

N° d'ordre : **4071**

THÈSE DE DOCTORAT

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

Par **Mahmoud KOABAZ**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **MÉCANIQUE et INGÉNIERIE**

**Contribution à l'étude des ondes de LAMB dans une plaque anisotrope :
théorie et expérience**

Soutenue le 30 Septembre 2010

Après avis de :

M. Olivier LENOIR, Professeur d'Université, Université Le Havre

M. Laurent LAGUERRE, Chargé de recherche (HDR), LCPC, Nantes

Devant la commission d'examen formée de :

Président M. Christophe BACON, Professeur d'Université, Université Bordeaux 1

Examineurs M. Pierre CALMON, Ingénieur de recherche, CEA

M. Olivier LENOIR, Professeur d'Université, Université Le Havre

M. Laurent LAGUERRE, Chargé de recherche (HDR), LCPC, Nantes

Directeur de thèse M. Marc DESCHAMPS, Directeur de Recherche, Université Bordeaux 1

M. Eric DUCASSE, Maître de conférences, ENSAM

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement les membres de jury, principalement Monsieur Christophe Bacon qui a accepté d'en être le président. Mes remerciements s'adressent aussi à Messieurs Olivier Lencir et Laurent Laquerre qui ont eu une lourde tâche d'effectuer un rapport sur ce travail, sans oublier Monsieur Pierre Calmon pour son travail d'examineur. Je leur exprime ici toute ma gratitude.

Je tiens également à remercier Monsieur Marc Deschamps, mon directeur de thèse, pour ses conseils tout au long de ces années de recherche, de son soutien et de la confiance à mon égard. Je voudrais également remercier Monsieur Eric Ducasse qui m'a encadré dans ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi aux Messieurs Bernard Hosten et Clément Rossignol avec qui j'ai réalisé une importante partie de mon travail expérimental et

aussi au Monsieur Tribikram Kundu de l'université d'Arizona avec qui j'ai travaillé pendant un mois.

Mes remerciements s'adressent de même à tous les doctorants, les personnels du laboratoire de Mécanique Physique de l'université Bordeaux 1, tous mes amis, et toutes les personnes qui m'ont accompagné de près ou de loin tout au long de ma thèse. Recevez ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je ne saurai terminer sans remercier mes parents, mon frère et mes sœurs et Rola, qui n'ont pas cessé de me soutenir et de m'encourager. Je vous dédie ce mémoire.

Mahmoud Koabaz

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I : Tenseur de Green pour un milieu infini.....	7
I.1 Introduction.....	9
I.2 Définitions et notations	9
I.2.1. Scalars, vecteurs, matrices.....	9
I.2.2 Produits.....	10
I.3 Propagation des ondes planes dans un milieu infini	11
I.4 Polynôme de Christoffel	12
I.4.1 Expression du polynôme de Christoffel	12
I.4.2 Surfaces des lenteurs de phase, en coordonnées sphériques	13
I.4.3 Points où la normale à la surface de lenteur est parallèle à la direction d'observation.....	14
I.5 Calcul de la fonction de Green dans l'espace infini.....	15
I.5.1 Généralités.....	15
I.5.2 Transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green.....	15
I.5.3 Retour dans l'espace spatio-temporel	16
I.5.4. Formulation en intégrale curviligne	18
I.5.4.1. Passage d'une intégrale double à une intégrale curviligne.	18
I.5.4.2. Singularités des arrivées d'ondes.....	19
I.6 Résultats numériques	23
I.6.1. Composantes du tenseur de Green pour différentes directions.....	24
I.6.2. Correspondance entre courbes de réponse et intersections plans/surface de lenteur.....	28
I.7 Conclusion.....	38
I.9 Références.....	39
Chapitre II : Tenseur de Green en présence d'interfaces planes.....	41
II.1 Introduction	43
II.2 Présentation de problème.....	43
II.3 Formalisme de Stroh.....	44
II.3.1 Généralités.....	44
II.3.2 Mise sous la forme d'un problème différentiel du premier ordre	44
II.3.3 Solution générale.....	45
II.3.4. Ondes montantes et descendantes, normalisation	46
II.3.4.1 Solutions homogènes	46
II.3.4.2 Solutions homogènes	47
II.3.5. Numérotation.....	47
II.4 Champ élastodynamique dans le demi-espace	48
II.4.1 Formulation du problème	48
II.4.1.1 Expressions générales des champs de déplacement et de contrainte verticale	48
II.4.1.2. Conditions aux limites	48

II.4.1.3. Tenseur de Green.....	48
II.4.2. Résolution du problème en respectant la causalité.....	49
II.4.2.1. Causalité et transformation de FOURIER.....	49
II.4.2.2. Inversion de la matrice \mathcal{R}_{up}	50
II.4.3 Retour dans l'espace physique sur l'interface.....	51
II.5 Réponse d'une plaque à une sollicitation aux interfaces.....	53
II.5.1 Méthode 1 : Résolution en pulsation et série de Debye.....	53
II.5.1.1. Transformée du tenseur de Green.....	53
II.5.1.2 Décomposition en série de Debye.....	54
II.5.1.3 Réécriture de la série de Debye.....	55
II.5.1.4 Retour numérique dans l'espace physique.....	57
II.5.1.5 Exemple d'une plaque de carbone-époxy.....	58
II.5.2. Méthode 2 : Résolution semi-analytique en temps.....	61
II.5.2.1 Ecriture du problème.....	61
II.5.2.2 Discrétisation dans l'épaisseur.....	61
II.5.2.3 Retour dans l'espace physique.....	62
II.5.2.4 Exemple d'une plaque de monocristal de cuivre.....	63
II.6 Conclusion.....	66
II.8 Références.....	67

Chapitre III : Etude expérimentale : ondes guidées pour un monocristal de cuivre... 69

III.1 Introduction.....	71
III.2 Mode opératoire.....	71
III.3 Résultats expérimentaux.....	72
III.3.1 Temps d'arrivée des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh.....	72
III.3.2 Temps d'arrivée des ondes réfléchies.....	78
III.3.2.1 Temps d'arrivée des premières réflexions sans conversion.....	82
III.3.2.2 Temps d'arrivée des multiples réflexions sans conversion.....	85
III.4 Conclusion.....	88
III.5 Références.....	89

Chapitre IV : Etude expérimentale : ondes guidées pour un matériau composite.....91

IV.1 Introduction.....	93
IV.2 Caractérisation des matériaux.....	94
IV.2.1. Dispositif expérimental.....	94
IV.2.2 Identification des C_{ij}	96
IV.3 Mesures expérimentales.....	97
IV.3.1 Mesure de la lenteur de groupe en fonction de la direction d'observation.....	100
IV.3.2 Mesure de la lenteur de phase en fonction de l'angle de propagation de la phase teta pour une fréquence donnée.....	103
IV.3.3 Mesure de la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour un angle de phase donné.....	104
IV.3.4 Mesure de la vitesse d'énergie en fonction de l'angle d'observation pour une fréquence fixée.....	107
IV.4 Conclusion.....	110
IV.5 Références.....	111

Chapitre V : Localisation d'un point d'impact dans une plaque anisotrope.....	113
V.1 Introduction	115
V.2 Principe et Formulation	115
V.3 Investigation expérimental	118
V.3.1 Mesure de la célérité d'énergie des ondes	118
V.3.2 Détection du point d'impact	119
V.6 Conclusion	124
V.7 Références.....	125
Conclusion.....	127
Annexes.....	129
Annexe A.....	131
Annexe B.....	135
Annexe C.....	137

Introduction

La détermination de la réponse élastodynamique d'un solide à une sollicitation donnée suscite un grand intérêt dans de nombreux domaines scientifiques liés à la mécanique, comme la caractérisation des matériaux, les essais non destructifs, la sismologie, la physique du solide, *etc.* Depuis plusieurs années, des efforts considérables sont consacrés au calcul de ces réponses pour des matériaux solides de différents types (isotrope, anisotrope, viscoélastique) et différentes géométries (espace infini –ou illimité–, espace demi-infini, plaque, cylindre, tube, coque, *etc.*).

L'étude fondamentale de la propagation des ondes élastiques dans un solide illimité (ondes de volume) a été initiée par Elwin Bruno Christoffel [*Christoffel, 1877*]. Elle permet de déduire les caractéristiques de ces ondes, qui dépendent uniquement des propriétés du matériau au sein duquel elles se propagent et de leur direction de propagation. Cette relation directe fait de ces ondes un outil très efficace pour la caractérisation de matériaux et pour l'imagerie des défauts de structures.

Dès lors que le milieu de propagation des ondes élastiques n'est pas illimité, les solutions de l'équation de propagation doivent aussi satisfaire des conditions aux limites. La première approche théorique des ondes se propageant sur la surface libre d'un solide élastique semi-infini fut exposée par Lord Rayleigh en 1885. Dans la littérature, l'existence des ondes de surface fut tout d'abord discutée en terme d'anisotropie du milieu et d'orientation de la surface [*Buchwald, 1960, 1961; Buchwald et Davis, 1963; Lim et Farnell, 1968a; Burridge, 1970, Lothe et Barnett, 1976*]. La réponse élastodynamique d'un demi-espace élastique à une force impulsionnelle localisée est d'importance fondamentale dans de nombreux domaines. Son intérêt a été récemment revitalisé par des applications liées à la génération des ondes acoustiques ultrasonores par Laser [*Castagnède et Berthelot, 1992*], [*Monchalin, 1993*], [*Gusev et al., 1996*] qui ont mené une étude théorique dans les domaines temporel et fréquentiel des ondes d'interface générées par Laser. Les méthodes de calcul des fonctions de GREEN font appel à des techniques employées par les géophysiciens sismologistes [*Johnson, 1974; Keith et Crampin, 1977; Aki et Richards, 1980*]. Diverses investigations ont été présentées pour résoudre ce problème classique de Sir Horace LAMB [*Lamb, 1903*] afin de calculer le champ de déplacement à l'intérieur d'un demi-espace élastique isotrope ou anisotrope assujéti à une source rectiligne ou ponctuelle [*Payton, 1983; Tewary et Fortunko, 1992; Wang et Achenbach, 1993; Every et Kim, 1994; Mourad et Deschamps, 1995 ; Mourad et al., 1996*].

Dans le cas d'une plaque dans le vide –ou dans un milieu peu dense–, des ondes des plaques –ou ondes de Lamb– résultent du couplage de différentes ondes partielles aux interfaces solide/vide. Le calcul du champ émis par une source localisée au sein de ce guide peut être traité alors par une méthode multimodale. Cette technique est mise en défaut, d'une part, pour un guide enfoui ou immergé, et d'autre part, s'il s'agit d'obtenir la fonction de Green, notamment pour une source située sur l'une des interfaces. En effet, dans ce dernier cas, le calcul de la propagation de discontinuités nécessite un nombre infini de modes guidés, alors que dans le premier cas, on est en présence d'un continuum de modes. Une alternative existe, consistant à développer la solution comme une somme infinie de multiples réflexions/réfractions [Brekhovskikh, 1960] et connue sous le nom de série de Debye [Debye, 1908]. Utilisant cette décomposition, plusieurs auteurs ont obtenu des résultats intéressants pour des solides élastiques cylindriques [Brill and Uberall, 197], [Conoir and Gérard, 1989], pour des couches sphériques élastiques [Gérard, 1983] ou pour des plaques planes élastiques [Deschamps and Cao, 1991], [Conoir et al., 1991], [Deschamps and Hosten, 1992]. L'esprit de la méthode pour obtenir aisément cette série est décrit dans [Gérard, 1983]. Cette décomposition, associée à un calcul intégral, est bien adaptée à un calcul de champ dans le domaine temporel en évitant le calcul des pôles associés aux modes guidés. À titre d'exemple, dans la référence [Van Der Hijden, 1987], on trouvera ce type de calcul par la méthode de Cagniard-de-Hoop.

Dans ce travail, ces différentes géométries sont étudiées par le calcul de tenseurs de Green pour un milieu élastique anisotrope. La démarche générale dans toutes les méthodes de la littérature consiste à faire d'abord une transformée de Fourier temporelle et ensuite une transformée de Fourier spatiale. L'originalité de la méthode présentée ici est que l'on s'efforce de rester dans le domaine temporel en considérant uniquement une transformée de Fourier spatiale.

Dans le chapitre I, les notions nécessaires pour la compréhension du chapitre suivant sont posées. Des résultats classiques de la théorie des ondes planes sont tout d'abord présentés : leur équation de propagation dans un milieu infini, l'expression du champ de déplacement comme la superposition d'ondes planes homogènes, chacune étant caractérisée par un vecteur « lenteur de phase » à composantes réelles, solution de l'équation de Christoffel. La visualisation des surfaces des lenteurs de phase présente l'intérêt de donner directement accès à la direction de transport d'énergie car la vitesse de l'énergie est en tout point normal à cette surface. La réponse élastodynamique d'un solide anisotrope infini due à une source ponctuelle est ensuite introduite. Son calcul est réalisé en restant toujours dans le domaine temporel et en considérant uniquement une transformée de Fourier spatiale. La réponse impulsionnelle s'écrit comme une intégrale simple le long de courbes fermées, intersection des surfaces de

lenteurs avec un plan perpendiculaire à la direction d'observation, situé à la distance « rapport du temps par la distance d'observation » de l'origine du repère. Une caractéristique primordiale dans le calcul de la fonction de Green pour un solide dans le domaine temporel est la succession des arrivées d'ondes. Ces arrivées correspondent aux cas où le plan est tangent à l'une des nappes de la surface de lenteur. Une attention particulière est portée sur l'étude de ces singularités, principalement elliptiques ou hyperboliques.

Dans le chapitre II, la réponse en déplacement d'un demi-espace élastique anisotrope à une excitation ponctuelle à la surface est calculée, puis celle d'une plaque. Notre approche consiste à appliquer la transformée de Fourier aux équations d'élasticité et aux conditions aux limites, par rapport au temps et aux coordonnées spatiales parallèles aux interfaces, à résoudre ensuite les équations algébriques en résultant, puis à écrire la transformée inverse. Dans le cas d'un demi-espace, une réécriture de cette dernière formule permet de réduire le calcul numérique de la réponse à l'évaluation d'une intégrale simple et non plus d'une intégrale triple. Dans le cas de la plaque, il faut mettre en oeuvre une méthode de calcul numérique. Deux méthodes sont présentées : une première consiste à décomposer le champ comme une succession de réflexions aux interfaces ; le champ s'écrit sous la forme d'une série de Debye dont la troncature permet un calcul numérique par une transformée de Fourier rapide en pulsation puis une évaluation d'intégrale double sur les lenteurs. La seconde consiste à résoudre semi-analytiquement le problème dans un espace hybride en restant dans le domaine temporel, avant de revenir dans l'espace physique par double transformée de Fourier rapide spatiale. Des réponses sont présentées dans le cas d'une plaque de carbone-époxy à fibres orientées selon une seule direction parallèle aux interfaces, puis dans celui d'un monocristal de cuivre dont les axes cristallographiques sont parallèles aux axes du repère. Les réponses du monocristal de cuivre sont mesurées expérimentalement dans le chapitre III, dans lequel les arrivées des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh et les pseudo-ondes de Rayleigh, ainsi que les arrivées des ondes de volume issues des multiples réflexions sur les interfaces sans conversion des modes sont identifiées.

Le chapitre IV présente des illustrations expérimentales des propriétés des modes guidés. Les expériences sont réalisées sur des composites unidirectionnels de carbone époxy. Elles portent successivement sur la mesure de la vitesse de phase et de l'énergie en fonction de la fréquence ou en fonction de la direction d'observation. Ces propriétés ont ensuite servi au chapitre V, dans lequel on traite d'un problème inverse : prédire, en utilisant une nouvelle fonction de minimisation, la localisation d'une source acoustique en surface d'une plaque à partir de quelques points de mesure, et comparer ensuite cette prédiction avec la localisation exacte.

Références

- Achenbach J.D. (1973). *Wave propagation in elastic solids*, North-Holland Ed., Amsterdam.
- Aki K. et Richards P.G. (1980). *Quantitative seismology*. San Francisco.
- Brekhovskikh L.M. (1960). *Waves in layered media*. Applied mathematics and mechanics (Academic Press, New York).
- Brill D., Überall H. (1971). *Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinder*, J. Acoust. Soc. Am. 50, 921–939.
- Buchwald V.T. (1960). *Rayleigh waves in anisotropic media*. Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XIV, (Pt. 4), 461-468.
- Buchwald V.T. (1961). *Rayleigh waves in transversely isotropic media*. Quart. Journ. Mech. And Applied Math., Vol. XIV, (Pt. 3), 294-317.
- Buchwald V.T. et Davis A. (1963). *Surface waves in elastic media with cubic symmetry*. Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XVI, (Pt. 3), 283-293.
- Burridge R. (1970). *The direction in which rayleigh waves may be propagated on crystal*. Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XXIII, 217-224.
- Castagnède B. et Berthelot Y. (1992). *Photoacoustic interactions by modulation and laser impact :Applications in mechanics and physics of anisotropic solids*. J. Acoust., Vol. 5, 417-453.
- Christoffel E.B. (1877). Ann. Mat. Pura Appl. **8**: 193.
- Conoir J.M., Gérard A. (1989). *Un nouveau fond potentiel pour la matrice s*, J. Acoustique 2, 217–227.
- Conoir J.M., Gérard A., Derem A. (1991). *Ondes acoustiques transmises et séries de Debye généralisées. 1- traitement des interfaces planes*, J. Acoustique 4, 159–200.
- Debije P. (1908). *Das elektromagnetische Feld um einen Zylinder und die Theorie des Regenbonens*, Phys. Z. 9, 775–778.
- Deschamps M., Cao C. (1991). *Reflection/refraction of a solid layer by Debye's series expansion*, Ultrasonics 29, 288–293.
- Deschamps M., Hosten B. (1992). *The effects of viscoelasticity on the reflection and transmission of ultrasonic waves by an orthotropic plate*, J. Acoust. Soc. Am. 91, 2007–2015.
- Every A.G. et Kim K.Y. (1994). *Time domain dynamic response functions of elastically anisotropic solids*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 95, (5), 2505-2516.

- Gérard A. (1983). *Scattering by spherical elastic layers : Exact solution and interpretation for a scalar field*, J. Acoust. Soc. Am. 73, 13–17.
- Gusev V., Desmet C., Lauriks W., Glorieux C. et Thoen J. (1996). *Theory of Scholte, leaky Rayleigh and lateral wave excitation via laser-induced thermoelastic effect*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 100, (3), 1514-1528.
- Johnson L.R. (1974). *Green's Function for Lamb's Problem*. Geophys. J. R. astr. Soc, Vol. 37, 99-131.
- Keith C.M. et Crampin S. (1977). *Seismic body waves in anisotropic media: synthetic seismograms*. Geophys. J. R. astr. Soc., Vol. 49, 225-243.
- Lamb H. (1903). *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid*. Phil.Trans. Roy. Soc. London, A 203, p. 1-42.
- Lim T.C. et Farnell G.W. (1968). *Search for Forbidden Directions of Elastic Surface – Wave Propagation in Anisotropic Crystals*. Journ. of Applied Physics, Vol. 39, 4319-4325.
- Lothe J. et Barnett D.M. (1976). *On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface*. J. Appl. Phys, Vol. 47, (2), 428-433.
- Monchalin J.P. (1993). *Progress towards the application of laser-ultrasonic's*. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 12, 495-506.
- Mourad A. et Deschamps M. (1995). *Lamb's problem for an anisotropic half space studied by the Cagniard de Hoop method*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 97, (5), 3194-3197.
- Mourad A., Deschamps M. et Castagnède B. (1996). *Acoustic waves generated by a transient line source in an anisotropic half space*. Acta Acustica, Vol. 52, 839-851.
- Payton R.G. (1983). *Elastic wave propagation in transversely isotropic media*. (Martinus Nijhoff Publisher, The Hagues).
- Tewary V.K. et Fortunko C.M. (1992). *A computationally efficient representation for propagation of elastic waves in anisotropic solids*. J. Acoust. Soc. Am., Vol. 91, 1888-1896.
- Van Der Hijden J.H.M.T. (1987). *Propagation of Transient Elastic Waves in Stratified Anisotropic Media*, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Elsevier Science Ltd.
- Wang C.-Y. et Achenbach J.D. (1992). *A new look at 2-D time-domain elastodynamic Green's functions for general anisotropic solids*. Wave Motion, Vol. 16, 389-405.
- Yeatts F. R. (1984). *Elastic radiation from a point force in an anisotropic medium*. Phys. Rev. B **29**(4), pp. 1674–1684.

Chapitre I : Tenseur de Green pour un milieu infini

I.1 Introduction.....	9
I.2 Définitions et notations	9
I.2.1. Scalaires, vecteurs, matrices.....	9
I.2.2 Produits.....	10
I.3 Propagation des ondes planes dans un milieu infini	11
I.4 Polynôme de Christoffel	12
I.4.1 Expression du polynôme de Christoffel	12
I.4.2 Surfaces des lenteurs de phase, en coordonnées sphériques	13
I.4.3 Points où la normale à la surface de lenteur est parallèle à la direction d'observation.....	14
I.5 Calcul de la fonction de Green dans l'espace infini.....	15
I.5.1 Généralités.....	15
I.5.2 Transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green.....	15
I.5.3 Retour dans l'espace spatio-temporel	16
I.5.4. Formulation en intégrale curviligne	18
I.5.4.1. Passage d'une intégrale double à une intégrale curviligne.	18
I.5.4.2. Singularités des arrivées d'ondes.....	19
I.6 Résultats numériques	23
I.6.1. Composantes du tenseur de Green pour différentes directions.	24
I.6.2. Correspondance entre courbes de réponse et intersections plans/surface de lenteur	28
I.7 Conclusion	38
I.9 Références.....	39

I.1 Introduction

La réponse en déplacement due à un point force impulsif dans un solide illimité, ou la fonction de Green élastodynamique, est importante dans de nombreuses applications. Elle est utile dans les domaines tels que le contrôle non destructif, la caractérisation des matériaux et la sismologie.

Dans ce chapitre, la réponse dynamique d'un solide anisotrope infini due à un point source est considérée. Dans la première partie, les équations de propagation ainsi que l'expression du champ de déplacement, qui décrivent des ondes planes homogènes caractérisées par une vitesse de phase réelle, solutions de l'équation de Christoffel sont décrites. Ces ondes sont caractérisées par leur surface des vitesses de phase qui contrairement aux surfaces des vitesses de phase, présente l'intérêt de donner directement la direction de transport d'énergie.

La seconde partie présente le tenseur de Green. Ce tenseur sera écrit comme une intégrale sur la sphère unité. Il sera ensuite réécrit comme une intégrale sur les surfaces de vitesse. Cette écriture a été effectuée par plusieurs auteurs. Burridge [Burridge, 1967] fut le premier, il a utilisé la décomposition d'un point-source $\delta(x)$ comme une somme dans toutes les directions de plans-sources. D'autres auteurs ont retrouvé un résultat similaire au moyen de la transformée de Radon : [Yeatts, 1984] et [Wang et Achenbach, 1993], ou à partir d'autres méthodes [Every et Kim, 1994]. La démarche générale dans toutes les méthodes consiste à faire d'abord une transformée de Fourier temporelle et ensuite une transformée de Fourier spatiale.

L'originalité de la méthode présentée ici est que l'on reste toujours dans le domaine temporel en considérant uniquement une transformée de Fourier spatiale.

I.2 Définitions et notations

I.2.1. Scalaires, vecteurs, matrices

Autant que possible les scalaires seront désignés par des lettres minuscules, les vecteurs (colonnes) de dimension 3 par des minuscules droites en gras, les vecteurs de dimension 6 par des majuscules droites en gras, et les matrices par des majuscules grecques ou calligraphiques.

Exemples :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'un vecteur ou une matrice est défini par blocs, des tirets séparent les différents blocs :

$$\Sigma = (\sigma_x \cdots \sigma_y \cdots \sigma_z); \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} v \\ \cdots \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

- **Vecteur nul** d'ordre n : $\mathbf{0}_n$.
- **Matrice identité** d'ordre n : $\mathbb{1}_n$.
- **Matrice carrée nulle** d'ordre n : $\mathbf{0}_n$.
- **Transposée** de la matrice \mathcal{M} : \mathcal{M}^T .
- **Conjugué** d'un scalaire, d'un vecteur ou d'une matrice : z^*, u^*, \mathcal{M}^* .
- **Conjugué de la transposée** de la matrice \mathcal{M} : \mathcal{M}^+ .
- **Déterminant** de la matrice \mathcal{M} : $\det(\mathcal{M})$.
- **Trace** de la matrice \mathcal{M} : $\text{tr}(\mathcal{M})$.
- **Comatrice** de la matrice \mathcal{M} :

$$\mathcal{M}^C = \begin{pmatrix} m_{22}m_{33} - m_{32}m_{23} & -m_{21}m_{33} + m_{31}m_{23} & m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22} \\ -m_{12}m_{33} + m_{32}m_{13} & m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13} & -m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31} \\ m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13} & -m_{11}m_{23} + m_{21}m_{13} & m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} \end{pmatrix}.$$

I.2.2 Produits

Produit matriciel Contrairement à la notation mathématique française usuelle, le produit matriciel n'est pas symbolisé par un point mais simplement par un espace, pour se conformer à la notation internationale en vigueur.

Produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^T \mathbf{v} = u_j v_j$ (Convention de sommation d'Einstein).

Produit tensoriel $\mathcal{M} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T \Leftrightarrow m_{jk} = u_j v_k$.

Produit \diamond associé au tenseur des rigidités réduites

Le produit \diamond de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} est une matrice $\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}$ telle que

$$\left(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} \right)_{jm} = c_{jkmn} a_k b_n, \quad (\text{I.1})$$

où les c_{jkmn} désignent les composantes du tenseur des rigidités réduites du milieu homogène anisotrope élastique considéré, c'est-à-dire des rigidités divisées par la masse volumique (unité : $m^2 s^{-2}$). Ce produit est **bilinéaire** et les propriétés du tenseur des rigidités (symétries) se traduisent par :

$$\mathbf{b} \diamond \mathbf{a} = \left(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} \right)^T, \quad (\text{I.2})$$

$$(\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}) \mathbf{c} = (\mathbf{a} \diamond \mathbf{c}) \mathbf{b}, \quad (\text{I.3})$$

et

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{a} \neq \mathbf{O}_3, \mathbf{a} \diamond \mathbf{a} \text{ symétrique définie positive.} \quad (\text{I.4})$$

Cette notation $\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}$ présente l'avantage de lever toute ambiguïté par rapport à la notation équivalente (ab) introduite par Barnett et Lothe [Barnett et Lothe,1973], [Lothe et Barnett,1976].

I.3 Propagation des ondes planes dans un milieu infini

Un milieu élastique anisotrope infini repéré par un système d'axes orthonormés $(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ est considéré. Un ébranlement le traversant entraîne le déplacement de particules qui le composent autour de leur position d'équilibre. Le déplacement en chaque point $\mathbf{x} = x \mathbf{n}_x + y \mathbf{n}_y + z \mathbf{n}_z$ et à tout instant t est noté $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

La relation fondamentale de la dynamique, ou deuxième loi de NEWTON, relie l'accélération au tenseur Σ des contraintes réduites (c'est-à-dire divisées par la masse volumique et d'unité : $m^2 s^{-2}$), en l'absence de forces extérieures :

$$\partial_{t^2} \mathbf{u} = \partial_j \boldsymbol{\sigma}_j = \Sigma \nabla, \quad (\text{I.5})$$

$\nabla = \left(\partial_x \ \partial_y \ \partial_z \right)^T$ désignant l'opérateur *gradient* et $\boldsymbol{\sigma}_j$ le vecteur des contraintes réduites selon la direction j .

Le tenseur des déformations \mathcal{E} s'écrivant :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla), \quad (\text{I.6})$$

la loi de HOOKE, pour de petites déformations d'un solide élastique, exprime le tenseur des contraintes réduites en fonction de ceux des rigidités réduites et de déformation :

$$\sigma_{jk} = c_{jkmn} \varepsilon_{mn}.$$

Ou encore, d'après les équations (I.3) et (I.6), cette loi permet d'écrire le vecteur des contraintes réduites selon la direction j :

$$\sigma_j = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{n}_j \diamond \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{n}_j \diamond \mathbf{u}) \nabla \right] = (\mathbf{n}_j \diamond \nabla) \mathbf{u}. \quad (\text{I.7})$$

L'équation du mouvement se déduit de la relation fondamentale de la dynamique (I.5) et de la loi de Hooke (I.7) :

$$\partial_{t^2} \mathbf{u} = (\nabla \diamond \nabla) \mathbf{u}. \quad (\text{I.8})$$

Si l'on cherche une solution à ce système d'équations aux dérivées partielles, linéaire à coefficients constants d'ordre 2 en temps et en espace, sous la forme d'une onde plane harmonique :

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} e^{i\omega(t-\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})} \quad (\text{I.9})$$

de pulsation ω , de vecteur *lenteur de phase* \mathbf{s} et de polarisation \mathbf{p} , on obtient l'équation algébrique suivante, indépendante de la pulsation :

$$(\mathbf{s} \diamond \mathbf{s}) \mathbf{p} = \mathbf{p}, \quad (\text{I.10})$$

qui n'admet de solution non nulle que si la matrice $\mathbf{s} \diamond \mathbf{s}$ a au moins une valeur propre égale à l'unité. Cela revient à étudier le polynôme de Christoffel défini au paragraphe suivant.

I.4 Polynôme de Christoffel

I.4.1 Expression du polynôme de Christoffel

En considérant que le vecteur *lenteur de phase* $\mathbf{s} = s \mathbf{n}$ est de norme s , et de direction de phase \mathbf{n} (vecteur unitaire), la bilinéarité du produit \diamond permet de récrire l'équation (I.10) :

$$(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) \mathbf{p} = \frac{1}{s^2} \mathbf{p}. \quad (\text{I.11})$$

La matrice $\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}$ étant symétrique définie positive [Éq. (I.4)], elle est forcément diagonalisable en base orthonormale. Par conséquent, pour toute direction de phase \mathbf{n} il existe exactement trois lenteurs réelles vérifiant $0 < s_1(\mathbf{n}) \leq s_2(\mathbf{n}) \leq s_3(\mathbf{n})$ telles que les vecteurs lenteurs $s_\alpha(\mathbf{n}) \mathbf{n}$ annulent le polynôme de CHRISTOFFEL :

$$\Gamma(\mathbf{s}) = \det \left[s^2 (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) - \mathbb{I}_3 \right] = \det (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) s^6 - \text{Tr} \left[(\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})^C \right] s^4 + \text{Tr} (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}) s^2 - 1. \quad (\text{I.12})$$

L'existence de trois autres racines, opposées aux $s_\alpha(\mathbf{n})$, traduit juste le fait que dans la direction $-\mathbf{n}$ les lenteurs sont les mêmes puisque $(-\mathbf{n}) \diamond (-\mathbf{n}) = \mathbf{n} \diamond \mathbf{n}$.

Sauf pour un milieu isotrope ou isotrope-transverse, le nombre de directions, dites « axes acoustiques », pour lesquelles le polynôme de Christoffel admet une racine double ne peut

excéder 16 [Alshits and Lothe, 2004]. La normale à la surface de lenteur est donc définie presque partout par le gradient $\nabla\Gamma(s)$.

I.4.2 Surfaces des lenteurs de phase, en coordonnées sphériques

La surface des lenteurs de phase est le lieu, tracé à partir d'une origine, des extrémités des vecteurs *lenteur de phase* racines du polynôme Christoffel.

En coordonnées sphériques, la direction de phase est caractérisée par deux angles θ et φ tels que :

$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \cos \theta \mathbf{n}_x + (\cos \varphi \sin \theta) \mathbf{n}_y + (\sin \varphi \sin \theta) \mathbf{n}_z. \quad (\text{I.13})$$

On peut donc obtenir la surface des lenteurs de phase en traçant les trois nappes S_α paramétrées par θ et φ :

$$S_\alpha = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbf{R}^3, s = s_\alpha(\mathbf{n}(\theta, \varphi)) \mathbf{n}(\theta, \varphi) \right\}.$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, dont les propriétés sont invariantes quelle que soit la direction de propagation, ces surfaces sont des sphères. Elles prennent des formes plus complexes pour un milieu anisotrope. La surface des lenteurs de phase du mode transversal pour le cas d'un monocristal de cuivre dont la symétrie est cubique est représentée par la Figure I-1 :

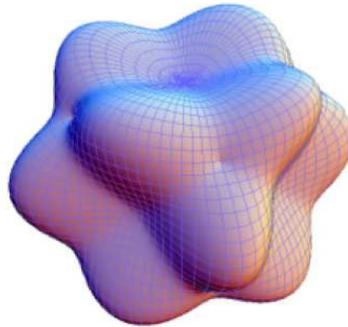


Figure I-1 : surface des lenteurs de phase 3D du mode TH d'un mono cristal de cuivre.

En faisant $\theta = \pi/2$, on obtient l'intersection de la surface des lenteurs avec le plan $s_y s_z$, représentée sur la Figure I-2 pour un monocristal de cuivre.

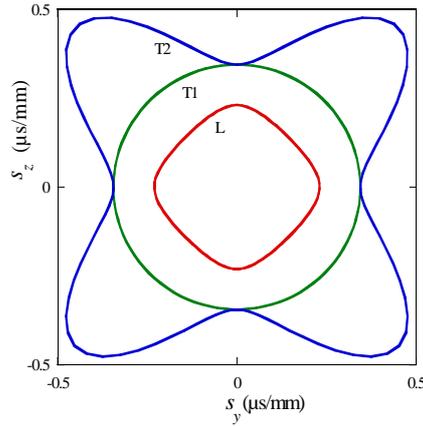


Figure I-2 : courbes des lenteurs de phase des ondes rasantes dans le plan (L, T1, T2) pour l'angle $\theta = \pi/2$.

I.4.3 Points où la normale à la surface de lenteur est parallèle à la direction d'observation.

Nous allons montrer que pour une direction d'observation \mathbf{d} fixée, le nombre de points où la direction d'observation est orthogonale à la surface de lenteur est fini.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la direction d'observation est donnée par le vecteur \mathbf{n}_x . En se plaçant hors des points où le gradient $\nabla\Gamma(\mathbf{s})$ est nul, la normale à la surface de lenteur sera parallèle à la direction d'observation si et seulement si les deux premières composantes de ce gradient sont nulles.

On doit donc résoudre un système de trois équations polynomiales à trois inconnues qui sont s_x, s_y , et s_z , les trois composantes du vecteur $\mathbf{s} = s_x \mathbf{n}_x + s_y \mathbf{n}_y + s_z \mathbf{n}_z$:

$$\begin{cases} \Gamma(\mathbf{s}) = 0 & \text{(Equation de degré 6);} \\ \partial_{s_y} \Gamma(\mathbf{s}) = 0 & \text{(degré 5)} & ; \\ \partial_{s_z} \Gamma(\mathbf{s}) = 0 & \text{(degré 5)} & . \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

En raison des propriétés remarquables du polynôme de Christoffel, le système (I.14) ne peut pas être dégénéré et admet donc un nombre fini de solutions. En conséquence, la direction d'observation et la normale à la surface de lenteur sont distinctes « *presque partout* ».

I.5 Calcul de la fonction de Green dans l'espace infini.

I.5.1 Généralités

En présence d'une densité volumique \mathbf{f} (unité $m s^{-2}$) de forces extérieures réduites (divisées par la masse volumique du milieu), l'équation d'ondes à résoudre est la suivante (voir par exemple [Royer et Dieulesaint, 1996]) :

$$\partial_{t^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - (\nabla \diamond \nabla) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{I.15})$$

Si la densité volumique de force est supposée causale, c'est-à-dire nulle pour t négatif, la causalité implique qu'à tout instant t négatif le système est au repos, c'est-à-dire que :

$$\left\{ \forall t < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O}_3 \right\} \Rightarrow \left\{ \forall t < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O}_3 \right\}. \quad (\text{I.16})$$

Le second membre $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ peut s'écrire comme une convolution spatio-temporelle :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{0^-}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\delta(\mathbf{x} - \xi) (\delta(t - \tau) \mathbb{I}_3) \right] \mathbf{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (\text{I.17})$$

Comme l'équation (I.15) est linéaire à coefficients constants, sa solution peut toujours s'exprimer comme la convolution du *tenseur de Green* \mathcal{G} par le terme-source :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{0^-}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{G}(\mathbf{x} - \xi, t - \tau) \cdot \mathbf{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (\text{I.18})$$

le tenseur de Green satisfaisant l'équation :

$$\partial_{t^2} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) - (\nabla \diamond \nabla) \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \delta(t) \delta(\mathbf{x}) \mathbb{I}_3. \quad (\text{I.19})$$

avec la condition initiale :

$$\forall t < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{O}_3. \quad (\text{I.20})$$

L'originalité de ce travail est de rester dans le domaine temporel et de prendre une transformée de Fourier uniquement par rapport à l'espace pour retrouver des résultats de la littérature.

I.5.2 Transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green

La transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green est définie par :

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{G}(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (\text{I.21})$$

de sorte que

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (\text{I.22})$$

La transformée de Fourier spatiale des équations (I.19) et (I.20) donne :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) + (\mathbf{k} \diamond \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) = \delta(t) \mathbb{I}_3, \\ \forall t < 0, \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{O}_3 \end{cases}, \quad (\text{I.23})$$

qui se résout en diagonalisant la matrice $\mathbf{k} \diamond \mathbf{k} = k^2 (\mathbf{n} \diamond \mathbf{n})$. Comme on l'a vu précédemment, la matrice $\mathbf{n} \diamond \mathbf{n}$ est diagonalisable en base orthonormale (valeurs propres $1/s_\alpha^2(\mathbf{n})$ et vecteurs propres normalisés $\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})$), ce qui se traduit par :

$$\mathbf{n} \diamond \mathbf{n} = \mathcal{P}(\mathbf{n}) \text{diag} \left(\frac{1}{s_\alpha^2(\mathbf{n})} \right)_{1 \leq \alpha \leq 3} \mathcal{P}(\mathbf{n})^T, \quad (\text{I.24})$$

avec $\mathcal{P}(\mathbf{n}) = [\mathbf{p}_1(\mathbf{n}) \mid \mathbf{p}_2(\mathbf{n}) \mid \mathbf{p}_3(\mathbf{n})]$ et $\mathcal{P}(\mathbf{n})\mathcal{P}(\mathbf{n})^T = \mathbb{I}_3$.

L'unique solution causale de l'équation différentielle $g''(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t)$ étant la fonction $t \mapsto u(t) \sin(\omega_0 t) / \omega_0$, où u désigne l'échelon unitaire ou *fonction de Heaviside*, la transformée de Fourier spatiale du tenseur de Green s'écrit ([Alshits et Lothe, 2004] par exemple) :

$$\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{k}, t) = u(t) \mathcal{P}(\mathbf{n}) \text{diag} \left[\frac{s_\alpha(\mathbf{n})}{k} \sin \left(\frac{kt}{s_\alpha(\mathbf{n})} \right) \right]_{1 \leq \alpha \leq 3} \mathcal{P}(\mathbf{n})^T = u(t) \sum_{\alpha=1}^3 \frac{s_\alpha(\mathbf{n})}{k} \sin \left(\frac{kt}{s_\alpha(\mathbf{n})} \right) [\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})]. \quad (\text{I.25})$$

I.5.3 Retour dans l'espace spatio-temporel

En appliquant la transformation de Fourier inverse (I.22), on obtient :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{u(t)}{8\pi^3} \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{s_\alpha(\mathbf{n})}{k} \sin \left(\frac{kt}{s_\alpha(\mathbf{n})} \right) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})] d\mathbf{k}, \quad (\text{I.26})$$

puis, après un passage en coordonnées sphériques ($d\mathbf{k} = k^2 dk d\mathbf{n}$),

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{u(t)}{8\pi^3} \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \\ |\mathbf{n}|=1}} \left[\int_0^{+\infty} k \sin\left(\frac{kt}{s_\alpha(\mathbf{n})}\right) e^{-i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})k} dk \right] s_\alpha(\mathbf{n}) [\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})] d\mathbf{n}. \quad (\text{I.27})$$

Dans cette dernière intégrale, grâce à la symétrie centrale $s_\alpha(-\mathbf{n}) = s_\alpha(\mathbf{n})$ et $\mathbf{p}_\alpha(-\mathbf{n}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})$, le changement de variable $k \mapsto -k$ et $\mathbf{n} \mapsto -\mathbf{n}$ modifie juste les bornes de l'intégrale en k : on intègre de moins l'infini à zéro. Par conséquent, on peut également écrire :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{u(t)}{16\pi^3} \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \\ |\mathbf{n}|=1}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} k \sin\left(\frac{kt}{s_\alpha(\mathbf{n})}\right) e^{-i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})k} dk \right] s_\alpha(\mathbf{n}) [\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})] d\mathbf{n}. \quad (\text{I.28}).$$

Comme, pour tous nombres réels ν et μ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \sin(\nu k) e^{-i\mu k} dk = \pi \left[\delta'(\mu - \nu) - \delta'(\mu + \nu) \right],$$

grâce à la symétrie centrale qui permet de remplacer $-\delta'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} + t/s_\alpha(\mathbf{n}))$ par $\delta'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - t/s_\alpha(\mathbf{n}))$, et puisque $\delta'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} - t/s_\alpha(\mathbf{n})) = -s_\alpha^2(\mathbf{n})\delta'[t - s_\alpha(\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}]$, le tenseur de GREEN peut être récrit comme la somme de trois intégrales sur la sphère unité :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{-u(t)}{8\pi^2} \partial_t \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 \\ |\mathbf{n}|=1}} s_\alpha^3(\mathbf{n}) \delta[t - s_\alpha(\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}] [\mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{n})] d\mathbf{n} \right\}. \quad (\text{I.29})$$

Ce résultat a été obtenu par de nombreux auteurs mais par d'autres méthodes. À notre connaissance, la première formulation a été établie par Burridge en 1967 [Burridge, 1967, Éq.(4.6)] en exprimant une source ponctuelle comme la superposition de plans-sources dans toutes les directions. D'autres articles ont fait appel à la transformation de RADON ([Yeatts, 1984, Éq.(28)], [Wang et Achenbach, 1993, Éq.(4.17)]). D'autres méthodes encore ont été mises en oeuvre dans [Every et Kim, 1994, Éq.(9)] et [Bakulin et Tyurikov, 1996, Éq.(9)].

Sur chaque nappe \mathcal{S}_α de la surface de lenteur, le vecteur *lenteur de phase* \mathbf{s} s'écrit $s_\alpha(\mathbf{n})$ et on peut démontrer que $\left[s_\alpha^3(\mathbf{n}) d\mathbf{n} \right]$ égale $\left[|\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{s})| d\mathbf{s} \right]$, le vecteur unitaire $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ désignant la normale à la surface de lenteur. Le tenseur de Green peut donc être exprimé également comme une intégrale double sur les trois nappes de la surface de lenteur:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{-u(t)}{8\pi^2} \partial_t \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 \int_{S_\alpha} \delta(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{x}) [p(\mathbf{n}) \otimes p(\mathbf{n})] |\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{s})| d\mathbf{s} \right\}. \quad (\text{I.30})$$

Des formules analogues sont données dans [Burridge, 1967, Éq.(5.4)] et [Yeatts, 1984, Éq.(39)].

Notons que chaque surface de lenteur admet une normale partout sauf pour les points coniques qui sont en nombre limité (e.g. [Alshits and Lothe, 2004]) et représentent le contact ponctuel entre deux surfaces de lenteurs.

Assez étrangement, les auteurs précédemment cités à l'exception de [Every et Kim, 1994] ne cherchent pas à simplifier cette intégrale. Ces derniers évoquent: « *The properties of the function could be used to reduce this surface integral to a line integral summed over directions for which $(t - \mathbf{s}_j \cdot \mathbf{x} = 0)$, which have to be located numerically. However, there is no clear-cut advantage to doing this [. . .]* ».

Nous allons cependant donner dans le paragraphe suivant l'expression du tenseur de Green comme une somme d'intégrales curvilignes sur les courbes d'intersection des surfaces de lenteur avec le plan $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = \frac{t}{d})$, avec la notation $(\mathbf{x} = d \mathbf{m})$, d étant la distance d'observation et \mathbf{m} la direction d'observation.

I.5.4. Formulation en intégrale curviligne

I.5.4.1. Passage d'une intégrale double à une intégrale curviligne.

Prenons un point d'observation situé à une distance d du point-source dans la direction \mathbf{m} (vecteur unitaire), et un instant t tels que pour toute lenteur \mathbf{s} située à l'intersection du plan $\{\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = t/d\}$ et de la surface de lenteur, la normale $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ à la surface de lenteur est définie et non colinéaire à la direction d'observation \mathbf{m} .

L'intersection des surfaces de lenteurs (cf. Annexe B) avec le plan $\{\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = t/d\}$ est un ensemble de courbes fermées très régulières. Au voisinage de chaque courbe, on peut repérer la surface de lenteur par deux variables ν et μ (cf. Annexe B) telles que $\{\mu = \mathbf{m} \cdot \mathbf{s} - t/d\}$ et ν est l'abscisse curviligne de la courbe d'intersection dont le point courant est $\mathbf{s}(\nu, 0)$.

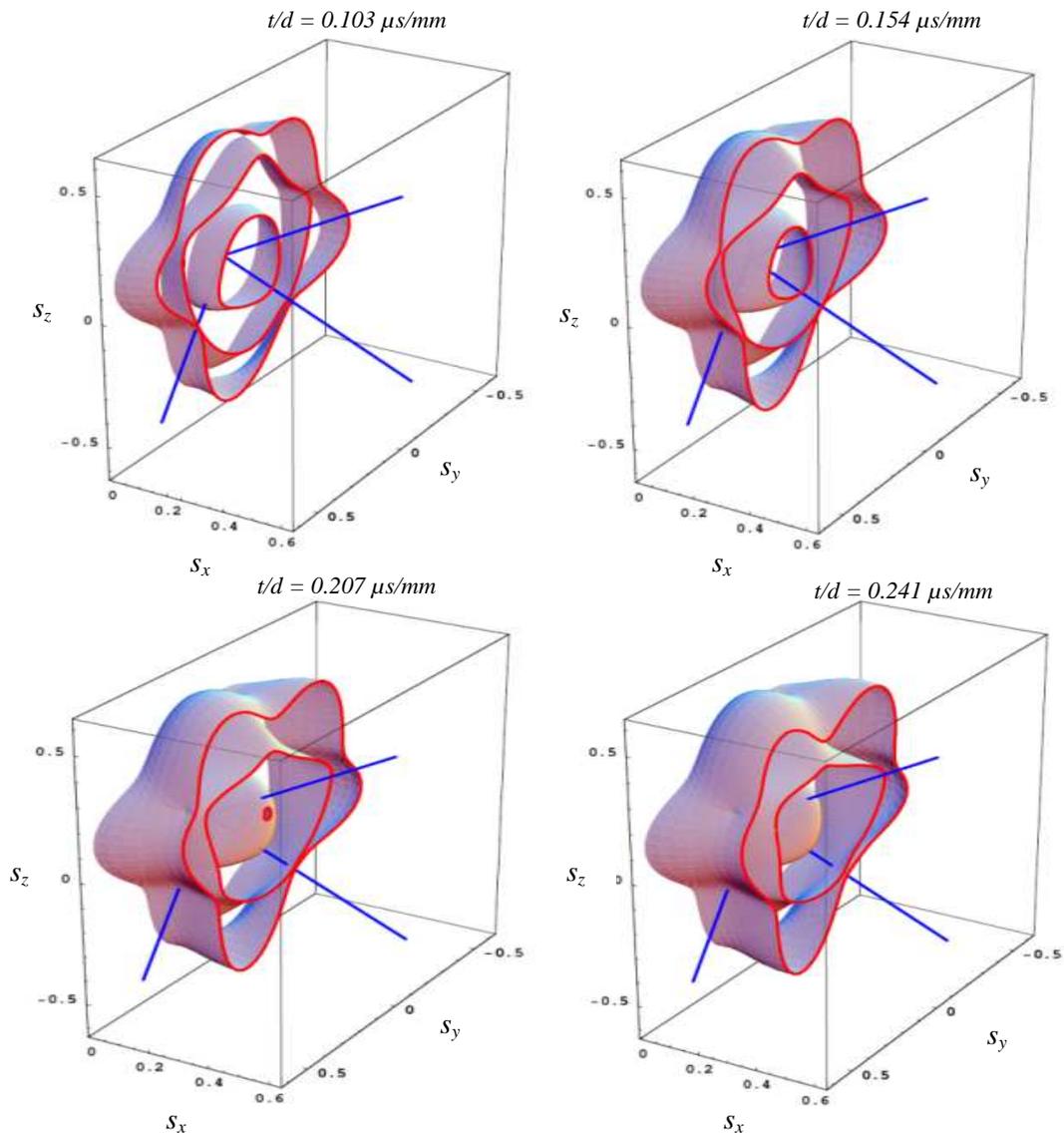
En outre, on peut démontrer que l'élément de surface infinitésimal $d\mathbf{s}$ s'écrit $jacob(\nu, \mu) d\nu d\mu$, le jacobien $jacob(\nu, 0)$ valant $|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(\mathbf{s})|^{-1}$ le long de la courbe d'intersection, soit l'inverse du sinus de l'angle entre la normale $\mathbf{r}(\mathbf{s})$ à la surface de lenteur et la direction d'observation \mathbf{m} .

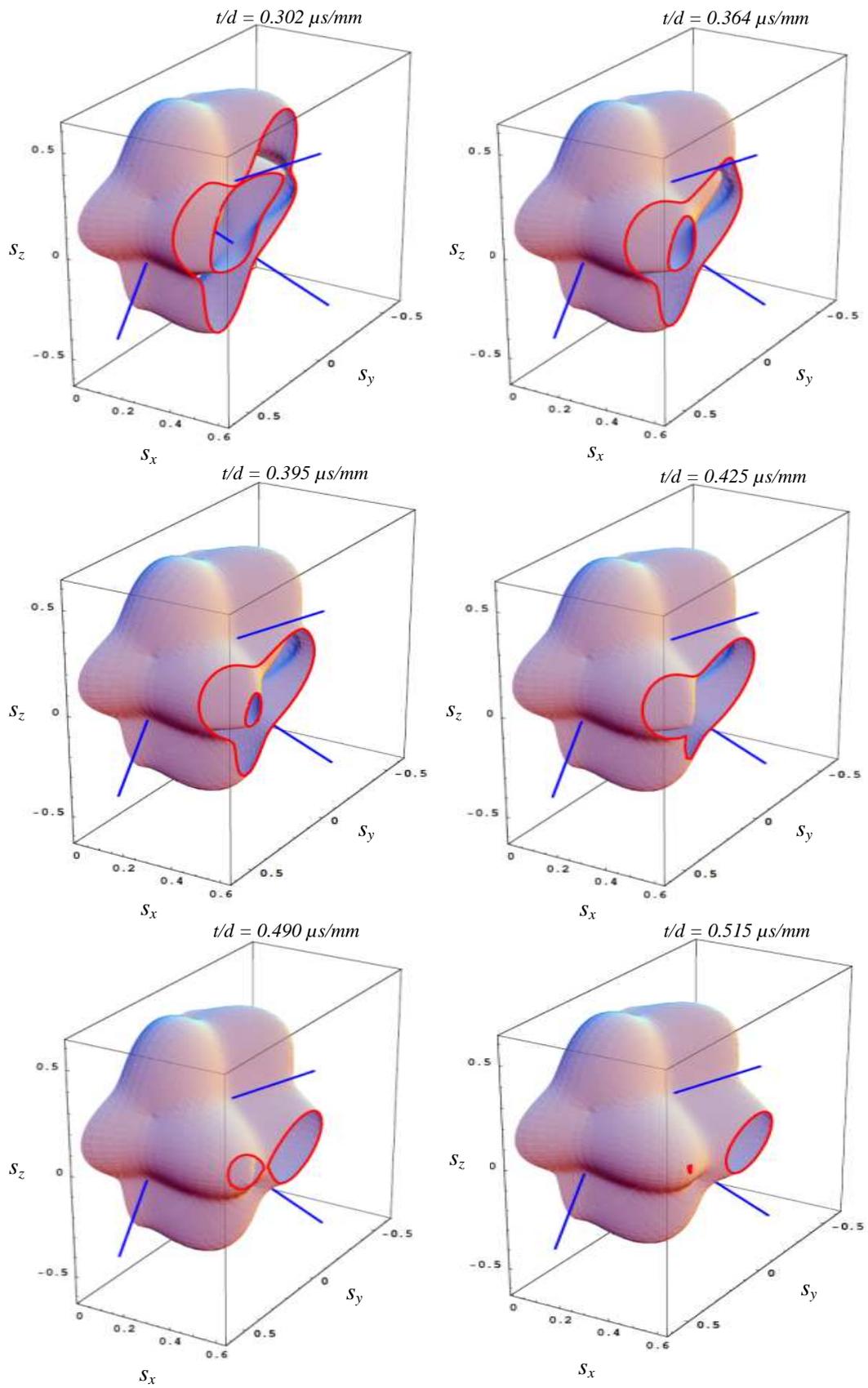
L'intégrale double (I.30), devient, en utilisant la propriété $\delta(\beta\mu) = |\beta|^{-1} \delta(\mu)$, une somme d'intégrales curvilignes le long des intersections du plan $\{\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = t/d\}$ avec les trois nappes de la surface de lenteur, à condition que la normale à la surface de lenteur ne coïncide pas avec la direction d'observation :

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{-u(t)}{8\pi^2 d} \partial_t \left(\sum_{i=1}^3 \oint_{\substack{\mathbf{s} \in S_\alpha \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = t/d}} \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{s})|}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(\mathbf{s})|} [\mathbf{p}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{p}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} \right) \quad (\text{I.31})$$

I.5.4.2. Singularités des arrivées d'ondes.

Des exemples de courbes d'intersection des surfaces de lenteur avec le plan $\{\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = t/d\}$ sont montrés dans les figures suivantes, pour un monocristal de cuivre et différentes valeurs de t/d :





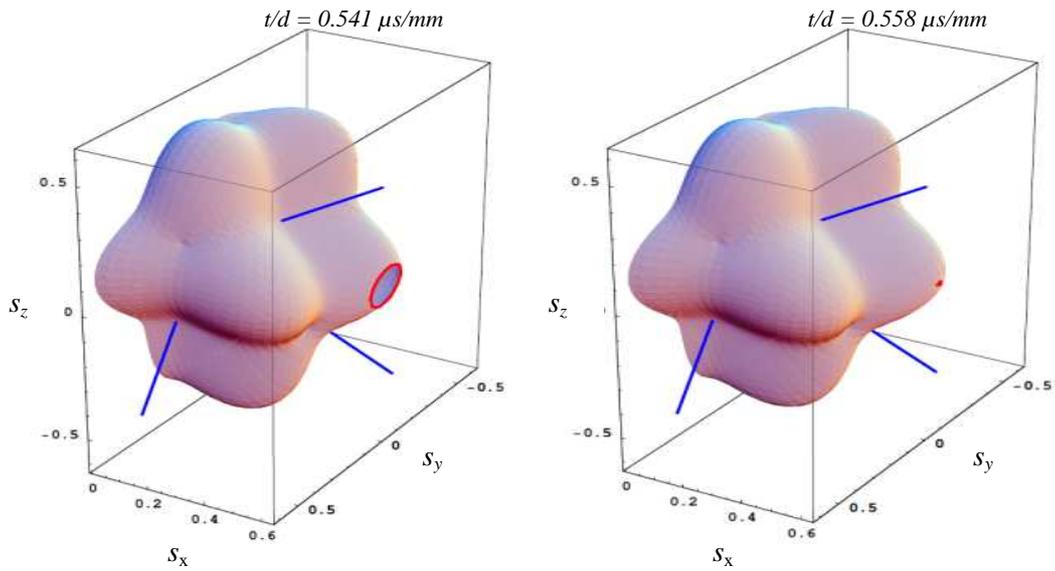


Figure I-3: courbes d'intersections successives des surfaces de lenteur avec le plan $s_x = t/d$ jusqu'à l'arrivée de toutes les ondes.

L'une des caractéristiques les plus importantes dans le calcul de la fonction de Green pour un solide dans le domaine temporel est l'identification des arrivées d'ondes. Ce sont des caractéristiques singulières qui se propagent avec la vitesse de groupe dans la direction d'observation. La plupart de l'énergie acoustique rayonnée par un événement localisé, comme une force impulsive ponctuelle, est concentrée dans ces arrivées. Par conséquent, ces arrivées d'onde disposent d'une place importante dans toute discussion sur l'élastodynamique.

On s'intéresse ici à la nature du comportement singulier de la solution au voisinage d'une arrivée d'onde associée à l'une des trois branches de la lenteur acoustique. La propagation dans une direction générique est associée au point elliptique ou hyperbolique sur la surface de la lenteur, c.à.d. les points où les courbures principales sont respectivement de même signe (Figure I-4 (a)) ou de signe opposée (Figure I-4 (b)).

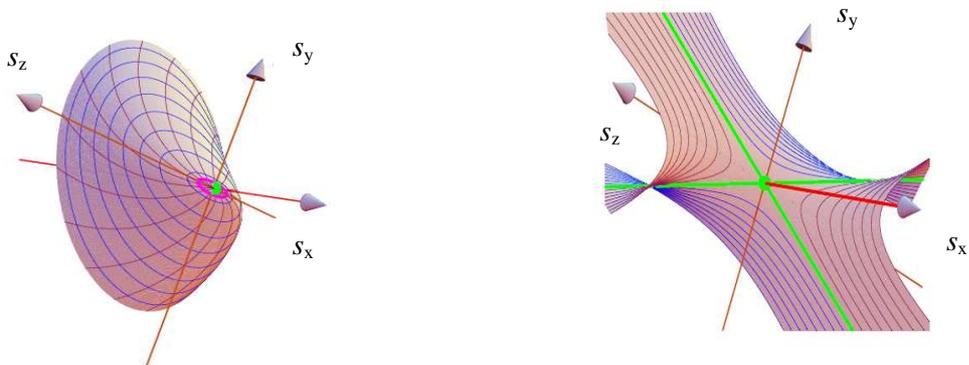


Figure I-4: les 2 types des arrivées d'ondes : elliptique (a) et hyperbolique (b).

Un point singulier s_0 sur la surface de lenteur est dit générique ou régulier si les deux courbures principales sont finies. En alignant s_y et s_z le long des directions principales de la surface, l'équation locale de la surface de lenteur s'écrit [Every et al., 2007], [Every et al., 1997]:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s_x}(s_0)\delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_y^2}(s_0)s_y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_z^2}(s_0)s_z^2 = 0 \quad (\text{I.32})$$

Dans le cas des points elliptiques, la surface de lenteur est soit concave soit convexe, et les deux courbures principales sont de même signe c.-à-d. $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_y^2}(s_0) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_z^2}(s_0) > 0$.

L'arrivée de l'onde pour un point elliptique prend habituellement la forme d'une discontinuité, mais dans certains cas, généralement relatifs à la symétrie, peut prendre la forme d'un décrochement (*kink*). Afin de calculer l'intégrale au voisinage de s_0 , l'équation (I.32) est localement approchée par :

$$\pm \delta x = \left(\frac{s_y}{a} \right)^2 + \left(\frac{s_z}{b} \right)^2 \quad (\text{I.33})$$

avec a et b des coefficients sans dimensions et α un angle. Avec ce changement, s_y et s_z seront alors écrits :

$$s_y(\alpha, z) = a\sqrt{\pm \delta x} \cos \alpha \text{ et } s_z(\alpha, z) = b\sqrt{\pm \delta x} \sin \alpha$$

et d/s sera écrit comme suit :

$$d/s = \sqrt{\pm \delta x} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \text{ et}$$

$$|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}| \approx \frac{2}{ab} \sqrt{\pm \delta x} \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \quad (\text{I.34})$$

L'intégrale sur le contour au voisinage de s_0 vaut alors :

$$\oint_{S \cap (\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}_0 + z)} \mathcal{M}(\mathbf{s}) \frac{d/s}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(\mathbf{s})|} = \begin{cases} \approx \pi ab \mathcal{M}(\mathbf{s}_0) \\ \text{ou } 0 \end{cases}. \quad (\text{I.35})$$

La partie singulière de $\mathcal{G}(\mathbf{x}, t)$ dans ce cas sera écrite sous la forme suivante :

$$\mathcal{G}_{\text{sing}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\pm ab}{8\pi d} \left(\frac{t_0}{d} \right) \delta(t - t_0) [\mathbf{p}(\mathbf{s}_0) \mathbf{p}(\mathbf{s}_0)^T]. \quad (\text{I.36})$$

Dans le cas des points hyperboliques, les deux courbures principales sont de signes opposés c.-à-d. $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_y^2}(s_0) \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s_z^2}(s_0) < 0$.

L'arrivée pour un point hyperbolique prend la forme d'une singularité ou, quand la symétrie intervient, une faible singularité [Every et al., 2007], [Every et al., 1997]. L'équation locale dans ce cas sera approchée par :

$$\delta x = \left(\frac{s_y}{a}\right)^2 - \left(\frac{s_z}{b}\right)^2 \text{ pour } \begin{cases} -\varepsilon < \frac{s_y}{a} < \varepsilon \\ -\varepsilon < \frac{s_z}{b} < \varepsilon \end{cases} \quad (\text{I.37})$$

et s_y et s_z seront écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\varepsilon < \delta x < 0 : s_y^\pm(\alpha, z) = a\sqrt{-\delta x} \sinh \alpha, s_z^\pm(\alpha, z) = \pm b\sqrt{-\delta x} \cosh \alpha \\ 0 < \delta x < \varepsilon : s_y^\pm(\alpha, z) = \pm a\sqrt{-\delta x} \cosh \alpha, s_z^\pm(\alpha, z) = b\sqrt{-\delta x} \sinh \alpha \end{cases} \quad (\text{I.38})$$

Avec ce changement on obtient :

$$\frac{ds}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s)|} = \left[\frac{ab}{2} + 0(\varepsilon^2) \right] d\alpha \quad (\text{I.39})$$

Et $\mathcal{M}(s)$ s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(s_0) + 0(\varepsilon). \quad (\text{I.40})$$

En appliquant les relations écrites au dessus, l'intégrale de $G(x,t)$ s'écrit alors comme suit :

$$\mathcal{G}_\varepsilon(x,t) = \frac{-u(t)}{8\pi^2 d} \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\substack{S \cap (\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}_0 + z) \\ -a\varepsilon < \xi < a\varepsilon; -b\varepsilon < \zeta < b\varepsilon}} \left\{ \frac{ab}{2} \left(\frac{t_0}{d} \right) [\mathbf{p}(s_0)\mathbf{p}(s_0)^T] + 0(\varepsilon) \right\} d\alpha \quad (\text{I.41})$$

En résolvant cette intégrale, on trouve :

$$\mathcal{G}_\varepsilon(x,t) \approx \frac{abu(t)}{8\pi^2 d^2} \left(\frac{t_0}{t - t_0} \right) [\mathbf{p}(s_0)\mathbf{p}(s_0)^T] \quad (\text{I.42})$$

Le calcul de l'intégrale trouvée au voisinage du point singulier s_0 pour le cas des points elliptiques ou hyperboliques est en accord avec les résultats trouvés par [Burridge, 1967] et [Every and kim., 1994].

I.6 Résultats numériques

La méthode décrite précédemment a été implémentée pour calculer la réponse impulsionnelle due à un point-source. Le monocristal de cuivre a été choisi pour réaliser cette application numérique car ce matériau est fortement anisotrope. Les constantes d'élasticité non nulles du

crystal sont : $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{33} = 170$ GPa, $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{23} = 123$ GPa et $\tilde{c}_{44} = \tilde{c}_{55} = \tilde{c}_{66} = 75$ GPa .
 Sa masse volumique est de 8900 kg.m^{-3} .

I.6.1. Composantes du tenseur de Green pour différentes directions.

La section de la surface d'onde dans le plan $(\mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ est représentée par la Figure I-5 où les angles d'observation et les arrivées d'ondes associées sont également indiqués par les points a, b, c, d, etc... . En raison de la symétrie du matériau, les composantes non nulles du tenseur de Green sont $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 2, 3$, et \mathcal{G}_{11} .

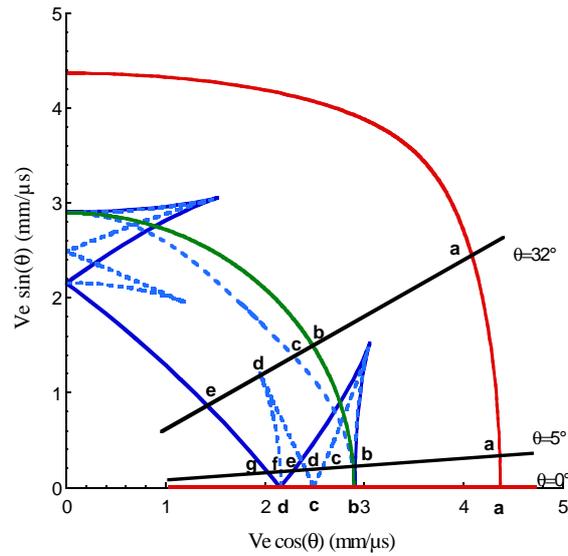


Figure I-5: coupe de la surface d'onde du cristal de cuivre, ondes dans le plan (trait plein) et hors plan (traits en pointillés). Les couleurs rouge, vert et bleu correspondent respectivement aux ondes L, T1 et T2.

Les Figures I-6(a) et I-6(b)) donnent $\mathcal{G}_{22} = \mathcal{G}_{33}$ et \mathcal{G}_{11} le long de l'axe de symétrie $\theta = 0^\circ$. La composante \mathcal{G}_{22} montre un changement de pente en a, une discontinuité en b, une singularité en c, et une autre discontinuité en d.

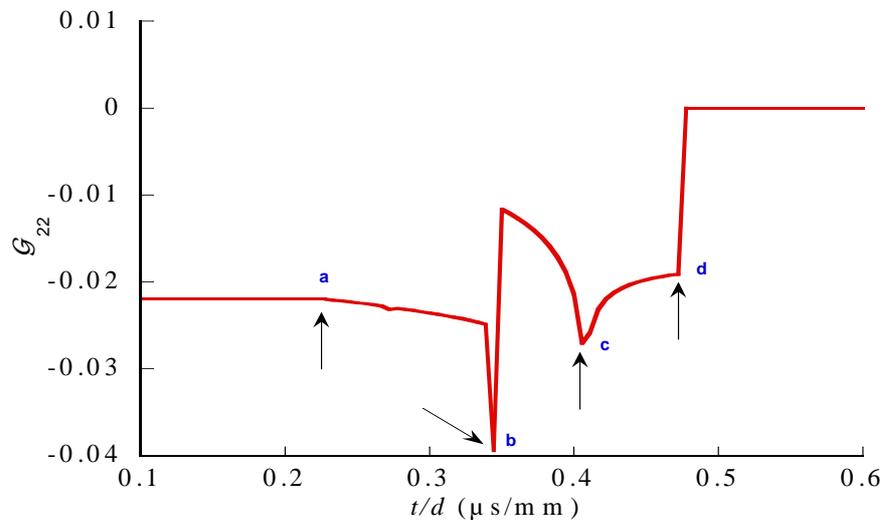


Figure I-6(a) : composante \mathcal{G}_{22} du tenseur de Green dans la direction 0° .

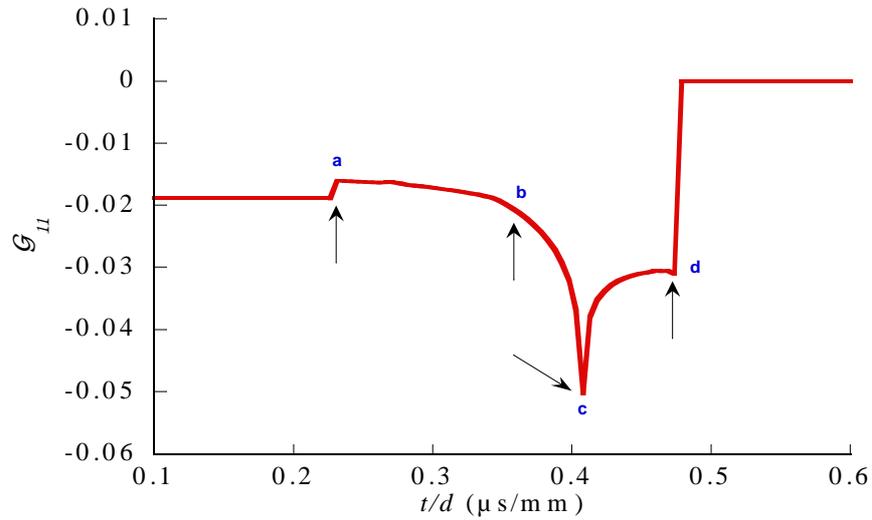


Figure I-6(b) : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green dans la direction 0° .

Les composantes pour l'angle $\theta = 5^\circ$ sont présentées dans les Figures I-7(a, b, c et d). Il y a moins de sept arrivées d'ondes dans cette direction. Les composantes \mathcal{G}_{11} et \mathcal{G}_{33} ont un changement de pente en a, une discontinuité en b, un décrochement en c, et une singularité en d et e et une discontinuité en f. Les composantes \mathcal{G}_{23} et \mathcal{G}_{22} présentent une discontinuité en a, un changement de pente en b, des singularités en c et d et des discontinuités en e et f.

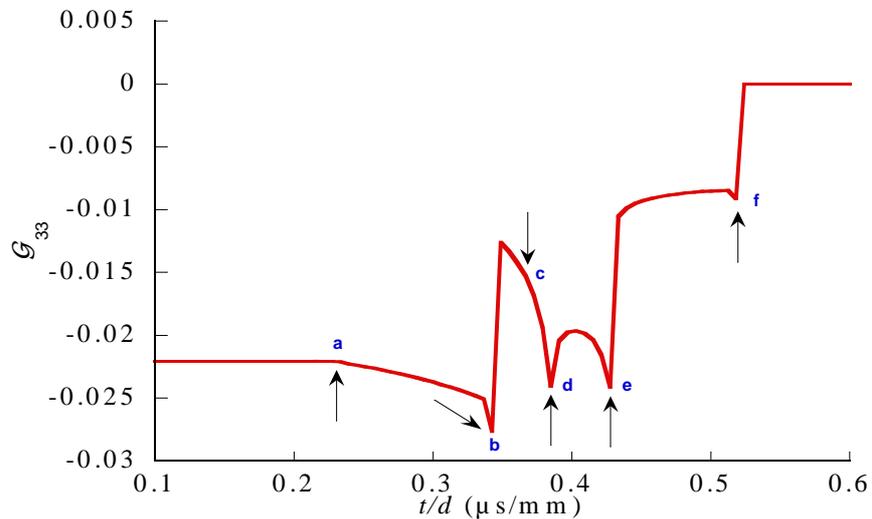


Figure I-7(a) : composante \mathcal{G}_{33} du tenseur de Green dans la direction 5° .

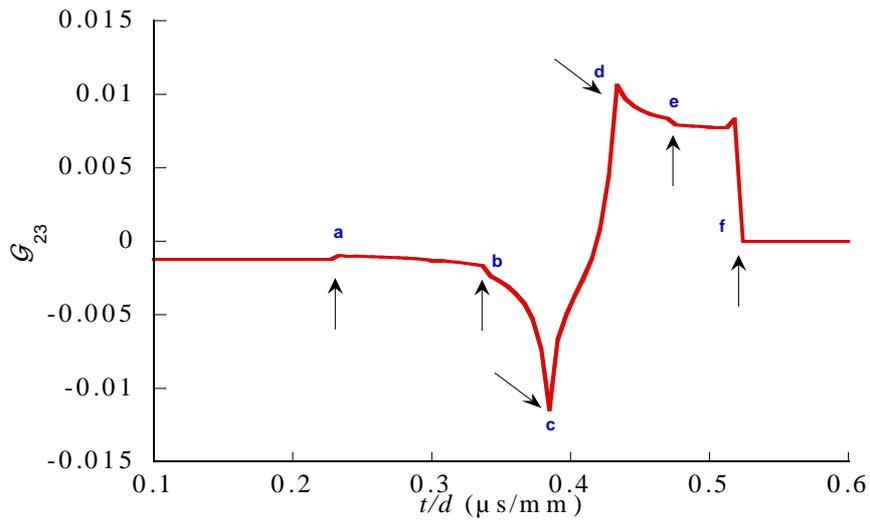


Figure I-7(b) : composante \mathcal{G}_{23} du tenseur de Green dans la direction 5° .

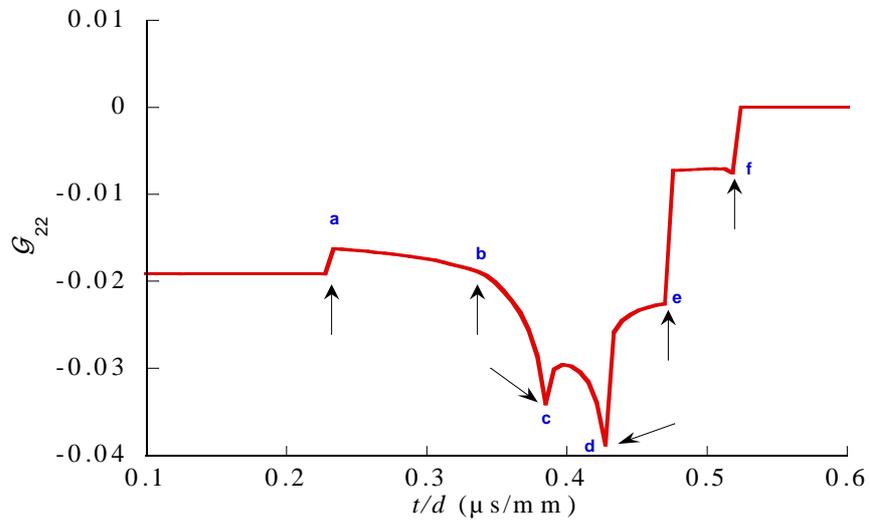


Figure I-7(c) : composante \mathcal{G}_{22} du tenseur de Green dans la direction 5° .

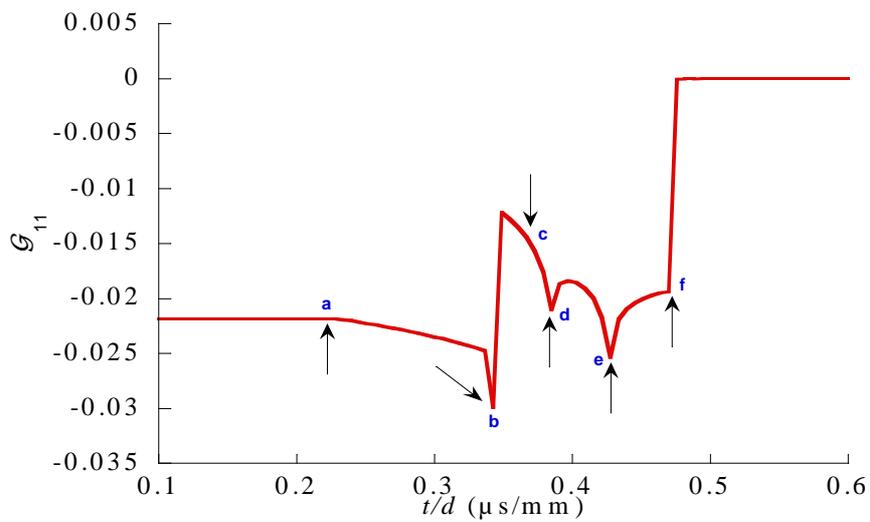


Figure I-7(d) : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green dans la direction 5° .

Les Figures I-8(a, b, c et d) montrent les composantes pour $\theta = 32^\circ$. les composantes $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 2, 3$ ont une discontinuité en a, c et e et une singularité en d tandis que \mathcal{G}_{11} a un changement de pente en a, une singularité en b et une discontinuité en c et d.

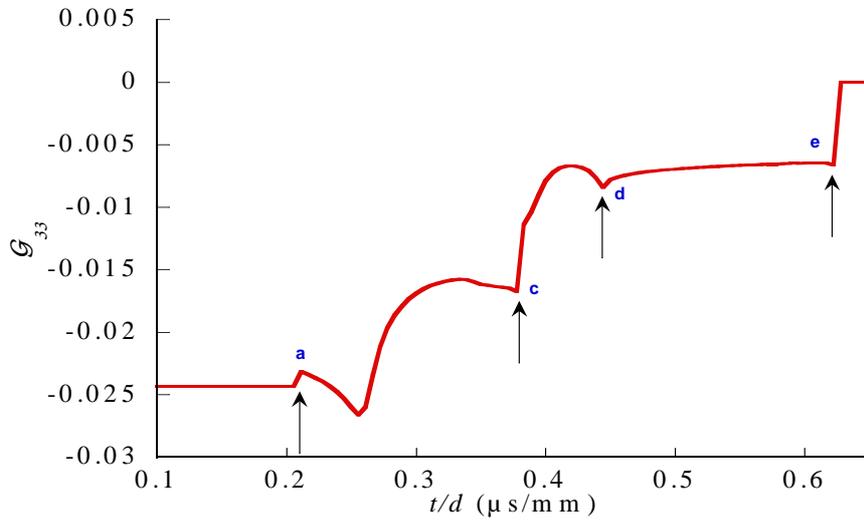


Figure I-8(a) : composante \mathcal{G}_{33} du tenseur de Green dans la direction 32° .

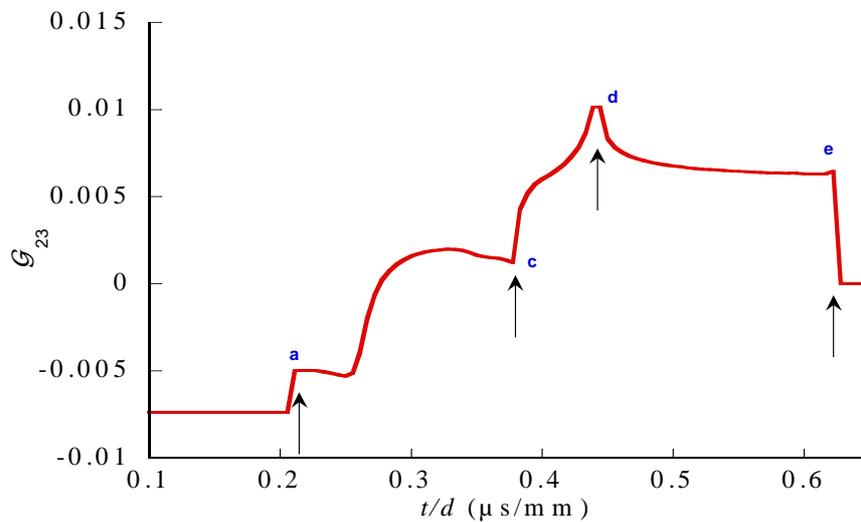


Figure I-8(b) : composante \mathcal{G}_{23} du tenseur de Green dans la direction 32° .

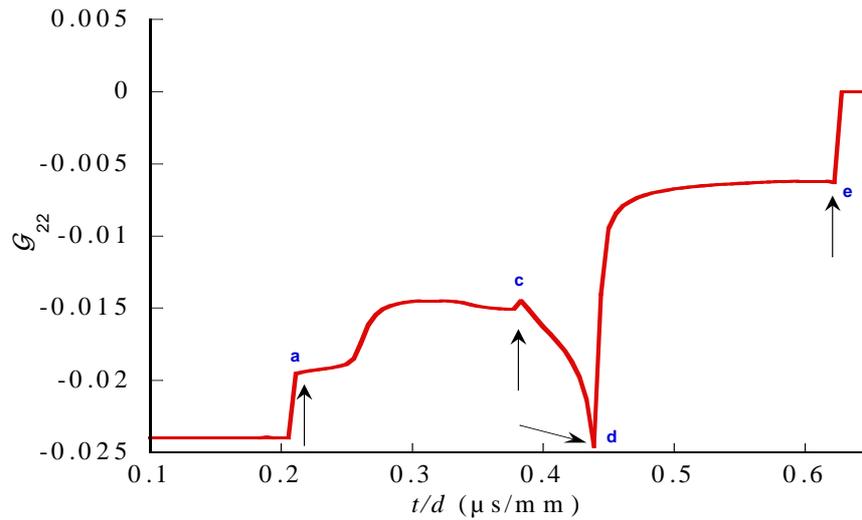


Figure I-8(c) : composante \mathcal{G}_{22} du tenseur de Green dans la direction 32° .

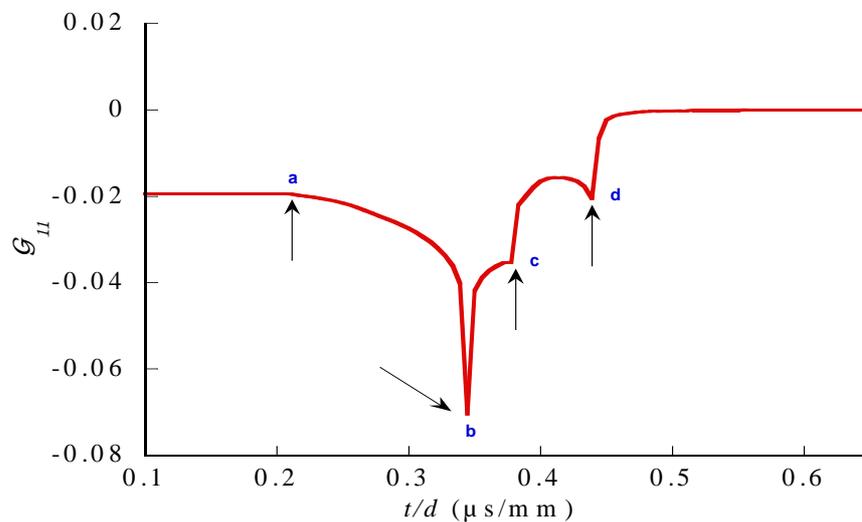


Figure I-8(d) : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green dans la direction 32° .

I.6.2. Correspondance entre courbes de réponse et intersections plans/surface de lenteur

En raison de la symétrie du matériau, les composantes possibles non nulles du tenseur de Green sont les composantes $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 2, 3$, et la composante \mathcal{G}_{11} . Les valeurs de θ considérées sont présentées dans la Figure I-5. Dans cette figure les arrivées d'onde notées a, b, ..., pour chaque valeur de θ choisi sont représentées.

Les surfaces de lenteurs de phase correspondant aux solutions du polynôme de Christoffel, ont été présentées en coordonnées polaires dans la Figure I-2. Ces courbes évoluent avec le rapport t/d jusqu'à la disparition de la dernière, ce qui correspond à la dernière arrivée

d'onde. Les courbes d'intersection des ces surfaces avec le plan $m \cdot s = t/d$, sont présentées dans ce paragraphe, afin de montrer l'arrivée des différentes ondes, et les différentes formes des singularités associées.

Les Figures I-10, montrent les courbes d'intersection dans la direction la moins compliquée, direction de l'axe de symétrie d'angle $\theta = 0^\circ$. Les courbes d'intersection choisies sont prises aux moments d'arrivées des ondes ou juste avant. Parmi les deux composantes non nulles dans cette direction, on prend la composante \mathcal{G}_{11} (Figure I-9).

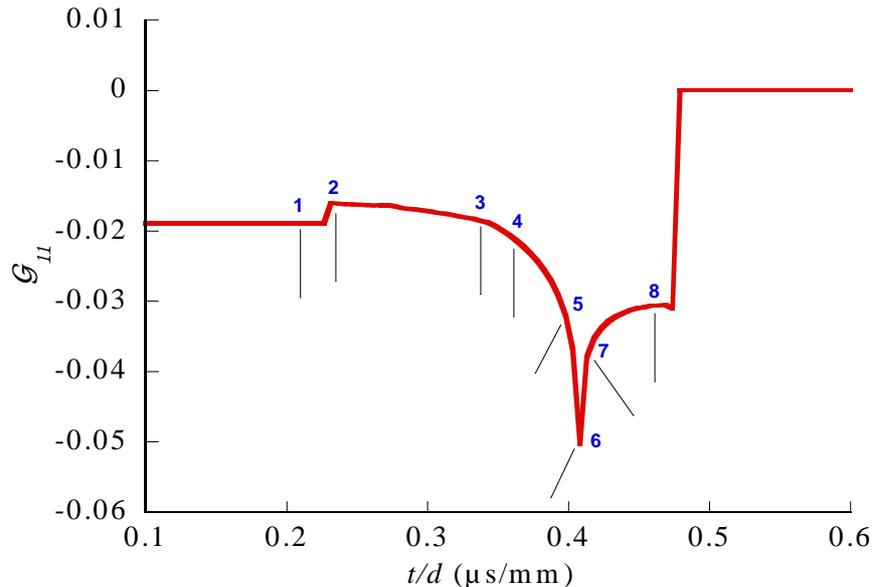
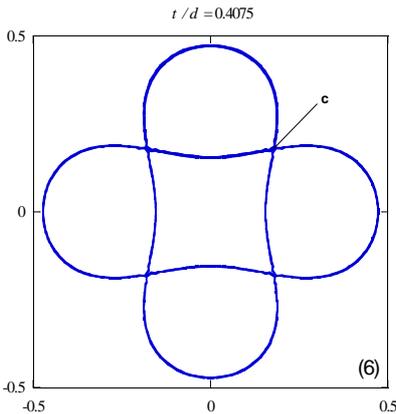
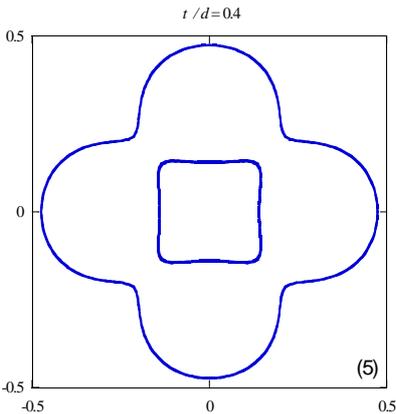
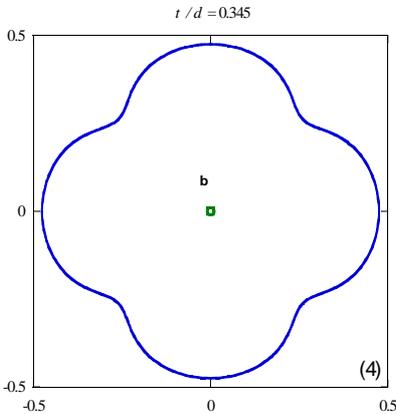
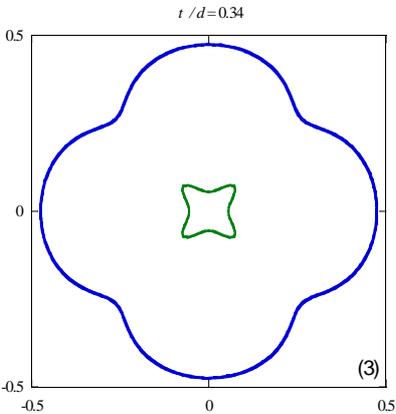
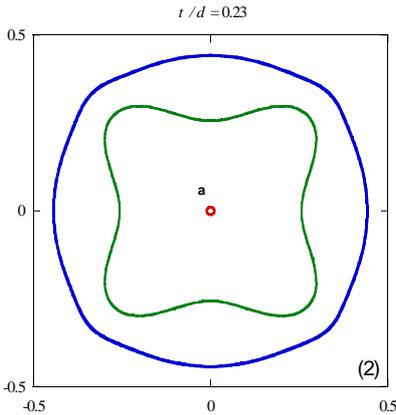
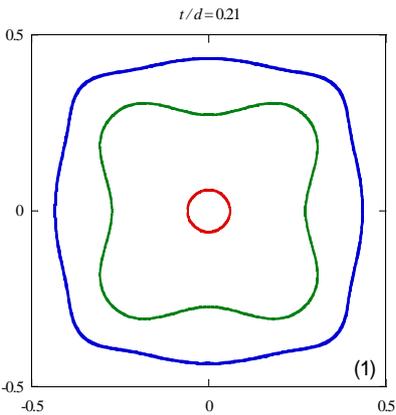


Figure I-9 : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green, suivant la direction 0° . Les chiffres mentionnés correspondent aux différentes courbes d'intersection avec le plan $s_x = t/d$ présentées dans les Figures I-10 (1) à (8).

La Figure I-10(1) représente la courbe d'intersection des 3 courbes de lenteurs avec le plan t/d avant la première arrivée. Après un peu de temps, la surface de lenteur de l'onde la plus rapide (mode longitudinal) est arrivée (Figure I-10(2)), cette arrivée est associée à un point elliptique (Figure I-4(a)) qui se traduit dans la réponse par une discontinuité en a. La propagation continue jusqu'à l'arrivée de la première onde transversale (Figure I-10(4)) qui est associée aussi à un point elliptique et qui se traduit par un changement de pente dans la fonction réponse (point b). La surface de lenteur correspondant à la deuxième onde transversale (l'onde la plus lente) est ensuite la seule à couper le plan $s_x = t/d$. La courbe se sépare ensuite en quatre morceaux. Cette séparation est associée à un point hyperbolique (Figure I-4 (b)) qui provoque une singularité dans la fonction réponse (point c). L'intersection entre le plan et la surface de lenteur est caractérisé maintenant par quatre petites courbes (Figure I-10(7)), le long desquelles l'intégrale sera calculée et qui se réduisent ensemble à quatre points (dernière arrivée d'onde) (Figure I-10(8)). Cette dernière arrivée est associée à un point elliptique, en provoquant une discontinuité dans la fonction réponse (point d).



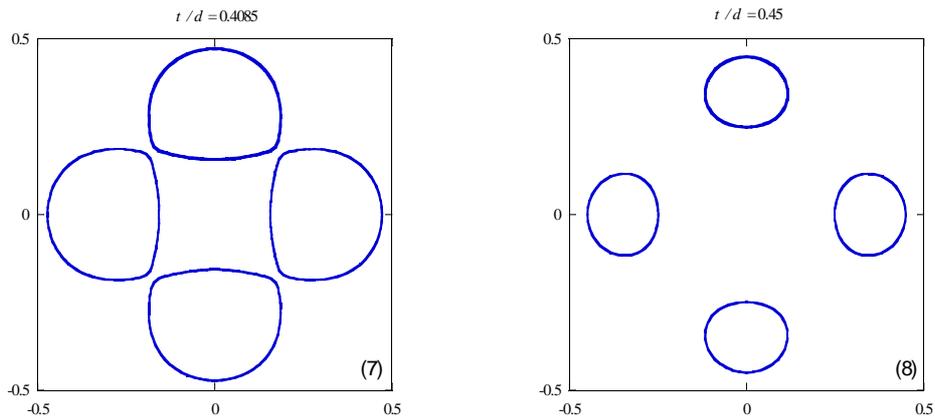


Figure I-10 : courbes d'intersection des surfaces de lentilles avec le plan $s_x = t/d$, suivant la direction 0° .

On choisit ensuite la direction d'angle 32° , celle qui passe par l'extrémité de la corne (Figure I.5), les composantes de la fonction de Green dans cette direction sont présentées dans les Figures I-8 (a) à (d). Parmi ses 4 composantes non nulles, on prend le cas de \mathcal{G}_{11} (Figure I.11) pour montrer les différentes arrivées d'onde et la nature de leur comportement singulier.

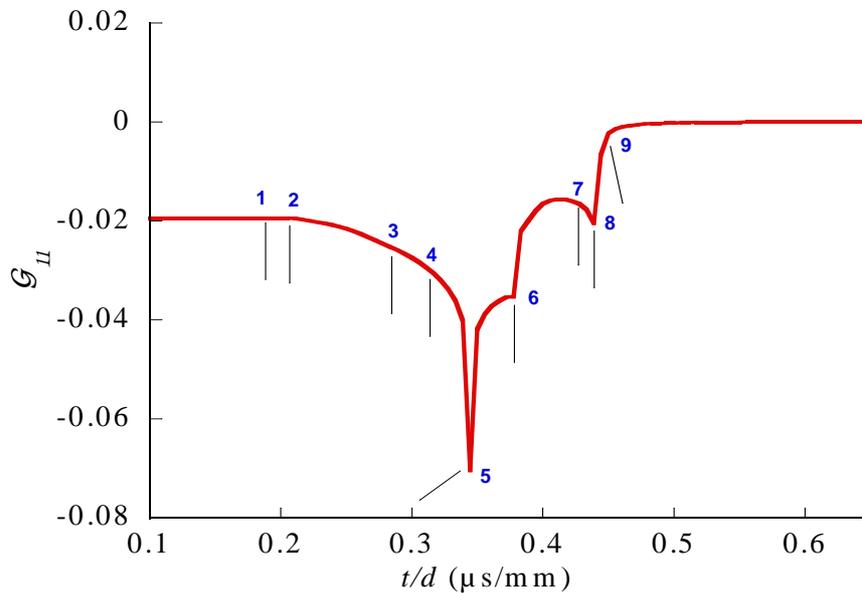
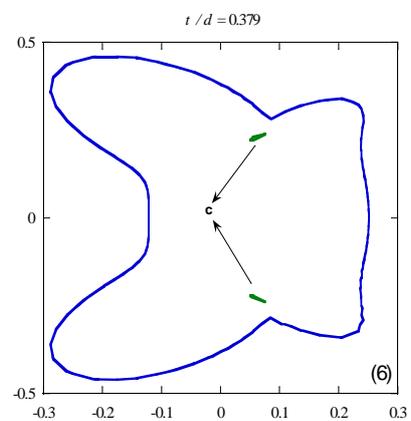
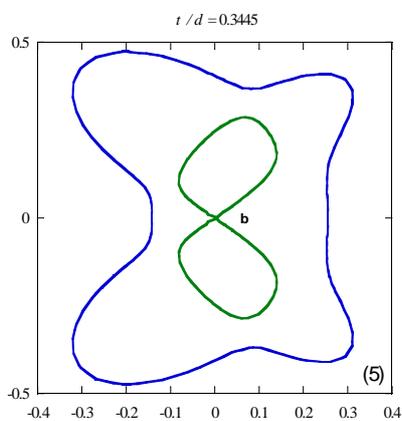
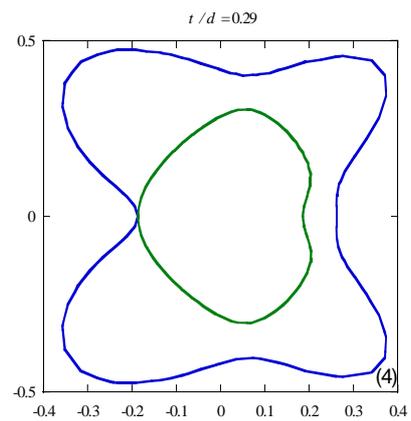
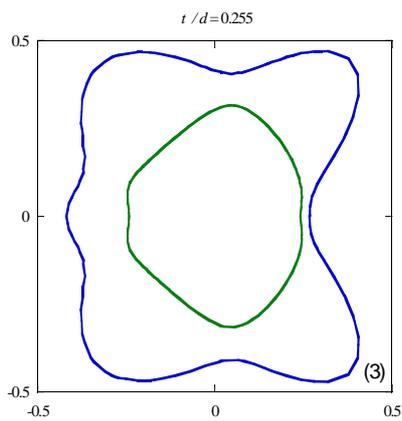
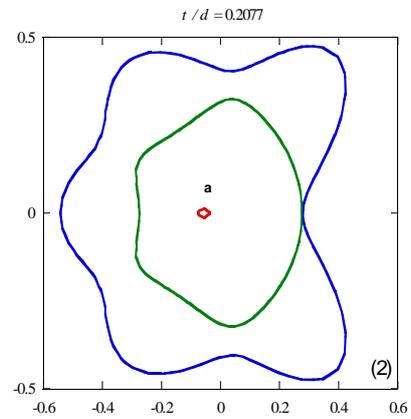
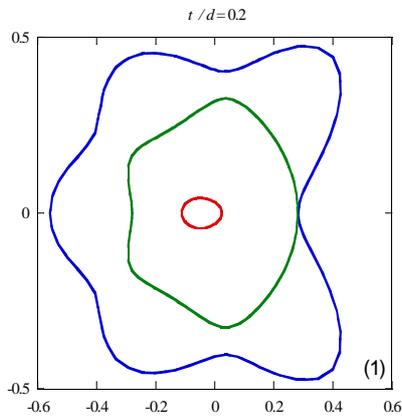


Figure I-11 : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green, suivant la direction 32° . Les chiffres mentionnés correspondent aux différentes courbes d'intersection avec le plan $s_x = t/d$ présentées dans les Figures I-12 (1) à (10).

La Figure I-12(1) représente la courbe d'intersection dans la direction 32° des 3 surfaces de lentilles avec le plan $s_x = t/d$ juste avant la première arrivée, de l'onde quasi-longitudinale (Figure I-12(2)). Cette arrivée correspond à un changement de pente (point a), puisqu'elle était associée à un point elliptique. Puis les coupes d'intersection se suivent (Figures I-12(3)-

(4) jusqu'à la coupe où la courbe de lenteur de la première onde quasi-transversale commence à se séparer (Figure I-12(5)), en provoquant une singularité (point b) dans la fonction réponse puisqu'elle est associée à un point hyperbolique.



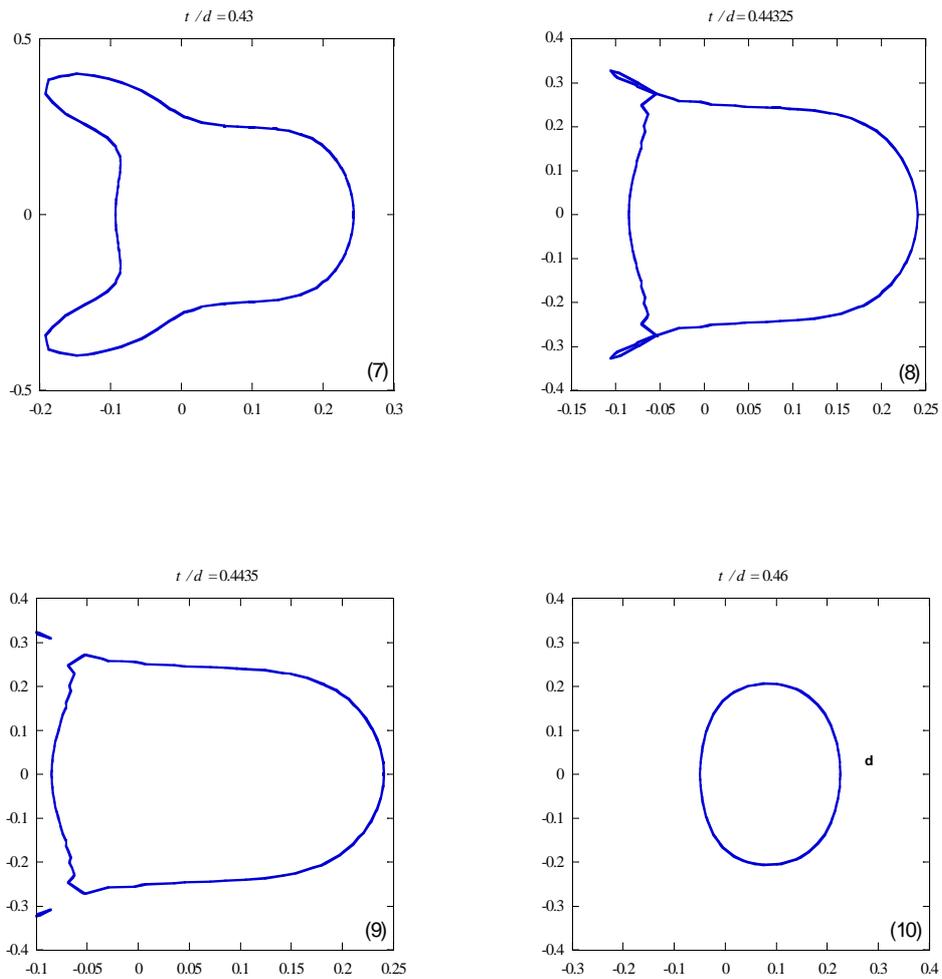


Figure I-12 : courbes d'intersection des surfaces de lenteurs avec le plan $s_x = t/d$, suivant la direction 32° .

Après la séparation de la surface de lenteur de l'onde T1, l'intersection avec le plan comprend la courbe de T2 et 2 courbes de T1. Cette intersection reste dans cet état jusqu'aux arrivées simultanées de T1 sous forme d'un point elliptique (Figure I-12(6)), qui se traduit par une discontinuité dans \mathcal{G}_{11} (point c). L'intersection n'est plus alors que la courbe de lenteur de T2, qui diminue avec le rapport t/d (Figures I-12 (7 à 9)), jusqu'à la dernière arrivée associée à un point elliptique (changement de pente, point d) (Figure I-12(10)).

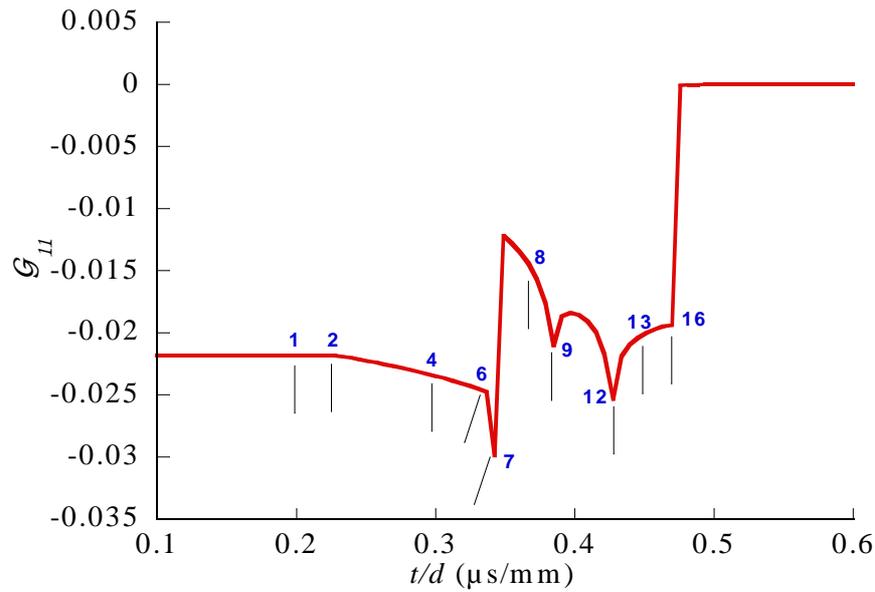


Figure I-13 : composante \mathcal{G}_{11} du tenseur de Green, suivant la direction 5° . Les chiffres mentionnés correspondent aux différentes courbes d'intersection avec le plan $s_x=t/d$ présentées dans les Figures I-14 (1) à (16).

Les deux directions choisies ne représentent pas les directions les plus compliquées, car elles ne passent pas au travers de la corne pour lesquelles il peut y avoir huit arrivées d'ondes ou plus. Afin de visualiser ces différentes arrivées, on a choisi la direction d'angle 5° qui passe au sein de la corne. Les composantes de la fonction de Green dans cette direction sont présentées dans la Figure I.7. Parmi ces 4 composantes non nulles, on prend le cas de \mathcal{G}_{11} (Figure I.13) pour montrer les différentes arrivées d'onde et la nature de leur comportement singulier.

La Figure I-14(1) représente la courbe d'intersection dans la direction 5° des 3 surfaces de lenteurs avec le plan $s_x = t/d$ avant l'arrivée d'onde longitudinale. L'onde quasi-longitudinale arrive en premier (Figure I.14 (2)). Cette arrivée provoque un changement de pente (point a), puisqu'elle est associée à un point elliptique. La Figure I.14(4) montre deux points coniques, sans arrivée d'onde. La courbe de lenteur de la première onde quasi-transversale commence à se séparer sur la Figure I.14(7)) en provoquant une singularité (point b) dans la fonction réponse puisqu'elle est associée à un point hyperbolique. Après la séparation de la courbe de lenteur de l'onde T1, l'intersection avec le plan comprend une courbe de lenteur de T2 et 2 courbes de T1 jusqu'à l'arrivée simultanée des 2 courbes de T1, sous forme d'un décrochement (point c). Après l'arrivée de T1, l'intersection est seulement avec la courbe de lenteur de T2, jusqu'au le moment où une partie de cette courbe commence à se séparer (Figure I.14 (10)), cette séparation est associée à un point hyperbolique qui provoque une singularité dans la fonction réponse (point d), et l'intersection avec le plan $s_x = t/d$ donne naissance maintenant à deux courbes de la lenteur T2. Cette situation reste jusqu'à la séparation de la courbe la plus grande en 3 parties (Figure I.14 (12)). Cette

séparation est associée à deux points hyperboliques symétriques qui créent une autre singularité dans la fonction réponse (point e).

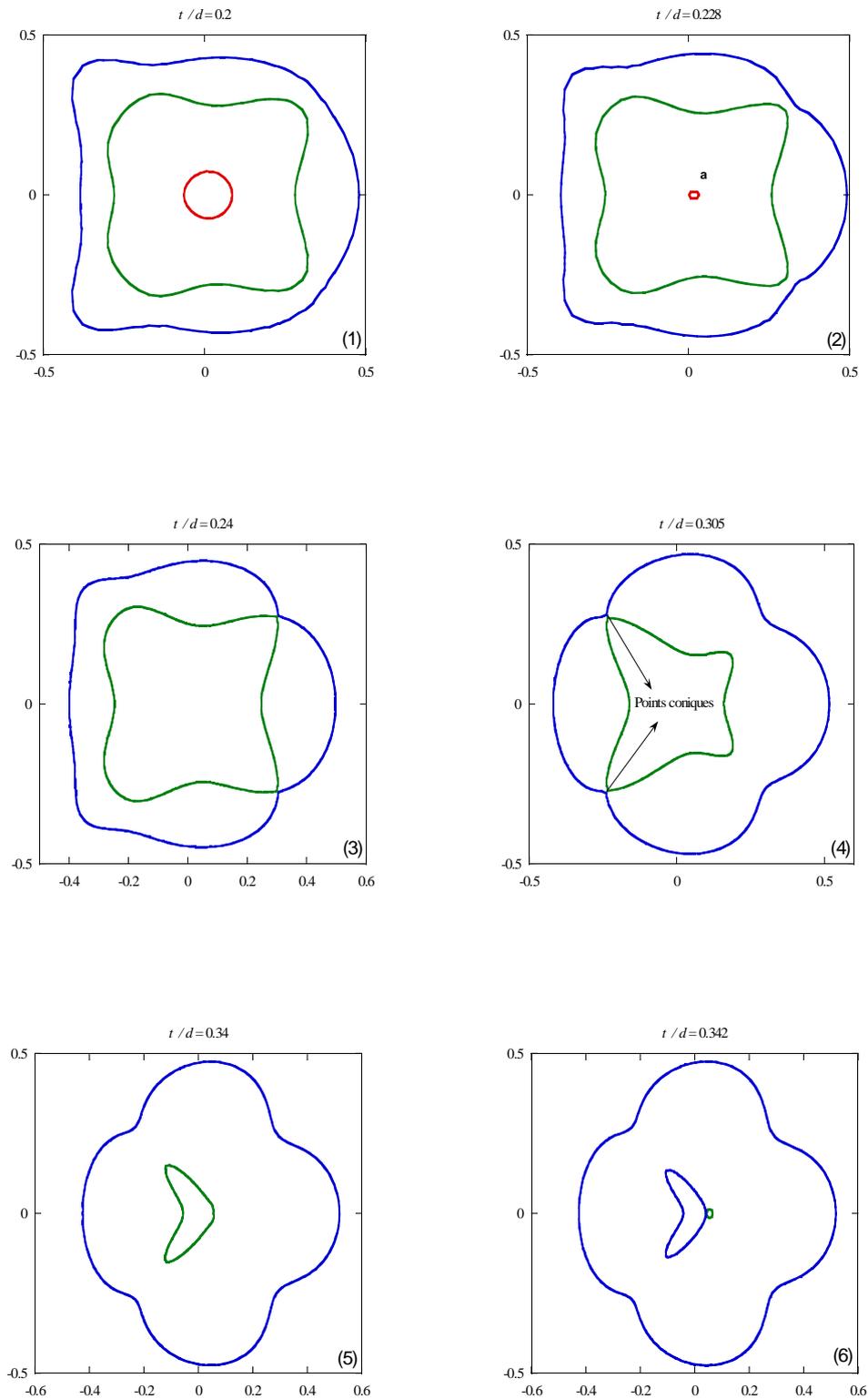


Figure I-14 : courbes d'intersection des surfaces de lentilles avec le plan $s_x = t/d$, suivant la direction 5° (de 1 à 6).

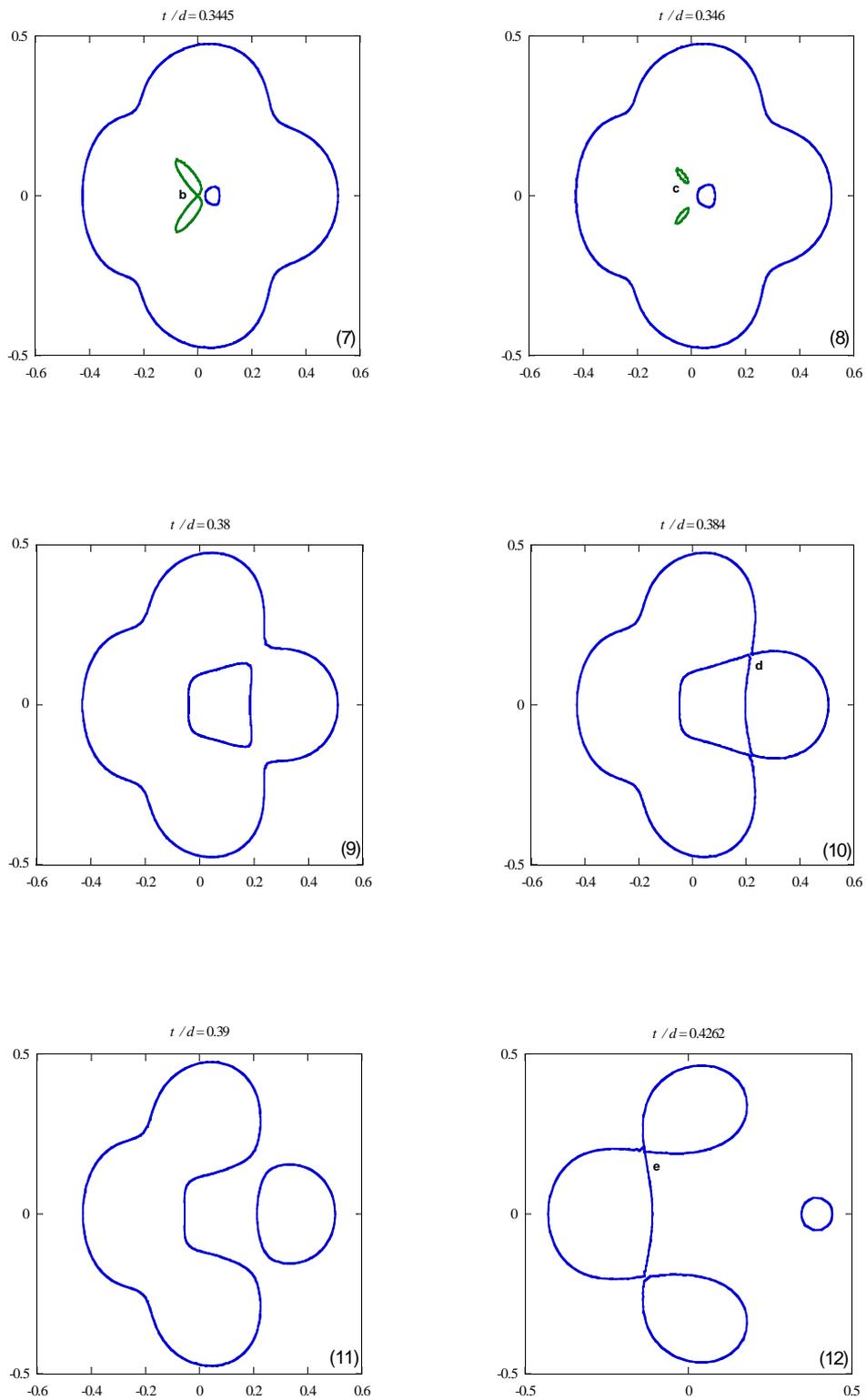


Figure I-14 : courbes d'intersection des surfaces de lentilles avec le plan $s_x = t/d$, suivant la direction 5° (de 7 à 12).

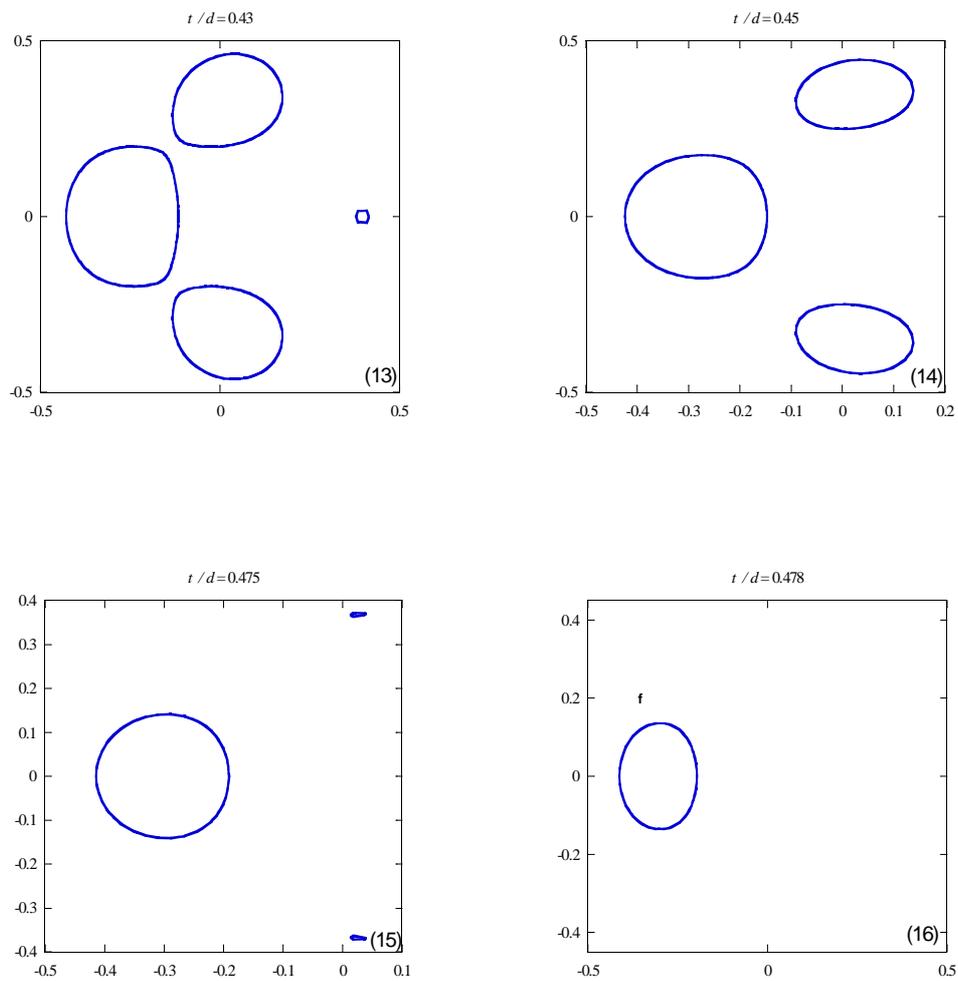


Figure I-14 : courbes d'intersection des surfaces de lentures avec le plan $s_x = t/d$, suivant la direction 5° (de 13 à 16).

Après cette séparation, l'intersection avec le plan $s_x = t/d$ donne naissance à quatre courbes de la lenture (Figures I.14 (13 à 16)). Ces courbes disparaissent avec une arrivée d'onde associée à un point elliptique qui provoque une discontinuité (point f).

I.7 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons calculé la réponse en déplacement à une force appliquée en un point dans un solide anisotrope infini. Le tenseur de Green a été écrit comme une intégrale sur la sphère unité qui a été ensuite réécrite comme une intégrale sur les surfaces de lenteur. La partie théorique décrite est employée pour calculer la fonction de Green pour plusieurs orientations. Une partie importante de l'étude des courbes de réponses porte sur l'étude des points singuliers, correspondant aux arrivées successives des ondes. À travers un certain nombre d'exemples numériques, nous avons illustré la présence de ces singularités dans les fonctions de réponse pour le monocristal de cuivre. Ces singularités sont toujours présentes dans les fonctions de réponse d'un espace élastique semi-infini ou une plaque.

I.9 Références

- Alshits V. I. and Lothe J. (2004). *Some basic properties of bulk elastic waves in anisotropic media*. Wave Motion **40**, pp. 297–313.
- Bakulin A. V. and Tyurikov L. G. (1996). *The field of a point source in an elastic homogeneous anisotropic medium*. Acoustical Physics **42**(6), pp. 651–656.
- Barnett D.M. et Lothe J. (1973). *Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, greens function and surface wave (Rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic solids*. Phys. Norv. **7**, pp. 13-19.
- Lothe J. et Barnett D.M. (1976). *On the existence of surface-wave solutions for anisotropic elastic half-spaces with free surface*. Journal of Applied Physics. **47**(2), pp. 428-433.
- Burridge R. (1967). *The singularity on the plane lids of the wave surface of elastic media with cubic symmetry*. Quart. Journ. Mech. and Applied Math **XX**, pp. 41–56.
- Every A. G. and Kim K. Y. (1994). *Time domain dynamic response functions of elastically anisotropic solids*. J. Acoust. Soc. Am. **95**(5), pp. 2505–2515.
- Every A. G., Kaplunov A. V., Pichugin A.V. and Rogerson G.A. (2007). *Wave arrival singularities at cuspidal points in the acoustic wave surfaces of anisotropic solids and their unfolding under weak spatial dispersion*. Proc. R. Soc. A, **463**, 2983-3000.
- Every A.G., Kim K.Y. et Maznev A.A., (1997) *The elastodynamique response of a semi-infinite anisotropic solid to sudden surface loading*. , J. Acoust. Soc. Am., Vol. 102, (2).
- Royer D. and Dieulesaint E. (1996). *Ondes élastiques dans les solides*. (Masson, Paris), ISBN 2-225-85422-X.
- Wang C.Y. and Achenbach J. D. (1993). *A new method to obtain 3-d Green's functions for anisotropic solids*. Wave Motion **18**, pp. 273–289.
- Yeatts F. R. (1984). *Elastic radiation from a point force in an anisotropic medium*. Phys. Rev. B **29**(4), pp. 1674–1684.

Chapitre II : Tenseur de Green en présence d'interfaces planes

II.1 Introduction	43
II.2 Présentation de problème.....	43
II.3 Formalisme de Stroh.....	44
II.3.1 Généralités.....	44
II.3.2 Mise sous la forme d'un problème différentiel du premier ordre	44
II.3.3 Solution générale.....	45
II.3.4. Ondes montantes et descendantes, normalisation	46
II.3.4.1 Solutions homogènes	46
II.3.4.2 Solutions hétérogènes	47
II.3.5. Numérotation.....	47
II.4 Champ élastodynamique dans le demi-espace	48
II.4.1 Formulation du problème	48
II.4.1.1 Expressions générales des champs de déplacement et de contrainte verticale	48
II.4.1.2. Conditions aux limites	48
II.4.1.3. Tenseur de Green.....	48
II.4.2. Résolution du problème en respectant la causalité.....	49
II.4.2.1. Causalité et transformation de Fourier	49
II.4.2.2. Inversion de la matrice \mathcal{R}_{up}	50
II.4.3 Retour dans l'espace physique sur l'interface	51
II.5 Réponse d'une plaque à une sollicitation aux interfaces	53
II.5.1 Méthode 1 : Résolution en pulsation et série de Debye	53
II.5.1.1. Transformée du tenseur de Green.....	53
II.5.1.2 Décomposition en série de Debye	54
II.5.1.3 Réécriture de la série de Debye.....	56
II.5.1.4 Retour numérique dans l'espace physique	58
II.5.1.5 Exemple d'une plaque de carbone-époxy.....	59
II.5.2. Méthode 2 : Résolution semi-analytique en temps.....	61
II.5.2.1 Ecriture du problème	61
II.5.2.2 Discrétisation dans l'épaisseur	62
II.5.2.3 Retour dans l'espace physique	63
II.5.2.4 Exemple d'une plaque de monocristal de cuivre.....	64
II.6 Conclusion	66
II.8 Références	67

II.1 Introduction

Le problème de la réponse en déplacement d'un solide élastique semi-infini ou d'une plaque à une source ponctuelle ou une ligne-source située à la surface a reçu une large attention au cours des années, depuis les travaux de Lamb [*Lamb, 1904*]. Dans ce chapitre, nous calculons la réponse en déplacement d'un demi-espace élastique anisotrope (Figure II-1) puis d'une plaque à une excitation ponctuelle à la surface. Notre approche consiste à appliquer la transformée de Fourier aux équations d'élasticité et aux conditions aux limites, par rapport au temps et aux coordonnées spatiales parallèles aux interfaces, à résoudre ensuite les équations algébriques en résultant, puis à écrire la transformée inverse. Dans le cas d'un demi-espace, une réécriture de cette dernière formule permet de réduire le calcul numérique de la réponse à l'évaluation d'une intégrale simple et non plus d'une intégrale triple. Dans le cas de la plaque, il faut mettre en oeuvre une méthode de calcul numérique. Deux méthodes sont présentées : une première consiste à décomposer le champ comme une succession de réflexions aux interfaces ; le champ s'écrit sous la forme d'une série de Debye dont la troncature permet un calcul numérique par transformée de Fourier rapide en pulsation puis évaluation d'intégrale double sur les lenteurs. La seconde consiste à résoudre analytiquement le problème dans un espace hybride avant de revenir dans l'espace physique par double transformée de Fourier rapide spatiale. Des réponses sont présentées dans le cas d'une plaque de carbone-époxy à fibres orientées selon une seule direction parallèle aux interfaces, puis dans celui d'un monocristal de cuivre dont les axes cristallographiques sont parallèles aux axes du repère.

II.2 Présentation de problème

Un milieu continu élastique anisotrope non absorbant occupant le demi-espace « $z \geq 0$ » est soumis à une densité surfacique de force appliquée à sa surface. Le trièdre de référence $(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z)$ est représenté sur la Figure II.1, où le vecteur \mathbf{n}_z est normal à la surface libre et dirigée vers le solide.

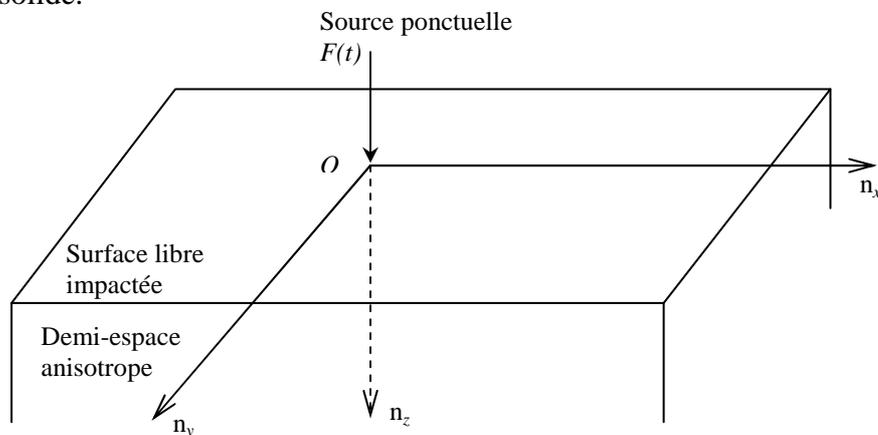


Figure II-1 Géométrie du problème.

Dans le cas d'une plaque d'épaisseur h , les interfaces seront placées en « $z = h / 2$ » et « $z = -h / 2$ » de sorte que le plan « $z = 0$ » soit un plan de symétrie.

II.3 Formalisme de Stroh

II.3.1 Généralités

Dans le cas d'un demi-espace ou d'une plaque (chapitre suivant), le formalisme de Stroh est particulièrement adapté pour écrire et résoudre ce type de problème de propagation ([Stroh, 1962] et, par exemple, [Ingebrigtesen et Tønning, 1969], [Barnett et Lothe, 1973], [Chadwick et Smith, 1977], [Aki et Richards, 1980], [van der Hijden, 1987]). Cela consiste à considérer un vecteur $U(x, t)$ de dimension six pour caractériser l'état vibratoire du milieu. Ce vecteur contient dans notre cas la vitesse et la contrainte verticale réduite :

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} \partial_t u(x, t) \\ \sigma_z(x, t) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

II.3.2 Mise sous la forme d'un problème différentiel du premier ordre

En considérant une transformée de Fourier spatiale dans le plan de l'interface et temporelle :

$$\begin{aligned} U(s_{//}, z, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\omega(t-s_{//} \cdot x_{//})} \hat{U}(x, y, z, t) d\mathbf{x}_{//} dt \\ &\Downarrow \\ U(x_{//}, z, t) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \omega^2 e^{-i\omega(t-s_{//} \cdot x_{//})} \hat{U}(s_{//}, z, \omega) d\mathbf{s}_{//} d\omega \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

où $\mathbf{x}_{//} = x \mathbf{n}_x + y \mathbf{n}_y$ désigne la position horizontale et $\mathbf{s}_{//} = s_x \mathbf{n}_x + s_y \mathbf{n}_y$ le vecteur *lenteur de phase* dans le plan xy .

La deuxième loi de Newton [Éq. (I.5)] devient dans le domaine $(s_{//}, z, \omega)$:

$$-\omega^2 \hat{u}(s_{//}, z, \omega) = -i\omega \left[s_x \hat{\sigma}_x(s_{//}, z, \omega) + s_y \hat{\sigma}_y(s_{//}, z, \omega) \right] + \partial_z \hat{\sigma}_z(s_{//}, z, \omega), \quad (\text{II.3})$$

et la loi de Hooke [Éq. (I.7)] :

$$\hat{\sigma}_j(s_{//}, z, \omega) = -i\omega (\mathbf{n}_j \diamond \mathbf{s}_{//}) \hat{u}(s_{//}, z, \omega) + (\mathbf{n}_j \diamond \mathbf{n}_z) \partial_z \hat{u}(s_{//}, z, \omega), \quad j = x, y, z. \quad (\text{II.4})$$

En substituant $\hat{\sigma}_x(s_{//}, z, \omega)$ et $\hat{\sigma}_y(s_{//}, z, \omega)$ dans l'équation (II.3) grâce à l'équation (II.4) pour $j = x$ et $j = y$, il vient immédiatement, en utilisant la bilinéarité du produit \diamond :

$$\begin{cases} \partial_z \hat{\mathbf{u}}(s_{//}, z, \omega) = i\omega (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{s}_{//}) \hat{\mathbf{u}}(s_{//}, z, \omega) + (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} \hat{\sigma}_z(s_{//}, z, \omega) \quad , \\ \partial_z \hat{\sigma}_z(s_{//}, z, \omega) = \omega^2 (\mathbf{s}_{//} \diamond \mathbf{s}_{//} - \mathbb{1}_3) \hat{\mathbf{u}}(s_{//}, z, \omega) + i\omega (\mathbf{s}_{//} \diamond \mathbf{n}_z) \partial_z \hat{\mathbf{u}}(s_{//}, z, \omega) \quad , \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

ce qui donne le système différentiel du premier ordre suivant :

$$\partial_z \hat{\mathbf{U}}(s_{//}, z, \omega) = -i\omega \underbrace{\begin{bmatrix} -(\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{s}_{//}) & (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} \\ \mathbf{s}_{//} \diamond \mathbf{s}_{//} - \mathbb{1}_3 - (\mathbf{s}_{//} \diamond \mathbf{n}_z) (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{s}_{//}) & -(\mathbf{s}_{//} \diamond \mathbf{s}_z) (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z)^{-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{N}(s_{//})} \hat{\mathbf{U}}(s_{//}, z, \omega), \quad (\text{II.6})$$

où $\mathcal{N}(s_{//})$ désigne la matrice de Stroh, à coefficient réels, qui ne dépend que du vecteur lenteur $s_{//}$ et pas de la pulsation ω .

II.3.3 Solution générale

La résolution du système (II.6) passe par la diagonalisation de la matrice $\mathcal{N}(s_{//})$ qui admet six valeurs et vecteurs propres $\zeta_\alpha(s_{//})$ et $\xi_\alpha(s_{//})$. La solution générale de (II.6) s'écrit alors dans la base des six solutions :

$$\hat{\mathbf{U}}(s_{//}, z, \omega) = \sum_{\alpha=1}^6 a_\alpha(s_{//}, \omega) e^{-i\omega \zeta_\alpha(s_{//}) z} \xi_\alpha(s_{//}) = \Xi(s_{//}) \underbrace{\text{diag} \left[e^{-i\omega \zeta_\alpha(s_{//}) z} \right]_{1 \leq \alpha \leq 6}}_{\mathcal{E}(s_{//}, z, \omega)} \mathbf{A}(s_{//}, \omega) \quad (\text{II.7})$$

où $\Xi(s_{//})$ désigne la matrice des polarisations, $\mathcal{E}(s_{//}, z, \omega)$, la matrice de propagation, et $\mathbf{A}(s_{//}, \omega)$ le vecteur des composantes a_α dans la base des solutions.

Orthogonalité Considérons la matrice \mathcal{T} [Ducasse et Deschamps, 2010] :

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & \frac{-\rho}{4} \mathbb{1}_3 \\ \frac{-\rho}{4} \mathbb{1}_3 & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{II.8})$$

où ρ désigne la masse volumique du milieu.

On peut démontrer que la matrice des polarisations satisfait la propriété d'orthogonalité [Barnett et Lothe, 1973] :

$$\Xi^T \mathcal{T} \Xi = \text{diag}(\phi_\alpha), \quad (II.9)$$

$1 \leq \alpha \leq 6$

ou encore :

$$1 \leq \alpha \leq 6, \quad 1 \leq \beta \leq 6, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow \xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\beta = 0. \quad (II.10)$$

II.3.4. Ondes montantes et descendantes, normalisation

La matrice de Stroh $\mathcal{N}(s_{//})$ étant à coefficients réels, son polynôme caractéristique est de degré 6 à coefficients réels et admet donc un nombre pair $2r$ de solutions réelles (ondes homogènes) et $(3 - r)$ paires de solutions complexes conjuguées (ondes hétérogènes).

II.3.4.1 Solutions homogènes

Lorsque la lenteur ζ_α est réelle, alors la polarisation associée ξ_α peut être choisie à composantes réelles. Dans ce cas, le nombre $\phi_\alpha = \xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha$ coïncide avec la composante verticale (selon z) du vecteur de Poynting, lequel représente le flux surfacique moyen de puissance ([Royer et Dieulesaint, 1996] par exemple).

En effet, le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\Psi = -\rho \langle \Sigma \partial_t \mathbf{u} \rangle = \frac{-\rho}{4} \left[\hat{\Sigma}^* (i\omega \hat{\mathbf{u}}) + \hat{\Sigma} (i\omega \hat{\mathbf{u}})^* \right], \quad (II.11)$$

dont la troisième composante s'écrit par conséquent :

$$\psi_z = \frac{-\rho}{4} \left[\hat{\sigma}_z^* \cdot (i\omega \mathbf{u}) + \hat{\sigma}_z \cdot (i\omega \hat{\mathbf{u}})^* \right] = \hat{\mathbf{U}}^+ \mathcal{T} \hat{\mathbf{U}}. \quad (II.12)$$

Si $\hat{\mathbf{U}} = \xi_\alpha e^{-i\omega \zeta_\alpha (s_{//})z}$ avec ζ_α réel et ξ_α à composantes réelles, alors $\psi_z = \xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha = \phi_\alpha$.

Si ϕ_α est strictement positif, le flux vertical de puissance est orienté vers le haut et l'onde homogène est dite « montante », et on peut arbitrairement normaliser la polarisation, à composantes réelles, de sorte que $\xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha = 1$. Si ϕ_α est strictement négatif, l'onde homogène est dite « descendante » et on peut choisir la polarisation telle que $\xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha = -1$.

Si ϕ_α est nul, on peut démontrer que $\zeta_\alpha(s_{//})$ est une racine multiple du polynôme caractéristique et que cela correspond à une onde dont la direction de l'énergie est dans le plan parallèle à l'interface, avec au moins deux polarisations possibles. Ce cas particulier, survenant sur un ensemble de vecteurs lenteurs $s_{//}$ de mesure nulle, ne sera pas traité dans la suite du document.

II.3.4.2 Solutions hétérogènes

Si ζ_α est une lenteur à partie imaginaire non nulle, avec une polarisation ξ_α , alors son conjugué ζ_α^* est aussi une racine du polynôme caractéristique avec une polarisation ξ_α^* conjuguée. L'onde hétérogène est dite « montante » si son amplitude décroît avec z – la partie imaginaire $\mathcal{I}m(\zeta_\alpha)$ de la lenteur verticale et la pulsation ω sont de signes opposés –, et elle est dite « descendante » sinon – les deux valeurs $\mathcal{I}m(\zeta_\alpha)$ et ω sont de même signe–.

La Relation (II.10) implique que chaque onde hétérogène à une direction d'énergie parallèle à l'interface puisque nécessairement $\xi_\alpha^+ \mathcal{T} \xi_\alpha = \xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha^* = 0$. La polarisation est arbitrairement normalisée de sorte que : $\xi_\alpha^+ \mathcal{T} \xi_\alpha = \xi_\alpha^T \mathcal{T} \xi_\alpha^* = 1$.

II.3.5. Numérotation

En se plaçant dans le cas où toutes les racines du polynôme caractéristique sont des racines simples, on choisit de numéroter les couples $[\zeta_\alpha(s_{//}), \xi_\alpha(s_{//})]$ comme indiqué dans le Tableau II-1 [Ducasse et Deschamps, 2010].

Numéro	Qualité de l'onde	Lenteur	Normalisation
$1 \leq \alpha \leq r$	Montante homogène	ζ_α réelle	$\xi_\alpha^+ J \xi_\alpha = 1$
$r \leq \alpha \leq 3$	Montante hétérogène	$\mathcal{I}m(\zeta_\alpha) < 1$	$\xi_\alpha^T J \xi_\alpha = 1$
$4 \leq \alpha \leq 3 + r$	Descendante homogène	ζ_α réelle	$\xi_\alpha^+ J \xi_\alpha = -1$
$3 + r \leq \alpha \leq 6$	Descendante hétérogène	$\zeta_\alpha = \zeta_{\alpha-3}^*$	$\xi_\alpha = \xi_{\alpha-3}^*$

Tableau II-1 : Numérotation et normalisation des couples $[\zeta_\alpha(s_{//}), \xi_\alpha(s_{//})]$, en supposant que la matrice de STROH admet $2r$ valeurs propres réelles distinctes et $3-r$ couples de valeurs propres conjuguées

Cela permet de décomposer la matrice des polarisations en 4 blocs 3×3 :

$$\Xi(s_{//}) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\text{up}}(s_{//}) & \mathcal{P}_{\text{down}}(s_{//}) \\ \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//}) & \mathcal{R}_{\text{down}}(s_{//}) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.13})$$

de sorte que $\mathcal{P}_{\text{up}}(s_{//})$ et $\mathcal{P}_{\text{down}}(s_{//})$ sont les matrices des polarisations de la vitesse pour les ondes montantes et descendantes, respectivement. $\mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//})$ et $\mathcal{R}_{\text{down}}(s_{//})$ sont les matrices des polarisations de la contrainte verticale.

Remarque Par construction, la matrice des polarisations Ξ dépend du signe de la pulsation. En effet, pour une pulsation négative, il faut remplacer la matrice Ξ par sa matrice conjuguée Ξ^* .

II.4 Champ élastodynamique dans le demi-espace

II.4.1 Formulation du problème

II.4.1.1 Expressions générales des champs de déplacement et de contrainte verticale

Avec une source localisée sur la frontière du demi-espace élastique anisotrope, le champ élastodynamique dans celui-ci ne contient que des ondes montantes (se propageant selon les z croissants). Les champs de déplacement et de contrainte verticale s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{u}(s_{//}, z, \omega) &= \frac{1}{i\omega} \mathcal{P}_{\text{down}}(s_{//}) \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) a(s_{//}, \omega) \\ \text{et } \hat{\sigma}_z(s_{//}, z, \omega) &= \frac{1}{i\omega} \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//}) \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) a(s_{//}, \omega), \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

où la matrice de propagation est définie par $\mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) = \text{diag} \left[e^{-i\omega \zeta_\alpha(s_{//}) z} \right]_{1 \leq \alpha \leq 3}$.

Pour caractériser les champs il suffit de déterminer les trois coefficients a_1, a_2 et a_3 du vecteur a , en fonction du vecteur lenteur $s_{//}$ dans le plan de l'interface et de la pulsation ω .

II.4.1.2. Conditions aux limites

Il suffit pour cela d'introduire la condition aux limites :

$$\hat{\sigma}_z(s_{//}, 0, \omega) = -f_0(s_{//}, \omega) = \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//}) a(s_{//}, \omega), \quad (\text{II.15})$$

consistant à appliquer une densité surfacique de force f_0 sur la frontière du demi-espace. Il faut donc « inverser » la matrice $\mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//})$ en respectant la causalité, comme expliqué au paragraphe II.4.2.2.

II.4.1.3. Tenseur de Green

La transformée du champ de déplacement s'écrit donc, d'après (II.14) et (II.15) :

$$\hat{u}(s_{//}, z, \omega) = \hat{\mathcal{H}}(s_{//}, z, \omega) f_0(s_{//}, \omega), \quad (\text{II.16})$$

où $\hat{\mathcal{H}}$ désigne la transformée du tenseur de Green telle que :

$$\hat{\mathcal{H}}(s_{//}, z, \omega) = -\frac{1}{i\omega} \mathcal{P}_{\text{up}}(s_{//}) \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) \mathcal{Q}(s_{//}) \text{ et } \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//}) \mathcal{Q}(s_{//}) = \mathbb{1}_3. \quad (\text{II.17})$$

II.4.2. Résolution du problème en respectant la causalité

II.4.2.1. Causalité et transformation de Fourier

Pour comprendre la problématique, prenons une équation différentielle très simple :

$$g'(t) + (\beta - i\omega_0)g(t) = \delta(t), \text{ avec } g(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad (\text{II.18})$$

dont l'unique solution est $g(t) = u(t)e^{-i\omega_0 t} e^{-\beta t}$.

L'utilisation de la transformation de Laplace permet de résoudre ce problème puisqu'on trouve facilement: $G(s) = 1 / [s + (\beta - i\omega_0)]$. La fonction G est bien la transformée de Laplace de la fonction g . En revanche, c'est différent si l'on utilise la transformation de Fourier, et ceci pour plusieurs raisons. Tout d'abord, si β est strictement positif, la fonction g n'admet pas de transformée de Fourier, même au sens des distributions. Ensuite, l'utilisation de la transformation de Fourier pour résoudre l'Équation (II.18) donne :

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\beta + i(\omega - \omega_0)} \Leftrightarrow g(t) = \begin{cases} u(t)e^{-i\omega_0 t} e^{-\beta t} & , \beta > 0 ; \\ \frac{1}{2} \text{sign}(t) e^{-i\omega_0 t} & , \beta = 0 ; \\ -u(-t)e^{-i\omega_0 t} e^{-\beta t} & , \beta < 0 ; \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Il est donc nécessaire de définir une opération algébrique d'inversion dans l'ensemble des transformées de Fourier des signaux causaux de sorte que [Maznev et Every, 1997] :

$$i(\omega - \omega_0) \hat{g}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \hat{g}(\omega) = \frac{1}{i(\omega - \omega_0)} + \pi \delta(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow g(t) = u(t)e^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{II.20})$$

Plus généralement,

$$(\omega - \omega_0)^n \hat{g}(\omega) = \hat{q}(\omega) \Leftrightarrow \hat{g}(\omega) = \hat{q}(\omega) \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^n} - i\pi \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \delta^{[n-1]}(\omega - \omega_0) \right]. \quad (\text{II.21})$$

II.4.2.2. Inversion de la matrice \mathcal{R}_{up}

Ondes de Rayleigh Les lenteurs s_R qui annulent le déterminant $r(s_R)$ de la matrice $\mathcal{R}_{\text{up}}(s_R)$ correspondent aux ondes de Rayleigh. Ces ondes de surfaces satisfont « $\mathcal{R}_{\text{up}}(s_R) \mathbf{a}_R = \mathbf{O}_3$ » avec un vecteur \mathbf{a}_R à composantes non toutes nulles.

Dans le cas isotrope, cette onde a été mise en évidence par Lord Rayleigh en 1885, d'où vient le nom de cette onde. L'onde de Rayleigh présente ainsi dans un premier temps un grand intérêt pour les géophysiciens et les sismologues. En comparaison, l'utilisation de cette onde dans l'appareillage électronique est plus récente. Elle émane de la création du radar durant la seconde guerre mondiale. Depuis, un grand nombre d'appareillages utilisant cette onde ont vu leur apparition : du radar et des systèmes de communication professionnels, aux téléviseurs et téléphone portables. Des applications de l'onde de Rayleigh en électronique sont données [Lewis, 1995], [Morgan, 1998]. Tout comme les ondes de volume, l'onde de Rayleigh est également utilisée en caractérisation des matériaux, en contrôle non destructif pour détecter par exemple la présence des défauts à la surface d'une structure.

En supposant que le déterminant $r(s_{//})$ s'annule sur une portion de courbe du plan des lenteurs $s_{//}$, on peut faire un développement limité de $r(s_{//})$ au voisinage d'une valeur s_R , supposée racine simple de r , dans la direction \mathbf{n} :

$$r(s_R + \Delta s \mathbf{n}) = [\nabla r(s_R) \cdot \mathbf{n}] \Delta s + \mathcal{O}(\Delta s^2). \quad (\text{II.22})$$

Tout vecteur lenteur est le rapport d'un vecteur d'onde par une pulsation, ces deux paramètres étant indépendants. Soit une pulsation ω_R arbitraire et le vecteur d'onde $k_{//} = \omega_R s_R$. On choisit ensuite un deuxième vecteur d'onde $k'_{//}$ tel que $k'_{//} = \omega [s_R + \Delta s \mathbf{n}]$ et $r\left(\frac{1}{\omega_R} k'_{//}\right) = 0$, de sorte que l'équation $\omega = \omega_R$ soit l'équation de la courbe des lenteurs de RAYLEIGH, au voisinage de s_R (voir Figure II-2).

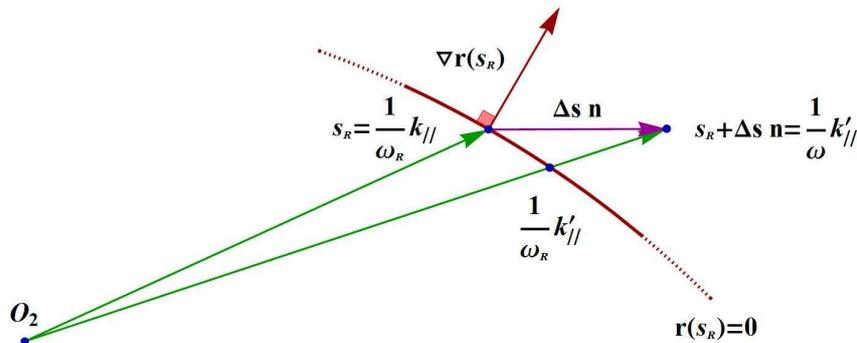


Figure II-2 : Définitions des variables au voisinage de la courbe des lenteurs de RAYLEIGH.

Par un raisonnement géométrique simple, on obtient la relation suivante :

$$\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \left[\frac{\omega}{\omega_R} (\mathbf{s}_R + \Delta s \mathbf{n}) - \mathbf{s}_R \right] = \Delta s \frac{\omega}{\omega_R} [\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{n}] + \frac{\omega - \omega_R}{\omega_R} [\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R] \quad (\text{II.23})$$

On obtient ainsi un développement limité en ω au voisinage de ω_R :

$$r\left(\frac{1}{\omega} \mathbf{k}'\right) = -[\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R] \frac{\omega - \omega_R}{\omega_R} + \mathcal{O}\left[(\omega - \omega_R)^2\right], \quad (\text{II.24})$$

d'où on déduit l'inverse de $r(\mathbf{s}_R + \Delta s \mathbf{n})$ dans l'espace des transformées de FOURIER des signaux causaux, au voisinage de \mathbf{s}_R :

$$\frac{1}{r(\mathbf{s}_R + \Delta s \mathbf{n})} - i\pi \frac{\omega_R}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R} \delta(\omega - \omega_R) = \frac{1}{r(\mathbf{s}_R + \Delta s \mathbf{n})} - \frac{i\pi}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R} \left| \frac{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{n}} \right| \delta(\Delta s). \quad (\text{II.25})$$

Par conséquent, la matrice inverse de la matrice $\mathcal{R}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//})$, dans l'espace des transformées de FOURIER des signaux causaux et au voisinage de \mathbf{s}_R peut s'écrire :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}) = \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1}(\mathbf{s}_{//}) - \frac{i\pi}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R} \left| \frac{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{n}} \right| \delta(\Delta s) \mathcal{R}_{\text{up}}^C(\mathbf{s}_R). \quad (\text{II.26})$$

Rappelons que $\mathcal{R}_{\text{up}}^C$ désigne la matrice adjointe, ou comatrice, de la matrice \mathcal{R}_{up} .

II.4.3 Retour dans l'espace physique sur l'interface

Le tenseur de Green s'obtient par triple transformation de Fourier inverse :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}_{//}, z, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \omega^2 e^{-i\omega(t - \mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{s}_{//}, z, \omega) d\omega d\mathbf{s}_{//} \quad (\text{II.27})$$

Si l'on veut juste le tenseur de Green qui permet de passer de la densité surfacique de force \mathbf{f}_0 au champ des déplacements à l'interface ($z = 0$), alors on obtient, en prenant en compte la nécessité de remplacer les matrices $\mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//})$ et $\mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//})$ par leurs conjuguées pour les pulsations négatives :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}_{//}, 0, t) = & \frac{1}{8\pi^3} \partial_t \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t - \mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} d\omega \right] \mathcal{R}e \left[\mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//}) \mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}) \right] d\mathbf{s}_{//} \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} i \text{sign}(\omega) e^{-i\omega(t - \mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} d\omega \right] \mathcal{I}m \left[\mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//}) \mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}) \right] d\mathbf{s}_{//} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Le tenseur de GREEN respectant la causalité, à tout instant positif t , on peut écrire [Every et al., 1997] :

$$\mathcal{H}(-\mathbf{x}_{//}, 0, -t) = 0 = \frac{1}{8\pi^3} \partial_t \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t-\mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} d\omega \right] \mathcal{R}e \left[\mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//}) \mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}) \right] d\mathbf{s}_{//} - \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} i \text{sign}(\omega) e^{-i\omega(t-\mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} d\omega \right] \mathcal{I}m \left[\mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_{//}) \mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}) \right] d\mathbf{s}_{//} \right\} \quad (\text{II.29})$$

En conclusion, l'écriture se simplifie, en utilisant la propriété :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau), \quad (\text{II.30})$$

pour donner l'intégrale simple le long de la droite d'équation « $\mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//} = t$ » dans l'espace des lenteurs, paramétrée par $\mathbf{s}_{//} = (t/d)\mathbf{m} + s\mathbf{n}$, avec une position d'observation $\mathbf{x}_{//} = d\mathbf{m}$ (d et \mathbf{m} sont respectivement la distance et la direction d'observation) et les vecteurs \mathbf{m} et \mathbf{n} sont normés et orthogonaux :

$$\mathcal{H}(d\mathbf{m}, 0, t) = \frac{u(t)}{2\pi^2} \partial_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}e \left[\mathcal{P}_{\text{up}} \left(\frac{t}{d}\mathbf{m} + s\mathbf{n} \right) \mathcal{Q} \left(\frac{t}{d}\mathbf{m} + s\mathbf{n} \right) \right] ds \right\}, \quad (\text{II.31})$$

soit, en remplaçant la matrice \mathcal{Q} par son expression [Éq. (II.26)] :

$$\mathcal{H}(d\mathbf{m}, 0, t) = \frac{u(t)}{2\pi^2} \partial_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}e \left[\mathcal{P}_{\text{up}} \left(\frac{t}{d}\mathbf{m} + s\mathbf{n} \right) \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} \left(\frac{t}{d}\mathbf{m} + s\mathbf{n} \right) \right] ds + \pi \sum_{\substack{\mathbf{s}_R = \frac{t}{d}\mathbf{m} + s\mathbf{n} \\ r(\mathbf{s}_R) = 0}} \left| \frac{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{n}} \right| \mathcal{I}m \left[\frac{1}{\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{s}_R} \mathcal{P}_{\text{up}}(\mathbf{s}_R) \mathcal{R}_{\text{up}}^C(\mathbf{s}_R) \right] \right\}. \quad (\text{II.32})$$

Notons que cette dernière formule diverge si la droite d'équation « $\mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//} = t$ » tangente la courbe des lenteurs de Rayleigh [c'est-à-dire $\nabla r(\mathbf{s}_R) \cdot \mathbf{n} = 0$]. Cela coïncide avec l'arrivée de l'onde de Rayleigh dans la direction \mathbf{m} .

En conclusion, le calcul de la réponse en déplacement d'un demi-espace élastique anisotrope sur l'interface à une source ponctuelle en surface se ramène au calcul, analytique lorsque c'est possible ou numérique, d'une intégrale simple, comme c'est le cas avec la méthode de Cagniard-De Hoop [Bescond, 1997]. Les quelques calculs effectués ne sont pas présentés ici. Quelques détails sur le cas isotrope sont donnés dans l'Annexe C.

II.5 Réponse d'une plaque à une sollicitation aux interfaces

La première méthode présentée consiste à résoudre le problème dans le domaine $(s_{//}, z, \omega)$ puis à revenir dans l'espace physique en utilisant les séries de Debye, une transformée de Fourier rapide en pulsation et l'évaluation d'une intégrale double sur les lenteurs. Le problème du choix de la base de travail pour la décomposition en réflexions successives d'ondes montantes et descendantes est détaillé. Quelques résultats de simulation dans le cas d'une plaque de carbone-époxy sont fournis.

Une seconde méthode consiste à poser le problème dans le domaine $(s_{//}, z, t)$ et à en déterminer une solution semi-analytique. Cette deuxième méthode sera appliquée au cas d'un monocristal de cuivre.

II.5.1 Méthode 1 : Résolution en pulsation et série de Debye

II.5.1.1. Transformée du tenseur de Green

Si on applique sur la face supérieure de la plaque une force réduite surfacique $f_{\text{top}}(x_{//}, t)$ et sur la face inférieure $-f_{\text{bottom}}(x_{//}, t)$, après transformations de Fourier spatiale 2D par rapport à $x_{//}$ et temporelle, la réponse s'écrit dans le domaine $(s_{//}, z, \omega)$, d'après l'équation (II.7) :

$$\hat{U}(s_{//}, z, \omega) = \Xi(s_{//}) \mathcal{E}(s_{//}, z, \omega) \mathcal{M}(s_{//}, \omega) \hat{F}(s_{//}, \omega) = \mathcal{K}(s_{//}, \omega) \hat{F}(s_{//}, \omega), \quad (\text{II.33})$$

où le vecteur d'entrée \mathbf{F} , de dimension six s'écrit : $\mathbf{F}(s_{//}, \omega) = \begin{bmatrix} f_{\text{bottom}}(x_{//}, t) \\ \dots \\ f_{\text{top}}(x_{//}, t) \end{bmatrix}$ et où les

matrices \mathcal{M} et \mathcal{K} sont des matrices 6×6 , ou tenseurs de Green.

En séparant les ondes montantes et descendantes, la matrice de propagation s'écrit:

$$\mathcal{E}(s_{//}, z, \omega) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathcal{E}_{\text{down}}(s_{//}, z, \omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{II.34})$$

On peut alors formuler les conditions aux limites suivantes avec les notations données par l'équation (II.13) sous forme d'équation matricielle :

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//})\mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, -\frac{h}{2}, \omega) & \mathcal{R}_{\text{down}}(s_{//})\mathcal{E}_{\text{down}}(s_{//}, -\frac{h}{2}, \omega) \\ \hline \mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//})\mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, \frac{h}{2}, \omega) & \mathcal{R}_{\text{down}}(s_{//})\mathcal{E}_{\text{down}}(s_{//}, \frac{h}{2}, \omega) \end{array} \right]}_{\hat{\mathcal{L}}(s_{//}, \omega)} \hat{\mathcal{M}}(s_{//}, \omega) = \mathbb{I}_6; \quad (\text{II.35})$$

Avec \mathcal{R}_{up} et $\mathcal{R}_{\text{down}}$ sont définis dans II.13. Il faut donc inverser la matrice $\hat{\mathcal{L}}(s_{//}, \omega)$, dont les racines du déterminant correspondent aux modes de LAMB de la plaque : couples (lenteur de phase $s_{//}$, produit pulsation-épaisseur ωh), en prenant en compte les problèmes de causalité évoqués précédemment (§I1.4.2).

Pour simplifier les notations, on réécrit la matrice $\hat{\mathcal{L}}$ en omettant les arguments :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{\text{up}} & \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} \\ \hline \mathcal{R}_{\text{up}} & \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} \\ \hline \mathcal{R}_{\text{down}} & \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \\ \hline \mathcal{R}_{\text{down}} & \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \end{array} \right]. \quad (\text{II.36})$$

II.5.1.2 Décomposition en série de Debye

Une autre méthode pour obtenir le tenseur de Green \mathcal{M} est de le construire par réflexions successives aux interfaces. D'après ce qu'on a vu précédemment pour le demi-espace, la source sur l'interface supérieure engendre une onde descendante de coefficients formant le vecteur $\mathbf{a}_{\text{down}}^{[0]}(s_{//}, \omega)$ satisfaisant :

$$\mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \mathbf{a}_{\text{down}}^{[0]} = \mathbf{f}_{\text{top}}. \quad (\text{II.37})$$

De même, la source sur l'interface inférieure engendre une onde montante :

$$\mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} \mathbf{a}_{\text{up}}^{[0]} = \mathbf{f}_{\text{bottom}}, \quad (\text{II.38})$$

soit :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{\text{up}} & \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} \\ \hline \mathbf{O}_3 & \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \end{array} \right] \mathbf{A}^{[0]} = \hat{\mathbf{F}}(s_{//}, \omega). \quad (\text{II.39})$$

Ensuite, chaque onde résultant de la n -ième réflexion est caractérisée par son vecteur $\mathbf{A}^{[n]}(s_{//}, \omega h)$. Ses trois composantes montantes se réfléchissent sur l'interface supérieure pour donner trois composantes descendantes, et réciproquement de sorte que la $(n+1)$ -ième réflexion satisfait :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_3 & \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \\ \hline \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} & \mathbf{O}_3 \end{array} \right] \mathbf{A}^{[n+1]} = - \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \end{array} \right] \mathbf{A}^{[n]}, \quad (\text{II.40})$$

qui correspond à une condition de contraintes normales nulles aux deux interfaces.

Le vecteur des six coefficients, caractérisant le champ total dans la plaque qui peut se construire par superposition de tous les champs réfléchis successifs, est la somme de tous les vecteurs $A^{[n]}$. Sans se préoccuper de la causalité, on en déduit la propriété sur le tenseur de Green \mathcal{M} :

$$\hat{\mathcal{M}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_3 & -(\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \\ \hline -(\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbf{O}_3 \end{array} \right]^n \right) \left[\begin{array}{c|c} (\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & (\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \end{array} \right]. \quad (\text{II.41})$$

Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{X}^n = (\mathbb{I}_6 - \mathcal{X})^{-1}$, on a bien [Éq. (II.36)] :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_3 & (\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \\ \hline (\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbb{I}_3 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c|c} (\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & (\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_3 & (\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}} \mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \\ \hline (\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \mathcal{R}_{\text{down}}^{-1} \mathcal{R}_{\text{up}} \mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbb{I}_3 \end{array} \right]^{-1} = \hat{\mathcal{L}}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

L'intérêt de cette décomposition en série de Debye réside dans le fait que lorsqu'on s'intéresse uniquement au début d'une réponse temporelle en champ proche ou moyen, il suffit de prendre uniquement les premiers termes de la série. Cette troncature élimine du coup les pôles du déterminant de la matrice $\hat{\mathcal{L}}$ et les modes de Lamb se forment lorsqu'on fait tendre le nombre de termes de la série vers l'infini. Cependant, cette approche par série de Debye pose une difficulté. En effet, cette série diverge dans certains cas [Deschamps et Cao, 1991]. Cette divergence provient de problèmes énergétiques lorsqu'on est en présence d'au moins un couple de solutions hétérogènes ($r \leq 2$, cf. Tableau II-1), comme cela a été montré dans [Ducasse et Deschamps, 2010] pour une plaque isotrope décrit par la Figure II.3.

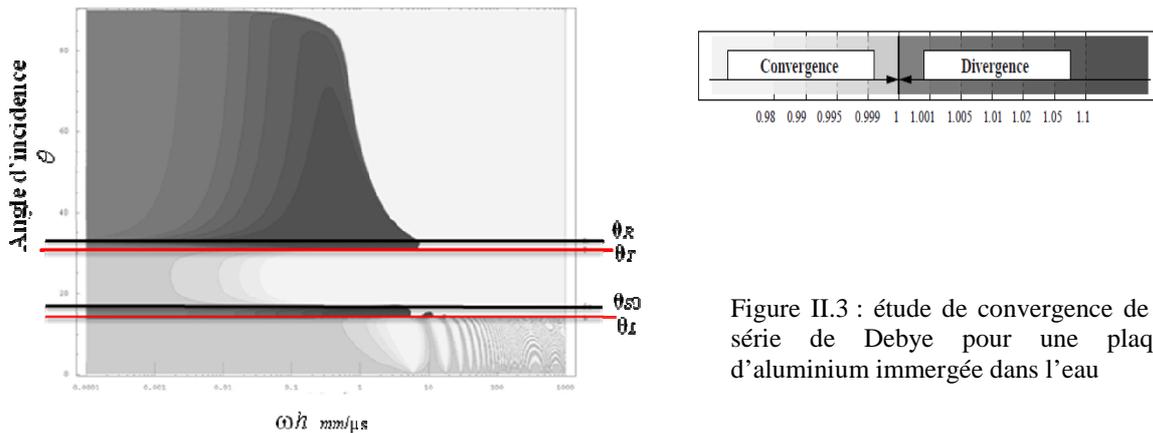


Figure II.3 : étude de convergence de la série de Debye pour une plaque d'aluminium immergée dans l'eau

En dehors du problème de convergence, nous avons vu dans le cas du demi-espace que la contrainte de causalité nécessite des précautions lors de l'inversion des matrices $\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}}$ et $\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}}$ (pôles des déterminants correspondant aux ondes de Rayleigh).

II.5.1.3 Réécriture de la série de Debye

Pour pallier les problèmes de convergence, on effectue un changement de base qui s'opère de la façon suivante [Ducasse et Deschamps, 2010] : pour chaque paire de solutions hétérogènes conjuguées $(\zeta_\alpha, \xi_\alpha)$ et $(\zeta_{\alpha+3} = \zeta_\alpha^*, \xi_{\alpha+3} = \xi_\alpha^*)$, on prend comme nouvelle base de solution (exemple Figure II.4):

$$\begin{cases} \hat{Q}_\alpha(s_{//}, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega z \zeta_\alpha} \xi_\alpha(s_{//}) + e^{-i\omega z \zeta_\alpha^*} \xi_\alpha^*(s_{//}) \right) \\ \hat{Q}_{\alpha+3}(s_{//}, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega z \zeta_\alpha} \xi_\alpha(s_{//}) - e^{-i\omega z \zeta_\alpha^*} \xi_\alpha^*(s_{//}) \right) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Cela revient à remplacer la matrice $Q(s_{//}, z, \omega) = \Xi(s_{//}) \mathcal{E}(s_{//}, z, \omega)$ par la matrice :

$$\hat{Q}(s_{//}, z, \omega) = Q(s_{//}, z, \omega) \Omega(s_{//}) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) & \tilde{\mathcal{P}} \mathcal{E}_{\text{down}}(s_{//}, z, \omega) \\ \hline \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{E}_{\text{up}}(s_{//}, z, \omega) & \tilde{\mathcal{R}} \mathcal{E}_{\text{down}}(s_{//}, z, \omega) \end{array} \right], \quad (\text{II.44})$$

dans laquelle on ne peut plus séparer la partie polarisation (Ξ) de la partie propagation (\mathcal{E}), et où la matrice Ω est définie dans le Tableau II-2.

$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$
\mathbb{I}_6 base inchangée	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & \mathcal{X} \\ \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{X} & 0 & 0 & -\mathcal{X} \end{pmatrix}$

TABLEAU II-2 : Matrice Ω de changement de base en fonction du nombre r , où $2r$ est le nombre de solutions homogènes et $3-r$ le nombre de paires de solutions hétérogènes conjuguées, et avec $\mathcal{X} = 1 / \sqrt{2}$.

Dans cette nouvelle base, le vecteur des composantes s'écrit $\tilde{\mathbf{A}} = \Omega \mathbf{A}$ et le flux vertical moyen de puissance devient :

$$\psi_z = \hat{\mathbf{U}}^+ \mathcal{T} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{A}}^+ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & -\mathbf{I}_3 \end{array} \right) \tilde{\mathbf{A}} = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^3 |\tilde{a}_\alpha|^2}_{\text{ondes montantes}} - \underbrace{\sum_{\alpha=4}^6 |\tilde{a}_\alpha|^2}_{\text{ondes descendantes}}, \quad (\text{II.45})$$

de sorte que le flux total est la somme des flux, positifs pour les trois ondes montantes et négatifs pour les trois ondes descendantes. La nouvelle base de travail est orthogonale au sens du flux vertical d'énergie.

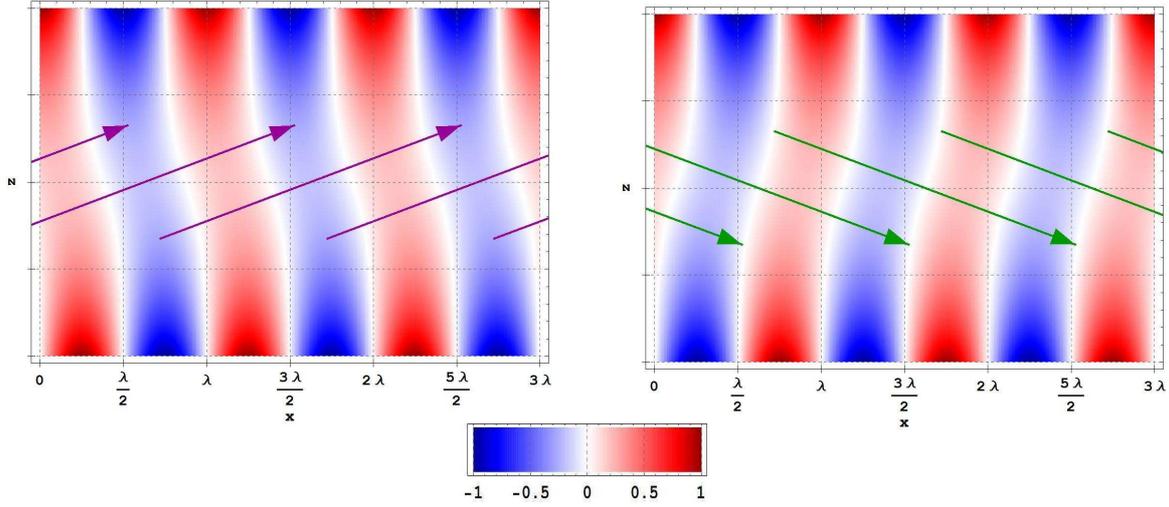


Figure II.4 : fronts d'une onde montante (à gauche) et d'une onde descendante (à droite) construite à partir de deux ondes hétérogènes conjuguées (cas isotrope).

La récurrence se récrit :

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \end{array} \right] \tilde{\mathbf{A}}^{[0]} = \hat{\mathbf{F}}(s_{//}, \omega) \quad (\text{II.46})$$

et

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_3 & \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}} \\ \hline \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}} & \mathbf{O}_3 \end{array} \right] \tilde{\mathbf{A}}^{[n+1]} = - \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \end{array} \right] \tilde{\mathbf{A}}^{[n]}, \quad (\text{II.47})$$

ce qui donne une deuxième écriture de la transformée du tenseur de Green, sous forme d'une série de Debye qui ne diverge plus pour certaines valeurs de la lenteur horizontale $s_{//}$:

$$\hat{\mathcal{M}} = \Omega \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{O}_3 & -(\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{bottom}} \\ \hline -(\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{top}} & \mathbf{O}_3 \end{array} \right]^n \right) \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{up}}^{\text{bottom}})^{-1} & \mathbf{O}_3 \\ \hline \mathbf{O}_3 & (\tilde{\mathcal{R}}\mathcal{E}_{\text{down}}^{\text{top}})^{-1} \end{array} \right]. \quad (\text{II.48})$$

II.5.1.4 Retour numérique dans l'espace physique

Pour une excitation donnée $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{//}, t)$, on en déduit la transformée du vecteur d'état :

$$\hat{\mathbf{U}}_m(\mathbf{s}_{//}, z, \omega) = \mathcal{Q}(\mathbf{s}_{//}, z, \omega) \hat{\mathcal{M}}_m(\mathbf{x}_{//}, \omega) \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{s}_{//}, \omega), \quad (\text{II.49})$$

m désignant le nombre de termes de la série de Debye que l'on prend dans Éq. (II.48) ou dans Éq. (II.41), au choix selon des critères de vitesse de convergence.

Le retour théorique dans le domaine physique se fait par :

$$\mathbf{U}_m(\mathbf{x}_{//}, z, t) = \int_{\mathbf{R}^2} \left[\frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(t - \mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//})} \hat{\mathbf{U}}_m(\mathbf{s}_{//}, z, \omega) d\omega \right] d\mathbf{s}_{//}. \quad (\text{II.50})$$

On suppose que la transformée $\mathbf{F}(\mathbf{s}_{//}, \omega)$ est nulle au-dessus d'une certaine pulsation et au-dessus d'un certain nombre d'onde de manière à satisfaire les conditions du Théorème de Shannon et pouvoir ainsi procéder à un calcul numérique.

Le fait de tronquer la série permet « d'écourter » la réponse \mathbf{U}_m pour pouvoir utiliser une transformation de Fourier rapide en pulsation et calculer ainsi numériquement :

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{s}_{//}, z, \tau) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \hat{\mathbf{U}}_m(\mathbf{s}_{//}, z, \omega) d\omega, \quad (\text{II.51})$$

pour chaque vecteur lenteur $\mathbf{s}_{//}$, chaque position verticale z , et chaque instant τ .

Ce calcul est parallélisable par nature (pour éventuellement utiliser un cluster d'ordinateurs) et nécessite de grosses capacités de stockage pour mémoriser toutes les valeurs de $\mathbf{L}_m(\mathbf{s}_{//}, z, \tau)$.

Pour obtenir la réponse à une position donnée $\mathbf{x}_{//}$, il suffit de calculer numériquement l'intégrale double :

$$\mathbf{U}_m(\mathbf{s}_{//}, z, t) = \int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{L}_m(\mathbf{s}_{//}, z, t - \mathbf{s}_{//} \cdot \mathbf{x}_{//}) \cdot d\mathbf{s}_{//}. \quad (\text{II.52})$$

Ce calcul a été fait dans l'exemple qui suit.

II.5.1.5 Exemple d'une plaque de carbone-époxy

Avec la notation de Voigt, on considère le tenseur des rigidités élastiques réduites suivant, caractérisant un matériau composite carbone-époxy dont les fibres de carbone sont toutes orientées selon l'axe des y :

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} xx & yy & zz & yz & xz & xy \end{matrix} \\
 \begin{matrix} xx \\ yy \\ zz \\ yz \\ xz \\ xy \end{matrix} & \begin{pmatrix}
 8.63 & 3.66 & 4.51 & 0 & 0 & 0 \\
 3.66 & 71.90 & 4.25 & 0 & 0 & 0 \\
 4.51 & 4.25 & 8.21 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2.61 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1.47 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.07
 \end{pmatrix}
 \end{matrix} \quad (\text{Unité: } mm^2 \cdot \mu s^{-2}). \quad (II.53)$$

Une plaque d'épaisseur $3,6 \text{ mm}$ est excitée sur sa face supérieure par un actionneur piézoélectrique de diamètre 5 mm de sorte que l'excitation s'écrit :

$$F(x_{//}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & f(x_{//})\varphi(t) \end{pmatrix}^T,$$

les fonctions f et φ étant décrites Figure II.5.

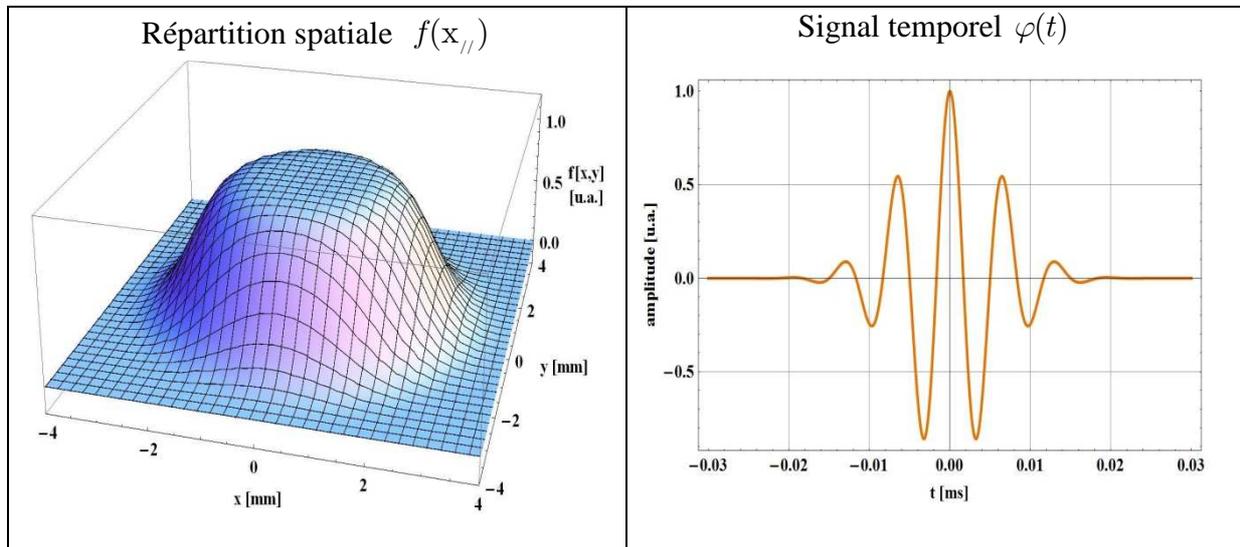


Figure II.5 : Caractéristiques de l'excitation de la plaque de carbone-époxy : salve de fréquence centrale 150 kHz sur un transducteur circulaire de diamètre 5 mm en excitation normale.

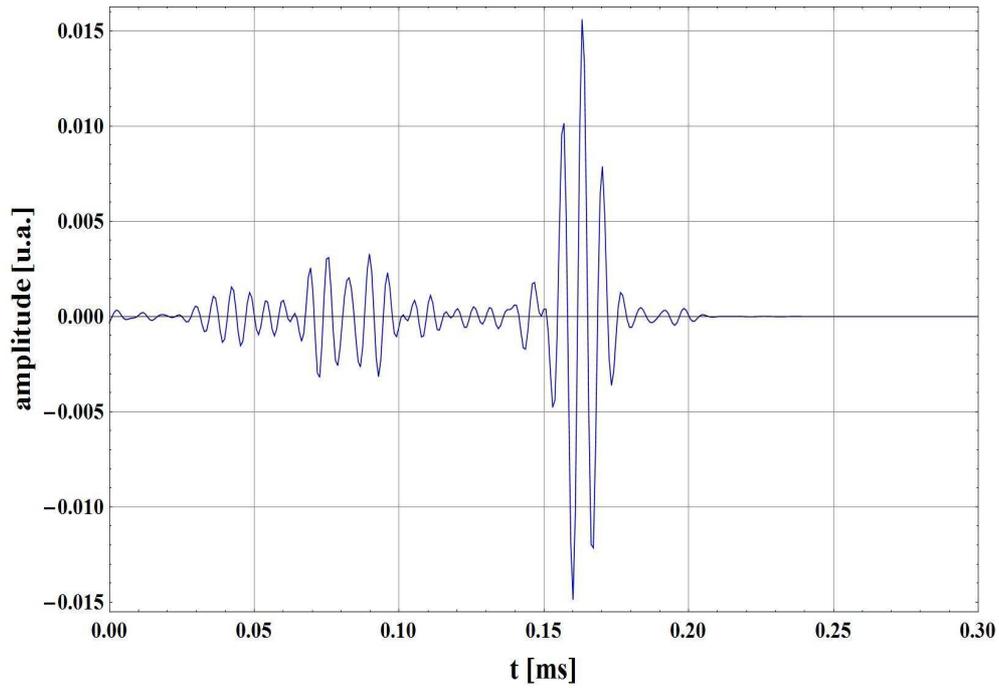


Figure II.6: *Déplacement vertical de la plaque en $x_{//} = (20\text{cm}, 0)$ (direction d'observation perpendiculaire aux fibres), sur sa face supérieure ($z = h/2$), calculée numériquement.*

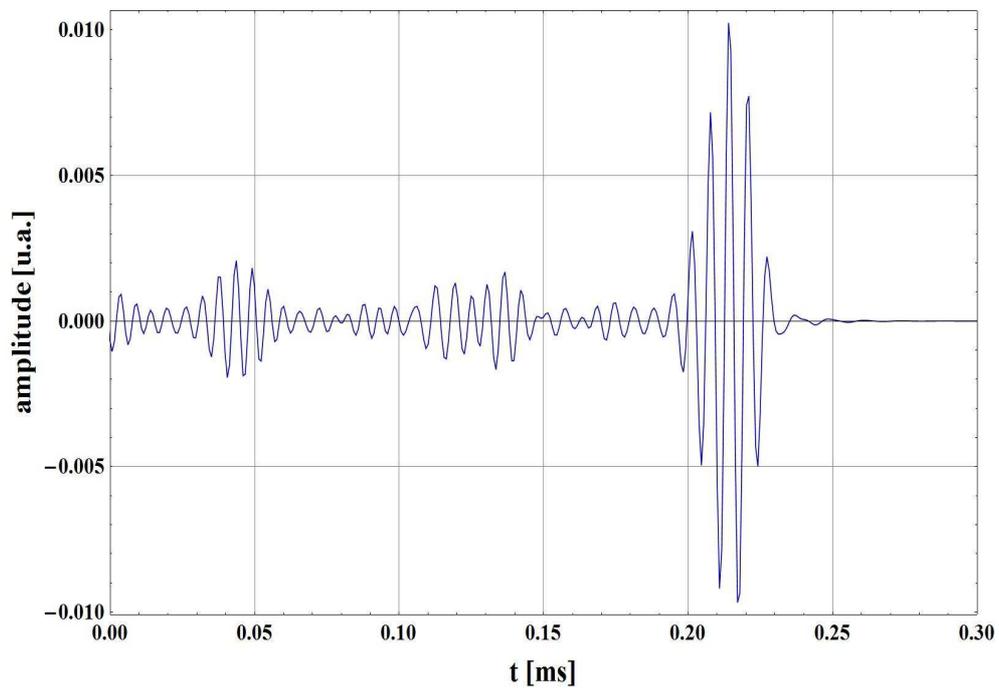


Figure II.7 : *Déplacement vertical de la plaque en $x_{//} = (24\ 25\text{cm}, 14\text{cm})$ (direction d'observation oblique), sur sa face supérieure ($z = h/2$), calculée numériquement.*

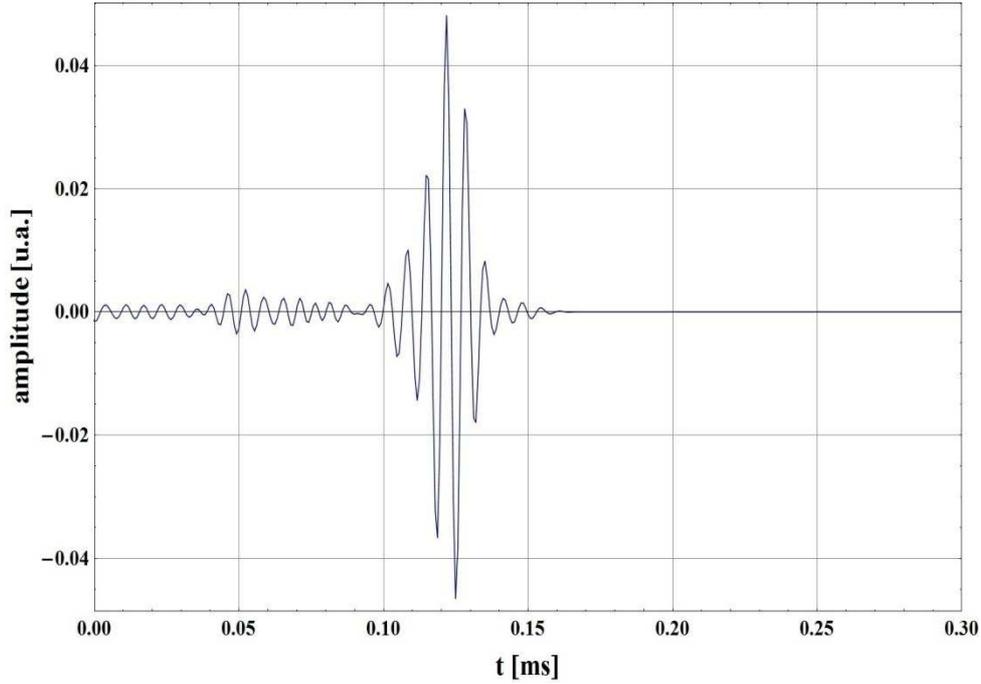


FIGURE II.8 : Déplacement vertical de la plaque en $x_{//} = (0\text{cm}, 20)$ (direction d'observation parallèle aux fibres), sur sa face supérieure ($z = h/2$), calculée numériquement.

II.5.2. Méthode 2 : Résolution semi-analytique en temps

Dans cette deuxième méthode, le principe est de travailler dans le domaine $(k_{//}, z, t)$ (vecteur d'onde parallèle à la plaque, position verticale, temps). Ceci permet d'éviter des problèmes qui se posent quand on travaille en pulsation, comme celui de la causalité évoqué précédemment.

II.5.2.1 Ecriture du problème

Le vecteur d'état est ici le déplacement u , comme dans le Chapitre I. La transformée de Fourier de ce déplacement s'écrit :

$$\bar{u}(k_{//}, z, t) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i k_{//} \cdot x_{//}} u(x_{//}, z, t) d^2 x_{//} \Leftrightarrow u(x_{//}, z, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i k_{//} \cdot x_{//}} \bar{u}(k_{//}, z, t) d^2 k_{//}. \quad (\text{II.54})$$

L'équation d'onde (I.8) devient à l'intérieur de la plaque :

$$\partial_t^2 \bar{u} - (\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{n}_z) \partial_z^2 \bar{u} + \mathbf{i} \left[(\mathbf{n}_z \diamond \mathbf{k}_{//}) + (\mathbf{k}_{//} \diamond \mathbf{n}_z) \right] \partial_z \bar{u} + (\mathbf{k}_{//} \diamond \mathbf{k}_{//}) \bar{u} = \mathbf{O}_3. \quad (\text{II.55})$$

Les conditions aux limites se récrivent, d'après équation (I.7) :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_z \left(k_{//}, -\frac{h}{2}, t \right) = \bar{f}_{bottom} \left(k_{//}, t \right) = -i \left(n_z \diamond k_{//} \right) \bar{u} \left(k_{//}, -\frac{h}{2}, t \right) + \left(n_z \diamond n_z \right) \partial_z \bar{u} \left(k_{//}, -\frac{h}{2}, t \right); \\ \bar{\sigma}_z \left(k_{//}, \frac{h}{2}, t \right) = \bar{f}_{top} \left(k_{//}, t \right) = -i \left(n_z \diamond k_{//} \right) \bar{u} \left(k_{//}, \frac{h}{2}, t \right) + \left(n_z \diamond n_z \right) \partial_z \bar{u} \left(k_{//}, \frac{h}{2}, t \right) \end{cases}. \quad (\text{II.56})$$

Sans oublier la condition initiale :

$$\forall t < 0, \bar{u} \left(k_{//}, z, t \right) = \mathbf{O}_3. \quad (\text{II.57})$$

II.5.2.2 Discrétisation dans l'épaisseur

Le problème différentiel formé des équations (II.55), (II.56) et (II.57) peut se résoudre numériquement de différentes manières. Ici, une discrétisation en κ intervalles selon l'épaisseur est effectuée en posant :

$$\bar{u}_i \left(k_{//}, t \right) = \bar{u} \left(k_{//}, z_i, t \right) \text{ avec } z_i = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{\kappa} \right) h, i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq \kappa, \quad (\text{II.58})$$

de sorte que l'on cherche un vecteur $\bar{\mathbf{V}} \left(k_{//}, t \right)$ de dimension $(3\kappa - 3)$:

$$\bar{\mathbf{V}} \left(k_{//}, t \right) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \left(k_{//}, t \right) \\ \dots \\ \bar{u}_2 \left(k_{//}, t \right) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \bar{u}_{\kappa-1} \left(k_{//}, t \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{II.59})$$

qui satisfait le problème différentiel linéaire à coefficients constants suivant :

$$\partial_t^2 \bar{\mathbf{V}} \left(k_{//}, t \right) + \mathcal{A} \left(k_{//} \right) \bar{\mathbf{V}} \left(k_{//}, t \right) = \mathcal{B} \left(k_{//} \right) \bar{\mathbf{F}} \left(k_{//}, t \right) \text{ avec } \bar{\mathbf{V}} \left(k_{//}, t \right) = \mathbf{0} \text{ si } t < 0. \quad (\text{II.60})$$

Les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} dépendent du schéma numérique utilisé, un schéma aux différences finies par exemple. Notons que la méthode employée ici peut s'appliquer aussi si les caractéristiques élastiques de la plaque varient avec l'épaisseur (milieu stratifié/multicouche).

Le problème différentiel (II.60) se résout analytiquement en diagonalisant la matrice $\mathcal{A} \left(k_{//} \right)$. Ses valeurs et vecteurs propres sont notés respectivement $\omega_n^2 \left(k_{//} \right)$ et $\mathbf{J}_n \left(k_{//} \right)$. Sa solution s'écrit sous forme de la convolution temporelle :

$$\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{k}_{//}, t) = u(t) \int_0^t \mathcal{J}(\mathbf{k}_{//}) \left\{ \underbrace{\text{diag}}_{1 \leq n \leq 3\kappa-3} \left[\frac{\sin(\omega_n(\mathbf{k}_{//})(t-\tau))}{\omega_n(\mathbf{k}_{//})} \right] \right\} \mathcal{J}(\mathbf{k}_{//})^{-1} \mathcal{B}(\mathbf{k}_{//}) \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}_{//}, \tau) d\tau. \quad (\text{II.61})$$

II.5.2.3 Retour dans l'espace physique

Le retour dans l'espace physique se fait par double transformation de Fourier numérique, d'après l'équation (II.54). Le choix des paramètres de discrétisation se fait comme suit, pour satisfaire les hypothèses du Théorème de Shannon.

Tout d'abord, à tout instant t donné, en supposant que l'excitation \mathbf{F} est localisée autour de l'origine du repère et qu'elle n'est non nulle qu'aux instants positifs, la zone dans laquelle le déplacement u diffère de zéro est un cylindre d'équation $|\mathbf{x}_{//}| \leq c_{\max} t, c_{\max}$ désignant la célérité maximale, en général celle de l'onde longitudinale ou quasi-longitudinale.

Le pas δk de discrétisation en vecteur d'onde doit satisfaire nécessairement :

$$\delta k \leq \frac{\pi}{c_{\max} t}. \quad (\text{II.62})$$

Par conséquent, plus on veut aller loin en temps, plus il faut observer loin de la source, plus le pas de discrétisation δk doit être petit, plus le nombre de vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{//}$ pour lesquels on doit déterminer la distribution modale (ω_n, \mathbf{J}_n) est élevé.

La deuxième contrainte est que l'on doit supposer que la norme de la transformée $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{k}_{//}, \tau)$ du vecteur d'excitation est quasiment nulle pour $|k_x| > k_{\max}$ et $|k_y| > k_{\max}$. Le pas de discrétisation spatial δx , supposé identique selon les directions x et y , doit alors vérifier :

$$\delta x \leq \frac{\pi}{k_{\max}} \quad (\text{II.63})$$

En effet, toujours en vertu du théorème de Shannon, plus le signal d'excitation est « chahuté » spatialement, plus le pas d'échantillonnage spatial doit être petit.

Il en résulte un quadrillage carré 2D de ν^2 points, aussi bien en espace qu'en vecteur d'onde avec :

$$\nu \leq \frac{\pi}{2} k_{\max} c_{\max} t. \quad (\text{II.64})$$

II.5.2.4 Exemple d'une plaque de monocristal de cuivre

Une première simulation a été effectuée sur une plaque de monocristal de cuivre d'épaisseur 15mm et de tenseur de rigidités réduites (cristal cubique, [Bescond et Deschamps, 1998]) :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} xx & yy & zz & yz & xz & xy \end{matrix} \\ \begin{matrix} xx \\ yy \\ zz \\ yz \\ xz \\ xy \end{matrix} & \begin{pmatrix} 19.03 & 13.77 & 13.77 & 0 & 0 & 0 \\ 13.77 & 19.03 & 13.77 & 0 & 0 & 0 \\ 13.77 & 13.77 & 19.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8.45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.45 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (\text{Unité: } mm^2 \cdot \mu s^{-2}). \quad (II.65)$$

La plaque est excitée normalement sur sa face supérieure :

$$F(x_{//}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & f(x_{//})\varphi(t) \end{pmatrix}^T,$$

Les fonctions f et φ étant décrites Figure II.9. Remarquons que, le signal temporel devrait être nul pour $t < 0$, mais qu'on a fait un changement d'origine de temps pour que le zéro soit au centre de l'excitation pour pouvoir comparer les distances théoriques de propagations (pointillés violet, vert et jaune) avec la réponse calculée (Figure II.10).

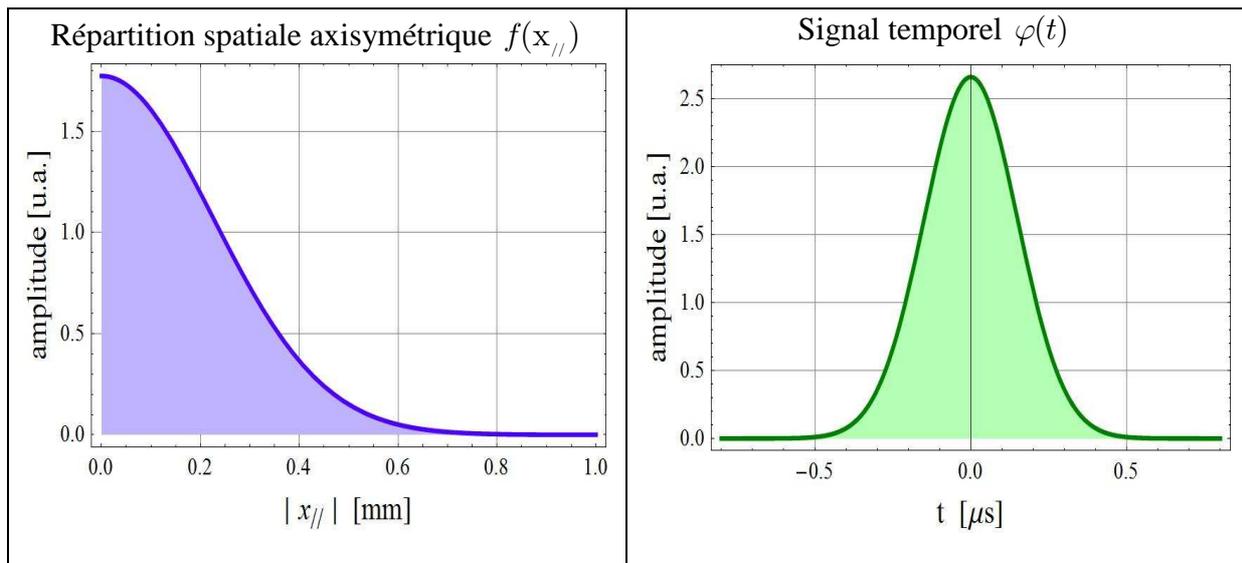
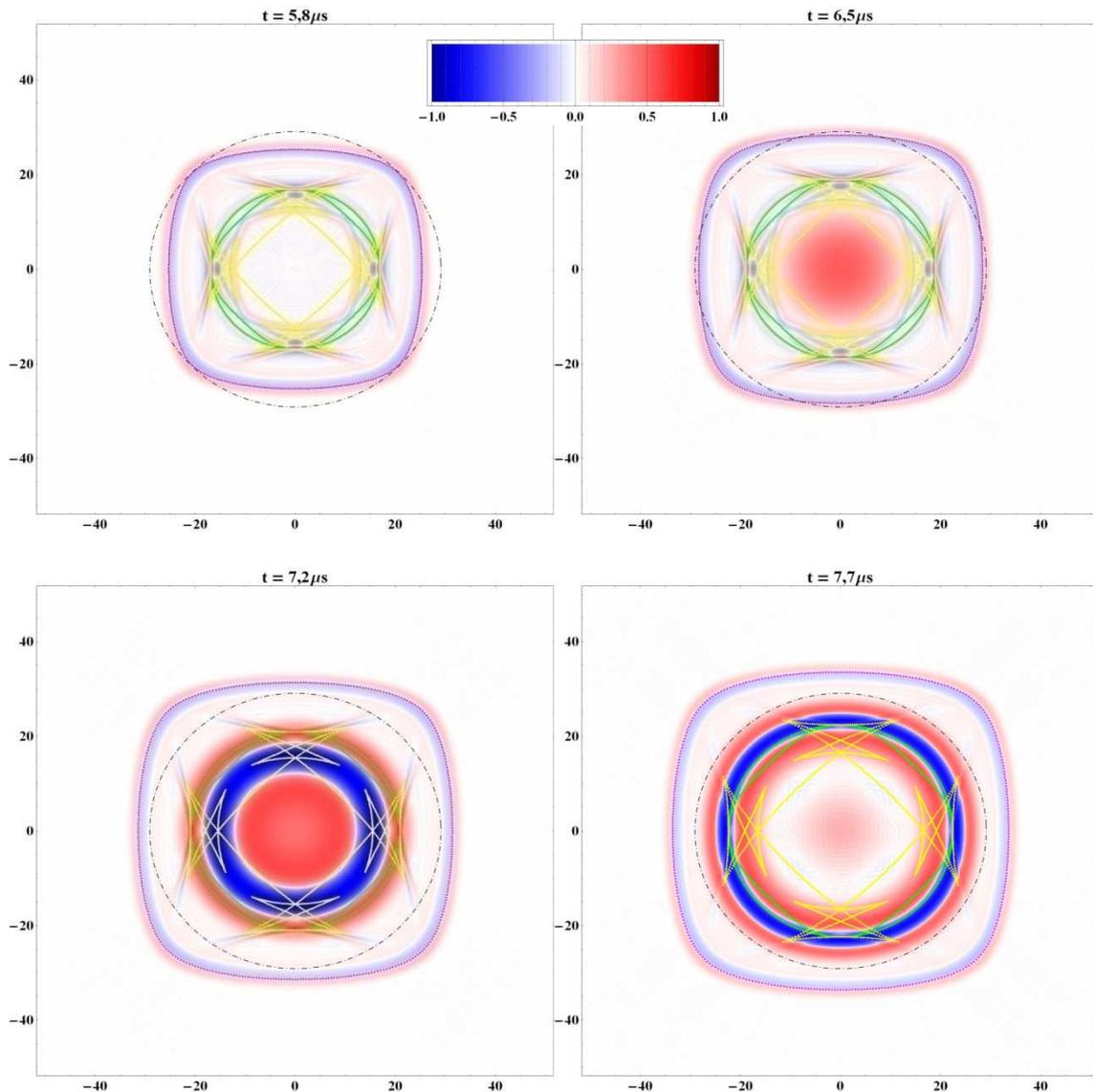


Figure II.9: Signaux gaussiens d'excitation de la plaque en monocristal de cuivre.

Le quadrillage est de 512 / 512 points, avec un pas d'échantillonnage spatial de $\delta x \approx 0,202mm$ pour un pas d'échantillonnage en nombre d'onde de $\delta k \approx 0,061mm^{-1}$. Grâce aux symétries du cristal de cuivre, le calcul sur 32 896 points, soit environ le huitième des 512 / 512 points, a été effectivement mené et stocké (fichier binaire d'environ 165Mo). Les modes pris en compte ont des fréquences qui s'arrêtent à 5MHz.

La réponse en déplacement normal sur la face supérieure est tracée sur le Figure II.10, à différent instants. La ligne pointillée violette représente l'onde rasante quasi-longitudinale. Les autres lignes pointillées (vertes et jaunes), les ondes rasantes quasi-transverses. Le halo rouge qui apparaît à $6,5\mu s$ et se transforme ensuite en front d'onde quasi-circulaire correspond à l'onde quasi-longitudinale qui s'est réfléchi sur la face inférieure de la plaque. En effet, vue l'excitation normale gaussienne, cette onde de volume est fortement excitée.



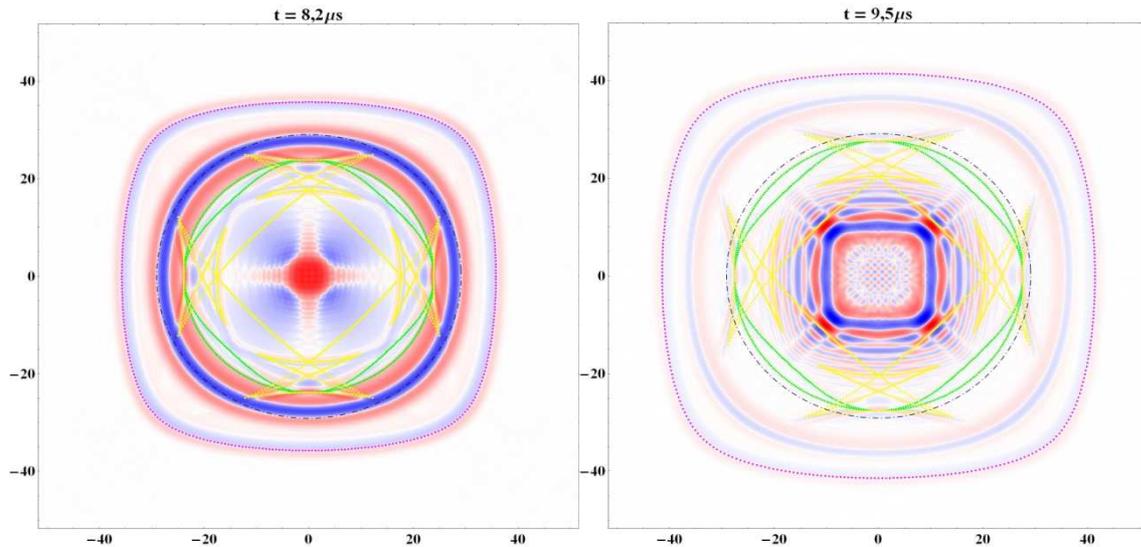


Figure II.10: Déplacement vertical en surface d'une plaque de monocristal de cuivre à différents instants. Les distances sont en millimètres. La ligne pointillée violette représente l'onde rasante quasi-longitudinale. Les autres lignes pointillées (vertes et jaunes), les ondes rasantes quasi-transverses. Le cercle pointillé de rayon 29 mm représente la ligne de mesure des points expérimentaux.

II.6 Conclusion

La réponse en déplacement d'un demi-espace élastique anisotrope et d'une plaque à une excitation ponctuelle à la surface a été calculée. Notre approche consiste à appliquer la transformée de Fourier aux équations d'élasticité et aux conditions aux limites, par rapport au temps et aux coordonnées spatiales parallèles aux interfaces, à résoudre ensuite les équations algébriques en résultant, puis à écrire la transformée inverse. Dans le cas d'un demi-espace, une réécriture de cette dernière formule a permis de réduire le calcul numérique de la réponse à l'évaluation d'une intégrale simple et non plus d'une intégrale triple. Dans le cas de la plaque deux méthodes sont présentées pour mettre en œuvre le calcul numérique : une première consiste à décomposer le champ comme une succession de réflexions aux interfaces ; le champ s'écrit sous la forme d'une série de Debye dont la troncature permet un calcul numérique par transformée de Fourier rapide en pulsation puis évaluation d'intégrale double sur les lenteurs. La seconde consiste à résoudre analytiquement le problème dans un espace hybride avant de revenir dans l'espace physique par double transformée de Fourier rapide spatiale. Des réponses sont présentées dans le cas d'une plaque de carbone-époxy à fibres orientées selon une seule direction parallèle aux interfaces, puis dans celui d'un monocristal de cuivre dont les axes cristallographiques sont parallèles aux axes du repère.

II.8 Références

- Aki, K. and Richards, P. G. (1980). "*Quantitative seismology. Theory and methods.*" San Francisco, CA : Freeman.
- AULD B. A. (1990), *Acoustic Fields and Waves in Solids* (Krieger Pub Co), 2^{nde} édition. ISBN 0-89874-782-1.
- Barnett D.M. et Lothe J. (1973). "*Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, greens function and surface wave (rayleigh wave) solutions in anisotropic elastic solids.*" Phys. Norv. **7**: 13-19.
- Bescond C. (1997). "*Réponse dynamique d'un demi-espace anisotrope: Application à la résolution de problèmes inverses par génération et détection laser.*" Thèse, Université Bordeaux 1.
- Bescond C. et Deschamps M. (1998). "*Dynamical surface response of a semi- infinite elastic medium to an impulsive force.*" J. Acoust. Soc. Am. **103**: 114-124.
- Chadwick, P. and Smith, G. D. (1977). "*Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials.*" Adv. Appl. Mech. **17**, 303-376.
- Ducasse, E. and Deschamps, M. (2010). "*Sur la convergence de série de Debye représentant les réflexions successives d'une onde ultrasonore dans une plaque élastique anisotrope immergée.*" Actes du 10^e Congrès Français d'Acoustique, Lyon, avril 2010.
- EVERY A. G., KIM K. Y., and MAZNEV A. A. (1997). "*The elastodynamic response of a semi-infinite anisotropic solid to sudden surface loading.*" J. Acoust. Soc. Am. **102**(3), pp. 1346–1355.
- Ingebrigsten K.A. et Tønning A. (1969). "*Elastic surface waves in crystal.*" Phys. Rev. **184**:942-951.
- Lamb H. (1904). "*On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.*" Phil. Trans. Roy. Soc. London **203**(A) : 1-42.
- Lewis Meirion F. (1995). "*Rayleigh waves - a progress report.*" Eur. Jour. Phys.: 1-7.
- Morgan D.P. (1998). "*History of saw devices.*" IEEE Int. Frequency Control Symp.: 439-460.
- ROYER D. and DIEULESAINT E. (1996), *Ondes élastiques dans les solides* (Masson, Paris). ISBN 2-225-85422-X.
- Stroh A.N. (1962). "*Steady state problems in anisotropic elasticity.*" J. Math. Phys. **41**: 77-103.
- Van der Hijden, J. H. M. T. (1987). "*Propagation of transient elastic waves in stratified anisotropic media.*" Amsterdam : North-Holland.

Chapitre III : Etude expérimentale : ondes guidées pour un monocristal de cuivre

III.1	Introduction	71
III.2	Mode opératoire	71
III.3	Résultats expérimentaux	72
III.3.1	Temps d'arrivée des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh	72
III.3.2	Temps d'arrivée des ondes réfléchies	78
III.3.2.1	Temps d'arrivée des premières réflexions sans conversion	83
III.3.2.2	Temps d'arrivée des multiples réflexions sans conversion	86
III.4	Conclusion.....	89
III.5	Références	90

III.1 Introduction

La détection Laser qui utilise le principe de l'interférométrie optique offre un outil très performant pour la mesure des déplacements acoustiques d'une surface. Cette technique autorise une mesure ponctuelle et instantanée des perturbations acoustiques sur une surface. Ainsi, la détection des ondes acoustiques peut être menée avec une excellente résolution spatiale et temporelle. La mesure expérimentale de la réponse dynamique de la surface d'un monocristal de cuivre, soumise à une source ponctuelle impulsionnelle, est réalisée en appliquant cette technique. Après une description du dispositif expérimental, les résultats obtenus sont présentés et ils sont comparés avec les résultats théoriques. On observe notamment les arrivées des ondes qui se propagent à la surface et les arrivées des ondes issues de multiple réflexion par les interfaces de la plaque.

III.2 Mode opératoire

Décrivons maintenant le dispositif expérimental qui sera utilisé tout au long de ce travail. Les développements théoriques effectués s'inscrivent dans le cadre de la génération et détection Laser d'ultrasons. Pour la génération, un faisceau Laser de forte puissance et de durée d'impulsion brève est focalisé sur la surface libre d'un échantillon anisotrope [*Scruby et al., 1990*], [*Hutchins, 1988*], [*Scudder et al., 1994*]. Dans ce travail, on utilisera le régime d'ablation pour la génération des ondes acoustiques ultrasonores. La dépendance temporelle s'apparente donc d'une fonction de Dirac. Le faisceau incident est focalisé sur la surface de l'échantillon à l'aide d'une lentille sphérique rendant la source acoustique ponctuelle d'un diamètre inférieur à 1 mm. La détection s'effectue au moyen d'une sonde Laser hétérodyne ce qui permet la mesure ponctuelle de la composante normale de très faibles déplacements mécaniques de l'interface [*Royer and Dieulesaint, 1986*]. Les déplacements normaux à la surface sont détectés en focalisant le faisceau sonde de l'interféromètre sur la surface impactée.

Un dispositif de translation piloté permet de déplacer une lentille et un miroir, et donc de translater l'impact sur la surface de l'échantillon. La sonde optique mesure en un point de la surface le déplacement acoustique normal en fonction du temps. Un dispositif de rotation conservant la distance entre les faisceaux émetteur et récepteur permet de mesurer les arrivées des fronts pour différentes directions d'observation des ondes de surface. Le dispositif expérimental est représenté à la Figure III.1. Les mesures sont effectuées tous les degrés pour des angles compris entre 0 et 45°. Les résultats sont moyennés sur 1000 tirs. La distance entre la source et le récepteur est de 29 mm.

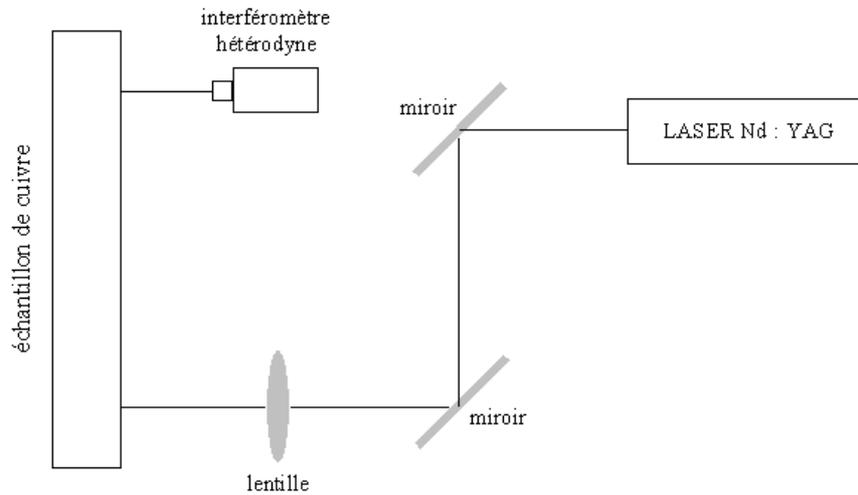


Figure III.1 : Montage expérimental pour la génération et détection Laser d'ondes à la surface d'un échantillon de cuivre.

III.3 Résultats expérimentaux

III.3.1 Temps d'arrivée des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh

Dans un premier temps, il est important de donner quelques indications sur les ondes rasantes. Ces ondes de surface sont les ondes de volumes particulières pour lesquelles la célérité de l'énergie est orientée dans la direction d'observation. Cette direction n est contenue dans le plan de l'interface, identifiée par Π à la Figure III.2.

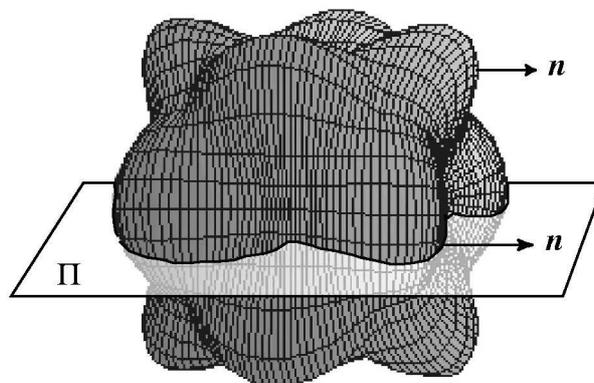


Figure III.2: Vue 3D de la surface de lenteur du mode T1 dans un cristal de cuivre. Différenciation des contributions : i - dans le plan de l'interface (notée Π), o - hors plan de l'interface.

S'agissant d'un problème 3D, l'ensemble des rayons doit être pris en compte. Deux cas sont alors possibles dans la recherche des vecteurs lents associés. Soit ils sont dans le plan de l'interface, les rayons seront alors notés i (pour in-plane), soit ils n'y sont pas, et les rayons seront notés o (pour out-plane). Les célérités de l'énergie de ces ondes sont reportées à la Figure III.3. Les ondes rasantes dans le plan et hors plan sont respectivement repérées par I et O . En plus de ces ondes, l'onde de Rayleigh [Royer, 1974] et la pseudo onde de Rayleigh

[Auld, 1973] se propagent à la surface de l'échantillon. Leurs célérités de l'énergie, respectivement identifiées par R , Ps , sont tracées à la Figure III.4.

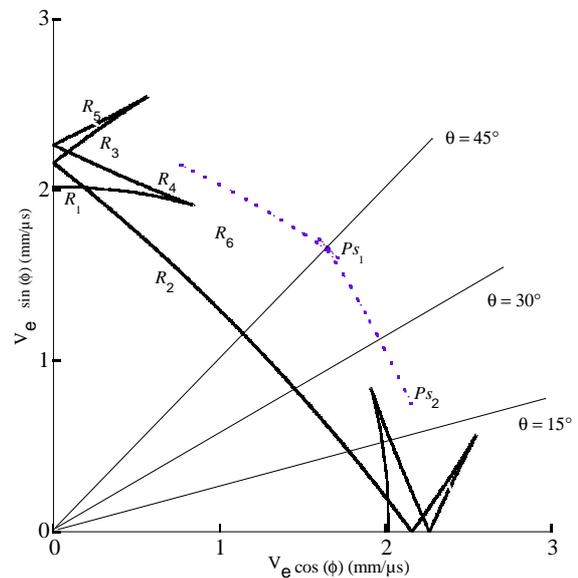
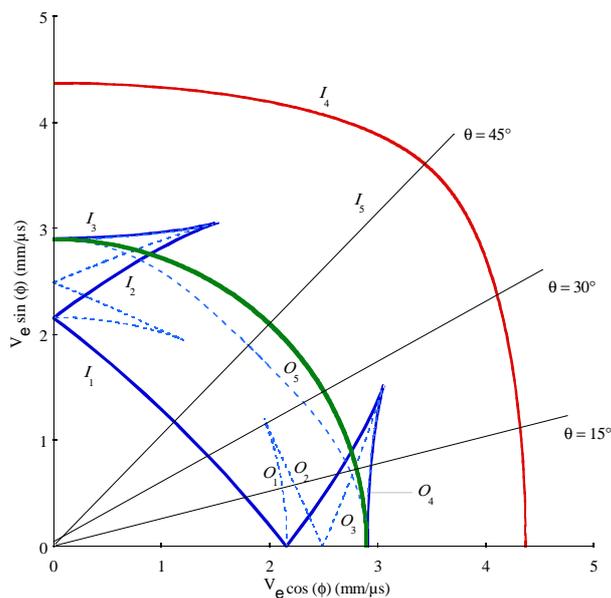


Figure III.3 : Vitesses de l'énergie des ondes rasantes dans le plan (trait plein) et hors plan (traits en pointillés).

Figure III.4 : Vitesses de l'énergie des ondes de Rayleigh (trait plein) et pseudo Rayleigh (traits en pointillés).

Lors des expériences, les signaux ont été acquis sur une durée temporelle de 45 μ s. Compte tenu de la distance d'observation, le temps d'arrivée de ces ondes est compris entre 6 μ s et 16 μ s. Aux Figures III.5 à III.8, on présente un zoom sur cette plage des formes d'onde, pour les angles d'observation θ de 0°, 15°, 30° et 45°.

Les calculs théoriques développés au chapitre II permettent en principe de faire le calcul des champs acoustiques diffractés par une source de type Dirac spatiale et temporelle. Cependant, d'un point de vue numérique, les contenus fréquentiels temporel et spatial sont tels que la méthode employée n'est pas adaptée au calcul de telles réponses abruptes, telles qu'elles se présentent dans le cas d'une génération par opto-acoustique. C'est pour cela que nous avons eu recours à une méthode de Cagniard-de Hoop couplée à une méthode numérique pour effectuer ce calcul. On trouvera à la référence [Bescond, 1997] ce développement théorique. Les résultats ainsi obtenus numériquement sont présentés sur chaque figure pour une comparaison avec l'expérience.

Tout d'abord, pour l'angle $\theta=0^\circ$, la Figure III.5 montre la complexité de la forme d'onde due au grand nombre d'arrivées de fronts d'onde. Les arrivées de trois ondes de Rayleigh (R_1 , R_2 , R_4) sont discernables par des pics de forte amplitude. Les temps des ondes latérales sont caractérisés par des discontinuités d'amplitude plus faible. On discerne donc plus difficilement leurs temps d'arrivée expérimentaux qui sont parasités par le bruit. Cependant les pics I_1 , O_1 et O_3 sont identifiables.

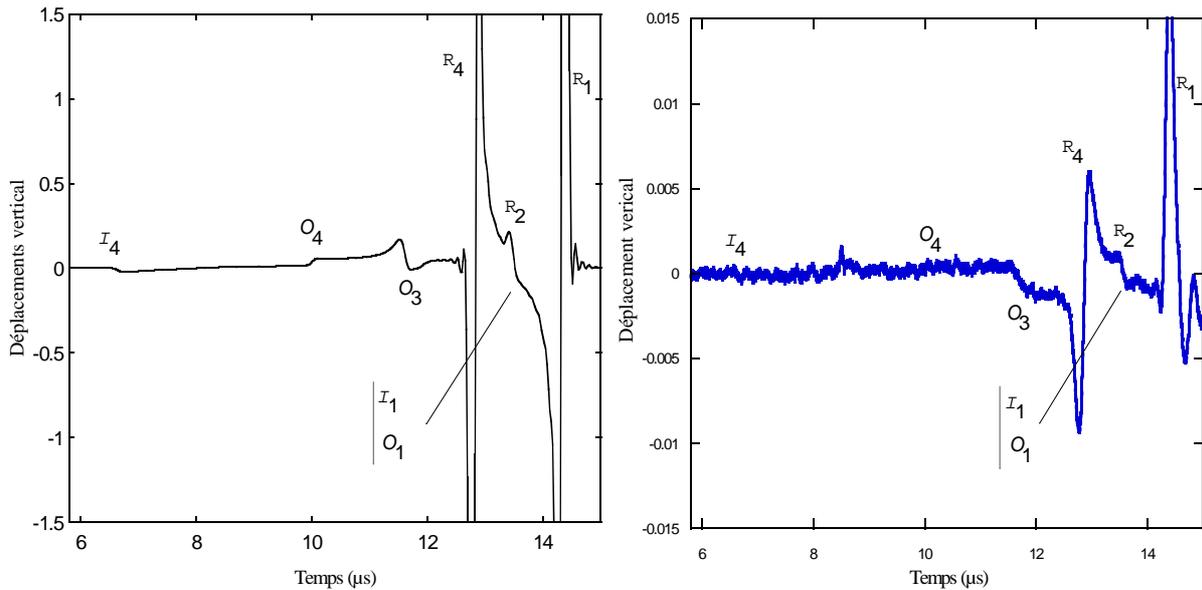


Figure III.5 : Temps d'arrivée des fronts d'onde, théorique (à gauche) et expérimentales (à droite), pour l'angle $\theta = 0^\circ$.

Pour la direction d'observation $\theta = 15^\circ$, Figure III.6, qui ne correspond pas à un axe cristallographique, les phénomènes deviennent plus complexes. Les temps d'arrivée des ondes de Rayleigh de fortes amplitudes (R_1 , R_4 et R_7) sont clairement identifiables aussi bien avec les résultats théoriques qu'expérimentaux. Le temps d'arrivée de R_7 est issu de la diffraction des fronts R_3 et R_5 . Selon la branche de cette structure en forme de corne, le flux d'énergie de l'onde de Rayleigh est soit focalisé (R_1 , R_3 , R_4 et R_5) soit dispersé (R_2). Ainsi, l'amplitude de cette dernière est plus faible si bien qu'on ne l'observe pas sur les résultats expérimentaux. Le pic correspondant au Ps_2 , issu de la diffraction des cornes de la pseudo-onde de Rayleigh, superposé à celui du O_2 , apparaît dans les résultats expérimentaux. Il en est de même pour les temps de I_3 , O_1 et O_4 .

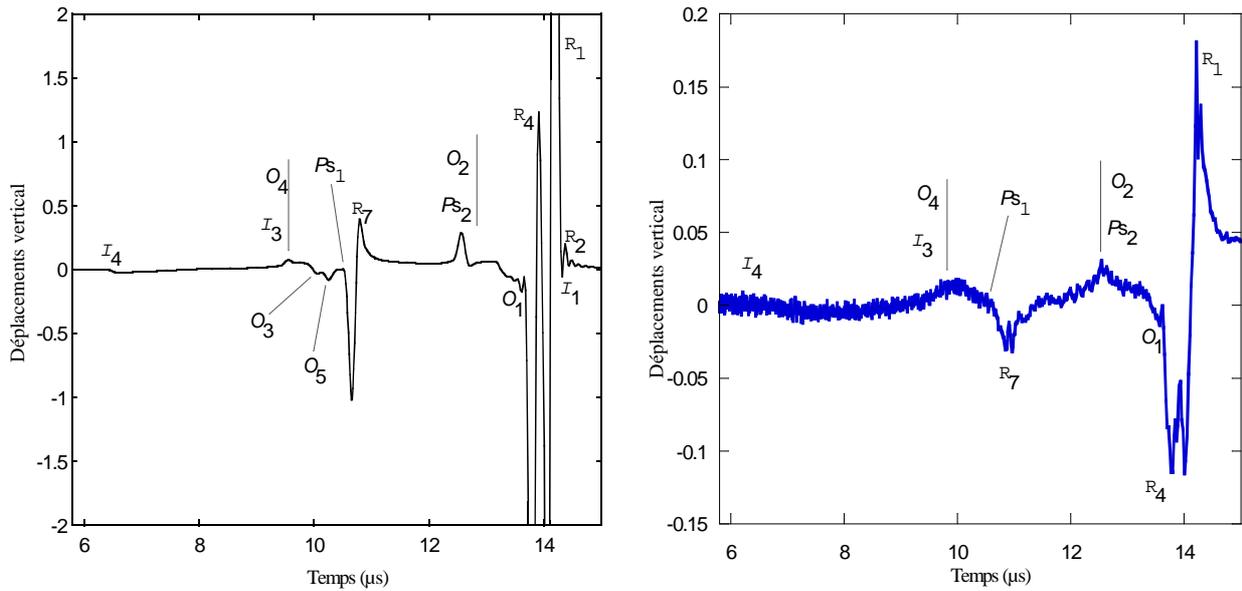


Figure III.6 : Temps d'arrivée des fronts d'onde, théorique (à gauche) et expérimentales (à droite), pour l'angle $\theta = 15^\circ$.

Pour l'angle $\theta = 30^\circ$, l'ensemble des phénomènes est observé expérimentalement à la Figure III.7. Contrairement aux deux angles précédents, pour cette direction de propagation, les fronts d'ondes ont des temps d'arrivée éloignés. Il n'y a ainsi pas d'interaction entre ces fronts pouvant altérer les résultats. On observe pour cette direction trois fronts générés par diffraction (I_5 , R_6 et Ps_1).

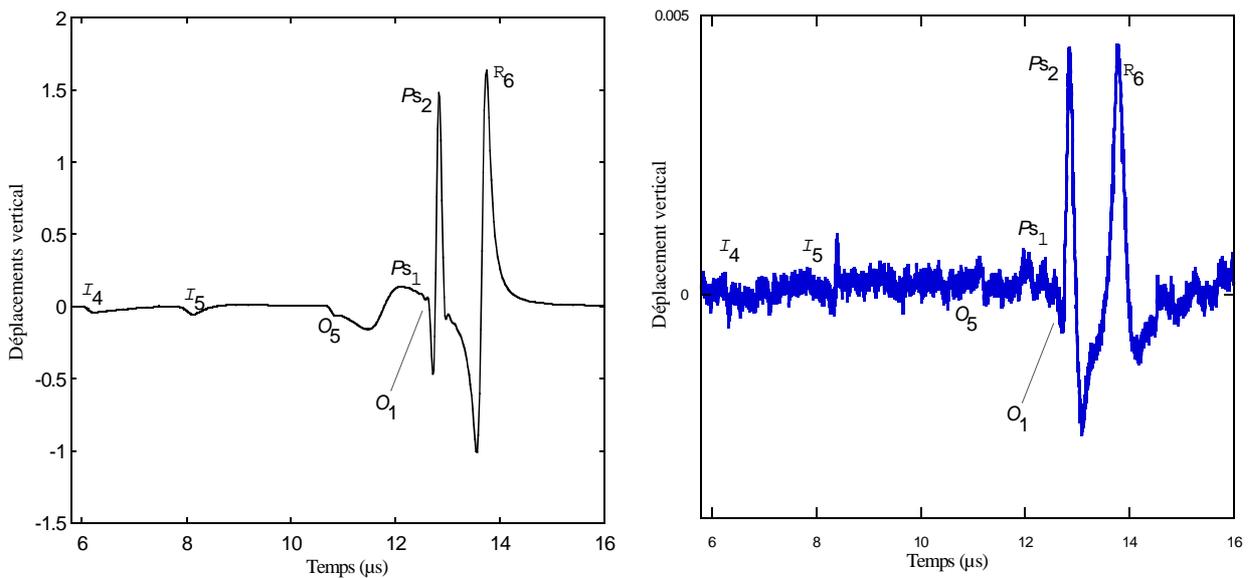


Figure III.7 : Temps d'arrivée des fronts d'onde, théorique (à gauche) et expérimentales (à droite), pour l'angle $\theta = 30^\circ$.

Pour le dernier angle, $\theta = 45^\circ$, la réponse dynamique est la plus simple. Le résultat théorique met en évidence la propagation des deux pseudo-ondes de Rayleigh (P_{S_1} et P_{S_2}) ainsi que de deux ondes latérales dans le plan (I_4 et I_5). Le front O_5 d'amplitude trop faible n'est pas observable. Expérimentalement, les mêmes fronts apparaissent à l'exception de I_5 (Figure III-8).

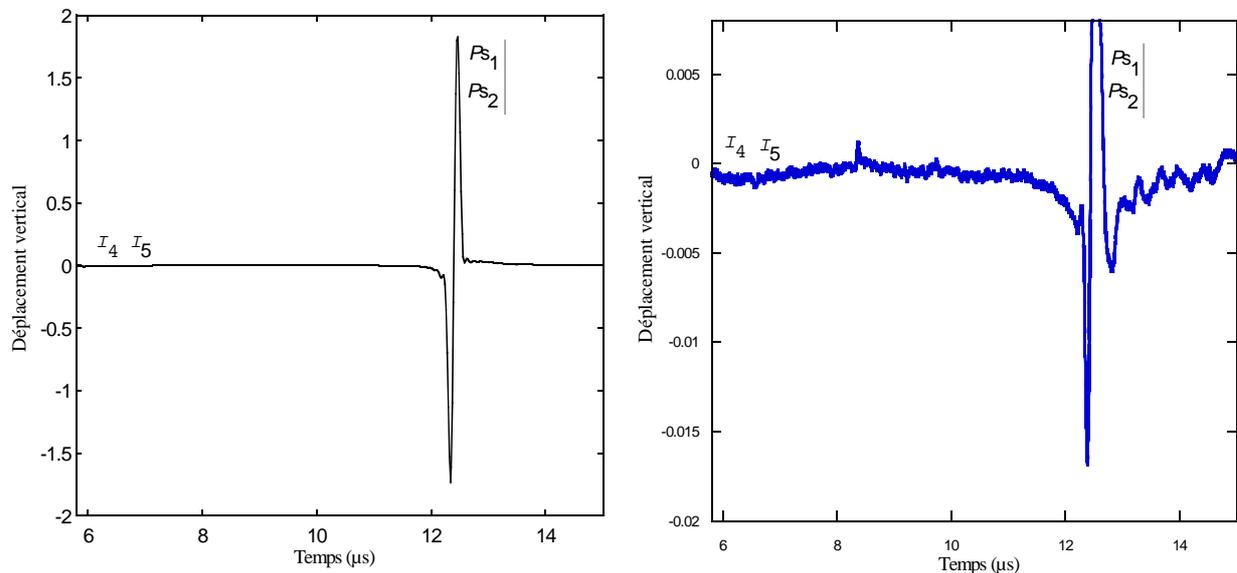


Figure III.8 : Temps d'arrivée des fronts d'onde théorique (à gauche) et expérimentales (à droite) pour l'angle $\theta = 45^\circ$.

Compte tenu de la symétrie de l'échantillon, à partir de l'obtention des réponses de 0° à 45° , on peut en déduire la réponse pour une rotation complète de 360° . Ces réponses sont tracées en coordonnées polaires à la Figure III.9, où l'angle est l'angle d'observation et l'amplitude est convertie en niveaux de gris. Le blanc représente un maximum d'amplitude et le noir un minimum. La zone blanche, située au centre de la représentation expérimentale, correspond à une plage temporelle comprise entre 0 et $2.5 \mu\text{s}$ pour lesquelles le déplacement n'a pas été mesuré. Les courbes des temps d'arrivée théorique sont superposées aux représentations expérimentales des déplacements de la surface à la Figure III.9 (2) pour les ondes rasantes, et à la Figure III.9 (3) pour les ondes de Rayleigh. Pour finir, à la Figure III.9 (4) les ondes rasantes et de Rayleigh sont reportées simultanément sur la même figure.

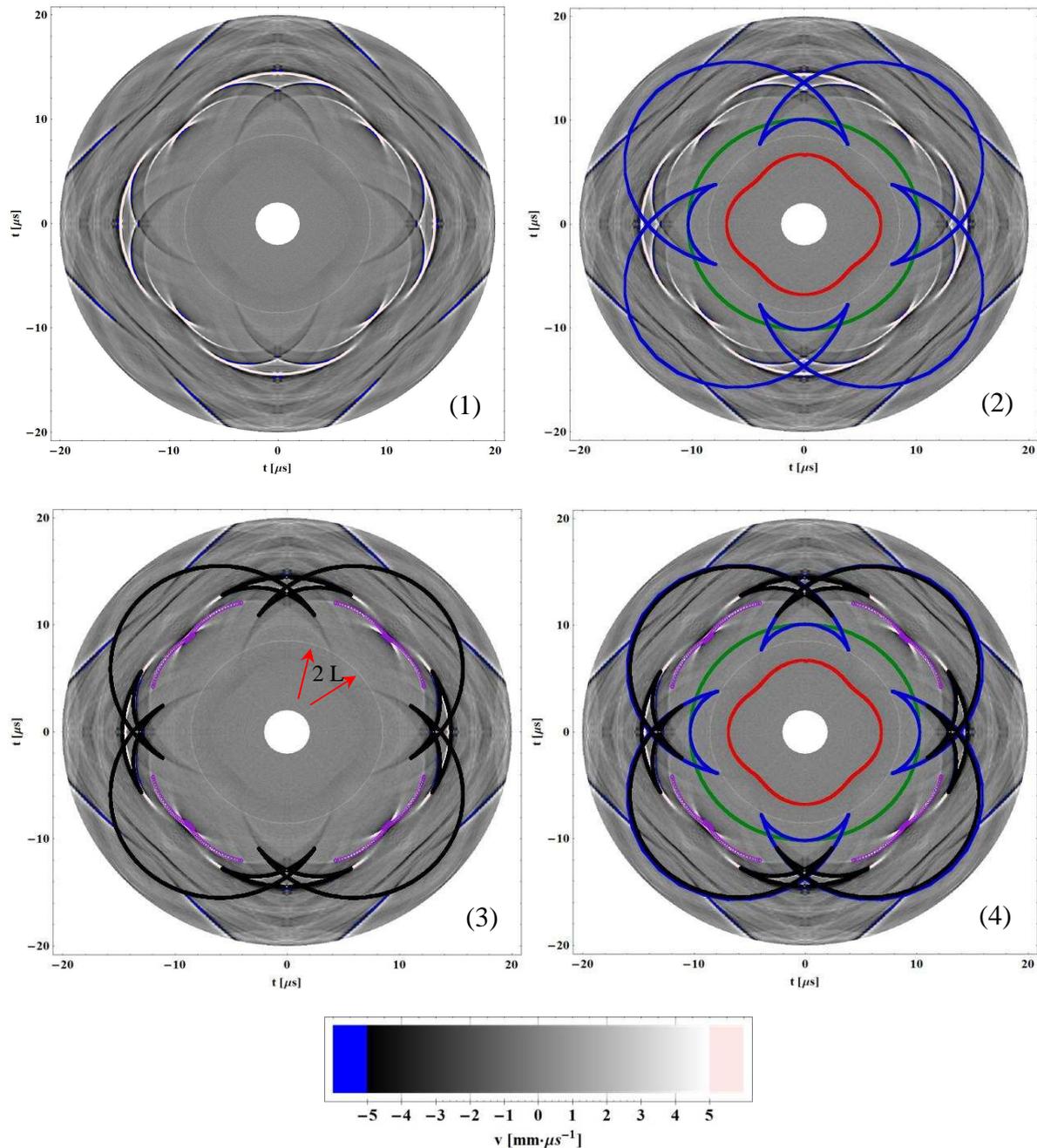


Figure III.9 : Représentation tridimensionnelle des déplacements normaux à la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, mesurés expérimentalement (1). Comparaison avec les temps d'arrivée théoriques des ondes : ondes rasantes (2), ondes de surface (Rayleigh et pseudo-Rayleigh) (3), et de l'ensemble de ces ondes (4). Les couleurs rouge, vert, bleu, noir et violet correspondent aux ondes respectivement L, T_1 , T_2 , R et Ps.

On constate avec la figure III.9 que les temps d'arrivée des ondes rasantes et les ondes de Rayleigh donnent une description complète des ondes qui se propagent à la surface d'un cristal de cuivre. Notons cependant que sur la plage temporelle étudiée à cette figure une contribution reste non expliquée (cf. flèches à la Figure III.9 (3)). Cette contribution est le

résultat d'une réflexion de l'onde L à la seconde interface et fait l'objet des développements qui suivent.

III.3.2 Temps d'arrivée des ondes réfléchies

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la contribution des ondes de volume qui se sont réfléchies une ou plusieurs fois à la seconde interface. Ce sont toutes les arrivées qu'on peut observer à Figure III.10, qui reprend la Figure III.9.1, mais en couvrant la totalité de l'étendue temporelle des signaux acquis. On y observe clairement la complexité de la réponse.

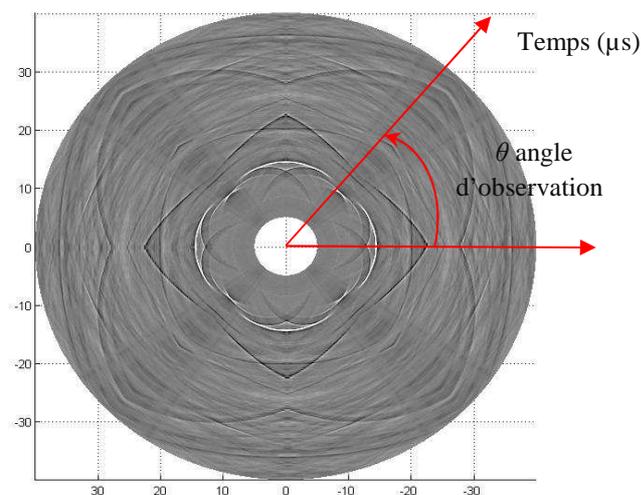


Figure III.10 : Représentation tridimensionnelle des temps d'arrivée des déplacements verticaux de la surface d'un cristal de cuivre, soumise à une force impulsionnelle normale, mesurés expérimentalement.

Les travaux théoriques du paragraphe II.5 expriment la réponse à une source localisée à la surface d'une lame à faces parallèles comme la superposition des réflexion/réfraction multiples au sein de la plaque, connues sous le nom de série de Debye. Dans le cas général, il y a trois types d'ondes de volume qui sont générées dans la plaque et ceci dans toutes les directions du demi espace 3D issues de la présence de la première interface. Les rayons nommés L , T_1 , T_2 sont associés à ces trois ondes initiales.

S'appuyant sur les développements du paragraphe II.5, ces ondes sont successivement réfléchies et converties à la seconde interface et à la première interface. Les ondes qui sont ainsi engendrées suivent à leur tour le même processus (cf. Figure III.11). On note $nAmBIC$, les rayons issus de n propagations de type A ($A = L, T_1$ ou T_2), de m propagations de type B ($B = L, T_1$ ou T_2) et de l propagations de type C ($C = L, T_1$ ou T_2). Dans ce cas nous nous intéressons uniquement aux temps d'arrivée des ondes. De ce fait, nous ne différencions pas le rayon issu, par exemple, de deux trajets A et d'un trajet B et d'un trajet C, de celui issu

d'un trajet A, d'un trajet B et d'un trajet C et enfin d'un trajet A. Suivant ces notations, à la Figure III.11 on illustre le rayon $4L$ et $2L T_1 T_2$.

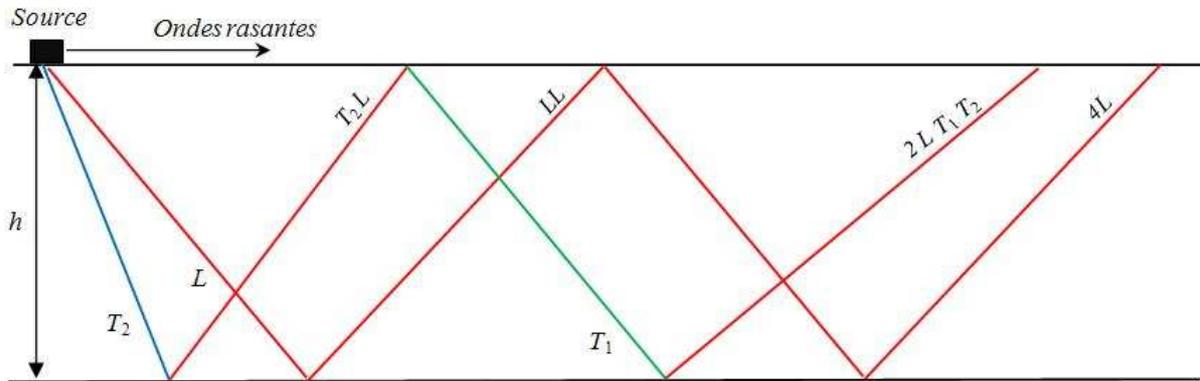


Figure III.11 : diagramme des rayons réfléchis.

Le Figure III.12 montre la forme d'onde dans les directions $\theta = 0^\circ$. On y observe la complexité et le grand nombre d'ondes qui arrivent après l'arrivée des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh. Le signal est mesuré avec 50000 points d'acquisition.

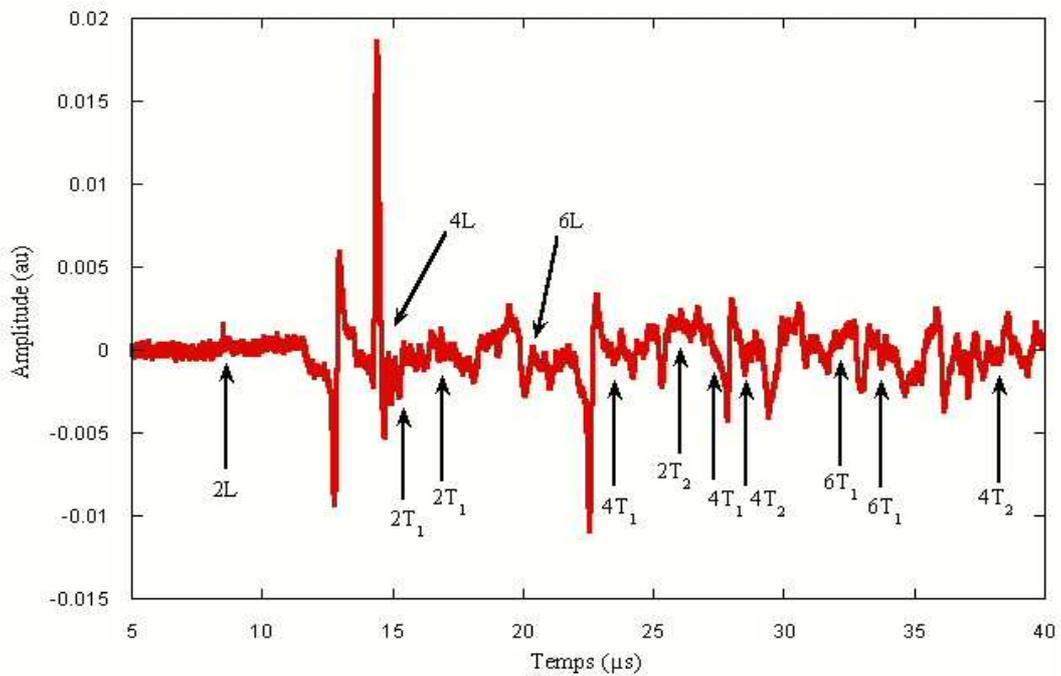


Figure III.12 : déplacement normal mesuré expérimentalement pour la direction $\theta=0^\circ$.

On a noté sur cette figure les arrivées de certains rayons. Le nombre important de points et la relative faible amplitude de certaines de ces contributions font qu'il est difficile de se faire une idée réelle de ces arrivées. C'est pour cela que des zooms de ces plages temporelles de faibles amplitudes et présentant l'arrivée d'ondes, issus de la figure III.12, sont tracés à la figure III.13 pour différentes fenêtres temporelles d'observation. Les temps d'arrivée y sont identifiés. Ainsi, les 2 arrivées d'ondes 2T1 de la figure III.13 (1) se retrouvent à la figure III.20 qui sera présentée ultérieurement. De la même manière, les 2 arrivées notées 4T1 de la figure III.13 (3) correspondent à la figure III.25, alors que celles notées 6T1 à la figure III.13 (4) correspondent à la figure III.29.

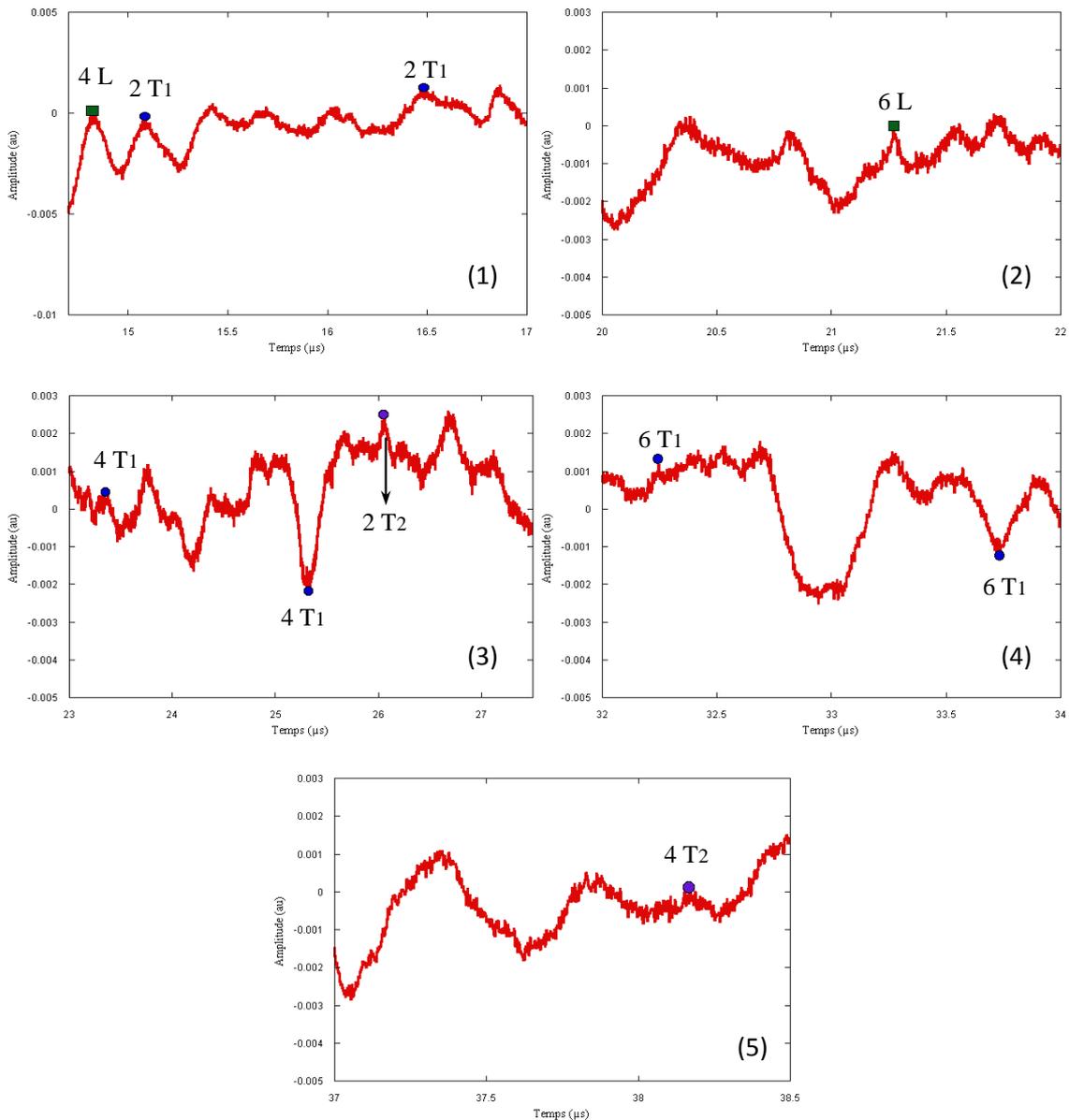


Figure III.13 : zooms des différentes fenêtres temporelles qui montrent les arrivées des rayons pour la direction $\theta = 0^\circ$.

Cette même constatation sur les zones de faibles amplitudes peut être faite, bien sûr, pour toutes les directions. Ainsi, pour les directions $\theta = 15^\circ$, 30° et 45° associées aux figures III.14, III.15 et III.16, le même type de zooms pourrait être effectué.

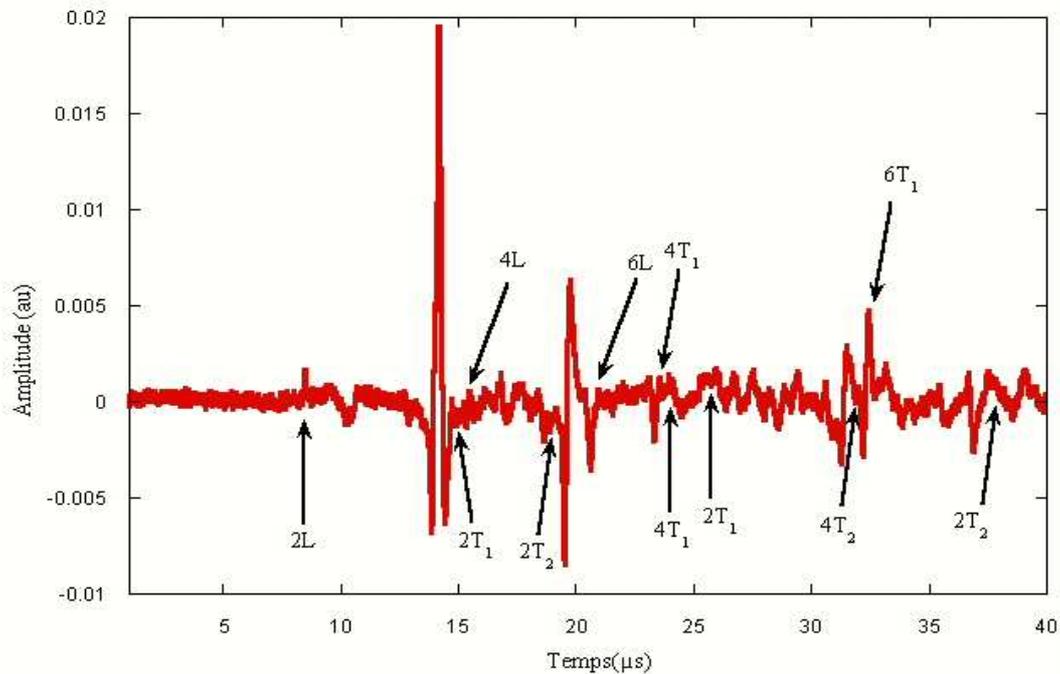


Figure III.14 : déplacement normal mesuré expérimentalement pour la direction $\theta=15^\circ$.

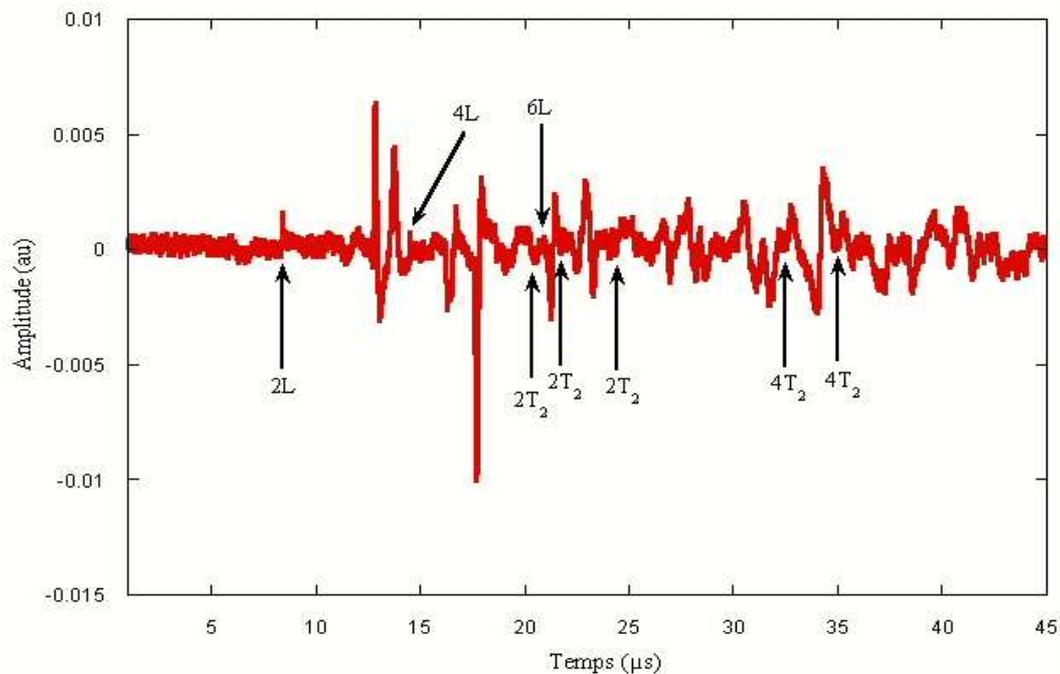


Figure III.15 : déplacement normal mesuré expérimentalement pour la direction $\theta=30^\circ$.

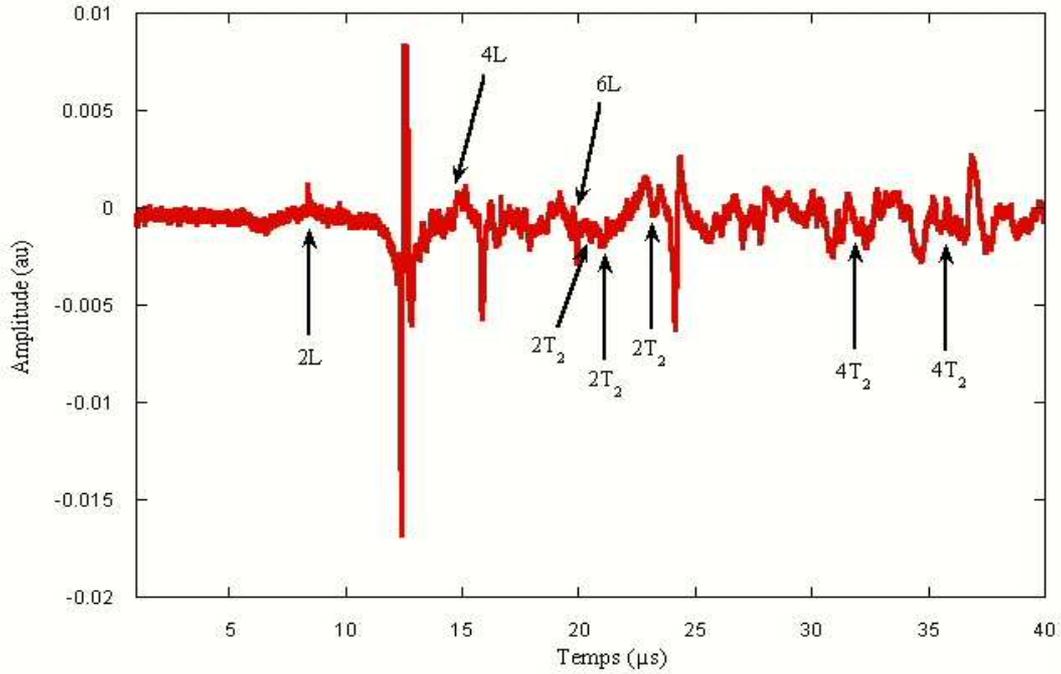


Figure III.16 : déplacement normal mesuré expérimentalement pour la direction $\theta=45^\circ$.

La représentation tridimensionnelle de ces déplacements mesurés dans toutes les directions est représentée dans la Figure III.10.

Vu la complexité des signaux issus de la réflexion, on va seulement traiter les modes réfléchis sans conversion des modes. Pour calculer les temps de vol de ces modes, il est plus facile d'utiliser la liaison entre la distance parcouru et la projection de lenteur sur l'interface de la plaque comme montré ci-dessous. La distance D parcourue par les ondes réfléchies est donnée par:

$$D = n \sqrt{\left(\frac{d}{n}\right)^2 + h^2} = \sqrt{d^2 + n^2 h^2}, \quad (\text{III.1})$$

avec d la distance entre l'émetteur et le récepteur, h est l'épaisseur de la plaque et n le nombre des trajets égaux qui constituent la distance parcourue. Le temps d'arrivée d'une onde est donnée par:

$$t = s \cdot D, \quad (\text{III.2})$$

s représente la lenteur de phase, et comme la distance d est égale à:

$$d = D \cos(\theta), \quad (\text{III.3})$$

l'équation (III.2) sera écrite:

$$t = s \cdot \frac{d}{\cos(\theta)} = s_{//} \cdot \frac{d}{\cos^2(\theta)}, \quad (\text{III.4})$$

où $s_{//}$ est la projection de la lentueur de phase s sur la surface de la plaque.

Afin d'effectuer une comparaison avec l'expérience, à la Figure III.17 on trace, la représentation 3D de la Figure III.10 en coordonnées cartésiennes temps-angle.

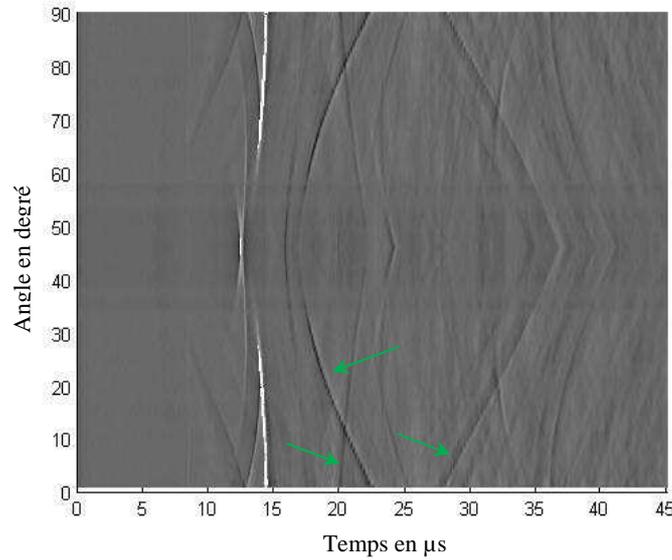


Figure III.17 : Représentation cartésienne des signaux expérimentaux.

Analysons maintenant en détail certains trajets particuliers.

III.3.2.1 Temps d'arrivée des premières réflexions sans conversion

Dans un premier temps, intéressons nous aux rayons qui n'ont pas subi de conversion de modes et qui sont issus d'une seule réflexion. Ils correspondent à $n = 2$, $m = 0$ et $l = 0$. La Figure III.18 montre le chemin parcouru par ces ondes et concerne les rayons $2L$, $2T_1$ et $2T_2$.

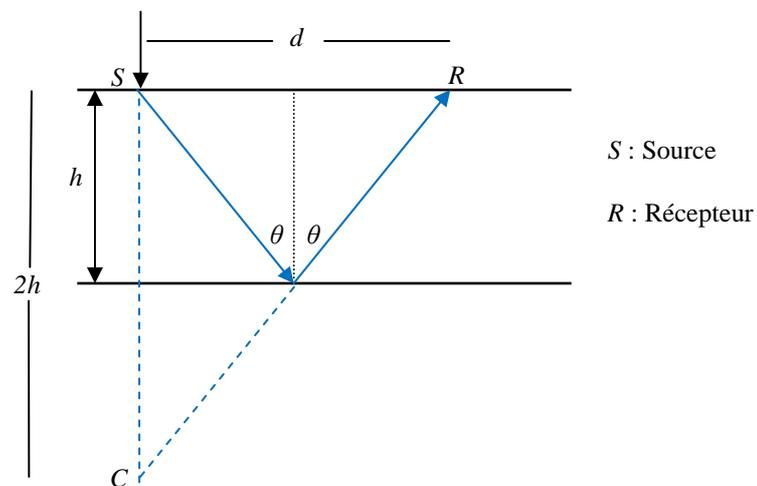


Figure III.18 : Schéma de la réflexion primaire.

Pour permettre une meilleure visualisation des résultats expérimentaux, on présente des zooms de la Figure III.17, avec des excursions angulaires soit de -45° à 45° soit de 0° à 90° selon le rayon étudié. Faisant ainsi, à la Figure III.19, on voit très clairement la bonne concordance entre la théorie et les mesures pour le rayon $2L$. C'est ce rayon auquel il avait été fait allusion à la Figure III.9.3 et qui complète son interprétation. A la Figure III.20, on observe partiellement la contribution du rayon $2T_1$. En effet, ce rayon n'est visible que sous certaines conditions (cf. les 3 flèches blanches parallèles). Une autre partie du rayon prédit par la théorie n'est pas présente (cf. la flèche blanche seule). Il en est de même pour la réflexion $2T_2$. Cette contribution est beaucoup plus complexe que les autres, puisqu'elle associe à la fois une corne et des réflexions hors plan.

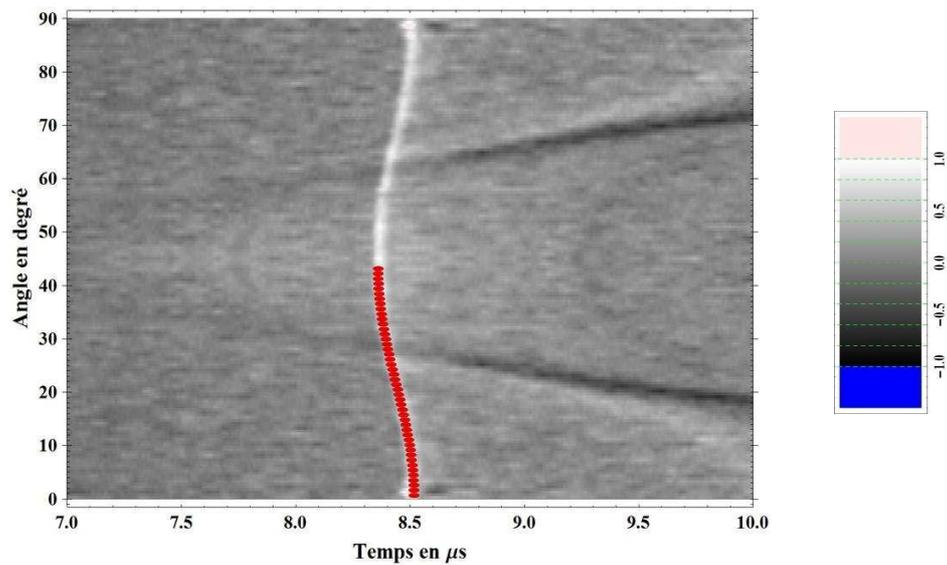


Figure III.19 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la première réflexion $2L$ de l'onde longitudinale L .

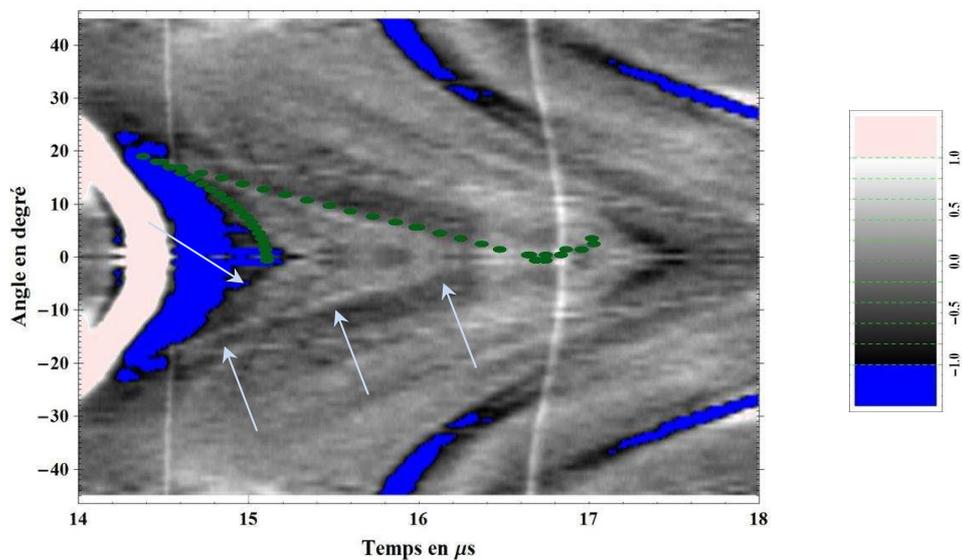


Figure III.20 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la première réflexion $2T_1$ de l'onde transversale T_1 .

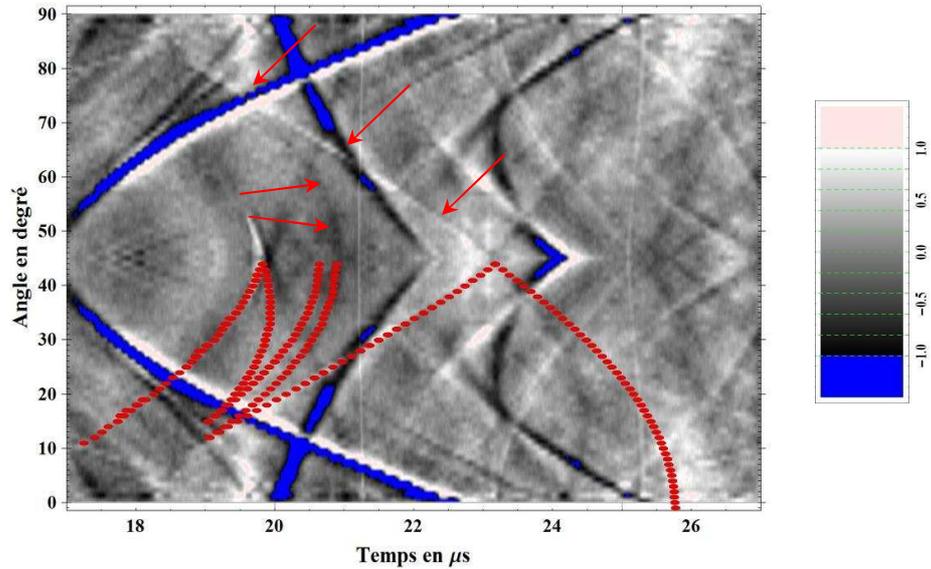


Figure III.21 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la première réflexion $2T_2$ de l'onde transversale T_2 .

Les rayons qui ne sont pas observés le sont parce qu'ils ne sont pas engendré par la source, i. e. une force ponctuelle à la surface de l'échantillon. Pour ceux observés, on note le bon accord entre la théorie et l'expérience. Cette comparaison est reportée en coordonnées polaires à la Figure III.22, en superposant les courbes de temps d'arrivée théoriques aux déplacements mesurés expérimentalement. On note qu'en coordonnées polaires la correspondance est bien moins claire qu'en coordonnées cartésiennes.

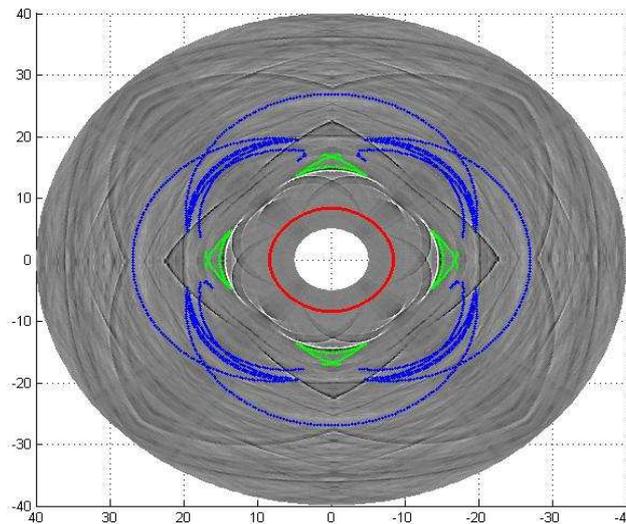


Figure III.22 : superposition des courbes de temps d'arrivée théoriques de la réflexion primaire aux déplacements mesurés expérimentalement.

III.3.2.2 Temps d'arrivée des multiples réflexions sans conversion

Après l'arrivée des ondes issues de la première réflexion, un deuxième groupe d'ondes réfléchies peut être visible. Dans un premier temps, examinons les rayons qui ont subi deux réflexions entre l'interface inférieure et l'interface supérieure comme le montre la figure ci-dessous (Figure III.23). Dans ce cas là, le calcul de la distance parcourue par les ondes correspond à $n = 4$, $m=0$ et $l=0$.

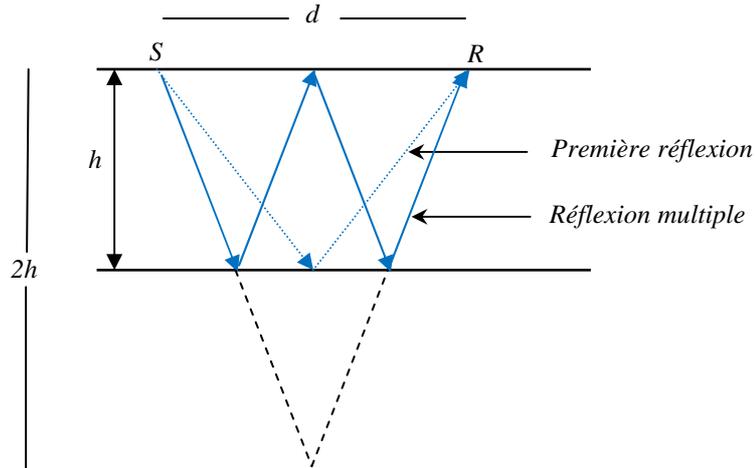


Figure III.23 : une réflexion primaire et une réflexion multiple du premier ordre.

Les arrivées de ces rayons, qui correspondent à $4L$, $4T_1$ et $4T_2$, sont représentées respectivement aux Figures III.24, III.25 et III.26. De même qu'au paragraphe précédent, des zooms adaptés ont été effectués pour mieux identifier ces réflexions multiples.

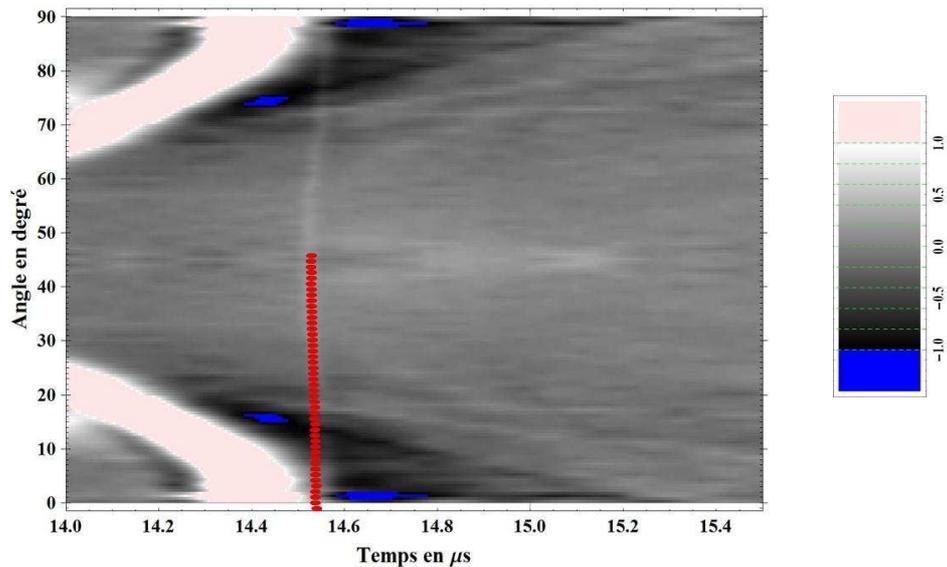


Figure III.24 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la 2ème réflexion $4L$ de l'onde longitudinale L.

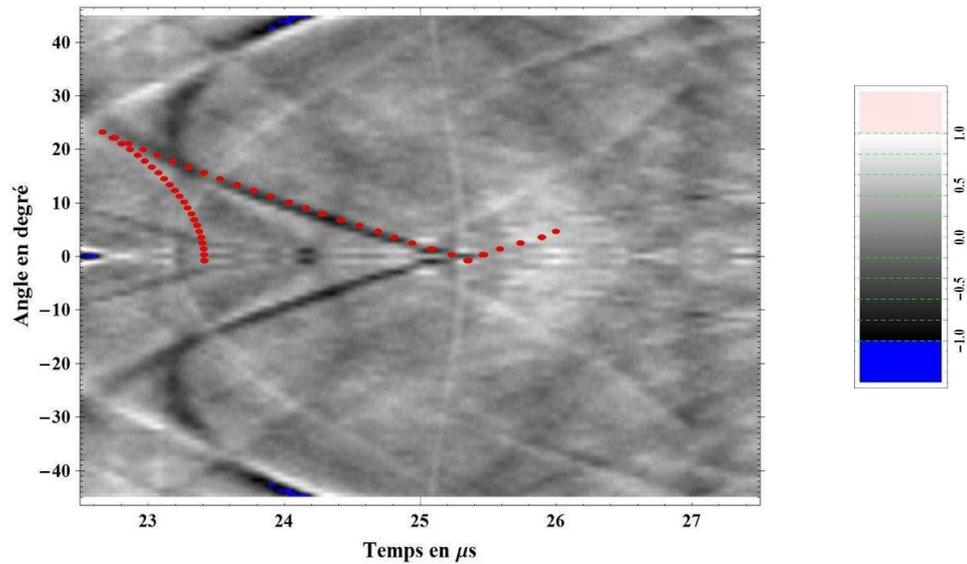


Figure III.25 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la 2ème réflexion $4T_1$ de l'onde transversale T_1 .

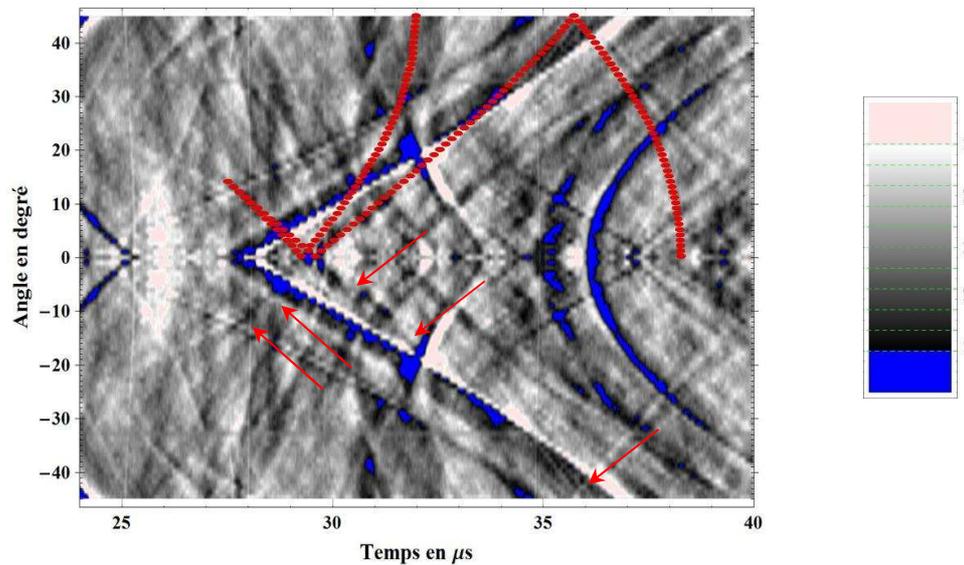


Figure III.26 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la 2ème réflexion $4T_2$ de l'onde transversale T_2 .

Pour ce degré de réflexion (n égal 4), à l'instar des premières réflexions, les rayons associés au mode L sont les plus visibles et la comparaison de leur arrivée avec la théorie est la plus probante (cf. Figure III.24). On devine cependant pour quelques directions des conversions $4T_1$ et $4T_2$ (cf. Figures III.25 et III.26). Tous ces résultats sont reportés sur la figure qui suit en coordonnées polaires.

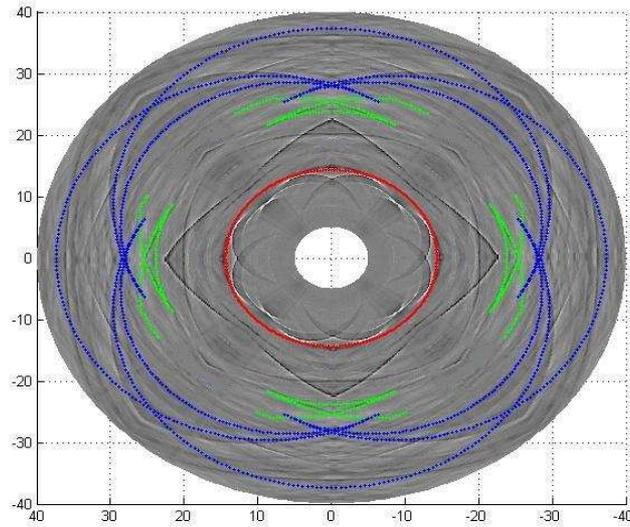


Figure III.27 : superposition des courbes de temps d'arrivée théoriques de la 2ème réflexion aux déplacements mesurés expérimentalement.

Evidemment, le nombre des multiples réflexions qui existent dans la plaque est très grand. Leurs contributions diminuent avec le nombre de réflexion. Cependant, ce n'est toujours vrai, puisque lorsque le nombre de réflexions augmente l'angle de propagation du rayon diminue. On peut donc imaginer qu'en fonction du diagramme de directivité la réponse soit plus importante. A la Figure III.28, on observe les contributions des ondes 6L et on devine toujours celles des rayons $6T_1$ (Figure III.29).

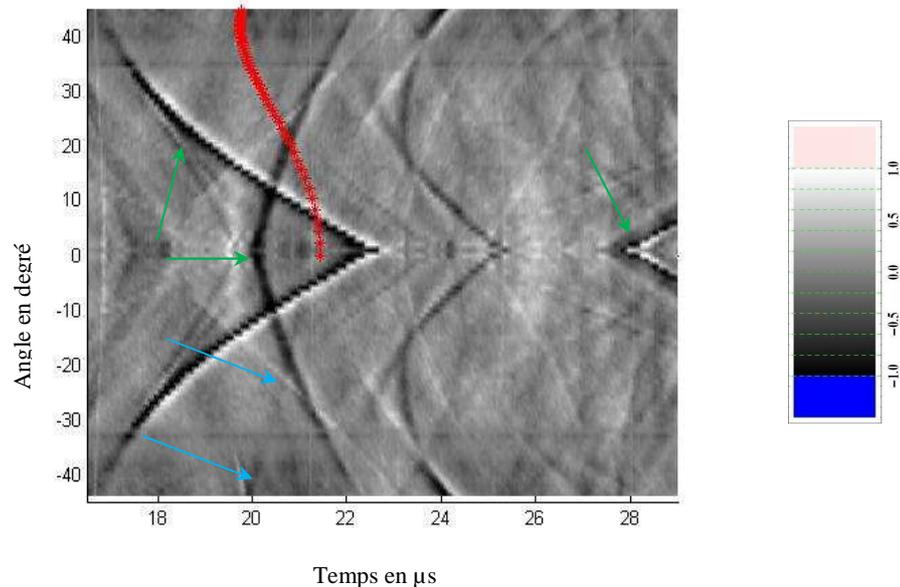


Figure III.28 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la 3ème réflexion 6L de l'onde longitudinale L.

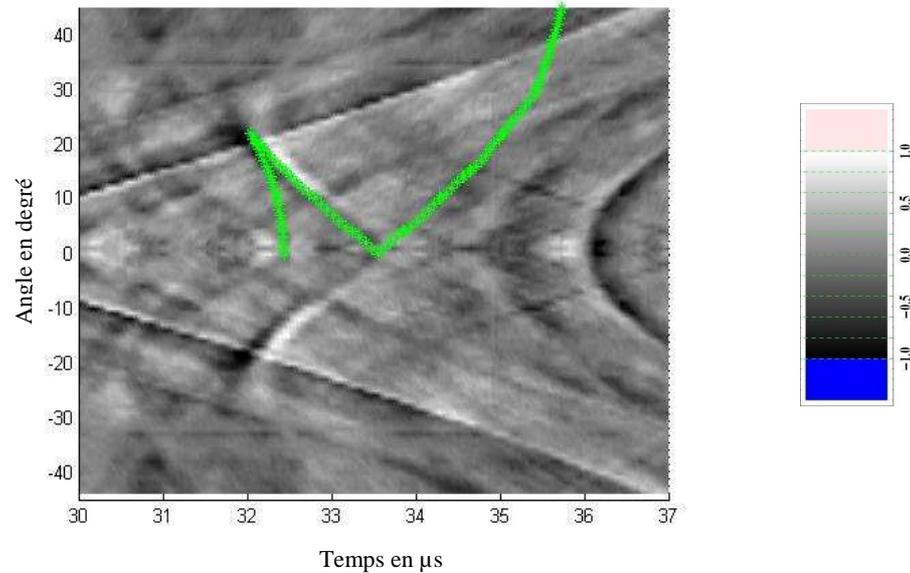


Figure III.29 : zoom de la représentation 3D de la Figure III.17 pour la 3ème réflexion $6T_1$ de l'onde transversale T_1 .

Avant de conclure ce chapitre, il est très important de remarquer les contributions importantes identifiées par des flèches vertes aux Figures III.17 et III.28. Suite à une étude que nous avons menée, ces arrivées ne peuvent être expliquées par des réflexions avec conversions de modes. Ce sont, sans doute, des réflexions des ondes de surface sur le bord de l'échantillon. Une étude plus poussée reste à faire pour clarifier ce point.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les arrivées des ondes rasantes et des ondes de Rayleigh et les pseudo-ondes de Rayleigh pour le mono cristal de cuivre sont décrites. Aussi les arrivées des ondes issues de la multiple réflexion dans la plaque sont mesurées. Les résultats expérimentaux sont globalement en accord avec les résultats théoriques. Ce chapitre met en relief la diffraction des ondes dans la plaque de cuivre et les multiples réflexions. Un point reste à faire, il concerne l'étude des réflexions avec conversions de modes.

III.5 Références

Auld B.A. (1973). *Acoustic fields and waves in solids*. New York, Wiley.

Barnett D.M., Lothe J. (1973). *Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's functions, and surface waves in anisotropic elastic solids*, *Physica Norvegica* 7(1), 13–19.

Bescond C. (1997). "Réponse dynamique d'un demi-espace anisotrope: Application à la résolution de problèmes inverses par génération et détection laser." Thèse, Université Bordeaux 1.

Huet. G., (2006), *Fronts d'onde ultrasonores à la surface d'un milieu semi infini anisotrope: théorie des rayons réels et complexes*. Thèse, Université Bordeaux 1.

Hutchins D.A. (1988). *Ultrasonic generation by pulsed laser*, Academic Press W.P. Mason et R.N. Thurston, Physical Acoustics, New York.

Royer D. et Dieulesaint E. (1986). *Optical detection of sub-Angstrom transient mechanical displacement*, IEEE Ultrason. Symp. Proc., Vol. 527-530.

Royer D. et Dieulesaint E. (1974). *Ondes élastiques dans les solides*. Paris, Masson.

Scruby C.B. et Drain L.E. (1990). *Laser Ultrasonics Techniques and Applications.*, Bristol, Philadelphia and New York.

Scudder L.P., Hutchins D.A. And Mottram J.T. (1994). *The ultrasonic impulse response of unidirectional carbon fibre laminates*, *Ultrasonics*, Vol. 32, (5).

Chapitre IV : Etude expérimentale : ondes guidées pour un matériau composite

IV.1 Introduction	93
IV.2 Caractérisation des matériaux	94
IV.2.1. Dispositif expérimental	94
IV.2.2 Identification des C_{ij}	96
IV.3 Mesures expérimentales	97
IV.3.1 Mesure de la vitesse de groupe en fonction de la direction d'observation	100
IV.3.2 Mesure de la vitesse de phase en fonction de l'angle de propagation de la phase teta pour une fréquence donnée.....	103
IV.3.3 Mesure de la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour un angle de phase donné.....	103
IV.3.4 Mesure de la vitesse d'énergie en fonction de l'angle d'observation pour une fréquence fixée	107
IV.4 Conclusion	110
IV.5 Références	111

IV.1 Introduction

La connaissance des propriétés des ondes de Lamb facilite leur application pour l'évaluation non destructive. Ces ondes qui font l'objet de nombreuses recherches appliquées relatives à l'inspection des plaques sont utilisées notamment pour détecter les défauts des matériaux, tester les composantes collées [Seifried, et al., 2002] et pour la détection des décollements [Tan, et al., 1995]. Elles sont aussi utilisées pour la caractérisation des matériaux [Safaeinili, et al., 1996], [Chimenti, 1997], [Wu and Liu, 1999], suivre l'évolution des matériaux lors d'endommagements ou sollicitations variées (immersion prolongée, température, essai de traction-compression...) et pour connaître leurs propriétés après endommagement.

Dans ce chapitre, une illustration expérimentale des propriétés des modes guidés pour une plaque orthotrope est donnée. L'objectif est de fournir des résultats expérimentaux et de les valider par des résultats théoriques. L'exécution de telles expériences sur une plaque orthotrope est une tâche difficile. Ceci implique les problèmes venant de l'installation expérimentale, du processus de caractérisation et de l'anisotropie du matériau.

Cinq types d'expériences sont présentés. La première décrit la méthode ultrasonore par immersion qui utilise la propagation d'ondes planes dont les paramètres acoustiques sont fortement sensibles à la structure interne des matériaux. Cette méthode a permis de mesurer les vitesses de propagation d'ondes ultrasonores dans les milieux anisotropes afin de déterminer les constantes d'élasticité.

Les autres expériences sont effectuées à l'aide d'une configuration de source ponctuelle, pour une plaque de carbone époxy unidirectionnel. Elles permettent de mesurer la vitesse de groupe en fonction de la direction d'observation, et aussi de mesurer la vitesse de phase en fonction de l'angle de propagation de la phase θ pour une fréquence donnée, et encore de mesurer la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour un angle de phase donné. Une dernière expérience permet de mesurer la vitesse d'énergie en fonction de l'angle d'observation pour une fréquence fixée.

IV.2 Caractérisation des matériaux

IV.2.1. Dispositif expérimental

L'expérience se déroule dans un banc à immersion (Figure IV.1 et Figure IV.2) dans lequel le transducteur-émetteur génère une onde ultrasonore qui se propage dans le fluide et qui est recueillie par le transducteur-récepteur. Un générateur excite le transducteur par une impulsion brève. Les transducteurs sont tous les deux des larges-bandes (0.5 MHz à 5 MHz) et ils peuvent supporter des températures allant jusqu'à 250°C. Ils sont tous les deux orientables à l'aide de plateaux tournants. Ils sont réglés de manière à être strictement en face l'un de l'autre au départ et que leurs faces soient parallèles.

Le récepteur est relié à une table en translation de manière à pouvoir se déplacer dans un plan parallèle au plan d'émission de l'onde pour recueillir la totalité du signal transmis par l'échantillon et satisfaire la condition d'onde plane.



Figure IV.1 : Banc ultrasonore à immersion.

En incidence normale, les faces de l'échantillon doivent être à la fois perpendiculaires aux faisceaux ultrasonores et parallèles au déplacement du récepteur. Le décalage latéral du faisceau transmis est connu grâce aux lois de Snell-Descartes. Le fluide utilisé est l'eau.

Un premier signal est acquis en l'absence d'échantillon. Ce signal noté $r(t)$ est considéré comme référence. Il est mesuré une fois pour toute au début de l'expérience.

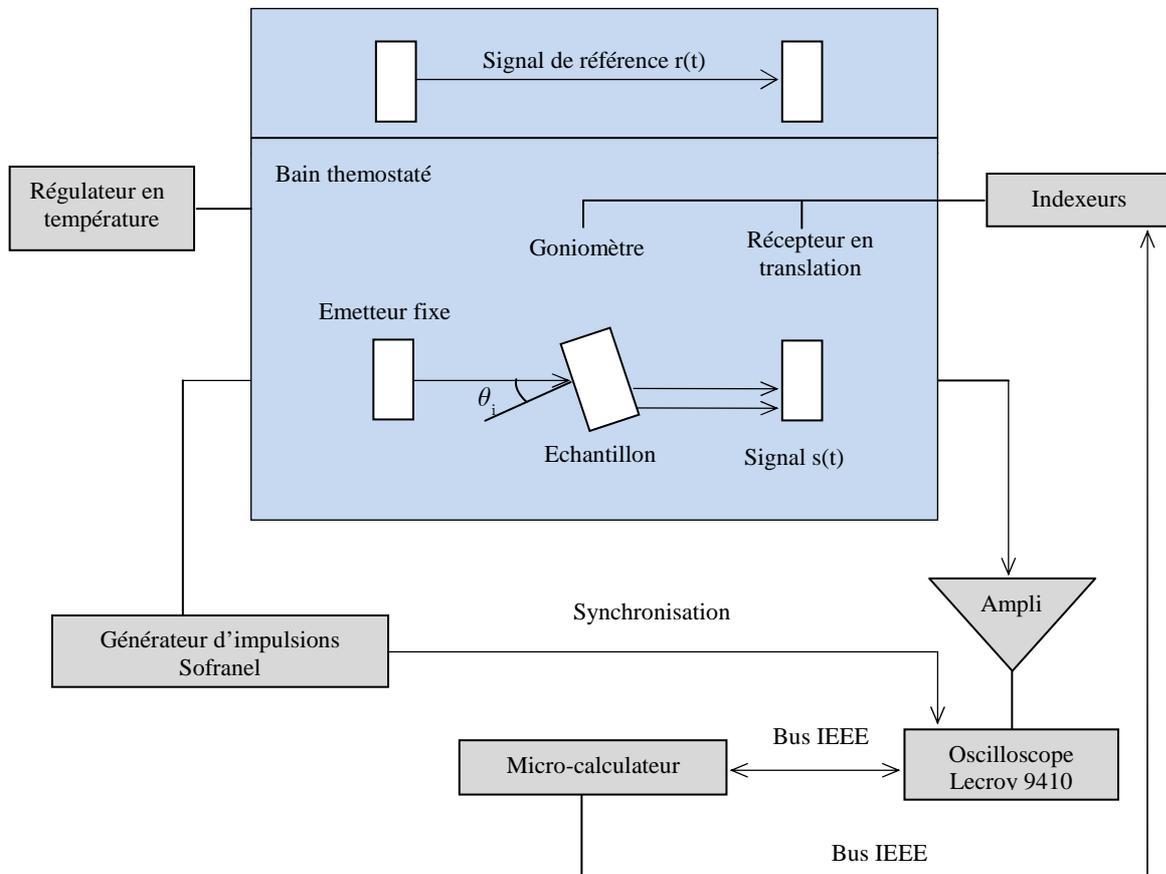


Figure IV.2 : Synoptique du spectro-interféromètre.

L'échantillon qui est une lame à faces parallèles est ensuite placé entre les transducteurs. Il est fixé à un goniomètre précis au $1/100^{\text{ème}}$ de degré, qui assure la rotation de l'échantillon autour de son axe (Figure IV.3). Il permet ainsi de faire varier l'angle d'incidence θ_i des ondes sur les matériaux avec une précision de 0.1° .

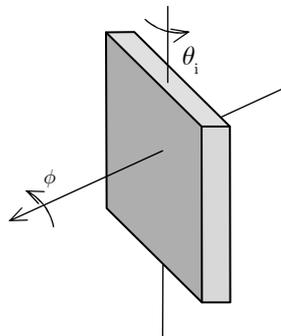


Figure IV.3 : Représentation de l'angle azimutal et de l'angle d'incidence.

Un système de rotation de l'échantillon autour de sa normale permet de faire varier l'angle azimutal ϕ de l'échantillon avec une précision angulaire de $\pm 0,5^\circ$, ceci sans sortir le matériau du bain thermostaté. En position initiale, l'angle azimutal est nul et le plan correspondant dans le cas des matériaux unidirectionnels est le plan P12 (Figure IV.4).

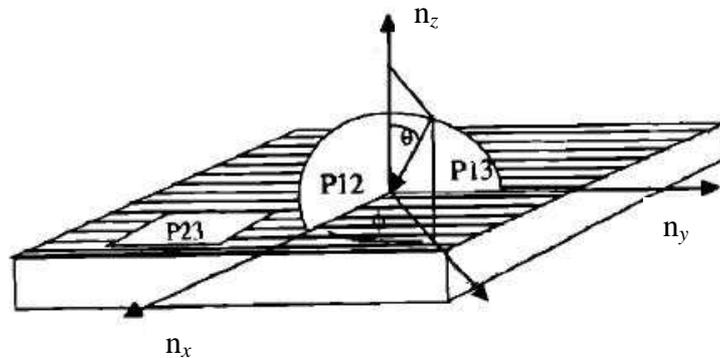


Figure IV.4 : Axes et plans principaux dans un matériau composite stratifié.

Le pilotage du banc est assuré par micro-ordinateur, i.e. rotation du goniomètre, mouvement de l'unité de translation, déclenchement de l'émission et de l'acquisition des signaux. Le réglage de l'angle azimutal est manuel.

Les signaux $s(t)$ transmis par l'échantillon sont enregistrés à divers angles d'incidence, visualisés sur oscilloscope numérique puis recueillis sur micro-ordinateur. Ils sont ensuite analysés par rapport au signal référence et la totalité des propriétés des matériaux peut être déterminée.

IV.2.2 Identification des C_{ij}

L'identification des constantes d'élasticité C_{ij} permet de déterminer les vitesses des phases du matériau, celui-ci est supposé orthotrope, c'est-à-dire qu'il a neuf composants complexes du tenseur C_{ij} indépendantes. Il est ensuite possible de vérifier les éventuelles simplifications qu'impliquent des symétries particulières. Par exemple, dans le plan P12 du composite unidirectionnel, repéré par l'angle azimutal $\phi = 0^\circ$, quatre modules sont identifiés : C_{11}, C_{22}, C_{66} et C_{12} , et on peut ensuite vérifier que la symétrie isotrope transverse associée à ce matériau est correcte, c'est-à-dire que le plan P12 est quasi-isotrope et que : $C_{11} = C_{22}$ et $C_{12} = C_{11} - 2C_{66}$.

L'auscultation du plan P13 ($\phi = 90^\circ$) permet d'accéder aux modules C_{11}, C_{33}, C_{55} et C_{13} . Et enfin, l'auscultation d'un troisième plan, le plan $\phi = 45^\circ$, qui n'est pas un plan de symétrie, permet d'identifier les deux modules C_{23} et C_{44} .

Si la symétrie isotrope transverse est vérifiée, alors $C_{23} = C_{13}$ et $C_{44} = C_{55}$. Dans le cas des matériaux isotropes, il suffit d'étudier un seul plan pour obtenir les quatre modules C_{11}, C_{22}, C_{66} et C_{12} . Les constantes d'élasticité fournies par processus de caractérisation pour un échantillon du Carbone-Epoxy unidirectionnel sont données dans le Tableau (IV.1).

$C_{11} = 12.56$	$C_{12} = 6.9$	$C_{13} = 6.5$	0	0	0
	$C_{22} = 13.2$	$C_{23} = 5.6$	0	0	0
		$C_{33} = 110$	0	0	0
			$C_{44} = 4.7$	0	0
<i>épaisseur = 3.6 mm</i>				$C_{55} = 4.00$	0
$\rho = 1.53 \text{ g/cm}^3$					$C_{66} = 2.25$

Tableau IV.1: table des constantes d'élasticité pour une plaque de carbone-époxy unidirectionnel.

Toutes les constantes d'élasticité sont données en GPa.

IV.3 Mesures expérimentales

Dans cette section, on se propose d'effectuer quelques expériences afin de déterminer les lenteurs de groupe et de phase ainsi que les vitesses d'énergie des modes de Lamb. L'échantillon utilisé pour toutes les expériences est une plaque de Carbone-Epoxy dont les caractéristiques sont indiquées dans le Tableau IV.1. Ses dimensions sont : 91 x 80 x 0.36 cm.

La source ultrasonore est constituée d'un empilement de deux disques PZT de 5 mm de diamètre (de Morgan Matroc). Ces deux disques de PZT ont été raccordés en électricité de telle sorte que la puissance a été amplifiée par rapport à un seul disque. Une vue détaillée de la source est indiquée dans la Figure IV.5. Ce transducteur source a été appliqué au centre de la plaque et il a été relié à un générateur d'ondes (Macro Design Ltd, U.). Le signal d'émission est formé d'un signal de 5 cycles sinusoïdaux modulés par une fenêtre de Hanning (Figure IV.6).

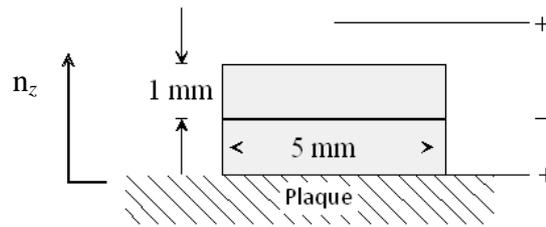


Figure IV.5 : schéma de la source.

La fréquence centrale de ce signal est notée f_0 . Elle est choisie de telle sorte que les dimensions de la source soient petites par rapport à la longueur d'onde et la distance de propagation afin que celle-ci puisse être assimilée à un point source.

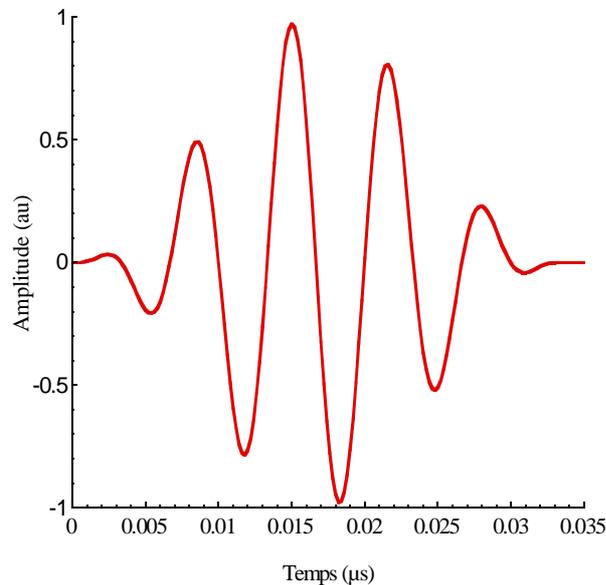


Figure IV.6: signal d'excitation pour une fréquence centrale 0.15 MHz et pour 5 cycles sinusoïdaux.

Un interféromètre Laser (POLYTEC) a été utilisé comme récepteur. Il permet la mesure du déplacement ultrasonore normal à la surface de l'échantillon. Il est branché à un oscilloscope (Lecroy 9410) qui est relié à un ordinateur pour l'enregistrement des données. L'interféromètre Laser est focalisé sur la plaque. Afin d'améliorer la sensibilité, un papier réfléchissant renvoi le faisceau optique vers la sonde. Ce système permet la mesure du déplacement ultrasonore normal à la surface pour n'importe quel point M de la plaque. En effet, la plaque est solidaire d'un goniomètre qui assure une rotation d'angle θ_G et l'interféromètre laser est porté par une table en translation qui offre la possibilité de se déplacer suivant l'axe Y_T . Ce déplacement est parallèle à l'échantillon (Figure IV.7). Il est important de noter, d'une part, que l'axe de rotation du goniomètre a été réglé de manière à ce

qu'il corresponde à l'origine O du repère (X_T, Y_T) , et d'autre part, que la source coïncide avec l'axe de rotation.

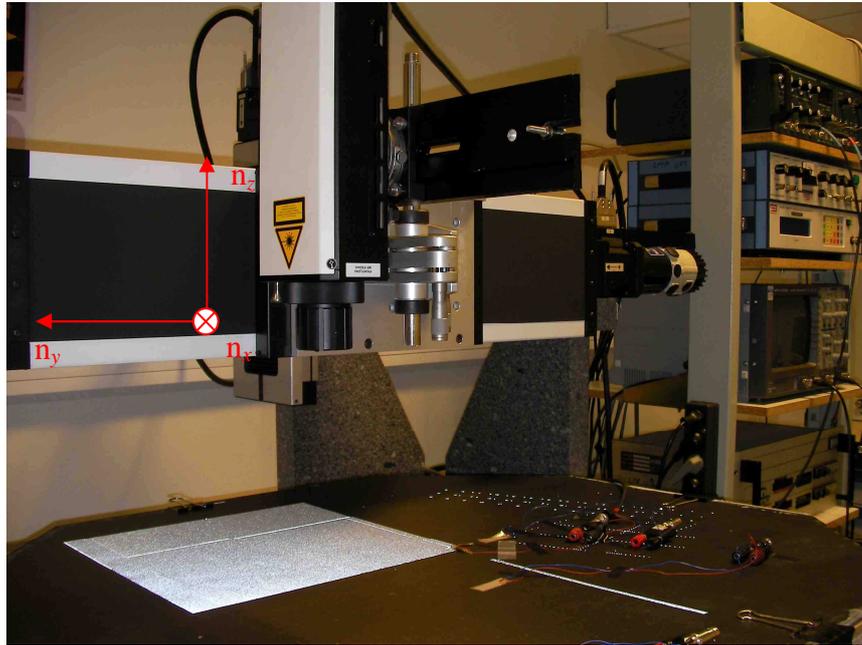


Figure IV.7: installation expérimentale.

Le déplacement de l'interféromètre Laser dans son repère naturel, noté x_T , et l'angle de rotation du goniomètre θ_G permettent de déplacer le point de mesure $M(x,y)$ dans tout le plan (n_x, n_y) de l'échantillon par le changement du paramètre suivant (Figure IV.8) :

$$x = x_T \cos(\theta_G) \quad \text{et} \quad y = x_T \sin(\theta_G).$$

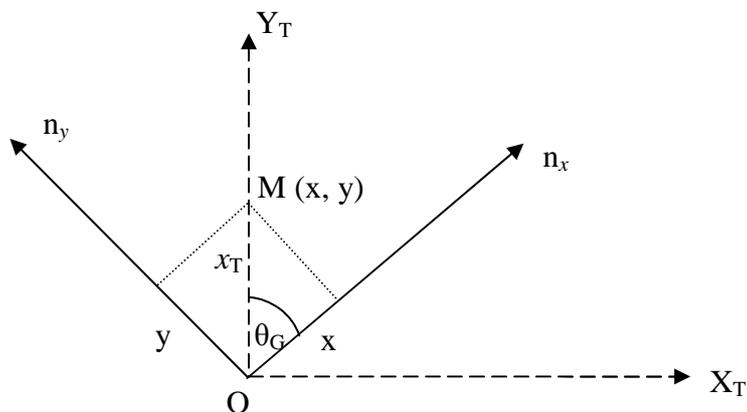


Figure IV.8 : changement de base.

Ainsi, le point M peut s'exprimer soit en coordonnées polaires par $M(r, \theta)$, avec $r = x_T$ et $\theta = \theta_G$ soit en coordonnées cartésiennes $M(x, y)$. Pour tout point M, on peut faire l'acquisition d'un signal temporel (Figure IV.6), de spectre que l'on l'obtient par une simple transformation de Fourier du signal temporel (Figure IV.9) et aussi de son enveloppe (Figure IV.9) qu'on obtient par une transformation de Fourier inverse de la transformation de Hilbert du signal expérimental [Max, 1977]. Pour finir notons que l'axe naturel de l'échantillon X_T correspond à l'axe des fibres du matériau.

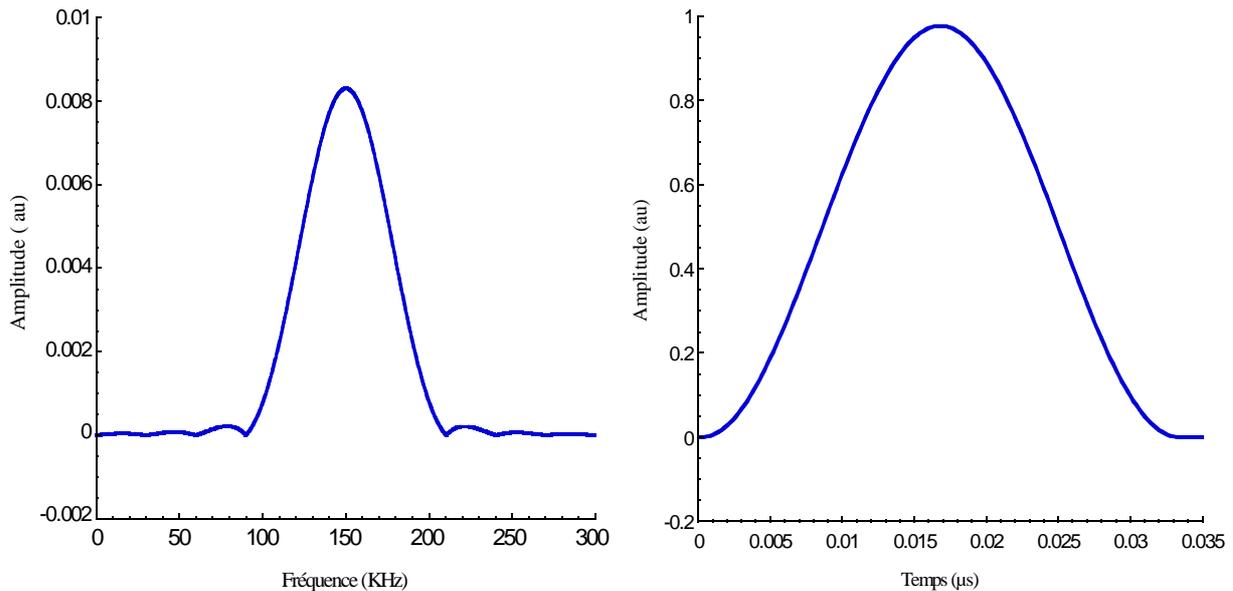


Figure IV.9 : spectre et enveloppe pour un signal temporel donné à la figure IV.6.

En combinant les différents traitements de signal et les diverses possibilités de déplacements (cartésiens ou polaires), ce dispositif expérimental est exploité, aux paragraphes suivants, pour visualiser la lenteur de groupe, pour mesurer la vitesse de phase en fonction de la direction de propagation ou en fonction de la fréquence, et enfin pour mesurer la vitesse d'énergie en fonction de la direction de propagation.

IV.3.1 Mesure de la lenteur de groupe en fonction de la direction d'observation

Le but de cette expérience est d'effectuer la mesure de la vitesse de groupe des modes de Lamb qui se propagent dans une plaque anisotrope. Le dispositif expérimental mis en place est celui décrit au paragraphe précédent avec un mode de fonctionnement en coordonnées polaires (Figure IV.10).

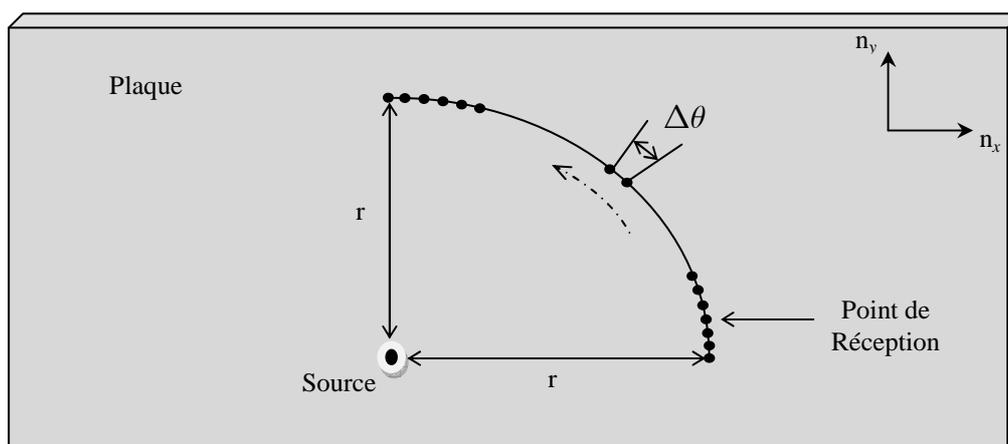


Figure IV.10 : un transducteur-source de point fixe est utilisé comme source. Le point récepteur décrit un quart de cercle autour de la source.

Le signal est acquis à une distance $r = 20$ cm de la source pour différentes valeurs de l'angle d'observation θ allant de 0 à 90° par pas de 1° . Un signal typique est présenté à la Figure IV.6, pour une fréquence de 0.15 MHz.

Afin d'obtenir la vitesse d'énergie d'un mode, il est nécessaire de déterminer précisément le temps d'arrivée d'un paquet d'ondes. L'observation de ce signal révèle la présence de plusieurs paquets qui sont associés à plusieurs modes de Lamb. Il y a différentes façons de déterminer le temps d'arrivée de ces modes. La façon la plus instinctive de faire cette mesure est dans le domaine temporel. Lorsque la dispersion est faible, une bonne méthode consiste simplement à prendre le temps correspondant au maximum de l'enveloppe du signal (Figure IV.11). Ainsi, pour chaque direction, l'enveloppe a été calculée pour extraire les vitesses de groupe des modes excités. Pour chaque direction θ , ces maxima présents au temps t_m sont associés à des lenteurs par la relation $s_m = t_m/r$. Elles sont identifiées par des cercles rouges dans le plan (s_x, s_y) à la Figure IV.12. En un point de la surface, le déplacement normal est noté $d(r, \theta, t)$. Ce déplacement peut être exprimé en fonction de la variable $s = t/r$, homogène à une lenteur et conduit à une nouvelle expression $d(s \cos(\theta), s \sin(\theta))$. La Figure IV.12 est une représentation tridimensionnelle de cette fonction issue de la mesure. Le plan de la figure correspond à celui de la surface et l'amplitude du déplacement est quantifiée par les dégradés de gris: le noir correspond à un maximum de déplacement et le blanc à un minimum. Cette représentation peut être interprétée comme une photographie, au temps unitaire, de la surface déformée.

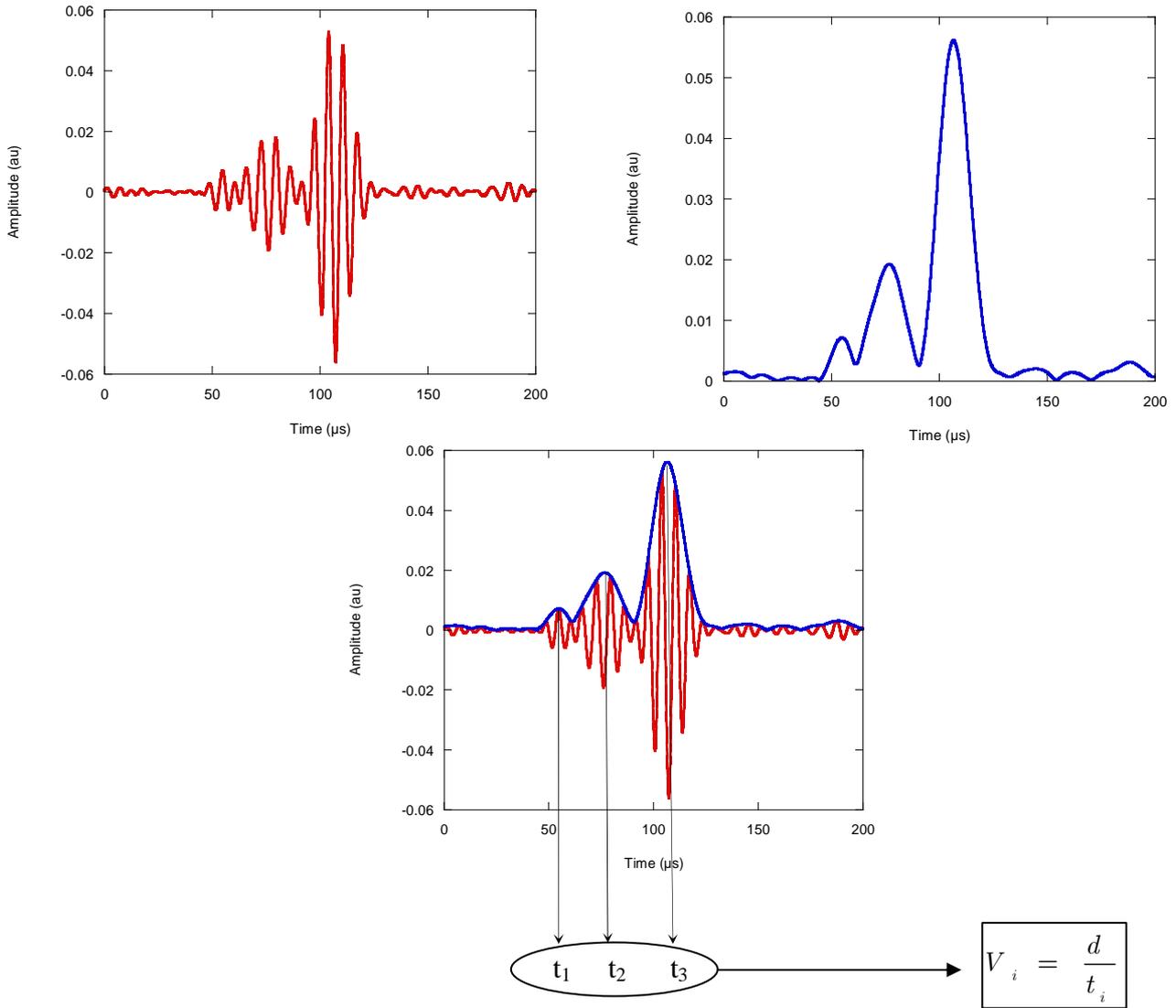


Figure IV.11 : extraction de la vitesse des données expérimentales en utilisant l'enveloppe.

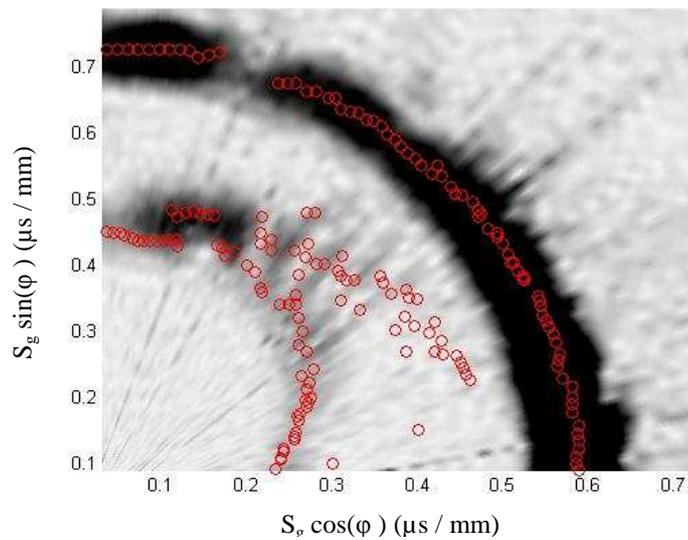


Figure IV.12 : résultat expérimental de lenteur de groupe des modes de Lamb pour une plaque de Carbone-Epoxy : image d'interpolation en échelle de gris pour les mesures des enveloppes et les valeurs associés de ses maximales (points rouges).

IV.3.2 Mesure de la lenteur de phase en fonction de l'angle de propagation de la phase θ pour une fréquence donnée.

Le but de ce paragraphe est d'extraire expérimentalement les surfaces de lenteurs des modes guidés pour une plaque anisotrope.

Pour cela le dispositif expérimental décrit au paragraphe III.1 est utilisé en mode cartésien. L'interféromètre Laser a été déplacé dans le plan (n_x, n_y) avec un pas $\Delta x = 2$ mm et $\Delta y = 2$ mm.

Pour chaque ligne, on a recueilli 32 signaux temporels. Cette opération a été répétée 32 fois par translation selon y d'un pas Δy . Les signaux acquis constituent donc une matrice de dimension 32×32 .

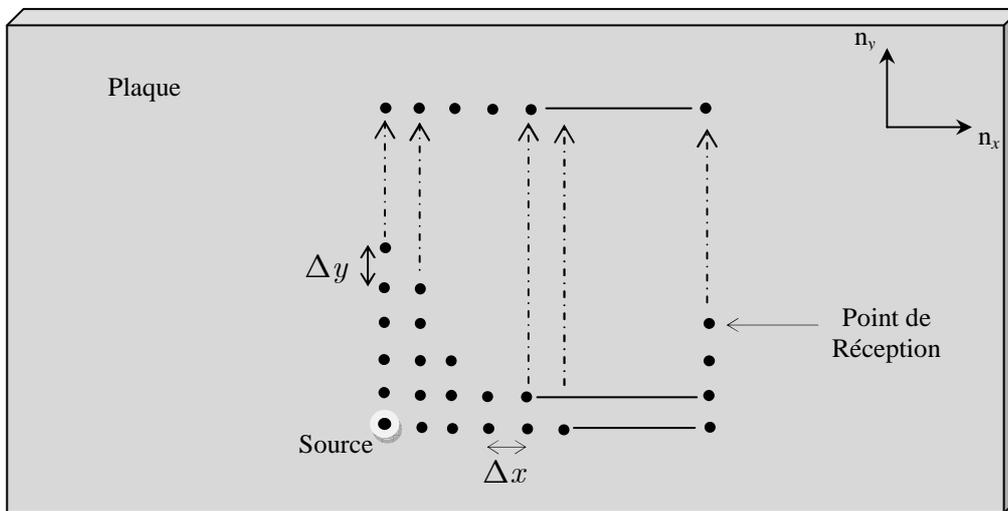


Figure IV.13 : représentation schématique de la méthode utilisée pour déterminer les surfaces de lenteurs.

A chaque signal, on applique une transformation de Fourier temporelle simple. Ensuite, pour une fréquence donnée, on applique une double transformation de Fourier spatiale. On se trouve ainsi dans le domaine (f, k_x, k_y) .

Pour chaque fréquence temporelle f , on peut extraire des spectres spatiaux $A(k_x, k_y)$ des maxima d'amplitude. Ces maxima sont alors tracés dans le plan (k_x, k_y) . Pour l'exemple choisi $f = 0,15$ MHz, ces courbes sont présentées à la Figure IV.14. A travers la mesure de la lenteur de phase on y observe trois modes : A_0 , S_0 et SH_0 . Des calculs théoriques ont été effectués avec la même fréquence et comparé avec l'expérience.

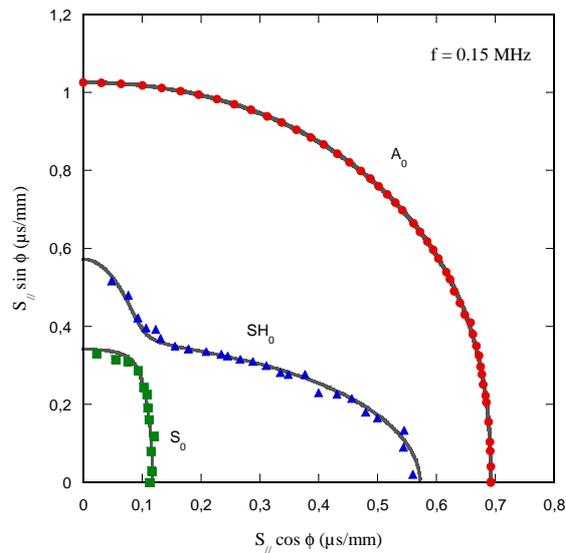


Figure IV.14: courbes de lenteurs des ondes de Lamb A_0 , S_0 et SH_0 pour une fréquence de 0,15 MHz : les valeurs pour le mode A_0 sont représentées par des cercles rouges, celles du mode S_0 par des carrés verts et celles du mode SH_0 par des triangles bleus.

La conformité entre les surfaces de lenteurs théoriques et expérimentales est bonne surtout pour le mode A_0 . Il est à noter que parfois l'amplitude du(es) mode(s) S_0 et/ou SH_0 est approximativement égale à celles des bruits. Dans ce cas, il nous était difficile d'identifier les bons maxima. C'est pour cette raison que quelques points manquent parfois dans le tracé de ces modes.

IV.3.3 Mesure de la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour un angle de phase donné

Le but de cette expérience est de faire la mesure de la vitesse de phase des modes de Lamb dans la plaque en fonction de la fréquence pour une direction d'observation donnée. Pour cela, le montage expérimental fonctionne en coordonnées polaires. A partir d'une distance fixe de $r = 20$ cm on fait l'acquisition du signal pour différentes valeurs de rayon r par pas de 2 mm (Figure IV.15).

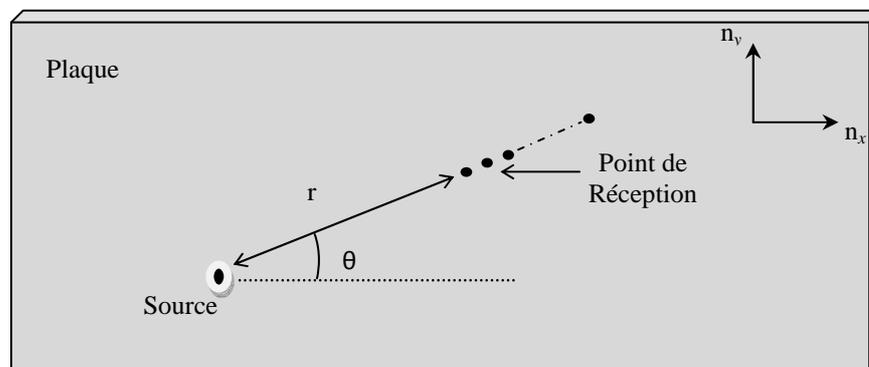


Figure IV.15 : Représentation schématisée de la méthode utilisée pour déterminer la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour une direction d'observation donnée.

On obtient ainsi après transformée de Fourier temporelle et spatiale le spectre bidimensionnel $B(f, k_r)$ où k_r est la fréquence spatiale dans la direction d'observation imposée θ . La recherche des valeurs de k_r associées au maximum d'amplitude pour une fréquence donnée identifie les modes. Les vitesses de phases expérimentales sont alors déduites par $v_\phi = 2\pi f / k_r$. Les Figures IV.17 et IV.18 présentent les résultats pour des directions d'observation respectivement de 0° et 90° . On y observe les courbes de dispersion des modes A_0 et S_0 . Pour ces deux angles d'observation, il est important de noter que puisque la propagation se fait dans deux directions principales, les directions de la célérité de phase et de la célérité d'énergie sont les mêmes. En conséquence, les mesures coïncident parfaitement aux courbes de dispersion théorique donnant la vitesse de phase v_ϕ en fonction de la fréquence. Dans le cas général, cf. la Figure IV.19 pour $\theta = 45^\circ$, cette comparaison n'est pas justifiée puisque les directions de la célérité de phase et de la célérité d'énergie ne sont pas identiques. En effet dans ce cas, comme on l'illustre à la Figure IV.16, la variation de la phase qui est mesurée dans la direction d'observation n_r correspond au nombre d'onde qui se trouve être dans la direction θ_ϕ , cette direction de phase dépendant de la fréquence.

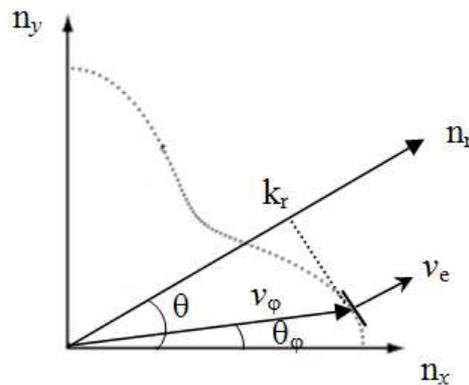


Figure IV.16 : liaison entre la vitesse de phase pour un angle de phase donnée θ_ϕ et la direction d'observation.

Pour obtenir une adéquation avec la courbe de vitesse phase théorique présentée à la Figure IV.19, il aurait fallu, à partir des spectres spatiaux $A(k_x, k_y)$ mesurés pour chaque fréquence temporelle f (cf. paragraphe IV.3.2), extraire les maxima d'amplitude pour une direction de phase donnée θ_ϕ , telle que : $k_x = k_\phi \cos(\theta_\phi)$ et $k_y = k_\phi \sin(\theta_\phi)$. A chaque maximum, un nombre d'onde k_ϕ peut être associé ainsi qu'une vitesse de phase.

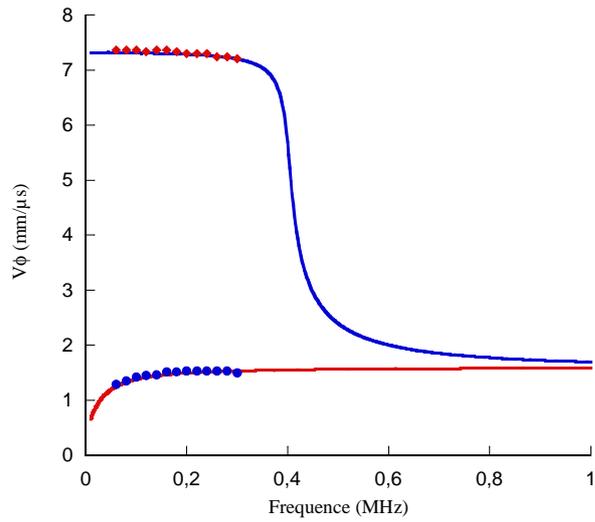


Figure IV.17 : vitesses de phases des modes A_0 et S_0 en fonction de la fréquence.

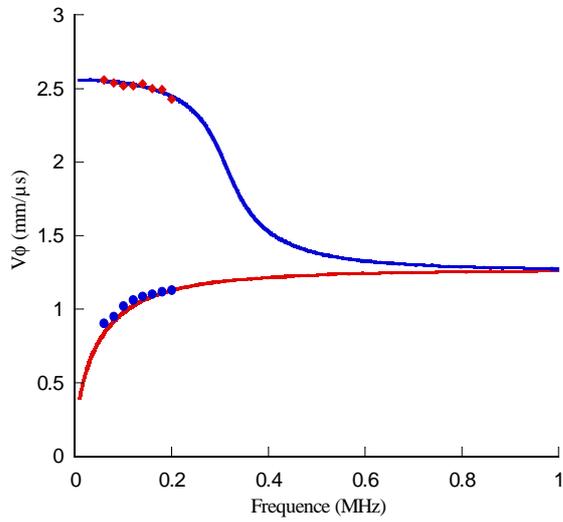


Figure IV.18 : vitesses de phases des modes A_0 et S_0 en fonction de la fréquence dans la direction perpendiculaires aux fibres.

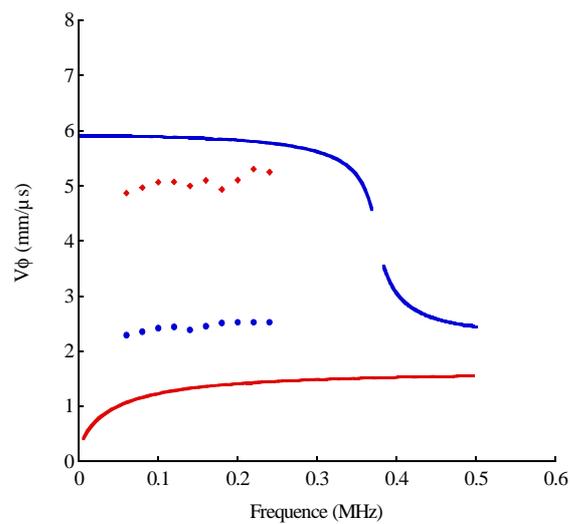


Figure IV.19 : vitesses de phases des modes A_0 et S_0 en fonction de la fréquence dans la direction 45° .

IV.3.4 Mesure de la vitesse d'énergie en fonction de l'angle d'observation pour une fréquence fixée

Le but de ce paragraphe est de mesurer les vitesses d'énergie des trois modes fondamentaux d'une plaque anisotrope. L'accent est mis sur ces modes parce que l'atténuation liées à la viscoélasticité des composites des modes supérieurs est souvent très élevée, et dans certains cas il est difficile, voire impossible, de les identifier. D'autre part, quand ils sont observables, la séparation des modes d'ordre supérieur est très difficile de par leur réponse multi-mode. Les modes fondamentaux restent donc les modes qui ont le plus d'intérêt pour la surveillance structurelle et le CND.

Dans un premier temps, il est nécessaire de s'assurer de la séparation des modes. Dans ce but, une étude préalable consiste à analyser l'évolution de la réponse pour une direction donnée et pour plusieurs distances source-réception : $r = 15$ cm, $r = 20$, Ces résultats sont présentés à la Figure IV.20 pour une fréquence centrale $f_0 = 150$ kHz et un angle d'observation $\theta = 40^\circ$. Le signal temporel reçu est tracé en rouge et son enveloppe en bleu. Pour une distance faible, i.e. $r = 20$ cm, les modes A_0 et S_0 sont clairement identifiables avec une amplitude convenable pour une mesure précise. Cette distance est donc choisie pour analyser ces deux modes en fonction de l'angle d'observation. En revanche, en ce qui concerne le mode SH_0 , la distance optimale, pour séparer les trois contributions liées à la corne, est de $r = 28$ cm. La conséquence est la perte d'amplitude due à la diffraction et à la viscoélasticité. Ceci entraîne une moins bonne précision dans la mesure.

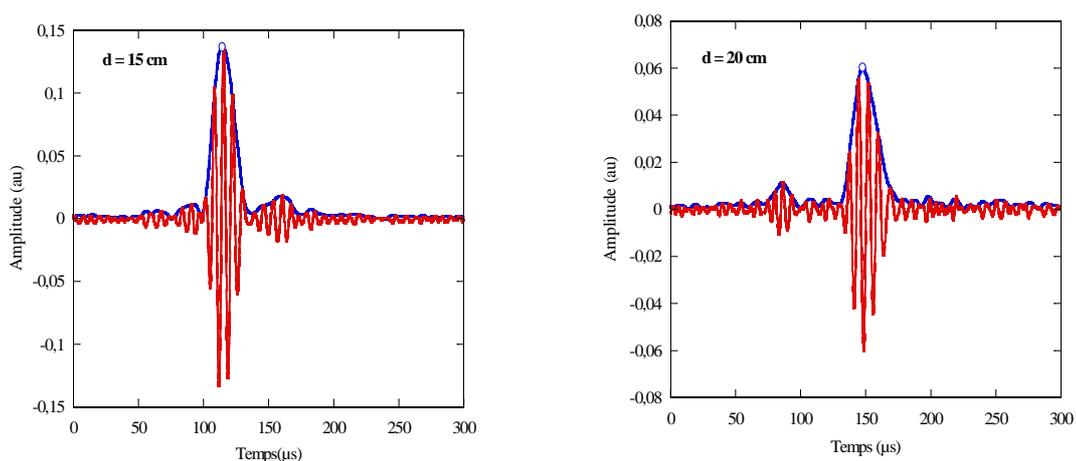


Figure IV.20 (a) : signaux expérimentaux effectués à 40° de la direction des fibres pour plusieurs distance à la fréquence expérimentale $f = 0,15$ MHz.

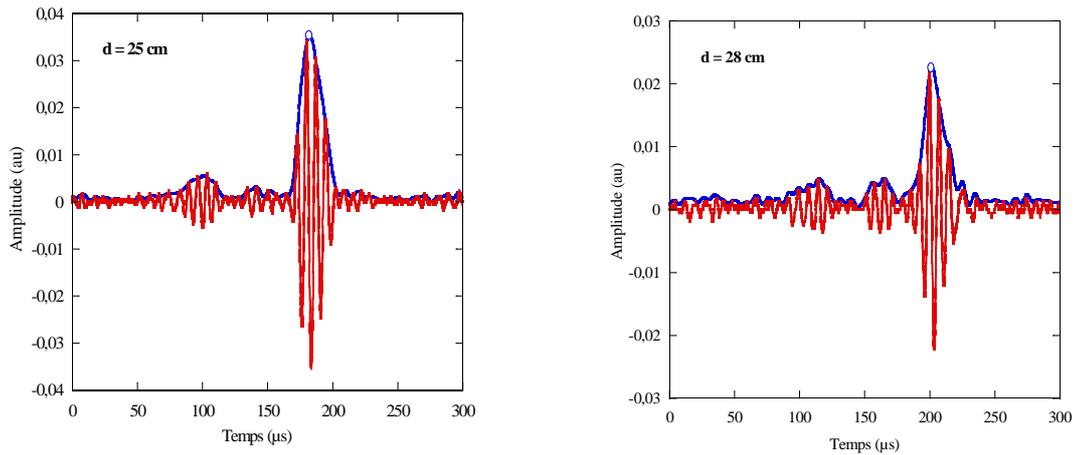


Figure IV.20 (b): signaux expérimentaux effectués à 40° de la direction des fibres pour plusieurs distance à la fréquence expérimentale $f = 0,15$ MHz.

Aux temps t_m , correspondant aux maxima de l'enveloppe du signal, on peut associer une célérité par la relation $c_g = r/t_m$. A la Figure IV.21 (a et b), le résultat de l'identification des maxima est représenté par des symboles colorés : cercle rouge pour le mode A_0 , carré vert pour le mode S_0 et un losange bleu pour le mode SH_0 , sur les formes d'ondes obtenues dans les directions : $\theta=0^\circ$, $\theta=60^\circ$ et $\theta=90^\circ$. Ces trois signaux expérimentaux ont été modélisés au chapitre II et présentées, respectivement, dans les Figures II.4, II.5 et II.6. On y observe une correspondance correcte, bien que certains problèmes numériques, notamment liés à des problèmes de repliement subsistent. Ce point important est en cours d'expertise complémentaire.

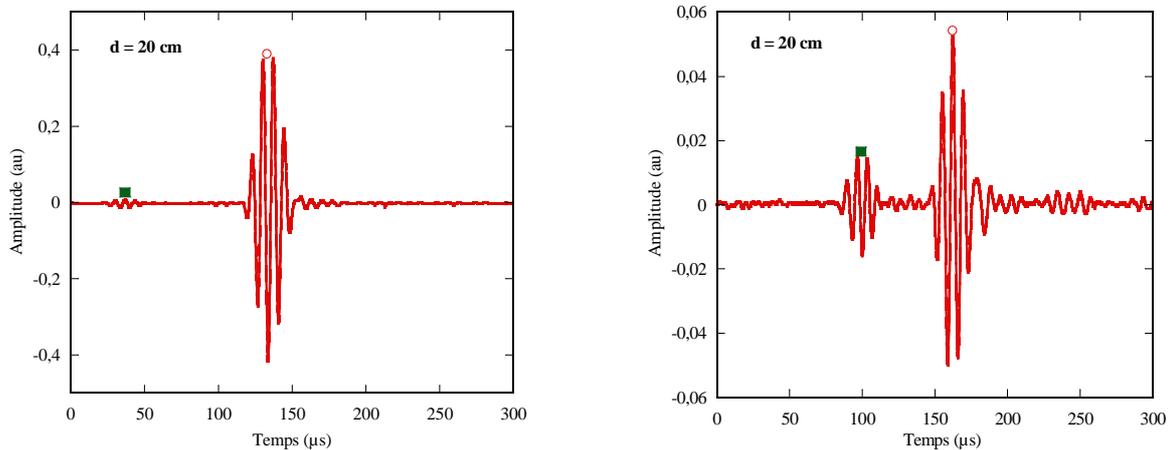


Figure IV.21(a) : Signaux expérimentaux pris à une fréquence $f_0 = 0.15$ MHz, respectivement dans la direction des fibres ($\theta=0^\circ$) et perpendiculaires aux fibres ($\theta=90^\circ$), à 20 cm de la source.

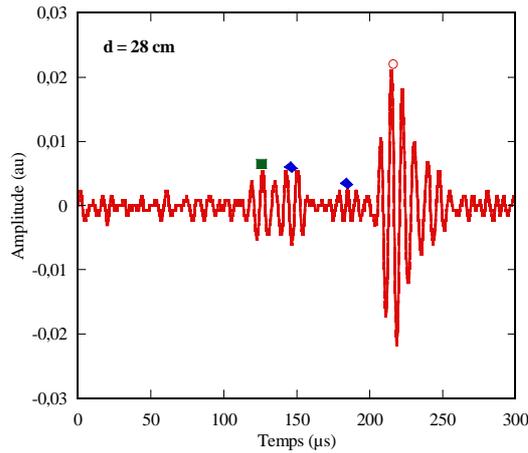


Figure IV.21(b) : Signal expérimental pris pour une fréquence $f_0 = 0.15$ MHz, à 60° de la direction des fibres et à 28 cm de la source.

Le suivi de ces vitesses de propagation d'énergie, pour des angles d'observation de 0 à 90° par pas de 1° , est montré pour des fréquences de 0,1 et 0,15 MHz à la figure ci-dessous (Figure IV.22). Sur ces figures, les courbes de vitesse d'énergie des modes A_0 , S_0 et SH_0 sont également tracées. On remarque notamment qu'il y a un excellent accord entre les courbes des vitesses d'énergie théoriques et expérimentales. Il est également possible d'observer la présence de la corne pour le mode SH_0 . Ainsi, entre $\theta = 45^\circ$ et $\theta = 70^\circ$ pour les fréquences 0.1 et 0.15 MHz, on peut distinguer trois arrivées d'onde de ce mode. Pour des angles supérieurs à 70° à basse fréquence, il y a encore présence d'une onde de type SH_0 . Ce phénomène est connu sous le nom de diffraction par la corne dans le cas de la propagation des ondes de volume [Bescond, 1997] ou de l'onde de Rayleigh [Huet, 2006]. Il est observé ici pour une plaque. Pour finir, notons qu'à basse fréquence, les modes interfèrent, cf. $f = 0.15$ MHz et $\theta > 70^\circ$.

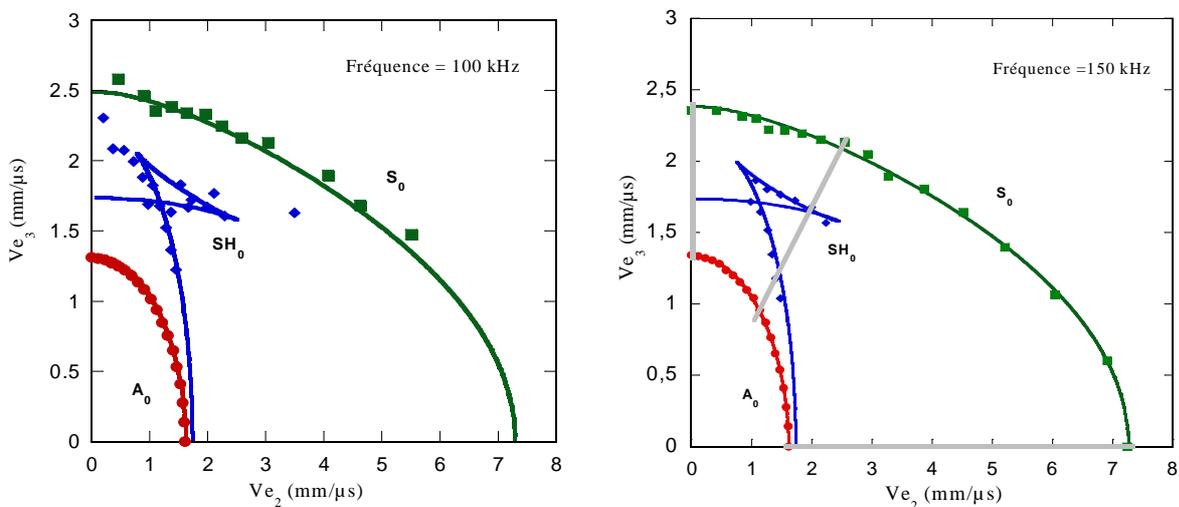


Figure IV.22 : mesure expérimentale de la vitesse d'énergie et des surfaces d'ondes pour les modes fondamentaux. L'axe horizontal représente la direction des fibres.

IV.4 Conclusion

Dans cette étude expérimentale, l'accent a été mis sur la compréhension des propriétés de modes guidés le long de la direction de l'énergie. Une illustration expérimentale a été donnée pour les modes fondamentaux pour une plaque de carbone époxy unidirectionnelle. Des mesures de vitesse de groupe en fonction de la direction d'observation et de vitesse de phase en fonction de l'angle d'observation pour une fréquence donnée ont été effectuées. Un bon accord a été trouvé pour la vitesse de phase et les vitesses d'énergie pour tous les modes à basse fréquence.

IV.5 Références

- Bescond. C., (1997), *Réponse dynamique d'un demi-espace anisotrope: Application à la résolution de problèmes inverses par génération et détection laser*. Thèse, Université Bordeaux 1.
- Chimenti., D.E, (1997), *Guided waves in plates and their use in materials characterization*, *Applied Mechanical Review*, 50, (5), pp. 247- 284.
- Evans, M., Webster, J.R. and Cawley, P., (2000), *Design of self-calibrating simulated acoustic emission source*, *Ultrasonics*, 37, pp. 589-594.
- Huet. G., (2006), *Fonts d'onde ultrasonores à la surface d'un milieu semi infini anisotrope: théorie des rayons réels et complexes*. Thèse, Université Bordeaux 1.
- Max, J., (1977), *Méthodes et techniques de traitement de signal et applications aux mesures physiques*, Masson.
- Safaeinili A., Lobkis, O.I. and Chimenti, D.E., (1996), *Quantitative materials characterization using air-coupled leaky Lamb waves*, *Ultrasonics*, 34, pp. 393-396.
- Seifreid, R., Jacobs, L.J. and Qu, J., (2002), *Propagation of guided waves in adhesive bonded components*, *NDT & E International*, 35, (55), pp. 317-328.
- Tan, K.S., Guo, N. and Wong, B.S., (1995), *Experimental evaluation of delaminations in composite plates by the use of Lamb waves*, *Composites Science and Technology*, 53, pp. 77-84.
- Wu, T.T., and Liu, Y.H., (1999), *On the measurement of anisotropic elastic constants of fiber-reinforced composite plate using ultrasonic bulk wave and laser generated Lamb wave*, *Ultrasonics*, 37, pp. 405-412.

Chapitre V : Localisation d'un point d'impact dans une plaque anisotrope

V.1	Introduction	115
V.2	Principe et Formulation	115
V.3	Investigation expérimental	118
V.3.1	Mesure de la célérité d'énergie des ondes.....	118
V.3.2	Détection du point d'impact	119
V.6	Conclusion.....	124
V.7	Références	125

V.1 Introduction

Les techniques du contrôle non destructif utilisant des capteurs à ultrasons peuvent efficacement localiser et caractériser les défauts existants et émergents. Les transducteurs à ultrasons sont généralement utilisés dans deux modes communément connus sous le nom des modes actifs et passifs pour le suivi des dommages structurels. La technique de surveillance passive peut être utilisée pour localiser le point d'impact d'un objet étranger dans une plaque. Pour les plaques isotropes, le point d'impact peut être localisé par la détection du signal d'émission acoustique par au moins trois capteurs en appliquant la technique de triangulation. Cependant, si la plaque est anisotrope alors la technique de triangulation ne fonctionne pas, parce que cette technique suppose que la vitesse des ondes est la même dans toutes les directions, ce qui n'est pas vrai pour les plaques anisotropes.

Une méthode alternative basée sur un schéma d'optimisation a été proposée par [Kundu et al., 2007, 2008, 2009 a, 2009 b] pour localiser le point d'impact en plaques anisotropes en analysant les temps d'arrivée des signaux ultrasonores reçus par les capteurs passifs attachés à la plaque. Récemment Hajzargarbashi et al. [HajZargarbashi et al., 2010] a amélioré la technique de prédiction du point d'impact. À la suite de leur modification, dans le présent chapitre le point d'impact pour une plaque anisotrope est prédit à partir des données d'émission acoustique. La méthode, initialement proposée par [Kundu et al. 2007] repose sur la technique d'optimisation - minimisation d'une fonction non-linéaire objective ou fonction d'erreur. Toutefois, la fonction objective proposée dans cette référence avait le problème inhérent de singularités multiples qui a été vaincu dans [Kundu et al., 2008] en modifiant la fonction objective. La technique d'optimisation a été améliorée par Hajzargarbashi et al. [HajZargarbashi et al., 2010]. En utilisant cette nouvelle technique d'optimisation, le point d'impact dans une plaque de carbone-époxy est prédit et comparé avec le point exact de l'impact.

La méthode proposée dans ce chapitre pour localiser le point d'impact fonctionne bien pour tout type d'anisotropie, car elle utilise la direction obtenue expérimentalement qui dépend du profil de la vitesse d'onde de Lamb.

V.2 Principe et formulation

Soit un impact localisé au point (x_0, y_0) issu, par exemple, de la chute d'un objet sur une plaque. Le problème consiste à déterminer le lieu de cet impact. Pour cela on dispose n capteurs ultrasonores répartis sur la surface de la plaque. La formulation, que nous utilisons est présentée dans les références [Kundu et al., 2007, 2008] et [HajZargarbashi et al., 2010] et est brièvement résumée ici. Supposons le temps de détection du signal acoustique de la i -

ème station être t_{id} . Si le temps de l'impact est t_c , le temps de parcours de l'onde du point d'impact au détecteur t_i est alors:

$$t_i = t_{id} - t_c, \quad (V.1)$$

avec $i = 1, 2, 3 \dots n$.

Les temps t_{id} et t_c sont bien sûr définis par rapport à la même synchronisation. Si les coordonnées d'un capteur de réception S_i sont notées (x_i, y_i) alors la distance du capteur au point d'impact d_i est donnée par:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \quad (V.2)$$

La vitesse de propagation de l'onde, notée $c(\theta)$, est fonction de la direction de propagation θ , associée au capteur, qui est définie par :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0} \right), \quad (V.3)$$

La célérité $c(\theta)$ correspond à la vitesse de l'énergie des ondes de LAMB. Donc, on peut aussi écrire la distance d_i par :

$$d_i = c(\theta_i)t_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \quad (V.4)$$

A travers la relation (V.1), le temps d'arrivée des ondes nécessite la connaissance explicite du temps de l'impact t_c . Pour se passer de cette connaissance, il suffit de travailler sur la différence relative du temps d'arrivée de l'onde sur deux capteurs i et j ($i \neq j$), tel que :

$$t_{ij} = t_{id} - t_{jd} = t_i - t_j \quad (V.5)$$

Il est alors facile d'exprimer ce temps d'arrivée relatif en fonction de la vitesse des ondes $c(\theta_i)$ par la relation suivante:

$$t_{ij} = \frac{c(\theta_j)d_i - d_j c(\theta_i)}{c(\theta_i)c(\theta_j)} \quad (V.6)$$

A partir de la relation (V.5), on peut définir une fonction d'erreur sous deux formes.

La première a été établie par *Kundu et al.* [2008]. Elle est construite sur l'analyse des signaux reçus par 2 paires des capteurs et elle s'exprime par :

$$E_{ijkl}(x_0, y_0) = \left(t_{ij} c(\theta_i) c(\theta_j) \left(c(\theta_l) \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2} - c(\theta_k) \sqrt{(x_l - x_0)^2 + (y_l - y_0)^2} \right) - t_{kl} c(\theta_k) c(\theta_l) \left(c(\theta_j) \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - c(\theta_j) \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \right) \right)^2 \quad (V.7)$$

La seconde a été proposée plus récemment à la référence [HajZargarbashi et al., 2010]. Dans ce cas, seul le résultat de deux capteurs est analysé en même temps. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$E_{ij}(x_0, y_0) = \left((t_i - t_j) c(\theta_i) c(\theta_j) - \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} c(\theta_j) + \sqrt{(x_j - x_0)^2 + (y_j - y_0)^2} c(\theta_i) \right)^2 \quad (V.8)$$

Ces deux fonctions traduisent l'écart entre la mesure expérimentale des temps relatifs t_{ij} et leurs valeurs théoriques exprimées en fonction de la localisation des capteurs, du point d'impact (x_0, y_0) et de la célérité des ondes dans les directions θ_i , θ_k et θ_j . Bien sûr, si les valeurs de t_{ij} sont exactes, ces fonctions sont nulles. Elles doivent être le plus proche de zéro pour une bonne identification du point d'impact. Par conséquent, nous avons besoin de minimiser la valeur de l'une de ces fonctions, dites fonction d'erreur ou fonction objective. Pour donner une importance égale aux mesures des temps d'arrivée aux n emplacements des capteurs, la somme de la fonction d'erreur doit être introduite. Ainsi, on définit deux fonctions d'erreur $E_n(x_0, y_0)$ et $E_a(x_0, y_0)$, avec lesquelles la prédiction du point d'impact devrait être moins influencée par l'erreur expérimentale liée à la mesure des temps d'arrivée sur chaque capteur [HajZargarbashi et al., 2010].

Ainsi, à partir de (V.7), si on somme les contributions des différentes possibilités de doubles paires indépendantes associant les capteurs, S_i , S_j , S_k et S_l on obtient :

$$E_a(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n E_{ijkl}(x_0, y_0), \quad (V.9)$$

De même, partant de la fonction (V.8), la somme des contributions des différentes paires indépendantes associant les capteurs, S_i et S_j , il vient :

$$E_n(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_{ij}(x_0, y_0), \quad (V.10)$$

La comparaison entre ces deux fonctions d'erreur, $E_n(x_0, y_0)$ et $E_a(x_0, y_0)$, qui sont désignées comme «ancienne» [Kundu et al., 2008] et «nouvelle» [HajZargarbashi et al., 2010], va être étudiée par la suite.

V.3 Investigation expérimentale

Les expériences ont été effectuées sur la même plaque de carbone-époxy que celle utilisée au chapitre précédent. Deux types de mesures ont été faites.

V.3.1 Mesure de la célérité d'énergie des ondes

Dans un premier temps, une source acoustique de type « Parallel Pre-stressed Actuator » (PPA) est positionnée sur la plaque en point $S_0(x_0, y_0)$. Afin de déterminer expérimentalement la célérité des ondes de Lamb dans cette configuration, dix capteurs ultrasonores, de type PVDF, ont été collés, à intervalles réguliers de 10° , sur un quart de cercle à une distance 30 cm de la source, cf. Figure V.1. Les angles sont définis à partir de la direction des fibres (0° direction) à sa direction perpendiculaire (90° direction), conformément à la Figure V.1. Pour éviter la complexité de la réponse, l'expérience a été réalisée à une fréquence de 45 kHz, pour laquelle seulement les modes fondamentaux SH_0 , A_0 et S_0 sont générés. Plus particulièrement le mode A_0 sera exploité comme nous le verrons par la suite. La mesure expérimentale de sa vitesse d'énergie $c(\theta)$ en fonction de l'angle d'observation θ , ainsi que la comparaison avec la théorie, sont données à la Figure V.2.

La connaissance de cette évolution angulaire est absolument nécessaire pour la résolution du problème inverse à partir de la fonction $E_n(x_0, y_0)$ ou $E_a(x_0, y_0)$. En effet, même si les courbes théoriques de la Figure V.2 font appel à la résolution de l'équation de dispersion des ondes de Lamb, dans la pratique, il est plus facile et rapide de faire passer la courbe optimale par les valeurs expérimentales, pour avoir une évolution angulaire de la vitesse des ondes suffisamment précise.

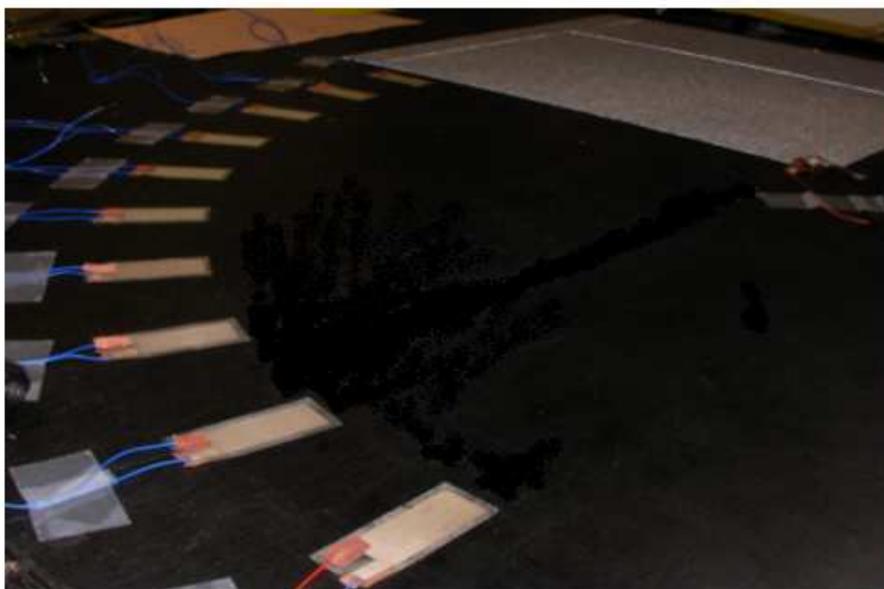


Figure V.1: Figure de l'expérience.

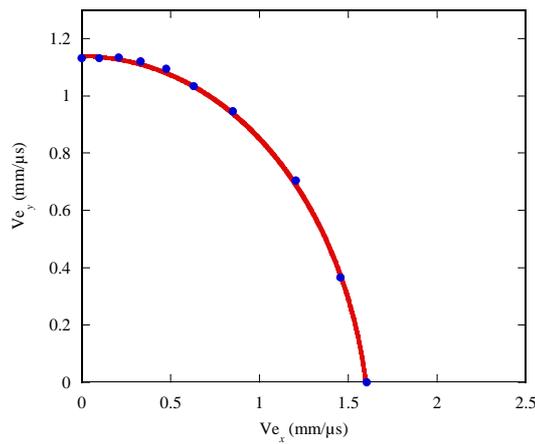


Figure V.2: Mesure expérimentale de la vitesse d'énergie du mode A₀ dans la plaque de Carbone-époxy.

V.3.2 Détection du point d'impact

Après l'obtention du profil de la vitesse des ondes dans la plaque de carbone-époxy, il est maintenant possible de mener des expériences pour prédire la localisation d'un point d'impact à partir de données d'émission acoustique. Pour cette expérience quatre capteurs passifs (PVDF) sont collés sur la plaque. Ces capteurs, notés S1, S2, S3 et S4, sont placés loin du point d'impact, leur coordonnées sont présentées dans le tableau V.I. L'emplacement de la source acoustique notée S0 correspond au point d'impact. La Figure V.3 montre ce dispositif expérimental.

Capteur S _i	Coordonnées (x _i , y _i) en mm
S0	(400, 330)
S1	(200, 646)
S2	(118, 433)
S3	(351, 54)
S4	(677, 170)

Tableau V.1 : coordonnées de la source et des différents capteurs.

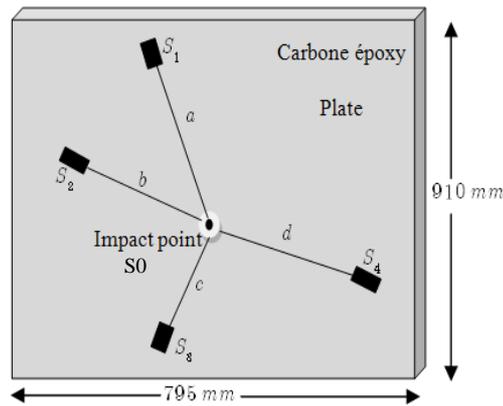


Figure V.3: Emplacement des capteurs d'émission acoustique pour l'expérience # 2, avec ($a = 400$ mm, $b = 300$, $C = 280$ mm, $d = 320$ mm).

Une forme d'ondes significative est présentée à la Figure V.4, pour le capteur S2. Il n'est pas facile de mesurer le temps d'arrivée de tous les modes dans un signal temporel multimodal, parce qu'il y a une ambiguïté sur le moment exact de l'arrivée. Par exemple, l'arrivée des modes de faible amplitude (le mode S_0 par exemple) est cachée dans le bruit ou

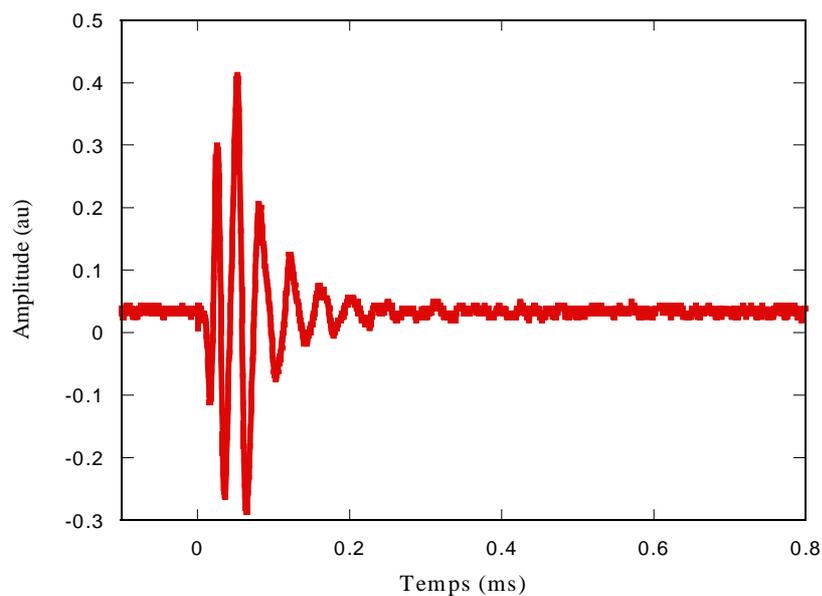


Figure V.4 : signal temporel reçu par le capteur S2.

peut être influencée par la proximité d'un autre mode. Par contre le mode A_0 présente deux avantages. D'une part, il est le plus rapide et donc le début du signal associé n'est pas influencé par un autre mode. D'autre part, son amplitude est la plus importante. Pour ces deux raisons, une technique de seuil permet une mesure relativement fiable de l'arrivée absolue de ce mode. Les mesures de célérités des ondes de Lamb exploitées à la Figure V.2 ont nécessité cette mesure absolue. C'est cette méthode qui a donc été utilisée pour cette expérience.

Par contre, pour mesurer les différences d'arrivée t_{ij} cette mesure absolue n'est pas une obligation. Ainsi, si les distances de propagation du point d'impact aux différents récepteurs varient considérablement, la forme du signal enregistré par ces récepteurs est significativement différente en raison de la dispersion et de l'atténuation. Dans ce cas, la mesure du temps d'arrivée par la technique du seuil ne peut pas donner des résultats précis. Dans cette situation, la technique de corrélation dans le domaine temporel [Kosel et al., 2000], [Ziola et al., 1991] appliquée aux deux signaux enregistrés issus des deux capteurs S_i et S_j donne des résultats beaucoup plus précis pour la mesure de la différence de temps t_{ij} . Ce sont ces considérations qui ont orienté notre choix pour l'analyse qui va suivre.

Bien sûr la précision de la détection du point d'impact dépend du nombre de capteurs. Plus celui-ci est grand plus la précision est grande. Ainsi, Hajzargarbashi et al. [HajZargarbashi et al., 2010] ont montré que si le nombre de capteurs de réception passe de 3 à 4, la précision de la prédiction du point d'impact est nettement améliorée.

Pour un nombre donné de capteurs, la manière de les traiter et la fonction d'erreur utilisée (équation V.7 et équation V.8) joue un rôle important.

Pour faire cette analyse, prenons les quatre capteurs déjà décrits (cf. Figure V.3). Dans ce cas, nous pouvons soit traiter tous les capteurs ensemble, soit les analyser par groupe de trois. Pour construire un ensemble de 3 capteurs à partir d'un groupe de 4, un capteur est laissé de côté. De cette manière, 4 séries de trois capteurs différents peuvent être construites à partir de ces 4 capteurs. Pour ces deux procédures, nous pouvons utiliser la fonction objective donnée soit par équation V.7 soit par équation V.8. Les valeurs x et y correspondant au minimum de l'une ou de l'autre des deux fonctions objectives doivent donner le point d'impact en optimisant la position (x_0, y_0) . Cependant, en raison de plusieurs minima locaux, des régimes d'optimisation standard tels que l'algorithme simplex [Nelder and Mead, 1965] ne convergent pas toujours vers le minimum physique. Néanmoins, notre expérience montre que l'obtention du *minimum* donne les bonnes valeurs de x et y qui correspondent au plus près des coordonnées du point d'impact.

Un dernier point important à souligner, concerne la précision sur la mesure des temps de vol. Bien que certaines précautions aient été prises pour assurer la meilleure précision possible, elle reste insuffisante. Pour palier ce manque, nous créons, à partir des mesures originelles de t_{ij} , une série de mesures (50 mesures) en perturbant de manière aléatoire ces temps mesurés. Cette perturbation est comprise entre + et - 5%.

Considérons tout d'abord les 4 capteurs simultanément et examinons l'influence des deux fonctions objectives. Les résultats sont donnés aux Figures V.5 et V.6, qui représentent la

plaque vue de dessus avec la localisation réelle de l'impact (grosse étoile), sa prédiction (résultat de l'optimisation) donnée par les différents points de la série issue de la perturbation (petite croix) et enfin le lieu de l'impact est identifié en prenant en compte la moyenne de la totalité des points. Les Figures V.5 et V.6 sont relatives respectivement à l'ancienne et à la nouvelle fonction d'erreur. Comme première remarque, nous constatons que la nouvelle fonction d'erreur que nous avons introduite semble beaucoup moins sensible à la précision sur la mesure du temps de vol.

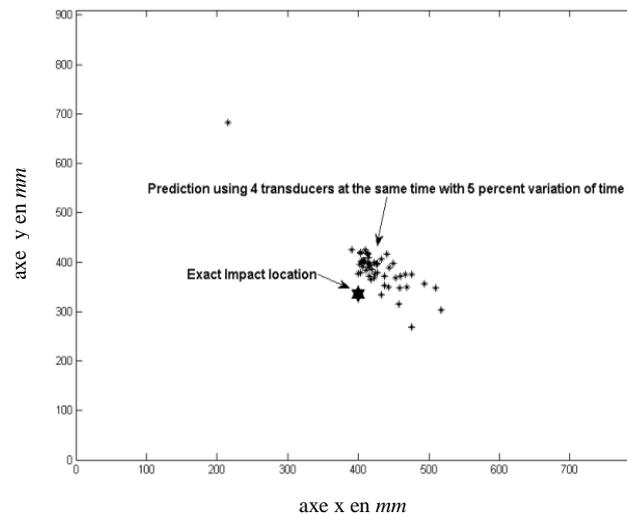


Figure V.5: Points d'impact précis et prédits en utilisant l'ancienne fonction objective pour 1 ensemble de 4 capteurs.

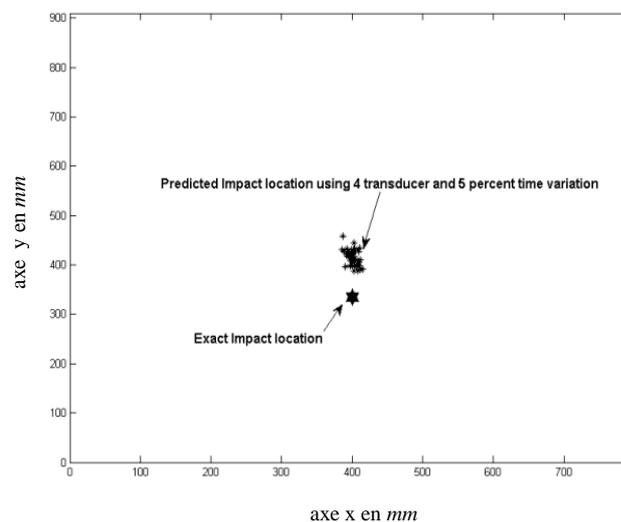


Figure V.6: Points d'impact précis et prédits en utilisant la nouvelle fonction objective pour 1 ensemble de 4 capteurs.

On retrouve cette tendance lorsqu'on traite les 4 combinaisons de 3 capteurs. Chaque combinaison sera représentée par un symbole différent (carré, croix, triangle et point) aux Figures V.7 et V.8, qui sont relatives aux deux fonctions d'erreur respectivement ancienne et

nouvelle. En effet, on observe clairement que l'ancienne présente une dispersion beaucoup plus importante. Ceci est même plus évident qu'aux Figures V.7 et V.8. On note que, pour chaque combinaison, la répartition des diverses identifications de la série créé aléatoirement est très différemment répartie à la surface de la plaque. En revanche, l'intersection de ces zones, comme montré très schématiquement à la Figure V.9, permet une très bonne estimation du point d'impact. Cette localisation est plus proche du point réel de la source. Ainsi, nous proposons, avec T. Kundu et son équipe, une amélioration conséquente de la méthode d'identification d'un point d'impact, que celui-ci avait, par ailleurs, déjà développé.

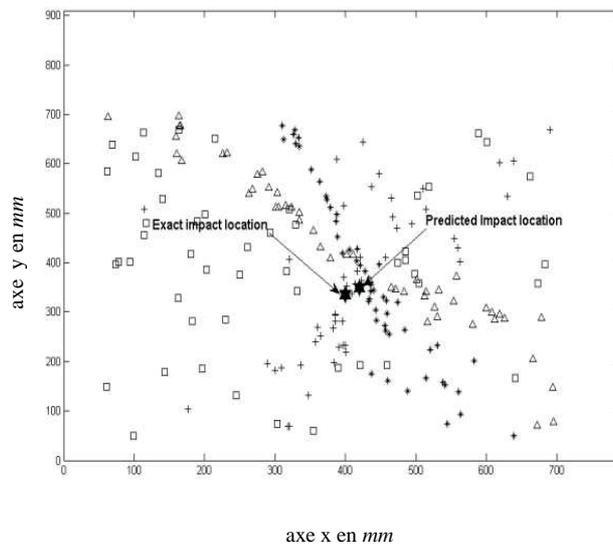


Figure V.7: Points d'impact précis et prédits en utilisant l'ancienne fonction objective de 4 ensembles de 3 capteurs.

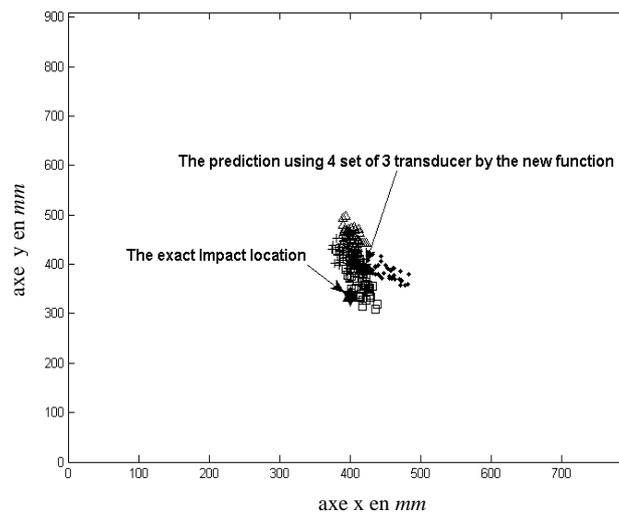


Figure V.8: Points d'impact précis et prédits en utilisant la nouvelle fonction objective de 4 ensembles de 3 capteurs.

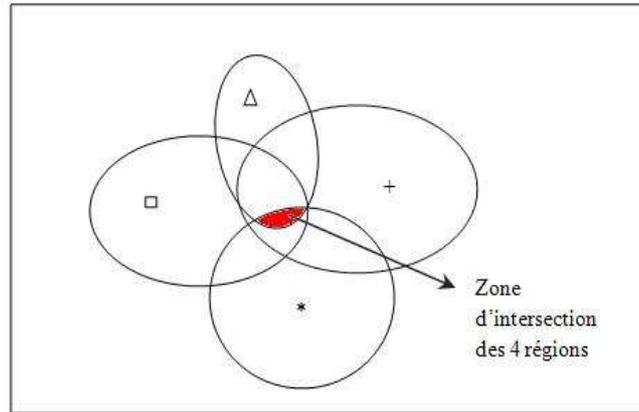


Figure V.9: schéma simplifié qui montre la détermination du zone d'intersection des 4 régions (4 ensembles de 3 capteurs) qui sont différencié par leur symbole utilisé auparavant.

V.6 Conclusion

Le schéma d'optimisation proposé par [Kundu et al., 2007, 2008, 2009 a, 2009 b] et [HajZargarbashi et al., 2010] pour localiser la source acoustique dans une plaque anisotrope en analysant les temps d'arrivée des signaux ultrasonores est utilisé dans ce chapitre. Suite à cette technique d'optimisation, la source acoustique pour une plaque de carbone-époxy est prédite à partir des données d'émission acoustique. Les expérimentations sont réalisées avec une source acoustique (PPA) mise sur la plaque et qui module le point d'impact. Il est montré que le point source peut être correctement prédit par cette technique lorsque la nature anisotrope du profil de vitesse dans la plaque est considérée.

V.7 Références

- HajZargarbashi T., Kundu T. and Bland S. (2010) *A new algorithm for detecting impact points in anisotropic plates by the acoustic emission technique*, Health Monitoring of Structural and Biological Systems IV, Ed. T. Kundu, SPIE's 17th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials & Nondestructive Evaluation and Health Monitoring, San Diego, California, March 7-11, 2010.
- Kosel T., Grabec I. and Muzic P. (2000) *Location of acoustic emission sources generated by air flow* Ultrasonics **38** 824–826.
- Kundu T., Das S. and Jata K. V. (2007) *Point of Impact Prediction in Isotropic and Anisotropic Plates from the Acoustic Emission Data*, J. Acoust. Soc. Am. **122** (4) 2057-2066.
- Kundu T., Das S., Martin S. A. and Jata K. V. (2008) *Locating Point of Impact in Anisotropic Fiber Reinforced Composite Plates*, Ultrasonics **48**(3) 193-201.
- Kundu T., Das S. and Jata K. V. (2009) a. *Health Monitoring of a Thermal Protection System using Lamb Waves*, Structural Health Monitoring: An International Journal **8**(1) 29-45.
- Kundu T., Das S. and Jata K. V. (2009) b. *Impact Point Detection in Stiffened Plates by Acoustic Emission Technique* Smart Materials & Structures **18** Article #035006.
- Nelder J. A. and Mead R. (1965) *A simplex method for function minimization* Comp. J. **7** 308–315.
- Ziola S. M. and Gorman M. R. (1991), *Source location in thin plates using cross-correlation* J. Acoust. Soc. Am. **90** 2551–2556.

Conclusion

Dans cette thèse, les réponses élastodynamiques pour un milieu élastique anisotrope ont été étudiées pour différentes géométries. La démarche générale dans toutes les méthodes de la littérature consiste à faire d'abord une transformée de Fourier temporelle et ensuite une transformée de Fourier spatiale. L'originalité de la méthode qu'on a utilisée est que l'on s'efforce de rester dans le domaine temporel en considérant uniquement une transformée de Fourier spatiale.

En premier lieu, nous avons calculé la réponse en déplacement à une force appliquée en un point dans un solide anisotrope infini. Le tenseur de Green a été écrit comme une intégrale simple le long de courbes fermées, intersections des surfaces de lenteurs avec un plan perpendiculaire à la direction d'observation, situées à la distance « rapport du temps par la distance d'observation » de l'origine du repère. Une caractéristique importante de ces fonctions est leurs singularités qu'elles affichent à l'arrivée des ondes. À travers un certain nombre d'exemples numériques, nous avons illustré la présence de ces singularités dans les fonctions de réponse pour le matériau cuivre. Ces singularités sont toujours présentes dans les fonctions de réponse d'un espace élastique semi-infini ou d'une plaque.

Le calcul de la réponse dynamique de la surface d'un milieu semi-infini anisotrope assujéti à une source ponctuelle est essentiel pour mettre en évidence les phénomènes physiques liés à la propagation des ondes de surface. Ici, les solutions de l'équation de propagation doivent satisfaire des conditions aux limites. L'expression du tenseur de Green a été établie par une méthode théorique dans l'espace temporel, cette expression a été écrite sous forme d'un intégral d'une dimension.

Par contre, pour la plaque une méthode numérique est nécessaire pour sa réponse à une sollicitation aux interfaces. Deux méthodes ont été testées. La première méthode consiste à résoudre le problème dans le domaine $(s_{//}, z, \omega)$ puis à revenir dans l'espace physique en utilisant les séries de Debye, une transformée de Fourier rapide en pulsation et l'évaluation d'une intégrale double sur les lenteurs. Le problème du choix de la base de travail pour la décomposition en réflexions successives d'ondes montantes et descendantes a été détaillé. Quelques résultats de simulations dans le cas d'une plaque de carbone-époxy ont été fournis. La seconde méthode consiste à poser le problème dans le domaine $(s_{//}, z, t)$ et à en déterminer une solution semi-analytique. Cette deuxième méthode a été appliquée au cas d'un monocristal de cuivre.

La génération et la détection ponctuelles d'ondes acoustiques de surface est une configuration expérimentale très attractive pour de nombreuses applications. Cependant, lorsque la focalisation des ondes de surface induite par l'anisotropie est critique, les formes d'onde deviennent très complexes ce qui implique des difficultés dans leur interprétation. Les déplacements normaux à la surface d'un monocristal de cuivre ont été mesurés en utilisant un impact Laser focalisé comme source ponctuelle et un interféromètre Laser pour la mesure ponctuelle. Les arrivées des fronts d'ondes des ondes rasantes et des réflexions multiples des ondes de Lamb avec les interfaces, ainsi que les fronts des ondes de Rayleigh et les pseudo-ondes de Rayleigh sont mesurées et concordent avec la théorie.

Pour les réflexions multiples des ondes de Lamb, seules les ondes réfléchies sans conversion des modes ont été calculées et identifiées expérimentalement. Il est envisageable d'implémenter une méthode numérique qui calculerait les modes issues des réflexions multiples avec conversion des modes pour les identifier dans les résultats expérimentaux. Un autre point important à remarquer, réside sur le fait que certaines branches dans les réponses expérimentales ne sont pas expliquées. Suite à une étude que nous avons menée, ces arrivées ne peuvent être expliquées par des réflexions avec conversions de modes. Ce sont, sans doute, des réflexions des ondes de surface sur le bord de l'échantillon. Une étude spécifique reste à faire pour clarifier ce point.

Enfin une illustration expérimentale a mis l'accent sur la compréhension des propriétés des modes de Lamb dans la direction de l'énergie. Cette illustration a été donnée pour les modes fondamentaux pour une plaque de carbone-époxy unidirectionnel. La vitesse de phase et la vitesse d'énergie ont été mesurées en fonction de la fréquence ou de la direction d'observation et comparées avec la théorie. Ces propriétés ont servi à prédire la localisation d'une source acoustique en surface d'une plaque à partir de quelques points de mesure, puis une comparaison avec la localisation exacte a permis de valider cette prédiction.

ANNEXES

Annexe A : Calcul du tenseur de Green pour un milieu infini isotrope

Un milieu isotrope est caractérisé par les deux célérités c_L et c_T telles que le tenseur des rigidités réduites en notation de Voigt s'écrit :

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} c_L^2 & c_L^2 - 2c_T^2 & c_L^2 - 2c_T^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_L^2 - 2c_T^2 & c_L^2 & c_L^2 - 2c_T^2 & 0 & 0 & 0 \\ c_L^2 - 2c_T^2 & c_L^2 - 2c_T^2 & c_L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_T^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

La matrice de Christoffel s'écrit :

$$s \diamond s = \begin{pmatrix} c_L^2 s_x^2 + c_T^2 (s_y^2 + s_z^2) & (c_L^2 - c_T^2) s_x s_y & (c_L^2 - c_T^2) s_x s_z \\ (c_L^2 - c_T^2) s_x s_y & c_L^2 s_y^2 + c_T^2 (s_x^2 + s_z^2) & (c_L^2 - c_T^2) s_y s_z \\ (c_L^2 - c_T^2) s_x s_z & (c_L^2 - c_T^2) s_y s_z & c_L^2 s_z^2 + c_T^2 (s_x^2 + s_y^2) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Le polynôme de Christoffel ne dépend que de la norme s de la lenteur et pas de la direction n :

$$\Gamma(s) = (c_L^2 s^2 - 1)(c_T^2 s^2 - 1)^2. \quad (\text{A.3})$$

Après diagonalisation, on obtient, par exemple (il n'y a pas unicité de l'écriture) :

$$s \diamond s = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & -\sqrt{n_2^2 + n_3^2} \\ n_2 & \frac{-n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \\ n_3 & \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_1 n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_L^2 & 0 & 0 \\ 0 & c_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_T^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ 0 & \frac{-n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \\ -\sqrt{n_2^2 + n_3^2} & \frac{n_1 n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} & \frac{n_1 n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Le tenseur de Green s'écrit alors :

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{-u(t)}{8\pi^2 d} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \oint_{s_\alpha} \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{s})|}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(\mathbf{s})|} [\mathbf{p}(\mathbf{s}) \otimes \mathbf{p}(\mathbf{s})] d\mathbf{s} \right)$$

$$= \frac{-u(t)}{8\pi^2 d} \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{\substack{|s|=1/c_L \\ m \cdot s = t/d}} \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} \frac{|s| d s}{|m \wedge r(s)|} + \oint_{\substack{|s|=1/c_T \\ m \cdot s = t/d}} \begin{pmatrix} 1 - n_1^2 & -n_1 n_2 & -n_1 n_3 \\ -n_1 n_2 & 1 - n_2^2 & -n_2 n_3 \\ -n_1 n_3 & -n_2 n_3 & 1 - n_3^2 \end{pmatrix} \frac{|s| d s}{|m \wedge r(s)|} \right) \quad (\text{A.5})$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que la direction d'observation est la direction x . L'intersection de chaque sphère avec le plan $s_x = t/d$ est soit un cercle, soit l'ensemble vide (soit un point dans le cas limite).

Chaque cercle peut être paramétré par : $s = 1/c_{L,T}$, $n_x = c_{L,T} t/d$, $n_y = \sqrt{1 - n_x^2} \cos(\theta)$ et $n_z = \sqrt{1 - n_x^2} \sin(\theta)$.

Le tenseur de Green s'écrit :

$$\mathcal{G}(d,t) = \frac{-1}{8\pi^2 d} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(t) - u\left(t - \frac{d}{c_L}\right)}{c_L^2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \frac{n_3^2}{1 - n_3^2} & \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \cos(\theta) & \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \sin(\theta) \\ \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \cos(\theta) & \cos^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} (1 - n_3^2) d\theta \right. \\ \left. + \frac{u(t) - u\left(t - \frac{d}{c_T}\right)}{c_T^2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \cos(\theta) & \frac{-n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \sin(\theta) \\ \frac{-n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \cos(\theta) & \frac{1}{1 - n_3^2} - \cos^2(\theta) & -\cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{-n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{1 - n_3^2} - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} (1 - n_3^2) d\theta \right) \quad (\text{A.6})$$

Après le calcul de l'intégrale, le tenseur de Green se simplifie et s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(d,t) = & \frac{-1}{4\pi^2 d} \frac{\partial}{\partial t} \left(u(t) - u\left(t - \frac{d}{c_L}\right) \right) \begin{pmatrix} \frac{t^2}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2c_L^2} - \frac{t^2}{2d^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2c_L^2} - \frac{t^2}{2d^2} \end{pmatrix} \\
& + \left(u(t) - u\left(t - \frac{d}{c_T}\right) \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{c_T^2} - \frac{t^2}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2c_T^2} + \frac{t^2}{2d^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2c_T^2} + \frac{t^2}{2d^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(d,t) = & \frac{1}{4\pi d} \left(u\left(t - \frac{d}{c_L}\right) - u\left(t - \frac{d}{c_T}\right) \right) \begin{pmatrix} \frac{2t}{d^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{d^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t^2}{d^2} \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \frac{1}{c_L^2} \delta\left(t - \frac{d}{c_L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_T^2} \delta\left(t - \frac{d}{c_T}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_T^2} \delta\left(t - \frac{d}{c_T}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Annexe B : Définition des coordonnées locales ν et μ

Soit une valeur s_0 telle que pour toute lenteur s (solution de l'équation de Christoffel) située dans le plan $\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = s_0$, la normale $\mathbf{r}(s)$ à la surface de lenteur est définie et non colinéaire à la direction d'observation \mathbf{d} , c.à.d. que le produit vectoriel $\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s)$ est non nul.

Pour des raisons de continuité, le produit vectoriel $\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s)$ reste non nul sur les surfaces de lenteurs au voisinage $S_\alpha^{[\varepsilon]}$ de l'intersection du plan avec les trois surfaces de lenteurs :

$$\forall s \in S_\alpha, \text{ tel que } s_0 - \varepsilon < \mathbf{m} \cdot \mathbf{s} < s_0 + \varepsilon : \mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s) \neq \mathbf{O}_3. \quad (\text{B.1})$$

En conséquence, l'intersection des surfaces de lenteurs avec tout plan $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = s_0 + \mu)$ est un ensemble de courbes fermées très régulières pour tout μ compris entre $-\varepsilon$ et ε puisqu'en tout point s , la tangente $\tau(s)$ à la courbe est définie : elle est orthogonale à la fois à \mathbf{m} (puisque la courbe est dans le plan) et à $\mathbf{r}(s)$ (puisque la courbe est dans la surface de lenteur).

$$\tau(s) = \frac{\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s)}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{r}(s)|}. \quad (\text{B.2})$$

On peut munir localement la surface du système de coordonnées $\{\nu, \mu\}$ telle que :

- ν soit une abscisse curviligne de la courbe d'intersection du plan $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{s} = s_0)$ avec la surface de lenteur, tout point de la courbe s'écrivant $s(\nu, 0)$ avec

$$\frac{\partial s(\nu, 0)}{\partial \nu} = \tau(s(\nu, 0)). \quad (\text{B.3})$$

- au voisinage de la courbe, de proche en proche,

$$s(\nu, \mu) = s(\nu, 0) + \int_0^\mu \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \mu)} v(\nu, \mu) d\xi \quad (\text{B.4})$$

où le vecteur $v(\nu, \mu)$ est le produit vectoriel de $\tau(s(\nu, 0))$ et de $r(s(\nu, \mu))$ de telle sorte qu'il soit tangent à la surface de lenteur en $s(\nu, \mu)$ et perpendiculaire à la tangente à la courbe en $s(\nu, 0)$. Ce système de coordonnées est construit pour que :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}(\nu, \mu) &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}(\nu, 0) + \mathbf{m} \cdot \int_0^\mu \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \mu)} \mathbf{v}(\nu, \mu) d\xi \\ &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{s}(\nu, 0) + \int_0^\mu d\xi \\ &= s_0 + \mu. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

L'étude des dérivées partielles donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \nu} = \tau(s(\nu, 0)) + \int_0^\mu \frac{1}{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \xi))^2} \left((\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \xi)) \frac{\partial \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \xi)}{\partial \nu} - \left(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\nu, \xi)}{\partial \nu} \right) \mathbf{v}(\nu, \xi) \right) d\xi \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mu} = \frac{1}{\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}(\nu, \beta)} \mathbf{v}(\nu, \mu) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Le vecteur

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}(\nu, \xi)}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} (\tau(s(\nu, 0)) \wedge r(s(\nu, \xi))) \\ &= \frac{\partial \tau(s(\nu, 0))}{\partial \nu} \wedge r(s(\nu, \xi)) + \tau(s(\nu, 0)) \wedge \frac{\partial r(s(\nu, \xi))}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

est uniformément borné.

Si on pose

$$jacob(\nu, \mu) = \left| \frac{\partial \mathbf{v}(\nu, \xi)}{\partial \nu} \wedge \frac{\partial \mathbf{v}(\nu, \xi)}{\partial \mu} \right|, \quad (\text{B.8})$$

l'élément de surface $d\mathbf{s}$ s'écrit $(jacob(\nu, \mu) d\nu d\mu)$, avec $jacob(\nu, 0) = \frac{1}{|\mathbf{m} \wedge \mathbf{v}|}$ (la base $\{\mathbf{r}, \tau, \mathbf{v}\}$ est orthonormée directe par construction et \mathbf{m} est dans le plan $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$).

Annexe C : calcul de la réponse en déplacement d'un demi-espace élastique isotrope

C.1 Généralités

Le problème est invariant par rotation du repère et on se place donc dans le cas $s_{//} = s(\cos\theta \mathbf{n}_x + \sin\theta \mathbf{n}_y)$, dans le repère $(\cos\theta \mathbf{n}_x + \sin\theta \mathbf{n}_y, -\sin\theta \mathbf{n}_x + \cos\theta \mathbf{n}_y)$.

Matrice de Stroh

$$\mathcal{N}(s_{//}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s & -\frac{1}{c_T^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_T^2} & 0 \\ s \left(2 \frac{c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_L^2} \\ 4s^2 c_T^2 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \left(2 \frac{c_T^2}{c_L^2} - 1 \right) \\ 0 & s^2 c_T^2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -s & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Lenteurs

$$\zeta_1 = \zeta_2 = -\zeta_4 = -\zeta_5 = \zeta_T \text{ et } \zeta_3 = -\zeta_6 = \zeta_L, \text{ avec } \zeta_{T,L} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{c_{T,L}^2} - s^2} & , s < c_{T,L} \\ i \text{sign} \sqrt{s^2 - \frac{1}{c_{T,L}^2}} & , s > c_{T,L} \end{cases}. \quad (\text{C.2})$$

Matrice des polarisations Les colonnes 1 et 4 correspondent aux ondes SH ; les colonnes 2 et 5, aux ondes SV ; et les colonnes 3 et 6, aux ondes P :

$$\Xi = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\zeta_T} & \frac{s}{\sqrt{\zeta_L}} & 0 & \sqrt{\zeta_T^*} & \frac{-s}{\sqrt{\zeta_L^*}} \\ -\frac{\sqrt{\zeta_T}}{c_T \zeta_T} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\zeta_T^*}}{c_T \zeta_T} & 0 & 0 \\ 0 & -s \frac{\sqrt{\zeta_T}}{\zeta_T} & \frac{\zeta_L}{\sqrt{\zeta_L}} & 0 & s \frac{\sqrt{\zeta_T^*}}{\zeta_T} & -\frac{\zeta_L}{\sqrt{\zeta_L^*}} \\ 0 & (2s^2 c_T^2 - 1) \frac{\sqrt{\zeta_T}}{c_T \zeta_T} & -2s c_T^2 \frac{\zeta_L}{\sqrt{\zeta_L}} & 0 & (1 - 2s^2 c_T^2) \frac{\sqrt{\zeta_T^*}}{c_T \zeta_T} & 2s c_T^2 \frac{\zeta_L}{\sqrt{\zeta_L^*}} \\ c_T \sqrt{\zeta_T} & 0 & 0 & c_T \sqrt{\zeta_T^*} & 0 & 0 \\ 0 & 2s c_T^2 \sqrt{\zeta_T} & \frac{2s^2 c_T^2 - 1}{\sqrt{\zeta_L}} & 0 & 2s c_T^2 \sqrt{\zeta_T^*} & \frac{2s^2 c_T^2 - 1}{\sqrt{\zeta_L^*}} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

C.2 Adimensionnement et repère lié au vecteur lenteur

Une écriture plus synthétique peut être obtenue en adimensionnant les variables par rapport à la célérité transverse c_T :

$$\lambda_x = c_T s_x = \frac{c_T t}{d}, \quad \lambda_y = c_T s_y, \quad \lambda = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}, \quad \beta = \frac{c_L}{c_T} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad (\text{C.4})$$

et

$$\mu_T = c_T \zeta_T = \begin{cases} \sqrt{1 - \lambda^2}, & \lambda < 1 \\ -j\sqrt{\lambda^2 - 1}, & \lambda > 1 \end{cases}, \quad \mu_L = c_T \zeta_L = \begin{cases} \sqrt{\beta^2 - \lambda^2}, & \lambda < \beta \\ -j\sqrt{\lambda^2 - \beta^2}, & \lambda > \beta \end{cases}. \quad (\text{C.5})$$

En posant $s_{//} = \frac{\lambda}{c_T} (\cos \theta \mathbf{n}_x + \sin \theta \mathbf{n}_y)$, on se place d'abord dans le repère $(\cos \theta \mathbf{n}_x + \sin \theta \mathbf{n}_y, -\sin \theta \mathbf{n}_x + \cos \theta \mathbf{n}_y)$, de sorte que la matrice $\mathcal{P}_{\text{up}}(s_{//}) \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1}(s_{//})$ s'écrit (voir Généralités ci-avant) :

$$\mathcal{P}_{\text{up}}(s_{//}) \mathcal{R}_{\text{up}}^{-1}(s_{//}) = -\frac{1}{c_T} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{q(\lambda^2)} \begin{bmatrix} \mu_T & 0 & \lambda(1 - 2(\lambda^2 + \mu_T \mu_L)) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(1 - 2(\lambda^2 + \mu_T \mu_L)) & 0 & \mu_L \end{bmatrix} \right\}, \quad (\text{C.6})$$

où $q(\lambda^2)$ est proportionnel au déterminant de $\mathcal{R}_{\text{up}}(s_{//})$, qui ne dépend pas du repère orthonormé choisi, et vaut :

$$q(\lambda^2) = (2\lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 \mu_T \mu_L. \quad (\text{C.7})$$

Cette fonction ne s'annule que pour une unique valeur γ^2 , où γ est le produit de la lenteur dite *de Rayleigh* par la célérité transverse c_T , ou *lenteur de Rayleigh adimensionnée*, telle que :

$$\beta < 1 < \gamma \text{ et } (2\gamma^2 - 1)^2 - 4\gamma^2 \sqrt{\gamma^2 - 1} \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} = 0, \quad (\text{C.8})$$

fonction du rapport des célérités $\beta = c_T / c_L$ (voir Figure C-1).

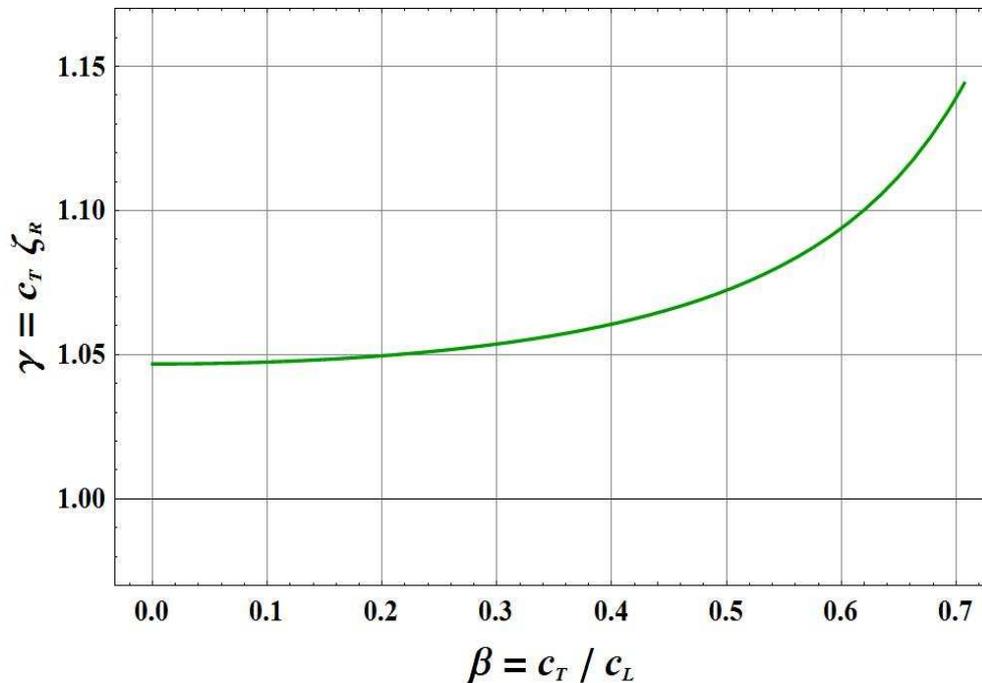


Figure C-1 : Lenteur de l'onde de Rayleigh en fonction du rapport c_T / c_L

Notons que la première matrice dans l'Equation (II.33) correspond à l'onde SH alors que la seconde, aux ondes SV et P, dont le couplage à l'interface engendre l'onde de Rayleigh.

C.3 Observation sur l'axe des x

Vue l'isotropie du problème, on peut décider d'observer à une distance d du point d'excitation, dans la direction de l'axe des x ($x_{//} = d n_x$) sans perte de généralité.

Partie concernant l'onde SH La partie du tenseur de Green à l'interface concernant l'onde SH s'écrit, après changement de base et d'après les équations (II.32) et (C.6) :

$$\mathcal{H}_{SH}(d \mathbf{n}_x, 0, t) = \frac{-u(t)}{2\pi^2 d c_T^2} \partial_t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Re} \left(\frac{1}{\mu_T} \right) \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda_y^2 & -\lambda_x \lambda_y & 0 \\ -\lambda_x \lambda_y & \lambda_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\lambda_y \right\}, \quad (\text{C.9})$$

qui devient :

$$\mathcal{H}_{SH}(d \mathbf{n}_x, 0, t) = \frac{-u(t)}{\pi^2 d c_T^2} \partial_t \left\{ \int_0^{\sqrt{1-\lambda_x^2}} \frac{1}{(\lambda_x^2 + \lambda_y^2) \sqrt{1 - (\lambda_x^2 + \lambda_y^2)}} \begin{pmatrix} \lambda_y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\lambda_y \right\}, \quad \lambda_x > 1 ;$$

$$\left. \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{O}_3 \end{matrix} \right\}, \quad \lambda_x < 1 , \quad (\text{C.10})$$

soit en remplaçant λ_x par $c_T t / d$:

$$\mathcal{H}_{SH}(d \mathbf{n}_x, 0, t) = \frac{-u(t)}{2\pi d c_T^2} \partial_t \left[u(d / c_T - t) \begin{pmatrix} 1 - c_T t / d & 0 & 0 \\ 0 & c_T t / d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.11})$$

$$= \frac{u(t)}{2\pi d c_T^2} \left[u(d / c_T - t) \frac{c_T}{d} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta(t - d / c_T) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Partie concernant les ondes P et SV La partie « P-SV » du tenseur de Green sur l'interface s'écrit alors :

$$\mathcal{H}_{PSV}(d \mathbf{n}_x, 0, t) = \frac{-u(t)}{2\pi d c_T^2} \partial_t \left\{ \mathcal{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{q(\lambda^2)} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_x^2}{\lambda^2} \mu_T & \frac{\lambda_x \lambda_y}{\lambda^2} \mu_T & k \lambda_x \\ \frac{\lambda_x \lambda_y}{\lambda^2} \mu_T & \frac{\lambda_y^2}{\lambda^2} \mu_T & k \lambda_y \\ -k \lambda_x & -k \lambda_y & \mu_L \end{pmatrix} d\lambda_y \right\} \right\} \quad (\text{C.12})$$

$$- \frac{\pi u(\gamma - \lambda_x)}{q'(\gamma^2) \sqrt{\gamma^2 - \lambda_x^2}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_x^2}{\gamma^2} \sqrt{\gamma^2 - 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2 - \lambda_x^2}{\gamma^2} \sqrt{\gamma^2 - 1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \end{pmatrix}.$$

avec $k = 1 - 2(\lambda^2 + \mu_L \mu_T)$, qui prend une valeur réelle lorsque $\lambda = \gamma$.

Le terme intégral correspond à une intégration dans le plan (λ_x, λ_y) , le long de la droite d'équation $\lambda_x = c_T t / d$ (voir Figure C-2).

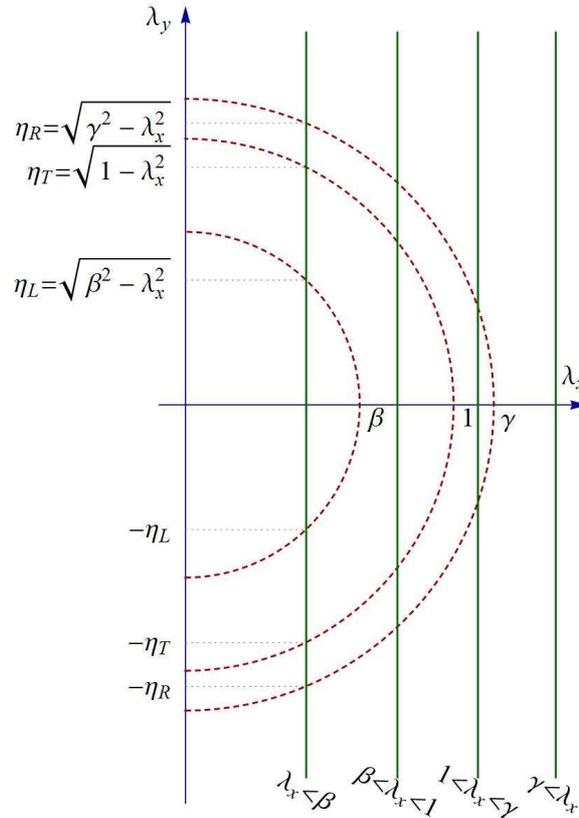


Figure C-2 : Chemins d'intégration dans le plan (λ_x, λ_y) et définition des valeurs η_L, η_T et η_R .

Ce terme intégral peut se calculer en appliquant le théorème des résidus. Dans le plan complexe, on intègre la long de l'axe réel. Il faut prendre en compte les problèmes de coupure sur $\mu_L = \sqrt{\eta_L^2 - \lambda_y^2}$ et $\mu_T = \sqrt{\eta_T^2 - \lambda_y^2}$ ainsi que les deux seuls pôles η_R et $-\eta_R$. Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes contentés de faire quelques évaluations numériques de ces intégrales simples.

Contribution à l'étude des ondes de LAMB dans une plaque anisotrope: Théorie et expérience

Résumé :

Le rayonnement d'une source ultrasonore située sur l'une des interfaces d'une plaque anisotrope est étudié. Le calcul du tenseur de Green est effectué dans le cas général d'un problème 3D. Une décomposition en multiples réflexions /réfractions, constituant une série de rayons au sein de la plaque, est utilisée pour une comparaison théorie-expérience dans le cas d'un mono cristal de Cuivre. La vitesse de phase et la vitesse d'énergie sont mesurées en fonction de la fréquence ou de la direction d'observation, pour une plaque de carbone-époxy unidirectionnels, et comparées avec la théorie.

Mots clés: Tenseur de Green, ondes de Lamb, anisotrope.

Contribution to the study of LAMB waves in an anisotropic plate: theory and experiment

Abstract :

The ultrasonic radiation from a source located on one of the interfaces of an anisotropic plate is studied. The calculation of the Green tensor is performed in the general case of a 3D problem. Decomposition into multiple reflections /refractions, as a series of rays in the plate, is used for comparison between theory and experiment in the case of a single crystal of copper. The phase velocity and energy velocity are measured in terms of frequency or direction of observation, for a plate of unidirectional carbon-epoxy, and compared with theory.

Keywords: Green Tensor, Lamb waves, anisotropic