N^o d'ordre : 4106

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par

Joyce ASSAAD

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures - Analyse**

★★★

TRANSFORMÉES DE RIESZ ASSOCIÉES AUX OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER AVEC DES POTENTIELS NÉGATIFS

★★★

Soutenue le 29 Novembre 2010 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

Devant la commission d'examen composée de :

M. **P. AUSCHER**	Professeur, Université Paris-Sud	
M. **R. DEVILLE**	Professeur, Université Bordeaux I	
M. **P. C. KUNSTMANN**	Chercheur HDR, Universität Karlsruhe	
M. **G. MAUCERI**	Professeur, Università di Genova	**Rapporteur**
M. **E. M. OUHABAZ**	Professeur, Université Bordeaux I	**Directeur**
M^{me} **S. PETERMICHL**	Professeur, Université Toulouse III	**Rapporteur**

Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, El Maati Ouhabaz, qui a dirigé mon mémoire de Master et ma thèse de Doctorat. Je le remercie pour ses remarques pertinentes, ses précieux conseils et les nombreuses connaissances en analyse qu'il m'a permis d'acquérir.

Je remercie Giancarlo Mauceri et Stéphanie Petermichl d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi que pour les précieuses remarques qui ont servi à améliorer ce manuscrit. Je remercie aussi Pascal Auscher, Robert Deville et Peer-Christian Kunstmann qui ont accepté de faire parti de mon jury.

D'une manière générale, je remercie tous les membres de l'IMB. Plus particulièrement, je pense à Chiara Spina pour les discussions et conseils intéressants que nous avons eu durant son post-doc à Bordeaux et pour son amitié. Je pense aussi à Bernard Bercu, Stanislas Kupin et Bernhard Haak pour les discussions intéressantes qui m'ont permis de mieux comprendre certaines notions mathématiques.
Je remercie aussi Jean-François Le Gall de l'université de Paris-Sud pour une discussion par mail qui m'a permis de comprendre une hypothèse d'un article[1], et Hendrik Vogt de Technische Universität Dresden pour une discussion dans un workshop qui m'a permis de mieux comprendre le contre-exemple de son article [2].

Je remercie l'ancien Chef du département de Mathématiques pures à l'Université Libanaise- Faculté de Sciences II, Chawki Abi Najem, et une amie qui m'est chère, Aline Hosry. D'eux vient l'idée de partir en France et de faire une thèse de Doctorat.

Je remercie Jeanette De Vigan pour son accompagnement, son soutien, et ses précieux conseils pour faire un bon exposé (en espérant ne pas la decevoir lors de mon exposé de soutenance!).
Merci pour mon SOS Latex et Beamer, Cédric Joncour, il a passé de longs moments à me définir des commandes qui réalisent mes idées.
Merci à tous mes amis pour leur soutien tout au long de mon séjour en France et pour tous les bons moments passés ensemble.

Je remercie mes oncles et leurs familles qui habitent la region parisienne, ils m'ont accueilli et accompagné comme si j'étais leur propre fille.

Je tiens à remercier mes parents d'avoir eu confiance en moi, ils n'ont cessé de m'encourager et de me conseiller pour avancer même dans les moments difficiles. Je leur suis infiniment redevable. Je veux leur dire combien ils me sont chers.

[1] Takeda M., Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).

[2] Liskevich V., Sobol Z., Vogt H., On the L^p theory of C^0-semigroups associated with second-order elliptic operators II, J. Funct. Anal. 193, 55-76, (2002).

Résumé

Dans cette thèse nous étudions la bornitude des transformées de Riesz associées aux opérateurs de Schrödinger avec des potentiels qui admettent des parties négatives. Cette étude a lieu dans un premier temps sur les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$, puis sur les espaces $L^p(M, dx)$ où M est une variété Riemannienne de type homogène et dans un dernier temps sur les espaces à poids $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$. Nous considérons également, sur ces espaces à poids, la bornitude du calcul fonctionnel holomorphe associé et la bornitude des puissances négatives de l'opérateur de Schrödinger.

Tout d'abord nous traitons le cas où la partie négative du potentiel vérifie la seule condition “fortement sous-critique”, c.à.d. qu'il existe un $\alpha \in (0,1)$ tel que $V^- \leq \alpha(-\Delta + V^+)$ au sens des formes quadratiques. Dans ce cas, il existe un $p_0 \in (\frac{2N}{N-2}, \infty)$ tel que le semi-groupe associé à l'opérateur de Schrödinger est uniformement borné sur $L^p(dx)$ pour tout $p \in (p_0', p_0)$, et cet intervalle est optimal. Ainsi les méthodes basées sur les estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur associé ne sont pas applicables. Nous montrons des estimations $L^p(dx) - L^q(dx)$ hors-diagonale du semi-groupe pour $p, q \in (p_0', p_0)$. Ces estimations sont l'outil utilisé pour montrer la bornitude des transformées de Riesz associées sur $L^p(dx)$ pour tout $p \in (p_0', 2]$. Nous montrons aussi que l'intervalle de p trouvé est "optimal". Sur les variétés, les estimations $L^p(dx) - L^q(dx)$ hors-diagonale démontrées et qui nous permettent d'obtenir la bornitude des transformées de Riesz sont de la forme:

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-s(-\Delta+V^+-V^-)} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}) \Big)^{\beta} e^{-cd^2(B(x,r),B(y,r))/s},$$

où $B(x,r)$ est la boule de centre x et de rayon r et $v(x,r)$ est le volume de cette boule.

Avec des conditions aditionnelles sur le potentiel, et sur la variété, le semi-groupe est représenté par un noyau qui admet des estimations Gaussiennes. Ainsi nous montrons que les transformées de Riesz sont bornés sur $L^p(dx)$ pour tout $p \in (1, N)$ où N est la dimension de la variété considérée. Nous montrons également dans ce cas la bornitude des transformées de Riesz sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ pour tout $p \in (N', N)$ et tout $w \in A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$ où A_q désigne la classe de Muckenhoupt et RH_q désigne la classe de Hölder inverse.

Enfin nous montrons la bornitude sur les espaces à poids des puissances négatives de l'opérateur de Schrödinger ainsi que du calcul fonctionnel holomorphe associé, avec la seule condition "V^- fortement sous-critique".

Mots-clés: Transformées de Riesz, opérateur de Schrödinger, opérateur d'intégrale singulière, estimations Gaussiennes, estimations hors-diagonales, variétés Riemanniennes, classe de Muckenhoupt, classe de Hölder inverse.

Abstract

In this thesis we study the boundedness of Riesz transforms associated to Schrödinger operators with potentials having negative parts. First we consider the boundedness on $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$, then on $L^p(M, dx)$ where M is a Riemannian manifold of homogeneous type. Finally we treat the boundedness of Riesz transforms on $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$. As we consider, on the weighted spaces, the boundedness of the associated holomorphic functional calculus and the boundedness of the negative powers of the Schrödinger operator.

We begin with the case where the negative part of the potential is strongly subcritical, i.e. there exists an $\alpha \in (0,1)$ such that $V^- \leq \alpha(-\Delta + V^+)$ in the sense of quadratic forms. In this case, there exists a $p_0 \in (\frac{2N}{N-2}, \infty)$ such that the semigroup associated to the Schrödinger operator is uniformly bounded on $L^p(dx)$ for all $p \in (p_0', p_0)$, and this result is sharp. Thus the methods based on the Gaussian estimates of the associated heat kernel are not appropriate. We prove $L^p(dx) - L^q(dx)$ off-diagonal estimates of the semigroup for $p, q \in (p_0', p_0)$. These estimates are the tool used to prove the boundedness of the associated Riesz transforms on $L^p(dx)$ for all $p \in (p_0', 2]$. We also prove that this range of p is "optimal". On manifolds, the $L^p(dx) - L^q(dx)$ off-diagonal estimates, that are proved and allow us to obtain boundedness of Riesz transforms, are of the form:

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-s(-\Delta+V^+-V^-)} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}) \Big)^{\beta} e^{-cd^2(B(x,r),B(y,r))/s},$$

where $B(x,r)$ is the ball of centre x and radius r and $v(x,r)$ is the volume of this ball.

With additional conditions on the potential and on the manifold, the semigroup is represented by a kernel that satisfies Gaussian estimates. Thus we prove that Riesz transforms are bounded on $L^p(dx)$ for all $p \in (1, N)$ where N is the dimension of the considered manifold. As we prove in this case that the Riesz transforms are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ for all $p \in (N', N)$ and all $w \in A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$ where A_q is the Muckenhoupt class and RH_q is the reverse Hölder class.

Finally we prove the boundedness on the weighted spaces of the negative powers of the Schrödinger operator and of the associated holomorphic functional calculus, with the sole condition "V^- strongly subcritical".

Key-words: Riesz transform, Schrödinger operator, singular integral operator, Gaussian estimates, off-diagonal estimates, Riemannian manifold, Muckenhoupt class, reverse Hölder class.

Contents

Chapter 1

Introduction

Dans cette thèse nous étudions la bornitude des transformées de Riesz associées aux opérateurs de Schrödinger avec des potentiels qui admettent des parties négatives. Cette étude a lieu dans un premier temps sur les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$, puis sur les espaces $L^p(M, dx)$ où M est une variété Riemannienne de type homogène [1], et dans un dernier temps sur les espaces à poids $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$. Nous considérons également, sur ces espaces à poids, la bornitude du calcul fonctionnel holomorphe associé ainsi que la bornitude des puissances négatives de l'opérateur de Schrödinger.

Soit A un opérateur de Schrödinger. Il est défini via la méthode des formes sesquilinéaires, comme étant une perturbation de l'opérateur $-\Delta$ par un potentiel V à valeurs réelles. Sur $(\mathbb{R}^N, dx)$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace positif, et sur les variétés Riemanniennes plus générales c'est l'opérateur de Laplace-Beltrami. On note

$$A := -\Delta + V^+ - V^- \quad V^+, V^- \geq 0$$

l'opérateur de Schrödinger A où V^+ et V^- constituent les parties positives et négatives de V, respectivement. On note $\nabla A^{-1/2}$ les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Schrödinger A. Par la méthode des formes sesquilinéaires, l'opérateur $-A$ est générateur d'un semi-groupe noté $(e^{-tA})_{t>0}$. Ainsi,

$$\nabla A^{-1/2} := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \nabla e^{-tA} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

On s'intéresse à la bornitude sur L^p des transformées de Riesz $\nabla A^{-1/2}$. Il s'agit d'un sujet à l'interface de l'analyse harmonique et des EDP. Les méthodes généralement utilisées pour obtenir cette bornitude sur L^p sont issues de l'analyse harmonique (théorie de Calderòn-Zygmund, opérateurs d'intégrale singulière,...). D'autre part, si $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur L^p, alors le domaine de $A^{1/2}$ est inclu dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}$. Par conséquent, la solution de l'équation d'évolution associée sur L^p, appartient à $W^{1,p}$. C'est donc une propriété de régularité par rapport à la variable espace.

[1] La définition se trouve dans la section suivante

La bornitude des transformées de Riesz $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ a été étudiée par plusieurs chercheurs sous plusieurs conditions. Par contre la situation du cas des potentiels négatifs, c.à.d., $\nabla(-\Delta-V^-)^{-1/2}$ n'est pas encore bien comprise. Dans la littérature, on trouve récemment une seule étude de ce cas sous des conditions de régularité et d'annulation du potentiel assez fortes. L'un des objectifs de cette thèse est de présenter une étude détaillée de ce cas par d'autres méthodes sans avoir besoin de ces conditions-là.

1.1 Quelques résultats antérieurs

Commençons par décrire quelques résultats, reliés aux transformées de Riesz, antérieurs à cette thèse.

1.1.1 Transformées de Riesz associées à $-\Delta+V^+$

Nous regroupons les résultats en quatre cas: La bornitude sur $L^p(\mathbb{R}^N,dx)$, puis sur $L^p(M,dx)$ où M est une variété Riemannienne de type homogène, puis sur $L^p(\mathbb{R}^N,wdx)$ où w est un poids de la classe de Muckenhoupt A_p, et enfin sur $L^p(M,wdx)$.

Sur $L^p(\mathbb{R}^N,dx)$

Shen [29] étudie $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ sur $\mathbb{R}^N; N\geq 3$. Si V^+ est dans la classe de Hölder inverse RH_q [2] où $N/2\leq q<N$, il montre que $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour $p\in(1,\frac{qN}{N-q}+\varepsilon)$ pour un $\varepsilon>0$, et montre que ce résultat est optimal. Si $V^+\in RH_N$, il déduit que $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour $p\in(1,\infty)$ en montrant qu'il est un opérateur de Calderòn-Zygmund [2].

Soit $p(t,x,y)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace $(-\Delta)$. On dit que $p(t,x,y)$ admet une estimation Gaussienne si

$$p(t,x,y)\leq Ct^{-N/2}e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}. \tag{1.1}$$

pour tout $t>0$, et tout $x,y\in\mathbb{R}^N$.
Ouhabaz [26] puis Duong, Ouhabaz et Yan [20] utilisent des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur, couplées avec des estimations à poids de son gradient. Celles-ci forment l'outil nécessaire pour vérifier le critère de la bornitude $L^1(\mathbb{R}^N)-L^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ des opérateurs d'intégrales singulières [3]. Ainsi ils déduisent que $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ est borné sur les $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tous les $p\in(1,2]$, avec la seule condition que V^+ est localement intégrable.
On revient au cas $p>2$. Auscher et Ben Ali [5] donnent une amélioration du résultat de Shen cité ci-dessus. Ils supposent que V^+ appartient à la classe de Hölder inverse $RH_q, q>1$. Ils utilisent comme outil un critère de Auscher et Martell [8] [4]. Ceci leur

[2] La définition est au Chapitre 5 Sous-Section 5.1.1
[3] Dû à Duong-McIntosh [19]
[4] Ce critère est une généralisation d'un critère donné par Shen [30] (voir Chapitre 2)

permet de montrer que $\nabla(-\Delta + V^+)^{-1/2}$ est borné sur les $L^p(\mathbb{R}^N); N \geq 1$ pour les $p \in (1, \max(2q, \frac{qN}{N-q}) + \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$ si $q < N$, et pour les $p \in (1; \infty)$ si $q \geq N$.
Récemment, Dragičević et Volberg [18], en utilisant la technique de la fonction de Bellman, montrent que les transformées de Hermite-Riesz sont bornées sur tous les $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec une borne ne dépendant pas de la dimension. Rappelons que ces transformées sont les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Hermite $-\Delta + |x|^2$.
D'autres auteurs se sont intéressés aux transformées de Riesz des opérateurs non-symétriques de type Ornstein-Uhlenbeck (voir Mauceri et Noselli [25]).

Sur $L^p(M, dx)$

Soit (M, μ, ρ) une variété Riemannienne de type homogène, c.à.d., pour tout $x \in M$ et $r > 0$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r))$$

où $B(x, r) := \{y \in M \text{ tel que } \rho(x, y) < r\}$. On dit que le volume est polynômial si $\mu(B(x, r)) \approx r^N$ pour tout $r > 0$ et $x \in M$.
Soit $p(t, x, y)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace-Beltrami $(-\Delta)$. On dit que $p(t, x, y)$ admet une estimation Gaussienne si

$$p(t, x, y) \leq \frac{Ce^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}. \tag{1.2}$$

pour tout $t > 0$, et tout $x, y \in M$.

Coulhon et Duong [16] montrent que les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Laplace-Beltrami, $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$, sont bornées sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1, 2]$, où M est une variété Riemannienne de type homogène où (1.2) est vérifiée. Ils donnent aussi un contre-exemple de la bornitude des transformées de Riesz sur $L^p(M)$ quand $p > 2$. On observe[5] que leur méthode est applicable en présence d'un potentiel positif localement intégrable. Ainsi $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1, 2]$.
Puis Auscher et Coulhon [6] et Auscher *et al.*[7] montrent que la bornitude de $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ sur $L^p(M)$ pour $p > 2$ peut avoir lieu avec des conditions aditionnelles sur le noyau de la chaleur et sur la norme du gradient du semi-groupe.
Carron *et al.*[14] montrent la bornitude de $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1, N)$ où $N > 2$, si la variété M est C^∞ et elle a un nombre fini de bouts Euclidiens. Comme ils montrent que ces transformées de Riesz ne sont pas bornées pour $p \geq N$ si M admet plus qu'un bout.

En présence d'un potentiel positif, récemment Badr et Ben Ali [11] généralisent le résultat de Auscher et Ben Ali [5] cité dans le paragraphe précédent. Elles étudient les transformées de Riesz sur les variétés Riemanniennes M de dimension $N \geq 1$ à volume polynômial, et où les inégalités de Poincaré ont lieu. Ainsi elles montrent que si V^+ est dans la classe de Hölder inverse $RH_q, q > 1$, alors $\nabla(-\Delta+V^+)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1, \max(2q, \frac{qN}{N-q}) + \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$ si $q < N$, et pour les $p \in (1; \infty)$

[5] Voir [26]

si $q \geq N$. Comme elles montrent que ce résultat reste vrai sur un intervalle de p plus petit lorsque la variété est de type homogène dont le volume n'est pas polynômial.

Sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la bornitude des transformées de Riesz $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ sur les espaces $L^p(wdx)$ ainsi qu'à la recherche de la borne optimale. Soit w un poids de la classe de Muckenhoupt A_p, c.à.d. $||w||_{A_p} < \infty$ où $||w||_{A_p}$ est la A_p-charactéristique de w suivante

$$||w||_{A_p} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^N} \Big(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}(x)dx\Big)^{p-1}. \tag{1.3}$$

Buckley [13], utilisant des méthodes de fonctions dyadiques, a montré que les opérateurs de Calderòn-Zygmund, en particulier les transformées de Riesz $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$, sont bornés sur $L^2(wdx)$ pour tout $w \in A_2$, avec la borne $C||w||^2_{A_2}$. Ainsi par le théorème d'extrapolation de Rubio De Francia[6], les transformées de Riesz $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ sont bornées sur tous les $L^p(wdx)$ pour tous les poids $w \in A_p$.
Lerner [23], toujours pour les opérateurs de Calderòn-Zygmund, améliore la borne et trouve $C||w||^{3/2}_{A_2}$, et plus généralement il trouve la borne $C||w||_{A_p}^{\frac{1}{2}+max(1,p/2)\frac{1}{p-1}}$ pour les $p \in (1;\infty)$.
Petermichl [27] (voir aussi [17]) donne la majoration optimale. Elle montre la bornitude des transformées de Riesz sur $L^2(wdx)$ par $C||w||_{A_2}$, ce qui lui a permit de déduire la bornitude sur $L^p(wdx), 1 < p < \infty$ par $C||w||^{\max(1,p'/p)}_{A_p}$. Pour ce but elle définit les transformées de Riesz par la méthode des multiplicateurs de Fourier. Puis elle les décompose en opérateurs dyadiques (comme elle explique dans [28]), ensuite elle utilise une modification de la technique de la fonction de Bellman.

Rappelons que $\nabla A^{-1/2}$, où A est l'opérateur de Schrödinger, ne peut pas être défini par les multiplicateurs de Fourier (∇ et A ne commutent pas). Ainsi, ces méthodes intéressantes pour l'étude de $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ ne semblent pas utilisables pour $\nabla A^{-1/2}$ où A est l'opérateur de Schrödinger.
Nous avons vu ci-dessus que les opérateurs de Calderòn-Zygmund sont bornés sur $L^p(wdx)$ pour tout $1 < p < \infty$ et tout w dans la classe de Muckenhoupt A_p. Nous avons aussi vu que Shen [29] [7] montre que $\nabla(-\Delta + V^+)^{-1/2}$ sur $\mathbb{R}^N; N \geq 3$ est un opérateur de Calderòn-Zygmund si V^+ est un potentiel de la classe de Hölder inverse RH_N. Ainsi les résultats sur la bornitude sur $L^p(wdx)$ des opérateurs de Caldèron-Zygmund sont aussi valables pour $\nabla(-\Delta + V^+)^{-1/2}$ sur $\mathbb{R}^N; N \geq 3$ si $V^+ \in RH_N$.

La bornitude sur les espaces à poids $L^p(wdx)$ des transformées de Riesz associées à l'opérateur de Schrödinger n'a pas, à notre connaissance, été étudiée en présence de la partie négative du potentiel. Dans ce cadre, d'autres problèmes importants se posent,

[6]Voir Chapitre 5

[7]Voir le cas $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$

notamment ceux des meilleures majorations.

Sur $L^p(M, wdx)$

Auscher et Martell [9] étudient la bornitude des transformées de Riesz $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ où $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur les variétés Riemanniennes M de type homogène où l'estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé à $e^{-t(-\Delta)}$ est satisfaite. Soit

$$q_+ := \sup\{p \in (1;\infty) \text{ tel que } \nabla(-\Delta)^{-1/2} \text{ est borné sur } L^p(M, dx)\}.$$

Alors ils montrent que $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(M, wdx)$ pour tout $p \in (1; q_+)$ tel que $w \in A_p \cap RH_{(q_+/p)'}$. En plus, si $w \in A_1 \cap RH_{(q_+)'}$, alors $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ est borné de $L^1(M, wdx)$ dans $L^{1,\infty}(M, wdx)$.

1.1.2 Transformées de Riesz associées à $-\Delta + V^+ - V^-$

Nous avons rappelé ci-dessus que les transformées de Riesz associées à $-\Delta + V^+$ sont bornées sur les $L^p(dx)$ pour tout $p \in (1, 2]$ et tout potentiel $V^+ \in L^1_{loc}$. Pour certains $p > 2$, les résultats connus supposent V^+ dans une certaine classe de Hölder inverse.
Des difficultés apparaissent avec les transformées de Riesz associées à A en présence de la partie négative V^- du potentiel. En effet, ces opérateurs ne sont pas représentés par un noyau, donc les méthodes des estimations Gaussiennes et des opérateurs d'intégrales singulières ne sont pas applicables, et celles utilisées pour l'étude des opérateurs de Calderòn-Zygmund ne sont pas applicables non plus. En plus, comme c'est remarqué ci-dessus, ces opérateurs ne sont pas définis par les multiplicateurs de Fourier. Donc les méthodes basées sur cette définition des transformées de Riesz ne sont valables pour les transformées de Riesz associées aux opérateurs de Schrödinger. Et finalement, des critères de bornitude des opérateurs sous-linéaires [8], qui donnent des bons résultats pour les opérateurs de la forme $-\mathrm{div}B\nabla$ où B est une matrice à coefficients bornés et à valeurs complexes, ne sont applicables aux opérateurs de Schrödinger vu qu'on n'a pas la propriété de conservation suivante

$$e^{-tA}1 = 1 \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Nous observons que, si $V^- \in L^\infty(\mathbb{R}^N, dx)$, les arguments de [26] sont valables pour l'opérateur $-\Delta - V^- + ||V^-||_\infty$. Alors l'opérateur $\nabla(-\Delta - V^- + ||V^-||_\infty)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ pour $p \in (1; 2]$. Or c'est un résultat plus faible que celui de la bornitude de $\nabla(-\Delta - V^-)^{-1/2}$ recherchée.

Guillarmou et Hassell [21] et [22] ont étudié récemment les transformées de Riesz en présence de V^-. Ils montrent que, si la variété est asymptotiquement conique de

[8] Voir Théorème 2.8, Théorème 2.9 et Théorème 5.10

dimension $N \geq 3$, alors l'opérateur $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ est borné sur L^p pour tous les $p \in (1; N)$ où P_+ est la projection dans la partie positive du spectre. Leur méthode exige que le potentiel $V := V^+ - V^-$ soit régulier, et que 0 ne soit ni une valeur propre ni une résonance. Comme ils montrent que ce résultat est vrai sur un intervalle de p plus petit quand 0 est une valeur propre.

1.2 Contributions à l'étude de $\nabla(-\Delta + V^+ - V^-)^{-1/2}$

Dans cette thèse, nous étudions la bornitude des transformées de Riesz $\nabla(-\Delta+V^+-V^-)^{-1/2}$. Le Chapitre 3 est consacré à l'étude de cette bornitude sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx), N \geq 3$ puis sur $L^p(M, dx)$ où M est une variété Riemannienne, de dimension $N \geq 3$, à volume polynômial. Le cas des variétés Riemanniennes, de dimension $N \geq 1$, de type homogène, dont le volume n'est pas nécessairement polynômial est traité au Chapitre 4. L'étude de la bornitude sur les espaces à poids $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ des transformées de Riesz $\nabla(-\Delta - V^-)^{-1/2}$ est réalisée au Chapitre 5.

Définition 1.1. *On dit que V^- est fortement sous-critique s'il existe une constante $\alpha \in [0, 1)$ telle que*

$$\int_M V^- u^2 d\mu \leq \alpha \Big[\int_M |\nabla u|^2 d\mu + \int_M V^+ u^2 d\mu \Big],$$

pour tout $u \in W^{1,2}(M)$ tel que $\int_M V^+ u^2 d\mu < \infty$.

Au Chapitre 3 nous étudions $\nabla A^{-1/2}$ où A est l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V^-$. Ce Chapitre correspond à l'article [1] à paraître dans *Publicacions Matemàtiques.*
On remarque que $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ si et seulement si V^- est fortement sous-critique. Puis, utilisant des résultats connus sur la bornitude du semi-groupe associé, nous montrons que si V^- est fortement sous-critique alors $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx), N \geq 3$, pour $p \in (p_0', 2]$ où $p_0 := \frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}$ et p_0' est son conjugué de dualité. Nous trouvons aussi que la seule condition "V^- fortement sous-critique" ne suffit pas pour avoir la bornitude sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ où $p \in (1, p_0') \cup (p_{0*}, \infty)$; $2 < p_{0*} := \frac{p_0 N}{N+p_0} < p_0$.
Pour obtenir le résultat ci-dessus, nous montrons des estimations $L^p - L^q$ hors-diagonales du semi-groupe et de son gradient. Puis nous appliquons le critère[9] de la bornitude de L^p dans $L^{p,\infty}$ des opérateurs sous-linéaires. Comme nous utilisons un contre-exemple[10]de la bornitude du semi-groupe sur L^p pour $p \notin (p_0', p_0)$.
Si V^- est fortement sous-critique dans la sous-classe de Kato K_N^∞ [11],$N \geq 3$, alors le noyau de la chaleur associé admet une estimation Gaussienne. Ainsi, suivant les arguments de [20], nous observons que $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ pour tout $p \in (1, 2]$. Si en plus $V^- \in L^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N, dx), N \geq 3$, alors par des méthodes d'interpolation complexe[12], les transformées de Riesz associées sont bornées sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ pour tout

[9]Une version simpifiée par Auscher [4] du critère de Blunck-Kunstmann [12]
[10]Voir Liskevich *et al.* [24]
[11]Voir Section 3.4
[12]Suivant une idée de Auscher-Ben Ali [5]

$p \in (1, N)$. En particulier, ce dernier résultat est vrai pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel V^- fortement sous-critique qui appartient à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$.
Avec les mêmes conditions sur V^-, nous montrons des résultats similaires pour l'opérateur $(V^-)^{1/2}A^{-1/2}$. Par conséquent si V^- est fortement sous-critique et $V^- \in K_N^\infty \cap L^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N, dx)$, alors

$$\|\nabla u\|_p + \|(V^-)^{1/2}u\|_p \approx \|(-\Delta - V^-)^{1/2}u\|_p$$

pour tout $p \in (N'; N)$.

Comme nous remarquons, dans la section 3.5, que ces résultats restent valables sur des variétés Riemanniennes de type homogène vérifiant les inégalités de Sobolev globales

$$||u||_{\frac{2N}{N-2}} \leq C||\nabla u||_2 \quad \forall u \in W^{1,2}(M).$$

Au Chapitre 4, nous généralisons les résultats du Chapitre 3 aux variétés Riemanniennes M de dimension $N \geq 1$, de type homogène, où l'estimation Gaussienne (1.2) est vraie. Mais le volume n'est pas nécessairement polynômial et l'inégalité de Sobolev ci-dessus n'est pas nécessairement vraie. Ce Chapitre correspond à l'article [3] écrit en collaboration avec E. M. Ouhabaz, soumis pour publication.
Nous étudions les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V := -\Delta + V^+ - V^-$ où $V^+ \in L^1_{loc}(M)$ et V^- fortement sous-critique. Sous ces conditions, $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ et $|V|^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ sont bornés sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (p_0', 2]$ où $p_0' = 1$ si $N \leq 2$, et $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}\right)' \in (1, 2)$ si $N > 2$. La preuve est basée sur les mêmes techniques que celles du Chapitre 3. Pour cela nous montrons des $L^p - L^q$ estimations hors-diagonale de la forme

$$||\chi_{B(x,r)}e^{-s(-\Delta+V)}\chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}}\Big(\max\Big(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}\Big)\Big)^\beta e^{-cd^2(B(x,r),B(y,r))/s},$$

pour le semi-groupe ainsi que pour $\sqrt{s}\nabla e^{-s(-\Delta+V)}$ et $\sqrt{s}|V|^{1/2}e^{-s(-\Delta+V)}$. Pour obtenir ces estimations, on établie un pont entre une inégalité de Gagliardo-Nirenberg localisée et la bornitude locale du semi-groupe.
Nous étudions aussi $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ et $|V|^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ sur $L^p(M)$ où $p > 2$. Supposons que pour $r_1, r_2 > 2$

$$\int_0^1 \Big\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}}\Big\|_{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s}} + \int_1^\infty \Big\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}}\Big\|_{r_2} \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty.$$

Alors par des arguments de perturbation[13], $(-\Delta)^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ et $|V|^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ sont bornés sur $L^p(M)$ pour tout $p \in (1, r)$ si $N \leq 2$ et $p \in (p_0', \frac{p_0 r}{p_0+r})$ si $N > 2$ où $r = \inf(r_1, r_2)$. Ainsi, dans le cas particulier où $\mu(B(x,t)) \approx t^N$ pour un $N > 2$ et l'inégalité de Poincaré sur $L^2(M)$ est vraie, cette dernière condition sur V devient $V \in L^{N/2-\varepsilon} \cap L^{N/2+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$, et cet intervalle n'est que $(1, N)$.

[13]Suivant une idée de Coulhon et Dungey [15]

Le Chapitre 5 est consacré à l'étude de la bornitude sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ des transformées de Riesz associées à $A := -\Delta - V^-$, ainsi qu'à l'étude des opérateurs puissances négatives et du calcul fonctionnel associés à $-\Delta - V^-$. Dans ce dernier chapitre nous nous limitons à obtenir la bornitude de ces opérateurs sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ sans chercher les majorations optimales de leurs normes. Ce Chapitre correspond à [2], il est en cours de rédaction sous forme d'article pour publication.
Nous suivons les mêmes arguments de perturbation que le chapitre précédent, et nous utilisons la bornitude sur $L^p(wdx)$ de $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$, de $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ et du calcul fonctionnel holomorphe associé à $(-\Delta)$ et à A en présence des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur. Ainsi nous montrons que, si le potentiel est fortement sous-critique et appartient à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R}^N, dx) \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^N, dx); N \geq 3$, alors $\nabla(-\Delta - V^-)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ pour tout $p \in (N'; N)$ tel que $w \in A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$.

1.3 Etude de $(-\Delta - V^-)^{-\alpha/2}; \alpha > 0$ et $\varphi(A)$ où φ est holomorphe borné

Au Chapitre 5, nous étudions aussi les opérateurs $(-\Delta - V^-)^{-\alpha/2}; \alpha > 0$ et $\varphi(A)$ où φ est holomorphe borné, avec la seule condition V^- est fortement sous-critique. Rappelons que sous cette condition sur V^-, le semi-groupe $e^{-t(-\Delta - V^-)}$ ne s'exprime pas en fonction d'un noyau[14]. Ainsi les méthodes utilisant les estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur ne sont pas valables.

Nous montrons que si V^- est fortement sous-critique, alors $(-\Delta - V^-)^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(\mathbb{R}^N, w^p dx)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N, w^q dx)$ où $1/p - 1/q = \alpha/N$ pour tous les $p, q \in (p_0'; p_0)$ (où $p_0 := \frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}$ et p_0' son exposant de dualité) tels que $w \in A_{1+1/p_0'-1/p} \cap RH_{q(p_0/q)'}$. Notre preuve est basée sur des techniques de Auscher et Martell [10] et sur des estimations $L^p - L^q$ hors-diagonale du semi-groupe de la forme

$$||\chi_F e^{-zA} \chi_E f||_q \leq C|z|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-c\frac{d^2(E,F)}{|z|}} ||f||_p$$

pour tous les sous-ensembles fermés E et F de $\mathbb{R}^N$, tout z dans le secteur $S(\mu); \mu \in (0, \pi/2)$ et toute fonction $f \in L^p \cap L^2$ à support dans E.

Utilisant ces mêmes estimations et des techniques de Auscher et Martell [8] nous montrons que si V^- est fortement sous-critique, alors le calcul fonctionnel holomorphe associé est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ pour tout $p \in (p_0'; p_0)$ tel que $w \in A_{p/p_0'} \cap RH_{(p_0/p)'}$.

Bibliographie

[1] Assaad J., Riesz transforms associated to Schrödinger operators with negative potentials, to appear in Publicacions Matemàtiques.

[14] Voir Chapitre 3

[2] Assaad J., Weighted norm inequalities for Riesz transforms, fractional power operators and functional calculus of Schrödinger operators with negative potentials, in preparation.

[3] Assaad J., Ouhabaz E. M., Riesz transforms associated of Schrödinger operators on manifolds, submitted.

[4] Auscher P., On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ and related estimates, Mem. Amer. Math. Soc.186 no 871, (2007).

[5] Auscher P., Ben Ali B., Maximal inequalities and Riesz transform estimates on L^p spaces for Schrödinger operators with nonnegative potentials, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 57 no 6, 1975-2013, (2007).

[6] Auscher P., Coulhon T., Riesz transform on manifolds and Poincaré inequalities, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 4 no. 3, 531–555, (2005).

[7] Auscher P.,Coulhon T., Duong X.T., Hofmann S., Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity, Ann. Scient. ENS 37 no 6, 911-957, (2004).

[8] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I: General operator theory and weights. Adv. Math. 212 no 1, 225-276, (2007).

[9] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part IV: Riesz transforms on manifolds and weights. Math. Z. 260 no 3, 527-539, (2008).

[10] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities for fractional operators, Ind. univ. Math. J. 57 no 4, 1845-1869, (2008).

[11] Badr N., Ben Ali B., L^p-boundedness of Riesz transform related to Schrödinger operators on a manifold, To appear in Scuola Norm. Sup. di Pisa.

[12] Blunck S., Kunstmann P., Calderòn-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞-functional calculus, Rev. Mat. Iberoamericana 19 no 3, 919-942, (2003).

[13] Buckley S., Summation conditions on weights, Michigan Math. J. 40 no. 1, 153–170, (1993).

[14] Carron G., Coulhon T., Hassell A., Riesz transform and L^p-cohomology for manifolds with Euclidean ends, Duke Math. J. 133 no. 1, 59–93, (2006).

[15] Coulhon T., Dungey N., Riesz transform and perturbation, J. Geom. Anal. 17 no 2, 213-226, (2007).

[16] Coulhon T., Duong X. T., Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 no. 3, 1151–1169, (1999).

[17] Dragičevíc O., Grafakos L., Pereyra M. C., Petermichl S., Extrapolation and sharp norm estimates for classical operators on weighted Lebesgue spaces Publ. Mat. 49 no. 1, 73–91,(2005).

[18] Dragičević O., Volberg A., Linear dimension-free estimates for the Hermite-Riesz transforms, preprint.

[19] Duong X. T., McIntosh A., Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains, Rev. Mat. Iberoamericana 15 no. 2, 233–265, (1999).

[20] Duong X.T., Ouhabaz E.M., Yan L., Endpoint estimates for Riesz transforms of magnetic Schrödinger operators, Ark. Mat. 44, 261-275, (2006).

[21] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.I, Math. Ann 341 no 4, 859-896, (2008).

[22] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.II, Ann. Inst. Fourier 59 no 4, 1553-1610, (2009).

[23] Lerner, A. K., On some weighted norm inequalities for Littlewood-Paley operators, Illinois J. Math. 52 no. 2, 653–666, (2008).

[24] Liskevich V., Sobol Z., Vogt H., On the L^p theory of C^0-semigroups associated with second-order elliptic operators II, J. Funct. Anal. 193, 55-76, (2002).

[25] Mauceri G., Noselli L., Riesz transforms for a non-symmetric Ornstein-Uhlenbeck semigroup, Semigroup Forum 77 no. 3, 380–398, (2008).

[26] Ouhabaz E.M., Analysis of heat equations on domains, London Math. Soc. Mono. 31, Princ. Univ. Press. (2004).

[27] Petermichl S., The sharp weighted bound for the Riesz transforms, Proc. Amer. Math. Soc. 136 no. 4, 1237–1249, (2008).

[28] Petermichl S., Treil S., Volberg, A., Why the Riesz transforms are averages of the dyadic shifts? Proceedings of the 6th International Conference on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial, 2000). Publ. Mat. Vol. Extra, 209–228, (2002).

[29] Shen Z., L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, Ann. Inst. Fourier Grenoble 45 no. 2, 513-546, (1995).

[30] Shen Z., Bounds of Riesz transforms on L^p spaces for second order elliptic operators, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 no. 1, 173–197, (2005).

Chapter 2

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques propriétés des formes sesquilinéaires. Ensuite nous expliquons comment on utilise ces formes pour définir l'opérateur de Schrödinger $A := -\Delta + V^+ - V^-$ sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que sur des variétés Riemanniennes plus générales. Nous exposons aussi les résultats déjà connus sur le semi-groupe associé e^{-tA}. Finalement, nous expliquons l'intérêt de l'étude des transformées de Riesz et donnons les critères habituellement utilisés pour montrer qu'elles sont bornés.

2.1 Formes sesquilinéaires

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, $(.,.)$ son produit scalaire et $\|.\|^2 = (.,.)$ la norme associée. (Pour plus de détails sur cette section voir [13].)

Une forme sesquilinéaire est une application $\mathfrak{a}$ définie sur un sous-espace vectoriel de H, noté $D(\mathfrak{a})$, et appelé le domaine de $\mathfrak{a}$, telle que:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{a}\colon D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \text{et } \forall v \in D(\mathfrak{a}), \text{ l'application } u & \longrightarrow & \mathfrak{a}(u,v) \text{ est linéaire} \\ \text{et } \forall u \in D(\mathfrak{a}), \text{ l'application } v & \longrightarrow & \mathfrak{a}(u,v) \text{ est antilinéaire.} \end{array}$$

On dit que:

a) $\mathfrak{a}$ est à domaine dense si $D(\mathfrak{a})$ est dense dans H.

b) $\mathfrak{a}$ est accrétive si: $\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u) \geq 0, \quad \forall u \in D(\mathfrak{a})$.

c) $\mathfrak{a}$ est continue si: $\exists M$ constante > 0 telle que

$$|\mathfrak{a}(u,v)| \leq M\|u\|_a\|v\|_a \tag{2.1}$$

où $\quad \|u\|_a = (\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u) + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

d) $\mathfrak{a}$ est fermée si: $(D(\mathfrak{a}), \|.\|_a)$ est complet.

e) $\mathfrak{a}$ est sectorielle (où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si: $\exists \beta \in [0, \frac{\pi}{2})$ tel que

$$\mathfrak{a}(u,u) \in \overline{S(\beta)} := \{z \in \mathbb{C}, |argz| \leq \beta\}$$

pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$ où $S(\beta)$ est le secteur ouvert d'angle β. Ceci est equivalent à: $\exists C \geq 0$ tel que

$$|\mathfrak{Im}\mathfrak{a}(u,u)| \leq C\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u) \tag{2.2}$$

alors $|\mathfrak{a}(u,v)| \leq (1+C)(\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u))^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(v,v))^{\frac{1}{2}}\ \forall u,v \in D(\mathfrak{a})$.
En particulier $\mathfrak{a}$ est continue.

On appelle forme adjointe de $\mathfrak{a}$, notée $\mathfrak{a}^*$, la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}^* : D(\mathfrak{a}) \times D(\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que $\mathfrak{a}^*(u,v) = \overline{\mathfrak{a}(v,u)}$.
On dit que $\mathfrak{a}$ est symétrique si $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ $\Big(\mathfrak{a}(u,v) = \overline{\mathfrak{a}(v,u)}\ \forall u,v \in D(\mathfrak{a})\Big)$.
Si $\mathfrak{a}$ est symétrique accrétive, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve que $\mathfrak{a}$ est continue.
On appelle partie symétrique de $\mathfrak{a}$, la forme sesquilinéaire $\mathfrak{b}$ définie par $\mathfrak{b} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^*)$ avec $D(\mathfrak{b}) = D(\mathfrak{a})$.
La forme $\mathfrak{b}$ est symétrique et [$\mathfrak{a}$ symétrique $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$].
Si $\mathfrak{a}$ n'est pas accrétive mais $\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u) \geq -\gamma\|u\|^2\ \forall u \in D(\mathfrak{a})$, on se ramène à une forme accrétive en considérant la forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}+\gamma$ telle que $D(\mathfrak{a}+\gamma) = D(\mathfrak{a})$ et $\|u\|_a$ sera remplacée par $(\mathfrak{Re}\mathfrak{a}(u,u) + \gamma\|u\|^2 + \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

2.2 Opérateurs et semi-groupes associés

Soit $\mathfrak{a}$ une forme sesquilinéaire à domaine dense, accrétive, continue et fermée. Alors on associe à $\mathfrak{a}$ un opérateur A de la façon suivante:

$$\begin{aligned} D(A) = &\{u \in D(\mathfrak{a}),\, \exists \phi \in H,\, \mathfrak{a}(u,v) = (\phi, v) \quad \forall v \in D(\mathfrak{a})\} \\ &\text{et } Au = \phi. \end{aligned}$$

Comme référence pour cette section voir [1], [11] et [13].

On peut définir un opérateur comme étant une perturbation d'un autre. On utilise le théorème KLMN suivant pour cet objectif.

Théorème 2.1. *Soit A un opérateur auto-adjoint positif défini par une forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$, et soit $\mathfrak{b}$ une forme sesquiliéaire sur $D(\mathfrak{a})$ telle que pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$*

$$|\mathfrak{b}(u,u)| \leq \alpha\mathfrak{a}(u,u) + c(u,u)$$

où $\alpha \in (0,1)$ et c une constante réelle. Alors la forme somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est fermée et minorée, par suite on peut lui associer un opérateur auto-adjoint, vu comme étant une perturbation de l'opérateur A.

La proposition suivante s'obtient facilement en appliquant le lemme de Lax-Milgram.

Proposition 2.2. *Soit A l'opérateur associé à une forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$, alors A est à domaine dense et* $\forall\lambda > 0, (\lambda I + A)$ *est un opérateur inversible et* $(\lambda I + A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ *avec*

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall\lambda > 0.$$

D'après le théorème de Hille-Yosida, $-A$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu et de contraction sur H, noté $(e^{-tA})_{t\geq 0}$. En particulier le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \ \forall t \geq 0, \quad u(0) = f \in D(A)$$

admet une solution unique $u(t) = e^{-tA}f$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $-A$ est générateur d'un semi-groupe analytique sur H d'angle $(\frac{\pi}{2} - \arctan M)$ où M est la constante de continuité qui apparaît dans (2.1), de plus

$$\|e^{-z}e^{-zA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall z \in S\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan M\Big).$$

Si la forme est sectorielle alors $(-A)$ est générateur d'un semi-groupe analytique sur H d'angle $(\frac{\pi}{2} - \arctan C)$, où C est la constante de (2.2), et

$$\|e^{-zA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall z \in S\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan C\Big).$$

Si $\mathfrak{a}$ est symétrique alors $C = 0$, donc $(-A)$ est générateur d'un semi-groupe analytique sur H d'angle $\frac{\pi}{2}$, et

$$\|e^{-zA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1 \quad \forall z \in S\Big(\frac{\pi}{2}\Big).$$

Par suite le problème de Cauchy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \ \forall t > 0, \quad u(0) = f \in H$$

admet une solution unique $u(t) = e^{-tA}f$.

Définition 2.3. *Un opérateur A est de type β si les deux conditions suivantes sont vraies:*

- $\sigma(A) \subset S(\beta)$ *pour* $0 \leq \beta < \pi$ *où* $\sigma(A)$ *est le spectre de A et $S(\beta)$ est le secteur d'angle β,*
- *Pour tout $\nu > \beta$, il existe une constante c_ν telle que pour $\lambda \notin S(\nu)$*

$$||(A - \lambda I)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{c_\nu}{|\lambda|}.$$

Soit A l'opérateur associé à une forme sesquilinéaire $\mathfrak{a}$, alors A^*, l'adjoint de A, est l'opérateur associé à la forme $\mathfrak{a}^*$.

Proposition 2.4. *Supposons que $\mathfrak{a}$ est symétrique, accrétive, à domaine dense et fermée, alors son opérateur associé A est auto-adjoint et*

$$(Au, u) := \int Au.udx \geq 0$$

pour tout $u \in D(A)$. Par suite A est de type 0.

Supposons que $\mathfrak{a}$ est symétrique, accrétive, à domaine dense et fermée, alors le calcul fonctionnel holomorphe associé à A est borné sur H. Par suite on a

$$\|\varphi(A)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|\varphi\|_\infty$$

pour toute fonction φ holomorphe bornée sur le secteur $S(\mu)$ pour tout $\mu \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Quand l'opérateur A est auto-adjoint accrétif, il existe un unique opérateur B auto-adjoint, accrétif tel que $B^2 = A$, c.à.d. $D(A) = D(B^2)$ où $B^2 = B.B$ et $Au = B^2u$ pour tout $u \in D(A)$.
On note $B = A^{\frac{1}{2}}$, l'opérateur B est appelé la racine carrée de A. Alors $D(A^{\frac{1}{2}}) = D(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a}(u, v) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v) \quad \forall u, v \in D(\mathfrak{a}) = D(A^{\frac{1}{2}})$

2.3 Définition de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V^+ - V^-$

Soit $-\Delta$ l'opérateur de Laplace positif sur $\mathbb{R}^N$. Il est défini comme étant l'opérateur

$$-\Delta := -\mathrm{div} \circ \nabla$$

où

$$(\nabla f)_i := \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \mathrm{div} F := \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ où $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace positif et le potentiel $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est tel que $V = V^+ - V^-$ (où V^+ et V^- sont les parties positives et négatives de V, respectivement). Cet opérateur est défini par la méthode des formes sesquilinéaires. On définit

$$\mathfrak{a}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) u(x) v(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) u(x) v(x) dx$$

$$D(\mathfrak{a}) = \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) u^2(x) dx < \infty \right\},$$

où on suppose que $V^+ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et V^- satisfait (pour tout $u \in D(\mathfrak{a})$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \quad & V^-(x) u^2(x) dx \leq \\ & \alpha \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x) u^2(x) dx \right] + \beta \int_{\mathbb{R}^N} u^2(x) dx \end{aligned} \tag{2.3}$$

où $\alpha \in (0,1)$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Par le théorème KLMN cité dans la section précédente, nous observons que l'opérateur associé est l'opérateur de Schrödinger A qui est bien défini et auto-adjoint.
Si en plus $\beta \leq 0$, alors A est positif, et le calcul fonctionnel holomorphe associé à A est borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Sur des variétés Riemanniennes, l'opérateur de Schrödinger est défini aussi par la méthode des formes sesquilinéaires. Cet opérateur s'écrit $-\Delta + V^+ - V^-$ où $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami: Si g est la métrique Riemannienne, on définit le gradient Riemannien par

$$(\nabla f)_i := \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

et la divergence par

$$\mathrm{div} F := \sum_i \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det g} F_i).$$

Alors l'opérateur

$$-\Delta := -\mathrm{div} \circ \nabla$$

est l'opérateur de Laplace-Beltrami de la variété Riemannienne.

2.4 Bornitude du semi-groupe associé à $-\Delta + V^+ - V^-$

Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V^+ - V^-$ défini sur $\mathbb{R}^N$ par la méthode des formes sesquilinéaires, où V^+ est localement intégrable et V^- vérifie (2.3) où $\beta \leq 0$. Ainsi $-A$ est générateur d'un semi-groupe fortement continu (même analytique) et de contraction sur L^2.

Pour étudier la bornitude du semi-groupe sur L^p pour $p \neq 2$ il existe plusieurs méthodes:

Si $V^- \equiv 0$, en utilisant la formule de Trotter-Kato, on a la domination suivante

$$|e^{-tA} f| \leq e^{-t(-\Delta)} |f|.$$

Cette domination par le semi-groupe de Gauss donne l'estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé. Par suite le semi-groupe associé à A est uniformement borné sur L^p pour tous les $p \in [1, \infty]$. Alors pour tout $t > 0$ et tout $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$||e^{-tA}||_{p-q} \leq C t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}. \tag{2.4}$$

Si $V^+ \equiv 0$ et V^- radial tel que $V^- \approx c/r^2$ lorsque $r \to \infty$ où $0 < c < \frac{(N-2)^2}{4}$, Davies et Simon [8], par une étude de la résonance radiale, montrent que le semi-groupe est uniformement borné pour tout $p \in ((N/\gamma)', N/\gamma)$ où $0 < \gamma$ est l'indice de la résonance.

Comme ils montrent, pour $p \notin ((N/\gamma)', N/\gamma)$, que e^{-tA} n'est pas uniformement borné sur L^p.

Liskevich, Sobol et Vogt [12] étudient le cas où V^+ est localement intégrable et V^- vérifie (2.3). Ils montrent que si $\beta \le 0$ dans (2.3), alors le semi-groupe associé est uniformement borné sur L^p pour tout $p \in (p_0', p_0)$ tel que $p_0 := \frac{N}{(N-2)} \frac{2}{(1-\sqrt{1-\alpha})}$ où α est celle de (2.3). Ils obtiennent ce résultat en étudiant la condition sur p telle que

$$(A_p u, u^{p-1}) := \int_{\mathbb{R}^N} A_p u.u^{p-1} dx \ge 0$$

où A_p est l'opérateur associé à A sur L^p, puis en utilisant l'inégalité de Sobolev

$$||f||_{pN/(N-p)} \le C||\nabla f||_p.$$

Ils montrent aussi que, si $V^+ := r^2$ et $V^- := -\alpha \frac{(N-2)^2}{4r^2}$ où $r(x) := |x|$ et α est celle de (2.3), alors pour $p \notin (p_0', p_0)$ le semi-groupe ne s'extrapole pas à un semi-groupe fortement continu sur L^p.

2.5 Transformées de Riesz: définition et motivation

Nous avons vu dans Section 2.2 que si un opérateur A est auto-adjoint positif, on peut définir sa racine carrée, et pour tout $u \in D(\mathfrak{a}) = D(A^{1/2})$

$$\mathfrak{a}(u, u) = (A^{1/2}u, A^{1/2}u).$$

On peut aussi définir les opérateurs associés de la forme $A^{-\alpha}$ (voir [10]):

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-tA} dt$$

où Γ est la fonction d'Euler.

Ainsi, l'opérateur $\nabla A^{-1/2}$, appelé les transformées de Riesz associées à A, est défini par

$$\nabla A^{-1/2} := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \nabla e^{-tA} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Expliquons l'intérêt de l'étude de la bornitude des transformées de Riesz.

La solution u d'une équation d'évolution, par exemple du problème de Cauchy suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \ \forall t > 0, \quad u(0) = f \in L^p,$$

appartient à L^p, plus précisemment à $D(A)$. Si l'inégalité suivante est vraie

$$||\nabla u||_p \le C||A^{1/2}u||_p, \tag{2.5}$$

alors la solution est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}$. Ceci est vrai vu que $D(A) \subset D(A^{1/2})$.
Ainsi, étudier la bornitude sur L^p des transformées de Riesz $\nabla A^{-1/2}$, nous imforme sur la régularité de la solution de l'équation d'évolution associée.

Nous étudions aussi la bornitude de l'opérateur

$$V^{1/2}A^{-1/2} := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^\infty V^{1/2}e^{-tA}\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Ainsi, si cet opérateur et borné sur L^p alors l'inégalité suivante est vraie

$$||V^{1/2}u||_p \leq C||A^{1/2}u||_p.$$

Dans ce cas, si $V^{1/2}u \notin L^p$, alors la fonction u ne peut pas être dans le domaine de $A^{1/2}$.

2.6 Critères pour montrer la bornitude des transformées de Riesz

Soit M une variété Riemannienne et ρ la distance géodésique sur M. Supposons que M est de type homogène, c.à.d., pour tout $x \in M$ et $r > 0$

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r))$$

où $B(x,r) := \{y \in M \ \text{ tel que } \ \rho(x,y) < r\}$.
Ceci implique qu'il existe un $N > 0$ tel que

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leq C\lambda^N\mu(B(x,r))$$

pour tout $\lambda \geq 1$.

Définition 2.5.
- *On dit que T est un opérateur d'intégrale singulière s'il admet un noyau associé $k(x,y)$. C.à.d., si k est une fonction mesurable sur $M \times M$ telle que*

$$Tu(x) = \int_M k(x,y)u(y)d\mu(y) \quad p.p. x \notin supp u$$

pour tout $u \in L^2(M,\rho,\mu)$ à support compact dans M.

- *On dit qu'un opérateur linéaire est de type faible (p,p) s'il est borné de L^p dans $L^{p,\infty}$.*

Duong et McIntosh [9] donnent le théorème suivant. C'est un critère sous lequel un opérateur d'intégrale singulière, borné sur $L^2(M,\rho,\mu)$, est de type faible $(1,1)$. Leur condition généralise la célèbre condition presque L^1 de Hörmander. Ce critère consiste l'outil utilisé par Coulhon-Duong [7] pour les transformées de Riesz sur les variétés, et également par Ouhabaz [13] pour les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel positif.

Théorème 2.6. *Soit T un opérateur linéaire borné sur $L^2(M,\rho,\mu)$ ayant un noyau associé $k(x,y)$. Soit $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu et $p_t(x,y)$ son noyau de la chaleur qui vérifie l'estimation Gaussienne:*

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{C}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} e^{-\frac{c\rho(x,y)^2}{t}} \quad \forall t>0, \quad p.p.(x,y) \in M \times M.$$

Supposons que les opérateurs composés Te^{-tA} ont des noyaux associés $k_t(x,y)$ et qu'il existe des constantes W et γ positives telles que:

$$\int_{\rho(x,y)\geq\gamma\sqrt{t}} |k(x,y) - k_t(x,y)| d\mu(x) \leq W \quad p.p. y \in M \quad \forall t > 0.$$

Alors l'opérateur T est de type faible $(1,1)$ et il existe une constante C, indépendante de T, telle que

$$\|T\|_{L^1(M,\mu)\to L^{1,\infty}(M,\mu)} \leq C(W + \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}).$$

Or, il existe des opérateurs qui ne sont pas représentés par un noyau. Blunck et Kunstmann [6] généralisent le théorème précédent et donnent la version suivante. Nous utilisons ce critère (une version simplifiée) au Chapitre 3 et Chapitre 4.

Théorème 2.7. *Soient $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$, et $(S_t)_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires bornés sur $L^2(M,\rho,\mu)$ satisfaisant $S_0 = I$ et l'estimation hors-diagonale suivante*

$$||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)} S_t \chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-q} \leq \mu(B(x,\sqrt{t}))^{-1/p+1/q} g_t(k)$$

pour tout $x \in M$, $t > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, et pour des fonctions $g_t : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $t > 0$, $\sum_k (k+1) g_t(k) \leq C$. Ici $A(x,\sqrt{t},k)$ est l'anneau $B(x,(k+1)\sqrt{t}) \setminus B(x,k\sqrt{t})$. Soit T un opérateur linéaire de type faible $(2,2)$ qui satisfait

$$\frac{1}{\mu(B(z,\frac{\sqrt{t}}{2}))^{\frac{1}{p'}}} \left\| \chi_{B(z,\frac{\sqrt{t}}{2})} \left(T \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k S_{kt} \right)^* \chi_{B^c(z,4\sqrt{t})} f \right\|_{p'} \leq CM^{\frac{1}{2}}(|f|^2)(x)$$

pour tout $t > 0$, $f \in L^{p'}(M,\rho,\mu)$, $z \in M$, $x \in B(z,\sqrt{t}/2)$ et un $n \in \mathbb{N}$, où

$$M^{1/2}(|f|^2)(x) := \sup_{r>0} \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|^2 \right)^{1/2}.$$

Alors T est de type faible (p,p).

Shen [14] montre la bornitude des transformées de Riesz associées à l'opérateur $-\mathrm{div}B\nabla$ où B est une matrice à coefficients bornés et à valeurs réelles. Pour cet objectif, il montre le critère suivant en utilisant des méthodes "Good-λ inequalities".

Théorème 2.8. *Soit T un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $p > 2$. Supposons qu'il existe des constantes $\alpha_2 > \alpha_1 > 1, C > 1$, telles que*

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B |Tf|^p \right)^{1/p} \leq C \left\{ \left(\frac{1}{|\alpha_1 B|} \int_{\alpha_1 B} |Tf|^2 \right)^{1/2} + \sup_{B' \supset B} \left(\frac{1}{|B'|} \int_{B'} |f|^2 \right)^{1/2} \right\}$$

pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^N$ et toute fonction $f \in L^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^N \setminus \alpha_2 B$. Alors T est borné sur L^q pour tout $2 < q < p$.

Le théorème ci-dessus est généralisé par Auscher et Martell [5]. Auscher et Ben Ali [3] utilisent cette généralisation pour étudier les transformées de Riesz associées à l'opérateur de Schödinger avec un potentiel positif.

Toujours en utilisant des méthodes "Good-λ inequalities" Auscher, Coulhon, Duong et Hofmann [4] donnent le critère suivant. Auscher [2] l'utilise pour montrer la bornitude des transformées de Riesz associés à l'opérateur $-\mathrm{div}B\nabla$ où B est une matrice a coefficients bornés et à valeurs complexes.

Théorème 2.9. *Soit $q \in (2, \infty]$. Supposons que T est un opérateur sous-linéaire borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, et soit $(A_r)_{r>0}$ une famille d'opérateurs linéaires sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. Supposons que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(I - A_{r(B)})f|^2\right)^{1/2} \leq C\Big(M(|f|^2)\Big)^{1/2}(x)$$

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |TA_{r(B)}f|^q\right)^{1/q} \leq C\Big(M(|Tf|^2)\Big)^{1/2}(x)$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, toute boule B qui contient x où $r(B)$ est le rayon de B. Ici M est l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|}\int_B |f|.$$

Si $2 < p < q$ et $Tf \in L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors T est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N)$. On a ainsi, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$, $\|Tf\|_p \leq c\|f\|_p$ où c dépend seulement de la dimension N, p, q et C.

Le théorème ci-dessus est généralisé par Auscher et Martell [5] aux espaces à poids $L^p(wdx)$. Au Chapitre 5 nous utilisons cette généralisation pour montrer la bornitude sur $L^p(wdx)$ du calcul fonctionnel associé à $-\Delta - V, V \geq 0$.

Observons que les théorèmes prouvés par les méthodes "Good-λ inequalities" sont applicables même si l'opérateur T n'est pas représenté par un noyau.

Bibliographie

[1] Albrecht D., Duong X., McIntosh A., Operator theory and harmonic analysis. Instructional Workshop on Analysis and Geometry, Part III, 77–136, (Canberra, 1995), Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., 34, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1996.

[2] Auscher P., On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ and related estimates, Mem. Amer. Math. Soc.186 no 871, (2007).

[3] Auscher P., Ben Ali B., Maximal inequalities and Riesz transform estimates on L^p spaces for Schrödinger operators with nonnegative potentials, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 57 no 6, 1975-2013, (2007).

[4] Auscher P.,Coulhon T., Duong X.T., Hofmann S., Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity, Ann. Scient. ENS 37 no 6, 911-957, (2004).

[5] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I: General operator theory and weights. Adv. Math. 212 no 1, 225-276, (2007).

[6] Blunck S., Kunstmann P., Calderòn-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞-functional calculus, Rev. Mat. Iberoamericana 19 no 3, 919-942, (2003).

[7] Coulhon T., Duong X. T., Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 no. 3, 1151–1169, (1999).

[8] Davies E.B., Simon B., L^p norms of non-critical Schrödinger semigroups, J. Funct. Anal. 102, 95-115, (1991).

[9] Duong X. T., McIntosh A., Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains, Rev. Mat. Iberoamericana 15 no. 2, 233–265, (1999).

[10] Haase M., The functional calculus for sectorial operators, Operator Theory: Advances and Applications, 169. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[11] Kato T., Perturbation theory for linear operators, Grund. der Math. Wiss. 132 Springer Verlag (1966).

[12] Liskevich V., Sobol Z., Vogt H., On the L^p theory of C^0-semigroups associated with second-order elliptic operators II, J. Funct. Anal. 193, 55-76, (2002).

[13] Ouhabaz E.M., Analysis of heat equations on domains, London Math. Soc. Mono. 31, Princ. Univ. Press. (2004).

[14] Shen Z., Bounds of Riesz transforms on L^p spaces for second order elliptic operators, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 no 1, 173-197, (2005).

Chapter 3

Riesz transforms associated to Schrödinger operators with negative potentials

The goal of this paper is to study the Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ where A is the Schrödinger operator $-\Delta - V$, $\quad V \geq 0$, under different conditions on the potential V. We prove that if V is strongly subcritical and $N \geq 3$, then there exists a $p_0 \in (\frac{2N}{N-2}, \infty)$ such that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (p_0', 2]$ where p_0' is the dual exponent of p_0, and we give a counterexample to the boundedness on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $p \in (1, p_0') \cup (p_{0*}, \infty)$ where $p_{0*} := \frac{p_0 N}{N+p_0}$ is the reverse Sobolev exponent of p_0. If the potential is strongly subcritical in the Kato subclass K_N^∞, then $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, 2]$, moreover if it is in $L^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N)$ then $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, N)$. We prove also boundedness of $V^{1/2}A^{-1/2}$ with the same conditions on the same spaces. Finally we study these operators on manifolds. We prove that our results hold on a class of Riemannian manifolds.

3.1 Introduction and definitions

Let A be a Schrödinger operator $-\Delta + V$ where $-\Delta$ is the nonnegative Laplace operator and the potential $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ such that $V = V^+ - V^-$ (where V^+ and V^- are the positive and negative parts of V, respectively). The operator is defined via the sesquilinear form method as explained in the previous chapter Section 2.3. If $\beta \leq 0$ in (2.3), then A is nonnegative. Thus, as explained in Section 2.5, we can define the Riesz transforms associated to A by

$$\nabla A^{-1/2} := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \sqrt{t} \nabla e^{-tA} \frac{dt}{t}.$$

The boundedness of Riesz transforms on $L^p(\mathbb{R}^N)$ implies that the domain of $A^{1/2}$ is included in the Sobolev space $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Thus the solution of the corresponding evolution equation will be in the Sobolev space $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ for initial data in $L^p(\mathbb{R}^N)$.

It is our aim to study the boundedness on $L^p(\mathbb{R}^N)$ of the Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$. We are also interested in the boundedness of the operator $V^{1/2}A^{-1/2}$. If $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$, we obtain for some positive constant C

$$\|\nabla u\|_p + \|V^{1/2}u\|_p \leq C\|(-\Delta + V)^{1/2}u\|_p.$$

By a duality argument, we obtain

$$\|(-\Delta + V)^{1/2}u\|_{p'} \leq C(\|\nabla u\|_{p'} + \|V^{1/2}u\|_{p'})$$

where p' is the dual exponent of p.
Riesz transforms associated to Schrödinger operators with nonnegative potentials were studied by Ouhabaz [25], Shen [28], and Auscher and Ben Ali [2]. Ouhabaz proved that Riesz transforms are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, 2]$, for all potential V locally integrable. Shen and Auscher and Ben Ali proved that if the potential V is in the reverse Hölder class RH_q[1], then the Riesz transforms are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, p_1)$ where $2 < p_1 \leq \infty$ depends on q. The result of Auscher and Ben Ali generalizes that of Shen because Shen has restrictions on the dimension N and on the class RH_q. Recently, Badr and Ben Ali [5] extended the result of Auscher and Ben Ali [2] to Riemannian manifolds with polynomial volume growth where Poincaré inequalities hold and Riesz transforms associated to the Laplace-Beltrami operator are bounded. For manifolds of homogeneous type (without polynomial volume growth condition), they proved similar results for a smaller range of p.

With negative potentials new difficulties appear. If we take $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, and apply the method in [25] to the operator $A + \|V\|_\infty$, we obtain boundedness of $\nabla(A + \|V\|_\infty)^{-1/2}$ on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, 2]$. This is weaker than the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ on the same spaces. Guillarmou and Hassell [19] studied Riesz transforms $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ where A is the Schrödinger operator with negative potential and P_+ is the spectral projection on the positive spectrum. They prove that, on asymptotically conic manifolds M of dimension $N \geq 3$, if V is smooth and satisfies decay conditions, and the Schrödinger operator has no zero-modes nor zero-resonances, then Riesz transforms $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, N)$. They also prove (see [20]) that when zero-modes are present, Riesz transforms $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (\frac{N}{N-2}, \frac{N}{3})$, with bigger range possible if the zero modes have extra decay at infinity.

In this paper we consider only negative potentials. From now on, we denote by A the Schrödinger operator with negative potential,

$$A := -\Delta - V, \quad V \geq 0.$$

Our purpose is, first, to find optimal conditions on V allowing the boundedness of Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ and that of $V^{1/2}A^{-1/2}$ on $L^p(\mathbb{R}^N)$ second, to find the best possible

[1]Definition in Chapter 5 SubSection 5.1.1

range of p's.
Let us make the following definition

Definition 3.1. *We say that the potential V is strongly subcritical if for some $\varepsilon > 0$, $A \geq \varepsilon V$. This means that for all $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} Vu^2 \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2.$$

Let $N \geq 3$. The potential $V(x) = c/|x|^2$ where $0 < c < \frac{(N-2)^2}{4}$ is an example of strongly subcritical potentials, thanks to the Hardy inequality. Let $V(x) \approx c/|x|^\alpha$ for $\alpha > 2$ when x tends to infinity. This potential is strongly subcritical if $V \in L^{N/2,\infty}$ and $||V||_{\frac{N}{2},\infty}$ is small enough (see the example at the end of Section 3.4). For more information on strongly subcritical potentials see [16] and [34].
With this condition, V satisfies assumption (2.3) where $\beta = 0$ and $\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon}$. Thus A is well defined, nonnegative and $-A$ generates an analytic contraction semigroup $(e^{-tA})_{t\geq 0}$ on $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Since $-\Delta - V \geq \varepsilon V$ we have $(1+\varepsilon)(-\Delta - V) \geq \varepsilon(-\Delta)$. Therefore

$$||\nabla u||_2^2 \leq (1 + \frac{1}{\varepsilon})||A^{1/2}u||_2^2. \tag{3.1}$$

Thus, $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^N)$. Conversely, it is clear that if $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^N)$ then V is strongly subcritical.

We observe also that $-\Delta - V \geq \varepsilon V$ is equivalent to

$$||V^{1/2}u||_2^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}||A^{1/2}u||_2^2. \tag{3.2}$$

Thus, $V^{1/2}A^{-1/2}$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^N)$ if and only if V is strongly subcritical.

So we can conclude that

$$\|\nabla u\|_2 + \|V^{1/2}u\|_2 \leq C\|(-\Delta - V)^{1/2}u\|_2$$

if and only if V is strongly subcritical. Then by a duality argument we have

$$\|\nabla u\|_2 + \|V^{1/2}u\|_2 \approx \|(-\Delta - V)^{1/2}u\|_2$$

if and only if V is strongly subcritical.

To study Riesz transforms on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $1 \leq p \leq \infty$ with $p \neq 2$ we use the results on the uniform boundedness of the semigroup on $L^p(\mathbb{R}^N)$. Taking central potentials which are equivalent to $c/|x|^2$ as $|x|$ tends to infinity where $0 < c < (\frac{N-2}{2})^2, N \geq 3$, Davies and Simon [16] proved that for all $t > 0$ and all $p \in (p_0', p_0)$,

$$\|e^{-tA}\|_{p-p} \leq C$$

where $2 < \frac{2N}{N-2} < p_0 < \infty$ and p_0' its dual exponent. Next Liskevich, Sobol, and Vogt [24] proved the uniform boundedness on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (p_0', p_0)$ where $2 < \frac{2N}{N-2} < p_0 = \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$, for general strongly subcritical potentials. They also proved that the range (p_0', p_0) is optimal and the semigroup does not even act on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $p \notin (p_0', p_0)$. Under additional condition on V, Takeda [32] used stochastic methods to prove a Gaussian estimate of the associated heat kernel. Thus the semigroup acts boundedly on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in [1, \infty]$.

In this paper we prove that when V is strongly subcritical and $N \geq 3$, Riesz transforms are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (p_0', 2]$. We also give a counterexample to the boundedness of Riesz transforms on $L^p(\mathbb{R}^N)$ when $p \in (1, p_0') \cup (p_{0*}, \infty)$ where $2 < p_{0*} := \frac{p_0 N}{N+p_0} < p_0 < \infty$. If V is strongly subcritical in the Kato subclass K_N^∞, $N \geq 3$ (see Section 3.4), then $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, 2]$. If, in addition, $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N)$ then it is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, N)$. With the same conditions, we prove similar results for the operator $V^{1/2}A^{-1/2}$. Hence if V is strongly subcritical and $V \in K_N^\infty \cap L^{\frac{N}{2},\infty}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, then

$$\|\nabla u\|_p + \|V^{1/2}u\|_p \approx \|(-\Delta - V)^{1/2}u\|_p \tag{3.3}$$

for all $p \in (N', N)$.
For Schrödinger operator $-\Delta + V$ with nonnegative V, these results hold under the sole assumption $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}$.
In the last section, we extend our results to a class of Riemannian manifolds. We denote by $-\Delta$ the Laplace-Beltrami operator on a complete non-compact Riemannian manifold M of dimension $N \geq 3$. We prove that when M is of homogeneous type and the Sobolev inequality holds on M, $\nabla(-\Delta - V)^{-1/2}$ and $V^{1/2}(-\Delta - V)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (p_0', 2]$ provided that V is strongly subcritical on M. If in addition Poincaré inequalities hold on M and V belongs to the Kato class $K_\infty(M)$, then $\nabla(-\Delta - V)^{-1/2}$ and $V^{1/2}(-\Delta - V)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, 2]$. Assume now that the volume of balls B_r of M is equivalent to r^N, and Poincaré inequalities hold on M. If V is strongly subcritical in $K_\infty(M) \cap L^{\frac{N}{2},\infty}(M)$ and $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ is bounded on $L^r(M)$ for some $r > 2$, then $\nabla(-\Delta - V)^{-1/2}$ and $V^{1/2}(-\Delta - V)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, \inf(r, N))$. We deduce that this last result holds for Schrödinger operators with potentials in $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$.

For the proof of the boundedness of Riesz transforms we use off-diagonal estimates (for properties and more details see [4]). These estimates are a generalization of the Gaussian estimates used by Coulhon and Duong in [13] to study the Riesz transforms associated to the Laplace-Beltrami operator on Riemannian manifolds, and by Duong, Ouhabaz and Yan in [17] to study the magnetic Schrödinger operator on $\mathbb{R}^N$. We also use the approach of Blunck and Kunstmann in [8] and [9] to weak type (p, p)-estimates. In [1], Auscher used these tools to divergence-form operators with complex coefficients. For $p \in (2, N)$ we use a complex interpolation method (following an idea in Auscher and Ben Ali [2]).

In contrast to [19] and [20], we do not assume decay nor smoothness conditions on V.

In the following sections, we denote by L^p the Lebesgue space $L^p(\mathbb{R}^N)$ with the Lebesgue measure dx, $||.||_p$ its usual norm, $(.,.)$ the inner product of L^2, $||.||_{p-q}$ the norm of operators acting from L^p to L^q. We denote by $L^{p,\infty}$ the weak Lebesgue space. We denote by p' the dual exponent to p, $p' := \frac{p}{p-1}$. We denote by C, c the positive constants even if their values change at each occurrence. Throughout this paper, $\nabla A^{-1/2}$ denotes one of the partial derivative $\frac{\partial}{\partial x_k} A^{-1/2}$ for any fixed $k \in \{1, ..., N\}$.

3.2 Off-diagonal estimates

In this section, we show that $(e^{-tA})_{t>0}, (\sqrt{t}\nabla e^{-tA})_{t>0}$ and $(\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ satisfy $L^p - L^2$ off-diagonal estimates provided that V is strongly subcritical.

Definition 3.2. *Let $(T_t)_{t>0}$ be a family of uniformly bounded operators on L^2. We say that $(T_t)_{t>0}$ satisfies $L^p - L^q$ off-diagonal estimates for $p, q \in [1, \infty]$ with $p \leq q$ if there exist positive constants C and c such that for all closed sets E and F of $\mathbb{R}^N$ and all $h \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ with support in E, we have for all $t > 0$:*

$$\|T_t h\|_{L^q(F)} \leq C t^{-\gamma_{pq}} e^{-\frac{cd(E,F)^2}{t}} \|h\|_p,$$

where d is the Euclidean distance and $\gamma_{pq} := \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$.

Proposition 3.3. *Let $A = -\Delta - V$ where $V \geq 0$ and V is strongly subcritical. Then $(e^{-tA})_{t>0}$, $(\sqrt{t}\nabla e^{-tA})_{t>0}$, and $(\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ satisfy $L^2 - L^2$ off-diagonal estimates, and we have for all $t > 0$ and all $f \in L^2$ supported in E:*

(i) $||e^{-tA}f||_{L^2(F)} \leq e^{-d^2(E,F)/4t}||f||_2$,

(ii) $||\sqrt{t}\nabla e^{-tA}f||_{L^2(F)} \leq Ce^{-d^2(E,F)/16t}||f||_2$,

(iii) $||\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA}f||_{L^2(F)} \leq Ce^{-d^2(E,F)/8t}||f||_2$.

Proof: The estimate (i) is proved in [14] Theorem 3.3. Nevertheless, to prove estimates (ii) and (iii) we use the classical Davies perturbation technique, and the estimate of the perturbed semigroup. Therefore we give details of the proof of (i) with this method, as of (ii) and (iii).
Let $A_\rho := e^{\rho\phi}Ae^{-\rho\phi}$ where $\rho > 0$ and ϕ is a Lipschitz function with $|\nabla\phi| \leq 1$ a.e.. Here A_ρ is the associated operator to the sesquilinear form $\mathfrak{a}_\rho$ defined by

$$\mathfrak{a}_\rho(u, v) := \mathfrak{a}(e^{-\rho\phi}u, e^{\rho\phi}v)$$

for all $u, v \in D(\mathfrak{a})$.

By the strong subcriticality property of V we have for all $u \in W^{1,2}$

$$\begin{aligned}((\mathfrak{a}_\rho + \rho^2)u, u) &= -\int \rho^2 |\nabla\phi|^2 u^2 + \int |\nabla u|^2 - \int V u^2 + \rho^2 ||u||_2^2 \\ &\geq \int |\nabla u|^2 - \int V u^2 \\ &\geq \max\left\{\varepsilon ||V^{1/2}u||_2^2, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}||\nabla u||_2^2\right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

In particular $(A_\rho + \rho^2)$ is a maximal accretive operator on L^2, and this implies

$$||e^{-tA_\rho}u||_2 \leq e^{t\rho^2}||u||_2. \tag{3.5}$$

Now we want to estimate

$$\|(A_\rho + 2\rho^2)e^{-t(A_\rho+2\rho^2)}\|_{2-2}.$$

First, let us prove that $A_\rho + 2\rho^2$ is a sectorial operator.

For u complex-valued,

$$\mathfrak{a}_\rho(u,u) := \mathfrak{a}(u,u) + \rho\int u\nabla\phi\overline{\nabla u} - \rho\int \overline{u}\nabla\phi\nabla u - \rho^2\int |\nabla\phi|^2|u|^2.$$

Then

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2 &\geq \mathfrak{a}(u,u) + \rho\int u\nabla\phi\overline{\nabla u} - \rho\int \overline{u}\nabla\phi\nabla u + \rho^2\|u\|_2^2 \\ &= \mathfrak{a}(u,u) + 2i\rho\mathfrak{Im}\int u\nabla\phi\overline{\nabla u} + \rho^2\|u\|_2^2.\end{aligned}$$

This implies that

$$\mathfrak{Re}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2) \geq \mathfrak{a}(u,u), \tag{3.6}$$

and

$$\mathfrak{Re}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2) \geq \rho^2\|u\|_2^2. \tag{3.7}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\rho(u,u) &= \mathfrak{a}(u,u) + \rho\int u\nabla\phi\overline{\nabla u} - \rho\int \overline{u}\nabla\phi\nabla u - \rho^2\int |\nabla\phi|^2|u|^2 \\ &= \mathfrak{a}(u,u) + 2i\rho\mathfrak{Im}\int u\nabla\phi\overline{\nabla u} - \rho^2\int |\nabla\phi|^2|u|^2.\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}|\mathfrak{Im}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2)| &\leq 2\rho\int |u||\nabla\phi||\overline{\nabla u}| \\ &\leq 2\rho\|u\|_2\|\nabla u\|_2.\end{aligned}$$

Using (3.1) we obtain that

$$\begin{aligned}|\mathfrak{Im}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2)| &\leq 2\rho\|u\|_2 c_\varepsilon \mathfrak{a}^{\frac{1}{2}}(u,u) \\ &\leq c_\varepsilon^2\mathfrak{a}(u,u) + \rho^2\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

where $c_\varepsilon = (1+\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}$. Now using estimates (3.6) and (3.7), we deduce that there exists a constant $C > 0$ depending only on ε such that

$$|\mathfrak{Im}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2)| \le C\mathfrak{Re}(\mathfrak{a}_\rho(u,u) + 2\rho^2\|u\|_2^2).$$

We conclude that (see [22] or [25])

$$\|e^{-z(A_\rho+2\rho^2)}\|_{2-2} \le 1$$

for all z in the open sector of angle $\arctan(1/C)$. Hence by the Cauchy formula

$$\|(A_\rho + 2\rho^2)e^{-t(A_\rho+2\rho^2)}\|_{2-2} \le \frac{C}{t}. \tag{3.8}$$

The constant C is independent of ρ.
Setting $u = e^{-t(A_\rho+2\rho^2)}f$. By estimate (3.4) we have

$$((A_\rho + 2\rho^2)u,u) \ge ((A_\rho + \rho^2)u,u) \ge \max\left\{\varepsilon||V^{1/2}u||_2^2, \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}||\nabla u||_2^2\right\}.$$

Then using (3.8) and (3.5)
we obtain

$$||\sqrt{t}\nabla e^{-tA_\rho}f||_2 \le Ce^{2t\rho^2}||f||_2. \tag{3.9}$$

and

$$||\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA_\rho}f||_2 \le Ce^{2t\rho^2}||f||_2. \tag{3.10}$$

Let E and F be two closed subsets of $\mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ supported in E, and let $\phi(x) := d(x,E)$ where d is the Euclidean distance. Since $e^{\rho\phi}f = f$, we have the following relation

$$e^{-tA}f = e^{-\rho\phi}e^{-tA_\rho}f.$$

Then

$$\nabla e^{-tA}f = -\rho\nabla\phi e^{-\rho\phi}e^{-tA_\rho}f + e^{-\rho\phi}\nabla e^{-tA_\rho}f,$$

and

$$V^{1/2}e^{-tA}f = e^{-\rho\phi}V^{1/2}e^{-tA_\rho}f.$$

Now taking the norm on $L^2(F)$, we obtain from (3.5), (3.9) and (3.10)

$$||e^{-tA}f||_{L^2(F)} \le e^{-\rho d(E,F)}e^{\rho^2 t}||f||_2, \tag{3.11}$$

$$||\nabla e^{-tA}f||_{L^2(F)} \le \rho e^{-\rho d(E,F)}e^{\rho^2 t}||f||_2 + \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\rho d(E,F)}e^{2t\rho^2}||f||_2, \tag{3.12}$$

and

$$||V^{1/2}e^{-tA}f||_{L^2(F)} \le \frac{C}{\sqrt{t}}e^{-\rho d(E,F)}e^{2\rho^2 t}||f||_2. \tag{3.13}$$

We set $\rho = d(E,F)/2t$ in (3.11) and $\rho = d(E,F)/4t$ in (3.13), then we get the $L^2 - L^2$ off-diagonal estimates (i) and (iii).
We set $\rho = d(E,F)/4t$ in (3.12), we get

$$||\nabla e^{-tA} f||_{L^2(F)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \Big(1 + \frac{d(E,F)}{4\sqrt{t}}\Big) e^{-d^2(E,F)/8t} ||f||_2.$$

This gives estimate (ii). □

Now, we study the $L^p - L^2$ boundedness of the semigroup, of its gradient, and of $(V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$.

Proposition 3.4. *Let A be the Schrödinger operator $-\Delta - V$. Assume that V is strongly subcritical. Then $(e^{-tA})_{t>0}$, $(\sqrt{t}\nabla e^{-tA})_{t>0}$ and $(\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ are $L^p - L^2$ bounded for all $p \in (p_0', 2]$. Here $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)} \right)'$, where ε is that of the strongly subcritical property, and the dimension $N \geq 3$. More precisely we have for all $t > 0$:*

i) $\|e^{-tA} f\|_2 \leq C t^{-\gamma_p} \|f\|_p$,

ii) $\|\sqrt{t}\nabla e^{-tA} f\|_2 \leq C t^{-\gamma_p} \|f\|_p$,

iii) $\|\sqrt{t}V^{1/2} e^{-tA} f\|_2 \leq C t^{-\gamma_p} \|f\|_p$,

where $\gamma_p = \frac{N}{2}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\Big)$.

Proof: i) We apply the Gagliardo-Nirenberg inequality (see for instance [1] p. 16 or [25] p. 158)

$$||u||_2^2 \leq C_{a,b} ||\nabla u||_2^{2a} ||u||_p^{2b},$$

where $a + b = 1$ and $(1 + 2\gamma_p)a = 2\gamma_p$, to $u = e^{-tA}f$ for all $f \in L^2 \cap L^p$, all $t > 0$, and all $p \in (p_0', 2]$. We obtain

$$||e^{-tA}f||_2^2 \leq C_{a,b} ||\nabla e^{-tA} f||_2^{2a} ||e^{-tA} f||_p^{2b}.$$

At present we use the boundedness of the semigroup on L^p for all $p \in (p_0', 2]$ proved in [24], and the fact that $||\nabla u||_2^2 \leq (1 + 1/\varepsilon)(Au, u)$ from the strong subcriticality condition, then we obtain that

$$||e^{-tA} f||_2^{2/a} \leq -C\psi'(t) ||f||_p^{2b/a}$$

where $\psi(t) = ||e^{-tA}f||_2^2$. This implies

$$||f||_p^{-2b/a} \leq C(\psi(t)^{\frac{a-1}{a}})'.$$

Since $\frac{2b}{a} = \frac{1}{\gamma_p}$ and $\frac{a-1}{a} = -\frac{1}{2\gamma_p}$, integration between 0 and t yields

$$t||f||_p^{-1/\gamma_p} \leq C||e^{-tA}f||_2^{-1/\gamma_p},$$

which gives *i)*.
We obtain *ii)* by using the following decomposition:

$$\sqrt{t}\nabla e^{-tA} = \sqrt{t}\nabla A^{-1/2} A^{1/2} e^{-tA/2} e^{-tA/2},$$

the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and of $(\sqrt{t}A^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ on L^2, and the fact that $(e^{-tA})_{t>0}$ is $L^p - L^2$ bounded for all $p \in (p_0', 2]$ proved in *i)*.
We prove *iii)* by using the following decomposition:

$$\sqrt{t}V^{1/2} e^{-tA} = \sqrt{t}V^{1/2} A^{-1/2} A^{1/2} e^{-tA/2} e^{-tA/2},$$

the boundedness of $V^{1/2}A^{-1/2}$ and of $(\sqrt{t}A^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ on L^2, and the fact that $(e^{-tA})_{t>0}$ is $L^p - L^2$ bounded for all $p \in (p_0', 2]$ proved in *i)*. □

We invest the previous results to obtain :

Theorem 3.5. *Let A be the Schrödinger operator $-\Delta - V$. Assume that V is strongly subcritical. Then $(e^{-tA})_{t>0}$, $(\sqrt{t}\nabla e^{-tA})_{t>0}$ and $(\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ satisfy $L^p - L^2$ off-diagonal estimates for all $p \in (p_0', 2]$. Here p_0' is that of the previous proposition. Then we have for all $t > 0$, all $p \in (p_0', 2]$, all closed sets E and F of $\mathbb{R}^N$ and all $f \in L^2 \cap L^p$ with supp$f \subseteq E$*

i)

$$\|e^{-tA} f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p} e^{-\frac{cd^2(E,F)}{t}} \|f\|_p, \tag{3.14}$$

ii)

$$\|\sqrt{t}\nabla e^{-tA} f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p} e^{-\frac{cd^2(E,F)}{t}} \|f\|_p, \tag{3.15}$$

iii)

$$\|\sqrt{t}V^{1/2} e^{-tA} f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p} e^{-\frac{cd^2(E,F)}{t}} \|f\|_p, \tag{3.16}$$

where $\gamma_p = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ and C, c are positive constants.

Remark 3.6. 1) *By duality, we deduce from (3.14) a $L^2 - L^p$ off-diagonal estimate of the norm of the semigroup for all $p \in [2, p_0)$, but we cannot deduce from (3.15) and (3.16) the same estimate of the norm of $\sqrt{t}\nabla e^{-tA} f$ and of $\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA}f$ because they are not selfadjoint. This affects the boundedness of Riesz transforms and of $V^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for $p > 2$.*
2) *If $V(x) := c|x|^{-2}$ where $0 < c < \frac{(N-2)^2}{4}$, assertion $i)$ is proved in [14] Example 4.17.*

The previous theorem follows from [14] Theorem 4.15 using our Proposition 3.3 and Proposition 3.4, and setting $W_1(., \sqrt{t}) := Ct^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}$ and $W_2(., \sqrt{t}) := Ct^{\frac{N}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{2})}$ for some $r \in (p, 2)$.
Note also that $i)$ follows from Proposition 3.4 and Riesz-Thorin interpolation theorem since

$$\|\chi_F e^{-tA} \chi_E f\|_2 \leq e^{-d^2(E,F)/4t} \|f\|_2$$

by Proposition 3.3. Similar arguments hold for *ii)* and *iii)*.

3.3 Boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for $p \in (p_0', 2]$

This section is devoted to the study of the boundedness of $V^{1/2}A^{-1/2}$ and Riesz transforms associated to Schrödinger operators with negative strongly subcritical potentials. We prove that $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, for all $p \in (p_0', 2]$, where p_0' is the exponent mentioned in Theorem 3.5.

Theorem 3.7. *Assume that $A \geq \varepsilon V$, then $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $N \geq 3$, for all $p \in (p_0', 2]$ where $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}\right)'$.*

To prove Theorem 3.7, we prove that $\nabla A^{-1/2}$ is of weak type (p,p) for all $p \in (p_0', 2)$ by using the following theorem of Blunck and Kunstmann [8][2]. Then by the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ on L^2, and the Marcinkiewicz interpolation theorem, we obtain boundedness on L^p for all $p \in (p_0', 2]$. This result can also be deduced from an extension to complex time of Theorem 3.5 together with Theorem 1.1 of [9].

Theorem 3.8. *Let $p \in [1, 2)$. Suppose that T is sublinear operator of strong type $(2, 2)$, and let $(A_r)_{r>0}$ be a family of linear operators acting on L^2.*

Assume that for $j \geq 2$

$$\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{C_j(B)} |T(I - A_{r(B)})f|^2\right)^{1/2} \leq g(j)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\right)^{1/p}, \tag{3.17}$$

and for $j \geq 1$

$$\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{C_j(B)} |A_{r(B)}f|^2\right)^{1/2} \leq g(j)\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\right)^{1/p}, \tag{3.18}$$

for all ball B with radius $r(B)$ and all f supported in B. If $\Sigma := \sum g(j)2^{Nj} < \infty$, then T is of weak type (p,p), with a bound depending only on the strong type $(2,2)$ bound of T, p, and Σ.
Here $C_1 = 4B$ and $C_j(B) = 2^{j+1}B \setminus 2^jB$ for $j \geq 2$, where λB is the ball of radius $\lambda r(B)$ with the same center as B, and $|\lambda B|$ its Lebesgue measure.

Proof of Theorem 3.7: Let $T = \nabla A^{-1/2}$. We prove assumptions (3.17) and (3.18) with $A_r = I - (I - e^{-r^2A})^m$ for some $m > N/4 - \gamma_p$, using arguments similar to Auscher [1] Theorem 4.2.
Let us prove (3.18). For f supported in a ball B (with radius r),

$$\begin{aligned}\frac{1}{|2^{j+1}B|^{1/2}}\|A_r f\|_{L^2(C_j(B))} &= \frac{1}{|2^{j+1}B|^{1/2}}\left\|\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}e^{-kr^2A}f\right\|_{L^2(C_j(B))} \\ &\leq \frac{1}{|2^{j+1}B|^{1/2}}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}C(kr^2)^{-\gamma_p}e^{\frac{-cd^2(B,C_j(B))}{kr^2}}\|f\|_p.\end{aligned}$$

[2]We use a simplified version of this theorem due to Auscher [1]

for all $p \in (p_0', 2)$ and all $f \in L^2 \cap L^p$ supported in B. Here we use the $L^p - L^2$ off-diagonal estimates (3.14) for $p \in (p_0', 2]$. Since $\gamma_p = \frac{N}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ we obtain

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{C_j(B)}|A_rf|^2\Big)^{1/2} &\leq \frac{Cr^{-2\gamma_p}}{|2^{j+1}B|^{1/2}}e^{\frac{-cd^2(B,C_j(B))}{mr^2}}\|f\|_p \\ &\leq C2^{-jN/2}e^{\frac{-cd^2(B,C_j(B))}{r^2}}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|f|^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

This yields, for $j = 1$,

$$\Big(\frac{1}{|4B|}\int_{4B}|A_rf|^2\Big)^{1/2} \leq C2^{-N/2}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|f|^p\Big)^{1/p},$$

and for $j \geq 2$

$$\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{C_j(B)}|A_rf|^2\Big)^{1/2} \leq C2^{-jN/2}e^{-c4^j}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|f|^p\Big)^{1/p}.$$

Thus assumption (3.18) of Theorem 3.8 holds with $\sum_{j\geq 1} g(j)2^{jN} < \infty$.
It remains to check the assumption (3.17):
We know that

$$\nabla A^{-1/2}f = C\int_0^\infty \nabla e^{-tA}f\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

then, using the Newton binomial, we get

$$\begin{aligned}\nabla A^{-1/2}(I - e^{-r^2A})^m f &= C\int_0^\infty \nabla e^{-tA}(I - e^{-r^2A})^m f\frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= C\int_0^\infty g_{r^2}(t)\nabla e^{-tA}f\,dt\end{aligned}$$

where

$$g_{r^2}(t) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k\frac{\chi_{(t-kr^2>0)}}{\sqrt{t-kr^2}}.$$

Hence, using the $L^p - L^2$ off-diagonal estimate (3.15), we obtain for all $p \in (p_0', 2)$, all $j \geq 2$, and all $f \in L^2 \cap L^p$ supported in B

$$\|\nabla A^{-1/2}(I - e^{-r^2A})^m f\|_{L^2(C_j(B))} \leq C\int_0^\infty |g_{r^2}(t)|t^{-\gamma_p-1/2}e^{-c4^jr^2/t}dt\|f\|_p.$$

We observe that (see [1] p. 27)

$$|g_{r^2}(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t-kr^2}} \quad \text{if} \quad kr^2 < t \leq (k+1)r^2 \leq (m+1)r^2$$

and

$$|g_{r^2}(t)| \leq Cr^{2m}t^{-m-1/2} \quad \text{if} \quad t > (m+1)r^2.$$

This yields

$$\begin{aligned}\|\nabla A^{-\frac{1}{2}}(I-e^{-r^2A})^m f\|_{L^2(C_j(B))} &\leq C\sum_{k=0}^{m}\int_{kr^2}^{(k+1)r^2}\frac{t^{-\gamma_p-1/2}}{\sqrt{t-kr^2}}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt\|f\|_p \\ &+ C\int_{(m+1)r^2}^{\infty} r^{2m}t^{-\gamma_p-1-m}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt\|f\|_p \\ &\leq I_1+I_2. \end{aligned} \tag{3.19}$$

We have

$$I_2 := C\int_{(m+1)r^2}^{\infty} r^{2m}t^{-\gamma_p-1-m}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt\|f\|_p \leq Cr^{-2\gamma_p}2^{-2j(m+\gamma_p)}\|f\|_p,$$

by the Laplace transform formula, and

$$\begin{aligned} I_1 &:= C\|f\|_p\sum_{k=0}^{m}\int_{kr^2}^{(k+1)r^2}\frac{t^{-\gamma_p-1/2}}{\sqrt{t-kr^2}}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt \\ &= C\|f\|_p\Big(\sum_{k=1}^{m}\int_{kr^2}^{(k+1)r^2}\frac{t^{-\gamma_p-1/2}}{\sqrt{t-kr^2}}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt+\int_0^{r^2}t^{-\gamma_p-1}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt\Big) \\ &= J_1+J_2. \end{aligned}$$

In the preceding equation

$$\begin{aligned} J_1 &:= C\|f\|_p\sum_{k=1}^{m}\int_{kr^2}^{(k+1)r^2}\frac{t^{-\gamma_p-1/2}}{\sqrt{t-kr^2}}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt \\ &\leq C\|f\|_p e^{-\frac{c4^j}{m+1}}\sum_{k=1}^{m}(kr^2)^{-\gamma_p-1/2}\int_{kr^2}^{(k+1)r^2}(t-kr^2)^{-1/2}dt \\ &\leq Cr^{-2\gamma_p}2^{-2j(m+\gamma_p)}\|f\|_p, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J_2 &:= C\int_0^{r^2}t^{-\gamma_p-1}e^{-\frac{c4^jr^2}{t}}dt\|f\|_p \\ &\leq C\|f\|_p e^{-\frac{c4^j}{2(m+1)}}\int_0^{r^2}t^{-\gamma_p-1}e^{-\frac{c4^jr^2}{2t}}dt \\ &\leq C\|f\|_p 2^{-2jm}\int_0^{r^2}t^{-1-\gamma_p}C(2^{-2j}r^{-2}t)^{\gamma_p}e^{-\frac{c4^jr^2}{4t}}dt \\ &\leq C\|f\|_p 2^{-2j(m+\gamma_p)}r^{-2\gamma_p}\int_0^{r^2}t^{-1}e^{-\frac{c4^jr^2}{4t}}dt \\ &\leq Cr^{-2\gamma_p}2^{-2j(m+\gamma_p)}\|f\|_p. \end{aligned}$$

Here, for the last inequality, we use the fact that $j \geq 2$ to obtain the convergence of the integral without dependence on r nor on j.
We can therefore employ these estimates in (3.19) to conclude that

$$\|\nabla A^{-1/2}(I-e^{-r^2A})^m f\|_{L^2(C_j(B))} \leq Cr^{-2\gamma_p}2^{-2j(m+\gamma_p)}\|f\|_p,$$

which implies

$$\left(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{C_j(B)} |\nabla A^{-\frac{1}{2}}(I-e^{-r^2A})^m f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C2^{-2j(m+\gamma_p+\frac{N}{4})}\left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

where $\sum g(j)2^{jN} < \infty$ because we set $m > N/4 - \gamma_p$. $\square$

Proposition 3.9. *Assume that $A \geq \varepsilon V$, then $V^{1/2}A^{-1/2}$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $N \geq 3$, for all $p \in (p_0', 2]$ where p_0' is the dual exponent of p_0 with $p_0 = \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$.*

Proof: We have seen in (3.2) that the operator $V^{1/2}A^{-1/2}$ is bounded on L^2. To prove its boundedness on L^p for all $p \in (p_0', 2]$ we prove that it is of weak type (p,p) for all $p \in (p_0', 2)$ by checking assumptions (3.17) and (3.18) of Theorem 3.8, where $T = V^{1/2}A^{-1/2}$. Then, using the Marcinkiewicz interpolation theorem, we deduce boundedness on L^p for all $p \in (p_0', 2]$.
We check assumptions of Theorem 3.8 similarly as we did in the proof of Theorem 3.7, using the $L^p - L^2$ off-diagonal estimate (3.16) instead of (3.15). $\square$

Let us now move on, setting $V = c|x|^{-2}$ where $0 < c < (\frac{N-2}{2})^2$, which is strongly subcritical thanks to the Hardy inequality, we prove that the associated Riesz transforms are not bounded on L^p for $p \in (1, p_0')$ neither for $p \in (p_{0*}, \infty)$. Here $p_{0*} = \frac{p_0 N}{N+p_0}$ is the reverse Sobolev exponent of p_0.

Proposition 3.10. *Set V strongly subcritical and $N \geq 3$. Assume that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for some $p \in (1, p_0')$. Then there exists an exponent $q_1 \in [p, p_0')$ such that $(e^{-tA})_{t>0}$ is bounded on L^r for all $r \in (q_1, 2)$.*

Consider now $V = c|x|^{-2}$ where $0 < c < (\frac{N-2}{2})^2$. It is proved in [24] that the semigroup does not act on L^p for $p \notin (p_0', p_0)$. Therefore we obtain from this proposition that the Riesz transform $\nabla A^{-1/2}$ is not bounded on L^p for $p \in (1, p_0')$.

Proof: Assume that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for some $p \in (1, p_0')$. By the boundedness on L^2 and the Riesz-Thorin interpolation theorem, we get the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ on L^q for all $q \in [p, 2]$. Now we apply the Sobolev inequality

$$\|f\|_{q^*} \leq C\|\nabla f\|_q \tag{3.20}$$

where $q^* = \frac{Nq}{N-q}$ if $q < N$ to $f := A^{-1/2}u$, so we get

$$\|A^{-1/2}u\|_{q^*} \leq C\|\nabla A^{-1/2}u\|_q \leq C\|u\|_q$$

for all $q \in [p, 2]$. In particular, $\|A^{-1/2}\|_{q_1 - q_1^*} \leq C$ where $p \leq q_1 < p_0'$ such that $q_1^* > p_0'$. Decomposing the semigroup as follows

$$e^{-tA} = A^{1/2}e^{-tA/2}e^{-tA/2}A^{-1/2} \tag{3.21}$$

where $A^{-1/2}$ is $L^{q_1} - L^{q_1^*}$ bounded , $e^{-tA/2}$ has $L^{q_1^*} - L^2$ norm bounded by $Ct^{-\gamma_{q_1^*}}$ (Proposition 3.4) and $A^{1/2}e^{-tA/2}$ is L^2-L^2 bounded by $Ct^{-1/2}$ because of the analyticity of the semigroup on L^2. Therefore, we obtain

$$\|e^{-tA}\|_{q_1-2} \leq Ct^{-\gamma_{q_1^*}-1/2} = Ct^{-\gamma_{q_1}}.$$

We now interpolate this norm with the $L^2 - L^2$ off-diagonal estimate of the norm of e^{-tA}, as we did in the proof of Theorem 3.5, so we get a $L^r - L^2$ off-diagonal estimate for all $r \in (q_1, 2)$. Then Lemma 3.3 of [1] yields that $(e^{-tA})_{t>0}$ is bounded on L^r for all $r \in (q_1, 2)$ for $q_1 \in [p, p_0')$ such that $q_1^* > p_0'$. $\square$

Proposition 3.11. *Set V strongly subcritical and $N \geq 3$. Assume that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for some $p \in (p_{0*}, \infty)$. Then there exists an exponent $q_2 > p_{0*}$ such that the semigroup $(e^{-tA})_{t>0}$ is bounded on L^s for all $s \in (2, q_2^*)$. Here $q_2^* > p_0$.*

Consider now $V = c|x|^{-2}$ where $0 < c < (\frac{N-2}{2})^2$. It is proved in [24] that the semigroup does not act on L^p for $p \notin (p_0', p_0)$. Therefore we obtain from this proposition that the Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ are not bounded on L^p for $p \in (p_{0*}, \infty)$.

Proof: Assume that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for some $p \in (p_{0*}, \infty)$. Then by interpolation we obtain the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ on L^q for all $q \in [2, p]$. In particular,

$$||\nabla A^{-1/2}||_{q_2-q_2} \leq C$$

where $p_{0*} < q_2 < p_0$, $q_2 \leq p$, $q_2 < N$. Using the Sobolev inequality (3.20), we obtain that $A^{-1/2}$ is $L^{q_2} - L^{q_2^*}$ bounded where $q_2^* > p_0$.
Now we decompose the semigroup as follows

$$e^{-tA} = A^{-1/2}e^{-tA/2}A^{1/2}e^{-tA/2}. \tag{3.22}$$

Thus we remark that it is $L^2 - L^{q_2^*}$ bounded where $q_2^* > p_0$.
Then, using similar arguments as in the previous proof, we conclude that $(e^{-tA})_{t>0}$ is bounded on L^s for all $s \in (2, q_2^*)$ for $p_{0*} < q_2 < \inf(p_0, p, N)$. $\square$

3.4 Boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for all $p \in (1, N)$

In this section we assume that V is strongly subcritical in the Kato subclass K_N^∞, $N \geq 3$. Following Zhao [34], we define

$$K_N^\infty := \left\{ V \in K_N^{loc}, \lim_{B\uparrow\infty} \left[\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \int_{|y|\geq B} \frac{|V(y)|}{|y-x|^{N-2}} dy \right] = 0 \right\},$$

where K_N^{loc} is the class of potentials that are locally in the Kato class K_N.
For the necessary background on the Kato class see [30] and references therein.

We use results proved by stochastic methods to deduce a $L^1 - L^\infty$ off-diagonal estimate of the norm of the semigroup which leads to the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for all $p \in (1, N)$.

First, we recall the following

Lemma 3.12. *For two functions f and g defined on a metric space M, such that $f \in L^{r,\infty}$ and $g \in L^q$, for some $r, q \in (1, \infty)$ we have the following Hölder inequality*

$$||f.g||_p \leq C_{p,r,q}||f||_{r,\infty}||g||_q, \tag{3.23}$$

where $||f||_{r,\infty} := \sup_{t>0}(t^r \mu\{x, |f(x)| > t\})^{1/r}$ and $p \in (1, \infty)$ is such that $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Proof: For $r, q \in (1, \infty)$ and p such that $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ it is known that (see [18] p.15)

$$||f.g||_{p,\infty} \leq C_{p,r,q}||f||_{r,\infty}||g||_{q,\infty}.$$

In particular,

$$||f.g||_{p,\infty} \leq C_{p,r,q}||f||_{r,\infty}||g||_q.$$

Let p_i, q_i and r $(i = 1, 2)$ such that $\frac{1}{r} + \frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i}$. Then

$$||f.g||_{p_i,\infty} \leq C_{p_i,r,q_i}||f||_{r,\infty}||g||_{q_i}.$$

This means that the operator $T_f(g) := f.g$ is bounded from L^{q_i} to $L^{p_i,\infty}$. Now using the Marcinkiewicz interpolation theorem we deduce (3.23).

□

Theorem 3.13. *Let A be the Schrödinger operator $-\Delta - V, V \geq 0$. Assume that V is strongly subcritical in the class $K_N^\infty, (N \geq 3)$, then $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type $(1, 1)$, they are bounded on L^p for all $p \in (1, 2]$. If in addition $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}$, then $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (1, N)$.*

Proof: We assume that V is strongly subcritical in the class K_N^∞. Therefore V satisfies assumptions of Theorem 2 of [32]. Thus the heat kernel associated to $(e^{-tA})_{t>0}$ satisfies a Gaussian estimate. Therefore using Theorem 5 of [29] we conclude that $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type $(1, 1)$ and they are bounded on L^p for all $p \in (1, 2]$.

To prove the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ on L^p for higher p we use the Stein complex interpolation theorem (see [31] Section V.4).
Let us first mention that $D := R(A) \cap L^1 \cap L^\infty$ is dense in L^p for all $p \in (1, \infty)$ provided that V is strongly subcritical in $K_N^\infty, N \geq 3$. We prove the density as in [2], where in our case we have the following estimate

$$|f_k - f| \leq k(c(-\Delta) + k)^{-1}f \tag{3.24}$$

where $f_k := A(A + k)^{-1}f$ and c is a positive constant. This estimate holds from the Gaussian estimate of the heat kernel associated to the semigroup $(e^{-tA})_{t>0}$.

Set $F(z) :=< (-\Delta)^z A^{-z} f, g >$ where $f \in D$, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ and $z \in S := \{x + iy$ such that $x \in [0,1]$ and $y \in \mathbb{R}^N\}$. $F(z)$ is admissible. Indeed, the function $z \longmapsto F(z)$ is continuous in S and analytic in its interior. In addition

$$|F(z)| = | < A^{-z} f, (-\Delta)^{\overline{z}} g > | \leq ||A^{-z} f||_2 ||(-\Delta)^{\overline{z}} g||_2. \tag{3.25}$$

For $\mathfrak{Re}\overline{z} \in (0,1)$, $D(-\Delta) \subset D((-\Delta)^{\overline{z}})$, so

$$||(-\Delta)^{\overline{z}} g||_2 \leq C||g||_{W^{2,2}} \tag{3.26}$$

for all $z \in S$.
When V is strongly subcritical, A is non-negative self-adjoint operator on L^2, hence $||A^{iy}||_{2-2} \leq 1$ for all $y \in \mathbb{R}$. Therefore for all $z = x + iy \in S$ and $f = Au \in R(A)$ we have

$$\begin{aligned} ||A^{-z} f||_2 &\leq ||A^{-iy}||_{2-2} ||A^{1-x} u||_2 \\ &\leq C(||u||_2 + ||Au||_2). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Here we use $D(A) \subset D(A^{1-x})$ because $(1-x) \in (0,1)$.
Now we employ (3.26) and (3.27) in (3.25) to deduce the admissibility of $F(z)$ in S. Thus we can apply the Stein complex interpolation theorem to $F(z)$.
Since V is strongly subcritical and belongs to the class $K_N^\infty, N \geq 3$, we obtain a Gaussian estimate of the heat kernel of A. Thus A has a H^∞-bounded calculus on L^p for all $p \in (1,\infty)$ (see e.g. [8] Theorem 2.2). Hence

$$|F(iy)| \leq ||A^{-iy} f||_{p_0} ||(-\Delta)^{-iy} g||_{p_0'} \leq C_{\gamma,p_0} e^{2\gamma|y|} ||f||_{p_0} ||g||_{p_0'}$$

for all $\gamma > 0$, all $p_0 \in (1,\infty)$.
Let us now estimate $||VA^{-1}||_{p_1-p_1}$. By the Hölder's inequality (3.23) of the previous lemma, we have

$$||VA^{-1}u||_{p_1} \leq C||V||_{\frac{N}{2},\infty} ||A^{-1}u||_q \tag{3.28}$$

where $p_1 < N$ and $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{q} + \frac{2}{N}$. As mentioned above we have a Gaussian upper bound for the heat kernel. In particular

$$||e^{-tA}||_{1-\infty} \leq Ct^{-N/2}$$

for all $t > 0$. Therefore A^{-1} extends to a bounded operator from L^s to L^q such that $s < \frac{N}{2}$ and $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{2}{N}$, and we have

$$||A^{-1}u||_q \leq C||u||_s.$$

(see Coulhon [12]). Thus $s = p_1$, $D(A) \subseteq D(V)$ and (3.28) implies

$$||VA^{-1}||_{p_1-p_1} \leq C$$

where C depends on $||V||_{\frac{N}{2},\infty}$. Hence we can estimate

$$\begin{aligned} ||(-\Delta)A^{-1}u||_{p_1} &= ||(-\Delta - V + V)A^{-1}u||_{p_1} \\ &\leq ||u||_{p_1} + ||VA^{-1}u||_{p_1} \\ &\leq C||u||_{p_1} \end{aligned} \tag{3.29}$$

where C depends on $||V||_{\frac{N}{2},\infty}$. We return to $F(z)$,

$$\begin{aligned} |F(1+iy)| &\leq ||(-\Delta)A^{-1}A^{-iy}f||_{p_1}||(-\Delta)^{-iy}g||_{p_1'} \\ &\leq ||(-\Delta)A^{-1}||_{p_1-p_1}||A^{-iy}f||_{p_1}||(-\Delta)^{-iy}g||_{p_1'} \\ &\leq C_{\gamma,p_1,||V||_{\frac{N}{2},\infty}} e^{2\gamma|y|}||f||_{p_1}||g||_{p_1'} \end{aligned}$$

for all $p_1 \in (1, N/2)$ and all $\gamma > 0$.

From the Stein interpolation theorem it follows that for all $t \in [0, 1]$ there exists a constant M_t such that

$$|F(t)| \leq M_t||f||_{p_t}||g||_{p_t'}$$

where $\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}$. Setting $t = \frac{1}{2}$ and using a density argument we conclude that $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (1, N)$.

To prove boundedness of $V^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p we use the following decomposition

$$V^{1/2}A^{-1/2} = V^{1/2}(-\Delta)^{-1/2}(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}.$$

Assuming $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}$, by the Hölder's inequality (3.23) we have

$$||V^{1/2}u||_p \leq C||V^{1/2}||_{N,\infty}||u||_q$$

where $p < N$ and $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{N}$. Then by Sobolev inequality and the boundedness of Riesz transforms associated to the Laplace operator we obtain

$$||V^{1/2}u||_p \leq C_{p,N,||V||_{\frac{N}{2},\infty}}||\nabla u||_p \leq C_{p,N,||V||_{\frac{N}{2},\infty}}||(-\Delta)^{1/2}u||_p$$

for all $p \in (1, N)$. Thus if $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}$ we have for all $p \in (1, N)$

$$||V^{1/2}(-\Delta)^{-1/2}||_{p-p} \leq C. \tag{3.30}$$

Using the boundedness of Riesz transforms associated to the Schrödinger operator A we have

$$||(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}u||_p \leq C||u||_p$$

for all $p \in (1, N)$.
Therefore $V^{1/2}A^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (1, N)$ provided that V is strongly subcritical in the class $K_N^\infty \cap L^{\frac{N}{2},\infty}, N \geq 3$. $\square$

Remark 3.14. *1) The proof of the previous theorem shows that*

$$||Vu||_{p_1} \leq C||Au||_{p_1}$$

and

$$||\Delta u||_{p_1} \leq C||Au||_{p_1}$$

for all $p_1 \in (1, N/2)$.
2) If we consider $H = -\Delta + V$ *a Schrödinger operator with non-negative potential* $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}$, *we obtain by the previous arguments the* L^{p_1}*-boundedness of* VH^{-1} *and* ΔH^{-1} *for all* $p_1 \in (1, N/2)$, *and the* L^p*-boundedness of* $V^{1/2}H^{-1/2}$ *and* $\nabla H^{-1/2}$ *for all* $p \in (1, N)$.

Corollary 3.15. *Let A be the Schrödinger operator* $-\Delta - V, V \geq 0$. *Assume that V is strongly subcritical belongs to* $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}, N \geq 3$, *for some* $\varepsilon > 0$. *Then* $\nabla A^{-1/2}$ *and* $V^{1/2}A^{-1/2}$ *are bounded on* L^p *for all* $p \in (1, N)$.

Proof: Taking $N \geq 3$ and $\varepsilon > 0$, we show that $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon} \subset K_N^\infty$. Thus we deduce this result using the previous theorem.
Assume $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$, then $V \in L^p$ for all $p \in \left(\frac{N}{2} - \varepsilon, \frac{N}{2} + \varepsilon\right)$, in particular, $V \in L^p$ for all $p \in \left(\frac{N}{2}, \frac{N}{2} + \varepsilon\right)$. Therefore V belongs to the Kato class K_N(see [30] Section A). We recall that

$$K_N := \left\{V, \lim_{a \downarrow 0} \left[\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{|x-y| \leq a} \frac{|V(y)|}{|y-x|^{N-2}} dy\right] = 0\right\}.$$

Now

$$\int_{|y|\geq B} \frac{|V(y)|}{|y-x|^{N-2}} dy = \int_{\{|y|\geq B, |x-y|\leq a\}} \frac{|V(y)|dy}{|y-x|^{N-2}} + \int_{\{|y|\geq B, |x-y|\geq a\}} \frac{|V(y)|dy}{|y-x|^{N-2}}$$

where the first integral tends to zero because $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon} \subset K_N$. The second one, by the Hölder inequality,

$$\int_{\{|y|\geq B, |x-y|\geq a\}} \frac{|V(y)|}{|y-x|^{N-2}} dy \quad \leq \quad ||V||_{L^p(|y|\geq B)} \Big(\int_{\{|x-y|\geq a\}} \frac{dy}{|y-x|^{(N-2)p'}}\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

where we choose $p \in \left(\frac{N}{2} - \varepsilon, \frac{N}{2}\right)$. Thus

$$\int_{\{|x-y|\geq a\}} \frac{dy}{|y-x|^{(N-2)p'}}$$

converges and $||V||_{L^p(|y|\geq B)}$ tends to zero. Therefore V belongs to K_N^∞. $\square$

Example: Set $N \geq 3$, and let us take potentials V in the Kato subclass $K_N \cap L^{\frac{N}{2},\infty}$ such that $V \sim c|x|^{-\alpha}$ when x tends to infinity, where $\alpha > 2$. Suppose that $||V||_{\frac{N}{2},\infty}$ is small enough. Let us prove that these potentials are strongly subcritical, so we should prove that

$$||V^{1/2}u||_2^2 \leq C||\nabla u||_2^2$$

where $C<1$. This is (3.30) where $p=2$, and $C<1$ for $||V||_{\frac{N}{2},\infty}$ is small enough. Hence these potentials are strongly subcritical. Z.Zhao [34] proved that they are in the subclass K_N^∞. Hence they satisfy the assumptions of Theorem 3.13. Then $\nabla(-\Delta-V)^{-1/2}$ and $V^{1/2}(-\Delta-V)^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p\in(1,N)$.

3.5 Schrödinger operators on Riemannian manifolds

Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N\geq 3$. Denote by $d\mu$ the Riemannian measure, ρ the geodesic distance on M and ∇ the Riemannian gradient. Denote by $|.|$ the length in the tangent space, and by $\|.\|_p$ the norm in $L^p(M,d\mu)$. Let $-\Delta$ be the positive self-adjoint Laplace-Beltrami operator on M. Take V a strongly subcritical positive potential on M, which means that there exists an $\varepsilon>0$ such that

$$\int_M Vu^2 d\mu \leq \frac{1}{1+\varepsilon}\int_M |\nabla u|^2 d\mu. \tag{3.31}$$

and set $A:=-\Delta-V$ the associated Schrödinger operator on M. By the sesquilinear form method A is well defined, non-negative, and $-A$ generates a bounded analytic semigroup $(e^{-tA})_{t>0}$ on $L^2(M)$.

As in $\mathbb{R}^N$, we have the $L^2(M)$-boundedness of $V^{1/2}A^{-1/2}$ and of the Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ if and only if V is strongly subcritical.

We remark that the methods used in [24] hold on manifolds.
The semigroup $(e^{-tA})_{t>0}$ can be extrapolated to $L^p(M)$, and it is uniformly bounded for $p\in\Big(\big(\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}}\big)',\big(\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}}\big)\Big)$. If in addition the Sobolev inequality

$$\|f\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(M)} \leq C\||\nabla f|\|_{L^2(M)} \tag{3.32}$$

for all $f\in C_0^\infty(M)$ holds on M, then we obtain for all $t>0$

$$\|e^{-tA}\|_{L^p(M)-L^{\frac{pN}{N-2}}(M)} \leq Ct^{-1/p}$$

for all $p\in\Big(\big(\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}}\big)',\big(\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}}\big)\Big)$. Using the $L^2(M)-L^2(M)$ off-diagonal estimate we obtain as in [24] the fact that $(e^{-tA})_{t>0}$ is bounded on $L^p(M)$ for all $p\in(p_0',p_0)$ where $p_0:=\frac{2N}{N-2}\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}}$.
For classes of manifolds satisfying (3.32) see [27]. Note that (3.32) is equivalent to the following Gaussian upper bound of the heat kernel $p(t,x,y)$ of the Laplace-Beltrami operator (see [33] and [15])

$$p(t,x,y)\leq Ct^{-N/2}e^{-c\rho^2(x,y)/t} \quad \forall x,y\in M, t>0. \tag{3.33}$$

We say that M is of homogeneous type if for all $x \in M$ and $r > 0$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)) \tag{3.34}$$

where $B(x,r) := \{y \in M \text{ such that } \rho(x,y) \leq r\}$.
We say that the L^2-Poincaré inequalities hold on M if there exists a positive constant C such that

$$\int_{B(x,r)} |f(y) - f_r(x)|^2 d\mu(y) \leq Cr^2 \int_{B(x,r)} |\nabla f(y)|^2 d\mu(y) \tag{3.35}$$

for all $f \in C_0^\infty(M), x \in M, r > 0$, where $f_r(x) := \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y)$.
Saloff-Coste [26] proved that (3.34) and (3.35) hold if and only if the heat kernel $p(t,x,y)$ mentioned above satisfies the following Li-Yau estimate

$$\frac{Ce^{-c\rho^2(x,y)/t}}{\mu(B(x,\sqrt{t}))} \leq p(t,x,y) \leq \frac{C_1 e^{-c_1\rho^2(x,y)/t}}{\mu(B(x,\sqrt{t}))}. \tag{3.36}$$

Arguing as in the Euclidean case we obtain the following theorem

Theorem 3.16. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$. Assume (3.31) and (3.32). Then $(e^{-tA})_{t>0}$, $(\sqrt{t}\nabla e^{-tA})_{t>0}$ and $(\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA})_{t>0}$ satisfy $L^p(M) - L^2(M)$ off-diagonal estimates for all $p \in (p_0', 2]$. Here p_0' is the dual exponent of p_0 where $p_0 = \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$. Then we have for all $t > 0$, all $p \in (p_0', 2]$, all closed sets E and F of M, and all $f \in L^2(M) \cap L^p(M)$ with $suppf \subseteq E$*

i) $\|e^{-tA}f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p}e^{-\frac{c\rho^2(E,F)}{t}}\|f\|_p$,

ii) $\|\sqrt{t}\nabla e^{-tA}f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p}e^{-\frac{c\rho^2(E,F)}{t}}\|f\|_p$,

iii) $\|\sqrt{t}V^{1/2}e^{-tA}f\|_{L^2(F)} \leq Ct^{-\gamma_p}e^{-\frac{c\rho^2(E,F)}{t}}\|f\|_p$,

where $\gamma_p = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$ and C, c are positive constants.

We invest these off-diagonal estimates as in the proof of Theorem 3.7 to obtain the following result

Theorem 3.17. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$. Assume (3.31), (3.32) and (3.34). Then $V^{1/2}A^{-1/2}$ and $\nabla A^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (p_0', 2]$ where $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}\right)'$.*

We say that the potential V is in the class $K_\infty(M)$, if for any $\varepsilon > 0$ there exists a compact set $K \subset M$ and $\delta > 0$ such that

$$\sup_{x \in M} \int_{K^c} G(x,y)|V(y)|d\mu(y) \leq \varepsilon$$

where $K^c := M \setminus K$, and for all measurable sets $B \subset K$ with $\mu(B) < \delta$,

$$\sup_{x \in M} \int_B G(x,y)|V(y)|d\mu(y) \leq \varepsilon.$$

Here $G(x,y) := \int_0^\infty p(t,x,y)dt$ is the Green function, and $p(t,x,y)$ is the heat kernel of the Laplace-Beltrami operator. This class is the generalization of K_N^∞ to manifolds (see [11] Section 2).

Since (3.34) and (3.35) imply the Li-Yau estimate (3.36), we can use Theorem 2 of [32] and obtain a Gaussian upper bound of the heat kernel of $-\Delta - V$. Thus arguing as in the Euclidean case, we obtain the following result

Theorem 3.18. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$, and let $0 \leq V \in L^{\frac{N}{2},\infty}(M) \cap K_\infty(M)$. Assume that for each ball $B(x,r)$, $\mu(B(x,r) \approx r^N$. Assume (3.31) and (3.35). Then $\Delta(-\Delta - V)^{-1}$ and $V(-\Delta - V)^{-1}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, N/2)$.*

Now using Theorem 2 of [32] then Theorem 5 of [29], we obtain the following

Theorem 3.19. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$, and let A be the Schrödinger operator $-\Delta - V, 0 \leq V \in K_\infty(M)$. Assume (3.31), (3.34) and (3.35). Then $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type $(1,1)$, thus they are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1,2]$.*

Using Theorem 2 of [32] then arguing as in the Euclidean case, we obtain the following

Theorem 3.20. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$ where $\mu(B(x,r)) \approx r^N$ for all ball B. Let A be the Schrödinger operator $-\Delta - V, 0 \leq V \in K_\infty(M) \cap L^{\frac{N}{2},\infty}(M)$ satisfying (3.31). Assume (3.35). If for some $r > 2$, the Riesz transforms $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ are bounded on $L^r(M)$ then $\nabla A^{-1/2}$ and $V^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (1, \inf(r, N))$.*

We notice that Theorem 3.18 and Theorem 3.20 hold with conditions (3.34) and $\mu(B(x,r)) \geq Cr^N$ instead of $\mu(B(x,r)) \approx r^N$.

Remark 3.21. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$ which satisfies the Sobolev inequality (3.32). Let $H = -\Delta + V$ be a Schrödinger operator with non-negative potential $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}(M)$. Assume that for some $r > 2$, the Riesz transforms $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (2, r)$. Then the heat kernel associated to H satisfies (3.33). Hence we obtain by the previous argument the L^p-boundedness of $V^{1/2}H^{-1/2}$ and $\nabla H^{-1/2}$ for all $p \in (1, \inf(r, N))$.*

Note that (3.34) and (3.35) hold on manifolds with non-negative Ricci curvature (see [23]) as well as the boundedness on $L^p(M)$ for all $p \in (1,\infty)$ of Riesz transforms associated to the Laplace-Beltrami operator (see [6]).

We mention that Carron, Coulhon and Hassell [10] proved that the Riesz transforms $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (2, N)$ on smooth complete Riemannian manifolds of dimension $N \geq 3$ which are the union of a compact part and a finite number of Euclidean ends. Ji, Kunstmann and Weber [21] proved that this boundedness holds for all $p \in (1, \infty)$, on the complete connected Riemannian manifolds whose Ricci curvature is bounded from below, if there is a constant $a > 0$ with $\sigma(-\Delta) \subset \{0\} \cup [a, \infty)$. They also give examples of manifolds that satisfy their conditions. Auscher, Coulhon, Duong and Hofmann [3] proved that on complete non-compact Riemannian manifolds satisfying assumption (3.36), the uniform boundedness of $(\sqrt{t}\nabla e^{-t(-\Delta)})_{t>0}$ on L^q for some $q \in (2, \infty]$ implies the boundedness on $L^p(M)$ of $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ for all $p \in (2, q)$.

Therefore we deduce the following propositions using our previous theorem and the previously mentioned criterion of [3]. We also use the fact that the semigroup $(e^{-t(-\Delta-V)})_{t>0}$ is bounded analytic on $L^p(M)$ for all $p \in (1, \infty)$. This is true on manifolds where assumptions (3.34) and (3.35) hold and when $V \in K_\infty$ satisfying (3.31) (see e.g. [7] Theorem 1.1).

Proposition 3.22. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$ where $\mu(B(x,r)) \approx r^N$ for all ball B. Assume (3.31), (3.35), and $V \in K_\infty(M) \cap L^{\frac{N}{2},\infty}(M)$. If for some $r > 2$*

$$|||\nabla e^{-t(-\Delta)}|||_{L^r(M)-L^r(M)} \leq C/\sqrt{t}$$

for all $t > 0$, then

$$|||\nabla e^{-t(-\Delta-V)}|||_{L^p(M)-L^p(M)} \leq C/\sqrt{t}$$

for all $t > 0$, all $p \in (1, inf(r, N))$.

Once again, we notice that the previous proposition holds with conditions (3.34) and $\mu(B(x,r)) \geq Cr^N$ instead of $\mu(B(x,r)) \approx r^N$.

Proposition 3.23. *Let M be a non-compact complete Riemannian manifold of dimension $N \geq 3$. Assume (3.32) and assume that $V \in L^{\frac{N}{2},\infty}(M)$. If for some $r > 2$*

$$|||\nabla e^{-t(-\Delta)}|||_{L^r(M)-L^r(M)} \leq C/\sqrt{t}$$

for all $t > 0$, then

$$|||\nabla e^{-t(-\Delta+V)}|||_{L^p(M)-L^p(M)} \leq C/\sqrt{t}$$

for all $t > 0$, all $p \in (1, inf(r, N))$.

Bibliography

[1] Auscher P., On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ and related estimates, Mem. Amer. Math. Soc.186 no 871, (2007).

[2] Auscher P., Ben Ali B., Maximal inequalities and Riesz transform estimates on L^p spaces for Schrödinger operators with nonnegative potentials, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 57 no 6, 1975-2013, (2007).

[3] Auscher P.,Coulhon T., Duong X.T., Hofmann S., Riesz transforms on manifolds and heat kernel regularity, Ann. Scient. ENS 37 no 6, 911-957, (2004).

[4] Auscher P., Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators.Part II: Off-diagonal estimates on spaces of homogeneous type, J. Evol. Equ. 7, 265-316, (2007).

[5] Badr N., Ben Ali B., L^p-boundedness of Riesz transform related to Schrödinger operators on a manifold, To appear in Scuola Norm. Sup. di Pisa.

[6] Bakry D., Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, in Séminaire de Probabilités XXI, Springer L.N., no 1247, 137-172, (1987).

[7] Blunck S., Kunstmann P., Weighted norm estimates and maximal regularity, Adv. Diff. Equ. 7 no 12, 1513-1532, (2002).

[8] Blunck S., Kunstmann P., Calderòn-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞-functional calculus, Rev. Mat. Iberoamericana 19 no 3, 919-942, (2003).

[9] Blunck S., Kunstmann P., Weak type (p, p) estimates for Riesz transforms, Math. Z. 247, 137-148, (2004).

[10] Carron G., Coulhon T., Hassell A., Riesz transform and L^p cohomology for manifolds with Euclidean ends, Duke Math. J. 133, no 1, 59-93, (2006).

[11] Chen Z.-Q., Gaugeability and conditional gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. 354 no 11, 4639-4679, (2002).

[12] Coulhon T., Dimension a l'infini d'un semi-group analytique, Bull. Sc. Math. 2 serie, 114, 485-500, (1990).

[13] Coulhon T., Duong X.T., Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 no 3,1151-1169, (1999).

[14] Coulhon T., Sikora A., Gaussian heat kernel upper bounds via the Phragmén-Lindelöf theorem, Proc. London Math. Soc. 96 no 3, 507-544, (2008).

[15] Davies E. B., Heat kernels and spectral theory, Cambridge University Press, (1989).

[16] Davies E.B., Simon B., L^p norms of non-critical Schrödinger semigroups, J. Funct. Anal. 102, 95-115, (1991).

[17] Duong X.T., Ouhabaz E.M., Yan L., Endpoint estimates for Riesz transforms of magnetic Schrödinger operators, Ark. Mat. 44, 261-275, (2006).

[18] Grafakos L., Classical and modern Fourier analysis, Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ, (2004).

[19] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.I, Math. Ann 341 no 4, 859-896, (2008).

[20] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.II, Ann. Inst. Fourier 59 no 4, 1553-1610, (2009).

[21] Ji L., Kunstmann P., Weber A., Riesz transform on locally symmetric spaces and Riemannian manifolds with a spectral gap, To appear in Bull. Sci. Math. (2009).

[22] Kato T., Perturbation theory for linear operators, Grund. der Math. Wiss. 132 Springer Verlag (1966).

[23] Li P., Yau S.T., On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. 156, 153-201, (1986).

[24] Liskevich V., Sobol Z., Vogt H., On the L^p theory of C^0-semigroups associated with second-order elliptic operators II, J. Funct. Anal. 193, 55-76, (2002).

[25] Ouhabaz E.M., Analysis of heat equations on domains, London Math. Soc. Mono. 31, Princ. Univ. Press. (2004).

[26] Saloff-Coste L., A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities, Duke J. Math. 65, 27-38,I.R.M.N. (1992).

[27] Saloff-Coste L., Aspects of Sobolev-type inequalities, Lond. Math. Soc. Lecture Note Series, 289, Camb. Univ. Press, (2002).

[28] Shen Z., L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, Ann. Inst. Fourier Grenoble 45 no 2, 513-546, (1995).

[29] Sikora A., Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation, Math. Z. 247, 643-662, (2004).

[30] Simon B., Schrödinger semigroups, Bull. Amer. Math. Soc. 7 no 3, 447-526, (1982).

[31] Stein E.M., Weiss G., Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princ. Math. series 32, Princ. Univ. Press. (1971).

[32] Takeda M., Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).

[33] Varopoulos N., Une généralisation du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev pour les espaces de Dirichlet, C.R.A.S Paris, 299, I, 651-654, (1984).

[34] Zhao Z., Subcriticality and gaugeability of the Schrödinger operator, Trans. Amer. Math. Soc. 334 no 1, 75-96, (1992).

Chapter 4

Riesz transforms of Schrödinger operators on manifolds

We consider Schrödinger operators $A = -\Delta + V$ on $L^p(M)$ where M is a complete Riemannian manifold of homogeneous type and $V = V^+ - V^-$ is a signed potential. We study boundedness of Riesz transform type operators $\nabla A^{-\frac{1}{2}}$ and $|V|^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}$ on $L^p(M)$. When V^- is strongly subcritical with constant $\alpha \in (0,1)$ we prove that such operators are bounded on $L^p(M)$ for $p \in (p_0', 2]$ where $p_0' = 1$ if $N \leq 2$, and $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}\right)' \in (1,2)$ if $N > 2$. We also study the case $p > 2$. With additional conditions on V and M we obtain boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2} A^{-1/2}$ on $L^p(M)$ for $p \in (1, \inf(q_1, N))$ where q_1 is such that $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$ is bounded on $L^r(M)$ for $r \in [2, q_1)$.

4.1 Introduction

Let M be a non-compact complete Riemannian manifold. Denote by $d\mu$ the Riemannian measure, d the geodesic distance on M and ∇ the Riemannian gradient. By $-\Delta$ we denote the positive Laplace-Beltrami operator. We say that M is of homogeneous type if for all $x \in M$ and $r > 0$

$$v(x, 2r) \leq C v(x, r) \tag{4.1}$$

where $v(x,r) := \mu(B(x,r))$ and $B(x,r) := \{y \in M \text{ such that } d(x,y) < r\}$.
This is equivalent to the fact that for some constants C and N,

$$v(x, \lambda r) \leq C \lambda^N v(x, r) \tag{4.2}$$

for all $\lambda \geq 1$.
Let $p(t,x,y)$ be the heat kernel of the Laplace-Beltrami operator Δ. We say that $p(t,x,y)$ satisfies a Gaussian upper bound if

$$p(t,x,y) \leq \frac{C e^{-c\frac{d^2(x,y)}{t}}}{v(x, \sqrt{t})}. \tag{4.3}$$

for all $t > 0$, and all $x, y \in M$.

Let us define the Riesz transform $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ of the operator $-\Delta$. Since by integration by parts

$$\|\nabla u\|_2 = \|(-\Delta)^{1/2}u\|_2, \quad \forall u \in W^{1,p}(M),$$

it follows obviously that $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ acts as a bounded operator on L^2. It is of interest to know if the Riesz transform extends to a bounded operator on L^p for $p \neq 2$. When this is the case, we can identify the domain of $(-\Delta)^{1/2}$ with the Sobolev space $W^{1,p}$, and obtain $W^{1,p}-$regularity of the solution of the heat equation with initial data in L^p. We can draw the same conclusions if $-\Delta$ is replaced by another self-adjoint differential operator A for which $\nabla A^{-1/2}$ acts as a bounded operator on L^p.

Under the assumptions (4.1) and (4.3)[1] it was proved by Coulhon and Duong [12] that $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ is of weak type $(1,1)$ and hence bounded on L^p for all $p \in (1,2]$. This quite general result does not hold for other values of p ; a counter-example is given there showing that the Riesz transform is unbounded on L^p for $p > 2$. One needs then additional conditions (on the manifold or its heat kernel) to guarantee boundedness of $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ on L^p for some $p > 2$. For this, we refer the reader to Auscher et al. [4], Carron, Coulhon and Hassell [11], Guillarmou and Hassell [17], [18] and the references therein. Let us also mention the following works of Auscher [2], Blunck and Kunstmann [8], Sikora [26] and Ouhabaz [24] (Chapter 7) dealing with Riesz transforms of elliptic differential operators.

Let us now move to Schrödinger operators on the Euclidean case $M = \mathbb{R}^N$. The classical Riesz transform $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ is of course bounded on L^p for all $p \in (1,\infty)$. If V is a non-negative potential, then $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (1,2]$ (see Ouhabaz [24], Chapter 7 or more general case in Duong, Ouhabaz and Yan [15]) but it may be unbounded on L^p for some $p > 2$, see Shen [27] for a counter-example. Shen [27], and Auscher and Ben Ali [3] proved that if the non-negative potential V is in the reverse Hölder class RH_q[2], then the Riesz transform $\nabla(-\Delta+V)^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (2, p_1)$ where p_1 depends on q. For negative potentials V (which are assumed to be small with respect to $-\Delta$ in the sense of quadratic forms) the situation is more complicated. Indeed, it is known that the semigroup $(e^{-t(-\Delta+V)})_{t>0}$ extends from L^2 to L^p for p in some interval (p_0', p_0) and (p_0', p_0) is optimal (see Liskevich, Sobol and Vogt [23]). In this setting, Assaad [1] proved that Riesz transform is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for $p \in (p_0', 2]$ where $p_0 = \frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}$. If, in addition, $V \in L^{N/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^N)$ for some $\varepsilon > 0$, then it is bounded on $L^p(\mathbb{R}^N)$ for all $p \in (1, N)$.

For Schrödinger operators $-\Delta + V$ on Riemannian manifolds less is known. If V is non-negative and (4.1), (4.3) are satisfied, then the heat kernel of $-\Delta+V$ is dominated by the heat kernel of $-\Delta$ and hence it satisfies (4.3). The method of Coulhon and Duong [12], based on a Gaussian upper bound and weighted gradient estimates, works also for $-\Delta + V$ and leads to boundedness of $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ on L^p for $p \in (1,2]$. This also follows from results in Blunck and Kunstmann [8], and Sikora [26]. For $p > 2$, Badr and Ben Ali [5] extend the result of Auscher and Ben Ali [3] to the setting of Riemannian

[1] when the doubling condition (4.1) is satisfied, (4.3) is equivalent to the apparently weaker diagonal estimate: $p(t,x,x) \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})}$, see Grigor'yan [16], Theorem 1.1.

[2] Definition in Chapter 5 SubSection 5.1.1

manifolds which satisfy polynomial volume growth and Poincaré inequalities. As in the Euclidean case, they assume that the potential V is non-negative and belongs to a reverse Hölder class. Note also that the results of Assaad [1] for negative potentials hold in the setting of Riemanniann manifolds which satisfy a global Sobolev inequality. Guillarmou and Hassell [17], [18] studied Riesz transforms $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ where A is a Schrödinger operator with signed potential and P_+ is the spectral projection on the positive spectrum. They prove in particular that on asymptotically conic manifolds M of dimension $N \geq 3$, if V is smooth and satisfies decay conditions, and the Schrödinger operator has neither zero-modes nor zero-resonances, then the Riesz transform type operator $\nabla(A \circ P_+)^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (1, N)$.

It is our aim to study the boundedness on $L^p(M)$ of Riesz transforms $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$. We consider signed potentials $V = V^+ - V^-$ and Riemannian manifolds M for which we merely assume (4.2) and (4.3). We do not require any global Sobolev inequality nor smoothness conditions on V. We assume that $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- is small with respect to $-\Delta + V^+$ in the sense that

$$\int_M V^- u^2 d\mu \leq \alpha \Big[\int_M |\nabla u|^2 d\mu + \int_M V^+ u^2 d\mu \Big],$$

for all $u \in W^{1,2}(M)$ such that $\int_M V^+ u^2 d\mu < \infty$, where $\alpha \in [0, 1)$. We prove that $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ are bounded on $L^p(M)$ for all $p \in (p_0', 2]$ where $p_0' = 1$ if $N \leq 2$, and $p_0' = \left(\frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}\right)' \in (1, 2)$ if $N > 2$. The proof is based on techniques from Auscher [2] and Blunck and Kunstmann [7], [8] together with $L^p - L^q$ off-diagonal estimates both for the semigroup $e^{-t(-\Delta+V)}$ and its gradient. We prove in particular estimates of the type

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-s(-\Delta+V)} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} (\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}))^\beta e^{-cd^2(B(x,r),B(y,r))/s},$$

as well as similar estimates for $\sqrt{s}\nabla e^{-s(-\Delta+V)}$. In order to prove the latter estimate we establish a bridge between $L^p - L^q$ estimates of a semigroup and localized Gagliardo-Nirenberg type inequalities. This is proved in a general setting of metric spaces in the next section.

We also study $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ with signed potentials on L^p for $p > 2$. Suppose that for some $r_1, r_2 > 2$

$$\int_0^1 \Big\| \frac{V}{v(., \sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \Big\|_{r_1} ds + \int_1^\infty \Big\| \frac{V}{v(., \sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \Big\|_{r_2} ds < \infty.$$

We obtain by arguments of perturbation type that $V(-\Delta+V)^{-1}$ and $(-\Delta)(-\Delta+V)^{-1}$ are bounded on L^p for all $p \in (p_0', \frac{p_0 r}{r+p_0})$ if $N > 2$ and $p \in (1, r)$ if $N \leq 2$ (where $r = \inf(r_1, r_2)$). If

$$\int_0^1 \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \Big\|_{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s}} + \int_1^\infty \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \Big\|_{r_2} \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty,$$

then $(-\Delta)^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (1, r)$ if $N \leq 2$ and $p \in (p_0', \frac{p_0 r}{p_0+r})$ if $N > 2$. In the particular case where $v(x, t) \approx t^N$ for some

$N > 2$, the latter condition on V reads as $V \in L^{N/2-\varepsilon} \cap L^{N/2+\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$, and the conclusion is that $(-\Delta)^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}(-\Delta+V)^{-1/2}$ are bounded on L^p for $p \in (p_0', \frac{p_0 N}{p_0+N})$. If in addition Poincaré inequalities hold on M, the latter interval is $(1, N)$.

Notation. In the following sections, we denote by L^p the Lebesgue space $L^p(M,\mu)$ or $L^p(M, T^*M)$ (according to the context) with the Riemannian measure μ, $||.||_p$ its usual norm, $(.,.)$ the inner product of L^2, and $||.||_{p-q}$ denotes the norm of operators from L^p to L^q. Set $\gamma_{p,q} := \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ for $p \leq q$. We denote by p' the dual exponent of p, $p' := \frac{p}{p-1}$ and as usual $p' = \infty$ if $p = 1$. We denote by C, c all inessential positive constants even if their values change at each occurrence. The boundedness of the Riesz transform $\nabla A^{-1/2}$ on L^p means boundedness from L^p of functions into L^p of vector fields. Recall also that $v(x,r) = \mu(B(x,r))$ denotes the volume of the ball $B(x,r)$. We shall use the notation $A(x,r,k) := B(x,(k+1)r) \setminus B(x,kr)$, $C_1(x,r) := B(x,4r)$, $C_j(x,r) := B(x,2^{j+1}r) \setminus B(x,2^j r)$ for $j \geq 2$. Finally, χ_E denotes the indicator function of E and $\chi_E S \chi_F$ is the operator $f \to \chi_E S(\chi_F f)$.

4.2 Off-diagonal estimates

In order to establish boundedness on L^p of the Riesz transform of $-\Delta + V$ we shall need the boundedness of the semigroup $e^{-t(-\Delta+V)}$ on L^p together with $L^p - L^q$ off-diagonal estimates. Upper bounds for the heat kernel of $-\Delta$ (hence $L^p - L^q$ off-diagonal estimates) is a well studied and quite understood subject but such bounds can be destroyed by the presence of a non-trivial negative part of V. We shall prove that $L^p - L^q$ off-diagonal estimates are conserved for p and q in a certain interval around 2. Our approach is based on perturbation arguments. However, since we do not assume V to be bounded, the domains of $-\Delta$ and $-\Delta + V$ are not necessarily the same and therefore properties of $e^{t\Delta}$ do not imply the same for $e^{-t(-\Delta+V)}$ in a trivial way. The operators here are constructed by the quadratic form technic, we have some information on the domains of the square roots $\sqrt{-\Delta}$ and $\sqrt{-\Delta+V}$ and our perturbation technique relies very much on this fact.

The results in the next sub-sections do not use the Riemannian manifold framework and hold for general self-adjoint operators on metric spaces. We shall assume that A is a non-negative self-adjoint operator on $L^2(X,\mu,\rho)$ where (X,μ,ρ) is a metric measured space. Again, $B(x,r) = \{y \in X, \rho(x,y) < r\}$ will denote the open ball with volume $v(x,r) := \mu(B(x,r))$. We may need to assume that (X,μ,ρ) is of homogenous type which will mean that (4.2) holds for some constants C and N independent of x and r. For simplicity, we write L^p instead of $L^p(X,\mu)$.

4.2.1 Local $L^2 - L^q$ estimates

The following simple proposition will play an important role in our analysis of off-diagonal estimates. It connects local $L^2 - L^q$ estimates to Gagliardo-Nirenberg type inequalities.

Proposition 4.1. *Let A be a non-negative self-adjoint operator on L^2. Consider the following properties in which N is a positive constant.*

i) $||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-sA}||_{2-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{N}{2}\gamma_{2,q}}$
for all $0 < s \leq t$, *and all* $x \in X$.

ii) $||\chi_{B(x,r)}u||_q \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}}\Big[||u||_2 + r||A^{1/2}u||_2\Big]$
for all $r > 0$, *all* $x \in X$, *and all* $u \in D(A^{1/2})$.

iii) $||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-sA}||_{2-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}} \max(1, \left(\frac{t}{s}\right)^{1/2})$
for all $0 < s, t$, *and all* $x \in X$.

Here $q \in [2, \frac{2N}{N-2})$ *if* $N > 2$, $q \in [2, \infty)$ *if* $N = 2$ *and* $q \in [2, \infty]$ *if* $N < 2$.
Then i) $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii).*

Proof: Let us first prove that *i*) implies *ii*). For every $u \in D(A^{1/2})$, we write

$$u = e^{-tA}u + \int_0^t Ae^{-sA}uds = e^{-tA}u + \int_0^t e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}uds.$$

Then

$$\chi_{B(x,\sqrt{t})}u = \chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}u + \int_0^t \chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}uds.$$

Now using *i*) and the fact that the semigroup is bounded analytic on L^2, we have

$$\begin{aligned}
||\chi_{B(x,\sqrt{t})}u||_q &\leq ||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}u||_q + \int_0^t ||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}u||_q ds \\
&\leq \frac{C||u||_2}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}} + \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}}\int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{N}{2}\gamma_{2,q}} ||A^{1/2}e^{-\frac{sA}{2}}A^{1/2}u||_2 ds \\
&\leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}}\Big[||u||_2 + t^{\frac{N}{2}\gamma_{2,q}}||A^{1/2}u||_2 \int_0^t s^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2}\gamma_{2,q}}ds\Big].
\end{aligned}$$

The last integral converges if $\gamma_{2,q} := \frac{1}{2} - \frac{1}{q} < \frac{1}{N}$. This gives the conditions on q as in the proposition. Therefore we deduce that *ii*) holds where $r = \sqrt{t}$.
Assume now *ii*) holds. Setting $r = \sqrt{t}$, $u = e^{-sA}f$ for $f \in L^2$ and $s, t > 0$ we obtain

$$\begin{aligned}
||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-sA}f||_q &\leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}}\Big[||f||_2 + \sqrt{t}||A^{1/2}e^{-sA}f||_2\Big] \\
&\leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{2,q}}}\Big[1 + \left(\frac{t}{s}\right)^{1/2}\Big]||f||_2.
\end{aligned}$$

This gives *iii*). □

Note that these arguments do not use the self-adjointness of A. All what we need is that $-A$ generates a bounded holomorphic semigroup on L^2. Also one can reformulate *ii*) as follows

$$||\chi_{B(x,r)}u||_q \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}}\Big[||u||_2 + r^{2\alpha}||A^\alpha u||_2\Big]$$

for all $r > 0$, all $x \in X$, and all $u \in D(A^\alpha)$. The condition on q becomes $\gamma_{2,q} < \frac{2\alpha}{N}$. The proof is the same.
One also obtains similar assertions by replacing the L^2 norm in the RHS by an L^s norm if e^{-tA} is assumed to be bounded holomorphic on L^s.
We learned recently about somehow related results in [10] where the Gaussian estimate (4.3) of a heat kernel $p(t,x,y)$ is characterized in terms of inequalities of type

$$\|fv_r^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|_q \leq C\Big(\|f\|_2 + r^2\|A^{1/2}f\|_2\Big).$$

Here $v_r(x) := v(x,r)$. For our latter purpose, these inequalities are not convenient because the heat kernel of $-\Delta + V$ with signed potential V does not satisfy a Gaussian upper bound in general. We mentioned in the introduction that the semigroup $e^{-t(-\Delta+V)}$ may not act on all L^p spaces. However, the inquality $ii)$ in the previous proposition will allow us to prove $L^p - L^q$ off-diagonal estimates for $\chi_{B(x,r)}e^{-t(-\Delta+V)}\chi_{B(y,r)}$ for appropriate p and q.

4.2.2 $L^p - L^q$ off-diagonal estimate

Let A be as above and assume that there exists some $p_1 \in (2,\infty]$ such that $(e^{-tA})_{t>0}$ extends to a uniformly bounded semigroup on L^p for all $p \in (p_1', p_1)$ where p_1' is the conjugate of p_1. Denote by $-A_p$ the corresponding generator of $(e^{-tA})_{t>0}$ on L^p (hence $A_2 = A$). Suppose in addition that for $p \in (p_1', p_1)$, $\psi_p(u) := |u|^{p/2}\mathrm{sign}(u) \in D(A^{1/2})$ for all $u \in D(A_p) \cap L^2$ and

$$||A_p u||_p.||u||_p^{p-1} \geq C||A^{1/2}\psi_p(u)||_2^2. \tag{4.4}$$

Here $|u|$ is the absolute value (or the modulus) of u and sign is the classical sign function.

These hypothesis are always satisfied if the semigroup e^{-tA} is sub-Markovian. Indeed, in that case, $\psi_p(u) \in D(A^{1/2})$ for all $u \in D(A_p)$ with $p \in (1,\infty)$ and

$$(A_p u, |u|^{p-1}\mathrm{sign}(u)) \geq 4\frac{p-1}{p^2}||A^{1/2}\psi_p(u)||_2^2. \tag{4.5}$$

See [21] or Theorem 3.9 in [24].

Under these assumptions, we can obtain from the local $L^2 - L^q$ estimate of Proposition 4.1 similar $L^p - L^r$ estimates where $r > p$.

Proposition 4.2. *Let A be a non-negative self-adjoint operator on L^2 whose semigroup is uniformly bounded on L^p for $p \in (p_1', p_1)$ and satisfies (4.4). Suppose also that $ii)$ of Proposition 4.1 holds. Then*

$$||\chi_{B(x,r)}e^{-sA}||_{p-pq_1} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,pq_1}}}\Big[\max\Big(1, \frac{r}{\sqrt{s}}\Big)\Big]^{2/p} \tag{4.6}$$

for all $p \in [2, p_1)$ and all $q_1 \in [1,\infty]$ if $N < 2$, $q_1 \in [1,\infty)$ if $N = 2$ and $q_1 \in [1, \frac{N}{N-2})$ if $N > 2$.

Proof: Let $u \in D(A_p) \cap L^p$. Since we assume $\psi_p(u) \in D(A^{1/2})$ we can apply *ii)* of Proposition 4.1 to $\psi_p(u)$ (with the conditions there on q). This gives

$$||\chi_{B(x,r)}|u|^{p/2}||_q \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}}\Big[|||u|^{p/2}||_2 + r||A^{1/2}\psi_p(u)||_2\Big].$$

Using (4.4) we obtain

$$||\chi_{B(x,r)}u||_{qp/2}^{p/2} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}}\left[||u||_p^{p/2} + r||A_p u||_p^{1/2}.||u||_p^{(p-1)/2}\right].$$

Take $f \in L^2 \cap L^p$ and apply this inequality with $u = e^{-sA}f$. Since the semigroup is uniformly bounded on L^p for all $p \in (p_1', p_1)$ and bounded analytic on L^2 it is well known by complex interpolation arguments that it is bounded analytic on L^p. Hence $||A_p e^{-tA}f||_p \leq Ct^{-1}||f||_p$. Thus we obtain

$$||\chi_{B(x,r)}e^{-sA}f||_{qp/2}^{p/2} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}}\left[1 + \frac{r}{\sqrt{s}}\right]||f||_p^{p/2}.$$

This is exactly (4.6) with $q_1 \in [1,\infty]$ for $N < 2$, $q_1 \in [1,\infty)$ if $N = 2$, and $q_1 \in [1, \frac{N}{N-2})$ if $N > 2$. $\square$

Off-diagonal $L^2 - L^2$ estimates[3] are in general not difficult to prove by means of multiplicative perturbations. By such estimates we mean

$$||\chi_F e^{-tA}\chi_E||_{2-2} \leq Ce^{-c\rho^2(E,F)/t} \tag{4.7}$$

for E, F subsets of the metric space (X, ρ) and $t > 0$. Assume now that such estimates hold. Since, by assumption, the semigroup is uniformly bounded on L^p for all $p \in (p_1', p_1)$ we obtain from the Riesz-Thorin interpolation theorem $L^p - L^p$ off-diagonal estimate

$$||\chi_F e^{-tA}\chi_E||_{p-p} \leq Ce^{-c\rho^2(E,F)/t}, \tag{4.8}$$

for all $p \in (p_1', p_1)$. The previous proposition implies $L^p - L^{pq}$ estimates

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{B(y,\sqrt{t})}||_{p-pq} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,pq}}} \tag{4.9}$$

for all $p \in [2, p_1)$ and $q \in [1, q_0)$ with $q_0 = \infty$ if $N \leq 2$ and $q_0 := \frac{N}{N-2}$ if $N > 2$. Using again the Riesz-Thorin interpolation theorem, (4.8) and (4.9) imply

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{B(y,\sqrt{t})}||_{r-rq} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{r,rq}}}e^{-c\rho^2(x,y)/t}.$$

We have then proved

[3] also called Davies-Gaffney estimates

Proposition 4.3. *Let A be as in the previous proposition and assume that (4.7) holds. Then*

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{B(y,\sqrt{t})}||_{r-s} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{r,s}}}e^{-c\rho^2(x,y)/t} \tag{4.10}$$

for all $t>0$, $x,y \in X$, all $r \in [2,p_1)$, $s \in [r, rq_0)$ where $q_0 = \infty$ if $N \leq 2$ and $q_0 = \frac{N}{N-2}$ if $N > 2$.

By duality one has similar estimates for $||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{B(y,\sqrt{t})}||_{s'-r'}$ with $v(y,\sqrt{t})$ instead of $v(x,\sqrt{t})$ in (4.10). Again, p' denotes the conjugate exponent of p.

Theorem 4.4. *Let (X,ρ,μ) be a measured metric space satisfying the doubling condition (4.2) with some constant $N>0$. Let A be as in the Proposition 4.2 and assume that (4.7) holds. Then the semigroup $(e^{-tA})_{t>0}$ extends to a bounded analytic semigroup on L^p for all $p \in (p_0', p_0)$ where $p_0 := p_1 q_0$ and $q_0 = \infty$ if $N \leq 2$ and $q_0 = \frac{N}{N-2}$ if $N>2$.*

Proof: From Proposition 4.2 we have

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}||_{r-s} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{r,s}}}.$$

Here $A(x,\sqrt{t},k)$ is the annulus

$$A(x,\sqrt{t},k) := B(x,(k+1)\sqrt{t}) \setminus B(x,k\sqrt{t}).$$

Interpolating again with (4.7) yields

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}||_{r-s} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{r,s}}}e^{-ck^2} \tag{4.11}$$

for all $r \in [2,p_1)$ and all $s \in (2, p_1 q_0)$, where $q_0 = \infty$ if $N \leq 2$ and $q_0 = \frac{N}{N-2}$ if $N>2$. Since the semigroup is bounded analytic on L^p for $p \in (p_1', p_1)$ we can apply [6] Theorem 1.1 to deduce that the semigroup is bounded analytic on L^p for all $p \in (2, p_1 q_0) = (2, p_0)$. The case $p \in (p_0', 2)$ is obtained by duality.
Note that we can also argue as in the proof of Proposition 4.9 below to obtain the boundedness of the semigroup on L^p for p as above. Analyticity on L^p follows then from analyticity on L^2 by a classical complex interpolation argument. □

We shall see later that the estimate of the previous proposition holds for r and s smaller than 2. Before proving this, we first need the following lemma.

Lemma 4.5. *Assume that X satisfies the doubling condition (4.2) for some constant $N>0$. For $a,r,s>0$, and $x,y \in X$, set*

$$J := \int_X \left(1 + \frac{\rho(B(x,r),B(z,r))}{r}\right)^a e^{-c\frac{\rho^2(B(x,r),B(z,r))}{s}} d\mu(z).$$

Then

$$J \leq Cv(x,r)\left[\max\left(1, \frac{\sqrt{s}}{r}\right)\right]^{a+N}. \tag{4.12}$$

Proof: By splitting the integral J into two parts as $J_1 + J_2 := \int_{B(x,2r)} + \int_{X\setminus B(x,2r)}$ we see that the first term is bounded by $Cv(x,r)$ and then it remains to treat the second one. Therefore, we assume in the sequel that $\rho(x,z) \geq 2r$.
It is clear that

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{\rho(B(x,r),B(z,r))}{r}\Big)^a &= \Big(1+\frac{\rho(B(x,r),B(z,r))}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{s}}{r}\Big)^a \\ &\leq \Big[\max(1,\frac{\sqrt{s}}{r})\Big]^a\Big(1+\frac{\rho(B(x,r),B(z,r))}{\sqrt{s}}\Big)^a.\end{aligned}$$

Using this, we obtain (with some constant $c > 0$ slightly smaller than the one in J)

$$J_2 \leq C\Big[\max\Big(1,\frac{\sqrt{s}}{r}\Big)\Big]^a \int_{X\setminus B(x,2r)} e^{-c\frac{\rho^2(B(x,r),B(z,r))}{s}}\,d\mu(z).$$

Assume that $\sqrt{s} \leq r$. Then

$$J_2 \leq C\int_{X\setminus B(x,2r)} e^{-c\frac{\rho^2(B(x,r),B(z,r))}{r^2}}\,d\mu(z),$$

and since

$$\rho^2(B(x,r),B(z,r)) \geq \rho(x,z)^2 + 4r^2 - 4r\rho(x,z)$$

we end up with

$$J_2 \leq C\int_X e^{-c\frac{\rho^2(x,z)}{r^2}}\,d\mu(z).$$

The standard argument which consists in decomposing X into annuli $A(x,r,l)$ gives

$$\begin{aligned}\int_X e^{-c\frac{\rho^2(x,z)}{r^2}}\,d\mu(z) &\leq C\sum_{l=0}^{\infty}\int_{lr\leq\rho(x,z)\leq(l+1)r} e^{-cl^2}\,d\mu(z) \\ &\leq C\sum_{l=0}^{\infty} e^{-cl^2}v(x,(l+1)r) \leq Cv(x,r).\end{aligned}$$

Assume now that $\sqrt{s} > r$. Then

$$\begin{aligned}J_2 &\leq C(\frac{\sqrt{s}}{r})^a\sum_{l=0}^{\infty}\int_{l\sqrt{s}\leq\rho(x,z)\leq(l+1)\sqrt{s}} e^{-c(\frac{\rho(x,z)}{\sqrt{s}}-\frac{2r}{\sqrt{s}})^2}\,d\mu(z) \\ &\leq C(\frac{\sqrt{s}}{r})^a\sum_{l=0}^{\infty} e^{-cl^2}(l+1)^N v(x,\sqrt{s}) \\ &\leq C(\frac{\sqrt{s}}{r})^{a+N} v(x,r).\end{aligned}$$

This proves the lemma. □

Using the $L^2 - L^2$ off diagonal estimate (4.7) and interpolation arguments we can deduce $L^p - L^q$ off diagonal estimates for $\chi_{B(x,r)}e^{-sA}\chi_{B(y,r)}$ for $p \in [2, p_1)$. Now we prove such estimates for all $p \in (p_0', p_0)$. More precisely, we have

Theorem 4.6. *Let X and A be as in Theorem 4.4. Then for all $r, s > 0$, and $p \in (p_0', p_0)$ and $q \in [p, p_0)$*

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}) \Big)^{\beta} e^{-c\rho^2(B(x,r),B(y,r))/s}, \quad (4.13)$$

where $C, c,$ and β are positive constants.

Proof: We first prove the theorem for $p = 2$. That is

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{2-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{2,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}) \Big)^{\beta} e^{-c\rho^2(B(x,r),B(y,r))/s}, \quad (4.14)$$

for $q \in [2, p_0)$.

From Theorem 4.4 and (4.7) we obtain by the Riesz-Thorin interpolation theorem the $L^p - L^p$ off-diagonal estimate

$$||\chi_F e^{-tA} \chi_E||_{p-p} \leq Ce^{-c\rho^2(E,F)/t}, \quad (4.15)$$

for all $p \in (p_0', p_0)$. Given $p \in [2, p_1)$. Using once again interpolation we obtain from (4.6) and (4.15)

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{p-pu} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,pu}}} \Big[\max(1, \frac{r}{\sqrt{s}}) \Big]^{\theta} e^{-\frac{c\rho^2(B(x,r),B(y,r))}{s}} \quad (4.16)$$

for all $p \in [2, p_1)$ and $u \in [1, q_0) = [1, \frac{N}{N-2})$. Here θ is a positive constant depending on p and u.
On the other hand, using (4.15) for $p_0 - \varepsilon$ and $L^{p_1-\varepsilon'} - L^{p_0-\varepsilon}$ estimate obtained from (4.6) we obtain by interpolation $L^p - L^{p_0-\varepsilon}$ estimate as in (4.16) with $p \in [p_1, p_0)$ and $pu = p_0 - \varepsilon (\approx p_0)$.
For $N \leq 2$ (4.16) is the $L^2 - L^s$ off-diagonal estimate for all $s \in [2, \infty)$.
For $N > 2$ we consider two cases. The first one is when $p_1 \leq 2q_0 = \frac{2N}{N-2}$ and the second one is when $2q_0 < p_1$.

Let us treat the first situation. Let $2 < r_1 < p_1 \leq 2q_0$ and $u < q_0$ (u is close to q_0). We have from (4.16) $L^2 - L^{r_1}$ and $L^{r_1} - L^{r_1 u}$ off-diagonal estimates. We use a composition argument to obtain $L^2 - L^{r_1 u}$ estimate. For this, we need the following lemma (see [9] Lemma 3.4)

Lemma 4.7. *Let X be a metric measured space satisfying the doubling condition. If R, S are two linear operators, we have*

$$||RS||_{p-q} \leq C \int_X ||R\chi_{B(z,r)}||_{m-q} ||\chi_{B(z,s)} S||_{p-m} v^{-1}(z, \inf(r,s)) d\mu(z)$$

for all $r, s > 0$ and all $1 \leq p \leq m \leq q \leq \infty$, where C is independent of R, S, r, s.

Set $R := \chi_{B(x,r)} e^{-\frac{sA}{2}}$ and $S := e^{-\frac{sA}{2}} \chi_{B(y,r)}$. Then for all $u \in [1, q_0)$ (we are interested by u close to q_0),

$$\begin{aligned}
& ||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{2-r_1 u} \\
\leq\ & C \int_X ||\chi_{B(x,r)} e^{-\frac{sA}{2}} \chi_{B(z,r)}||_{r_1 - r_1 u} ||\chi_{B(z,r)} e^{-\frac{sA}{2}} \chi_{B(y,r)}||_{2-r_1} v^{-1}(z,r) d\mu(z) \\
\leq\ & \frac{C\Big[max\Big(1, \frac{r}{\sqrt{s}}\Big)\Big]^{\theta}}{v(x,r)^{\gamma_{r_1, r_1 u}}} \int_X \frac{e^{-\frac{cd^2(B(x,r),B(z,r))}{s}} e^{-\frac{c\rho^2(B(z,r),B(y,r))}{s}}}{v(z,r)^{\gamma_{2,r_1}+1}} d\mu(z) \\
\leq\ & \frac{C\Big[max\Big(1, \frac{r}{\sqrt{s}}\Big)\Big]^{\theta}}{v(x,r)^{\gamma_{r_1, r_1 u}}} e^{-\frac{c\rho^2(B(x,r),B(y,r))}{s}} \int_X \frac{e^{-\frac{c\rho^2(B(x,r),B(z,r))}{s}}}{v(z,r)^{\gamma_{2,r_1}+1}} d\mu(z). \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Using the fact that $B(x,r) \subset B\Big(z, 3r + \rho(B(x,r), B(z,r))\Big)$ and the estimate (4.2), we deduce that

$$\frac{1}{v(z,r)} \leq \frac{C}{v(x,r)} \Big(3 + \frac{\rho(B(x,r), B(z,r))}{r}\Big)^N. \qquad (4.18)$$

Employing this in (4.17) yields

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{2-r_1 u} \leq \frac{C\Big[\max\Big(1, \frac{r}{\sqrt{s}}\Big)\Big]^{\theta}}{v(x,r)^{\gamma_{2,r_1 u}+1}} e^{-\frac{c\rho^2(B(x,r),B(y,r))}{s}} J, \qquad (4.19)$$

where

$$J := \int_X \Big(3 + \frac{d(B(x,r), B(z,r))}{r}\Big)^{N(\gamma_{2,r_1}+1)} e^{-\frac{c\rho^2(B(x,r),B(z,r))}{s}} d\mu(z).$$

Now we use Lemma 4.5 and obtain $L^2 - L^{r_1 u}$ off-diagonal estimate for all $r_1 \in [2, p_1)$ and $u \in [1, q_0)$. This is (4.14) for all $q \in [2, p_0)$.

Now we move to the second case, i.e., $2q_0 < p_1 < p_0 := p_1 q_0$. This is handled in a similar way as before. Indeed, if we choose $2 \leq p_2 < \frac{2N}{N-2}$, then we have the estimate (4.16) for $L^2 - L^{p_2}$ and $L^{p_2} - L^{p_3}$ for $p_2 < p_3 = p_2 u < p_2 q_0$. The previous lemma gives the $L^2 - L^{p_3}$ off-diagonal estimate. With several iterations we obtain $L^2 - L^{r_1}$ off-diagonal estimate for some $r_1 \in [p_1, p_0)$. As explained at the beginning of the proof, for such r_1 we have $L^{r_1} - L^{p_0 - \varepsilon}$ off-diagonal estimate. Again, the composition argument yields $L^2 - L^{p_0 - \varepsilon}$ and we obtain the desired estimate (4.14).

By Theorem 4.4 and the Riesz-Thorin interpolation theorem, we obtain from (4.14) the estimate (4.13) for $p \in [2, p_0)$ and $q \in [p, p_0)$. Now if we take $p \in (p_0', 2)$, then by duality we have from (4.14) the $L^p - L^2$ off-diagonal estimate

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{p-2} \leq \frac{C}{v(y,r)^{\gamma_{p,2}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r})\Big)^{\beta} e^{-c\rho^2(B(x,r),B(y,r))/s}. \qquad (4.20)$$

We argue as before by a composition of (4.20) and (4.14) for $q \in [2, p_0)$ and end up with

$$||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(y,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r})\Big)^{\beta} e^{-c\rho^2(B(x,r),B(y,r))/s}. \qquad (4.21)$$

It remains to see that $v(y,r)$ in the RHS can be replaced by $v(x,r)$ (after changing the constants c and β). Indeed, by the doubling property,

$$\begin{aligned} v(x,r) &\leq Cv(y,r)[1+\frac{\rho(x,y)}{r}]^N \\ &\leq Cv(y,r)[1+\frac{\rho(x,y)}{\sqrt{s}}]^N(\max(1,\frac{\sqrt{s}}{r})^N \\ &\leq Cv(y,r)[1+\frac{\rho(B(x,r),B(y,r))}{\sqrt{s}}+\frac{2r}{\sqrt{s}}]^N(\max(1,\frac{\sqrt{s}}{r}))^N \\ &\leq Cv(y,r)[1+\frac{\rho(B(x,r),B(y,r))}{\sqrt{s}}]^N(\max(\frac{r}{\sqrt{s}},\frac{\sqrt{s}}{r})^N. \end{aligned}$$

Once this inserted in (4.21) we obtain (4.13) for $p \in (p_0', 2)$ and $q \in [2, p_0)$. The case $q \in [p, 2]$ is obtained by duality of the case $2 \leq p \leq q < p_0$. Hence we have (4.13) for all $p \in (p_0', p_0)$ and $q \in [p, p_0)$. □

Corollary 4.8. *(see also Proposition 2.1 in [9]) Let X and A be as in Theorem 4.4. For $p \in (p_0', p_0)$ and $q \in [p, p_0)$ we have for all $t > 0$*

$$||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}e^{-tA}\chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}}e^{-ck^2}, \tag{4.22}$$

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}}e^{-ck^2}, \tag{4.23}$$

$$||\chi_{C_j(x,r)}e^{-sA}\chi_{B(x,r)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}}\Big(\max(\frac{2^{j+1}r}{\sqrt{s}},\frac{\sqrt{s}}{2^{j+1}r})\Big)^{\beta}e^{-c\frac{4^jr^2}{s}}. \tag{4.24}$$

Proof: Using the obvious fact that

$$||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}e^{-tA}\chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-q} \leq ||\chi_{B(x,(k+1)\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{B(x,(k+1)\sqrt{t})}||_{p-q}$$

and the previous theorem we obtain (for some constant β)

$$||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}e^{-tA}\chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}}(k+1)^{\beta}.$$

By (4.15) we know that

$$||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}e^{-tA}\chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-p} \leq Ce^{-ck^2}$$

and we use interpolation to obtain (4.22). The arguments are similar for (4.23) and (4.24). □

We finish this section by showing that $L^p - L^q$ off-diagonal estimates for $p \leq q$ imply that $(v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA})_{t>0}$ is $L^p - L^q$ bounded. What we prove here follows also from the results in [9] but we shall give details for the sake of completeness.

Proposition 4.9. *Let X and A be as in Theorem 4.4. Then for all p and q as in the previous theorem,*

$$||v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}||_{p-q} \leq C.$$

Proof: By Corollary 4.8 we have

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}||_{p-q} \leq \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}}e^{-ck^2}. \tag{4.25}$$

Using the fact that if $z \in B(x,\sqrt{t})$, $v(z,\sqrt{t})$ is equivalent to $v(x,\sqrt{t})$ (by the doubling condition), we obtain

$$\begin{aligned}
& ||\chi_{B(x,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}f||_q^q \\
= & \int_X |\chi_{B(x,\sqrt{t})}(z)v(z,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}\chi_{A(x,\sqrt{t},k)}(z)f(z)|^q d\mu(z) \\
\leq & Ce^{-ck^2}||f||_p^q.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

So we can write

$$\begin{aligned}
& ||v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q^q \\
= & \int_X v(x,\sqrt{t})^{-1}v(x,\sqrt{t})|v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f(x)|^q d\mu(x) \\
= & \int_X v(x,\sqrt{t})^{-1}\int_M \chi_{B(x,\sqrt{t})}(z)d\mu(z)|v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f(x)|^q d\mu(x) \\
\leq & C\int_X v(z,\sqrt{t})^{-1}||\chi_{B(z,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q^q d\mu(z) \\
= & C\left\|v(.,\sqrt{t})^{-1/q}||\chi_{B(.,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q\right\|_q^q.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Let us now estimate $v(z,\sqrt{t})^{-1/q}||\chi_{B(z,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q$. By (4.26) we write

$$\begin{aligned}
& v(z,\sqrt{t})^{-1/q}||\chi_{B(z,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q \\
\leq & v(z,\sqrt{t})^{-1/q}\sum_k ||\chi_{B(z,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}\chi_{A(z,\sqrt{t},k)}f||_q \\
\leq & Cv(z,\sqrt{t})^{-1/q}\sum_k e^{-ck^2}||\chi_{A(z,\sqrt{t},k)}f||_p.
\end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}
& v(z,\sqrt{t})^{-1/q}||\chi_{B(z,\sqrt{t})}v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q \\
\leq & C\sum_k e^{-ck^2}v(z,(k+1)\sqrt{t})^{-1/q}||\chi_{B(z,(k+1)\sqrt{t})}f||_p.
\end{aligned}$$

Inserting this in (4.27) we obtain

$$||v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}e^{-tA}f||_q \quad \leq \quad C\sum_k e^{-ck^2}\left\|v(.,(k+1)\sqrt{t})^{-\frac{1}{q}}||\chi_{B(.,(k+1)\sqrt{t})}f||_p\right\|_q.$$

Then using the Minkowski inequality we estimate

$$\begin{aligned}
& \left\|v(.,(k+1)\sqrt{t})^{-\frac{1}{q}}||\chi_{B(.,(k+1)\sqrt{t})}f||_p\right\|_q \\
\leq & \left[\int_X |f(x)|^p\Big(\int_X \chi_{B(y,(k+1)\sqrt{t})}(x)v(y,(k+1)\sqrt{t})^{-1}d\mu(y)\Big)^{\frac{p}{q}}d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Thus,

$$\left\| v(., (k+1)\sqrt{t})^{-\frac{1}{q}} ||\chi_{B(.,(k+1)\sqrt{t})} f||_p \right\|_q \leq ||f||_p,$$

and we come to

$$||v(., \sqrt{t})^{\gamma_{p,q}} e^{-tA} f||_q \leq C||f||_p \sum_k e^{-ck^2} \leq C||f||_p.$$

□

Let us point out that all the results in this section hold with the same proofs if A is considered on $L^2(\Omega)$ with Ω any open subset of X. The volume $v(x,r)$ appearing in the estimates is the volume of the ball $B(x,r)$ in X and not the ball in Ω. When (X, ρ, μ) satisfies the doubling condition, (Ω, ρ, μ) does not necessarily satisfy the same property.

4.3 The Schrödinger operator and the associated Riesz transforms

In this section we give applications of estimates proved in the previous one. We prove that these off-diagonal estimates are verified by the semigroup associated to the Schrödinger operator with signed strongly subcritical potential. Then we apply these estimates to prove the boundedness of the associated Riesz transforms on L^p for $p \leq 2$, and their boundedness on L^p for $p > 2$ with additional conditions on the potential.

4.3.1 The Schrödinger operator on L^2

Let M be a complete connected Riemannian manifold. Let A be a Schrödinger operator $-\Delta + V$ on $L^2 = L^2(M)$, where $-\Delta$ is the Laplace-Beltrami operator and the potential $V : M \to \mathbb{R}$ such that $V = V^+ - V^-$ (where V^+ and V^- are the positive and negative parts of V, respectively). The operator is defined via the sesquilinear form method. We set

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_M \nabla u \nabla v d\mu + \int_M V^+ uv d\mu - \int_M V^- uv d\mu,$$

with domain

$$D(\mathfrak{a}) = \left\{ u \in W^{1,2}(M), \int_M V^+ u^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Here we assume $V^+ \in L^1_{loc}(M)$ and V^- satisfies (for all $u \in D(\mathfrak{a})$):

$$\int_M V^- u^2 d\mu \leq \alpha \left[\int_M |\nabla u|^2 d\mu + \int_M V^+ u^2 d\mu \right] + \beta \int_M u^2 d\mu \tag{4.28}$$

where $\alpha \in (0,1)$ and $\beta \in \mathbb{R}$. By the well-known KLMN theorem (see for example [19] Chapter VI), the form $\mathfrak{a}$ is closed (and bounded from below). Its associated operator is $A = -\Delta + V$. If in addition $\beta \leq 0$, then A is nonnegative.

Following [14], we take the following definition

Definition 4.10. *We say that the negative part V^- is strongly subcritical if there exists an $0 \leq \alpha < 1$ such that*

$$\int_M V^- u^2 d\mu \leq \alpha \Big[\int_M |\nabla u|^2 d\mu + \int_M V^+ u^2 d\mu, \Big] \tag{4.29}$$

for all $u \in W^{1,2}(M)$ such that $\int_M V^+ u^2 d\mu < \infty$.

Assume now that $V^+ \in L^1_{loc}$ and (4.29) holds. Set $A = -\Delta + V$ the Schrödinger operator defined above. Thus A is a non-negative operator on $L^2(M)$. In addition

$$(Au, u) = \int_M |\nabla u|^2 d\mu + \int_M V^+ u^2 d\mu - \int_M V^- u^2 d\mu \geq (1-\alpha) \int_M |\nabla u|^2 d\mu.$$

That is,

$$||\nabla u||_2^2 \leq \frac{1}{1-\alpha} ||A^{1/2} u||_2^2. \tag{4.30}$$

Thus, the Riesz transform $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on $L^2(M)$.

We also observe that, V^- is strongly subcritical means that $V^- \leq \alpha(-\Delta + V^+)$ which is equivalent to

$$A = -\Delta + V^+ - V^- \geq \frac{1-\alpha}{\alpha} V^-. \tag{4.31}$$

Also the fact that $\alpha \in [0, 1)$ gives

$$A \geq (1-\alpha) V^+. \tag{4.32}$$

Summing (4.31) and (4.32) gives

$$A \geq \frac{1-\alpha}{2} (V^+ + V^-) = \frac{1-\alpha}{2} |V|. \tag{4.33}$$

This means that

$$(Au, u) \geq \frac{1-\alpha}{2} (|V| u, u) = \frac{1-\alpha}{2} \int_M |V| u^2 d\mu.$$

That is,

$$|||V|^{1/2} u||_2^2 \leq \frac{2}{1-\alpha} ||A^{1/2} u||_2^2. \tag{4.34}$$

So we can conclude that

$$\|\nabla u\|_2 + \||V|^{1/2} u\|_2 \leq C \|(-\Delta + V)^{1/2} u\|_2$$

if V^- is strongly subcritical. Then by a duality argument we have

$$\|\nabla u\|_2 + \||V|^{1/2} u\|_2 \approx \|(-\Delta + V)^{1/2} u\|_2$$

if V^- is strongly subcritical.

As in [1] we obtain the following $L^2 - L^2$ off-diagonal estimates (see also [13] for the first estimate).

Proposition 4.11. *Let A be the Schrödinger operator with potential $V = V^+ - V^-$ such that $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- satisfies (4.29). Then for all E and F subsests of M and all $t > 0$*

(i) $||\chi_F e^{-tA}\chi_E||_{2-2} \leq e^{-cd^2(E,F)/t}$,

(ii) $||\chi_F \sqrt{t}\nabla e^{-tA}\chi_E||_{2-2} \leq Ce^{-cd^2(E,F)/t}$,

(iii) $||\chi_F \sqrt{t}|V|^{1/2} e^{-tA}\chi_E||_{2-2} \leq Ce^{-cd^2(E,F)/t}$.

4.3.2 L^p Estimates

In this subsection, we verify that the Schrödinger operator with potential V such that V^- is strongly subcritical satisfies the assumptions of Subsection 4.2.2. Therefore its semigroup satisfies the $L^p - L^q$ off-diagonal estimates proved there.

Proposition 4.12. *Let A be a Schrödinger operator with $V^+ \in L^1_{loc}$ and suppose that V^- satisfies (4.29) with some constant $\alpha \in (0, 1)$. Then the associated semigroup is uniformly bounded analytic on L^p for all $p \in (p_1', p_1)$ where $p_1 := \frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}}$.*

This result follows from [21], Theorem 3.2. The semigroup is even a contraction one on L^p for $p \in (p_1', p_1)$. In order to understand this, note that for a smooth function u,

$$(-\Delta u, |u|^{p-1}\text{sign}(u)) = \frac{4(p-1)}{p^2}(\nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u)), \nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u))).$$

Therefore,

$$\begin{aligned}(Au, |u|^{p-1}\text{sign}(u)) &= \frac{4(p-1)}{p^2}(\nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u)), \nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u))) \\ &\quad +(V^+|u|^{p/2}, |u|^{p/2}) - (V^-|u|^{p/2}, |u|^{p/2}) \\ &\geq (\frac{4(p-1)}{p^2} - \alpha)\Big[(\nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u)), \nabla(|u|^{p/2}\text{sign}(u))\Big].\end{aligned}$$

This extends by density arguments to all u in an appropriate domain of A as an operator in L^p. This explains why A is a dissipative operator on L^p for p such that $\frac{4(p-1)}{p^2} - \alpha \geq 0$, i.e., for $p \in (p_1', p_1)$ with $p_1 = \frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}}$. For more details, see [21].

The previous inequalities show also that

$$(Au, |u|^{p-1}\text{sign}(u)) \geq C(A^{1/2}|u|^{p/2}\text{sign}(u), A^{1/2}|u|^{p/2}\text{sign}(u)), \tag{4.35}$$

which gives (4.4).

Theorem 4.13. *Assume that the manifold M satisfies the doubling condition (4.2) and the heat kernel of the Laplace-Beltrami operator satisfies the Gaussian upper bound (4.3). Let A be the Schrödinger operator with $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- strongly subcritical. We have following properties.*
1) The semigroup (e^{-tA}) extends a bounded analytic semigroup on L^p for all $p \in (p_0', p_0)$.

Here $p_0 = \infty$ *if* $N \le 2$ *and* $p_0 = (\frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}})\frac{N}{N-2}$ *if* $N > 2$.
2) For all $r, s > 0$, $x, y \in M$ *and all* $p \in (p_0', p_0)$, $q \in [p, p_0)$

$$
\begin{aligned}
&||\chi_{B(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(y,r)}||_{p-q} \le \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r}) \Big)^{\beta} e^{-cd^2(B(x,r),B(y,r))/s},\\
&||\chi_{A(x,\sqrt{t},k)} e^{-tA} \chi_{B(x,\sqrt{t})}||_{p-q} \le \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}} e^{-ck^2},\\
&||\chi_{B(x,\sqrt{t})} e^{-tA} \chi_{A(x,\sqrt{t},k)}||_{p-q} \le \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}}} e^{-ck^2},\\
&||v(.,\sqrt{t})^{\gamma_{p,q}} e^{-tA}||_{p-q} \le C.\\
&||\chi_{C_j(x,r)} e^{-sA} \chi_{B(x,r)}||_{p-q} \le \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,q}}} \Big(\max(\frac{2^{j+1}r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{2^{j+1}r}) \Big)^{\beta} e^{-c\frac{4^j r^2}{s}}.
\end{aligned}
$$

Proof: By the previous proposition and (4.35) we can apply the results of the previous section (Theorems 4.4, 4.6, Proposition 4.9 and Corollary 4.8). The missing thing at this stage is property ii) of Proposition 4.1 for A. Since the heat kernel of $-\Delta$ satisfies the Gaussian bound (4.3), it is easily seen that

$$||\chi_{B(x,\sqrt{t})} e^{-sA_0}||_{2-\infty} \le \frac{C}{v(x,\sqrt{t})^{1/2}} \Big(\frac{t}{s}\Big)^{\frac{N}{4}},$$

for all $0 < s \le t$. Thus, estimate i) of Proposition 4.1 holds for $-\Delta$ and this implies *ii*) for $-\Delta$. As explained before, the Riesz transform of A is bounded on L^2, hence

$$\|(-\Delta)^{1/2} f\|_2 = \|\nabla f\|_2 \le C \|A^{1/2}\|_2.$$

This implies that property ii) of Proposition 4.1 holds for A. □

4.3.3 $L^p - L^2$ off-diagonal estimates of ∇e^{-sA} and $|V|^{1/2} e^{-sA}$

In this subsection, we combine the $L^2 - L^p$ off-diagonal estimates of the semigroup with the $L^2 - L^2$ off-diagonal estimates of Proposition 4.11 to obtain the following result.

Theorem 4.14. *Let* M *be a complete Riemannian manifold where (4.2) and (4.3) are satisfied. Let* $A = -\Delta + V$ *be a Schrödinger operator with* $V^+ \in L^1_{loc}$ *and* V^- *strongly subcritical. Denote by* T_s *either* $\sqrt{s}\nabla e^{-sA}$ *or* $\sqrt{s}|V|^{1/2} e^{-sA}$. *Then* T_s *satisfies the following* $L^p - L^2$ *off-diagonal estimates for all* $p \in (p_0', 2]$, *where* $p_0' = 1$ *if* $N \le 2$, *and* $p_0' = \Big(\frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}\Big)'$ *if* $N > 2$.

$$||\chi_{B(x,r)} T_s \chi_{B(y,r)}||_{p-2} \le \frac{Cg(r,s)}{v(y,r)^{\gamma_{p,2}}} e^{-c\frac{d^2(B(x,r),B(y,r))}{s}}, \tag{4.36}$$

$$||\chi_{A(x,r,l)} T_s \chi_{B(x,r)}||_{p-2} \le \frac{Cg(r,s) l^{\beta}}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} e^{-c\frac{l^2 r^2}{s}}, \tag{4.37}$$

$$||\chi_{C_j(x,r)} T_s \chi_{B(x,r)}||_{p-2} \le \frac{Cg(r,s) 2^{j\beta}}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} e^{-c\frac{4^j r^2}{s}}, \tag{4.38}$$

where $g(r,s) := \Big(\max(\frac{r}{\sqrt{s}}, \frac{\sqrt{s}}{r})\Big)^{\beta}$ *for some positive constant* β. *We recall that* $A(x,r,k) := B(x,(k+1)r) \setminus B(x,kr)$, $C_1(x,r) := B(x,4r)$, $C_j(x,r) := B(x,2^{j+1}r) \setminus B(x,2^j r)$ *for* $j \geq 2$.

Proof: Let us take $T_s = \sqrt{s}\nabla e^{-sA}$. The proof is the same for $T_s = \sqrt{s}|V|^{1/2}e^{-sA}$.

First, we prove (4.36).

By Theorem 4.13,

$$||\chi_{B(z,r)}e^{-sA}\chi_{B(y,r)}||_{p-2} \leq \frac{Cg(r,s)}{v(z,r)^{\gamma_{p,2}}}e^{-\frac{cd^2(B(z,r),B(y,r))}{s}} \tag{4.39}$$

for all $p \in (p_0', 2]$. We also have the $L^2 - L^2$ off-diagonal estimate (ii) of Proposition 4.11, which gives

$$||\chi_{B(x,r)}\sqrt{s}\nabla e^{-sA}\chi_{B(z,r)}||_{2-2} \leq Ce^{-cd^2(B(x,r),B(z,r))/s}. \tag{4.40}$$

Now, as before, we use Lemma 4.7 and write

$$\begin{aligned} & ||\chi_{B(x,r)}\sqrt{s}\nabla e^{-sA}\chi_{B(y,r)}||_{p-2} \\ \leq \; & C\int ||\chi_{B(x,r)}\sqrt{s}\nabla e^{-\frac{sA}{2}}\chi_{B(z,r)}||_{2-2}||\chi_{B(z,r)}e^{-\frac{sA}{2}}\chi_{B(y,r)}||_{p-2}v^{-1}(z,r)d\mu(z). \end{aligned}$$

We employ (4.39) , (4.40), and (4.18) to obtain

$$||\chi_{B(x,r)}\sqrt{s}\nabla e^{-sA}\chi_{B(y,r)}||_{p-2} \leq \frac{Cg(r,s)}{v(y,r)^{\gamma_{p,2}+1}}e^{-\frac{cd^2(B(x,r),B(y,r))}{s}}I, \tag{4.41}$$

where

$$I := \int_M \left(1 + \frac{d(B(y,r),B(z,r))}{r}\right)^{N(\gamma_{p,2}+1)} e^{-\frac{cd^2(B(y,r),B(z,r))}{s}}d\mu(z).$$

Now we use Lemma 4.5 and obtain (4.36).

Now, we check (4.37).

By (4.36), we have

$$\begin{aligned} ||\chi_{A(x,r,l)}T_s\chi_{B(x,r)}||_{p-2} &\leq ||\chi_{B(x,(l+1)r)}T_s\chi_{B(x,(l+1)r)}||_{p-2} \\ &\leq \frac{Cg((l+1)r,s)}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} \\ &\leq \frac{Cg(r,s)l^{\beta}}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}}. \end{aligned}$$

By Proposition 4.11

$$||\chi_{A(x,r,l)}T_s\chi_{B(x,r)}||_{2-2} \leq Ce^{-c\frac{l^2r^2}{s}}. \tag{4.42}$$

Therefore, (4.37) holds by applying the Riesz-Thorin interpolation theorem.

The latter arguments work also for (4.38). $\square$

4.3.4 Boundedness of Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ and of $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p, $p<2$

Having the main tools for the Schrödinger operator $A = -\Delta + V^+ - V^-$, we can prove the boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and of $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for all $p \in (1,2]$ if $N \leq 2$, and for all $p \in (p_0', 2]$ if $N > 2$. More precisely,

Theorem 4.15. *Let M be the Riemannian manifold with assumptions (4.2) and (4.3). Let A be the Schrödinger operator with signed potential V such that $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- satisfies (4.29). Then the associated Riesz transforms $\nabla A^{-1/2}$ and the operator $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (1,2]$ if $N \leq 2$ and for all $p \in (p_0', 2]$ if $N > 2$ where $p_0' := \left(\frac{2N}{(N-2)(1-\sqrt{1-\alpha})}\right)'$.*

Proof: To prove this result, we prove that $\nabla A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type (p,p), then using the boundedness on L^2 and the Marcinkiewicz interpolation theorem we deduce the boundedness on L^p for the suitable range of p. To prove that $\nabla A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type (p,p) we apply the following theorem from [7]. The formulation here is taken from [2].

Theorem 4.16. *Let $p \in [1,2)$. Suppose that T is sublinear operator of strong type $(2,2)$, and let $(A_r)_{r>0}$ be a family of linear operators acting on L^2. Assume that for $j \geq 2$ and every ball $B = B(x,r)$,*

$$\left(\frac{1}{v(x,2^{j+1}r)} \int_{C_j(x,r)} |T(I-A_r)f|^2\right)^{1/2} \leq g(j) \left(\frac{1}{v(x,r)} \int_B |f|^p\right)^{1/p}, \tag{4.43}$$

and for $j \geq 1$

$$\left(\frac{1}{v(x,2^{j+1}r)} \int_{C_j(x,r)} |A_r f|^2\right)^{1/2} \leq g(j) \left(\frac{1}{v(x,r)} \int_B |f|^p\right)^{1/p}, \tag{4.44}$$

for all f supported in B. If $\Sigma := \sum g(j) 2^{Nj} < \infty$, then T is of weak type (p,p), with a bound depending only on the strong type $(2,2)$ bound of T, p, and Σ.

Set $T := \nabla A^{-1/2}$ (the case $T = |V|^{1/2}A^{-1/2}$ is treated in a similar way). We prove assumptions (4.43) and (4.44) with $A_r = I - (I - e^{-r^2 A})^m$ for some integer m large enough. The following arguments are very similar to those in [2] Theorem 4.2 and [1] where some elliptic and Schrödinger operators are treated on the Euclidean space.

We prove (4.44) by using the estimate of Theorem 4.13. For f supported in a ball

$B = B(x,r)$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{v(x,2^{j+1}r)^{1/2}} \|A_r f\|_{L^2(C_j(x,r))} \\
= \; & \frac{1}{v(x,2^{j+1}r)^{1/2}} \Big\| \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{k+1} e^{-kr^2 A} f \Big\|_{L^2(C_j(x,r))} \\
\le \; & \frac{1}{v(x,r)^{1/2}} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \|e^{-kr^2 A} f\|_{L^2(C_j(x,r))} \\
\le \; & \frac{C}{v(x,r)^{1/2}} \frac{1}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} 2^{j+1} e^{-c4^j} \|f\|_{L^p(B)} \\
\le \; & C e^{-c4^j} \Big(\frac{1}{v(x,r)} \int_B |f|^p \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

From this it is clear that (4.44) holds with $g(j) = Ce^{-c4^j}$.

It remains to check the assumption (4.43). Fix $f \in L^2$ supported in a ball B. We know that

$$\nabla A^{-1/2} f = C \int_0^\infty \nabla e^{-tA} f \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

and hence

$$\begin{aligned}
\nabla A^{-1/2}(I - e^{-r^2 A})^m f &= C \int_0^\infty \nabla e^{-tA} (I - e^{-r^2 A})^m f \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= C \int_0^\infty g_{r^2}(t) \nabla e^{-tA} f dt
\end{aligned}$$

where

$$g_{r^2}(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{\chi_{(t-kr^2>0)}}{\sqrt{t-kr^2}}.$$

By Theorem 4.14

$$\begin{aligned}
\|\chi_{C_j(x,r)} \nabla A^{-1/2}(I - A_r)\chi_B\|_{p-2} &\le \frac{C2^{j\beta}}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} \int_0^\infty |g_{r^2}(t) g(r,t)| e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{C2^{j\beta}}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} (I_1 + I_2),
\end{aligned}$$

where

$$I_1 := \int_0^{(m+1)r^2} |g_{r^2}(t) g(r,t)| e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

and

$$I_2 := \int_{(m+1)r^2}^\infty |g_{r^2}(t) g(r,t)| e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

We observe that (see [2] p. 27)

$$|g_{r^2}(t)| \le \frac{C}{\sqrt{t-kr^2}} \quad \text{if} \quad kr^2 < t \le (k+1)r^2 \le (m+1)r^2$$

and
$$|g_{r^2}(t)| \le Cr^{2m}t^{-m-1/2} \quad \text{if} \quad t > (m+1)r^2.$$
Using this we have
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{r^2} (\frac{r}{\sqrt{t}})^\beta e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} \frac{dt}{t} + \sum_{k=1}^m \int_{kr^2}^{(k+1)r^2} |g_{r^2}(t)g(r,t)|e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &\le 2^{-j\beta} \int_0^{4^{-j}} e^{-c\frac{1}{u}} \frac{du}{u^{1+\beta/2}} \\ &\quad + Cr^{-1}e^{-c'4^j} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{kr^2}^{(k+1)r^2} \max(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{\sqrt{t}}{r})^\beta (t-kr^2)^{-1/2} dt \\ &\le Ce^{-c'4^j}. \end{aligned}$$

On the other hand, the obvious bound $\lambda^\alpha e^{-\lambda} \le C$ for any positive α gives (here we choose $\alpha = m$ large enough)

$$\begin{aligned} I_2 &\le Cr^{2m} \int_{(m+1)r^2}^\infty t^{-m-1} \max(\frac{r}{\sqrt{t}}, \frac{\sqrt{t}}{r})^\beta e^{-c\frac{4^j r^2}{t}} dt \\ &\le C4^{-jm} r^{2m-2m-\beta} \int_{(m+1)r^2}^\infty t^{-m-1+\frac{\beta}{2}+m} dt \\ &= C'4^{-jm}. \end{aligned}$$

We obtain from these estimates
$$\|\chi_{C_j(x,r)} \nabla A^{-1/2}(I-A_r)\chi_B\|_{p-2} \le \frac{C}{v(x,r)^{\gamma_{p,2}}} 2^{j\beta}(e^{-c'4^j} + 4^{-jm}).$$

This shows (4.43) and proves the theorem. □

Remarks: 1) As explained in [1] in the Euclidean case, the value p_0' is optimal in the sense that the Riesz transform $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for $p \in (p_0', 2]$ and could be unbounded on L^p for $p < p_0'$. The reason is that this value is also optimal for existence of the semigroup e^{-tA} on L^p for $p \in (p_0', p_0)$.
2) Suppose that $N > 2$ and V^- satisfies (4.29). Suppose in addition that $V^- \in K_\infty(M)$, that is, for any $\varepsilon > 0$ there exists a compact set $K \subset M$ and $\delta > 0$ such that

$$\sup_{x\in M} \int_{K^c} G(x,y)|V^-(y)|d\mu(y) \le \varepsilon$$

where $G(x,y)$ is the Green function, $K^c := M \setminus K$, and for all measurable sets $B \subset K$ with $\mu(B) < \delta$,
$$\sup_{x\in M} \int_B G(x,y)|V^-(y)|d\mu(y) \le \varepsilon.$$

Suppose also that L^2-Poincaré inequalities hold. Then using the results in [28], it follows that the heat kernel of A has a Gaussian upper bound. Therefore, Theorem 5 in [26] shows that $\nabla A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are of weak type $(1,1)$ and they are bounded on L^p for all $p \in (1,2]$.

4.3.5 Boundedness of VA^{-1} and $(-\Delta)A^{-1}$ on L^p

Let us first recall again the notation $p_0 = (\frac{2}{1-\sqrt{1-\alpha}})\frac{N}{N-2}$ if $N > 2$ and $p_0 = \infty$ otherwise.

Proposition 4.17. *Let M be a complete Riemannian manifold for which (4.2) and (4.3) hold. Let A be the Schrödinger operator with signed potential V such that $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- satisfying (4.29). Assume that, for some $r_1, r_2 > 2$*

$$\int_0^1 \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \right\|_{r_1} ds < \infty \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \right\|_{r_2} ds < \infty. \tag{4.45}$$

Set $r := \inf(r_1, r_2)$. Then VA^{-1} and $(-\Delta)A^{-1}$ are bounded on L^p for all $p \in (p_0', \frac{p_0 r}{r+p_0})$ if $N > 2$ and $p \in (1, r)$ if $N \leq 2$.

Proof: Let us write[4]

$$A^{-1} = \int_0^\infty e^{-sA} ds.$$

By Hölder's inequality,

$$\begin{aligned} ||VA^{-1}||_{p-p} &\leq C \int_0^\infty ||Ve^{-sA}||_{p-p} ds \\ &\leq C \int_0^1 \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \right\|_{r_1} ||v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}} e^{-sA}||_{p-q_1} ds \\ &+ C \int_1^\infty \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \right\|_{r_2} ||v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}} e^{-sA}||_{p-q_2} ds, \end{aligned}$$

for all $p \in (p_0', p_0)$ such that $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} = \frac{1}{r_1}$ and $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{r_2}$. Proposition 4.9 applied to A gives (note that $\gamma_{p,q_1} = \frac{1}{r_1}$ and $\gamma_{p,q_2} = \frac{1}{r_2}$)

$$||v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{p,q}} e^{-sA}||_{p-q} \leq C \tag{4.46}$$

for $p_0' < p \leq q < p_0$. We choose q_1 and q_2 close to p_0 and using (4.45), we deduce

$$\begin{aligned} ||VA^{-1}||_{p-p} &\leq C \int_0^1 \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \right\|_{r_1} ds + C \int_1^\infty \left\| \frac{V}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \right\|_{r_2} ds \\ &\leq C \end{aligned}$$

for all $p \in (p_0', \frac{rp_0}{r+p_0})$. Finally, for $u \in L^2 \cap L^p$

$$\begin{aligned} ||(-\Delta)A^{-1}u||_p &= ||(-\Delta + V - V)A^{-1}u||_p \\ &\leq ||u||_p + ||VA^{-1}u||_p \\ &\leq C||u||_p. \end{aligned}$$

□

[4]we use A^{-1} for simplicity. In principle we should replace in this formula A by $\varepsilon I + A$, the estimates we prove below are uniform with respect to ε, we then let $\varepsilon \to 0$.

Remarks. 1) Assume that $v(x,t) \approx t^N$ for all $x \in M$ with $N > 2$. Then (4.45) means that $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$. Assume also that L^2-Poincaré inequality holds. The conclusion is then VA^{-1} and $(-\Delta)A^{-1}$ are bounded on L^p for $p \in (p_0', \frac{p_0 N}{2p_0+N})$. In this case, the heat kernel of $A = -\Delta + V^+$ is dominated by that of $-\Delta$ (see [1]), therefore it has a Gaussian upper bound (4.3). This means that $p_0 = \infty$ and we obtain boundedness of VA^{-1} and $(-\Delta)A^{-1}$ on L^p for $p \in (1, N/2)$. For related results with conditions that V^+ in a reverse Hölder class, see [27], [3] and [5].
2) If L^2-Poincaré inequality holds and V^- is such that the heat kernel of A has a Gaussian upper bound (see the remark at the end of the previous section). Then (4.46) holds for all $p \le q \in (1,\infty)$. This means that there will be no restriction on q_1 and q_2 in the previous proof. With the same assumptions as in the previous proposition, we end up with VA^{-1} and $(-\Delta)A^{-1}$ bounded on L^p for all $p \in (1, r)$.

4.3.6 Boundedness of $\nabla A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p for $p > 2$

In this section we study boundedness of the Riesz transform of A on L^p for $p > 2$.

Theorem 4.18. *Let M be a complete Riemannian manifold with (4.2) and (4.3). Let A be the Schrödinger operator with signed potential V such that $V^+ \in L^1_{loc}$ and V^- satisfying (4.29). Assume that, for some $r_1, r_2 > 2$*

$$\int_0^1 \left\| \frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}} \right\|_{r_1} \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty \quad \text{and} \quad \int_1^\infty \left\| \frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}} \right\|_{r_2} \frac{ds}{\sqrt{s}} < \infty.$$

If $N \le 2$, then the operators $(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (1, r)$, where $r = \inf(r_1, r_2)$.
If $N > 2$, then $(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (p_0', \frac{p_0 r}{p_0+r})$. In particular, if the Riesz transform $\nabla(-\Delta)^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (2, \delta)$, then $\nabla A^{-1/2}$ is bounded on L^p for all $p \in (p_0', \inf(\frac{p_0 r}{p_0+r}, \delta))$.

Proof: The case $p \in (p_0', 2]$ was already studied in Theorem 4.15, so we consider only $p > 2$. We prove that $I - (-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}$ is bounded on L^p for all p as in the theorem. Let $A_0 := -\Delta$ and write

$$\begin{aligned} I - A_0^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}} &= A_0^{\frac{1}{2}}(A_0^{-\frac{1}{2}} - A^{-\frac{1}{2}}) && (4.47)\\ &= C\int_0^\infty A_0^{\frac{1}{2}}(I+tA_0)^{-1}t^{-\frac{1}{2}}dt - C\int_0^\infty A_0^{\frac{1}{2}}(I+tA)^{-1}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= C\int_0^\infty A_0^{\frac{1}{2}}\Big((I+tA_0)^{-1} - (I+tA)^{-1}\Big)t^{-1/2}dt && (4.48)\end{aligned}$$

Take Λ_0 and Λ two operators such that

$$\mathfrak{a}_0(u,v) :=< \Lambda_0 u, v > \quad \text{and} \quad \mathfrak{a}(u,v) :=< \Lambda u, v >$$

where $<,>$ is the pairing between $D(\mathfrak{a}_0)$ and its dual (or $D(\mathfrak{a})$ and its dual). Note that $D(\Lambda_0) := D(\mathfrak{a}_0) = W^{1,2}$ and $D(\Lambda) := D(\mathfrak{a}) = \{u \in W^{1,2}, \int V^+|u|^2 < \infty\}$. Here $\mathfrak{a}_0$ and $\mathfrak{a}$ are the sesquilinear forms associated with $A_0 := -\Delta$ and A, respectively.

The operator Λ_0 restricted to $D(A_0)$ is A_0, and Λ restricted to $D(A)$ is A. Also the restriction of $(I+t\Lambda_0)^{-1}$ to L^2 coincides with $(I+tA_0)^{-1}$, and the restriction of $(I+t\Lambda)^{-1}$ to L^2 coincides with $(I+tA)^{-1}$. See, e.g., [24] Chapter I.
Set $G(t)$ the following difference:

$$\begin{aligned} G(t) &:= A_0^{1/2}\Big((I+t\Lambda_0)^{-1}-(I+t\Lambda)^{-1}\Big) \\ &= tA_0^{1/2}(I+t\Lambda_0)^{-1}(\Lambda-\Lambda_0)(I+t\Lambda)^{-1} \\ &= tA_0^{1/2}(I+t\Lambda_0)^{-1}V(I+t\Lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

Since $D(\Lambda)\subseteq D(\Lambda_0)$, $G(t)$ is well defined. For $f\in L^2\cap L^p$ we write

$$G(t)f = tA_0^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}(I+tA_0)^{-1/2}|V|^{1/2}\mathrm{sign}V.|V|^{1/2}(I+tA)^{-1}f. \tag{4.49}$$

We estimate the norms of each of the following operators: $A_0^{\frac{1}{2}}(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}$, $(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}|V|^{\frac{1}{2}}$, and $|V|^{\frac{1}{2}}(I+tA)^{-1}$.
We begin with the first one. Since A_0 is sectorial, the operator $tA_0(I+tA_0)^{-1}$ is uniformly bounded on L^p for all $p\in(1,\infty)$. Set $\phi(z):=z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}-z(1+z)^{-1}$. Then ϕ is in H_0^∞ where H_0^∞ is the set of H^∞ functions that are regularly decaying at 0 and ∞. Thus $\phi(tA_0)$ is uniformly bounded on L^p for all $p\in(1,\infty)$ (see for instance [20] Chapter II section 9) Therefore we have all $t>0$ and all $p\in(1,\infty)$

$$||A_0^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}||_{p-p} \;\leq\; Ct^{-1/2}. \tag{4.50}$$

In order to estimate the norm of the second operator, $(I+tA_0)^{-1/2}|V|^{1/2}$, we argue by duality. We write

$$|||V|^{\frac{1}{2}}(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}||_{q-q} \leq |||V|^{1/2}A_0^{-1/2}||_{q-q}||A_0^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}||_{q-q}$$

By Hölder's inequality, we have

$$\begin{aligned} |||V|^{\frac{1}{2}}A_0^{-\frac{1}{2}}||_{q-q} &\leq C\int_0^\infty |||V|^{1/2}e^{-sA_0}||_{q-q}\frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &\leq C\int_0^1 \left\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{q,q_1}}}\right\|_{r_1} ||v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{q,q_1}}e^{-sA_0}||_{q-q_1}\frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &+ C\int_1^\infty \left\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{q,q_2}}}\right\|_{r_2} ||v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{q,q_2}}e^{-sA_0}||_{q-q_2}\frac{ds}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

where q_1 and q_2 are chosen such that $\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}=\frac{1}{r_1}$ and $\frac{1}{q}-\frac{1}{q_2}=\frac{1}{r_2}$.
Since we assume (4.3), we have by Proposition 4.9

$$||v(.,\sqrt{s})^{\gamma_{p,q}}e^{-sA_0}||_{p-q}\leq C$$

for $1\leq p\leq q\leq\infty$. Therefore,

$$|||V|^{\frac{1}{2}}A_0^{-\frac{1}{2}}||_{q-q}\leq C\int_0^1 \left\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_1}}}\right\|_{r_1}\frac{ds}{\sqrt{s}} + C\int_1^\infty \left\|\frac{|V|^{1/2}}{v(.,\sqrt{s})^{\frac{1}{r_2}}}\right\|_{r_2}\frac{ds}{\sqrt{s}}. \tag{4.51}$$

Using the hypothesis on V we deduce the boundedness of $|V|^{1/2}A_0^{-1/2}$ on L^q for all $q \in (1, r)$.
Hence $t^{1/2}|V|^{1/2}(I + tA_0)^{-1/2}$ is uniformly bounded on L^q for all $q \in (1, r)$, and by duality

$$||(I + tA_0)^{-1/2}|V|^{1/2}||_{p-p} \le Ct^{-1/2} \tag{4.52}$$

for all $p \in (r', \infty)$. Thus, using (4.50) and (4.52) in (4.49) we obtain for all $p \in (r', \infty)$

$$||G(t)||_{p-p} \le C|||V|^{1/2}(I + tA)^{-1}||_{p-p}. \tag{4.53}$$

By the Laplace transform,

$$\begin{aligned} |||V|^{1/2}(I + tA)^{-1}||_{p-p} &= \Big\| \int_0^\infty |V|^{1/2} e^{-s} e^{-stA} ds \Big\|_{p-p} \\ &\le \int_0^\infty e^{-u/t} |||V|^{1/2} e^{-uA}||_{p-p} \frac{du}{t}, \end{aligned}$$

and using (4.48) we obtain

$$\begin{aligned} ||I - A_0^{1/2} A^{-\frac{1}{2}}||_{p-p} &\le C \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u/t} |||V|^{1/2} e^{-uA}||_{p-p} \frac{du}{t} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= C \int_0^\infty |||V|^{1/2} e^{-uA}||_{p-p} \int_0^\infty e^{-u/t} t^{-3/2} dt du. \end{aligned}$$

Since $\int_0^\infty e^{-u/t} t^{-3/2} dt = Cu^{-1/2}$ we have

$$\begin{aligned} ||I - A_0^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}||_{p-p} &\le C \int_0^\infty |||V|^{1/2} e^{-uA}||_{p-p} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &\le C \int_0^1 \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{u})^{\frac{1}{r_1}}} \Big\|_{r_1} ||v(., \sqrt{u})^{\gamma_{p,q_1}} e^{-uA}||_{p-m_1} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &+ C \int_1^\infty \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{u})^{\frac{1}{r_2}}} \Big\|_{r_2} ||v(., \sqrt{u})^{\gamma_{p,q_1}} e^{-uA}||_{p-m_2} \frac{du}{\sqrt{u}}. \end{aligned}$$

Here we choose m_1 and m_2 such that $\frac{1}{p} - \frac{1}{m_1} = \frac{1}{r_1}$ and $\frac{1}{p} - \frac{1}{m_2} = \frac{1}{r_2}$.
Using estimate (4.46) and the hypothesis on V, we have for all $p \in \left(2, \frac{p_0 r}{r+p_0}\right)$

$$\begin{aligned} ||I - A_0^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}||_{p-p} &\le C\Big[\int_0^1 \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{u})^{\frac{1}{r_1}}} \Big\|_{r_1} \frac{du}{\sqrt{u}} + \int_1^\infty \Big\| \frac{|V|^{1/2}}{v(., \sqrt{u})^{\frac{1}{r_2}}} \Big\|_{r_2} \frac{du}{\sqrt{u}} \Big] \\ &\le C. \end{aligned}$$

Therefore,

$$||A_0^{\frac{1}{2}} A^{-1/2}||_{p-p} \le C$$

for all $p \in (2, \frac{p_0 r}{r+p_0})$ if $N > 2$ and $p \in (2, r)$ if $N \le 2$.
To obtain boundedness of $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ on L^p we write

$$|V|^{1/2}A^{-1/2} = |V|^{1/2}A_0^{-1/2}A_0^{1/2}A^{-1/2},$$

and use the boundedness of $|V|^{1/2}A_0^{-1/2}$ on L^p for $p \in (1, r)$ which follows from (4.51). □

As in a previous remark, if L^2-Poincaré inequality holds and V^- is such that the heat kernel of A has a Gaussian upper bound like (4.3), then we obtain in the previous theorem that $(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for all $p \in (1, r)$.
If $v(x,t) \approx t^N$ for some $N > 2$, then the condition on V reads as $V \in L^{N/2-\varepsilon} \cap L^{N/2+\varepsilon}$ for some $\varepsilon > 0$. Thus if L^2-Poincaré inequality holds then the conclusion is that $(-\Delta)^{1/2}A^{-1/2}$ and $|V|^{1/2}A^{-1/2}$ are bounded on L^p for $p \in (p_0', \frac{p_0 N}{p_0+N})$. Again, $p_0 = \infty$, the latter interval is $(1, N)$. For non-negative potentials V that are in a reverse Hölder class, related results are proved in [27], [3] and [5].

Bibliography

[1] Assaad J., Riesz transforms associated to Schrödinger operators with negative potentials, to appear in Publicacions Matemàtiques.

[2] Auscher P., On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ and related estimates, Mem. Amer. Math. Soc.186 no 871, (2007).

[3] Auscher P., Ben Ali B., Maximal inequalities and Riesz transform estimates on L^p spaces for Schrödinger operators with nonnegative potentials, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 57 no 6, 1975-2013, (2007).

[4] Auscher P., Coulhon Th., Duong, X.T., Hofmann S., Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37, no. 6, 911–957 (2004).

[5] Badr N., Ben Ali B., L^p-boundedness of Riesz transform related to Schrödinger operators on a manifold, To appear in Scuola Norm. Sup. di Pisa.

[6] Blunck S., Kunstmann P.C., Weighted norm estimates and maximal regularity, Adv. Diff. Equ. 7 no 12, 1513-1532, (2002).

[7] Blunck S., Kunstmann P.C., Calderòn-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞ functional calculus, Rev. Mat. Iberoamericana 19, 919-942, (2003).

[8] Blunck S., Kunstmann P.C., Weak type (p, p) estimates for Riesz transforms, Math. Z. 247, 137-148, (2004).

[9] Blunck S., Kunstmann P.C., Generalized Gaussian estimates and the Legendre transform, J. Operator Theory 53 no 2, 351-365, (2005).

[10] Boutayeb S., Coulhon Th., Sikora, A., in preparation.

[11] Carron G., Coulhon Th., Hassell A., Riesz transform and L^p-cohomology for manifolds with Euclidean ends, Duke Math. J. 133, no. 1, 59–93 (2006).

[12] Coulhon Th., Duong X.T., Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$. Trans. Amer. Math. Soc. 351, no. 3, 1151–1169 (1999).

[13] Coulhon Th., Sikora A., Gaussian heat kernel upper bounds via the Phragmen-Lindelöf theorem. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 96, no. 2, 507–544 (2008).

[14] Davies E.B., Simon B., L^p norms of non-critical Schrödinger semigroups, J. Funct. Anal. 102, 95-115, (1991).

[15] Duong X.T., Ouhabaz E.M., Yan L., Endpoint estimates for Riesz transforms of magnetic Schrödinger operators, Ark. Mat. 44, no. 2, 261–275 (2006).

[16] Grigor'yan A., Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds, J. Diff. Geom. 45, 33-52 (1997).

[17] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.I, Math. Ann 341 no 4, 859-896, (2008).

[18] Guillarmou C., Hassell A., Resolvent at low energy and Riesz transform for Schrödinger operators on asymptotically conic manifolds.II, Ann. Inst. Fourier 59 no 4, 1553-1610, (2009).

[19] Kato T., Perturbation theory for linear operators, Grund. der Math. Wiss. 132 Springer Verlag (1966).

[20] Kunstmann P. C., Weis L., Maximal Lp-regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and $H\infty$-functional calculus. Functional analytic methods for evolution equations, 65-311, Lecture Notes in Math., 1855, Springer, Berlin, 2004.

[21] Lieskevich V., Semenov, Yu. A., Some problems on Markov semigroups. Schrödinger operators, Markov semigroups, wavelet analysis, operator algebras, 163–217, Math. Top., 11, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[22] Li P., Yau S.T., On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, Acta Math. 156, 153-201, (1986).

[23] Liskevich V., Sobol Z., Vogt H., On the L^p theory of C^0-semigroups associated with second-order elliptic operators II, J. Funct. Anal. 193, 55-76, (2002).

[24] Ouhabaz E.M., Analysis of heat equations on domains, London Math. Soc. Monographs 31, Princ. Univ. Press. (2004).

[25] Saloff-Coste L., A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities, Duke J. Math. 65, 27-38,I.R.M.N. (1992).

[26] Sikora A., Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation, Math. Z. 247, 643-662, (2004).

[27] Shen Z., L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45, no. 2, 513-546, (1995).

[28] Takeda M., Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).

Chapter 5

Analyse sur les espaces à poids

Le but de ce chapitre est d'étudier la bornitude sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^N, wdx), N \geq 3$, des transformées de Riesz $\nabla A^{-1/2}$, des puissances négatives des opérateurs, $A^{-\alpha/2}$, et du calcul fonctionnel holomorphe $\varphi(A)$. Dans tous ces cas A est l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où $-\Delta$ est le Laplacien positif et V est un potentiel positif fortement sous-critique, c-à-d. qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq \varepsilon V$. Nous montrons que si le poids w appartient à certaines classes de Muckenhoupt et de Hölder inverse, alors la bornitude sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ peut avoir lieu.

5.1 Préliminaires

Nous commençons ce chapitre par une section dédiée aux définitions, notations, et théorèmes importants constituant les outils de notre étude des inégalités à poids.

5.1.1 Les classes de Muckenhoupt $A_p, A_{p,q}$ et les classes de Hölder inverse RH_q

Soit M l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood non-centré suivant

$$Mf(x) := \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

On sait que cet opérateur est de type faible $(1,1)$, c-à-d. qu'il est borné de $L^1(\mathbb{R}^N, dx)$ dans $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, dx)$. Il est aussi borné sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ pour tous les $1 < p < \infty$.
On se demande pour quels poids w, la bornitude de cet opérateur sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ a lieu?
Muckenhoupt répond à cette question en donnant le théorème suivant (voir par exemple [12])

Théorème 5.1. *Soit $1 < p < \infty$. L'opérateur maximal de Hardy-Littlewood M est borné sur $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ si et seulement s'il existe une constante C telle que, pour toute* *boule B de $\mathbb{R}^N$,*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}(x)dx\right)^{p-1} \leq C.$$

Soit $I_\alpha := (-\Delta)^{-\alpha/2}$ le potentiel de Riesz et soit M_α l'opérateur maximal fractionnel suivant

$$M_\alpha f(x) := \sup_{B\ni x} \frac{r(B)^\alpha}{|B|}\int_B |f(y)|dy$$

où les boules B sont des boules de $\mathbb{R}^N$.
Muckenhoupt et Wheeden [16] montrent le théorème suivant

Théorème 5.2. *Pour $0 < \alpha < N$, $1 \leq p < N/\alpha$ et $1/p - 1/q = \alpha/N$, l'opérateur M_α est borné de $L^p(\mathbb{R}^N, w^p dx), p > 1$, dans $L^q(\mathbb{R}^N, w^q dx)$ si et seulement s'il existe une constante C telle que, pour toute boule B de $\mathbb{R}^N$,*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^q(x)dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-p'}(x)dx\right)^{1/p'} \leq C.$$

Quand $p = 1$, M_α est borné de $L^1(\mathbb{R}^N, wdx)$ dans $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^N, w^q dx)$ si et seulement s'il existe une constante C telle que, pour toute boule B de $\mathbb{R}^N$,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^q(x)dx\right)^{1/q} \leq Cw(y)$$

pour presque tous les $y \in B$.

Pareillement, la bornitude de $L^p(\mathbb{R}^N, w^p dx)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N, w^q dx)$ du potentiel de Riesz I_α est caractérisée par les mêmes classes de poids.

Rappelons la définition suivante (voir [20])

Définition 5.3. *On dit qu'un opérateur T est un opérateur de Calderòn-Zygmund si T est un opérateur linéaire borné sur $L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ et s'il existe une fonction mesurable K sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ telle que*

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x,y)u(y)dy \quad p.p. x \notin supp u$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^N, dx)$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$. En plus K satisfait les estimations suivantes:

i) $|K(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^N}$

ii) $|K(x+h,y) - K(x,y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{N+\delta}}$

iii) $|K(x,y+h) - K(x,y)| \leq \frac{C|h|^\delta}{|x-y|^{N+\delta}}$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$, $|h| < |x-y|/2$ et pour un $\delta > 0$.

La bornitude sur les espaces à poids des opérateurs de Calderòn-Zygmund a été aussi étudiée. Le résultat est le suivant (voir par exemple [12])

Théorème 5.4. *Soient* $1 < p < \infty$ *et* T *un opérateur de Calderòn-Zygmund. Alors* T *est borné sur* $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$ *si et seulement s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B *de* $\mathbb{R}^N$,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}(x)dx\Big)^{p-1} \leq C.$$

Définition 5.5. *Soit* w *une fonction positive localement intégrable sur* $\mathbb{R}^N$.
On dit que w *appartient à la classe de Muckenhoupt* $A_p, 1 < p < \infty$ *s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B *de* $\mathbb{R}^N$,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^{1-p'}(x)dx\Big)^{p-1} \leq C.$$

Pour $p = 1$, *on dit que* w *appartient à la classe de Muckenhoupt* A_1 *s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B *de* $\mathbb{R}^N$,

$$\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx \leq Cw(y)$$

pour presque tous les $y \in B$.
On dit que w *appartient à la classe de Hölder inverse* $RH_q, 1 < q < \infty$ *s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^q(x)dx\Big)^{1/q} \leq \frac{C}{|B|}\int_B w(x)dx.$$

Pour $q = \infty$, *on dit que* w *appartient à la classe de Hölder inverse* RH_∞ *s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B,

$$w(y) \leq \frac{C}{|B|}\int_B w(x)dx$$

pour presque tous les $y \in B$.
On dit que $w \in A_{p,q}, 1 \leq p \leq q < \infty$, *s'il existe une constante* C *telle que, pour toute boule* B *de* $\mathbb{R}^N$,

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^q(x)dx\Big)^{1/q}\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-p'}(x)dx\Big)^{1/p'} \leq C$$

quand $p > 1$, *et*

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B w^q(x)dx\Big)^{1/q} \leq Cw(y)$$

pour presque tous les $y \in B$, *quand* $p = 1$.

Voici quelques propriétés de ces classes (voir [11], [12] et [13])

Proposition 5.6. *1.* $A_\infty = \bigcup_{1\le p<\infty} A_p = \bigcup_{1<q\le\infty} RH_q$.

2. $A_1 \subset A_p \subset A_q$ *où* $1 \le p \le q < \infty$.

3. $RH_\infty \subset RH_q \subset RH_p$ *où* $1 < p \le q \le \infty$.

4. Pour $w \in A_p, 1 < p < \infty$, *il existe un* $q \in (1,p)$ *tel que* $w \in A_q$.

5. Pour $w \in RH_q, 1 < q < \infty$, *il existe un* $p \in (q,\infty)$ *tel que* $w \in RH_p$.

6. si $w \in A_\infty$ *alors la mesure* wdx *est une mesure Borélienne doublante.*

7. Si $1 < p < \infty, w \in A_p$ *si et seulement si* $w^{1-p'} \in A_{p'}$.

8. Si $1 \le p \le \infty$ *et* $1 < q < \infty$, *alors* $w \in A_p \cap RH_q$ *si et seulement si* $w^q \in A_{q(p-1)+1}$.

9. Si $1 \le p \le q < \infty$ *alors* $w \in A_{p,q}$ *si et seulement si* $w^q \in A_{1+q/p'}$ *si et seulement si* $w \in A_{1+1/p'} \cap RH_q$.

10. Si $1 \le p < q < \infty$ *et* $\alpha/N = 1/p - 1/q$, *alors* $w \in A_{p,q}$ *si et seulement si* $w^q \in A_{q(N-\alpha)/N}$.

Dans tout ce chapitre, on note L^p l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ et $L^p(w)$ l'espace de Lebesgue à poids $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$.

5.1.2 Le Théorème d'extrapolation de Rubio De Francia

Rubio De Francia [18] montre le théorème d'extrapolation suivant pour les opérateurs bornés sur les espaces à poids.

Théorème 5.7. *Si un opérateur* T *est borné sur* $L^r(w)$ *pour un* $r \in [1,\infty)$ *fixé et pour tous les poids* w *dans* A_r, *alors* T *est borné sur* $L^p(w)$ *pour tous les* $p \in (1,\infty)$ *et tous les poids* w *dans* A_p.

Remarquant que ce théorème n'utilise pas des caractéristiques spécifiques de l'opérateur T, on retrouve la version suivante pour des paires de fonctions (voir [2], [8] et [9]).

Théorème 5.8. *Soit* F *une famille ordonnée de paires de fonctions* (f,g) *positives et mesurables. Supposons qu'il existe un* $r \in [1,\infty)$ *tel que pour toute paire* $(f,g) \in F$

$$||f||_{L^r(w)} \le C||g||_{L^r(w)} \quad \textit{pour tout} \;\; w \in A_r.$$

Alors pour tous les $p \in (1,\infty)$ *et tous les* $w \in A_p$,

$$||f||_{L^p(w)} \le C||g||_{L^p(w)}.$$

Vu qu'il existe plusieurs opérateurs qui ne sont pas définis sur tous les espaces L^p, Auscher et Martell [2] adaptent ce théorème à l'intervalle $(p_0, q_0) \subset (1,\infty)$. Cette adaptation fait appel aux poids $w \in A_{p/p_0} \cap RH_{(q_0/p)'}$.

Théorème 5.9. *Soit $0 < p_0 < q_0 \leq \infty$. Supposons qu'il existe un $r \in [p_0, q_0], r < \infty$, tel que pour toute paire $(f, g) \in F$*

$$||f||_{L^r(w)} \leq C||g||_{L^r(w)} \quad \textit{pour tout} \;\; w \in A_{r/p_0} \cap RH_{(q_0/r)'}.$$

Alors pour tous les $p \in (p_0, q_0)$ et tous les $w \in A_{p/p_0} \cap RH_{(q_0/p)'}$,

$$||f||_{L^p(w)} \leq C||g||_{L^p(w)}.$$

Notons aussi qu'il existe des versions du théorème d'extrapolation de Rubio De Francia pour la bornitude des l^r-extensions de l'opérateur T, ainsi que des versions pour la bornitude des espaces $L^p(w)$ dans les espaces $L^{p,\infty}(w)$.

5.1.3 Critères de bornitude sur $L^p(w)$ des opérateurs sous-linéaires

Rappelons que M et M_α sont les opérateurs maximaux définis dans la sous-section 5.1.1. Utilisant des méthodes "Good-λ inequalities", Auscher et Martell [2] et [6] montrent les critères ci-dessous.
Pour montrer la bornitude sur $L^p(w)$:

Théorème 5.10. *Soit $1 \leq p_0 < q_0 \leq \infty$ et soient E et D deux espaces vectoriels tels que $D \subset E$. Soient T et S deux opérateurs tels que S agit de D dans l'espace des fonctions mesurables et T est sous-linéaire agissant de E dans L^{p_0}. Soit $(\mathcal{A}_r)_{r>0}$ une famille d'opérateurs agissant de D dans E. Supposons que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(I-\mathcal{A}_{r(B)})f|^{p_0}dx\right)^{1/p_0} \leq CM(|Sf|^{p_0})(x)^{1/p_0}, \tag{5.1}$$

et

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T\mathcal{A}_{r(B)}f|^{q_0}dx\right)^{1/q_0} \leq CM(|Tf|^{p_0})(x)^{1/p_0}, \tag{5.2}$$

pour tout $f \in D$ et tout $x \in B$ (le rayon de B est noté par $r(B)$). Soient $p_0 < p < q_0$ (ou $p = q_0$ quand $q_0 < \infty$), et $w \in A_{p/p_0} \cap RH_{(q_0/p)'}$. Alors il existe une constante C telle que

$$||Tf||_{L^p(w)} \leq C||Sf||_{L^p(w)}$$

pour tout $f \in D$.

Pour montrer la bornitude de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$ pour $p < q$:

Théorème 5.11. *Soient $0 < \alpha < N$ et $1 \leq p_0 < s_0 < q_0 \leq \infty$ tels que $1/p_0 - 1/s_0 = \alpha/N$. Soient T un opérateur sous-linéaire borné de L^{p_0} dans L^{s_0}, et $(\mathcal{A}_r)_{r>0}$ une famille d'opérateurs agissant de L^∞_c dans L^{p_0}. Supposons que*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T(I-\mathcal{A}_{r(B)})f|^{s_0}dx\right)^{1/s_0} \leq CM_{\alpha p_0}(|f|^{p_0})(x)^{1/p_0}, \tag{5.3}$$

et

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |T\mathcal{A}_{r(B)}f|^{q_0}dx\right)^{1/q_0} \leq CM(|Tf|^{s_0})(x)^{1/s_0}, \tag{5.4}$$

pour tout $f \in L_c^\infty$ et tout $x \in B$ pour tout B de rayon $r(B)$. Soient $p_0 < p < q < q_0$ tels que $1/p - 1/q = \alpha/N$, et $w \in A_{1+1/p_0-1/p} \cap RH_{q(q_0/q)'}$. Alors T est borné de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$.

On dit que la mesure doublante ν est d'ordre $D > 0$ si D est le plus petit nombre tel que

$$\nu(\lambda B) \leq C_\nu \lambda^D \nu(B)$$

pour toute boule B et tout $\lambda > 0$.

Dans la suite on note par $C_1(B)$ la boule $4B$, et par $C_j(B)$ l'anneau $2^{j+1}B \setminus 2^jB$ pour $j \geq 2$. On note par $W_w(p_0, q_0)$ l'espace suivant

$$W_w(p_0, q_0) := \{p : p_0 < p < q_0 \text{ et } w \in A_{p/p_0} \cap RH_{(q_0/p)'}\}.$$

Blunck et Kunstmann [7] donnent un critère pour vérifier la bornitude faible d'un opérateur. Ce critère est vrai sur les espaces métriques avec des mesures doublantes. Sachant que si le poids w est dans la classe A_∞ alors la mesure wdx est doublante (voir Proposition 5.6), Auscher et Martell [2] montrent la version à poids du théorème de Blunck-Kunstmann.

Théorème 5.12. *Soient μ une mesure Borélienne doublante sur $\mathbb{R}^N$, et $w \in A_\infty$ d'ordre D_w. Soit $D_1 \subset D_2$ deux sous-espaces de $L^{p_0}(w)$, stables avec la troncature par les fonctions indicatrices des espaces mesurables. Soient T un opérateur sous-linéaire défini sur D_2 et $(\mathcal{A}_r)_{r>0}$ une famille d'opérateurs agissant de D_1 dans D_2. Soient $1 \leq p_0 < q_0 \leq \infty$. Supposons que*

(a) il existe un $q \in W_w(p_0, q_0)$ tel que T est borné de $L^q(w)$ dans $L^{q,\infty}(w)$.

(b) pour tout $j \geq 1$, il existe des constantes α_j telles que pour toute boule B de rayon $r(B)$ et pour toute fonction $f \in D_1$ à support dans B,

$$\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)}\int_{C_j(B)} |\mathcal{A}_{r(B)}f|^{q_0}d\mu\right)^{1/q_0} \leq \alpha_j \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|^{p_0}d\mu\right)^{1/p_0}.$$

(c) il existe un β tel que $w \in RH_{\beta'}$ avec la propriété suivante: pour tout $j \geq 2$ il existe des constantes α_j telles que pour toute boule B de rayon $r(B)$ et pour toute fonction $f \in D_1$ à support dans B,

$$\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)}\int_{C_j(B)} |T(I-\mathcal{A}_{r(B)})f|^{\beta}d\mu\right)^{1/\beta} \leq \alpha_j \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|^{p_0}d\mu\right)^{1/p_0}.$$

(d) $\sum_j \alpha_j 2^{D_w j} < \infty$ où les α_j sont celles de (b) et (c).

Alors T est borné de $L^p(w)$ dans $L^{p,\infty}(w)$ pour tous les $p \in W_w(p_0, q_0)$ avec $p < q$. Ainsi, pour un tel p, il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in D_1$,

$$||Tf||_{L^p(w)} \leq C||f||_{L^p(w)}.$$

Notons que toutes les hypothèses des Théorèmes 5.10 et 5.11 sont des hypothèses sans poids. Or le Théorème 5.12 demande la vérification de la bornitude à poids dans l'hypothèse (a), ce qui peut être un obstacle dans sa vérification. D'autre part, l'opérateur T est présent (en particulier au côté droit des inégalités) dans les inégalités (5.2) et (5.4) des Théorèmes 5.10 et 5.11. Ce qui est une réstriction de la classe des opérateurs qui vérifient ces conditions, $\nabla A^{-1/2}$ où A est l'opérateur de Schrödinger en est un exemple.

5.2 Bornitude sur $L^p(w)$ des transformées de Riesz associées à $-\Delta - V$

Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où $-\Delta$ est le Laplacien positif et V est un potentiel positif fortement sous-critique: il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq \varepsilon V$.
Sous cette condition sur V nous savons d'après le Chapitre 3 que les transformées de Riesz associées, $\nabla A^{-1/2}$, sont bornées sur $L^p(\mathbb{R}^N, dx), N \geq 3$ pour tous les $p \in (p_0', 2]$ où p_0' est le dual de $p_0 := \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$. Cet intervalle de bornitude est élargi avec des conditions aditionnelles sur le potentiel V.
Notre objectif dans cette section est de trouver la classe de poids w qui nous permettent d'avoir la bornitude des transformées de Riesz sur les espaces de Lebesgue à poids $L^p(\mathbb{R}^N, wdx)$.

Nous remarquons que si le poids w et son inverse w^{-1} sont dans L^∞, et si les transformées de Riesz sont bornées sur un espace L^p, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla A^{-1/2} f(x)|^p w(x) dx &\leq ||w||_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla A^{-1/2} f(x)|^p dx \\
&\leq C||w||_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \\
&\leq C||w||_\infty ||w^{-1}||_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p w(x) dx.
\end{aligned}$$

Nous remarquons aussi que nous ne pouvons pas éspérer la bornitude sur $L^p(w)$ pour tout $w \in A_p$ de $\nabla A^{-1/2}$ avec la seule condition "V fortement sous-critique". Car si c'est vrai, alors par le théorème d'extrapolation de Rubio De Francia, Théorème 5.7, les transformées de Riesz sont bornées sur tous les $L^p(w)$ pour tout $w \in A_p$. Or nous avons déjà (voir Chapitre 3 Section 3.3) un contre-exemple de la bornitude de $\nabla A^{-1/2}$ sur L^p pour $p \in (1, p_0') \cup (p_{0*}, \infty)$. De même, par le Théorème 5.9, nous ne pouvons pas éspérer que $\nabla A^{-1/2}$ soit borné sur $L^p(w)$ pour tout $w \in A_{p/p_0'} \cap RH_{(p_0/p)'}$.Car si c'est vrai, nous aurons une contradiction sur l'intervalle (p_{0*}, p_0), toujours d'après le contre-exemple donné dans le Chapitre 3 Section 3.3.

Pour étudier la bornitude à poids des transformées de Riesz $\nabla A^{-1/2}$, nous commençons par celle de l'opérateur $A^{-\alpha/2}$, puis celle de l'opérateur $V^{1/2}A^{-\alpha/2}$.
Rappelons que

$$A^{-\beta}f(x) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-tA}f(x)dt$$

pour tout $\beta > 0$.
Tout d'abord on note qu'en présence d'une estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé au semi-groupe e^{-tA}, on a la majoration suivante

$$\int |A^{-\alpha/2}f(x)|^q w(x)^q dx \leq C\int |I_\alpha|f(x)||^q w(x)^q dx, \tag{5.5}$$

où I_α est le potentiel de Riesz. Ainsi en utilisant le résultat sur la bornitude de I_α[1] on déduit que l'opérateur $A^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$ pour tout $1 < p < N/\alpha$ et tout $q > p$ tel que $1/p - 1/q = \alpha/N$ et $w \in A_{p,q}$.

Rappelons l'inégalité de Hölder suivante (voir Chapitre 3 Lemme 3.12)

$$||f.g||_p \leq C_{p,r,q}||f||_{r,\infty}||g||_q, \tag{5.6}$$

où $||f||_{r,\infty} := \sup_{t>0}(t^r|\{x, |f(x)| > t\}|)^{1/r}$ et $p \in (1,\infty)$ tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.
Remarquons que si $w \in A_p \cap RH_{r/p}$ où $1 < p < r$, alors $w^{1/p} \in A_{p,r}$.
Par suite, si $w \in A_p \cap RH_{r/p}$ où $1/p - 1/r = \alpha/N$,

$$\begin{aligned} ||V^{1/2}(-\Delta)^{-\alpha/2}f||^p_{L^p(w)} &= \int_{\mathbb{R}^N} V^{p/2}(x)|(-\Delta)^{-\alpha/2}f(x)|^p(w(x)^{1/p})^p dx \\ &\leq C||V^{1/2}||^p_{\frac{N}{\alpha},\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta)^{-\alpha/2}f(x)|^r(w(x)^{\frac{r}{p}})dx\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq C||V^{1/2}||^p_{\frac{N}{\alpha},\infty}||f||^p_{L^p(w)}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Pour la deuxième inégalité on a utilisé (5.6) et pour la troisième on a utilisé la bornitude de I_α de $L^p(w^{p/p})$ dans $L^r(w^{r/p})$ tel que $1/p - 1/r = \alpha/N$ et $w^{1/p} \in A_{p,r}$.
Donc $V^{1/2}(-\Delta)^{-\alpha/2}$ est borné sur $L^p(w)$ si $V^{1/2} \in L^{\frac{N}{\alpha},\infty}$. Ceci est vrai pour tous les $p \in (1, N/\alpha)$ tels que $w \in A_p \cap RH_{r/p}$ où r est tel que $1/p - 1/r = \alpha/N$. En présence d'une estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé à e^{-tA}, on utilise l'estimation (5.5) et on trouve ce même résultat pour l'opérateur $V^{1/2}A^{-\alpha/2}$.

Ayant les outils nécessaires, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Théorème 5.13. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ et $\nabla A^{-1/2}$ les transformées de Riesz associées. Soit V un potentiel fortement sous-critique appartenant à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$, $N \geq 3$ et $\varepsilon > 0$. Alors l'opérateur $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (N', N)$ tels que w est dans la classe $A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$.*

[1] Voir la première section de ce chapitre

Preuve: Nous montrons que $\nabla(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} - \nabla A^{-\frac{1}{2}}$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (N', N)$ tels que $w \in A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$. Puis on déduit que $\nabla A^{-1/2}$ est borné sur $L^p(w)$ avec les mêmes conditions sur p et w.
Soit $A_0 := -\Delta$ et $A := -\Delta - V$. On écrit

$$\begin{aligned}
\nabla A_0^{-\frac{1}{2}} - \nabla A^{-\frac{1}{2}} &:= C\int_0^\infty \nabla(I+tA_0)^{-1}t^{-\frac{1}{2}}dt - C\int_0^\infty \nabla(I+tA)^{-1}t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= C\int_0^\infty \nabla\Big((I+tA_0)^{-1} - (I+tA)^{-1}\Big)t^{-1/2}dt \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du Théorème 4.18 Chapitre 4, la différence

$$G(t) := \nabla(I+tA_0)^{-1} - \nabla(I+tA)^{-1}$$

peut être écrite sous la forme

$$G(t) = -t\nabla(I+tA_0)^{-1}V(I+tA)^{-1}.$$

Majorons la norme $||G(t)f||_{L^p(w)}$ pour $f \in L^2(w) \cap L^p(w)$.

$$\begin{aligned}
||G(t)f||_{L^p(w)} &\leq t||\nabla(I+tA_0)^{-1}V(I+tA)^{-1}f||_{L^p(w)} \\
&\leq t||\nabla(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}.(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}.V^{\frac{1}{2}}(I+tA)^{-1}f||_{L^p(w)}. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

Etudions maintenant la norme de $\nabla(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}$, $(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}$, et $V^{\frac{1}{2}}(I+tA)^{-1}$.

On commence par le premier opérateur: d'après Théorème 5.4, les transformées de Riesz associées à A_0 sont bornées sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (1,\infty)$ tels que $w \in A_p$. D'après le même théorème (voir aussi Martell [14] Théorème 7.3), $(tA_0)^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (1,\infty)$ tels que $w \in A_p$. Par suite, pour tous les $p \in (1,\infty)$ tels que $w \in A_p$ et tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
||\nabla(I+tA_0)^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} &\leq ||\nabla A_0^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)}.||A_0^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \\
&\leq Ct^{-1/2}. \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Estimons maintenant la norme de l'opérateur $(I+tA_0)^{-1/2}V^{1/2}$. On remarque que cet opérateur est le dual par rapport à la mesure dx de $V^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}$, étudions son dual. D'après (5.7) et [14] Théorème 7.3, si $V^{1/2} \in L^{N,\infty}$,

$$\begin{aligned}
||V^{\frac{1}{2}}(I+tA_0)^{-\frac{1}{2}}||_{L^p(w)-L^p(w)} &\leq ||V^{1/2}A_0^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)}||A_0^{1/2}(I+tA_0)^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \\
&\leq Ct^{-1/2}
\end{aligned}$$

pour tous les $p \in (1,N)$ tels que $w \in A_p \cap RH_{\frac{q}{p}}$ où $1/p - 1/q = 1/N$. Or, si $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$ alors il appartient à $L^{\frac{N}{2},\infty}$. D'autre part, rappelons qu'un opérateur est borné sur $L^p(w)$ si et seulement si son dual par rapport à dx est borné sur $L^{p'}(w^{1-p'})$. Par conséquent nous obtenons

$$||(I+tA_0)^{-1/2}V^{1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq Ct^{-1/2} \qquad (5.11)$$

pour tous les $p \in (N', \infty)$ tels que $w \in A_{1+\frac{p}{q}}$ où $1/p' - 1/q = 1/N$.

Il ne nous reste qu'à étudier le troisième opérateur, $V^{1/2}(I+tA)^{-1}$. Avec l'hypothèse V fortement sous-critique appartenant à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$, on a une estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé à e^{-tA} (voir la preuve du Corollaire 3.15 du Chapitre 3 et Théorème 2 de [21]). Par suite, comme c'est expliqué plus haut, l'estimation (5.5) est vraie et l'opérateur $V^{1/2}A^{-\alpha/2}$ est borné sur $L^p(w)$ si $V^{1/2} \in L^{\frac{N}{\alpha},\infty}$. Ceci est vrai pour tous les $p \in (1, N/\alpha)$ tels que $w \in A_p \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ où Q est tel que $1/p - 1/Q = \alpha/N$. Si $w \in A_p \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ tel que $1/p - 1/Q = 1/N$, alors d'après la proriété *5* de Proposition 5.6, il existe un $q_2 > Q$ tel que $w \in RH_{\frac{q_2}{p}}$. Par suite, il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que $w \in RH_{\frac{q_2}{p}}$ où $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} - \frac{1+2\varepsilon'}{N}$.
Donc si $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$ et $w \in A_p \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ alors $w \in A_p \cap RH_{\frac{q_2}{p}}$ où $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2} = \frac{1+2\varepsilon'}{N}$ et

$$||V^{1/2}A^{-1/2-\varepsilon'}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq C \tag{5.12}$$

pour tous les $p \in (1, \frac{N}{1+2\varepsilon'})$.
D'autre part, si $w \in A_p \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ tel que $1/p - 1/Q = 1/N$, alors d'après la proriété *3* de Proposition 5.6, $w \in A_p \cap RH_{\frac{q_1}{p}}$ où $\frac{1}{p} - \frac{1}{q_1} = \frac{1-2\varepsilon'}{N}$ et

$$||V^{1/2}A^{-1/2+\varepsilon'}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq C \tag{5.13}$$

pour tous les $p \in (1, \frac{N}{1-2\varepsilon'})$. Rappelons que si V est fortement sous-critique, alors le calcul fonctionnel holomorphe associé à A est borné sur L^2, et si en plus $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}$, on a une estimation Gaussienne du noyau de la chaleur associé. Donc d'après [14] Théorème 7.3 le calcul fonctionnel holomorphe associé à A est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (1, \infty)$ tels que $w \in A_p$. Par conséquent, si $w \in A_p \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ tel que $1/p - 1/Q = 1/N$, alors d'une part

$$\begin{aligned} ||V^{1/2}(I+tA)^{-1}||_{L^p(w)-L^p(w)} &\leq ||V^{1/2}A^{-\frac{1}{2}+\varepsilon'}||_{L^p(w)-L^p(w)}||A^{\frac{1}{2}-\varepsilon'}(I+tA)^{-1}||_{L^p(w)-L^p(w)} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}+\varepsilon'}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

pour tout $p \in (1, \frac{N}{1-2\varepsilon'})$ et d'autre part

$$\begin{aligned} ||V^{1/2}(I+tA)^{-1}||_{L^p(w)-L^p(w)} &\leq ||V^{1/2}A^{-\frac{1}{2}-\varepsilon'}||_{L^p(w)-L^p(w)}||A^{\frac{1}{2}+\varepsilon'}(I+tA)^{-1}||_{L^p(w)-L^p(w)} \\ &\leq Ct^{-\frac{1}{2}-\varepsilon'} \end{aligned} \tag{5.15}$$

pour tout $p \in (1, \frac{N}{1+2\varepsilon'})$.
Revenons à $G(t)$: nous utilisons les estimations (5.10), (5.11) et (5.14) (respectivement (5.15)) dans (5.9). Ainsi pour tout $t > 0$, tous les $p \in (N', N)$ tels que $w \in A_p \cap A_{1+\frac{p}{q}} \cap RH_{\frac{Q}{p}} = A_{1+\frac{p}{q}} \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ où $1/p' - 1/q = 1/N$ et $1/p - 1/Q = 1/N$, nous obtenons

$$||G(t)||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}+\varepsilon'} \tag{5.16}$$

(respectivement

$$||G(t)||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\varepsilon'}). \tag{5.17}$$

Ainsi, revenant à (5.8) et coupant l'intégrale en deux: on utilise (5.16) dans celle au voisinage de 0 et (5.17) dans celle au voisinage de l'infini. Donc si $V \in L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}, N \geq 3$ et V fortement sous-critique,

$$||\nabla A_0^{-1/2} - \nabla A^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq C$$

pour tous les $p \in (N', N)$ tels que $w \in A_{1+\frac{p}{q}} \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ où $1/p' - 1/q = 1/N = 1/p - 1/Q$. Or $\nabla A_0^{-1/2}$ est un opérateur de Calderòn-Zygmund, donc d'après Théorème 5.4

$$||\nabla A_0^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq C$$

pour tous les $p \in (1, \infty)$ tels que $w \in A_p$. Ainsi on déduit que si V est fortement sous-critique appartenant à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}, N \geq 3$, alors

$$||\nabla A^{-1/2}||_{L^p(w)-L^p(w)} \leq C$$

pour tous les $p \in (N', N)$ tels que $w \in A_{1+\frac{p}{q}} \cap RH_{\frac{Q}{p}}$ où $\frac{1}{p'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q}$. Ceci n'est que la bornitude de $\nabla A^{-1/2}$ sur $L^p(w)$ pour tout $p \in (N', N)$ et tout $w \in A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$. □

En étudiant la différence $V^{1/2}A_0^{-1/2} - V^{1/2}A^{-1/2}$ par la même méthode que la différence des gradients, on déduit le résultat suivant:

Théorème 5.14. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$. Soit V un potentiel fortement sous-critique appartenant à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}, N \geq 3$ et $\varepsilon > 0$. Alors l'opérateur $V^{1/2}A^{-1/2}$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (N', N)$ tels que w est dans la classe $A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$.*

Remarque 5.15. ***1)*** *Observons que la preuve est aussi valable pour l'opérateur $A = -\Delta + V$ où V est un potentiel positif qui appartient à $L^{\frac{N}{2}-\varepsilon} \cap L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}, N \geq 3, \varepsilon > 0$. Ainsi on déduit que $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ et $V^{1/2}(-\Delta + V)^{-1/2}$ sont bornés sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (N', N)$ tels que $A_{p/N'} \cap RH_{(N/p)'}$.*
2) *Si $0 \leq V \in RH_N$ alors Shen [19] a montré que $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ est un opérateur de Calderòn-Zygmund. D'après le Théorème 5.4, on conclut que $\nabla(-\Delta + V)^{-1/2}$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (1, \infty)$ tel que $w \in A_p$.*

5.3 Bornitude à poids de l'opérateur $(-\Delta - V)^{-\alpha/2}$

Dans cette section nous étudions les opérateurs de la forme $A^{-\alpha/2}$, où A est l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où V est un potentiel positif fortement sous-critique. Dans ce cas, le semi-groupe associé est borné sur L^p pour les $p \in (p_0', p_0) \subset (1, \infty)$. Par suite il n'est pas représenté par un noyau. Ainsi dans cette section nous montrons

la bornitude de $A^{-\alpha/2}$ en absence des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur. Nous nous servons des estimations $L^p - L^q$ hors-diagonales pour $p_0' < p \leq q < p_0$. Nous montrons que $A^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$ où $p_0' < p < q < p_0$ tels que $1/p - 1/q = \alpha/N$ et w est un poids dans une certaine classe de Muckenhoupt.
Dans ce but, nous appliquons le Théorème 5.11. Notons que ce théorème est utilisé par Auscher et Martell [6] pour montrer le même résultat pour l'opérateur A tel que $Af := -\mathrm{div}(B\nabla f)$ où B est une matrice à coefficients bornés et à valeurs complexes. Nous allons suivre leur méthode. Commençons tout d'abord par la bornitude sans poids de l'opérateur $(-\Delta - V)^{-\alpha/2}$, puis vérifions les inégalités (5.3) et (5.4) du Théorème 5.11.
Suivant les arguments de Auscher [1] Chapitre 5 et Davies [10] p.76 , on montre le résultat suivant

Proposition 5.16. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où V est un potentiel positif. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq \varepsilon V$. Alors l'opérateur $A^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(\mathbb{R}^N, dx)$ dans $L^q(\mathbb{R}^N, dx), (N \geq 3)$, pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$. Ici $p_0 := \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$ et p_0' est son exposant dual.*

Preuve: Nous montrons que $A^{-\alpha/2}$ est de type faible (p, q) pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$. Puis en appliquant le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz nous déduisons la bornitude de $A^{-\alpha/2}$ de L^p dans L^q pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$. Décomposant $A^{-\alpha/2}f(x)$ en deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$ telles que

$$g(x) = C\int_0^T t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-tA}f(x)dt,$$

et

$$h(x) = C\int_T^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-tA}f(x)dt.$$

Rappelons que, quand V est fortement sous-critique, le semi-groupe est $L^p - L^q$ borné pour tout $p_0' < p \leq q < p_0$. En effet, on a montré la bornitude $L^2 - L^p$ pour tout $p \in [2, p_0)$ dans Chapitre 3, ce qui nous donne, par dualité puis composition, la bornitude $L^p - L^q$ pour tout $p_0' < p \leq 2$ et $2 \leq q < p_0$. Pour vérifier la bornitude où $2 \leq p \leq q < p_0$ on interpole la bornitude sur L^q pour $q \in [2, p_0)$ avec la bornitude $L^2 - L^q$. Par dualité on trouve le cas $p_0' < p \leq q \leq 2$. Alors pour tout $t > 0$ et $p_0' < p \leq q < p_0$

$$||e^{-tA}||_{p-q} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{5.18}$$

Soit $p_0' < q_1 < q < q_2 < p_0$. Alors

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{R}^N, |A^{-\alpha/2}f(x)| > \lambda\}| &\leq \frac{C}{\lambda^{q_1}}\int_{\{x,|g(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} \lambda^{q_1}dx + \frac{C}{\lambda^{q_2}}\int_{\{x,|h(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} \lambda^{q_2}dx \\
&\leq \frac{C}{\lambda^{q_1}}||g||_{q_1}^{q_1} + \frac{C}{\lambda^{q_2}}||h||_{q_2}^{q_2} \\
&\leq \frac{C}{\lambda^{q_1}}\Big(\int_0^T t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1})-1}dt||f||_p\Big)^{q_1} \\
&+ \frac{C}{\lambda^{q_2}}\Big(\int_T^\infty t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2})-1}dt||f||_p\Big)^{q_2} \\
&\leq \frac{C}{\lambda^{q_1}}T^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q})q_1}||f||_p^{q_1} + \frac{C}{\lambda^{q_2}}T^{\frac{N}{2}(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q})q_2}||f||_p^{q_2}
\end{aligned}$$

Choisissons T tel que $\lambda = T^{-\frac{N}{2q}}||f||_p$, alors nous obtenons

$$|\{x \in \mathbb{R}^N, |A^{-\alpha/2}f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^q}||f||_p^q.$$

Donc $A^{-\alpha/2}$ est borné de L^p dans $L^{q,\infty}$ pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$, d'où le résultat. □

Afin de vérifier la bornitude à poids de $A^{-\alpha/2}$, nous montrons l'estimation hors-diagonale suivante pour les temps complexes.

Proposition 5.17. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où V est un potentiel positif fortement sous-critique. Soit $\mu \in (0, \pi/2)$, alors pour tous $p_0' < p \leq q < p_0$, il existe des constantes positives C et c qui dépendent de μ telle que*

$$||\chi_F e^{-zA}\chi_E f||_q \leq C|z|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-c\frac{d^2(E,F)}{|z|}}||f||_p \tag{5.19}$$

pour tous les sous-ensembles fermés E et F de $\mathbb{R}^N$, tout z dans le secteur $S(\mu)$ et toute fonction $f \in L^p \cap L^2$ à support dans E.

Preuve: Premièrement, montrons l'estimation sur L^2. Nous reprenons la preuve du Théorème 3.3 (i) du Chapitre 3, en l'appliquant à l'opérateur $e^{i\theta}A$ à la place de A où $\theta \in (-\mu, \mu)$. Alors pour tout $t > 0$ et pour toute constante $\rho > 0$

$$||e^{-te^{i\theta}A}f||_{L^2(F)} \leq e^{-\rho d(E,F)}e^{\rho^2 t\cos\theta}||f||_2. \tag{5.20}$$

Donc pour $|z| = t$ et un choix convenable de ρ nous obtenons l'estimation $L^2 - L^2$ hors-diagonale pour z.
Rappelons que le semi-groupe est analytique borné sur L^q pour $p_0' < q < p_0$ (voir Chapitre 3). Par suite, en décomposant le semi-groupe et en utilisant (5.18) nous trouvons

$$\begin{aligned} ||e^{-zA}||_{p-q} &= ||e^{-\frac{\mathfrak{Re}zA}{2}}||_{2-q}||e^{-i\mathfrak{Im}zA}||_{2-2}||e^{-\frac{\mathfrak{Re}zA}{2}}||_{p-2} \\ &\leq C|z|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$||\chi_F e^{-zA}\chi_E f||_q \leq C|z|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}||f||_p \tag{5.21}$$

pour tout $p_0' < p \leq q < p_0$.
On montre l'estimation hors-diagonale en vérifiant les trois cas: $p_0' < p \leq 2 \leq q < p_0$, $2 \leq p \leq q < p_0$ et $p_0' < p \leq q \leq 2$.
En interpolant la bornitude ci-dessus où on prend $p = 2$ avec l'estimation $L^2 - L^2$ hors-diagonale pour les temps complexes, on trouve l'estimation $L^2 - L^r$ hors-diagonale pour tout $r \in [2, p_0)$. Ainsi par dualité et composition nous trouvons l'estimation $L^p - L^q$ hors-diagonale pour tout $p \in (p_0', 2]$ et $q \in [2, p_0)$.
Pour le deuxième cas on interpole la bornitude sur L^p ($p = q$ dans (5.21)) pour $p \in$

$[2, p_0)$ avec l'estimation hors-diagonale sur L^2, on trouve une estimation hors-diagonale sur L^r pour tout $r \in [2, p_0)$. Ainsi l'interpolation avec l'estimation $L^2 - L^r$ hors-diagonale(du premier cas) pour tout $r \in [2, p_0)$ nous donne l'estimation $L^p - L^r$ hors-diagonale pour tout $2 \leq p \leq r < p_0$.
Le troisème cas se déduit par dualité du deuxième. □

Montrons maintenant la bornitude de $A^{-\alpha/2}$ sur les espaces de Lebesgue à poids. Plus précisément, montrons le théorème suivant

Théorème 5.18. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où V est un potentiel positif sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ avec $N \geq 3$. Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq \varepsilon V$. Alors $A^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$ pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$ et $w \in A_{1+\frac{1}{p_0'}-\frac{1}{p}} \cap RH_{q(p_0/q)'}$. Ici $p_0 := \frac{2N}{(N-2)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)}$, $N \geq 3$ et p_0' est son exposant dual.*

Preuve: Pour montrer ce résultat nous appliquons le Théorème 5.11 à l'opérateur $T := A^{-\alpha/2}$, en posant $\mathcal{A}_r = I - (I - e^{-r^2 A})^m$ (pour un entier naturel m à choisir convenablement).
D'après la Proposition 5.16, $A^{-\alpha/2}$ est borné de L^p dans L^q pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$. Montrons maintenant les hypothèses (5.3) et (5.4).
Soient $p_0' < p < q < p_0$ tels que $1/p - 1/q = \alpha/N$ et $w \in A_{1+\frac{1}{p_0'}-\frac{1}{p}} \cap RH_{q(p_0/q)'}$. Donc d'après les propriétés *4* et *5* de Proposition 5.6, il existe p_1, q_1, s_1 tels que $p_0' < p_1 < s_1 < q_1 < p_0$, $1/p_1 - 1/s_1 = \alpha/N$, et pour $p_1 < p < q < q_1$, $w \in A_{1+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \cap RH_{q(q_1/q)'}$.
Soit B une boule de rayon r et λB la boule de rayon λr. Soient $C_1(B) := 4B$ et $C_j(B) = 2^{j+1}B \setminus 2^j B$ pour $j \geq 2$. Soit $f \in L^\infty$ à support compact. Commençons par la preuve de (5.4).

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B|}\int_B |A^{-\alpha/2}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k e^{-kr^2A}f(x)|^{q_1}dx\right)^{1/q_1} \\
\leq\;& C\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k} r^{-N/q_1}||\chi_B e^{-kr^2A}\sum_{j\geq 1}\chi_{C_j(B)}A^{-\alpha/2}f||_{q_1} \\
\leq\;& C\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\sum_{j\geq 1} r^{-N/q_1}||\chi_B e^{-kr^2A}\chi_{C_j(B)}A^{-\alpha/2}f||_{q_1}.
\end{aligned}
$$

Or d'après (5.19), l'estimation hors-diagonale suivante est vraie pour tout $p_0' < p \leq q < p_0$, tout $t > 0$ et tout $j \geq 2$

$$||\chi_B e^{-tA}\chi_{C_j(B)}f||_q \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}e^{-\frac{c4^j r^2}{t}}||f||_p.$$

Ainsi nous pouvons majorer

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |A^{-\alpha/2}\sum_{k=1}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{-kr^2A} f(x)|^{q_1}dx\Big)^{1/q_1} \\
\leq\ & C\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} k^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{q_1}\right)} r^{-N/s_1}\Big(||\chi_{4B}A^{-\alpha/2}f||_{s_1} + \sum_{j\geq 2} e^{-c4^j}||\chi_{2^{j+1}B}A^{-\alpha/2}f||_{s_1}\Big) \\
\leq\ & C\Big(\frac{1}{|4B|}\int_{4B}|A^{-\alpha/2}f|^{s_1}\Big)^{1/s_1} + C\sum_{j\geq 2} e^{-c4^j}2^{\frac{N}{s_1}(j+1)}\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|A^{-\alpha/2}f|^{s_1}\Big)^{1/s_1} \\
\leq\ & CM(|A^{-\alpha/2}f|^{s_1})(x)^{1/s_1}
\end{aligned}$$

pour tout $x \in B$. Donc (5.4) est prouvée. Prouvons maintenant (5.3).

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m f|^{s_1}dx\Big)^{\frac{1}{s_1}} \leq \sum_{j\geq 1}\frac{1}{|B|^{\frac{1}{s_1}}}||\chi_B A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m \chi_{C_j(B)}f||_{s_1}.$$

Pour $j=1$, on utilise la bornitude de $A^{-\alpha/2}$ de L^{p_1} dans L^{s_1} tel que $1/p_1 - 1/s_1 = \alpha/N$, et le fait que le semi-groupe est borné sur L^{p_1}. Ceci est vrai car p_1 et s_1 sont dans l'intervalle (p_0', p_0). Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m\chi_{4B}f|^{s_1}dx\Big)^{1/s_1} &\leq C\frac{1}{|B|^{1/s_1}}||\chi_{4B}f||_{p_1} \\
&\leq C(4r)^\alpha\Big(\frac{1}{|B|}\int_{4B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1} \\
&\leq CM_{\alpha r}(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1}
\end{aligned}$$

pour tout $x \in B$. Etudions le cas $j \geq 2$. Soit $\Phi_t(A) := e^{-tA}(I-e^{-r^2A})^m$. Ainsi

$$A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f = C\int_0^\infty t^{\alpha/2}\Phi_t(A)\chi_{C_j(B)}f\frac{dt}{t}. \tag{5.22}$$

La fonction $\Phi_t(z) := e^{-tz}(1-e^{-r^2z})^m$ est holomorphe et vérifie

$$|\Phi_t(z)| \leq \frac{c|z|^a}{(1+|z|)^{2a}}$$

pour un $a > 0$ et tout z dans le secteur $S(\mu)$ pour tout $0 < \mu < \pi/2$ (c dépend de t). Cela permet d'écrire $\Phi_t(A)$ de la façon suivante

$$\Phi_t(A) = \int_{\Gamma_+} e^{-zA}\eta_+(z)dz + \int_{\Gamma_-} e^{-zA}\eta_-(z)dz$$

où $0 < \theta < \nu < \mu < \pi/2$, $\Gamma_\pm := \mathbb{R}^+ e^{\pm i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ et

$$\eta_\pm(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\pm} e^{\xi z}\Phi_t(\xi)d\xi$$

pour $z \in \Gamma_\pm$ où $\gamma_\pm := \mathbb{R}^+ e^{\pm i\nu}$. On sait que pour $z \in \Gamma_\pm$ (voir [6])

$$|\eta_\pm(z)| \leq \frac{Cr^{2m}}{(|z|+t)^{m+1}},$$

et que les intégrales le long de Γ_+ et Γ_- ont la même majoration. Rappelons que par la proposition précédente,

$$||\chi_B e^{-zA}\chi_{C_j(B)}f||_q \leq C|z|^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} e^{-c\frac{4^j r^2}{|z|}}||f||_p$$

pour tous $p_0' < p \leq q < p_0$.
Ainsi nous majorons $|B|^{-1/s_1}||\chi_B \Phi_t(A)\chi_{C_j(B)}f||_{s_1}$ par

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|^{\frac{1}{s_1}}}\int_{\Gamma_\pm}\Big(\int_B |e^{-zA}\chi_{C_j(B)}f|^{s_1}\Big)^{\frac{1}{s_1}}|\eta(z)||dz| \\
\leq\ & C2^{j\frac{N}{p_1}} r^{\frac{N}{p_1}-\frac{N}{s_1}} r^{2m}\int_0^\infty \frac{v^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{s_1}\right)}e^{-c4^j r^2 v^{-1}}}{(v+t)^{m+1}}dv\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}.
\end{aligned}$$

On insère cette majoration dans (5.22) et on trouve

$$\begin{aligned}
&|B|^{-1/s_1}||\chi_B A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{s_1} \\
\leq\ & C|B|^{-1/s_1}\int_0^\infty t^{\alpha/2}||\chi_B\Phi_t(A)\chi_{C_j(B)}f||_{s_1}\frac{dt}{t} \\
\leq\ & C\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1} 2^{j\frac{N}{s_1}}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha/2}\frac{2^{j\alpha}r^\alpha e^{-c4^j r^2 v^{-1}}r^{2m}}{v^{\alpha/2}(v+t)^{m+1}}\frac{dt}{t}dv.
\end{aligned}$$

A cette étape faisons le changement de variables $T = t/v$ puis le changement $S^2 = 4^j r^2 v^{-1}$ pour trouver

$$\begin{aligned}
&|B|^{-1/s_1}||\chi_B A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{s_1} \\
\leq\ & C\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}} 2^{j\frac{N}{s_1}}4^{-jm}(2^j r)^\alpha\Big(\int_0^\infty\frac{T^{\frac{\alpha}{2}-1}}{(1+T)^{m+1}}dT\Big)\Big(\int_0^\infty S^{2m-1}e^{-cS^2}dS\Big) \\
\leq\ & C\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1} 2^{j\frac{N}{s_1}}4^{-jm}(2^j r)^\alpha
\end{aligned}$$

si $m > \frac{\alpha}{2} - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m f|^{s_1}dx\Big)^{1/s_1} \\
\leq\ & \sum_{j\geq 1}\frac{1}{|B|^{1/s_1}}||\chi_B A^{-\alpha/2}(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{s_1}. \\
\leq\ & CM_{\alpha r}(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1} + C\sum_{j\geq 2}\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}2^{j\frac{N}{s_1}}4^{-jm}(2^j r)^\alpha \\
\leq\ & CM_{\alpha r}(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1}
\end{aligned}$$

pour le choix d'un $m > \max(\frac{\alpha}{2}-1, \frac{N}{2s_1})$. Par suite, d'après le Théorème 5.11, l'opérateur $A^{-\alpha/2}$ est borné de $L^p(w^p)$ dans $L^q(w^q)$ pour tous les $p_0' < p < q < p_0$ tels que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N}$ et $w \in A_{1+\frac{1}{p_0'}-\frac{1}{p}} \cap RH_{q(p_0/q)'}$. $\square$

5.4 Bornitude sur $L^p(w)$ du calcul fonctionnel associé à $-\Delta - V$

Dans cette section nous étudions la bornitude sur les espaces $L^p(w)$ des opérateurs $\varphi(A)$ où les fonctions φ sont holomorphes bornées et A est l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$. Ici V est un potentiel positif fortement sous-critique. Dans ce cas on sait que le semi-groupe est borné sur les espaces L^p pour tous les $p \in (p_0', p_0)$ et qu'on a un contre exemple de sa bornitude pour les $p < p_0'$ et les $p > p_0$. Donc l'intérêt de cette section c'est de pouvoir montrer la bornitude du calcul fonctionnel en absence des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur associé à l'opérateur A.
L'opérateur $Af := -\mathrm{div}(B\nabla f)$ où B est une matrice à coefficients bornés à valeurs complexes est un générateur d'un semi-groupe borné sur un intervalle strictement compris dans $(1, \infty)$. Auscher et Martell [4] ont étudié le calcul fonctionnel associé à cet opérateur. Nous utilisons leur méthode pour montrer la bornitude sur les espaces à poids du calcul fonctionnel associé à l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel négatif.

Montrons le théorème suivant

Théorème 5.19. *Soit A l'opérateur de Schrödinger $-\Delta - V$ où V est un potentiel positif fortement sous-critique. Alors le calcul fonctionnel holomorphe associé à A est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p \in (p_0', p_0)$ tels que $w \in A_{p/p_0'} \cap RH_{(p_0/p)'}$.*

Preuve: Nous montrons ce résultat pour les fonctions φ holomorphes sur un secteur $S(\mu)$ où $0 < \mu < \pi/2$, qui vérifient la condition suivante: il existe des constantes $C, s > 0$ telles que

$$|\varphi(z)| \leq \frac{C|z|^s}{(1+|z|)^{2s}}$$

pour $z \in S(\mu)$. On conclut ensuite, par le lemme de convergence de McIntosh (voir [15]), le résultat pour toute fonction holomorphe bornée sur $S(\mu)$.
Nous allons appliquer Théorème 5.10 avec $T := \varphi(A)$, $S := I$ et $\mathcal{A}_r = I - (I - e^{-r^2 A})^m$ pour un entier naturel m à choisir convenablement.
Comme au Chapitre 3, en présence des estimations hors-diagonale, $\varphi(A)$ est borné sur L^p pour tous les $p \in (p_0', p_0)$. Montrons maintenant les hypothèses (5.1) et (5.2).

Soit $p_0' < p < p_0$ et $w \in A_{p/p_0'} \cap RH_{(p_0/p)'}$, alors d'après les propriétés *4* et *5* de Proposition 5.6, il existe p_1 et q_1 tels que $p_0' < p_1 < p < q_1 < p_0$ et $w \in A_{p/p_1} \cap RH_{(q_1/p)'}$.

Soient $C_1(B) := 4B$ et $C_j(B) = 2^{j+1}B \setminus 2^j B$ pour $j \geq 2$. Soit $f \in L^\infty$ à support compact. Commençons par la preuve de (5.2).

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |\varphi(A)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k e^{-kr^2A}f(x)|^{q_1}dx\Big)^{1/q_1}\\
\leq\ & C\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}r^{-N/q_1}||\chi_B e^{-kr^2A}\sum_{j\geq 1}\chi_{C_j(B)}\varphi(A)f||_{q_1}\\
\leq\ & C\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\sum_{j\geq 1}r^{-N/q_1}||\chi_B e^{-kr^2A}\chi_{C_j(B)}\varphi(A)f||_{q_1}.
\end{aligned}$$

A cette étape, on utilise l'estimation hors-diagonale suivante (voir la section précédente)

$$||\chi_B e^{-tA}\chi_{C_j(B)}f||_{q_1} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})}e^{-\frac{c4^j r^2}{t}}||f||_{p_1}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B |\varphi(A)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k e^{-kr^2A}f(x)|^{q_1}dx\Big)^{1/q_1}\\
\leq\ & C\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}k^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)}r^{-N/p_1}\Big(||\chi_{4B}\varphi(A)f||_{p_1}+\sum_{j\geq 2}e^{-c4^j}||\chi_{2^{j+1}B}\varphi(A)f||_{p_1}\Big)\\
\leq\ & C\Big(\frac{1}{|4B|}\int_{4B}|\varphi(A)f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}+C\sum_{j\geq 2}e^{-c4^j}2^{\frac{N}{p_1}(j+1)}\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|\varphi(A)f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}\\
\leq\ & CM(|\varphi(A)f|^{p_1})(x)^{1/p_1}
\end{aligned}$$

pour tout $x\in B$. Donc (5.2) est vérifiée. Prouvons maintenant (5.1).

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m f|^{p_1}dx\Big)^{1/p_1} \quad\leq\quad \sum_{j\geq 1}\frac{1}{|B|^{1/p_1}}||\chi_B\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{p_1}.$$

Pour $j=1$, par la bornitude de $\varphi(A)$ et du semi-groupe sur L^{p_1}, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m\chi_{4B}f|^{p_1}dx\Big)^{1/p_1} \quad&\leq\quad \Big(\frac{C}{|B|}\int_{4B}|f|^{p_1}\Big)^{p_1}\\
&\leq\quad CM(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1}
\end{aligned}$$

pour tout $x\in B$. Etudions le cas $j\geq 2$. Soit $\Psi(A):=\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m$. Alors $\Psi(z)$ est holomorphe et vérifie

$$|\Psi(z)|\leq\frac{c|z|^a}{(1+|z|)^{2a}}$$

pour un $a>0$ et tout z dans le secteur $S(\mu)$ pour tout $0<\mu<\pi/2$. Par suite, nous pouvons écrire $\Psi(A)$ de la façon suivante

$$\Psi(A)=\int_{\Gamma_+}e^{-zA}\eta_+(z)dz+\int_{\Gamma_-}e^{-zA}\eta_-(z)dz$$

où $0 < \theta < \nu < \mu < \pi/2$, $\Gamma_\pm := \mathbb{R}^+ e^{\pm i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ et

$$\eta_\pm(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\pm} e^{\xi z}\Psi(\xi)d\xi$$

pour $z \in \Gamma_\pm$ où $\gamma_\pm := \mathbb{R}^+ e^{\pm i\nu}$. On sait que, pour $z \in \Gamma_\pm$,(voir [4])

$$|\eta_\pm(z)| \leq \frac{Cr^{2m}}{|z|^{m+1}},$$

et que les intégrales le long de Γ_+ et Γ_- ont la même majoration. En outre, l'estimation hors-diagonale suivante est vraie (voir la section précédente)

$$||\chi_B e^{-zA}\chi_{C_j(B)}f||_{p_1} \leq Ce^{-c\frac{4^j r^2}{|z|}}||f||_{p_1}.$$

Alors nous estimons $|B|^{-1/p_1}||\chi_B\Psi(A)\chi_{C_j(B)}f||_{p_1}$ par

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|B|^{\frac{1}{p_1}}}\int_{\Gamma_\pm}\Big(\int_B |e^{-zA}\chi_{C_j(B)}f|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}|\eta(z)||dz| \\ \leq\ & C2^{j\frac{N}{p_1}}r^{2m}\int_0^\infty \frac{e^{-c4^j r^2 v^{-1}}}{v^{m+1}}dv\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}.\end{aligned}$$

Maintenant avec le changement de variables $S^2 = 4^j r^2 v^{-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}&|B|^{-1/p_1}||\chi_B\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{p_1} \\ \leq\ & C\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{\frac{1}{p_1}}2^{j\frac{N}{p_1}}4^{-jm}\Big(\int_0^\infty S^{2m-1}e^{-cS^2}dS\Big) \\ \leq\ & C\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}2^{j(\frac{N}{p_1}-2m)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|B|}\int_B|\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m f|^{p_1}dx\Big)^{1/p_1} \\ \leq\ & \sum_{j\geq 1}\frac{1}{|B|^{1/p_1}}||\chi_B\varphi(A)(I-e^{-r^2A})^m\chi_{C_j(B)}f||_{p_1}. \\ \leq\ & CM(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1} + C\sum_{j\geq 2}\Big(\frac{1}{|2^{j+1}B|}\int_{2^{j+1}B}|f|^{p_1}\Big)^{1/p_1}2^{j(\frac{N}{p_1}-2m)} \\ \leq\ & CM(|f|^{p_1})(x)^{1/p_1}\end{aligned}$$

pour le choix d'un $m > \frac{N}{2p_1}$. Par suite, d'après le Théorème 5.10, $\varphi(A)$ est borné sur $L^p(w)$ pour tous les $p_0' < p < p_0$ tels que $w \in A_{p/p_0'} \cap RH_{(p_0/p)'}$. $\square$

Bibliographie

[1] Auscher P., On necessary et sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^N$ and related estimates, Mem. Amer. Math. Soc.186 no 871, (2007).

[2] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part I: General operator theory and weights. Adv. Math. 212 no 1, 225-276, (2007).

[3] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part II: Off-diagonal estimates on spaces of homogeneous type, J. Evol. Equ. 7 no. 2, 265–316, (2007). Math. Z. 260 no 3, 527-539, (2008).

[4] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part III: Harmonic analysis of elliptic operators. J. Funct. Anal. 241 no 2, 703-746, (2006).

[5] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. Part IV: Riesz transforms on manifolds and weights. Math. Z. 260 no 3, 527-539, (2008).

[6] Auscher P, Martell J.M., Weighted norm inequalities for fractional operators, Ind. univ. Math. J. 57 no 4, 1845-1869, (2008).

[7] Blunck S., Kunstmann P., Calderòn-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞-functional calculus, Rev. Mat. Iberoamericana 19 no 3, 919-942, (2003).

[8] Cruz-Uribe D., Martell J. M., Pérez C., Extrapolation from A_∞ weights and applications, J. Funct. Anal. 213, 412-439, (2004)

[9] Curbera G., Gracía-Cuerva J., Martell J. M., Pérez C., Extrapolation with weights, Rearrangement Invariant function spaces, modular inequalities and applications to singular integrals, Adv. Math. 203 no 1, 256-318, (2006).

[10] Davies E. B., Heat kernels and spectral Theory, Cambridge University Press, 1990. (Cambridge Tracts in Mathematics, 92).

[11] Gracía-Cuerva J., Rubio De Francia J. L., Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland Mathematics. Studies 116, Notas de Matemàtica [Mathematical Notes], 104. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985. x+604 pp. ISBN 0-444-87804-1

[12] Grafakos L., Classical and modern Fourier analysis, Pearson Education, New Jersey, 2004.

[13] Johnson R., Neugebauer C. J., Change of variable results for A_p- and reverse Hölder RH_r classes, Trans. Amer. Math. Soc. 328, 639-666, (1991).

[14] Martell J. M., Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications, Studia Math. 161 no 2, 113-145, (2004).

[15] McIntosh A., Operators which have an H^∞-calculus, Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations, Proc. Centre Math. Analysis 14, Austral. Nat. Univ., Camberra, 210-231, (1986).

[16] Muckenhoupt B., Wheeden R., Weighted norm inequalities for fractional integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 192, 261-274, (1974).

[17] Ouhabaz E.M., Analysis of heat equations on domains, London Math. Soc. Mono. 31, Princ. Univ. Press. (2004).

[18] Rubio De Francia J.L., Factorization theory and A_p weights, Amer. J. Math. 106, 533-547, (1984).

[19] Shen Z., L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials, Ann. Inst. Fourier Grenoble 45, 513-546, (1995).

[20] Stein E., Harmonic analysis: real-variable method, orthogonality, and oscillatory integrals, Princ. Univ. Press, 1993.

[21] Takeda M., Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, London Math. Soc. 39, 85-94, (2007).