

UNIVERSITÉ DE LA MEDITERRANÉE - U.F.R. SCIENCES  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET  
INFORMATIQUE E.D. 184

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE  
*Spécialité : Informatique*

par

**Mariette SERAYET**

### **Raisonnement à partir d'informations structurées et hiérarchisées : Application à l'information archéologique**

soutenue le 6 mai 2010 devant le jury composé de

Marie-Odile CORDIER	Professeur à l'Université de Rennes 1 ( <i>Rapporteur</i> )
Nadia CREIGNOU	Professeur à l'Université de la Méditerranée ( <i>Examinatrice</i> )
Olivier CURÉ	Maître de conférence à l'Université Paris-Est ( <i>Invité</i> )
Pierre DRAP	Chargé de recherche CNRS, LSIS ( <i>Co-directeur</i> )
Antoinette HESNARD	Directrice de recherche CNRS, CCJ ( <i>Examinatrice</i> )
Sylvain LAGRUE	Maître de conférence à l'Université d'Artois ( <i>Invité</i> )
Jérôme LANG	Directeur de recherche CNRS, LAMSADE ( <i>Rapporteur</i> )
Odile PAPINI	Professeur à l'Université de la Méditerranée ( <i>Directrice</i> )



Thèse préparée dans le laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes  
LSIS - UMR CNRS 6168



au sein de l'université de la Méditerranée et de l'université Paul Cézanne



et financée par le projet européen VENUS n° (IST-034924).





*A mes parents,*



# Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier Marie-Odile Cordier et Jérôme Lang pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail mais aussi pour les conseils qu'ils m'ont donné pour l'amélioration de mon manuscrit. Je remercie également Nadia Creignou et Antoinette Hesnard pour avoir accepté d'être membres du jury qui a examiné mon travail.

Je remercie Odile Papini et Pierre Drap d'avoir dirigé cette thèse, de m'avoir encouragée et de m'avoir fait découvrir de nouveaux domaines. Leur rigueur et leurs critiques m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier également le projet européen VENUS dont le financement m'a permis de réaliser cette thèse. J'en profite à ce titre pour remercier tous les partenaires de ce projet. Je remercie Olivier Curé pour notre collaboration et sa présence lors de ma soutenance. Je souhaite remercier également mon grand frère de thèse, Julien S. qui a su parfaitement jouer son rôle. Quelques lignes ne suffiraient pas pour lui exprimer toute ma reconnaissance.

Mes prochains remerciements vont à Salem Benferhat, Sylvain Lagrue et Safa Yahia du CRIL de Lens pour notre collaboration pendant cette thèse ainsi que pour la présence de Sylvain pour ma soutenance.

Je tiens à remercier ensuite les membres de mon équipe (INCA), je n'aurais pu trouver meilleur environnement de travail. Je remercie tout spécialement Philippe pour la confiance qu'il m'a accordé lors des enseignements qu'il m'a confiés pendant ces années et Cyril T. qui a toujours été à mon écoute en tant que collègue et ami. Je souhaite remercier Régis et Cédric P. pour avoir partagé le bureau pendant ces derniers mois et en particulier, merci à Cédric P. pour le café du matin. Je remercie Eric et Julien H. pour toutes les discussions enrichissantes que nous avons pu avoir. Travailler avec vous tous fut un réel plaisir.

Lors de mon arrivée à l'ESIL, j'ai été chaleureusement accueillie par l'équipe I&M (remerciement spécial pour Bernard et sa femme) et plus particulièrement par les thésards. Nous avons partagé des bons moments lors de soirées ou de déjeuners pour nous aérer l'esprit. La solidarité dont vous avez fait preuve m'a beaucoup touchée : merci à Guigui, Greg, Van, Alaa, Thomas, Ludo, Hung, Christophe, Florian et Kheiredine. Je souhaiterais remercier spécialement Adrien (mon coloc de bureau ;-)) et Dimitri pour tous les bons moments passés tous les trois. J'espère garder votre amitié longtemps et on se voit quand vous voulez pour un sandwich à Montréal ! Une autre personne mérite des remerciements spéciaux, Véronique (surnommée maman Véro), elle a toujours su

être à mon écoute et m'a consolée un nombre de fois impressionnant, elle est devenue au fil de ces années une amie très chère. J'en profite également pour remercier Nathalie et Marie pour leur gentillesse et plus généralement tout le personnel de l'ESIL.

Mes plus grands remerciements vont à mes parents. Ils m'ont toujours soutenue et encouragée dans mes choix. Merci de m'avoir transmis cet esprit critique, cette persévérance et plein d'autres choses. Un immense merci à ma soeur, Maud, qui a toujours su trouvé les bons mots pour me remotiver. Tu vas enfin pouvoir dire que ta soeur est docteur ! J'en profite pour remercier Nico ! Je remercie également mon "petit" frère, Côme et sa pétillante Marine pour leur bonne humeur. Un grand merci à l'ensemble des autres membres de ma famille ainsi que mon parrain pour avoir été à mes côtés.

L'aventure de la thèse a été l'occasion de faire de belles rencontres. La plus belle de ces rencontres reste celle de Cédric. Tu as réussi à me soutenir pendant ces années malgré les milliers de kilomètres qui nous séparent. Je te remercie pour tout ce que tu m'apportes. Une nouvelle aventure commence pour nous et je sais que grâce à ton soutien, ce sera une autre belle réussite. J'en profite également pour remercier toute ma belle famille, les week-ends niçois étaient un bol d'air à chaque fois, merci à Jean-Claude, Lyliane et Cynthia pour ces bons moments. Je n'oublie pas le clan des Nîmois pour m'avoir accueillie et divertie lors de week-ends sympathiques et inoubliables !

J'ai toujours pu compter sur mes ami(e)s qui ont su me soutenir chacun à leur manière pendant ces années de thèse. Corinne qui a sans cesse pris de mes nouvelles alors que je croulais sous le travail. Je remercie également Manu, Romain, Schnob' et Cécile pour toutes les fois où ils m'ont écoutée et soutenue par MSN ou par mail ! Merci à Rémi pour les bons restos que l'on a découvert sur Marseille, c'était un plaisir à chaque fois. Etant passé par là, tu m'as toujours écoutée et conseillée dans les moments de doute. Un grand merci à Claire et Elodie qui malgré la distance ont toujours su trouver les mots pour m'encourager jusqu'à la fin. Enfin, je voudrais remercier la Shrink family sur qui j'ai toujours pu compter : Raf, Flo, Jean-Luc, Emilie, Fiona et Jack merci pour les soirées, les réveillons, les concerts, les pique-niques, les anniversaires, ... et pour tous les bons moments à venir !

La dernière personne que je souhaite remercier est ma marraine. Elle a été paradoxalement la plus présente dans mes pensées lorsque la solitude et les doutes se faisaient trop lourds, marraine, je ne t'oublie pas et j'espère que de là-haut, tu es fière de moi.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>21</b>
<b>1 Outils</b>	<b>23</b>
1.1 Notations . . . . .	23
1.2 Logique propositionnelle . . . . .	24
1.2.1 Le langage de la logique propositionnelle . . . . .	24
1.2.2 Aspect axiomatique de la logique propositionnelle . . . . .	24
1.2.3 Aspect sémantique de la logique propositionnelle . . . . .	26
1.3 Logique des prédicats . . . . .	28
1.3.1 Le langage de la logique des prédicats . . . . .	28
1.3.2 Aspect axiomatique de la logique des prédicats . . . . .	30
1.3.3 Aspect sémantique de la logique des prédicats . . . . .	31
1.4 Programmation logique avec sémantique de modèles stables . . . . .	34
1.4.1 Programme logique normal . . . . .	34
1.4.2 Programme basique . . . . .	34
1.4.3 Programme avec sémantique de modèles stables . . . . .	35
1.4.4 Les solveurs ASP . . . . .	36
<b>II Etat de l’art</b>	<b>37</b>
<b>2 Restauration de la cohérence</b>	<b>39</b>
2.1 Préliminaires . . . . .	40
2.1.1 Ordres et préordres . . . . .	40
2.1.2 Bases de croyances . . . . .	41
2.2 Sous-bases cohérentes préférées . . . . .	41
2.2.1 Base de croyances non ordonnées . . . . .	42
2.2.2 Base de croyances totalement préordonnées . . . . .	42
2.2.3 Base de croyances partiellement préordonnées . . . . .	44
2.3 Minimisation de l’incohérence . . . . .	46

2.3.1	Restauration de la cohérence et diagnostic . . . . .	46
2.3.2	Restauration de la cohérence et sous-formules minimales inconsistantes (MUS) . . . . .	48
2.3.3	Traitement local de l'incohérence . . . . .	49
2.4	Affaiblissement par oubli de variables . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Inférence en présence d'incohérence</b>	<b>53</b>
3.1	Inférence pour des bases de croyances non ordonnées . . . . .	54
3.1.1	Les principes d'inférence . . . . .	55
3.2	Inférence pour des bases de croyances totalement préordonnées . . . . .	56
3.2.1	Les principes d'inférence . . . . .	56
3.2.2	Les relations d'inférence non-monotone . . . . .	58
3.3	Inférence pour des bases de croyances partiellement préordonnées . . . . .	60
3.3.1	Extension basée sur les compatibles . . . . .	60
3.3.2	Extension directe des inférences . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Révision de croyances</b>	<b>65</b>
4.1	La révision selon AGM . . . . .	66
4.2	Les postulats KM . . . . .	67
4.3	Quelques approches de révision . . . . .	68
4.3.1	Approches sémantiques . . . . .	68
4.3.2	Approches syntaxiques . . . . .	69
4.4	Révision itérée . . . . .	73
4.4.1	Les postulats de Darwiche et Pearl . . . . .	74
4.4.2	Quelques opérateurs . . . . .	75
4.5	Révision d'états épistémiques représentés par des préordres partiels . . . . .	78
4.5.1	Les postulats KM révisés . . . . .	78
4.5.2	Caractérisation des postulats de Darwiche et Pearl pour des préordres partiels . . . . .	79
4.5.3	Quelques opérateurs . . . . .	80
<b>III</b>	<b>Raisonnement à partir d'informations partiellement préordonnées</b>	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>Restauration de la cohérence par R-ensembles</b>	<b>87</b>
5.1	Comparateurs . . . . .	88
5.1.1	Comparateur faible . . . . .	89
5.1.2	Comparateur lexicographique . . . . .	91
5.2	Approche syntaxique . . . . .	95
5.3	Approche sémantique . . . . .	101
5.4	Equivalence syntaxique/sémantique . . . . .	103
5.5	Equivalence R-ensembles/MCONS . . . . .	104

---

<b>6 Révision par R-ensembles (PPRSR)</b>	<b>113</b>
6.1 Représentation d'un état épistémique . . . . .	114
6.2 Approche syntaxique . . . . .	114
6.3 Approche sémantique . . . . .	119
6.3.1 PPRSР et l'assignation P-fidèle . . . . .	123
6.3.2 Instanciation de PPRSР avec le comparateur faible . . . . .	124
6.3.3 Instanciation de PPRSР avec le comparateur lexicographique . . . . .	130
6.4 Equivalence PPRSР/MCONS . . . . .	134
<b>7 Inférence lexicographique</b>	<b>141</b>
7.1 Inférence lexicographique basée sur les compatibles . . . . .	141
7.1.1 Approche syntaxique . . . . .	142
7.1.2 Approche sémantique . . . . .	145
7.1.3 Equivalence des inférences syntaxique et sémantique . . . . .	147
7.2 Inférence lexicographique directement sur les R-ensembles . . . . .	148
7.2.1 Approche syntaxique . . . . .	149
7.2.2 Approche sémantique . . . . .	149
7.2.3 Equivalence des inférences syntaxique et sémantique . . . . .	150
7.3 Propriétés . . . . .	151
<b>8 Mise en oeuvre avec ASP</b>	<b>157</b>
8.1 Traduction en un programme logique avec sémantique de modèles stables	157
8.1.1 Etape 1 . . . . .	158
8.1.2 Etape 2 . . . . .	158
8.1.3 Etape 3 (Révision) . . . . .	159
8.2 Modèles stables et R-ensembles potentiels . . . . .	160
8.3 Modèles stables préférés et R-ensembles . . . . .	167
<b>IV Application dans le contexte du projet VENUS</b>	<b>173</b>
<b>9 Préliminaires</b>	<b>175</b>
9.1 Logiques de description . . . . .	175
9.1.1 Aspect axiomatique des logiques de description . . . . .	175
9.1.2 Aspect sémantique des logiques de description . . . . .	177
9.1.3 Raisonnement en logiques de description . . . . .	178
9.2 Les ontologies . . . . .	180
9.2.1 Définitions . . . . .	180
9.2.2 Classifications des ontologies . . . . .	182
9.2.3 Construction d'une ontologie . . . . .	183

<b>10 Représentation de l'information archéologique</b>	<b>187</b>
10.1 Projet européen VENUS . . . . .	187
10.2 Description de l'information archéologique . . . . .	190
10.2.1 Acquisition des données . . . . .	190
10.2.2 Relevés archéologiques . . . . .	192
10.3 Ontologie d'application . . . . .	193
10.4 Contraintes . . . . .	194
10.5 Base de connaissances . . . . .	196
10.6 Un outil pour la génération de représentations 3D d'amphores . . . . .	197
10.6.1 Caractéristiques des dessins archéologiques et traitement de l'image	197
10.6.2 Génération de représentations 2D . . . . .	201
10.6.3 Génération de représentations 3D . . . . .	202
10.7 Traduction en formalismes logiques . . . . .	204
10.7.1 Traduction en logique de description . . . . .	204
10.7.2 Traduction en logique des prédicats instanciés . . . . .	210
<b>11 Mise en oeuvre du raisonnement dans VENUS</b>	<b>223</b>
11.1 Application de la restauration de la cohérence . . . . .	224
11.2 Application de la révision . . . . .	228
11.3 Implantation de la restauration de la cohérence . . . . .	234
11.4 Expérimentations et résultats . . . . .	236
11.4.1 Relevé de Pianosa . . . . .	236
11.4.2 Relevé de Sesimbra . . . . .	237
11.4.3 Relevé de Port Miou C . . . . .	238
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>241</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>245</b>
<b>A Spécification de l'ontologie d'application</b>	<b>261</b>
A.1 Description des concepts et des attributs . . . . .	261
A.2 Description des relations entre les concepts . . . . .	268

# Table des figures

3.1	Processus de définitions de relations d'inférence non-monotone pour des bases de croyances non ordonnées . . . . .	55
3.2	Processus de définitions de relations d'inférence non-monotone pour des bases de croyances totalement préordonnées . . . . .	57
3.3	Processus de définitions de relations d'inférence syntaxique non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées . . . . .	61
3.4	Processus de définitions de relations d'inférence sémantique non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées . . . . .	62
5.1	Restauration de la cohérence d'un état épistémique $\Psi$ . . . . .	88
5.2	Représentation de $\preceq_{\Sigma}$ . . . . .	89
5.3	Représentation de $\prec_s$ . . . . .	91
5.4	Restauration de la cohérence par R-ensembles d'un état épistémique . . . . .	96
5.5	Equivalence entre la restauration de la cohérence par R-ensembles et par MCONS . . . . .	104
6.1	Représentation d'un état épistémique révisé . . . . .	114
6.2	Révision syntaxique par R-ensembles d'un état épistémique . . . . .	115
6.3	Préordres partiels sur les interprétations $\preceq_{\Psi}^w$ , $\preceq_{\Psi \bullet_{\Delta}^w \mu}$ et $\preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu}$ . . . . .	126
6.4	$\preceq_{\Gamma \circ_{\Delta}^w \mu}$ . . . . .	127
6.5	Préordres partiels sur les interprétations $\preceq_{\Psi}^{\Delta}$ , $\preceq_{\Psi \bullet_{\Delta}^{\Delta} \mu}$ et $\preceq_{\Psi \bullet_{\triangleright} \mu}$ . . . . .	133
6.6	Equivalence entre PPRS et MCONS . . . . .	135
7.1	Préordre partiel sur les interprétations $\prec_{\Psi}^{\Delta}$ . . . . .	155
8.1	Mise en oeuvre avec ASP . . . . .	158
9.1	Différents niveaux de généralités des ontologies . . . . .	182
10.1	Intégration du workpackage 3 . . . . .	189
10.2	Hiérarchie de concepts de ontologie . . . . .	194
10.3	Notre ontologie . . . . .	195
10.4	Interaction de l'ontologie et la base de connaissances dans le projet VENUS . . . . .	196
10.5	Relevé d'une Dressel 2-4 courte réalisé lors de la mission de Pianosa . . . . .	198

---

10.6	Relevé d'une Beltran 2B provenant de la base de données d'Ads . . . . .	198
10.7	Détermination d'un pixel candidat . . . . .	199
10.8	Analyse des huit pixels voisins du pixel candidat . . . . .	200
10.9	Génération d'une représentation 3D d'amphore . . . . .	203
10.10	Extrait de notre ontologie d'application . . . . .	211
10.11	Préordre partiel sur les formules relatives à la connaissance générique . . .	219
10.12	Préordre partiel sur les formules relatives aux instances d'amphores . . .	219
10.13	Préordre partiel sur les formules de la base de connaissances . . . . .	220
11.1	Intégration de notre méthode dans le contexte du projet VENUS. . . . .	225
11.2	Préordre partiel $\preceq_{\Sigma}$ sur les formules de $\Sigma$ . . . . .	226

# Introduction

Cette thèse s'est déroulée dans le cadre du projet européen VENUS (Virtual ExploratioN of Underwater Sites) n ° (IST-034924)<sup>1</sup> qui fournit des méthodes scientifiques et des outils technologiques pour l'exploration virtuelle de sites archéologiques sous-marins. L'un des objectifs du projet est de construire une représentation d'un site archéologique à l'aide de relevés 3D guidés par la connaissance archéologique sous-marine. Dans ce contexte, la photogrammétrie est utilisée pour produire des relevés 3D sur les objets. La connaissance sur les objets étudiés provient donc à la fois de l'archéologie sous-marine et de la photogrammétrie. Par ailleurs, l'acquisition des données nécessite l'intervention humaine ce qui conduit à l'apparition éventuelle d'incohérence. L'une des problématique dans ce contexte est l'étude de représentations formelles de ces relevés 3D afin de développer des méthodes de raisonnement, en particulier la restauration de la cohérence.

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la représentation formelle des informations provenant des relevés 3D mais également au raisonnement en présence d'incohérence dans ce contexte. Ces informations se composent à la fois de la connaissance générique, l'archéologie sous-marine et d'observations c'est-à-dire de relevés sur les objets. Les informations provenant des relevés 3D sont structurées et hiérarchisées, certaines sont incomparables entre elles. En outre, certaines de ces informations sont des contraintes. Afin de représenter ces informations, nous avons construit une ontologie associée à un ensemble de contraintes. Nous avons choisi dans un premier de temps de représenter l'ontologie et les contraintes en logique de description. Cette démarche qui semble naturelle s'est avérée limitée puisque les contraintes dont nous avons besoin ne peuvent pas être représentées par ce formalisme. Il nous a semblé préférable de représenter l'ontologie et les contraintes d'un point de vue syntaxique par un ensemble de formules de la logique des prédicats instanciés ou propositionnelles équipé d'un préordre partiel entre les formules permettant de représenter l'incomparabilité entre concepts de l'ontologie. En effet, dans ce contexte, l'utilisation d'un préordre total n'est pas adapté pour modéliser la structure et la hiérarchie des informations manipulées.

---

<sup>1</sup><http://www.venus-project.eu>

Par ailleurs, la confrontation entre la connaissance générique et les observations peut conduire à des incohérences. Nous avons ensuite proposé une méthode pour la restauration de la cohérence lorsque les informations sont représentées par un ensemble de formules partiellement préordonnées.

Les travaux existants se concentrent, d'un point de vue syntaxique, sur la construction des sous-bases maximales cohérentes ou des sous-bases cohérentes préférées selon un critère. Cependant, lorsque l'incohérence porte sur peu d'informations comme c'est le cas dans notre projet, il semble plus naturel de se focaliser sur les informations responsables de l'incohérence. C'est la raison pour laquelle nous adoptons le point de vue qui consiste à retirer le moins de formules possibles pour restaurer la cohérence.

Les informations représentées par les formules sont précieuses et nous disposons d'un préordre partiel sur ces informations qui nous renseignent sur les préférences mais aussi sur les incomparabilités. Dans ce contexte, afin de construire un préordre partiel sur les sous-ensembles de formules et de sélectionner les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence, il est intéressant de combiner le préordre sur les formules et la cardinalité. Nous avons donc étudié la préférence lexicographique pour des préordres partiels que nous avons utilisée pour la restauration de la cohérence. De plus, d'un point de vue théorique, nous avons également développé une approche de révision de bases de croyances partiellement préordonnées et d'inférence à partir de bases de croyances partiellement préordonnées utilisant la préférence lexicographique.

Dans la partie théorique de ce manuscrit, nous considérons l'état épistémique d'un agent ce qui nous permet de représenter les croyances courantes de l'agent ainsi que les méta-croyances dont il dispose. L'état épistémique est représenté d'un point de vue syntaxique par une base de croyances partiellement préordonnées c'est-à-dire par un ensemble fini de formules propositionnelles équipé d'un préordre partiel. Cette approche syntaxique nous permet de proposer une mise en oeuvre. L'état épistémique est représenté sémantiquement de façon équivalente par un préordre partiel sur les interprétations qui facilite l'étude et l'expression des propriétés des opérations que nous proposons.

Notre première contribution porte sur la restauration de la cohérence d'un état épistémique. Nous avons tout d'abord défini une relation de préférence lexicographique pour des bases de croyances propositionnelles partiellement préordonnées. Nous avons ensuite étendu l'approche des R-ensembles initialement introduite pour la révision de croyances non ordonnées ou totalement préordonnées à la restauration de la cohérence de préordres partiels d'un point de vue syntaxique mais également sémantique.

Par ailleurs, d'un point de vue théorique, nous nous sommes également intéressés à la révision d'un état épistémique par une formule propositionnelle. En effet, un état épistémique peut être cohérent cependant l'ajout d'une nouvelle information peut

entraîner l'apparition d'incohérence. Nous nous intéressons à la question suivante : comment restaurer la cohérence lors de l'ajout d'une information considérée plus sûre donc préférée aux informations actuelles mais contradictoire avec ces informations ? Nous avons également étendu l'approche des R-ensembles d'un point de vue syntaxique et sémantique. Nous avons proposé une méthode syntaxique pour calculer l'ensemble des croyances courantes de l'agent.

L'inférence en présence d'incohérence repose souvent sur les méthodes de restauration de la cohérence. Nous avons donc naturellement étudié l'inférence lexicographique à partir de préordres partiels.

Nous avons proposé une mise en oeuvre en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables pour la méthode de restauration de la cohérence et celle de révision de bases de croyances partiellement préordonnées que nous avons proposées. Nous avons ensuite implanté et expérimenté notre méthode de restauration de la cohérence en utilisant le comparateur lexicographique avec les données réelles provenant du projet VENUS.

## Plan du manuscrit

Ce document s'organise en quatre grandes parties. La première partie, composée du chapitre 1, est consacrée à la présentation des notations et des outils qui seront utilisés tout au long de ce manuscrit. La seconde partie, regroupant les chapitres 2 à 4, présente l'état de l'art. La troisième partie, composée des chapitres 5 à 8, se concentre sur notre contribution théorique. La quatrième et dernière partie de ce manuscrit regroupe les chapitres 9 et 11 et présente nos contributions dans le contexte applicatif du projet VENUS.

Dans le chapitre 1, nous présentons brièvement les notations utilisées. Nous détaillons ensuite les formalismes de représentation nécessaires à la compréhension de ce manuscrit : la logique propositionnelle et la logique des prédicats. Nous présentons également la programmation logique avec sémantique de modèles stables.

Après un bref rappel sur les notions d'ordre et de préordre et les bases de croyances, le chapitre 2 présente un état de l'art sur la restauration de la cohérence pour des bases de croyances non ordonnées, totalement préordonnées et partiellement préordonnées. Ce chapitre s'intéresse aux approches qui consistent à supprimer l'incohérence. Nous décrivons les trois principaux types d'approches. Les premières approches visent à déterminer les sous-bases (maximales) cohérentes préférées selon un critère. Nous décrivons ensuite les approches basées sur les sous-ensembles minimaux incohérents. La dernière famille d'approches que nous présentons consiste à oublier certaines variables des formules responsables de l'incohérence afin de restaurer la cohérence.

Le chapitre 3 présente l'inférence non-monotone pour des bases de croyances non ordonnées, totalement préordonnées et des bases de croyances partiellement préordonnées dans le cadre de la restauration de la cohérence. Nous présentons pour ces trois types de bases de croyances, les différents principes d'inférence existants. Puis nous combinons ces principes aux méthodes de restauration de la cohérence du chapitre précédent afin de définir des relations d'inférence non-monotone.

Le chapitre 4 rappelle les principaux travaux dans le cadre de la révision de croyances. Nous présentons les postulats AGM ainsi que leur reformulation par Katsuno et Mendelzon. Nous montrons quelques opérations syntaxiques et sémantiques satisfaisant ces postulats. Nous introduisons ensuite la révision itérée, la reformulation des postulats KM dans ce cadre ainsi que les postulats de Darwiche et Pearl. Nous présentons également quelques opérations de révision itérée : la révision naturelle, ordinale et possibiliste. Nous abordons ensuite la révision d'états épistémiques représentés par des préordres partiels. Nous présentons les postulats KM révisés et la caractérisation des postulats de Darwiche et Pearl. Enfin, nous détaillons les extensions de la révision ordinale drastique et de la révision possibiliste pour des bases de croyances partiellement préordonnées.

Le chapitre 5 constitue notre première contribution. Il présente l'extension de la méthode des R-ensembles initialement définie pour la révision d'états épistémiques représentés par des bases de croyances non ordonnées ou totalement préordonnées à la restauration de la cohérence d'états épistémiques représentés par des préordres partiels. Cette approche consiste à construire un préordre partiel sur les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence. Pour cela, nous utilisons la notion de comparateur. Nous reformulons le comparateur faible et nous introduisons le comparateur lexicographique. Nous proposons une approche syntaxique pour calculer l'ensemble des croyances courantes de l'agent. Pour cela nous introduisons la notion de R-ensemble potentiel et nous généralisons la notion de R-ensemble. Nous construisons ensuite une contre-partie sémantique équivalente. Enfin, nous montrons comment notre approche peut être exprimée en termes de sous-bases maximales cohérentes préférées.

Dans le chapitre 6, nous proposons un nouveau cadre de travail pour la révision d'états épistémiques représentés par des préordres partiels. Nous étendons la méthode des R-ensembles initialement définie dans le cadre non ordonné ou totalement préordonné aux états épistémiques représentés par des bases de croyances partiellement préordonnées. Nous proposons une contre-partie sémantique à notre approche syntaxique. Nous étudions dans quelles conditions notre approche capture la révision possibiliste. Nous montrons que lors de l'application du comparateur lexicographique, notre opération de révision capture la révision ordinale drastique. Enfin, nous montrons que nous pouvons exprimer notre méthode en termes de sous-bases maximales

cohérentes préférées.

Nous présentons dans le chapitre 7 l'inférence lexicographique à partir de préordres partiels. Nous proposons deux approches. La première consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatibles. La deuxième approche utilise la définition du nouveau comparateur lexicographique sur les R-ensembles pour déterminer les sous-bases maximales cohérentes préférées afin d'appliquer l'inférence classique. Nous proposons une contre-partie sémantique pour chacune de ces deux approches. Nous présentons les propriétés des relations d'inférence définies.

Le chapitre 8 a pour objet la mise en oeuvre de nos méthodes en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables. Nous présentons tout d'abord la traduction de nos problèmes en programmes logiques. Nous montrons ensuite la correspondance entre les modèles stables et les R-ensembles potentiels. Nous définissons ensuite la notion de modèle stable préféré et nous montrons la correspondance entre les modèles stables préférés et les R-ensembles définis dans les chapitres précédents.

La dernière partie concerne l'application. Le chapitre 9 présente un état de l'art sur les logiques de description et les ontologies. Le chapitre 10 présente l'information archéologique manipulée dans le contexte du projet VENUS. Nous introduisons tout d'abord le contexte du projet puis le processus d'acquisition des données lors des trois missions effectuées. Nous présentons l'ontologie d'application que nous avons construite dans ce cadre afin de représenter les informations issues des relevés, les contraintes associées ainsi que la base de connaissances dans ce contexte. Nous présentons également un outil de génération de représentations 3D à partir de relevés archéologiques que nous avons développé. Enfin, nous traduisons la base de connaissances d'une part en logique de description  $SHOIN(\mathcal{D})$  et d'autre part en logique des prédicats afin d'utiliser les méthodes théoriques proposées dans les chapitres précédents.

Nous traitons dans le chapitre 11, l'application de nos méthodes de restauration de la cohérence et de révision dans le contexte du projet VENUS. Nous présentons des exemples concrets d'application de la restauration de la cohérence et de la révision dans ce contexte. Nous détaillons ensuite l'implantation de nos méthodes et les expérimentations menées sur la restauration de la cohérence des relevés photogrammétriques issus des trois missions réalisées pendant le projet avant de conclure et de dresser des perspectives pour de futurs travaux.



Première partie

Préliminaires



# Chapitre 1

## Outils

Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des notations qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit puis des rappels de base sur la logique propositionnelle et la logique des prédicats ainsi que sur la programmation logique avec sémantique de modèles stables.

### 1.1 Notations

Nous notons  $\mathcal{L}$  le langage propositionnel détaillé en section 1.2 de ce chapitre. Les lettres romaines minuscules  $a, b, \dots$  représentent les variables propositionnelles. Les formules de  $\mathcal{L}$  sont notées par les lettres grecques  $\phi, \psi, \dots$  et par les lettres romaines minuscules. Les lettres romaines majuscules  $A, B, \dots, \Gamma$  et  $\Sigma$  représentent les ensembles de formules propositionnelles et les lettres grecques majuscules  $\Psi, \Phi$  représentent les états épistémiques.

Nous notons  $\mathcal{W}$  l'ensemble des interprétations basées sur le langage  $\mathcal{L}$ . Une interprétation est notée  $\omega$ .

Nous notons  $\mathcal{L}_{Pr}$  le langage des prédicats détaillé en section 1.3 de ce chapitre. Les lettres romaines minuscules  $a, b, \dots$  ou les suites de lettres romaines minuscules (mots) représentent les symboles de prédicats. Nous réservons les lettres romaines minuscules  $x, y, z$ , éventuellement indicées, pour désigner les variables. Les symboles fonctionnels sont représentés par les lettres romaines minuscules  $f, g, h$ . Les formules sont désignées par les lettres romaines majuscules  $\phi, \psi, \dots$ , éventuellement indicées. Nous noterons les ensembles de formules par les lettres romaines majuscules  $A, B, \dots$  et  $\Sigma$  et l'ensemble des termes  $\mathcal{T}$ .

Nous notons  $\mathcal{W}$  l'ensemble des interprétations basées sur le langage  $\mathcal{L}_{Pr}$ . Une interprétation est notée  $\omega$ . Soit  $\phi$  une formule de la logique des prédicats, nous notons  $\omega(\phi)$  l'interprétation de la formule  $\phi$ .

## 1.2 Logique propositionnelle

Cette section présente un bref rappel sur la logique propositionnelle plus précisément détaillée dans les documents suivants [199, 53, 117, 82].

### 1.2.1 Le langage de la logique propositionnelle

Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de variables propositionnelles. Le langage propositionnel, noté  $\mathcal{L}$ , est construit à partir de  $\mathcal{P}$ , de constantes  $\perp$  (faux) et  $\top$  (vrai), des connecteurs usuels  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  et de parenthèses.

#### Définition 1.1

L'ensemble des formules bien formées de  $\mathcal{L}$  est le plus petit ensemble tel que :

- $\perp$  et  $\top$  sont des formules,
- une variable propositionnelle (ou proposition) est une formule,
- si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules alors  $\neg\phi$ ,  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$  et  $\phi \leftrightarrow \psi$  sont des formules.

### 1.2.2 Aspect axiomatique de la logique propositionnelle

L'aspect axiomatique de la logique propositionnelle revient à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes.

Pour définir un système formel, il est nécessaire d'utiliser des axiomes c'est-à-dire des propositions évidentes admises sans démonstration. Différents ensembles d'axiomes ont été proposés comme le système de cinq axiomes de Whitehead et Russel, le système de quatre axiomes de Hilbert et Ackermann, le système de treize axiomes de Kleene et Gentsen et le système de Lukasiewicz proposé dans les années 1930. Ce système utilise seulement les connecteurs  $\neg$  et  $\rightarrow$  et il est basé sur les trois axiomes suivants :

$$A_1 : \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi);$$

$$A_2 : (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \varphi));$$

$$A_3 : (\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi);$$

Pour effectuer des déductions, des règles sont définies comme la *règle de substitution* qui permet de remplacer toutes les occurrences d'une variable propositionnelle dans un théorème par une autre variable propositionnelle ou par une formule bien formée. La *règle de conclusion* a également été définie. Cette règle est plus communément appelée *règle de dérivation* ou de *Modus Ponens* et est définie formellement par :

$$\frac{\vdash \phi, \vdash \phi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

où le symbole d'assertion logique  $\vdash$  n'est pas un nouvel opérateur mais un signe métalogique (du métalangage).

Les définitions sont des équivalences qui permettent de simplifier l'écriture des formules en n'utilisant que certains connecteurs. Dans les définitions suivantes, seuls les connecteurs  $\neg$  et  $\vee$  sont utilisés :

$$D_1 : \phi \rightarrow \psi =_{def} \neg\phi \vee \psi$$

$$D_2 : \phi \wedge \psi =_{def} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$$

$$D_3 : \phi \leftrightarrow \psi =_{def} (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi)$$

Le système de Lukasiewicz se compose des trois axiomes cités précédemment, de la règle de substitution et du Modus Ponens. La déduction peut se définir formellement comme suit :

**Définition 1.2**

Soient  $H_1, H_2, \dots, H_m \in \mathcal{L}$  et  $F_1, F_2, \dots, F_p \in \mathcal{L}$ .

Une déduction à partir d'hypothèses  $H_1, H_2, \dots, H_m$  est une suite de formules bien formées  $F_1, F_2, \dots, F_p$  où chaque  $F_i$  est soit :

- une hypothèse,
- un axiome,
- ou une formule obtenue à partir des règles d'inférence (substitution ou modus ponens) appliquées aux formules placées avant  $F_i$  dans la déduction.

Soient  $H_1, H_2, \dots, H_m \vdash F_p$  une déduction de  $F_p$  à partir des hypothèses  $H_1, H_2, \dots, H_m$  et  $\vdash F$  un théorème  $F$  c'est-à-dire une déduction de  $F$  sans hypothèse. Nous avons les propriétés suivantes :

**Proposition 1.1**

$\forall \phi \in \mathcal{L}, \vdash (\phi \rightarrow \phi)$ .

**Proposition 1.2**

$\forall \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \psi \in \mathcal{L}$ , si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi)$  alors  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi$ .

Le théorème suivant permet de simplifier la déduction d'une formule considérée :

**Théorème 1.1 (de déduction)**

$\forall \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \psi \in \mathcal{L}$ , si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi$  alors  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi)$ .

De plus, nous avons les théorèmes suivants :

**Proposition 1.3**

$\forall \phi, \psi, \varphi \in \mathcal{L}$ , toutes les formules suivantes sont des théorèmes :

- $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\phi \rightarrow \varphi)))$  ;
- $\vdash (\phi \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi))$  ;
- $\vdash (\neg\phi \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$  ;
- $\vdash (\neg\neg\phi \rightarrow \phi)$  ;
- $\vdash (\phi \rightarrow \neg\neg\phi)$  ;
- $\vdash ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\phi))$  ;
- $\vdash (\phi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg(\phi \rightarrow \psi)))$  ;
- $\vdash ((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow ((\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \phi))$ .

### 1.2.3 Aspect sémantique de la logique propositionnelle

L'aspect sémantique de la logique propositionnelle, également appelé théorie des modèles, considère l'interprétation des formules de  $\mathcal{L}$ .

#### Définition 1.3

On appelle *interprétation*, toute application  $\omega$  de  $\mathcal{P}$  dans  $\{0, 1\}$  telle que  $\omega(0) = 0$  et  $\omega(1) = 1$ . L'application  $\omega$  est étendue aux formules de la façon suivante :  $\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}$ ,

- $\omega(\neg\phi) = 1 - \omega(\phi)$  ;
- $\omega(\phi \vee \psi) = \max(\omega(\phi), \omega(\psi))$  ;
- $\omega(\phi \wedge \psi) = \min(\omega(\phi), \omega(\psi))$  ;
- $\omega(\phi \rightarrow \psi) = \max(1 - \omega(\phi), \omega(\psi))$  ;
- $\omega(\phi \leftrightarrow \psi) = \min(\max((1 - \omega(\phi)), \omega(\psi)), \max(\omega(\phi), (1 - \omega(\psi))))$ .

Cela peut être décrit par la table de vérité ci-dessous :

$\phi$	$\psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Nous avons les définitions suivantes, soient  $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ ,  $A$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$  et  $\omega$  une interprétation,

#### Définition 1.4

- Une tautologie (ou formule valide), notée  $\models \phi$  est une formule  $\phi$  telle que pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\omega(\phi) = 1$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence logique ou conséquence valide de la formule  $\phi$ , notée  $\phi \models \psi$ , si  $\omega(\phi) = 1$  alors  $\omega(\psi) = 1$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence logique de l'ensemble de formules  $A$ , notée  $A \models \psi$ , si  $\forall \phi \in A$ ,  $\omega(\phi) = 1$  alors  $\omega(\psi) = 1$ .
- Les formules  $\psi$  et  $\phi$  sont équivalentes, notées  $\phi \equiv \psi$ , si  $\phi \models \psi$  et  $\psi \models \phi$ .
- Une formule  $\phi$  est satisfaisable ou cohérente s'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\omega(\phi) = 1$ .  $\omega$  est alors un modèle de  $\phi$  et nous notons  $\omega \models \phi$ .
- Un ensemble de formules  $A$  est satisfaisable ou cohérent s'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\forall \phi \in A$ ,  $\omega(\phi) = 1$ .  $\omega$  est alors un modèle de  $A$  et nous notons  $\omega \models A$ .
- Deux ensembles de formules sont équivalents, s'ils ont exactement les mêmes modèles.
- Une formule  $\phi$  est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\omega(\phi) = 0$ .  $\omega$  est appelé contre-modèle de  $\phi$ .  
Nous pouvons facilement montrer que  $\phi$  est insatisfaisable si  $\neg\phi$  est une tautologie.
- Un ensemble de formules  $A$  est insatisfaisable ou incohérent si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\exists \phi \in A$  tel que  $\omega(\phi) = 0$ . Autrement dit, il n'existe aucun modèle de  $A$  et  $\omega$  est appelé contre-modèle de  $A$ .

De plus, nous avons les résultats suivants :

**Proposition 1.4**

$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}$ ,

- $\models (\phi \rightarrow \psi)$  si et seulement si  $\phi \models \psi$  ;
- $\models (\phi \leftrightarrow \psi)$  si et seulement si  $\phi \equiv \psi$  ;
- si  $\models \phi$  et  $\models (\phi \rightarrow \psi)$  alors  $\models \psi$  ;
- $\models (\phi \wedge \psi)$  si et seulement si  $\models \phi$  et  $\models \psi$  ;
- si  $\models \phi$  ou  $\models \psi$  alors  $\models (\phi \vee \psi)$ .

Les propriétés principales de la logique propositionnelle sont exprimées par l'ensemble des théorèmes suivants :

**Théorème 1.2**

**(d'adéquation)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}$ , si  $\vdash \phi$  alors  $\models \phi$ . Autrement dit, tous les théorèmes sont des tautologies.

**(de complétude)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}$ , si  $\models \phi$  alors  $\vdash \phi$ . Autrement dit, toutes les tautologies sont des théorèmes.

**(de cohérence)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}$ , il est impossible d'avoir à la fois  $\vdash \phi$  et  $\vdash \neg \phi$ .

**(de complétude généralisée)** Soit  $A$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , soit  $\phi$  une formule de  $A$ ,  $A \models \phi$  ssi  $A \vdash \phi$ .

**(de compacité)** Soit  $A$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , si pour toute famille finie  $A'$ ,  $A' \subset A$ , il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\forall \phi \in A'$ ,  $\omega(\phi) = 1$  alors il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\forall \phi \in A$ ,  $\omega(\phi) = 1$ .

**(de finitude)** Soit  $A$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}$ , si  $A \models \phi$  alors il existe  $A'$  fini,  $A' \subset A$  tel que  $A' \models \phi$ .

**(de décidabilité)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}$ , il existe un programme qui pour toute formule  $\phi$ , indique en temps fini si oui ou non  $\vdash \phi$

Il est souvent utile, d'un point de vue algorithmique, de transformer les formules propositionnelles en formules équivalentes ayant un caractère "canonique".

**Définition 1.5**

- Un littéral est une proposition ou la négation d'une proposition.
- Une clause est une disjonction de littéraux.

**Définition 1.6**

Une formule  $\phi$  est sous forme normale conjonctive (CNF)<sup>1</sup> si et seulement si  $\phi$  est une conjonction de clauses.

**Définition 1.7**

Une formule  $\phi$  est sous forme normale disjonctive (DNF)<sup>2</sup> si et seulement si  $\phi$  est une disjonction de conjonctions de littéraux.

<sup>1</sup>en anglais, Conjunctive Normal Form.

<sup>2</sup>en anglais, Disjunctive Normal Form.

Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 1.3 (de normalisation)**

- *Toute formule propositionnelle admet une forme normale conjonctive qui lui est équivalente.*
- *Toute formule propositionnelle admet une forme normale disjonctive qui lui est équivalente.*

Le problème de satisfaisabilité d'une formule de la logique propositionnelle mise sous forme normale conjonctive est un problème de décision connu : le problème SAT. Ce problème est NP-complet (théorème de Cook). De nombreuses heuristiques ont été proposées pour résoudre ce problème. Parmi elles, la procédure de Davis et Putnam (DP) [51] consiste à énumérer les interprétations d'une formule  $\phi$  mise sous forme normale conjonctive afin de déterminer si parmi elles, il existe un modèle de  $\phi$ . L'algorithme s'arrête dès qu'un modèle de  $\phi$  a été trouvé. Si aucun modèle n'existe, toutes les interprétations sont testées. De nombreux travaux sur l'amélioration de l'efficacité de la procédure DP ont été proposés.

## 1.3 Logique des prédicats

La logique propositionnelle est un formalisme logique intéressant par sa simplicité mais également par sa décidabilité qui est non négligeable du point de vue des applications informatiques. Cependant elle présente certaines limites au niveau de l'expressivité. En effet, tous les problèmes de la logique ne peuvent être ni exprimés ni traités par cette logique. La logique des prédicats, construite à partir de la logique propositionnelle, est plus expressive et permet de formaliser des connaissances relatives à des environnements plus complexes. Nous présentons dans cette section un bref rappel sur le langage, la syntaxe et la sémantique de la logique des prédicats, appelée également logique du premier ordre.

### 1.3.1 Le langage de la logique des prédicats

Le langage de la logique des prédicats, noté  $\mathcal{L}_{Pr}$  est construit à partir d'un ensemble infini dénombrable de symboles de prédicats<sup>3</sup>, d'un ensemble infini dénombrable de symboles fonctionnels<sup>4</sup>, d'un ensemble infini dénombrable de variables, des connecteurs usuels  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  et des quantificateurs universel  $\forall$  et existentiel  $\exists$ .

Les définitions d'un terme et d'un atome sont nécessaires pour définir les formules de la logique des prédicats :

**Définition 1.8 (terme)**

*L'ensemble des termes  $\mathcal{T}$  est le plus petit ensemble tel que :*

- *une variable  $x$  est un terme ;*

<sup>3</sup>Les symboles de prédicats d'arité 0 sont des propositions.

<sup>4</sup>Les symboles fonctionnels d'arité 0 sont appelés symboles constants.

- un symbole fonctionnel  $f$  est un terme ;
- si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes alors  $f(t_1, \dots, t_n)$  est un terme.

**Définition 1.9 (atome)**

Si  $t_1, \dots, t_n$  sont des termes et  $p$  un prédicat alors  $p(t_1, \dots, t_n)$  est un atome.

**Définition 1.10 (formule)**

L'ensemble des formules  $\Sigma$  est le plus petit ensemble tel que :

- un atome est une formule ;
- si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules alors  $\neg\phi$ ,  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$  et  $\phi \leftrightarrow \psi$  sont des formules.
- si  $\phi$  est une formule et  $x$  une variable alors  $\forall x \phi$ ,  $\exists x \phi$  sont des formules.

Dans les formules du type  $\forall x \phi$  ou  $\exists x \phi$ ,  $\phi$  est appelé la portée du quantificateur.

**Définition 1.11**

Si l'occurrence d'une variable est placée sous la portée d'un quantificateur, cette occurrence est dite liée, sinon elle est dite libre.

Nous rappelons ensuite les définitions de l'ensemble de variables liées et de l'ensemble des variables libres.

**Définition 1.12**

Soit  $\phi$  une formule. L'ensemble des variables liées de  $\phi$  est noté  $Varlie(\phi)$  et est défini par :

- si  $\phi$  est un atome alors  $Varlie(\phi) = \emptyset$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\psi \wedge \varphi$  ou  $\psi \vee \varphi$  ou  $\psi \rightarrow \varphi$  ou  $\psi \leftrightarrow \varphi$  alors  $Varlie(\phi) = Varlie(\psi) \cup Varlie(\varphi)$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\neg\psi$  alors  $Varlie(\phi) = Varlie(\psi)$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\forall x \psi$  ou  $\exists x \psi$  alors  $Varlie(\phi) = Varlie(\psi) \cup \{x\}$

**Définition 1.13**

Soient  $\phi$  une formule et  $Var(\phi)$  l'ensemble des variables de  $\phi$ . L'ensemble des variables libres de  $\phi$  est noté  $Varlib(\phi)$  et est défini par :

- si  $\phi$  est un atome alors  $Varlib(\phi) = Var(\phi)$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\psi \wedge \varphi$  ou  $\psi \vee \varphi$  ou  $\psi \rightarrow \varphi$  ou  $\psi \leftrightarrow \varphi$  alors  $Varlib(\phi) = Varlib(\psi) \cup Varlib(\varphi)$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\neg\psi$  alors  $Varlib(\phi) = Varlib(\psi)$  ;
- si  $\phi$  est de la forme  $\forall x \psi$  ou  $\exists x \psi$  alors  $Varlib(\phi) = Varlib(\psi) - \{x\}$

**Définition 1.14**

Une formule  $\phi$  est dite close ou fermée si  $Varlib(\phi) = \emptyset$ .

### 1.3.2 Aspect axiomatique de la logique des prédicats

Comme pour la logique propositionnelle, l'aspect axiomatique de la logique des prédicats consiste à définir un système formel dans lequel les déductions que l'on peut faire conduisent à des théorèmes. La définition d'un système formel nécessite l'utilisation d'axiome. Pour ce faire, nous utiliserons l'extension à la logique des prédicats du système de Lukasiewicz.

La règle de substitution dans le cadre de la logique des prédicats est défini comme suit :

**Définition 1.15**

*Soient  $\psi(x)$  une formule contenant  $x$  comme variable libre et  $t$  un terme.*

*La formule  $\psi(t)$  est obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de  $x$  par  $t$  dans  $\psi(x)$ .*

Si  $x$  ou  $t$  apparaissent comme des variables liées dans  $\psi(x)$  alors ces occurrences sont renommées.

Le système de Lukasiewicz a été étendu à la logique des prédicats et cette extension est basée sur les 5 axiomes suivants :

Soient  $\phi, \psi, \varphi$  des formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ ,  $x$  une variable,  $t$  un terme,  $\mu$  une formule n'ayant pas  $x$  pour variable libre.

$$A_1 : \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi);$$

$$A_2 : (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \varphi));$$

$$A_3 : (\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi);$$

$$A_4 : (\forall x \psi(x) \rightarrow \psi(t));$$

$$A_5 : ((\mu \rightarrow \psi) \rightarrow (\mu \rightarrow \forall x\psi)).$$

Les règles d'inférence de ce système formel sont la règle de substitution, la règle de déduction ou modus ponens :

$$\frac{\vdash \phi, \vdash \phi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$$

et la règle de généralisation :

$$\frac{\vdash \phi}{\vdash \forall x \phi}$$

A partir de la définition 1.2 de la déduction, nous avons les propriétés suivantes :

**Proposition 1.5**

$$\forall \phi \in \mathcal{L}_{Pr}, \vdash (\phi \rightarrow \phi).$$

**Proposition 1.6**

$$\forall \phi_1, \dots, \phi_{n-1} \in \mathcal{L}_{Pr} \times \dots \times \mathcal{L}_{Pr}, \text{ si } \phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi) \text{ alors } \phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi.$$

**Théorème 1.4 (de déduction)**

*Soient  $\phi_1, \dots, \phi_n$  des formules closes de  $\mathcal{L}_{Pr}$ , si  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}, \phi_n \vdash \psi$  alors  $\phi_1, \dots, \phi_{n-1} \vdash (\phi_n \rightarrow \psi)$ .*

### 1.3.3 Aspect sémantique de la logique des prédicats

La sémantique de la logique des prédicats consiste à interpréter les formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ .

#### Définition 1.16

On appelle interprétation le triplet  $\omega = (D, I_c, I_v)$  où

- $D$  est un ensemble non vide, appelé domaine d'interprétation,
- $I_c$  est la fonction qui associe à tout symbole fonctionnel une valeur du domaine  $D$  et à tout prédicat une valeur dans  $\{0, 1\}$ ,
- $I_v$  est la fonction qui associe à toute variable une valeur de  $D$ .

#### Définition 1.17

L'interprétation d'une formule de la logique des prédicats  $\phi$  associe une valeur de vérité  $\omega(\phi)$  à  $\phi$  comme suit :

- si  $x$  est une variable libre alors  $\omega(x) = I_v(x)$  ;
- $\omega(f(t_1, \dots, t_n)) = (I_c(f))(\omega(t_1), \dots, \omega(t_n))$  ;
- $\omega(p(t_1, \dots, t_m)) = (I_c(p))(\omega(t_1), \dots, \omega(t_m))$  ;
- si  $\phi$  et  $\psi$  sont des formules alors  $\neg\phi$ ,  $\phi \wedge \psi$ ,  $\phi \vee \psi$ ,  $\phi \rightarrow \psi$  et  $\phi \leftrightarrow \psi$  s'interprètent comme dans la logique propositionnelle ;
- si  $\phi$  est une formule et  $x$  une variable alors  $\omega(\forall x \phi) = 1$  si  $I_{x \setminus d}(\phi) = 1$  pour tout élément de  $d \in D$  avec  $I_{x \setminus d}(\phi)$  désigne  $\omega(\phi)$  où chaque occurrence de  $x$  est remplacée par  $d$  ;
- si  $\phi$  est une formule et  $x$  une variable alors  $\omega(\exists x \phi) = 1$  si  $I_{x \setminus d}(\phi) = 1$  pour au moins un élément de  $d \in D$  ;

Nous avons les définitions suivantes :

#### Définition 1.18

Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{L}_{Pr}$  et  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ ,

- Une tautologie (ou formule valide), notée  $\models \phi$ , est une formule  $\phi$ , telle que pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\omega(\phi) = 1$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence de la formule  $\phi$ , notée  $\phi \models \psi$ , si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\omega(\phi) = 1$  alors  $\omega(\psi) = 1$ .
- La formule  $\psi$  est une conséquence de l'ensemble de formules  $\Sigma$ , notée  $\Sigma \models \psi$ , si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\forall \phi \in \Sigma$ ,  $\omega(\phi) = 1$  alors  $\omega(\psi) = 1$ .
- Une formule  $\phi$  est satisfaisable ou cohérente s'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\omega(\phi) = 1$ .  $\omega$  est appelé modèle de  $\phi$  et nous notons  $\omega \models \phi$ .
- Un ensemble de formules  $\Sigma$  est satisfaisable ou cohérent s'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\forall \phi \in \Sigma$ ,  $\omega(\phi) = 1$ .  $\omega$  est appelé modèle de  $\Sigma$  et nous notons  $\omega \models \Sigma$ .
- Une formule  $\phi$  est insatisfaisable ou incohérente si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\omega(\phi) = 0$ .  $\omega$  est appelé contre-modèle de  $\phi$ .
- Un ensemble de formules  $\Sigma$  est insatisfaisable ou incohérent si pour toute interprétation  $\omega$ ,  $\exists \phi \in \Sigma$  tel que  $\omega(\phi) = 0$ .  $\omega$  est appelé contre-modèle de  $\Sigma$ .

De plus, nous avons les propriétés et les résultats suivants :

**Proposition 1.7**

Soient  $\Sigma \in \mathcal{L}_{Pr}$  un ensemble de formules closes et  $\psi$  une formule close.

$\Sigma \models \psi$  si et seulement si  $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$  est insatisfaisable.

**Proposition 1.8**

Soient  $\phi$  et  $\psi$  des formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ .

$$\begin{array}{ll}
(\forall x \phi \wedge \forall x \psi) \equiv \forall x (\phi \wedge \psi) & (\exists x (\phi \vee \psi) \equiv (\exists x \phi \vee \exists x \psi)) \\
(\forall x \phi \vee \forall x \psi) \models \forall x (\phi \vee \psi) & (\exists x (\phi \wedge \psi) \models (\exists x \phi \wedge \exists x \psi)) \\
\forall x (\phi \rightarrow \psi) \models (\forall x \phi \rightarrow \forall x \psi) & \exists x (\phi \rightarrow \psi) \equiv (\forall x \phi \rightarrow \exists x \psi) \\
\forall x (\phi \equiv \psi) \models (\forall x \phi \equiv \forall x \psi) & \forall x \neg\phi \equiv \neg\exists x \phi \\
\forall x \forall y \phi \equiv \forall y \forall x \phi & \\
\exists x \exists y \phi \equiv \exists y \exists x \phi & \\
\exists x \forall y \phi \models \forall y \exists x \phi & 
\end{array}$$

**Théorème 1.5**

**(d'adéquation)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}_{Pr}$ , si  $\vdash \phi$  alors  $\models \phi$ . Autrement dit, les formules qui sont des théorèmes sont des tautologies.

**(de complétude)**  $\forall \phi \in \mathcal{L}_{Pr}$ , si  $\models \phi$  alors  $\vdash \phi$ .

**(de complétude généralisée)** Soient  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$  et  $\phi$  une formule de  $\Sigma$ ,  $\Sigma \models \phi$  ssi  $\Sigma \vdash \phi$ .

**(de compacité)** Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$ , si pour toute famille finie  $\Sigma'$ ,  $\Sigma' \subset \Sigma$ ,  $\Sigma'$  est satisfaisable alors  $\Sigma$  est aussi satisfaisable.

**(de finitude)** Soient  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$  et  $\phi \in \mathcal{L}_{Pr}$ . Si  $\Sigma \models \phi$  alors  $\exists \Sigma' \subset \Sigma$  fini tel que  $\Sigma' \models \phi$ .

**Proposition 1.9**

Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules de  $\mathcal{L}_{Pr}$  et  $\psi$  une tautologie.  $\Sigma \vdash \neg\psi$  si  $\Sigma$  n'a pas de modèle.

La logique des prédicats est semi-décidable car il est possible de lister les théorèmes mais la recherche d'une preuve pour une formule non valide peut ne pas s'arrêter.

Il peut s'avérer utile de transformer les formules des prédicats en formules équivalentes sans quantificateurs.

**Définition 1.19**

Soit  $\phi$  une formule de la logique des prédicats  $\mathcal{L}_{Pr}$ .

$\phi$  est sous forme préfixe si  $\phi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n M$  où  $Q_1, \dots, Q_n$  est un quantifieur ( $\forall$  ou  $\exists$ ),  $x_1, \dots, x_n$  des variables et  $M$  est une formule sans quantifieur.

**Proposition 1.10**

Pour toute formule  $\phi \in \mathcal{L}_{Pr}$ , il existe une forme préfixe équivalente à  $\phi$ .

La suite des quantificateurs  $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$  est appelée préfixe, et  $M$  est appelée matrice. Les notions de littéraux et clauses sont étendues à la logique des prédicats comme suit :

**Définition 1.20**

- On appelle littéral un atome ou la négation d'un atome.
- On appelle clause une disjonction de littéraux.

**Définition 1.21**

Une forme conjonctive normale (CNF) est une forme préfixe dont la matrice  $M$  est une conjonction de clauses.

**Définition 1.22**

Une forme normale disjonctive (DNF) est une forme préfixe dont la matrice  $M$  est une disjonction de conjonctions de littéraux.

A partir de la forme normale préfixe d'une formule, cette formule peut être mise sous forme Skolem :

**Définition 1.23**

Une formule est en forme normale de Skolem si elle est en forme normale préfixe et ne contient pas de quantificateur existentiel.

La mise sous forme Skolem d'une formule  $\phi \in \mathcal{L}_{Pr}$  est effectuée par l'algorithme suivant : il s'agit de transformer une formule  $\phi$  en forme préfixe puis de remplacer chaque occurrence de variable quantifiée existentiellement par un symbole fonctionnel ayant pour arguments les variables quantifiées universellement qui précèdent la variable et de supprimer les quantificateurs existentiels.

Et nous avons la proposition suivante :

**Proposition 1.11**

Soit  $S_\phi$  la forme Skolem de la formule  $\phi$ .

$\phi$  est satisfaisable si et seulement si  $S_\phi$  est satisfaisable.

A partir de la forme Skolem d'une formule  $\phi$ ,  $\phi$  peut être mise sous forme normale clausale.

Le théorème de Herbrand permet de ramener le problème de satisfaisabilité d'une formule de la logique des prédicats au problème de la satisfaisabilité d'un ensemble de clauses propositionnelles. Pour cela, on associe à la forme conjonctive normale d'une formule  $\phi \in \mathcal{L}_{Pr}$ , l'ensemble des clauses correspondantes, noté  $C$  et on construit l'univers de Herbrand associé à cet ensemble de clauses  $C$ , c'est-à-dire l'ensemble de tous les termes sans variable construit à partir des symboles fonctionnels et des constantes de  $C$ .

L'ensemble des clauses obtenues à partir de  $C$  en remplaçant les variables par des éléments de l'univers de Herbrand est appelé système de Herbrand  $SH_C$  associé à  $C$  et nous avons le résultat suivant :

**Théorème 1.6**

Soient  $C$  un ensemble fini de clauses et  $SH_C$  le système de Herbrand associé à  $C$ .

$C$  est satisfaisable si et seulement si  $SH_C$  est satisfaisable.

## 1.4 Programmation logique avec sémantique de modèles stables

La programmation logique est langage déclaratif proposé pour la représentation des connaissances ainsi que le raisonnement. La description des connaissances dans un programme logique se fait par le biais de faits et de règles et l'application d'un moteur d'inférence permet de déduire de nouvelles connaissances. Diverses approches ont été proposées. Le premier langage de programmation logique, appelé PROLOG (**PRO**grammation **LOG**ique), a été proposé par Alain Colmerauer et al. [48] afin de représenter des connaissances en logique et non pas de décrire la suite d'instructions que les machines doivent exécutées. Initialement, le langage PROLOG se base sur la logique du premier ordre restreinte aux clauses de Horn. Ce langage est ensuite enrichi avec par exemple la négation et les arbres infinis. Une autre approche a été proposée par Gelfond et Lifschitz [79] qui consiste à étendre la notion de programme logique par la négation par échec. La négation par échec signifie que si un atome ne peut être montré comme étant vrai en un temps fini alors il est considéré comme faux.

### 1.4.1 Programme logique normal

Un programme logique normal est un ensemble de règles de la forme :

$$c \leftarrow a_1, \dots, a_n, \text{not } b_1, \dots, \text{not } b_m.$$

où  $c, a_i (1 \leq i \leq n), b_j (1 \leq j \leq m)$  sont des atomes de la logique propositionnelle et le symbole *not* représente la négation par échec.

Soit  $r$  une règle tel que  $r : c \leftarrow a_1, \dots, a_n, \text{not } b_1, \dots, \text{not } b_m$ .  $c$  est appelé tête de règle et est noté  $tete(r)$ .  $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$  constitue le corps de la règle et est noté  $corps(r)$ . De plus,  $corps^+(r) = \{a_1, \dots, a_n\}$  représente l'ensemble des atomes positifs du corps de la règle et  $corps^-(r) = \{b_1, \dots, b_m\}$  l'ensemble de ses atomes négatifs. Nous avons alors  $corps(r) = corps^+(r) \cup corps^-(r)$ . Enfin,  $r^+$  représente la règle  $tete(r) \leftarrow corps^+(r)$  obtenue en supprimant tous les atomes négatifs du corps de  $r$ .

### 1.4.2 Programme basique

Un programme basique est un programme logique ne comportant pas de négation par échec.

#### Définition 1.24

*Un ensemble d'atomes  $X$  est clos sous un programme basique  $\Pi$  si et seulement si pour n'importe quelle règle  $r \in \Pi$ ,  $tete(r) \in X$  lorsque  $corps(r) \subseteq X$ .*

Le plus petit ensemble d'atomes qui est clos sous un programme basique  $\Pi$  est noté  $CN(\Pi)$ .

### 1.4.3 Programme avec sémantique de modèles stables

La notion de programmation avec sémantique de modèles stables a été définie par V. Lifschitz dans [133, 79]. Contrairement à PROLOG qui n'admet qu'un seul ensemble de conséquences, appelé modèle minimal, la programmation avec sémantique de modèles stables<sup>5</sup> permet d'obtenir plusieurs ensembles de conséquences, appelés modèles stables. Ces ensembles de conséquences sont parfois contradictoires ce qui permet les raisonnements non-monotones.

#### Définition 1.25

La réduction ou la transformation de Gelfond-Lifschitz [79],  $\Pi^X$  d'un programme  $\Pi$  relativement à un ensemble  $X$  d'atomes est définie par

$$\Pi^X = \{r^+ \mid r \in \Pi \text{ et } \text{corps}^-(r) \cap X = \emptyset\}.$$

#### Exemple 1.1

Soit  $\Pi$  le programme logique suivant :

$$\Pi = \left\{ \begin{array}{ll} a \leftarrow \text{not } b & b \leftarrow \text{not } c, d \\ & c. \quad d \leftarrow c, \text{not } a \end{array} \right\}$$

Soit  $X$  un ensemble d'atomes,  $X = \{a, c\}$  alors :

$$\Pi^X = \left\{ \begin{array}{l} a. \\ c. \end{array} \right\}$$

Soit  $X'$  un ensemble d'atomes,  $X' = \{c, d\}$  alors :

$$\Pi^{X'} = \left\{ \begin{array}{l} a. \\ c. \\ d \leftarrow c \end{array} \right\}$$

Un modèle stable est alors défini comme suit :

#### Définition 1.26

Soit  $X$  un ensemble d'atomes et  $\Pi$  un programme logique.

Un ensemble d'atomes  $X$  est un modèle stable de  $\Pi$  si et seulement si  $CN(\Pi^X) = X$ .

#### Exemple 1.2

Si nous considérons l'exemple précédent, nous avons :

- $CN(\Pi^X) = \{a, c\} = X$  et  $X$  est un modèle stable,
- $CN(\Pi^{X'}) = \{a, c, d\} \neq X'$  et  $X'$  n'est pas un modèle stable.

<sup>5</sup>en anglais, Answer Set Programming (ASP)

#### 1.4.4 Les solveurs ASP

Des solveurs ASP sont ensuite utilisés pour calculer les modèles stables. Il existe différents solveurs ASP. Smodels est le premier solveur ASP proposé dans [188]. Il repose sur une méthode de calcul des modèles stables simples. L’algorithme utilisé est de type Branch and Bound et de ce fait, il construit progressivement au cours des appels un ensemble d’atomes  $X$  qui représente un modèle stable potentiel. noMoRe, présenté dans [6], est un solveur ASP implantant un paradigme basé sur la coloration de graphes non-standards. Un système, nommé ASSAT, permettant de calculer les modèles stables d’un programme logique à partir de solveurs SAT est présenté dans [135]. CMODELS [81] utilise également les solveurs SAT pour calculer les modèles stables des programmes logiques. Il est en effet utilisé pour l’énumération de tous les modèles du programme logique.

Clasp est un solveur ASP pour les programmes logiques normaux. Il a été proposé par Gebser et al. [77] et repose sur les capacités de modélisation de la programmation logique avec sémantique de modèles stables (ASP) ainsi que sur la résolution de contraintes booléennes. L’approche de clasp [78] est centrée sur une notion issue des problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) : les nogoods. Un *nogood* est un ensemble de littéraux, noté  $\{a_1, \dots, a_n\}$  qui exprime la violation d’une contrainte par une affectation booléenne des variables  $a_1, \dots, a_n$ . La procédure de résolution de ce solveur s’appuie ensuite sur des techniques provenant de CSP et SAT telles que l’apprentissage guidé par conflit (conflict-driven learning), le retour arrière “intelligent” (backjumping), etc. L’exploitation de ces différentes techniques fait de clasp un solveur efficace permettant d’énumérer les modèles stables d’un programme logique.

Les programmes logiques ne sont pas directement utilisables par les solveurs, LParse [197] est un programme permettant de traduire les programmes logiques dans un format approprié.

Deuxième partie

Etat de l'art



## Chapitre 2

# Restauration de la cohérence

Le raisonnement en présence d'incohérence est un problème important en intelligence artificielle qui a fait l'objet de nombreuses études. L'incohérence d'une base de croyances peut provenir de différentes causes : l'ajout d'une nouvelle information, la fusion de sources d'information multiples, etc. Dans le contexte du projet VENUS, l'intervention humaine nécessaire lors du processus d'acquisition des mesures peut entraîner l'introduction d'incohérence. Comme décrit au chapitre 10, cette incohérence est due à la confrontation d'observations sur les artefacts avec la connaissance générique.

Il existe deux grandes familles d'approches pour raisonner en présence d'incohérences dans une base de croyances : certaines approches consistent à conserver l'incohérence et à raisonner en présence de l'incohérence comme par exemple les logiques paraconsistantes [109] ou les travaux en argumentation [26]. D'autres cherchent à restaurer la cohérence comme les travaux réalisés dans le cadre de la logique propositionnelle ou dans le cadre d'autres logiques comme par exemple, la logique possibiliste [61, 62]. Dans le contexte de nos travaux, nous nous limitons à la présentation des principales approches de restauration de la cohérence essentiellement dans le cas de la logique propositionnelle. Nous pouvons distinguer trois catégories d'approches. Le premier type d'approches consiste à utiliser un critère de préférence pour sélectionner certaines sous-bases parmi les sous-bases cohérentes. Ces approches cherchent à maximiser la cohérence selon un critère. A l'inverse, d'autres approches adoptent le point de vue de minimisation de l'incohérence et consistent à utiliser les sous-ensembles minimaux incohérents pour restaurer la cohérence. La dernière famille d'approches consiste à oublier certaines variables des formules responsables de l'incohérence afin de restaurer la cohérence.

Nous commençons par donner quelques notions préliminaires sur les ordres, les préordres et les bases de croyances avant de détailler les différents types d'approches de restauration de la cohérence.

## 2.1 Préliminaires

Dans cette section, nous définissons les ordres et les préordres puis les bases de croyances.

### 2.1.1 Ordres et préordres

Soit  $E$  un ensemble. Une relation binaire sur l'ensemble  $E$  est une partie  $\mathcal{R}$  de  $E \times E$ .  $\forall x, y \in E$ ,  $(x, y) \in \mathcal{R}$  signifie que  $x$  est en relation avec  $y$  et est noté  $x\mathcal{R}y$ . Les relations binaires peuvent ou non vérifier un certain nombre de propriétés. On dit qu'une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $E$  est

- *réflexive* si et seulement si  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ ;
- *symétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E \times E$ , si  $x\mathcal{R}y$  alors  $y\mathcal{R}x$ ;
- *transitive* si et seulement si  $\forall x, y, z \in E \times E \times E$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$  alors  $x\mathcal{R}z$ ;
- *antisymétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E \times E$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$  alors  $x = y$ .

De plus,  $\mathcal{R}$  est dite *totale* si et seulement si  $\forall x, y \in E$ ,  $x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$ . Si la relation n'est pas totale, elle est alors *partielle*. Un *ordre* est une relation réflexive, transitive et antisymétrique. Un *préordre* est une relation réflexive et transitive.

**Préordre total :** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules.

- Un *préordre total*  $\leq$  sur  $\Sigma$  est une relation binaire réflexive et transitive tel que  $\forall \mu, \varphi \in \Sigma$ ,  $\mu \leq \varphi$  ou  $\varphi \leq \mu$ .  $\mu \leq \varphi$  (resp.  $\varphi \leq \mu$ ) signifie que  $\mu$  (resp.  $\varphi$ ) est au moins aussi préférée que  $\varphi$  (resp.  $\mu$ ).
- $\mu = \varphi$  signifie qu'il n'y a pas de préférence entre la formule  $\mu$  et la formule  $\varphi$  :  $\mu = \varphi$  si et seulement si  $\mu \leq \varphi$  et  $\varphi \leq \mu$ .
- Un *préordre total strict*  $<$  sur  $\Sigma$  est une relation binaire irreflexive et transitive. Formellement,  $\mu < \varphi$  si et seulement si  $\mu \leq \varphi$  et  $\varphi \not\leq \mu$ . Donc l'expression  $\mu < \varphi$  signifie que  $\mu$  est strictement préférée à  $\varphi$ .

**Préordre partiel :** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules.

- Un *préordre partiel*  $\preceq$  sur  $\Sigma$  est une relation binaire réflexive et transitive.  $\forall \mu, \varphi \in \Sigma$ ,  $\mu \preceq \varphi$  signifie que  $\mu$  est au moins aussi préférée que  $\varphi$ .
- $\mu = \varphi$  signifie qu'il n'y a pas de préférence entre la formule  $\mu$  et la formule  $\varphi$  :  $\mu = \varphi$  si et seulement si  $\mu \preceq \varphi$  et  $\varphi \preceq \mu$ .
- Un *préordre partiel strict*  $\prec$  sur  $\Sigma$  est une relation binaire irreflexive et transitive. Formellement,  $\mu \prec \varphi$  si et seulement si  $\mu \preceq \varphi$  et  $\varphi \not\preceq \mu$ . Donc l'expression  $\mu \prec \varphi$  signifie que  $\mu$  est strictement préférée à  $\varphi$ .
- L'*incomparabilité* est définie de la manière suivante :  $\mu \sim \varphi$  si et seulement si on a ni  $\mu \preceq \varphi$  ni  $\varphi \preceq \mu$ . L'expression  $\mu \sim \varphi$  signifie que  $\mu$  n'est pas préférée à  $\varphi$  et inversement.

Nous présentons ensuite un bref rappel sur les bases de croyances.

### 2.1.2 Bases de croyances

Une *base de croyances* est ensemble fini de formules<sup>1</sup>.

- Une *base de croyances non ordonnées* ou *base de croyances non stratifiée* est notée  $\Sigma$  et est telle qu'il n'existe pas de relation de préférence entre ces formules.
- Une *base de croyances totalement préordonnées* ou *base de croyances stratifiée*, notée  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$ , est une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telle que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) ont le même niveau de priorité ( $\forall \phi, \psi \in \Sigma_i, \phi =_\Sigma \psi$ ) et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$  ( $\forall \phi \in \Sigma_i, \psi \in \Sigma_j, \phi <_\Sigma \psi$ ).
- Une *base de croyances partiellement préordonnées*, notée  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , est un ensemble de formules propositionnelles muni d'un préordre partiel entre ces formules.

Dans la section suivante, nous nous intéressons aux approches de restauration de cohérence basées sur les sous-bases cohérentes préférées selon un critère.

## 2.2 Sous-bases cohérentes préférées

Cette famille d'approches consiste à déterminer les sous-bases cohérentes préférées d'une base de croyances [173]. Une relation de préférence est appliquée afin de sélectionner certaines sous-bases cohérentes parmi les sous-bases cohérentes possibles. Ce processus est appelé mécanisme de sélection dans [122].

Dans certaines de ces relations de préférence, il est possible de considérer les sous-bases cohérentes maximales pour l'inclusion au lieu de considérer toutes les sous-bases cohérentes. Soit  $CONS(\Sigma)$  l'ensemble des sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ .

### Définition 2.1

Soit  $\Sigma$  une base de croyances incohérente,  $B \subseteq \Sigma$  tel que  $B$  est cohérent.

Une sous-base  $B$  de  $\Sigma$  est une sous-base cohérente maximale pour l'inclusion de  $\Sigma$ , appelée sous-base maximale cohérente de  $\Sigma$  si et seulement si :

- $B$  est une sous-base cohérente,
- $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B \subset B'$ .

L'ensemble des sous-bases maximales cohérentes est noté  $MCONS(\Sigma)$ .

Nous présentons certains mécanismes de sélection proposés dans le cas de bases de croyances non ordonnées, totalement préordonnées et partiellement préordonnées.

<sup>1</sup>Nous considérons des formules propositionnelles. Une base de croyances  $\Sigma$  est cohérente si elle ne contient pas de contradictions c'est-à-dire  $\Sigma \not\vdash \perp$  et incohérente si elle contient des contradictions c'est-à-dire  $\Sigma \vdash \perp$ .

### 2.2.1 Base de croyances non ordonnées

Parmi ces travaux, S. Benferhat et al. considèrent une base de croyances non stratifiée et présentent une approche qui consiste à extraire de la base de croyances des arguments cohérents supportant ou réfutant une proposition dans [21].

Un *argument* pour une formule  $\phi$  est un sous-ensemble cohérent minimal selon l'inclusion qui implique  $\phi$ . Une sous-base  $B$  de  $\Sigma$  est un argument pour une formule  $\phi$  si elle satisfait les conditions suivantes :

- (i)  $B$  est cohérente ;
- (ii)  $B \vdash \phi$  ;
- (iii)  $\forall \psi \in B, B - \{\psi\} \not\vdash \phi$

Le nombre de sous-bases maximales cohérentes de  $\Sigma$  augmentant exponentiellement avec le nombre de conflits<sup>2</sup> dans la base, les auteurs proposent dans [21], de sélectionner les sous-bases maximales cohérentes qui conservent le plus possible de formules de  $\Sigma$ . Cet ensemble est noté  $MCONS_L(\Sigma)$ . Formellement,

$$B \in MCONS_L(\Sigma) \text{ si et seulement si } B \in MCONS(\Sigma) \text{ et } \forall B' \in MCONS(\Sigma), \\ |B| \geq |B'|$$

où  $|B|$  dénote la cardinalité de l'ensemble  $B$ .

### 2.2.2 Base de croyances totalement préordonnées

Dans le cas de bases de croyances totalement préordonnées, différents mécanismes de sélection ont été proposés pour déterminer les sous-bases cohérentes préférées. Ces mécanismes définissent une relation de préférence entre les sous-bases cohérentes.

Nous rappellerons ici les trois mécanismes les plus couramment utilisés : la préférence Best-Out issue de la logique possibiliste [61], la préférence basée sur l'inclusion [41, 42, 45, 46, 61] et la préférence lexicographique [17, 127].

#### 2.2.2.1 Préférence Best-Out

La préférence Best-Out, décrite dans [61] et [17], est définie comme suit :

##### Définition 2.2

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Soient  $B$  et  $B'$  deux sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ . Soit  $a(X)$  la plus haute priorité d'une formule de  $\Sigma$  qui n'est pas dans  $X$ .

- $B <_{bo} B'$  si et seulement si  $a(B') < a(B)$  avec  $a(B) = \min\{i | \exists \phi \in \Sigma_i \setminus B\}$ <sup>3</sup> ;
- $B =_{bo} B'$  si et seulement si  $\forall j, 1 \leq j \leq n, a(B) = a(B')$  ;

<sup>2</sup>sous-ensembles minimaux incohérents c'est-à-dire  $M$  est un sous-ensemble minimal incohérent si et seulement si  $M$  est incohérent et tout sous-ensemble de  $M$  est cohérent

<sup>3</sup>Par convention  $\min \emptyset = n + 1$ .

L'ensemble des sous-bases cohérentes préférées selon la préférence Best-Out est noté  $CONS_{bo}(\Sigma)$ . Cette préférence induit un préordre total sur les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ . Contrairement à la préférence basée sur l'inclusion et à la préférence lexicographique présentée en section 2.2.2.3, les sous-bases de croyances préférées selon la préférence Best-Out ne sont pas maximales selon l'inclusion. En effet, soit  $k$  l'indice maximal de la strate tel que  $B = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$  est cohérente,  $B$  est une sous-base cohérente préférée selon la préférence Best-Out mais toute sous-base cohérente  $B'$  tel  $B \subseteq B'$  est également une sous-base cohérente préférée selon la préférence Best-Out. Cette préférence est donc peu déterminante. En particulier dans le cas où la base de croyances  $\Sigma$  ne contient qu'une seule strate, cette préférence ne permet pas de faire une sélection puisque toutes les sous-bases cohérentes sont aussi les sous-bases cohérentes préférées.

### 2.2.2.2 Préférence basée sur l'inclusion

Il existe différentes approches de type "Inclusion Based Preference" qui considèrent les sous-bases maximales cohérentes de  $\Sigma$  et qui définissent une relation de préférence entre ces sous-bases.

Brewka, [41, 42], définit les *sous-bases maximales cohérentes*, appelées également *sous-théories préférées*, comme suit :

#### Définition 2.3

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Un ensemble  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  est une sous-base maximale cohérente de  $\Sigma$  si et seulement si  $\forall k, 1 \leq k \leq n, S_1 \cup \dots \cup S_k$  est un sous-ensemble maximal cohérent de  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$ .

D'après cette définition, les sous-bases maximales cohérentes sont également appelées *thèses* dans [122].

Cayrol, Royer et Sorel généralisent les travaux de Brewka en définissant une relation de préférence  $<_{incl}$  entre les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$  telle que les éléments maximaux pour  $<_{incl}$  soient les sous-théories préférées de Brewka, [45, 46]. La préférence basée sur l'inclusion, appelée initialement préférence basée sur la stratification et également nommé *a posteriori* discrimin [60], est définie comme suit :

#### Définition 2.4

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Soient  $B$  et  $B'$  deux sous-bases maximales cohérentes de  $\Sigma$ .

- $B <_{incl} B'$  si et seulement si  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $(\Sigma_i \cap B') \subset (\Sigma_i \cap B)$  et  $\forall j, 1 \leq j < i, (\Sigma_j \cap B) = (\Sigma_j \cap B')$ ;
- $B =_{incl} B'$  si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq n, (\Sigma_i \cap B) = (\Sigma_i \cap B')$ ;

L'ensemble des sous-bases maximales cohérentes préférées selon l'inclusion est noté  $MCONS_{incl}(\Sigma)$ . Nous avons  $MCONS_{incl}(\Sigma) = MCONS(\Sigma)$ . Les éléments maximaux sont appelés *thèses démo-préférées*. Dans [61], Dubois, Lang et Prade proposent d'associer à  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances possibiliste et définissent la notion de *sous-bases*

*fortement maximales cohérentes*. Il est démontré dans [18] que les thèses démo-préférées de  $\Sigma$  associées à la base possibiliste correspondent aux sous-bases fortement maximales cohérentes. Par ailleurs, la préférence basée sur l'inclusion induit un ordre partiel strict sur les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ .

### 2.2.2.3 Préférence lexicographique

La préférence lexicographique, appelée aussi leximin [151, 177], a été définie de manière équivalente dans [17] et [127] :

#### Définition 2.5

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Soient  $B$  et  $B'$  deux sous-bases maximales cohérentes de  $\Sigma$ .

- $B <_{lex} B'$  si et seulement si  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|\Sigma_i \cap B| < |\Sigma_i \cap B'|$ <sup>4</sup> et  $\forall j, 1 \leq j < i, |\Sigma_j \cap B| = |\Sigma_j \cap B'|$  ;
- $B =_{lex} B'$  si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq n, |\Sigma_i \cap B| = |\Sigma_i \cap B'|$  ;

L'ensemble des sous-bases maximales cohérentes préférées selon la préférence lexicographique est noté  $MCONS_{lex}(\Sigma)$ . Il est démontré dans [17] que la préférence lexicographique raffine la préférence basée sur l'inclusion : toute sous-base préférée selon la préférence lexicographique est aussi préférée selon l'inclusion, l'inverse est faux. Par ailleurs, contrairement à la préférence basée sur l'inclusion qui définit un ordre partiel strict, la préférence lexicographique induit un ordre total strict sur les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ .

### 2.2.3 Base de croyances partiellement préordonnées

Dans le cas de base de croyances partiellement préordonnées, le principe est analogue : certaines sous-bases cohérentes sont sélectionnées par un mécanisme appelé comparateur. Nous présentons trois comparateurs : le comparateur démocratique, le comparateur fort et le comparateur faible.

#### 2.2.3.1 Comparateur démocratique

La préférence démocratique, appelée également comparateur démocratique, généralise les travaux de Brewka. Ce comparateur est défini dans [46] comme suit :

#### Définition 2.6

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées. Soient  $B$  et  $B'$  deux sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ .

$B$  est démocratiquement préférée à  $B'$ , noté  $B \triangleleft_d B'$  si et seulement si  $\forall x \in B' \setminus B, \exists y \in B \setminus B'$  tel que  $x \prec_\Sigma y$ .

<sup>4</sup> $|X|$  représente le nombre de formules de  $X$ .

L'ensemble des sous-bases cohérentes démocratiquement préférées est noté  $CONS_d(\Sigma)$ . L'application de ce comparateur induit un préordre partiel entre les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$ . Les sous-bases cohérentes préférées selon le comparateur démocratique sont des sous-bases cohérentes maximales pour l'inclusion.

### 2.2.3.2 Comparateur fort et comparateur faible

Dans [19], les auteurs proposent une autre manière de définir un préordre entre les sous-ensembles de formules. Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de formules. Ce comparateur consiste à préférer  $X$  à  $Y$  si et seulement si il existe une formule de  $X$  qui est préférée à toutes les formules de  $Y$ . Plus formellement,

#### Définition 2.7

Soient  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

- $X$  est “fortement” préféré à  $Y$ , noté  $X \preceq_s^i Y$  si et seulement si  $\exists x \in X$  tel que  $\forall y \in Y, x \preceq_\Sigma y$  ;
- $X$  est strictement “fortement” préféré à  $Y$ , noté  $X \prec_s^i Y$  si et seulement si  $\exists x \in X$  tel que  $\forall y \in Y, x \prec_\Sigma y$  ;
- $X$  est “fortement” égale à  $Y$ , noté  $X =_s^i Y$  si et seulement si  $X \preceq_s^i Y$  et  $Y \preceq_s^i X$ .

Une des limitations du comparateur fort est qu'il produit de nombreuses incomparabilités contrairement au comparateur faible que nous rappelons ensuite. Le comparateur faible, défini dans [124], a été introduit dans [131] et repris dans [99]. Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de formules. Ce comparateur consiste à préférer  $X$  à  $Y$  si et seulement si pour toutes les formules  $y$  de  $Y$ , il existe une formule  $x$  de  $X$  qui lui est préférée. Plus formellement,

#### Définition 2.8

Soient  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

- $X$  est “faiblement” préféré à  $Y$ , noté  $X \preceq_w^i Y$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$  ;
- $X$  est strictement “faiblement” préféré à  $Y$ , noté  $X \prec_w^i Y$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \prec_\Sigma y$  [99] ;
- $X$  est “faiblement” égale à  $Y$ , noté  $X =_w^i Y$  si et seulement si  $X \preceq_w^i Y$  et  $Y \preceq_w^i X$ .

La restauration de la cohérence consiste à déterminer les sous-bases cohérentes préférées. Dans [124], Lagrue propose d'utiliser les définitions 2.7 et 2.8 pour construire un préordre partiel sur les sous-bases cohérentes. Ce préordre partiel, noté  $\preceq_C$ , est défini comme suit :

#### Définition 2.9

Soient  $B, B' \in CONS(\Sigma)$ . Soit  $C$  un comparateur.

- $B \preceq_C B'$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B') \preceq_C^i (\Sigma \setminus B)$ .
- $B \prec_C B'$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B') \prec_C^i (\Sigma \setminus B)$ .

L'ensemble des sous-bases cohérentes préférées de  $\Sigma$  pour le comparateur  $C$  est noté  $CONS_C(\Sigma)$ . Formellement,

$$CONS_C(\Sigma) = \min(CONS(\Sigma), \preceq_C).$$

Sylvain Lagrue propose dans [124] une méthode constructive pour calculer  $CONS_C(\Sigma)$  basée sur ses propriétés ainsi que son implantation.

De plus, les préférences induites par le comparateur fort et le comparateur faible sont des extensions de la préférence Best-Out définie pour des bases de croyances totalement préordonnées et rappelée en section 2.2.2.1 de ce chapitre.

Par ailleurs, il n'existe pas de comparateur lexicographique pour les bases de croyances partiellement préordonnées. Pourtant, dans un contexte tel que le projet VENUS, les informations étant précieuses et partiellement préordonnées, considérer le comparateur lexicographique tenant compte de la préférence sur les formules et de la cardinalité pour restaurer la cohérence est nécessaire.

Nous présentons ensuite des approches qui reposent sur la minimisation de l'incohérence pour restaurer la cohérence.

## 2.3 Minimisation de l'incohérence

Une deuxième famille d'approches consiste à adopter un point de vue dual et utilise les sous-ensembles minimaux incohérents de la base de croyances initiale, appelés également conflits ou nogoods. Reiter [172] propose de déterminer les diagnostics d'un système défectueux à partir de l'ensemble des ensembles intersectants<sup>5</sup> ou hitting sets des sous-ensembles minimaux incohérents. Le calcul des sous-ensembles minimaux incohérents peut être également considéré du point de vue du problème SAT<sup>6</sup>. Dans ce contexte, il s'agit de déterminer les sous-formules minimales inconsistantes<sup>7</sup> (MUS) d'une instance SAT. Nous présentons rapidement des travaux réalisés dans cette perspective. Enfin, nous abordons le traitement local de l'incohérence dans les bases de croyances.

### 2.3.1 Restauration de la cohérence et diagnostic

Reiter propose une approche pour la restauration de la cohérence dans le cadre de diagnostic d'un système défectueux [172]. Un système est représenté par un triplet  $(SD, OBS, COMP)$  où  $SD$  est la description du système,  $OBS$  un ensemble d'observations du système en fonctionnement et  $COMP$  l'ensemble des composants du système. Reiter utilise la logique du premier ordre pour formaliser un système ainsi que son fonctionnement. Diagnostiquer une panne consiste à déterminer les sous-ensembles minimaux de composants qui sont responsables d'un fonctionnement incohérent avec le com-

<sup>5</sup>Les ensembles intersectants sont appelés hitting sets en anglais. Le problème des ensembles intersectants est l'un des 21 problèmes NP-complets de Karp.

<sup>6</sup>SAT est un problème NP-complet qui consiste à vérifier si il existe une interprétation qui satisfait une formule.

<sup>7</sup>c'est-à-dire incohérentes.

portement attendu du système. Pour cela, Reiter formalise le problème de défaillance d'un système comme suit : un système  $(SD, OBS, COMP)$  est défaillant c'est-à-dire qu'une observation  $OBS$  est en conflit avec le fonctionnement attendu du système si

$$SD \cup \{\forall c \in COMP, \neg AB(c)\} \cup OBS \text{ est incohérent}$$

où  $AB(c)$  est un prédicat décrivant le fonctionnement anormal du composant  $c$ . Il s'agit ensuite de déterminer un diagnostic sur le mauvais fonctionnement du système. Un diagnostic est une hypothèse sur les composants du système provoquant le mauvais fonctionnement. Le nombre de composants incriminés doit être minimal. La notion de diagnostic est définie formellement comme suit :

**Définition 2.10**

*Un diagnostic pour le système  $(SD, OBS, COMP)$  est un ensemble minimal de composants,  $C \subseteq COMP$ , tel que :*

$$SD \cup OBS \cup \{AB(c) | c \in C\} \cup \{\neg AB(c) | c \in COMP - C\} \text{ est cohérent.}$$

Pour déterminer tous les diagnostics minimaux du système défaillant, Reiter propose une méthode basée sur la notion d'ensemble de conflits, initialement introduite par de Kleer [52]. En effet, les diagnostics minimaux sont calculés à partir des hitting sets, également appelés ensembles intersectants des ensembles de conflits du système.

**Définition 2.11**

*Un ensemble de conflits pour le système  $(SD, OBS, COMP)$  est un ensemble de composants  $\{c_1, \dots, c_k\} \subseteq COMP$  tel que :*

$$SD \cup OBS \cup \{\neg AB(c_1), \dots, \neg AB(c_k)\} \text{ est incohérent.}$$

Soit  $\mathcal{C}$  une collection des ensembles de conflits pour le système  $(SD, OBS, COMP)$ . Un hitting set est un sous-ensemble de formules qui contient au moins une formule de chacun des ensembles de la collection  $\mathcal{C}$  et qui permet de restaurer la cohérence. Un ensemble intersectant est défini formellement comme suit :

**Définition 2.12**

*Soit  $\mathcal{C}$  une collection d'ensembles.*

- *Un hitting set  $C$  de  $\mathcal{C}$  est un ensemble  $C \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{C}} S$  tel que  $\forall S \in \mathcal{C}, C \cap S \neq \emptyset$ .*
- *Un hitting set minimal  $C$  de  $\mathcal{C}$  est un hitting set tel que  $\forall C' \subset C$  avec  $C' \neq \emptyset$ ,  $C'$  n'est pas un hitting set de  $\mathcal{C}$ .*

Les diagnostics sont alors caractérisés comme suit :

**Théorème 2.1**

*Un ensemble de composants,  $C \subseteq COMP$ , est un diagnostic pour le système  $(SD, OBS, COMP)$  si et seulement si  $C$  est un hitting set minimal pour la collection  $\mathcal{C}$  des ensembles de conflits pour le système  $(SD, OBS, COMP)$ .*

Dans [172], Reiter propose un algorithme basé sur la construction en largeur d'un arbre n-aire pour calculer l'ensemble des hitting sets minimaux. Cet algorithme a été modifié par [88]. Dans [206], les auteurs montrent que la révision de croyances par R-ensemble, définie en section 4.3.2.2 du chapitre 4 peut s'exprimer en termes de hitting sets.

### 2.3.2 Restauration de la cohérence et sous-formules minimales inconsistantes (MUS)

La détermination des sous-ensembles minimaux incohérents d'une base de croyances peut être assimilée à la notion de sous-formule minimale inconsistante d'une instance SAT. Une instance SAT est une formule mise sous forme CNF et est considérée comme un ensemble de clauses. Une sous-formule minimale inconsistante (Minimally Unsatisfiable Subformula, MUS) est une sous-formule qui contient le plus petit nombre de clauses responsables de l'incohérence d'une instance SAT. Formellement,

#### Définition 2.13

Soit  $S$  un ensemble de clauses (instance SAT).

Une sous-formule minimale inconsistante  $A$  de  $S$  est un sous-ensemble de clauses tel que :

1.  $A \subseteq \Sigma$  ;
2.  $A$  est insatisfaisable ;
3.  $\forall B \subset A$ ,  $B$  est satisfaisable

La restauration de la satisfaisabilité d'une instance SAT consiste à retirer au moins une clause appartenant à chacun de ses sous-formules minimales inconsistantes.

De nombreux travaux ont été proposés pour calculer les sous-formules minimales inconsistantes. Nous pouvons distinguer deux familles de méthodes : la première consiste à extraire un MUS alors que la seconde s'intéresse au calcul de tous les MUS.

Parmi les méthodes d'extraction d'un MUS, Bruni [43] propose une méthode dite *adaptive* d'approximation de MUS basée sur la difficulté<sup>8</sup> des clauses et montre dans [44], que pour certaines classes de formules, le problème peut être résolu efficacement en utilisant la programmation linéaire. Par ailleurs, d'autres approches ont été proposées. L'approche AMUSE (A Minimally-Unsatisfiable Subformula Extractor) [160], permet de calculer un sur-ensemble d'un MUS. La méthode zCore [210] consiste à déterminer les sous-ensembles de clauses responsables de l'incohérence permettant ainsi l'élimination de certaines clauses d'un sous-ensemble insatisfaisable de la formule de départ. Une méthode pour calculer la plus petite sous-formule minimale inconsistante est proposée dans [139]. Une méthode incomplète à partir d'une heuristique basée sur la recherche locale pour l'approximation de sous-formules insatisfaisables [140] a été proposée dans [85].

Ces méthodes sont dites destructives car elles consistent à retirer certaines clauses de la formule initiale jusqu'à l'obtention d'une approximation d'un MUS. Une méthode constructive, appelée *constructMUS*, pour approximer un MUS qui consiste à ajouter des clauses une à une jusqu'à ce que l'ensemble soit insatisfaisable a été proposée [168].

Une méthode permettant de calculer tous les MUSes d'une formule sous forme normale conjonctive a été développée dans [132]. Cette méthode adopte un point de vue

<sup>8</sup>La difficulté est mesurée par une pondération attribuée à une clause par rapport à l'importance présumée de la contrainte qu'elle représente dans la formule.

dual en calculant les ensembles de clauses qui ne sont pas inclus dans les sous-formules maximales satisfaisables. Grégoire et al. proposent également une approche HYCAM (HYbridization for Computing All MUS) [86, 87] permettant de calculer tous les MUSes qui améliore celle proposée dans [132]. L'algorithme proposé dans [132] construit l'ensemble des MUS à partir de l'ensemble dual des sous-formules maximales satisfaisables (MSS). La première étape consiste à calculer les ensembles complémentaires, notés CoMSS, de chacun des MSS d'une instance SAT, c'est-à-dire les sous-ensembles minimaux de clauses qui peuvent être retirés pour restaurer la satisfaisabilité de l'instance. En fait, un CoMSS est un ensemble intersectant minimal (cf définition en section 2.3.1 de ce chapitre) de l'ensemble des MUS. La seconde étape consiste à calculer l'ensemble des MUS à partir des CoMSS.

Enfin, il est montré dans [167] comment les algorithmes développés pour l'approximation de MUS peuvent être adaptés à la gestion de bases de connaissances propositionnelles stratifiées.

Soit  $\Sigma$  une formule propositionnelle mise sous forme normale conjonctive.  $\Sigma$  est considéré comme un ensemble de clauses et interprété comme une conjonction. De plus, nous avons  $\Sigma$  partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telle que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) ont le même niveau de priorité et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$ .

Le calcul des sous-bases maximales cohérentes préférés selon la préférence lexicographique définie en section 2.2.2.3 de ce chapitre, est réalisé en plusieurs étapes. La première étape consiste à déterminer le seuil d'incohérence c'est-à-dire l'indice  $k$  maximale tel que  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_k$  est cohérent. Cet indice permet de déterminer les formules appartenant à toutes les sous-bases cohérentes préférées. L'algorithme HYCAM est ensuite dérivé pour le calcul exact des sous-bases préférés en effectuant une recherche locale afin d'obtenir un ensemble de MSS candidats puis les sous-bases préférées sont déterminées en vérifiant l'optimalité des MSS.

### 2.3.3 Traitement local de l'incohérence

Dans [22], S. Benferhat et L. Garcia ont proposé une méthode pour traiter localement l'incohérence dans les bases de croyances stratifiées. Elle considère les sous-ensembles de formules responsables de l'incohérence de la base de croyances initiale. Ces sous-ensembles sont les sous-bases minimales incohérentes, appelés conflits. Les priorités entre les croyances sont exprimées localement à l'intérieur d'une sous-base minimale incohérente. Soit  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n \cup \Sigma_k$  une base de croyances où  $\Sigma_k$  est la strate la plus prioritaire.

La notion de sous-base minimale incohérente est définie formellement par :

#### Définition 2.14

Soit  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n \cup \Sigma_k$  une base de croyances. Soit  $B \subset \Sigma$ .

$B$  est une sous-base de croyances minimale incohérente si et seulement si :

- $B$  est incohérente ;
- $\forall \phi \in B, B - \{\phi\} \not\vdash \perp$ .

La restauration de la cohérence consiste alors à supprimer dans chaque conflit une formule. Un conflit est alors partitionné en deux strates selon la strate dominante, notée  $\overline{B}$ , et la strate non-dominante, notée  $\underline{B}$ . La strate non-dominante contient les formules les moins prioritaires et la strate dominante les plus prioritaires. Formellement :

**Définition 2.15**

Soit  $\Sigma$  une base de croyances. Soit  $B \subset \Sigma$ .

Une stratification locale d'une sous-base de croyances minimale incohérente est une partition  $(\overline{B}, \underline{B})$  telle que

- $\overline{B} \cup \underline{B} = B, \overline{B} \cap \underline{B} = \emptyset$  ;
- $\Sigma_k \notin \underline{B}$  ;
- $\underline{B} \neq \emptyset$ .

Si une formule appartient à plusieurs sous-bases de croyances minimales incohérentes, la résolution d'un conflit peut être influencée par la résolution d'un autre conflit. Cette approche requiert un préordre sur la résolution des conflits.

La méthode générale de restauration de la cohérence utilisant cette approche est la suivante : la première étape consiste à déterminer toutes les sous-bases minimales incohérentes puis la stratification de chacune. Il faut ensuite déterminer l'ordre de résolutions des conflits. Pour chaque conflit prioritaire, il faut sélectionner la formule à retirer. Les conflits prioritaires étant résolus, il faut réitérer le processus jusqu'à l'absence de conflit à résoudre.

Nous présentons en section suivante la dernière famille d'approches : l'affaiblissement par oubli de variables.

## 2.4 Affaiblissement par oubli de variables

J. Lang et P. Marquis proposent dans [126] une méthode de gestion de l'incohérence pour des bases de croyances propositionnelles qui s'appuie sur la notion de "variables forgetting". L'idée est d'affaiblir les croyances plutôt que de les rejeter c'est-à-dire d'oublier les variables responsables de l'incohérence pour restaurer la cohérence.

L'oubli de variables a été initialement introduit dans [134] et [125] et est défini comme suit :

**Définition 2.16**

Soit  $\psi$  une formule propositionnelle et  $V \subseteq \mathcal{P}$ .

L'oubli de l'ensemble de variables  $V$  dans la formule  $\phi$ , noté  $\exists V.\phi$  est défini inductivement comme suit :

- $\exists \emptyset.\phi \equiv \phi$  ;
- $\exists \{x\}.\phi \equiv \phi_{x \leftarrow 0} \vee \phi_{x \leftarrow 1}$  où  $x \leftarrow 0$  (resp.  $x \leftarrow 1$ ) est la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences de  $x$  dans  $\phi$  par faux (resp. vrai) ;
- $\exists \{x\} \cup V.\phi \equiv \exists V.(\exists \{x\}.\phi)$ .

L'oubli de variables  $\exists V.\phi$  est la plus forte conséquence  $\psi$  de  $\phi$  qui est indépendante de  $V$  c'est-à-dire qu'il existe une formule propositionnelle  $\psi'$  telle que  $\psi \equiv \psi'$  et  $Var(\psi') \cap V = \emptyset$ . D'après [125],  $\phi$  est cohérent si et seulement si  $\exists Var(\phi).\phi$  est valide.

Dans [126], les auteurs considèrent qu'une base de croyances  $\Sigma$  est représentée par un vecteur, noté  $\Sigma = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$  de  $n$  formules propositionnelles. Une base de croyances est considérée comme incohérente si et seulement si l'ensemble des formules  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  est incohérent.

Ils définissent ensuite un contexte d'oubli de la façon suivante :

**Définition 2.17**

Un contexte d'oubli  $\mathcal{C}$  pour une base de croyances  $\Sigma = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$  de  $n$  est un triplet  $\langle F, G, H \rangle$  où :

- $F = \langle F_i \rangle_{i=1 \dots n}$  où, pour chaque  $i$ ,  $F_i \subseteq \mathcal{P}$  est l'ensemble des variables qui peuvent être oubliées dans  $\phi_i$  ;
- $G = \langle G_i \rangle_{i=1 \dots n}$  où, pour chaque  $i$ ,  $G_i$  est un graphe orienté sur  $F_i$  ; un arc  $(v, v')$  de  $G_i$  signifie que  $v'$  est significatif uniquement en présence de  $v$ , c'est-à-dire si  $v$  est oublié dans  $\phi_i$  alors  $v'$  doit aussi être oublié dans  $\phi_i$  ;
- $H \subseteq \mathcal{P} \times \{1 \dots n\} \times \{1 \dots n\}$  est un ensemble de triplets  $(v, i, j)$  où  $v \in F_i \cap F_j$  et  $i \neq j$  signifie que si  $v$  est oublié dans  $\phi_i$ , alors  $v$  doit être oublié dans  $\phi_j$ .

$F$ ,  $G$  et  $H$  imposent des contraintes sur la façon dont les variables de la croyance  $\phi_i$  de  $\Sigma$  peuvent être affaiblies. Le principe de cette approche consiste à déterminer les ensembles de variables dont l'oubli permet de restaurer la cohérence dans la base de croyances. Ces ensembles sont appelés "recoveries" (restaurations) et sont définis comme suit :

**Définition 2.18**

Soit  $\Sigma = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$  une base de croyances et  $\mathcal{C}$  un contexte d'oubli pour  $\Sigma$ .

Un vecteur de restauration (ou "recovery")  $\vec{V}$  pour  $\Sigma$  donné dans un contexte  $\mathcal{C}$  est un vecteur  $\vec{V} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle$  de sous-ensembles de  $Var(B)$ <sup>9</sup> tel que :

- pour tout  $i \in 1 \dots n$ ,  $v_i \subseteq F_i$  ;
- pour tout  $i \in 1 \dots n$ ,  $\forall (v, v') \in G_i$ , si  $v \in V_i$  alors  $v' \in V_i$  ;
- pour tout  $(v, i, j) \in H$ , si  $v \in V_i$  alors  $v \in V_j$  ;
- l'ensemble  $\Sigma | \vec{V} = \{\exists V_i. \phi_i | i \in 1 \dots n\}$  est cohérent.

$\Sigma | \vec{V}$  est appelé la projection du vecteur de restauration  $\vec{V}$  sur  $\Sigma$  donné dans un contexte  $\mathcal{C}$ . L'ensemble des vecteurs de restauration est noté  $\mathcal{R}(\Sigma)$ .

Les auteurs proposent ensuite de définir une relation de préférence entre les ensembles de variables oubliées afin d'affiner ce résultat. Les auteurs montrent que leur approche recouvre différentes approches existantes comme celle considérant les sous-bases cohérentes préférées.

---

<sup>9</sup> $Var(\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle) = \bigcup_{i=1}^n Var(\phi_i)$ .



## Chapitre 3

# Inférence en présence d'incohérence

Nous présentons dans ce chapitre des rappels sur l'inférence non-monotone pour les bases de croyances totalement préordonnées et les bases de croyances partiellement préordonnées dans le cadre de la restauration de la cohérence.

L'inférence classique consiste à déduire des formules propositionnelles à partir d'un ensemble de formules propositionnelles. Syntactiquement, l'ensemble de formules  $\Sigma$  infère une formule  $\psi$ , noté  $\Sigma \vdash \psi$ , si et seulement si  $\Sigma \cup \neg\psi$  est incohérent. La relation d'inférence  $\vdash$  est réflexive et transitive. Elle satisfait également la propriété de monotonie :

### Définition 3.1

*Soit  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  un ensemble de formules propositionnelles et soient  $\psi$  et  $\varphi$  deux formules propositionnelles.*

$$\text{Si } \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \vdash \psi \text{ alors } \{\phi_1, \dots, \phi_n, \varphi\} \vdash \psi.$$

Sémantiquement, l'ensemble des formules de  $\Sigma$  infère la formule  $\psi$ , noté  $\Sigma \models \psi$ , si et seulement si tout modèle de  $\Sigma$  est un modèle de  $\psi$ .

Mais la logique classique n'est pas appropriée à la formalisation du raisonnement incertain et révisable. En effet, la logique classique permet la formalisation du raisonnement strictement correct. La logique classique est monotone c'est-à-dire que quelque soit la nouvelle information, les conclusions tirées précédemment restent valides. Or dans le raisonnement révisable, les prémisses peuvent ne plus être vérifiées lors de l'ajout d'une nouvelle information. La formalisation d'un raisonnement révisable entraîne donc la perte de la propriété de monotonie. Pour modéliser le raisonnement révisable, différentes approches ont été proposées. Une de ces approches consiste à définir des logiques non-monotones comme la logique des défauts [171], les logiques non-monotones de Mc Dermott et Doyle [55, 144], les logiques autoépistémiques [150]

et la circonscription [141, 142]. Une autre approche consiste à conserver la logique classique en changeant la relation d'inférence. Cette relation d'inférence se définit par  $\phi \sim \psi$  et signifie  $\psi$  est une conséquence plausible de  $\phi$ . Les travaux [70, 121, 128, 73] proposent des propriétés souhaitables pour ces systèmes d'inférence non-monotone. En particulier, dans [121], Kraus, Lehmann et Magidor définissent un ensemble de postulats (les postulats KLM) qu'un système non-monotone *raisonnable* doit vérifier ainsi qu'un système non-monotone, appelé Système P (pour préférentiel). Ce système se base sur les règles du Système C (pour cumulatif) [70, 121] en ajoutant la règle de Disjonction à Gauche. Il est donc composé des postulats suivants : soit  $\phi$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  trois formules.

- (a) Réflexivité :  $\phi \sim \phi$ ,
- (b) Equivalence Logique à Gauche (LLE) : si  $\phi \leftrightarrow \varphi$  et  $\phi \sim \psi$  alors  $\varphi \sim \psi$ ,
- (c) Affaiblissement à Droite (RW) : si  $\psi \models \varphi$  et  $\phi \sim \psi$  alors  $\phi \sim \varphi$ ,
- (d) Disjonction à Gauche (OR) : si  $\phi \sim \varphi$  et  $\psi \sim \varphi$  alors  $\phi \vee \psi \sim \varphi$ ,
- (e) Monotonie Prudente (CM) : si  $\phi \sim \psi$  et  $\phi \sim \varphi$  alors  $\phi \wedge \psi \sim \varphi$ ,
- (f) Coupure (CUT) : si  $\phi \wedge \psi \sim \varphi$  et  $\phi \sim \psi$  alors  $\phi \sim \varphi$ .

Une importante conséquence de ce système est la propriété de Conjonction à Droite (AND) : si  $\phi \sim \psi$  et  $\phi \sim \varphi$  alors  $\phi \sim \psi \wedge \varphi$ . Cette règle exprime le fait que la conjonction de deux conséquences plausibles est une conséquence plausible. D'autres règles, sans être une conséquence du Système P, comme la Monotonie Rationnelle (RM) [128] ont été proposées : si  $\phi \sim \delta$  et  $\phi \not\sim \neg\psi$  alors  $\phi \wedge \psi \sim \delta$ . La nécessité de cette règle n'a pas été démontrée néanmoins elle est vérifiée par de nombreuses extensions du Système P.

La plupart des relations d'inférence non-monotones présentées dans ce chapitre sont définies à partir d'un processus décrit par [169] et présenté dans [122]. Il consiste à sélectionner certaines sous-bases cohérentes. Les mécanismes de sélection, également appelé comparateurs dans le cas de préordres partiels, sont décrits dans le chapitre précédent. Les relations sont alors obtenues en appliquant un principe d'inférence.

Nous présentons en sections 3.1 et 3.2 le processus de définitions de relations d'inférence non-monotones pour des bases de croyances non ordonnées et totalement préordonnées. Nous détaillons ensuite l'inférence non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées en section 3.3. Nous nous plaçons dans le cadre de la logique propositionnelle mais les notions définies dans ce chapitre sont aussi valables dans le cadre de la logique des prédicats.

### 3.1 Inférence non-monotone pour des bases de croyances non ordonnées

Soit  $\Sigma$  une base de croyances. Le processus de définitions de relations d'inférence non-monotone pour des bases de croyances non ordonnées est illustré par la figure 3.1.

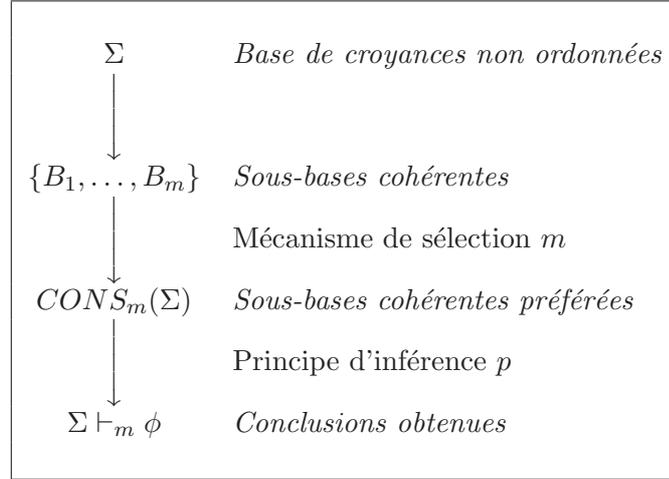


FIG. 3.1 – Processus de définitions de relations d'inférence non-monotone pour des bases de croyances non ordonnées

Nous nous intéressons tout d'abord aux différents principes d'inférence.

### 3.1.1 Les principes d'inférence

Dans [21], les auteurs présentent trois principes d'inférence pour des bases de croyances non ordonnées.

#### 3.1.1.1 Inférence argumentive

Le principe dit argumentif défini par [20] pour des bases de croyances non ordonnées est formellement défini comme suit :

##### Définition 3.2

$\Sigma \vdash_A \phi$  si et seulement si

1. il existe un argument<sup>1</sup> pour  $\phi$  dans  $\Sigma$  ;
2. il n'existe pas d'argument pour  $\neg\phi$  dans  $\Sigma$ .

#### 3.1.1.2 Inférence forte ou universelle

Le principe d'inférence dit fort ou universel a été introduit par [173]. Formellement, il est défini comme suit :

##### Définition 3.3

$\Sigma \vdash_{MCONS(\Sigma)} \phi$  si et seulement si quelle que soit la sous-base  $B_i$  de  $MCONS(\Sigma)$ , nous avons  $B_i \vdash \phi$ .

<sup>1</sup>La définition d'argument est donnée en section 2.2.1 du chapitre 2.

### 3.1.1.3 Inférence faible ou existentielle

Le principe d'inférence dit faible ou existentiel, introduit par [173], est formellement défini comme suit :

#### Définition 3.4

$\Sigma \vdash_{\exists} \phi$  si et seulement si il existe au moins une sous-base  $B_i$  de  $MCONS(\Sigma)$  telle que  $B_i \vdash \phi$ .

Dans [21], la relation d'inférence basée sur la préférence rappelée en section 2.2.1 du chapitre précédent, est définie formellement comme suit :

#### Définition 3.5

$\Sigma \vdash_L \phi$  si et seulement si  $\forall B_i \in MCONS_L(\Sigma)$ , nous avons  $B_i \vdash \phi$ .

## 3.2 Inférence non-monotone pour des bases de croyances totalement préordonnées

Soit  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telle que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) ont le même niveau de priorité et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$ . Le processus de définition des relations d'inférence, illustré par la figure 3.2, est divisé en deux étapes : l'application d'un mécanisme de sélection puis l'application d'un principe d'inférence. En effet, à partir d'une base de croyances incohérente  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$ , les sous-bases cohérentes, notées  $CONS(\Sigma)$ , sont calculées. Parmi elles, les sous-bases préférées selon un mécanisme choisi, noté  $m$ , sont sélectionnées. Nous notons  $CONS_m(\Sigma)$  ces sous-bases préférées. La déduction classique est alors appliquée sur chacune des sous-bases cohérentes préférées et la déduction non-monotone est définie à partir des résultats obtenus de la déduction classique sur chacune de ses sous-bases cohérentes préférées. Le mécanisme de sélection ayant déjà été détaillé en section 2.2.2 du chapitre précédent, nous nous intéressons dans cette section à l'application d'un principe d'inférence.

### 3.2.1 Les principes d'inférence

La deuxième étape du processus de création de relations d'inférence non-monotones consiste à appliquer un principe d'inférence. Les principaux mécanismes consistent à adopter une conclusion :

- si “toutes les sous-bases sont d'accord pour cette conclusion”, nous l'appelons conséquence forte,
- si “au moins une est d'accord pour cette conclusion”, nous l'appelons conséquence faible,
- si “au moins une est d'accord pour cette conséquence et aucune contre cette conclusion”, nous l'appelons conséquence argumentative.

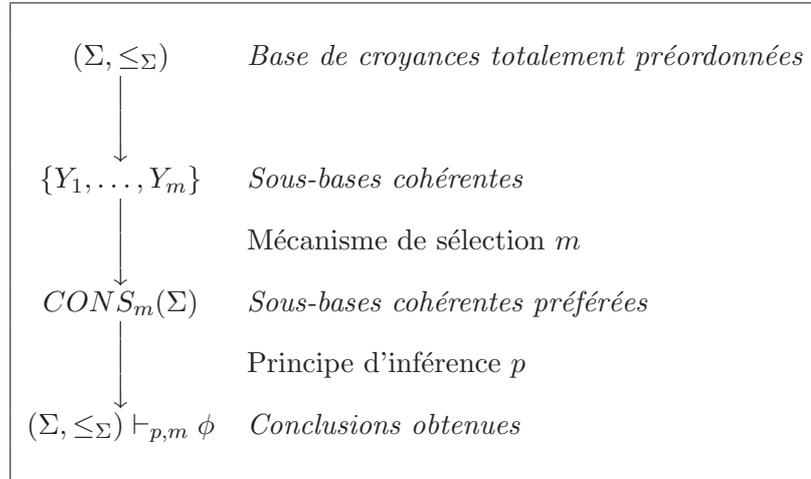


FIG. 3.2 – Processus de définitions de relations d'inférence non-monotone pour des bases de croyances totalement préordonnées

Nous considérons  $CONS_m(\Sigma)$  l'ensemble des sous-bases cohérentes de  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  préférées selon un mécanisme  $m$  défini en section 2.2.2 du chapitre précédent. Nous rappelons ici quelques instances des principaux mécanismes d'inférence présentés par [169] et décrits dans [122, 123]. Nous présentons seulement ceux qui prennent en compte la préférence entre les sous-bases.

### 3.2.1.1 Inférence argumentative avec préférences

Le principe d'inférence dit argumentatif avec préférences, décrit par [122]. Il reprend le principe dit argumentatif également défini par [20] (mais dans le cadre de l'argumentation) en prenant en compte la relation de préférence entre les sous-bases cohérentes. Formellement, il est défini comme suit :

#### Définition 3.6

$CONS_m(\Sigma) \vdash_{A,m} \phi$  si et seulement si

1. il existe au moins une sous-base  $B_i$  de  $CONS_m(\Sigma)$  telle que  $B_i \vdash \phi$ ,
2. quelle que soit  $B_i$  de  $CONS_m(\Sigma)$ , nous avons  $B_i \not\vdash \neg\phi$ .

### 3.2.1.2 Inférence forte avec préférences

Le principe d'inférence dit universel avec préférences, décrit par [122]. Il reprend le principe dit fort ou universel introduit par [173] en prenant en compte la relation de préférence entre les sous-bases cohérentes. Il associe les préférences entre les sous-bases avec un raisonnement sceptique. Formellement, il est défini comme suit :

**Définition 3.7**

$CONS_m(\Sigma) \vdash_{\forall, m} \phi$  si et seulement si quelle que soit la sous-base  $B_i$  de  $CONS_m(\Sigma)$ , nous avons  $B_i \vdash \phi$ .

**3.2.1.3 Inférence faible avec préférences**

Le principe d'inférence dit existentiel avec préférences, décrit par [122]. Il reprend le principe dit faible ou existentiel introduit par [173] en prenant en compte la relation de préférence entre les sous-bases cohérentes. Il associe les préférences entre les sous-bases avec un raisonnement crédule. Formellement, il est défini comme suit :

**Définition 3.8**

$CONS_m(\Sigma) \vdash_{\exists, m} \phi$  si et seulement si il existe au moins une sous-base  $B_i$  de  $CONS_m(\Sigma)$  telle que  $B_i \vdash \phi$ .

**3.2.2 Les relations d'inférence non-monotone**

Nous pouvons définir des relations d'inférence à partir de bases de croyances totalement préordonnées incohérentes. Nous présentons l'inférence linéaire et l'inférence possibiliste. Puis nous combinons les mécanismes de sélection présentés en section 2.2.2 et le principe d'inférence universel pour définir l'inférence basée sur l'inclusion, l'inférence lexicographique et l'inférence Best-Out.

**3.2.2.1 Inférence linéaire**

L'inférence linéaire a été introduite par Nebel dans [155]. Elle consiste à appliquer l'inférence classique à partir d'une sous-base cohérente sélectionnée comme suit :

**Définition 3.9**

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . La sous-base cohérente linéaire, notée  $B_{lin}$ , est définie par  $\bigcup_{i=1}^m \Sigma'_i$  telle que

$$\Sigma'_i \begin{cases} \Sigma_i & \text{si } \Sigma_i \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} \Sigma'_j \text{ est cohérent;} \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inférence linéaire est alors définie comme suit :

**Définition 3.10**

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ . Soit  $\psi$  une formule.  
 $(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{lin} \phi$  si et seulement si  $B_{lin} \vdash \phi$ .

### 3.2.2.2 Inférence possibiliste

L'inférence possibiliste est définie comme suit :

#### Définition 3.11

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ .  
Soit  $\phi$  une formule propositionnelle.

$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_\pi \phi$  si et seulement si

- $\exists i, 1 \leq i \leq n, \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_i$  est cohérente et  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_{i+1}$  est incohérente ;
- $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_i \vdash \phi$ .

L'inférence possibiliste permet de sélectionner une seule sous-base cohérente qui est  $\Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_i$ . Cette approche est très prudente puisqu'elle ne considère que les formules de niveau de certitude supérieur au niveau d'incohérence de la base. Ce problème est appelé "effet de noyade" [17].

### 3.2.2.3 Inférence lexicographique

De même, l'inférence relative à la préférence lexicographique consiste à appliquer l'inférence classique à toutes les sous-bases cohérentes lexicographiquement préférées. Nous rappelons que les sous-bases cohérentes lexicographiquement préférées sont maximales au sens de l'inclusion. Formellement,

#### Définition 3.12

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ .  
Soit  $\psi$  une formule.

$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{lex} \psi$  si et seulement si  $\forall B \in MCONS_{lex}(\Sigma), B \vdash \psi$ .

### 3.2.2.4 Inférence basée sur l'inclusion

L'inférence relative à la préférence basée sur l'inclusion consiste à appliquer l'inférence classique à toutes les sous-bases cohérentes préférées pour l'inclusion. Formellement, elle est définie comme suit :

#### Définition 3.13

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ .  
Soit  $\psi$  une formule.

$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{incl} \psi$  si et seulement si  $\forall B \in CONS_{incl}(\Sigma), B \vdash \psi$ .

L'inférence basée sur l'inclusion est plus prudente que l'inférence lexicographique définie car les sous-bases cohérentes lexicographiquement préférées sont maximales au sens de l'inclusion.

### 3.2.2.5 Inférence Best-Out

L'application de l'inférence classique aux sous-bases de croyances cohérentes préférées selon la préférence Best-Out nous permet de définir formellement l'inférence suivante :

**Définition 3.14**

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$ .

Soit  $\psi$  une formule.

$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{bo} \phi$  si et seulement si  $\forall B \in CONS_{bo}(\Sigma), B \vdash \phi$ .

La section suivante présente l'inférence non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées.

### 3.3 Inférence non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées

La définition de relations d'inférence à partir d'une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  peut se faire de deux manières différentes. La première méthode consiste à considérer les bases de croyances totalement préordonnées  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ . La deuxième méthode consiste à appliquer d'une part, un mécanisme de sélection, appelé comparateur pour déterminer un ensemble de sous-bases cohérentes préférées et d'autre part, le principe d'inférence universelle.

L'extension de l'inférence basée sur l'inclusion directement à partir du préordre partiel a été proposée dans [113] dans le cadre de la logique des défauts. Dans ce chapitre, nous présentons les extensions de l'inférence basée sur l'inclusion et de l'inférence possibiliste basées sur la notion de compatibles puis l'inférence démocratique [46] et l'inférence possibiliste [23] directement définies à partir du préordre partiel.

#### 3.3.1 Extension basée sur les compatibles

Une base de croyances totalement préordonnées  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  est dite compatible avec une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  si et seulement si le préordre total  $\leq_\Sigma$  étend le préordre partiel  $\preceq_\Sigma$ . Plus formellement,

**Définition 3.15**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées.

Une base de croyances totalement préordonnées  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  est dite compatible avec une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  si et seulement si :

(i)  $\forall \phi, \psi \in \Sigma : \text{si } \phi \preceq_\Sigma \psi \text{ alors } \phi \leq_\Sigma \psi,$

(ii)  $\forall \phi, \psi \in \Sigma : \text{si } \phi \prec_\Sigma \psi \text{ alors } \phi <_\Sigma \psi.$

Nous notons  $\mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  l'ensemble des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ .

##### 3.3.1.1 Inférence basée sur l'inclusion

L'inférence basée sur l'inclusion à partir des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  est définie comme suit :

**Définition 3.16**

Une formule  $\phi$  est inférée à partir de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , noté  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_C \phi$  si et seulement si  $\forall (\Sigma, \leq_\Sigma) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma), (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{incl} \phi$ .

**3.3.1.2 Inférence possibiliste**

L'inférence possibiliste à partir des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  est définie comme suit :

**Définition 3.17**

Une formule  $\phi$  est inférée à partir de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , noté  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_C \phi$  si et seulement si  $\forall (\Sigma, \leq_\Sigma) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma), (\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_\pi \phi$ .

**3.3.2 Extension directe des inférences**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  un ensemble de formules propositionnelles partiellement préordonnées. La première étape consiste à sélectionner certaines sous-bases parmi les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$  en utilisant une méthode, appelée comparateur, définie en section 2.2.3 du chapitre précédent. La deuxième étape du processus consiste à appliquer un principe d'inférence. Ce processus est résumé et illustré par la figure 3.3.

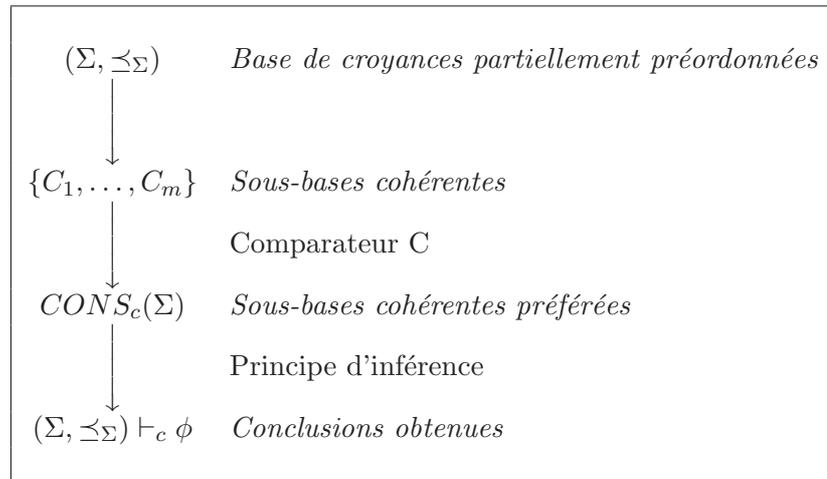


FIG. 3.3 – Processus de définitions de relations d'inférence syntaxique non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées

**3.3.2.1 Extension de l'inférence démocratique**

La préférence démocratique, définie dans [46], est rappelée en section 2.2.3.1. L'inférence démocratique consiste à appliquer l'inférence classique aux sous-bases de croyances cohérentes démocratiquement préférées. Formellement,

**Définition 3.18**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées.

$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_d \phi$  si et seulement si  $\forall B \in \text{CONS}_d(\Sigma), B \vdash \phi$ .

**3.3.2.2 Extension de l'inférence possibiliste**

Nous présentons les extensions syntaxiques et sémantiques de l'inférence Best-Out à partir du comparateur fort et du comparateur faible.

Syntaxiquement, l'inférence Best-Out forte (resp. faible) consiste à appliquer l'inférence universelle aux sous-bases de croyances cohérentes préférées selon le comparateur fort (resp. faible) défini en section 2.2.3.2 du chapitre précédent. Formellement,

**Définition 3.19**

Soit  $C$  un comparateur.

$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_C \phi$  si et seulement si  $\forall B \in \text{CONS}_C(\Sigma), B \cup \neg\psi$  est incohérent.

Dans [23, 124], il est également proposé une extension sémantique pour l'inférence possibiliste forte et faible à partir d'une base de croyances partiellement préordonnées. Le processus consiste à déterminer les interprétations préférées puis à appliquer le principe d'inférence forte. Ce processus est résumé et illustré par la figure 3.4.

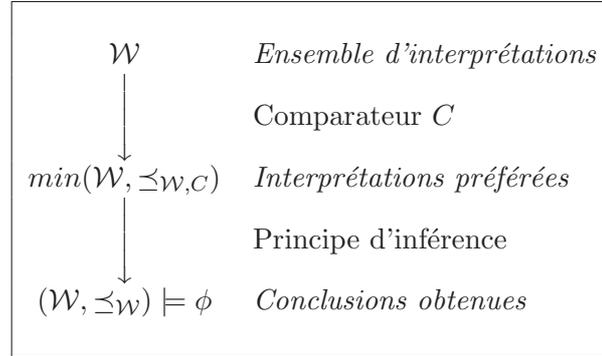


FIG. 3.4 – Processus de définitions de relations d'inférence sémantique non-monotone pour des bases de croyances partiellement préordonnées

Afin de préordonner les interprétations, S. Lagrue utilise une méthode pour passer d'un préordre partiel sur les formules à un préordre partiel sur les interprétations [124]. Il considère les formules falsifiées par  $\omega$  et préférées pour  $\Sigma$  :  $[\omega, \Sigma] = \min(\phi | \phi \in \Sigma, \omega \not\models \phi, \prec_\Sigma)$ . Il définit ensuite le préordre sur les interprétations suivant :

**Définition 3.20**

- $\omega \preceq_{\mathcal{W}, C} \omega'$  si et seulement si  $[\omega', \Sigma] \triangleleft_C^i [\omega, \Sigma]$  ;
- $\omega \prec_{\mathcal{W}, C} \omega'$  si et seulement si  $[\omega', \Sigma] \triangleleft_C^i [\omega, \Sigma]$  ;
- $\omega =_{\mathcal{W}, C} \omega'$  si et seulement si  $[\omega', \Sigma] =_C^i [\omega, \Sigma]$ .

L'inférence sémantique est alors définie de la manière suivante :

**Définition 3.21**

*Soit  $C$  un comparateur.*

$(\mathcal{W}, \preceq_{\mathcal{W}, C}) \models \phi$  si et seulement si  $\min(\mathcal{W}, \preceq_{\mathcal{W}, C}) \subseteq \text{Mod}(\phi)$ .

**Propriétés** La première propriété démontrée dans [124] est l'équivalence entre les inférences syntaxique et sémantique :  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_C \phi$  si et seulement si  $(\mathcal{W}, \preceq_{\mathcal{W}, C}) \models \phi$ .

La deuxième propriété également démontrée dans [124] est l'équivalence entre les inférences proposées et l'inférence obtenue en considérant les bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  définie en section 3.3.1.2.

D'après [124], contrairement à l'inférence faible, les conséquences issues de l'inférence forte sont trop prudentes et ne correspondent pas aux conclusions attendues.



## Chapitre 4

# Révision de croyances

En intelligence artificielle, la révision de croyances a été très largement étudiée dans le domaine de la représentation de connaissances [190]. Nous considérons qu'un état épistémique symbolise les croyances qu'un agent intelligent a du monde réel sur la base des informations dont il dispose. La révision de croyances d'états épistémiques consiste à intégrer une nouvelle information considérée plus fiable que les autres aux croyances actuelles sur le monde. L'ajout d'une nouvelle information peut conduire à des incohérences. De nombreuses approches ont été proposées pour restaurer la cohérence d'un état épistémique.

La révision a été initialement définie dans le cadre de changement d'état épistémique représenté par une théorie<sup>1</sup> [4]. La *révision* par une formule est la modification de la théorie en conservant la nouvelle information, en préservant la cohérence et en modifiant le moins possible la théorie initiale. Ce cadre regroupe d'autres opérations : l'*expansion* qui consiste à introduire d'une nouvelle formule dans la théorie sans modifier la théorie initiale, la *contraction* qui consiste à retirer une formule de la théorie initiale.

Cependant, l'état épistémique [72] d'un agent ne désigne pas seulement sa vision actuelle du monde c'est-à-dire ses croyances courantes mais aussi des croyances sur ces croyances courantes (méta-croyances). Autrement dit, un état épistémique  $\Psi$  d'un agent représente l'ensemble des informations disponibles par l'agent à partir duquel il prendra des décisions. Bochman définit un état épistémique comme une "boîte noire" dont la fonction première est de produire des ensembles de croyances mais il contient également une partie "cachée" qui permet de réagir face à l'arrivée d'une nouvelle information [28, 29]. Un état épistémique peut être représenté de différentes manières : par un enracinement épistémique [72] c'est-à-dire une relation d'ordre sur les formules reflétant leur enracinement épistémique, par une distribution de probabilité ou de possibilité sur un ensemble de mondes possibles, par un ensemble de formules, par un préordre sur les interprétations, etc.

Meyer définit l'état épistémique comme une fonction qui associe à chaque interprétation un entier naturel [145]. Booth et Nittka considèrent qu'un état épistémique

---

<sup>1</sup>Ensemble déductivement clos de formules.

$\Psi$  est représenté d'une part, par les croyances courantes de l'agent et d'autre part, par un sous-ensemble des croyances de l'agent considérées comme "intouchables" [32, 34].

Les différentes approches pour la révision d'un état épistémique sont classées selon trois points de vue [54].

Le premier point de vue est "Belief revision as defeasible inference" (BRDI). Etant donné un ordre de plausibilité entre les interprétations qui décrit un état épistémique et une nouvelle information, les approches de ce type (BRDI) consistent à trouver l'interprétation la plus plausible qui satisfait la nouvelle information. Le point de vue exposé dans [73] peut être caractérisé comme une approche BRDI. Le deuxième type de révision proposé dans [54] est "Belief revision as incorporation of evidence" (BRIE). Soit un ordre de plausibilité sur les interprétations représentant un état épistémique, cette approche consiste à modifier l'ordre de plausibilité en présence d'une nouvelle information. Les travaux [194, 63, 50, 204] peuvent être caractérisées par cette approche. Enfin, le dernier point de vue possible pour classer les méthodes de révision est "Belief revision of background knowledge" (BRBK). Ce type de révision regroupe les approches qui révisent la connaissance générique par une nouvelle information générique. Les approches [39, 69] sont caractérisées par ce point de vue.

Nous présentons un panorama des travaux proposés pour la révision de croyances.

## 4.1 La révision selon AGM

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont proposé dans [4] une formalisation dans laquelle la révision est interprétée comme un changement de croyances. Dans cette approche, l'état épistémique d'un agent est représenté par un ensemble de formules déductivement clos, appelé théorie.

### Définition 4.1

Soit  $T$  une théorie et  $\mu$  une formule, nous notons  $T \star \mu$  la théorie révisée par  $\mu$ . Comme  $T$  est déductivement clos,  $T \star \mu = \text{Cons}(T \star \mu)$ .

Ils ont proposé un ensemble de postulats que les opérations de révision doivent satisfaire. Ces postulats s'appuient sur trois principes : (1) le principe de cohérence, une opération de révision doit produire un ensemble de croyances cohérent ; (2) le principe du changement minimal, une opération de révision doit modifier le moins possible l'ensemble de croyances initial ; (3) la formule par laquelle nous révisons doit être conservée.

Soient  $T$  une théorie,  $\mu$  et  $\varphi$  des formules. Soit  $T \star \mu$  la théorie révisée par  $\mu$ , nous notons  $T + \mu$  le plus petit sous-ensemble de formules déductivement clos contenant  $T$  et  $\mu$ . Nous notons  $T^\perp$  l'ensemble de toutes les formules.

(AGM1)  $T \star \mu$  est une théorie ;

(AGM2)  $\mu \in T \star \mu$  ;

(AGM3)  $T \star \mu \subseteq T + \mu$  ;

- (AGM4) si  $\neg\mu \notin T$  alors  $T \star \mu = T + \mu$  ;  
 (AGM5)  $T \star \mu = T^\perp$  si et seulement si  $\mu$  est insatisfaisable ;  
 (AGM6) si  $\mu \equiv \varphi$  alors  $T \star \mu = T \star \varphi$  ;  
 (AGM7)  $T \star (\mu \wedge \varphi) \subseteq (T \star \mu) + \varphi$  ;  
 (AGM8) si  $\neg\varphi \notin T \star \mu$  alors  $(T \star \mu) + \varphi = T \star (\mu \wedge \varphi)$ .

Le postulat (AGM1) exprime le fait que le résultat de la révision est une théorie. (AGM2) signifie que la formule par laquelle on révisé appartient à la théorie révisée. Les postulats (AGM3) et (AGM4) donnent le résultat de la révision lorsque la formule  $\mu$  est cohérente avec la théorie  $T$ . (AGM5) spécifie que le résultat de la révision doit être cohérent. Le postulat (AGM6) précise que le résultat de la révision doit être indépendant de la syntaxe. (AGM7) et (AGM8) expriment le principe de changement minimal.

## 4.2 Les postulats KM

Des approches sémantiques pour la révision de croyances ont été développées [49, 194, 35] et Katsuno et Mendelzson [114] ont unifié ces approches sémantiques en créant un cadre commun. Ils ont proposé une reformulation des postulats AGM dans le cas où un état épistémique est représenté par une seule formule propositionnelle  $\psi$ . Ces postulats sont équivalents aux postulats AGM.

Soient  $\psi$ ,  $\varphi$  et  $\mu$  des formules propositionnelles.

- (KM1)  $\psi \circ \mu \models \mu$  ;  
 (KM2) si  $\psi \wedge \mu$  est satisfaisable, alors  $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$  ;  
 (KM3) si  $\mu$  est satisfaisable, alors  $\psi \circ \mu$  l'est aussi ;  
 (KM4) si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$  ;  
 (KM5)  $(\phi \circ \mu) \wedge \varphi \models \phi \circ (\mu \wedge \varphi)$  ;  
 (KM6) si  $(\phi \circ \mu) \wedge \varphi$  est satisfaisable, alors  $\phi \circ (\mu \wedge \varphi) \models (\phi \circ \mu) \wedge \varphi$ .

Plus précisément, (KM1) stipule que les modèles de la formule révisée par une nouvelle information  $\mu$  sont également des modèles de  $\mu$ . Le postulat (KM2) signifie que si la formule  $\mu$  est satisfaisable avec la formule initiale  $\psi$ , la révision de  $\psi$  par  $\mu$  est l'intersection des modèles de  $\psi$  et des modèles de  $\mu$ . (KM3) exprime que le résultat de la révision est incohérent seulement si la formule par laquelle nous révisons est incohérente, autrement dit si aucune interprétation ne satisfait pas  $\psi$ . Le postulat (KM4) représente le principe d'indépendance de la syntaxe. Les postulats (KM5) et (KM6) expriment le principe de changement minimal.

Les postulats KM et les postulats AGM sont équivalents. La correspondance entre un opérateur de révision sur les formules  $\circ$  et un opérateur de révision sur les théories  $\star$  est donnée par :

$$\text{Cons}(\bigwedge_{\varphi \in T} \varphi) \circ \mu \equiv T \star \mu.$$

L'équivalence entre les postulats AGM et les postulats KM est énoncée par le théorème suivant dans [114] :

#### **Théorème 4.1**

*Soit un opérateur de révision sur les théories  $\star$  et  $\circ$  l'opérateur de révision sur les formules correspondant. Alors les postulats (KM1)–(KM6) sont satisfaits par  $\circ$  si et seulement si les postulats (AGM1)–(AGM8) sont satisfaits par  $\star$ .*

Katsuno et Mendelzon proposent également un théorème de représentation qui s'appuie sur la notion d'assignation fidèle. Une assignation fidèle est une fonction qui associe un préordre total  $\leq_\psi$  sur les interprétations  $\mathcal{W}$  à un état épistémique représenté par la formule  $\psi$ . Plus formellement,

#### **Définition 4.2**

*Soient  $\psi$  une formule et  $\mathcal{W}$  l'ensemble d'interprétations. Un préordre total  $\leq_\psi$ , associé à  $\psi$ , est une **assignation fidèle** si et seulement si*

- (i) *si  $\omega \in \text{Mod}(\psi)$  et  $\omega' \in \text{Mod}(\psi)$  alors  $\omega =_\psi \omega'$ ,*
- (ii) *si  $\omega \in \text{Mod}(\psi)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\psi)$  alors  $\omega <_\psi \omega'$ ,*
- (iii) *si  $\psi \equiv \phi$  alors  $\leq_\psi = \leq_\phi$ .*

Katsuno et Mendelzon ont montré qu'un opérateur de révision satisfait les postulats KM si et seulement si il existe une assignation fidèle qui associe à  $\Psi$  un préordre total  $\leq_\psi$  et tel que les éléments minimaux pour ce préordre sont les modèles de l'ensemble de croyances de la formule révisée. Plus formellement,

#### **Théorème 4.2**

*Un opérateur de révision satisfait les postulats (KM1) à (KM6) si et seulement si il existe une assignation fidèle qui associe à  $\psi$  un préordre total  $\leq_\psi$  tel que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\psi \circ \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \leq_\psi)$ .*

## 4.3 Quelques approches de révision

Nous présentons dans cette section quelques approches de révision de bases de croyances non ordonnées ou totalement préordonnées. Nous présentons les approches sémantiques puis les approches syntaxiques.

### 4.3.1 Approches sémantiques

Différentes approches sémantiques ont été proposées comme les fonctions conditionnelles ordinales de Spohn [194], le système de sphères de Grove [89], les opérateurs de révision définis par Borgida [35], la révision basée sur des opérations de morphologie mathématique Bloch et Lang [27] et l'opérateur de révision de Dalal [49] que nous détaillons en section suivante à titre d'exemple.

### 4.3.1.1 La révision selon Dalal

Dalal propose un opérateur sémantique de révision dans [49] s'appuyant sur la distance entre les interprétations. La distance utilisée entre deux interprétations est la distance de Hamming, notée  $d_H$ , qui correspond au nombre de formules propositionnelles par lesquelles les interprétations diffèrent :

$$d_H(\text{Mod}(\mu), w) = \min_{\omega_i \in \text{Mod}(\mu)} d_H(\omega_i, w).$$

Ainsi, la révision selon Dalal utilise l'assignation fidèle suivante :

#### Définition 4.3

Soient  $\psi$  la formule propositionnelle représentant l'état épistémique et  $\mu$  la formule par laquelle on révisé.

$$\omega \leq_{\psi}^{d_H} \omega' \text{ si et seulement si } d_H(\text{Mod}(\mu), \omega) \leq d_H(\text{Mod}(\mu), \omega')$$

Formellement, la révision selon Dalal est définie comme suit :

$$\psi \circ \mu = \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\psi}^{d_H}).$$

#### Exemple 4.1

Soit  $\psi = \neg a \wedge \neg b \wedge (c \vee b)$  la formule propositionnelle représentant l'état épistémique et  $\mu = a$  la formule par laquelle on révisé. Le modèle de  $\psi$  est  $\omega = \{\neg a, \neg b, c\}$  et les modèles de  $\mu$  sont  $\omega_0 = \{a, \neg b, \neg c\}$ ,  $\omega_1 = \{a, \neg b, c\}$ ,  $\omega_2 = \{a, b, \neg c\}$  et  $\omega_3 = \{a, b, c\}$ . Nous calculons ensuite la distance de Hamming entre le modèle de  $\psi$  et les modèles de  $\mu$  :

- $d_H(\omega_0, \omega) = 2$
- $d_H(\omega_1, \omega) = 1$
- $d_H(\omega_2, \omega) = 3$
- $d_H(\omega_3, \omega) = 2$

La révision selon Dalal est alors :  $\psi \circ \mu = \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\psi}^{d_H}) = \{a, \neg b, c\}$ .

Cette opération satisfait les postulats (KM1) - (KM6).

### 4.3.2 Approches syntaxiques

Il existe également différentes approches syntaxiques pour la révision comme la semi-révision et la révision sélective de Hansson [101, 68]. Nous présentons la révision selon Nebel [153, 154, 155] et la révision par R-ensembles [206, 13].

#### 4.3.2.1 La révision selon Nebel

Le premier opérateur de révision pour les bases de croyances finies a été proposé par B. Nebel dans [153, 154]. Soit  $\Sigma$  une base de croyances finie et  $\mu$  une formule. L'ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents qui n'implique pas  $\mu$ , noté  $\Sigma \downarrow \mu$ , est défini comme suit :

$$\Sigma \downarrow \mu = \{B, B \subseteq \Sigma, B \not\vdash \mu \text{ et si } B \subset A \subseteq \Sigma \text{ alors } A \vdash \mu\}.$$

Nebel utilise l'identité de Levi [130] qui définit la révision à partir de la contraction puis de l'expansion. L'opération de contraction est définie comme suit :

$$\Sigma - \mu = \begin{cases} (\bigvee_{B \in \Sigma \downarrow \mu} B) \wedge (\Sigma \vee \neg \mu) & \text{si } \not\vdash \mu \\ \Sigma & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opération de révision pour les bases de croyances finies est définie comme suit :

$$\Sigma \oplus \mu = \text{Cons}(\Sigma - \neg \mu) + \mu$$

B. Nebel considère ensuite une base de croyances  $\Sigma$  partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telles que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) ont le même niveau de priorité et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$ . Dans ce cadre, l'ensemble des sous-ensembles maximaux cohérents qui n'implique pas  $\mu$  et tenant compte du préordre total est noté  $\Sigma \downarrow \mu$  et est définie par :

$$\Sigma \downarrow \mu = \{B \subseteq \Sigma \mid B \not\vdash \mu, \forall C, j : B \cap \bigcup_{i=j}^n \Sigma_i \subset C \cap \bigcup_{i=j}^n \Sigma_i \text{ alors } C \cap \bigcup_{i=j}^n \Sigma_i \vdash \mu\}.$$

L'opération de révision prioritaire est définie par :

$$\Sigma \oplus^p \mu = \left( \bigcap_{B \in \Sigma \downarrow \neg \mu} \text{Cons}(B) \right) + \mu.$$

L'opération de révision prioritaire  $\oplus^p$  vérifie les postulats AGM. Un des principaux inconvénients de cette méthode concerne la complexité de calcul.

Dans [154], Nebel a proposé une autre opération de révision pour les bases de croyances stratifiées, notée  $\Sigma \otimes^p \mu$  et définie comme suit :

$$\Sigma \otimes^p \mu = \text{Cons}(\{\mu \in \Sigma \mid \psi \in \Sigma_j, \bigcup_{i=j}^n \Sigma_i \not\vdash \neg \mu\}) + \mu$$

Cette opération de révision permet de retirer les formules des strates dont la priorité est inférieure ou égale à la priorité de la strate "responsable" de l'incohérence. Cette opération de révision  $\otimes^p$  satisfait les postulats AGM.

### 4.3.2.2 La révision par R-ensembles

**Approche syntaxique** La révision par R-ensembles<sup>2</sup> [206] traite de la révision d'un ensemble de formules propositionnelles par un ensemble de formules propositionnelles. Les formules propositionnelles sont mises sous forme normale conjonctive (CNF) et les auteurs considèrent les formules comme des ensembles finis de clauses. Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles finis de clauses. La révision par R-ensembles (RSR) consiste à choisir les ensembles minimaux de clauses à retirer de  $\Sigma$ , appelés *R-ensembles*, afin de restaurer la cohérence de  $\Sigma \cup A$ . Plus formellement,

<sup>2</sup>Le terme R-ensemble est la traduction de Removed Set en anglais.

**Définition 4.4**

Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles de clauses cohérents tels que  $\Sigma \cup A$  est incohérent.  $R$ , un sous-ensemble de clauses de  $\Sigma$ , est un R-ensemble de  $\Sigma \cup A$  si et seulement si

- (i)  $(\Sigma \setminus R) \cup A$  est cohérent ;
- (ii)  $\forall R' \subseteq \Sigma$ , si  $(\Sigma \setminus R') \cup A$  est cohérent, alors  $|R| \leq |R'|$ <sup>3</sup>.

**Exemple 4.2**

Soient  $\Sigma = \{b, c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$  et  $A = \{\neg a, \neg a \vee b \vee c\}$ .  $\Sigma \cup A$  est incohérent et nous avons neuf sous-ensembles de  $\Sigma$  qu'il est possible de retirer pour restaurer la cohérence :  $R_0 = \{b, c\}$ ,  $R_1 = \{b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_2 = \{c, a \vee \neg b\}$ ,  $R_3 = \{a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_4 = \{b, c, a \vee \neg b\}$ ,  $R_5 = \{b, c, a \vee \neg c\}$ ,  $R_6 = \{b, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_7 = \{c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$  et  $R_8 = \{b, c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ . Parmi, ces sous-ensembles,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  sont des R-ensembles de  $\Sigma \cup A$ .

L'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma \cup A$  est noté  $\mathcal{R}(\Sigma \cup A)$ . La révision par R-ensembles (RSR) est alors définie comme suit :

**Définition 4.5**

Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles de clauses cohérents.

$$\Sigma \circ_{RSR} A =_{def} \bigvee_{R \in \mathcal{R}(\Sigma \cup A)} Cons((\Sigma \setminus R) \cup A).$$

**Exemple 4.3**

Si nous reprenons l'exemple 4.2, le résultat de l'opération de révision est :  $\Sigma \circ_{RSR} A = Cons(\{a \vee \neg b, a \vee \neg c, \neg a, \neg a \vee b \vee c\}) \vee Cons(\{c, a \vee \neg b, \neg a, \neg a \vee b \vee c\}) \vee Cons(\{b, a \vee \neg c, \neg a, \neg a \vee b \vee c\}) \vee Cons(\{b, c, \neg a, \neg a \vee b \vee c\})$ .

**Approche sémantique** Selon le point de vue sémantique, nous notons  $|\mathcal{NS}_\Sigma(\omega)|$  le nombre de clauses de  $\Sigma$  falsifiées par une interprétation  $\omega$  et un préordre total sur les interprétations est défini par :

**Définition 4.6**

$\forall \omega_i, \omega_j \in \mathcal{W}$ ,  $\omega_i \leq_\Sigma \omega_j$  si et seulement si  $|\mathcal{NS}_\Sigma(\omega_i)| \leq |\mathcal{NS}_\Sigma(\omega_j)|$ .

Sémantiquement, nous définissons la révision par R-ensembles.

**Définition 4.7**

Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles de clauses cohérents.

$$Mod(\Sigma \circ_{RSR_{sem}} A) = min(Mod(A), \leq_\Sigma)$$

**Exemple 4.4**

Sémantiquement, nous considérons les formules falsifiées par les interprétations :

<sup>3</sup> $|R|$  représente le nombre de clauses de  $R$ .

$\mathcal{W}$	$a$	$b$	$c$	$\mathcal{NS}_\Sigma(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\{b, c\}$
$\omega_1$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$\{b, a \vee \neg c\}$
$\omega_2$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$\{c, a \vee \neg b\}$
$\omega_3$	$\neg a$	$b$	$c$	$\{a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$
$\omega_4$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$\{b, c\}$
$\omega_5$	$a$	$\neg b$	$c$	$\{b\}$
$\omega_6$	$a$	$b$	$\neg c$	$\{c\}$
$\omega_7$	$a$	$b$	$c$	$\emptyset$

Nous avons  $Mod(\Sigma \circ_{RSR_{sem}} A) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

Elle minimise le nombre de clauses falsifiées par les modèles de  $A$ . L'équivalence entre les approches syntaxique et sémantique est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 4.1**

Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles de clauses cohérents.

$$Mod(\Sigma \circ_{RSR} A) = Mod(\Sigma \circ_{RSR_{sem}} A).$$

La révision par R-ensembles satisfait les postulats AGM [206, 205].

**Extension de la révision par R-ensembles aux bases de croyances totalement préordonnées (PRSR)**

Dans [13], la généralisation de la révision par R-ensembles (RSR) aux bases de croyances totalement préordonnées (PRSR) a été proposée. Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de clauses stratifié où  $\Sigma$  est partitionné en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telles que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ont le même niveau de priorité et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$ , avec  $1 \leq i \leq n$ , et  $1 \leq j \leq n$ .  $\Sigma_1$  contient les clauses de  $\Sigma$  les plus prioritaires et  $\Sigma_n$  celles qui sont le moins prioritaires. Le principe pour restaurer la cohérence consiste à enlever un nombre minimal de clauses de  $\Sigma_1$ , puis un nombre minimal de clauses de  $\Sigma_2$ , etc. Afin de généraliser la notion de R-ensemble décrite précédemment, il est nécessaire d'introduire la relation de préférence entre les sous-ensembles de  $\Sigma$  suivante :

**Définition 4.8**

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini stratifié et cohérent de clauses. Soient  $X$  et  $X'$  deux sous-ensemble de  $\Sigma$ .

$X$  est strictement préféré à  $X'$  si et seulement si

- (i)  $\exists i, 1 \leq i \leq n, |X \cap \Sigma_i| < |X' \cap \Sigma_i|$ ;
- (ii)  $\forall j, 1 \leq j < i, |X \cap \Sigma_j| = |X' \cap \Sigma_j|$ .

La définition des R-ensembles est ensuite généralisée :

**Définition 4.9**

Soient  $\Sigma$  un ensemble fini stratifié et cohérent de clauses et  $A$  un ensemble fini et cohérent de clauses tels que  $\Sigma \cup A$  est incohérent.

$R$ , un sous-ensemble de clauses de  $\Sigma$ , est un R-ensemble de  $\Sigma \cup A$  si et seulement si

- (i)  $R \subseteq \Sigma$ ;
- (ii)  $(\Sigma \setminus R) \cup A$  est cohérent;
- (iii)  $\forall R' \subseteq \Sigma$ , si  $(\Sigma \setminus R') \cup A$  est cohérent, alors  $R'$  n'est pas strictement préféré à  $R$ .

**Exemple 4.5**

Soient  $\Sigma = \{b, c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$  tel que  $\Sigma_1 = \{a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$  et  $\Sigma_2 = \{b, c\}$  et  $A = \{\neg a, \neg a \vee b \vee c\}$ . Les sous-ensembles de  $\Sigma$  qu'il est possible de retirer pour restaurer la cohérence sont  $R_0 = \{b, c\}$ ,  $R_1 = \{b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_2 = \{c, a \vee \neg b\}$ ,  $R_3 = \{a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_4 = \{b, c, a \vee \neg b\}$ ,  $R_5 = \{b, c, a \vee \neg c\}$ ,  $R_6 = \{b, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ ,  $R_7 = \{c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$  et  $R_8 = \{b, c, a \vee \neg b, a \vee \neg c\}$ . Parmi ses sous-ensembles, il n'y a qu'un seul R-ensemble :  $R_0$ .

L'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma \cup A$  est noté  $\mathcal{PR}(\Sigma \cup A)$ . La révision par R-ensembles de bases de croyances totalement préordonnées (PRSR) est alors définie comme suit :

**Définition 4.10**

Soient  $\Sigma$  et  $A$  deux ensembles de clauses cohérents.

$$\Sigma \circ_{PRSR} A =_{def} \bigvee_{R \in \mathcal{PR}(\Sigma \cup A)} Cons((\Sigma \setminus R) \cup A).$$

**Exemple 4.6**

La révision par R-ensembles de l'exemple 4.5 nous donne :

$$\Sigma \circ_{PRSR} A = Cons(\{a \vee \neg b, a \vee \neg c, \neg a, \neg a \vee b \vee c\})$$

La révision par R-ensembles a été efficacement mise en oeuvre en utilisant la programmation avec sémantique de modèle stables dans le cadre du projet REVIGIS [14].

## 4.4 Révision itérée

La notion de révision itérée a été introduite dans [127] puis [50] et permet de réviser une base de croyances par une séquence d'informations  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  telle que ces informations sont préférées aux croyances initiales et  $\mu_2$  est préférée à  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  est préférée à  $\mu_2$ , etc. Dans le cas où l'ensemble des nouvelles informations est cohérent, les postulats définis par Katsuno et Mandelzon, rappelés en section 4.2, ne posent pas de problèmes car il est possible de réviser la base de croyance initiale par la conjonction des formules de la séquence. En revanche, ces postulats ne sont pas adaptés dans le cas où l'ensemble des nouvelles informations est incohérent c'est pourquoi Darwiche et Pearl proposent un nouvel ensemble de postulats qu'un opérateur de révision itérée doit satisfaire [50]. Cette approche fait l'objet de la section suivante.

#### 4.4.1 Les postulats de Darwiche et Pearl

Tout d'abord, Darwiche et Pearl considèrent qu'un état épistémique ne peut pas être représenté par une formule, mais par une structure plus riche, qui non seulement représente les croyances courantes d'un agent mais aussi des informations supplémentaires qui permettent de guider le processus de révision lors d'arrivée des nouvelles informations. Un état épistémique peut être représenté par une distribution de possibilité, par une fonction conditionnelle ordinale, par un préordre sur les interprétations, etc. A un état épistémique  $\Psi$  doit cependant correspondre une formule propositionnelle, notée  $Bel(\Psi)$  qui correspond aux croyances courantes de l'agent et représente en quelque sorte la partie visible de l'état épistémique. Le résultat de la révision de l'état épistémique  $\Psi$  par  $\mu$  sera un état épistémique révisé, noté  $\Psi \circ \mu$ , les croyances courantes correspondantes à l'état épistémique révisé sera la formule, notée  $Bel(\Psi \circ \mu)$ .

Les postulats KM, définis pour la révision d'une formule  $\psi$  par une formule  $\mu$ , sont généralisés pour la révision d'un état épistémique  $\Psi$  par une formule  $\mu$ . Soient  $\mu$  et  $\varphi$  deux formules propositionnelles.

(KM'1)  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$  ;

(KM'2) si  $Bel(\Psi) \wedge \mu$  est satisfaisable, alors  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$  ;

(KM'3) si  $\mu$  est satisfaisable, alors  $Bel(\psi \circ \mu)$  l'est aussi ;

(KM'4) si  $\Psi_1 = \Psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$  ;

(KM'5)  $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi \models Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \varphi))$  ;

(KM'6) si  $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi$  est satisfaisable, alors  $Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \varphi)) \models Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi$ .

Les postulats (KM'1),(KM'3) - (KM'6) sont des reformulations directes des postulats KM correspondants, en revanche le postulat (KM'4) est affaibli, il stipule que les deux états épistémiques doivent être égaux.

Darwiche et Pearl [50] proposent d'ajouter un nouvel ensemble de postulats qu'un opérateur de révision itérée doit satisfaire :

(DP1) si  $\psi \models \mu$  alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi) \equiv Bel(\Psi \circ \psi)$  ;

(DP2) si  $\psi \models \neg\mu$  alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi) \equiv Bel(\Psi \circ \psi)$  ;

(DP3) si  $Bel(\Psi \circ \psi) \models \mu$  alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi) \models \mu$  ;

(DP4) si  $Bel(\Psi \circ \psi) \not\models \neg\mu$  alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi) \not\models \neg\mu$ .

Le postulat (DP1) stipule si les modèles de  $\mu$  contiennent les modèles de  $\psi$  alors la révision de l'état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  puis par la formule  $\psi$  est équivalente à la révision directe de  $\Psi$  par  $\psi$ . De même, (DP2) signifie que si les modèles de  $\psi$  sont contenus dans les modèles de  $\neg\mu$  c'est-à-dire que  $\psi$  et  $\mu$  n'ont aucun modèle commun alors réviser l'état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  puis par la formule  $\psi$  revient à réviser directement  $\Psi$  par  $\psi$ . Le postulat (DP3) stipule que si  $Bel(\Psi \circ \psi)$  infère  $\mu$  alors  $\mu$  sera inféré par  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi)$  c'est-à-dire qu'une information sera conservée dans la base de croyances si elle est incohérente avec aucune nouvelle information. (DP4)

montre que si  $\neg\mu$  ne peut être déduit de  $Bel(\Psi \circ \psi)$  alors  $\neg\mu$  ne peut être déduit de  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \psi)$ , autrement dit si  $\mu$  n'est pas incohérent avec l'état épistémique  $\Psi$  révisé par  $\psi$  alors  $\mu$  ne devrait pas être incohérent avec l'état épistémique  $\Psi$  révisé par  $\mu$  puis par  $\psi$ .

A partir de ces postulats, le théorème de représentation suivant a été énoncé [50] :

### **Théorème 4.3**

Soit  $\circ$  un opérateur de révision vérifiant les postulats (KM'1) à (KM'6). Cet opérateur de révision satisfait les postulats (DP1) à (DP4) si et seulement si il existe une assignation fidèle qui associe à  $\Psi$  un préordre total  $\leq_{\Psi}$  et une assignation fidèle qui associe à  $\Psi \circ \mu$  un préordre total  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  tels que :

- (Ip1) si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \in Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
- (Ip2) si  $\omega \notin Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
- (Ip3) si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega <_{\Psi} \omega'$  implique  $\omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
- (Ip4) si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  implique  $\omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ .

(Ip1) (resp. (Ip2)) stipule que l'ordre relatif entre les modèles (resp. contre-modèles) de  $\mu$  est préservé. Le postulat (Ip3) signifie que si un modèle de  $\mu$  est strictement préféré à un contre-modèle de  $\mu$  alors cette préférence est préservée. Le postulat (Ip4) est similaire et stipule que si un modèle de  $\mu$  est préféré à un contre-modèle de  $\mu$ , cette préférence est préservée après la révision.

## **4.4.2 Quelques opérateurs**

Nous présentons quelques opérateurs de révision itérée : la révision naturelle [38], la révision ordinale [194] et la révision possibiliste [64].

D'autres approches pour la révision itérée ont été proposées comme les opérations de révision avec mémoire [118], les opérations de révision à *renforcement* [33, 112] et les opérations d'*amélioration* [119].

### **4.4.2.1 La révision naturelle**

Sémantiquement, un état épistémique  $\Psi$  est représenté par un préordre total sur les interprétations  $\mathcal{W}$ , noté  $\leq_{\Psi}$ . L'ensemble des croyances courantes de l'état épistémique est noté  $Bel(\Psi)$  et est tel que :  $Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi})$ .

La révision naturelle a été proposée par Boutilier dans [38]. Elle consiste à préférer les meilleurs modèles de  $\mu$  à toutes les autres interprétations. L'opération de révision naturelle, noté  $\circ_n$  est définie comme suit :

#### **Définition 4.11**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $\leq_{\Psi}$  un préordre total sur les interprétations  $\mathcal{W}$  et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Alors l'état épistémique  $\Psi$  révisé, noté  $\Psi \circ_n \mu$ , est représenté par un préordre total  $\leq_{\Psi \circ_n \mu}$  sur les interprétations tel que :

- (i) si  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$ , et  $\omega' \notin \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  alors  $\omega \leq_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  ;
- (ii) si  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  et  $\omega' \in \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  alors  $\omega =_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  ;
- (iii) si  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  et  $\omega' \notin \min(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  alors  $\omega \leq_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  si et seulement si  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$ .

L'opération de révision naturelle  $\circ_n$  satisfait les postulats (KM'1)-(KM'6) ainsi que les postulats (DP1)-(DP4).

#### 4.4.2.2 La révision ordinale

La révision ordinale, initialement introduite par [194], a été également développée par [203, 204] et [161].

L'état épistémique  $\Psi$  est représenté par une fonction conditionnelle ordinale  $\kappa_{\Psi}$ . Cette fonction associée à chaque interprétation de  $\mathcal{W}$  un ordinal : 0 représente la situation la plus certaine et  $+\infty$  représente une situation impossible. L'ensemble des croyances courantes de l'état épistémique est noté  $Bel(\Psi)$  et est tel que :  $Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega \in \mathcal{W} : \kappa_{\Psi}(\omega) = 0\}$ .

L'opération de révision ordinale, noté  $\circ_{\mathbb{N}}$  utilise une opération de translation, notée  $\kappa_{\mu, m}(\omega)$  qui associe à chaque interprétation un nouvel ordinal qui dépend de la formule  $\mu$  et de l'ordinal  $m$  qui exprime la certitude de la nouvelle information  $\mu$ . Nous avons  $\kappa(\mu) = \min\{\kappa(\omega) : \omega \models \mu\}$ . Formellement,

$$\kappa_{\mu, m}(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(\mu) & \text{si } \omega \in Mod(\mu) \\ \kappa(\omega) - \kappa(\neg\mu) + m & \text{si } \omega \notin Mod(\mu) \end{cases}$$

L'ordre relatif entre les modèles (resp. les contre-modèles) de  $\mu$  est préservé. L'opération de révision ordinale  $\circ_{\mathbb{N}}$  est alors définie comme suit :

#### Définition 4.12

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par une fonction conditionnelle ordinale  $\kappa_{\Psi}$  et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Alors l'état épistémique  $\Psi$  révisé, noté  $\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu$ , est représenté par une nouvelle fonction conditionnelle ordinale, notée  $\kappa_{\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu}$ , telle que :

$$\kappa_{\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu}(\omega) = \begin{cases} \kappa_{\Psi}(\omega) - \kappa_{\Psi}(\mu) & \text{si } \omega \in Mod(\mu) \\ \kappa_{\Psi}(\omega) + 1 & \text{si } \omega \notin Mod(\mu) \end{cases}$$

Mais, qualitativement parlant, représenter les situations impossibles et la relation de translation  $\kappa_{\neg\mu, m}(\omega)$  est impossible. Dans [161], O. Papini utilise une opération de révision dérivée de l'opération de révision ordinale. Cette opération est appelée opération de révision ordinale drastique, est noté  $\circ_{\triangleright}$  et est égale à  $\kappa_{\neg\mu, m}(\omega)$  où  $m = \max\{\kappa(\omega) : \omega \models \mu\} - \kappa(\mu) + 1$ . Formellement, l'opération de révision  $\circ_{\triangleright}$  est définie comme suit :

**Définition 4.13**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $\leq_{\Psi}$  un préordre total sur les interprétations  $\mathcal{W}$  et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Alors l'état épistémique  $\Psi$  révisé, noté  $\Psi \circ_{\triangleright} \mu$ , est représenté par un préordre total  $\leq_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}$  sur les interprétations tel que :

- (i) si  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$ , et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \leq_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega'$  ;
- (ii) si  $\omega \notin \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \leq_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega'$  ;
- (iii) si  $\omega \notin \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega <_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu} \omega'$ .

L'ordre relatif entre les modèles (resp. les contre-modèles) de  $\mu$  est préservé et les modèles de  $\mu$  sont préférés aux contre-modèles de  $\mu$ .

L'opération de révision ordinaire drastique  $\circ_{\triangleright}$  satisfait les postulats (KM'1)-(KM'6) ainsi que les postulat (DP1)-(DP4).

**4.4.2.3 La révision possibiliste**

Nous présentons maintenant la révision possibiliste introduite par Dubois et Prade [64, 65]. L'intégration de la nouvelle information s'appuie sur le *conditionnement possibiliste*. Ce conditionnement consiste à modifier la distribution de possibilité initiale lors de l'ajout de la nouvelle information. L'état épistémique  $\Psi$  d'un agent est représenté par une distribution de possibilité  $\pi$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  tel que  $\pi(\omega) = 1$  signifie que  $\omega$  est totalement possible alors que  $\pi(\omega) = 0$  signifie que  $\omega$  est totalement impossible. Dans le cadre de la révision possibiliste, la nouvelle information, notée  $\mu$ , est considérée comme totalement certaine. Ainsi, l'ordre relatif entre les modèles de  $\mu$  sera conservé alors que les contre-modèles de  $\mu$  seront considérés comme impossibles. L'opérateur de révision possibiliste s'appuie sur le conditionnement possibiliste, différents conditionnements ont été définis comme celui basé sur le minimum :

$$\pi(\omega|_{\min}\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\mu) \text{ et } \omega \in \text{Mod}(\mu); \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\mu) \text{ et } \omega \in \text{Mod}(\mu); \\ 0 & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$

avec  $\Pi(\mu) = \max\{\pi(\omega) : \omega \models \mu\}$ . La valeur 1 est attribuée aux modèles de  $\mu$  préférés, les autres modèles de  $\mu$  conservent leur valeur. Les contre-modèles de  $\mu$  étant considérés comme impossibles, la valeur 0 leur est donnée.

L'opérateur de révision possibiliste basé sur ce conditionnement est défini comme suit :

**Définition 4.14**

Soit  $\Psi$  l'état épistémique d'un agent représenté par une distribution de possibilité  $\pi$ .

L'état épistémique  $\Psi$  révisé par une nouvelle information  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\pi, \min} \mu$ , est représenté par une distribution de possibilité, notée  $\pi_{\Psi \circ_{\pi, \min} \mu}(\omega)$  et telle que :

$$\pi_{\Psi \circ_{\pi, \min} \mu}(\omega) = \pi(\omega|_{\min}\mu).$$

## 4.5 Révision d'états épistémiques représentés par des préordres partiels

Nous avons présenté dans les sections précédentes différentes méthodes de révision d'états épistémiques représentés par des bases de croyances non ordonnées ou totalement préordonnées. Cependant, nous ne disposons pas toujours d'un préordre total sur ces croyances et il est seulement possible de représenter l'état épistémique par un préordre partiel.

Les postulats KM ne sont pas adaptés pour les opérateurs de révision d'état épistémique représenté par un préordre partiel c'est pourquoi les postulats sont reformulés dans [24]. Cette reformulation fait l'objet de la section suivante.

### 4.5.1 Les postulats KM révisés

Un ensemble de postulats qu'une opération  $\circ$  doit satisfaire est proposé dans [24] ainsi qu'un théorème de représentation tel que  $Mod(Bel(\Psi \circ \mu)) = min(Mod(\mu), \preceq_\Psi)$  dans le cadre d'informations partiellement préordonnées.

Nous rappelons les postulats proposés dans [24] :

- (P1)  $Bel(\Psi \circ \mu) \models \mu$ ;
- (P2)  $Bel(\Psi \circ \top) \equiv Bel(\Psi)$ ;
- (P3) si  $\mu$  est satisfaisable, alors  $Bel(\Psi \circ \mu)$  l'est aussi;
- (P4) si  $\Psi_1 = \Psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $Bel(\Psi_1 \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi_2 \circ \mu_2)$ ;
- (P5)  $Bel(\Psi \circ \mu) \wedge \varphi \models Bel(\Psi \circ (\mu \wedge \varphi))$ ;
- (P6) si  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \models \mu_2$  et  $Bel(\Psi \circ \mu_2) \models \mu_1$  alors  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \equiv Bel(\Psi \circ \mu_2)$ ;
- (P7)  $Bel(\Psi \circ \mu_1) \wedge Bel(\Psi \circ \mu_2) \models Bel(\Psi \circ (\mu_1 \vee \mu_2))$ .

Les postulats (P1), (P3) et (P5) correspondent aux postulats KM (KM1), (KM3) et (KM5). Le postulat (KM2) est remplacé par le postulat (P2) qui exprime le fait que les croyances courantes de l'agent ne doivent pas changer dans le cas où la nouvelle information à ajouter est une tautologie. Le postulat (KM4) est remplacé par le postulat (P4) proposé par [50], il est affaibli comme dans le cas de la révision itérée. (P4) signifie que l'égalité entre les états épistémiques est nécessaire tandis que (KM4) nécessitent l'équivalence entre les ensembles de croyances.

Deux affaiblissements de (KM2) peuvent être dérivés de cet ensemble de postulats :

- (P'<sub>2</sub>)  $Bel(\Psi) \wedge \mu \models Bel(\Psi \circ \mu)$
- (P<sub>2w</sub>) si  $Bel(\Psi) \models \mu$  alors  $Bel(\Psi \circ \mu) \equiv Bel(\Psi) \wedge \mu$

Un théorème de représentation se basant sur la notion d'assignation P-fidèle est proposé dans [24]. En effet, la notion d'assignation fidèle n'étant pas appropriée pour les préordres partiels, cette définition est étendue aux préordres partiels par l'assignation P-fidèle dans [24]. Soit  $\Psi$  un état épistémique et  $Bel(\Psi)$  l'ensemble des croyances correspondantes,  $\Psi$  est représenté par un préordre partiel sur les interprétations, noté  $\preceq_\Psi$  tel que  $Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi)$ . Formellement,

**Définition 4.15**

Soit  $\Psi$  un état épistémique représenté par un préordre partiel sur les interprétations.

$\preceq_{\Psi}$  est une **assignation P-fidèle** si et seulement si

- (i) si  $\omega \models \text{Bel}(\Psi)$  et  $\omega' \models \text{Bel}(\Psi)$  alors  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  est impossible,
- (ii) si  $\omega' \not\models \text{Bel}(\Psi)$ , alors il existe  $\omega$  tel que  $\omega \models \text{Bel}(\Psi)$  et  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$ ,
- (iii) si  $\Psi = \Phi$  alors  $\preceq_{\Psi} = \preceq_{\Phi}$ .

Le théorème de représentation défini dans [24] précise qu'un opérateur de révision satisfait les postulats révisés si et seulement si il existe une assignation P-fidèle qui associe à chaque état épistémique un préordre partiel et tel que les éléments minimaux pour ce préordre sont les modèles de l'ensemble de croyances de l'état épistémique révisé. Plus formellement,

**Théorème 4.4**

Un opérateur de révision satisfait les postulats (P1) à (P7) si et seulement si il existe une assignation P-fidèle qui associe à chaque état épistémique  $\Psi$  un préordre partiel  $\preceq_{\Psi}$  tel que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi})$ .

**4.5.2 Caractérisation des postulats de Darwiche et Pearl pour des préordres partiels**

Une caractérisation des postulats de Darwiche et Pearl lorsque les états épistémiques sont représentés par des préordres partiels a été proposée dans [24]. Ils se restreignent aux opérateurs de révision itérée qui satisfont les postulats (P1) à (P7). Soit  $\circ$  un opérateur de révision et  $\preceq_{\Psi}$  son assignation P-fidèle associée. La caractérisation de (DP1) à (DP4) est définie par les propriétés suivantes :

- (Ip<sub>1</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \models \mu$  alors  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ;
- (Ip<sub>2</sub>) si  $\omega \not\models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ;
- (Ip<sub>3</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ;
- (Ip<sub>4</sub>) si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega \preceq_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \preceq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ ;

(Ip<sub>1</sub>) (resp. (Ip<sub>2</sub>)) stipule que l'ordre strict relatif entre les modèles (resp. contre-modèles) de  $\mu$  est préservé. Le postulat (Ip<sub>3</sub>) signifie que si un modèle de  $\mu$  est strictement préféré à un contre-modèle de  $\mu$  alors cette préférence est préservée. Le postulat (Ip<sub>4</sub>) est similaire à (Ip<sub>3</sub>) pour la préférence non stricte.

Les auteurs fournissent également à partir de cette caractérisation un théorème de représentation :

**Théorème 4.5**

Soit un opérateur de révision satisfaisant les postulats (P1) à (P7). Alors,

- (1)  $\circ$  satisfait (DP1) si et seulement si l'assignation fidèle satisfait (Ip<sub>1</sub>);
- (2)  $\circ$  satisfait (DP2) si et seulement si l'assignation fidèle satisfait (Ip<sub>2</sub>);
- (3)  $\circ$  satisfait (DP3) si et seulement si l'assignation fidèle satisfait (Ip<sub>3</sub>);

(4) si l'assignation fidèle associée à  $\circ$  satisfait  $(Ip_4)$  alors  $\circ$  satisfait  $(DP_4)$ .

La caractérisation du postulat (3) est identique à celle proposée par Darwiche et Pearl [50].

Enfin, deux postulats alternatifs ont été proposés [24] afin de capturer d'autres formes de révision de croyances itérée.

Le premier postulat exprime que si un état épistémique  $\Psi$  est révisé par une formule  $\mu$  puis par son contraire  $\neg\mu$ , alors les croyances initiales sont ignorées :

$$(C_{Cond}) \quad Bel((\Psi \circ \mu) \circ \neg\mu) \equiv \mu$$

La caractérisation de ce postulat est la suivante :

#### **Théorème 4.6**

Un opérateur de révision  $\circ$  satisfait les postulats  $(P1)$  à  $(P7)$  et  $(C_{Cond})$  si et seulement si l'assignation  $P$ -fidèle qui associe à l'état épistémique révisé  $\Psi \circ \mu$  un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  est tel que si  $\omega \models \neg\mu$  et  $\omega' \models \neg\mu$  alors nous n'avons ni  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ni  $\omega' \prec_{\Psi \circ \mu} \omega$ .

Le deuxième postulat alternatif concerne les relations entre les modèles et les contre-modèles d'une nouvelle information  $\mu$ .

$$(C_{lex}) \quad \text{Si } \alpha \text{ n'est pas contradictoire, } \alpha \models \mu \text{ et } \beta \models \mu \text{ alors } Bel((\Psi \circ \mu) \circ (\alpha \vee \beta)) \equiv Bel(\Psi \circ \alpha)$$

La caractérisation de ce postulat est la suivante :

#### **Théorème 4.7**

Un opérateur de révision  $\circ$  satisfait les postulats  $(P1)$  à  $(P7)$  et  $(C_{lex})$  si et seulement si l'assignation  $P$ -fidèle qui associe à l'état épistémique  $\Psi$  un préordre partiel  $\preceq_{\Psi}$  et à l'état épistémique révisé  $\Psi \circ \mu$  un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \circ \mu}$  est tel que

- si  $\omega, \omega' \models \mu$  alors  $\omega \prec_{\Psi} \omega'$  si et seulement si  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
- si  $\omega \models \mu$  et  $\omega' \not\models \mu$  alors  $\omega \prec_{\Psi \circ \mu} \omega'$ .

Les opérateurs de révision qui satisfont  $(C_{lex})$  sont tels que les modèles de la nouvelle information sont strictement préférés aux contre-modèles et l'ordre relatif entre les modèles de  $\mu$  est préservé.

### **4.5.3 Quelques opérateurs**

Sylvain Lagrue propose dans [124] d'étendre la révision ordinaire drastique ainsi que la révision possibiliste dans le cas d'états épistémiques représentés par des bases de croyances partiellement préordonnées. Pour chacune de ses extensions, nous rappelons l'approche sémantique puis l'approche syntaxique.

#### **4.5.3.1 Extension de la révision ordinaire drastique**

L'opérateur de révision ordinaire drastique vise à préférer tous les modèles de la nouvelle information à ses contre-modèles et de conserver respectivement l'ordre relatif entre les modèles et entre les contre-modèles.

**Approche sémantique** Sémantiquement, un état épistémique  $\Psi$  d'un agent est représenté par un préordre partiel  $\preceq_\Psi$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . La révision de  $\Psi$  par une formule  $\mu$  conduit à un nouvel état épistémique, noté  $\Psi \bullet_\triangleright \mu$  et représenté par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_\triangleright \mu}$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . La révision ordinaire drastique est définie sémantiquement comme suit :

**Définition 4.16**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $\preceq_\Psi$  un préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$  et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Alors l'état épistémique  $\Psi$  révisé, noté  $\Psi \bullet_\triangleright \mu$ , est représenté par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_\triangleright \mu}$  sur les interprétations tel que :

- (i) si  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega \preceq_{\Psi \bullet_\triangleright \mu} \omega'$  si et seulement si  $\omega \preceq_\Psi \omega'$  ;
- (ii) si  $\omega \notin \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega \preceq_{\Psi \bullet_\triangleright \mu} \omega'$  si et seulement si  $\omega \preceq_\Psi \omega'$  ;
- (iii) si  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega \prec_{\Psi \bullet_\triangleright \mu} \omega'$ .

L'ensemble des croyances de l'agent après révision est :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_\triangleright \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_\Psi).$$

D'après [24], cette opération de révision  $\circ_\triangleright$  satisfait le postulat ( $C_{lex}$ ).

**Approche syntaxique** Du point de vue syntaxique, l'état épistémique  $\Psi$  est représenté par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur ces formules. La révision ordinaire drastique syntaxique conduit à une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_\triangleright \mu, \preceq_{\Sigma \circ_\triangleright \mu})$  et est définie comme suit :

**Définition 4.17**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  une formule propositionnelle. Soit  $U$  l'ensemble des disjonctions possibles entre  $\Sigma$  et  $\mu$  qui n'aboutissent pas à des tautologies.

Alors la révision de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  par  $\mu$  conduit à une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_\triangleright \mu, \preceq_{\Sigma \circ_\triangleright \mu})$  telles que  $\Sigma \circ_\triangleright \mu = \Sigma \cup U \cup \mu$  et  $\preceq_{\Sigma \circ_\triangleright \mu}$  est défini par :

- (i)  $\forall \varphi \vee \mu \in U$  et  $\varphi \in \Sigma$ ,  $\varphi \vee \mu \prec_{\Sigma \circ_\triangleright \mu} \mu$  ;
- (ii)  $\forall \varphi \in \Sigma$ ,  $\mu \prec_{\Sigma \circ_\triangleright \mu} \varphi$  ;
- (iii)  $\forall \varphi, \varphi' \in \Sigma$ ,  $\varphi \preceq_\Sigma \varphi'$  si et seulement si  $\varphi \preceq_{\Sigma \circ_\triangleright \mu} \varphi'$  ;
- (iv)  $\forall \varphi \vee \mu \in U$  et  $\varphi' \vee \mu \in U$ ,  $\varphi \preceq_\Sigma \varphi'$  si et seulement si  $\varphi \vee \mu \preceq_{\Sigma \circ_\triangleright \mu} \varphi' \vee \mu$ .

Lagrange [124] propose une approche syntaxique pour le calcul de l'ensemble des croyances courantes de l'agent  $\text{Bel}(\Psi \circ_\triangleright \mu)$ . Cette approche s'appuie sur la construction d'un préordre partiel  $\preceq_w$  sur les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$  à partir du comparateur faible, défini en section 2.2.3.2.

**Définition 4.18**

Soient  $B_1, B_2 \in CONS(\Sigma)$ .

- $B_1 \preceq_w B_2$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B_2) \preceq_w^i (\Sigma \setminus B_1)$ .
- $B_1 \prec_w B_2$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B_2) \prec_w^i (\Sigma \setminus B_1)$ .

L'ensemble des sous-bases cohérentes préférées de  $\Sigma$  pour le comparateur faible est noté  $CONS_w(\Sigma)$  plus précisément  $CONS_w(\Sigma) = \min(CONS(\Sigma), \preceq_w)$ .

L'ensemble des croyances courantes de l'agent  $Bel(\Psi \circ_{\triangleright} \mu)$  est tel que

$$Bel(\Psi \circ_{\triangleright} \mu) = \bigvee_{B \in CONS_w(\Sigma)} Cons(B).$$

**4.5.3.2 Extension de la révision possibiliste**

L'opérateur de révision possibiliste consiste à préférer tous les modèles de la nouvelle information à ses contre-modèles, de préserver l'ordre relatif entre les modèles et de considérer tous les contre-modèles au même niveau, autrement dit aussi "mauvais".

**Approche sémantique** D'un point de vue sémantique, l'état épistémique  $\Psi$  d'un agent est représenté par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi}$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . La révision possibiliste de  $\Psi$  par une formule  $\mu$  conduit à un nouvel état épistémique, noté  $\Psi \bullet_{\pi} \mu$  et représenté par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu}$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . La révision possibiliste est définie sémantiquement comme suit :

**Définition 4.19**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $\preceq_{\Psi}$  un préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$  et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Alors l'état épistémique  $\Psi$  révisé, noté  $\Psi \bullet_{\pi} \mu$ , est représenté par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu}$  sur les interprétations tel que :

- (i) si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \in Mod(\mu)$  alors  $\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu} \omega'$  si et seulement si  $\omega \preceq_{\Psi} \omega'$  ;
- (ii) si  $\omega \notin Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega =_{\Psi \bullet_{\pi} \mu} \omega'$  ;
- (iii) si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega \prec_{\Psi \bullet_{\pi} \mu} \omega'$ .

L'ensemble des croyances de l'agent après révision est :

$$Mod(Bel(\Psi \bullet_{\pi} \mu)) = \min(Mod(\mu), \preceq_{\Psi}).$$

D'après [24], cette opération de révision  $\circ_{\pi}$  satisfait les postulats (P1) - (P7), (DP1), (DP3) - (DP4) et ( $C_{Cond}$ ).

**Approche syntaxique** L'état épistémique  $\Psi$  est représenté syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_{\Sigma}$  un préordre partiel sur ces formules. La révision possibiliste syntaxique conduit à une nouvelle bases de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_{\pi} \mu, \preceq_{\Sigma \circ_{\pi} \mu})$  et est définie comme suit :

**Définition 4.20**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  une formule propositionnelle. Alors la révision de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  par  $\mu$  conduit à une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_\pi \mu, \preceq_{\Sigma \circ_\pi \mu})$  telles que  $\Sigma \circ_\pi \mu = \Sigma \cup \mu$  et  $\preceq_{\Sigma \circ_\pi \mu}$  est défini par :

- (i)  $\forall \varphi \in \Sigma, \mu \prec_{\Sigma \circ_\pi \mu} \varphi$  ;
- (ii)  $\forall \varphi, \varphi' \in \Sigma, \varphi \preceq_\Sigma \varphi'$  si et seulement si  $\varphi \preceq_{\Sigma \circ_\pi \mu} \varphi'$ .

L'approche syntaxique pour le calcul de l'ensemble des croyances courantes de l'agent  $Bel(\Psi \circ_\pi \mu)$  est similaire à celle décrite 4.5.3.1.



Troisième partie

Raisonnement à partir  
d'informations partiellement  
préordonnées



## Chapitre 5

# Restauration de la cohérence par R-ensembles

Nous avons présenté dans les chapitres précédents plusieurs raisonnements à partir d'informations non ordonnées ou totalement préordonnées. Cependant, un agent ne dispose pas toujours d'informations totalement préordonnées. Il est parfois seulement possible de définir un préordre partiel entre les informations. En effet, dans les cas d'ignorance partielle ou d'information incomplète, le préordre partiel nous permet d'éviter de comparer des informations qui n'ont aucun rapport entre elles. Dans certaines applications l'utilisation d'un préordre partiel entre les informations est également plus appropriée. Par exemple, dans le cadre de l'archéologie, les informations utilisées par les archéologues sont structurées et hiérarchisées, un préordre partiel est donc bien adapté. De plus, ces informations se composent d'un ensemble de connaissances génériques ainsi que d'observations sur des objets. La confrontation de ces deux types d'informations peut conduire à des incohérences. Et il est donc nécessaire de restaurer la cohérence.

La plupart des approches de restauration de la cohérence dans la littérature s'expriment en termes de sous-bases de croyances maximales cohérentes. Ces approches adoptent le point de vue de maximisation de la cohérence. Lorsque l'incohérence provient de peu de formules, il semble assez naturel de pointer les incohérences plutôt que d'essayer de construire les sous-ensembles maximaux cohérents. Ces approches adoptent le point de vue de la minimisation de l'incohérence. Parmi elles, nous avons présenté en section [4.3.2.2](#) l'approche des R-ensembles qui consiste à minimiser les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence. Par ailleurs, cette approche dispose d'une mise en oeuvre utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre l'approche des R-ensembles à la restauration de la cohérence d'un état épistémique. Pour cela, nous considérons un état

épistémique  $\Psi$  représenté syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur les formules de  $\Sigma$ . A cet état épistémique correspond un ensemble de croyances noté  $Bel(\Psi)$  qui représente les croyances courantes de l'agent. Nous pouvons définir une contre-partie sémantique à la restauration de la cohérence d'un état épistémique. Sémantiquement, nous représentons l'état épistémique  $\Psi$  par un préordre partiel  $\preceq_\Psi^C$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$  et l'ensemble des croyances associées à l'état épistémique  $\Psi$  est tel que :

$$Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^C)$$

La figure 5.1 illustre la restauration de la cohérence d'un état épistémique.

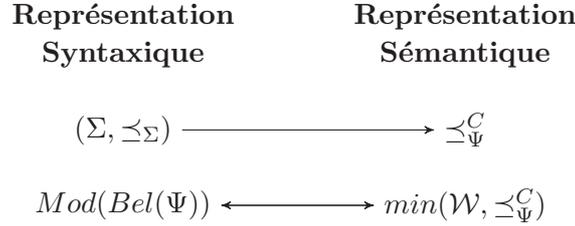


FIG. 5.1 – Restauration de la cohérence d'un état épistémique  $\Psi$

Notre approche consiste à déterminer  $Bel(\Psi)$  l'ensemble des croyances courantes de l'agent. Pour cela, nous devons déterminer les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence de l'état épistémique représenté syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées. Le nombre de sous-ensembles de formules susceptibles d'être retirés pour restaurer la cohérence peut être rapidement élevé, nous nous appuyons sur un mécanisme de sélection appelé comparateur. Les comparateurs ont été définis dans le cas de la maximisation de la cohérence. Nous reformulons le préordre sur les sous-ensembles de façon à préférer les sous-ensembles de formules à retirer. Cette reformulation fait l'objet de la section suivante.

## 5.1 Comparateurs

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur les formules de  $\Sigma$ . Nous nous plaçons dans le cadre où  $\Sigma$  est incohérent. Afin de sélectionner certaines sous-bases, nous avons besoin de définir une relation de préférence sur les sous-bases cohérentes de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  à partir du préordre partiel  $\preceq_\Sigma$  sur les formules de  $\Sigma$ . Il existe différentes méthodes pour comparer des sous-ensembles de formules mais elles ne sont pas toutes adaptées pour les bases de croyances partiellement préordonnées comme la méthode élitiste et la méthode démocratique [124]. Dans le chapitre 3, nous présentons deux comparateurs : le comparateur fort et le comparateur faible. L'étude menée dans [124] montre que

l'utilisation du compérateur faible est plus intéressante que celle du compérateur fort. C'est pourquoi nous présentons tout d'abord la reformulation du compérateur faible. Une autre méthode consiste à utiliser la préférence lexicographique. Nous présentons ensuite le compérateur lexicographique.

### 5.1.1 Compérateur faible

Nous reformulons le compérateur défini par S. Lagrue [124] et rappelé en section 2.2.3.2 qui a été introduit par Lewis [131] et repris par Halpern [98]. Nous adoptons un point de vue dual c'est-à-dire que nous ne cherchons pas à conserver le maximum de formules pour restaurer la cohérence mais nous voulons retirer le moins de formules possibles. Nous allons donc préférer les sous-ensembles de formules que nous allons retirer. Pour définir un préordre partiel sur les sous-ensembles de  $\Sigma$ , nous considérons que  $Y$  est préféré à  $X$  si pour tous les éléments  $y$  de  $Y$ , il existe au moins un élément  $x$  de  $X$  qui est préféré à  $y$ , formellement :

#### Définition 5.1

Soit  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

$Y$  est “**faiblement**” préféré à  $X$ , noté  $Y \preceq_w X$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$ .

#### Exemple 5.1

Soient  $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6\}$  telle que  $\phi_1 \prec_\Sigma \phi_2$ ,  $\phi_1 \prec_\Sigma \phi_3$ ,  $\phi_2 \prec_\Sigma \phi_3$ ,  $\phi_4 \prec_\Sigma \phi_5$ ,  $\phi_6 \prec_\Sigma \phi_5$  et  $\phi_5 =_\Sigma \phi_6$ . Cette situation est représentée par la figure 5.2.

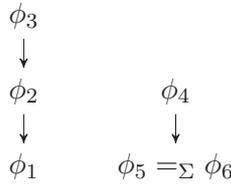


FIG. 5.2 – Représentation de  $\preceq_\Sigma$

$\phi_1 \leftarrow \phi_2$  signifie  $\phi_1 \prec_\Sigma \phi_2$ . Soient  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_2, \phi_4, \phi_6\}$ . Nous avons  $Y \preceq_w X$  car  $\phi_1 \preceq_\Sigma \phi_2$ ,  $\phi_5 \preceq_\Sigma \phi_4$  et  $\phi_5 \preceq_\Sigma \phi_6$ .

Comme l'a montré Sylvain Lagrue [124] dans la proposition suivante, nous pouvons nous contenter de comparer les éléments minimaux par rapport au préordre partiel initial des sous-ensembles de formules :

#### Proposition 5.1

Soit  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

$Y \preceq_w X$  si et seulement si  $\forall y \in \min(Y, \prec_\Sigma), \exists x \in \min(X, \prec_\Sigma)$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$ .

**Preuve :**

- Montrons que  $Y \triangleleft_w X$  implique que  $\forall y \in \min(Y, \prec_\Sigma), \exists x \in \min(X, \prec_\Sigma)$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$ .  
 $Y \triangleleft_w X$  implique que  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$ . Soit  $y_0 \in \min(Y, \prec_\Sigma)$  alors  $\exists x_0 \in X$  tel que  $x_0 \preceq_\Sigma y_0$ . Nous avons alors deux possibilités :
  - Soit  $x_0 \in \min(X, \prec_\Sigma)$  et la condition est remplie.
  - Soit  $x_0 \notin \min(X, \prec_\Sigma)$  et  $\exists x_1 \in \min(X, \prec_\Sigma)$  tel que  $x_1 \prec_\Sigma x_0$ . Par transitivité, on a  $x_1 \prec_\Sigma y_0$ .
- Montrons que  $\forall y \in \min(Y, \prec_\Sigma), \exists x \in \min(X, \prec_\Sigma)$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$  implique que  $Y \triangleleft_w X$ .  
 Soit  $y \in Y$ . Nous avons alors deux possibilités :
  - Si  $y \in \min(Y, \prec_\Sigma)$  alors  $\exists x \in \min(X, \prec_\Sigma)$  et donc dans  $X$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$ .
  - Sinon  $y \notin \min(Y, \prec_\Sigma)$ , donc  $\exists y_0 \in \min(Y, \prec_\Sigma)$  tel que  $y_0 \prec_\Sigma y$ .  $\exists x_0 \in \min(X, \prec_\Sigma)$  tel que  $x_0 \prec_\Sigma y_0$ . Par transitivité, on a  $x_0 \prec_\Sigma y$ .

■

**Exemple 5.2**

Si nous reprenons l'exemple 5.1, nous avons  $\min(X, \prec_\Sigma) = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $\min(Y, \prec_\Sigma) = \{\phi_2, \phi_6\}$ . Nous avons bien  $Y \triangleleft_w X$  puisque  $\phi_1 \preceq_\Sigma \phi_2$  et  $\phi_5 \preceq_\Sigma \phi_6$ .

Sylvain Lagrue dans [124] propose également de définir le comparateur strict  $\triangleleft_w$  associé à  $\triangleleft_w$  ainsi que  $=_w$ .

**Définition 5.2**

$Y$  est **strictement préféré** à  $X$ , noté  $Y \triangleleft_w X$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \prec_\Sigma y$ .

**Exemple 5.3**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.1. Soient  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_2, \phi_4\}$ . Nous avons  $Y \triangleleft_w X$  car  $\phi_1 \prec_\Sigma \phi_2$ ,  $\phi_5 \prec_\Sigma \phi_4$ .

**Définition 5.3**

Il n'y a pas de préférence entre  $X$  et  $Y$ , noté  $X =_w Y$  si et seulement si  $X \triangleleft_w Y$  et  $Y \triangleleft_w X$ .

**Exemple 5.4**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.1. Si  $X = \{\phi_1, \phi_6\}$  et  $Y = \{\phi_1, \phi_5\}$ , nous avons  $X =_w Y$  car

- $X \triangleleft_w Y$  :  $\phi_1 \preceq_\Sigma \phi_1$  et  $\phi_5 \preceq_\Sigma \phi_6$ .
- $Y \triangleleft_w X$  :  $\phi_1 \preceq_\Sigma \phi_1$  et  $\phi_6 \preceq_\Sigma \phi_5$ .

Nous pouvons également définir l'incomparabilité :

**Définition 5.4**

$X$  et  $Y$  sont **incomparables**, noté  $X \sim_w Y$  si et seulement si  $X \not\triangleleft_w Y$  et  $Y \not\triangleleft_w X$ .

**Exemple 5.5**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.1. Si  $X = \{\phi_2, \phi_3, \phi_6\}$  et  $Y = \{\phi_4, \phi_1\}$ , nous avons  $X \sim_w Y$ .

### 5.1.2 Compérateur lexicographique

Une autre façon de comparer des sous-ensembles de formules est d'utiliser la préférence lexicographique définie dans [207, 208, 209] lors d'une collaboration avec S. Benferhat, S. Lagrue et S. Yahi du CRIL à Lens. Nous adoptons également un point de vue dual puisque que nous ne cherchons pas à conserver le maximum de formules pour restaurer la cohérence mais nous voulons retirer le moins de formules possible. Nous allons donc préférer les sous-ensembles de formules que nous allons retirer.

Dans un premier temps, nous partitionnons  $\Sigma$  de la façon suivante :  
 $\Sigma = E_1 \cup \dots \cup E_n$  ( $n \geq 1$ ) tel que :

- (i)  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , nous avons  $\forall \varphi, \varphi' \in E_i : \varphi =_{\Sigma} \varphi'$  ;
- (ii)  $\forall i, 1 \leq i \leq n, \forall j, 1 \leq j \leq n$  avec  $i \neq j$ , nous avons  $\forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \neq_{\Sigma} \varphi'$ .

Chaque sous-ensemble  $E_i$  représente une classe d'équivalence de  $\Sigma$  selon la relation d'équivalence  $=_{\Sigma}$  c'est-à-dire qu'il n'y a pas de préférence entre les éléments d'une même classe selon le préordre partiel sur les formules de  $\Sigma$ .

Nous définissons ensuite une relation de préférence entre les classes d'équivalence à partir du préordre partiel initial sur les formules de  $\Sigma$ .

#### Définition 5.5

Soit  $E_i$  et  $E_j$  deux classes d'équivalence de  $\Sigma$  selon  $=_{\Sigma}$ . Alors,

- (i)  $E_i \prec_s E_j$  si et seulement si  $\exists \varphi \in E_i, \exists \varphi' \in E_j$  tel que  $\varphi \prec_{\Sigma} \varphi'$ .
- (ii)  $E_i \sim_s E_j$  si et seulement si  $E_i \not\prec_s E_j$  et  $E_j \not\prec_s E_i$ .

Nous remarquons que (i) pourrait se définir de manière équivalente de la façon suivante :

$$E_i \prec_s E_j \text{ si et seulement si } \forall \varphi \in E_i, \forall \varphi' \in E_j : \varphi \prec_{\Sigma} \varphi'.$$

De plus, la relation de préférence entre les classes d'équivalence ainsi définie est un ordre partiel strict.

#### Exemple 5.6

Dans l'exemple 5.1, nous avons cinq classes d'équivalence :  $E_1 = \{\phi_1\}$ ,  $E_2 = \{\phi_2\}$ ,  $E_3 = \{\phi_3\}$ ,  $E_4 = \{\phi_4\}$  et  $E_5 = \{\phi_5, \phi_6\}$ .  $\prec_s$  est illustré par la figure 5.3.

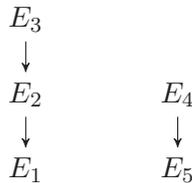


FIG. 5.3 – Représentation de  $\prec_s$

Ce partitionnement en classes d'équivalence ainsi que la relation de préférence sur ces classes d'équivalence nous permet de définir une nouvelle relation de préférence lexicographique entre deux sous-ensembles de formules de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , notée  $\trianglelefteq_\Delta$  :

**Définition 5.6**

Soit  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

$Y$  est **lexicographiquement préférée** à  $X$ , notée  $Y \trianglelefteq_\Delta X$ , si et seulement si  $\forall i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , si  $|E_i \cap Y| > |E_i \cap X|$  alors  $\exists j$ ,  $1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

**Exemple 5.7**

Reprenons l'exemple 5.1 avec  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_2, \phi_4\}$ . Le tableau suivant résume la cardinalité de l'intersection des ensembles  $X$  et  $Y$  avec chacune des classes d'équivalence :

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
$ E_i \cap X $	1	0	0	0	1
$ E_i \cap Y $	0	1	0	1	0

Nous avons  $Y \trianglelefteq_\Delta X$  car

- pour  $i = 2$ , nous avons  $|E_2 \cap Y| > |E_2 \cap X|$  et il existe  $j = 1$  tel que  $|E_1 \cap X| > |E_1 \cap Y|$  et  $E_1 \prec_s E_2$ ;
- pour  $i = 4$ , nous avons  $|E_4 \cap Y| > |E_4 \cap X|$  et il existe  $j = 5$  tel que  $|E_5 \cap X| > |E_5 \cap Y|$  et  $E_5 \prec_s E_4$ .

Nous pouvons également définir le comparateur strict  $\triangleleft_\Delta$  associé à  $\trianglelefteq_\Delta$ .

**Définition 5.7**

$Y$  est **strictement préféré** à  $X$ , noté  $Y \triangleleft_\Delta X$ , si et seulement si  $Y \trianglelefteq_\Delta X$  et  $X \not\trianglelefteq_\Delta Y$ .

**Exemple 5.8**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.1. Soient  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_2, \phi_4\}$ . Nous avons  $Y \triangleleft_\Delta X$  car

- nous avons montré dans l'exemple 5.7 que  $Y \trianglelefteq_\Delta X$  et
- nous avons  $X \not\trianglelefteq_\Delta Y$  puisque
  - pour  $i = 1$ , nous avons  $|E_1 \cap X| > |E_1 \cap Y|$  mais il n'existe pas de  $j$ ,  $1 \leq j \leq 5$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_1$ ;
  - pour  $i = 5$ , nous avons  $|E_5 \cap X| > |E_5 \cap Y|$  mais il n'existe pas de  $j$ ,  $1 \leq j \leq 5$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_5$ .

Nous définissons ensuite  $=_\Delta$ .

**Définition 5.8**

Il n'y a pas de préférence entre  $X$  et  $Y$ , noté  $X =_\Delta Y$ , si et seulement si  $X \trianglelefteq_\Delta Y$  et  $Y \trianglelefteq_\Delta X$ .

$=_\Delta$  peut être définie de manière équivalente par la proposition suivante :

**Proposition 5.2**

$X =_{\Delta} Y$  si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| = |E_i \cap Y|$ .

**Preuve :** Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de formules de  $\Sigma$ .

- Nous montrons que si  $X =_{\Delta} Y$  alors  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| = |E_i \cap Y|$ . Supposons que  $X =_{\Delta} Y$  et  $\exists i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| \neq |E_i \cap Y|$ . On distingue deux cas :
  - Soit  $|E_i \cap X| > |E_i \cap Y|$ . Nous notons  $F = \{E_i, 1 \leq i \leq n \text{ tel que } |E_i \cap Y| > |E_i \cap X|\}$ . Nous avons  $F \neq \emptyset$ . Soit  $E_i \in \min(F, \preceq_s)$ . D'après la définition 5.8, nous avons  $X \trianglelefteq_{\Delta} Y$  et  $Y \trianglelefteq_{\Delta} X$ . D'après la définition 5.6 et  $X \trianglelefteq_{\Delta} Y$  nous savons :  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Y| > |E_j \cap X|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . Mais d'après la définition 5.6 et  $Y \trianglelefteq_{\Delta} X$ ,  $\exists k, 1 \leq k \leq n$  tel que  $|E_k \cap X| > |E_k \cap Y|$  et  $E_k \prec_s E_j$ . De plus,  $E_k \in F$  car  $|E_k \cap X| > |E_k \cap Y|$ . Nous avons  $E_k \prec_s E_j$  et  $E_j \prec_s E_i$ , par transitivité de  $\prec_s$  nous obtenons  $E_k \prec_s E_i$  ce qui contredit l'hypothèse de départ :  $E_i \in \min(F, \preceq_s)$ .
  - Soit  $|E_i \cap Y| > |E_i \cap X|$  : la preuve similaire est similaire au cas précédent.
- Nous montrons ensuite que si  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| = |E_i \cap Y|$  alors  $X =_{\Delta} Y$ . D'après la définition 5.6, nous avons  $X \trianglelefteq_{\Delta} Y$  et  $Y \trianglelefteq_{\Delta} X$  c'est-à-dire  $X =_{\Delta} Y$ .

■

**Exemple 5.9**

Nous considérons l'exemple 5.1 avec  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_1, \phi_6\}$ . Nous avons  $X =_{\Delta} Y$  car nous avons  $\forall i, 1 \leq i \leq 5 : |E_i \cap X| = |E_i \cap Y|$ .

L'incomparabilité entre deux sous-ensembles de formules, noté  $\sim_{\Delta}$ , est définie comme suit :

**Définition 5.9**

$X$  et  $Y$  sont *incomparables*, noté  $X \sim_{\Delta} Y$  si et seulement si  $X \not\trianglelefteq_{\Delta} Y$  et  $Y \not\trianglelefteq_{\Delta} X$ .

**Exemple 5.10**

Reprenons l'exemple 5.1 avec  $X = \{\phi_1, \phi_5\}$  et  $Y = \{\phi_2, \phi_4, \phi_6\}$ . Le tableau suivant résume la cardinalité de l'intersection des ensembles  $X$  et  $Y$  avec chacune des classes d'équivalence :

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
$ E_i \cap X $	1	0	0	0	1
$ E_i \cap Y $	0	1	0	1	1

Nous avons  $Y \trianglelefteq_{\Delta} X$  car nous avons :

- $X \not\trianglelefteq_{\Delta} Y$  :
  - pour  $i = 2$ , nous avons  $|E_2 \cap Y| > |E_2 \cap X|$  et il existe  $j = 1$  tel que  $|E_1 \cap X| > |E_1 \cap Y|$  et  $E_1 \prec_s E_2$ ;
  - pour  $i = 4$ , nous avons  $|E_4 \cap Y| > |E_4 \cap X|$  mais il n'existe pas de  $j$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_4$ ;

- $Y \not\triangleleft_{\Delta} X$  : pour  $i = 1$ , nous avons  $|E_1 \cap Y| > |E_1 \cap X|$  mais il n'existe pas de  $j$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_1$ .

Ce comparateur possède les propriétés suivantes :

**Proposition 5.3**

Soit  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  une base de croyances partiellement préordonnées. Alors,  $\triangleleft_{\Delta}$  est un préordre partiel sur l'ensemble des sous-ensembles de  $\Sigma$ .

**Preuve :** Nous voulons montrer que  $\triangleleft_{\Delta}$  est un préordre partiel sur l'ensemble des sous-ensembles de  $\Sigma$  c'est-à-dire que la relation de préférence  $\triangleleft_{\Delta}$  est réflexive, transitive et qu'elle n'est pas antisymétrique.

- $\triangleleft_{\Delta}$  **est une relation réflexive** : Soit  $X$  un sous-ensemble de formules de  $\Sigma$ . Nous avons :  $\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| = |E_i \cap X|$ . Donc  $X \triangleleft_{\Delta} X$  et  $\triangleleft_{\Delta}$  est une relation réflexive.
- $\triangleleft_{\Delta}$  **est une relation transitive** : Soient  $X, Y$  et  $Z$  des sous-ensembles de formules de  $\Sigma$ . Supposons que

$$\begin{aligned} X \triangleleft_{\Delta} Y \text{ c'est-à-dire } \forall i, 1 \leq i \leq n : \text{ si } |E_i \cap X| > |E_i \cap Y| \text{ alors} \\ \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ tel que } |E_j \cap Y| > |E_j \cap X| \text{ et } E_j \prec_s E_i, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} Y \triangleleft_{\Delta} Z \text{ c'est-à-dire } \forall i, 1 \leq i \leq n : \text{ si } |E_i \cap Y| > |E_i \cap Z| \text{ alors} \\ \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ tel que } |E_j \cap Z| > |E_j \cap Y| \text{ et } E_j \prec_s E_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous voulons montrer que  $X \triangleleft_{\Delta} Z$  c'est-à-dire  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap X| > |E_i \cap Z|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Z| > |E_j \cap X|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . Supposons qu'il n'existe pas de  $j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Z| > |E_j \cap X|$  et  $E_j \prec_s E_i$  c'est-à-dire

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| \leq |E_i \cap Z| \quad (3)$$

Nous pouvons distinguer deux cas :

1.  $|E_j \cap Y| \leq |E_j \cap Z|$  :  
D'après l'hypothèse, nous avons  $|E_i \cap X| > |E_i \cap Y|$ . De plus, d'après (1),  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Y| > |E_j \cap X|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . Nous notons  $F = \{E_j, 1 \leq j \leq n, |E_j \cap Y| > |E_j \cap X| \text{ et } E_j \prec_s E_i\}$ . Nous avons  $F \neq \emptyset$ . Soit  $E_j \in \min(F, \preceq_s)$ . D'après (3), nous avons  $|E_j \cap X| \leq |E_j \cap Z|$  et donc  $|E_j \cap Y| > |E_j \cap Z|$ . Mais d'après (2),  $\exists k, 1 \leq k \leq n$  tel que  $|E_k \cap Z| > |E_k \cap Y|$  et  $E_k \prec_s E_j$ . D'après (3), nous avons  $|E_k \cap X| > |E_k \cap Y|$ . Mais d'après (1),  $\exists l, 1 \leq l \leq n$  tel que  $|E_l \cap Y| > |E_l \cap X|$  et  $E_l \prec_s E_k$ . Nous avons  $E_l \in F$ ,  $E_l \prec_s E_k$  et  $E_k \prec_s E_j$  donc par transitivité de  $\prec_s$ ,  $E_l \prec_s E_j$  ce qui contredit le fait que  $E_j \in \min(F, \preceq_s)$ .
2.  $|E_j \cap Y| > |E_j \cap Z|$  :  
D'après (2),  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Z| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . Nous

notons  $F = \{E_j, 1 \leq j \leq n, |E_j \cap Z| > |E_j \cap Y| \text{ et } E_j \prec_s E_i\}$ . Nous avons  $F \neq \emptyset$ . Soit  $E_j \in \min(F, \preceq_s)$ . D'après (3), nous avons  $|E_j \cap X| \leq |E_j \cap Z|$  et donc  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$ . D'après (1),  $\exists k, 1 \leq k \leq n$  tel que  $|E_k \cap Y| > |E_k \cap X|$  et  $E_k \prec_s E_j$ . D'après (3), nous avons  $|E_k \cap Y| > |E_k \cap Z|$ . Mais d'après (2),  $\exists l, 1 \leq l \leq n$  tel que  $|E_l \cap Z| > |E_l \cap Y|$  et  $E_l \prec_s E_k$ . Nous avons  $E_l \in F$ ,  $E_l \prec_s E_k$  et  $E_k \prec_s E_j$  donc par transitivité de  $\prec_s$ ,  $E_l \prec_s E_j$  ce qui contredit le fait que  $E_j \in \min(F, \preceq_s)$ .

Donc,  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap X| > |E_i \cap Z|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Z| > |E_j \cap X|$  et  $E_j \prec_s E_i$  c'est-à-dire  $X \not\preceq_\Delta Z$ .

- $\preceq_\Delta$  n'est pas une relation antisymétrique : Nous considérons le contre-exemple suivant : soient  $\Sigma = \{\phi, \psi, \varphi, \delta\}$  et  $\preceq_\Sigma$  est défini par  $\phi =_\Sigma \psi$  et  $\varphi =_\Sigma \delta$ ,  $X = \{\phi, \delta\}$  et  $Y = \{\psi, \varphi\}$ . Nous avons  $X \subseteq \Sigma$  et  $Y \subseteq \Sigma$ . De plus, d'après la définition 5.6, nous avons  $X \preceq_\Delta Y$  et  $Y \preceq_\Delta X$  mais  $X$  et  $Y$  ne contiennent pas les mêmes éléments, ils ne sont donc pas identiques c'est-à-dire  $X \neq Y$ . ■

#### Proposition 5.4

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées.  $\preceq_\Delta$  vérifie la propriété de monotonie c'est-à-dire  $\forall X, Y \subseteq \Sigma$ , si  $Y \subseteq X$  alors  $Y \preceq_\Delta X$ .

**Preuve :** Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de formules de  $\Sigma$ . Supposons  $Y \subseteq X$  alors  $\forall k, 1 \leq k \leq n$ ,  $|E_k \cap X| \geq |E_k \cap Y|$  c'est-à-dire  $\nexists i, |E_i \cap Y| > |E_i \cap X|$ . D'après la définition 5.6, nous obtenons  $Y \preceq_\Delta X$ . ■

#### Proposition 5.5

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées.  $\preceq_\Delta$  vérifie la propriété de monotonie "stricte" c'est-à-dire  $\forall X, Y \subseteq \Sigma$ , si  $Y \subset X$  alors  $Y \triangleleft_\Delta X$ .

**Preuve :** Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de formules de  $\Sigma$ . Supposons  $Y \subset X$  alors  $\forall k, 1 \leq k \leq n$ ,  $|E_k \cap X| \geq |E_k \cap Y|$  c'est-à-dire  $\nexists i, |E_i \cap Y| > |E_i \cap X|$ . D'après la définition 5.6, nous obtenons  $Y \preceq_\Delta X$ . De plus comme  $Y \subset X$ , il existe au moins un  $i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap X| > |E_i \cap Y|$  mais il n'existe pas de  $j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap Y| > |E_j \cap X|$  donc  $X \not\preceq_\Delta Y$ . Nous avons donc  $Y \triangleleft_\Delta X$ . ■

Nous présentons dans la section suivante une méthode syntaxique pour le calcul de  $Bel(\Psi)$ .

## 5.2 Approche syntaxique

Nous représentons syntaxiquement l'état épistémique  $\Psi$  par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur les formules de  $\Sigma$ . Nous proposons dans

cette section d'étendre l'approche des R-ensembles à la restauration de la cohérence de bases de croyances partiellement préordonnées afin de calculer  $Bel(\Psi)$ . Notre approche, illustrée par la figure 5.4, consiste à sélectionner certains sous-ensembles de formules de  $\Sigma$  à retirer pour restaurer la cohérence. Pour cela, nous définissons une relation de préférence sur les sous-ensembles de formules de  $\Sigma$  à partir du préordre partiel.

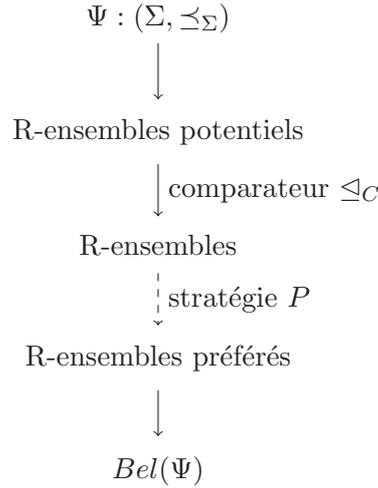


FIG. 5.4 – Restauration de la cohérence par R-ensembles d'un état épistémique

Nous présentons l'exemple utilisé tout au long de ce chapitre.

### Exemple 5.11

Trois experts observent une même amphore. Le premier de ces experts observe que cette amphore a pour typologie  $t_1$  par le biais de photographies sous-marine, de qualités inégales. L'amphore est ensuite remontée à bord et le second expert qui peut alors en observer tous les détails, comme par exemple la composition de la pâte, observe quand à lui que cette amphore a pour typologie  $t_2$ . Ceci se traduit dans le préordre par  $t_2 \prec_{\Sigma} t_1$ . L'amphore est ensuite étudiée en laboratoire par un troisième expert qui effectue des mesures. Il observe alors que la valeur de la hauteur est comprise dans l'intervalle de valeurs  $i_h$ . Les observations faites par les deux premiers experts ne sont pas comparables avec celles faites par le troisième expert car la typologie n'est pas un attribut directement observable. Nous ajoutons donc  $t_1 \sim_{\Sigma} i_h$  et  $t_2 \sim_{\Sigma} i_h$ .

Par ailleurs, la connaissance générique sur ces typologies précise que :

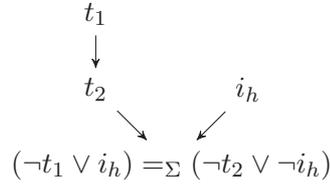
- (1) si une amphore a pour typologie  $t_1$  alors la valeur de la hauteur est comprise dans l'intervalle  $i_h$ ,
- (2) que si une amphore a pour typologie  $t_2$  alors la valeur de la hauteur n'est pas comprise dans l'intervalle  $i_h$ .

Nous traduisons (1) par la formule  $t_1 \rightarrow i_h$ , autrement dit  $(\neg t_1 \vee i_h)$  et (2) par la formule par la formule  $t_2 \rightarrow \neg i_h$ , soit  $(\neg t_2 \vee \neg i_h)$ . Ces formules proviennent toutes

deux de la connaissance générique, c'est pourquoi nous les mettons au même niveau dans le préordre partiel, nous avons  $(\neg t_1 \vee i_h) =_{\Sigma} (\neg t_2 \vee \neg i_h)$ . De plus, par hypothèse, la connaissance générique ne peut être remise en cause c'est pourquoi les formules relatives à cette connaissance sont préférées dans le préordre à celles relatives aux observations :  $(\neg t_1 \vee i_h) \prec_{\Sigma} t_1$ ,  $(\neg t_1 \vee i_h) \prec_{\Sigma} t_2$ ,  $(\neg t_1 \vee i_h) \prec_{\Sigma} i_h$ ,  $(\neg t_2 \vee \neg i_h) \prec_{\Sigma} t_1$ ,  $(\neg t_2 \vee \neg i_h) \prec_{\Sigma} t_2$  et  $(\neg t_2 \vee \neg i_h) \prec_{\Sigma} i_h$ .

Nous obtenons donc la base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  suivante :

- $\Sigma = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$
- $\preceq_{\Sigma}$  :



$\Sigma$  est incohérente.

La première étape consiste à déterminer tous les sous-ensembles de formules que nous pouvons retirer de notre base de croyances pour en restaurer la cohérence. Ces sous-ensembles sont appelés R-ensembles potentiels et sont définis formellement comme suit :

### Définition 5.10

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent.

$R \subseteq \Sigma$  est un **R-ensemble potentiel** de  $\Sigma$  si et seulement si  $\Sigma \setminus R$  est cohérent.

Nous notons  $\mathcal{R}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma$ .

**Remarque :** Lorsque  $\Sigma$  est cohérent, l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  est vide c'est-à-dire  $\mathcal{R}(\Sigma) = \emptyset$ .

### Exemple 5.12

Soit  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  définie dans l'exemple 5.11.  $\Sigma$  est incohérente donc l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  n'est pas vide.  $\Sigma$  possède 27 R-ensembles potentiels :

$$\begin{array}{ll}
 R_0 = \{t_2\} & R_8 = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 R_1 = \{t_1, t_2\} & R_9 = \{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 R_2 = \{t_1, i_h\} & R_{10} = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 R_3 = \{t_2, i_h\} & R_{11} = \{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
 R_4 = \{t_1, t_2, i_h\} & R_{12} = \{t_1, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
 R_5 = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{13} = \{t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
 R_6 = \{t_1, t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{14} = \{t_1, t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
 R_7 = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{15} = \{i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
R_{16} &= \{t_1, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{22} &= \{t_1, t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{17} &= \{t_2, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{23} &= \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{18} &= \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{24} &= \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{19} &= \{(\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{25} &= \{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{20} &= \{t_1, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{26} &= \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{21} &= \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}
\end{aligned}$$

Le nombre de R-ensembles potentiels est élevé et nous souhaitons tenir compte du préordre partiel initial sur  $\Sigma$  pour sélectionner les R-ensembles. Parmi ces R-ensembles potentiels, nous conservons les sous-ensembles de formules qui sont minimaux selon l'inclusion car l'information est précieuse et nous voulons retirer le moins d'information possible. Nous construisons ensuite un préordre sur les sous-ensembles de formules à partir du préordre initial sur les formules de  $\Sigma$  en utilisant les comparateurs définis en section 5.1 afin de déterminer ceux qui sont préférés. Nous généralisons la notion de R-ensemble comme suit :

**Définition 5.11**

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent. Soit  $\mathcal{R}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma$ . Soit  $C$  un comparateur.

$R \subseteq \Sigma$  est un **R-ensemble de  $\Sigma$  selon le comparateur  $C$**  si et seulement si

- (i)  $R$  est R-ensemble potentiel,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \subset R$ ,
- (iii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

L'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  selon le comparateur  $C$  est noté  $\mathcal{R}_C(\Sigma)$ .

Nous remarquons que la condition (ii) est toujours vérifiée dans le cas de l'utilisation du comparateur lexicographique du fait de la propriété 5.4 et dans ce cas,  $\mathcal{R}_\Delta(\Sigma) = \min(\mathcal{R}(\Sigma), \triangleleft_\Delta)$ .

**Exemple 5.13**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Parmi les R-ensembles potentiels, nous sélectionnons les minimaux selon l'inclusion :

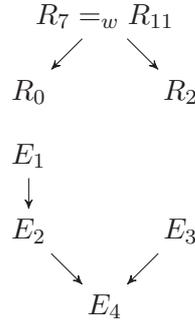
- $R_0 = \{t_2\}$ ,
- $R_2 = \{t_1, i_h\}$ ,
- $R_7 = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\}$ ,
- $R_{11} = \{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$ .

Nous utilisons ensuite un comparateur pour les préordonner partiellement.

**Comparateur faible** Dans le cas de l'utilisation du comparateur faible défini en section 5.1, nous obtenons le préordre partiel suivant :

$$R_0 \longleftarrow R_7 \text{ signifie que } R_0 \triangleleft_w R_7. \text{ Nous obtenons } \mathcal{R}_w(\Sigma) = \{R_0, R_2\}.$$

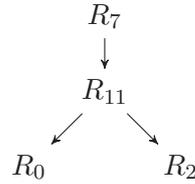
**Comparateur lexicographique** L'utilisation du comparateur lexicographique défini en section 5.6 requiert la détermination des classes d'équivalence :  $E_1 = \{t_1\}$ ,  $E_2 = \{t_2\}$ ,  $E_3 = \{i_h\}$  et  $E_4 = \{(\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$ . Le préordre partiel  $\prec_s$  entre ces classes d'équivalence est le suivant :



De plus, nous avons :

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$
$ E_i \cap R_0 $	0	1	0	0
$ E_i \cap R_2 $	1	0	1	0
$ E_i \cap R_7 $	0	0	1	1
$ E_i \cap R_{11} $	0	0	0	1

Nous obtenons le préordre partiel suivant :



Comme précédemment,  $R_{11} \leftarrow R_7$  signifie que  $R_{11} \triangleleft_{\Delta} R_7$  et  $\mathcal{R}_{\Delta}(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$ .

L'ensemble  $\mathcal{R}_C(\Sigma)$  peut être également raffiné en utilisant une stratégie notée  $P$ . Nous définissons formellement les R-ensembles préférés selon une stratégie  $P$  comme suit :

**Définition 5.12**

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent. Soit  $\mathcal{R}_C(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  selon le comparateur  $C$ .

$R \subseteq \Sigma$  est un **R-ensemble préféré de  $\Sigma$  selon la stratégie  $P$**  si et seulement si

- (i)  $R$  est R-ensemble de  $\Sigma$  selon le comparateur  $C$ ,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' <_P R$ .

Nous notons  $\mathcal{R}_{C,P}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  préférés selon la stratégie  $P$ . Nous présentons la stratégie de cardinalité qui consiste à retirer le moins de formules possibles. Formellement,

**Définition 5.13**

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent. Soient  $R_x$  et  $R_y$  deux R-ensembles de  $\Sigma$  selon le comparateur  $C$ .

$R_x$  est **préféré selon la cardinalité** à  $R_y$ , noté  $R_x \leq_{CARD} R_y$ , si et seulement si  $|R_x| \leq |R_y|$ <sup>1</sup>.

L'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  préférés selon la stratégie de cardinalité est noté  $\mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma)$ .

**Exemple 5.14**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$ . Nous nous intéressons avec cette stratégie à la cardinalité de ces R-ensembles :  $|R_0| = 1$  et  $|R_2| = 2$ . Donc,  $\mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma) = \{R_0\}$ .

A partir de ces définitions, nous pouvons définir une opération de restauration de la cohérence d'un état épistémique  $\Psi$  représenté par la base de croyances partiellement préordonnées. La restauration de la cohérence consiste à déterminer les croyances courantes de l'agent  $Bel(\Psi)$  c'est-à-dire à calculer les R-ensembles selon un comparateur  $C$  et à retirer les R-ensembles de la base de croyances initiale. Formellement,

**Définition 5.14**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées incohérente représentant un état épistémique  $\Psi$ . Soit  $C$  un comparateur.

L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$ , noté  $Bel(\Psi)$ , est défini par :

$$Bel(\Psi) = \bigvee_{R \in \mathcal{R}_C(\Sigma)} Cons(\Sigma \setminus R)$$

**Exemple 5.15**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$ . L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$  :

$$Bel(\Psi) = Cons(t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)) \vee Cons(t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)).$$

Dans le cas où les préférences issues du comparateur  $C$  sont raffinées par une stratégie  $P$ , la restauration de la cohérence est définie formellement comme suit :

**Définition 5.15**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées incohérente représentant un état épistémique  $\Psi$ . Soient  $C$  un comparateur et  $P$  une stratégie.

L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$ , noté  $Bel(\Psi)$ , est défini par :

<sup>1</sup> $|X|$  désigne la cardinalité de l'ensemble  $X$ .

$$Bel(\Psi) = \bigvee_{R \in \mathcal{R}_{C,P}(\Sigma)} Cons(\Sigma \setminus R)$$

**Exemple 5.16**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma) = \{R_0\}$ . L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$  :

$$Bel(\Psi) = Cons(t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)).$$

**5.3 Approche sémantique**

Nous présentons maintenant une contrepartie sémantique à la restauration de la cohérence syntaxique définie précédemment. Nous construisons un préordre partiel sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . Pour cela, nous préférons les interprétations qui satisfont les formules que nous voulons conserver. Les interprétations préférées sont celles qui sont les minimales dans ce préordre partiel. Pour assurer l'équivalence entre les approches syntaxique et sémantique, nous proposons de construire le préordre partiel sur les interprétations  $\preceq_\Psi^C$  à partir du préordre partiel sur les formules  $\preceq_\Sigma$ . Pour ce faire, nous considérons l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par l'interprétation  $\omega$  que nous notons  $F_\Sigma(\omega)$ . Plus précisément,

$$\forall \omega \in \mathcal{W}, F_\Sigma(\omega) = \{\phi \mid \phi \in \Sigma, \omega \not\models \phi\}.$$

**Exemple 5.17**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11.

$\omega_i$	$t_1$	$t_2$	$i_h$	$F_\Sigma(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg t_1$	$\neg t_2$	$\neg i_h$	$\{t_1, t_2, i_h\}$
$\omega_1$	$\neg t_1$	$\neg t_2$	$i_h$	$\{t_1, t_2\}$
$\omega_2$	$\neg t_1$	$t_2$	$\neg i_h$	$\{t_1, i_h\}$
$\omega_3$	$\neg t_1$	$t_2$	$i_h$	$\{t_1, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$
$\omega_4$	$t_1$	$\neg t_2$	$\neg i_h$	$\{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\}$
$\omega_5$	$t_1$	$\neg t_2$	$i_h$	$\{t_2\}$
$\omega_6$	$t_1$	$t_2$	$\neg i_h$	$\{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\}$
$\omega_7$	$t_1$	$t_2$	$i_h$	$\{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$

A partir des ensembles de formules de  $\Sigma$  falsifiées par les interprétations, nous définissons la relation de préférence sur les interprétations  $\mathcal{W}$  comme suit : une interprétation  $\omega$  sera préférée à une interprétation  $\omega'$  si et seulement si les formules falsifiées par  $\omega$  sont préférées selon un comparateur  $C$  aux formules falsifiées par  $\omega'$ . Formellement,

**Définition 5.16**

Soient  $\omega$ , et  $\omega'$  deux interprétations de  $\mathcal{W}$ . Soit  $C$  un comparateur.

L'interprétation  $\omega$  est préférée à l'interprétation  $\omega'$ , noté  $\omega \preceq_\Psi^C \omega'$  si et seulement si

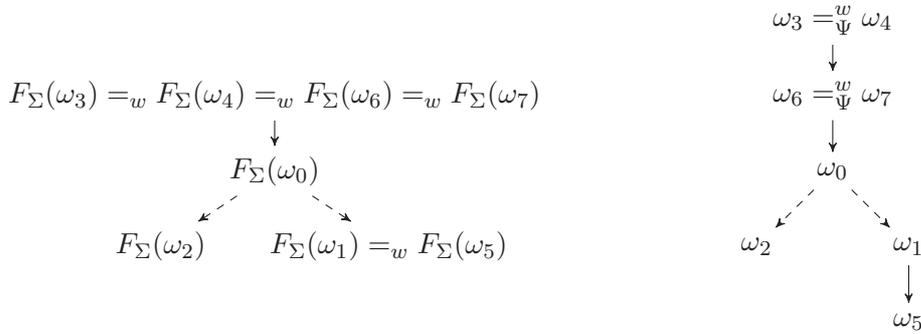
1.  $F_\Sigma(\omega') \not\subseteq F_\Sigma(\omega)$ ,
2.  $F_\Sigma(\omega) \trianglelefteq_C F_\Sigma(\omega')$ .

Comme dans l'approche syntaxique, nous remarquons que la condition 1 de cette définition n'est pas nécessaire dans le cas de l'utilisation du comparateur lexicographique puisqu'il possède la propriété 5.5 sur la monotonie "stricte".

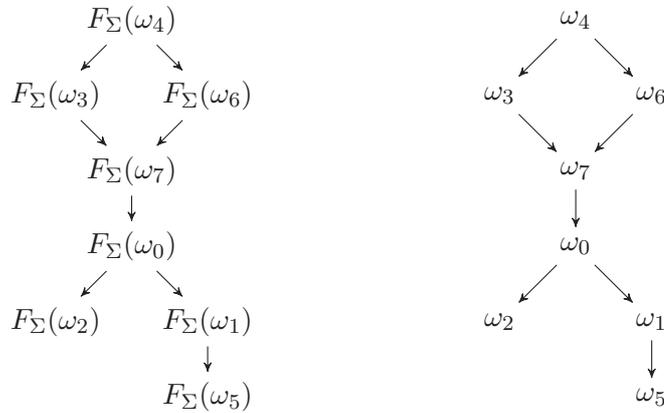
**Exemple 5.18**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Nous préordonnons les interprétations à partir de la définition 5.16 et en utilisant les comparateurs sur les formules de  $\Sigma$  falsifiées. Nous représentons les préordres partiels stricts par des flèches pleines et les préordres partiels non stricts par des flèches en pointillés.

**Comparateur faible** Nous obtenons :



**Comparateur lexicographique** Nous obtenons :



Comme dans l'approche syntaxique, nous pouvons raffiner en appliquant une stratégie et dans ce cas, le préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$  est défini comme suit :

**Définition 5.17**

Soient  $\omega$ , et  $\omega'$  deux interprétations de  $\mathcal{W}$ . Soit  $C$  un comparateur.

L'interprétation  $\omega$  est préférée à l'interprétation  $\omega'$ , noté  $\omega \preceq_{\Psi}^{C,P} \omega'$  si et seulement si

- (i)  $F_{\Sigma'}(\omega') \not\subseteq F_{\Sigma'}(\omega)$ ,

- (ii)  $F_{\Sigma'}(\omega) \triangleleft_C F_{\Sigma'}(\omega')$ ,
- (iii)  $F_{\Sigma'}(\omega) \leq_P F_{\Sigma'}(\omega')$ .

Comme précédemment, nous remarquons que la condition (ii) n'est pas nécessaire dans le cas de l'utilisation du comparateur lexicographique.

## 5.4 Equivalence des approches syntaxique et sémantique de la restauration de cohérence

L'équivalence entre l'approche syntaxique et l'approche sémantique pour la restauration de la cohérence est donnée par la proposition 5.6. Ainsi les modèles de  $Bel(\Psi)$  sont les interprétations préférées selon le préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^C$  défini en section 5.3.

### Proposition 5.6

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté syntaxiquement par  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  une base de croyances partiellement préordonnées et sémantiquement par  $\preceq_{\Psi}^C$  le préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$ .

$$Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C).$$

**Preuve :** La preuve se déroule en deux étapes : nous montrons  $Mod(Bel(\Psi)) \subseteq min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$  puis  $min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C) \subseteq Mod(Bel(\Psi))$ .

1. Nous commençons par montrer  $Mod(Bel(\Psi)) \subseteq min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$ .  
 $\forall \omega \in Mod(Bel(\Psi))$ , il existe au moins un R-ensemble  $R \in \mathcal{R}_C(\Sigma)$  tel que  $\omega \models (\Sigma \setminus R)$ . Soit  $F_{\Sigma}(\omega)$  l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par  $\omega$ . Comme  $\omega \in Mod(Bel(\Psi))$  alors  $\omega$  ne falsifie pas les formules de  $\Sigma \setminus R$  mais  $\omega$  falsifie les formules du R-ensemble  $R$  car  $\Sigma$  est incohérent. Donc  $F_{\Sigma}(\omega) = R$ . Supposons  $\omega \notin min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$  alors il existe  $\omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\omega' \prec_{\Psi}^C \omega$ . Par définition,  $\omega' \prec_{\Psi}^C \omega$  si et seulement si  $F_{\Sigma}(\omega) \not\subseteq F_{\Sigma}(\omega')$  et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_C F_{\Sigma}(\omega)$ . Or  $F_{\Sigma}(\omega) = R$  donc  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_C R$  ce qui contredit le fait que  $R$  est un R-ensemble. Donc  $\omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$ .
2. Nous montrons ensuite  $min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C) \subseteq Mod(Bel(\Psi))$ .  
 $\forall \omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$ ,  $F_{\Sigma}(\omega) \neq \emptyset$  car  $\Sigma$  est incohérent.  $F_{\Sigma}(\omega) \subseteq \Sigma$  et  $\omega \models (\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega))$  donc  $\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega)$  est cohérent. Montrons que  $F_{\Sigma}(\omega)$  est un R-ensemble. Pour cela, nous montrons
  - (a)  $\nexists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \subset F_{\Sigma}(\omega)$ .  
 Supposons qu'il existe  $\omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \subset F_{\Sigma}(\omega)$ . D'après la définition 5.16,  $\omega' \prec_{\Psi}^C \omega$  donc  $\omega \notin min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$  ce qui contredit l'hypothèse de départ.
  - (b)  $\nexists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_C F_{\Sigma}(\omega)$ .  
 Supposons qu'il existe  $\omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_C F_{\Sigma}(\omega)$ . D'après la définition 5.16,  $\omega' \prec_{\Psi}^C \omega$  donc  $\omega \notin min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C)$  ce qui contredit l'hypothèse de départ.

■

**Exemple 5.19**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11. Quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$  et  $Bel(\Psi) = Cons(t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)) \vee Cons(t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h))$ . Donc  $Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega_2, \omega_5\}$ .

De plus, quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^C) = \{\omega_2, \omega_5\}$ .

Nous avons bien  $Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^C)$ .

## 5.5 Equivalence de la restauration de la cohérence avec les méthodes de R-ensembles et de MCONS

Nous avons adopté le point de vue qui consiste à déterminer les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence d'une base de croyances partiellement préordonnées. Or la plupart des autres approches consistent à déterminer les sous-bases maximales cohérentes, nous présentons dans cette section notre méthode de restauration de la cohérence exprimée en terme de sous-bases maximales cohérentes. La figure 5.5 montre l'équivalence des deux points de vue.

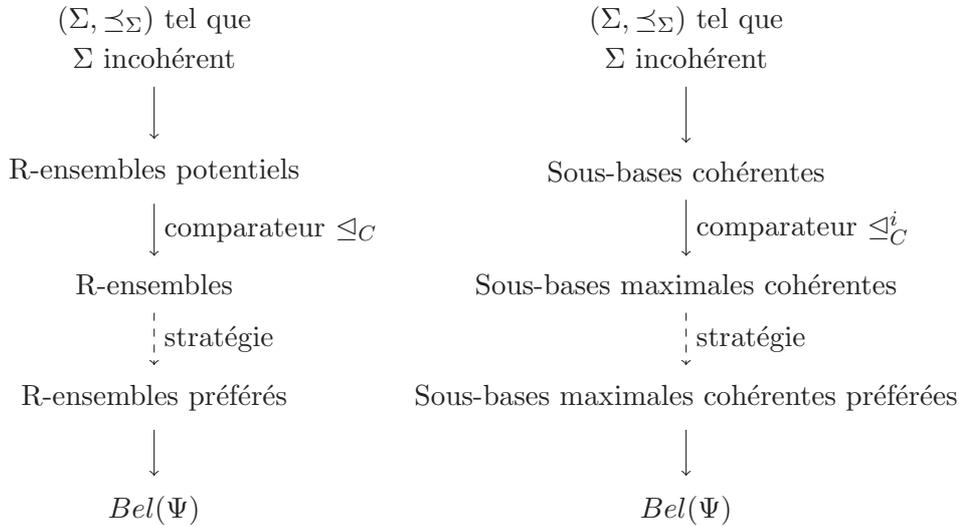


FIG. 5.5 – Equivalence entre la restauration de la cohérence par R-ensembles et par MCONS

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées représentant un état épistémique  $\Psi$  telle que  $\Sigma$  est incohérente. Nous notons  $CONS(\Sigma)$  l'ensemble des sous-bases de  $\Sigma$  cohérentes. Formellement,  $CONS(\Sigma) = \{B \subseteq \Sigma, B \text{ est cohérent}\}$ .

Tout d'abord, nous rappelons la définition de la relation de préférence  $\preceq_w$ , décrite en section 2.2.3.2 du chapitre 3.

**Définition 5.18**

Soient  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

- $X$  est "faiblement" préféré à  $Y$ , noté  $X \trianglelefteq_w^i Y$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \preceq_\Sigma y$  ;
- $X$  est strictement "faiblement" préféré à  $Y$ , noté  $X \triangleleft_w^i Y$  si et seulement si  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tel que  $x \prec_\Sigma y$  ;
- $X$  est "faiblement" égale à  $Y$ , noté  $X =_w^i Y$  si et seulement si  $X \trianglelefteq_w^i Y$  et  $Y \trianglelefteq_w^i X$ .

Le préordre partiel sur les sous-bases cohérentes, noté  $\preceq_w$ , est alors défini comme suit :

**Définition 5.19**

Soient  $B_1, B_2 \in CONS(\Sigma)$ . Soit  $w$  un comparateur.

- $B_1 \preceq_w B_2$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B_2) \trianglelefteq_w^i (\Sigma \setminus B_1)$ .
- $B_1 \prec_w B_2$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus B_2) \triangleleft_w^i (\Sigma \setminus B_1)$ .

Nous définissons maintenant la relation de préférence  $\preceq_\Delta$ . Le comparateur lexicographique pour des bases de croyances partiellement préordonnées, initialement défini pour construire une relation de préférence entre les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$  est le suivant :

**Définition 5.20**

Soit  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur  $\Sigma$ ,  $Y \subseteq \Sigma$  et  $X \subseteq \Sigma$ .

- $X \trianglelefteq_\Delta^i Y$  si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , si  $|E_i \cap Y| > |E_i \cap X|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap X| > |E_j \cap Y|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .
- $X \triangleleft_\Delta^i Y$  si et seulement si  $X \trianglelefteq_\Delta^i Y$  et  $Y \not\trianglelefteq_\Delta^i X$

La relation de préférence entre les sous-bases de croyances cohérentes de  $\Sigma$  induite par le comparateur lexicographique, notée  $\preceq_\Delta$ , est définie comme suit :

**Définition 5.21**

Soient  $B_1, B_2 \in CONS(\Sigma)$ .

- $B_1 \preceq_\Delta B_2$  si et seulement si  $B_1 \trianglelefteq_\Delta^i B_2$ .
- $B_1 \prec_\Delta B_2$  si et seulement si  $B_1 \triangleleft_\Delta^i B_2$ .

Nous sélectionnons les sous-bases cohérentes maximales au sens de l'inclusion. La relation de préférence induite par le comparateur  $\trianglelefteq_C^i$  est appliquée entre les différentes sous-bases de croyances de  $\Sigma$  cohérentes afin de déterminer les sous-bases de  $\Sigma$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$ . Plus formellement,

**Définition 5.22**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées représentant un état épistémique  $\Psi$  telle que  $\Sigma$  est incohérent. Soit  $C$  un comparateur.

$B \subseteq \Sigma$  est une sous-base de croyances de  $\Sigma$  maximale cohérente préférée selon  $\preceq_C$  si et seulement si

- (i)  $B \in \text{CONS}(\Sigma)$ ,
- (ii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B \subset B'$ ,
- (iii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B' \prec_C B$ .

L'ensemble des sous-bases de  $\Sigma$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$  est noté  $\text{MCONS}_C(\Sigma)$ .

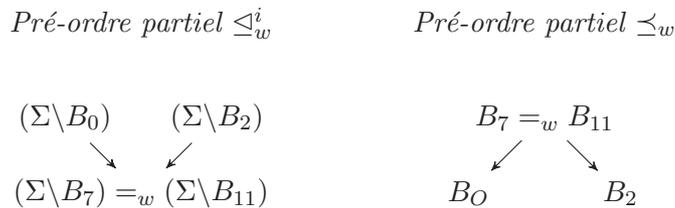
**Exemple 5.20**

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11 où  $\Sigma = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$ . Les sous-bases cohérentes de  $\Sigma$  sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 B_0 = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{14} = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 B_1 = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{15} = \{t_1, t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 B_2 = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{16} = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 B_3 = \{t_1, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{17} = \{t_1, (\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 B_4 = \{(\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{18} = \{(\neg t_1 \vee i_h)\} \\
 B_5 = \{t_1, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{19} = \{t_1, t_2, i_h\} \\
 B_6 = \{i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{20} = \{t_2, i_h\} \\
 B_7 = \{t_1, t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{21} = \{t_1, i_h\} \\
 B_8 = \{t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{22} = \{i_h\} \\
 B_9 = \{t_1, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{23} = \{t_1, t_2\} \\
 B_{10} = \{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & B_{24} = \{t_2\} \\
 B_{11} = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & B_{25} = \{t_1\} \\
 B_{12} = \{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & B_{26} = \emptyset \\
 B_{13} = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} &
 \end{array}$$

Parmi elles, nous sélectionnons les sous-bases maximales au sens de l'inclusion :  $\text{MCONS}(\Sigma) = \{B_0, B_2, B_7, B_{11}\}$ . Nous les préordonnons ensuite selon les comparateurs.

**Comparateur faible** D'après les définitions 5.18 et 5.19, nous obtenons le préordre suivant pour le comparateur faible :

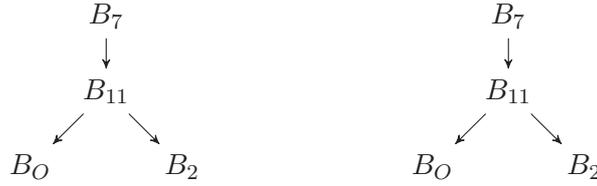


Nous avons  $\text{MCONS}_w(\Sigma) = \{B_0, B_2\}$ .

**Comparateur lexicographique** D'après les définitions 5.20 et 5.21, nous obtenons le préordre suivant pour le comparateur lexicographique :

Pré-ordre partiel  $\leq_{\Delta}^i$

Pré-ordre partiel  $\leq_{\Delta}$



Nous avons  $MCONS_{\Delta}(\Sigma) = \{B_0, B_2\}$ .

A partir de la définition 5.22, nous définissons la restauration de la cohérence de la base de croyances partiellement préordonnées comme suit :

**Définition 5.23**

Soit  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$  une base de croyances partiellement préordonnées représentant un état épistémique  $\Psi$  telle que  $\Sigma$  est incohérent. Soit  $C$  un comparateur.

L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$ , noté  $Bel(\Psi)$ , est défini par :

$$Bel(\Psi) = \bigvee_{B \in MCONS_C(\Sigma)} Cons(B)$$

**Exemple 5.21**

Soit  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$  définie dans l'exemple 5.11. L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$  :

$$Bel(\Psi) = Cons(t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)) \vee Cons(t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)).$$

Nous pouvons exprimer la notion de R-ensemble en termes de sous-bases de  $\Sigma$  maximales cohérentes préférées selon un comparateur  $\leq_C$  et l'équivalence entre les deux méthodes est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 5.7**

Soit  $(\Sigma, \leq_{\Sigma})$  une base de croyances partiellement préordonnées représentant un état épistémique  $\Psi$  telle que  $\Sigma$  est incohérent.

$R \subseteq \Sigma$  est un R-ensemble de  $\Sigma$  selon le comparateur  $\leq_C$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus R)$  est une sous-base de croyances de  $\Sigma$  maximale cohérente et préférée selon  $\leq_C$ .

**Preuve :** Nous montrons que  $R \in R_C(\Sigma)$  si et seulement si  $\Sigma \setminus R \in MCONS_C(\Sigma)$ .

1. Tout d'abord, nous montrons  $\forall R \in R_C(\Sigma), \Sigma \setminus R \in MCONS_C(\Sigma)$ .

Soit  $R \in R_C(\Sigma)$ . D'après la définition 5.11,  $R$  est un R-ensemble selon  $\leq_C$  tel que

- (i)  $R$  est R-ensemble potentiel,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \subset R$ ,
- (iii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

Nous notons  $B = \Sigma \setminus R$ . D'après (i),  $B$  est cohérent. De plus,  $B \subset \Sigma$  donc  $B$  est une sous-base cohérente de  $\Sigma$  c'est-à-dire  $B \in \text{CONS}(\Sigma)$ . D'après (ii),  $R$  est minimal selon l'inclusion et peut se réécrire de la manière suivante :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R) \subset (\Sigma \setminus R')$  c'est-à-dire  $B \subset (\Sigma \setminus R')$ . Donc  $B$  est maximal au sens de l'inclusion. D'après (iii),  $R$  est préféré selon le comparateur  $\triangleleft_C$ . Montrons que  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$  c'est-à-dire :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$ .

Supposons  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$ . Nous détaillons la preuve pour chacun des comparateurs :

- Comparateur faible : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_w B$ .

D'après la définition 5.19,  $(\Sigma \setminus R') \prec_w B$  ssi  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i R'$ .

D'après la définition 5.18,  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i R'$  ssi  $\forall y \in R', \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_\Sigma y$ .

D'après la définition 5.2,  $\forall y \in R', \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_\Sigma y$  ssi  $R' \triangleleft_w (\Sigma \setminus B)$  c'est-à-dire  $R' \triangleleft_w R$ . Ceci contredit l'hypothèse de départ (iii).

- Comparateur lexico : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_\Delta B$ .

D'après la définition 5.21,  $(\Sigma \setminus R') \prec_\Delta B$  ssi  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$

D'après la définition 5.20,  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$  ssi

(a)  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$  et

(b)  $B \not\triangleleft_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$ .

Plus précisément,

- (a)  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap B| > |E_i \cap (\Sigma \setminus R')|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_j \cap B|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Or  $B = \Sigma \setminus R$ .

$(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap (\Sigma \setminus R)| > |E_i \cap (\Sigma \setminus R')|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_j \cap (\Sigma \setminus R)|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

De plus, nous avons  $R \subseteq \Sigma, R' \subseteq \Sigma$  et  $\forall k, 1 \leq k \leq n, E_k \subseteq \Sigma$  :

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R)| + |E_k \cap R|$$

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| + |E_k \cap R'|$$

Nous avons :

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus R)| + |E_k \cap R| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| + |E_k \cap R'| \text{ Donc } \forall k, 1 \leq k \leq n,$$

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus R)| > |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| \text{ ssi } |E_k \cap R'| > |E_k \cap R|.$$

Par conséquent,  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap R'| > |E_i \cap R|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R| > |E_j \cap R'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

D'après la définition 5.6,  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $R' \triangleleft_\Delta R$ .

- (b)  $B \not\triangleleft_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_i \cap B|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B| > |E_j \cap (\Sigma \setminus R')|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Comme précédemment, nous pouvons déduire que :  $B \not\triangleleft_{\Delta}^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap R| > |E_i \cap R'|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R'| > |E_j \cap R|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Par conséquent,  $B \not\triangleleft_{\Delta}^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$ .

Donc  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_{\Delta}^i B$  ssi  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).

$\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$  donc  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Nous avons  $B \in MCONS_C(\Sigma)$ .

2. Puis, nous montrons  $\forall B \in MCONS_C(\Sigma), \Sigma \setminus B \in R_C(\Sigma)$ .

Soit  $B \in MCONS_C(\Sigma)$ . D'après la définition 5.22,  $B$  est une sous-base maximale cohérente préférée selon  $\preceq_C$ , plus précisément :

- (i)  $B \in CONS(\Sigma)$ ,
- (ii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B \subset B'$ ,
- (iii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B' \prec_C B$ .

Nous notons  $R = \Sigma \setminus B$ , nous avons  $B = \Sigma \setminus R$ . D'après (i),  $\Sigma \setminus R$  est cohérent. De plus,  $R \subset \Sigma$  donc  $R$  est un R-ensemble potentiel de  $\Sigma$  c'est-à-dire  $R \in R(\Sigma)$ . D'après (ii),  $B$  est maximal selon l'inclusion et peut se réécrire comme suit :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $B' = \Sigma \setminus R'$  et  $B'$  est cohérent et  $R' \subset R$ . Donc  $R$  est minimal selon l'inclusion. D'après (iii),  $B$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Montrons que  $R = \Sigma \setminus B$  est préféré selon le comparateur  $\trianglelefteq_C$  c'est-à-dire :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

Supposons  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ . Nous détaillons la preuve pour chacun des comparateurs :

– Comparateur faible : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_w R$ .

D'après la définition 5.2,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $\forall y \in R', \exists x \in R$  tel que  $x \prec_{\Sigma} y$ .

Or  $R = \Sigma \setminus B$  et  $R' = \Sigma \setminus B'$ .

$R' \triangleleft_C R$  ssi  $\forall y \in (\Sigma \setminus B'), \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_{\Sigma} y$ .

D'après la définition 2.8,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i (\Sigma \setminus B')$ .

D'après la définition 2.9,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $B' \prec_w B$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).

– Comparateur lexicographique : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' \triangleleft_{\Delta} R$

D'après la définition 5.6,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi

- (a)  $R' \trianglelefteq_{\Delta} R$  et
- (b)  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$ .

Plus précisément,

(a)  $R' \trianglelefteq_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap R'| > |E_i \cap R|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R| > |E_j \cap R'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Or  $B = \Sigma \setminus R$  et  $B' = \Sigma \setminus R'$ .

$R' \trianglelefteq_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap (\Sigma \setminus B')| > |E_i \cap (\Sigma \setminus B)|$  alors  $\exists j,$

$1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_j \cap (\Sigma \setminus B')|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . De plus, nous avons  $B \subseteq \Sigma$ ,  $B' \subseteq \Sigma$  et  $\forall k, 1 \leq k \leq n, E_k \subseteq \Sigma$  :

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B)| + |E_k \cap B|$$

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| + |E_k \cap B'|$$

Nous avons :

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus B)| + |E_k \cap B| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| + |E_k \cap B'| \text{ Donc } \forall k, 1 \leq k \leq n, \\ |E_k \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| \text{ ssi } |E_k \cap B'| > |E_k \cap B|.$$

Par conséquent,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap B| > |E_i \cap B'|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B'| > |E_j \cap B|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

D'après la définition 5.20,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $B' \triangleleft_{\Delta}^i B$ .

- (b)  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap R| > |E_i \cap R'|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R'| > |E_j \cap R|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Comme précédemment, nous pouvons déduire que :  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_i \cap (\Sigma \setminus B')|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus B')| > |E_j \cap (\Sigma \setminus B)|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

$R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap B'| > |E_i \cap B|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B| > |E_j \cap B'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Par conséquent,  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$  ssi  $B \not\triangleleft_{\Delta}^i B'$ .

Donc  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $B' \triangleleft_{\Delta}^i B$ .

D'après la définition 5.21,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $B' \prec_{\Delta} B$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).

$\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$  donc  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Nous avons  $B \in MCONS_C(\Sigma)$ . ■

### Exemple 5.22

D'après l'exemple 5.13, quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$  avec  $R_0 = \{t_2\}$  et  $R_2 = \{t_1, i_h\}$  et d'après l'exemple 5.20, quelque soit le comparateur utilisé, nous avons  $MCONS_C(\Sigma) = \{B_0, B_2\}$  avec  $B_0 = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$  et  $B_2 = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$ . Clairement  $B_0 = \Sigma \setminus R_0$  et  $B_2 = \Sigma \setminus R_2$ .

## Conclusion

La plupart des approches concernant la restauration de la cohérence sont définies en termes de sous-bases de croyances maximales cohérentes. Dans ce chapitre, nous avons adopté un point de vue dual, en considérant les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence. En effet, nous avons proposé d'étendre la méthode des R-ensembles à la restauration de la cohérence de bases de croyances partiellement préordonnées [178, 179]. Cette méthode permet de sélectionner parmi un nombre très important de solutions, les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence, à partir d'un mécanisme de sélection, appelé comparateur.

Nous avons étudié deux comparateurs : le comparateur faible et le comparateur lexicographique. La construction du préordre partiel sur l'ensemble des interprétations à partir du préordre partiel sur les ensembles de formules falsifiées nous montre que le comparateur lexicographique est plus fin que le comparateur faible. En effet, le comparateur faible place certains sous-ensembles de formules au même niveau alors que le comparateur lexicographique exprime des préférences entre eux. Ceci est en partie dû au fait que contrairement au comparateur faible reformulé, le comparateur lexicographique vérifie la propriété de monotonie "stricte".

Le chapitre suivant s'intéresse à la révision par R-ensembles d'états épistémiques représentés par des préordres partiels.



## Chapitre 6

# Révision par R-ensembles

Les différentes approches proposées dans la littérature pour réviser un état épistémique peuvent être classées selon trois points de vue [54] : “Belief revision as defeasible inference” (BRDI), “Belief revision as incorporation of evidence” (BRIE) et “Belief revision of background knowledge” (BRBK) comme nous l’avons décrit en introduction du chapitre 4. Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau cadre pour la révision d’état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées de type BRIE. Les approches de ce type modifient l’ordre de plausibilité lors de l’ajout d’une nouvelle information.

Nous proposons d’étendre la révision par R-ensembles définie pour un état épistémique représenté par une base de croyances non ordonnées [206] et totalement préordonnées [13] qui dispose d’une implémentation efficace utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables. Cette approche consiste à déterminer les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence.

Nous nous intéressons à la révision d’état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées par une formule propositionnelle. Tout d’abord, nous détaillons la représentation d’un état épistémique d’un point de vue syntaxique et sémantique. Nous présentons ensuite l’extension de la révision par R-ensembles d’état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées, notée PPRSR. Pour cela, nous détaillons l’approche syntaxique. Dans cette approche, nous utilisons différents opérateurs qui reposent sur la construction d’une relation de préférence entre les sous-ensembles de formules. Cette relation provient deux comparateurs reformulés : le comparateur faible défini en section 5.1.1 et noté  $\leq_w$  et le comparateur lexicographique défini en section 5.1.2 et noté  $\leq_\Delta$ . A partir de l’approche syntaxique, nous construisons l’approche sémantique et nous proposons un certain nombre de propriétés que ces opérations de révision vérifient.

## 6.1 Représentation d'un état épistémique

Un état épistémique  $\Psi$  d'un agent peut être représenté syntaxiquement sous forme d'une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  où  $\Sigma$  est un ensemble de formules propositionnelles et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur ces formules. A chaque état épistémique correspond un ensemble de croyances noté  $Bel(\Psi)$  qui représente les croyances courantes de l'agent.

L'état épistémique  $\Psi$  d'un agent peut également se représenter sémantiquement sous la forme d'un préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$ , noté  $\preceq_\Psi^C$ . Dans ce cas, l'ensemble des croyances associées à l'état épistémique  $\Psi$  est tel que :

$$Mod(Bel(\Psi)) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^C)$$

La révision syntaxique d'un état épistémique  $\Psi$  par la formule propositionnelle  $\mu$  représentant la nouvelle information est un état épistémique révisé, noté  $\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu$  qui se représente syntaxiquement par une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu, \preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu})$ .

L'état épistémique révisé sémantiquement est noté  $\Psi \bullet_{\triangleleft_C} \mu$  et est représenté par un nouveau préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_C} \mu}$  sur les interprétations  $\mathcal{W}$ .

### Représentation Syntaxique

### Représentation Sémantique

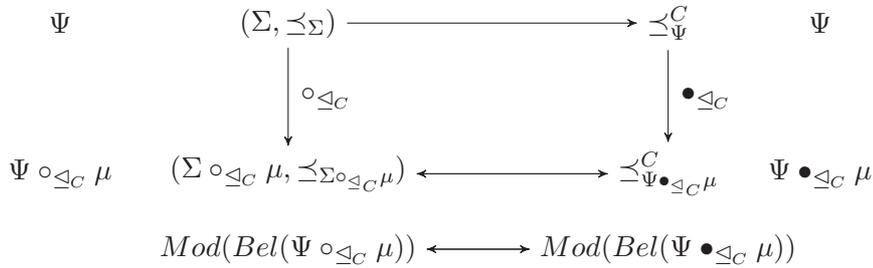


FIG. 6.1 – Représentation d'un état épistémique révisé

## 6.2 Approche syntaxique

L'état épistémique  $\Psi$  étant représenté syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , la révision syntaxique de l'état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  conduit à un état épistémique révisé syntaxiquement, noté  $\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu$  et représenté par une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu, \preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu})$ . Pour le préordre  $\preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu}$ , la nouvelle formule  $\mu$  est préférée à tous les éléments de  $\Sigma$  et le préordre partiel entre les formules de  $\Sigma$  est préservé. Formellement,

l'opérateur de révision syntaxique par R-ensembles d'une bases de croyances partiellement préordonnées (PPRSR), noté  $\circ_{\triangleleft_C}$  est défini comme suit :

**Définition 6.1**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle.

L'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu$ , est représenté par :

- $\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu = \Sigma \cup \{\mu\}$
- $\preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu} :$ 
  - (i)  $\forall \psi \in \Sigma : \mu \prec_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu} \psi$
  - (ii)  $\forall \psi, \phi \in \Sigma : \psi \preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_C} \mu} \phi$  si et seulement si  $\psi \preceq_\Sigma \phi$

L'ensemble de croyances associé à l'état épistémique révisé syntaxiquement  $\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu$  est noté  $Bel(\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu)$ . Nous proposons une méthode syntaxique pour le calcul de  $Bel(\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu)$ . Cette méthode, illustrée par la figure 6.2, consiste à retirer les sous-ensembles de formules de  $\Sigma$  qui contiennent le moins de formules préférées pour restaurer la cohérence. Pour cela, nous construisons un préordre partiel sur ces sous-ensembles de formules de  $\Sigma$  à partir du préordre partiel  $\preceq_\Sigma$  initial sur les formules de  $\Sigma$ . Nous présentons cette construction selon les deux comparateurs définis en section 5.1 du chapitre précédent. Nous pouvons ensuite raffiner notre choix en appliquant une stratégie  $P$ .

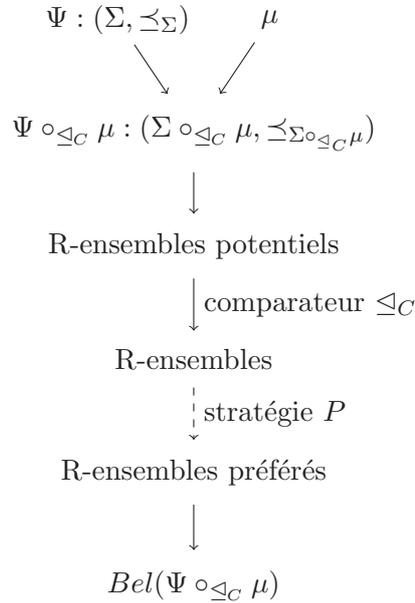


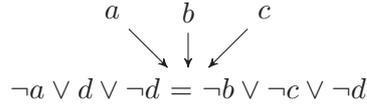
FIG. 6.2 – Révision syntaxique par R-ensembles d'un état épistémique

Nous présentons l'exemple qui sera utilisé tout au long de ce chapitre.

**Exemple 6.1**

Considérons la base de croyances partiellement préordonnées cohérente  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  telle que :

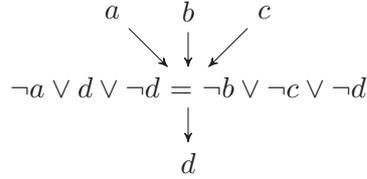
- $\Sigma = \{a, b, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d\}$
- $\preceq_\Sigma :$



$\Sigma$  est cohérente. Nous souhaitons réviser  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  par la formule  $\mu$  suivante :  $d$ .

L'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu = d$ , noté  $\Psi \circ_{\leq_C} \mu$ , est représenté par :

- $\Sigma \circ_{\leq_C} \mu = \{a, b, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d, d\}$
- $\preceq_{\Sigma \circ_{\leq_C} \mu} :$



Nous redéfinissons d'abord la notion de R-ensemble potentiel. Les R-ensembles potentiels sont tous les sous-ensembles de formules que nous pouvons retirer de notre base de croyances pour en restaurer la cohérence.

**Définition 6.2**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle.

$R$ , un sous-ensemble de formules de  $\Sigma$ , est un **R-ensemble potentiel** de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$  est cohérent.

L'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est noté  $\mathcal{R}(\Sigma \cup \{\mu\})$ . Lorsque  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est cohérent, l'ensemble des R-ensembles potentiels est vide c'est-à-dire  $\mathcal{R}(\Sigma \cup \{\mu\}) = \emptyset$ .

**Exemple 6.2**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  définis dans l'exemple 6.1.  $\Sigma \cup \{\mu\}$  tel que défini dans l'exemple 6.1 est incohérent. L'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  n'est donc pas vide.

Nous dénombrons 27 R-ensembles potentiels :

- $R_0 = \{b\}$
- $R_1 = \{b, (\neg a \vee d \vee \neg d)\}$
- $R_2 = \{a, b\}$
- $R_3 = \{a, b, (\neg a \vee d \vee \neg d)\}$
- $R_4 = \{c\}$

$$\begin{aligned}
R_5 &= \{c, (\neg a \vee d \vee \neg d)\} \\
R_6 &= \{a, c\} \\
R_7 &= \{a, c, (\neg a \vee d \vee \neg d)\} \\
R_8 &= \{b, c\} \\
R_9 &= \{b, c, (\neg a \vee d \vee \neg d)\} \\
R_{10} &= \{a, b, c\} \\
R_{11} &= \{a, b, c, (\neg a \vee d \vee \neg d)\} \\
R_{12} &= \{(\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{13} &= \{(\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{14} &= \{a, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{15} &= \{a, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{16} &= \{b, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{17} &= \{b, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{18} &= \{a, b, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{19} &= \{a, b, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{20} &= \{c, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{21} &= \{c, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{22} &= \{a, c, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{23} &= \{a, c, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{24} &= \{b, c, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{25} &= \{b, c, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{26} &= \{a, b, c, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\} \\
R_{27} &= \{a, b, c, (\neg a \vee d \vee \neg d), (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\}
\end{aligned}$$

Le nombre de R-ensembles potentiels étant élevé, nous souhaitons tenir compte du préordre partiel initial pour sélectionner certains d'entre eux. Pour cela nous construisons un préordre partiel sur les sous-ensembles de formules de  $\Sigma$ , appelé comparateur et nous définissons la notion de R-ensemble. Les R-ensembles sont caractérisés par des propriétés : un R-ensemble est un R-ensemble potentiel, minimal selon l'inclusion et préféré selon un comparateur  $\preceq_C$ . Nous adoptons un point de vue dual par rapport aux travaux de Sylvain Lagrue [124]. Nous voulons préférer les sous-ensembles de formules de  $\Sigma$  à retirer qui contiennent le moins de formules préférées. Pour cela, nous construisons le préordre partiel sur les R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  à partir des comparateurs reformulés présentés en section 5.1. Formellement, nous définissons les R-ensembles comme suit :

### Définition 6.3

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle. Soit  $\mathcal{R}(\Sigma \cup \{\mu\})$  l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma \cup \{\mu\}$ . Soit  $\preceq_C$  un comparateur.

$R$ , un sous-ensemble de formules de  $\Sigma$ , est un **R-ensemble** de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  si et seulement si

- (i)  $R$  est R-ensemble potentiel de  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \subset R$ ,

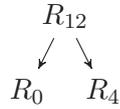
(iii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

L'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est noté  $\mathcal{R}_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

### Exemple 6.3

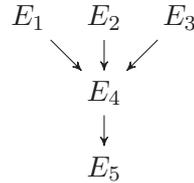
Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  définis dans l'exemple 6.1. Parmi les R-ensembles potentiels, nous sélectionnons dans un premier temps, les R-ensembles minimaux selon l'inclusion :  $R_0 = \{b\}$ ,  $R_4 = \{c\}$  et  $R_{12} = \{\neg b \vee \neg c \vee \neg d\}$ . Nous utilisons ensuite les comparateurs pour préordonner les R-ensembles.

**Comparateur faible** L'application du comparateur faible, nous donne :  $R_0 \sim_w R_4$ ,  $R_0 \triangleleft_w R_{12}$  et  $R_4 \triangleleft_w R_{12}$ , soit :



Nous avons  $\mathcal{R}_w(\Sigma \cup \{\mu\}) = \{R_0, R_4\}$ .

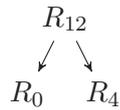
**Comparateur lexicographique** L'application du comparateur lexicographique nécessite la détermination des classes d'équivalence :  $E_1 = \{a\}$ ,  $E_2 = \{b\}$ ,  $E_3 = \{c\}$ ,  $E_4 = \{\neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d\}$ ,  $E_5 = \{d\}$ . Le préordre partiel  $\prec_s$  entre ces classes d'équivalence est le suivant :



Nous utilisons ensuite le comparateur lexicographique :

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$
$ E_i \cap R_0 $	0	1	0	0	0
$ E_i \cap R_4 $	0	0	1	0	0
$ E_i \cap R_{12} $	0	0	0	1	0

$R_0 \sim_\Delta R_4$ ,  $R_0 \triangleleft_\Delta R_{12}$  et  $R_4 \triangleleft_\Delta R_{12}$ , soit : Nous avons  $\mathcal{R}_\Delta(\Sigma \cup \{\mu\}) = \{R_0, R_4\}$ .



Nous pouvons ensuite raffiner cet ensemble en appliquant une stratégie. Nous définissons les R-ensembles préférés selon une stratégie, notée  $P$ . Formellement,

**Définition 6.4**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle.

$R$ , un sous-ensemble de formules de  $\Sigma$ , est un **R-ensemble préféré** de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  selon la stratégie  $P$  si et seulement si

- (i)  $R$  est R-ensemble de  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' <_P R$ .

L'ensemble des R-ensembles préférés de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  selon la stratégie  $P$  est noté  $\mathcal{R}_{C,P}(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

Nous présentons ensuite la stratégie de cardinalité qui consiste à retirer le moins de formules possibles.

**Définition 6.5**

Soient  $R_x$  et  $R_y$  deux R-ensembles de  $\Sigma \cup \{\mu\}$ .

$R_x$  est préféré selon la cardinalité à  $R_y$ , noté  $R_x \leq_{CARD} R_y$ , ssi  $|R_x| \leq |R_y|$  où  $|X|$  désigne la cardinalité de l'ensemble  $X$ .

L'ensemble des R-ensembles préférés de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  selon la stratégie de cardinalité est noté  $\mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

Syntaxiquement, nous construisons l'ensemble des croyances associées à l'état épistémique révisé  $\Psi \circ_{\leq_C} \mu$  comme suit :

$$Bel(\Psi \circ_{\leq_C} \mu) = \bigvee_{R \in \mathcal{R}_C(\Sigma)} Cons((\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\})$$

**Exemple 6.4**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  définis dans l'exemple 6.1. Quelque soit le comparateur utilisé (faible ou lexicographique), nous avons  $\mathcal{R}_C(\Sigma \cup \{\mu\}) = \{R_0, R_2\}$ . Donc, l'ensemble des croyances associées à l'état épistémique révisé  $\Psi \circ_{\leq_C} \mu$  :

$$Bel(\Psi \circ_{\leq_C} \mu) = Cons(\{a, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d, d\}) \bigvee Cons(\{a, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d, d\}).$$

## 6.3 Approche sémantique

Nous présentons maintenant la contre-partie sémantique de la révision par R-ensembles de bases de croyances partiellement préordonnées. L'état épistémique se représente sémantiquement par un préordre partiel sur les interprétations  $\mathcal{W}$ . Nous construisons ce préordre sur les interprétations à partir des ensembles de formules de  $\Sigma$  falsifiées par les interprétations auquel nous appliquons les comparateurs. Nous définissons une correspondance où l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par l'interprétation  $\omega$  est noté  $F_\Sigma(\omega)$ .

**Définition 6.6**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle.

Le **préordre partiel**  $\preceq_\Psi^C$  est défini tel que :  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,

$$\omega \preceq_{\Psi}^C \omega' \text{ si et seulement si } F_{\Sigma}(\omega) \preceq_C F_{\Sigma}(\omega').$$

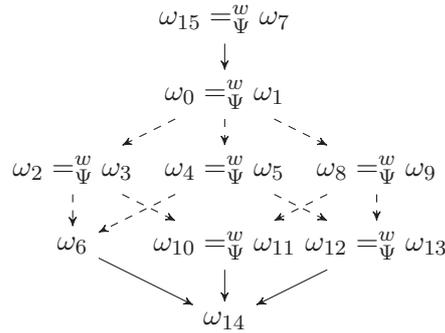
**Exemple 6.5**

Soient  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  et  $\mu$  définis dans l'exemple 6.1. Nous considérons l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par les interprétations :

$\omega_i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$F_{\Sigma}(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{a, b, c\}$
$\omega_1$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$d$	$\{a, b, c\}$
$\omega_2$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$\neg d$	$\{a, b\}$
$\omega_3$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$d$	$\{a, b\}$
$\omega_4$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{a, c\}$
$\omega_5$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$d$	$\{a, c\}$
$\omega_6$	$\neg a$	$b$	$c$	$\neg d$	$\{a\}$
$\omega_7$	$\neg a$	$b$	$c$	$d$	$\{a, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\}$
$\omega_8$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{b, c\}$
$\omega_9$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$d$	$\{b, c\}$
$\omega_{10}$	$a$	$\neg b$	$c$	$\neg d$	$\{b\}$
$\omega_{11}$	$a$	$\neg b$	$c$	$d$	$\{b\}$
$\omega_{12}$	$a$	$b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{c\}$
$\omega_{13}$	$a$	$b$	$\neg c$	$d$	$\{c\}$
$\omega_{14}$	$a$	$b$	$c$	$\neg d$	$\emptyset$
$\omega_{15}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\{(\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\}$

Nous obtenons le préordre sur les interprétations en utilisant les comparateurs sur les ensembles de formules de  $\Sigma$  falsifiées les interprétations.

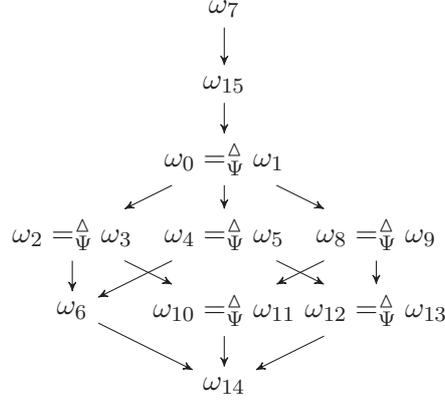
**Comparateur faible** En appliquant le comparateur faible, nous obtenons :



Les flèches pleines représentent le préordre partiel strict  $\prec_{\Psi}^w$  et les flèches en pointillés représentent le préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^w$ .

<sup>1</sup>Nous utiliserons cette représentation dans ce chapitre, les flèches pleines représentent les préordres stricts alors que les flèches en pointillés représentent les préordres non stricts.

**Comparateur lexicographique** Pour le comparateur lexicographique, nous obtenons :



D'après la définition 6.6, la représentation sémantique de  $\Psi$  est un préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^C$  sur les interprétations  $\mathcal{W}$  et elle est telle que

$$Mod(Bel(\Psi)) = \min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^C).$$

### Exemple 6.6

Quelque soit le comparateur utilisé, nous avons  $Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega_{14}\}$ .

Nous définissons ensuite la contre-partie sémantique de la révision par R-ensembles de bases de croyances partiellement préordonnées que nous notons  $\bullet_{\preceq_C}$  :

### Définition 6.7

Soit  $\preceq_{\Psi}^C$  la représentation sémantique de l'état épistémique  $\Psi$ . Soit  $\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu$  l'état épistémique révisé sémantiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ .

$$Mod(Bel(\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu)) = \min(Mod(\mu), \preceq_{\Psi}^C).$$

L'état épistémique  $\Psi$  révisé par la formule propositionnelle  $\mu$  est représenté sémantiquement par un nouveau préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu}$  sur les interprétations  $\mathcal{W}$ . Ce nouveau préordre partiel est défini à partir des ensembles de formules de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  falsifiées par les interprétations auquel nous appliquons les comparateurs. Nous définissons une correspondance où  $F_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu}(\omega)$  dénote l'ensemble des formules de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  falsifiées par l'interprétation  $\omega$  :

### Définition 6.8

Soit  $\Psi \circ_{\preceq_C} \mu$  l'état épistémique révisé syntaxiquement par  $(\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu, \preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu})$ .

Le **préordre partiel**  $\preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu}$  représentant l'état épistémique révisé sémantiquement  $\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu$  est défini tel que :  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,

$$\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_C} \mu} \omega' \text{ si et seulement si } F_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu}(\omega) \preceq_C F_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu}(\omega').$$

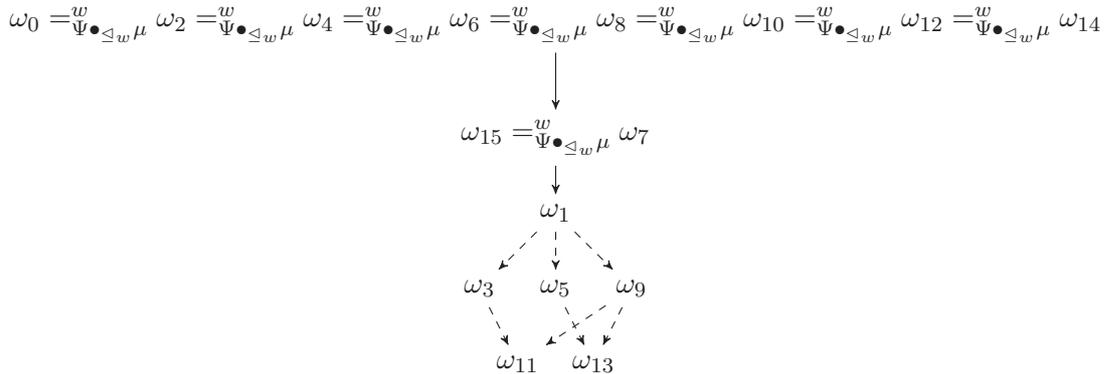
**Exemple 6.7**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $\mu$  définis dans l'exemple 6.1. Nous considérons l'ensemble des formules de  $\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu$  falsifiées par les interprétations :

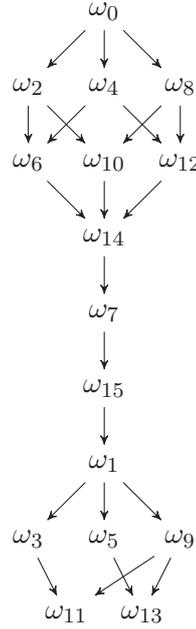
$\omega_i$	$a$	$b$	$c$	$d$	$F_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu}(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{a, b, c, d\}$
$\omega_1$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$d$	$\{a, b, c\}$
$\omega_2$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$\neg d$	$\{a, b, d\}$
$\omega_3$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$d$	$\{a, b\}$
$\omega_4$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{a, c, d\}$
$\omega_5$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$d$	$\{a, c\}$
$\omega_6$	$\neg a$	$b$	$c$	$\neg d$	$\{a, d\}$
$\omega_7$	$\neg a$	$b$	$c$	$d$	$\{a, (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\}$
$\omega_8$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{b, c, d\}$
$\omega_9$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$d$	$\{b, c\}$
$\omega_{10}$	$a$	$\neg b$	$c$	$\neg d$	$\{b, d\}$
$\omega_{11}$	$a$	$\neg b$	$c$	$d$	$\{b\}$
$\omega_{12}$	$a$	$b$	$\neg c$	$\neg d$	$\{c, d\}$
$\omega_{13}$	$a$	$b$	$\neg c$	$d$	$\{c\}$
$\omega_{14}$	$a$	$b$	$c$	$\neg d$	$\{d\}$
$\omega_{15}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\{(\neg b \vee \neg c \vee \neg d)\}$

Nous obtenons le préordre sur les interprétations en utilisant les comparateurs sur les ensembles de formules de  $\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu$ .

**Comparateur faible** Si nous appliquons le comparateur faible, nous obtenons le préordre partiel suivant :



**Comparateur lexicographique** L'application du comparateur lexicographique, nous donne le préordre partiel suivant :



Les modèles de  $\mu$  sont  $\omega_{11}$ ,  $\omega_{13}$  et  $\omega_{15}$  et dans cet exemple, quelque soit le comparateur, nous avons  $Mod(Bel(\Psi \bullet_{\leq_C} \mu)) = \{\omega_{11}, \omega_{13}\}$ .

### 6.3.1 PPRS et l'assignation P-fidèle

PPRSR satisfait la notion d'assignation P-fidèle introduite dans [24] rappelée par la définition 4.15 du chapitre 4.

#### Proposition 6.1

Soit  $\Psi$  un état épistémique et  $\preceq_{\Psi}^C$  un préordre partiel sur  $\mathcal{W}$  associé à  $\Psi$ .

$\preceq_{\Psi}^C$  est une assignation P-fidèle.

**Preuve :** Soit  $\Sigma$  un ensemble de formules. Le préordre sur les interprétations est défini de la manière suivante :  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,  $\omega \preceq_{\Psi}^C \omega'$  ssi  $F_{\Sigma}(\omega) \leq_C F_{\Sigma}(\omega')$ . Nous voulons montrer que  $\preceq_{\Psi}^C$  est une assignation P-fidèle.

1. Montrons que si  $\omega \in Mod(Bel(\Psi))$  et  $\omega' \in Mod(Bel(\Psi))$  alors  $\omega \prec_{\Psi}^C \omega'$  est impossible.  
Soit  $\omega \in Mod(Bel(\Psi))$  et  $\omega' \in Mod(Bel(\Psi))$  alors  $F_{\Sigma}(\omega) = \emptyset$  et  $F_{\Sigma}(\omega') = \emptyset$ .  
Donc  $F_{\Sigma}(\omega) =_C F_{\Sigma}(\omega')$  donc  $\omega =_C^C \omega'$ .
2. Montrons que si  $\omega' \not\models Bel(\Psi)$ , alors il existe  $\omega$  tel que  $\omega \models Bel(\Psi)$  et  $\omega \prec_{\Psi}^C \omega'$ .  
Soit  $\omega' \not\models Bel(\Psi)$  alors  $F_{\Sigma}(\omega') \neq \emptyset$ . Montrons qu'il existe  $\omega$  tel que  $\omega \models Bel(\Psi)$  et  $\omega \prec_{\Psi}^C \omega'$ .  
 $\Psi$  est un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  avec  $\Sigma$  cohérent. Donc il existe  $\omega$  tel que  $\omega \models Bel(\Psi)$  et  $F_{\Sigma}(\omega) = \emptyset$ . On a  $F_{\Sigma}(\omega') \neq \emptyset$  et  $F_{\Sigma}(\omega) = \emptyset$  donc  $F_{\Sigma}(\omega) \leq_C F_{\Sigma}(\omega')$ . Ainsi,  $\omega \prec_{\Psi}^C \omega'$ .

3. Montrons que si  $\Psi = \Phi$  alors  $\preceq_{\Psi}^C = \preceq_{\Phi}^C$ . Soit  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$  la représentation syntaxique de l'état épistémique  $\Psi$  et  $(\Gamma, \preceq_{\Gamma})$  la représentation syntaxique de l'état épistémique  $\Phi$ . Si  $\Psi = \Phi$  alors  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) = (\Gamma, \preceq_{\Gamma})$  et  $Bel(\Psi) = Bel(\Phi)$ , donc  $\preceq_{\Psi}^C = \preceq_{\Phi}^C$ .

■

Puisque  $\preceq_{\Psi}^C$  est une assignation P-fidèle alors l'opération  $\bullet_{\preceq_C}$  satisfait les postulats révisés (P1) - (P7) comme le précise le théorème de représentation rappelé en section 4.5.1 du chapitre 4 et introduit dans [24].

### 6.3.2 Instanciation de PPRSР avec le comparateur faible

Dans le cas où nous utilisons le comparateur faible défini en section 5.1, PPRSР capture l'extension aux préordres partiels de la révision possibiliste rappelée en section 4.5.3.2. En effet, l'état épistémique issu de cette révision conserve l'ordre relatif entre les modèles de la nouvelle information  $\mu$ . Les modèles de  $\mu$  sont strictement préférés aux contre-modèles de  $\mu$ . Les contre-modèles sont mis au même niveau. Nous avons la proposition suivante :

#### Proposition 6.2

Soit  $\circ_{\pi}$  l'opérateur de révision possibiliste.  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,

$$\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_w} \mu}^w \omega' \quad \text{si et seulement si} \quad \omega \preceq_{\Psi \circ_{\pi} \mu} \omega'$$

#### Preuve :

Nous pouvons distinguer trois cas :

- L'ordre relatif entre les modèles de  $\mu$  est préservé.
- Les contre-modèles de  $\mu$  sont au même niveau.
- Les modèles de  $\mu$  sont strictement préférés aux contre-modèles de  $\mu$ .

1. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \in Mod(\mu) \text{ et } \omega' \in Mod(\mu) \text{ alors } \omega \preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_w} \mu}^w \omega' \text{ ssi } \omega \preceq_{\Psi}^w \omega'.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_w} \mu}^w \omega' \quad \text{ssi} \quad & F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega) \triangleleft_w F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega') \\ \text{ssi} \quad & \forall \phi \in F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega') \text{ tel que } \varphi \preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu} \phi \end{aligned}$$

Comme  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \in Mod(\mu)$  alors  $\mu \notin F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega)$  et  $\mu \notin F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega')$ .

D'après la définition 6.1 de  $\circ_{\preceq_w}$ ,  $\forall \psi, \phi \in \Sigma : \psi \preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu} \phi$  ssi  $\psi \preceq_{\Sigma} \phi$

Donc :

$$\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\preceq_w} \mu}^w \omega' \quad \text{ssi} \quad \forall \phi \in F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega') \text{ tel que } \varphi \preceq_{\Sigma} \phi$$

Comme  $\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu = \Sigma \cup \{\mu\}$  :

$$\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega' \quad \text{ssi} \quad \forall \phi \in F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega') \text{ tel que } \varphi \preceq_{\Sigma} \phi$$

De plus, comme  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  alors  $\mu \notin F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  et  $\mu \notin F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$ . Donc  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) = F_{\Sigma}(\omega)$  et  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega') = F_{\Sigma}(\omega')$ .

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega' \quad \text{ssi} \quad & \forall \phi \in F_{\Sigma}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma}(\omega') \text{ tel que } \varphi \preceq_{\Sigma} \phi \\ & \text{ssi} \quad F_{\Sigma}(\omega) \triangleleft_w F_{\Sigma}(\omega') \\ & \text{ssi} \quad \omega \preceq_{\Psi}^w \omega'. \end{aligned}$$

2. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu) \text{ et } \omega' \notin \text{Mod}(\mu) \text{ alors } \omega =_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega'.$$

Nous avons  $\omega \notin \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega$  et  $\omega'$  falsifient  $\mu$  donc  $\mu \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega)$  et  $\mu \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega')$ . Par définition de  $\preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}$ , on a :  $\forall \phi \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega')$  (en l'occurrence  $\mu$ ) tel que  $\varphi \preceq_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu} \phi$  et donc  $\omega \preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega'$ . Par symétrie, on a  $\omega' \preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega$  donc  $\omega =_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega'$ .

3. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu) \text{ et } \omega' \notin \text{Mod}(\mu) \text{ alors } \omega \prec_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega'.$$

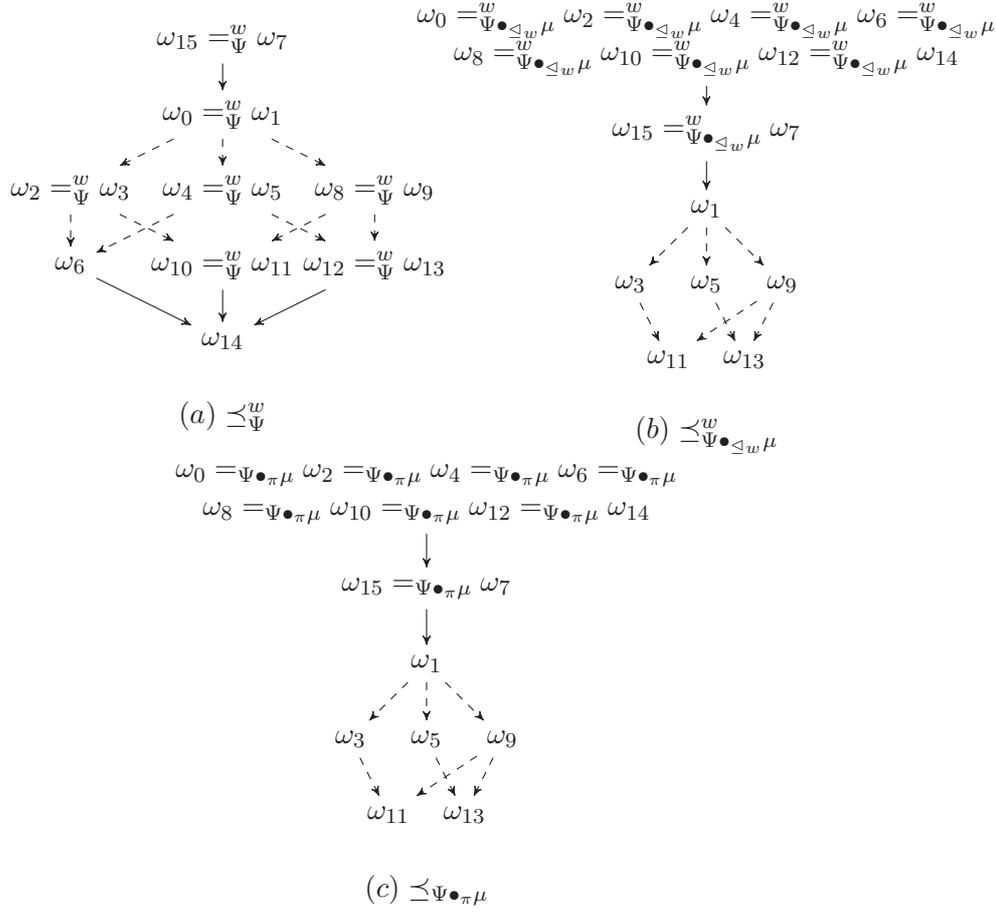
Nous avons  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega$  ne falsifie pas  $\mu$  et  $\omega'$  falsifie  $\mu$  donc  $\mu \notin F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega)$  et  $\mu \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega')$ . Nous avons :  $\forall \phi \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega), \exists \varphi \in F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu}(\omega')$  (en l'occurrence  $\mu$ ) tel que  $\varphi \prec_{\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu} \phi$ . Donc  $\omega \prec_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w \omega'$ . ■

### Exemple 6.8

Nous considérons l'exemple 6.1. Nous utilisons la définition 6.6 avec le comparateur faible pour construire le préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^w$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . L'ensemble des formules falsifiées est détaillé dans l'exemple 6.5. Nous obtenons le préordre partiel illustré par la figure 6.3 (a). Nous avons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi)) = \min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^w) = \{\omega_{14}\}$ .

De même, nous utilisons la définition 6.8 le comparateur faible pour construire le préordre partiel (b)  $\preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu}^w$ , représenté par la figure 6.3 (b). Nous rappelons que l'ensemble des formules falsifiées de  $\Sigma \circ_{\triangleleft_w} \mu$  est détaillé dans l'exemple 6.7.  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_w} \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) = \{\omega_{11}, \omega_{13}\}$ .

De plus, l'application de la révision prossibiliste définie en section 4.5.3.2 nous fournit le préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu}^w$  illustré par la figure 6.3 (c). En effet, les modèles de  $\mu$  sont les interprétations  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}, \omega_{13}$  et  $\omega_{15}$ . L'ordre relatif entre les modèles de  $\mu$  est préservé, alors que les contre-modèles sont mis au même niveau. Enfin, les modèles de  $\mu$  sont préférés aux contre-modèles.

FIG. 6.3 – Préordres partiels sur les interprétations  $\preceq_{\Psi}^w$ ,  $\preceq_{\Psi \bullet_{\leq w} \mu}^w$  et  $\preceq_{\Psi \bullet_{\pi} \mu}$ 

D'après la proposition 6.2, notre opérateur instancié avec le comparateur faible capture l'extension de la révision possibiliste et par conséquent satisfait les postulats (DP1), (DP3) - (DP4) et ( $C_{Cond}$ ).

**Remarque :** Dans [24], une caractérisation des postulats de Darwiche et Pearl est proposée lorsque les états épistémiques sont représentés par des préordres partiels. Cette caractérisation est rappelée en section 4.4 du chapitre 4.

### 6.3.2.1 Equivalence syntaxique et sémantique de PPRSР avec le comparateur faible

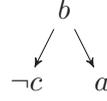
La définition de la contre-partie sémantique telle qu'elle est exposée au début de cette section, nous permet de capturer complètement la révision possibiliste mais elle n'est pas équivalente à l'approche syntaxique définie en section 6.2 de ce chapitre.

#### Contre-exemple 6.1

Considérons le contre-exemple suivant : soit  $\Phi$  un état épistémique représenté syntaxi-

quement par la base de croyances partiellement préordonnées  $(\Gamma, \preceq_\Gamma)$  où

- $\Gamma = \{a, b, \neg c\}$  et
- $\preceq_\Gamma :$



Nous souhaitons réviser par la formule  $\mu = a \rightarrow b \wedge c$ . L'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ , noté  $\Phi \circ_{\preceq_w} \mu$ , est représenté par :

- $\Gamma \circ_{\preceq_w} \mu = \{a, b, \neg c, a \rightarrow b \wedge c\}$
- $\preceq_{\Gamma \circ_{\preceq_w} \mu}$  est illustré par la figure 6.4.

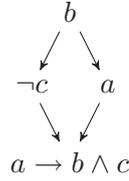


FIG. 6.4 -  $\preceq_{\Gamma \circ_{\preceq_w} \mu}$

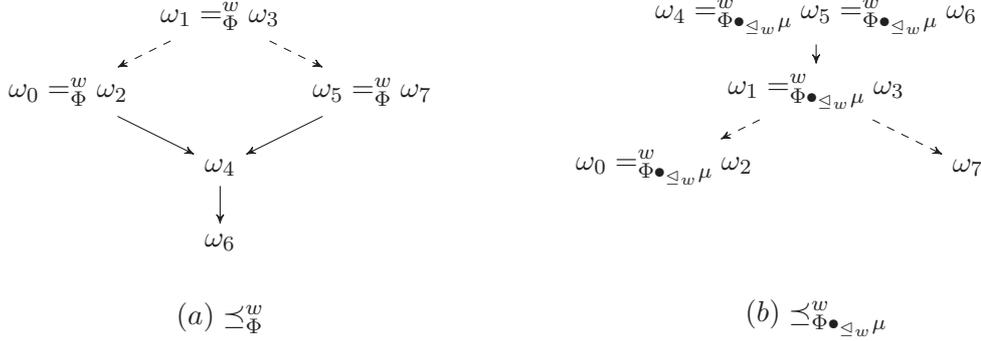
Nous obtenons deux  $R$ -ensembles  $R_0 = \{a\}$  et  $R_1 = \{\neg c\}$  et l'ensemble des croyances courantes de l'état épistémique révisé est :

$$\text{Bel}(\Phi \circ_{\preceq_w} \mu) = \text{Cons}(\{b, \neg c, a \rightarrow b \wedge c\}) \vee \text{Cons}(\{a, b, a \rightarrow b \wedge c\}).$$

Sémantiquement, nous construisons les préordres partiels à partir des ensembles de formules de  $\Gamma$  (resp.  $\Gamma \circ_{\preceq_w} \mu$ ) falsifiées par les interprétations.

$\omega_i$	$a$	$b$	$c$	$F_\Gamma(\omega_i)$	$F_{\Gamma \circ_{\preceq_w} \mu}(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\omega_1$	$\neg a$	$\neg b$	$c$	$\{a, b, \neg c\}$	$\{a, b, \neg c\}$
$\omega_2$	$\neg a$	$b$	$\neg c$	$\{a\}$	$\{a\}$
$\omega_3$	$\neg a$	$b$	$c$	$\{a, \neg c\}$	$\{a, \neg c\}$
$\omega_4$	$a$	$\neg b$	$\neg c$	$\{b\}$	$\{b, a \rightarrow b \wedge c\}$
$\omega_5$	$a$	$\neg b$	$c$	$\{b, \neg c\}$	$\{b, \neg c, a \rightarrow b \wedge c\}$
$\omega_6$	$a$	$b$	$\neg c$	$\emptyset$	$\{a \rightarrow b \wedge c\}$
$\omega_7$	$a$	$b$	$c$	$\{\neg c\}$	$\{\neg c\}$

Nous obtenons les préordres partiels  $\preceq_\Phi^w$  et  $\preceq_{\Phi \bullet \preceq_w \mu}^w$  suivants :



D'après le préordre partiel  $\preceq_{\Phi \bullet_{\leq_w} \mu}^w$  et la définition 6.7, nous avons :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_{\leq_w} \mu)) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_7\}.$$

Or les modèles de  $\text{Bel}(\Phi \circ_{\leq_w} \mu)$  sont  $\omega_2$  et  $\omega_7$ . Nous n'avons donc pas l'équivalence entre les approches syntaxiques et sémantiques.

Pour obtenir l'équivalence entre notre approche syntaxique et notre approche sémantique, nous devons raffiner l'ensemble des modèles de notre état épistémique révisé sémantiquement par  $\mu$ . En effet, lors de la définition de la notion de R-ensemble dans notre approche syntaxique, nous considérons les sous-ensembles de formules minimaux selon l'inclusion. La même considération doit être prise en compte dans notre approche sémantique.

Nous redéfinissons la contre-partie sémantique de la révision par R-ensembles de bases de croyances partiellement préordonnées que nous notons  $\bullet_{\leq_w+}$  :

### Définition 6.9

Soit  $\preceq_{\Psi}^C$  la représentation sémantique de l'état épistémique  $\Psi$ . Soit  $\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu$  l'état épistémique révisé sémantiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ .

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu)) = \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}.$$

Nous montrons l'équivalence entre l'opération de révision syntaxique  $\circ_{\leq_w}$  et l'opération de révision sémantique  $\bullet_{\leq_w+}$ .

### Proposition 6.3

Soient  $\Psi \circ_{\leq_w} \mu$  l'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu$  et  $\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu$  l'état épistémique révisé sémantiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ .

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu)) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu)).$$

**Preuve :** Nous voulons montrer que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu)) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu))$  or d'après la définition 6.9,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_w+} \mu)) = \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}$ . Nous montrons que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu)) = \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}$ .

1. Montrons que

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu)) \subseteq \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}.$$

$\forall \omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu))$ , il existe au moins un R-ensemble  $R \in \mathcal{R}_w(\Sigma \cup \{\mu\})$  tel que  $\omega \in \text{Mod}((\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\})$ . Soit  $F_{\Sigma}(\omega)$  l'ensemble des formules falsifiées par  $\omega$ . Comme  $\omega \in \text{Mod}((\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\})$  alors  $\omega$  ne falsifie pas les formules de  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$  mais  $\omega$  falsifie les formules du R-ensemble  $R$ . Donc  $F_{\Sigma}(\omega) = R$ . Nous voulons montrer que

- (a)  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w)$ . Supposons  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w)$  alors il existe  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $\omega' \prec_{\Psi}^w \omega$ . Par la définition 6.6,  $\omega' \prec_{\Psi}^w \omega$  si et seulement si  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_w F_{\Sigma}(\omega)$ . Or  $F_{\Sigma}(\omega) = R$  donc  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_w R$  ce qui contredit le fait que  $R$  est un R-ensemble. Donc  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w)$ .
- (b)  $\nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)$ . Supposons  $\exists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)$ . Comme  $F_{\Sigma}(\omega) = R$ , nous avons  $F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset R$  ce qui contredit le fait que  $R$  est un R-ensemble. Donc  $\nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)$ .

2. Montrons que

$$\{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\} \subseteq \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\leq_w} \mu)).$$

$\forall \omega \in \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}$ ,  $F_{\Sigma}(\omega) \neq \emptyset$  car  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est incohérent.  $F_{\Sigma}(\omega) \subset \Sigma$  et  $\omega \models \mu$  et  $\omega \models (\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega))$ . Puisque  $F_{\Sigma}(\omega) \cap \{\mu\} = \emptyset$  donc  $\omega \models (\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega)) \cup \{\mu\}$  et  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega)) \cup \{\mu\}$  est cohérent. Montrons que  $F_{\Sigma}(\omega)$  est un R-ensemble. Montrons que :

- (a)  $\nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \subset F_{\Sigma}(\omega)$ . Supposons qu'il existe  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \subset F_{\Sigma}(\omega)$ . Cela contredit l'hypothèse de départ :  $\omega \in \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}$ .
- (b)  $\nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_w F_{\Sigma}(\omega)$ . Supposons qu'il existe  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_w F_{\Sigma}(\omega)$ . D'après la définition 6.6,  $\omega' \prec_{\Psi}^w \omega$  donc  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w)$  ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

### Exemple 6.9

Si nous reprenons l'exemple 6.1 présenté en contre-exemple. Nous obtenons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_{\leq_w} \mu)) = \{\omega_2, \omega_7\}$  car  $F_{\Gamma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega_2) \subset F_{\Gamma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega_0)$ . Ces modèles correspondent bien à ceux de l'état épistémique  $\Phi$  révisé syntaxiquement c'est-à-dire à  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \circ_{\leq_w} \mu))$ .

Mais dans ce cadre, nous capturons seulement le préordre partiel sur les interprétations obtenu par la révision possibiliste. Les modèles de notre approche sont inclus dans les modèles obtenus par la révision possibiliste.

**Proposition 6.4**

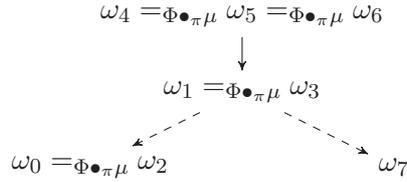
Soit  $\circ_\pi$  l'opérateur de révision possibiliste.  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_{w^+}} \mu)) \subseteq \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_\pi \mu)).$$

**Preuve :** Soit  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\leq_{w^+}} \mu))$ . Montrons que  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_\pi \mu))$ . D'après la définition 6.9,  $\omega \in \{\omega \mid \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w) \text{ et } \nexists \omega', F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega') \subset F_{\Sigma \circ_{\leq_w} \mu}(\omega)\}$ . Donc  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^w)$ . Or nous rappelons dans la section 4.5.3.2 du chapitre 4 que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_\pi \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi})$  où le préordre partiel  $\preceq_{\Psi}$  étant la représentation sémantique de l'état épistémique  $\Psi$ . Donc  $\preceq_{\Psi} = \preceq_{\Psi}^w$  et  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_\pi \mu))$ . ■

**Exemple 6.10**

Si nous reprenons l'exemple 6.1, nous construisons le préordre partiel  $\preceq_{\Phi \bullet_\pi \mu}$  à partir de la révision possibiliste :



Nous avons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_{\leq_{w^+}} \mu)) = \{\omega_2, \omega_7\}$  et  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_\pi \mu)) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_7\}$ . Nous avons bien  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_{\leq_{w^+}} \mu)) \subseteq \text{Mod}(\text{Bel}(\Phi \bullet_\pi \mu))$ .

### 6.3.3 Instanciation de PPRS avec le comparateur lexicographique

Nous montrons dans cette section que cette instanciation, nous permet de capturer l'extension aux préordres partiels de la révision ordinaire drastique. Nous montrons également l'équivalence syntaxique et sémantique de notre opération de révision avec le comparateur lexicographique.

L'utilisation du comparateur lexicographique défini en section 5.1, nous permet de capturer l'extension aux préordres partiels de la révision ordinaire drastique présentée en section 4.5.3.1. L'état épistémique révisé avec cet opérateur conserve l'ordre relatif entre les modèles de la nouvelle information ainsi que l'ordre relatif entre les contre-modèles. Les modèles de  $\mu$  sont strictement préférés aux contre-modèles de  $\mu$ . Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 6.5**

Soit  $\circ_\triangleright$  l'opérateur de révision ordinaire drastique.  $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$ ,

$$\omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{si et seulement si} \quad \omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleright \mu} \omega'$$

**Preuve :**

Nous pouvons distinguer trois cas :

- L'ordre relatif entre les modèles de  $\mu$  est préservé.
- L'ordre relatif entre les contre-modèles de  $\mu$  est préservé.
- Les modèles de  $\mu$  sont strictement préférés aux contre-modèles de  $\mu$ .

1. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu) \text{ et } \omega' \in \text{Mod}(\mu) \text{ alors } \omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \text{ ssi } \omega \preceq_{\Psi}^{\Delta} \omega'.$$

Nous avons :

$$\omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu}(\omega')$$

Comme  $\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu = \Sigma \cup \{\mu\}$  :

$$\omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$$

De plus, comme  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  alors  $\mu \notin F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  et  $\mu \notin F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$ . Donc  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) = F_{\Sigma}(\omega)$  et  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega') = F_{\Sigma}(\omega')$  et nous avons :

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad F_{\Sigma}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma}(\omega') \\ \text{ssi} \quad \omega \preceq_{\Psi}^{\Delta} \omega'. \end{aligned}$$

2. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu) \text{ et } \omega' \notin \text{Mod}(\mu) \text{ alors } \omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \text{ ssi } \omega \preceq_{\Psi}^{\Delta} \omega'.$$

Nous avons :

$$\omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu}(\omega')$$

Comme  $\Sigma \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu = \Sigma \cup \{\mu\}$  :

$$\omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$$

$\mu$  étant une nouvelle information, nous rajoutons une classe d'équivalence  $E_{n+1}$  telle que  $E_{n+1} = \{\mu\}$  et  $\forall i, 1 \leq i \leq n, E_{n+1} \prec_s E_i$ . Les autres classes d'équivalence restent inchangées, nous avons donc  $\forall i, 1 \leq i \leq n, |E_i \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)| = |E_i \cap F_{\Sigma}(\omega)|$  et  $|E_i \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')| = |E_i \cap F_{\Sigma}(\omega')|$ .

D'après la définition 5.1.2 du comparateur reformulé, nous avons :

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Psi_{\bullet} \triangleleft_{\Delta} \mu}^{\Delta} \omega' \quad \text{ssi} \quad \forall i, 1 \leq i \leq n+1, \text{ si } |E_i \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)| > |E_i \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')| \text{ alors} \\ \exists j, 1 \leq j \leq n+1 \text{ tel que } |E_j \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')| > |E_j \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)| \\ \text{et } E_j \prec_s E_i \end{aligned}$$

De plus, comme  $\omega \notin \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\mu \in F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  et  $\mu \in F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$  et nous avons :

$$|E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)| = |E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')|.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Psi \bullet \triangleleft \Delta}^{\Delta} \omega' \quad & \text{ssi} \quad \forall i, 1 \leq i \leq n, \text{ si } |E_i \cap F_{\Sigma}(\omega)| > |E_i \cap F_{\Sigma}(\omega')| \text{ alors} \\ & \exists j, 1 \leq j \leq n \text{ tel que } |E_j \cap F_{\Sigma}(\omega')| > |E_j \cap F_{\Sigma}(\omega)| \\ & \text{et } E_j \prec_s E_i \\ & \text{ssi} \quad F_{\Sigma}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma}(\omega') \\ & \text{ssi} \quad \omega \preceq_{\Psi}^{\Delta} \omega'. \end{aligned}$$

3. Nous voulons montrer :

$$\text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu) \text{ et } \omega' \notin \text{Mod}(\mu) \text{ alors } \omega \prec_{\Psi \bullet \triangleleft \Delta}^{\Delta} \omega'.$$

Nous avons  $\omega \in \text{Mod}(\mu)$  et  $\omega' \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $\omega$  ne falsifie pas  $\mu$  et  $\omega'$  falsifie  $\mu$  donc  $\mu \notin F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  et  $\mu \in F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$ . De plus,  $\mu$  étant la nouvelle information, sa classe d'équivalence correspondante est  $E_{n+1}$  c'est-à-dire  $E_{n+1} = \{\mu\}$  et  $\forall i, 1 \leq i \leq n, E_{n+1} \prec_s E_i$ .

Par conséquent, nous avons  $|E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')| > |E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)|$ .

Donc :  $\forall i, 1 \leq i \leq n+1$ , si  $|E_i \cap F_{\Sigma}(\omega)| > |E_i \cap F_{\Sigma}(\omega')|$  alors  $\exists j, j = n+1$  tel que  $|E_j \cap F_{\Sigma}(\omega')| > |E_j \cap F_{\Sigma}(\omega)|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Nous avons bien  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$ . De plus, nous avons :

$F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega') \not\triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  car pour  $i = n+1, |E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')| > |E_{n+1} \cap F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)|$  et il n'existe pas de  $j, 1 \leq j \leq n+1$  tel que  $|E_j \cap F_{\Sigma}(\omega)| > |E_j \cap F_{\Sigma}(\omega')|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

$F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega) \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega')$  et  $F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega') \not\triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma \cup \{\mu\}}(\omega)$  donc  $\omega \prec_{\Psi \bullet \triangleleft \Delta}^{\Delta} \omega'$ .

■

### Exemple 6.11

Nous considérons l'exemple 6.1. Nous utilisons la définition 6.6 avec le comparateur lexicographique pour construire le préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^{\Delta}$  sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ . Nous rappelons que l'ensemble des formules falsifiées est détaillé dans l'exemple 6.5. Le préordre partiel obtenu est illustré par la figure 6.5 (a). Nous avons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi)) = \min(\mathcal{W}, \preceq_{\Psi}^{\Delta}) = \{\omega_{14}\}$ .

Nous utilisons ensuite la définition 6.8 instanciée par le comparateur lexicographique pour construire le préordre partiel (b)  $\preceq_{\Psi \bullet \triangleleft \Delta}^{\Delta}$ , représenté par la figure 6.5 (b). L'ensemble des formules falsifiées de  $\Sigma \circ_{\triangleleft \Delta} \mu$  est détaillé dans l'exemple 6.7.  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet \triangleleft \Delta \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta}) = \{\omega_{11}, \omega_{13}\}$ .

Nous appliquons la révision ordinaire drastique définie en section 4.5.3.1 et le préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet \triangleright \mu}$  est illustré par la figure 6.5 (c). Les interprétations qui sont les modèles de  $\mu$  sont :  $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}, \omega_{13}$  et  $\omega_{15}$ . L'ordre relatif entre les

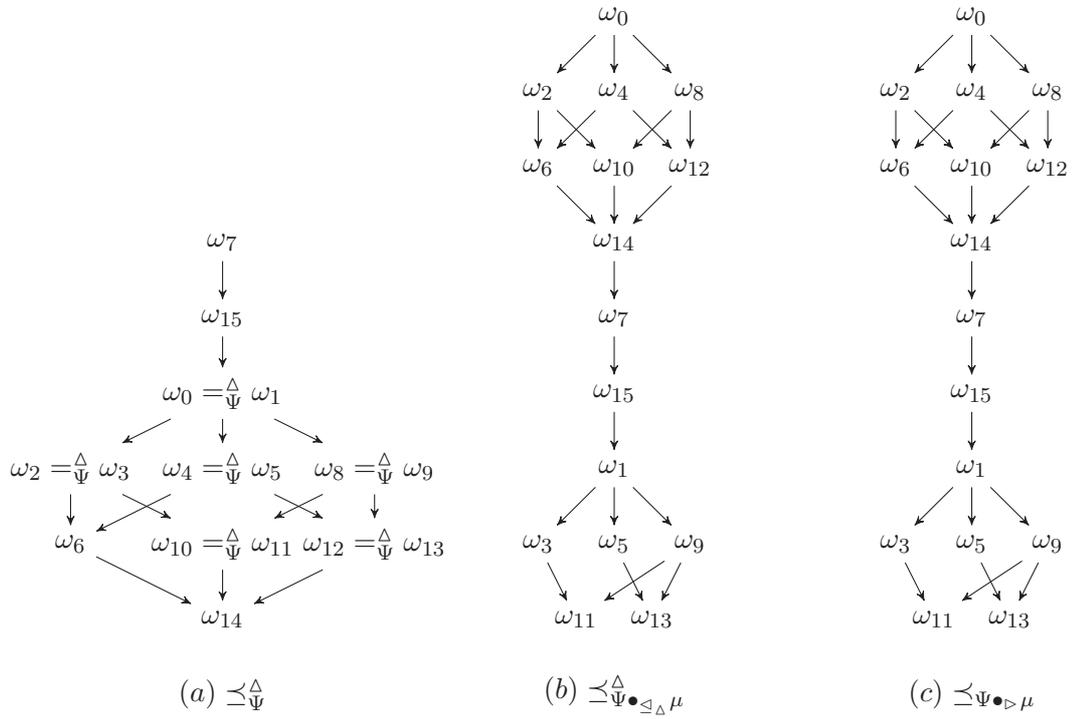


FIG. 6.5 – Préordres partiels sur les interprétations  $\preceq_{\Psi}^{\Delta}$ ,  $\preceq_{\Psi \bullet \leq_{\Delta}}^{\Delta} \mu$  et  $\preceq_{\Psi \bullet \triangleright} \mu$

modèles de  $\mu$  d'une part et les contre-modèles d'autre part, est préservé et les modèles de  $\mu$  sont préférés aux contre-modèles.

D'après la proposition 6.5, l'instanciation de notre opérateur avec le comparateur lexicographique capture l'extension de la révision ordinaire drastique et par conséquent satisfait les postulats (DP1)-(DP4) et ( $C_{lex}$ ) rappelés en sections 4.4.1 et 4.5.2 du chapitre 4 et introduit respectivement dans [50] et [24].

### 6.3.3.1 Equivalence syntaxique et sémantique entre PPRS avec le comparateur lexicographique

Nous montrons dans cette section l'équivalence de nos approches syntaxique et sémantique lors de l'instanciation avec le comparateur lexicographique. Lors de cette instanciation, le problème rencontré lors de l'instanciation du comparateur faible, exposé en section 6.3.2.1, ne se pose pas ici car le comparateur lexicographique vérifie la propriété de monotonie "stricte" comme il est décrit en section 5.1.2 du chapitre 5. La condition de minimalité selon l'inclusion est toujours vérifiée par la préférence lexicographique.

L'équivalence entre la révision par R-ensembles de bases de croyances partiellement

préordonnées syntaxique et sémantique instanciée par le comparateur lexicographique est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 6.6**

Soient  $\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu$  l'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu$  et  $\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu$  l'état épistémique révisé sémantiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ .

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)).$$

**Preuve :** Nous voulons montrer que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu))$  or d'après la définition 6.7,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Nous montrons que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ .

1. Montrons que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) \subseteq \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ .  
 $\forall \omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu))$ , il existe au moins un R-ensemble  $R \in \mathcal{R}_{\Delta}(\Sigma \cup \{\mu\})$  tel que  $\omega \in \text{Mod}((\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\})$ . Soit  $F_{\Sigma}(\omega)$  l'ensemble des formules falsifiées par  $\omega$ . Comme  $\omega \in \text{Mod}((\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\})$  alors  $\omega$  ne falsifie pas les formules de  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$  mais  $\omega$  falsifie les formules du R-ensemble  $R$ . Donc  $F_{\Sigma}(\omega) = R$ . Nous voulons montrer que  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Supposons  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  alors il existe  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $\omega' \prec_{\Psi}^{\Delta} \omega$ . Par définition,  $\omega' \prec_{\Psi}^{\Delta} \omega$  si et seulement si  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma}(\omega)$ . Or  $F_{\Sigma}(\omega) = R$  donc  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_{\Delta} R$  ce qui contredit le fait que  $R$  est un R-ensemble. Donc  $\omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ .
2. Montrons que  $\min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta}) \subseteq \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu))$ .  
 $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ ,  $F_{\Sigma}(\omega) \neq \emptyset$  car  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est incohérent.  $F_{\Sigma}(\omega) \subset \Sigma$  et  $\omega \models \mu$  et  $\omega \models (\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega))$ . Puisque  $F_{\Sigma}(\omega) \cap \{\mu\} = \emptyset$  donc  $\omega \models (\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega)) \cup \{\mu\}$  et  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega)) \cup \{\mu\}$  est cohérent. Montrons que  $F_{\Sigma}(\omega)$  est un R-ensemble. Montrons que  $\nexists \omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma}(\omega)$ . Supposons qu'il existe  $\omega' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $(\Sigma \setminus F_{\Sigma}(\omega')) \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $F_{\Sigma}(\omega') \triangleleft_{\Delta} F_{\Sigma}(\omega)$ . D'après la définition 6.6,  $\omega' \prec_{\Psi}^{\Delta} \omega$  donc  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\mu), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  ce qui contredit l'hypothèse de départ. ■

**Exemple 6.12**

D'après l'exemple 6.3, nous avons  $\mathcal{R}_{\Delta}(\Sigma \cup \{\mu\}) = \{R_0, R_4\}$  et  $\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu) = \text{Cons}(\{a, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d, d\}) \vee \text{Cons}(\{a, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d, d\})$ . Donc  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \{\omega_{11}, \omega_{13}\}$ . De plus, nous avons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \{\omega_{11}, \omega_{13}\}$ . Nous avons bien  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \circ_{\triangleleft_{\Delta}} \mu)) = \text{Mod}(\text{Bel}(\Psi \bullet_{\triangleleft_{\Delta}} \mu))$ .

## 6.4 L'équivalence entre PPRS et MCONS

Nous avons adopté le point de vue dual en préférant les sous-ensembles de formules de la base de croyances partiellement préordonnées à retirer pour restaurer la cohérence

mais la plupart des approches syntaxiques construisent les sous-bases cohérentes. Notre méthode, PPRSR, peut être définie en termes de sous-bases maximales cohérentes comme nous le montre la figure 6.6.

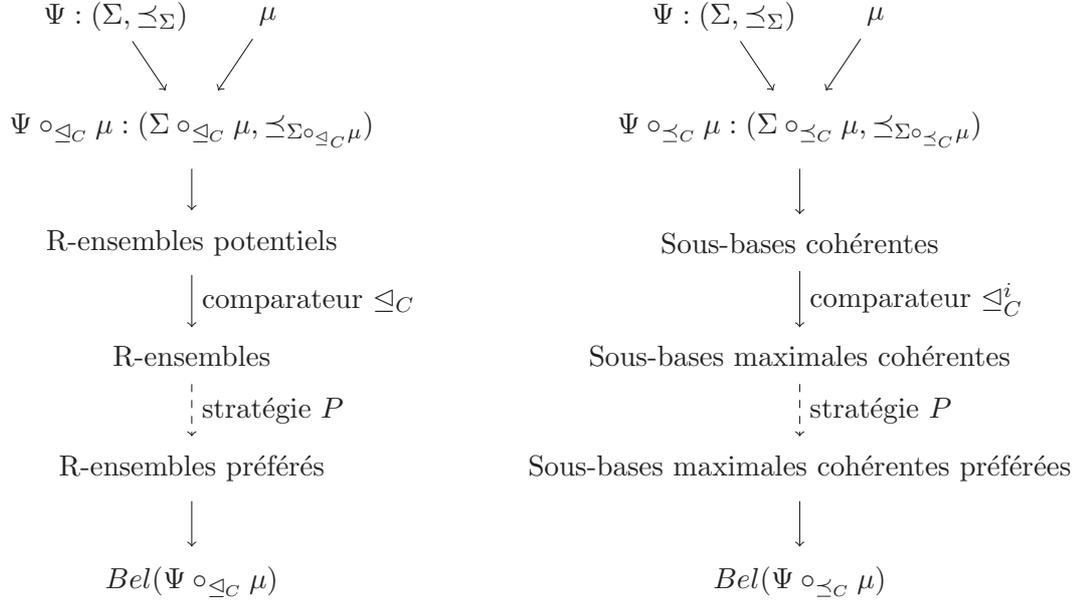


FIG. 6.6 – Equivalence entre PPRSR et MCONS

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle. Nous rappelons les notations déjà utilisées dans le chapitre 5. L'ensemble des sous-bases de  $\Sigma$  cohérentes avec la formule  $\mu$  est noté  $CONS(\Sigma \cup \{\mu\})$ . Formellement,  $CONS(\Sigma \cup \{\mu\}) = \{B \subseteq \Sigma, B \cup \{\mu\} \text{ est cohérent}\}$ . Nous sélectionnons les sous-bases de croyances cohérentes maximale au sens de l'inclusion et nous appliquons la relation de préférence induite par  $\preceq_C$  entre les différentes sous-bases de croyances de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  cohérentes. Nous notons  $MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$  l'ensemble des sous-bases de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$ . Formellement,

**Définition 6.10**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle telle que  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est incohérent.

$B \subseteq \Sigma$  est une sous-base de croyances de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximale cohérente et préférée selon  $\preceq_C$  si et seulement si

- (i)  $B \in CONS(\Sigma \cup \{\mu\})$ ,
- (ii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B' \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $B \subset B'$ ,
- (iii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B' \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $B' \prec_C B$ .

La révision syntaxique de l'état épistémique peut également être exprimée en termes de sous-bases de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$ . L'état épistémique  $\Psi$

étant représenté syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , la révision syntaxique de l'état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  conduit à un état épistémique révisé syntaxiquement, noté  $\Psi \circ_{\preceq_C} \mu$  et représenté par une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu, \preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu})$ . Pour le préordre  $\preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu}$ , la nouvelle formule  $\mu$  est préférée à tous les éléments de  $\Sigma$  et le préordre partiel entre les formules de  $\Sigma$  est préservé. Formellement, l'opérateur de révision syntaxique en termes de sous-bases de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$ , noté  $\circ_{\preceq_C}$  est défini comme suit :

**Définition 6.11**

Soient  $\Psi$  un état épistémique représenté par  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées cohérente et  $\mu$  une formule propositionnelle.

L'état épistémique révisé syntaxiquement par une formule propositionnelle  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\preceq_C} \mu$ , est représenté par :

- $\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu = \Sigma \cup \{\mu\}$
- $\preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu} :$ 
  - (i)  $\forall \psi \in \Sigma : \mu \prec_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu} \psi$
  - (ii)  $\forall \psi, \phi \in \Sigma : \psi \preceq_{\Sigma \circ_{\preceq_C} \mu} \phi$  ssi  $\psi \preceq_\Sigma \phi$

L'ensemble des croyances associées à l'état épistémique révisé syntaxiquement,  $\Psi \circ_{\preceq_C} \mu$ , est défini comme suit :

$$Bel(\Psi \circ_{\preceq_C} \mu) = \bigvee_{B \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})} Cons(B \cup \{\mu\})$$

La notion de R-ensemble peut donc être exprimée en termes de sous-bases de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximales cohérentes préférées selon  $\preceq_C$ .  $R$  est un R-ensemble de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  selon le comparateur  $\preceq_C$  si et seulement si  $(\Sigma \setminus R)$  est une sous-base de croyances de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  maximale cohérente préférée selon  $\preceq_C$ . Plus formellement,

**Proposition 6.7**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle telle que  $\Sigma \cup \{\mu\}$  est incohérent.

$R \in R_C(\Sigma \cup \{\mu\})$  si et seulement si  $\Sigma \setminus R \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

**Preuve :** Nous montrons que  $R \in R_C(\Sigma \cup \{\mu\})$  si et seulement si  $\Sigma \setminus R \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

1. Tout d'abord, nous montrons  $\forall R \in R_C(\Sigma \cup \{\mu\}), \Sigma \setminus R \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .  
Soit  $R \in R_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ . D'après la définition 6.3,  $R$  est un R-ensemble selon  $\preceq_C$  tel que
  - (i)  $R$  est R-ensemble potentiel,
  - (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \subset R$ ,
  - (iii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

Nous notons  $B = \Sigma \setminus R$ . D'après (i),  $B$  est cohérent. De plus,  $B \subset \Sigma$  donc  $B$  est une sous-base cohérente de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  c'est-à-dire  $B \in \text{CONS}(\Sigma \cup \{\mu\})$ . D'après (ii),  $R$  est minimal selon l'inclusion et peut se réécrire de la manière suivante :  $\#R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R) \subset (\Sigma \setminus R')$  c'est-à-dire  $B \subset (\Sigma \setminus R')$ . Donc  $B$  est maximal au sens de l'inclusion. D'après (iii),  $R$  est préféré selon le comparateur  $\preceq_C$ . Montrons que  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$  c'est-à-dire :  $\#R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$ .

Supposons  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$ . Nous détaillons la preuve pour chacun des comparateurs :

– Comparateur faible : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_w B$ .

D'après la définition 2.9,  $(\Sigma \setminus R') \prec_w B$  ssi  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i R'$ .

D'après la définition 2.8,  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i R'$  ssi  $\forall y \in R', \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_\Sigma y$ .

D'après la définition 5.2,  $\forall y \in R', \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_\Sigma y$  ssi  $R' \triangleleft_w (\Sigma \setminus B)$  c'est-à-dire  $R' \triangleleft_w R$ . Ceci contredit l'hypothèse de départ (iii).

– Comparateur lexico : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_\Delta B$ .

D'après la définition 5.21,  $(\Sigma \setminus R') \prec_\Delta B$  ssi  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$

D'après la définition 5.20,  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_\Delta^i B$  ssi

(a)  $(\Sigma \setminus R') \trianglelefteq_\Delta^i B$  et

(b)  $B \not\trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$ .

Plus précisément,

(a)  $(\Sigma \setminus R') \trianglelefteq_\Delta^i B$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap B| > |E_i \cap (\Sigma \setminus R')|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_j \cap B|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Or  $B = \Sigma \setminus R$ .

$(\Sigma \setminus R') \trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap (\Sigma \setminus R)| > |E_i \cap (\Sigma \setminus R')|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_j \cap (\Sigma \setminus R)|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

De plus, nous avons  $R \subseteq \Sigma, R' \subseteq \Sigma$  et  $\forall k, 1 \leq k \leq n, E_k \subseteq \Sigma$  :

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R)| + |E_k \cap R|$$

$$- |E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| + |E_k \cap R'|$$

Nous avons :

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus R)| + |E_k \cap R| = |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| + |E_k \cap R'| \text{ Donc } \forall k, 1 \leq k \leq n,$$

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus R)| > |E_k \cap (\Sigma \setminus R')| \text{ ssi } |E_k \cap R'| > |E_k \cap R|.$$

Par conséquent,  $(\Sigma \setminus R') \trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap R'| > |E_i \cap R|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R| > |E_j \cap R'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

D'après la définition 5.6,  $(\Sigma \setminus R') \trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R)$  ssi  $R' \trianglelefteq_\Delta R$ .

(b)  $B \not\trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap (\Sigma \setminus R')| > |E_i \cap B|$  pour lequel  $\#j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B| > |E_j \cap (\Sigma \setminus R')|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Comme précédemment, nous pouvons déduire que :  $B \not\trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap R| > |E_i \cap R'|$  pour lequel  $\#j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R'| > |E_j \cap R|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Par conséquent,  $B \not\trianglelefteq_\Delta^i (\Sigma \setminus R')$  ssi  $R \not\trianglelefteq_\Delta R'$ .

Donc  $(\Sigma \setminus R') \triangleleft_{\Delta}^i B$  ssi  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).  
 $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$  donc  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Nous avons donc  $B \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

2. Puis, nous montrons  $\forall B \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\}), \Sigma \setminus B \in R_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .  
 Soit  $B \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ . D'après la définition 6.10,  $B$  est une sous-base maximale cohérente préférée selon  $\preceq_C$ , plus précisément :

- (i)  $B \in CONS(\Sigma \cup \{\mu\})$ ,
- (ii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B \subset B'$ ,
- (iii)  $\nexists B' \subseteq \Sigma$  tel que  $B'$  est cohérent et  $B' \prec_C B$ .

Nous notons  $R = \Sigma \setminus B$ , nous avons  $B = \Sigma \setminus R$ . D'après (i),  $\Sigma \setminus R$  est cohérent. De plus,  $R \subset \Sigma$  donc  $R$  est un R-ensemble potentiel de  $\Sigma \cup \{\mu\}$  c'est-à-dire  $R \in R(\Sigma)$ . D'après (ii),  $B$  est maximal selon l'inclusion et peut se réécrire comme suit :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $B' = \Sigma \setminus R'$  et  $B'$  est cohérent et  $R' \subset R$ . Donc  $R$  est minimal selon l'inclusion. D'après (iii),  $B$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Montrons que  $R = \Sigma \setminus B$  est préféré selon le comparateur  $\triangleleft_C$  c'est-à-dire :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

Supposons  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ . Nous détaillons la preuve pour chacun des comparateurs :

- Comparateur faible : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_w R$ .

D'après la définition 5.2,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $\forall y \in R', \exists x \in R$  tel que  $x \prec_{\Sigma} y$ .

Or  $R = \Sigma \setminus B$  et  $R' = \Sigma \setminus B'$ .

$R' \triangleleft_C R$  ssi  $\forall y \in (\Sigma \setminus B'), \exists x \in (\Sigma \setminus B)$  tel que  $x \prec_{\Sigma} y$ .

D'après la définition 2.8,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $(\Sigma \setminus B) \triangleleft_w^i (\Sigma \setminus B')$ .

D'après la définition 2.9,  $R' \triangleleft_C R$  ssi  $B' \prec_w B$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).

- Comparateur lexicographique : nous avons supposé que  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $R' \triangleleft_{\Delta} R$

D'après la définition 5.6,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi

- (a)  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  et
- (b)  $R \not\triangleleft_{\Delta} R'$ .

Plus précisément,

- (a)  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap R'| > |E_i \cap R|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R| > |E_j \cap R'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Or  $B = \Sigma \setminus R$  et  $B' = \Sigma \setminus R'$ .

$R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap (\Sigma \setminus B')| > |E_i \cap (\Sigma \setminus B)|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_j \cap (\Sigma \setminus B')|$  et  $E_j \prec_s E_i$ . De plus, nous avons  $B \subseteq \Sigma, B' \subseteq \Sigma$  et  $\forall k, 1 \leq k \leq n, E_k \subseteq \Sigma$  :

- $|E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B)| + |E_k \cap B|$
- $|E_k \cap \Sigma| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| + |E_k \cap B'|$

Nous avons :

$$|E_k \cap (\Sigma \setminus B)| + |E_k \cap B| = |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| + |E_k \cap B'| \text{ Donc } \forall k, 1 \leq k \leq n, \\ |E_k \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_k \cap (\Sigma \setminus B')| \text{ ssi } |E_k \cap B'| > |E_k \cap B|.$$

Par conséquent,  $R' \trianglelefteq_{\Delta} R$  ssi  $\forall i, 1 \leq i \leq n$  : si  $|E_i \cap B| > |E_i \cap B'|$  alors  $\exists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B'| > |E_j \cap B|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

D'après la définition 5.20,  $R' \trianglelefteq_{\Delta} R$  ssi  $B' \trianglelefteq_{\Delta}^i B$ .

- (b)  $R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap R| > |E_i \cap R'|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap R'| > |E_j \cap R|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Comme précédemment, nous pouvons déduire que :  $R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap (\Sigma \setminus B)| > |E_i \cap (\Sigma \setminus B')|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap (\Sigma \setminus B')| > |E_j \cap (\Sigma \setminus B)|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

$R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $\exists i, 1 \leq i \leq n$  tel que  $|E_i \cap B'| > |E_i \cap B|$  pour lequel  $\nexists j, 1 \leq j \leq n$  tel que  $|E_j \cap B| > |E_j \cap B'|$  et  $E_j \prec_s E_i$ .

Par conséquent,  $R \not\trianglelefteq_{\Delta} R'$  ssi  $B \not\trianglelefteq_{\Delta}^i B'$ .

Donc  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $B' \triangleleft_{\Delta}^i B$ .

D'après la définition 5.21,  $R' \triangleleft_{\Delta} R$  ssi  $B' \prec_{\Delta} B$  ce qui contredit l'hypothèse de départ (iii).

$\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$  est cohérent et  $(\Sigma \setminus R') \prec_C B$  donc  $B = \Sigma \setminus R$  est préféré selon  $\preceq_C$ . Nous avons  $B \in MCONS_C(\Sigma \cup \{\mu\})$ .

■

## Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre un cadre de révision d'un état épistémique représenté par une base de croyances partiellement préordonnées par une formule propositionnelle, appelé PPRSR. Nous avons étendu la méthode des R-ensembles initialement définie pour un état épistémique représenté par une base de croyances non ordonnées et totalement préordonnées aux bases de croyances partiellement préordonnées. Nous avons proposé une contre-partie sémantique à cette approche syntaxique. Nous avons montré que dans le cas de l'utilisation du comparateur lexicographique, nos approches syntaxique et sémantique étaient équivalentes et que notre opération de révision capturait la révision ordinaire drastique. Lors de l'instanciation de notre approche avec le comparateur faible, nous avons montré que nous capturons complètement la révision possibiliste mais que cette contre-partie sémantique n'était pas équivalente à notre approche syntaxique. Nous avons proposé une contre-partie sémantique équivalente à notre approche syntaxique. Mais dans ce cas, nous avons montré que notre approche ne capture pas complètement la révision possibiliste. Enfin, nous avons montré que l'approche par R-ensembles est équivalente à l'approche qui considère les sous-bases maximales cohérentes. Les résultats de ce chapitre ont donné lieu à différentes publications [183, 184].

Dans les applications réelles, par exemple dans le contexte des systèmes d'informations géographique, GIS [14, 15] ou dans le contexte de l'information archéologique

présenté dans le chapitre 10 de ce manuscrit, nous disposons de données coûteuses et/ou difficiles à acquérir. Dans le cas d'incohérence, il semble naturel d'adopter une approche de minimisation de l'incohérence comme dans l'approche des R-ensembles où nous voulons retirer le moins de formules possibles.

Par ailleurs, nous disposons pour ces opérations de révision d'une mise en oeuvre en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables qui fait l'objet du chapitre 8. L'approche ASP ayant été développée avec succès pour la révision par R-ensembles dans le cadre d'informations non ordonnées ou totalement préordonnées, il nous a semblé naturel de l'étendre au cas de la révision d'informations partiellement préordonnées.

Nous nous intéressons dans le chapitre suivant à l'inférence lexicographique à partir de préordres partiels.

## Chapitre 7

# Inférence lexicographique

En présence d'incohérence, l'inférence classique ne peut être appliquée directement. En effet, à partir d'une base de croyances incohérente, nous pouvons déduire n'importe quoi. Pour pallier cela, différentes méthodes ont été proposées. L'une d'entre elles se base sur la restauration de la cohérence. La plupart des approches proposées dans ce cas considère des bases de croyances totalement préordonnées comme l'inférence possibiliste [62], l'inférence linéaire [155], l'inférence basée sur l'inclusion [42] et l'inférence lexicographique [17, 127]. Toutefois, des extensions pour des bases de croyances partiellement préordonnées ont été proposées comme l'extension de l'inférence possibiliste [23] et l'extension de l'inférence basée sur l'inclusion [113]. En revanche, aucune extension n'a été proposée pour l'inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. Pourtant, cette inférence présente des propriétés intéressantes aussi bien en théorie qu'en pratique. D'un point de vue psychologique, une étude a été réalisée dans le contexte du raisonnement par défaut [16] dans laquelle il est montré que l'inférence lexicographique est plus proche du raisonnement humain non-monotone que les autres inférences considérées par cette étude. De plus, l'inférence lexicographique nous permet d'éviter "l'effet de la noyade" [17] c'est-à-dire que toutes les formules qui ne contribuent pas à l'incohérence pourront être déduites.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre l'inférence lexicographique pour des bases de croyances partiellement préordonnées. Nous adoptons un point de vue dual par rapport aux travaux présentés en [207, 208, 209] puisque nous considérons les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence et non les sous-bases maximales cohérentes.

### 7.1 Inférence lexicographique basée sur les compatibles

Nous présentons dans cette section une première définition de l'inférence lexicographique pour des bases de croyances partiellement préordonnées s'appuyant sur la notion

de bases de croyances totalement préordonnées compatibles. Plus précisément, cette première méthode consiste à déterminer les bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec la base de croyances partiellement préordonnées initiale dont la définition est rappelée en section 3.3.2.2. Les conséquences lexicographiques de la base de croyances partiellement préordonnées initiale sont déterminées en appliquant l'inférence lexicographique classique sur chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatibles.

### 7.1.1 Approche syntaxique

#### 7.1.1.1 La préférence et l'inférence lexicographique classique

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances partitionnée en  $n$  strates, i.e.,  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  telle que les formules de la strate  $\Sigma_i$  ( $i \geq 1$ ) ont le même niveau de priorité et sont plus prioritaires que celles de la strate  $\Sigma_j$  pour  $j > i$ . Nous reformulons la préférence lexicographique rappelée en section 2.2.2.3 pour l'adapter à notre point de vue et l'appliquer entre les R-ensembles potentiels d'une base de croyances totalement préordonnées :

#### Définition 7.1

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances totalement préordonnées telle que  $(\Sigma, \leq_\Sigma) = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_m$ . Soient  $R_X$  et  $R_Y$  deux R-ensembles potentiels<sup>1</sup> de  $\Sigma$ . Alors,

- $R_Y <_{lex} R_X$  si et seulement si  $\exists i, 1 \leq i \leq m$  tel que  $|\Sigma_i \cap R_X| > |\Sigma_i \cap R_Y|$ <sup>2</sup> et  $\forall j, j < i, |\Sigma_j \cap R_X| = |\Sigma_j \cap R_Y|$
- $R_Y =_{lex} R_X$  si et seulement si  $\forall i, 1 \leq i \leq m$  tel que  $|\Sigma_i \cap R_Y| = |\Sigma_i \cap R_X|$ .

Nous définissons ensuite le notion de R-ensemble. Les R-ensembles sont les R-ensembles potentiels préférés selon la préférence lexicographique. Formellement,

#### Définition 7.2

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent. Soit  $\mathcal{R}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles potentiels de  $\Sigma$ .

$R \subseteq \Sigma$  est un **R-ensemble de  $\Sigma$  selon préférence lexicographique** si et seulement si

- (i)  $R$  est R-ensemble potentiel,
- (ii)  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R' <_{lex} R$ .

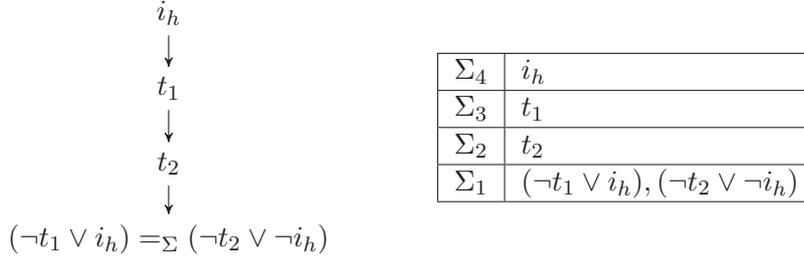
Nous notons  $R_{lex}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  selon la préférence lexicographique.

#### Exemple 7.1

Soit  $(\Sigma, \leq_1)$  une base de croyances totalement préordonnées telle que  $\Sigma = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$  et  $\leq_1$  :

<sup>1</sup>La notion de R-ensembles potentiels est définie en section 5.2 du chapitre 5.

<sup>2</sup> $|X|$  correspond au nombre de formules  $X$ .



Les  $R$ -ensembles potentiels de  $\Sigma$  sont les mêmes que ceux de l'exemple 5.11, nous les rappelons :

$$\begin{array}{ll}
R_0 = \{t_2\} & R_{14} = \{t_1, t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_1 = \{t_1, t_2\} & R_{15} = \{i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_2 = \{t_1, i_h\} & R_{16} = \{t_1, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_3 = \{t_2, i_h\} & R_{17} = \{t_2, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_4 = \{t_1, t_2, i_h\} & R_{18} = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_5 = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{19} = \{(\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_6 = \{t_1, t_2, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{20} = \{t_1, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_7 = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{21} = \{t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_8 = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{22} = \{t_1, t_2, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_9 = \{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{23} = \{i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{10} = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\} & R_{24} = \{t_1, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{11} = \{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{25} = \{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{12} = \{t_1, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} & R_{26} = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} \\
R_{13} = \{t_2, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\} &
\end{array}$$

Nous appliquons ensuite la préférence lexicographique sur les  $R$ -ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion car la préférence lexicographique ainsi définie, vérifie la propriété de monotonie "stricte". Les  $R$ -ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion sont  $R_0$ ,  $R_2$ ,  $R_7$  et  $R_{11}$ . L'application de la préférence lexicographique, nous conduit au préordre total suivant :

$$\begin{array}{c}
R_7 \\
\downarrow \\
R_{11} \\
\downarrow \\
R_0 \\
\downarrow \\
R_2
\end{array}$$

Nous obtenons  $R_{lex}(\Sigma) = \{R_2\}$ .

Nous rappelons ensuite la définition de l'inférence lexicographique classique adaptée à la méthode des R-ensembles :  $\varphi$  est une conséquence lexicographique de  $\Sigma$ , noté  $\Sigma \vdash_{lex} \varphi$ , si et seulement si  $\varphi$  est une conséquence classique de chacun des  $\Sigma \setminus R$  pour tout  $R \in R_{lex}(\Sigma)$ . Formellement,

**Définition 7.3**

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances totalement préordonnées. Soit  $R_{lex}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles selon la préférence lexicographique. Soit  $\psi$  une formule.

$$(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{lex} \varphi \text{ si et seulement si } \forall R \in R_{lex}(\Sigma) : (\Sigma \setminus R) \vdash \varphi.$$

**Exemple 7.2**

D'après l'exemple 7.1, nous avons  $R_{lex}(\Sigma) = \{R_2\}$  et donc par exemple,  $(\Sigma, \leq_\Sigma) \vdash_{lex} t_2$  car  $(\Sigma \setminus R_2) \vdash t_2$ .

**7.1.1.2 Définition de l'inférence lexicographique basée sur les compatibles**

Soit  $\mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  l'ensemble des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ . Dans la suite, nous notons  $(\Sigma, \leq_i)$  la  $i^{\text{ième}}$  base de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et  $R_{lex_i}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $(\Sigma, \leq_i)$ . A partir de la préférence lexicographique sur les R-ensembles potentiels et de l'inférence lexicographique, nous pouvons maintenant définir l'inférence lexicographique de bases de croyances partiellement préordonnées à partir des bases de croyances totalement préordonnées compatibles :  $\psi$  est une conclusion  $\mathcal{C}$ -lexicographique de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , notée  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi$ , si et seulement si  $\psi$  est une conséquence lexicographique de chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , formellement :

**Définition 7.4**

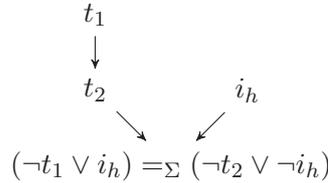
Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule. Alors,

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi \text{ si et seulement si } \forall (\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma) : (\Sigma, \leq_i) \vdash_{lex} \varphi.$$

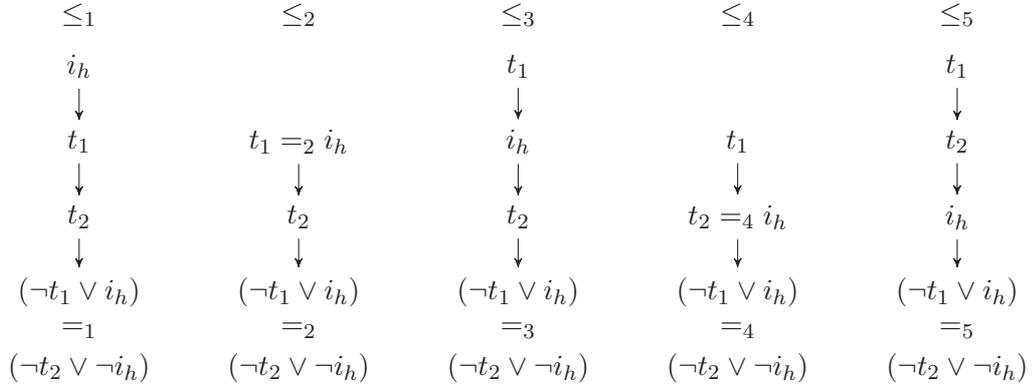
**Exemple 7.3**

Dans ce chapitre, nous considérons la base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  définie dans l'exemple 5.11 du chapitre 5 :

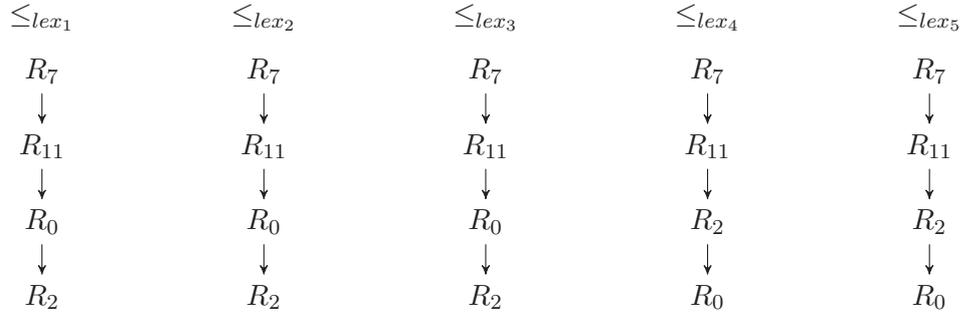
$\Sigma = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$  et  $\preceq_\Sigma$  :



Les bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  sont les suivantes :



Les préordres totaux respectifs sur les  $R$ -ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion sont les suivants :



$$R_{lex_1}(\Sigma) = \{R_2\} \quad R_{lex_2}(\Sigma) = \{R_2\} \quad R_{lex_3}(\Sigma) = \{R_2\} \quad R_{lex_4}(\Sigma) = \{R_0\} \quad R_{lex_5}(\Sigma) = \{R_0\}$$

Nous avons

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)} R_{lex_i}(\Sigma) = \{R_0, R_2\}.$$

Par exemple,  $\neg t_2 \vee \neg i_h$  est une conséquence  $\mathcal{C}$ -lexicographique de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  car  $(\Sigma, \leq_1) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_2) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_3) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_4) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$  et  $(\Sigma, \leq_5) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$ .

### 7.1.2 Approche sémantique

D'un point de vue sémantique, nous construisons pour chaque base de croyances totalement préordonnées compatible, un préordre total sur les interprétations  $\mathcal{W}$ , noté  $\leq_{\Psi}^{lex}$ . Ce préordre total est construit à partir des formules de  $\Sigma$  falsifiées par les interprétations et est tel que  $\omega \leq_{\Psi}^{lex} \omega'$  si et seulement si  $F_{\Sigma}(\omega) \leq_{lex} F_{\Sigma}(\omega')$ . Pour chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatible, l'inférence classique est appliquée.

**Définition 7.5**

Soit  $(\Sigma, \leq_\Sigma)$  une base de croyances totalement préordonnées. Soit  $R_{lex}(\Sigma)$  l'ensemble des  $R$ -ensembles selon la préférence lexicographique. Soit  $\varphi$  une formule.

$$(\Sigma, \leq_\Sigma) \models_{lex} \varphi \text{ si et seulement si } \forall \omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex}) : \omega \models \varphi.$$

L'inférence lexicographique sémantique basée sur les compatibles est définie comme suit :

**Définition 7.6**

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule. Alors,

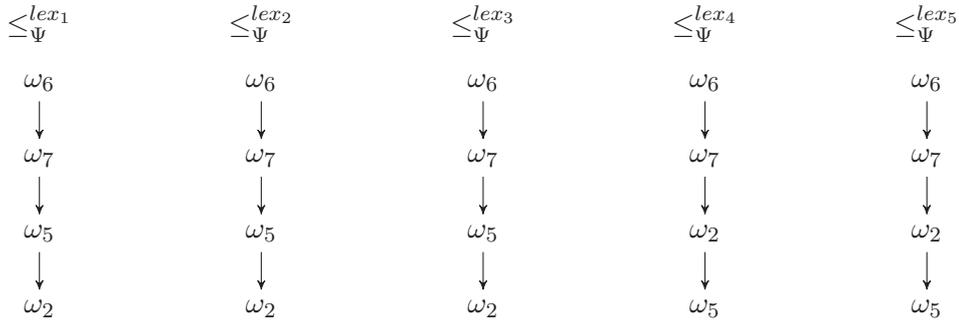
$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^c \varphi \text{ si et seulement si } \forall (\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma) : (\Sigma, \leq_i) \models_{lex} \varphi.$$

**Exemple 7.4**

Nous rappelons les ensembles de formules falsifiées par les interprétations de  $\mathcal{W}$  :

$\omega_i$	$t_1$	$t_2$	$i_h$	$F_\Sigma(\omega_i)$
$\omega_0$	$\neg t_1$	$\neg t_2$	$\neg i_h$	$\{t_1, t_2, i_h\}$
$\omega_1$	$\neg t_1$	$\neg t_2$	$i_h$	$\{t_1, t_2\}$
$\omega_2$	$\neg t_1$	$t_2$	$\neg i_h$	$\{t_1, i_h\}$
$\omega_3$	$\neg t_1$	$t_2$	$i_h$	$\{t_1, (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$
$\omega_4$	$t_1$	$\neg t_2$	$\neg i_h$	$\{t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\}$
$\omega_5$	$t_1$	$\neg t_2$	$i_h$	$\{t_2\}$
$\omega_6$	$t_1$	$t_2$	$\neg i_h$	$\{i_h, (\neg t_1 \vee i_h)\}$
$\omega_7$	$t_1$	$t_2$	$i_h$	$\{(\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$

Nous utilisons la préférence lexicographique sur les ensembles de formules de  $\Sigma$  falsifiées par une interprétation minimaux selon l'inclusion. Les interprétations concernées sont  $\omega_2, \omega_5, \omega_6$  et  $\omega_7$ . Les préordres totaux respectifs sur ces interprétations sont les suivants :



Nous avons  $\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex1}) = \{\omega_2\}$ ,  $\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex2}) = \{\omega_2\}$ ,  $\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex3}) = \{\omega_2\}$ ,  $\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex4}) = \{\omega_5\}$  et  $\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex5}) = \{\omega_5\}$ .

Nous avons

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)} \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i}) = \{\omega_2, \omega_5\}.$$

Par exemple  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{C}} \neg t_2 \vee \neg i_h$  car  $(\Sigma, \leq_1) \models_{lex} \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_2) \models_{lex} \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_3) \models_{lex} \neg t_2 \vee \neg i_h$ ,  $(\Sigma, \leq_4) \models_{lex} \neg t_2 \vee \neg i_h$  et  $(\Sigma, \leq_5) \models_{lex} \neg t_2 \vee \neg i_h$ .

### 7.1.3 Equivalence des inférences syntaxique et sémantique

Nous montrons ensuite l'équivalence des approches sémantique et syntaxique de l'inférence lexicographique basées sur les bases de croyances totalement préordonnées compatibles.

#### Proposition 7.1

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule.

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi \text{ si et seulement si } (\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi.$$

**Preuve :** Montrons que  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi$  si et seulement si  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi$ . Cela revient à montrer que :

$$\forall (\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma), \quad \bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} \text{Mod}(\Sigma \setminus R) = \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i}).$$

– Soit  $(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , nous montrons d'abord que

$$\bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} \text{Mod}(\Sigma \setminus R) \subseteq \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i}).$$

Soit  $\omega \in \bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} \text{Mod}(\Sigma \setminus R)$  c'est-à-dire qu'il existe un R-ensemble  $R$  de  $\Sigma$  tel que  $\omega \in \text{Mod}(\Sigma \setminus R)$ . Soit  $F_\Sigma(\omega)$  l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par  $\omega$ . Comme  $\omega \in \text{Mod}(\Sigma \setminus R)$ ,  $\omega$  ne falsifie pas les formules de  $\Sigma \setminus R$  mais falsifie les formules du R-ensemble  $R$ . Donc  $R \subseteq F_\Sigma(\omega)$ . Plus précisément,  $R = F_\Sigma(\omega)$  sinon  $\omega \not\models \Sigma \setminus R$ . Nous voulons montrer que  $\omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i})$ . Pour cela, nous supposons que  $\omega \notin \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i})$  c'est-à-dire qu'il existe  $\omega' \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i})$  tel que  $\omega' <_{lex}^{\Psi} \omega$ . Par définition de  $\leq_\Psi^{lex}$ ,  $\omega' <_{lex}^{\Psi} \omega$  si et seulement si  $F_\Sigma(\omega') <_{lex} F_\Sigma(\omega)$ . Comme  $R = F_\Sigma(\omega)$  alors nous avons  $F_\Sigma(\omega') <_{lex} R$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $R$  est un R-ensemble de  $\Sigma$ . Donc  $\omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i})$ .

– Soit  $(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , nous montrons ensuite que

$$\min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i}) \subseteq \bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} \text{Mod}(\Sigma \setminus R).$$

Soit  $\omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_\Psi^{lex_i})$ .  $F_\Sigma(\omega) \neq \emptyset$  car  $\Sigma$  est incohérent. Nous avons  $F_\Sigma(\omega) \subseteq \Sigma$  et  $\omega \models (\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega))$ .  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega)$  est donc cohérent. Nous voulons montrer  $\omega \in$

$\bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$ . Cela revient à montrer que  $F_\Sigma(\omega)$  est un R-ensemble de  $\Sigma$  c'est-à-dire  $\nexists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega')$  est cohérent et  $F_\Sigma(\omega') <_{lex} F_\Sigma(\omega)$ . Pour cela, nous supposons que  $\exists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega')$  est cohérent et  $F_\Sigma(\omega') <_{lex} F_\Sigma(\omega)$ . Mais par définition de  $\leq_{\Psi}^{lex}$  alors  $\omega' <_{\Psi}^{lex} \omega$  ce qui contredit l'hypothèse initiale :  $\omega \in \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_i})$ . Donc  $\omega \in \bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$ . ■

### Exemple 7.5

Reprenons l'exemple 7.3. Nous avons :

- pour  $(\Sigma, \leq_1)$ , nous avons d'une part,  $R_{lex_1}(\Sigma) = \{R_2\}$  donc  $Mod(\Sigma \setminus R_2) = \{\omega_2\}$  et d'autre part,  $\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_1}) = \{\omega_2\}$  ;
- pour  $(\Sigma, \leq_2)$ , nous avons d'une part,  $R_{lex_2}(\Sigma) = \{R_2\}$  donc  $Mod(\Sigma \setminus R_2) = \{\omega_2\}$  et d'autre part,  $\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_2}) = \{\omega_2\}$  ;
- pour  $(\Sigma, \leq_3)$ , nous avons d'une part,  $R_{lex_3}(\Sigma) = \{R_2\}$  donc  $Mod(\Sigma \setminus R_2) = \{\omega_2\}$  et d'autre part,  $\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_3}) = \{\omega_2\}$  ;
- pour  $(\Sigma, \leq_4)$ , nous avons d'une part,  $R_{lex_4}(\Sigma) = \{R_0\}$  donc  $Mod(\Sigma \setminus R_0) = \{\omega_5\}$  et d'autre part,  $\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_4}) = \{\omega_5\}$  ;
- pour  $(\Sigma, \leq_5)$ , nous avons d'une part,  $R_{lex_5}(\Sigma) = \{R_0\}$  donc  $Mod(\Sigma \setminus R_0) = \{\omega_5\}$  et d'autre part,  $\min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_5}) = \{\omega_5\}$ .

Nous avons donc :

$$\forall (\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_{\Sigma}), \quad \bigcup_{R \in R_{lex_i}(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R) = \min(\mathcal{W}, \leq_{\Psi}^{lex_i}).$$

Cette méthode est assez naturelle puisqu'elle se base la notion intuitive de les bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec une base de croyances partiellement préordonnées. En outre, cette méthode a également été utilisée lors de l'extension de l'inférence possibiliste [23] et l'extension de l'inférence basée sur l'inclusion [113] (ces extensions ont été rappelées en section 3.3 du chapitre 3). Toutefois, calculer l'ensemble des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec une base de croyances partiellement préordonnées peut s'avérer très coûteux. Nous présentons en section suivante une nouvelle définition de l'inférence lexicographique basée sur les formules et le préordre partiel initial de la base de croyances.

## 7.2 Inférence lexicographique directement sur les R-ensembles

Nous proposons une deuxième méthode pour l'inférence lexicographique de bases de croyances partiellement préordonnées. Contrairement à l'approche précédente qui considérait l'ensemble des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec la base de croyances partiellement préordonnées, cette méthode utilise la définition du nouveau comparateur présentée en section 5.1.2 du chapitre 5 pour déterminer les sous-bases maximales cohérentes préférées afin d'appliquer l'inférence classique. En effet, les

sous-bases maximales cohérentes préférées sont déterminées à partir des R-ensembles. Nous présentons l'approche syntaxique puis l'approche sémantique de cette deuxième méthode.

### 7.2.1 Approche syntaxique

Dans le cas où la base de croyances est cohérente,  $\Sigma$  est la base maximale cohérente et l'ensemble des R-ensembles est vide. A partir d'une base de croyances incohérente, les R-ensembles sont calculés selon le comparateur lexicographique défini en section 5.1.2. Nous appliquons alors la déduction classique sur chacune des sous-bases de croyances cohérentes obtenues en enlevant chaque R-ensemble de la base initiale. La déduction non monotone est définie à partir des résultats obtenus de la déduction classique sur chacune de ses sous-bases. Nous adoptons le point de vue suivant : nous adoptons une conséquence si elle admise par toutes les sous-bases. Plus précisément,  $\varphi$  est une conséquence  $\mathcal{P}$ -lexicographique de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , notée  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \varphi$ , si et seulement si  $\varphi$  est une conséquence classique de chaque base de croyances privé d'un R-ensemble. Formellement,

#### Définition 7.7

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\psi$  une formule. Soit  $R_\Delta(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  selon le comparateur lexicographique  $\preceq_\Delta$ .

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \varphi \text{ si et seulement si } \forall R \in R_\Delta(\Sigma) : (\Sigma \setminus R) \vdash \varphi.$$

#### Exemple 7.6

D'après l'exemple 5.13 du chapitre 5, nous avons  $R_\Delta(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$ . Par exemple, nous avons  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \neg t_2 \vee \neg i_h$  car  $(\Sigma \setminus R_0) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$  et  $(\Sigma \setminus R_2) \vdash \neg t_2 \vee \neg i_h$ .

### 7.2.2 Approche sémantique

Sémantiquement, nous construisons un préordre partiel sur l'ensemble des interprétations  $\mathcal{W}$ , noté  $\preceq_\Psi^\Delta$  équivalent à la représentation syntaxique. La construction de ce préordre est définie en section 5.3 du chapitre 5. Nous définissons l'inférence lexicographique de la contre-partie sémantique comme suit :  $\varphi$  est une conséquence  $\mathcal{S}$ -lexicographique de  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , notée  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{S}} \varphi$  si et seulement si  $\varphi$  est satisfaite par toutes les interprétations préférées selon  $\preceq_\Psi^\Delta$ . Formellement,

#### Définition 7.8

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule.

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{S}} \varphi \text{ si et seulement si } \forall \omega \in \min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta), \omega \models \varphi.$$

#### Exemple 7.7

D'après l'exemple 5.18 du chapitre 5, nous avons  $\min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta) = \{\omega_2, \omega_5\}$ . Par exemple, nous avons  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^{\mathcal{S}} \neg t_2 \vee \neg i_h$  car  $\omega_2 \models \neg t_2 \vee \neg i_h$  et  $\omega_5 \models \neg t_2 \vee \neg i_h$ .

### 7.2.3 Equivalence des inférences syntaxique et sémantique

Nous montrons l'équivalence des inférences lexicographiques syntaxique et sémantique directement basées sur les sous-bases cohérentes.

#### Proposition 7.2

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule.

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^S \varphi \text{ si et seulement si } (\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^P \varphi.$$

**Preuve :** Cette preuve est similaire à la celle de la proposition 7.1. Montrer que  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \models_{lex}^S \varphi$  si et seulement si  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^P \varphi$  revient à montrer que :

$$\bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta).$$

- Nous montrons d'abord que  $\bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R) \subseteq min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$ .

Soit  $\omega \in \bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$  c'est-à-dire qu'il existe un R-ensemble  $R$  de  $\Sigma$  tel que  $\omega \in Mod(\Sigma \setminus R)$ . Soit  $F_\Sigma(\omega)$  l'ensemble des formules de  $\Sigma$  falsifiées par  $\omega$ . Comme  $\omega \in Mod(\Sigma \setminus R)$ ,  $\omega$  ne falsifie pas les formules de  $\Sigma \setminus R$  mais falsifie les formules du R-ensemble  $R$ . Donc  $R \subseteq F_\Sigma(\omega)$ . Plus précisément,  $R = F_\Sigma(\omega)$  sinon  $\omega \notin \Sigma \setminus R$ . Nous voulons montrer que  $\omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$ . Pour cela, nous supposons que  $\omega \notin min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$  c'est-à-dire qu'il existe  $\omega' \in min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$  tel que  $\omega' \prec_\Psi^\Delta \omega$ . Par définition de  $\preceq_\Psi^\Delta$ ,  $\omega' \prec_\Psi^\Delta \omega$  si et seulement si  $F_\Sigma(\omega') \triangleleft_\Delta F_\Sigma(\omega)$ . Comme  $R = F_\Sigma(\omega)$  alors nous avons  $F_\Sigma(\omega') \triangleleft_\Delta R$ , ce qui contredit la fait que  $R$  est un R-ensemble de  $\Sigma$ . Donc  $\omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$ .

- Nous montrons ensuite que  $min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta) \subseteq \bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$ .

Soit  $\omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$ .  $F_\Sigma(\omega) \neq \emptyset$  car  $\Sigma$  est incohérent. Nous avons  $F_\Sigma(\omega) \subseteq \Sigma$  et  $\omega \models (\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega))$ .  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega)$  est donc cohérent. Nous voulons montrer  $\omega \in \bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$ . Cela revient à montrer que  $F_\Sigma(\omega)$  est un R-ensemble de  $\Sigma$  c'est-à-dire  $\nexists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega')$  est cohérent et  $F_\Sigma(\omega') \triangleleft_\Delta F_\Sigma(\omega)$ . Pour cela, nous supposons que  $\exists \omega' \in \mathcal{W}$  tel que  $\Sigma \setminus F_\Sigma(\omega')$  est cohérent et  $F_\Sigma(\omega') \triangleleft_\Delta F_\Sigma(\omega)$ . Mais par définition de  $\preceq_\Psi^\Delta$  alors  $\omega' \prec_\Psi^\Delta \omega$  ce qui contredit l'hypothèse initiale :  $\omega \in min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta)$ . Donc  $\omega \in \bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R)$ . ■

#### Exemple 7.8

Reprenons l'exemple 7.6. Nous avons d'une part  $R_\Delta(\Sigma) = \{R_0, R_2\}$  donc  $\bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R) = \{\omega_2, \omega_5\}$  et d'autre part,  $min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta) = \{\omega_2, \omega_5\}$ . Nous avons donc :

$$\bigcup_{R \in R_\Delta(\Sigma)} Mod(\Sigma \setminus R) = min(\mathcal{W}, \preceq_\Psi^\Delta).$$

## 7.3 Propriétés

Cette section présente les propriétés des relations d'inférences  $\vdash_{lex}^P$ ,  $\vdash_{lex}^C$ ,  $\models_{lex}^C$  et  $\models_{lex}^S$  décrites précédemment.

L'inférence lexicographique définie directement à partir de la base de croyances partiellement préordonnées (section 7.2) est couverte par l'inférence lexicographique définie à partir des bases de croyances totalement préordonnées compatibles (7.1) c'est-à-dire que les conclusions obtenues par l'inférence lexicographique définie directement à partir de la base de croyances partiellement préordonnées sont également obtenues par la première méthode présentée. Plus formellement,

### Proposition 7.3

*Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\varphi$  une formule.*

*Si  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^P \varphi$  alors  $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{lex}^C \varphi$ .*

Cette proposition stipule que la relation d'inférence lexicographique définie directement à partir de la base de croyances partiellement préordonnées est moins productive<sup>3</sup> que celle définie à partir des bases de croyances totalement préordonnées compatibles. Pour la montrer, nous avons besoin du lemme suivant qui stipule que si  $X$  est lexicographiquement préférée à  $Y$  alors  $X$  est lexicographiquement préféré à  $Y$  pour toutes les bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ .

### Lemme 7.1

*Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées. Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $\Sigma$ . Soit  $(\Sigma, \leq_i)$  une base de croyances totalement préordonnées compatible avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ . Alors,*

1. *Si  $X \triangleleft_\Delta Y$  alors  $X <_{lex} Y$ .*
2. *Si  $X =_\Delta Y$  alors  $X =_{lex} Y$ .*

Nous rappelons que le comparateur strict  $\triangleleft_\Delta$  est défini en section 5.1.2 du chapitre 5.

**Preuve :** Soit  $(\Sigma, \leq_i)$  une base de croyances totalement préordonnées compatible avec  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  et tel que  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_m$ .

1. Nous voulons montrer que si  $X \triangleleft_\Delta Y$  alors  $X <_{lex} Y$ .

Soit  $X \triangleleft_\Delta Y$  alors  $X \trianglelefteq_\Delta Y$  et  $Y \not\trianglelefteq_\Delta X$ . Nous pouvons distinguer deux cas :

- $\nexists i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| > |E_i \cap Y|$  c'est-à-dire

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| \leq |E_i \cap Y|. \quad (1)$$

$\forall j, 1 \leq j \leq m$ , nous avons  $\Sigma_j = \bigcup_{i \in A} E_i$  où  $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

Donc  $|\Sigma_j \cap X| = |(\bigcup_{i \in A} E_i) \cap X| = |\bigcup_{i \in A} (E_i \cap X)| = \sum_{i \in A} |E_i \cap X|$  car les classes d'équivalence sont par définition disjointes. Par analogie, nous avons

<sup>3</sup>La productivité d'une relation d'inférence est définie par l'ensemble des conclusions obtenues par cette relation.

$$|\Sigma_j \cap Y| = \sum_{i \in A} |E_i \cap Y|.$$

D'après l'hypothèse (1), nous avons  $\sum_{i \in A} |E_i \cap X| \leq \sum_{i \in A} |E_i \cap Y|$  c'est-à-dire  $\forall j, 1 \leq j \leq m, |\Sigma_j \cap X| \leq |\Sigma_j \cap Y|$ .

De plus, nous avons  $Y \not\triangleleft_{\Delta} X$  c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \exists k, 1 \leq k \leq n : |E_k \cap Y| > |E_k \cap X| \text{ mais} \\ & \nexists l, 1 \leq l \leq n \text{ tel que } |E_l \cap X| > |E_l \cap Y| \text{ et } E_l \prec_s E_k. \end{aligned} \quad (2)$$

Nous considérons ensuite  $\Sigma_i, 1 \leq i \leq m$ , la strate contenant la classe  $E_k$ . Nous avons  $\Sigma_i = E_k \cup \bigcup_{j \in B} E_j$  où  $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Par conséquent,  $|\Sigma_i \cap X| = |(\bigcup_{j \in B} E_j \cup E_k) \cap X| = |\bigcup_{j \in B} (E_j \cap X) \cup (E_k \cap X)| = \sum_{j \in B} |E_j \cap X| + |E_k \cap X|$  car les classes d'équivalence sont par définition disjointes. De même, nous avons  $|\Sigma_i \cap Y| = \sum_{j \in B} |E_j \cap Y| + |E_k \cap Y|$ . D'après l'hypothèse (2), nous avons  $\sum_{j \in B} |E_j \cap X| + |E_k \cap X| < \sum_{j \in B} |E_j \cap Y| + |E_k \cap Y|$  c'est-à-dire  $|\Sigma_i \cap X| < |\Sigma_i \cap Y|$ .

Nous avons donc  $\forall j, 1 \leq j \leq m, |\Sigma_j \cap X| \leq |\Sigma_j \cap Y|$  et  $\exists i, 1 \leq i \leq m, |\Sigma_i \cap X| < |\Sigma_i \cap Y|$ . Par conséquent, nous avons  $X <_{lex} Y$ .

- $\exists k, 1 \leq k \leq n : |E_k \cap X| > |E_k \cap Y|$  tel que  $\exists l, 1 \leq l \leq n : |E_l \cap Y| > |E_l \cap X|$  et  $E_l \prec_s E_k$ .

Soit  $\Sigma_i, 1 \leq i \leq m$ , la première strate contenant une classe  $E_k$  qui vérifie  $|E_k \cap X| > |E_k \cap Y|$ . La strate  $\Sigma_p$  contenant  $E_l$  doit être préférée à la strate  $\Sigma_i$  qui contient  $E_k$  c'est-à-dire que  $p < i$  et par conséquent  $i \neq 1$ .

D'après la construction de  $\Sigma_i, \forall j, 1 \leq j \leq i$ , la strate  $\Sigma_j$  est construite à partir des classes d'équivalence  $E_r$  tel que  $|E_r \cap Y| \geq |E_r \cap X|$ . Donc  $\forall j, 1 \leq j \leq i, |\Sigma_j \cap Y| \geq |\Sigma_j \cap X|$ . Plus précisément, nous avons  $|\Sigma_p \cap Y| > |\Sigma_p \cap X|$ . Par conséquent, nous avons  $X <_{lex} Y$ .

2. Nous voulons montrer que si  $X =_{\Delta} Y$  alors  $X =_{lex} Y$ .

Par définition,

$$X =_{\Delta} Y \text{ si et seulement si } \forall i, 1 \leq i \leq n : |E_i \cap X| = |E_i \cap Y|. \quad (3)$$

$\forall i, 1 \leq i \leq m$ , nous avons  $\Sigma_i = \bigcup_{j \in A} E_j$  où  $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

$|\Sigma_i \cap X| = |(\bigcup_{j \in A} E_j) \cap X| = |\bigcup_{j \in A} (E_j \cap X)| = \sum_{j \in A} |E_j \cap X|$  car les classes d'équivalence sont par définition disjointes. Nous obtenons également  $|\Sigma_i \cap Y| = \sum_{j \in A} |E_j \cap Y|$ . D'après l'hypothèse (3),  $\sum_{j \in A} |E_j \cap X| = \sum_{j \in A} |E_j \cap Y|$  c'est-à-dire  $|\Sigma_i \cap X| = |\Sigma_i \cap Y|$ . Par conséquent, nous avons  $X =_{lex} Y$ . ■

**Preuve :** [de la proposition 7.3] Par définitions, nous avons  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \varphi$  si et seulement si  $\forall R \in R_{\Delta}(\Sigma) : \Sigma \setminus R \vdash \varphi$  et  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi$  si et seulement si  $\forall (\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) : (\Sigma, \leq_i) \vdash_{lex} \varphi$ . Montrer que si  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_{lex}^{\mathcal{P}} \varphi$  alors  $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_{lex}^{\mathcal{C}} \varphi$  revient à montrer que

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_{\Sigma})} R_{lex_i}(\Sigma) \subset R_{\Delta}(\Sigma).$$

Soit  $(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ . Soit  $R \in R_{lex_i}(\Sigma)$ . Nous voulons montrer que  $R \in R_\Delta(\Sigma)$ . Pour cela, nous supposons que  $R \notin R_\Delta(\Sigma)$  c'est-à-dire qu'il existe un R-ensemble  $R'$  de  $\Sigma$  selon le comparateur lexicographique  $\triangleleft_\Delta$  tel que  $R' \triangleleft_\Delta R$ . D'après le lemme 7.1, nous avons  $R' \prec_{lex} R$  ce qui contredit le fait que  $R \in R_{lex_i}(\Sigma)$ . Donc  $R \in R_\Delta(\Sigma)$  et

$$\bigcup_{(\Sigma, \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma, \preceq_\Sigma)} R_{lex_i}(\Sigma) \subset R_\Delta(\Sigma).$$

■

La contraposée de la proposition 7.3 n'est pas vraie comme nous le montre le contre-exemple suivant :

### Contre-exemple 7.1

Soit  $(\Sigma', \preceq_{\Sigma'})$  une base de croyances partiellement préordonnées telle que

- $\Sigma' = \{a \wedge \neg b, b \wedge c, \neg a \wedge b \wedge c, a \wedge c, \neg b \wedge c\}$  ;
- $\preceq_{\Sigma'} : a \wedge \neg b =_{\Sigma'} b \wedge c$  et  $\neg a \wedge b \wedge c =_{\Sigma'} a \wedge c =_{\Sigma'} \neg b \wedge c$ .

Clairement, les R-ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion sont

- $R_0 = \{b \wedge c, \neg a \wedge b \wedge c\}$ ,
- $R_1 = \{a \wedge \neg b, a \wedge c, \neg b \wedge c\}$ ,
- $R_2 = \{a \wedge \neg b, \neg a \wedge b \wedge c, \neg b \wedge c\}$ .

D'une part, nous avons  $R_\Delta(\Sigma') = \{R_0, R_1, R_2\}$  car nous avons  $R_0 \sim_\Delta R_1$ ,  $R_0 \sim_\Delta R_2$ ,  $R_1 \sim_\Delta R_2$ . D'autre part, nous avons  $\bigcup_{(\Sigma', \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma', \preceq_{\Sigma'})} R_{lex_i}(\Sigma') = \{R_1, R_2\}$ .

Donc, nous déduisons :

$$R_\Delta(\Sigma') \not\subseteq \bigcup_{(\Sigma', \leq_i) \in \mathcal{C}(\Sigma', \preceq_{\Sigma'})} R_{lex_i}(\Sigma').$$

Nous présentons maintenant les différentes propriétés vérifiées par l'inférence basée sur le comparateur lexicographique. Afin d'analyser les propriétés non monotones de notre relation d'inférence  $\models_{lex}^S$ , nous l'étendons de telle sorte qu'elle soit définie entre deux formules par rapport à une base de croyances partiellement préordonnées. Pour cela nous définissons une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées :  $(\Sigma', \preceq_{\Sigma'})$  telle que

1.  $\Sigma' = \Sigma \cup \{\mu\}$
2.  $\forall \alpha, \beta \in \Sigma, \alpha \preceq_\Sigma \beta$  si et seulement si  $\alpha \preceq_{\Sigma'} \beta$
3.  $\forall \alpha \in \Sigma, \varphi \prec_{\Sigma'} \alpha$ , c'est-à-dire  $\mu$  est la formule la plus prioritaire dans  $\Sigma'$ .

Nous pouvons alors redéfinir notre relation d'inférence lexicographique :

### Définition 7.9

Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et soient  $\mu$  et  $\varphi$  deux formules. Soit  $(\Sigma', \preceq_{\Sigma'})$  une nouvelle base de croyances partiellement préordonnées.

$\varphi$  est une Lex-conséquence de  $\mu$  par rapport à  $\Sigma$ , notée  $\mu \mid \sim_{lex} \varphi$ , si et seulement si  $(\Sigma', \preceq_{\Sigma'}) \vdash_{lex}^P \varphi$ .

Ainsi, nous pouvons définir notre inférence lexicographique comme une inférence préférentielle définie dans [187].

**Proposition 7.4**

Soient  $\mu$  et  $\psi$  deux formules. Alors,

$$\mu \mid \sim_{lex} \varphi \text{ si et seulement si } \forall \omega \in \min(\text{Mod}(\psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \varphi.$$

**Preuve :** La preuve de cette proposition est naturelle à partir de la proposition 7.2. ■

L'inférence  $\mid \sim_{lex}$  ainsi définie satisfait le Système P rappelé en introduction du chapitre 3 mais contrairement à l'inférence lexicographique classique, elle ne satisfait pas la monotonie rationnelle.

**Proposition 7.5**

L'inférence  $\mid \sim_{lex}$  satisfait les postulats rationnels du Système P mais ne satisfait pas la monotonie rationnelle.

**Preuve :** Montrons que  $\mid \sim_{lex}$  satisfait les postulats du Système P.

- **Réflexivité :** Soit  $\varphi$  une formule. Clairement, nous avons  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \varphi$ . Donc,  $\varphi \mid \sim_{lex} \varphi$  c'est-à-dire  $\mid \sim_{lex}$  est réflexive.
- **Équivalence logique à gauche (LLE) :** Soient  $\varphi, \psi$  et  $\delta$  trois formules telles que (i)  $\varphi \leftrightarrow \psi$  et (ii)  $\varphi \mid \sim_{lex} \delta$ . Montrons que  $\psi \mid \sim_{lex} \delta$ . D'après (ii), nous avons  $\varphi \mid \sim_{lex} \delta$  c'est-à-dire  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \delta$ . D'après (i),  $\text{Mod}(\varphi) = \text{Mod}(\psi)$  et  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \delta$ . Donc  $\psi \mid \sim_{lex} \delta$ .
- **Affaiblissement à droite (RW) :** Soient  $\varphi, \psi$  et  $\delta$  trois formules telles que (i)  $\varphi \models \psi$  et  $\delta \mid \sim_{lex} \varphi$ . Montrons que  $\delta \mid \sim_{lex} \psi$ . D'après (ii), nous avons  $\varphi \mid \sim_{lex} \delta$  c'est-à-dire  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \delta$ . D'après (i),  $\varphi \models \psi$  c'est-à-dire que tous les modèles de  $\varphi$  sont des modèles de  $\psi$ . Donc,  $\omega \in \text{Mod}(\psi)$  c'est-à-dire  $\omega \models \psi$  et  $\delta \mid \sim_{lex} \psi$ .
- **Disjonction gauche (OR) :** Soient  $\varphi, \psi$  et  $\delta$  trois formules telles que (i)  $\varphi \mid \sim_{lex} \psi$  et (ii)  $\delta \mid \sim_{lex} \psi$ . Montrons que  $\varphi \vee \delta \mid \sim_{lex} \psi$ . Nous avons, (i)  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \psi$  et (ii)  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \psi$ . Supposons que  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi \vee \delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  donc  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi) \cup \text{Mod}(\delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Nous pouvons distinguer deux cas. Soit  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  et d'après (i)  $\omega \models \psi$ . Soit  $\omega \in \min(\text{Mod}(\delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  et d'après (ii)  $\omega \models \psi$ . Donc  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi \vee \delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \psi$  et  $\varphi \vee \delta \mid \sim_{lex} \psi$ .
- **Monotonie prudente (CM) :** Soient  $\varphi, \psi$  et  $\delta$  trois formules telles que (i)  $\varphi \mid \sim_{lex} \psi$  et  $\varphi \mid \sim_{lex} \delta$ . Montrons que  $\varphi \wedge \psi \mid \sim_{lex} \delta$ . D'après (i),  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \models \delta$  c'est-à-dire que  $\min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}) \subseteq \text{Mod}(\psi)$ . Donc,  $\forall \omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}), \omega \in \text{Mod}(\psi)$  et  $\omega \in \text{Mod}(\varphi \wedge \psi)$ . Nous voulons montrer que  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi \wedge \psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Supposons que  $\omega \notin \min(\text{Mod}(\varphi \wedge \psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Alors  $\exists \omega' \in \min(\text{Mod}(\varphi \wedge \psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  tel que  $\omega' \prec_{\Psi}^{\Delta} \omega$ . Nous avons,  $\omega' \in \text{Mod}(\varphi \wedge \psi)$ ,  $\omega' \models \varphi$  et  $\omega' \models \psi$ . Donc cela contredit l'hypothèse  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$ . Nous avons donc,  $\omega \in \min(\text{Mod}(\varphi \wedge \psi), \preceq_{\Psi}^{\Delta})$  et d'après (ii),  $\omega \models \delta$ .

- **Coupure (Cut)** : D'après [30], la monotonie prudente (CM) et la disjonction gauche (OR) implique la coupure (CUT).

Montrons maintenant que  $\sim_{lex}$  ne satisfait pas la **monotonie rationnelle**. La monotonie rationnelle est définie par : Si  $\varphi \sim \psi$  et  $\varphi \not\vdash \neg\delta$  alors  $\varphi \wedge \delta \sim \psi$ . Considérons le contre exemple suivant : Soit  $\Sigma = \{p, q, \neg r\}$  tel que  $p \prec \neg r$ ,  $q \prec \neg r$  et  $p \sim q$ .  $E_1 = q$ ,  $E_2 = p$  et  $E_3 = \neg r$ . L'ensemble des formules de  $\Sigma$  satisfaites par  $\omega$  est :

$\mathcal{W}$	$p$	$q$	$r$	$F_{\Sigma(\omega)}$
$\omega_0$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\{p, q\}$
$\omega_1$	$\neg p$	$\neg q$	$r$	$\{p, q, \neg r\}$
$\omega_2$	$\neg p$	$q$	$\neg r$	$\{p\}$
$\omega_3$	$\neg p$	$q$	$r$	$\{p, \neg r\}$
$\omega_4$	$p$	$\neg q$	$\neg r$	$\{q\}$
$\omega_5$	$p$	$\neg q$	$r$	$\{q, \neg r\}$
$\omega_6$	$p$	$q$	$\neg r$	$\emptyset$
$\omega_7$	$p$	$q$	$r$	$\{\neg r\}$

Le préordre  $\preceq_{\Psi}^{\Delta}$  sur  $\mathcal{W}$  est illustré par la figure 7.1. Soient  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\delta$  trois for-

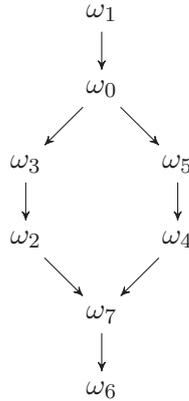


FIG. 7.1 – Préordre partiel sur les interprétations  $\preceq_{\Psi}^{\Delta}$

mules telles que  $\varphi = (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$ ,  $\psi = p \vee \neg r$  et  $\delta = r$ . Nous avons  $Mod(\varphi) = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$  et  $min(Mod(\varphi), \preceq_{\Psi}^{\Delta}) = \{\omega_2, \omega_5\}$ . Nous vérifions  $\varphi \sim_{lex} \psi$  puisque  $Mod(\psi) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ ,  $\omega_2 \models \psi$  et  $\omega_5 \models \psi$ . De même, nous n'avons pas  $\varphi \sim_{lex} \neg\delta$  puisque  $Mod(\neg\delta) = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ ,  $\omega_2 \models \neg\delta$  et  $\omega_5 \not\models \neg\delta$ . D'autre part,  $Mod(\delta) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7\}$ ,  $Mod(\varphi \wedge \delta) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$  et  $min(Mod(\varphi \wedge \delta), \preceq_{\Psi}^{\Delta}) = \{\omega_3, \omega_5\}$  mais nous n'avons pas  $(\varphi \wedge \delta) \sim_{lex} \psi$  puisque  $\omega_3 \not\models \psi$  et  $\omega_5 \models \psi$ . En conséquence, l'inférence  $\sim_{lex}$  ne satisfait pas la monotonie rationnelle. ■

## Conclusion

Des extensions pour l'inférence possibiliste ainsi que pour l'inférence basée sur l'inclusion pour des bases de croyances partiellement préordonnées ont été proposées dans la littérature. Aucune extension pour l'inférence lexicographique n'avait été proposée. Dans ce chapitre, nous avons présenté deux méthodes pour l'inférence lexicographique de bases de croyances partiellement préordonnées. La première méthode, assez naturelle consiste à appliquer l'inférence classique sur chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatibles avec la base de croyances partiellement préordonnées. La deuxième approche consiste à appliquer l'inférence classique sur chacune des sous-bases de croyances cohérentes obtenue à partir de la base de croyances initiale en retirant les R-ensembles déterminés par la nouvelle préférence lexicographique. Les conclusions obtenues par l'inférence lexicographique définie directement à partir de la base de croyances partiellement préordonnées (deuxième approche) sont également obtenues par la première méthode présentée.

Ce travail en collaboration avec S. Yahi, S. Benferhat et S. Lagrue du CRIL à Lens a été présenté du point de vue des bases maximales cohérentes dans [207, 208, 209]. Dans ce manuscrit, nous adoptons un point de vue dual, nous avons donc adapté ce travail à notre point de vue et cela a fait l'objet d'un deliverable [163] ainsi que d'un produit final [185].

Le chapitre suivant présente la mise en oeuvre utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables pour la restauration de la cohérence et pour la révision par R-ensembles pour des bases de croyances partiellement préordonnées.

## Chapitre 8

# Mise en oeuvre avec ASP

Nous présentons dans cette section la mise en oeuvre en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables de nos problèmes de restauration de la cohérence, d'inférence et de révision à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. Cette mise en oeuvre a été efficacement utilisée dans le cadre de la révision par R-ensembles de bases de croyances non ordonnées ou totalement préordonnées [206, 13] et de la fusion de bases de croyances [107]. L'extension des méthodes proposées dans [13, 15, 108] permet une mise en oeuvre effective pour le calcul des R-ensembles pour les problèmes de restauration de la cohérence, d'inférence et de révision à partir de bases de croyances partiellement préordonnées.

Pour cela, nous avons étendu les méthodes proposées dans [13, 15, 108]. Nous avons construit un programme logique correspondant au problème (restauration de la cohérence ou révision). Nous avons montré que les modèles stables de ce programme correspondaient aux R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ). Nous avons ensuite défini un préordre partiel sur les modèles stables à partir des comparateurs faibles et lexicographique et nous avons montré que les modèles stables préférés correspondaient aux R-ensembles de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ). Ce processus est illustré par la figure 8.1.

Nous nous intéressons dans la section suivante à la traduction de notre problème en un programme logique.

### 8.1 Traduction en un programme logique avec sémantique de modèles stables

La traduction des problèmes de restauration de cohérence et de révision en un programme logique avec sémantique de modèles stables s'effectue par étapes que nous présentons ci-dessous. Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées. Nous notons :  $\Pi_\Sigma$  le programme logique que nous construisons dans le cas de la restauration de la cohérence et  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  le programme logique que nous construisons

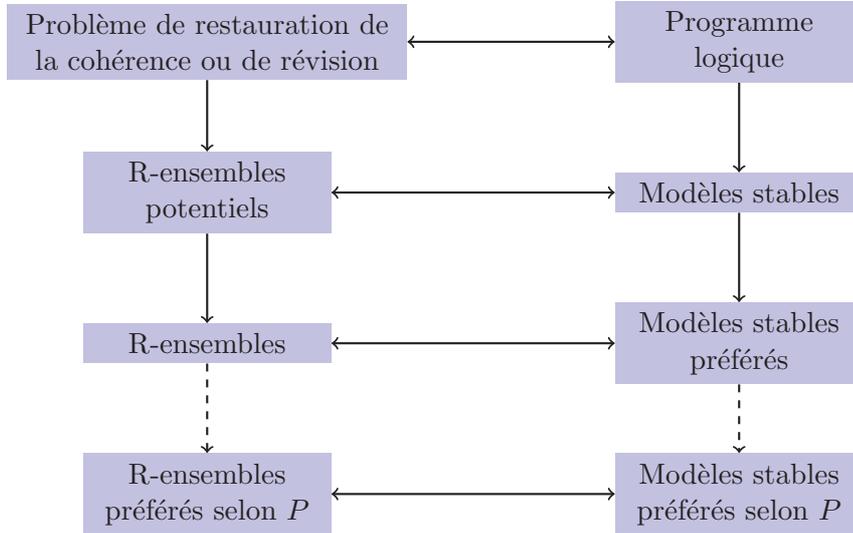


FIG. 8.1 – Mise en oeuvre avec ASP

dans le cas de la révision.

Nous représentons les atomes de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ) dans le programme logique qui est construit : un atome  $a$  de  $\Sigma$  correspond à l'atome  $a$  de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ). Nous notons par  $V^+$ , l'ensemble de tous les littéraux positifs de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ). De même, à chaque atome  $a$  de  $V^+$  correspond un atome  $a'$  qui représente la négation de l'atome  $a$ . L'ensemble de tous les littéraux négatifs de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) est noté  $V^-$ . Le programme logique  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) est construit de façon à ce que les modèles stables préférés selon le comparateur  $\triangleleft_C$  correspondent aux R-ensembles de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ). Cette construction s'effectue étape par étape.

### 8.1.1 Etape 1

La première étape consiste à introduire des règles permettant de construire une bijection entre les modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et les interprétations de  $V^+$ . Pour chaque atome,  $a \in V^+$ , deux règles sont introduites :

- $a \leftarrow \text{not } a'$
- $a' \leftarrow \text{not } a$

où  $a' \in V^-$  est l'atome négatif correspondant à  $a$ .

### 8.1.2 Etape 2

La seconde étape permet de déterminer les R-ensembles potentiels associés aux interprétations.

L'ensemble de toutes les atomes de règles représentant les formules est défini par  $R^+ = \{r_f | f \in \Sigma\}$  et  $F_O(r_f)$  représente les formules de  $\Sigma$  correspondant à  $r_f$  dans  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ), c'est-à-dire  $\forall r_f \in R^+, F_O(r_f) = f$ .

Dans la seconde étape, les modèles stables  $S$  correspondant aux interprétations qui ne sont pas des modèles de  $\Sigma \setminus F$  (resp.  $(\Sigma \setminus F) \cup \{\mu\}$ ) avec  $F = \{f | r_f \in S\}$  sont exclus.

La traduction en un programme logique des formules concernées par cette étape nécessite l'introduction d'atomes intermédiaires apparaissant dans les sous-formules de  $f$ . Les atomes intermédiaires représentant la sous formule  $f^j$  de  $f \in \Sigma$  sont notés  $\rho_{f^j}$ .

Selon la syntaxe de la formule  $f$ , nous introduisons les règles suivantes :

- Si  $f =_{def} a$ , la règle  $r_f \leftarrow \text{not } a$  est introduite ;
- Si  $f =_{def} \neg f^1$ , la règle  $r_f \leftarrow \text{not } \rho_{f^1}$  est introduite ;
- Si  $f =_{def} f^1 \vee \dots \vee f^m$ , la règle  $r_f \leftarrow \rho_{f^1}, \dots, \rho_{f^m}$  est introduite ;
- Si  $f =_{def} f^1 \wedge \dots \wedge f^m$ , les règles  $\forall 1 \leq j \leq m, r_f \leftarrow \rho_{f^j}$  sont introduites.

Ces deux étapes sont suffisantes pour traduire notre problème de restauration de la cohérence. La traduction du problème de révision nécessite une étape supplémentaire permettant de conserver les interprétations qui sont des modèles de  $\mu$ .

### 8.1.3 Etape 3 (Révision)

L'étape suivante a été introduite dans [13] pour la révision par R-ensembles de bases de croyances totalement préordonnées. La troisième étape consiste à introduire des règles permettant d'exclure les interprétations qui ne sont pas modèles de  $\mu$ . Selon la syntaxe de la formule  $\mu$ , les règles suivantes sont introduites :

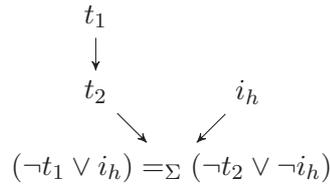
- Si  $\mu =_{def} a$ , la règle  $false \leftarrow a'$  est introduite ;
- Si  $\mu =_{def} \neg f^1$ , la règle  $false \leftarrow \text{not } \rho_{f^1}$  est introduite ;
- Si  $\mu =_{def} f^1 \vee \dots \vee f^m$ , la règle  $false \leftarrow \rho_{f^1}, \dots, \rho_{f^m}$  est introduite ;
- Si  $\mu =_{def} f^1 \wedge \dots \wedge f^m$ , les règles  $\forall 1 \leq j \leq m, false \leftarrow \rho_{f^j}$  sont introduites.

Afin d'exclure  $false$  de tous les modèles de  $\mu$ , la règle suivante est introduite :  $\text{contradiction} \leftarrow false, \text{not contradiction}$ .

Nous notons  $S(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) l'ensemble des modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ).

#### Exemple 8.1 (Restauration de la cohérence)

Nous reprenons l'exemple 5.11 défini au chapitre 5 :  $\Sigma = \{t_1, t_2, i_h, (\neg t_1 \vee i_h), (\neg t_2 \vee \neg i_h)\}$  et  $\preceq_\Sigma$  :



Le programme logique  $\Pi_\Sigma$  associé à ce problème est construit de la manière suivante, les règles introduites lors de l'étape 8.1.1 sont :

$$\begin{array}{lll} t_1 \leftarrow \text{not } t'_1. & t_2 \leftarrow \text{not } t'_2. & i_h \leftarrow \text{not } i'_h. \\ t'_1 \leftarrow \text{not } t_1. & t'_2 \leftarrow \text{not } t_2. & i'_h \leftarrow \text{not } i_h. \end{array}$$

Les règles introduites lors de l'étape 8.1.2 sont :

$$\begin{array}{lll} r_{t_1} \leftarrow \text{not } t_1. & r_{i_h} \leftarrow \text{not } i_h. & r_{\neg t_2 \vee \neg i_h} \leftarrow t_2, i_h. \\ r_{t_2} \leftarrow \text{not } t_2. & r_{\neg t_1 \vee i_h} \leftarrow t_1, \text{not } i_h. & \end{array}$$

### Exemple 8.2 (Révision)

Nous reprenons l'exemple 6.1 défini au chapitre 6 :  $\Sigma = \{a, b, c, \neg a \vee d \vee \neg d, \neg b \vee \neg c \vee \neg d\}$  et  $\preceq_\Sigma$  :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \swarrow & \downarrow & \swarrow \\ \neg a \vee d \vee \neg d & = & \neg b \vee \neg c \vee \neg d \end{array}$$

Le programme logique  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  associé à ce problème est le suivant, les règles introduites lors de l'étape 8.1.1 sont :

$$\begin{array}{llll} a \leftarrow \text{not } a'. & b \leftarrow \text{not } b'. & c \leftarrow \text{not } c'. & d \leftarrow \text{not } d'. \\ a' \leftarrow \text{not } a. & b' \leftarrow \text{not } b. & c' \leftarrow \text{not } c. & d' \leftarrow \text{not } d. \end{array}$$

Les règles introduites lors de l'étape 8.1.2 sont :

$$\begin{array}{lll} r_a \leftarrow \text{not } a. & r_c \leftarrow \text{not } c. & r_{\neg b \vee \neg c \vee \neg d} \leftarrow c, b, d. \\ r_b \leftarrow \text{not } b. & r_{\neg a \vee d \vee \neg d} \leftarrow a, \text{not } d, d. & \end{array}$$

Les règles introduites lors de l'étape 8.1.3 sont :

$$\begin{array}{l} \text{false} \leftarrow \text{not } d. \\ \text{contradiction} \leftarrow \text{false}, \text{not contradiction}. \end{array}$$

La section suivante montre la correspondance entre les modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et les R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ).

## 8.2 Modèles stables et R-ensembles potentiels

Soit  $S \subseteq V$  un ensemble d'atomes, nous définissons  $I_S = \{a | a \in S\} \cup \{\neg a | a' \in S\}$ . La proposition suivante montre qu'un atome de règle  $\rho$  est déduit si et seulement si l'interprétation  $I_S$  ne satisfait pas  $F_O(\rho)$ .

### Proposition 8.1

Soit  $\rho$  un atome de règle ou un atome intermédiaire.

$$\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S) \text{ si et seulement si } I_S \not\models F_O(\rho)$$

Cette proposition a été démontrée dans [107] et la preuve provient de la construction des règles.

La correspondance entre les modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  et les interprétations de  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  est établie dans la proposition suivante :

**Proposition 8.2**

*Soit  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées. Soit  $S \subseteq V$  un ensemble d'atomes.*

*$S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  si et seulement si  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$ .*

**Preuve :**

1. Nous montrons dans un premier temps que si  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  alors  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$ .

Soit  $S$  un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$ . Nous avons  $I_S = \{a \mid a \in S\} \cup \{\neg a \mid a' \in S\}$  c'est à dire si  $a \in S$  alors  $a \in I_S$  et si  $a' \in S$  alors  $\neg a \in I_S$ .

- Nous montrons d'abord que  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ .

Pour cela, nous montrons l'exclusion mutuelle c'est à dire  $\forall a \in V^+$ , soit  $a \in S$ , soit  $a' \in S$  car :

- Si  $a \notin S$  et  $a' \notin S$  alors la règle  $a \leftarrow \text{not } a'$  est appliquée et  $a \in CN(\Pi_\Sigma^S)$ , or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  donc  $S = CN(\Pi_\Sigma^S)$  donc  $a \in S$  ce qui contredit l'hypothèse.
- Si  $a \in S$  et  $a' \in S$  alors la seule règle permettant la déduction de  $a$  est  $a \leftarrow \text{not } a'$ . Pour que  $a$  soit vrai, il faut que  $a'$  soit faux donc  $a' \notin S$  ce qui contredit l'hypothèse. Donc,  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ .

- Nous montrons ensuite que  $I_S$  satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  c'est à dire que  $I_S \in \text{Mod}(\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S))$ .

Supposons que  $I_S \notin \text{Mod}(\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S))$ . Alors il existe une formule  $f \in \Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  telle que  $I_S \not\models f$ . Dans ce cas, l'étape 2 décrite en 8.1.2 introduit un nouvel atome de règle  $r_f$  correspondant à  $f$ , et donc  $r_f \in CN(\Pi_\Sigma^S)$  or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  donc  $S = CN(\Pi_\Sigma^S)$  donc  $r_f \in S$ . Si  $r_f \in S$  alors  $f \in F_O(R^+ \cap S)$  et donc  $f \notin \Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $I_S$  satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$ .

2. Nous montrons ensuite, si  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  alors  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$ .

A partir de  $I_S$ , nous construisons un ensemble  $S$  tel que  $S = \{a \mid a \in I_S\} \cup \{a' \mid \neg a \in I_S\}$  c'est à dire si  $a \in I_S$  alors  $a \in S$  et si  $\neg a \in I_S$  alors  $a' \in S$ . Nous ajoutons ensuite les atomes de règles et les atomes intermédiaires. Montrons que  $S = CN(\Pi_\Sigma^S)$ .

- Nous montrons d'abord  $S \subseteq CN(\Pi_\Sigma^S)$ .

Soit  $a \in S$  un atome. Nous avons deux cas :

- Soit  $a \in V^+$ .  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ ,  $\neg a \notin V^+$  et  $a' \notin S$ . Grâce à la règle  $a \leftarrow \text{not } a'$ , nous avons  $a \in CN(\Pi_\Sigma^S)$ .
- Soit  $a \in V^-$ . La démonstration est similaire.  
De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire. Nous savons que si  $\rho \in S$  alors  $\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S)$  d'après la proposition 8.1.
- Nous montrons ensuite  $CN(\Pi_\Sigma^S) \subseteq S$ .
  - Nous montrons d'abord que  $CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$ .  
Supposons qu'il existe  $a \in CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R^+)$  tel que  $a \notin S$ . Nous avons deux cas :
    - Soit  $a \in V^+$ . Comme  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ ,  $\forall a \in V^+$ , soit  $a \in S$ , soit  $a' \in S$ . Par hypothèse  $a \notin S$  donc  $a' \in S$ . Nous savons que  $S \subseteq CN(\Pi_\Sigma^S)$  donc  $a' \in CN(\Pi_\Sigma^S)$ . Mais la seule règle permettant la déduction de  $a$  est  $a \leftarrow \text{not } a'$  donc  $a \notin CN(\Pi_\Sigma^S)$  ce qui est impossible puisque  $a \in CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R)$ . Donc  $a \in S$ .
    - Soit  $a \in V^-$ . La démonstration est similaire.  
De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire tel que  $\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R^+)$  et  $\rho \notin S$ . D'après la proposition 8.1, nous savons que  $\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S)^S \cap (V \setminus R^+)$  implique que  $I_S \models F_O(\rho)$ . Mais, si  $\rho \notin S$  alors  $I_S \not\models F_O(\rho)$  ce qui est contradictoire.
  - Puis, nous montrons que  $CN(\Pi_\Sigma^S) \cap R^+ \subseteq S$ . Supposons qu'il existe  $a \in CN(\Pi_\Sigma^S) \cap R^+$  tel que  $a \notin S$ . Alors  $a = r_f$  donc  $r_f \in S$  et  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ . L'étape 2 décrite en 8.1.2 introduit un nouvel atome de règle  $r_f$  correspondant à  $f$ , et donc  $r_f \in CN(\Pi_\Sigma^S)$ . Comme  $CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$  alors il appartient aussi à  $S$ . ce qui implique  $I_S \not\models f$ . Mais  $I_S$  est un modèle de  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  et  $r_c \notin S$  ce qui contredit l'hypothèse.  
De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire tel que  $\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S) \cap R^+$  et  $\rho \notin S$ . D'après la proposition 8.1, nous savons que  $\rho \in CN(\Pi_\Sigma^S)^S \cap R^+$  implique que  $I_S \models F_O(\rho)$ . Mais, si  $\rho \notin S$  alors  $I_S \not\models F_O(\rho)$  ce qui est contradictoire.

Nous avons  $CN(\Pi_\Sigma^S) \subseteq V$  et nous avons montré que  $CN(\Pi_\Sigma^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$  et  $CN(\Pi_\Sigma^S) \cap R^+ \subseteq S$  donc  $CN(\Pi_\Sigma^S) \subseteq S$ . ■

### Exemple 8.3 (Restauration de la cohérence)

Les modèles stables obtenus à partir du programme logique  $\Pi_\Sigma$  défini dans l'exemple 8.1 sont :

$$\begin{array}{ll}
 S_0 = \{i'_h, t_2, t'_1, r_{i_h}, r_{t_1}\} & S_4 = \{r_{\neg t_2 \vee \neg i_h}, t_2, i_h, t_1\} \\
 S_1 = \{i'_h, t'_2, t'_1, r_{i_h}, r_{t_2}, r_{t_1}\} & S_5 = \{r_{\neg t_2 \vee \neg i_h}, t_2, i_h, t'_1, r_{t_1}\} \\
 S_2 = \{i'_h, t_2, r_{\neg t_1 \vee i_h}, t_1, r_{i_h}\} & S_6 = \{i_h, t'_2, t_1, r_{t_2}\} \\
 S_3 = \{i'_h, t'_2, r_{\neg t_1 \vee i_h}, t_1, r_{i_h}, r_{t_2}\} & S_7 = \{i_h, t'_2, t'_1, r_{t_2}, r_{t_1}\}
 \end{array}$$

La correspondance entre les modèles stables de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  et les interprétations de  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$  est établie dans la proposition suivante :

**Proposition 8.3**

*Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle. Soit  $S \subseteq V$  un ensemble d'atomes.*

*$S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  si et seulement si  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$ .*

**Preuve :**

1. Nous montrons dans un premier temps que si  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  alors  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$ .  
Soit  $S$  un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ . Nous avons  $I_S = \{a \mid a \in S\} \cup \{\neg a \mid a' \in S\}$  c'est à dire si  $a \in S$  alors  $a \in I_S$  et si  $a' \in S$  alors  $\neg a \in I_S$ .
  - Nous montrons d'abord que  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ .
    - Pour cela, nous montrons l'exclusion mutuelle c'est à dire  $\forall a \in V^+$ , soit  $a \in S$ , soit  $a' \in S$  car :
      - Si  $a \notin S$  et  $a' \notin S$  alors la règle  $a \leftarrow \text{not } a'$  est appliquée et  $a \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ , or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  donc  $S = CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $a \in S$  ce qui contredit l'hypothèse.
      - Si  $a \in S$  et  $a' \in S$  alors la seule règle permettant la déduction de  $a$  est  $a \leftarrow \text{not } a'$ . Pour que  $a$  soit vrai, il faut que  $a'$  soit faux donc  $a' \notin S$  ce qui contredit l'hypothèse.
    - Nous montrons également que  $\text{false} \notin S$  et  $\text{contradiction} \notin S$ . Supposons que  $\text{false} \in S$ , nous avons deux cas :
      - Soit  $\text{contradiction} \notin S$ . La règle  $\text{contradiction} \leftarrow \text{false}, \text{not contradiction}$  est appliquée et  $\text{contradiction} \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ , or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  donc  $S = CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $\text{contradiction} \in S$  ce qui contredit l'hypothèse de départ.
      - Soit  $\text{contradiction} \in S$ . La seule règle permettant de déduire  $\text{contradiction}$  est  $\text{contradiction} \leftarrow \text{false}, \text{not contradiction}$ . Pour que  $\text{contradiction}$  soit vrai, il faut que  $\text{false}$  soit vrai et  $\text{contradiction}$  soit faux donc  $\text{contradiction} \notin S$  ce qui contredit l'hypothèse.
  - Nous montrons ensuite que  $I_S$  satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$  c'est à dire que  $I_S \in \text{Mod}(\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\})$ .
    - Montrons que  $I_S$  est un modèle de  $\mu$ . Supposons que  $I_S \notin \text{Mod}(\mu)$  alors  $I_S \not\models \mu$ . La règle introduite à l'étape 3 décrite en section 8.1.3, nous donne que  $\text{false} \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ , or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  donc  $S = CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $\text{false} \in S$  ce qui est impossible puisque  $\text{false} \notin S$ . Donc  $I_S \in \text{Mod}(\mu)$ .
    - Supposons que  $I_S \notin \text{Mod}(\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\})$ . Alors il existe une formule  $f \in \Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$  telle que  $I_S \not\models f$ . Comme  $I_S \in \text{Mod}(\mu)$  alors  $f \neq \mu$

donc  $f \in \Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$ . L'étape 2 décrite en 8.1.2 introduit un nouvel atome de règle  $r_f$  correspondant à  $f$ , et donc  $r_f \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  or  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  donc  $S = CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $r_f \in S$ . Si  $r_f \in S$  alors  $f \in F_O(R^+ \cap S)$  et donc  $f \notin \Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$  ce qui contredit l'hypothèse.

Donc  $I_S$  satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$ .

2. Nous montrons ensuite, si  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S) \cup \{\mu\}$  alors  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ . A partir de  $I_S$ , nous construisons un ensemble  $S$  tel que  $S = \{a \mid a \in I_S\} \cup \{a' \mid \neg a \in I_S\}$  c'est à dire si  $a \in I_S$  alors  $a \in S$  et si  $\neg a \in I_S$  alors  $a' \in S$ . Nous ajoutons ensuite les atomes de règles et les atomes intermédiaires. Montrons que  $S = CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ .

- Nous montrons d'abord  $S \subseteq CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ .

Soit  $a \in S$  un atome. Nous avons deux cas :

- Soit  $a \in V^+$ .  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ ,  $\neg a \notin V^+$  et  $a' \notin S$ . Grâce à la règle  $a \leftarrow \text{not } a'$ , nous avons  $a \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ .
- Soit  $a \in V^-$ . La démonstration est similaire.

De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire. Nous savons que si  $\rho \in S$  alors  $\rho \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  d'après la proposition 8.1.

- Nous montrons ensuite  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \subseteq S$ .

Clairement, nous avons  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \subseteq V \cup \{\text{false}, \text{contradiction}\}$ .

- Nous montrons d'abord que  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$ . Supposons qu'il existe  $a \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+)$  tel que  $a \notin S$ . Nous avons deux cas :

- Soit  $a \in V^+$ . Comme  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ ,  $\forall a \in V^+$ , soit  $a \in S$ , soit  $a' \in S$ . Par hypothèse  $a \notin S$  donc  $a' \in S$ . Nous savons que  $S \subseteq CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $a' \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ . Mais la seule règle permettant la déduction de  $a$  est  $a \leftarrow \text{not } a'$  donc  $a \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  ce qui est impossible puisque  $a \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R)$ . Donc  $a \in S$ .

- Soit  $a \in V^-$ . La démonstration est similaire.

De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire tel que  $\rho \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+)$  et  $\rho \notin S$ . D'après la proposition 8.1, nous savons que  $\rho \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+)$  implique que  $I_S \models F_O(\rho)$ . Mais, si  $\rho \notin S$  alors  $I_S \not\models F_O(\rho)$  ce qui est contradictoire.

- Puis, nous montrons que  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap R^+ \subseteq S$ . Supposons qu'il existe  $a \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap R^+$  tel que  $a \notin S$ . Alors  $a = r_f$  donc  $r_f \in S$  et  $I_S$  est une interprétation de  $V^+$ . L'étape 2 décrite en 8.1.2 introduit un nouvel atome de règle  $r_f$  correspondant à  $f$ , et donc  $r_f \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ . Comme  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$  alors il appartient aussi à  $S$ . ce qui implique  $I_S \models f$ . Mais  $I_S$  est un modèle de  $\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S)$  et  $r_c \notin S$  ce qui contredit

l'hypothèse.

De plus, si  $\rho$  est un atome de règle ou un atome intermédiaire tel que  $\rho \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap R^+$  et  $\rho \notin S$ . D'après la proposition 8.1, nous savons que  $\rho \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap R^+$  implique que  $I_S \models F_O(\rho)$ . Mais, si  $\rho \notin S$  alors  $I_S \not\models F_O(\rho)$  ce qui est contradictoire.

- Enfin, nous montrons que  $false \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ . Supposons que  $false \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ , alors l'étape 3 décrite en 8.1.3 introduit un nouvel atome de règle  $r_f$  correspondant à  $f$ , et donc  $r_f \in CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  et comme  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$  alors il appartient aussi à  $S$ . Mais cela veut dire que  $\mu$  n'est pas satisfaite par  $I_S$  ce qui est impossible puisque  $I_S$  est un modèle de  $\mu$ . Donc  $false \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  et par conséquent  $contradiction \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$ .

Nous avons  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \subseteq V \cup \{false, contradiction\}$  et nous avons montré que  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap (V \setminus R^+) \subseteq S$ ,  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \cap R^+ \subseteq S$ ,  $false \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  et  $contradiction \notin CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S)$  donc  $CN(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}^S) \subseteq S$ .

■

#### Exemple 8.4 (révision)

Nous obtenons huit modèles stables à partir du programme logique  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$  défini dans l'exemple 8.2 :

$$\begin{array}{ll}
 S_0 = \{d, r_{\neg b \vee \neg c \vee \neg d}, c, b, a\} & S_4 = \{d, c, b', a, r_b\} \\
 S_1 = \{d, r_{\neg b \vee \neg c \vee \neg d}, c, b, a', r_a\} & S_5 = \{d, c, b', a', r_b, r_a\} \\
 S_2 = \{d, b, c', a, r_c\} & S_6 = \{d, b', c', a, r_c, r_b\} \\
 S_3 = \{d, b, c', a', r_c, r_a\} & S_7 = \{d, b', c', a', r_c, r_b, r_a\}
 \end{array}$$

Les propositions suivantes sont une conséquence des propositions précédentes 8.2 et 8.3 .

#### Proposition 8.4

Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle. Soit  $R \subseteq \Sigma$  un ensemble fini de formules.

Si  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) est cohérent alors il existe un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et  $F_O(R^+ \cap S) \subseteq R$ .

**Preuve :** Soit  $R \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) soit cohérent. Montrons qu'il existe un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et  $F_O(R^+ \cap S) \subseteq R$ .

$(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) est cohérent alors il existe une interprétation  $I_S$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ). A partir de cette interprétation  $I_S$ , nous pouvons construire un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S = \{a \mid a \in I_S\} \cup \{a' \mid \neg a \in I_S\} \cup \{\rho \mid I_S \not\models F_O(\rho)\}$  et  $S$

est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ).  $R$  contient entre autres toutes les formules falsifiées par l'interprétation  $I_S$ . Mais  $R$  peut aussi contenir des formules satisfaites. C'est pourquoi tous les R-ensembles potentiels ne conduisent pas à un modèle stable mais il existe un modèle stable qui est inclus dans  $R$ . ■

Nous avons également le corollaire suivant :

**Corollaire 8.1**

*Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle. Soit  $R \subseteq \Sigma$  un ensemble de formules tel que  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) soit cohérent.*

*Si il n'existe pas de  $R' \subseteq R$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  (resp.  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$ ) soit cohérent alors il existe un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et  $F_O(R^+ \cap S) = R$*

**Preuve :** Soit  $R \subseteq \Sigma$  un ensemble de formules tel que  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) soit cohérent. D'après la proposition 8.4, il existe un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et  $F_O(R^+ \cap S) \subseteq R$ . Donc il existe une interprétation  $I_S$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) et  $R = \{f | I_S \not\models f\} \cup A$  avec  $A \subseteq \{f | I_S \models f\}$ . Supposons qu'il n'existe pas de  $R' \subseteq R$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  (resp.  $(\Sigma \setminus R') \cup \{\mu\}$ ) soit cohérent. Donc  $R = \{f | I_S \not\models f\}$ .

A partir de  $S$ , nous construisons l'interprétation suivante :  $I_S = \{a | a \in S\} \cup \{\neg a | a' \in S\}$ . D'après la proposition 8.1 si un atome de règle  $r_f$  n'apparaît pas dans  $S$  alors sa formule correspondante  $F_O(r_f)$  est satisfaite par  $I_S$ . Nous avons :  $S = \{a | a \in I_S\} \cup \{a' | \neg a \in I_S\} \cup \{r_f | I_S \not\models F_O(r_f)\}$ . Donc  $F_O(R^+ \cap S) = \{f | I_S \not\models F_O(r_f)\} = R$ . ■

La proposition suivante permet d'achever d'établir la correspondance entre les modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et les R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ).

**Proposition 8.5**

*Soient  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  une base de croyances partiellement préordonnées et  $\mu$  une formule propositionnelle.*

*Si il existe un ensemble d'atomes  $S$  tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) alors  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) est cohérent.*

**Preuve :** Soit  $S$  un ensemble d'atomes tel que  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$ . Montrons que  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) est cohérent.

A partir de  $S$ , on construit une interprétation  $I_S = \{a | a \in S\} \cup \{\neg a | a' \in S\}$ . D'après la proposition 8.2 (resp. proposition 8.3), nous savons que toutes les règles  $r_f$  qui n'apparaissent pas dans  $S$  ont leurs formules correspondantes  $f$  satisfaites par l'interprétation  $I_S$ . Donc  $(\Sigma \setminus R)$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ) est cohérent.

■

Nous avons établi la correspondance entre les modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et les R-ensembles potentiels de  $\Sigma$  (resp.  $(\Sigma \setminus R) \cup \{\mu\}$ ), nous introduisons maintenant une relation de préférence entre les modèles stables.

### 8.3 Modèles stables préférés et R-ensembles

Nous préordonnons ensuite partiellement les modèles stables selon un comparateur afin d'obtenir une correspondance entre les modèles stables préférés de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_\Sigma \cup \{\mu\}$ ) et les R-ensembles de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ) selon ce même comparateur. Un modèle stable  $S$  de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) est préféré selon le comparateur  $\trianglelefteq_C$  si et seulement si  $F_O(S \cap R^+)$  est minimal selon l'inclusion et préféré selon le comparateur  $\trianglelefteq_C$ . Plus formellement,

#### Définition 8.1

Soit  $S(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) l'ensemble des modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ). Soit  $\trianglelefteq_C$  un comparateur.

$S$  est un **modèle stable préféré** de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) selon le comparateur  $\trianglelefteq_C$  si et seulement si

1.  $S$  est un modèle stable,
2.  $\nexists S' \in S(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) tel que  $F_O(S' \cap R^+) \subset F_O(S \cap R^+)$ ,
3.  $\nexists S' \in S(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) tel que  $F_O(S' \cap R^+) \triangleleft_C F_O(S \cap R^+)$ .

L'ensemble des modèles stables préférés de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) selon le comparateur  $\trianglelefteq_C$  est noté  $S_C(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_C(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ).

#### Exemple 8.5 (Restauration de la cohérence)

Nous reprenons l'exemple 8.1. Parmi les modèles stables, nous sélectionnons ceux qui vérifient la règle 2 de la définition 8.1. Nous avons :

$$\begin{array}{ll}
 S_0 \cap R^+ = \{r_{i_h}, r_{t_1}\} & S_4 \cap R^+ = \{r_{-t_2 \vee -i_h}\} \\
 S_1 \cap R^+ = \{r_{i_h}, r_{t_2}, r_{t_1}\} & S_5 \cap R^+ = \{r_{-t_2 \vee -i_h}, r_{t_1}\} \\
 S_2 \cap R^+ = \{r_{-t_1 \vee i_h}, r_{i_h}\} & S_6 \cap R^+ = \{r_{t_2}\} \\
 S_3 \cap R^+ = \{r_{-t_1 \vee i_h}, r_{i_h}, r_{t_2}\} & S_7 \cap R^+ = \{r_{t_2}, r_{t_1}\}
 \end{array}$$

Les minimaux selon l'inclusion sont :  $S_0, S_2, S_4$  et  $S_6$ .

Puis nous utilisons les comparateurs faible et lexicographique pour préordonner les modèles stables.

**Comparateur faible** Dans le cas de l'utilisation du comparateur faible défini en section 5.1, nous obtenons le préordre partiel suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 F_O(S_2 \cap R^+) & =_w & F_O(S_4 \cap R^+) \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F_O(S_0 \cap R^+) & & F_O(S_6 \cap R^+)
 \end{array}$$

Nous avons  $S_w(\Pi_\Sigma) = \{S_0, S_6\}$ .

**Comparateur lexicographique** Dans le cas de l'utilisation du comparateur faible défini en section 5.6, nous obtenons le préordre partiel suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & F_O(S_2 \cap R^+) & \\
 & \downarrow & \\
 & F_O(S_4 \cap R^+) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F_O(S_0 \cap R^+) & & F_O(S_6 \cap R^+)
 \end{array}$$

Nous avons  $S_\Delta(\Pi_\Sigma) = \{S_0, S_6\}$ .

### Exemple 8.6 (Révision)

Nous reprenons l'exemple 8.2. Parmi les modèles stables, nous sélectionnons ceux qui vérifient la règle 2 de la définition 8.1. Nous avons :

$$\begin{array}{ll}
 S_0 \cap R^+ = \{r_{\neg b \vee \neg c \vee \neg d}\} & S_4 \cap R^+ = \{r_b\} \\
 S_1 \cap R^+ = \{r_{\neg b \vee \neg c \vee \neg d}, r_a\} & S_5 \cap R^+ = \{r_b, r_a\} \\
 S_2 \cap R^+ = \{r_c\} & S_6 \cap R^+ = \{r_c, r_b\} \\
 S_3 \cap R^+ = \{r_c, r_a\} & S_7 \cap R^+ = \{r_c, r_b, r_a\}
 \end{array}$$

Les minimaux selon l'inclusion sont :  $S_0$ ,  $S_2$  et  $S_4$ .

**Comparateur faible** L'application du comparateur faible, nous fournit le préordre partiel sur les modèles stables minimaux selon l'inclusion suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & F_O(S_0 \cap R^+) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F_O(S_2 \cap R^+) & & F_O(S_4 \cap R^+)
 \end{array}$$

Nous obtenons :  $S_w(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}) = \{S_2, S_4\}$ .

**Comparateur lexicographique** Le préordre partiel sur les modèles stables minimaux selon l'inclusion à partir du comparateur lexicographique est le suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & F_O(S_0 \cap R^+) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 F_O(S_2 \cap R^+) & & F_O(S_4 \cap R^+)
 \end{array}$$

Nous obtenons :  $S_\Delta(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}) = \{S_2, S_4\}$ .

Nous montrons maintenant la bijection entre les modèles stables préférés de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) et les R-ensembles de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ) par la proposition suivante :

**Proposition 8.6**

*R est un R-ensemble de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ) si et seulement si il existe un modèle stable S de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) préféré selon le comparateur  $\preceq_C$  tel que  $F_O(R^+ \cap S) = R$ .*

**Exemple 8.7 (Restauration de la cohérence)**

*Nous considérons l'exemple 8.1. Quelque soit le comparateur choisi, les modèles stables préférés sont  $S_0$  et  $S_6$ . De plus, nous avons :*

- $F_O(R^+ \cap S_0) = \{i_h, t_1\}$ ,
- $F_O(R^+ \cap S_6) = \{t_2\}$ .

*Ces modèles stables correspondent bien aux R-ensembles trouvés dans l'exemple 5.13 :*

- $R_0 = \{t_2\}$ ,
- $R_2 = \{i_h, t_1\}$ .

**Exemple 8.8 (Révision)**

*Nous considérons l'exemple 8.2. Quelque soit le comparateur choisi, les modèles stables préférés sont  $S_2$  et  $S_4$ . Nous avons :*

- $F_O(R^+ \cap S_2) = \{c\}$ ,
- $F_O(R^+ \cap S_4) = \{b\}$ .

*Ces modèles stables correspondent bien aux R-ensembles trouvés dans l'exemple 6.3 :*

- $R_0 = \{b\}$ ,
- $R_4 = \{c\}$ .

Nous donnons la preuve de la proposition 8.6 uniquement dans le cas de la restauration de la cohérence. Si nous considérons le problème de révision, la preuve est analogue.

**Preuve :** [de la proposition 8.6]

Soit  $S_C(\Pi_\Sigma)$  l'ensemble des modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  préférés selon le comparateur  $\preceq_C$ . Soit  $R_C(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$ . Nous voulons montrer que :

$$\{F_O(R^+ \cap S) \mid S \in S_C(\Pi_\Sigma)\} = R_C(\Sigma).$$

1. Montrons que  $\{F_O(R^+ \cap S) \mid S \in S_C(\Pi_\Sigma)\} \subseteq R_C(\Sigma)$ .

Soit  $S$  un modèle stable préféré selon le comparateur  $\preceq_C$ , c'est à dire  $S \in S_C(\Pi_\Sigma)$ , tel que  $R = F_O(R^+ \cap S)$ . On veut montrer que  $R \in R_C(\Sigma)$  c'est à dire :

- $R$  est un R-ensemble potentiel de  $\Sigma$  :  $(\Sigma \setminus R)$  est cohérent.
- $R$  est minimal selon l'inclusion :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  est cohérent et  $R' \subset R$ .
- $R$  est minimal selon le comparateur  $\preceq_C$  :  $\nexists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

D'après la proposition 8.5,  $(\Sigma \setminus R)$  est cohérent. Supposons que  $R \notin R_C(\Sigma)$  alors on a deux possibilités :

- (a)  $R$  n'est pas minimal selon l'inclusion :  $\exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  est cohérent et  $R' \subset R$ .

- (b)  $R$  n'est pas minimal selon le comparateur  $\triangleleft_C : \exists R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  est cohérent et  $R' \triangleleft_C R$ .

Soit  $R' \subseteq \Sigma$  tel que  $(\Sigma \setminus R')$  est cohérent alors il existe une interprétation  $I_{S'}$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$ . Soit  $S' = \{a \mid a \in I_{S'}\} \cup \{a' \mid \neg a \in I_{S'}\} \cup \{\rho \mid I_{S'} \not\models F_O(\rho)\}$ . Clairement,  $I_{S'} = \{a \mid a \in S'\} \cup \{\neg a \mid a' \in S'\}$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R')$  et tel que  $R' = F_O(R^+ \cap S')$ . D'après le corollaire 8.1,  $S'$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$ . De plus,

- (a) si  $R' \subset R$ , alors  $F_O(R^+ \cap S') \subset F_O(R^+ \cap S)$  ce qui contredit l'hypothèse  $S \in S_C(\Pi_\Sigma)$ .
- (b) si  $R' \triangleleft_C R$  alors  $F_O(R^+ \cap S') \triangleleft_C F_O(R^+ \cap S)$  ce qui contredit l'hypothèse  $S \in S_C(\Pi_\Sigma)$ .

Donc  $R \in R_C(\Sigma)$ .

2. Montrons que  $R_C(\Sigma) \subseteq \{F_O(R^+ \cap S) \mid S \in S_C(\Pi_\Sigma)\}$ .

Soit  $R$  un R-ensemble de  $\Sigma$  selon le comparateur  $\triangleleft_C$ . On a  $(\Sigma \setminus R)$  est cohérent, donc il existe une interprétation  $I_S$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$ . Soit  $S = \{a \mid a \in I_S\} \cup \{a' \mid \neg a \in I_S\} \cup \{\rho \mid I_S \not\models F_O(\rho)\}$  un ensemble d'atomes. Clairement,  $R = F_O(R^+ \cap S)$ . D'après le corollaire 8.1,  $S$  est un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$ . Supposons que  $S \notin S_C(\Pi_\Sigma)$  alors on a deux possibilités :

- (a)  $S$  n'est pas minimal selon l'inclusion :  $\exists S' \in S(\Pi_\Sigma)$  tel que  $F_O(S' \cap R^+) \subset F_O(S \cap R^+)$ . Comme  $R = F_O(R^+ \cap S)$ ,  $F_O(S' \cap R^+) \subset R$ . De plus,  $F_O(S' \cap R^+) \subseteq \Sigma$  et  $(\Sigma \setminus F_O(S' \cap R^+))$  est cohérent. Donc  $R$  n'est pas un R-ensemble de  $\Sigma$  ce qui contredit l'hypothèse.
- (b)  $S$  n'est pas minimal selon le comparateur  $\triangleleft_C : \exists S' \in S(\Pi_\Sigma)$  tel que  $F_O(S' \cap R^+) \triangleleft_C F_O(S \cap R^+)$ . Comme  $R = F_O(R^+ \cap S)$ ,  $F_O(S' \cap R^+) \triangleleft_C R$ . De plus,  $F_O(S' \cap R^+) \subseteq \Sigma$  et  $(\Sigma \setminus F_O(S' \cap R^+))$  est cohérent. Donc  $R$  n'est pas un R-ensemble de  $\Sigma$  ce qui contredit l'hypothèse.

Donc  $S \in S_C(\Pi_\Sigma)$ . ■

**Remarque** Nous pouvons ensuite raffiner cet ensemble en appliquant une stratégie. Nous définissons les modèles stables préférés selon différentes stratégies, notées  $P$ .

### Définition 8.2

Soient  $\triangleleft_C$  un comparateur,  $S_Y \in S_C(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_C(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) et  $S_X \in S_C(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_C(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) et  $P$  une stratégie.

$S$  est un **modèle stable préféré** de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) selon le comparateur  $\triangleleft_C$  et selon la stratégie  $P$  si et seulement si

1.  $S$  est un modèle stable préféré selon le comparateur  $\triangleleft_C$ ,
2.  $\nexists S' \in S(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) tel que  $F_O(S' \cap R^+) \leq_P F_O(S \cap R^+)$ .

L'ensemble des modèles stables préférés de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) selon le comparateur  $\preceq_C$  et selon la stratégie  $P$  est noté  $S_{C,P}(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_{C,P}(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ).

Nous pouvons illustrer cette définition, par exemple avec la stratégie de cardinalité :

**Définition 8.3**

Soient  $\preceq_C$  un comparateur,  $S_Y \in S_C(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_C(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) et  $S_X \in S_C(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_C(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ).

$F_O(S_Y \cap R^+) \leq_{CARD} F_O(S_X \cap R^+)$  si et seulement si  $|F_O(S_Y \cap R^+)| \leq |F_O(S_X \cap R^+)|$ .

Nous notons  $S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma)$  (resp.  $S_{C,CARD}(\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}})$ ) l'ensemble des modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) préférés selon le comparateur  $\preceq_C$  et la stratégie de cardinalité.

**Exemple 8.9**

Si nous reprenons l'exemple 8.1 de restauration de la cohérence. Quelque soit le comparateur, nous avons  $S_C(\Pi_\Sigma) = \{S_0, S_6\}$  avec  $F_O(R^+ \cap S_0) = \{i_h, t_1\}$  et  $F_O(R^+ \cap S_6) = \{t_2\}$ . Si nous appliquons la stratégie de cardinalité :

- $|F_O(R^+ \cap S_0)| = 2$ ,
- $|F_O(R^+ \cap S_6)| = 1$ .

Nous obtenons  $S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma) = \{S_6\}$ .

De même que précédemment, il existe une bijection entre les R-ensembles préférés selon  $P$  et les modèles stables préférés selon  $\preceq_C$  et selon  $P$ . Cette bijection est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 8.7**

$R$  est un R-ensemble de  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma \cup \{\mu\}$ ) préféré selon la stratégie  $P$  si et seulement si il existe un modèle stable préféré  $S$  de  $\Pi_\Sigma$  (resp.  $\Pi_{\Sigma \cup \{\mu\}}$ ) selon le comparateur  $\preceq_C$  et selon  $P$  tel que  $F_O(R^+ \cap S) = R$ .

**Exemple 8.10**

Si nous reprenons l'exemple 8.1 de restauration de la cohérence. Le modèle stable  $S_6$  tel que  $F_O(R^+ \cap S_6) = \{t_2\}$  correspond bien au R-ensemble trouvé dans l'exemple 5.14 :  $R_0 = \{t_2\}$ .

La preuve est rédigée en considérant le problème de restauration de la cohérence et elle est similaire dans le cas de la révision.

**Preuve :** [de la proposition 8.7]

Soit  $S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma)$  l'ensemble des modèles stables de  $\Pi_\Sigma$  préférés selon la stratégie  $CARD$ . Soit  $\mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma)$  l'ensemble des R-ensembles de  $\Sigma$  préférés selon la stratégie  $CARD$ . Nous voulons montrer que  $\{F_O(R^+ \cap S) : S \in S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma)\} = \mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma)$ .

1. Nous montrons d'abord que  $\{F_O(R^+ \cap S) : S \in S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma)\} \subseteq \mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma)$ .  
Soit  $S$  un modèle stable de  $\Pi_\Sigma$  préféré selon la stratégie  $CARD$ . Soit  $R = F_O(R^+ \cap S)$ . D'après la proposition 8.5,  $(\Sigma \setminus R)$  est cohérent. Supposons que  $R$  n'est pas un R-ensemble de  $\Sigma$  préféré selon la stratégie  $CARD$ . Alors il existe  $R' \subseteq \Sigma$  tel que  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent et  $R'$  est préféré à  $R$  selon la cardinalité c'est à dire

$|R'| < |R|$ . Comme  $\Sigma \setminus R'$  est cohérent, il existe une interprétation  $I_{S'}$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R')$ . Soit  $S' = \{a | a \in I_{S'}\} \cup \{a' | \neg a \in I_{S'}\} \cup \{\rho | I_{S'} \not\models F_O(\rho)\}$  et soit  $I'_S = \{a | a \in S'\} \cup \{\neg a | a' \in S'\}$ . Clairement,  $I'_S$  est une interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R')$ . De plus,  $R' = F_O(R^+ \cap S')$ . D'après la proposition 8.1,  $S'$  est un modèle stable. En outre,  $R' = F_O(R^+ \cap S')$  est préféré à  $R = F_O(R^+ \cap S)$  selon la cardinalité c'est à dire  $|F_O(R^+ \cap S')| < |F_O(R^+ \cap S)|$ .  $S$  n'est pas un modèle stable préféré ce qui contredit l'hypothèse.  $R$  est un R-ensemble de  $\Sigma$  préféré selon la stratégie *CARD*.

2. Nous montrons ensuite que  $\mathcal{R}_{C,CARD}(\Sigma) \subseteq \{F_O(R^+ \cap S) : S \in S_{C,CARD}(\Pi_\Sigma)\}$ . Soit  $R$  un R-ensemble de  $\Sigma$  préféré selon la stratégie *CARD*. Alors,  $(\Sigma \setminus R)$  est cohérent. Donc il existe une interprétation  $I_S$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$ . Soient  $S = \{a | a \in I_S\} \cup \{a' | \neg a \in I_S\} \cup \{\rho | I_S \not\models F_O(\rho)\}$  et  $I_S = \{a | a \in S\} \cup \{\neg a | a' \in S\}$ . Clairement,  $I_S$  est interprétation de  $V^+$  qui satisfait  $(\Sigma \setminus R)$ . De plus,  $R = F_O(R^+ \cap S)$ . En outre, d'après la proposition 8.1,  $S$  est un modèle stable. Supposons que  $S$  n'est pas un modèle stable préféré. Alors il existe un modèle stable  $S'$  tel que  $S'$  est préféré à  $S$  c'est à dire :  $|F_O(R^+ \cap S')| < |F_O(R^+ \cap S)|$ . De plus,  $R = F_O(R^+ \cap S)$ . Donc  $|F_O(R^+ \cap S')| \leq |R|$ .  $F_O(R^+ \cap S') \subseteq \Sigma$  et  $(\Sigma \setminus F_O(R^+ \cap S'))$  est cohérent. Donc,  $R$  n'est pas un R-ensemble de  $\Sigma$  préféré selon la stratégie *CARD* ce qui contredit l'hypothèse.  $S$  est un modèle stable préféré. ■

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une mise en oeuvre de nos méthodes de restauration de la cohérence et de révision pour des états épistémiques représentés par des bases de croyances partiellement préordonnées en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables. Dans un premier temps, nous avons montré comment traduire notre problème en un programme logique. Nous avons ensuite montré que les modèles stables obtenus à partir de ce programme correspondaient aux R-ensembles potentiels. Nous avons ensuite défini la notion de modèles stables préférés selon un comparateur et montré l'équivalence entre les modèles stables préférés et les R-ensembles. Enfin, nous avons montré que lorsque nous utilisons une stratégie pour raffiner les modèles préférés, les modèles stables préférés selon cette stratégie correspondent aux R-ensembles préférés selon cette même stratégie.

De plus, la mise en oeuvre proposée de nos méthodes de raisonnement est utilisée dans le contexte du projet européen VENUS. Cette mise en oeuvre s'intègre au sein d'un processus automatique de vérification d'un relevé. Nous décrivons les expérimentations effectuées sur les données fournies par les campagnes d'acquisition lors des différentes missions réalisées au cours de ce projet puis les résultats obtenus à partir de ces expérimentations. Dans le chapitre suivant, nous commençons par décrire l'information archéologique et le processus d'acquisition des données dans ce contexte ainsi que les formalismes de représentation utilisés.

Quatrième partie

Application dans le contexte du  
projet VENUS



# Chapitre 9

## Préliminaires

Nous présentons dans ce chapitre un bref rappel sur les notions de logiques de description et d'ontologies, utilisées dans le chapitre suivant.

### 9.1 Logiques de description

Les logiques de description (LD) [9] sont une famille de formalismes logiques qui permettent une représentation formelle et structurée des connaissances d'un domaine. Elles permettent de représenter ces connaissances par des concepts (classes d'individus) et des rôles (relations entre les classes), appelés *terminologie*, ainsi que les propriétés des individus, appelées *assertions*. Les logiques de description sont un fragment de la logique du premier ordre. Les logiques de description ont une sémantique bien définie ainsi que des algorithmes d'inférence efficaces. Elles sont également très flexibles puisqu'elles fournissent une hiérarchie de langages dont l'expressivité et la complexité augmentent.

En logique de description, les concepts sont considérés comme des concepts atomiques, ils représentent un ensemble d'individus qui appartiennent au concept et sont représentés par des symboles de prédicats unaires. Les noms des rôles sont considérés comme des rôles atomiques, ils désignent les relations entre les concepts et ils sont représentés par des relations binaires [152].

#### 9.1.1 Aspect axiomatique des logiques de description

La syntaxe des logiques de description consiste en un ensemble de concepts atomiques, un ensemble de rôle atomique et une définition récursive pour construire des concepts et des rôles complexes.

Nous décrivons le langage minimal des logiques de description  $\mathcal{AL}$  (Attributive Language)[175].

**Définition 9.1**

Si  $A$  est un concept atomique,  $C$  et  $D$  sont des concepts et  $r$  un rôle alors  $A$  (concept atomique),  $\top$  (concept universel),  $\perp$  (concept spécifique),  $\neg A$  est un concept (complément ou négation atomique),  $C \sqcap D$  (intersection ou conjonction),  $\forall r.C$  (quantification universelle),  $\exists r.\top$  (quantification existentielle) sont des concepts.

Plusieurs logiques de description permettent d'étendre la logique  $\mathcal{AL}$  en ajoutant des constructeurs de concepts [10]. Nous présentons ici une partie de ces constructeurs, une liste complète de ces constructeurs est détaillée dans [8, 166], soient  $C$  et  $D$  des concepts complexes,  $r$  un rôle et  $n \geq 0$  :

Notation	Nom	Constructeur syntaxique
$\mathcal{C}$	négation de concept complexe	$\neg C$
$\mathcal{E}$	quantification existentielle complète	$\exists r.C$
$\mathcal{U}$	union de concepts	$C \sqcup D$
$\mathcal{N}$	restriction de cardinalité	$\geq nr$ (au moins $n$ via $r$ ) $\leq nr$ (au plus $n$ via $r$ )
$\mathcal{O}$	énumération	$\{a_1, \dots, a_n\}$
$\mathcal{Q}$	restriction de nombre qualifiée	$\geq nr.C$ ou $\leq nr.C$
$\mathcal{F}$	propriétés fonctionnelles	$\leq 1r$

La logique  $\mathcal{AL}$  peut également être enrichie de constructeurs de rôles, soient  $r_1$  et  $r_2$  deux rôles :

Notation	Nom	Constructeur syntaxique
$\mathcal{I}$	rôle inverse	$r^{-1}$
$\neg$	négation de rôle	$\neg r$
$\mathcal{R}$	conjonction ou intersection de rôles	$r_1 \sqcap r_2$
$\sqcup$	union de rôles	$r_1 \sqcup r_2$
$\circ$	composition	$r_1 \circ r_2$

De plus, la logique  $\mathcal{AL}$  peut être enrichie de contraintes sur les rôles, soient  $C$  un concept complexe,  $r_1$  et  $r_2$  deux rôles :

Notation	Nom	Constructeur syntaxique
$+$	transitivité	$r^+$
$*$	réflexivité - transivité	$r^*$
$f$	rôles fonctionnels	
$r$	restriction de rôles	$r C$
$i$	identité	$id(C)$
$\mathcal{H}$	hiérarchie des rôles	$r_1 \sqsubseteq r_2$

( $\mathcal{D}$ ) signifie que ces logiques supportent les types primitifs.

L'extension  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$  [106] est définie par :

- $\mathcal{S}$  qui dénote la logique  $\mathcal{ALC}$  augmentée des rôles transitifs,
- $\mathcal{H}$  qui dénote hiérarchie des rôles,
- $\mathcal{O}$  qui dénote l'énumération d'individus nommés,
- $\mathcal{I}$  qui dénote les rôles inverses,
- $\mathcal{N}$  qui dénote la restriction de cardinalité et
- $(\mathcal{D})$  qui signifie que cette logique supportent les types primitifs.

### 9.1.2 Aspect sémantique des logiques de description

La sémantique des logiques de description est définie par un domaine et une fonction qui interprète les concepts comme des ensembles d'individus du domaine et les rôles comme des paires d'individus du domaine. Les concepts et les rôles complexes sont interprétés récursivement à partir des atomes et des rôles atomiques.

Pour définir la sémantique, nous considérons qu'une *interprétation* est une paire  $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$  où  $\Delta^{\mathcal{I}}$  est un ensemble non vide, appelé *domaine d'interprétation* et  $\cdot^{\mathcal{I}}$  est la *fonction d'interprétation* qui associe à chaque concept atomique  $A$ , un ensemble  $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$  et à chaque rôle  $r$ , une relation binaire  $r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$ . Cette fonction d'interprétation est étendue aux concepts de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\
\perp^{\mathcal{I}} &= \emptyset \\
(\neg A)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(\forall r.C)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y \in \Delta^{\mathcal{I}}, \text{ si } (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ alors } y \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\exists r.\top)^{\mathcal{I}} &= \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ et } y \in \Delta^{\mathcal{I}}\}
\end{aligned}$$

La sémantique des constructeurs de concepts qui enrichissent la logique de description minimale  $\mathcal{AL}$  est décrite ci-dessous :

Notation	Constructeur sémantique
$\mathcal{C}$	$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
$\mathcal{E}$	$(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ et } y \in C^{\mathcal{I}}\}$
$\mathcal{U}$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
$\mathcal{N}$	$(\geq nr)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \mid \geq n\}$ $(\leq nr)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \mid \leq n\}$
$\mathcal{O}$	$(\{a_1, \dots, a_n\})^{\mathcal{I}} = \{a_1^{\mathcal{I}}, \dots, a_n^{\mathcal{I}}\}$
$\mathcal{Q}$	$(\geq nr.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ et } y \in C^{\mathcal{I}} \mid \geq n\}$ $(\leq nr.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \text{ et } y \in C^{\mathcal{I}} \mid \leq n\}$
$\mathcal{F}$	$(\leq 1r)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y \in \Delta^{\mathcal{I}}, (x, y) \in r^{\mathcal{I}} \mid \leq 1\}$

La sémantique des constructeurs de rôles est définie comme suit :

Notation	Constructeur sémantique
$\mathcal{I}$	$(r^{-1})^{\mathcal{I}} = \{(y, x) \in \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \mid (x, y) \in r^{\mathcal{I}}\}$
$\neg$	$(\neg r)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \setminus r^{\mathcal{I}}$
$\mathcal{R}$	$(r_1 \sqcap r_2)^{\mathcal{I}} = r_1^{\mathcal{I}} \cap r_2^{\mathcal{I}}$
$\sqcup$	$(r_1 \sqcup r_2)^{\mathcal{I}} = r_1^{\mathcal{I}} \cup r_2^{\mathcal{I}}$
$\circ$	$(r_1 \circ r_2)^{\mathcal{I}} = r_1^{\mathcal{I}} \circ r_2^{\mathcal{I}}$

Les contraintes sur les rôles peuvent être définies sémantiquement comme suit :

Notation	Constructeur sémantique
$+$	$(r^+)^{\mathcal{I}} = \bigcup_{i \geq 1} (r^{\mathcal{I}})^i$
$*$	$(r^*)^{\mathcal{I}} = \bigcup_{i \geq 0} (r^{\mathcal{I}})^i$
$r$	$(r C)^{\mathcal{I}} = r^{\mathcal{I}} \cap (\Delta^{\mathcal{I}} \times C^{\mathcal{I}})$
$i$	$(id(C))^{\mathcal{I}} = \{(d, d) \mid d \in \Delta^{\mathcal{I}}\}$
$\mathcal{H}$	$(r_1 \sqsubseteq r_2)^{\mathcal{I}} = r_1^{\mathcal{I}} \subseteq r_2^{\mathcal{I}}$

### 9.1.3 Raisonnement en logiques de description

Une base de connaissances en logique de description est composée d'une TBox et d'une ABox, elle est notée  $\mathcal{K} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{A} \rangle$ . La TBox est l'ensemble des informations terminologiques. Elle définit l'ensemble des concepts qui dénotent les individus et l'ensemble des relations, appelées également rôles ou propriétés, entre les individus. Les informations contenues dans la ABox sont les assertions sur les individus et les relations.

#### 9.1.3.1 Raisonnement pour les TBox

Les différents types de raisonnement pouvant être effectués sur une TBox sont : la satisfaisabilité, la subsomption, l'équivalence et la disjonction [10]. Soient  $\mathcal{T}$  une TBox,  $C$  et  $D$  des concepts.

##### Proposition 9.1 (Satisfaisabilité)

Un concept  $C$  est satisfaisable par rapport à une TBox  $\mathcal{T}$  si et seulement si il existe un modèle  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$ . On appelle alors  $\mathcal{I}$  un modèle de  $C$ .

##### Proposition 9.2 (Subsomption)

Un concept  $D$  subsume un concept  $C$  par rapport à une TBox  $\mathcal{T}$ , noté  $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$  ou  $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ , si et seulement si pour tous les modèles  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ ,  $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ .

##### Proposition 9.3 (Equivalence)

Un concept  $C$  est équivalent à un concept  $D$  par rapport à une TBox  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$  pour chaque modèle  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ . On écrit  $C \equiv_{\mathcal{T}} D$  ou  $\mathcal{T} \models C \equiv D$ .

##### Proposition 9.4 (Disjonction)

Des concepts  $C$  et  $D$  sont disjoints par rapport à une TBox  $\mathcal{T}$  si et seulement si  $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$  pour chaque modèle  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{T}$ .

La satisfaisabilité, l'équivalence et la disjonction peuvent être exprimées en fonction de la subsumption :

**Proposition 9.5**

*Soient  $C$  et  $D$  deux concepts.*

- *Le concept  $C$  est insatisfaisable si et seulement si le concept  $C$  est subsumé par  $\perp$  (i.e.  $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} \perp$ ).*
- *Les concepts  $C$  et  $D$  sont équivalents si et seulement si le concept  $C$  est subsumé par le concept  $D$  (i.e.  $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$ ) et le concept  $D$  est subsumé par le concept  $C$  (i.e.  $D \sqsubseteq_{\mathcal{T}} C$ ).*
- *Les concepts  $C$  et  $D$  sont disjoints si et seulement si  $C \sqcap D$  est subsumé par  $\perp$  (i.e.  $C \sqcap D \sqsubseteq_{\mathcal{T}} \perp$ ).*

Il est également possible de réduire la subsumption, l'équivalence et la disjonction à des problèmes de satisfaisabilité :

**Proposition 9.6**

*Soient  $C$  et  $D$  deux concepts.*

- *Le concept  $C$  est subsumé par le concept  $D$  si et seulement si  $C \sqcap \neg D$  est insatisfaisable.*
- *Les concepts  $C$  et  $D$  sont équivalents si et seulement si  $C \sqcap \neg D$  et  $\neg C \sqcap D$  sont insatisfaisables.*
- *Les concepts  $C$  et  $D$  sont disjoints si et seulement si  $C \sqcap D$  est insatisfaisable.*

**9.1.3.2 Raisonnement pour les ABox**

Les informations contenues dans la ABox sont les assertions sur les individus  $C(a)$  et les relations  $r(a, b)$ , appelées également instances où  $a, b$  sont des constantes nommées,  $C$  un concept nommé et  $r$  un nom de rôle. La base de connaissances doit être cohérente. La définition formelle de la cohérence est donnée par :

**Définition 9.2 (cohérence)**

*La ABox  $\mathcal{A}$  est cohérente par rapport à la TBox  $\mathcal{T}$  si et seulement si il existe une interprétation  $\mathcal{I}$  qui est un modèle de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{T}$ .*

Le deuxième type de raisonnement qui peut être effectué sur les ABoxes est la vérification des instances c'est-à-dire il faut vérifier si une assertion est inférée par une ABox :

**Définition 9.3**

*Soient  $\mathcal{A}$  une Abox et  $\alpha$  une assertion.*

*L'assertion  $\alpha$  est inférée par  $\mathcal{A}$ , notée  $\mathcal{A} \models \alpha$ , si toutes les interprétations qui satisfont  $\mathcal{A}$ , satisfont aussi  $\alpha$ .*

Si  $\alpha$  est de la forme  $C(a)$ , alors la vérification de l'instance peut être réduite au problème de cohérence pour les ABoxes par la proposition suivante :

**Proposition 9.7**

$\mathcal{A} \models C(a)$  si et seulement si  $\mathcal{A} \cup \{\neg C(a)\}$  est incohérent.

Le problème de satisfaisabilité d'un concept peut être également réduit au problème de cohérence dans les ABoxes d'après la proposition suivante :

**Proposition 9.8**

Soient  $C$  un concept et  $C(a)$  une assertion du concept  $C$ .  
 $C$  est satisfaisable si et seulement si  $\{C(a)\}$  est cohérent.

Il existe différentes implantations du raisonnement pour les ABox et les TBox au travers d'outils performants. Nous rappelons brièvement trois d'entre eux. Le premier moteur d'inférence FaCT (**F**ast **C**lassification of **T**erminologies) [104] se concentre sur le raisonnement dans les TBox. Il utilise la méthode des tableaux et comprend deux raisonneurs, l'un basé sur la logique de description *SHIF* et l'autre basé sur *SHIQ*. FaCT++ [200] est une nouvelle version de FaCT implantée en C++. Les deux moteurs d'inférence suivants RACER (**R**enamed **A**Box and **C**oncept **E**xpression **R**easoner) [97] et Pellet [189] permettent de raisonner sur les ABox et les TBox. RACER supporte la logique de description *SHIQ* et est développé en Common Lisp. Pellet est un raisonneur développé en Java. Contrairement aux deux moteurs d'inférence présentés précédemment, Pellet n'a pas été implanté pour une logique de description en particulier mais pour les langages OWL présentés en section 9.2.

## 9.2 Les ontologies

Cette section rappelle les principales notions sur les ontologies. Le mot "ontologie" provient du mot scientifique latin *ontologia* formé à partir de deux racines grecques : *ontos* (être, ce qui existe) et *logos* (science, étude, langage) et renvoie donc à la *théorie de l'existence*. En philosophie, l'Ontologie est définie comme une partie de la métaphysique qui étudie l'être en tant qu'être, c'est-à-dire les propriétés générales de ce qui existe. En informatique, le terme "ontologie" a été emprunté à la philosophie dans les années 1990. Une ontologie permet de représenter un ensemble de connaissances sous forme de concepts et de relations entre ces concepts. Différentes définitions plus précises ont été proposées sur la notion d'ontologie informatique, ces définitions usuelles sont présentées en section 9.2.1. Nous introduisons ensuite différentes manières de classer les ontologies en section 9.2.2. Nous présentons enfin les travaux sur la construction d'une ontologie en section 9.2.3.

### 9.2.1 Définitions

Dans le domaine de l'intelligence artificielle, la première définition d'une ontologie a été proposée par [156] : "une ontologie définit les termes et les relations de base du vocabulaire d'un domaine ainsi que les règles qui indiquent comment combiner les termes et les relations de façon à pouvoir étendre le vocabulaire".

Dans la littérature d'intelligence artificielle, la définition la plus citée est celle proposée par Grüber dans [91] : “une ontologie est une spécification explicite d'une conceptualisation”.

La définition donnée par Grüber étant trop large, Borst l'a légèrement modifiée dans [37] en spécifiant qu'une ontologie est une spécification formelle d'une conceptualisation partagée.

Ces deux définitions sont expliquées dans [195]. Grüber [91] définit une ontologie comme “une spécification explicite” ; *explicite* signifie que l'ontologie est décrite par un ensemble d'objets nommés par des termes représentatifs, des définitions associées et des axiomes (représentant les contraintes entre eux). Le terme *conceptualisation* fait référence aux choix quant à la manière de décrire le domaine de connaissances : c'est un point de vue sur le domaine. Borst [37] parle de “spécification formelle” c'est-à-dire le langage utilisé pour la représentation est interprétable par une machine. De plus, il précise que la conceptualisation est *partagée* parce que l'ontologie doit représenter des connaissances consensuelles, partagées par un groupe ou une communauté.

Dans [95], Guarino et Giaretta étudient sept interprétations possibles pour le terme “ontologie”. D'après cette analyse, ils définissent une ontologie comme une interprétation explicite et partielle d'une conceptualisation. La notion provient du fait qu'il est impossible de représenter formellement toute la complexité d'un domaine.

Uschold and Grüninger, dans [201], adoptent la définition suivante : une ontologie est une interprétation ou une représentation explicite d'une conceptualisation (ou d'une partie d'une conceptualisation). Une *conceptualisation* est un ensemble de concepts, de définitions de ces concepts et des relations entre ces concepts. Ils précisent qu'une telle conceptualisation peut être qualifiée d'*implicite* c'est-à-dire que l'ensemble des concepts utilisés pour définir un domaine d'intérêt représente le point de vue d'une seule personne.

Pour [83], les deux définitions suivantes sont basées sur l'approche utilisée lors de la conception de l'ontologie. Dans [25], les auteurs considèrent qu'une “ontologie fournit les moyens pour décrire explicitement la conceptualisation derrière la base de connaissance”. Swartout et al. proposent de définir une ontologie comme “un ensemble de termes hiérarchiquement structurés pour décrire un domaine et pouvant être utilisé comme squelette d'une base de connaissances” [196].

D'après Chandrasekaran et al., une ontologie décrit un domaine de connaissances spécifique par des objets, des propriétés sur ces objets et des relations entre ces objets dans [47]. Ils précisent que ce n'est pas le vocabulaire lui-même mais les conceptualisations que les termes du vocabulaire capturent qui définissent une ontologie.

Pour Sowa, [193], une ontologie est le résultat d'une étude des catégories de choses qui existent ou qui peuvent exister dans un certain domaine. Il précise que ces objets sont décrits selon le point de vue d'une personne utilisant un langage spécifique.

Plus généralement, une ontologie est définie comme un ensemble structuré de concepts qui permet de modéliser un ensemble de connaissances dans un domaine donné. Une ontologie est utilisée pour représenter la connaissance générique en décrivant les concepts, les attributs et les relations.

### 9.2.2 Classifications des ontologies

Différentes classifications des ontologies ont été proposées. Celles-ci s'appuient sur différents critères : par exemple, dans [92, 93, 94], Guarino propose de classer les ontologies selon leur niveau de généralité c'est-à-dire selon si elles dépendent d'une tâche précise ou d'un point de vue. Pour cela, il propose quatre niveaux différents : les *ontologies de haut-niveau*, les *ontologies de domaine*, les *ontologies de tâche* et les *ontologies d'application* comme il est illustré en figure 9.1.

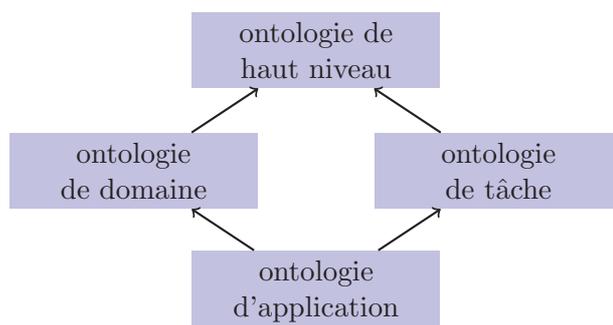


FIG. 9.1 – Différents niveaux de généralités des ontologies

- Les *ontologies de haut-niveau*, appelées également *ontologies supérieures* décrivent des concepts généraux et indépendants d'un problème particulier ou d'un domaine. Ce type d'ontologies vise à étudier les catégories d'objets génériques comme l'espace ou le temps. Par exemple, SUMO (Suggested Upper Merged Ontology)<sup>1</sup>, [157], est une ontologie de haut-niveau qui vise à constituer un standard pour permettre l'interopérabilité sémantique entre les différents systèmes d'informations.
- Les *ontologies de domaine* décrivent un vocabulaire relatif à un domaine particulier comme la médecine. La plupart des ontologies sont des ontologies de domaine. UMLS (Unified Medical Language System)<sup>2</sup> [143] est une ontologie des terminologies médicales. Ce système combine différentes ressources de connaissances : un métathésaurus et un réseau sémantique. Pour Mizoguchi [148], les ontologies de domaine caractérisent les connaissances d'un domaine où une tâche est exécutée.
- Les *ontologies de tâches*, [148, 149, 147], décrivent quant à elle un vocabulaire relatif à une tâche spécifique ou à une activité indépendante d'un domaine comme la vente. Par exemple, l'ontologie CBT (Computer-based Training) [111] est une ontologie de tâche qui représente l'enseignement assisté par ordinateur.
- Les *ontologies d'application* décrivent des concepts très spécifiques qui dépendent à la fois d'un domaine et d'une tâche ou activité. Il s'agit souvent d'une spécialisation des deux ontologies (domaine et tâche) relatives. Les ontologies ap-

<sup>1</sup><http://www.ontologyportal.org/>

<sup>2</sup><http://www.nlm.nih.gov/research/umls/>

partenant à ce niveau permettent de lier les concepts d'un domaine aux concepts d'une tâche spécifique afin de décrire la représentation comme par exemple : apprendre les statistiques.

Uschold et Grüninger [201] proposent une classification des ontologies selon le niveau de leur formalisme de représentation. Ils présentent quatre niveaux :

- Les *ontologies informelles* sont exprimées dans le langage naturel.
- Les *ontologies semi-informelles* sont exprimées par un sous-ensemble limité et structuré du langage naturel.
- Les *ontologies formelles* sont exprimées à l'aide d'un langage artificiel défini formellement.
- Les *ontologies semi-formelles* sont exprimées dans un langage qui possède une sémantique formelle, des théorèmes, des preuves et des propriétés telles que la complétude.

### 9.2.3 Construction d'une ontologie

Différentes méthodes pour le développement des ontologies ont été proposées comme entre autres [201], [202], [158] et [159]. Lors de cette construction, différents principes et critères doivent être respectés. Les principaux critères sont les cinq critères proposés par Grüber [90] :

- *Clarté* : Les définitions contenues dans une ontologie doivent être objectives. Elles doivent être distinctes du contexte même si la définition du concept peut être influencée par la situation sociale ou les besoins des calculs. En outre, elles doivent être aussi complètes que possible c'est-à-dire définies par des conditions nécessaires et suffisantes. Elles doivent également être décrites en langage naturel.
- *Cohérence* : Une ontologie doit être cohérente c'est-à-dire que le raisonnement inféré à partir de l'ontologie ne doit pas conduire à des contradictions. L'inférence doit être en accord avec les définitions.
- *Extensibilité* : La construction d'une ontologie doit laisser la possibilité d'ajouter des extensions (par exemple, introduire de nouveaux concepts) sans remettre en cause ce qui a été conçu précédemment.
- *Déformation d'encodage minimale* : La conceptualisation d'une ontologie doit être indépendante d'un langage de représentation particulier. En effet, l'ontologie doit pouvoir être implantée dans différents systèmes de représentation.
- *Engagement ontologique minimal* : Une ontologie doit spécifier autant que possible la signification des termes afin de permettre aux utilisateurs de spécialiser et d'instancier l'ontologie comme ils le souhaitent.

D'autres principes qui doivent être respectés, sont présentés dans [83] :

- le *principe de distinction ontologique*, [36] : les concepts d'une ontologie doivent être disjoints,
- la *diversification des hiérarchies*, [7], augmente la puissance fournie par les mécanismes d'héritage multiple :
- la *modularité*, [25],

- la *distance sémantique minimale*, [7] : les concepts similaires doivent être regroupés et représentés comme sous-concepts d'un même concept tandis que les concepts peu similaires doivent être représentés par des concepts distincts dans la hiérarchie,
- la *normalisation des noms*, [7] c'est-à-dire qu'il faut normaliser les noms des concepts autant que possible.

### 9.2.3.1 Les formalismes de représentation

Il existe différents formalismes de représentation des ontologies. Certains sont basés sur la logique du premier ordre comme KIF (**K**nowledge **I**nterchange **F**ormat) [80] ou CycL (**Cyc** Language)[129]. KIF est un langage formel pour la représentation des connaissances basé sur la logique des prédicats. C'est un langage intermédiaire qui peut être lu par les utilisateurs et les machines. Ce formalisme est utilisé par le système Ontolingua<sup>3</sup> qui permet de parcourir, de créer, d'éditer et d'utiliser des ontologies. Malgré une forte expressivité, aucun moteur de raisonnement n'est fourni pour ce formalisme. Il ne permet donc pas de détecter des incohérences. Cependant, il est possible de représenter certaines règles de raisonnement non monotone. CyCL est un langage formel utilisé par le projet Cyc<sup>4</sup> fondé en 1984 par Douglas Lenat. La première version de CycL était basée sur les frames, la dernière version est quant à elle basée sur la logique du premier ordre. Ce formalisme est également très expressif, il peut exprimer différentes sortes de quantification mais le raisonnement produit est monotone.

D'autres formalismes de représentation sont basés sur les frames [146] comme F-logic (**F**rame-**l**ogic) [115] et KL-ONE [40]. Comme son nom l'indique, F-logic est un langage basé sur les frames mais il est aussi basé sur la logique du premier ordre. Ce langage combine une sémantique déductive et une expressivité des langages déductifs des bases de données avec les riches possibilités de modélisation des concepts orientés objet. Ce formalisme est donc un langage de haut niveau supportant l'héritage simple ou multiple, monotone ou non monotone. Mais les conflits créés par l'héritage multiple ne peuvent être résolus. KL-ONE est un langage de représentation des connaissances basés sur les frames également. Ce langage est apparu en 1977 et décrit un niveau de représentation qui est indépendant d'un domaine, appelé niveau épistémologique. L'évolution de KL-ONE a permis de produire un langage qui permet de représenter explicitement des informations conceptuelles. Ce formalisme fournit une classification automatique utilisant un algorithme robuste mais incomplet. La cohérence n'est pas vérifiée mais d'autres systèmes basés sur KL-ONE permettent de vérifier la cohérence.

Les réseaux sémantiques [170] et les graphes conceptuels [191] sont également utilisés pour représenter les ontologies. Selon [192], un réseau sémantique est une représentation graphique des connaissances sous forme de noeuds interconnectés par des arcs. Les noeuds représentent les concepts. De plus, il existe différents types d'arc comme par exemple, la relation d'agrégation, la relation de composition, la relation d'instancia-

<sup>3</sup><http://www.ksl.stanford.edu/software/ontolingua/>

<sup>4</sup><http://www.cyc.com/>

tion, ... Ce formalisme dispose d'algorithmes d'inférence efficaces. La notion de graphe conceptuel est fondée sur la logique et sur les graphes existentiels de Charles Sanders Peirce. D'après [191], un graphe conceptuel est un graphe fini, connecté et biparti. Il possède deux types de noeuds : des noeuds représentant les concepts et des noeuds représentant les relations entre les concepts. Ce formalisme étant très expressif, les problèmes de raisonnement sont indécidables pour la plupart des graphes conceptuels. RDF (**R**esource **D**escription **F**ramework)<sup>5</sup> est un modèle de graphe permettant de décrire différentes ressources internet. Il est considéré comme le langage de base du Web sémantique. Un graphe RDF est un triplet composé d'un sujet, d'un prédicat et d'un objet où le sujet identifie la ressource décrite par ce triplet, le prédicat représente une propriété de cette ressource et l'objet est la valeur de la propriété (elle peut être soit une valeur littérale ou soit une autre ressource). D'autres langages pour les ontologies peuvent être construits à partir de RDF comme OWL.

OWL (Web Ontology Language)<sup>6</sup> est un langage permettant de définir des ontologies pour le Web Sémantique. Le langage OWL est développé par le World Wide Web Consortium (W3C). Ce langage est devenu une recommandation depuis février 2004. Il est décliné en trois versions de plus en plus expressives : OWL-Lite, OWL-DL et OWL-Full. Les langages OWL-Lite et OWL-DL peuvent être vus comme des logiques de description expressives avec une syntaxe RDF. OWL-DL s'appuie sur la logique de description  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$  et supporte donc les mêmes inférences que cette logique. Cette logique est très expressive mais la plupart des problèmes dans cette logique comme la satisfaisabilité d'une base de cohérence, sont dans NEXPTIME ce qui rend son utilisation difficile en pratique [105]. C'est pourquoi un sous-ensemble de OWL-DL, appelé OWL-Lite a été défini. OWL-Lite s'appuie sur la logique de description  $\mathcal{SHIF}(\mathcal{D})$  et la complexité théorique pour le raisonnement est EXPTIME. OWL-Full est la version la plus expressive de OWL. Contrairement à OWL-Lite et OWL-DL, elle permet d'utiliser tous les constructeurs de OWL sans aucune contrainte. La forte expressivité de cette version rend le raisonnement indécidable. Récemment, le W3C a fourni une extension de OWL appelé OWL 2<sup>7</sup>. Cette nouvelle version peut entre autre exprimer qu'une valeur d'une propriété de type de données doit appartenir à un intervalle de valeurs donné.

### 9.2.3.2 Les outils

Différents éditeurs pour créer et modifier des ontologies ont été développés. Nous en présentons ici un seul outil : Protégé<sup>8</sup>. Cet éditeur est le plus connu et le plus utilisé, il est opensource<sup>9</sup>. Il permet de construire des ontologies dans la plupart des formats (RDF, OWL, ...) à travers une interface graphique et il offre de nombreuses

---

<sup>5</sup><http://www.w3.org/RDF/>

<sup>6</sup><http://www.w3.org/TR/owl-features/>

<sup>7</sup><http://www.w3.org/TR/owl2-overview/>

<sup>8</sup><http://protege.stanford.edu/>

<sup>9</sup>Nous préférons utiliser le terme opensource plutôt que "source ouverte" ou "code source libre".

possibilités. En effet, il est possible de raisonner sur les ontologies en utilisant des moteurs d'inférence facilement intégrables à Protégé comme RACER décrit en section [9.1.3](#).

## Chapitre 10

# Représentation de l'information archéologique dans le cadre du projet VENUS

### 10.1 Projet européen VENUS

Le projet européen VENUS (Virtual ExploratioN of Underwater Sites) n ° (IST-034924)<sup>1</sup> fournit des méthodes scientifiques et des outils technologiques pour l'exploration virtuelle de sites archéologiques sous-marins. L'exploration virtuelle de l'environnement sous-marin permet à la fois aux experts ainsi qu'au grand public d'étudier des sites archéologiques en toute sécurité, à faible coût et de façon pédagogique. Le projet VENUS était divisé en cinq objectifs :

1. Le premier objectif avait pour but de définir un ensemble de procédures ainsi que les meilleurs moyens pratiques pour collecter les données à partir de sites archéologiques sous-marins de manière efficace, économique et sécurisé.
2. Le second objectif consistait à définir des procédures concrètes afin de fusionner les données optiques et acoustiques, acquises lors du relevé des sites sous-marins en une représentation cohérente.
3. Le troisième objectif consistait à fournir aux archéologues un outil logiciel pour le traitement et la gestion des données et des signaux.
4. Le principal but du quatrième objectif était d'immerger les archéologues dans un univers virtuel représentant un site archéologique reconstruit afin de leur permettre de travailler sur le site aussi naturellement que possible.
5. Le cinquième objectif concernait la dissémination scientifique dans les domaines de l'archéologie, l'exploration sous-marine, la photogrammétrie et la réalité vir-

---

<sup>1</sup><http://www.venus-project.eu>

tuelle à travers entre autres de publications, d'un ensemble d'outils "open-source"<sup>2</sup>.

Pour réaliser ces objectifs, trois missions aux contextes archéologiques différents ainsi qu'aux conditions de mer différentes ont été réalisées. La première consistait à étudier le site archéologique près de l'île de Pianosa en Toscane. Ce site est considéré comme peu profond puisqu'il est situé à 36 mètres de profondeur. La seconde expérimentation a eu lieu sur un site archéologique à 55 mètres de profondeur près de la baie de Sesimbra au Portugal. La troisième mission concernait un site découvert par COMEX dans la calanque de Port Miou près de Marseille. Ce site est extrêmement bien préservé et est localisé à 100m de profondeur. Plus de détails sur ces missions sont présentés en section 10.2.2 de ce chapitre. Ces objectifs ont été remplis avec succès à travers différents "workpackages"<sup>3</sup>. Parmi eux, le workpackage 3 concernait la représentation et la gestion des connaissances archéologiques. Le but était d'analyser les méthodes de travail ainsi que les outils utilisés par les archéologues lors d'une étude de site archéologique afin de construire une ontologie, d'étudier ensuite les formalismes de représentation appropriés afin de pouvoir gérer ces informations archéologiques. Ce workpackage se décompose donc en deux sous-parties : la représentation d'informations archéologiques sous forme d'ontologie c'est-à-dire une description conceptuelle de ces informations et la gestion des connaissances appelée également raisonnement. La figure 10.1 illustre l'intégration des modules de description conceptuelle et de raisonnement du workpackage 3 au sein de trois modules issus des autres workpackage du projet.

- Le module intitulé "mesure" concerne le processus et l'outil de mesure décrit en section 10.2.1 de ce chapitre.
- Le module "données" représente le stockage des différentes données comme celles issues de la mesure dans une base de données.
- Le module de "réalité virtuelle" concerne le workpackage 4 et la visualisation virtuelle du site archéologique sous-marin.

Comme nous le montre la figure 10.1, ces différents modules interagissent entre eux de la façon suivante :

1. La connaissance générique est décrite par un expert.
2. Le relevé photogrammétrique est produit par un expert en utilisant l'interface Arpenteur [57, 58].
3. La connaissance générique est exportée afin d'être utilisée par le module de raisonnement.
4. Les résultats du relevé sont sauvegardés dans la base de données.
5. Les instances des objets sont exportées afin d'être utilisées par le module de raisonnement.
6. Les données sur ces objets peuvent être visualisées et modifiées par le module de réalité virtuelle.

---

<sup>2</sup>Nous préférons utiliser le terme opensource plutôt que "source ouverte" ou "code source libre".

<sup>3</sup>Nous utiliserons dans ce manuscrit le mot anglais "workpackage" pour désigner un "lot" de travaux.

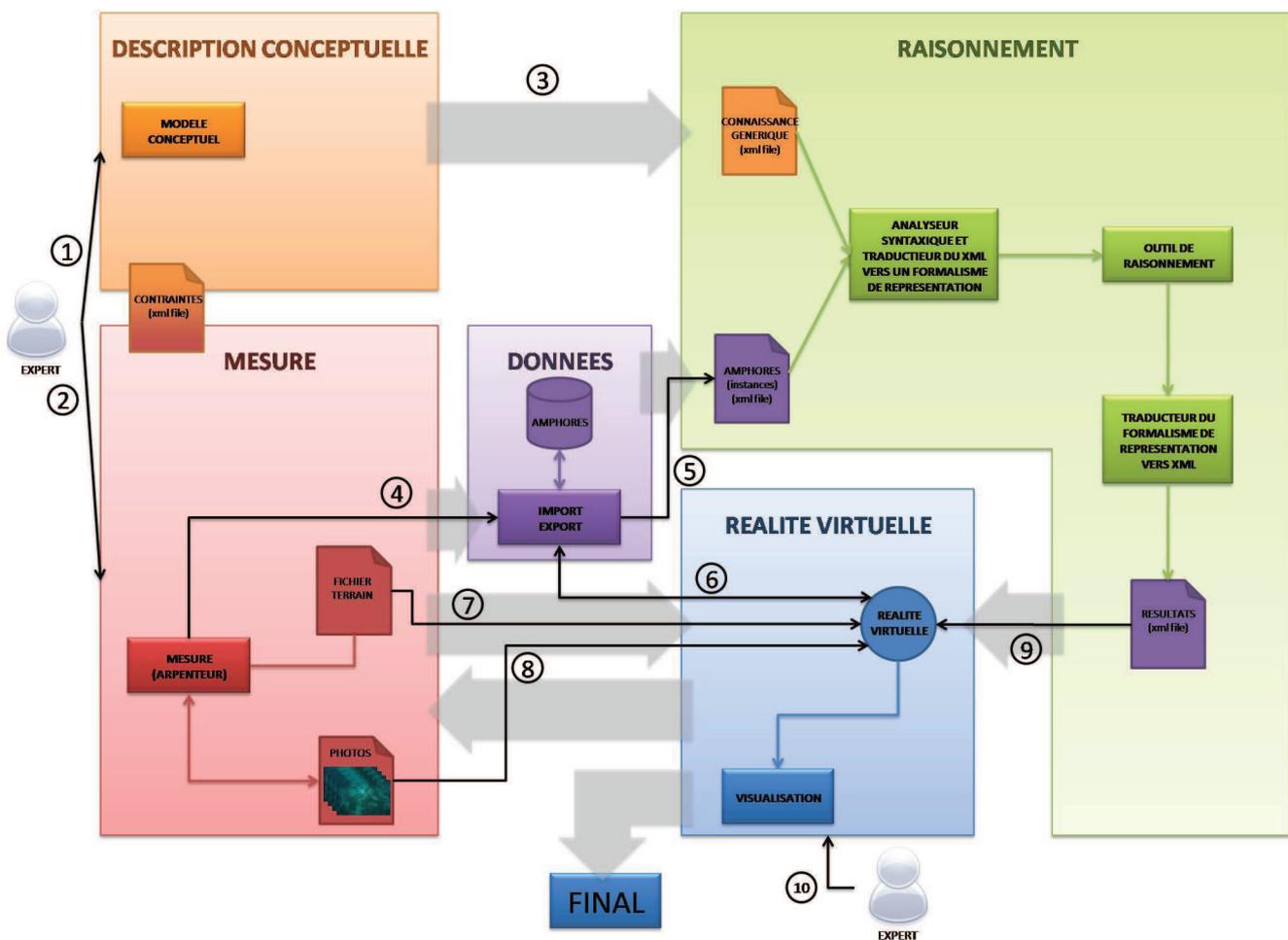


FIG. 10.1 – Intégration du workpackage 3

7. Le modèle terrain est chargé par le module de réalité virtuelle.
8. Les photos sont chargées par le module de réalité virtuelle.
9. Les résultats issus du module de raisonnement sont transmis au module de réalité virtuelle.
10. L'expert interagit avec les données par le module de réalité virtuelle.

## 10.2 Description de l'information archéologique

Le premier objectif du workpackage 3 consistait à représenter l'information archéologique dans le contexte du projet VENUS. Pour cela, il est nécessaire d'étudier la provenance de ces données.

### 10.2.1 Acquisition des données

Dans le cadre du projet VENUS, une des technologies utilisées pour l'acquisition de données dimensionnelles est la photogrammétrie. Les mesures obtenues par Arpenteur prennent en compte la connaissance archéologique sous-marine.

#### 10.2.1.1 Photogrammétrie

Le contexte du projet européen VENUS requiert une méthode de relevé qui puisse être utilisée dans des sites profonds et sans contact avec le site. Pour cela, deux méthodes sont possibles : l'utilisation d'un sonar ou l'utilisation de la photogrammétrie [2, 120, 5]. Le cadre du projet VENUS nécessite l'obtention d'informations qualitatives sur des textures, une grande précision sur les mesures (entre 1 et 5 mm) ainsi qu'un enregistrement rapide des données. Seule la photogrammétrie répond à ces critères. En effet, la photogrammétrie nécessite l'utilisation d'appareils photo ainsi que de flashes qui peuvent être embarqués sur un sous-marin. De plus, puisque nous sommes dans le cadre de sites sous-marins profonds, la turbidité nous impose d'être très proche des objets afin d'obtenir des photos de très bonne qualité et permettre ainsi des observations fines. Enfin, la durée de l'intervention en utilisant la photogrammétrie est égale à la durée des prises de vue car les mesures ainsi que le relevé se feront *a posteriori* en laboratoire. De plus, grâce aux techniques récentes d'ajustement des faisceaux, les prises de vue ne nécessitent pas beaucoup de règles c'est-à-dire que les photographies se font sous peu de contraintes.

#### 10.2.1.2 Observations des sites

Le terme de photogrammétrie existe depuis plus d'un siècle et désigne *“la science ou la technique permettant d'obtenir des informations fiables sur l'espace naturel ou sur des objets physiques par l'enregistrement, la mesure et l'interprétation d'images photographiques ou produites par rayonnement électromagnétique ou autres phénomènes”*<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Traduction de la définition de [5] par Gilles Gaillard, 1992

Cette technique a été adaptée au monde sous-marin il y a environ 50 ans [11, 12] et elle a été très peu utilisée en archéologie [198, 102] jusqu'à sa démocratisation. Parallèlement aux relevés des techniques photogrammétriques, les premiers travaux sur l'apport de l'intelligence artificielle à la compréhension et au raisonnement des artefacts, principalement des amphores, ont été développés dans les années 80 [1, 74, 96, 75] dans le cadre de recherche interdisciplinaire qui sont en quelque sorte le fondement de notre travail.

Néanmoins, les mesures sur lesquelles se basent notre approche sont toutes effectuées sur des photographies *in situ* et sans aucun prélèvement d'amphores possible. De plus, il est fréquent que le site n'ait pas pu être nettoyé avant la prise de vue. Dans ces conditions, nous avons limité le nombre de zones mesurables sur chaque amphore et ainsi réduit le nombre d'attributs morphologiques présents dans le travail de typologie d'Antoinette Hesnard [100, 67].

Le relevé archéologique sous-marin a ensuite suivi les évolutions de la technologie et de nombreux auteurs utilisent à présent des techniques de photogrammétrie légères [84]. Actuellement, les méthodes émergentes de relevé optique sous-marin sont développées dans le milieu de la robotique sous-marine et seront d'ici peu entièrement automatisées [116].

L'utilisation de la photogrammétrie nous permet d'obtenir un ensemble de points observés sur plusieurs photographies. Les mêmes points doivent être reconnus sur différentes photographies. Pour cela, nous pourrions utiliser des méthodes de corrélation [120]. Dans notre contexte, nous préférons nous fier à un opérateur qui mesure manuellement les points. Lors de cette mesure, l'expert introduit de la connaissance en étiquetant ces points. Par exemple, si nous considérons une amphore, nous pourrions avoir comme étiquette : point de la panse. A l'issue de cette étape, nous obtenons donc un ensemble de points étiquetés. Dans un contexte sous-marin, les conditions d'observations et de détérioration rendent impossible l'identification automatique des étiquettes des points. La méthode utilisée est donc manuelle et elle permet d'introduire de la sémantique. L'intervention de l'expert pour l'étiquetage des points entraîne la possibilité d'introduction d'erreurs c'est pourquoi il est nécessaire d'avoir un système de restauration de la cohérence.

Les observations [176] sont les données recueillies durant la saisie photogrammétrique permettant de restituer les objets. Cette saisie est réalisée en utilisant une interface de l'Arpenteur, outil que nous décrivons dans la section suivante.

### 10.2.1.3 Arpenteur

Le projet Arpenteur (ARchitectural PhotogrammEtry Network Tool for Education and Research)<sup>5</sup> [57, 58] est un ensemble d'outils logiciels pour la mesure photogrammétrique utilisable par les archéologues et les architectes. Il est développé sous la direction de Pierre Drap (LSIS - UMR CNRS 6168). Ce projet repose sur l'idée d'un processus de mesure guidé par les connaissances relatives aux domaines étudiés et ne requiert que peu de connaissances spécifiques en photogrammétrie. L'étape de

---

<sup>5</sup><http://www.arpenteur.net>

mesure doit être exécutée par un expert du domaine de connaissances (architecte ou archéologue). Les résultats sont produits sous forme de documents XML et de fichiers dédiés à la visualisation 2D\3D (SVG, VRML, X3D). Pour ce faire, le système offre aux experts un ensemble d'outils qui leur permet de formuler des hypothèses et des correspondances entre les mesures et les champs d'investigation. A l'issue du projet VENUS, une version opensource de l'Arpenteur a été mise à disposition sur la plate-forme d'hébergement SourceForge<sup>6</sup>.

Nous décrivons dans la section suivante les différents relevés effectués lors du projet VENUS.

### 10.2.2 Relevés archéologiques

Pendant le projet VENUS, trois sites archéologiques ont été étudiés lors des différentes missions effectuées : le site de Pianosa (Italie), le site de Sesimbra (Portugal) et le site de Port Miou C (France).

#### Relevé de Pianosa

La première mission du projet européen VENUS s'est déroulée sur le site de Pianosa, en Italie. Le site archéologique de Pianosa a été découvert en 1989 par les plongeurs Giuseppe Adriani et Paolo Vaccari. Le site est localisé à 35 m de profondeur près de Scoglio della Scola, sur la côte est de l'île de Pianosa. Le site est caractérisé par la présence d'une centaine d'amphores d'origines et d'époques variées. Les amphores sont de typologies différentes : de la Dressel 1A à la Beltran 2B et la Dressel 20 en passant par des typologies Africaines. Lors d'une étude précédente de ce même site (en 2001), il a été démontré que le site était resté intact.

Le site a été choisi pour cette première expérimentation car étant situé à 35 m de profondeur, il permettait aussi bien l'utilisation de plongeurs que d'un système robotisé et automatisé (ROV, Remotely Operated Vehicle) pour collecter les informations archéologiques et ainsi effectuer une comparaison et une évaluation des données produites par chacun. L'étude du site de Pianosa [71, 59], a permis de produire un relevé photogrammétrique des amphores du site.

#### Relevé de Sesimbra

La deuxième mission du projet européen VENUS s'est déroulée dans la baie de Sesimbra, au sud de Lisbonne au Portugal. Le site archéologique choisi "Barco da Telha or Tiles' Vessel" est localisé à 55m de profondeur, il a été découvert en avril 2005 par deux plongeurs Pedro Lage et António Moreira. Le site est caractérisé par un tumulus de tuiles et de briques atteignant 1,8 m de hauteur. Des boulets de tailles différentes ont également été détectés.

---

<sup>6</sup><http://sourceforge.net/>

Le site a permis de tester le système automatique d'acquisition des données photogrammétriques à plus de 50m de profondeur. A l'issue de cette étude [137, 138], un relevé photogrammétrique des tuiles du site a été produit.

### Relevé de Port Miou C

La troisième et dernière mission de projet européen VENUS s'est déroulée dans la calanque de Port Miou située entre Marseille et Cassis [136]. L'épave romaine de Port Miou a été découverte en octobre 1998 par Henri-Germain Delauze (président de la société COMEX) lors d'une plongée avec le sous-marin Remora. Le site est localisé entre 90 et 110m de profondeur. L'épave s'apparente à un large tumulus d'amphores romaines de type Dressel 1, mesurant environ 24 m de long pour 12 m de large et 2 m de haut. Le chargement est composé d'environ 1500 ou 2000 amphores visibles et devrait contenir au total 3000 ou 3500 unités, peut-être plus.

Un relevé photogrammétrique d'environ 870 amphores résulte en partie de l'étude de ce site [3, 76].

Pour gérer cette connaissance très limitée, insérée par l'expert lors du relevé, nous nous appuyons, sur un mécanisme de gestion des modèles 3D, des instances ainsi que sur des vérificateurs de la cohérence.

## 10.3 Ontologie d'application

Comme nous l'avons vu en section 10.2, les informations utilisées par les archéologues sont structurées, hiérarchisées. La construction d'une ontologie est donc adaptée pour représenter l'ensemble de ces informations et répond au premier objectif de ce workpackage. L'information que nous souhaitons capturer dépend d'un domaine et d'une tâche. En effet, l'Arpenteur utilise la connaissance archéologique dans le processus de mesure en utilisant la description archéologique des objets pour la détermination des zones à mesurer. La mesure obtenue par l'Arpenteur dépend donc d'un domaine précis, l'archéologie sous-marine, plus précisément, les amphores, les tuiles et les briques (figure 10.4, flèche 2) et d'une tâche précise qui est le processus d'acquisition des données (figure 10.4, flèche 3). Selon la classification des ontologies proposée par Guarino [92, 93, 94] et rappelée en section 9.2 de ce manuscrit, nous avons donc construit une ontologie d'application provenant à la fois d'un domaine et d'une tâche comme nous le montre la figure 10.4.

Pour la construction de notre ontologie, nous nous sommes inspirés de la méthode présentée dans [159].

Pendant le projet VENUS, trois missions ont été effectuées. Le site de Pianosa, qui a été l'objet de la première mission, est caractérisé par la présence d'un seul artefact : les amphores. Notre ontologie a été construite initialement pour représenter le processus de mesure des amphores. Les artefacts présents sur le site de la mission de Sesimbra sont des tuiles et des briques. Nous avons donc enrichi notre ontologie en ajoutant des concepts ainsi que des attributs et des relations pour représenter le processus de mesure

de ces artefacts. Enfin, seules les amphores sont présentes sur le site de Port Miou C qui a été l'objet de la dernière mission.

Après une étude détaillée des classes définies dans Arpenteur, nous avons défini les concepts, les attributs des concepts ainsi que les relations entre les concepts qui composent notre ontologie. L'analyse des classes de l'Arpenteur, nous a permis tout d'abord, d'établir une hiérarchie entre les principaux concepts. Cette hiérarchie est en fait une taxonomie et est illustrée par la figure 10.2.

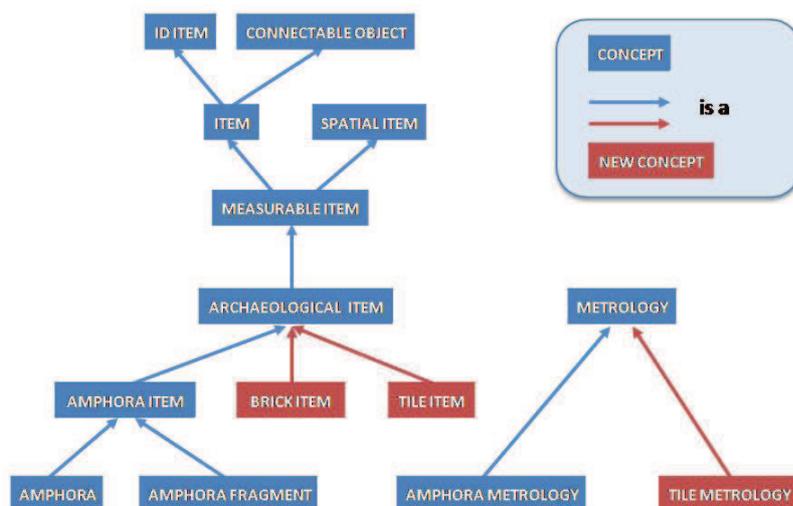


FIG. 10.2 – Hiérarchie de concepts de ontologie

Les concepts, les attributs et les relations qui composent notre ontologie d'application, représentés schématiquement par la figure 10.3, sont détaillés dans une spécification fournie en annexe A et disponible dans le produit final [180] du projet VENUS.

**Remarque :** Dans le contexte du projet VENUS, une autre version de cette ontologie a été proposée afin d'étendre le modèle orienté CIDOC CRM (Modèle Conceptuel de Référence) [110] et permettre l'utilisation des raisonneurs comme Pellet [189] pour la restauration de la cohérence. Elle diffère de la version présentée ci-dessus par l'attribut *typology* du concept *ARCHAEOLOGICAL ITEM* qui est remplacé par un sous-concept du concept *AMPHORA* (resp. *BRICK ITEM* et *TILE ITEM*) pour chacune des typologies possibles de l'objet. Plus de détails sur cette version sont disponibles dans le produit final [180] ainsi que dans le livrable [164].

## 10.4 Contraintes

Les valeurs de certains attributs doivent respecter certaines règles qui ne peuvent être directement encodées dans l'ontologie (figure 10.4, flèche 1). Nous avons donc



desquels selon un pourcentage donné, nous pouvons calculer des intervalles de valeurs. Ces domaines de valeurs sont traduits par des contraintes dites conditionnelles. Plus précisément, ces contraintes sont appliquées sur les attributs morphologiques de la métrologie, de la métrologie d'amphore et de la métrologie des tuiles : la hauteur totale, la longueur totale, la largeur totale, la masse, le volume, la hauteur des lèvres, le diamètre de la panse, les diamètres interne et externe ainsi que l'épaisseur et les rayons de la petite et de la grande base. Selon la typologie de l'objet, les valeurs de ces attributs doivent être comprises dans un intervalle de valeurs. Cet intervalle est construit à partir de la valeur théorique de l'attribut en question plus ou moins un certain pourcentage. Par exemple, la valeur de la hauteur d'une amphore dont la typologie est Dressel 2-4 courte doit être comprise dans un intervalle de valeur de plus ou moins 20% de la valeur théorique qui est 0,850 m. La valeur de la hauteur doit être comprise entre 0,68 m et 1,02 m.

## 10.5 Base de connaissances

La base de connaissances se compose d'une part de la connaissance générique formée par l'ontologie d'application et les contraintes et d'autre part d'un ensemble d'instances sur les objets. Notre base de connaissances est représentée schématiquement par la figure 10.4.

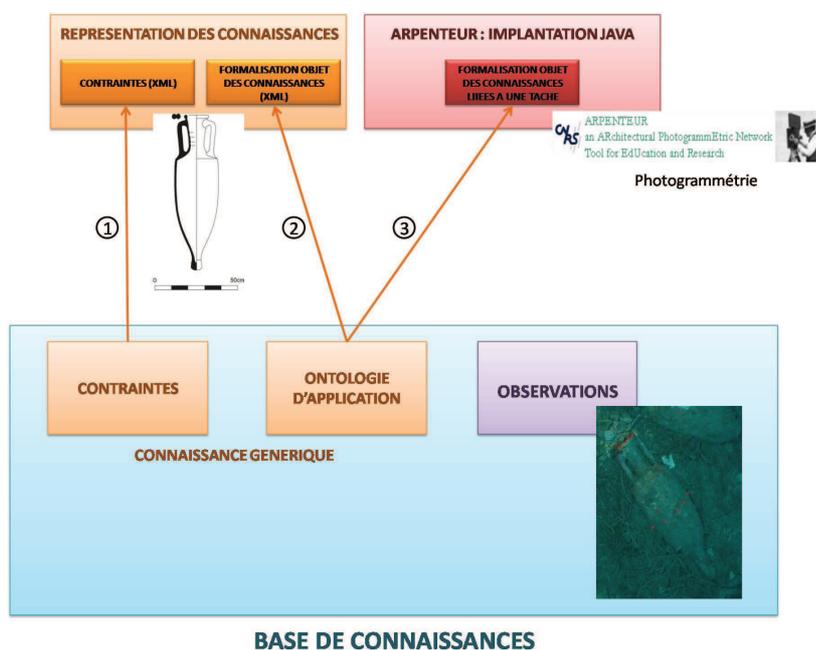


FIG. 10.4 – Interaction de l'ontologie et la base de connaissances dans le projet VENUS

Formellement, notre base de connaissances se décrit de la manière suivante :

$$KB = \{G, I\}$$

avec

- $G$  dénotant la connaissance générique telle que  $G = O \cup C$ ,  
     $O$  représente l'ontologie d'application,  
     $C$  l'ensemble des contraintes associées et
- $I$  constitue l'ensemble des observations sur les objets mesurés.

## 10.6 Un outil pour la génération de représentations 3D d'amphores

La connaissance représentée par l'ontologie et les observations (photos et mesures) est également utilisée lors de la génération de la représentation 3D des objets.

Les représentations 3D sont les modèles théoriques dont l'ensemble des coordonnées est exprimé dans un référentiel local.

L'ontologie nous donne des informations sur l'objet entier mais également sur les composantes de cet objet qui sont utilisées lors de la génération du modèle 3D. La connaissance représentée par l'ontologie et les observations est encore accessible dans la représentation 3D finale ce qui nous permet d'identifier également les composants des objets manipulés.

Nous avons développé une application permettant de générer des représentations 3D d'amphores à partir de dessins archéologiques en passant par une représentation 2D.

La génération de représentations 3D d'amphores à partir de dessins archéologiques de profils d'amphores requiert différentes étapes. Ces représentations 3D sont obtenues en utilisant un processus semi-automatique car la connaissance de l'expert est requise pour déterminer les différentes parties (le profil du corps, la section et le profil des anses, l'échelle du dessin) sur le relevé de l'amphore.

### 10.6.1 Caractéristiques des dessins archéologiques et traitement de l'image

Le relevé d'une amphore est dessiné manuellement par les archéologues. Il doit respecter certains critères. Tout d'abord, il doit être en noir et blanc. Au moins une section de anse ainsi que le profil de l'amphore doivent être représentés sur l'image. Seul la présence de l'échelle est optionnelle. Si l'échelle n'est pas présente sur le relevé, elle doit être fournie par l'utilisateur. Des dessins provenant de différentes sources peuvent être utilisés. Dans le contexte du projet VENUS, certains d'entre eux ont été dessinés par des archéologues lors de la mission de Pianosa comme le dessin représenté par la figure 10.5 tandis que d'autres proviennent de la base de données d'Ads<sup>7</sup> disponibles

---

<sup>7</sup>Ads, partenaire du projet VENUS, est un laboratoire d'archéologie qui s'occupe de fournir des méthodes et des outils aux archéologues pour gérer leurs données numériques.

sur leur site<sup>8</sup> comme le dessin représenté par la figure 10.6.

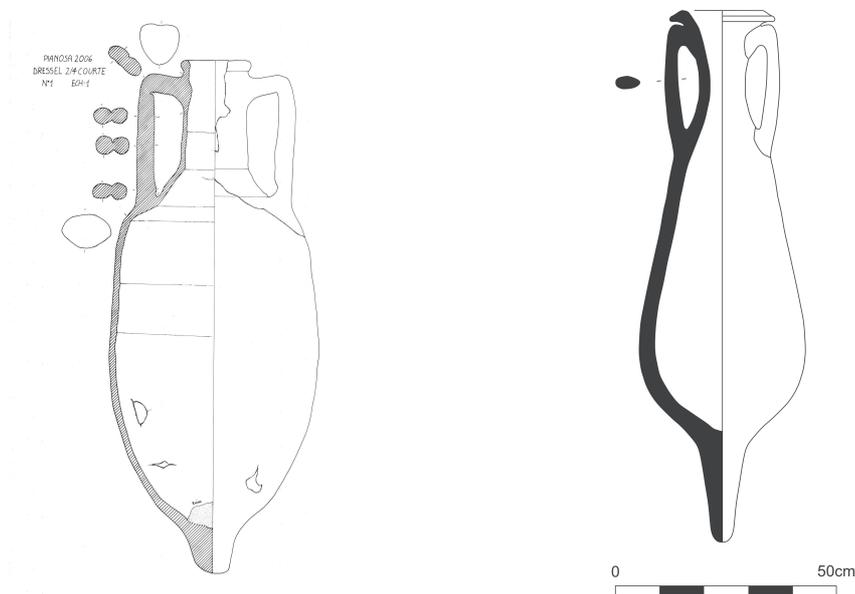


FIG. 10.5 – Relevé d'une Dressel 2-4 courte réalisé lors de la mission de Pianosa

FIG. 10.6 – Relevé d'une Beltran 2B provenant de la base de données d'Ads

### 10.6.1.1 Traitement de l'image

L'utilisation par notre application des relevés d'amphores présentés dans la section précédente nécessite de modifier manuellement ces relevés. Selon l'origine du dessin utilisé, les relevés d'amphores doivent subir des corrections mais aussi parfois des modifications. En effet, les relevés d'amphores de Pianosa sont des données réelles puisqu'ils ont été réalisés par les archéologues durant la mission.

Ces dessins ont été ensuite scannés afin d'obtenir des relevés d'amphores digitaux. Le système de référence des nouveaux relevés d'amphores est inhérent au support du dessin initial qui a pu subir une légère rotation durant l'étape de numérisation. Ce système de référence ne correspond pas à celui utilisé dans notre application. Pour exprimer le relevé digitalisé dans le bon référentiel, les points doivent subir une rotation. Les points de l'axe de l'amphore doivent avoir une ordonnée constante ce qui nous permet de déterminer l'angle de rotation.

L'étape suivante, la détection de contour, requiert le remplissage en noir des zones hachurées sur les profils. Les dernières modifications concernent les anses. Le processus de génération des représentations 3D des anses n'utilise qu'une seule des sections des anses, les autres sections doivent donc être supprimées. Par ailleurs, la partie droite des relevés d'amphores n'est pas utile pour notre application, cette partie est également

<sup>8</sup><http://ads.ahds.ac.uk/catalogue/resources.html?amphora2005>

effacée du relevé. Ces modifications étant faites, nous obtenons par exemple, le relevé représenté par la figure 10.9 (a) et nous pouvons utiliser notre application qui commence par l'étape de détection des contours.

### 10.6.1.2 Détection des contours

La détection des contours consiste à parcourir l'image pour détecter toutes les formes. Nous analysons l'image à partir du coin supérieur gauche en utilisant un algorithme de parcours ligne à ligne avec un pas horizontal et un pas vertical. Si le pixel candidat est acceptable (c'est-à-dire que le pixel est considéré comme noir selon un seuil donné<sup>9</sup>) et si il n'appartient pas à une forme déjà détectée, nous recherchons le premier pixel contigu afin de rester sur le contour de la forme détectée. Ce processus est illustré par la figure 10.7 pour un pas horizontal de cinq pixels et un pas vertical de deux pixels.

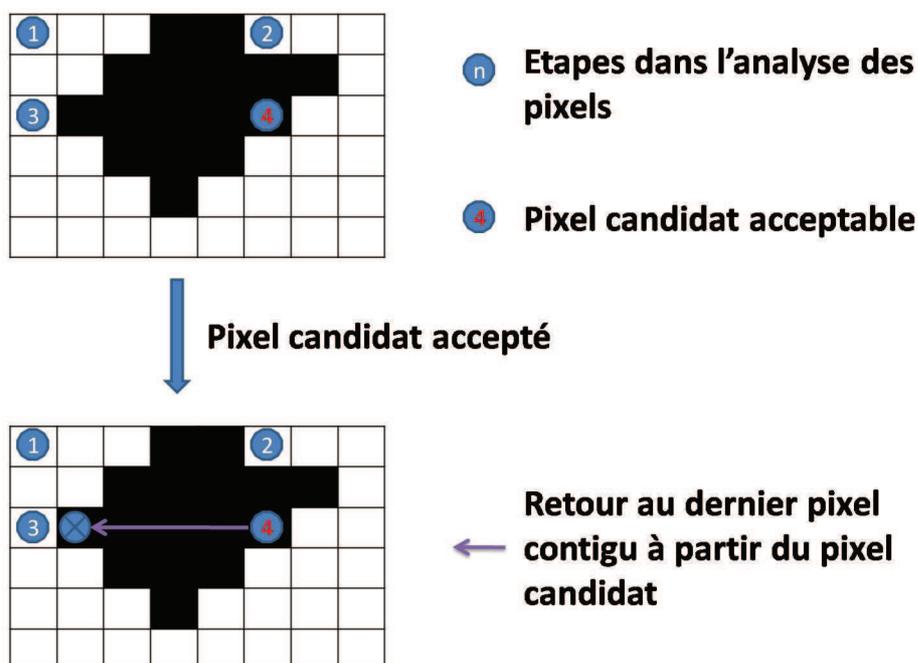


FIG. 10.7 – Détermination d'un pixel candidat

Un algorithme de détection des contours avec un parcours dans la direction anti-horaire est ensuite appliquée à partir du pixel candidat pour déterminer le contour de la forme. A partir de ce pixel, nous cherchons parmi ses huit voisins le prochain pixel du contour (algorithme 1). Nous analysons les voisins à partir du dernier pixel trouvé pour le contour (pour le premier pixel, nous prenons arbitrairement le pixel juste au-dessus). Si le pixel voisin est blanc, nous regardons le voisin suivant. Si le pixel voisin est noir

<sup>9</sup>Ce seuil est fixé à 128 par défaut.

et si au moins un des pixels voisins précédents était blanc, alors nous avons trouvé le pixel du contour. Sinon, le pixel est à l'intérieur de la forme et nous regardons le voisin suivant.

---

**Algorithme 1** Détermination du prochain pixel
 

---

**Entrées:** pixel candidat, dernier pixel

**Sorties:** prochain pixel

pv ← dernier pixel

blanc ← 0

trouve ← FAUX

**tantque** non trouve et les huit voisins n'ont pas été parcourus **faire**

 si pv est blanc **alors**

pv ← voisin suivant

blanc ← blanc +1

**sinon si** blanc > 0 **alors**

trouve ← VRAI

**sinon**

pv ← voisin suivant

**finsi**
**fin tantque**


---

Cet algorithme, illustré par la figure 10.8, est répété jusqu'à ce que le pixel de départ soit retrouvé.

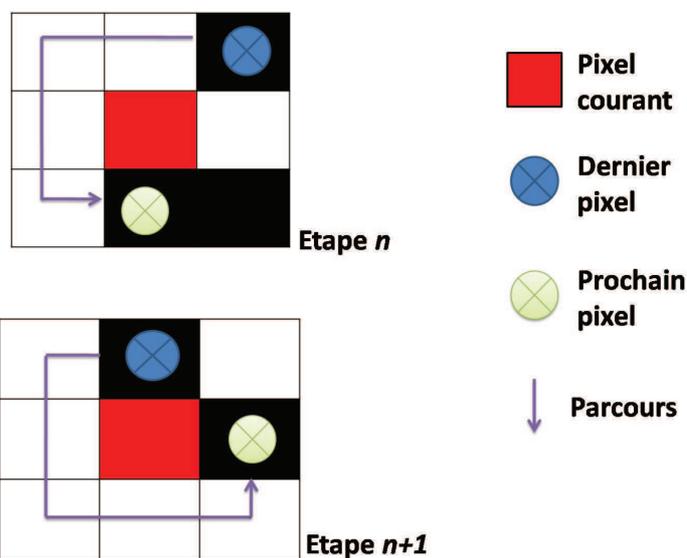


FIG. 10.8 – Analyse des huit pixels voisins du pixel candidat

Nous procédons comme il est décrit précédemment jusqu'à détection de toutes les

formes présentes sur le relevés d'amphore. La figure 10.9 (b) montre le résultat du processus de détection des contours.

Si l'utilisateur est satisfait par cette détection de contour, il procède ensuite à la saisie de quatre points délimitant les anses sur le contour du profil de l'amphore et valide ses choix. A partir de ces informations, nous passons à l'étape de reconnaissance des formes permettant la génération d'une représentation 2D de l'amphore.

### 10.6.2 Génération de représentations 2D

La reconnaissance des différentes formes (l'échelle, le profil de l'amphore, la section des anses) sur l'image est basée sur l'analyse des boîtes englobantes de ces formes. Nous utilisons la connaissance géométrique pour différencier les formes. La reconnaissance de ces formes se fait suivant un ordre bien précis :

1. Tout d'abord, si cela est nécessaire, nous détectons l'échelle parmi les formes. L'échelle est différenciée des autres formes par la largeur. La forme dont la boîte englobante est la plus large (taille maximum selon l'axe des abscisses), est étiquetée comme étant l'échelle.
2. De même, le profil principal de l'amphore est déterminé selon la longueur. La forme dont la boîte englobante est la plus longue, définit le profil d'amphore. De plus, la forme dont la boîte englobante est la deuxième plus longue est désignée comme étant la partie intérieur des anses. A partir de ces formes (profil de l'amphore et intérieur des anses) et des quatres points saisis par l'utilisateur, nous distinguons automatiquement le profil principal de l'amphore et le profil des anses.
3. La détermination de la section des anses se base sur deux caractéristiques. La boîte englobante de la section doit d'une part avoir la plus petite surface et d'autre part, le centre de cette boîte englobante doit être situé au-dessus de l'origine du profil principal de l'amphore, l'origine étant le point situé le plus en bas à droite de la forme.

Ces choix doivent ensuite être confirmés par l'utilisateur. Si ce dernier n'est pas d'accord, il est possible de les modifier. La détermination de l'échelle permet de changer le système de référence. Ce changement s'effectue à travers trois étapes : une translation, une rotation et le calcul de l'échelle réelle. L'origine du système de référence actuel est situé au coin supérieur gauche. L'origine du nouveau système de référence est le point du profil d'amphore le plus en bas à droite. Cette translation est illustrée par la figure 10.9 (c). Les points des trois formes précédemment déterminées sont translatés par rapport à cette nouvelle origine. Afin de sauvegarder la représentation 2D, tous les points doivent être représentés dans un référentiel direct. La transformation appliquée est définie par :  $X' = X$  et  $Y' = -Y$ . La dernière étape consiste à transformer les pixels en mètres selon l'échelle pour obtenir les dimensions réelles de l'objet.

Après la détermination du profil principal de l'amphore, de la section et du profil des anses et du nouveau système de référence, la représentation 2D est générée et sauvegardée dans un fichier XML ainsi qu'un fichier SVG (figure 10.9 (d)).

### 10.6.3 Génération de représentations 3D

La première étape pour générer la représentation 3D d'une amphore consiste à changer le système de référence. En effet, les points doivent être exprimés en trois dimensions. Pour cela, nous ajoutons une coordonnée  $z$  initialisée à 0.0 pour tous les points (figure 10.9 (e)). Nous appliquons ensuite une rotation ( $X' = X$ ,  $Y' = Z$  et  $Z' = Y$ ) pour obtenir un référentiel direct. Ces transformations sont illustrées par la figure 10.9 (f).

La génération du modèle 3D d'une amphore se décompose en deux parties : la génération 3D de l'amphore sans les anses et la génération 3D des anses.

#### 10.6.3.1 Génération du modèle 3D de l'amphore sans les anses

La génération de la représentation 3D de l'amphore sans les anses consiste à faire tourner la représentation 2D de l'amphore sans les anses autour d'un axe afin de générer un volume de révolution. Il n'est pas nécessaire de conserver tous les points pour la création de la représentation 3D. Pour cela, il est possible d'échantillonner les points du profil c'est-à-dire que seuls certains points seront sélectionnés. Tous les points sélectionnés du profil sont ensuite reproduits autour de l'axe  $Z$  selon un angle donné. Ce processus est illustré par la figure 10.9 (g).

Le choix du nombre de points qui seront conservés et le choix de l'angle détermine la résolution de la représentation 3D. L'identification des points permet d'appliquer une méthode simple de triangulation et le résultat est illustré par la figure 10.9 (h). Cette figure illustre également l'utilité de l'identification des points pour distinguer l'extérieur et l'intérieur de l'amphore.

#### 10.6.3.2 Génération du modèle 3D des anses de l'amphore

La génération de la représentation 3D des anses de l'amphore est plus complexe que la génération du reste de l'amphore puisque elle dépend à la fois de la section et du profil des anses. Certaines opérations doivent être effectuées sur la section des anses d'une part et sur le profil des anses d'autre part. Comme pour le profil de l'amphore sans les anses, il n'est pas utile de conserver la totalité des points, un échantillonnage est donc effectué sur les points de la section des anses. Les points de la section sont ensuite soumis à deux rotations. La première consiste à appliquer aux points une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe  $Z$ . La seconde rotation consiste quand à elle à placer la section dans le bon plan, la rotation est effectuée autour de l'axe des abscisses. L'analyse des formes présentée en section 10.6.2 a permis de déterminer le profil des anses et plus précisément, de distinguer les points situés à l'extérieur du contour des points à l'intérieur. Cette distinction permet de calculer l'axe médian. Nous effectuons un échantillonnage sur les points de l'axe médian. Pour chacun des points conservés de l'axe médian, les points de la section sont reproduits. Les points de la section sont translatés de façon à ce que le barycentre de la boîte englobante de la section devienne le point de l'axe médian. La dernière étape s'effectue localement et consiste à incliner et élargir la section des anses. Nous appliquons ensuite la méthode de triangulation afin d'obtenir la représentation

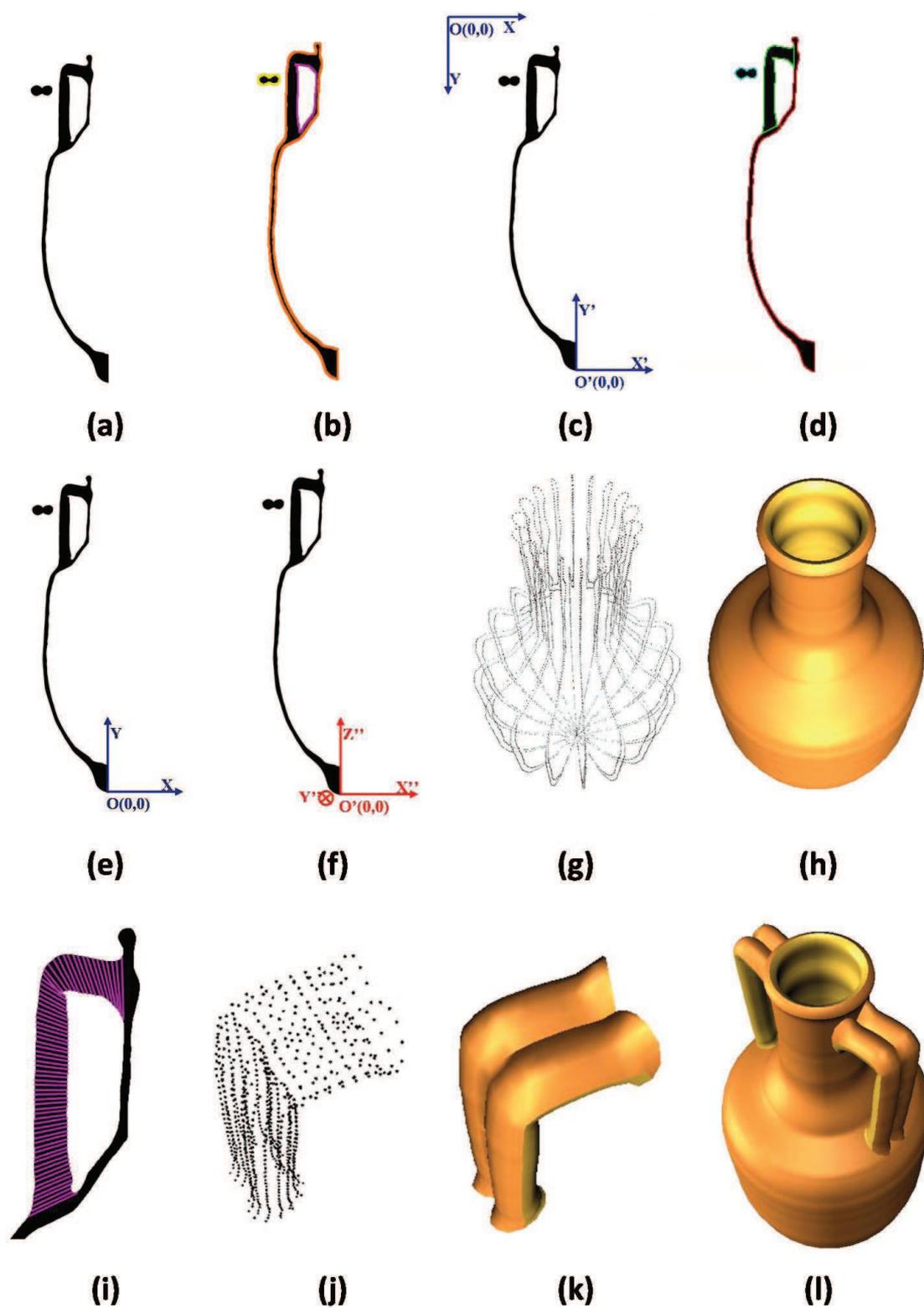


FIG. 10.9 – Génération d'une représentation 3D d'amphore

3D des anses. Le processus de création du modèle 3D des anses est représenté par les figures 10.9 (i), (j) et (k).

La jonction entre les anses et le reste de l'amphore est un problème difficile. Nous avons choisi de générer une géométrie spécifique pour les quatre jonctions nécessaires. Ce qui permet de remplir l'espace entre les extrémités des anses et le reste de l'amphore. Cet espace est relativement petit par rapport à la représentation 3D de l'amphore et ce fait nous obtenons des résultats visuels satisfaisant. La représentation 3D de l'amphore qui résulte de ce processus est illustrée par la figure 10.9 (l).

Les représentations 3D produites sont ensuite vérifiées. A partir de ces représentations 3D, nous construisons des instances. La vérification de la cohérence des instances s'effectue en utilisant la méthode de restauration de la cohérence par R-ensembles définie au chapitre 5.

## 10.7 Traduction en formalismes logiques

Pour raisonner avec notre ontologie en utilisant les méthodes de raisonnement précédemment définies dans la partie III de ce manuscrit, nous avons traduit notre ontologie d'application ainsi que les contraintes associées et les instances sur les objets en formalismes logiques.

Tout d'abord, nous avons utilisé les logiques de description et plus précisément la logique de description  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$ , rappelée en section 9.1, pour représenter formellement l'ontologie d'application et les instances. Nous présentons ensuite la traduction de l'ontologie d'application, des contraintes associées et des instances d'objets en logique des prédicats instanciés.

### 10.7.1 Traduction en logique de description

Nous présentons dans cette section une traduction de l'ontologie précédemment définie en utilisant la logique de description  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$ . En effet, pour traduire l'ontologie, nous avons besoin de représenter, entre autre, une hiérarchie de concepts, la négation, l'union de concepts, les cardinalités et les domaines concrets. Cette logique de description est bien adaptée pour représenter formellement l'ontologie.

La base de connaissances est représentée en logique de description par une  $TBox$  pour la connaissance générique et par une  $ABox$  pour les instances (cf. section 9.1), nous présentons d'une part la  $TBox$  et d'autre part un extrait de la  $ABox$ , [164, 181].

#### 10.7.1.1 TBox

La  $TBox$  se compose d'un ensemble d'axiomes terminologiques ainsi que d'un ensemble de définitions.

Nous définissons tout d'abord la hiérarchie de notre ontologie d'application sous forme d'axiomes terminologiques.

$$ITEM \sqsubseteq ID\_ITEM \sqcap CONNECTABLE\_OBJECT$$

$$ID\_ITEM \sqcap CONNECTABLE\_OBJECT \sqsubseteq \perp$$

$$ID\_ITEM \sqsubseteq (\exists name).String \\ \sqcap (\exists idn).Integer$$

$$MEASURABLE\_ITEM \sqsubseteq ITEM \\ \sqcap SPATIAL\_ITEM \\ \sqcap (\exists has\_metrology).METROLOGY \\ \sqcap (\exists has\_survey\_session\_data).SURVEY\_SESSION\_DATA \\ \sqcap (\exists surveyId) \\ \sqcap (\exists timekey) \\ \sqcap (\exists description) \\ \sqcap (\exists remark)$$

$$ARCHAEOLOGICAL\_ITEM \sqsubseteq MEASURABLE\_ITEM \\ \sqcap (\exists has\_documentation).DOCUMENTATION \\ \sqcap (\exists excavationID)$$

$$AMPHORA\_ITEM \sqsubseteq ARCHAEOLOGICAL\_ITEM \\ \sqcap (\exists has\_amphora\_metrology).AMPHORA\_METROLOGY \\ \sqcap (\exists fragmentNumber) \\ \sqcap (\exists type) \\ \sqcap (\exists model)$$

$$AMPHORA \sqsubseteq AMPHORA\_ITEM \\ \sqcap (\exists typology).\{Dressel7 - 11, Dressel2 - 4 \\ short, Dressel2 - 4long, Dressel20, Gauloise3, \\ Haltern70, Pascual1, Beltran2B, Dressel1A\}$$

$$AMPHORA\_FRAGMENT \sqsubseteq AMPHORA\_ITEM \\ \sqcap (\exists typology).\{Dressel7 - 11, Dressel2 - 4 \\ short, Dressel2 - 4long, Dressel20, Gauloise3, \\ Haltern70, Pascual1, Beltran2B, Dressel1A\}$$

$$AMPHORA \sqcap AMPHORA\_FRAGMENT \sqsubseteq \perp$$

$$TILE\_ITEM \sqsubseteq ARCHAEOLOGICAL\_ITEM$$

	$\sqcap (\exists has\_tile\_metrology) .TILE\_METROLOGY$
	$\sqcap (\exists typology) .\{SesimbraRomanTile\}$
<i>BRICK_ITEM</i>	$\sqsubseteq ARCHAEOLOGICAL\_ITEM$
	$\sqcap (\exists typology) .\{SesimbraBrick\}$
<i>DOCUMENTATION</i>	$\sqsubseteq (\exists discoveryLocation)$
	$\sqcap (\exists use)$
	$\sqcap (\exists description)$
	$\sqcap (\exists currentLocation)$
	$\sqcap (\exists comment)$
	$\sqcap (\exists datation)$
<i>SURVEY_SESSION_DATA</i>	$\sqsubseteq (\exists referenceSystemID)$
	$\sqcap (\exists site)$
	$\sqcap (\exists subsite)$
	$\sqcap (\exists surveyorName)$
	$\sqcap (\exists user)$
	$\sqcap (\exists secteur)$
	$\sqcap (\exists groundUnit)$
	$\sqcap (\exists dimensionUnit)$
	$\sqcap (\exists angleUnit)$
	$\sqcap (\exists massUnit)$
	$\sqcap (\exists volumeUnit)$
	$\sqcap (\exists remark)$
	$\sqcap (\exists date)$
<i>METROLOGY</i>	$\sqsubseteq (\exists mass)$
	$\sqcap (\exists volume)$
	$\sqcap (\exists totalLength)$
	$\sqcap (\exists totalHeight)$
	$\sqcap (\exists totalWidth)$
<i>AMPHORA_METROLOGY</i>	$\sqsubseteq METROLOGY$
	$\sqcap (\exists heightRims)$
	$\sqcap (\exists bodyDiameter)$
	$\sqcap (\exists externalDiameter)$
	$\sqcap (\exists internalDiameter)$
	$\sqcap (\exists baseDiameter)$
	$\sqcap (\exists pcRims)$
	$\sqcap (\exists remainHeight)$

$$\begin{aligned}
TILE\_METROLOGY &\sqsubseteq METROLOGY \\
&\sqcap (\exists thickness) \\
&\sqcap (\exists radiusL) \\
&\sqcap (\exists radiusS)
\end{aligned}$$

Nous définissons les types des attributs des concepts. Les types (float, double, long, Integer, String, Date et nonNegativeDouble) sont définis par notre environnement.

$T \sqsubseteq \forall name.String$   
 $T \sqsubseteq \forall idn.Integer$   
 $T \sqsubseteq \forall surveyID.String$   
 $T \sqsubseteq \forall timekey.long$   
 $T \sqsubseteq \forall description.String$   
 $T \sqsubseteq \forall remark.String$   
 $T \sqsubseteq \forall excavationID.String$   
 $T \sqsubseteq \forall fragmentNumber.Integer$   
 $T \sqsubseteq \forall type. \{Entiere, Anse, Levre, Col, Panse, Fond, Epaule, Undefined\}$   
 $T \sqsubseteq \forall model.String$   
 $T \sqsubseteq \forall discoveryLocation.String$   
 $T \sqsubseteq \forall use.String$   
 $T \sqsubseteq \forall description.String$   
 $T \sqsubseteq \forall currentLocation.String$   
 $T \sqsubseteq \forall comment.String$   
 $T \sqsubseteq \forall datation.String$   
 $T \sqsubseteq \forall referenceSystemID.String$   
 $T \sqsubseteq \forall site.String$   
 $T \sqsubseteq \forall subsite.String$   
 $T \sqsubseteq \forall surveyorName.String$   
 $T \sqsubseteq \forall user.String$   
 $T \sqsubseteq \forall secteur.String$   
 $T \sqsubseteq \forall groundUnit.String$   
 $T \sqsubseteq \forall dimensionUnit.String$   
 $T \sqsubseteq \forall angleUnit.String$   
 $T \sqsubseteq \forall massUnit.String$   
 $T \sqsubseteq \forall volumeUnit.String$   
 $T \sqsubseteq \forall remark.String$   
 $T \sqsubseteq \forall date.Date$   
 $T \sqsubseteq \forall mass.nonNegativeDouble$   
 $T \sqsubseteq \forall volume.nonNegativeDouble$   
 $T \sqsubseteq \forall totalLength.nonNegativeDouble$   
 $T \sqsubseteq \forall totalHeight.nonNegativeDouble$   
 $T \sqsubseteq \forall totalWidth.nonNegativeDouble$   
 $T \sqsubseteq \forall heightRims.nonNegativeDouble$

$\top \sqsubseteq \forall \text{bodyDiameter.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{externalDiameter.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{internalDiameter.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{baseDiameter.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{pcRims.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{remainHeight.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{thickness.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{radiusL.nonNegativeDouble}$   
 $\top \sqsubseteq \forall \text{radiusS.nonNegativeDouble}$

### ABox

La ABox est un ensemble fini d'instances des concepts, des attributs et des relations définis par la TBox. Nous présentons un extrait de la TBox dans le contexte du projet VENUS. L'instance est extraite du relevé des amphores de Pianosa.

*AMPHORA(Entiere\_4)*

*AMPHORA\_ITEM(Entiere\_4)*  
*fragmentNumber(Entiere\_4, 0)*  
*type(Entiere\_4, Entiere)*  
*model(Entiere\_4, null)*

*ARCHAEOLOGICAL\_ITEM(Entiere\_4)*  
*excavationId(Entiere\_4, "17r")*  
*typology(Entiere\_4, Beltran2B)*

*MEASURABLE\_ITEM(Entiere\_4)*  
*timekey(Entiere\_4, 1179825341617)*  
*surveyId(Entiere\_4, "17r")*  
*decsription(Entiere\_4, "null")*  
*remark(Entiere\_4, "cassee soue epaules, marker 13")*

*ID\_ITEM(Entiere\_4)*  
*name(Entiere\_4, "Entiere")*  
*idn(Entiere\_4, 4)*  
*METROLOGY(metrology)*  
*has\_metrology(Entiere\_4, metrology)*  
*totalHeight(metrology, 1.13)*  
*totalLength(metrology, 0.27)*  
*totalWidth(metrology, 0.27)*  
*volume(metrology, 37.0)*  
*mass(metrology, 12.0)*

```

AMPHORA_METROLOGY(amphora_metrology)
has_amphora_metrology(Entiere_4, amphora_metrology)
remainHeight(amphora_metrology, 1.126)
internalDiameter(amphora_metrology, 0.35)
externalDiameter(amphora_metrology, 0.114)
footDiameter(amphora_metrology, 0.05)
bodyDiameter(amphora_metrology, 0.403)
heightRims(amphora_metrology, 0.025)
pcRims(amphora_metrology, 0)

SURVEY_SESSION_DATA(SurveySessionData1082)
has_survey_session_data(Entiere_4, SurveySessionData1082)
date(SurveySessionData1082, 2007.03.15 – 16 : 36 : 31)
secteur(SurveySessionData1082, "Pianosa")
site(SurveySessionData1082, "15X15")
subsite(SurveySessionData1082, "Indetermine")
referenceSystemID(SurveySessionData1082, "UTM32")
surveyorName(SurveySessionData1082, "unknown")
user(SurveySessionData1082, "sara")
angleUnit(SurveySessionData1082, "gon")
dimensionUnit(SurveySessionData1082, "m")
groundUnit(SurveySessionData1082, "m")
massUnit(SurveySessionData1082, "kg")
volumeUnit(SurveySessionData1082, "l")
remark(SurveySessionData1082, "Survey made with Arpenteur")

DOCUMENTATION(documentation)
has_documentation_data(Entiere_4, documentation)
datation(documentation, "unknown")
discoveryLocation(documentation, "unknown")
description(documentation, "unknown")
use(documentation, "unknown")
currentLocation(documentation, "unknown")
comment(documentation, "no comment")

```

Les contraintes décrites dans la section 10.4 comme les contraintes conditionnelles, ne peuvent être exprimées en logique de description. Pour résoudre ce problème, nous avons étudié dans le contexte du projet VENUS, deux alternatives :

- la première alternative consiste à utiliser le langage OWL 2 [31] qui permet de

définir ces contraintes et ainsi utiliser des raisonneurs tels que Pellet comme il est décrit dans [162];

- la deuxième alternative consiste à utiliser un autre formalisme logique, la logique des prédicats instanciés, pour traduire l'ensemble de l'ontologie, les contraintes qui lui sont associées ainsi que les instances. Cette traduction fait l'objet de la section suivante.

### 10.7.2 Traduction en logique des prédicats instanciés

Afin d'utiliser les méthodes de restauration de la cohérence et de révision précédemment présentées dans les chapitres 5, 6 et 8, nous avons traduit notre base de connaissances en une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$  où  $\Sigma$  est ensemble de prédicats instanciés et  $\preceq_\Sigma$  un préordre partiel sur les prédicats instanciés de  $\Sigma$ . Pour cela, cette traduction s'effectue à partir de la traduction en logique de description  $SHOIN(D)$  de notre base de connaissances. En effet, il existe une correspondance entre certains fragments des logiques de description et la logique du premier ordre, présentée dans [10] et détaillée dans [174].

La traduction s'effectue en deux étapes : nous fournissons d'abord une traduction en logique des prédicats puis une instanciation de ces prédicats. Pour des raisons de simplicité, nous fournissons la traduction en logique des prédicats instanciés sur un extrait de notre base de connaissances. Cet extrait est composé d'une partie de notre ontologie d'application, des contraintes associées et d'une instance d'amphore du relevé de Pianosa.

#### 10.7.2.1 Traduction de la base de connaissances en prédicats instanciés

Pour traduire notre base de connaissances, nous commençons par traduire en logique des prédicats la connaissance générique c'est-à-dire la connaissance provenant de l'ontologie et les contraintes associées.

**Traduction de la connaissance générique** Pour obtenir un exemple illustratif, nous avons sélectionné l'extrait de notre ontologie d'application présenté en figure 10.10 dont les concepts, les attributs et les relations sont détaillés en annexe A de ce document.

Les contraintes associées sur lesquelles nous nous focalisons sont :

- les contraintes d'intégrité :
  - la hauteur totale et la longueur totale d'un item mesurable ne doit pas excéder 50 mètres,
  - la hauteur totale et la longueur totale d'un item archéologique ne doit pas excéder 10 mètres,
  - la hauteur totale et la longueur totale d'un item amphore ne doit pas excéder 2 mètres.

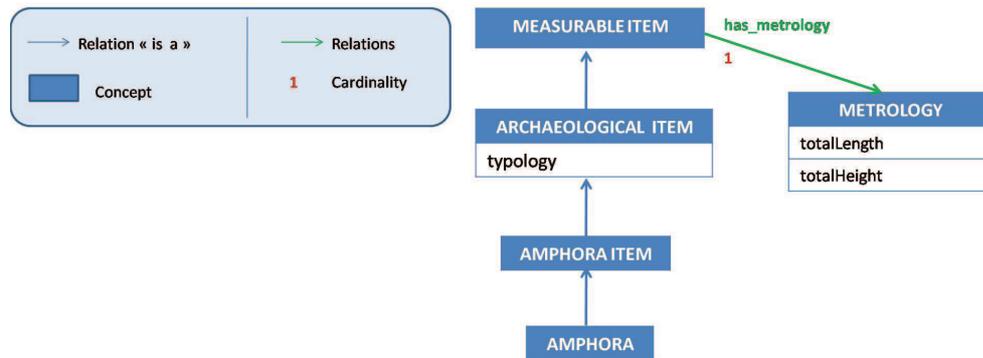


FIG. 10.10 – Extrait de notre ontologie d'application

- les contraintes conditionnelles telles que si la typologie d'une amphore est Dressel 20 alors
  - la valeur de la hauteur totale doit être comprise entre 0,368 et 0,552 mètres ;
  - la valeur de la longueur totale doit être comprise entre 0,533 et 0,799 mètres.
- la contrainte de domaine : si une amphore a pour typologie Dressel 20, alors elle ne peut pas avoir la typologie Beltran 2B.

La traduction requiert de préciser un certain nombre de notations ainsi que les domaines, nous notons :

- $\mathcal{T}$  : l'ensemble des typologies d'amphore, dans cet extrait nous en avons choisi deux :  $\mathcal{T} = \{Beltran2B, Dressel20\}$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$  : l'ensemble des items mesurables,
- $\mathcal{AR}_{\mathcal{I}}$  : l'ensemble des items archéologiques,
- $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$  : l'ensemble des items amphores,
- $\mathcal{A}$  : l'ensemble des amphores,
- $\mathcal{M}$  : l'ensemble des métrologies,
- $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$  : l'ensemble des hauteurs totales et
- $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  : l'ensemble des longueurs totales.

Nous présentons ensuite la traduction en prédicats des concepts. Nous procédons de la manière suivante : à chaque concept  $C$  de notre ontologie traduite en logique de description, nous introduisons un prédicat unaire  $C(x)$ . Cette traduction est illustrée dans le tableau 10.16.

En ce qui concerne les relations entre les concepts de notre ontologie, nous introduisons un prédicat binaire pour chaque relation  $R$  entre les concepts  $C(x)$  et  $C(y)$  comme il est montré dans le tableau 10.17.

Enfin, il nous reste à exprimer en logique des prédicats les attributs des concepts de notre ontologie d'application. Nous procédons comme suit : à chaque attribut  $A$  de notre concept  $C(x)$ , nous introduisons un prédicat binaire  $A(x, y)$ . L'ensemble de la traduction des attributs de notre extrait est présenté dans le tableau 10.18.

Après avoir obtenu tous les prédicats nécessaires, nous avons traduit les informations

$SHOIN(\mathcal{D})$	Prédicats
$MEASURABLE\_ITEM$	$x \in \mathcal{M}_{\mathcal{I}}, measurable\_item(x)$
$ARCHAEOLOGICAL\_ITEM$	$x \in \mathcal{AR}_{\mathcal{I}}, archaeological\_item(x)$
$AMPHORA\_ITEM$	$x \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}, amphora\_item(x)$
$AMPHORA$	$x \in \mathcal{A}, amphora(x)$
$METROLOGY$	$x \in \mathcal{M}, metrology(x)$

TAB. 10.16 – Traduction des concepts de l'ontologie en prédicats.

$SHOIN(\mathcal{D})$	Prédicats
$has\_metrology$	$x \in \mathcal{M}_{\mathcal{I}}, y \in \mathcal{M}, has\_metrology(x, y)$

TAB. 10.17 – Traduction des relations de l'ontologie en prédicats.

$SHOIN(\mathcal{D})$	Prédicats
typology	$x \in \mathcal{A}_{\mathcal{I}}, y \in \mathcal{T}, typology(x, y)$
totalLength	$x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}, totalLength(x, y)$
totalHeight	$x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}, totalHeight(x, y)$

TAB. 10.18 – Traduction des attributs des concepts de l'ontologie en prédicats.

sur la hiérarchie des concepts ainsi que les liens entre les attributs et les concepts et sur les types des attributs à partir de la logique de description.

La formule suivant exprimée en logique de description  $SHOIN(\mathcal{D})$

$$ARCHAEOLOGICAL\_ITEM \sqsubseteq MEASURABLE\_ITEM$$

est traduite par la formule en logique des prédicats suivante

$$\forall x. archaeological\_item(x) \rightarrow measurable\_item(x).$$

Similairement, nous obtenons les deux autres formules suivantes qui traduisent la hiérarchie de l'extrait choisi de l'ontologie :

$$\begin{aligned} \forall x. amphora\_item(x) &\rightarrow archaeological\_item(x) \\ \forall x. amphora(x) &\rightarrow amphora\_item(x) \end{aligned}$$

Nous définissons ensuite les assertions exprimant le lien entre les concepts et leurs attributs. Par exemple, l'assertion suivante exprimée en  $SHOIN(\mathcal{D})$

$$MEASURABLE\_ITEM \sqsubseteq (\exists has\_metrology). METROLOGY$$

est traduite comme suit en logique des prédicats :

$$\begin{aligned}\forall x.measurable\_item(x) &\rightarrow \exists y.has\_metrology(x, y) \\ \forall x\forall y.has\_metrology(x, y) &\rightarrow metrology(y)\end{aligned}$$

Nous procédons de même pour l'assertion concernant le concept *METROLOGY* et nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned}\forall x.metrology(x) &\rightarrow \exists y.totalLength(x, y) \\ &\wedge \exists z.totalHeight(x, z)\end{aligned}$$

En ce qui concerne, l'assertion sur le concept *AMPHORA* :

$$AMPHORA \sqsubseteq AMPHORA\_ITEM \sqcap (\exists typology) .\{Beltran2B, Dressel20\}$$

nous remarquons que l'attribut *typology* dépend d'un type bien précis puisqu'il s'agit d'un type énuméré. En logique des prédicats, nous exprimons l'assertion sur *AMPHORA* et le type énuméré de l'attribut *typology* de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\forall x.amphora(x) &\rightarrow amphora\_item(x) \\ &\wedge (typology(x, Beltran2B) \vee typology(x, Dressel20))\end{aligned}$$

La dernière partie de la traduction concerne les contraintes. Nous avons traduit tout d'abord, la contrainte de domaine qui exprime l'unicité de la typologie d'une amphore :

$$\begin{aligned}\forall x.((typology(x, Dressel20) \vee typology(x, Beltran2B)) \wedge \\ (\neg typology(x, Dressel20) \vee \neg typology(x, Beltran2B)))\end{aligned}$$

Les contraintes d'intégrité sont définies en ajoutant un prédicat binaire pour certains attributs morphologiques :

- *compatibleMITotalHeight(x, y)* : la valeur  $x$  de la hauteur totale de l'item mesurable  $y$  est inférieure à 50 m.
- *compatibleMITotalLength(x, y)* : la valeur  $x$  de la longueur totale de l'item mesurable  $y$  est inférieure à 50 m.
- *compatibleARITotalHeight(x, y)* : la valeur  $x$  de la hauteur totale de l'item archéologique  $y$  est inférieure à 10 m.
- *compatibleARITotalLength(x, y)* : la valeur  $x$  de la longueur totale de l'item archéologique  $y$  est inférieure à 10 m.
- *compatibleAITotalHeight(x, y)* : la valeur  $x$  de la hauteur totale de l'item amphore  $y$  est inférieure à 2 m.
- *compatibleAITotalLength(x, y)* : la valeur  $x$  de la longueur totale de l'item amphore  $y$  est inférieure à 2 m.

Les contraintes d'intégrité sont alors exprimées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x.measurable\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalHeight(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleMITotalHeight(z, x)) \\
\forall x.measurable\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalLength(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleMITotalLength(z, x)) \\
\forall x.archaeological\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalHeight(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleARITotalHeight(z, x)) \\
\forall x.archaeological\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalLength(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleARITotalLength(z, x)) \\
\forall x.amphora\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalHeight(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleAITotalHeight(z, x)) \\
\forall x.amphora\_item(x) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalLength(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleAITotalLength(z, x))
\end{aligned}$$

Les dernières contraintes à traduire en logique des prédicats sont les contraintes conditionnelles concernant les valeurs de la métrologie d'une amphore et sa typologie. Pour cela, nous avons rajouté des prédicats binaires pour chacun des attributs morphologiques :

- *compatibleTotalLength(x, y)* : la valeur  $x$  de la longueur totale est compatible avec la valeur théorique de la typologie correspondante  $y$ ,  $y \in \mathcal{T}$ .
- *compatibleTotalHeight(x, y)* : la valeur  $x$  de la hauteur totale est compatible avec la valeur théorique de la typologie correspondante  $y$ ,  $y \in \mathcal{T}$ .

Les contraintes conditionnelles sont exprimées en introduisant les assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x.typology(x, Dressel20) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalLength(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleTotalLength(z, Dressel20)) \\
\forall x.typology(x, Dressel20) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalHeight(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleTotalHeight(z, Dressel20)) \\
\forall x.typology(x, Beltran2B) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalLength(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleTotalLength(z, Beltran2B)) \\
\forall x.typology(x, Beltran2B) &\rightarrow \exists m\exists z.(totalHeight(m, z) \\
&\quad \wedge compatibleTotalHeight(z, Beltran2B))
\end{aligned}$$

L'étape suivante consiste à instancier les formules de la logique des prédicats définies précédemment.

**Instanciation de la connaissance générique** Soient  $a \in \mathcal{A}$  une amphore d'un relevé avec une typology  $t \in \mathcal{T}$ , une métrologie  $m \in \mathcal{M}$ , une longueur totale  $l \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}}$  et

une hauteur totale  $h \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ . Les formules précédentesinstanciées sont situées à gauche. Pour plus de simplicité, nous renommons ces formules à droite.

Nous notons  $O$  l'ensemble des formules provenant de l'ontologie :

$$\begin{array}{l|l}
 \text{measurable\_item}(a) \rightarrow \text{has\_metrology}(a, m) & m_i \rightarrow h_m \\
 \text{archaeological\_item}(a \rightarrow \text{measurable\_item}(a)) & ar_i \rightarrow m_i \\
 \text{amphora\_item}(a) \rightarrow \text{archaeological\_item}(a) & a_i \rightarrow ar_i \\
 \text{amphora}(a) \rightarrow \text{amphora\_item}(a) \wedge \\
 (\text{typology}(a, \text{Beltran2B}) \vee \text{typology}(a, \text{Dressel20})) & a \rightarrow a_i \wedge (b \vee d) \\
 \text{metrology}(m) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \text{totalHeight}(m, h) & m \rightarrow l \wedge h \\
 \\ 
 \text{has\_metrology}(a, m) \rightarrow \text{metrology}(m) & h_m \rightarrow m
 \end{array}$$

Nous notons  $C$  l'ensemble des formules provenant des contraintes :

$$\begin{array}{l|l}
 (\text{typology}(a, \text{Dressel20}) \vee \text{typology}(a, \text{Beltran2B})) \wedge \\
 (\neg \text{typology}(a, \text{Dressel20}) \vee \neg \text{typology}(a, \text{Beltran2B})) & (d \vee b) \wedge (\neg d \vee \neg b) \\
 \\ 
 \text{measurable\_item}(a) \rightarrow \text{totalHeight}(m, h) \wedge \\
 \text{compatibleMITotalHeight}(h, a) & m_i \rightarrow h \wedge c_{MI_h} \\
 \text{measurable\_item}(a) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \\
 \text{compatibleMITotalLength}(l, a) & m_i \rightarrow l \wedge c_{MI_l} \\
 \text{archaeological\_item}(a) \rightarrow \text{totalHeight}(m, h) \wedge \\
 \text{compatibleARITotalHeight}(h, a) & ar_i \rightarrow h \wedge c_{AR_h} \\
 \text{archaeological\_item}(a) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \\
 \text{compatibleARITotalLength}(l, a) & ar_i \rightarrow l \wedge c_{AR_l} \\
 \text{amphora\_item}(a) \rightarrow \text{totalHeight}(m, h) \wedge \\
 \text{compatibleAITotalHeight}(h, a) & a_i \rightarrow h \wedge c_{AI_h} \\
 \text{amphora\_item}(a) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \\
 \text{compatibleAITotalLength}(l, a) & a_i \rightarrow l \wedge c_{AI_l} \\
 \\ 
 \text{typology}(a, \text{Dressel20}) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \\
 \text{compatibleTotalLength}(l, \text{Dressel20}) & d \rightarrow l \wedge c_{l_d} \\
 \text{typology}(a, \text{Dressel20}) \rightarrow \text{totalHeight}(m, h) \wedge \\
 \text{compatibleTotalHeight}(h, \text{Dressel20}) & d \rightarrow h \wedge c_{h_d} \\
 \text{typology}(a, \text{Beltran2B}) \rightarrow \text{totalLength}(m, l) \wedge \\
 \text{compatibleTotalLength}(l, \text{Beltran2B}) & b \rightarrow l \wedge c_{l_b} \\
 \text{typology}(a, \text{Beltran2B}) \rightarrow \text{totalHeight}(m, h) \wedge \\
 \text{compatibleTotalHeight}(h, \text{Beltran2B}) & b \rightarrow h \wedge c_{h_b}
 \end{array}$$

La dernière étape pour obtenir les formules de  $\Sigma$  consiste à instancier les formules à partir d'un ensemble d'observations d'une amphore d'un relevé.

**Instanciation d'une amphore du relevé** Comme il est décrit en section , les observations sur les amphores sont décrites dans un fichier XML. Nous présentons ensuite un extrait de ce fichier ainsi que sa traduction en logique de prédicats instanciés.

```

<amphora id="Entiere_4"
  class="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore">
  <description
    javaClass="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore"
    timekey="1179825341617"
    subClass="Beltran_2B"
    type="Entiere"
    name="Entiere"
    num="4"
    surveyId="17r"
    standardId="null"
    excavationId="17r"
    inventory="null"
    localisation=""
    nbFrgmt="0"
    description="null"
    remark="cassee soue epaules, marker 13"
    date="2007-05-22 11:14:13.0"
    model="null"
  />
<!--
  Description of location, orientation and dimension of this
  ItemMesurable -->
<!-- Measured with Arpenteur: null null -->
  <location
    X="800.795"
    Y="907.893"
    Z="-32.458"
    Omega="4.37047988"
    Phi="0.66375111"
    Kappa="-1.41806886" >
  <boundingBox>
    <cone
      height="0.26690106040519507"
      radius1="0.563"
      radius2="0.563"
    />
  </boundingBox>
</location>

```

```

<metrology
  totalHeight=" 1.13"
  totalLength=" 0.27"
  totalWidth=" 0.27"
  volume=" 37.00"
  remainHeight=" 1.126"
  internalDiameter=" 0.35"
  externalDiameter=" 0.114"
  footDiameter=" 0.05"
  bellyDiameter=" 0.403"
  heightLips=" 0.025"
  pcLips=" 0"
  mass=" 12.0"
/>
...
</amphora>

```

A partir de ce fichier XML, nous pouvons instancier certaines formules directement alors que d'autres proviennent de la description conceptuelle. A partir des observations décrites dans cet extrait du relevé, nous avons des observations sur une amphore, nous instancions donc les formules suivantes :

$$\begin{array}{l|l}
 amphora(a) & a \\
 typology(a, Beltran2B) & b \\
 metrology(m) & m
 \end{array}$$

D'après la description conceptuelle de  $amphora(a)$  et de la hiérarchie des concepts (représentés par la figure 10.2), nous obtenons les prédicats suivants :

$$\begin{array}{l|l}
 amphora\_item(a) & a_i \\
 archaeological\_item(a) & ar_i \\
 measurable\_item(a) & m_i
 \end{array}$$

De la même manière, d'après la description conceptuelle de  $metrology(m)$ , nous obtenons :

$$has\_metrology(a, m) \mid h_m$$

Enfin, nous obtenons les formules sur les attributs de la métrologie :

$$\begin{aligned}
 & totalLength(m, l) \wedge compatibleMITotalLength(l, a) \wedge \\
 & compatibleARITotalLength(l, a) \wedge compatibleAITotalLength(l, a) \wedge \\
 & \neg compatibleTotalLength(l, Beltran2B)
 \end{aligned}$$

renommée :  $l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{AR_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_b$

$$\begin{aligned} & totalHeight(m, h) \wedge compatibleMITotalHeight(h, a) \wedge \\ & compatibleARITotalHeight(h, a) \wedge compatibleAITotalHeight(h, a) \wedge \\ & compatibleTotalHeight(h, Beltran2B) \end{aligned}$$

renommée :  $h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{hb}$

où

- les prédicats  $totalLength(m, l)$  et  $totalHeight(m, h)$  sont instanciés directement à partir du fichier XML ;
- les prédicats  $compatibleMITotalHeight(h, a)$ ,  $compatibleARITotalHeight(h, a)$ ,  $compatibleAITotalHeight(h, a)$ ,  $compatibleMITotalLength(l, a)$ ,  $compatibleARITotalLength(l, a)$  et  $compatibleAITotalLength(l, a)$  sont calculés à partir des prédicats  $totalLength(m, l)$  et  $totalHeight(m, h)$  en vérifiant la valeur de l'attribut avec la valeur théorique pour  $amphora\_item(a)$ ,  $archaeological\_item(a)$ ,  $measurable\_item(a)$ . Par exemple, la valeur de la hauteur totale de cette amphore est 1,13 mètres. Cette valeur respecte bien les valeurs limites définies pour les items mesurables (inférieure à 50 mètres), les items archéologiques (inférieure à 10 mètres) et les items amphores (inférieure à 2 mètres).
- les prédicats  $compatibleTotalHeight(h, Beltran2B)$  and  $\neg compatibleTotalLength(l, Beltran2B)$  sont calculés à partir des prédicats  $totalLength(m, l)$  et  $totalHeight(m, h)$  en vérifiant la valeur de l'attribut avec la valeur théorique correspondante à la typologie Beltran 2B. Par exemple, la valeur de la hauteur totale de cette amphore est 1.13 mètres. La contrainte sur la hauteur d'une amphore Beltran 2B stipule que la valeur de la hauteur doit être comprise entre 0,368 et 0,552 mètres ce qui est le cas, c'est pourquoi nous avons le prédicat  $compatibleTotalHeight(h, Beltran2B)$ .

Nous notons  $I$  l'ensemble des formules en logique des prédicats instanciés représentant les observations sur une amphore. Nous obtenons donc  $\Sigma$  tel que  $\Sigma = O \cup C \cup I$ , l'étape suivante décrit la construction du préordre partiel entre les formules de  $\Sigma$ .

### 10.7.2.2 Construction du préordre partiel sur les prédicats

Le préordre partiel sur les formules de  $\Sigma$  provient d'une part de la hiérarchie des concepts de l'ontologie et d'autre part, d'hypothèses fournies par l'expert. En effet, les contraintes définies en section 10.4 doivent être respectées c'est pourquoi les formules relatives à ces contraintes doivent être préférées dans le préordre partiel. Nous avons :

$$\forall \phi \in O, \psi \in C, \psi \preceq_{\Sigma} \phi.$$

De plus, à l'intérieur de l'ensemble des contraintes nous pouvons définir une relation de préférence. En effet, si les contraintes d'intégrité ne sont pas respectées alors les

contraintes conditionnelles ne peuvent être respectées c'est pourquoi les formules relatives aux contraintes d'intégrité sont préférées aux formules relatives aux contraintes conditionnelles. Le préordre partiel sur les formules relatives à la connaissance générique (ontologie et contraintes) est illustré par la figure 10.11.

$$\begin{array}{c}
a \rightarrow a_i \wedge b \\
\downarrow \\
a_i \rightarrow ar_i \\
\downarrow \\
ar_i \rightarrow m_i \\
\downarrow \\
m_i \rightarrow h_m = h_m \rightarrow m \quad m \rightarrow l \wedge h \\
\swarrow \quad \searrow \\
(d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d) = \\
d \rightarrow l \wedge c_{l_d} = \\
d \rightarrow h \wedge c_{h_d} = \\
b \rightarrow l \wedge c_{l_b} = \\
b \rightarrow h \wedge c_{h_b} \\
\downarrow \\
a_i \rightarrow h \wedge c_{AI_h} = \\
a_i \rightarrow l \wedge c_{AI_l} \\
\downarrow \\
ar_i \rightarrow h \wedge c_{ARI_h} = \\
ar_i \rightarrow l \wedge c_{ARI_l} \\
\downarrow \\
m_i \rightarrow h \wedge c_{MI_h} = \\
m_i \rightarrow l \wedge c_{MI_l}
\end{array}$$

FIG. 10.11 – Préordre partiel sur les formules relatives à la connaissance générique

Le préordre partiel sur les formules relatives aux instances d'amphore, illustré par la figure 10.12, est défini par la hiérarchie des concepts.

$$\begin{array}{c}
a = b \\
\downarrow \\
a_i \\
\downarrow \\
ar_i \\
\downarrow \\
m_i = h_m
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
m = \\
l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{l_b} = \\
h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}
\end{array}$$

FIG. 10.12 – Préordre partiel sur les formules relatives aux instances d'amphores

Enfin, nous devons respecter que la connaissance générique ne peut être remise en cause. Cette hypothèse est traduite dans le préordre partiel en préférant les formules relatives à la connaissance générique aux formules relatives aux instances d'amphores. Le préordre partiel sur l'ensemble de formules  $\Sigma$  est donné par la figure 10.13.

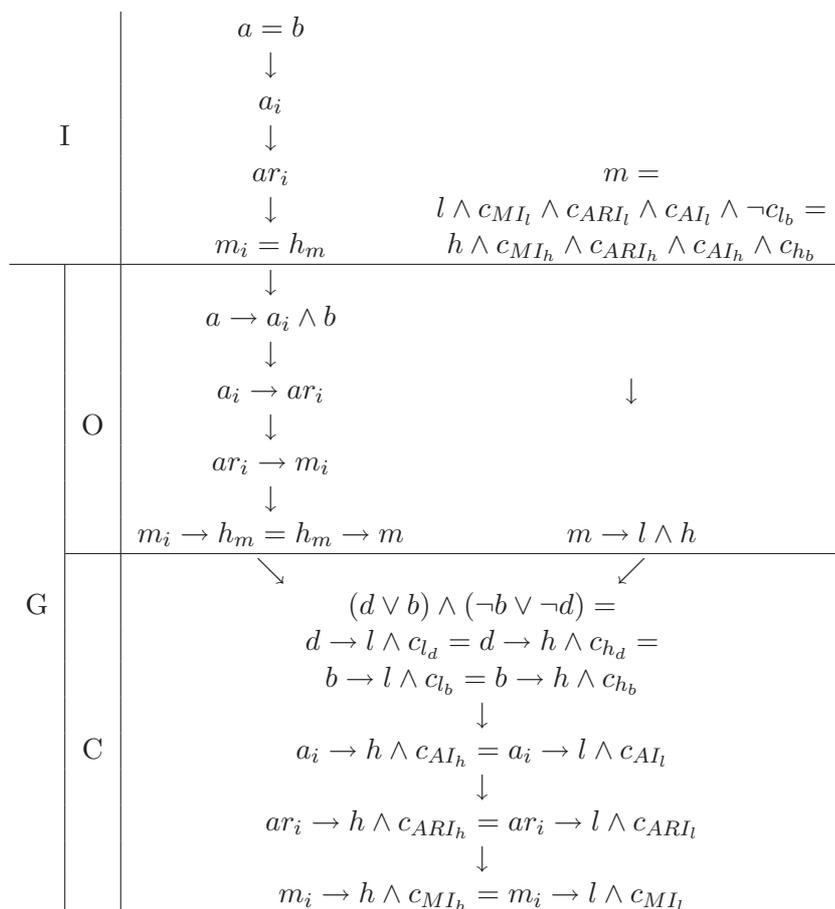


FIG. 10.13 – Préordre partiel sur les formules de la base de connaissances

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte du projet VENUS. Nous avons décrit l'information archéologique dans ce contexte ainsi que les processus d'acquisition de ces données. Nous avons proposé une représentation de ces informations sous forme d'une ontologie d'application et d'un ensemble de contraintes. De plus, afin d'utiliser les méthodes de raisonnement définies en partie III, nous avons traduit notre base de connaissances en formalismes logiques. Nous avons proposé tout d'abord une traduction

---

en logique de description  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$  puis une traduction en logique des prédicats instanciés.

Nous présentons dans le chapitre suivant la mise en oeuvre de ces méthodes de raisonnement dans ce contexte. Nous présentons les expérimentations menées sur les relevés issus des trois missions effectuées pendant ce projet ainsi que résultats obtenus.



## Chapitre 11

# Mise en oeuvre du raisonnement dans VENUS

Le worckpackage 3 avait pour objectif de représenter et gérer l'information archéologique. L'étape de représentation de cette information a été présentée dans le chapitre précédent. Nous présentons dans ce chapitre la mise en oeuvre de nos méthodes de gestion d'incohérence et de révision de bases de croyances partiellement préordonnées.

Dans ce contexte, l'utilisation du comparateur lexicographique est bien adapté. Tout d'abord, dans le cadre de la restauration de la cohérence, nous confrontons les instances d'objet à la connaissance générique. L'exploitation du préordre partiel sur les formules est importante car nous préférons remettre en cause les formules instanciées relatives aux concepts les plus spécifiques. D'autre part, dans le cadre de la révision, plusieurs jeux de données sont utilisés pour la mesure, une relation de préférence entre ces jeux de données est définie à partir de la qualité des photos (ceci est détaillé en section 11.2 de ce chapitre). Dans ce cas, il est naturel de privilégier le maximum de mesures dont les qualités sont les plus hautes. De plus, les infrastructures déployées pour l'acquisition de ces données sont très coûteuses et le contexte sous-marin rend cette acquisition difficile. Les données acquises sont alors très précieuses et il semble naturel de minimiser les informations à retirer pour restaurer la cohérence. C'est pourquoi combiner le préordre partiel sur les formules et la cardinalité nous semble essentiel dans ce projet.

Le schéma 11.1 résume l'intégration du raisonnement pour des bases de croyances partiellement préordonnées dans le contexte du projet européen VENUS. A partir de la description conceptuelle de la connaissance générique (ontologie et contraintes) et des données (instances), nous appliquons notre méthode de raisonnement. Les résultats issus de notre méthode sont ensuite transmis au module de réalité virtuelle, cela permet aux archéologues de visualiser les objets dont les mesures sont incohérentes avec les

valeurs théoriques et d'examiner les propositions de restauration de cohérence.

Ce chapitre présente un exemple concret pour la restauration de la cohérence dans le contexte du projet VENUS. Il s'agit de la confrontation d'une instance d'amphore issue du relevé effectué lors de la mission à Pianosa avec la connaissance générique. Nous présentons ensuite comment notre méthode de révision pourrait être appliquée dans ce contexte. L'implantation et les expérimentations sont présentées en fin de chapitre.

Les missions programmées au départ étaient indépendantes des résultats attendus du travail réalisé d'un point de vue théorique dans le workpackage 3. Il y a eu un décalage entre les campagnes d'acquisition des données et l'exploitation de ces données pour une expérimentation des approches théoriques.

## 11.1 Application de la restauration de la cohérence

Nous considérons l'extrait de notre base de connaissances traduit en section 10.7.2.1 du chapitre précédent en une base de croyances partiellement préordonnées  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ . Dans cet extrait, un ensemble d'observations sur une amphore est confrontée à la connaissance générique. Nous avons :

- $\Sigma$  l'ensemble de prédicats instanciés tel que  $\Sigma = G \cup I$
- avec  $G = O \cup C$ , l'ensemble des formules relatives à l'ontologie et aux contraintes :
  - $O = \{a \rightarrow a_i \wedge b, a_i \rightarrow ar_i, ar_i \rightarrow m_i, m_i \rightarrow h_m, h_m \rightarrow m, m \rightarrow l \wedge h\}$ ,
  - $C = \{(d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d), d \rightarrow l \wedge c_{l_d}, d \rightarrow h \wedge c_{h_d}, b \rightarrow l \wedge c_{l_b}, b \rightarrow h \wedge c_{h_b}, a_i \rightarrow h \wedge c_{AI_h}, a_i \rightarrow l \wedge c_{AI_l}, ar_i \rightarrow h \wedge c_{ARI_h}, ar_i \rightarrow l \wedge c_{ARI_l}, m_i \rightarrow h \wedge c_{MI_h}, m_i \rightarrow l \wedge c_{MI_l}\}$ ,
- $I$  l'ensemble des formules relatives à l'instance d'une amphore :
$$I = \{a, a_i, ar_i, b, h_m, m, m_i, l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{l_b}, h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}\}$$
 et
- $\preceq_\Sigma$  le préordre partiel sur les prédicats instanciés de  $\Sigma$  est illustré en figure 11.2.

$\Sigma$  est incohérent. Nous souhaitons restaurer la cohérence. L'application de notre méthode de restauration de la cohérence d'état épistémique (définie dans la chapitre 5) à l'information archéologique requiert quelques modifications [164, 182]. En effet, nous devons tenir compte des hypothèses telles que : la connaissance générique ne peut être remise en cause. Cette hypothèse signifie que les formules relatives à cette connaissance ne peuvent être retirées de la base de connaissances pour restaurer la cohérence. Considérer ces formules comme préférées à toutes les autres n'est pas suffisant. Pour cela, nous redéfinissons les R-ensembles potentiels comme suit :

### Définition 11.1

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de formules incohérent.

$R \subseteq I$  est un **R-ensemble potentiel** de  $\Sigma$  si et seulement si  $\Sigma \setminus R$  est cohérent.

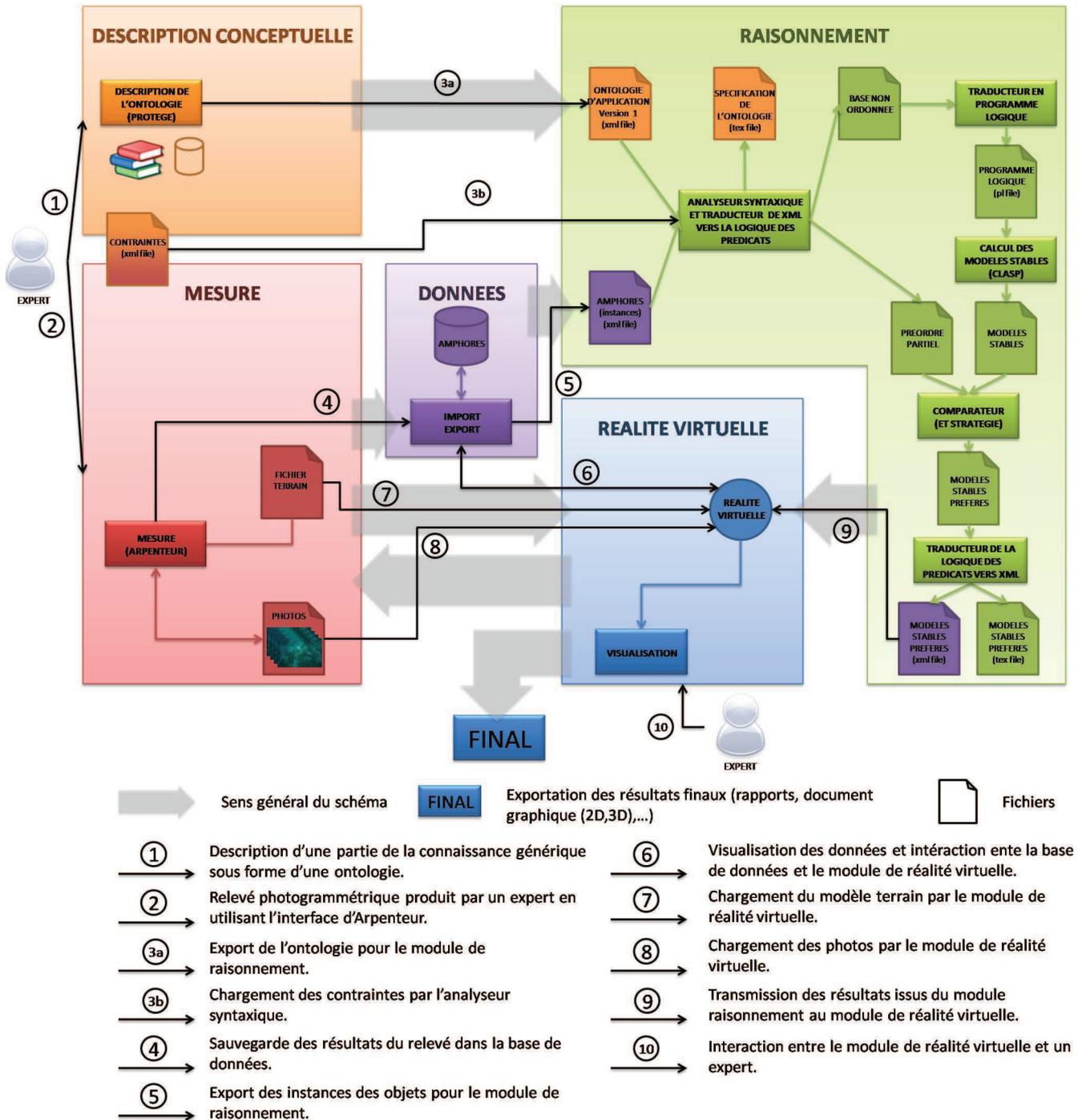
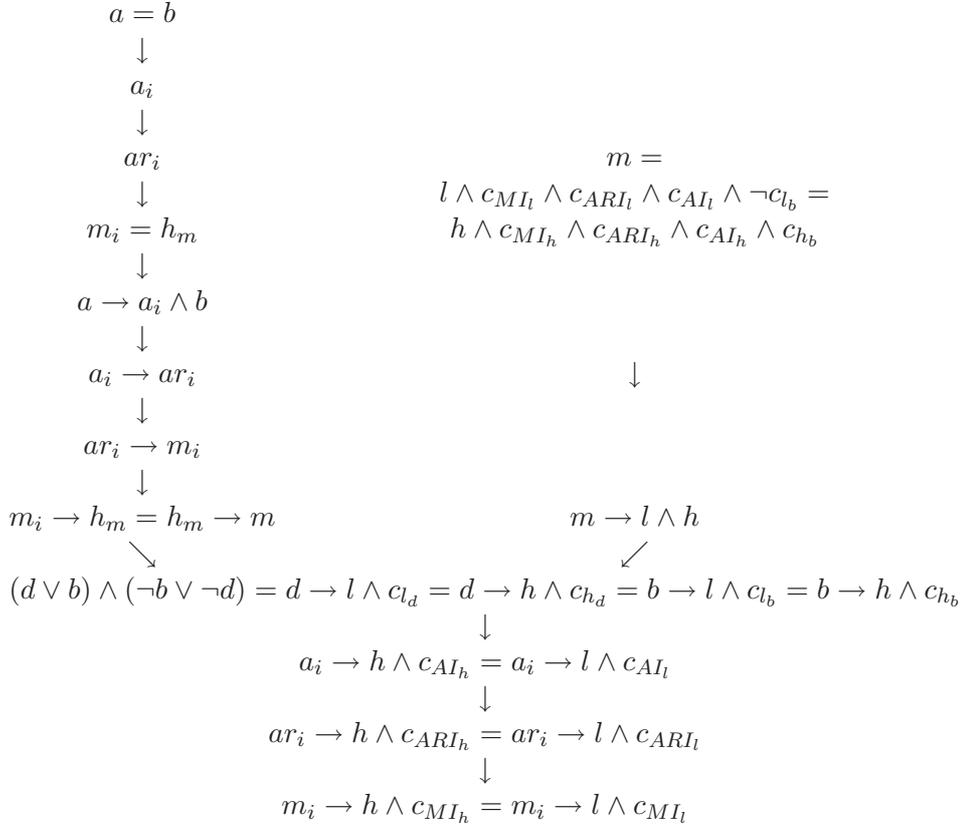


FIG. 11.1 – Intégration de notre méthode dans le contexte du projet VENUS.

FIG. 11.2 – Préordre partiel  $\preceq_\Sigma$  sur les formules de  $\Sigma$ 

En appliquant cette définition à  $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ , nous obtenons un nombre très élevé de R-ensembles potentiels. Parmi ces R-ensembles potentiels, nous sélectionnons les R-ensembles potentiels minimaux selon l'inclusion :

- $R_0 = \{a, b\}$ ,
- $R_1 = \{l \wedge c_{AI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{MI_l} \wedge \neg c_{l_b}\}$ .

Selon les comparateurs faible et lexicographique, ces deux R-ensembles potentiels sont incomparables :  $R_0 \sim_w R_1$  et  $R_0 \sim_\Delta R_1$ . Nous avons donc  $\mathcal{R}_w(\Sigma) = \mathcal{R}_\Delta(\Sigma) = \{R_0, R_1\}$ .

L'ensemble des formules cohérentes issues de  $\Sigma$ , noté  $Bel(\Psi)$ , est défini par :

$$\begin{aligned}
Bel(\Psi) = & Cons(a_i, ar_i, h_m, m, m_i, l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{l_b}, h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge \\
& c_{AI_h} \wedge c_{h_b}, (d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d), d \rightarrow l \wedge c_{l_d}, d \rightarrow h \wedge c_{h_d}, b \rightarrow l \wedge c_{l_b}, b \rightarrow h \wedge c_{h_b}, a_i \rightarrow \\
& h \wedge c_{AI_h}, a_i \rightarrow l \wedge c_{AI_l}, ar_i \rightarrow h \wedge c_{ARI_h}, ar_i \rightarrow l \wedge c_{ARI_l}, m_i \rightarrow h \wedge c_{MI_h}, m_i \rightarrow \\
& l \wedge c_{MI_l}, a \rightarrow a_i \wedge b, a_i \rightarrow ar_i, ar_i \rightarrow m_i, m_i \rightarrow h_m, h_m \rightarrow m, m \rightarrow l \wedge h) \\
& \vee \\
& Cons(a, a_i, ar_i, b, h_m, m, m_i, h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}, (d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d), d \rightarrow \\
& l \wedge c_{l_d}, d \rightarrow h \wedge c_{h_d}, b \rightarrow l \wedge c_{l_b}, b \rightarrow h \wedge c_{h_b}, a_i \rightarrow h \wedge c_{AI_h}, a_i \rightarrow l \wedge c_{AI_l}, ar_i \rightarrow
\end{aligned}$$

$$h \wedge c_{ARI_h}, ar_i \rightarrow l \wedge c_{ARI_l}, m_i \rightarrow h \wedge c_{MI_h}, m_i \rightarrow l \wedge c_{MI_l}, a \rightarrow a_i \wedge b, a_i \rightarrow ar_i, ar_i \rightarrow m_i, m_i \rightarrow h_m, h_m \rightarrow m, m \rightarrow l \wedge h)$$

Nous illustrons maintenant le calcul des R-ensembles en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables comme il est décrit dans le chapitre 8. La première étape consiste à traduire notre problème en un programme logique dont la méthode de construction est donnée en section 8.1 du chapitre 8. Nous avons :

$$\begin{aligned} V^+ &= \{a, a_i, ar_i, b, m, m_i, h_m, l, c_{MI_l}, c_{ARI_l}, c_{AI_l}, c_{I_b}, h, c_{MI_h}, c_{ARI_h}, c_{AI_h}, c_{h_b}\}, \\ V^- &= \{a', a'_i, ar'_i, b', m', m'_i, h'_m, l', c'_{MI_l}, c'_{ARI_l}, c'_{AI_l}, c'_{I_b}, h', c'_{MI_h}, c'_{ARI_h}, c'_{AI_h}, c'_{h_b}\}, \\ R^+ &= \{r_a, r_{a_i}, r_{ar_i}, r_b, r_m, r_{m_i}, r_{h_m}, r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}}, r_{h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}}\}. \end{aligned}$$

Dans cette traduction, nous devons tenir compte de l'hypothèse sur la connaissance générique qui stipule que cette connaissance ne peut être remise en cause c'est-à-dire que les formules relatives à cette connaissance ne peuvent être retirées de la base de connaissances pour restaurer la cohérence. Afin de respecter cette hypothèse, nous utilisons l'étape 8.1.3 du processus de traduction, initialement définie pour la révision par R-ensembles, pour traduire les formules relatives à la connaissance générique. Nous obtenons le programme logique  $\Pi_\Sigma$  suivant :

$$\begin{array}{ll} a \leftarrow not\ a'. & h \leftarrow not\ h'. \\ a' \leftarrow not\ a. & h' \leftarrow not\ h. \\ a_i \leftarrow not\ a'_i. & c_{MI_h} \leftarrow not\ c'_{MI_h}. \\ a'_i \leftarrow not\ a_i. & c'_{MI_h} \leftarrow not\ c_{MI_h}. \\ ar_i \leftarrow not\ ar'_i. & c_{ARI_h} \leftarrow not\ c'_{ARI_h}. \\ ar'_i \leftarrow not\ ar_i. & c'_{ARI_h} \leftarrow not\ c_{ARI_h}. \\ b \leftarrow not\ b'. & c_{AI_h} \leftarrow not\ c'_{AI_h}. \\ b' \leftarrow not\ b. & c'_{AI_h} \leftarrow not\ c_{AI_h}. \\ m \leftarrow not\ m'. & c_{h_b} \leftarrow not\ c'_{h_b}. \\ m' \leftarrow not\ m. & c'_{h_b} \leftarrow not\ c_{h_b}. \\ m_i \leftarrow not\ m'_i. & r_a \leftarrow not\ a. \\ m'_i \leftarrow not\ m_i. & r_{a_i} \leftarrow not\ a_i. \\ h_m \leftarrow not\ h'_m. & r_{ar_i} \leftarrow not\ ar_i. \\ h'_m \leftarrow not\ h_m. & r_b \leftarrow not\ b. \\ l \leftarrow not\ l'. & r_m \leftarrow not\ m. \\ l' \leftarrow not\ l. & r_{m_i} \leftarrow not\ m_i. \\ c_{MI_l} \leftarrow not\ c'_{MI_l}. & r_{h_m} \leftarrow not\ h_m. \\ c'_{MI_l} \leftarrow not\ c_{MI_l}. & r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}} \leftarrow not\ l. \\ c_{ARI_l} \leftarrow not\ c'_{ARI_l}. & r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}} \leftarrow not\ c_{MI_l}. \\ c'_{ARI_l} \leftarrow not\ c_{ARI_l}. & r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}} \leftarrow not\ c_{ARI_l}. \\ c_{AI_l} \leftarrow not\ c'_{AI_l}. & r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}} \leftarrow not\ c_{AI_l}. \\ c'_{AI_l} \leftarrow not\ c_{AI_l}. & r_{l \wedge c_{MI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{AI_l} \wedge \neg c_{I_b}} \leftarrow c_{I_b}. \\ c_{I_b} \leftarrow not\ c'_{I_b}. & r_{h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}} \leftarrow not\ h. \\ c'_{I_b} \leftarrow not\ c_{I_b}. & r_{h \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b}} \leftarrow not\ c_{MI_h}. \end{array}$$

$rh \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b} \leftarrow not\ c_{ARI_h}.$	$false \leftarrow b, not\ l.$
$rh \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b} \leftarrow not\ c_{AI_h}.$	$false \leftarrow b, not\ c_{l_b}.$
$rh \wedge c_{MI_h} \wedge c_{ARI_h} \wedge c_{AI_h} \wedge c_{h_b} \leftarrow not\ c_{h_b}.$	$false \leftarrow a_i, not\ h.$
$false \leftarrow a, not\ a_i.$	$false \leftarrow a_i, not\ c_{AI_h}.$
$false \leftarrow a, not\ b.$	$false \leftarrow a_i, not\ l.$
$false \leftarrow a_i, not\ ar_i.$	$false \leftarrow a_i, not\ c_{AI_l}.$
$false \leftarrow ar_i, not\ m_i.$	$false \leftarrow ar_i, not\ h.$
$false \leftarrow m_i, not\ h_m.$	$false \leftarrow ar_i, not\ c_{ARI_h}.$
$false \leftarrow h_m, not\ m.$	$false \leftarrow ar_i, not\ l.$
$false \leftarrow m, not\ l.$	$false \leftarrow ar_i, not\ c_{ARI_l}.$
$false \leftarrow m, not\ h.$	$false \leftarrow m_i, not\ h.$
$false \leftarrow not\ d, not\ b.$	$false \leftarrow m_i, not\ c_{MI_h}.$
$false \leftarrow d, b.$	$false \leftarrow m_i, not\ l.$
$false \leftarrow b, not\ h.$	$false \leftarrow m_i, not\ c_{MI_l}.$
$false \leftarrow b, not\ c_{h_b}.$	$contradiction \leftarrow false, not\ contradiction.$

A partir de ce programme logique, CLASP nous fournit 1834 modèles stables. Leur nombre étant élevé, notre méthode requiert de se restreindre aux minimaux selon l'inclusion, nous obtenons  $S_0$  et  $S_1$  tels que :

- $F_O(S_0 \cap R^+) = \{a, b\},$
- $F_O(S_1 \cap R^+) = \{l \wedge c_{AI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{MI_l} \wedge \neg c_{l_b}\}.$

Selon les comparateurs faible et lexicographique, ces modèles stables sont incomparables :  $F_O(S_0 \cap R^+) \sim_w F_O(S_1 \cap R^+)$  et  $F_O(S_0 \cap R^+) \sim_\Delta F_O(S_1 \cap R^+).$

Nous avons donc  $S_w(\Pi_\Sigma) = S_\Delta(\Pi_\Sigma) = \{S_0, S_1\}.$

Comme  $F_O(S_0 \cap R^+) = \{a, b\}$  et  $F_O(S_1 \cap R^+) = \{l \wedge c_{AI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{MI_l} \wedge \neg c_{l_b}\},$  ces deux modèles stables correspondent aux deux R-ensembles attendus.

Si nous analysons ces R-ensembles :

- $R_0 = \{a, b\},$
- $R_1 = \{l \wedge c_{AI_l} \wedge c_{ARI_l} \wedge c_{MI_l} \wedge \neg c_{l_b}\}.$

Le R-ensemble  $R_0$  suggère que la typologie est suspectée alors que le R-ensemble  $R_1$  indique une possible erreur sur la valeur de la longueur totale.

## 11.2 Application de la révision

Nous avons décrit dans le chapitre précédent le contexte du projet VENUS et plus particulièrement l'information archéologique et le processus d'acquisition de ces données dans ce contexte. Les infrastructures utilisées comme le ROV pour cette acquisition sont très coûteuses. Il est donc préférable d'effectuer plusieurs fois le survol du site à étudier plutôt que de déployer les moyens à plusieurs reprises. De plus, la qualité des photos prises ne peut être constante car les conditions de prises de vue (altitude, éclairage, ...) différent à chacun des survols. Ces différents survols nous fournissent plusieurs jeux de données. Une relation de préférence sur ces jeux de données peut être construite à

partir de la qualité des photos (visibilité, exposition, présence d'occlusions, ...). Pour chaque objet étudié, nous aurons un préordre sur ces jeux de données différent. Dans cette section, nous désignerons par le terme d'expert, la production des données.

La méthode de révision par R-ensembles décrite dans le chapitre 6 pourrait être appliquée dans le contexte du projet européen VENUS [186].

Nous considérons l'ensemble des formules relatives à l'ontologie et à la contrainte d'unicité du domaine,  $G = O \cup C$ , décrites en section 10.7.2.1 du chapitre précédent :

- $O = \{a \rightarrow a_i \wedge b, a_i \rightarrow ar_i, ar_i \rightarrow m_i, m_i \rightarrow h_m, h_m \rightarrow m, m \rightarrow l \wedge h\}$ ,
- $C = \{(d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d)\}$ ,

Nous considérons ensuite deux ensembles d'observations sur la même amphore provenant de deux experts différents :

```
<amphora id="Entiere_1"
  class="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore">
  <description
    javaClass="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore"
    subClass="Dressel2_4_courte"
    type="Entiere"
    name="Entiere"
    num="1"
    ...
  />
<!--
  Description of location, orientation and dimension of this
  ItemMesurable -->
<!-- Measured with Arpenteur : null null -->
  <location
    X="808.954"
    Y="906.568"
    Z="-32.686"
    Omega="4.64701722"
    Phi="0.43907584"
    Kappa="4.37421141" >
  <boundingBox>
    <cone
      height="0.29543431242482493"
      radius1="0.5054120034485536"
      radius2="0.5054120034485536"
    />
  </boundingBox>
</location>
<metrology
```

```

    totalHeight="      1.01"
    totalLength="      0.30"
    totalWidth="       0.30"
    volume="          30.70"
    remainHeight=" 1.05"
    internalDiameter=" 0.29"
    externalDiameter=" 0.31"
    footDiameter=" 0.08"
    bellyDiameter=" 0.31"
    heightLips=" 0.026"
    pcLips=" 0"
    mass=" 25.5"
  />
  ...
</amphora>

<amphora id="Entiere_1"
  class="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore">
  <description
    javaClass="net.arpenteur.mesurable.archeologie.amphore.Amphore"
    subClass="Dressel2_4_longue"
    type="Entiere"
    name="Entiere"
    num="1"
    ...
  />
  <!--
  Description of location, orientation and dimension of this
  ItemMesurable -->
  <!-- Measured with Arpenteur : null null -->
  <location
    X=" 808.954"
    Y=" 906.568"
    Z=" -32.686"
    Omega=" 4.64701722"
    Phi=" 0.43907584"
    Kappa=" 4.37421141" >
  <boundingBox>
    <cone
      height=" 0.29543431242482493"
      radius1=" 0.5054120034485536"

```

```

        radius2=" 0.5054120034485536"
      />
    </boundingBox>
  </location>
  <metrology
    totalHeight=" 1.01"
    totalLength=" 0.30"
    totalWidth=" 0.30"
    volume=" 30.70"
    remainHeight=" 1.05"
    internalDiameter=" 0.29"
    externalDiameter=" 0.31"
    footDiameter=" 0.08"
    bellyDiameter=" 0.31"
    heightLips=" 0.026"
    pcLips=" 0"
    mass=" 25.5"
  />
  ...
</amphora>

```

Nous utilisons la méthode décrite en section 10.7.2.1 du chapitre précédent pour traduire ces observations en logique des prédicats intanciés et nous obtenons les ensembles de formules partiellement préordonnées suivants :

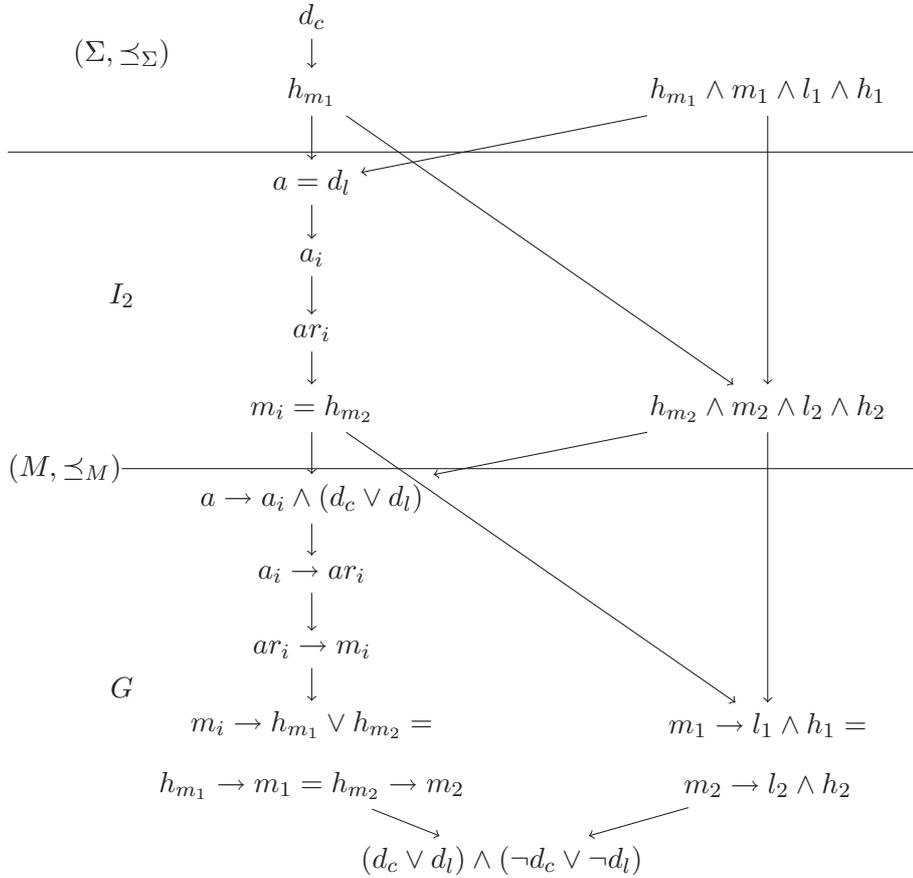
$(I_1, \preceq_{I_1})$ $I_1 = \{a, a_i, ar_i, d_c, m_i, h_{m_1}, h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1\}$ $\preceq_{I_1}$ $a = d_c$ $\downarrow$ $a_i$ $\downarrow$ $ar_i$ $\downarrow$ $m_i = h_{m_1} \quad h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1$	$(I_2, \preceq_{I_2})$ $I_2 = \{a, a_i, ar_i, d_l, m_i, h_{m_2}, h_{m_2} \wedge m_2 \wedge l_2 \wedge h_2\}$ $\preceq_{I_2}$ $a = d_l$ $\downarrow$ $a_i$ $\downarrow$ $ar_i$ $\downarrow$ $m_i = h_{m_2} \quad h_{m_2} \wedge m_2 \wedge l_2 \wedge h_2$
--	--

Nous savons que l'expert 2 est plus fiable que l'expert 1 donc les observations issues de cet expert sont préférées à celles fournies par l'expert 1. De plus, par hypothèse, les informations correspondant à la connaissance générique ne peuvent être remises en cause donc nous révisons les observations fournies par l'expert 1 par les observations

fournies par l'expert 2 et la connaissance générique. Nous considérons donc  $\Sigma = I_1 \setminus (I_1 \cap I_2)$  et nous révisons par  $M = G \cup I_2$ .

Nous appliquons la méthode décrite dans le chapitre 6. La révision par R-ensembles dans le contexte du projet VENUS est définie comme suit :

- $\Sigma \circ_{\leq_C} M = \{a \rightarrow a_i \wedge b, a_i \rightarrow ar_i, ar_i \rightarrow m_i, m_i \rightarrow h_{m_1} \vee h_{m_2}, h_{m_1} \rightarrow m_1, h_{m_2} \rightarrow m_2, m_1 \rightarrow l_1 \wedge h_1, m_2 \rightarrow l_2 \wedge h_2, (d \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg d), a, a_i, ar_i, d_c, m_i, h_{m_1}, h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1, d_l, h_{m_2}, h_{m_2} \wedge m_2 \wedge l_2 \wedge h_2\}$ ;
- $\preceq_{\Sigma \circ_{\leq_C} M}$  :



Nous allons maintenant calculer  $Bel(\Psi \circ_{\leq_C} M) = \bigvee_{R \in \mathcal{R}_C(\Sigma \cup M)} Cons((\Sigma \setminus R) \cup M)$ . Pour cela, il nous faut calculer les R-ensembles potentiels de  $\Sigma \cup M$ .  $\Sigma = \{d_c, h_{m_1}, h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1\}$ , il y a alors quatre R-ensembles potentiels possibles. Mais un seul R-ensemble potentiel est minimal selon l'inclusion. Par conséquent, il n'y a qu'un R-ensemble.

Nous effectuons le calcul des R-ensembles en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables comme il est décrit dans le chapitre 8. La première étape consiste à traduire notre problème en un programme logique dont la méthode

de construction est donnée en section 8.1 du chapitre 8. Nous avons :

$$\begin{aligned} V^+ &= \{a, a_i, ar_i, d_c, d_l, m_i, h_m, m_1, l_1, h_1, m_2, l_2, h_2\}, \\ V^- &= \{a', a'_i, ar'_i, d'_c, d'_l, m'_i, h'_m, m'_1, l'_1, h'_1, m'_2, l'_2, h'_2\}, \\ R^+ &= \{r_{d_c}, r_{h_{m_1}}, r_{h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1}\}. \end{aligned}$$

Nous obtenons le programme logique  $\Pi_\Sigma$  suivant :

$$\begin{array}{ll} a \leftarrow \text{not } a'. & r_{h_{m_1}} \leftarrow \text{not } h_{m_1}. \\ a' \leftarrow \text{not } a. & r_{h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1} \leftarrow \text{not } h_{m_1}. \\ a_i \leftarrow \text{not } a'_i. & r_{h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1} \leftarrow \text{not } m_1. \\ a'_i \leftarrow \text{not } a_i. & r_{h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1} \leftarrow \text{not } l_1. \\ ar_i \leftarrow \text{not } ar'_i. & r_{h_{m_1} \wedge m_1 \wedge l_1 \wedge h_1} \leftarrow \text{not } h_1. \\ ar'_i \leftarrow \text{not } ar_i. & \text{false} \leftarrow \text{not } h_{m_2}. \\ d_c \leftarrow \text{not } d'_c. & \text{false} \leftarrow \text{not } l_2. \\ d'_c \leftarrow \text{not } d_c. & \text{false} \leftarrow \text{not } h_2. \\ d_l \leftarrow \text{not } d'_l. & \text{false} \leftarrow \text{not } m_2. \\ d'_l \leftarrow \text{not } d_l. & \text{false} \leftarrow \text{not } a. \\ m_i \leftarrow \text{not } m'_i. & \text{false} \leftarrow \text{not } d_l. \\ m'_i \leftarrow \text{not } m_i. & \text{false} \leftarrow \text{not } a_i. \\ h_{m_1} \leftarrow \text{not } h'_{m_1}. & \text{false} \leftarrow \text{not } ar_i. \\ h'_{m_1} \leftarrow \text{not } h_{m_1}. & \text{false} \leftarrow \text{not } m_i. \\ h_{m_2} \leftarrow \text{not } h'_{m_2}. & \text{false} \leftarrow a, \text{not } d_c, \text{not } d_l. \\ h'_{m_2} \leftarrow \text{not } h_{m_2}. & \text{false} \leftarrow a, \text{not } a_i. \\ m_1 \leftarrow \text{not } m'_1. & \text{false} \leftarrow a_i, \text{not } ar_i. \\ m'_1 \leftarrow \text{not } m_1. & \text{false} \leftarrow ar_i, \text{not } m_i. \\ l_1 \leftarrow \text{not } l'_1. & \text{false} \leftarrow m_i, \text{not } h_{m_1}, \text{not } h_{m_2}. \\ l'_1 \leftarrow \text{not } l_1. & \text{false} \leftarrow h_{m_1}, \text{not } m_1. \\ h_1 \leftarrow \text{not } h'_1. & \text{false} \leftarrow h_{m_2}, \text{not } m_2. \\ h'_1 \leftarrow \text{not } h_1. & \text{false} \leftarrow m_1, \text{not } l_1. \\ m_2 \leftarrow \text{not } m'_2. & \text{false} \leftarrow m_1, \text{not } h_1. \\ m'_2 \leftarrow \text{not } m_2. & \text{false} \leftarrow m_2, \text{not } l_2. \\ l_2 \leftarrow \text{not } l'_2. & \text{false} \leftarrow m_2, \text{not } h_2. \\ l'_2 \leftarrow \text{not } l_2. & \text{false} \leftarrow \text{not } d_c, \text{not } d_l. \\ h_2 \leftarrow \text{not } h'_2. & \text{false} \leftarrow d_c, d_l. \\ h'_2 \leftarrow \text{not } h_2. & \text{contradiction} \leftarrow \text{false}, \text{not } \text{contradiction}. \\ r_{d_c} \leftarrow \text{not } d_c. & \end{array}$$

A partir de ce programme logique, CLASP nous fournit un seul modèle stable  $S_0$  tel que  $:F_O(S_0 \cap R^+) = \{d_c\}$  qui correspond au R-ensemble attendu.

Nous avons choisi pour illustrer notre méthode de révision un exemple qui peut sembler assez simple. Cependant, un exemple plus complexe aurait pris beaucoup de place et aurait nui à la lisibilité.

### 11.3 Implantation de la restauration de la cohérence

Notre module de raisonnement est codé dans un programme Java permettant une vérification automatique d'un relevé. Cette vérification consiste à confronter les observations de chacun des objets du relevé à la connaissance générique. Ce processus est divisé en cinq étapes principales, comme l'illustre par la figure 11.1. Nous détaillons chacune de ses étapes.

**Traduction en logique des prédicats instanciés** Cette étape prend en entrée :

l'ontologie d'application, les contraintes sur les objets, les instances d'amphores sous forme de fichiers xml. Les informations contenues dans ces fichiers sont traduites en une base de croyances et un préordre partiel associé de la façon suivante. Le fichier contenant l'ontologie est le premier fichier à être analysé syntaxiquement et traduit en un ensemble de prédicats. Les prédicats associés aux contraintes d'intégrité, aux contraintes de domaine ainsi qu'aux contraintes conditionnelles sont définis et ajoutés à l'ensemble de prédicats précédents. Le fichier des contraintes est parcouru afin d'instancier les intervalles de valeurs nécessaires pour la détermination des prédicats de compatibilité pour chacun des attributs morphologiques selon chaque typologie et un pourcentage donné.

Enfin, le fichier contenant les instances d'amphores est parcouru afin d'instancier l'ensemble des prédicats représentant l'ontologie. Nous obtenons donc un ensemble de prédicats instanciés représentant la connaissance générique et les instances.

Parallèlement, le préordre partiel entre ces prédicats instanciés décrit en section 10.3 est construit. Ce préordre partiel est représenté sous forme d'une matrice  $2 \times 2$  où  $m[i][j]$  représente la préférence entre les prédicats  $p_i$  et  $p_j$  :

- $m[i][j] = 1$  si le prédicat  $p_i$  est strictement préféré au prédicat  $p_j$ . ( $p_i \prec_{\Sigma} p_j$ )
- $m[i][j] = -1$  si le prédicat  $p_j$  est strictement préféré au prédicat  $p_i$ . ( $p_j \prec_{\Sigma} p_i$ )
- $m[i][j] = 0$  si il n'y a pas de préférence entre le prédicat  $p_i$  et le prédicat  $p_j$ . ( $p_i =_{\Sigma} p_j$ )
- $m[i][j] = 2$  si le prédicat  $p_i$  est incomparable avec le prédicat  $p_j$ . ( $p_i \sim_{\Sigma} p_j$ )

Nous obtenons ainsi l'ensemble  $G$  défini en section 11.1 et le préordre partiel associé.

Cette étape nous permet également de générer automatiquement la spécification d'ontologie présentée en section 10.3, également décrite dans le produit final [180] du projet VENUS. Cette spécification précise les concepts, les attributs et les relations entre les concepts. Cette spécification est produite sous forme de fichier latex.

**Traduction en programme logique** Cette deuxième étape prend en entrée la base de croyances précédemment construite et traduit les formules de cette base en un programme logique selon les règles définies en section 11.1. Nous obtenons un

programme logique (fichier pl).

**Calcul des modèles stables (CLASP)** L'étape suivante prend en entrée le programme logique défini précédemment et consiste à calculer les modèles stables en utilisant le solveur CLASP. Le solveur est lancé à partir du programme java et nous permet d'obtenir l'ensemble des modèles stables.

**Préordre partiel sur les modèles stables** La quatrième étape prend en entrée le préordre partiel défini à la première étape ainsi que les modèles stables obtenus à l'étape précédente. Cette étape consiste à déterminer les modèles stables préférés. Pour cela, nous sélectionnons les modèles stables minimaux selon l'inclusion et nous les préordonnons ensuite selon le comparateur choisi (comparateur faible  $\preceq_w$  ou comparateur lexicographique  $\preceq_\Delta$ ). Comme précédemment, nous avons choisi de représenter le préordre partiel entre les modèles stables sous forme de matrice  $2 \times 2$  où  $m[i][j]$  représente la préférence entre les modèles stables  $S_i$  et  $S_j$  :

- $m[i][j] = 1$  si le modèle stable  $S_i$  est strictement préféré au modèle stable  $S_j$ . ( $S_i \preceq_C S_j$ )
- $m[i][j] = -1$  si le modèle stable  $S_j$  est strictement préféré au modèle stable  $S_i$ . ( $S_j \preceq_C S_i$ )
- $m[i][j] = 0$  si il n'y a pas de préférence entre le modèle stable  $S_i$  et le modèle stable  $S_j$ . ( $S_i =_C S_j$ )
- $m[i][j] = 2$  si le modèle stable  $S_i$  est incomparable avec le modèle stable  $S_j$ . ( $S_i \sim_C S_j$ )

A partir de cette matrice, il est possible de déterminer les modèles stables préférés et par conséquence les R-ensembles correspondants.

**Vérification des résultats et exportation en xml** La dernière étape consiste à valider les hypothèses émises par notre méthode c'est-à-dire les R-ensembles. D'après notre méthode théorique et la structure de l'ontologie, il est possible d'avoir deux sortes de modèles stables préférés : un mettant en cause la typologie de l'objet et l'autre mettant en cause les valeurs des attributs mesurés. Ces hypothèses doivent être analysées puis confirmées. En effet, si un des R-ensembles contient un prédicat négatif sur les contraintes d'intégrité, alors la typologie de l'objet ne peut être suspectée. De plus, pour valider l'hypothèse mettant en cause la typologie de l'objet, nous devons fournir une autre typologie qui correspond parfaitement avec les attributs mesurés. Une fois ces hypothèses confirmées, nous transmettons ces résultats au module de réalité virtuelle sous forme de fichier xml. Ce fichier se présente sous la forme suivante :

```
<Artefact_list id = 'YYMMJJhhmmssmmm' >
  <Artefact id = 'number' >
```

```

    height = ‘‘true or false’’
    width = ‘‘true or false’’
    length = ‘‘true or false’’
    type = ‘‘true or false’’ >
<type> T_1 <\type >
<type> T_2 <\type >
    ...
<\Artefact >

<Artefact id = ‘‘number’’
    ...
<\Artefact>

<Artefact id = ‘‘number’’
    ...
<\Artefact>

    ...

<\Artefact_list >

```

## 11.4 Expérimentations et résultats

Nous avons conduit différentes expérimentations dans le contexte du projet européen VENUS. En effet, nous avons testé notre méthode de restauration de la cohérence sur les trois relevés, décrits en section 10.2.2, issues des trois missions du projet. Ces résultats ont été présentés dans le livrable [162].

Pour chacun des relevés, nous avons conduit quatre expérimentations qui diffèrent par le pourcentage de tolérance utilisé pour calculer les intervalles de valeurs des contraintes conditionnelles (20%, 10%, 5% et 1%). Chacune des expérimentations est calculée sur une moyenne c’est-à-dire que le processus est lancé une cinquantaine de fois. Les expérimentations ont été menées en utilisant le comparateur lexicographique pour les raisons précisées en introduction de ce chapitre.

### 11.4.1 Relevé de Pianosa

Ce relevé contient 40 amphores comme il est décrit en section 10.2.2. Nous nous sommes focalisés sur deux des attributs morphologiques. En effet, la longueur totale, la hauteur totale et la largeur totale sont les seuls attributs mesurés. De plus, l’amphore est représentée comme un volume de révolution, donc les valeurs de la longueur totale

et la largeur totale sont identiques. C'est pourquoi, nous prenons en compte dans la restauration de la cohérence les attributs suivants : la longueur totale et la hauteur totale. A l'issue de la traduction en logique des prédicats instanciés, nous obtenons 1080 formules formées à partir de 840 atomes. Le tableau 11.1 présente les résultats obtenus lors de l'application de notre méthode sur le relevé de Pianosa.

% tolérance	T1 (traducteur)	T2 (raisonnement)	T3 (xml)	T1+T2+T3
20	240	1118	0	1358
10	270	5134	0	5404
5	290	5874	0	6164
1	310	6914	0	7224

TAB. 11.1 – Temps d'exécution, en millisecondes, de notre méthode pour le relevé de Pianosa.

Le tableau 11.2 montre le nombre d'amphores considérées incohérentes selon les différents pourcentages de tolérance.

% tolérance	Nombre d'incohérences
20.0	5
10.0	26
5.0	30
1.0	36

TAB. 11.2 – Nombre d'amphores incohérentes dans le relevé de Pianosa.

### 11.4.2 Relevé de Sesimbra

Nous avons également mené des expérimentations sur le relevé de Sesimbra qui contient 873 tuiles. Ce relevé est décrit plus précisément en section 10.2.2. Pour cet artefact, nous nous focalisons sur trois des attributs morphologiques de la métrologie : la hauteur totale, la longueur totale et la largeur totale car une tuile est représentée géométriquement par un tronc de cône. La traduction en prédicats instanciés permet d'obtenir 26190 formules construites à partir de 21825 atomes. Les résultats de l'application de notre méthode à ce relevé sont donnés par les tableaux 11.3 et 11.4. Le premier tableau présente les temps d'exécution tandis que le second montre le nombre de tuiles incohérentes pour chacun des intervalles de tolérances.

% tolérance	T1 (traducteur)	T2 (raisonnement)	T3 (xml)	T1+T2+T3
20	3820	70310	0	74130
10	4480	103460	0	107940
5	5050	119160	0	124210
1	5640	150650	0	156290

TAB. 11.3 – Temps d'exécution, en millisecondes, de notre méthode pour le relevé de Sesimbra.

% tolérance	Nombre d'incohérences
20.0	12
10.0	18
5.0	21
1.0	27

TAB. 11.4 – Nombre de tuiles incohérentes dans le relevé de Sesimbra.

Le faible nombre d'incohérences est dû à la méthode de saisie qui, dans la plupart des cas, fournit un objet qui a les valeurs par défaut c'est-à-dire une instance théorique. La mesure se contente de positionner l'objet dans l'espace, ceci étant fait à la demande des archéologues car l'étude individuelle de chaque tuile n'était pas pertinente.

### 11.4.3 Relevé de Port Miou C

Les résultats de l'application de notre méthode sur le relevé issue de la campagne de mesures du site Port Miou C sont donnés dans le tableau 11.5. 545 amphores ont été mesurées comme il est spécifié en section 10.2.2. Comme pour le relevé de Pianosa, nous nous focalisons sur deux des attributs morphologiques qui sont la hauteur totale et la longueur totale. Nous obtenons 6021 formules contruites à partir de 4683 atomes après la traduction en logique des prédicats instanciés.

% tolérance	T1 (traducteur)	T2 (raisonnement)	T3 (xml)	T1+T2+T3
20.0	680	9380	0	10060
10.0	750	13696	0	14446
5.0	810	15030	0	15840
1.0	880	16802	0	17682

TAB. 11.5 – Temps d'exécution, en millisecondes, de notre méthode pour le relevé de Port Miou C.

Le tableau 11.6 résume le nombre d'amphores incohérentes selon chaque intervalle de tolérance.

% tolérance	Nombre d'incohérences
20.0	44
10.0	65
5.0	72
1.0	81

TAB. 11.6 – Nombre d'amphores incohérentes dans le relevé de Port Miou C.

## Conclusion

Ce chapitre présente la mise en oeuvre des méthodes de restauration de la cohérence et de révision par R-ensembles proposées dans les chapitres 5 et 6 ainsi que le détail de l'implantation de la restauration de la cohérence dans le contexte du projet VENUS. Nous avons présenté les expérimentations qui ont été menées sur les relevés des trois missions réalisées pendant le projet VENUS. Les résultats obtenus montrent que notre méthode est adaptée à cette application puisqu'elle donne des temps raisonnables pour un grand nombre d'artefacts. Dans le cadre de ce projet, nous avons comparé notre méthode de restauration de la cohérence à deux autres approches [162] :

1. une méthode utilisant la fusion par R-ensembles (RSF et PRSF) [107] et
2. une méthode combinant OWL 2 et le raisonneur Pellet [162].

Contrairement à l'approche de fusion par R-ensembles utilisant une base de connaissances non ordonnées qui ne reflète ni la structure ni la hiérarchie des informations, le formalisme de représentation de l'information utilisé par notre approche est beaucoup plus expressif. En effet, notre formalisme permet de représenter des informations structurées et hiérarchisées. Par ailleurs, les temps d'exécution plus long que ceux de RSF sont malgré tout acceptables. Ils sont dus à la considération du préordre partiel. L'utilisation de la préférence lexicographique dans le cas d'un préordre total comme l'exploite PRSF permet de réduire la complexité, ce n'est pas le cas pour des informations partiellement préordonnées. Enfin, la méthode utilisée combinant OWL 2 et PELLET pour notre comparaison se limite à la restauration de la cohérence alors que notre méthode permet de restaurer la cohérence et de réviser notre base de connaissances.



# Conclusions et perspectives

Dans ce manuscrit, d'un point de vue théorique, nous nous sommes intéressés au raisonnement à partir d'états épistémiques représentés par des préordres partiels. Plus précisément, nous avons étudié la restauration de la cohérence, la révision et l'inférence à partir d'états épistémiques lorsqu'ils sont représentés syntaxiquement par une base de croyances partiellement préordonnées et sémantiquement par un préordre partiel sur les interprétations.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons plus particulièrement à la restauration de la cohérence. Nous avons proposé d'étendre l'approche des R-ensembles pour la restauration de la cohérence d'informations partiellement préordonnées. Nous avons tout d'abord introduit un nouveau comparateur lexicographique qui combine l'exploitation du préordre partiel initial et la cardinalité. Nous avons ensuite présenté une approche syntaxique pour calculer les croyances courantes de l'agent s'appuyant sur la notion de R-ensemble. Nous avons proposé une contre-partie sémantique équivalente à cette approche syntaxique. Enfin, nous avons montré l'équivalence de notre approche en terme de sous-bases maximales cohérentes préférées. Nous avons proposé pour cette méthode une mise en oeuvre utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables dans le chapitre 8. Ces travaux ont fait l'objet de deux publications [178, 179].

Dans le chapitre 6, nous avons proposé un nouveau cadre de travail pour la révision d'états épistémiques par une formule propositionnelle. Nous avons proposé d'étendre la révision par R-ensembles initialement définie pour des préordres totaux à des préordres partiels. D'un point de vue syntaxique, nous avons représenté l'état épistémique  $\Psi$  par une base de croyances partiellement préordonnées. Nous avons défini une opération de révision syntaxique  $\circ_{\triangleleft_C}$  et nous avons proposé une méthode pour le calcul de l'ensemble des croyances courantes de l'agent  $Bel(\Psi \circ_{\triangleleft_C} \mu)$  basée sur les R-ensembles. D'un point de vue sémantique, nous avons représenté l'état épistémique par un préordre partiel  $\preceq_{\Psi}^C$  sur les interprétations à partir des formules de la base de croyances falsifiées par les interprétations et selon un comparateur  $C$ . Nous avons montré que la correspondance qui associe  $\Phi$  à ce préordre partiel est une assignation P-fidèle. Nous avons défini une opération de révision sémantique  $\bullet_{\triangleleft_C}$ . Nous avons ensuite construit un préordre partiel  $\preceq_{\Psi \bullet_{\triangleleft_C} \mu}^C$  sur les interprétations représentant

l'état épistémique révisé. Nous avons montré que, dans le cas de l'utilisation du comparateur lexicographique, les opérations de révision syntaxique et sémantique sont équivalentes et que notre approche capture la révision ordinale drastique. Dans le cas du comparateur faible, notre approche capture la révision possibiliste. Cependant, pour obtenir l'équivalence entre la révision syntaxique et la révision sémantique, nous avons dû imposer une autre condition : la minimalité selon l'inclusion des ensembles de formules de la base de croyances falsifiées par les interprétations. Nous avons montré dans ce cas, que notre approche capture le préordre partiel sur les interprétations obtenu en appliquant la révision possibiliste mais que l'ensemble des modèles des croyances courantes de l'état épistémique révisé par notre approche est inclus dans l'ensemble des modèles obtenu en appliquant la révision possibiliste. Comme pour la restauration de la cohérence, nous avons montré que notre approche, quelque soit le comparateur utilisé, était équivalente à celle considérant les sous-bases maximales cohérentes préférées. Une mise en oeuvre avec ASP de notre approche est également proposée au chapitre 8. Nous avons présenté nos approches dans [183, 184].

A partir de la restauration de la cohérence utilisant le comparateur lexicographique proposé au chapitre 5, nous proposons ensuite une relation d'inférence lexicographique pour les préordres partiels. Plus précisément, nous avons proposé deux approches naturelles. La première consiste à appliquer l'inférence lexicographique classique sur chacune des bases de croyances totalement préordonnées compatibles. La deuxième approche plus prudente que la première, utilise la définition du nouveau comparateur lexicographique sur les R-ensembles pour déterminer les sous-bases maximales cohérentes préférées afin d'appliquer l'inférence classique. Nous avons proposé une contre-partie sémantique pour chacune de ces deux approches. Ce travail, effectué en collaboration avec S. Benferhat, S. Lagrue et S. Yahi du CRIL à Lens, a donné lieu à différentes publications [207, 208, 209].

Cette thèse s'étant déroulée le contexte du projet européen VENUS, nous avons montré l'exploitation de nos méthodes dans le contexte d'une application réelle. Tout d'abord, nous avons construit une ontologie d'application provenant d'un domaine précis, l'archéologie sous-marine et plus particulièrement les amphores, les tuiles et les briques et d'une tâche précise, le processus d'acquisition des données, la photogrammétrie. La représentation sous-forme d'ontologie est, en effet, bien adaptée aux informations archéologiques mais n'étant pas directement exploitable par nos méthodes, nous avons proposé une traduction formelle en logique des prédicats instanciés de notre ontologie, des contraintes associées et des observations. Nous avons montré que l'utilisation d'un préordre partiel traduisait convenablement la hiérarchie de l'ontologie.

Nous avons présenté ensuite les détails de l'implantation de notre méthode de restauration de la cohérence dans le contexte de VENUS ainsi que les expérimentations à partir des relevés des missions effectuées durant ce projet. Nous avons montré, dans ce contexte, l'utilité du comparateur lexicographique qui combine l'exploitation du

préordre partiel et de la cardinalité. Nous avons comparé notre méthode aux autres approches développées dans ce même contexte. Nos temps d'exécution se sont avérés plus longs du fait de l'expressivité de notre représentation mais notre approche reste tout de même efficace dans cette application. De plus, nous avons montré comment la révision peut s'appliquer. Dans cette dernière partie, nous avons également proposé un outil de génération de représentations 3D d'amphores à partir de relevés archéologiques d'amphores. A partir de ces représentations 3D d'amphores, nous avons créé des instances dont la cohérence avec la connaissance générique est vérifiée en utilisant notre méthode de restauration de la cohérence par R-ensemble. Tout au long des trois ans du projet VENUS, nous avons réalisé des rapports techniques [165, 164, 163, 162, 137, 56] ainsi que des produits finaux [180, 181, 182, 185, 186].

## Perspectives

Le travail présenté dans ce manuscrit offre plusieurs perspectives. La première perspective concerne la mise en oeuvre de nos méthodes. En effet, nous proposons une mise en oeuvre utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables. Or cette mise en oeuvre nous permet d'obtenir effectivement les modèles stables mais nous impose d'utiliser un programme pour construire le préordre partiel issu du comparateur faible ou lexicographique sur ces modèles stables. Comme nous l'avons vu dans la section 11.4 du chapitre 11, ceci ralentit les temps d'exécution. La solution consisterait à mener une étude plus approfondie afin de définir directement le préordre partiel entre les modèles stables à partir du programme logique.

Nous avons présenté des opérations de restauration de cohérence et de révision pour des préordres partiels. Hué, dans [107], a présenté une opération de fusion par R-ensembles (RSF) pour des bases de croyances non ordonnées ainsi que totalement préordonnées. L'extension de l'approche par R-ensembles à la fusion de bases de croyances partiellement préordonnées est une autre de nos perspectives. Plusieurs cas doivent être étudiés. Dans un premier temps, il s'agirait de considérer un préordre partiel uniquement entre les bases de croyances. Puis, de considérer un préordre partiel entre les bases de croyances mais également entre les formules appartenant à ces bases de croyances.

Dans notre mise en oeuvre actuelle de la restauration de la cohérence, nous utilisons les relevés photogrammétriques qui contiennent tous les objets mais en réalité nous confrontons les observations de chaque objet à la connaissance générique. Une perspective serait d'intégrer notre module de raisonnement lors de la restitution des objets. Notre méthode interviendrait avant la sauvegarde de l'objet dans la base de données. Par ailleurs, lors d'incohérence sur les observations d'un objet, nous pointons les attributs responsables. Nous pourrions raffiner nos résultats en fournissant à l'archéologue une estimation de la qualité des mesures afin de l'aider à corriger les valeurs suspectées.

La qualité d'une valeur d'un attribut serait en quelque sorte une "distance" qualitative entre la valeur mesurée et la valeur théorique disponible par la description conceptuelle.

Dans le cadre du projet VENUS, nous avons construit une ontologie d'application que nous avons traduite en logique de description  $\mathcal{SHOIN}(\mathcal{D})$ . Une autre perspective consisterait à étudier dans quelle mesure, nous pouvons étendre les approches de restauration de la cohérence et de révision basées sur les R-ensembles à une base de connaissances exprimée en logique de description. Par ailleurs, du point de vue de la mise en oeuvre, il serait intéressant d'étudier comment combiner l'utilisation de raisonneur PELLET, utilisé dans le cadre du projet VENUS [162] et du solveur CLASP. En effet, combiner les règles et les logiques de description est un problème ouvert en intelligence artificielle. Des travaux proposés [103, 66] se focalisent sur les interactions entre les logiques de description et la programmation logique.

Enfin, une perspective concerne l'outil de génération de représentations 3D à partir de relevés archéologiques. Nous avons présenté cet outil dans le cas des amphores. Mais il existe d'autres objets pour lesquels il pourrait être adapté. Par exemple, la représentations 3D de certains vases est proche de celles des amphores. La différence majeure entre ces deux représentations 3D réside dans la non symétrie de l'objet par exemple la présence d'un bec. Nous avons commencé l'adaptation de notre outil aux représentations 3D de vases ne possédant pas de bec. Dans ce cas, notre outil permet de générer la représentation 3D d'un vase asymétrique, possédant par exemple une ou deux anses. Pour terminer cette adaptation, il conviendrait de générer une représentation 3D de vase possédant un bec ou tout autre particularité le rendant asymétrique comme un orifice pour la vidange.

# Bibliographie

- [1] *Méthodes classiques et méthodes formelles dans l'étude des amphores*, volume 32. Ecole Française de Rome, 1977. 27-29 mai 1974, Actes du colloque de Rome.
- [2] J. Albertz and W. Kreiling. *Photogrammetrisches Taschenbuch*. Wichmann-Verlag, Heidelberg, 1989.
- [3] F. Alcalá, F. Gauch, E. Seguin, P. Drap, J. Seinturier, D. Scaradozzi, G. Conte, A. Caiti, S. Franca, G. Vitaioli, S. M. Zanoli, and L. Long. D6.5 comex france : Photogrammetric and bathymetric sonar survey completed. Technical report, Deliverable, VENUS project, December 2008.
- [4] C. E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.
- [5] American Society of Photogrammetry. *Manual of photogrammetry*. American Society of Photogrammetry : 210 Little Falls, St Falls Church, Va 22046, 4th edition edition, 1980.
- [6] C. Anger, K. Konczak, and T. Linke. Nomore : Non-monotonic reasoning with logic programs. In *Proceedings of the 8th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA '02)*, pages 521–524. Springer, 2002.
- [7] J. C. Arpírez, A. Gómez-Pérez, A. Lozano, and S. Pinto. (onto)2agent : An ontology-based www broker to select ontologies, 1998.
- [8] F. Baader, H. J. Bürckert, J. Heinsohn, B. Hollunder, J. Müller, B. Nebel, W. Nutt, and H. J. Profitlich. Terminological knowledge representation : A proposal for a terminological logic. pages 120–128, 1991.
- [9] F. Baader, D. Calvanese, D. L. McGuinness, D. Nardi, and P. Patel-Schneider. *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications*. Cambridge University Press, 2003.
- [10] F. Baader and W. Nutt. Basic description logics. In Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors, *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation, and Applications*, chapter 2. Cambridge University Press, 2003.
- [11] G. F. Bass. *Archaeology under Water*. Penguin, 1970.

- [12] G. F. Bass and D. Rosencrantz. L'utilisation des submersibles pour les recherches et la cartographie photogrammétrique sous-marine. In *L'archéologie subaquatique, une discipline naissante.*, pages 285–298, Paris, 1973.
- [13] J. Ben-Naim, S. Benferhat, O. Papini, and E. Würbel. An answer set programming encoding of prioritized removed sets revision : application to gis. In J. Alferes and Springer Verlag J. Leite, editors, *Proceedings of the 9th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'04)*, pages 604–616, Lisbonne, Portugal, Septembre 2004. Lecture notes in Artificial Intelligence. Logics for AI.
- [14] S. Benferhat, J. Ben-Naim, R. Jeansoulin, M. Khelfallah, S. Lagrue, O. Papini, N. Wilson, and E. Würbel. Belief revision of gis systems : the results of revising. In Luis Godo (ed.), editor, *Proceedings of the 8th European Conferences on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQA-RU'05)*, pages 452–464. Springer, july 2005. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3571.
- [15] S. Benferhat, J. Ben-Naim, O. Papini, and E. Würbel. Answer set programming encoding of prioritized removed sets revision : Application to gis. *Applied Intelligence. Springer Verlag.*, 2008.
- [16] S. Benferhat, J. Bonnefon, and R. Da Silva Neves. An overview of possibilistic handling of default reasoning : an experimental study. *Synthese*, 146(1) :53–70, 2005.
- [17] S. Benferhat, D. Dubois, C. Cayrol, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–647, 1993.
- [18] S. Benferhat, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Hypothetical reasoning in possibilistic logic : basic notions and implementation issues. In P.Z. Wang and K.F. Loe, editors, *Between Mind and Computer, Fuzzy Science and Engineering*, volume I, pages 1–29. World Scientific Publ., Singapore, 1994.
- [19] S. Benferhat, D. Dubois, J. Lang, H. Prade, A. Saffiotti, and P. Smets. Reasoning under inconsistency based on implicitly-specified partial qualitative probability relations : A unified framework. In *Proceedings of the 15th national/10th Conference on Artificial Intelligence/Innovative Applications of Artificial Intelligence (AAAI'98/IAAI'98)*, pages 121–126, 1998.
- [20] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Argumentative inference in uncertain and inconsistent knowledge bases. In *Proceedings of Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 411–419, 1993.
- [21] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Some syntactic approaches to the handling of inconsistent knowledge bases : A comparative study, part 1 / the flat case. *Studia Logica*, (58) :17–45, 1997.
- [22] S. Benferhat and L. Garcia. Handling locally stratified inconsistent knowledge bases. *Studia Logica Journal*, 70 :77–104, 2002.

- [23] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. A possibilistic handling of partially ordered information. In *The Nineteenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'03)*, pages 29–36. Morgan Kaufmann Publishers, 2003.
- [24] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. Revision of partially ordered information : Axiomatization, semantics and iteration. In *Proceedings of 19th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 376–381, Edinburgh, 2005. Professional Book Center.
- [25] A. Bernaras, I. Laresgoiti, and J. Corera. Building and reusing ontologies for electrical network applications. In Wolfgang Wahlster, editor, *Proceedings of the 12th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 96)*, pages 298–302, Budapest, Hungary, 1996. Wiley.
- [26] P. Besnard and A. Hunter. *Elements of Argumentation*. The MIT Press, 2008.
- [27] I. Bloch and J. Lang. Towards mathematical morpho-logics. pages 367–380, 2002.
- [28] A. Bochman. A foundational theory of belief and belief change. *Artificial Intelligence*, 108(1-2) :309–352, 1999.
- [29] A. Bochman. A foundationalist view of the agm theory of belief change. *Artificial Intelligence*, 116(1-2) :237–263, 2000.
- [30] A. Bochman. *A logical theory of nonmonotonic inference and belief change*. Springer-Verlag, 2001.
- [31] C. Bock, A. Fokoue, P. Haase, R. Hoekstra, I. Horrocks, A. Ruttenberg, U. Sattler, and M. Smith. Owl 2 web ontology language structural specification and functional-style syntax, June 2009.
- [32] R. Booth. On the logic of iterated non-prioritised revision. In *In Conditionals, Information and Inference – Selected papers from the Workshop on Conditionals, Information and Inference*, pages 86–107. Springer-Verlag, 2002.
- [33] R. Booth and T. Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 26(1) :127–151, 2006.
- [34] R. Booth and A. Nittka. Reconstructing an agent’s epistemic state from observations about its beliefs and non-beliefs. *Journal of Logic and Computation*, 18(5) :755–782, 2008.
- [35] A. Borgida. Language features for flexible handling of exceptions in information systems. *ACM Trans. Database Syst.*, 10(4) :565–603, 1985.
- [36] S. Borgo, N. Guarino, and C. Masolo. Stratified ontologies : The case of physical objects. In *Proceedings of the Workshop on Ontological Engineering. Held in conjunction with ECAI'96.*, pages 5–15, Budapest, 1996.
- [37] W. N. Borst. *Construction of Engineering Ontologies for Knowledge Sharing and Reuse*. PhD thesis, Universiteit Twente, 1997.
- [38] C. Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In *Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial intelligence (IJCAI'93)*, pages 519–525, San Francisco, CA, USA, 1993. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

- [39] C. Boutilier and M. Goldszmidt. Revision by conditional beliefs. In *Proceedings of the 11th National Conference on Artificial Intelligence (AAAE93)*, pages 649–654, Washington, DC, 1993.
- [40] R. J. Brachman and J. G. Schmolze. An overview of the KL-ONE knowledge representation system. *Cognitive Science*, 9(2) :171–216, 1985.
- [41] G. Brewka. Nonmonotonic logics - a brief overview. *AI Communications*, 2(2) :88–97, 1989.
- [42] G. Brewka. Preferred sutheories : an extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.
- [43] R. Bruni. Approximating minimal unsatisfiable subformulae by means of adaptive core search. *Discrete Applied Mathematics*, 130(2) :85–100, 2003.
- [44] R. Bruni. On exact selection of minimally unsatisfiable subformulae. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 43(1-4) :35–50, 2005.
- [45] C. Cayrol. Un modèle logique général pour le raisonnement révisable. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 6(3) :255–284, 1992.
- [46] C. Cayrol, V. Royer, and C. Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. In *Advanced Methods in Artificial Intelligence (IPMU'92)*, pages 13–22, Berlin, 1992. Springer Verlag.
- [47] B. Chandrasekaran, J. R. Josephson, and V. R. Benjamins. What are ontologies, and why do we need them? *IEEE Intelligent Systems*, 14(1) :20–26, 1999.
- [48] A. Colmerauer and P. Roussel. The birth of prolog. In *HOPL Preprints*, pages 37–52, 1993.
- [49] M. Dalal. Investigations into a theory of knowledge base revision. In *Proceedings of the 7th National Conference on Artificial Intelligence*, pages 475–479, 1988.
- [50] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89(1-2) :1–29, 1997.
- [51] M. Davis and H. Putnam. A computing procedure for quantification theory. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 7(3) :201–215, 1960.
- [52] J. de Kleer. Local methods for localizing faults in electronic circuits. In *MIT AI Memo 394*. Cambridge, 1976.
- [53] J.-P. Delahaye. *Outils logiques pour l'intelligence artificielle*. Eyrolles, Paris, 1986.
- [54] J. P. Delgrande, D. Dubois, and J. Lang. Iterated revision as prioritized merging. In Patrick Doherty, John Mylopoulos, and Christopher A. Welty, editors, *Proceedings of 10th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 210–220. AAAI Press, 2006.
- [55] D. Mc Dermott and J. Doyle. Non-monotonic logic i. *Artificial Intelligence*, 13 :41–72, 1980.

- [56] P. Drap, J.-C. Chambelland, J. Seinturier, M. Sérayet, and K. Hanke. D2.5 prototypal software for semi automated digitalization method. Technical report, Deliverable, VENUS project, July 2008.
- [57] P. Drap and P. Grussenmeyer. Arpenteur, an architectural photogrammetry network for education and research. In *ISPRS Comm. V Symposium*, number XXXII part 5, pages 537–542. Int. Arch. of Photogrammetry and Remote Sensing, 1998.
- [58] P. Drap and P. Grussenmeyer. A digital photogrammetric workstation on the web. *Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 55(1) :48–58, février 2000.
- [59] P. Drap, J. Seinturier, and P. Gambogi. D6.2 tuscany : Data completed. Technical report, Deliverable, VENUS project, July 2007.
- [60] D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Beyond min aggregation in multicriteria decision : (ordered) weighted min, disci-min, leximin. pages 181–192, 1997.
- [61] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency in possibilistic knowledge bases : To live with it or not live with it. In L.A. Zadeh and J. Kacprzyk, editors, *Fuzzy Logic for the Management of Uncertainty*, pages 335–351. Wiley, New York, 1992.
- [62] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming.*, 3 :439–513, 1994.
- [63] D. Dubois and H. Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artificial Intelligence*, 50(2) :223–239, 1991.
- [64] D. Dubois and H. Prade. Belief change and possibility theory. In Peter Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.
- [65] D. Dubois and H. Prade. Belief revision with uncertain inputs in the possibilistic setting. In *Proceedings of the 12th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'96)*, pages 236–243. Morgan Kaufmann, 1996.
- [66] T. Eiter, G. Ianni, T. Lukasiewicz, R. Schindlauer, and H. Tompits. Combining answer set programming with description logics for the semantic web. *Artificial Intelligence*, 172(12-13) :1495–1539, 2008.
- [67] L. Farinos Del Cerro, W. Fernandez de la Vega, and A. Hesnard. Contribution à l'établissement d'une typologie des amphores dites "dressel 2-4". In *Méthodes classiques et méthodes formelles dans l'étude des amphores, 27-29 mai 1974 Actes du colloque de Rome*, volume 32, pages 179–206. Ecole Française de Rome, 1977.
- [68] E. L. Fermé and S. O. Hansson. Selective revision. *Studia Logica*, 63(3) :331–342, 1999.
- [69] M. Freund. On the revision of preferences and rational inference processes. *Artificial Intelligence*, 152(1) :105–137, 2004.
- [70] D. M. Gabbay. Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems. pages 439–457, 1985.

- [71] P. Gambogi, R. Bonaiuti, E. Africano, G. Conte, D. Scaradozzi, S.M. Zanoli, L. Gambella, A. Caiti, P. Drap, and O. Papini. D6.1 tuscany : Photogrammetric and bathymetric sonar survey. Technical report, Deliverable, VENUS project, 2007.
- [72] P. Gärdenfors. *Knowledge in flux : modeling the dynamics of epistemic states*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.
- [73] P. Gärdenfors and D. Makinson. Nonmonotonic inference based on expectations. *Artificial Intelligence*, 65 :197–245, 1994.
- [74] J.-C. Gardin. *Une archéologie théorique*. Paris, 1979.
- [75] J.-C. Gardin, O. Guillaume, P. Herman, A. Hesnard, M.-S. Lagrange, M. Renaud, and E. Zadora-Rio. *Systèmes experts et sciences humaines : le cas de l'archéologie*. Eyrolles, Paris, 1987.
- [76] F. Gauch, P. Drap, J. Seinturier, L. Long, P. Gambogi, D. Scaradozzi, L. Sebastião, and K. Hanke. D6.6 cnrs france : Data completed. Technical report, Deliverable, VENUS project, June 2009.
- [77] M. Gebser, B. Kaufmann, A. Neumann, and T. Schaub. clasp : A conflict-driven answer set solver. In *Proceedings of Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning (LPNMR'07)*, pages 260–265. Springer, 2007.
- [78] M. Gebser, B. Kaufmann, A. Neumann, and T. Schaub. Conflict-driven answer set solving. In *Proceedings of the 20th international joint conference on Artificial intelligence (IJCAI'07)*, pages 386–392, San Francisco, CA, USA, 2007. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [79] M. Gelfond and V. Lifschitz. The stable model semantics for logic programming. In *Proceedings of the 5th International Conference on Logic Programming*, pages 1070–1080. MIT Press, 1988.
- [80] M. R. Genesereth and R. E. Fikes. *Knowledge Interchange Format*, 1992.
- [81] E. Giunchiglia, Y. Lierler, and M. Maratea. Sat-based answer set programming. In *Proceedings of the 19th national Conference on Artificial intelligence (AAAI'04)*, pages 61–66. AAAI Press / The MIT Press, 2004.
- [82] P. Gochet and P. Gribomont. *Logique : méthodes pour l'informatique fondamentale*. Hermès, Paris, 1990.
- [83] A. Gómez-Pérez. Ontological engineering : a state of the art. *Expert Update*, 2(3), 1999.
- [84] J. N. Green, P. E. Baker, B. Richards, and D. M. Squire. Simple underwater photogrammetric techniques. *Archaeometry*, 13(2) :221–232, 2007.
- [85] E. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Extracting muses. In *Proceedings of the 17th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'06)*, pages 387–391, Trento, Italy, 2006.
- [86] E. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Local-search extraction of muses. *Constraints*, 12(3) :325–344, 2007.

- [87] E. Grégoire, B. Mazure, and C. Piette. Using local search to find msses and muses. *European Journal of Operational Research*, 199(3) :640–646, 2009.
- [88] R. Greiner, B. A. Smith, and R. W. Wilkerson. A correction to the algorithm in reiter’s theory of diagnosis. *Artificial Intelligence*, 41(1) :79–88, 1989.
- [89] A. Grove. Two modellings for theory change. *Journal of Philosophical Logic*, 17(2), 1988.
- [90] T. R. Grüber. Towards principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. In N. Guarino and R. Poli, editors, *Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge Representation*, Deventer, The Netherlands, 1993. Kluwer Academic Publishers.
- [91] T. R. Grüber. A translation approach to portable ontology specifications. *Journal of Knowledge Acquisition*, 5(2) :199–220, 1993.
- [92] N. Guarino. Semantic matching : Formal ontological distinctions for information organization, extraction, and integration. In M. T. Pazienza, editor, *Information Extraction : A Multidisciplinary Approach to an Emerging Information Technology*, pages 139–170, London, UK, 1997. Springer-Verlag.
- [93] N. Guarino. Understanding, building and using ontologies : A commentary to üsing explicit ontologies in kbs development; by van heijst, schreiber, and wilinga. *International Journal of Human and Computer Studies*, 46(2-3) :293–310, 1997.
- [94] N. Guarino. Formal ontology and information systems. pages 3–15. IOS Press, 1998.
- [95] N. Guarino and P. Giaretta. Ontologies and knowledge bases : Towards a terminological clarification. *Towards Very Large Knowledge Bases : Knowledge Building and Knowledge Sharing*, pages 25–32, 1995.
- [96] A. Guénoche and A. Hesnard. Typologies d’amphores romaines par une méthode logique de classification. In *Computers and the Humanities 17*, pages 185–198. 1983.
- [97] V. Haarslev and R. Möller. Racer system description. In *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR’01)*, pages 701–706, London, UK, 2001. Springer-Verlag.
- [98] J. Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered structures. In *Proceedings of UAI’96*, pages 299–306, 1996.
- [99] J. Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 7 :1–24, 1997.
- [100] E. Hamon and A. Hesnard. Problèmes de documentation et de description relatifs à un corpus d’amphores romaines. In *Méthodes classiques et méthodes formelles dans l’étude des amphores, 27-29 mai 1974, Actes du colloque de Rome*, volume 32, pages 9–16. Ecole Française de Rome, 1977.

- [101] S. O. Hansson. Semi-revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 7(2), 1997.
- [102] A. Hesnard. L'épave romaine grand ribaud d. *Archaeonautica*, 1988.
- [103] S. Heymans and D. Vermeir. Integrating description logics and answer set programming. In François Bry, Nicola Henze, and Jan Maluszynski, editors, *Proceedings of International Workshop on Principles and Practice of Semantic Web Reasoning (PPSWR'03)*, pages 146–159. Springer, 2003.
- [104] I. Horrocks. Using an expressive description logic : FaCT or fiction? In *Proceedings of the 6th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 636–647, 1998.
- [105] I. Horrocks and P. Patel-Schneider. Reducing owl entailment to description logic satisfiability. In *Journal of Web Semantics*, pages 17–29. Springer, 2003.
- [106] I. Horrocks, U. Sattler, and S. Tobies. Practical reasoning for expressive description logics. In Harald Ganzinger, David McAllester, and Andrei Voronkov, editors, *Proceedings of the 6th International Conference on Logic for Programming and Automated Reasoning (LPAR'99)*, number 1705, pages 161–180. Springer-Verlag, 1999.
- [107] J. Hué. *Fusion de bases de croyances et programmation logique avec sémantique des modèles stables*. PhD thesis, Université du Sud Toulon Var, 2009.
- [108] J. Hué, E. Würbel, and O. Papini. Removed sets fusion : Performing off the shelf. In Malik Ghallab, Constantine D. Spyropoulos, Nikos Fakotakis, and Nikos Avouris, editors, *Proceedings of the 18th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, 2008.
- [109] Anthony Hunter. Paraconsistent logics. In *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertain Information*, pages 11–36. Kluwer, 1996.
- [110] ICOM-CIDOC. Definition of the cidoc conceptual reference model. In *ICOM/-CIDOC version 5.0.1*, 2009.
- [111] L. Jin, M. Ikeda, and R. Mizoguchi. Ontological issues on computer-based training. In *Workshop on Knowledge-based Instructional Systems in an Industrial Setting (PRICAI'96)*, pages 55–66, 1996.
- [112] Y. Jin and M. Thielscher. Iterated belief revision, revised. In *Proceedings of the 19th International Joint Conference on Artificial intelligence (IJCAI'05)*, pages 478–483, San Francisco, CA, USA, 2005. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [113] U. Junker and G. Brewka. Handling partially ordered defaults in tms. In *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.
- [114] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3) :263–294, 1991.
- [115] M. Kifer, G. Lausen, and J. Wu. Logical foundations of object-oriented and frame-based languages. Technical report, 1990.

- [116] A. Kim and R. Eustice. Pose-graph visual slam with geometric model selection for autonomous underwater ship hull inspection. In *Proceedings of the 2009 IEEE/RSJ international conference on Intelligent robots and systems (IROS'09)*, pages 1559–1565, Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE Press.
- [117] S. C. Kleene. *Logique mathématique*. Epistémologie. Jacques Gabay, Paris, 1987.
- [118] S. Konieczny and R. Pino Pérez. A framework for iterated revision. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 10(3-4) :339–367, 2000.
- [119] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Improvement operators. In *Proceedings of 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 177–186, 2008.
- [120] K. Kraus. *Photogrammetry*, volume 1. Dümmler/Bonn, 1997.
- [121] S. Kraus, D. Lehmann, and M. Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 144 :167–207, 1990.
- [122] M.-C. Lagasque-Schiex. *Contribution à l'étude des relations d'inférence non-monotone combinant inférence classique et préférences*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, décembre 1995.
- [123] M.-C. Lagasque-Schiex. *Traitement de l'incohérence dans le raisonnement non monotone : de la restauration de cohérence à l'argumentation. Inconsistency handling in nonmonotonic reasoning : from consistency restoration to argumentation*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, juillet 2009.
- [124] S. Lagrue. *Gestion d'informations partiellement ordonnées : raisonnement, révision et information géographique*. PhD thesis, Université du Sud, Toulon - Var, décembre 2003.
- [125] J. Lang and P. Marquis. Complexity results for independence and definability in propositional logic. In *Proceedings of the 6th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 356–367, San Francisco, CA, juin 1998. Morgan Kaufmann.
- [126] J. Lang and P. Marquis. Resolving inconsistencies by variable forgetting. In *Proceedings of the 8th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02)*, pages 239–250, San Francisco, France, avril 2002. Morgan Kaufmann Publishers.
- [127] D. Lehmann. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 15(1) :61–82, 1995.
- [128] D. Lehmann and M. Magidor. What does a conditional knowledge base entail. *Artificial Intelligence*, 55 :1–60, 1992.
- [129] D. B. Lenat and R. V. Guha. *Building Large Knowledge-Based Systems ; Representation and Inference in the Cyc Project*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1990.
- [130] I. Levi. *The enterprise of knowledge*, 1980.

- [131] D. K. Lewis. *Counterfactuals*. Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1973.
- [132] M. H. Liffiton and K. A. Sakallah. On finding all minimally unsatisfiable subformulas. In *Proceedings of the 8th International Conference of Theory and Applications of Satisfiability Testing (SAT'05)*, pages 173–186, 2005.
- [133] V. Lifschitz. Action languages, answer sets and planning. In *The Logic Programming Paradigm : a 25-Year Perspective*, pages 357–373. Springer Verlag, 1999.
- [134] F. Lin and R. Reiter. Forget it! In *Proceedings of the AAAI Fall Symposium on Relevance*, pages 154–159, 1994.
- [135] F. Lin and Y. Zhao. Assat : Computing answer sets of a logic program by sat solvers. In *Artificial Intelligence*, pages 112–117, 2002.
- [136] L. Long. D5.2 start of web publication on the city of marseille official web portal. Technical report, Deliverable, VENUS project, july 2008.
- [137] V. Loureiro, J. Gachet Alves, A. Pascoal, G. Conte, D. Scaradozzi, P. Drap, and M. Sérayet. D6.3 mc-sg portugal : Photogrammetric and bathymetric sonar survey completed. Technical report, Deliverable, VENUS project, January 2008.
- [138] V. Loureiro, D. Scaradozzi, A. Pascoal, P. Drap, and J. Seinturier. D6.4 mc-sg portugal : Data completed. Technical report, Deliverable, VENUS project, July 2008.
- [139] I. Lynce and J. P. Marques-Silva. On computing minimum unsatisfiable cores. In *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, pages 305–310, May 2004.
- [140] B. Mazure, L. Saïs, and E. Grégoire. Boosting complete techniques thanks to local search. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (AMAI)*, 22 :309–322, 1998.
- [141] J. McCarthy. Circumscription - a form of non-monotonic reasoning, 1980.
- [142] J. McCarthy. Applications of circumscription to formalizing common sense knowledge. *Artificial Intelligence*, 59 :23–26, 1986.
- [143] A. T. McCray and S. J. Nelson. The representation of meaning in the umls. *Methods of information in medicine*, 34 :193–201, 1995.
- [144] D. McDermott. Nonmonotonic logic ii : Nonmonotonic modal theories. *ACM*, 29(1) :33–57, 1982.
- [145] T. Meyer. Merging epistemic states. In *Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence*, pages 286–296, 2000.
- [146] M. Minsky. A framework for representing knowledge. Technical report, Cambridge, MA, USA, 1974.
- [147] R. Mizoguchi and M. Ikeda. Towards ontology engineering. Technical Report AI-TR-96-1, The Institute of Scientific and Industrial Research, Osaka University, 1996.

- [148] R. Mizoguchi, Y. Tijerino, and M. Ikeda. Task ontology and its use in a task analysis interview system – two-level mediating representation in multis. In *Proceedings of the 2nd Japanese (JKAW '92)*, pages 185–198, 1992.
- [149] R. Mizoguchi, J. Vanwelkenhuysen, and M. Ikeda. Task ontology for reuse of problem solving knowledge. In *Knowledge Building & Knowledge Sharing (KB&KS'95) (2nd International Conference on Very Large-Scale Knowledge Bases)*, pages 46–59, 1995.
- [150] R. C. Moore. Semantical considerations on nonmonotonic logic. *Artificial Intelligence*, 25(1) :75–94, 1985.
- [151] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making (Econometric Society Monographs)*. Cambridge University Press, 1988.
- [152] A. Napoli. Une introduction aux logiques de descriptions. Technical Report RR-3314, INRIA, 1997.
- [153] B. Nebel. A knowledge level analysis of belief revision. In *Proceedings of the 1st International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'89)*, pages 301–311, San Francisco, CA, USA, 1989. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [154] B. Nebel. Belief revision and default reasoning : Syntax-based approaches. pages 417–428. Morgan Kaufmann, 1991.
- [155] B. Nebel. Base revision operations and schemes : Semantics, representation, and complexity. In *Proceedings of the 11th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'94)*, pages 341–345. John Wiley & Sons, 1994.
- [156] R. Neches, R. Fikes, T. Finin, T. R. Grüber, R. Patil, T. Senator, and W. Swartout. Enabling technology for knowledge sharing. *AI Magazine*, 12(3) :36–56, August 1991.
- [157] I. Niles and A. Pease. Towards a standard upper ontology. In *Proceedings of the international conference on Formal Ontology in Information Systems (FOIS'01)*, pages 2–9, New York, NY, USA, 2001. ACM.
- [158] N. F. Noy and C. D. Hafner. The state of the art in ontology design : A survey and comparative review. *AI Magazine*, 18(3) :53–74, 1997.
- [159] N. F. Noy and D. L. McGuinness. Ontology development 101 : A guide to creating your first ontology. Technical Report SMI-2001-0880, Stanford University School of Medicine, 2001.
- [160] Y. Oh, M. N. Mneimneh, Z. S. Andraus, K. A. Sakallah, and I. L. Markov. Amuse : a minimally-unsatisfiable subformula extractor. In *Proceedings of the 41st annual Design Automation Conference (DAC'04)*, pages 518–523, New York, NY, USA, 2004. ACM.
- [161] O. Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In Mary-Anne Williams and Hans Rott, editors, *Frontiers of Belief Revision*, pages 279–301. Kluwer Academic Press, 2001.

- [162] O. Papini, O. Curé, P. Drap, B. Fertil, J. Hué, D. Roussel, M. Sérayet, J. Seinturier, and E. Würbel. D3.6 reasoning with archaeological ontologies. technical report and prototype of software for the reversible fusion operations. Technical report, Deliverable, VENUS project, july 2009.
- [163] O. Papini, O. Curé, P. Drap, M. Sérayet, and J. Seinturier. D3.5 knowledge based photogrammetric software interface 3. Technical report, Deliverable, VENUS project, january 2009.
- [164] O. Papini, E. Würbel, R. Jeansoulin, O. Curé, P. Drap, M. Sérayet, J. Hué, J. Seinturier, and L. Long. D3.4 representation of archaeological ontologies 1. Technical report, Deliverable, VENUS project, July 2008.
- [165] O. Papini, E. Würbel, R. Jeansoulin, P. Drap, M. Sérayet, J. Hué, and J. Seinturier. D3.2 archaeological ontologies and knowledge based photogrammetric software interface 1. Technical report, Deliverable, VENUS project, July 2007.
- [166] P. Patel-Schneider and B. Swartout. Description logic specification from the krss effort (draft). In *Group, University of Manchester*, 1993.
- [167] C. Piette. *Techniques algorithmiques pour l'extraction de formules minimales inconsistantes*. PhD thesis, Lens, novembre 2007.
- [168] C. Piette, Y. Hamadi, and L. Saïs. Efficient combination of decision procedure for mus computation. In *Proceedings of the 7th International Symposium on Frontiers of Combining Systems (FroCos'09)*, pages 335–349, Trento, Italy, 2009. LNCS.
- [169] G. Pinkas and R. P. Loui. Reasoning from inconsistency : A taxonomy of principles for resolving conflict. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'92)*, pages 709–719, 1992.
- [170] M. R. Quillian. Word concepts : A theory and simulation of some basic semantic capabilities. In *Readings in Knowledge Representation*, pages 97–118. Kaufmann, 1985.
- [171] R. Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, 13(1-2) :81–132, 1980.
- [172] R. Reiter. A theory of diagnosis from first principles. *Artificial Intelligence*, 32(1) :57–95, 1987.
- [173] N. Rescher and R. Manor. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1 :179–219, 1970.
- [174] U. Sattler, D. Calvanese, and R. Molitor. Relationships with other formalisms. In Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors, *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation, and Applications*, chapter 4. Cambridge University Press, 2003.
- [175] M. Schmidt-Schaubß and G. Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artificial Intelligence*, 48(1) :1–26, 1991.

- [176] J. Seinturier. *Fusion de connaissances : Applications aux relevés photogrammétriques de fouilles archéologiques sous-marines*. PhD thesis, Université du Sud Toulon Var, décembre 2007.
- [177] A.K. Sen. Social choice theory. In K.J. Arrow and M.D. Intriligator, editors, *Handbook of mathematical economics*, volume 3, pages 1073–1181. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [178] M. Sérayet. Raisonement à partir d'informations partiellement ordonnées : Application à l'information archéologique. In *Journées du Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (JDL6'08)*, juin 2008.
- [179] M. Sérayet. Raisonement à partir d'informations partiellement ordonnées : Application à l'information archéologique. In *Manifestation des Jeunes Chercheurs en Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication (MAJECSTIC'08)*, octobre 2008.
- [180] M. Sérayet, O. Curé, P. Drap, O. Papini, and J. Seinturier. Wp3r2 application ontology for archaeological information - specification, July 2009.
- [181] M. Sérayet, O. Curé, P. Drap, O. Papini, and J. Seinturier. Wp3r3 encoding of the application ontology for archaeological information into description logic - specification, July 2009.
- [182] M. Sérayet, P. Drap, B. Fertil, and O. Papini. Wp3r5 inconsistency handling for partially preordered archaeological information, July 2009.
- [183] M. Sérayet, P. Drap, and O. Papini. Encoding the revision of partially preordered information in answer set programming. In Claudio Sossai and Gaetano Chemello, editors, *Proceedings of 10th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'09)*, pages 421–433, 2009.
- [184] M. Sérayet, P. Drap, and O. Papini. Révision par R-ensembles de bases de croyances partiellement pré-ordonnées. In *Journées Nationales de l'Intelligence Artificielle Fondamentale (IAF'09)*, octobre 2009.
- [185] M. Sérayet, P. Drap, and O. Papini. Wp3r6 lexicographic inference for partially preordered archaeological information, July 2009.
- [186] M. Sérayet, P. Drap, and O. Papini. Wp3r8 reasoning with the application ontology for archaeological information, July 2009.
- [187] Y. Shoham. *Reasoning about change : Time and Causation from the standpoint of Artificial Intelligence*. MIT press, 1988.
- [188] P. Simons, I. Niemelá, and T. Sooinen. Extending and implementing the stable model semantics. *Artificial Intelligence*, 138(1-2) :181–234, 2002.
- [189] E. Sirin, B. Parsia, B. C. Grau, A. Kalyanpur, and Y. Katz. Pellet : A practical OWL-DL reasoner. *Web Semantics*, 5(2) :51–53, 2007.
- [190] Léa Sombé, editor. *Revision and updating in knowledge bases*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1994.

- [191] J. F. Sowa. *Conceptual Structures : Information Processing in Mind and Machine*. Addison-Wesley, Reading, MA., USA, 1984.
- [192] J. F. Sowa. Semantic networks. In Stuart C. Shapiro, editor, *Encyclopedia of Artificial Intelligence*. Wiley, second edition, 1992.
- [193] J. F. Sowa. *Knowledge Representation : Logical, Philosophical, and Computational Foundations*. Course Technology, 1999.
- [194] W. Spohn. Ordinal conditional functions : A dynamic theory of epistemic states. In W.L. Harper and B. Skyrms, editors, *Causation in decision, belief change, and statistics*, volume II, pages 105–134. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [195] R. Studer, V. R. Benjamins, and D. Fensel. Knowledge engineering : Principles and methods. *DKE*, 25(1-2) :161–197, 1998.
- [196] B. Swartout, R. Patil, K. Knight, and T. Russ. Toward distributed use of large-scale ontologies. *Spring Symposium Series on Ontological Engineering*, pages 138–148, 1997.
- [197] T. Syrjänen. Lparse user’s manual, 2002.
- [198] A. Tchernia, P. Pomey, and A. Hesnard. L’épave romaine de la madrague de giens (var). *Supplément à Gallia N ° 34*, 1978.
- [199] A. Thayse et al. *Approche logique de l’intelligence artificielle, Tome 1*. Informatique. Dunod, Paris, 1990.
- [200] D. Tsarkov and I. Horrocks. Proceedings of the 2004 description logic workshop (dl 2004). pages 41–50, 2004.
- [201] M. Uschold and M. Grüninger. Ontologies : Principles, methods and applications. *Knowledge Engineering Review*, 11 :93–136, 1996.
- [202] G. van Heijst, A. Th. Schreiber, and B. J. Wielinga. Using explicit ontologies in kbs development. *International Journal of Human and Computer Studies*, 46(2-3) :183–292, 1997.
- [203] M.-A. Williams. Transmutations of knowledge systems. In *Proceedings of the 4th International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR’94)*, pages 619–629, 1994.
- [204] M.-A. Williams. Iterated theory base change : a computational model. In *Proceedings of the 14th international joint conference on Artificial intelligence (IJCAI’95)*, pages 1541–1547, San Francisco, CA, USA, 1995. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [205] E. Würbel. *Révision de connaissances géographiques*. Doctorat informatique, Université de Provence, Marseille, décembre 2000.
- [206] E. Würbel, O. Papini, and R. Jeansoulin. Revision : an application in the framework of gis. In *Proceedings of the 7th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR’00)*, pages 505–516, Breckenridge, Colorado, USA, avril 2000.

- 
- [207] S. Yahi, S. Benferhat, S. Lagrue, M. Sérayet, and O. Papini. A lexicographic inference for partially preordered belief bases. In Gerhard BREWKA and Jérôme LANG, editors, *Proceedings of 11th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 507–516, september 2008.
- [208] S. Yahi, S. Benferhat, S. Lagrue, M. Sérayet, and O. Papini. Une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement pré-ordonnées. In *Journées Nationales de l'Intelligence Artificielle Fondamentale (IAF'08)*, octobre 2008.
- [209] S. Yahi, M. Sérayet, S. Lagrue, and O. Papini. Une inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. *Information-Interaction-Intelligence (Revue I3)*, 9(1), 2009.
- [210] L. Zhang and S. Malik. Extracting small unsatisfiable cores from unsatisfiable boolean formula. In *the 6th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, 2003.



## Annexe A

# Spécification de l'ontologie d'application

### A.1 Description des concepts et des attributs

#### **ID ITEM**

Super concept de : ITEM  
MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM  
AMPHORA ITEM  
AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note : définit un objet identifié.

Attributs : name : chaîne de caractères, nom de l'item.  
idn : entier, identifiant numérique de l'instance.

#### **CONNECTABLE OBJECT**

Super concept de : ITEM  
MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM  
AMPHORA ITEM  
AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note : définit un objet qui est capable de communiquer avec d'autres objets.

### **ITEM**

Sous concept de : ID ITEM  
CONNECTABLE OBJECT

Super concept de : MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM  
AMPHORA ITEM  
AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note : définit un objet qui est identifié et capable de communiquer avec d'autres objets.

### **SPATIAL ITEM**

Super concept de : MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM  
AMPHORA ITEM  
AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note : définit un objet qui a des propriétés spatiales.

### **MEASURABLE ITEM**

Sous concept de : ID ITEM  
CONNECTABLE OBJECT  
ITEM  
SPATIAL ITEM

Super concept de : ARCHAEOLOGICAL ITEM  
AMPHORA ITEM  
AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note :	définit un objet qui peut être mesuré en utilisant la photogrammétrie c'est-à-dire que l'objet possède des zones mesurables.
Attributs :	<p>surveyID : chaîne de caractères, identifiant du relevé.</p> <p>timekey : entier long, clé unique marquant la milliseconde à laquelle l'objet a été créé garantissant ainsi l'unicité de chaque item créé avec Arpenteur. Cette clé ne peut être modifiée.</p> <p>description : chaîne de caractères, description d'un item mesurable.</p> <p>remark : chaîne de caractères, remarque possible sur un item mesurable.</p>
Relations :	<p>has_metrology : METROLOGY</p> <p>has_survey_session_data : SURVEY SESSION DATA</p>

### ARCHAEOLOGICAL ITEM

Sous concept de :	<p>ID ITEM</p> <p>CONNECTABLE OBJECT</p> <p>ITEM</p> <p>SPATIAL ITEM</p> <p>MEASURABLE ITEM</p>
Super concept de :	<p>AMPHORA ITEM</p> <p>AMPHORA</p> <p>AMPHORA FRAGMENT</p>
Note :	définit un objet qui a des propriétés archéologiques.
Attributs :	<p>excavationID : chaîne de caractères, identifiant de l'item pendant la fouille.</p> <p>typology : chaîne de caractères, typologie de l'item archéologique, selon l'objet instancié, cet attribut prendra ces valeurs dans les ensembles suivants :</p> <p>si l'objet est une amphore ou un fragment d'amphore : Dressel7-11, Dressel2-4 short, Dressel2-4 long, Dressel20, Gauloise3, Haltern70, Pascual1, Beltran2B, Dressel1A ;</p> <p>si l'objet est une brique : Sesimbra Brick ;</p> <p>si l'objet est une tuile : Sesimbra Roman Tile.</p>

Relations : has\_documentation : DOCUMENTATION

### **AMPHORA ITEM**

Sous concept de : ID ITEM  
CONNECTABLE OBJECT  
ITEM  
SPATIAL ITEM  
MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM

Super concept de : AMPHORA  
AMPHORA FRAGMENT

Note : définit un objet qui est une amphore. Ce concept regroupe les amphores entières et les fragments d'amphores.

Attributs : fragmentNumber : entier, nombre de fragments identifiés si l'amphore est cassée.  
type : chaîne de caractères, état physique de l'item.  
model : chaîne de caractères, sous type local si nécessaire.

Relations : has\_amphora\_metrology : AMPHORA METROLOGY

### **BRICK ITEM**

Sous concept de : ID ITEM  
CONNECTABLE OBJECT  
ITEM  
SPATIAL ITEM  
MEASURABLE ITEM  
ARCHAEOLOGICAL ITEM

Note : définit un objet qui est une brique.

### **TILE ITEM**

Sous concept de : ID ITEM  
CONNECTABLE OBJECT

ITEM  
 SPATIAL ITEM  
 MEASURABLE ITEM  
 ARCHAEOLOGICAL ITEM

Note : définit un objet qui est une tuile.

Relations : has\_tile\_metrology : TILE METROLOGY

### **AMPHORA**

Sous concept de : ID ITEM  
 CONNECTABLE OBJECT  
 ITEM  
 SPATIAL ITEM  
 MEASURABLE ITEM  
 ARCHAEOLOGICAL ITEM  
 AMPHORA ITEM

Note : définit une amphore entière selon le point de vue d'Arpenteur. Une amphore est considérée comme entière si elle peut être reconstruite complètement.

### **AMPHORA FRAGMENT**

Sous concept de : ID ITEM  
 CONNECTABLE OBJECT  
 ITEM  
 SPATIAL ITEM  
 MEASURABLE ITEM  
 ARCHAEOLOGICAL ITEM  
 AMPHORA ITEM

Note : définit un fragment selon le point de vue d'Arpenteur. Un objet est considéré comme un fragment si il ne peut pas être reconstruit complètement.

### **METROLOGY**

Super concept de : AMPHORA METROLOGY

### TILE METROLOGY

Note : définit des attributs morphologiques communs à tous les items mesurables.

Attributs :  
mass : réel, attribut morphologique, masse de l'item.  
volume : réel, attribut morphologique, volume de l'item.  
totalLength : réel, attribut morphologique, longueur totale de l'item.  
totalHeight : réel, attribut morphologique, hauteur totale de l'item.  
totalWidth : réel, attribut morphologique, largeur totale de l'item.

### AMPHORA METROLOGY

Sous concept de : METROLOGY

Note : définit des attributs morphologiques spécifiques aux items amphores.

Attributs :  
heightRims : réel, attribut morphologique, hauteur des lèvres.  
bodyDiameter : réel, attribut morphologique, diamètre de la panse.  
externalDiameter : réel, attribut morphologique, diamètre externe.  
internalDiameter : réel, attribut morphologique, diamètre interne.  
baseDiameter : réel, attribut morphologique, diamètre du fond.  
pcRims : réel, attribut morphologique, pourcentage des lèvres.  
remainHeight : réel, attribut morphologique, hauteur restante.

### TILE METROLOGY

Sous concept de : METROLOGY

- Note : définit des attributs morphologiques spécifiques aux tuiles. Une tuile est représentée géométriquement comme un tronc de cône.
- Attributs :  
thickness : réel, attribut morphologique, épaisseur de la tuile.  
radiusS : réel, attribut morphologique, rayon de la petite base.  
radiusL : réel, attribut morphologique, rayon de la grande base.

### SURVEY SESSION DATA

- Note : définit des informations sur la session du relevé dans Arpenteur.
- Attributs :  
referenceSystemID : chaîne de caractères, identifiant du système de référence (système dans lequel les coordonnées sont exprimées).  
site : chaîne de caractères, identifiant du site de l'item.  
sub site : chaîne de caractères, identifiant du sous site si nécessaire.  
surveyorName : chaîne de caractères, nom du responsable des fouilles.  
user : chaîne de caractères, identifiant de la personne qui a effectué la restitution depuis l'interface de l'Arpenteur.  
secteur : chaîne de caractères, description du secteur où le site est localisé.  
groundUnit : chaîne de caractères, unité de longueur terrain c'est-à-dire l'unité de mesure utilisée pour les données terrain.  
dimensionUnit : chaîne de caractères, unité de mesure pour les dimensions de l'item mesurable c'est-à-dire l'unité utilisée pour les objets restitués (amphores, tuiles, ...).  
angleUnit : chaîne de caractères, unité d'angle de l'item mesurable.  
massUnit : chaîne de caractères, unité de masse de l'item mesurable.  
volumeUnit : chaîne de caractères, unité de volume de l'item mesurable.  
remark : chaîne de caractères, remarque sur la session du relevé.  
date : date, date de création de item mesurable.

## DOCUMENTATION

- Note : définit des informations archéologiques sur un item archéologique.
- Attributs :
- discoveryLocation : chaîne de caractères, lieu où l'item a été découvert.
  - use : chaîne de caractères, fonction de l'item.
  - description : chaîne de caractères, texte descriptif sur l'item.
  - currentLocation : chaîne de caractères, lieu où se trouve actuellement l'item.
  - comment : chaîne de caractères, commentaire archéologique sur l'item.
  - datation : chaîne de caractères, datation absolue de l'item.

## A.2 Description des relations entre les concepts

### has\_metrology

Domaine : MEASURABLE ITEM

Co-domaine : METROLOGY

Quantification : (1 :1)

Note : Un item mesurable a une métrologie.

### has\_survey\_session\_data

Domaine : MEASURABLE ITEM

Co-domaine : SURVEY SESSION DATA

Quantification : (1 :1)

Note : Un item mesurable item a un ensemble d'informations concernant la session du relevé auquel il appartient.

**has\_documentation**

Domaine :           ARCHAEOLOGICAL ITEM

Co-domaine :       DOCUMENTATION

Quantification :   (1 :1)

Note :              Un item archéologique a une documentation.

**has\_amphora\_metrology**

Domaine :           AMPHORA ITEM

Co-domaine :       AMPHORA METROLOGY

Quantification :   (1 :1)

Note :              Un item amphore a une métrologie d'amphore.

**has\_tile\_metrology**

Domaine :           TILE ITEM

Co-domaine :       TILE METROLOGY

Quantification :   (1 :1)

Note :              Un item tuile a une métrologie de tuile.





## Résumé

La thèse s'inscrit dans le cadre du projet européen VENUS (Virtual ExploratioN of Underwater Sites) n° (IST-034924) qui fournit des méthodes scientifiques et des outils technologiques pour l'exploration virtuelle de sites archéologiques sous-marins. Dans ce contexte, la photogrammétrie est utilisée pour produire des relevés 3D sur les objets. La connaissance sur les objets étudiés provient à la fois de l'archéologie sous-marine et de la photogrammétrie. Nous avons tout d'abord étudié la représentation des connaissances dans ce contexte. Ces informations étant structurées, hiérarchisées et parfois incomparables, nous avons construit une ontologie d'application. Après avoir étudié les formalismes de représentation des ontologies, nous nous sommes particulièrement intéressés aux bases de croyances partiellement préordonnées. Par ailleurs, l'acquisition de données dans VENUS nécessitant l'intervention humaine peut conduire à l'apparition d'incohérence. Nous avons donc étudié le raisonnement à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. Nous avons étendu l'approche des R-ensembles à la restauration de la cohérence. Afin de comparer les sous-ensembles de formules à retirer pour restaurer la cohérence, nous avons introduit le comparateur lexicographique. De plus, d'un point de vue théorique, nous avons proposé un cadre de travail pour la révision de bases de croyances partiellement préordonnées ainsi que deux relations d'inférence lexicographique à partir de bases de croyances partiellement préordonnées. Nous avons fourni pour ces approches une mise en oeuvre en utilisant la programmation logique avec sémantique de modèles stables. Finalement, nous avons mis en oeuvre la méthode de restauration de la cohérence dans le contexte de VENUS, nous l'avons testé sur les relevés photogrammétriques produits à l'issue des missions effectuées lors du projet.

**Mots clés :** restauration de la cohérence, révision, inférence, préordre partiel, R-ensemble.

## Abstract

This PHD has been performed within the European VENUS project (Virtual ExploratioN of Underwater Sites) n° (IST-034924) which aims at providing scientific methodologies and technological tools for the virtual exploration of deep underwater archaeology sites. In this context, photogrammetry is used to produce 3D survey on objects and the knowledge on studied artefacts comes from both underwater archaeology and photogrammetry. We first studied the knowledge representation in this context. The information being structured, hierarchized and sometimes incomparable, we then built an ontology. After studying representation formalisms for ontologies, we focused on partially preordered belief bases. Since data acquisition requires human intervention possibly leading to inconsistency. We then focused on the reasoning from partially preordered belief bases. We extended the Removed Set approach to inconsistency handling. To compare subsets of formulae to remove in order to restore consistency, we introduced the lexicographic comparator. Moreover, from a theoretical point of view, we proposed a new framework for the revision of partially preordered belief bases and two lexicographic inference relations from partially preordered belief bases. We proposed an implementation stemming from Answer Set Programming. Finally, we implemented our inconsistency handling method in the VENUS context and we provided an experimental study on photogrammetric surveys which were produced during missions of the project.

**Keywords :** inconsistency handling, revision, inference, partial preorder, removed set.