-ondes. La section II.3.1 présentera la procédure expérimentale utilisée. Puis la section II.3.2 appliquera les méthodes de caractérisation.

II.3.1. Dispositif expérimental

Considérons le dispositif expérimental présenté sur la Figure II.10. Nous disposons de deux échantillons formés de deux barreaux polymériques homogènes de section rectangulaires $A = 22 \times 10 \text{ mm}^2$ identiques mais de longueurs différentes : $L_1 = 150 \text{ mm}$ pour le barreau en « PVC noir » et $L_2 = 100 \text{ mm}$ pour celui en « PVC jaune ». Dans un premier temps, chaque barreau est placé dans un guide fermé et est soumis à une excitation quasi impulsionnelle formée de 15 impulsions de micro-ondes de durée $1 \mu\text{s}$ et de période $1,2 \mu\text{s}$. L'absorption de micro-ondes à l'intérieur du matériau provoque la génération d'ondes acoustiques le long du barreau. Les vibrations de la face située à l'extrémité des échantillons sont mesurées à l'aide de l'accéléromètre de masse $0,2 \text{ g}$ décrite dans la section (II.2.1). Les spectres obtenus sur les Figures II.11 et II.12 montrent la présence de trois modes axiaux de traction compression indiqués respectivement sur le spectre par les trois pics. Mais, seul le premier et le dernier mode de vibration sont utilisés dans la suite pour appliquer la méthode de caractérisation de leur coefficient ν en raison de leurs faibles amplitudes. Plus l'amplitude

du pic (donc du mode considéré) est faible et plus il sera difficile de relever la valeur de sa fréquence de résonance avec une bonne précision.

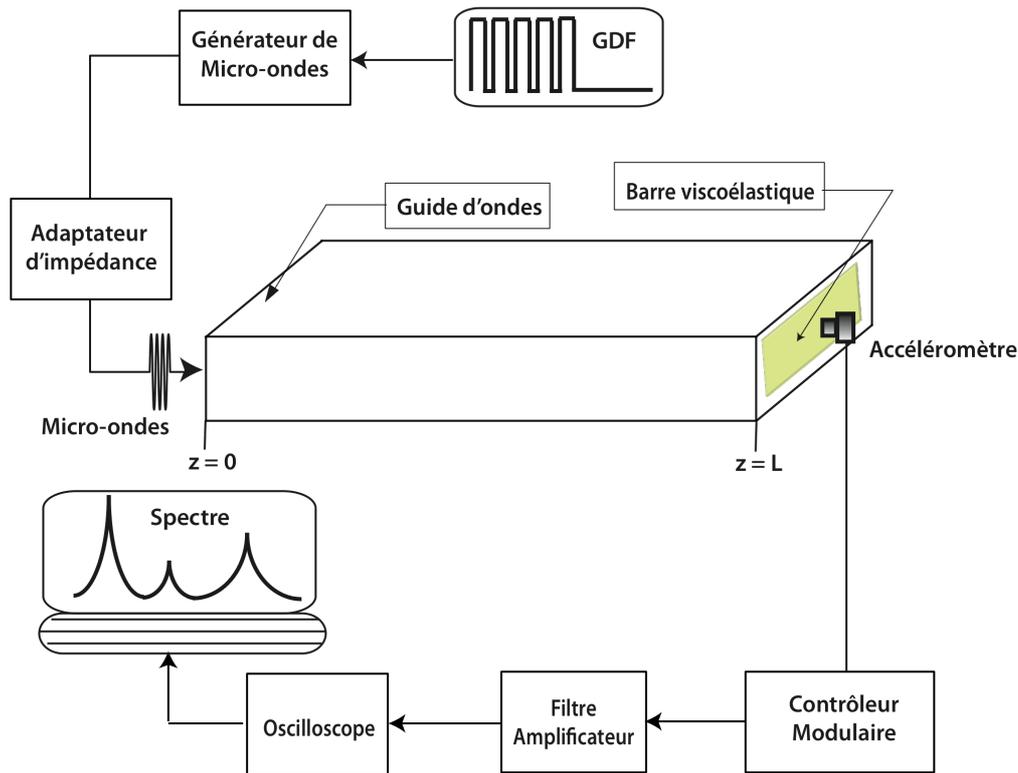


Figure II.10 : schéma simplifié du dispositif expérimental.

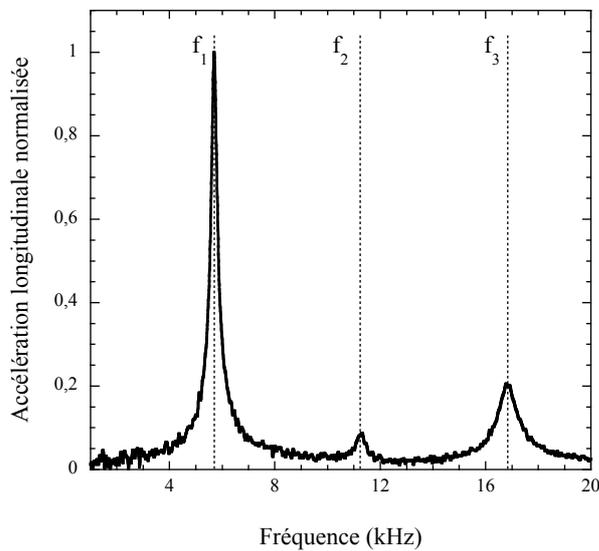


Figure II.11 : spectre de l'accélération mesurée expérimentalement à l'extrémité du barreau de longueur $L = 150$ mm (PVC noir).

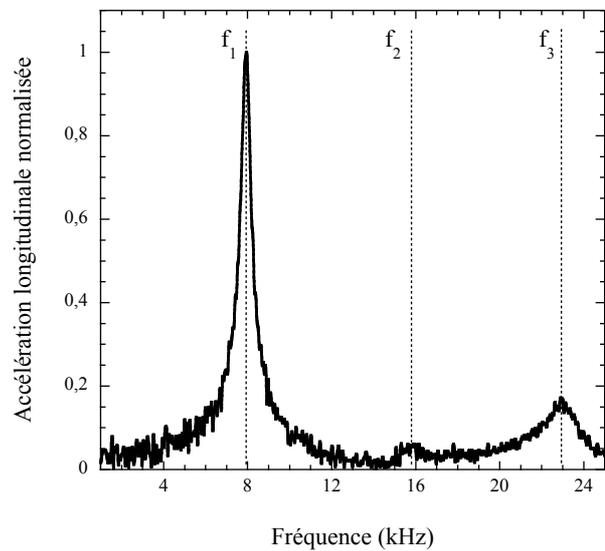


Figure II.12 : spectre de l'accélération mesurée expérimentalement à l'extrémité du barreau de longueur $L = 100$ mm (PVC jaune).

II.3.2. Validation expérimentale des méthodes basées sur les courbes de dispersion

Les méthodes basées sur les courbes de dispersions des ondes longitudinales sont appliquées pour estimer le coefficient ν et la partie réelle de la lenteur S^* des deux échantillons. Le Tableau II.2 donne les fréquences de résonance (des modes longitudinaux) et les vitesses de propagation des modes longitudinaux calculées à l'aide de la relation (II.6).

Mode longitudinal	1	3
Fréquence de résonance (Hz)	5 700	16 820
Vitesse de propagation ($m \cdot s^{-1}$)	1710	1 680

Tableau II.2 : données expérimentales relatives au barreau en «PVC noir».

Mode longitudinal	1	3
Fréquence de résonance (Hz)	7 930	22 950
Vitesse de propagation ($m \cdot s^{-1}$)	1586	1 530

Tableau II.3 : données expérimentales relatives au barreau en «PVC jaune».

La connaissance de ces données permet ensuite d'appliquer les méthodes inverses décrites dans la section II.2.3.2. Cependant, la démarche utilisée ici est plus générale et elle consiste à chercher à la fois la partie réelle S' de S^* et le coefficient ν qui minimisent la fonctionnelle $J(S', \nu)$ définie par :

$$J(S', \nu) = \sum_f \frac{|v_\varphi(S', \nu) - v_\varphi^*(f)|}{v_\varphi^*(f)} \quad (\text{II.12})$$

où v_φ est la vitesse de phase prédite soit par le modèle de Love (II.8), soit par la méthode SAFE (I.39) et v_φ^* est la vitesse de phase expérimentale calculée respectivement avec les données des Tableaux II.2 et II.3.

La procédure d'estimation est répétée sur chacune des fréquences de résonance expérimentales. Les paramètres optimums obtenus par l'algorithme de minimisation sont rassemblés sur les Tableaux II.4 et II.5.

	Méthode de Love	Méthode SAFE
$S'(\mu s/m)$	584 (± 2)	583 (± 2)
ν	0,44 ($\pm 0,05$)	0,42 ($\pm 0,02$)

Tableau II. 4 : estimations relatives au 1^{er} échantillon.

	Méthode de Love	Méthode SAFE
$S' (\mu s/m)$	629 (± 2)	629 (± 2)
ν	0,43 ($\pm 0,02$)	0,36 ($\pm 0,02$)

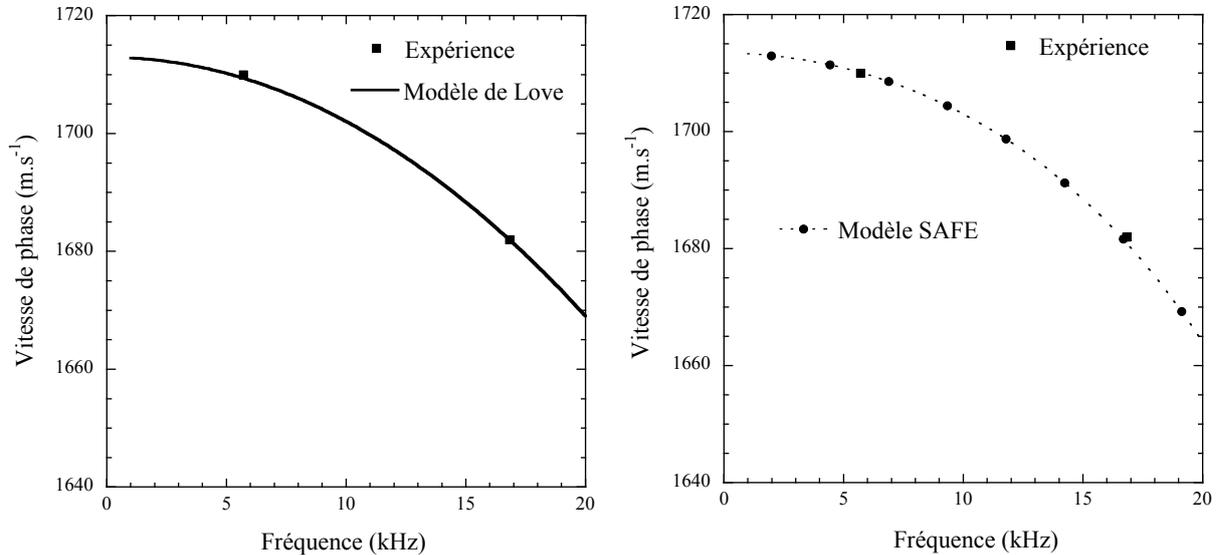
Tableau II. 5 : estimations relatives au 2^{ème} échantillon.

Figure II.13 : comparaisons des résultats expérimentaux avec ceux prédits par les deux modèles et calculés avec les paramètres optimaux dans le cas du barreau en « PVC noir ».

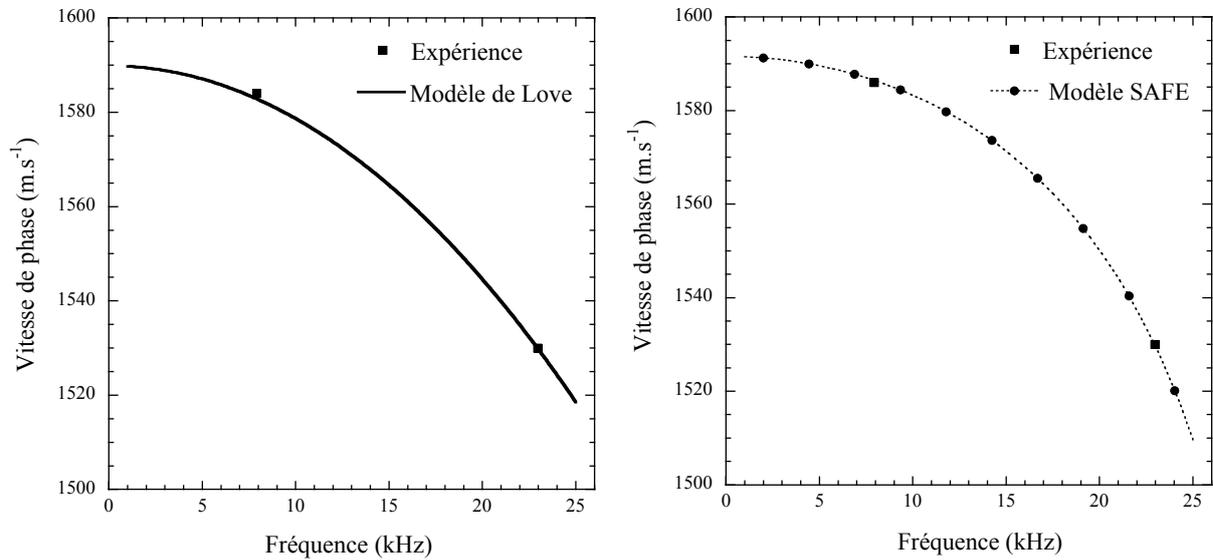


Figure II.14 : comparaisons des résultats expérimentaux avec ceux prédits par les deux modèles et calculés avec les paramètres optimaux dans la cas du barreau en « PVC jaune ».

Les résultats montrent que les estimations obtenues par les deux méthodes sont voisines dans le cas du barreau en « PVC noir ». Par contre, celles obtenues pour le « PVC jaune » sont nettement différentes. Cette différence pourrait s'expliquer par le fait que, dans le cas du barreau en « PVC jaune », la troisième fréquence de résonance f_3 est dans un domaine où les

hypothèses utilisées dans le modèle de Love sont limitées comme cela est illustré sur la Figure II.3. Notons que les estimations de S' sont très proches de celle estimée dans la référence [II.2]. Par ailleurs, nous remarquons aussi que les estimations de ν dans le cas du barreau en « PVC noir » sont très proches de la valeur de 0,4 obtenue dans la référence [II.4]. Plus encore, les Figures II.13 et II.14 indiquent une bonne concordance entre les vitesses de phase expérimentales et celles prédites par les deux modèles et calculées avec les paramètres optimaux.

Synthèse : dans cette section, nous avons validé expérimentalement les différentes approches analytiques et numériques permettant d'évaluer le coefficient de Poisson. Les résultats ont montré une bonne concordance entre les estimations obtenues et celles qui sont données dans les références [II.3] et [II.4].

II.4. Conclusion

Nous avons proposé dans ce Chapitre des méthodes analytiques et numériques permettant de caractériser la matrice de rigidité des barreaux viscoélastiques isotropes soumis à des impulsions de micro-ondes. D'une part, une approche analytique basée sur l'étude de l'effet de ν sur le rapport entre les amplitudes maximales de la vibration transversale mesurée au milieu du barreau et longitudinale mesurée à son extrémité a été mise en place. D'autre part, une méthode analytique basée sur l'approximation de Love et une autre numérique par éléments finis SAFE exploitant toutes les deux l'effet de ν sur les courbes de dispersion des ondes longitudinales de traction compression ont été aussi présentées. La validation de ces différentes approches dans le cas d'une simulation numérique par éléments finis a souligné que la première méthode analytique souffrait des erreurs qui seraient commises sur la partie réelle de la permittivité diélectrique du matériau. Par contre, les méthodes utilisant la dispersion des ondes longitudinales semblent être les mieux adaptées.

Ces dernières méthodes ont été par la suite appliquées dans le cas pratique de deux barreaux polymériques. Les résultats obtenus ont montré que les estimations de ν obtenues par chaque méthode reste plus ou moins proches des valeurs données dans la littérature. Cependant, il est important de noter que ces estimations dépendront des erreurs expérimentales faites sur les valeurs des fréquences de résonance des modes longitudinaux. Ces erreurs peuvent être dues, soit aux effets non linéaires induits par les contacts de l'échantillon testé avec le guide d'ondes électromagnétiques, soit à la viscosité du matériau qui tend à étaler les pics de résonance au fur et à mesure que la fréquence augmente ou soit à un mauvais rapport signal/bruit. Il faut noter aussi que cette procédure d'estimation de ν pourrait être appliquée à d'autres méthodes de génération d'ondes acoustique le long des barreaux (par exemple la technique de génération acoustique par impact mécanique). Mais l'intérêt de l'utilisation de la technique des micro-ondes est qu'elle est sans contact et que la sollicitation reste très répétitive tout au long de l'expérience.

II.5. Références

- [II.1] B. Hosten and C. Bacon, “*Measurement of complex young moduli of composite material by time-gated microwaves*”, AIP Conference Proceedings, vol. **509**, p. 1113-1120 (2000).
- [II.2] E. Guilliorit, “*Génération d’ondes acoustiques par micro-ondes impulsionnelles*”, Thèse de doctorat, n° d’ordre 2421, Université Bordeaux 1 (2001).
- [II.3] A. R. Hadj Henni, “*Vibrations de structures générées par micro-ondes pulsées : application à l’évaluation non-destructive*”, Thèse de doctorat, n° d’ordre 3213, Université Bordeaux 1 (2006).
- [II.4] A. R. Hadj Henni, C. Bacon and B. Hosten, “*In-plane vibration of thin circular structures submitted to pulsed microwave*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **119**(6), p. 3782-3792 (2006).
- [II.5] E. A. H. Love, “*A treatise on the mathematical theory of elasticity*”, Dover, New York (1944).
- [II.6] H. N. Abramson, H. J. Plass and E. A. Ripperger, “*Stress wave propagation in rods and beams*”, Advanced Applied Mechanics, vol. **5**, p. 111-194 (1958).
- [II.7] M. Krawczuk, J. Grabowska and M. Palacz, “*Longitudinal wave propagation. part I-comparison of rod theories*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **295**, p. 461-478 (2006).
- [II.8] M. Castaings, C. Bacon, B. Hosten and M. V. Predoi, “*Finite element predictions for the dynamic response of thermo-viscoelastic material structures*”, Journal of the Acoustical Society of America, vol. **115**(3), p. 1125-1133 (2004).
- [II.9] I. Bartoli, A. Marzani, F. L. di Scalea and E. Viola, “*Modelling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **295**, p. 685-707 (2006).
- [II.10] T. Hayashi, W. J. Song and J. L. Rose, “*Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example*”, Ultrasonics, vol. **41**, p. 175-183 (2003).
- [II.11] L. Gavric’, “*Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **185**(3), p. 531-543 (1995).

Chapitre III

Génération acoustique par micro-ondes pour le contrôle non destructif de plaques

III.1. Introduction	60
III.2. Modélisation analytique.....	63
III.2.1. Vibrations radiales des structures circulaires soumises localement à une élévation de température.....	63
III.2.2. Anneau soumis à une distribution uniforme de la température	64
III.2.3. Disque plein soumis à une élévation uniforme de la température	66
III.3. Modélisation numérique par éléments finis (EF)	68
III.3.1. Formulation 2D pour les plaques en état plan de contraintes	68
III.3.2. Formulation 3D dans le cas d'une répartition axisymétrique de la température ...	69
III.3.3. Validation numérique des modèles analytiques.....	70
III.4. Caractérisation de la répartition spatiale de la température.....	72
III.4.1. Cas d'une élévation uniforme de la température	72
III.4.2. Cas d'une élévation non uniforme de la température	73
III.5. Étude de la génération acoustique du trou	75
III.5.1. Cas d'une plaque très mince soumise localement au centre à une élévation uniforme de la température	76
III.5.2. Spectre des vibrations générées sur le trou dans le cas d'une plaque 3D soumise à une température gaussienne	81
III.5.2.1. Analyse des deux pics P3 et P4	84
III.5.2.2. Analyse des deux pics P1 et P2	87
III.5.2.3. Méthode de contrôle non destructif des défauts circulaires.....	88
III.6. Application dans le cas d'une plaque en polymère	90
III.6.1. Procédure expérimentale pour la caractérisation de la forme de la répartition gaussienne de la température	90
III.6.2. Procédure expérimentale pour le contrôle non destructif	92
III.7. Conclusion.....	94
III.8. Références	95

III.1. Introduction

L'étude de nouvelles techniques pour contrôler l'intégrité des structures mécaniques n'a cessé de progresser tout au long de ces dernières années. Elle a notamment favorisé l'émergence de plusieurs méthodes actuellement appliquées pour localiser et dimensionner les défauts contenus dans les structures mécaniques largement utilisées dans l'industrie. L'objectif de ce Chapitre est d'étudier l'apport éventuel de la technique de génération acoustique par micro-ondes dans le domaine du contrôle non destructif (CND) des structures simples se présentant sous formes de plaques minces.

Il est admis que l'irradiation de micro-ondes sur un matériau (absorbant les ondes électromagnétiques) entraîne, par effet d'échauffements et de dilatations thermiques, la génération d'ondes acoustiques. Évidemment, la forme et l'amplitude de ces ondes acoustiques dépendront non seulement des propriétés mécaniques, électromagnétiques et thermiques du matériau testé, mais aussi de la présence ou pas de défauts dans la structure. De ce fait, il est normal de penser que l'étude de la génération acoustique par micro-ondes pourrait favoriser l'émergence d'une procédure expérimentale de CND des plaques viscoélastiques. Cette procédure se ferait par exemple en déplaçant une source de micro-ondes sur toute la surface de l'échantillon puis en analysant le comportement des ondes acoustiques qui y sont générées.

D'un point de vue acoustique, l'utilisation de cette nouvelle technique serait probablement avantageuse par rapport à certaines méthodes ultrasonores. En effet, comme l'indique la Figure III.1, ces techniques sont basées en général, d'une part sur l'émission et la propagation d'ondes acoustiques dans la structure, puis d'autre part sur la détection des ondes qui y sont réfléchies. L'analyse des interactions entre les champs acoustiques incidents et réfléchis (par le défaut) sur des courtes durées peut parfois être difficile à cause des interférences entre ces différentes ondes acoustiques. Par contre, si le défaut est soumis localement à un flux thermique rapide (qui peut provenir d'une source de micro-ondes) comme cela est illustré sur la Figure III.2, alors les mouvements brusques d'ouverture et de fermeture du défaut provoqueraient la génération d'ondes acoustiques directement liées à la présence du défaut. C'est pour cette raison que nous voulons analyser si cette réponse acoustique donnerait dans la mesure du possible une méthode efficace permettant de contrôler les plaques viscoélastiques. La mise en place de cette méthode implique d'abord une bonne compréhension des phénomènes acoustiques qui seront mis en jeu. De nombreuses revues scientifiques [III.1]-[III.8] ont étudié les ondes acoustiques générées au sein de certaines structures mécaniques (troués ou non) soumises à une élévation de température. Ce travail est une extension des résultats obtenus dans la référence [III.9] où l'auteur présente brièvement la génération acoustique d'un trou circulaire situé dans une plaque subissant un échauffement uniforme sur tout son volume. L'étude de cette réponse acoustique a indiqué l'existence d'une relation directe entre les dimensions du défaut et une caractéristique du spectre des vibrations radiales générées sur le défaut. Celle-ci est *a priori* intéressante puisqu'elle procure une méthode non invasive simple permettant de dimensionner ces types de défauts. Cependant,

étant donné que l'approche analytique utilisée repose sur une approximation grossière d'une répartition thermique uniforme sur toute la plaque, nous allons dans ce Chapitre l'étudier puis l'approfondir en nous restreignant aux deux cas suivants :

- Le cas où l'élévation de température serait localement centrée et uniforme sur une zone S_{Th} appelée zone thermique contenant le défaut. Elle est illustrée sur la Figure III.3. Celle-ci représente brièvement le processus de CND analysé dans ce Chapitre. Ce type de défaut (trou traversant l'épaisseur de la plaque) a été choisi afin de simplifier la modélisation analytique du problème. Toutefois, si les résultats obtenus s'avèrent être intéressants, alors l'étude pourra par la suite être étendue numériquement aux cas des défauts plus complexes.
- Le cas où la répartition thermique sur la plaque prendrait une forme gaussienne. Cette dernière a été considérée afin non seulement de tenir compte des effets acoustiques éventuellement engendrés par un gradient de température mais aussi de se rapprocher à un profil de température plus réaliste.

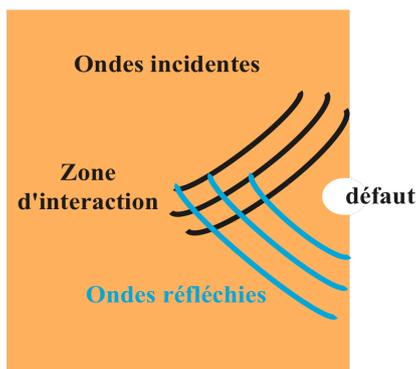


Figure III.1 : description locale de la méthode de CND utilisant les techniques ultrasonores.

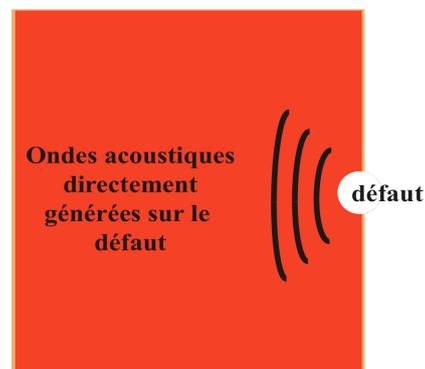


Figure III.2 : description locale de la méthode de CND utilisant une source de micro-ondes.

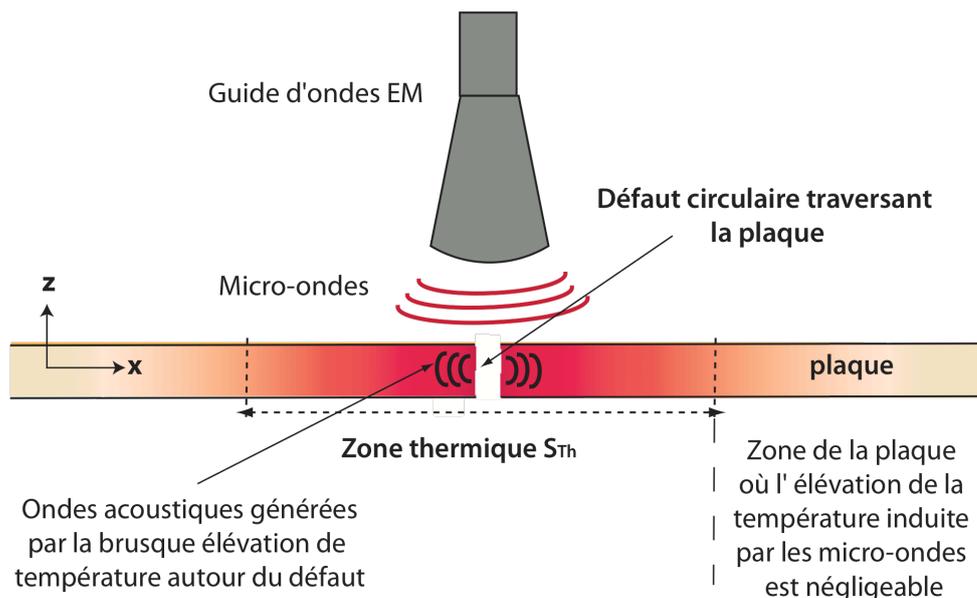


Figure III.3 : schéma représentant la génération acoustique par micro-ondes sur une plaque contenant un défaut.

Le problème décrit sur la Figure III.3 sera dans un premier temps étudié analytiquement dans le cas des anneaux circulaires, libres, de rayon intérieur R_1 (rayon du défaut) et de rayon extérieur R_2 , soumis à une élévation thermique uniforme sur la zone thermique S_{Th} . Deux hypothèses seront formulées afin de simplifier la modélisation analytique du problème.

Nous supposerons que les plaques seront en état plan de contraintes et que leurs épaisseurs sont négligeables devant les longueurs d'ondes de la plaque. L'équation d'ondes dérivant des équations de Navier sera résolue dans le plan radial au moyen de fonctions de Bessel. Ce modèle permettra de déduire ces différents cas particuliers :

- Le cas d'un disque (non troué) qui est chauffé sur la zone S_{Th} en prenant $R_1 = 0$ et R_2 fini. Ce modèle sera utilisé pour élaborer une méthode inverse permettant d'estimer la taille de la zone chauffée par les micro-ondes. Le but sera de déterminer une taille de S_{Th} réaliste qui rendra possible la reproduction analytique ou numérique des essais expérimentaux.
- Le cas d'une plaque saine (supposée grande et dépourvue de défaut) qui est chauffée de la même façon sur la zone S_{Th} en choisissant $R_1 = 0$ et $R_2 \gg R_{Th}$ (rayon de la zone chauffée). Ce modèle sera utilisé pour mettre en évidence l'onde acoustique générée par la discontinuité brusque et « artificielle » de l'élévation de la température. Il permettra par la suite d'isoler ses effets lors de l'étude de la méthode de CND. Nous verrons effectivement que cette discontinuité, qui ne peut exister dans la réalité, peut modifier la forme du champ acoustique prédit par les modèles théoriques.
- Le cas de la plaque possédant un défaut circulaire traversant son épaisseur (trou) avec $R_1 > 0$ et $R_2 \gg R_{Th}$. Ce modèle sera appliqué pour pousser un peu plus loin l'étude de la relation liant les dimensions du défaut à la caractéristiques du spectre des vibrations radiales générées sur le défaut.

Les modèles analytiques seront complétés par des simulations numériques par éléments finis (EF) réalisées en utilisant différentes formulations numériques du problème :

- Une formulation bidimensionnelle par éléments finis : modèle EF 2D. Ce modèle sera construit avec les mêmes hypothèses que celles formulées dans des modèles analytiques. Son avantage est qu'il permettra d'une part de valider les modèles analytiques et d'autre part d'étendre l'étude de la génération acoustique par micro-ondes au cas des répartitions de température continues et à gradient non nul. Plus encore, il pourra être appliqué facilement dans le cas des plaques constituées de matériaux anisotropes. Son inconvénient est qu'il sera impossible de l'utiliser pour étudier l'impact des effets de l'épaisseur des plaques sur la forme de la génération acoustique.
- Une formulation tridimensionnelle par éléments finis construit en supposant que le chargement thermique sur la plaque est de forme axisymétrique. Cette hypothèse nous permettra de modéliser simplement le problème 3D en utilisant un modèle numérique 2D axisymétrique par éléments finis : modèle EF axisymétrique 2D. Son avantage est qu'il favorisera l'étude numérique complète du problème thermoélastique sans faire

aucune hypothèse sur la distribution des contraintes dans la plaque. Il facilitera non seulement la validation des méthodes analytiques et numériques 2D mais aussi d'étudier leurs limites en incluant les effets dans l'épaisseur. Son inconvénient est qu'il sera seulement restreint au cas des évolutions axisymétriques de la température.

III.2. Modélisation analytique

Avant-propos : cette section étudie les vibrations radiales des structures circulaires minces (anneaux ou disques) soumises à une brusque élévation thermique provoquée par une source de micro-ondes. La section III.2.1 décrira l'équation des déplacements radiaux dans le cas où la distribution de température serait quelconque. Puis, par soucis de simplifier la résolution analytique du problème, l'étude sera restreinte dans les sections III.2.2 à III.2.4 aux cas des distributions centrées et localement uniformes. Les modèles obtenus seront étendus au cas des plaques saines d'une part, et trouées à travers leurs épaisseurs d'autre part. L'objectif sera d'analyser les différentes ondes acoustiques générées dans ces structures, puis de mettre en évidence et d'exploiter analytiquement l'effet du trou sur la réponse mécanique.

III.2.1. Vibrations radiales des structures circulaires soumises localement à une élévation de température

Considérons une structure circulaire, mince (c'est-à-dire que l'épaisseur reste négligeable devant les longueurs d'ondes acoustiques), de module d'Young E^* , de masse volumique ρ et de coefficient de Poisson ν , en état plan de contraintes, constituée d'un matériau viscoélastique isotrope et soumise au centre à une brusque élévation de température. En appliquant la théorie de la thermoélasticité, l'équation dont satisfait le champ du vecteur déplacement \mathbf{u} peut se mettre sous la forme :

$$Q_{11}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \frac{Q_{11}-Q_{12}}{2}\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{u}) - B_1\nabla\theta = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{III.1})$$

où Q_{ij} sont les composantes de la matrice de rigidité réduite à valeurs complexes :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E^*}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{E^*\nu}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E^*}{2(1+\nu)}, \quad \theta \text{ est l'élévation thermique dans}$$

l'échantillon à l'instant t et B_1 est une constante égale à $E^*\alpha/(1-\nu)$.

Notons que le terme $\nabla\theta$ de l'équation III.1 dépendra de la forme spatiale prise par l'échauffement thermique induite par l'absorption de micro-ondes. Son expression analytique peut s'obtenir en résolvant les équations couplées de Maxwell et de la chaleur. Or, il est difficile d'établir analytiquement une telle résolution analytique dans la mesure où l'irradiation des échantillons se fait en dehors des guides d'ondes. Donc, pour contourner ce problème, la suite du développement sera faite en formulant différentes hypothèses sur la

forme la distribution de la température dans l'échantillon. Dans un premier temps, nous allons supposer que la pénétration des ondes électromagnétiques induit localement au voisinage de la zone d'irradiation une température uniforme. Cette zone sera notée S_{Th} tout au long de ce Chapitre. Toutefois, il faudra garder à l'esprit que l'hypothèse d'un échauffement local et uniforme sur S_{Th} n'a été formulée que pour faciliter la résolution analytique de l'équation (III.2) et pour améliorer la modélisation thermoélastique faite dans la référence [III.1]. Rien ne garantit qu'elle reflète la réalité expérimentale. De plus, sachant que les guides d'ondes utilisées expérimentalement seront circulaires, alors cette zone S_{Th} sera supposée être de forme circulaire et de rayon R_{Th} . Dans ce cas, la transformée de Fourier de l'équation du mouvement (III.1) entraîne que le spectre du déplacement radial \tilde{u}_r vérifie directement en coordonnées cylindriques une équation de Bessel inhomogène de première espèce donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + (k_L^2 - \frac{1}{r^2}) \tilde{u}_r = B_1 \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{\theta}(r, \omega)) \quad (III.2)$$

où $k_L = \omega / C_L$ est le nombre d'onde correspondant aux ondes acoustiques se propageant dans la direction radiale avec la célérité $C_L = \sqrt{Q_{11} / \rho}$.

III.2.2. Anneau soumis à une distribution uniforme de la température

Considérons sur la Figure III.4 un anneau de rayon intérieur R_1 (rayon d'un éventuel défaut traversant l'épaisseur d'une structure circulaire mince) et de rayon extérieur R_2 , soumis localement à une température uniforme sur la zone thermique S_{Th} , de rayon R_{Th} . Cette structure a été choisie dans la mesure où elle permet d'explicitement facilement les solutions analytiques de l'équation (III.2) dans ces différents cas : le cas d'un disque plein en fixant $R_1 = 0$ et R_2 fini, le cas d'une plaque saine en prenant $R_1 = 0$ et $R_2 \gg R_{Th}$, et enfin le cas d'une plaque trouée à travers son épaisseur en choisissant R_1 fini et $R_2 \gg R_{Th}$.

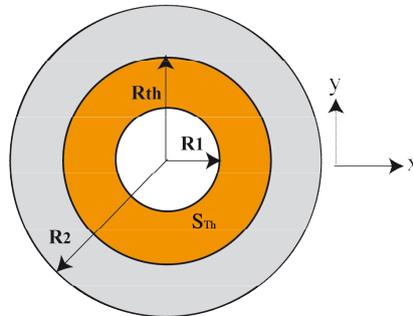


Figure III.4 : schéma de l'anneau soumis à une température uniforme sur S_{Th} .

La distribution localement centrée et uniforme de la température sur la zone S_{Th} peut être exprimée analytiquement à l'aide de la fonction d'Heaviside par :

$$\theta(r, t) = \theta_{Max} f(t) H(R_{Th} - r)$$

où H est la fonction d'Heaviside définie par :

$$H(r) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ 1 & r \geq 0, \end{cases}$$

$f(t) = r(t)$ est l'élévation temporelle de la température donnée par l'expression (I.2) du Chapitre I et θ_{Max} est l'amplitude maximale de l'échauffement thermique.

De cette façon, en calculant le gradient de l'élévation thermique puis en injectant le résultat dans la relation (III.2), cette dernière peut se réécrire simplement sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \left(k_L^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_r = \tilde{A}(\omega) \delta(R_{Th} - r) \quad (III.3)$$

où $\tilde{A}(\omega) = -B_1 \theta_{Max} \tilde{f}(\omega)$ et $\delta(r)$ est la fonction de Dirac.

La transformée de Fourier du déplacement radial \tilde{u}_r prédit par le modèle analytique satisfait une équation de Bessel inhomogène du premier ordre dont le second membre dépend de la fonction de Dirac. Donc, sa solution générale est la somme d'une solution homogène \tilde{u}_r^h combinaison linéaire des deux fonctions de Bessel $J_1(k_L r)$ et $Y_1(k_L r)$ de première et de seconde espèces, et d'une solution particulière $\tilde{u}_{r,p}^A(r)$ donnée par :

$$\tilde{u}_{r,p}^A(r) = [\gamma^{Y_1} J_1(k_L r) - \gamma^{J_1} Y_1(k_L r)] H(R_{Th} - r) \quad (III.4)$$

où les constantes γ^{J_1} et γ^{Y_1} sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma^{Y_1} &= (\pi R_{Th} / 2) \tilde{A}(\omega) Y_1(k_L R_{Th}) \\ \gamma^{J_1} &= (\pi R_{Th} / 2) \tilde{A}(\omega) J_1(k_L R_{Th}). \end{aligned}$$

La méthode permettant d'obtenir l'expression de la solution particulière $\tilde{u}_{r,p}^A$ est décrite dans l'Annexe D.

La solution générale $\tilde{u}_r(r)$ de l'équation (III.3) s'écrit :

$$\tilde{u}_r(r) = \beta_1 J_1(k_L r) + \beta_2 Y_1(k_L r) + \tilde{u}_{r,p}^A(r) \quad (III.5)$$

où $\beta_i, i=1,2$ sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites imposées sur les rayons $R_i, i=1,2$.

Comme l'anneau est libre de toutes contraintes extérieures en $R_i, i=1,2$, alors la contrainte radiale $\tilde{\sigma}_{rr}(R_i)$ doit y être nulle. En utilisant l'expression de la contrainte radiale $\tilde{\sigma}_{rr}$:

$$\tilde{\sigma}_{rr}(r) = \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \tilde{u}_r - (1 + \nu) \alpha \tilde{\theta}(r, \omega) \quad (III.6)$$

et en effectuant tous les calculs nécessaires, nous obtenons en $R_i, i=1,2$ le système de deux équations à deux inconnus $\beta_i, i=1,2$:

$$\begin{cases} \beta_1 J(R_i) + \beta_2 Y(R_i) = F_1(R_i) \\ \beta_1 J(R_2) + \beta_2 Y(R_2) = 0 \end{cases} \quad (III.7)$$

avec $J(r) = k_L J_0(k_L r) + \left(\frac{2\nu}{r} \right) J_1(k_L r) - k_L J_2(k_L r)$, $Y(r) = k_L Y_0(k_L r) + \left(\frac{2\nu}{r} \right) Y_1(k_L r) - k_L Y_2(k_L r)$,

$F_1(r) = 2(1 + \nu) \alpha T_0 f(\omega) - [\gamma^{Y_1} J(r) - \gamma^{J_1} Y(r)] H(r_0 - r)$.

La résolution du système (III.7) indique que ses solutions peuvent être exprimées par :

$$\beta_1 = -\frac{F_1(R_1)Y(R_2)}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)}$$

$$\beta_2 = \frac{F_1(R_1)J(R_2)}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)}.$$
(III.8)

Le problème thermoélastique des vibrations radiales d'un anneau soumis localement à une distribution uniforme de la température peut être résolu (dans le domaine de Fourier) de façon exact. La solution du champ de déplacement radial s'exprime alors sous la forme :

$$\tilde{u}_r(r) = \frac{F_1(R_1)[-Y(R_2)J_1(k_L r) + J(R_2)Y_1(k_L r)]}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)}$$

$$+ [\gamma^{Y_1}J_1(k_L r) - \gamma^{J_1}Y_1(k_L r)]H(R_{Th} - r).$$
(III.9)

Nous remarquons qu'en prenant R_1 fini et $R_2 \gg R_{Th}$ dans l'expression (III.9), il est possible d'étudier analytiquement les vibrations radiales générées dans une plaque contenant un trou traversant son épaisseur et subissant localement au centre à une brusque élévation thermique uniforme.

III.2.3. Disque plein soumis à une élévation uniforme de la température

Cette partie étend la résolution de l'équation de Bessel d'ordre 1 inhomogène (III.3) aux cas des disques pleins soumis localement au centre à une distribution thermique uniforme induite par hypothèse à une absorption de micro-ondes. Ce modèle sera utilisé par la suite non seulement pour analyser les ondes acoustiques générées dans son plan radial mais aussi pour construire une procédure inverse permettant d'estimer la taille de la zone thermique S_{Th} . L'estimation de cette zone facilitera une reproduction analytique proche de l'essai expérimental. Considérons le disque plein présenté sur la Figure III.5.

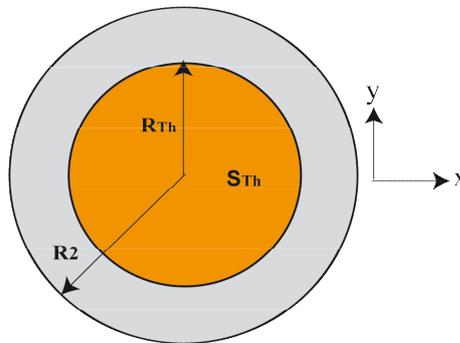


Figure III.5 : Disque soumis localement à une distribution uniforme de la température sur S_{Th} .

La symétrie de la distribution de température entraîne que le déplacement radial doit être nul au centre du disque. Ce résultat est dû au comportement asymptotique de la fonction de

Bessel $Y_1(k_L r)$ lorsque le rayon tend vers 0. Par suite, l'expression du champ de déplacement radial se déduit de celle de l'anneau (III.5) en choisissant la constante $\beta_2 = 0$. Donc, la solution générale du problème thermoélastique (III.2) dans le cas d'un disque plein est donnée par l'expression :

$$\tilde{u}_r(r) = \beta J_1(k_L r) + \tilde{u}_{r,p}^D(r) \quad (\text{III.10})$$

où $\tilde{u}_{r,p}^D$ est une solution particulière permettant de déterminer la constante réelle β en exploitant la condition aux limites du champ de contrainte radiale $\tilde{\sigma}_{rr}(r)$ en $r = R$.

Les calculs dont la plupart sont explicités en Annexe D indiquent qu'une solution particulière $\tilde{u}_{r,p}^D$ peut être exprimée sous la forme :

$$\tilde{u}_{r,p}^D(r) = [\gamma^Y J_1(k_L r) H(R_{Th} - r) + \gamma^J Y_1(k_L r) H(r - R_{Th})]. \quad (\text{III.11})$$

Dans le cas où le disque est libre de toute contrainte mécanique extérieure, la transformée de Fourier de la contrainte radiale $\tilde{\sigma}_{rr}(r)$ s'annule en $r = R$. En utilisant l'expression (III.6) de $\tilde{\sigma}_{rr}(r)$ et en effectuant tous les calculs nécessaires, nous obtenons finalement que l'expression de la constante β se met sous la forme :

$$\beta = -\gamma^J \frac{Y(R)}{J(R)}. \quad (\text{III.12})$$

Le problème thermoélastique des vibrations radiales d'un disque soumis localement au centre à une distribution uniforme de la température peut être résolu (dans le domaine de Fourier) de façon exact. La solution du champ de déplacement radial s'écrit :

$$\tilde{u}_r(r) = -\gamma^J \frac{Y(R)}{J(R)} J_1(k_L r) + [\gamma^Y J_1(k_L r) H(R_{Th} - r) + \gamma^J Y_1(k_L r) H(r - R_{Th})]. \quad (\text{III.13})$$

Par ailleurs, à titre indicatif, notons qu'en partant des expressions (III.9) et (III.13), il est possible de retrouver les solutions des modèles analytiques établis dans la référence [III.1] dans le cas d'une répartition totalement uniforme de la température sur la plaque. Une démonstration est donnée en Annexe E.

Synthèse : nous avons analytiquement résolu dans cette partie le problème des vibrations des disques et des anneaux circulaires minces, constitués d'un matériau viscoélastique isotrope et soumis localement au centre à une distribution thermique uniforme. Il a été démontré qu'en faisant différentes hypothèses, les solutions pouvaient être exprimées de façon exactes. Par suite, l'expression analytique du modèle du disque plein sera appliquée pour construire une méthode inverse permettant d'estimer la taille de la zone S_{Th} chauffée uniformément par les micro-ondes. Cette estimation facilitera la simulation analytique des résultats expérimentaux. De même, il a été montré que l'expression analytique du modèle de l'anneau peut être appliquée pour étudier la réponse acoustique générée dans une plaque trouée soumise à la même forme de température. Toutefois, ces modèles seront complétés par des modèles numériques afin non seulement de les valider mais aussi de les compléter et d'analyser leurs limites.

III.3. Modélisation numérique par éléments finis (EF)

Avant-propos : étant donné que les modèles analytiques peuvent ne pas modéliser efficacement le problème physique formulé, alors il est important de les compléter par des approches numériques par éléments finis. Ces dernières permettront de tenir compte de la variation possible de la température sur la zone S_{Th} , de l'influence de la structure tridimensionnelle des échantillons sur les vibrations des plaques et de considérer le cas des plaques composites ou des défauts à géométrie plus complexes. Notons qu'il serait difficile d'exhiber dans tous ces cas des solutions analytiques simples. La section III.3.1 décrira le modèle numérique bidimensionnel (modèle EF 2D) basé sur l'hypothèse d'un état plan de contraintes et en supposant que les épaisseurs des échantillons restent négligeables devant les longueurs d'ondes acoustiques. Son intérêt est d'abord de valider les modèles analytiques puis de les compléter et de les substituer dans le cas d'une répartition thermique quelconque ou d'une éventuelle utilisation de plaques anisotropes. La section III.3.2 présentera un autre modèle numérique basé sur l'hypothèse d'une répartition thermique axisymétrique centrée sur la plaque. Celui-ci permettra, contrairement au premier, d'analyser les effets tridimensionnels des échantillons sur la forme de la génération acoustique. La section III.3.3 analysera la validité et les limites des modèles analytiques en comparant ses résultats à ceux qui sont obtenus par les simulations numériques.

III.3.1. Formulation 2D pour les plaques en état plan de contraintes

Cette section présente le modèle bidimensionnel numérique par éléments finis (modèle EF 2D) qui est mis en place pour valider numériquement les modèles analytiques. Ce modèle résout numériquement par éléments finis le problème thermoélastique (III.1) indépendamment de la forme de la répartition spatiale de la source thermique appliquée au centre des échantillons. De plus, étant données les propriétés géométriques des échantillons testés ici (plaques circulaires) et la forme axisymétrique de l'excitation thermique, la résolution numérique est menée en n'effectuant le maillage (voir Figures III.6 et III.7) et les calculs numériques que sur un quart de l'échantillon.

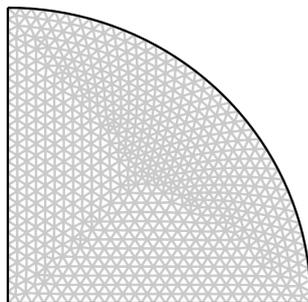


Figure III.6 : maillage triangulaire sur un quart du disque plein.

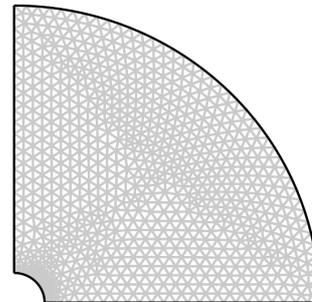


Figure III.7 : maillage triangulaire sur un quart de l'anneau.

Cette démarche permet de réduire le temps mis pour résoudre numériquement les équations de Navier. Néanmoins, elle implique de trouver les bonnes conditions aux limites à appliquer sur les plans $x=0$ et $y=0$ où les différents champs mécaniques doivent respecter des conditions de symétrie imposées par la nature physique de l'excitation et la structure géométrique circulaire des échantillons. Il est possible numériquement de les réaliser en imposant sur ces plans et via le module « plane stress » contenu dans la bibliothèque de COMSOL MULTIPHYSICS des conditions de types « symétrie plane ».

III.3.2. Formulation 3D dans le cas d'une répartition axisymétrique de la température

Le modèle numérique bidimensionnel par EF construit dans la section III.3.1 ne permettra pas, d'une part d'analyser l'influence des effets mécaniques induits dans l'épaisseur, et d'autre part de supposer une variation possible de la température dans cette direction. Il est donc important d'élaborer aussi un modèle numérique tridimensionnel afin de prendre en considération tous ces effets et ainsi se rapprocher au cas réel des vibrations des plaques testées dans la pratique. Considérons un disque ou un anneau circulaire de rayon extérieur R_2 , d'épaisseur e , soumis localement au centre à une répartition axisymétrique de la température (la température ne dépend pas de la coordonnée cylindrique θ). En supposant qu'une telle hypothèse est vérifiée, les déformations tridimensionnelles des disques ou des anneaux d'épaisseur non négligeables peuvent être simulées numériquement par éléments finis en utilisant un modèle axisymétrique 2D. Son intérêt est de faciliter numériquement les calculs des vibrations générées dans les échantillons de grandes dimensions en un temps très réduit. Par exemple, au lieu de faire les calculs numériques sur un maillage 3D (du disque ou de l'anneau) comportant un nombre important d'éléments, ces mêmes calculs numériques pourront être faits avec un nombre restreint d'éléments triangulaires représentés schématiquement sur les Figures III.8 et III.9.

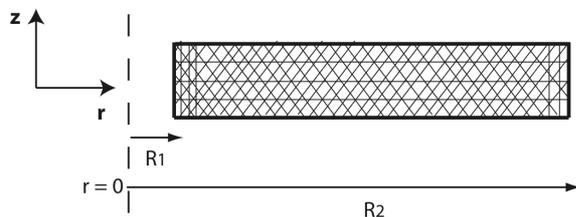


Figure III.8 : maillage de l'anneau (modèle 2D axisymétrique).

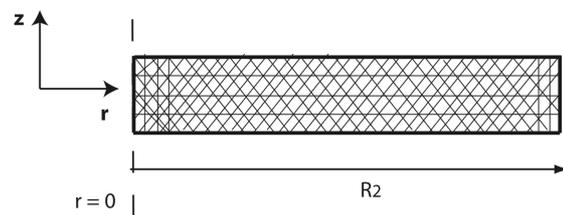


Figure III.9 : maillage du disque (modèle 2D axisymétrique).

E^* (GPa)	ν	ρ (kg · m ⁻³)	α (°C ⁻¹)	R_1 (mm)	R_2 (mm)
$3,75 + 0,2i$	0,40	1380	$8 \cdot 10^{-5}$	5	50

Tableau III. 1 : propriétés mécaniques et géométriques de l'échantillon.

III.3.3. Validation numérique des modèles analytiques

Considérons numériquement un échantillon circulaire (anneau ou disque) constitué d'un matériau viscoélastique isotrope, soumis localement sur une zone circulaire S_{Th} de rayon $R_{Th} = 23\text{mm}$ à une distribution uniforme de la température. Pour simplifier, l'excitation électromagnétique sera composée tout au long de ce Chapitre III d'une impulsion de micro-ondes. Sauf mention contraire, les autres données relatives aux propriétés mécaniques, thermiques et géométriques des échantillons sont supposées être égales à celles qui sont données sur le Tableau III.1 suivant :

Les simulations numériques ont été réalisées en discrétisant les échantillons par des éléments triangulaires. La discrétisation comporte dans le cas du modèle 2D axisymétrique de l'anneau, un nombre d'éléments égal à 942, soit un nombre de degrés de liberté égal à 6 706. Ce nombre a été suffisant pour obtenir une solution numérique convergente. Les Figures III.10 et III.11 montrent les comparaisons spectrales des accélérations radiales de l'anneau déterminées par les modèles analytiques et numériques (par éléments finis).

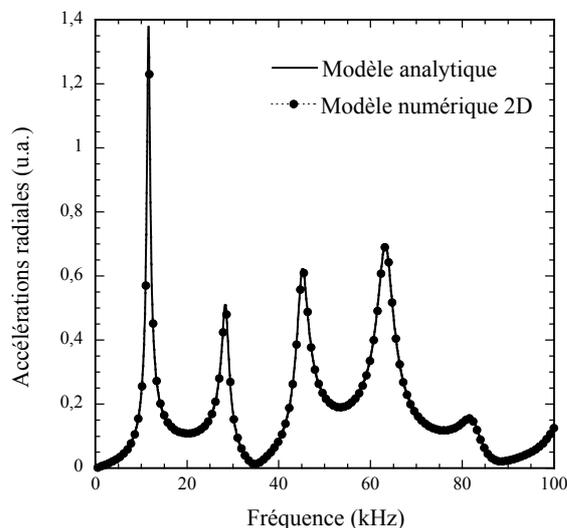


Figure III.10 : comparaison des spectres des vibrations radiales calculées à l'extrémité de l'anneau.

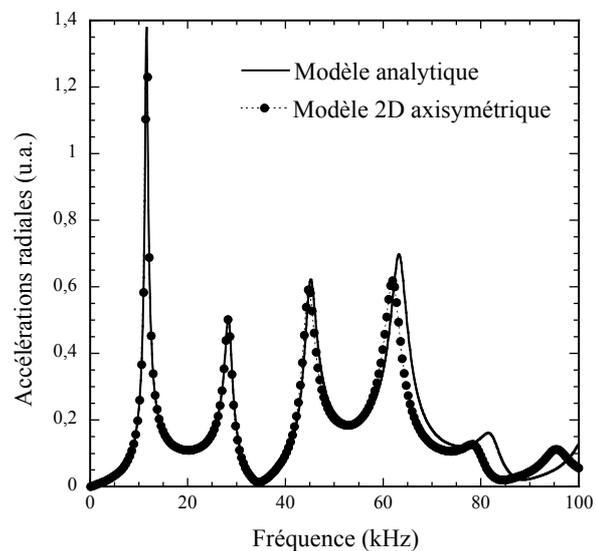


Figure III.11 : comparaison des spectres des vibrations radiales calculées à l'extrémité d'un anneau d'épaisseur 5 mm.

Les Figures III.12 et III.13 illustrent la même chose dans le cas d'un disque plein. Les spectres numériques sont calculés à l'extrémité R_2 des échantillons et sur les 250 points discrétisant la gamme de fréquences inférieure à 100 kHz. Nous observons que les résultats des deux modèles analytiques concordent bien avec ceux du modèle numérique 2D construit sous les hypothèses d'un état plan de contraintes. De même, nous constatons qu'en dessous de la fréquence de 60 kHz environ, les spectres des accélérations radiales prédits par le modèle théorique coïncident avec ceux du modèle numérique 2D axisymétrique (donc 3D). Par contre, au-delà de cette fréquence, des variations apparaissent. Celles-ci sont en partie liées aux effets dispersifs induits par la structure 3D des échantillons qui font baisser les fréquences de résonances des modes situés dans cette gamme de fréquences.

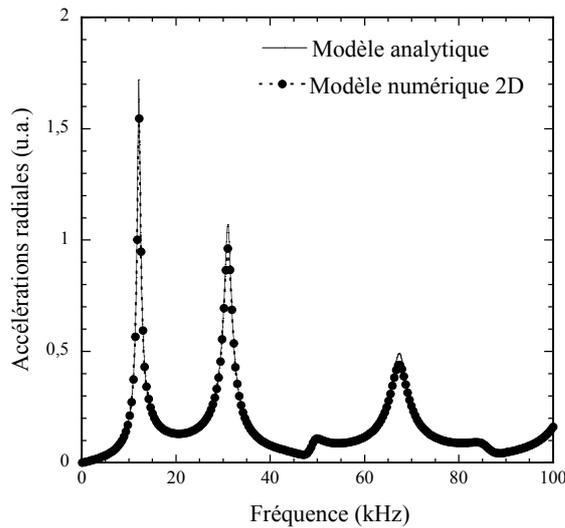


Figure III.12 : comparaison des spectres des vibrations radiales calculées à l'extrémité du disque.

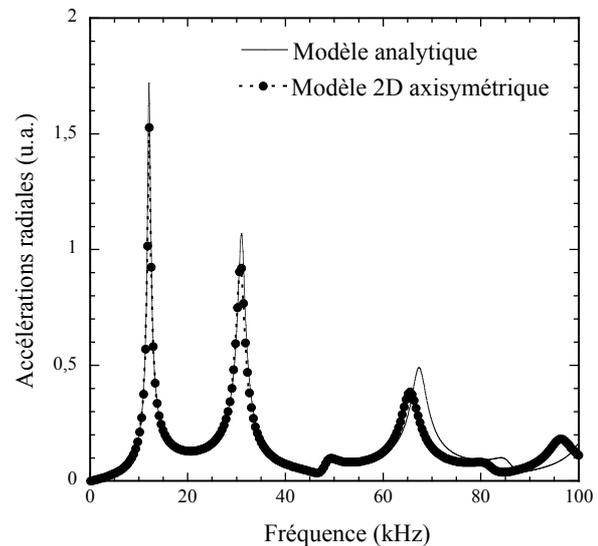


Figure III.13 : comparaison des spectres des vibrations radiales calculées à l'extrémité d'un disque d'épaisseur 5 mm.

La validation numérique en basses fréquences des modèles analytiques étant faite dans le cas d'une élévation thermique uniforme, ils peuvent donc être utilisés par la suite pour étudier la génération acoustique. Toutefois, pour simplifier, nous nous intéresserons d'abord à celle d'un défaut circulaire traversant l'épaisseur d'une plaque et subissant localement une élévation thermique brusque et uniforme. Ce phénomène a déjà été rapidement mis en évidence dans la référence [III.9] dans le cas où la répartition de la température était uniforme sur tout le volume de la plaque. Évidemment, il est fort probable qu'une telle hypothèse ne soit pas vérifiée dans la pratique. En effet, lorsqu'une plaque est irradiée localement par une source de micro-ondes suivant la configuration illustrée sur la Figure III.3, nous pouvons *a fortiori* penser que l'hypothèse d'une élévation thermique uniforme sur tout le volume de l'échantillon ne soit pas vérifiée. Par contre, il est possible d'imaginer, dans un premier temps pour simplifier, une zone S_{Th} plus ou moins importante subissant *a priori* l'échauffement thermique. Comme la forme de cette zone peut modifier la forme et l'amplitude des ondes acoustiques générées dans la plaque, alors deux méthodes acoustiques seront proposées pour caractériser la forme de la distribution spatiale de la température sur dans les plaques.

Synthèse : différentes méthodes numériques par éléments finis ont été mises en place pour simuler les vibrations de plaques circulaires soumises au centre à une brusque élévation thermique. Un modèle numérique 2D construit sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes a été présenté. Un autre a été élaboré afin de tenir compte des effets tridimensionnels des échantillons. Même si les modèles analytiques ont été numériquement validés dans le cas d'un état plan de contraintes, les résultats du modèle EF axisymétrique ont souligné certaines limites des modèles analytiques qu'il faudra tenir compte dans la suite de l'analyse.

III.4. Caractérisation de la répartition spatiale de la température

Avant-propos : généralement, si une structures diélectrique subit une irradiation de micro-ondes, plusieurs méthodes être utilisées pour estimer la forme de l'élévation thermique. La première méthode la plus directe consiste à utiliser par exemple une caméra infrarouge. Mais une telle approche serait infructueuse étant donnée l'élévation très faible de la température (environ 10^{-5} °C). La deuxième consiste à résoudre analytiquement en coordonnées cylindriques ou numériquement par éléments finis les équations couplées de Maxwell et de la chaleur, puis en déduire ensuite la taille et la forme de cette zone. Cette stratégie serait difficile à mettre en œuvre du fait que l'irradiation des micro-ondes sur les plaques est réalisée en dehors des guides d'ondes électromagnétiques. Mais étant donné que les vibrations radiales d'un disque dépendent de la taille de la zone chauffée, il sera aisé du point de vue acoustique d'exploiter le spectre de ces vibrations afin d'estimer la taille de la zone thermique S_{Th} . Ainsi, dans la section III.4.1, nous développerons une méthode analytique inverse permettant d'estimer la taille de S_{Th} subissant localement l'échauffement uniforme tandis que la section III.4.2 présentera une autre approche numérique inverse dans le cas où l'élévation de température serait non uniforme et de forme gaussienne.

III.4.1. Cas d'une élévation uniforme de la température

Considérons un disque de rayon R_2 et de propriétés mécaniques et thermiques identiques à celles données sur le Tableau III.1. Ce disque est soumis sur la zone thermique S_{Th} (cf. Figure III.5) à une brusque distribution uniforme de la température provoquée par l'absorption d'une impulsion de micro-ondes. La Figure III.14 montre les spectres des accélérations radiales normalisées et déterminées sur le rayon extérieur par le modèle analytique (III.13). Les simulations analytiques ont été faites en utilisant différentes valeurs du rayon thermique R_{Th} . Les résultats montrent que le rayon thermique agit sur la forme des spectres obtenus. Ce résultat est intéressant puisqu'il suggère que la taille de la zone chauffée peut être estimée en cherchant par exemple le vecteur p minimisant la fonctionnelle $J_1(p_1)$ définie par :

$$J_1(p_1) = \frac{1}{N} \sum_f \left\| \tilde{a}_r^{Exp}(f) - \tilde{a}_r^{Th}(p_1, f) \right\| \quad (III.14)$$

où p_1 est le vecteur des paramètres qui peuvent influencer le spectre, N le nombre de fréquences expérimentales f , $|\tilde{a}_r^{Exp}(f)|$ et $|\tilde{a}_r^{Th}(p_1, f)|$ sont respectivement les valeurs absolues des transformées de Fourier des accélérations radiales expérimentale et théorique.

Le calcul théorique du spectre de l'accélération radiale peut être déduit de celui du déplacement radial en utilisant la relation :

$$\tilde{a}_r^{Th} = -\omega^2 \tilde{u}_r^D. \quad (III.15)$$

Généralement sauf mention contraire, le vecteur des paramètres p_1 sera formé par le module d'Young E^* , le coefficient de Poisson ν et le rayon thermique R_{Th} : $p_1 = (E^*, \nu, R_{Th})$.

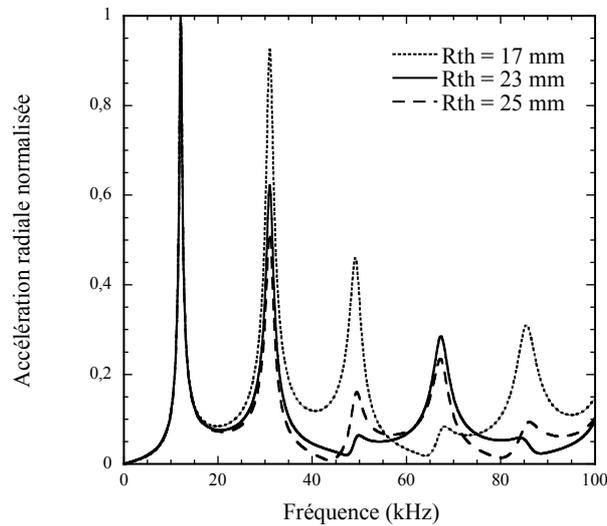


Figure III.14 : effets de la taille de la zone thermique sur le spectre de l'accélération radiale normalisée et calculée analytiquement à l'extrémité du disque.

III.4.2. Cas d'une élévation non uniforme de la température

Dans cette partie, l'hypothèse de non uniformité de l'élévation thermique sur la plaque implique l'utilisation d'une approche numérique par éléments finis pour estimer la forme de la répartition spatiale de la température sur l'échantillon. Pour simplifier l'étude, nous n'allons traiter que le cas où la variation thermique sur la plaque prend, dans la direction radiale, la forme gaussienne donnée par l'expression :

$$T_{gauss}(r) = e^{-0,5(r/\xi)^2} \quad (\text{III.16})$$

et dont une illustration est montrée sur la Figure III.15. La nature physique de l'absorption de micro-ondes mène à penser que cette dernière forme est plus proche de la réalité expérimentale que celle d'une répartition uniforme.

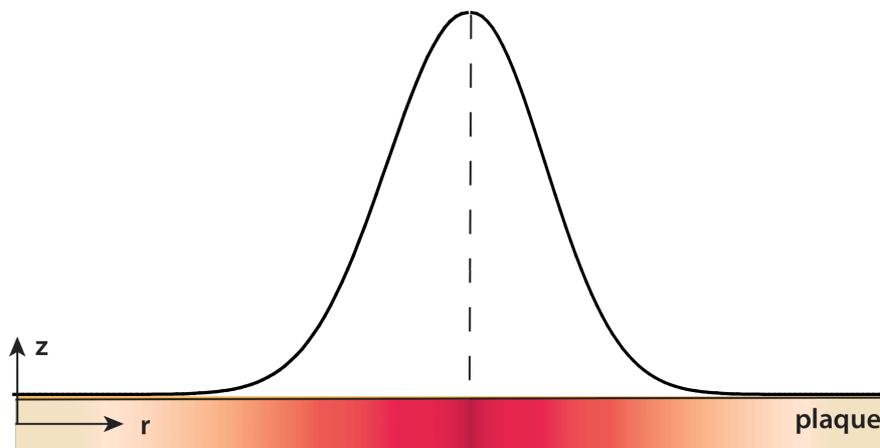


Figure III.15 : schéma représentatif du disque soumis à une température gaussienne.

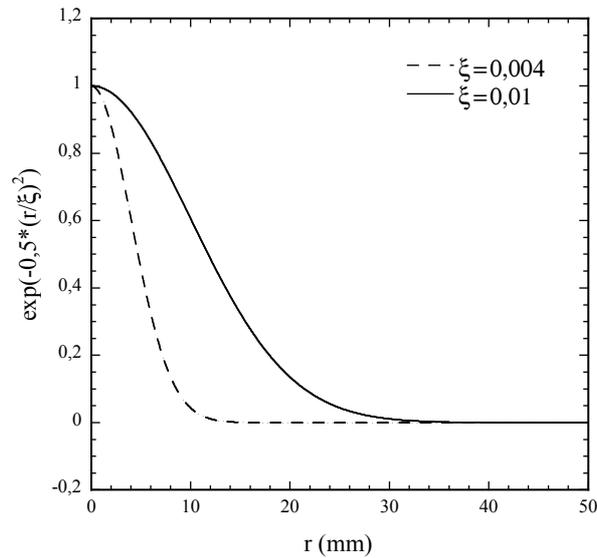


Figure III.16 : effets du paramètre ξ sur la zone de répartition de la température sur le disque.

Par ailleurs, les deux répartitions illustrées sur la Figure III.16 montrent que le paramètre ξ permettra de contrôler la forme de la distribution spatiale de la température sur les échantillons.

Le problème thermoélastique associé à cette nouvelle distribution non uniforme de la température est étudié en utilisant les modèles numériques par éléments finis décrits dans la section III.3. Évidemment, pour estimer la taille de S_{Tn} , il serait coûteux en temps de calcul numérique d'appliquer la méthode inverse (III.14) sur tous les points discrétisant la gamme de fréquences. Pour contourner ce problème, comme cela est indiqué sur la Figure III.17, il suffira d'analyser l'influence de ξ sur les amplitudes maximales R_{pi} , $i=2,3$ des pics secondaires présents sur le spectre des vibrations radiales (voir Figure III.14). Les résultats de la Figure III.17 ont été obtenus en considérant numériquement un disque de rayon 50 mm fait d'un matériau dont les propriétés mécaniques et thermiques sont identiques à celles du Tableau III.1.

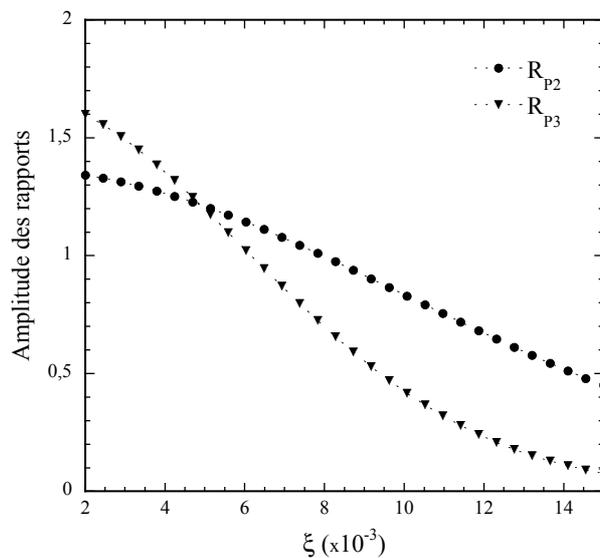


Figure III.17 : évolution des rapports R_{pi}^{Num} en fonction du paramètre ξ .

Ils montrent que les rapports $R_{pi}, i = 2,3$ dépendent du paramètre ξ et donc de la forme de la répartition gaussienne de la température sur la plaque. Celle-ci peut donc être caractérisée en cherchant le vecteur p_2 qui minimise la fonctionnelle $J_2(p_2)$:

$$J_2(p_2) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=2}^M \left\| |R_{pi}^{Exp}(f_i)| - |R_{pi}^{Num}(p_2, f_i)| \right\| \quad (\text{III.17})$$

où $p_2 = (E^*, \nu, \xi)$, M le nombre de pics expérimentaux considérés, $|R_{pi}^{Exp}(f_i)|$ et $|R_{pi}^{Num}(p_2, f_i)|$ sont les valeurs maximales des amplitudes des différents pics présents sur le spectre des vibrations radiales normalisées (par rapport au premier pic) et obtenues respectivement par l'expérience et par le modèle numérique (voir Figure III.14).

Synthèse : l'étude analytique de l'influence de la taille de la zone thermique sur le spectre des vibrations radiales d'un disque fini a permis d'élaborer plusieurs méthodes acoustiques inverses favorisant la caractérisation de la forme de la répartition de la température sur la plaque. Cette caractérisation facilitera par la suite d'élaborer une méthode de CND des plaques viscoélastiques en se basant sur des distributions thermiques plus réalistes permettant de reproduire les champs acoustiques mesurés dans la pratique.

III.5. Étude de la génération acoustique du trou

Avant-propos : nous allons examiner dans cette partie la génération acoustique d'un défaut circulaire traversant l'épaisseur des plaques viscoélastiques soumises aux deux formes de flux thermiques (localement uniforme sur S_{Th} et gaussienne). Pour cela, la section III.5.1 mettra d'abord en évidence, dans le cas d'une répartition localement uniforme de la température, deux ondes acoustiques générées respectivement par la discontinuité brusque et « artificielle » de la température et par le défaut circulaire. Puis, les effets de cette discontinuité sur les déformations radiales déterminées analytiquement au niveau du défaut seront isolés afin d'analyser seulement les réponses acoustiques liées directement à la présence du défaut. Une relation directe (semblable à celle qui est présente dans [III.9]) reliant une des caractéristiques du spectre de la vitesse radiale aux dimensions du défaut sera mise en évidence. Celle-ci sera ensuite confrontée au cas où l'échauffement brusque au voisinage du défaut serait non uniforme en supposant une distribution gaussienne de la température. Les résultats numériques obtenus avec le modèle EF 2D indiqueront des variations. Celles-ci souligneront d'une part l'impact des effets du gradient thermique sur la génération acoustique par micro-ondes et d'autre part que l'hypothèse d'uniformité de la température ne peut pas être utilisée pour construire la méthode de CND. C'est pour cela que la section III.5.2 étendra l'étude de cette relation dans le cas des plaques tridimensionnelles soumises à la forme gaussienne de la température. L'objectif sera d'exploiter les vibrations engendrées dans l'épaisseur de ces plaques afin de chercher une relation plus générale liant les caractéristiques du spectre des vibrations dans l'épaisseur aux dimensions du défaut.

III.5.1. Cas d'une plaque très mince soumise localement au centre à une élévation uniforme de la température

Cette partie tente d'abord d'appliquer les modèles analytiques pour étudier les vibrations radiales générées dans les plaques viscoélastiques isotropes minces et circulaires ($R_{Th} \ll R_2$), soumises localement au centre à une élévation uniforme de la température. Pour simplifier, les valeurs du rayon de la zone thermique et du rayon extérieur de la plaque sont respectivement égales à 30 mm et à 200 mm. La Figure III.18 compare les évolutions temporelles des vitesses radiales calculées analytiquement et numériquement sur la circonférence d'un trou de 2 mm de rayon traversant l'épaisseur de la plaque. La réponse temporelle de la vitesse radiale prédite par le modèle analytique est obtenue en faisant une transformée de Fourier inverse du spectre calculé à l'aide de la relation (III.9). Par contre, celle du modèle EF 2D a été obtenue en introduisant dans la simulation numérique une viscosité de type Rayleigh définie par les deux coefficients α_R et β_R vérifiant la relation :

$$[C] = \alpha_R [M] + \beta_R [K] \quad (\text{III.18})$$

où $[C]$, $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de viscosité, de masse et de raideur du système mécanique. Le lecteur se rapportera aux références [III.10]-[III.13] pour avoir plus de détails sur la description de cette méthode.

Pour déterminer les coefficients de Rayleigh qui modélisent bien la viscosité de la plaque, il a été nécessaire de chercher le couple (α_R, β_R) permettant d'obtenir des résultats numériques proches de ceux du modèle analytique. Les simulations numériques réalisées montrent que le couple $\alpha_R = 4,2 \cdot 10^4 s^{-1}$ et $\beta_R = 10,5 \cdot 10^{-9} s$ convient. La bonne concordance des résultats implique que ce couple peut être utilisé dans les futures simulations numériques afin de modéliser l'effet de la viscosité sur l'atténuation des champs acoustiques.

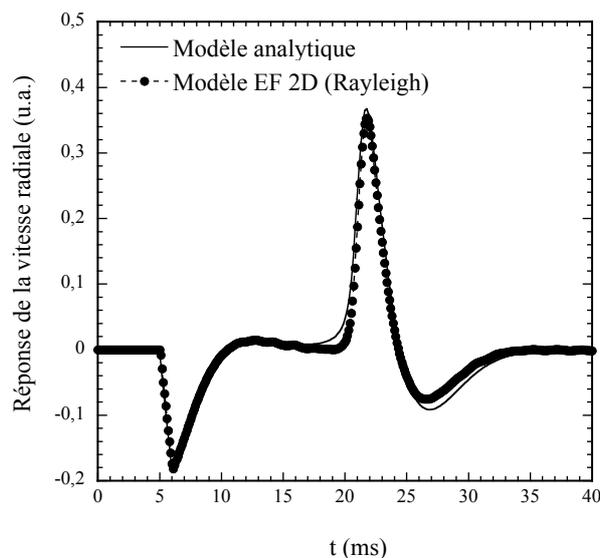


Figure III.18 : comparaison des évolutions temporelles des vitesses radiales calculées analytiquement et numériquement par éléments finis (modèle EF 2D). Ce dernier utilise une viscosité de type Rayleigh afin de tenir compte de la viscoélasticité du matériau constituant la plaque trouée.

La réponse acoustique radiale de la plaque prédite par le modèle analytique est ensuite analysée en comparant sur la Figure III.19 la vitesse radiale de la plaque trouée (le rayon du trou est égal à 2 mm) à celle d'une plaque saine. Les réponses temporelles des vitesses radiales obtenues avec les deux échantillons montrent que la plaque trouée présente deux signaux S_1 et S_2 alors que celle de la plaque saine ne comporte que le signal S_2 . Donc, la réponse acoustique S_1 est celle qui est liée aux mouvements d'ouverture et de fermeture du trou lorsqu'il est soumis localement à une brusque dilatation thermique uniforme. Par contre, le deuxième signal S_2 est généré par la discontinuité « artificielle » de la température. Cette hypothèse est validée par les résultats de la Figure III.20. Ces derniers indiquent que le temps d'arrivée de la réponse acoustique S_2 sur le point de calcul diminue lorsque la taille de la zone de discontinuité thermique diminue. Notons aussi sur la Figure III.19 que l'amplitude « crête à crête » du signal S_2 est plus important dans le cas de la plaque trouée que dans le cas de la plaque saine. Ce résultat s'explique par la superposition au niveau du trou de l'onde incidente générée par la discontinuité de la température arrivant sur le trou et celle qui s'y réfléchit.

Les Figures III.21 et III.22 comparent respectivement les réponses temporelles et spectrales des vitesses radiales calculées analytiquement sur deux défauts circulaires de 0,5 mm et 2 mm de rayon. Les résultats soulignent que la réponse temporelle S_1 dépend des dimensions du trou et que son spectre contient plusieurs pics. L'identification de la réponse acoustique S_2 liée à la discontinuité « artificielle » de la température a permis par la suite de la filtrer afin de supprimer ses effets (voir Figure III.23). Pour cela, nous avons augmenté la taille de la zone chauffée en prenant un rayon thermique de 100 mm de rayon.

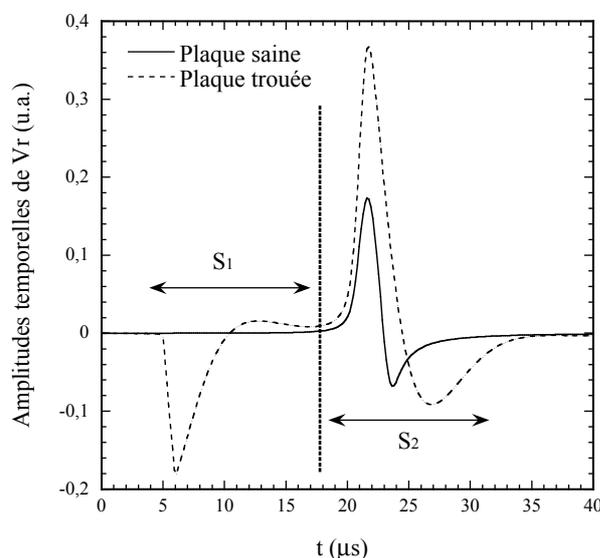


Figure III.19 : comparaison des amplitudes temporelles des vitesses radiales calculées analytiquement à 2 mm du centre de la zone thermique uniforme d'une plaque saine et sur un trou de 2 mm de rayon centrée sur la même zone thermique et traversant la même plaque.

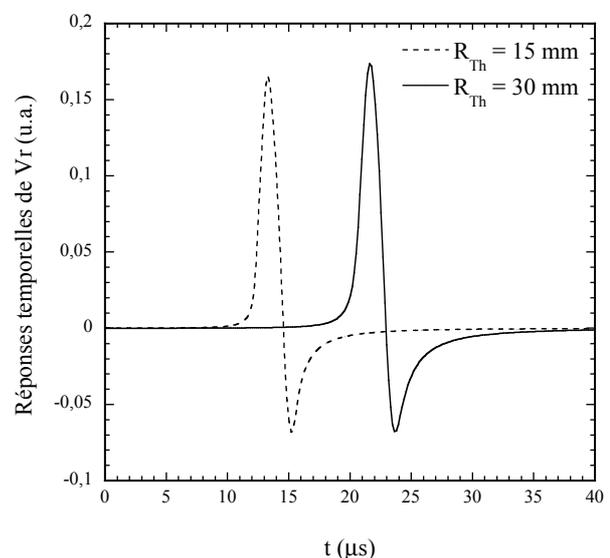


Figure III.20 : effets de la taille de la zone de discontinuité de la température uniforme sur les réponses temporelles des vitesses radiales calculées analytiquement à 2 mm du centre des zones thermiques uniformes de deux plaques saines.

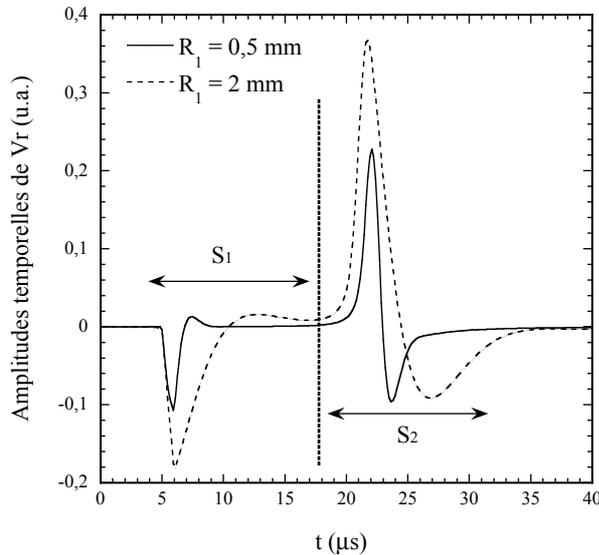


Figure III.21 : comparaison des amplitudes temporelles des vitesses radiales calculées analytiquement dans le cas de deux trous de rayons différents.

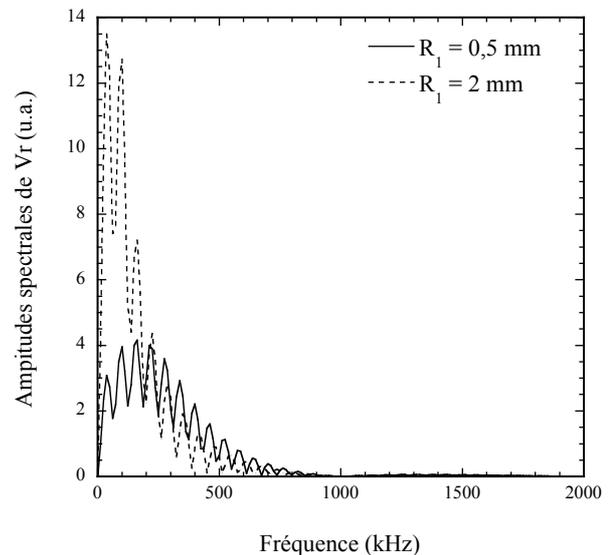


Figure III.22 : comparaison des amplitudes spectrales des vitesses radiales calculées analytiquement dans le cas de deux trous de rayons différents.

Cette valeur a été adoptée afin de bien dissocier les deux réponses acoustique S_1 et S_2 (voir Figure III.23). Les résultats de la Figure III.24 montrent que les pics présents sur la Figure III.22 étaient dus à la réponse S_2 . Donc, ils ne peuvent pas être pris en compte dans l'élaboration de la méthode de CND. De cette façon, l'étude de la méthode de CND est faite en analysant l'influence des dimensions du trou sur la fréquence principale du spectre analytique de la vitesse radiale sans le signal S_2 (voir Figure III.24).

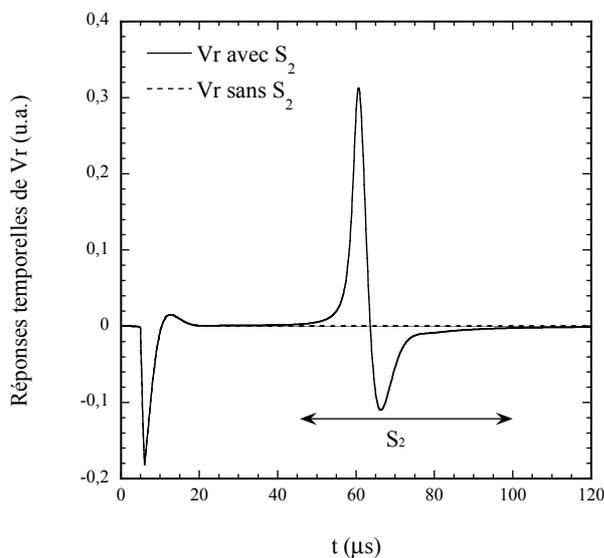


Figure III.23 : réponses temporelles des vitesses radiales avec ou sans S_2 calculées analytiquement pour un rayon thermique R_{Th} égal à 100 mm.

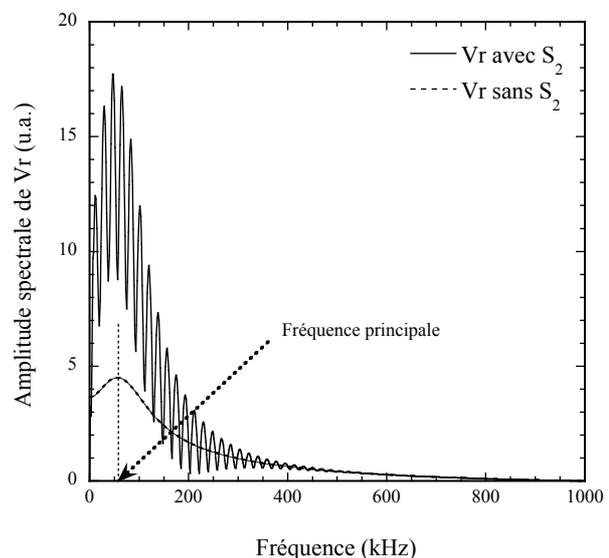


Figure III.24 : effets du filtrage de la réponse S_2 sur le spectre de la vitesse radiale calculée par le modèle analytique.

La Figure III.25 représente l'évolution de cette fréquence principale par rapport aux dimensions du trou.

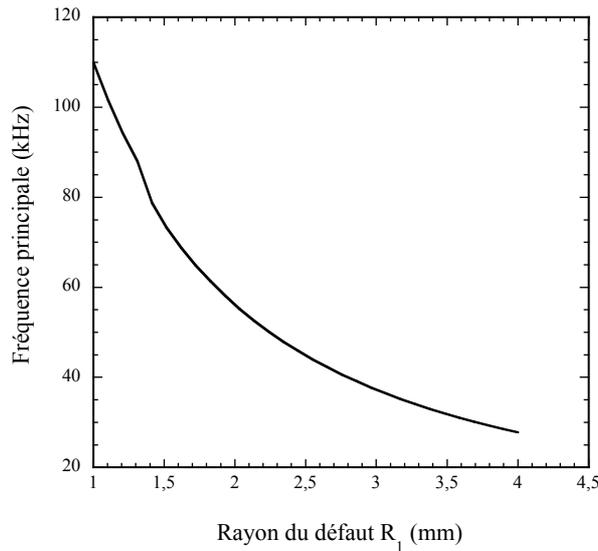


Figure III.25 : évolution de la fréquence principale du spectre de la vitesse radiale calculée analytiquement sur la circonférence du défaut en fonction des dimensions de ce dernier.

Les calculs analytiques basés sur l'hypothèse d'une distribution thermique centrée sur la plaque trouée et localement uniforme montrent l'existence d'une relation directe entre la taille du trou (défaut) circulaire et la valeur de la fréquence principale. Plus le défaut circulaire est petit, plus cette fréquence est élevée. En d'autres termes, plus le défaut est de petite taille, plus ses vibrations induites par la brusque élévation thermique sont brèves.

Nous constatons que cette relation analytique directe entre la taille du défaut et la fréquence principale est similaire à celle donnée dans la référence [III.9]. Dans la suite, nous allons tenter de pousser l'étude un peu plus loin en analysant si elle conviendrait à l'élaboration de la méthode de CND. Pour cela, elle sera comparée à celle qui serait obtenue en supposant deux choses : une répartition gaussienne de la température et une prise en compte des effets tridimensionnels des plaques. Ces hypothèses permettent d'une part d'étudier l'impact d'un gradient thermique sur la zone chauffée par les micro-ondes et d'autre part de se rapprocher à un cas plus réaliste. L'objectif est d'analyser si ces deux hypothèses influencent l'allure de la courbe donnée sur la Figure III.25.

Les Figures III.26 et III.27 représentent l'influence des distributions spatiales de la température sur les amplitudes temporelles et spectrales de la vitesse radiale générée sur un trou de 1 mm de rayon traversant une plaque viscoélastique isotrope supposée être en état plan de contraintes. Les réponses correspondant aux formes uniforme et gaussienne ($\xi=0,0122$) de la température sont calculées sur la circonférence du trou en utilisant respectivement les modèles analytique (III.9) et numérique 2D. Les allures des réponses temporelles indiquent que lorsque le trou subit une brusque élévation de température répartie de façon gaussienne (voir Figure III.15), le trou vibre plus longtemps que lors d'une élévation localement uniforme.

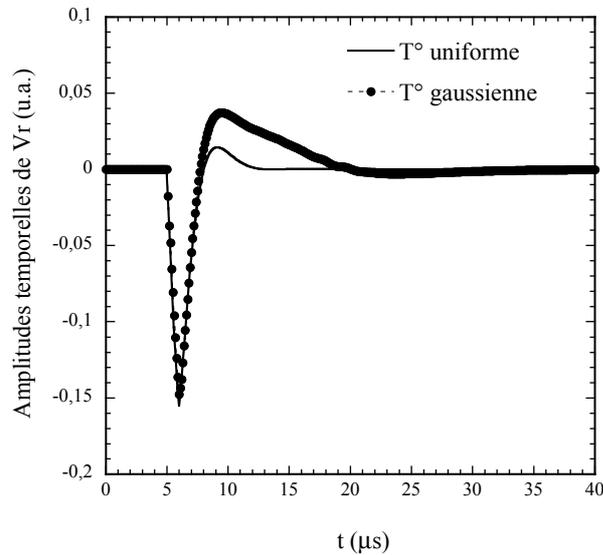


Figure III.26 : effets de la forme de la répartition de la température sur la réponse acoustique radiale générée sur un trou de 1 mm de rayon traversant une plaque viscoélastique isotrope supposée être en état plan de contraintes.

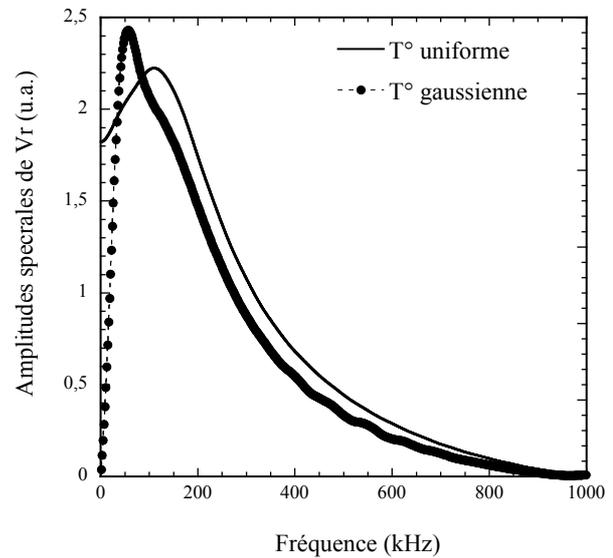


Figure III.27 : effets de la forme de la répartition de la température sur la fréquence principale du spectre de la réponse acoustique radiale générée sur le trou de 1 mm de rayon traversant une plaque viscoélastique isotrope supposée être en état plan de contraintes.

Ce résultat s'explique par le fait que la forme gaussienne entraîne localement au voisinage du trou un gradient de température faisant vibrer localement la matière de proche en proche. Ses effets sont perceptibles sur le spectre de la réponse acoustique radiale générée sur le trou. La comparaison faite sur la Figure III.27 des deux spectres révèle que le gradient de la température modifie aussi les fréquences principales (fréquences des pics) des spectres des vitesses radiales calculées sur le trou. Ceci implique que la courbe de la Figure III.25 dépendra du gradient thermique induit au voisinage du trou. Les résultats de la Figure III.28 viennent valider cette hypothèse.

De ce fait, l'hypothèse d'uniformité (local ou non) de la température n'est pas adaptée à l'élaboration de la méthode de CND des plaques trouées et irradiées par des micro-ondes. La raison est que, pour construire cette méthode en se basant sur la relation directe entre la fréquence principale à la taille du trou, il est fondamental de tenir compte des effets possible de la variation thermique dans la direction radiale de l'échantillon. C'est pour cela que dans la suite du développement, nous n'allons traiter numériquement par éléments finis que les cas où la répartition thermique est centrée puis distribuée de façon gaussienne sur la plaque trouée. Les déformations des plaques seront analysées dans la direction e_z . Ce choix est justifié par le fait que dans la pratique, il sera en général plus facile de mesurer avec le dispositif expérimental décrit dans la section II.1.2 les vibrations générées dans l'épaisseur des plaques que dans la direction radiale.

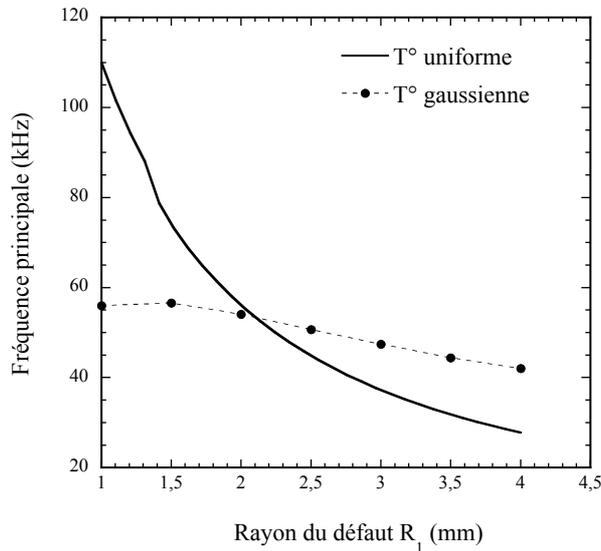


Figure III.28 : effets de la forme de la température sur la courbe d'évolution de la fréquence principale en fonction des dimensions du trou.

Synthèse : le modèle analytique (III.9) a mis en évidence une relation directe liant la taille d'un défaut circulaire (traversant l'épaisseur d'une plaque viscoélastique isotrope soumise au centre du défaut à une température localement uniforme) à la fréquence principale du spectre de la réponse acoustique radiale générée sur le défaut. Cette relation semblait initialement être un moyen non invasive de dimensionnement de ces types de défauts. Mais l'étude numérique réalisée avec une forme gaussienne a indiqué qu'elle ne pouvait pas être appliquée dans la pratique en raison du gradient thermique qui *a fortiori* peut être engendré par l'absorption de micro-ondes. Il reste maintenant à analyser la possibilité de trouver une relation similaire, plus ou moins générale, incluant à la fois le gradient de température et les effets tridimensionnels (3D) des plaques.

III.5.2. Spectre des vibrations générées sur le trou dans le cas d'une plaque 3D soumise à une température gaussienne

Nous avons vu dans la section III.5.2 précédente que le modèle EF 2D des plaques trouées au centre, en état plan de contraintes, et soumises au centre à une température gaussienne prédit en dessous de 60 kHz environ une relation directe liant les dimensions du défaut et la fréquence principale du spectre de la réponse acoustique radiale générée sur le trou (voir Figure III.28). Dans la suite, nous allons étendre cette relation à un cas plus général tenant compte des effets tridimensionnels afin d'analyser si elle peut être influencée par les effets dans l'épaisseur des plaques. Les ondes acoustiques générées dans les plaques tridimensionnelles saines ou trouées sont simulées numériquement en utilisant le modèle EF axisymétrique 2D. Dans un premier temps, les résultats obtenus par ce modèle EF sont confrontés à ceux du modèle EF 2D en considérant une plaque tridimensionnelle

viscoélastique isotrope circulaire de rayon extérieur égal à 200 mm et d'épaisseur 0,5 mm. Elle est percée au centre et à travers l'épaisseur d'un trou circulaire de 1 mm de rayon modélisant un éventuel défaut. Le rayon de 200 mm a été choisi afin d'éviter la prise en compte, pendant la durée de la simulation numérique, de l'influence des ondes acoustiques réfléchies sur les bords et qui viendraient par la suite perturber localement le champ acoustique sur le point de calcul. Par contre, son épaisseur n'a été adoptée que pour valider l'hypothèse de l'état plan de contraintes adoptée dans le modèle EF 2D. En outre, la viscosité de la plaque 3D est prise en compte en introduisant dans le modèle EF axisymétrique la viscosité de type Rayleigh définie par les coefficients $\alpha_R = 4,2 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ et $\beta_R = 10,5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ obtenus dans la section III.5.1.2.

Les Figures III.29 et III.30 montrent les résultats des simulations numériques réalisées avec le même pas de temps égal à $0,08 \mu\text{s}$. En analysant les réponses temporelles illustrées sur la Figure III.29, nous constatons que la vitesse radiale V_r déterminée par le modèle EF axisymétrique sur la circonférence du trou est proche de celle du modèle EF 2D et qui est illustrée sur la Figure III.26. Ce résultat valide le modèle EF axisymétrique ainsi construit. Toutefois, il apparaît sur la vitesse V_z des petites oscillations qui sont dues vraisemblablement à la génération puis à la propagation d'ondes acoustiques dans l'épaisseur de la plaque. Il est donc envisageable que ces effets deviennent de plus en plus important au fur et à mesure que l'épaisseur de la plaque augmente.

La validation du modèle EF axisymétrique permet de comparer par la suite ses résultats avec ceux du modèle numérique 2D. La Figure III.31 montre la comparaison de la relation liant les dimensions du trou à la fréquence principale de la réponse acoustique radiale générée sur le trou. Cette dernière correspond dans chaque cas à la fréquence du premier pic présent sur les spectres. Les courbes soulignent une bonne concordance entre les résultats numériques obtenus par les deux modèles. Toutefois, notons la présence d'une légère variation lorsque les trous circulaires ont des rayons inférieurs à 2 mm. Les résultats de la Figure III.32 indiquent que les effets dans l'épaisseur de la plaque peuvent être à l'origine de cette variation. Nous constatons aussi sur la Figure III.32 qu'il est intéressant d'analyser dans la direction e_z la réponse acoustique générée sur le trou que dans la direction radiale e_r . La raison est que la courbe de la vitesse radiale V_r calculée sur le trou montre qu'en dessous du rayon de 2 mm environ, il est possible de trouver deux défauts circulaires de rayons différents et donnant la même fréquence principale.

De ce fait, dans la suite, l'étude ne portera que sur la réponse acoustique générée sur le trou généré trou et qui se propage ensuite dans l'épaisseur de la plaque. Rappelons qu'étant donnée la nature physique de l'absorption de micro-ondes dans la plaque, cette forme de température est plus proche de la réalité expérimentale que celle d'une distribution locale et uniforme. De plus, pour se rapprocher encore plus de la pratique, nous allons amplifier les effets 3D des plaques en augmentant la valeur de l'épaisseur à 5 mm. Le modèle EF axisymétrique 2D ainsi validé sera appliqué pour analyser le comportement des ondes acoustiques qui se propagent dans l'épaisseur des plaques viscoélastiques isotropes testés.

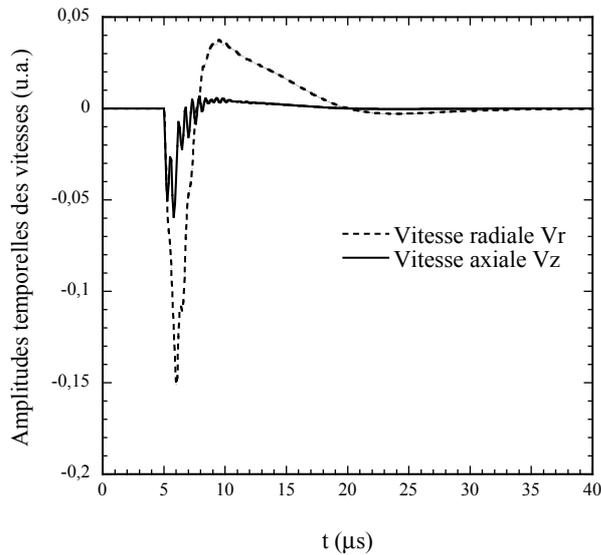


Figure III.29 : amplitudes temporelles des vitesses déterminées par le modèle EF axisymétrique sur la circonférence d'un trou circulaire de rayon 1 mm traversant la plaque 3D d'épaisseur 0,5 mm soumise à la température gaussienne ($\xi = 0,0122$).

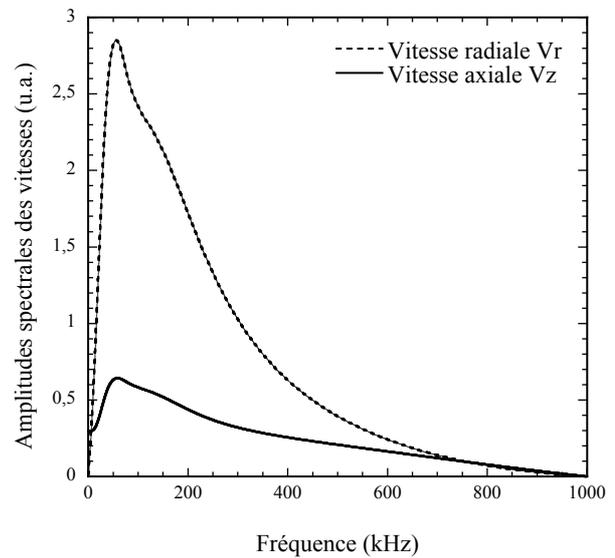


Figure III.30 : amplitudes spectrales des vitesses déterminées par le modèle EF axisymétrique sur la circonférence d'un trou circulaire de rayon 1 mm traversant une plaque 3D d'épaisseur 0,5 mm soumise à une température gaussienne ($\xi = 0,0122$).

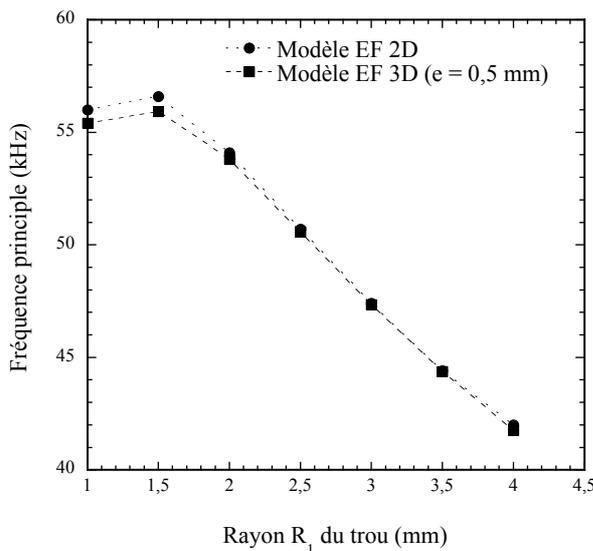


Figure III.31 : comparaison des relations liant les dimensions du trou à la fréquence principale des spectres des vitesses radiales prédites respectivement par le modèle numérique 2D et le modèle EF axisymétrique et calculées sur la circonférence du trou traversant deux plaques (très mince et d'épaisseur 0,5 mm) soumises à la température gaussienne ($\xi = 0,0122$).

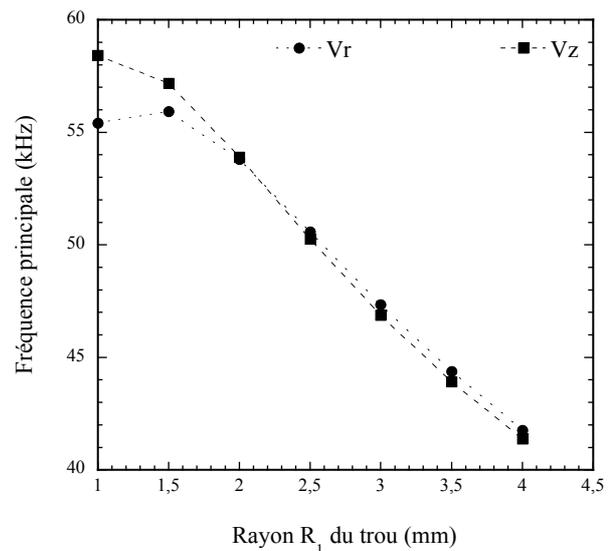


Figure III.32 : effets du rayon du trou (défaut circulaire) sur les fréquences principales des spectres des vitesses déterminées (sur la circonférence du trou circulaire traversant une plaque d'épaisseur 0,5 mm soumise à la température gaussienne ($\xi = 0,0122$)) par le modèle EF axisymétrique.

Les Figures III.33 et III.34 montrent respectivement les amplitudes temporelles et spectrales des vitesses V_z calculées numériquement par EF sur deux plaques circulaires. Les deux réponses sont déterminées à 2 mm du centre des deux plaques, donc directement au niveau de la circonférence du trou dans le cas de la plaque trouée. La comparaison des vitesses V_z montre des légères variations difficilement perceptibles dans le domaine temporel. Cependant, elles apparaissent mieux en comparant leurs spectres respectifs. Nous constatons que le spectre de la plaque saine prédit trois pics P1, P3 et P4. Par contre, celui de la plaque trouée indique en plus de ces pics un autre pic P2. Ainsi, avant d'aller un peu plus loin dans l'étude de la méthode de CND, il est important d'analyser et de comprendre l'origine physique de ces différents pics dans la mesure où, à notre connaissance, aucune étude de ces pics n'a été faite jusqu'ici.

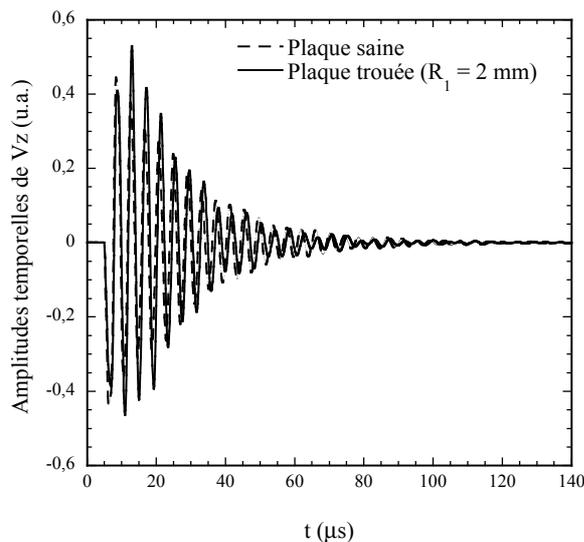


Figure III.33 : comparaison des amplitudes temporelles des vitesses V_z prédites par le modèle EF axisymétrique dans le cas de deux plaques viscoélastiques isotropes d'épaisseur 5 mm. Les calculs sont effectués à 2 mm du centre des plaques circulaires.

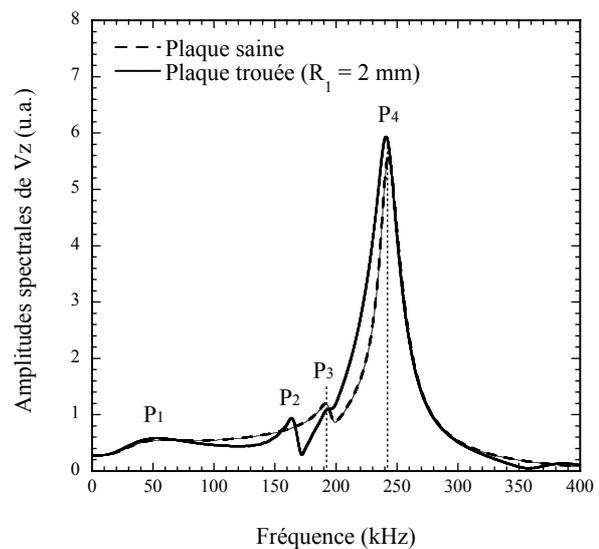


Figure III.34 : comparaison des amplitudes spectrales des vitesses V_z prédites par le modèle EF axisymétrique dans le cas de deux plaques viscoélastiques isotropes d'épaisseur 5 mm. Les calculs sont effectués à 2 mm du centre des plaques circulaires.

III.5.2.1. Analyse des deux pics P3 et P4

Pour commencer, il est facile de noter que ces deux pics sont présents sur les réponses acoustiques générées dans les deux plaques. L'amplitude élevée du quatrième pic P4 fait penser qu'il correspond au mode fondamental généré dans l'épaisseur des plaques par la brusque dilatation thermique. En effet, en calculant directement sa fréquence de résonance à l'aide de la relation $f_4 = C_4/2e$ où $C_4 = \sqrt{C_{33}/\rho}$ est la célérité des ondes de volume longitudinales qui se propagent dans l'épaisseur de la plaque, nous obtenons que $f_4 = 241,3$ kHz. Cette valeur est très proche de la valeur indiquée graphiquement sur la Figure III.34.

Ensuite, plusieurs hypothèses ont été formulées pour interpréter l'origine du troisième pic. La première consiste à supposer qu'il est lié à la taille de la zone de la plaque saine chauffée par la distribution de la température gaussienne. Cette hypothèse est rapidement écartée puisque les résultats indiqués sur les Figures III.35 et III.36 montrent la présence de ce pic pour les deux températures gaussiennes représentées sur la Figure III.16. Toutefois, notons que la taille de la forme de la répartition de la température influence la forme du pic situé en dessous de la fréquence de 100 kHz.

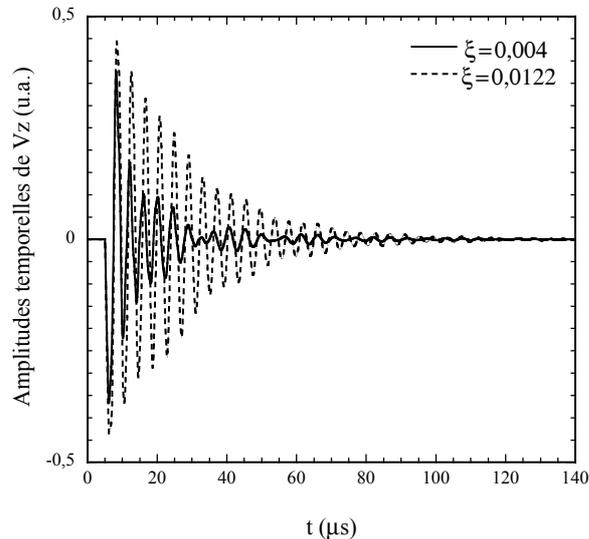


Figure III.35 : effets de la taille de la zone de la plaque saine chauffée par une température gaussienne sur la réponse temporelle de la vitesse V_z prédite par le modèle EF axisymétrique. Les calculs sont effectués à 2 mm du centre de la plaque saine.

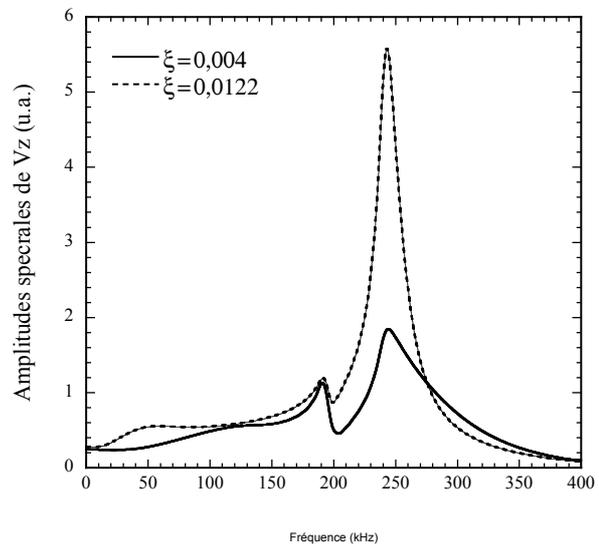


Figure III.36 : effets de la taille de la zone de la plaque saine chauffée par une température gaussienne sur la réponse spectrale de la vitesse V_z prédite par le modèle EF axisymétrique. Les calculs sont effectués à 2 mm du centre de la plaque saine.

La deuxième hypothèse suppose que le pic P3 est lié au gradient thermique introduit localement au voisinage du point de calcul par la distribution gaussienne de la température. Différentes répartitions ont été considérées pour valider cette hypothèse. Elles sont représentées sur la Figure III.37. La Figure III.38 donne les spectres des vitesses V_z prédites par le modèle EF axisymétrique et qui sont calculées en supposant les formes illustrées sur la Figure III.37. Nous observons que le troisième pic P3 n'apparaît que lorsque le gradient de température imposée dans la zone chauffée augmente. D'un point de vue thermoélastique, il est tout à fait normal d'envisager que ce gradient de température entraîne localement des contraintes thermiques qui, couplées aux vibrations dans l'épaisseur de la plaque, peuvent créer des contraintes mécaniques de cisaillement. Ces dernières faciliteraient par la suite la génération d'ondes transverses (de cisaillement). Effectivement, en supposant que ce pic est provoqué par la propagation dans l'épaisseur de la plaque saine d'un mode de cisaillement, alors sa fréquence peut être déterminée à l'aide de la relation $f_3 = C_3/e$ où $C_3 = \sqrt{\mu/\rho}$ est la célérité des ondes de cisaillement dans le cas d'un matériau isotrope. Notons que contrairement au cas du calcul de f_4 , celui de f_3 ne fait intervenir que l'épaisseur e de la plaque. La raison

est que ce mode de cisaillement fait vibrer, dans le même sens, la matière située dans l'épaisseur de la plaque.

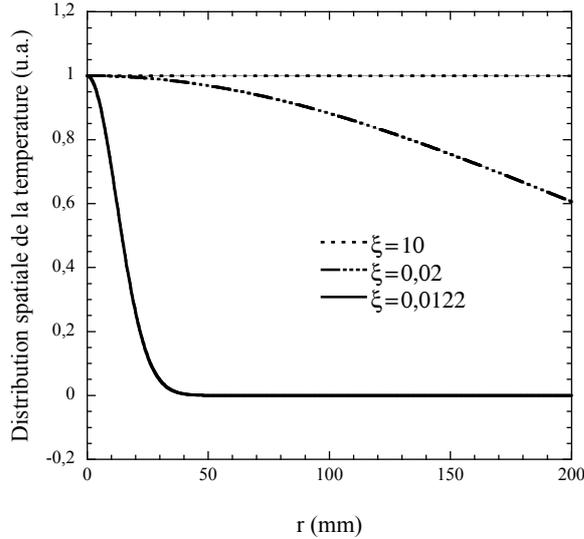


Figure III.37 : représentation des différentes formes de répartition de température centrées sur la plaque saine d'épaisseur 5 mm.

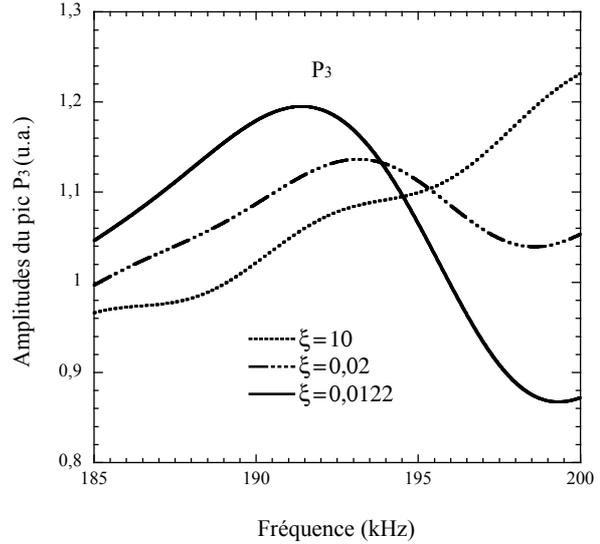


Figure III.38 : effets des différentes formes de température sur la génération du troisième pic P3 présent sur le spectre de la vitesse Vz de la plaque saine d'épaisseur 5 mm.

Les calculs donnent une fréquence égale à $f_3 = 190,3$ kHz. Cette valeur est très proche de celle qui est indiquée graphiquement sur la Figure III.33. Une autre façon de valider cette hypothèse est de comparer le rapport théorique des fréquences par rapport à celui obtenu directement par une simulation numérique. Théoriquement, ce rapport $f_3/f_4 = 2[(1-2\nu)/2(1-\nu)]^{1/2}$ ne dépend que du coefficient de Poisson du matériau constituant la plaque. La Figure III.39 représente les spectrales numériques des vitesses V_z obtenues avec deux valeurs distinctes de ν . Nous remarquons que pour $\nu=0,2$, le mode longitudinal dans l'épaisseur (pic de grande amplitude) arrive avant le deuxième mode. Le Tableau III.2 donne les différentes valeurs des rapports des fréquences prédites par le modèle théorique et celles obtenues numériquement en faisant les rapports des fréquences du petit pic (pic lié par hypothèse au mode de cisaillement) par rapport au grand (lié au mode fondamental dans l'épaisseur). Les valeurs numériques obtenues sont proches de celles qui sont prédites par la théorie. Ce résultat valide l'hypothèse que le troisième pic est lié à la génération puis à la propagation dans l'épaisseur d'un mode de cisaillement induit par le couplage des effets tridimensionnels et du gradient de la température gaussienne sur les deux plaques.

ν	$f_3^{Théo} / f_4^{Théo}$	f_3^{Num} / f_4^{Num}
0,4	0,82	190/241 = 0,79
0,2	1,22	219/171 = 1,28

Tableau III. 2 : valeurs des rapports des fréquences pour chaque ν .

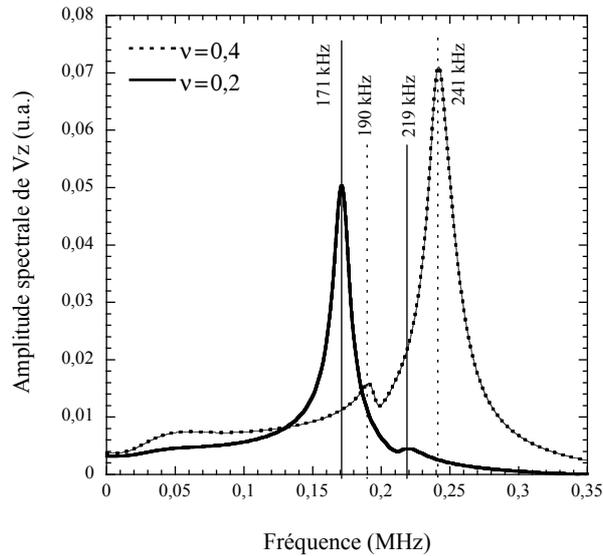


Figure III.39 : effets du coefficient de Poisson sur les fréquences des pics présents sur le spectre de la vitesse V_z d'une plaque saine.

III.5.2.2. Analyse des deux pics P1 et P2

Les résultats de la Figure III.34 montrent que la fréquence du pic P1 se trouve dans la gamme de fréquences voisinant les 50 kHz. Ce pic est donc comparable à celui obtenu précédemment avec le modèle EF 2D construit sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes et qui est illustré sur la Figure III.30 (voir spectre de V_z). Pour valider cette hypothèse, nous allons étudier l'influence de la taille du trou sur la fréquence de P1. La Figure III.40 signale que l'évolution de la fréquence de ce pic en fonction de la taille du trou est quasi identique à celle de la fréquence principale prédite par le modèle EF 2D (voir Figure III.32). Ces résultats semblent confirmer que le pic P1 est indépendant des effets tridimensionnels de la plaque trouée. Il correspond à l'onde acoustique générée sur le trou dans la direction radiale e_r et qui, par effet Poisson, peut être mesuré dans la direction e_z . En outre, l'étude des spectres des vitesses V_z représentés sur la Figure III.41 montre que le pic P2 est directement liée à la présence du défaut (trou) sur la plaque. Par contre, le fait que le pic P2 soit absent sur le spectre de la vitesse V_z obtenue numériquement avec la plaque d'épaisseur de 0,5 mm (voir spectre de V_z sur la Figure III.30) signifie qu'il est associé à un phénomène mécanique provoqué par le couplage des effets d'inertie tridimensionnels de la plaque et ceux qui sont dus aux vibrations du trou. De même, la diminution de son amplitude au fur et à mesure que la taille du défaut circulaire (trou) augmente suggérerait l'existence d'une taille limite du défaut au-delà de laquelle les contraintes mécaniques qui interviennent dans sa génération deviennent négligeables.

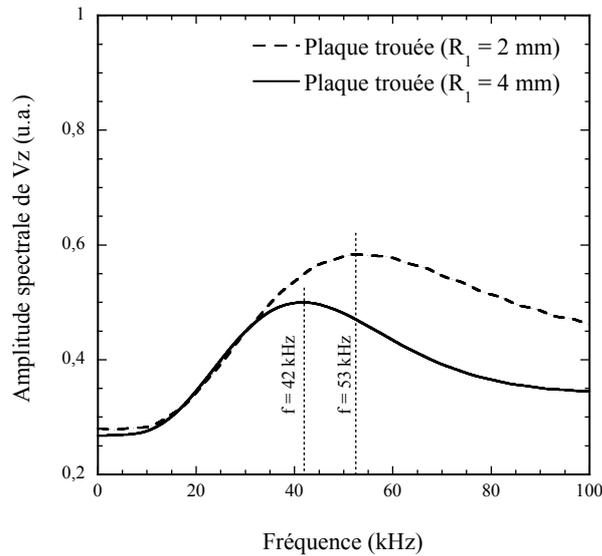


Figure III.40 : effets de la taille du trou sur la fréquence du pic P1.

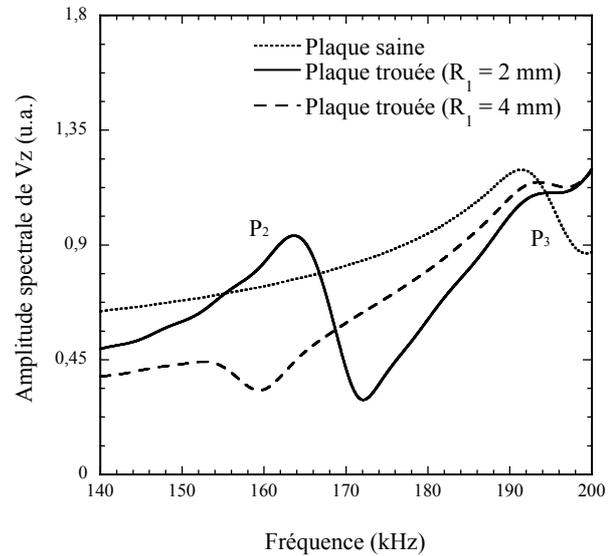


Figure III.41 : effets de la taille du trou sur la fréquence du pic P2.

III.5.2.3. Méthode de contrôle non destructif des défauts circulaires

La caractérisation des différents pics présents sur le spectre de la vitesse V_z facilite par la suite l'étude et la mise en place de la méthode de contrôle non destructif des défauts circulaires traversant les plaques viscoélastiques isotropes soumises au centre à une brusque élévation gaussienne de la température. L'analyse peut être menée en exploitant les effets des défauts sur la forme des pics P1 et P2, ou plus précisément en étudiant les relations directes reliant les fréquences des pics P1 et P2 aux dimensions des défauts. Sachant que la fréquence du pic P1 est indépendante des effets tridimensionnels de la plaque, alors l'évolution de sa fréquence en fonction du rayon du défaut circulaire est quasi similaire à celle qui est prédite par le modèle EF 2D (voir la courbe de V_z illustrée sur la Figure III.31).

La Figure III.42 compare cette relation avec celle qui est obtenue dans le cas d'une plaque saine. Pour la plaque trouée, la valeur R correspond à la valeur du rayon R_1 du trou ainsi qu'à la position du point de calcul. Pour la plaque saine, le rayon R correspond seulement à la position du point de calcul. Nous constatons que contrairement au cas d'une élévation thermique uniforme, la forme gaussienne de la température entraîne sur la plaque saine la génération d'une onde acoustique dont la fréquence est relativement voisine à celle qui est générée sur le trou. De ce fait, il sera difficile dans la pratique d'utiliser seulement la relation liant la fréquence du pic P1 aux dimensions du trou pour contrôler ces types de défauts et notamment si ces derniers ont des rayons inférieurs à 2 mm. Par contre, nous avons vu sur la Figure III.41 que le pic P2 n'apparaît que sur la réponse acoustique de la plaque trouée. En traçant sur la Figure III.43 l'évolution de sa fréquence par rapport aux dimensions du défaut (trou), nous remarquons l'existence d'une relation directe liant sa fréquence aux dimensions du défaut.

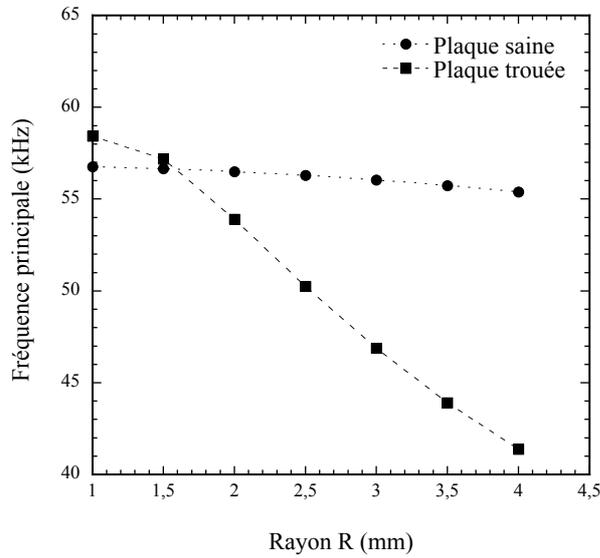


Figure III.42 : comparaison des évolutions de la fréquence du pic P_1 dans le cas de deux plaques viscoélastiques isotropes (saine et trouée) traversant l'épaisseur de la plaque viscoélastique chauffées au centre par une température gaussienne ($\xi = 0,0122$).

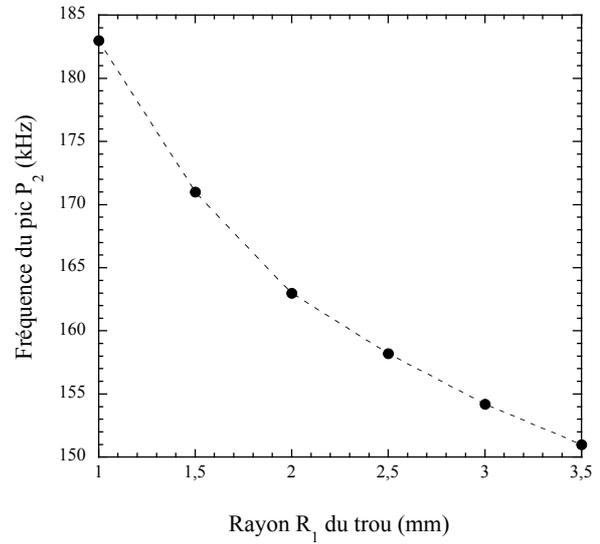


Figure III.43 : évolution de la fréquence du pic P_2 par rapport au rayon du défaut circulaire traversant l'épaisseur de la plaque viscoélastique chauffée au centre par une température gaussienne ($\xi = 0,0122$).

Cette dépendance laisse envisager la possibilité de construire une méthode de contrôle non destructif basée sur la technique de génération acoustique par micro-ondes. En plus, en combinant les résultats des deux Figures III.42 et III.43, il serait alors possible d'estimer les dimensions des défauts avec une bonne précision. Rappelons que ces courbes ont été obtenues en supposant que les propriétés mécanique et thermique du matériau constituant la plaque sont connues. Dans le cas contraire, il faudra adapter la méthode en estimant d'abord ses caractéristiques par une méthode d'optimisation basée par exemple sur la minimisation de la fonctionnelle $J_3(p)$ définie, pour $p = (E', \nu, \rho)$, par l'expression :

$$J_3(p) = |f_L^{th}(p) - f_L^{Exp}| \quad (\text{III.19})$$

où $f_L^{th} = C_L/2e$ avec $C_L = \sqrt{C_{33}/\rho}$ et f_L^{Exp} sont les fréquences de résonance du mode fondamental dans l'épaisseur respectivement prédites par la théorie de la propagation des ondes de volume et mesurée expérimentalement.

Synthèse : nous avons mis en place dans cette section deux relations simples liant une des caractéristiques du spectre des vibrations dans l'épaisseur des plaques aux dimensions des défauts circulaires traversant l'épaisseur des plaques viscoélastiques isotropes. Ces deux relations tiennent compte du gradient de la température sur la plaque et de ses mécaniques dans l'épaisseur. Son avantage est qu'elle facilite l'élaboration de méthodes simples inverses pouvant être appliquées pour estimer la taille de ces défauts. Cependant, pour qu'elle puisse être exploitée dans la pratique, il faudrait que le dispositif expérimental puisse mesurer convenablement les déformations situées dans les très hautes fréquences.

III.6. Application dans le cas d'une plaque en polymère

Avant-propos : la technique de génération par micro-ondes sera appliquée pour contrôler une plaque mince polymérique contenant un défaut circulaire à travers son épaisseur. La section III.6.1 présentera le dispositif expérimental utilisé d'abord pour caractériser la forme de la répartition gaussienne de la température permettant de simuler numériquement par éléments finis les résultats expérimentaux. Puis, la section III.6. tentera d'appliquer la méthode de contrôle non destructif décrite précédemment dans la section III.5.2.3 pour dimensionner un défaut circulaire traversant l'épaisseur d'une plaque en PVC.

III.6.1. Procédure expérimentale pour la caractérisation de la forme de la répartition gaussienne de la température

Comme l'indique la Figure III.44, l'échantillon testé expérimentalement pour caractériser la forme de la répartition gaussienne de la température induite (par hypothèse) par l'absorption de micro-ondes est un disque de rayon $R_2 = 50\text{ mm}$ et d'épaisseur $e = 5\text{ mm}$ constitué d'un matériau polymérique de type PVC.

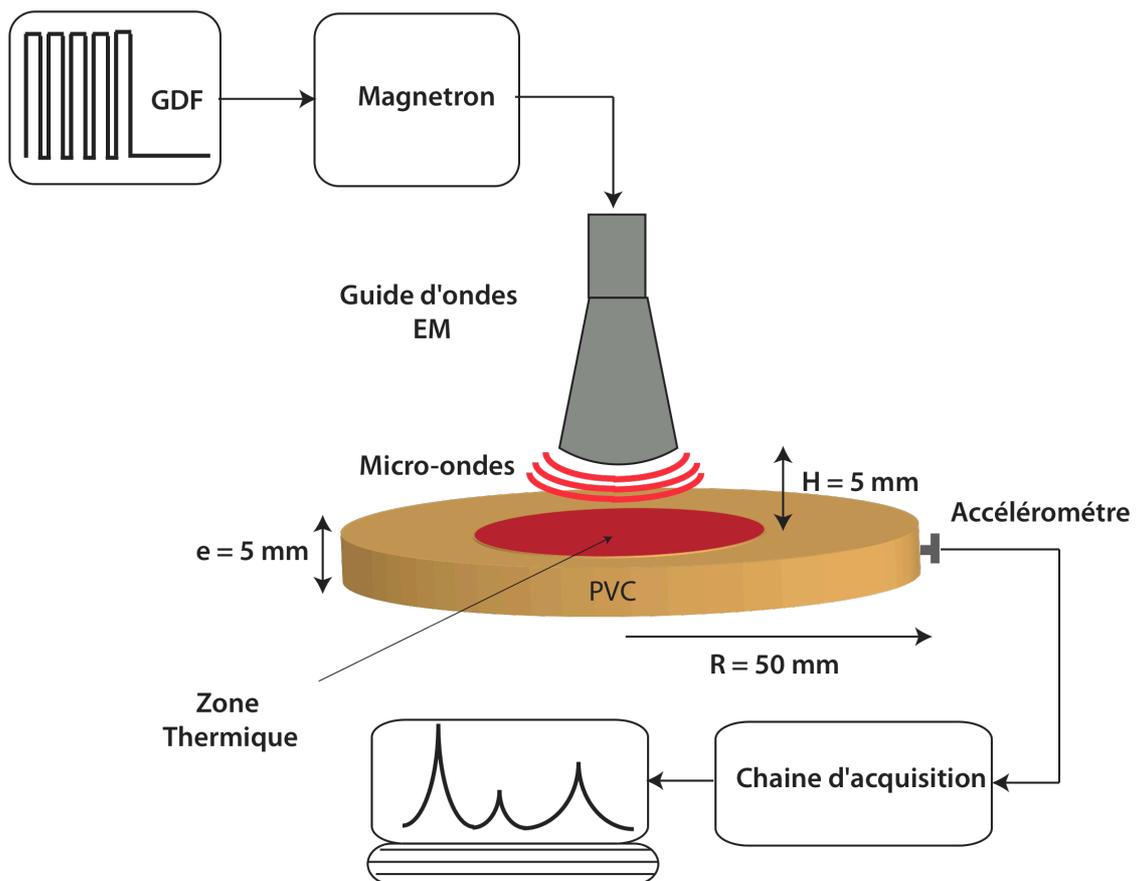


Figure III.44 : schéma simplifié du montage expérimental utilisé pour caractériser la répartition gaussienne de l'élevation de la température sur l'échantillon.

Ce disque est soumis au centre et à travers un guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire - circulaire à une excitation quasi impulsionnelle composée de 5 impulsions de micro-ondes. Ce guide permet de faire propager d'une part, grâce au guide rectangulaire, le mode fondamental TE_{10} et d'autre part, grâce au guide circulaire, le mode fondamental TE_{11} . L'absorption de l'énergie électromagnétique induit au voisinage de la zone d'irradiation une élévation thermique rapide supposée, pour simplifier, répartie d'une façon gaussienne sur le disque. Cette brusque élévation gaussienne de la température engendre des déformations mesurées dans la direction radiale par l'accéléromètre de masse 0,2g décrite dans la section I.2.1. Ce capteur a été choisi parce qu'il permet d'acquérir des signaux moins bruités que ceux qui seraient obtenus avec le vibromètre Laser. La réponse temporelle obtenue est ensuite envoyée à une chaîne d'acquisition permettant non seulement de filtrer et d'amplifier le signal, mais aussi d'obtenir son spectre en lui appliquant au préalable une transformée de Fourier. Ce spectre est celui qui est présenté sur la Figure III.45. Il a été obtenu avec un pas en fréquence égal à 6 Hz puis normalisé par rapport à l'amplitude maximale du mode fondamental indiqué par le premier pic.

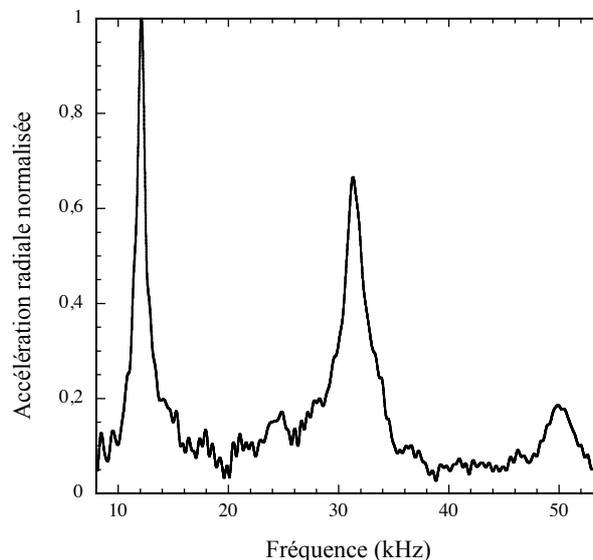


Figure III.45 : spectre expérimental de l'accélération radiale normalisée et mesurée à l'extrémité du disque en PVC

La connaissance du spectre expérimental permet par la suite de calculer les valeurs $R_2^{\text{Exp}} = 0,67$ et $R_3^{\text{Exp}} = 0,185$ des rapports des deux derniers pics. L'algorithme numérique de minimisation de la fonctionnelle $J_2(p_2)$ décrite par la relation (III.14) est ensuite appliqué pour estimer le vecteur $p = (E^*, \nu, \xi)$ permettant de reproduire numériquement par éléments finis les résultats expérimentaux. Les estimations obtenues sont indiquées sur le Tableau III.3. Notons que celles des propriétés mécaniques sont proches de celles qui figurent dans le Tableau II.3 du Chapitre II. La Figure III.46 représente la forme de la distribution gaussienne de la température calculées avec le paramètre optimal ξ_{opt} et donne une idée sur la forme de la distribution thermique sur le disque. La Figure III.47 valide expérimentalement les résultats numériques calculés avec les paramètres du Tableau III.3.

E' (GPa)	E'' (GPa)	ν	ξ_{opt}
3,8 ($\pm 0,20$)	0,2 ($\pm 0,05$)	0,41 ($\pm 0,03$)	0,0122 ($\pm 0,002$)

Tableau III.3 : estimations des paramètres mécaniques et thermiques

Sachant que les différentes estimations ont permis approximativement de reproduire les spectres expérimentaux des accélérations radiales, elles seront utilisées dans la suite pour tenter de dimensionner un défaut circulaire de rayon $R_1 = 2$ mm traversant l'épaisseur d'une plaque polymérique.

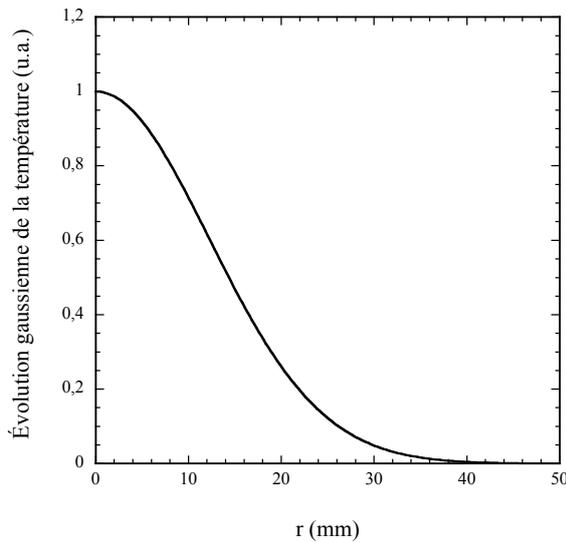


Figure III.46 : forme de la répartition gaussienne de la température sur le disque et qui est obtenue pour $\xi_{opt} = 0,0122$.

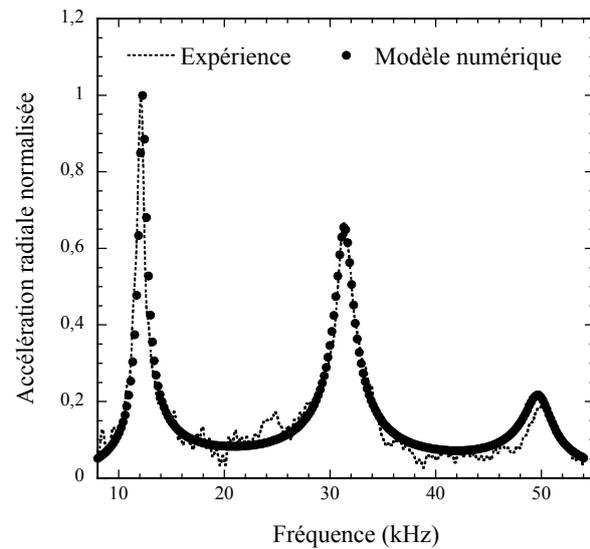


Figure III.47 : comparaison entre le spectre expérimental de l'accélération radiale et celle prédite par le modèle numérique et qui est calculée avec les paramètres optimaux du Tableau III.3.

Synthèse : la technique des micro-ondes pulsées a été appliquée dans cette partie pour élever brusquement la température d'un disque polymérique de type PVC. En se restreignant ici au cas particulier d'une distribution thermique répartie radialement de façon gaussienne, l'étude expérimentale menée dans cette section a permis d'exhiber un champ thermique modélisant d'une façon quasi réaliste le champ acoustique généré par l'absorption de micro-ondes.

III.6.2. Procédure expérimentale pour le contrôle non destructif

Une plaque polymérique de longueur $L = 400$ mm, de largeur $l = 400$ mm et d'épaisseur $e = 5$ mm est percée son centre et à travers l'épaisseur d'un trou circulaire de rayon $R_1 = 2$ mm (voir Figure III.48). Elle est soumise sur une face à un rayonnement de micro-ondes composé de 12 salves contenant chacune 2 impulsions. La disposition du guide d'ondes électromagnétiques rectangulaire - circulaire est faite de telle sorte que son axe coïncide avec

le centre du trou. L'absorption de micro-ondes est supposée induire au sein de la plaque une distribution gaussienne de la température dont la forme est celle qui est indiquée sur la Figure III.46. Cette hypothèse implique nécessairement de respecter quelques paramètres expérimentaux utilisés dans le dispositif de la Figure III.44. Par exemple, il était important de garder la même distance séparant le guide d'ondes et la plaque trouée. En effet, si cette distance augmente, alors la zone d'irradiation augmente aussi du fait de l'élargissement du champ de rayonnement de la puissance électromagnétique à l'extrémité du guide d'ondes. La dilatation thermique résultant de la brusque élévation thermique provoque une génération d'ondes acoustiques au voisinage du trou. Ces ondes sont mesurées sur l'autre face de la plaque non irradiée à l'aide du vélocimètre Laser vu dans le Chapitre I. La mesure est réalisée à 5 mm du défaut. La réponse temporelle de la vitesse V_z acquise par ce capteur est ensuite envoyée à la chaîne d'acquisition décrite dans la section I.2.1. Celle-ci a été réglée afin de filtrer les vibrations de fréquences inférieures à 100 kHz. Les amplitudes temporelles et spectrales de la vitesse V_z induite au sein de la plaque trouée de la Figure III.48 et d'une plaque saine constituée du même matériau sont représentés respectivement sur les Figures III.49 et III.50. Nous remarquons qu'il est difficile d'appliquer la méthode de CND construit dans la section III.5.2.3 ne peut pas être appliquée convenablement étant donnée la difficulté à identifier aisément avec une bonne certitude le pic intervenant dans la méthode de CND. Cette difficulté est liée à la valeur très faible du rapport signal/bruit ou à la viscosité du matériau qui tend à étaler les pic dans les hautes fréquences.

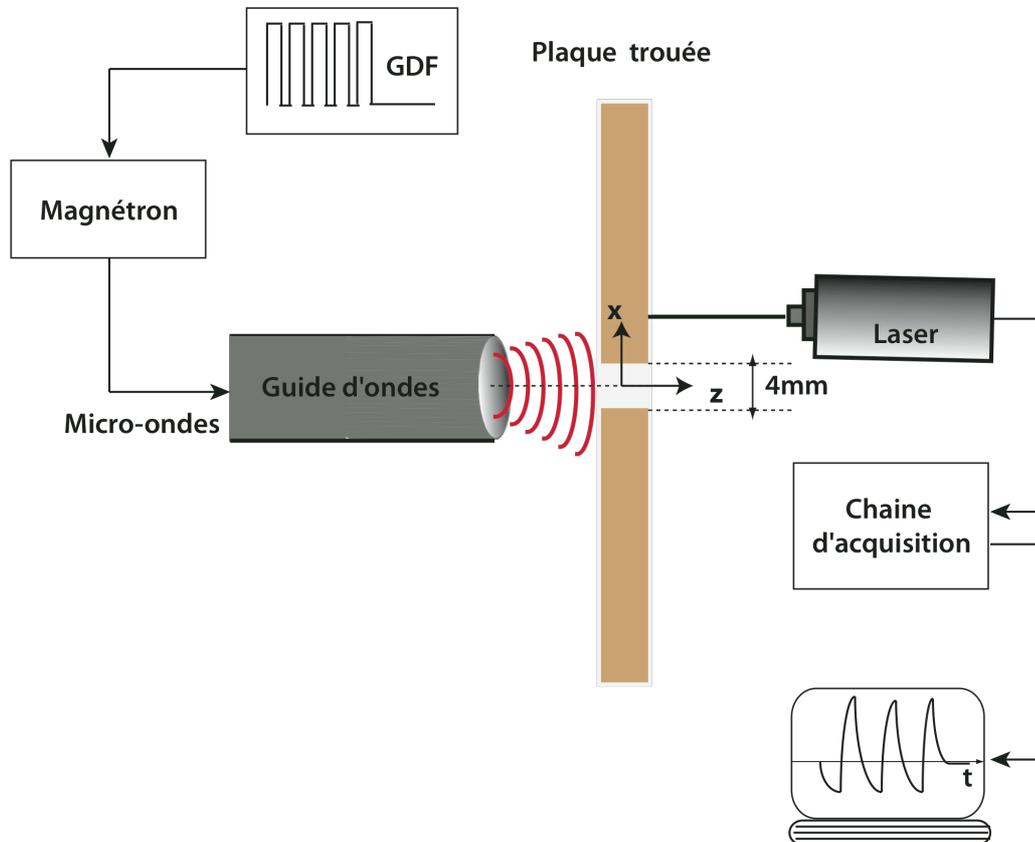


Figure III.48 : dispositif expérimental proposé pour appliquer la méthode de CND.

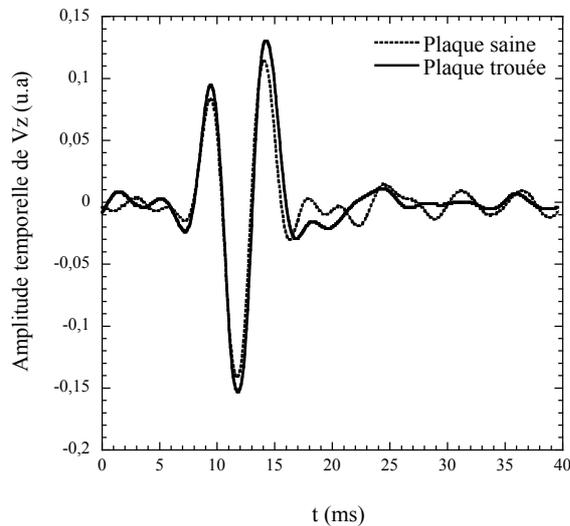


Figure III.49 : amplitudes temporelles des vitesses V_z mesurées expérimentalement sur deux plaques polymériques.

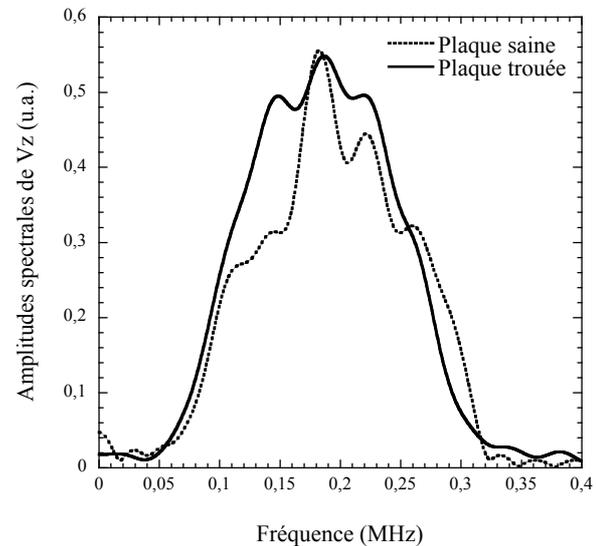


Figure III.50 : amplitudes spectrales des vitesses V_z mesurées expérimentalement sur les deux plaques polymériques.

Le dispositif expérimental actuel n'est pas bien adapté à l'irradiation des échantillons avec un maximum d'énergie électromagnétique. Plus encore, il ne permet pas de focaliser l'intensité des micro-ondes (ou concentrer l'énergie thermique) sur la zone située au voisinage du défaut.

Synthèse : nous avons proposé dans cette section un dispositif expérimental pour dimensionner les défauts traversant l'épaisseur des plaques minces viscoélastiques isotropes en appliquant la méthode de CND décrite dans la section III.5.2.3. Malheureusement, elle n'a pas pu être expérimentalement validée en raison des difficultés de mesures expérimentales.

III.7. Conclusion

L'étude des vibrations des plaques minces subissant une élévation thermique rapide induite par une source de micro-ondes a été abordée dans ce Chapitre. Une première partie traitant les structures circulaires minces (anneaux et disques) a d'abord été étudiée analytiquement en supposant une répartition locale et uniforme de la température. Les résultats ont montré la possibilité d'exprimer, sous l'hypothèse d'un état plan de contraintes, les expressions exactes des déformations radiales des échantillons. Deux modèles numériques par éléments finis ont été aussi présentés pour valider, compléter et analyser les limites des modèles analytiques ainsi construits. Les résultats ont indiqué une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques dans le cas particulier d'une répartition thermique uniforme et dans le cas où les effets tridimensionnels seraient négligeables. Par contre, leurs limites ont été mises en évidence en considérant une distribution non uniforme de la température et en tenant compte des effets tridimensionnels des plaques.

Cependant, Les simulations numériques ont été intéressantes dans la mesure où elles ont favorisé l'étude du problème thermoélastique en considérant d'autres formes plus réalistes des répartitions thermiques sur les échantillons. Elles ont aussi facilité par la suite l'analyse tridimensionnelle des différentes ondes acoustiques générées dans les plaques saines ou trouées à travers leurs épaisseurs. L'étude des ondes acoustiques générées dans les plaques trouées soumises à une température gaussienne a montré que l'hypothèse d'uniformité locale de l'échauffement ne peut pas être adoptée pour construire la méthode de CND. La raison est que le gradient de la température qui semble *a fortiori* être la plus réaliste influence la forme des spectres des vibrations. De ce fait, il était important de formuler des hypothèses tenant compte de la variation possible de l'élévation thermique sur les plaques.

Les effets de la taille de la zone thermique S_{Th} (correspondant à la zone subissant l'élévation thermique) sur le spectre des déformations radiales d'un disque plein ont été aussi étudiés. Les résultats ont montré que le spectre des vibrations radiales mesurées à l'extrémité des échantillons circulaires (anneaux ou disques) varie en fonction du rayon thermique R_{Th} . De ce fait, deux méthodes (analytique et numérique) inverses ont été élaborées afin d'estimer la taille de la zone chauffée permettant de reproduire les résultats expérimentaux. Les données obtenues par l'algorithme d'optimisation numérique dans le cas réel d'un disque polymérique ont montré une bonne concordance entre le spectre expérimental et celui prédit par le modèle numérique. La connaissance de la répartition spatiale de la température a rendu possible l'étude puis l'élaboration d'une démarche favorisant le dimensionnement des trous circulaires traversant les épaisseurs des plaques viscoélastiques isotropes. Malheureusement, elle n'a pas pu être appliquée dans la pratique à cause des difficultés de mesures liées aux contraintes imposées par le dispositif expérimental actuel. Celui-ci ne permet pas d'obtenir des réponses acoustiques d'amplitudes convenables et facilement exploitables.

III.8. Références

- [III.1] A. R. Hadj Henni and C. Bacon, "*In-plane vibration of thin circular structures submitted to uniform pulsed microwave irradiations*", Journal of the Acoustical Society of America, vol. **119**(6), p. 3782-3792 (2006).
- [III.2] A. R. Hadj Henni and C. Bacon, "*In-plane vibration of thin elliptic plates submitted to uniform pulsed microwave irradiations*", Journal of Sound and Vibration, vol. **299**(1-2), p. 298-313 (2007).
- [III.3] C. Bacon, E. Guillorrit and B. Hosten, "*Acoustic wave generated by pulsed microwaves in viscoelastic rods: modeling and experimental verification*", Journal of the Acoustical Society of America, vol. **110**(3), p. 1398-1407 (2001).
- [III.4] B. A. Boley and J. H. Weiner, "*Theory of thermal stresses*", John Wiley and Sons, New York (1960).

- [III.5] P. Biswas, “*Non-linear free vibrations of heated elastic plates*”, Indian Journal of Pure Applied Mathematics, vol. **14**(10), p. 1199-1203 (1983).
- [III.6] M. Ishihara and N. Noda, “*Theoretical analysis of thermoelastoplastic déformation of a circular plate due to a partially distributed heat supply*”, Journal of Thermal Stress, vol. **20**, p. 203-225 (1997).
- [III.7] M. N. Gaikwad and K. C. Deshmukh, “*Thermal deflection of an inverse thermoelastic problem in a thin isotropic circular plate*”, Applied Mathematical Modelling, vol. **29**(9), p. 797-804 (2005).
- [III.8] S. Yuxin and T. Hironori, “*Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circular plate resonators*”, Journal of Sound and Vibration, vol. **319**, p. 392-405 (2009).
- [III.9] A. R. Hadj Henni, “*Vibrations de structures générées par micro-ondes pulsées : application à l'évaluation non-destructive*”, Thèse de doctorat, n° d'ordre 3213, Université Bordeaux 1 (2006).
- [III.10] M. Liu and D. G. Gorman, “*Formulation of Rayleigh damping and its extensions*”, Computers and Structures, vol. **57**(2), p. 277-285 (1995).
- [III.11] S. Adhikari, “*Damping models for structural vibration*”, Ph.D. Thesis, Cambridge University (2000).
- [III.12] F. Rudinger, “*Modeling and estimation of damping in non-linear random vibration*”, Ph.D. Thesis, Technical University of Denmark (2002).
- [III.13] J. Shen-Haw and N. Sheng-Huoo, “*Determining Rayleigh damping parameters of soils for finite element analysis*”, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. **31**(10), p. 1239-1255 (2007).

Conclusions et perspectives

Les structures mécaniques (barreaux et plaques) viscoélastiques isotropes soumises à des impulsions de micro-ondes ont été étudiées tout au long de ce travail de recherche. Il a été admis que l'absorption de micro-ondes induit au sein d'un matériau absorbant une brusque élévation thermique entraînant, par effet de minuscules dilatations thermiques, la génération puis la propagation d'ondes acoustiques. L'étude a été abordée en utilisant différentes voies de modélisations complémentaires : la modélisation analytique facilitant une formulation rapide des équations différentielles du mouvement dérivant du problème thermoélastique et les simulations numériques par éléments finis permettant de valider numériquement les modèles analytiques ainsi construits, d'analyser leurs limites et de se rapprocher au cas réel expérimental. Leurs résultats ont été confrontés à ceux obtenus expérimentalement.

Dans le premier Chapitre, les vibrations des barreaux viscoélastiques isotropes placés dans des guides d'ondes partiellement ouverts (sur une de ses faces latérales) et soumis à des brèves excitations de micro-ondes ont été étudiées. Initialement, le but de ce dispositif expérimental original et non conventionnel était d'exploiter le spectre des déformations transversales de l'échantillon afin d'analyser la faisabilité d'une méthode d'évaluation non destructive des propriétés mécaniques et électromagnétiques. Cependant, la comparaison des spectres des vibrations mesurées d'une part avec ce nouveau dispositif et d'autre part avec les dispositifs conventionnels a souligné des différences qu'il fallait d'abord analyser puis interpréter. Pour y arriver, un modèle analytique unidimensionnel a été d'abord élaboré. Il a permis de montrer que l'hypothèse d'une température symétrique sur une section-droite de l'échantillon ne permettait pas de prédire tous les modes de vibration mesurés expérimentalement et qu'il était donc nécessaire de formuler d'autres hypothèses plus réalistes tenant compte la nature physique du problème.

L'étude a été poursuivie en envisageant une simulation tridimensionnelle par éléments finis des déformations mécaniques du barreau. L'objectif était de vérifier si ces différences étaient dues à la non prise en compte dans le modèle analytique des effets tridimensionnels du barreau. Les résultats numériques ont montré une nette amélioration du spectre numérique par rapport à celui prédit par le modèle analytique. En effet, ce modèle numérique 3D a rendu possible la prédiction de certains modes de vibration expérimentaux liés aux dilatations des sections-droites du barreau lorsqu'elles sont soumises à une brusque élévation thermique. Leur mise en évidence a souligné l'intérêt de l'approche numérique 3D développée dans ce travail puisqu'il a permis d'exhiber des modes de vibrations non prédits par les modèles analytiques existants. Par contre, il a été noté que ce modèle numérique 3D construit sous l'hypothèse d'un champ thermique symétrique sur la section-droite de l'échantillon est

incapable de prédire certains modes de vibration situés en basses fréquences ($\leq 3kHz$). Au travers de plusieurs comparaisons modélisations - expérience, l'effet de l'ouverture du guide d'ondes sur la répartition spatiale du champ thermique dans l'échantillon a été reformulé. Une étude analytique et « paramétrique » des équations de Maxwell avec les nouvelles conditions aux limites (c'est-à-dire la prise en compte de la présence de la rainure sur le guide d'ondes) a indiqué que la rainure pourrait induire dans l'échantillon un champ de température asymétrique. Une étude numérique par éléments finis a validé les résultats expérimentaux en démontrant que ces modes correspondaient à des modes de flexion. Une autre étude analytique directe portant sur la relation de dispersion des modes de flexion a souligné que les fréquences propres de ces modes dépendaient seulement du module d'Young à valeurs complexes. Leurs exploitations ne permettaient donc pas d'évaluer d'autres caractéristiques du matériau constituant le barreau comme par exemple le coefficient de Poisson. Toutefois, la mise en évidence de certains modes de vibrations liés à l'effet Poisson a favorisé par la suite la recherche d'une méthode de caractérisation du coefficient de Poisson des barreaux viscoélastiques isotropes.

Ensuite, le Chapitre II orienta l'étude vers l'élaboration de méthodes directes permettant d'estimer les coefficients de Poisson de barreaux viscoélastiques isotropes. Cette estimation facilitera par la suite la caractérisation de leurs matrices de rigidité dans une gamme de fréquences intermédiaire ($1kHz \leq f \leq 20kHz$). Pour cela, un guide d'ondes possédant un trou de 3 mm de diamètre à la place de la rainure a été considéré. Ce trou a été réalisé non seulement pour mesurer les déplacements générés dans la direction latérale du barreau lors du processus d'irradiation de micro-ondes mais aussi pour éviter les modes de flexions générés par les rainures faites sur les guides d'ondes. L'effet de ν sur le rapport entre les déformations transversale et axiale a été analysé en considérant le modèle analytique unidimensionnel du Chapitre I. L'étude analytique du problème direct a démontré que ce rapport dépendait linéairement de ν . Mais cette méthode n'a pas pu être appliquée en pratique dans la mesure où elle est très sensible à la valeur de la partie réelle de la permittivité diélectrique du matériau. Par ailleurs, d'autres approches analytiques et numériques par élément finis ont été proposées afin d'analyser l'influence de ν sur la dispersion des ondes acoustiques de traction compression qui se propagent le long du barreau. Leur avantage est qu'elles permettent de calculer les courbes de dispersion sur la gamme de fréquences souhaitée. Les problèmes directs ont prédit que les courbes de dispersions variaient en fonction de ν . Cette étude a facilité par la suite l'élaboration de différentes approches permettant d'estimer non seulement les coefficients ν des barreaux viscoélastiques isotropes indépendamment de la valeur de la permittivité diélectrique du matériau mais aussi les parties réelles de leurs lenteurs à valeurs complexes. Ces méthodes ont été par la suite appliquées à deux cas réels de barreaux polymériques.

Enfin, la suite des travaux a concerné dans le Chapitre III l'étude des vibrations mécaniques des plaques minces contenant des défauts de formes géométriques simples et soumis à différentes sources thermiques. Pour simplifier, nous n'avons traité que le cas particulier où les défauts sont circulaires et traversent toute l'épaisseur des plaques.

Contrairement aux cas précédents où les échantillons testés étaient confinés dans des guides d'ondes électromagnétiques, les plaques sont disposées en dehors des guides d'ondes. Dans ce cas, il est difficile de résoudre analytiquement les équations de Maxwell. Par conséquent, la démarche entreprise pour prendre en compte l'effet de l'absorption de micro-ondes dans les échantillons a été d'imposer dans les équations du mouvement un terme source thermique assurant le couplage thermoélastique. Ensuite, ce problème a été analysé en formulant d'autres hypothèses sur la distribution spatiale du champ thermique sur la zone irradiée.

Deux hypothèses ont été analysées, à savoir une distribution centrée et localement uniforme de la température et une répartition gaussienne. La première a facilité l'élaboration d'un modèle analytique qui découle directement de l'équation différentielle de Navier des mouvements des plaques dans la direction radiale. Il a été établi que les déplacements radiaux de la plaque satisfont dans le domaine de Fourier une équation différentielle de Bessel inhomogène d'ordre 1. Les champs de déplacements radiaux ont été calculés analytiquement puis validés numériquement en dessous de 50 kHz . La résolution du problème thermoélastique associé à la deuxième hypothèse (répartition gaussienne de la température) a été effectuée numériquement par éléments finis en utilisant une formulation bidimensionnelle du problème (modèle EF 2D) et une autre tridimensionnelle (modèle EF axisymétrique 2D). Deux méthodes acoustiques inverses ont été mises en place pour estimer la forme des répartitions thermiques sur la plaque permettant de reproduire le spectre des vibrations mesurées expérimentalement dans une gamme de fréquences inférieure à 55 kHz .

L'étude des réponses acoustiques générées par ces deux formes de température sur une plaque saine et contenant un trou circulaire (modélisant un éventuel défaut) traversant son épaisseur fut abordée afin de mettre en place une procédure de contrôle non destructif basé sur la technique de génération acoustique par micro-ondes. Les résultats ont montré que lorsque le trou subit localement un flux thermique, des ondes acoustiques, résultants des mouvements d'ouverture et de fermeture du trou, se propageaient dans la direction radiale et dans l'épaisseur. Il a été démontré aussi que si la répartition thermique est localement centrée et uniforme autour du défaut, alors il apparaît une autre réponse acoustique liée cette fois-ci à la discontinuité « artificielle » de la température. En ne s'intéressant qu'à la réponse acoustique générée dans la direction radiale et qui est liée à la présence du trou, nous avons montré l'existence d'une relation liant directement la taille du défaut à une caractéristique du spectre de la vitesse radiale (la fréquence principale du spectre). Cette relation est semblable à celle indiquée dans la littérature. Malheureusement, elle n'a pas pu être exploitée dans la mesure où elle dépendait du gradient de la température sur l'échantillon testé. Pour contourner ce problème, la suite de l'étude s'est alors tournée vers l'analyse des vibrations dans l'épaisseur des plaques en supposant une distribution de température réaliste et de forme gaussienne. Les résultats ont montré que les effets tridimensionnels de la plaque engendraient des oscillations mécaniques traduisant la génération et la propagation d'ondes acoustiques dans l'épaisseur. L'étude numérique approfondie a montré l'existence de deux relations simples liant les dimensions du trou aux fréquences de deux pics présents sur le spectre des vibrations dans l'épaisseur. Ces deux relations permettent *a priori* d'esquisser une méthode

inverse permettant de dimensionner ces types de défauts. Leur validation a été abordée en tentant de les appliquer au cas pratique d'une plaque polymérique contenant un trou de 2 mm de rayon. Malheureusement, les résultats expérimentaux ont souligné la difficulté de mesurer proprement en hautes fréquences les ondes acoustiques qui se propagent dans l'épaisseur de la plaque. Cette difficulté est liée au mauvais rapport signal/bruit des signaux mesurés et qui est lié en partie à la limitation de la puissance électromagnétique délivrée par le magnétron.

Il existe plusieurs façons de projeter ces travaux dans l'avenir en améliorant d'une part la modélisation du processus de génération acoustique par micro-ondes et d'autre part l'efficacité des outils et des appareils électroniques qui composent la chaîne d'acquisition expérimentale. D'abord, nous avons utilisé une méthode empirique pour démontrer que la rainure entraînait une distribution de température asymétrique à l'intérieur du barreau. Il serait intéressant d'approfondir ce point en modélisant numériquement par éléments finis le couplage électromagnétique-thermique au sein de l'échantillon placé dans le guide rainuré. Cette simulation pourrait être faite en utilisant un code de calcul par éléments finis permettant de résoudre les équations couplées de Maxwell, de la chaleur et de la mécanique. L'avantage d'une telle approche est d'étudier si la conception d'autres ouvertures ingénieuses pourrait induire à l'intérieur de l'échantillon d'autres formes de distribution thermique intéressantes pour la caractérisation des propriétés viscoélastiques des barreaux.

Nous avons vu dans le Chapitre II que la méthode d'évaluation de ν basée sur le rapport des spectres transversaux et longitudinaux n'a pas pu être exploitée à cause des erreurs liées à la non connaissance précise de la valeur de la permittivité électromagnétique de l'échantillon testé. Ainsi, comme pour l'instant il n'existe aucune méthode basée sur la technique de génération acoustique par micro-ondes permettant, en une seule mesure, d'estimer avec une bonne précision la permittivité électromagnétique des barreaux diélectriques, il serait intéressant de pousser l'étude un peu plus loin en analysant les effets de ce paramètre sur la génération acoustique. De même, il est possible d'étendre le modèle SAFE aux cas des matériaux orthotropes. Cependant la difficulté sera ici d'exploiter les courbes de dispersion afin de remonter aux différentes caractéristiques du matériau.

La technique de génération acoustique par micro-ondes pour le contrôle non destructif pourrait être poursuivie en adaptant les outils numériques par éléments finis développés dans le Chapitre III aux cas des défauts à géométrie complexes ou enfouis dans les plaques viscoélastiques isotropes. Le but serait de caractériser aussi la profondeur des défauts ou d'étudier le cas des plaques contenant des porosités et/ou des délaminages. Tous ces modèles numériques construits avec un matériau isotrope pourraient aussi s'étendre sans difficultés aux cas des matériaux anisotropes ou composites. Par ailleurs, notons aussi que les modèles analytiques développés dans cette partie peuvent servir à obtenir une solution analytique approchée du problème thermoélastique associé à une forme de température non localement uniforme. Pour cela, il suffira de discrétiser ce champ thermique non uniforme en une somme finie de fonctions de Heaviside et d'appliquer par la suite les résultats des modèles analytiques.

Pour finir, nous avons mentionné dans ce travail les difficultés rencontrées pour obtenir des signaux acoustiques convenables et facilement exploitables avec le dispositif expérimental actuel. De ce fait, il serait intéressant de réfléchir à d'autres moyens permettant d'améliorer l'acquisition des mesures et la génération d'ondes acoustiques de fortes amplitudes. Il existerait plusieurs axes d'optimisation possible. La première serait d'investir sur une source de micro-ondes permettant d'augmenter la puissance électromagnétique irradiée sur les échantillons. La deuxième serait d'adapter la fréquence des ondes électromagnétiques de la source du magnétron aux matériaux irradiés de façon à ce que l'absorption soit la plus importante possible. Enfin la troisième serait de substituer le vélocimètre Laser avec un autre capteur plus précis et sans contact.

Annexe A

Identifications des coefficients des matrices intervenant dans le formalisme 3D de COMSOL MULTIPHISICS

Cette annexe montre la procédure utilisée pour identifier les coefficients des matrices du système (A.1) par rapport à ceux du problème thermoélastique (A.2).

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{ij} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + d_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} - c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - \left(\alpha_{ijk} - \beta_{ijk} + \frac{\partial c_{ijkl}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\ - \left(\frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial x_k} - a_{ij} \right) u_j + \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k} = f_i \quad \text{dans } \Omega \\ c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_k + \alpha_{ijk} u_j n_k - \gamma_{ik} n_k + q_{ij} u_j = g_i \quad \text{sur } \partial\Omega \\ h_{ij} u_j = r_i \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ikjl} \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_k \partial x_l} - C_{ikjl} \alpha_{jl} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_k} + \rho \omega^2 \tilde{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T = \sigma_{ik} n_k = C_{ikjl} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} n_k - C_{ikjl} \alpha_{jl} \Delta \tilde{\theta} n_k \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

En se restreignant au cas d'un problème tridimensionnel ($n = 3$) où le déplacement se met sous la forme $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ($m = 3$), alors :

- e, d, a, q et h sont des matrices scalaires 3×3 ,
- c est une matrice 3×3 dont les composantes sont des matrices 3×3 ,
- α et β sont des matrices 3×3 dont les composantes sont des vecteurs scalaires,
- γ est un vecteur 3×1 dont les composantes sont des vecteurs scalaires à 3 composantes,
- f, g et r sont des vecteurs scalaires à 3 composantes.

En comparant la première équation de (A.1) à celle de (A.2), nous obtenons que les matrices e , β et d_a sont nulles. Par contre, a est une matrice diagonale dont les composantes sont égales à $-\rho\omega^2$. Toutefois, il est difficile de trouver une relation simple permettant d'identifier les coefficients de la matrice c en comparant la première équation de (A.1) à celle de (A.2) car en développant la sommation nous obtenons la relation :

$$(c_{1112} + c_{1121}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} \text{ car } \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_1}. \quad (\text{A.3})$$

Par contre, il est facile d'utiliser la deuxième équation traduisant les conditions aux limites de type Neumann pour identifier les composantes des autres matrices. En procédant ainsi, nous obtenons que :

$$c_{ijkl} = C_{ijkl}, \alpha_{ijk} = 0, \gamma_{ik} = C_{ikj} \alpha_{jl} \tilde{\theta}, q_{ij} = 0 \text{ et } h = 0 \quad (\text{A.4})$$

avec $1 \leq i, j, k, l \leq 3$. Les coefficients de la matrice c sont de la forme :

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

où par exemple c_{11} peut être exprimée par :

$$c_{11} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Les C_{ijkl} désignent les composantes de la matrice de rigidité. Les autres composantes sont données par les relations :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{pmatrix} & c_{12} &= \begin{pmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{56} & C_{52} & C_{54} \end{pmatrix} & c_{13} &= \begin{pmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{55} & C_{54} & C_{53} \end{pmatrix} \\ c_{21} &= \begin{pmatrix} C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{21} & C_{26} & C_{25} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \end{pmatrix} & c_{22} &= \begin{pmatrix} C_{66} & C_{62} & C_{64} \\ C_{26} & C_{22} & C_{24} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \end{pmatrix} & c_{23} &= \begin{pmatrix} C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \end{pmatrix} \\ c_{31} &= \begin{pmatrix} C_{51} & C_{56} & C_{55} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \\ C_{31} & C_{36} & C_{35} \end{pmatrix} & c_{32} &= \begin{pmatrix} C_{56} & C_{52} & C_{54} \\ C_{46} & C_{42} & C_{44} \\ C_{36} & C_{32} & C_{34} \end{pmatrix} & c_{33} &= \begin{pmatrix} C_{55} & C_{54} & C_{53} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Formalisme utilisé pour implémenter la méthode SAFE dans COMSOL MULTIPHYSICS

Considérons une onde acoustique de déplacement se propageant dans un solide suivant la direction x_3 et avec le nombre d'onde k . Ce champ de déplacement $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ peut être décomposé sous la forme :

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = U_i(x_1, x_2) e^{i(kx_3 - \omega t)}. \quad (\text{B.1})$$

Par ailleurs, l'équation de la thermoélasticité (I.22) avec $\tilde{\theta} = 0$ s'écrit :

$$\sum_{j,p,l=1}^3 \left[C_{ipjl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_p \partial x_l} \right] + \rho \omega^2 u_i = 0 \quad (\text{B.2})$$

avec $1 \leq i \leq 3$.

Les calculs montrent que la relation (B.2) équivaut à :

$$(\text{B.2}) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{p,l=1}^2 C_{ipjl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_p \partial x_l} + \sum_{l=1}^2 C_{i3jl} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3 \partial x_l} + \sum_{p=1}^2 C_{ipj3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_p \partial x_3} + C_{i3j3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} \right] + \rho \omega^2 u_i = 0$$

$$(\text{B.2}) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{p,l=1}^2 C_{ipjl} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_p \partial x_l} + ik \sum_{l=1}^2 C_{i3jl} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + ik \sum_{p=1}^2 C_{ipj3} \frac{\partial U_j}{\partial x_p} - k^2 C_{i3j3} U_j \right] + \rho \omega^2 U_i = 0$$

$$(\text{B.2}) \Leftrightarrow C_{ipjl} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_p \partial x_l} + i(C_{i3jp} + C_{ipj3}) \frac{\partial(kU_j)}{\partial x_p} - kC_{i3j3}(kU_j) + \rho \omega^2 U_j \delta_{ij} = 0. \quad (\text{B.3})$$

En faisant de même avec l'équation (I.23), les composantes T_i du vecteur de contraintes $\mathbf{T} = \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}$ s'expriment sous la forme :

$$T_i = \sum_{j,p,l=1}^3 C_{ipjl} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_p = \sum_{j=1}^3 \left[\sum_{p,l=1}^2 C_{ipjl} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_p + \sum_{p=1}^2 C_{ipj3} \frac{\partial U_j}{\partial x_3} n_p + \sum_{l=1}^2 C_{i3jl} \frac{\partial U_j}{\partial x_p} n_3 + C_{i3j3} \frac{\partial U_j}{\partial x_3} n_3 \right]. \quad (\text{B.4})$$

En prenant le cas où la composante n_3 du vecteur \mathbf{n} est nulle, alors (B.4) peut s'écrire facilement sous la forme :

$$T_i = C_{ipjl} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_p + iC_{ipj3} (kU_j) n_p \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{B.5})$$

avec $1 \leq i, j \leq 3$, $1 \leq l, p \leq 2$ et une sommation sur j, l, p .

Par ailleurs, Le formalisme utilisé dans COMSOL MULTIPHYSICS pour résoudre par éléments finis le problème aux valeurs propres λ d'un système est :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (c \nabla c + \alpha u - \gamma) - a u - \beta \cdot \nabla u + d_a \lambda u - e_a \lambda^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ n \cdot (c \nabla c + \alpha u - \gamma) + q u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

où les différentes matrices sont définies dans la section I.4.1.

Dans le cas où les matrices c, α et γ sont uniformes dans le domaine Ω , alors l'équation (B.1) peut se réécrire sous la forme indicielle suivante :

$$\begin{cases} c_{ijql} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_q \partial x_l} + (\alpha_{ijq} - \beta_{ijq}) \frac{\partial u_j}{\partial x_q} - a_{ij} u_j + \lambda d_{ij} u_j - \lambda^2 e_{ij} u_j = 0 & \text{dans } \Omega \\ g_i = c_{ijql} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_q + \alpha_{ijq} u_j n_q - \gamma_{iq} n_q + q_{ij} u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

où $1 \leq i, j \leq m$, $1 \leq l, q \leq n$ et il y a une sommation implicite sur j, q, l , m est le nombre de variables u_1, \dots, u_m et n est le nombre de dimension spatiale x_1, \dots, x_n .

L'identification des coefficients matriciels du système (B.7) par rapport à ceux du système (B.1) nécessite de définir le vecteur de déplacement u sous la forme $u = (U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3)$ avec $V_i = kU_i$.

En comparant les expressions (B.5) et (B.7) :

$$\begin{aligned} C_{ipjl} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_p + iC_{ipj3} V_j n_p &= T_i \\ c_{ijpl}^m \frac{\partial U_j}{\partial x_l} n_p + \alpha_{ijp}^{uv} V_j n_p &= g_i \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

et celles données par les équations (B.3) et (B.7) :

$$\begin{aligned} C_{ipjl} \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_p \partial x_l} + i(C_{i3jp} + C_{ipj3}) \frac{\partial V_j}{\partial x_p} - kC_{i3j3} V_j + \rho \omega^2 U_j \delta_{ij} - k\rho \omega^2 \delta_{ij} U_j + \rho \omega^2 \delta_{ij} V_j &= 0 \\ c_{ijpl}^m \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_p \partial x_l} + (-\beta_{ijp}^{uv} + \alpha_{ijp}^{uv}) \frac{\partial V_j}{\partial x_p} + \lambda d_{ij}^{uv} V_j + \lambda d_{ij}^{vu} U_j - a_{ij}^m U_j - a_{ij}^{vv} V_j &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

nous remarquons que les matrices γ, q et e_a sont nulles. Quant aux autres matrices, leurs expressions sont données par :

- la matrice c est de la forme :

$$c = \begin{bmatrix} c_{11}^{uu} & c_{12}^{uu} & c_{13}^{uu} & & \\ c_{21}^{uu} & c_{22}^{uu} & c_{23}^{uu} & c^{uv} = 0 & \\ c_{31}^{uu} & c_{32}^{uu} & c_{33}^{uu} & & \\ & c^{vu} = 0 & & c^{vv} = 0 & \end{bmatrix} \quad \text{avec } c_{pqjl}^{uu} = C_{pqjl} \quad (\text{B.10})$$

avec par exemple,

$$c_{11}^{uu} = \begin{bmatrix} c_{1111}^{uu} & c_{1112}^{uu} \\ c_{1121}^{uu} & c_{1122}^{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} \\ C_{1211} & C_{1212} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} \\ C_{61} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

- la matrice α est donnée par :

$$\alpha = \begin{bmatrix} & & \alpha_{11}^{uv} & \alpha_{12}^{uv} & \alpha_{13}^{uv} \\ \alpha^{uu} = 0 & & \alpha_{21}^{uv} & \alpha_{22}^{uv} & \alpha_{23}^{uv} \\ & & \alpha_{31}^{uv} & \alpha_{32}^{uv} & \alpha_{33}^{uv} \\ & \alpha^{vu} = 0 & & \alpha^{vv} = 0 & \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha_{pqj}^{uv} = iC_{pqj3} \quad (\text{B.12})$$

avec par exemple,

$$\alpha_{11}^{uv} = \begin{vmatrix} \alpha_{111}^{uv} \\ \alpha_{112}^{uv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iC_{1113} \\ iC_{1213} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} iC_{15} \\ iC_{65} \end{vmatrix} \quad (\text{B.13})$$

- la matrice β est donnée par :

$$\beta = \begin{bmatrix} & & \beta_{11}^{uv} & \beta_{12}^{uv} & \beta_{13}^{uv} \\ \beta^{uu} = 0 & & \beta_{21}^{uv} & \beta_{22}^{uv} & \beta_{23}^{uv} \\ & & \beta_{31}^{uv} & \beta_{32}^{uv} & \beta_{33}^{uv} \\ & \beta^{vu} = 0 & & \beta^{vv} = 0 & \end{bmatrix} \quad \text{avec } \beta_{pqj}^{uv} = -iC_{p^3 jq} \quad (\text{B.14})$$

- la matrice d_a est donnée par :

$$d_a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & d_{11}^{uv} & d_{12}^{uv} & d_{13}^{uv} \\ & d_a^{uu} = 0 & & d_{21}^{uv} & d_{22}^{uv} & d_{23}^{uv} \\ & & & d_{31}^{uv} & d_{32}^{uv} & d_{33}^{uv} \\ \hline -\rho\omega^2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\rho\omega^2 & 0 & d_a^{vv} = 0 & & \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & & & \end{array} \right] \text{ avec } d_{ij}^{uv} = -C_{i3j3} \quad (\text{B.15})$$

où :

$$d_a^{uv} = \begin{bmatrix} -C_{1313} & -C_{1323} & -C_{1333} \\ -C_{2313} & -C_{2323} & -C_{2333} \\ -C_{3313} & -C_{3323} & -C_{3333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{55} & -C_{54} & -C_{53} \\ -C_{45} & -C_{44} & -C_{43} \\ -C_{35} & -C_{34} & -C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

- et enfin la matrice a est donnée par :

$$a = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -\rho\omega^2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -\rho\omega^2 & 0 & a^{uv} = 0 & & \\ 0 & 0 & -\rho\omega^2 & & & \\ \hline & & & -\rho\omega^2 & 0 & 0 \\ & a^{vu} = 0 & & 0 & -\rho\omega^2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -\rho\omega^2 \end{array} \right] \quad (\text{B.17})$$

L'entrée de ces différentes matrices dans COMSOL MULTIPHYSICS permet, pour chaque pulsation propre ω , de résoudre numériquement le système (B.7). Cette résolution aboutit à la détermination des modes propres U_p associés chacun à un nombre d'onde k^p .

Annexe C

Calcul de la valeur moyenne sur une période électromagnétique du flux du vecteur de Poynting

Cette annexe a pour objectif de montrer les différentes étapes ayant permis d'exprimer la valeur moyenne sur une période T_0 du flux de densité de puissance électromagnétique.

Le spectre de la densité de puissance électromagnétique s'écrit sous la forme :

$$\tilde{\pi}(x, y, z, \omega) = \frac{\sin^2(k_x x)}{2\pi} [\tilde{F}(z, \omega) \tilde{E}_i(\omega) * \tilde{G}(z, \omega) Y(\omega) \tilde{E}_i(\omega)] \quad (\text{C.1})$$

où * désigne le produit de convolution entre les deux champs \tilde{E}_y et \tilde{H}_x , $\tilde{E}_i(\omega)$ le spectre du champ électrique incidente et monochromatique, de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$, pouvant être exprimée sous la forme :

$$\tilde{E}_i(\omega) = \tilde{E}_i \frac{\pi}{i} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (\text{C.2})$$

avec δ la fonction de Dirac.

En remplaçant la relation (C.2) dans (C.1), la relation (C.1) précédente devient :

$$\tilde{\pi} = -\frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} (\tilde{F}(z, \omega_0) \delta(\omega - \omega_0) - \tilde{F}(z, -\omega_0) \delta(\omega + \omega_0) \tilde{E}_i(\omega)) * \\ (Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0) \delta(\omega - \omega_0) - Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) \delta(\omega + \omega_0)) \end{array} \right]. \quad (\text{C.3})$$

En utilisant les propriétés du produit de convolution, la relation (C.3) se réécrit sous la forme :

$$\tilde{\pi} = -\frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \tilde{F}(z, \omega_0) Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0) \delta(\omega - 2\omega_0) \\ + \tilde{F}(z, -\omega_0) Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) \delta(\omega + 2\omega_0) \\ - (\tilde{F}(z, \omega_0) Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) + \tilde{F}(z, -\omega_0) Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0)) \delta(\omega) \end{array} \right]. \quad (\text{C.4})$$

Ensuite, en appliquant une transformation de Fourier inverse à l'équation (C.4), nous montrons que la densité de Puissance instantanée peut se mettre sous la forme :

$$\tilde{\pi}(x,z,t) = -\frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{4} \left[\begin{array}{l} \tilde{F}(z, \omega_0) Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0) e^{2i\omega_0 t} \\ + \tilde{F}(z, -\omega_0) Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) e^{-2i\omega_0 t} \\ - (\tilde{F}(z, \omega_0) Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) + \tilde{F}(z, -\omega_0) Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0)) \end{array} \right]. \quad (C.5)$$

La valeur moyenne de la densité de puissance électromagnétique sur une période T_0 de l'onde électromagnétique est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(x,z) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \pi(x,z,t) dt \\ &= \frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{4} [\tilde{F}(z, \omega_0) Y(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) + \tilde{F}(z, -\omega_0) Y(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0)]. \end{aligned} \quad (C.6)$$

Sachant que l'admittance $Y(\omega) = \frac{k_z(\omega)}{\omega \mu_0}$, alors la relation (C.6) devient :

$$\bar{\pi}(x,z) = \frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{4 \omega_0 \mu_0} [\tilde{F}(z, -\omega_0) k_z^*(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0) - \tilde{F}(z, \omega_0) k_z^*(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0)]. \quad (C.7)$$

La dérivée de la relation (C.7) par rapport à z s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\pi}(x,z)}{\partial z} = K(x) \left[\begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{F}(z, -\omega_0)}{\partial z} k_z^*(\omega_0) \tilde{G}(z, \omega_0) + \tilde{F}(z, -\omega_0) k_z^*(\omega_0) \frac{\partial \tilde{G}(z, \omega_0)}{\partial z} \\ - \frac{\partial \tilde{F}(z, \omega_0)}{\partial z} k_z^*(-\omega_0) \tilde{G}(z, -\omega_0) - \tilde{F}(z, \omega_0) k_z^*(-\omega_0) \frac{\partial \tilde{G}(z, -\omega_0)}{\partial z} \end{array} \right] \quad (C.8)$$

$$\text{où } K(x) = \frac{\sin^2(k_x x) \pi E_i^2}{4 \omega_0 \mu_0}.$$

En utilisant les relations données dans l'équation (C.9),

$$\frac{\partial \tilde{F}(z, \omega)}{\partial z} = -i k_z^* \tilde{G}(z, \omega), \quad \frac{\partial \tilde{G}(z, \omega)}{\partial z} = -i k_z \tilde{F}(z, \omega) \quad (C.9)$$

la relation (C.8) devient :

$$\frac{\partial \bar{\pi}(x,z)}{\partial z} = i K(x) [\tilde{F}(z, \omega_0) \tilde{F}(z, -\omega_0) (k_z^{*2}(-\omega_0) - k_z^{*2}(\omega_0))]. \quad (C.10)$$

Puis en utilisant les relations (C.11) que doivent vérifier les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde k_z^* ,

$$k_z'(-\omega_0) = -k_z'(\omega_0), \quad k_z''(-\omega_0) = k_z''(\omega_0) \quad (C.11)$$

nous obtenons finalement que le flux de densité de puissance électromagnétique peut s'écrire simplement sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\pi}(x,z)}{\partial z} = iK(x) \left[\tilde{F}(z, \omega_0) \tilde{F}(z, -\omega_0) (4ik'_z(\omega_0)k''_z(\omega_0)) \right]. \quad (\text{C.12})$$

Annexe D

Méthodes pour obtenir les expressions analytiques des solutions particulières de l'équation de Bessel inhomogène d'ordre 1.

Cette annexe a pour objectif de montrer les étapes permettant d'obtenir l'expression analytique de la solution particulière satisfaisant l'équation de Bessel inhomogène d'ordre 1.

D.1. Cas d'un anneau

Considérons l'équation de Bessel inhomogène d'ordre 1 suivante :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \left(k_L^2 - \frac{1}{r^2} \right) \tilde{u}_r = \tilde{A}(\omega) \delta(R_{Th} - r) \quad (D.1)$$

où $\delta(r)$ est la fonction de Dirac.

Nous remarquons que le second membre est nul presque partout. De ce fait, une solution particulière simple $\tilde{u}_{r,p}^A(r, \omega)$ de l'équation (D.1) peut être cherchée comme une combinaison linéaire des fonctions de Bessel solutions de l'équation homogène associée. Donc, nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$\tilde{u}_{r,p}^A(r) = [\gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r)] H(R_{Th} - r). \quad (D.2)$$

La forme particulière de l'équation de Bessel (D.1) impose que la dérivée seconde de $\tilde{u}_{r,p}^A$ présente la même discontinuité en $r = R_{Th}$ que celle du terme de droite. Par conséquent, la dérivée première $\frac{\partial \tilde{u}_{r,p}^A}{\partial r}$ doit présenter un saut. Or, l'expression de cette dérivée s'écrit simplement sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{r,p}^A(r)}{\partial r} &= [\gamma_1 J_1'(k_L r) + \gamma_2 Y_1'(k_L r)] H(R_{Th} - r) \\ &\quad - [\gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r)] \delta(R_{Th} - r) \end{aligned} \quad (D.3)$$

où $' = \frac{\partial}{\partial r}$.

La condition qu'elle doit vérifiée peut est décrite mathématiquement par le système d'équations :

$$\begin{cases} \gamma_1 J_1'(k_L r) + \gamma_2 Y_1'(k_L r) = A(\omega), & r = R_{Th} \\ \gamma_1 J_1(k_L r) + \gamma_2 Y_1(k_L r) = 0 & r = R_{Th} \end{cases} \quad (D.4)$$

dont les solutions sont données par les expressions :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{A(\omega)}{J_1'(k_L r)Y_1(k_L r) - J_1(k_L r)Y_1'(k_L r)} Y_1(k_L r) & r = R_{Th} \\ \gamma_2 = -\frac{A(\omega)}{J_1'(k_L r)Y_1(k_L r) - J_1(k_L r)Y_1'(k_L r)} J_1(k_L r) & r = R_{Th}. \end{cases} \quad (D.5)$$

Le terme au dénominateur est le Wronskien $W(J_1, Y_1)$ des deux fonctions de Bessel. En utilisant son identité :

$$W(J_1, Y_1) := J_1'(k_L r)Y_1(k_L r) - J_1(k_L r)Y_1'(k_L r) = \frac{2}{\pi r}, \quad r = R_{Th} \quad (D.6)$$

nous obtenons finalement les expressions simplifiées suivantes :

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{\pi R_{Th} A(\omega)}{2} Y_1(k_L R_{Th}) \\ \gamma_2 = -\frac{\pi R_{Th} A(\omega)}{2} J_1(k_L r). \end{cases} \quad (D.7)$$

D.2. Cas d'un disque

Nous remarquons directement que la solution particulière donnée par la relation (D.2) n'est pas adaptée au cas d'un disque puisqu'elle ne permet pas d'exploiter la condition aux limites imposées par la contrainte radiale en $r = R_2$. D'une façon plus générale, cette solution particulière peut être cherchée sous la forme :

$$\tilde{u}_{r,p}^D(r) = \left[\kappa_1 J_1(k_L r) H(R_{Th} - r) + \kappa_2 Y_1(k_L r) H(r - R_{Th}) \right]. \quad (D.8)$$

Dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial \tilde{u}_{r,p}^D}{\partial r}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{u}_{r,p}^D}{\partial r} = \left[\begin{array}{l} \kappa_1 J_1'(k_L r) H(R_{Th} - r) + \kappa_2 Y_1'(k_L r) H(r - R_{Th}) \\ -\kappa_1 J_1(k_L r) \delta(R_{Th} - r) + \kappa_2 Y_1(k_L r) \delta(R_{Th} - r) \end{array} \right]. \quad (D.9)$$

En suivant le même raisonnement que dans la section précédente, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\kappa_1 J_1'(k_L r) + \kappa_2 Y_1'(k_L r) = A(\omega), & r = R_{Th} \\ -\kappa_1 J_1(k_L r) + \kappa_2 Y_1(k_L r) = 0, & r = R_{Th}, \end{cases} \quad (D.10)$$

dont les solutions sont données par :

$$\begin{cases} \kappa_1 = -\frac{\pi R_{Th} A(\omega)}{2} Y_1(k_L R_{Th}) \\ \kappa_2 = \frac{\pi R_{Th} A(\omega)}{2} J_1(k_L r). \end{cases} \quad (D.11)$$

Notons à titre indicatif que cette solution pourrait être utilisée dans le cas de l'anneau.

Annexe E

Validation des modèles analytiques d'un anneau et d'un disque soumis à une distribution uniforme de la température

Cette annexe a pour objectif de montrer comment à partir de l'expression du champ de déplacement radial donnée par la relation (IV.9), il est possible de retrouver celle correspondant au cas où l'anneau serait soumis à une distribution uniforme de la température sur tout son volume. Notons que l'expression de ce dernier est connue analytiquement dans la littérature [III.1].

E.1 Cas d'un anneau

Rappelons que l'expression analytique (IV.9) du spectre du champ de déplacement radial s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r(r) = & \frac{F_1(R_1)[-Y(R_2)J_1(k_L r) + J(R_2)Y_1(k_L r)]}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)} \\ & + [\gamma^{Y_1}J_1(k_L r) - \gamma^{J_1}Y_1(k_L r)]H(R_{Th} - r) \end{aligned} \quad (E.1)$$

où : $F_1(r) = 2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega) - [\gamma^{Y_1}J(r) - \gamma^{J_1}Y(r)]H(R_{Th} - r)$,

$$Y(r) = k_L Y_0(k_L r) + \left(\frac{2\nu}{r}\right)Y_1(k_L r) - k_L Y_2(k_L r),$$

$$J(r) = k_L J_0(k_L r) + \left(\frac{2\nu}{r}\right)J_1(k_L r) - k_L J_2(k_L r),$$

$$\gamma^{Y_1} = -\frac{\pi R_2}{2}(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega)Y_1(k_L R_2),$$

$$\gamma^{J_1} = \frac{\pi R_2}{2}(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega)J_1(k_L R_2).$$

Partant de cette relation, il est possible d'exprimer le champ de déplacement radial dans le cas où l'anneau serait soumis à une distribution uniforme de la température sur tout son volume en choisissant $R_2 = R_{Th}$. Dans ce cas précis, nous avons que $H(R_{Th} - r) = 1$ pour tout r et le déplacement radial \tilde{u}_r peut se réécrire sous la forme :

$$\tilde{u}_r(r) = \frac{F_1(R_1)[-Y(R_2)J_1(k_L r) + J(R_2)Y_1(k_L r)]}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)} + [\gamma^{Y_1} J_1(k_L r) - \gamma^{J_1} Y_1(k_L r)] \quad (E.2)$$

avec $F_1(r) = 2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max} \tilde{f}(\omega) - [\gamma^{Y_1} J(r) - \gamma^{J_1} Y(r)]$,

ou encore sous la forme :

$$\tilde{u}_r(r) = \frac{B_1 J_1(k_L r) - B_2 Y_1(k_L r)}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)} \quad (E.3)$$

avec : $B_1 = [\gamma^{Y_1} (Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)) - F_1(R_1)Y(R_2)]$,

$B_2 = [\gamma^{J_1} (Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)) - F_1(R_1)J(R_2)]$.

Nous constatons que pour se ramener à une expression semblable à celle donnée dans la référence [III.1], il est important de simplifier les expressions de B_1 et de B_2 . Dans la suite, nous n'allons développer que les différentes étapes permettant d'obtenir une expression simple de B_1 . Celles de B_2 peuvent être adaptées facilement en procédant de la même manière. En utilisant l'expression de $F_1(R_1)$ donnée par la relation (E.2) et en développant l'expression de B_1 donnée par la relation (E.3), il est facile de noter que la quantité B_1 peut se réécrire simplement sous la forme :

$$B_1 = [Y(R_1)(\gamma^{Y_1} J(R_2) - \gamma^{J_1} Y(R_2)) - 2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max} \tilde{f}(\omega)Y(R_2)]. \quad (E.4)$$

En réécrivant les fonctions $J(r)$ et $Y(r)$ sous les formes :

$$\begin{aligned} J(r) &= 2J_1'(k_L r) + \frac{2\nu}{r} J_1(k_L r) \\ Y(r) &= 2Y_1'(k_L r) + \frac{2\nu}{r} Y_1(k_L r) \end{aligned} \quad (E.5)$$

et en utilisant l'identité (E.6) du Wronskien des fonctions de Bessel en $r = R_{Th}$:

$$J_1(k_L R_{Th})Y_1'(k_L R_{Th}) - J_1'(k_L R_{Th})Y_1(k_L R_{Th}) = \frac{2}{\pi R_{Th}}; \quad R_{Th} = R_2; \quad ' = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (E.6)$$

nous obtenons que la quantité B_1 peut finalement s'exprimer sous la forme :

$$B_1 = 2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max} \tilde{f}(\omega)[Y(R_1) - Y(R_2)]. \quad (E.7)$$

En procédant de la même manière, il est facile de montrer que la quantité B_2 peut se réécrire simplement sous la forme :

$$B_1 = 2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega)[J(R_1) - J(R_2)]. \quad (E.8)$$

En remplaçant ces quantités dans la relation (E.3), nous retrouvons l'expression analytique :

$$\tilde{u}_r(r) = \frac{2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega)}{Y(R_1)J(R_2) - Y(R_2)J(R_1)} \left([Y(R_1) - Y(R_2)]J_1(k_L r) - [J(R_1) - J(R_2)]Y_1(k_L r) \right) \quad (E.9)$$

du spectre des déplacements radiaux d'un anneau soumis uniformément à une distribution de température. Cette expression est semblable à celle prédites dans la référence [III.10] page IV-10.

E.2 Cas d'un disque plein

Comme précédemment, nous voulons comparer dans cette partie l'expression du modèle analytique (III.13) à celle présente dans la littérature [III.1] dans le cas des vibrations radiales d'un disque plein soumis uniformément à une distribution uniforme de la température. Partant de l'expression du modèle analytique (III.13) rappelée ci dessous :

$$\tilde{u}_r(r) = -\gamma^J \frac{Y(R)}{J(R)} J_1(k_L r) + [\gamma^Y J_1(k_L r)H(R_{Th} - r) + \gamma^J Y_1(k_L r)H(r - R_{Th})] \quad (E.10)$$

et en se plaçant dans la configuration d'un disque uniformément chauffé (c'est-à-dire $R_{Th} = R$), le champ de déplacement radiale donnée par la relation (E.10) se réécrit simplement sous la forme :

$$\tilde{u}_r(r) = -\gamma^J \frac{Y(R)}{J(R)} J_1(k_L r) + \gamma^Y J_1(k_L r). \quad (E.11)$$

Ainsi, en utilisant, les relations (E.5) et (E.6), nous obtenons que l'expression du déplacement peut se mettre sous la forme (E.12). Notons qu'elle est similaire à celle donnée dans la référence [III.10] page IV-12 :

$$\tilde{u}_r(r) = \frac{2(1 + \nu)\alpha\theta_{Max}\tilde{f}(\omega)}{J(R)} J_1(k_L r). \quad (E.12)$$

