No. ordre: 2010-27

THESE

présentée par

Julie VAREILLES

pour l'obtention du grade de

Docteur
Spécialité: Mécanique

Etude de l'influence de la distribution de la taille des grains sur le seuil d'érosion des lits de sédiments non cohésifs par la méthode DEM

soutenue publiquement le 13 octobre 2010 devant le jury constitué de:

M. Philippe Belleudy	Professeur, Université Joseph Fourier – Grenoble 1 (Rapporteur)
M. François Charru	Professeur, Université Paul Sabatier – Toulouse 3
M. Richard Perkins	Professeur, Ecole Centrale de Lyon (Directeur de thèse)
M. Mike Reeks	Professeur, Université de Newcastle upon Tyne (Rapporteur)
M. Nicolas Rivière	Professeur, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (Président)

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509, Ecole Centrale de Lyon – Université Claude Bernard Lyon 1 – Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

remerciements

Je remercie, tout d'abord, Richard Perkins, qui a bien voulu me diriger pendant ce doctorat, pour la confiance et la liberté qu'il m'a accordées, pour ses conseils avisés et pour sa disponibilité tout au long de ces années.

Je remercie également Philippe Belleudy et Mike Reeks pour avoir accepté de rapporter ce travail de doctorat, ainsi que François Charru et Nicolas Rivière de faire partie de mon jury de soutenance. Je les remercie en particulier pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour la pertinence de leurs commentaires.

Je remercie, enfin, Bethsabée, Emile, Jeanne, Lucile, Marcel, Raphaël, Serge, Sophie et Stéphane pour leur patience et leurs nombreux encouragements.

résumé

Etude de l'influence de la distribution de la taille des grains sur le seuil d'érosion des lits de sédiments non-cohésifs par la méthode DEM.

Les modèles d'érosion et de transport couramment utilisés sont construits à partir de données empiriques obtenues avec des sédiments de granulométries quasi-uniformes. Or, il y a beaucoup de situations pour lesquelles la granulométrie des sédiments n'est pas uniforme. Les expériences réalisées en laboratoire et dans les rivières montrent que l'érosion et le transport des sédiments dépendent de la dispersion du diamètre des grains. Cette observation est à l'origine de cette thèse qui a pour objectif l'étude de l'influence de la distribution du diamètre des grains sur le transport de sédiments. Cette influence est envisagée à partir du développement d'un modèle numérique. La prédiction de l'érosion et du transport de sédiments tient de la résolution de deux problèmes : le premier est lié à l'écoulement au dessus du lit, le second à la mise en mouvement du sédiment. Le modèle développé détermine explicitement le mouvement des grains dans le lit de sédiments lorsque sa face supérieure est soumise à un écoulement. Pour cela, il mobilise la Méthode des Eléments Discrets (DEM), développée par Cundall et Strack (1979). Afin de reproduire l'effet de la topographie du lit sur le champ de vitesse du fluide, le modèle DEM est couplé avec le modèle d'écoulement FLOWSTAR. Le modèle FLOWSTAR est proposé par Carruthers et al. (2004) pour déterminer l'écoulement moyen dans une couche limite turbulente atmosphérique au-dessus de collines de faible pente. Le modèle numérique développé est appliqué à différents types d'arrangements de grains. Il permet d'estimer l'évolution du débit de sédiments au cours du temps pour différentes vitesses de frottement. Les seuils d'érosion des lits et l'évolution des débits de sédiments en fonction de la vitesse de frottement sont conformes à l'expérience. L'utilisation de l'approche DEM permet par ailleurs de connaître le comportement des grains dans et à la surface du lit au cours du temps (profil vertical de la vitesse des grains à l'intérieur de l'arrangement par exemple).

Mots clés : sédiments non cohésifs, seuil d'érosion, transport, distribution du diamètre des grains, Méthode des Eléments Discrets, modèle FLOWSTAR.

abstract

Study of the influence of the grain size distribution on the erosion threshold for non-cohesive sediments, using the Discrete Element Method

The models for the erosion and transport of sediments that are currently used rely on empirical data obtained from experiments with sediments having a uniform or unimodal distribution. But there are many practical situations for which the size distribution is significantly different from this assumed distribution, and laboratory and field experiments have shown that the erosion threshold and the transport rate depend on the size distribution and the range of particle sizes. The aim of this study is therefore to investigate and explain the influence of size distribution on erosion and transport rates, using a numerical model that has been developed specifically to study this problem. The sediment bed is assumed to consist of individual, non-cohesive, spherical particles, and the physical interactions between the particles are modelled explicitly, using the Discrete Element Method developed by Cundall and Strack (1979). The flow above the bed is computed using the FLOWSTAR model (Carruthers et al 2000) which was originally developed to compute the flow in the atmospheric boundary layer above arbitrary topography. These two models are coupled, and the resulting numerical code has been used to investigate the temporal evolution of erosion and transport rates for different sediment size distributions. The computed values of threshold shear and transport rates agree well with experimental measurements, and the DEM provides additional information concerning the temporal evolution of the particle size distribution within the bed.

Key words : non-cohesive sediments, erosion threshold, transport, grain size distribution, Discrete Element Method, FLOWSTAR model.

table des matières

introduction **1**

I introduction à la modélisation de l'érosion et du transport des sédiments **5**

1 généralités **5**
1.1 sédiments . . . 5
1.1.1 distribution de la taille des grains des sédiments . . . 9
1.1.2 érosion et le transport . . . 13
1.2 écoulement au-dessus du lit de sédiments . . . 15

2 modèles d'érosion **19**
2.1 définition du seuil d'érosion . . . 19
2.2 modèle de White (1940) . . . 20
2.3 critère de Shields (1936) . . . 22
2.4 application aux sédiments dispersés . . . 24

3 modèles de transport **31**
3.1 modèles déterministes . . . 31
3.1.1 modèle de Meyer-Peter et Müller (1948) . . . 31
3.1.2 modèle de Engelund et Hansen (1967) . . . 32
3.1.3 modèle de Ackers et White (1973) . . . 32
3.1.4 modèle de van Rijn (1984) . . . 34
3.1.5 application des modèles de transport . . . 36
3.2 modèles statistiques . . . 36
3.3 application aux sédiments dispersés . . . 37
3.3.1 modèle de Proffitt et Sutherland (1983) . . . 38
3.3.2 modèle de Samaga *et al.* (1986a,b) . . . 39
3.3.3 modèle de Kleinhans et van Rijn (2002) . . . 40

4 objectifs et méthodologie **43**
4.1 principes et applications de la Méthode des Eléments Discrets (DEM) . . . 44
4.2 hypothèses de travail . . . 46
4.3 objectifs . . . 47

II méthode des éléments discrets **51**

1 équation de mouvement d'une particule solide **51**
1.1 force de traînée . . . 52
1.1.1 influence de la non-uniformité de l'écoulement . . . 53
1.1.2 influence de la rotation de la particule solide . . . 55
1.1.3 effet de la présence de parois au voisinage de la particule solide . . . 56

1.2 force de portance . . . 58
1.2.1 force de portance créée par la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement 58
1.2.2 force de portance induite par la rotation de la particule solide appelée force de Magnus . . . 64
1.2.3 effet de la présence de parois au voisinage de la particule solide . . . 66
1.3 force d'accélération . . . 68
1.4 force histoire . . . 69
1.5 moment de la force fluide . . . 71
1.6 modélisation de la trajectoire des grains . . . 72
1.6.1 rotation du grain . . . 72
1.6.2 force exercée par le fluide . . . 73
1.6.3 cinq modèles de trajectoire . . . 80
1.6.4 comparaison des modèles de trajectoire . . . 86
1.7 conclusion . . . 90

2 modélisation des interactions mécaniques entre les grains 93
2.1 modèles *hard sphere* . . . 95
2.1.1 collision d'une particule sphérique avec une paroi . . . 97
2.1.2 collision entre deux sphères . . . 98
2.1.3 application à des écoulements diphasiques dans des conduites et dans des canaux . . . 99
2.1.4 application au mouvement de saltation du grain . . . 101
2.2 modèles *soft sphere* . . . 102
2.2.1 modèle de Cundall et Strack (1979) . . . 103
2.2.2 collision directe entre deux sphères . . . 104
2.2.3 coefficients du modèle de collision . . . 106
2.3 application des modèles . . . 110
2.4 conclusion . . . 119

3 application de la méthode DEM à la déposition des lits de sédiments 121
3.1 méthode de déposition . . . 121
3.2 dimensions des lits de sédiments . . . 124
3.3 exemples de lits de sédiments . . . 125

III érosion et transport des lits de sédiments 129

1 modèle d'écoulement 129
1.1 modélisation de l'écoulement . . . 131
1.1.1 transformée de Fourier . . . 132
1.1.2 expression de la perturbation de la vitesse . . . 133
1.1.3 coefficients du modèle . . . 135
1.2 écoulement autour d'une colline isolée . . . 137
1.3 écoulement au-dessus d'une dune . . . 143
1.4 écoulement au-dessus du lit de sédiments . . . 149
1.5 conclusion . . . 154

2 modèle de transport 155
2.1 principes du modèle . . . 155
2.2 mouvement des grains . . . 160
2.2.1 transport de sédiments . . . 166
2.2.2 débit moyen de sédiments . . . 168

2.3 influence des coefficients du modèle . . . 173
2.4 conclusion . . . 177

3 influence de la distribution de la taille des grains 179
3.1 sédiments étudiés . . . 179
3.2 transport des sédiments . . . 184
3.2.1 sédiments mono-dispersés . . . 185
3.2.2 sédiments bi-dispersés . . . 192
3.2.3 sédiments « faiblement dispersés » . . . 198
3.2.4 sédiments « dispersés » . . . 204
3.2.5 comparaison avec les expériences et les simulations existantes . . . 208
3.3 mouvement des grains . . . 217
3.3.1 réorganisation initiale des grains . . . 217
3.3.2 débit de sédiments dans les directions latérale et verticale . . . 223
3.3.3 vitesse des grains en fonction de la distance à la surface . . . 228
3.4 organisation des grains dans l'arrangement en fonction de leur taille . . . 235
3.4.1 observations du tri granulométrique vertical . . . 235
3.4.2 vitesse et trajectoire des grains en fonction de leur diamètre . . . 239
3.4.3 transport des classes de grains . . . 243
3.4.4 transferts de grains à l'intérieur de l'arrangement . . . 251
3.5 conclusion . . . 253

conclusions et perspectives 259

liste des symboles 263

annexe : application du modèle FLOWSTAR à un écoulement autour d'une colline gaussienne 281

bibliographie 283

introduction

Les situations pour lesquelles il est nécessaire d'estimer le transport de sédiments sont diverses et nombreuses. Par exemple, la connaissance du transport de sédiments permet de déterminer l'impact des activités et des aménagements des cours d'eau (construction de digues et de barrages) sur leur évolution morphologique. Il s'agit alors de prévenir les dépositions et les érosions éventuelles de sédiments. Par ailleurs, les profils des rivières évoluent au cours du temps et l'estimation du transport de sédiments est utile pour la gestion de ces rivières ainsi que celle des ouvrages hydrauliques. Elle permet notamment de prévoir l'ensablement des canaux et des retenues en amont des barrages, de planifier les opérations de dragage et de vidange. Lors des opérations de vidange, une certaine quantité de sédiments est évacuée en aval de la retenue ; parmi les sédiments transportés, les plus petits sont souvent pollués en métaux lourds. L'estimation du transport de sédiments est ici nécessaire pour évaluer le risque de pollution des cours d'eau. L'estimation du transport de sédiments sert également à prédire le comportement des cours d'eau et des ouvrages hydrauliques lors d'événements pluvieux importants ; cette prédiction permet de dimensionner ces ouvrages et d'élaborer des plans d'occupation des sols (plan local d'urbanisme, plan de prévention des risques naturels). Dans tous les cas, l'ingénieur utilise, pour déterminer l'érosion et le transport de sédiments, des formules empiriques établies à partir de sédiments de granulométrie faiblement dispersée (qualifiée de standard). Or, très souvent, la distribution des sédiments considérés (en aval des barrages, dans les cours d'eau) est dispersée, voire bi-modale et les formules empiriques traditionnellement utilisées ne sont pas *a priori* valides. En effet, les grains de différentes tailles interagissent et influent sur le transport de sédiments et sur l'organisation des grains dans le lit. Par exemple, à sa surface, les petits grains sont sous-exposés à l'écoulement ; inversement, les gros grains sont surexposés. De plus, dans les lits composés de sable et de gravier, le processus d'érosion s'accompagne, pour des vitesses de frottement faibles, d'un transport sélectif du sédiment : seules les particules de sable sont en mouvement. La surface se recouvre d'une forme de pavage constitué par les plus gros grains qui protège le lit de l'érosion. Les interactions entre les classes des grains dépendent de la distribution du diamètre des grains.

L'influence de cette distribution sur le transport de sédiments est généralement étudiée à partir d'expériences réalisées en laboratoire ou dans des rivières et de mesures de débits de sédiments. Ces expériences (Misri *et al.*, 1984 ; Kuhnle, 1993 ; Wilcock *et al.*, 2001) n'ont cependant pas permis, jusqu'à présent, d'identifier précisément les mécanismes à l'origine des interactions entre les classes de grains et de proposer une modélisation réellement satisfaisante. Pour ces raisons, l'influence de la distribution du diamètre est dans cette thèse envisagée à partir du développement d'un modèle numérique. La prédiction de l'érosion et du transport des sédiments tient de la résolution de deux problèmes : le premier est lié à l'écoulement dans le cours d'eau et le second à la mise en mouvement du sédiment. Ces deux problèmes appartiennent à deux domaines distincts de la mécanique : le premier dépend de la mécanique des fluides et le second de la mécanique du solide. Cette distinction est prégnante dans la représentation habituelle de l'érosion et du transport (typiquement, le logiciel Télémac). Cette représentation articule une modélisation numérique de l'écoulement (basée sur la résolution des équations de Saint-Venant) et une modélisation empirique d'érosion et de transport. Cette représentation a montré ses limites et n'a pas été reprise dans cette thèse. Le modèle développé détermine explicitement le mouvement

des grains dans un lit de sédiments lorsque sa face supérieure est soumise à un écoulement. Pour cela, il mobilise la méthode des éléments discrets (*Discrete Element Method*, DEM), c'est-à-dire il calcule à chaque pas de temps la position et la vitesse des grains du lit. Le modèle permet ainsi de considérer localement les interactions entre les grains et de mieux saisir le rôle de ces interactions dans la mise en mouvement et le transport de sédiments. L'écoulement au-dessus du lit est un écoulement moyen, tridimensionnel ; pour simplifier, les fluctuations turbulentes ne sont pas modélisées. Il ne s'agit pas dans cette thèse de proposer de nouvelles relations entre le débit de fluide et le débit de sédiments qui pourraient être utilisées par l'ingénieur, mais plutôt d'utiliser le modèle développé pour identifier les mécanismes mis en œuvre lors du processus d'érosion. La méthode DEM est déjà utilisée pour étudier l'érosion et le transport de sédiments, notamment par Jiang et Haff (1993), par McEwan et coauteurs (2001, 2003) et par Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009). Dans ces modèles, l'écoulement moyen est représenté par un écoulement unidirectionnel qui ne dépend pas de la topographie de la surface du lit. Or les dépressions et les bosses créées par les amoncellements des particules à la surface modifient localement la vitesse du fluide. Cet effet est représenté dans le modèle numérique développé : celui-ci est basé sur le couplage entre un modèle DEM et un modèle d'écoulement.

Ce mémoire s'organise selon trois parties. La première partie consiste en une présentation des modélisations de l'érosion et du transport existantes dans la littérature et établies à partir de formules empiriques. Les deuxième et troisième parties intéressent le modèle de transport développé. La deuxième partie traite du modèle DEM qui est utilisé pour reproduire le mouvement des grains dans l'arrangement. Le modèle DEM est basé sur la résolution des équations de mouvement des grains et requiert ainsi la connaissance de la force exercée par le fluide sur le grain et la modélisation des collisions et des contacts entre les grains. La troisième partie présente le modèle d'écoulement et les résultats obtenus à partir du modèle de transport, constitué par le couplage du modèle DEM et du modèle d'écoulement.

I introduction à la modélisation de l'érosion et du transport des sédiments

1 généralités

1.1 sédiments

Les sédiments charriés par les rivières sont d'origines diverses. Ils sont essentiellement apportés dans le cours d'eau par les eaux de ruissellement et par les eaux souterraines et sont constitués par les matériaux présents dans le bassin versant. Ils sont aussi introduits dans l'écoulement lors de glissements de terrain. Dans les zones de montagne, des sédiments, tels des gros graviers et des blocs de pierre, sont arrachés des talus formés par des accumulations de sédiments grossiers au pied des montagnes et sur des surfaces de forte pente. Les sédiments sont également issus de l'altération, de l'effritement (*weathering*) et de l'érosion des roches constituant le lit et les berges. (Garde et Ranga Raju, 2006)
La taille et la forme des sédiments varient beaucoup à cause notamment de leur origine mais aussi de la nature et de la durée de leur transport dans l'écoulement. Par exemple, la particule d'argile est assez plate, le grain de sable transporté dans l'air est plutôt rond, celui transporté dans l'eau, ovoïde. Comme la taille, la forme du grain évolue au cours de son transport. C'est une grandeur difficile à mesurer qui influe sur son mouvement par exemple sur sa résistance à l'érosion (Petit, 1989) et sur sa vitesse de chute (Dietrich, 1982 ; Jimenez et Madsen, 2003). Pour caractériser la forme du grain, nous utilisons les trois distances a, b et c définies dans la figure 1.1 avec $a > b > c$. Zingg (1935) (Allen, 1985) se sert de ces grandeurs pour classer les grains

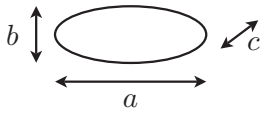


figure 1.1 – définition des distances a, b et c utilisées pour caractériser la forme des grains

en quatre types : *bladed* (lame), *tabular* (disque applati), *prolate* (tige) et *equant* (sphère). La définition de ces types est donnée en fonction des rapports b/a et c/b dans la figure 1.2. La forme du grain est également décrite par la sphéricité qui mesure l'écart par rapport à une sphère et par la rondeur qui mesure le degré d'érosion des arrêtes. Folk (1980) reporte plusieurs nombres sans dimension qui quantifient la sphéricité du grain. Parmi ces nombres, nous avons le facteur de forme noté CF (*Corey factor*) qui est donné par la relation (1.1).

$$CF = \frac{c}{(ab)^{1/2}} \tag{1.1}$$

Folk (1980) suggère qu'un galet avec $CF = 0{,}6$ se déposera 0,7 fois moins vite que la sphère de même volume. 0,7 est la valeur du rapport ψ_p des surfaces de projection maximales de la particule (égale à $\pi ab/4$) et de la sphère de même volume ($\pi d^2/4$ avec $d^3 = abc$). Nous avons :

$$\psi_p = CF^{2/3} \tag{1.2}$$

Lors de sa déposition, la particule s'oriente de telle façon que sa surface de projection maximale est perpendiculaire à l'écoulement. Plus cette surface est grande, plus la résistance au mouvement est importante. Ceci explique pourquoi une particule de forme allongée comme une tige (*rod*)

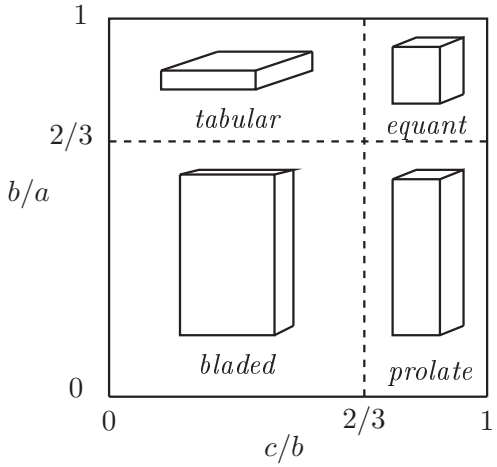


figure 1.2 – classification de la forme de la particule proposée par Zingg (1935) (Allen, 1985)

se dépose plus vite qu'un disque de même volume. Le facteur de forme CF varie en moyenne entre 0,60 et 0,85 (Garde et Ranga Raju, 2006). Raudkivi (1998) et Jimenez et Madsen (2003) indiquent la valeur 0,7. Comme pour la sphéricité, plusieurs échelles sont élaborées pour estimer la rondeur du grain. Par exemple, l'échelle de Wadell (1932) (Folk, 1980) est basée sur le rapport du rayon de courbure moyen des arrêtes et du rayon du disque le plus gros qui s'incrit dans le grain. Suivant cette échelle, une rondeur comprise entre 0 et 0,15 correspond à un grain anguleux qui présentent des arrêtes vives (*angular*) ; une rondeur comprise entre 0,6 et 1 à un grain rond dont toutes les arrêtes ont été détruites par abrasion (*well-rounded*). La rondeur de la plupart des grains de sable varie entre 0,3 et 0,4. (Folk, 1980) Ce sont des grains partiellement ronds qui ont subi une importante abrasion mais incomplète (*subrounded*). Garde et Ranga Raju (2006) rapportent des valeurs comprises entre 0,3 et 0,8. Jimenez et Madsen (2003) utilisent comme valeur par défaut 0,35.

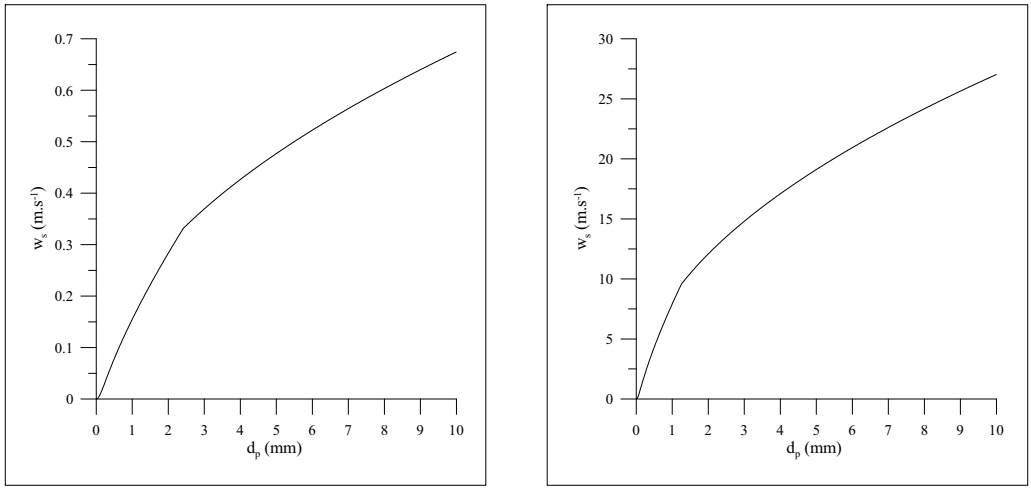
La définition de la taille des grains n'est pas aussi évidente que dans le cas de la sphère, notamment à cause de leur forme. Une des grandeurs utilisées est le diamètre nominal. Il représente le diamètre de la sphère dont le volume est identique à celui du grain. Dans le cas d'un grain de forme ovoïde décrite par les distances a, b et c, nous avons :

$$d_p = \sqrt[3]{abc} \tag{1.3}$$

D'autres grandeurs sont définies, elles dépendent de la méthode utilisée pour classer les sédiments. Pour les sédiments type sable et galets qui sont triés à l'aide d'un ensemble de tamis, la taille du grain est caractérisée par le diamètre par criblage (*sieve diameter*). Il correspond à la taille de la maille du tamis qui a retenu le grain. Suivant cette définition, le diamètre d'un grain allongé peut être différent selon son orientation au moment du passage à travers la maille. Pour les sédiments plus petits comme les particules d'argile, la taille des grains est obtenue de sa vitesse de sédimentation. Elle est donnée par le diamètre de sédimentation qui est le diamètre d'une sphère ayant une masse volumique et une vitesse de sédimentation identiques à celles du grain. La vitesse de sédimentation est fonction de la taille, de la forme et de la masse volumique du grain, de la viscosité du fluide, de l'intensité turbulente, de la présence de parois et du nombre de particules au voisinage. (Raudkivi, 1998) C'est la vitesse de la particule qui tombe sous l'effet de la gravité lorsque la force de traînée est égale à la force de flottabilité. Nous avons dans l'eau pour des petits grains ($d_p < 100$ μm) la relation de Stokes (van Rijn, 1984b) qui s'écrit :

$$w_s = \frac{(\gamma - 1) g d_p^2}{18\nu} \tag{1.4}$$

Avec : w_s la vitesse de sédimentation ; d_p le diamètre du grain ; γ le rapport des masses volumiques du grain et du fluide ; g l'accélération de la pesanteur ; ν la viscosité cinématique du fluide.
La masse volumique des grains est liée aux minéraux qu'ils contiennent, elle est comprise entre 2450 et 2650 kg.m^{-3}. La masse volumique de l'eau est égale à 1000 kg.m^{-3} et sa viscosité cinématique vaut 10^{-6} m^2.s^{-1}. Le rapport γ est ainsi de l'ordre de 2,5. Par comparaison, il est mille fois plus grand dans l'air : les vitesses de sédimentation sont dans ce milieu beaucoup plus importantes que celles estimées dans l'eau, comme le montre la figure 1.3. L'évolution de la



(a) dans l'eau (b) dans l'air

figure 1.3 – évolution de la vitesse de sédimentation w_s d'une particule sphérique en fonction de son diamètre d_p

vitesse de sédimentation présentée dans la figure 1.3 est obtenue de la résolution de l'équation de mouvement d'une particule sphérique qui tombe dans un fluide au repos. La particule est soumise à la force de flottabilité et à la force de traînée. Les expressions empiriques de la vitesse de sédimentation qui sont reportées par van Rijn (1984b) pour des particules de sable de diamètre supérieur à 0,1 mm dans l'eau et l'expression de Rubey (1931) (Graf et Altinakar, 2000) donnent des valeurs inférieures. La vitesse de sédimentation dépend de la concentration de particules. Pour des concentrations élevées, les expériences indiquent une diminution importante de la vitesse w_s. van Rijn (1984b) détermine la vitesse de sédimentation de la particule dans un écoulement chargé de sédiments notée w_{sm} en utilisant la relation (1.5) qui est valide pour des particules de diamètres compris entre 50 et 500 μm.

$$w_{sm} = (1 - c)^4 w_s \tag{1.5}$$

Avec w_s la vitesse de sédimentation de la particule isolée et c la concentration de particules.

Les sédiments sont sériés en fonction de leur taille comme par exemple dans la classification « British Standard BS 1377 : 1975 » (Raudkivi, 1998) qui est présentée dans le tableau 1.1.
Nous avons six grands groupes de sédiments : les argiles (*clay*), les vases (*silt*), les sables (*sand*), les graviers (*gravel*), les pavés (*cobbles*) et les blocs de pierre (*boulders*). D'autres classifications existent, elles sont assez semblables avec quelques différences dans les diamètres définissant les groupes de sédiments et les termes employés (cf. Folk (1980)). Il est pratique ici de remplacer le diamètre d_p par la grandeur ϕ qui est donnée par l'équation (1.6).

$$\phi = \log_2 d_p = -\frac{\ln d_p}{\ln 2} \tag{1.6}$$

Avec d_p le diamètre du grain exprimé en millimètre.

groupes	sous-groupes	diamètres d_p	indices ϕ
clay (argile)	*very fine clay*	0,24 . . . 0,5 μm	11 . . . 12
	fine clay	0,5 . . . 1,0 μm	10 . . . 11
	medium clay	1 . . . 2 μm	9 . . . 10
	coarse clay	2 . . . 4 μm	8 . . . 9
silt (vase)	*very fine silt*	4 . . . 8 μm	7 . . . 8
	fine silt	8 . . . 16 μm	6 . . . 7
	medium silt	16 . . . 31 μm	5 . . . 6
	coarse silt	31 . . . 62 μm	4 . . . 5
sand (sable)	*very fine sand*	62 . . . 125 μm	3 . . . 4
	fine sand	125 . . . 250 μm	2 . . . 3
	medium sand	250 . . . 500 μm	1 . . . 2
	coarse sand	0,5 . . . 1,0 mm	0 . . . 1
	very coarse sand	1 . . . 2 mm	-1 . . . 0
gravel (gravier)	*very fine gravel*	2 . . . 4 mm	-2 . . . -1
	fine gravel	4 . . . 8 mm	-3 . . . -2
	medium gravel	8 . . . 16 mm	-4 . . . -3
	coarse gravel	16 . . . 32 mm	-5 . . . -4
	very coarse gravel	32 . . . 64 mm	-6 . . . -5
cobbles (pavés)	*small cobbles*	64 . . . 128 mm	-7 . . . -6
	large cobbles	128 . . . 256 mm	-8 . . . -7
boulders (blocs de pierre)	*small boulders*	256 . . . 512 mm	-9 . . . -8
	medium boulders	512 . . . 1024 mm	-10 . . . -9
	large boulders	1024 . . . 2048 mm	-11 . . . -10
	very large boulders	2048 . . . 4096 mm	-12 . . . -11

tableau 1.1 – classification des sédiments selon leur taille (classification « British Standard BS 1377 : 1975 ») (Raudkivi, 1998)

Dans l'échelle ϕ, la largeur des classes de sédiments est constante et égale à 1 (cf. le tableau 1.1). Par exemple, les sédiments dits *coarse sand* correspondent à $0 < \phi < 1$.

1.1.1 distribution de la taille des grains des sédiments

Les sédiments sont constitués en général de grains de tailles diverses et la distribution de la taille de ces grains est représentée sous la forme d'histogrammes, de courbes de fréquences et de courbes cumulatives. La distribution de la taille des grains évolue le long du cours d'eau et dépend de la vitesse de l'écoulement. Proche de la source, dans les zones de montagnes où la pente du lit est importante, la vitesse de l'écoulement est élevée et les sédiments transportés contiennent des grosses particules, la distribution de la taille est relativement étendue. Lorsque la vitesse de l'écoulement diminue, notamment à cause de la diminution de la pente du lit, les grosses particules se déposent et la distribution de la taille se rétrécit. Loin de la source, la distribution tend vers une loi log-normale (Wilcock et Southard, 1988 ; Raudkivi, 1998). Par définition, la loi log-normale est vérifiée par une variable positive (notée X) dont le logarithme népérien suit une loi normale. Sa fonction de densité s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)^2\right] \tag{1.7}$$

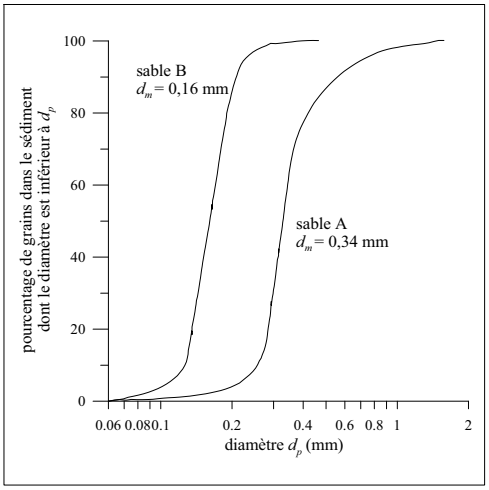
Avec m et σ la moyenne et l'écart-type de la variable $\ln X$:

$$m = \ln\left(\frac{X_m^2}{\sqrt{\sigma_X^2 + X_m^2}}\right) \quad , \quad \sigma^2 = \ln\left(\frac{\sigma_X^2}{X_m^2} - 1\right) \tag{1.8}$$

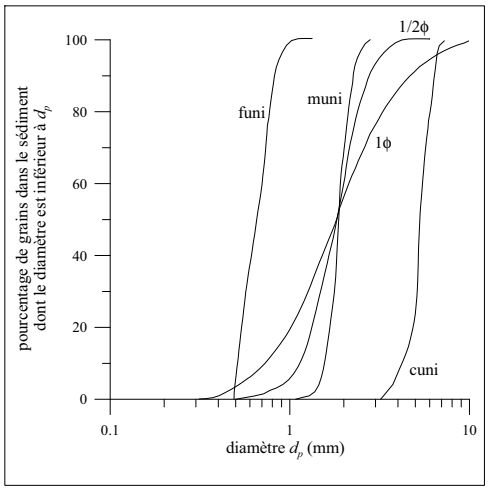
X_m et σ_X sont la moyenne et l'écart-type de la variable X qui est ici le diamètre des grains.
La figure 1.4 présente trois exemples de distributions de la taille des grains de sédiments observées en rivières : les courbes cumulatives sont données par l'évolution, en fonction du diamètre d_p, du pourcentage de grains dans le sédiment dont le diamètre est inférieure à d_p ; les courbes de fréquences correspondent à l'évolution, en fonction du diamètre d_p, du pourcentage de sédiment retenu par le tamis dont la taille de la maille est égale à d_p. La taille des grains est dispersée et les distributions sont bi-modales. Les distributions de la taille des grains des sédiments utilisés en laboratoire pour reproduire le comportement des lits ne sont pas aussi étendues que celles observées dans la nature, compte tenu des dimensions des installations : cf. la figure 1.4. La distribution est souvent uni-modale, comme par exemple dans les expériences de Ackers (1964) et de Wilcock et Southard (1988). Dans les expériences de Wilcock et Southard (1988), les sédiments désignés par les termes muni, $1/2\phi$ et 1ϕ ont une distribution faiblement non-uniforme, qui suit approximativement une loi log-normale. Kuhnle (1993) étudie des mélanges de sable et de gravier dont la distribution tend à être bi-modale.

La distribution de la taille des grains est dite uniforme (ou quasi-uniforme) si le rapport des quantiles 95% et 5% est inférieur à 5. Les quantiles sont obtenus de la courbe cumulative comme indiqué dans la figure 1.5. Par définition, 95% des particules du sédiment ont un diamètre inférieur au quantile 95% qui est noté d_{95}. Les quantiles (d_{35}, d_{65} par exemple) sont utilisés pour caractériser la distribution du diamètre des grains, en particulier sa dispersion. La médiane d_{50} est souvent choisie comme diamètre représentatif de la distribution, de la même façon que les diamètres moyens d_m et d_g qui sont respectivement le diamètre moyen arithmétique et le diamètre moyen géométrique. La valeur de ces deux diamètres moyens est déduite de l'histogramme de la distribution, elle est donnée par l'équation (1.9).

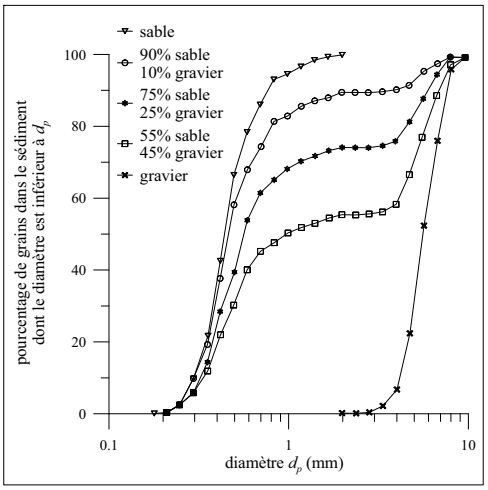
$$d_m = \sum_{i=1}^{N} f_i d_i \ , \quad d_g = \prod_{i=1}^{N} d_i^{f_i} \tag{1.9}$$



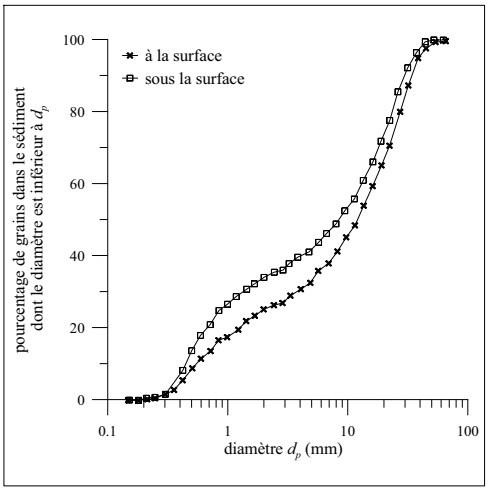
(a) sables utilisés par Ackers (1964)



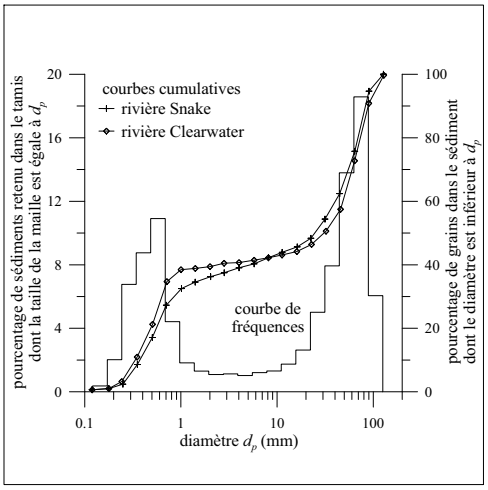
(b) sédiments utilisés dans les expériences de Wilcock et Southard (1988)



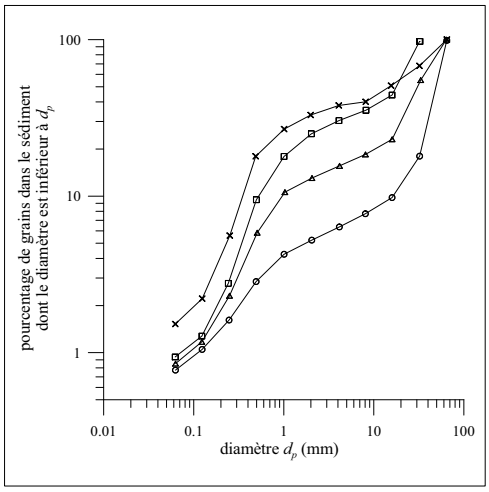
(c) mélanges de sable et de gravier utilisés dans les expériences de Kuhnle (1993)



(d) sédiments présents à la surface et à l'intérieur du lit de la rivière Goodwin Creek (Kuhnle, 1993)



(e) sédiments transportés par charriage au confluent des rivières Snake et Clearwater au voisinage de Lewiton (Idaho) (Emmett et Thomas, 1978)



(f) sédiments du lit de la rivière Rio Grande en différents lieux (Pemberton, 1964)

figure 1.4 – distribution de la taille des grains des sédiments utilisés en laboratoire et recueillis en rivière

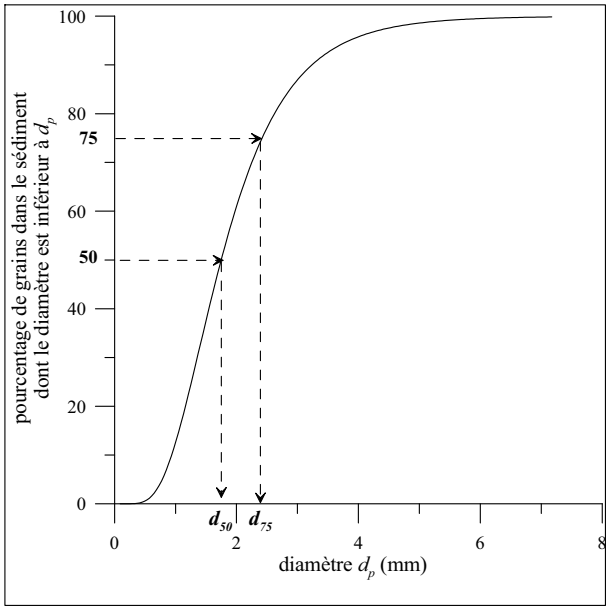


figure 1.5 – détermination graphique des quantiles de la distribution de la taille des grains

Avec : N le nombre de classes de grains (rectangles dans l'histogramme) ; d_i le diamètre moyen des grains de la classe i ; f_i sa fréquence.
La fréquence f_i est le rapport de la masse de grains contenus dans la classe i et de la masse totale de sédiment.

$$f_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1.10}$$

Avec m_i la masse des grains contenus dans la classe i.
Le diamètre d_{50} correspond à l'égalité (1.11).

$$0{,}5 = \frac{\sum_{i=1}^{i_{50}} m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1.11}$$

Avec i_{50} l'indice de la classe de diamètre d_{50}.
En général, les diamètres d_{50} et d_m sont différents. Toutefois, si la distribution du diamètre est faiblement antisymétrique, ils sont approximativement égaux.
Les diamètres d_{50}, d_m et d_g ne renseignent pas la forme de la distribution du diamètre. Celle-ci est estimée principalement par trois grandeurs qui sont l'écart-type et les coefficients d'asymétrie (*skewness*) et d'aplatissement (*kurtosis*). L'écart-type mesure la dispersion de la taille des grains et comme pour le diamètre moyen, plusieurs définitions de l'écart-type existent :

– l'écart-type arithmétique σ_a qui est peu utilisé :

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i \, (d_i - d_m)^2 \tag{1.12}$$

– l'écart-type géométrique σ_g :

$$(\ln \sigma_g)^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i \left[\ln \left(\frac{d_i}{d_g} \right) \right]^2 \tag{1.13}$$

– l'écart-type σ_ϕ qui est basé sur la grandeur ϕ :

$$\sigma_\phi^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i \left(\phi_i - \phi_m\right)^2 \quad , \quad \phi_m = \sum_{i=1}^{N} f_i \phi \tag{1.14}$$

Les écart-types σ_g et σ_ϕ sont liés par la relation $\sigma_g = 2^{\sigma_\phi}$. (De même, nous avons $d_g = 2^{\phi_m}$.)
La distribution de la taille des grains du sédiment est considérée comme uniforme si l'écart-type géométrique σ_g est inférieur à 1,35.
Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont les moments d'ordre 3 et d'ordre 4 de la distribution. Ils mesurent l'écart de la distribution par rapport à la loi normale de Laplace-Gauss qui s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - X_m}{\sigma_X}\right)^2\right] \tag{1.15}$$

Avec X_m et σ_X la moyenne et l'écart-type de la variable X.
Le coefficient d'asymétrie évalue le degré d'asymétrie de la distribution. Son signe indique quelles tailles de grains dominent la distribution. S'il est positif, la distribution est dominée par les petits grains, s'il est négatif, par les gros grains. Une distribution normale a un coefficient égal à zéro. La valeur du coefficient peut être obtenue de l'équation (1.16) en utilisant les quantiles d_{25}, d_{50} et d_{75} (Raudkivi, 1998).

$$S_k = \frac{1}{2}\left(d_{75} + d_{25} - 2d_{50}\right) \tag{1.16}$$

Avec S_k le coefficient d'asymétrie dit arithmétique.
Le coefficient d'aplatissement caractérise la forme du pic de la distribution par rapport à la distribution normale. Si le coefficient est positif, la distribution est relativement pointue. S'il est négatif, la distribution est relativement aplatie.

Il existe beaucoup d'autres paramètres ou coefficients établis pour caractériser la dispersion et la forme de la distribution de la taille des grains. Citons les coefficients d'uniformité de Hazen et de Kramer, les paramètres d'Inman (1952), l'échelle Fuchtbauer (1959), etc. (Folk, 1980 ; Raudkivi, 1998 ; Boulvain, 2009). L'échelle Fuchtbauer (1959), qui est présentée dans le tableau 1.2, classe les sédiments en fonction du degré de dispersion de la taille des grains. Elle repose sur le rapport $\sqrt{d_{75}/d_{25}}$.

degré de classement	$\sqrt{d_{75}/d_{25}}$
très bon	$< 1{,}23$
bon	1,23 – 1,41
moyen	1,41 – 1,74
mauvais	1,74 – 2,00
très mauvais	$> 2{,}00$

tableau 1.2 – évaluation du degré de classement d'un sédiment suivant l'échelle de Fuchtbauer (1959) (Boulvain, 2009)

1.1.2 érosion et le transport

Les sédiments sont répertoriés selon leur teneur en argile en deux catégories : les sédiments cohésifs et les sédiments non cohésifs. Les sédiments cohésifs sont caractérisés par une teneur en argile supérieure à 10%. Leur comportement dans l'écoulement dépend d'intéractions électro-chimiques dues à la présence de charges négatives sur les particules d'argile. Ces interactions électro-chimiques sont à l'origine de la formation de flocs (agglomérats de particules) riches en eau. Les lits des sédiments cohésifs se consolident au cours du temps, au fur et à mesure de l'élimination de l'eau contenue dans les flocs. Leur érosion dépend de leur teneur en eau et du degré de cohésion du sédiment (qui est lié à sa nature minéralogique, à la salinité et au pH de l'eau). Elle se produit par arrachage de blocs plus ou moins gros qui se désintègrent rapidement dans l'écoulement. Les sédiments non cohésifs ont un comportement similaire à celui d'un arrangement granulaire. Leur érosion est contrôlée essentiellement par deux paramètres : la taille et le poids des grains. Elle se traduit par l'entraînement d'un petit nombre de grains à la surface. Le seuil d'érosion est définie par une vitesse de frottement dite critique qui est notée u_{*c}.
Le transport des sédiments dépend de la taille des grains et de l'écoulement. Trois formes de transport sont observées : le transport par charriage, le transport par saltation et le transport en suspension.

- Lorsque la vitesse de frottement est légèrement supérieure à la valeur critique, les grains se mettent à rouler et à glisser à la surface du lit. Leur mouvement est irrégulier et discontinu. Le transport est dit par charriage.
- Lorsque la vitesse de frottement augmente, les grains se déplacent par bonds successifs à la surface du lit. Leur trajectoire est relativement peu affectée par la turbulence et la hauteur maximale des rebonds est comprise entre 2 et $4\,d_p$. (Francis, 1973) C'est le transport par saltation. Il constitue un mode de transport important pour les sédiments non cohésifs qui ont une vitesse de sédimentation relativement élevée, tels que les particules de sable dans l'air et dans une moindre mesure, les particules de gravier dans l'eau. (Garde et Ranga Raju, 2006)
- Lorsque la vitesse de frottement augmente encore, la turbulence générée à la surface du lit devient suffisante pour maintenir les grains en suspension. Leur trajectoire est affectée par les fluctuations de vitesse fluide et présente des oscillations.

Raudkivi (1998) propose un critère approximatif pour déterminer le mode de transport dans l'eau. Il est basé sur le rapport de la vitesse de sédimentation du grain w_s et de la vitesse de frottement u_*. Il est présenté dans le tableau 1.3. Bagnold (1966) considère qu'une particule est

mode de transport	w_s/u_*
charriage	2 – 6
saltation	0,6 – 2
suspension	$< 0{,}6$

tableau 1.3 – modes de transport en fonction de la vitesse de sédimentation du grain w_s et la vitesse de frottement u_*

en suspension lorsque l'intensité turbulente dans la direction verticale $\sqrt{\overline{w'^2}}$ est supérieure à sa vitesse de sédimentation. L'intensité turbulente est prise égale à $0{,}8u_*$ et partant, la vitesse de frottement critique de mise en suspension u_{*cs} est égale à $1{,}25w_s$. van Rijn (1984b) déduit de

données empiriques un autre critère qui fait intervenir le diamètre sans dimension d_* :

$$d_* = d\left[\frac{(\gamma - 1)g}{\nu^2}\right]^{1/3} \tag{1.17}$$

Si $1 < d_* \leq 10$,

$$u_{*cs} = \frac{4}{d_*}\, w_s \tag{1.18}$$

Si $d_* > 10$,

$$u_{*cs} = 0{,}4\, w_s \tag{1.19}$$

Le critère de van Rijn (1984b) définit des écoulements dans lesquels des mouvements verticaux de particules avec des bonds de longueurs supérieures à 100 diamètres sont observés localement. van Rijn (1984b) suggère que le critère de Bagnold (1966) (et donc celui de Raudkivi (1998)) constitue une limite supérieure qui correspond à des écoulements dans lesquels un profil de concentration des particules en suspension commence à se développer. Ceci explique le résultat obtenu pour les grands diamètres ($d_p \gtrsim 0{,}14$ mm, $d_* \gtrsim 3{,}5$) dans la figure 1.6 qui montre l'évolution du rapport u_{*cs}/w_s en fonction du diamètre d_p. Pour les petits diamètres, le rapport u_{*cs}/w_s calculé avec le

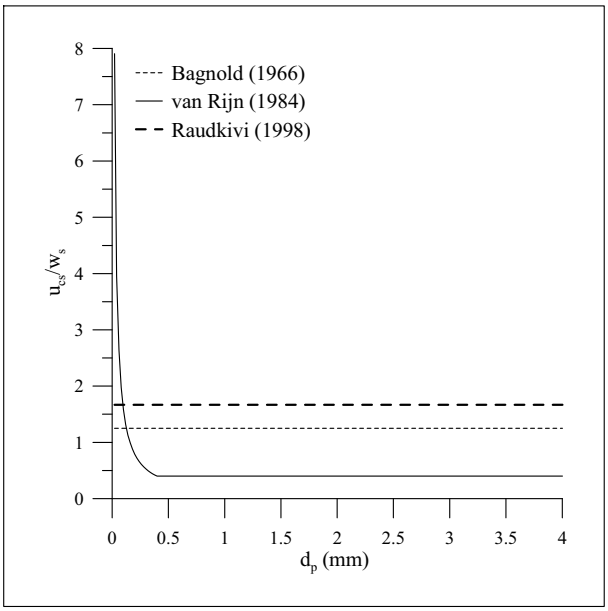


figure 1.6 – vitesses de frottement critiques de mise en suspension du grain selon les modèles de Bagnold (1966), de van Rijn (1984a) et de Raudkivi (1988)

critère de van Rijn (1984b) devient supérieur aux valeurs prédites par les deux autres critères et la définition des critères suggérée ne tient plus.
Dans les rivières, compte tenu des vitesses de sédimentation et des vitesses de l'écoulement, les particules les plus grossières (graviers, galets, blocs) tendent à être transportées par charriage et en saltation. La nature de leur déplacement dépend de leur forme. Les grains sphériques ont une plus grande tendance à rouler et à rebondir que les grains discoïdaux qui tendent à glisser. Les particules plus fines (sables, limons, argiles) sont plutôt en suspension. (Garde et Ranga Raju, 2006) La hauteur de saltation est de quelques millimètres et les particules en saltation se déplacent au voisinage du lit. Garde et Ranga Raju (2006) notent que le transport en saltation dans l'eau est habituellement difficile à mesurer et qu'il est faible au-dessus des lits de sable. Au contraire, au-dessus des dunes dans les déserts, les particules de sable sont transportées essentiellement par saltation et la hauteur des rebonds est de l'ordre du mètre. (Garcia, 2007)

Deux termes sont utilisés dans la littérature pour décrire le transport des particules : *bed load* et *suspended load*. Ces termes recouvrent des réalités différentes selon les auteurs. Dans l'approche proposée par Bagnold (1966) et reprise par van Rijn (1984a), le terme *bed load* désigne le transport par charriage et par saltation qui sont les deux modes de transport contrôlés par la gravité. En effet Francis (1973) montre expérimentalement l'existence d'un transport par saltation dans un écoulement laminaire. Le terme *suspended load* est utilisé pour parler du transport en suspension : les particules sont maintenues en suspension par la turbulence. Dans l'approche de Einstein (1948), le terme *bed load* regroupe les sédiments transportés dans la couche proche du lit d'épaisseur égale à deux diamètres, essentiellement les sédiments transportés par charriage ; le terme *suspended load* désigne les autres sédiments, *i.e.* qui sont transportés par saltation et en suspension. Cette définition est utilisée par Engelund et Fredsoe (1967) et par Misri *et al.* (1984). Le terme *wash load* désigne, parmi les particules en suspension, les particules très fines de vase et d'argile. Ces particules sont introduites dans l'écoulement par le ruissellement, par le lessivage des sols ou par l'abrasion de particules transportées. Elles ne sont pas en général présentes en quantité dans le sédiment du lit. Le transport *wash load* ne dépend pas des paramètres hydrauliques de l'écoulement, il peut exister dans des zones où les vitesses du fluide sont très faibles. (Raudkivi, 1998)

1.2 écoulement au-dessus du lit de sédiments

L'écoulement au-dessus du lit de sédiments est un écoulement de couche limite turbulente et il est caractérisé par deux nombres sans dimension : le nombre de Reynolds Re et le nombre de Froude Fr.

$$Re = \frac{u_d 4R}{\nu} \ , \quad Fr = \frac{u_d}{\sqrt{gh}} \tag{1.20}$$

Avec : u_d la vitesse débitante égale au débit divisé par la section de passage ; R le rayon hydraulique qui est égal au rapport de la section du canal et du périmètre mouillé ; $4R$ le diamètre hydraulique ; h la hauteur d'eau ; g l'accélération de la pesanteur.
Le nombre de Reynolds quantifie l'importance relative des forces d'inertie vis-à-vis des forces visqueuses et le nombre de Froude quantifie l'importance relative des forces d'inertie vis-à-vis de la force de pesanteur. L'écoulement est dit turbulent si $Re \gtrsim 500$ (Graf et Altinakar, 2000).
Dans les situations les plus courantes, l'écoulement est quasi-horizontal et le champ de vitesse est modélisé par un écoulement moyen unidirectionnel. La vitesse moyenne u_f est donnée par la loi logarithmique qui s'écrit :

$$u_f(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1.21}$$

Avec κ la constante de von Kármàn ($\kappa \simeq 0{,}4$) et z_0 la longueur caractéristique de rugosité.
La longueur de rugosité z_0 dépend de la nature de la couche limite turbulente. Si la couche limite turbulente est hydrauliquement lisse, la longueur de rugosité z_0 est proportionnelle à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ' et nous avons :

$$\delta' = 11{,}6\frac{\nu}{u_*} \ , \quad z_0 = \frac{\delta'}{107} = 0{,}108\frac{\nu}{u_*} \tag{1.22}$$

La loi logarithmique (1.21) devient sous la forme adimensionnelle :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(z^+\right) + 5{,}5 \tag{1.23}$$

Avec $u^+ = u_f(z)/u_*$ et $z^+ = z u_*/\nu$.
Dans la sous-couche visqueuse, la vitesse u_f est proportionnelle à z et nous avons :

$$u^+ = z^+ \tag{1.24}$$

En général, dans les rivières, la couche limite est hydrauliquement rugueuse, c'est-à-dire la hauteur des rugosités k est supérieure à $10\delta'$ et il n'y a pas de sous-couche visqueuse. L'expérience indique pour la longueur z_0 la relation (1.25)

$$z_0 = \frac{k}{30{,}2} \tag{1.25}$$

et la loi logarithmique est donnée par la relation (1.26).

$$\frac{u_f(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{k}\right) + 8{,}5 \tag{1.26}$$

La hauteur des rugosités k est assimilée à la hauteur de rugosité équivalente de Nikuradse qui est notée k_s et qui est proportionnelle au diamètre du grain. Schlichting (1960) montre que la rugosité augmente avec la compacité du lit. Plusieurs expressions de k_s basés sur les quantiles de la distribution sont proposées. Pour un lit de sable plat, Ackers et White (1973) indiquent $k_s = 1{,}25\, d_{35}$, Mahmood (1971), $k_s = 5{,}1\, d_{84}$. Einstein et Barbarossa (1952) prennent $k_s = d_{65}$ et Engelund et Hansen (1967) choisissent $k_s = 2\, d_{65}$. van Rijn (1982) reporte une série de valeurs comprises entre d_{90} et $10\, d_{90}$. Il trouve qu'en moyenne la hauteur k_s est égale à $3\, d_{90}$. Viollet *et al.* (2002) utilisent $k_s = 3\, d_{90}$. Dans les modèles, la rugosité k_s est fixée à d_p ou à $2\, d_p$.
La loi logarithmique (1.21) est strictement valide seulement pour $z > 30\nu/u_*$ et $z < 0{,}2h$. Elle constitue cependant pour de nombreux cours d'eau, une approximation raisonnable pour décrire le profil de vitesse à travers toute la section. (Graf et Altinakar, 2000 ; Garcia, 2007). Par conséquent, elle est communément utilisée.
La zone située entre la sous-couche visqueuse et la zone « logarithmique » est appelée la zone tampon (*buffer layer*) et la vitesse moyenne u_f peut y être estimée par la relation de Reichardt (1951) (Ushijima, 1998) :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(1 + \kappa z^+\right) + 7.4 \left[1 - \exp\left(-\frac{z^+}{11}\right) - \frac{z^+}{11} \exp(-0{,}33 z^+)\right] \tag{1.27}$$

Pour $z > 0{,}2h$, le profil de vitesse n'est plus logarithmique et la vitesse u_f dépend de la vitesse maximale $U_{\max}$. Elle peut être calculée en utilisant la relation proposée par Graf et Altinakar (2000).

$$\frac{U_{\max} - u_f(z)}{u_*} = 9{,}6 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \tag{1.28}$$

Coles (1956) observe que l'écart à la loi logarithmique est similaire à celui observé dans un sillage et il propose la loi de sillage (1.29) (Raudkivi, 1998 ; Graf et Altinakar, 2000).

$$\frac{U_{\max} - u_f(z)}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_{\max}}\right) + \frac{\Pi}{\kappa}\, \omega\left(\frac{z}{z_{\max}}\right) \tag{1.29}$$

Avec : $z_{\max}$ la distance au lit où la vitesse u_f est maximale ; Π le paramètre de sillage de Coles ; ω la fonction de sillage qui est donnée par l'équation (1.30) :

$$\omega\left(\frac{z}{z_{\max}}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{z}{z_{\max}}\right) \tag{1.30}$$

Le paramètre de sillage Π représente l'écart maximum entre le profil logarithmique et le profil de vitesse et il indique l'intensité du sillage. Il est fonction du gradient de pression longitudinal. Dans le cas des écoulements uniformes lisses et rugueux, dans un canal de faible pente (*i.e.* avec des faibles gradients de pression), le paramètre Π varie de $-0{,}1$ à $0{,}3$ et Graf et Altinakar (2000) suggèrent de prendre $\Pi \simeq 0{,}2$. Pour des écoulements de couche limite avec un gradient de pression nul, le paramètre Π est égal à 0,55. (Hinze, 1975). La distance $z_{\max}$ est en général inférieure à la hauteur d'eau à cause du frottement de l'eau sur l'air. Cependant, dans des canaux

dits larges ($B/h \gtrsim 5$ avec B la largeur du canal) dans lesquels l'écoulement peut être assimilé à un écoulement bidimensionnel, nous avons $z_{\max} \simeq h$ (Graf et Altinakar, 2000). Dans les canaux qui ne sont pas très larges ($B/h < 5$), compte tenu des écoulements secondaires, la distance $z_{\max}$ est égale à $0{,}75h$ (Viollet *et al.*, 2002).
Une autre représentation du profil de vitesse est la loi puissance qui s'écrit sous la forme (1.31) (Raudkivi, 1998)

$$\frac{u_f(z)}{u_*} = \frac{m}{\kappa}\left(\frac{z}{h}\right)^{1/m} \tag{1.31}$$

Prandtl utilise $m = 7$.

La vitesse de frottement u_* est considérée dans la plupart des modèles comme le paramètre à utiliser pour décrire le mouvement des grains. Par définition, nous avons :

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \tag{1.32}$$

Avec τ_0 la contrainte de frottement à la surface du lit.
La méthode la plus simple pour calculer la vitesse u_* consiste à supposer l'écoulement unidimensionnel et normal (*i.e.* stationnaire, uniforme et dans lequel la pente de la ligne de charge est égale à la pente du lit). Dans ces hypothèses, la vitesse u_* est donnée par la relation (1.33) :

$$u_* = \sqrt{gRS_0} \tag{1.33}$$

Avec S_0 la pente du lit.
Si l'écoulement n'est pas normal, la relation est approximativement vérifiée en remplaçant la pente du lit par la pente de la ligne de charge. La vitesse de frottement u_* peut aussi être obtenue de la formule de Weisbach-Darcy établie pour des conduites. Elle s'écrit :

$$u_* = \sqrt{\frac{f}{8}}U_f \tag{1.34}$$

Avec U_f la moyenne de la vitesse fluide u_f sur la hauteur d'eau et f le coefficient de frottement ou de perte de charge.
Le coefficient f dépend du nombre de Reynolds et de la rugosité relative par rapport au rayon hydraulique. Il est déterminé à partir de l'abaque de Moody ou de formules empiriques (formule de Colebrook, loi de Chézy, loi de Manning-Strickler) : cf. par exemple Graf et Altinakar (2000) (pp. 72 – 87) et Viollet *et al.* (2002) (pp. 222–224). Raudkivi (1998) propose la relation (1.35) si la couche limite turbulente est hydrauliquement rugueuse.

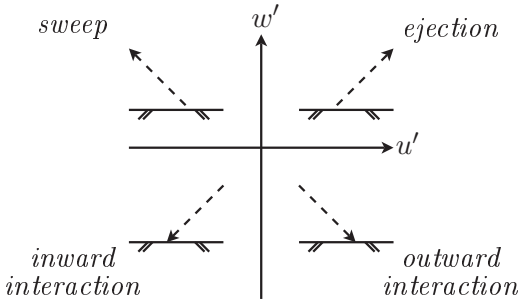
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2{,}03\log\left(\frac{4R}{k}\right) + 0{,}91 \tag{1.35}$$

Les équations précédentes fournissent une estimation de la valeur moyenne de la vitesse fluide et de la contrainte de frottement. Or l'écoulement est turbulent et les deux grandeurs fluctuent autour de leur valeur moyenne. Nezu (1977) montre que les intensités des fluctuations de vitesse sont indépendantes du nombre de Reynolds Re et du nombre de Froude Fr. Il détermine expérimentalement leur expression si $0{,}1h < z < 0{,}95h$:

$$\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_*} \simeq 2{,}30\exp\left(-\frac{z}{h}\right) \quad , \quad \frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{u_*} \simeq 1{,}63\exp\left(-\frac{z}{h}\right) \quad , \quad \frac{\sqrt{\overline{w'^2}}}{u_*} \simeq 1{,}27\exp\left(-\frac{z}{h}\right) \tag{1.36}$$

Avec u', v' et w' les fluctuations de vitesse dans les directions x, y et z.

Il existe dans l'écoulement des structures turbulentes cohérentes caractérisées par des fluctuations de vitesse de forte intensité comme par exemple les événements *ejections* et *sweeps*. Sont également observés des phénomènes de bouffées turbulentes (*burst*) dans la zone tampon. Plusieurs études (Sutherland, 1967 ; Sumer et Deigaard, 1981 ; Cao, 1997) montrent que ces bouffées turbulentes jouent un rôle dans le processus d'érosion. Les bouffées turbulentes se traduisent par l'arrivée dans la zone tampon de fluide ralenti provenant de la surface du lit. Elles sont constituées par un cycle de quatre événements *ejections*, *sweeps*, *outward interactions* et *inward interactions* dont la définition est donnée, dans le tableau 1.4, en fonction du signe des fluctuations de vitesse u' et w' (cf. la méthode des quadrants). Ces événements ont des effets différents sur le mode de



ejections	$u' < 0,\ w' > 0$
sweeps	$u' > 0,\ w' < 0$
outward interactions	$u' > 0,\ w' > 0$
inward interactions	$u' < 0,\ w' < 0$

tableau 1.4 – définition des évènements turbulents selon la méthode des quadrants ; les flèches en trait pointillé indiquent l'orientation du vecteur de la fluctuation turbulente par rapport au lit

transport, sur le débit et la taille des sédiments transportés. Les expériences de Thorne *et al.* (1989) et de Williams (1990) montrent que proche du seuil d'érosion, le transport par charriage des particules de gravier se produit principalement pendant les évènements *sweeps* et dans une moindre mesure pendant les événements *outward interactions*. Les évènements *ejections* et *inward interactions* influent peu sur le mouvement des particules car même les valeurs les plus élevées de la force de portance n'excèdent pas la force de flottabilité des grains. Bridge et Bennett (1992) indiquent cependant qu'avec des particules plus fines ou avec des contraintes de frottement turbulentes plus élevées, l'influence des évènements *ejections* sur le transport des grains sur le lit et en suspension est beaucoup plus importante. Kleinhans et van Rijn (2002) suggèrent que les évènements qui contribuent principalement au transport sont les évènements *sweeps* et *ejections*. Les bouffées turbulentes influent sur les fluctuations de la contrainte de frottement qui peuvent être bien supérieures à sa valeur moyenne. Grass (1970) indique des fluctuations maximales égales à 2,5 fois la valeur moyenne. Willmarth et Lu (1972) mesurent, pendant des événements type *sweeps*, des valeurs entre 30 et 100 fois la valeur moyenne. Bridge et Bennet (1992) montrent que dans les écoulements transitoires et hydrauliquement rugueux, la distribution de la contrainte de frottement à l'extérieur de la sous-couche visqueuse suit approximativement une loi normale. Dans les écoulements hydrauliquement lisses, la loi est plutôt du type log-normale ou gamma.

2 modèles d'érosion

Les modèles d'érosion déterminent les conditions d'écoulement qui correspondent au seuil d'érosion du lit. Dans la plupart des modèles, les mécanismes à l'origine du mouvement des grains sont décrits en utilisant la vitesse de frottement. Cette hypothèse apparaît être la bonne. D'autres modèles (Hjulström, 1935 ; Yang, 1973) reposent sur la vitesse de fluide moyenne U_f. Or la vitesse de frottement n'est pas constante pour une vitesse U_f donnée, elle dépend de la section du canal. Par exemple, elle diminue lorsque la hauteur d'eau augmente. Cependant, ces modèles qui reposent sur des coefficients empiriques fournissent des résultats satisfaisants. La forme des rivières évolue peu et pour une vitesse U_f, la vitesse de frottement est sensiblement la même d'une rivière à l'autre. Ainsi, ces modèles sont couramment utilisés par les ingénieurs car la vitesse U_f est une donnée plus facilement disponible que la vitesse de frottement u_*.

2.1 définition du seuil d'érosion

Lorsque la vitesse de frottement augmente, les grains à la surface du lit commencent à bouger de façon aléatoire et intermittente. La mise en mouvement dépend à la fois de l'écoulement au voisinage du lit et de l'instabilité propre du grain qui est liée à sa forme, son poids, sa position dans l'arrangement, etc. La variabilité de ces deux paramètres rend la définition du seuil d'érosion complexe et explique en partie la dispersion des résultats expérimentaux.
Shields (1936) définit le seuil d'érosion comme le passage d'un transport nul à un transport non nul. La contrainte de frottement critique est déduite par extrapolation de la relation empirique obtenue entre la quantité de sédiments transportés et la contrainte de frottement. Le seuil d'érosion défini par Shields (1936) n'est pas observable expérimentalement (Parker, 2002). Il est dit absolu. Un autre seuil d'érosion dit effectif est souvent utilisé dans la littérature. Il correspond à un transport non nul quoique faible. Au dessous de ce seuil, le transport de sédiment est si faible que les changements morphologiques du lit qui en résultent sont négligeables pendant la période d'observation. Dans l'approche de Bonnefille (1963), le seuil d'érosion correspond à un transport sans dimension q^+ égal à 10^{-4} avec $q^+ = q_t/d_p u_*$ et q_t le débit volumique de sédiments transportés par largeur du canal. Parker *et al.* (1982) définissent le rapport sans dimension W :

$$W = \frac{(\gamma - 1) g q_t}{u_*^3} \tag{2.1}$$

La contrainte de frottement critique est calculée, par interpolation ou par extrapolation, selon une méthode similaire à celle de Shields (1936) lorsque $W = 0{,}002$. Elle est appelée contrainte de frottement de référence et notée τ_r.

Le seuil d'érosion peut être aussi établi directement à partir de l'observation de la surface du lit. Il est alors associé à un certain degré d'activité du lit. Dans les conditions proches du seuil d'érosion, seules les fluctuations turbulentes les plus intenses mettent en mouvement les grains et aucun mouvement continu de grains ne peut être observé. Les grains sont mis en mouvement, roulent, glissent le long du lit, s'arrêtent, sont remis en mouvement, etc. Le degré d'activité du lit est mesuré à partir du nombre n de grains déplacés par unité de surface et par unité de temps.

La valeur du nombre n critique correspondant au seuil d'érosion dépend des auteurs. Neill et Yalin (1969) proposent de fixer le nombre n critique comme suit.

$$N = 10^{-6} \ , \quad N = \frac{n\, d_p^3}{u_*} \tag{2.2}$$

Pour justifier l'égalité (2.2), Neill et Yalin (1969) indiquent que le nombre N vaut 10^{-5} lorsque la vitesse de frottement est égale à la valeur critique fournie par le critère de Shields. Ils montrent par ailleurs à partir d'une analyse dimensionnelle, que le nombre sans dimension N est une fonction de deux nombres sans dimension, le nombre de Reynolds Re_* et le paramètre de Shields θ.

$$Re_* = \frac{d_p u_*}{\nu} \ , \quad \theta = \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho) g d_p} \tag{2.3}$$

Le paramètre de Shields représente le rapport entre les forces déstabilisatrices (forces de traînée et de portance) et les forces stabilisatrices (force de flottabilité). Le critère de Neil et Yalin (1969) est utilisé dans l'eau et dans l'air. Mais les paramètres de Shields critiques obtenus avec ce critère sont différents dans les deux milieux. En effet, si le nombre n est identique, nous avons :

$$\theta_{cE} = \sqrt{\frac{\rho_E}{\rho_s - \rho_E} \frac{\rho_s - \rho_A}{\rho_A}}\, \theta_{cA} \simeq 1600\, \theta_{cA} \tag{2.4}$$

Avec : θ_{cE} le paramètre de Shields dans l'eau ; θ_{cA} le paramètre de Shields dans l'air ; ρ_E la masse volumique de l'eau ($\rho_E = 1000$ kg.m^{-3}) ; ρ_A la masse volumique de l'air ($\rho_A = 1$ kg.m^{-3}) ; ρ_s la masse volumique du sédiment qui est ici prise égale à 2650 kg.m^{-3}.
Dancey *et al.* (2002) développent un critère basé sur la probabilité conditionnelle Γ d'entraînement du grain sachant qu'un événement turbulent s'est produit. Celle-ci est exprimée en fonction du nombre de grains déplacés par unité de temps, n' et de la période moyenne d'apparition des événements turbulents, $\mathcal{I}$. Dancey *et al.* (2002) montrent pour des temps d'observation longs :

$$\Gamma = \frac{n'}{n_s} \mathcal{I} \tag{2.5}$$

Avec n_s le nombre de grains disponibles à la surface du lit.
La valeur critique Γ_c est déterminée de façon que les critères d'érosion existants (critères de Shields (1936) et de Neill et Yalin (1969) par exemple) soient vérifiés. Les expériences indiquent $\Gamma_c = 3{,}58.10^{-5}$. Cette valeur correspond à $N = 2{,}78.10^{-6}$.

Quelle que soit l'approche utilisée, la définition du seuil d'érosion est subjective. La vitesse de frottement critique dépend dans la première approche de la méthode d'extrapolation et de la valeur du transport minimal choisies (cf. par exemple l'étude de Wilcock et Southard (1988)). De même, elle est liée, dans les critères de Neill et Yalin (1969) et de Dancey *et al.* (2002), à la valeur critique de N et de Γ. Or, comme la valeur du transport minimal, cette valeur est fixée plus ou moins arbitrairement par les auteurs. Buffigton et Montgomery (1997) notent que les critères basés sur le nombre de grains déplacés sont peu utilisés.

2.2 modèle de White (1940)

Le modèle de White (1940) fait partie des modèles dits analytiques (Bridge et Bennett, 1992 ; James, 1990). Ceux-ci déterminent l'écoulement qui met en mouvement un grain isolé à la surface du lit. Le grain est supposé initialement en équilibre sur d'autres grains (deux ou trois en fonction de la dimension du modèle). Sa mise en mouvement se fait de deux façons : par translation ou par rotation. Le grain est entraîné par translation lorsque la force exercée par le fluide devient supérieure à la force qui maintient le grain sur le lit. La première force est constituée des forces

de traînée et de portance qui sont au sens large : la force de traînée, la force de portance, la force de masse ajoutée, la force histoire, etc. (Cf. le chapitre 1 de la partie 2, ce chapitre intéresse la représentation de la force exercée par le fluide sur une particule solide.) La deuxième force est due au poids du grain. Lorsque la particule est mise en mouvement par rotation, la détermination de la vitesse de frottement critique repose sur l'équation des moments des forces. Les expériences (Dey *et al.*, 1999) montrent que le grain sphérique se met en mouvement plutôt par rotation tandis qu'un grain anguleux tend à glisser.

White (1940) envisage la mise en mouvement d'un grain par rotation. Le grain est placé en équilibre sur deux autres grains. Le raisonnement repose sur l'égalité, lors de l'entraînement du

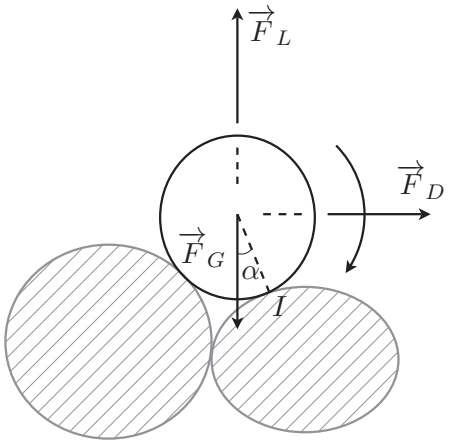


figure 2.1 – mise en mouvement du grain par rotation

grain, des moments des forces de traînée et de flottabilité exprimés à un des points de contact autour duquel le grain est supposé tourner. White (1940) choisit de représenter le moment de la force de traînée exprimé au point de contact de la façon suivante.

$$\mathcal{M}_D = \beta \rho u_*^2 (\pi a_p^2) a_p \cos\alpha \tag{2.6}$$

Avec : $\mathcal{M}_D$ le moment de la force de traînée ; a_p le rayon du grain ; β un paramètre.
L'angle α est défini dans la figure 2.1. Le paramètre β modélise les effets qui ne sont pas pris en compte par cette représentation simple de la force de traînée comme par exemple les effets liés à la turbulence et les effets liés à la position réelle du point d'application de la force. Le moment de la force de flottabilité $\mathcal{M}_G$ au point de contact s'écrit :

$$\mathcal{M}_G = \frac{4\pi a_p^3}{3}(\rho_s - \rho) g a_p \sin\alpha \tag{2.7}$$

L'égalité des moments $\mathcal{M}_D$ et $\mathcal{M}_G$ lors de la mise en mouvement du grain permet à White (1940) de déterminer l'expression (2.8) de la vitesse de frottement critique u_{*c} susceptible de faire bouger le grain de diamètre d_p.

$$u_{*c} = B\sqrt{(\gamma - 1) g d_p}\ , \quad B = \sqrt{\frac{2\tan\alpha}{3\beta}} \tag{2.8}$$

La vitesse de frottement critique u_{*c} apparaît proportionnelle à $\sqrt{d_p}$. Bagnold (1941) retrouve expérimentalement ce résultat. Dans l'eau, cette relation est satisfaite si le diamètre des particules est supérieur à 0,65 mm : le paramètre B est alors égal à 0,2. Dans l'air, nous avons $u_{*c} \simeq 0{,}1\sqrt{(\gamma - 1) g d_p}$ si $d_p > 0{,}1$ mm. (Raudkivi, 1998).

2.3 critère de Shields (1936)

Le critère de Shields est un modèle empirique qui repose sur l'analyse dimensionnelle du processus d'entraînement des grains. C'est le modèle le plus utilisé pour déterminer la vitesse de frottement critique. Les travaux de Shields (1936) qui sont à l'origine du dit critère considèrent un lit de sédiments non cohésifs de granulométrie quasi-uniforme. Dans son approche, le grain est mis en mouvement par un écoulement qui est supposé unidirectionnel. La force exercée par le fluide est constituée uniquement de la force de traînée dont la forme générale est donnée par l'équation (2.9).

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A_p \rho u_f^2 = \mathcal{F}_1 \left(a_1, \frac{d_p u_f}{\nu} \right) \rho d_p^2 u_f^2 \tag{2.9}$$

Avec : C_D le coefficient de traînée ; A_p la surface du grain exposée à l'écoulement ; a_2 un facteur de forme qui caractérise la forme du grain.
Le coefficient C_D dépend du rapport sans dimension $d_p u_f/\nu$ qui définit le nombre de Reynolds de la particule Re_p. La surface A_p est proportionnelle au carré du diamètre du grain d_p et dépend de sa forme. La fonction $\mathcal{F}_1$ représente l'effet du nombre de Reynolds Re_p sur le coefficient C_D et l'effet de la forme du grain sur le coefficient C_D et sur la surface A_p. La vitesse u_f est calculée à une distance du lit qui est fixée par Shields (1936) à $a_2 d_p$ avec a_2 une constante à déterminer, liée au lit. Elle est calculée en utilisant le profil logarithmique avec $k \propto d_p$:

$$\frac{u_f}{u_*} = 5.75 \log \left(\frac{a_2 d_p}{k} \right) + \frac{(a_2 d_p) u_*}{\nu} = 5.75 \log a_2 + \mathcal{F}_2(Re_*) \tag{2.10}$$

Avec Re_* le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement.
Dans ces hypothèses, la force exercée par le fluide s'écrit comme une fonction des facteurs a_1 et a_2 et du nombre de Reynolds Re_* :

$$F_D = \rho d_p^2 u_*^2 \mathcal{F}_3 \left(a_1, a_2, Re_* \right) \tag{2.11}$$

La force horizontale qui maintient le grain sur le lit et qui est notée R est proportionnelle à la force de flottabilité. Son expression dépend de la topographie du lit au voisinage du grain (pente du lit par exemple) qui est modélisée par le facteur a_3 :

$$R = a_3 (\rho_s - \rho) g d_p^3 \tag{2.12}$$

Lorsque le grain est mis en mouvement, Shields (1936) suppose l'égalité des forces F_D et R. Cette hypothèse correspond à un grain entraîné par translation. Cependant, une égalité équivalente est obtenue si l'entraînement du grain se fait par rotation. Dans ce cas, l'effet de la topographie modifie la force de traînée. Shields (1936) déduit de cette égalité que le paramètre de Shields critique dépend, pour un lit donné (a_1, a_2 et a_3 constants), seulement du nombre de Reynolds.Ainsi nous avons :

$$\theta_c = \mathcal{F}(Re_*) \tag{2.13}$$

L'équation (2.13) constitue le critère de Shields.
Shields (1936) estime la fonction $\mathcal{F}$ dans l'équation (2.13) à partir de données expérimentales sur le transport de sédiments. Le paramètre de Shields critique est défini pour un transport nul. Shields (1936) détermine, pour chaque série de mesures considérée, une relation empirique entre la quantité de sédiments transportés et le paramètre de Shields. Il déduit par extrapolation, lorsque le transport est nul, la vitesse de frottement critique. Le critère proposé par Shields (1936) est présenté sous la forme d'un diagramme d'abscisse Re_* et d'ordonnée θ sur lequel est tracée la fonction $\mathcal{F}$. Il est établi à partir d'expériences réalisées avec des sédiments non cohésifs de masse volumique comprise entre 1060 et 4250 kg.m^{-3} et de granulométrie quasi-uniforme ($\sigma_g < 1{,}3$) pour des nombres de Reynolds Re_* compris entre 6 et 220. Il est complété et corrigé par de nombreuses études expérimentales (White, 1970 ; Grass, 1970 ; Mantz, 1973, 1977 ; Miller *et al.*,

1977 ; Unsöld, 1982). Le critère aujourd'hui utilisé appelé critère de Shields est une synthèse de tous ces travaux. Une représentation de ce critère de Shields est donnée dans la figure 2.3 (Raudkivi, 1998). Les valeurs critiques obtenues par Shields (1936) sont situées dans la zone

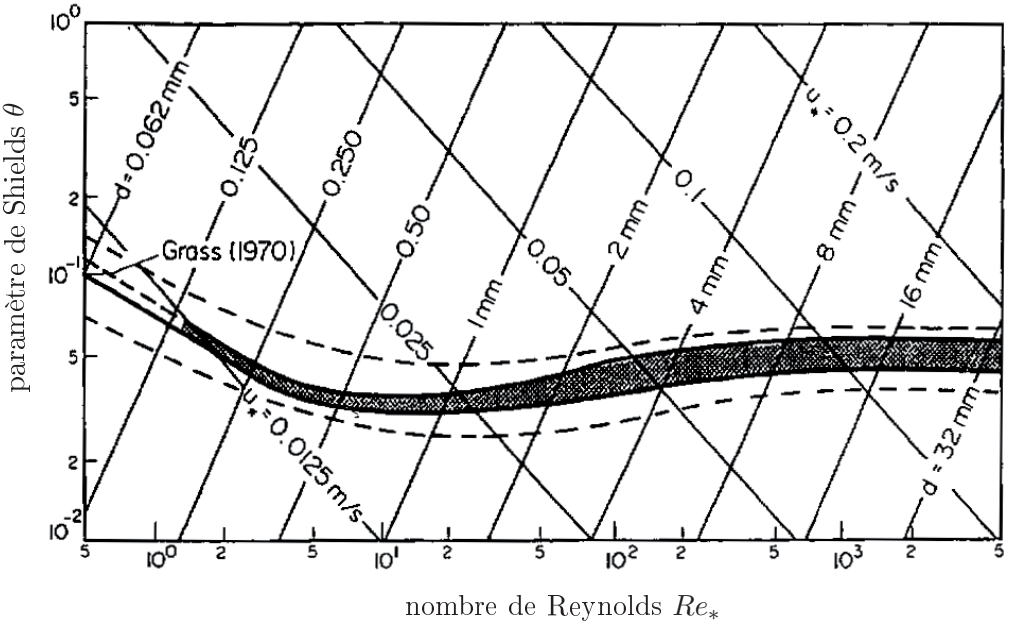


figure 2.2 – critère de Shields (Raudkivi, 1998) ; la zone coloriée en noir correspond aux vitesses de frottement critiques obtenues par Shields (1936) ; la zone située entre les deux lignes en pointillé contient la plupart des valeurs critiques trouvées dans les expériences ; la zone située au-dessus de cette dernière zone correspond à des vitesses de frottement pour lesquelles le grain est en mouvement, la zone située au-dessous à des vitesses de frottement pour lesquelles le grain est au repos

coloriée en noir ; la plupart des résultats expérimentaux est contenue dans la zone située entre les deux courbes en pointillé. Ces zones divisent le plan $Re_* - \theta$ en deux zones, une zone inférieure qui correspond à un grain au repos et une zone supérieure qui correspond à un grain en mouvement. Lorsque le nombre de Reynolds Re_* est supérieur à 100 (*i.e* la couche limite turbulente est hydrauliquement rugueuse), le paramètre de Shields critique est approximativement constant, compris entre 0,047 et 0,056 (Meyer-Peter et Müller, 1948 ; Bonnefille, 1963 ; Raudkivi, 1998). Si $Re_* < 2$, Shields suppose que

$$\theta_c \propto Re_*^{-1} \tag{2.14}$$

Grass (1970) trouve un résultat différent : si $0{,}7 < Re_* < 2$,

$$\theta_c \propto Re_*^{-0{,}63} \tag{2.15}$$

Mantz (1977) répertorie des résultats obtenus pour des faibles nombres de Reynolds. Il trouve que l'exposant du nombre de Reynolds varie de -1 à 0. Il déduit de ses expériences et de celles de White (1970) l'expression (2.16) qui est valide si $0{,}03 < Re_* < 1$.

$$\theta_c = 0{,}10 Re_*^{-0{,}3} \tag{2.16}$$

Les mesures sont réalisées dans l'eau et dans l'huile avec des sédiments de diamètre moyen compris entre 0,01 et 0,15 mm.
La forme du critère choisie par Shields (1936) est peu pratique car les grandeurs θ et Re_* dépendent de la vitesse de frottement u_*. Des expressions explicites sont formulées comme les

critères proposés par Bonnefille (1963), van Rijn (1984a) et Julien (1994). van Rijn (1984a) relie le paramètre de Shields critique au diamètre sans dimension d_* qui est donné par l'équation (2.17).

$$d_* = d\left[\frac{(\gamma-1)g}{\nu^2}\right]^{1/3} \tag{2.17}$$

Le critère obtenu par van Rijn (1984a) est présenté dans le tableau 2.5.

Si $d_* \leq 4$	$\theta_c = 0{,}24\, d_*^{-1}$
Si $4 < d_* \leq 10$	$\theta_c = 0{,}14\, d_*^{-0{,}64}$
Si $10 < d_* \leq 20$	$\theta_c = 0{,}04\, d_*^{-0{,}10}$
Si $20 < d_* \leq 150$	$\theta_c = 0{,}013\, d_*^{0{,}29}$
Si $d_* > 150$	$\theta_c = 0{,}055$

tableau 2.5 – critère de Shields proposé par van Rijn (1984a)

2.4 application aux sédiments dispersés

Le critère de Shields repose sur des données obtenues avec des sédiments quasi-uniformes. Son application à des sédiments de granulométrie dispersée posent deux questions : les modèles sont-ils valides ? comment représenter la distribution de la taille des grains ? Le transport de sédiments de granulométrie dispersée fait l'objet de nombreux travaux (Misri *et al.*, 1984 ; Samaga *et al.*, 1986 ; Wilcock et coauteurs, 1988, 2001, 2003 ; Kuhnle, 1993). Ils montrent l'existence de phénomènes de sous- et surexpositions des grains à l'écoulement en fonction du diamètre. Ces phénomènes sont mis en évidence en particulier dans les travaux de Wilcock et Southard (1988). La figure 2.3 montre l'évolution du paramètre de Shields de référence θ_{ri} des classes des grains composant le sédiment en fonction du diamètre sans dimension d_{*i} qui est déterminée par Wilcock et Southard (1988) pour six sédiments. Le critère de Shields qui donne la valeur de référence dans le cas uniforme (Parker *et al.*, 1982) est aussi représentée. Le diamètre moyen et l'écart-type géométrique des sédiments utilisés sont indiqués dans le tableau 2.6. La figure 2.3 montre que la vitesse de frottement de référence (ou critique) des petits grains est supérieure à la valeur déterminée dans le cas d'une distribution uniforme. Les petits grains sont situés, à la surface du lit, derrière des grains plus gros. Ils sont protégés et moins exposés à l'écoulement. La corrélation est inversée pour les particules les plus grossières. La vitesse de frottement de référence est supérieure à la valeur « uniforme ». Les grosses particules apparaissent à la surface du lit comme des éléments isolés et sont surexposées à l'écoulement. Il existe une classe de grains dont la vitesse de référence est similaire à la valeur « uniforme ». Elle correspond le plus souvent au diamètre « moyen » qui est selon les expériences (Misri *et al.*, 1984 ; Wilcock et Southard, 1988 ; Kuhnle, 1993) le diamètre médian d_{50} ou le diamètre moyen arithmétique d_m. Proffitt et Sutherland (1983) considèrent que le diamètre invariant est inférieur ou égal au diamètre d_{50} et qu'il peut estimé en utilisant le tableau 3.8. Kuhnle (1993) trouve un résultat différent pour la rivière Goodwin Creek. Le diamètre invariant est supérieur au diamètre d_{50} du sédiment du lit. Toutefois, la granulométrie de ce sédiment est relativement dispersée et la distribution de la taille des grains à la surface est différente de celle du sédiment du lit. Le diamètre invariant s'avère en fait dans ce cas légèrement inférieur au diamètre d_{50} du sédiment de la surface, grandeur qui apparaît ici plus pertinente.

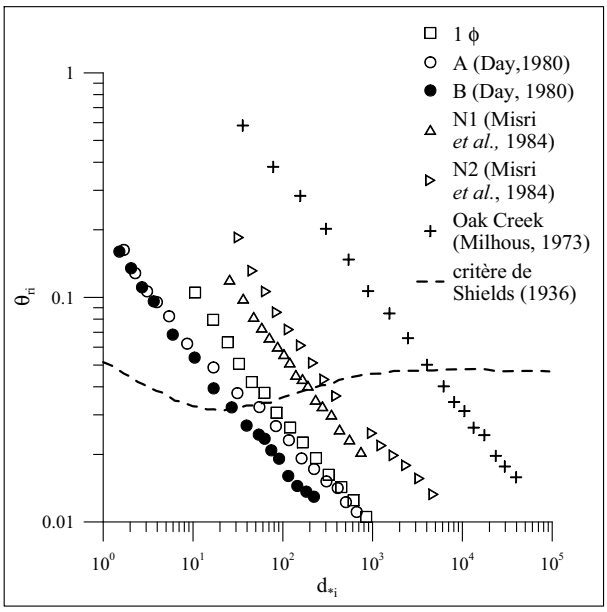


figure 2.3 – évolution du paramètre de Shields de référence θ_{ri} en fonction du diamètre d_{*i} du grain (Wilcock et Southard, 1988)

nom	auteurs	d_m (mm)	σ_g
MUNI	Wilcock et Southard (1988)	1,87	1,15
1/2 ϕ	Wilcock et Southard (1988)	1,82	1,41
1 ϕ	Wilcock et Southard (1988)	1,85	1,99
CUNI	Wilcock et Southard (1988)	5,31	1,13
FUNI	Wilcock et Southard (1988)	0,662	1,20
A	Day (1980)	1,50	3,41
B	Day (1980)	1,17	2,73
N1	Misri *et al.* (1984)	2,37	2,00
N2	Misri *et al.* (1984)	3,78	2,71
N3	Misri *et al.* (1984)	4,09	2,27
SAF	Dhamotharan *et al.* (1980)	2,10	2,45
Oak Creek	Milhous (1973)	13,1	4,29

tableau 2.6 – diamètre moyen des grains et écart-type géométrique de la distribution des sédiments utilisés dans les travaux de Wilcock et Southard (1988) ; les mesures de Dhamotharan *et al.* (1980) et de Milhous (1973) sont réalisées dans les rivières SAF et Oak Creek, les autres données sont obtenues en laboratoire

Wilcock et Southard (1988) trouvent pour les sédiments considérés dans le tableau 2.6 que la relation $\theta_{ri} = f(d_i/d_{50})$ s'exprime sous la forme d'une loi puissance :

$$\theta_{ri} = \alpha \left(\frac{d_i}{d_{50}} \right)^{\beta} \tag{2.18}$$

Avec β un coefficient qui est compris entre $-0{,}809$ et $1{,}091$.
Ainsi, les classes de grains composant le sédiment sont mises en mouvement approximativement à la même contrainte de frottement. Ce résultat constitue le concept dit *equal mobility* qui est introduit par Parker *et al.* (1982) et qui impose $\beta = 1$. Selon Kleinhans et van Rijn (2002) et de Linares et Belleudy (2007), ce concept s'applique lorsque les particules de différentes tailles sont réparties aléatoirement dans le lit (en particulier à sa surface), comme dans les sédiments de distribution uni-modale. Le seuil d'érosion de tels sédiments est déterminé en considérant la mise en mouvement des grains de diamètre « moyen » qui est en fonction des auteurs le diamètre moyen arithmétique d_m ou le diamètre médian d_{50}.

Dans les sédiments bi-modaux (mélanges de sable et de gravier par exemple), les grains ne sont pas mis en mouvement à la même vitesse de frottement et il existe un transport partiel qui est composés par les plus petits grains. Le concept *equal mobility* n'est plus vérifié. La figure 2.4 montre l'évolution de la vitesse de frottement de référence u_{*ri} des classes de grains dans des mélanges de sable et de gravier, évolution qui est déterminée par Kuhnle (1993) en laboratoire et dans la rivière Goodwin Creek. Les classes constituées par les grains de sable ($0{,}2 \leq d_i \leq 2$ mm) sont

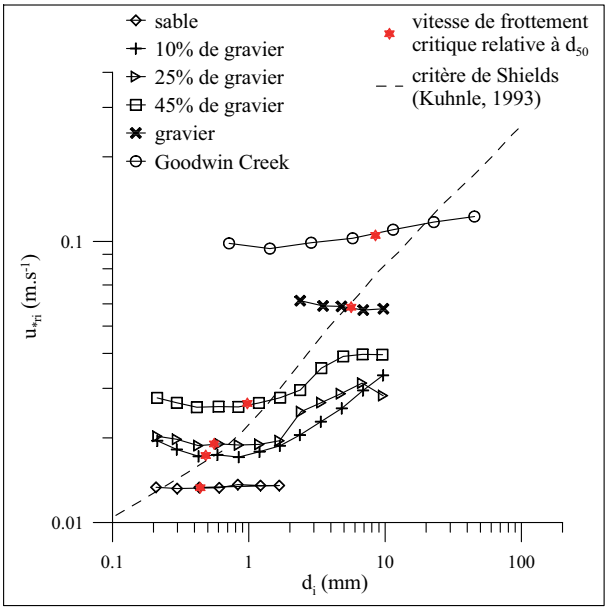


figure 2.4 – évolution de la vitesse de frottement de référence u_{*ri} des classes de grains pour des mélanges de sable et de gravier déterminée par Kuhnle (1993) en laboratoire et dans la rivière Goodwin Creek ; la distribution du diamètre des grains des sédiments est indiquée dans la figure 1.4

caractérisées par une contrainte de frottement de référence qui est approximativement constante. Pour les particules de gravier, la contrainte de frottement de référence est une fonction croissante du diamètre d_i. Ceci est particulièrement vrai dans les expériences en laboratoire. Wilcock (1992) trouve un résultat différent. La contrainte de frottement de référence des particules de gravier est constante pour les deux sédiments bi-modaux étudiés. Selon Kuhnle (1993), cette différence est liée à la granulométrie des sédiments. Dans l'étude de Wilcock (1992), peu de grains appartient aux classes situées entre les deux modes et la distribution de la taille des grains contenus

dans ces modes est très étroite. de Linares et Belleudy (2007) avance une autre explication liée à la proportion de gravier dans le sédiment. Si les particules de gravier sont majoritaires, le comportement du sédiment est similaire à celui d'un sédiment de distribution uni-modale. Les particules de gravier ne sont pas affectées par les particules de sable peu nombreuses et sont mises en mouvement, quelle que soit leur taille, à la même contrainte de frottement. Les particules de sable sont protégées derrière les particules de gravier et ne sont entraînées que si celles-ci sont en mouvement. Si les particules de gravier sont minoritaires, elles sont isolées à la surface du lit et leur mouvement dépend de leur taille. La contrainte de frottement critique des particules de sable est approximativement constante et inférieure aux valeurs critiques observées pour les particules de gravier. Dans les expériences de Kuhnle (1993), la proportion de gravier dans les trois sédiments étudiés est inférieure, en poids, à 45%. Nous observons que la dépendance entre la contrainte de frottement critique des particules de gravier et le diamètre d_i est plus prononcée lorsque la proportion de gravier est égale à 10%.
La proportion de gravier (ou de sable) influe également sur les phénomènes de sous- et surexposition. (Kuhnle, 1993 ; Wilcock *et al.*, 2001) Lorsque la proportion en sable diminue, la mobilité des particules de sable diminue et la contrainte de frottement critique τ_{ci} relative à la classe de diamètre d_i diminue. Le nombre de particules de sable protégées derrière une particule de gravier croît. Inversement, lorsque la proportion de sable augmente, la contrainte τ_{ci} des particules de gravier diminue car plus isolées à la surface du lit, elles sont plus exposées à l'écoulement. Wilcock *et al.* (2001) rangent les grains en deux classes « sable » et « gravier » et déterminent la contrainte de frottement critique de la classe « gravier ». Celle-ci diminue lorsque la proportion en sable augmente. Wilcock *et al.* (2001) relèvent que la diminution est plus brutale lorsque la proportion de sable passe de 14% à 21%. Ils considèrent que cette diminution brutale est liée à la modificiation de la texture du mélange qui passe d'une texture dite *framework-supported* (Les particules de gravier sont jointives.) à une texture dite *matrix-supported* (Les particules de gravier sont diluées parmi les particules de sable.).
La ségrégation des grains à la surface du lit peut aussi expliquer le comportement des particules dans les mélanges bi-modaux . Wilcock et McArdell (1993) et Kleinhans et van Rijn (2002) constatent en laboratoire l'existence de bandes de sable dans la direction de l'écoulement au-dessus de lits de gravier. A l'intérieur des bandes de sable, le concept *equal mobility* s'applique et les particules sont très mobiles. A l'extérieur, il y a un entraînement sélectif des particules de gravier dû à la présence des particules de sable. Parker *et al.* (1982) repèrent également des bandes de sable sur les lits des rivières Snake et Clearwater. Ils remarquent que la présence de ces bandes augmente la résistance des lits de gravier à l'érosion.

Dans les sédiments pour lesquels il existe un transport partiel, le seuil d'érosion du lit ne peut pas être défini à partir du diamètre moyen. En général, les grains du sédiment sont sériés en classes et pour chaque classe, une contrainte de frottement critique τ_{ci} (relative au diamètre d_i) est déterminée. La mobilité des grains dans un sédiment dispersé dépend non seulement de leur taille d_i mais aussi de la taille des particules sur lesquelles ils sont posés et qui définit leur mobilité relative. La mobilité relative est liée à la distribution de la taille des grains et le plus souvent représentée par les rapports d_i/d_m et d_i/d_{50}. Les études de Wilcock (1992) et Kuhnle (1993) sur les mélanges bi-modaux mettent également en évidence le rôle des modes. Trois paramètres pertinents sont ainsi identifiées : la différence des tailles des deux modes, la proportion de grains contenus dans chaque mode et la proportion de grains des classes situées entre les deux modes. Pour ces raisons, la contrainte de frottement critique τ_{ci} ne peut pas être déterminée par le critère de Shields et des modèles spécifiques sont établis.
Egiazaroff (1965) considère une particule sphérique sur un arrangement de grains de diamètres variables dans un écoulement pleinement turbulent et obtient l'expression analytique (2.19).

$$\theta_{ci} = \frac{0{,}1}{\left[\log\left(19 d_i/d_{50}\right)\right]^2} \tag{2.19}$$

Egiazaroff (1965) utilise à la place du diamètre d_{50} le diamètre $\bar{d}_{avg}$. Le diamètre $\bar{d}_{avg}$ détermine la rugosité du lit en considérant à la fois la granulométrie du sédiment du lit et la granulométrie du sédiment en mouvement pour le débit fluide considéré. La méthode de calcul employée nous apparaît assez obscure et cela explique peut-être pourquoi la présentation de cette formule dans la littérature (Raudkivi, 1998 ; Wu *et al.*, 2000 ; Kleinhans et van Rijn, 2002) repose sur le diamètre d_{50} du sédiment du lit.
Komar (1987) (Raudkivi, 1998) montre en utilisant les données de Day (1980) que la relation entre θ_{ci} et d_i/d_{50} dépend de l'écart-type géométrique σ_g. Il trouve, pour un sédiment faiblement dispersé avec $d_{50} = 0{,}42$ mm et $\sigma_g = 1{,}82$, l'expression (2.20) du paramètre θ_{ci} :

$$\theta_{ci} = \frac{0{,}075}{\left[\log\left(17 d_i/d_{50}\right)\right]^2} \tag{2.20}$$

et pour un sédiment dispersé avec $d_{50} = 1{,}75$ mm et $\sigma_g = 4{,}28$, l'expression (2.21) :

$$\theta_{ci} = \frac{0{,}051}{\left[\log\left(29 d_i/d_{50}\right)\right]^2} \tag{2.21}$$

Wilcock et Southard (1988) notent au contraire que le paramètre de Shields θ_{ri} ne dépend pas de l'écart-type géométrique, seulement du rapport d_i/d_{50}. La distribution de la taille des grains des trois sédiments utilisés dans les expériences est uni-modale. Le diamètre moyen vaut environ 1,8 mm et l'écart-type σ_g varie de 1,1 à 2. (Les sédiments sont désignés par les termes MUNI, 1/2 ϕ et 1 ϕ dans le tableau 2.6.)
Wu *et al.* (2000) développent un modèle analytique basé sur la probabilité p_{hi} que le grain de diamètre d_i soit protégé de l'écoulement et sur la probabilité p_{ei} qu'il soit exposé ($p_{hi} + p_{ei} = 1$). Le paramètre de Shields critique est donnée par la relation empirique (2.22).

$$\theta_{ci} = 0{,}03 \left(\frac{p_{ei}}{p_{hi}}\right)^{-0{,}6} \tag{2.22}$$

Avec :

$$p_{hi} = \sum_{j=1}^{N} p_{hij} \ , \quad p_{ei} = \sum_{j=1}^{N} p_{eij} \tag{2.23}$$

N le nombre de classes de grains dans le sédiment.
p_{hij} est la probabilité que le grain de diamètre d_i soit protégé par le grain de diamètre d_j et p_{eij} la probabilité que le grain de diamètre d_i ne soit pas protégé par le grain de diamètre d_j. Les probabilités p_{hij} et p_{eij} sont déterminées en considérant deux grains de diamètres d_i et d_j posés côte à côte : le grain de diamètre d_i est protégé par le grain de diamètre d_j si la hauteur d'exposition Δ_i est négative (cf. figure 2.5). La hauteur d'exposition Δ_i qui est comprise entre $-d_j$ et d_i est *a priori* une variable aléatoire car la disposition des grains dans le lit est aléatoire. Wu *et al.* (2000) suppose que la distribution de la grandeur Δ_i est uniforme et la probabilité que la grandeur Δ_i soit négative est égale à $d_j/(d_i + d_j)$. La probabilité p_{hij} est égale au produit de la probabilité qu'un grain de diamètre d_j soit devant un grain de diamètre d_i (supposée égale à la fréquence f_j) et de la probabilité que la grandeur Δ_i soit négative. L'expression de la probabilité p_{eij} est obtenue de façon similaire. Nous avons alors :

$$p_{hij} = f_j \frac{d_j}{d_i + d_j} \ , \quad p_{eij} = f_j \frac{d_i}{d_i + d_j} \tag{2.24}$$

Avec f_j la proportion de grains de diamètre d_j dans le sédiment.
Dans les mélanges de sable et de gravier, la distribution de la taille des grains présents à la surface du lit est en général différente de celle du sédiment. Pour cette raison, Wilcock et Crowe (2003) proposent un modèle basé sur la granulométrie du sédiment à la surface. Le paramètre

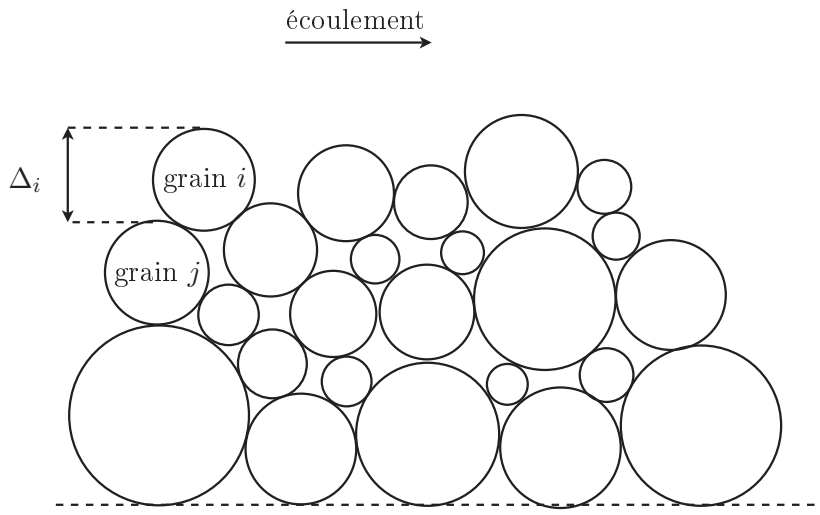


figure 2.5 – définition de la hauteur d'exposition Δ_i (Wu *et al.*, 2000)

de Shields critique θ_{ci} est exprimé en fonction du diamètre moyen d_{sm} du sédiment de la surface et du paramètre de Shields critique θ_{csm} correspondant à ce diamètre comme suit :

$$\theta_{ci} = \theta_{csm}\left(\frac{d_i}{d_{sm}}\right)^{\beta-1} \quad , \quad \beta = \frac{0{,}67}{1+\exp\left(1{,}5-\dfrac{d_i}{d_{sm}}\right)} \tag{2.25}$$

Wilcock et Southard (2003) montrent que le paramètre de Shields θ_{csm} dépend de la proportion F_s de sable à la surface. Ils déterminent son expression à partir de résultats empiriques :

$$\theta_{csm} = 0{,}021 + 0{,}015\exp(-20F_s) \tag{2.26}$$

Le paramètre de Shields critique θ_{ci} est aussi défini très souvent à partir du paramètre de Shield critique θ_{cm} qui correspond au diamètre « moyen » du sédiment (d_m, d_{50}) et une relation du type (2.27) est proposée.

$$\theta_{ci} = \xi_i\theta_{cm} \tag{2.27}$$

ξ_i est un facteur correctif qui est désigné sous le terme *hiding-exposure function*. Il modélise, entre autres, les phénomènes de sous- et surexpositions. Le paramètre θ_{cm} est déduit du critère de Shields conformément aux expériences de Misri *et al* (1984), de Wilcock et Southard (1988), de Kuhnle (1993) qui indiquent que le diamètre invariant est le diamètre moyen.
De nombreuses études sont réalisées afin de déterminer la définition et l'expression de la fonction ξ_i. Pour une revue bibliographique, nous pouvons nous reporter aux études de Buffington et Montgomery (1997) et de Kleinhans et van Rijn (2002). Les travaux de Egiazaroff (1965) fournissent une première expression analytique de la fonction ξ_i.

$$\xi_i = \left[\frac{\log 19}{\log\left(19d_i/d_{50}\right)}\right]^2 \tag{2.28}$$

Habituellement, la fonction ξ_i est dérivée de données expérimentales et s'écrit comme une loi puissance du rapport d_i/d_{50}. Ainsi,

$$\xi_i = \left(\frac{d_i}{d_{50}}\right)^{\beta} \tag{2.29}$$

Ceci implique $\tau_{ci} = \tau_{c50}(d_i/d_{50})^{\beta+1}$.
Selon les données recueillies par Buffington et Montgomery (1997), le paramètre β est compris entre $-0{,}32$ et $-1{,}25$. Lorsque $\beta = -1$, les particules se mettent en mouvement à la même

contrainte de frottement, c'est le concept *equal mobility*. Lorsque $\beta < -1$,la contrainte de frottement critique des petits grains est supérieure à celle des gros grains, la mobilité est inversée. Kleinhans et van Rijn (2002) relèvent que c'est parfois le cas pour les sables très fins. Le tableau 2.7 indique quelques valeurs du paramètre β utilisées dans la littérature. Ashida et Michiue

auteurs	β	d_m (mm)	σ_g
Leopold et Emmett (1976)	$-0{,}86$	1,25	3,48
Kuhnle (1993)	$-0{,}81$	11,7	1,87
Wilcock et McArdell (1993)	$-0{,}45$	2,6	5,87
Misri *et al.* (1984)	$-1{,}0$	2,4	2,00

tableau 2.7 – valeurs de paramètre β utilisées dans la littérature (Buffington et Montgomery (1997)

(1972) montrent pour des lits de sable que la relation entre ξ_i et d_i/d_m est différente pour les petits et gros grains. Ils trouvent pour $d_i/d_m \leq 0{,}4$ la fonction ξ_i suivante :

$$\xi_i = 0{,}843 \left(\frac{d_i}{d_m} \right)^{-1} \tag{2.30}$$

Pour $d_i/d_m > 0{,}4$, la fonction ξ_i est donnée par l'équation (2.31).

$$\xi_i = \left[\frac{\log 19}{\log (19 d_i/d_m)} \right]^2 \tag{2.31}$$

3 modèles de transport

Les modèles de transport fournissent le débit de sédiments transportés en fonction des conditions d'écoulement. Ils sont classés en deux catégories : l'approche « une couche » et l'approche « deux couches ». Les modèles dits « une couche » (Ackers et White, 1973 ; Engelund et Hansen, 1967) considèrent les sédiments en mouvement dans sa globalité et déterminent un transport total. Les modèles dits « deux couches » (Meyer-Peter et Müller, 1949 ; Einstein, 1950 ; van Rijn, 1984a,b) envisagent séparément les transports par charriage et en suspension.

3.1 modèles déterministes

Dans les modèles déterministes, le calcul du transport de sédiments repose sur les propriétés moyennes de l'écoulement. Nous décrivons brièvement quatre modèles qui sont représentatifs des différents modèles existants dans la littérature : les modèles de Meyer-Peter et Müller (1948), de Engelund et Hansen (1967), de Ackers et White (1973) et de van Rijn (1984a,b,c). Ils sont établis en utilisant des données expérimentales obtenues avec des sédiments de granulométrie quasi-uniforme ($\sigma_g < 1{,}3$). Ils font intervenir le transport sans dimension ϕ défini comme suit.

$$\phi = \frac{q_t}{\sqrt{(\gamma - 1) g d_p^3}} \tag{3.1}$$

Avec q_t le débit volumique de sédiments transportés par unité de largeur.
Lorsque la distribution du diamètre du grain est dispersée, le diamètre d_p est remplacé par le diamètre « moyen » (d_m, d_{50}).

Citons pour son originalité les travaux de Einstein (1950) qui repose sur la probabilité qu'un grain soit mis en mouvement. Nous pouvons nous reporter pour une description de ces travaux aux livres de Raudkivi (1998) (pp. 139–142) et de Graf et Altinakar (2000) (pp. 376–382).

3.1.1 modèle de Meyer-Peter et Müller (1948)

Le modèle de Meyer-Peter et Müller (1948) détermine le transport par charriage et compte tenu des données expérimentales utilisées ($3 \leq d_p \leq 29$ mm), il est préconisé pour prédire le transport de gros sédiments. Le débit de sédiments est exprimé comme la différence des contraintes de frottement $\tau_0 - \tau_c$ avec τ_c la contrainte de frottement critique. La différence $\tau_0 - \tau_c$ correspond à la contrainte de frottement « disponible » pour le transport. Nous avons

$$\phi = 8 \left(\xi_m \theta - \theta_c \right)^{3/2} \tag{3.2}$$

Avec : θ_c le paramètre de Shields critique qui est fixé par Meyer-Peter et Müller à 0,047 ; ξ_m un paramètre de rugosité (Graf et Altinakar, 2000) :

$$\xi_m = \left(\frac{K_s}{K_s'} \right)^{3/2} \tag{3.3}$$

K_s est la rugosité totale du lit et K'_s la rugosité liée aux grains. Ces deux rugosités sont évaluées respectivement par la formule de Manning-Strickler et par la formule de Strickler (L'écoulement est supposé hydrauliquement rugueux.).

$$K_s = \frac{U_f}{R^{3/2} S_f^{1/2}} \ , \quad K'_s = \frac{26}{d_{90}^{1/6}} \tag{3.4}$$

Avec : S_f la pente de la ligne de charge ; U_f la vitesse moyenne ; R le rayon hydraulique.
Le paramètre de rugosité ξ_m est compris entre 0,35 et 1 (Raudkivi, 1998 ; Graf et Altinakar, 2000). Graf et Altinakar (2000) recommandent de prendre, en l'absence de dunes sur le lit, $\xi_m = 1$.

L'approche développée dans le modèle de Meyer-Peter et Müller est utilisée également par Du Boys (1879), par Schoklitsch (1934) et par Fernandez-Luque et van Beek (1974). Par exemple, Fernandez-Luque et van Beek (1974) proposent la relation (3.5) qui est basée sur leurs résultats expérimentaux (grains de formes et de masses volumiques différentes) :

$$\phi = \alpha \, (\theta - \theta_c)^{3/2} \ , \quad \alpha = 5{,}7 \tag{3.5}$$

Ribberink (1998) (Kleinhans et van Rijn, 2002) considère que le facteur α dépend du débit de sédiments. Il recommande de prendre $\alpha = 5{,}7$ pour des petits débits, $\alpha = 8$ pour des débits intermédiaires et $\alpha = 13$ pour des grands débits.

3.1.2 modèle de Engelund et Hansen (1967)

Engelund et Hansen (1967) appliquent l'approche proposée par Bagnold (1956) pour déterminer le débit de sédiments total q_t. Dans cette approche, le débit de sédiments est imposé par la part utile de l'énergie disponible dans l'écoulement. Engelund et Hansen (1967) considèrent le transport de sédiment au-dessus d'une dune qui recouvre la surface du lit. Le transport est lié à l'énergie requise pour que les grains passent au-dessus de la dune. Avec ces considérations, Engelund et Hansen (1967) obtiennent l'expression (3.6) qui donne le débit q_t.

$$f\phi = 0{,}1 \, \theta^{5/2} \ , \tag{3.6}$$

Avec : f le coefficient de frottement :

$$f = \frac{2ghS_f}{U_f^2} = \frac{2g}{C^2} \tag{3.7}$$

C le coefficient de Chézy et h la hauteur d'eau.
La relation (3.6) est calibrée à partir de données expérimentales établies avec des mélanges de sable faiblement dispersés. Le nombre de Reynolds Re_* dans les expériences est supérieur à 12. Raudkivi (1998) note que la formule fournit des résultats satisfaisants d'une part, lorsque l'estimation du coefficient C s'appuie sur des observations in-situ et d'autre part, lorsque le transport en suspension est significatif.

3.1.3 modèle de Ackers et White (1973)

Le modèle de Ackers et White (1973) calcule le débit total de sédiments transportés, il tient compte pour cela de l'influence de la taille des grains sur le mode de transport (charriage ou suspension). Ackers et White (1973) supposent que les gros grains sont transportés par charriage, que les petits grains en suspension et que les grains de taille intermédiaire selon les deux modes. Les mécanismes à l'origine des deux types de transport ne sont pas les mêmes et ils sont décrits par des grandeurs différentes. Le transport par charriage est contrôlé par la vitesse de frottement

u'_* qui est liée à la rugosité due aux grains. Le transport en suspension dépend de la vitesse de frottement « totale » u_*.
Le débit de sédiment est défini dans le modèle par le nombre sans dimension G_{gr} et il est donné par l'équation (3.8).

$$G_{gr} = C\left(\frac{F_{gr}}{A} - 1\right)^m \quad , \quad G_{gr} = \frac{q_t}{U_f d_p}\left(\frac{u_*}{U_f}\right)^n \tag{3.8}$$

Avec : F_{gr} le paramètre de mobilité :

$$F_{gr} = \frac{u_*^n}{\sqrt{(\gamma-1)g d_p}}\left[\frac{U_f}{32^{1/2}}\log\left(\frac{\alpha h}{d_p}\right)\right]^{n-1} \tag{3.9}$$

α, n, A, C, m des coefficients de calibration.
Le paramètre G_{gr} représente le rapport de la puissance utile au transport de sédiments et de la puissance fournie par l'écoulement. Le paramètre de mobilité F_{gr} s'identifie au paramètre de Shields. Sa valeur critique est donnée par le coefficient A. Si $4 < d_* < 60$,

$$A \simeq \theta_c \tag{3.10}$$

Si $d_* < 4$,

$$A < \theta_c \tag{3.11}$$

Le coefficient α est évalué à partir de mesures dans des écoulements turbulents hydrauliquement rugueux et sa valeur est fixée à 10. Le coefficient n indique la nature du transport : si le transport se fait par charriage, $n = 0$; s'il est en suspension, $n = 1$. Les coefficients A, C et m sont déduits en utilisant des méthodes d'optimisation. Leur expression dépend de la taille du grain d_* et de la nature du transport. Les expériences sont réalisées avec des sédiments de distribution quasi-uniforme dont le diamètre d_* est compris entre 1 et 100.
Pour les gros grains ($d_* \geq 60$), le transport se fait par charriage et le paramètre de mobilité F_{gr} s'écrit avec $n = 0$:

$$F_{gr} = \frac{u'_*}{\sqrt{(\gamma-1)g d_p}} \quad , \quad u'_* \equiv \frac{U_f}{32^{1/2}}\log\left(\frac{\alpha h}{d_p}\right) \tag{3.12}$$

Les coefficients A, C et m sont constants et sont donnés par l'équation (3.13).

$$A = 0{,}17 \ , \quad C = 0{,}025 \ , \quad m = 1{,}50 \tag{3.13}$$

Pour les grains de taille intermédiaire ($60 > d_* \geq 1$), le transport se fait par charriage et en suspension. Le coefficient n est compris entre 0 et 1 et quantifie la proportion de grains transportés selon un des deux modes. Nous avons :

$$n = 1 - 0{,}56 \log d_* \tag{3.14}$$

Les coefficients A, C et m sont des fonctions du diamètre d_*, ils sont déterminés en utilisant la relation (3.15).

$$A = \frac{0{,}23}{\sqrt{d_*}} + 0{,}14 \ , \quad \log C = 2{,}86 \log d_* - (\log d_*)^2 - 3{,}54 \ , \quad m = \frac{9{,}66}{d_*} + 1{,}34 \tag{3.15}$$

Les petits grains ($d_* < 1$) sont transportés en suspension. Compte tenu des données expérimentales utilisées, il n'est pas possible à Ackers et White (1973) de déterminer les coefficients A, C et m.

3.1.4 modèle de van Rijn (1984)

Le modèle de van Rijn (1984a,b,c) est un modèle « deux couches ». Il détermine le débit q_b des sédiments transportés par charriage et le débit q_s des sédiments transportés en saltation. Le transport par charriage est constitué dans le modèle des sédiments qui roulent et glissent le long de la surface du lit et des sédiments transportés en saltation. Le transport par charriage est localisé dans une zone proche de la surface du lit d'épaisseur δ_b. Le débit q_b des particules transportées par charriage dépend de la concentration c_b en particules dans cette zone, de l'épaisseur δ_b et de la vitesse moyenne u_b des particules. Il est défini comme suit :

$$q_b = \delta_b u_b c_b \tag{3.16}$$

Avec q_b le débit par unité de largeur.
L'épaisseur δ_b est assimilée à la hauteur moyenne des rebonds des grains (Une valeur minimale est fixée à $2d_p$). van Rijn (1984a) montre à partir d'une analyse dimensionnelle que les rapport δ_b/d_p et u_b/u_* et la concentration c_b dépendent de deux nombres sans dimension, le paramètre de mobilité T et le diamètre d_*. Le paramètre de mobilité T est donné par l'équation (3.17).

$$T = \frac{{u'_*}^2 - u_{*c}^2}{u_{*c}^2} \tag{3.17}$$

Avec u'_* la vitesse de frottement liée à la rugosité due aux grains.
L'expression des grandeurs δ_b et u_b est dérivée de la simulation numérique du rebond d'un grain sur le lit. L'équation de mouvement du grain utilisée est calibrée à partir des expériences de Fernandez-Luque et van Beek (1976) (cf. le paragraphe 1.6.3 dans la partie 2). La concentration c_b est obtenue, en fonction de T et de d_*, de mesures du débit q_b et des expressions de δ_b et u_b. van Rijn (1984a) déduit de ces résultats l'expression (3.18) du débit sans dimension ϕ_b.

$$\phi_b = 0{,}053\,\frac{T^{2,1}}{d_*^{0,3}}\ , \quad \phi_b = \frac{q_b}{\sqrt{(\gamma-1)g d_p^3}} \tag{3.18}$$

Pour calculer la vitesse u'_*, van Rijn (1984a) propose l'expression (3.19).

$$u'_* = \frac{\sqrt{g}\,U_f}{C'} \tag{3.19}$$

Avec C' le coefficient de Chézy lié à la rugosité des grains.

$$C' = 18\log\left(\frac{12R_b}{3d_{90}}\right) \tag{3.20}$$

R_b est le rayon hydraulique lié au lit qui est calculé selon la méthode de Vanoni-Brooks (Julien, 1994).

Le transport en suspension dépend du paramètre Z qui quantifie l'importance des forces fluide turbulentes dans la direction verticale vis-à-vis de la force de flottabilité. Le paramètre Z est défini comme suit.

$$Z = \frac{w_s}{\beta\kappa u_*} \tag{3.21}$$

Avec w_s la vitesse de sédimentation d'une particule isolée et β un coefficient relatif à la diffusion des particules.
Les grains en suspension sont supposés se déplacer dans une zone située à une distance a du lit. La distance de référence a est égale à la moitié de la hauteur des dunes et en l'absence d'information sur leur géométrie, à la hauteur de rugosité k_s ($k_s = 3\,d_{90}$). Pour des raisons de

précision, van Rijn (1984b) recommande de prendre $0{,}01h$ comme valeur minimale de a. Le débit q_s de sédiments en suspension est donné par l'équation (3.22).

$$q_s = \int_a^h c(z) u_f(z)\, dz \tag{3.22}$$

Avec c la concentration de particules à la distance au lit z.
Le profil vertical de concentration $c(z)$ est obtenu de l'équation de diffusion qui s'écrit dans un écoulement permanent et uniforme :

$$(1-c)c\, w_{sm} + \varepsilon_s \frac{dc}{dz} = 0 \tag{3.23}$$

Avec : w_{sm} la vitesse de sédimentation dans un écoulement chargé de sédiments : $w_{sm} = (1-c)^4 w_s$; ε_s la diffusivité des particules en suspension.
van Rijn (1984b) exprime la diffusivité ε_s en fonction de la diffusivité du fluide ε_f :

$$\varepsilon_s = \beta\varphi\varepsilon_f \tag{3.24}$$

Le paramètre φ modélise la diminution de la turbulence liée à la présence des particules. Il est supposé dépendre de la concentration c. Lorsque la concentration est faible, $\varphi \simeq 1$. Le coefficient β représente la différence de diffusivité de la particule de sédiment et de la particule fluide. Il est pris constant sur la hauteur d'eau. Si $w_s/u_* < 2$, il est égal à 1. Si $w_s/u_* > 2$,

$$\beta = 1 + 2\left(\frac{w_s}{u_*}\right)^2 \tag{3.25}$$

Le coefficient de diffusion ε_f est en général modélisé par un profil parabolique. Ici le profil parabolique est utilisé seulement si $z/h < 0{,}5$:

$$\varepsilon_f = 4\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\varepsilon_{f\max}\ , \quad \varepsilon_{f\max} = 0{,}25\kappa u_* h \tag{3.26}$$

Pour $z/h \geq 0{,}5$, le coefficient ε_f est constant et égal à $\varepsilon_{f\max}$. Selon van Rijn (1984b), cette modélisation permet une meilleur description du profil de concentration.
van Rijn (1984b) résout l'équation de diffusion (3.23) dans l'hypothèse $\varphi = 1$ et la solution s'écrit pour des petites concentrations (*i.e.* $c < c_a < 0{,}001$) : si $z/h < 0{,}5$,

$$\frac{c}{c_a} = \left[\frac{a}{h-a}\frac{h-z}{z}\right]^Z \tag{3.27}$$

et si $z/h \geq 0{,}5$,

$$\frac{c}{c_a} = \left[\frac{a}{h-a}\right]^Z \exp\left[-4Z\left(\frac{z}{h}-0{,}5\right)\right] \tag{3.28}$$

La concentration de référence c_a est définie par l'équation (3.29).

$$q_b = c_a u_a a \tag{3.29}$$

La vitesse u_a est supposée égale à $\alpha_2 u_b$. La constante α_2 est déterminée en comparant des profils de concentration mesurés et calculés. Dans les expériences utilisées, la concentration c est relativement faible et $\phi \simeq 1$. La constante α_2 est fixée à 2,3. van Rijn (1984b) exprime la concentration c_a en fonction des nombres sans dimension T et d_* :

$$c_a = 0{,}015\,\frac{d_{50}}{a}\frac{T^{1,5}}{d_*^{0,3}} \tag{3.30}$$

van Rijn (1984b) généralise les expressions (3.27) et (3.28) de la concentration pour c et φ quelconques. Pour cela, il remplace le paramètre Z par la somme $Z + \varphi' = Z'$ avec φ' un coefficient de calibration. Le coefficient φ' est estimé en utilisant l'équation (3.31).

$$\varphi' = 2{,}5 \left(\frac{w_s}{u_*}\right)^{0,8} \left(\frac{c_a}{0{,}65}\right)^{0,4} \tag{3.31}$$

L'intégrale (3.22) n'a pas de solution analytique. van Rijn (1984b) suppose que le profil de vitesse est logarithmique et calcule numériquement le débit q_s. Il en déduit l'expression approchée (3.32) (La précision est de l'ordre de 75%.).

$$q_s = FU_f h c_a \ , \quad F = \frac{(a/h)^{Z'} - (a/h)^{2,1}}{[1-(a/h)]^{Z'}\,[1{,}2 - Z']} \tag{3.32}$$

Lorsque la distribution de la taille des grains n'est pas uniforme, van Rijn (1984a,b) préconise de prendre le diamètre d_{50} pour estimer le débit q_b. Dans le modèle de transport en suspension, la vitesse de sédimentation est calculée pour un grain de diamètre d_s. L'expression du diamètre d_s est déterminée de façon que le débit calculé soit égal à celui obtenu par la méthode des classes.

$$\frac{d_s}{d_{50}} = 1 + 0{,}011(\sigma_g - 1)(T - 25) \tag{3.33}$$

3.1.5 application des modèles de transport

Pour comparer ces modèles, nous calculons le transport d'un sédiment de diamètre moyen égal à 1,5 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,2. Nous supposons que l'écoulement au-dessus du lit est unidirectionnel et qu'il est décrit par la loi logarithmique. La hauteur d'eau est fixée à 0,5 m et le canal est pris très large ($R \sim h$). La figure 3.1 montre l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ pour les modèles de Meyer-Peter et Müller (1948), de Engelund et Hansen (1967), de Ackers et White (1973), de Fernandez-Luque et van Beek (1976) et de van Rijn (1984a,b). Dans la formule de Meyer-Peter et Müller (1948), 0,047 est remplacé par la valeur du paramètre de Shields critique. Les modèles de Meyer-Peter et Müller (1948), de Fernandez-Luque et van Beek (1976) et de van Rijn (1984a,b) sont des modèles dits à seuil, c'est-à-dire ils calculent un débit non nul seulement si $u_* > u_{*c}$, contrairement aux modèles de Engelund et Hansen (1967) et de Ackers et White (1973). Ceux-ci estiment, quelle que soit la vitesse u_*, un débit non nul qui est très faible proche du seuil d'érosion.
Les débits de sédiments calculés sont dispersés. Ainsi, le transport ϕ varie, selon les modèles, de 1,7 à 3,9 lorsque $\theta - \theta_c \simeq 0{,}44$. La précision des mesures en laboratoire et in-situ est relativement faible et selon van Rijn (1984b), compte tenu de la précision des paramètres d'entrée, il n'est pas possible de prédire le débit de sédiments avec une imprécision inférieure à un facteur 2 (c'est-à-dire avec $0{,}5 < r < 2$, r le rapport des débits réel et calculé).
Le débit de sédiments en suspension ϕ_s prédit par le modèle de van Rijn (1984b) est faible et inférieur à 10^{-3}. Ce résultat est cohérent avec les vitesses de frottement utilisées. La vitesse de frottement maximale dans les calculs est 0,11 m.s^{-1}. Or pour $d_p = 1{,}5$ mm, la vitesse de frottement critique de mise en suspension est égale selon le critère de van Rijn (1984b) à 0,09 m.s^{-1} et selon le critère de Raudkivi (1998) à 0,28 m.s^{-1}.

3.2 modèles statistiques

Les modèles statistiques prennent en compte le caractère turbulent de l'écoulement et pour cela, reposent sur la fonction de densité de probabilité de la contrainte de frottement. Dans ces modèles (Bridge et Bennett, 1992 ; Kleinhans et van Rijn, 2002), le transport ϕ est donné par la relation (3.34) :

$$\phi = \int_{-\infty}^{-\tau_c} p_{\tau_j} \phi^D(\tau_j)\, d\tau_j + \int_{\tau_c}^{+\infty} p_{\tau_j} \phi^D(\tau_j)\, d\tau_j \tag{3.34}$$

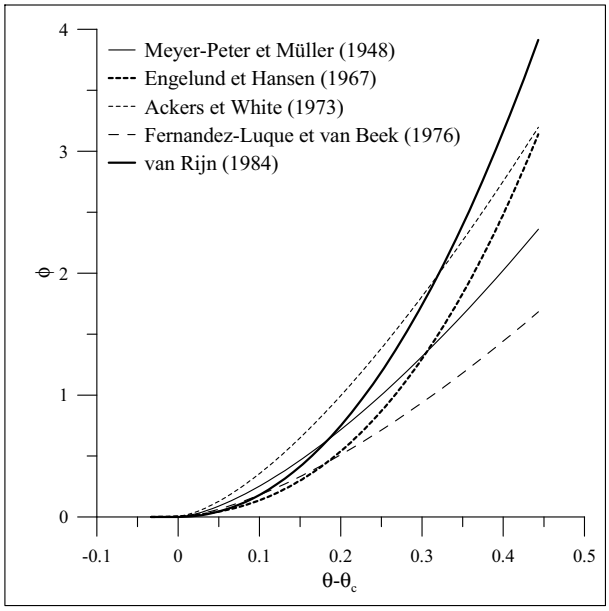


figure 3.1 – évolution du transport sans dimension en fonction du paramètre de Shields déterminé en utilisant différents modèles de transport ; le sédiment est caractérisé par un diamètre moyen égal à 1,5 mm et un écart-type géométrique égal à 1,2

Avec : p_{τ_j} l'intervalle de temps pour lequel la contrainte de frottement est comprise entre $\tau_j \pm \Delta\tau$; $\phi^D(\tau_j)$ le transport de sédiments obtenu avec un modèle déterministe lorsque la contrainte de frottement est égale à τ_j ; τ_c la contrainte de frottement critique du sédiment.
Le transport est supposé nul si $|\tau_j| < \tau_c$. Nous avons :

$$p_\tau = f(\tau)\Delta\tau \tag{3.35}$$

Avec $f(\tau)$ la fonction de densité de probabilité de la contrainte de frottement.
Selon Bridge et Bennett (1992) et Kleinhans et van Rijn (2002), la fonction de densité de probabilité peut être décrite par une distribution normale ou log-normale. Bridge et Bennett montrent que ces deux distributions donnent des résultats très proches. Dans le cas d'une loi normale,

$$f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - \bar{\tau}}{\sigma_\tau}\right)^2\right] \tag{3.36}$$

Avec $\bar{\tau}$ et σ_τ la moyenne et l'écart-type de la contrainte de frottement.
L'expérience (Grass, 1970) montre $\sigma_\tau \sim 0{,}4\bar{\tau}$. Le calcul des intégrales est réalisé numériquement et pour cela, Bridge et Bennett (1992) supposent que six écart-types incluent la majorité de la distribution. L'intervalle $\Delta\tau$ est égal à $6\sigma_\tau/N$ avec N le nombre d'intervalles. Celui-ci est fixé à 16 dans le modèle de Kleinhans et van Rijn (2002).

L'effet de la turbulence sur le transport est surtout significatif proche du seuil d'érosion. Pour cette raison, Kleinhans et van Rijn (2002) suggèrent d'utiliser les modèles statistiques seulement si $\bar{\tau} \sim \tau_c$.

3.3 application aux sédiments dispersés

En général, le transport de sédiments dispersés est estimé en utilisant les modèles établis avec des granulométries « uniformes ». Ces modèles sont adaptés afin de prendre en compte l'effet de

la dispersion de la distribution du diamètre sur le transport. Lorsque le sédiment est uni-modal, les classes de grains sont mis en mouvement approximativement à la même vitesse de frottement et la granulométrie du sédiment transporté est sensiblement la même que celle du lit (Wilcock, 1992 ; Kuhnle, 1993). Pour cette raison, le transport peut être déterminé en utilisant un diamètre représentatif de la taille des grains qui dépend des auteurs. Par exemple, Ackers et White (1973) se servent du diamètre d_{35}, Meyer-Peter et Müller (1948), du diamètre moyen arithmétique d_m. van Rijn (1984a,b) utilise deux diamètres, les diamètres d_{50} et d_s pour calculer respectivement le transport par charriage et le transport en suspension car les granulométries des sédiments par charriage et en suspension sont différentes.
Pour les granulométries plus dispersées, il existe un transport partiel pour les petites vitesses de frottement et la méthode la plus courante est l'approche par classes. Le transport est exprimé comme la somme des débits des classes de grains. Nous avons :

$$q_t = \sum_{i=1}^{N} q_{ti} \tag{3.37}$$

Avec N le nombre de classes et q_{ti} le débit de sédiments appartenant à la classe i.
Le débit q_{ti} est calculé à l'aide d'un modèle « uniforme ». A cause des interactions entre les classes de grains, le comportement des grains de diamètre d_i n'est pas similaire à celui d'un sédiment mono-dispersé. Le plus souvent, ces interactions sont assimilées aux phénomènes de sous- et surexpositions. Wilcock *et al.* (2001) montrent que lorsque la proportion de sable dans le sédiment croît, les particules de gravier sont plus exposées à l'écoulement et leur mobilité et leur débit augmentent. Einstein (1950) est l'un des premiers à proposer une modélisation des effets des interactions sur le transport. Dans son modèle, le transport des petits grains est modifié afin de prendre en compte les phénomènes de sous-exposition (cf. Raudkivi (1998, pp. 140–141)). Einstein (1950) « oublie » les phénomènes de surexposition des gros grains. Cependant, dans la plupart des modèles récents (Misri *et al.*, 1984 ; Wu *et al.*, 2000 ; Wilcock et Crowe, 2003), les deux phénomènes sont considérés. Différentes méthodes existent pour représenter l'influence des interactions. Par exemple, la contrainte de frottement exercée sur les grains peut être modifiée en utilisant un facteur correctif du type ξ_i. Dans le modèle de Karim (1998), c'est le débit de sédiments qui est corrigé. Parker (2002) fournit de nombreux exemples de modèles. Nous détaillons ici trois modèles : le modèle de Proffitt et Sutherland (1983), le modèle de Samaga *et al.* (1986a,b) et le modèle de Kleinhans et van Rijn (2002).

3.3.1 modèle de Proffitt et Sutherland (1983)

Le modèle de Proffitt et Sutherland (1983) repose sur le modèle « uniforme » de Ackers et White (1973). Le débit q_{ti} de la classe i est donné par l'équation suivante :

$$q_{ti} = f_i G_{gri} d_i U_f \left(\frac{U_f}{u_*}\right)^n \tag{3.38}$$

Avec : d_i le diamètre moyen des grains contenus dans la classe i ; f_i la fraction massique de grains du sédiment appartenant à la classe i ; G_{gri} le paramètre de transport introduit par Ackers et White (1973) :

$$G_{gri} = C\left(\frac{F_{gri}}{A} - 1\right)^m \tag{3.39}$$

F_{gri} le paramètre de mobilité ; n, C et A trois coefficients empiriques (cf. le paragraphe 3.1.3).
Afin de tenir compte des interactions entre les classes, Proffitt et Sutherland (1983) posent :

$$F_{gri} = \xi_i F_{gri}^U \tag{3.40}$$

Avec F_{gri}^U le paramètre de mobilité dans le cas « uniforme » et ξ_i un coefficient empirique.

Le paramètre F_{gri}^U est donné par la relation utilisée dans le modèle de Ackers et White (1973) :

$$F_{gr}^U = \frac{u_*^n}{\sqrt{(\gamma-1)gd_i}} \left[\frac{U_f}{32^{1/2}} \log\left(\frac{\alpha h}{d_i}\right)\right]^{n-1} \tag{3.41}$$

L'estimation du coefficient ξ_i s'appuie sur des données expérimentales qui sont obtenues avec des sédiments de diamètre moyen compris entre 2,9 et 4,2 mm et d'écart-type σ_g compris entre 1,95 et 3,24. Son expression dépend de la classe i et du diamètre d_u. Si $d_i/d_u > 3{,}7$,

$$\xi_i = 1{,}3 \tag{3.42}$$

si $0{,}075 < d_i/d_u \leq 3{,}7$,

$$\xi_i = 0{,}53 \log\left(\frac{d_i}{d_u}\right) + 1 \tag{3.43}$$

et si $d_i/d_u \leq 0{,}075$,

$$\xi_i = 0{,}4 \tag{3.44}$$

Le diamètre d_u est le diamètre du grain dont le mouvement n'est pas modifié par la présence de particules de tailles variables dans le lit. Contrairement à d'autres auteurs (Misri *et al.*, 1984 ; Raudkivi, 1998), Proffitt et Sutherland (1983) trouvent que le diamètre d_u est différent en général du diamètre d_{50}. Son expression est indiquée dans le tableau 3.8 en fonction du paramètre de mobilité T_{50}.

$$T_{50} = \frac{u_*^2}{(\gamma-1)gd_{50}} \tag{3.45}$$

$0{,}02 < T_{50} < 0{,}04$	$\frac{d_u}{d_{50}} \sim 1{,}1$
$0{,}04 < T_{50} < 0{,}045$	$\frac{d_u}{d_{50}} \sim -20{,}9\,T_{50} + 1{,}9$
$0{,}045 < T_{50} < 0{,}095$	$\frac{d_u}{d_{50}} \sim -10{,}0\,T_{50} + 1{,}4$
$0{,}095 < T_{50} < 0{,}13$	$\frac{d_u}{d_{50}} \sim 0{,}4$

tableau 3.8 – évolution du rapport d_u/d_{50} en fonction du paramètre de mobilité T_{50}

Samaga *et al.* (1986a) et Wu *et al.* (2000) montrent que le modèle tend à surestimer le transport de sédiments.

3.3.2 modèle de Samaga *et al.* (1986a,b)

Samaga *et al.* (1986a,b) reprennent les travaux de Misri *et al.* (1984) sur le transport par charriage. Le modèle est un modèle dit deux « couches ». Il repose sur deux coefficients empiriques ξ_i^b et ξ_i^s qui simulent l'effet des interactions entre les classes sur le transport par charriage et sur le transport en suspension (*hiding-exposure functions*). Samaga *et al.* (1986a) supposent que si le grain de diamètre d_i est transporté par charriage, il est soumis à une contrainte de frottement égale à $\xi_i^b \tau_0'$. La contrainte de frottement τ_0' est exprimée en fonction du diamètre moyen d_m comme suit.

$$\tau_0' = \rho g R_b S_f \tag{3.46}$$

Avec : R_b le rayon hydraulique lié aux frottements sur les grains :

$$R_b = \left(\frac{nU_f}{\sqrt{S_f}} \right)^{3/2} \quad , \quad n = \frac{d_m}{24} \tag{3.47}$$

n le coefficient de Manning
De la même façon, lorsque le grain est en suspension, il est soumis à une contrainte de frottement égale à $\xi_i^s \tau_0$. Le transport de la classe de diamètre d_i est estimé à partir de ces deux contraintes de frottement en utilisant des lois établies avec des sédiments de granulométrie quasi-uniforme.

L'estimation des facteurs ξ_i^b et ξ_i^s s'appuie sur des expériences réalisés avec des sédiments dispersés ($1{,}9 < \sigma_g < 12$). Ils sont données en fonction :

1) du coefficient de Kramer qui mesure l'« uniformité » de la distribution ;
2) des contraintes τ_0' et τ_0 (selon la nature du transport) ;
3) de la contrainte de frottement critique τ_{cm} relative à la classe de diamètre égal à d_m.

Si $d_i < d_m$, les phénomènes de sous-exposition entraînent la diminution de la contrainte de frottement exercée sur la particule. Il vient ξ_i^b , $\xi_i^s < 1$. Si $d_i > d_m$, le grain tend à être surexposé et la contrainte de frottement sur le grain est augmentée. Les facteurs ξ_i^b et ξ_i^s sont supérieurs à 1. Samaga *et al.* (1986a,b) considèrent que la classe de diamètre égal d_m n'est pas modifié par les interactions entre les grains. La contrainte de frottement critique τ_{cm} est déduite du critère de Shields (cf. le paragraphe 2.3 de cette partie).

3.3.3 modèle de Kleinhans et van Rijn (2002)

Kleinhans et van Rijn (2002) suggèrent que le transport de sédiments dispersés est modifié d'une part, par les phénomènes de sous- et surexpositions et d'autre part, par le phénomène désigné sous le terme *hindrance* (obstacle). Le phénomène *hindrance* modélise la difficulté des petits grains à se déplacer dans le lit dans le cas d'un transport partiel. Les grains qui ne sont pas entraînés par l'écoulement se comportent comme des obstacles qui restreignent le mouvement des petits grains. Par exemple, celui-ci est limité lorsque les petits grains doivent passer au-dessus d'un gros grain immobile, lorsqu'ils entrent en collision avec lui ou lorsqu'ils sont enfouis dans le lit. Le modèle de Kleinhans et van Rijn (2002) repose sur le résultat de Meyer-Peter et Müller (1948) et s'écrit :

$$\phi_i = \xi^h f_i 8 \left(\theta_i' - \theta_{ci} \right)^{1{,}5} \quad , \quad \xi^h = 1 - \exp\left[-7{,}2 \left(\frac{d_{90}^b}{d_{90}} \right)^2 \right] \tag{3.48}$$

Avec θ_i' le paramètre de Shields basé sur la vitesse u_*' et le diamètre d_i.
Les phénomènes de sous- et surexpositions sont pris en compte lors du calcul du paramètre de Shields critique θ_{ci} en utilisant le facteur correctif ξ_i qui est donné par la relation d'Egiazaroff (1965) ou par une loi puissance. Le facteur ξ^h simule le phénomène *hindrance*. Kleinhans et van Rijn (2002) supposent qu'il dépend du rapport de la surface des gros grains transportés et de la surface des gros grains du lit. Ce rapport est exprimé par $(d_{90}^b/d_{90})^2$ avec d_{90}^b et d_{90} diamètres relatifs au sédiment transporté et au sédiment du lit. Le diamètre d_{90}^b est déduit du modèle par récurrence. Lorsque les vitesses de frottement sont élevées, la granulométrie des sédiments transportés est identique à celle du lit et le rapport d_{90}^b/d_{90} tend vers 1. Le phénomène *hindrance* disparaît.

La plupart des modèles reposent sur la distribution de la taille des grains du sédiment du lit. Ils ne tiennent pas compte de l'évolution de la granulométrie de sa surface qui est observée lors de son érosion et qui modifie la disponibilité des classes de grains. Le transport partiel conduit à l'élimination des petits grains de la surface qui sont soit entraînés dans l'écoulement

soit lessivés à l'intérieur du lit. La proportion des gros grains à la surface augmente et dans certaines conditions, ceux-ci forment une carapace protectrice qui empêche l'érosion du lit. On parle de pavage (*amouring*) (Parker *et al.*, 1982). Dans les expériences de Wilcock *et al.* (2001) réalisées avec des mélanges de sable et de gravier, le diamètre moyen des particules de gravier et donc le nombre de gros grains augmentent à la surface avec la vitesse de frottement. Cependant, lorsque la proportion de sable dans le sédiment est suffisamment élevée (supérieure à 34%), le diamètre d_{50} du sédiment de la surface est inférieur à celui du sédiment du lit et la proportion de sable à la surface est supérieure à celle dans le sédiment. Le lessivage des petits grains est limité car compte tenu de leur nombre, tous les espaces entre les gros grains sont remplis. Il y a un surplus de grains de sable. En raison des différences entre la distribution de la taille des grains à la surface et celle dans le lit, les modèles de Hunziker et Jaeggi (2002) et de Wilcock et Crowe (2003) calculent le débit de sédiments en considérant le sédiment à la surface du lit.

4 objectifs et méthodologie

L'érosion et le transport de lits de sédiments de granulométrie dispersée dépendent d'interactions entre les grains de tailles différentes. Ces interactions sont à l'origine, entre autres, des phénomènes de sous- et surexpositions et du phénomène dit *hindrance* (Kleinhans et van Rijn, 2002). Elles peuvent aussi entraîner une modification de l'arrangement des classes des grains dans le lit : par exemple, augmentation du diamètre moyen des grains de la surface (phénomène de pavage, tri vertical), ségrégation des grains avec la formation à la surface de bandes longitudinales constituées par les petits grains. Dans les modèles d'érosion et de transport, l'effet des interactions entre les classes sur le transport est appréhendé à travers une grandeur « globale », telle que la vitesse de frottement critique, le débit de sédiments, et l'utilisation du coefficient empirique ξ qui relient ses valeurs dans les cas « uniforme » et « dispersé ». La présence de grains de tailles différentes modifie leur mouvement à la surface et dans les couches supérieures du lit et partant, influe sur le transport. Ainsi il nous paraît intéressant d'étudier l'influence de la distribution de la taille des grains sur l'érosion et le transport des sédiments en considérant à la fois le débit de sédiments et le comportement individuel des grains à l'intérieur du lit. Pour ce faire, nous développons un modèle numérique qui est basé sur la Méthode des Eléments Discrets (*Discret Element Method*, DEM) (Cundall et Strack, 1979) et qui simule le mouvement des grains dans un arrangement lorsque sa face supérieure est soumise à un écoulement. Dans l'approche DEM, la position de chaque grain de l'arrangement est déterminée à chaque pas de temps en résolvant son équation de mouvement et en modélisant les forces exercées par le fluide et les interactions entre les grains.

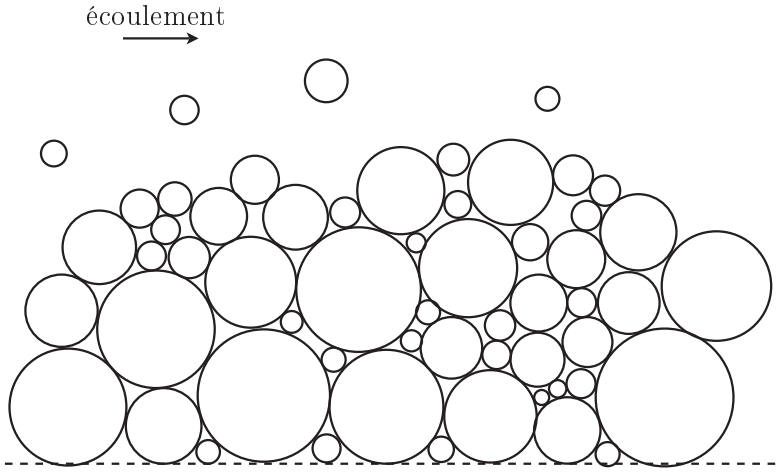


figure 4.1 – représentation schématique du comportement d'un arrangement soumis à un écoulement qui est simulé dans le modèle numérique développé

4.1 principes et applications de la Méthode des Eléments Discrets (DEM)

La Méthode des Eléments Discrets appelée aussi *Discrete Particle Modelling* et *Particle Dynamics Method* est dérivée des modèles utilisés en chimie pour suivre le mouvement de molécules (*Molecular Dynamics Models*). Elle est développée et appliquée à des problèmes impliquant des particules macroscopiques (Jiang et Haff, 1993). Le volume 109 de la revue *Powder Technology* dirigé par Thornton (2000) et le volume 362 de la revue *The Philosophical Transactions of the Royal Society A* donnent un aperçu des nombreuses applications de la méthode DEM à des arrangements granulaires. Par exemple Cleary (2000) simule le remplissage d'un godet d'une drague utilisée dans des mines à ciel ouvert et étudie ainsi l'influence de la forme des particules sur la performance du godet. Xu *et al.* (2000) modélisent le mouvement de particules solides dans un lit alors qu'un flux de gaz y est injecté latéralement. Kitahara *et al.* (2000) déterminent le comportement de particules non sphériques placées dans un champ magnétique lors de la compaction de l'arrangement. L'approche DEM est également appliquée au transport des lits de sédiments non cohésifs et nous reportons les sept études suivantes :

- l'étude de Haff et Anderson (1993) ;
- l'étude de Jiang et Haff (1993) ;
- l'étude de Jefcoate (1995) ;
- l'étude de McEwan et Heald (2001) ;
- l'étude de Heald *et al.* (2004) ;
- l'étude de Calantoni et ses coauteurs (2001, 2004, 2006) ;
- l'étude de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009).

Modèle de Haff et Anderson (1993)

Haff et Anderson (1993) étudient l'impact dans l'air d'un grain sur un arrangement granulaire et examinent l'influence des paramètres du modèle de collision sur la réponse du lit à l'impact, *i.e.* sur les grains éjectés (nombre et position) et sur la vitesse d'éjection des grains.

Modèle de Jiang et Haff (1993)

Jiang et Haff (1993) développent un modèle numérique bidimensionnel afin de simuler la mise en mouvement et le transport par charriage de disques dans un écoulement d'eau. Le lit contient cent disques de diamètres variables compris entre 6 mm et 10 mm avec un diamètre d_{50} égal à 7,2 mm. L'écoulement est modélisé par une couche de fluide qui se déplace unidirectionnellement avec une vitesse uniforme. La vitesse du fluide est calculée à chaque pas de temps en résolvant l'équation de mouvement de la couche de fluide. Les grains sont mis en mouvement par le fluide par rotation. La couche active du lit dépend de la contrainte de frottement. Les simulations durent 2 s. Jiang et Haff (1993) déterminent le déplacement horizontal des particules pendant la simulation et les distributions de la hauteur et de la longueur des rebonds pour différentes contraintes de frottement.

Modèle de Jefcoate (1995)

Jefcoate (1995) simule le transport de sédiments par charriage et le phénomène de pavage. Le sédiment est composé de grains de diamètres compris entre 0,4 et 7 mm et la longueur de l'arrangement est égale à 1 m. Dans le modèle, les grains sont assimilés à des sphères et sont soumis à la force de flottabilité, à la force de traînée et à la force de portance. Ils sont entraînés par le fluide par rotation. Au cours de la simulation, les grains peuvent se déplacer jusqu'à une position stable dans un creux de la surface et se déposer. Ils restent dans cette nouvelle position jusqu'à qu'ils soient re-érodés. L'écoulement est représenté par un champ de vitesse unidirectionnel et

constant. Pour modéliser le phénomène de pavage, aucun sédiment n'est introduit en amont de la portion du lit étudié. Le débit de sédiments varie ainsi dans les simulations le long du lit : il devient nul au fur et à mesure que le pavage progresse vers l'aval. Toutes les classes de grains sont en mouvement. La granulométrie du sédiment transporté est identique au début des simulations à celle du sédiment du lit. Elle évolue au cours du temps : la distribution du diamètre devient moins pointue et le diamètre associé au pic augmente. Les simulations présentées durent 750 s.

Modèle de McEwan et Heald (2001)

McEwan et Heald (2001) étudient la stabilité des grains à la surface du lit. Ils déterminent la contrainte de frottement critique des grains à la surface de lits déposés par la méthode DEM. Par hypothèse, les grains considérés dans l'étude sont situés à la surface du lit et ne sont pas ensevelis sous d'autres grains. McEwan et Heald (2001) montrent que pour des lits formés de sphères identiques de diamètre égal à 2, 4 et 8 mm, l'évolution de la masse de sédiments entraînés en fonction du paramètre de Shields critique est indépendante de la taille des grains et peut être représentée en première approximation par une loi log-normale.
Les effets sur la mise en mouvement des particules de leur exposition à l'écoulement sont modélisés. L'exposition des particules est supposée dépendre des particules sur lesquelles elles sont en équilibre et du champ de vitesse qui est modifié localement par la topographie du lit. La modélisation repose sur la position du point d'action de la force fluide dans les plans normaux à la direction de l'écoulement, position qui peut varier. La prise en compte de la modification du champ de vitesse se traduit par une diminution de la force de traînée et partant, entraîne une augmentation significative de la contrainte de frottement critique.

Modèle de Heald, McEwan et Tait (2004)

Heald *et al.* (2004) développent un modèle DEM afin de simuler le transport par charriage d'un sédiment de granulométrie de distribution log-normale dans l'eau. Le modèle s'appuie sur les résultats du modèle de déposition de McEwan et Heald (2001). Le grain est soumis à trois forces : la force de flottabilité, la force de traînée et la force de masse ajoutée. La collision est supposée sans frottement et ponctuelle. Le grain est mis en mouvement entraîné par le fluide, par rotation. Au cours de la simulation il peut se déposer s'il entre en collision successivement avec les mêmes grains du lit. Le champ de vitesse est unidirectionnel et uniforme et il est déterminé en utilisant le modèle d'une couche de fluide conformément à l'étude de Jiang et Haff (1993). Ses variations locales dans les sillages des grains les plus proéminents sont prises en compte en introduisant un coefficient qui est compris entre 0 et 1 et qui modifie la surface de la particule exposée à l'écoulement. Le sédiment est composé de 50 000 grains de diamètre variable compris entre 2 et 8 mm : le diamètre d_{50} est égal à 4 mm et l'écart-type de la distribution σ_g à 1,3
Heald *et al.* (2004) mesurent le débit de sédiments transportés par charriage. La comparaison avec des données fournies par des formules de transport communément utilisées (par exemple Meyer-Peter et Müller (1948) et Einstein (1950)) est satisfaisante. Heald *et al.* (2004) examinent l'influence du coefficient de restitution sur le transport de sédiments qui est trouvée significative seulement si la vitesse de frottement est faible.

Modèle de Calantoni, Drake, Holland et Thaxton (2001, 2004, 2006)

L'approche DEM est utilisée par Calantoni et ses coauteurs (2001, 2004, 2006) pour modéliser le transport dit par *sheet flow* en zone côtière. Ce transport correspond à un transport par charriage très important généré par des ondes de gravité dans des zones de faible profondeur. L'effet des vagues est reproduit en utilisant un champ de vitesse sinusoïdal. Calantoni *et al.* (2004) étudient l'influence de la forme du grain sur le transport. Les grains non sphériques sont obtenus par la combinaison de deux calottes sphériques.

Modèle de Yeganeh-Bakhtiary, Shabani, Gotoh et Wang (2009)

Le modèle de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) intéresse le transport par charriage dans les rivières. L'écoulement est représenté par la somme d'un champ de vitesse moyen unidirectionnel décrit par la loi logarithmique et d'un champ tridimensionnel de fluctuations turbulentes. Le calcul des fluctuations turbulentes est basé sur les résultats expérimentaux de Nezu (1977) sur les intensités turbulentes et sur l'utilisation de trois nombres aléatoires (dans chaque direction). Le lit de sédiments est supposé périodique dans la direction horizontale et il est limité dans la direction latérale par deux parois. L'arrangement simulé est formé par mille sphères identiques de diamètre égal à 5 mm (10 particules dans chaque direction).
Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) déterminent le profil vertical de la composante dans la direction x de la vitesse des particules à l'intérieur du lit et le débit de sédiment lorsque le paramètre de Shields est compris entre 0,06 et 1,4.

4.2 hypothèses de travail

Le modèle numérique développé simule le mouvement des particules d'un arrangement tridimensionnel lorsque sa surface est soumis à un écoulement d'eau. Il calcule à chaque pas de temps la position des particules et pour cela résout l'équation de mouvement. La mise en mouvement des grains se fait de deux façons :

- entraînés par le fluide, par rotation ;
- éjectés du lit par la collision avec un grain mobile.

Les grains sont soumis à deux types de forces : les forces exercées par le fluide à savoir : force de flottabilité, force de traînée, force de portance, force de masse ajoutée ; et les forces liées aux interactions entre les grains. Comme le sédiment est supposé non cohésif, les interactions entre les grains sont générées uniquement par les collisions. Il existe alors deux approches pour modéliser leurs effets sur le mouvement des particules : l'approche *hard sphere* (dite classique) et l'approche *soft sphere*. Nous choisissons d'utiliser ici l'approche *soft sphere*. Dans cette approche, les forces dues aux collisions sont représentées par des forces créées par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs (Cundall et Strack, 1979). Si le sédiment est cohésif, les interactions électrochimiques et les mécanismes de floculation doivent être également pris en compte, par exemple en introduisant dans l'équation de mouvement une force d'attraction et de répulsion. Ceci ne fait pas l'objet de ce travail de thèse.
Les particules sont assimilées à des sphères dans tous les modèles précédemment cités à l'exception de celui de Calantoni *et al.* (2004). L'expérience montre que le grain n'est en général pas sphérique et que la forme du grain influe sur son mouvement : par exemple sur sa résistance à l'érosion, sur la nature de son déplacement sur le lit (roulement/glissement), sur sa vitesse de sédimentation, etc. Des solutions sont imaginées pour représenter des grains non sphériques (Kitahara *et al.*, 2000 ; Matuttis *et al.*, 2000). Dans le modèle de Calantoni *et al.* (2004), le grain est composé de deux calottes sphériques de diamètres différents. L'utilisation de la sphère comme brique élémentaire est imposée par la nécessité de déterminer facilement et rapidement les collisions. Cependant, la surface présente des aspérités à la réunion des sphères qui peuvent modifier le comportement des grains. En l'absence de modélisation satisfaisante et compte tenu de la valeur du facteur de forme du grain proche de 1 ($CF \simeq 0{,}7$), nous choisissons de représenter le grain par une particule sphérique.
L'écoulement au-dessus du lit dépend de la topographie de la surface : il est modifié localement par la présence de dépressions et de bosses. Nous souhaitons prendre en compte l'influence de ces variations locales sur le transport de sédiments. Pour cette raison, l'écoulement est déterminé en utilisant le modèle FLOWSTAR (Jackson et Hunt, 1975 ; Hunt *et al.*, 1988 ; Carruthers *et al.*, 2004). Basé sur une approche multi-couches, il est développé pour décrire l'écoulement moyen dans une couche limitée atmosphérique turbulente au-dessus d'une colline de faible pente. Il

fournit une représentation tridimensionnelle du champ de vitesse. Les fluctuations turbulentes ne sont pas représentées pour simplifier, bien qu'il est montré qu'elles jouent un rôle important dans la mise en mouvement des lits. Toutefois, il est possible et simple, grâce au type d'algorithme utilisé, d'implémenter une fonction qui modélise l'influence de la turbulence sur le transport, en utilisant par exemple les travaux de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) ou la théorie *Kinematic Simulation* (Kraichnan, 1970 ; Fung *et al.*, 1992 ; Ushijima, 1998). A l'intérieur du lit, le fluide est supposé au repos.

Le principal inconvénient de la méthode DEM est le temps de calcul. Il augmente avec le nombre de particules. En effet, à chaque pas de temps, le modèle numérique détermine, pour chaque particule du lit, le nombre de grains en collision avec elle. Par ailleurs, pour des raisons de stabilité, le pas de temps doit être proportionnel à $\sqrt{d_p}$ (Cundall et Strack, 1979), aussi le nombre d'itérations est une fonction décroissante du diamètre des grains. Par conséquent, le nombre de grains dans l'arrangement et la durée des simulations sont limités. Comme la taille des arrangements est petite, nous supposons que le lit de sédiments est périodique dans le plan horizontal, dans les directions x et y.

4.3 objectifs

Le modèle numérique est développé pour étudier le transport de sédiments, en particulier l'influence de la distribution de la taille des grains sur le seuil d'érosion.

Le modèle DEM utilisé est décrit dans la partie 2 de ce rapport. Il s'appuie sur la modélisation de l'équation de mouvement de la particule solide et sur la modélisation des interactions mécaniques entre les grains. Le chapitre 1 de la partie 2 présente un certain nombre de travaux relatifs au mouvement de la particule solide. Il répertorie différentes expressions des forces exercées par le fluide sur la particule : force de traînée, force de portance, force de masse ajoutée, force d'histoire. Il reporte aussi les modélisations choisies dans la littérature pour simuler le mouvement de saltation des grains au-dessus du lit.
Le chapitre 2 intéresse la modélisation des interactions mécaniques entre les grains liées aux collisions. Les approches *hard sphere* et *soft sphere* sont présentées et sont comparées en considérant la collision d'une sphère avec la paroi.
Le chapitre 3 récapitule les hypothèses du modèle DEM. Le modèle DEM est appliqué à la déposition des lits de sédiments qui est réalisée en l'absence d'écoulement (Le fluide est supposé au repos.). Les deux méthodes de déposition utilisées sont décrites et des exemples d'arrangements obtenus sont présentés.

La partie 3 présente le modèle de transport qui est appliqué à des sédiments de granulométries variables. Le chapitre 1 de la partie 3 décrit le modèle d'écoulement FLOWSTAR (Carruthers *et al.*, 2004). Celui-ci est utilisé pour déterminer l'écoulement au-dessus de reliefs simples (colline, dune). Les résultats sont présentés et comparés à des mesures expérimentales.
Les chapitres 2 et 3 ont pour objet le transport de sédiments simulé par le modèle numérique. Le modèle numérique est validé en étudiant le transport de mélanges de grains de diamètre moyen égal à 1,65 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,18. La distribution du diamètre de ces sédiments correspond dans les expériences à une granulométrie quasi-uniforme. La validation repose sur deux grandeurs globales : le seuil d'érosion et le débit de sédiments. Elle est présentée dans le chapitre 2.
Le chapitre 3 intéresse le transport de sédiments de granulométries variables. Cinq types de sédiments sont étudiés :

- des sédiments mono-dispersés, composés de sphères identiques ;
- des sédiments bi-dispersés composés de deux tailles de grains ;

- des sédiments dits « faiblement dispersés » caractérisés par un écart-type géométrique égal à 1,1 ;
- des sédiments dits de distribution « uniforme » (utilisés dans le chapitre 2) ;
- des sédiments dits « dispersés » caractérisés par un écart-type géométrique compris entre 1,2 et 1,4.

Les résultats reportés concernent d'une part, le seuil d'érosion et le débit de sédiments et d'autre part, le mouvement des grains à l'intérieur de l'arrangement.

II méthode des éléments discrets

1 équation de mouvement d'une particule solide

Le modèle numérique développé repose sur la méthode des éléments discrets (DEM) qui consiste à déterminer, à chaque pas de temps, la position des grains dans le lit. Cette détermination nécessite la résolution de l'équation de mouvement du grain et ainsi la connaissance de la force exercée par le fluide sur ce grain. Le champ des vitesses du fluide au dessus du lit de sédiments est assimilé dans le modèle à un champ tridimensionnel qui correspond à l'écoulement moyen dans la couche limite turbulente : la modélisation de l'écoulement s'appuie sur les travaux de Carruthers *et al.* (2004) (cf. le chapitre 1 de la partie 3). Ce chapitre est une étude bibliographique dans laquelle sont présentés des résultats relatifs aux forces fluide exercées sur une particule solide sphérique pour différentes situations (fluide au repos, écoulement cisaillé, particule en rotation, présence d'une paroi, etc.).
Par simplification, la position et la vitesse de la particule à l'instant t sont notées $\overrightarrow{x}_p$ et $\overrightarrow{u}_p$. De même, la vitesse du fluide à l'instant t, à la position de la particule et en l'absence de celle-ci est notée $\overrightarrow{u}_f$.

Le mouvement d'une particule solide dans un fluide fait l'objet de nombreuses études théoriques, empiriques et numériques (Basset, 1888 ; Boussinesq, 1903 ; Tchen, 1947 ; Magnaudet *et al.*, 1995). La forme générale de son équation de mouvement s'écrit (Maxey et Riley, 1983) :

$$m_p \frac{du_{pi}}{dt} = m_p g_i + \int_S \sigma_{ij} n_j \, dS \tag{1.1}$$

Avec : m_p la masse de la particule solide ; u_{pi} la composante i de sa vitesse $\overrightarrow{u}_p$; g_i la composante i de l'accélération de gravité ; σ_{ij} le tenseur des contraintes fluide ; n_j la composante j du vecteur normal à la surface de la particule ; S la surface de la particule.
L'intégrale représente la force qu'exerce le fluide sur la surface exposée à l'écoulement de la particule solide. Son calcul requiert la connaissance du tenseur σ_{ij} et la résolution des équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement autour de la particule solide. Les auteurs s'accordent

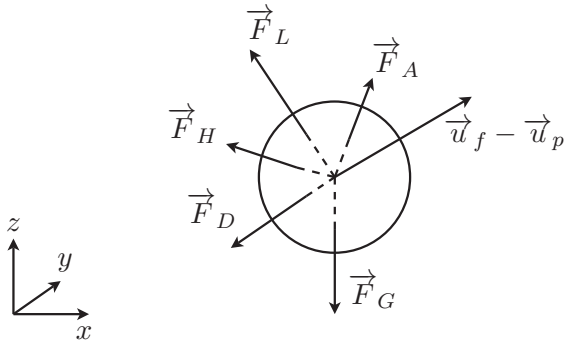


figure 1.1 – représentation schématique des forces exercées par le fluide sur la particule solide

pour définir l'équation de mouvement d'une particule solide dans un fluide sous la forme sché-

matique (1.2).

$$m_p \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} = \overrightarrow{F}_B + \overrightarrow{F}_D + \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_H \tag{1.2}$$

Les termes $\overrightarrow{F}_B$, $\overrightarrow{F}_D$, $\overrightarrow{F}_L$, $\overrightarrow{F}_A$ et $\overrightarrow{F}_H$ désignent respectivement les forces de flottabilité, de traînée, de portance, d'accélération et histoire (cf. la figure 1.1). La force de flottabilité $\overrightarrow{F}_B$ est égale à $(\rho_s - \rho)V_p\overrightarrow{g}$ avec ρ_s la masse volumique de la particule solide, V_p son volume et ρ la masse volumique du fluide. L'expression des autres forces dépend du contexte d'étude, en particulier du nombre de Reynolds de la particule Re_p.

$$Re_p = \frac{d_p \| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \|}{\nu} \tag{1.3}$$

Avec d_p le diamètre de la particule et ν la viscosité cinématique du fluide.
Le nombre de Reynolds de la particule est un nombre sans dimension qui quantifie l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses.

Les études analytiques sur les forces fluide exercées sur la particule solide se placent dans deux situations asymptotiques :

- les écoulements à faibles nombres de Reynolds (écoulement de Stokes), *i.e.* dans lequel les termes convectifs de l'équation de Navier-Stokes sont très petits devant les termes visqueux ($Re_p \ll 1$) ;
- les écoulements non visqueux ($Re_p \gg 1$).

Plus récemment, le développement des méthodes numériques permettent la résolution des équations de Navier-Stokes à des nombres de Reynolds intermédiaires ($0{,}1 \leq Re_p \leq 500$). L'estimation des forces fluide découle alors directement de l'intégration sur la surface de la particule des contraintes fluide σ_{ij}.

1.1 force de traînée

La force de traînée a deux origines :

- la distribution de pression à la surface de la particule qui produit une composante normale à la surface : la traînée de forme ;
- la présence de contraintes visqueuses à la surface de la particule qui induit une composante tangentielle : la traînée visqueuse.

La traînée de forme est négligeable pour des nombres de Reynolds Re_p faibles. Lorsque le nombre de Reynolds augmente ($Re_p \sim 100$), la couche limite décroche et des tourbillons se forment à l'aval de la sphère. Avec la formation des tourbillons, la pression dans le sillage diminue et la traînée de forme augmente. Elle devient prépondérante pour les nombres de Reynolds élevés ($750 < Re_p < 3{,}5.10^5$). (Crowe *et al.*, 1998)

Dans un écoulement uniforme, permanent et infini, la force de traînée sur une particule solide en translation est exprimée par la relation (1.4).

$$\overrightarrow{F}_D = \frac{1}{2}\rho A_p C_D \| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \| (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \tag{1.4}$$

Avec C_D le coefficient de traînée et A_p la section de la particule exposée à l'écoulement qui est, pour une sphère, égale à $\pi d_p^2/4$.
Le coefficient de traînée dépend de la forme de la particule, de son orientation à l'écoulement et des paramètres de l'écoulement (nombre de Reynolds Re_p, niveau de turbulence par exemple).

Stokes (1851) résout pour $Re_p \ll 1$ les équations de Navier-Stokes et détermine, dans cette hypothèse, le coefficient de traînée C_D pour une sphère. Ainsi, si $Re_p < 1$, nous avons :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \ , \quad \overrightarrow{F}_D = 3\pi\mu d_p \left(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\right) \tag{1.5}$$

Avec μ la viscosité dynamique ($\mu = \rho\nu$).
Lorsque le nombre de Reynolds est plus élevé ($750 < Re_p < 3{,}5\,.10^5$), le coefficient de traînée varie peu et peut être supposé constant et égal à 0,445 (la marge d'erreur est de $\pm 13\%$). Lorsque le nombre de Reynolds est égal au nombre de Reynolds critique ($\sim 3{,}5\,.10^5$), le coefficient C_D diminue brutalement. Pour des nombres de Reynolds intermédiaires ($1 < Re_p < 1000$), des relations empiriques et analytiques sont établies. Par exemple, pour un nombre de Reynolds compris entre 1 et 800, Schiller et Nauman (1933) (Clift *et al.*, 1978) proposent la relation (1.6).

$$C_D = \frac{24}{Re_p}\left(1 + 0{,}15 Re_p^{0{,}687}\right) \tag{1.6}$$

Les coefficients C_D calculés avec la relation (1.6) sont égaux à $\pm 5\%$ des valeurs mesurées.
La figure 1.2 montre l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds qui est établie dans un écoulement uniforme et permanent lorsque la particule solide est une sphère sans rotation.

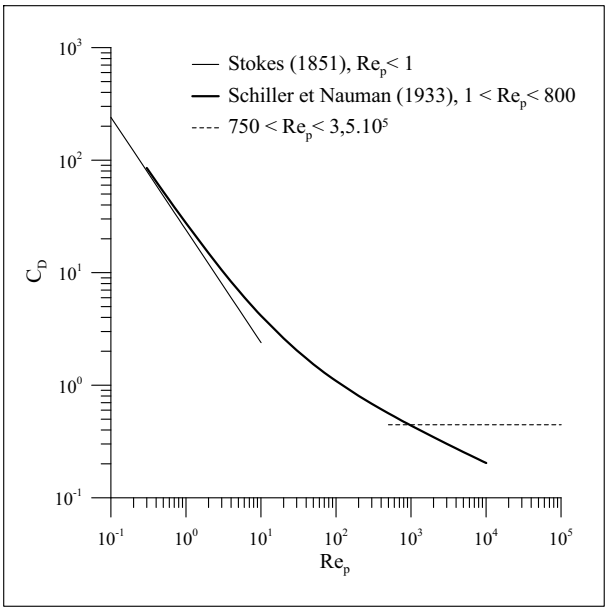


figure 1.2 – évolution du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds Re_p (Clift *et al.*, 1978)

1.1.1 influence de la non-uniformité de l'écoulement

L'effet de la non-uniformité de l'écoulement sur la force de traînée est étudié en considérant un écoulement unidirectionnel linéairement cisaillé. La vitesse fluide s'écrit de la façon suivante.

$$\overrightarrow{u}_f = (u_\infty + Gz)\,\overrightarrow{e}_x \tag{1.7}$$

Avec u_∞ et G des constantes. (L'origine du repère est le centre de la sphère.)
Dandy et Dwyer (1990) déterminent la force de traînée sur une sphère fixe dans un écoulement linéairement cisaillé et pour cela, résolvent numériquement les équations de Navier-Stokes pour

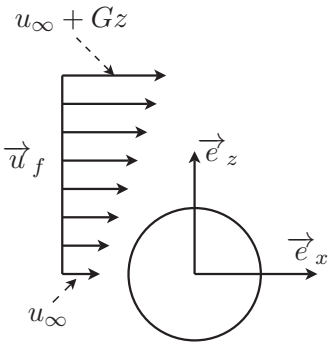


figure 1.3 – représentation schématique du champ de vitesse d'un écoulement unidirectionnel linéairement cisaillé, défini par $\overrightarrow{u}_f = (u_\infty + Gz)\,\overrightarrow{e}_x$; l'origine du repère est le centre de la sphère

des nombres de Reynolds Re_p compris entre 0,1 et 100. Le cisaillement est défini par le nombre sans dimension α_G.

$$\alpha_G = \frac{a_p\, G}{\| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \|} \tag{1.8}$$

Avec a_p le rayon de la particule solide.
Le nombre α_G varie de 0,005 à 0,4. Selon une approche identique, Kurose et Komori (1999) et Bagchi et Balachandar (2002) calculent le coefficient de traînée C_D respectivement pour $1 \leq Re_p \leq 500$ et pour $0 \leq \alpha_G \leq 0{,}4$ et pour $0{,}5 \leq Re_p \leq 200$ et pour $0 \leq \alpha_G \leq 0{,}2$. Ces auteurs obtiennent des résultats similaires à ceux de Dandy et Dwyer (1990).

- Le coefficient de traînée diminue rapidement lorsque le nombre de Reynolds augmente.
- Le coefficient C_D augmente lorsque le nombre sans dimension α_G augmente.
- L'influence du cisaillement sur le coefficient C_D augmente avec le nombre de Reynolds.

Le coefficient de traînée peut être estimé pour des nombres de Reynolds faibles par une relation obtenue dans un écoulement uniforme et permanent. Par exemple, Bagchi et Balachandar (2002) proposent d'utiliser, pour $Re_p < 200$, la relation de Schiller et Nauman (1933). Pour des nombres de Reynolds plus élevés ($Re_p > 400$), l'effet du cisaillement n'est plus négligeable mais il reste petit. Kurose et Komori (1999) estiment que lorsque $Re_p = 500$, la différence relative entre les coefficients C_D obtenus avec $\alpha_G = 0$ et $\alpha_G = 0{,}4$ atteint 10%.

Magnaudet *et al.* (1995) considèrent l'écoulement de déformation pure décrit par la relation (1.9).

$$\overrightarrow{u}_f = (u_\infty + Gx)\,\overrightarrow{e}_x - \frac{G}{2} z\,\overrightarrow{e}_z \tag{1.9}$$

La constante G peut être positive (écoulement convergent) ou négative (écoulement divergent) (cf. la figure 1.4). Magnaudet *et al.* (1995) déterminent la force de traînée sur une particule solide fixe pour des nombres de Reynolds compris entre 0,1 et 300. Le nombre sans dimension α_G varie entre $-0{,}1$ et 0,1. L'évolution du coefficient de traînée en fonction des nombres Re_p et α_G est similaire à celle obtenue dans un écoulement linéairement cisaillé. Lorsque le nombre de Reynolds est petit ($Re_p \leq 10$), l'effet du cisaillement sur le coefficient de traînée est faible, la différence relative entre les coefficients de traînée calculés pour $\alpha_G = 0$ et $\alpha_G = \pm\,0{,}1$ est inférieure à 4%. Pour des nombres de Reynolds plus importants ($10 \leq Re_p \leq 300$), l'écart augmente (de l'ordre de 10% lorsque $Re_p = 300$) et Magnaudet *et al.* (1995) proposent une expression du coefficient de traînée en fonction des nombres Re_p et α_G.

$$C_D = (1 + 0{,}25\,\alpha_G)\, C_{D0} + 0{,}55\,\alpha_G \tag{1.10}$$

Avec C_{D0} le coefficient de traînée obtenu dans un écoulement uniforme et permanent.

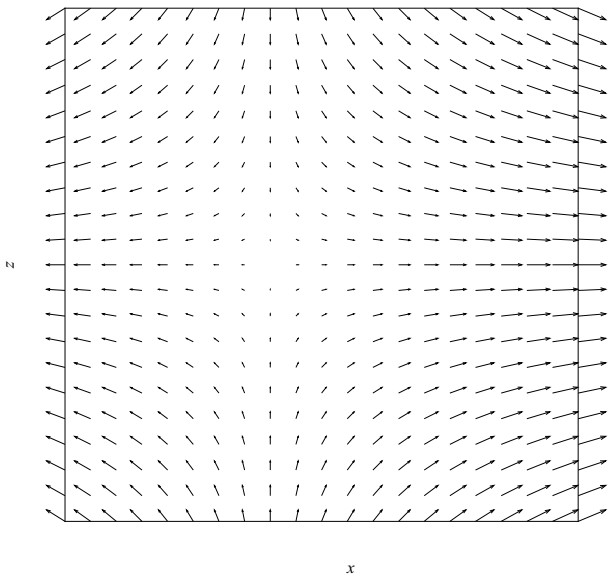


figure 1.4 – exemple d'un écoulement de déformation pure ; le champ de vitesse est défini par $\overrightarrow{u}_f = (u_\infty + Gx)\,\overrightarrow{e}_x - \dfrac{G}{2} z \overrightarrow{e}_z$, avec ici G positif

Sridhar et Katz (1995) mesurent la force de traînée sur une bulle sphérique entraînée par un tourbillon, pour des nombres de Reynolds compris entre 20 et 80 et pour des diamètres de bulles compris entre 500 μm et 800 μm. La vorticité ω_f est définie par le nombre sans dimension Re_ω.

$$Re_\omega = \frac{d_p^2\,\omega_f}{\nu} \tag{1.11}$$

Avec ω_f la norme du rotationnel de la vitesse du fluide : $\omega_f = \|\nabla \wedge \overrightarrow{u}_f\|$.
Le nombre Re_ω varie de 0,5 à 15. Dans les expériences, en raison de la présence d'impuretés dans le fluide porteur, la bulle se comporte comme une particule solide (*i.e.* il existe à sa surface une condition de non-glissement). L'effet de la vorticité sur le coefficient C_D mesuré est faible et le coefficient C_D peut être estimé, selon Sridhar et Katz (1995), en utilisant la relation de Schiller et Nauman (1933).

1.1.2 influence de la rotation de la particule solide

Rubinow et Keller (1961) étudient l'effet de la rotation de la particule sur le coefficient de traînée. Ils montrent de façon analytique que pour des petits nombres de Reynolds, la force de traînée n'est pas modifiée à l'ordre $o(Re_p)$ par la rotation. Kurose et Komori (1999) estiment le coefficient de traînée d'une particule solide en rotation dans un écoulement uniforme et permanent pour des nombres de Reynolds compris entre 0 et 500. La vitesse de rotation ω_p de la particule est caractérisée par le nombre sans dimension α_Ω qui varie de 0 à 0,25.

$$\alpha_\Omega = \frac{a_p\,\omega_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.12}$$

Le coefficient C_D est une fonction croissante du nombre sans dimension α_Ω. Ainsi, si $Re_p = 500$, la différence entre les coefficients C_D calculés avec $\alpha_\Omega = 0$ et $\alpha_\Omega = 0{,}25$ est environ de 10%. Pour des nombres de Reynolds élevés ($Re_p > 200$), les deux effets liés au cisaillement et à la rotation de la particule sont corrélés et le coefficient C_D ne peut pas être donné par la somme du coefficient C_D d'une particule solide fixe dans un écoulement cisaillé et du coefficient C_D d'une

particule solide en rotation dans un écoulement uniforme. Kurose et Komori (1999) proposent alors l'expression (1.13) qui fait intervenir les nombres sans dimensions Re_p, α_G et α_Ω.

$$C_D = C_{D0}\left[1 + A_0\alpha_G + \left(A_1 + A_2\alpha_G^{1,5} + A_3\alpha_G^{2,0}\right)\alpha_\Omega + \left(A_4 + A_5\alpha_G + A_6\alpha_G^{2,0}\right)\alpha_\Omega^{4,0}\right] \quad (1.13)$$

Avec A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 des coefficients qui dépendent du nombre de Reynolds.
Le coefficient C_{D0} est calculé à par la relation de Morsi et Alexander (1972). Dans les simulations, la rotation est créée par un moment extérieur.
Lorsque la particule solide est mise en rotation sous l'effet du seul cisaillement, l'effet de la rotation sur le coefficient C_D est faible et celui-ci peut être estimé pour $Re_p < 200$ par la relation de Schiller et Nauman (1933). (Bagchi et Balachandar, 2002)

1.1.3 effet de la présence de parois au voisinage de la particule solide

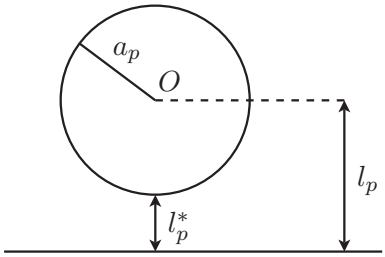


figure 1.5 – particule solide au voisinage d'une paroi ; définition des longueurs l_p et l_p^*

Dans de nombreuses applications (déposition et mise en suspension d'aérosol, mouvement de sédiments, mouvement de particules dans des tubes capillaires), la particule solide se déplace au voisinage de parois. Or la présence de parois influe sur la force exercée par le fluide sur la particule.
La plupart des résultats obtenus en présence de parois supposent un écoulement de Stokes. Ils se présentent sous la forme d'expressions analytiques qui sont les solutions exactes ou approchées de l'intégration des contraintes fluide. En général, les études considèrent séparément le cas de la particule qui se déplace parallèlement à la paroi et le cas de la particule qui se déplace perpendiculairement. Toutefois, il est montrée que pour des petits nombres de Reynolds, la force de traînée est égale approximativement à la somme de la force de traînée sur la particule lorsqu'elle se déplace parallèlement à la paroi et de la force de traînée lorsqu'elle se déplace perpendiculairement. (Rizk et Elghobashi, 1985 ; Chen et McLaughlin, 1995) Ainsi, elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_D = 3\pi\mu\, d_p\, \mathbf{C}.(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \ , \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_\parallel & 0 & 0 \\ 0 & C_\parallel & 0 \\ 0 & 0 & C_\perp \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Avec $C_\parallel$ et $C_\perp$ deux coefficients correctifs qui modélisent l'influence de la paroi lorsque la particule se déplace parallèlement et perpendiculairement à la paroi.
Pour déterminer les coefficients $C_\parallel$ et $C_\perp$, nous pouvons nous reporter, d'une part, aux études de Faxen (1923) et de O'Neill (1964) sur des particules solides se déplaçant parallèlement à la paroi et d'autre part, aux études de Brenner (1961), de Maude (1963) et de Cox et Brenner (1967) sur des particules se déplaçant perpendiculairement. Rizk et Elghobashi (1985) et Chen et McLaughlin (1995) récapitulent aussi de nombreuses formules analytiques qui sont établies dans l'hypothèse $Re_p \ll 1$ dans différentes situations (particules solide sans rotation et en rotation, écoulements

uniforme et linéairement cisaillé). Par exemple, les tableaux 1.1 et 1.2 présentent les expressions des coefficients correctifs lorsque la particule est sans rotation dans un écoulement uniforme en fonction de la distance l_p^* entre la surface de la particule et la paroi. Elles sont utilisées par Chen et McLaughlin (1995) pour modéliser la déposition d'aérosols dans des conduites verticales dans un écoulement turbulent ($Re_p \lesssim 1$, $1{,}0 < d_p < 24{,}3$ μm).

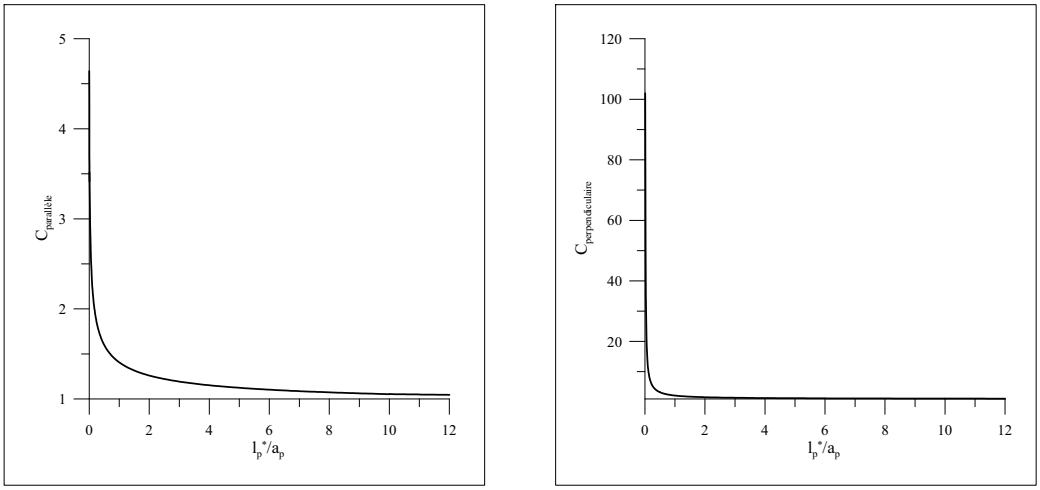
$l_p^*/a_p < 0{,}01$	$C_\parallel = -\frac{8}{15}\ln\left(\frac{l_p^*}{a_p}\right) + 0{,}9588$	Goldman *et al.* (1967) (théorie de lubrification)
$0{,}01 \leq l_p^*/a_p \leq 10$	$C_\parallel = \exp\left\{1{,}465\exp\left[-0{,}03176\left(\ln\frac{l_p^*}{a_p} + 6{,}150\right)^2\right] - 0{,}1\right\}$	expression approchée de la solution exacte de O'Neill (1964)
$l_p^*/a_p > 10$	$C_\parallel = \left[1 - \frac{9}{16}\frac{a_p}{l_p} + \frac{1}{8}\left(\frac{a_p}{l_p}\right)^3 - \frac{45}{256}\left(\frac{a_p}{l_p}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{a_p}{l_p}\right)^5\right]^{-1}$	Faxen (1923) (méthode des reflexions)

tableau 1.1 – expressions du coefficient correctif $C_\parallel$ établies dans l'hypothèse $Re_p \ll 1$ lorsque la particule est sans rotation dans un écoulement uniforme (Chen et McLaughlin, 1995) ; cf. la figure 1.5 pour les notations

$l_p^*/a_p \leq 0{,}5$	$C_\perp = \frac{2}{\alpha_B^2} + 0{,}4\ln\left(\frac{1}{\alpha_B}\right) + 1{,}04$ Avec $\alpha_B = \ln\left[\frac{l_p^*}{a_p} + 1 + \sqrt{\left(\frac{l_p^*}{a_p}\right)^2 + 2\frac{l_p^*}{a_p}}\right]$	expression approchée de la solution exacte de Brenner (1961)
$0{,}5 < l_p^*/a_p \leq 10$	$C_\perp = \exp\left\{4{,}526\exp\left[-0{,}0662\left(\ln\frac{l_p^*}{a_p} + 5{,}217\right)^2\right]\right\}$	expression approchée de la solution exacte de Brenner (1961)
$l_p^*/a_p > 10$	$C_\perp = 1 + \frac{a_p}{l_p^*}$	Dahneke (1974)

tableau 1.2 – expressions du coefficient correctif $C_\perp$ établies dans l'hypothèse $Re_p \ll 1$ lorsque la particule est sans rotation dans un écoulement uniforme (Chen et McLaughlin, 1995) ; cf. la figure 1.5 pour les notations

La figure 1.6 montre l'évolution des coefficients $C_\parallel$ et $C_\perp$ en fonction du rapport l_p^*/a_p. La figure 1.6 indique que la présence de parois entraîne l'augmentation du coefficient de traînée. Quel que soit le rapport l_p^*/a_p, nous avons $C_\parallel$, $C_\perp \geq 1$. Lorsque $l_p^*/a_p < 0{,}1$, les coefficients $C_\parallel$ et $C_\perp$ sont bien supérieurs à 1. Lorsque le rapport l_p^*/a_p augmente et devient supérieur à 10, ils tendent vers 1.
Zeng *et al.* (2005) trouvent un résultat différent. Ils réalisent des simulations numériques pour



(a) $C_{\parallel}$ (b) $C_{\perp}$

figure 1.6 – évolution des coefficients correctifs $C_{\parallel}$ et $C_{\perp}$ en fonction du rapport l_p^*/a_p (Chen et McLaughlin, 1995)

des nombres de Reynolds compris entre 0,5 et 250 et pour quatre rapports l^*/a_p qui sont 0,5, 1, 3 et 7. Lorsque $l_p^*/a_p \leq 1$, le coefficient de traînée C_D est supérieur au coefficient C_{D0} trouvé en l'absence de paroi, comme dans la figure 1.6. Lorsque la distance $l_p^* \geq 3$, le coefficient C_D est inférieur à C_{D0} si $Re_p \leq 100$ et supérieur à C_{D0} si $Re_p > 100$. Ce résultat est aussi obtenu dans certaines conditions par Vasseur et Cox (1977) et par Kim *et al.* (1993). Vasseur et Cox (1977) étudient le mouvement d'une sphère tombant sous l'effet de la gravité au voisinage d'une paroi verticale lorsque $Re \ll 1$. Le travail de Kim *et al.* (1993) intéresse deux sphères qui tombent côte à côte. Dans ces deux études, le coefficient de traînée est inférieur à C_{D0} lorsque la distance de séparation est suffisamment élevée. Zeng *et al.* (2005) déduisent de leurs résultats l'expression (1.15) du coefficient de traînée pour une particule solide se déplaçant parallèlement à la paroi.

$$C_D = C_{D0} + \frac{133{,}31}{Re_p}\frac{a_p}{l_p} - 8{,}36 \tag{1.15}$$

Le coefficient C_{D0} est donné par la relation de Vasseur et Cox (1977) établie en l'absence de paroi et dans l'hypothèse de Stokes :

$$C_{D0} = \frac{24}{Re_p}\left(1 + \frac{3}{8}Re_p\right) \tag{1.16}$$

1.2 force de portance

La force de portance est la composante de la force fluide perpendiculaire à la vitesse relative de la particule solide et du fluide. Les mécanismes à l'origine de cette force sont essentiellement la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement et la rotation de la particule solide.

1.2.1 force de portance créée par la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement

Les travaux sur la force de portance créée par la variation spatiale de la vitesse de l'écoulement portent le plus souvent sur un écoulement unidirectionnel linéairement cisaillé (cf. l'équation (1.7) et la figure 1.3). Saffman (1965, 1968) calcule pour des petits nombres de Reynolds à l'aide de développements asymptotiques (méthode dite *matched asymptotic expansion*) la force de portance

sur une particule solide sphérique dans un écoulement infini, unidirectionnel, linéairement cisaillé. La sphère se déplace parallèlement à l'écoulement avec une vitesse de rotation $\omega_p \overrightarrow{e}_y$. Saffman (1965, 1968) obtient l'expression analytique (1.17).

$$F_L = 6{,}46\rho\,\nu^{1/2} a_p^2\,\varepsilon_G |G|^{1/2}\,(u_f - u_p) \tag{1.17}$$

Avec $\varepsilon_G = 1$ si $G > 0$ et $\varepsilon_G = -1$ si $G < 0$.
L'expression (1.17) est valide si la condition (1.18) est vérifiée.

$$Re_p \ll 1\ , \quad Re_\Omega \ll 1\ , \quad Re_G \ll 1\ , \quad \varepsilon \gg 1 \tag{1.18}$$

Avec : Re_p le nombre de Reynolds de la particule ; Re_Ω le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation de la particule ω_p ; Re_G un nombre de Reynolds lié au cisaillement G.

$$Re_\Omega = \frac{d_p^2\,\omega_p}{\nu}\ , \quad Re_G = \frac{d_p^2\,|G|}{\nu}\ , \quad \varepsilon = \frac{Re_G^{1/2}}{Re_p} \tag{1.19}$$

Si la vitesse relative $u_f - u_p$ est positive, la force de Saffman est orientée des zones de faibles vitesses vers les zones de fortes vitesses ; si elle est négative, la force est dirigé vers les zones de faibles vitesses.
Les conditions de validation de la relation de Saffman (1965, 1968) correspondent à des taux de cisaillement élevés associés à des vitesses relatives très faibles. Elles sont rarement satisfaites dans les écoulements réels (cf. par exemple la déposition de particules d'aérosols (Wang *et al.*, 1997)). McLaughlin (1991) (Cherukat *et al.*, 1999) généralise ce résultat pour ε quelconque.

$$F_L = \frac{J(\varepsilon)}{2{,}255}\,F_{LS} \tag{1.20}$$

Avec F_{LS} la force de portance qui est donnée par l'équation (1.17) et qui est dite de Saffman.
La fonction J est une intégrale volumique. Elle tend vers 2,255 lorsque ε tend vers l'infini et décroît rapidement lorsque ε diminue. Lorsque ε tend vers 0, la force de portance est très petite et change de signe. Mei (1992) détermine une expression approchée de la fonction J à partir des résultats de McLaughlin (1991) lorsque $0{,}1 \leq \varepsilon \leq 20$.

$$J(\varepsilon) \approx 0{,}6765\,\{1 + \tanh[2{,}5\log(\varepsilon + 0{,}191)]\}\,\{0{,}667 + \tanh[6(\varepsilon - 0{,}32)]\} \tag{1.21}$$

Auton (1987) obtient l'expression de la force de portance sur une sphère placée dans un écoulement faiblement cisaillé d'un fluide non visqueux ($Re_p \gg 1$).

$$\overrightarrow{F_L} = C_L\,\rho V_p\,(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\omega_f} \tag{1.22}$$

Avec $\overrightarrow{\omega}_f$ la vorticité du fluide : $\overrightarrow{\omega}_f = \nabla \wedge \overrightarrow{u}_f$.
Cette expression repose sur l'hypothèse que la variation de la vitesse incidente de l'écoulement non perturbé le long de la sphère est bien inférieure à la vitesse relative de la sphère, *i.e.* $a_p\,\|\overrightarrow{\omega}_f\| \ll \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|$ ou encore $\alpha_{\omega_f} \ll 1$. Auton (1987) montre que le coefficient de portance vaut 1/2. Ce résultat s'applique plutôt à des bulles qui, dans une eau suffisamment pure et pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés, se déplacent comme si l'écoulement est non visqueux.

Dandy et Dwyer (1990) estiment, à l'aide de simulations numériques, le coefficient de portance C_L pour une particule solide fixe lorsque le nombre de Reynolds varie de 0,1 à 100 et le nombre sans dimension α_G de 0,01 à 0,4. Dans les simulations, le coefficient C_L est exprimé par la relation (1.23).

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho\pi a_p^2 \|\overrightarrow{u_f} - \overrightarrow{u_p}\|^2} \tag{1.23}$$

Le coefficient C_L dépend des nombres sans dimension Re_p et α_G.

- Le coefficient C_L augmente lorsque le nombre α_G augmente (comme le coefficient de traînée C_D).
- Si $Re_p < Re_{p\,\mathrm{lim}}$, il diminue (rapidement) lorsque le nombre Re_p augmente.
- Si $Re_p > Re_{p\,\mathrm{lim}}$, il est indépendant du nombre de Reynolds et proportionnel à α_G.
- Le nombre $Re_{p\,\mathrm{lim}}$ est approximativement égal à 40 ; il augmente légèrement avec le nombre α_G.

Lorsque $Re_p = 0{,}1$, le coefficient C_L est égal approximativement à la valeur C_{LS} qui est le coefficient de portance calculé à partir de l'expression de Saffman (1965, 1968) (cf. l'équation (1.17)).

$$C_{LS} \simeq 5{,}82 \left(\frac{\alpha_G}{Re_p} \right)^{1/2} \tag{1.24}$$

Ce résultat peut paraître suprenant. En effet, dans les simulations, la condition (1.18) n'est en général pas vérifiée. La grandeur sans dimension ε (qui est donnée par $(2\alpha_G/Re_p)^{1/2}$) est ainsi strictement inférieure à 1 seulement si $\alpha_G < 0{,}05$. Les résultats de Dandy et Dwyer (1990) sont obtenus dans des conditions proches de celles utilisées dans les travaux de McLaughlin (1991) et peuvent être donc comparés à l'expression (1.21) établie par Mei (1992). Nous représentons dans la figure 1.7 le coefficient de portance de Saffman C_{LS}, le coefficient déterminé par la relation (1.21) et le coefficient obtenu numériquement par Dandy et Dwyer (1990). Ce dernier est déduit

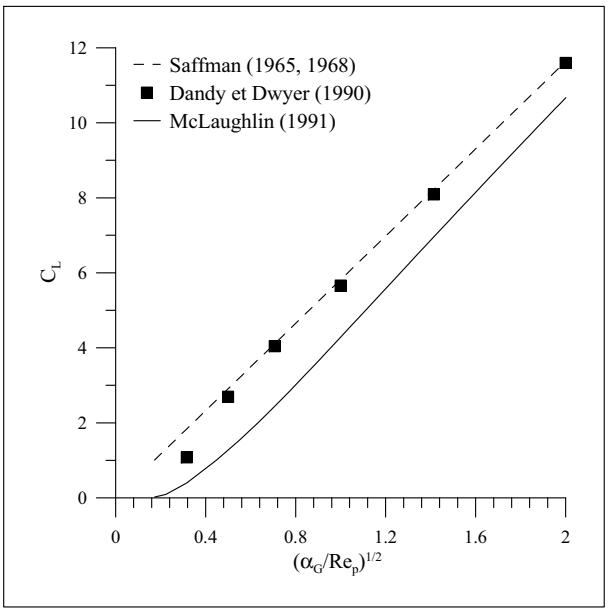


figure 1.7 – coefficient de portance déterminé par Dandy et Dwyer (1990) si $Re_p = 0{,}1$ et $0{,}01 \leq \alpha_G \leq 0{,}4$

de la figure 3 de leur article. Dans cette figure, la position de la mesure pour le nombre α_G le plus faible semble erronée. En effet, elle y est placée à l'abscisse $(\alpha_G/Re_p)^{1/2} = 0{,}22$ (qui correspond à $\alpha_G = 0{,}005$) et non à l'abscisse $(\alpha_G/Re_p)^{1/2} = 0{,}32$ ($\alpha_G = 0{,}01$). Or Dandy et Dwyer (1990) indiquent qu'il est impossible de déterminer, pour $\alpha_G = 0{,}005$, la force de portance compte tenu de sa faiblesse et de l'imprécision des calculs. Pour cette raison, dans la figure 1.7, la position de la première mesure est placée à l'abscisse $(\alpha_G/Re_p)^{1/2} = 0{,}32$. Cette observation modifie les conclusions de Dandy et Dwyer (1990). Leurs résultats coincident avec ceux de de Saffman (1965, 1968) seulement pour $\alpha_G \geq 0{,}05$ alors que les hypothèses utilisées par Saffman (1965, 1968) ne sont pas vérifiées. Pour $\alpha_G = 0{,}01$, les simulations donnent un coefficient inférieur à

C_{LS}. Par ailleurs, malgré des conditions identiques sur les nombres sans dimension α_G, Re_p et ε, les résultats de Dandy et Dwyer (1990) ne sont pas similaires à ceux de McLaughlin (1991) et de Mei (1992) (équation (1.21)). Ben Salem et Osterle (1998) considèrent que les simulations de Dandy et Dwyer (1990) ne sont pas valides car le domaine d'intégration utilisé est trop petit (notamment pour les petits nombres de Reynolds). Toutefois, notons que lorsque $\alpha_G = 0$ et pour $10 \leq Re_p \leq 100$, les résultats de Dandy et Dwyer (1990) sont corroborés par les données de Woo (1971) et de Clift *et al.* (1978) qui concernent respectivement la distribution de la pression à la surface de la particule et le point de décollement et la longueur du sillage.

Mei (1992) reprend les résultats de Saffman (1965, 1968) et de Dandy et Dwyer (1990) et propose une expression du coefficient de portance si $Re_p < 100$.

Si $Re_p \leq 40$,

$$\frac{C_L}{C_{LS}} = (1 - 0{,}3314\,\alpha_G^{1/2}) \exp\left(-\frac{Re_p}{10}\right) + 0{,}3314\,\alpha_G^{1/2} \tag{1.25}$$

Si $Re_p > 40$,

$$\frac{C_L}{C_{LS}} = 0{,}0524\,(\alpha_G Re_p)^{1/2} \tag{1.26}$$

Kurose et Komori (1999) déterminent également numériquement le coefficient de portance lorsque $1 \leq Re_p \leq 500$ et $0 \leq \alpha_G \leq 0{,}4$. Les résultats sont un peu différents de ceux de Dandy et Dwyer (1990). Comme dans les simulations de Dandy et Dwyer (1990), le coefficient C_L diminue lorsque le nombre de Reynolds Re_p augmente. Cependant, pour des nombres de Reynolds élevés ($Re_p > 60$), le coefficient C_L n'est pas constant et devient négatif. La direction de la force de portance est opposée à celle obtenue dans les situations asymptotiques (écoulement non visqueux et écoulement de Stokes). Afin de vérifier ces résultats numériques, des expériences sont réalisées. Kurose et Komori (1999) laissent tomber une bille dans un écoulement vertical linéairement cisaillé produit par deux rouleaux qui se déplacent dans des directions opposées. Initialement, la bille est éjectée au centre de l'écoulement (en $z = 0$). Pour des faibles nombres de Reynolds, la bille tombe indifféremment des deux côtés de l'axe médian. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, elle tombe, dans presque 80% des cas, du côté des faibles vitesses ($z < 0$). Ainsi, ces observations tendent à confirmer l'existence d'une force de portance dirigée vers les vitesses les plus faibles (et donc d'un coefficent C_L négatif). Ce résultat est aussi obtenu par Bagchi et Balachandar (2002). Bagchi et Balachandar (2002) calculent le coefficient de portance pour des nombres de Reynolds compris entre 0 et 200 et des nombres α_G compris entre 0 et 0,2 et trouvent un coefficient de portance négatif, si $Re_p \approx 200$. Les simulations de Kurose et Komori (1999) et de Bagchi et Balachandar (2002) sont validées pour les faibles nombre de Reynolds. Le coefficient C_L calculé peut être donné par l'équation (1.21) pourvu que $Re_p < 5$. Cette condition correspond approximativement au domaine d'application de l'équation. Par contre, les expressions de Saffman (1965, 1968) et de Mei (1992) (équations (1.25) et (1.26)) ne sont pas vérifiées, elles surestiment le coefficient C_L. Ces remarques confirment les conclusions de Ben Salem et Osterle (1998) sur la validité des simulations de Dandy et Dwyer (1990)

Sridhar et Katz (1995) mesurent la force de portance sur une bulle sphérique entraînée par un tourbillon lorsque $20 < Re_p < 80$ et $0{,}01 < \alpha_\omega < 0{,}1$.

$$\alpha_\omega = \frac{a_p\,\omega_f}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.27}$$

Le coefficient de portance mesuré ne dépend pas du nombre de Reynolds. Il varie entre 0,1 et 0,3. Sridhar et Katz (1995) déduisent une expression du coefficient de portance en fonction de α_ω.

$$C_L = 0{,}59\,\alpha_\omega^{0{,}25} \tag{1.28}$$

Dans un écoulement quelconque

La plupart des écoulements considérés dans les études théoriques ou dans les simulations numériques sont des écoulements simples :

- des écoulements unidirectionnels linéairement cisaillés ;
- des écoulements de déformation pure (le tenseur des taux de rotation $\mathbf{\Omega}$ est nul) ; par exemple :

$$\overrightarrow{u}_f(x,z) = (u_\infty + G/2z)\overrightarrow{e}_x + G/2x\overrightarrow{e}_z \tag{1.29}$$

- des écoulements de rotation pure (le tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$ est nul) ; par exemple :

$$\overrightarrow{u}_f(x,z) = (u_\infty + G/2z)\overrightarrow{e}_x - G/2x\overrightarrow{e}_z \tag{1.30}$$

Des tentatives sont faites pour proposer une expression de la force de portance valide dans un écoulement quelconque. Crowe *et al.* (1998) se placent dans les hypothèses utilisées par Saffman (1965, 1968) et généralisent l'expression proposée par l'auteur à un écoulement tridimensionnel.

$$\overrightarrow{F}_L = C_L \rho \nu^{1/2} d_p^2 \frac{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\omega}_f}{\|\overrightarrow{\omega}_f\|^{1/2}} \tag{1.31}$$

Avec $C_L = 1{,}61$.
Ahmadi et Ma (1990) et Massoudi (2006) appliquent à un écoulement quelconque le résultat obtenu par Drew (1976, 1978) pour un écoulement de déformation pure et pour des petits nombres de Reynolds.

$$\overrightarrow{F}_L = 6{,}46\rho\nu^{1/2} \frac{a_p^2}{\left(2\sum_{i,j} S_{ij}S_{ij}\right)^{0{,}25}} 2\mathbf{S}.(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \tag{1.32}$$

Avec $\mathbf{S}$ le tenseur des taux de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i}\right) \tag{1.33}$$

Toutefois, nous remarquons que la relation (1.32) n'est pas valide dans un écoulement quelconque. Considèrons, par exemple, l'écoulement unidirectionnel décrit par $\overrightarrow{u}_f = f(z)\overrightarrow{e}_x$ (cas de la loi logarithmique) et une sphère qui se déplace dans cet écoulement, avec une vitesse $(u_p\,, 0\,, w_p)$. La force $\overrightarrow{F}_L$ s'écrit avec la relation (1.32) :

$$\overrightarrow{F}_L = 6{,}46\rho\nu^{1/2}a_p^2|f'(z)|^{1/2}\left[-w_p\overrightarrow{e}_x + (u_f - u_p)\overrightarrow{e}_z\right] \tag{1.34}$$

La force obtenue n'est pas orthogonale à la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$. Elle n'est donc pas, à proprement parler, une force de portance (qui est la composante de la force fluide normale à la vitesse relative). La formule (1.32) apparaît, de fait, incorrecte. Drew (1978) arrive à la même conclusion en considérant les résultats de Harper et Chang (1968).
Magnaudet et Legendre (1998) montrent que pour des taux de cisaillement faibles et modérés, la force de portance sur une bulle dans un écoulement complexe peut être déterminée en superposant les résultats obtenus dans un écoulement de déformation pure et dans un écoulement de rotation pure. Ils écrivent :

$$\overrightarrow{F}_L = \rho V_p\, C_L\, (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\omega}_f + \overrightarrow{F}_{LG} + \overrightarrow{F}_{L\Omega} \tag{1.35}$$

Le premier terme correspond à la force déterminée par Auton (1987) dans l'hypothèse d'un fluide non visqueux. Le coefficient C_L est égal à 1/2. Les deuxième et troisième termes correspondent aux forces de portance générées respectivement dans un écoulement de déformation pure et dans un écoulement de rotation pure. Magnaudet et Legendre (1998) examinent l'expression des forces $\overrightarrow{F}_{LG}$ et $\overrightarrow{F}_{L\Omega}$ à l'aide de simulations numériques en considérant une bulle fixe dans les écoulements décrits par les équations (1.29) et (1.30).

La force de portance dans un écoulement de déformation pure Pour proposer l'expression de la force $\overrightarrow{F}_{LG}$, Magnaudet et Legendre (1998) reprennent, en le modifiant, le résultat de Drew (1976).

$$\overrightarrow{F}_{LG} = 2\rho V_p\, C_{LG} \left[\mathbf{S} - \frac{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p).\mathbf{S}.(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p)}{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p).(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p)}\mathbf{1}\right].(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \tag{1.36}$$

Avec $\mathbf{1}$ le tenseur unité.
Le second terme dans les crochets assure que la force $\overrightarrow{F}_{LG}$ est orthogonale à la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$. Le coefficient C_{LG} dépend du nombre de Reynolds Re_p et du nombre sans dimension α_S.

$$\alpha_S = \frac{d_p \left(2\sum_{i,j} S_{ij}S_{ij}\right)^{1/2}}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.37}$$

Pour des petits nombres de Reynolds, le coefficient C_{LG} est donné par la relation (1.38) :

$$C_{LG} = (\alpha_S\, Re_p)^{-1/2}\, J_G(\varepsilon_G) \tag{1.38}$$

Avec $\varepsilon_G = (\alpha_S/Re_p)^{1/2}$.
La fonction J_G n'est pas complètement déterminée, seul son comportement est connu lorsque ε_G tend vers l'infini : la fonction J_G est alors égale à 1,41. Pour les grands nombres de Reynolds ($Re_p > 100$),

$$C_{LG} = 1{,}2(Re_p)^{-1/3} + o(Re_p^{-1}) \tag{1.39}$$

La force de portance dans un écoulement de rotation pure La force $\overrightarrow{F}_{L\Omega}$ est donnée par la relation (1.40) :

$$\overrightarrow{F}_{L\Omega} = 2\rho V_p\, C_{L\Omega}\, (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p)^T .\mathbf{\Omega} = \rho V_p\, C_{L\Omega}\, (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\omega}_f \tag{1.40}$$

Avec $\mathbf{\Omega}$ le tenseur des taux de rotation :

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{fi}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_{fj}}{\partial x_i}\right) \tag{1.41}$$

Le coefficient de portance $C_{L\Omega}$ dépend du nombre de Reynolds Re_p et du nombre sans dimension α_Ω.

$$\alpha_\Omega = \frac{d_p \left(2\sum_{i,j} \Omega_{ij}\Omega_{ij}\right)^{1/2}}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.42}$$

Pour des petits nombres de Reynolds, le coefficient $C_{L\Omega}$ est donné par la relation (1.43).

$$C_{L\Omega} = (Re_p\, \alpha_\Omega)^{-1/2} J_\Omega(\epsilon_\Omega) \tag{1.43}$$

Avec $\varepsilon_\Omega = (\alpha_\Omega/Re_p)^{1/2}$.
Si ε_Ω tend vers l'infini, J_Ω tend vers $-1{,}20$. Pour les grands nombres de Reynolds ($Re_p > 100$),

$$C_{L\Omega} = 1{,}2Re_p^{-1/3} - 6{,}5Re_p^{-1} + o(Re_p^{-1}) \tag{1.44}$$

L'expression de la force de portance (1.35) est validée par Magnaudet et Legendre (1998) dans le cas d'une bulle fixe dans un écoulement linéairement cisaillé (cf. l'équation (1.7)). Elle peut s'appliquer à des particules solides pour des petits nombres de Reynolds et dans les hypothèses

définies par McLaughlin (1991). Legendre et Magnaudet (1997, 1998) montrent que dans ces conditions, le rapport des forces de portance sur une bulle et sur une particule solide est égal à $(2/3)^2$. Les comportements du fluide au voisinage de la bulle et de la particule solide diffèrent par la condition limite à la surface qui est respectivement une condition de cisaillement nul et une condition de non-glissement.
Considérons de nouveau l'exemple de la particule solide en mouvement dans un écoulement défini par $\overrightarrow{u}_f = f(z)\overrightarrow{e}_x$. La vitesse de la particule dans la direction y est supposée nulle. La relation (1.35) proposée par Magnaudet et Legendre (1998) s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_L = \rho V_p \left[C_L + C_{L\Omega} + C_{LG} \frac{(u_f - u_p)^2 - w_p^2}{\| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \|^2} \right] f'(z) \left(w_p \overrightarrow{e}_x + (u_f - u_p) \overrightarrow{e}_z \right) \tag{1.45}$$

Dans les mêmes conditions, la généralisation par Crowe *et al.* (1998) de la force de Saffman donne :

$$\overrightarrow{F}_L = \rho C_L d_p^2 \nu_f^{1/2} \sqrt{f'(z)} \left(w_p \overrightarrow{e}_x + (u_f - u_p) \overrightarrow{e}_z \right) \tag{1.46}$$

Les forces fournies par ces deux équations sont bien orthogonales à la vitesse relative de la particule. Dans les deux cas, le coefficient de portance est connu seulement pour une gamme limitée de nombres de Reynolds, de taux de cisaillement et de taux de rotation. Par ailleurs, il est nécessaire de valider, pour la particule solide, la forme de la force de portance proposée par Magnaudet et Legendre (1998).

1.2.2 force de portance induite par la rotation de la particule solide appelée force de Magnus

Le mouvement de rotation de la particule solide modifie le champ de vitesse du fluide à son voisinage. D'un côté de la particule, le fluide est accéléré par la rotation, de l'autre côté, il est ralenti. Ce gradient de vitesse fluide induit une différence de pressions qui produit une force de portance, la force de Magnus. Cette force de Magnus est par exemple à l'origine du comportement du boomerang ou de l'effet lifté au tennis.
Rubinow et Keller (1961) calculent, en utilisant des développements asymptotiques, la force de portance sur une sphère en translation et en rotation dans un fluide au repos pour des petits nombres de Reynolds ($Re_p \sim 1$).

$$\overrightarrow{F}_{LM} = \pi a_p^3 \rho \, \overrightarrow{\omega}_p \wedge \overrightarrow{u}_p \tag{1.47}$$

Avec $\overrightarrow{\omega}_p$ la vitesse de rotation de la particule.
La relation fournit une valeur à l'ordre $o(Re_p)$. Saffman (1965) montre que, dans l'hypothèse « Re_p petit », la force de Magnus est d'un ordre inférieur à la force de portance induite par le cisaillement, à moins que la vitesse de rotation de la sphère soit bien supérieure au taux de cisaillement. Crowe *et al.* (1998) étendent le résultat de Rubinow et Keller (1961) à une sphère en rotation dans un fluide en rotation.

$$\overrightarrow{F}_{LM} = \pi a_p^3 \rho \, (\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\Omega}_r \tag{1.48}$$

Avec : $\overrightarrow{\Omega}_r$ la vitesse de rotation relative de la particule par rapport au fluide :

$$\overrightarrow{\Omega}_r = \overrightarrow{\omega}_p - \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}_f \tag{1.49}$$

$\overrightarrow{\omega}_f/2$ représente la vitesse de rotation locale du fluide. Un coefficient de portance dit de Magnus et noté C_{LM} peut être défini de la même façon que le coefficient C_L (cf. l'équation (1.23)). La force de Magnus s'écrit alors :

$$\overrightarrow{F}_{LM} = \frac{1}{2}\rho C_{LM} A_p \| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \| \left[\frac{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\Omega}_r}{\| \overrightarrow{\Omega}_r \|} \right] \tag{1.50}$$

Le résultat de Rubinow et Keller (1961) se réduit à l'équation (1.51).

$$C_{LM} = \frac{d_p \| \overrightarrow{\Omega}_r \|}{\| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \|} = 2\,\alpha_{\Omega_r} \tag{1.51}$$

L'équation (1.51) montre que dans un écoulement de Stokes, le coefficient C_{LM} varie linéairement avec α_{Ω_r}. Tanaka *et al.* (1990) mesurent le coefficient C_{LM} pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^4 lorsque le nombre sans dimension α_{Ω_r} varie de 0,1 à 1. Le coefficient C_{LM} augmente linéairement avec α_{Ω_r} seulement si α_{Ω_r} est petit. Lorsque α_{Ω_r} augmente, il diminue rapidement et devient même négatif pour $Re_p = 6.10^4$ et $Re_p = 10^5$. Tanaka *et al.* (1990) proposent d'exprimer le coefficient C_{LM} comme suit.

$$C_{LM} = 0{,}5 \min(1\,,\alpha_{\Omega_r}) \tag{1.52}$$

Une autre expression est déduite par Lun et Liu (1997) à partir des résultats théoriques de Rubinow et Keller (1961) ($Re_p \lesssim 1$) et des résultats empiriques de Oesterle *et al.* (1991) ($10 < Re_p < 60$) et de Tsuji *et al.* (1985b) ($550 < Re_p < 1600$). Nous avons si $Re_p < 1000$:

$$C_{LM} = 2\alpha_{\Omega_r} \left(0{,}178 + 0{,}822 Re_p^{-0{,}522}\right) \tag{1.53}$$

Kurose et Komori (1999) estiment la force de portance sur une particule solide en rotation lorsque le nombre de Reynolds est compris entre 0 et 500 et le nombre sans dimension α_Ω entre 0 et 0,25. Dans les simulations, le coefficient de portance C_{LM} est positif quel que soit Re_p. Si $Re_p > 200$, il tend vers une constante qui augmente avec le nombre sans dimension α_Ω. Kurose et Komori (1999) considèrent la force de portance sur une particule solide en rotation dans un écoulement cisaillé. Pour les grands nombres de Reynolds ($Re_p = 200$), les effets du cisaillement et de la rotation sont corrélés. Par conséquent, le coefficient de portance pour une particule solide en rotation dans un écoulement linéairement cisaillé n'est pas égal à la somme du coefficient de portance de la particule solide sans rotation dans un écoulement cisaillé et du coefficient de portance de la particule en rotation dans un écoulement uniforme. Kurose et Komori (1999) proposent alors l'expression (1.54) du coefficient C_L.

$$C_L = A_0 \alpha_G^{0,9} + A_1 \alpha_G^{1,1} + \left(A_2 + A_3 \alpha_G + A_4 \alpha_G^{2,0} + A_5 \alpha_G^{9,5}\right) \alpha_\Omega \tag{1.54}$$

Avec A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 des coefficients qui dépendent du nombre Re_p.
Dans les études précédentes, la rotation de la particule est imposée par un moment extérieur. Bagchi et Balachandar (2002) déterminent la force de portance sur une sphère mise en rotation par le cisaillement. La rotation de la sphère tend à augmenter la force de portance par rapport au cas sans rotation. Elle est orientée des zones de faibles vitesses vers les zones de vitesses élevées, *i.e.* le coefficient de portance est positif. Si $Re_p \leq 1$, l'influence de la rotation sur la force de portance est faible : lorsque $Re_p = 0{,}5$, l'augmentation de la force de portance est de l'ordre de 5%. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la vitesse de rotation induite par le cisaillement diminue. L'influence de la rotation est ainsi significative seulement pour les nombres de Reynolds intermédiaires, en particulier car la force de portance sur une sphère sans rotation tend vers zéro. Si $Re_p > 200$, elle est négligeable. Bagchi et Balachandar (2002) déduisent l'expression (1.55) du coefficient C_{LM}.

$$C_{LM} \approx 1{,}1 \alpha_{\Omega_r} \tag{1.55}$$

Dans les conditions expérimentales, comme la vitesse de rotation générée par le cisaillement diminue avec Re_p, les effets de la rotation et du cisaillement sont indépendants quel que soit Re_p et la force de portance sur une sphère en rotation induite par le cisaillement est la somme de la force de portance sur la sphère sans rotation dans un écoulement cisaillé et de la force portance sur la sphère en rotation « forcée » dans un écoulement uniforme. Zeng *et al.* (2005) considèrent une sphère se déplaçant parallèlement à une paroi, en rotation « libre ». Le coefficient C_{LM} varie de 0,8 à $1{,}4\,\alpha_{\Omega_r}$: la présence de parois modifie peu la valeur C_{LM}.
Dans toutes ces études réalisées pour $Re_p > 1$, le coefficient de portance C_{LM} s'avère inférieur à $2\alpha_{\Omega_r}$, résultat établi dans l'hypothèse de Stokes.

1.2.3 effet de la présence de parois au voisinage de la particule solide

La présence de parois influe sur la force de portance et de nombreuses expressions analytiques sont déduites sous certaines conditions (sur la distance l_p, sur le nombre de Reynolds). Nous pouvons nous reporter, par exemple, aux travaux de Cox et coauteurs (1968, 1977), de Ho et Leal (1974), de Leighton et Acrivos (1985), de McLaughlin (1993) et de Wang *et al.* (1997). Cherukat et McLaughlin (1994) déterminent la force de portance exercée sur une sphère qui se déplace parallèlement à la paroi dans un écoulement linéaire cisaillé. Pour cela, ils supposent $l_p \sim a_p$. La force de portance s'écrit à l'ordre $O(Re_p)$ et dans l'hypothèse $Re_p \ll 1$ comme suit :

$$\frac{F_L}{\mu a_p V} = Re_p\, I \tag{1.56}$$

Avec : V une vitesse caractéristique de l'écoulement ; Re_p le nombre de Reynolds de la particule basé sur la vitesse V ; I une intégrale de surface qui dépend des nombres sans dimension κ et α_G :

$$\kappa = \frac{a_p}{l_p}\ , \quad \alpha_G = \frac{G a_p}{V} \tag{1.57}$$

La vitesse V dépend de la norme de la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$. Si $\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\| \neq 0$,

$$V = \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\| \tag{1.58}$$

Si $\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\| = 0$,

$$V = G a_p \tag{1.59}$$

La relation (1.56) peut être utilisée quelle que soit la distance l_p pourvu que :

$$l_p \ll \min((\nu/\alpha)^{1/2}, \nu/\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|) \tag{1.60}$$

Cette condition signifie que la paroi est située dans la zone de l'écoulement dans laquelle les effets visqueux sont prépondérants (*inner region*). Cherukat et McLaughlin (1994) évaluent numériquement l'intégrale I pour différentes valeurs de κ et de α_G dans deux cas : lorsque la sphère est en translation et lorsque la sphère est en translation et en rotation. Ainsi, lorsque la sphère est en translation, l'intégrale I peut être estimée à l'aide de l'équation (1.61).

$$\begin{aligned} I \;=\; & 1{,}7716 + 0{,}2160\kappa - 0{,}7292\kappa^2 + 0{,}4854\kappa^3 \\ & - \left[\frac{3{,}2397}{\kappa} + 1{,}1450 + 2{,}0840\kappa - 0{,}9059\kappa^2\right]\alpha_G \\ & + \left[2{,}0069 + 1{,}0575\kappa - 2{,}4007\kappa^2 + 1{,}3174\kappa^3\right]\alpha_G^2 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Par ailleurs, des expériences (Hall, 1988 ; Cherukat et McLaughlin, 1990 ; Patnaik *et al.*, 1994) sont réalisées. Hall (1988) considère la force de portance sur une particule solide sphérique au voisinage d'une paroi lisse dans une couche limite turbulente. Dans les expériences, le nombre de Reynolds Re_* basé sur la vitesse de frottement u_* varie de 3,6 à 140. Hall (1988) déduit de ses mesures une relation entre les deux nombres sans dimension F_L^+ et Re_* :

$$F_L^+ = (20{,}90 \pm 1{,}57)\left(\frac{Re_*}{2}\right)^{2{,}31\pm0{,}02} \tag{1.62}$$

Avec :

$$F_L^+ = \frac{F_L}{\rho\nu^2}\ , \quad Re_* = \frac{d_p\, u_*}{\nu} \tag{1.63}$$

(Dans l'étude de Hall (1988), le nombre Re_* est remplacé par le nombre sans dimension a^+ qui est égal $a_p u_*/\nu$.)

Molinger et Nieuwstadt (1996) déterminent, pour des nombres de Reynolds compris entre 0,6 et 4, une autre expression de la force F_L^+ :

$$F_L^+ = (56{,}9 \pm 1{,}1)\left(\frac{Re_*}{2}\right)^{1{,}87\pm0{,}04} \tag{1.64}$$

Dans leurs expériences, les particules solides sont des billes creuses en verre de diamètre égal à 120 μm posées sur une paroi lisse. Elles sont suffisamment petites pour être contenues dans la sous-couche visqueuse de la couche limite turbulente dans laquelle l'écoulement est unidirectionnel, linéairement cisaillé, contrairement à l'étude de Hall (1988). Dans l'étude de Hall (1988), la particule se situe dans la zone « tampon » et même dans la zone logarithmique. A titre de comparaison, la force proposée par Saffman (1965, 1968) s'écrit, en supposant la particule solide contenue dans la sous couche visqueuse :

$$F_L^+ = 6{,}46\left(\frac{Re_*}{2}\right)^3 \tag{1.65}$$

Plus récemment, Takemura et Magnaudet (2003) mesurent la force de portance sur des bulles contaminées (dont le comportement s'assimile à celui des particules solides) au voisinage d'une paroi lorsque le nombre de Reynolds Re_p est compris entre 1 et 92. Ils proposent l'expression (1.66) du coefficient de portance.

$$C_L = C_{L0}\, a^2 \left(\frac{l_p}{1{,}5 d_p}\right)^{-2\tanh(0{,}01 Re_p)} \tag{1.66}$$

Avec : l_p la distance entre le centre de la sphère et la paroi ;

$$a = 1 + 0{,}6 Re_p^{1/2} - 0{,}55 Re_p^{0{,}08} \tag{1.67}$$

Le coefficient C_{L0} dépend du nombre de Reynolds Re_{l_p} construit à partir de la distance l_p.

$$Re_{l_p} = \frac{l_p \| \overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p \|}{\nu} \tag{1.68}$$

Nous avons : si $0 < Re_{l_p} < 10$,

$$C_{L0} = \left(\frac{9}{8} + 5{,}78.10^{-6} Re_{l_p}^{4.58}\right)\beta^2 \exp(-0{,}292 Re_{l_p}) \tag{1.69}$$

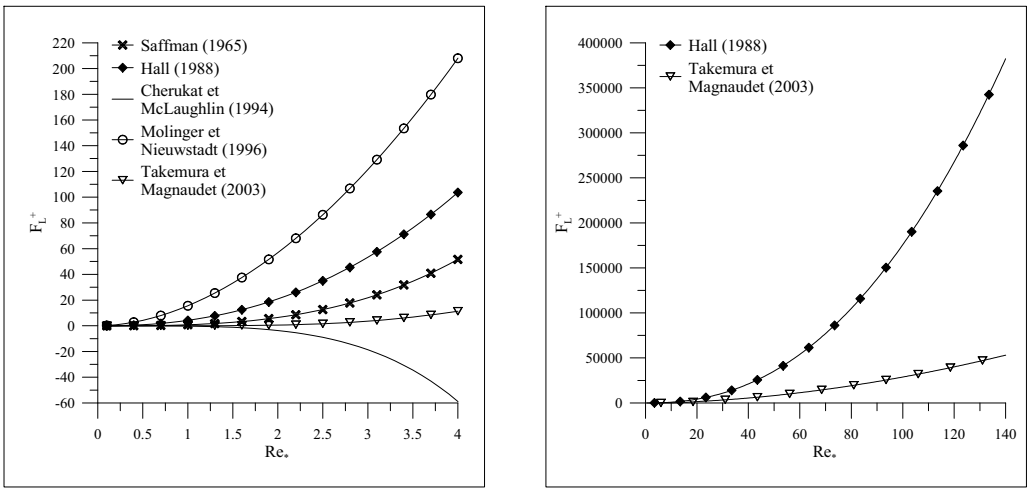
et si $10 \leq Re_{l_p} < 300$,

$$C_{L0} = 8{,}94 \beta^2 Re_{l_p}^{-2{,}09} \tag{1.70}$$

Avec $\beta = 0{,}50698$.
La relation (1.66) est retrouvée dans les simulations de Zeng *et al.* (2005) si $Re_{l_p} < 100$. Ainsi, le coefficient de portance diminue avec le nombre sans dimension Re_{l_p} et la diminution est une fonction croissante du rapport l_p/d_p. Lorsque $Re_{l_p} > 100$, le coefficient augmente avec le nombre Re_{l_p} et la relation (1.66) sous-estime la valeur numérique. Nous pouvons citer aussi les simulations numériques de Kim *et al.* (1993).

Nous comparons, dans la figure 1.8, les différentes relations rapportées ici. Pour ce faire, nous considérons une particule sphérique posée sur une paroi lisse ($l_p = a_p$) dans un écoulement linéairement cisaillé. Le profil de vitesse est donné par la loi établie dans la sous-couche visqueuse, à savoir :

$$u_f(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z \tag{1.71}$$



(a) $Re_* < 4$ (b) $0.5 < Re_* < 140$

figure 1.8 – évolution de la force de portance sans dimension F_L^+ en fonction du nombre de Reynolds Re_*

La figure 1.8a montre l'évolution de la force F_L^+ calculée avec les relations de Saffman (1965, 1968), de Hall (1988), de Cherukat et McLaughlin (1994), de Molinger et Nieuwstadt (1996) et de Takemura et Magnaudet (2003) pour $Re_* < 4$. Cette condition correspond approximativement au domaine d'application des relations. Les valeurs obtenues sont différentes. Si $Re_* = 4$, l'écart peut être d'ordre 20 et la relation de Cherukat et McLaughlin (1994) établit une force F_L^+ négative. La présence de la paroi a un effet opposé selon les modèles. Dans les modèles de Hall (1988) et de Molinger et Nieuwstadt (1996), elle tend à augmenter la force de portance par rapport au cas sans paroi qui est décrit par la relation de Saffman (1965, 1968). Inversement, dans le modèle de Takemura et Magnaudet (2003), la force F_L est diminuée. Dans la figure 1.8b, nous examinons le cas $Re_* > 4$: nous représentons le comportement de la force F_L^+ obtenu à partir des relations de Hall (1988) et de Takemura et Magnaudet (2003). La relation de Hall (1988) donne une valeur bien supérieure à celle estimée par Takemura et Magnaudet (2003) et donc, à celle calculée numériquement par Zeng *et al.* (2005).

1.3 force d'accélération

Tout solide qui se déplace dans un écoulement uniforme avec une vitesse $\overrightarrow{u}_p$ qui varie avec le temps est soumis à la force de masse ajoutée. Cette force a pour origine l'accélération par le solide d'une certaine masse de fluide environnant : lorsque le solide se déplace, il modifie l'énergie cinétique du fluide. La force de masse ajoutée dans un fluide au repos s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_M = -\rho\, C_M\, V_p \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} \tag{1.72}$$

Avec C_M le coefficient de masse ajoutée.
Dans le cas d'une sphère et dans l'hypothèse d'un fluide non visqueux ou d'un écoulement de Stokes, le coefficient C_M est égal à 1/2. La masse $\rho V_p C_M$ est la masse du fluide qui, si elle se déplaçait avec la vitesse $\overrightarrow{u}_p$, aurait la même énergie cinétique que le fluide accéléré. Lorsque l'écoulement est uniforme et non stationnaire, la force exercée sur la sphère est liée aux accélérations du fluide et de la sphère. Elle s'écrit (Batchelor, 1967 ; Magnaudet et Eames, 2000) :

$$\overrightarrow{F}_A = \rho V_p \frac{d\overrightarrow{u}_f}{dt} + \rho\, C_M\, V_p \left(\frac{d\overrightarrow{u}_f}{dt} - \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} \right) \tag{1.73}$$

Le premier terme est dû à la présence de gradients de pression dans le fluide au voisinage de la particule qui sont induits par l'accélération du fluide. Le second terme est la force de masse ajoutée.
Dans le cas général (écoulement non uniforme et non stationnaire), nous avons (Auton *et al.*, 1988 ; Magnaudet *et al.*, 1995 ; Ushijima, 1998) :

$$\overrightarrow{F}_A = \rho V_p \frac{D\overrightarrow{u}_f}{Dt} + \rho\, C_M\, V_p \left[\frac{D\overrightarrow{u}_f}{Dt} - \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt}\right] \tag{1.74}$$

Avec $D/Dt = \partial/\partial t + \overrightarrow{u}_f.\nabla$.
Cependant, il n'existe pas de consensus sur l'expression de la force $\overrightarrow{F}_A$. Ainsi, Niño et Garcia (1998b) utilisent, dans leur modèle de trajectoire, l'expression (1.75) qui fait intervenir la dérivée totale d/dt définie par $d/dt = \partial/\partial t + \overrightarrow{u}_p.\nabla$.

$$\overrightarrow{F}_A = \rho V_p \frac{D\overrightarrow{u}_f}{Dt} + \rho\, C_M\, V_p \left[\frac{d\overrightarrow{u}_f}{dt} - \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt}\right] \tag{1.75}$$

Ushijima (1998) note que pour les faibles nombres de Reynolds, les deux expressions (1.74) et (1.75) sont équivalentes mais que, lorsque le nombre de Reynolds augmente, elles ne peuvent pas être simultanément correctes. Il déduit de plusieurs études (Bretherton, 1962 ; Ruetsch et Meiburg, 1993 ; Magnaudet *et al.*, 1995) que seule l'expression (1.74) est valide.
Magnaudet *et al.* (1995) déterminent numériquement le coefficient C_M pour une sphère placée dans un écoulement de déformation pure. Dans les simulations, le nombre de Reynolds varie de 0,1 à 300 et le nombre sans dimension α_G est compris entre $-0{,}1$ et 0,1. Le coefficient C_M calculé est approximativement égal à 0,5.
Odar et Hamilton (1964) s'intéressent au cas d'une particule solide en translation dans un fluide au repos, dont le mouvement est accéléré (mouvement oscillatoire). Pour estimer la force fluide, ils réalisent des expériences dans lesquelles le nombre de Reynolds Re_p varie de 0 à 62. Il apparaît que le coefficient de masse ajoutée est indépendant du nombre de Reynolds et qu'il est une fonction du paramètre sans dimension A_c.

$$A_c = \frac{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2}{d_p \left\| \dfrac{d(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p)}{dt} \right\|} \tag{1.76}$$

Le paramètre A_c quantifie l'importance de l'accélération convective vis-à-vis de l'accélération locale. Pour les nombres A_c considérés ($A_c < 2{,}5$), le coefficient C_M est supérieur à 0,5 et tend vers une valeur limite égale à 1,05 lorsque $A_c > 1{,}5$ (cf. la figure 5 de leur article). Odar (1966) applique ce résultat à une particule tombant sous l'effet de la gravité dans un fluide au repos. Il trouve un accord satisfaisant sur la vitesse de la particule entre l'expérience et le calcul. Niño et Garcia (1998b) citent les résultats de Yen (1992) qui effectue des expériences dans des conditions proches et qui trouve également des valeurs supérieures à 0,5. Crowe *et al.* (1998) reprennent les travaux de Odar et Hamilton (1964) et proposent pour le coefficient C_M l'expression (1.77) :

$$C_M = 1{,}05 - \frac{0{,}066}{0{,}12 + A_c^2} \tag{1.77}$$

1.4 force histoire

La force histoire a pour origine la réponse non instantanée de la couche limite autour de la particule solide à une variation dans le temps de la vitesse relative de cette particule par rapport au fluide. Elle peut être assimilée à une traînée visqueuse qui serait due à l'accélération relative. Dans la même idée, la force de masse ajoutée est une traînée de forme générée par l'accélération.

(Crowe *et al.*, 1998) La norme F_H est une fonction du temps et elle est définie comme l'intégrale (1.78) avec $\mathcal{K}$ le noyau (Basset, 1888).

$$F_H(t) = 6\pi\mu a_p \int_{-\infty}^{t} \mathcal{K}(t,s,Re_p)\frac{d}{ds}\left(u_f - u_p\right) ds \tag{1.78}$$

Le comportement du noyau $\mathcal{K}$ dépend du contexte d'étude (nombre de Reynolds, nature de la variation de la vitesse relative). Son expression est déterminée uniquement dans quelques cas particuliers. Basset (1888) montre dans un écoulement de Stokes pour une sphère en translation dans un fluide au repos, dont le mouvement est accéléré que le noyau $\mathcal{K}$ s'écrit :

$$\mathcal{K}(t,s) = \frac{a_p}{\sqrt{\pi\nu(t-s)}} \tag{1.79}$$

Pareillement, Odar et Hamilton (1964) considèrent une particule en translation dans un fluide au repos. Dans cette étude, le mouvement de la particule est sinusoïdal et le nombre de Reynolds Re_p est compris entre 0 et 62. Le noyau $\mathcal{K}$ est exprimé comme suit :

$$\mathcal{K}(t,s) = C_H \frac{a_p}{\sqrt{\pi\nu(t-s)}} \tag{1.80}$$

Avec C_H un coefficient qui est déterminé expérimentalement par les auteurs.
Le coefficient C_H est indépendant du nombre de Reynolds et il est une fonction décroissante du paramètre sans dimension A_c qui est donné par l'équation (1.76) et qui modélise l'effet de l'accélération. Pour les nombres A_c étudiés ($A_c < 2{,}5$), le coefficient C_H est inférieur à 1 et tend lorsque $A_c > 1{,}5$ vers 0,48. Crowe *et al.* (1998) propose l'expression (1.81).

$$C_H = 0{,}48 + \frac{0{,}52}{(1+A_c)^3} \tag{1.81}$$

Dans les expressions (1.79) et (1.80), le noyau $\mathcal{K}$ décroît avec le temps comme $t^{-1/2}$. Des travaux plus récents qui reposent sur des simulations numériques aboutissent à un autre résultat. Le comportement en $t^{-1/2}$ est vérifié seulement pour des temps courts, c'est-à-dire pour $t^* < 1$ avec $t^* = t\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|/d_p$. Pour des temps longs, le noyau décroît plus vite. Son comportement est lié à la nature de la variation de la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$: cf. par exemple les travaux de Mei et coauteurs qui sont bien résumés dans l'article de Lawrence et Mei (1995). Mei *et al.* (1991) déterminent le noyau $\mathcal{K}$ pour une particule fixe dans un écoulement unidirectionnel spatialement uniforme lorsque la vitesse fluide varie faiblement autour d'une valeur moyenne. Ils trouvent pour des temps longs que le noyau $\mathcal{K}$ décroît comme t^{-2}. Lorsque la vitesse fluide varie brusquement de u_{f1} à u_{f2}, Lawrence et Mei (1995) indiquent un comportement un peu différent. Si $u_{f1} \leq 0$ et $u_{f2} > 0$, le noyau $\mathcal{K}$ décroît encore comme t^{-2}. Par contre, dans les cas où $u_{f1} < 0$ et $u_{f2} > 0$ et où $u_{f1} > 0$ et $u_{f2} = 0$, il décroît comme t^{-1}.
Lorsque l'écoulement est unidirectionnel linéairement cisaillé, la force histoire est constituée d'une composante parallèle à la vitesse relative $u_f - u_p$, comme dans l'écoulement uniforme et d'une composante perpendiculaire à cette vitesse qui est notée F_H^L. (Bagchi et Balachandar, 2002 ; Wakaba et Balachandar, 2005) La force F_H^L est définie par l'équation (1.78), en introduisant la fonction $\mathcal{K}_L$. Wakaba et Balachandar (2005) étudient l'influence du cisaillement et des conditions initiale et finale sur l'évolution temporelle des noyaux $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}_L$. Pour cela, ils s'intéressent à une particule solide en translation dans un écoulement linéairement cisaillé qui est brusquement accélérée. Les simulations numériques indiquent que le cisaillement n'a pas d'effet sur le comportement du noyau $\mathcal{K}$ et qu'il est semblable à celui observé pour un écoulement uniforme. Conformément à l'étude de Lawrence et Mei (1995), il est lié aux vitesses relatives initiale et finale. Wakaba et Balachandar (2005) remarquent toutefois que pour des temps courts ($t^* < 1$), l'évolution du rapport $\mathcal{K}/\sqrt{Re_{p1}}$ (avec $Re_{p1} = d_p(u_{f1} - u_{p1})/\nu$ le nombre de Reynolds « initial ») est indépendante des conditions initiale et finale. Le noyau $\mathcal{K}_L$ dépend du cisaillement et

des conditions initiale et finale. Wakaba et Balachandar (2005) comparent l'évolution du rapport $\mathcal{K}_L/Re_\alpha$ avec $Re_\alpha = d_p^2|\alpha|/\nu$, obtenue pour deux cisaillements ($\alpha_{G1} = a_p\alpha/(u_{f1} - u_{p1}) = 0{,}04$ et 0,02). Elle est trouvée identique. Les auteurs proposent d'exprimer le noyau $\mathcal{K}_L$ comme suit :

$$\mathcal{K}_L(t) = Re_\alpha \left\{ a_1 \left[1 - \tanh\left(b_1 t^* - c_1\right)\right] + a_2 \left[1 - \tanh\left(b_2 t^* - c_2\right)\right] \cos(\omega_2 t + \phi_2) \right\} \tag{1.82}$$

Avec $t^* = t\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|/d_p$; a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ω_2 et ϕ_2 des constantes.
Wakaba et Balachandar (2005) déduisent de leurs résultats seulement la valeur des constantes a_1, b_1 et c_1. Des simulations supplémentaires sont nécessaires afin d'estimer les autres constantes.

Sridhar et Katz (1995) montrent par ailleurs que dans leurs expériences (une particule solide entraînée par un tourbillon), la force histoire est négligeable vis-à-vis des autres forces fluide (flottabilité, traînée, portance).
Dans le modèle numérique, l'effet de la force histoire sur la trajectoire du grain n'est pas pris en compte (cf. le paragraphe 1.7).

1.5 moment de la force fluide

Le moment exercé par le fluide sur la particule solide est dû à la distribution des contraintes de cisaillement sur sa surface. Il est déterminé dans l'hypothèse de faibles nombres de Reynolds par Happel et Brenner (1973) (Crowe *et al.*, 1998) pour une sphère en rotation dans un écoulement cisaillé.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = -8\pi\mu a_p^3 \left(\overrightarrow{\omega}_p - \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}_f \right) \tag{1.83}$$

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le moment $\mathcal{M}$ peut être calculé en utilisant la relation de Ben Salem *et al.* (1998).

$$C_\mathcal{M} = -\frac{32}{Re_p} \left(\alpha_\Omega + \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha |\alpha_G|^{0,9} + 1{,}625.10^5\, \varepsilon_\alpha |\alpha_G|^{0,2} Re_p^2 \right) \tag{1.84}$$

Avec $\varepsilon_\alpha = 1$ si $\alpha_G > 0$ et $\varepsilon_\alpha = -1$ si $\alpha_G < 0$;

$$C_\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}}{\frac{1}{2}\rho\,\pi a_p^3\,\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2} \tag{1.85}$$

La relation (1.84) repose sur des simulations numériques réalisées lorsque $Re_p \leq 40$, $-2 < \alpha_\Omega < 2$ et $-0{,}3 < \alpha_G < 0{,}3$. Mentionnons également l'étude de Denis *et al.* (1980) qui estiment, par une méthode spectrale, le moment $\mathcal{M}$ sur une sphère en rotation dans un fluide au repos. Le nombre de Reynolds Re_Ω basé sur la vitesse de rotation de la particule est compris dans l'étude entre 1 et 100. Les résultats sont conformes à ceux obtenus expérimentalement par Sawatzki (1970) ($2 \leq Re_\Omega \leq 1{,}5.10^6$). Crowe *et al.* (1998) déduisent des résultats de Denis *et al.* (1980) et de Sawatzki (1970) l'expression (1.86) du moment pour $1000 \geq Re_\Omega \geq 20$:

$$\mathcal{M} = -16{,}1\mu a_p^3 \omega_p \left(1 + 0{,}201 Re_\Omega^{1/2}\right) \tag{1.86}$$

Zeng *et al.* (2005) examinent, par ailleurs, le mouvement d'une sphère au voisinage d'une paroi. Le moment $\mathcal{M}$ est induit par la non-symétrie de l'écoulement dans le sillage de la sphère due à la présence de la paroi. Les simulations numériques sont réalisées pour $10 \leq Re_p \leq 300$ et $0{,}75 \leq l_p/d_p \leq 4$. Le moment $\mathcal{M}$ est en général petit et diminue rapidement avec le nombre de Reynolds Re_p et la distance l_p. Si $Re_p \geq 100$, $C_\mathcal{M} \leq 0{,}004$. Le moment est positif. A l'inverse, Kim *et al* (1993) obtient pour deux sphères qui tombent côte à côte des valeurs négatives lorsque $Re_p \geq 50$ et $l_p/d_p \geq 2$.

1.6 modélisation de la trajectoire des grains

L'étude bibliographique précédente montre que la force exercée par le fluide dépend de nombreux paramètres : de la forme de la particule, de sa vitesse, de sa vitesse de rotation, du champ de vitesses fluide, de la présence de paroi, etc. Sa détermination par des méthodes expérimentales et numériques est complexe et limitée et il n'est pas possible d'obtenir une expression générale de la force fluide.
Dans les modèles de trajectoire, habituellement, le grain de sédiment est assimilé à une sphère et il est soumis à quatre forces :

- la force de flottabilité,
- la force de traînée,
- la force de portance,
- la force d'accélération.

Parfois, la force histoire est considérée. Les expressions des forces fluide utilisées sont établies pour une particule solide sphérique en translation, en l'absence de paroi, dans un écoulement uniforme ou cisaillé. Ces conditions ne sont pas vérifiées dans le cas du grain. Celui-ci se déplace à proximité d'un lit, il peut être en rotation et l'écoulement autour du grain est turbulent (*i.e.* instationnaire et non uniforme). Certains modèles contiennent des coefficients empiriques. Ces coefficients sont estimés à partir de grandeurs caractérisant le mouvement de saltation : par exemple la trajectoire du grain, les hauteur et longueur moyennes des rebonds. Ils modélisent ainsi une partie des phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans l'expression des forces fluide.
Les modèles de trajectoire sont développés dans le but de déduire des formules de transport. Pour ce faire, les résultats des simulations numériques réalisées à l'aide de ces modèles sont compilés : cf. les études de van Rijn (1984a), de Niño et Garcia (1994b, 1998b) et de Lee et coauteurs (2000, 2006).

Il s'agit dans ce paragraphe de faire le point sur les connaissances que nous avons sur le comportement du grain à proximité du lit (rotation, force exercée par le fluide) et sur sa modélisation.

1.6.1 rotation du grain

Les expériences (White, 1982 ; Lee et Hsu, 1996) montrent dans l'air et dans l'eau que la vitesse de rotation du grain est maximale pendant la phase ascendante du rebond, puis diminue pendant la phase descendante. Elle est modifiée essentiellement par la collision avec d'autres grains. Sa valeur dépend du fluide porteur. Dans l'air, la rotation du grain peut être importante et influer sur sa trajectoire. White et Schulz (1977) souhaitent déterminer l'équation de mouvement d'un grain en saltation dans l'air. Pour cela, ils supposent, dans un premier temps, que le grain est soumis à deux forces : la force de flottabilité et la force de traînée. Ils comparent les trajectoires mesurées et calculées. (Les conditions initiales utilisées pour intégrer l'équation de mouvement sont déduites du premier segment de la trajectoire mesurée.) Ils constatent que la hauteur du rebond est dans les calculs inférieure, jusqu'à 30%, à la valeur mesurée. Selon White et Schulz (1977), ceci est dû à la non-prise en compte dans les simulations de la rotation du grain. Pour vérifier cette hypothèse, White et Schulz (1977) re-calculent les trajectoires du grain en introduisant dans l'équation de mouvement la force de Magnus et déterminent les vitesses de rotation qui permettent d'avoir un bon accord entre l'expérience et le calcul. Ils obtiennent des vitesses de rotation comprises entre 100 et 300 rev.s^{-1}. Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que celles mesurées par White (1982) dans des conditions similaires ($350 \leq \omega_p \leq 400$ rev.s^{-1}). Pareillement, les expériences de Bagnold (1941), de Kawamura (1951) et de Chepil et Woodruff (1963) indiquent des vitesses de rotation du grain élevées, qui varient entre 100 et 750 rev.s^{-1} selon le diamètre et l'angle d'envol. Zou *et al.* (2007) reproduisent en soufflerie le mouvement de

saltation d'un grain de sable ($d_m \sim 0{,}25$ mm) pour trois vitesses de frottement ($u_* = 0{,}67$, 0,83 et 0,87 m.s^{-1}). Ils mesurent des vitesses de rotation moyennes comprises entre 400 et 600 rev.s^{-1}. Comme White et Schulz (1977), ils montrent que l'introduction de la force de Magnus dans l'équation du mouvement permet d'augmenter de façon substantielle (respectivement jusqu'à 10% et 25%) la hauteur et la longueur du rebond. Toutefois, les résultats de White et Schulz (1977) et de Zou *et al.* (2007) peuvent être, dans un certain sens, remis en cause car l'expression de la force de Magnus utilisée est celle de Rubinow et Keller (1961) établie dans l'hypothèse « Re_p petit ». Cette condition n'est pas respectée dans les expériences pour lesquelles le nombre de Reynolds est bien supérieur à 1.

Dans l'eau, la rotation de la particule est faible. Lee et Hsu (1996) rapportent des vitesses de rotation juste après l'impact comprises entre 11 et 32 rev.s^{-1} ($4 \leq d_p \leq 5{,}95$ mm). De même, Niño et Garcia (1998a) mesurent pour des particules de sable ($d_p = 0{,}5$ mm) des vitesses de rotation moyennes pendant le rebond variant entre 10 et 40 rev.s^{-1}. La vitesse de rotation dépend essentiellement des collisions entre les particules et pour cette raison, sa valeur est hautement aléatoire. Niño et Garcia (1998a) déduisent de leurs mesures la relation (1.87).

$$S \simeq 5{,}11 - 1{,}13 \left(\frac{u_*}{u_{*c}} \right)^2 , \quad S = \frac{\omega_p \, d_p}{u_*} \tag{1.87}$$

Avec u_{*c} la vitesse de frottement critique de mise en mouvement du grain (cf. le critère de Shields).
Suivant une méthode similaire à celle proposée par White et Schulz (1977), Lee et Hsu (1994) estiment dans l'eau l'effet de la force de Magnus sur la trajectoire du grain. Lorsque cette force est considérée dans le modèle, la longueur du rebond est augmentée (jusqu'à 12%). Cependant, les vitesses de rotation trouvées sont de l'ordre de 60–70 rev.s^{-1}, valeurs supérieures à celles des expériences. Francis (1973) note que quel que soit le mode de transport (charriage, saltation, suspension), le grain tourne autour de son axe transversal et que la vitesse de rotation est plus faible pour les grains sphériques que pour les grains anguleux.
Compte tenu des valeurs mesurées dans l'eau, il est probable dans ce milieu que la rotation du grain modifie peu la force fluide et que son effet sur la trajectoire du grain puisse être négligé.

1.6.2 force exercée par le fluide

Il n'existe pas de mesure directe de la force fluide sur un grain en saltation. Les mesures sont réalisées sur une particule fixe à proximité d'une paroi. Un certain nombre de résultats relatifs à une paroi lisse sont rapportés dans les paragraphes 1.1.3 et 1.2.3. Les résultats présentés ici proviennent d'expériences effectuées dans des conditions qui tendent à être celles d'un grain sur le lit. Dans ces expériences, la particule n'est pas isolée, elle peut être posée sur une rangée de particules, elle peut être également placée dans le sillage d'autres grains. Les expériences à notre connaissance sont relativement anciennes à l'exception de celles de Schmeeckle *et al.* (2007).

Le grain est en équilibre sur une rangée de particules

Coleman (1967) détermine la force fluide exercée sur des sphères en plastique et en acier posées sur des arrangements de sphères identiques. Le nombre de Reynolds Re_p est compris entre 50 et 10000. Les mesures montrent que le coefficient de traînée peut être estimé en première approximation par une loi établie en l'absence de paroi, par exemple la relation de Schiller et Nauman (1933). Cependant, elles sont très dispersées avec une variation qui peut être d'ordre 1 si $Re_p < 200$. (Marsh *et al.*, 2004) Les mesures intéressent aussi la force de portance qui est montré jouer un rôle essentiel dans la mise en mouvement des grains. Elle est trouvée négative si $Re_* < 100$. L'étude bibliographique de James (1990) indique que son signe dépend de la nature de l'écoulement. Il est positif si l'écoulement est hydrauliquement rugueux (*i.e.* $Re_* \gg 5$) et

négatif sinon. Davies et Samad (1978) rapportent ainsi pour des petits nombres de Reynolds Re_* des valeurs négatives de la force F_L. Dans les expériences, la sphère de diamètre égal à 25,4 mm est placée dans un fluide non newtonien sur une paroi rugueuse formée de sphères identiques. La viscosité cinématique varie de $1{,}2.10^{-5}$ à $2{,}3.10^{-4}$ $\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$. Le coefficient de portance C_L^* dépend à la fois du nombre de Reynolds Re_* et d'une caractéristique rhéologique du fluide.

$$C_L^* = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho A_p u_*^2} \tag{1.88}$$

Pour une viscosité donnée, le coefficient C_L^* est une fonction croissante de Re_*. Davies et Samad (1978) déduisent de ces résultats une loi valide dans l'eau et dans le cas de la paroi rugueuse. Cette loi s'écrit comme suit :

$$C_L^* = -31{,}74 \pm 1{,}43 + 20{,}61 \ln Re_* \ , \quad 2 \leq Re_* \leq 10 \tag{1.89}$$

Selon cette loi, le coefficient C_L^* est négatif si $Re_* < 5$. Davies et Samad (1978) relient ce résultat à la nature des déplacements des grains, à savoir :

- pour les petits nombres de Reynolds, le transport se fait par charriage, la force fluide est dirigée vers le lit ($C_L^* < 0$) ;
- pour les grands nombres de Reynolds, le transport se fait par saltation et en suspension, la force fluide est dirigée vers la surface libre ($C_L^* > 0$).

Les arguments avancés par les auteurs pour justifier leur loi sont les suivants. Les fluides utilisés dans les expériences sont des pseudo-plastiques, c'est-à-dire lorsque le taux de cisaillement est petit, ils se comportent comme un fluide newtonien : la contrainte de frottement varie linéairement avec le taux de cisaillement et la viscosité cinématique est constante. Au contraire, lorsque le taux de cisaillement augmente, leur comportement s'assimile à celui d'un plastique et la viscosité cinématique dépend du taux de cisaillement. Davies et Samad (1978) remarquent que pour les viscosités les plus élevées, les courbes de variation du coefficient C_L^* en fonction du nombre de Reynolds se rapprochent. Ils en concluent que pour l'intervalle du nombre de Reynolds considéré et pour ces viscosités, le comportement du fluide est similaire à celui d'un fluide newtonien, l'intervalle de la contrainte de cisaillement qui correspond au comportement « newtonien » augmentant avec la viscosité. La loi proposée par Davies et Samad (1978) est alors dérivée des mesures obtenues pour ces viscosités.

Schmeeckle *et al.* (2007) mesurent les fluctuations turbulentes de la force fluide exercée sur une sphère placée sur le lit. Dans les expériences, le nombre de Reynolds Re_p est compris entre 2000 et 9000 et le rapport des valeurs instantanée et moyenne de la force varie dans la direction x, de -1 à 4 et dans la direction z, de -6 à 6. Cheng et Clyde (1972) estiment,pour des nombres de Reynolds très supérieurs, une variation de la force de portance beaucoup plus faible. Ils trouvent ainsi lorsque $32000 < Re_* < 55000$ que le rapport des valeurs instantanée et moyenne varie de 1,16 à 1,22. (Marsh *et al.*, 2004) Lorsque la particule est posée sur une paroi lisse, les fluctuations turbulentes de la force fluide diminuent. Schmeeckle *et al.* (2007) trouvent que le rapport des valeurs instantanées et moyennes varie alors dans la direction x, de 0,5 à 1,5 et dans la direction z, de 0 à 1,5. Nous représentons, dans la figure 1.9, la valeur instantanée de la composante dans la direction x de la force fluide (notée F_x) mesurée par Schmeeckle *et al.* (2007) lorsque la sphère est posée sur le lit. La composante F_x peut être donnée, de façon approximative, par une loi affine de la forme (cf. la figure 1.9) :

$$F_x = a\frac{1}{2}\rho\, A_p u_f^2 + b \tag{1.90}$$

Avec $a \sim 0{,}4$ et $b \sim 0{,}005$.

La valeur du coefficient a est comparable à la valeur du coefficient de traînée qui est couramment admise pour une sphère dans un fluide au repos. Ceci est aussi conforme au résultat de Coleman

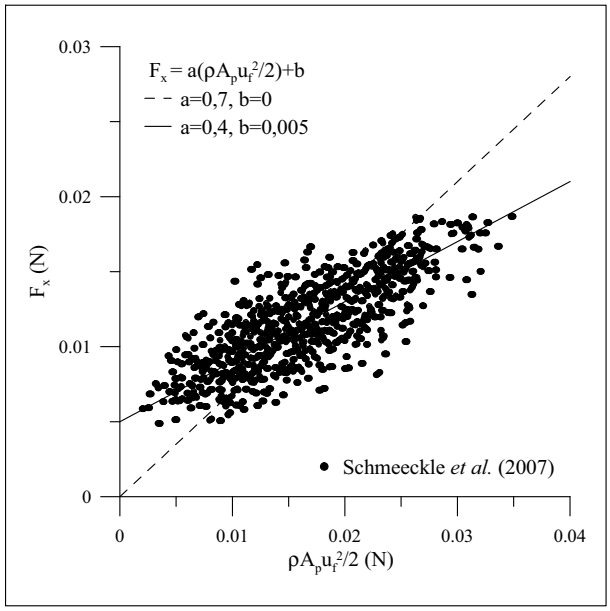


figure 1.9 – évolution de la valeur instantanée de la composante dans la direction x de la force fluide F_x en fonction de la vitesse fluide u_f mesurée dans les expériences de Schmeeckle *et al.* (2007) pour une particule sphérique posée sur le lit

(1967). Le coefficient b est non nul et l'hypothèse de Schmeeckle *et al.* (2007) selon laquelle la force fluide dans la direction x se réduit à la force de traînée (c'est-à-dire elle est proportionnelle à u_f^2), n'est pas validée pour les valeurs instantanées. Avec cette hypothèse, Schmeeckle *et al.* (2007) obtiennent un coefficient moyen a égal à 0,7 qui est bien supérieur à la valeur de référence. Toutefois, l'accord entre les mesures et la loi linéaire n'est pas bon. En fait, l'hypothèse de Schmeeckle *et al.* (2007) s'applique aux valeurs moyennes. Nous avons alors :

$$\overline{F}_x = \frac{1}{2}\rho\, a' A_p \overline{u}_f^2 \tag{1.91}$$

Avec $\overline{F}_x$ et $\overline{u}_f$ les valeurs moyennes de la force fluide et de la vitesse fluide.
Le coefficient a' est égal à 0,71. Lorsque la sphère est remplacée par des particules de gravier ($0{,}43 \leq CF \leq 0{,}82$), le coefficient a' augmente et vaut 0,91. Le travail de Schmeeckle *et al.* (2007) pose la question des grandeurs à utiliser pour déterminer le coefficient de traînée, valeurs instantanées ou valeurs moyennes. Le résultat obtenu peut être très différent. Schmeeckle *et al.* (2007) choisissent d'estimer le coefficient de traînée à partir des valeurs moyennes car dans les modèles, c'est la vitesse moyenne $\overline{u}_f$ qui sert à calculer la force fluide. La valeur ainsi estimée, bien qu'élevée, est semblable au résultat de Roberson et Chen (1970) qui obtiennent un coefficient C_D compris entre 0,6 et 0,7.

Le grain est placé dans le sillage d'un autre grain

Sur le lit, le grain se trouve dans le sillage d'autres grains. Cette situation est étudiée notamment dans les expériences de Chepil (1958), de Watters et Rao (1971), de Brayshaw *et al.* (1983) et de Hall (1988). Chepil (1958) mesure dans l'air la force de traînée et de portance sur une demi-sphère en métal placée au voisinage de plusieurs monticules de taille identique et formés de particules de gravier ($2 \leq d_p \leq 6{,}4$ mm). La distance entre les hémisphères est fixée à $3D$ avec D le diamètre des hémisphères (2,54 cm, 5,08 cm et 10,16 cm). La paroi est recouverte par des particules de gravier. Le nombre de Reynolds Re_* varie de 1034 à 13680. Les mesures montrent que le rapport des forces de portance et de traînée F_L/F_D est relativement constant et

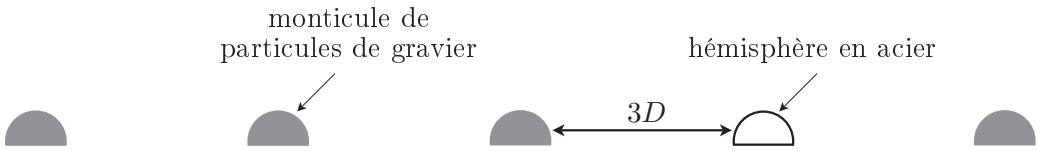


figure 1.10 – configuration utilisée par Chepil (1958) pour estimer le rapport F_L/F_D ; les mesures de la force fluide sont réalisées sur l'hémisphère en acier ; D est le diamètre des hémisphères

compris entre 0,71 et 0,91 excepté si $Re_* > 10000$. Pour les plus grands nombres de Reynolds, le rapport varie de 1,2 à 1,3. En moyenne, lorsque $Re_* < 10000$, il est égale à 0,81. Des expériences similaires sont réalisées avec des monticules de gravier ($D = 12{,}8$ et 2,54 mm) et des monticules de sable mouillé ($D = 3{,}2$ et 6,4 mm). Le rapport F_L/F_D est compris entre 0,76 et 1,10, avec une valeur moyenne égale à 0,88 ($94 \leq Re_* \leq 2394$). Chepil (1958) propose de prendre dans le cas général :

$$\frac{F_L}{F_D} \simeq 0{,}85 \tag{1.92}$$

Cette valeur est supérieure à celle trouvée par Bagnold (1974). Bagnold (1974) estime la force fluide sur une sphère ($d_p = 16$ mm) sur une paroi lisse. Il trouve que le rapport des forces de portance et de traînée est égal à 0,5. Le nombre de Reynolds Re_p vaut dans les expériences approximativement 2700. Brayshaw *et al.* (1983) considèrent dans l'air deux hémisphères posés

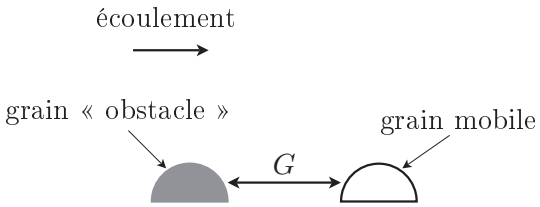


figure 1.11 – configuration utilisée par Brayshaw *et al.* (1983) ; les mesures de la force fluide sont réalisées sur le grain mobile de diamètre D

sur une paroi lisse. Le nombre de Reynolds de la particule est égal à $5{,}2.10^4$. L'un des hémisphères, désigné sous le terme d'obstacle, est fixe, son diamètre est noté D_0. Le deuxième hémisphère, le « grain mobile », est utilisé pour mesurer la force fluide. Sa position varie en amont et en aval de la particule « obstacle » selon une ligne passant par le centre de celui-ci et parallèle à l'écoulement. La distance entre les deux hémisphères G varie de 0 à $2\,D_0$. Trois diamètres sont testés pour le grain mobile : $D = 0{,}7\,D_0$, $D = D_0$ et $D = 1{,}3\,D_0$. Les coefficients de traînée et de portance sont des fonctions croissantes du diamètre D. Ils dépendent aussi de sa position par rapport à l'obstacle (en amont ou en aval).

- Si le grain mobile est situé en amont de l'obstacle, l'influence de la présence de l'obstacle sur les coefficients est faible, l'écoulement autour du grain mobile est peu modifié en particulier pour les gros diamètres. Le coefficient de traînée est égal approximativement à la valeur obtenue pour ces nombres de Reynolds pour une sphère isolée ($\sim 0{,}45$). De même, le coefficient de portance est relativement indépendant du diamètre D et si $G/D_0 > 0{,}4$, de la distance G. Nous avons alors $C_L = 0{,}4 - 0{,}45$ (cas de la sphère isolée). Lorsque la distance G diminue, le coefficient C_L augmente et atteint un maximum en $G/D_0 = 0{,}2$.
- Si le grain mobile est placé en aval de l'obstacle, il est situé dans le sillage turbulent de l'obstacle, zone dans laquelle l'écoulement est fortement perturbé (zone de re-circulation). Les coefficients de traînée et de portance sont très différents du cas isolé. Ils dépendent du diamètre D et augmentent linéairement avec le rapport G/D_0. Le coefficient C_D est inférieur à la valeur estimée pour le grain isolé. Il est négatif pour les plus petites distances

G lorsque le diamètre D est inférieur ou égal à D_0. En effet, le grain se situe dans la zone de dépression associé au sillage et la différence de pressions amont et aval à l'origine de la force de traînée est négative.

Nous déterminons, à partir des valeurs des coefficients C_L et C_D données par Brayshaw *et al.* (1983), l'évolution du rapport des forces de portance et de traînée dans les expériences. La figure 1.12 montre le résultat en fonction de la distance G et du diamètre D. Le rapport F_L/F_D est

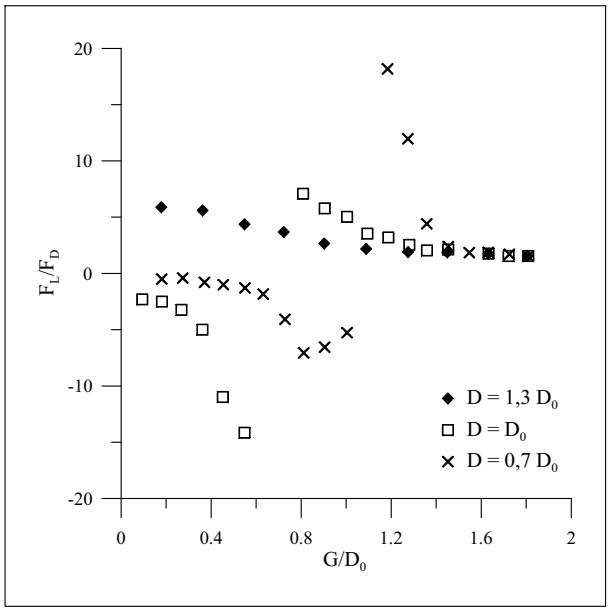


figure 1.12 – évolution du rapport des forces de portance et de traînée en fonction de la distance G entre les deux hémisphères, obtenue expérimentalement par Brayshaw *et al.* (1983) lorsque le grain mobile est situé en aval de l'obstacle

supérieur à la valeur trouvée par Chepil (1958). Il est maximal lorsque $C_D \simeq 0$ et tend vers 1,6 lorsque la distance G/D_0 augmente ($G/D_0 > 1{,}7$). Il est alors indépendant du diamètre D et de la distance G.

Dans les expériences de Watters et Rao (1971), la force fluide est mesurée pour différentes configurations présentées dans la figure 1.13 alors que le nombre de Reynolds Re_* varie de 10 à 100. La force de portance est trouvée négative dans les quatre cas : cf. la figure 1.17. Dans la

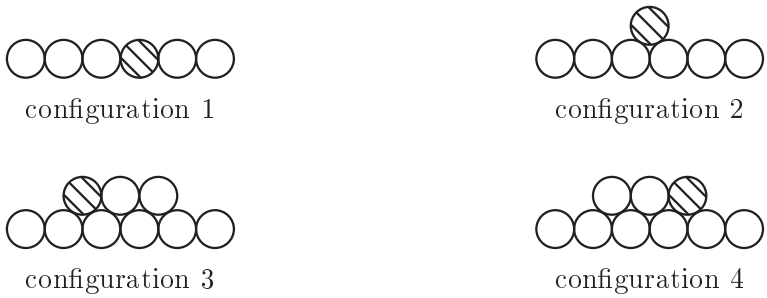


figure 1.13 – configurations étudiées dans les expériences de Watters et Rao (1971) ; la force fluide est mesurée sur la particule hachurée.

configuration 1 qui est comparable à celle utilisée dans les expériences de Chepil (1958) et de Brayshaw *et al.* (1983) avec $G = 0$, le rapport $|F_L/F_D|$ varie de 3,5 à 0,4 lorsque le nombre de Reynolds Re_* augmente de 32 à 80.

Hall (1988) estime la force de portance sur une sphère placée au milieu d'un arrangement de cylindres. Les cylindres sont posés sur une paroi lisse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. Hall (1988) étudie l'influence du diamètre des cylindres sur la force. Les configurations testées (1–3) sont décrites dans la figure 1.14. La force de portance est réduite par rapport au

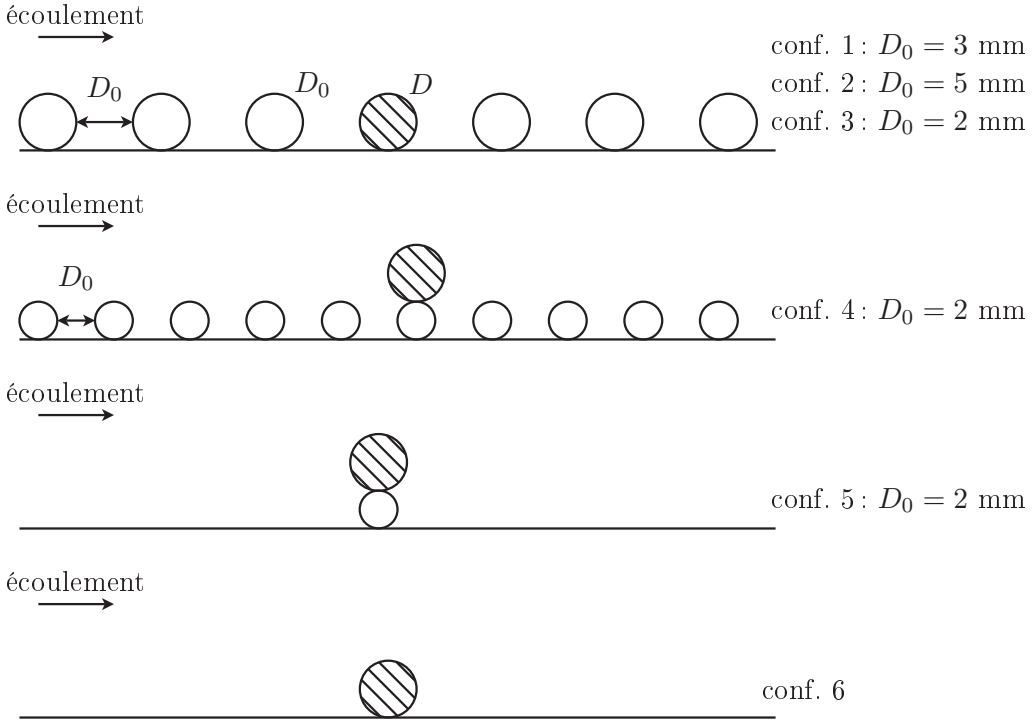


figure 1.14 – configurations étudiées dans les expériences de Hall (1988) ; la force fluide est mesurée sur la particule hachurée ; dans les configurations 1–5, le diamètre D de la particule est égal à 3 mm et dans la configuration 6, il varie de 1 à 5 mm

cas de la sphère isolée sur une paroi lisse (conf. 6). Des valeurs négatives sont relevées pour la configuration 1 pour $Re_* < 16$. La dimension des cylindres, plus petite ou plus grande que le diamètre de la sphère, influe peu sur la valeur mesurée comme le montre l'évolution du coefficient C_L^* déduite des résultats de Hall (1988) dans la figure 1.17. Lorsque la sphère est posée sur un cylindre (conf. 4 et 5), la force de portance augmente. Dans la configuration 4, la sphère est plus exposée à l'écoulement que dans la configuration 3 et Hall (1988) trouve que la force de portance est semblable à la valeur estimée pour la sphère isolée sur une paroi lisse (cf. l'équation (1.62)). Elle est encore plus élevée dans la configuration 5, la sphère est soumise à des vitesses plus importantes que lorsqu'elle est en contact avec la paroi.

James (1990) fait une synthèse des résultats empiriques et il en déduit une expression du rapport des coefficients de portance et de traînée. Il suppose que le rapport est approximativement égal au rapport des forces F_L/F_D. Il obtient pour $Re_* < 150$:

$$\frac{C_L}{C_D} = -0{,}560 + 0{,}212 \ln Re_* \tag{1.93}$$

Si $Re_* \geq 150$, le rapport est pris constant et égal à 0,5. Les mesures utilisées proviennent des expériences de Chepil (1958), d'Apperley (1968), de Watters et Rao (1971), de Cheng et Clyde (1972), d'Askoy (1973), de Bagnold (1974) et de Brayshaw (1983). Les conditions expérimentales sont diverses : hemisphères/sphères, paroi lisse/paroi rugueuse, etc. La relation (1.93) est obtenue pour les petits nombres de Reynolds des seuls résultats de Watters et Rao (1971). Nous trouvons

que la comparaison des valeurs calculées et mesurées est peu probante. La relation (1.93) surestime systématiquement le rapport des coefficients par rapport à l'expérience comme le montre la figure 1.15. Par conséquent, nous ne savons pas comment James (1990) a obtenu sa relation.

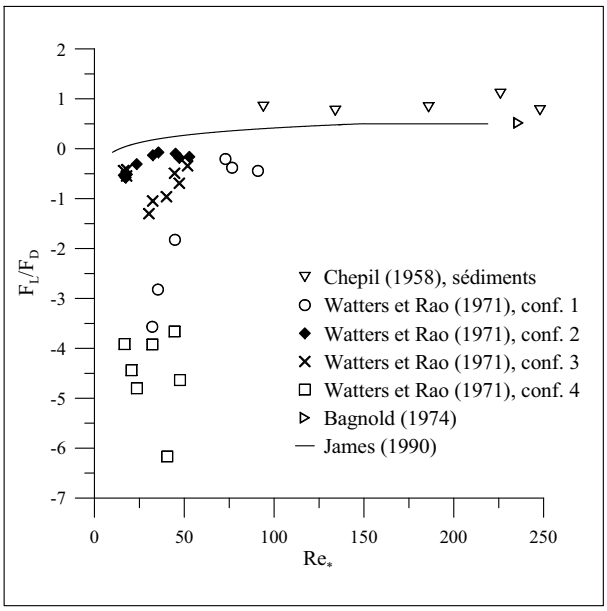


figure 1.15 – comparaison de la relation de James (1990) et des données expérimentales utilisées

Marsh *et al.* (2004) testent aussi la validité de cette relation et ils trouvent, contrairement à nous, qu'il y a un bon accord entre les résultats du modèle et les données expérimentales, y compris pour les petits nombres de Reynolds. En effet, dans la figure 2 de leur article (qui est

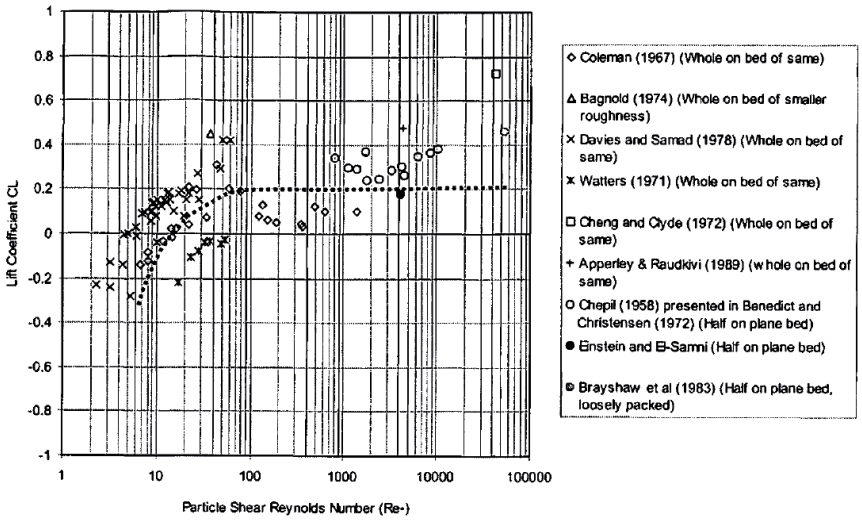


figure 1.16 – figure 2 de l'article de Marsh *et al.* (2004) ; le coefficient de portance (*Lift coefficient*) mesuré par différents auteurs est représenté en fonction du nombre de Reynolds de la particule Re_* (*Particle shear Reynolds number*) ; la ligne en pointillé correspond à l'équation (1.93)

montrée dans la figure 1.16), la courbe se situe au milieu des points de mesures. Cependant, il y a un doute sur les données utilisées. La figure 2 indique que certaines mesures issues des expériences de Watters et Rao (1971) sont réalisées à des nombres de Reynolds inférieurs à 1. Dans l'article de Watters et Rao (1971) (et aussi dans l'article de James (1990)), l'ensemble des

données présentées est obtenu pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10.
Nous présentons dans la figure 1.17 la plupart des résultats expérimentaux cités, relatifs à la force de portance qui est exprimée sous la forme du coefficient C_L^*. Les données de Bagnold

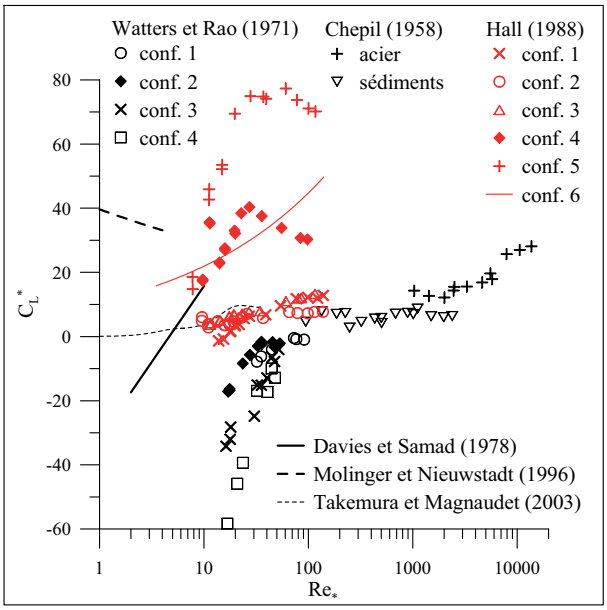


figure 1.17 – évolution du coefficient de portance C_L^* obtenue dans les expériences en fonction du nombre de Reynolds Re_*

(1974) et de Brayshaw *et al.* (1983) ne sont pas montrées car les informations à notre disposition ne permettent pas de calculer le coefficient C_L^*. Les relations de Molinger et Nieuwstadt (1996) et de Takemura et Magnaudet (2003) sont établies pour une sphère isolée sur une paroi lisse (cf. le paragraphe 1.2.3). D'une façon générale, à l'exception des expériences de Molinger et Niewstadt (1996), le coefficient C_L^* augmente avec le nombre de Reynolds Re_*. Les données sont dispersées, en partie car elles sont obtenues dans des conditions expérimentales différentes. Il est difficile de déterminer à partir de la figure 1.17 une expression générale du coefficient C_L^*. Les résultats de Chepil (1958), de Watters et Rao (1971) (conf. 1) et de Hall (1988) (conf. 1–3) lorsque la particule est en contact avec la paroi présentent une certaine cohérence. Par contre, si la particule est posée sur une autre particule, les résultats divergent : les valeurs trouvées dans les expériences de Watters et Rao (1971) (conf. 2–4) et dans celles de Hall (1988) (conf. 4 et 5) sont de signe opposé. La relation suggérée par Davies et Samad (1978) n'est pas validée par les données recueillies ici. Il y a parfois une certaine convergence des résultats entre les cas de la paroi lisse et de la paroi rugueuse. Ainsi, les mesures de Takemura et Magnaudet (2003) sont conformes à ceux de Hall (1988) pour les configurations 1–3. Pareillement, dans les expériences de Hall (1988), les coefficients C_L^* estimés pour les configurations 4 et 6 sont semblables.

1.6.3 cinq modèles de trajectoire

Nous rapportons cinq modèles de trajectoire utilisés pour décrire le mouvement de grains dans l'eau.

- le modèle de van Rijn (1984a),
- le modèle de Lee, Lin, You et Wang (2006),
- le modèle de Hu et Hui (1996),
- le modèle de Niño et Garcia (1998b),
- le modèle de Dey, Dey Sarker et Debnath (1999).

Les grains sont assimilés à des sphères. L'écoulement est supposé unidirectionnel et le profil de vitesse est donné par la loi logarithmique.

$$u_f(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1.94}$$

L'origine du profil et la rugosité z_0 dépendent du modèle. Les vitesses du grain dans les directions x, y et z sont notés u_p, v_p et w_p. Certains modèles tiennent compte de l'inclinaison du lit et dans ce cas, les vitesses du grain et du fluide sont définies dans le repère lié au lit.

Modèle de van Rijn (1984a)

L'équation de mouvement du grain en saltation s'écrit :

$$(m_p + C_M \rho V_p)\frac{du_p}{dt} = F_D \frac{u_f - u_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.95a}$$

$$(m_p + C_M \rho V_p)\frac{dw_p}{dt} = -(\rho_s - \rho)V_p g - F_D \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{u_f - u_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.95b}$$

Avec F_D et F_L les forces de traînée et de portance et C_M le coefficient de masse ajoutée égal à $1/2$.
La force de traînée F_D est donnée par la relation de Morsi et Alexander (1972) :

$$F_D = \frac{1}{2}\rho\, A_p C_D \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2 \ , \quad C_D = A_0 + A_1 Re_p^{-1} + A_2 Re_p^{-2} \tag{1.96}$$

Avec A_0, A_1 et A_2 des coefficients empiriques.
La valeur des coefficients A_0, A_1 et A_2 est établie à partir de mesures réalisées dans des écoulements uniformes pour huit intervalles de nombres de Reynolds. La force de portance est la généralisation de la force de Saffman (Crowe *et al.*, 1998) (cf. l'équation 1.31) :

$$F_L = \rho\, \nu^{1/2}\, d_p^2\, C_L \left(\frac{du_f}{dz}\right)^{0.5} \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\| \tag{1.97}$$

L'expression du coefficient de portance dépend du nombre de Reynolds Re_*. Si $Re_* < 5$, l'écoulement est hydrauliquement lisse et le coefficient C_L est égal à la valeur proposée par Saffman (1965, 1968), c'est-à-dire :

$$C_L = 1{,}6 \tag{1.98}$$

Si $Re_* > 70$, l'écoulement est hydrauliquement rugueux et le coefficient C_L est pris égal à 20. Pour les nombres de Reynolds intermédiaires, nous avons :

$$C_L = 1{,}6 + \frac{18{,}4}{65}\,(Re_* - 5) \tag{1.99}$$

L'expression du coefficient C_L est assez approximative. En effet, la calibration du modèle repose sur deux grandeurs, le coefficient C_L et la rugosité équivalente k_s et sur trois trajectoires mesurées par Fernandez-Luque et van Beek (1976) lorsque $Re_* = 70$. Le grain en saltation a un diamètre égal à 1,8 mm. Dans le modèle, ses vitesses u_p et w_p sont à l'instant initial égales à $2u_*$ qui est la valeur obtenue par Francis et Abbott (1973, 1977). Sa position initiale est située à une distance égale à $0{,}6\, d_p$ de la surface du lit (Celle-ci est positionnée à $0{,}25\, d_p$ au-dessous du sommet des grains supérieurs.). La hauteur de rugosité z_0 est donnée par la relation (1.100) :

$$z_0 = 0{,}11\frac{\nu}{u_*} + 0{,}03\, k_s \tag{1.100}$$

Les simulations de van Rijn (1984a) (et aussi de Lee et Hsu (1994)) montrent le rôle des deux paramètres C_L et k_s sur les propriétés du rebond. Ainsi, si le coefficient C_L augmente, la longueur

du rebond tend à croître. Au contraire, si la hauteur de rugosité k_s augmente, la longueur diminue. La calibration du modèle indique pour $Re_* = 70$: $C_L = 20$, $k_s = 2\,d_p$. van Rijn (1984a) suppose alors pour $5 < Re_* < 70$ que le coefficient C_L est donné par une loi linéaire de Re_*.
van Rijn (1984a) utilise son modèle pour décrire le mouvement de saltation de grains dont le diamètre varie entre 0,1 et 2 mm lorsque la vitesse de frottement est comprise entre 0,02 et 0,14 m.s^{-1}. (Le nombre de Reynolds Re_* est compris entre 2 et 280.)

Modèle de Hu et Hui (1996)

L'équation du mouvement du grain s'écrit :

$$(m_p + C_M \rho V_p)\,\frac{du_p}{dt} = F_D \frac{u_f - u_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_A \tag{1.101a}$$

$$(m_p + C_M \rho V_p)\,\frac{dw_p}{dt} = -(\rho_s - \rho) V_p g - F_D \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{u_f - u_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.101b}$$

Avec $C_M = 1/2$.
La force F_A est générée par l'accélération du fluide autour du grain. Elle est donnée dans le modèle par la relation (1.102) qui est une autre formulation de l'expression (1.74) :

$$F_A = \frac{3}{2} \rho\, V_p \frac{du_f}{dz}\, w_p \tag{1.102}$$

Toutefois, Ushijima (1998) montre que seule l'expression (1.74) est correcte. Les forces de traînée et de portance F_D et F_L sont définies de la façon suivante.

$$F_D = \frac{1}{2}\,\rho\, A_p C_D \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2\ , \quad F_L = \frac{1}{2}\,\rho\, A_p C_L \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2 \tag{1.103}$$

Les coefficients C_D et C_L sont déduites de mesures de trajectoires réalisées avec des grains de diamètre et de masse volumique variables ($1{,}34 \leq d_p \leq 7{,}6$ mm et $1043 \leq \rho_s \leq 2650$ kg.m^{-3}) au-dessus de parois lisses et rugueuses. L'expérience montre que les coefficients dépendent de la nature du mouvement du grain, ascendant ou descendant. Si le grain se déplace vers la surface de l'eau ($w_p > 0$), nous avons :

$$C_D = 1{,}55 \left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{2{,}34} \left(\frac{l_p}{h}\right)^{0{,}97}\ , \quad C_L = -0{,}3 + 0{,}09 \left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{0{,}66} \left(\frac{l_p}{h}\right)^{-0{,}37} \tag{1.104}$$

Avec l_p la distance entre le centre du grain et la paroi et h la hauteur d'eau.
Si le grain se déplace vers la surface du lit ($w_p < 0$),

$$C_D = 0{,}36 \left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{2{,}51} \left(\frac{l_p}{h}\right)^{0{,}68}\ , \quad C_L = -0{,}3 + 0{,}19 \left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{0{,}66} \left(\frac{l_p}{h}\right)^{-0{,}18} \tag{1.105}$$

Les coefficients C_D et C_L sont une fonction du rapport des masses volumiques ρ_s/ρ, comme les trajectoires (cf. l'analyse dimensionnelle de la hauteur et de la longueur moyennes du rebond) et du rapport l_p/h. Ils ne dépendent pas explicitement du nombre de Reynolds ou de la vitesse relative du grain, contrairement à la plupart des modélisations (en particulier pour le coefficient de traînée). Le modèle apparaît assez spécifique, propre aux expériences de Hu et Hui (1996) et il est probable que son application dans d'autres conditions donne des résultats peu satisfaisants (cf. le paragraphe 1.6.4).

Modèle de Niño et Garcia (1998b)

Le grain est soumis dans ce modèle à la force de Magnus et à la force histoire. Sa position et sa vitesse sont définies dans le repère lié au lit qui est incliné d'un angle θ. L'équation de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned}(m_p + C_M\rho V_p)\,\frac{du_p}{dt} &= (\rho_s-\rho)V_p\,g\sin\theta + \frac{1}{2}\rho A_p C_D \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|\,(u_f-u_p) \qquad (1.106a)\\ &\quad + \rho\,V_p\,C_M\frac{du_f}{dz}\,w_p + 6\pi\mu\,a_p\int_0^t \frac{a_p}{\sqrt{\pi\mu(t-s)}}\frac{d(u_f-u_p)}{ds}\,ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m_p + C_M\rho V_p)\,\frac{dw_p}{dt} &= -(\rho_s-\rho)V_p\,g\cos\theta - \frac{1}{2}\rho A_p C_D \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|w_p \qquad (1.106b)\\ &\quad + \frac{1}{2}\rho A_p C_L\left(u_T^2-u_B^2\right) - 6\pi\mu\,a_p\int_0^t \frac{a_p}{\sqrt{\pi\mu(t-s)}}\frac{dw_p}{ds}\,ds\\ &\quad + \frac{1}{2}\rho A_p\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|\left[\omega_p - \frac{1}{2}\omega_f\right]\end{aligned}$$

Avec : ω_p la vitesse de rotation de la particule ; ω_f la vorticité du fluide ($\omega_f = du_f/dz$), $\omega_f/2$ la vitesse de rotation locale du fluide ; u_T et u_B les vitesses relatives au-dessus et au-dessous de la particule (La vitesse fluide est exprimée respectivement en $z_p + a_p$ et $z_p - a_p$.) :

$$u_T^2 = [u_p - u_f(z_p+a_p)]^2 + w_p^2\ , \quad u_B^2 = [u_p - u_f(z_p-a_p)]^2 + w_p^2 \qquad (1.107)$$

Le coefficient de traînée C_D est déterminée en utilisant la relation de Yen (1992).

$$C_D = \frac{24}{Re_p}\left(1 + 0{,}15\sqrt{Re_p} + 0{,}017Re_p\right) - \frac{0{,}208}{1+10^4 Re_p^{-0{,}5}} \qquad (1.108)$$

La force de portance est modélisée par la relation de Wiberg et Smith (1985). Wiberg et Smith (1985) obtiennent cette relation par le calcul, en supposant que la pression à la surface de la sphère soit donnée par la théorie de Bernouilli. Ils dérivent la valeur du coefficient C_L des mesures réalisées par Chepil (1958) et ils trouvent $C_L = 0{,}2$. La relation de Wiberg et Smith (1985) est fréquemment utilisée dans les modèles de saltation compte tenu de sa simplicité : cf. par exemple les études de Sekine et Kikkawa (1992), de Jefcoate (1995), de Bigillon (2001) et de Gondret *et al.* (2002). Niño et Garcia (1998b) commettent une erreur lors de son implémentation car la force $\overrightarrow{F}_L$ n'est ici pas perpendiculaire à la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$. Schmeeckle *et al.* (2007) comparent les valeurs instantanées de la composante F_z de la force fluide dans la direction z et de la différence des vitesses u_T^2 et u_B^2. Ils trouvent que ces deux grandeurs sont faiblement corrélées et ils en concluent que le modèle de Wiberg et Smith (1985) ne permet pas de décrire correctement la force de portance. (Schmeeckle *et al.* (2007) ne montrent pas l'évolution de la force F_z en fonction de $u_T^2 - u_B^2$.)
La vitesse de rotation de la particule est prise constante pendant les simulations et dépend du rapport u_*/u_{*c} (cf. la relation empirique (1.87)).
Niño et Garcia (1998b) utilisent le modèle pour simuler le mouvement de saltation de particules de sable ($0{,}5 \leq d_p \leq 0{,}8$ mm). La comparaison des trajectoires calculées et mesurées montre que l'introduction de la force histoire dans l'équation de mouvement augmente la longueur du rebond et permet un meilleur accord entre les simulations et l'expérience. Niño et Garcia (1998b) en déduisent, comme Gondret *et al.* (2002), que la force F_H ne peut pas être négligée. Toutefois, l'expression de la force histoire choisie est établie pour une particule solide en translation dans un fluide au repos dans l'hypothèse « Re_p petit », hypothèse qui n'est pas vérifiée dans les expériences. Le rôle de la force de Magnus est aussi étudié. La longueur de la trajectoire calculée en prenant en compte la force de Magnus est surestimée par rapport à l'expérience. Niño et Garcia (1998b) suggèrent que l'effet de la turbulence qui réduit la hauteur et la longueur du

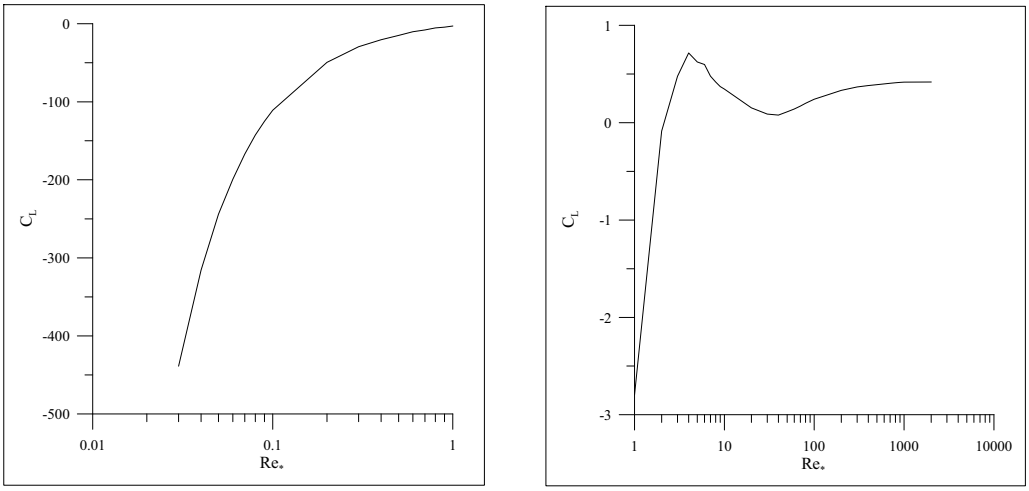
rebond et l'effet lié à la rotation du grain se compensent. Ils peuvent être donc négligés. L'effet de la force histoire et de la turbulence sur la trajectoire diminue lorsque le diamètre des grains augmente. Il apparaît négligeable pour les grosses particules ($d_p > 6$ mm) (à cause de l'inertie du grain) (cf. Niño et Garcia (1994b)).

Modèle de Dey, Dey Sarker et Debnath (1999)

Dey *et al.* (1999) souhaitent déterminer la vitesse de frottement susceptible de mettre en mouvement par rotation le grain. Dans le modèle, le grain sphérique est en équilibre sur trois autres particules dans un écoulement unidirectionnel, stationnaire et uniforme. L'effet de la turbulence sur la contrainte de frottement exercée sur le lit est pris en compte. Le grain est soumis à trois forces : la force de flottabilité, la force de traînée et la force de portance. La force de traînée est donnée par la relation de Morsi et Alexander (1972) (l'équation (1.96)). La force de portance est exprimée comme suit :

$$F_L = C_L \rho \, d_p^2 u_m \left(\frac{du_f}{dz}\right)^{1/2} \left[\nu^{1/2} + 0{,}5 f(Re_*) d_p \left(\frac{du_f}{dz}\right)^{1/2}\right] \tag{1.109}$$

Avec u_m la vitesse du fluide moyenne reçue par la surface exposée du grain.
La force F_L est générée par la non-uniformité de l'écoulement (premier terme) et par la rotation de la particule (second terme). Saffman (1965) montre que pour les petits nombres de Reynolds, la force liée à la rotation de la particule est d'un ordre inférieur à celle générée par le cisaillement, à moins que la vitesse de rotation soit bien supérieure au taux de cisaillement. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le grain sphérique est mis en rotation juste avant d'être éjecté du lit et ainsi, il tourne et roule, contrairement au grain anguleux qui glisse (Halow, 1973 ; Li et Komar, 1986 ; Debnath, 1998 (thèse non publiée)). Compte tenu de ces observation, Dey *et al.* (1999) négligent la force de Magnus si $Re_* < 3$: la fonction f est prise nulle. Si $Re_* > 3$, la fonction f est égale à 1 et l'expression de Rubinow et Keller (1961) est généralisée en introduisant le coefficient C_L. La vitesse de rotation de la particule est représentée dans le modèle par la vitesse de rotation locale du fluide Ω_f qui est égale à $0{,}5\omega_f$. Cette hypothèse est valide si la sphère tourne librement sous l'effet du cisaillement (C'est le cas ici.) et si le nombre de Reynolds est petit (Saffman, 1965). Lorsque le nombre de Reynolds augmente, la vitesse de rotation de la particule diminue (Cherukat *et al.*, 1999 ; Bagchi et Balachandar, 2002). La forme de la force de portance peut être discutée. La valeur limite du nombre de Reynolds ($Re_* = 3$) n'est pas justifiée et dans un autre papier (Dey, 1999), la valeur est prise égale à 5. De plus, pourquoi lier le comportement de la force de portance due à la non-uniformité de l'écoulement et celui de la force de Magnus et prendre un seul coefficient de calibration ?
Dey *et al.* (1999) déterminent le coefficient de portance en comparant les vitesses de frottement critiques mesurées et calculées avec le modèle. L'évolution du coefficient C_L en fonction du nombre de Reynolds Re_* est montrée dans la figure 1.18. Si $Re_* < 3$, la fonction f est nulle et le coefficient C_L est négatif et devient, en valeur absolue, très grand.



(a) $Re_* < 1$ (b) $Re_* > 1$

figure 1.18 – évolution du coefficient de portance C_L en fonction du nombre de Reynolds Re_* (Dey *et al.*, 1999)

Modèle de Lee, Lin, You et Wang (2006)

Le modèle est tridimensionnel et tient compte de l'inclinaison du lit. L'équation de mouvement du grain s'écrit :

$$(m_p + C_M \rho V_p)\,\frac{du_p}{dt} = (\rho_s - \rho) V_p g \sin\theta + F_D \frac{u_f - u_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \frac{u_f - u_p}{\sqrt{(u_f - u_p)^2 + v_p^2}} \tag{1.110a}$$

$$(m_p + C_M \rho V_p)\,\frac{dv_p}{dt} = F_D \frac{v_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} - F_L \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \frac{v_p}{\sqrt{(u_f - u_p)^2 + v_p^2}} \tag{1.110b}$$

$$(m_p + C_M \rho V_p)\,\frac{dw_p}{dt} = -(\rho_s - \rho) V_p g \cos\theta - F_D \frac{w_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} + F_L \frac{\sqrt{(u_f - u_p)^2 + v_p^2}}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.110c}$$

La force de traînée est donnée par l'équation (1.103) et la relation de Swamee et Ojha (1991) :

$$C_D = 0{,}5 \left\{ 16 \left[\left(\frac{24}{Re_p} \right)^{1{,}6} + \left(\frac{130}{Re_p} \right)^{0{,}72} \right]^{2{,}5} + \left[1 + \left(\frac{4.10^4}{Re_p} \right)^2 \right]^{-0{,}25} \right\}^{0{,}25} \tag{1.111}$$

La force de portance est exprimée à l'aide de la relation de Wiberg et Smith (1985).

$$\overrightarrow{F}_L = \frac{1}{2} \rho\, A_p\, C_L \left(u_T^2 - u_B^2 \right) \frac{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{e}_z}{\|(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{e}_z\|} \wedge \frac{\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|} \tag{1.112}$$

Le coefficient C_L est déterminé par Lee *et al.* (2006). Lee *et al.* (2006) se servent de leur modèle pour étudier le mouvement de saltation des grains au-dessus du lit. Pour cela, comme dans notre étude, ils couplent le modèle de trajectoire à un modèle de collision. Le coefficient C_L et

les paramètres du modèles de collision (par exemple le coefficient de restitution) sont utilisés pour calibrer les modèles. La calibration repose sur la longueur et la hauteur du rebond, le déplacement latéral du grain et la composante horizontale de sa vitesse moyenne pendant le rebond. Les expériences concernent des grains de diamètre égal à 6 mm et de masse volumique variable ($1080 \leq \rho_s \leq 2150$ kg.m^{-3}). Le nombre de Reynolds Re_p est compris entre 500 et 1500 et le nombre de Reynolds Re_* entre 230 et 460. Lee *et al.* (2006) obtiennent l'expression (1.113) du coefficient C_L :

$$C_L = 1{,}45.10^{-5}\, Re_p^{1{,}7325} \quad , \qquad r = 0{,}73 \tag{1.113}$$

Le coefficient C_L varie de 0 à 5. Avec une méthode similaire et pour des nombres de Reynolds Re_p compris entre 200 et 300, Lee *et al.* (2000) trouvent $C_L \sim 4{,}6$. Les valeurs du coefficient C_L sont bien supérieures à celle suggérée par Wiberg et Smith (1985) car la dissipation de l'énergie pendant les collisions successives du grain sur le lit est en partie supportée par le coefficient C_L. Il est probable que les deux expressions proposées surestiment la force de portance exercée sur le grain.

1.6.4 comparaison des modèles de trajectoire

Le grain est fixe sur le lit

Nous comparons dans les figures 1.19 et 1.20 l'évolution, en fonction du nombre de Reynolds Re_*, de la force fluide exercée sur une particule fixe qui est obtenue à partir des modèles et dans les expériences. Dans les calculs, la particule est une sphère posée en équilibre sur une rangée de sphères identiques. L'écoulement est supposé unidirectionnel et modélisé par un profil logarithmique. La hauteur de rugosité z_0 et la position de la particule sont définies comme dans l'étude de van Rijn (1984a). La particule se situe à une distance de la surface du lit égale à $0{,}6\, d_p$, avec d_p son diamètre ($d_p = 1$ mm).
La figure 1.19 montre l'évolution du coefficient de traînée C_D^* en fonction du nombre de Reynolds Re_*.

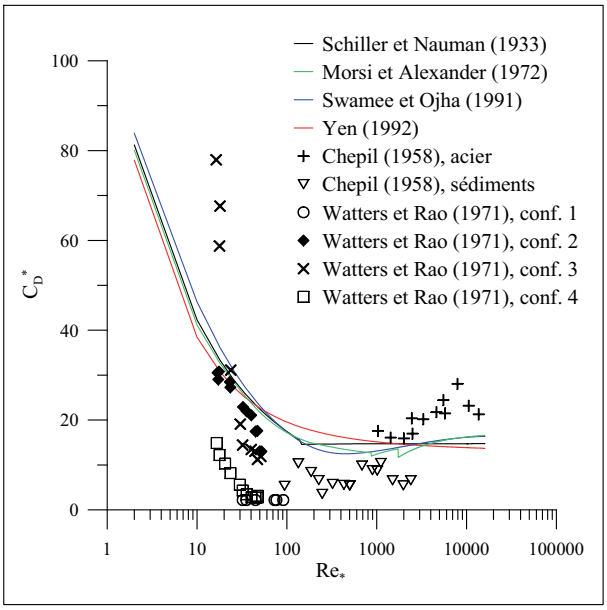
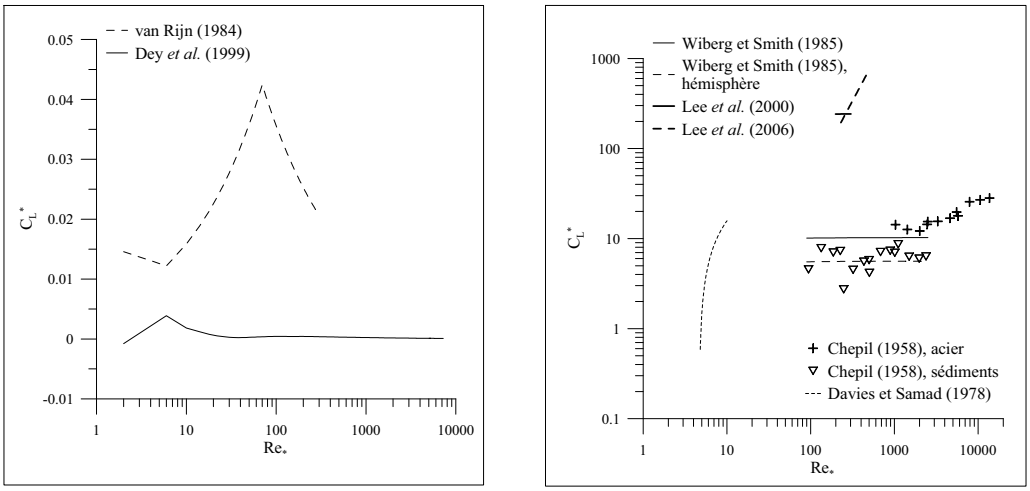


figure 1.19 – évolution du coefficient de traînée C_D^* en fonction du nombre de Reynolds

$$C_D^* = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho A_p u_*^2} \tag{1.114}$$

Les quatre corrélations utilisées pour calculer le coefficient C_D^* sont les relations de Schiller et Nauman (1933), de Morsi et Alexander (1972), de Swamee et Ojha (1991) et de Yen (1992). Les corrélations donnent des résultats similaires et il existe un accord relatif entre ces résultats et les données recueillies en laboratoire avec des sédiments. Ainsi, les mesures réalisées par Watters et Rao (1971) alors que la sphère est placée comme dans les calculs sur une rangée de particules (configuration 2), peuvent être décrites de façon satisfaisante par une des quatre corrélations, spécialement si $Re_* < 45$. Nous retrouvons (en partie) le résultat de Coleman (1967). Bien que dispersées, les données empiriques qui sont obtenues suivant des protocoles (forme et position de la particule dans le lit) différents, présentent une certaine cohérence. Le coefficient C_D tend à diminuer avec le nombre de Reynolds, puis se stabilise autour de 200–300.
La figure 1.20 montre l'évolution du coefficient de portance C_L^* en fonction du nombre de Reynolds obtenue dans les modèles de van Rijn (1984a), de Wiberg et Smith (1985), de Dey *et al.* (1999) et de Lee et coauteurs (2000, 2006). Nous représentons l'évolution du coefficient seulement pour les



(a) (b)

figure 1.20 – évolution du coefficient de portance C_L^* en fonction du nombre de Reynolds Re_*

nombres de Reynolds appartenant au domaine de validité des modèles (indiqué dans le tableau 1.3). Les résultats sont très dispersés et soulignent la difficulté à estimer l'expression de la force

van Rijn (1984a)	$2 \leq Re_* \leq 280$
Wiberg et Smith (1985)	$90 < Re_* < 2500$
Dey *et al.* (1999)	$0{,}03 \leq Re_* < 200$
Lee *et al.* (2000)	$200 \leq Re_* \leq 300$
Lee *et al.* (2006)	$230 \leq Re_* \leq 460$

tableau 1.3 – domaine de validité des relations utilisées pour calculer le coefficient C_L^* dans la figure 1.20

de portance. De fait, la forme de l'expression n'est pas encore résolue. Les relations de van Rijn (1984a) et Dey *et al.* (1999) reposent sur les études analytiques de Saffman (1965) et de Rubinow et Keller (1961). Elles sont définies à partir de la vitesse relative de la particule et le taux de cisaillement. Wiberg et Smith (1985) expriment la force F_L en fonction des vitesses relatives u_T

et u_B, à partir de la théorie de Bernouilli. La calibration des cinq modèles s'appuie, par ailleurs, sur des grandeurs différentes :

- la trajectoire du grain dans le modèle de van Rijn (1984a) ;
- la force de portance dans le modèle de Wiberg et Smith (1985);
- la contrainte de frottement critique dans le modèle de Dey *et al.* (1999) ;
- les propriétés du rebond dans les modèles de Lee et coauteurs (2000, 2006).

Le coefficient de portance, qui est déterminé lors de la calibration, dépend de la grandeur utilisée, des données empiriques et le cas échéant, de la modélisation des autres forces fluide exercées sur le grain et du modèle de collision. Ainsi, le domaine d'application des modèles est lié à la méthode de calibration.
Seul le modèle de Wiberg et Smith (1985) est validé par l'expérience. Cela n'est pas surprenant car les données de Chepil (1958) obtenus avec des hémisphères servent à calibrer le modèle. Nous calculons, avec ce modèle, le coefficient C_L^* pour un hémisphère posé sur une paroi lisse ; la vitesse u_T est déterminée en $z = 0{,}5\, d_p$. Sa valeur se situe alors au milieu des mesures (cf. la figure 1.20). Comme attendu, les relations de Lee et coauteurs (2000, 2006) surestiment le coefficient C_L^*. A l'opposé, la force de portance calculée est très faible dans le modèle de van Rijn (1984a) et plus étonnant, dans le modèle de Dey *et al.* (1999). En effet, la calibration de ce dernier modèle est effectuée dans des conditions qui sont proches de celles considérées ici.

Le grain est en saltation au-dessus du lit

Le comportement des modèles est différent lorsque nous considérons la trajectoire du grain. La figure 1.21 montre l'évolution de la position du centre de la particule au cours du rebond qui est estimée par les modèles de van Rijn (1984a), de Niño et Garcia (1998b) (corrigé), de Dey *et al.* (1999) et de Lee et coauteurs (2000,2006). Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

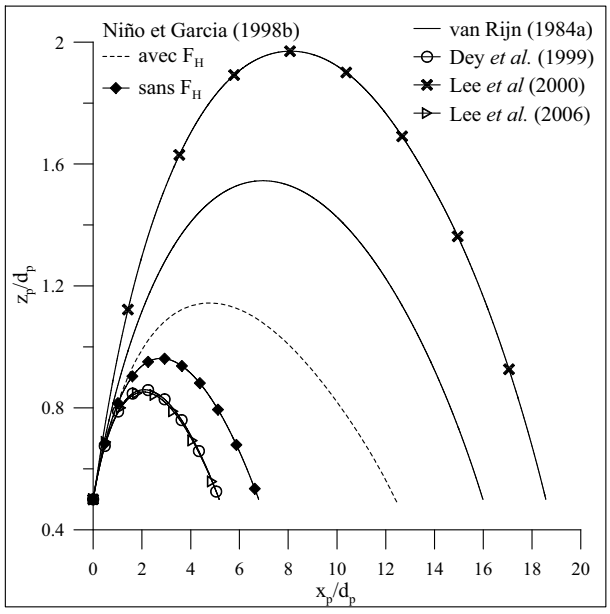
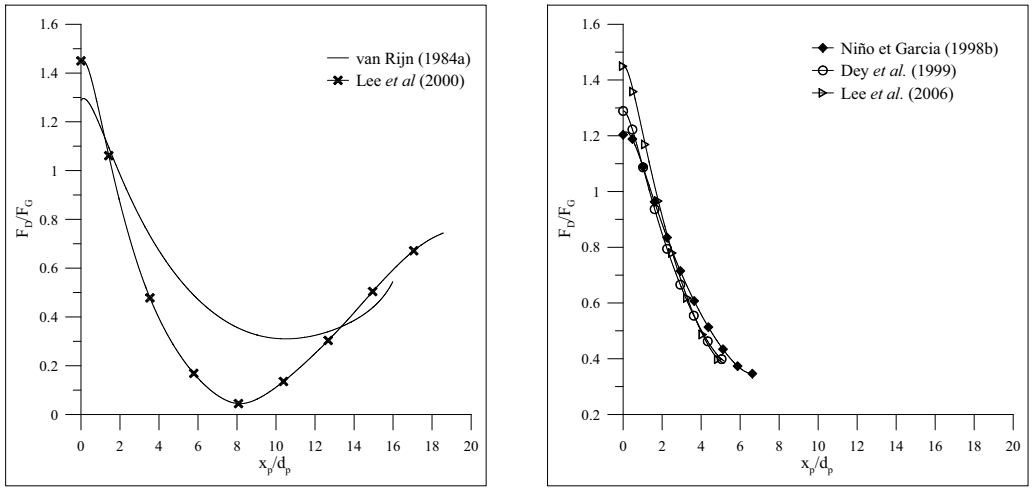


figure 1.21 – trajectoire du grain calculé avec les modèles ($R_p = 50$ et $Re_* = 16$)

- le diamètre sans dimension R_p vaut 50, avec $R_p = \sqrt{(\gamma - 1) g d_p^3}/\nu$ et $\gamma = 2{,}65$;
- le paramètre de Shields est fixé à 0,1 ;
- la pente du lit est égale à $\arctan 0{,}001$;
- à l'instant initial, la position du grain est donnée par $x_p = 0$ et $z_p = 0{,}5\, d_p$, sa vitesse par $u_p = 3{,}5\, u_*$ et $w_p = 1{,}8\, u_*$.

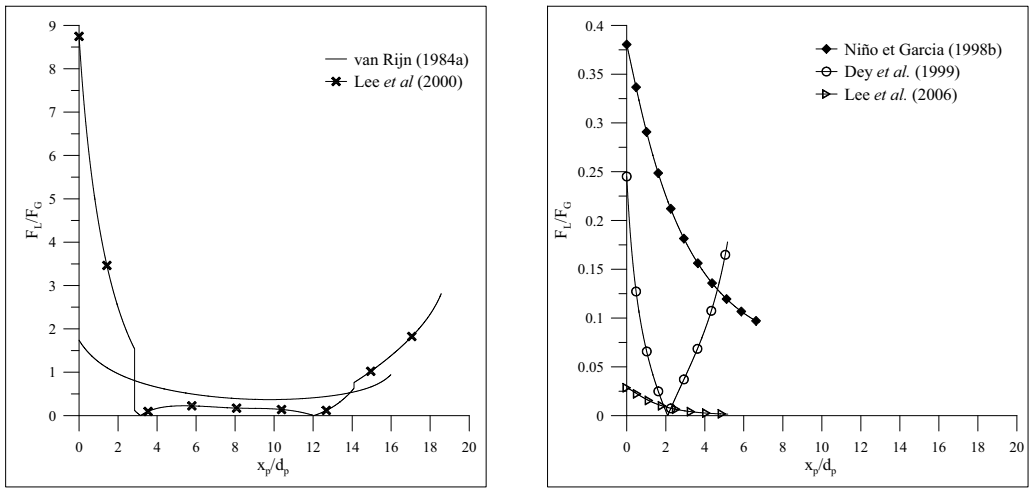
Le nombre de Reynolds Re_* vaut approximativement 16 et partant, les modèles de Lee et coauteurs (2000, 2006) ne sont pas *a priori* valides (cf. le tableau 1.3). Les résultats sont, là encore, très différents avec des longueurs de rebond qui varient de 5 à $20\,d_p$. Les modélisations de Dey *et al.* (1999) et de Lee *et al.* (2006) sont ici équivalentes et simulent une trajectoire identique à celle obtenue pour une force de portance nulle. Au contraire, les modèles de van Rijn (1984a) et de Lee *et al.* (2000) surestiment la hauteur et la longueur du rebond.
Les hypothèses de calcul sont celles utilisées dans l'étude de Niño et Garcia (1998b) (cf. la figure 3 de leur article) pour montrer l'influence de la force histoire sur le mouvement des petits grains. Nous représentons, dans la figure 1.21, la trajectoire déterminée par les deux auteurs lorsque la force $\overrightarrow{F}_H$ est prise en compte. La taille du rebond est inférieure à celle prédite par les modèle de van Rijn (1984a) et de Lee *et al.* (2000). Ainsi, les conclusions de Niño et Garcia (1998b) et de Gondret *et al.* (2002) sur la force histoire qui ne peut, selon eux, être négligée, ne valent que si l'expression de Wiberg et Smith (1985) est utilisée. Cela est dû, en partie, à la grandeur servant à la calibration du modèle qui est la force de portance. Il est probable dans les autres modèle que l'effet de la force histoire est pris en compte par les coefficients empiriques.
Les figures 1.23 et 1.22 montrent l'évolution des rapports F_D/F_G et F_L/F_G au cours du rebond déterminées par les modèles avec F_D, F_L et F_G la norme des forces de traînée, de portance et de flottabilité. L'ordre de grandeur de la force F_D est semblable dans les cinq modèles. Les



(a) (b)

figure 1.22 – évolution du rapport F_D/F_G au cours du rebond déterminée par les cinq modèles avec F_D et F_G la norme des forces de traînée et de flottabilité

différences observées dans les trajectoires sont liées à la force de portance : le rapport F_L/F_G est bien supérieur dans les modèles de van Rijn (1984a) et de Lee *et al.* (2000) aux valeurs trouvées dans les modèles de Niño et Garcia (1998b), de Dey *et al.* (1999) et de Lee *et al.* (2006) dans lesquels $F_L/F_G < 0{,}4$. Dans tous les modèles, les normes F_D et F_G diminuent au début du rebond. Après, il y a des divergences. Dans le modèle de van Rijn (1984a), les forces F_D et F_L augmentent à la fin du rebond, le minimum étant atteint pendant la phase descendante du grain. Dans le modèle de Lee *et al.* (2000), l'évolution de la norme F_L est plutôt irrégulière, en certains points discontinue. Elle diminue, se stabilise, puis augmente. L'évolution de la norme F_D est en accord avec celle trouvée dans le modèle de van Rijn (1984a). Son minimum coïncide approximativement au sommet du rebond. Dans les autres modèles, dans lesquels la taille du rebond est faible, l'évolution du rapport F_D/F_G est identique, il diminue pendant tout le rebond. L'évolution du rapport F_L/F_G est cependant différent. Il diminue dans les modèles de Niño et Garcia (1998b) et de Lee *et al.* (2006) tandis qu'il diminue puis augmente dans le modèle de Dey *et al.* (1999) (Le minimum est atteint au sommet du rebond.). Dans ces trois modèles, la force de portance



(a) (b)

figure 1.23 – évolution du rapport F_L/F_G au cours du rebond déterminée par les cinq modèles avec F_L et F_G la norme des forces de portance et de flottabilité

est très petite devant la force de traînée et n'a pas d'effet sur la trajectoire. Nous pouvons, ainsi, avoir une trajectoire identique avec une force de portance différente. Sekine et Kikkawa (1984) obtiennent le même résultat. Leur modèle est très proche de celui de Niño et Garcia (1998b) et leurs simulations indiquent que si la force de portance et la force liée à l'accélération du fluide sont négligées, la trajectoire est peu modifiée. Pour cette raison, Sekine et Kikkawa (1992) et Jefcoate (1995) ne prennent pas en compte la force de portance dans l'équation de mouvement du grain. Dans le modèle de van Rijn (1984a), l'amplitude des forces de portance et de traînée est équivalente. Ce n'est pas le cas dans le modèle de Lee *et al.* (2000). La force de portance y est bien supérieure à la force de traînée au début et à la fin du rebond.

Ces deux exemples illustrent le comportement des modèles de trajectoire, ils ne permettent pas de conclure sur leur validité. Toutefois, le modèle de Dey *et al.* (1999) n'apparaît pas satisfaisant dans les deux cas.

1.7 conclusion

Nous souhaitons reproduire le mouvement des grains au voisinage du lit dans un écoulement tri-dimensionnel qui est l'écoulement moyen d'une couche limite turbulente. Comme dans les modèles de trajectoire précédents, le grain est une sphère et il est soumis à quatre forces :

- la force de flottabilité,
- la force de traînée,
- la force de portance,
- la force d'accélération.

La force de traînée est modélisée, si $Re_p < 800$, par la relation de Schiller et Nauman (1933) (cf. l'équation (1.6)). Si $Re_p \geq 800$, il est pris constant et égal à 0,445. La figure 1.19 montre qu'il y a un certain consensus sur la forme de la force de traînée. Les différentes expressions utilisées dans les modèles de trajectoire donnent des valeurs très proches et il existe un accord raisonnable entre les modèles et l'expérience bien que les modèles soient établis en l'absence de paroi dans un écoulement au repos. De plus, les études reportées dans le paragraphe 1.1 indiquent qu'en première approximation et dans les situations considérées, la force de traînée peut être calculée en utilisant la relation de Schiller et Naumman (1933). Pour la force de portance, le choix est

plus difficile, les expressions proposées dans les modèles de trajectoire aboutissant à des résultats très différents. L'étude bibliographique indique qu'il existe seulement deux expressions qui prennent en compte le caractère tridimensionnel de l'écoulement : la relation de Magnaudet et Legendre (1998) et la généralisation de la force de Saffman par Crowe *et al.* (1998). La relation de Magnaudet et Legendre (1998) est complexe et la valeur des coefficients n'est pas établie pour une particule solide lorsque $Re_p > 1$. La formulation de Crowe *et al.* (1998) est plus simple. Elle est obtenue dans l'hypothèse « Re_p petit ». van Rijn (1984a) l'applique à un grain en saltation dans un écoulement unidirectionnel et cisaillé. Il détermine une expression du coefficient de portance pour $Re_* < 280$. Cette expression est assez approximative compte tenu des hypothèses et données expérimentales utilisées. Cependant, il est difficile de déterminer une expression « plus robuste » car le nombre d'études connues rapportant des trajectoires est insuffisant (cf. les études de Francis et Abbott (1973, 1977), de Fernandez-Luque et van Beek (1976), de Sumer et Deigaard (1981) et de Niño et Garcia (1995a, 1998a)). Par ailleurs, les nombres de Reynolds considérés dans ces études ne permettent pas d'agrandir l'intervalle d'application. La relation de Wiberg et Smith (1985), qui est utilisée dans de nombreux modèles de trajectoire, ne prend pas en compte le caractère tridimensionnel de l'écoulement, la vitesse fluide étant représentée par une norme. Pour ces raisons et en l'absence de relation plus fiable, nous choisissons de calculer la force de portance en utilisant les relations de van Rijn (1984a) et de Crowe *et al.* (1998). Dans nos simulations, le nombre de Reynolds Re_* peut être supérieur à 280 et dans ce cas, nous prenons $C_L = 20$. La force d'accélération est donnée par la relation (1.74) et le coefficient C_M est fixé à 1/2, conformément aux simulations de Magnaudet *et al.* (1995) et aux autres modèles de trajectoire.

Nous négligeons la force de Magnus et la force histoire. L'expérience (Lee et Hsu, 1996 ; Niño et Garcia, 1998a) montre que la rotation du grain est faible dans l'eau et qu'elle est contrôlée principalement par les collisions. Pour cette raison, la force liée à la rotation de la particule n'est pas considérée dans les modèles de trajectoire. Ainsi, dans le modèle numérique développé, la rotation du grain est générée uniquement par les collisions et la vitesse de rotation est prise constante entre deux collisions. Le moment $\mathcal{M}$ exercé par le fluide sur le grain est négligé dans l'équation de moment (Calantoni, 2002). Son influence sur la vitesse de rotation est probablement faible car les collisions avec le lit sont très fréquentes, le grain étant transporté essentiellement par charriage. Seul le moment des forces de contact est déterminé.
La force histoire n'est pas prise en compte dans le modèle, conformément aux expériences de Sridhar et Katz (1995) et à la plupart des modèles de trajectoire. Les études fournissent surtout des résultats qualitatifs et il existe peu d'expressions de la force F_H. Son comportement dépend, par ailleurs, du contexte d'étude, par exemple de la variation de vitesse de la particule. Sur le lit, la situation des grains est multiple, certains grains accélèrent et d'autres ralentissent. Dans ces conditions, il est difficile de choisir la bonne formulation. Pour cette raison, sans doute, dans le modèle de Niño et Garcia (1998b), la force histoire est décrite par la formule de Basset (1888) valide seulement si $Re_p \ll 1$. Enfin, la figure 1.21 montre que l'influence de la force histoire sur la trajectoire est liée à l'expression de la force de portance choisie. Elle peut être contenue, avec d'autres phénomènes (par exemple la turbulence) dans le coefficient de portance.

Le modèle de trajectoire qui est présenté dans ce paragraphe est utilisé dans le modèle numérique pour déterminer à la fois le mouvement des grains au-dessus du lit et le mouvement des grains à l'intérieur de l'arrangement. Le modèle d'écoulement qui sert à calculer la vitesse du fluide et qui est implémenté est détaillé dans le chapitre 1 de la partie 3.

2 modélisation des interactions mécaniques entre les grains

Le modèle numérique développé simule le mouvement des grains dans un arrangement soumis à un écoulement. Les interactions mécaniques entre les grains sont un paramètre important de la modélisation. A la surface de l'arrangement, les grains sont transportés par charriage et ils entrent fréquemment en collision avec le lit. A l'intérieur, les grains sont en permanence en contact avec d'autres grains. La détection des collisions dépend de la forme des grains. Dans le modèle numérique, les grains sont représentés par des sphères et la collision entre deux grains est réalisée si la distance entre leur centre est inférieure à la somme de leur rayon, à savoir :

$$\|\overrightarrow{x}_{pj} - \overrightarrow{x}_{pk}\| < a_{pj} + a_{pk} \tag{2.1}$$

Avec $\overrightarrow{x}_{pj}$ et $\overrightarrow{x}_{pk}$ la positions des deux grains désignés par les indices j et k et a_{pj} et a_{pk} leur rayon.
Il existe deux types de modèles de collision : les modèles *hard sphere* (sphère rigide) et les modèles *soft sphere* (sphère souple).

1. Les modèles *hard sphere* sont basés sur les équations d'impulsion des solides qui constituent les formes intégrées des équations de mouvement. Dans ces modèles, le mouvement des deux solides pendant la collision n'est pas explicitement déterminé et seules les vitesses de translation et de rotation des solides après la collision sont calculées à partir des vitesses avant la collision. Les modèles *hard sphere* qui sont simples et rapides sont valides seulement pour des collisions ponctuelles pour lesquelles la théorie d'impulsion est vérifiée.
2. Dans les modèles *soft sphere*, les vitesses de translation et de rotation des solides durant l'impact sont déduites de la résolution des équations de mouvement. Ces modèles nécessitent l'estimation des forces de contact qui s'exercent sur les solides pendant la collision.

Dans les modèles DEM existants qui simulent l'érosion d'un arrangement, les deux approches sont utilisées. Jefcoate (1995) et McEwan et coauteurs (2001, 2004) modélisent ainsi la collision avec une approche *hard sphere*. Haff et coauteurs (1993) et Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) s'appuient sur l'approche *soft sphere*.

La collision entre deux solides est un phénomène court et dissipatif qui aboutit à une brusque variation des vitesses des deux solides. La collision se déroule en deux phases : la phase de compression (ou de déformation) et la phase de restitution. Pendant la phase de compression, les surfaces des deux solides se déforment au voisinage du point de contact : la distance entre les solides diminue. A la fin de la phase de compression, la vitesse de pénétration, qui est la composante normale au plan de contact de la vitesse relative des deux solides exprimée au point de contact, est nulle. Pendant la phase de restitution, les forces de contact diminuent et la distance entre les deux solides augmente. Leur forme finale, notamment l'existence d'une déformation résiduelle des surfaces, dépend de l'élasticité de la matière les constituant. Le coefficient de restitution (normal) e_n tend à quantifier la dissipation énergétique qui se produit lors de la collision. En général, il est défini comme le rapport des vitesses de pénétration avant et après le choc. Il est compris entre 0 et 1. Si $e_n = 1$, les solides sont parfaitement élastiques. Si $e_n = 0$,

ils sont parfaitement mous, seule la phase de compression existe et la déformation des surfaces subsiste. Le coefficient de restitution dépend de plusieurs paramètres : de l'angle incident, du fluide porteur, des matériaux constituant les solides, de leurs vitesses de translation et de rotation, de leur forme, de leur rugosité, etc. Son estimation repose sur des études expérimentales de la collision d'une particule solide sur une paroi dans un fluide au repos (Grant et Tabakoff, 1975 ; Brauer, 1980 ; Yamamoto, 1986 ; Govan *et al.*, 1989 ; Gorham et Kharaz, 2000). Dans ces études, la collision est supposée se dérouler dans le plan vertical (xz). Brauer (1980) établit

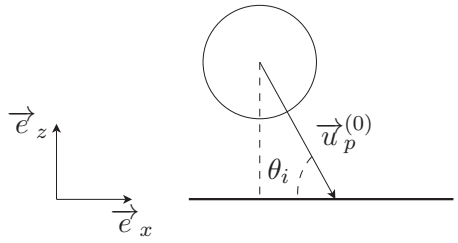


figure 2.1 – collision entre une particule sphérique et une paroi plane ; définition de l'angle θ_i

pour la collision d'une particule sphérique en acier avec une paroi en polyméthylméthacrylate l'expression (2.2) du coefficient e_n en fonction de l'angle incident θ_i (défini dans la figure 2.1). Si $\theta_i < 30$,

$$e_n \simeq -0{,}00233\,\theta_i + 1{,}0 \tag{2.2}$$

Avec $\tan\theta_i = w_p^{(0)}/u_p^{(0)}$ et $u_p^{(0)}$ et $w_p^{(0)}$ les composantes horizontale et verticale de la vitesse de la sphère avant le choc.
Si $\theta_i \geq 30$, le coefficient est constant et égal à 0,93.
Dans les expériences de Grant et Tabakoff (1975), le coefficient e_n est donné par l'équation (2.3).

$$e_n = 0{,}993 - 1{,}76\,\theta_i + 1{,}56\,\theta_i^2 - 0{,}49\,\theta_i^3 \tag{2.3}$$

Le coefficient de restitution e_n est généralement une fonction décroissante de l'angle θ_i. Il dépend également du nombre Stokes St qui est un nombre sans dimension défini comme le rapport du temps de réponse de la particule solide et du temps caractéristique de l'écoulement.

$$St = \frac{\rho_s L U}{\mu} \tag{2.4}$$

Avec : L la taille caractéristique de la particule ; ρ_s sa masse volumique ; U une échelle de vitesse ; μ la viscosité dynamique du fluide.
Le nombre de Stokes mesure l'inertie de la particule par rapport aux effets visqueux. Joseph *et al.* (2001) et Gondret *et al.* (2002) étudient son influence sur la collision. Dans leurs études, le nombre de Stokes est défini comme suit.

$$St = \frac{1}{9}\frac{\rho_s u_p d_p}{\mu} \tag{2.5}$$

Avec d_p le diamètre de la particule solide et u_p sa vitesse.
Si le nombre de Stokes est inférieur à une valeur dite critique et notée St_c, la particule solide ne rebondit pas et le coefficient de restitution est nul. Si le nombre de Stokes est supérieur à St_c, la particule rebondit. Le coefficient de restitution augmente rapidement avec St jusqu'à une valeur limite $e_{n\,\max}$. La valeur limite $e_{n\,\max}$ est la valeur du coefficient e_n obtenue dans un fluide de résistance négligeable (gaz ou vide). Dans les expériences de Gondret *et al.* (2002), elle est atteinte lorsque $St > 1000$. Le nombre de Stokes critique est trouvé par Joseph *et al.* (2001) et Gondret *et al.* (2002) indépendant des propriétés élastiques de la particule solide et de la paroi. Il est égal approximativement à 10. Gondret *et al.* (2002) montrent aussi que l'évolution du rapport $e_n/e_{n\,\max}$ en fonction du nombre de Stokes est indépendante des matériaux constituant la

particule.

Nous présentons, dans ce chapitre, les principes des modélisations *hard sphere* et *soft sphere* et nous les appliquons à la collision entre une sphère et une paroi. Cette comparaison montre que malgré des théories sous-jacentes différentes, les deux modélisations sont équivalentes, pourvu que les coefficients des modèles soient bien choisis.
Dans le modèle de transport développé, les interactions mécaniques sont liées à l'existence de collisions ponctuelles entre les grains à la surface du lit et à la présence de façon continue de contacts entre ceux-ci à l'intérieur de l'arrangement. Par conséquent, elles sont modélisées en utilisant l'approche *soft sphere* qui nous apparaît plus adaptée à notre problématique.

2.1 modèles *hard sphere*

Les modèles *hard spheres* reposent sur la théorie classique du choc et sur la notion d'impulsion (Brossard, 1997). L'impulsion intégrée au vecteur $\overrightarrow{F}$ pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est l'intégrale vectorielle $\overrightarrow{I}$.

$$\overrightarrow{I} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}\, dt \tag{2.6}$$

Si l'amplitude du vecteur $\overrightarrow{F}$ devient grande pendant un temps très court, l'intégrale $\overrightarrow{I}$ est appelée percussion.
Le phénomène de choc est caractérisé par une brusque variation des vitesses traitée ici comme des discontinuités et par l'absence de changement dans les positions des solides. Il est décrit par les équations d'impulsion qui sont les équations de mouvement des deux solides intégrées sur la durée de la collision. Lors de la collision, les forces de contact qui agissent sur un temps très court ont une amplitude très grande et l'impulsion $\overrightarrow{J}$ des forces de contact pendant la durée de la collision est finie. L'impulsion des forces fluide (force de flottabilité, force de traînée, force de portance, etc.) est infiniment petite et est négligeable vis-à-vis de l'impulsion $\overrightarrow{J}$. Ainsi, les

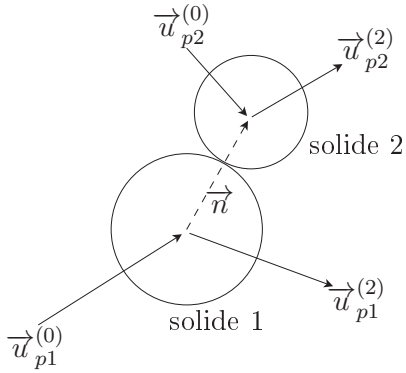


figure 2.2 – collision entre deux solides 1 et 2 ; définition des notations utilisées

équations d'impulsion s'écrivent pour deux solides 1 et 2 en collision comme suit :

$$m_{p1}\left(\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)} - \overrightarrow{u}_{p1}^{(0)}\right) = \overrightarrow{J} \tag{2.7a}$$

$$m_{p2}\left(\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)} - \overrightarrow{u}_{p2}^{(0)}\right) = -\overrightarrow{J} \tag{2.7b}$$

$$\mathcal{I}_1\left(\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)} - \overrightarrow{\omega}_{p1}^{(0)}\right) = a_{p1}\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{J} \tag{2.7c}$$

$$\mathcal{I}_2\left(\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)} - \overrightarrow{\omega}_{p2}^{(0)}\right) = a_{p2}\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{J} \tag{2.7d}$$

Avec : $\overrightarrow{u}_{p1}^{(0)}$ et $\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)}$ la vitesse du solide 1 avant et après la collision ; $\overrightarrow{u}_{p2}^{(0)}$ et $\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)}$ la vitesse du solide 2 avant et après la collision ; $\overrightarrow{J}$ l'impulsion de la force de contact exercée sur le solide 1 par

le solide 2 ; m_{p1} et m_{p2} la masse des solides 1 et 2 ; $\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(0)}$, $\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)}$, $\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(0)}$ et $\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)}$ la vitesse angulaire des solides 1 et 2 avant et après la collision ; $\overrightarrow{n}$ le vecteur unité dirigé du solide 1 vers le solide 2, normal au plan de contact ; $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ le moment d'inertie des solides ; a_{p1} et a_{p2} le rayon des deux solides (cf. la figure 2.2).
La résolution de l'équation (2.7) fournit les vitesses des solides après la collision. Compte tenu du nombre d'inconnues (les vitesses et l'impulsion $\overrightarrow{J}$, *i.e.* 15 inconnues), les 12 équations précédentes sont insuffisantes et d'autres relations sont nécessaires. Elles sont établies en reprenant la définition du coefficient de restitution et la loi de Coulomb.

Coefficient de restitution e_n

Plusieurs définitions du coefficient de restitution e_n existent. La définition la plus courante est celle de Darboux (Brossard, 1997). Le coefficient de restitution y est défini comme le rapport des composantes normales de la vitesse relative $\overrightarrow{G}$ du solide 1 par rapport au solide 2 après et avant la collision notées $G_n^{(2)}$ et $G_n^{(0)}$.

$$e_n = -\frac{G_n^{(2)}}{G_n^{(0)}} \tag{2.8}$$

Avec : G_n la composante normale de la vitesse relative $\overrightarrow{G}$ (aussi vitesse de pénétration) :

$$G_n = \overrightarrow{G}.\overrightarrow{n} \ , \quad \overrightarrow{G} = \overrightarrow{u}_{p1} - \overrightarrow{u}_{p2} \tag{2.9}$$

Crowe *et al.* (1998) notent qu'avec cette définition, le coefficient e_n d'un solide non sphérique dépend de la position du point de contact. Pour cette raison, Tsuji *et al.* (1989a,b) et Crowe *et al.* (1998) utilisent une autre définition qui repose sur les composantes normales $J_n^{(21)}$ et $J_n^{(10)}$ de l'impulsion $\overrightarrow{J}$ pendant la phase de restitution et pendant la phase de compression.

$$e_n = \frac{J_n^{(21)}}{J_n^{(10)}} \tag{2.10}$$

Dans le cas d'une collision entre une sphère et une paroi, les définitions (2.8) et (2.10) sont équivalentes.

Loi de Coulomb

La loi de Coulomb régit la force de contact $\overrightarrow{F}_c$ entre les deux solides. Soit $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ la composante tangentielle de la vitesse relative $\overrightarrow{G}_c$ exprimée au point de contact, appelée vitesse de glissement.

$$\overrightarrow{G}_{c\tau} = \overrightarrow{G}_c - G_n\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n} \wedge \left(\overrightarrow{G}_c \wedge \overrightarrow{n}\right) \ , \quad \overrightarrow{G}_c = (\overrightarrow{u}_{p1} + a_{p1}\overrightarrow{\omega}_{p1} \wedge \overrightarrow{n}) - (\overrightarrow{u}_{p2} - a_{p2}\overrightarrow{\omega}_{p2} \wedge \overrightarrow{n}) \tag{2.11}$$

Si la vitesse de glissement $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ est différente de 0, il y a glissement sans roulement. La loi de Coulomb s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_\tau = -f\|\overrightarrow{F}_n\|\overrightarrow{\tau} \ , \quad \overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{G}_{c\tau}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|} \tag{2.12}$$

Avec $\overrightarrow{F}_n$ et $\overrightarrow{F}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de la force de contact et f le coefficient de frottement dynamique.
Si la vitesse de glissement $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ est nulle, il y a roulement sans glissement et les composantes de la force de contact vérifient la condition (2.13).

$$\|\overrightarrow{F}_\tau\| < f_0\|\overrightarrow{F}_n\| \tag{2.13}$$

Avec f_0 le coefficient de frottement statique.

Les coefficients de frottement f et f_0 ne sont pas nécessairement égaux. Le plus souvent, le coefficient de frottement statique f_0 est supérieur au coefficient de frottement dynamique f : cf. les coefficients de frottement associés au contact pneu/enrobé.
L'application de la loi de Coulomb requiert la connaissance de la vitesse de glissement pendant la collision. Cette vitesse est obtenue de la résolution des équations de mouvement des deux solides pendant la durée du choc. Brossard (1997) donne le détail des calculs notamment pour le cas de la collision entre une plaque mobile et une plaque fixe.

La théorie classique du choc et les modèles *hard sphere* sont utilisés dans les écoulements diphasiques pour décrire deux types de collision :

- la collision entre un solide mobile et une paroi : par exemple, dans les écoulements dans les conduites, cf. les travaux de Matsumoto et Saito (1970) et de Tsuji *et al.* (1989a,b) ;
- la collision entre deux solides mobiles isolés : dans des écoulements dans lesquels les particules solides sont suffisamment dispersées, par exemple, dans les écoulements cisaillés, très rapides tels qu'ils peuvent exister dans certaines zones d'avalanches de neige ou de rocher (Haff et Anderson, 1993).

Nous indiquons ici les équations pour les expressions des vitesses des solides après la collision obtenues par la modélisation *hard sphere* pour la collision entre une sphère et une paroi et pour la collision entre deux sphères.

2.1.1 collision d'une particule sphérique avec une paroi

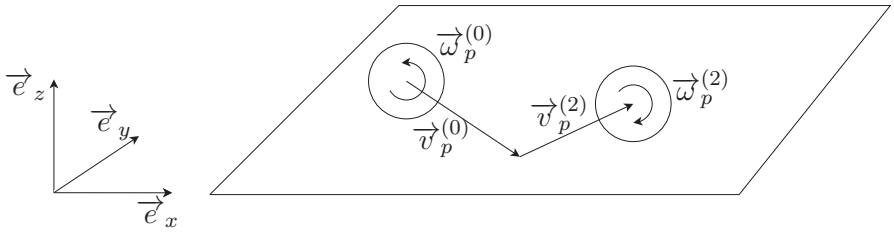


figure 2.3 – collision entre une particule sphérique et une paroi ; définition des notations utilisées

Les vitesses de la particule sphérique après la collision sont obtenues des équations d'impulsion de la sphère. Leur résolution s'appuie sur trois hypothèses :

- Hypothèse 1 : la déformation de la sphère est négligeable : pendant la collision, la distance entre le centre de la sphère et la paroi reste constante et égale à son rayon a_p.
- Hypothèse 2 : la force de contact exercée sur la sphère vérifie la loi de Coulomb.
- Hypothèse 3 : une fois que la vitesse de glissement s'annule, elle reste égale à zéro jusqu'à la fin de la collision.

La paroi est supposée plane et lisse. Les expressions des vitesses après la collision dépendent de l'application de la loi de Coulomb et de la vitesse de glissement de la sphère. Le plus souvent, il y a glissement au début de la collision, puis pendant la collision, la vitesse de glissement de la sphère diminue à cause du frottement. Dans certaines conditions, elle s'annule, la particule arrête de glisser et il y a roulement. (Maw *et al.*, 1976) Deux situations sont considérées lors de la résolution des équations d'impulsion (Tsuji *et al.*, 1987 ; Crowe *et al.*, 1998) :

- la sphère arrête de glisser pendant la collision (situation 1) ;
- la sphère glisse pendant toute la collision (situation 2).

La sphère arrête de glisser pendant la collision (situation 1)

Les vitesses $\overrightarrow{u}_p^{(2)}$ et $\overrightarrow{\omega}_p^{(2)}$ de la particule après la collision sont données par les équations (2.14) et (2.15).

$$u_p^{(2)} = \frac{5}{7}\left[u_p^{(0)} + \frac{2}{5}\,a_p\,\omega_{py}^{(0)}\right] \;,\quad v_p^{(2)} = \frac{5}{7}\left[v_p^{(0)} - \frac{2}{5}\,a_p\,\omega_{px}^{(0)}\right] \;,\quad w_p^{(2)} = -e_n w_p^{(0)} \tag{2.14}$$

$$\omega_{px}^{(2)} = -\frac{1}{a_p}\,u_{py}^{(2)} \;,\quad \omega_{py}^{(2)} = \frac{1}{a_p}\,u_{px}^{(2)} \;,\quad \omega_{pz}^{(2)} = \omega_{pz}^{(0)} \tag{2.15}$$

Avec u_p, v_p et w_p les composantes de la vitesse de translation de la particule et ω_{px}, ω_{py} et ω_{pz} les composantes de sa vitesse de rotation. Les indices (0) et (2) désignent des grandeurs établies avant et après le choc.

La sphère glisse pendant toute la collision (situation 2)

Les vitesses $\overrightarrow{u}_p^{(2)}$ et $\overrightarrow{\omega}_p^{(2)}$ sont fonctions du coefficient de frottement f et s'écrivent :

$$u_p^{(2)} = u_p^{(0)} + \epsilon_x f(1+e_n)\,w_p^{(0)} \;,\quad v_p^{(2)} = v_p^{(0)} + \epsilon_y f(1+e_n)\,w_p^{(0)} \;,\quad w_p^{(2)} = -e w_p^{(0)} \tag{2.16}$$

$$\omega_{px}^{(2)} = \omega_{px}^{(0)} + \frac{5}{2a_p}\,\epsilon_y f(1+e_n)\,w_p^{(0)} \;,\quad \omega_{py}^{(2)} = \omega_{py}^{(0)} - \frac{5}{2a_p}\,\epsilon_x f(1+e_n)\,w_p^{(0)} \;,\quad \omega_{pz}^{(2)} = \omega_{pz}^{(0)} \tag{2.17}$$

Avec :

$$\varepsilon_x = \frac{u_p - a_p\,\omega_{py}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|} \;,\quad \varepsilon_y = \frac{v_p + a_p\,\omega_{px}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|} \tag{2.18}$$

$\overrightarrow{G}_{c\tau}$ la composante tangentielle de la vitesse de la sphère exprimée au point de contact.
Les coefficients ε_x et ε_y quantifient la répartition de la vitesse verticale dans les directions x et y. La situation 2 est observée si la condition (2.19) est vérifiée.

$$\frac{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|}{|w_p^{(0)}|} > \frac{7}{2} f(1+e_n) \tag{2.19}$$

2.1.2 collision entre deux sphères

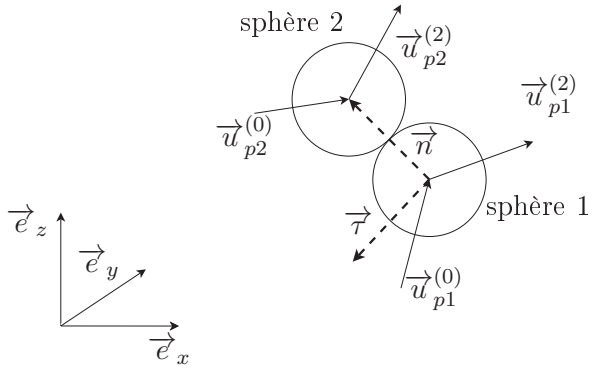


figure 2.4 – collision de deux sphères ; définition des notations utilisées

Les expressions des vitesses des deux sphères après la collision sont obtenues de la résolution des équations d'impulsion des deux solides. L'approche employée est identique à celle utilisée pour la collision d'une particule sphérique avec la paroi. Les expressions des vitesses des deux solides après la collision dépendent de la nature du mouvement relatif des deux sphères. (Crowe *et al.*, 1998) Deux situations sont envisagées :

- les deux sphères arrêtent de glisser pendant la collision (situation 1) ;
- les deux sphères glissent pendant toute la durée de la collision (situation 2).

Les sphères arrêtent de glisser pendant la collision (situation 1)

Les vitesses $\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)}$, $\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)}$, $\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)}$ et $\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)}$ des deux sphères après la collision sont données par l'équation (2.20).

$$\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)} = \overrightarrow{u}_{p1}^{(0)} - \frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\left[(1+e_n)\,G_n^{(0)}\overrightarrow{n} + \frac{2}{7}\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|\overrightarrow{\tau}\right] \tag{2.20a}$$

$$\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)} = \overrightarrow{u}_{p2}^{(0)} + \frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\left[(1+e_n)\,G_n^{(0)}\overrightarrow{n} + \frac{2}{7}\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|\overrightarrow{\tau}\right] \tag{2.20b}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)} = \overrightarrow{\omega}_{p2}^{(0)} - \frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\frac{5}{7a_{p1}}\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|\,(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{\tau}) \tag{2.20c}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)} = \overrightarrow{\omega}_{p1}^{(0)} - \frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\frac{5}{7a_{p2}}\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|\,(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{\tau}) \tag{2.20d}$$

Avec : m_{p1} et m_{p2} la masse des sphères ; a_{p1} et a_{p2} leur rayon ; $\overrightarrow{u}_{p1}$ $\overrightarrow{u}_{p1}$ leur vitesse de translation ; $\overrightarrow{\omega}_{p1}$ et $\overrightarrow{\omega}_{p1}$ leur vitesse de rotation ; G_n la composante normale au plan de contact de la vitesse relative $\overrightarrow{G}$ de la sphère 1 par rapport à la sphère 2 ; $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ la composante tangentielle de la vitesse relative $\overrightarrow{G}_c$ exprimée au point de contact.
Nous avons :

$$\overrightarrow{G}_{c\tau} = \overrightarrow{G}_c - G_n\overrightarrow{n}\ , \quad \overrightarrow{G}_c = \overrightarrow{G} + a_{p1}\overrightarrow{\omega}_{p1}\wedge\overrightarrow{n} + a_{p2}\overrightarrow{\omega}_{p2}\wedge\overrightarrow{n} \tag{2.21}$$

$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\tau}$ sont les vecteurs unité dans les directions normale et tangentielle au plan de contact. Ils sont définis comme suit.

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{x}_{p2}-\overrightarrow{x}_{p1}}{\|\overrightarrow{x}_{p2}-\overrightarrow{x}_{p1}\|} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\|} \tag{2.22}$$

Avec $\overrightarrow{x}_{p1}$ et $\overrightarrow{x}_{p2}$ la position des centres des sphères.

Les sphères glissent pendant toute la collision (situation 2)

Les vitesses $\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)}$, $\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)}$, $\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)}$ et $\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)}$ s'écrivent :

$$\overrightarrow{u}_{p1}^{(2)} = \overrightarrow{u}_{p1}^{(0)} - (1+e_n)\frac{m_2}{m_1+m_2}\,G_n^{(0)}\left(\overrightarrow{n} + f\frac{|G_n^{(0)}|}{G_n^{(0)}}\overrightarrow{\tau}\right) \tag{2.23a}$$

$$\overrightarrow{u}_{p2}^{(2)} = \overrightarrow{u}_{p2}^{(0)} + (1+e_n)\frac{m_1}{m_1+m_2}\,G_n^{(0)}\left(\overrightarrow{n} + f\frac{|G_n^{(0)}|}{G_n^{(0)}}\overrightarrow{\tau}\right) \tag{2.23b}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{p1}^{(2)} = \overrightarrow{\omega}_{p1}^{(0)} - f(1+e_n)\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{5}{2a_{p1}}|G_n^{(0)}|\,(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{\tau}) \tag{2.23c}$$

$$\overrightarrow{\omega}_{p2}^{(2)} = \overrightarrow{\omega}_{p2}^{(0)} - f(1+e_n)\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{5}{2a_{p1}}|G_n^{(0)}|\,(\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{\tau}) \tag{2.23d}$$

Si les sphères glissent pendant toute la collision, la vitesse tangentielle $\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(2)}$ est strictement supérieure à 0. Comme $\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(2)} = \overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)} - (7/2)f(1+e_n)|G_n^{(0)}|\overrightarrow{\tau}$, la situation 2 est observée si la condition (2.24) est vérifiée.

$$\|\overrightarrow{G}_{c\tau}^{(0)}\| > \frac{7}{2}f(1+e_n)|G_n^{(0)}| \tag{2.24}$$

2.1.3 application à des écoulements diphasiques dans des conduites et dans des canaux

Dans une conduite, la particule solide se déplace par bonds successifs. Ce mouvement de saltation est lié à la rugosité de la surface et à la forme de la particule qui n'est pas parfaitement sphérique.

Des modèles *hard sphere* sont développés pour représenter l'effet de ces deux paramètres sur la collision. Matsumoto et Saito (1970) (cf. Sommerfeld (1992)) cherchent à modéliser les effets de la rugosité de la paroi. Pour cela, ils représentent la paroi à l'aide de la fonction sinusoïdale (2.25)

$$z_{paroi} = A_r \sin\left(\frac{2\pi}{L_r}\, x + \alpha\right) \tag{2.25}$$

Avec : z_{paroi} la position de la paroi ; A_r l'amplitude de la rugosité ; L_r la distance entre deux rugosités ; α une variable aléatoire de distribution uniforme qui est comprise entre 0 et 2π.
Les résultats du modèle sont comparés de façon satisfaisante à des données expérimentales obtenues dans un canal horizontal. Cependant les parois en verre du canal sont dans les expériences lisses et l'effet représenté par le modèle est plutôt lié à la forme de la particule. Tsuji et ses coauteurs (1985a, 1987) s'intéressent également aux effets de la rugosité de la paroi et proposent le modèle de paroi virtuelle (*virtual wall model*). La paroi horizontale est remplacée par une paroi « virtuelle » qui est inclinée d'un angle θ_b par rapport à l'horizontale (cf. la figure 2.5). Tsuji *et*

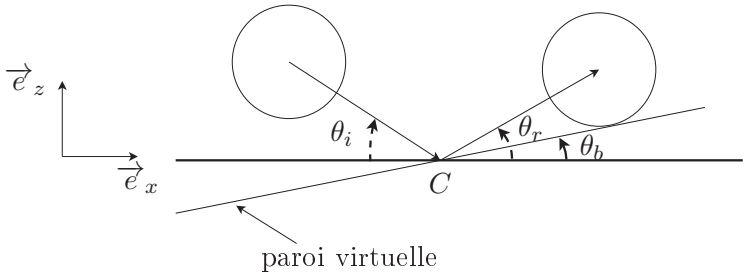


figure 2.5 – modèle de paroi virtuelle (Tsuji *et al.*, 1985a,1987)

al. (1987) déterminent l'expression de l'angle θ_b pour des écoulements en canal. Si l'angle incident θ_i est inférieur à 7°, l'angle θ_b est donné par l'équation (2.26).

$$\theta_b = -5\, R^4\, \delta_0(\theta_i - 7)\ , \quad \delta_0 = \frac{2{,}3}{Fr} - \frac{91}{Fr^2} + \frac{1231}{Fr^3} \tag{2.26}$$

Avec Fr le nombre de Froude et R une variable aléatoire comprise entre 0 et 1.
Si l'angle θ_i est supérieur à 7°, il est nul. Dans le modèle de paroi virtuelle de Sommerfeld (1992), l'angle θ_b est différent de zéro quelle que soit la valeur de l'angle θ_i et il est estimé par une variable aléatoire de distribution normale.
Les effets liés à la forme de la particule sont étudiés par Tsuji *et al.* (1989a,b). Dans le modèle de Tsuji *et al.* (1989a,b), la particule n'est pas sphérique et sa forme est caractérisée par deux grandeurs r et θ. Ces grandeurs sont définies à partir du vecteur $\overrightarrow{OC}$ comme dans la figure 2.6 avec :

$$\overrightarrow{OC} = r\,(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_z) \tag{2.27}$$

O le centre de la particule solide et C le point de contact.

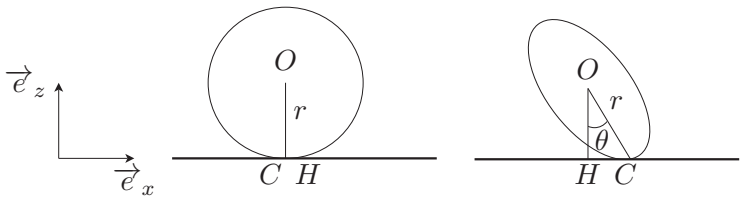


figure 2.6 – collision entre une particule solide et une paroi pour une particule sphérique et une particule de forme quelconque ; définition des grandeurs r et θ

Elles dépendent de la position de la particule par rapport à la paroi au début de la collision qui est déterminée à l'aide d'une variable aléatoire. Les simulations numériques réalisées par Tsuji *et*

al. (1989a,b) montrent qu'une petite modification de la sphéricité des particules solides entraîne une grande variation dans les trajectoires.

2.1.4 application au mouvement de saltation du grain

L'approche *hard sphere* est en général utilisée pour modéliser le mouvement de saltation du grain au-dessus d'un lit de sédiments : cf. les modèles de Niño et coauteurs (1994a,b, 1998a,b), de Lee et coauteurs (2000, 2006) et de Lukerchenko *et al.* (2006). Le plan de contact est incliné d'un angle θ_b par rapport à l'horizontale. Cet angle dépend de la disposition des grains au voisinage du point de contact et son estimation dans les expériences est difficile. Niño *et al.* (1994a) considèrent qu'il varie de façon aléatoire, même dans la situation dans laquelle le lit est une rangée de sphères. Des considérations géométriques permettent d'établir des relations entre l'angle θ_b, l'angle incident θ_i et la distance r, grandeurs définies dans la figure 2.7. Niño *et al.* (1994a) supposent que l'angle

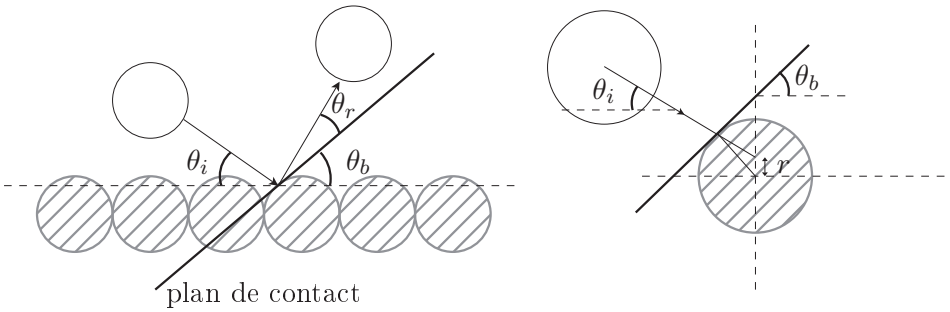


figure 2.7 – définition des angles θ_i, θ_r, θ_b et de la distance r (Niño *et al.*, 1994a)

θ_b est compris entre $-30°$ et $30°$ et que la distance r est une variable aléatoire de distribution uniforme. Cette dernière hypothèse est équivalent à celle selon laquelle la position de la particule varie uniformément à la surface. Si le grain entre en collision avec le lit comme montré dans la figure 2.7, sa vitesse après la collision est donnée par l'équation (2.28)

$$u_p^{(2)} = e_\tau \cos(\theta_i + \theta_b) \frac{\cos(\theta_r + \theta_b)}{\cos\theta_r} \| \overrightarrow{u}_p^{(0)} \| \tag{2.28a}$$

$$w_p^{(2)} = e_\tau \cos(\theta_i + \theta_b) \frac{\sin(\theta_r + \theta_b)}{\cos\theta_r} \| \overrightarrow{u}_p^{(0)} \| \tag{2.28b}$$

Avec u_p et w_p les composantes de la vitesse de la particule dans les directions x et z.
Si le grain frappe la face aval du grain du lit, les vitesses $u_p^{(2)}$ et $w_p^{(2)}$ s'écrivent (Lee *et al.*, 2000) :

$$u_p^{(2)} = e_\tau \cos(\theta_i + \theta_b) \frac{\cos(\theta_r - \theta_b)}{\cos\theta_r} \| \overrightarrow{u}_p^{(0)} \| \tag{2.29a}$$

$$w_p^{(2)} = e_\tau \cos(\theta_i + \theta_b) \frac{\sin(\theta_r - \theta_b)}{\cos\theta_r} \| \overrightarrow{u}_p^{(0)} \| \tag{2.29b}$$

Les coefficients de restitution e_n et e_τ sont égaux aux rapports des composantes normales et tangentielles au plan de contact de la vitesse du grain après et avant la collision :

$$e_n = -\frac{u_{pn}^{(2)}}{u_{pn}^{(0)}} , \quad e_\tau = \frac{u_{p\tau}^{(2)}}{u_{p\tau}^{(0)}} \tag{2.30}$$

Dans le modèle développé par Lee *et al.* (2006), le mouvement de la particule est tridimensionnel. Les auteurs proposent les expressions des trois composantes de la vitesse après la collision.

2.2 modèles *soft sphere*

Quand deux particules solides entrent en collision, une force normale de répulsion apparaît entre elles, elle a pour origine l'élasticité du matériau constituant les particules. (Haff et Anderson, 1993) Dans les modèles *hard sphere*, l'élasticité est prise égale à l'infini et la force de répulsion est infinie. Dans les modèles *soft sphere*, l'élasticité a une valeur finie et les forces de contact pendant la collision sont finies et sont estimées. Les modèles *soft sphere* reposent sur les équations de

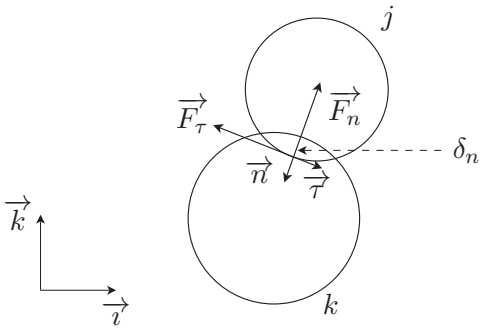


figure 2.8 – représentation de la collision de deux sphères dans l'approche *soft sphere* ; définition des notations utilisées

mouvement des particules en collision et sur la possibilité pour celles-ci de s'interpénétrer. En effet quand deux particules entrent en collision, elles se déforment. Dans ces modèles, au lieu de se déformer, leur volume se recouvre, comme montré dans la figure 2.8. La force de répulsion sera d'autant plus grande que le recouvrement des deux volumes dans la direction normale, défini par la distance δ_n, est important. Outre la force normale, les deux particules sont soumises à une force de frottement dans la direction tangentielle au plan de contact.
Les modèles *soft sphere* cherchent à représenter le comportement pendant la collision de ces deux forces normale et tangentielle. Ils sont proposés initialement par Cundall et Strack (1979) pour décrire les contacts entre des disques placés entre quatre parois en mouvement. Plus généralement, ils sont appliqués à l'étude des arrangements granulaires dans lesquels la collision entre les particules ne peut pas être considérée comme ponctuelle et dans lesquels la particule solide est en collision avec plusieurs particules (cf. Thornton (2000) et Haff et Anderson (1993) pour des exemples). Ils dépendent de la relation choisie entre la force de contact (normale et tangentielle) et le recouvrement. Dans les modèles les plus simples, la force de contact est exprimée comme la force créée par une combinaison de ressorts et d'amortisseurs. Des modèles non linéaires (Thornton et Randall, 1988 ; Kitahara *et al.*, 2000 ; Matuttis *et al.*, 2000 ; Li *et al.*, 2005) sont également développés. Ils reposent sur les travaux de Hertz (1882) et de Mindlin et Deresiewicz (1953) et proposent une description plus réaliste des forces de contact. Hertz (1882) montre que la force normale s'écrit :

$$F_n = K_n \delta_n^{3/2} \tag{2.31}$$

Avec K_n le coefficient d'élasticité et δ_n l'interpénétration des deux solides.
Le coefficient K_n dépend de la forme des solides et du matériaux les constituant. Par exemple, le coefficient K_n est donné par l'équation (2.32) si les deux solides en collision sont deux sphères.

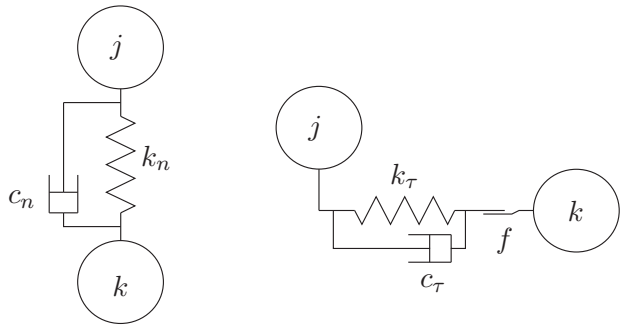
$$\frac{1}{K_n} = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)\left(\frac{1}{a_{p1}} + \frac{1}{a_{p2}}\right)^{-1/2} \tag{2.32}$$

Avec : E_1 et E_2 les modules de Young et ν_1 et ν_2 les coefficient de Poisson des matériaux constituant les deux sphères ; a_{p1} et a_{p2} leur rayon.

Nous choisissons de représenter les interactions mécaniques entre les grains avec le modèle linéaire de Cundall et Strack (1979), conformément aux modèles de Haff et coauteurs (1993) et de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009).

2.2.1 modèle de Cundall et Strack (1979)

Dans le modèle de Cundall et Strack (1979), les forces de contact sont représentées par les forces créées par un système de ressorts et d'amortisseurs montés en parallèle dans les directions normale et tangentielle, comme le montre la figure 2.9. Les ressorts modélisent la déformation des deux



composante normale composante tangentielle

figure 2.9 – représentation de la force de contact dans le modèle de Cundall et Strack (1979) (Crowe *et al*, 1998)

particules solides pendant la collision et les amortisseurs déterminent la dissipation de l'énergie inhérente à la collision. Les raideurs des ressorts k_n et k_τ et les coefficients d'amortissement c_n et c_τ influent notamment sur les coefficients de restitution et sur la durée de la collision. Ainsi, la modélisation de la collision élastique est obtenue en l'absence des amortisseurs. Par ailleurs, la loi de Coulomb est prise en compte en ajoutant, dans la direction tangentielle, une glissière (caractérisée par le coefficient de frottement f).
Lorsqu'il y a contact entre les particules j et k, la force de contact exercée par la particule k sur la particule j s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{F}_c = F_n \overrightarrow{n} + F_\tau \overrightarrow{\tau} \tag{2.33}$$

Avec : F_n et F_τ les composantes normale et tangentielle au plan de contact de la force de contact ; $\overrightarrow{n}$ le vecteur unité perpendiculaire au plan de contact, dirigé vers la particule k ;

$$\overrightarrow{n} = \frac{\overrightarrow{x}_{pk} - \overrightarrow{x}_{pj}}{\| \overrightarrow{x}_{pk} - \overrightarrow{x}_{pj} \|} \tag{2.34}$$

$\overrightarrow{x}_{pj}$ et $\overrightarrow{x}_{pk}$ la position des deux particules ; $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unité dans la direction tangentielle au plan de contact (cf. la figure 2.9).
Lorsqu'il n'y a pas de contact entre les particules j et k, la force F_c est nulle.

Composante normale de la force de contact F_n

La composante normale de la force de contact F_n est la somme des forces créées par un ressort et un amortisseur montés en parallèle entre les deux particules.

$$\overrightarrow{F}_n = -\left(k_n \delta_n + c_n G_n\right) \overrightarrow{n} \tag{2.35}$$

Avec : k_n et c_n la raideur et le coefficient d'amortissement dans la direction normale ; δ_n le recouvrement des volumes des deux particules dans la direction normale ; G_n la composante normale de la vitesse relative $\overrightarrow{G}$ de la particule j par rapport à la particule k.

$$G_n = \overrightarrow{G}.\overrightarrow{n} \ , \quad \overrightarrow{G} = \overrightarrow{u}_{pj} - \overrightarrow{u}_{pk} \tag{2.36}$$

La distance δ_n est donnée par l'intégrale de la vitesse G_n entre l'instant t_0 qui correspond au début de la collision et l'instant t.

$$\delta_n = \int_{t_0}^{t} G_n \, dt' \tag{2.37}$$

Si les deux particules sont des sphères, δ_n est donné par la relation (2.38).

$$\delta_n = a_{pj} + a_{pk} - \| \overrightarrow{x}_{pj} - \overrightarrow{x}_{pk} \| \tag{2.38}$$

Avec a_{pj} et a_{pk} les rayons des deux sphères.

Composante tangentielle de la force de contact F_τ

La composante tangentielle de la force de contact est donnée par l'équation (2.39).

$$\overrightarrow{F}_\tau = -k_\tau \overrightarrow{\delta}_\tau - c_\tau \overrightarrow{G}_{c\tau} \tag{2.39}$$

Avec : k_τ et c_τ la raideur et le coefficient d'amortissement dans la direction tangentielle ; $\overrightarrow{\delta}_\tau$ le recouvrement dans la direction tangentielle ; $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ la composante tangentielle de la vitesse relative $\overrightarrow{G}_c$ exprimée au point de contact (qui est la vitesse de glissement au point de contact).

$$\overrightarrow{G}_c = \overrightarrow{G} + a_{pj} \overrightarrow{\omega}_{pj} \wedge \overrightarrow{n} + a_{pk} \overrightarrow{\omega}_{pk} \wedge \overrightarrow{n} \ , \quad \overrightarrow{G}_{c\tau} = \overrightarrow{G}_c - G_n \overrightarrow{n} \tag{2.40}$$

$\overrightarrow{\delta}_\tau$ est obtenue de l'intégrale de la vitesse de glissement $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ entre les instants t_0 et t.

$$\overrightarrow{\delta}_\tau = \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{G}_{c\tau} \, dt' \tag{2.41}$$

La loi de Coulomb s'applique et si la condition (2.42) est vérifiée

$$\| \overrightarrow{F}_\tau \| > f_0 \| \overrightarrow{F}_n \| \tag{2.42}$$

la force tangentielle s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_\tau = -f \| \overrightarrow{F}_n \| \overrightarrow{\tau} \tag{2.43}$$

Avec f et f_0 les coefficients de frottement dynamique et statique et $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unité :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{G}_{c\tau}}{\| \overrightarrow{G}_{c\tau} \|} \tag{2.44}$$

Le modèle de collision fait appel à cinq coefficients : les raideurs k_n et k_τ, les coefficients d'amortissement c_n et c_τ et le coefficient de frottement f. Excepté le coefficient de frottement f, ces coefficients n'ont pas de signification physique. Ils ont cependant une influence sur des grandeurs « mesurables » telles que le coefficient de restitution e_n. Des relations analytiques entre les coefficients et les grandeurs mesurables sont déterminées en considérant le cas de la collision directe entre deux sphères. Elles sont utilisées pour déterminer la valeur des coefficients.

2.2.2 collision directe entre deux sphères

Le mouvement de deux sphères de rayon a_{pj} et a_{pk} en collision directe est assimilé au mouvement de deux masses ponctuelles m_j et m_k reliées par un ressort k_n et un amortisseur c_n montés en parallèle (cf. la figure 2.10). La longueur du ressort est égale à la distance entre les deux masses. A l'instant initial t_0, elle est égale à la somme des rayons $a_{pj} + a_{pk}$. Le mouvement de ces deux masses est décrit par l'équation (2.45).

$$m_{jk} \frac{d^2 \delta_n}{dt^2} + c_n \frac{d\delta_n}{dt} + k_n \delta_n = 0 \tag{2.45}$$

Avec m_{jk} la masse réduite : $m_{jk} = m_j m_k / (m_j + m_k)$.
La distance δ_n est égale à la différence entre les distances entre les deux masses à l'instant t_0 et à l'instant t. Elle représente le recouvrement des volumes des deux sphères.

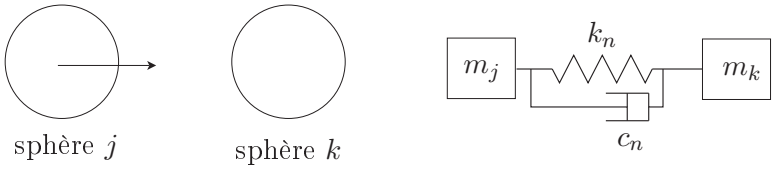


figure 2.10 – collision directe entre deux sphères

Le coefficient d'amortissement c_n est égal à 0

Si $c_n = 0$, la collision est parfaitement élastique. La distance δ_n est donnée par l'équation (2.46).

$$\delta_n = \delta_{n\max 0} \sin \omega_0 t \tag{2.46}$$

Avec :

$$\delta_{n\max 0} = \frac{v_n^{(0)}}{\omega_0} \ , \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_n}{m_{jk}}} \tag{2.47}$$

$v_n^{(0)}$ la vitesse relative des deux masses à l'instant initial (avant la collision). (Le temps t est mesuré à partir du début de l'impact.)
$\delta_{n\max 0}$ correspond à la compression maximale du ressort, au moment où toute l'énergie cinétique initiale du système est transformée en énergie potentielle (qui égale à $k_n\delta_{n\max 0}^2/2$). La durée de la collision T_0 est égale au rapport π/ω_0 et s'écrit :

$$T_0 = \pi\sqrt{\frac{m_{jk}}{k_n}} \tag{2.48}$$

Le coefficient c_n est différent de 0

La forme de la solution de l'équation (2.45) dépend du signe de $c_n^2 - 4k_n m_{jk}$. Seule la solution obtenue pour $c_n < 2\sqrt{k_n m_{jk}}$ est ici significative. La distance δ_n est donnée par l'équation (2.49).

$$\delta_n = \delta_{n\max 1} \exp(-\beta t) \sin \omega_1 t \tag{2.49}$$

Avec :

$$\delta_{n\max 1} = \frac{v_n^{(0)}}{\omega_1} \ , \quad \beta = \frac{c_n}{2m_{jk}} \ , \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{2.50}$$

La durée de la collision T_1 est égale au rapport π/ω_1 qui s'écrit :

$$T_1 = \frac{2\pi m_{jk}}{\sqrt{4k_n m_{jk} - c_n^2}} \tag{2.51}$$

Ce résultat montre qu'une collision avec dissipation ($c_n \neq 0$) dure plus longtemps qu'une collision élastique. Le coefficient de restitution e_n, qui est défini comme le rapport de la vitesse relative des deux sphères avant et après la collision, est donné par l'équation (2.52).

$$e_n = \exp\left(-\frac{\pi\beta}{\omega_1}\right) = \exp\left(-\frac{\pi c_n}{\sqrt{4k_n m_{jk} - c_n^2}}\right) \tag{2.52}$$

Ainsi le coefficient de restitution dépend de deux coefficients du modèle, k_n et c_n.

Temps caractéristiques de la collision

Le pas de temps utilisé dans les simulations doit être inférieur au temps caractéristique de la collision. L'étude de la collision directe met en évidence trois temps caractéristiques qui sont : 1) la durée de la collision T_0 lorsque $c_n = 0$; 2) la durée de la collision T_1 lorsque $c_n \neq 0$; 3) T_{damp} lié à l'amortissement du système (Haff et Anderson, 1993). Le temps T_{damp} est défini comme l'inverse de β :

$$T_{\text{damp}} = \frac{1}{\beta} = \frac{2m_{jk}}{c_n} \tag{2.53}$$

Dans le cas des collisions entre les grains de sédiments, le coefficient d'amortissement c_n est petit et le système est fortement sous-amorti. Nous avons $T_{\text{damp}} \gg T_0$. Haff et Anderson (1993) en déduisent une condition entre le pas de temps Δt et la raideur k_n.

$$\Delta t \ll \pi\sqrt{\frac{m_{jk}}{k_n}} \tag{2.54}$$

La condition est équivalente à celle proposée par Cundall et Strack (1979). Cundall et Strack (1979) fixent pour des raisons de stabilité le pas de temps à une fraction inférieur à 1 du pas de temps critique Δt_c. Celui-ci est déterminé en considérant une masse m reliée par un ressort à une paroi. Il est estimé à $2\sqrt{m/k_n}$.

2.2.3 coefficients du modèle de collision

Dans le modèle non linéaire de Hertz (1882), la raideur K_n est déterminée directement à partir des propriétés des matériaux des deux solides (module de Young et coefficient de Poisson). Dans le modèle de Cundall et Strack (1979), les coefficients ne peuvent pas être estimées de cette façon car il n'existe pas de relation analytique entre les coefficients et les propriétés des matériaux. Leur valeur est choisie compte tenu de leur influence sur des grandeurs qui sont jugées pertinentes. Les coefficients influent ainsi sur l'interpénétration des grains pendant la collision, sur la dissipation d'énergie du grain due à la collision et sur le pas de temps utilisé dans les simulations. Le recouvrement des grains conditionne l'intensité des forces de contact et il correspond à la déformation des particules qui est observée lors de la collision. Pour être conforme à la réalité, il doit être suffisamment petit. L'étude de la collision directe de deux sphères montre que le recouvrement δ_n dans la direction $\overrightarrow{n}$ est une fonction décroissante de la raideur k_n. Le pas de temps contrôle la durée des simulations et il doit être suffisamment grand. Il augmente lorsque la raideur k_n diminue. La dissipation d'énergie pendant la collision est une grandeur mesurable et il existe des estimations du coefficient de restitution pour la collision de deux grains. Dans le modèle de Cundall et Strack (1979), ce coefficient dépend de la raideur des ressorts et des coefficients d'amortissement.

Raideurs k_n et k_τ

La valeur des raideurs k_n et k_τ est choisie selon deux critères :

1) des distances δ_n et δ_τ (qui quantifient le recouvrement des volumes) pas trop grandes ;
2) le pas de temps Δt pas trop petit.

La distance δ_n est jugée pas trop grande si elle reste petite par rapport aux rayons des grains. Dans le cas d'une collision directe et parfaitement élastique, la condition sur le raideur k_n s'écrit comme suit (Haff et Anderson, 1993) :

$$k_n \gg \frac{m_{jk}{v_n^{(0)}}^2}{\min(a_{pj}^2, a_{pk}^2)} \tag{2.55}$$

La raideur k_n doit être d'autant plus grande que le grain est gros. Haff et Anderson (1993) étudient l'influence de la raideur k_n sur la réponse du lit de sédiments à l'impact d'un grain.

Les valeurs de k_n testées sont comprises entre 125 et 8000 N.m^{-1} et le diamètre des grains est égal à 0,328 mm. L'influence de la raideur k_n reste faible excepté pour les valeurs k_n les plus faibles ($k_n \leq 250$ N.m^{-1}). Les grains qui sont mis en mouvement suite à l'impact sont identiques d'une simulation à l'autre et leur vitesse évolue peu. Haff et Anderson (1993) observent que les petites vitesses ($< 0{,}01$ m.s^{-1}) sont plus sensibles à la valeur k_n. L'impact du grain apporte au système de l'énergie et l'accélération inhérente des grains du lit et la transmission des forces sont contrôlées essentiellement selon Haff et Anderson (1993) par la géométrie de l'arrangement. Lorsque la raideur k_n diminue, les grains deviennent plus souples et pour une force appliquée donnée, leur déplacement augmente. Le contrôle lié à la géométrie du système est moins efficace. Comme le nombre de collisions augmente, l'énergie dissipée croît et la vitesse de rebond du grain à l'origine de l'impact tend à diminuer. Elle est égale à 0.38 m.s^{-1} pour $k_n = 8000$ N.m^{-1} et à 0,32 m.s^{-1} pour $k_n = 125$ N.m^{-1}. Dans les simulations de Haff et Anderson (1993), le pas de temps est constant et lorsque la raideur k_n augmente, la précision du schéma d'intégration diminue et une petite quantité d'énergie est introduite dans le système de façon numérique. Ceci peut aussi expliquer une partie de l'augmentation de la vitesse de rebond lorsque la raideur k_n augmente. Jiang et Haff (1993) s'intéressent à l'influence de la raideur k_n sur la hauteur de saltation dans l'eau. Pour cela, ils simulent le transport par charriage de particules de diamètres compris entre 6 et 10 mm pour quatre valeurs k_n comprises entre 10^3 et 10^5 N.m^{-1}. La forme de la distribution de la hauteur de saltation dépend peu de la raideur k_n. Nous ne pouvons pas déduire de l'étude Jiang et Haff (1993) une corrélation entre la hauteur de saltation et la raideur k_n. Nous observons que le nombre de rebonds et leur hauteur sont sensiblement constants pour $k_n \leq 10^4$ N.m^{-1} et qu'ils diminuent pour $k_n = 10^5$ N.m^{-1}.
Ces deux études montrent que la valeur des raideurs des ressorts devraient avoir peu d'influence sur les résultats du modèle de transport. Pour cette raison et en l'absence de données, les raideurs k_n et k_τ sont prises identiques dans le modèle développé. La valeur utilisée dépend de la distribution de la taille des grains des sédiments, elles varient de 10^2 N.m^{-1} pour les plus petits diamètres à 10^5 N.m^{-1} pour les plus gros. (Le diamètre moyen d_m est compris entre 0,3 et 3,5 mm.) La valeur dépend également du processus simulé, la déposition du lit ou son érosion. Des valeurs supérieurs sont choisies lors de la déposition. La déposition du lit se fait dans un fluide au repos, les grains sont laissés se déposer l'un après l'autre et les particules du lit sont fixes. Ces conditions rendent le grain « plus sensible » aux collisions et nécessitent d'avoir des distances δ_n et δ_τ et un pas de temps plus faibles.

Dans le modèle de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009), l'approche est différente. Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) fixent le pas de temps à 0,0002 s et déterminent la raideur k_n à partir de la condition de stabilité sur le pas de temps. Elle est défini comme suit.

$$k_n = \frac{m_p}{2}\left(\frac{2\pi}{\Delta t_c}\right)^2 \quad , \quad \Delta t_c = 20\Delta t \tag{2.56}$$

Dans les simulations, le diamètre des grains est égal à 5 mm et la raideur k_n vaut 214 N.m^{-1}. La raideur k_τ est donnée par la relation (2.57).

$$k_\tau = \frac{k_n}{2(1+\nu)} \tag{2.57}$$

Avec ν le coefficient de Poisson.
Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) supposent $\nu = 0{,}2$ et la raideur k_τ est égale à 82 N.m^{-1}.

Coefficients d'amortissement c_n et c_τ

Les coefficients d'amortissement c_n et c_τ déterminent la dissipation d'énergie des grains due à la collision. Dans le modèle original de Cundall et Strack (1979), ils sont proportionnels aux

raideurs k_n et k_τ.

$$c_n = \beta k_n \ , \quad c_\tau = \beta k_\tau \tag{2.58}$$

Crowe *et al.* (1998) proposent de prendre la valeur du coefficient d'amortissement correspondant à la situation d'amortissement critique dans le système de deux masses reliées par un ressort et un amortisseur (cf. l'équation (2.45)). Nous avons :

$$c_n = 2\sqrt{m_{jk} k_n} \ , \quad c_\tau = 2\sqrt{m_{jk} k_\tau} \tag{2.59}$$

Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) utilisent une relation pour c_n similaire à celle de Crowe *et al.* (1998) et expriment le coefficient c_τ en fonction de c_n et ν.

$$c_n = \alpha 2\sqrt{m_p k_n} \ , \quad c_\tau = \frac{c_n}{2(1+\nu)} \tag{2.60}$$

α est un coefficient de calibration qui est estimé à 1. Dans le modèle de Haff et Anderson (1993), le coefficient c_n est fixé afin d'avoir le coefficient e_n désiré. Il est donné par la relation théorique (2.61) qui est établie dans le vide (absence de force fluide) pour la collision directe entre deux sphères.

$$c_n = \frac{2\sqrt{k_n m_{jk}}\,|\ln e_n|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_n)^2}} \tag{2.61}$$

Lorsque la particule entre en collision avec une paroi, la masse m_{jk} est remplacée par la masse de la particule. Le coefficient c_τ est pris égal à $2m_{jk}\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k_n/m_{jk}}$. Haff et Anderson (1993) notent que le temps caractéristique lié à l'amortissement dans la direction tangentielle est, avec cette valeur, égal à $1/\omega_0$ qui est approximativement la durée de la collision (cf. l'étude du mouvement de deux sphères en collision).
Dans le modèle de transport développé, les coefficients c_n et c_τ sont estimés de façon identique, à savoir à partir des coefficients de restitution e_n et e_τ dans les directions normale et tangentielle et de l'équation (2.61).

$$e_n = -\frac{G_n^{(2)}}{G_n^{(0)}} \ , \quad e_\tau = \frac{G_\tau^{(2)}}{G_\tau^{(0)}} \tag{2.62}$$

Avec G_τ la composante tangentielle de la vitesse relative.
L'équation (2.61) est strictement valide dans le vide. Nous représentons dans la figure 2.11 l'évolution du coefficient e_n en fonction de c_n qui est déterminée pour la collision entre deux particules sphériques et pour la collision entre une particule sphérique et une paroi dans le vide et dans l'eau. Les évolutions dans l'eau et dans le vide sont assez proches et la relation (2.61) peut être utilisée pour l'évaluation des coefficients c_n et c_τ. Les paramètres d'entrée du modèle sont les coefficients e_n et e_τ et pour chaque collision, les coefficients d'amortissement sont calculés. Dans les simulations, le rapport des composantes normales de la vitesse relative après et avant la collision est approximativement égal à la valeur e_n entrée. Ce n'est pas le cas pour le rapport des composantes tangentielles à cause de l'application de la loi de Coulomb. Sa valeur dépend de fait peu du coefficient e_τ entré (cf. le paragraphe 2.3).

Niño et ses coauteurs (1994a, 1998a) déterminent les coefficients de restitution e_n et e_τ pour des particules de sable et de gravier. Leur estimation repose sur l'observation du mouvement de saltation de grains au-dessus du lit. Des valeurs sont aussi trouvées, suivant une méthode un peu similaire, par Tsuchiya et Aoyama (1970) (Sekine et Kikkawa, 1992), par Hu et Hui (1996) et par Lee et ses coauteurs (2000, 2006). Mais leurs expériences concernent des particules qui ne sont pas sédimentaires : des billes de verre, des coquilles de noix par exemple. Or les coefficients dépendent du matériau constituant les grains.
Niño et ses coauteurs (1994a,1998a) estiment les coefficients e_n et e_τ de la façon suivant. Ils déterminent à partir de l'enregistrement de trajectoires les vitesses du grain avant et après la

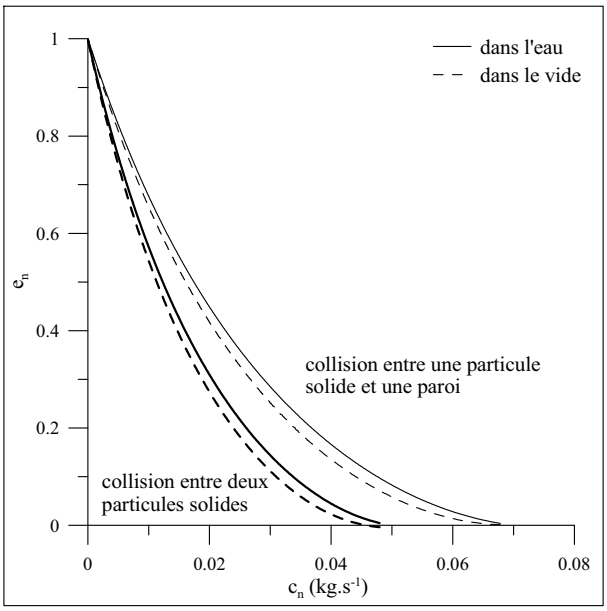


figure 2.11 – relations entre le coefficient d'amortissement normal c_n et le coefficient de restitution normal e_n obtenues dans le vide et dans l'eau

collision. Ils analysent ces vitesses selon le modèle *hard sphère* qui est détaillé dans le paragraphe 2.1.4. L'estimation des coefficients e_n et e_τ requiert la connaissance de l'angle d'inclinaison θ_b du plan de contact par rapport à l'horizontal. Cet angle dépend de la disposition des grains à la surface et il est supposé varier de façon aléatoire. Il n'est pas mesuré dans les expériences et Niño et ses coauteurs (1994a, 1998a) proposent une méthode pour le calculer. Niño et ses coauteurs (1994a, 1998a) constatent que le coefficient de restitution normal varie de 0 à 0,5 et qu'il dépend du rapport θ/θ_c avec θ le paramètre de Shields et θ_c sa valeur critique. Si $\theta/\theta_c < 3$, il est donné par la relation approchée (2.63).

$$e_n = 0{,}75 - 0{,}25\frac{\theta}{\theta_c} \tag{2.63}$$

Si $\theta/\theta_c \geq 3$, le coefficient est pris nul. Le coefficient e_τ est relativement constant. Il dépend du type de sédiment. Pour les particules de sable, il est égal à 0,89 et pour les particules de gravier à 0,73. Les valeurs trouvées par Niño et ses coauteurs (1994a, 1998a) sont liées à la modélisation de l'angle θ_b qui apparaît assez approximative. Niño et ses coauteurs (1994a, 1998a) supposent que l'angle θ_b est compris entre $-30°$ et $30°$. Ils montrent que l'intervalle de variation de θ_b influe sur les coefficients obtenus. Par exemple, si l'intervalle augmente, le coefficient e_n diminue et le coefficient e_τ augmente. Calantoni (2002) indique les résultats non publiés de Drake (1996) selon lesquels le coefficient de restitution varie pour des particules de sable et de gravier entre 0,1 et 0,8. Les valeurs les plus fréquentes sont comprises entre 0,1 et 0,5.

Dans les modèles DEM, les valeurs e_n et e_τ choisies semblent plutôt des valeurs par défaut compte de tenu de l'absence de données expérimentales fiables. Dans le modèle de Haff et Anderson (1993) dans lequel le fluide porteur est l'air, le coefficient e_n est fixé à 0,7. Jiang et Haff (1993) choisissent une valeur plus faible car dans l'eau les phénomènes de lubrification sont importants et contribuent à augmenter la dissipation d'énergie des grains lors des collisions (Abbott et Francis, 1977 ; Gordon *et al.*, 1972). Ils supposent $e_n = 0{,}2$. Dans le modèle de McEwan et ses coauteurs (2001, 2004), le coefficient e_n est égal à 0,5 et le coefficient e_τ à 1. Les simulations de Heald *et al.* (2004) montrent que l'influence du coefficient de restitution normal sur le débit de sédiments est significative seulement si la vitesse de frottement est faible. Calantoni (2002) estime le débit de sédiments pour $e_n = 0{,}15$, 0,3 et 0,6 et les résultats sont semblables. Il suppose $e_n = 0{,}6$. Dans

le modèle de transport, nous prenons :

$$e_n = 0{,}2 \ , \quad e_\tau = 0{,}89 \tag{2.64}$$

Coefficient de frottement f

Le coefficient f est le coefficient de frottement dynamique entre deux solides en contact. C'est une grandeur qui peut être mesurée et qui dépend des matériaux constituant les solides. Sa valeur pour deux surfaces sèches est supérieure à celle obtenues pour les mêmes surfaces mouillées. Elle est estimée à 0,75 pour un contact calcaire/calcaire et à 0,71 pour un contact grès/grès (Poncelet, 1870). Jiang et Haff (1993) notent que les grains de sable et de gravier sont constitués de plusieurs minéraux et qu'il est difficile de donner une estimation du coefficient f. Or les simulations de Jiang et Haff (1993) montrent que le débit de sédiments, le nombre de grains transportés et la hauteur de saltation dépendent du coefficient f. Dans le modèle de Jiang et Haff (1993), le coefficient f modélise le frottement et les effets sur le transport qui sont liés à la forme réel des grains. Il est égal à 0,5. Dans le cas de grains anguleux, Jiang et Haff (1993) estiment qu'il pourrait être supérieur à 1. Lorsque le coefficient f augmente, la vitesse de glissement devrait être plus souvent nulle. Haff et Anderson (1993) étudient l'influence du coefficient f sur la réponse du lit à l'impact d'un grain. Le coefficient f varie de 0 à 2 et contrairement aux simulations de Jiang et Haff (1993), son influence est négligeable excepté pour $f = 0$. Haff et Anderson (1993) prennent $f = 0{,}5$. Calantoni (2002) trouve également que le transport de sédiments ne dépend pas de f sauf pour $f = 0$ et utilise $f = 1$. Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) supposent $f = 0{,}577$. Dans le modèle de transport, le coefficient f est égal à 0,75.

Le tableau 2.1 récapitule les approches et les valeurs des coefficients utilisées pour décrire la collision dans les modèles DEM. Le modèle de Calantoni (2002) repose sur les travaux de Mindlin et Deresiewicz (1953) et la définition des forces de contact est différente.

2.3 application des modèles

Les deux approches *hard sphere* et *soft sphere* reposent sur des théories différentes et nécessitent une implémentation propre. La figure 2.13 présente la méthode d'implémentation utilisée dans les deux approches pour déterminer le mouvement du grain. Nous souhaitons dans ce paragraphe les comparer et vérifier qu'elles sont équivalentes. Pour cela, elles sont appliquées au cas de la collision d'une sphère avec la paroi. La collision est supposée se dérouler dans le vide, la particule n'est pas soumise à des forces fluide et son mouvement dépend des seules forces de contact. La masse volumique des solides est égale à 2650 kg.m^{-3}.
La particule solide entre en collision avec la paroi avec un angle θ_i comme dans la figure 2.12. L'impact génère sa rotation selon l'axe y.

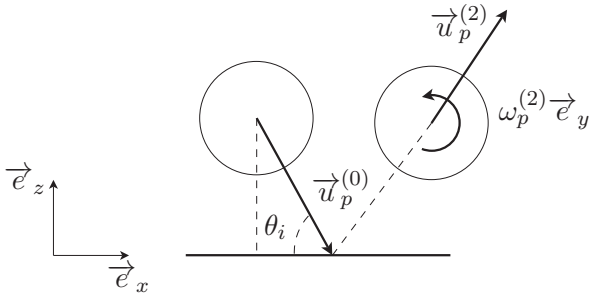
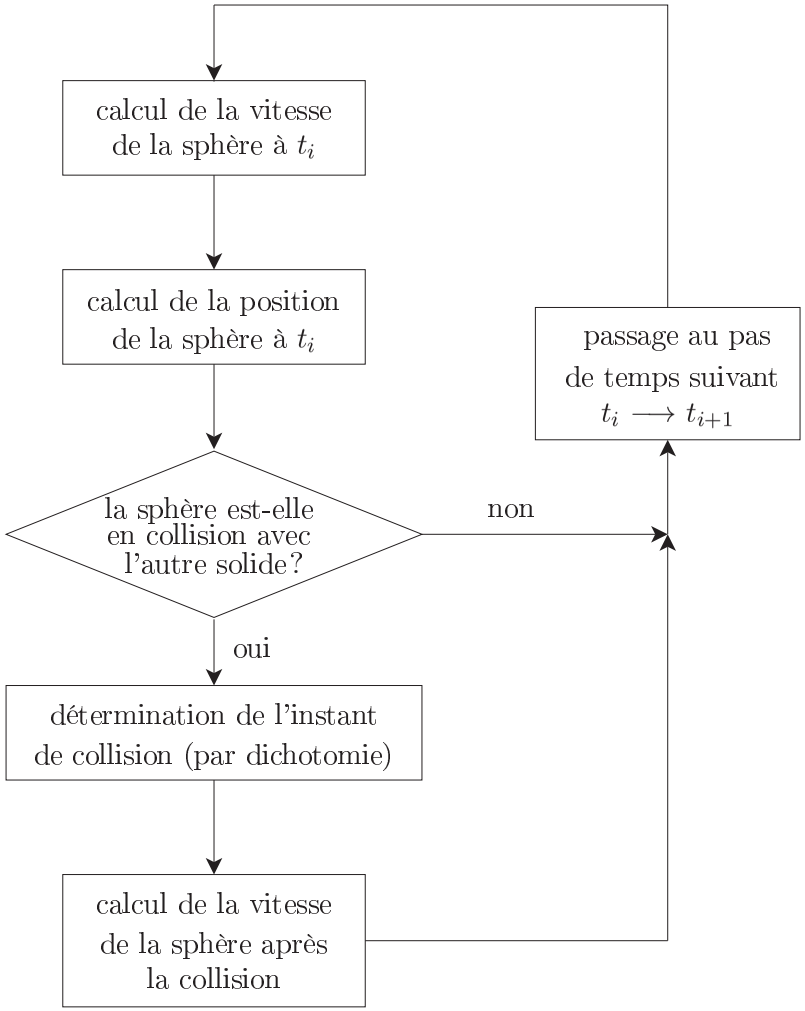


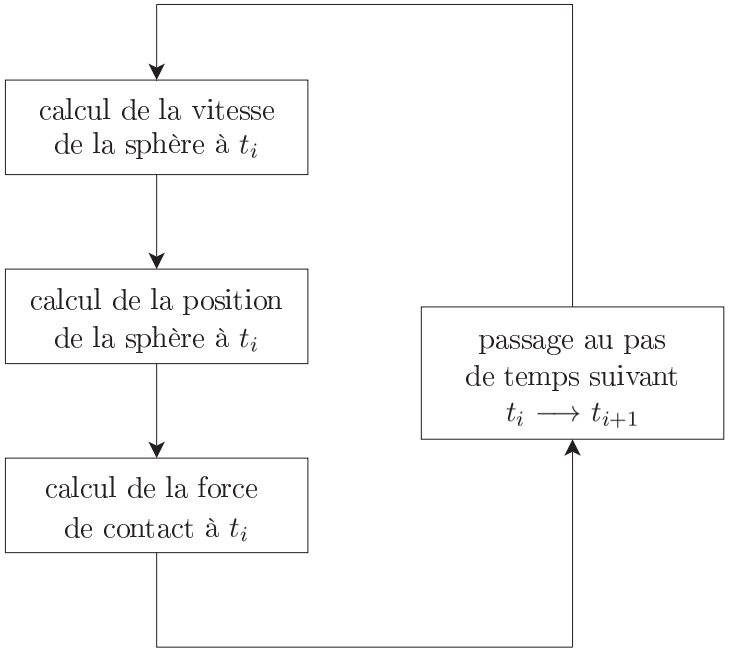
figure 2.12 – la particule solide entre en collision avec la paroi avec un angle θ_i

auteurs	objet	modèle de collision	d_p	k_n (N.m^{-1})	k_τ (N.m^{-1})	e_n	c_n (kg.s^{-1})	c_τ (kg.s^{-1})	f
Haff et Anderson (1993)	impact d'un grain sur un lit de sédiments dans l'air	*soft sphere*	0,328 mm	2.10^3	2.10^3	0,7	$9{,}0.10^{-2}$	$2{,}0.10^{-2}$	0,5
Jiang et Haff (1993)	transport par charriage dans l'eau	*soft sphere*	de 6 à 10 mm	10^3	10^3	0,2	de 0,5 à 1,1	de 1,1 à 2,4	0,5
Jefcoate (1995)	transport par charriage dans l'eau	*hard sphere*	de 0,4 à 7 mm	n.u.	n.u.	n.c.	n.u.	n.u.	n.c.
Iwashita et Oda (2000)	micro-déformations dans un arrangement granulaire	*soft sphere*	de 8 à 12 mm	10^8	10^7	$\rightarrow 1^*$	0,05	0,05	0,49
McEwan et ses coauteurs (2001, 2004)	déposition d'un lit et transport par charriage dans l'eau	*hard sphere*	de 2 à 4 mm	n.u.	n.u.	0,5	n.u.	n.u.	n.c.
Calantoni (2002)	transport dit *sheet flow* en zone côtière	*soft sphere*	de 0,5 à 2 mm	n.u.	n.u.	0,6	n.u.	n.u.	1
Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009)	transport par charriage dans l'eau	*soft sphere*	5 mm	214	83	$\rightarrow 0^*$	0,38	0,15	0,57
modèle de transport	transport par charriage dans l'eau	*soft sphere*	0,3 mm	100	100	0,2	$1{,}7.10^{-3}$	$1{,}4.10^{-4}$	0,75
modèle de transport	transport par charriage dans l'eau	*soft sphere*	1 mm	1000	1000	0,2	$2{,}8.10^{-2}$	$2{,}8.10^{-3}$	0,75
modèle de transport	transport par charriage dans l'eau	*soft sphere*	2,5 mm	2500	2500	0,2	$2{,}1.10^{-1}$	$1{,}7.10^{-2}$	0,75

tableau 2.1 – approche et valeurs des coefficients utilisées pour décrire la collision dans les modèles DEM ; le symbole * indique que la valeur e_n est déduite de l'équation (2.52) ; n.c. signifie non communiqué et n.u. non utilisé



modélisation *hard sphere*



modélisation *soft sphere*

figure 2.13 – étapes de calcul utilisées dans les deux approches *hard sphere* et *soft sphere* pour déterminer le mouvement du grain

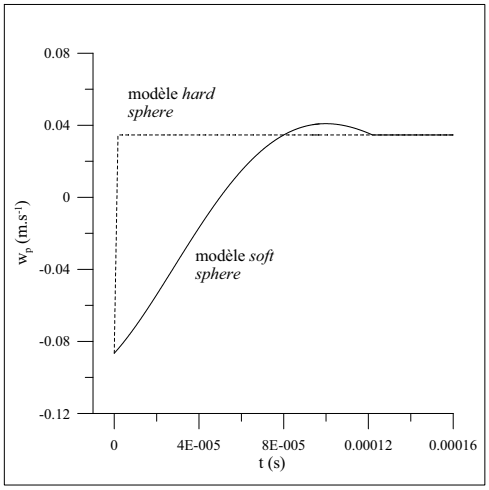
Les données utilisées dans les simulations sont indiquées dans le tableau 2.2. La figure 2.14 montre

d_p	1 mm	e_n	0,4
$\|\overrightarrow{u}_p(0)\|$	0,1 m.s^{-1}	e_τ	0,89
$\|\overrightarrow{\omega}_p(0)\|$	0 rad.s^{-1}	c_n	$2{,}1.10^{-2}$ kg.s^{-1}
θ_i	60°	c_τ	$2{,}8.10^{-3}$ kg.s^{-1}
Δt	7.10^{-4} s	f	0,25
k_n, k_τ	1000 N.m^{-1}		

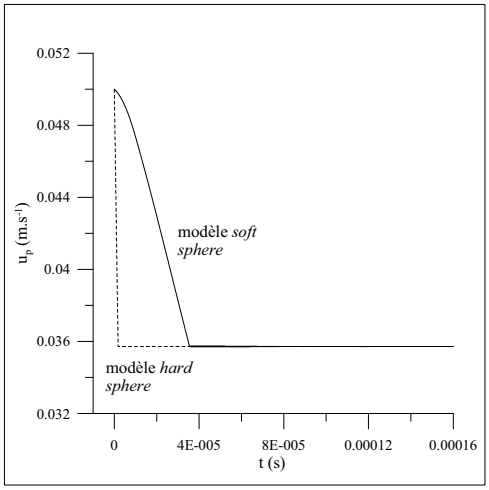
tableau 2.2 – données utilisées pour simuler le mouvement d'une particule solide entrant en collision avec une paroi

l'évolution des vitesses de translation u_p et w_p et de la vitesse de rotation ω_{py} de la particule. Les deux modèles donnent des vitesses de la particule après la collision identiques. Dans le modèle *soft sphere*, la variation des vitesses n'est pas instantanée et la durée de la collision est égale à T_1 ($\simeq 1{,}22.10^{-4}$ s). La vitesse verticale w_p augmente, devient positive à la fin de la phase de compression, passe par un maximum, puis diminue (faiblement) jusqu'à sa valeur finale. La vitesse horizontale u_p et la vitesse de rotation ω_{py} se stabilisent après un temps relativement court. L'interpénétration des solides est faible, le rapport $|\delta_n/a_p|$ est inférieur à 0,5%.
La figure 2.15 montre l'évolution de la force de contact $\overrightarrow{F}_c$ et du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ correspondant qui s'exercent sur la particule pendant la collision dans le modèle *soft sphere*. Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ est exprimé au centre de la particule. Le déroulement de la collision, à savoir le début des phases de compression et de restitution et la fin de la collision, peut être déduit de l'évolution de la force créée par le ressort k_n qui est proportionnelle à δ_n et qui est montrée dans la figure 2.15a. La composante normale F_n de la force de contact est au début de la collision négative, c'est une force de répulsion. Elle diminue, atteint un minimum pendant la phase de compression, puis augmente et devient positive. A la fin de la collision, elle est une force d'attraction. Cela correspond à la diminution de la vitesse w_p observé à partir de $t = 10^{-4}$ s. La composante tangentielle F_τ est la plupart du temps égale à $f|F_n|$. Elle est égale à la force créée par le ressort k_τ et par l'amortisseur c_τ seulement au début de la collision. Le maximum de la force F_τ à $t = 10^{-4}$ s est lié au changement de signe de la composante F_n. La vitesse de glissement diminue et pour $t > 3{,}5.10^{-5}$ s, elle oscille autour de zéro. Le système devient instable, le vecteur $\overrightarrow{\tau}$ oscille entre les vecteurs $-\overrightarrow{e}_x$ et $\overrightarrow{e}_x$. Ce phénomène entraîne l'oscillation de la composante horizontale F_{cx} de la force de contact ainsi que celle du moment $\mathcal{M}_{cy}$. Il coïncide avec les vitesses u_p et ω_{py} constantes. Selon Haff et Anderson (1993), ce phénomène d'oscillation est lié à un amortissement dans la direction tangentielle trop faible. Il est probable que lorsque la particule est soumise à des forces fluide, ce phénomène d'oscillation disparaisse.

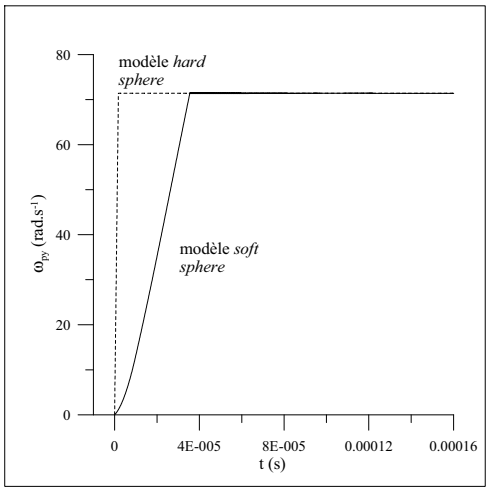
Pendant la collision, compte tenu de l'application de la loi de Coulomb, la composante tangentielle F_τ de la force de contact dépend peu de la raideur k_τ et du coefficient d'amortissement c_τ. La figure 2.16 montre l'évolution temporelle de la force F_τ et de la vitesse de glissement en fonction du coefficient c_τ pour deux angles θ_i : $\theta_i = 20°$ et $\theta_i = 60°$. $\theta_i = 20°$ correspond à la situation dans laquelle la particule glisse pendant toute la collision. Lorsque le coefficient c_τ diminue, la force créée par le ressort et l'amortisseur est plus faible et l'utilisation de la relation (2.43) est retardée. L'intervalle de temps Δt^* pendant lequel la force F_τ est égale à la force créée par le ressort et l'amortisseur reste petit par rapport à la durée totale de la collision. Par conséquent, l'influence de la raideur k_τ et du coefficient c_τ sur la vitesse de la particule après la collision est



(a) vitesse verticale w_p

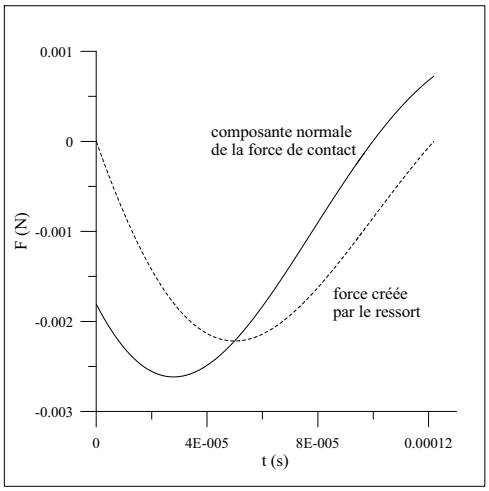


(b) vitesse horizontale u_p

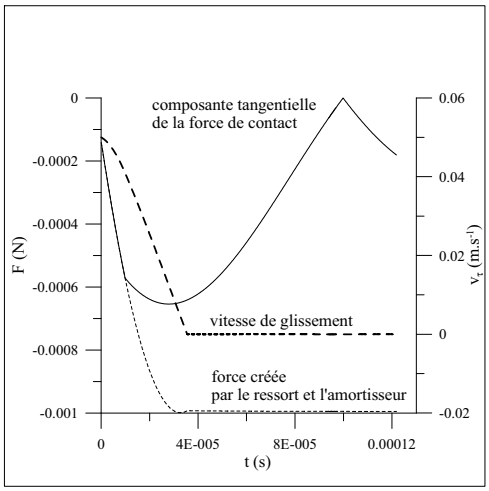


(c) vitesse de rotation ω_{py}

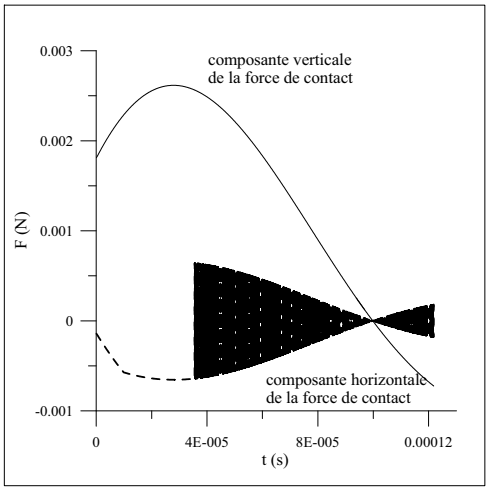
figure 2.14 – évolution des vitesses de la particule qui entre en collision avec une paroi dans les modèles *hard sphere* et *soft sphere*



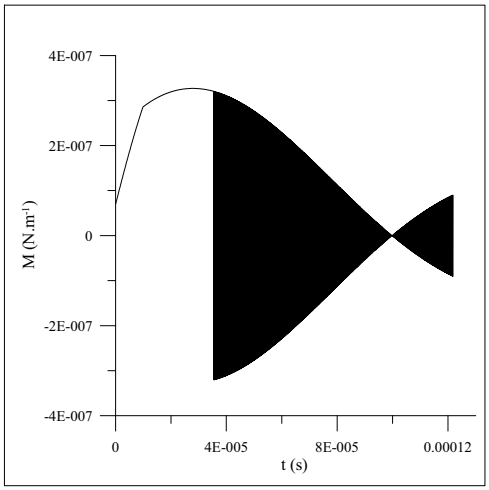
(a) composante normale F_n de la force de contact



(b) composante tangentielle F_τ de la force de contact

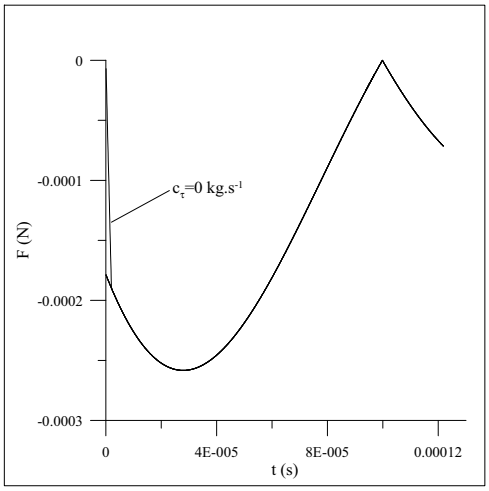


(c) force de contact exercée sur la particule par la paroi

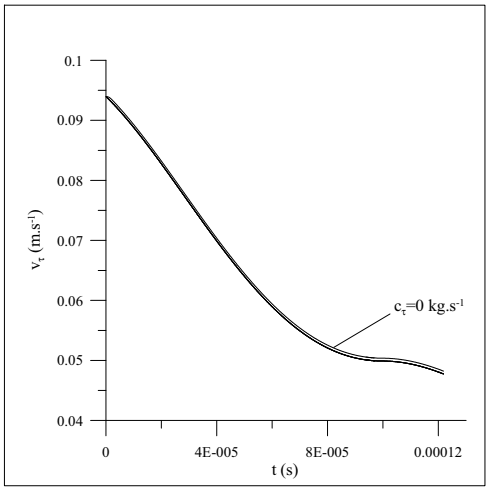


(d) moment de la force de contact $\mathcal{M}_{cy}$ exprimé au centre de la particule

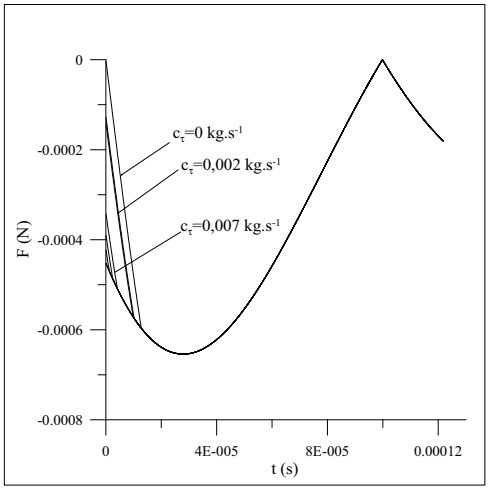
figure 2.15 – évolution de la force de contact $\overrightarrow{F}_c$ et de son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ exercés sur la particule pendant la collision dans le modèle *soft sphere* ; $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e}_z$, $\overrightarrow{\tau} = \pm\overrightarrow{e}_x$



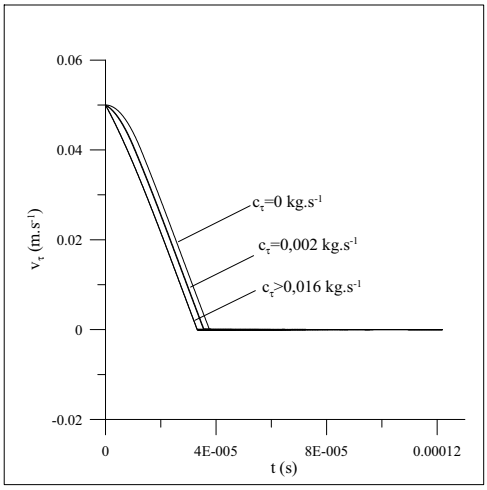
(a) force F_τ lorsque $\theta_i = 20°$



(b) vitesse de glissement lorsque $\theta_i = 20°$



(c) force F_τ lorsque $\theta_i = 60°$



(d) vitesse de glissement lorsque $\theta_i = 60°$

figure 2.16 – évolution temporelle de la composante tangentielle F_τ de la force de contact et de la vitesse de glissement en fonction du coefficient d'amortissement c_τ pour deux angles incidents θ_i

faible comme le montre le calcul du coefficient de restitution tangentiel e_τ. Lorsque l'angle θ_i diminue, l'intervalle Δt^* et l'influence des deux paramètres diminuent.

Evolution du coefficient de restitution tangentiel e_τ en fonction de l'angle incident

Le coefficient de restitution tangentiel e_τ est défini comme le rapport des vitesses horizontales de la particule après et avant la collision.

$$e_\tau = \frac{u_p^{(2)}}{u_p^{(0)}} \tag{2.65}$$

Dans le modèle *hard sphere*, lorsque la particule arrête de glisser pendant la collision (situation 1), le coefficient e_τ est constant et égal à 5/7. lorsque la particule glisse pendant toute la collision (situation 2), nous avons :

$$e_\tau = 1 - f(1 + e_n)\tan\theta_i \tag{2.66}$$

Avec $e_n = 0{,}4$ et $f = 0{,}25$.
La figure 2.17 présente l'évolution du coefficient e_τ en fonction de l'angle θ_i dans les deux modèles de collision. Elle indique que la particule glisse pendant toute la collision si $\theta_i < 40°$. Le coefficient

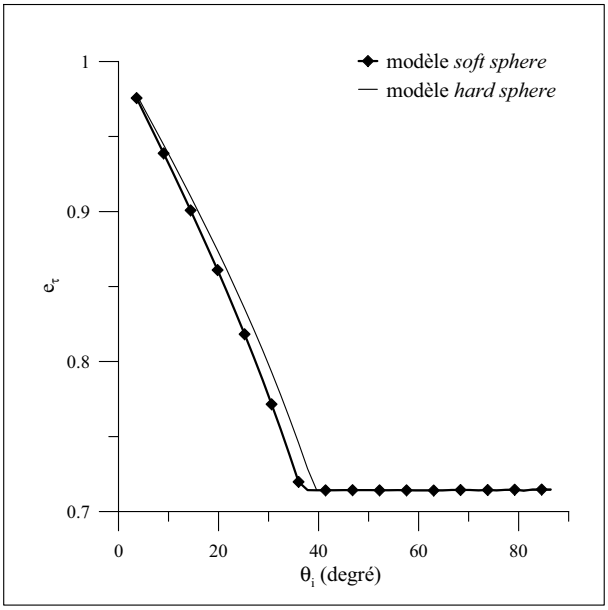


figure 2.17 – évolution du coefficient de restitution tangentiel e_τ en fonction de l'angle incident θ_i dans les modèles *hard sphere* et *soft sphere*

de restitution e_τ calculé dans le modèle *soft sphere* est très proche de la valeur trouvée dans le modèle *hard sphere*. Ainsi, il apparaît indépendant de la raideur k_τ et du coefficient c_τ. Il n'est pas lié au coefficient de restitution tangentiel utilisé comme paramètre d'entrée dans le modèle de transport. Ce n'est pas le cas pour le coefficient de restitution normal. La valeur calculée à la fin de la collision est égale à celle entrée. Le coefficient e_τ s'écrit pour $\theta_i < 36°$:

$$e_\tau = 1 - 0{,}275(1 + e_n)\tan\theta_i \tag{2.67}$$

La figure 2.17 montre que le modèle *soft sphere* tend à sous-estimer la vitesse $u_p^{(2)}$ de la particule après la collision et à surestimer sa vitesse de rotation $\omega_{py}^{(2)}$ par rapport au modèle *hard sphere*.

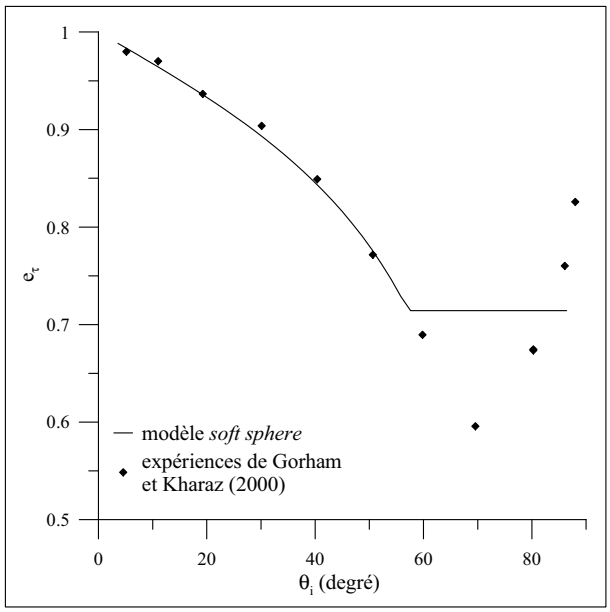


figure 2.18 – évolution du coefficient de restitution tangentielle e_τ en fonction de l'angle incident θ_i déterminée numériquement par le modèle *soft sphere* et expérimentalement par Gorham et Kharaz (2000)

L'évolution du coefficient e_τ en fonction de θ_i est comparée dans la figure 2.18 aux résultats de Gorham et Kharaz (2000) obtenus expérimentalement pour une particule sphérique en oxyde d'aluminium qui entre en collision avec une paroi en verre. Les conditions expérimentales et les paramètres d'entrée du modèle *soft sphere* sont indiqués dans le tableau 2.3. Les résultats numé-

d_p	5 mm	e_n	0
ρ_s	3400 kg.m^{-3}	e_τ	0,99
$\|\overrightarrow{u}_p(0)\|$	3,9 m.s^{-1}	c_n	0 kg.s^{-1}
$\|\overrightarrow{\omega}_p(0)\|$	0 rad.s^{-1}	c_τ	0,0027 kg.s^{-1}
k_n, k_τ	1000 N.m^{-1}	f	0,0092

tableau 2.3 – paramètres d'entrée du modèle *soft sphere* utilisés pour simuler la collision observée dans les expériences de Gorham et Kharaz (2000)

riques sont conformes aux valeurs expérimentales pour $\theta_i < 60°$. Lorsque l'angle θ_i augmente, le coefficient e_τ calculé par le modèle *soft sphere* est constant et égal à 5/7. Dans les expériences, il diminue, atteint un minimum pour $\theta_i \simeq 70°$, puis augmente et devient supérieur à 5/7. Cette évolution est liée à des phénomènes de micro-glissement (Maw *et al.* , 1976, 1981), c'est-à-dire la surface de contact entre la particule et la paroi comprend des zones de glissement et des zones de non-glissement. Ces phénomènes apparaissent lorsque l'angle θ_i est suffisamment grand. Ils ne sont pas pris en compte dans le modèle *soft sphere* (comme dans le modèle *hard sphere*). Une modélisation est proposée par Maw *et al.* (1976, 1981).

2.4 conclusion

Le modèle de transport est développé pour étudier le mouvement des grains à la surface et à l'intérieur du lit. Ce mouvement dépend des collisions entre les grains. Ces collisions sont de deux types : des collisions ponctuelles à la surface du lit et des contacts continus (*i.e.* qui durent dans le temps) à l'intérieur de l'arrangement. Leurs effets peuvent être modélisés par deux approches, l'approche *hard sphere* et l'approche *soft sphere*. Les deux approches sont équivalentes dans le cas de la collision ponctuelle entre deux solides. Mais, par sa conception (utilisation des équations d'impulsion notamment), le modèle *hard sphere* ne permet pas de décrire correctement les contacts à l'intérieur de l'arrangement. Ainsi, c'est l'approche *soft sphere* qui est choisie dans le modèle numérique développé.
L'estimation des coefficients du modèle de collision s'appuie dans cette thèse sur des études expérimentales sur la collision entre deux grains de sédiment et sur des études numériques basées sur les modèles DEM de transport. Elle repose également sur la réponse numérique du modèle (« stabilité » des simulations) qui est liée essentiellement à l'amplitude du recouvrement des grains (cf. le rôle de la raideur k_n du ressort dans la direction normale). Par ailleurs, l'étude de la collision d'une particule avec la paroi montre que la raideur k_τ et le coefficient c_τ n'influent pas sur la vitesse du grain après la collision.

3 application de la méthode DEM à la déposition des lits de sédiments

La mise en mouvement des lits de sédiments dépend de la disposition des grains à l'intérieur de l'arrangement. Les grains doivent être initialement dans une position relativement stable et similaire à celle observée dans les rivières. Pour cette raison, les lits utilisés dans les simulations sont créés en lâchant successivement les grains et en les laissant se déposer. Les grain rebondissent plusieurs fois jusqu'à la dissipation totale de leur énergie. Le mouvement du grain en train de se déposer est déterminé en appliquant la méthode DEM. Une autre méthode pour obtenir des arrangements granulaires consiste à lâcher les grains à partir d'une position choisie aléatoirement dans le plan horizontal et à les fixer dès qu'ils entrent en collision avec la surface du lit. Les lits ainsi générés sont poreux et les particules le plus souvent dans un état très instable. Il est probable que les seuils d'érosion déterminés avec ces lits soient surestimés par rapport à l'expérience.
Les lits de sédiments sont déposés dans un fluide au repos (Jefcoate, 1995 ; McEwan et Heald, 2001). Le mouvement du grain est déduit de la résolution de son équation de mouvement et de la détermination des forces de contact à l'aide du modèle de Cundall et Strack (1979). La méthode utilisée pour déposer les lits fait l'objet de ce chapitre.

3.1 méthode de déposition

Les grains sont déposés l'un après l'autre. Leur position initiale varie aléatoirement dans le plan horizontal selon une loi uniforme. Ils tombent sous l'effet de la gravité dans un fluide qui est au repos. Ils rebondissent plusieurs fois sur la surface avant de s'immobiliser. Une fois déposé, le grain est fixe, sa position n'est pas modifiée par l'impact sur le lit des grains lâchés après lui. La démarche utilisée pour déposer le grain est décrite de façon schématique dans la figure 3.1. Elle comprend huit étapes. Les étapes 1 et 2 servent à définir les caractéristiques du grain, à savoir son diamètre et sa position initiale. Le diamètre est choisi de façon aléatoire parmi les diamètres de la granulométrie du sédiment. Les cinq étapes suivantes permettent de déterminer la position finale du grain dans le lit de sédiments, qui découle de son mouvement au-dessus du lit. La détermination du mouvement du grain (étape 6) s'appuie sur celle des forces qui s'exercent sur lui (étapes 3 et 4) et sur celle de sa vitesse (étape 5). L'étape 7 ouvre un processus itératif. Elle consiste à estimer la déposition du grain à partir de la quantité de son énergie cinétique et de la stabilité de son équilibre. Si la quantité d'énergie cinétique du grain est suffisamment petite et si son équilibre est stable, le grain est déposé (étape 8). Si ces conditions ne sont pas vérifiées, le grain n'est pas déposé et le programme redémarre à l'étape 3. Le grain est considéré dans un état stable s'il est contact avec au moins trois autres grains du lit.

Equation de mouvement du grain

Le grain en mouvement est soumis à trois forces fluide : la force de flottabilité, la force de traînée et la force de masse ajoutée. La force de portance liée à la non uniformité de l'écoulement est ici nulle car le fluide est au repos. La force générée par la rotation du grain n'est pas prise en

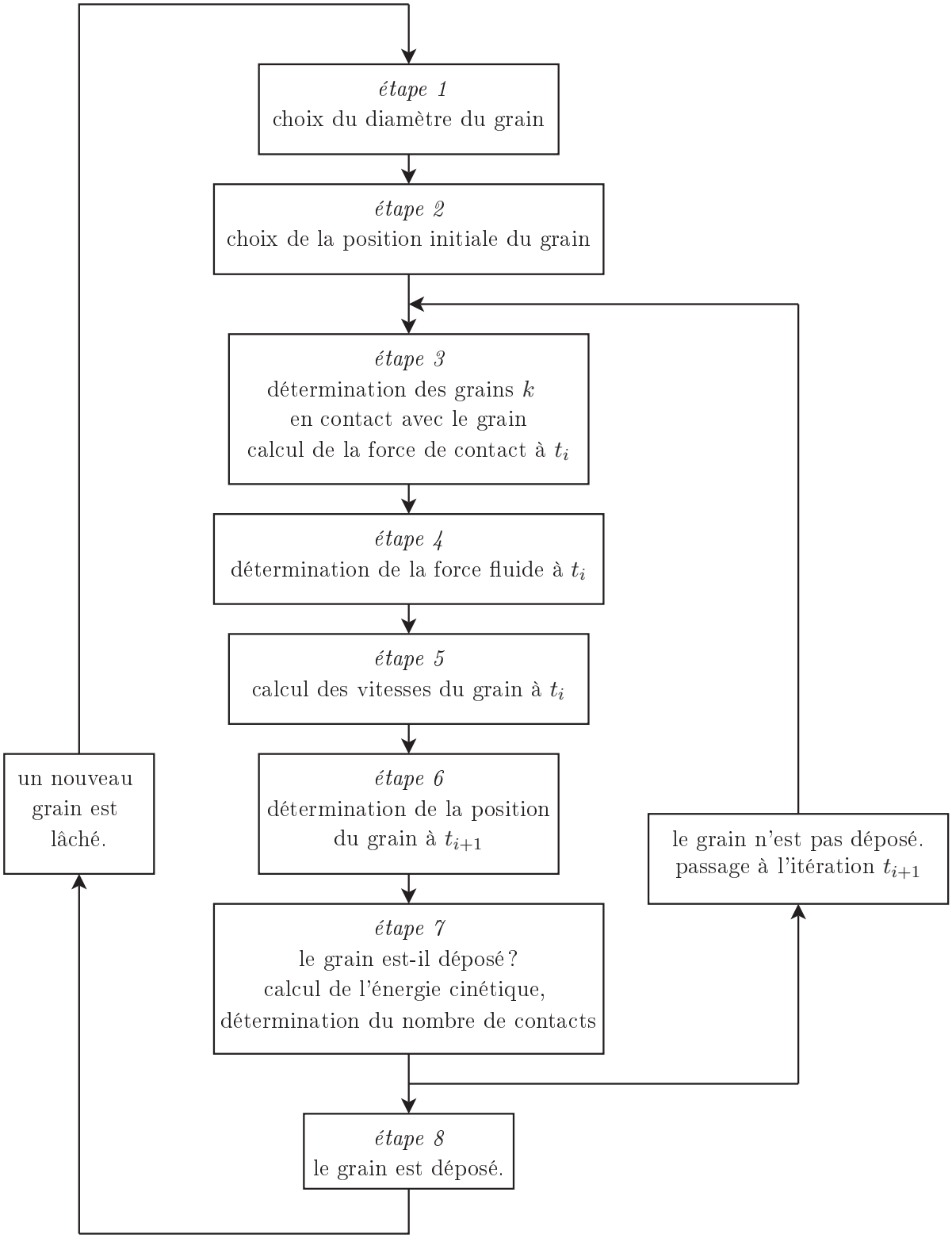


figure 3.1 – présentation schématique de la démarche utilisée pour déposer un grain

compte dans le modèle. Le grain subit aussi une force de contact s'il est en collision avec d'autres grains du lit. Dans ces conditions, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\rho V_p\,(\gamma + C_M)\frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} = (\rho_s - \rho)\,V_p\,\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_D + \overrightarrow{F}_c \tag{3.1a}$$

$$\mathcal{I}\,\frac{d\overrightarrow{\omega}_p}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_c \tag{3.1b}$$

Avec : $\overrightarrow{u}_p$ et $\overrightarrow{\omega}_p$ la vitesse de translation et de rotation du grain ; V_p le volume du grain ; ρ_s et ρ la masse volumique du sédiment et du fluide ; $\gamma = \rho_s/\rho$; C_M le coefficient de masse ajoutée ($C_M = 0{,}5$) ; $\overrightarrow{F}_D$ la force de traînée ; $\overrightarrow{F}_c$ la force de contact ; $\mathcal{I}$ le moment d'inertie du grain exprimé en son centre ; $\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ le moment de la force de contact exprimé au centre du grain. (cf. le paragraphe 1.7 de cette partie)
Le moment d'inertie $\mathcal{I}$ est celui d'une sphère pleine et il est égal à $(2/5)m_p\,a_p^2$ avec a_p le rayon de la sphère. La force de traînée $\overrightarrow{F}_D$ est donnée par la relation de Schiller et Nauman (1933) si $Re_p < 800$.

$$\overrightarrow{F}_D = -6\pi\mu a_p\left(1 + 0{,}15Re_p^{0{,}687}\right)\overrightarrow{u}_p \tag{3.2}$$

Avec Re_p le nombre de Reynolds de la particule basé sur son diamètre.
Si $Re_p \geq 800$, le coefficient de traînée est constant et la force $\overrightarrow{F}_D$ s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_D = -\frac{1}{2}C_D\pi a_p^2\|\overrightarrow{u}_p\|\overrightarrow{u}_p\ , \quad C_D = 0{,}445 \tag{3.3}$$

Calcul de la force de contact

La force de contact $\overrightarrow{F}_C$ est exprimée à l'instant t à partir du modèle de collision de Cundall et Strack (1979).

$$\overrightarrow{F}_n = -k_n[\|\overrightarrow{x}_{pj} - \overrightarrow{x}_{pk}\| - a_{pj} - a_{pk}]\overrightarrow{n} + c_n G_n\overrightarrow{n} \tag{3.4a}$$

$$\overrightarrow{F}_\tau = -k_\tau\int_{t_0}^{t}\overrightarrow{G}_{c\tau}\,dt' + c_\tau\overrightarrow{G}_{c\tau} \tag{3.4b}$$

Avec : $\overrightarrow{F}_n$ et $\overrightarrow{F}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de la force de contact exercée par le grain k sur le grain j ; $\overrightarrow{x}_{pj}$ et $\overrightarrow{x}_{pk}$ la position des centres des grains j et k ; a_{pj} et a_{pk} leur rayon ; G_n et $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ les composantes normale et tangentielle de la vitesse relative du grain j par rapport au grain k exprimée au point de contact ; t_0 l'instant du début de la collision.
k_n et k_τ sont les raideurs des ressorts dans les directions normale et tangentielle, elles sont supposées identiques et sont fixées à 10^4 N.m^{-1} ou 10^5 N.m^{-1} en fonction de la taille des grains. c_n et c_τ sont les coefficients d'amortissement normal et tangentiel. Ils sont estimés à partir des coefficients de restitution e_n et e_τ qui sont égaux à 0,2 et 0,89.
Le comportement de la force tangentielle est régi par la loi de Coulomb. Ainsi, si $\|\overrightarrow{F}_\tau\| > f\|\overrightarrow{F}_n\|$, elle est donnée par l'équation (3.5).

$$\overrightarrow{F}_\tau = -f\|\overrightarrow{F}_n\|\overrightarrow{\tau}\ , \quad \overrightarrow{\tau} = \frac{\overrightarrow{G}_{c\tau}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|} \tag{3.5}$$

Le coefficient de frottement dynamique f est égal à 0,25 ou 0,75. La valeur des coefficients du modèle de collision est discutée dans le paragraphe 2.2.3 de cette partie.
L'intégration de la vitesse $\overrightarrow{G}_{c\tau}$ dans l'équation (3.4) s'effectue de deux façons.

1) Si la collision des deux grains commence entre deux pas de temps (*i.e.* si le grain n'est pas en collision avec le grain k à l'instant t_i et s'il est en collision avec ce grain à l'instant t_{i+1}), l'intégration repose sur la méthode des rectangles :

$$\int_{t_0}^{t_{i+1}}\overrightarrow{G}_{c\tau}(t')\,dt' = \overrightarrow{G}_{c\tau}(t_{i+1})\,(t_{i+1} - t_0) \tag{3.6}$$

L'intervalle de temps $t_{i+1} - t_0$ est approchée par la relation (3.7).

$$t_{i+1} - t_0 \sim \frac{\| \overrightarrow{x}_{pj}(t_{i+1}) - \overrightarrow{x}_{pk} \| - a_{pj} - a_{pk}}{|G_n(t_{i+1})|} \tag{3.7}$$

2) Si le grain j est en collision avec le grains k aux deux instants t_i et t_{i+1}, l'intégrale est calculée par la méthode des trapèzes. Nous avons :

$$\int_{t_0}^{t_{i+1}} \overrightarrow{G}_{c\tau}(t')\, dt' = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{G}_{c\tau}(t_i) + \overrightarrow{G}_{c\tau}(t_{i+1})\right) \Delta t + \int_{t_0}^{t_i} \overrightarrow{G}_{c\tau}(t')\, dt' \tag{3.8}$$

Pour déterminer les particules en collision avec le grain, l'approche dite *boxing* (Rajamani *et al.*, 2000 ; Heald *et al.*, 2004) est utilisée. Dans cette approche, l'espace 3D est divisé en cellules qui sont des cubes de côté égal au diamètre maximal. La position des grains est définie à partir des cellules auxquelles ils appartiennent. S'ils sont en contact avec d'autres grains, ceux-ci appartiennent aux mêmes cellules. Ainsi, nous calculons à chaque pas de temps uniquement les distances entre le grain j en train de se déposer et les grains k appartenant aux mêmes cellules. L'approche *boxing* permet de réduire le temps de calcul.

Position à l'instant t du grain

La position du grain à l'instant t est déduite de la résolution de l'équation du mouvement (3.1) et de l'équation (3.9).

$$\overrightarrow{x}_p = \frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} \tag{3.9}$$

La résolution de ces équations est réalisée à l'aide d'un schéma d'Euler. A l'instant initial, la vitesse du grain est égale à sa vitesse de sédimentation w_s et sa vitesse de rotation est nulle.

$$\overrightarrow{u}_p = -w_s \overrightarrow{e}_z \ , \quad \overrightarrow{\omega}_p = \overrightarrow{0} \tag{3.10}$$

La vitesse de sédimentation est obtenue de l'équation (3.1a) en prenant $\overrightarrow{u}_p$ constant.
Le pas de temps Δt est donné par l'équation (3.11).

$$\Delta t = 2\alpha\sqrt{\frac{m}{k_n}} \tag{3.11}$$

m est la masse du plus gros grain présent dans le sédiment. La constante α est égale à 0,001 ou 0,005. Elle est suffisamment petite pour que compte tenu de la dispersion de la taille des grains utilisée qui est relativement faible, la condition de stabilité proposée par Cundall et Strack (1979) soit vérifiée quel que soit le grain.

3.2 dimensions des lits de sédiments

Le nombre de grains dans le lit détermine la durée des simulations. La méthode DEM est très couteuse en temps de calcul et en espace mémoire. Heald *et al.* (2004) indiquent que 50% du temps de calcul est consacré à la détection des collisions. Par conséquent, le nombre de grains est relativement limité et les dimensions du lit sont petites. Afin de surmonter cette contrainte, celui-ci est supposé périodique dans les directions x et y (Jiang et Haff, 1993 ; McEwan et Heald, 2001 ; Heald *et al.*, 2004). Si le grain sort du domaine d'étude, il y rentre aussitôt par le plan opposé à celui par lequel il l'a quitté.
Jiang et Haff (1993) travaillent avec des lits bidimensionnels composés de 100 particules et la hauteur des lits est approximativement égale à $5\,d_p$. Dans les simulations de Heald *et al.* (2004), les arrangements sont formés de 50 000 grains. L'épaisseur du lit est de l'ordre de 10 fois le diamètre maximum et les dimensions dans le plan horizontal sont égales à $50\,d_{50}$. Toutefois, seul

le mouvement des grains à la surface du lit est modélisé. La détection des collisions ne concernent donc pas la totalité des grains mais uniquement un petit nombre. Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) utilisent des lits mono-dispersés de 1000 particules. Leurs dimensions dans les trois directions sont fixées à $10\,d_p$. Le lit est périodique dans la direction x et est borné dans la direction y par deux parois. Dans nos simulations, le nombre de grains utilisé varie de 10 000 à 15 000. Les dimensions du lit dans les directions x et y sont identiques et son épaisseur est comprise entre 10 et 30 fois le diamètre moyen d_m. Le tableau 3.1 présenté dans le chapitre 3 de la partie 3 récapitule les caractéristiques des lits étudiés.

3.3 exemples de lits de sédiments

Les figures 3.2, 3.3 et 3.4 montrent des exemples de lits de sédiments déposés numériquement. Dans les figures, les sphères gris clair sont les particules qui sont effectivement déposées, c'est-à-dire qui sont lâchées successivement et dont la position au cours du temps est déterminée par la méthode DEM. Les sphères gris foncé sont les images des sphères précédentes dont la position est obtenue par translation afin de respecter les propriétés de périodicité du lit. Les lits sont des arrangements aléatoires de grains. Ils sont déposés suivant deux méthodes.

Méthode 1

Dans la première méthode, la création du lit de sédiments se fait en deux étapes :

1) création d'une couche de base ;
2) déposition des grains au-dessus de cette couche.

La couche inférieure est composée de grains identiques, dont le diamètre est égal au diamètre minimal de la granulométrie. Le choix du diamètre minimal permet d'obtenir une couche étanche dans laquelle les grains sont joints. L'utilisation de grains plus gros conduirait à créer une couche « trouée » qui laisserait passer pendant la seconde étape certaines particules. La position verticale des grains composant la couche inférieure varie faiblement et de façon aléatoire autour du plan $z = 0$. Pendant la phase d'érosion, les grains composant cette couche sont fixes : la couche inférieure sert de base « aléatoire » sur laquelle sont déposés les grains qui seront susceptibles d'être érodés. Dans la méthode 1, les grains sont déposés si leur énergie cinétique est faible et s'ils sont en contact avec au moins trois particules. Nous remarquons que la position finale des grains obtenue dans le modèle est très proche de leur position théorique d'équilibre. Dans cette position, le centre du grain est situé au sommet du tétraèdre dont la base est formé par les grains le supportant et dont les côtés sont égaux à la somme des rayons, les grains étant joints. Pour cette raison, contrairement à McEwan et Heald (2001), nous ne calculons pas, lorsque le grain est déposé, sa position théorique.
Les lits montrés dans les figures 3.2 et 3.3 sont obtenus avec cette méthode

Méthode 2

La seconde méthode consiste à lâcher les grains au-dessus du plan $z = 0$. Les grains sont déposés si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) la position verticale de leur centre est au-dessous du plan $z = 0$;
2) leur énergie cinétique est faible et ils sont en contact avec au moins trois particules.

La couche inférieure est constituée, à mesure de la déposition des grains, par l'ensemble des grains dont la position verticale est en dessous de 0 ; ces grains sont fixes lors de la phase d'érosion. La méthode 2 est appliquée pour déposer le lit présenté dans la figure 3.4.

La méthode de déposition n'influe pas sur la mise en mouvement et sur le transport des lits comme le montrent les résultats présentés dans le chapitre 2 de la partie 3.

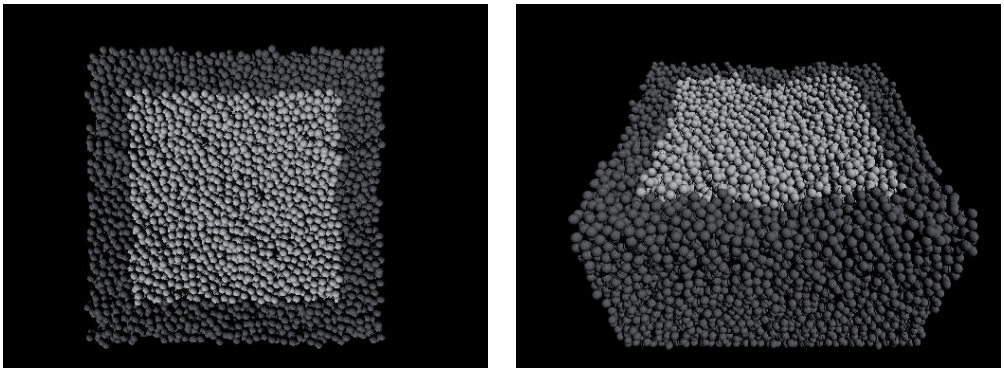


figure 3.2 – arrangement de grains de diamètre égal à 0,5 mm obtenu par la méthode 1 ; les sphères gris clair sont les particules qui sont déposées à l'aide du modèle DEM ; les sphères gris foncé sont les images des sphères précédentes dont la position est obtenue par translation afin de respecter les propriétés de périodicité du lit

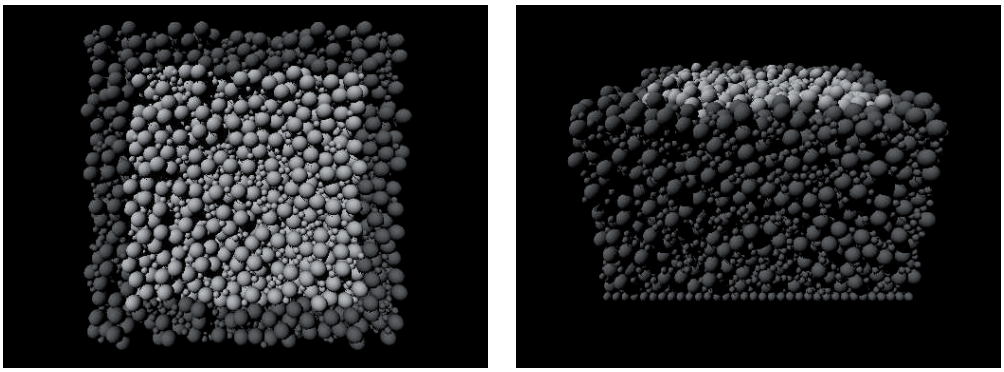


figure 3.3 – arrangement de grains de diamètres égaux à 0,42 mm et 1 mm obtenu par la méthode 1

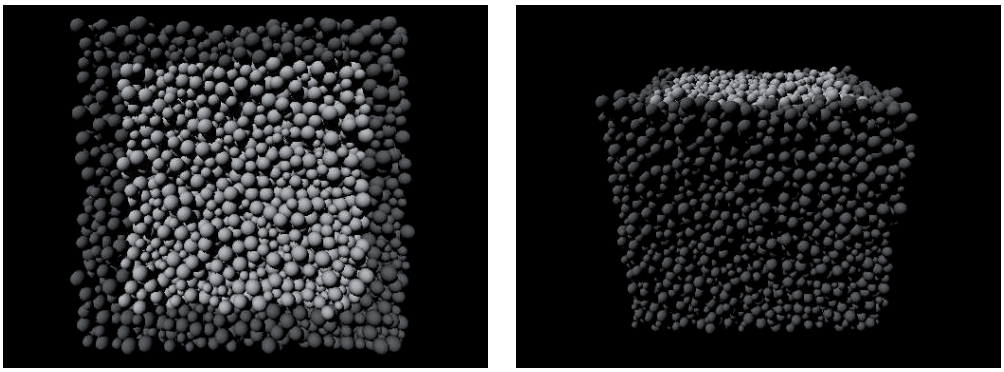


figure 3.4 – arrangement de grains dont le diamètre varie selon une loi uniforme entre 1 et 2 mm obtenu par la méthode 2

III érosion et transport des lits de sédiments

1 modèle d'écoulement

Le mouvement des grains dépend de l'écoulement au-dessus du lit. L'expérience montre que l'entraînement et le transport par charriage sont liés au cisaillement à la surface tandis que le transport en suspension est fonction du profil vertical de la vitesse (cf. les modèles de transport qui sont décrits dans le paragraphe 3.1 de la partie 1). L'application de la méthode DEM requiert la connaissance à chaque pas de temps de la force exercée par le fluide sur le grain. Dans les rivières, l'écoulement au-dessus du lit est un écoulement de couche limite turbulente qui est le plus de souvent de type rugueux, c'est-à-dire les rugosités du lit sont supérieures à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Le champ de vitesse n'est pas uniforme, il dépend de la topographie du lit qui peut influer de façon importante sur l'érosion et la déposition des sédiments. Une fois que les grains sont en mouvement, le lit ne reste pas longtemps plat. Dans les conditions réelles, les processus d'érosion et de déposition peuvent être à l'origine de la formation de rides et de dunes à la surface du lit. Dans les simulations numériques, il est peu probable compte-tenu des dimensions des arrangements étudiés que de telles formes apparaissent. Raudkivi (1998) indique que la longueur λ des rides peut être estimée à partir de la relation (1.1) et du diamètre d_p des grains.

$$\lambda = 245\, d_p^{0,35} \tag{1.1}$$

Avec λ et d_p exprimés en millimètre.
Ainsi, si $d_p = 1$ mm, la longueur des rides est de l'ordre de 245 mm. Cette valeur est bien supérieure à la dimension dans la direction x des lits qui sont utilisés dans les simulations ($\simeq 30\, d_p$). Même en l'absence de rides et de dunes, la surface du lit présente des dépressions et des bosses et nous souhaitons modéliser leurs effets sur l'écoulement et sur le mouvement des grains. Comme le profil de la surface évolue rapidement, le champ de vitesse du fluide doit être calculé à chaque pas de temps.

Equations de Navier-Stokes

L'écoulement au-dessus du lit est régi par les équations de Navier-Stokes. Celles-ci s'écrivent pour un fluide newtonien et incompressible sous la forme adimensionnelle et avec la notation d'Einstein comme suit (Batchelor, 1967) :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j \partial X_j} \tag{1.2b}$$

Avec :

$$U_i = \frac{u_{fi}}{U}\ , \quad X_i = \frac{x_i}{L}\ , \quad P = \frac{p}{\rho U^2}\ , \quad T = \frac{tU}{L}$$

u_{fi} les composantes de la vitesse fluide ; x_i les coordonnées cartésiennes de la particule fluide ; p la pression ; t le temps ; U et L une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement (dans une conduite de diamètre D, $L = D$, dans un canal de hauteur d'eau h, $L = h$) ; ρ la masse

volumique du fluide ; Re le nombre de Reynolds ;

$$Re = \frac{LU}{\nu} \tag{1.3}$$

ν la viscosité cinématique du fluide (dans l'eau, $\nu \simeq 10^{-6}$ m^2.s^{-1}).
Le nombre de Reynolds mesure l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses dans l'équation (1.2). Lorsqu'il tend vers l'infini, les termes de diffusion sont négligeables devant les termes de pression et les termes de transport. Les équations de Navier-Stokes correspondent alors aux équations d'Euler et l'écoulement est similaire à celui d'un fluide parfait ($\nu = 0$). Dans le modèle du fluide parfait, la condition limite à la paroi est une condition de glissement, *i.e.* la composante normale de la vitesse fluide est nulle. Dans le cas d'un fluide réel ($\nu \neq 0$), la condition à la paroi est une condition d'adhérence, elle impose une vitesse relative du fluide nulle qui est obtenue par dissipation visqueuse.

Les équations de Navier-Stokes sont non linéaires à cause des termes de transport et sont résolues numériquement. Deux méthodes sont utilisées en fonction des capacités de calcul (Pope, 2000 ; Bailly et Comte-Bellot, 2003) :

1) la méthode RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) ;
2) la méthode DNS (*Direct Numerical Simulation*).

Dans la méthode RANS, seul l'écoulement moyen est déterminé et les effets des fluctuations turbulentes sont paramétrés par un modèle de turbulence, par exemple le modèle $k - \varepsilon$. La méthode DNS est plus précise. Toutes les échelles de la turbulence sont modélisées et aucun modèle de fermeture n'est utilisé. Le maillage est très fin, la taille des mailles doit être plus petite que la plus petite échelle pertinente de l'écoulement. Or la taille des petites échelles diminue très rapidement lorsque le nombre de Reynolds augmente et le nombre de nœuds du maillage est proportionnel à $Re^{9/4}$ (Sagaut, 2002). De plus, le pas de temps dépend, pour des raisons de stabilité, de la distance entre deux nœuds successifs. La durée des simulations qui est fonction de l'intervalle de temps et de la distance entre deux nœuds augmente donc de façon importante avec le nombre de Reynolds. Pour cette raison, la méthode DNS est appliquée aujourd'hui à des phénomènes caractérisés par des nombres de Reynolds relativement faibles qui sont inférieurs à 10^3. Reinert *et al.* (2007) doutent qu'elle puisse être appliquée un jour à des écoulements géophysiques pour lesquels $Re > 10^5$. La méthode LES (*Large-Eddy Simulation*) suit une approche un peu similaire. Les grandes échelles de la turbulence, celles qui contiennent le plus d'énergie, sont représentées explicitement et un modèle dit de sous-maille (*subgrid-scale* – SGS) est utilisé pour reproduire les effets des échelles plus petites. La méthode LES est moins coûteuse en temps de calcul que la méthode DNS. Singh *et al.* (2007) appliquent la méthode DNS à un écoulement au-dessus d'une couche de sphères identiques et jointes. Le nombre de Reynolds Re_* ($Re_* = d_p u_*/\nu$) est égal à 533 et le nombre de Reynolds Re ($Re = u_d\, h/\nu$, u_d la vitesse débitante) est égal approximativement à 3112. L'écoulement est un écoulement turbulent hydrauliquement rugueux. Singh *et al.* (2007) utilisent comme domaine de simulation, un rectangle de dimensions $16\sqrt{3}d_p \times 16d_p \times 4d_p$. L'intervalle entre deux nœuds successifs est de l'ordre de $0{,}03\, d_p$ et le nombre de nœuds du maillage est supérieur à 67 millions. La résolution des équations de Navier-Stokes repose sur la parallélisation du schéma numérique et le temps de calcul total effectif est de 200 000 heures !
La méthode DNS, comme les méthodes LES et RANS, ne peut pas servir dans notre cas pour déterminer le champ de vitesse fluide au-dessus du lit. Dans les modèles de Jiang et Haff (1993) et de Heald *et al.* (2004), l'écoulement est représenté par une couche de fluide qui se déplace dans la direction x avec une vitesse constante U_0. La position de la couche de fluide par rapport à l'arrangement est fixée par Jiang et Haff (1993) au début des simulations afin que le centre de 30% des grains à la surface y soit contenu. L'épaisseur est égale à $3\, d_{50}$, valeur qui est supérieure à la hauteur moyenne des rebonds de saltation (~ 1 à $2\, d_p$). La vitesse U_0 est estimée à chaque pas

de temps à partir de la résolution de l'équation de mouvement de la couche de fluide. Celle-ci est soumise d'une part à la force de traînée exercée par les grains présents dans la couche et d'autre part à une contrainte de cisaillement exercée sur sa face supérieure qui est le paramètre d'entrée définissant la force de l'écoulement. Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) modélisent le champ de vitesse au-dessus du lit par la somme d'un champ de vitesse moyen unidirectionnel décrit par la loi logarithmique et d'un champ de fluctuations turbulentes qui est calculé à l'aide des résultats de Nezu (1977). Ces deux modèles d'écoulement ne tiennent pas compte de l'influence de la forme de la surface (présence de bosses et de dépressions) sur l'écoulement. Le modèle FLOWSTAR proposé par Carruthers *et al.* (2004) permet dans une certaine mesure de représenter cette influence. Le modèle FLOWSTAR est développé pour des écoulements de couches limites atmosphériques au-dessus de collines de faible pente. Il repose sur la linéarisation des équations de Navier-Stokes et fournit des expressions analytiques de la vitesse fluide. A la surface du lit, l'arrangement des grains est limité par le frottement et les reliefs et les creux formés aléatoirement par les particules sont caractérisés par des pentes avec un angle inférieur à l'angle de repos. L'angle de repos est l'angle limite du tas de grains avant l'avalanche, il est égal pour du sable sec à 30°. Par conséquent, les différentes formes à la surface du lit devraient être de faible pente, conformément à l'hypothèse utilisée dans le modèle FLOWSTAR.

Le modèle FLOWSTAR est choisi pour déterminer l'écoulement au-dessus du lit dans le modèle de transport. Il est présenté dans ce chapitre. Les expressions analytiques de la vitesse du fluide fournies par le modèle sont données. Le modèle FLOWSTAR est appliqué à deux cas réels : l'écoulement dans l'air autour d'une colline et l'écoulement dans l'eau autour d'une dune. Les résultats sont comparés à des données expérimentales. Le modèle FLOWSTAR est enfin utilisé pour obtenir le champ de vitesse au-dessus d'un arrangement de grains.

1.1 modélisation de l'écoulement

Le modèle FLOWSTAR est développé par Carruthers *et al.* (2004) pour calculer les vitesses fluide dans les couches inférieures de la couche limite atmosphérique pour des écoulements sur des collines de faible pente. Le rapport L/H avec L la demi-longueur de la colline et H son hauteur est typiquement inférieur à 0,3. Le modèle repose sur les résultats théoriques de Jackson et Hunt (1975) et de Hunt *et al.* (1988). L'idée sous-jacente au modèle est que la topographie génère une perturbation tridimensionnelle du champ de vitesse telle que le champ de vitesse réel peut être exprimé comme la somme du champ « non perturbé », en l'absence de la colline, et du champ « perturbé ». Ainsi, nous avons :

$$u_f(x,y,z) = U_0(z) + u(x,y,z)\ , \quad v_f(x,y,z) = v(x,y,z)\ , \quad w_f(x,y,z) = w(x,y,z) \tag{1.4}$$

u_f, v_f et w_f sont les composantes de la vitesse réelle du fluide dans les directions x, y et z, qui est dite perturbée. u, v, w sont les composantes de la perturbation de la vitesse créée par la présence de la colline. U_0 est la vitesse non perturbée en amont de la colline.
La perturbation de la vitesse est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes linéarisées. La linéarisation est réalisée en comparant les ordres de grandeur des termes intervenant dans les équations, ordres qui dépendent de la distance au sol. L'écoulement est divisé en deux ou trois couches avec une linéarisation différente dans chaque couche. Dans le modèle de numérique développé, la vitesse non perturbée est décrite par le profil logarithmique.

$$U_0(z) = \frac{u_*}{\kappa} \log\left(\frac{z}{z_0}\right) \tag{1.5}$$

Avec u_* la vitesse de frottement et κ la constante de von Kàrmàn ($\kappa = 0{,}4$).

La rugosité z_0 de la surface est exprimée comme suit (van Rijn, 1984a ; Lee et Hsu, 1994 ; Lukerchenko *et al.*, 2006) :

$$z_0 = 0{,}11\frac{\nu}{u_*} + 0{,}03\,k_s \tag{1.6}$$

Avec k_s la hauteur de rugosité équivalente de Nikuradse.

Dans l'implémentation choisie, l'écoulement est divisée en deux régions : la région interne (*inner region*) dans laquelle la perturbation de la contrainte de cisaillement a un effet important sur l'écoulement moyen et la région externe (*outer region*) dans laquelle le cisaillement est faible et l'écoulement est non visqueux. Les deux régions sont divisées en deux couches. La figure 1.1 montre une représentation schématique de l'écoulement au-dessus de la colline.

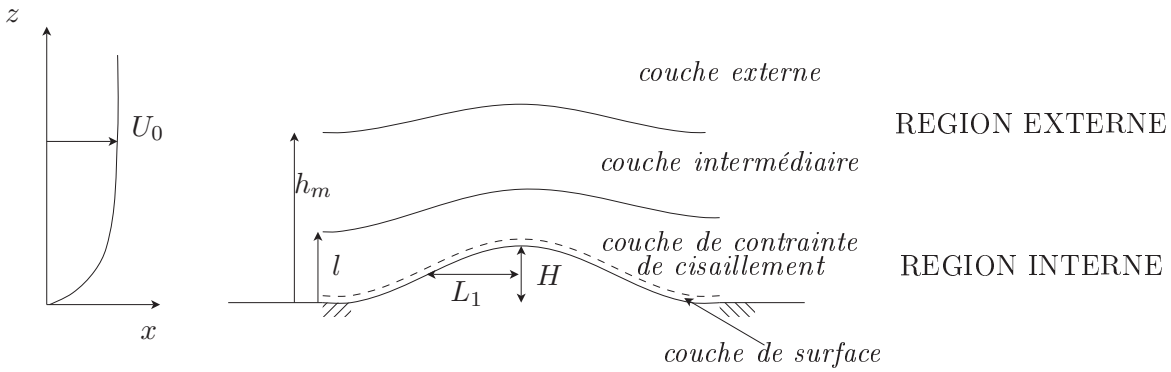


figure 1.1 – division de l'écoulement utilisée lors de la linéarisation des équations de Navier-Stokes (Carruthers et Hunt, 1990 ; Carruthers *et al.*, 2004)

1. La région interne est composée d'une fine couche de surface (*inner surface layer*) d'épaisseur l_s qui est utilisée pour raccorder la solution à la surface et une couche de contrainte de cisaillement (*shear-stress layer*).
   a) Dans la couche de surface, la perturbation de la vitesse diminue et tend vers zéro. (Hunt *et al.*, 1988)
   b) Dans la couche de contrainte de cisaillement, les contraintes de cisaillement sont déterminées en utilisant le modèle de longueur de mélange, la turbulence étant supposée localement en équilibre. Les équations de Navier-Stokes linéarisées sont les équations de Bessel.
2. La région externe est composée d'une couche intermédiaire (*middle layer*) dans laquelle l'effet du cisaillement de l'écoulement non perturbé est important et une couche externe (*outer layer*) dans laquelle l'écoulement est contrôlé par le champ de pression. Dans la région externe, la perturbation des contraintes de cisaillement a un effet négligeable sur la perturbation de vitesse, bien que les contraintes de cisaillement tiennent une part significative dans l'établissement de l'écoulement moyen dans cette région.
   a) Dans la couche intermédiaire, si la pente de la colline est faible, les équations de Navier-Stokes linéarisées sont les équations de Scorer (1949).
   b) Dans la couche externe, la solution des équations de Navier-Stokes linéarisées est l'écoulement potentiel.

Les équations de Navier-Stokes linéarisées sont résolues dans l'espace de Fourier.

1.1.1 transformée de Fourier

La transformée de Fourier $\tilde{g}$ de la fonction g à deux variables x et y est définie par la relation (1.7).

$$\tilde{g}(k_1,k_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\exp\left[-i(k_1x + k_2y)\right]\,dxdy \tag{1.7}$$

Avec k_1 et k_2 les nombres d'onde qui correspondent aux variables x et y dans l'espace de Fourier. La transformée de Fourier inverse s'écrit :

$$g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k_1,k_2) \exp\left[i(k_1 x + k_2 y)\right] \, dk_1 dk_2 \tag{1.8}$$

Dans les simulations, les fonctions sont connues dans l'espace réel seulement en certains points (nœuds) (x_i, y_j) tels que :

$$x_i = i\frac{L_x}{N_x}, \quad 0 \leq i \leq N_x \tag{1.9a}$$

$$y_j = j\frac{L_y}{N_y}, \quad 0 \leq j \leq N_y \tag{1.9b}$$

Avec L_x et L_y la dimension du domaine dans les directions x et y et N_x et N_y le nombre de nœuds dans ces directions
Les nombres d'onde k_1 et k_2 sont définis par l'équation (1.10) :

$$k_{1l} = l\frac{2\pi}{L_x}, \quad -\frac{N_x}{2} < l \leq \frac{N_x}{2} \tag{1.10a}$$

$$k_{2m} = m\frac{2\pi}{L_y}, \quad -\frac{N_y}{2} < m \leq \frac{N_y}{2} \tag{1.10b}$$

Les transformées de Fourier sont dites discrètes, elles sont calculées en utilisant la méthode de Transformée de Fourier Rapide (*Fast Fourier Transform*, FFT) dont une description peut être trouvée dans l'ouvrage Numerical Recipes de Press *et al.* (2002, pp. 496-536). Dans cette méthode, les nombres de nœuds N_x et N_y sont une puissance de 2.

1.1.2 expression de la perturbation de la vitesse

Le modèle FLOWSTAR intéresse l'écoulement dans les basses couches de la couche limite turbulente atmosphérique. Il tient compte de la stratification de l'écoulement (liée au gradient de température), de la présence du relief et de la variation de la rugosité de la surface. Nous indiquons ici les équations établies pour les expressions de la perturbation de la vitesse dans l'espace de Fourier (et dans l'espace réel) dans le cas d'une atmosphère neutre, en l'absence de stratification et selon l'hypothèse d'une rugosité constante. Au-dessus du lit de sédiments, l'écoulement n'est pas stratifié et la rugosité liée à la taille des grains du sédiment peut être supposée constante. Les expressions de la vitesse fluide dépendent du paramètre Z qui est la distance locale à la surface solide.

$$Z = z - f(x,y) \tag{1.11}$$

Avec f une fonction qui décrit l'élévation de la surface solide par rapport à une origine.
Lorsque le nombre d'onde k_1 est nul, la transformée de Fourier de la perturbation est prise nulle.

1. Dans la couche externe avec $Z > h_m$, les composantes de la perturbation sont données par le système d'équations (1.12)

$$\tilde{u}(k_1,k_2,Z) = -i\frac{k_1}{k_{12}}\tilde{w}(k_1,k_2,Z) \tag{1.12a}$$

$$\tilde{v}(k_1,k_2,Z) = -i\frac{k_2}{k_{12}}\tilde{w}(k_1,k_2,Z) \tag{1.12b}$$

$$\tilde{w}(k_1,k_2,Z) = ik_1 \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)U_0(h_m) \tag{1.12c}$$

Avec : $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ les transformées de Fourier des composantes u, v et w de la perturbation de vitesse ; $U_0(h_m)$ la vitesse non perturbée calculée en $Z = h_m$;

$$k_{12} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \tag{1.13}$$

2. Dans la couche intermédiaire avec $l < Z \leq h_m$, nous avons :

$$\tilde{u}(k_1,k_2,Z) = \frac{k_1^2}{k_{12}}\Gamma_u \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)U_0(h_m) \tag{1.14a}$$

$$\tilde{v}(k_1,k_2,Z) = \frac{k_2 k_1}{k_{12}}\Gamma_v \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)U_0(h_m) \tag{1.14b}$$

$$w(x,y,Z) = [U_0(Z) + u(x,y,Z)]\, F_1^{-1} + v(x,y,Z)\left[1 - \frac{Z}{h_m}\right] F_2^{-1} \tag{1.14c}$$

Avec : Γ_u, Γ_v les fonctions de raccordement qui assurent la continuité de la perturbation de la vitesse en $Z = l$;

$$\Gamma_u = \left[1 - \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{Z-l}{l}\right)\right]\Gamma_{muh} + \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{Z-l}{l}\right)\Gamma_{mul} \tag{1.15}$$

$$\Gamma_v = \left[1 - \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{Z-l}{l}\right)\right]\frac{U_0(h_m)}{U_0(Z)} + \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{Z-l}{l}\right)\Gamma_{mvl} \tag{1.16}$$

$$\Gamma_{muh} = \left[1 + \frac{k_{12}}{k_1^2 \ln(Z/z_0)}\right]\frac{U_0(h_m)}{U_0(Z)} \tag{1.17}$$

$$\Gamma_{mul} = [1 + \delta - G_{u1} - G_{u2}]\,\frac{U_0(h_m)}{U_0(l)} \tag{1.18}$$

$$\Gamma_{mvl} = \left[1 - 4\delta K_o(\alpha\sqrt{2Z})\frac{\ln(Z/l)}{\ln(l/z_0)}\right]\frac{U_0(h_m)}{U_0(l)} \tag{1.19}$$

$$G_{u1} = \delta\left[\ln(Z/l) - \frac{k_{12}}{k_1^2} + 1\right] \tag{1.20}$$

$$G_{u2} = \left[2 + \delta\frac{k_{12}}{k_1^2}\right]\frac{K_o(\alpha\sqrt{Z})}{K_o(\alpha\sqrt{z_0})} \tag{1.21}$$

$$\delta = \frac{1}{\ln(l/z_0)} \tag{1.22}$$

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{k_1 \ln(l/z_0)}{2\kappa^2}} \tag{1.23}$$

K_o est la fonction de Bessel modifiée qui est exprimée à l'aide des fonctions de Kelvin ker et kei :

$$K_o(x) = \ker(x) + i\,\mathrm{kei}(x) \qquad \text{si } x \text{ est réel} \tag{1.24a}$$

$$= \ker(|x|) - i\,\mathrm{kei}(|x|) \qquad \text{si } x \text{ est un imaginaire pur} \tag{1.24b}$$

Les fonctions de Kelvin sont déduites de fonctions approchées de type polynôme qui sont indiquées par Abramowitz et Stegun (1964, pp. 384-385). F_1^{-1} et F_2^{-1} sont des transformées de Fourier inverses qui dépendent de la fonction f.

$$F_1^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ik_1 \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)\exp\left[i(k_1x + k_2y)\right]\, dk_1 dk_2 \tag{1.25a}$$

$$F_2^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ik_2 \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)\exp\left[i(k_1x + k_2y)\right]\, dk_1 dk_2 \tag{1.25b}$$

3. Dans la couche de contrainte de cisaillement avec $l_s < Z \leq l$, la perturbation de la vitesse s'écrit :

$$\tilde{u}(k_1,k_2,Z) = \frac{k_1^2}{k_{12}}\Gamma_u^* \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)U_0(h_m) \tag{1.26a}$$

$$\tilde{v}(k_1,k_2,Z) = \frac{k_2 k_1}{k_{12}}\Gamma_v^* \exp(-k_{12}Z)\tilde{f}(k_1,k_2)U_0(h_m) \tag{1.26b}$$

$$w(x,y,Z) = [U_0(Z) + u(x,y,Z)]\, F_1^{-1} + v(x,y,Z)\left[1 - \frac{Z}{h_m}\right] F_2^{-1} \tag{1.26c}$$

Avec Γ_u^* et Γ_v^* les fonctions de raccordement :

$$\Gamma_u^* = \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{l-Z}{l}\right)\Gamma_{muh} + \left[1 - \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{l-Z}{l}\right)\right]\Gamma_{mul} \tag{1.27}$$

$$\Gamma_v^* = \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{l-Z}{l}\right)\frac{U_0(h_m)}{U_0(Z)} + \left[1 - \frac{1}{2}\exp\left(-4\frac{l-Z}{l}\right)\right]\Gamma_{mvl} \tag{1.28}$$

4. Dans la couche de surface avec $Z \leq l_s$, la perturbation de la vitesse est fixée à zéro. Lorsque $Z < z_0$, la vitesse non perturbée est supposée nulle.

Le modèle FLOWSTAR est établi en supposant que la vitesse non perturbée en amont de la colline soit une fonction monotone et croissante de la variable z et que la couche de cisaillement ne soit pas trop développée. Le champ de vitesse du fluide peut être évalué rapidement à partir des équations précédentes avec des fonctions numériques standards (transformée de Fourier inverse par exemple). Nous constatons que le champ de vitesse obtenu avec le modèle FLOWSTAR est discontinu en $Z = h_m$.

1.1.3 coefficients du modèle

Le champ de vitesse du fluide dépend des distances h_m, l et l_s qui définissent la division de l'écoulement au-dessus de la surface. Ces distances sont déterminées par la longueur horizontale L_1 qui caractérise la forme du relief.

Longueur horizontale caractéristique L_1

Il n'existe pas de consensus sur la définition de la longueur L_1 qui varie selon les auteurs et selon la forme du relief. (Walmsley *et al.*, 1982) Dans le modèle original, le relief est une colline isolée et Jackson et Hunt (1975) définissent la longueur L_1 comme la distance au sommet pour laquelle l'élévation du sol est égale à la moitié de la hauteur H de la colline (cf. la figure 1.1). Dans le modèle de Mason et Sykes (1979), la colline est représentée par la fonction f définie de la façon suivante. Si $\sqrt{x^2+y^2} < L$,

$$f(x,y) = H\left[\cos\left(\frac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2L}\right)\right]^2 \tag{1.29}$$

Sinon, $f(x,y) = 0$. La longueur L_1 est prise égale à L. Taylor *et al.* (1983) considèrent l'écoulement au-dessus d'une séquence infinie de collines bidimensionnelles et sinusoïdales dont la forme est définie par la fonction f suivante.

$$f(x,y) = \frac{H}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] \quad , \quad -\frac{\lambda}{2} < x < \frac{\lambda}{2} \tag{1.30}$$

Taylor *et al.* (1983) étudient l'influence de la longueur L_1 sur la pression à la surface et sur le maximum de la perturbation de la vitesse horizontale au sommet de la colline. (La perturbation

de la vitesse est maximale lorsque $z - f(x,y)$ tend vers z_0.) Les résultats sont comparés à ceux de modèles plus précis basés sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Suivant la définition de Jackson et Hunt (1975), la longueur L_1 est égale à $\lambda/4$. Taylor *et al.* (1983) montrent qu'avec cette valeur, la pression à la surface et le maximum de la perturbation de la vitesse sont surestimés. Pour que la pression à la surface et la maximum de la perturbation de la vitesse soient en accord avec les résultats numériques, la longueur L_1 doit être comprise entre $\lambda/40$ et $\lambda/20$. Ces valeurs sont bien inférieures à celle suggérée par Jackson et Hunt (1975).
Dans les situations réelles, le relief du terrain présente un grand nombre de structures de longueurs différentes. Taylor *et al.* (1983) utilisent des longueurs L_1 qui dépendent des nombres d'onde k_{1l} et k_{2m}. Dans le modèle FLOWSTAR , la longueur L_1 est exprimée en fonction de la transformée de Fourier $\tilde{f}$ de la fonction surface f. Elle est définie comme suit.

$$L_1 = \frac{1}{\bar{k}_1} \ , \quad \bar{k}_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k_1 \tilde{f}(k_1,k_2)\, d\delta_{k_1} d\delta_{k_2}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_1,k_2)\, d\delta_{k_1} d\delta_{k_2}} \tag{1.31}$$

Lors du calcul du nombre d'onde $\bar{k}_1$, seuls les 32 plus petits nombres d'onde sont considérés. La longueur L_1 représente alors les principales longueurs horizontales caractéristiques. La définition proposée par Carruthers *et al.* (2004) ne s'applique pas toujours. Par exemple, si $f(x,y) = H\cos(2\pi x/\lambda)$, la transformée de Fourier $\tilde{f}$ est différente de zéro et égale à $H/2$ seulement pour deux nombres d'onde k_1 et k_{-1} avec $k_1 = -k_{-1} = 2\pi/\lambda$. Il vient $\bar{k}_1 = 0$ et la longueur L_1 tend vers l'infini.

Longueur h_m

Hunt *et al.* (1988) montrent que pour des collines « longues » pour lesquelles la longueur L_1 est supérieure à l'épaisseur δ de la couche limite, la hauteur h_m est égal à L_1. Pour des collines « courtes » telles que $L_1 \ll \delta$, la hauteur h_m est donnée par l'équation (1.32).

$$h_m \left[\ln\left(\frac{h_m}{z_0}\right)\right]^{1/2} = L_1 \tag{1.32}$$

soit en utilisant la fonction de Lambert $\mathcal{W}$,

$$h_m = z_0 \exp\left[0{,}5\,\mathcal{W}\left(2\left(\frac{L_1}{z_0}\right)^2\right)\right] \tag{1.33}$$

Dans le modèle FLOWSTAR, la distance h_m dépend du nombre d'onde k_{12}. Si $k_{12} < 3/L_1$, la hauteur h_m est solution de l'équation (1.34)

$$\left|\frac{1}{U_0(h_m)}\frac{d^2U_0}{dz^2}(h_m)\right| = \frac{1}{L_1^2} \tag{1.34}$$

Lorsque la vitesse non perturbée est modélisée par la loi logarithmique, les équations (1.32) et (1.34) sont équivalentes. Si $k_{12} \geq 3/L_1$, nous avons :

$$\left|\frac{1}{U_0(h_m)}\frac{d^2U_0}{dz^2}(h_m)\right| = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{L_1} + k_*\right)\right]^2 \tag{1.35}$$

Avec $k_* = 1/\delta L_*$ et δL_* l'intervalle entre deux nœuds du maillage dans le plan horizontal.
Carruthers *et al.* (2004) ne précisent pas quelle valeur il faut utiliser pour δL_* lorsque l'intervalle entre deux nœuds dans les directions x et y est différent.

Longueur l

Jackson et Hunt (1975) et Hunt *et al.* (1988) montrent avec des arguments différents que la distance l est solution de l'équation (1.36).

$$l \ln\left(\frac{l}{z_0}\right) = 2\kappa^2 L_1 \tag{1.36}$$

Comme la distance h_m, la distance l peut être exprimée avec la fonction de Lambert $\mathcal{W}$.

$$l = 2\kappa^2 L_1 \left[\mathcal{W}\left(\frac{2\kappa^2 L_1}{z_0}\right)\right]^{-1} \tag{1.37}$$

Dans le modèle FLOWSTAR, si $k_{12} < 3/L_1$, la distance l est donnée par l'équation (1.36). Si $k_{12} \geq 3/L_1$, elle est estimée à partir de l'équation (1.38).

$$l = \frac{2\kappa^2}{\ln(l/z_0)} \left[\frac{1}{2}\left(3\bar{k}_{12} + k_*\right)\right]^{-1} \tag{1.38}$$

Dans les expériences, la distance l est définie comme la distance au-dessus du sommet de la colline pour laquelle la perturbation de vitesse u est maximale. Pour Taylor *et al.* (1987) et Walker et Nickling (2002), cette définition fournit plutôt une hauteur caractéristique de la couche qu'une hauteur pour laquelle se produit « quelque chose ». Carruthers et Hunt (1990) estiment que le maximum de u est obtenu pour $Z = l/3$. Cette définition n'est pas conforme à l'hypothèse utilisée par Taylor *et al.* (1983) selon laquelle u est maximum lorsque $z - f(x,y)$ tend vers z_0. La longueur l est comprise dans l'air entre 0,1 et 1 m pour des dunes de petite taille et de taille intermédiaire. (Frank et Kocurek, 1996 ; McKenna Neuman *et al.*, 1997 ; Walker et Nickling, 2002) Les valeurs expérimentales sont en général inférieures à celles prédites par l'équation (1.36).

Longueur l_s

L'épaisseur de la sous-couche visqueuse l_s est définie comme suit (Hunt *et al.*, 1988) :

$$l_s = (l z_0)^{1/2} \tag{1.39}$$

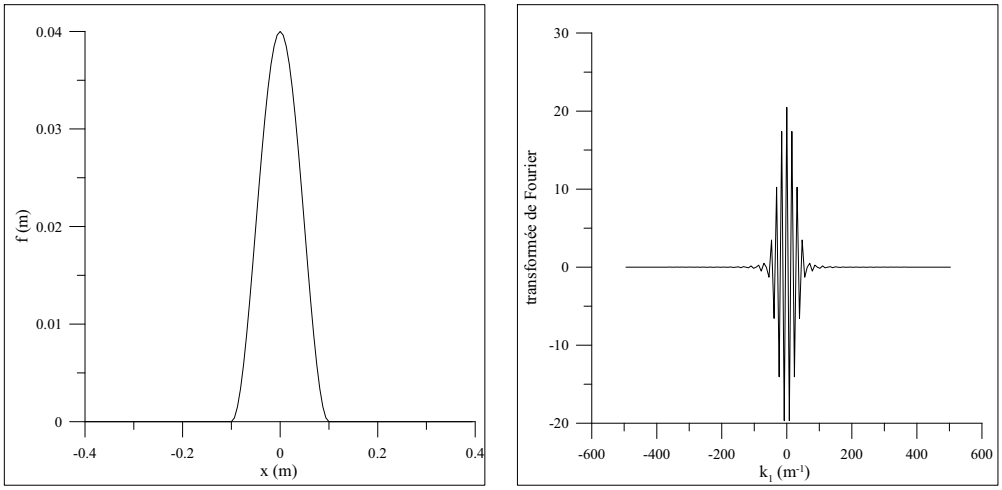
Elle est égale dans l'air pour des dunes de petite taille et de taille intermédiaires à quelques centimètres. (Frank et Kocurek, 1996 ; McKenna Neuman *et al.*, 1997)

1.2 écoulement autour d'une colline isolée

Le modèle FLOWSTAR est appliqué à l'écoulement dans une couche limite atmosphérique autour d'une colline gaussienne afin de vérifier la validité de notre implémentation. Les résultats sont montrés en annexe. Ils sont conformes à ceux présentés par Carruthers *et al.* (2004).
Le modèle FLOWSTAR est ici utilisé pour reproduire l'écoulement mesuré par Ishihara *et al.* (2001) en soufflerie au-dessus d'une colline bidimensionnelle. Onze profils verticaux de la composante dans la direction x de la vitesse moyenne du fluide sont déterminés en amont et en aval de la colline. La comparaison entre le modèle et l'expérience repose sur des données qui proviennent de la figure 3 de l'article de Lun *et al.* (2007) (La surface est considérée comme rugueuse.).
La forme de la colline est définie par la fonction f. Si $-0{,}1 < x < 0{,}1$ m, elle est donnée par l'équation (1.40).

$$f(x,y) = H\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right]^2 \tag{1.40}$$

Avec $H = 0{,}04$ m et $L = 0{,}1$ m.
Si $x \leq -0{,}1$ m et si $x \geq 0{,}1$ m, nous avons $f(x,y) = 0$. La fonction f est représentée dans la figure 1.2a. Elle est indépendante de la variable y et la transformée de Fourier est nulle lorsque



(a) fonction de surface f (b) transformée de Fourier de la fonction f

figure 1.2 – définitions de la fonction f qui définit la colline bidimensionnelle utilisée dans les expériences de Ishihara *et al.* (2001) et de la transformée de Fourier $\tilde{f}$

le nombre d'onde k_2 est différent de zéro. L'évolution de la transformée de Fourier $\tilde{f}$ en fonction du nombre d'onde k_1 est montrée pour $k_2 = 0$ dans la figure 1.2b.

Les paramètres d'entrée du modèle FLOWSTAR sont le profil vertical de la vitesse non perturbée en amont de la colline, U_0 et la longueur horizontale caractéristique, L_1.

Profil vertical de la vitesse non perturbée

La vitesse du fluide non perturbée est décrite par la loi logarithmique. La vitesse de frottement u_* et la rugosité z_0 sont déterminées à partir des mesures des profils verticaux de la façon suivante. Nous constatons que le débit de fluide dans la direction x n'est pas conservé. Ce résultat est lié aux conditions expérimentales (précision des mesures, écoulement 3D par exemple). Pour cette raison, les profils de vitesse sont modifiés. La vitesse mesurée à la position x_i est remplacée par la vitesse mesurée multipliée par le rapport Q_m/Q_i avec Q_m le débit moyen et Q_i le débit estimé en x_i. Nous vérifions ainsi, avec ces vitesses, la conservation du débit. Le débit Q_i est donné par l'équation (1.41).

$$Q_i = \int_{z_f}^{h} u_f(z)\, dz \tag{1.41}$$

Avec h l'épaisseur d'air au-dessus de la paroi et z_f la position de la paroi en x_i.
La vitesse de frottement u_* et la rugosité z_0 sont alors estimées par la méthode des moindres carrées à partir des profils modifiés. Ceux-ci sont représentés en fonction du rapport z/H dans la figure 1.3. Jackson (1981) considère que suffisamment loin du sol, *i.e.* $z > d_0$, la composante u_f de la vitesse fluide est donnée par la loi logarithmique (1.42) :

$$u_f(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right) \tag{1.42}$$

Avec d la hauteur de déplacement.
La figure 1.3 montre que la loi logarithmique est vérifiée à partir d'une distance au sol d_0 comprise entre 60 et 90 mm (entre 1,5H et 2,5H). Nous calculons la vitesse u_* et la hauteur de rugosité z_0 pour plusieurs couples (d_0, d). Le tableau 1.1 indique pour sept distances d_0 les valeurs d, u_*

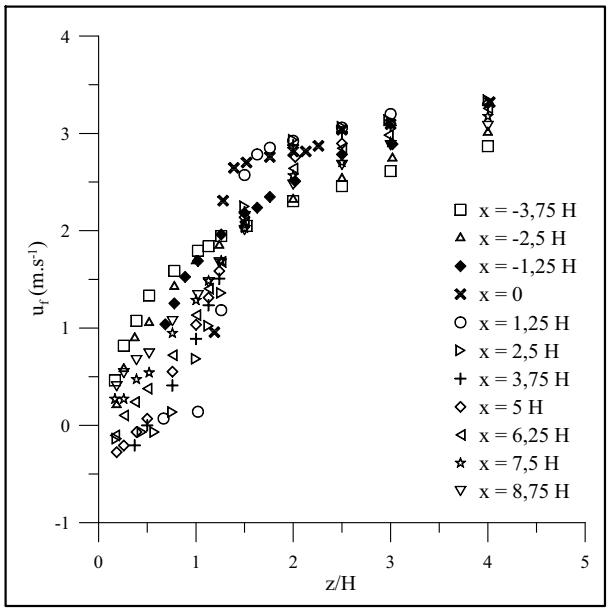


figure 1.3 – profils verticaux de la vitesse du fluide modifiés afin de conserver le débit ; la hauteur H est égale à 0,04 mm

et z_0 minimisant l'erreur E :

$$E = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(u_f - u_{fm})^2} \tag{1.43}$$

Avec : u_f la vitesse de fluide calculée avec le profil logarithmique ; u_{fm} la vitesse de fluide mesurée ; N le nombre de mesures considérées. Les vitesses de frottement obtenues sont assez proches, comprises entre 0,25 et 0,29 m.s^{-1}. Les hauteurs de rugosité sont de l'ordre du millimètre. L'erreur E est minimale lorsque $d_0 = 80$ mm. Dans ce cas-là, la vitesse de frottement u_* est égale à 0,29 m.s^{-1} et la rugosité z_0 vaut 2,1 mm. Ces deux valeurs sont choisies dans les simulations numériques.

Champ de vitesse

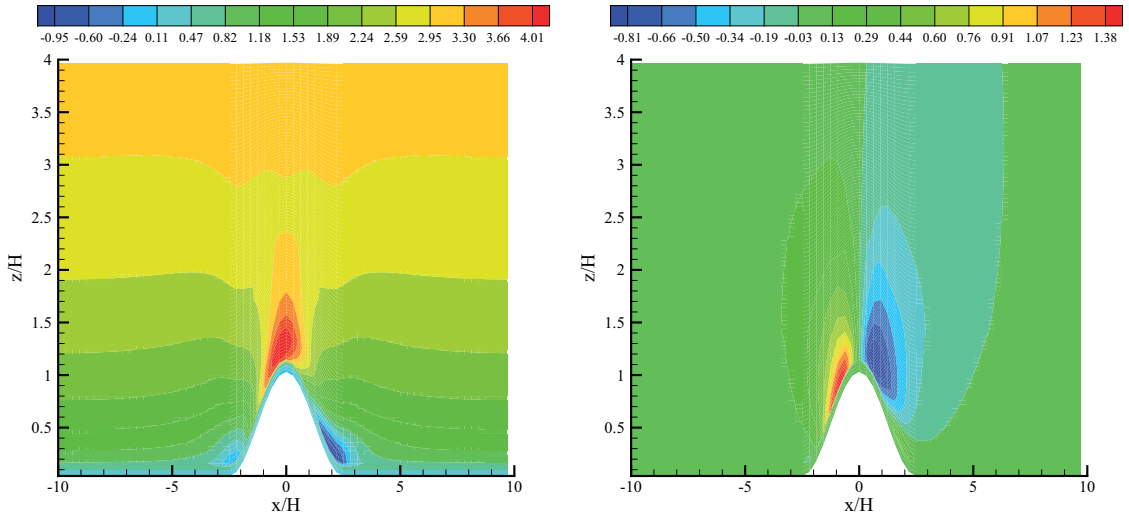
Les dimensions du domaine utilisé dans les simulations sont égales dans le plan horizontal à $20\,H$ (0,8 m). Le nombre de nœuds est fixé à 2^6 dans la direction x et à 2^5 dans la direction y. La longueur horizontale L_1 est égale à la distance L conformément à Mason et Sykes (1979). Nous en déduisons :

$$h_m = 55{,}2 \text{ mm}, \quad l = 15{,}8 \text{ mm}, \quad l_s = 5{,}7 \text{ mm} \tag{1.44}$$

La figure 1.4 montre le champ de vitesse moyen déterminé par le modèle FLOWSTAR. Le champ de vitesse est modifié par la présence de la colline.
La composante u_f de la vitesse fluide est accélérée sur sa face amont à proximité du sommet. Elle est trouvée négative en amont et en aval. La présence de ces zones de recirculation est mise en évidence dans la figure 1.5. Elle est aussi observée dans les expériences. Cependant, la zone de recirculation en aval de la colline n'est pas représentée correctement dans les simulations, elle est trop petite. Le point de décollement se situe en $x = 1{,}3H$ et le point de rattachement en $x = 2{,}8H$. Dans les expériences, le décollement se produit en $x = 0{,}6H$ et le rattachement en $6{,}4H$. A titre de comparaison, Lun *et al.* (2007) obtiennent avec un modèle plus sophistiqué basé sur la méthode RANS (modèle S–Ω), le point de décollement en $x = 0{,}5H$ et le point de rattachement en $x = 7{,}8H$. (Lun *et al.* (2007) n'indiquent pas les dimensions de la zone de

distance d_0	hauteur de déplacement d	erreur commise E	vitesse de frottement u_*	hauteur de rugosité z_0
60 mm	16,8 mm	0,203 m.s^{-1}	0,249 m.s^{-1}	8,76.10^{-4} m
65 mm	0 mm	0,196 m.s^{-1}	0,290 m.s^{-1}	2,00.10^{-3} m
70 mm	0 mm	0,192 m.s^{-1}	0,288 m.s^{-1}	1,94.10^{-3} m
75 mm	15,4 mm	0,188 m.s^{-1}	0,259m.s^{-1}	1,07.10^{-3} m
80 mm	0 mm	0,174 m.s^{-1}	0,292 m.s^{-1}	2,07.10^{-3} m
85 mm	0 mm	0,176 m.s^{-1}	0,281 m.s^{-1}	1,75.10^{-3} m
90 mm	0 mm	0,178 m.s^{-1}	0,291 m.s^{-1}	2,04.10^{-3} m

tableau 1.1 – hauteur de déplacement, vitesse de frottement et hauteur de rugosité qui minimisent l'erreur E pour sept distances d_0



(a) composante dans la direction x

(b) composante dans la direction z

figure 1.4 – champ de vitesse moyen calculé par le modèle FLOWSTAR ; la longueur L_1 est égale à L ; les variables x et z sont exprimées en mètre et la vitesse en mètre par seconde

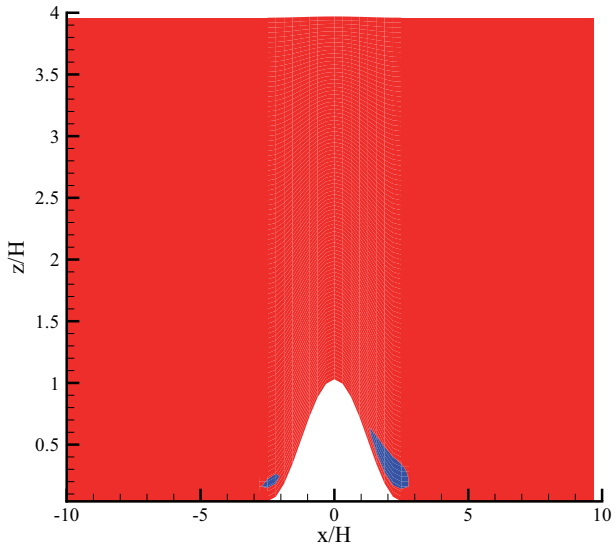


figure 1.5 – mise en évidence des zones de recirculation ; la zone coloriée en rouge correspond à une composante de la vitesse fluide u_f positive et la zone coloriée en bleu à une vitesse u_f négative

recirculation en amont.) Par ailleurs, le fluide a un mouvement ascendant en amont de la colline ($w_f > 0$) et un mouvement descendant en aval ($w_f < 0$).
La sous-couche visqueuse au-dessus de la colline est facilement identifiable dans la figure 1.4. Elle correspond à la zone de vitesse uniforme proche de la paroi. Dans cette zone, la perturbation de la vitesse est supposée nulle, le champ de vitesse est unidimensionnel et la vitesse u_f est donnée par le profil logarithmique.

La figure 1.6 compare les profils verticaux de la vitesse u_f calculés et mesurés. En amont de la colline, l'écoulement est décrit de façon satisfaisante par le modèle compte tenu de sa simplicité. Le modèle surestime l'accélération de la vitesse u_f à proximité du sommet, en $x = -1{,}25H$ et $x = 0$. En aval de la colline, les profils mesurés et calculés ne sont comparables que suffisamment loin de la paroi. La zone de recirculation n'est pas bien évaluée. La vitesse est surestimée au voisinage de la paroi et la forme du profil de vitesse n'est pas restituée. Le modèle « diffuse » trop, les termes visqueux sont mal modélisés. Walker et Nickling (2002) indiquent que la surestimation de la vitesse est liée au modèle de fermeture et aux effets non linéaires associés à l'accélération, la décélération et la déviation de l'écoulement. De plus, dans les simulations, la perturbation de la vitesse devient négligeable lorsque $x \geq 3{,}75H$. Les vitesses perturbée et non perturbée sont alors similaires. Ceci n'est pas vérifié dans les expériences pour lesquelles le champ de vitesse est encore influencé par la présence de la colline en $x = 8{,}75H$.

Influence de la longueur L_1

La définition de la longueur L_1 n'est pas claire. Pour cette raison, nous souhaitons déterminer son influence sur le calcul de l'écoulement. Le modèle FLOWSTAR est appliqué en utilisant cinq valeurs différentes de L_1 : $L_1 = L$ (Mason et Sykes, 1979), $L_1 = 0{,}5L$ (Jackson et Hunt, 1975), $L_1 = 0{,}25L$, $L_1 = 0{,}1L$ et $L_1 = 0{,}05L$. La figure 1.7 montre les profils verticaux de la vitesse u_f qui sont obtenus au sommet et en aval de la colline. La longueur L_1 influe sur la division de l'écoulement. Les distances h_m, l_s et l sont des fonctions croissantes de L_1. Dans la figure 1.7a, la position de la couche intermédiaire h_m correspond au palier dans le profil. (Le champ de vitesse est discontinu en $Z = h_m$ dans le modèle.)
La longueur L_1 a également un effet sur la perturbation de la vitesse. Celle-ci augmente avec L_1.

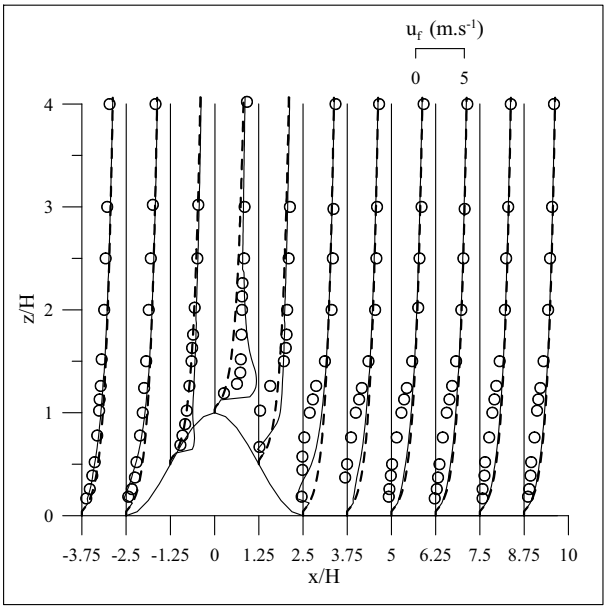
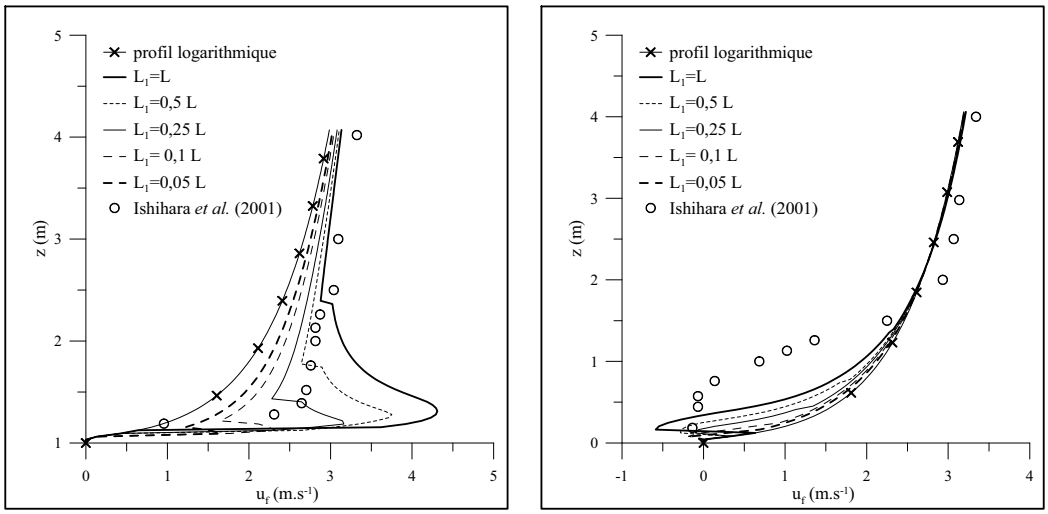


figure 1.6 – évolution de la composante u_f de la vitesse fluide moyenne en fonction de la distance à la paroi z au voisinage de la colline bidimensionnelle ; la ligne continue correspond à la composante u_f, la ligne discontinue à la vitesse non perturbée



(a) $x = 0$ (b) $x = 2{,}5H$

figure 1.7 – influence de la longueur L_1 sur le calcul de l'écoulement

Au sommet de la colline, le modèle FLOWSTAR établit l'existence d'un pic de vitesse au voisinage de la surface. Ce pic n'est pas observé dans les expériences pour lesquelles la vitesse est une fonction monotone croissante de la variable z. Le maximum de la vitesse calculé diminue lorsque L_1 diminue et proche de la surface, les simulations qui reproduisent le mieux l'expérience sont réalisées avec la longueur L_1 la plus faible (égale à $0{,}05L$). Ce résultat est également trouvé par Taylor *et al.* (1983) avec des dunes sinusoïdales. Au contraire, suffisamment loin de la surface, ce sont les vitesses déterminées avec $L_1 = 0{,}5L$ et $L_1 = L$ qui s'accordent le mieux aux mesures. La variation de la longueur L_1 ne permet pas d'améliorer la modélisation de l'écoulement en aval de la colline. Quelle que soit la longueur L_1, la perturbation de la vitesse s'annule trop rapidement lorsque z augmente et la vitesse u_f est surestimée par rapport à l'expérience. Cette surestimation est liée au modèle de fermeture de turbulence. De même, la zone de recirculation est trop petite pour les cinq valeurs L_1, ses dimensions dépendent peu de cette longueur. En aval de la colline, le décollement se produit entre $x = 1{,}2H$ et $x = 1{,}7H$ et le rattachement entre $x = 2{,}6H$ et $x = 2{,}8H$.

Influence des paramètres d'entrée u_* et z_0

La figure 1.8 compare le champ de vitesse pour deux profils de vitesse non perturbée. Les profils

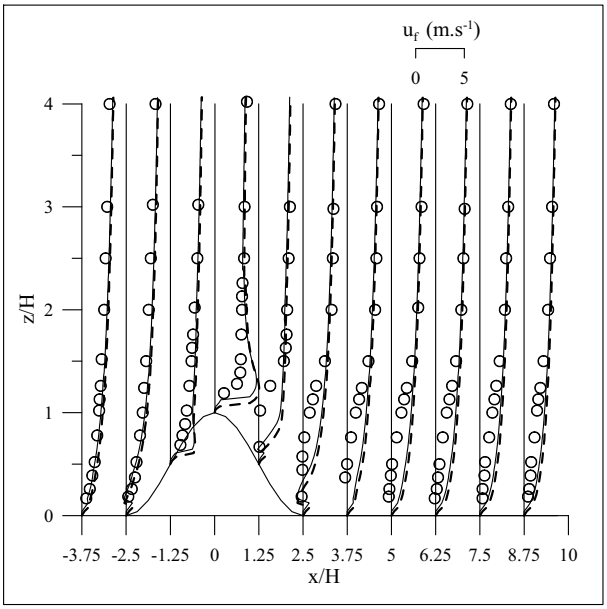


figure 1.8 – profils verticaux de la composante u_f de la vitesse fluide moyenne déterminés par le modèle FLOWSTAR lorsque $u_* = 0{,}259$ m.s^{-1} et $z_0 = 1{,}07.10^{-3}$ m (cas $d_0 = 75$ mm, ligne discontinue) et lorsque $u_* = 0{,}292$ m.s^{-1} et $z_0 = 2{,}07.10^{-3}$ m (cas $d_0 = 80$ mm, ligne continue)

de vitesse sont choisis parmi les profils définis dans le tableau 1.1 en fonction de la distance d_0. Les valeurs des vitesses de frottement et des rugosités sont relativement proches. Il n'est pas étonnant dans ces conditions que dans la figure 1.8, la composante u_f soit similaire pour les deux profils.

1.3 écoulement au-dessus d'une dune

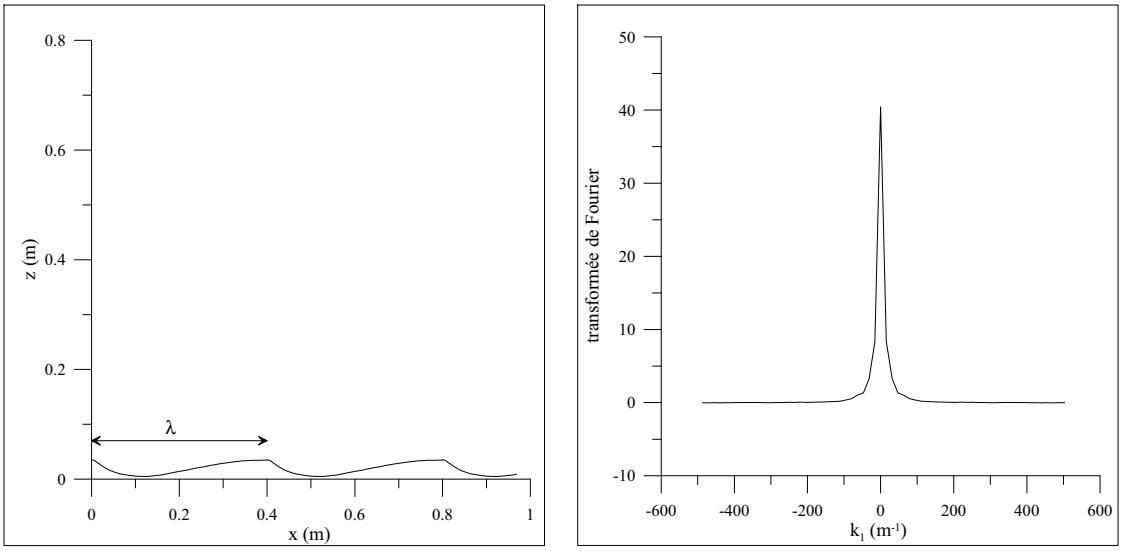
Le modèle FLOWSTAR est utilisé pour simuler l'écoulement au-dessus d'une dune fluviale. Les résultats numériques sont comparés aux mesures de Raudkivi (1963,1966) obtenues avec des dunes bidimensionnelles.

Les dunes se forment à partir d'une petite perturbation créée à la surface du lit par l'accumulation ponctuelle de grains. Cette perturbation modifie localement l'écoulement et par conséquent, le mouvement des grains. Les dunes se propagent progressivement en aval de la perturbation. Elles sont transportées par des phénomènes d'érosion et de déposition. Les grains situés sur la face amont sont érodés et sont déposés en aval de la crête. (Raudkivi, 1963) L'écoulement au-dessus de dunes dans l'eau et dans l'air est l'objet de nombreux travaux expérimentaux et numériques : cf. par exemple les études de van Mierlo et de Ruiter (1988), de Mendoza et Shen (1990), de Sajjadi et Aldridge (1995), de Maddux *et al.* (2003a,b) et de Sukhodolov *et al.* (2006). L'approche proposée par Jackson et Hunt (1975) et par Hunt *et al.* (1988) est notamment appliquée par Frank et Kocurek (1996) et par McKenna Neuman *et al.* (1997, 2000) à des écoulements dans l'air au-dessus de dunes. L'écoulement entre deux dunes successives peut être décomposé en quatre zones (Hudson *et al.*, 1996 ; Walker et Nickling, 2002) :

1) une zone de recirculation dans le creux de la dune, dont les dimensions dépendent du rapport η/λ avec η et λ la hauteur et la longueur de la dune ;
2) une zone de fort cisaillement proche de la surface ;
3) une couche limite qui se forme immédiatement à l'aval de la zone de recirculation et qui s'étend jusqu'au sommet de la dune suivante
4) une zone dans lequel l'écoulement est faiblement perturbé.

Forme de la dune

Raudkivi (1963, 1966) observe à la surface du lit des dunes bidimensionnelles dont la forme est montrée dans la figure 1.9. Leur hauteur η est égale à 35 mm et leur longueur λ à 400 mm.



(a) fonction de surface f (b) transformée de Fourier de la fonction surface f

figure 1.9 – forme des dunes observées dans les expériences de Raudkivi (1963)

Dans les simulations, compte tenu de l'utilisation de transformées de Fourier, le lit est supposé périodique dans la direction x. Il est formé par une succession de dunes. Les dimensions du domaine utilisé sont identiques dans les directions x et y et sont égales à λ. Le nombre de nœuds est égal à 2^6 dans la direction x et à 2^5 dans les direction y.
Les dunes sont bidimensionnelles et la fonction surface f est indépendante de la variable y. La transformée de Fourier $\tilde{f}$ est donc nulle si le nombre d'onde k_2 est différent de zéro. Son évolution en fonction du nombre d'onde k_1 est représentée dans la figure 1.9 pour $k_2 = 0$.

Profil vertical de la vitesse non perturbée

Le profil vertical de la vitesse non perturbée est modélisé par la loi logarithmique. La vitesse de frottement u_* et la rugosité z_0 sont déduites des profils mesurés (Raudkivi, 1966) suivant une méthode similaire à celle utilisée dans le paragraphe 1.2 à savoir :

1. les profils de vitesse sont modifiés afin de conserver le débit le long de la dune ;
2. les grandeurs u_* et z_0 sont déterminées pour plusieurs couples (d, d_0) afin de minimiser l'erreur.

Les profils de vitesse modifiés sont montrés dans la figure 1.3. La loi logarithmique est vérifiée

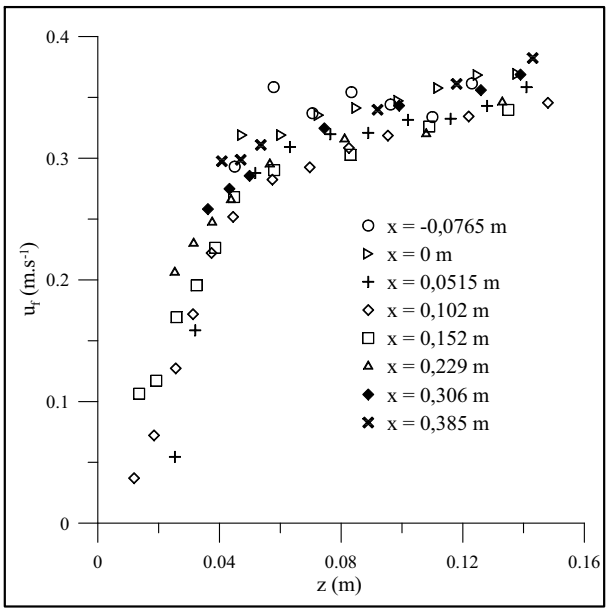


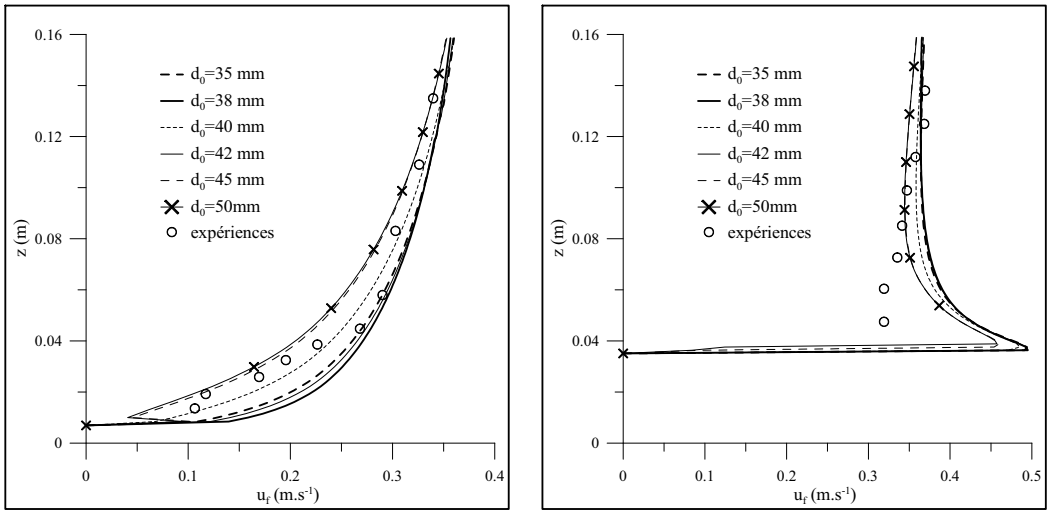
figure 1.10 – détermination de la distance d_0 ; z est la distance au lit

approximativement à partir d'une distance au lit d_0 comprise entre 35 et 50 mm. Pour six distances d_0 choisies dans cet intervalle, nous calculons les valeurs u_*, z_0 et d qui minimisent l'erreur E. Ces valeurs sont récapitulées dans le tableau 1.2. Elles varient de façon importante en

distance d_0	hauteur de déplacement d	erreur commise E	vitesse de frottement u_*	hauteur de rugosité z_0
35 mm	32,5 mm	0,0174 m.s^{-1}	0,0140 m.s^{-1}	4,25.10^{-6} m
38 mm	36,9 mm	0,0172 m.s^{-1}	0,0113 m.s^{-1}	4,02.10^{-7} m
40 mm	20,8 mm	0,0168 m.s^{-1}	0,0180 m.s^{-1}	4,30.10^{-5} m
42 mm	34,9 mm	0,0166 m.s^{-1}	0,0129 m.s^{-1}	1,76.10^{-6} m
45 mm	0 mm	0,0162 m.s^{-1}	0,0223 m.s^{-1}	2,31.10^{-4} m
50 mm	0 mm	0,0163 m.s^{-1}	0,0231 m.s^{-1}	2,91.10^{-4} m

tableau 1.2 – hauteur de déplacement, vitesse de frottement et hauteur de rugosité qui minimisent l'erreur E pour six distances d_0

fonction de la distance d_0 contrairement à l'écoulement autour d'une colline isolée. De plus, la figure 1.11 montre que le calcul de l'écoulement dépend du profil de vitesse non perturbée. Il n'est



(a) $x = 0{,}152$ m (b) $x = -0{,}0765$ m

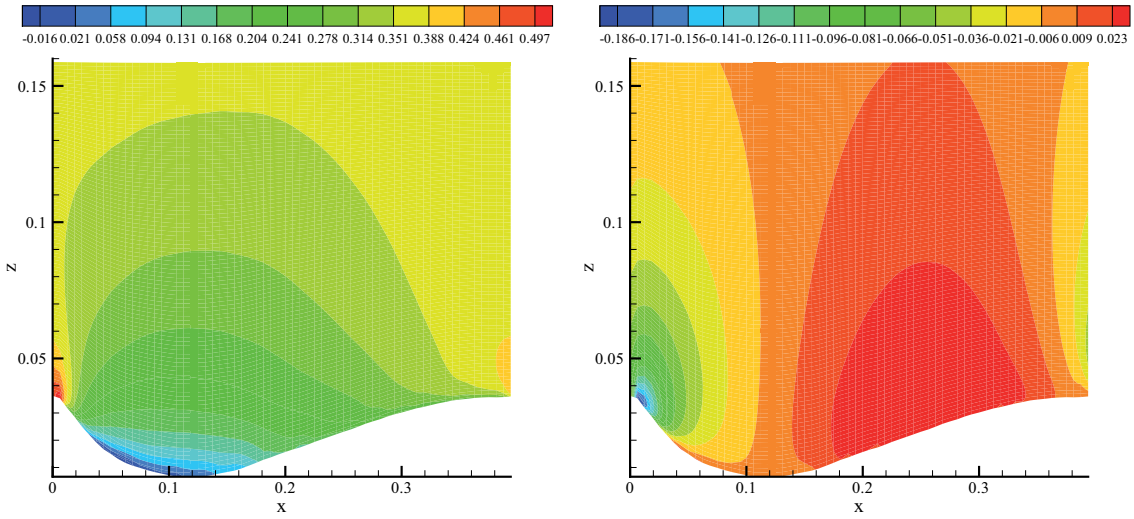
figure 1.11 – influence des paramètres d'entrée u_* et z_0 sur le profil de vitesse ; les valeurs u_* et z_0 sont définies dans le tableau 1.2 en fonction de la distance d_0 ; la longueur L_1 est égale à la longueur de la dune ; la position des profils dans la direction x est donnée dans la figure 1.13

pas possible de déduire du tableau 1.2 les « bons » paramètres et il est nécessaire d'introduire un second critère qui intègre la rugosité z_0. La hauteur des rugosités est liée au diamètre des grains. Par exemple, nous avons : $z_0 = 2d_p/30$. Dans les expériences de Raudkivi (1963, 1966), le diamètre moyen du sédiment est égal à 0,4 mm et la valeur théorique de la rugosité est de l'ordre de 10^{-5} m. Compte tenu de cette valeur, la vitesse de frottement u_* est fixée dans les simulations à 0,018 m.s^{-1} et la rugosité z_0 à $4{,}3.10^{-5}$ m. Dans ce cas, la distance d_0 est égale à 40 mm et la hauteur de déplacement à 20,8 mm.

Champ de vitesse

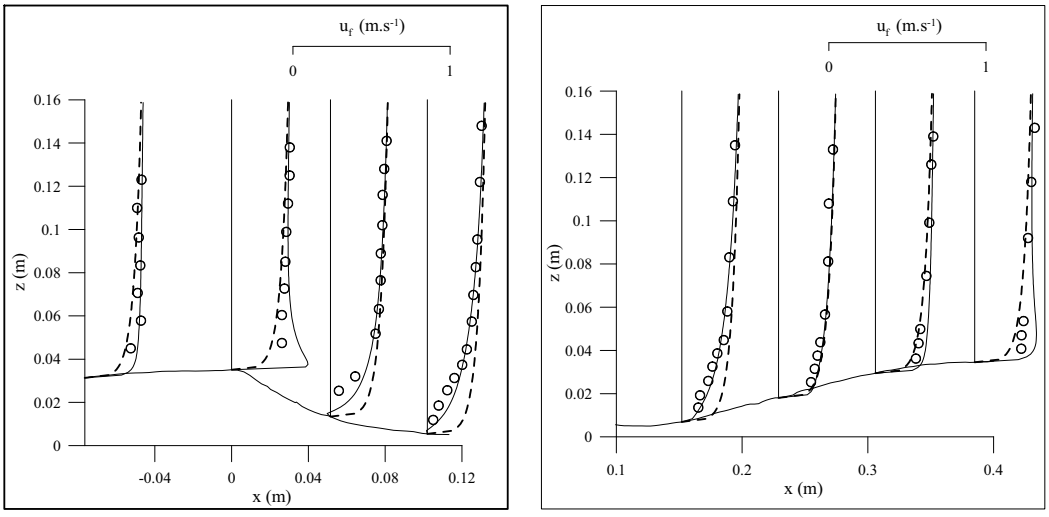
La figure 1.12 montre l'évolution des composantes horizontale et verticale u_f et w_f de la vitesse moyenne du fluide qui est déterminée par le modèle FLOWSTAR en fonction des variables x et z. En raison de la forme de la dune, la vitesse du fluide est indépendante de y et sa composante v_f est nulle. Dans les calculs, la longueur L_1 est égale à la longueur de la dune. Les longueurs h_m, l et l_s sont données dans le tableau 1.3.
La vitesse u_f est maximale à la crête à cause de la compression des lignes de courant à cet endroit. En aval de la crête, l'écoulement est dévié vers le lit ($w_f < 0$) tandis qu'en amont, il est dévié vers la surface libre ($w_f > 0$). Nous observons également une zone de recirculation dans le creux de la dune. Cette zone est très petite par rapport à l'expérience. Ce résultat est identique à celui obtenu en aval de la colline et il est lié au modèle de turbulence.

La figure 1.13 compare les profils verticaux de la vitesse u_f calculés et mesurés. Nous constatons que les profils de vitesse sont différents du profil logarithmique et qu'il y a un accord raisonnable entre le calcul et l'expérience notamment pour $0{,}08 < x < 0{,}3$ m. Les lacunes du modèle FLOWSTAR sont ici les mêmes que celles mises en évidence dans le cas de la colline isolée. Le modèle FLOWSTAR surestime la perturbation de la vitesse à la crête et sous-estime la décélération du fluide dans le creux de la dune.



(a) composante dans la direction x (b) composante dans la direction z

figure 1.12 – vitesse moyenne du fluide déterminé par le modèle FLOWSTAR ; la longueur L_1 est égale à la longueur de la dune ; les variables x et z sont exprimées en mètre et la vitesse en mètre par seconde



(a) (b)

figure 1.13 – profils verticaux de la vitesse u_f calculée (ligne continue) et mesurée (cercle) ; le profil de la vitesse non perturbée est indiquée par la ligne discontinue

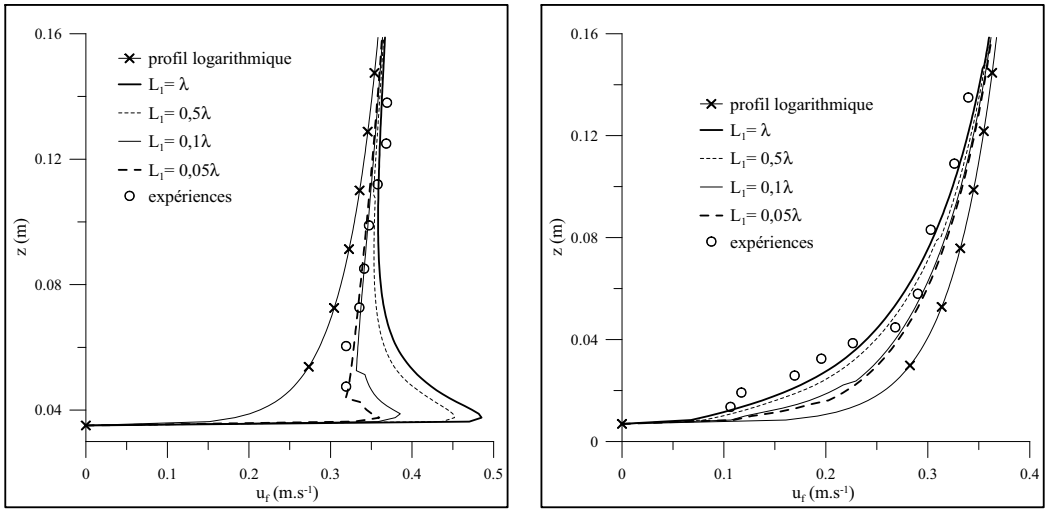
Influence de la longueur horizontale L_1

Nous déterminons l'écoulement au-dessus de la dune pour quatre valeurs de L_1 : $L_1 = \lambda$, $L_1 = 0{,}5\lambda$, $L_1 = 0{,}1\lambda$ et $L_1 = 0{,}05\lambda$. Les longueurs h_m, l et l_s utilisées sont indiquées dans le tableau 1.3.

longueur horizontale caractéristique L_1	position de la couche intermédiaire h_m	position de la couche de paroi l	position de la sous-couche visqueuse l_s
0,4 m	140,6 mm	20,7 mm	$9{,}44.10^{-4}$ m
0,2 m	73,3 mm	11,5 mm	$7{,}02.10^{-4}$ m
0,04 m	16,4 mm	3,0 mm	$3{,}60.10^{-4}$ m
0,02 m	8,7 mm	1,7 mm	$2{,}73.10^{-4}$ m

tableau 1.3 – longueurs h_m, l et l_s en fonction de quatre longueurs horizontales L_1

La figure 1.14 montre les profils verticaux de la vitesse u_f obtenus à la crête et au creux de la dune. Les résultats sont similaires à ceux obtenus pour la colline bidimensionnelle. La perturbation de la



(a) $x = -0{,}0765$ m (b) $x = 0{,}152$ m

figure 1.14 – influence de la longueur L_1 sur le calcul de l'écoulement ; la position des profils dans la direction x est donnée dans la figure 1.13

vitesse dans la direction x diminue lorsque la longueur L_1 diminue. Cet exemple montre encore que le choix de la longueur L_1 n'est pas évident. En effet, au sommet de la dune, le modèle FLOWSTAR donne des résultats satisfaisants si $L_1 = 0{,}05\lambda$. Lorsque la longueur L_1 augmente, l'augmentation de la vitesse est surestimée par rapport à l'expérience. Au contraire, sur la face ascendante, la perturbation générée avec $L_1 = 0{,}05\lambda$ est trop faible et le bon profil est obtenu avec $L_1 = \lambda$.

1.4 écoulement au-dessus du lit de sédiments

Le modèle FLOWSTAR est utilisé dans le modèle numérique pour déterminer l'écoulement au-dessus du lit de sédiments. L'écoulement est modifié localement par la présence de reliefs et de creux formés aléatoirement à la surface par les grains. Lorsque les grains sont mis en mouvement, le profil de la surface évolue rapidement. La résolution de l'équation de mouvement du grain nécessite de connaître la vitesse du fluide au centre de la particules ainsi que ses dérivées partielles. Le modèle FLOWSTAR donne dans le plan horizontal la vitesse du fluide seulement en certains points et celle-ci est estimé au centre de la particule par une interpolation bilinéaire (Press *et al.*, 2002, p. 123).
Nous précisons dans ce paragraphe la méthode développée pour déterminer l'écoulement au-dessus du lit à partir du modèle FLOWSTAR. Les résultats présentés sont obtenus pour un lit de sédiments composés de grains de diamètres variables compris entre 1 et 2 mm ($d_m = 1{,}65$ mm), dont la surface est montrée dans la figure 1.15. Nous avons besoin pour appliquer le modèle

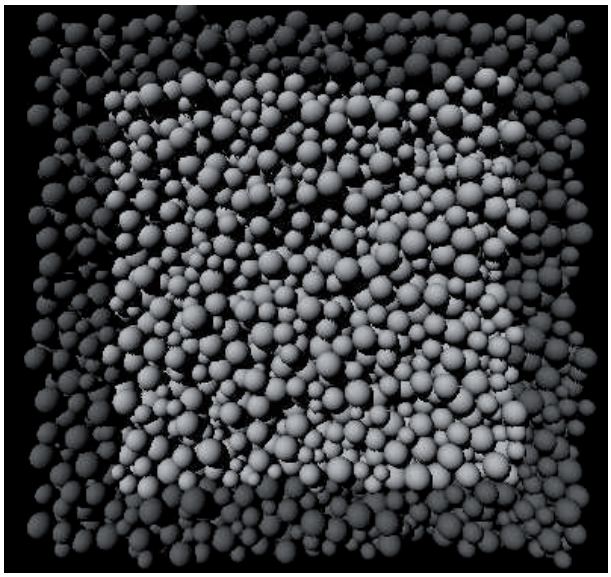


figure 1.15 – surface du lit de sédiments utilisée dans les simulations ; le diamètre des grains varie entre 1 et 2 mm

FLOWSTAR de définir la fonction surface f qui caractérise le relief à la surface du lit. Le lit est un arrangement de sphères et la fonction f dépend de la position des grains exposés à l'écoulement. L'approche la plus simple est de déterminer la fonction f directement, par un simple relevé topographique des surfaces des grains exposés (*i.e.* des grains qui sont situés dans la couche supérieure de l'arrangement). La fonction f obtenue cette cette approche est très irrégulière, en partie à cause de la dispersion de la taille des grains, comme le montre la figure 1.16. Les pentes locales de la surface sont parfois beaucoup plus grandes que la limite de 1/3 supposée lors de la linéarisation des équations de Navier-Stokes dans le modèle FLOWSTAR. Les calculs réalisés avec cette fonction f fournissent alors des vitesses, proche de la paroi, aberrantes.

Surface virtuelle

Proche de la surface, la vitesse du fluide est relativement faible en particulier entre les grains (existence de zones d'eau stagnante) et les effets visqueux y sont importants. Ils tendent à lisser la surface entre les grains. Afin de reproduire ces effets qui ne sont pas pris en compte dans le modèle FLOWSTAR, nous développons un algorithme basé sur la notion de surface virtuelle définie par une pente limite qui est fixée à 0,3. Cette surface virtuelle est formée par un ensemble

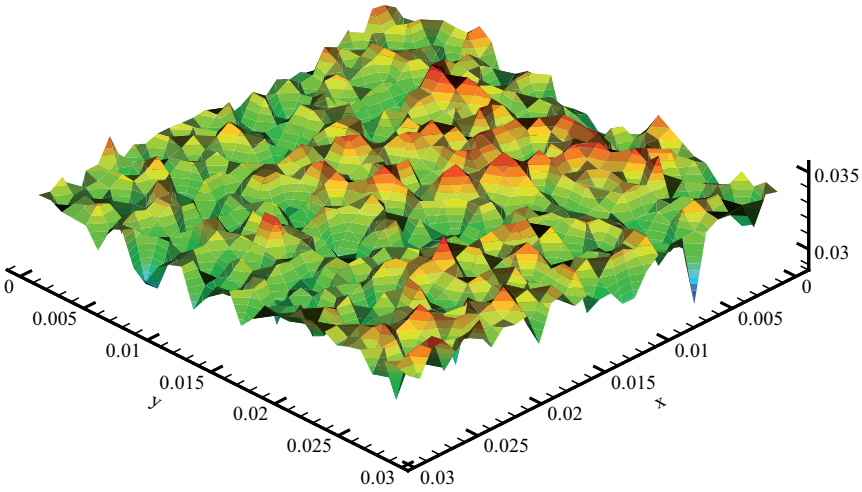


figure 1.16 – fonction de surface f obtenue par un relevé topographique pour le lit présenté dans la figure 1.15 ; les variables x, y et f sont exprimées en mètre

de cônes localisés sur les grains les plus proéminents, dont la pente est égale à la pente limite. Sa définition et les étapes de sa construction sont représentées de façon schématique dans la figure 1.17. Le premier cône est centré en bas du grain le plus élevé, c'est-à-dire pour lequel la somme $z_p + a_p$ est maximale. Nous considérons que les grains dont le centre est situé à l'intérieur du cône sont situés sous la surface virtuelle. La position du deuxième cône est déterminée à partir des grains qui sont hors du premier cône. Son sommet est placé en bas du grain le plus élevé parmi ces grains. Cette opération est répétée jusqu'à ce que tous les grains du lit sont soit au sommet soit à l'intérieur d'un cône. La surface virtuelle est alors l'enveloppe des cônes, elle représente la surface du lit dans le modèle FLOWSTAR et dans le modèle de transport. Ainsi, compte tenu de la position choisie pour le cône (*i.e.* en bas du grain), les grains exposés à l'écoulement sont situés sur la surface virtuelle. Cette situation est comparable à celle du grain posé sur une rangée de grains identiques. Dans ce cas, la surface du lit est localisée à une distance de $0{,}25\,d_p$ du sommet des grains de la rangée et le grain exposé à une distance de $0{,}6\,d_p$ de la surface du lit (van Rijn, 1984a).
Lorsque le grain est situé sous la surface virtuelle, la vitesse fluide en son centre est prise nulle dans le modèle numérique.

La fonction de surface f est donnée par la relation (1.45) :

$$f(x,y) = z_f(x,y) - z_{fm} \tag{1.45}$$

Avec : z_f la position de la surface virtuelle par rapport à l'origine du repère :

$$z_f(x,y) = \max_{k=1\ldots Nc} \left(z_{ck} - a_k \sqrt{(x - x_{ck})^2 + (y - y_{ck})^2} \right) \tag{1.46}$$

x_{ck}, y_{ck} et z_{ck} les coordonnées du sommet du cône k ; a_k sa pente ($a_k = 0{,}3$) ; N_c le nombre de cônes sur la surface du lit ; z_{fm} la valeur moyenne de la fonction z_f.
La fonction f obtenue pour le lit présenté dans la figure 1.15 est montrée dans la figure 1.18. Le nombre de cônes nécessaire pour recouvrir la surface est 301. La fonction f est discrétisée suivant un maillage cartésien uniforme. Le nombre de nœuds est identique dans les directions x et y et égal à 2^5. La transformée de Fourier de la fonction f définie dans la figure 1.18 est montrée dans la figure 1.19.

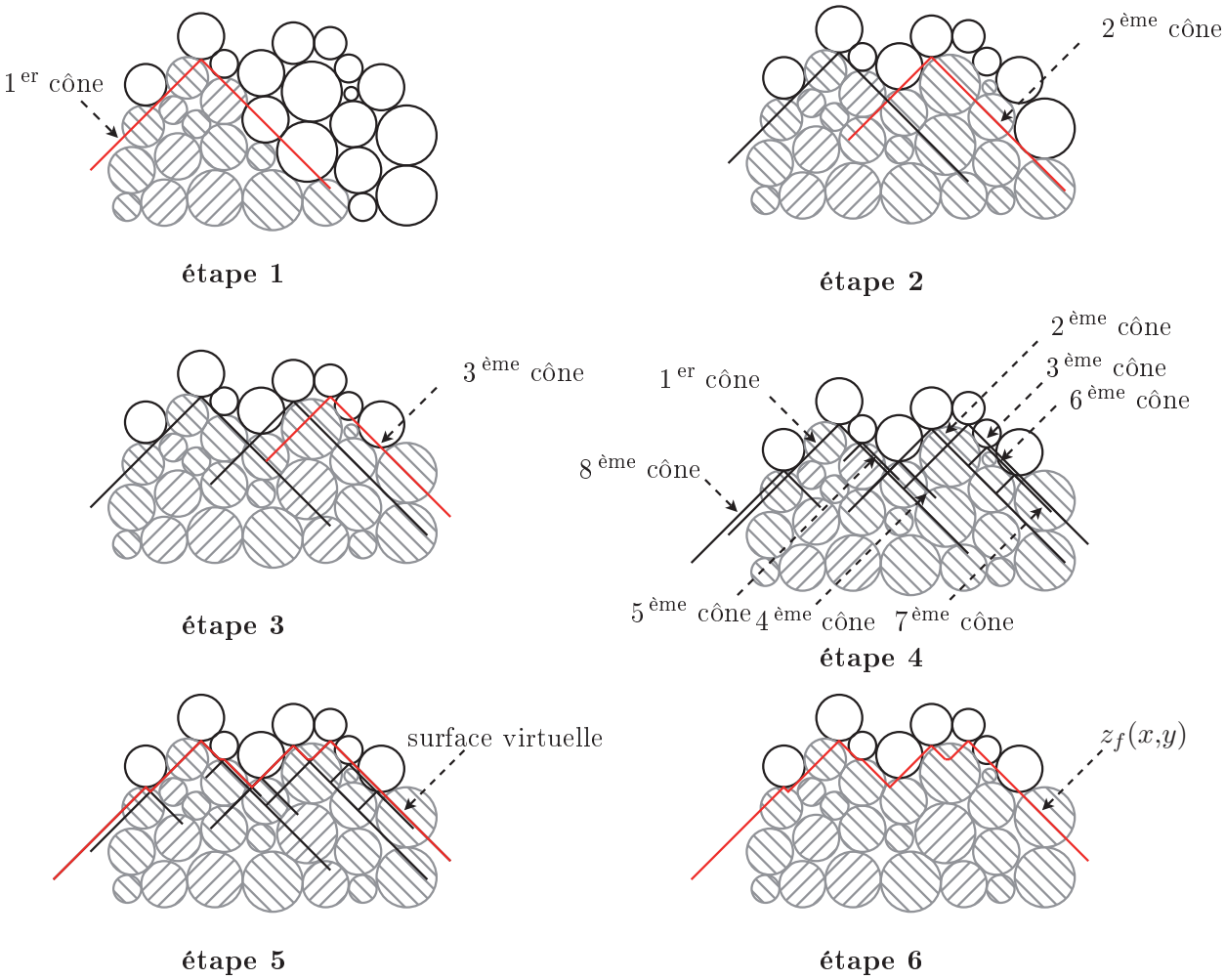


figure 1.17 – définition et étapes de construction de la surface virtuelle

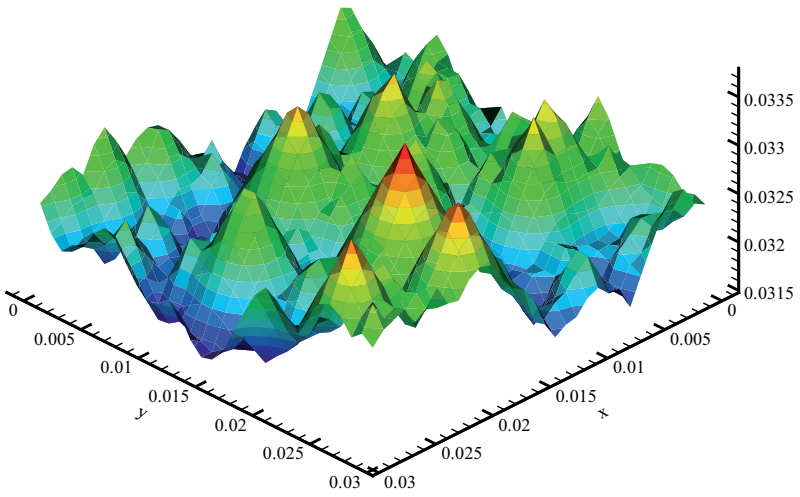


figure 1.18 – surface virtuelle formée par les cônes pour le lit montré dans la figure 1.15 ; sa position z_f mesurée par rapport à l'origine de l'arrangement est représentée en fonction des variables x et y ; les trois grandeurs sont exprimées en mètre

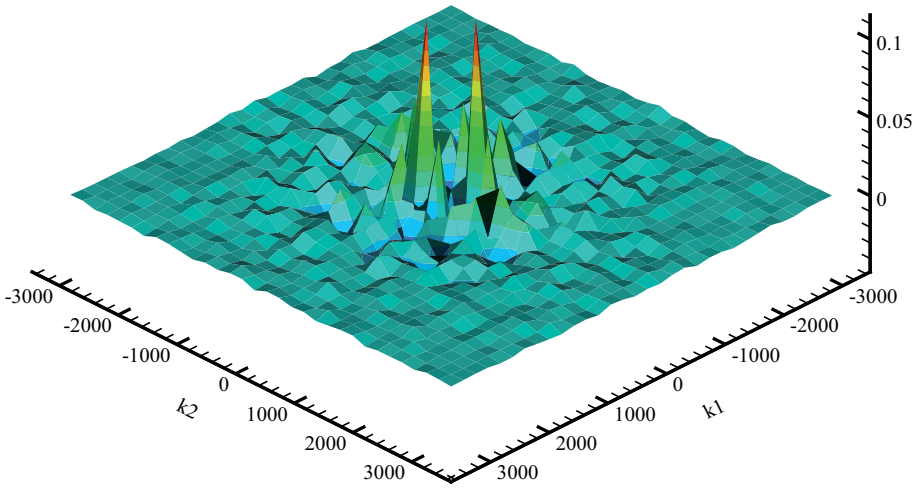


figure 1.19 – transformée de Fourier de la fonction f en fonction des nombres d'onde k_1 et k_2

Champ de vitesse

Le profil de vitesse non perturbée est logarithmique. La vitesse de frottement u_* est un paramètre d'entrée du modèle de transport utilisé pour caractériser la force de l'écoulement. La rugosité z_0 est donnée par l'équation (1.6) (van Rijn, 1984a) et la hauteur de rugosité équivalente de Nikuradse k_s est égale à $2\,d_{\max}$ avec $d_{\max}$ le diamètre maximal des grains.
Les applications du modèle FLOWSTAR aux écoulements au-dessus de la colline et de la dune montrent que la perturbation de la vitesse dépend de la longueur L_1. Ces applications indiquent aussi que sa définition et son effet sur l'écoulement ne sont pas encore complètement déterminés. Dans notre cas, la longueur L_1 caractérise le relief à la surface du lit qui est représentée par un ensemble de cônes. Il est donc cohérent de définir ici cette longueur à partir de leur position. Nous proposons l'expression (1.47) pour la longueur L_1.

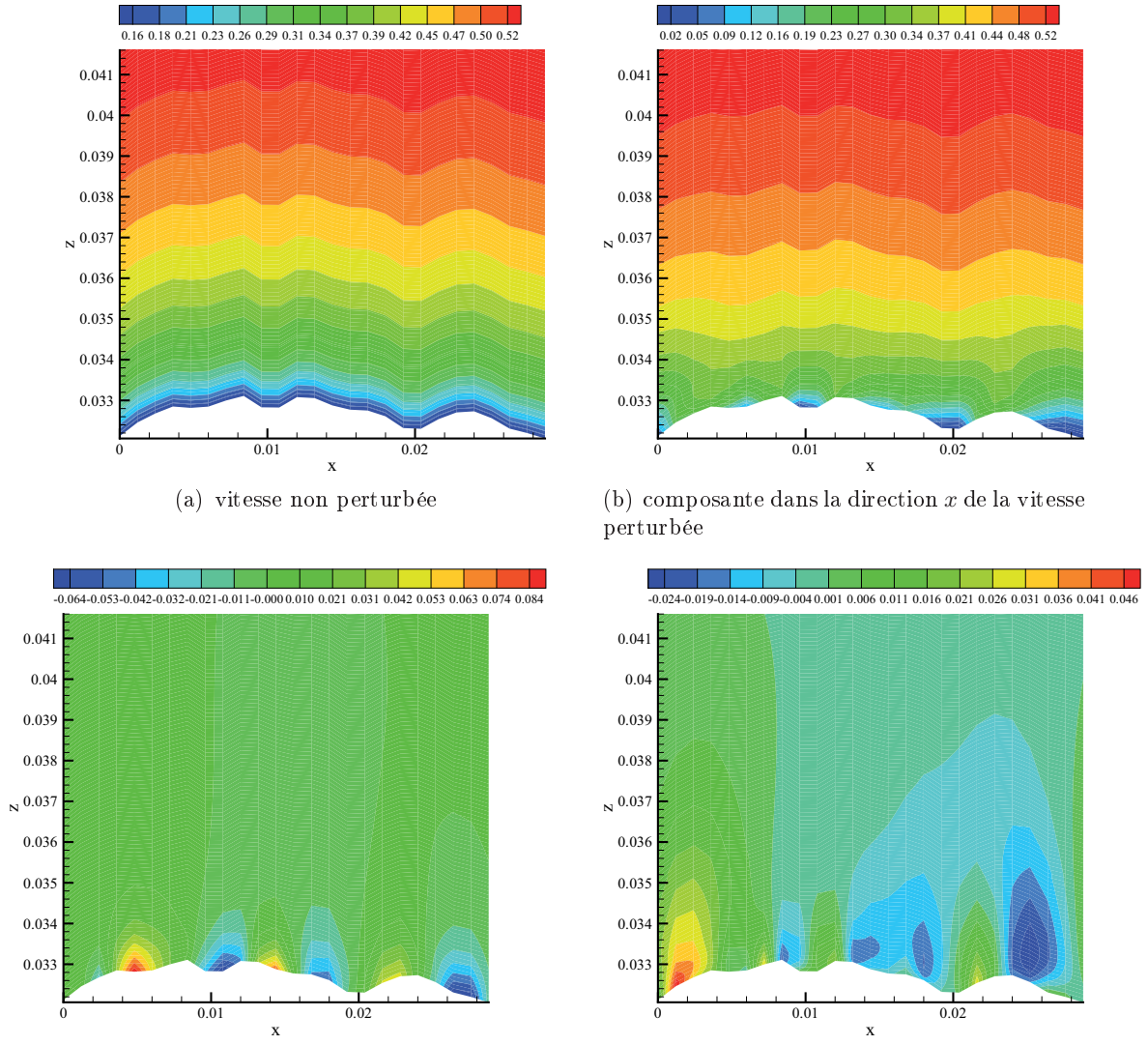
$$L_1 = \max_{i,j} \left(L_{i,j} \right) \tag{1.47}$$

Avec $L_{i,j}$ la distance entre le nœud (i,j) et le sommet du cône qui lui est le plus proche.
La longueur L_1 est égale à la distance maximale entre les nœuds du maillage et le cône qui leur est le plus proche. Plus la longueur L_1 est petite, plus les cônes sont proches et nombreux et plus le nombre de grains exposés est grand. La longueur L_1 caractérise ainsi l'espace entre les cônes c'est-à-dire les creux. Les hauteurs h_m, l et l_s sont estimées à partir des équations (1.32), (1.36) et (1.39).

L'écoulement au-dessus du lit est calculé pour $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}. La valeur des coefficients du modèle est donnée dans le tableau 1.4. La longueur h_m correspond approximativement à deux fois le diamètre moyen du grain. Ainsi le transport par charriage et en saltation se fait dans la couche de cisaillement et dans la couche intermédiaire, zones de l'écoulement dans lesquelles l'effet du relief du lit est important. L'évolution de la vitesse en fonction des variables x et z est montrée dans la figure 1.20 en $y = 0{,}015$ m. Les irrégularités locales de la surface du lit peuvent modifier de façon significative la vitesse du fluide. Les creux situés en $x = 0{,}01$ m et $x = 0{,}02$ m produisent une décélération de cette vitesse dans la direction x et une déviation de l'écoulement dans les deux autres directions. Ces modifications de l'écoulement influent sur la mise en mouvement des grains exposés. L'intervalle de variation des composantes de la vitesse au-dessus du lit est indiqué dans le tableau 1.5. La perturbation de la vitesse dans la direction latérale est relativement symétrique. Ce résultat s'explique par la disposition aléatoire des grains à la surface. La vitesse u_f dans la direction x est, en certains endroits du lit, négative et des

position moyenne de la surface virtuelle z_{fm}	3,23 cm
hauteur de rugosité z_0	0,12 mm
longueur horizontale caractéristique L_1	5,89 mm
longueur h_m	3,25 mm
longueur l	0,96 mm
longueur l_s	0,34 mm

tableau 1.4 – définition des coefficients du modèle FLOWSTAR ; les valeurs z_0, h_m, l et l_s sont obtenues pour $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}



(a) vitesse non perturbée

(b) composante dans la direction x de la vitesse perturbée

(c) composante dans la direction y de la vitesse perturbée

(d) composante dans la direction z de la vitesse perturbée

figure 1.20 – champ de vitesse au-dessus du lit (présenté dans la figure 1.15) en $y = 0{,}015$ m ; les variables x et z sont exprimées en mètre et la vitesse en mètre par seconde

vitesse non perturbée	$0{,}13 \ldots 0{,}55$ m.s^{-1}
perturbation de la vitesse dans la direction x	$-0{,}33 \ldots 0{,}31$ m.s^{-1}
composante u_f dans la direction x de la vitesse perturbée	$-0{,}20 \ldots 0{,}55$ m.s^{-1}
composante v_f dans la direction y de la vitesse perturbée	$-0{,}15 \ldots 0{,}14$ m.s^{-1}
composante w_f dans la direction z de la vitesse perturbée	$-0{,}061 \ldots 0{,}091$ m.s^{-1}

tableau 1.5 – intervalle de variation des composantes de la vitesse « perturbée » au-dessus du lit de sédiments

zones de recirculation sont modélisées. Cependant, à cause des limites du modèle FLOWSTAR, ces zones sont très petites. Par ailleurs, les vitesses v_f et w_f dans les directions latérale et verticale apparaissent non négligeables par rapport à u_f, même si elles lui sont inférieures. La déviation de l'écoulement génère des vitesses plus faibles dans la direction z. Loin de la surface du lit, la perturbation de l'écoulement tend à s'annuler.

1.5 conclusion

La vitesse du fluide au voisinage du grain dépend dans le modèle numérique de sa position. Lorsque le grain est situé à la surface du lit, l'écoulement est déterminé en utilisant le modèle FLOWSTAR. Lorsqu'il est situé sous la surface, l'écoulement est supposé au repos et la vitesse du fluide est prise nulle.
Le modèle FLOWSTAR est développé pour les couches limites atmosphériques au-dessus de collines de faible pente. La surface des lits de sédiments n'est pas plate et le modèle FLOWSTAR est utilisé pour représenter l'effet des irrégularités de la surface sur l'écoulement. Ces irrégularités sont créées localement par l'accumulation de grains. La surface du lit est remplacée dans les simulations par une surface virtuelle définie à partir de cônes localisés sur les grains les plus proéminents de l'arrangement. Le champ de vitesse fluide obtenu à partir du modèle d'écoulement dépend de la longueur horizontale caractéristique L_1, dont la définition reste encore à préciser. La longueur L_1 est ici estimée à partir de la position des cônes. Les simulations réalisées pour des écoulements au-dessus de collines et de dunes montrent que le modèle FLOWSTAR tend à surestimer la perturbation de la vitesse au sommet du relief et à la sous-estimer en aval. Ceci est lié à son modèle de turbulence. Par ailleurs, le champ de vitesse calculé avec le modèle FLOWSTAR est un champ de vitesse moyen. Or les expériences montrent le rôle important de la turbulence sur la mise en mouvement des grains. Ainsi, le modèle d'écoulement devra être modifié afin d'étudier l'influence de la turbulence. Par exemple le modèle FLOWSTAR pourra être couplé avec un modèle basé sur l'approche *kinematic simulation* qui consiste à représenter la fluctuation turbulente par une série de Fourier. Cette approche est utilisée par Ushijima (1998) pour simuler la dispersion des particules lourdes dans une turbulence homogène isotrope.
Enfin, nous considérons dans ce travail que l'effet de l'écoulement à l'intérieur du lit sur le mouvement des particules est faible. Pour cette raison, nous supposons une vitesse fluide nulle sous la surface du lit. Un développement possible du modèle d'écoulement sera la modélisation de cet écoulement.

2 modèle de transport

Le modèle de transport est développé pour étudier le mouvement des grains dans un arrangement soumis à un écoulement. Il est présenté dans ce chapitre. Il repose sur le couplage entre le modèle DEM décrit dans la partie 2 et le modèle d'écoulement décrit dans le chapitre 1 de cette partie. Il est appliqué à des sédiments composés de grains de diamètres variables compris entre 1 et 2 mm, afin d'être validé.

2.1 principes du modèle

Le modèle de transport détermine la position des grains de l'arrangement au cours du temps lorsque sa face supérieure est soumise à un écoulement. Ses paramètres d'entrée concernent le sédiment (distribution de la taille des grains) et l'écoulement non perturbé (vitesse de frottement). Les grains sont représentés par des sphères.

Mise en mouvement des grains

Les grains sont mis en mouvement de deux façons. Ils sont entraînés par l'écoulement lorsque la force exercée par le fluide est suffisante. Ils sont aussi « éjectés » de leur position suite à une collision. Dans le lit, le grain est en équilibre sur au moins trois grains. Nous supposons que lorsqu'il est entraîné par le fluide, il est mis en mouvement par rotation autour d'un des axes qui relient les centres de ces grains. Nous avons :

$$\mathcal{M}_{mn} = \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_G + \overrightarrow{\mathcal{M}}_F\right) \cdot \overrightarrow{a}_{mn} = 0 \tag{2.1}$$

Avec $\overrightarrow{a}_{mn}$ le vecteur unitaire directeur de l'axe a_{mn} qui relie les centres des grains m et n (cf. la figure 2.1). $\overrightarrow{\mathcal{M}}_F$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ sont les moments de la force fluide et de la force de flottabilité exprimés

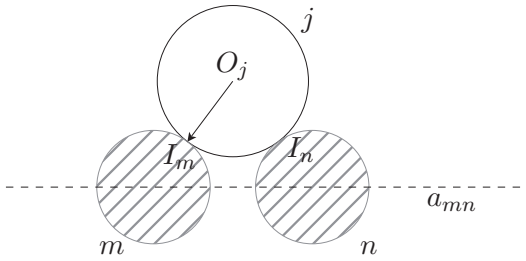


figure 2.1 – mise en mouvement du grain j par rotation autour de l'axe a_{mn}

en un des points de contact entre le grain exposé et les grains sur lesquels il est en équilibre. La force de flottabilité et la force fluide sont supposées s'exercer au centre du grain. $\mathcal{M}_{mn}$ est la projection de la somme $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_F$ sur l'axe a_{mn}. Seuls les grains exposés à l'écoulement sont susceptibles d'être entraînés par le fluide. Compte tenu des hypothèses utilisées dans le modèle d'écoulement, ce sont les grains situés au-dessus de la surface virtuelle du lit, c'est-à-dire ceux aux sommets des cônes. Initialement il y a toujours à la surface du lit des grains en position instable

qui sont entraînés par le fluide. Nous considérons également qu'un grain est mis en mouvement dès qu'il est en contact avec un grain mobile. Ainsi après quelques itérations, la plupart des grains du lit sont en mouvement. Cependant les vitesses des grains ne sont pas les mêmes à la surface et à l'intérieur de l'arrangement. A l'intérieur de l'arrangement, les vitesses et les déplacements des grains sont très faibles. (Les grains formant la base de l'arrangement (cf. le paragraphe 3.3 dans la partie 2) sont fixes dans le modèle de transport.)
Le modèle de transport simule le mouvement des grains à la surface du lit et dans les couches inférieures. Le transport résiduel à l'intérieur du lit est généré, dans le modèle, essentiellement par les interactions mécaniques qui existent entre les grains. Il influe *a priori* sur le transport total du lit. Ce transport n'est pas pris en compte dans tous les modèles. Ainsi, dans les modèles de Jefcoate (1995) et de Heald *et al.* (2004), il est probable que seul le mouvement des grains situés à la surface du lit est représenté du fait des hypothèses de modélisation (utilisation du modèle de collision type *hard sphere* notamment). Dans les simulations, le grain de sédiment se déplace le plus souvent par charriage. Dans certaines conditions, il peut se retrouver piégé entre plusieurs grains. Sa vitesse et sa position oscillent faiblement autour d'une valeur moyenne : il est en vibration. Le réentraînement du grain dans le fluide dépend alors de son équation de mouvement et de la balance entre la force fluide, la force de flottabilité et les forces de contact (cf. l'équation (2.2)). Dans l'approche de Jefcoate (1995) et de Heald *et al.* (2004), le grain en vibration va se déposer. Les auteurs ne précisent pas toutefois les conditions utilisées (énergie minimale du grain par exemple). Le grain une fois déposé est remis en mouvement si la condition (2.1) est vérifiée.

Equation de mouvement du grain

La position du grain dans le modèle de transport est déterminée comme dans le modèle de déposition, à partir de la résolution de son équation de mouvement. La méthode utilisée pour résoudre cette équation est précisée dans le paragraphe 3.1 de la partie 2.
Le grain est soumis à cinq forces : la force de flottabilité, la force de traînée, la force de portance, la force d'accélération et la force de contact lorsqu'il est en collision avec d'autres grains. Son équation de mouvement s'écrit (cf. le paragraphe 1.7 dans la partie 2) :

$$\rho V_p(\gamma + C_M)\frac{d\overrightarrow{u}_p}{dt} = (\rho_s - \rho)\, V_p \overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_D + \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_A + \overrightarrow{F}_c \tag{2.2a}$$

$$\mathcal{I}\,\frac{d\overrightarrow{\omega}_p}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_c \tag{2.2b}$$

Avec : $\overrightarrow{u}_p$ et $\overrightarrow{\omega}_p$ la vitesse de translation et de rotation du grain ; V_p le volume du grain ; ρ_s et ρ la masse volumique du sédiment et du fluide ; $\gamma = \rho_s/\rho$; C_M le coefficient de masse ajoutée ($C_M = 0{,}5$) ; $\overrightarrow{F}_D$ la force de traînée ; $\overrightarrow{F}_L$ la force de portance ; $\overrightarrow{F}_A$ la force d'accélération ; $\overrightarrow{F}_c$ la force de contact ; $\mathcal{I}$ le moment d'inertie du grain exprimé en son centre ; $\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ le moment de la force de contact exprimé au centre du grain.
L'influence du lit sur les forces fluide n'est pas prise en compte, conformément aux autres modèles de trajectoire (Niño et Garcia, 1998b ; Lee *et al.*, 2006) et les expressions des forces utilisées sont établies en l'absence de paroi. La force de traînée $\overrightarrow{F}_D$ est donnée par la relation de Schiller et Nauman (1933) si $Re_p < 800$.

$$\overrightarrow{F}_D = -6\pi\mu a_p \left(1 + 0{,}15 Re_p^{0{,}687}\right) \overrightarrow{u}_p \tag{2.3}$$

Avec Re_p le nombre de Reynolds de la particule basé sur son diamètre.
Si $Re_p \geq 800$, le coefficient de traînée est constant et la force $\overrightarrow{F}_D$ s'écrit :

$$\overrightarrow{F}_D = -\frac{1}{2} C_D \pi a_p^2 \|\overrightarrow{u}_p\| \overrightarrow{u}_p \ , \quad C_D = 0{,}445 \tag{2.4}$$

La force de portance $\overrightarrow{F}_L$ est déterminée à l'aide de la relation proposée par Crowe *et al.* (1998) :

$$\overrightarrow{F}_L = C_L \rho \nu^{1/2} d_p^2 \frac{(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p) \wedge \overrightarrow{\omega}_f}{\|\overrightarrow{\omega}_f\|^{1/2}} \tag{2.5}$$

Avec C_L le coefficient de portance et $\overrightarrow{\omega}_f$ la vorticité du fluide .
Pour estimer le coefficient C_L, nous utilisons la relation de van Rijn (1984a). Cette relation est approximative et des simulations sont réalisées pour étudier l'influence du coefficient C_L sur le transport de sédiments. La force $\overrightarrow{F}_A$ qui est liée à l'accélération du fluide est définie comme suit.

$$\overrightarrow{F}_A = \rho(1 + C_M) V_p \frac{D\overrightarrow{u}_f}{Dt} \tag{2.6}$$

Avec $D/Dt = \partial/\partial t + \overrightarrow{u}_f.\nabla$.
La vitesse du fluide au centre du grain et ses dérivées partielles sont déterminées en appliquant le modèle FLOWSTAR lorsque le grain est situé à la surface du lit. Elles sont égales à zéro lorsqu'il est situé à l'intérieur de l'arrangement. (Cf. le modèle d'écoulement.)
Le modèle de Cundall et Strack (1979) est utilisé pour calculer la force de contact $\overrightarrow{F}_C$. La valeur des coefficients du modèle (raideurs k_n et k_τ, coefficients d'amortissement c_n et c_τ, coefficient de frottement) est discutée dans le paragraphe 2.2.3 de la partie 2. Les raideurs k_n et k_τ et les coefficients d'amortissement c_n et c_τ dépendent de la granulométrie du sédiment.

- Les raideurs k_n et k_τ sont égales et comprises entre 100 et 2500 N.m^{-1}. Elles sont choisies afin d'avoir un recouvrement des volumes pendant la collision pas trop grand et un pas de temps pas trop petit.
- Les valeurs c_n et c_τ sont déterminées afin que les coefficients de restitution (théoriques) e_n et e_τ soient égaux à 0,25 et à 0,89.

Le coefficient de frottement est égal à 0,75. Nous supposons que la vitesse de rotation du grain dépend seulement du moment des forces de contact $\overrightarrow{\mathcal{M}}_C$. Elle est donc constante entre deux chocs. (Calantoni, 2002 ; Niño et Garcia, 1998b)
L'équation de mouvement du grain est résolue selon un schéma d'Euler, le pas de temps est donné par l'équation (2.7) (Cundall et Strack, 1979) :

$$\Delta t = 2\alpha \sqrt{\frac{m}{k_n}} \tag{2.7}$$

La constante α est comprise entre 0,01 et 0,05 et la masse m est définie selon les sédiments à partir du diamètre maximal ou du diamètre moyen des grains.

La figure 2.2 indique de façon schématique les étapes de calcul réalisées à chaque itération. Elles sont au nombre de sept. L'étape 1 intéresse les cônes qui sont utilisés dans le modèle d'écoulement pour lisser la surface du lit. Elle consiste à placer les cônes sur le lit et à déterminer les grains à la surface susceptibles d'être entraînés par l'écoulement. L'étape 2 sert à définir la fonction surface f à partir des cônes et les coefficients du modèle FLOWSTAR (longueurs L_1, h_m, l et l_s). Le modèle de transport considère, ensuite et successivement, trois catégories de grains :

1) les grains en mouvement à l'instant t_i ;
2) les grains qui sont en contact à l'instant t_i avec des grains en mouvement ;
3) les grains qui sont localisés à l'instant t_i au sommet des cônes.

Le modèle calcule la position à l'instant t_{i+1} des grains déjà en mouvement (étape 3). Puis, il détermine les grains mis en mouvement par collision (étape 4) et leur position au pas de temps suivant (étape 5). Enfin, le modèle « s'interroge » sur l'entraînement par le fluide des grains à la surface du lit (étape 6) : le grain est érodé si la condition (2.8) est vérifiée.

$$\text{si } \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_G \cdot \overrightarrow{a}_{mn}\right) \mathcal{M}_{mn} < 0 \tag{2.8}$$

S'il est mis en mouvement, sa position à l'instant t_{i+1} est évaluée (étape 7).

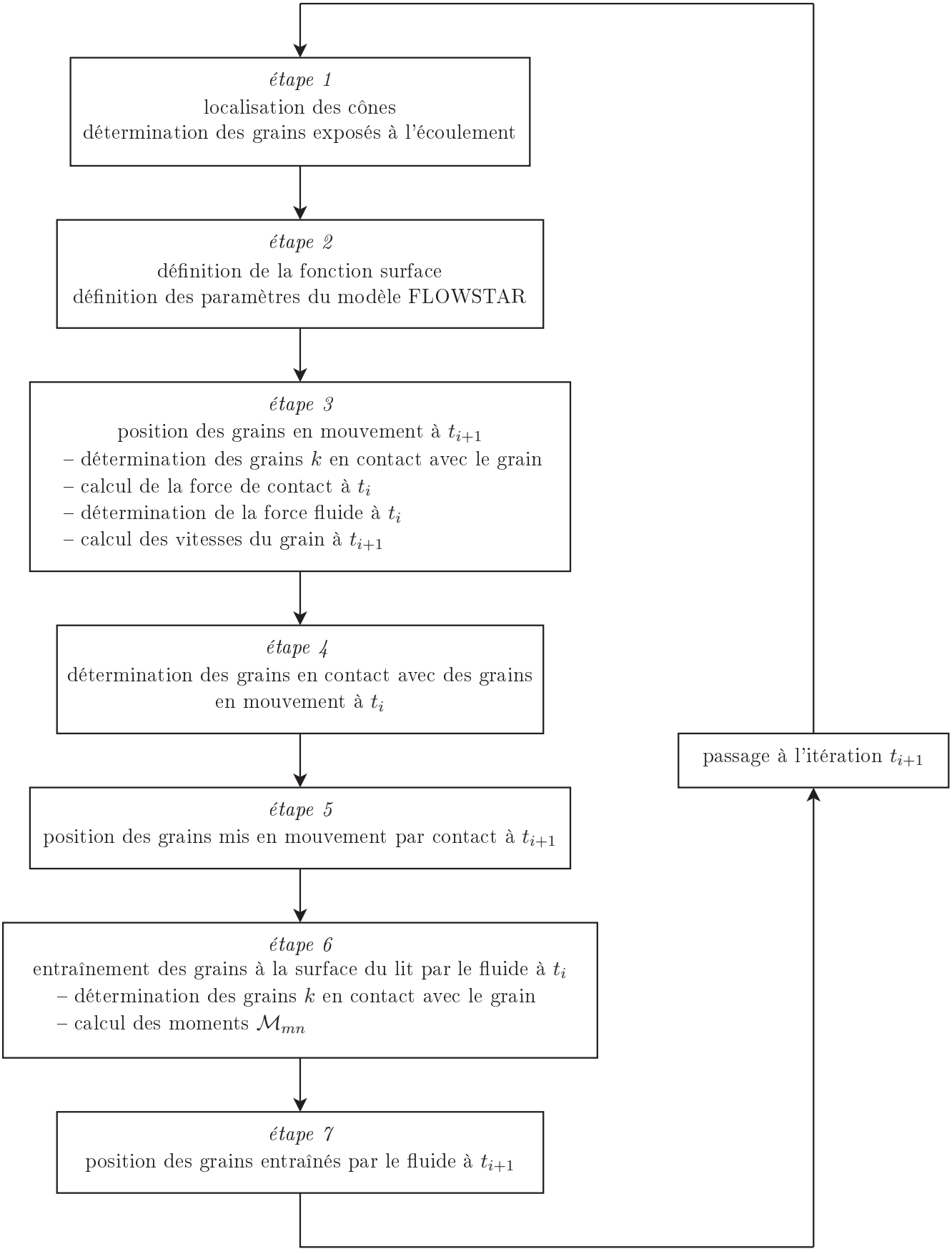


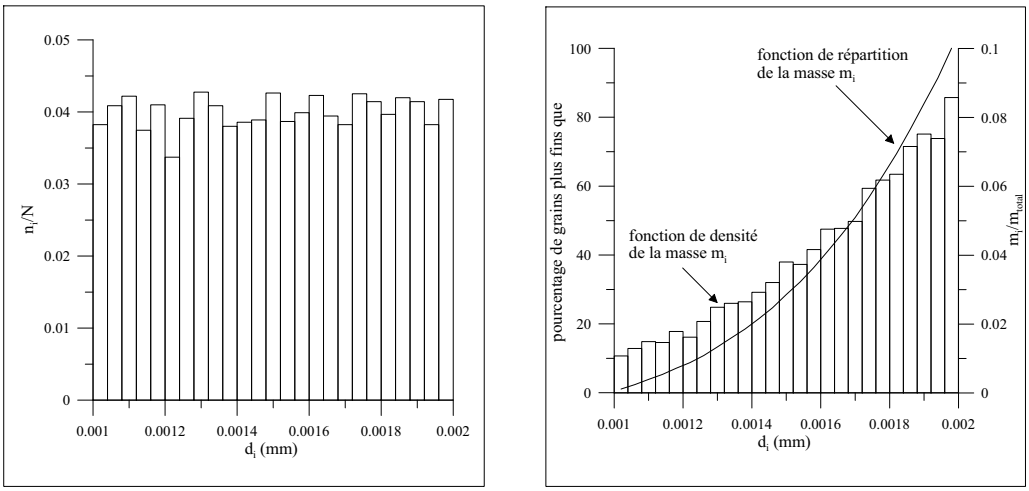
figure 2.2 – schéma de principe de l'algorithme utilisé pour mettre en mouvement et transporter le lit de sédiments

Validation du modèle

La validation du modèle repose sur le transport de sédiments composés de grains de diamètres variables compris entre 1 et 2 mm. Huit arrangements de grains sont utilisés. Ils sont désignés par les termes « lit 1 », « lit 2 », « lit 3 », « lit 4 », « lit 11 », « lit 12 », « lit 13 » et « lit 14 ». Le diamètre des grains varie aléatoirement entre 1 et 2 mm selon la loi uniforme (2.9).

$$d_p = d_{\min} + (d_{\max} - d_{\min})\,\alpha_d \tag{2.9}$$

Avec $d_{\min} = 1$ mm et $d_{\max} = 2$ mm.
α_d est une variable aléatoire de distribution uniforme comprise entre 0 et 1. L'ordre de lâcher des grains lors de la déposition des lits est aléatoire. La figure 2.3 montre la distribution de la taille des grains du lit 1. Elle est similaire pour les autres lits, bien que les diamètres des grains soient



(a) répartition du nombre de grains par classe

(b) fonction de densité et fonction de répartition du diamètre des grains

figure 2.3 – distribution de la taille des grains du sédiment du lit 1 ; n_i est le nombre de grains dans la classe i et N le nombre total de grains dans l'arrangement ; m_i est la masse des grains dans la classe i et m_{total} la masse totale de grains

différents. La figure 2.3a montre la répartition du nombre de grains n_i par classe. Compte tenu de la méthode de définition du diamètre d_p, le nombre de grains est approximativement le même pour toutes les classes de sédiments. Ainsi la masse m_i des grains de la classe i évolue de façon croissante avec le diamètre d_i (cf. la figure 2.3b). Excepté dans le lit 13, le diamètre moyen d_m des grains est égal à 1,65 mm, l'écart-type arithmétique σ_a à 0,25 mm et l'écart-type géométrique σ_g à 1,18. Dans le lit 13, le diamètre d_m est égal à 1,64 mm, l'écart-type σ_a à 0,27 mm et l'écart-type σ_g à 1,20. Le diamètre d_{50} vaut pour les huit lits 1,7 mm. La granulométrie du sédiment des lits correspond dans les expériences à une granulométrie dite uniforme. (Cf. la partie 1 pour la définition des grandeurs d_m, d_{50}, σ_a et σ_g.)
Les dimensions des lits et le nombre de grains N contenus dans ces lits sont indiqués dans le tableau 2.1. Les dimensions des lits dans les directions x et y sont notées l_b et L_b. Elles sont égales et proportionnelles au diamètre minimal. La hauteur du lit H_b est définie comme la distance entre le centre du grain le plus bas et celui du grain le plus haut. Les dimensions des lits 1–4 et le nombre de grains les composant sont identiques. Ils sont déposés avec la même méthode. Les grains sont lâchés au-dessus d'une couche régulière formée par 900 sphères de diamètre égal à 1 mm (cf. le paragraphe 3.3 dans la partie 2). Les sphères qui composent la couche du fond ne sont pas prises en compte dans le calcul de la distribution de la taille des grains (distribution montrée dans la figure 2.3), elles sont supposées fixes lors les simulations. Les lits 1–4 sont utilisés pour

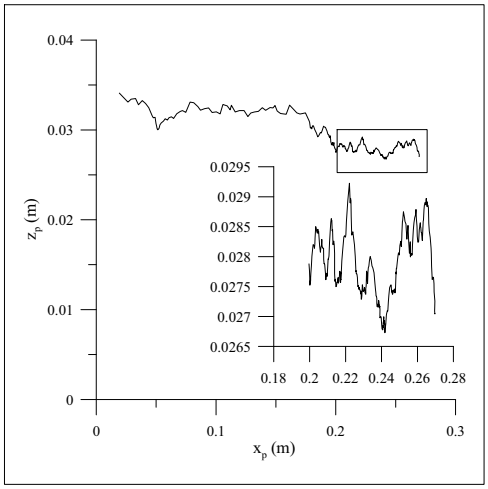
lit	lits 1–4	lit 11	lit 12	lit 13	lit 14
diamètre moyen d_m	1,65 mm	1,65 mm	1,65 mm	1,65 mm	1,65 mm
écart-type géométrique σ_g	1,18	1,18	1,18	1,20	1,18
longueur l_b	3 cm	3 cm	3 cm	4,25 cm	3,5 cm
hauteur H_b	$21\,d_m$	$10\,d_m$	$23\,d_m$	$10\,d_m$	$15\,d_m$
nombre de grains N	10000	5000	10000	10000	10000

tableau 2.1 – dimensions et granulométrie des lits 1–4 et 11–14 ; la hauteur H_b est égale à la distance entre les centres des grains le plus bas et le plus haut du lit

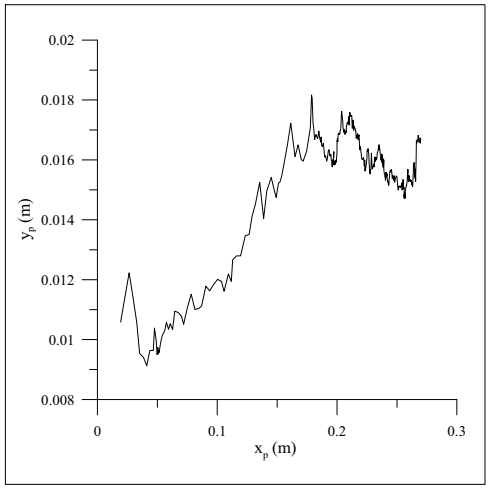
étudier l'influence de la disposition des grains dans l'arrangement sur le transport de sédiments déterminé par le modèle de transport. Les lits 11, 13 et 14 sont déposés comme les lits 1–4. Ils sont utilisés pour examiner l'influence du nombre de grains, de l'épaisseur du lit et des dimensions de sa surface. Le lit 12 est déposé différemment. Les particules sont lâchées au-dessus du plan $z = 0$, la couche du fond est constituée des particules dont la position du centre est inférieure à zéro ($z_p \leq 0$). Compte tenu de la distribution uniforme du diamètre d_p, le lit 12 contient environ 5000 grains de diamètre supérieur à 1,5 mm. Dans les lits 1–4, leur nombre est inférieur, il est estimé approximativement à 4550 (cf. la définition de la couche du fond). Ceci explique que l'épaisseur du lit 12 soit supérieure à celle des lits 1–4.

2.2 mouvement des grains

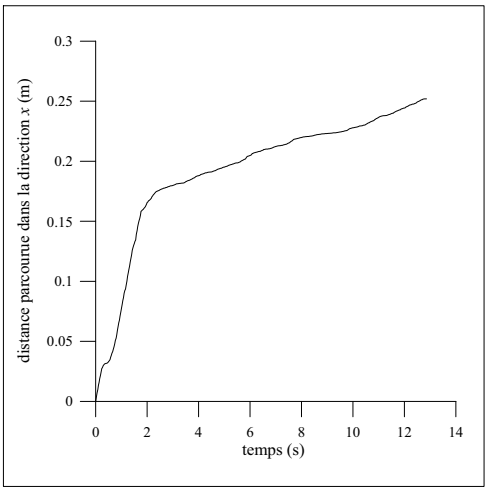
Dans les simulations, le transport de sédiments se fait essentiellement par charriage. Les grains rampent, roulent et font des petits bonds sur la surface du lit. Leur mouvement est discontinu : ils sont en mouvement, s'immobilisent, se remettent en mouvement. Quelques grains, les plus fins, sont en saltation. Les figures 2.4 et 2.5 montrent la trajectoire de deux grains de diamètre égal à 1,5 et 1,8 mm ainsi que la distance parcourue par ces grains lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1}. Les grains sont situés initialement à la surface du lit. Les simulations durent 14 s. La position des grains est fluctuante. La distance parcourue dans la direction x, *i.e.* dans la direction de l'écoulement non perturbée, est bien supérieure à celle dans les directions y et z. Dans ces directions, elle est du même ordre de grandeur. Le grain de diamètre égal à 1,5 mm est repoussé progressivement vers l'intérieur du lit dans lequel le fluide est au repos, sa position z_p diminue. Le grain de diamètre égal à 1,8 mm reste à la surface du lit, sa position z_p oscille autour de 0,034 m. Comme il est exposé à l'écoulement, ses vitesses sont plus élevées et les distances parcourues sont plus grandes que pour le grain de diamètre égal à 1,5 mm. Sa vitesse moyenne dans la direction x est approximativement égale à la vitesse de frottement. Nous observons dans la figure 2.5 un palier dans la courbe d'évolution de la distance parcourue pour $2 < t < 4$ s. Ce palier correspond à un moment où le grain est situé sous la surface du lit, à $z_p \sim 0{,}029$ m. A $t \simeq 4$ s, le mouvement des grains dans le lit permet sa remontée à la surface.
L'absence de transport en suspension dans les simulations est conforme avec les expériences. Les simulations sont réalisées pour des vitesses de frottement comprises entre 0,01 et 0,1 m.s^{-1}. De plus, lorsque la vitesse de frottement est supérieure à 0,05 m.s^{-1}, le diamètre moyen des grains de la surface du lit augmente au cours de la simulation et devient supérieur à 1,7 mm. (Ce phénomène de pavage est étudié dans le chapitre 3.) van Rijn (1984b) indique des vitesses critiques de mise en suspension qui varient de 0,096 m.s^{-1} pour $d_p = 1{,}65$ mm à 0,113 m.s^{-1} pour $d_p = 2$ mm (cf. le tableau 2.2).



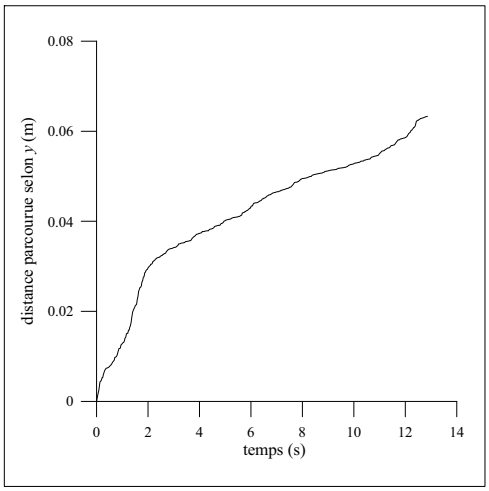
(a) $z_p = f(x_p)$



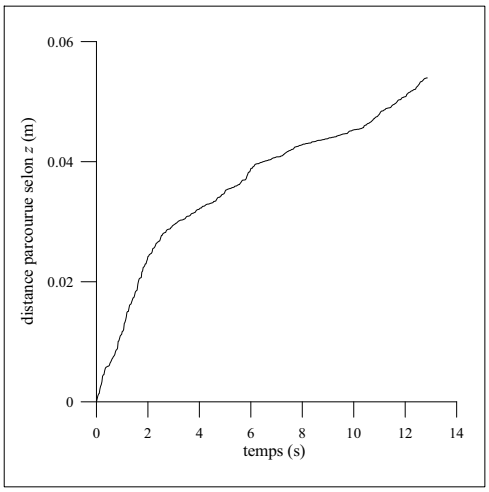
(b) $y_p = f(x_p)$



(c) distance parcourue dans la direction x

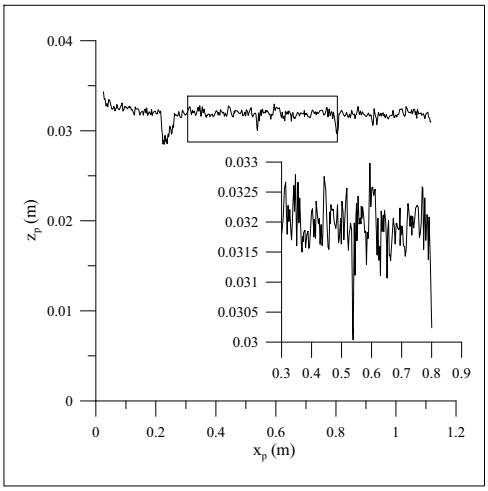


(d) distance parcourue dans la direction y

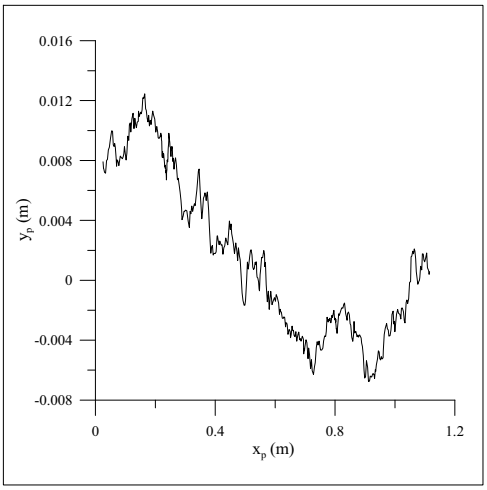


(e) distance parcourue dans la direction z

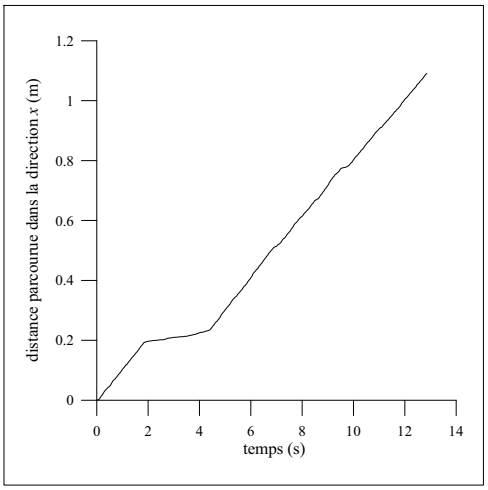
figure 2.4 – trajectoire et distance parcourue d'un grain de diamètre égal à 1,5 mm situé initialement à la surface du lit ; la vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1}



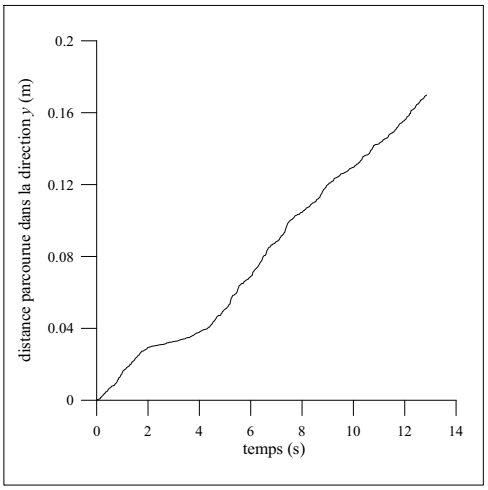
(a) $z_p = f(x_p)$



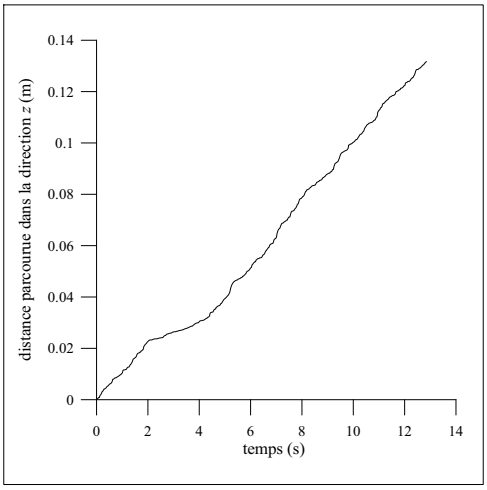
(b) $y_p = f(x_p)$



(c) distance parcourue dans la direction x



(d) distance parcourue dans la direction y



(e) distance parcourue dans la direction z

figure 2.5 – trajectoire distance parcourue par un grain de diamètre égal à 1,8 mm situé initialement à la surface du lit ; la vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1}

diamètre du grain	1 mm	1,65 mm	2 mm
vitesse de frottement critique de mise en mouvement	0,023 m.s^{-1}	0,032 m.s^{-1}	0,036 m.s^{-1}
vitesse de frottement critique de mise en suspension	0,062 m.s^{-1}	0,096 m.s^{-1}	0,113 m.s^{-1}

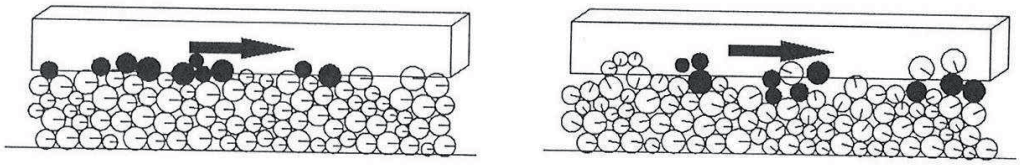
tableau 2.2 – vitesses de frottement critiques de mise en mouvement et de mise en suspension pour trois tailles de grains déterminées à partir des relations de van Rijn (1984a,b)

Réorganisation du lit

Le processus d'érosion s'accompagne initialement d'une réorganisation interne de l'arrangement des grains. Cette réorganisation se traduit par un tassement et par une augmentation de la compacité du lit. Ces phénomènes apparaissent dans la diminution de l'énergie potentielle totale notée E_p des grains du lit pendant la simulation. L'énergie E_p est donnée par l'équation (2.10).

$$E_p = g \sum_{i=1}^{N} m_{pi} z_{pi} \tag{2.10}$$

Avec : m_{pi} la masse du grain i ; z_{pi} sa position verticale ; N le nombre de grains dans le lit ; g l'accélération de la pesanteur.
L'énergie E_p diminue rapidement au début des simulations, puis se stabilise. La réorganisation du lit est due essentiellement à la méthode utilisée pour le déposer. Dans le modèle de déposition, le grain une fois déposé est fixe. Sa position n'est pas modifiée par les collisions successives qui ont lieu entre le grain en train de se déposer et le lit. De plus, l'écoulement est supposé au repos. La réorganisation de l'arrangement qui concerne toutes les particules du lit tend vers une configuration plus stable et plus compacte. L'état final du lit peut être comparé à ceux d'arrangements réguliers de sphères (cf. le paragraphe 3.3). La réorganisation des grains est aussi observée dans les simulations à deux dimensions de Jiang et Haff (1993) : cf. la figure 7 de leur article, qui est reproduite ici dans la figure 2.6. Jefcoate (1995) et Heald *et al.* (2004) ne mentionnent pas



(a) état initial

(b) état obtenu après la mise en mouvement des grains

figure 2.6 – évolution du lit observée dans les simulations de Jiang et Haff (1993) ; les grains de sédiment sont représentés par des disques ; la flèche indique la direction de l'écoulement (cf. la figure 7 de leur article)

l'existence dans leurs simulations de cette réorganisation interne de l'arrangement. L'absence de réorganisation du lit s'explique vraisemblablement par leur choix de ne pas déterminer le mouvement des grains à l'intérieur de l'arrangement.

La figure 2.7 montre l'évolution de l'énergie potentielle E_p pour les lits 1–4 et 12 lorsque la vitesse de frottement varie entre 0,01 et 0,1 m.s^{-1}. Elle dépend de la configuration initiale du lit. L'effet

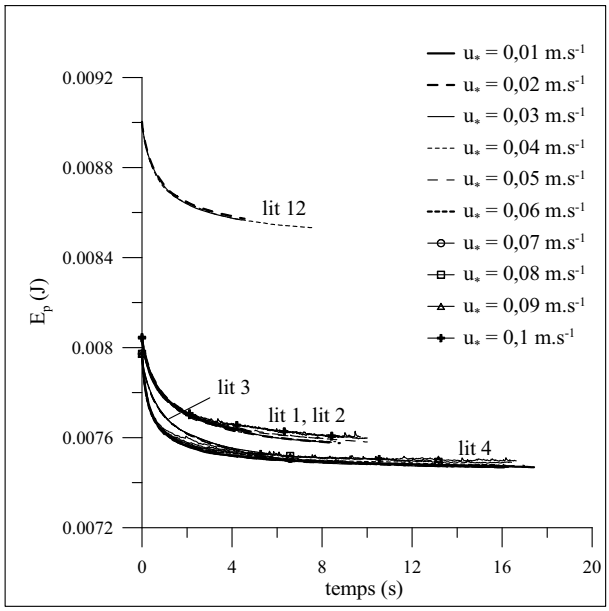


figure 2.7 – évolution temporelle de l'énergie potentielle totale du lit pour les arrangements 1–4 et 12 et pour des vitesses de frottement comprises entre 0,01 et 0,1 m.s^{-1}

de la vitesse de frottement est négligeable. La réorganisation du lit apparaît même si la vitesse de frottement est inférieure à la valeur critique. Nous remarquons pour les vitesses de frottement les plus élevées ($u_* > 0{,}06$ m.s^{-1}) que l'énergie potentielle oscille pour $t \gtrsim 2$ s et que l'amplitude des oscillations est une fonction croissante de la vitesse u_*. Ces oscillations sont observées alors que la réorganisation est approximativement terminée. Elles sont liées aux fluctuations de la position des grains à la surface du lit qui augmentent avec u_*. L'énergie potentielle du lit 12 est supérieure à celle des lits 1–4 et ceci est dû au nombre de gros grains présents dans les lits qui est différent. La variation de l'énergie potentielle apparaît identique pour les cinq lits, elle vaut $4{,}5.10^{-4}$ J. Cependant, ce résultat ne peut pas être généralisé car par exemple, nous avons pour le lit 11, $\Delta E_p = 7{,}5.10^{-5}$ J et pour le lit 13, $\Delta E_p = 9.10^{-5}$ J.

L'évolution de l'énergie potentielle du lit dépend également du pas de temps Δt et de la raideur k_n. La figure 2.8 montre l'évolution temporelle de l'énergie potentielle E_p pour trois pas de temps ($\alpha = 0{,}01$, 0,025 et 0,05). Plus le pas de temps est grand, plus la diminution de l'énergie potentielle est rapide. Lorsque le pas de temps augmente, le début de la collision est déterminée de façon moins précise et le chevauchement des volumes des deux solides est plus important. Les forces de contact et les vitesses de grains sont alors plus élevées. La réorganisation des grains dans le lit est accélérée. Mais la valeur finale de l'énergie potentielle semble tendre vers une valeur unique. Les raideurs k_n et k_τ influent aussi sur la réponse des grains aux collisions. La figure 2.9 montre l'évolution de l'énergie potentielle E_p pour cinq raideurs k_n. Lorsque les raideurs des ressorts diminuent, les grains sont plus souples et le chevauchement des volumes augmente. Les grains sont plus sensibles aux collisions et ils se déplacent plus facilement dans l'arrangement. Sa réorganisation est plus rapide. De plus dans les simulations, le pas de temps est une fonction décroissante de k_n.

L'évolution de l'énergie potentielle est indépendante du coefficient de portance C_L et du coefficient de restitution e_n, comme le montre la figure 2.10.

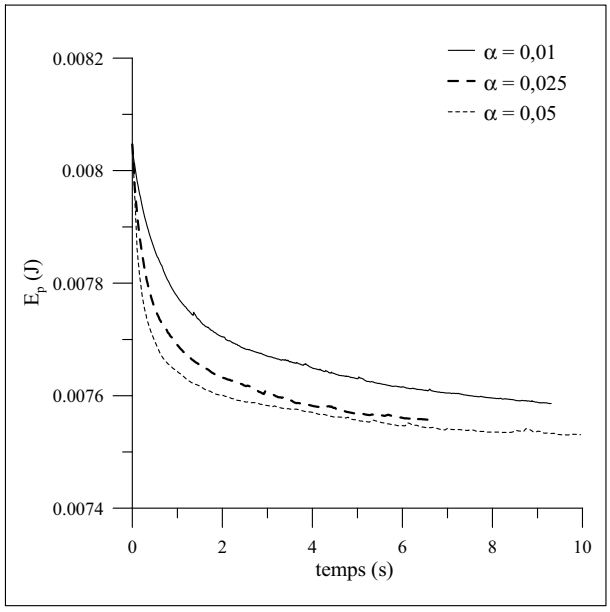


figure 2.8 – évolution temporelle de l'énergie potentielle E_p déterminée pour le lit 1 pour trois pas de temps ; $\Delta t = \alpha\sqrt{m_p/k_n}$ avec m_p la masse du plus gros grain ; la vitesse de frottement est égale à 0,05 m.s^{-1}

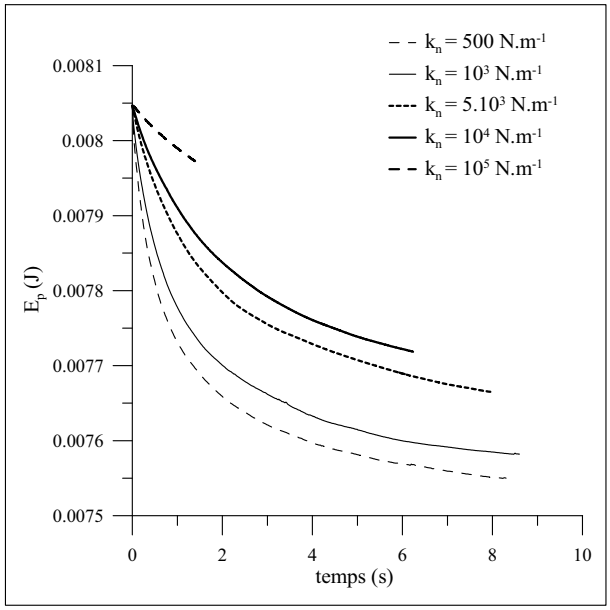
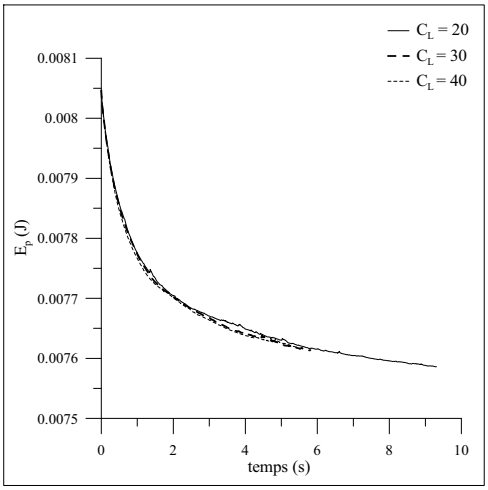
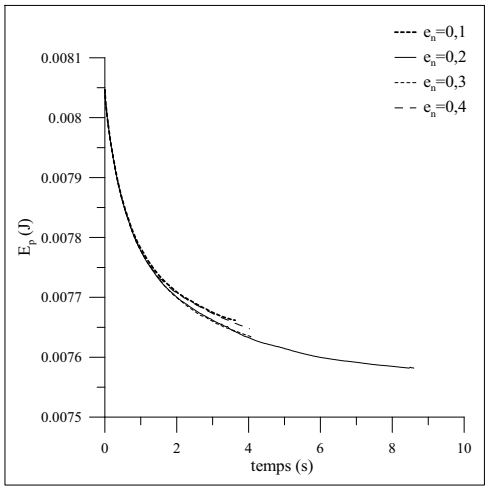


figure 2.9 – évolution temporelle de l'énergie potentielle totale E_p déterminée pour le lit 1 et pour 5 valeurs de la raideur k_n ; la vitesse de frottement est égale à 0,04 m.s^{-1}



(a) influence du coefficient de portance ; la vitesse de frottement u_* est égale à 0,05 m.s^{-1}



(b) influence du coefficient de restitution e_n ; la vitesse de frottement u_* est égale à 0,04 m.s^{-1}

figure 2.10 – évolution de l'énergie potentielle totale déterminée pour le lit 1 pour trois coefficients de portance et pour quatre coefficients de restitution normal

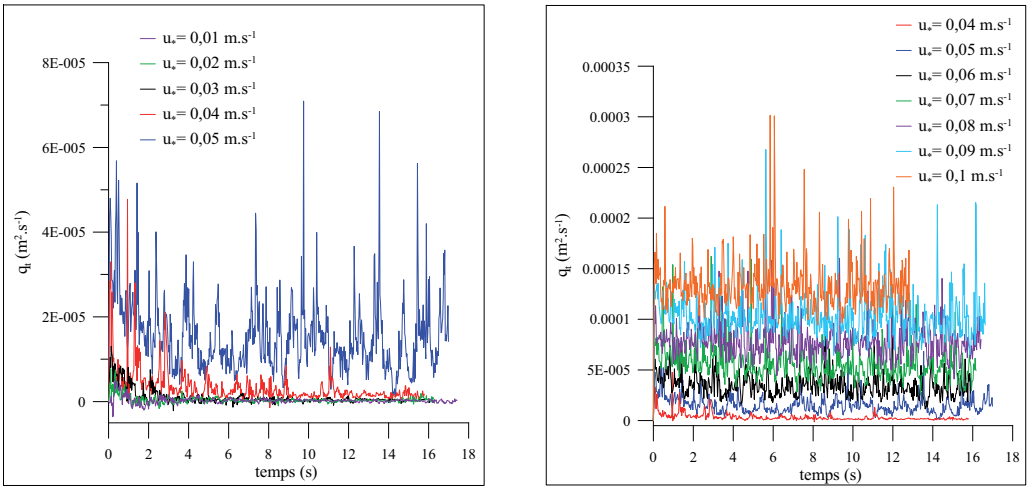
2.2.1 transport de sédiments

Le modèle de transport enregistre la position et la vitesse des particules du lit à intervalles réguliers. Ces enregistrements permettent d'estimer l'activité du lit. Dans les simulations, ils se produisent toutes les 500 itérations pour réaliser des films et toutes les 5000 itérations pour dériver des propriétés statistiques. Le pas de temps n'est pas identique pour toutes les simulations, il dépend notamment du diamètre des grains. L'intervalle de temps entre deux images successives du lit peut donc varier.
Le transport de sédiments est évalué à partir du débit total de sédiments q_t qui est défini par la relation (2.11) (Jiang et Haff, 1993) :

$$q_t = \frac{1}{S_b} \sum_{i=1}^{N} V_{pi} u_{pi} \tag{2.11}$$

Avec : S_b la surface du lit ; N le nombre de grains dans le lit ; V_{pi} le volume du grain i ; u_{pi} la composante de la vitesse du grain i dans la direction x. (La direction x est la direction de l'écoulement non perturbé et (de fait) la direction principale de l'écoulement.)
La figure 2.11 présente, pour le lit 4, l'évolution temporelle du débit de sédiments q_t pour plusieurs vitesses de frottement. Le débit de sédiments est fluctuant et caractérisé par la présence de pics dont l'amplitude augmente avec la vitesse de frottement. Quelle que soit la vitesse de frottement, le débit de sédiments augmente au début de la simulation. L'augmentation initiale du transport est une conséquence de la réorganisation interne du lit, certains grains occupent initialement une position instable de laquelle ils sont facilement entraînés (par le fluide et par collision) (Jefcoate, 1995). Trois comportements peuvent être identifiés en fonction de u_*. Ils définissent trois régimes.

1) Régime initial
   Lorsque la vitesse de frottement est faible (ici $u_* \leq 0{,}03$ m.s^{-1}), les grains initialement instables se déplacent jusqu'à ce qu'ils trouvent une position stable de laquelle ils ne bougent plus. La force de l'écoulement est insuffisante pour les entraîner de nouveau. Le débit de sédiments q_t diminue rapidement et tend à s'annuler. Lorsque la vitesse u_* est très faible ($u_* = 0{,}01$ m.s^{-1}), la disposition initiale des grains dans le lit peut être telle que le débit



(a) $0{,}01 \leq u_* \leq 0{,}05$ m.s^{-1} (b) $0{,}04 \leq u_* \leq 0{,}1$ m.s^{-1}

figure 2.11 – évolution temporelle du débit de sédiments q_t en fonction de la vitesse de frottement pour le lit 4

initial est négatif. La majorité des grains bouge dans le sens opposé à l'écoulement. Leur mouvement n'est ainsi pas affecté par l'écoulement.

2) Régime intermédiaire
   Lorsque la vitesse de frottement augmente, le débit q_t diminue puis se stabilise autour d'une valeur non nulle.

3) Régime final
   Lorsque la vitesse de frottement augmente encore, le débit q_t augmente rapidement et fluctue autour d'une valeur moyenne, supérieure à celle obtenue dans le régime intermédiaire.

Le caractère fluctuant du débit de sédiments est dû au mouvement aléatoire des grains qui est créé par les interactions entre les grains en saltation et les grains du lit. La distribution du débit q_t ne présente pas de forme particulière, par exemple elle ne suit pas une loi normale. L'évolution temporelle du débit est similaire à celle des composantes de la vitesse du grain qui est observée dans les expériences de Charru *et al.* (2007). Charru *et al.* (2007) étudient le mouvement d'un lit formé par des billes sphériques, placé dans un canal annulaire et soumis à un écoulement de Couette. Ils mesurent au cours du temps la vitesse des particules solides. L'écoulement au-dessus d'un lit de sédiments est en général turbulent et les fluctuations turbulentes de la vitesse du fluide contribuent aussi au caractère fluctuant du débit de sédiments qui est observé dans les expériences. Cet aspect n'est pas représenté ici, compte tenu du modèle d'écoulement utilisé : nous ne pouvons donc pas estimer quelle part de la fluctuation du débit a pour origine la turbulence.

Estimation du seuil d'érosion dans le modèle de McEwan et Heald (2001)

La réorganisation du lit dans une configuration plus stable avec un transport de sédiments non négligeable remet en cause les résultats de McEwan et Heald (2001) sur la distribution de la contrainte de frottement critique des particules à la surface du lit. Ces résultats reposent sur l'analyse de lits qui sont déposés numériquement (comme dans nos simulations) et qui ne sont pas retravaillés par l'écoulement (*unworked beds*). L'évolution du débit de sédiments montre que l'estimation de la contrainte de frottement critique des particules doit être réalisée à l'issue de la phase de réorganisation, c'est-à-dire sur des lits « travaillés » (*worked beds*). Hofland (2003) arrive à la même conclusion en considérant des lits de sédiments de diamètre égal à 100 mm. Il montre que la topographie du lit dépend de la méthode utilisée pour le déposer. Elle dépend notamment du coefficient de restitution e_n : plus le coefficient e_n est grand, plus la surface du lit

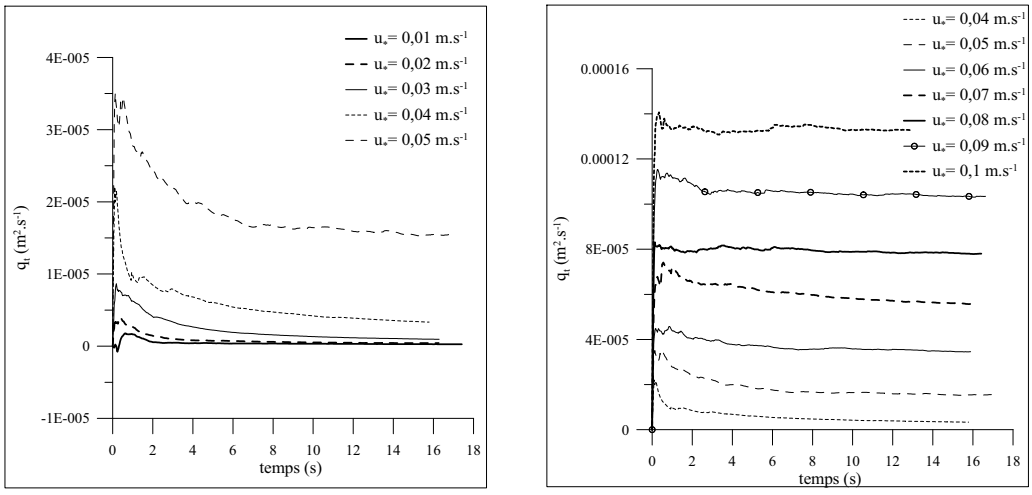
est plate. Ainsi, l'importance des reliefs à la surface est liée à la durée de déplacement des grains avant leur immobilisation, qui est fonction entre autres de l'amortissement de leur mouvement lors des collisions. Afin d'obtenir des lits travaillés dont la topographie est indépendante de la méthode de déposition, Hofland (2003) propose d'enlever de la surface les grains les plus exposés à l'écoulement et les plus instables, *i.e.* ceux dont la position est la plus élevée. Il ne détaille pas le critère employé pour choisir les grains à enlever. Cependant, la méthode de Hofland (2003) ne modélise pas la réorganisation interne du lit que nous observons. La contrainte de frottement critique évaluée par McEwan et Heald (2001) sur des lits non travaillés devrait être sous-estimée par rapport à l'expérience. Leurs travaux suggèrent au contraire que pour des vitesses de frottement proches de la valeur critique obtenue par le critère de Shields, moins de 5% de la masse de sédiments est entraînée. McEwan et Heald (2001) déterminent la vitesse de frottement critique des grains situés à la surface du lit qui ne sont pas ensevelis sous d'autres grains. Ils considérent les moments de la force de flottabilité et de la force de traînée qui s'exercent sur les grains. Ils supposent ainsi que seul l'écoulement est à l'origine de la mise en mouvement des grains. Or nos simulations indiquent que les collisions entre les grains participent de façon importante à leur entraînement. Ce résultat permet d'expliquer la surestimation du paramètre de Shields critique qui est trouvée par McEwan et Heald (2001) par rapport à l'expérience. Le paramètre de Shields critique moyen varie, dans leur étude, entre 0,89 et 2,1 selon les hypothèses de modélisation utilisées (sur la position du point d'action de la force de traînée) ; le critère de Shields indique pour les diamètres considérés des valeurs bien inférieures, autour de 0,04 et 0,05.

2.2.2 débit moyen de sédiments

Le débit moyen de sédiments q_{tm} à l'instant t est obtenu de l'équation (2.12) :

$$q_{tm} = \frac{1}{N_t} \sum_{k=1}^{N_t} q_{tk} \tag{2.12}$$

N_t est le nombre d'enregistrements à l'instant t et q_{tk} les débits de sédiments aux N_t instants successifs. La figure 2.12 montre pour le lit 4 l'évolution du débit moyen en fonction du temps. Le

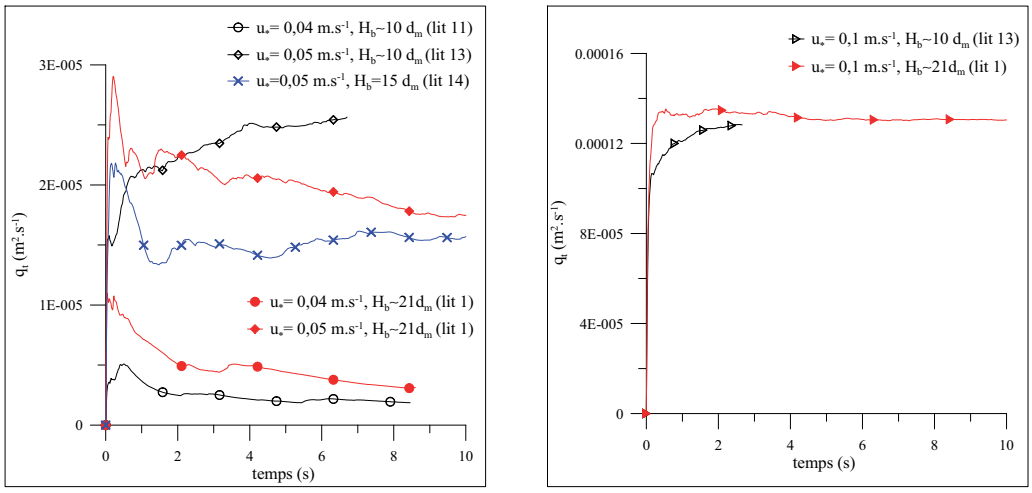


(a) $0{,}01 \leq u_* \leq 0{,}05$ m.s^{-1} (b) $0{,}04 \leq u_* \leq 0{,}1$ m.s^{-1}

figure 2.12 – évolution du débit moyen de sédiments en fonction du temps obtenue pour le lit 4

débit moyen augmente au début des simulations, comme le débit instantané. Puis, il diminue et tend vers une constante. Un état d'équilibre est atteint. Le débit est alors supposé indépendant des conditions initiales (organisation des grains liée au modèle de déposition) et de la durée de

simulation. La durée de la phase transitoire dépend de la vitesse de frottement et de la taille des grains (cf. les simulations réalisées avec les sédiments mono-dispersés).
La figure 2.13 montre les débits moyens déterminés pour les lits 1, 11, 13 et 14. Ils sont ap-



(a) (b)

figure 2.13 – influence de l'épaisseur de l'arrangement sur l'évolution du débit moyen de sédiments

proximativement du même ordre de grandeur. Le comportement du lit 13 est différent pour $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}. Nous n'observons pas l'augmentation rapide du débit au début des simulations comme dans les lits 1–4 et 11-12. Le débit diminue puis il augmente de façon continue. L'état d'équilibre ne semble pas atteint à la fin des simulation. Ce comportement n'est pas observé pour $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1}.

Loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta)$

La figure 2.14 montre l'évolution du débit de sédiment moyen sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ obtenue pour les huit lits. Le débit de sédiment sans dimension ϕ est défini par l'équation (2.13).

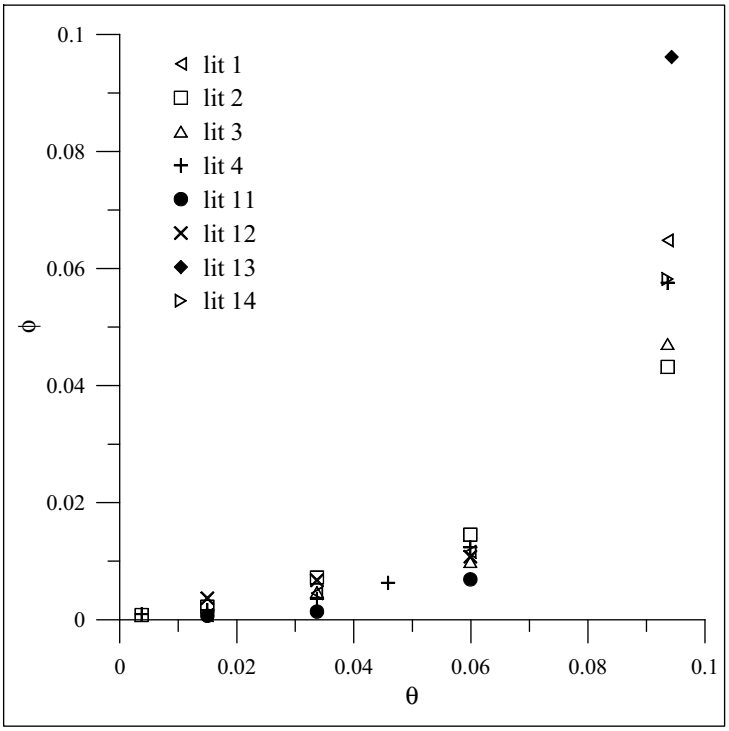
$$\phi = \frac{q_t}{\sqrt{(\gamma - 1) g d_m^3}} \tag{2.13}$$

Avec $d_m \simeq 1{,}65$ mm.
Le débit moyen est déterminé à la fin de la simulation lorsque l'état d'équilibre est considéré comme atteint. Le paramètre de Shields θ s'écrit :

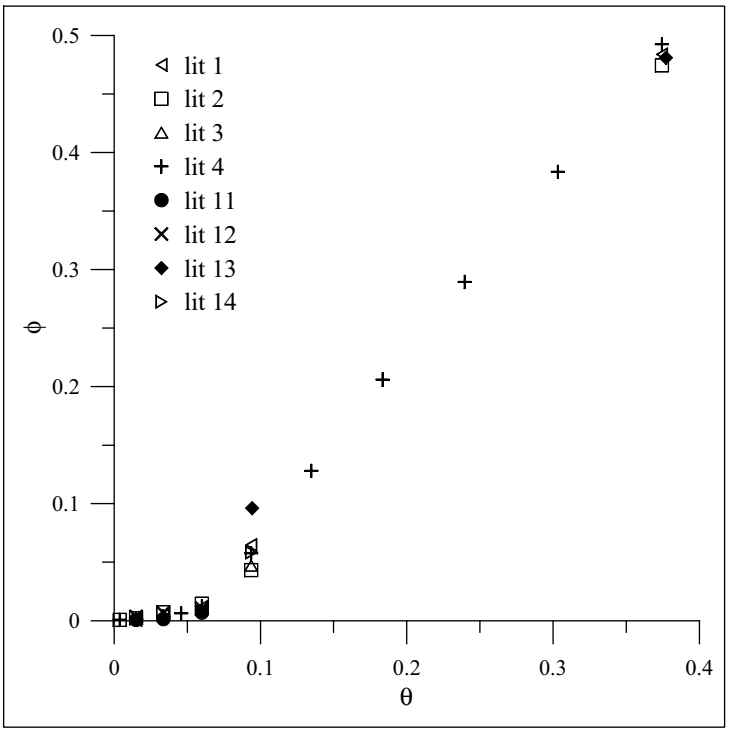
$$\theta = \frac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho) g d_m} \tag{2.14}$$

Nous observons lorsque $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1} ($\theta \simeq 0{,}1$) que le débit moyen de sédiments établi pour le lit 13 est surestimé par rapport aux autres valeurs, probablement car l'état d'équilibre du lit n'est pas atteint. Toutefois, la différence des débits est plus ou moins du même ordre de grandeur que les variations liées à l'organisation initiale des grains dans l'arrangement. De plus, lorsque $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1} ($\theta \simeq 0{,}4$), le débit pour le lit 13 n'est pas surestimé, il est compris entre les valeurs obtenues pour les lits 1, 2 et 4. Le débit de sédiments calculé par le modèle de transport apparaît ainsi indépendant de la géométrie du lit (arrangement initial des grains, épaisseur et surface). Ce résultat valide l'approche utilisée dans le modèle de transport. Comme la valeur instantanée, l'évolution du débit moyen de sédiments dépend de la vitesse de frottement.

– Proche du seuil d'érosion, *i.e.* $u_* \leq 0{,}04$ m.s^{-1} ($\theta < 0{,}06$), le débit est petit et croît



(a) $0{,}01 \leq u_* \leq 0{,}05$ m.s^{-1}



(b) $0{,}01 \leq u_* \leq 0{,}1$ m.s^{-1}

figure 2.14 – évolution du débit de sédiments moyen ϕ en fonction du paramètre de Shields déterminée numériquement pour les lits 1–4 et 11–14

faiblement si la vitesse u_* augmente. Cela correspond au débit instantané très irrégulier quasi-nul entre deux pics.

- Lorsque $u_* > 0{,}04$ m.s^{-1} ($\theta > 0{,}06$), le débit moyen augmente rapidement. Le débit instantané est relativement régulier et l'amplitude des pics élevée. L'évolution du débit sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ peut être représentée par une relation affine de type $\phi = a\theta + b$. Dans notre cas, nous avons :

$$\phi = 1{,}51\,\theta - 0{,}076\ , \quad r^2 = 0{,}9993 \tag{2.15}$$

Afin de ne pas donner plus de poids à ces points, la moyenne des débits calculés pour les huit lits est utilisée lorsque la vitesse u_* est égale à 0,04, 0,05 et 0,1 m.s^{-1} (*i.e.* $\theta \simeq 0{,}1$, 0,4 et 0,6).

Seuil d'érosion des lits

Dans les simulations, il existe, quelle que soit la vitesse de frottement, un transport résiduel lié aux interactions mécaniques entre les grains et ainsi le débit de sédiments est toujours différent de zéro. Il n'est donc pas possible de définir le seuil d'érosion comme la vitesse de frottement à laquelle le transport deviendrait non nul. Le paragraphe 1.2.3 de la partie 1 présente les approches utilisées dans les expériences pour déterminer le seuil d'érosion des lits. La définition du seuil d'érosion peut reposer sur le degré d'activité du lit et sur l'observation de sa surface. La vitesse de frottement critique caractérise alors le passage d'un mouvement sporadique des grains à un mouvement général. Dans cette perspective, Neill et Yalin (1969) propose une méthode basée sur le nombre de grains déplacés par unité de surface et par unité de temps. Dans l'approche de Shields (1936) et de Parker (1982), la vitesse de frottement critique est plutôt vue comme l'origine de la loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta)$. L'objectif est alors de trouver une loi universelle pour des sédiments de diamètre quelconque de la forme $\phi = \mathcal{G}(\theta - \theta_c)$. La loi $\phi = \mathcal{F}(\theta)$ est établie à partir des mesures réalisées loin du seuil d'érosion. Raudkivi (1998) note qu'elle est différente de celle obtenue proche du seuil d'érosion. En effet, les processus physiques à l'origine du transport sont différents et proche du seuil d'érosion, le débit est très sensible à la vitesse de frottement.

L'analyse de l'évolution temporelle du débit q_t (valeur moyenne, amplitude et fréquence des pics) produite par le modèle de transport révèle l'existence d'un intervalle de vitesse de frottement ($0{,}03 < u_* < 0{,}04$ m.s^{-1}) pendant lequel le débit change.

- Pour $u_* \leq 0{,}03$ m.s^{-1} ($\theta < 0{,}034$), le débit q_t est quasi-nul et l'amplitude des oscillations est très faible. Seuls quelques grains sont transportés, le mouvement est sporadique.
- Pour $u_* \geq 0{,}04$ m.s^{-1} ($\theta > 0{,}06$), le débit oscille autour d'une valeur non nulle. La plupart des grains à la surface du lit sont en mouvement.

Nous observons également entre ces deux vitesses de frottement (plus précisément entre 0,035 et 0,04 m.s^{-1}) un changement de la pente de la courbe d'évolution du débit moyen. Il est probable, et par ailleurs admis, compte tenu de ces deux résultats que le seuil d'érosion du lit se situe entre 0,035 et 0,04 m.s^{-1} (*i.e.* que le paramètre de Shields critique est compris entre 0,046 et 0,06). Cette estimation est conforme à l'expérience. Par exemple van Rijn (1984a) indique des vitesses de frottement critiques comprises entre 0,023 et 0,036 m.s^{-1} (cf. le tableau 2.2). Si la méthode proposée par Shields (1936) est appliquée, nous obtenons de l'équation (2.15) : $u_{*c} = 0{,}037$ m.s^{-1} ($\theta_c = 0{,}051$). Notre estimation du seuil d'érosion est aussi confirmée par l'évolution de la vitesse moyenne des grains dans la couche supérieure et par l'évolution de la distribution de la taille des grains de la surface du lit qui montrent un changement pour $0{,}03 < u_* < 0{,}04$ m.s^{-1}.

Le paramètre de Shields critique utilisé dans la loi de transport $\phi = \mathcal{G}(\theta - \theta_c)$ est calculée à partir de la valeur moyenne des deux vitesses de frottement 0,035 et 0,04 m.s^{-1}, valeur égale à 0,0375 m.s^{-1}.

Comparaison avec les lois de transport empiriques

L'évolution du débit moyen de sédiments déterminée par le modèle de transport est comparée à celle déduite de relations empiriques. Dans les simulations, les sédiments sont transportés par charriage et en saltation. Les relations choisies sont les formules de Meyer-Peter et Müller (1948), de Fernandez Luque et van Beek (1976), de Einstein-Brown (1950) et de Raudkivi (1998). Elles sont établies à partir de mesures réalisées avec des sédiments de granulométrie quasi-uniforme ($\sigma_g < 1{,}3$). La formule de Meyer-Peter et Müller (1948) s'écrit (cf. le paragraphe 3.1.1 de la partie 1) :

$$\phi = \alpha \left(\xi_m \theta - \theta_c\right)^{3/2} \tag{2.16}$$

Avec $\alpha = 8$.
Le paramètre de Shields critique est pris égal à 0,053, qui correspond à la valeur critique estimée à partir des résultats du modèle numérique ($u_{*c} = 0{,}0375$ m.s^{-1}). ξ_m est le rapport des rugosités liées au lit et aux grains, il est pris égal 1. La formule de Fernandez Luque et van Beek (1976) est identique à celle de Meyer-Peter et Müller (1948) avec $\alpha = 5{,}7$. La formule de Einstein-Brown (1950) est donnée par la relation (2.17) (Raudkivi, 1998) :

$$\phi F = 40\theta^3 \ , \quad F = \left(\frac{2}{3} + \frac{36\nu_f}{(\gamma - 1) g d_p^3}\right)^{1/2} - \left(\frac{36\nu_f}{(\gamma - 1) g d_p^3}\right)^{1/2} \tag{2.17}$$

La relation (2.17) est dérivée pour des paramètres de Shields inférieurs à 0,625. Raudkivi (1998) propose d'exprimer le transport ϕ comme suit :

$$0{,}456\phi = \exp\left(-\frac{0{,}391}{\theta}\right) \tag{2.18}$$

Les données expérimentales utilisées pour établir la formule (2.18) sont obtenues lorsque $\phi < 0{,}4$. La figure 2.15 montre l'évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction du paramètre de Shields θ, déterminée à partir du modèle de transport et à partir des lois empiriques. Pour

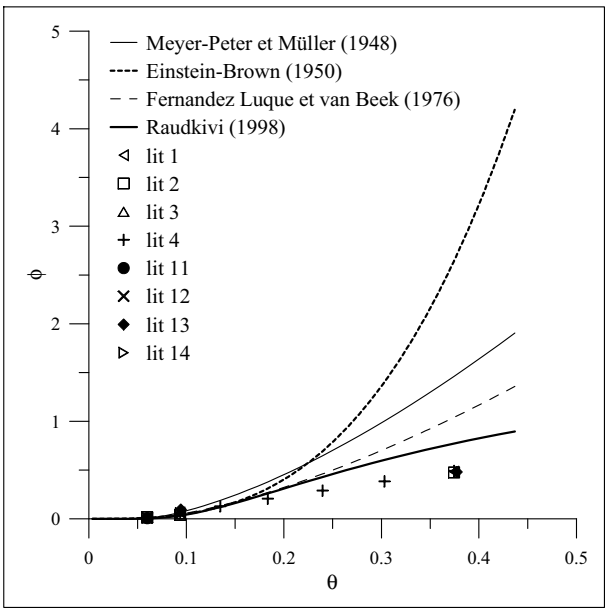


figure 2.15 – évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction du paramètre de Shields θ, déterminée à partir du modèle de transport et à partir des lois empiriques

$u_* < 0{,}07$ m.s^{-1} ($\theta < 0{,}2$), les débits numériques et empiriques convergent. Lorsque la vitesse

de frottement augmente, le débit numérique n'augmente pas aussi rapidement que dans les expériences. La différence entre les débits numérique et empiriques s'accroît avec θ. Cependant, il reste du même ordre de grandeur que les variations observées entre les différents débits empiriques. Nous en déduisons que le modèle numérique reproduit de façon satisfaisante l'érosion et le transport dans le cas de lits de granulométrie de distribution uniforme. Dans les expériences, la loi de transport est souvent exprimée comme une loi puissance en $\theta - \theta_c$, l'exposant étant compris entre 1 et 1,5 (Heald *et al.*, 2004). Nous obtenons ici :

$$\phi = 1{,}54(\theta - \theta_c)^{1{,}0} \ , \quad r^2 = 0{,}9998 \tag{2.19}$$

Avec $\theta_c = 0{,}053$ ($u_{*c} = 0{,}0375$ m.s^{-1}).

2.3 influence des coefficients du modèle

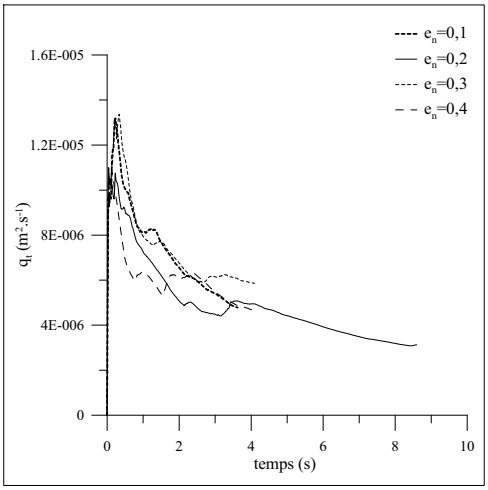
Le modèle de transport dépend de plusieurs coefficients relatifs à la trajectoire du grain et aux propriétés de la collision. Des simulations réalisées avec une sphère en saltation au dessus d'un lit montrent que les paramètres de saltation (hauteur et longueur du rebond, vitesse moyenne) ne dépendent pas du coefficient de restitution tangentiel e_τ et du coefficient de frottement f. Il est probable que ces deux paramètres ont, de la même façon, un effet négligeable sur le calcul numérique du transport de sédiments. Pour cette raison, nous étudions l'influence des quatre paramètres suivants : le coefficient de restitution normal, les raideurs des ressorts dans les directions normale et tangentielle, le pas de temps et le coefficient de portance.

Influence du coefficient de restitution normal

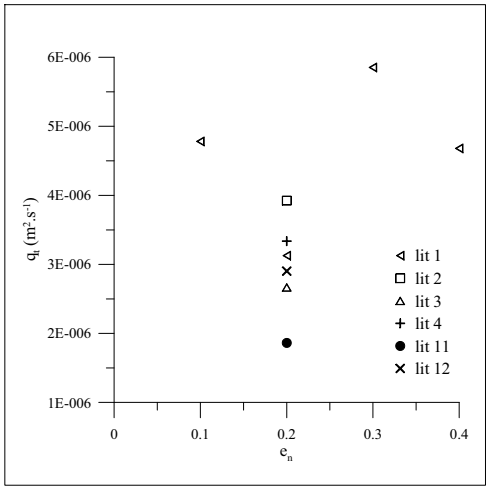
La plupart des simulations sont réalisées en utilisant un coefficient de restitution normal égal à 0,2. Cette valeur est choisie compte tenu des valeurs établies expérimentalement par Niño et Garcia (1998a) et utilisée par Jiang et Haff (1993). Les mesures de Niño et Garcia (1998a) sont dispersées et comprises entre 0 et 0,4. Elles dépendent de leur modèle de collision (cf. le paragraphe 2.1.4 de la partie 2).
Nous déterminons le débit de sédiments pour quatre valeurs du coefficient e_n : $e_n = 0{,}1$, $e_n = 0{,}2$, $e_n = 0{,}3$ et $e_n = 0{,}4$. La vitesse de frottement u_* est fixée à 0,04 m.s^{-1}. Le coefficient de restitution tangentiel est égal à 0,89. La figure 2.16 montre l'évolution du débit q_t pour différents coefficients e_n. L'état d'équilibre n'est pas atteint dans les cas $e_n = 0{,}1$, $e_n = 0{,}3$ et $e_n = 0{,}4$ et le débit moyen calculé est sans doute surestimé. Toutefois, les courbes d'évolution sont très proches et nous en déduisons que le coefficient e_n influe peu sur le débit moyen lorsque $u_* \sim 1{,}3\,u_{*c}$. Ce résultat est conforme aux observations de Heald *et al.* (2004). Heald *et al.* (2004) calculent le débit de sédiments pour trois coefficients de restitution : $e_n = 0{,}3$, $e_n = 0{,}5$ et $e_n = 0{,}7$. Ils montrent que l'influence du coefficient de restitution sur le débit est significative seulement proche du seuil d'érosion et qu'elle diminue lorsque la vitesse de frottement augmente (cf. la figure 11 de leur article). Pour $u_*/u_{*c} < 1{,}2$ avec $u_{*c} \simeq 0{,}067$ m.s^{-1} (valeur déterminée par les auteurs), les courbes d'évolution du débit q_t sont différentes : le débit q_t est alors une fonction décroissante du coefficient e_n. Lorsque $u_*/u_{*c} > 1{,}2$, les courbes d'évolution sont confondues. Heald *et al.* (2004) suggèrent que l'évolution du débit en fonction du coefficient e_n est liée au nombre de collisions entre les grains qui diminue lorsque la vitesse de frottement et la hauteur des rebonds augmentent.
Le coefficient de restitution e_n influe donc peu sur le calcul du transport de sédiments.

Influence des raideurs k_n et k_τ

La collision est modélisée par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs. Nous supposons que la raideur des ressorts dans les directions normale et tangentielle notée k_n et k_τ est identique.



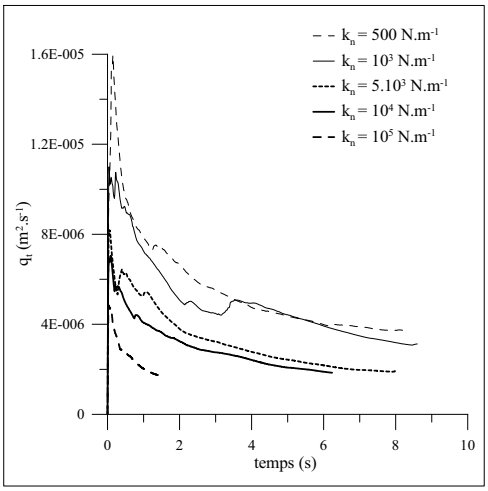
(a) évolution temporelle du débit moyen de sédiments (pour le lit 1)



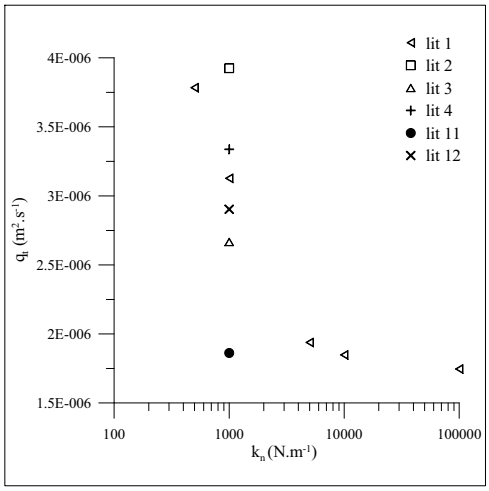
(b) débit moyen de sédiments à la fin des simulations

figure 2.16 – influence du coefficient de restitution normal e_n sur le débit moyen de sédiments q_t ; la vitesse de frottement est égal à 0,04 m.s^{-1}

La raideur k_n détermine le recouvrement des deux grains dans la direction normale pendant la collision et le pas de temps qui est dans les simulations proportionnel à $1/\sqrt{k_n}$. La valeur k_n est choisie afin que le recouvrement ne soit pas trop grand et le pas de temps pas trop petit. Elle est fixée par tâtonnement et en tenant compte des travaux de Jiang et Haff (1993) à 1000 N.m^{-1} pour les lits 1–4 et 11–14.
Des simulations sont ici réalisées avec le lit 1 afin d'examiner l'influence de la raideur k_n sur le transport. Cinq raideurs sont considérées : 500 N.m^{-1}, 1000 N.m^{-1}, 5000 N.m^{-1}, 10^4 N.m^{-1} et 10^5 N.m^{-1}. Lorsque la raideur k_n augmente, le recouvrement et le pas de temps diminuent. Le calcul des forces de contact est plus précis. Dans le cas $k_n = 10^5$ N.m^{-1}, la durée de la simulation est relativement longue et le débit moyen est estimé alors que l'état d'équilibre n'est pas atteint. La figure 2.17 montre l'influence de la raideur k_n sur le transport de sédiments lorsque la vitesse



(a) évolution temporelle du débit moyen de sédiments (pour le lit 1)



(b) débit moyen de sédiments à la fin des simulations

figure 2.17 – influence de la raideur k_n sur le débit moyen de sédiments q_t ; la vitesse de frottement est égale à 0,04 m.s^{-1}

de frottement u_* est égale à 0,04 m.s^{-1}. La raideur k_n influe sur la réorganisation interne de l'arrangement et donc sur le transport initial des grains. La réorganisation du lit dépend de la rigidité des grains qui est modélisée par les ressorts. Plus la raideur k_n est petite, plus la réorganisation de l'arrangement est rapide et plus le transport initial est important. Le débit moyen est une fonction décroissante de la raideur k_n. Toutefois, après un temps suffisamment long, la différence entre les débits s'amoindrit et les débits moyens à l'arrêt des simulations sont du même ordre de grandeur. L'intervalle de variation du débit obtenu pour les cinq valeurs k_n est égal à celui lié à la géométrie initiale des huit lits. Ainsi l'influence de la raideur k_n sur le débit est faible, à condition de rester dans une gamme de valeurs raisonnable. Jiang et Haff (1993) arrivent à la même conclusion. Pour cela, ils estiment la hauteur de saltation de grains de diamètre moyen égal à 7,2 mm pour quatre raideurs k_n comprises entre 10^3 et 10^5 N.m^{-1}. Nous remarquons dans la figure 2.18 que l'augmentation de la raideur k_n atténue les fluctuations du débit.

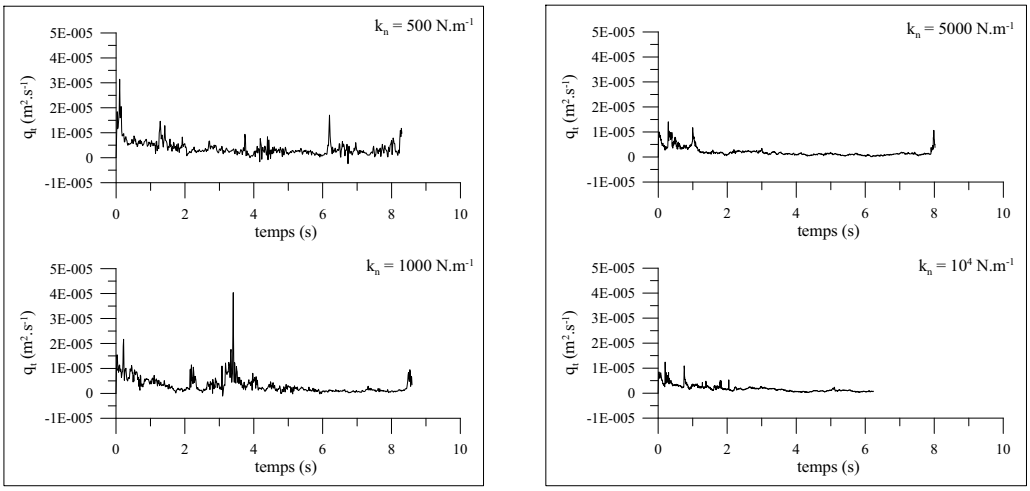


figure 2.18 – influence de la raideur k_n sur les fluctuations du débit de sédiments ; la vitesse de frottement est égale à 0,04 m.s^{-1}

Influence du pas de temps

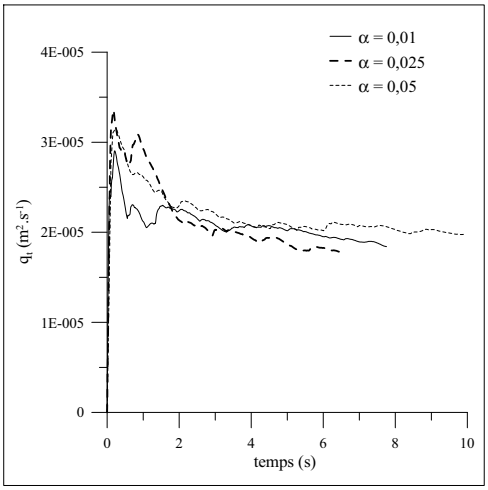
Le pas de temps est égal à $\alpha\sqrt{m/k_n}$. m est la masse du grain de diamètre égal à 2 mm. La constante α varie de 0,01 à 0,05. Les débits de sédiments calculés sont très proches (cf. la figure 2.19) et l'influence de la constante α est négligeable dans la gamme considérée. Ceci valide le choix de la valeur du pas de temps.

Influence du coefficient de portance

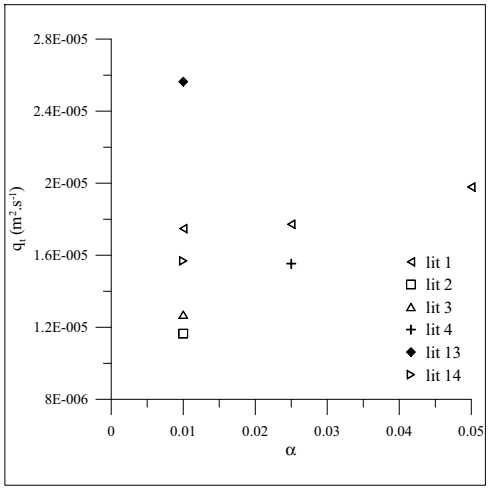
Le coefficient de portance est estimé dans le modèle numérique à partir de la relation approchée de van Rijn (1984a). Si le nombre de Reynolds Re_* ($= u_* d_p/\nu$) est inférieur à 5, le coefficient C_L est égal à 1,6, qui est la valeur déterminée par Saffman (1965, 1968). Si $Re_* \geq 70$, il est égal à 20. Cette valeur est obtenue des expériences de Fernandez Luque et van Beek (1976) sur la trajectoire du grain. van Rijn (1984a) suppose pour les nombres de Reynolds intermédiaires que le coefficient varie linéairement de 1,6 à 20 et nous avons :

$$C_L = 1{,}6 + 0{,}28\,(Re_* - 5) \tag{2.20}$$

van Rijn (1984a) applique ce résultat à des nombres de Reynolds compris entre 2 et 280. Dans les simulations, il varie de 10 à 200. Nous calculons le débit de sédiments pour plusieurs valeurs



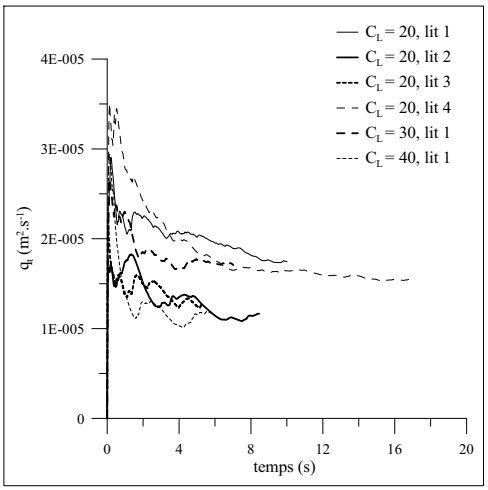
(a) évolution temporelle du débit moyen de sédiments (pour le lit 1)



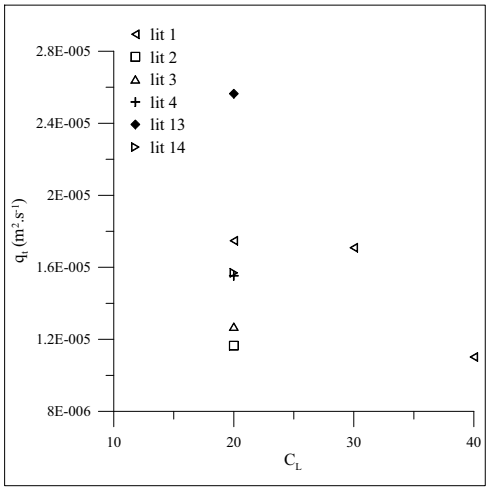
(b) débit moyen de sédiments à la fin des simulations

figure 2.19 – influence de la constante α sur le débit moyen de sédiments q_t ; la vitesse de frottement est égale à 0,05 m.s^{-1}

du coefficient C_L lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,05 et 0,1 m.s^{-1}. Les résultats des calculs sont montrés dans les figures 2.20 et 2.21. Lorsque $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}, trois valeurs



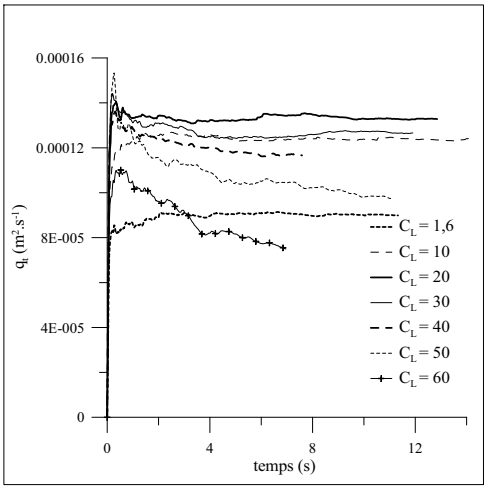
(a) évolution temporelle du débit moyen de sédiments



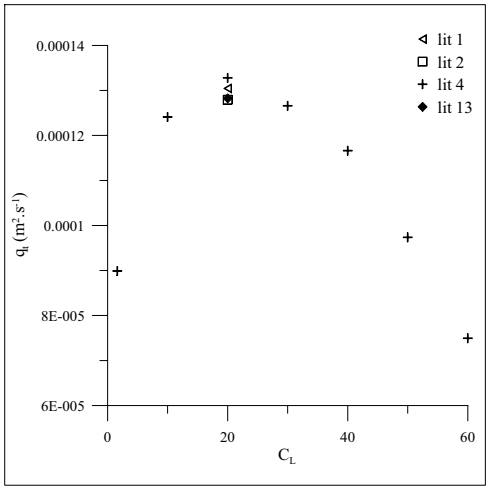
(b) débit moyen de sédiments à la fin des simulations

figure 2.20 – influence du coefficient de portance C_L sur le débit moyen de sédiments q_t ; la vitesse de frottement est égale à 0,05 m.s^{-1}

C_L (20, 30 et 40) sont considérées et les variations du débit observées sont du même ordre de grandeur que celles liées à la géométrie initiale du lit. Lorsque $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1}, le débit q_t est calculé pour sept valeurs C_L et il est possible de déduire une relation plus précise entre le débit et le coefficient C_L. Le débit n'est pas une fonction monotone du coefficient C_L. Il atteint un maximum pour $C_L = 20$ et il est minimal lorsque $C_L = 60$. Il peut être supposé constant sur l'intervalle $10 \leq C_L \leq 30$. La différence entre les débits minimal et maximal est significative et l'influence du coefficient de portance sur le transport de sédiments ne peut pas être négligée.
La comparaison du débit de sédiments calculé par le modèle de transport et ceux déterminés par les loi empiriques montre que le modèle sous-estime le débit pour les vitesses de frottement



(a) évolution temporelle du débit moyen de sédiments (pour le lit 4)



(b) débit moyen de sédiments à la fin des simulations

figure 2.21 – influence du coefficient de portance C_L sur le débit moyen de sédiments q_t ; la vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1}

les plus élevées (cf. la figure 2.15). Les simulations précédentes indiquent que l'augmentation du coefficient de portance ne permet pas d'accroître le débit calculé et que le maximum est obtenu pour la valeur proposée par van Rijn (1984a).

2.4 conclusion

Le modèle de transport développé est le résultat du couplage du modèle DEM et du modèle d'écoulement qui sont décrits respectivement dans la partie 2 et dans le chapitre 1 de cette partie. Il est appliqué à des sédiments de diamètre moyen égal à 1,6 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,2. Le modèle de transport reproduit le mouvement des grains à la surface du lit : les grains y sont transportés par charriage et en saltation. Au début des simulations, le processus d'érosion s'accompagne d'une réorganisation interne de l'arrangement des grains liée à la méthode de déposition. Cette réorganisation se traduit par un transport initial de grains important.
Le débit de sédiments, dont le calcul repose sur la composante horizontale de la vitesse des grains, fluctue au cours du temps. Sa valeur moyenne et l'amplitude des fluctuations augmentent avec la vitesse de frottement. Les fluctuations du débit sont, dans le modèle, essentiellement la conséquence des collisions entre les grains. Les simulations montrent que le débit de sédiments est indépendant de la géométrie du lit (arrangement initial des grains, épaisseur et surface). Il est également indépendant des coefficients du modèle de collision (raideur des ressorts, coefficient de restitution). Par contre, il dépend du coefficient de portance. Enfin, le seuil d'érosion du lit et l'évolution du débit moyen de sédiments en fonction de la vitesse de frottement, qui sont déterminés à partir du modèle numérique sont pour les sédiments considérés conformes aux données expérimentales. L'utilisation de la relation de van Rijn (1984a) pour le coefficient de portance apparaît notamment satisfaisante.

3 influence de la distribution de la taille des grains

3.1 sédiments étudiés

L'influence de la distribution de la taille des grains sur le transport est étudiée à partir de grandeurs « macroscopiques » que sont le débit de sédiments (instantané et moyen) et le seuil d'érosion et à partir de grandeurs « microscopiques » relatives au mouvement des particules à l'intérieur du lit (distribution de la vitesse des grains selon leur position, selon leur diamètre, évolution de la taille des grains à la surface, etc.). Dans ce but, nous simulons le transport de cinq catégories de sédiments, à savoir :

1) des sédiments mono-dispersés constitués de sphères identiques ;
2) des sédiments bi-dispersés composés de deux types de grains (lits LB10–13 et LB20 et 21) ;
3) des sédiments « faiblement dispersés » caractérisés par un écart-type géométrique égal à 1,1 ;
4) des sédiments de granulométrie « uniforme » dont le diamètre est compris entre 1 et 2 mm (lits 1–4 et 11–14) ;
5) des sédiments « dispersés » caractérisés par un écart-type géométrique compris entre 1,2 et 1,4 (lits LG11–13).

Le tableau 3.1 présente les propriétés des lits de sédiments étudiés ainsi que les conditions de simulations. Les dimensions des arrangements dans le plan horizontal l_b et L_b sont identiques. La hauteur H_b est définie comme la distance entre le centre du grain le plus bas et le centre du grain le plus haut. Elle varie de 10 à $29\,d_m$. Nous montrons que la hauteur influe peu sur le transport total de sédiments : cf. par exemple les débits de sédiments établis pour les lits 1, 11, 13 et 14 et l'évolution du débit sans dimension des lits mono-dispersés. En fait, la vitesse des grains diminue rapidement à l'intérieur du lit. Les coefficients du modèle de transport sont choisis comme suit (cf. aussi le paragraphe 2.2.3 dans la partie 2). Les raideurs des ressorts dans les directions normale et tangentielle k_n et k_τ sont identiques. Les coefficients d'amortissement sont calculés en prenant $e_n = 0{,}2$ et $e_\tau = 0{,}89$ avec e_n et e_τ les coefficients de restitution normal et tangentiel (cf. les expériences de Niño et Garcia (1994a,1998a)). Le coefficient de frottement f est fixé à 0,75. Le pas de temps est obtenu à partir de l'équation (3.1).

$$\Delta t = \alpha \sqrt{\frac{m}{k_n}} \tag{3.1}$$

m est la masse du plus gros grain contenu dans l'arrangement ou la masse du grain de diamètre moyen d_m. Les valeurs k_n et α sont déterminées par tâtonnement afin que le pas de temps ne soit pas trop petit et que le chevauchement des volumes pas trop grand. Pour cette raison, elles varient en fonction de la taille des grains.

lits	d_m (mm)	σ_g	N	l_b (mm)	H_b	α	k_n (N.m^{-1})
sédiments	0,30	1	15000	7,5	21 d_m	0,025	100
mono-dispersés	0,42	1	15000	10,5	22 d_m	0,01	100
	0,50	1	15000	12,5	21 d_m	0,01 ou 0,05	1000
	0,70	1	12000	21	13 d_m	0,01	1000
	1	1	15000	30	15 d_m	0,05	1000
	1,5	1	10000	45	10 d_m	0,05	1000
	2	1	10000	60	10 d_m	0,01	1000
	2,5	1	10000	75	10 d_m	0,01	2500
LB10	1,96	1,14	10000	30	29 d_m	0,01	1000
LB11	1,92	1,20	10000	30	24 d_m	0,01	1000
LB12	1,89	1,24	10000	30	22 d_m	0,01	1000
LB13	1,84	1,29	10000	30	19 d_m	0,01	1000
LB20	0,94	1,29	10000	16,5	15 d_m	0,05	1000
LB21	0,89	1,40	10000	14,5	13 d_m	0,05	1000
sédiments « faiblement	0,31	1,10	15000	7,5	23 d_m	0,025	100
dispersés »	0,43	1,11	15000	10,5	22 d_m	0,01	100
	0,52	1,10	15000	12,5	22 d_m	0,01 ou 0,05	1000
	0,72	1,10	12000	21	13 d_m	0,01	1000
(LG10)	1 ,10	1,11	10000	30	11 d_m	0,05	1000
lits 1–4	1,65	1,18	10000	30	21 d_m	0,01 et 0,025	1000
lit 11	1,65	1,18	5000	30	10 d_m	0,01	1000
lit 12	1,65	1,18	10000	30	23 d_m	0,01	1000
lit 13	1,64	1,20	10000	42,5	10 d_m	0,01	1000
lit 14	1,65	1,18	10000	35	15 d_m	0,01	1000
LG11	1,15	1,21	10000	30	11 d_m	0,01	1000
LG12	1,34	1,33	10000	30	11 d_m	0,01	1000
LG13	1,57	1,42	10000	30	11 d_m	0,01	1000

tableau 3.1 – propriétés des lits de sédiments étudiés : d_m est le diamètre moyen (arithmétique) du sédiment, σ_g l'écart-type géométrique de la distribution de la taille des grains ; N est le nombre de grains constituant le lit ; l_b est la longueur de l'arrangement dans la direction de l'écoulement non perturbé (elle est égale à la longueur L_b du lit dans la direction latérale) ; H_b est la hauteur du lit égale à la distance entre les centres des grains le plus bas et le plus haut du lit ; le pas de temps s'écrit $\Delta t = \alpha\sqrt{m/k_n}$; k_n est la raideur du ressort dans la direction normale au plan de contact (cf. le modèle de collision)

Le diamètre moyen d_m des grains et l'écart-type géométrique σ_g sont donnés par l'équation (3.2) (cf. le paragraphe 1.1.1 dans la partie 1).

$$d_m = \sum_{i=1}^{N} f_i d_i \ , \quad \sigma_g = \exp\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i \left[\ln\left(\frac{d_{pi}}{d_g}\right)\right]^2}\right) \tag{3.2}$$

Avec

$$f_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \ , \quad d_g = \prod_{i=1}^{N} d_{pi}^{f_i} \tag{3.3}$$

N est le nombre de grains dans l'arrangement. Le diamètre moyen d_m est différent de la moyenne des diamètres des grains. Par exemple, pour les lits 1–4, le diamètre moyen des grains est égal à 1,65 mm et la moyenne des diamètres à 1,5 mm.

Sédiments mono-dispersés

Les sédiments mono-dispersés sont composés de sphères identiques. Les diamètres utilisés dans les simulations sont compris entre 0,3 et 2,5 mm.

Sédiments bi-dispersés

Les sédiments bi-dispersés sont constitués de quatre mélanges de sphères de diamètres égaux à 1 et 2 mm (LB10–13) et de deux mélanges de sphères de diamètres égaux à 0,42 et 1 mm (LB20 et 21). La composition des mélanges de grains est précisée dans le tableau 3.2. Le transport

lits	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$N_{\min}$	$N_{\min}/N$	$m_{\min}/m_{\text{total}}$
LB10	1 mm	2 mm	2500	25%	4%
LB11	1 mm	2 mm	4000	40%	8%
LB12	1 mm	2 mm	5000	50%	11%
LB13	1 mm	2 mm	6000	60%	15%
LB20	0,42 mm	1 mm	6000	60%	10%
LB21	0,42 mm	1 mm	7500	75%	18%

tableau 3.2 – composition des six sédiments bi-dispersés : $d_{\min}$ et $d_{\max}$ sont les diamètres des petits et des gros grains ; $N_{\min}$ et $m_{\min}$ sont le nombre et la masse des grains de diamètre $d_{\min}$; N et m_{total} sont le nombre et la masse des grains dans le lit

des sédiments bi-dispersés est comparé à celui des sédiments mono-dispersés de diamètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$ et à celui des sédiments de granulométrie « uniforme » (lits 1–4 et 11–14). Il est aussi utilisé pour étudier les phénomènes de pavage et de ségrégation des petites particules. Dans les sédiments LB20 et 21, le diamètre des petits grains, $d_{\min}$ est égal approximativement au diamètre de la sphère la plus grosse qui passe entre quatre sphères jointes, situées dans le même plan horizontal et de diamètre $d_{\max}$:

$$d_{\min} \simeq \left(\sqrt{2} - 1\right) d_{\max} \tag{3.4}$$

Sédiments « faiblement dispersés »

Les sédiments « faiblement dispersés » sont des mélanges de grains dont la distribution du diamètre est log-normale et caractérisée par un écart-type géométrique σ_g égal à 1,1. Les sédiments étudiés ont un diamètre moyen compris entre 0,3 et 1 mm. La figure 3.1 montre la distribution de la taille des grains du sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm qui est désigné par le terme LG10.

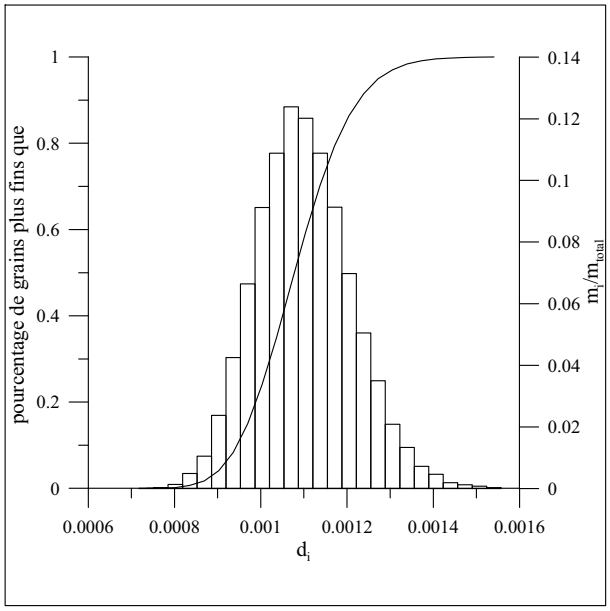
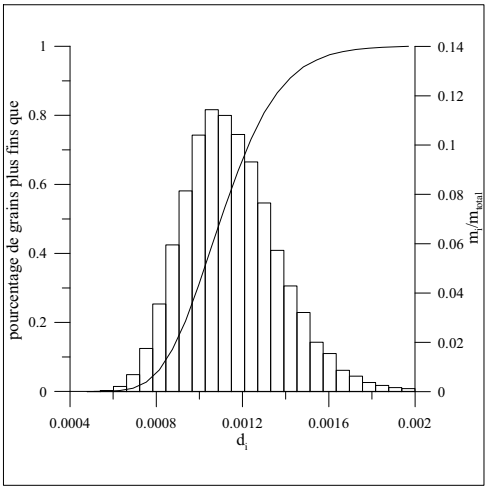


figure 3.1 – distribution de la taille des grains du sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm (sédiment LG10) ; l'écart-type géométrique est égal à 1,11.

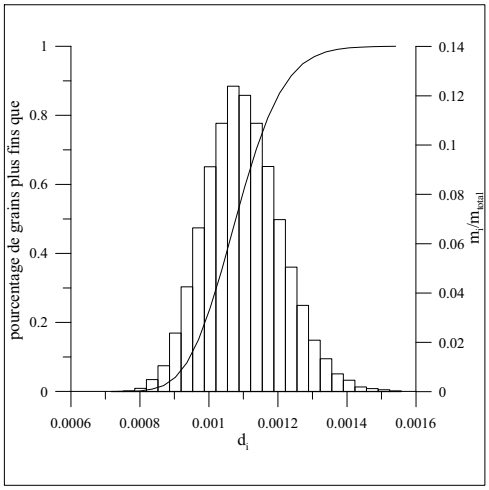
Sédiments « dispersés »

Trois sédiments « dispersés » sont utilisés dans les simulations : ce sont les sédiments LG11, LG12 et LG13. La distribution du diamètre des grains pour les trois sédiments est montrée dans la figure 3.2. Le diamètre moyen des grains varie de 1,15 à 1,6 et l'écart-type σ_g de la distribution du diamètre de 1,2 à 1,4. La distribution de la taille des grains est générée de la façon suivante. Nous fixons un diamètre minimal, un diamètre maximal et une loi de distribution. Nous divisons l'intervalle de variation de la fonction de répartition en N sous-intervalles $[F_k, F_{k+1}]$ tels que $F_{k+1} - F_k = 1/N$, comme montré dans la figure 3.3. Pour chaque intervalle $[F_k, F_{k+1}]$, nous choisissons aléatoirement une valeur F_k^*. Les diamètres des grains constituant le sédiment correspondent aux N F_k^*. La loi de distribution est pour les sédiments LG11 et LG12 une loi log-normale.

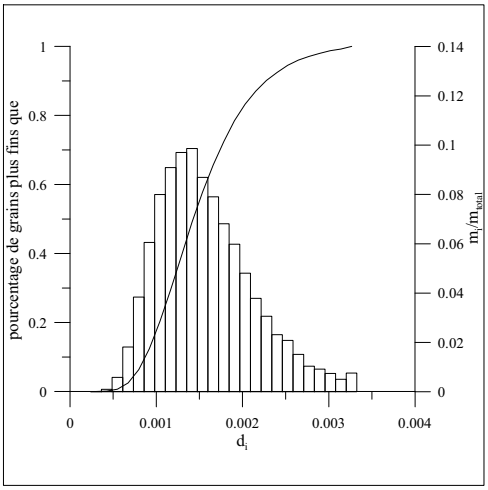
La dispersion de la taille des grains des sédiments LG11–13 est faible par rapport à celle des sédiments étudiés dans les expériences. Suivant le critère qui sert dans ces expériences ($\sigma_g \gtrsim 1{,}3$), seuls les sédiments LG12 et LG13 sont réellement non-uniformes. La dispersion du diamètre est limitée dans les simulations, par la taille des échantillons. Ceux-ci sont trop petits pour représenter de grandes variations de diamètre. Le nombre de grains N dans les arrangements détermine le temps de calcul qui dépend pour une grande part de la détection des collisions. Lorsque ce nombre N est élevé, le temps de calcul devient très important. Le tableau 3.3 indique la durée de simulation obtenue avec le modèle numérique pour deux cas. Les calculs sont effectués sur une station de travail dotée d'un processeur Intel Core 2 Duo E4400 cadencé à 2,00 GHz et



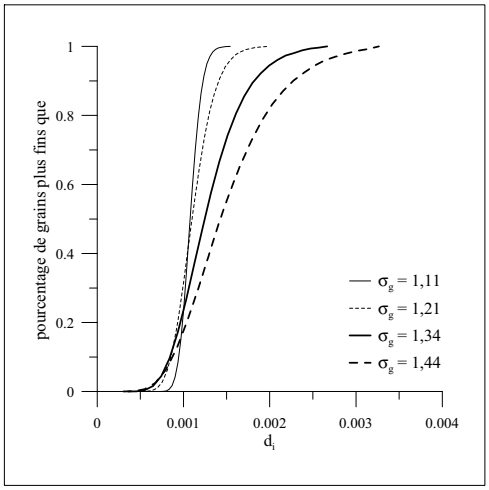
(a) $d_m = 1{,}15$ mm, $\sigma = 1{,}21$ (LG11)



(b) $d_m = 1{,}34$ mm, $\sigma_g = 1{,}33$ (LG12)



(c) $d_m = 1{,}57$ mm, $\sigma_g = 1{,}42$ (LG13)



(d) comparaison des fonctions de répartition du sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm (LG10) et des sédiments « dispersés »

figure 3.2 – distribution de la taille des grains des sédiments « dispersés »

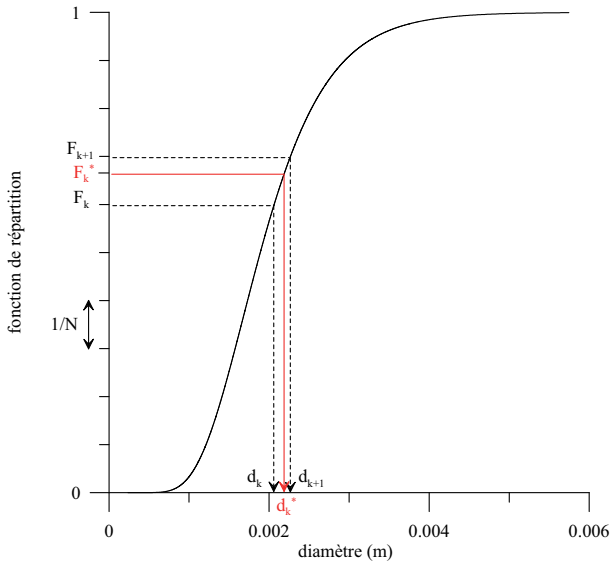


figure 3.3 – définition des diamètres des grains des sédiments « dispersés »

disposant de 2 Go de mémoire RAM. La durée des simulations est variable. Elle est liée entre autres au sédiment, à la vitesse de frottement et aux coefficients du modèle (raideurs des ressorts, pas de temps). Les calculs sont généralement arrêtés lorsqu'un certain état d'équilibre est atteint dans le lit (par exemple observation d'une stabilisation du débit de sédiments moyen). Le temps

sédiments	lit 1	mono-dispersé
diamètre moyen d_m	1,65 mm	0,3 mm
nombre de grains N	10000	15000
vitesse de frottement u_*	0,1 m.s^{-1}	0,01 m.s^{-1}
durée de la simulation	300 heures	427 heures
temps simulé	10 s	3,9 s

tableau 3.3 – exemples de durée de simulation obtenus avec le modèle numérique

de calcul est un inconvénient connu de la méthode des éléments discrets.

3.2 transport des sédiments

Nous souhaitons étudier l'influence de la distribution de la taille des grains sur le transport de particules dans l'arrangement. Pour cela, nous déterminons, pour chaque type de sédiments décrit précédemment, le seuil d'érosion et la loi de transport qui relie le débit de sédiments sans dimension ϕ et la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$.

Les enregistrements de la vitesse des grains effectués par le modèle numérique à intervalles de temps réguliers permettent de connaître pour plusieurs vitesses de frottement, l'évolution du

débit de sédiments q_t (défini par l'équation (3.5)) au cours du temps.

$$q_t = \frac{1}{S_b} \sum_{i=1}^{N} V_{pi} u_{pi} \tag{3.5}$$

Avec : S_b la surface du lit ; N le nombre de grains dans le lit ; V_{pi} le volume du grain i ; u_{pi} la composante de la vitesse du grain i dans la direction x.
Nous constatons que l'allure générale de l'évolution du débit est indépendante du type de sédiments. Quelle que soit la granulométrie du sédiment, le débit q_t fluctue au cours du temps ; l'amplitude et la fréquence des pics augmentent avec la vitesse de frottement. De plus, le débit q_t augmente rapidement au début des simulations, en raison de la réorganisation interne de l'arrangement due à la méthode de déposition choisie. Trois régimes de débits peuvent être identifiés en fonction de la vitesse de frottement.

1) Régime initial
   Lorsque la vitesse de frottement est faible (*i.e.* inférieure à la valeur critique), le débit de sédiments tend à s'annuler.
2) Régime intermédiaire
   Lorsque la vitesse de frottement augmente et devient supérieure à la valeur critique, il diminue vers une valeur non nulle.
3) Régime final
   Lorsque la vitesse de frottement augmente encore, il se stabilise autour d'une constante qui est supérieure à celle estimée dans le régime intermédiaire.

Nous observons également pour tous les sédiments qu'au bout d'un certain temps, un état d'équilibre est atteint dans le lit. Le débit moyen de sédiments ne varie alors plus avec le temps (cf. par exemple les figures 3.4b et 3.5b).
Les évolutions des débits de sédiments instantanés et moyens obtenues au cours du temps et pour plusieurs vitesses de frottement sont utilisées pour estimer dans un premier temps, le seuil d'érosion des lits et le paramètre de Shields critique θ_c et dans un second temps, la loi de transport ϕ en fonction de $\theta - \theta_c$.

3.2.1 sédiments mono-dispersés

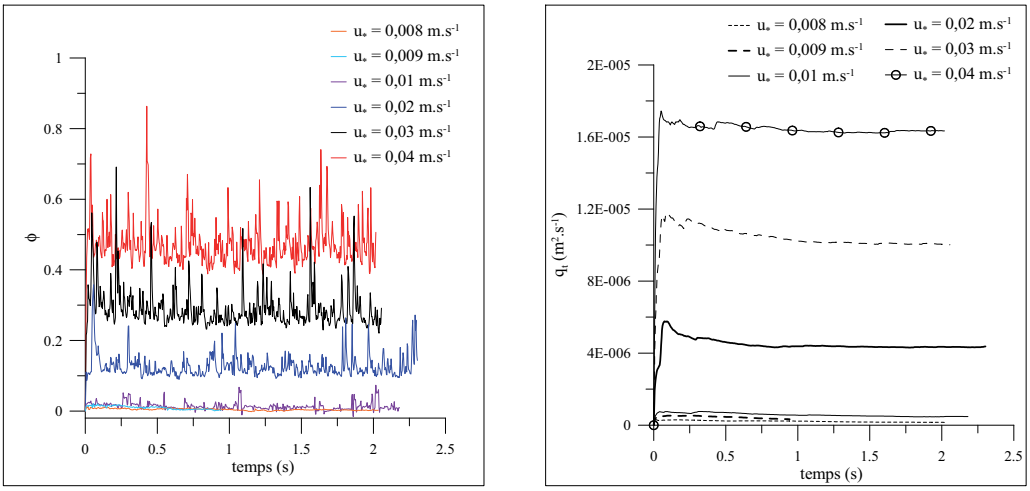
Seuil d'érosion

Les figures 3.4 et 3.5 montrent l'évolution du débit de sédiments (instantané et moyen) au cours du temps et pour plusieurs vitesses de frottement, qui est établie par le modèle numérique pour deux sédiments mono-dispersés. Nous remarquons que la durée de la phase de réorganisation des grains à l'intérieur du lit, pendant laquelle le débit q_t varie significativement avec le temps, dépend de la taille des grains et de la vitesse de frottement. Nous représentons également pour ces deux sédiments, dans la figure 3.6, le débit de sédiments moyen sans dimension ϕ qui est obtenu à la fin de la simulation, en fonction du paramètre de Shields θ.
La mise en mouvement du lit de sédiments entraîne une modification dans l'évolution du débit de sédiments, qui est visible dans les figures 3.4, 3.5 et 3.6. Elle se produit pour une vitesse de frottement qui est comprise entre les vitesses u_{*c1} et u_{*c2}. En effet,

- si $u_* \leq u_{*c1}$, le débit est quasi-nul et l'activité du lit est faible ;
- si $u_* \geq u_{*c2}$, le débit fluctue autour d'une valeur non nulle et la plupart des grains à la surface du lit sont en mouvement.

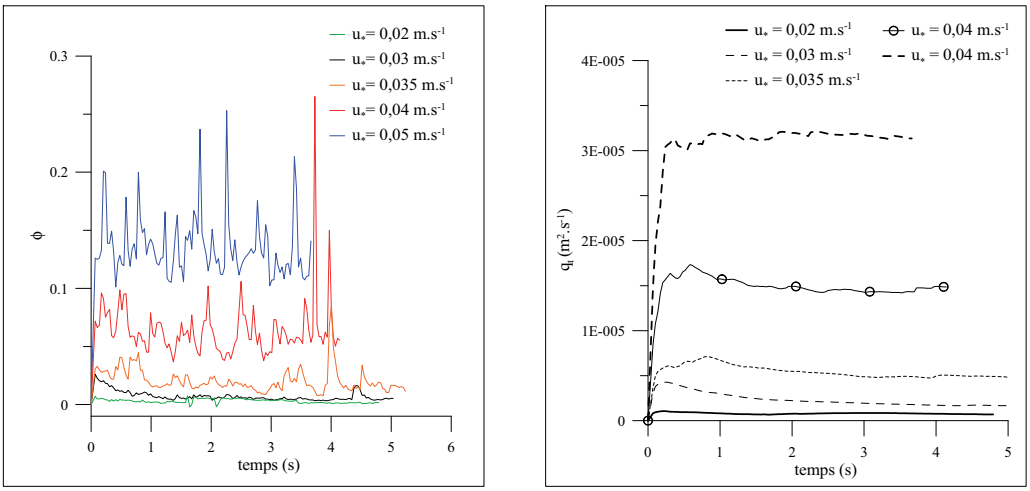
La mise en mouvement du lit correspond au changement de pente de la courbe d'évolution du débit moyen q_t en fonction de la vitesse u_* (cf. la figure 3.7). Nous prenons, comme vitesse de frottement critique, la moyenne des deux vitesses u_{*c1} et u_{*c2}.

$$u_{*c} = \frac{u_{*c1} + u_{*c2}}{2} \tag{3.6}$$



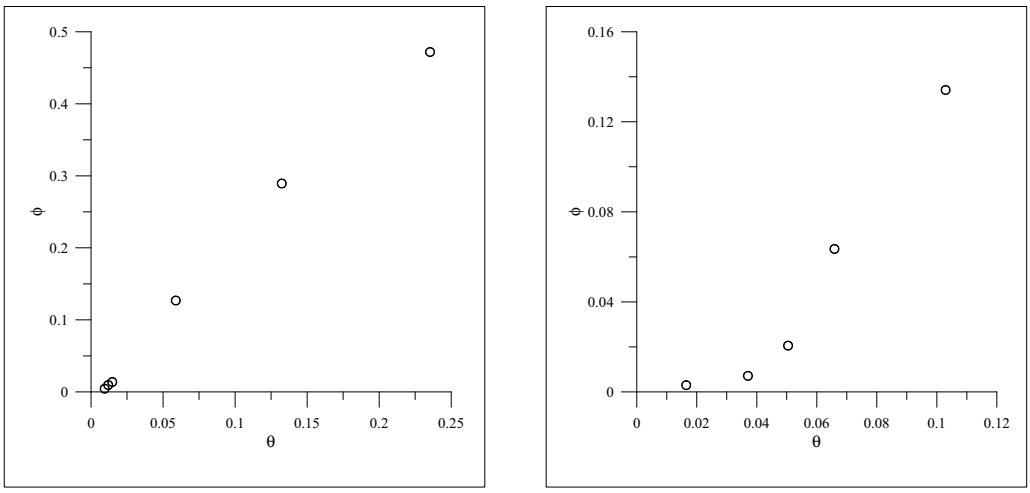
(a) débit instantané (b) débit moyen

figure 3.4 – évolution du débit de sédiments (instantané et moyen) au cours du temps établie par le modèle de transport pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm



(a) débit instantané (b) débit moyen

figure 3.5 – évolution du débit de sédiments (instantané et moyen) au cours du temps établie par le modèle de transport pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm



(a) $d_p = 0{,}42$ mm (b) $d_p = 1{,}5$ mm

figure 3.6 – évolution du débit moyen de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ pour les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 mm et 1,5 mm

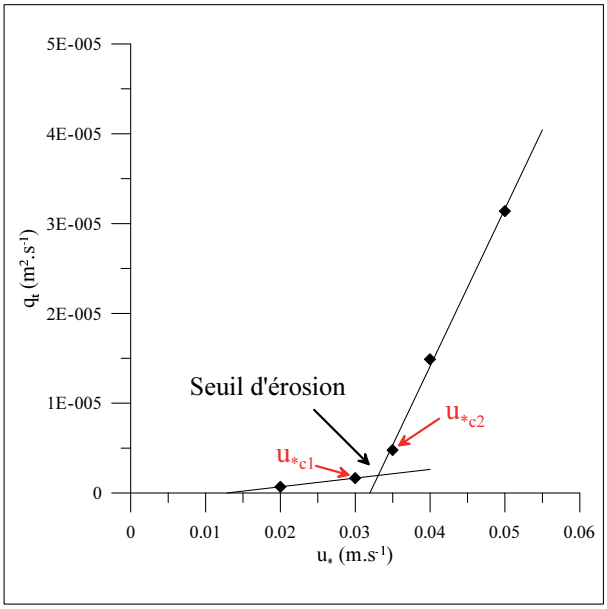


figure 3.7 – définition du seuil d'érosion à partir de la courbe d'évolution du débit moyen de sédiments q_t en fonction de la vitesse de frottement u_*

C'est cette valeur qui est utilisée pour établir la loi de transport entre les grandeurs sans dimension ϕ et $\theta - \theta_c$. Le tableau 3.4 indique, pour les huit sédiments mono-dispersés, les vitesses critiques u_{*c1}, u_{*c2} et u_{*c}.

diamètre (mm)	u_{*c1} ($\mathrm{m.s^{-1}}$)	u_{*c2} ($\mathrm{m.s^{-1}}$)	u_{*c} ($\mathrm{m.s^{-1}}$)	θ_c	u^S_{*c} ($\mathrm{m.s^{-1}}$)	u^E_{*c} ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
0,30	0,007	0,008	0,0075	0,012	–	0,014
0,42	0,009	0,01	0,0095	0,013	–	0,015
0,50	0,01	0,015	0,0125	0,019	–	0,016
0,70	0,015	0,02	0,0175	0,027	–	0,018
1	0,02	0,025	0,0225	0,031	0,021	0,023
1,5	0,03	0,035	0,0325	0,043	0,031	0,030
2	0,035	0,04	0,0375	0,043	0,037	0,036
2,5	0,045	0,05	0,0475	0,056	0,047	0,042

tableau 3.4 – seuil d'érosion des lits mono-dispersés ; u_{*c1} et u_{*c2} définissent dans les simulations l'intervalle de la vitesse de frottement pour lequel se produit le seuil d'érosion ; u_{*c} est la valeur moyenne de ces deux vitesses et θ_c est le paramètre de Shields critique associé ; u^S_{*c} est la valeur critique qui est déterminée suivant la méthode de Shields (1936) ; u^E_{*c} est la vitesse de frottement critique calculée à partir des relations de van Rijn (1984a)

Il indique aussi la vitesse de frottement critique u^S_* qui est obtenue à partir de la méthode proposée par Shields (1936). Nous déterminons ainsi la relation linéaire $\phi = a\theta + b$ vérifiée par les résultats lorsque $u_* \gg u_{*c}$: la vitesse u^S_* est égale au rapport $-b/a$. Les valeurs u^S_* sont comparables aux vitesses u_{*c1}, u_{*c2} et u_{*c} si le diamètre des grains est supérieur à 1 mm. Lorsque $d_p < 1$ mm, la méthode de Shields (1936) ne donne pas de résultats satisfaisants, le coefficient b étant trouvé positif.

Les vitesses de frottement critiques u_{*c1}, u_{*c2} et u_{*c} sont comparées à des données expérimentales dans le tableau 3.4 et la figure 3.8. Nous indiquons, dans le tableau 3.4, la vitesse de frottement critique calculée en utilisant les relations empiriques de van Rijn (1984a) (cf. le paragraphe 2.3 dans la partie 1). Cette vitesse est notée u^E_{*c}. Dans la figure 3.8, nous représentons nos résultats dans le diagramme du critère de Shields : en abscisse le nombre de Reynolds critique Re_{*c} ($= d_p\, u_{*c}/\nu$) et en ordonnée, le paramètre de Shields critique θ_c ($= \rho u^2_{*c}/[(\rho_s - \rho)g d_p]$). La position du symbole est relative à la vitesse u_{*c} et les extrémités du segment aux vitesses u_{*c1} et u_{*c2}. Le diagramme du critère de Shields se décompose en trois zones. Au-dessous de la ligne en trait gras pointillé, inférieure, les vitesses de frottement sont trop faibles et aucun mouvement de grains (significatif) n'est observé dans les expériences. Au-dessus de la ligne en trait gras pointillé, supérieure, les grains sont transportés par l'écoulement. La zone située entre les deux lignes en trait gras pointillé recouvre l'ensemble des vitesses de frottement critiques obtenues dans les expériences avec des sédiments de granulométrie uniforme ($\sigma_g < 1{,}3$). La ligne en petits pointillés correspond aux relations de van Rijn (1984a).
L'estimation du seuil d'érosion par le modèle de transport apparaît correcte pour les diamètres compris entre 0,7 et 2,5 mm. Les résultats numériques et expérimentaux convergent. La vitesse

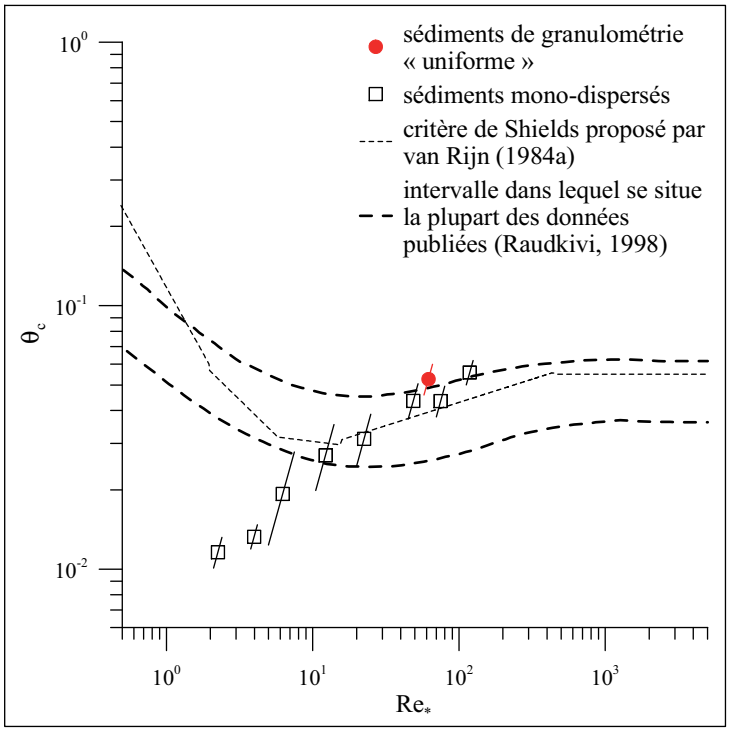


figure 3.8 – évolution du paramètre de Shields critique en fonction du nombre de Reynolds établie par le modèle de transport pour les sédiments mono-dispersés ; la position du symbole est fixée par la vitesse de frottement critique u_{*c} et les extrémités du segment par les vitesses u_{*c1} et u_{*c2}

critique u_{*c} se situe au milieu de l'intervalle englobant la plupart des données publiées. Cependant pour les petits diamètres ($d_p \leq 0{,}5$ mm), elles est sous-estimée par rapport à l'expérience. La différence entre les valeurs numériques et expérimentales s'accroît lorsque la taille des grains diminue. Ainsi, pour $d_p = 0{,}30$ mm, nous avons $u_{*c} \sim 0{,}5\, u_{*c}^E$.

La sous-estimation de la vitesse de frottement critique par le modèle de transport peut s'expliquer par la distribution de la taille et la forme des grains utilisés dans les simulations et dans les expériences. Dans les simulations, le sédiment est composé de grains sphériques et identiques. Dans les expériences, le sédiment est composé de grains non sphériques de diamètres variables. La figure 3.8 indique que la vitesse de frottement critique des lits de granulométrie « uniforme » (lits 1–4) est supérieure à celles des lits mono-dispersés de diamètre équivalent. Plus généralement, les simulations montrent que la présence de plusieurs tailles de grains rend les lits plus rigides et plus difficiles à éroder. De plus, la forme du grain influe sur sa résistance à l'écoulement et sur son type de mouvement. Un grain de forme allongée a un coefficient de traînée inférieur à celui d'un grain sphérique. La présence de tels grains permet aussi une meilleure imbrication des particules dans l'arrangement qui est alors plus résistant.

La sous-estimation de la vitesse de frottement critique pour les petites particules peut être aussi liée à la présence au-dessus du lit de la sous-couche visqueuse. Lorsque le nombre de Reynolds Re_* est petit ($Re_* \lesssim 5$), la couche limite turbulente est hydrauliquement lisse et il existe une zone proche de la surface dans laquelle les effets visqueux sont très importants et les vitesses faibles (cf. le paragraphe 1.2 de la partie 1). Miller *et al.* (1977) notent que dans cette sous-couche visqueuse, les grains sont protégés de l'écoulement. Contrairement aux simulations, dans les expériences, le paramètre de Shields critique pour les petits grains augmente lorsque le diamètre d_p diminue. L'épaisseur de la sous-couche visqueuse est égale à $11{,}6\nu/u_*$. Elle est indépendante du diamètre et lorsque celui-ci diminue, le nombre de grains contenus dans la sous-couche visqueuse augmente. L'effet de la sous-couche visqueuse n'est pas pris en compte dans le modèle d'écou-

lement. Dans le modèle, la couche limite turbulente est hydrauliquement rugueuse et le profil de vitesse non perturbée est décrit par la loi logarithmique. Pour les petits grains considérés dans les simulations ($d_p \leq 0{,}5$ mm), le nombre de Reynols Re_* est inférieur à 10. Ces grains sont dans les expériences situés dans la sous-couche visqueuse. De fait, les vitesses fluide subies sont inférieures à celles calculées dans les simulations. La surestimation de la vitesse fluide subie par les grains dans les simulations par rapport aux expériences augmente lorsque le diamètre des grains diminue. Cette surestimation peut donc expliquer la sous-estimation de la vitesse de frottement critique dans les simulations.

Afin de déterminer le seuil d'érosion, Bonnefille (1963) et Parker *et al.* (1982) développent des critères basés sur un débit de sédiments minimum. Dans l'approche de Bonnefille (1963), la valeur critique correspond à $q^+ = 10^{-4}$ avec $q^+ = q_t/d_p u_*$. Parker *et al.* (1982) fixent le seuil d'érosion du lit pour $W = 0{,}002$ avec $W = (\gamma - 1) g q_t / u_*^3$. Suivant une approche similaire, nous calculons le débit de sédiments sans dimension lorsque la vitesse de frottement est égale à la valeur critique. Ce débit dit critique est noté ϕ_c, il est estimé comme suit.

$$\phi_c \sim \frac{\phi_{c1} + \phi_{c2}}{2} \tag{3.7}$$

Avec ϕ_{c1} et ϕ_{c2} les débits de sédiments lorsque $u_* = u_{*c1}$ et $u_* = u_{*c2}$.
La figure 3.9 montre l'évolution du débit ϕ_c en fonction du diamètre d_m pour les sédiments mono-dispersés et les sédiments de granulométrie « uniforme ». Le débit critique ϕ_c est du même ordre

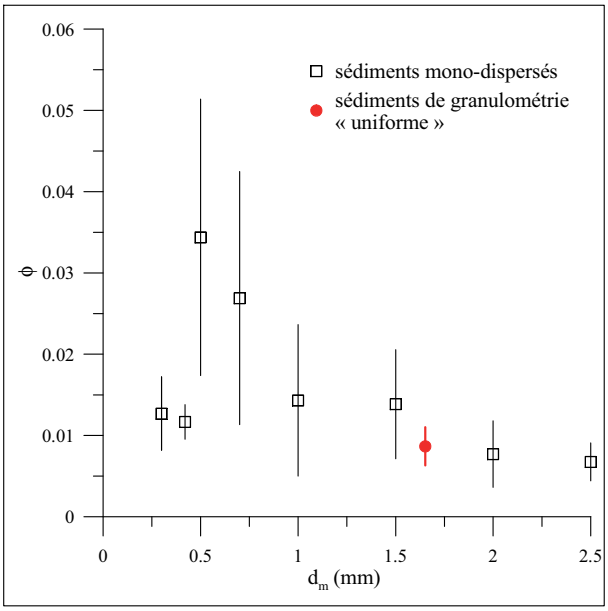


figure 3.9 – évolution du débit de sédiments sans dimension lorsque la vitesse de frottement est égale à la valeur critique pour les sédiments mono-dispersés et de granulométrie « uniforme », en fonction du diamètre moyen d_m ; la position du symbole est fixée par la valeur ϕ_c et la longueur du segment est égale à $\phi_{c2} - \phi_{c1}$

de grandeur. Il est compris entre 0,006 et 0,035 et il est en moyenne égal à 0,015. Ce résultat est encourageant, il constitue une sorte de validation de la méthode utilisée pour déterminer le seuil d'érosion.
Dans les simulations, le nombre sans dimension W est compris pour $u_* = u_{*c}$ entre 0,3 et 5,7 et le débit sans dimension q^+ entre 0,03 et 0,2. Ces valeurs sont bien supérieures à celles établies dans les critères de Bonnefille (1963) et de Parker *et al.* (1982). Les différences observées peuvent s'expliquer par la définition du débit de sédiments. Dans les expériences, le débit est mesuré à

partir de la quantité de sédiments récupérés à l'aval du canal. Dans les simulations, le débit est calculé à partir de la vitesse des grains. Pour $u_* \leq u_{*c}$, les distances parcourues par les grains sont faibles, inférieures à la longueur de l'arrangement (cf. la figure 3.53). Il est donc probable que si le débit est évalué comme dans les expériences, il serait beaucoup plus faible.

Loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta - \theta_c)$

La figure 3.10 montre l'évolution du débit moyen sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les huit sédiments mono-dispersés. Le paramètre critique

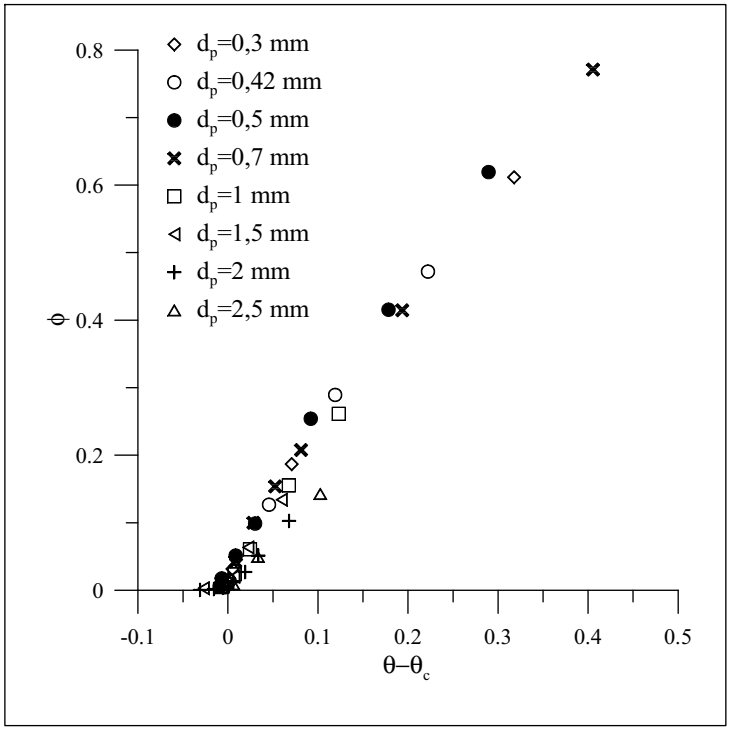


figure 3.10 – évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les sédiments mono-dispersés

θ_c est la valeur obtenue dans les simulations, il est indiqué dans le tableau 3.4.
Comme dans les expériences, le débit sans dimension ϕ est une fonction d'une seule variable qui est la différence de paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. L'évolution du débit ϕ est identique pour les huit sédiments mono-dispersés malgré des conditions de simulations différentes (épaisseur et surface de l'arrangement, constante α, raideur k_n). Ce résultat valide les hypothèses de modélisation et la méthode d'estimation du paramètre de Shields critique. Il montre que les coefficients du modèle et la géométrie du lit n'ont pas d'influence sur le transport de sédiments pourvu que nous restions dans une gamme de variation raisonnable (cf. aussi le paragraphe 2.3 de cette partie).
La loi de transport s'écrit pour les huit sédiments mono-dispersés comme suit.

$$\phi = 1{,}99\,(\theta - \theta_c)\ , \quad r^2 = 0{,}9776 \tag{3.8}$$

La relation (3.8) est obtenue par la méthode des moindres carrés. Nous remarquons que le débit de sédiments obtenu pour $d_p = 2$ mm et $d_p = 2{,}5$ mm est faiblement inférieur à celui estimé pour les diamètres plus petits.
La relation (3.8) est une formule à seuil qui est une des formes de lois fréquemment utilisées pour décrire le transport de sédiments par charriage. Ce type de transport est le mode dominant dans les simulations.

3.2.2 sédiments bi-dispersés

Le transport des sédiments bi-dispersés est comparé à celui des sédiments mono-dispersés formés des mêmes grains. L'écart-type géométrique de la distribution du diamètre est compris pour les sédiments bi-dispersés entre 1,2 et 1,4. La distribution est considérée dans les expériences comme quasi-uniforme ou faiblement dispersée. En général, le transport de ces sédiments est estimé à partir du diamètre moyen d_m. Le diamètre d_m des sédiments LB10–13 et LB20–21 est égal approximativement au diamètre des gros grains.

Seuil d'érosion

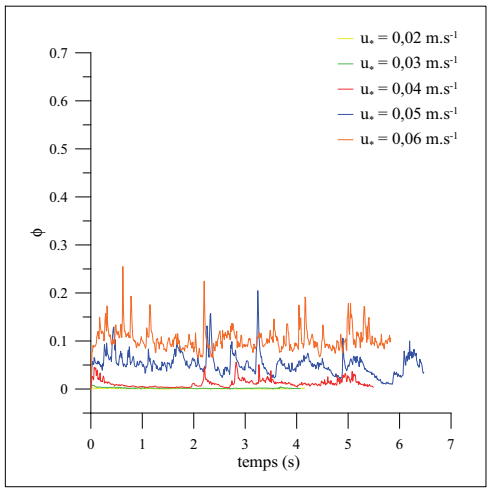
Les figures 3.11 et 3.12 montrent les évolutions du débit de sédiments instantané et moyen obtenues pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 et pour les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 1 et 2 mm. Les évolutions du débit sont différentes pour les sédiments bi-dispersés et mono-dispersés. La présence de deux types de grains rend le lit plus résistant. Pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1 mm, le seuil d'érosion du lit se produit lorsque la vitesse de frottement est comprise entre 0,02 et 0,025 m.s^{-1}. Pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2 mm, il se produit lorsque la vitesse de frottement est comprise entre 0,035 et 0,04 m.s^{-1}. La vitesse de frottement critique pour les sédiments bi-dispersés est supérieure à ces valeurs et se situe dans l'intervalle 0,04 et 0,05 m.s^{-1}. En effet, lorsque $u_* = 0{,}04$ m.s^{-1}, le débit de sédiments tend à s'annuler. Lorsque la vitesse de frottement augmente et est égale à 0,05 m.s^{-1}, le débit devient intermittent et le transport se fait « par bouffées ». Les bouffées sont très dispersées et il n'est pas possible de déterminer une corrélation entre le nombre de petits grains et leur fréquence. Lorsque $u_* = 0{,}07$ m.s^{-1}, l'ensemble des grains à la surface du lit est en mouvement et le débit de sédiments fluctue autour d'une valeur non nulle. Le débit de sédiments ne dépend alors pas du nombre de petits grains présents dans l'arrangement. Il est le même pour les quatre sédiments LB10–LB13.

Les figures 3.13 et 3.14 montrent les évolutions du débit de sédiments instantané et moyen obtenues pour les sédiments bi-dispersés LB20 et 21 et pour les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 et 1 mm. L'évolution du débit pour les sédiments bi-dispersés est, dans ce cas, similaire à celle déterminée pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1 mm. Le seuil d'érosion se produit pour les trois sédiments lorsque la vitesse de frottement est comprise entre 0,02 et 0,03 m.s^{-1}. La présence des petits grains ne modifie pas la résistance à l'écoulement, contrairement à ce qui est observé pour les sédiments LB10–13.

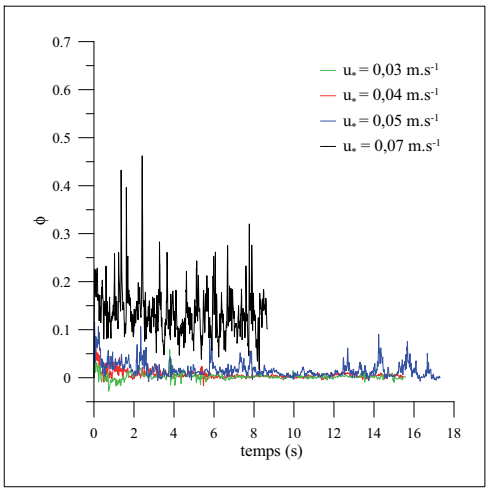
Le tableau 3.5 récapitule les vitesses critiques établies par le modèle de transport pour les sédiments bi-dispersés.

lits	LB10–13	LB20–21
u_{*c1}	0,04 m.s^{-1}	0,02 m.s^{-1}
u_{*c2}	0,05 m.s^{-1}	0,03 m.s^{-1}
u_{*c}	0,045 m.s^{-1}	0,025 m.s^{-1}
θ_c	0,062	0,042

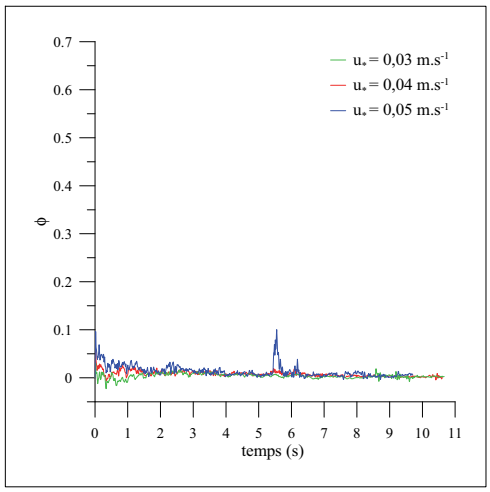
tableau 3.5 – seuil d'érosion établi par le modèle de transport pour les sédiments bi-dispersés ; u_{*c1} et u_{*c2} définissent l'intervalle de la vitesse de frottement pour lequel se produit le seuil d'érosion ; u_{*c} est la valeur moyenne de ces deux vitesses et θ_c est le paramètre de Shields critique associé



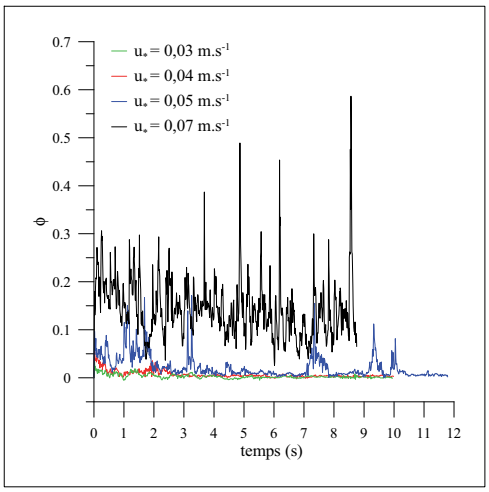
(a) 100% de gros grains



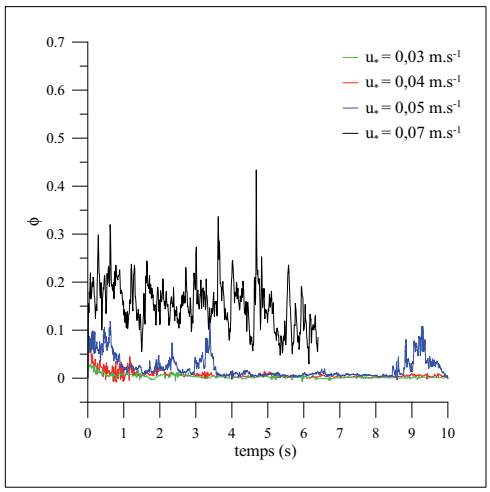
(b) 25% de petits grains (LB10)



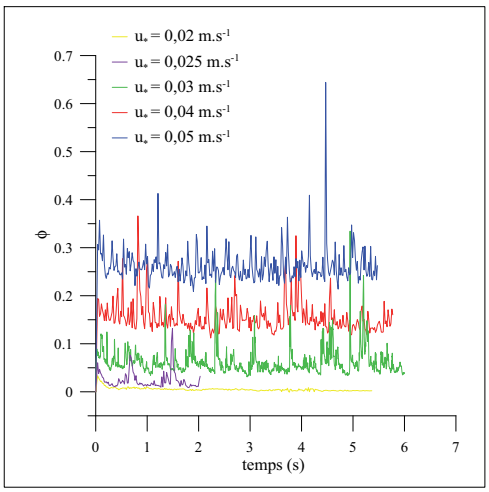
(c) 40% de petits grains (LB11)



(d) 50% de petits grains (LB12)



(e) 60% de petits grains (LB13)



(f) 100% de petits grains

figure 3.11 – évolution du débit de sédiments en fonction du temps pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 et les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 1 et 2 mm

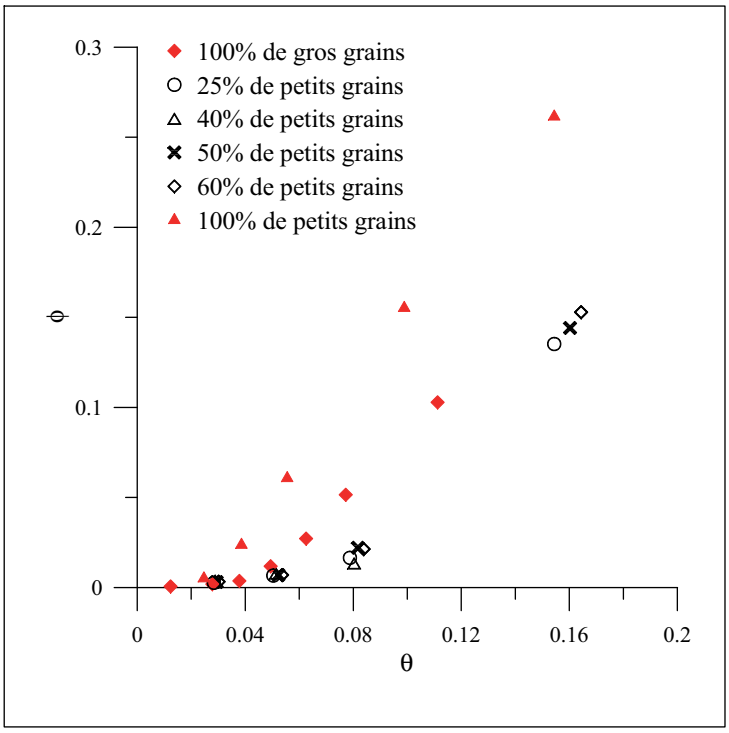


figure 3.12 – évolution du débit moyen de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ obtenue pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 et les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 1 et 2 mm

Loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta - \theta_c)$

La figure 3.15 montre l'évolution du débit moyen de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les six sédiments bi-dispersés. La valeur du paramètre de Shields critique utilisée est indiquée dans le tableau 3.5. La loi de transport s'écrit pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 :

$$\phi = 1{,}53(\theta - \theta_c) \ , \quad r^2 = 0{,}9937 \tag{3.9}$$

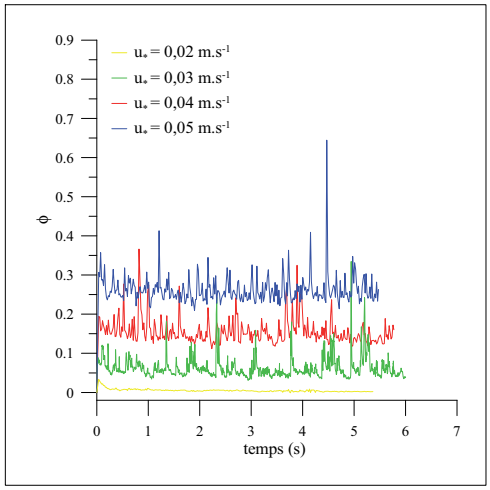
L'équation (3.9) est déterminée par la méthode des moindres carrés à partir des données obtenues pour $u_* = 0{,}05$ et $0{,}07$ m.s^{-1}. Pour les sédiments LB20 et 21, le débit de sédiments croît plus vite avec $\theta - \theta_c$ et il est donné par la relation (3.10).

$$\phi = 2{,}32(\theta - \theta_c) \ , \quad r^2 = 0{,}9945 \tag{3.10}$$

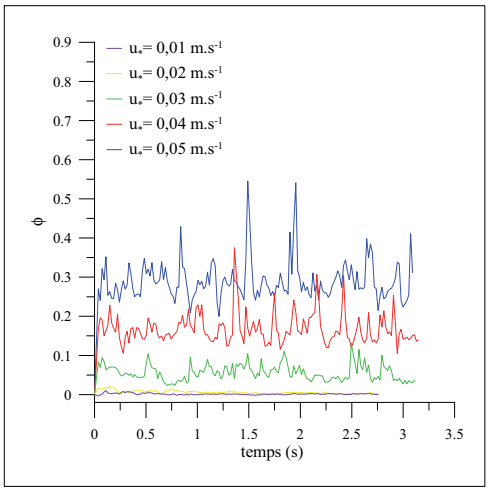
L'évolution du débit ϕ en fonction de $\theta - \theta_c$ est semblable à celle établie pour les sédiments mono-dispersés et pour les sédiments de granulométrie « uniforme » à condition que le paramètre de Shields critique soit bien déterminé. Les différences observées entre les sédiments LB10–13 et LB20–21 semblent être liées à la valeur du diamètre moyen. L'étude des sédiments mono-dispersés montre que la loi de transport pour $d_p \geq 2$ mm est un peu différente de celle obtenue pour des diamètres plus petits. Dans la figure 3.15a, les points relatifs au débit des sédiments LB10–13 sont situés sur la même droite que ceux relatifs au débit du sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2 mm et du sédiment de granulométrie « uniforme » de diamètre moyen égal à 1,65 mm.

Influence de la distribution de la taille des grains

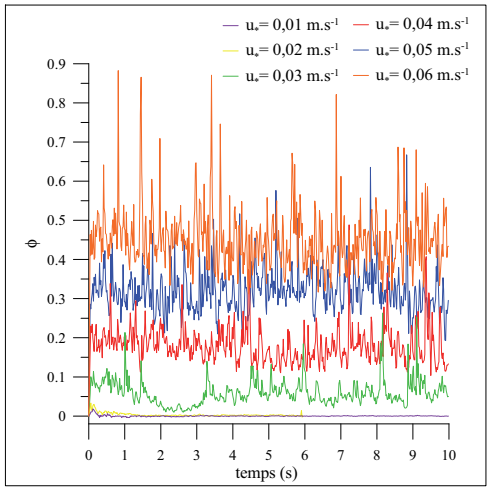
Le comportement des sédiments bi-dispersés ne dépend pas du nombre de grains contenus dans l'arrangement. Le seuil d'érosion et le débit de sédiments q_t sont identiques pour les sédiments



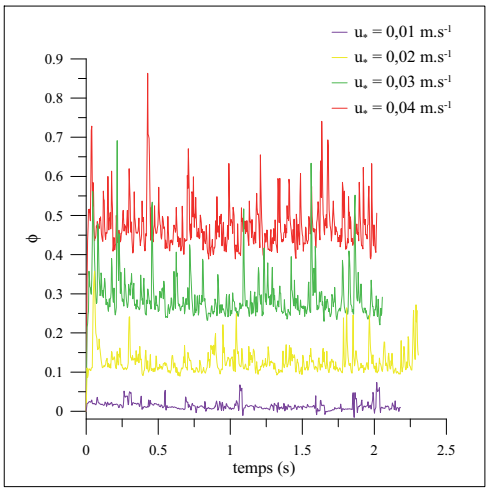
(a) 100% de gros grains



(b) 60% de petits grains (LB20)



(c) 75% de petits grains (LB21)



(d) 100% de petits grains

figure 3.13 – évolution du débit de sédiments en fonction du temps pour les sédiments bi-dispersés LB20–21 et les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 et 1 mm

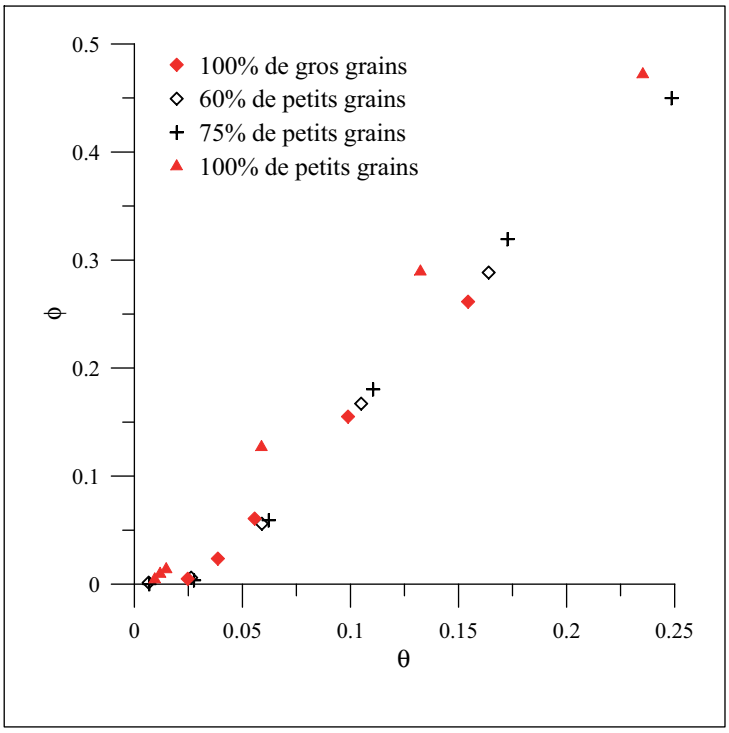
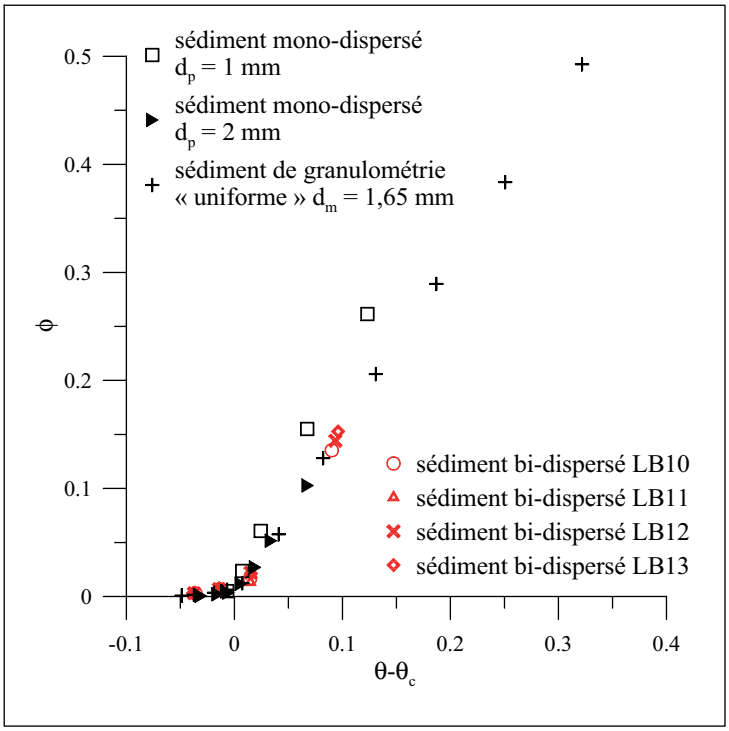


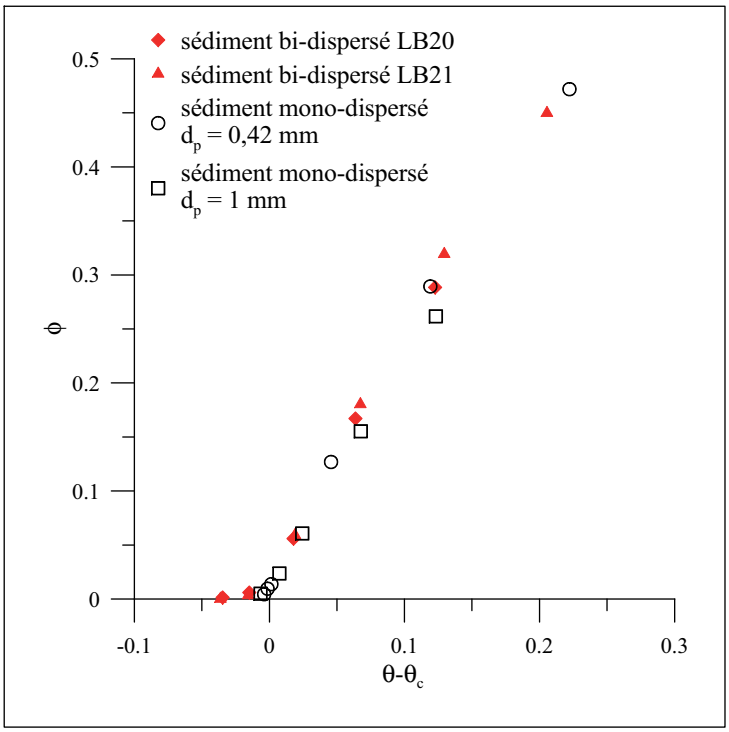
figure 3.14 – évolution du débit moyen de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ obtenue pour les sédiments bi-dispersés LB20–21 et les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 et 1 mm

LB10–13 et pour les sédiments LB20–21. Le paramètre influent apparaît être la différence de diamètres des grains. Ce résultat est conforme aux observations de Wilcock (1992) et Kuhnle (1993). Wilcock (1992) et Kuhnle (1993) notent que le transport des sédiments bi-modaux est déterminé entre autres par la différence de diamètres des deux modes. La différence des diamètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$ pour les sédiments LB20–21 est plus importante que pour les sédiments LB10–13. Le diamètre $d_{\min}$ est égal, dans les premiers sédiments, approximativement au diamètre de la sphère la plus grosse qui passe entre quatre sphères jointes, situées dans le même plan horizontal et de diamètre $d_{\max}$. Ce diamètre limite vaut $(\sqrt{2}-1)\,d_{\max}$. Pour $d_{\max} = 1$ mm, il est égal à 0,41 mm et pour $d_{\max} = 2$ mm, à 0,83 mm.

Le mouvement des sédiments LB20–21 n'est pas influencé par la présence des petits grains. La vitesse de frottement critique u_{*c} et le débit de sédiments q_t sont similaires aux valeurs obtenues pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1 mm. Compte tenu de la valeur $d_{\min}$, les petits grains se déplacent entre les grosses particules sans en entraver leur mouvement. Au contraire, dans les sédiments LB10–13, les petits grains sont « plus gros » et bloquent le mouvement des grosses particules. Coincés dans les interstices, ils « cimentent » la surface du lit. Ainsi le seuil d'érosion se produit à des vitesses de frottements supérieures à celles obtenues pour les sédiments mono-dispersés. Nous remarquons aussi que la résistance des sédiments LB10–13 est plus importante que celle des sédiments de granulométrie « uniforme » pour lesquels $u_{*c} = 0{,}0375$ m.s^{-1}. Lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,07 m.s^{-1}, le mouvement des grosses particules n'est plus entravé et le débit de sédiments q_t est équivalent à celui du sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2 mm. La visualisation des lits de sédiments bi-dispersés (cf. le paragraphe 3.4.1 de cette partie) montre que pour $u_* > u_{*c}$, la couche supérieure de l'arrangement est constituée seulement par les gros grains. Les petits grains sont repoussés vers l'intérieur. Pour $u_* < u_{*c}$, la réorganisation initiale du lit s'accompagne aussi d'un tri granulométrique. Le nombre de petits grains à la surface diminue mais il reste non nul.



(a) sédiments LB10–13



(b) sédiments LB20–21

figure 3.15 – évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les sédiments bi-dispersés

La distribution de la taille des grains influe ainsi sur le seuil d'érosion du lit. Les simulations réalisées ici montrent que le seuil d'érosion ne peut pas être prédit par le diamètre moyen des grains. Par contre, l'influence de la distribution du diamètre n'est pas significative pour des vitesses de frottement supérieures à la valeur critique. Pour ces vitesses, le débit de sédiments bi-dispersés est équivalent à celui obtenu pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à d_m.

3.2.3 sédiments « faiblement dispersés »

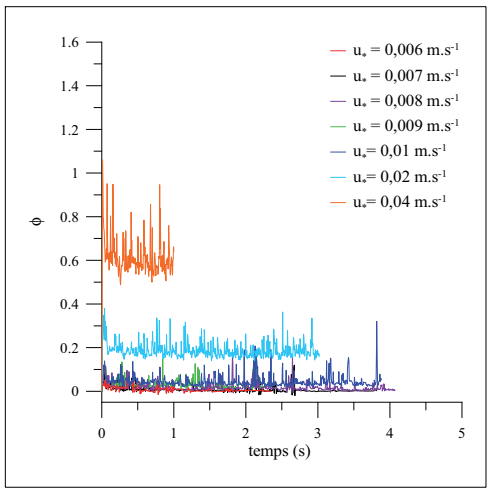
Les sédiments « faiblement dispersés » sont des mélanges de grains dont l'écart-type géométrique de la distribution du diamètre est égal à 1,1. Le transport de ces sédiments est comparé à celui des sédiments mono-dispersés.

Seuil d'érosion

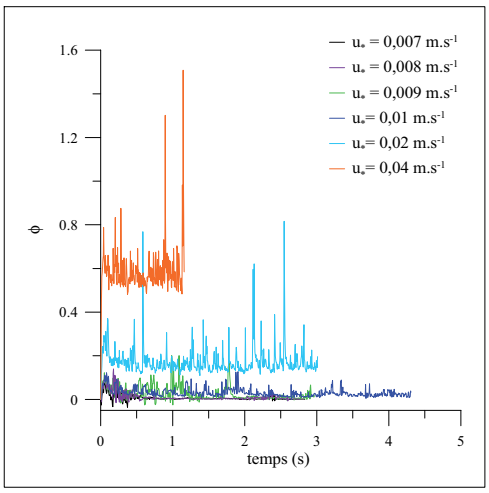
Dans les simulations, l'influence de la distribution de la taille des grains sur le seuil d'érosion des sédiments dépend du diamètre moyen d_m. Les figures 3.16, 3.17 et 3.18 montrent l'évolution du débit de sédiments instantané et moyen pour trois sédiments « faiblement dispersés » de diamètre moyen égal à 0,3, 0,7 et 1 mm. L'influence de la distribution du diamètre est négligeable lorsque le diamètre moyen des grains est égal à 0,3 mm. Le seuil d'érosion et le débit de sédiments q_t sont similaires pour les deux types de sédiments. L'amplitude des fluctuations du débit augmente avec l'écart-type géométrique. Lorsque le diamètre moyen est égal à 0,7 mm, le comportement des deux sédiments est différent. Pour le sédiment « faiblement dispersé », la réorganisation initiale de l'arrangement s'accompagne d'un important mouvement des grains et au début des simulations, le débit de sédiments est supérieur à celui estimé dans le cas mono-dispersé. Après la phase de réorganisation, le débit diminue et à la fin des simulations, le débit moyen est inférieur à celui du sédiment mono-dispersé. Lorsque $u_* = 0{,}05$ et 0,07 m.s^{-1}, l'état d'équilibre n'est pas atteint et le débit moyen est surestimé. L'écart entre les débits des deux types de sédiments est donc sous-estimé. La vitesse de frottement critique établie par le modèle de transport est égale pour le sédiment « faiblement dispersé » à 0,0225 m.s^{-1} et pour le sédiment mono-dispersé à 0,0175 m.s^{-1}. Lorsque le diamètre moyen est égal à 1 mm, les différences sont encore plus marquées. Le seuil d'érosion se produit pour le sédiment « faiblement dispersé » entre les vitesses 0,045 et 0,05 m.s^{-1} et pour le sédiment mono-dispersé entre les vitesses 0,02 et 0,025 m.s^{-1}.
Le tableau 3.6 indique, pour les cinq sédiments « faiblement dispersés », la vitesse de frottement critique. Cette vitesse critique est comparée, dans la figure 3.19, à des données expérimentales

diamètre d_m (mm)	u_{*c1} (m.s^{-1})	u_{*c2} (m.s^{-1})	u_{*c} (m.s^{-1})	θ_c
0,31	0,008	0,009	0,0085	0,015
0,43	0,01	0,015	0,0125	0,023
0,52	0,015	0,020	0,0175	0,038
0,72	0,02	0,025	0,0225	0,045
1,10	0,04	0,045	0,0425	0,087

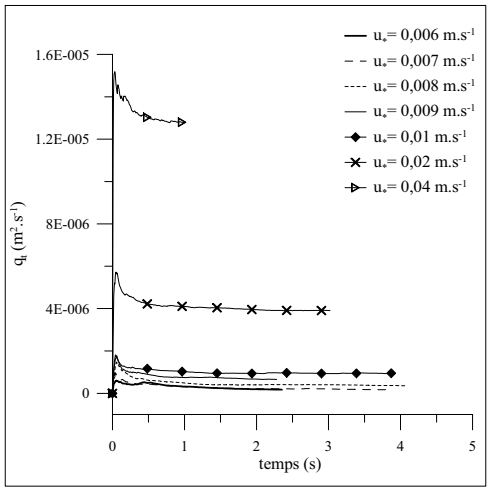
tableau 3.6 – seuil d'érosion établi par le modèle de transport pour les sédiments « faiblement dispersés » ; u_{*c1} et u_{*c2} définissent l'intervalle de la vitesse de frottement pour lequel se produit le seuil d'érosion ; u_{*c} est la valeur moyenne de ces deux vitesses et θ_c est le paramètre de Shields critique associé



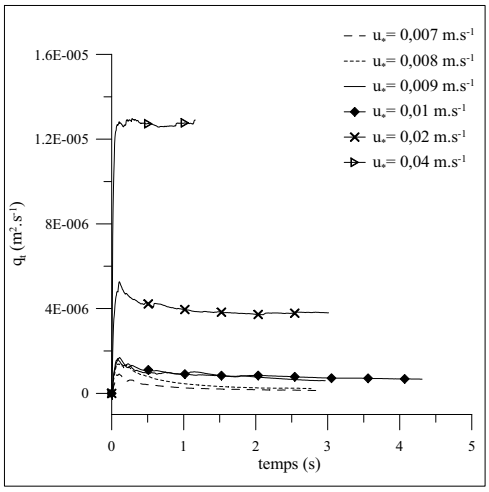
(a) évolution temporelle du débit pour le sédiment mono-dispersé



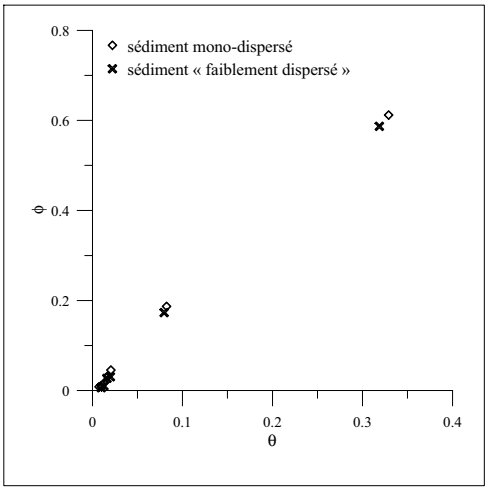
(b) évolution temporelle du débit pour le sédiment « faiblement dispersé »



(c) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment mono-dispersé

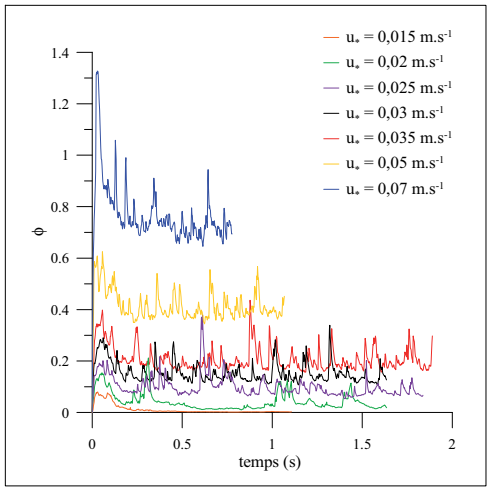


(d) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment« faiblement dispersé »

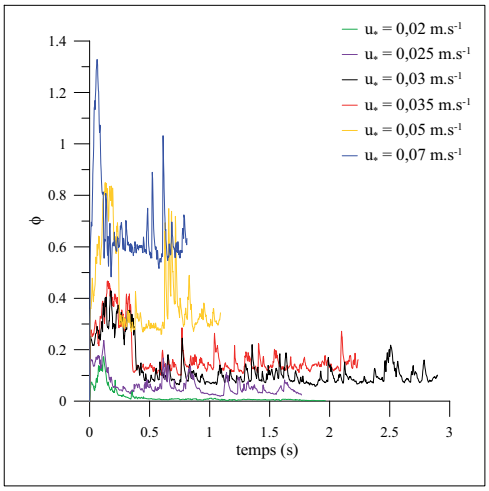


(e) débit moyen à la fin des simulations

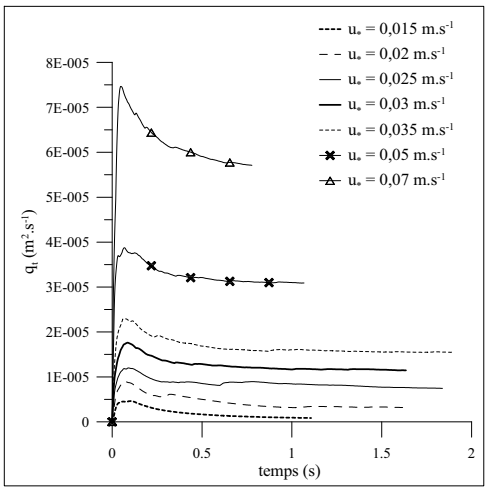
figure 3.16 – évolution du débit de sédiments pour les sédiments mono-dispersé et « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 0,3 mm



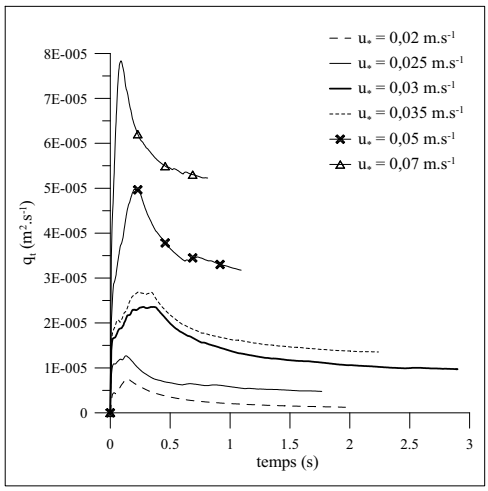
(a) évolution temporelle du débit pour le sédiment mono-dispersé



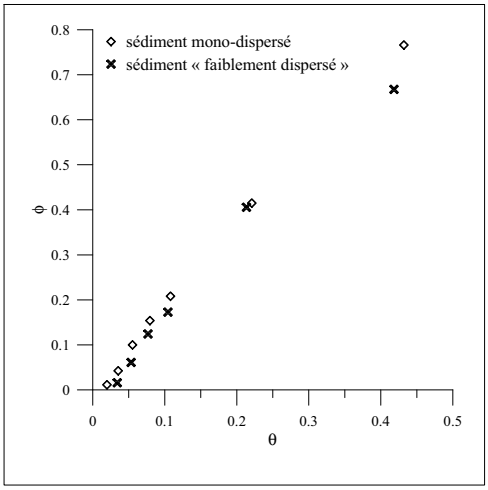
(b) évolution temporelle du débit pour le sédiment « faiblement dispersé »



(c) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment mono-dispersé

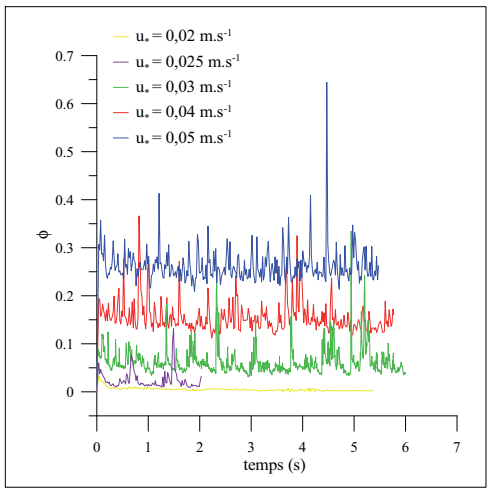


(d) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment« faiblement dispersé »

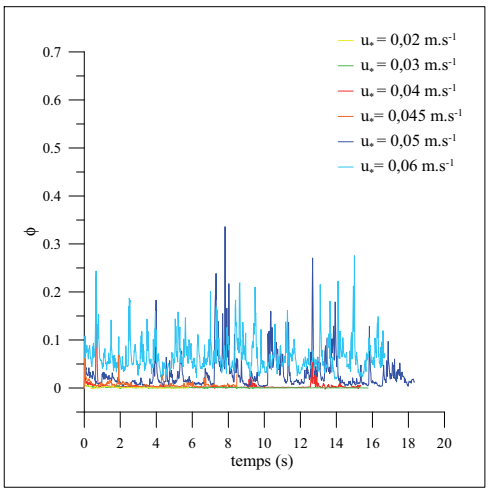


(e) débit moyen à la fin des simulations

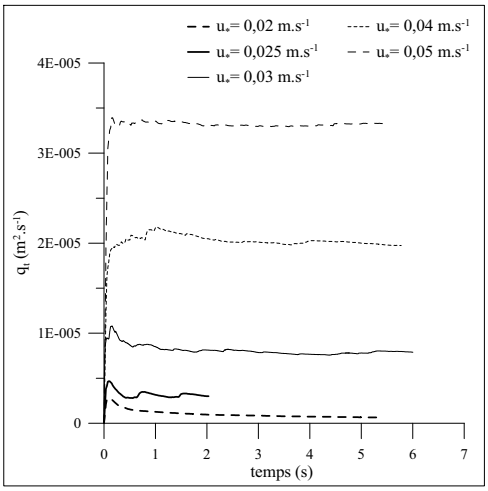
figure 3.17 – évolution du débit de sédiments pour les sédiments mono-dispersé et « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 0,7 mm



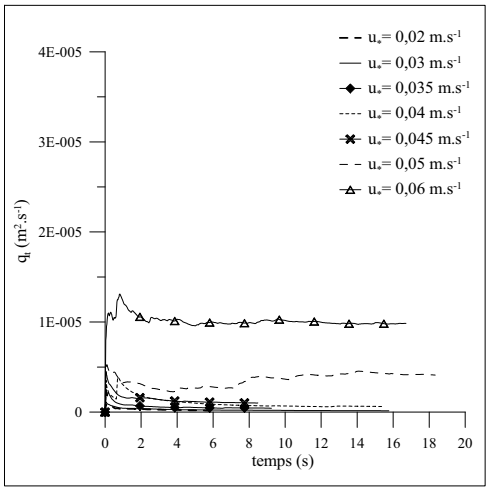
(a) évolution temporelle du débit pour le sédiment mono-dispersé



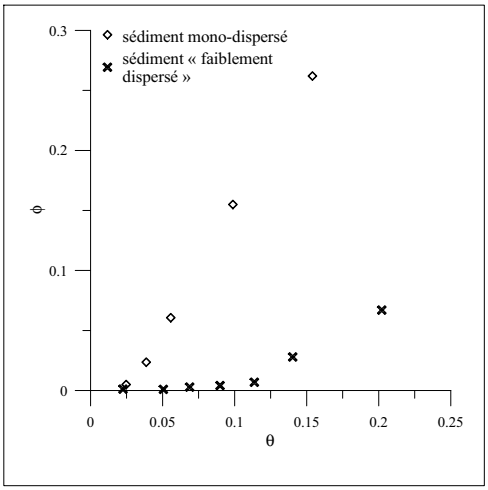
(b) évolution temporelle du débit pour le sédiment « faiblement dispersé »



(c) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment mono-dispersé



(d) évolution temporelle du débit moyen pour le sédiment« faiblement dispersé »



(e) débit moyen à la fin des simulations

figure 3.18 – évolution du débit de sédiments pour les sédiments mono-dispersé et « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1 mm

(van Rijn, 1984a ; Raudkivi, 1998) obtenues avec des sédiments de granulométrie faiblement dispersée ($\sigma_g < 1{,}3$) et aux résultats établis par le modèle de transport pour les sédiments mono-dispersés, les sédiments bi-dispersés et les sédiments de granulométrie « uniforme ». L'estimation

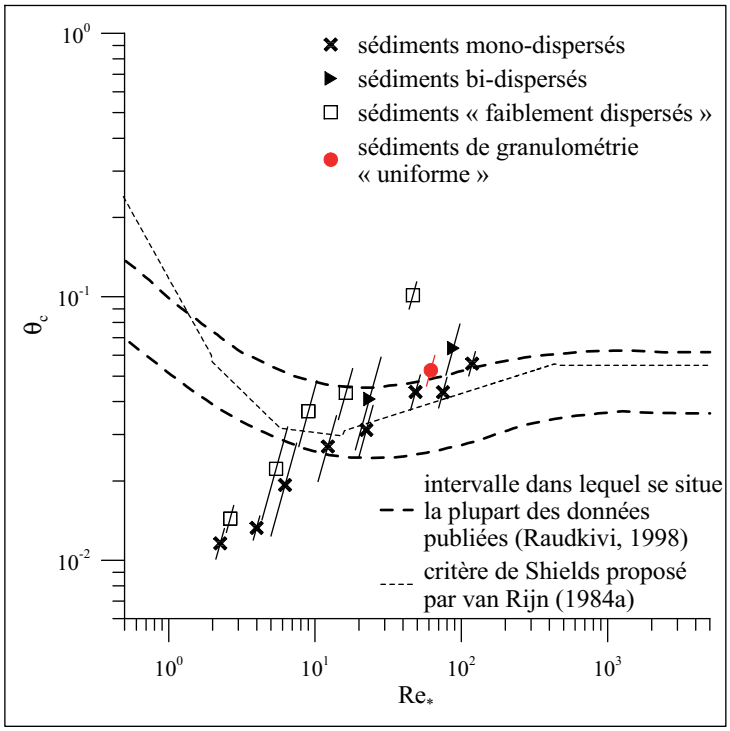


figure 3.19 – évolution du paramètre de Shields critique en fonction du nombre de Reynolds établie par le modèle de transport pour les sédiments « faiblement dispersés » ; la position du symbole est fixée par la vitesse de frottement critique u_{*c} et les extrémités du segment par les vitesses u_{*c1} et u_{*c2}

de la vitesse de frottement critique à partir des résultats du modèle numérique est conforme à l'expérience, excepté pour $d_m = 0{,}3$ mm, $d_m = 0{,}4$ mm et $d_m = 1{,}1$ mm. Comme dans le cas des sédiments mono-dispersés, pour les petits diamètres, la vitesse critique est sous-estimée. Cette sous-estimation semble être liée aux hypothèses du modèle d'écoulement (qui ne prend pas en compte l'effet de la sous-couche visqueuse). Pour $d_m = 1{,}1$ mm, le résultat est plus étonnant. La vitesse u_{*c} qui est trouvée dans les simulations est bien supérieure aux valeurs empiriques ainsi qu'à celle fournie par le modèle numérique pour le sédiment mono-dispersé correspondant. La figure 3.19 montre que même une dispersion faible de la taille des grains rend les arrangements plus résistants à l'érosion. La vitesse de frottement critique déterminée pour les sédiments « faiblement dispersés » est toujours supérieure à celle obtenue pour les sédiments mono-dispersés.

La figure 3.20 montre l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ_c lorsque la vitesse de frottement est égale à la valeur critique,en fonction du diamètre moyen d_m pour les sédiments « faiblement dispersés ». Le débit ϕ_c est semblable à celui déterminé lorsque le sédiment est mono-dispersé ou de granulométrie « uniforme ».

Loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta - \theta_c)$

La figure 3.21 montre l'évolution du débit moyen sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. La relation entre ϕ et $\theta - \theta_c$ dépend du diamètre moyen. Contrairement aux sédiments mono-dispersés, nous n'obtenons pas une relation unique. Lorsque

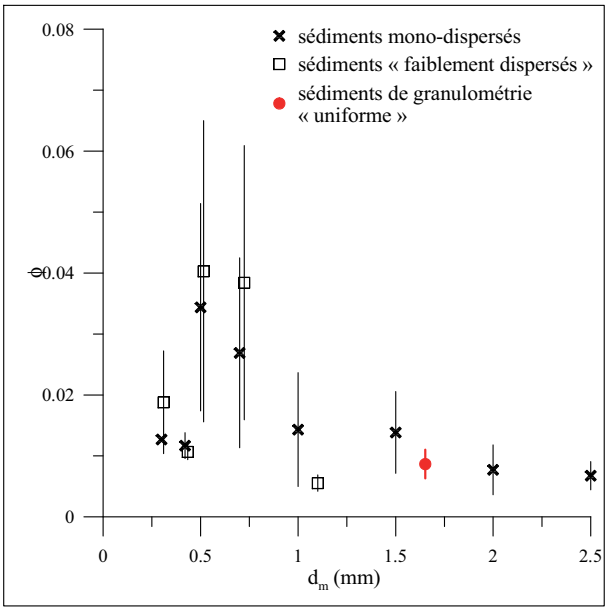


figure 3.20 – évolution du débit de sédiments sans dimension lorsque la vitesse de frottement est égale à la valeur critique pour les sédiments « faiblement dispersés », en fonction du diamètre moyen d_m ; la position du symbole est fixée par la valeur ϕ_c et la longueur du segment est égale à $\phi_{c2} - \phi_{c1}$

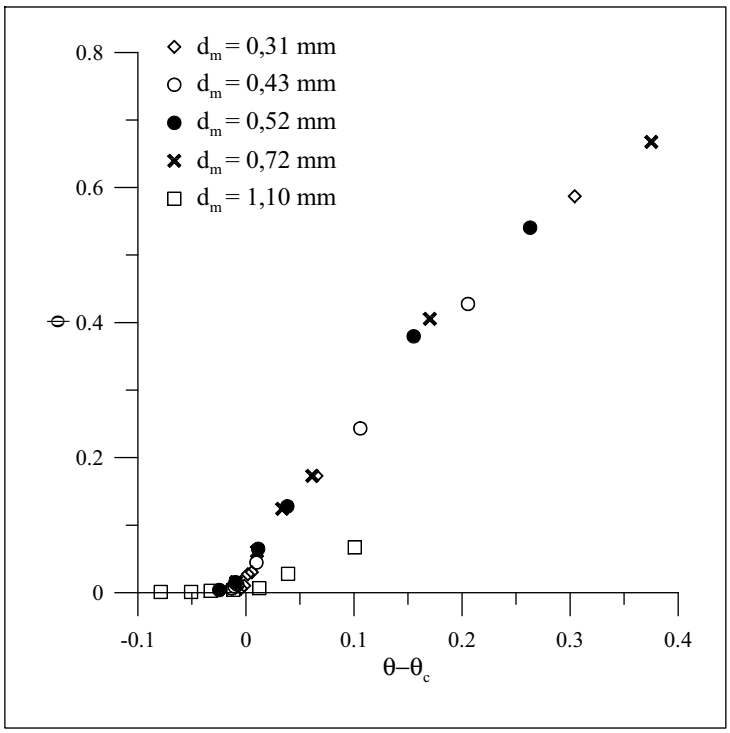


figure 3.21 – évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les sédiments « faiblement dispersés »

le diamètre moyen est petit ($d_m \lesssim 0{,}7$ mm), la loi de transport est identique à celle obtenue pour les sédiments mono-dispersés. Elle peut être approchée par la relation linéaire (3.11).

$$\phi = 2{,}01\,(\theta - \theta_c) \quad , \quad r^2 = 0{,}9495 \tag{3.11}$$

Une loi puissance peut être aussi utilisée, elle donne ici une meilleure approximation. Elle s'écrit :

$$\phi = 1{,}34\,(\theta - \theta_c)^{0{,}71} \quad , \quad r^2 = 0{,}9916 \tag{3.12}$$

Pour $d_m = 1{,}1$ mm, l'augmentation du débit ϕ avec $\theta - \theta_c$ est plus faible et nous avons :

$$\phi = 0{,}67\,(\theta - \theta_c) \quad , \quad r^2 = 0{,}9970 \tag{3.13}$$

3.2.4 sédiments « dispersés »

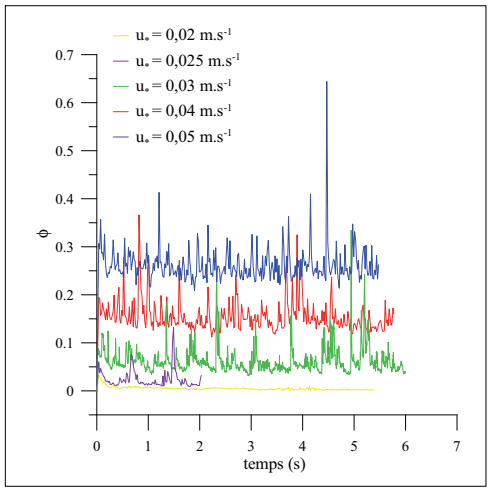
Le diamètre moyen des sédiments « dispersés » (LG11–13) varie de 1,15 à 1,57 mm et l'écart-type géométrique de la distribution du diamètre est compris entre 1,21 et 1,42. Le mouvement de ces sédiments est comparé à celui des sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 1 et 1,5 mm et à celui du sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm (sédiment LG10). La moyenne des diamètres des grains dans les sédiments LG10–13 est identique et égale à 1 mm.

Seuil d'érosion

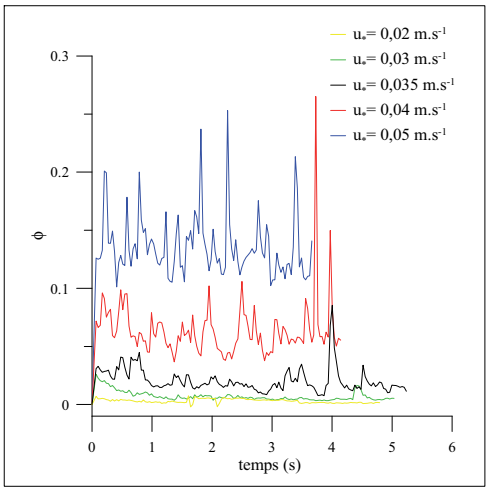
La figure 3.22 montre l'évolution du débit de sédiments en fonction du temps pour les trois sédiments « dispersés », les deux sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 1 et 1,5 mm et le sédiment « faiblement dispersé » LG10. Nous représentons aussi, pour ces sédiments, l'évolution du débit moyen sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ dans la figure 3.23. Le comportement des sédiments « dispersés » est similaire, bien que le diamètre moyen varie. Pour les trois sédiments, le seuil d'érosion se produit pour $\theta \simeq 0{,}05$ et l'évolution du débit ϕ en fonction du paramètre θ est identique. La vitesse de frottement critique est supérieure à celle estimée pour les sédiments mono-dispersés. La dispersion de la taille augmente la résistance de l'arrangement à l'érosion. Cependant les résultats trouvés avec le sédiment « faiblement dispersé » LG10 montrent que la résistance de l'arrangement n'est pas une fonction croissante de l'écart-type géométrique. Il existe une dispersion de la taille des grains « limite » pour laquelle la résistance de l'arrangement est maximale.
Nous indiquons, dans le tableau 3.7, la vitesse de frottement critique u_{*c} qui est déterminée à partir des évolutions du débit de sédiments. Nous précisons, également dans ce tableau 3.7, la vitesse u_{*c}^E déduite des relations de van Rijn (1984a). Pour les sédiments LG11 et LG12, le seuil d'érosion se produit entre les vitesses 0,03 et 0,035 m.s^{-1}, la vitesse u_{*c} est estimée à 0,0325 m.s^{-1}. Cependant, il est probable, compte tenu des débits de sédiments pour $u_* = 0{,}035$ m.s^{-1}, que le seuil d'érosion du lit LG11 se situe à une vitesse inférieure à celui du lit LG12. Le paramètre de Shields critique θ_c fourni par le modèle de transport est représenté en fonction du nombre de Reynolds critique Re_{*c} dans la figure 3.2.4. Il est faiblement supérieur aux valeurs expérimentales qui sont obtenues avec des sédiments de granulométrie équivalente ($\sigma_g < 1{,}3$).

Loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta - \theta_c)$

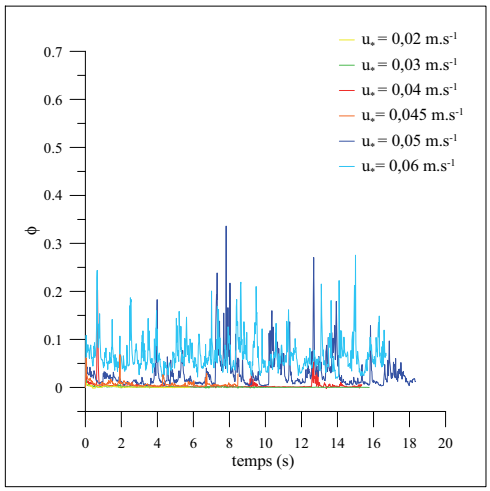
La figure 3.25 montre, pour les sédiments « dispersés », l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. Celle-ci est identique pour les trois sédiments. Mais, elle apparaît différente de celle établie pour les sédiments mono-dispersés. Pour ces sédiments, le débit ϕ croît plus vite avec $\theta - \theta_c$. La présence de plusieurs tailles de grains entrave leur mouvement. Nous observons aussi que les évolution du débit ϕ pour les sédiments « dispersés » et pour les sédiments de granulométrie « uniforme » ne sont pas les mêmes, la différence des débits augmentant avec $\theta - \theta_c$. Pourtant, la dispersion de la taille des



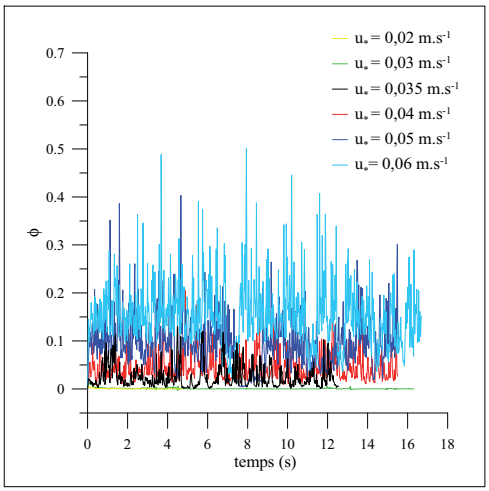
(a) sédiment mono-dispersé ; $d_p = 1$ mm



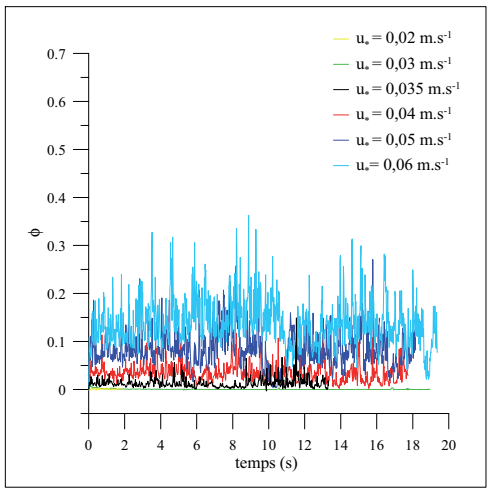
(b) sédiment mono-dispersé ; $d_p = 1{,}5$ mm



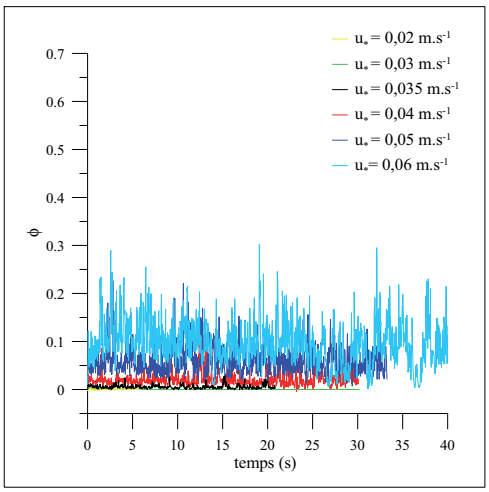
(c) sédiment « faiblement dispersés » ; $d_m = 1{,}10$ mm, $\sigma_g = 1{,}11$ (LG10)



(d) sédiment « dispersé » ; $d_m = 1{,}15$ mm, $\sigma_g = 1{,}21$ (LG11)



(e) sédiment « dispersé » ; $d_m = 1{,}34$ mm, $\sigma_g = 1{,}33$ (LG12)



(f) sédiment « dispersé » ; $d_m = 1{,}57$ mm, $\sigma_g = 1{,}42$ (LG13)

figure 3.22 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction du temps pour les sédiments « dispersés »

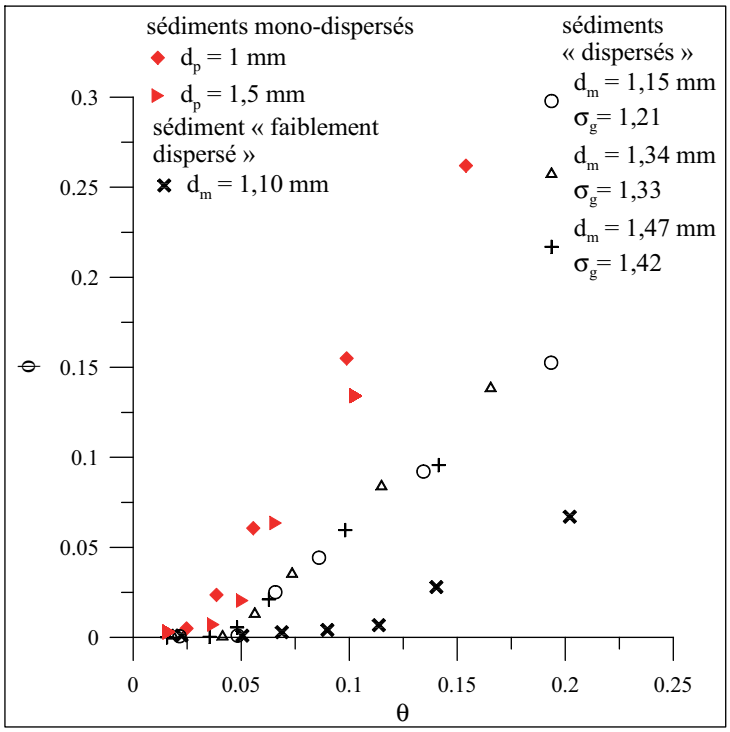


figure 3.23 – évolution du débit moyen de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields pour les sédiments « dispersés »

sédiment	d_m (mm)	σ_g	u_{*c1} (m.s^{-1})	u_{*c2} (m.s^{-1})	u_{*c} (m.s^{-1})	θ_c	u_{*c}^E (m.s^{-1})
mono-dispersé	1	0	0,02	0,025	0,0225	0,031	0,023
mono-dispersé	1,5	0	0,03	0,035	0,0325	0,043	0,030
LG10	1,10	1,11	0,045	0,05	0,0475	0,101	0,025
LG11	1,15	1,21	0,03	0,035	0,0325	0,057	0,025
LG12	1,34	1,33	0,03	0,035	0,0325	0,049	0,028
LG13	1,57	1,42	0,035	0,04	0,0375	0,055	0,031

tableau 3.7 – seuil d'érosion établi par le modèle de transport pour les sédiments « dispersés » ; u_{*c1} et u_{*c2} définissent l'intervalle de la vitesse de frottement pour lequel se produit le seuil d'érosion ; u_{*c} est la valeur moyenne de ces deux vitesses et θ_c est le paramètre de Shields critique associé ; u_{*c}^E est la vitesse de frottement critique calculée à partir des relations de van Rijn (1984a)

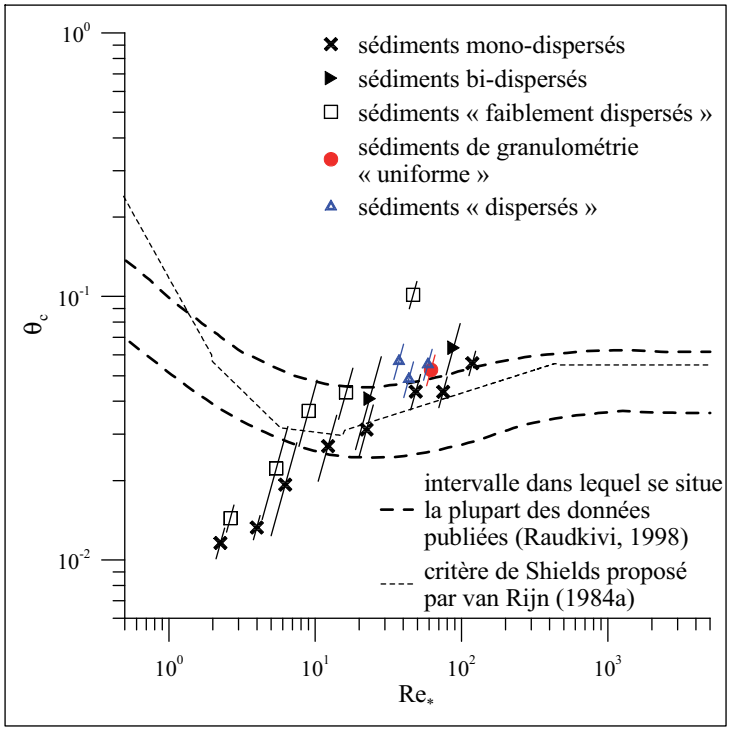


figure 3.24 – évolution du paramètre de Shields critique en fonction du nombre de Reynolds établie par le modèle de transport pour les sédiments « dispersés » ; la position du symbole est fixée par la vitesse de frottement critique u_{*c} et les extrémités du segment par les vitesses u_{*c1} et u_{*c2}

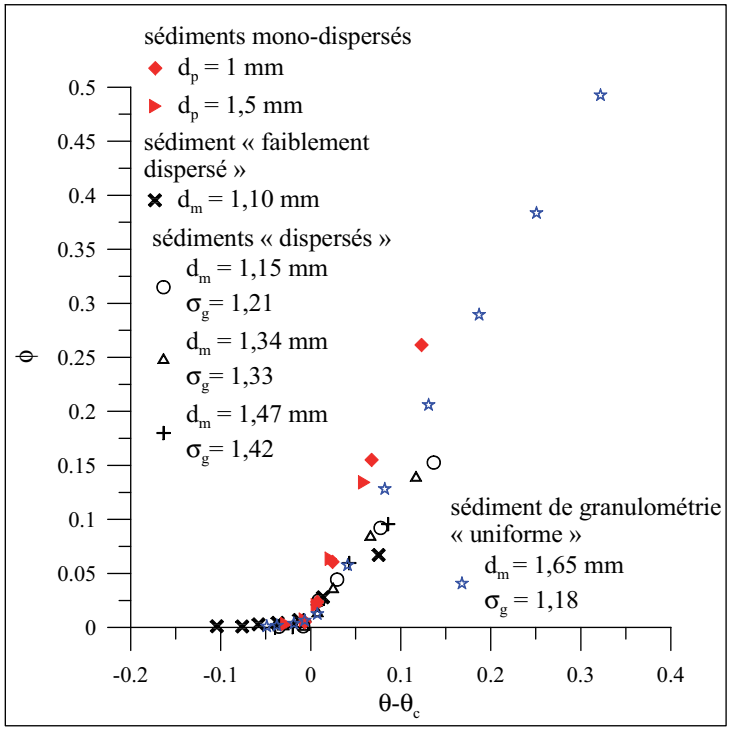


figure 3.25 – évolution du débit moyen de sédiments ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ pour les sédiments « dispersés »

grains dans ces sédiments est proche. L'écart-type σ_g de la distribution du diamètre des sédiments de granulométrie « uniforme » est égal à 1,18. La différence de comportement peut s'expliquer par la forme de la distribution. Elle suit approximativement une loi log-normale dans le cas des sédiments « dispersés ». Dans le cas des sédiments de granulométrie « uniforme », le nombre de grains est réparti uniformément dans les classes. Enfin, le débit des sédiments « dispersés » tend à être supérieur à celui du sédiment « faiblement dispersé » LG10.
La loi de transport s'écrit pour les sédiments « dispersés » :

$$\phi = 1{,}18\,(\theta - \theta_c) \ , \quad r^2 = 0{,}9679 \tag{3.14}$$

3.2.5 comparaison avec les expériences et les simulations existantes

Expériences de Wilcock et Southard (1988)

Wilcock et Southard (1988) étudient l'influence de la granulométrie des sédiments sur leur mise en mouvement. Pour cela, ils considèrent cinq lits de granulométrie variable. La distribution du diamètre des grains dans ces lits est représentée dans la figure 3.26. Elle est, pour les lits MUNI,

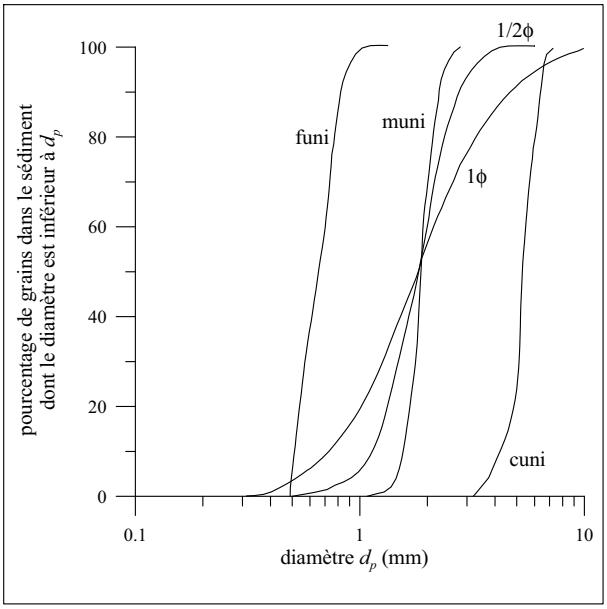


figure 3.26 – distribution du diamètre des grains dans les sédiments étudiés par Wilcock et Southard (1988)

1/2 ϕ et 1 ϕ, une loi log-normale. Nous indiquons, dans le tableau 3.8, le diamètre moyen d_m des grains ainsi que l'écart-type géométrique σ_g de la distribution de leur diamètre.
Wilcock et Southard (1988) donnent, pour chaque sédiment, une série de mesures de débits q_t en fonction de la vitesse de frottement u_* et de la vitesse de frottement u'_* liée à la rugosité due aux grains (Les lits sont recouverts le plus souvent de rides.). Les sédiments sont transportés par charriage. La vitesse u'_* est alors la grandeur pertinente pour estimer la loi de transport, elle est utilisée pour calculer le paramètre de Shields dans la figure 3.27. Nous montrons, dans la figure 3.27, l'évolution du débit sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ déterminée à partir des mesures de Wilcock et Southard (1988). La définition des deux grandeurs sans dimension repose sur le diamètre moyen d_m. L'allure générale de la relation entre le débit ϕ et le paramètre θ dans les expériences est identique à celle établie par le modèle de transport, c'est-à-dire la relation peut être décrite par deux lois affines et l'augmentation du débit ϕ avec θ est plus importante lorsque les vitesses de frottement sont élevées. Nous observons aussi que l'évolution du débit ϕ en fonction du paramètre de Shields θ est similaire pour les trois sédiments

sédiment	d_m (mm)	σ_g
MUNI	1,87	1,15
$1/2\ \phi$	1,82	1,41
$1\ \phi$	1,85	1,99
CUNI	5,31	1,13
FUNI	0,662	1,20

tableau 3.8 – diamètre moyen d_m des grains et écart-type géométrique σ_g de la distribution de leur diamètre pour les sédiments étudiés dans les expériences de Wilcock et Southard (1988)

MUNI, $1/2\ \phi$ et $1\ \phi$, dont la distribution du diamètre des grains est log-normale. Ces sédiments, qui ont le même diamètre moyen, diffèrent seulement par la dispersion de la taille des particules les constituant (cf. la valeur σ_g). La dispersion de la taille des grains semble pour ce type de

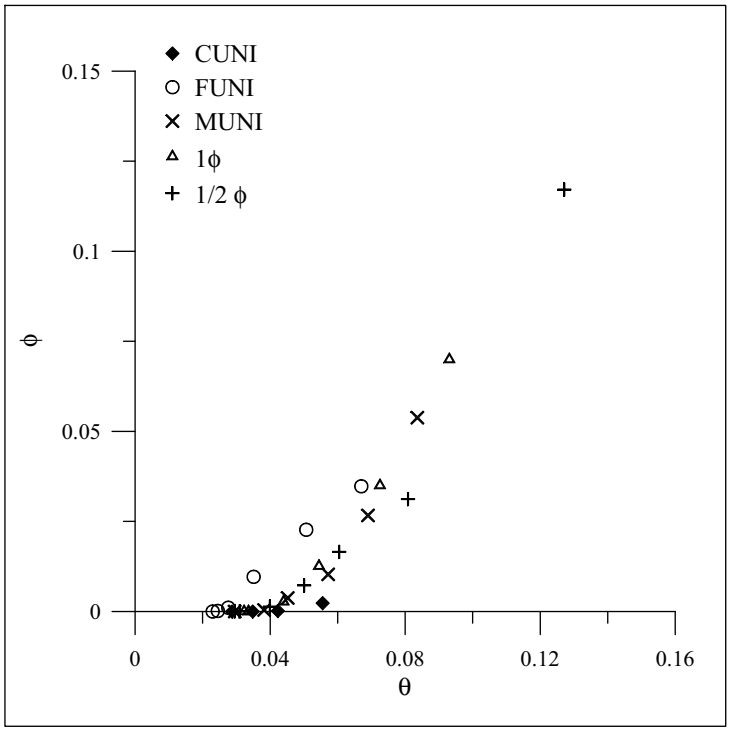


figure 3.27 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ dans les expériences de Wilcock et Southard (1988)

sédiments ne pas influer sur leur débit. Ce résultat peut se rapprocher de celui obtenu dans les simulations avec les sédiments « dispersés » LG11–LG13 (diamètres moyens et distributions du diamètre approximativement constants et écarts-types géométriques variables). Les expériences de Wilcock et Southard (1988) ne permettent pas d'expliquer le résultat trouvé avec le sédiment LG10.

Wilcock et Southard (1988) utilisent leurs résultats expérimentaux pour déterminer les paramètres de Shields de référence θ_{ri} des classes des grains, selon le critère de Parker *et al.* (1982)

(cf. le paragraphe 2.1 de la partie 1). Ils trouvent de la même façon que les paramètres θ_{ri} sont identiques pour les sédiments 1/2 ϕ et 1 ϕ. Comme précédemment, nous déterminons la vitesse de frottement critique u_{*c} des cinq lits étudiés par Wilcock et Southard (1988), à partir de la position du changement de pente dans la courbe d'évolution du débit ϕ dans la figure 3.27. Les valeurs obtenues sont indiquées dans le tableau 3.9. Elles sont supérieures aux vitesses de

sédiment	u_{*c} (m.s^{-1})	u_{*r} (m.s^{-1})
MUNI	0,035	n.c.
1/2 ϕ	0,036	0,029
1 ϕ	0,034	0,030
CUNI	0,057	0,056
FUNI	0,018	0,015

tableau 3.9 – vitesse de frottement critique u_{*c} déterminée pour les cinq sédiments étudiés par Wilcock et Southard (1988) à partir de la position du changement de pente dans la courbe d'évolution du débit ϕ en fonction du paramètre de Shields θ ; la vitesse de frottement de référence u_{*r} est estimée par Wilcock et Southard (1988) pour la classe de grains relative au diamètre moyen d_m (Aucune valeur n'est indiquée pour le sédiment MUNI.)

frottement de référence u_{*r} estimées par Wilcock et Southard (1988) pour la classe de grains de diamètre moyen. Nous remarquons pour les sédiments MUNI, 1 ϕ et FUNI que le seuil d'érosion défini par la vitesse u_{*c} coïncide approximativement à l'apparition de rides (*ripples*) à la surface du lit. Pour le sédiment 1/2 ϕ, les rides apparaissent à des vitesses inférieures à u_{*c}. Pour le sédiment CUNI qui est un mélange de graviers, aucune ondulation de la surface du lit n'est observée.
Nous comparons, dans la figure 3.28, l'évolution du débit sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ obtenue dans les expériences de Wilcock et Southard (1988) et dans nos simulations numériques. Le paramètre de Shields critique est déterminé pour chaque sédiment à partir de l'évolution du débit moyen. La comparaison est satisfaisante : il y un bon accord entre les résultats expérimentaux et numériques. Les débits mesurés vérifient la même relation que les sédiments composés de grains de plusieurs tailles (sédiments de granulométrie « uniforme », sédiments bi-dispersés, sédiments « dispersés »). Ils sont inférieurs aux débits des sédiments mono-dispersés.

Expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003)

Les expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003) concernent des sédiments de granulométrie relativement dispersée. Ce sont des mélanges de sable et de gravier : le diamètre moyen des grains est compris entre 4,1 et 10,5 mm et l'écart-type géométrique de la distribution du diamètre entre 2,91 et 5,31 (cf. le tableau 3.10).
Nous déterminons, à partir de leurs mesures, pour chaque sédiment, l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ. Le résultat est montré dans la figure 3.29. L'allure générale de la relation entre le débit ϕ et le paramètre θ est, là encore, conforme aux résultats numériques. La relation peut être décrite par deux lois affines. Elle dépend, ici, de la teneur en sable du mélange. Deux lois sont identifiées, l'une pour les sédiments J06, J14 et J21 et l'autre pour les sédiments J21 et BOMC. Les débits mesurés pour les sédiments J06, J14 et J21 sont plus faibles et le seuil d'érosion se produit à des vitesses de frottement

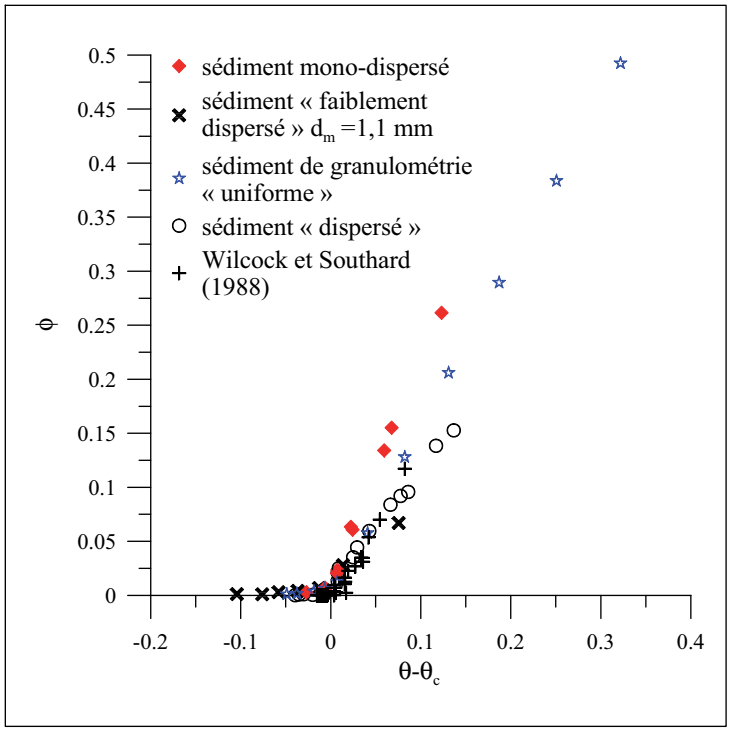


figure 3.28 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ déterminée à partir du modèle de transport et des expériences de Wilcock et Southard (1988)

sédiment	% de sable en poids	d_m (mm)	σ_g
J06	6,2	10,5	2,91
J14	14,9	8,4	3,41
J21	20,6	7,3	3,68
J27	27	6,1	3,89
BOMC	34,3	4,1	5,31

tableau 3.10 – diamètre moyen des grains et écart-type géométrique de la distribution de leur diamètre pour les sédiments étudiés dans les expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003)

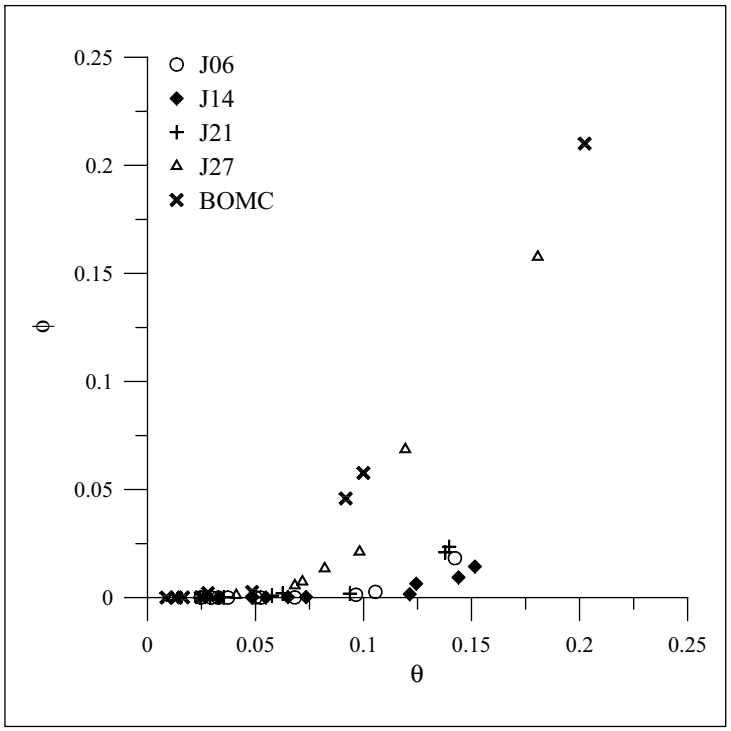


figure 3.29 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction du paramètre de Shields θ déterminée dans les expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003)

plus élevées que pour les sédiments J27 et BOMC. Ces différents comportements sont dus, selon Wilcock et Crowe (2003), à la texture du sédiment. Dans le sédiment, les gros grains créent une macrostructure (*framework*) plus ou moins poreuse que viennent combler les petits particules (qui constitue la matrice (*matrix*)). Lorsque le sédiment contient peu de petites particules, comme les mélanges J06, J14 et J21, les gros grains sont jointifs et le mélange est dit *framework-supported*. Les petites particules sont coincées dans les interstices et jouent le rôle de ciment. Le sédiment est alors très résistant à l'érosion. Au contraire, lorsque le sédiment contient beaucoup de petites particules (au moins 30% en poids (Church *et al.*, 1987)), comme les mélanges J27 et BOMC, les gros grains ne sont plus jointifs et le mélange est dit *matrix-supported*. Les petites particules se déplacent facilement entre les grosses particules. Ces évolutions du débit ϕ différentes selon la teneur en sable font penser à celles déterminées dans les simulations pour les sédiments LG10–13. Les résultats obtenus pour le sédiment LG10 semblent liés à sa texture qui serait plutôt du type *framework-supported*.

Des similitudes entre les expériences et les simulations sont aussi trouvées lorsque nous déterminons la vitesse de frottement critique u_{*c} des sédiments J06–27 et BOMC. La vitesse u_{*c} est estimée à partir du changement de pente dans la courbe d'évolution du débit q_t en fonction de la vitesse de frottement. Sa valeur est indiquée dans le tableau 3.11. Elle y est comparée à la valeur u_{*c}^E déduite des relations empiriques de van Rijn (1984a). Nous représentons également les résultats dans le diagramme du critère de Shields (cf. la figure 3.30). Pour les sédiments J27 et BOMC, il y a un accord raisonnable entre la vitesse u_{*c} déterminée à partir de l'évolution du débit moyen et les valeurs obtenues dans les expériences avec des sédiments de granulométrie quasi-uniforme ($\sigma_g \lesssim 1{,}3$). Par contre, la vitesse u_{*c} est, pour les sédiments J06–21 (comme dans les simulations, pour le sédiment LG10), bien supérieure à ces valeurs expérimentales.

La figure 3.31 compare l'évolution du débit sans dimension ϕ en fonction des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ déterminée à partir des simulations numériques et des expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003). (Le paramètre de Shields critique utilisé est celui déterminé à partir

sédiment	u_{*c1} (m.s^{-1})	u_{*c2} (m.s^{-1})	u_{*c} (m.s^{-1})	θ_c	u_{*c}^E (m.s^{-1})
J06	0,132	0,154	0,143	0,123	0,097
J14	0,127	0,128	0,128	0,123	0,086
J21	0,104	0,1126	0,115	0,115	0,080
J27	0,089	0,097	0,093	0,090	0,074
BOMC	0,056	0,077	0,066	0,068	0,058

tableau 3.11 – seuil d'érosion établi à partir de l'évolution du débit de sédiment ϕ en fonction du paramètre θ pour les sédiments étudiés par Wilcock et coauteurs (2001, 2003) ; u_{*c1} et u_{*c2} définissent l'intervalle de la vitesse de frottement pour lequel se produit le seuil d'érosion ; u_{*c} est la valeur moyenne de ces deux vitesses et θ_c est le paramètre de Shields critique associé ; u_{*c}^E est la vitesse de frottement critique calculée à partir des relations de van Rijn (1984a)

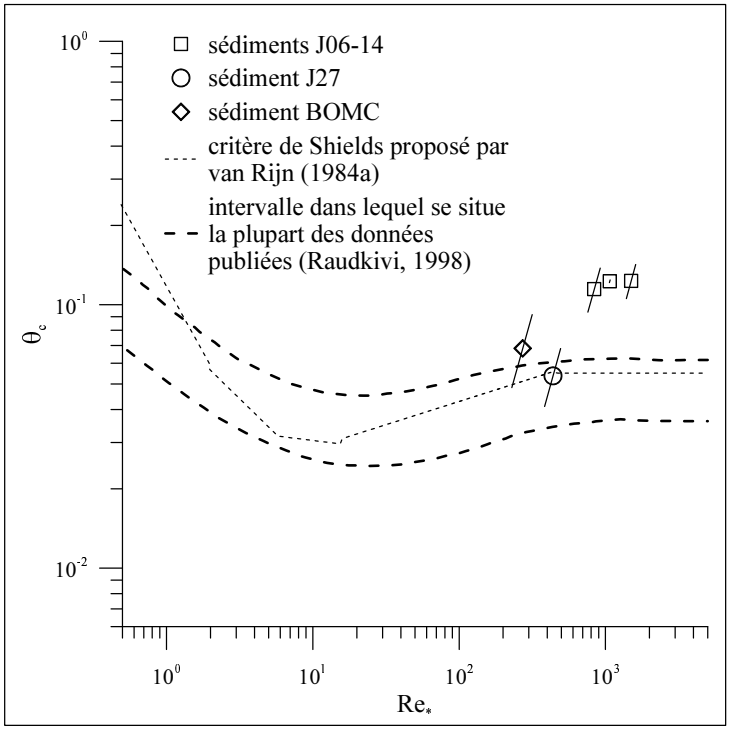


figure 3.30 – évolution du paramètre de Shields critique en fonction du nombre de Reynolds déterminée à partir des mesures de Wilcock et Crowe (2001, 2003) ; la position du symbole est fixée par la vitesse de frottement critique u_{*c} et les extrémités du segment par les vitesses u_{*c1} et u_{*c2}

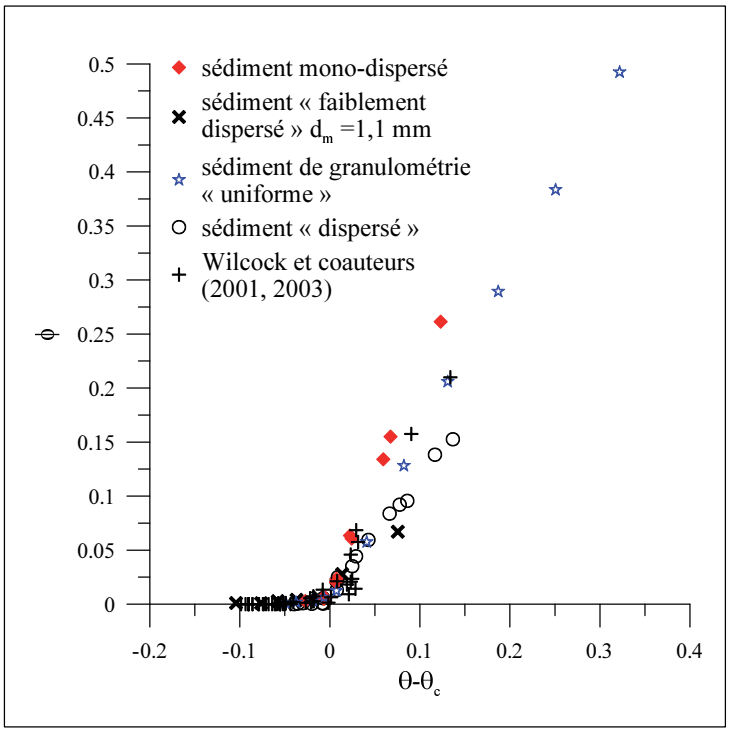


figure 3.31 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ déterminée à partir du modèle de transport et des expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003)

de l'évolution du débit moyen.) Il y a une convergence entre les résultats expérimentaux et numériques. La loi de transport $\phi = \mathcal{F}(\theta - \theta_c)$ établie à partir des mesures de Wilcock et coauteurs (2001, 2003) est semblable à celles obtenues des simulations.

Simulations de Heald *et al.* (2004)

Les simulations de Heald *et al.* (2004) sont réalisées en utilisant un modèle DEM basé sur un modèle de collision de type *hard sphere*. L'écoulement y est représenté par une couche de fluide qui se déplace au-dessus du lit, dans la direction x avec une vitesse constante (cf. le paragraphe 4.1 dans la partie 1). Le sédiment considéré est un mélange de grains de diamètres compris entre 2 et 8 mm ($d_m = 4$ mm, $\sigma_g = 1{,}33$), dont la distribution est une loi log-normale. Heald *et al.* (2004) estiment, pour ce sédiment, le paramètre de Shields critique θ_c à 0,07.
Nous représentons, dans la figure 3.32, l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ qui est déterminée numériquement par Heald *et al.* (2004). Nous indiquons aussi, dans la figure 3.32, les résultats de nos simulations. Il y a un bon accord entre les résultats des deux modèles DEM, en particulier pour $\theta - \theta_c < 0{,}2$ et pour les sédiments de granulométrie « uniforme » (lits 1–4 et 11–14) et les sédiments « dispersés » (LG11–13). Lorsque la différence $\theta - \theta_c$ augmente et devient supérieure à 0,25, le modèle de Heald *et al.* (2004) tend à surestimer le débit par rapport à notre modèle numérique. Ce résultat peut s'expliquer par :

1) le modèle d'écoulement : les vitesses de fluide subies par les grains à la surface du lit pour une même vitesse de frottement peuvent être différentes dans les deux modèles ;
2) le modèle de collision : dans le modèle de Heald *et al.* (2004), le coefficient de restitution normal e_n est égal à 0,5, la composante tangentielle de la vitesse du grain n'est pas modifiée par la collision et la collision entre un grain mobile et un grain fixe du lit est assimilée à

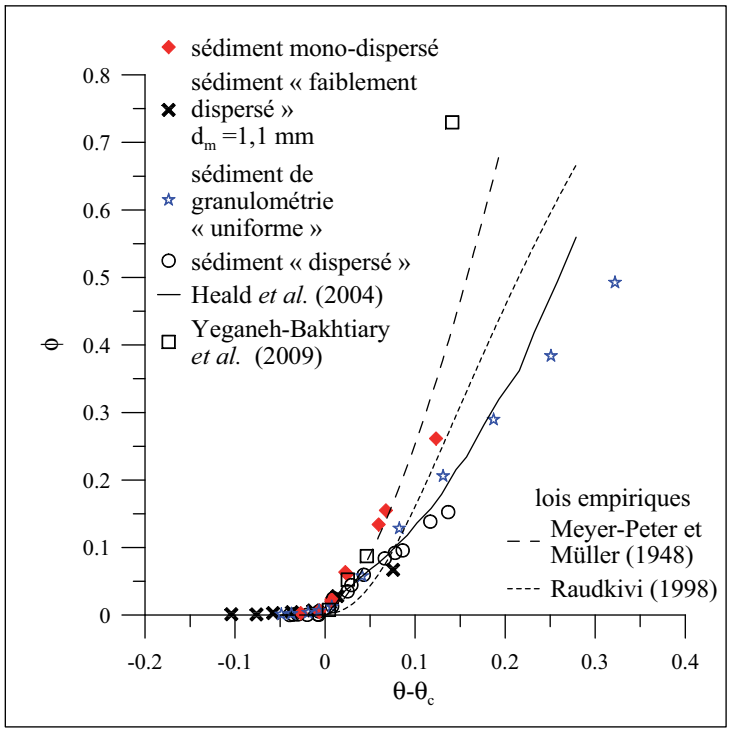


figure 3.32 – évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ déterminée par les modèles de Heald *et al.* (2004) et de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) et par notre modèle numérique

une collision entre une particule et une paroi ;

3) le nombre de grains en mouvement dans le lit : dans le modèle de Heald *et al.* (2004), les grains sont mis en mouvement uniquement par l'effet de l'écoulement (L'effet des collisions n'est pas pris en compte.) et seuls les grains situés dans la partie supérieure du lit sont en mouvement ;
4) le calcul du débit de sédiments q_t : la méthode utilisée par Heald *et al.* (2004) n'est pas indiquée.

Il est vraisemblable que dans les simulations de Heald *et al* (2004), compte tenu des hypothèses du modèle, le nombre de grains mobiles soit inférieur à celui dans nos simulations. Comme les débits de sédiments sont plus ou moins identiques pour les deux modèles, nous en déduisons que la vitesse moyenne du grain est plus élevée dans les simulations de Heald *et al* (2004).

Les résultats des deux modèles DEM sont comparés, dans la figure 3.32, aux lois empiriques de Meyer-Peter et Müller (1948) et de Raudkivi (1998) (cf. le paragraphe 2.2.2 de cette partie). Ces deux lois sont obtenues dans des conditions proches de celles des simulations. La relation de Meyer-Peter et Müller (1948) est établie à partir de mesures réalisées avec des mélanges de grains de diamètre supérieur à 3 mm, comme dans les simulations de Heald *et al.* (2004). La relation de Raudkivi (1998) est trouvée pour $\phi < 0{,}4$. Les débits de sédiments calculés dans les simulations sont du même ordre de grandeur que les valeurs estimées à partir des lois empiriques.

Simulations de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009)

Le modèle DEM de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) repose sur la modélisation des collisions suivant l'approche *soft sphere* et sur la modélisation des fluctuations turbulentes de la vitesse du fluide. Dans le modèle, la vitesse du fluide est la somme d'une vitesse « moyenne » qui est

dirigée selon x et qui est décrite par la loi logarithmique et de fluctuations turbulentes dans les trois directions. L'expression de ces fluctuations est déduite des travaux de Nezu (1977) sur les intensités turbulentes. Les simulations sont réalisées avec un sédiment mono-dispersé constitué par un arrangement de sphères de diamètre égal à 5 mm.
Nous représentons, dans les figures 3.32 et 3.33, l'évolution du débit de sédiments sans dimension ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ avec $\theta_c = 0{,}055$ (valeur déduite du critère de Shields (1936)), qui est déterminée par Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009). Dans

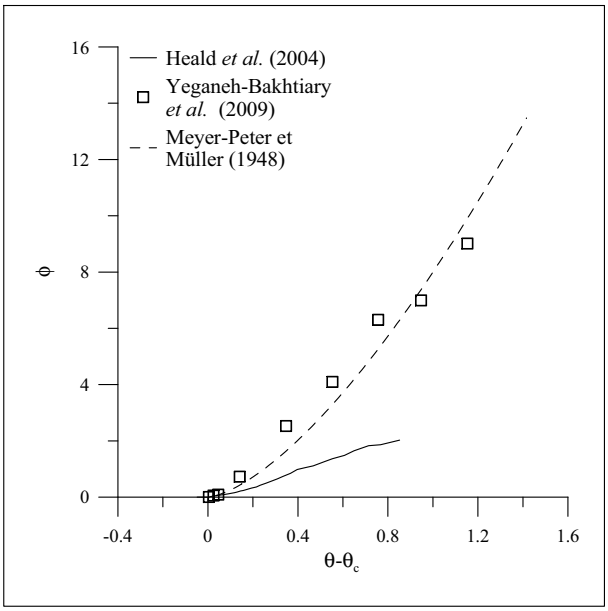


figure 3.33 – comparaison des résultats des modèles de transport de Heald *et al.* (2004) et Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009)

les simulations, le paramètre de Shields θ varie de 0,059 à 3,46 et le débit de sédiments ϕ de 0,077 à 22,0. Les débits ϕ sont bien supérieurs aux valeurs estimées dans les expériences de Wilcock et coauteurs (1988, 2001, 2003), dans les simulations de Heald *et al.* (2004) et dans nos simulations. La figure 3.33 montre cependant qu'il y a un très bon accord entre les résultats de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) et la loi de Meyer-Peter et Müller (1948).
La surestimation du débit de sédiments par le modèle de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) peut être liée :

1) à la géométrie des lits de sédiments : dans les simulations de Yeganeh-Bakhtiary*et al.* (2009), le nombre de grains N dans les arrangements est faible, égal à 1000, les longueurs l_b et L_b sont petites (environ $10\,d_p$) ; l'arrangement est périodique dans la direction x et limité dans la direction y par des parois ;
2) au modèle d'écoulement ;
3) au modèle de collision : dans le modèle de Yeganeh-Bakhtiary*et al.* (2009), les raideurs k_n et k_τ sont égales à 214 et 83 N.m^{-1}, elles sont plus faibles que les valeurs communément utilisées dans les simulations DEM et peuvent être à l'origine de vitesses de grains élevées (cf. le paragraphe 2.2.3 de la partie 2) ;
4) au calcul du débit de sédiments q_t : le débit q_t est défini par Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009) par l'équation (3.15) :

$$q_t = \int c_b(z) u_p(z)\, dz \tag{3.15}$$

Avec c_b la concentration de particules transportées par charriage en z et u_p la vitesse (moyenne) de ces particules dans la direction x.

3.3 mouvement des grains

Le modèle de transport est utilisé pour quantifier le mouvement des grains à l'intérieur du lit. Nous déterminons par exemple l'évolution de leur vitesse et de leur position au cours du temps.

3.3.1 réorganisation initiale des grains

Le modèle de déposition génère des arrangements de grains « instables », en raison des hypothèses utilisées (le fluide est au repos, le grain une fois déposé est fixe). Pour cette raison, quelle que soit la vitesse de frottement, l'arrangement se réorganise au début des simulations, dans une configuration plus stable et plus compact. Cette réorganisation s'accompagne d'un mouvement de grains important (cf. l'évolution du débit de sédiments instantané) et par la variation de l'énergie potentielle totale des grains. La figure 3.34 montre l'évolution de l'énergie potentielle totale E_p en fonction du temps pour quatre sédiments qui sont les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 et 0,7 mm, le sédiment « faiblement dispersé » LG10 et le sédiment « dispersé » LG13. L'énergie potentielle totale E_p des grains de l'arrangement est donnée par l'équation (3.16).

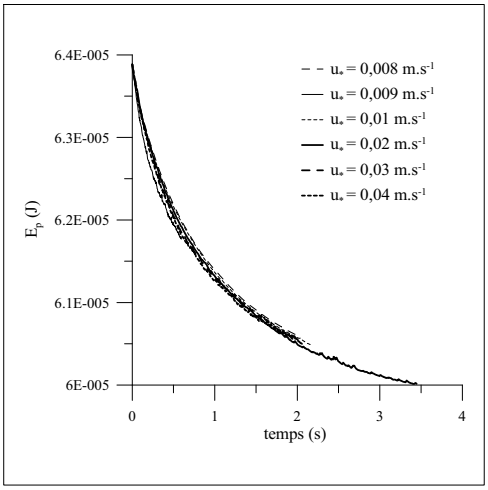
$$E_p = g \sum_{i=1}^{N} m_{pi} z_{pi} \tag{3.16}$$

Avec : m_{pi} la masse du grain i ; z_{pi} sa position verticale ; N le nombre de grains dans le lit ; g l'accélération de la pesanteur.
L'énergie potentielle E_p diminue pendant la phase de réorganisation de l'arrangement. Par la suite, elle oscille autour d'une constante. Pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,7 mm, l'énergie potentielle augmente au début des simulations, puis diminue. Cette augmentation correspond à un mouvement ascendant des grains. Elle est également observée pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,3 mm et pour les sédiments « faiblement dispersés ». La figure 3.34 montre que la durée de la phase de réorganisation du lit est propre à chaque sédiment et approximativement indépendante de la vitesse de frottement.

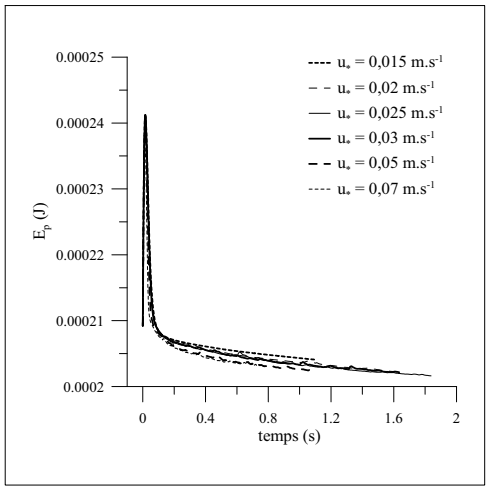
Valeur finale de l'énergie potentielle totale des grains

La valeur finale E_p^f de l'énergie potentielle dépend du type de sédiment. Pour les sédiments mono-dispersés, les sédiments « faiblement dispersés » de diamètre moyen inférieur à 0,7 mm et les sédiments de granulométrie « uniforme » (lits 1–4), elle dépend peu de la vitesse de frottement. Au contraire, pour le sédiment « faiblement dispersé » LG10 et les sédiments « dispersés » (LG11–13), la valeur E_p^f est liée à la vitesse de frottement. Lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique, les fluctuations de l'énergie potentielle ne sont plus négligeables. L'amplitude des fluctuations augmente avec la vitesse u_* et l'écart-type géométrique σ_g.
Nous souhaitons comparer la valeur finale E_p^f à l'énergie potentielle d'arrangements réguliers de sphères afin d'avoir une estimation de la compacité du lit après la phase de réorganisation. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas des sédiments mono-dispersés et nous considérons deux arrangements de sphères de même diamètre d_p qui sont l'arrangement A-A et l'arrangement hexagonal compact. L'arrangement A-A est constitué par la superposition de couches identiques de sphères. Sa compacité, qui est le rapport du volume occupé par les sphères sur le volume total de l'arrangement, est égale à 0,524. La distance entre deux sphères situées dans deux couches successives est égale à d_p. La compacité de l'arrangement hexagonal compact est maximale et vaut 0,74. La distance entre deux grains dans deux couches successives est égale, dans cet arrangement, à $\sqrt{3/4}\, d_p$. L'énergie potentielle des grains des deux arrangements réguliers notée E_p^* est estimée à partir de l'équation (3.17) :

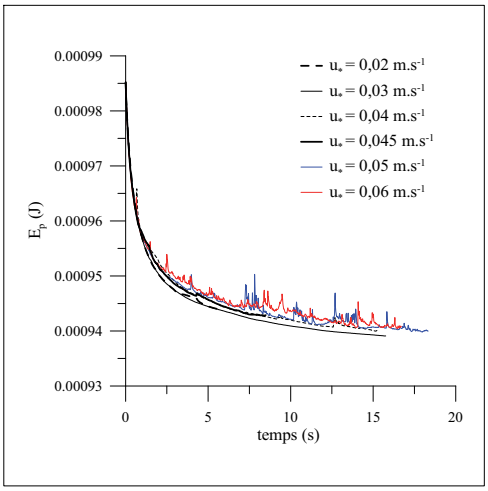
$$E_p^* = m_p g N_{ch} d_{ch} \frac{(n_{ch}-1)(n_{ch}-2)}{2} \tag{3.17}$$



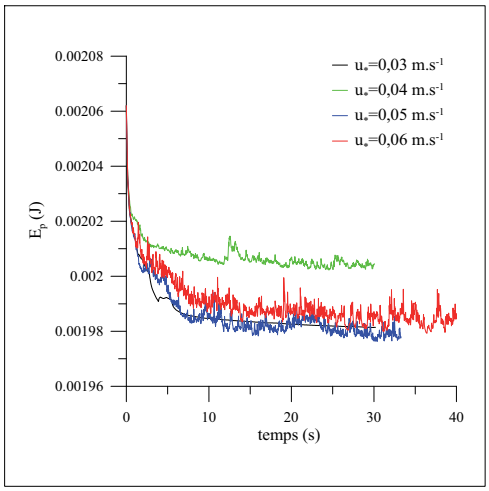
(a) sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm



(b) sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,7 mm



(c) sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm (LG10)



(d) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,57 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,42 (LG13)

figure 3.34 – évolution de l'énergie potentielle totale des grains de l'arrangement en fonction du temps

Avec : m_p la masse du grain de diamètre d_p ; d_{ch} la distance entre deux grains situés dans deux couches successives ; N_{ch} le nombre de grains dans une couche ; n_{ch} le nombre de couches dans l'arrangement. Nous avons :

$$N_{ch} = \frac{l_b L_b}{d_p^2} \ , \quad n_{ch} = \frac{N}{N_{ch}} \tag{3.18}$$

Avec : l_b et L_b la dimension du lit dans les directions x et y ; N le nombre de grains dans l'arrangement.
La figure 3.35 représente, pour les sédiments mono-dispersés, l'évolution du rapport E_p^f/E_p^* en fonction du diamètre d_p. L'énergie potentielle à la fin des simulations est faiblement inférieure

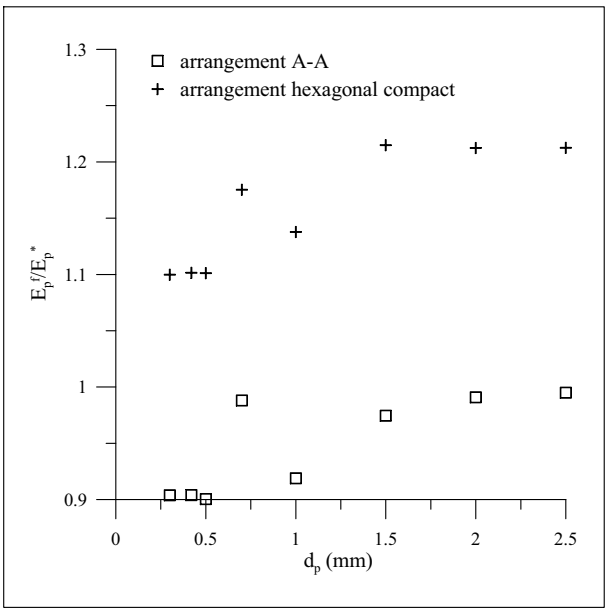
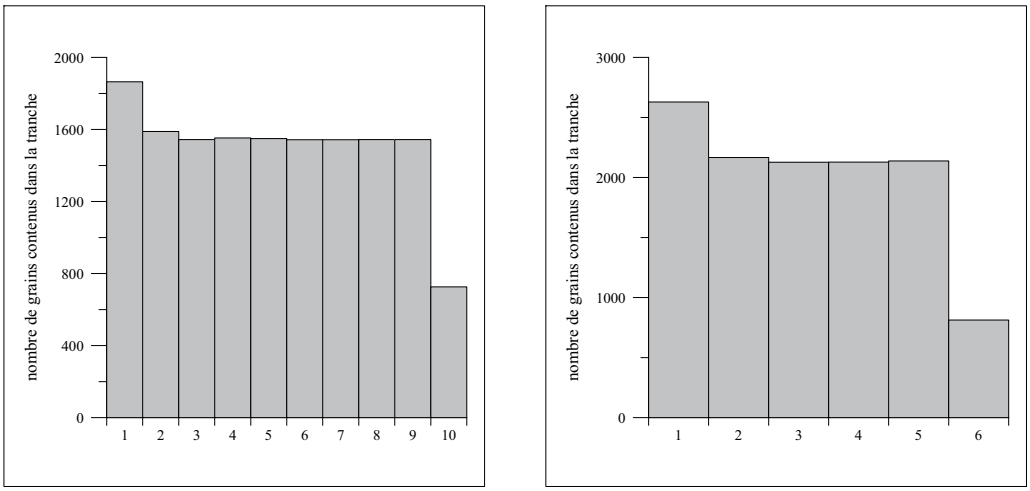


figure 3.35 – évolution du rapport E_p^f/E_p^* en fonction du diamètre des grains d_p ; E_p^f est l'énergie potentielle totale des grains du sédiment mono-dispersé à la fin de la simulation ; E_p^* est l'énergie potentielle des grains des arrangements réguliers

à celle de l'arrangement A-A. Le rapport E_p^f/E_p^* varie, dans ce cas, de 0,90 à 0,995. Il est compris, pour l'arrangement hexagonal compact, entre 1,10 et 1,21. Nous en déduisons que les arrangements des sédiments mono-dispersés ont, à la fin de la phase de réorganisation, une compacité inférieure à celle de l'arrangement hexagonal compact. Leur compacité n'est donc pas maximale.

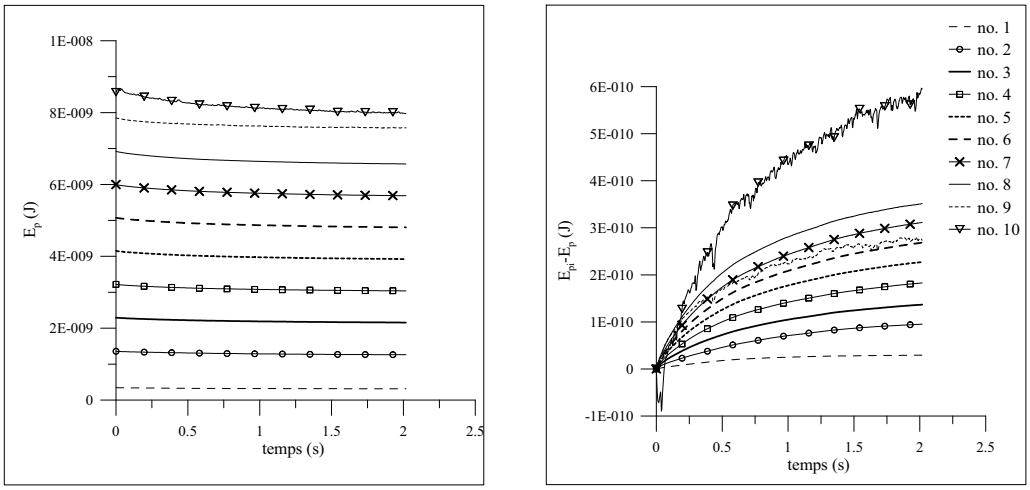
Position moyenne des grains au cours du temps

La position moyenne des grains au cours du temps est déterminée à partir de l'évolution de l'énergie potentielle de ces grains en fonction de leur position verticale à l'intérieur du lit à $t = 0$. L'étude repose sur les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 et 0,7 mm et sur le sédiment « dispersé » LG13. Le lit est divisé en tranches dont l'épaisseur est de l'ordre de $2\,d_p$, le nombre de tranches dépend de l'épaisseur de l'arrangement. Les grains sont répartis de façon uniforme dans les tranches à l'exception des tranches inférieure et supérieure. La figure 3.36 montre la répartition des grains dans les tranches pour les sédiments mono-dispersés.
La figure 3.37 montre l'évolution de l'énergie potentielle des dix tranches pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm lorsque la vitesse de frottement est égal à 0,04 m.s^{-1}. L'énergie potentielle d'une tranche à l'instant t est la somme de l'énergie potentielle des grains



(a) $d_p = 0{,}42$ mm (b) $d_p = 0{,}7$ mm

figure 3.36 – répartition des grains dans le lit à l'instant $t = 0$ pour les sédiments mono-dispersés de diamètre égal à 0,42 mm et 0,7 mm



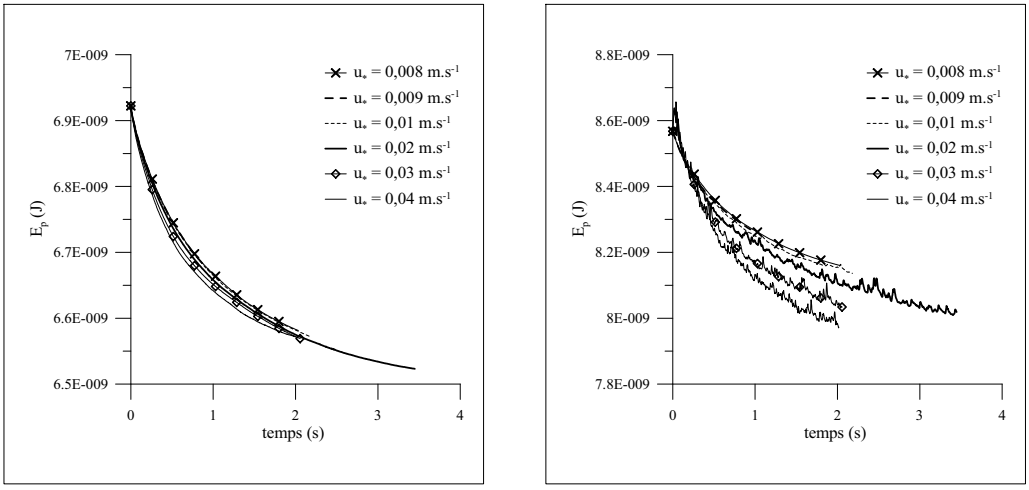
(a) E_p (b) $E_{pi} - E_p$

figure 3.37 – évolution de l'énergie potentielle des tranches en fonction du temps pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm ; la vitesse de frottement est égale à 0,04 m.s^{-1} ; E_{pi} est l'énergie potentielle des grains à l'instant $t = 0$; la tranche no. 1 désigne la tranche située à la base de l'arrangement et la tranche no. 10 celle située à la surface du lit.

contenus initialement dans la tranche. Ainsi, nous avons :

$$E_p = \frac{1}{N_k} g \sum_{i=1}^{N_k} m_{pi} z_{pi} \tag{3.19}$$

Avec N_k le nombre de grains appartenant à $t = 0$ à la tranche k.
L'évolution générale de l'énergie potentielle des tranches est semblable à celle de l'énergie potentielle totale du lit. Elle diminue de façon monotone. Trois comportements sont identifiés en fonction de la position de la tranche dans le lit. Dans la tranche no. 1 qui englobe la partie inférieure de l'arrangement, l'énergie potentielle varie peu. Elle est approximativement égale, à la fin de la simulation, à sa valeur initiale. La tranche no. 1 contient notamment les 625 grains fixes formant la base de l'arrangement. Dans les tranches intermédiaires (no. 2–9), la différence entre la valeur de l'énergie potentielle à l'instant t et sa valeur initiale, notée $E_{pi} - E_p$, augmente avec le temps. Les valeurs $E_{pi} - E_p$ sont du même ordre de grandeur pour les huit tranches et ne sont pas corrélées avec la position de la tranche dans le lit. Après la phase de réorganisation, la différence $E_{pi} - E_p$ se stabilise et la position verticale moyenne des grains reste relativement constante. Dans la tranche no. 10 située à la surface, la diminution de l'énergie potentielle est plus marquée. La différence $E_{pi} - E_p$ fluctue autour d'une valeur supérieure à celle obtenue dans les tranches intermédiaires et continue à augmenter après la phase de réorganisation. La variation de la position verticale moyenne des grains y est donc plus importante que dans les tranches intermédiaires dans lesquelles la variation est constante. Ainsi, ce sont les grains contenus (initialement) dans la tranche supérieure qui contribuent principalement au transport de sédiments. La figure 3.38 montre l'évolution de l'énergie potentielle des tranches no. 8 et no. 10 pour six vitesses de frottement. L'énergie potentielle de la tranche no. 10 fluctue lorsque la vitesse de

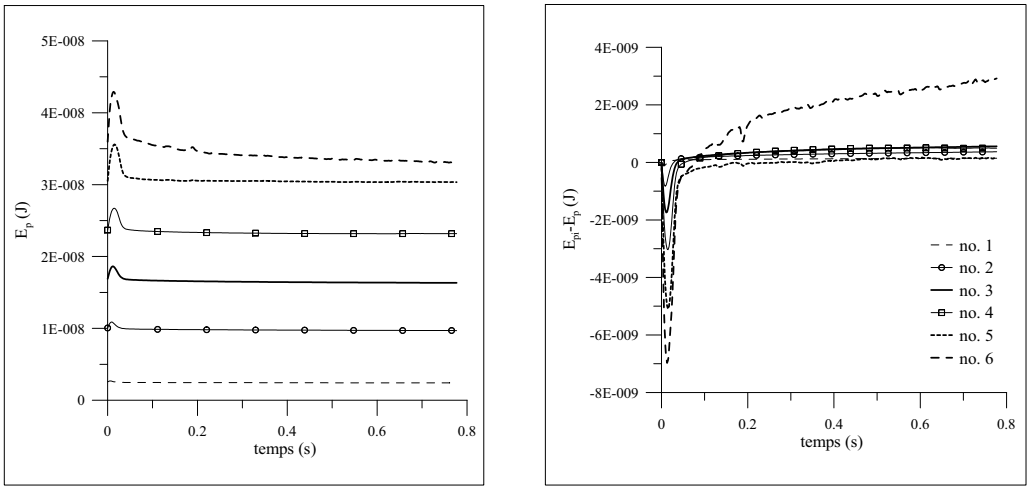


(a) dans la tranche no. 8 (b) dans la tranche no. 10

figure 3.38 – évolution de l'énergie potentielle des tranches en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm

frottement est supérieure à la valeur critique (*i.e.* $u_* \gtrsim 0{,}01$ m.s^{-1}). Les fluctuations sont liées au mouvement des grains. Pour $u_* \gtrsim u_{*c}$, la plupart des grains à la surface du lit sont mobiles et leur position varie aléatoirement. L'amplitude des fluctuations dépend de la vitesse de frottement. Elle renseigne sur l'activité de la tranche, sur la mobilité des particules et sur l'influence de l'écoulement. Pour cette raison, les fluctuations de l'énergie potentielle de la tranche no. 9 sont plus faibles et sont observées pour des vitesses supérieures. Dans la tranche no. 8, les grains ne sont pas directement exposés à l'écoulement et sont peu mobiles. L'énergie potentielle n'oscille pas et l'influence de la vitesse de frottement est négligeable. Ce résultat est aussi obtenu pour les tranches no. 1–7.

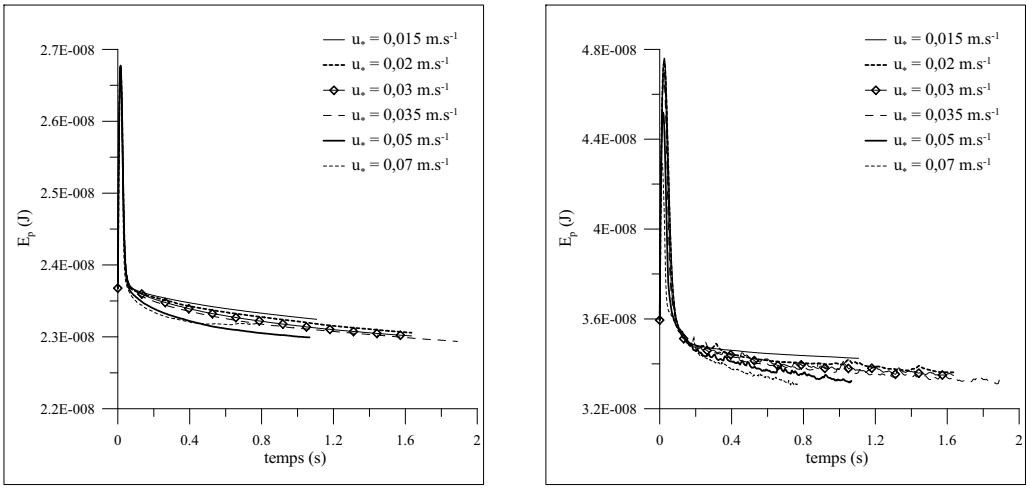
La figure 3.39 montre pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,7 mm l'évolution de l'énergie potentielle des six tranches lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,07 m.s^{-1}. L'évolution de l'énergie potentielle des tranches est conforme à celle de l'énergie potentielle



(a) E_p (b) $E_{pi} - E_p$

figure 3.39 – évolution de l'énergie potentielle des tranches en fonction du temps pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,7 mm ; la vitesse de frottement est égale à 0,07 m.s^{-1} ; E_{pi} est l'énergie potentielle des grains à l'instant $t = 0$; la tranche no. 1 désigne la tranche située à la base de l'arrangement et la tranche no. 6 celle située à la surface du lit.

totale du lit. L'énergie E_p augmente avant de diminuer. Au début des simulations, la position verticale moyenne des grains augmente dans chaque tranche et cette augmentation est plus importante dans les tranches supérieures. Comme pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm, la valeur $E_{pi} - E_p$ dans la tranche no. 6 située à la surface du lit est à la fin de la simulation bien supérieure à celle obtenue dans les tranches inférieures. La figure 3.40 montre l'évolution de l'énergie potentielle des tranches no. 4 et no. 6 en fonction de la vitesse de frottement. L'influence de la vitesse de frottement sur l'évolution de l'énergie potentielle

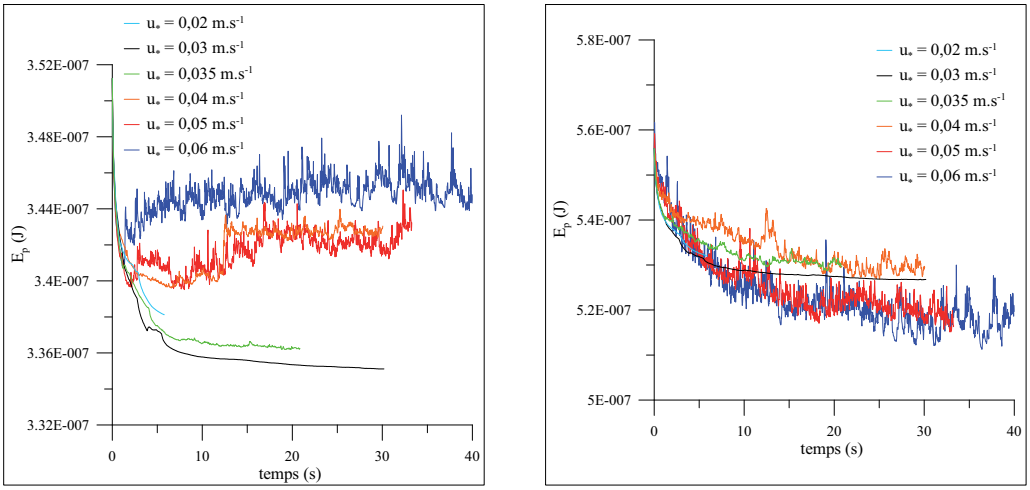


(a) dans la tranche no. 4 (b) dans la tranche no. 6

figure 3.40 – évolution de l'énergie potentielle des tranches en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,7 mm

est ici faible dans les deux tranches. Cependant, pareillement au sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm, l'énergie potentielle de la tranche no. 6 fluctue lorsque $u_* \gtrsim u_{*c}$ avec $u_{*c} = 0{,}0175$ m.s^{-1}.

L'évolution de l'énergie potentielle des tranches pour le sédiment « dispersé » est un peu différente de celle obtenue pour les sédiments mono-dispersés. A l'intérieur du lit, la variation de l'énergie potentielle des tranches est constante et indépendante de la vitesse de frottement. Dans les tranches supérieures, le comportement est différent pour $u_* > u_{*c}$. La figure 3.41 montre l'évolution de l'énergie potentielle des tranches no. 7 et 8 situées à la surface du lit. L'énergie



(a) dans la tranche no. 7

(b) dans la tranche no. 8

figure 3.41 – évolution de l'énergie potentielle des tranches no 7 et 8 en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment « dispersé » LG13

potentielle fluctue et l'amplitude des fluctuations dépend de la vitesse de frottement. Elle augmente dans la tranche no. 7 et diminue dans la tranche no. 8. Sa diminution et son augmentation croissent avec la vitesse de frottement. Ce comportement est lié au tri granulométrie vertical qui se produit dans l'arrangement (cf. le paragraphe 3.4 de cette partie).

Comme dans les sédiments mono-dispersés, l'amplitude des fluctuations peut être utilisée pour définir la couche « active » de l'arrangement. Pour $u_* = 0{,}035$ m.s^{-1}, le transport de particules se fait essentiellement dans la tranche no. 8. Lorsque la vitesse de frottement augmente, la couche « active » est constituée par les tranches no. 7 et 8.

3.3.2 débit de sédiments dans les directions latérale et verticale

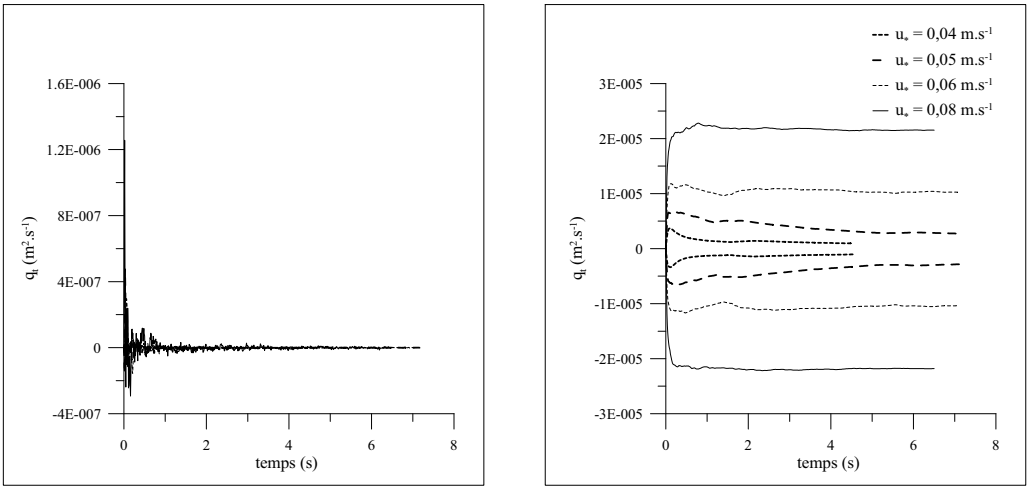
Le mouvement des grains est généré par l'écoulement (qui est décrit par un champ de vitesse tri-dimensionnel) et par les collisions. Les grains se déplacent donc dans les trois directions. Nous mesurons le mouvement des grains dans les directions y et z en calculant les débits q_t^L et q_t^V qui sont définis par l'équation (3.20).

$$q_t^L = \frac{1}{S_b}\sum_{i=1}^{N} V_{pi} v_{pi} \ , \quad q_t^V = \frac{1}{S_b}\sum_{i=1}^{N} V_{pi} w_{pi} \tag{3.20}$$

Avec : N le nombre de grains dans le lit ; V_{pi} le volume du grain i ; v_{pi} et w_{pi} les composantes de la vitesse du grain i dans les directions y (latérale) et z (verticale) ; S_b la surface du lit.

Mouvement des grains dans la direction latérale

La figure 3.42 montre, pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2,5 mm, l'évolution du débit moyen q_t^L en fonction du temps. Elle indique également l'évolution des débits moyens q_t^{L+}



(a) débit q_t^L (b) débits q_t^{L+}, q_t^{L-}

figure 3.42 – évolution des débits moyens q_t^L, q_t^{L+} et q_t^{L-} pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2,5 mm en fonction du temps ; le débit q_t^{L+} est strictement positif, le débit q_t^{L-} strictement négatif

et q_t^{L-} dans les directions y positif et y négatif. Les débits q_t^{L+} et q_t^{L-} sont donnés par l'équation (3.21).

$$q_t^{L+} = \frac{1}{S_b} \sum_{v_{pi}>0} V_{pi} v_{pi} \ , \quad q_t^{L-} = \frac{1}{S_b} \sum_{v_{pi}<0} V_{pi} v_{pi} \tag{3.21}$$

Le débit moyen q_t^L tend vers zéro après la phase de réorganisation de l'arrangement. Mais le mouvement des grains dans la direction latérale n'est pas nul. Les particules se déplacent à part égale dans les directions $y > 0$ et $y < 0$. Ainsi les débits q_t^{L+} et q_t^{L-} sont égaux en valeur absolue, ils augmentent avec la vitesse de frottement. Cette évolution du débit de sédiments dans la direction latérale est obtenue pour tous les sédiments étudiés. Elle est conforme aux propriétés de l'écoulement et de la collision. La composante v_f de la vitesse fluide dans la direction y est créée par les irrégularités de la surface du lit qui sont *a priori* réparties aléatoirement dans le plan horizontal. La distribution de la composante v_f est symétrique par rapport à zéro. Lors de la collision, aucune direction n'est privilégiée.
La figure 3.43 montre, pour les sédiments étudiés, l'évolution du débit moyen sans dimension ϕ^{L+} dans la direction $y > 0$ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. La loi de transport entre ϕ^{L+} et $\theta - \theta_c$ peut être décrite pour les sédiments mono-dispersés, de granulométrie « uniforme » et « dispersés » par la même relation. Nous avons :

$$\phi^{L+} = 0{,}34\,(\theta - \theta_c) \ , \quad r^2 = 0{,}8727 \tag{3.22}$$

Le débit ϕ^{L+} pour ces sédiments est inférieur à celui estimé pour les sédiments « faiblement dispersés » pour lesquels les résultats sont faiblement corrélés et pour lesquels les débits sont importants proche du seuil d'érosion.

Mouvement des grains dans la direction verticale

La figure 3.44 montre l'évolution des débits moyens q_t^V, q_t^{V+} et q_t^{V-} en fonction du temps qui est établie pour le sédiment mono-dispersé de diamètre moyen égal à 2,5 mm. q_t^{V+} et q_t^{V-} sont

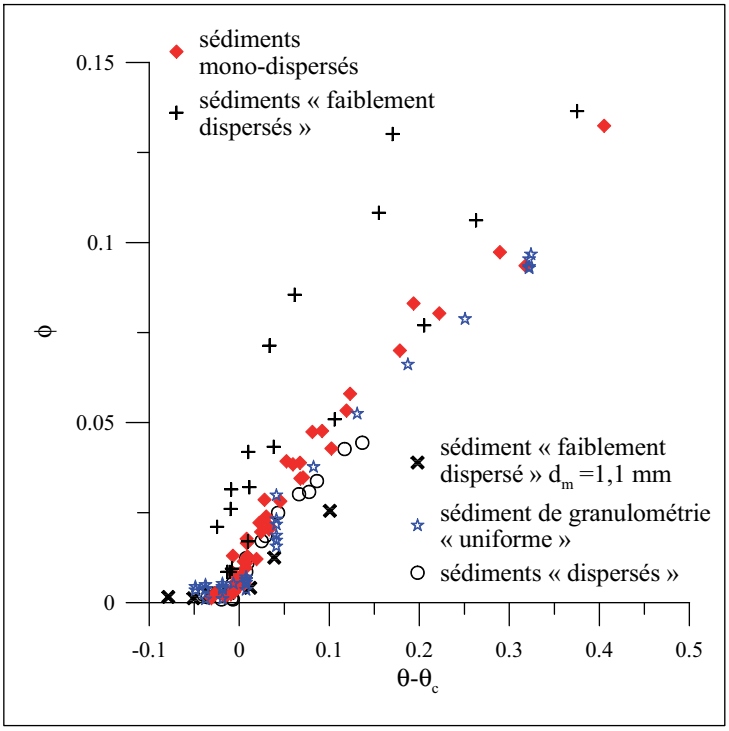
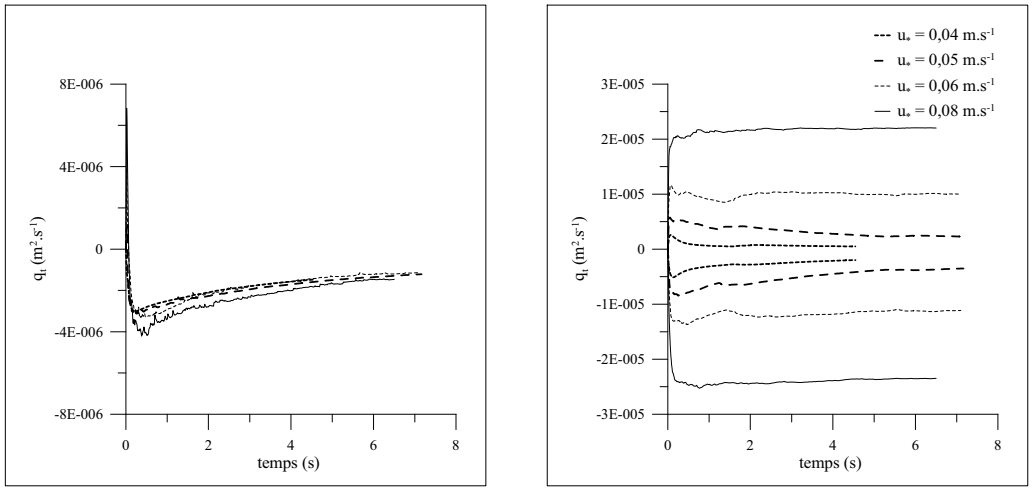


figure 3.43 – évolution du débit moyen sans dimension ϕ^{L+} dans la direction $y > 0$ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ établie pour les sédiments étudiés ; $\phi^{L+} = \dfrac{q_t^{L+}}{\sqrt{(\gamma-1)g d_p^3}}$



(a) débit q_t^V (b) débits q_t^{V+}, q_t^{V-}

figure 3.44 – évolution des débits moyens q_t^V, q_t^{V+} et q_t^{V-} pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2,5 mm en fonction du temps ; le débit q_t^{V+} est strictement positif, le débit q_t^{V-} strictement négatif

les débits de sédiments dans les directions z positif et z négatif. Ils sont donnés par la relation (3.23).

$$q_t^{V+} = \frac{1}{S_b} \sum_{w_{pi}>0} V_{pi} w_{pi} \ , \quad q_t^{V-} = \frac{1}{S_b} \sum_{w_{pi}<0} V_{pi} w_{pi} \tag{3.23}$$

L'évolution du débit q_t^V est liée à celle de l'énergie potentielle totale du lit. Elle dépend du type de sédiments et de la géométrie initiale de l'arrangement. En général, le débit q_t^V est négatif, la majorité des grains se déplaçant vers l'intérieur du lit. Il est surtout important au début des simulations, pendant la phase de réorganisation et de stabilisation de l'arrangement. L'influence de la vitesse de frottement est faible. La figure 3.44 montre que les grains se déplacent dans les deux directions $z > 0$ et $z < 0$. Les débits q_t^{V+} et q_t^{V-} augmentent de façon similaire avec la vitesse de frottement. Ils sont du même ordre de grandeur, le débit q_t^{V+} est toujours inférieur au débit q_t^{V-}.
L'écoulement au-dessus du lit a une direction privilégiée qui est la direction x. La vitesse du fluide dans cette direction est composée de la vitesse non perturbée et de la fluctuation de vitesse générée par les irrégularités de la surface. Elle est supérieure aux autres composantes de la vitesse du fluide. Le déplacement des grains dans la direction x est plus important que dans les directions latérale et verticale. L'évolution du débit q_t est représentée, pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2,5 mm, en fonction du temps dans la figure 3.45. Sa valeur est

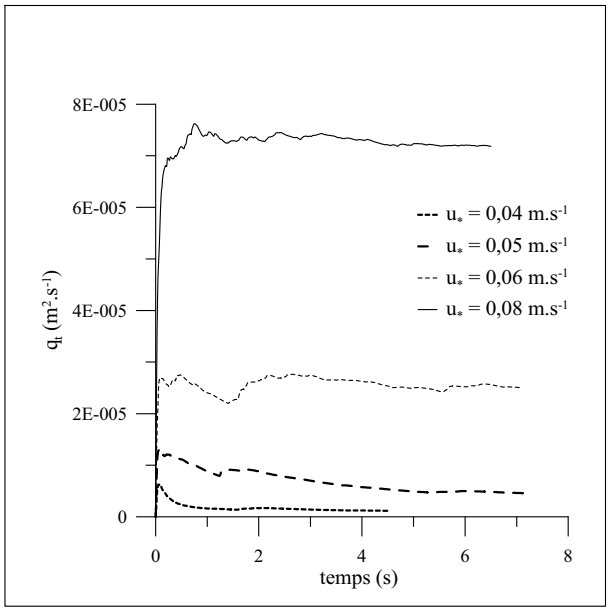
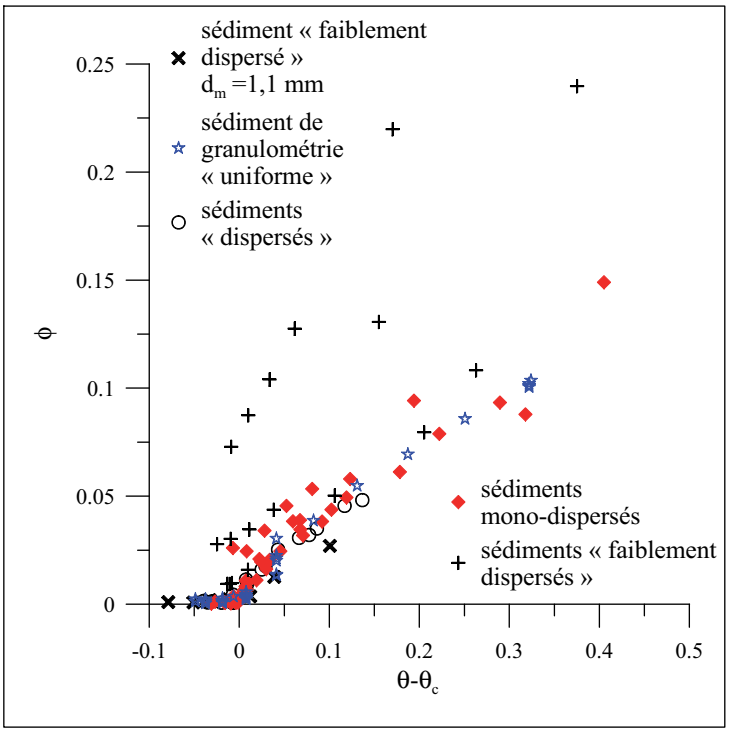


figure 3.45 – évolution du débit moyen q_t (dans la direction x) en fonction du temps pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 2,5 mm

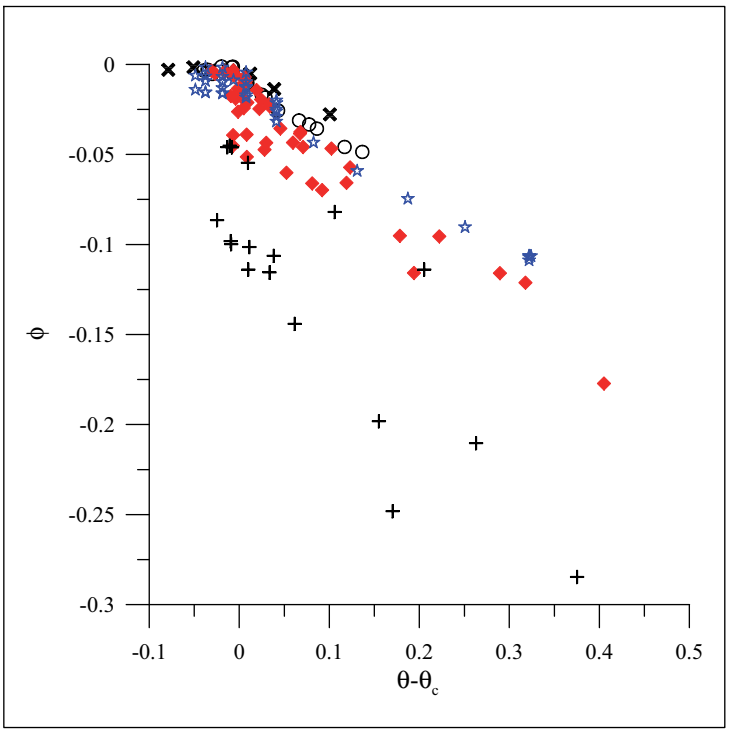
bien supérieure à celle des débits q_t^{L+}, q_t^{L-}, q_t^{V+} et q_t^{V-} qui sont équivalents. Par exemple pour $u_* = 0{,}08$ m.s^{-1}, le débit q_t est égal à 7.10^{-5} m^2.s^{-1} et les débits q_t^{V+}, q_t^{V-}, q_t^{L+} et q_t^{L-} sont de l'ordre de 2.10^{-5} m^2.s^{-1}.

La figure 3.46 montre l'évolution des débits moyens sans dimension ϕ^{V+} et ϕ^{V-} en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. Les résultats sont similaires à ceux obtenus dans la direction latérale. L'évolution des débits peut être décrite par la même relation pour les sédiments mono-dispersés, de granulométrie « uniforme » et « dispersés ». Nous constatons cependant que proche du seuil d'érosion, les débits ϕ^{V+} et ϕ^{V-} peuvent être importants et la loi de transport est plutôt de type affine. Elle s'écrit pour la direction $z > 0$:

$$\phi^{V+} = 0{,}31\,(\theta - \theta_c) + 0{,}0093 \ , \quad r^2 = 0{,}9418 \tag{3.24}$$



(a) débit ϕ^{V+}



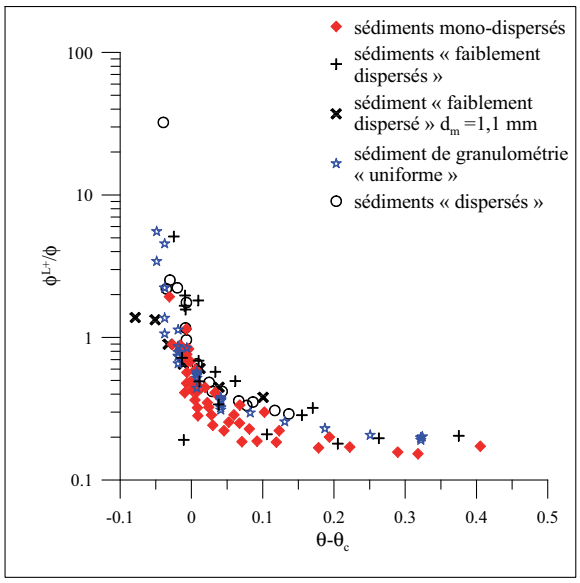
(b) débit ϕ^{V-}

figure 3.46 – évolution des débits moyens sans dimension ϕ^{V+} et ϕ^{V-} en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$

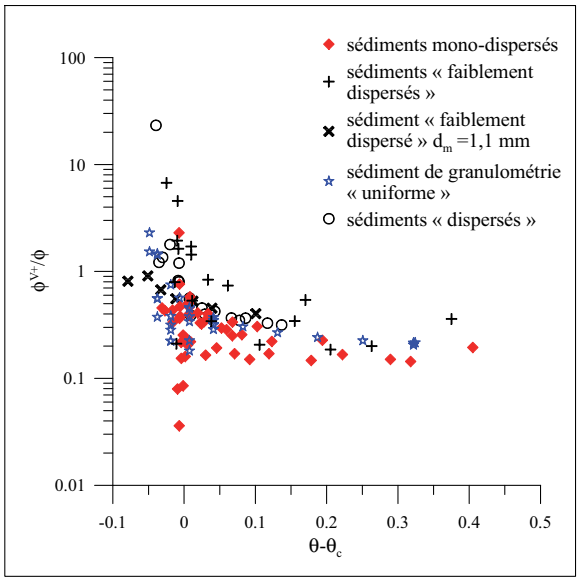
et pour la direction $z < 0$:

$$\phi^{V-} = -0{,}33\,(\theta - \theta_c) - 0{,}016\ , \quad r^2 = 0{,}8860 \tag{3.25}$$

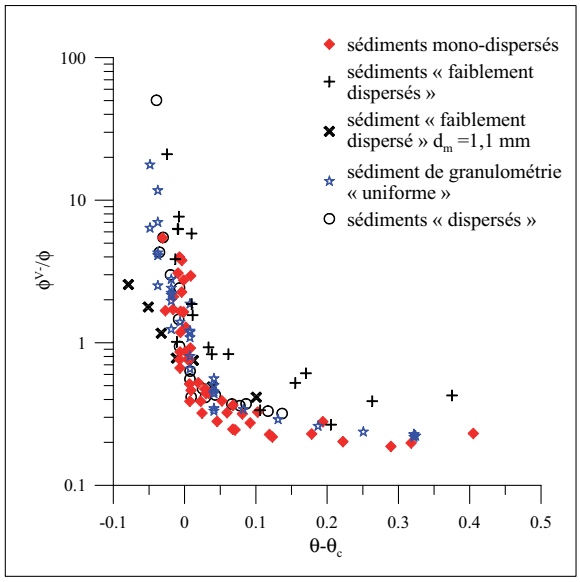
La figure 3.47 compare les débits de sédiments sans dimension dans les directions x, y et z. Pour $\theta \lesssim \theta_c$, les débits dans les trois directions sont faibles et sont du même ordre de grandeur. Pour $\theta > \theta_c$, le débit ϕ est supérieur aux débits ϕ^{L+}, ϕ^{L-}, ϕ^{V+} et ϕ^{V-} et le déplacement des grains dans la direction x est prépondérant par rapport aux autres directions.



(a) ϕ^{L+}/ϕ



(b) ϕ^{V+}/ϕ



(c) $-\phi^{V-}/\phi$

figure 3.47 – évolution des rapports ϕ^{L+}/ϕ, ϕ^{V+}/ϕ et ϕ^{V-}/ϕ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$; ϕ est le débit de sédiments sans dimension dans la direction x

3.3.3 vitesse des grains en fonction de la distance à la surface

L'évolution de l'énergie potentielle des grains en fonction de leur position initiale montre que ce sont les grains contenus dans la partie supérieure de l'arrangement qui contribuent essentiellement

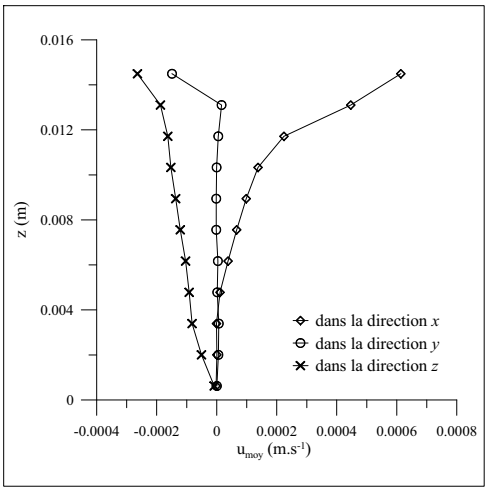
au transport de sédiments. La position verticale moyenne des grains à l'intérieur du lit est relativement stable après la phase de réorganisation. Afin notamment d'estimer l'épaisseur de la couche « active », nous déterminons le profil vertical des trois composantes de la vitesse des grains.
Le lit est divisé en tranches d'épaisseur constante et égale à $0{,}9\,d_m$. Nous définissons une vitesse moyenne des grains pour chaque tranche et cette vitesse notée $\overrightarrow{u}_{\text{moy}}$ est estimée à l'instant t à partir de l'équation (3.26).

$$\overrightarrow{u}_{\text{moy}} = \frac{1}{N_L} \sum_{i=1}^{N_L} \overrightarrow{u}_{pi} \tag{3.26}$$

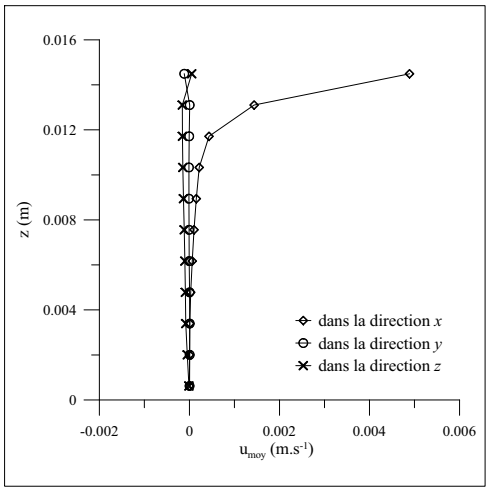
Avec N_L le nombre de grains dans la tranche à l'instant t.
La définition des tranches repose sur l'état initial de l'arrangement. Le nombre de grains dans les tranches varie (faiblement) au cours de la simulation. Dans la tranche supérieure, ce nombre est initialement petit vis-à-vis de celui des autres tranches. Il diminue en raison de la réorganisation et de l'augmentation de la compacité du lit et à certains instants, il peut être nul.
La figure 3.48 montre le profil vertical de la moyenne des vitesses $\overrightarrow{u}_{\text{moy}}$ pendant la simulation pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm. La vitesse de frottement est comprise entre 0,02 et 0,05 m.s^{-1} et le seuil d'érosion se produit pour ce sédiment entre 0,03 et 0,035 m.s^{-1}. Le nombre de tranches utilisé est égal à 11. La vitesse des grains augmente avec la coordonnée z, elle atteint un maximum dans les tranches supérieures. Ce résultat est conforme à l'expérience, l'influence de l'écoulement agit surtout dans la zone du lit qui est proche de la surface. A l'intérieur, le mouvement des grains est lié aux interactions mécaniques dues aux contacts, il est, par conséquent, plus faible.
L'évolution de la vitesse des grains est fonction de la vitesse de frottement. Pour $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}, la vitesse des grains est faiblement dépendante de la coordonnée z et les trois composantes u_p, v_p et w_p sont équivalentes. Elles sont très faibles de l'ordre de 10^{-4} m.s^{-1}. Le transport de sédiments tend vers zéro après la phase de réorganisation. L'écoulement est insuffisant pour entraîner durablement les particules à la surface et leur mouvement est généré principalement par les collisions. Proche du seuil d'érosion ($u_* \simeq 0{,}03$–$0{,}035$ m.s^{-1}), les grains à la surface du lit commencent à être mis en mouvement et leur vitesse augmente et dépend de la coordonnée z. La composante u_p dans la direction x est supérieure aux autres composantes. Cependant, elle est encore faible. La couche « active » de l'arrangement est définie comme la zone dans laquelle la vitesse u_p des grains est supérieure à $0{,}1\,u_{\max}$. $u_{\max}$ est la vitesse maximale qui est atteinte en général dans la tranche de surface. Dans cette couche « active », les grains sont transportés par charriage et compte tenu de la forme du profil vertical de la vitesse u_p, son épaisseur est estimée à $4\,d_p$. A l'extérieur de cette couche de charriage, la vitesse des grains est négligeable. Lorsque la vitesse de frottement augmente ($u_* \geq 0{,}04$ m.s^{-1}), l'ensemble des grains à la surface est transporté. La vitesse u_p est alors bien supérieure aux autres composantes. Dans la couche de charriage, elle augmente rapidement avec z et proche de la surface, elle est égale approximativement à la vitesse de frottement. Le déplacement des grains se produit essentiellement dans la direction x qui est la direction de la vitesse non perturbée dans le modèle d'écoulement.
La couche de charriage est définie lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique. Son épaisseur ne dépend pas de la géométrie de l'arrangement et augmente faiblement avec la vitesse de frottement. Elle varie pour les sédiments étudiés de 3 à $4\,d_m$ avec d_m le diamètre moyen des grains. Ces valeurs sont également obtenues par Thaxton et Calantoni (2006) qui simulent le mouvement de mélanges bi-dispersés soumis à un écoulement sinusoïdal.

Modèle de Du Boys (1879)

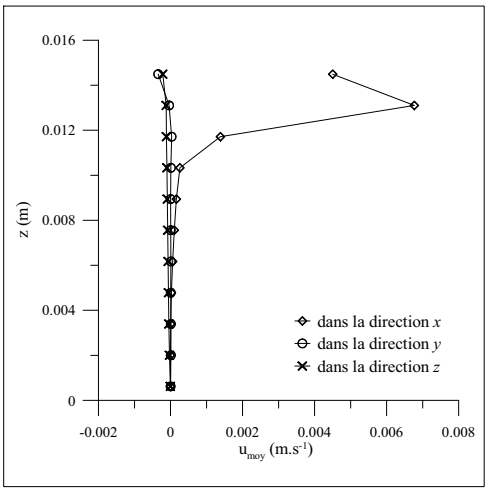
Du Boys (1879) propose un modèle pour décrire le mouvement du lit de sédiments de diamètre d_p. Dans son modèle, le lit est constitué d'une succession de couches d'épaisseur égale à d_p, qui



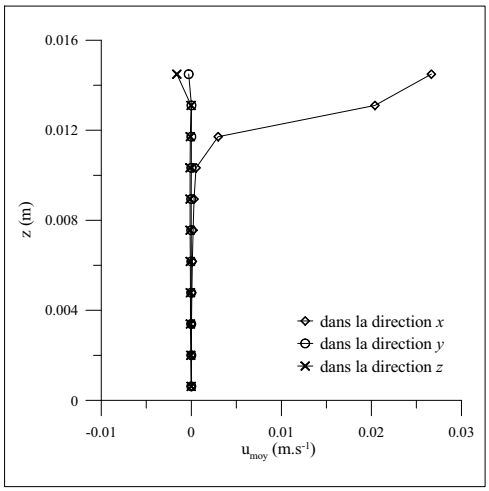
(a) $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}



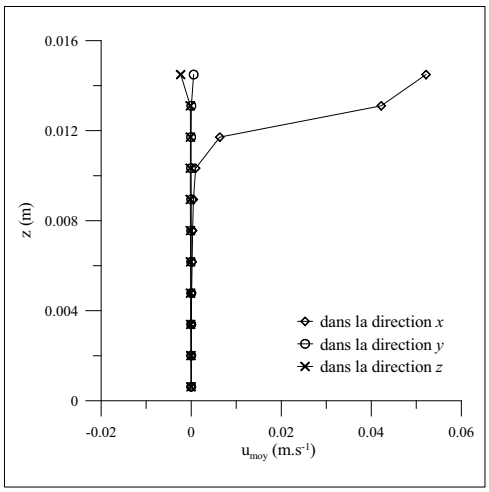
(b) $u_* = 0{,}03$ m.s^{-1}



(c) $u_* = 0{,}035$ m.s^{-1}



(d) $u_* = 0{,}04$ m.s^{-1}



(e) $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}

figure 3.48 – profil vertical des composantes de la vitesse moyenne des grains pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm, ; le seuil d'érosion se produit entre les vitesses de frottement 0,03 et 0,035 m.s^{-1} ; chaque symbole correspond à une tranche

se déplacent à la vitesse v. Du Boys (1879) suppose que la vitesse v varie linéairement avec la coordonnée z. Les principes du modèle sont schématisés dans la figure 3.49. La vitesse de la

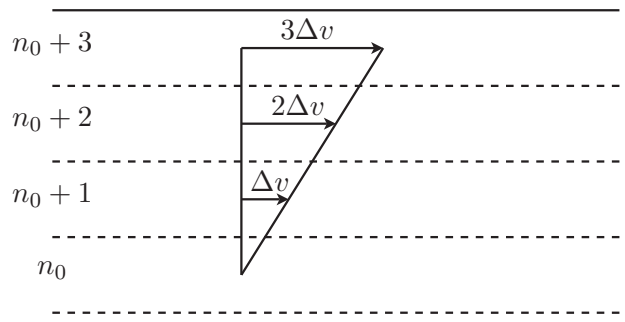
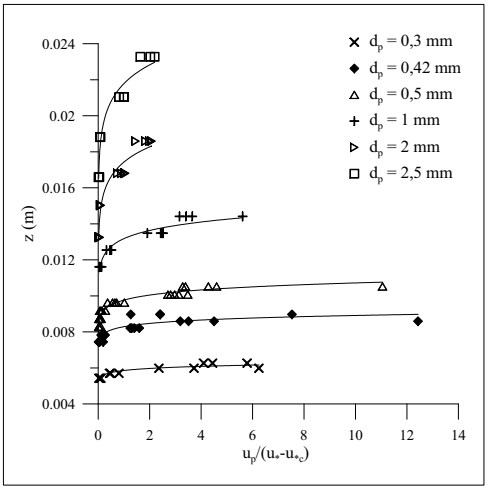


figure 3.49 – modèle de Du Boys (1879) pour décrire le mouvement du lit de sédiments

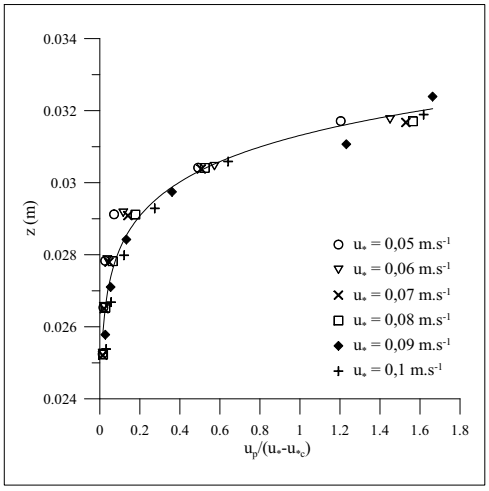
couche n qui est notée v_n est donnée par l'équation (3.27).

$$v_n = (n - n_0)\Delta v \tag{3.27}$$

Avec n_0 le numéro de la couche pour laquelle la vitesse est nulle et Δv la différence de vitesses entre deux couches successives qui est supposée constante.
Le modèle de Du Boys (1879) n'est pas vérifié dans les simulations. Le profil vertical de la vitesse u_p des grains établi par le modèle de transport ne peut pas être décrit par une relation linéaire. La figure 3.50 montre, pour les sédiments mono-dispersés et pour les sédiments de granulométrie « uniforme », l'évolution de la vitesse sans dimension $u_p/(u_* - u_{*c})$ en fonction de la coordonnée z, qui est déterminée dans la couche de charriage. La relation entre $u_p/(u_* - u_{*c})$ et z est une



(a) sédiments mono-dispersés



(b) sédiment de granulométrie « uniforme » (lit 4)

figure 3.50 – évolution de la vitesse sans dimension $u_p/(u_* - u_{*c})$ en fonction de la coordonnée z établie par le modèle de transport dans la couche de charriage ; les lignes continues correspondent aux lois puissance vérifiées par la vitesse $u_p/(u_* - u_{*c})$

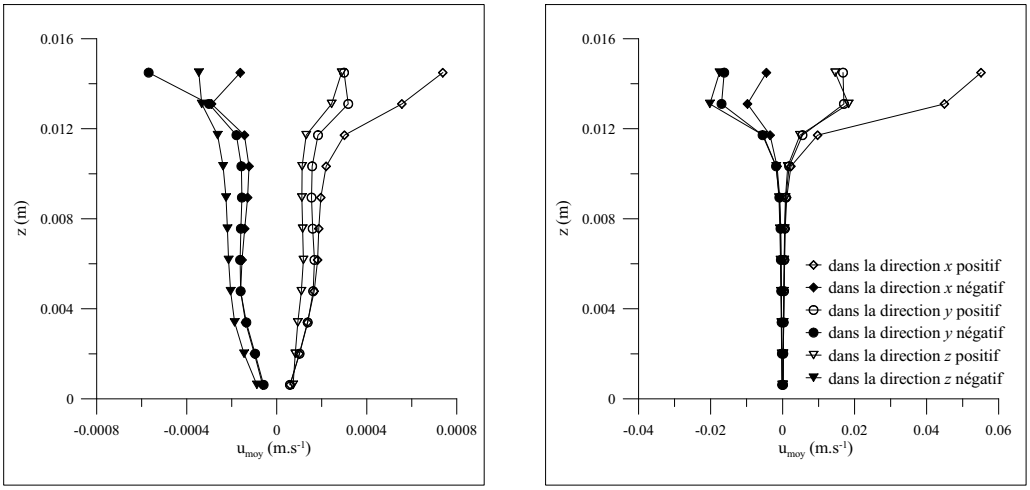
loi puissance qui est représentée dans la figure 3.50 par les lignes continues. Les coefficients de la loi puissance dépendent de la géométrie de l'arrangement (diamètre moyen, épaisseur de l'arrangement). Cependant aucune corrélation simple entre les grandeurs n'est trouvée.

Sens de déplacement des grains

L'estimation des débits moyens de sédiments dans les directions latérale et verticale montre que les grains se déplacent dans toutes les directions. Nous déterminons le profil vertical des vitesses moyennes des grains dans les directions x positif, x négatif, y positif, y négatif, z positif et z négatif. Ces vitesses sont notées u^+_{moy}, u^-_{moy}, v^+_{moy}, v^-_{moy}, w^+_{moy} et w^-_{moy}. Les vitesses u^+_{moy} et u^-_{moy} sont calculées à l'instant t à partir de la relation (3.28).

$$u^+_{\text{moy}} = \frac{1}{N^+_L} \sum_{u_{pi}>0} u_{pi} \ , \quad u^-_{\text{moy}} = \frac{1}{N^-_L} \sum_{u_{pi}<0} u_{pi} \tag{3.28}$$

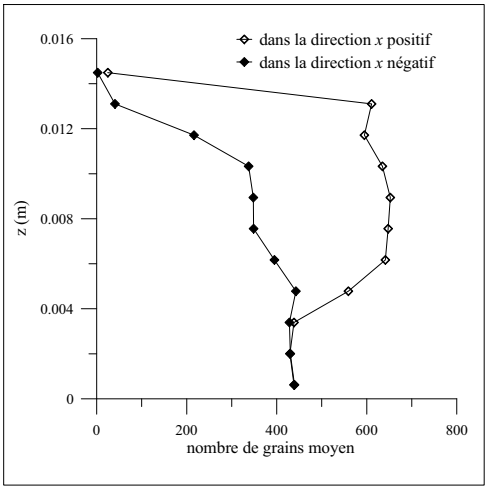
Avec N^+_L le nombre de grains situés dans la tranche à l'instant t et dont la vitesse u_p est positive et N^-_L le nombre de grains situés dans la tranche à l'instant t et dont la vitesse u_p est négative. Les autres vitesses sont dérivées de façon identique. La figure 3.51 montre l'évolution des six vitesses moyennes en fonction de la coordonnée z pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm. Les vitesses sont des fonctions croissantes de la coordonnée z et les valeurs



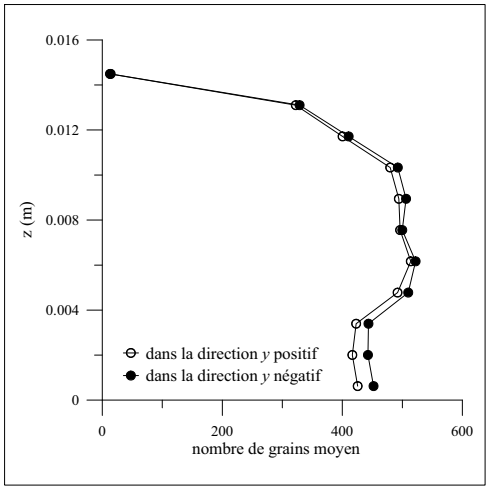
(a) $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1} (b) $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}

figure 3.51 – évolution des vitesses u^+_{moy}, u^-_{moy}, v^+_{moy}, v^-_{moy}, w^+_{moy} et w^-_{moy} en fonction de la coordonnée z pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm ; chaque symbole correspond à une tranche

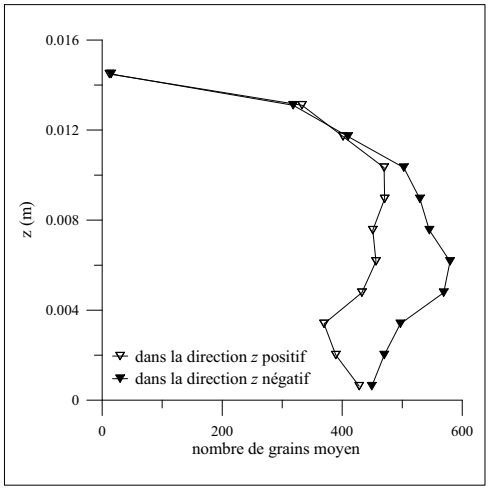
maximales sont obtenues dans les tranches supérieures. Dans la couche de charriage, les vitesses v^+_{moy}, v^-_{moy}, comme les vitesses w^+_{moy} et w^-_{moy}, sont égales en valeur absolue. Il y a symétrie des déplacements dans les directions latérale et verticale. Ce n'est pas le cas dans la direction x. La vitesse u^+_{moy} est supérieure aux autres vitesses même lorsque la vitesse de frottement est inférieure à la valeur critique. Ce phénomène est lié au champ de vitesse fluide au-dessus du lit. La figure 3.52 montre l'évolution du nombre moyen de grains se déplaçant dans les six directions en fonction de la coordonnée z pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm. La vitesse de frottement est fixée à 0,05 m.s^{-1}. Dans la partie supérieure du lit, la plupart des grains se déplacent dans le sens de l'écoulement ($x > 0$). Le nombre de ces grains est égal au nombre de grains se déplaçant en sens inverse seulement dans les trois dernières tranches de l'arrangement. Ainsi l'écoulement influe sur le mouvement des grains situés à l'extérieur de la couche de charriage alors que leurs vitesses sont indépendantes de la vitesse de frottement. Dans la direction latérale, le nombre de grains se déplaçant selon $y > 0$ est identique au nombre de grains se déplaçant selon $y < 0$ sur toute la hauteur de l'arrangement. Ce résultat est similaire à celui obtenu avec les débits q^{L+}_t et q^{L-}_t, il est lié aux modèles d'écoulement et de collision. Pour la direction verticale,



(a) dans la direction x



(b) dans la direction y



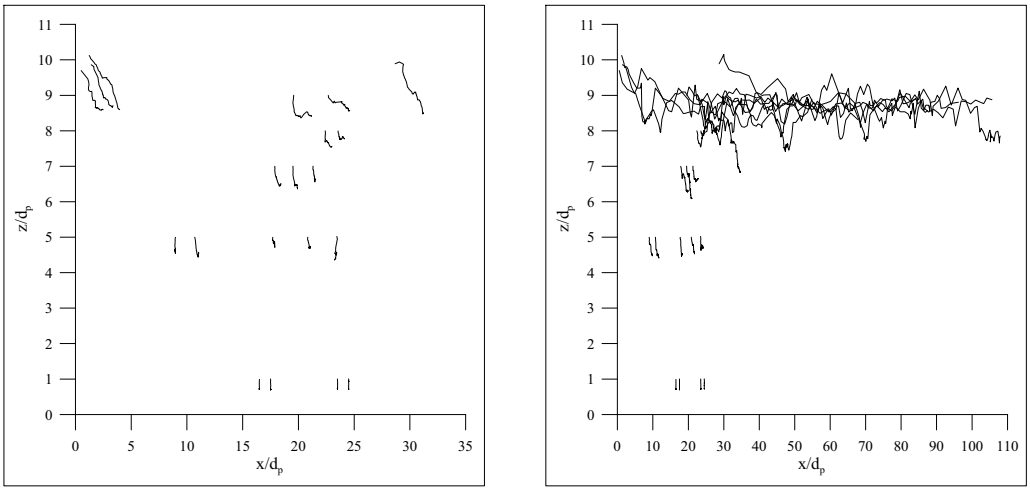
(c) dans la direction z

figure 3.52 – évolution du nombre de grains se déplaçant dans les directions x positif, x négatif, y positif, y négatif, z positif et z négatif en fonction de la coordonnée z pour le sédiment monodispersé de diamètre égal à 1,5 mm ; la vitesse de frottement est égale à 0,05 m.s^{-1}

les nombres de grains se déplaçant selon $z > 0$ et $z < 0$ sont identiques uniquement dans la couche de charriage (cf. les vitesses w^{+}_{moy} et w^{-}_{moy}). Dans la partie inférieure du lit, l'effet de la gravité sur le mouvement des grains n'est plus compensé par l'action de l'écoulement et une majorité de grains ont un mouvement descendant.
L'évolution du sens de déplacement des grains en fonction de la coordonnée z qui est ici décrite pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 1,5 mm est observée pour l'ensemble des sédiments étudiés.

Trajectoire des grains en fonction de leur position dans l'arrangement

Les vitesses des grains et par conséquent, leur trajectoire dépendent de leur position dans le lit. La figure 3.53 montre quelques exemples de trajectoire de grains dans le sédiment mono-dispersés de diamètre moyen égal à 1,5 mm lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,02 et 0,05 m.s^{-1} (cf. aussi la figure 3.59). La position verticale des particules diminue au début des



(a) $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1} ; la durée de la simulation est égale à 4,8 s

(b) $u_* = 0{,}05$ m.s^{-1} ; la durée de la simulation est égale à 3,7 s

figure 3.53 – exemple de trajectoires de grains pour le sédiment mono-dispersé de diamètre moyen égal à 1,5 mm ; le seuil d'érosion se produit entre 0,03 et 0,035 m.s^{-1}

simulations en raison de la réorganisation de l'arrangement. Par la suite, elle reste relativement stable. A l'intérieur du lit ($z_p \lesssim 7\,d_p$), les vitesses des grains sont trop faibles pour qu'il existe un mouvement de particules entre les différentes couches de l'arrangement. Les distances parcourues dans les trois directions sont petites. Dans la couche de charriage, les vitesses des grains sont importantes lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique ($u_* = 0{,}05$ m.s^{-1}). La composante u_p dans la direction x est de l'ordre de u_* et la distance parcourue dans cette direction est égale ici à trois fois la longueur du lit (qui vaut $30\,d_p$). Dans la direction verticale, la position des grains fluctue autour d'une valeur moyenne. Il existe donc un mélange important des grains dans la partie supérieure du lit. Ce mélange n'a pas lieu pour $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1} car les vitesses des grains même à la surface sont faibles. Nous constatons quelle que soit la vitesse de frottement que les distances parcourues par les grains au début des simulations, pendant la phase de réorganisation, sont supérieures à celles estimées par la suite.

3.4 organisation des grains dans l'arrangement en fonction de leur taille

Le modèle de déposition crée des arrangements dans lesquels les grains de différentes tailles sont répartis aléatoirement. La distribution du diamètre dans les couches constituant l'arrangement y est conforme à celle du sédiment. Lorsque le lit est mis en mouvement (pour $u_* \geq u_{*c}$), l'organisation des grains évolue. Dans les couches supérieures, la distribution du diamètre change. Le nombre de gros grains augmente. Les petites particules situées initialement à la surface tombent à l'intérieur du lit. Ce tri granulométrique vertical peut se rapprocher de l'effet « noix du Brésil » (*Brazil nut effect*). Cette expression est utilisée pour décrire les phénomènes observés dans un arrangement granulaire, confiné, secoué de bas en haut. Après quelques secousses, les grosses particules se retrouvent à la surface et les petites particules, au fond de l'arrangement. Ce phénomène est lié au mouvement de convection induit par les vibrations verticales, mouvement qui est ascendant au centre de l'arrangement et descendant au voisinage des parois. Les conditions d'apparition de l'effet « noix du Brésil » ne sont pas vérifiées *a priori* dans le modèle de transport. Les arrangements de grains ne sont pas limités dans le plan horizontal par des parois et sont périodiques dans les directions x et y. Sa face supérieure est soumise à un écoulement qui génère le mouvement des particules.
Le phénomène de ségrégation des particules est aussi obtenu numériquement par Thaxton et Calantoni (2006) à partir d'un modèle DEM. Thaxton et Calantoni (2006) simulent le mouvement d'arrangements bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 1 et 1,5 mm. Les arrangements sont soumis à un écoulement sinusoïdal afin de représenter l'effet des vagues. Thaxton et Calantoni (2006) testent plusieurs mélanges de grains. Le rapport des masses des gros et des petits grains est compris dans les simulations entre 0,1 et 9. Thaxton et Calantoni (2006) observent un tri granulométrique vertical quel que soit le mélange de grains. Cependant, ils ne précisent pas s'il existe une corrélation entre l'ampleur du tri vertical et la composition du mélange. Wilcock et coauteurs (1993, 2001, 2003) examinent expérimentalement l'influence de la proportion de particules de sable dans le mélange sur la distribution du diamètre du sédiment à la surface. Dans les expériences, la proportion de sable dans le sédiment varie de 6,2 à 34,3%. Le diamètre moyen des grains et l'écart-type géométrique de la distribution du diamètre de ces grains dans les mélanges étudiés sont indiqués dans le tableau 3.10. Lorsque la proportion de sable est inférieure à 14% (sédiments J06 et J14), la surface du lit à la fin de l'expérience ne contient plus de petits grains. Ceux-ci se sont déposés dans les interstices du lit, entre les gros grains. Lorsque la proportion de sable augmente et est égale à 21 et 27% (sédiments J21 et J27), le nombre de petits grains à la surface diminue mais il est encore important à la fin de l'expérience. Wilcock *et al.* (2001) considèrent que la capacité de stockage des petits grains à l'intérieur du lit est atteinte. Lorsque la proportion en sable est égale à 34,3% (sédiment BOMC), la distribution du diamètre du sédiment à la surface dépend du mouvement des grosses particules. Pour des vitesses de frottement faibles, seules les particules de sable sont en mouvement et le tri granulométrique concerne les très petites particules, de diamètre inférieur à 1 mm. Pour des vitesses de frottement plus élevées, les grosses particules sont entraînées et par conséquent, ne protègent plus les petites particules. Celles-ci sont plus exposées à l'écoulement et leur proportion à la surface du lit augmente. Ainsi, le diamètre moyen des grains à la surface diminue lorsque la vitesse de frottement augmente. Wilcock et McArdell (1993) utilisent l'expression *sand-mining* (littéralement extraction de sable) pour décrire ce phénomène.

3.4.1 observations du tri granulométrique vertical

Le tri granulométrique vertical dépend du sédiment, à savoir : de la proportion des petits grains et de la porosité de l'arrangement. Les petites particules en mouvement se déposent entre les gros grains et leur nombre à la surface diminue. Le tri granulométrique vertical s'arrête lorsque les espaces entre les gros grains sont remplis. Le tri granulométrique dépend aussi de la vitesse

de frottement qui contrôle son ampleur.

Sédiments de granulométrie « uniforme »

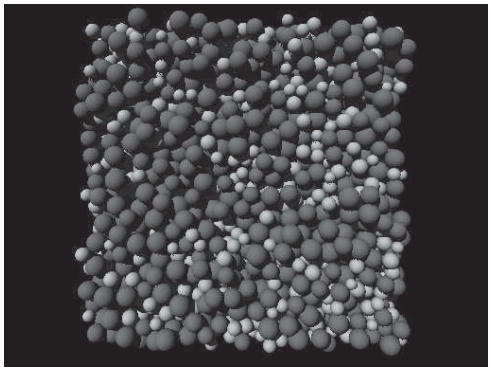
La figure 3.54 montre l'évolution de la distribution du diamètre des grains à la surface du lit en fonction du temps pour le sédiment de granulométrie « uniforme » dit lit 4. Lorsque la vitesse de frottement est inférieure à la valeur critique ($u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}), l'organisation des grains dans le lit n'est pas modifiée par l'écoulement et la distribution du diamètre des grains à la surface à la fin des simulations est identique à celle du lit à $t = 0$ s. Lorsque la vitesse de frottement augmente ($u_* \geq u_{*c}$), les grains sont en mouvement dans la couche de charriage. Ils sont transportés par roulement, glissement et saltation et même certains petits grains sont en suspension. Le transport de sédiments induit, dans la couche de charriage, une modification de la distribution du diamètre des grains. La disparition des petits grains, *i.e.* dont le diamètre est inférieur à la moyenne des diamètres (1,5 mm), de la surface du lit se produit pour $u_* \geq 0{,}06$ m.s^{-1}. La figure 3.54 indique pour $u = 0{,}1$ m.s^{-1} que cette disparition est progressive et qu'elle est incomplète à $t = 1$ s. (La phase de réorganisation/stabilisation du lit liée à la méthode de déposition est terminée pour $t \simeq 2$ s.) A $t = 13$ s, la surface du lit est composée uniquement de gros grains. Les petits grains ont été repoussés, petit à petit, à l'intérieur du lit où ils sont protégés de l'écoulement.

Sédiments bi-dispersés

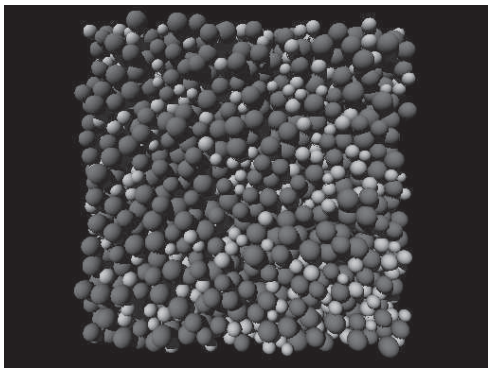
Le mouvement des sédiments bi-dispersés est caractérisé par un phénomène de ségrégation des particules important. La figure 3.55 montre l'évolution de la distribution de la taille des grains dans l'arrangement en fonction du temps pour le sédiment bi-dispersé LB21 composé de sphères de diamètre égal à 0,42 et 1 mm. Pour $u_* > u_{*c}$, le transport de sédiments s'accompagne de la disparition totale des petits grains dans la partie supérieure du lit. L'épaisseur de cette zone augmente avec la vitesse de frottement. Elle vaut approximativement $5\,d_p$ lorsque $u_* = 0{,}06$ m.s^{-1}. Le diamètre $d_{\min}$ est égal, dans ce sédiment, approximativement au diamètre de la sphère la plus grosse qui passe entre quatre sphères jointes, situées dans le même plan horizontal et de diamètre $d_{\max}$. Les petits grains peuvent ainsi se déplacer facilement entre les gros grains et ils tombent alors à l'intérieur du lit, hors de la couche de charriage. La figure 3.55 montre qu'une fois à l'intérieur de l'arrangement, les petits grains ne peuvent pas remonter. Ils sont « coincés » sous les grosses particules. Ce comportement ne peut pas s'expliquer uniquement par la différence des diamètres minimal et maximal. En effet, il est aussi observé dans les simulations qui sont réalisées avec les sédiments bi-dispersés LB10–13 composés de sphères de diamètre égal à 1 et 2 mm et dans les simulations de Thaxton et Calantoni (2006) qui concernent des sédiments bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 1 et 1,5 mm.
La comparaison des arrangements de grains à la fin des simulations pour les différents types de sédiments étudiés montre que le tri granulométrique vertical est maximal lorsque le sédiment est bi-dispersé. Dans les lits de sédiments de granulométrie « uniforme », le tri est moins efficace et des petits grains sont encore présents dans la couche active à la fin des simulations (cf. la figure 3.54). Ce résultat peut être lié à la porosité de l'arrangement qui est plus grande dans le cas du sédiment bi-dispersé.

Sédiments « faiblement dispersés »

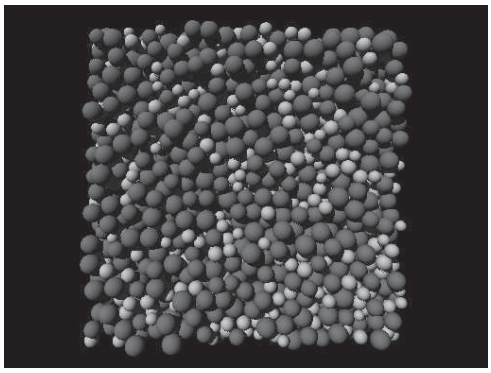
La figure 3.56 montre, pour le sédiment « faiblement dispersé » LG10, l'évolution de la distribution de la taille des grains dans l'arrangement en fonction du temps lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1}. Le diamètre des grains est compris entre 0,77 et 1,55 mm. L'organisation des grains dans l'arrangement évolue peu dans les couches supérieures du lit. Pour $u_* = 0{,}06$ m.s^{-1}, le tri granulométrique vertical se traduit par la diminution du nombre de petits grains à la surface du lit et non par leur disparition. Dans des conditions analogues, il se révèle



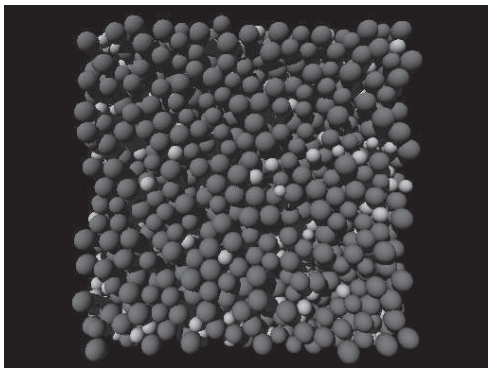
(a) au début des simulations



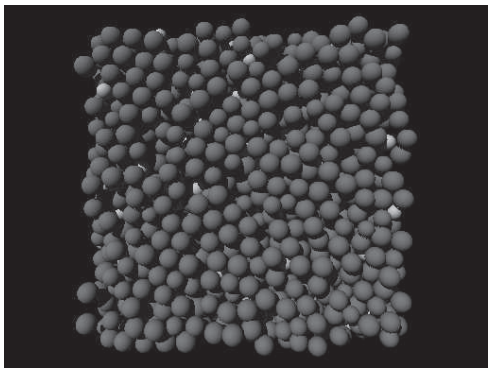
(b) à $t = 1$ s lorsque $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}



(c) à $t = 16$ s lorsque $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}

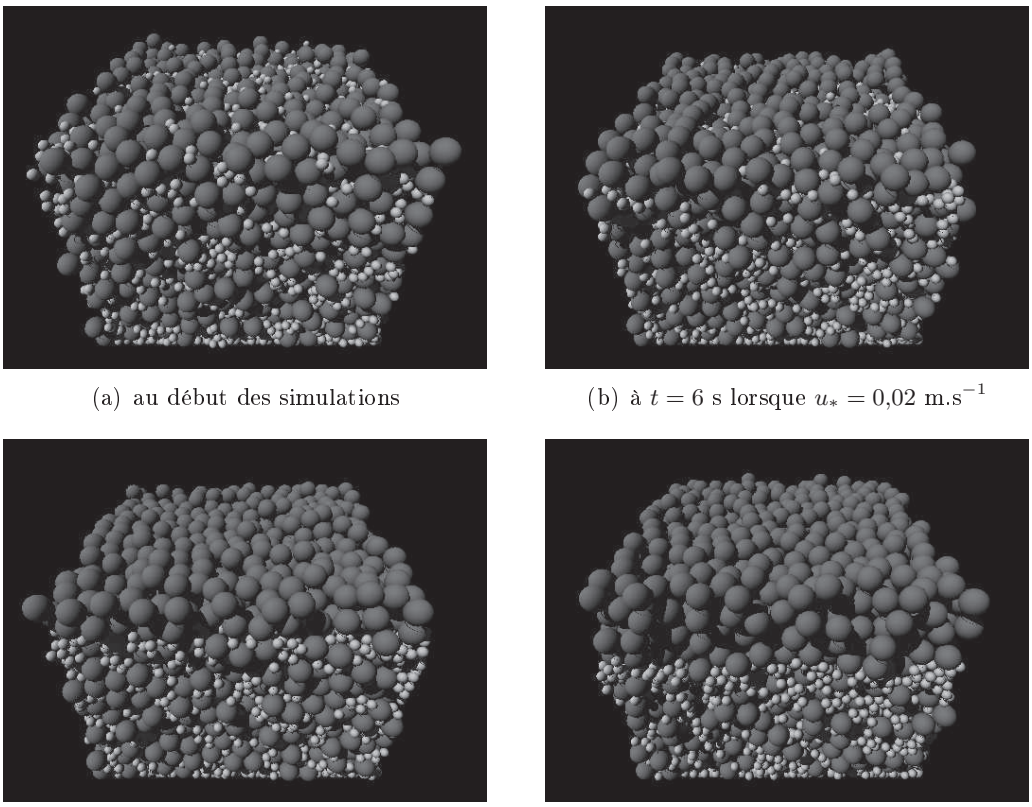


(d) à $t = 1$ s lorsque $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1}



(e) à $t = 13$ s lorsque $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1}

figure 3.54 – évolution de la distribution du diamètre des grains à la surface du lit en fonction du temps pour le sédiment de granulométrie « uniforme » ; le seuil d'érosion se produit entre 0,035 et 0,04 m.s^{-1} ; les grains de couleur gris clair ont un diamètre inférieur à 1,5 mm (valeur moyenne des diamètres) et les grains de couleur gris foncé un diamètre supérieur



(a) au début des simulations

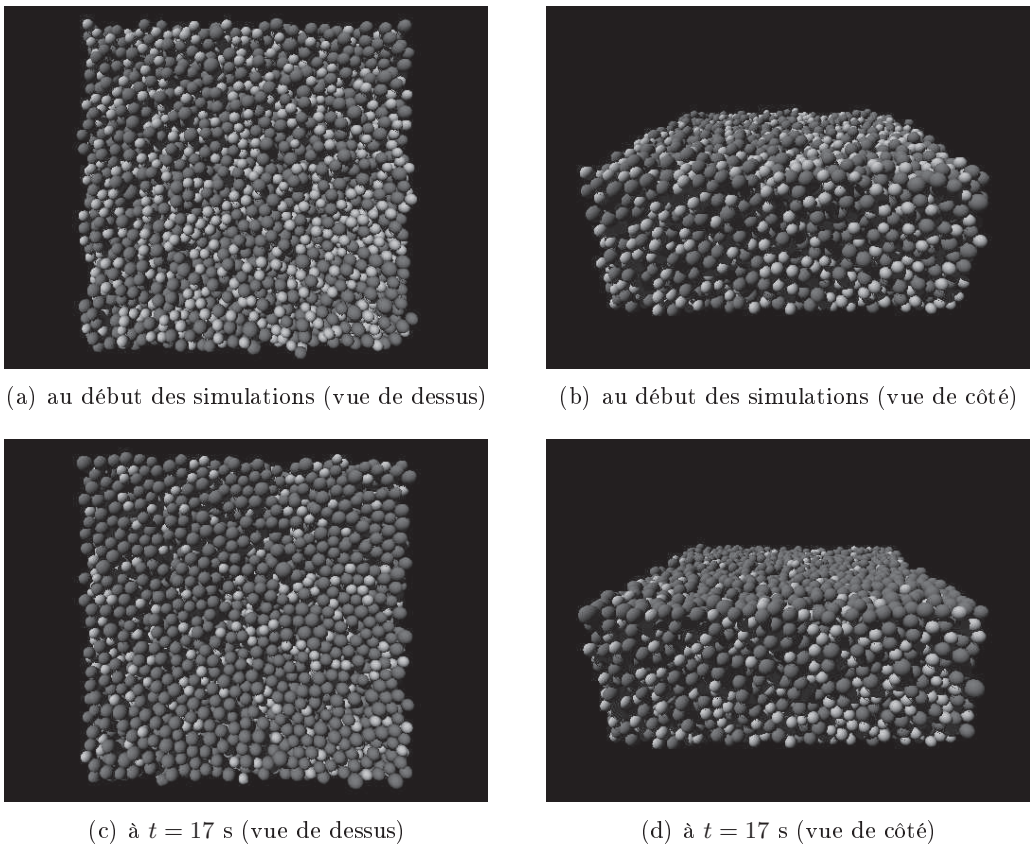
(b) à $t = 6$ s lorsque $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}

(c) à $t = 10$ s lorsque $u_* = 0{,}03$ m.s^{-1}

(d) à $t = 10$ s lorsque $u_* = 0{,}06$ m.s^{-1}

figure 3.55 – évolution de la distribution du diamètre des grains à la surface du lit en fonction du temps pour le sédiment bi-dispersé LB21 ; le seuil d'érosion se produit entre 0,02 et 0,03 m.s^{-1} ; le diamètre des grains de couleur gris clair est égal à 0,42 mm et celui des grains de couleur gris foncé à 1 mm

« plus efficace » dans les lits de sédiments bi-dispersés (cf. la surface du lit pour $u_* = 0{,}03$ m.s^{-1} dans la figure 3.55).



(a) au début des simulations (vue de dessus) (b) au début des simulations (vue de côté)

(c) à $t = 17$ s (vue de dessus) (d) à $t = 17$ s (vue de côté)

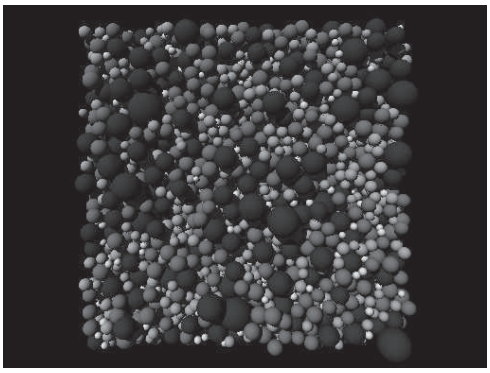
figure 3.56 – évolution de la distribution de la taille des grains dans l'arrangement en fonction du temps pour le sédiment « faiblement dispersé » LG10 ($d_m = 1{,}1$ mm) ; la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1}, la vitesse de frottement critique de mise en mouvement du lit est estimée à 0,0475 m.s^{-1} ; les grains de couleur gris clair ont un diamètre inférieur à d_m et les grains de couleur gris foncé un diamètre supérieur

Sédiments « dispersés »

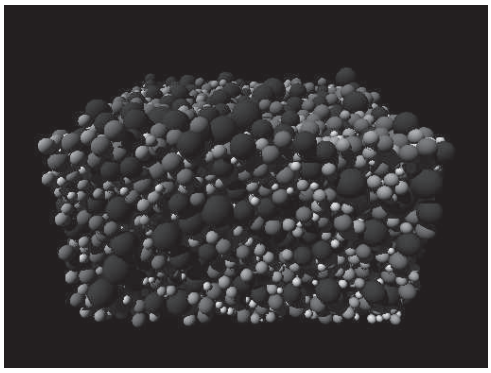
La figure 3.57 montre, pour le sédiment « dispersé » LG13, l'évolution de la distribution de la taille des grains dans l'arrangement en fonction du temps lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1}. Le diamètre des grains varie de 0,24 à 3,33 mm et les grains sont sériés dans la figure 3.57 en quatre classes : les particules de diamètre inférieur à 0,8 mm (sphères gris très clair), les particules de diamètre inférieur à 1,2 mm (sphères gris clair), les particules de diamètre inférieur à 1,8 mm (sphères grises) et les particules de diamètre supérieur à 1,8 mm (sphères gris foncé). Le tri granulométrique vertical est important pour ce sédiment. Le diamètre des grains à la surface du lit augmente et il est supérieur, pour $u_* = 0{,}06$ m.s^{-1}, à 1,2 mm.

3.4.2 vitesse et trajectoire des grains en fonction de leur diamètre

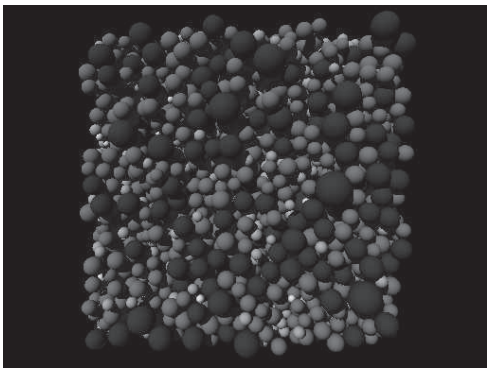
Le tri granulométrique vertical modifie l'organisation des grains dans l'arrangement et par conséquent, leur exposition à l'écoulement (cf. par exemple le cas des petites particules). En raison de ce tri, la vitesse et la trajectoire des grains dépendent de leur taille. La figure 3.58 montre l'évolution de la composante horizontale u_p de la vitesse des grains au cours du temps en fonction du diamètre pour le sédiment de granulométrie « uniforme » dit lit 1. Les particules sont sériées



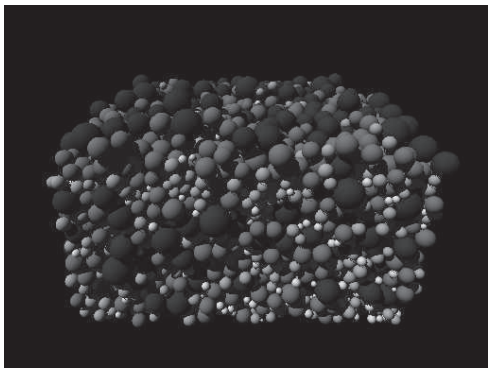
(a) au début des simulations (vue de dessus)



(b) au début des simulations (vue de côté)

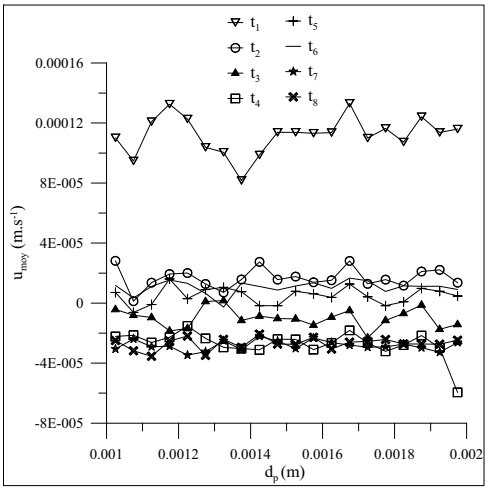


(c) à $t = 40$ s (vue de dessus)

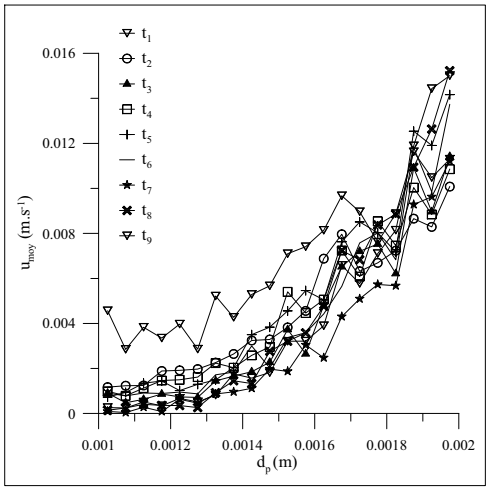


(d) à $t = 40$ s (vue de côté)

figure 3.57 – évolution de la distribution de la taille des grains dans l'arrangement en fonction du temps pour le sédiment « dispersé » LG13 ; la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1}, la vitesse de frottement critique de mise en mouvement du lit est estimée à 0,0375 m.s^{-1} ; les grains de couleur gris très clair et gris clair ont un diamètre inférieur à 1,2 mm et les grains de couleur gris et gris foncé un diamètre supérieur



(a) $u_* = 0{,}02$ m.s^{-1}



(b) $u_* = 0{,}1$ m.s^{-1}

figure 3.58 – évolution de la vitesse horizontale u_p des grains en fonction de leur diamètre pour le sédiment de granulométrie « uniforme » dit lit 1 ; la vitesse de frottement critique de mise en mouvement du lit est égale à 0,0375 m.s^{-1} ; les vitesses sont estimées toutes les secondes ($t_{i+1} - t_i \simeq 1$ s), la première estimation se produit 1 s après le début de la simulation ($t_1 \simeq 1$ s)

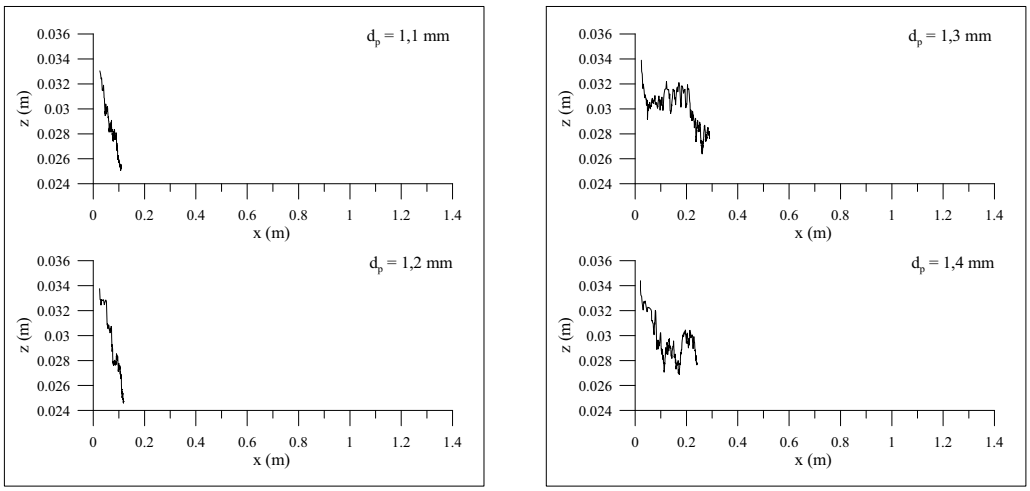
en vingt classes d'intervalle constant égal à $(d_{\max} - d_{\min})/20$. La vitesse moyenne des grains relative à une classe est définie par l'équation (3.29).

$$u^d_{\text{moy}} = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{N_c} u_{pi} \tag{3.29}$$

Avec n_i le nombre de grains dans la classe.
La vitesse moyenne u^d_{moy} ne dépend pas du temps. La figure 3.58 suggère que sa valeur est plus élevée au début de la simulation compte tenu de la réorganisation du lit dans une configuration plus stable. Ce résultat ne peut pas être généralisé. Il n'est pas observé pour tous les sédiments, notamment les sédiments de granulométrie « uniforme ».
Pour $u_* < u_{*c}$, la vitesse des grains de l'arrangement est faible et indépendante du diamètre. L'organisation du lit n'est pas modifiée et les grains de différentes tailles sont encore répartis aléatoirement dans l'arrangement à la fin des simulations. La distribution du diamètre des grains dans les tranches est constante et égale à celle du sédiment. Les petits et les gros grains sont donc exposés, dans ce cas, de façon identique à l'écoulement. Pour $u_* > u_{*c}$, la vitesse u^d_{moy} est une fonction croissante du diamètre. Ce résultat est une conséquence du tri granulométrique vertical. En effet, celui-ci change la distribution du diamètre des grains dans les tranches supérieures de l'arrangement. Les petites particules situées initialement à la surface sont repoussées à l'intérieur du lit, hors de la couche de charriage. Elles ne sont plus exposées directement à l'écoulement et leur vitesse diminue. Parallèlement le nombre de gros grains dans la couche de charriage augmente, leur vitesse moyenne u^d_{moy} croît. Il y a alors surexposition des gros grains à l'écoulement et sous-exposition des petits grains. La différence de vitesse entre les petits et les gros grains augmente avec la vitesse de frottement.

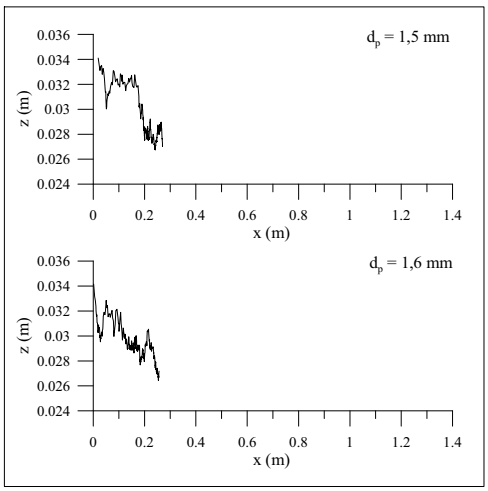
Trajectoire des grains

La figure 3.59 montre, pour le sédiment de granulométrie « uniforme » dit lit 4, la trajectoire de douze grains qui sont situés initialement à la surface du lit (c'est-à-dire à $t = 0$ s, $z_p \sim 0{,}033$ m). La vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1}. Le diamètre des grains varie de 1,1 à 2 mm. Deux comportements sont identifiés en fonction du diamètre. Les particules de diamètre supérieur à 1,7 mm, qui est approximativement la valeur du diamètre moyen d_m, sont transportées à la surface du lit. Leur position verticale z_p qui diminue au début des simulations, à cause de la phase de réorganisation du lit, oscille ensuite autour de 0,032 m. Exposées à l'écoulement, leur vitesse est importante. La distance parcourue dans la direction x est comprise entre 0,8 et 1,4 m, *i.e.* entre 27 et 47 l_b avec l_b la longueur du lit. Certains grains peuvent tomber, au cours de leur mouvement, à l'intérieur de l'arrangement. Cette situation correspond, dans la figure 3.59, à $z_p \simeq 0{,}028$–$0{,}03$ m. Mais ils remontent aussitôt dans la couche de charriage. Nous ne savons pas bien quels sont les mécanismes à l'origine de cette remontée. La variation rapide de la grandeur z_p laisse penser que la particule est éjectée à la surface par une collision. Lorsque leur diamètre est inférieur à 1,7 mm, les grains sont repoussés progressivement à l'intérieur du lit. Une fois à l'intérieur de l'arrangement, ils sont incapables de remonter, ils semblent comme « piégés ». Leur mouvement dépend alors essentiellement des interactions mécaniques dues aux contacts et leurs vitesses et les distances parcourues sont faibles. Pour les plus petits grains ($d_p \leq 1{,}2$ mm), la chute dans le lit est rapide et continue, leur position finale est bien inférieure à celle des grains de diamètre intermédiaire ($d_p = 1{,}3$–$1{,}6$ mm).
Si les particules sont situées initialement sous la surface, à $z_p \sim 0{,}028$ m, l'évolution de leur trajectoire dépend encore du diamètre mais de façon différente. Les grosses particules sont poussées vers la surface du lit et les petites particules descendent dans les tranches inférieures. Les échanges de particules entre les tranches de l'arrangement se produisent surtout dans une zone d'épaisseur comprise entre 2 et 4 d_p.

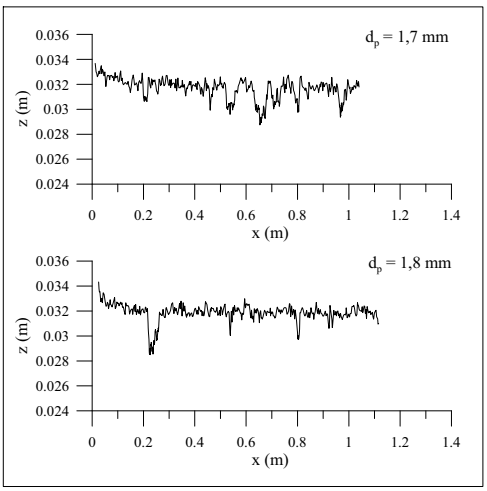


(a)

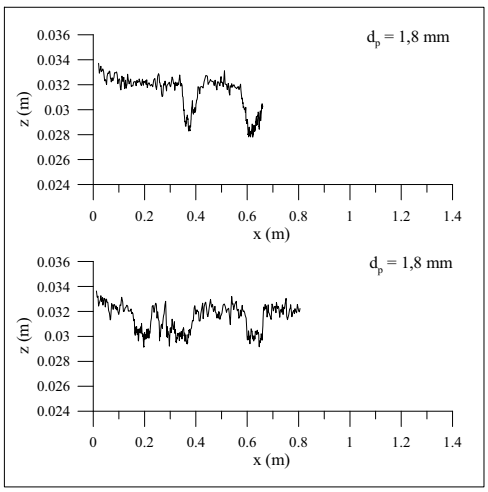
(b)



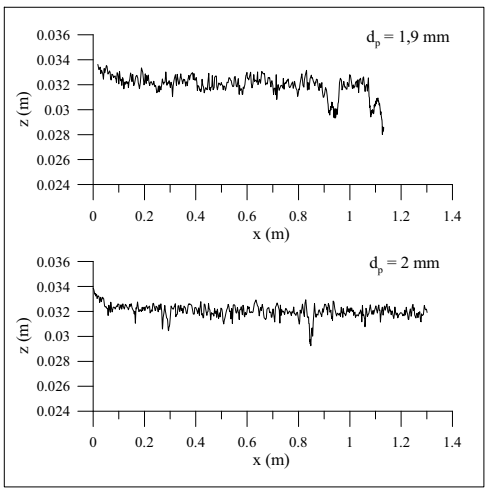
(c)



(d)



(e)



(f)

figure 3.59 – trajectoires de douze grains qui sont situés initialement à la surface du lit pour le sédiment de granulométrie « uniforme » dit lit 4 ; la vitesse de frottement est égale à 0,1 m.s^{-1} ; la simulation dure 13 s ; les coordonnées x et z sont celles du centre de la particule

3.4.3 transport des classes de grains

L'effet des interactions entre les grains sur le transport est examiné en considérant le débit des classes de grains. L'étude repose d'une part, sur les sédiments bi-dispersés et d'autre part, sur le sédiment « faiblement dispersé » LG10 et sur les sédiments « dispersés » LG11–13. La visualisation de la surface des lits de sédiments montre que la distribution du diamètre des grains disponibles à la surface évolue au cours du temps et diffère de celle du sédiment. Les interactions entre les grains entraînent des phénomènes de tri granulométrique et de « pavage » qui influent sur le transport de sédiments.

Sédiments bi-dispersés

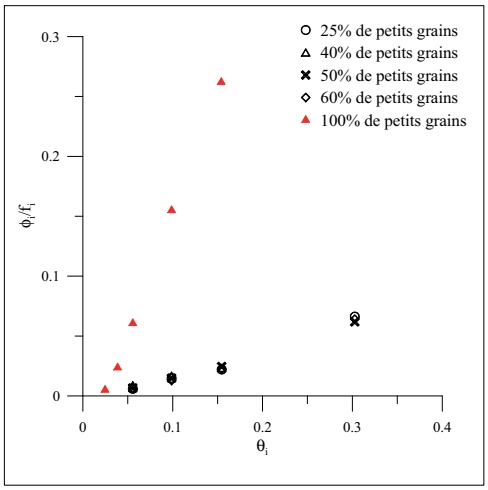
Les sédiments bi-dispersés sont des mélanges de deux types de sphères de diamètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$. Les classes de grains sont définies par ces deux diamètres. L'influence des interactions entre les grains sur le transport de sédiments est estimée par le facteur ξ_i relatif à la classe de diamètre d_i. Le facteur ξ_i est donné par l'équation (3.30).

$$\xi_i = \frac{\phi_i}{f_i \phi_i^*} \tag{3.30}$$

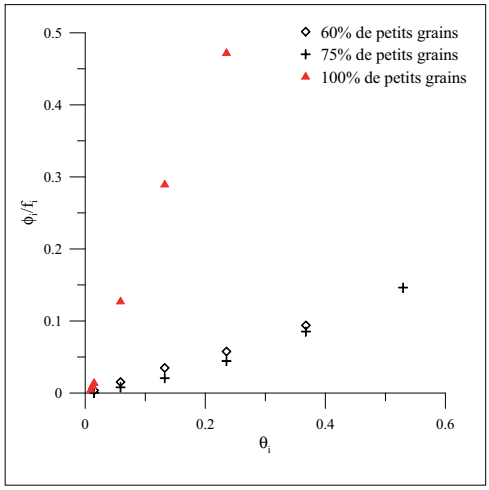
Avec : f_i la proportion en poids de la classe de diamètre d_i dans le sédiment ; ϕ_i le débit sans dimension de grains de diamètre d_i estimé pour le sédiment « dispersé » ; ϕ_i^* le débit sans dimension de grains de diamètre d_i estimé pour le sédiment mono-dispersé.
Le facteur ξ_i est égal à 1 s'il n'y a pas d'interaction entre les grains. Le transport de classe de diamètre d_i est équivalent à celui du sédiment mono-dispersé de même diamètre et nous avons :

$$\frac{\phi_i}{f_i} = \phi_i^* \tag{3.31}$$

Le facteur ξ_i est utilisé pour modéliser les phénomènes de sous- et surexposition des grains à l'écoulement en fonction de leur diamètre. Il est désigné par le terme anglais *hiding-exposure function* (Buffington et Montgomery, 1997 ; Kleinhans et van Rijn, 2002). Dans les expériences, il est trouvé inférieur à 1 lorsque $d_i < d_m$. Les petits grains sont protégés de l'écoulement par les grosses particules, ils sont sous-exposés par rapport au cas mono-dispersé. Lorsque $d_i > d_m$, le facteur ξ_i est supérieur à 1. Les gros grains sont surexposés à l'écoulement car ils apparaissent isolés à la surface du lit.
La figure 3.60 montre, pour la classe de grains de diamètre $d_{\min}$, l'évolution du rapport ϕ_i/f_i en fonction du paramètre de Shields θ_i déterminée pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 et LB20–21. Nous indiquons, également dans la figure 3.60, l'évolution du débit ϕ_i^* qui est déterminée à partir du modèle numérique pour le sédiment mono-dispersé de diamètre $d_{\min}$. Le transport de la classe de diamètre $d_{\min}$ dans les sédiments bi-dispersés est indépendant de la composition du sédiment (*i.e.* de la proportion de petits grains). Il est bien inférieur à celui obtenu pour le sédiment mono-dispersé. Ce résultat s'explique par la présence du tri granulométrique vertical. Une conséquence de ce tri granulométrique est la diminution du nombre de petits grains présents dans la couche de charriage, voire leur disparition pour les vitesses de frottement les plus élevées. Ainsi, du fait de leur position dans le lit, les petits grains sont peu exposés à l'écoulement et par conséquent, peu transportés.
La figure 3.61 montre, pour la classe de grains de diamètre $d_{\max}$, l'évolution du rapport ϕ_i/f_i en fonction du paramètre de Shields θ_i. L'effet des interactions entre les grains sur le transport des gros grains est ici lié à la différence des diamètres $d_{\min}$ et $d_{\max}$. Pour les sédiments LB10–13 qui sont composés de sphères de diamètre égal à 1 et 2 mm, le transport de la classe de diamètre $d_{\max}$ est inférieur à celui du sédiment mono-dispersé de même diamètre lorsque $u_* \leq 0{,}05$ m.s^{-1} ($\theta_i \lesssim 0{,}8$). La présence des petites particules réduit, dans ces sédiments, la mobilité des gros grains. Ce résultat explique celui obtenu à partir du débit total de sédiments. (Pour rappel, le

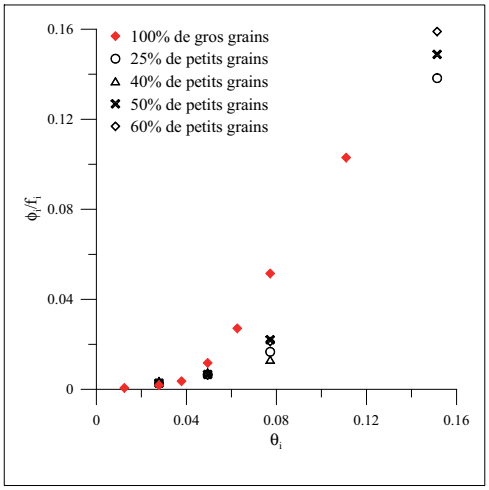


(a) sédiments bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 1 et 2 mm (LB10–13)

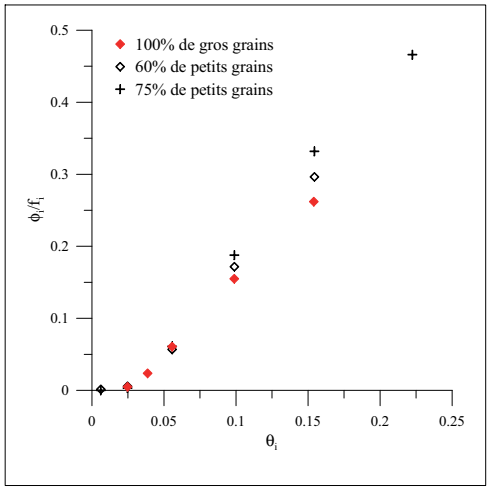


(b) sédiments bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 0,42 et 1 mm (LB20–21)

figure 3.60 – évolution du rapport ϕ_i/f_i en fonction du paramètre de Shields θ_i pour la classe de grains de diamètre $d_{\min}$ déterminée pour les sédiments bi-dispersés



(a) sédiments bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 1 et 2 mm (LB10–13)



(b) sédiments bi-dispersés composés de sphères de diamètre égal à 0,42 et 1 mm (LB20–21)

figure 3.61 – évolution du rapport ϕ_i/f_i en fonction du paramètre de Shields θ_i pour la classe de grains de diamètre $d_{\max}$ déterminée pour les sédiments bi-dispersés

débit total des sédiments LB10–13 est inférieur à celui des sédiments mono-dispersés de diamètre $d_{\min}$, $d_{\max}$ et d_m, comme le montre la figure 3.12.) Pour les sédiments LB20–21 qui sont des mélanges de grains de diamètre égal à 0,42 et 1 mm, le transport de la classe de diamètre $d_{\max}$ est équivalent à celui du sédiment mono-dispersé lorsque $u_* \leq 0{,}03$ m.s^{-1} ($\theta_i < 0{,}06$). Le rapport ϕ_i/f_i est égal au débit ϕ_i^*, l'effet des interactions entre les grains est négligeable. Lorsque la vitesse de frottement augmente, le rapport ϕ_i/f_i devient supérieur à ϕ_i^* : la présence des petits grains accroît la mobilité des grosses particules. Nous constatons pour les deux types de sédiments bi-dispersés que le rapport ϕ_i/f_i augmente avec la proportion de petits grains. Ceci est conforme aux résultats expérimentaux de Wilcock *et al.* (2001).
La figure 3.62 montre, pour les classes de grains de diamètre $d_{\min}$ et $d_{\max}$, l'évolution du facteur ξ_i en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. Les paramètres de Shields θ et θ_c sont calculés en utilisant le diamètre moyen d_m et la valeur de la vitesse de frottement critique indiquée dans le tableau 3.5. Le facteur ξ_i est estimé à partir des débits sans dimension ϕ_i établis par le modèle de transport pour les sédiments bi-dispersés. Le débit ϕ_i^* est déduit de la loi de transport (3.8) des sédiments mono-dispersés. Le facteur ξ_i est différent de 1 pour les deux classes de grains. Lorsque le diamètre des grains est égal à $d_{\min}$, il est très inférieur à 1, compris entre 0,08 et 0,14. Cette valeur s'explique par l'enfouissement dans le lit des petits grains lié au tri granulométrique vertical. Lorsque le diamètre des grains est égal à $d_{\max}$, le facteur ξ_i dépend de la différence $d_{\min}$ et $d_{\max}$. Dans le cas des sédiments LB10–13, il est inférieur à 1 et tend à augmenter avec $\theta - \theta_c$. Les gros grains semblent donc « sous-exposés » à l'écoulement par rapport au cas mono-dispersé. Dans le cas des sédiments LB20–21, le facteur ξ_i est approximativement constant, égal à 1,2. Les gros grains sont « surexposés ».

Sédiment « faiblement dispersé » LG10 et sédiments « dispersés » LG11–13

Les sédiments LG10–13 sont des mélanges de sphères dont la moyenne des diamètres est égale à 1 mm. Les grains sont sériés en dix classes qui sont définies dans le tableau 3.12. La figure 3.63

classe 0	0,2–0,5 mm	classe 5	1,8–2,1 mm
classe 1	0,5–0,9 mm	classe 6	2,1–2,4 mm
classe 2	0,9–1,2 mm	classe 7	2,4–2,7 mm
classe 3	1,2–1,5 mm	classe 8	2,7–3 mm
classe 4	1,5–1,8 mm	classe 9	3–3,3 mm

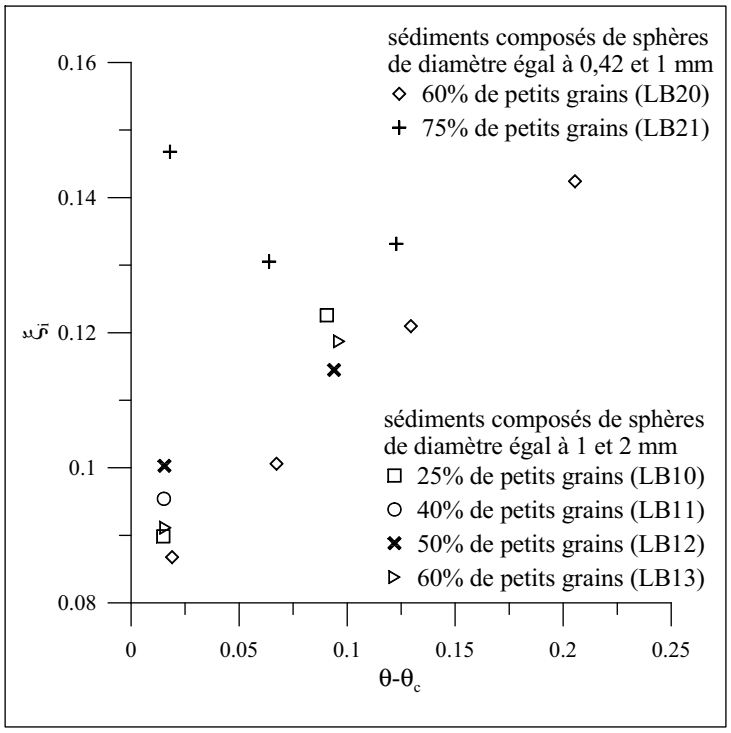
tableau 3.12 – définition des classes de grains utilisée pour sérier les grains dans les sédiments LG10–13

montre, pour les quatre sédiments, la répartition des grains dans les dix classes en fonction de la fréquence massique f_i. f_i est le rapport de la masse m_i des grains de diamètre d_i et de la masse totale des grains.

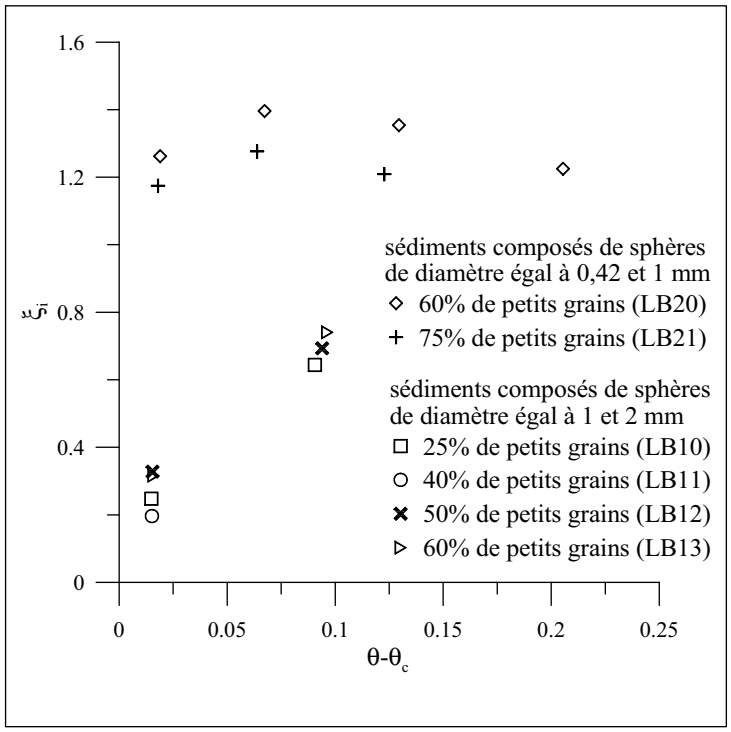
$$f_i = \frac{m_i}{\sum_i m_i} \tag{3.32}$$

La dispersion de la taille des grains est différente selon les sédiments et il existe, dans le cas des sédiments LG10–11, des classes ne contenant aucun grain.

Vitesse de frottement critique u_{*ci} des classes de grains La dispersion du diamètre des grains dans les sédiments LG10–13 est petite par rapport aux expériences. Cependant, nous

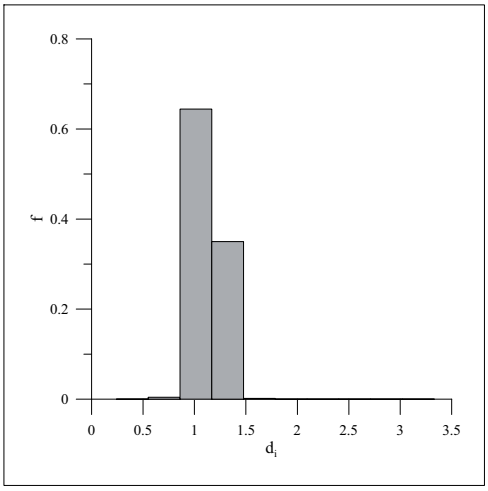


(a) classe de grains de diamètre $d_{\min}$

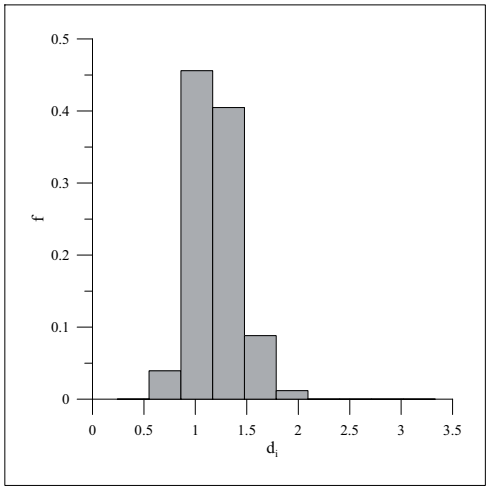


(b) classe de grains de diamètre $d_{\max}$

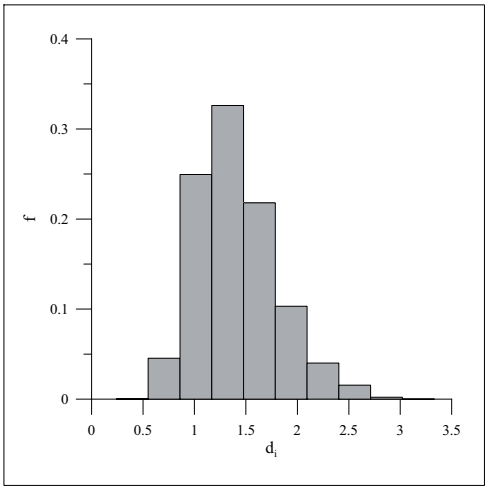
figure 3.62 – évolution du facteur ξ_i pour les classes des grains de diamètre $d_{\min}$ et $d_{\max}$ en fonction de la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$ déterminée pour les sédiments bi-dispersés LB10–13 et LB20–21 ; les paramètres de Shields θ et θ_c sont calculés en utilisant le diamètre moyen du sédiment



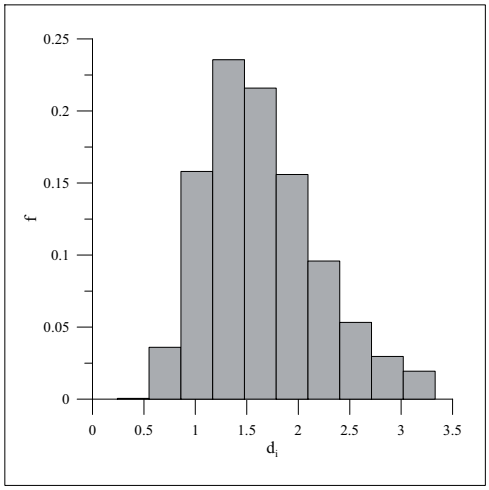
(a) sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,11 (LG10)



(b) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,15 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,21 (LG11)



(c) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,34 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,33 (LG12)



(d) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,57 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,42 (LG13)

figure 3.63 – répartition des grains dans les dix classes pour les sédiments LG10–13 ; f est le rapport de la masse m_i des grains de diamètre d_i et de la masse totale des grains

pouvons déterminer, comme dans les expériences, la vitesse de frottement critique u_{*ci} des grains de diamètre d_i. Pour cela, nous considérons l'évolution du débit de grains q_{ti} relatif à cette classe en fonction de la vitesse de frottement. La figure 3.64 montre l'évolution des débits q_{ti} obtenue dans le cas du sédiment LG10. Comme pour le débit total de sédiments q_t, la relation entre

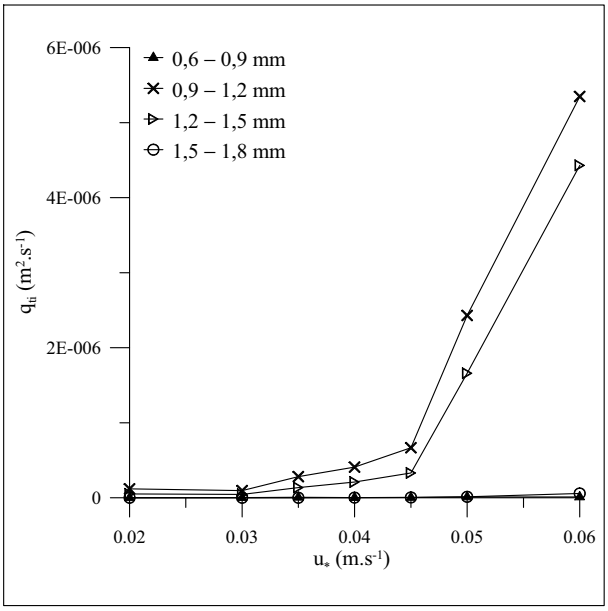
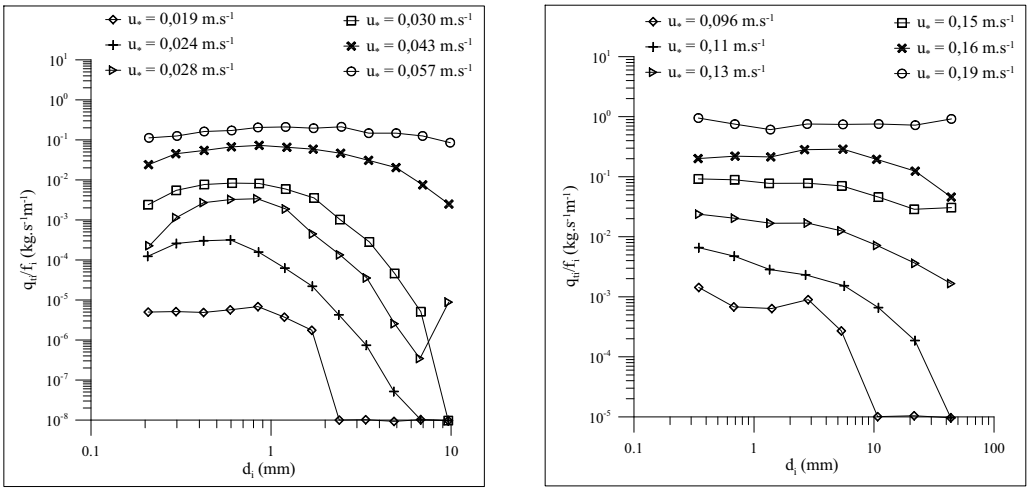


figure 3.64 – évolution des débits de grains de diamètre d_i notés q_{ti} en fonction de la vitesse de frottement u_* pour le sédiment « faiblement dispersé » LG10

les grandeurs q_{ti} et u_* peut être décrite par deux lois affines qui dépendent du diamètre d_i. La vitesse de frottement critique u_{*ci} est estimée de façon identique à la vitesse u_{*c}, à partir de la position du changement de pente dans la courbe d'évolution du débit q_{ti}. Dans le cas du sédiment « faiblement dispersé » LG10, la vitesse u_{*ci} est identique pour les quatre classes de grains, elle est comprise entre 0,045 et 0,05 m.s^{-1}. Ainsi, les classes de grains se mettent en mouvement à la même vitesse de frottement. Cette situation correspond au concept « equal mobility » introduit par Parker *et al.* (1982). Ce concept implique que les petits grains sont sous-exposés et les gros grains surexposés à l'écoulement par rapport au cas mono-dispersé. Il est vérifié expérimentalement pour les sédiments uni-modaux (Wilcock et Southard, 1988).
Un résultat similaire est trouvé pour le sédiment « dispersé » LG11. Dans le cas des sédiments LG12–13, la dispersion de la taille des grains est plus importante et deux vitesses de frottement critiques différentes u_{*ci} sont déterminées pour les petits et les gros grains. Pour $0{,}9 < d_p < 2{,}1$ mm, la vitesse u_{*ci} est comprise entre 0,03 et 0,035 m.s^{-1} et pour $d_p \geq 2{,}1$ mm, elle est comprise entre 0,035 et 0,04 m.s^{-1}. Le transport des classes de diamètres d_0 et d_1 est très faible en raison du tri granulométrique vertical. En effet, les particules appartenant à ces deux classes sont repoussées à l'intérieur du lit et leurs vitesses sont petites. Il n'est pas pertinent dans ces conditions de calculer une vitesse de frottement critique. Le comportement des sédiments LG12–13 peut être rapproché de celui des mélanges de sable et de gravier (Kuhnle, 1993). Cependant la granulométrie des sédiments utilisés dans les expériences est plus étendue. Par exemple, dans les expériences de Wilcock *et al.* (2001), nous avons $\sigma_g > 2{,}9$.

Evolution du rapport q_{ti}/f_i En général, pour les mélanges de sable et de gravier, la distribution du diamètre du sédiment en mouvement n'est pas la même que celle du sédiment du lit, en raison des vitesses de frottement critiques u_{*ci} des classes de grains qui sont différentes. La figure 3.65 montre l'évolution du rapport q_{ti}/f_i en fonction de la vitesse de frottement qui est

déterminée expérimentalement par Kuhnle (1993) pour un mélange contenant 25% de gravier et pour le sédiment de la rivière Goodwin Creek. Si la granulométrie du sédiment en mouvement



(a) mélange contenant 25% de gravier (b) sédiment de la rivière Goodwin Creek

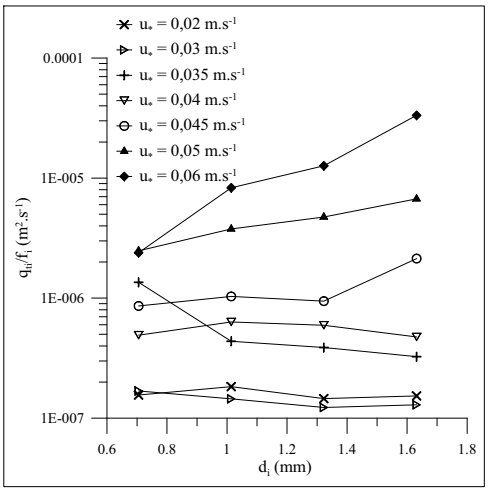
figure 3.65 – évolution du rapport q_{ti}/f_i en fonction de la vitesse de frottement u_* déterminée expérimentalement par Kuhnle (1993) pour deux mélanges de sable et de gravier ; le débit q_{ti} est le débit des grains de diamètre d_i ; la fréquence f_i est égale au rapport de la masse m_i des grains de diamètre d_i et de la masse totale des grains ; la distribution du diamètre des sédiments et la vitesse de frottement critique des classes des grains sont indiquées dans les figures 1.4 et 2.4 dans la partie 1

est identique à celle du sédiment du lit, nous avons :

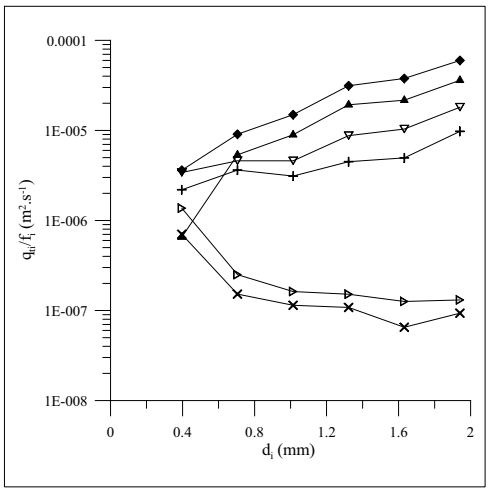
$$q_{ti} = f_i q_t \tag{3.33}$$

Avec q_t le débit total de sédiments.
Le rapport q_{ti}/f_i est alors constant. Cette situation est observée seulement pour les vitesses de frottement les plus élevées. Sinon, le rapport q_{ti}/f_i diminue avec d_i. Les gros grains sont donc sous-représentés dans le sédiment en mouvement.
La figure 3.66 montre l'évolution du rapport q_{ti}/f_i en fonction de la vitesse de frottement déterminée par le modèle de transport pour les sédiments LG10–13. Lorsque la vitesse de frottement est inférieure à la valeur critique u_{*c}, le rapport q_{ti}/f_i est relativement constant. La distribution du diamètre des grains du sédiment en mouvement est approximativement égale à celle du sédiment du lit. Le transport de sédiments est faible et il n'y a pas de tri granulométrique vertical. La granulométrie du sédiment disponible à la surface est similaire à celle du sédiment du lit. Lorsque la vitesse de frottement augmente, la granulométrie du sédiment à la surface change et le rapport q_{ti}/f_i tend à croître avec le diamètre d_i. Les gros grains sont surreprésentés et les petits grains sous-représentés dans le sédiment en mouvement. Ces phénomènes de sous- et surreprésentation sont liés au tri granulométrique vertical. Ils augmentent avec la dispersion de la taille des grains. Nous observons pour les sédiments LG12–13 que le rapport q_{ti}/f_i évolue peu pour les gros diamètres et que pour les vitesses de frottement intermédiaires, la classe relative au diamètre maximal est sous-représentée dans le sédiment transporté. Ces observations sont en accord avec les résultats des expériences réalisées avec des sédiments de granulométrie non uniforme ($\sigma_g > 1{,}3$).

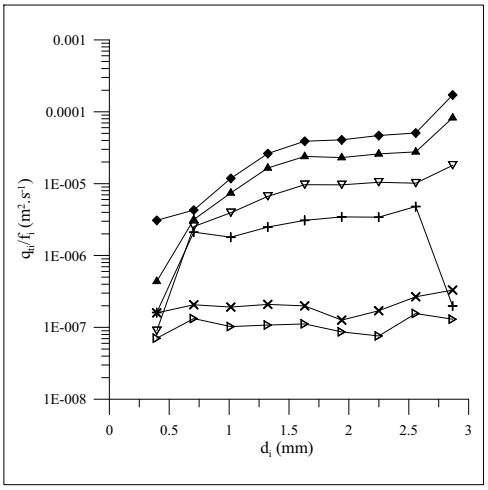
Ces deux études de cas montrent l'importance, lors du calcul du débit de sédiments à partir de lois empiriques telles que celle de Meyer-Peter et Müller (1948) et celle de van Rijn (1984a,b), de considérer non pas la distribution du diamètre des grains du sédiment du lit, mais celle des grains disponibles à la surface du lit.



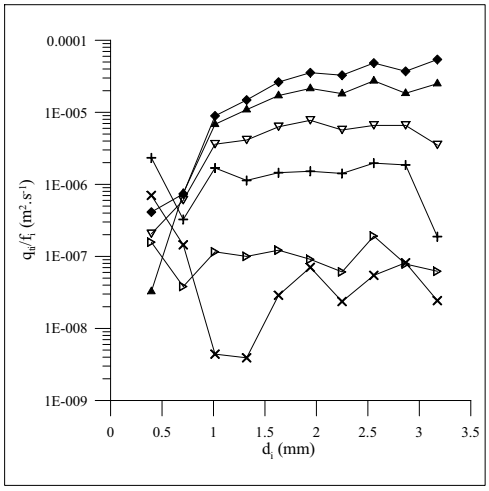
(a) sédiment « faiblement dispersé » de diamètre moyen égal à 1,1 mm et d'écart-type géométrique égal à 1,11 (LG10)



(b) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,15 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,21 (LG11)



(c) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,34 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,33 (LG12)



(d) sédiment « dispersé » de diamètre moyen égal à 1,57 mm et d'écart-type σ_g égal à 1,42 (LG13)

figure 3.66 – évolution du rapport q_{ti}/f_i en fonction de la vitesse de frottement u_* pour les sédiments LG10–13 ; le débit q_{ti} est le débit des grains de diamètre d_i ; la fréquence f_i est égale au rapport de la masse m_i des grains de diamètre d_i et de la masse totale des grains

3.4.4 transferts de grains à l'intérieur de l'arrangement

Lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique, la répartition des grains dans l'arrangement change notamment en raison du tri granulométrique vertical qui apparaît dans les sédiments composés de sphères de différentes tailles. Le mouvement de particules entre les tranches supérieures de l'arrangement peut être mis en évidence à partir de l'évolution de l'énergie potentielle des tranches. Celle-ci est calculée à partir des grains contenus initialement dans les tranches. La figure 3.41 montre, pour le sédiment « dispersé » LG13, l'évolution de l'énergie potentielle des deux tranches supérieures notées no. 7 et 8. L'énergie potentielle de la tranche no. 7 augmente avec le temps pour $u_* > u_{*c}$ car les gros grains qui appartiennent à cette tranche à $t = 0$ s se déplacent vers la surface du lit. Inversement, l'énergie potentielle de la tranche no. 8 diminue car les petites grains descendent à l'intérieur du lit. L'augmentation et la diminution de l'énergie potentielle sont des fonctions croissantes de la vitesse de frottement, comme le tri granulométrique vertical. L'évolution de l'énergie potentielle des sédiments mono-dispersés montre qu'il existe aussi pour ces sédiments un transfert de particules entre les tranches. Ce transfert est plus faible que celui obtenu pour les sédiments composés de grains de tailles variables. La figure 3.38 montre la variation de l'énergie potentielle de la tranche no. 10 située à la surface du lit, pour le sédiment mono-dispersé de diamètre égal à 0,42 mm. L'énergie potentielle diminue et sa diminution croît avec la vitesse de frottement. Ce résultat indique la présence d'un mouvement descendant des particules de la tranche no. 10 qui dépend de u_*. Dans la tranche no 9, contrairement au sédiment « dispersé » LG13, l'énergie potentielle diminue pour $u_* > u_{*c}$. Mais sa diminution décroît avec u_*. Ainsi, des particules se déplacent au cours du temps vers la surface et leur nombre augmente avec u_*.

Afin de quantifier plus précisément ce mouvement de grains, nous déterminons pour le sédiment « dispersé » LG13 l'évolution de la distribution du diamètre des grains dans les différentes tranches composant l'arrangement. Le lit est divisé en sept tranches d'épaisseur égale à $1{,}4\,d_m$. Pour simplifier, les grains sont sériés en quatre classes. La fréquence f_i de la classe i, qui est le rapport du nombre de grains dans la classe i et du nombre total de grains dans l'arrangement, est indiquée dans le tableau 3.13.

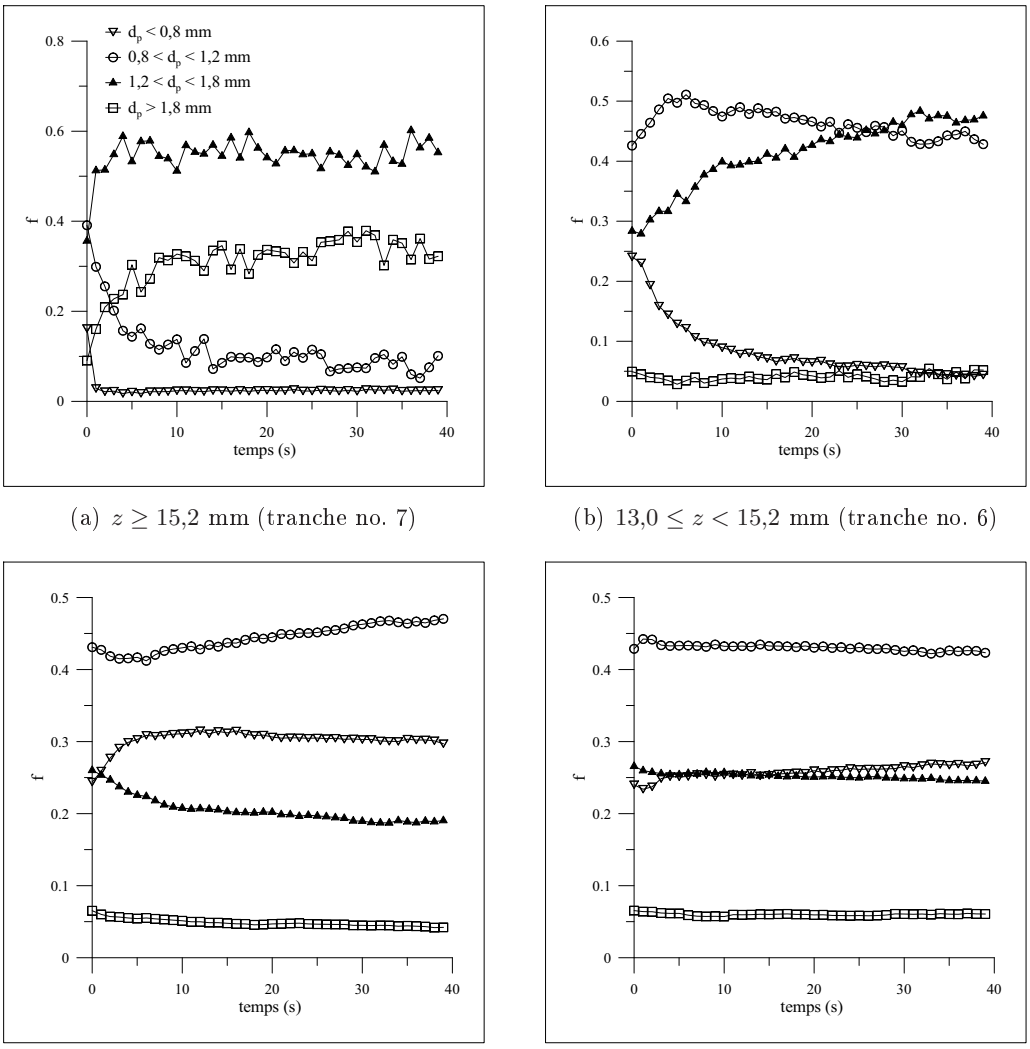
$$f_i = \frac{n_i}{N_L} \tag{3.34}$$

Avec n_i le nombre de grains de la classe i dans la tranche et N_L le nombre total de grains dans la tranche.

classe 1	$d_p < 0{,}8$ mm	25,9%
classe 2	$0{,}8 \leq d_p < 1{,}2$ mm	42,5%
classe 3	$1{,}2 \leq d_p < 1{,}8$ mm	26,1%
classe 4	$d_p \geq 1{,}8$ mm	5,5%

tableau 3.13 – distribution du diamètre des grains dans le sédiment « dispersé » LG13

Au début de la simulation, les grains sont répartis aléatoirement dans l'arrangement et la distribution du diamètre est identique pour les sept tranches. La figure 3.67 montre l'évolution de la distribution du diamètre des grains dans les quatre premières tranches de l'arrangement lorsque la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1}.
A la surface, dans la tranche no. 7, la fréquence des classes évolue surtout au début de la simulation. Par la suite, elle est relativement constante. En raison du tri granulométrique, la fréquence des classes 3 et 4 qui correspondent aux gros diamètres augmente et la fréquence des



(a) $z \geq 15{,}2$ mm (tranche no. 7)

(b) $13{,}0 \leq z < 15{,}2$ mm (tranche no. 6)

(c) $10{,}8 \leq z < 13{,}0$ mm (tranche no. 5)

(d) $8{,}6 \leq z < 10{,}8$ mm (tranche no. 4)

figure 3.67 – évolution de la distribution du diamètre des grains dans les quatre premières tranches de l'arrangement pour le sédiment « dispersé » LG13 ; la vitesse de frottement est égale à 0,06 m.s^{-1} ; la fréquence f est le rapport du nombre de grains de diamètre d_i dans la tranche et le nombre total de grains dans la tranche

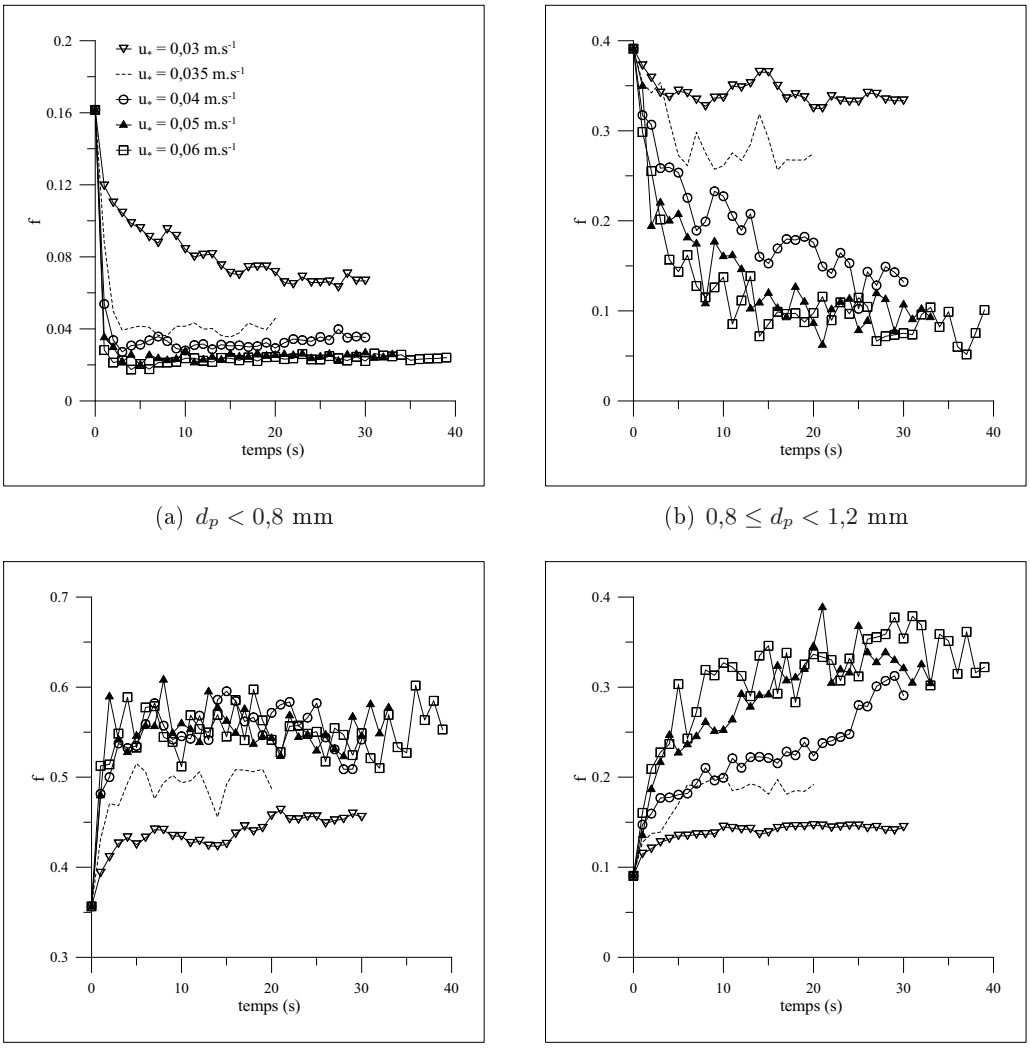
classes 1 et 2 diminue. Pour cette vitesse de frottement, le nombre de petits grains de diamètre inférieur à 0,8 mm varie de 107 à $t = 0$ s à 5 à $t = 40$ s. Dans la tranche suivante (no. 6), le sédiment est composé essentiellement des grains des classes intermédiaires 2 et 3. La fréquence de la classe 3 augmente et est égale, à la fin de la simulation, à celle de la classe 2. La fréquence de la classe 4 ($d_p \geq 1{,}8$ mm) reste constante et celle de la classe 1 ($d_p < 0{,}8$ mm) diminue. Dans les tranches no. 4 et 5 qui sont situées à l'extérieur de la couche active, le mouvement des grains est plus faible. Dans la tranche no. 5, seules les fréquences des classes 1 et 3 évoluent de façon significative, conformément à leur évolution dans la tranche no. 6. Dans la tranche no. 4, la fréquence des classes ne change pas et la distribution du diamètre des grains est identique à celle du sédiment. Il n'y a pas d'arrivée et de départ de grains dans cette tranche. La variation du nombre de grains des classes dans les tranches no. 5, 6 et 7 montre qu'il existe simultanément :

1) un transfert des grains des classes 1 et 2 ($d_p < 1{,}2$ mm) des tranches no. 6 et 7 (surface du lit) vers la tranche no. 5 (à l'extérieur de la couche charriage) ;
2) un transfert des grains de la classe 3 ($1{,}2 \leq d_p < 1{,}8$ mm) de la tranche no. 7 (surface du lit) vers la tranche no. 6 ;
3) un transfert des grains de la classe 4 ($d_p \geq 1{,}8$ mm) de la tranche no. 6 vers la tranche no. 7 (surface du lit).

Ces mouvements de grains dépendent de la vitesse de frottement. Les figures 3.68, 3.69 et 3.70 montrent l'évolution de la distribution du diamètre des grains contenus dans les trois tranches supérieures (no. 5, 6 et 7) lorsque la vitesse de frottement varie. Lorsque la vitesse de frottement est inférieure à la valeur critique, la distribution du diamètre des grains n'est pas modifiée dans les tranches no. 5 et 6. Dans la tranche no. 7, à la surface du lit, le mouvement des grains même faible permet l'augmentation de la proportion des gros grains ($d_p > 1{,}2$ mm). Lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique, le mouvement des grains entre les tranches est similaire à celui établi pour $u_* = 0{,}06$ m.s^{-1}. L'augmentation et la diminution des fréquences des classes sont liées à la vitesse de frottement. La fréquence de la classe 1 diminue dans les tranches no. 6 et 7. Elle tend vers zéro pour $u_* \geq 0{,}04$ m.s^{-1} dans la tranche no. 7. Elle augmente dans la tranche no. 5. La fréquence de la classe 2 diminue dans la tranche no. 7. Son évolution dans les tranches inférieures dépend de la vitesse de frottement. Pour $u_* < 0{,}05$ m.s^{-1}, elle augmente dans la tranche no. 6 et est constante dans la tranche no. 5. Pour $u_* \geq 0{,}05$ m.s^{-1}, elle augmente puis diminue dans la tranche no. 6 et diminue puis augmente dans la tranche no. 5. La fréquence de la classe 3 diminue dans la tranche no. 7 et augmente dans les tranches no. 5 et 6. Enfin, la fréquence de la classe 4 augmente dans la tranche no. 7. Dans les tranches inférieures, elle est constante.

3.5 conclusion

Le modèle numérique est utilisé pour étudier l'influence de la distribution de la taille des grains sur la mise en mouvement et le transport des lits de sédiments. La distribution du diamètre des grains des lits considérés dans les simulations est variable : le diamètre moyen d_m est compris entre 0,3 et 2,5 mm et l'écart-type géométrique σ_g entre 1 et 1,42. Pour chaque arrangement de grains, nous déterminons, pour plusieurs vitesses de frottement, l'évolution au cours du temps du débit de sédiments (instantané et moyen). Nous en déduisons la vitesse de frottement critique de mise en mouvement u_{*c} et la loi de transport entre le débit de sédiments sans dimension ϕ et la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. Les résultats obtenus sont conformes à ceux établis dans les expériences (Shields, 1936 ; Wilcock et coauteurs, 1988, 2001, 2003). La loi de transport est identique pour un type de sédiments donné (sédiments mono-dispersés, sédiments de granulométrie « uniforme », sédiments « dispersés », etc.). Comme le seuil d'érosion, elle dépend de la dispersion de la taille des grains (écart-type σ_g), mais aussi de la forme de la distribution (variation uniforme du diamètre, loi log-normale). Plus généralement, la présence de grains de plusieurs tailles dans l'arrangement rend celui-ci plus résistant à l'érosion et réduit le



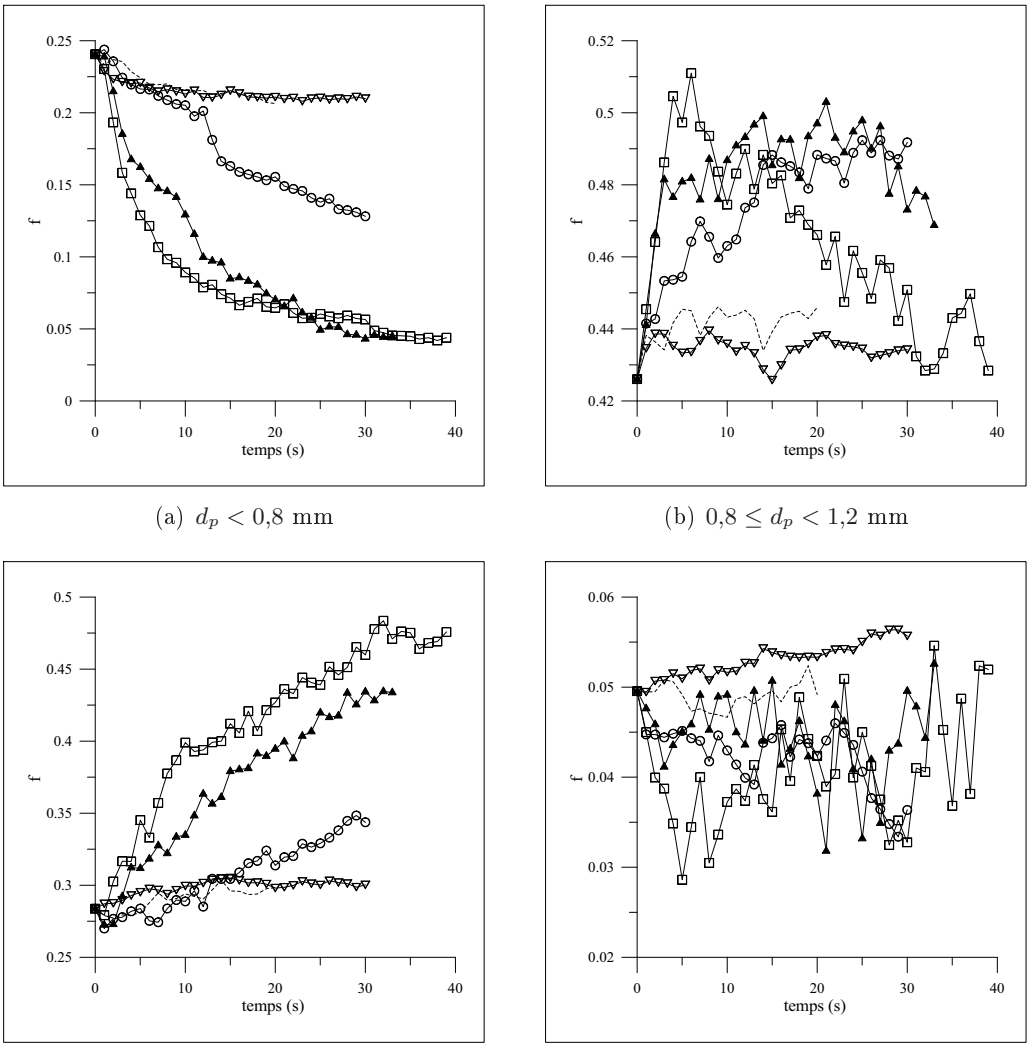
(a) $d_p < 0{,}8$ mm

(b) $0{,}8 \leq d_p < 1{,}2$ mm

(c) $1{,}2 \leq d_p < 1{,}8$ mm

(d) $d_p \geq 1{,}8$ mm

figure 3.68 – évolution de la distribution du diamètre des grains dans la tranche no. 7 en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment « dispersé » LG13 ; le seuil d'érosion est situé entre les vitesses de frottement 0,03 et 0,035 $\mathrm{m.s^{-1}}$



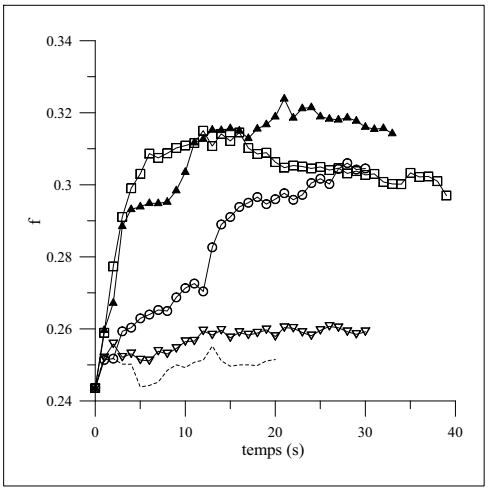
(a) $d_p < 0{,}8$ mm

(b) $0{,}8 \leq d_p < 1{,}2$ mm

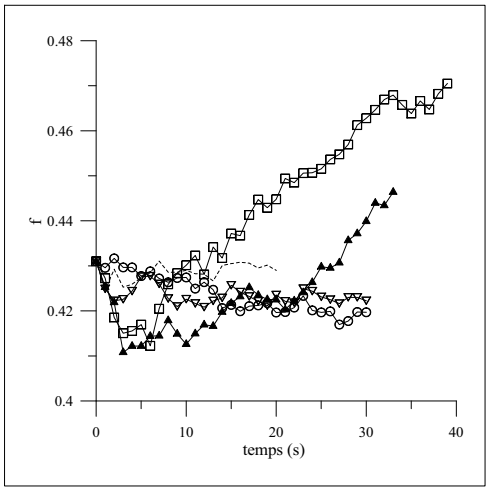
(c) $1{,}2 \leq d_p < 1{,}8$ mm

(d) $d_p \geq 1{,}8$ mm

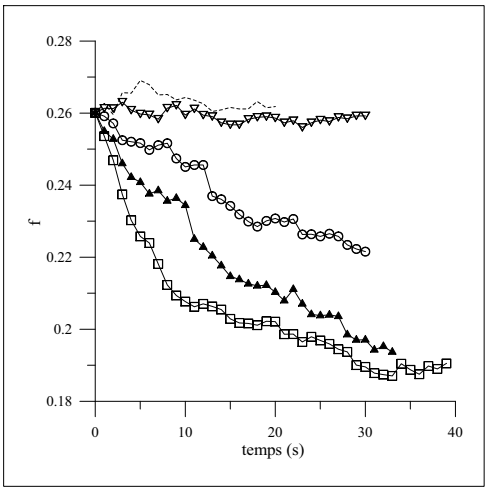
figure 3.69 – évolution de la distribution du diamètre des grains dans la tranche no. 6 en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment « dispersé » LG13 ; le seuil d'érosion est situé entre les vitesses de frottement 0,03 et 0,035 $\mathrm{m.s^{-1}}$; la légende est indiquée dans la figure 3.68



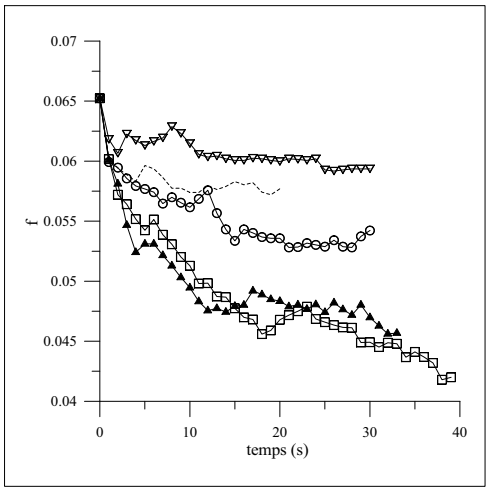
(a) $d_p < 0{,}8$ mm



(b) $0{,}8 \leq d_p < 1{,}2$ mm



(c) $1{,}2 \leq d_p < 1{,}8$ mm



(d) $d_p \geq 1{,}8$ mm

figure 3.70 – évolution de la distribution du diamètre des grains dans la tranche no. 5 en fonction de la vitesse de frottement pour le sédiment « dispersé » LG13 ; le seuil d'érosion est situé entre les vitesses de frottement 0,03 et 0,035 m.s^{-1} ; la légende est indiquée dans la figure 3.68

mouvement des particules lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique u_{*c}. Le débit des sédiments mono-dispersés est ainsi supérieur à celui des sédiments dispersés.
Le comportement du sédiment « faiblement dispersé » LG10 ($d_m = 1{,}1$ mm et $\sigma_g = 1{,}11$) est, dans les simulations, singulier. Il apparaît différent de celui des autres sédiments « faiblement dispersés » étudiés. Le sédiment LG10 est très résistant, la vitesse de frottement u_{*c} trouvée numériquement est bien supérieure à celle donnée par le critère de Shields (1936). Ce résultat peut s'expliquer par la texture de l'arrangement (cf. les expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003)).

La méthode des éléments discrets sert à connaître le déplacement des grains dans le lit. Les simulations montrent que la plupart de ces déplacements se produisent dans la couche supérieure du lit dite couche de charriage, dont l'épaisseur est estimée entre 3 et $4\,d_m$. Les vitesses et les débits de sédiments dans la direction x, qui est la direction principale de l'écoulement, y sont supérieurs aux valeurs calculées dans les directions latérale et verticale. A l'extérieur de la couche de charriage, l'influence de l'écoulement peut être négligée et le mouvement des grains est lié principalement aux interactions mécaniques dues aux contacts. Leurs vitesses et la distance parcourue dans les trois directions sont faibles et indépendantes de la vitesse de frottement.
Lorsque la vitesse de frottement est supérieure à la valeur critique u_{*c}, la distribution du diamètre des grains dans les tranches des arrangements dispersés évolue. Les petites particules se déposent entre les grosses particules et sont repoussées vers l'intérieur du lit. Parallèlement il existe un mouvement des gros grains vers la surface du lit. Ce tri granulométrique vertical dépend de la distribution du diamètre des grains, de la porosité de l'arrangement et de la vitesse de frottement. Il influe sur la granulométrie du sédiment disponible pour le transport et par conséquent, sur le débit de sédiments. Il doit être pris en compte lors de l'application des lois empiriques. Les effets du tri granulométrique observé dans les simulations ne peuvent pas être modélisés par les fonctions de sous- et surexposition utilisées dans les expériences.

conclusions et perspectives

Le modèle de transport

L'étude du transport de sédiments s'appuie, dans cette thèse, sur le développement d'un modèle numérique basé sur la Méthode des Eléments Discrets (DEM). Le modèle de transport développé repose sur le couplage du modèle DEM et d'un modèle d'écoulement.

L'approche DEM est développée à l'origine pour estimer le mouvement des particules et les forces d'interaction dans les arrangements granulaires. Elle consiste à déterminer la vitesse et la position des particules à chaque pas de temps, à partir de la résolution des équations de mouvement. Elle est ici appliquée pour reproduire le mouvement des grains à la surface d'un lit de sédiments non cohésifs comme par exemple dans les modèles de Jiang et Haff (1993), de Heald *et al.* (2004) et de Yeganeh-Bakhtiary *et al.* (2009). La méthode DEM nécessite de modéliser la trajectoire de la particule de sédiment et les interactions mécaniques entre les grains dues aux collisions ponctuelles à la surface du lit et aux contacts à l'intérieur de l'arrangement. Le grain est ici supposé soumis à cinq forces : la force de flottabilité, la force de traînée, la force de portance, la force d'accélération et les forces de contact. Les forces de contact sont décrites à partir de l'approche *soft sphere* qui est proposée par Cundall et Strack (1979). Elles sont assimilées aux forces créées par un système de ressorts et d'amortisseurs montés en parallèle placé dans les directions normale et tangentielle. La raideur des ressorts et le coefficient des amortisseurs déterminent les propriétés de la collision (coefficient de restitution, chevauchement des grains notamment).

L'écoulement au-dessus du lit de sédiments est un écoulement de couche limite turbulente. Nous choisissons de modéliser l'effet des irrégularités de la surface du lit sur l'écoulement moyen. Dans ce but, nous utilisons le modèle FLOWSTAR qui est développé par Carruthers *et al.* (2004) pour simuler l'écoulement dans une couche limite atmosphérique turbulente au-dessus d'une colline de faible pente. Carruthers *et al.* (2004) reprennent les résultats des travaux de Jackson et Hunt (1975) et de Hunt *et al.* (1988). Dans le modèle FLOWSTAR, le champ de vitesse du fluide est exprimé comme la somme du champ « non perturbé », en l'absence de la colline et du champ « perturbé ». La perturbation de la vitesse est obtenue de la résolution dans l'espace de Fourier des équations de Navier-Stokes linéarisées. La linéarisation de ces équations dépendent de la distance à la paroi et de la zone d'écoulement. Trois zones sont définies : *shear-stress layer*, *middle layer* et *outer layer*. Le modèle FLOWSTAR est appliqué, dans un premier temps, pour déterminer l'écoulement au-dessus d'une colline bi-dimensionnelle (Ishihara *et al.*, 2001) et l'écoulement au-dessus d'une dune (Raudkivi, 1963, 1966). Il y a un accord raisonnable entre les profils de vitesse dans les simulations et dans les expériences excepté en aval de l'obstacle. En aval de l'obstacle, la zone de recirculation est trop petite. Cette surestimation de la vitesse par rapport à l'expérience est liée au modèle de fermeture de la turbulence, le modèle FLOWSTAR « diffuse » trop. Les résultats numériques dépendent de la longueur horizontale L_1. La longueur L_1 caractérise les irrégularités de la surface et elle influe sur l'estimation de la perturbation de vitesse dans la direction x. Le modèle FLOWSTAR tend à surestimer cette vitesse au sommet de l'obstacle et à la sous-estimer en aval. Des recherches complémentaires doivent être réalisées afin de clarifier le rôle et la signification physique de la longueur L_1. La surface du lit de sédiments n'est pas plate et présente des dépressions et des bosses créées par les amoncellements des particules. Elle

est représentée dans le modèle de transport par une surface virtuelle formée par un ensemble de cônes placés sur les grains les plus exposés et de pente égale à 0,3. Cette surface virtuelle lisse les irrégularités de la surface réelle et permet de modéliser, dans une certaine mesure, les effets visqueux importants au voisinage des grains. Le champ de vitesse établi par le modèle FLOWSTAR au-dessus du lit est tridimensionnel. La perturbation de la vitesse dans la direction latérale est symétrique, les irrégularités de la surface étant réparties aléatoirement dans le plan horizontal.

Simulations et principaux résultats

Le modèle de transport détermine la vitesse et la position des grains au cours du temps lorsque la face supérieure de l'arrangement est soumise à un écoulement, qui est caractérisé, dans les simulations, par une vitesse de frottement. Nous estimons l'évolution du débit de sédiments en fonction du temps et l'évolution du débit moyen en fonction de la vitesse de frottement. Les simulations concernent cinq types de sédiments : des sédiments mono-dispersés qui sont des arrangements de sphères identiques ; des sédiments bi-dispersés composés de deux tailles de grains ; des sédiments dits « faiblement dispersés » dont l'écart-type géométrique de la distribution du diamètre est égal à 1,1 ; des sédiments de granulométrie dite « uniforme » dont le diamètre des grains suit une loi uniforme ; des sédiments dits « dispersés » dont l'écart-type géométrique est compris entre 1,2 et 1,4. Le diamètre moyen des grains des sédiments étudiés varie de 0,3 à 2,5 mm.
Le modèle DEM est utilisé dans un premier temps pour créer des lits de sédiments. Les particules sont lâchées l'une après l'autre. Leur position à l'instant initial varie aléatoirement dans le plan horizontal. Les particules rebondissent plusieurs fois sur la surface du lit avant de se déposer. Une fois déposée, la particule est fixe. Le fluide est supposé au repos. En raison de ces deux hypothèses, les lits créés sont dans une configuration instable et le processus d'érosion s'accompagne au début des simulations par une phase de réorganisation des grains qui aboutit à des arrangements plus compacts. L'énergie potentielle totale des grains des lits diminue initialement et cette diminution ne dépend pas de la vitesse de frottement mais de la géométrie initiale de l'arrangement. Nous montrons pour les sédiments mono-dispersés que la compacité finale est égale approximativement à celle des arrangements de sphères identiques de type A-A. Par conséquent, l'estimation de la vitesse de frottement critique des particules doit être réalisée en considérant les arrangements « travaillés », à l'issue de la phase de réorganisation. Ceci n'est pas fait dans l'étude de McEwan et Heald (2001). Ces auteurs déterminent la vitesse de frottement critique des grains exposés à la surface de lits « non travaillés ». Nos résultats mettent en défaut la distribution de la valeur critique proposée dans leur étude.
Dans le modèle de transport, les particules sont mises en mouvement de deux façons : entraînées par le fluide ou éjectées par une collision. La phase initiale de réorganisation du lit se traduit par un transport de sédiments qui peut être important, même pour des vitesses de frottement faibles. Pour ces vitesses, le débit de sédiments tend à s'annuler et à la fin des simulations, seuls quelques grains sont en mouvement à la surface du lit. Pour des vitesses plus élevées, le débit fluctue autour d'une valeur non nulle et l'ensemble des grains du lit est mobile. Le seuil d'érosion est défini à partir du degré d'activité des lits de sédiments et du mouvement global des particules. Nous considérons que le seuil d'érosion du lit se produit dans l'intervalle de vitesses de frottement pour lequel le comportement du débit de sédiments change, c'est-à-dire pour lequel le mouvement sporadique des grains devient général. L'évolution du débit moyen en fonction de la vitesse de frottement peut être décrite par deux relations affines et le seuil d'érosion correspond au changement de pente dans la courbe d'évolution du débit moyen. La vitesse de frottement critique est comparée à des données expérimentales recueillies par Raudkivi (1998) et au critère de Shields proposé par van Rijn (1984a). Les valeurs numériques et expérimentales convergent à l'exception des petits diamètres ($d_p \leq 0{,}5$ mm). Pour ces diamètres, la valeur critique est sous-estimée par rapport à l'expérience. Nous expliquons cette sous-estimation par la présence dans

les expériences de la sous-couche visqueuse. Cette sous-couche visqueuse qui protège les grains de l'écoulement n'est pas représentée dans le modèle FLOWSTAR. La méthode qui est utilisée par McEwan et Heald (2001) et qui repose sur l'équilibre des moments de la force fluide et de la force de flottabilité n'est pas satisfaisante. Elle néglige l'effet des collisions sur la mise en mouvement des grains (montrée dans nos simulations) et ainsi surestime la vitesse de frottement critique.

Le débit de sédiments q_t dépend du diamètre moyen des grains et de la vitesse de frottement. Mais pour chaque type de granulométrie étudié, nous obtenons une loi de transport unique entre le débit de sédiments sans dimension ϕ et la différence des paramètres de Shields $\theta - \theta_c$. La loi de transport peut être approchée par une relation linéaire. Nous constatons que cette relation linéaire dépend plus de la forme de la distribution de la taille des grains que du diamètre moyen d_m ou de l'écart-type géométrique σ_g : cf. par exemple l'évolution du débit ϕ pour les sédiments de granulométrie « uniforme » et les sédiments « dispersés ». Les lois de transport déterminées par le modèle de transport sont comparables aux relations empiriques établies avec des sédiments quasi-uniformes ($\sigma_g \leq 1{,}3$) telles celles de Meyer-Peter et Müller (1948) et de Fernandez Luque et van Beek (1976) et aux résultats expérimentaux de Wilcock et coauteurs (1988, 2001, 2003) qui concernent des sédiments de granulométries quasi-uniforme et dispersée ($1{,}1 < \sigma_g < 5{,}4$).

Le débit de sédiments est dû essentiellement au mouvement des grains situés dans la couche supérieure de l'arrangement. L'épaisseur de cette couche est estimée dans les simulations entre trois et quatre fois le diamètre moyen. A l'extérieur de cette couche, l'influence de l'écoulement est négligeable et le mouvement des particules est généré presque uniquement par les forces de contact. Par conséquent, leurs vitesses et les distances parcourues sont faibles. Dans la couche de surface, les particules se déplacent principalement dans la direction des x positifs qui est la direction de l'écoulement non perturbé. Pour des vitesses de frottement supérieures à la valeur critique, la vitesse moyenne des grains dans cette direction est de l'ordre de u_*. Elle est bien supérieure aux vitesses calculées dans les autres directions. Nous remarquons que, dans les directions latérale et verticale, la distribution des composantes de la vitesse est approximativement symétrique. Comme dans les expériences, le mouvement des grains se traduit par une modification de la distribution de la taille des grains à la surface du lit. Nous observons un tri granulométrique vertical et le lessivage des plus petites particules vers l'intérieur du lit. Ce tri granulométrique dépend de la distribution du diamètre des grains et de la vitesse de frottement. Il explique l'évolution de la vitesse des grains en fonction du diamètre et la sous-représentation des petits grains dans le transport. Les interactions entre les classes de grains ne peuvent pas être dans les simulations représentées par les fonctions de sous- et surexpositions qui sont généralement utilisées pour estimer, dans les expériences, le débit de sédiments dispersés.

La dispersion de la taille des grains influe à la fois sur le seuil d'érosion des lits et sur le mouvement des particules. La présence de grains de plusieurs tailles rend l'arrangement plus résistant. Ainsi, la vitesse de frottement critique établie pour les sédiments « faiblement dispersés » est supérieure à celle pour les sédiments mono-dispersés de même diamètre moyen. Pour des vitesses de frottement supérieures à la valeur critique, le mouvement global des particules dans les arrangements composés de plusieurs tailles de grains tend à être ralenti par rapport au cas mono-dispersé. Le diamètre moyen d_m ne permet pas à lui seul de déterminer le seuil d'érosion et le transport de sédiments. En effet, ces deux paramètres dépendent aussi de la forme de la distribution : cf. le cas des sédiments bi-dispersés LB10–13 et du sédiment « faiblement dispersé » LG10. Le comportement du sédiment LG10 est particulier. Il est, dans les simulations, très résistant à l'érosion, la vitesse de frottement critique estimée est bien supérieure à la valeur obtenue pour le sédiment mono-dispersé de même diamètre moyen et aux valeurs expérimentales. L'évolution du débit ϕ en fonction de $\theta - \theta_c$ est approximativement celle des sédiments « dispersés » (LG11–13). Le comportement des autres sédiments « faiblement dispersés » ($d_m \leq 0{,}7$ mm) est plus proche de celui des sédiments mono-dispersés : l'évolution du débit ϕ est identique pour les deux types de granulométrie.

Le mouvement des sédiments bi-dispersés est intéressant car il permet d'étudier le mécanisme de tri granulométrique et la formation du pavage. Les simulations réalisées avec ces sédiments montrent que le tri granulométrique dépend de la différence des deux diamètres. Cette différence détermine la porosité de l'arrangement. Dans cette thèse, le comportement des sédiments bi-dispersés ne dépend pas du nombre de petits grains. La teneur en petits grains est inférieure en poids à 18%. Wilcock et coauteurs (2001, 2003) notent que le comportement des sédiments évolue lorsque la teneur en sable est approximativement égale à 30%. Des simulations supplémentaires doivent être réalisées avec des sédiments contenant plus de petits grains. Le but de ces simulations sera de reproduire le comportement des lits de sédiments observé dans les expériences de Wilcock et coauteurs (2001, 2003), notamment les phénomènes *framework-supported* et *matrix-supported* et ainsi d'identifier les mécanismes à l'origine du lessivage des petits grains. Les simulations pourront être aussi utilisées pour simuler la rupture du pavage.

Développements envisagés et perspectives

Le modèle de transport développé repose sur plusieurs coefficients qui déterminent les propriétés de la trajectoire et de la collision. La valeur de ces coefficients est estimée à partir de la littérature. Les simulations montrent que la plupart des coefficients n'ont pas d'influence sur le résultat du modèle, à condition de rester dans une gamme de valeurs raisonnables. Le coefficient de portance est le seul coefficient qui influe de façon importante sur le débit de sédiments. La valeur utilisée dans les simulations est déduite de la relation proposée par van Rijn (1984a) qui est relativement approchée. Ainsi, nous avons besoin d'établir plus précisément l'expression du coefficient C_L pour les grains de sédiment et de clarifier son rôle dans le calcul du débit. Pour cela, nous pourrons, dans un premier temps, considérer le mouvement de saltation d'un grain au-dessus d'un lit de sédiments fixe.
D'autres développements envisagés concernent le modèle d'écoulement. Pour simplifier, nous négligeons, dans cette thèse, les effets des fluctuations turbulentes de la vitesse du fluide sur le transport de sédiments. Les expériences en laboratoire indiquent pourtant qu'elles participent à la mise en mouvement du lit. L'implémentation d'une fonction permettant de reproduire ces fluctuations constituera un développement intéressant du modèle. Sa définition pourra s'appuyer par exemple sur la méthode *Kinematic Simulation* (Kraichnan, 1970 ; Fung *et al.*, 1992 ; Ushijima, 1998). Les simulations réalisées avec des petits sédiments montrent par ailleurs la nécessité de modifier le modèle FLOWSTAR afin de prendre en compte la présence de la sous-couche visqueuse.
Enfin, la durée des simulations est dans cette thèse relativement longue. Elle dépend pour une grand part de la détection des collisions entre les grains. Pour cette raison, les dimensions des arrangements étudiés dans le plan horizontal sont petites. Or il est nécessaire, pour reproduire des phénomènes comme la formation de dunes, de travailler avec des arrangements plus grands. Une parallélisation même partielle du code de calcul permettra de réduire de manière substantielle la durée des simulations, compte tenu des performances des calculateurs parallèles existants.

liste des symboles

1, 2	indices des particules
(0), (2)	indices relatifs à l'instant avant et après la collision
01	indice relatif à la phase de compression de la collision
12	indice relatif à la phase de restitution de la collision
a	constante ; hauteur de référence (m) (van Rijn, 1984b)
a_k	pente du cône (cf. le modèle d'écoulement)
a_p	rayon de la particule (m)
a_{pj}	rayon de la particule j (m)
a'	constante
a^+	nombre sans dimension basé sur le rayon de la particule : $a^+ = \frac{a_p u_*}{\nu}$
a_1, a_2, a_3	constantes (Shields, 1936)
A	coefficient de calibration dans le modèle de Ackers et White (1973)
A_c	nombre sans dimension qui quantifie l'importance de l'accélération convective vis-à-vis de l'accélération locale : $A_c = \frac{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2}{d_p \left\| \frac{d(\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p)}{dt} \right\|}$
A_p	surface de la particule exposée à l'écoulement (m^2)
A_r	hauteur des rugosités (m) (Matsumoto et Saito, 1970)
A_1, A_2, A_3	constantes intervenant dans l'expression du coefficient de traînée proposée par Morsi et Alexander (1972)
b	constante ; indice relatif au transport par charriage (*bed load*)
B	largeur du canal (m) ; constante intervenant dans l'expression de la vitesse de frottement critique proposée par White (1940) : $B = \sqrt{\frac{2\tan\alpha}{3\beta}}$
c	indice relatif au seuil d'érosion (pour critique) ; concentration de particules
c_a	concentration de référence (van Rijn, 1984b)

c_b concentration de particules transportées par charriage (van Rijn, 1984a)

c_n, c_τ coefficients d'amortissement dans les directions normale et tangentielle ($\mathrm{kg.s^{-1}}$) (Cundall et Strack, 1979)

C matrice carrée diagonale utilisée pour calculer la force de traînée en présence de parois ; coefficient de Chézy ; coefficient de calibration dans le modèle de Ackers et White (1973) ; point de contact

C_D coefficient de traînée de la particule : $C_D = \dfrac{\|\overrightarrow{F}_D\|}{\frac{1}{2}\rho A_p \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2}$

C_{D0} coefficient de traînée de la particule dans un écoulement uniforme et permanent

C_D^* coefficient de traînée de la particule : $C_D^* = \dfrac{\|\overrightarrow{F}_D\|}{\frac{1}{2}\rho A_p u_*^2}$

C_H coefficient empirique relatif à la force histoire (Odar et Halmiton, 1964)

C_L coefficient de portance de la particule : $C_L = \dfrac{\|\overrightarrow{F}_L\|}{\frac{1}{2}\rho A_p \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2}$

C_{LG} coefficient de portance dans un écoulement de déformation pure (cf. la force $\overrightarrow{F}_{LG}$)

C_{LM} coefficient de portance dit de Magnus

C_{LS} coefficient de portance dit de Saffman

$C_{L\Omega}$ coefficient de portance dans un écoulement de rotation pure (cf. la force $\overrightarrow{F}_{L\Omega}$)

C_{L0} coefficient intervenant dans l'expression du coefficient de portance de Takemura et Magnaudet (2003)

C_L^* coefficient de portance de la particule : $C_L^* = \dfrac{F_L}{\frac{1}{2}\rho A_p u_*^2}$

C_M coefficient de masse ajoutée

$C_{\mathcal{M}}$ coefficient relatif au moment exercé par le fluide sur la particule : $C_{\mathcal{M}} = \dfrac{\mathcal{M}}{\frac{1}{2}\rho\,\pi a_p^3 \|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|^2}$

C' coefficient de Chézy lié à la rugosité due aux grains

$C_\parallel$ coefficient correctif relatif à la force de traînée lorsque la particule se déplace parallèlement à la paroi

$C_\perp$ coefficient correctif relatif à la force de traînée lorsque la particule se déplace perpendiculairement à la paroi

CF facteur de forme

d hauteur de déplacement (m) (Jackson, 1981)

d_{ch} distance entre deux grains situés dans deux couches successives de l'arrangement « régulier » (m)

d_g diamètre moyen géométrique des grains (m)

d_i diamètre moyen des grains appartenant à la classe i (m)

d_m diamètre moyen arithmétique des grains (m)

$d_{\min}$, $d_{\max}$ diamètres minimal et maximal des grains du sédiment (m)

d_p diamètre du grain (ou de la particule) (m)

d_s diamètre utilisé par van Rijn (1984b) pour calculer le débit q_s lorsque la distribution de la taille des grains n'est pas uniforme (m) : $\dfrac{d_s}{d_{50}} = 1 + 0{,}011(\sigma_g - 1)(T - 25)$

d_{sm} diamètre moyen des grains du sédiment à la surface du lit (m) (Wilcock et Crowe, 2003)

d_u diamètre « invariant » (m) (Proffitt et Sutherland, 1983)

d_0 distance (m) (Jackson, 1981)

d_{25}, d_{35}, d_{50}, d_{65}, d_{75}, d_{95} quantiles de la distribution de la taille des grains (m)

d_* diamètre sans dimension (m) : $d_* = d\left[\dfrac{(\gamma - 1)g}{\nu^2}\right]^{1/3}$

$\bar{d}_{avg}$ diamètre qui modélise la rugosité du lit (m) (Egiazaroff, 1965)

D diamètre de l'hémisphère (ou de la sphère) utilisé pour mesurer la force fluide (m) ; diamètre d'une conduite (m)

D_0 diamètre des hémisphères (ou des sphères)« obstacles » (m)

e_n coefficient de restitution normal

$e_{n\,\max}$ valeur du coefficient e_n obtenue dans un fluide de résistance négligeable (Joseph *et al.*, 2001 ; Gondret *et al.*, 2002)

e_τ coefficient de restitution tangentiel

E erreur commise

E_p énergie potentielle totale des grains du lit (J) : $E_p = \dfrac{1}{N}\, g \sum_{i=1}^{N} m_{pi} z_{pi}$; énergie potentielle de la tranche qui est égale à l'énergie des grains contenus initialement dans cette tranche (J) : $E_p = \dfrac{1}{N_k}\, g \sum_{i=1}^{N_k} m_{pi} z_{pi}$

E_{pi} énergie potentielle de la tranche à l'instant initial (J)

E_p^f énergie potentielle totale des grains du lit à la fin des simulations (J)

E_p^* énergie potentielle totale des grains dans un arrangement « régulier » (J)

E_1, E_2 module de Young des matériaux 1 et 2 (N.m^{-2}) (Hertz, 1882)

f fonction de la variable z qui est utilisée pour décrire la composante dans la direction x de la vitesse du fluide ; coefficient de perte de charge ; coefficient de frottement dynamique ; indice relatif au fluide ; fonction « surface » qui décrit l'évolution de la surface par rapport à une origine (m)

$\tilde{f}$ transformée de Fourier de la fonction « surface »

f_0 coefficient de frottement statique

f' dérivée de la fonction f

f_i proportion des grains de la classe i dans le sédiment exprimée en poids : $f_i = \dfrac{m_i}{m_{\text{total}}}$; fréquence de la classe i : $f_i = \dfrac{n_i}{N_L}$

F coefficient intervenant dans le modèle de transport en suspension de van Rijn (1984b) ; constante intervenant dans le modèle de Einstein-Brown (1950)

F_{cx}, F_{cy} composantes de la force de contact dans les directions x et y (N)

F_D norme du vecteur $\overrightarrow{F}_D$ (N)

F_{HL} composante de la force histoire dans la direction perpendiculaire à la vitesse relative $\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p$ (N)

F_{gr} paramètre de mobilité (Ackers et White, 1973) : $F_{gr} = \dfrac{u_*^n}{\sqrt{(\gamma-1)gd_p}} \left[\dfrac{U}{32^{1/2}} \log\left(\dfrac{\alpha h}{d_p}\right)\right]^{n-1}$

F_{gr}^U paramètre de mobilité dans le cas « uniforme » (Ackers et White, 1973 ; Proffitt et Sutherland, 1983)

F_L norme du vecteur $\overrightarrow{F}_L$ (N)

F_{LS} force de portance déterminée par Saffman (1965, 1968) (N)

F_{L+} nombre sans dimension basé sur la force de portance : $F_L^+ = \dfrac{F_L}{\rho\nu^2}$

F_n, F_τ composantes normale et tangentielle de la force de contact (N)

F_s proportion de sable à la surface du lit (Wilcock et Crowe, 2003)

F_x composante de la force fluide dans la direction x (N)

F_1^{-1}, F_2^{-1} transformées de Fourier inverses qui dépendent de la fonction surface f (Carruthers *et al.*, 2004)

$\overline{F}_x$ valeur moyenne de la composante F_x (N)

$\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ fonctions (cf. notamment le critère de Shields)

g	accélération de la pesanteur ($\mathrm{m.s^{-2}}$) ; fonction à deux variables x et y
$\tilde{g}$	transformée de Fourier de la fonction g
F_k, F_k^*	valeurs de la fonction de répartition du diamètre des grains du sédiment en d_k et en d_k^*
Fr	nombre de Froude : $Fr = \dfrac{u_d}{\sqrt{gh}}$
G	taux de cisaillement ($\mathrm{s^{-1}}$) ; distance entre deux hémisphères (m) (Brayshaw *et al.*, 1983)
G_{gr}	nombre sans dimension basé sur le débit q_t (Ackers et White, 1973) : $G_{gr} = \dfrac{q_t}{U d_p}\left(\dfrac{u_*}{U}\right)^n$
G_n	composante dans la direction normale de la vitesse relative $\overrightarrow{G}$ ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
G_{u1}, G_{u2}	fonctions de la variable Z (Carruthers *et al.*, 2004)
$\mathcal{G}$	fonction
h	hauteur d'eau (m) ; épaisseur d'air au-dessus du sol (m)
h_m	position de la couche externe (m) (cf. le modèle d'écoulement)
H	hauteur de la colline (m) (cf. le modèle d'écoulement)
H_b	épaisseur de l'arrangement de grains (m)
i, j, k, l m, n	indices désignant une particule ; indices désignant une classe de grains ; indices
$\mathcal{I}$	période moyenne d'apparition des événements turbulents (s) ; moment d'inertie du solide
$J(\varepsilon)$	fonction de la variable ε qui intervient dans le calcul de la force de portance (McLaughlin, 1991)
$J_G(\varepsilon_G)$	fonction de la variable ε_G qui intervient dans le calcul de la force de portance $\overrightarrow{F}_{LG}$ (Magnaudet et Legendre, 1998)
J_n	composante dans la direction normale de l'impulsion $\overrightarrow{J}$ (N.s)
$J_n^{(10)}$, $J_n^{(21)}$	composantes normales de l'impulsion $\overrightarrow{J}$ pendant la phase de compression et pendant la phase de restitution (N.s) (Tsuji *et al.*, 1989a,b ; Crowe *et al.*, 1998)
$J_\Omega(\varepsilon_\Omega)$	fonction de la variable ε_Ω qui intervient dans le calcul de la force de portance $\overrightarrow{F}_{L\Omega}$ (Magnaudet et Legendre, 1998)
k	hauteur de rugosité (m)
k_n, k_τ	raideur des ressorts dans les directions normale et tangentielle ($\mathrm{N.m^{-1}}$) (Cundall et Strack, 1979)
k_s	hauteur de rugosité équivalente de Nikuradse (m)

k_1, k_2 nombres d'onde qui correspondent aux variables x et y dans l'espace de Fourier (rad.m^{-1})

k_{12} nombre d'onde (rad.m^{-1}) : $k_{12} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$

k_* constante (Carruthers *et al.*, 2004) : $k_* = \dfrac{1}{\delta L^*}$

$\bar{k}_1$ nombre d'onde (m^{-1}) (Carruthers *et al.*, 2004)

ker, kei fonctions de Kelvin

K_s rugosité totale du lit (Meyer-Peter et Müller, 1948)

K_n coefficient d'élasticité (N.m$^{-3/2}$) (Hertz, 1882)

K_s' rugosité liée aux grains (Meyer-Peter et Müller, 1948)

K_0 fonction de Bessel modifiée

$\mathcal{K}$ noyau de la force histoire F_H

$\mathcal{K}_L$ noyau de la force histoire F_{HL} (Wakaba et Balachandar, 2005)

l position de la couche intermédiaire (m) (cf. le modèle d'écoulement)

l_b dimension de l'arrangement dans la direction x (m)

l_p distance entre le centre de la particule et la paroi (m)

l_p^* distance entre la surface de la particule et la paroi (m)

l_s épaisseur de la couche de surface (m) (cf. le modèle d'écoulement)

L échelle de longueur (m) ; demi-longueur de la colline (m) (cf. le modèle d'écoulement)

L_b dimension de l'arrangement dans la direction y (m)

$L_{i,j}$ distance entre le nœud (i,j) et le sommet du cône qui lui est le plus proche

L_r distance entre deux rugosités (m) (Matsumoto et Saito, 1970)

L_x, L_y dimensions du domaine dans les directions x et y (m) (cf. la définition de la transformée de Fourier discrète)

L_1 longueur horizontale caractéristique (m) (cf. le modèle d'écoulement)

m moyenne de la variable $\ln X$; constante qui intervient dans la loi puissance décrivant la vitesse fluide u_f ; coefficient de calibration dans le modèle de Ackers et White (1973) ; indice relatif à la classe de diamètre moyen d_m ; masse (kg)

m_i masse des grains appartenant à la classe i (kg)

m_j, m_k masses ponctuelles (kg) (cf. collision directe entre deux sphères)

m_{jk} masse réduite : $m_{jk} = \dfrac{m_j m_k}{m_j + m_k}$

$m_{\min}$ masse des grains de diamètre égal à $d_{\min}$ (kg)

m_p masse de la particule (kg)

m_{total} masse totale des grains contenus dans l'arrangement (kg)

$\mathcal{M}$ norme du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ (N.m)

$\mathcal{M}_D$ moment de la force de traînée (N.m)

$\mathcal{M}_G$ moment de la force de flottabilité (N.m)

$\mathcal{M}_{cy}$ composante du moment de la force de contact dans la direction y (N.m)

$\mathcal{M}_{mn}$ projection de la somme $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_F$ sur l'axe a_{mn}

n nombre de grains déplacés par unité de temps et par unité de surface ; coefficient dans le modèle de Ackers et White (1973) ; coefficient de Manning ; indice relatif à la direction normale au plan de contact

n_{ch} nombre de couches de grains dans l'arrangement (cas des arrangements « réguliers ») : $n_{ch} = \dfrac{N}{N_{ch}}$

n_i nombre de grains de la classe i ; nombre de grains de la classe i contenus dans la tranche

n_s nombre de grains disponibles à la surface

n_0 indice de la couche pour lequel la vitesse est nulle (Du Boys, 1879)

n' nombre de grains déplacés par unité de temps

N nombre de classes de grains dans le sédiment ; nombre de particules utilisées dans le modèle numérique ; nombre sans dimension basé sur le nombre de grains déplacés n (Neill et Yalin, 1969) ; nombre de mesures

N_c nombre de cônes qui recouvrent la surface du lit

N_{ch} nombre de grains composant une couche de l'arrangement (cas des arrangements « réguliers ») : $N_{ch} = \dfrac{l_b L_b}{d_p^2}$

N_k nombre de grains contenus initialement dans la tranche de l'arrangement

N_L nombre de grains contenus dans la tranche à l'instant t

N_L^+ nombre de grains contenus dans la tranche à l'instant t dont la vitesse u_{pi} est positif

N_L^- nombres de grains contenus dans la tranche à l'instant t dont la vitesse u_{pi} est négatif

$N_{\min}$ nombre de grains de diamètre égal à $d_{\min}$

N_t nombre d'enregistrements réalisés à l'instant t

N_x, N_y nombre de nœuds dans les directions x et y (cf. la définition de la transformée de Fourier)

O centre de la particule

p pression (Pa)

p_{ei} probabilité que le grain de diamètre d_i soit exposé à l'écoulement (Wu *et al.*, 2000)

p_{eij} probabilité que le grain de diamètre d_i ne soit pas protégé par le grain de diamètre d_j (Wu *et al.*, 2000)

p_{hi} probabilité que le grain de diamètre d_i soit protégé à l'écoulement (Wu *et al.*, 2000)

p_{hij} probabilité que le grain de diamètre d_i soit protégé par le grain de diamètre d_j (Wu *et al.*, 2000)

p_{τ_j} intervalle de temps pendant lequel la contrainte de frottement est comprise entre $\tau_j - \Delta\tau$ et $\tau_j + \Delta\tau$

P nombre sans dimension relatif à la pression p (cf. les équations de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle)

q_b débit volumique de sédiments transportés par charriage par unité de largeur ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_s débit volumique de sédiments transportés en suspension par unité de largeur ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_t débit volumique de sédiments transportés par unité de largeur ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$) (Jiang et Haff, 1993) : $q_t = \dfrac{1}{S_b}\sum_{i=1}^{N} V_{pi} u_{pi}$

q_{ti} débit volumique de sédiments appartenant à la classe i ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_{tk} débits de sédiments estimés aux N_t instants successifs ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_{tm} débit moyen de sédiments à l'instant t ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$) : $q_{tm} = \dfrac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t} q_{tk}$

q_t^L, q_t^V débits de sédiments dans les directions latérale et verticale ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_t^{L+}, q_t^{L-} débits de sédiments dans les directions $y > 0$ et $y < 0$ ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q_t^{V+}, q_t^{V-} débits de sédiments dans les directions $z > 0$ et $z < 0$ ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

q^+ débit de sédiments sans dimension : $q^+ = \dfrac{q_t}{d_p u_*}$

Q_i débit de l'écoulement estimé en x_i ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

Q_m débit de l'écoulement moyen ($\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$)

r rapport des débits réel et calculé ; distance entre le centre de la particule et le point de contact (m) (Tsuji *et al;*, 1989a,b) ; variable aléatoire (Niño *et al.*, 1994a)

R rayon hydraulique qui est égal au rapport de la section du canal et du périmètre mouillé (m) ; force horizontale maintenant le grain (N) (cf. le critère de Shields) ; variable aléatoire (Tsuji *et al.*, 1987)

R_b rayon hydraulique lié au lit (m) (méthode de Vanoni-Brooks)

Re nombre de Reynolds : $Re = \dfrac{LU}{\nu}$

Re_G nombre de Reynolds basé sur le taux de cisaillement G : $Re_G = \dfrac{d_p^2|G|}{\nu}$

Re_{l_p} nombre de Reynolds basé sur la distance l_p : $Re_{l_p} = \dfrac{l_p\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}{\nu}$

Re_p nombre de Reynolds de la particule qui quantifie l'importance relative des forces d'inertie par rapport aux forces visqueuses : $Re_p = \dfrac{d_p\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}{\nu}$

Re_Ω nombre de Reynolds basé sur la vitesse de rotation de la particule : $Re_\Omega = \dfrac{d_p^2\Omega_p}{\nu}$

Re_* nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement : $Re_* = \dfrac{d_p u_*}{\nu}$

s indice relatif au transport en suspension

S surface de la particule (m^2)

$\mathbf{S}$ tenseur des taux de déformation (partie symétrique du tenseur de gradient de vitesse fluide)

S_f pente de la ligne de charge

S_{ij} coefficients du tenseur $\mathbf{S}$

S_k coefficient d'asymétrie arithmétique (m)

S_0 pente du lit

St nombre de Stokes : $St = \dfrac{\rho_s LU}{\mu}$

St_c nombre de Stokes critique (Joseph *et al.*, 2001 ; Gondret *et al.*, 2002)

t temps (s)

t_0 instant correspondant au début de la collision (s)

T paramètre de mobilité (van Rijn, 1984a) : $T = \dfrac{u_*'^2 - u_{*c}^2}{u_{*c}^2}$; nombre sans dimension relatif au temps (cf. les équations de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle)

T_0 durée (théorique) de la collision élastique entre deux sphères (s)

T_1 durée (théorique) de la collision non élastique entre deux sphères (s)

T_{damp} constante de temps (s) : $T_{\text{damp}} = \dfrac{1}{\beta}$ (cf. la collision directe entre deux sphères)

T_{50} paramètre de mobilité basé sur le diamètre d_{50} (Proffitt et Sutherland, 1983 ; van Rijn, 1984a)

u_b	vitesse moyenne des particules en saltation dans la direction x ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_d	vitesse débitante égale au débit divisé par la section de passage ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u, v, w	composantes de la perturbation de la vitesse du fluide créée par la présence de la colline ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
$\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$	transformée de Fourier des composantes de la perturbation de vitesse fluide
u_f, v_f, w_f	composantes de la vitesse du fluide dans les directions x, y et z ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{fm}	vitesse du fluide mesurée ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
$u_{\max}$	valeur maximale de la composante de la vitesse $\overrightarrow{u}_{\mathrm{moy}}$ dans la direction x ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u^d_{moy}	vitesse moyenne des grains appartenant à la classe de diamètre d_i ($\mathrm{m.s^{-1}}$) : $u^d_{\mathrm{moy}} = \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{N_c} u_{pi}$
u^+_{moy}, u^-_{moy}	vitesses moyennes des grains dans les directions x positif et x négatif ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_p, v_p, w_p	composantes de la vitesse de la particule dans les directions x, y et z ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_∞	vitesse fluide au centre de la particule ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_*	vitesse de frottement ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u'_*	vitesse de frottement liée à la rugosité due aux grains ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{*c}	vitesse de frottement critique ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{*ci}	vitesse de frottement critique relative à la classe de grains de diamètre d_i ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{*cs}	vitesse de frottement critique de mise en suspension ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{*c1}, u_{*c2}	vitesses de frottement qui définissent dans les simulations l'intervalle pour lequel se produit le seuil d'érosion ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u^S_{*c}	vitesse de frottement critique déterminée suivant la méthode de Shields (1936) ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u^E_{*c}	vitesse de frottement critique déterminée à partir des relations de van Rijn (1984a) ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u_{*r}	vitesse de frottement de référence ($\mathrm{m.s^{-1}}$) (Parker *et al.*, 1982)
$\overline{u}_f$	valeur moyenne de la composante u_f ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u', v', w'	fluctuations de la vitesse fluide dans les direction x, y et z ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
u^+	nombre sans dimension basé sur la vitesse u_f : $u^+ = \frac{u_f}{u_*}$
U	échelle de vitesse ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
U_f	moyenne de la vitesse fluide u_f sur la hauteur d'eau ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

U_i	nombre sans dimension relatif à la composante u_{fi} de la vitesse du fluide (cf. les équations de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle)
$U_{\max}$	valeur maximale de la vitesse u_f obtenue en $z = z_{\max}$ ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
U_0	vitesse non perturbée, en amont de la colline ($\mathrm{m.s^{-1}}$) (cf. le modèle d'écoulement)
v^+_{moy}, v^-_{moy}	vitesses moyennes des grains dans les directions y positif et y négatif ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
v_n	vitesse de la couche n dans le modèle de Du Boys (1879) ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
$v_n^{(0)}$	vitesse relative des deux masses ponctuelles à l'instant initial ($\mathrm{m.s^{-1}}$) (cf. la collision directe entre deux sphères)
V	vitesse caractéristique ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
V_p	volume de la particule ($\mathrm{m^3}$)
w^+_{moy}, w^-_{moy}	vitesses moyennes des grains dans les directions z positif et z négatif ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
w_s	vitesse de sédimentation d'une particule isolée ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
w_{sm}	vitesse de sédimentation d'une particule dans un écoulement chargé de sédiments ($\mathrm{m.s^{-1}}$)
W	débit sans dimension : $W = \dfrac{(\gamma - 1)\, g q_t}{u_*^3}$
x, y, x	coordonnées cartésiennes du point
x_p, y_p, z_p	composantes du vecteur position de la particule dans les directions x, y et z
x_{ck}, y_{ck}, z_{ck}	coordonnées du sommet du cône
X_m	moyenne de la variable X
X	variable aléatoire
X_i	nombre sans dimension relatif aux coordonnées x_i (cf. les équations de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle)
z	distance au lit (m)
z_f	position de la paroi en x_i (m)
z_{fm}	position moyenne de la surface du lit (m)
$z_{\max}$	distance au lit où la vitesse u_f est maximale (m)
z_0	longueur caractéristique de rugosité (m)
z_{paroi}	position de la paroi (m) (Matsumoto et Saito, 1970)
z^+	nombre sans dimension basé sur la distance au lit z : $z^+ = \dfrac{z u_*}{\nu}$
Z	paramètre de suspension : $Z = \dfrac{w_s}{\beta \kappa u_*}$; distance locale à la surface solide (m) : $Z = z - f(x,y)$ (cf. le modèle de l'écoulement)

Z' paramètre de suspension (van Rijn, 1984b) : $Z' = Z + \varphi'$

α angle (°) ; coefficient de calibration dans le modèle de Ackers et White (1973) ; constante (cf. la définition du pas de temps utilisée) ; variable aléatoire (Matsumoto et Saito, 1970) ; constante (Carruthers *et al.*, 2004) : $\alpha = 2\sqrt{\dfrac{k_1 \ln(l/z_0)}{2\kappa^2}}$

α_d variable aléatoire (cf. les sédiments de granulométrie dite « uniforme »)

α_G nombre sans dimension basé sur le taux de cisaillement G : $\alpha_G = \dfrac{d_p^2 G}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$

α_S nombre sans dimension : $\alpha_S = \dfrac{d_p \left(2 \sum\limits_{i,j} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2}}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$

α_Ω nombre sans dimension basé sur la vitesse de rotation de la particule : $\alpha_\Omega = \dfrac{a_p \Omega_p}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$; nombre sans dimension basé sur le tenseur des taux de rotation (Magnaudet et Legendre, 1998) : $\alpha_\Omega = \dfrac{d_p \left(2 \sum\limits_{i,j} \Omega_{ij} \Omega_{ij} \right)^{1/2}}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$

α_{Ω_r} nombre sans dimension : $\alpha_{\Omega_r} = \dfrac{a_p \|\overrightarrow{\Omega}_r\|}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$

α_{ω_f} nombre sans dimension basé sur la vorticité : $\alpha_{\omega_f} = \dfrac{a_p \|\overrightarrow{\omega}_f\|}{\|\overrightarrow{u}_f - \overrightarrow{u}_p\|}$

α_2 constante (van Rijn, 1984b)

β paramètre intervenant dans l'expression du moment $\mathcal{M}_\mathcal{D}$ proposée par White (1940) ; paramètre modélisant la différence de diffusivités de la particule de sédiment et de la particule fluide (van Rijn, 1984b) ; coefficient d'amortissement (s^{-1}) (cf. la collision directe entre deux sphères) ; constante

δ constante (Carruthers *et al.*, 2004) : $\delta = \dfrac{1}{\ln(l/z_0)}$; épaisseur de la couche limite

δ_b hauteur moyenne du rebond de saltation (m)

δ_n, δ_τ recouvrement des volumes des deux particules pendant la collision dans les directions normale et tangentielle (m) (Cundall et Strack, 1979)

$\delta_{n\max 0}$, $\delta_{n\max 1}$ recouvrement maximal dans la direction normale (m) (cf. la collision directe entre deux sphères)

δ_0 coefficient (Tsuji *et al.*, 1987)

δ' épaisseur de la sous-couche visqueuse (m)

δL^* intervalle entre deux nœuds du maillage (m) (Carruthers *et al.*, 2004)

ΔE_p variation de l'énergie potentielle totale des grains du lit entre les instants initial et final (J)

Δ_i hauteur d'exposition du grain i (m) (Wu *et al.*, 2000)

Δt pas de temps (s)

Δt_c pas de temps critique (s) (Cundall et Strack, 1979) : $\Delta t_c = 2\sqrt{\frac{m}{k_n}}$

Δt^* intervalle de temps pendant lequel la composante tangentielle de la force de contact est égale à la force créée par le ressort et l'amortisseur (s)

Δv différence de vitesses entre deux couches successives dans le modèle de Du Boys (1879) ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

ε nombre sans dimension : $\varepsilon = \frac{Re_G^{1/2}}{Re_p}$

ε_f diffusivité des particules fluide ($\mathrm{m^2.s^{-1}}$)

$\varepsilon_{f\,\max}$ diffusivité maximale des particules fluide ($\mathrm{m^2.s^{-1}}$) (van Rijn, 1984b)

ε_G constante qui est égale à 1 ou -1 selon le signe du taux de cisaillement G (Saffman, 1965, 1968) ; nombre sans dimension (Magnaudet et Legendre, 1998) : $\varepsilon_G = \left(\frac{\alpha_S}{Re_p}\right)^{1/2}$

ε_s diffusivité des particules solides ($\mathrm{m^2.s^{-1}}$)

ε_x, ε_y coefficients (cf. la collision d'une particule solide et d'une paroi) : $\varepsilon_x = \frac{u_p - a_p\,\omega_{py}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|}$, $\varepsilon_y = \frac{v_p + a_p\,\omega_{px}}{\|\overrightarrow{G}_{c\tau}\|}$

ε_Ω nombre sans dimension (Magnaudet et Legendre, 1998) : $\varepsilon_\Omega = \left(\frac{\alpha_\Omega}{Re_p}\right)^{1/2}$

η hauteur de la dune (m)

γ rapport des masses volumiques de la particule et du fluide

Γ probabilité conditionnelle d'entraînement du grain sachant qu'un évènement turbulent s'est produit (Dancey *et al.*, 2002)

Γ_c valeur critique de Γ

Γ_u, Γ_v, Γ_u^*, Γ_v^* fonctions de raccordement (Carruthers *et al.*, 2004)

Γ_{muh}, Γ_{mul}, Γ_{mvl} fonctions de la variable Z (Carruthers *et al.*, 2004)

κ constante de von Kàrmàn ; nombre sans dimension : $\kappa = \frac{a_p}{l_p}$ (Cherukat et McLaughlin, 1994)

λ longueur de la ride (m)

μ viscosité dynamique ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$)

ν viscosité cinématique ($\mathrm{m^2.s^{-1}}$)

ν_1, ν_2	coefficients de Poisson des matériaux 1 et 2 (Hertz, 1882)
ω	fonction de sillage de Coles
$\mathbf{\Omega}$	tenseur des taux de rotation (partie anti-symétrique du tenseur de gradient de vitesse fluide)
ω_f	vorticité du fluide (norme du rotationnel de la vitesse fluide) (s^{-1})
ω_p	norme de la vitesse de rotation de la particule ($rad.s^{-1}$)
ω_{px}, ω_{py}, ω_{pz}	vitesses de rotation de la particule dans les directions x, y et z ($rad.s^{-1}$)
ω_0, ω_1	vitesses angulaires ($rad.s^{-1}$) (cf. la collision directe entre deux sphères)
Ω_{ij}	coefficients du tenseur $\mathbf{\Omega}$
Π	paramètre de sillage de Coles
ϕ	grandeur utilisée pour définir la taille du grain : $\phi = \log_2 d_p$: transport sans dimension : $\phi = \dfrac{q_t}{\sqrt{(\gamma-1)g d_p^3}}$
ϕ_c	débit de sédiments dit critique estimé dans les simulations en $u_* = u_{*c}$
ϕ_{c1}, ϕ_{c2}	débits de sédiments estimés dans les simulations en $u_* = u_{*c1}$ et $u_* = u_{*c2}$
ϕ_i	débit sans dimension de grains de diamètre d_i estimé pour le sédiment « dispersé »
ϕ_i^*	débit sans dimension de grains de diamètre d_i estimé pour le sédiment mono-dispersé
ϕ_m	moyenne des « diamètres » ϕ des grains du sédiment
ϕ^D	débit de sédiments calculé avec un modèle déterministe
ϕ^{L+}	débit de sédiments sans dimension dans la direction $y > 0$
ϕ^{V+}, ϕ^{V-}	débits de sédiments sans dimension dans les directions $z > 0$ et $z < 0$
φ	coefficient modélisant la diminution de la turbulence due à la présence des grains (van Rijn, 1984b)
φ'	coefficient correctif (van Rijn, 1984b)
ρ	masse volumique du fluide ($kg.m^{-3}$)
ρ_A	masse volumique de l'air ($kg.m^{-3}$)
ρ_E	masse volumique de l'eau ($kg.m^{-3}$)
ρ_s	masse volumique du sédiment ($kg.m^{-3}$)
σ	écart-type de la variable $\ln X$
σ_a	écart-type arithmétique de la distribution de la taille des grains (m)

σ_g écart-type géométrique de la distribution de la taille des grains

σ_{ij} composantes du tenseur de contraintes fluide ($\mathrm{N.m^{-2}}$)

σ_X écart-type de la variable X

σ_ϕ écart-type de la distribution de la taille des grains exprimée à l'aide de la grandeur ϕ

σ_τ écart-type de la distribution de la contrainte de frottement ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ indice relatif à la direction tangentielle au plan de contact

τ_c contrainte de frottement critique ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ_{ci} contrainte de frottement critique des grains de diamètre d_i ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ_{c50} contrainte de frottement critique des grains de diamètre d_{50} ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ_{cm} contrainte de frottement critique des grains de diamètre d_m ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ_0 contrainte de frottement à la surface ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ'_0 contrainte de frottement liée à la rugosité due aux grains (contrainte de peau) ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

τ_r contrainte de frottement de référence ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

$\bar{\tau}$ moyenne de la contrainte de frottement ($\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$)

θ paramètre de Shields : $\theta = \dfrac{\rho u_*^2}{(\rho_s - \rho) g d_p}$; angle entre le vecteur $\overrightarrow{OC}$ et la verticale (°) (Tsuji *et al.*, 1989a,b)

θ_b angle d'inclinaison de la paroi virtuelle (°) (Tsuji *et al.*, 1985a,1987) ; angle d'inclinaison du plan de contact (°) (Niño et Garcia, 1998)

θ_c paramètre de Shields critique

θ_{cA} paramètre de Shields critique dans l'air

θ_{cE} paramètre de Shields critique dans l'eau

θ_{ci} paramètre de Shields critique des grains constituant la classe relative au diamètre d_i

θ_{cm} paramètre de Shields critique des grains de diamètre « moyen » (d_m, d_{50})

θ_{csm} paramètre de Shields critique des grains de diamètre d_{sm} (Wilcock et Crowe, 2003)

θ_i angle d'impact du grain sur la paroi (°) ; angle d'impact du grain mesuré par rapport à l'horizontale (°) (Niño *et al.*, 1994a)

θ_r angle de rebond du grain sur le plan de contact (°)

θ_{ri} paramètre de Shields de référence des grains constituant la classe relatif au diamètre d_i (Parker *et al.*, 1982)

θ'_i paramètre de Shields basé sur la vitesse de frottement u'_* et le diamètre d_i (Kleinhans et van Rijn, 2002)

ξ_i facteur correctif utilisé pour modéliser les phénomènes de sous- et surexpositions dans les sédiments dispersés : $\xi_i = \dfrac{\phi_i}{f_i \phi_i^*}$

ξ_i^b facteur correctif qui modélise les effets des interactions entre les classes sur le transport par charriage (Samaga *et al.*, 1986a)

ξ_i^s facteur correctif qui modélise les effets des interactions entre les classes sur le transport en suspension (Samaga *et al.*, 1986b)

ξ^h facteur correctif qui modélise le phénomène *hindrance* (Kleinhans et van Rijn, 2002)

ξ_m paramètre de rugosité : $\xi_m = \left(\dfrac{K_s}{K'_s}\right)^{3/2}$ (Meyer-Peter et Müller, 1948)

$\overrightarrow{d}_{mn}$ vecteur unitaire directeur de l'axe a_{mn} qui relient les centres des grains m et n

$\overrightarrow{e}_x$, $\overrightarrow{e}_y$, $\overrightarrow{e}_z$ vecteurs unité dans les directions x, y et z

$\overrightarrow{F}_A$ force d'accélération (N)

$\overrightarrow{F}_B$ force de flottabilité (N)

$\overrightarrow{F}_c$ force de contact (N)

$\overrightarrow{F}_D$ force de traînée (N)

$\overrightarrow{F}_H$ force histoire (N)

$\overrightarrow{F}_L$ force de portance (N)

$\overrightarrow{F}_{LG}$ force de portance dans un écoulement de déformation pure (N)

$\overrightarrow{F}_{L\Omega}$ force de portance dans un écoulement de rotation pure (N)

$\overrightarrow{F}_n$ composante dans la direction normale de la force $\overrightarrow{F}_c$ (N)

$\overrightarrow{F}_\tau$ composante dans la direction tangentielle de la force $\overrightarrow{F}_c$ (N)

$\overrightarrow{g}$ vecteur de l'accélération de la pesanteur ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

$\overrightarrow{G}$ vitesse relative du solide 1 par rapport au solide 2 ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

$\overrightarrow{G}_c$ vitesse relative du solide 1 par rapport au solide 2 exprimée au point de contact ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

$\overrightarrow{G}_{c\tau}$ composante dans la direction tangentielle de la vitesse relative $\overrightarrow{G}_c$ ($\mathrm{m.s^{-1}}$)

$\overrightarrow{I}$ impulsion intégrée au vecteur $\overrightarrow{F}$ pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ (N.s)

$\overrightarrow{J}$ impulsion relative à la force de contact (N.s)

$\overrightarrow{\mathcal{M}}$ moment exercé par le fluide sur la particule (N.m)

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_c$ moment de la force de contact exprimé au centre de la particule (N.m)

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_F$ moment de la force fluide exprimé à un des points de contact (N.m)

$\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ moment de la force de flottabilité exprimé à un des points de contact (N.m)

$\overrightarrow{n}$ vecteur unité perpendiculaire au plan de contact

$\overrightarrow{u}_f$ vitesse du fluide (m.s^{-1}) ; vitesse du fluide à l'instant t, à la position de la particule, en l'absence de celle-ci (m.s^{-1})

$\overrightarrow{u}_{\text{moy}}$ vitesse moyenne des grains contenus dans la tranche à l'instant t (m.s^{-1}) : $\overrightarrow{u}_{\text{moy}} = \dfrac{1}{N_L}\sum_{i=1}^{N_L} \overrightarrow{u}_{pi}$

$\overrightarrow{u}_p$ vitesse de la particule (à l'instant t) (m.s^{-1})

$\overrightarrow{x}_p$ vecteur position de la particule (à l'instant t) (m)

$\overrightarrow{x}_{pj}$ vecteur position de la particule j (à l'instant t) (m)

$\overrightarrow{\delta}_\tau$ recouvrement des volumes des deux particules pendant la collision dans la direction tangentielle (m) (Cundall et Strack, 1979) : $\overrightarrow{\delta}_\tau = \int_{t_0}^{t'} \overrightarrow{G}_{c\tau}\, d\tau'$

$\overrightarrow{\omega}_f$ vecteur vorticité (s^{-1}) : $\overrightarrow{\omega}_f = \nabla \wedge \overrightarrow{u}_f$

$\overrightarrow{\omega}_p$ vitesse de rotation de la particule (à l'instant t) (rad.s $^{-1}$)

$\overrightarrow{\tau}$ vecteur unitaire dans la direction tangentielle au plan de contact

annexe : application du modèle FLOWSTAR à un écoulement autour d'une colline gaussienne

Le modèle FLOWSTAR est appliqué à l'écoulement de la couche limite atmosphérique au-dessus d'une colline gaussienne afin de vérifier la validité de notre implémentation. La colline utilisée dans les simulations est représentée dans la figure 1.1.

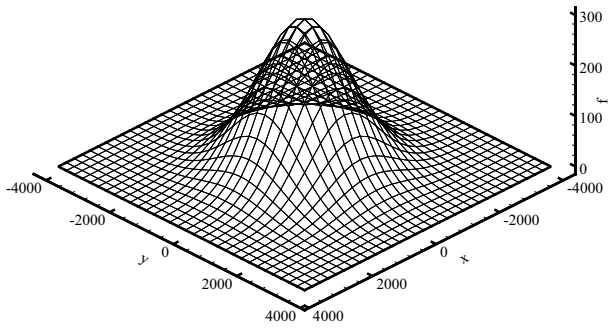


figure 1.1 – colline gaussienne utilisée lors de la simulation ; les variables x, y et f sont exprimés en mètre

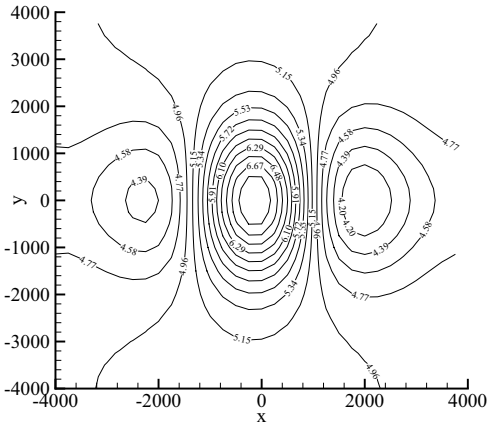
Elle est définie par la fonction surface f :

$$f(x,y) = H \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{L^2}\right) \tag{1.1}$$

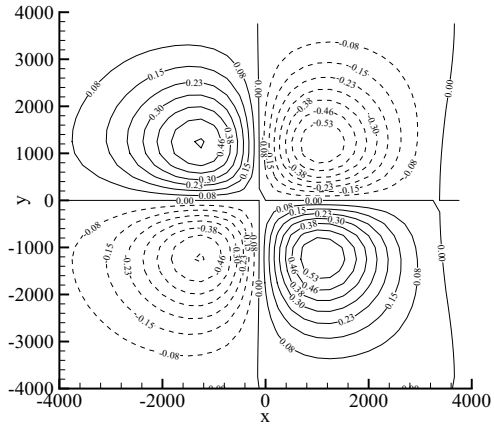
Avec $H = 300$ m et $L = 1500$ m.
Le champ de vitesse non perturbée est décrit par la loi logarithmique. La vitesse du fluide est fixée, pour $Z = 10$ m, à 5 m.s^{-1}, Z étant la distance au sol. La rugosité z_0 est supposée égale à 2 cm. La vitesse de frottement u_* est estimée à 0,32 m.s^{-1}.
Les dimensions du domaine d'étude dans le plan horizontal sont prises égales à 8000 m. Le nombre de nœuds du maillage qui sert à calculer les transformées de Fourier de la fonction f et du champ de vitesse fluide est égal à 2^5 dans les directions x et y. La longueur L_1 est estimée suivant la définition de Jackson et Hunt (1975). Elle est égale à $\sqrt{\ln 2}L$. Avec les valeurs numériques choisies, nous avons : $L_1 \simeq 1249$ m. Les positions des trois couches de l'écoulement l_s, l et h_m sont déduites des équations (1.32), (1.36) et (1.39) définies dans le chapitre 1 de la partie 3. Elles sont situées respectivement à une distance du sol égale à 1 m, 55 m et 397 m.

La figure 1.2 montre le champ de vitesse perturbée pour $Z = 10$ m. Le relief modifie localement l'écoulement. L'écoulement est dévié en amont et en aval de la colline dans les directions latérale et verticale et la perturbation de la vitesse dans ces deux directions est non nulle. La composante de la vitesse dans la direction x est décélérée en amont et en aval et accélérée au-dessus de la colline.

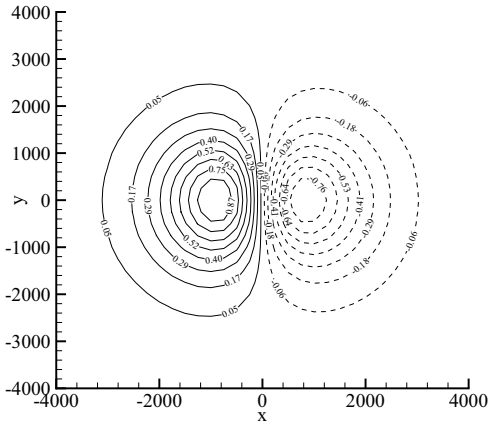
Les résultats obtenus sont en accord avec ceux présentés par Carruthers *et al.* (2004). (La forme des collines gaussiennes dans les deux études est un peu différente, Carruthers *et al.* (2004) n'indiquent pas l'expression analytique utilisée.)



(a) composante u_f dans la direction x



(b) composante v_f dans la direction y



(c) composante w_f dans la direction z

figure 1.2 – champ de la vitesse perturbée pour $Z = 10$ m ; la vitesse non perturbée à cette distance est égale à 5 m.s^{-1} ; les variables x et y sont exprimées en mètre et les vitesses en mètre par seconde

bibliographie

Abbott J.E. et Francis J.R.D. 1977. Saltation and suspension trajectories of solid grains in a water stream. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 284, pp. 225–254.

Abramowitz M. et Stegun I.A. 1964. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover. 1046 p.

Ackers P. 1964. Experiments on small streams in alluvium. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 90, pp. 1–37.

Ackers P.A. et White R.W. 1973. Sediment transport : new approach and analysis. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 99, pp. 2041–2060.

Ahmadi G. et Ma D. 1990. A thermodynamical formulation for dispersed multiphase turbulent flows. 1. Basic theory. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 16, pp. 323–340.

Allen J.R.L. 1985. *Principles of physical sedimentology.* George Allen & Unwin Ltd. 272 p.

Apperley L.W. 1968. *Effect of turbulence on sediment entrainment.* Thèse de Doctorat, Université d'Auckland, Nouvelle-Zélande.

Ashida K. et Michiue M. 1972. Study on hydraulic resistance and bedload transport rate in alluvial streams. *Transactions of the Japan Society of Civil Engineers*, vol. 206, pp. 59–69.

Askoy S. 1973. Fluid forces acting on a sphere near a solid boundary. *Proceedings of the 15^{th} Congress of the International Association for Hydraulic Research (IAHR)*, vol. 1, pp. 217–224.

Auton T.R. 1987. The lift force on a spherical body in a rotational flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 183, pp. 199–218.

Auton T.R., Hunt J.C.R. et Prud'Homme M. 1988. The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotationalflow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 197, pp. 241–257.

Bagchi P. et Balachandar S. 2002. Effect of free rotation on the motion of a solid sphere in linear shear flow at moderate Re. *Physics of Fluids*, vol. 14, pp. 2719–2737.

Bagnold R. 1974. Fluid forces on abody in shear-flow : 'experimental use of stationary flow'. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 340, pp. 147–171.

Bagnold R.A. 1941. *The physics of blown sand and desert dunes.* Methuen. 265 p.

Bagnold R.A. 1956. The flow of cohesionless grains in fluids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 249, pp. 235–297.

Bagnold R.A. 1966. An approach to the sediment transport problem from general physics. *United States Geological*, vol. 422-I, 37 p.

Bailly C. et Comte-Bellot G. 2003. *Turbulence.* CNRS éditions, collection Sciences et techniques de l'ingénieur. pp. 221–280.

Basset A.B. 1888. *A treatise on hydrodynamics.* Deighton, Bell and co. vol. 2, chap. 5.

Batchelor G.K. 1967. *An introduction to fluid dynamics.* Cambridge University Press. chap. 4.

Ben Salem M. et Oesterle B. 1998. A shear flow around a spinning sphere : numerical study at moderate Reynolds numbers. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 24, pp. 563–585.

Bigillon F. 2001. *Etude du mouvement bidimensionnel d'une particule dans un courant d'eau sur forte pente.* Thèse de Doctorat, Université Grenoble 1 – Joseph Fourier. 217 p.

Bonnefille R. 1963. Essais de synthèse des lois de début d'entraînement des sédiments sous l'action d'un courant en régime uniforme. *Bulletin du Centre de Recherche et d'Essai de Chatou (CREC)*, no. 5.

Boulvain F. 2009. *Une introduction aux processus sédimentaires.* Cours en ligne du département de Géologie, Faculté des Sciences, Université de Liège, Belgique. http://www2.ulg.ac.be/geolsed/processus/processus.htm (consulté le 7 mars 2011).

Boussinesq J. 1903. *Théorie analytique de la chaleur.* Cauthier-Villars, Paris. vol. 2.

Brauer H. 1980. Report on investigations on particle movement in straight horizontal tubes, particle-wall collision and erosion of tubes and tube bends. *Journal of Powder and Bulk Solids Technology*, vol. 4, pp. 3–12.

Brayshaw A.C., Frostick L.E. et Reid I. 1983. The hydrodynamics of particle clusters and sediment entrainment in coarse alluvial channel. *Sedimentology*, vol. 30, pp. 137–143.

Brenner H. 1961. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical Engineering Science*, vol. 16, pp. 242–251.

Bretherton F.P. 1962. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 14, pp. 284–304.

Bridge J.S. et Bennett S.J. 1992. A model for the entrainment and transport of sediment grains of mixed sizes, shapes and densities. *Water Resources Research*, vol. 28, pp. 337–363.

Brossard J.P. 1997. Mécanique générale Dynamique : théorie classique du choc. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. a1668.

Buffington J.M. et Montgomery D.R. 1997. A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers. *Water Resource Research*, vol. 33, no. 8, pp. 1993–2029.

Calantoni J. 2002. *Discrete particule model for bedload sediment transport in the surf zone.* Thèse de Doctorat, Université de l'état de Californie du nord, Etats Unis. 93 p.

Calantoni J., Holland K.T. et Drake T.G. 2004. Modelling sheet-flow sediment transport in wave-bottom boundary layers using discrete-element modelling. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 362, pp. 1787–2001.

Cao Z. 1997. Turbulent brusting-based sediment entrainment function. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 123, pp. 233–236.

Carruthers D.J. et Hunt J.C.R. 1990. Fluid mechanics of airflow over hills : turbulence, fluxes, and waves in the boundary layer dans Atmospheric processes over complex terrain dirigé par Blumen W. *Meteorological Monographs*, vol. 23, pp. 83–107.

Carruthers D.J., Weng W.S., Dyster S.J., Singles R. et Higson H. 2004. *Complex terrain module.* Cambridge Environmental Research Consultants (CERC). 36 p.

Charru F., Larrieu E., Dupont J.-C. et Zenit R. 2007. Motion of a particle near a rough wall in a viscous shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 570, pp. 431–453.

Chen M. et McLaughlin J.B. 1995. A new correlation for the aerosol deposition rate in vertical ducts. *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 169, pp. 437–455.

Cheng E.D.H et Clyde C.G. 1972. Instantaneous lift and drag forces on large roughness elements in turbulent open channel flow. Shen H.W. (ed), *Sedimentation – Symposium to honor Professor H.A. Einstein.*

Chepil W.S. 1958. The use of evenly spaced hemispheres to evaluate aerodynamic forces on a soil surface. *Transactions of American Geophysical Union*, vol. 39, pp. 397–404.

Chepil W.S. et Woodruff N.P. 1963. The physics of wind erosion and its control. *Advances in Agronomy*, vol. 15, pp. 211–302.

Cherukat P. et McLaughlin J.B. 1990. Wall-induced lift on a sphere. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 16, pp. 899–907.

Cherukat P. et McLaughlin J.B. 1994. The inertial lift on a rigid sphere in a linear shear flow field near a flat wall. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 263, pp. 1–18.

Cherukat P., McLaughlin J.B. et Dandy D.S. 1999. A computational study of the inertial lift on a sphere in a linear shear flow field. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 25, pp. 15–33.

Church M.A., McLean D.G. et Wolcott J.F. 1987. Chapitre : Sediment Transport in Gravel-bed Rivers. *Sediment Transport in Gravel-bed Rivers*, John Wiley & Sons Ltd.

Cleary P.W. 2000. DEM simulation of industrial particle flows : case studies of dragline excavators, mixing in tumblers and centrifugal mills. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 83–104.

Clift R., Grace J.R. et Weber M.E. 1978. *Bubble, drops, and particles.* Academic Press Inc. 380 p.

Coleman N. 1967. A theoretical and experimental study of drag and lift forces acting on a sphere resting on a hypothetical streambed. *Proceedings of the 12th Congress of the International Association for Hydraulic Research (IAHR).*

Coles D.E. 1956. The law of the wake in the turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 1, pp. 191–226.

Cox R.G. et Brenner H. 1967. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface – II. Small gap widths including inertial effects. *Chemical Engineering Science*, vol. 22, pp. 1753–1777.

Cox R.G. et Brenner H. 1968. The lateral migration of solid particles in Poiseuille flow – I. Theory. *Chemical Engineering Science*, vol. 23, pp. 147–173.

Cox R.G. et Hsu S.K. 1977. The lateral migration of solid particles in a laminar flow near a plane. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 201–222.

Crowe C., Sommerfeld M. et Tsuji Y. 1998. *Multiphase flows with droplets and particles.* CRC Press. 496 p.

Cundall P.A. et Strack O.D.L. 1979. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, vol. 29, pp. 47–65.

Dahneke B. 1974. Diffusional deposition of particles. *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 48, pp. 520–522.

Dancey C.L., Diplas P., Papanicolaou A. et Bala M. 2002. Probability of individual grain movement and threshold condition. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, pp. 1069–1075.

Dandy D.S. et Dwyer H.A. 1990. A sphere in shear flow at finite Reynolds number : effect of shear on particle lift, drag and heat transfert. *Journal of Fluids Mechanics*, vol. 216, pp. 381–410.

Davies T. et Samad M. 1978. Fluid dynamic lift on a bed particle. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 104, pp. 1171–1182.

Day T.J. 1980. A study of initial motion characteristics of particles in graded bed material. *Geological Survey of Canada, Current Research*, vol. 801A, pp. 281–286.

de Linares M. et Belleudy P. 2007. Critical shear stress of bimodal sediment in sand-gravel rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 133, pp. 555–559.

Denis S.C.R., Singh S.N. et Ingham D.B. 1980. The steady flow due to a rotation sphere at low and moderate Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 101, pp. 257–279.

Dey S. 1999. Sediment threshold. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 23, pp. 399–417.

Dey S., Dey Sarker H.K. et Debnath K. 1999. Sediment threshold under stream flow on horizontal and sloping beds. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 125, pp. 545–553.

Dhamotharan S., Wood A., Parker G. et Stefan H. 1980. Bedload transport in a model gravel stream. *Project Report, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, University of Minnesota, Etats Unis*, no. 190.

Dietrich W.E. 1982. Settling velocity of natural particles. *Water Resources Research*, vol. 18, pp. 1615–1626.

Drake T.G. et Calantoni J. 2001. Discrete particle model for sheet flow sediment transport in the nearshore. *Journal of Geophysical Research Oceans*, vol. 106, pp. 19 859–19 868.

Drew D.A. 1976. Two-phase flows – Constitutive equations for lift and Brownian motion and some basic flows. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,*, vol. 62, pp. 149–163.

Drew D.A. 1978. The force on a small sphere in slow viscous flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 88, pp. 393–400.

Du Boys M.P. 1879. Le Rhône et les rivières à lit affouillable. *Annale des Ponts et Chaussées*, série 5, vol. 18.

Egiazaroff I.V. 1965. Calculation of nonuniform sediment concentration. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 91, pp. 225–247.

Einstein H.A. 1948. Determination of rates of bedload movement. *Proceedings of the 1st Federal Inter-Agency Sedimentation Conference*, pp. 75–93.

Einstein H.A. 1950. The bed-load function for sediment transport in open channel flow. *Technical Bulletin, United States Department of Agriculture (USDA), Soil Conservation Service, Washington D.C.*, no. 126.

Einstein H.A. et Barbarossa N.L. 1952. River channel rouhness. *Transactions of the American Society of Civil Engineers (ASCE)*, vol. 117, pp. 1121–1146.

Emmett W.W. et Thomas W.A. 1978. Scour and deposition in lower granite reservoir, Snake and Clearwater rivers near Lewiston, Idaho, USA. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 16, p. 327–345.

Engelund E. et Hansen E. 1967. *A monograph on sediment transport in alluvial streams.* Teknisk Forlag, Copenhague, Danemark. 62 p.

Faxen H. 1923. Die bewegung einer starren kugel längs der achse eines mit zährer Flüssigkeit gefüllten rohres. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, vol. 17, pp. 1–28.

Fernandez Luque R. 1974. *Erosion and transport of bed-load sediment.* KRIPS Repro BV, Meppel, Pays Bas.

Fernandez Luque R. et van Beek R. 1976. Erosion and transport of bed-load sediment. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 14, pp. 127–144.

Folk R.L. 1980. *Petrology of sedimentary rocks.* Hemphill Publishing Company. 182 p.

Francis J.R.D. 1973. Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 332, pp. 443–471.

Frank A.J. et Kocurek G. 1996. Airflow up the stoss slope of sand dunes : limitations of current understanding. *Geomorphology*, vol. 17, pp. 47–54.

Fung J.C.H., Hunt J.C.R., Malik N.A. et Perkins R.J. 1992. Kinematic simulation of homogeneous turbulent flow generated by unsteady random Fourier modes. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 236, pp. 281–318.

Garcia M.H. 2007. Chapitre 2 : Sediment transport and morphodynamics. *Sedimentation engineering : processes, measurements, modeling, and practice, ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice*, no. 110.

Garde R.J. et Ranga Raju K.G. 2006. *Mechanics of sediment transportation and alluvial stream problems, 3ème édition.* New Age International Publishers, Ltd. 686 p.

Goldman A.J., Cox R.G. et Brenner H. 1967. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall – I. Motion through a quiescent fluid. *Chemical Engineering Science*, vol. 22, pp. 637–651.

Gondret P., Lance M. et Petit L. 2002. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids*, vol. 14, pp. 643–652.

Gordon R., Carmichael J.B. et Isackson F.J. 1972. Saltation of plastics ball in « one-dimensional » flume. *Water Resources Research*, vol. 8, pp. 444–459.

Gorham D.A. et Kharaz A.H. 2000. The measurement of particle rebound characteristics. *Powder Technology*, vol. 112, pp. 193–202.

Govan A.H., Hewitt G.F. et Terry J.W. 1989. Measurements of particle motion in a turbulent pipe flow using an axial-viewing technique. *Proceedings of the International Conference on Mechanics of Two-phase Flows, Taiwan*, pp. 103–109.

Graf W.H. et Altinakar M.S. 2000. *Hydraulique fluviale. Ecoulement non permanent et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple, $2^{ème}$ édition.* Traité de Génie Civil de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne (vol. 16), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. 378 p.

Grant G. et Tabakoff W. 1975. Erosion prediction in turbomachineryresulting from environmental solid particles. *Journal of Aircraft*, vol. 12, pp. 471–478.

Grass A.J. 1970. Initial instability of fine bed sand. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, pp. 619–632.

Haff P.K. et Anderson R.S. 1993. Grain scale simulation of loose sedimentary beds : the example of grain-bed impacts in aeolian saltation. *Sedimentology*, vol. 40, pp. 175–198.

Hall A. 1988. Measurements of the mean force on a particle near a boundary in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 187, pp. 451–466.

Halow A.D. 1973. Incipient rolling, sliding and suspension of particles in horizontal and inclined turbulent flow. *Chemical Engineering Science*, vol. 28, pp. 1–12.

Happel J. et Brenner H. 1973. *Low Reynolds numbers hydrodynamics: : with special applications to particulate media.* Noordhoff International Publishing. 553 p.

Harper E.Y. et Chang I-D. 1968. Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 33, pp. 209–225.

Heald J., McEwan I. et Tait S. 2004. Sediment transport over a flat bed in a unidirectional flow : simulations and validation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 362, pp. 1973–1986.

Hertz H. 1882. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, pp. 156–171.

Hinze J.O. 1975. *Turbulence.* McGraw-Hill. 790 p.

Hjulström F. 1935. Studies on the morphological activity of rivers as illustrated by the river Fyries. *Bulletin of the Geological institution of the University of Uppsala*, vol. 25, pp. 221–557.

Ho B.P. et Leal L.G. 1974. Inertial migration of rigid spheres in two-dimensionaluni-directional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 65, pp. 365–400.

Hofland B. 2003. Discussion of «Discrete particle modeling of entrainment from flat uniformly sized sediment beds» by Ian McEwan and John Heald. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 129, pp. 78–79.

Hu C. et Hui Y. 1996. Bed-load transport. I: Mechanical characteristics. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 122, pp. 245–254.

Hudson J.D., Dykhno L. et Hanratty T.J. 1996. Turbulence production in flow over a wavy wall. *Experiments in Fluids*, vol. 20, pp. 257–265.

Hunt J.C.R., Leibovich S. et Richards K.J. 1988. Turbulent shear flows over low hills. *The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 114, pp. 1435–1470.

Hunziker R. et Jaeggi M.N.R. 2002. Grain sorting processes. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, pp. 1060–1068.

Ishihara T., Fujino Y. et Hibi K. 2001. A wind tunnel study of separated flow over a two-dimensional ridge and a circular hill. *Proceedings of the 5^{th} Asia-Pacific Conference on Wind Engineering (APCWE V)*, vol. 89, pp. 573–576.

Iwashita K. et Oda M. 2000. Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 192–205.

Jackson P.S. 1981. On the displacement height in the logarithmic velocity profile. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 111, pp. 15–25.

Jackson P.S. et Hunt J.C.R. 1975. Turbulent wind flow over a low hill. *The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 101, pp. 929–955.

James C. 1990. Prediction of entrainment conditions for nonuniform, noncohesive sediments. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 28, pp. 25–41.

Jefcoate B.J.E. 1995. A model to investigate the roles of texture and sorting in bed armouring. *Proceedings of the 26th Congress of the International Assocation for Hydraulic Research (IAHR)*, vol. 5, pp. 61–66.

Jiang Z. et Haff P.K. 1993. Multiparticle simulation method applied to the micromechanics of bed load transport. *Water Resources Research*, vol. 29, pp. 399–412.

Jimenez J.A. et Madsen O.S. 2003. A simple formula to estimate settling velocity of natural sediments. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 129, pp. 70–78.

Joseph G.G., Zenit R., Hunt M.L. et Rosenwinkel A.M. 2001. Particle-wall collisions in a vsicous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 433, pp. 329–346.

Julien P.Y. 1994. *Erosion and sedimentation.* Cambridge University Press. 280 p.

Karim F. 1998. Bed material discharge prediction for nonuniform bed sediments. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 124, pp. 597–604.

Kawamura R. 1951. Study on sand movement by wind. *Report of the Institute of Science and Technology, Université de Tokyo*, vol. 5, pp. 95–112.

Kim I., Elghobashi S. et Sirignano W.A. 1993. Three-dimensional flow over two spheres placed side by side. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 246, pp. 465–488.

Kitahara H., Kotera H. et Shima S. 2000. 3-D simulation of magnetic particles' behaviour during compaction in a magnetic field. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 234–240.

Kleinhans M.G. et van Rijn L.C. 2002. Stochastic prediction of sediment transport in sand-gravel bed rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 128, pp. 421–425.

Komar P.D. 1987. Selective grain entrainment by a current fron a bed of mixed sizes. *Journal of Sedimentary Petrology*, vol. 57, pp. 203–211.

Kraichnan R.H. 1970. Diffusion by a random velocity. *Physics of Fluids*, vol. 13, pp. 22–31.

Kuhnle R.A. 1993. Fluvial transport of sand and gravel mixtures with bimodal size distributions. *Sedimentary Geology*, vol. 85, pp. 17–24.

Kurose R. et Komori S. 1999. Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 384, pp. 183–206.

Lawrence C.J. et Mei R. 1995. Long-time behavior on the drag on a body in impulsive motion. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 283, pp. 307–327.

Lee H.-Y. et Hsu I.-S. 1994. Investigation of saltating particle motion. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 120, pp. 831–845.

Lee H.-Y. et Hsu I.-S. 1996. Particle spinning motion during saltating process. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 122, pp. 587–590.

Lee H.-Y., Chen Y.-H., Chen Y.-H., You J.-Y. et Lin Y.-T. 2000. Investigations of continuous bed load saltating process. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 126, pp. 691–700.

Lee H.-Y., Lin Y.-T., You J.-Y. et Wang H.-W. 2006. On three-dimensional continuous saltating process of sediment particles near the channel bed. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 44, pp. 374–389.

Legendre D. et Magnaudet J. 1997. A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-numbershear flow. *Physics of Fluids*, vol. 9, pp. 3572–3574.

Leighton A. et Acrivos A. 1985. The lift on a small sphere touching a plane in the presence of a simple flow. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 36, pp. 174–178.

Leopold L.B. et Emmett W.W. 1976. Bedload measurements, East Fork River, Wyoming. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 73, pp. 1000–1004.

Li Y., Xu Y. et Thornton C. 2005. A comparison of discrete element simulations and experiments for 'sandpiles' composed of spherical particles. *Powder Technology*, vol. 160, pp. 219–228.

Li Z. et Komar P.D. 1986. Laboratory measurements of pivoting angles for applications to selective entrainment of gravel in a current. *Sedimentology*, vol. 33, pp. 425–436.

Lukerchenko N., Chara Z. et Vlasak P. 2006. 2D Numerical model of particle-bed collision in fluid-particle flows over bed. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 44, pp. 70–78.

Lun C.K.K. et Liu H.S. 1997. Numerical simulation of dilute turbulent gas-solid flows in horizontal channels. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 23, pp. 575–605.

Lun Y.F., Mochida A., Yoshino H. et Murakami S. 2007. Applicability of linear type revised $k-\epsilon$ models to flow over topographic features. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 95, pp. 371–384.

Maddux T.B., Nelson J.M. et McLean S.R. 2003a. Turbulent flow over three-dimensional dunes : 1. free surface and flow response. *Journal of Geophysical Research*, vol. 108, pp. 10 1–10 20.

Maddux T.B., McLean S.R. et Nelson J.M. 2003b. Turbulent flow over three-dimensional dunes : 2. fluid and bed stresses. *Journal of Geophysical Research*, vol. 108, pp. 11 1–11 17.

Magnaudet J. et Eames I. 2000. The motion of high-Reynolds number bubbles in inhomogeneous flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 32, pp. 659–708.

Magnaudet J. et Legendre D. 1998. Some aspects of the lift force on a spherical bubble. *Applied Scientic Research*, vol. 58, pp. 441–461.

Magnaudet J., Rivero M. et Fabre J. 1995. Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady straining flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 284, pp. 97–135.

Mahmood K. 1971. *Flow in sand bed channels.* Colorado State University, Fort Collins, Etats-Unis.

Mantz P.A. 1973. Cohesionless fine graded flaked sediment transport by water. *Natural Physical Science*, vol. 446, pp. 14–16.

Mantz P.A. 1977. Incipient transport of fine grains and flakes by fluids – Extended Shields diagram. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 103, pp. 601–615.

Marsh N.A., Western A.W. et Grayson R.B. 2004. Comparison of methods for predicting incipient motion for sand beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 130, pp. 616–621.

Mason P.J. et Sykes R.I. 1979. Flow over an isolated hill of moderate slope. *The Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 105, pp. 383–395.

Massoudi M. 2006. On drag and lift forces in two-dimensional flows of a particulate mixture : a theoretical study. *Acta Mechanica*, vol. 185, pp. 131–146.

Matsumoto S. et Saito S. 1970. Monte Carlo simulation of horizontal pneumatic conveying based on the rough wall model. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, vol. 3, pp. 223–230.

Matuttis H.G., Luding S. et Herrmann H.J. 2000. Discrete elment simulations of dense packing and heaps made of spherical and non-spherical particles. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 278–292.

Maude A.D. 1963. The movement of a sphere in front of a plane at low Reynolds number. *British Journal of Applied Physics*, vol. 14, pp. 894–898.

Maw N., Barber J.R. et Fawcett J.N. 1976. The oblique impact of elastic spheres. *Wear*, vol. 38, pp. 101–114.

Maw N., Barber J.R. et Fawcett J.N. 1981. The role of elastic tangential compliance in oblique impact. *Journal of Lubrification Technology*, vol. 103, pp. 74–80.

Maxey M.R. et Riley J.J. 1983. Equation of motion for a smal rigid sphere in a nonuniform flow. *Physics of Fluids*, vol. 26, pp. 883–889.

McEwan I. et Heald J. 2001. Discrete particle modelling of entrainment from flat uniformly sized sediment beds. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 127, p. 588–597.

McKenna Neuman C., Lancaster N. et Nickling W.G. 1997. Relations between dune morphology, air flow, and sediment flux on reversing dunes, Silver Peak, Nevada. *Sedimentology*, vol. 44, pp. 1103–1113.

McKenna Neuman C., Lancaster N. et Nickling W.G. 2000. The effect of unsteady winds on sediment transport on the stoss slope of a transverse dune, Silver Peak, NV, USA. *Sedimentology*, vol. 47, pp. 211–226.

McLaughlin J.B. 1991. Inertial migration of a small sphere in linear shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 224, pp. 261–274.

McLaughlin J.B. 1993. The lift on a small sphere in wall-bounded linear shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 246, pp. 249–265.

Mei R. 1992. An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 18, pp. 145–147.

Mei R., Adrian R.J. et Hanratty T.J. 1991. Particle dispersion in isotropic turbulence under Stokes drag and Basset force with gravitational settling. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 225, pp. 481–495.

Mendoza C. et Shen H.W. 1990. Investigation of turbulent flow over dunes. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 116, pp. 459–477.

Meyer-Peter E. et Müller R. 1948. Formulas for bed-load transport. *Proceedings of the 2nd Congress of the International Association for Hydraulic Research (IAHR)*, pp. 39–64.

Milhous R.T. 1973. *Sediment transport in a gravel-bottomed stream.* Thèse de Doctorat, Oregon State University, Etats Unis.

Miller M.C., McCave I.N. et Komar P.D. 1977. Threshold of sediment motion under unidirectional currents. *Sedimentology*, vol. 24, pp. 507–527.

Mindlin R.D. et Deresiewicz H. 1953. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 20, pp. 327–344.

Misri R.T., Garde R.J. et Ranga Raju K.G. 1984. Bedload transport of coarse non-uniform sediment. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 110, pp. 312–328.

Molinger A.M. et Nieuwstadt F.T.M. 1996. Measurement of the lift force on a particle fixed to the wall in the viscous sublayer of a fully developed turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 316, pp. 285–306.

Morsi S.A. et Alexander A.J. 1972. An investigation of particle trajectory in two-phase flow systems. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 55, pp. 193–208.

Neill C.R. et Yalin M.S. 1969. Quantitative definition of beginning of bed movement. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 15, pp. 585–588.

Nezu I. 1977. *Turbulent structure in open-channel flow.* Thèse de Doctorat, Kyoto University.

Niño Y et Garcia M. 1994b. Gravel saltation. 2. Modelling. *Water Resources Research*, vol. 30, pp. 1915–1924.

Niño Y. et Garcia M. 1998a. Experiments on saltation of sand in water. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 124, p. 1014–1025.

Niño Y. et Garcia M. 1998b. Using lagrangian particle saltation observations for bedload sediment transport modelling. *Hydrological Processes*, vol. 12, pp. 1197–1218.

Niño Y., Garcia M. et Ayala L. 1994a. Gravel saltation. 1. Experiments. *Water Resources Research*, vol. 30, pp. 1907–1914.

Odar F. 1966. Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 25, pp. 591–592.

Odar F. et Halmiton W.S. 1964. Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 18, pp. 302–314.

Oesterle B., Dinh Tri B. et Vial J. 1991. Measurements of lift and torque on a rotating sphere at intermediate Reynolds numbers. *Mechanics Research Communications*, vol. 18, pp. 145–150.

O'Neill M.E. 1964. A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. *Mathematika*, vol. 11, pp. 67–74.

Parker C., , Klingeman P.C. et McLean D.G. 1982. Bedload and size distribution in paved gravel-bed streams. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 108, pp. 544–571.

Parker G. 2002. Chapitre 3 : transport of gravel and sediment mixtures. *Sedimentation engineering : processes, measurements, modeling, and practice, ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice*, no. 110.

Patnaik P.C., Vittal N. et Pande P.K. 1994. Lift coefficient of a stationary sphere in gradient flow. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 32, pp. 471–480.

Pemberton E.L. 1964. Sediment investigations Middle Rio Grande. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 90, pp. 163–185.

Petit F. 1989. L'influence de la forme des cailloux en tant que facteur de résistance à l'érosion. *Revue de Géographie de Lyon*, vol. 64, pp. 231–239.

Poncelet J.-V. 1870. *Introduction à la mécanique industrielle physique ou expérimentale.* Gauthier-Villars. 747 p.

Pope S.B. 2000. *Turbulent flows.* Cambridge University Press. pp. 333–639.

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. et Flannery B.P. 2002. *Numerical Recipes in C, the art of scientific computing, $2^{ème}$ édition.* Cambridge University Press. 1002 p.

Proffitt G.J. et Sutherland A.J. 1983. Transport on non-uniform sediments. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 21, pp. 33–43.

Rajamani R.K., Mishra B.K., Venugopal R. et Datta A. 2000. Discrete element analysis of tumbling mills. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 105–112.

Raudkivi A.J. 1963. Study of sediment ripple formation. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 89, pp. 15–33.

Raudkivi A.J. 1966. Bed forms in alluvial channels. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 26, pp. 507–514.

Raudkivi A.J. 1998. *Loose boundary hydraulics.* A.A. Balkema. 496 p.

Reichardt H. 1951. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 31, pp. 208–219.

Reinert D., Wirth V., Eichhorn J. et Panhans W.-G. 2007. A new large-eddy simulation model for simulating air flow and warm clouds above highly complex terrain. Part I: The dry model. *Boundary-layer meteorology*, vol. 125, pp. 109–132.

Ribberink J.S. 1998. Bed-load transport for steady flows and unsteady oscillatory flows. *Coastal Engineering*, vol. 34, pp. 59–82.

Rizk M.A. et Elghobashi S.E. 1985. The motion of a spherical particle suspended in a turbulent flow near a plane wall. *Physics of Fluids*, vol. 28, pp. 806–817.

Roberson J.A. et Chen C.K. 1970. Flw in conduits with low roughness concentration. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 96, pp. 941–957.

Rubinow S.I. et Keller J.B. 1961. The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 11, pp. 447–459.

Ruetsch G.R. et Meiburg E. 1993. On the motion of small spherical bubbles in two-dimensional vortical flows. *Physics of Fluids A*, vol. 5, pp. 2326–2341.

Saffman P.G. 1965. The lift on a small sphere in a slow shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 22, pp. 385–400.

Saffman P.G. 1968. Corrigendum « The lift on a small sphere in a slow shear flow ». *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 31, pp. 624.

Sagaut P. 2002. *Large eddy simulation for incompressible flows, $2^{ème}$ édition.* Springer. 426 p.

Sajjadi S.G. et Aldridge J.N. 1995. Prediction of turbulent flow over rough asymmetrical bed forms. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 19, pp. 139–152.

Samaga B.R., Ranga Raju K.G. et Garde R.J. 1986a. Bed load transport of sediment mixtures. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 112, pp. 1003–1018.

Samaga B.R., Ranga Raju K.G. et Garde R.J. 1986b. Suspended load transport of sediment mixtures. *Journal of Hydraulics Engineering*, vol. 112, pp. 1019–1035.

Sawatzki O. 1970. Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel. *Acta Mechanica*, vol. 9, pp. 159–214.

Schiller L. et Nauman A.Z. 1933. Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwekraftaufbereitung. *Zeitschrift der Verhandlungen der Deutschen Ingenieur*, vol. 77, pp. 318–320.

Schlichting H. 1960. *Boundary Layer Theory*. McGraw-Hill. 647 p.

Schmeeckle M.W., Nelson J.M. et Shreve R.L. 2007. Forces on stationary particles in near-bed turbulent flows. *Journal of Geophysical Research*, vol. 112, F02003. 21 p.

Schoklitsch A. 1934. Der Geschiebetrieb und die Geschiebefracht. *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, Jahrgang 39, Helft 4, pp. 1–7.

Scorer R.S. 1949. Theory of waves in the lee of mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, vol. 75, pp. 41–56.

Sekine M. et Kikkawa H. 1984. Transportation mechanism of bed-load in an open channel. *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, vol. 351, pp. 69–75.

Sekine M. et Kikkawa H. 1992. Mechanics of saltating grains. II. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 118, pp. 536–558.

Shields A. 1936. Anwendung der Ähnlichkeits-Mechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. *Preussische Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau*, Heft 26, pp. 5–24.

Singh K.M., Sandham N.D. et Williams J.J.R. 2007. Numerical simulation of flox over a rough bed. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 133, pp. 386–398.

Sommerfeld M. 1992. Modelling of particle-wall collisions in confined gas-particle flows. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 18, pp. 905–926.

Sridhar G. et Katz J. 1995. Drag and lift forces on microscopic bubbles entrained by a vortex. *Physics of Fluids*, vol. 7, pp. 380–399.

Stokes G.G. 1851. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of Cambridge Philosophical Society*, vol. 9, pp. 8–106.

Sukhodolov A.N., Fedele J.J. et Rhoads B.L. 2006. Structure of flow over alluvial bedforms : an experiment on linking field and laboratory methods. *Earth Surface Processes and Landforms*, vol. 31, pp. 1292–1310.

Sumer B.M. et Deigaard R. 1981. Particle motion near the bottom in turbulent flow in an open channel. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 109, pp. 311–337.

Sutherland A.J. 1967. Proposed mechanism for sediment entrainment by turbulence flows. *Journal of Geophysical Research*, vol. 72, pp. 6183–6194.

Swamee P.K. et Ojha S.P. 1991. Drag coefficient and fall velocity of non-spherical particles. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 117, pp. 660–667.

Takemura F. et Magnaudet J. 2003. The transverse force on clean and contamined bubbles rising near a vertical wall at moderate Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 495, pp. 235–253.

Tanaka T., Yamagata K. et Tsuji Y. 1990. Experiments on fluid forces on a rotating sphere and spheroid. *Proceedings of the 2nd KSME-JSME Thermal and Fluids Engineering Conference*, vol. 1, pp. 366–369.

Taylor P.A., Walmsley J.L. et Salmon J.R. 1983. A simple model of neutrally stratified boundary-layer flow over real terrain incorporating wavenumber-dependent scaling. *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 26, pp. 169–189.

Taylor P.A., Mason P.J. et Bradley E.F. 1987. Boundary-layer flow over low hills. *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 39, pp. 107–132.

Tchen C.M. 1947. *Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid.* Thèse de Doctorat, University of Delft, Pays Bas.

Thaxton C.S. et Calantoni J. 2006. Vertical sorting and preferential transport in sheet flow with bimodal size distribution of sediment. *Proceeding of the 30th International Conference on Coast Engineering (ICCE 2006).*

Thorne P.D., Williams J.J. et Heathershaw A.D. 1989. In situ acoustic measurements of marine gravel threshold and entrainment. *Sedimentology*, vol. 36, pp. 61–74.

Thornton C. (ed). 2000. *Numerical simulations of discrete particle systems.* Powder Technology, Elsevier Science, vol. 109. 298 p.

Thornton C. et Randall C.W. 1988. Applications of theoretical contact mechanics in Micro-mechanics of granular materials. *Micromechanics of granular materials (eds Satake M. et Jenkins J.T.), Elsevier*, pp. 133–142.

Tsuchiya Y. et Aoyama T. 1970. On the mechanism of saltation of a sand particle in a turbulent stream. lI. On a theory of successive saltation. *Annuals of the Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University*, vol. 13B, pp. 199–216.

Tsuji Y., Oshima T. et Morikawa Y. 1985a. Numerical simulation of pneumatic conveying in a horizontal pipe. *KONA*, vol. 3, pp. 574–580.

Tsuji Y., Morikawa Y. et Mizuno O. 1985b. Experimental measurement of the Magnus force on a rotating sphere at low Reynolds numbers. *Journal of Fluids Engineering*, vol. 107, pp. 484–488.

Tsuji Y., Morikawa Y., Tanaka N., Nakatsukasa N. et Nakatani M. 1987. Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 13, pp. 671–684.

Tsuji Y., Shen N.Y. et Morikawa Y. 1989a. Numerical simulation of gas-solid flows. part 1 : particle to wall collision. *Technology Reports of the Osaka University*, vol. 39, no. 1975, pp. 233–241.

Tsuji Y., Shen N.Y. et Morikawa Y. 1989b. Numerical simulation of gas-solid flows. part 2 : calculation of a two-dimensional horizontal channel flow. *Technology Reports of the Osaka University*, vol. 39, no. 1976, pp. 243–254.

Unsöld G. 1982. *Der Transportbeginn rolligem Sohlenmaterials in gleichförmigen turbulenten Strömungen: eine kritische Überprüfung der Shields-Funktion und ihre experimentelle Erweiterung auf feinkörnige, nicht-bindige Sedimente.* Thèse de Doctorat, Mathematische-Naturwissenschaftlichen Fakultät, Kiel-University, Allemagne. 145 p.

Ushijima T. 1998. *The motion of heavy particles in turbulent flows.* Thèse de Doctorat, University of Cambridge, Royaume Unis.

van Mierlo M.C.L.M. et de Ruiter J.C.C. 1988. *Turbulence measurements above artificial dunes.* Report TOW A55 Q789, Delft Hydraulics, Pays Bas. 42 p.

van Rijn L.C. 1982. Equivalent roughness of alluvial bed. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 108, pp. 1215–1218.

van Rijn L.C. 1984a. Sediment transport, part 1 : bedload transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 110, pp. 1431–1456.

van Rijn L.C. 1984b. Sediment transport, part 2 : suspended load transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 110, pp. 1613–1641.

van Rijn L.C. 1984c. Sediment transport, part 3 : bed forms and alluvial roughness. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 110, pp. 1733–1754.

Vasseur P. et Cox R.G. 1977. The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 80, pp. 561–591.

Viollet P.-L., Chabard J.-P., Esposito P. et Laurence D. 2002. *Mécanique des fluides appliquée*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées. 367 p.

Wadell H. 1932. Volume, shape and roundness of rock particles. *The Journal of Geology*, vol. 40, pp. 443–451.

Wakaba L. et Balachandar S. 2005. History force on a spherein a weak linear shear flow. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 31, pp. 996–1014.

Walker I.J. et Nickling W.G. 2002. Dynamics of secondary airflow and sediment transport over and in the lee of transverse dunes. *Progress in Physical Geography*, vol. 26, pp. 47–75.

Walmsley J.L., Salmon J.R. et Taylor P.A. 1982. On the application of a model of boundary-layer flow over low hills to real terrain. *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 23, pp. 17–46.

Wang Q., Squires K.D., Chen M. et McLaughlin J.B. 1997. On the role of the lift force in turbulence simulations of particle deposition. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 23, pp. 749–763.

Watters G.Z. et Rao M.V.P. 1971. Hydrodynamic effects of seepage on bed particles. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 97, pp. 421–439.

White B.R. 1982. Two-phase measurements of saltating turbulent boundary layer flow. *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 8, pp. 459–473.

White B.R. et Schulz J.C. 1977. Magnus effect in saltation. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 31, p. 497–512.

White C.M. 1940. The equilibrium of grains on the bed of a stream. *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 174, pp. 322–338.

White S.J. 1970. Plane bed threshold of fine grained sediments. *Nature*, vol. 228, pp. 152–153.

Wiberg P.L. et Smith J.D. 1985. A theoretical model for saltating grains in water. *Journal of Geophysical Research*, vol. 90, pp. 7341–7354.

Wilcock P.R. 1992. Bed-load transport of mixed-size sediment. *Dynamics of gravel-bed rivers (eds Billi P., Heyn R.D., Thorne, C.R et Tacconi P.)*, Wiley, pp. 109–131.

Wilcock P.R. et Crowe J.C. 2003. Surface-based transport model for mixed-size sediment. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 129, pp. 120–128.

Wilcock P.R. et McArdell B.W. 1993. Surface-based fractional transport rates : mobilisation thresholds and partial transport of a sand -gravel sediment. *Water Resources Research*, vol. 29, pp. 1297–1312.

Wilcock P.R. et Southard J.B. 1988. Experimental study of incipient motion in mixed-size sediment. *Water Resources Research*, vol. 24, pp. 1137–1151.

Wilcock P.R., Kenworthy S.T. et Crowe J.C. 2001. Experimental study of the transport of mixed sand and gravel. *Water Resources Research*, vol. 37, pp. 3349–3358.

Williams J.J. 1990. Video observations of marine gravel transport. *Geo-Marine Letters*, vol. 10, pp. 157–174.

Willmarth W.W. et Lu S.S. 1972. Structure of the Reynolds stress near the wall. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 55, pp. 65–69.

Woo S.-W. 1971. *Simultaneous free and forced convection around submerged cylinders and spheres*. Thèse de Doctorat, McMaster University, Hamilton, Etats Unis.

Wu W., Wang S.S.Y. et Jia Y. 2000. Non uniform sediment transport in alluvial rivers. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 38, no. 6, pp. 427–434.

Xu B.H., Yu A.B., Chew S.J. et Zulli P. 2000. Numerical simulation of the gas–solid flow in a bed with lateral gas blasting. *Powder Technology*, vol. 109, pp. 13–26.

Yamamoto F. 1986. A study of motion of a sphere in air flow through horizontal pipe. *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, vol. 29, pp. 2055–2061.

Yang C.T. 1973. Incipient motion and sediment transport. *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 99, pp. 1979–1704.

Yeganeh-Bakhtiary A., Shabani B., Gotoh H. et Wang S.S.Y. 2009. A three-dimensional distinct element model for bed-load transport. *Journal of Hydraulic Research*, vol. 47, pp. 203–212.

Yen B.C. 1992. Sediment fall velocity in oscillating flow. *Water Resources and Environmental Engineering Research Report, Department of Civil Engineering, University of Virginia, Etats Unis*, no. 11.

Zeng L., Balachandar S. et Fisher P. 2005. Wall-induced forces on a rigid sphere at finite Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 536, pp. 1–25.

Zingg T. 1935. Beitrag zur Schotteranalyse. *Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen*, vol. 15, pp. 39–140.

Zou X.-Y., Cheng H., Zhang C.-L. et Zhao Y.-Z. 2007. Effects of the Magnus and Saffman forces on the saltation trajectories of sand grain. *Geomorphology*, vol. 90, pp. 11–22.

liste des personnes habilitées à diriger des recherche en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	maître de conférences	AMPERE	ECL
JAFFREZIC–RENAULT Nicole	directrice de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	AMPERE	ECL

Nombre AMPERE : 11

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL

LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

Nombre DER EEA : 2

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nombre DER STMS : 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	CNRS/ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	CNRS/ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nombre ICJ : 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL

Nombre ICTT : 1

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

GRENET Geneviève	directrice de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	maître de conférences	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directrice de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nombre INL : 20

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL

Nombre LIRIS : 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL

BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN Jean-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT Geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LERIBAULT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nombre LMFA : 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL

CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfrid	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargée de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieure de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOU Jean-Jacques	maître de conférences	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL

VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL

Nombre LTDS : 25

Nombre total HdR ECL : 91