AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UNIVERSITÉ

HENRI POINCARÉ – NANCY 1

École Nationale Supérieure des Technologies et Industries du Bois

Laboratoire d'Études et de Recherche sur le Matériau Bois

École doctorale : Ressources Produits Procédés Environnement.

Discipline : Sciences du bois et des fibres

THÈSE CIFRE portée par le CRITT Bois et le Conseil Général des Vosges

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ – NANCY 1

présentée par

Ludovic RESCH

Ingénieur ENSTIB

DÉVELOPPEMENT D'ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION EN BOIS DE PAYS LAMELLÉS ASSEMBLÉS PAR TOURILLONS THERMO-SOUDÉS

Composition du Jury :

Rapporteurs

Robert LE ROY : HDR – Chargé de recherches de l'unité de recherche NAVIER – LCPC – École des Ponts et Chaussées

Patrick RACHER : HDR – Maître de Conférences – Polytech. CLERMONT-FERRAND – Directeur R&D AUBRILAM

Examinateurs

Jean-Michel LEBAN : Directeur de recherches – INRA – LERFOB, Président du jury

Pascal TRIBOULOT : Professeur ENSTIB – UHP NANCY, Directeur de thèse

Jean-François BOCQUET : Maître de Conférences ENSTIB – UHP NANCY, Codirecteur de thèse

Antonio PIZZI : Professeur ENSTIB – UHP NANCY, Codirecteur de thèse

À ma mère,

À mon père,

À mon frère et à ma sœur,

À toutes les personnes qui m'ont soutenu.

"Beware the Jabberwock, my son!
The jaws that bite, the claws that catch!
Beware the Jubjub bird, and shun
The frumious Bandersnatch!"
[Lewis CARROLL, Jabberwocky (1872)]

"As he approaches completion of his dissertation,
time approaches infinity"
[John MADDEN, Proof (2005)]

Version : 2010-10-10 18:26

UNIVERSITÉ

HENRI POINCARÉ – NANCY 1

École Nationale Supérieure des Technologies et Industries du Bois

Laboratoire d'Études et de Recherche sur le Matériau Bois

École doctorale : Ressources Produits Procédés Environnement

Discipline : Sciences du bois et des fibres

THÈSE CIFRE portée par le CRITT Bois et le Conseil Général des Vosges

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ – NANCY 1

présentée par

Ludovic RESCH

Ingénieur ENSTIB

DÉVELOPPEMENT D'ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTION EN BOIS DE PAYS LAMELLÉS ASSEMBLÉS PAR TOURILLONS THERMO-SOUDÉS

Composition du Jury :

Rapporteurs

Robert LE ROY : HDR – Chargé de recherches de l'unité de recherche NAVIER –LCPC – École des Ponts et Chaussées

Patrick RACHER : HDR – Maître de Conférences – Polytech. CLERMONT-FERRAND – Directeur R&D AUBRILAM

Examinateurs

Jean-Michel LEBAN : Directeur de recherches – INRA – LERFOB, Président du jury

Pascal TRIBOULOT : Professeur ENSTIB – UHP NANCY, Directeur de thèse

Jean-François BOCQUET : Maître de Conférences ENSTIB – UHP NANCY, Codirecteur de thèse

Antonio PIZZI : Professeur ENSTIB – UHP NANCY, Codirecteur de thèse

REMERCIEMENTS

Ce travail a été financé sous la forme d'une thèse CIFRE, portée par le CRITT Bois et le Conseil Général des Vosges. Ce travail a été réalisé dans les locaux de l'ENSTIB, du LERMAB et du CRITT Bois à EPINAL dans les VOSGES.

Avant tout, je souhaite remercier Jean-François « Bill » BOCQUET, Maître de conférences à l'ENSTIB, pour avoir accepté de me diriger et de m'avoir guidé dans cette recherche. Son soutien inconditionnel, sa vision exceptionnelle du domaine de la construction, ses idées originales sans limite, sa confiance sans borne et son infinie patience, m'ont permis d'avoir une personne remarquable sur qui compter tout au long de ce travail, et cela m'a permis d'apprendre énormément à ses côtés. Je lui dois tout ce travail, également la rédaction du mémoire aussi, je lui témoigne toute ma reconnaissance. Ce manuscrit lui doit beaucoup, par le temps qu'il y a consacré et la qualité de ses remarques toujours pertinentes et constructives. Je tiens aussi à remercier sa femme, Marianne, pour avoir été toujours attentive, présente et de ses très bonnes idées pour égayer le quotidien. Je la remercie également pour avoir « éradiqué » toutes les fautes de français. Un p'tit coucou et un merci à leur fille, Fantine, pour avoir su inonder de son sourire chaque instant en sa présence.

Je remercie Pascal TRIBOULOT, Professeur et Directeur de l'ENSTIB, d'avoir accepté de me donner l'opportunité de réaliser cette thèse et de sa confiance en moi pour ce travail. Je tiens également à le remercier sincèrement pour m'avoir aidé, malgré les incompatibilités informatiques et autres, pour la rédaction du manuscrit et d'avoir pris de son temps précieux.

Je remercie également Antonio PIZZI, Professeur à l'ENSTIB, de m'avoir également apporté son appui pour l'autre face de la recherche.

Je remercie Jean Michel LEBAN, Directeur de recherche de l'INRA à CHAMPENOU, d'avoir accepté d'être le Président du Jury et d'être particulièrement ouvert sur les travaux réalisés.

Je remercie Robert LE ROY, HDR et Chargé de recherches de l'unité de recherche NAVIER au LCPC, d'avoir rapporté mon mémoire de thèse, de ses remarques pertinentes et judicieuses, et d'être indulgent pour la manière dont la fin de rédaction était menée.

Je remercie Patrick RACHER, HDR et Directeur R&D d'AUBRILAM à CLERMOND-FERRANT, d'avoir aussi accepté de rapporter mon manuscrit et d'être ouvert sur l'aspect environnemental du sujet.

Je remercie le CRITT Bois pour m'avoir accueilli et montré l'aspect industriel, ainsi que d'avoir financé avec le Conseil Général des VOSGES les travaux et notamment la machine prototype. Je tiens à remercier l'ensemble du personnel du CRITT bois, ancien et nouveau, toujours présent pour toutes mes interrogations, particulièrement Jérémie BOUCHER, Philippe THIRIET, Stéphane OHNIMUS, Christophe VAUCOURT et Ludovic GIUDICI.

Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans l'aide sincère et constante des techniciens, notamment Stéphane AUBERT, Gislain COLLIGNON, Dominique DEHARBE, Jean-Jacques BALLAND…

Je remercie l'équipe enseignante ainsi que l'équipe administrative pour toute l'aide et les réponses à mes questions et Christine FIVET pour toute sa gaiété.

Je remercie également l'ensemble des élèves doctorants et chercheurs pour avoir su divertir quelque peu ces années à l'ENSTIB. Je tiens particulièrement à remercier Pascal TOUSSAINT et Iman TAVAKOLI d'avoir toujours été là pour des discussions de tout bord et les repas, notamment le soir à l'ENSTIB. Je les remercie aussi pour leurs aides qu'ils m'ont apportés durant mes années de thèse. Je souhaite remercier aussi Gianluca TONDI et sa femme Veronica, pour ces repas mémorables et ce fameux café italien, ainsi que les bons moments et les vacances (été 2008) dans les pays de la Baltique : ha Riga ! J'ai eu de la chance de croiser la route de Gisèle et Rodrigo LABAT, adorables et « heureux » de vivre à Epinal à des kilomètres du climat exceptionnel de Sao Paulo. Je souhaite également remercier les autres pour leur aide, leur joie de vivre et leur présence tout au long de mon séjour à l'ENSTIB : les belles doctorantes : Hong LEI, Hélisoa Mamy RAPHIDIARISON, Julia BESSIERE, Pantea OMRANI, Paola

NAVARETTE et les doctorants : Gilles HECTOR, Hamid Resa MANSOURI, César CEGOVIA, Rami ABDALLA… Je souhaite remercier de tout cœur Jérôme LEMONON pour m'avoir ouvert les portes du montage vidéo et de la réalisation de films, même moins de 8 heures avant la soutenance ☺, et Xavier Duret qui lui, m'a ouvert les portes du monde de l'animation avec notamment Blender et du partage de la connaissance et de la culture sur le web, merci.

Je remercie Guanben DU, Professeur de Hong LEI en Chine, d'être ouvert et très simple à côtoyer, et d'avoir partager tant de choses.

Je tiens à remercier Carmen CRISTESCU, inventrice du procédé du contreplaqué sans colle, d'avoir partagé énormément et de m'avoir présenté ce pocédé

Je remercie mes amis de la promotion 2005, Christelle GANNE-CHEDEVILLE, Alexandre ROUGIER, Guillaume SIMONIN, mes anciens colocataires Sébastien MORIN et Pierre PILLOT. Je tiens à remercier chaleureusement Yoann QUELLIEN (Responsable informatique chez CADWORK) pour ses connaissances et son aide sans faille tout au long de mes années à l'ENSTIB (et après…).

J'en profite pour remercier la société CADWORK, pour le laptop qui m'a permis de travailler efficacement et presque sans limite.

Je remercie les étudiantes Sandra BARTHES et Marion LEMERCIER pour avoir réalisé la magnifique chaise Zig Zag de l'architecte RIETVELD en tourillons avec la technologie du soudage du bois, j'ai eu beaucoup de plaisir à codiriger votre projet de fin d'études (2008).

Je remercie les étudiants Lionel LEBRAS et Guillaume MENIER (« TigerWood ») pour avoir conçu et réalisé le plancher à lames croisées en utilisant la technologie du soudage du bois avec les tourillons. Merci d'avoir soudé environ 4900 tourillons sur 175 planches et d'avoir passé 51h pour la fabrication. J'ai également eu beaucoup de plaisir à codiriger votre projet de fin d'études (2006).

Je remercie Charles BARTHRAM pour m'avoir aidé en fin de thèse sur la calibration de la machine et la réalisation d'essais de dernières minutes. Merci d'avoir pris de ton temps pour suivre et améliorer mes différents travaux. Je te remercie également pour m'avoir supporté durant les deux derniers mois avant la soutenance, je sais, ce n'était pas facile. Je te souhaite de t'éclater dans tes travaux de thèse.

Je remercie mon ancienne colocataire de bureau, Marion NOEL d'avoir apporté un moment de gaité et de joie dans ce « bocal ». Merci d'avoir été une oreille toujours présente pour toutes mes divagations et mes interrogations.

Je remercie la famille Juin : Maryse, Emmanuelle, Stéphanie, productrice de produits fermiers dont le fameux foie gras, pour les moments passés dans leur ferme en leur compagnie, pour la fiabilité des produits du terroir cathare… Des produits qui me remettaient sur pied lorsque les ténèbres du nord-est restaient trop longtemps. Merci aussi pour tous les moments partagés autour des chevaux, et d'avoir été présentes à des moments clés de ma vie.

Je remercie la famille CAMOREYT : Francis, Nicole et Guillaume pour votre présence et votre aide que se soit pour la voiture (changement de la courroie de distribution), ou pour les questions existentielles. Merci d'avoir prêté vos épaules et votre joie de vivre.

Je remercie ma famille, pour m'avoir soutenue, donnée de bons conseils et pour être toujours là dans les moments difficiles et heureux. Merci Stéphan d'avoir pris du temps et être venu me soutenir.

Je souhaite remercier ma fidèle voiture, 309 Peugeot, pour m'avoir conduit sans limite, même quand tu avais soif, durant mes années à l'ENSTIB. Vogue bien dans le paradis des automobiles.

Je remercie Wolfram Research pour leurs aides et la force du logiciel Mathematica, sans quoi, les généralisations des modèles analytiques ne seraient qu'un doux rêve…

Je remercie abondamment Smiley pour sa motivation et sa foi pour le partage de la connaissance et de la culture (gigapedia, gigle, ebooksclub). Sans ce portail, bien des parties de ce mémoire ne serait pas aussi completes.

Enfin je souhaite remercier la personne responsable de tout, mon ancien voisin, mon ancien colocataire de bureau et mon ami… Je nomme : Aurélien DESPRES, responsable R&D à UNILIN. Il m'a mis sur les rails de la recherche. Il croyait en mes compétences avant même que je vois l'intérêt et l'attrait de ce domaine. C'est lui qui

m’a mis en contact avec Jean-François BOCQUET au cours de ma deuxième année d’école ingénieur à l’ENSTIB pour une éventuelle thèse. Je te remercie, vraiment, et croit en mon amitié absolu. Tu as été la branche qui m’a permis de me sortir du flot de l’incertitude. Je souhaite remercier sa compagne Vanessa GINI pour tout durant leurs années à EPINAL et notamment pour les repas inoubliables et très copieux, ainsi que leurs animaux de compagnie : le lapin, le poisson rouge Shugun. Leurs filles, Emma et Eléonore, sont également des enfants mémorables aux sourires ensoleillés.

Je pris de m’excuser tous ceux que j’ai oublié dans ces remerciements…

Ces années à l’ENSTIB resteront gravés à jamais dans ma mémoire.

Merci.

PRINCIPALES NOTATIONS

Lettres ajourées

$\mathbb{C}$ représente l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{J}$ représente un ensemble d'intervalles, généralement associé à l'indice lui correspondant : $j \in \mathbb{J}$

$\mathbb{N}$ représente l'ensemble des nombres entiers naturels (p.ex. : 1, 2, 3, 4…).

$\mathbb{R}$ représente l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{T}$ représente un ensemble d'intervalles, généralement associé à l'indice lui correspondant : $t \in \mathbb{T}$

$\mathbb{U}$ représente un ensemble d'intervalles, généralement associé à l'indice lui correspondant : $u \in \mathbb{U}$

Lettres rondes

$(\mathcal{A})$ représente le lieu où se trouve le centre d'inertie de la section de la poutre composite $(\mathscr{p})$.

$\mathscr{f}$ paramètre

$(\mathscr{p})$ représente l'ensemble des éléments constituant une poutre composite.

$(\mathcal{E})$ représente un système d'équations à résoudre.

$\mathcal{F}$ représente une fonction

$\mathcal{M}$ représente une matrice

Lettres romaines minuscules

a désigne principalement la distance du centre de gravité d'un élément à l'axe des centres d'inertie $(\mathcal{A})$ de la poutre $(\mathscr{p})$

b représente la largeur de l'élément considéré. Il peut être muni d'un indice qui caractérise l'élément auquel il se rattache.

c représente la raideur par organe des éléments lorsqu'il est muni d'un double indice. Il représente aussi la contreflèche.

d représente une longueur, principalement la position du chargement réparti.

e désigne l'espacement des organes. Il peut aussi désigner les entraxes entre solives et entre entretoises.

f désigne principalement la déformée maximale d'une poutre chargée : la flèche. En indice il caractérise le terme par rapport à la flèche, p.ex. : x_f désigne l'abscisse de la flèche. Il peut aussi représenter la fréquence propre des éléments, les indices indiqueront les harmoniques.

h désigne la hauteur de la section considérée. Il peut être muni d'un indice caractérisant l'élément auquel il appartient.

$i \in [\![1, n]\!]$ représente l'indice généralisé d'un élément de la poutre composite $(\mathscr{p})$.

j représente le nombre complexe $\sqrt{-1}$ et l'indice de multiplication des produits généralisés

k représente un facteur sans unité, il est généralement muni d'un double indice caractérisant l'endroit où il est utilisé.

ℓ représente la bande de chargement sur une poutre.

m représente la masse ou masse spécifique d'un élément. Il représente aussi le moment statique d'une section par rapport à un axe, l'indice caractérisant cet axe.

$n \in \mathbb{N}$ représente le nombre d'éléments constituant une poutre composite $(\mathcal{p})$.

p représente un chargement. Il peut aussi représenter un point muni d'un indice qui le caractérise.

q représente le chargement d'un élément. Lorsqu'il est muni de l'indice m : q_m cela correspond à l'amplitude du chargement. Il peut être muni de plusieurs indices.

r représente un paramètre caractérisant la distance du centre de la section de l'élément i par rapport à celui de la section de l'élément s

s représente l'élément se situant au centre géométrique de la section de la poutre composite $(\mathcal{p})$.

t représente un indice de sommation principalement des longueurs v_t.

u représente un indice de sommation. Il représente aussi le déplacement selon x de la section considérée, il est relié à l'allongement avec la relation $u' = \varepsilon$.

v désigne la distance du centre de gravité de la section au point le plus éloigné de celui-ci. Il représente aussi le déplacement selon y.

w représente la déformée d'un élément soumis à un chargement q. Il peut être muni d'indices.

x désigne l'abscisse de la poutre ou de tout autre élément. Il est généralement lié à la fibre moyenne de la poutre. La direction de x est orthogonale à y et z.

y désigne l'autre axe généralement dans le sens de la largeur de l'élément. La direction y est orthogonale à x et z.

z désigne la troisième direction de l'élément. Généralement il est dans le sens de la hauteur. Il peut aussi représenter à l'image de la distance a, la distance d'un élément à un centre de gravité ou d'inertie.

Lettres romaines majuscules

A désigne un appui de la poutre. Il représente aussi la section d'un élément. Un indice permet de caractériser l'élément auquel il se rattache.

B désigne un appui de la poutre. Il peut désigner un vecteur.

C désigne un moment ou un couple. Muni du crochet [] et d'un paramètre, il désigne une constante d'intégration.

D représente l'énergie de dissipation. Il peut représenter aussi le diamètre ou le déterminant d'une matrice carré.

E représente le module d'élasticité (ou module d'Young). Un indice lui est attribué pour les différentier. Il peut être relié à l'inertie I et/ou à la section A pour exprimer les rigidités EI et EA.

F désigne l'amplitude du chargement ponctuel.

G représente le module de cisaillement (ou module de Coulomb ou encore module de glissement). Un indice lui est attribué pour les différencier. Il peut être relié à la section réduite d'effort tranchant S pour donner la rigidité de glissement (ou de cisaillement) GS'.

I représente l'inertie quadratique d'un élément. Un indice permet de caractériser l'élément auquel il se rattache.

J représente une inertie, avec l'indice « tor », il représente le facteur d'inertie de torsion.

K représente la raideur linéique ou surfacique. Il est relié à la raideur unitaire par la relation $K = c\ e$.

L désigne la longueur de la poutre et/ou sa portée. Il peut être muni d'un indice caractérisant l'élément auquel il se rapporte. Il désigne aussi le lagrangien, il s'exprime en fonction de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $L = T - V$.

M représente généralement le moment fléchissant ou non.

N représente un paramètre, généralement le nombre entier. Il désigne aussi l'effort normal ou tranchant pour les plaques.

O désigne généralement le centre des repères et des cercles.

P représente un paramètre.

R représente le rayon d'un cercle, de courbure d'un arc et/ou d'une fonction.

S représente une surface, une section et la section réduite d'effort tranchant (généralement exprimé de la sorte : S').

T représente la période d'une fonction trigonométrique, il est relié avec la fréquence selon la relation $T = 1/f = 1/2\pi\omega$. Il représente aussi l'énergie cinétique.

U représente l'énergie élastique.

V représente l'énergie potentielle, elle s'exprime en fonction de l'énergie élastique, de la dissipation et du travail des forces extérieures : $V = U - W$.

W représente le travail des forces extérieures.

X représente le vecteur des inconnues.

Z désigne la coordonnée dans la troisième direction, généralement dans le sens de la hauteur. Il peut aussi représenter à l'image des distances a et z, la distance d'un élément à un centre de gravité ou d'inertie. Il est généralement lié à l'ordonnée z.

Lettres grecques minuscules

α représente la solution d'un système.

β représente un paramètre.

γ représente un paramètre sans dimension. Il caractérise une méthode pour le calcul des poutres à liaisons imparfaites.

δ représente la déformée en un point.

ε représente la déformation (positive : allongement (ou négative : raccourcissement)) d'un élément soumis à un chargement.

ζ représente un paramètre caractérisant la distance du centre de la section de l'élément i par rapport à celui de la section de l'élément s. Il représente aussi l'amortissement d'un système à un degré de liberté en analyse dynamique.

η représente un rendement, il peut aussi représenter un indice d'intégration.

θ représente un indice de sommation, généralement des sommes de fonctions trigonométriques.

λ représente un paramètre, il est relié à la pulsation propre.

μ représente la moyenne d'une population, de résultats.

ν représente le coefficient de Poisson.

ξ représente un paramètre sans dimension. Il dépend des paramètres γ.

π représente la constante du cercle, elle vaut approximativement 3.141592653589793.

ρ représente la masse volumique.

σ représente la contrainte normale d'un élément.

τ représente la contrainte tangentielle ou de cisaillement d'un élément.

φ représente la phase d'un signal trigonométrique.

ϕ représente la forme propre à une fréquence k.

χ représente la courbure d'un élément suite à un chargement ou à sa forme.

ψ représente un paramètre, avec l'indice 2 il représente la part quasi permanente d'une action caractéristique.

ω représente la pulsation d'une fonction trigonométrique. Il est généralement lié à la fréquence avec la relation $f = 2\pi\omega$. Il peut désigner le terme π/L.

Lettres grecques majuscules

Δ représente la variation d'un élément ou la déformée en un point.

Σ représente la somme discrète d'une suite.

Π représente le produit discret d'une suite.

Symboles et fonctions mathématiques

$\forall$ signifie « pour tout » ou « quel que soit ».

$dX(x)/dx$ signifie la variation de la fonction $X(x)$ par rapport à la variable x.

$\partial X(x,y)/\partial x$ désigne la variation partielle de la fonction $X(x,y)$ par rapport à la variable x.

$\in$ signifie « appartenir à » l'élément qui lui est directement accolé. Dans certaine notation, il se peut que se symbole soit omis.

$\notin$ signifie « ne pas appartenir à » l'élément qui lui est directement accolé.

$\cup$ signifie « union » des deux éléments qui lui sont directement accolés à sa gauche et à sa droite.

Le crochet $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière inférieure la plus proche de x (p.ex. : $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$).

Le crochet $|x|$ représente la valeur absolue de x (p.ex. : $|-x| = |x| = x$).

Le crochet fermé $[x_1, x_2]$ représente l'intervalle d'éléments réels (ou complexes) entre x_1 et x_2.

Le double crochet fermé $[\![x_1, x_2]\!]$ représente l'intervalle d'éléments entiers naturels entre $x_1 \in \mathbb{N}$ et $x_2 \in \mathbb{N}$.

$\sum_{i_1}^{i_2} X_i$ représente la somme discrète de la suite X_i de i_1 à i_2.

$\int_{i_1}^{i_2} X(i)$ représente la somme continue de la fonction $X(i)$ de i_1 à i_2.

$\prod_{i_1}^{i_2} X_i$ représente le produit discret de la suite X_i de i_1 à i_2.

Écritures mathématiques spéciales

Pour simplifier l'écriture de certaines formules, un indice double sera utilisé pour caractériser les éléments $i \in [\![1, n]\!]$ et $i \neq s$: $X_{i,i\pm1}$ avec pour $i < s$ cela signifie $X_{i,i+1}$ et pour $i > s$ cela signifie $X_{i,i-1}$. Cette manière d'écrire les deux cas précédemment décrits sera utilisée principalement pour l'étude des liaisons autour de l'élément central s d'une poutre $(\mathcal{p})$ composée de n éléments. Si toutefois le signe « $\pm$ » n'est pas présent : signe « + » ou signe « - » uniquement, il faudra prendre en considération le contexte pour savoir si l'étude porte sur les $i < s$ et/ou $i > s$ ou tout simplement $\forall i$.

Les sommes et les produits sur un intervalle ont deux écritures qui sont rigoureusement identiques. Cependant, dans certain cas l'une sera plus claire que l'autre. Par exemple, pour la somme et le produit discret de la suite X_u en u sur l'intervalle $[\![u_1, u_2]\!]$ privés de u_s, pourront être représentés selon ces deux façons :

$$\sum_{\substack{u=u_1 \\ u\neq u_s}}^{u_2} X_u = \sum_{\substack{u\neq u_s \\ [\![u_1,u_2]\!]}} X_u \text{ pour la somme, } \prod_{\substack{u=u_1 \\ u\neq u_s}}^{u_2} X_u = \prod_{\substack{u\neq u_s \\ [\![u_1,u_2]\!]}} X_u \text{ pour le produit}$$

Pour montrer un intervalle exclu, l'indice sera de la forme suivante $u \notin [\![u_1, u_2]\!]$.

L'union d'intervalle (p.ex. : $[\![u_{1,1}, u_{1,2}]\!] \cup [\![u_{2,1}, u_{2,2}]\!]$) est représentée de trois manières :

$$\sum_{u=u_{1,1}}^{u_{1,2}} X_u + \sum_{u=u_{2,1}}^{u_{2,2}} X_u = \sum_{u[\![u_{1,1},u_{1,2}]\!]\cup[\![u_{2,1},u_{2,2}]\!]} X_u = \sum_{\substack{u \\ [\![u_{1,1},u_{1,2}]\!] \\ [\![u_{2,1},u_{2,2}]\!]}} X_u \text{ pour la somme,}$$

$\prod_{u=u_{1,1}}^{u_{1,2}} X_u \prod_{u=u_{2,1}}^{u_{2,2}} X_u = \prod_{u[\![u_{1,1},u_{1,2}]\!]\cup[\![u_{2,1},u_{2,2}]\!]} X_u = \prod_{\substack{u \\ [\![u_{1,1},u_{1,2}]\!] \\ [\![u_{2,1},u_{2,2}]\!]}} X_u$ pour le produit.

La troisième écriture sera généralement préférée.

Une attention particulière devra être faite pour les sommes et produits discrets imbriqués en étudiant les indices.

Unités

Les unités utilisées sont celles du système international avec quelques aménagements :

- Les distances sont généralement exprimées en millimètres (mm).
- Les modules d'élasticité et de cisaillement ainsi que les contraintes seront généralement exprimés en MPa avec 1 MPa = 1 N/mm^2.

Abréviations

COV : Coefficient De Variation

DDL : Degré de liberté

ENSTIB : Ecole Nationale Supérieure des Technologies et Industries du Bois

E.L.S. : États Limites de Services

E.L.U. : États Limites Ultimes

FDR : Fully Plasticized and Deformed Region (zone entièrement plastifiée)

FTIR : spectroscopie infrarouge à transformée de FOURIER

MDof : Multi Degrees of freedom

MEF : Modélisation (ou Modèle ou Méthode) par Éléments Finis

MEG : Modèle Exact Généralisé ou Méthode Exacte Généralisée

MZ : Melting Zone (zone entièrement fondue)

PDF : Partially Deformed Region (zone partiellement déformée)

PP : Pseudo-Poutre(s)

PPP : Pseudo-Poutre(s) Primaire(s)

PPS : Pseudo-Poutre(s) Secondaire(s)

PVAc : Poly (Vinyle Acétate)

RdM : Résistance Des Matériaux

RMN : Résonance Magnétique Nucléaire

RMNs : Résonance Magnétique Nucléaire du solide

SDof : Single Degree of freedom

ZIP : Zone Initiale Poreuse

ZSP : Zone Semi-Poreuse

SOMMAIRE

INTRODUCTION **1**

LE SOUDAGE BOIS DANS LA CONSTRUCTION **5**

1 ÉLEMENTS CONSTRUCTIFS **7**
1.1 Structure type 7
1.2 Poutre à connexions imparfaites 11
1.3 Traitement dynamique 36
2 SOUDAGE DU BOIS **51**
2.1 Historique 51
2.2 Essentiel du matériau bois 53
2.3 Soudage par friction linéaire 63
2.4 Soudage par friction rotative 67

MAITRISE DE LA MISE EN ŒUVRE DU TOURILLON SOUDE **71**

3 CAHIER DES CHARGES DE LA MISE EN ŒUVRE DU TOURILLON SOUDE **73**
3.1 Conception de la machine 73
3.2 Calibration 88
4 ETUDE DU SOUDAGE **93**
4.1 Processus de soudage de chevilles cylindriques 93
4.2 Observation : cheville fondue ou soudée 94
4.3 Caractérisation des propriétés de l'assemblage unitaire 95
4.4 Conclusion 105

ELEMENTS DE STRUCTURE **107**

5 AVIVES **111**
5.1 Dimensions des avivés 111
5.2 La masse volumique 111
5.3 Module d'élasticité longitudinal 112
5.4 Conclusion 115
6 MODELISATION DES POUTRES **117**
6.1 Introduction 117
6.2 Modélisation par éléments finis d'une poutre composite 117
6.3 Généralisation de la méthode exacte 128
7 POUTRE ET POTEAU **141**
7.1 Étude expérimentale 141
7.2 Analyse de la rigidité d'interface 159
7.3 Approche de dimensionnement règlementaire 160
7.4 Conclusion 173
8 PLANCHER **175**
8.1 Etude théorique 175
8.2 Etude expérimentale 181
8.3 Conclusion et méthodologie de dimensionnement 190
9 PAROIS **193**
9.1 Etude expérimentale 193
9.2 Conclusion 208

CONCLUSION GENERALE **209**

ANNEXES **213**

A. OUTILS MATHEMATIQUES **217**
B. CARACTERISTIQUES DES SECTIONS **221**

C. RDM 225
D. DONNEES SUR LA MACHINE 285
E. REFERENCES 293
F. LISTE DES FIGURES 299
G. LISTE DES TABLEAUX 305
RESUME (VERSION LONGUE) 307
RESUME 310
ABSTRACT 310

INTRODUCTION

Depuis la nuit des temps, l'habitat a été l'une des préoccupations des plus fondamentales pour l'homme : avoir un lieu où se protéger du climat, des agressions multiples relève d'un besoin essentiel. Les techniques constructives, les formes, les architectures, les matériaux qui se succédèrent, au cours des millénaires, sont allés de la simple grotte à des structures sophistiquées, s'inscrivant dans une modernité emblématique des civilisations traversées. Les seules limites relèvent de l'intelligence, de la technicité, de la disponibilité des matériaux et de l'imagination humaine.

Jusqu'aux années de la première guerre mondiale, le bois est resté un matériau d'ingénierie dont les performances étaient reconnues. Utilisé, dans les structures des avions de combat, dans les instruments agraires, dans la construction navale, dans les charpentes et les éléments porteurs des constructions, dans l'aménagement, ce matériau occupait une place très importante.

A partir de cette période, les ingénieurs eurent tendance à considérer le bois comme un matériau dépassé. C'était en partie lié à ses « inconvénients » intrinsèques : biodégradation, variations dimensionnelles liées à l'humidité, grande variabilité dans les propriétés, mécaniques en particulier. C'était aussi le résultat d'une religion de progrès qui voulait que les matériaux les plus récents soient forcément les meilleurs. A partir de cette période, les travaux de recherche sur le bois, matériau de construction, sont devenus anecdotiques.

En France, le 1er choc pétrolier a sonné l'heure d'une première redécouverte du potentiel que représentait le bois pouvant être tiré de la forêt nationale. L'heure était aux économies d'énergie et les propriétés d'isolant thermique naturel que pouvaient présenter le bois, ainsi que le potentiel de matière première de ce matériau de construction, qui était aussi une source d'énergie, étaient redécouverts. Les premières thèses en France, faisant référence au bois comme matériau d'étude, datent des années 1980.

En France, suite au Grenelle de l'Environnement et aux Assises de la Forêt, le Ministère de l'Agriculture a fixé des objectifs de récolte supplémentaire de bois ambitieux pour 2012 et 2020 : + 12 millions m^3 en 2012, + 21 millions m^3 en 2020 dont 12 Mm^3 de bois énergie et 9 Mm^3 de bois d'œuvre.

Les enjeux sont considérables et ces décisions vont impacter durablement la filière. L'**enjeu environnemental** est devenu clairement une priorité. Dans le domaine de la construction, comme dans d'autres domaines, il s'agit de concilier le développement économique avec :

- les économies d'énergie,
- les économies d'eau à travers les filières sèches,
- l'épuisement des ressources fossiles qui va de paire avec l'envolée, parfois spectaculaire, du cours des matériaux de construction dits « traditionnels » : acier, cuivre…
- la réduction des impacts environnementaux

Dans cette approche, les filières « courtes », les matériaux renouvelables doivent être privilégiés. Dans ce nouveau contexte, il est facile de comprendre toute la place stratégique, qu'un matériau comme le bois, peut occuper. Les régions forestières ont maintenant la possibilité d'asseoir leur développement économique sur ce matériau, qui trouve une nouvelle expression dans l'architecture contemporaine et une nouvelle place dans le panel des matériaux de construction possibles. L'utilisation de **bois de pays** devient alors une priorité et vise à remplacer, par exemple, l'utilisation des bois d'importation qui est actuellement quasi générale dans la fabrication du bois lamellé collé en France aujourd'hui.

Le bois, matériau composite et naturel par excellence, est un matériau à plusieurs facettes. Il provient d'une ressource biologique considérable : 30% du territoire français [1], il est optimisé pour un grand nombre de caractéristiques : coût matière, résistance, légèreté, transformation, très faible impact environnemental, etc.

Dans le domaine du bois construction, les matériaux composites à base de bois ont vu le jour. Les matériaux en plaques offrent une réponse économique aux problèmes constructifs tels que les panneaux contrecollés, les panneaux de particules, les panneaux OSB, MDF, contreplaqués, panneaux d'éléments massifs collés type KLH [2], panneaux chevillés type THOMAHOLZ [3]… Dans les usages liés au bâtiment, le marché propose également des produits longs : lamellé collé, poutres en I, poutrelles mixtes, etc. De manière générale, tous ces matériaux font appel à la reconstitution, c'est une tendance lourde qui est une réponse aux demandes du marché de la construction. Ce marché exige des produits longs, ou des plaques, aux caractéristiques précises et constantes. L'introduction généralisée de L'EUROCODE 5 [4] est une réponse à cette légitime demande.

Quelques soient les technologies, les matériaux utilisés, ou l'époque, les parties de structures en bois peuvent être regroupés en trois familles qui ont des rôles qui leurs sont propres. Ces trois familles sont les **poutres** et les poteaux qui constituent le squelette de la structure, les **planchers** qui ont un rôle de diaphragme horizontal et les **parois** qui ont un rôle de diaphragme vertical. Dans l'architecture et les techniques constructives d'aujourd'hui, ces trois types d'éléments sont, dans la quasi-totalité des typologies d'ouvrages construits, bien présents.

L'une des problématiques essentielle liée à l'utilisation du bois dans la construction porte sur les **assemblages**. Assurer une continuité parfaite entre deux pièces de bois reste un obstacle. Les solutions existent pour assembler le bois mais restent cantonnées toujours dans le même registre. Les liaisons sont de trois types : les liaisons ponctuelles avec des organes de type tiges : clous, vis, boulons généralement en acier, cheville en bois ; les liaisons linéiques et les liaisons surfaciques faisant principalement appel aux colles et aux différents dérivés de la pétrochimie. L'autre problématique porte sur la grande variabilité des propriétés, en particulier des propriétés mécaniques. Là encore, la solution passe par la reconstitution et « l'assemblage » de pièces de bois de petites dimensions mais ayant les mêmes propriétés.

Dans ce domaine essentiel des « assemblages » liés au bois, une innovation récente constitue une véritable révolution : le **soudage du bois**.

Récemment, en 1996 [5], deux pièces de bois massif ont été assemblées sans l'utilisation de matériaux supplémentaires : en frottant tout simplement deux faces entre elles sous un chargement perpendiculaire à ces faces. Ce procédé, quasi instantané, est appelé soudage du bois par friction. Il existe deux variantes de ce procédé : le soudage linéaire par translation linéaire et circulaire et le soudage rotatif. Ce troisième type de soudage par friction peut être effectué de deux manières : la première méthode est la rotation d'une pièce autour d'un axe normal à la surface à souder, rejoignant le soudage par friction orbitale, la seconde méthode est l'introduction d'une pièce cylindrique ou conique dans une autre pièce par rotation. La pièce cylindrique peut être une cheville en bois (ou tourillon).

A partir de cette technologie, la question se pose de son adaptation aux systèmes constructifs bois. Il est possible d'imaginer là une nouvelle technique constructive qui soit **intégralement** constituée de matériaux renouvelables à base de bois. Cette nouvelle technique constitue une véritable rupture technologique puisqu'il serait possible de construire sans faire quasiment appel aux matériaux d'origine fossile comme l'acier des assemblages traditionnels ou la pétrochimie largement présente dans l'industrie du collage. Sans revenir sur l'impact positif de l'utilisation du bois sur l'effet de serre, il se comprend facilement qu'il y a là une réponse à l'ensemble des problématiques évoquées dans cette introduction.

Ce travail de thèse constitue la première approche en vraie grandeur de l'adaptation du soudage du bois à des éléments de structures type génie civil. Un choix préalable a été fait de limiter l'approche à la seule technologie du soudage rotatif (ou tourillons soudés).

Les questions posées et les éléments de réponse apportés dans cette thèse portent sur :

- Méthodologie et la maîtrise des paramètres du soudage rotatif en condition préindustrielle. Il a fallu concevoir et réaliser une machine prototype permettant de piloter les paramètres adéquats pour réaliser le soudage du bois. Ce point décrit la réalisation de la machine : le cahier des charges et les limites de son utilisation.
- Caractérisation mécanique des assemblages obtenus par soudage rotatif.
- Application de la technologie du soudage rotatif aux éléments de base de la construction à l'échelle 1 : poutres et poteaux, planchers, parois.
- Expérimentation, dimensionnement, modélisation mécanique des nouveaux composants du bâtiment obtenus par soudage du bois. L'étude théorique des poutres expose la généralisation de la méthode exacte. Cette généralisation est comparée à deux autres approches : la modélisation par éléments finis et l'approche simplifiée de KREUZINGER. L'étude du plancher dans le domaine statique ainsi que dans le domaine dynamique est abordée. Tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental, une méthodologie est appliquée pour déterminer les grandeurs caractéristiques du plancher : rigidité, résistance et confort. La partie théorique est principalement abordée avec la modélisation par éléments finis. Une analyse avec la théorie des plaques orthotropes ainsi que l'approche simplifiée de CHUI viennent préciser l'approche numérique. Une comparaison des études théoriques et expérimentales est ensuite présentée. L'étude des parois vient compléter notre étude.

Ce travail porte ainsi sur la maîtrise de la mise en œuvre de la technologie des tourillons soudés comme moyen d'assemblage et sur la modélisation des éléments de structure qui peuvent être réalisés en vue de leur dimensionnement.

Les résultats obtenus permettent ainsi d'être en mesure de situer le niveau de performance de cette toute nouvelle technologie d'assemblage, d'identifier les zones d'ombre et d'en situer les limites.

LE SOUDAGE BOIS DANS LA CONSTRUCTION

« Que puis-je faire d'autre ? Cette simple formulation représente le soubassement de toute construction. »

[Rudyard Kipling]

1 ÉLEMENTS CONSTRUCTIFS

Cette section traite des définitions des éléments constructifs principaux qui constituent une structure de génie civil en bois. Après une courte présentation à la section §1.1, les théories du calcul des poutres à liaisons imparfaites (§1.2) sont exposées puis l'analyse dynamique des poutres et des plaques (§1.3). Une présentation rapide de la théorie des éléments de type poutre se trouve à la section §C.1 et pour la théorie des plaques minces à la section §C.6.

1.1 Structure type

Les structures à base de bois peuvent être regroupées en trois familles principales : poteau-poutre, ossature bois type plateforme et en panneaux en bois massif (Figure 1). Ces trois familles sont décrites succinctement ici. Une première présentation est également faite des éléments pouvant être réalisés par la technologie des chevilles soudées.

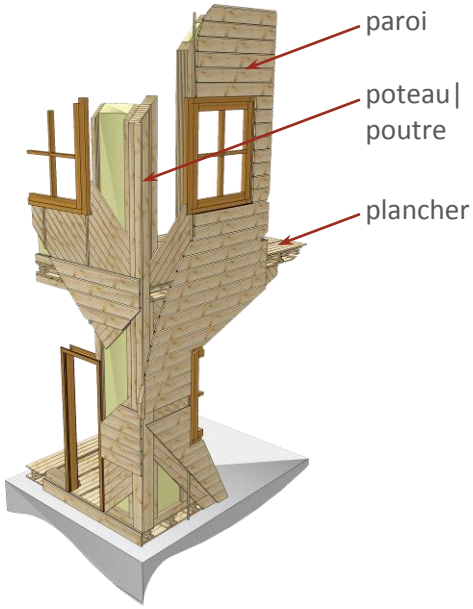


Figure 1 : *Principe d'une structure en bois de pays en tourillons soudés à partir d'avivés*

1.1.1 Structure bois type poteau-poutre

Un ouvrage dit poteau-poutre est constitué de poutres et de poteaux composants ainsi le squelette de la structure. Les autres éléments ne sont pas forcément porteurs et n'ont donc pas de rôle dans la stabilité de la construction. Les espaces entre les poteaux et les poutres sont remplis à l'aide d'isolants, d'ossatures, de madriers empilés, de baies vitrées, etc. Ces derniers éléments ont un rôle d'enveloppe (protection contre les agressions extérieures). Ce type de structures permet la réalisation de constructions avec de grands espaces libres ou de grandes envergures. Pour des grandes portées, l'utilisation du bois lamellé-collé est de rigueur, ce matériau permet d'atteindre de grandes portées à partir de bois de faible longueur. De plus, suite à sa fabrication, il présente des caractéristiques mécaniques constantes. Ce type de construction est idéal pour les salles des congrès, les centres commerciaux et les réalisations exceptionnelles.

Les structures en bois lamellé-collé permettent des réalisations architecturales importantes [6]. La figure 2 présente des possibilités offertes par ce type de matériaux dont la figure 2(a) représente le plafond de la piscine de BAD-DÜRHEIM (ALLEMAGNE), la figure 2(b) présente la toiture du stand SUISSE à la 35^{ième} exposition universelle

d'HANOVRE (ALLEMAGNE) en l'an 2000. La réalisation de telles structures avec la technologie du soudage par friction conduirait au remplacement des clous et des liaisons collées par des chevilles de bois, puis de valider leurs pertinences.

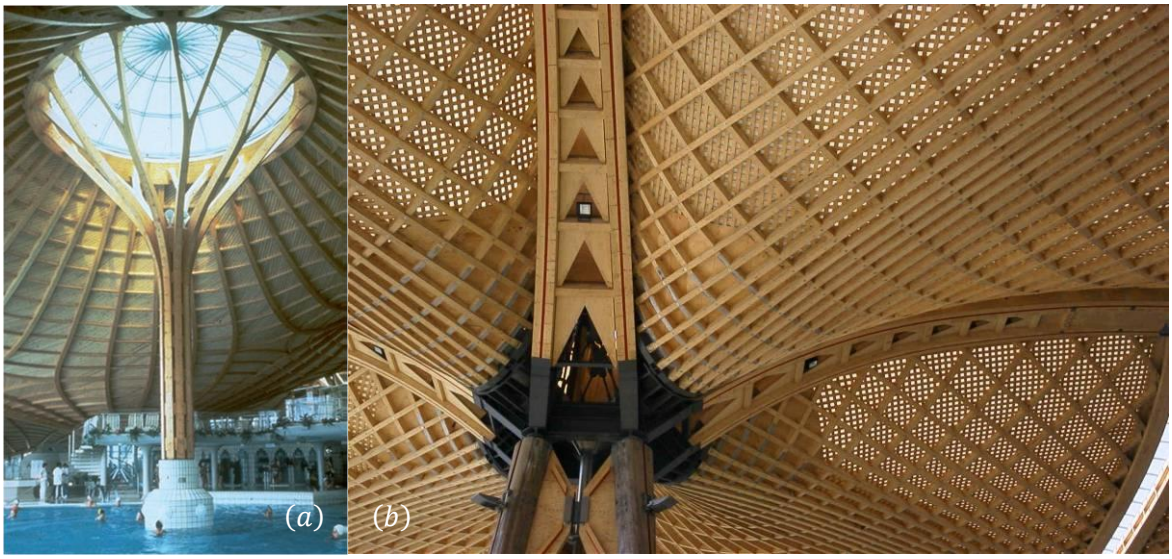


Figure 2 : *Structures en bois lamellé : (a) plafond de la piscine à BAR-DÜRHEIM (ALLEMAGNE) et (b) le plafond du stand suisse à la 35ième exposition universelle de HANOVRE (ALLEMAGNE, 2000)*

La réalisation de telles structures avec la technologie du soudage pourrait s'envisager en remplaçant les liaisons collées entre les lamelles par des chevilles soudées. Cette approche s'apparente à ce qui existe déjà dans les structures en bois lamellé-cloué [7], [8] et [9].

Pour une première approche de la faisabilité d'élément en bois lamellé utilisant la technologie du soudage du bois par friction rotative, il conviendra d'étudier, dans un premier temps des poutres droites. La poutre en bois lamellée assemblée avec des chevilles par la technologie du soudage du bois par friction devra être de la même forme qu'une poutre lamellée collée droite, comme l'illustre la figure 3.

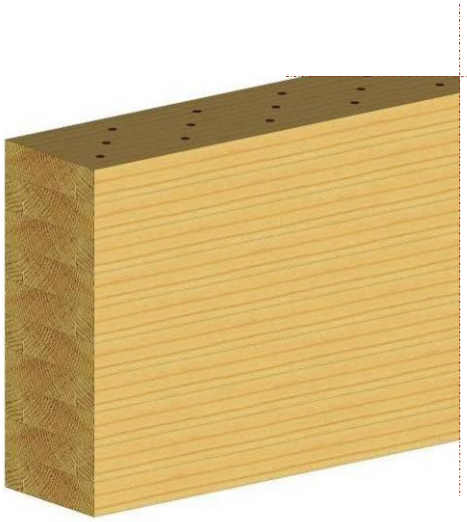


Figure 3 : *Forme de la poutre lamellée soudée*

1.1.2 Structure ossature bois

La structure type ossature bois est composée de parois généralement préfabriquées en usine, qui confèrent à cette méthode de fabrication une rapidité de montage des éléments préfabriqués. Elle est constituée d'une ossature d'éléments en bois massif et/ou en contrecollés, formant les montants verticaux et les lisses basses et hautes, ils sont reliés entre eux par clouage. Ensuite des panneaux à base de bois (généralement de type OSB) qui sont qualifiés de voiles travaillants (qui permettent de contreventer et de limiter la déformation de la construction soumise à un chargement horizontal), sont fixés à l'ossature. Afin de protéger cette ossature, vient s'insérer à l'intérieur des plaques de plâtres et un film pare-vapeur et pour l'extérieur, un revêtement (de type bois massif, briques ou tout type de matériaux intéressant pour cette fonction) est fixé sur des tasseaux pour favoriser la ventilation de l'arrière du revêtement. Ensuite pour protéger le panneau de contreventement, un pare-pluie est

intercalé entre les tasseaux et le panneau. Entre les montants, l'isolation prend sa place (isolation rigide ou semi-rigide à base de fibres : verre, roche, bois, liège ; isolation en vrac). Cette méthode contemporaine de fabrication de structures à ossature bois est la plus employée dans le monde, notamment aux États Unis, en Suède et en France. Le principal point faible est que ce système constructif offre moins d'espace libre que celle en poteau-poutre.

La paroi est un élément vertical se trouvant dans chaque niveau de la construction. Elle doit résister aux chargements horizontaux et verticaux. Une fois que la paroi est contreventée dans son plan (panneau, croix de St André…). Le mur doit être suffisamment rigide afin de limiter les déformations de la structure. La résistance au contreventement est soit déterminée par essai selon la norme NF EN 594 [10], soit calculée selon les méthodes de L'EUROCODE 5 [4][§9.2.4].

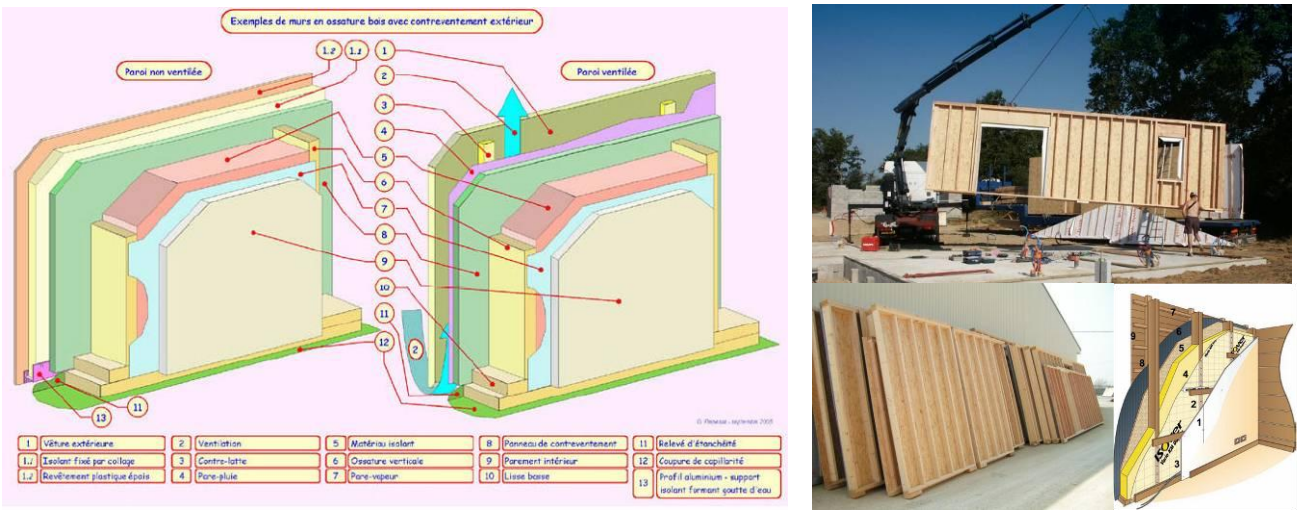


Figure 4 : *Exemple de structure ossature bois de type plateforme*

De même que pour les planchers, les panneaux massifs présentés dans la section suivante peuvent être utilisés comme paroi (Figure 6).

Par analogie avec ces techniques, les murs à lamelles chevillés soudés peuvent être conçus de trois manières :

1. type ossature bois traditionnelle avec des montants et des lisses soit massifs, soit lamellés chevillés soudés avec des avivés inclinés pour contreventer (Figure 5(a)),
2. type panneau massif donc les assemblages sont réalisés par le soudage du bois par friction rotative (Figure 5(b)),
3. type panneau massif ajouré avec le même mode d'assemblage (Figure 5(c)).

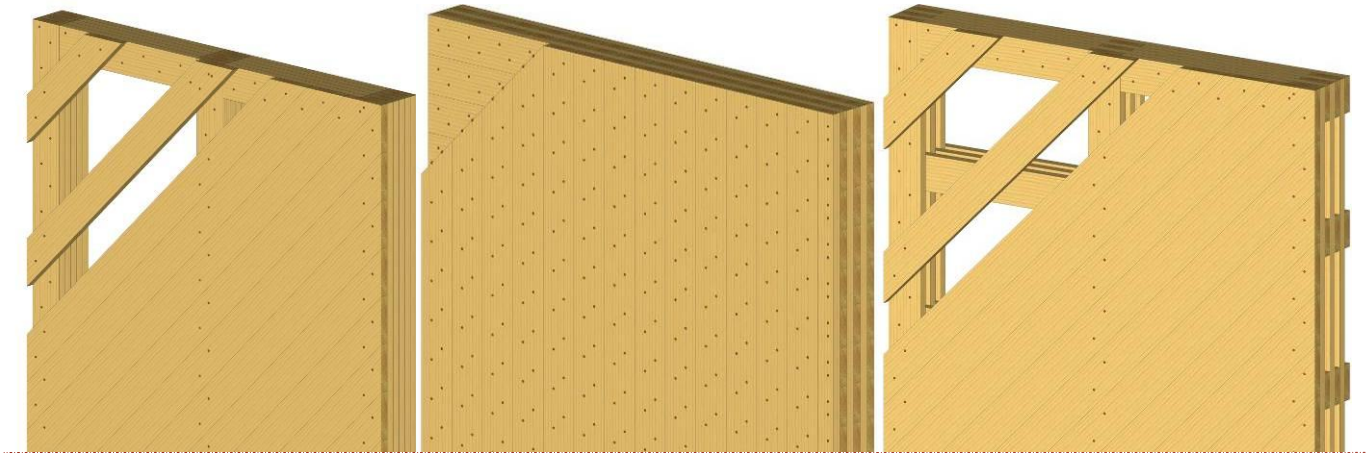


Figure 5 : *Formes des murs lamellés soudés : (a) type ossature bois, (b) type panneau massif chevillé et (c) type panneau massif chevillé ajouré*

1.1.3 Structure en panneaux de bois massif

La structure de ce type est constituée principalement de panneaux de bois massif qui jouent le rôle de squelette et de peau pour la construction. Ces panneaux peuvent être soit collés (KLH [2], BINDERHOLZ [11]), soit

chevillé (THOMAHOLZ [3], [12]). Ces panneaux sont composés de plusieurs niveaux. A l'image du contreplaqué, il est généralement constitué d'un nombre impair de niveaux, les niveaux pairs ont le sens du fil à 90° par rapport aux niveaux impairs. L'épaisseur de tels panneaux est équivalente à l'épaisseur des ossatures bois décrites précédemment.

La fabrication de panneaux structuraux donne des possibilités intéressantes pour la construction de structures. Il est ainsi possible d'utiliser des sciages de faibles longueurs pour concevoir les différents éléments constitutifs des murs, parois et planchers.

Le plancher est un élément horizontal entre deux niveaux d'une structure. Il est généralement considéré comme rigide, c'est-à-dire, que soumis à un effort horizontal, il ne se déforme pas (ou très peu) vis-à-vis des déformations des éléments porteurs. Il joue alors le rôle de diaphragme horizontal, ramenant les sollicitations (vent, séisme…) au niveau de ces éléments porteurs (mur, poutre, poteau…).

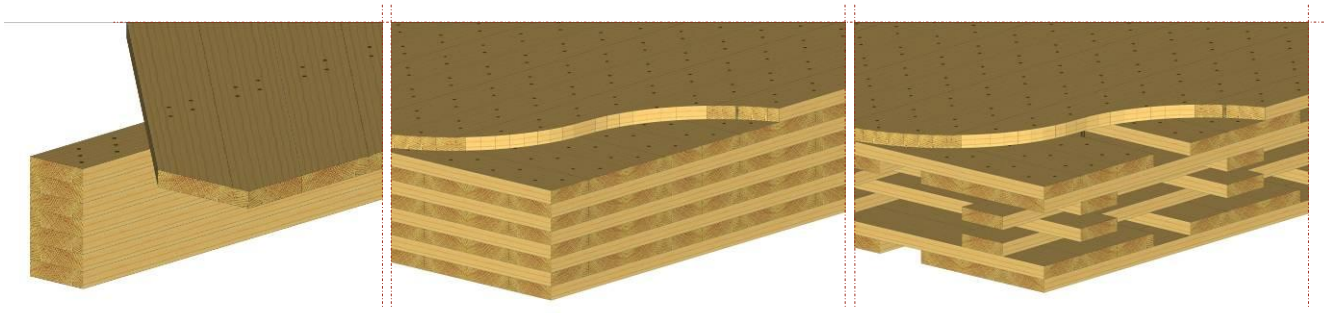
Pour les structures bois, le plancher est habituellement constitué de solives (éléments parallèles à la portée) et de poutres de rive (éléments perpendiculaires à la portée) des deux côtés du plancher. Entre les solives, des entretoises peuvent être présentes pour rigidifier localement la structure du plancher. La peau repose sur les solives et les rives, elle est fixée avec des vis et/ou des clous selon un espacement bien défini comme précisé dans la section §10.8 de l'EUROCODE 5 [4] par exemple.

Des planchers en panneau massif (KLH [2], BINDERHOLZ [11], THOMAHOLZ [13], [3], [12]) existent et le principal inconvénient est leurs poids pour la fonction qu'ils occupent.



Figure 6 : *Exemple de structures en panneaux massifs*

Ainsi, par analogie avec ces techniques de construction, un plancher à lamelles chevillées soudées peut être envisagé sous trois formes comme le montre la figure 7. La première manière repose sur des solives conçues sur le même modèle que les poutres déjà évoquées avec une peau en avivés croisés ou non (Figure 7(a)), celle-ci est assemblée aux solives par la technique du soudage du bois par friction rotative. La deuxième est la copie du procédé de THOMAHOLZ [3] avec des chevilles de diamètre inférieur en utilisant la technologie du soudage du bois par friction rotative (Figure 7(b)). La dernière, repose sur une optimisation coût-matière-performance qui permet de diminuer le poids du type de plancher précédent en intercalant des espaces vides où de l'isolant peut venir se loger (Figure 7(c)).



(a) (b) (c)

Figure 7 : *Formes des planchers lamellés soudés : (a) type traditionnel, (b) type panneau massif chevillé et (c) type panneau massif chevillé ajouré*

Ce plancher devra satisfaire les exigences de résistance, de déformation et de confort.

1.1.4 Conclusion

Les structures lamellées chevillées soudées présentées ici donnent un premier aperçu des éléments à concevoir. Les structures élémentaires poutre/poteau, plancher et paroi sont étudiées expérimentalement dans le troisième chapitre (Élément de structure). Une première approche théorique sur le comportement des éléments lamellés, est cependant nécessaire.

1.2 Poutre à connexions imparfaites

L'assemblage des éléments bois entre eux pose le problème récurrent, déjà évoqué, et qui porte sur la continuité. Pour cela, plusieurs possibilités existent et diverses innovations sont en cours. Dans le domaine de la construction bois, la liaison des éléments de construction entre eux peut être effectuée :

- soit par des liaisons ponctuelles (dites aussi discrètes) telles que les clous, les vis, les chevilles…,
- soit par des liaisons linéaires et surfaciques (dites aussi continues) telles que le collage et maintenant le soudage.

Les liaisons peuvent aussi être réparties en deux groupes :

- liaisons parfaites : capables de reproduire la continuité des éléments assemblés, ainsi la rigidité globale est reproduite et est maximale,
- liaisons imparfaites : elles ne reproduisent que partiellement la continuité des éléments assemblés, la rigidité obtenue est bornée par la rigidité sans liaison et celle avec des liaisons parfaites.

Dans la grande majorité des cas, les liaisons collées ou soudées sont considérées comme parfaites car ce type de liaison assure quasi intégralement la transmission des efforts à l'interface des éléments comme par exemple dans le bois lamellé collé. Les liaisons imparfaites discrètes permettent très fréquemment la réalisation de poteaux composés dans les structures bois. MARTIN [7] a étudié la faisabilité de poutre en bois lamellé cloué à partir de bois exotique. Il s'est limité à des éléments constitués de poutres. GLINIORZ [8] et PIRAZZI [9] ont étudiés des poutres lamellées clouées qui ont été mises en œuvre dans le plafond de la section suisse de la 35^{ième} exposition universelle à HANOVRE (Allemagne 2000).

Le calcul d'influence des liaisons imparfaites de manière analytique sur les poutres composites est assez bien connu lorsque le nombre d'éléments assemblés est de deux ou trois. En effet, une méthode permettant de calculer une poutre composite de deux ou trois éléments, appelée méthode des γ (du nom de la constante caractérisant la liaison imparfaite), a été développée par HEIMESHOFF [14] en se fondant sur les travaux de MÖHLER et SCHELLING (d'après [14]). Cette méthode consiste à étudier une poutre composite de type BERNOUILLI (déformation due à l'effort tranchant négligée) reposant sur deux appuis simples (articulé mobile et immobile) soumise à un chargement sinusoïdal. Cette méthode est reprise dans l'EUROCODE 5 [4] annexe B et se trouve aussi dans la section 8.6 de la norme allemande DIN 1052 [15]. Cette méthode est détaillée dans la section §1.2.2.

GIRHAMMAR [16] reproche à cette dernière méthode d'être trop approximative. De plus GIRHAMMAR [16] énonce que la relation donnant la valeur maximale de la contrainte de cisaillement n'est théoriquement pas correcte et qu'elle désigne une valeur limite supérieure. GIRHAMMAR [16] énonce une autre manière de calculer la contrainte de cisaillement maximale dépendant de la méthode qu'il a développée. La méthode de GIRHAMMAR porte le nom de méthode exacte et repose sur la théorie de poutres composites de deux éléments de BERNOULLI développée sur la base des travaux de STÜSSI, GRANHOLM, NEWMARK et indépendamment de PLESHKOV (d'après [16]). Cette méthode consiste à calculer l'équilibre de chaque lamelle constituant la poutre composite soumise aux efforts internes puis de relier ces efforts internes avec le chargement. Le point fort de cette méthode est la possibilité de prendre en compte tous les types d'appuis et de chargements [17]. Cependant, elle permet uniquement de calculer avec exactitude les efforts internes des lamelles suite au chargement souhaité lorsque la poutre contient deux lamelles. Elle a été principalement appliquée pour déterminer l'influence de la liaison entre une dalle béton et un profilé métallique [18], [19], [20] et [21]. Cette méthode est décrite dans la section §1.2.3. GIRHAMMAR a aussi étudié le comportement de poutres composites dans le domaine dynamique avec la méthode exacte [17]. CHALLAMEL [22] utilise cette méthode pour l'étude dynamique d'une poutre composite (de deux ou trois lamelles) soumise à de la torsion.

Ces deux méthodes souffrent de ne pouvoir connaître l'influence des liaisons pour une poutre de plus de trois éléments. KREUZINGER [23] a développé une méthode simplifiée permettant de connaitre l'influence de la liaison d'interface sur des poutres composites ainsi que pour une plaque composite, constituées d'un nombre non limité de lamelles (ou de plaques). Cette méthode repose sur la séparation de la poutre étudiée en deux poutres :

la poutre A caractérise la flexion (rigidité de flexion des lamelles EI_A) et la poutre B la rigidité de STEINER (rigidité due au couplage par les interfaces EI_B). Un autre avantage de cette méthode est la prise en compte du module de cisaillement des matériaux, qui permet d'avoir une déformée plus précise pour des poutres de petites portées. Un terme qui caractérise le cisaillement des éléments de la section composite totale est aussi calculé (rigidité de glissement GS_{ef}), ce terme dépend des raideurs d'interface et du module de cisaillement des lamelles. Cette méthode est reprise dans l'annexe D de la norme allemande DIN 1052 [15] et fait l'objet d'un rapport technique européen [24]. Le calcul des rigidités des poutres A et B ne dépendent pas du chargement mais tout comme les autres méthodes, lors de l'intégration des caractéristiques des liaisons, la relation liant les rigidités des poutres A et B et du glissement dépendent du chargement. Ainsi pour un chargement de type sinusoïdal, en faisant l'analogie avec le domaine de l'électricité où les rigidités correspondent aux admittances, PIRAZZI [9] exprime le calcul de la rigidité effective de la poutre composite de KREUZINGER (Figure 8). PIRAZZI [9] montre qu'il existe un écart entre le modèle de KREUZINGER et son modèle par éléments finis. Pour des lamelles de caractéristiques identiques, PIRAZZI montre que le modèle simplifié à un comportement linéaire alors que le modèle par éléments finis donne un comportement de type sigmoïdale. SCHOLZ [23] développe la marche à suivre pour le calcul de la part de chacune des deux poutres A et B. Une restitution succincte de cette méthode est présentée dans la section §1.2.4.

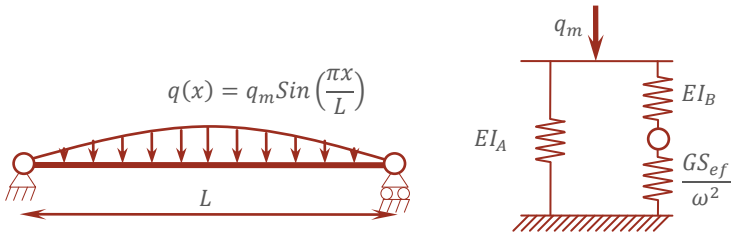


Figure 8 : *Modèle de KREUZINGER pour un chargement sinusoïdal (d'après* **[9]***)*

L'intérêt des méthodes précédentes réside dans le fait de pouvoir utiliser une formulation analytique pour traiter une grande partie des problèmes de l'ingénieur de structures. Ces formulations prennent en compte un comportement élastique des liaisons à l'interface. Il est intéressant de noter que pour une poutre constituée de deux ou trois lamelles, les contraintes et les efforts internes déterminés par l'une de ces méthodes sont équivalentes.

Dans la littérature, il existe des formulations éléments finis plus complexes tel que le modèle $\mathcal{M}4-5n-P$ [25] permettant d'étudier plus précisément des éléments hyperstatiques avec des comportements de liaison non linéaires. Cependant, pour l'étude des éléments de structures qui sont envisagés dans ce travail, la prise en compte d'un comportement non linéaire des organes de liaison n'est pas de première nécessité étant donné la relative souplesse de ces derniers. L'étude et les développements ultérieurs sont donc axés sur la généralisation de ces méthodes pour l'utilisation par l'ingénieur.

1.2.1 Rappel succinct sur l'étude du glissement selon la théorie des poutres

L'étude du glissement dans une poutre de section pleine permet d'aborder les éléments nécessaires pour la compréhension des théories sur les poutres multicouches à connexions imparfaites. En s'inspirant de la section §C.1.3.12. il apparait une relation entre l'effort normal et le moment subit par la section lorsque la poutre est chargée.

$$N = \frac{M_y}{I_y} m_{y,S_1} \qquad (1)$$

De plus, selon §C.1.3.11. il est possible d'exprimer les contraintes de cisaillement en fonction de la variation des contraintes normales :

$$\tau_z = \frac{1}{b(z)} \int \frac{d\sigma}{dx} dS \qquad (2)$$

1.2.2 Méthode des γ selon HEIMESHOFF

1.2.2.1 Données et hypothèses

Soit une poutre $(\mathcal{P})$ composée de trois éléments sur deux appuis soumise à un chargement sinusoïdal (Figure 9(a)). Chaque élément $i \in \{1,2,3\}$ de $(\mathcal{P})$ possède les caractéristiques suivantes : section A_i, inertie I_i, module d'élasticité E_i et longueur L. Les sections sont rectangulaires de dimensions h_i et b_i (Figure 9(b)).

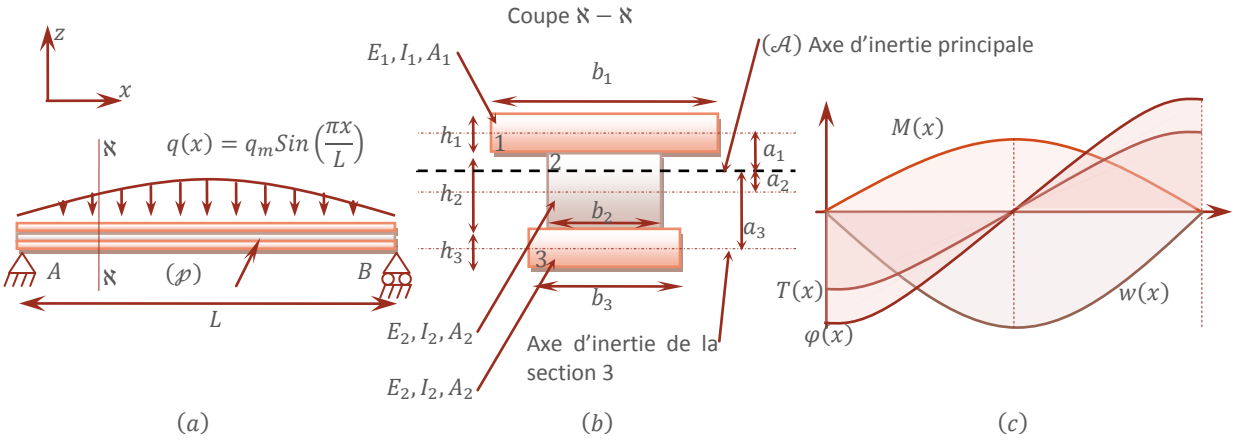


Figure 9 : *(a) Poutre composée de trois éléments soumise à un chargement sinusoïdal, (b) section de la poutre avec les distances caractéristiques et (c) l'allure de l'effort tranchant, du moment fléchissant, de la rotation et de la déformée.*

Le chargement q est choisi de telle sorte qu'il impose une déformée nulle ainsi qu'un moment fléchissant nul aux extrémités A et B :

$$q(x) = q_m Sin(\omega x) = q_m Sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \qquad (3)$$

Dans la suite, il sera utilisé de manière indifférente les deux notations ω ou π/L.

1.2.2.2 Etude RDM du chargement $q(x)$

- **Réactions aux appuis**

Le calcul des réactions aux appuis n'est pas aussi simple que sur les exemples classiques (p.ex. : §C.1.4.2.). Il convient de calculer la force résultante pour le chargement de type sinusoïdal, ensuite, comme le chargement est symétrique par rapport au plan perpendiculaire à la fibre moyenne en $x = L/2$, la détermination des réactions aux appuis, sera plus aisée.

La force résultante est calculée selon la relation (325) :

$$F_{\text{res}} = \int_0^{\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}} q_m Sin(\omega x)dx = q_m \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} Sin(\omega x)dx = -\frac{q_m}{\omega}[Cos(\omega x)]_0^{\pi/\omega} = -\frac{q_m}{\omega}[-1-1] = 2\frac{q_m}{\omega} \qquad (4)$$

Comme le barycentre de cette aire a pour abscisse $L/2$, les réactions aux appuis en découlent :

$$\begin{cases} R_A + R_B = F_{\text{res}} \\ -\dfrac{F_{\text{res}} L}{2} + R_B L = 0 \end{cases}$$

Il en résulte :

$$R_A = R_B = \frac{q_m}{\omega}$$

Il en découle l'effort tranchant (T), le moment fléchissant (M), la rotation des sections (φ) et la déformée (w).

- **Effort tranchant**

Comme le chargement est la variation de l'effort tranchant (331) :

$$q = \frac{dT}{dx} \Rightarrow T = \int q dx = -q_m \frac{1}{\omega} Cos(\omega x) + C[1]$$

Pour $T(0) = -R_A \Rightarrow C[1] = 0$

Donc l'effort tranchant vaut :

$$T(x) = -q_m \frac{1}{\omega} Cos(\omega x) = -T_m Cos(\omega x) \qquad (5)$$

- **Moment fléchissant**

Puisque l'effort tranchant et le moment fléchissant sont reliés avec (332) :

$$T = -\frac{dM}{dx} \Rightarrow M = -\int T dx = q_m \frac{1}{\omega^2} Sin(\omega x) + C[2]$$

Pour $M(0) = 0 \Rightarrow C[2] = 0$

Ainsi le moment fléchissant vaut :

$$M(x) = q_m \frac{1}{\omega^2} Sin(\beta x) = M_m Sin(\omega x) \quad (6)$$

- **Rotation**

La relation (363) permet de calculer la rotation à partir du moment fléchissant, il en résulte :

$$\varphi = \frac{1}{EI}\int M dx = \frac{1}{EI}\left(-q_m \frac{1}{\omega^2} Cos(\omega x) + C[3]\right)$$

Le calcul de la constante $C[3]$ est développé lors du calcul de la déformée, pour $w(L) = 0$

La rotation s'exprime selon la formule suivante :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{EI} q_m \frac{1}{\omega^3} Cos(\omega x) = \frac{1}{EI}\varphi_m Cos(\omega x) \quad (7)$$

- **Déformée**

Étant donné que la flèche a pour relation avec le moment (362) :

$$EI\, w'' = M \Rightarrow w = \frac{1}{EI}\iint M dx = \frac{1}{EI}\left(C[4] + xC[3] - q_m \frac{1}{\omega^4} Sin(\omega x)\right)$$

Pour $w(0) = 0 \Rightarrow C[4] = 0$ et $w(L) = 0 \Rightarrow L\, C[3] = 0 \Rightarrow C[3] = 0$

Alors la déformée a pour équation :

$$w(x) = -\frac{1}{EI} q_m \frac{1}{\omega^4} Sin(\omega x) = \frac{1}{EI} w_m Sin(\omega x) \quad (8)$$

La figure 9(c) illustre l'allure des diagrammes de la RDM décrits ci-dessus.

1.2.2.3 Contraintes internes et déformations

Le chargement $q(x)$ crée des efforts internes (donc des contraintes internes) pouvant être déterminés pour un élément de longueur dx de $(\mathcal{P})$. En effet, pour un élément de longueur dx, l'effort normal et le moment engendrent des contraintes normales (Figure 10) :

- Contrainte due à l'effort normal : $\sigma_{i,N} = \frac{N_i}{A_i}$,
- Contrainte due au moment fléchissant : $\sigma_{i,M} = \frac{M_i}{I_i} z$ avec $-\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2}$.

Donc la contrainte normale vaut :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \frac{N_i}{A_i} + \frac{M_i}{I_i} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (9)$$

Les déformations respectives sont données par la loi de HOOKE :

- Déformation dû à l'effort normal : $\varepsilon_{i,N} = \frac{\sigma_{i,N}}{E_i} = \frac{N_i}{E_i A_i}$,
- Déformation dû au moment fléchissant : $\varepsilon_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{E_i} = \frac{M_i}{E_i I_i} z$ avec $-\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2}$

D'où la déformation totale :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,N} + \varepsilon_{i,M} = \frac{N_i}{E_i A_i} + \frac{M_i}{E_i I_i} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (10)$$

Le sens des efforts normaux dans la figure 10 est ici arbitraire, mais il sera choisi par la suite un sens entrant dans l'élément de longueur dx pour un effort normal de compression (valeur négative) et sortant pour un effort normal de traction (valeur positive).

Note 1 : *Avec cette convention, les contraintes de traction sont positives et les contraintes de compression négatives.*

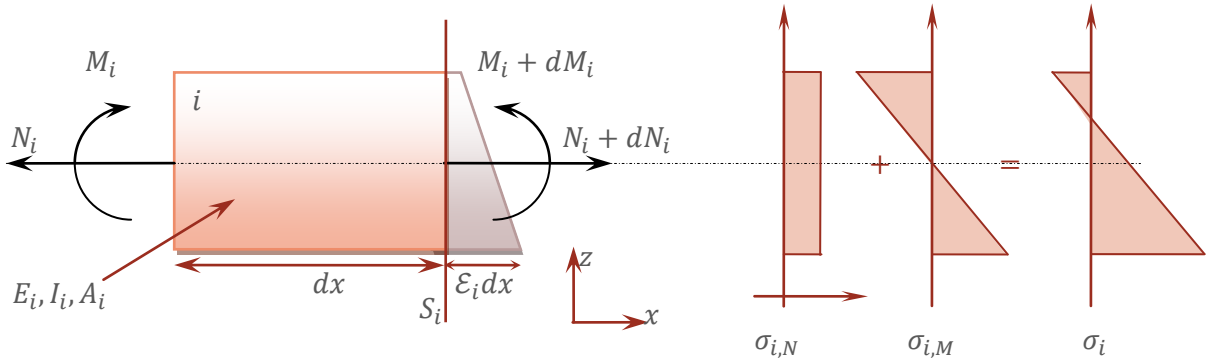


Figure 10 : *Contraintes normales dans la section* S_i

Il en découle pour le cas présent que l'effort normal de l'élément 1, N_1 doit être négatif et les efforts normaux des éléments 2 et 3 doivent être positifs. Il en va de même pour le moment, la partie au dessus de la fibre moyenne de la section considérée est comprimée tandis que la partie au dessous est tendue, donc la contrainte due au moment doit être négative au dessus de la fibre moyenne et positive en dessous. Il vient :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1, i<2\\0, i\geq 2\end{cases}} \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2}$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,N} + \varepsilon_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1, i<2\\0, i\geq 2\end{cases}} \frac{N_i}{E_i A_i} - \frac{M_i}{E_i I_i} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \qquad \textbf{(11)}$$

Le changement de signe de la contrainte due au moment fléchissant provient du signe de l'ordonnée z. Selon la figure 9, il en résulte les éléments se situant au dessus du 2ème élément de $(\mathcal{p})$ sont soumis à un effort normal de compression, les éléments se situant au dessous du 2ème élément de $(\mathcal{p})$ ainsi que le 2ème élément sont soumis à un effort normal de traction. Il faut noter que même avec ces conventions, les éléments autour du 2ème élément pourront avoir un changement de comportement (passer a priori d'un effort de traction à un effort de compression et vis et versa).

La figure 11 illustre ces efforts et ces moments suite au chargement sinusoïdal ainsi que les déformations respectives et le glissement de la liaison entre les éléments i et $i+1$. Les indices u (élément au dessus de la liaison) et o (élément au dessous de la liaison) pour les déformations, correspondent à l'emplacement où la déformation est obtenue.

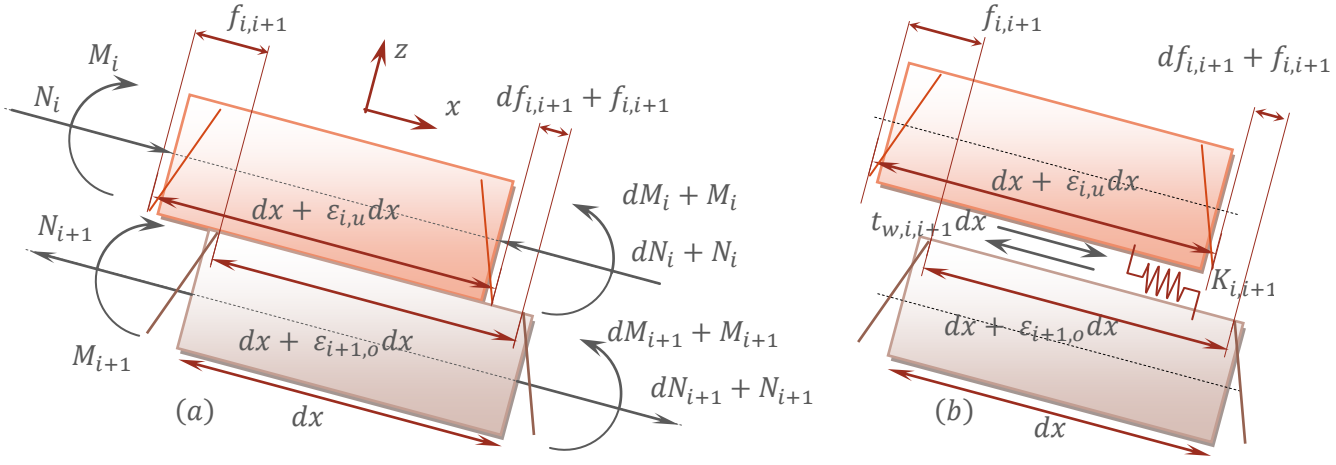


Figure 11 : *Représentation sur deux éléments de longueur* dx *(a) des efforts normaux et des moments et (b) du cisaillement rasant dans la liaison (d'après* **[14]***)*

1.2.2.4 Distances caractéristiques

Selon les caractéristiques des éléments de $(\mathcal{p})$, l'axe d'inertie principal $(\mathcal{A})$ n'est pas forcément au centre de la section de $(\mathcal{p})$. Pour cela, il est utile de pouvoir formuler les hauteurs des éléments vis-à-vis de l'axe principal

$(\mathcal{A})$ (Figure 9). Soit a_2 la distance de l'élément 2 à l'axe $(\mathcal{A})$. La relation liant les longueurs a_2, a_1, h_2 et h_1 est la suivante :

$$a_2 + a_1 = \frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{2}$$

Donc $a_1 = \frac{h_2}{2} + \frac{h_1}{2} - a_2$. En faisant de même avec a_3, il vient : $a_3 = \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} + a_2$. Il est donc possible d'exprimer les distances a_1 et a_3 en fonction de a_2 et des hauteurs des éléments $\left(a_{1\text{ ou }3} = \not{f}(a_2, h_i)\right)$. Les distances a_1, a_2 et a_3 correspondent aux distances liées à la géométrie de la section de $(\mathcal{p})$.

1.2.2.5 Etude du glissement des éléments

Soit $K_{i,i\pm1}$ la raideur linéique de la liaison entre les éléments i et $i+1$ (Figure 11(b)). Soit $f_{i,i\pm1}$ le glissement de la pièce i avec la pièce $i \pm 1$. Soit $t_{w,i,i\pm1}$ le flux de cisaillement dans la liaison.

En faisant l'hypothèse que les déformations resteront très petites devant la longueur de $(\mathcal{p})$ (Hypothèse 10), ainsi la raideur de la liaison a un comportement élastique, $F = kx$ (avec F force, k raideur de l'assemblage et x abscisse), il vient :

$$t_{w,i,i\pm1} = K_{i,i\pm1} f_{i,i\pm1}$$

En prenant l'hypothèse que la raideur est appliquée de manière discrète, soit $e_{i,i+1}$ la distance séparant ces « ressorts ». Donc la relation liant le glissement avec l'effort rasant devient :

$$f_{i,i\pm1} = \frac{t_{w,i,i\pm1}}{K_{i,i\pm1}} = \frac{t_{w,i,i\pm1} e_{i,i\pm1}}{c_{i,i\pm1}} \qquad (12)$$

Avec :

- $K_{i,i\pm1}$ représente la raideur linéique à l'interface (N/mm/mm) ou (N/mm^2),
- $e_{i,i\pm1}$ représente l'espacement entre organes d'assemblage (mm),
- $c_{i,i\pm1}$ représente la raideur individuelle de l'organe d'assemblage (N/mm).

1.2.2.6 Etablissement du système d'équation

Selon les hypothèses précédentes de la section §1.2.2.3, le calcul des déformations suit les relations suivantes pour la liaison 1 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,u} &= -\frac{N_1}{E_1 A_1} + \frac{M_1}{E_1 I_1}\frac{h_1}{2} \\ \varepsilon_{2,o} &= \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{M_2}{E_2 I_2}\frac{h_1}{2} \end{aligned} \qquad (13)$$

Et pour la liaison 2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,u} &= \frac{N_2}{E_2 A_2} + \frac{M_2}{E_2 I_2}\frac{h_2}{2} \\ \varepsilon_{3,o} &= \frac{N_3}{E_3 A_3} - \frac{M_3}{E_3 I_3}\frac{h_3}{2} \end{aligned} \qquad (14)$$

Puisque tous les éléments de $(\mathcal{p})$ ont la même courbure χ suite au chargement $q(x)$, les rapports $M_i/E_i I_i$ sont tous égaux à χ. De plus, la courbure est aussi égale à M_g/EI_{ef}, où EI_{ef} désigne la rigidité effective (ou globale) de $(\mathcal{p})$ et M_g son moment fléchissant global selon les formules (345) et (6).

$$\chi = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} = \frac{M_g}{EI_{ef}} \qquad (15)$$

Selon la figure 9, le calcul du moment total par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$ des moments et des efforts normaux des éléments 1, 2, et 3 donne la relation suivante pour le moment fléchissant M_g de $(\mathcal{p})$:

$$M_g = \sum_{i=1}^{3} (M_i + a_i N_i) \qquad (16)$$

L'effort normal N_i dans la section de l'élément i est appliqué à la fibre moyenne de celle-ci. La distance de l'élément i à l'axe $(\mathcal{A})$ est ainsi représentée par la distance a_i introduite au §1.2.2.4.

Comme la poutre $(\mathcal{p})$ n'est pas soumise à un effort normal, la somme des efforts normaux de chaque élément doit donc s'auto-compenser :

$$\Sigma \mathrm{N} = N_1 - N_2 - N_3 = 0 \qquad (17)$$

Cette équation permet de calculer un effort normal en fonction des autres. L'effort normal de l'élément central de $(\mathcal{p})$: N_2 est choisi pour être une combinaison linéaire des autres efforts normaux, d'après (17) :

$$N_2 = N_1 - N_3 \qquad (18)$$

Les éléments i et $i+1$, sous l'effet des efforts normaux et des moments fléchissants (Figure 11(a)), créent un glissement de l'élément i sur l'élément $i+1$. Ce glissement s'exprime avec le bilan au niveau de la liaison i:

$$f_{i,i\pm1} - \left(df_{i,i\pm1} + f_{i,i\pm1}\right) = \left(dx + \mathcal{E}_{i,u}dx\right) - \left(dx + \mathcal{E}_{i+1,o}dx\right)$$

En simplifiant, il apparait :

$$\mathcal{E}_{i,u}dx - \mathcal{E}_{i+1,o}dx + df_{i,i\pm1} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{i,u} - \mathcal{E}_{i+1,o} + df_{i,i\pm1}/dx = 0 \qquad (19)$$

Soit pour la liaison 1 :

$$\mathcal{E}_{1,u}dx - \mathcal{E}_{2,o}dx + df_{1,2} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{1,u} - \mathcal{E}_{2,o} + df_{1,2}/dx = 0 \qquad (20)$$

Et pour la liaison 2 :

$$\mathcal{E}_{2,u}dx - \mathcal{E}_{3,o}dx + df_{3,2} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{2,u} - \mathcal{E}_{3,o} + df_{3,2}/dx = 0 \qquad (21)$$

Comme dans les équations (19), (20) et (21), le terme du glissement est utilisé avec sa dérivée. En posant l'hypothèse que les raideurs $K_{i,i+1}$ sont constantes tout le long de la poutre, il vient en utilisant (358) dans (12) et en dérivant cette dernière par rapport à x, la relation entre le glissement et l'effort normal.

$$\frac{df_{1\text{ ou }3,2}}{dx} = \frac{1}{K_{1\text{ ou }3,2}}\frac{dt_{w,1\text{ ou }3,2}}{dx} = \frac{1}{K_{1\text{ ou }3,2}}\frac{d^2N_{1\text{ ou }3}}{dx^2} \qquad (22)$$

Il convient d'éliminer $df_{1,2}/dx$ de l'équation (20) en utilisant (13), (15) et (22) :

$$\left(-\frac{N_1}{E_1A_1} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_1}{2}\right) - \left(\frac{N_2}{E_2A_2} - \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_2}{2}\right) + \frac{1}{K_{1,2}}\frac{d^2N_1}{dx^2} = 0 \qquad (23)$$

En utilisant la relation (18), il vient :

$$\frac{1}{K_{1,2}}\frac{d^2N_1}{dx^2} - \frac{N_1}{E_1A_1} - \frac{N_1 - N_3}{E_2A_2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_1}{2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_2}{2} = 0 \qquad (24)$$

En effectuant de même pour l'équation (21) en utilisant (14), (15), (18) et (22), il vient :

$$\frac{1}{K_{3,2}}\frac{d^2N_3}{dx^2} - \frac{N_3}{E_3A_3} + \frac{N_1 - N_3}{E_2A_2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_3}{2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\frac{h_2}{2} = 0 \qquad (25)$$

Ces deux équations différentielles du second ordre permettent le calcul des efforts normaux N_1 et N_3.

Soit $(\mathcal{E})$ le système d'équations composé de ces deux équations : (24) et (25).

1.2.2.7 Résolution du système d'équation $(\mathcal{E})$

Le moment fléchissant global M_g a une forme sinusoïdale selon (6), il vient que la forme des efforts normaux recherchés est la même. En effet, comme $N_i = M_i m_i / I_i$ d'après (357), où m_i est le moment statique de l'élément i (soit $m_i = A_i z_i$) de $(\mathcal{p})$, il est donc possible d'avoir la forme suivante pour N_i en utilisant (15) :

$$N_i = \frac{M_i}{I_i}A_i z_i = \frac{M_g}{EI_{ef}}E_i A_i z_i = \frac{M_m}{EI_{ef}}E_i A_i z_i Sin(\omega x) \qquad (26)$$

Avec :

- z_i : distance où se trouve l'élément i par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$,
- EI_{ef} : rigidité effective ou rigidité globale de $(\mathcal{p})$,

Ne sachant pas si les distances a_i précédemment introduites au §1.2.2.4 sont présentes dans la solution de (26), il convient d'introduire de nouvelles distances z_i. Il faudra trouver une relation pour les distances z_i et a_i.

La résolution d'équations différentielles à fonctions inconnues n'est pas évidente à mener. Puisque la forme de la solution est supposée être (26), elle peut être simplifiée en :

$$N_i(x) = \alpha_i Sin(\omega x)$$
$$\alpha_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} E_i A_i z_i \quad (27)$$

Où α_i est une constante indépendante de x à déterminer en fonction des propriétés et des dimensions des éléments de$(\mathcal{p})$.

Comme :

$$\frac{d^2 N_i(x)}{dx^2} = -\omega^2 \alpha_i Sin(\omega x) = -\omega^2 N_i(x)$$

Donc $(\mathcal{E})$ devient :

$$-\frac{\omega^2}{K_{1,2}} N_1 - \frac{N_1}{E_1 A_1} - \frac{N_1 - N_3}{E_2 A_2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) = 0$$
$$-\frac{\omega^2}{K_{3,2}} N_3 - \frac{N_3}{E_3 A_3} + \frac{N_1 - N_3}{E_2 A_2} + \frac{M_g}{EI_{ef}}\left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right) = 0 \quad (28)$$

En nettoyant les termes issues de $d^2 N_{1 \text{ ou } 3}(x)/dx^2$ de leurs coefficients $\omega^2/K_{1 \text{ ou } 3,2}$, il vient :

$$-N_1 - \frac{N_1}{k_1} - \frac{N_1 - N_3}{E_2 A_2}\frac{K_1}{\omega^2} + \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{M_g}{EI_{ef}}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) = 0$$
$$-N_3 - \frac{N_3}{k_3} + \frac{N_1 - N_3}{E_2 A_2}\frac{K_3}{\omega^2} + \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{M_g}{EI_{ef}}\left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right) = 0 \quad (29)$$

Soit $k_{1 \text{ ou } 3}$ tel que :

$$k_{1 \text{ ou } 3,2} = \frac{\omega^2 E_{1 \text{ ou } 3} A_{1 \text{ ou } 3}}{K_{1 \text{ ou } 3,2}} \quad (30)$$

En remplaçant les fonctions $N_{1 \text{ ou } 3}$ et M_g par leurs formes (27) et (6), puis en factorisant par $Sin(\omega x)$, il apparait ce système :

$$Sin(\omega x)\left(-\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{k_{1,2}} - \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{E_2 A_2}\frac{K_1}{\omega^2} + \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)\right) = 0$$
$$Sin(\omega x)\left(-\alpha_3 - \frac{\alpha_3}{k_{3,2}} + \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{E_2 A_2}\frac{K_3}{\omega^2} + \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}\left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right)\right) = 0 \quad (31)$$

Pour résoudre (31), soit le terme $Sin(\omega x)$ $\forall x \in [0,\ L]$ annule les deux équations, soit les termes de droites. Or, $\forall x \in]0,\ L[, Sin(\omega x) \neq 0$ donc la résolution de $(\mathcal{E})$ revient à résoudre un simple système de deux équations à deux inconnues $\{\alpha_1, \alpha_3\}$.

Cette résolution peut être réalisée de plusieurs manières : par substitution, par calcul matriciel… La résolution par calcul matriciel permet de ne pas se limiter à deux équations deux inconnues, elle est donc choisie.

Soit le système à résoudre suivant :

$$\mathcal{M}X + B = 0 \quad (32)$$

Avec :

- $\mathcal{M}$ matrice des coefficients des inconnues,
- X le vecteur des inconnues et
- B le vecteur des termes indépendants des inconnues.

La solution est obtenue comme suit :

$$X = -\mathcal{M}^{-1} B \quad (33)$$

Où $\mathcal{M}^{-1}$ est l'inverse de la matrice $\mathcal{M}$.

De l'équation (31) il est possible de déterminer la matrice $\mathcal{M}$ et le vecteur B pour le vecteur des inconnues $X = \{\alpha_1, \alpha_3\}$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{k_{1,2}} - \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \\ \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & -1 - \frac{1}{k_{3,2}} - \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \end{pmatrix} \quad (34)$$

et

$$B = \frac{M_m}{EI_{ef}}\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix} K_{1,2}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) \\ K_{3,2}\left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Donc $(\mathcal{E})$ s'identifie à l'équation (32) et peut être résolu en appliquant (33).

L'inverse de $\mathcal{M}$ vaut :

$$\mathcal{M}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\mathcal{M})}\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{k_{3,2}} - \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & -\frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \\ -\frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & -1 - \frac{1}{k_{1,2}} - \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Avec :

$$\mathrm{Det}(\mathcal{M}) = \left(1 + \frac{1}{k_{3,2}} + \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2}\right)\left(1 + \frac{1}{k_{1,2}} + \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2}\right) - \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2}\frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \quad (37)$$

Comme le $\mathrm{Det}(\mathcal{M})$ ne peut être nul, la matrice $\mathcal{M}$ n'est pas singulière et le système $(\mathcal{E})$ admet une solution unique. Soit la solution suivante :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mathrm{Det}(\mathcal{M})}\frac{M_m}{EI_{ef}}\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{k_{3,2}} - \frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & -\frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \\ -\frac{K_{3,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} & -1 - \frac{1}{k_{1,2}} - \frac{K_{1,2}}{\omega^2}\frac{1}{E_2A_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_{1,2}\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) \\ K_{3,2}\left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (38)$$

Il convient de simplifier l'expression obtenue des inconnues pour obtenir la forme souhaitée de l'équation (26). En simplifiant et en réorganisant il apparait :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_m\, K_{1,2}k_{1,2}\left(\omega^2 A_2E_2(1+k_{3,2})\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + K_{3,2}k_{3,2}\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\,\omega^2\left(K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2} + K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2}) + \omega^2A_2E_2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})\right)} \\ \frac{M_m\, K_{3,2}k_{3,2}\left(\omega^2 A_2E_2(1+k_{1,2})\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + K_{1,2}k_{1,2}\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\,\omega^2\left(K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2} + K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2}) + \omega^2A_2E_2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})\right)} \end{pmatrix} \quad (39)$$

Selon la relation (18), les solutions α_1 et α_3 dépendent de α_2. Il faut donc préciser α_2 :

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_3 = \frac{M_m\, A_2E_2\left(K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2})\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2}\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)}{EI_{ef}\left(K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2} + K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2}) + \omega^2A_2E_2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})\right)} \quad (40)$$

En identifiant cette solution avec la relation (26), il en résulte :

$$z_2 = \frac{K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2})\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2}\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{K_{3,2}(1+k_{1,2})k_{3,2} + K_{1,2}k_{1,2}(1+k_{3,2}) + \omega^2A_2E_2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})} \quad (41)$$

Au niveau du dénominateur de z_2, le coefficient du terme A_2E_2 : $\omega^2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})$ permet de simplifier l'expression du numérateur et du dénominateur. En effet, en les divisant par ce coefficient, il vient :

$$z_2 = \frac{\frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})}\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - \frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2(1+k_{3,2})}\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{\frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2(1+k_{3,2})} + \frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})} + A_2E_2} \quad (42)$$

Or d'après la relation (30), les caractéristiques des sections peuvent apparaitre pour l'élément 1 et 3 en inversant la relation, il vient $K_{i,i\pm1}k_{i,i\pm1}/\omega^2 = A_iE_i$:

$$z_2 = \frac{A_1E_1\frac{1}{(1+k_{1,2})}\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - A_3E_3\frac{1}{(1+k_{3,2})}\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{A_3E_3\frac{1}{(1+k_{3,2})} + A_1E_1\frac{1}{(1+k_{1,2})} + A_2E_2} \quad (43)$$

Dans le but de simplifier cette expression, soit $\gamma_{1\text{ ou }3}$ tel que :

$$\gamma_{1\text{ ou }3} = \frac{1}{(1+k_{1\text{ ou }3,2})} \quad (44)$$

Il en découle :

$$z_2 = \frac{A_1E_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - A_3E_3\gamma_3\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2} \quad (45)$$

L'écriture des solutions α_1 et α_3 peut être simplifiée en s'inspirant la relation (18) et de la relation (26). En divisant les numérateurs et les dénominateurs des solutions α_1 et α_3 par le coefficient $\omega^2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})$ devant le terme A_2E_2 au dénominateur, (39) devient :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_m\frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2}\left(\frac{A_2E_2}{(1+k_{1,2})}\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + \frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})}\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\left(\frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2(1+k_{3,2})} + \frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})} + A_2E_2\right)} \\ \frac{M_m\frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2}\left(\frac{A_2E_2}{(1+k_{3,2})}\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + \frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})(1+k_{3,2})}\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\left(\frac{K_{3,2}k_{3,2}}{\omega^2(1+k_{3,2})} + \frac{K_{1,2}k_{1,2}}{\omega^2(1+k_{1,2})} + A_2E_2\right)} \end{pmatrix} \quad (46)$$

En faisant les mêmes changements qu'en (43) et (45), il vient :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_m A_1E_1\left(A_2E_2\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + A_3E_3\gamma_3\gamma_1\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\left(A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2\right)} \\ \frac{M_m A_3E_3\left(A_2E_2\gamma_3\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + A_1E_1\gamma_1\gamma_3\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)\right)}{EI_{ef}\left(A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2\right)} \end{pmatrix} \quad (47)$$

En identifiant avec la relation (26), il est possible d'avoir les expressions de z_1 et z_3 :

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\frac{A_2E_2\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + A_3E_3\gamma_3\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)}{A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2} \\ \gamma_3\frac{A_2E_2\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + A_1E_1\gamma_1\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)+\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)\right)}{A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

Il est intéressant de noter qu'il est possible de mettre en facteur γ_1 (resp. γ_3) dans z_1 (resp. z_3).

Afin d'obtenir une forme similaire au terme z_2, il convient de faire disparaitre le terme $A_2E_2\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)$ (resp. $A_2E_2\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)$) de z_1 (resp. z_3). En formulant z_i de la manière suivante :

$$z_i = \frac{\vartheta_1 A_2E_2 + \vartheta_2}{A_2E_2 + \vartheta_3}$$

Soit la simplification suivante :

$$z_i = \frac{\vartheta_1 A_2E_2 + \vartheta_2}{A_2E_2 + \vartheta_3} = \frac{\vartheta_1 A_2E_2 + \vartheta_2 - \vartheta_1(A_2E_2 + \vartheta_3) + \vartheta_1(A_2E_2 + \vartheta_3)}{A_2E_2 + \vartheta_3} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1\vartheta_3}{A_2E_2 + \vartheta_3} + \vartheta_1 \qquad (49)$$

Il en résulte pour l'équation (48) :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + \frac{-A_1E_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + A_3E_3\gamma_3\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2}\right) \\ \gamma_3\left(\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + \frac{A_1E_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - A_3E_3\gamma_3\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{A_3E_3\gamma_3 + A_1E_1\gamma_1 + A_2E_2}\right) \end{pmatrix} \qquad (50)$$

En comparant avec la forme de z_2 (45), il apparait :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1\left(\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - z_2\right) \\ \gamma_3\left(\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + z_2\right) \end{pmatrix} \qquad (51)$$

en posant $\gamma_2 = 1$ selon (45) afin de généraliser ce facteur. La distance z_2 peut être réécrite de la manière suivante :

$$z_2 = 1\frac{A_1E_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - A_3E_3\gamma_3\left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{3} A_iE_i\gamma_i} \qquad (52)$$

En identifiant avec les relations du paragraphe 1.2.2.4, il vient :

$$\begin{aligned} z_i &= \gamma_i a_i \\ a_2 &= z_2 \\ a_1 &= \left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right) - a_2 \\ a_3 &= \left(\frac{h_3}{2}+\frac{h_2}{2}\right) + a_2 \end{aligned} \qquad (53)$$

Comme les distances a_i proviennent de la géométrie de la section composite de $(\mathcal{P})$, les distances z_i représentent un rapprochement des sections i vers l'axe $(\mathcal{A})$, c'est le rôle du coefficient γ_i. En effet ce coefficient est compris dans l'intervalle $[0,1]$. Pour $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, la distance $z_2 = 0$ donc les sections 1 et 3 se retrouvent superposées sur la section 2, tandis que pour $\gamma_i = 1$, les distances $z_i = a_i$.

La relation (26) peut être précisée :

$$\alpha_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} E_iA_iz_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} E_iA_i\gamma_ia_i$$

Finalement l'effort normal N_i a pour expression :

$$N_i(x) = \frac{M_g(x)}{EI_{ef}} E_iA_iz_i = \frac{M_g(x)}{EI_{ef}} E_iA_i\gamma_ia_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} E_iA_i\gamma_ia_iSin(\omega x) \qquad (54)$$

La solution a été déterminée à partir de la forme de $q(x) = q_mSin(\omega x)$. Toutefois, une forme plus globale fonctionne : $q(x) = C[1]Sin(\omega x) + C[2]Cos(\omega x)$, où $C[1]$ et $C[2]$ sont des constantes.

Cela signifie que toutes les combinaisons linéaires à base de $Sin(\omega x)$ et de $Cos(\omega x)$ peuvent être des chargements pour $(\mathcal{p})$. Cependant, comme il est précisé à la section §C.3 les fonctions peuvent être développées en série de FOURIER, pour cela il faut complexifier cette méthode avec l'intégration d'un paramètre supplémentaire θ désignant le $\theta^{\text{ième}}$ terme de la série de FOURIER de la fonction $q(x)$. Dans les formules précédentes pour α_i, z_i, a_i et surtout γ_i, en remplaçant ω par $\theta\omega$ il est possible de pallier le problème. La forme globale du chargement devient : $q_\theta(x) = C[1]Sin(\theta\omega x) + C[2]Cos(\theta\omega x)$. Ensuite avec le principe de superposition (Hypothèse 11) tous les cas possibles de chargement q de $(\mathcal{p})$ sur n appuis peuvent être envisagés en suivant les recommandations des sections §C.1.4 et §C.1.11.

1.2.2.8 Détermination de la rigidité effective

En utilisant les relations obtenues précédemment : (15), (16) et (54), il vient :

$$M_g = \sum_{i=1}^{3}(M_i + a_i N_i) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{M_g}{EI_{ef}}E_i I_i + a_i \frac{M_g}{EIef}E_i A_i z_i\right) = \frac{M_g}{EIef}\sum_{i=1}^{3}\left(E_i I_i + E_i A_i \gamma_i a_i^2\right) \qquad (55)$$

En « simplifiant » par M_g il apparait la rigidité effective :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{3}\left(E_i I_i + E_i A_i \gamma_i a_i^2\right) = \sum_{i=1}^{3} E_i\left(I_i + A_i \gamma_i a_i^2\right) \qquad (56)$$

Il faut noter que si la raideur dans les liaisons est nulle, alors $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$, il en découle que $a_2 = 0$, il vient la rigidité effective minimale :

$$EI_{ef,\text{min}} = EI_0 = \sum_{i=1}^{3} E_i I_i \qquad (57)$$

Puis, si la raideur dans les liaisons tend vers l'infini, $\gamma_1 = \gamma_3 = 1$, il en résulte la rigidité effective maximale :

$$EI_{ef,\text{max}} = \sum_{i=1}^{3}\left(E_i I_i + E_i A_i a_i^2\right) = \sum_{i=1}^{3} E_i\left(I_i + A_i a_i^2\right) \qquad (58)$$

Où le terme $A_i a_i^2$ fait office du terme supplémentaire pour le calcul de l'inertie totale par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$ (ou centre de gravité) de $(\mathcal{p})$, cela revient au théorème de HUYGENS (Théorème 2).

En retravaillant la forme de la rigidité effective, il apparait cette manière de l'exprimer :

$$EI_{ef} = EI_0 + \frac{E_2A_2E_1A_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h_2}{2}\right)^2 + E_2A_2E_3A_3\gamma_3\left(\frac{h_2}{2}+\frac{h_3}{2}\right)^2 + E_1A_1\gamma_1E_3A_3\gamma_3\left(\frac{h_1}{2}+2\frac{h_2}{2}+\frac{h_3}{2}\right)^2}{E_1A_1\gamma_1 + E_2A_2 + E_3A_3\gamma_3} \qquad (59)$$

1.2.2.9 Contraintes

Avec les relations (54) et (56), les contraintes normales et tangentielles peuvent être précisées. Deux systèmes de coordonnées sont utilisés dans cette section, l'un est local « z » où son origine est représentée par la fibre neutre de chaque élément i, l'autre est globale « Z » et son origine se situe sur l'axe $(\mathcal{A})$ (Figure 12).

- **Contraintes normales**

Selon la relation (11), il est possible de connaître les contraintes normales dans chaque élément de $(\mathcal{p})$. La contrainte due à l'effort normal est la suivante :

$$\sigma_{i,N} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2\\ 0 \text{ pour } i\geq 2\end{cases}}\frac{N_i}{A_i} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2\\ 0 \text{ pour } i\geq 2\end{cases}}\frac{E_i\gamma_i a_i}{EI_{ef}}M_g(x) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2}$$

$$\sigma_{i,N,\text{max}} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2\\ 0 \text{ pour } i\geq 2\end{cases}}\frac{E_i a_i \gamma_i}{EI_{ef}}M_g\left(\frac{L}{2}\right) = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2\\ 0 \text{ pour } i\geq 2\end{cases}}\frac{E_i a_i \gamma_i}{EI_{ef}}\frac{q_m}{\omega^2} \qquad (60)$$

Quant à la contrainte due au moment fléchissant, avec les relations (11) et (15) il vient :

$$\sigma_{i,M} = -\frac{M_i}{I_i}z = -\frac{M_g(x)}{EI_{ef}}\frac{E_i I_i}{I_i}z = -\frac{E_i}{EI_{ef}}zM_g(x) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2}$$
$$\sigma_{i,M,\max} = \frac{E_i}{EI_{ef}}\frac{h_i}{2}M_g\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{E_i}{EI_{ef}}\frac{h_i}{2}\frac{q_m}{\omega^2} \quad (61)$$

La contrainte normale totale est la somme des deux contraintes précédentes :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2\\0 \text{ pour } i\ge 2\end{cases}}\frac{E_i\gamma_i a_i}{EI_{ef}}M_g(x) - \frac{E_i}{EI_{ef}}zM_g(x) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \quad (62)$$

- **Contraintes tangentielles et forces de cisaillement à l'interface**

La contrainte de cisaillement peut se calculer sur toute la hauteur de la section composite de $(\mathcal{P})$ et aussi à l'interface entre les éléments i et l'élément 2. Pour ce dernier cas, il faut revenir à la relation entre le flux de cisaillement et l'effort normal (358), il vient pour $i \in \{1,3\}$:

$$t_{w,i,2} = \frac{dN_i}{dx} = \frac{dM_g}{dx}\frac{E_i A_i z_i}{EI_{ef}} = T\frac{E_i A_i a_i \gamma_i}{EI_{ef}} \quad (63)$$

Comme la contrainte de cisaillement est reliée avec le flux de cisaillement (359), les expressions de la contrainte de cisaillement au niveau de l'interface entre les éléments i et 2 pour $i \in \{1,3\}$ sont :

$$\tau_{w,i} = \frac{t_{w,i,2}}{b_i} = T\frac{E_i A_i z_i}{b_i EI_{ef}} = T\frac{E_i h_i \gamma_i a_i}{EI_{ef}} \quad (64)$$

En utilisant les équations (12)et (63), la force soumise à un organe pour $i \in \{1,3\}$ s'exprime comme ceci :

$$F_{i,i\pm1} = t_{w,i,i\pm1}e_{i,i\pm1} = T\frac{E_i A_i a_i \gamma_i}{EI_{ef}}e_{i,i\pm1} \quad (65)$$

- **Contraintes tangentielles dans la section**

Pour la contrainte de cisaillement sur toute la hauteur de la section, il faut utiliser la relation (350) reliant la contrainte normale avec la contrainte tangentielle. En se servant de la formule de la contrainte normale totale (62), et en supposant constante la largeur b_1 le long de la hauteur de l'élément 1, il vient :

$$\tau_1 = \frac{1}{b_1}\int\frac{d\sigma_1}{dx}dS = \frac{E_1}{EI_{ef}}\frac{dM_g}{dx}\frac{1}{b_1}\int_z^{h_1/2}(-z_1 - z)\,dz\int_0^{b_1}dy$$
$$= \frac{E_1}{EI_{ef}}T\frac{1}{b_1}\left(-b_1 z_1\left(\frac{h_1}{2} - z\right) - \frac{b_1}{2}\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - z^2\right) + C[1]\right) \text{ pour } -\frac{h_1}{2} \le z \le \frac{h_1}{2} \quad (66)$$

La constante d'intégration se calcule en connaissant les conditions aux limites, en effet pour $z = h_2/2$, $\tau_1(h_2/2) = 0$, ainsi $C[1] = 0$. De cette relation, il est intéressant de souligner la part de l'effort normal $\tau_{1,N}$ et la part du moment fléchissant $\tau_{1,M}$:

$$\tau_1(z) = -\frac{E_1}{EI_{ef}}Tz_1\left(\frac{h_1}{2} - z\right) - \frac{E_1}{EI_{ef}}T\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - z^2\right) = \tau_{1,N}(z) + \tau_{1,M}(z) \text{ pour } -\frac{h_1}{2} \le z \le \frac{h_1}{2} \quad (67)$$

Pour $z = -h_2/2$, il vient $\tau_1(-h_2/2) = -\tau_{w,1}$.

Si l'on exprime cette contrainte par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$, il en découle :

$$\tau_1(Z) = -\frac{E_1}{EI_{ef}}Tz_1\left(\frac{h_1}{2} - (Z - a_1)\right) - \frac{E_1}{EI_{ef}}T\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - (Z - a_1)^2\right) \text{ pour } -\frac{h_1}{2} + a_1 \le Z \le \frac{h_1}{2} + a_1 \quad (68)$$

En prenant l'hypothèse que l'axe $(\mathcal{A})$ se situe dans la section de l'élément 2 : $-h_2/2 < z_2 < h_2/2$, la contrainte de cisaillement dans l'élément 2 se calcule de la manière suivante :

$$\tau_{2,1}(z) = \frac{1}{b_2}\int\frac{d\sigma_2}{dx}dS = \frac{E_2}{EI_{ef}}\frac{dM_g}{dx}\frac{1}{b_2}\int_z^{h_2/2}(z_2 - z)\,dz\int_0^{b_2}dy$$
$$= \frac{E_2}{EI_{ef}}T\frac{1}{b_2}\left(b_2 z_2\left(\frac{h_2}{2} - z\right) - \frac{b_2}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - z^2\right) + C[2]\right) \text{ pour } -\frac{h_2}{2} \le z \le \frac{h_2}{2}$$

En l'exprimant par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$, il en résulte :

$$\tau_{2,1}(Z) = \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{b_2}\left(b_2 z_2\left(\frac{h_2}{2} - (Z + a_2)\right) - \frac{b_2}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - (Z + a_2)^2\right) + C[2]\right) \text{ pour } -\frac{h_2}{2} - a_2 \le Z \le \frac{h_2}{2} - a_2$$

Pour déterminer la constante d'intégration $C[2]$, il faut que le flux de cisaillement soit identique à l'interface pour τ_1 et $\tau_{2,1}$, donc pour $z = h_2/2 - a_2 = -h_1/2 + a_1$, il vient $\tau_{2,1}(h_2/2 - a_2)b_2 = \tau_1(h_1/2 + a_1)b_1$ alors $C[2] = -E_1 A_1 z_1 / E_2$.

Ainsi, la contrainte de cisaillement dans l'élément 2 s'écrit :

$$\tau_{2,1}(z) = +\frac{E_2}{EI_{ef}} T z_2\left(\frac{h_2}{2} - z\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - z^2\right) - \frac{t_{w,1,2}}{b_2} \text{ pour } -\frac{h_2}{2} \le z \le \frac{h_2}{2} \quad (69)$$

Et par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$:

$$\tau_{2,1}(Z) = +\frac{E_2}{EI_{ef}} T a_2\left(\frac{h_2}{2} - (Z + a_2)\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - (Z + a_2)^2\right) - \frac{t_{w,1,2}}{b_2} \quad (70)$$

$$\text{pour } -\frac{h_2}{2} - a_2 \le Z \le \frac{h_2}{2} - a_2$$

L'extrémum se situe pour $\sigma_2 = 0$, soit pour $z = a_2$ ou pour $Z = 0$, il en découle :

$$\tau_{2,1,\max} = \tau_{2,1}(Z = 0) = +\frac{E_2}{EI_{ef}} T a_2\left(\frac{h_2}{2} - a_2\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - {a_2}^2\right) - \frac{t_{w,1,2}}{b_2}$$
$$= -\frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\frac{h_2}{2} - a_2\right)^2 - \frac{t_{w,1,2}}{b_2} \quad (71)$$

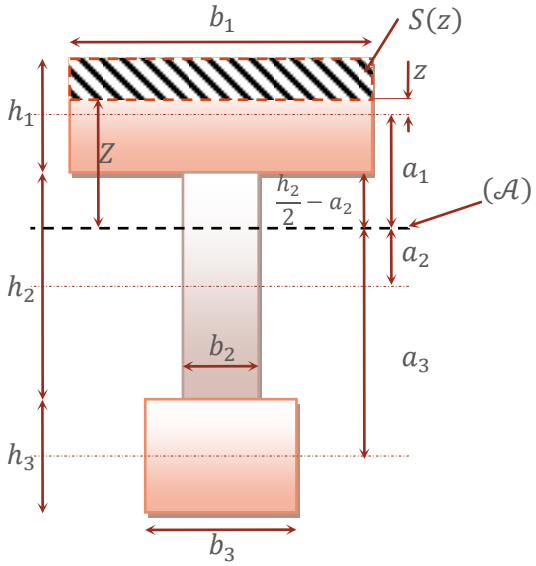


Figure 12 : *Système de coordonnées*

En faisant de même pour l'élément 3, il vient :

$$\tau_3(Z) = -\frac{E_3}{EI_{ef}} T z_3\left(\frac{h_3}{2} + (Z + a_3)\right) - \frac{E_3}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_3}{2}\right)^2 - (Z + a_3)^2\right) = \tau_{3,N}(Z) + \tau_{3,M}(Z) \quad (72)$$

$$\text{pour } -\frac{h_3}{2} - a_3 \le Z \le \frac{h_3}{2} - a_3$$

La contrainte de cisaillement $\tau_{2,3}$ pour la partie inférieure à $(\mathcal{A})$ de l'élément 2, est déterminée par la relation suivante :

$$\tau_{2,3}(Z) = -\frac{E_2}{EI_{ef}} T a_2 \left(\frac{h_2}{2} + (Z + a_2)\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - (Z + a_2)^2\right) - \frac{t_{w,3,2}}{b_2}$$
$$= \tau_{2,N}(Z) + \tau_{2,M}(Z) - \frac{t_{w,3,2}}{b_2} \quad \text{pour} \quad -\frac{h_2}{2} - a_2 \leq z \leq \frac{h_2}{2} - a_2 \qquad (73)$$

Son extrémum se situe pour $z = a_2$ ou pour $Z = 0$, il en découle :

$$\tau_{2,3,\max} = \tau_{2,3}(Z = 0) = -\frac{E_2}{EI_{ef}} T a_2 \left(a_2 + \frac{h_2}{2}\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - {a_2}^2\right) - \frac{t_{w,3,2}}{b_2}$$
$$= -\frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\frac{h_2}{2} + a_2\right)^2 - \frac{t_{w,3,2}}{b_2} \qquad (74)$$

La vérification de $\tau_{2,1,\max} = \tau_{2,3,\max}$ se réalise en utilisant les définitions de $t_{w,i,2}$ (63) et de z_i (51)(52) et a_i (53).

La valeur maximale de la contrainte de cisaillement se situe dans la section de l'élément 2 avec l'une des deux définitions $\tau_{2,1,\max}$ ou $\tau_{2,3,\max}$ tant que l'axe $(\mathcal{A})$ est présent dans cette section.

Dans le cas où l'axe $(\mathcal{A})$ se situe dans la section de l'élément 1, il convient de prendre par exemple la relation (68) pour $Z = 0$, il vient la valeur maximale de la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{1,\max} = \tau_1(Z = 0) = \frac{E_1}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + a_1\right)\left(a_1 - \frac{h_1}{2} - 2z_1\right) \qquad (75)$$

Il faut appliquer le même raisonnement si l'axe $(\mathcal{A})$ se situe dans la section de l'élément 3. Pour $Z = 0$, avec la relation (72), il en résulte :

$$\tau_{3,\max} = \tau_3(Z = 0) = \frac{E_3}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\frac{h_3}{2} + a_3\right)\left(a_3 - \frac{h_3}{2} - 2z_3\right) \qquad (76)$$

Donc les contraintes tangentielles maximales peuvent être déterminées où que soit l'axe $(\mathcal{A})$ dans la section composite à trois éléments.

1.2.2.10 Formulaire

Après le calcul et la réorganisation de la solution du système $(\mathcal{E})$ (§ 1.2.2.7), il est possible d'exprimer les efforts normaux N_i sous la forme :

$$N_i = E_i A_i \gamma_i a_i \frac{M_g(x)}{EI_{ef}} \qquad (77)$$

Ainsi que la rigidité effective :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{3} E_i I_i + E_i A_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{3} E_i I_i + E_i A_i a_i^2 \gamma_i^2 \qquad (78)$$

Avec :

$$\gamma_{1 \text{ ou } 3} = \frac{1}{1 + k_{1 \text{ ou } 3}}$$
$$\gamma_2 = 1 \qquad (79)$$

et

$$k_{1 \text{ ou } 3} = \frac{\omega^2 E_{1 \text{ ou } 3} A_{1 \text{ ou } 3}}{K_{1 \text{ ou } 3,2}} = \frac{\omega^2 E_{1 \text{ ou } 3} A_{1 \text{ ou } 3}}{c_{1 \text{ ou } 3,2}} e_{1 \text{ ou } 3,2} \qquad (80)$$

Les distances z_1, z_3, a_1 et a_3 valent :

$$z_i = \gamma_i a_i$$
$$a_1 = \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) - a_2$$
$$a_3 = \left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right) + a_2 \qquad (81)$$

L'expression de $z_2 = a_2$ vaut :

$$z_2 = a_2 = \frac{A_1 E_1 \gamma_1 \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) - A_3 E_3 \gamma_3 \left(\frac{h_3}{2} + \frac{h_2}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{3} A_i E_i \gamma_i} \quad (82)$$

Les contraintes normales ont pour expression :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<2 \\ 0 \text{ pour } i\geq 2\end{cases}} \frac{E_i \gamma_i a_i}{EI_{ef}} M - \frac{E_i}{EI_{ef}} zM \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (83)$$

Les contraintes de cisaillement aux interfaces ont pour formule pour $i \neq 2$:

$$\tau_{w,i} = \frac{t_{w,i,2}}{b_i} = T \frac{E_i A_i z_i}{b_i EI_{ef}} = T \frac{E_i h_i \gamma_i a_i}{EI_{ef}} \quad (84)$$

Les contraintes de cisaillement dans toute la section s'expriment comme ceci :

$$\tau_1(Z) = -\frac{E_1}{EI_{ef}} T z_1 \left(\frac{h_1}{2} - (Z - a_1)\right) - \frac{E_1}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 - (Z - a_1)^2\right) \text{ pour } -\frac{h_1}{2} + a_1 \leq Z \leq \frac{h_1}{2} + a_1$$

$$\tau_{2,3}(Z) = -\frac{E_2}{EI_{ef}} T a_2 \left(\frac{h_2}{2} + (Z + a_2)\right) - \frac{E_2}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 - (Z + a_2)^2\right) - \frac{t_{w,3,2}}{b_2} \quad \text{pour} \quad -\frac{h_2}{2} - a_2 \leq z \leq \frac{h_2}{2} - a_2 \quad (85)$$

$$\tau_3(Z) = -\frac{E_3}{EI_{ef}} T z_3 \left(\frac{h_3}{2} + (Z + a_3)\right) - \frac{E_3}{EI_{ef}} T \frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_3}{2}\right)^2 - (Z + a_3)^2\right) \text{ pour } -\frac{h_3}{2} - a_3 \leq Z \leq \frac{h_3}{2} - a_3$$

Pour les valeurs maximales de cette contrainte, il suffit de déterminer où se trouve le lieu où s'annule la contrainte normale totale, puis de prendre $Z = 0$, dans la zone adéquate.

À titre indicatif, la contrainte maximale dans la section de l'élément 2 s'écrit :

$$\tau_{2,3,\max} = \tau_{2,3}(Z = 0) = -\frac{1}{b_2 EI_{ef}} T \left(\frac{E_2 b_2}{2}\left(\frac{h_2}{2} + a_2\right)^2 + E_3 A_3 \gamma_3 a_3\right) \quad (86)$$

1.2.3 Méthode exacte de GIRHAMMAR

GIRHAMMAR [26] expose une méthode générale pour la flexion d'une poutre de deux éléments soumise à un chargement quelconque q, reposant sur deux appuis quelconques. Cependant, dans le cas présent un chargement de type sinusoïdal et une poutre reposant sur deux appuis simples sont préférés afin de pourvoir comparer ce modèle à celui de HEIMESHOFF présenté dans la section précédente. La description de cette méthode est inspirée de KREUZINGER [27] et SCHÄFER [18] et [19].

1.2.3.1 Equilibre des prismes élémentaires

Soit une poutre $(\mathcal{p})$ composée de deux éléments reposant sur deux appuis simples, soumise à un chargement sinusoïdal. Les éléments ont pour section $A_i = b_i h_i$, inertie $I_i = b_i h_i^3/12$, module E_i et longueur L (Figure 13).

Le chargement q fait fléchir la poutre composite $(\mathcal{p})$. Un glissement des deux sections apparait. En prenant l'hypothèse que la courbure est la même dans les deux sections, une fois la charge appliquée, il vient le calcul du glissement s_t en fonction des déplacements des sections u_1 et u_2, et de la rotation des sections w' :

$$s_t = (u_2 + w' v_2) - (u_1 - w' v_1) = u_2 - u_1 + w' a \quad (87)$$

En prenant la même hypothèse que pour l'étude du modèle d'HEIMESHOFF sur la raideur à l'interface, il vient la relation entre le glissement et le flux de cisaillement selon la figure 13 et les relations (12) et (87) :

$$t_w = K_{1,2} s_t = K_{1,2}(u_2 - u_1 + w' a) \quad (88)$$

De plus, le chargement q en faisant fléchir la poutre composite $(\mathcal{p})$, crée des efforts internes dans les sections des éléments. Il convient de calculer l'équilibre des efforts normaux puis des moments et des efforts tranchants. Il en résulte pour l'équilibre des efforts normaux selon la figure 14(a) :

$$N_1 + t_w dx = N_1 + dN_1, \quad \Rightarrow \frac{dN_1}{dx} - t_w = 0 \quad (89)$$

$$N_2 - t_w dx = N_2 + dN_2\,, \quad \Rightarrow \frac{dN_2}{dx} + t_w = 0$$

D'après la relation (341), avec $\varepsilon = -du_i/dx$, il vient la relation entre l'effort normal et le déplacement selon x u_i des sections i :

$$N_i = -E_i A_i \frac{du_i}{dx} = -E_i A_i u_i' \qquad \textbf{(90)}$$

Le signe négatif est nécessaire afin de garantir le postulat indiqué à la note 1 pour la résolution (§1.2.3.2).

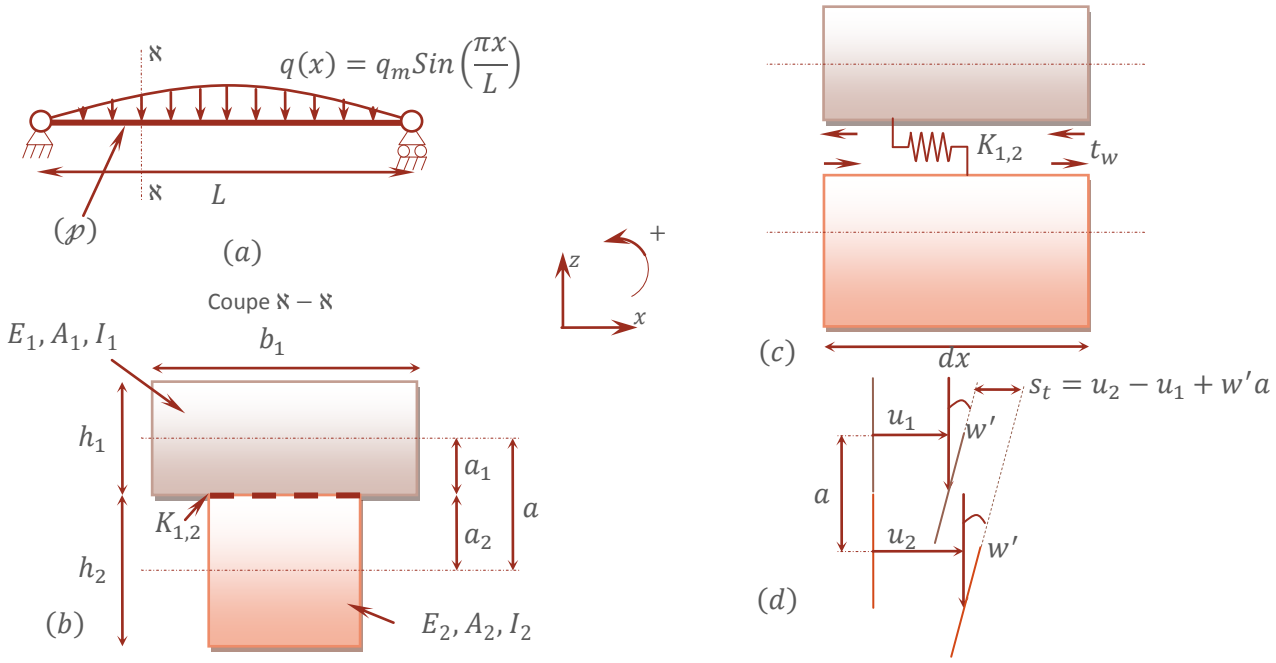


Figure 13 : *Hypothèses d'étude : (a) poutre type, (b) section de référence, (c) intégration de la raideur à l'interface et (d) apparition du glissement (d'après* **[27]***)*

Pour l'équilibre du tronçon illustré à la figure 14(b), le flux de cisaillement sur la longueur du prisme élémentaire crée des efforts tranchants qui doivent être équilibrés avec les moments, en calculant le moment au point O_i et en négligeant les infiniments petits du second ordre ($dT_i dx$), il vient :

$$-M_i + T_i dx - t_w dx a_i + (M_i + dM_i) = 0$$

$$T_i = -M_i' + t_w a_i$$

Comme le chargement q est la variation de l'effort tranchant total selon la relation (331), en prenant comme hypothèse que $T = T_1 + T_2$, il en découle :

$$q = T' = T_1' + T_2' = -M_1'' + t_w' a_1 - M_2'' + t_w' a_2 \qquad \textbf{(91)}$$

Selon la relation (362) entre le moment fléchissant et la flèche, puis la valeur du flux de cisaillement (88), il vient :

$$q = -(E_1 I_1 + E_2 I_2) w'''' + K_{1,2}(u_2' - u_1' + w'' a) a \qquad \textbf{(92)}$$

En posant $EI_0 = E_1 I_1 + E_2 I_2$, et en regroupant les équations (89) et (92), il en résulte le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} -E_1 A_1 u_1'' - K_{1,2}(u_2 - u_1 + w'a) &= 0 \\ -E_2 A_2 u_2'' + K_{1,2}(u_2 - u_1 + w'a) &= 0 \\ q = -EI_0 w'''' + K_{1,2}(u_2' - u_1' + w''a)a & \end{aligned} \qquad \textbf{(93)}$$

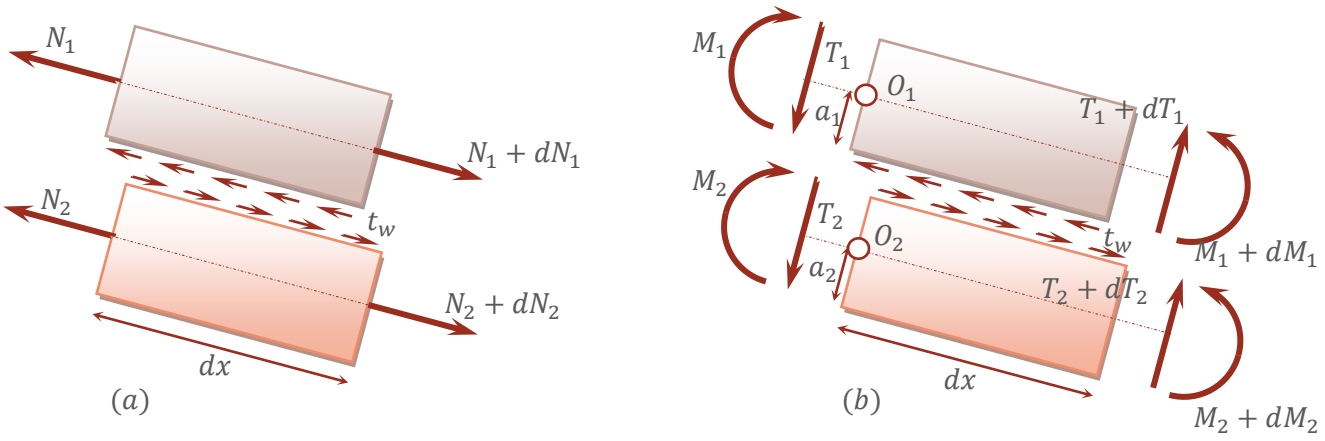


Figure 14 : *Équilibre des prismes élémentaires : (a) équilibre des efforts normaux (b) équilibre des moments et efforts tranchants*

1.2.3.2 Résolution du système d'équations différentielles

Bien que le système (93) puisse être résolu quel que soit le chargement q appliqué et quelles que soient les conditions aux appuis, le chargement choisi est sinusoïdal et a pour formule celle de la relation (3), soit :

$$q(x) = q_m Sin(\omega x) \qquad (94)$$

En s'inspirant de la formule de la déformée (8), il vient :

$$w(x) = -\frac{q_m}{\omega^4}\frac{1}{EI_{ef}} Sin(\omega x) = w_0 Sin(\omega x) \qquad (95)$$

Comme d'après (357), l'effort normal à une forme de type similaire au moment et donct à la flèche (d'après (362)), ici de forme sinus, soit la forme suivante pour le déplacement des sections selon x :

$$u_i(x) = u_{0i} Cos(\omega x) \qquad (96)$$

En utilisant les relations (94), (95) et (96), le système (93) devient un simple système d'équations algébriques puisque $Sin(\omega x)$ et $Cos(\omega x)$ ne s'annulent pas sur tout l'intervalle $[0, L]$:

$$\begin{aligned} E_1 A_1 \omega^2 u_{01} - K_{1,2}(u_{02} - u_{01} + \omega w_0 a) &= 0 \\ E_2 A_2 \omega^2 u_{02} + K_{1,2}(u_{02} - u_{01} + \omega w_0 a) &= 0 \\ q_m = -EI_0 \omega^4 w_0 - K_{1,2}(\omega u_{02} - \omega u_{01} + \omega^2 w_0 a) a & \end{aligned} \qquad (97)$$

En résolvant la première équation de (93) pour l'inconnue u_{01} il vient :

$$u_{01} = \frac{K_{1,2}(u_{02} + \omega w_0 a)}{K_{1,2} + E_1 A_1 \omega^2} = \frac{(u_{02} + \omega w_0 a)}{1 + \frac{E_1 A_1 \omega^2}{K_{1,2}}} = (u_{02} + \omega w_0 a)\gamma_1 \qquad (98)$$

Où le coefficient γ_1 permet de simplifier la formulation de u_{01}. Ce coefficient est le même que celui déterminé dans le modèle précédent (44). En remplaçant (98) dans la seconde équation de (93), il vient l'expression de u_{02} en utilisant la relation reliant $K_{1,2}$ et γ_1 :

$$u_{02} = -\frac{K_{1,2}\omega w_0 a(1-\gamma_1)}{E_2 A_2 \omega^2 + K_{1,2}(1-\gamma_1)} = -\omega w_0 a \frac{\gamma_1 E_1 A_1}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} \qquad (99)$$

Ainsi

$$u_{01} = \left(-\omega w_0 a \frac{\gamma_1 E_1 A_1}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} + \omega w_0 a\right)\gamma_1 = \omega w_0 a \frac{\gamma_1 E_2 A_2}{\gamma_1 E_1 A_1 + E_2 A_2} \qquad (100)$$

Il vient en remplaçant les inconnues u_{01} et u_{02} par leurs expressions (99) et (100) en fonction de w_0, dans la dernière équation de (93) :

$$w_0 = -\frac{q_m}{\omega^4}\frac{1}{EI_0 + a^2\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1 E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}}} = -\frac{q_m}{\omega^4}\frac{1}{EI_{ef}} \qquad (101)$$

En remplaçant le terme γ_1 par sa valeur issue de (44), la rigidité peut se formuler de la manière suivante :

$$EI_{ef} = EI_0 + a^2 \frac{1}{\frac{\omega^2}{K_{12}} + \frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2}} \quad (102)$$

1.2.3.3 Contraintes

Selon les notations choisies dans cette section, le sens des efforts normaux étant tous les deux en traction, ils doivent donc être des valeurs algébriques. Le moment fléchissant dans chacune des lamelles doit entraîner un effort de compression dans la partie supérieure de la section par rapport à la fibre moyenne, et un effort de traction dans la partie inférieure de la section, ainsi la coordonnée z indiquera le signe de la contrainte normale due au moment fléchissant, il en résulte :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (103)$$

Pour la contrainte de cisaillement, il convient de suivre la même méthodologie de la section §1.2.2.9 ainsi que celle plus générale de l'Annexe §C.2. Il en résulte :

$$\tau_i(x,z) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial N_i(x)}{\partial x}\left(\frac{h_i}{2} - z\right) - \frac{1}{I_i}\frac{\partial M_i(x)}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_i}{2}\right)^2 - z^2\right) + \frac{1}{b_i}\sum_{k=1}^{i-1} N_k'(x) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (104)$$

Pour obtenir le flux de cisaillement à l'interface entre l'élément 1 et l'élément 2, il faut calculer soit $\tau_1(x, -h_1/2)b_1$, soit $\tau_2(x, h_2/2)b_2$. Ce flux permet de calculer la force que reprend un organe dans l'interface, pour un espacement $e_{i,i\pm1}$ entre chaque organe :

$$F_{i,i\pm1}(x) = e_{i,i\pm1} \sum_{k=1}^{i} N_k'(x) \quad (105)$$

1.2.4 Méthode simplifiée de KREUZINGER

La méthode de KREUZINGER repose sur la séparation des sollicitations soumises à une poutre composite. Celle-ci est scindée en deux parties, la première correspond simplement aux éléments composant la poutre sans aucune liaison : rigidité de flexion ; la seconde, le complément pour obtenir une poutre complètement liée, rigidité de Steiner. Ensuite, il est possible de déterminer la rigidité de cisaillement où il est intégré les raideurs à l'interface et les modules de cisaillement de chacune des lamelles.

1.2.4.1 Les rigidités

Soit une poutre $(\mathcal{p})$ constituée de n éléments de section $A_i = b_i h_i$, d'inertie $I_i = b_i h_i^3/12$ et de longueur L.

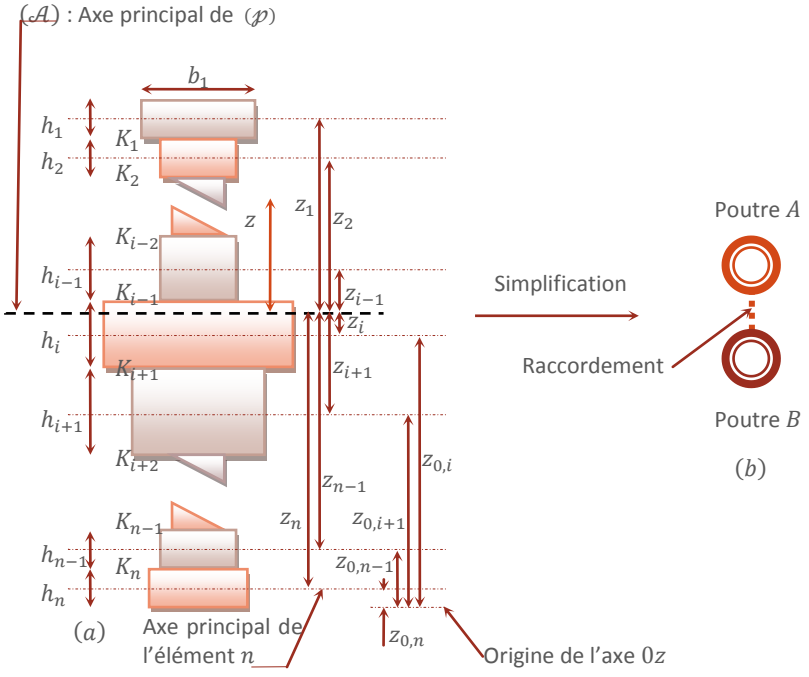


Figure 15 : *Simplification de la poutre composée de n éléments en une poutre composée de deux éléments*

En prenant une origine de l'axe Oz, il est possible par la suite de déterminer le barycentre de la section composée de n éléments pondérés des modules d'élasticité. Il convient pour cela d'utiliser la formule suivante :

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_{O,i} E_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} E_i A_i} \qquad (106)$$

Le centre de « gravité » de chaque section peut donc être déterminé selon cette nouvelle origine et avoir pour ordonnée z_i pour l'élément i.

Le calcul de l'inertie de chaque élément (§ C.1) suit donc la formule suivante (Figure 15) d'après le Théorème de HUYGENS (Théorème 2) :

$$I_i = \int_{A_i} z^2 \, dA = \int_{z_i - h_i/2}^{z_i + h_i/2} z^2 \, dA = b_i \int_{z_i - h_i/2}^{z_i + h_i/2} z^2 \, dz = \frac{b_i h_i^3}{12} + z_i^2 A_i = I_{A,i} + I_{B,i} \qquad (107)$$

Avec :

- $I_{A,i}$: Inertie de flexion (Inertie liée à la poutre A),
- $I_{B,i}$: Inertie de Steiner (Inertie liée à la poutre B),
- z_i : altitude de l'élément i par rapport au centre de gravité de la section composite.

En multipliant par le module d'élasticité, il en résulte les rigidités de flexion (108) et de Steiner (109) de la poutre :

$$EI_A = \sum_{i}^{n} E_i I_{A,i} \qquad (108)$$

$$EI_B = \sum_{i}^{n} E_i I_{B,i} \qquad (109)$$

Dans la littérature, ces rigidités sont souvent nommées respectivement B_A et B_B.

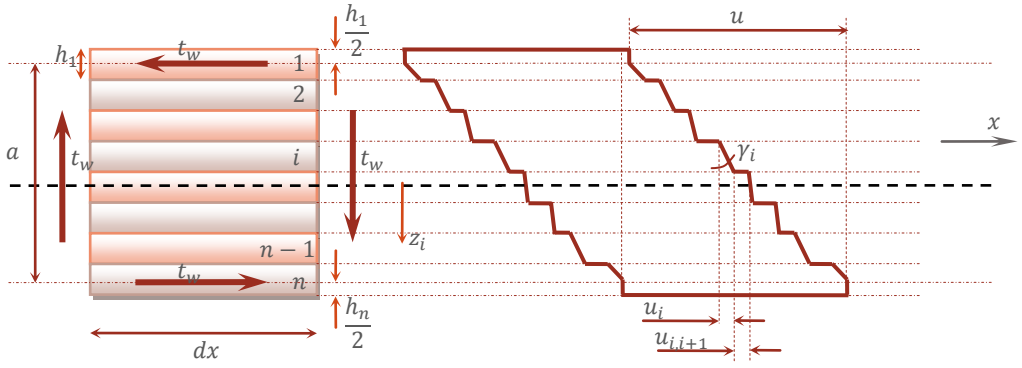


Figure 16 : *Influence du glissement dans la déformation de la section due au flux de cisaillement (d'après* **[23]***)*

Selon la figure 16, les relations (355) et (359) ainsi que l'hypothèse 10, les distances u_i et $u_{i,i+1}$ peuvent être calculées de la manière suivante :

$$\gamma_i = \frac{u_i}{h_i} = \frac{\tau}{G_i} = \frac{t_w}{G_i b_i} \qquad (110)$$

donc

$$u_i = \frac{\tau}{G_i} h_i = \frac{t_w}{G_i} \frac{h_i}{b_i} \qquad (111)$$

Au niveau de la jonction entre les éléments i et $i+1$, soit la raideur surfacique $\overline{K}_{i,i+1}$ suivante :

$$\overline{K}_{i,i+1} = \frac{K_{i,i+1}}{b_{i,i+1}} = \frac{c_{i,i+1}}{e_{i,i+1} b_{i,i+1}} \qquad (112)$$

Avec :

- $e_{i,i+1}$ est l'espacement entre les organes si la liaison est avec des connecteurs discrets. Pour des liaisons continues, $e_{i,i+1} = L$.
- $b_{i,i+1} = \min(b_i, b_{i+1})$,
- $e_{i,i+1} b_{i,i+1}$ est la surface de contact entre les éléments i et $i+1$.
- $c_{i,i+1}$ est la raideur d'un organe à la jonction entre les éléments i et $i+1$.
- $K_{i,i+1}$ est la raideur linéique de la jonction entre les éléments i et $i+1$.

Il vient pour le calcul du déplacement $u_{i,i+1}$:

$$u_{i,i+1} = \frac{\tau}{\overline{K}_{i,i+1}} = \frac{t_w}{\overline{K}_{i,i+1} b_{i,i+1}} = \frac{t_w}{K_{i,i+1}} \quad (113)$$

Lors de l'étude de la section composée, en faisant apparaitre la rigidité de cisaillement effective de la forme $GS_{ef} = G_{ef} b_{ef} a$ selon NGUYEN et al. [28] :

$$\gamma = \frac{u}{a} = \frac{\tau}{G_{ef}} = \frac{t_w}{G_{ef} b_{ef}} = \frac{a t_w}{GS_{ef}} \Rightarrow u = a^2 \frac{t_w}{GS_{ef}} \quad (114)$$

Et comme, en suivant la figure 16 :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1} = \frac{t_w}{G_1} \frac{h_1/2}{b_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_w}{G_i} \frac{h_i}{b_i} + \frac{t_w}{G_n} \frac{h_n/2}{b_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_w}{K_{i,i+1}} \quad (115)$$

En insérant (114) dans (115), il vient :

$$a^2 \frac{t_w}{GS_{ef}} = \frac{t_w}{G_1} \frac{h_1/2}{b_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{t_w}{G_i} \frac{h_i}{b_i} + \frac{t_w}{G_n} \frac{h_n/2}{b_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_w}{K_{i,i+1}} \quad (116)$$

Puisque le flux de cisaillement t_w n'est pas toujours nul, la rigidité de cisaillement GS_{ef} vaut donc :

$$\frac{1}{GS_{ef}} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{h_1/2}{G_1 b_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{h_i}{G_i b_i} + \frac{h_n/2}{G_n b_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{K_{i,i+1}} \right) \quad (117)$$

1.2.4.2 Les contraintes

- **Poutre A**

Selon la relation (346) les contraintes normales $\sigma_{A,i}$ sont calculées de la manière suivante :

$$\sigma_{A,i}(z) = \frac{M_A}{EI_A} E_i z \quad \text{avec} \quad \frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (118)$$

Selon la relation (350) pour une largeur constante dans la hauteur de la section, les contraintes de cisaillement $\tau_{A,i}$ peuvent être calculées :

$$\tau_{A,i}(z) = -\int_{-h_i/2}^{z} \frac{d\sigma_{A,i}(z)}{dx} dz = -\int_{-h_i/2}^{z} \frac{dM_A}{dx} \frac{E_i z}{EI_A} dz = -T_A \frac{E_i}{EI_A} \frac{1}{2} \left(z^2 - \left(\frac{h_i}{2} \right)^2 \right) \quad \text{avec} \quad -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (119)$$

- **Poutre B**

Selon la relation (346) les contraintes normales $\sigma_{B,i}$ s'écrivent :

$$\sigma_{B,i}(z) = \frac{M_B}{EI_B} E_i z_i \quad \text{avec} \quad \frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \quad (120)$$

Elle est constante sur toute la hauteur de la section de l'élément i.

Selon la relation (350) les contraintes de cisaillement $\tau_{B,i}$ valent :

$$\tau_{B,i}(z) = -\int_{-h_i/2}^{z_{0,i}} \frac{d\sigma_{B,i}(z)}{dx} dz + \tau_{0,i} = -\int_{-h_i/2}^{z_{0,i}} \frac{dM_B}{dx}\frac{E_i z_i}{EI_B} dz + \tau_{0,i} = -T_B \frac{E_i}{EI_B} z_i \int_{-h_i/2}^{z_{0,i}} dz + \tau_{0,i}$$
$$= -T_B \frac{E_i}{EI_B} z_i \left(z_{0,i} + \frac{h_i}{2}\right) + \tau_{0,i} \quad \textbf{(121)}$$

Où $\tau_{0,i}$ est la valeur initiale pour l'élément i. Elle varie linéairement le long de la hauteur de la section

- **Poutre globale**

La contrainte normale de l'élément i est :

$$\sigma_i(z) = \sigma_{A,i}(z) + \sigma_{B,i}(z) \quad \textbf{(122)}$$

La contrainte de cisaillement de l'élément i vaut :

$$\tau_i(z) = \tau_{A,i}(z) + \tau_{B,i}(z) \quad \textbf{(123)}$$

La figure 17 illustre la part de chaque lamelle vis-à-vis des contraintes.

Il convient de connaitre les efforts de la RDM issus du chargement afin de pouvoir déterminer la part de la poutre A et de la poutre B.

1.2.4.3 Mise en équation du chargement

Pour une poutre $(\mathcal{P})$ soumise à un chargement $p(x)$ quelconque, chaque élément de celle-ci est soumis à un effort tranchant T_i et à un moment fléchissant M_i (Figure 18(a)). Suite à la modélisation de cette poutre composite en une poutre constituée de deux poutres (A et B), un raccordement avec les caractéristiques adéquates est nécessaire pour faire en sorte que la poutre au globale soit cohérente (Figure 18(b)), c'est l'hypothèse qu'elles aient la même flèche suite au chargement $p(x)$.

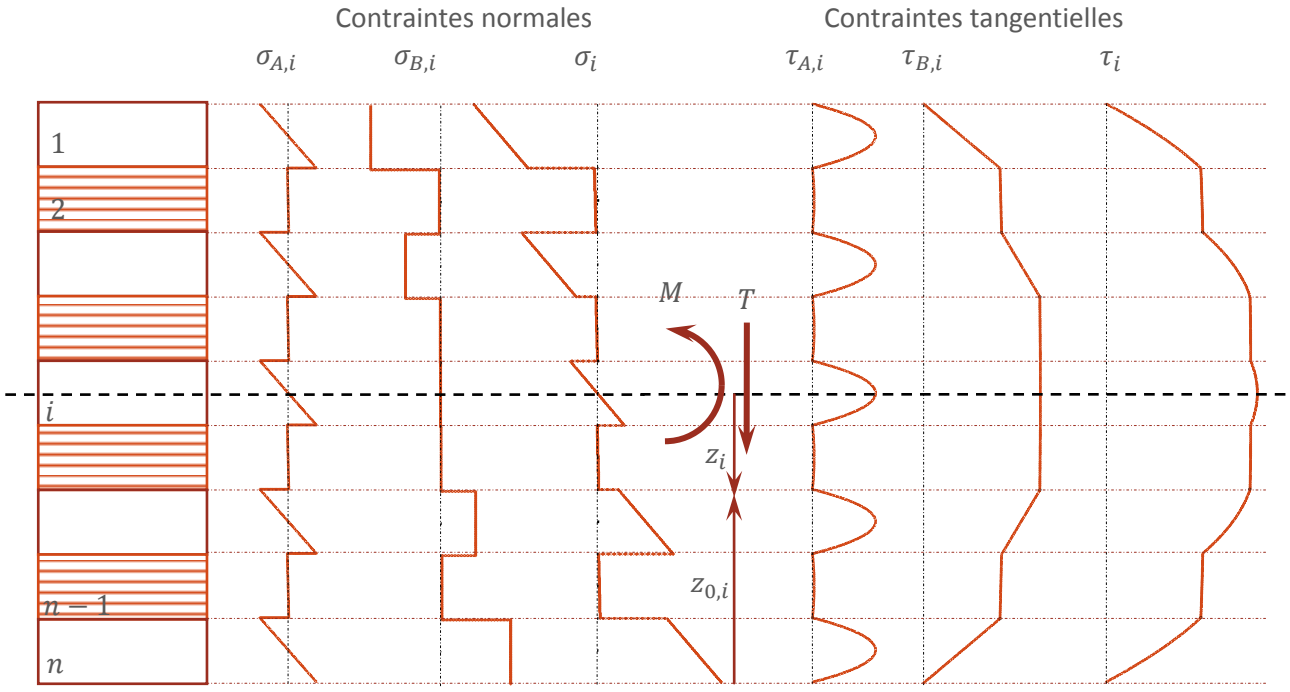


Figure 17 : *Exemple de diagramme des contraintes normales et tangentielles (d'après* **[23]***)*

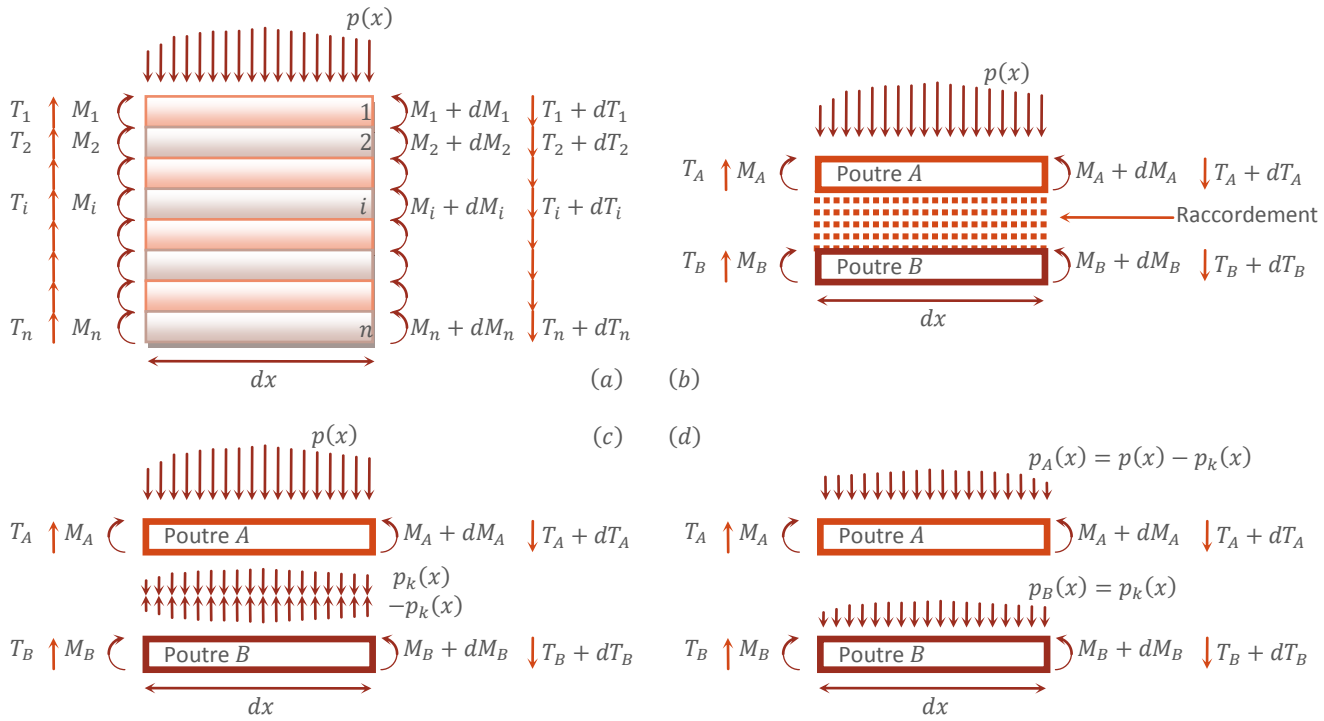


Figure 18 : *Simplification de l'élément de poutre de longueur* $\boldsymbol{dx}$ *et introduction du chargement de raccordement* $\boldsymbol{p_k(x)}$ **[23]**

Ce raccordement est mathématiquement mis en œuvre par l'introduction d'un chargement fictif $p_k(x)$ (Figure 18(c)). Ce chargement permet de connaitre la part de chargement supportée par chacune des deux poutres (Figure 18(d)). Ainsi, pour la poutre A, l'expression du chargement s'exprime de la manière suivante :

$$p_A(x) = p(x) - p_k(x) \qquad (124)$$

et le chargement pour la poutre B a pour expression :

$$p_B(x) = p_k(x) \qquad (125)$$

En utilisant les formules (331), (332) et/ou (333), l'effort tranchant et le moment fléchissant de chacune des poutres selon leurs chargements respectifs peuvent être déterminés, il vient pour l'effort tranchant :

$$\frac{dT_A}{dx} = p_A \text{ et } \frac{dT_B}{dx} = p_B \qquad (126)$$

Puis pour le moment fléchissant :

$$\frac{dM_A}{dx} = -T_A \text{ et } \frac{dM_B}{dx} = -T_B \qquad (127)$$

De plus d'après la relation (365) la flèche des poutres A et B peut s'exprimer en fonction de leurs chargement, soit, en considérant la rigidité de flexion EI_A constante vis-à-vis de l'abscisse x pour la poutre A :

$$\frac{d^4 w_A}{dx^4} = \frac{p_A}{EI_A} \qquad (128)$$

Pour la poutre B, l'étude se complexifie un peu puisqu'il faut tenir compte de la flèche due à l'effort tranchant. En effet, la flèche de la poutre B w_B vaut :

$$w_B = w_{B,M} + w_{B,T} \qquad (129)$$

Avec $w_{B,M}$ flèche du moment fléchissant et $w_{B,T}$ flèche due à l'effort tranchant.

Pour la flèche due au moment fléchissant $w_{B,M}$, en utilisant la relation (365) en prenant l'hypothèse que la rigidité de STEINER EI_B est constante selon l'axe x, il vient :

$$\frac{d^4 w_{B,M}}{dx^4} = \frac{p_B}{EI_B} \qquad (130)$$

La flèche due à l'effort tranchant $w_{B,T}$ est déterminée selon la rotation des sections. Donc, selon la relation (355) la déformation due à l'effort tranchant ,donne selon (126) :

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{GS_{ef}}\frac{dT_B}{dx} = \frac{1}{GS_{ef}}p_B \qquad (131)$$

De plus, selon la figure 19, il vient :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{dw_{B,T}}{dx} + \frac{du}{dz} \qquad (132)$$

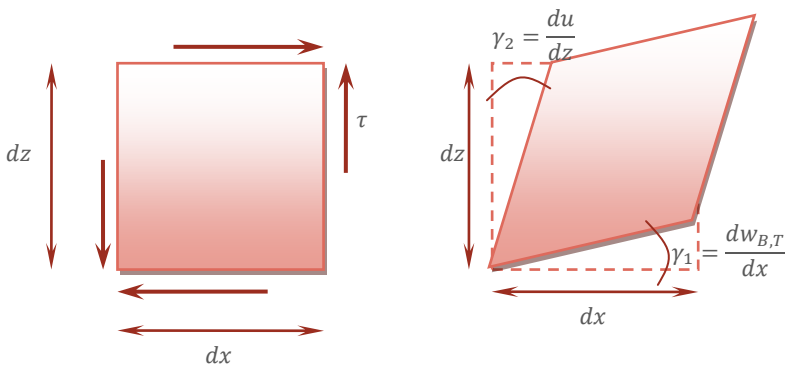


Figure 19 : *Déformation en cisaillement du prisme élémentaire*

En dérivant (132) par rapport à x et en l'insérant dans (131), il en résulte :

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d^2w_{B,T}}{dx^2} = \frac{1}{GS_{ef}}p_B \qquad (133)$$

Soit en dérivant (133) deux fois selon x :

$$\frac{d^4w_{B,T}}{dx^4} = \frac{1}{GS_{ef}}\frac{d^2p_B}{dx^2} \qquad (134)$$

En considérant la relation (129), il apparait selon (130) et (134) :

$$\frac{d^4w_B}{dx^4} = \frac{d^4w_{B,M}}{dx^4} + \frac{d^4w_{B,T}}{dx^4} = \frac{p_B}{EI_B} + \frac{1}{GS_{ef}}\frac{d^2p_B}{dx^2} \qquad (135)$$

Par hypothèse la flèche de la poutre A étant égale à la flèche de la poutre B, il vient avec (124), (125), (128) et (135) :

$$\frac{d^4w_A}{dx^4} = \frac{d^4w_B}{dx^4} \Rightarrow \frac{p_A}{EI_A} = \frac{p_B}{EI_B} + \frac{1}{GS_{ef}}\frac{d^2p_B}{dx^2} \Rightarrow \frac{p - p_k}{EI_A} = \frac{p_k}{EI_B} + \frac{1}{GS_{ef}}\frac{d^2p_k}{dx^2} \qquad (136)$$

En regroupant p_k et en posant :

$$\alpha = GS_{ef}\left(\frac{1}{EI_A} + \frac{1}{EI_B}\right) = GS_{ef}\frac{EI_A + EI_B}{EI_AEI_B} \qquad (137)$$

Il vient l'équation à résoudre suivante :

$$\frac{d^2p_k}{dx^2} - \alpha p_k = -\frac{GS_{ef}}{EI_A}p \qquad (138)$$

Son homologue sans second membre :

$$\frac{d^2p_k}{dx^2} - \alpha p_k = 0 \qquad (139)$$

1.2.4.4 Détermination du chargement de raccordement p_k

La résolution de l'équation (138) s'effectue en deux étapes :

- Etape 1 : détermination de la solution sans le second membre - équation (139).
- Etape 2 : détermination de la solution particulière selon le chargement p - équation (138).

L'équation (139) est une équation différentielle du second ordre à coefficient constant sans second membre. Il faut calculer le polynôme caractéristique de cette équation :

$$r^2 - \alpha = 0 \quad (140)$$

Les solutions de cette équation sont donc :

$$r = \pm\sqrt{\alpha} \quad (141)$$

Comme α est obligatoirement positive, les solutions sont réelles, soit donc la solution de (139) sous la forme suivante :

$$p_k(x) = p_1 e^{-\sqrt{\alpha}x} + p_2 e^{\sqrt{\alpha}x} \quad (142)$$

Avec cette solution, la résolution de l'équation (138) dépend de la forme du chargement $p(x)$ (chargement réparti, ponctuel, sinusoïdal…).

La détermination de la solution particulière s'effectue grâce à la méthode (*au nom douteux*) de la variation des constantes :

1. Soit l'équation différentielle à résoudre suivante : $y''(x) - \alpha y(x) = \beta(x)$
2. Soit la solution de l'équation homogène suivante : $y(x) = k_1 h_1(x) + k_2 h_2(x)$
3. Les constantes d'intégration deviennent des fonctions : $k_1(x)$ et $k_2(x)$
4. Il convient de résoudre le système d'équations différentielles d'ordre 1 suivant [29] :

$$\begin{cases} k_1'(x)h_1(x) + k_2'(x)h_2(x) = 0 \\ k_1'(x)h_1'(x) + k_2'(x)h_2'(x) = \beta(x) \end{cases}$$

5. Les fonctions $k_1(x)$ et $k_2(x)$ calculées (sans oublier les constantes d'intégration), la solution finale peut être déterminée.

Seul le chargement réparti uniforme sur toute la portée et le chargement de forme sinusoïdale sont traités ici. Au vu de la forme de l'équation (138), et des formes relativement simples du chargement $p(x)$: $p(x) = p_0$ pour le chargement réparti et $p(x) = p_0 Sin(\omega x)$ pour le chargement sinusoïdal, les solutions sont faciles à calculer.

En effet, en posant $p_k(x) = p_{k,0}$ il vient immédiatement la valeur de $p_{k,0} = \frac{GS_{ef}}{\alpha EI_A} p_0$, puis, en posant $p_k(x) = p_{k,0} Sin(\omega x)$, $p_k''(x) = \omega^2 p_{k,0} Sin(\omega x)$ alors l'équation (138) devient en factorisant le terme $Sin(\omega x)$ $(\omega^2 - \alpha)p_{k,0} Sin(\omega x) = p_0\, Sin(\omega x)\, GS_{ef}/EI_A$, donc, $p_{k,0} = p_0 \frac{GS_{ef}}{(\omega^2 - \alpha)EI_A}$. Le tableau 1 récapitule les expressions des chargements et des éléments de la RDM des poutres A et B selon le type du chargement initial $p(x)$.

Avec :

$$EI_{ef} = EI_A + \frac{1}{\frac{1}{EI_B} + \frac{\omega^2}{GS_{ef}}} \quad (143)$$

La désignation EI_A et équivalente à EI_0 obtenue lors des deux précédents modèles dans les sections précédentes.

1.2.5 Comparaison de l'architecture des rigidités effectives

Soient les rigidités effectives obtenues dans les sections précédentes qui sont reprises ici :

Modèle de HEIMESHOFF (59)

$$EI_{ef,H} = EI_0 + \frac{E_2A_2E_1A_1\gamma_1\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right)^2}{E_1A_1\gamma_1 + E_2A_2 + E_3A_3\gamma_3} + \frac{E_2A_2E_3A_3\gamma_3\left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right)^2}{E_1A_1\gamma_1 + E_2A_2 + E_3A_3\gamma_3} + \frac{E_1A_1\gamma_1E_3A_3\gamma_3\left(\frac{h_1}{2} + 2\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right)^2}{E_1A_1\gamma_1 + E_2A_2 + E_3A_3\gamma_3} \quad (144)$$

Modèle de GIRHAMMAR (102)

$$EI_{ef,G} = EI_0 + \frac{1}{\frac{\omega^2}{a^2K_{12}} + \frac{1}{a^2E_1A_1} + \frac{1}{a^2E_2A_2}}$$

Modèle de KREUZINGER (143)

$$EI_{ef,K} = EI_0 + \frac{1}{\frac{1}{EI_B} + \frac{\omega^2}{GS_{ef}}}$$

Tableau 1 : *Chargements des poutres A et B*

Type de chargement	Réparti uniforme	Sinusoïdal
$p(x)$	p_0	$p_0 Sin(\omega x)$
$p_k(x) = p_B(x)$	$\frac{GS_{ef}}{\alpha EI_A} p_0$	$p_0 \frac{GS_{ef}}{(\omega^2 - \alpha)EI_A} Sin(\omega x)$
$p_A(x) = p(x) - p_k(x)$	$p_0 \left(1 - \frac{GS_{ef}}{\alpha EI_A}\right)$	$p_0 \left(1 - \frac{GS_{ef}}{(\omega^2 - \alpha)EI_A}\right) Sin(\omega x)$
$T_{A+B} = T_A + T_B$	$-\frac{1}{2}(L - 2x)p_0$	$-\frac{p_0}{\omega} Cos(\omega x)$
T_A	(*)	$-\frac{p_0}{\omega} Cos(\omega x) \frac{EI_A}{EI_{ef}}$
T_B	(*)	$-\frac{p_0}{\omega} Cos(\omega x) \frac{EI_{ef} - EI_A}{EI_{ef}}$
$M_{A+B} = M_A + M_B$	$\frac{1}{2} x(L - x)p_0$	$\frac{p_0}{\omega^2} Sin(\omega x)$
M_A	(*)	$\frac{p_0}{\omega^2} Sin(\omega x) \frac{EI_A}{EI_{ef}}$
M_B	(*)	$\frac{p_0}{\omega^2} Sin(\omega x) \frac{EI_{ef} - EI_A}{EI_{ef}}$
φ_A	(*)	$\frac{p_0}{\omega^3} Cos(\omega x) \frac{1}{EI_{ef}}$
w_A	(*)	$\frac{p_0}{\omega^4} Sin(\omega x) \frac{1}{EI_{ef}}$

(*) pour le chargement réparti, les valeurs des efforts tranchants, des moments fléchissants de la rotation et de la déformée ne sont pas indiquées puisque les relations sont volumineuses.

Les formes des rigidités effectives calculées pour un chargement de type sinusoïdal sont relativement différentes. Comme le modèle exact est développé uniquement pour deux éléments, il convient de les comparer pour ce cas ci. Lorsque les dimensions du troisième élément sont mises à zéro pour le modèle de HEIMESHOFF, il vient $EI_{ef,H} = EI_{ef,G}$.

La figure 8 peut être revue au vu des considérations précédentes. Ainsi pour une poutre composite de deux pièces, la figure 20 illustre les deux types de rigidité effective : $EI_{ef,H} = EI_{ef,G}$ et $EI_{ef,K}$.

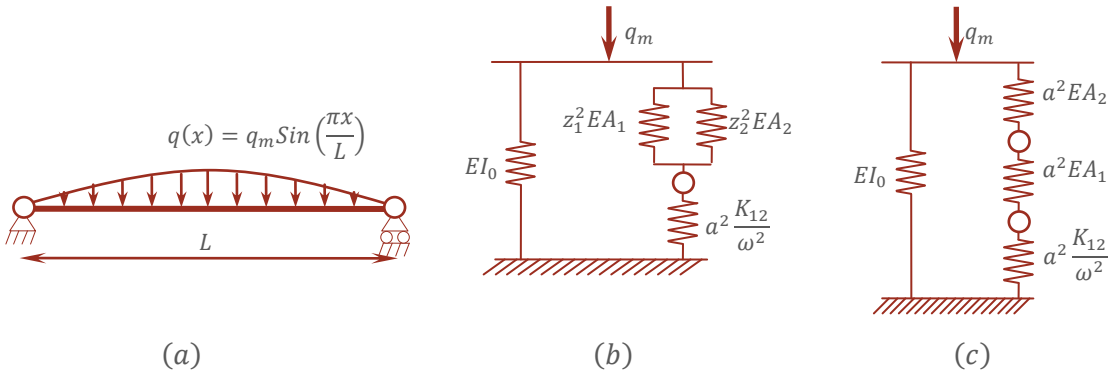


Figure 20 : *Modèle des rigidités effectives en admittance : (a) hypothèses de chargement, (b) modèle de KREUZINGER et (c) modèle de GIRHAMMAR*

1.3 Traitement dynamique

L'étude dynamique des structures est un domaine utile pour déterminer leurs comportements suite à des sollicitations extérieures (vent, séismes…). Elle permet aussi de caractériser les éléments de structures individuellement. Deux voies en sont déduites :

1. technique de caractérisation analogue/alternative à une étude statique afin de la remplacer ou de la compléter,
2. étude spécifique comme par exemple l'étude du confort des planchers […] que l'étude statique ne peut caractériser.

Dans un premier temps, l'étude théorique des éléments de type poutre en vibration transversale est présentée, dans un deuxième temps l'étude théorique des plaques orthotrope est approchée, pour finir avec le mécanisme expérimental pour la détermination des paramètres modaux utiles et souhaités.

1.3.1 Équation dynamique

La pierre angulaire de l'analyse dynamique est l'étude d'un système à un degré de liberté (DDL). Ce système ne dépend que d'un paramètre qui est la position de la masse m.

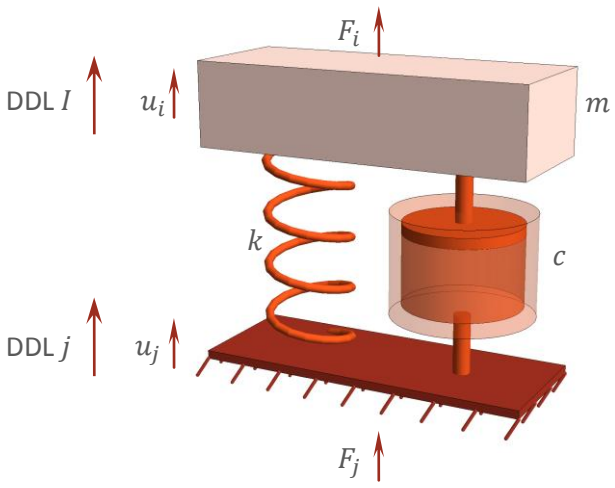


Figure 21 : *Système à un DDL*

Selon GIRARD et ROY [30], l'équation du mouvement suit le principe d'HAMILTON qui pose le postulat suivant :

> **Définition 1 :** *Le mouvement d'un système conservatif entre deux instants* $\boldsymbol{t_1}$ *et* $\boldsymbol{t_2}$ *s'accomplit telle que l'action hamiltonienne reste stationnaire. L'action s'exprime en fonction du Lagrangien* $\boldsymbol{L}$ *c'est-à-dire de la différence entre l'énergie cinétique* $\boldsymbol{T}$ *et l'énergie potentielle* $\boldsymbol{V}$ *:*

$$\frac{d}{dt}\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \frac{d}{dt}\int_{t_1}^{t_2} T - V\,dt = 0 \qquad (145)$$

L'énergie potentielle V se calcule en fonction de l'énergie élastique U, de la dissipation D et du travail des forces extérieures W. Il convient d'exprimer chacun de ces termes en fonction des caractéristiques de figure 21 :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{u}_i^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{u}_i & \dot{u}_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_i\\ \dot{u}_j\end{pmatrix} \\ U &= \frac{1}{2}k\left(u_i - u_j\right)^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_i & u_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k & -k\\ -k & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\ u_j\end{pmatrix} \\ D &= \frac{1}{2}c\left(\dot{u}_i - \dot{u}_j\right)^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{u}_i & \dot{u}_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -c\\ -c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_i\\ \dot{u}_j\end{pmatrix} \\ W &= \begin{pmatrix}F_i\\ F_j\end{pmatrix} \end{aligned} \qquad (146)$$

L'approche matricielle présentée dans GIRARD et ROY [30] est très simple d'utilisation et apporte une souplesse dans l'utilisation des formulations. En utilisant la relation (152), il vient l'équation du mouvement :

$$\begin{pmatrix}m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{u}_i\\ \ddot{u}_j\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c & -c\\ -c & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_i\\ \dot{u}_j\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}k & -k\\ -k & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_i\\ u_j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}F_i\\ F_j\end{pmatrix} \qquad (147)$$

Ce système donne deux équations qui permettent dans un premier temps de calculer la position u_i en fonction des excitations du système à savoir : F_i et u_j puis de connaître les réactions du support F_j en fonction de

u_i, u_j et F_i. Pour les études dynamiques dans ce mémoire le support est immobile donc $u_j = 0$. Ainsi le déplacement de la masse peut être obtenu selon la relation suivante :

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + ku_i = F_i \qquad (148)$$

La résolution de cette équation peut se faire dans le domaine réel ou complexe. L'intérêt du domaine réel est la simplicité des termes et une meilleure compréhension des phénomènes. La résolution de l'équation précédente sans le terme de dissipation puis avec, donne les premiers paramètres modaux suivants :

Pulsation propre

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (149)$$

Amortissement réduit

$$\zeta_k = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

La résolution peut se faire dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. L'opérateur permettant de passer d'un domaine à l'autre est la transformée de FOURIER. Dans la suite, l'indice i représente les DDL intérieurs et l'indice j les DDL de jonction [30]. Dans le domaine fréquentiel, les entités s'expriment de la manière suivante : $X(\omega)e^{i\omega t}$. L'équation réduite (147) devient :

$$\begin{pmatrix} u_i(\omega) \\ F_j(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ii}(\omega) & T_{ij}(\omega) \\ -T_{ji}(\omega) & K_{jj}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_i(\omega) \\ u_j(\omega) \end{pmatrix} \qquad (150)$$

Avec :

Flexibilité dynamique

$$G_{ii}(\omega) = H_k(\omega)\frac{1}{k} = H_k(\omega)\frac{1}{\omega_k^2 m}$$

Transmissibilité dynamique

$$T_{ij}(\omega) = T_{ji}(\omega) = T_k(\omega)$$

Raideur dynamique

$$K_{jj}(\omega) = -T_k(\omega)\omega^2 m$$

Facteur d'amplification dynamique

$$H_k(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + i2\zeta_k\frac{\omega}{\omega_k}} \qquad (151)$$

Facteur de transmissibilité dynamique

$$T_k(\omega) = \frac{1 + i2\zeta_k\frac{\omega}{\omega_k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + i2\zeta_k\frac{\omega}{\omega_k}}$$

Ces fonctions de ω se nomment transfert ou fonction transfert. Les transferts principaux dépendent de deux facteurs dynamiques : H_k et T_k. La figure 22 représente les deux facteurs en fonction de l'amortissement réduit ζ_k. Il vient trois comportements :

1. Pour $\omega \ll \omega_k$, comportement principalement dû au ressort,
2. pour $\omega \sim \omega_k$, comportement de type résonnance. Le maximum vaut approximativement $Q_k = 1/(2\zeta_k)$. Cette zone est le lieu de grands déplacements qui entraînent des problèmes néfastes pour la structure étudiée,
3. pour $\omega \gg \omega_k$, comportement d'atténuation, principalement dû à la masse. Le facteur T_k n'a plus la même orientation asymptotique que pour H_k.

Pour l'analyse dynamique expérimentale des structures, le transfert le plus commun est l'accélérance $A_{ii}(\omega) = -\omega^2 G_{ii}(\omega)$ puisque la récupération des résultats de l'excitation est réalisée le plus souvent avec des accéléromètres.

Pour un système à N DDL, les transferts énoncés plus haut, doivent être légèrement modifiés. En effet, le comportement d'un tel système est complexe. Cependant, il est possible en première approximation, de supposer que chaque DDL représente un système à un DDL. Il suffit de les étudier « séparément » pour ensuite les sommer entre eux. Une telle technique de découpage, est la base de l'analyse modale. Pour une étude de systèmes constitués uniquement de masses et de ressorts, ce choix de découpage est judicieux, cependant, une fois le facteur de dissipation intégré, la résolution des équations (147) et (150) n'est plus évidente. Il convient de prendre des hypothèses simplificatrices qui permettent de résoudre le problème. L'hypothèse la plus commune et généralement l'hypothèse de Basile [30] [31], qui préconise de ne garder qu'uniquement les termes de la diagonale de la matrice de dissipation.

Suite à ces considérations, l'analyse modale prend tout son sens en appliquant la somme des modes prépondérants.

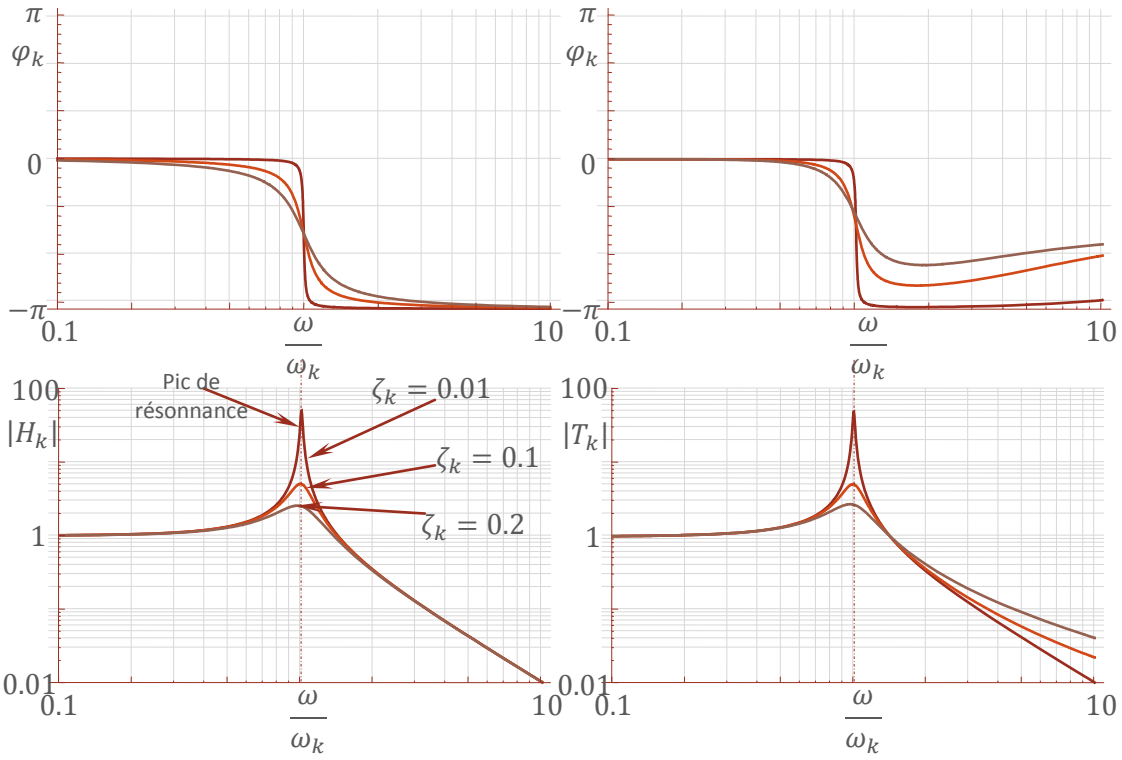


Figure 22 : *Diagramme amplitudes et phases des facteurs dynamiques*

1.3.2 Etude dynamique des poutres en flexion

Soit une poutre avec les caractéristiques suivantes : masse M, module d'élasticité E, inertie I et sa portée L.

La dynamique des poutres en flexion suit le principe d'HAMILTON [30] :

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{M}{L}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \qquad (152)$$

Cette équation différentielle se résout en séparant les variables x et t : $v(x,t) = \phi(x)g(t)$

Il vient pour $\phi(x) \neq 0, g(t) \neq 0$:

$$\frac{EIL}{M}\frac{\partial^4\phi(x)}{\partial x^4}\frac{1}{\phi(x)} = -\frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}\frac{1}{g(t)} = \omega^2 \qquad (153)$$

En posant $\lambda^4 = \omega^2 M/\,EIL$, il en résulte les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\phi(x)}{\partial x^4} - \lambda^4\phi(x) = 0\\ \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} + \omega^2 g(t) = 0\end{aligned} \qquad (154)$$

Les solutions de telles équations sont de la forme suivante [30] :

$$v(x,t) = \phi(x)g(t) = \sum_k \phi_k(x)g_k(t) = \sum_k v_k(x,t) \qquad (155)$$

Avec :

$$\phi_k(x) = A_k Cosh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) + B_k Cos\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) - \left(C_k Sinh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) + D_k sin\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right)\right)$$
$$g_k(t) = E_k Cos(\omega_k t) + F_k Sin(\omega_k t) \qquad \textbf{(156)}$$
$$\omega_k = \lambda_k^2 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}}$$

Où $\lambda_k = \lambda L$. Les paramètres munis de l'indice k, représentent la $k^{\text{ème}}$ valeur qui vérifie les conditions aux limites. Une notion intéressante est d'appeler $v_k(x,t)$ la $k^{\text{ème}}$ forme propre associée à la poutre. ω_k est appelée la $k^{\text{ème}}$ pulsation propre. La fréquence propre f_k est obtenue selon la relation suivante : $\omega_k = 2\pi f_k$. La première fréquence propre se nomme la fréquence fondamentale (f_1) ou le fondamental, toutes fréquences proportionnelles à celle-ci sont nommées fréquences harmoniques ou harmoniques. L'ensemble forme propre avec les pulsations/fréquences propres est nommé mode propre.

L'objectif est de connaître les modes propres d'une poutre selon ses caractéristiques intrinsèques et les conditions aux limites.

Les conditions aux limites pour la variable x représentent les conditions aux appuis de la poutre. Les cas d'appuis sont au nombre de quatre :

- Appuis libres : $\partial^2 v/\partial x^2 = 0$ et $\partial^3 v/\partial x^3 = 0$,
- Appuis glissants : $\partial v/\partial x = 0$ et $\partial^2 v/\partial x^2 = 0$,
- Appuis simples : $v = 0$ et $\partial^2 v/\partial x^2 = 0$,
- Appuis encastrés : $v = 0$ et $\partial v/\partial x = 0$

La détermination des quatre constantes se réalise au point $x = 0$ et $x = L$.

En posant comme condition initiale que $g_k(0) = 0$ et que la constante F_k est intégrée aux autres constantes A_k, B_k, C_k et D_k, alors $g_k(t) = Sin(\omega_k t)$.

La forme générale de la solution $v_k(x,t)$ a pour expression :

$$v_k(x,t) = \phi_k(x) g_k(t)$$
$$= \left(A_k Cosh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) + B_k Cos\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) - \left(C_k Sinh\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right) + D_k sin\left(\lambda_k \frac{x}{L}\right)\right)\right) Sin(\omega_k t) \qquad \textbf{(157)}$$

GIRARD et ROY [30] présentent les valeurs de A_k, B_k, C_k, D_k et des paramètres λ_k selon les conditions aux appuis. Pour une poutre sur deux appuis simples, il vient :

$$A_k = B_k = C_k = 0$$
$$D_k = -1 \qquad \textbf{(158)}$$
$$\lambda_k = k\pi$$

Les quatre premières formes propres de cette poutre sont illustrées à la figure 23.

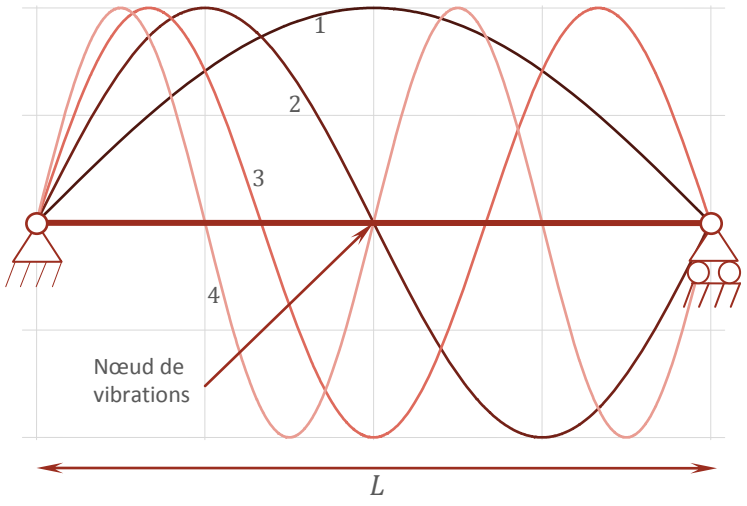


Figure 23 : *Formes propres d'une poutre sur deux appuis simples (d'après* **[30]***)*

Le fondamentale pour une telle poutre est :

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} \qquad (159)$$

D'où l'expression de la forme fondamentale de la poutre :

$$v_1(x,t) = \phi_1(x) g_1(t) = sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) Sin\left(\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ML^3}} t\right) \qquad (160)$$

1.3.3 Etude dynamique des plaques orthotrope en flexion

Soit une plaque mince orthotrope de caractéristiques suivantes : masse M, modules d'élasticité E_1, E_2, module de cisaillement G_{12}, de dimensions $L_x \times L_y \times h$. Dans la suite, il est fait comme hypothèse que le module d'élasticité E_1 est dans la direction x et le module d'élasticité E_2 dans le sens de la direction y.

Selon le principe d'HAMILTON, la forme de l'équation est un peu plus complexe, il vient [32] :

$$\left(D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \frac{M}{L_x L_y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (161)$$

Avec les paramètres D_i présentés à la relation (488).

Cette équation différentielle se résout en séparant les variables x, y et t : $w(x,y,t) = \phi(x,y) g(t)$

Il vient :

$$\left(D_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}(x,y) + 2D_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) + D_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}(x,y)\right) g(t) + \frac{M}{L_x L_y} \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} \phi(x,y) = 0 \qquad (162)$$

En prenant la fonction $g(t)$ de forme identique à la relation (156), l'équation aux dérivées partielles devient

$$\left(D_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}(x,y) + 2D_3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) + D_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}(x,y)\right) - \frac{M}{L_x L_y} \omega^2 \phi(x,y) = 0 \qquad (163)$$

Soit la solution $\phi(x,y)$ sous forme de série de FOURIER [32] :

$$\phi(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{m,n}(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(m \frac{\pi}{L_x} x\right) Sin\left(n \frac{\pi}{L_y} y\right) \qquad (164)$$

Il est ainsi possible de calculer la pulsation $\omega_{m,n}$ en remplaçant $\phi_{m,n}(x,y)$ dans l'équation (163) :

$$\omega_{m,n} = \pi^2 \sqrt{\frac{L_x L_y}{M}} \sqrt{D_1 \left(\frac{m}{L_x}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn}{L_x L_y}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{L_y}\right)^4} \qquad (165)$$

La pulsation fondamentale ($m = n = 1$) pour une plaque mince orthotrope carrée de côté $L_x = L_y = L$ vaut :

$$\omega_{1,1} = \pi^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{D_1 + 2D_3 + D_2}{M}} \qquad (166)$$

Les deux premières formes propres ($\phi_{1,1}$ et $\phi_{1,2}$) sont représentées à la figure 24.

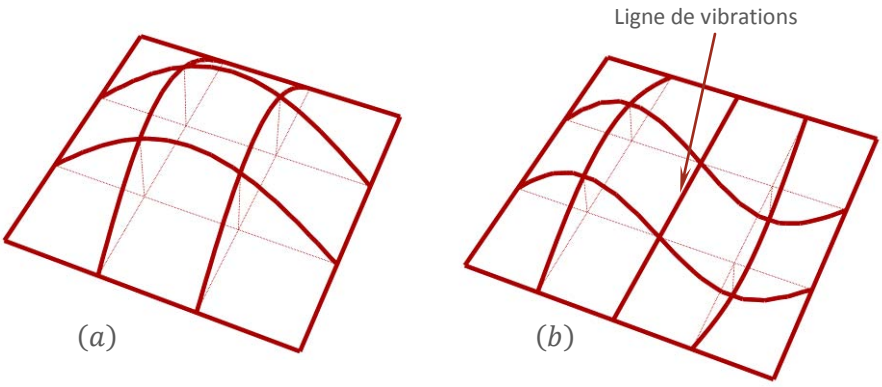


Figure 24 : *Formes propres d'une plaque mince : (a) fondamentale m=n=1 et (b) m=2 et n=1 (d'après* **[32]***)*

1.3.4 Ingrédient de l'analyse modale

Dans les systèmes continus présentés dans les deux sections précédentes (§1.3.2, §1.3.3), les expressions des masses généralisés m_k et des facteurs de participations L_{kj} sont les suivants [30] :

$$m_k = \int \phi_k(x)^2 dm$$
$$L_{kj} = \int \phi_k(x)\psi_j(x) dm \qquad \textbf{(167)}$$

Selon [30] les paramètres effectifs s'écrivent :

$$\tilde{G}_{ii,k} = \frac{\phi_{ik}\phi_{ki}}{\omega_k^2 m_k}, \qquad \tilde{T}_{ij,k} = \frac{\phi_{ik}L_{kj}}{m_k}, \qquad \tilde{M}_{jj,k} = \frac{L_{jk}L_{kj}}{m_k} \qquad \textbf{(168)}$$

Ainsi les transferts ont pour expression :

$$G_{ii}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} H_k(\omega)\tilde{G}_{ii,k}$$
$$T_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} T_k(\omega)\tilde{T}_{ij,k} - M_{ii}^{-1}M_{ij} \qquad \textbf{(169)}$$
$$M_{jj}(\omega) = \sum_{k=1}^{N} T_k(\omega)\tilde{M}_{jj,k} + M_{jj} - M_{ji}M_{ii}^{-1}M_{ij} + \frac{\overline{K}_{jj}}{-\omega^2}$$

La matrice des raideurs condensées $\overline{K}_{jj}$ représente l'hyperstaticité du système.

C'est en cela que réside l'intérêt de la décomposition en système de un DDL. Ainsi, chaque mode possède une amplification supplémentaire suite aux paramètres effectifs. Ces paramètres effectifs dépendent de la géométrie du système. Le but de l'analyse modale est d'étudier seulement une partie du système à N DDL : soit les n premiers par exemple. Il vient une nouvelle écriture :

$$G_{ii}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} H_k(\omega)\tilde{G}_{ii,k} + G_{ii,res}$$
$$T_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\omega)\tilde{T}_{ij,k} + T_{ij,res} \qquad \textbf{(170)}$$
$$M_{jj}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} T_k(\omega)\tilde{M}_{jj,k} + M_{jj,res} + \frac{\overline{K}_{jj}}{-\omega^2}$$

Où les matrices $G_{ii,res}$, $T_{ij,res}$ et $M_{jj,res}$ représentent les termes résiduels des transferts étudiés

1.3.5 Éléments d'étude expérimentale des structures

Les modes propres peuvent être calculés analytiquement selon les sections précédentes pour une poutre ou une plaque mince orthotrope. Toutefois, les valeurs obtenues doivent être confrontées avec l'expérience. En général, pour déterminer le comportement dynamique d'une structure, une excitation lui est appliquée puis la réponse est récupérée à l'aide d'accéléromètres judicieusement placés (par exemple aux nœuds ou lignes de vibrations). Les accéléromètres et l'excitation créés un signal électrique qui est conditionné pour obtenir des données concrètes comme la force appliquée ou les accélérations aux points de mesure, en fonction du temps (avec un pas de temps constant). Ensuite l'analyse dynamique permet de retrouver les modes propres pour les comparer avec les modes propres théoriques [31]. Afin d'avoir un meilleur résultat, il convient de faire un grand nombre de mesures identiques pour en faire une mesure moyenne, cela diminue l'effet du bruit et des non linéarités du système [31].

1.3.5.1 L'échantillonnage

Soit le théorème d'échantillonnage de NYQUIST-SHANNON :

> **Théorème 1 :** *La fréquence d'échantillonnage d'un signal doit être égale ou supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans le signal, afin de convertir ce signal d'une forme analogique à une forme numérique.*

Pour une fréquence d'échantillonnage f_{ech} donnée, il lui est attribué un pas de temps t_{ech} selon la relation suivante :

$$f_{\text{ech}} = \frac{1}{t_{\text{ech}}} \qquad (171)$$

De plus, l'échantillonnage dépend du matériel utilisé et de la dualité temps-fréquence. En effet, pour un pas de temps faible, il vient un pas de fréquence grand et inversement. Le calcul du pas de fréquence se détermine selon le nombre de points n_{pt} avec l'expression suivante :

$$\delta f = \frac{f_{\text{ech}}}{n_{\text{pt}}} \qquad (172)$$

1.3.5.2 Détermination des paramètres modaux

Le signal obtenu à la suite des mesures se nomme trace. Le moyen plus rapide pour analyser la trace, est de se placer en échelle fréquentielle par le biais de la transformée de FOURIER afin d'obtenir le spectre du signal. Ensuite l'analyse dynamique se décompose en cinq étapes :

1. nettoyage et regroupement des signaux,
2. détermination des fréquences dans la bande désirée : pour les études présentées dans ce mémoire, les fréquences obtenues sont dans l'intervalle $[0, 100]$,
3. détermination de l'amortissement,
4. détermination des paramètres modaux,
5. détermination des phases.

La recherche des fréquences s'effectue selon plusieurs méthodes. Seules les principales sont décrites ici. Pour plus d'informations se référer à HE et FU [31] et GIRARD et ROY [30].

La fréquence est obtenue en déterminant les maximums des pics calculés dans le domaine fréquentiel. Trois méthodes permettent d'y parvenir :

1. Calcul du module du spectre puis recherche des maximums des pics (résonnance). Cette méthode présente une certaine part d'erreur puisqu'il faut corriger la fréquence obtenue avec l'influence de l'amortissement. GIRARD et ROY [30] indiquent les facteurs à employer.
2. Calcul du spectre uniquement de la partie imaginaire. Cette méthode permet de limiter les problèmes de détection des pics dus à l'influence des autres pics et du bruit. L'étude en est simplifiée et plus exacte.
3. Lissage de cercle (*circle fit*). Cette méthode est décrite plus précisément pas la suite §1.3.5.3.

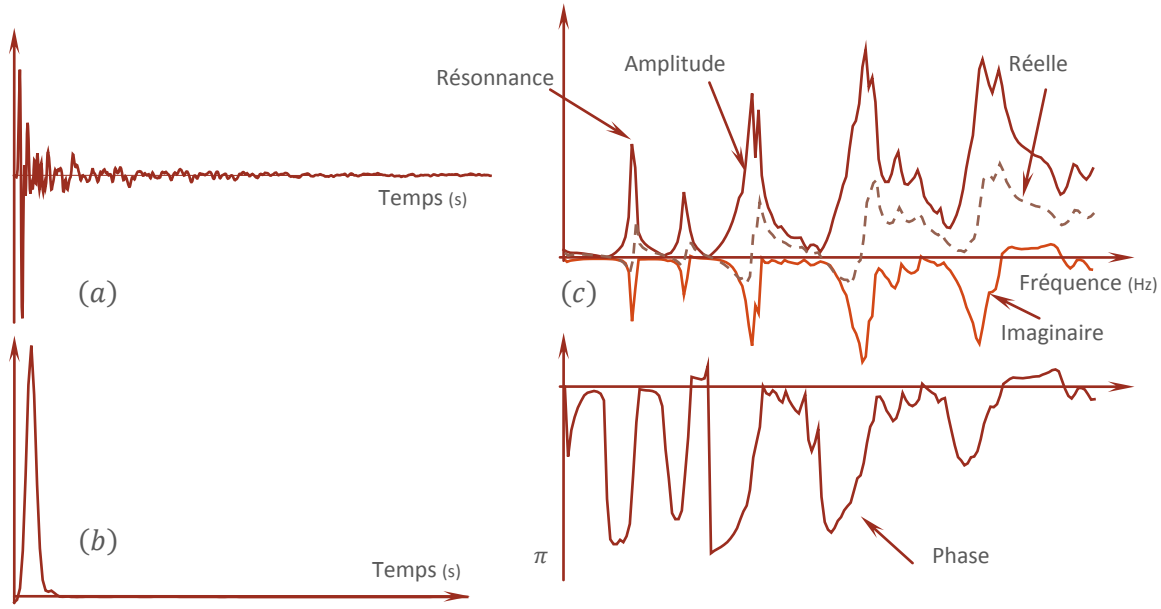


Figure 25 : *Exemple : (a) trace d'un accéléromètre, (b) trace de marteau d'impact, (c) diagramme amplitude et (d) diagramme de phase*

L'amortissement est obtenu quant à lui selon 3 manières :

1. en étudiant la forme globale de la trace pour un amortissement global
2. étude locale selon l'acuité des pics selon la méthode dite à 3dB ou à mi puissance comme l'illustre la figure 26. Généralement, les points nécessaires ne sont pas présents, il convient de les acquérir par interpolation linéaire.

$$\zeta_k \approx \frac{f_{k,g} - f_{k,d}}{f_k} = \frac{\omega_{k,g} - \omega_{k,d}}{\omega_k} \qquad \textbf{(173)}$$

3. Lissage de cercle (*circle fit*) §1.3.5.3.

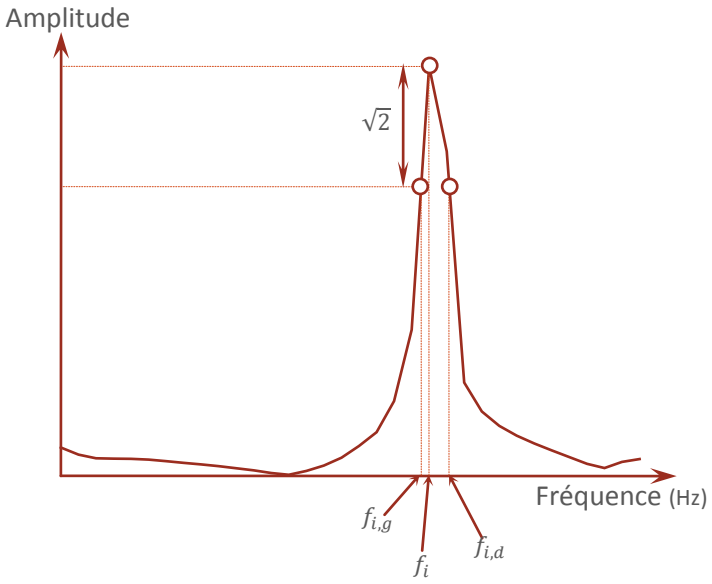


Figure 26 : *Détermination de l'amortissement expérimentalement (d'après* **[30]***)*

Les paramètres modaux se déterminent selon deux méthodes :

1. La hauteur du pic à la résonnance pour le diagramme imaginaire du spectre, cette méthode est peu précise mais donne un ordre de grandeur rapide.
2. Lissage de cercle, c'est le diamètre du cercle considéré §1.3.5.3.

La phase est déterminée selon deux méthodes :

1. Comparer la phase d'un signal avec un signal neutre contenant les fréquences et les amortissements identiques

2. Lissage de cercle, position de la fréquence propre §1.3.5.3.

1.3.5.3 Lissage de cercle (circle fit)

La technique du lissage de cercle fait partie des méthodes à un DDL (SDoF : *single degree of freedom*) pour l'analyse de système à plusieurs DDL (MDoF : *multi degrees of freedom*). Cette technique considère chaque mode propre séparément avec un comportement d'un système à un DDL. Cependant, la présence des autres modes crée une certaine part d'erreur lors de la résolution, mais par itération, l'erreur devient minime. L'intérêt de cette méthode est la rapidité pour la détermination des paramètres modaux et la compréhension aisée de la part de chaque mode.

Cette technique résulte que, pour le transfert de l'admittance, avec l'utilisation de l'amortissement réduit visqueux, le graphe dans le plan de NYQUIST est globalement un cercle [31]. Pour un système de quatre DDL le diagramme amplitude est représenté à la figure 27, et est illustré dans le plan de NYQUIST à la figure 28. Il y apparait les différents points caractéristiques permettant d'aboutir aux tracés des cercles. Ainsi, la fréquence propre peut être déterminée de manière très précise.

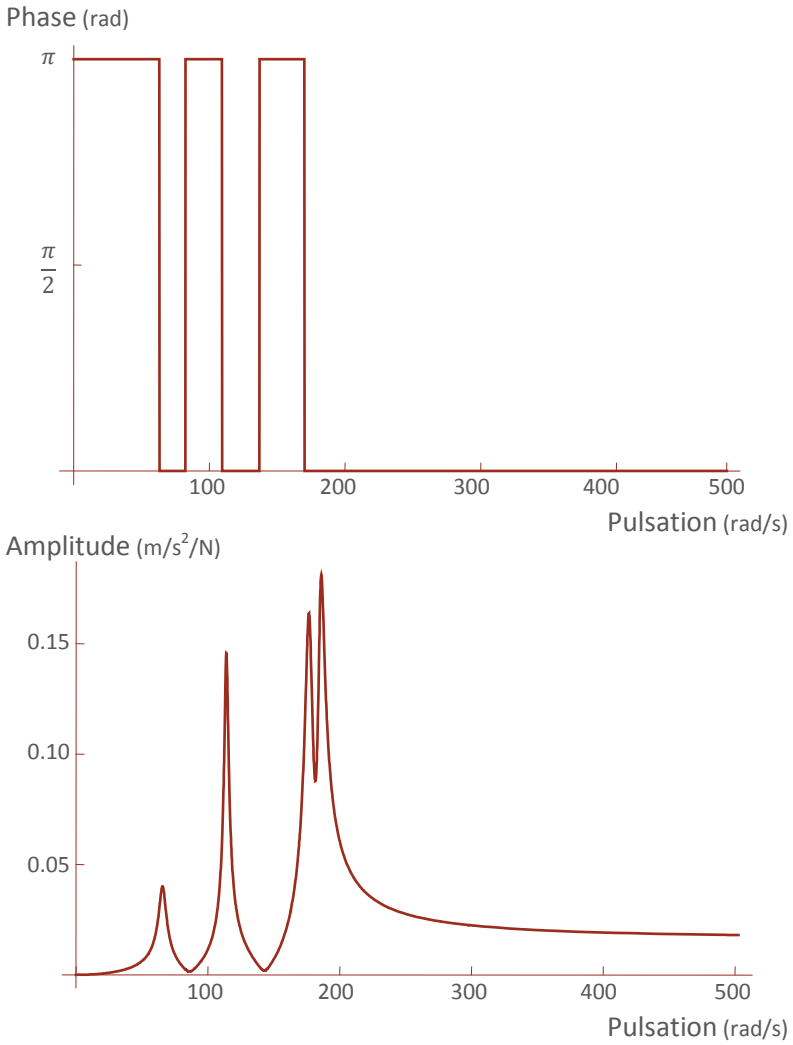


Figure 27 : *Diagramme amplitude et phase pour un système à quatre DDL*

Plusieurs méthodes existent comme la valeur réelle maximale, l'amplitude maximale, la partie imaginaire maximale, etc. Selon GIRARD et ROY [30], il faut choisir celui qui est le moins parasité par le bruit et par les autres fréquences. Aussi, la méthode pour déterminer ces fréquences dépend du transfert utilisé. Dans le cas de la figure 28, la fonction transfert est l'accélérance (§1.3.1). La détermination des fréquences propres se réalise en prenant l'amplitude maximale, ce qui revient à tracer une ligne partant de l'origine du repère et passant par les centres des cercles. Le point d'intersection le plus éloigné correspond à la fréquence fondamentale précise.

Cette méthode permet aussi de se focaliser sur les fréquences qui sont proches comme la troisième avec la quatrième. Souvent, la détermination de ces fréquences est possible. L'apparition d'un nœud dans le tracé spectrale caractérise ce phénomène.

La prédétermination des fréquences est toutefois primordiale afin d'avoir un lissage qui soit correct. Une fois la détermination des fréquences propres véritables évaluées, il convient de poursuivre l'analyse en déterminant l'amortissement, puis les paramètres modaux effectifs et la phase. Cependant, l'étude de l'amortissement reste difficile malgré des méthodes de vérification [31]. Le paramètre modal propre du transfert se détermine en fonction du diamètre du cercle et de l'amortissement et, selon le cas, du carré de la pulsation propre.

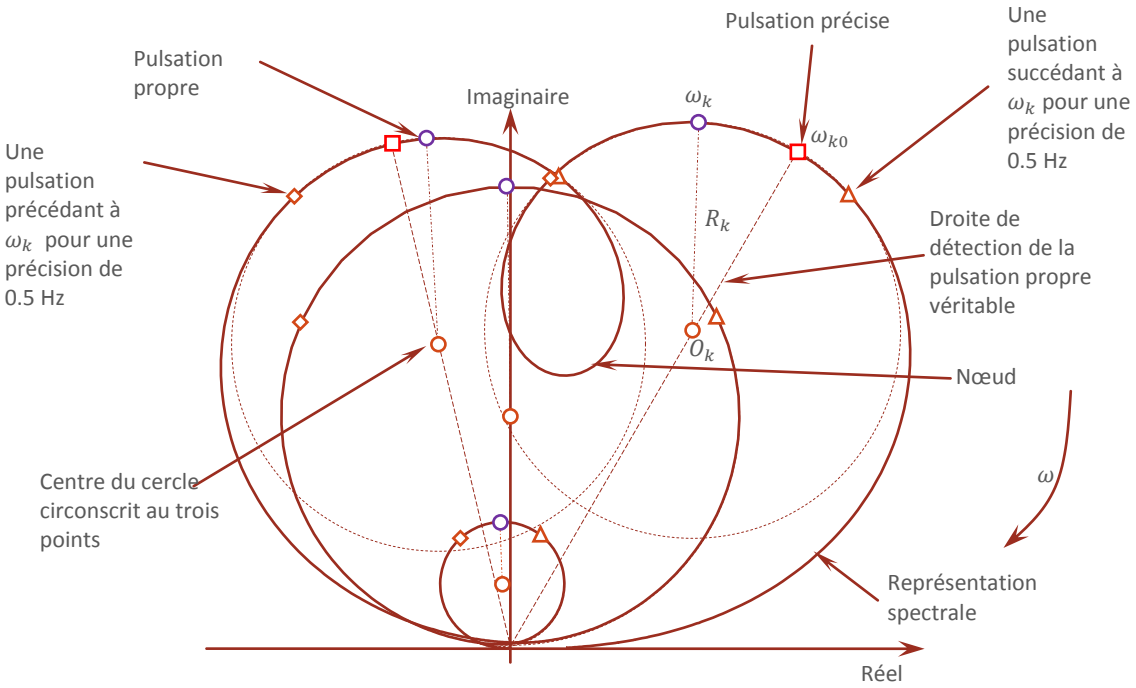


Figure 28 : *Lissage de cercle et plan de NYQUIST*

Les éléments modaux étant déterminés, il convient de calculer les critères en vigueur sur le système étudié.

1.3.5.4 Dynamique des planchers

L'étude dynamique des planchers est présentée selon les trois principales méthodes d'OHLSSON [33], d'ALLEN et al. [34] et de CHUI et al. [35].

- **Méthode d'OHLSSON**

Les planchers sont soumis à des critères statiques comme la plupart des éléments d'un ouvrage mais aussi à des critères de confort, liés à l'analyse dynamique, spécialement dans les basses fréquences. OHLSSON [33] a conduit des études sur le comportement vibratoire de planchers traditionnels sollicités par des petites fréquences. Il a en conclu une méthodologie pour calculer les planchers résidentiels légers [36]. Cette méthode de calcul permet de dimensionner de tels planchers si le fondamental est supérieur à 8 Hz. Elle est intégrée dans l'EUROCODE 5 [4] dans la section du dimensionnement aux états limites de service. Il est noté que pour les planchers satisfaisant une fréquence fondamentale inférieure à 8 Hz, des études spécifiques doivent être menées pour les caractériser en vibrations.

La méthodologie consiste à calculer la réponse de vitesse à une impulsion unité. Pour un plancher de dimension $L \times b$, la méthode est la suivante :

1. Calculer la souplesse du plancher à l'endroit le plus défavorable (généralement au centre de celui-ci). La souplesse a_{Ed} est reliée à la force F appliquée et au déplacement w par la relation classique :

$$\frac{w}{F} = a_{Ed} \leq a \qquad (174)$$

Avec a représentant la souplesse recommandée (en mm/kN par exemple)

2. Ensuite, il convient de calculer la fréquence fondamentale du plancher. Pour un plancher rectangulaire appuyé sur ses quatre côtés et avec des solives ayant une portée L, une approximation du fondamental peut être exprimée de la manière suivante [4] :

$$f_1 = \frac{\pi}{2L^2}\sqrt{\frac{(EI)_L}{m}} \leq a \qquad (175)$$

Avec : m la masse par unité de surface (kg/m^2), $(EI)_L$ représente la rigidité équivalente en flexion du plancher selon un axe perpendiculaire à la direction des solives (Nm^2/m).

3. Par approximation, pour le même plancher décrit précédemment, la réponse en vitesse à une impulsion unitaire v (m/Ns^2) vaut [33] [4] :

$$v = \frac{4(0.4 + 0.6n_{40})}{mbL + 200} \quad \textbf{(176)}$$

Avec n_{40} qui représente le nombre de modes possibles du premier ordre pour des fréquences propres inférieures à 40 Hz.

4. La valeur du paramètre n_{40} se calcule selon la formule suivante [33] :

$$n_{40} = \left(\left(\left(\frac{40}{f_1}\right)^2 - 1\right)\left(\frac{b}{L}\right)^4 \frac{(EI)_L}{(EI)_b}\right)^{1/4} \quad \textbf{(177)}$$

Avec $(EI)_b$ qui représente la rigidité équivalente en flexion du plancher selon un axe parallèle à la direction des solives (Nm^2/m), il vient l'ordre suivant entre les deux rigidités équivalentes de flexion : $(EI)_b < (EI)_L$.

5. Enfin $v_{\max,\lim}$ (m/Ns^2) vient borner la valeur de la réponse en vitesse à une impulsion unité v selon l'expression suivante :

$$v_{\max,\lim} \leq b^{f_1\zeta - 1} \quad \textbf{(178)}$$

Où ζ est l'amortissement modal réduit. Le coefficient b de cette formule fait référence à la valeur dans le figure 29 et non à la largeur du plancher.

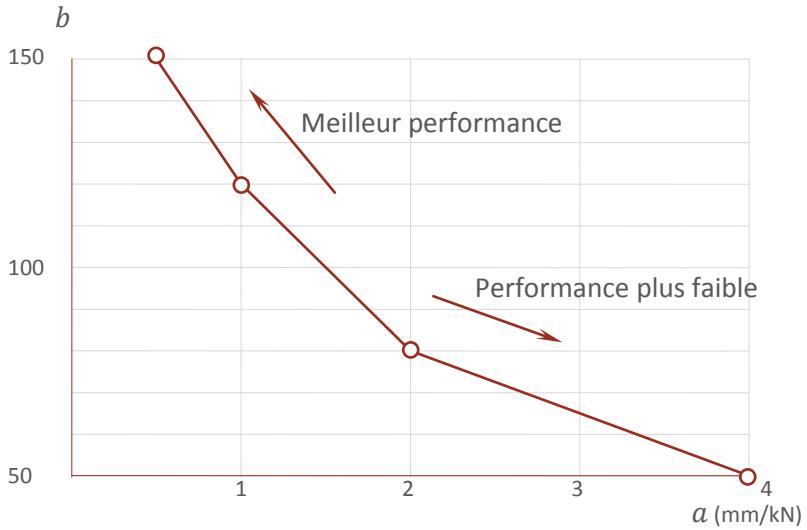


Figure 29 : *Valeurs et ratios recommandés pour a et b* **[4]**

Un confort normal pour un plancher résidentiel d'usage courant correspond à une valeur de a = (1,3 ± 0,3) mm/kN. La valeur de b se déduit sur la courbe de la figure 29. Un autre niveau de confort peut être obtenu en faisant varier la valeur de a, qui dans tous les cas doit rester inferieure à 3.

- **Méthode d'ALLEN**

De plus, une étude de ALLEN et al. [34] donne, selon les dimensions du plancher et la flèche obtenue l'acceptabilité de celui-ci ou non. La figure 30 illustre ce critère.

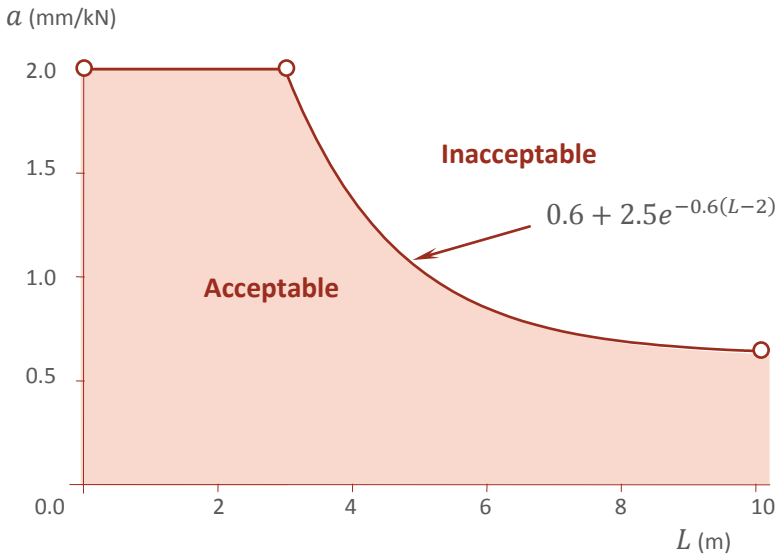


Figure 30 : *Critère de conception des planchers légers (d'après* **[34]***)*

La fréquence propre des planchers est calculée à partir de la formule bien connue de la fréquence f_n (Hz) et du déplacement δ (mm) issus du poids de tous les éléments que le plancher supporte :

$$f_n = \frac{18}{\sqrt{\delta}} \qquad (179)$$

- **Méthode de CHUI**

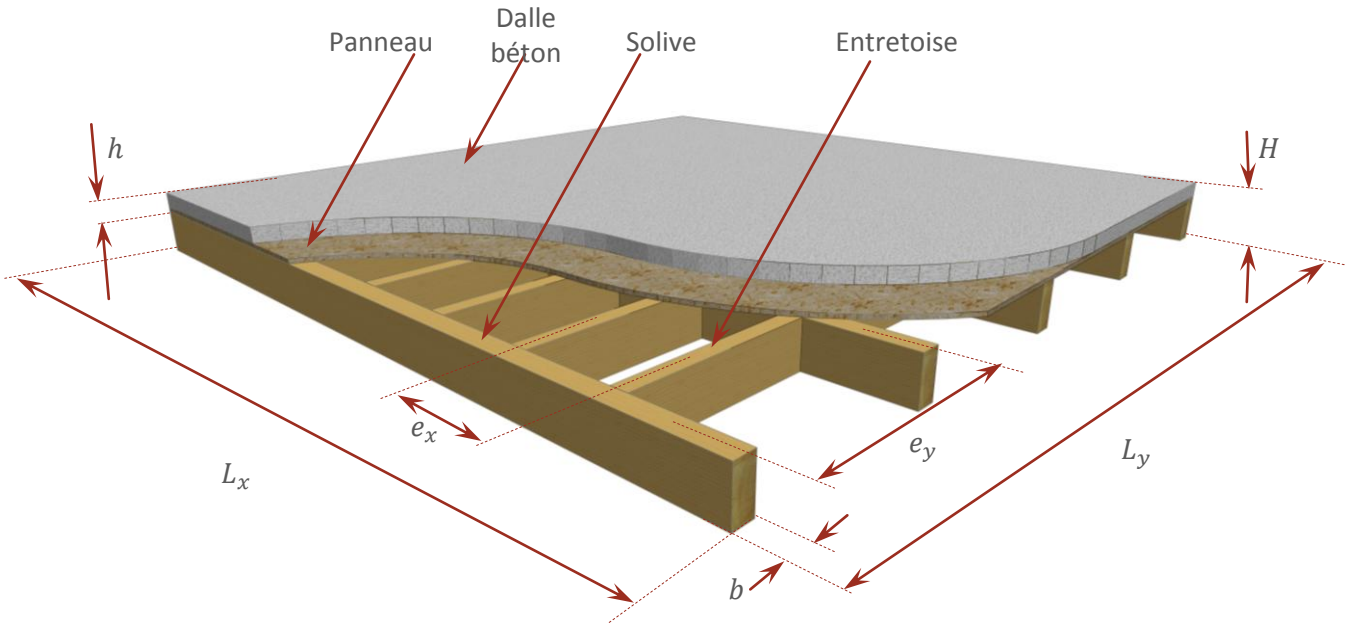


Figure 31 : *Plancher type à base de bois avec une dalle béton*

La méthode mise en place par CHUI [35] [37] et commentée dans CHUI et al. [38], permet de calculer la déformation d_p au centre du plancher pour un chargement ponctuel au centre et sa fréquence fondamentale f_1 selon les relations suivantes :

$$d_p = \frac{4P}{Lb\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{17} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{35} \frac{1}{D_x\left(\frac{m}{L}\right)^4 + 4D_{yx}\left(\frac{mn}{Lb}\right)^2 + D_y\left(\frac{n}{b}\right)^4}$$

$$f_1 = \frac{\pi}{\sqrt{m}}\sqrt{D_x\left(\frac{1}{L}\right)^4 + 4D_{yx}\left(\frac{1}{Lb}\right)^2 + D_y\left(\frac{1}{b}\right)^4} \qquad (180)$$

Avec :

$$D_x = (EI)_L = \frac{EI_C}{b_1}$$

rigidité équivalente en flexion du plancher selon un axe perpendiculaire à la direction des solives (Nm^2/m)

$$D_y = \frac{\sum_i^k (EI)_{b,i}}{a} + \frac{EI_p b_1}{b_1 - t + \alpha^3 t}$$

rigidité équivalente en flexion du plancher selon un axe parallèle à la direction des solives (Nm^2/m)

$$D_{xy} = \frac{G_p h^3}{12} + \frac{C}{2b_1}$$

Rigidité de cisaillement de la peau et rigidité de torsion des solives.

m masse surfacique.

Il faut aussi veiller aux problèmes du confort des personnes, puisque selon la norme ISO 2631, il faut tenir compte des vibrations dues aux chocs dans l'environnement où se trouve la personne et étudier des grandeurs qui caractérisent ces vibrations ainsi que le support.

« Le temps scinde tout ce que l'homme tente de souder. »

[Jean Claude Clari, Extrait de Catherine de I à V]

2 SOUDAGE DU BOIS

2.1 Historique

Le terme « soudage du bois », bien que très surprenant, apparait en 1993 en Russie à travers le brevet d'invention de ZANEGIN [39], où l'auteur décrit un procédé relativement complexe à mettre en place. Le procédé consiste à bombarder préalablement des particules de métal sur la surface des éléments bois à souder. Après cette phase de préparation, les deux éléments de bois-métal sont soudés selon les procédés classiques utilisés pour les aciers. Le problème majeur réside dans le procédé de bombardement des particules de métal qui altèrent voir détruit la structure du bois et qui le rend assez peu résistant aux diverses sollicitations. Bien que la solution semble séduisante, il n'y a apparemment aucune application utilisant ce procédé dans la littérature. Le brevet est relativement succinct, il ne contient que deux pages sans illustration.

Dans la même période, les chercheurs de la Haute École Spécialisée Bernoise (HESB) ont souhaité diminuer le temps de polymérisation du collage entre deux pièces de bois. Pour cela, ils se sont inspirés des techniques de soudage des plastiques par vibrations utilisées couramment dans les industries automobiles. Les éléments thermoplastiques peuvent être assemblés entre eux définitivement par friction. Les vibrations mises en œuvre pour réaliser ces assemblages atteignent les fréquences des ondes sonores et/ou des ondes ultrasonores. Dès le début des années 1990, l'équipe de GFELLER à la HESB s'inspire de ce procédé en intercalant entre deux pièces de bois à assembler un film (ou de la poudre) thermoplastique qui possède un pouvoir cohésif important avec le bois. A l'aide d'une machine de vibration BRANSON initialement prévue pour souder du métal (type 2700 ayant une fréquence de vibration de 100 Hz), une pièce est mise en vibration et est pressée sur une autre. L'échauffement dû à la friction fait fondre le thermoplastique intercalé entre les pièces. Un temps de maintien en pression de l'ordre de quelques secondes permet de parfaire le collage. Les pièces assemblées peuvent être utilisées directement sans attendre de longues heures de durcissement des procédés conventionnels de collage. Ce procédé rapide de collage d'éléments bois a abouti à un brevet d'invention en 2003 [40]. Ce type d'assemblage ainsi que d'autres liant deux pièces de bois avec des matériaux thermoplastiques, utilisant le soudage par vibration linéaire, rotatif comme le « spin welding » et ultrason, sont appelés Wood Welding Technology (WWT) [41] et protégés sous le même nom. Les premières collaborations entre l'HESB et L'ENSTIB datent de cette période où, suite à une erreur de manipulation (le film thermoplastique avait été oublié), le constat de l'adhésion entre les deux pièces de bois avait suscité bien des interrogations. C'est suite à ce constat que le Professeur PIZZI de l'ENSTIB et l'HESB ont collaboré sur cette technologie nouvelle, pour ensuite la comprendre et la développer.

Vers la fin des années 1990, une équipe allemande sous la direction de SUTHOFF dépose une série de brevets d'invention autour d'une machine de soudage d'éléments en bois ou à base de bois ainsi que sur le procédé à employer pour le réaliser. Le premier brevet sur le soudage par friction d'éléments bois [5] sans apport de matériaux ou d'adjuvants expose la possibilité de souder le bois par friction selon trois manières : rotation, linéaire et orbitale. De plus, pour ces trois procédés de soudage par friction, le mouvement peut être oscillant. Le cycle de soudage par friction des éléments bois suit les mêmes étapes que celles appliquées pour les thermoplastiques ou les métaux [42] :

1. Positionnement des éléments à assembler,
2. Mise en rotation (ou en vibration) d'un des deux éléments puis avance pour effectuer la mise en contact,
3. Accostage et échauffement dû à la pression exercée ainsi que la friction,
4. Arrêt de rotation (ou de la vibration) et forgeage (maintien durant un certain temps),
5. Retrait des éléments « soudés »

Ce cycle est représenté sur la figure 32.

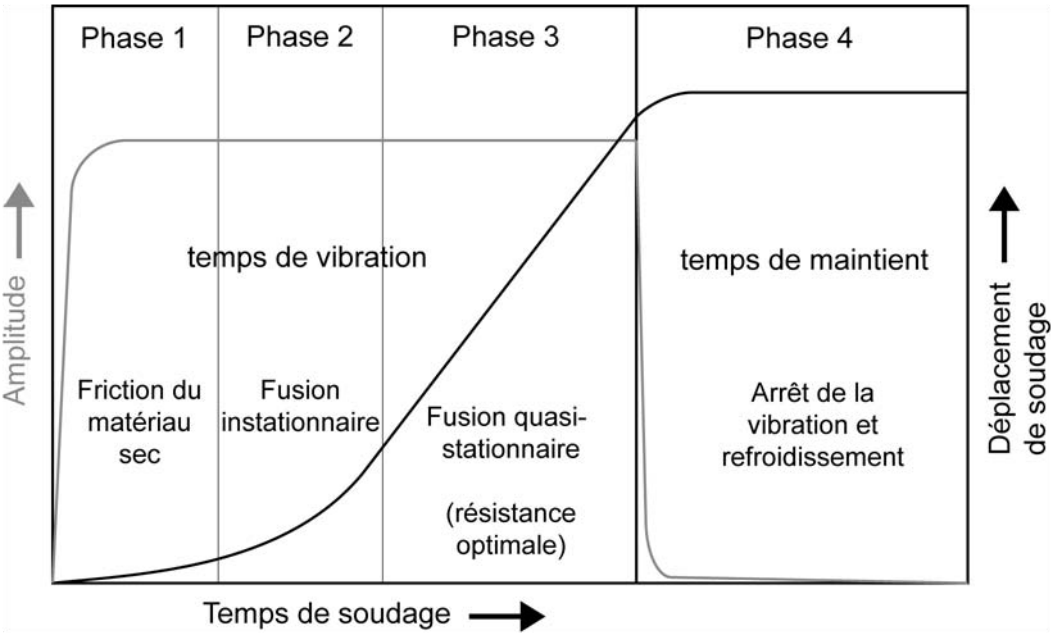


Figure 32 : *Phases du procédé du soudage linéaire (selon GIESE* **[43]***)*

Les indications contenues dans le premier brevet de SUTHOFF et al. indiquent aussi la forme possible d'une machine permettant de réaliser ce type de soudage pour des barreaux cylindriques de bois. Une courbe illustre l'évolution du couple de rotation, de la pression et de la diminution de longueur du barreau de bois de forme classique [42].

Le deuxième brevet [44] expose l'idée d'assemblage d'éléments en bois en utilisant le soudage par friction. Il décrit de manière plus précise les différentes possibilités de soudage par friction mais aussi par d'autres techniques comme par exemple les rayons infrarouges. Ce brevet est un amendement du précédent car il ajoute des revendications. Cependant aucun résultat ne permet d'étayer la faisabilité de cette technologie d'assemblage.

GLINIORZ de l'IBOIS a découvert ces brevets et a été tellement subjugué par cette nouvelle technologie d'assemblage qu'il rencontra les inventeurs et mis tout en œuvre pour souder du bois par friction confirmant ainsi le potentiel de ce mode d'assemblage [45]. En 2000 et 2001, GLINIORZ et al. [46] présentent deux types de « soudage du bois » : le premier est le procédé de collage rapide comme le procédé protégé par le brevet d'invention de GFELLER et al. [40], le second est le procédé de soudage par pyrolyse, sans apport d'un quelconque adhésif qui était protégé par les brevets de SUTHOFF et al. [5] [44].

Les premiers travaux scientifiques qui présentent des résultats commentés sur le soudage linéaire sont publiés en 2003 avec une première publication sur le sujet de l'HESB par GFELLER et al. [47] sur le soudage par friction linéaire. Quelques mois après, une première publication sur le soudage du bois par friction rotative est produite à l'ENSTIB avec PIZZI et al. [48].

Courant 2005, une thèse de doctorat est soutenue à l'EPFL sur le soudage du bois en utilisant la friction orbitale par STAMM [49]. Il a étudié le soudage du bois par friction sur des essences de bois tels que le hêtre (*Fagus sylvatica*) et l'épicéa (*Picea abies*). Après avoir appareillé la machine de soudage avec plusieurs capteurs de force, il a mis en relation le soudage avec le coefficient de frottement entre les éprouvettes assemblées. La durée de soudage est très longue : supérieure à 10 secondes. La fréquence de vibrations était de 80 Hz à 150 Hz, pour une amplitude de 0.95 mm sous une pression de 0.31 à 0.94 MPa. Le temps de maintien est de 20 secondes sous une pression de 1.6 MPa. Il a aussi étudié l'influence des orientations des cernes lors du soudage. La température obtenue à l'interface atteint 400°C. La machine de soudage circulaire initialement prévue pour le soudage de polymères est le modèle ZMT/2H de l'entreprise FISCHER KUNSTSTOFF SCHWEIßTECHNIK. Les dimensions maximales des pièces sont 100 x 50 mm^2.

En 2007, un brevet d'invention est déposé par CRISTESCU et al. [50] sur la fabrication de contreplaqué sans colle. Cette invention donne encore un autre aperçu des possibilités d'assembler le bois par fusion de certains de ces constituants comme il sera exposé plus loin. Ce « soudage » apparait uniquement en pressant suffisamment les plaquages de bois et en chauffant le tout. Ces panneaux possèdent non seulement la résistance mais aussi le traitement thermique permettant de les protéger des agents biologiques (champignons et insectes). Les presses nécessaires pour assurer cette mise en œuvre, sont similaires à celles utilisées dans l'industrie des panneaux utilisant des colles.

Les différentes méthodologies exposées précédemment pour conduire au "soudage du bois" mettent en jeu, à peu de chose près, les mêmes phénomènes au niveau de la matière. Avant d'exposer ceux-ci pour ce qu'ils ont d'essentiel dans le développement d'éléments de construction, un rappel sur l'anatomie du bois et sur ses constituants organique et chimique est important.

2.2 Essentiel du matériau bois

Le bois est le matériau naturel par excellence. Sa ressource biologique conséquente, plus ou moins maîtrisée selon les pays lui confère une disponibilité intéressante. Il possède un registre de facettes qui le distingue des autres matériaux tels que : beauté, docilité, inventif, pratique, économique, durable, sûr, confortable, écologique et combinable avec d'autres matériaux comme le métal, la pierre et le béton [51].

Dans un premier temps, l'anatomie (§2.2.1) du matériau est présentée succinctement afin de mettre en évidence les caractéristiques qui confèrent à ce matériau un caractère anisotrope fort. Dans un second temps, les constituants chimiques (§2.2.2) qui permettent de comprendre les réactions dans les phases du soudage sont détaillés. Pour terminer, les caractéristiques du matériau lors de la dégradation à haute température sont abordées.

2.2.1 Anatomie

2.2.1.1 Le caractère orthotrope du bois

Le matériau bois possède une très grande variabilité qui est due à son mode de croissance. En effet l'arbre croît par le mécanisme de la division cellulaire en hauteur ainsi qu'en diamètre. Les cellules indifférenciées au niveau de l'extrémité des tiges, nommées méristèmes primaires, donnent la croissance en hauteur. C'est le premier sens d'anisotropie : l'axe longitudinal illustré sur la figure 33.

La croissance en diamètre est due à la division cellulaire d'autres amas de cellules indifférenciées nommées méristèmes secondaires. Ces cellules se divisent dans les directions radiales et tangentielles. Ce sont les deux autres directions d'anisotropie (Figure 33). Ces cellules apparaissent lors de la première année dans la vie de la plante. Elles portent le nom d'assises génératrices [52].

La différentiation des cellules intervient par la suite conférant des rôles propres à chacune : soutient, conduction de sève ou stockage. Elles sont liées ensembles par la lamelle moyenne. Le détail sur la composition de cette interface qui lie les cellules ou trachéides (pour les résineux) entre elles est abordé dans la suite du document.

Le bois, ou xylème, est généré par l'assise génératrice libéro-ligneuse, aussi appelé cambium. Il produit des cellules de liber vers l'extérieur et des cellules de bois vers l'intérieur. Dans les régions tempérées, le cambium est actif pendant la période de végétation qui dure du printemps à l'automne. Il produit pendant cette période une unité de croissance qui s'appelle le cerne annuel. Le cerne est composé, dans les régions tempérées, de bois de printemps aussi appelé bois initial et de bois d'été ou bois final (Figure 33). Ces deux bois se différencient notamment par leur densité. Par exemple chez les résineux, les cellules du bois de printemps possèdent des parois plus fines et sont plus petites dans la direction radiale [49].

Suivant l'échelle d'observation ou de modélisation du matériau, il est possible de distinguer des plans suivant lesquels le matériau dispose de propriétés intrinsèques très différentes. C'est pour cette raison que le bois est en général considéré comme un matériau anisotrope. Lorsque des éléments de grandes dimensions comme les avivés sont modélisés, le bois sera considéré comme orthotrope transverse dont les plans LT et LR sont confondus en un plan Lt : longitudinal transverse. En effet, ces deux plans ont des propriétés mécaniques relativement proches et il est inconcevable de les distinguer à l'échelle de la modélisation de structure. Le bois est modélisé comme un matériau orthotrope transverse.

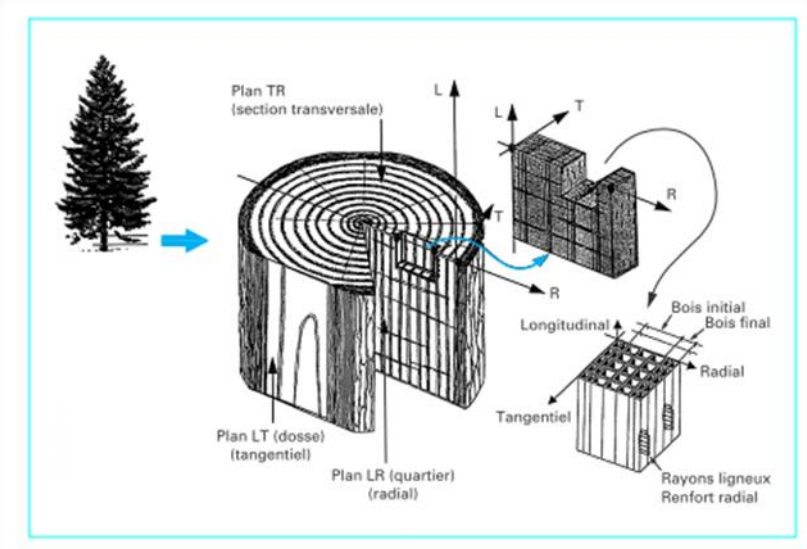


Figure 33 : *De l'arbre aux caractéristiques d'anisotropie du bois* **[52]**

2.2.1.2 Bois de résineux

Les résineux sont des plantes arborescentes gymnospermes riches en matières résineuses. C'est une essence primitive dont les cellules sont peu spécialisées. Il est dit que le bois de résineux est homoxylé car ce sont les mêmes cellules qui assurent le rôle de conduction de la sève et de soutient mécanique. La figure 34 illustre le plan ligneux d'un résineux. Ces cellules se nomment trachéides, elles composent globalement 90% du bois de résineux et mesurent environ 3 mm de long. La sève circule entre les trachéides par des ponctuations. Comme il est dit précédemment, le bois de printemps se différencie du bois d'été par la dimension des cellules dans la direction radiale ainsi que par l'épaisseur de la paroi cellulaire. La densité du bois est donc variable en fonction de sa position dans la section du tronc.

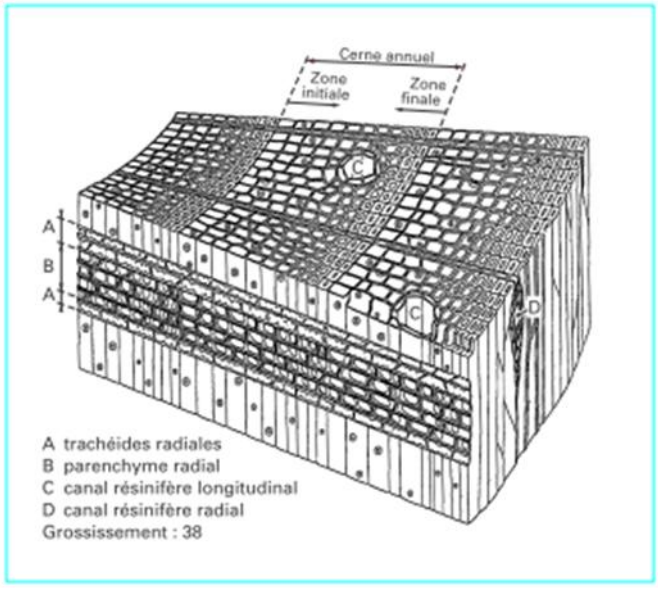


Figure 34 : *Plan ligneux des résineux (pin sylvestre)* **[52]**

2.2.1.3 Bois de feuillus

Les feuillus sont des essences plutôt évoluées dont les cellules de bois sont spécialisées en fonction de leur rôle, il est hétéroxylé. La conduction de la sève se fait dans les vaisseaux (Figure 35). Ce sont des cellules courtes et de gros diamètres qui sont empilées suivant l'axe longitudinal du tronc. La sève passe entre les différentes cellules par des perforations qui sont formées par l'hydrolyse des parois cellulaires. Le soutien mécanique est, quant à lui, assuré par les fibres (Figure 35). Ce sont des cellules allongées de petits diamètres et à parois épaisses. Les feuillus des régions tempérées peuvent-être divisés en trois catégories : les feuillus à zone initiale poreuse (ZIP), les feuillus homogènes et les feuillus à zone semi-poreuse (ZSP). Les ZIP produisent plus de vaisseaux de diamètres importants au début de la période de végétation. L'essence la plus représentative de cette catégorie est le chêne (*Quercus*). Les feuillus homogènes ont une distribution uniforme des vaisseaux dans le cerne annuel, que ce soit au point de

vue de leur diamètre ou de leur nombre. La majorité des feuillus appartient à ce groupe dont fait notamment partie le hêtre (*Fagus sylvatica*) qui est très utilisé dans cette étude pour faire des tourillons. Les ZSP ont une distribution des vaisseaux qui varie soit en nombre, soit en diamètre dans le cerne annuel. Le merisier, par exemple, est un feuillu à zone semi-poreuse.

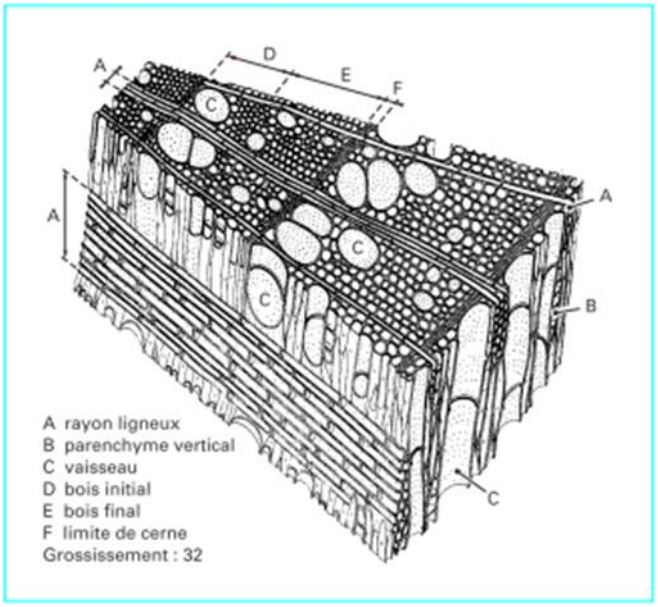


Figure 35 : *Plan ligneux des feuillus (frêne (fraxinus) : à zone semi-poreuse)* **[52]**

2.2.2 Chimie du bois

Le principal constituant du bois est la cellulose (50%). Ensuite vient la lignine (25%-30%), les hémicelluloses ou polyoses (25%-20%), des extractible (tanins, cires et terpènes) et des cendres (composés inorganiques). La proportion de ces constituants varie d'une essence à l'autre.

Lors de la division cellulaire du cambium, les deux cellules de bois sont séparées par une couche intercellulaire qui est lignifiée de manière importante lors du procédé de lignification suite à la duraminisation. La paroi primaire qui s'appuie sur la couche intercellulaire, extensible pour suivre l'étape de la différentiation, est composée de microfibrilles de cellulose enchevêtrées dans une matrice de polyoses et de lignine suite à la différentiation de la cellule. La paroi secondaire comporte trois couches :

- La couche S1 : les microfibrilles de cellulose forment une hélice dont l'angle par rapport à l'axe de la cellule varie de 60° à 80°.
- La couche S2 : c'est la couche la plus épaisse, les microfibrilles sont globalement parallèles et forment un angle par rapport à l'axe de la cellule de 5° à 30°
- La couche S3 : ressemble à la couche S1 mais se trouve être plus fine.

Comme pour la paroi primaire, suite à la différentiation, les microfibrilles baignent dans une matrice d'hémicelluloses et de lignine. La figure 36 présente les différentes couches de la paroi cellulaire.

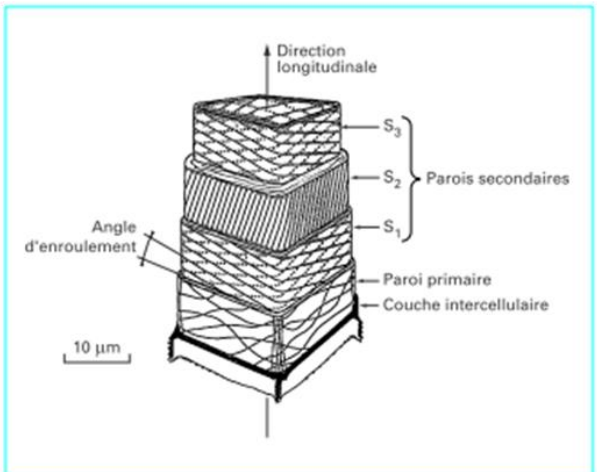


Figure 36 : *Définition de la paroi cellulaire* **[52]**

Les trois principaux constituants de la paroi cellulaire sont décrits dans les sections suivantes pour mieux comprendre leurs potentiels de réaction chimique.

2.2.2.1 Cellulose

La cellulose est le principal composant de la paroi cellulaire du bois. C'est un polymère linéaire composé d'unités de cellobiose. Une unité de cellobiose est composée de deux cycles de glucose de conformation β reliés par des liaisons 1-4 (Figure 37). Le groupe hydroxyle lié au carbone 1 est situé au dessus du plan formé par le cycle de glucopyranose.

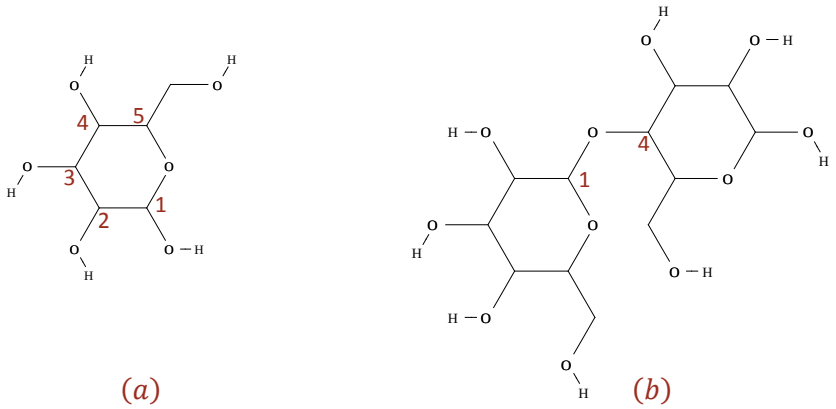


Figure 37 : *Constituant de la cellulose : (a) β-D-Glucose et (b) cellobiose (103 nm)*

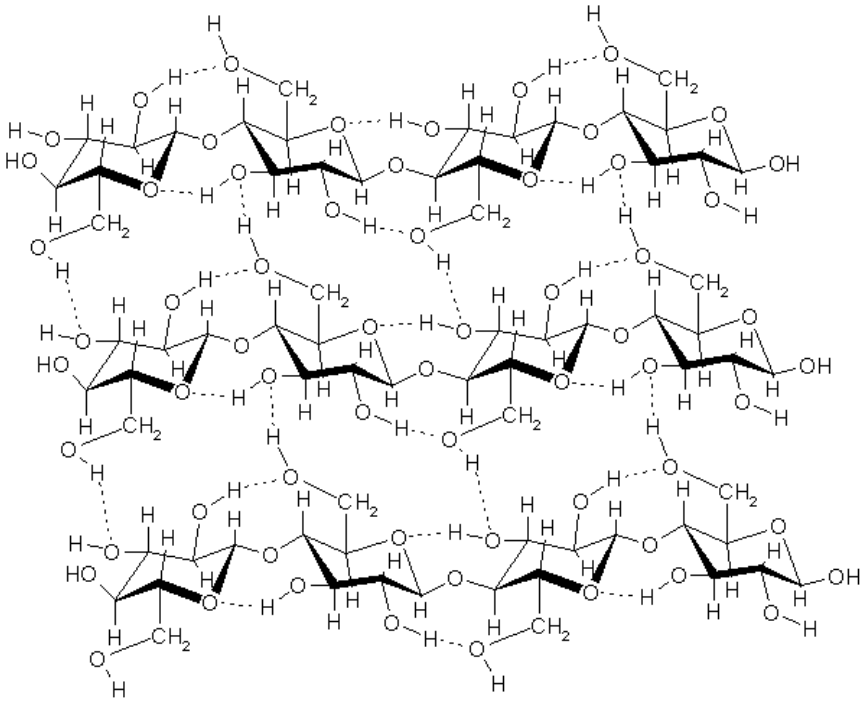


Figure 38 : *Exemple de la structure chimique de la cellulose*

La cellulose cristallise partiellement lors de sa formation. Le reste, moins ordonné est appelé cellulose amorphe. Les microfibrilles possèdent des zones cristallines et des zones amorphes. Le degré de cristallinité de la cellulose du bois est de l'ordre de 60 à 70%. Les microfibrilles (principales constituants de la paroi cellulaire) sont constituées des polymères linéaires de cellulose liés entre eux par des liaisons hydrogènes. Le même genre de liaisons peut exister entre la cellulose et d'autres polymères comme les hémicelluloses.

FENGEL [49] montre l'influence de l'eau sur les fibres de cellulose. En effet, lorsque les fibres sont séchées, l'eau se sépare des chaines de cellulose ce qui entraine un resserrement des microfibrilles, elles deviennent donc plus résistantes aux diverses attaques des composés acides.

2.2.2.2 Hémicelluloses

Les hémicelluloses sont des polymères qui ont un faible poids moléculaire en comparaison à la cellulose. Elles sont principalement composées de 4 sucres : les pentoses, les hexoses, les acides hexuroniques et les désoxy-hexoses (Figure 39). La chaine principale peut être constituée d'un seul ou de plusieurs de ces sucres. A cette

chaine principale peuvent être greffés d'autres sucres ou chaines aliphatiques comme des groupements acétyle. Les hémicelluloses des feuillus et des résineux diffèrent par leurs compositions en composés élémentaires.

Les glucomannanes sont des hémicelluloses dont la chaine principale est constituée d'unités de glucose et de manose liées par des liaisons β. Ils possèdent des arabinofuranoses latéraux. Les glucomannanes du bois sont différents s'ils sont issus de résineux ou de feuillus. Leur chaine principale est composée de glucose et de mannose. Contrairement à ceux des feuillus, les glucomannanes des résineux possèdent des groupes latéraux qui peuvent-être composés de sucres (galactose) et de chaines aliphatiques (acétyle). FENGEL et WEGENER [49] ont montré que les chaines latérales des glucomannanes pouvaient réagir avec la lignine pour former des complexes lignine-polysaccharide.

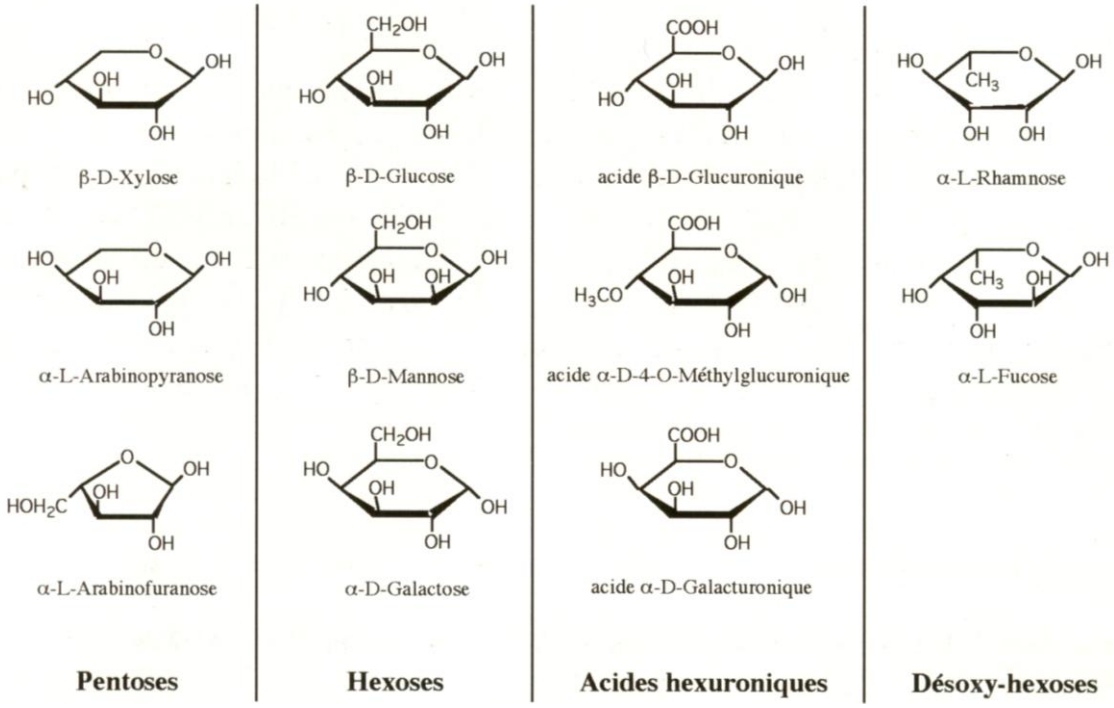


Figure 39 : *Constituant élémentaire des hémicelluloses*

Les hémicelluloses possèdent de nombreux groupements hydroxyles ce qui les rend particulièrement hydrophiles à l'image de la cellulose.

2.2.2.3 Lignine

La lignine est un polymère tridimensionnel phénolique considéré comme un des ciments de la paroi cellulaire. Son poids moléculaire est indéterminé et sa structure est variable, toutefois trois constituants élémentaires peuvent être dégagés : les monolignols (Figure 40). Ces derniers sont des dérivées indirectes de l'acide aminé la phénylalanine à la suite de réductions, d'hydroxylations, de méthylations et d'actions enzymatiques. Les monolignols peuvent prendre plusieurs formes radicalaires suite à ces réactions (Figure 41). La liaison entre deux unités peut donc prendre plusieurs formes telles que des liaisons C-C ou encore des liaisons aryle éther (β-O-4) comme la figure 42 l'illustre.

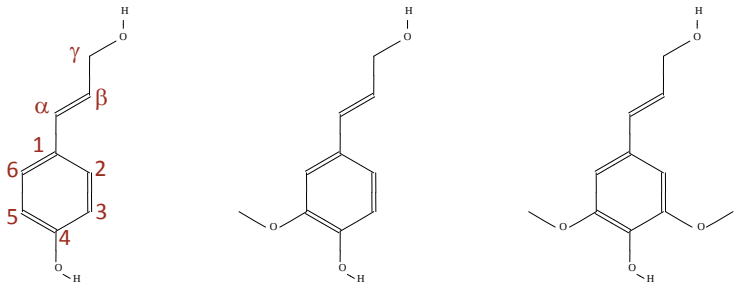


Figure 40 : *Monolignols*

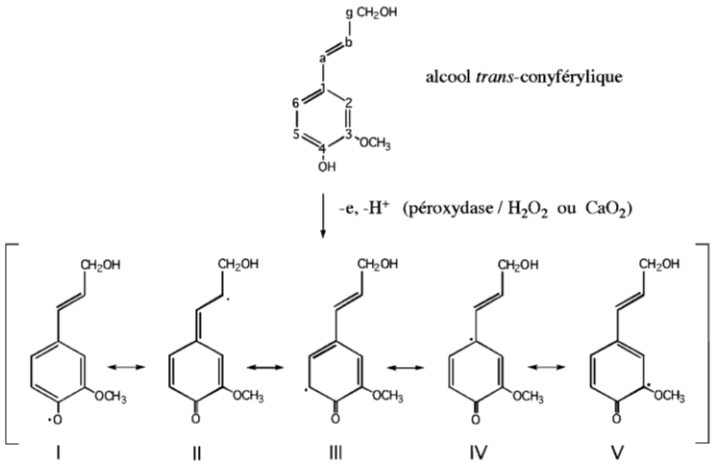


Figure 41 : *Déshydrogénation enzymatique de l'alcool coniférylique (FENGEL et WEGENER* **[53]***)*

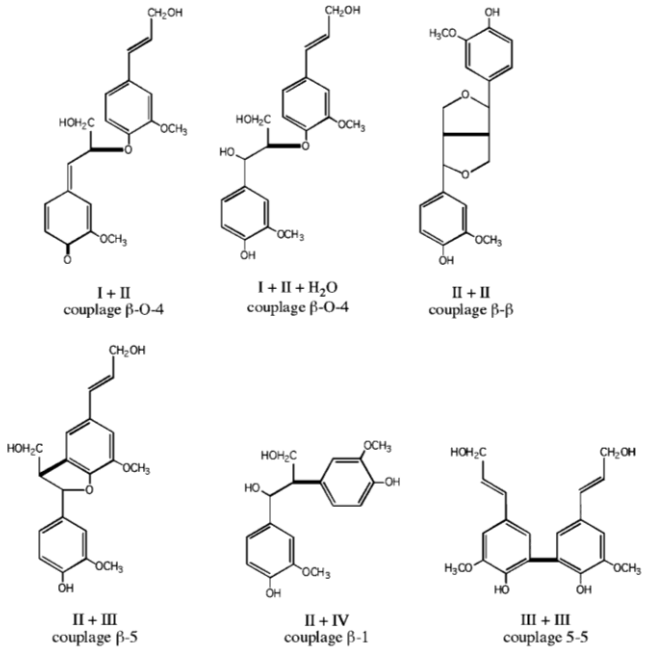


Figure 42 : *Formules typiques de quelques dilignols (FENGEL ET WEGENER* **[53]***)*

Les lignines de feuillus et de résineux se différencient principalement par leurs proportions des différentes unités de monolignols. La proportion en unité de gaiacyl (issu de l'alcool coniférylique) dans la composition de la lignine de résineux est plus importante que dans celle de feuillus.

2.2.2.4 Organisation moléculaire cellulose-hémicellulose-lignine

Les modèles de l'organisation moléculaire entre la cellulose, les hémicellulose et la lignine, sont variés et plus ou moins vraisemblables. Le plus plausible est le modèle proposé par FENGEL et WEGENER [53] il a été développé par la suite par HEGER [53] et SALMEN [53]. La figure 43 illustre le modèle de HEGER [53] de l'organisation moléculaire du composite bois.

Une vision générale de la cellule vers les constituants moléculaires est illustrée sur la figure 44. Les constituants principaux comme la cellulose, les hémicelluloses avec les xylanes et glucomannanes ainsi que la lignine sont positionnés dans l'organisation cellulaire.

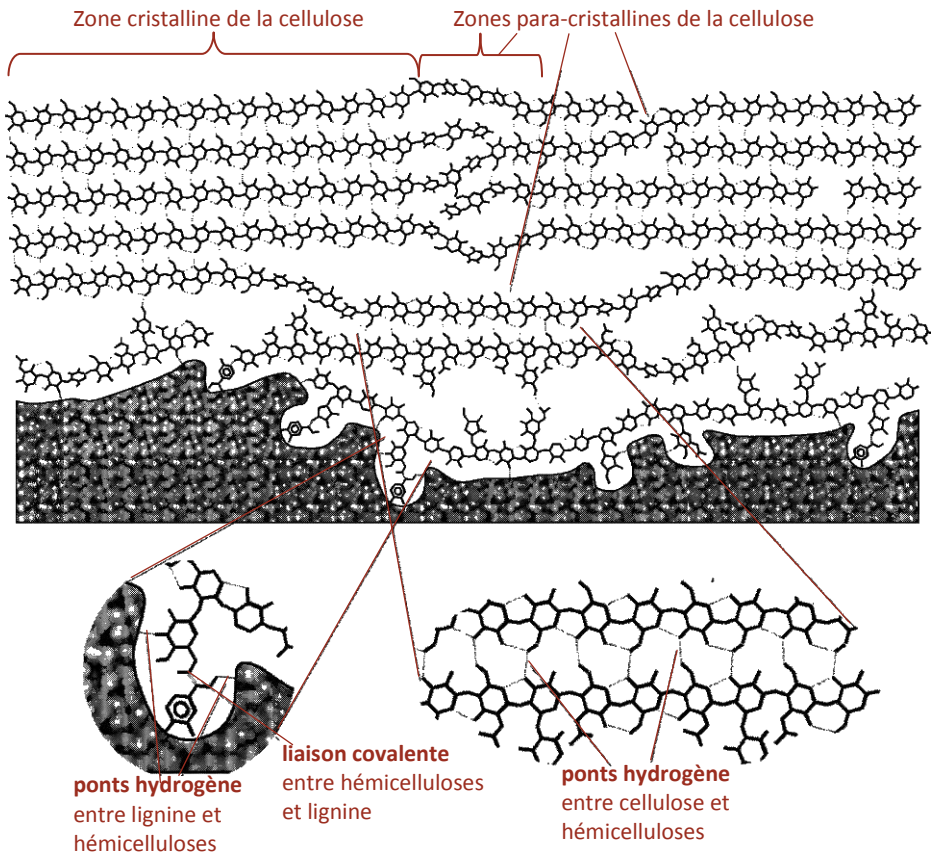


Figure 43 : *Modèle moléculaire du composite bois* **[53]**

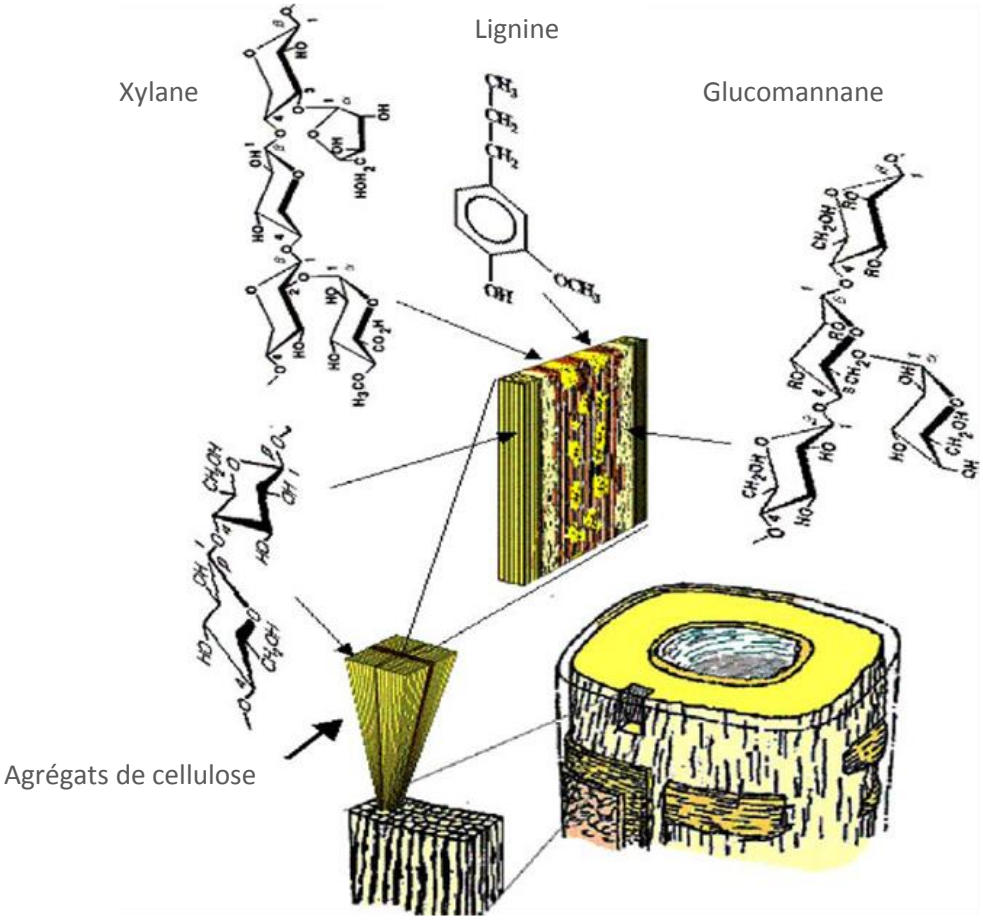


Figure 44 : *Organisation des principaux polymères du bois du tronc jusqu'aux molécules* **[54]**

2.2.3 Comportement à la chaleur du bois

2.2.3.1 Température de transition vitreuse

La figure 45 représente l'évolution du module d'élasticité longitudinal du bois en fonction de la température. Quatre phases sont identifiables : zone vitreuse, zone de transition vitreuse, zone caoutchouteuse et la zone d'écoulement.

La phase de transition vitreuse du bois considérée comme un polymère est le passage de l'état vitreux (rigide) à l'état caoutchouteux. Cette transition est nettement plus marquée pour les polymères amorphes que chez les polymères cristallins. Dans le cas du bois, cette phase de transition est fortement influencée par l'humidité. En effet, elle se lie aux groupes -OH des polymères et augmente la distance entre les molécules. Cette phase de transition vitreuse est accélérée avec l'augmentation de la température.

L'état caoutchouteux est caractérisé par un module d'élasticité du matériau 3000 à 4000 fois inférieur à celui de l'état vitreux. Ceci est principalement dû à la diminution des forces inter- et intramoléculaires (liaisons hydrogènes). La diminution de ces liaisons augmente les degrés de liberté des polymères. Des mouvements relatifs de plus grande amplitude entre chacun d'eux sont rendus possibles.

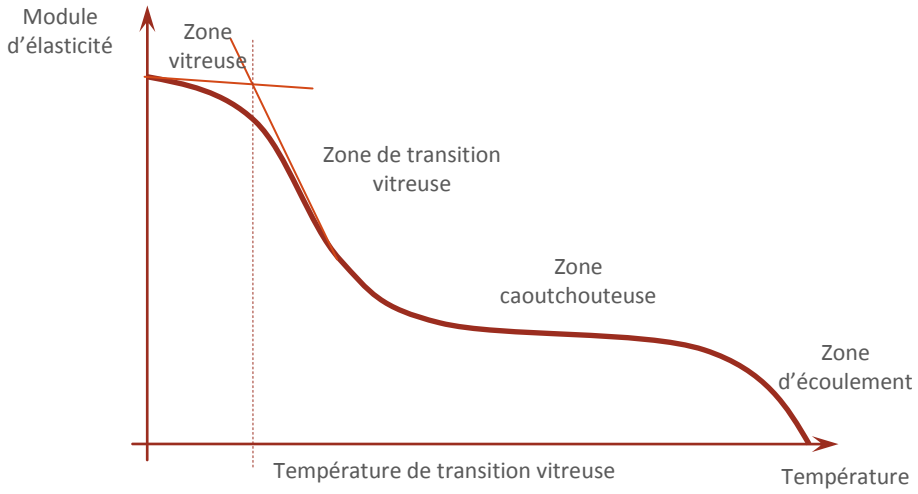


Figure 45 : *Evolution du module d'élasticité du bois avec la température (d'après* **[53]***)*

Tous les constituants du bois sont liés entre eux par des liaisons chimiques. Le comportement du bois n'est donc pas la somme des comportements individuels de chacun des polymères qui le constitue. Il faut prendre le bois comme un ensemble. La figure 46(a) (selon SALMEN [53]) représente l'évolution de la température de transition vitreuse des différents polymères du bois en fonction de l'humidité. Comparativement, la figure 46(b) présente le comportement de la matrice lignine-hémicelluloses en fonction de l'humidité relative de l'air ambiant.

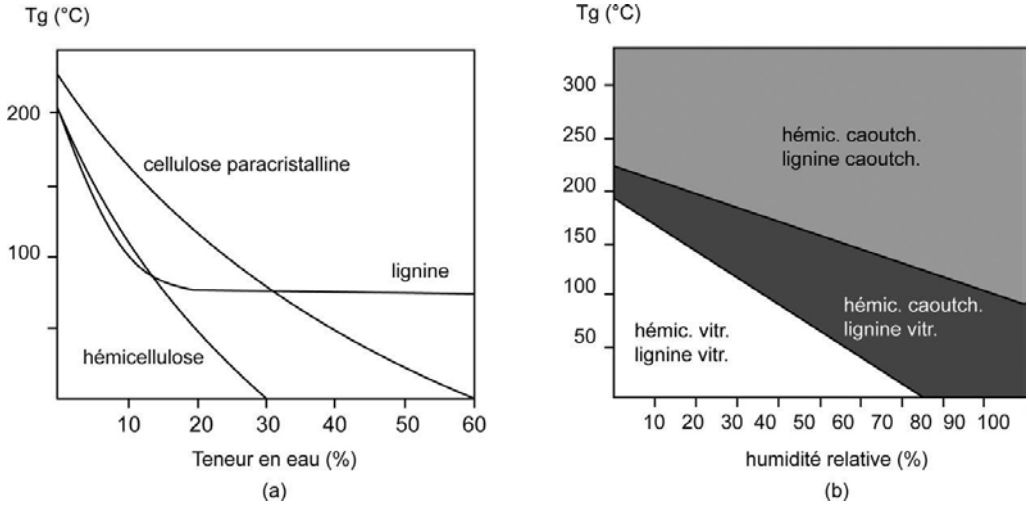


Figure 46 : *Température de transitions vitreuses (SALMEN* **[43]***)*

2.2.3.2 Dégradation thermique des polymères du bois

- **Cellulose**

Du fait de sa structure cristalline, la cellulose est plus stable que les hémicelluloses. Pourtant, FENGEL [49] montre qu'il se produit des changements structurels et chimiques dès 100°C. Au delà de 100°C les molécules d'eau qui se trouvent entre les polymères de celluloses s'évaporent, les chaines se rapprochent : l'effet des microfibrilles se trouve alors renforcé dans le comportement du composite qu'est le bois.

Pour des températures inférieures à 230°C la dégradation de la cellulose n'est que secondaire. Autour de 275°C, environ 20% de la cellulose est dégradée selon GARROTE et al. [49]. Les zones amorphes de la cellulose sont les premières à être dégradées. Il en résulte une augmentation de la cristallinité jusqu'à environ 200°C malgré une diminution du degré de polymérisation. La dégradation massive de la cellulose n'apparait qu'aux alentours de 300-360°C selon KIM et al. [49].

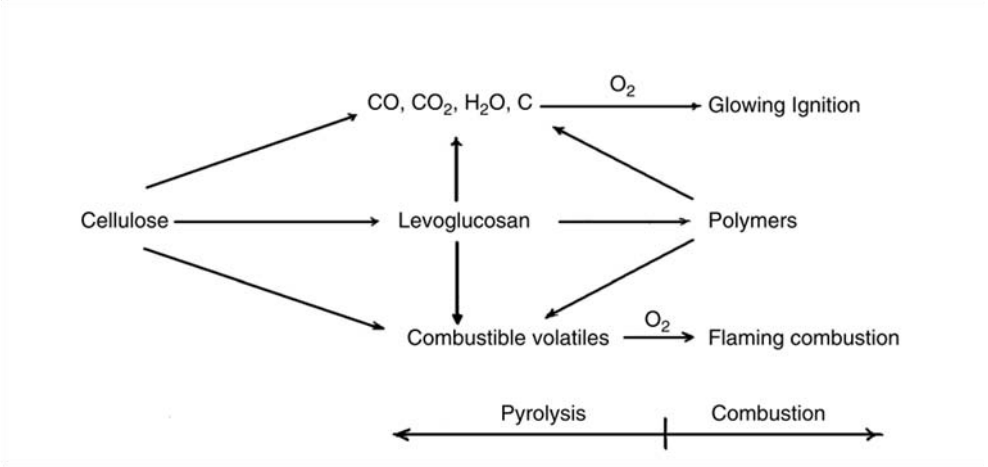


Figure 47 : *Pyrolyse et combustion de la cellulose* **[55]**

ROFFAEL et SCHALLER [49] montrent que l'humidité a une influence sur le degré de polymérisation de la cellulose. Après un traitement thermique à 200°C, le degré de polymérisation d'une éprouvette ayant une teneur en eau de 60% est 200 fois supérieur à celui d'une éprouvette ayant une teneur en eau de 7%. Ainsi, la présence d'eau liée diminuerait la sensibilité de la cellulose à la chaleur. La dégradation thermique de la cellulose produit majoritairement du levoglucosane, du furane et des dérivées furaniques (Figure 47).

- **Hémicellulose**

La dégradation des hémicelluloses commence à des températures plus basses que la cellulose. Entre 100 et 180°C, ce sont surtout les pentosanes qui sont décomposés. Vers 200°C, la dégradation des polyoses s'intensifie et d'après WIENHAUS [49], la structure originale des polyoses est totalement détruite à 225°C.

Les groupes acétyle jouent un rôle dans la dégradation des hémicelluloses car, lors de la décomposition de ces dernières, ces groupes se séparent des chaînes principales et acidifient le milieu. Les hémicelluloses subissent par la suite une hydrolyse catalysée par l'acide. Les produits issus de cette hydrolyse sont principalement du furfural et des composés furaniques.

Les xylanes sont moins stables que les glucomannanes à l'image des pentoses qui sont moins stables que les hexoses selon HILL [43].

- **Lignine**

Malgré le fait que la lignine soit considérée comme le composant le plus stable du bois, des dégradations se produisent déjà à des températures inférieures à 200°C. FUNAOKA et al. [49] attribuent à la condensation de la lignine la formation de sous produits tel que le diphénylméthane. Il est aussi affirmé que la présence d'eau accélère la condensation de la lignine ce qui la rend donc plus rigide.

Le poids moléculaire de la lignine baisse dans la gamme de températures 180-220°C selon KACIK et al. [49]. Cela est dû aux clivages des liaisons éther (R-O-R) qui représentent environ 65% des liaisons au sein de la lignine. Les nouveaux composés peuvent ensuite auto-condenser en créant des liaisons carbone-carbone β-β ou β-5.

Les réactions de dégradation significatives commencent pour des températures supérieures à 280°C.

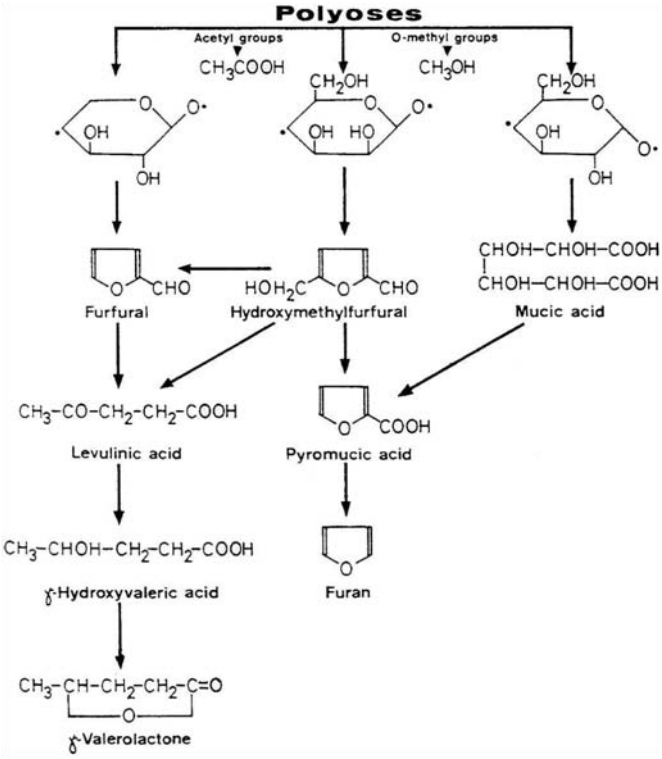


Figure 48 : *Etapes probable de dégradation thermique des hémicelluloses (FENGEL et WEGENER* **[43]***)*

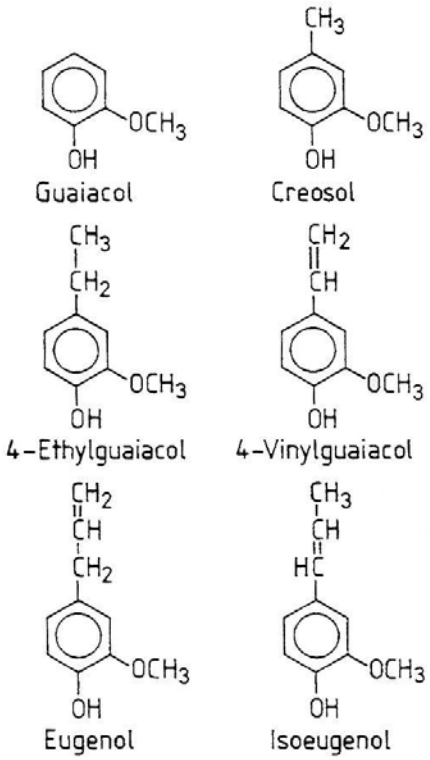


Figure 49 : *Produit de dégradation du bois (FENGEL et WEGENER* **[43]***)*

2.2.4 Conclusion

Le bois est un matériau qui peut être considéré comme un matériau composite formé de fibres de cellulose dans une matrice de lignine et d'hémicelluloses. De plus, de par son mode de croissance il possède un caractère orthotrope cylindrique dont les axes principaux sont les trois directions : longitudinale, radiale et tangentielle. Selon le mode de découpe du tronc, les plans orthotropes peuvent se ramener à un plan longitudinal-transversal comme les pièces de type poutre. Les propriétés d'un échantillon de bois sont donc dépendantes de l'orientation du fil ainsi que de sa position dans le tronc. De plus, la variabilité inter espèces offre des caractéristiques différentes, tout comme la variabilité intra espèce. Dans un même arbre, la variabilité est aussi présente selon son mode de croissance.

Outre les propriétés intrinsèques du matériau, le bois possède un comportement différent en fonction du milieu. En effet, il convient de prendre en considération la température et l'humidité du milieu. Ces dernières ont une grande influence sur le comportement mécanique du matériau bois.

Tous ces éléments sont autant de paramètres qu'il faut maitriser et prendre en compte lors de l'étude des procédés d'assemblage mettant en œuvre le bois. Les assemblages de pièces de bois par soudage sont d'autant plus sujets aux variations du bois qui influencent sa mise en œuvre et sa durabilité dans le temps.

D'autre part le comportement à la chaleur du bois reste complexe. Pour le soudage par friction, il faut atteindre la température nécessaire pour rendre la matière intercellulaire liquide : la température de transition vitreuse. Cette matrice est principalement composée de lignine et d'hémicelluloses. Ces dernières sont très sensibles à la dégradation thermique. Il est donc nécessaire de trouver la température qui assure une fonte complète de cette matrice à l'interface sans dégrader ce liant.

2.3 Soudage par friction linéaire

2.3.1 Evolution

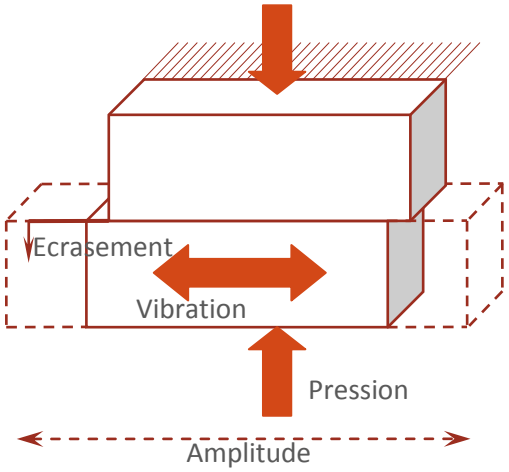


Figure 50 : *Principe du soudage linéaire*

Le principe du soudage du bois par friction linéaire a connu un développement relativement rapide car les matériels permettant le soudage sont les mêmes que ceux utilisés avec les adhésifs. Dès les premiers travaux, les résultats se sont montrés très prometteurs puisque la résistance en traction transversale après soudage de hêtre sur hêtre (*Fagus sylvatica*) a pu atteindre une moyenne proche de 10 MPa [47]. Il est intéressant de noter que pour du bois résineux (*Picea abies*), les valeurs obtenues sont de l'ordre du cinquième de celles observées avec du hêtre. Les paramètres du soudage utilisés pour ces expériences étaient les mêmes quel que soit l'essence. GFELLER et al. [47] ont donné une première description du mécanisme de soudage du bois : un réseau complexe se crée avec les fibres et les ingrédients du bois, principalement la lignine (Figure 51). En effet, la matière intercellulaire (lamelle moyenne) fond lors de l'échauffement et durcit à nouveau au refroidissement. La concentration de lignine contenue dans la lamelle moyenne est notablement plus élevée que celle de la paroi cellulaire. Les fibres ayant été peu endommagées s'entrecroisent, ce qui crée un premier ancrage mécanique qui se trouve renforcé lorsque la lignine fige cet enchevêtrement.

Leurs travaux ont montré l'apparition de réactions chimiques après le soudage à l'aide de la résonance magnétique nucléaire. Ces réactions chimiques améliorent la résistance du joint soudé. Ces observations ont conduit les expérimentateurs à introduire un temps de maintien final après la phase d'échauffement ou le contact entre les pièces est maintenu sous pression.

Dernièrement, GANNE-CHEDEVILLE [43] a étudié plus en détail le mécanisme du soudage avec les réactions chimiques pouvant avoir lieu pendant et après le soudage (Figure 52). Ses travaux montrent qu'il existe cinq facteurs permettant de gérer le soudage : l'énergie de friction (amplitude et fréquence), la pression lors du soudage, la pression après le soudage, la durée du soudage et la durée du maintient en pression. Dans ces travaux, le processus de soudage linéaire, à une fréquence de 100 Hz, conduit à un temps d'échauffement relativement long : une perte de matières remarquables (extrudât, gaz et eau) s'observe par la différence des hauteurs initiale et finale des pièces soudées. Les extrudâts sont des agglomérats de lignine surchauffée mélangées à des fibres arrachées à l'interface mais également surchauffées. Ces extrudâts ont une texture souple lorsqu'ils sont chauds. Ils

durcissent et deviennent cassants avec le temps ce qui prouve que des réactions ou des évolutions d'états ont encore lieu après l'opération de soudage.

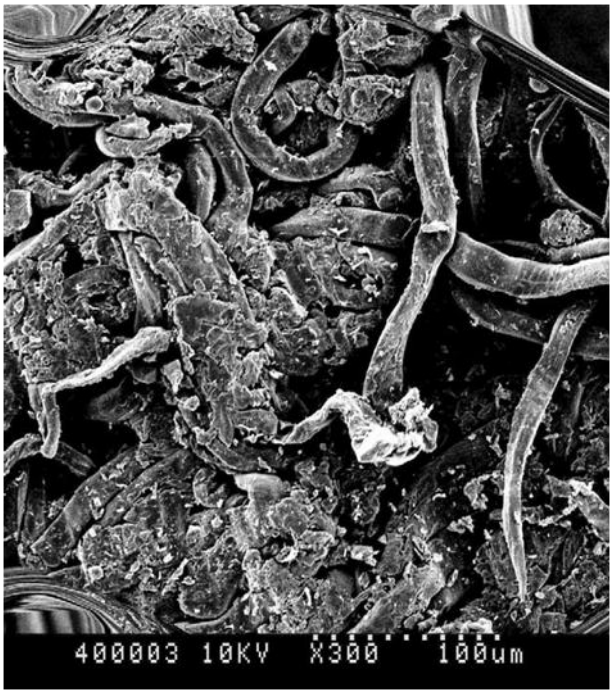
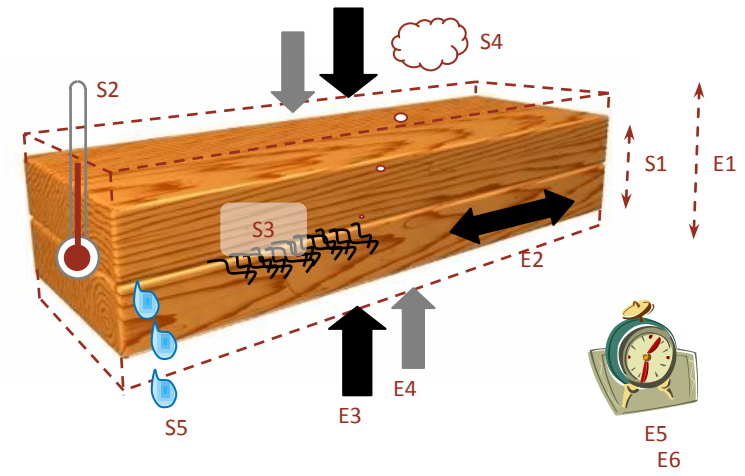


Figure 51 : *Interface soudée montrant l'existence d'un réseau de fibres de bois enchevêtrées lié dans une matrice durcie de matériel intercellulaire* **[47]**

Dans les travaux de GANNE-CHEDEVILLE [43] l'augmentation de la température à l'interface a été mesurée par thermographie infrarouge. La figure 53 présente l'évolution de la température à l'interface pour un temps d'échauffement de 10.5 s sur des éprouvettes de hêtre (*Fagus sylvatica*). Sur cette figure, la résistance mécanique du joint au cisaillement est également tracée en fonction du temps de soudage. Un optimal est obtenu à partir de 2 secondes. Il peut être remarqué que jusqu'à 6 secondes la résistance n'est pas affectée. Au-delà de 6 secondes la résistance chute.



Entrées
- E1 : Hauteur initiale
- E2 : Energie de friction
- E3 : Pression lors du soudage
- E4 : Pression lors du maintient
- E5 : Temps lors du soudage
- E6 : Temps lors du maintient

Sorties
- S1 : Hauteur finale
- S2 : Température à l'interface
- S3 : Extrudâts
- S4 : Gaz
- S5 : Eau

Figure 52 : *Bilan des facteurs entrant et sortant lors du soudage du bois (selon* **[43]***)*

La fenêtre de soudage optimale correspond à un intervalle de température qui s'étend de 150°C à 250°C. Cette plage de température donne lieu aux réactions de déshydratation et de condensation des hémicelluloses dans un premier temps (150°C), puis de la lignine dans un second temps (200°C). Ces réactions diminuent vers 230°C quand commence la dépolymérisation de la cellulose. Il apparait évident que dès l'atteinte de cette température, la résistance mécanique commence à baisser. La diminution de la résistance à partir de 6 secondes de soudage s'explique par la formation de charbon dans l'interface qui empêche l'enchevêtrement des fibres.

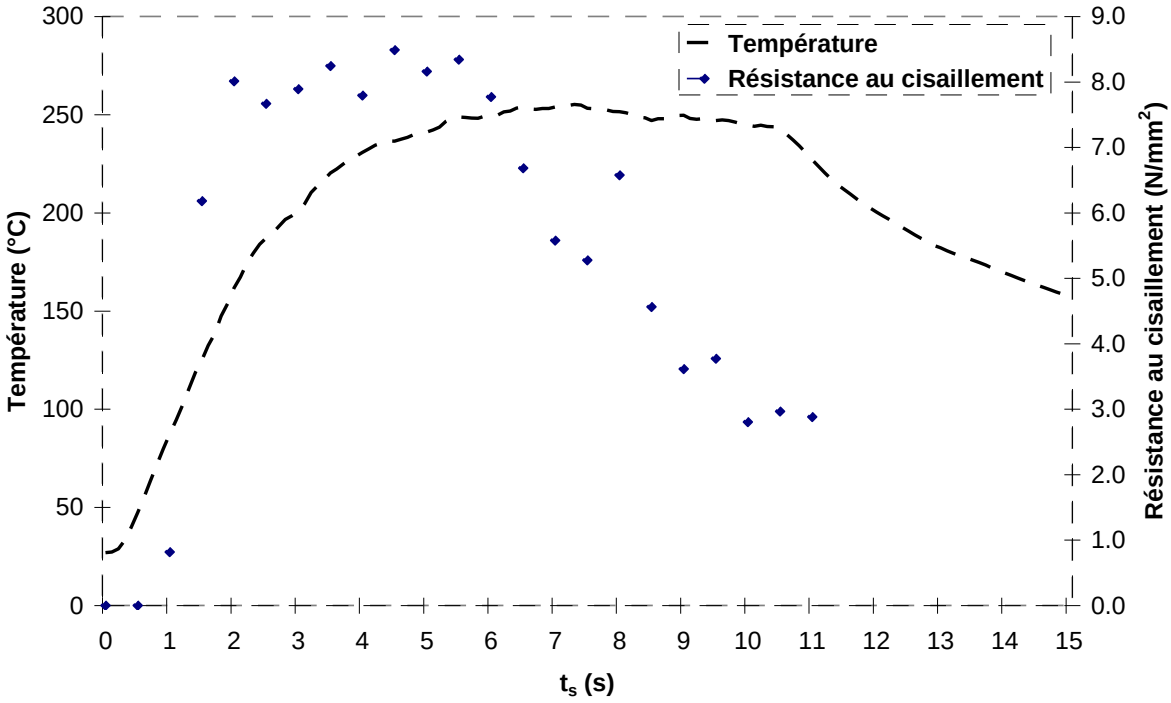


Figure 53 : *Température à l'interface et résistance en cisaillement en fonction du temps de soudage (d'après* **[43]***)*

Autour du joint soudé, GANNE-CHEDEVILLE [43] définit trois zones qui s'inspirent du soudage par friction linéaire des composites thermoplastiques :

1. La Melting Zone (MZ) : la zone entièrement fondue
2. La Fully Plasticized and Deformed Region (FDR) : la zone entièrement plastifiée
3. La Partially Deformed Region (PDR) : la zone partiellement déformée

L'épaisseur de ces différentes zones varie fortement en fonction de l'orientation du fil du bois allant de 160 à 1400 µm pour la PDR. L'apparition de ces différentes zones s'accompagne d'une densification du bois due à la diminution de la porosité causée par l'écrasement des cellules. Cette densification est étudiée plusieurs fois avec l'aide d'un densitomètre [56] [57].

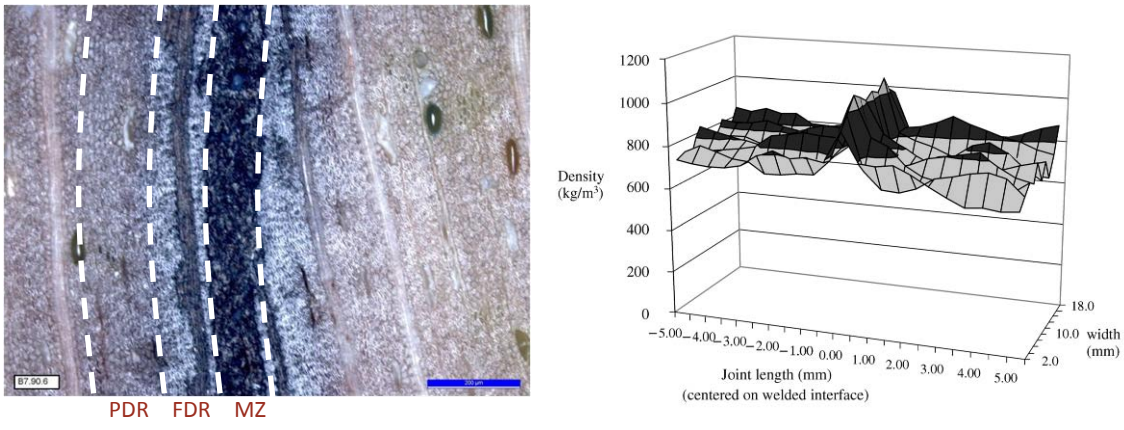


Figure 54 : *(a) Coupe transversale pour une orientation du fil du bois à 90 d'une éprouvette soudée d'érable (Acer campestre)* **[43]***, (b) microdensitométrie aux rayons X de l'interface soudée de deux pièces de hêtre (Fagus sylvatica)* **[56]**

L'étude de ces zones donne une indication sur le soudage. De 2 à 6 secondes, l'épaisseur des zones sont stables. Suite à un temps de soudage relativement long (supérieur à six secondes), les zones FDR et PDR croissent. La propagation de la température dans le bois affaiblit considérablement celui-ci.

Une étude par spectroscopie infrarouge à transformée de FOURIER (FTIR), résonance magnétique nucléaire du solide (RMNs) au ^{13}C permet de justifier la réorganisation de certaines liaisons entre la cellulose globalement intacte (réarrangement de la cellulose suite à la perte de l'eau), les hémicelluloses fortement dégradées et la

lignine dégradée [58]. De plus, les cycles de la lignine se recombinent en groupement phénolique qui s'oxydent assez facilement pour former, entre autre, des groupements quinone responsables de la coloration sombre voire noire du joint soudé. Ces substances sont aidées par la formation de composés à base de furfural provenant principalement des hémicelluloses qui polymérisent en présence de l'air en une résine noire [43]. De plus, le pouvoir hydrophobe de la lignine limite les réactions de décarboxylation des fibres de celluloses.

GANNE-CHEDEVILLE [43] détermine que la masse des extrudâts est de 1/3 par rapport à la masse totale perdue. Il apparait donc une masse relativement importante pour les déchets sous forme de gaz (dont l'eau en vapeur). Le volume de gaz obtenu est de 156 L pour 1 m^2 de bois soudé (12% d'humidité). Il faut donc maîtriser le contenu des fumées. Les fumées contiennent notamment des composés phénoliques issus de la lignine dont la vanilline, l'eugénol qui sont nocifs mais pas toxiques. Cela signifie des ruptures dans les liaisons β-O-4 des lignols, montrant ainsi une recombinaison et/ou dégradation de la lignine. La présence des ces deux molécules principalement vérifie la plage de mesure de la thermographie par infrarouge, en effet, ils sont facilement transportables (faible poids moléculaire) par la vapeur malgré une température d'ébullition au-delà de 250°C.

L'orientation des pièces à souder a une grande influence sur la résistance du joint soudé comme le précise PROPERZI et al. [59]. GANNE-CHEDEVILLE [43] a étudié l'influence de l'orientation du fil du bois pour le soudage d'éprouvettes d'érable (*Acer campestre*) pour des orientations du fil par rapport au plan de soudage de 0°, 45° et 90°. Les résultats de la figure 55 indique un optimal pour l'orientation du fil du bois à 45°.

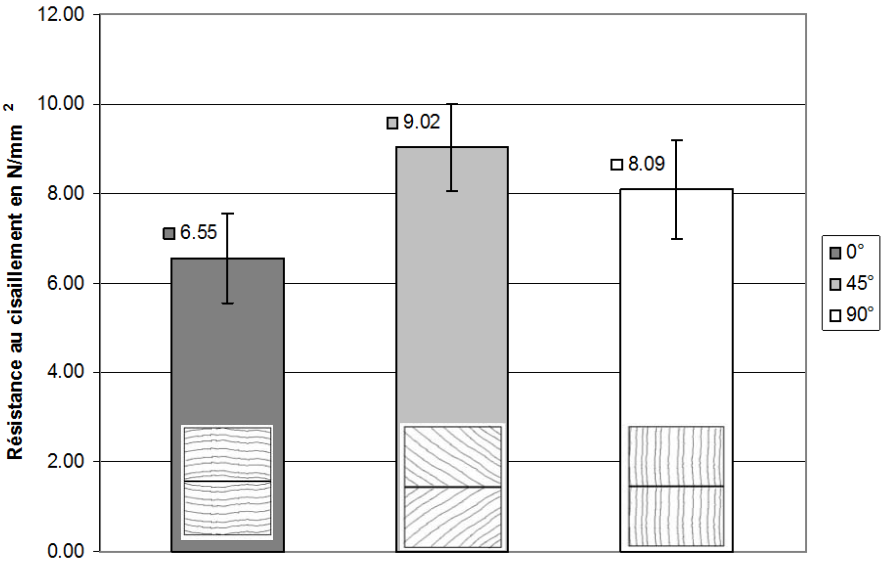


Figure 55 : *Influence de l'orientation du fil du bois sur la résistance en cisaillement du soudage d'érable (Acer campestre) (d'après* **[43]***)*

Les panneaux à base de bois ne sont pas en reste, puisque GANNE-CHEDEVILLE et al. [57] présentent des résultats intéressants sur la faisabilité du soudage par friction linéaire entre panneaux à base de bois.

Le bois traité thermiquement (augmentation de la stabilité dimensionnelle et de la durabilité intéressante au détriment de la résistance du matériau) a même été testé par BOONSTRA et al. [60]. Les essais sont présentés dans GANNE-CHEDEVILLE [43]. Le bois traité thermiquement peut être soudé avec, bien entendu, des résultats inférieurs par rapport au bois non traité thermiquement.

2.3.2 Limites et transferts industriels

Deux limites principales à ce procédé de soudage bois-bois existent : les dimensions des éprouvettes soudées et la résistance du joint soudé après une humidification de quelques heures.

La principale limite de cette technologie est la dimension des éprouvettes soudées. Malgré la machine BRANSON qui peut souder des éléments de deux mètres de long, la largeur possible s'en trouve réduite de deux à trois centimètres pour ne pas diminuer la qualité du soudage. Toutefois, GANNE-CHEDEVILLE [43] présente une première application industrielle : la fabrication d'un snowboard avec un noyau en lamellé bois soudé par friction linéaire comme le montre la figure 56.

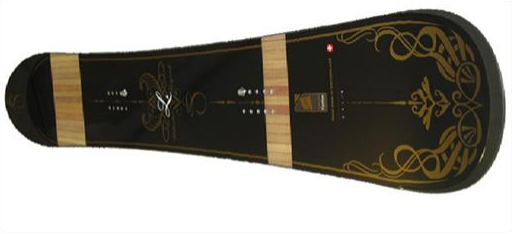


Figure 56 : *Snowboard NIDECKER* **[61]**

Pour des pièces de dimensions relativement petites comme par exemple des lames de fond de tonneaux, cette technologie prend tout son sens puisque la fabrication ne nécessite plus de colle. Le brevet d'invention de LEFORT [62] pour la société TARANSAUD déposé en 2007 le prouve. L'humidité causée par le liquide (vin, spiritueux…) dans les tonneaux, au niveau du joint soudé ne pose pas de problème ici, puisque le soudage des lames du fond de tonneau n'est utilisé principalement que pour le montage. Une fois le tonneau fabriqué, le joint soudé du fond est encore plus compressé et son utilité se limite aux saveurs subtiles de bois chauffés autour de 200°C se mariant avec le liquide en présence.

Une étude sur la résistance en milieu humide ou humidifié durant quelques heures montre le point faible du procédé de soudage. L'exposition à une heure dans l'eau fait baisser la résistance en cisaillement des joints soudés de 80% et de 100% pour trois heures. Le dernier paragraphe de [58] indique que les caractéristiques du joint soudé selon le soudage par friction rotative est fortement résistant à l'eau. Cependant la publication qui fait référence [63] présente des assemblages réalisés avec des chevilles insérées et soudées avec un angle de 53° par rapport au support également espacés et en quinconce. Ils sont testés en traction perpendiculaire à la ligne de couture. Ces échantillons sont comparés avec des échantillons dont les chevilles sont collées avec de l'urée formaldéhyde. Les échantillons sont ensuite immergés pendant deux heures dans de l'eau en ébullition. Les tests indiquent que les assemblages immergés résistent à 50% par rapport aux assemblages non immergés. Le test permet de qualifier la phénoménologie de l'assemblage et non le joint soudé, qui est principalement inopérant dans l'assemblage suite aux essais de GANNE-CHEDEVILLE [43] en milieu humide. Cela signifie que le soudage des tourillons ajoute au joint soudé des accroches mécaniques qui améliore la tenue à l'humidité du joint. Ce problème lié à l'humidité réduit l'utilisation de ce procédé d'assemblage pour des emplois exclusivement en intérieur.

2.4 Soudage par friction rotative

2.4.1 Evolution

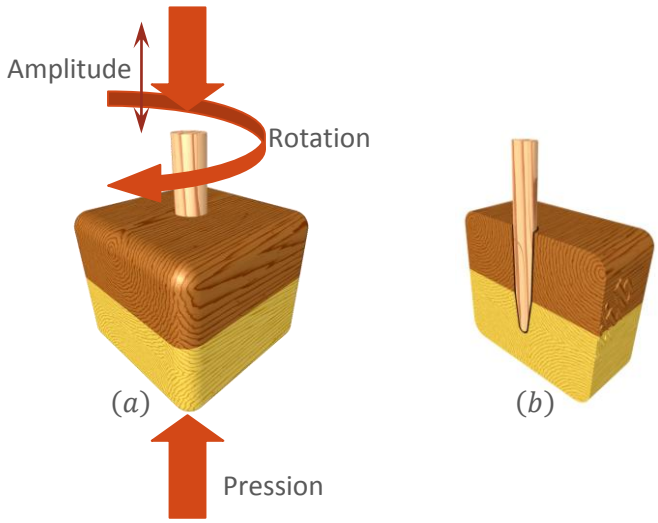


Figure 57 : *Principe du soudage du bois par friction en rotation : (a) les principaux paramètres et (b) vue en coupe de l'assemblage soudé*

Le principe du soudage du bois par friction rotative consiste à animer en rotation une cheville de bois et de l'insérer avec force dans les pièces à assembler, préalablement percées à un diamètre inférieur à celui de la cheville (Figure 57).

L'utilisation d'une cheville cylindrique insérée dans un trou également cylindrique a plusieurs inconvénients. En effet lors du soudage, le temps nécessaire pour souder la longueur entière du tourillon est très élevé. La matière se dégrade complètement au niveau du joint de soudage et donc diminue les capacités mécaniques du joint.

L'inconvénient est donc la difficulté à obtenir un soudage correct sur la longueur du tourillon [64]. De plus, lors de l'insertion du tourillon, la ligne de soudure qui vient d'être créée est aussitôt fragilisée par la rotation du tourillon.

KAZANAWA [64] a étudié des soudages avec des trous de diamètres variables sur la hauteur des éléments à assembler. Par exemple, pour le soudage d'un tourillon de diamètre 10 mm, les premiers 20 mm sont percés à 8 mm de diamètre et les derniers 10 mm sont percés à 7,5 mm de diamètre. Le perçage n'est pas débouchant. La vitesse de rotation de la perceuse lors de l'insertion de la cheville est de 1200 tr/min. Les essais sont réalisés manuellement avec une perceuse à colonne SYDERIC SH 32 (SYDERIC-VERNIER-CATO, FRANCE). Cette disposition permet une augmentation de la résistance de 25% de la liaison. ZUPCIC a aussi étudié cette disposition plus récemment [65] qui montre une nette amélioration de la résistance de l'assemblage (Figure 58).

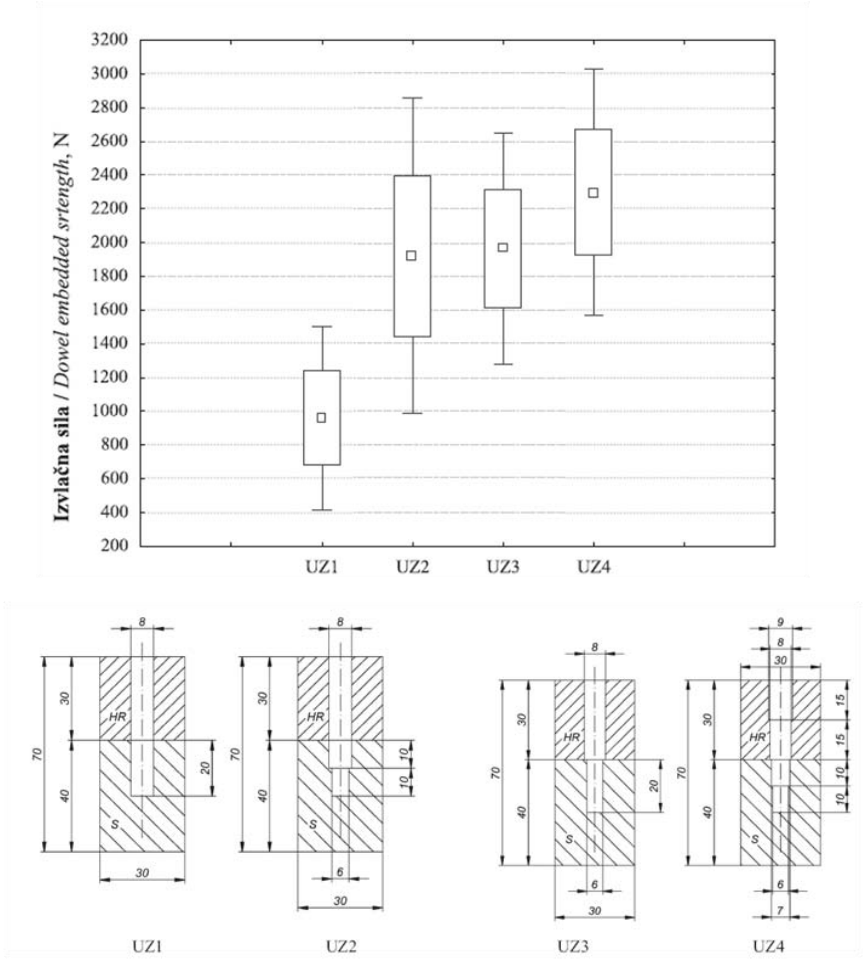


Figure 58 : *Influence de la conicité* **[65]**

KANAZAWA [64] montre aussi l'influence de quelques paramètres pour obtenir une meilleure résistance du joint soudé. Ces paramètres sont l'implantation de chevilles anhydres cylindriques, l'augmentation du rapport diamètre de la cheville cylindrique et du diamètre du perçage : (10/9 vers 10/8) ainsi que par exemple l'ajout d'éthylène glycol qui fait baisser la température de transition vitreuse.

Ces études montrent l'amélioration de la résistance mécanique du joint de soudage avec des configurations qui vont vers le perçage conique. Deux phénomènes en sont la conséquence : le temps de soudage est considérablement réduit et il est possible d'appliquer une pression sur le joint de soudure. En effet, les études réalisées sur le soudage par friction linéaire du bois ([40], [43]) montrent que ce paramètre est un des plus influents sur la qualité du joint de soudure. Cette remarque est souvent une préconisation de base pour le soudage des métaux [42]. La température obtenue lors du soudage est autour de 180°C [64].

Le domaine de l'ameublement offre à cette technique de soudage un terrain immense de nouveau concept d'assemblage et de créativité. Suite à deux projets de fin d'étude à l'ENSTIB [66], [67] et [68], la conception d'une chaise selon l'architecte RIETVELD, tout en bois a abouti à des prototypes remarquable comme le montre la figure 59.



Figure 59 : *Différentes chaises de RIETVELD réalisées (a) selon* **[68]**, *(b) selon* **[66]** *et (c) selon* **[67]**

Le but de ces prototypes de chaise est de montrer au-delà de la faisabilité, l'étude d'assemblages compétitifs devant les assemblages collés ou soudés linéairement, avec le procédé du soudage du bois par friction rotative. En effet par le mécanisme de l'assemblage de type couture, l'assemblage va vers une résistance accrue. Des essais sur le principe de couture selon OMARANI et al. [63] ont été réalisés manuellement sur des avivées de hêtre (*Fagus sylvatica*) mais ont donnés des résultats moyens devant les essais témoins assemblés avec de la colle urée formaldéhyde (UF). Toutefois l'intérêt porte sur la résistance après humidification prolongée (2h), où le système d'assemblage avec les tourillons cylindriques soudés permet de résister alors que les échantillons témoins (UF) sont totalement démontés.

Les chevilles sont principalement en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*) mais des études ont aussi été faites avec des tourillons cylindriques en érable (*Acer*) selon STEVANOVIC et al. [69] et des tourillons cylindriques en épicéa (*Picea abies*) selon LE BRAS et al. [70].

De même que pour le soudage linéaire, RESCH et al. [71] montrent la faisabilité du soudage de panneaux à base de bois (OSB, Panneaux de particules et contreplaqué) avec des chevilles cylindriques en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*). Le paramètre relativement prépondérant est la masse volumique du panneau, en effet les essais avec le contreplaqué donnent une moins bonne résistance pour un même protocole d'essai. De plus, le comportement en cisaillement de la cheville soudée de hêtre (*Fagus sylvatica*) de diamètre 10 mm est comparé à un clou de diamètre 6 mm. Des éprouvettes de type arc de triomphe (deux plans de cisaillement), composées de panneaux OSB, assemblées soit avec les chevilles soudées soit avec les clous sont comparées par le test en cisaillement. Le perçage des trois pièces constituant les éprouvettes est réalisé de manière étagée : 8 mm pour la première pièce, 7 mm pour la deuxième et 6 mm pour la dernière. Il vient que les assemblages cloués sont plus résistants que les assemblages chevillés soudés de 17% mais les assemblages chevillés soudés sont plus raides vis-à-vis des assemblages cloués de 25%. Il apparait que dans cette configuration, la cheville soudée est compétitive par rapport à un clou de diamètre 6 mm. Ainsi, la réalisation de panneaux du type MHM pourrait être réalisée avec des chevilles bois en lieu et place des clous en aluminium.

L'aspect des éléments constructifs utilisant l'assemblage par chevilles soudées est abordé par BOCQUET et al [72]. Des poutres de deux mètres de longueur composées de deux lamelles de sections 50×30 mm^2 sont assemblées à l'aide de chevilles cylindriques de diamètre 10 mm (collées ou soudées) ou de clous de diamètre 3.1 mm. Les chevilles sont en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*) et les lames sont soit en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*), soit en épicéa (*Picea abies*). Les poutres assemblées avec les tourillons soudés sont plus rigides et résistantes que les poutres de même configuration avec des chevilles collées ou avec deux rangées de clous de diamètre 3.1 mm. De plus, dans ces travaux des échantillons composés de deux lames de hêtres (*Fagus sylvatica*) assemblée avec des chevilles soudées sont comparés avec des échantillons massifs (en un seul morceau), des échantillons bilames dont l'interface est collée avec de la résine UF-MUF ou PVAc, des échantillons bilames assemblés avec deux rangées de clous de diamètre 3.1 mm. Les éprouvettes avec les chevilles soudées à 90° par rapport à l'interface sont similaires aux échantillons cloués. Les éprouvettes avec les chevilles soudées à 45° par rapport à l'interface se rapprochent

des capacités des joints collés et des échantillons massifs : -26%. Ces essais montrent la possibilité d'utiliser les chevilles soudées dans les éléments constructifs.

ZOULALIAN et al. [73] ont travaillé sur la mise en place d'un modèle thermique analytique sur le soudage du bois par friction rotative. Ce modèle permet d'approcher la température dans le joint lors du soudage. La température avoisine les 185°C.

Ce procédé nécessite généralement un pré-perçage pour obtenir un joint soudé entre la cheville cylindrique et la paroi du perçage. Il est possible cependant d'implanter un tourillon appointé dans une pièce de bois sans la pré-percer, ce concept est intitulé « clou-bois » selon GANNE-CHEDEVILLE [74]. Au final, la cheville se déforme dans la pièce de bois et forme un rivet. Cette méthode est relativement intéressante mais est relativement longue à mettre en place (10 secondes) pour ne pas briser la cheville en torsion. Le joint soudé est complètement détruit mais l'accroche réalisée par le rivet permet de compenser cette faiblesse.

2.4.2 Limite et conclusion

Les essais sur le soudage du bois par friction rotative ont permis de situer les possibilités est les limites de ce procédé.

La limite principale de ce procédé est l'insertion non totalement contrôlée de la cheville dans son logement. En effet, contrairement au procédé du soudage linéaire par friction qui utilise les machines préalablement conçues pour le soudage des métaux et des thermoplastiques, le procédé du soudage de la cheville par friction est réalisé manuellement, ainsi le facteur humain joue un grand rôle sur la qualité du joint soudé obtenu. La vitesse de descente et la force appliquée sont réalisées selon le bon vouloir de l'opérateur. Les études sont principalement réalisées avec une perceuse à colonne qui permet d'aligner parfaitement l'axe longitudinal de la cheville avec l'axe des pré-perçages. La vitesse d'insertion du tourillon, l'évolution de la vitesse de rotation, la force appliquée et le couple transmis sont des paramètres qui ne sont pas connus. Ces derniers permettraient de mieux percevoir le mécanisme du soudage par friction. Il manque donc pour mieux maîtriser le soudage, une machine permettant d'insérer la cheville de manière reproductible et contrôlée.

Comme pour le soudage linéaire, le procédé souffre du problème suite à une humidification du joint soudé. Il existe toutefois des dispositions qui limitent ce problème telles que la réalisation d'un assemblage de type couture ou de l'utilisation du clou-bois.

Selon l'ensemble des études présentées précédemment, il vient deux phénomènes qui améliorent l'assemblage chevillé soudé :

- l'insertion de la cheville lors du soudage avec un angle autour de 45° par rapport à la face de l'éprouvette, apporte une augmentation de la résistance en cisaillement de l'assemblage autour du double par rapport à un assemblage dont la cheville est insérée à 90° par rapport à la face de l'éprouvette. En effet, la cheville est sollicitée en cisaillement ainsi qu'en traction.
- le perçage étagé dans deux ou trois pièces avant le soudage avec des chevilles cylindriques, améliore la résistance de la liaison soudée de l'ordre de 25%. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la pression de la cheville cylindrique sur les parois du perçage lors du soudage. L'optimal devrait aller dans le sens des assemblages pré-percés avec une mèche conique et soudés à l'aide de chevilles de forme similaires au perçage.

Pour obtenir un soudage de qualité, il faut que le soudage puisse se réaliser très rapidement (inférieure à 2 secondes), avec l'application d'un effort entre la cheville cylindrique et la paroi du perçage.

De plus, selon STAMM [49], la masse volumique est un paramètre important mais elle doit aussi être couplée à la largeur des cernes et plus particulièrement à la proportion entre la zone du bois de printemps et la zone du bois d'été pour les bois hétérogènes.

MAITRISE DE LA MISE EN ŒUVRE DU TOURILLON SOUDE

« Les machines un jour pourront résoudre tous les problèmes, mais jamais aucune d'entre elles ne pourra en poser un. »

[Albert EINSTEIN]

3 CAHIER DES CHARGES DE LA MISE EN ŒUVRE DU TOURILLON SOUDE

Cette partie s'attache à présenter la conception de la machine prototype (§3.1) permettant la réalisation d'un soudage reproductible et automatique. Ce prototype a permis de réaliser des essais pour caractériser le soudage sur des assemblages unitaires composés d'une cheville cylindrique soudée (§4).

3.1 Conception de la machine

3.1.1 Présentation du prototype

L'analyse bibliographique exposée précédemment montre que même si quelques tentatives ont été réalisées pour mettre en œuvre les tourillons bois de manière contrôlée (à l'aide de machines utilisées pour le soudage du plastique par exemple) la plupart des essais sur chevilles soudées (ou tourillons soudés) a été réalisé avec un pilotage manuel. Cette démarche n'est pas dénuée de sens. En effet, la phénoménologie observée lorsqu'une cheville cylindrique surdimensionnée par rapport à son logement est mise en place possède un caractère assez reproductible. Le tourillon étant animé en rotation, celui-ci prend un certain temps pour monter en température lorsqu'il entre au contact avec le bois périphérique. L'effort axial qui en résulte est assez important. Lorsque celui-ci commence à s'échauffer, il prend une forme conique et pénètre alors plus facilement à l'intérieur du bois. Cette pénétration se poursuit ensuite avec un effort axial faible car le bois fond. Si la longueur du tourillon est trop importante, le frottement aura tendance à générer un couple capable de rompre le tourillon en torsion. A l'opposé, dans certain cas, la fusion du bois devient trop importante et le joint de soudage se trouve détérioré. Les origines de la grande variabilité des résultats n'ont pour le moment pas été clairement mises en évidence. Cependant, il apparaît clairement que si la **rotation du tourillon**, ainsi que la **vitesse de descente** étaient asservies la connaissance des phénomènes mis en jeu pourrait progresser.

Pour parvenir à cette maîtrise, il est nécessaire de concevoir une machine prototype pour rendre reproductible le soudage des chevilles. Dans le cadre de ce travail, cette machine devait satisfaire deux objectifs. Le premier déjà explicité, était de pouvoir contrôler les vitesses de rotation et d'avancement de la cheville dans la matière. Afin de comprendre les phénomènes, il est apparu essentiel de récupérer également le couple appliqué et l'effort axial sur la cheville au cours de la mise en place de celle-ci. Le second objectif était de pouvoir réaliser l'assemblage d'éléments de structures ou de réaliser des assemblages particuliers sans pour autant se lancer dans l'automatisation complète de toutes les tâches. Néanmoins, concevoir et réaliser une machine prototype capable de fabriquer des objets tridimensionnels comme des planchers ou des parois ne pouvait pas être envisagé. Le comportement en flexion des planchers à lames croisées étant relativement proche du fonctionnement des poutres à liaisons imparfaites, il a été décidé que la machine se limiterait, dans un premier temps à la réalisation des poutres. Pour la fabrication des planchers ou des parois, la technique du pilotage manuel sera conservée en utilisant une perceuse portative professionnelle.

Le cycle de mise en place de la cheville nécessitant un pré perçage et le soudage s'approchant d'un perçage, il était simple de concevoir cette machine à l'image d'une perceuse à colonne (Figure 60). Sur ce type de machine, une broche permet la mise en rotation par l'intermédiaire d'un mandrin des forets ou autres outils coupants, par un dispositif de guidage la broche est ensuite translatée. Le choix de séparer le pilotage de ces deux axes (le déplacement étant repéré (3) et la rotation du mandrin (4)) s'est imposée pour une question de simplicité de conception mécanique.

Ainsi, un moteur est attribué pour mettre en rotation le mandrin (nommé moteur de broche) et un moteur pour piloter le déplacement de la broche et de son support (nommé moteur de l'axe Y). Le développement d'un

axe de translation à grande course étant relativement onéreux, le choix a été fait de disposer d'une course minimale pour assurer la mise en place des chevilles (perçage compris) et de pouvoir déplacer mécaniquement l'ensemble pour s'adapter aux différentes configurations (positionnement (2) qui supporte (3) et (4)). Afin d'offrir la possibilité de mettre en place des chevilles à un angle dans les plans d'assemblage, l'ensemble (2),(3) et (4) est monté sur un axe pivotant nommé (1). Un bâti (0) reçoit l'ensemble motorisé, il permet le positionnement des pièces à assembler courtes ou longues.

Lorsqu'une perceuse manuelle est utilisée pour mettre en place des tourillons, ceux-ci ont tendance à tourner avec un faux rond : l'axe du tourillon et celui de la broche ne sont pas concentriques. Ce phénomène est peu gênant en pratique car il peut être compensé par l'opérateur. Les mandrins à mors standards ne permettent pas un positionnement correct des tourillons car ils produisent un serrage localisé qui déforme le tourillon. Pour cette raison, un dispositif de pinces du type DIN 6499 B, utilisées dans les machines à commande numérique ainsi que dans les défonceuses, est choisi. Ce type de pince nécessite une adaptation en bout de broche.

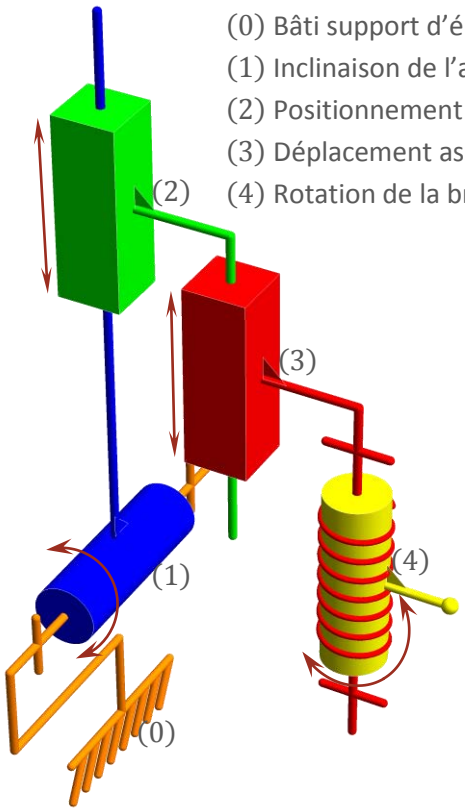


Figure 60 : *Schéma cinématique de la machine à tourillonner*

L'inconvénient majeur remarqué dans la mise en place de la cheville avec des matériels portatifs ou fixes est le temps d'arrêt du tourillon en rotation à la fin de la phase de soudage. L'inertie du mandrin additionnée à celle de la broche et de sa mécanique est en général assez importante. Très rares sont les matériels équipés de freins suffisamment puissants pour stopper quasi instantanément la rotation des broches. Dans cette conception, il a semblé très important que la machine dispose d'un freinage puissant afin de maîtriser parfaitement la fin de la phase de soudage.

3.1.2 Choix des moteurs et du vérin

Pour satisfaire les exigences de pilotage des deux axes motorisés, le choix technologique s'est rapidement orienté vers des moteurs électriques de type BRUSHLESS (Figure 61) dont la définition générale est rappelée ci dessous.

> **Définition 2 :** *Ces moteurs sont sans balai (« brushless » en anglais). Ils sont aussi nommés servomoteur à aimant ou moteur « autosynchrone ». Ils fonctionnent avec des aimants permanents. Les aimants sont généralement à terre-rare (Sm CO 5). Le plus souvent, la commande de ces moteurs est réalisée en onde « sinus » avec un capteur de commandes de type « resolver ». Ils sont couplés à des variateurs qui les alimentent, récupèrent l'énergie de freinage sur une résistance de freinage (RF : dissipation par effet joule) et possèdent le dispositif pilotant le capteur de commande* **[75]**.



Figure 61 : *Moteur BRUSHLESS de type NX de la gamme SSD Drives – PARVEX* **[76]**

Ces moteurs, outre leur encombrement réduit, présentent de nombreux avantages. Tout d'abord il est possible de faire varier leur vitesse de quasi 0 tr/min à près de 8000 tr/min en standard. Au besoin, à l'aide d'un réducteur ou d'un démultiplicateur, les possibilités d'évolution de gammes peuvent être facilement étendues. Les possibilités d'accélération ou de décélération sont variables et très puissantes. En standard, avec des inerties faibles, les vitesses mini et maxi peuvent être atteintes en moins d'une seconde. En termes de freinage, une résistance électrique additionnelle permet d'augmenter la décélération au besoin : il est possible de s'arrêter en moins d'un tour même à grande vitesse. En utilisant un codeur HIPERFACE® en lieu et place d'un RESOLVEUR® la précision de positionnement angulaire se trouve fortement augmentée : $\pm$ 45'' d'arc (0.72°) [77]. D'autre part, le contrôle électrique du couple par le variateur permet de gérer le moteur comme un ressort : l'arrêt du moteur peut ainsi avoir une certaine élasticité. Le capteur RESOLVEUR® standard permet de grandes possibilités de communications en dehors des consignes: récupération en temps réels des intensités, du positionnement du rotor et de la vitesse instantanée. Ces moteurs d'une grande fiabilité, à maintenance très réduite ont donc semblé les éléments les plus appropriés pour asservir les axes mais surtout aussi très intéressants pour servir de capteurs. En effet, en dimensionnant avec précision ces moteurs pour que les variations de courants dans les moteurs soient sensibles aux phénomènes développés pendant le soudage du tourillon (couple et effort) il n'est pas nécessaire d'ajouter des capteurs externes. Cette ajout induirait :

- un coup supplémentaire important par l'achat de capteur force et déplacement ainsi qu'une centrale d'acquisition,
- la nécessité de mesurer les signaux en simultané et d'assurer une communication avec les variateurs,
- un encombrement préjudiciable à l'utilisation de la machine.

Pour définir le cahier des charges du moteur de broche et de celui de l'axe de translation, les hypothèses suivantes ont été posées. Le couple nominal du moteur de broche doit avoisiner le couple nécessaire à la rupture statique d'une cheville de hêtre (*Fagus*) de 10 mm de diamètre en torsion. Par plusieurs mesures statiques simples, et par calcul le couple a été déterminé, il s'approche de 5,5 Nm. Le tableau 2 présente le calcul. La valeur de la résistance au cisaillement de la cheville est déterminée en multipliant par 9 la valeur caractéristique d'un bois feuillu donnée dans la norme EN 338 [78] pour une masse volumique qui se situe autour de 640 kg/m3.

Tableau 2 : *Détermination du couple de torsion à rupture d'un tourillon de 10 mm en hêtre (Fagus sylvatica)*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Moment de torsion du tourillon	M_{tour}	$\frac{\pi d_{\text{tour}}^4}{32} = 982$	mm^4
Résistance au cisaillement	τ_{tour}	$9 \times 3 = 27$	MPa
Moment résistant de torsion	M_{tors}	$\tau_{\text{tour}} \frac{M_{\text{tour}}}{\frac{d_{\text{tour}}}{2}} = 5.3$	Nm

L'effort maximal devant être appliqué au tourillon ne peut pas dépasser celui engendré en phase de soudage lorsque la cheville animée de rotation est mise en place sans pré-perçage et sans que celle-ci ne se rompe en torsion. Par une série d'essais, une charge moyenne de 2.2 kN a été déterminée. Afin de prendre une marge de sécurité une force minimale de référence de 4 kN a été retenue. La longueur de soudage possible avec des tourillons de 10 mm de diamètre s'approche de 50 mm, au-delà la rupture en torsion survient. Une course de 100 mm est donc nécessaire à leur mise en place (pré perçage compris). Enfin la vitesse de descente maximale de la broche a du être estimée. Après observation des temps de mise en place manuelle, une vitesse maximale de 50 mm/s a été retenue.

Selon les fiches techniques des moteurs BRUSHLESS de SSD Drives – PARVEX [79], il est possible dans un premier temps de choisir facilement le moteur de la broche de type NX430EAF (Annexe §D.1) qui possède un couple nominal de 5.5 Nm, alimenté en 400V.

Pour choisir le moteur de l'axe Y, il convient tout d'abord de définir la technologie qui assurera le mouvement de translation. C'est un vérin à vis à billes qui a semblé le plus simple pour réaliser ce déplacement. Il est possible de choisir le pas de la vis à billes entre 5, 10 et 25 mm. Un compromis doit être alors trouvé entre effort développé et plage de vitesses de déplacement. Dans la liste des moteurs BRUSHLESS de SSD Drives – PARVEX [76], le moteur ayant la vitesse de rotation minimale est le NX310EAP (Annexe §D.1) avec 2300 tr/min. La vitesse de descente s'exprime en fonction de la vitesse de rotation du moteur et du pas de la vis à billes avec la relation suivante :

$$V_d = \frac{V_{\text{moteur}}}{60} p_{\text{vis}} \qquad \textbf{(181)}$$

Avec :

V_d : vitesse de déplacement en translation (mm/s), V_{moteur} : vitesse du moteur souhaité (tr/min), p_{vis} : pas de la vis à billes (mm).

La vitesse de descente maximale $V_{d,\max}$ (pour V_{moteur} = 2300 tr/min) est indiquée dans le tableau 3 en fonction du pas de la vis à billes. Avec un pas de vis de 5 mm, il est nécessaire de réduire la vitesse de rotation par 10 pour ne pas dépasser la vitesse de 50 mm/s. En ne comptant que sur la variation de la vitesse motrice pour pouvoir travailler dans la plage 0 - 50 mm/s le risque est important de ne pouvoir piloter suffisamment précisément le positionnement de la vis. Il est alors choisi d'introduire un réducteur de vitesse à la sortie du moteur.

Pour déterminer le rapport du réducteur r_{GX} pour atteindre la vitesse souhaitée, il convient de calculer le rapport entre la vitesse initiale du moteur de l'axe Y et de la vitesse de descente. Le catalogue de SSD Drives – PARVEX [76] indique qu'il y a deux motoréducteurs possibles avec les rapports suivants : 5.5 et 7. La solution de compromis permettant de s'approcher de la vitesse souhaitée consiste à choisir un pas de vis de 10 mm avec un rapport de réduction de 7.

Pour obtenir une précision de positionnement compatible avec la précision de la vis à billes (0.05mm), le moteur de l'axe Y est couplé à un codeur HIPERFACE® [76]. L'emploi de ce codeur à la place d'un résolveur permet un repérage angulaire de la rotation du moteur compatible en précision.

Tableau 3 : *Vitesse de descente et choix du rapport de réduction*

p_{vis} (mm)	5	10	25
$V_{d,\max}$ (mm/s)	192	383	958
V_{moteur}/V_d	12.0	6.0	2.4
r_{GX}	-	7	5.5
V_d/r_{GX} (mm/s)	-	54.76	174.24

Pour piloter les deux moteurs, un variateur de type COMPAX3 Drive de chez SSD Drives PARVEX est attribué à chaque moteur. Les variateurs alimentent en énergie les moteurs et communiquent avec eux pour leur transmettre les consignes et récupérer les données tels que le courant à l'instant présent, la position exacte pour le moteur NX310EAP avec le codeur HYPERFACE®, les vitesses instantanées, les accélérations et décélérations, etc. Les données peuvent aussi être des informations sur le moteur, tels que les identifiants, l'état du moment (en défaut par exemple). Les données peuvent enfin être des paramètres constructeurs comme l'intensité nominale permettant de faire évoluer le couple initial du moteur.

Deux modes de pilotage peuvent être envisagés pour commander les moteurs. Le premier consiste à écrire une suite d'ordre dans la mémoire du variateur. Ce type d'approche, plutôt industrielle, peut être envisagé lorsque le cycle de pilotage d'insertion du tourillon est parfaitement défini. Ceci implique qu'un jeu unique de paramètres permet d'aboutir à un soudage reproductible. Dans cette phase de développement, il est plus commode de piloter les moteurs BRUSHLESS à l'aide d'une centrale informatique afin de développer facilement les cycles, les commandes d'asservissement par un contrôle en temps réel. Le pilotage est décrit plus en détail dans la section §3.1.6.

Selon le catalogue des vérins de PARKER [80], le vérin choisi (Figure 62) est un vérin à vis à billes guidé par des tiges de 25 mm de diamètres (a). Le système de guidage permet de se fixer facilement sur un grand nombre de supports. Le système possède aussi une platine, qui permet d'accoupler simplement les éléments souhaités. Le vérin (b) est de type ETB80. Ce vérin permet une poussée de 8.3 kN ce qui est supérieur au 4 kN de départ. Le choix d'un pas de vis de 10 mm pour la vis du vérin permet de s'accoupler directement avec le réducteur du moteur NX310EAP. La dénomination de ce vérin est ETB80 M10 [80].

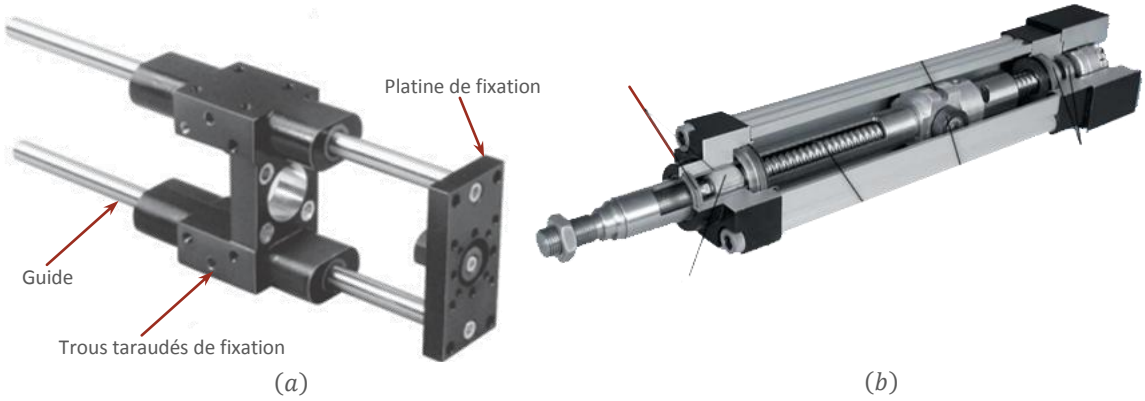


Figure 62 : *Système de vérin choisi pour la machine prototype de soudage : (a) système de guidage et de fixation, (b) vérin vis à billes.*

3.1.3 Vérification du dimensionnement des moteurs en utilisation normale

À partir du cahier des charges établi précédemment, le moteur de broche, le moteur d'axe ainsi que son vérin ont été choisis. Lorsque des moteurs BRUSHLESS sont utilisés, il est nécessaire de vérifier qu'en phase d'utilisation intensive ceux-ci ne s'échauffent pas. En effet ces moteurs ne disposent pas d'un système de ventilation sophistiqué. Généralement c'est l'enveloppe extérieure qui sert de radiateur, cela suffit dans la plupart des applications industrielles de base. L'échauffement des moteurs est lié au cycle d'utilisation imposé au moteur. A partir des caractéristiques des moteurs indiqués dans les fiches de la société SSD drives – PARVEX (§D.1) il est possible d'effectuer cette vérification. Il suffit de définir le cycle d'utilisation le plus contraignant envisagé (Figure 63).

3.1.3.1 Note de calculs du moteur de la broche

Pour démarrer la vérification, il faut définir un certains nombre de constantes (Tableau 4) qui peuvent se déduire à partir des caractéristiques du moteur NX430EAF données à l'annexe §D.1. Le rendement du moteur est considéré égal à $\eta_{\text{moteur}} = 0.85$ [76].

Tableau 4 : *Caractéristique supplémentaire du moteur NX430EAF*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Vitesse choisie	V	4000	tr/min
F.E.M.	E	$V\frac{Ke}{1000} = 4000\frac{51.8}{1000} = 207.2$	V
Couple(*)	M	$KtI_0 = 0.828 \times 6.64 = 5.498$	Nm
Constante de temps mécanique	τ_m	$J\frac{Rb}{Kt^2} = 42.10^{-3}\frac{1.48}{51.8^2} = 0.092$	s
Constante de temps électrique	τ_e	$\frac{L}{Rb} = \frac{6.8\ 10^{-3}}{1.48} = 0.0046$	s

(*) Le couple de rotation lente est retrouvé. Il est admis que le temps de démarrage est le triple de la constante de temps mécanique $t_d = 3\tau_m$

Après avoir défini ces constantes, la vérification se poursuit en décomposant les étapes du cycle (Figure 63) à savoir : démarrage, vitesse constante, freinage et attente.

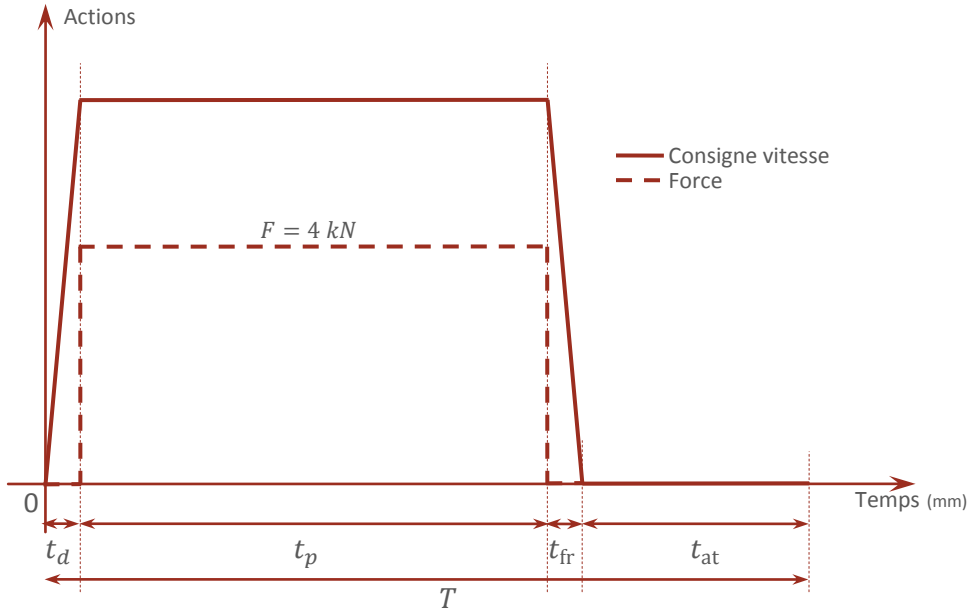


Figure 63 : *Cycle type*

- **Démarrage**

Cette étape permet de connaître le couple nécessaire au démarrage (Tableau 5).

Tableau 5 : *Etude du couple de démarrage*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Inertie de la broche	J_{broche}	20	kg.m^2.10^5
Temps de démarrage	t_d	0.1	s
Vitesse initiale	ω_i	0	rad/s
Vitesse finale	ω_f	$V\frac{2\pi}{60} = 4000\frac{2\pi}{60} = 418.9$	rad/s
Accélération	Acc	$\frac{\omega_f - \omega_i}{t_d} = \frac{418.9}{0.1} = 4189$	rad/s^2
Couple de moteur nécessaire	$M_{t,d}$	$(J + J_{broche})10^{-5}\frac{Acc}{\eta_{moteur}} = (42.6 + 20)10^{-5}\frac{4189}{0.85} = 3.08$	Nm

- **Vitesse constante**
  - Pression

Etude de la phase de pression afin de calculer le moment résistant de pression (Tableau 6).

Tableau 6 : *Etude du couple en vitesse constante de la pression*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps de pression	t_{p}	3	s
Force de pression	F_p	200	N
Angle de la pointe du tourillon	γ	5	°
Angle de frottement	φ	20	°
Diamètre du tourillon	d_{tour}	0.008	m
Moment résistant de pression	M_{pres}	$\frac{F_p}{Sin(\gamma)} Tan(\varphi) \frac{d_{\mathrm{tour}}}{2} = \frac{200}{Sin(5)} Tan(20) \frac{0.008}{2} = 3.34$	Nm

- Torsion du tourillon

Calcul du moment résistant de torsion de la cheville (Tableau 7). La valeur de la résistance au cisaillement de la cheville est déterminée selon la norme EN 338 [78] pour une masse volumique autour de 640 kg/m3.

Tableau 7 : *Etude du couple en vitesse constante de la torsion du tourillon*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Moment de torsion du tourillon	M_{tour}	$\frac{\pi d_{\mathrm{tour}}^4}{32} = 4.021\ 10^{-10}$	m^4
Résistance au cisaillement	τ_{tour}	$30\ 10^6$	N/m^2
Moment résistant de torsion	M_{tors}	$\tau_{\mathrm{tour}} \frac{M_{\mathrm{tour}}}{\frac{d_{\mathrm{tour}}}{2}} = 3.02$	Nm

Le couple moteur nécessaire pour la vitesse constante est pris comme le minimum entre le moment résistant de pression M_{pres} et le moment résistant de torsion M_{tors} : $M_{t,p} = Min(M_{\mathrm{pres}}; M_{\mathrm{tour}})$

- **Freinage**

Cette étape permet le calcul du moment résistant lors du freinage (Tableau 8).

Tableau 8 : *Etude du moment en phase de freinage*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps de freinage	t_{fr}	0.1	s
Couple moteur nécessaire	$M_{\mathrm{t,fr}}$	$\begin{cases} 0 & M_{t,d} \leq M_{t,p} \\ M_{t,d} - M_{t,p} & M_{t,d} > M_{t,p} \end{cases} = 0.06$	Nm

- **Attente**

Calcul du moment résistant lors d'une phase d'attente (Tableau 9).

Tableau 9 : *Etude de l'attente pour le moteur de la broche*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps d'attente	t_{at}	0	s
Couple moteur nécessaire	$M_{\mathrm{t,at}}$	0	Nm

Le cycle peut donc être finalement assemblé (Tableau 10). L'intensité du moteur pour les différentes phases du cycle, se calcule selon la relation suivante : $I = M/Kt$ [75] [76].

Tableau 10 : *Récapitulatif de cycle pour le moteur de la broche*

	t (s)	M (Nm)	I (A)	M^2t
Démarrage	0.1	3.08	3.73	0.95
Vitesse constante	3	3.02	3.64	27.29
Freinage	0.1	0.06	0.08	0.0005
Attente	0	0	0	0

La vérification thermique du moteur s'effectue en deux temps :

1. Les temps doivent êtres inférieurs à la constante de temps thermique de $T_{th} = 18$ min (Annexe §D.1).
2. Le couple thermique $M_{th} < 0.9M_n$.

Le temps du cycle vaut : $T = t_d + t_p + t_{fr} + t_{at} = 3.2\ s$. Le couple thermique se calcule de la manière suivante [75] :

$$M_{th} = \sqrt{\frac{\sum_i M_i^2 t_i}{T}} = \sqrt{\frac{28.24}{3.2}} = 0.384 \text{ Nm}$$

Comme $0.9M_n = 0.9 \times 4.29 = 3.86$ Nm, il n'y a donc aucun souci de température lors de cette utilisation.

3.1.3.2 Note de calculs du moteur de l'axe Y

Les caractéristiques du moteur NX310EAP sont données à l'annexe §D.1. Le rendement du moteur est pris à $\eta_{\text{moteur}} = 0.85$ [76].

D'autres caractéristiques peuvent être calculées pour le moteur de l'axe Y (Tableau 11) :

Tableau 11 : *Caractéristiques supplémentaire du moteur NX310EAP*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Vitesse choisie	V	2300	tr/min
Vitesse du vérin maximale	V_V	$\frac{Vp_{\text{vis}}}{60r} = 54.76$	mm/s
F.E.M.	E	$V\frac{Ke}{1000} = 2300\frac{88.9}{1000} = 204.5$	V
Couple(*)	M	$KtI_0 = 1.44 \times 1.39 = 2.00$	Nm
Constante de temps mécanique	τ_m	$J\frac{Rb}{Kt^2} = 7.9.10^{-3}\frac{20.7}{1.44^2} = 0.079$	s
Constante de temps électrique	τ_e	$\frac{L}{Rb} = \frac{62\ 10^{-3}}{20.7} = 0.003$	s
Valeur choisie de réduction	r	7	
Couple du moteur	M	$Cs/(r\eta)$=0.33	Nm

(*) Le couple de rotation lente est retrouvé. Il est admis que le temps de démarrage est le triple de la constante de temps mécanique $t_d = 3\tau_m$

Les caractéristiques de la vis à billes ETB80 M10 sont répertoriées dans le tableau 12.

Tableau 12 : *Caractéristiques de la vis à billes ETB80 M10*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Couple de pré-charge	C_{vis}	0.6	Nm
Inertie de la vis à 0 mm de déplacement	J_0	8.11	kg/m^2.10^{-5}
Inertie de la vis à x mm de déplacement	J_H	30.6	kg/m^2.10^{-5}/m
Déplacement	x	0.1	m
Inertie de la vis	J_{vis}	$J_0 + J_H x = 11.17$	kg/m^2.10^{-5}
Pas de la vis	p_{vis}	0.01	m
Rendement	η_{vis}	0.9	-

Les caractéristiques du motoréducteur GX3 sont indiquées dans le tableau 13.

Tableau 13 : *Caractéristiques du motoréducteur GX3…*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Inertie du réducteur	J_{red}	4.00	kg/m^2.10^{-5}
Rapport de réduction	r	7	-
Rendement	η_{red}	0.85	-

Les caractéristiques de l'ensemble mobile que le vérin ETB80 doit déplacer, sont présentées dans le tableau 14.

Tableau 14 : *Caractéristiques de l'ensemble mobile que doit déplacer le vérin ETB80 M10*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Masse de l'ensemble(*)	m_{app}	14.00	Kg
Inertie de l'ensemble	J_{app}	$\frac{m_{\text{app}} p_{\text{vis}}}{4\pi^2} = 3.55$	kg/m^2.10^{-5}

(*) La masse a été choisie de manière forfaitaire.

Les caractéristiques de poussées sont répertoriées dans le tableau 15.

Tableau 15 : *Caractéristiques de la pression exercée*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Force	F	4000	N
Vitesse de chargement	V_{ch}	$\frac{V p_{\text{vis}}}{60} = 383.3$	Mm/s
Vitesse angulaire de chargement	ω_{ch}	$\frac{2\pi V}{60} = 240.9$	rad/s
Couple de chargement de la vis du vérin	C_{ch}	$\frac{F V_{\text{ch}}}{\omega_{\text{ch}} \eta_{\text{vis}}} + C_{\text{vis}} = 7.67$	Nm
Couple du moteur en rotation lente	C_{lent}	$\frac{C_{\text{ch}}}{r \eta_{\text{red}}} = 1.29$	Nm

Ces caractéristiques donnent les éléments nécessaires pour le calcul de cycle (Figure 63). Les quatre étapes sont toujours : démarrage, vitesse constante, freinage et attente.

- **Démarrage**

Cette étape permet de connaître le couple nécessaire au démarrage (Tableau 16).

Tableau 16 : *Étude du démarrage pour le moteur de l'axe Y*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps de démarrage	t_d	0.1	s
Vitesse initiale	ω_i	0	rad/s
Vitesse finale	ω_f	$V\frac{2\pi}{60} = 2300\frac{2\pi}{60} = 240.9$	rad/s
Accélération	Acc	$\frac{\omega_f - \omega_i}{t_d} = 2408.6$	rad/s^2
Couple de moteur nécessaire	$M_{t,d}$	$\frac{\left(J + J_{\text{red}} + \frac{J_{\text{vis}} + J_{\text{app}}}{r}\right)10^{-5}Acc + C_{\text{lent}}}{\eta_{\text{moteur}}} = 1.91$	Nm

- **Vitesse constante**

Étude de la phase de pression afin de calculer le moment résistant pour le chargement (Tableau 17).

Tableau 17 : *Étude en vitesse constante pour le moteur de l'axe Y*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps de chargement	t_{ch}	3	s
Couple de chargement	M_{ch}	$C_{\text{lent}} = 1.29$	Nm

- **Freinage**

Calcul du moment résistant de freinage (Tableau 18).

Tableau 18 : *Étude du freinage pour le moteur de l'axe Y*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps de freinage	t_{fr}	0.1	s
Couple de moteur	$M_{t,d2}$	$\frac{\left(J + J_{\text{red}} + \frac{J_{\text{vis}} + J_{\text{app}}}{r}\right)10^{-5}Acc - C_{\text{lent}}}{\eta_{\text{moteur}}} = -1.12$	Nm
Couple moteur nécessaire	$M_{\text{t,fr}}$	$\begin{cases} 0 & M_{t,d2} \leq 0 \\ M_{t,d2} & sinon \end{cases} = 0$	Nm

- **Attente**

Calcul du moment résistant lors d'une attente (Tableau 19).

Tableau 19 : *Étude de l'attente pour le moteur de l'Axe Y*

Désignation		Valeur numérique	Unité
Temps d'attente	t_{at}	0.00	s
Couple moteur nécessaire	$M_{\text{t,at}}$	0.00	Nm

Le cycle peut donc être finalement assemblé (Tableau 20).

Tableau 20 : *Exemple de cycle pour le moteur de l'axe Y*

	t (s)	M (Nm)	I (A)	M^2t
Démarrage	0.10	1.91	1.33	0.37
Vitesse constante	3.00	1.29	0.90	4.99
Freinage	0.10	0.00	0.00	0.00
Attente	0.00	0.00	0.00	0.00

Où l'intensité se calcule toujours selon la relation suivante : $I = M/Kt$ [75] [76].

Les temps doivent êtres inférieurs à la constante de temps thermique de $T_{th} = 20$ min (Annexe §D.1).

Le temps du cycle vaut : $T = t_d + t_{\text{ch}} + t_{fr} + t_{at} = 3.2\ s$. Le couple thermique se calcule toujours de la manière suivante [75] :

$$M_{th} = \sqrt{\frac{\sum_i M_i^2 t_i}{T}} = \sqrt{\frac{5.36}{3.2}} = 0.17 \text{ Nm}$$

Or pour qu'il n'y ait aucun problème thermique, il suffit que $M_{th} < 0.9M_n$. Comme $0.9M_n = 0.9 \times 1.8 = 1.62$ Nm, il n'y a donc aucun souci de température lors de cette utilisation.

Le dimensionnement autour d'un cycle simple montre que l'utilisation de moteurs par intermittence est dans les limites admissibles, les moteurs ne sont pas utilisés en dehors de leurs capacités, notamment au point de vue thermique.

3.1.4 Conception de l'ensemble

Une codification (Figure 65) est mise en place pour déterminer l'emplacement des pièces dans les sous-groupes et les groupes. Elle est composée principalement de cinq parties comme l'illustre la figure 64. Ces parties permettent de scinder les objectifs de fabrication et de manipulation selon les configurations souhaitées.

Le châssis (codifié [CH]) représente le support de la machine. Il permet de positionner les éléments pour leur phase de soudage comme par exemple le montage de soudage d'organes unitaires ou alors les avivés pour la fabrication des poutres en bois lamellé. Ce bâti est conçu de manière à pouvoir être fixé au sol afin de limiter les vibrations.

L'ensemble équerre (codifié [EQ]) aide à aligner les éléments en cours de soudage. Il permet l'empilage des lamelles afin d'obtenir un élément de construction quasi fini. Il peut se placer en avant ou en arrière de la table pour assister tout type de fabrication d'éléments lamellés.

Un ensemble portique presseur équipé d'un vérin pneumatique (codifié [VE]) permet d'appliquer une pression parallèle à l'insertion des chevilles afin de réduire au maximum l'espacement à l'interface entre les lamelles ou même sur les échantillons à souder. Afin d'appliquer la pression au plus près du tourillon, une platine en forme de pied-de-biche de machine à coudre a été conçue (voir la fabrication des poutres lamellées soudées à la section §7.1.1), elle est montée sur un pivot perpendiculaire à l'axe de la broche de la machine. Le vérin peut se déplacer le long de la traverse pour parcourir la largeur du châssis, la traverse peut être déplacée verticalement afin de s'adapter à la hauteur des éléments à serrer.

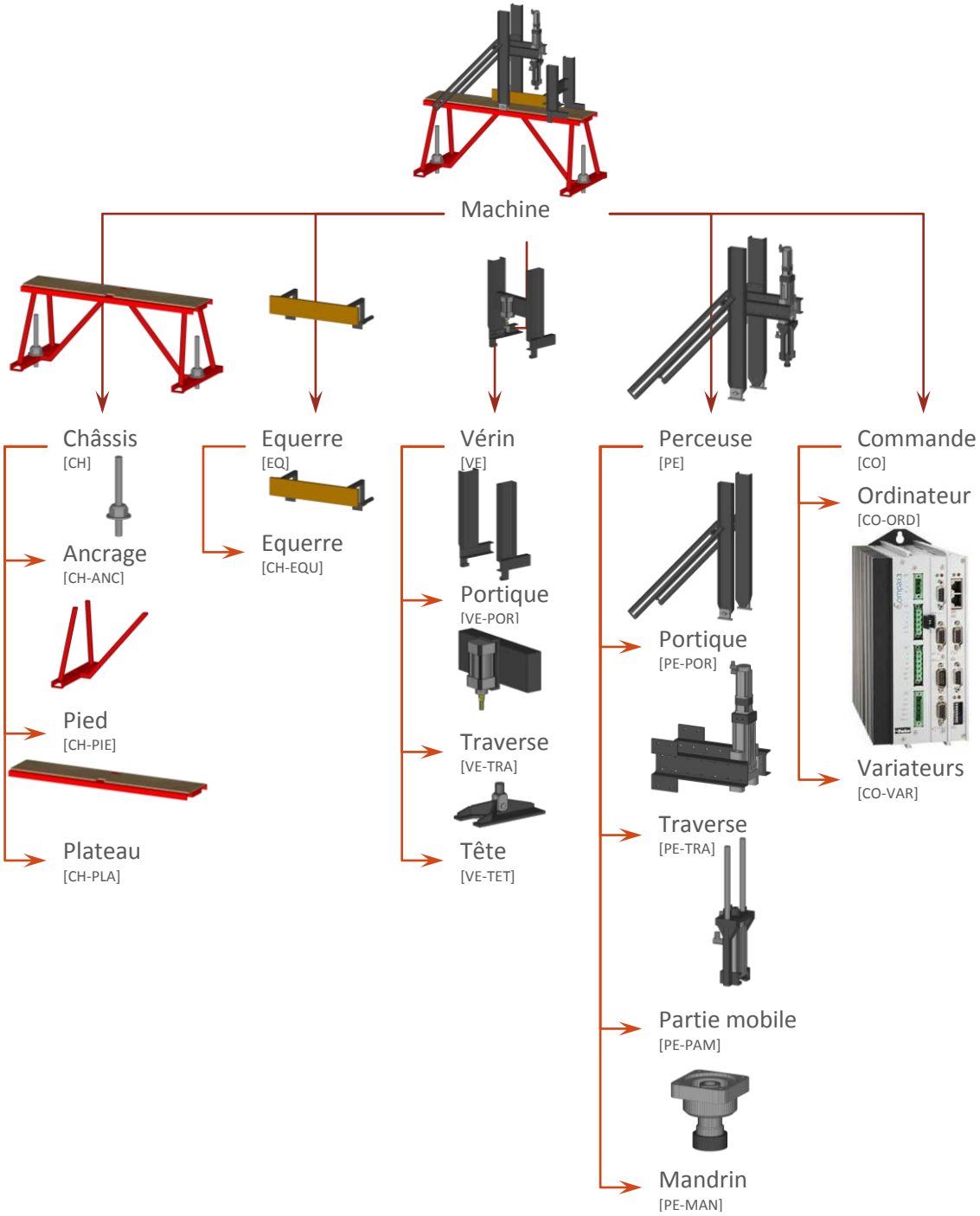


Figure 64 : *Organisation de la machine*

L'ensemble perceuse (codifié [PE]) est composé des éléments pour percer et souder. Cet ensemble est le plus complexe de la machine. Il est composé de quatre sous groupes :

- le premier, est nommé portique [PE-POR], il permet de supporter les autres sous groupes. C'est par son inclinaison qu'un angle peut être donné entre le tourillon et le plan de contact entre les pièces. L'inclinaison est possible à l'aide de pivots et de brides de fixations sur le châssis. Deux glissières permettent de stabiliser le portique en position et de rigidifier l'ensemble. Ce portique est percé régulièrement pour permettre le déplacement de l'ensemble moteur d'axe Y, vérin et broche. Comme il a été dit précédemment cette disposition compense la course limitée de l'axe Y.



Figure 65 : *Référencement des pièces*

- La partie fixe [PE-PAFPE-TRA] de l'axe Y est constituée d'un support percé régulièrement permettant de déporter le vérin à vis à billes de l'axe du portique (rallonge). Ce dispositif permet d'augmenter les capacités d'assemblage du fait de leur encombrement. Ce support reçoit le bâti du vérin à vis à billes. Au bout du vérin le réducteur GX3 et le moteur NX310EAP prennent place.
- La partie mobile [PE-PAM] de l'axe Y est composée du guide du vérin ETB80 et d'un support permettant la fixation du moteur de broche NX430EAP sur la platine du guide du vérin.

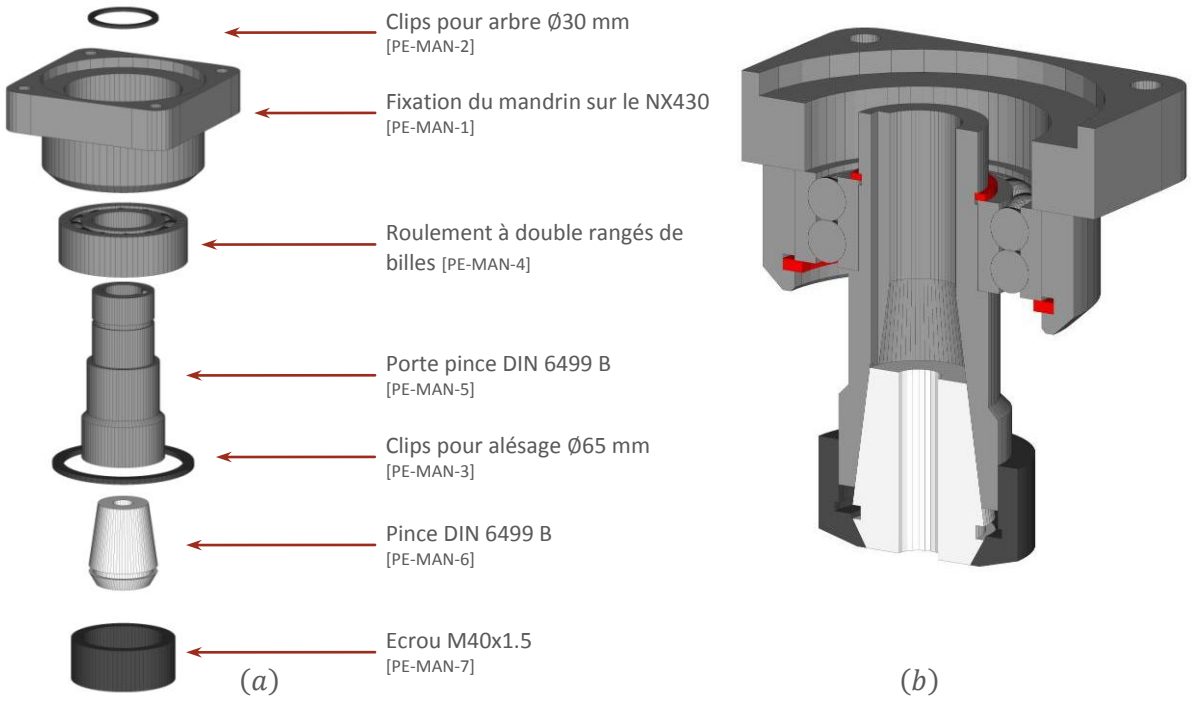


Figure 66 : *Composition du mandrin [PE-MAN] : (a) vue explosée et (b) coupe verticale*

- La dernière partie est nommée : mandrin [PE-MAN] : les roulements de l'arbre du moteur BRUSHLESS de la broche ne pouvant pas supporter d'efforts axiaux, il a été nécessaire de concevoir un porte pince pouvant supporter ces efforts. Le porte pince est monté sur un roulement à double rangées de billes, un

clavetage permet de le lier en rotation à l'arbre du moteur de broche NX430EAF. Le porte pince de type DIN 6499 B permet d'accueillir des outils ou des chevilles d'un diamètre allant de 2 à 25 mm. L'ensemble est illustré à la figure 66.

3.1.5 Fabrication

La réalisation de la machine s'est effectuée localement. Les pièces qui demandaient des précautions particulières comme le mandrin, les brides de fixations des pivots sur le châssis, les pivots et la rallonge, ont été fabriquées par une entreprise spécialisée.

Le châssis pèse 350 kg, ce qui lui confère une certaine rigidité.

Une fois la partie mécanique achevée, les éléments du pilotage et les moteurs ont été installés sur la structure de la machine. L'armoire électrique et les dispositifs de sécurité réglementaires ont finalement été implantés sous le châssis (Figure 67(b)).

La figure 67 présente la machine accompagnée de son ordinateur de commande.



Figure 67 : *Machine finalisée et prête pour fonctionner*

3.1.6 Définition de l'asservissement

Le pilotage des moteurs s'effectue avec un ordinateur muni de deux ports de communication RS232. Le PC communique aux variateurs les consignes, que ces derniers retransmettent aux moteurs. Les moteurs renvoient ensuite des informations aux variateurs qui sont ensuite traitées de nouveau par le PC.

Un logiciel de pilotage est livré avec les variateurs, il s'agit de COMPAX3 SERVOMANAGER. Le problème de ce programme est qu'il fonctionne uniquement pour un seul variateur, il n'existe pas de fonction de couplage entre variateurs. Ce logiciel ne pouvant être utilisé pour piloter les deux moteurs il a cependant permis de configurer les moteurs et de décrypter la communication avec les variateurs. Devant cette situation, il a été choisi de reconcevoir un logiciel pour piloter l'ensemble.

Afin de simplifier la programmation des cycles envisagés, le logiciel LABVIEW [81] développé par NATIONAL INTRUMENT a été choisi. En effet, ce logiciel offre toute une panoplie de fonctions préprogrammées pour faciliter entre autre la communication du PC avec les périphériques.

Pour donner un ordre aux moteurs, la marche à suivre est de remplir une base de données intégrée dans chacun des variateurs appelée tableau de groupe ou tableau d'objets. Ce tableau contient 9 colonnes qui représentent les objets, et 32 lignes qui représentent 32 possibilités de pilotage. Parmi les 9 objets, il se trouve les objets utiles pour donner les instructions aux moteurs. Les colonnes 3, 4 et 9 sont réservées pour les variateurs.

Un objet est désigné par la lettre « o » suivie de son adresse, elle-même suivie d'un « . » et se termine avec le numéro de ligne désiré. Par exemple, l'objet « Position » à la $i^{ème}$ ligne s'écrit de la manière suivante : o1901.i comme le tableau 21 le précise. Ces objets peuvent être initialisés par affectation de données en décimales ou hexadécimales.

Les objets permettent de donner des consignes et des ordres d'actions. Les objets présentés dans le tableau 21 sont des consignes que doit suivre le moteur. Par exemple pour la ligne 1, le moteur devra aller en position 50 avec une vitesse à 40% pour une accélération et une décélération de 1000 Unité/s^2 et une impulsion de 100000 Unité/s^3 pour appliquer les accélérations et les décélérations en mode de déplacement en absolu.

Les deux principaux modes de déplacement sont les déplacements en absolu ou en relatif. Le mode le plus utilisé est celui en déplacement absolu pour le moteur lié au déplacement de l'axe Y et en mode relatif pour le moteur de la broche.

Tableau 21 : *Structure principale du tableau des objets*

Colonne	1	2	5	6	7	8
Désignation	Position	Vitesse	Mode	Accélération	Décélération	Jerk
Type	REAL	REAL	INT	DINT	DINT	DINT
Objet	o1901	o1902	o1905	o1906	o1907	o1908
Ligne						
1	50	40	1	100	100	100000
…						
i	o1901.i	o1903.i	o1905.i	o1906.i	o1907.i	o1908.i
…						

Le changement d'états et l'attribution d'une consigne par le moteur se réalisent par l'application d'un front montant.

Il existe un tableau beaucoup plus grand contenant les divers éléments de configurations des variateurs et des moteurs qui leur sont liés. Il est ainsi possible de savoir que tel moteur est branché sur tel variateur, que le moteur possède telles caractéristiques… Il est même possible de changer des paramétrages d'usine, ceci est à réaliser avec beaucoup de précaution car selon les caractéristiques changées, les moteurs peuvent entrer en défaut dans le meilleur des cas. L'un de ces paramétrages utile est l'application des seuils maxi et mini d'intensité. Il est ainsi possible d'augmenter le couple de la broche afin de limiter l'utilisation du frein.

Programmation des cycles avec architecture. Remplissage du tableau puis lancement du cycle. Il n'est pas impossible de modifier le tableau en cours de cycle.

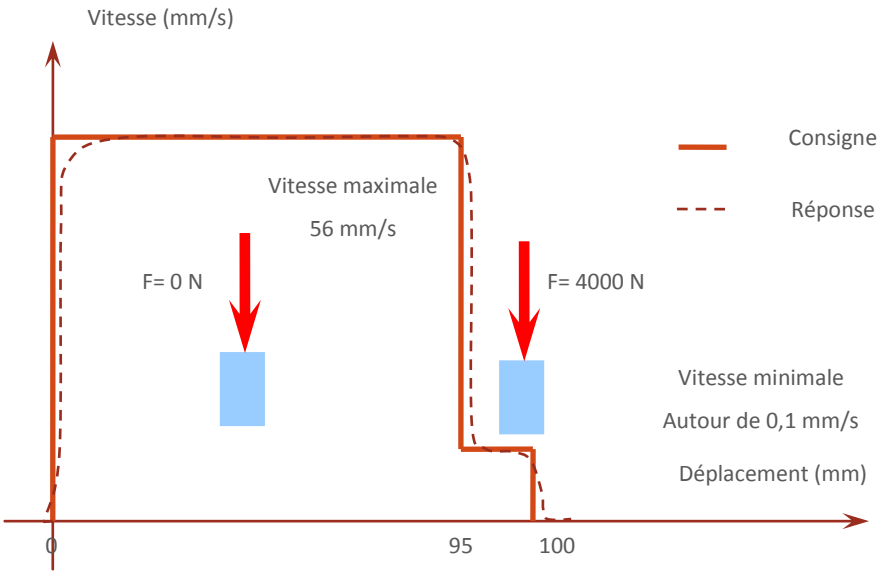


Figure 68 : *Exemple de cycle à programmer*

La figure 69 présente le GRAPHCET des modes de pilotage de la machine élémentaire de perçage et de soudage. Ces modes de pilotage sont utilisées pour la conception des cycles nécessaires pour le soudage des essais unitaires présentés à la section §4 et la fabrication des poutres composite décrite à la section §7.1.1.

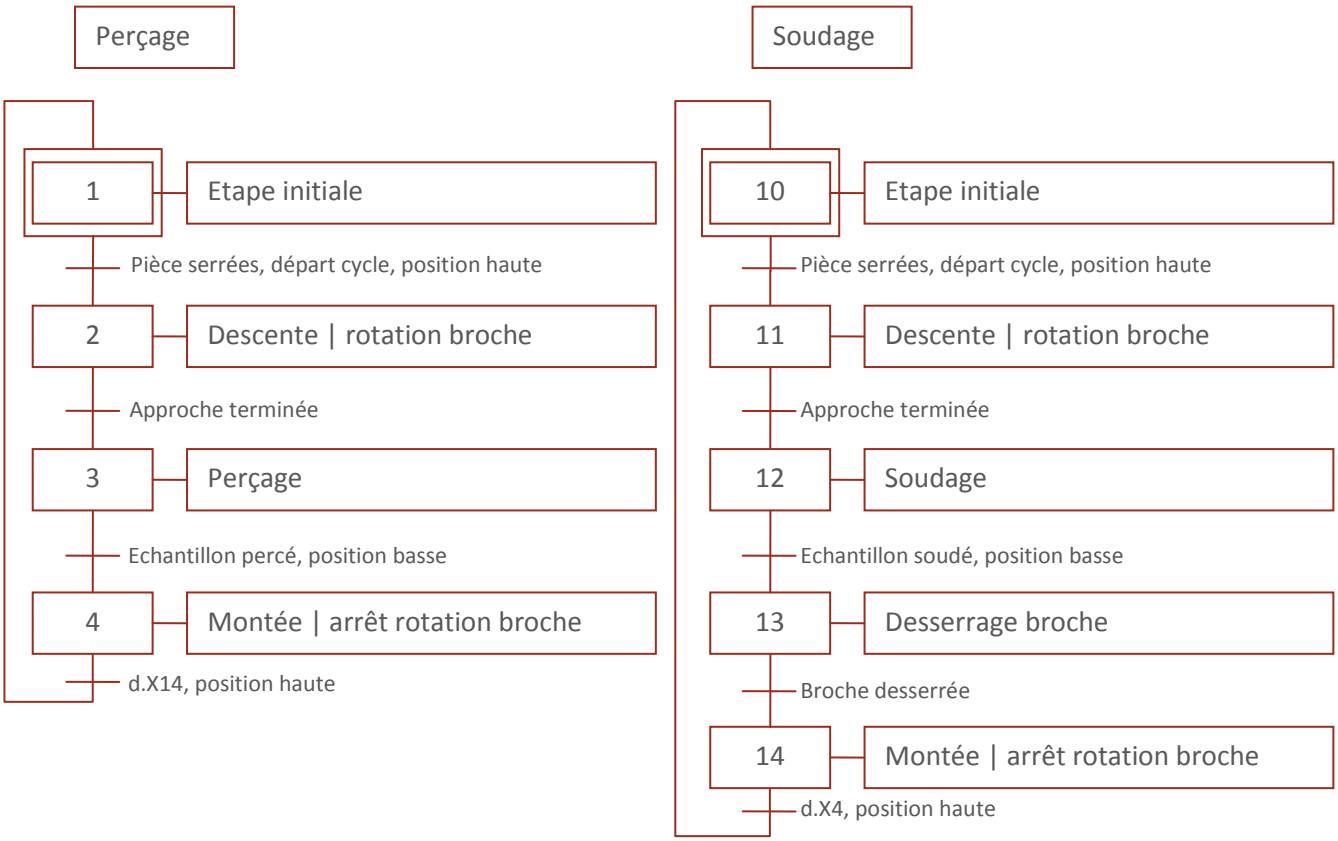


Figure 69 : *GRAFCET du perçage et du soudage*

La figure 70 présente l'interface utilisateur du logiciel de pilotage de la machine, avec la partie configuration où les paramètres de bases comme l'accélération, décélération sont indiqués. Il est aussi possible de détecter les défauts des moteurs. La partie cycle permet de programmer des cycles élémentaires pour la réalisation du soudage désiré.

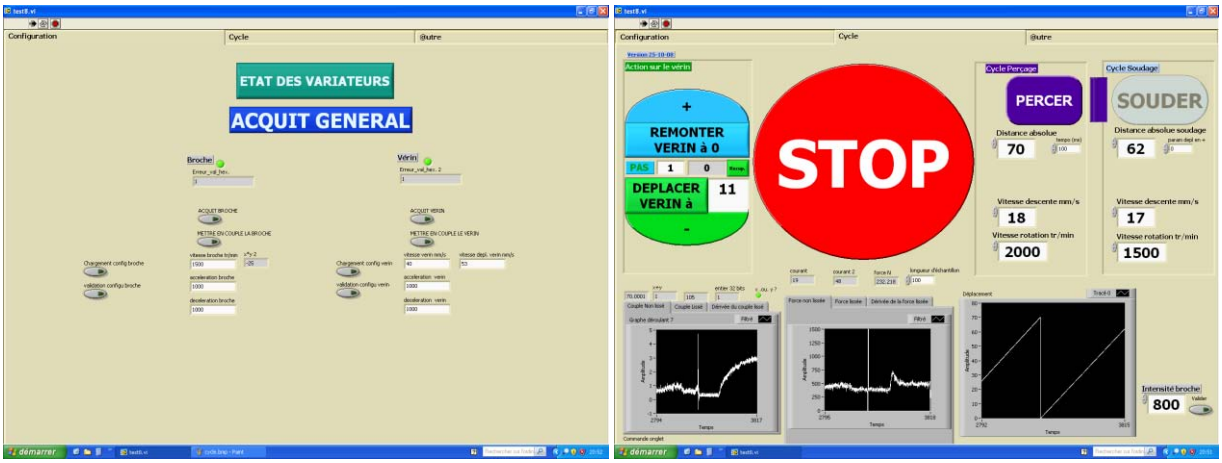


Figure 70 : *Interface de pilotage de la machine*

3.2 Calibration

3.2.1 Objectifs

La machine prototype permet par l'intermédiaire des variateurs de récupérer en temps réel l'intensité des courants fournis aux différents moteurs, le couple transmis à la cheville et la force appliquée dans le sens de l'axe Y. Selon les notes de calculs des moteurs (§3.1.3), la force et le couple sont déduits de l'intensité du courant des moteurs correspondants. Cependant, en brut, ces résultats ne peuvent être utilisés avec précision car le rendement exact de l'installation n'est pas connu précisément. Il est nécessaire de procéder à une calibration qui implique nécessairement de mesurer les efforts et les couples réellement développés au court d'un cycle de soudage.

3.2.2 Dispositif de calibration

Pour pouvoir mesurer les efforts développés pendant une phase de soudage, il a été nécessaire de concevoir un montage de calibration (codifié [CA]). Le principe de ce montage consiste à monter sur un pivot une pièce de bois en l'occurrence de forme cylindrique. Ce pivot est matérialisé par un roulement à billes. Celui-ci est monté sec et sans joint pour limiter les frottements, il est simplement muni d'un cache anti poussières. Ce pivot est supporté par un capteur d'effort HBM U10M disposant d'une plage de mesures comprise entre 0 et 25 kN pour une précision de ±10 N [82]. Le cylindre de bois libre de tourner sur son pivot supporte un bras. Ce bras enserre le cylindre par l'intermédiaire de deux vé qui permettent un serrage contrôlé de celui-ci sur le cylindre. Le diamètre du cylindre peut varier de 20 à 30 mm. Ce bras est relié par une chape à son autre extrémité à une cellule de charge HBM U9B dont la plage de mesures est comprise entre 0 et 1kN pour une précision de ±5 N [83]. Cette cellule de charges est fixée ultérieurement par un support au bâti. Le bras de levier mesure 247 mm. Ce dispositif est ensuite fixé sous le mandrin de la machine dans l'axe de la broche. Il devient alors possible de mesurer un effort axial par la cellule de charge placée sous le pivot et le couple par l'intermédiaire du bras de levier. Le cylindre de bois est une pièce martyre qui peut être changée à volonté. Il est possible de percer mais également de souder un tourillon après avoir réalisé un pré perçage. La figure 71 représente le montage de calibration.

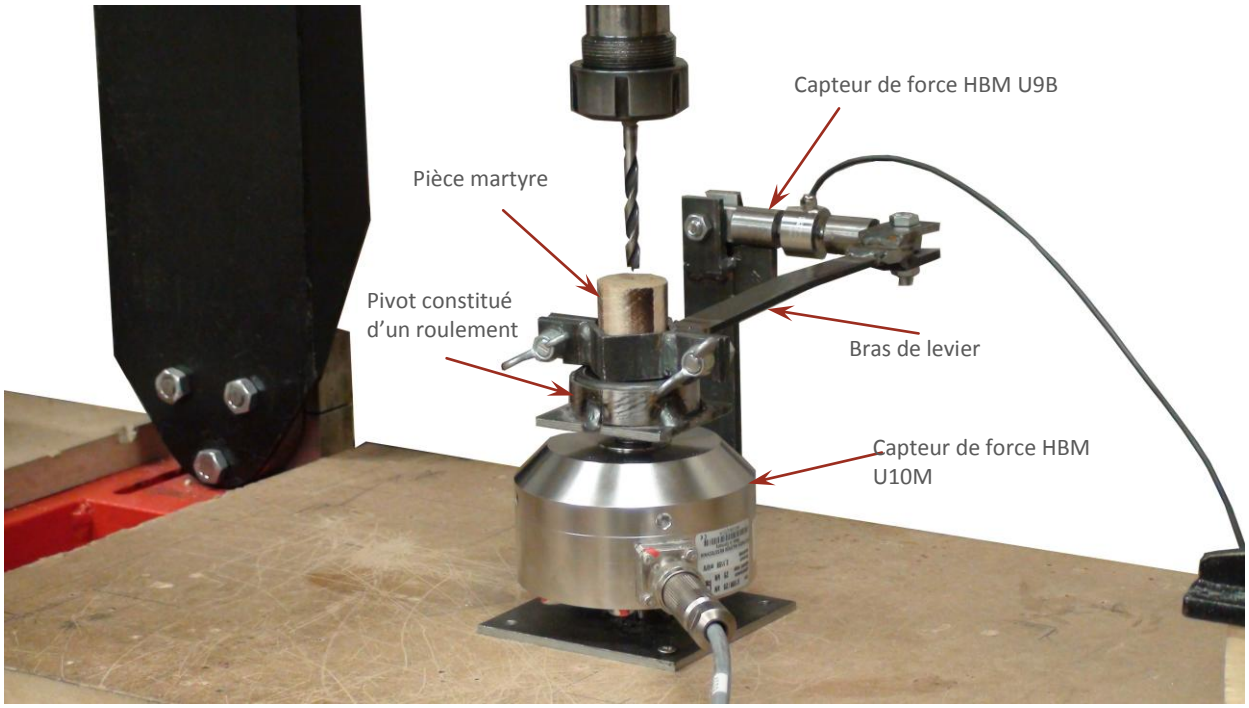


Figure 71 : *Montage de calibration*

3.2.3 Protocole

3.2.3.1 Réalisation des pièces martyres et des chevilles coniques

Lorsque des tourillons cylindriques sont introduits à l'aide de dispositif manuel, il faut noter, comme il a été dit précédemment, qu'après l'échauffement initial l'effort diminue. Cette diminution rapide de l'effort après la phase d'entrée du tourillon dans le bois ne permet pas de tester différents seuils d'effort comme il serait souhaitable dans cette phase de calibration dynamique de la machine. Afin de contourner ce problème, il est choisi d'effectuer cette calibration avec des tourillons de forme conique. En utilisant cette forme de cheville et en faisant varier les vitesses de rotation de la broche et l'axe Y différents efforts axiaux peuvent être obtenus. La figure 72 présente les dimensions de la pièce martyre et de la cheville retenues au final pour faire ces tests

Pour que les mesures soient reproductibles, il est nécessaire que la cheville présente une conicité épousant parfaitement la forme de l'alésage obtenu avec une mèche conique. La mèche conique utilisée est faite sur mesure en partant d'un alésoir cylindrique. Son angle de conicité est de 1.7°. Les chevilles possèdent un décolletage afin d'éviter tout risque de glissement dans la pince de la broche du fait de l'effort axial. Ce décolletage permet également d'usiner des éprouvettes parfaitement identiques. Les chevilles sont usinées à l'aide d'un tour numérique UTAM (*Unité de Tournage AutoMatisée*) [84].

3.2.3.2 Mise en place du montage

Il convient d'avoir l'axe de rotation de la cheville et celui de la pièce martyre coaxiaux dans le but d'avoir des mesures d'efforts correctes. La vérification de cette contrainte se réalise selon les étapes suivantes :

- Mettre en place le montage sans le fixer à la table de la machine.
- Enlever la pièce martyre.
- Mettre en place le cône recevant des éléments de diamètre 20 mm.
- Insérer dans le cône une cheville cylindrique de diamètre 20 mm.
- Descendre la tête de soudage de sorte que la cheville se loge dans le roulement du système d'accouplement.
- Fixer le dispositif à la table par des vis.
- Retirer la cheville de diamètre 20 mm et mettre en place la pièce martyre.

Le système est ainsi prêt pour le calibrage.

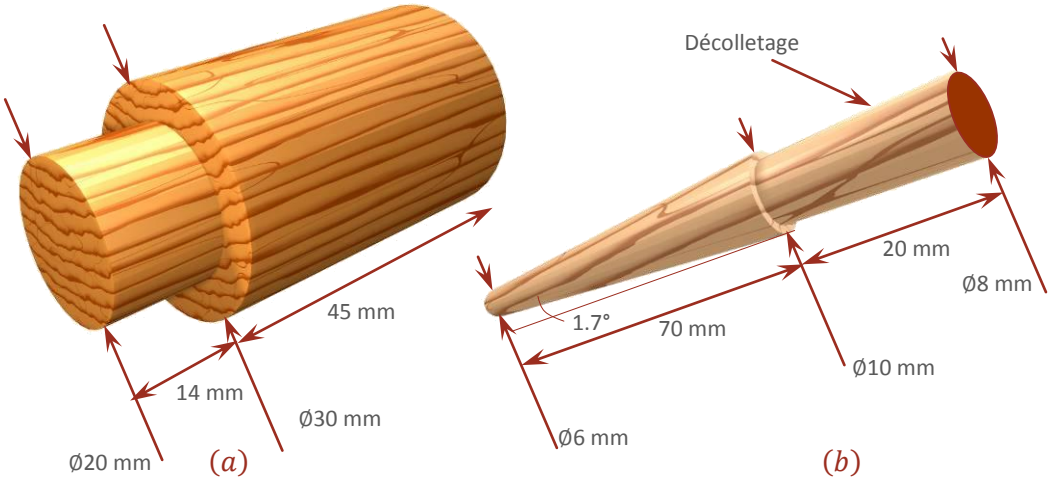


Figure 72 : *Dimensions de la pièce martyre et de la cheville utilisée*

3.2.3.3 Réalisation des mesures

La réalisation de plusieurs mesures est nécessaire afin d'approcher au maximum la précision des données obtenues de la machine. Cela permet aussi de diminuer l'influence des éléments perturbateurs lors de la mesure. Les mesures suivent le protocole suivant :

- Mise en place de la pièce martyre dans le support.
- Perçage de la pièce martyre avec un foret de diamètre 6 mm.
- Alésage de la pièce martyre à la conicité désirée avec la mèche conique d'angle 1.7°.
- Mise en place de la cheville conique dans le cône de diamètre 8 mm.
- Lancement du cycle de soudage.

Les données sont ensuite récupérées du PC et de la centrale de mesures Spider8 HBM. Il faut maintenant les traiter afin de comparer les signaux obtenus.

3.2.3.4 Analyse des données et correction des erreurs

La démarche suivante explicite la détermination des écarts entre les mesures établies avec la machine et les mesures établies avec les cellules de forces HBM. La procédure utilisée est décrite uniquement pour le couple transmis, il va de soit que pour obtenir la déviation pour la force appliquée, le cheminement sera identique.

Au préalable, il convient de recaler les signaux obtenus au niveau du temps Δt puisqu'ils ne sont pas synchronisés. De plus, lors de l'approche de la cheville vers la pièce martyre, le moteur possède un couple initial, ce qui se traduit par un décalage ΔC selon les ordonnées (Figure 73).

Au vue de la figure 73, le couple possède un bruit important. Pour diminuer le bruit dans le but de comparer plus facilement les deux signaux, il convient de comparer leurs spectres et de ne garder que les composantes communes pour les deux signaux, ces composantes restent globalement identiques jusqu'à 11 Hz. Le filtre utilisé est un filtre passe-bas qui coupe les fréquences à partir de 11 Hz. La figure 74 représente la comparaison des spectres des deux signaux avec le spectre du couple issu de la machine filtrée. Il apparait une instabilité au début et en fin de la courbe principalement due à la transformée de FOURIER.

Il est maintenant possible de comparer les deux signaux et par une minimisation des erreurs dans le sens des ordonnées, les deux signaux sont parfaitement superposés. La figure 75 illustre la superposition des deux signaux. Le décalage obtenu est ensuite intégré dans les configurations de la machine. En faisant de même avec la force, les valeurs énoncées par la machine représentent dorénavant l'illustration de ce qui se passe réellement lors du soudage par friction.

Finalement le décalage initial du couple est de **0.3 Nm** et celui de la force appliquée est de **400 N**.

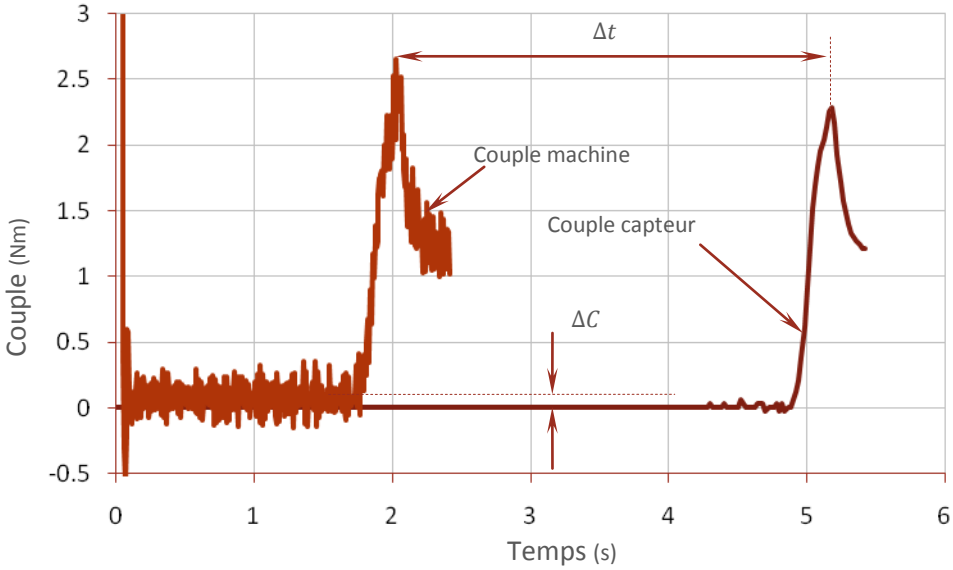


Figure 73 : *Décalage en temps et en couple initiale*

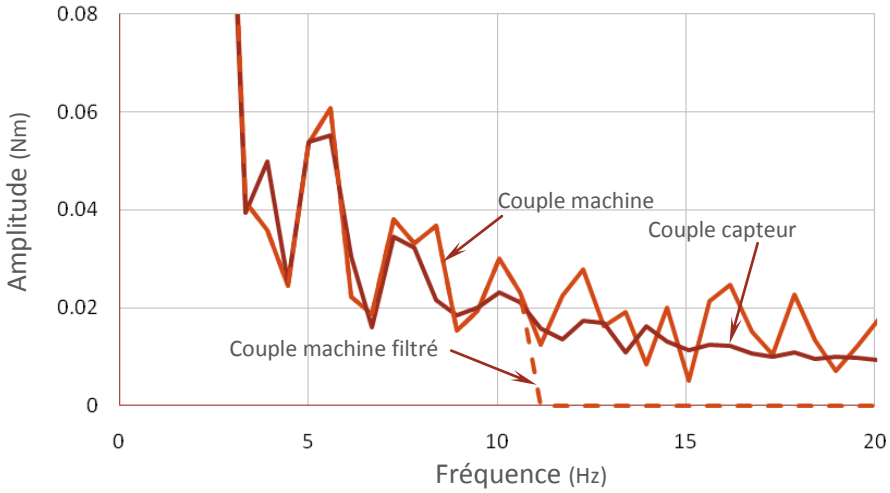


Figure 74 : *Spectre des signaux des couples*

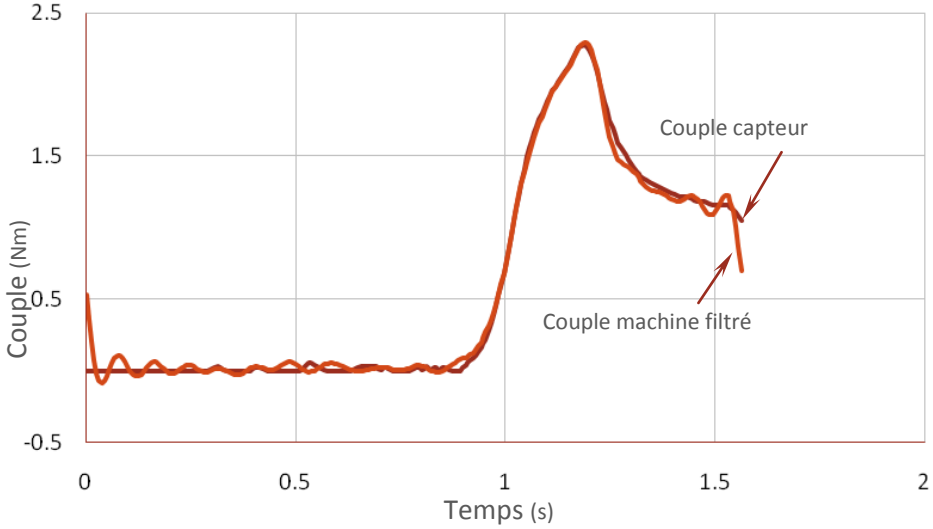


Figure 75 : *Signaux des couples superposés*

« Ne te contente pas du qu'est-ce que c'est*, mais essaie de savoir le* pourquoi *et le* comment*.»*

[Baden-Powell]

4 ETUDE DU SOUDAGE

4.1 Processus de soudage de chevilles cylindriques

Les chevilles de bois utilisées pour l'assemblage sont en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*) cylindriques et cannelées. Le soudage par friction rotative est effectué avec les paramètres suivants :

- Vitesse de rotation de la broche : **1500 tr/min**
- Vitesse de descente : entre **17 mm/s**.

Le bois à assembler est de l'épicéa (*Picea abies*) décrit dans la section §5. Généralement le nombre de pièces à assembler est de deux. Ainsi pour la fabrication des poutres par exemple, la cheville doit souder sur 40 mm, soit avec les données du soudage précédentes 2.3 s.

Le cycle demande d'atteindre la distance souhaitée et ne tient pas compte du comportement du couple appliqué et de la force appliquée lors du processus de soudage.

La figure 76 présente un faisceau de quelques mesures obtenues lors de la fabrication des poutres pleines. Le couple maximal atteint se situe entre 2,5 et 4 Nm avec une moyenne à 2.7 Nm. La zone d'approche (ici de deux secondes) est réalisée à la même vitesse que lors du soudage. La dispersion obtenue semble principalement due à la masse volumique du bois des lamelles. Il apparait que le couple appliqué augmente jusqu'à la fin du cycle.

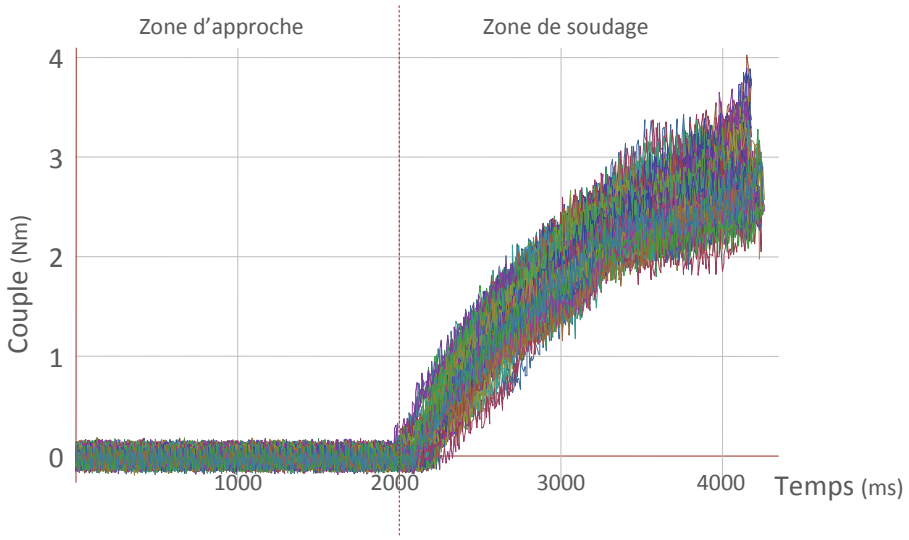


Figure 76 : *Faisceau de mesure du couple lors du soudage des lamelles pour la fabrication des poutres*

La figure 77 montre l'allure des mesures de forces obtenues lors de la fabrication des poutres pleines. La fin de la courbe est tronquée car elle représente l'arrêt du moteur par application d'un contre courant qui vient fausser le graphe. La force maximale atteinte varie de 60 à 10 daN avec une moyenne de 26 daN pour l'ensemble de ces mesures. La forme montre un pic principalement autour de la première demi-seconde de soudage puis survient une décroissance de la force vers une valeur minimale autour de 10-20 daN. Le pic présente l'effort utilisé pour que la matière devienne visqueuse au début du processus, ensuite l'échauffement réalisé par le frottement en rotation semble suffire pour continuer à rendre la matière visqueuse. La force n'est donc appliquée qu'en début du cycle sur quelques dixièmes de secondes.

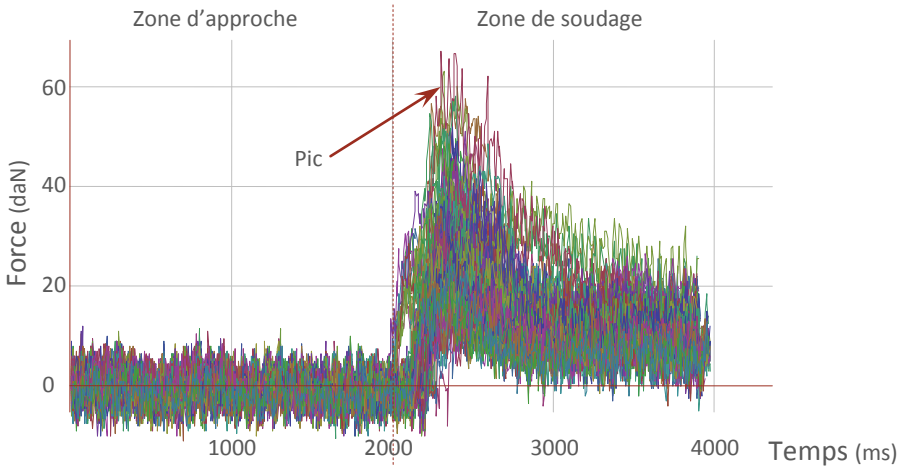


Figure 77 : *Faisceau de mesure de la force lors du soudage des lamelles pour la fabrication des poutres*

Il est intéressant de voir l'évolution de la force appliquée en fonction du couple appliqué lors du soudage. La figure 78 illustre une telle évolution pour deux cas. L'étude de la force en fonction du couple dans la phase juste avant le pic, est déterministe de part le fait que les surfaces en contact sont encore vitreuses et non rentrées encore en phase visqueuse (friction sèche). La loi permettant de lier la force et le couple est donnée en fonction des paramètres de frottement : cône de frottement et géométries. Cette zone où la force est reliée au couple selon les lois de la mécanique classique ne dure seulement que quelques dixièmes de secondes. La seconde partie, moins évidente, correspond à une friction visqueuse.

La forme générale est dans la phase avant le pic, une droite symbolisant la linéarité entre la force appliquée et le couple appliqué, puis une zone après le pic non linéaire.

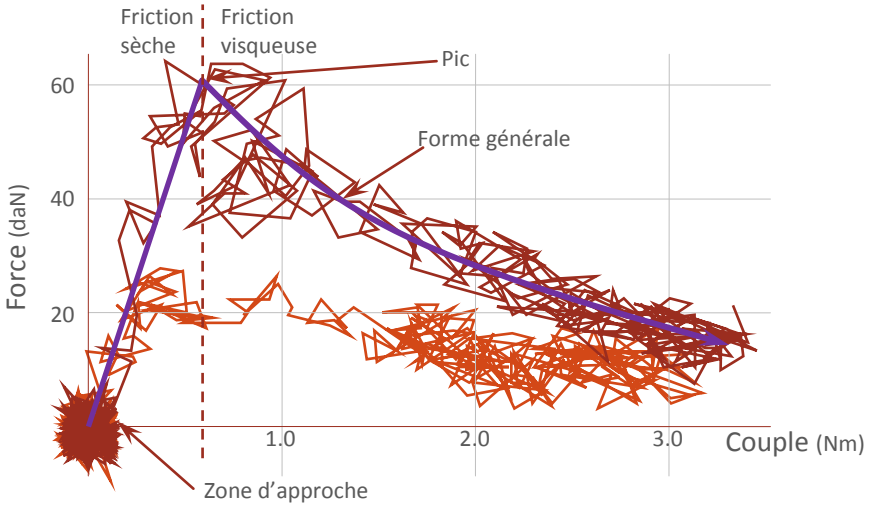


Figure 78 : *Evolution force appliquée en fonction du couple appliqué*

4.2 Observation : cheville fondue ou soudée

Il faut connaître la quantité de bois soudé dans un assemblage. Comme l'avait souligné KANAZAWA et al. [64], le soudage sur toute la longueur de la cheville n'est pas évident. En effet, au vue de la manière de souder, avec des chevilles cylindriques, le soudage créé au commencement est sans arrêt retravaillé et détruit puisque la cheville doit atteindre la distance souhaitée. Le soudage et donc partiellement présent le long de la cheville comme l'illustre la figure 79.

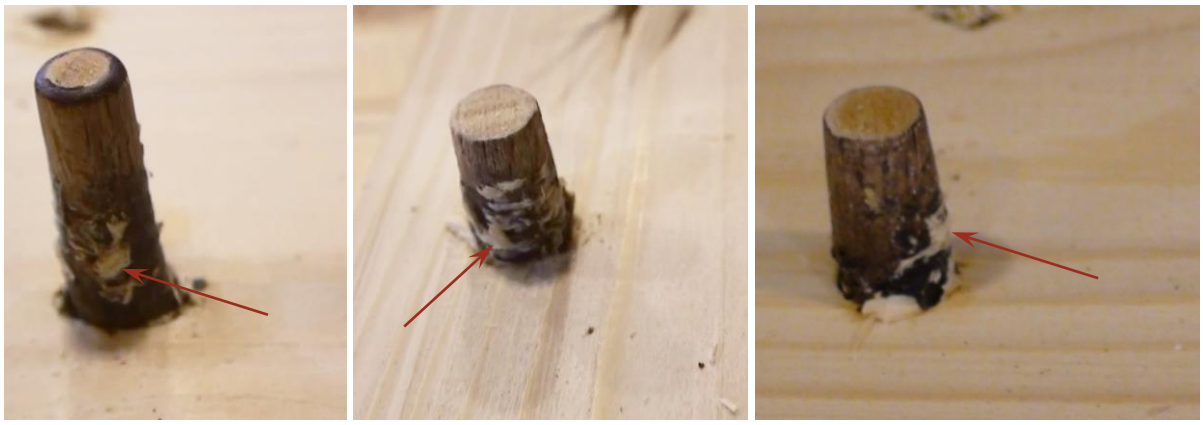


Figure 79 : *Présence des zones d'accroches pour les chevilles du plancher*

Pour un perçage uniforme sur toute la hauteur des éléments à assembler ou pour un perçage étagé de diamètres différents selon la hauteur des pièces, il vient, suite au soudage par friction, une conicité intrinsèque due à la dégradation des pièces en contact. La figure 80 représente l'apparition de la conicité dans une éprouvette de test unitaire.

La couleur du joint de soudage montre une dégradation excessive du matériel en présence. Ces différentes observations sont faites sur la base des paramètres de la littérature à savoir 1500 tr/min pour la rotation de la broche et de 17 mm/s pour la vitesse d'insertion. Cela demande d'optimiser le processus. Mais pour cela, il convient de caractériser l'assemblage de manière unitaire et de voir son influence à l'échelle structurale avant de chercher à optimiser le processus de soudage par friction.

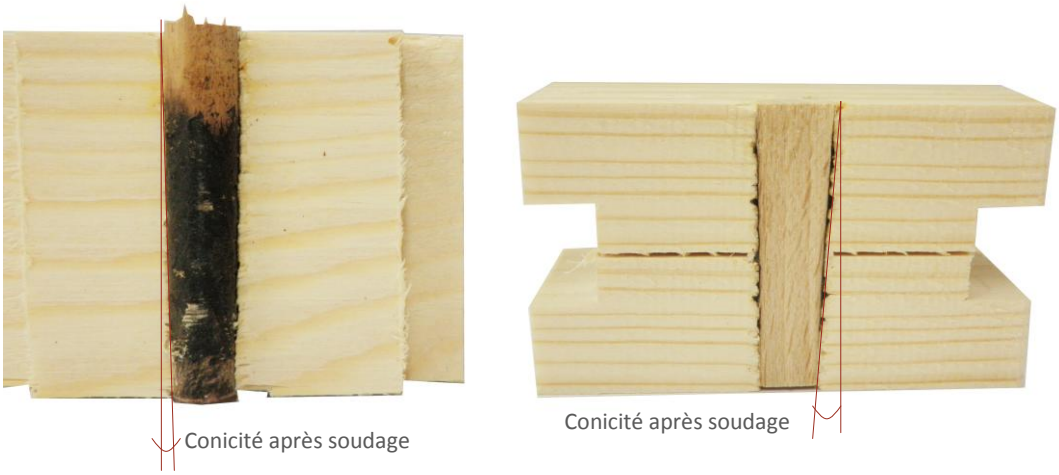


Figure 80 : *Conicité après soudage par friction pour un perçage cylindrique*

4.3 Caractérisation des propriétés de l'assemblage unitaire

Comme il a été précisé dans l'introduction, un des objectifs majeurs de ce travail est de pouvoir introduire les propriétés mécaniques du tourillon dans des modèles analytiques ou numériques afin de prévoir le comportement des éléments de structure. Plusieurs propriétés mécaniques peuvent être définies. Le premier essai mis au point permet de caractériser la résistance du joint soudé. Cette propriété n'est pas fondamentale en soi pour le dimensionnement des éléments de structures mais c'est sur elle qu'il sera nécessaire de se focaliser pour optimiser les paramètres du soudage, à savoir vitesse de rotation, vitesse d'introduction forme des éléments etc. Le second test développé permet de caractériser la résistance en cisaillement du tourillon, dans tous les éléments de structure évoqués en introduction de ce travail, cette propriété est essentielle. Le troisième test mis au point permet d'obtenir la résistance à l'arrachement du tourillon. Cette propriétés n'est pas directement mise en jeu dans les éléments développés mais permet d'assurer la cohésion des systèmes et par là même leur durabilité.

Afin de réduire au maximum, dans cette phase de caractérisation, les dispersions et rendre le plus reproductible possible le soudage, un montage mécanique rigide de positionnement des pièces a été mis au point. La préparation des éprouvettes étant relativement longue, un soin particulier a été apporté pour standardiser au maximum toutes les dimensions d'encombrement extérieures des éprouvettes. Ainsi, le montage permet par l'intermédiaire d'une sauterelle de serrer fortement les pièces avant la phase de soudage

La figure 81 représente le montage de soudage avec (a) en attente d'échantillons et (b) prêt pour assembler un échantillon pour l'essai de traction du joint soudé. Le montage soudage est codifié en [MO]. Les dimensions maximales horizontales sont 70 x 50 mm^2.

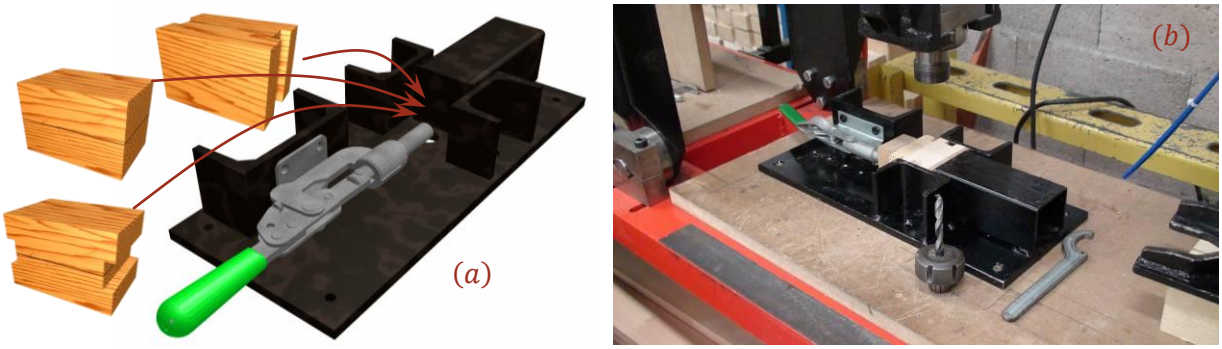


Figure 81 : *Montage de soudage*

La figure 82 présente le cycle de soudage utilisé avec les paramètres choisis selon l'étude bibliographique, pour les tests unitaires des sections suivantes.

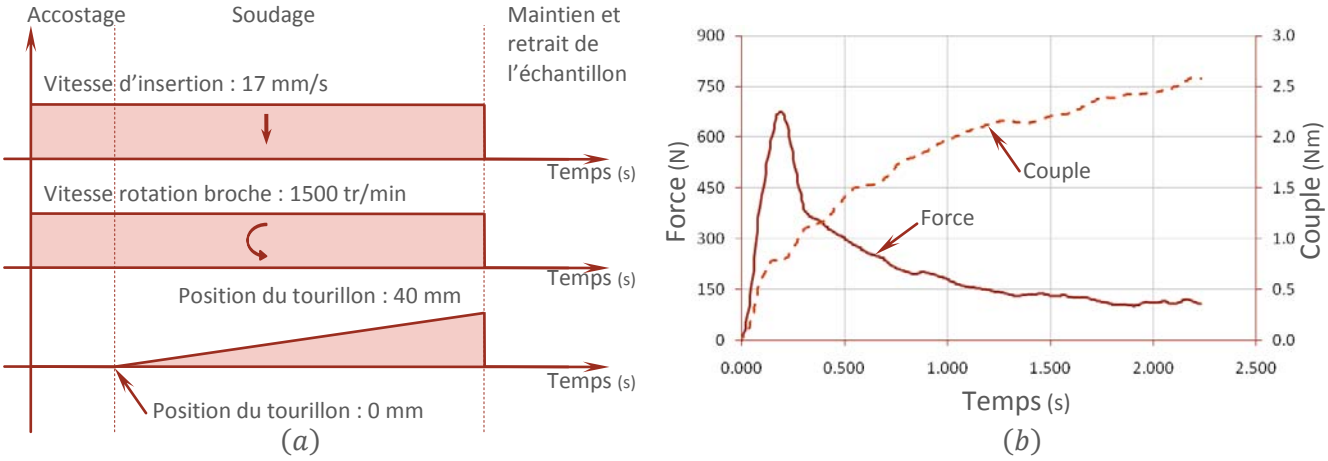


Figure 82 : *Présentation (a) du cycle de soudage et (b) de l'évolution de la force appliquée et du couple transmis lors du soudage de chevilles cylindriques*

L'essai est réalisé selon le cycle indiqué sur la figure 83 La valeur de la force estimée est déterminée par des essais préliminaires. Le pilotage des essais est réalisé en déplacement.

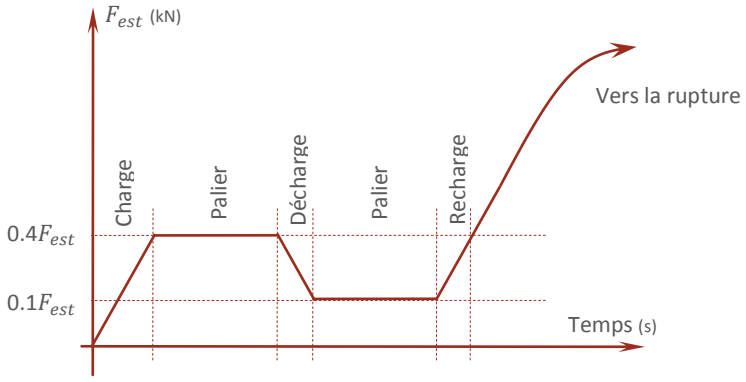


Figure 83 : *Cycle de chargement pour les essais*

Pour les tests, les machines d'essais universels INSTRON [85] 4467 et 4206 sont utilisées. La précision des mesures de la force est de 50 N.

4.3.1 Résistance du joint soudé en traction radiale

Le test de la traction radiale permet d'étudier la performance du joint de soudage obtenu. Pour cela, il convient de tester les échantillons dans le sens radial de la cheville (le fil du bois des éléments assemblés est perpendiculaire à l'axe de la cheville), comme l'illustre la figure 84. Les éprouvettes ont pour dimensions extérieures $L \times \ell \times h$ = 70 x 50 x 20 mm^3. Les chevilles ont une longueur initiale de 90 mm. Les propriétés des

échantillons sont présentées dans le tableau 22. Pour la réalisation de l'essai, des feuillures ont été usinées de chaque côté des pièces sur une profondeur de 5 mm afin que les mors de la machine de traction universelle puissent prendre place.

Tableau 22 : *Masse volumiques des pièces à assembler et des chevilles pour le test de traction radiale pour 30 échantillons*

	Moyenne (kg/m^3)	Ecart type (kg/m^3)	COV (%)
Pièces à assembler	459	51	11
Chevilles	686	53	8

Pour tester les éprouvettes, le protocole d'essai suivant a été mis au point :

- Détermination des propriétés des éprouvettes : dimensions, masse volumique. Les pièces sont conditionnées dans la salle mécanique pour atteindre une humidité de 12% à une température de 20°C.
- Perçage avec un foret de diamètre 8 mm des éprouvettes en bois d'épicéa (*Picea abies*) à l'interface dans le sens perpendiculaire au sens du fil du bois
- Soudage des éprouvettes avec une cheville en hêtre (*Fagus sylvatica*) de diamètre 10 mm.
- Attente d'un minimum de trois jours avant l'essai sur les machines de tests. Les éprouvettes sont maintenues dans la salle conditionnée.
- Test de traction de l'échantillon dans le sens radial de la cheville.

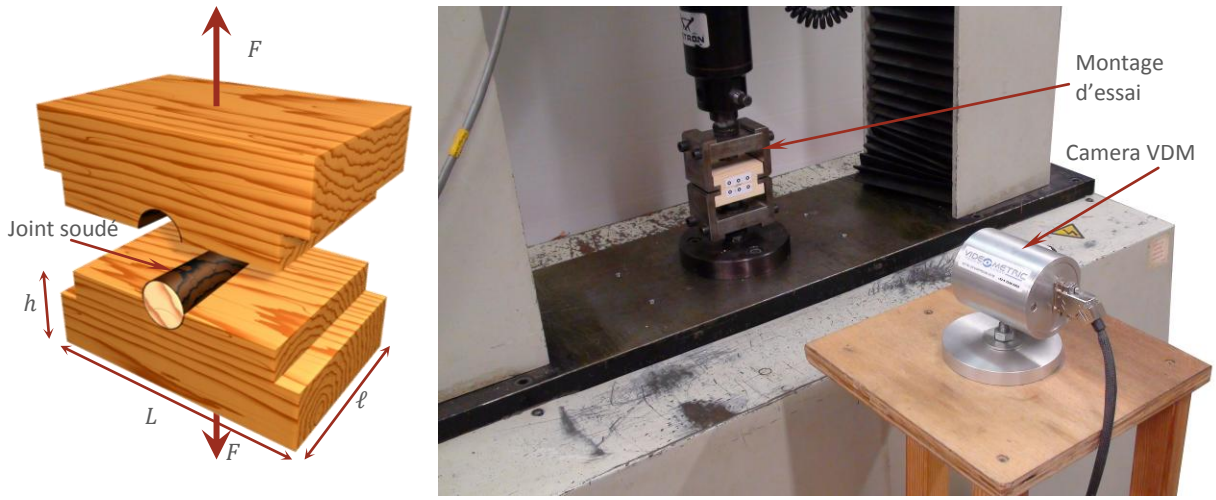


Figure 84 : *Montage de l'essai en traction radiale*

Compte tenu du montage mécanique pour mettre en traction les éprouvettes et les faibles déformations du joint à rupture, il a été choisi d'utiliser un système de mesure extérieur plus précis que celui de la machine de traction universelle. Dans le cadre de cet essai, la rigidité du joint en traction transversale n'est pas d'une grande utilité mécanique, cependant il a été mesuré pour disposer éventuellement d'informations supplémentaires au dépouillement des essais. Le système de mesure sans contact, avec l'acquisition des images à l'aide de la caméra VIDEOMETRIC [86] et du logiciel VDM GRABBER [87] et avec l'analyse d'images de l'enregistrement en utilisant le logiciel VDM ANALYSER 3D [88], permet une mesure des déplacements pour cet essai à 0.03 mm. Des cibles sont placées sur chacune des demi-éprouvettes de part et d'autre de leur surface de contact.

La figure 85 présente l'évolution de la force en fonction du déplacement type. Les raideurs sont obtenues dans les zones linéaires pour la charge, décharge et recharge. Le tableau 23 présente les valeurs obtenues des raideurs et de la force maximale.

Tableau 23 : *Forces maximales obtenues pour le test de traction radiale pour 30 échantillons*

	Moyenne	Ecart type	COV (%)
Force maximale (N)	459	125	27

A partir de la valeur de l'effort moyen à rupture une pseudo-contrainte à rupture en traction transversale de la cheville a été calculée. En effet, le joint étant de forme circulaire l'état de contrainte dans celui-ci est complexe à définir car il fait intervenir du cisaillement et de la traction transversale. Par analogie au calcul d'une contrainte d'enfoncement d'un organe circulaire dans du bois, cette pseudo contrainte de traction transversale est obtenue en faisant le rapport entre l'effort et la surface moyenne du tourillon au niveau du plan de contact entre les pièces assemblées. Si le soudage était effectif à 100%, c'est le tourillon qui serait rompu en traction transversale, la pseudo-contrainte prendrait alors tout son sens. Le tourillon ayant une forme globalement conique, la surface moyenne est obtenue en multipliant le diamètre mesuré au niveau du plan de contact d_{ef} par les hauteurs des pièces assemblées cumulées. Le diamètre moyen des tourillons mesurés vaut 9.05 mm. La contrainte à rupture moyenne s'élève à 1.02 MPa. A titre indicatif, il faudrait que cette valeur s'approche de 5 MPa pour que le tourillon casse en traction transversale.

$$f_{t,90,\mathrm{exp}} = \frac{F_{\max}}{A} = \frac{F_{\max}}{d_{ef}\ell} \qquad (182)$$

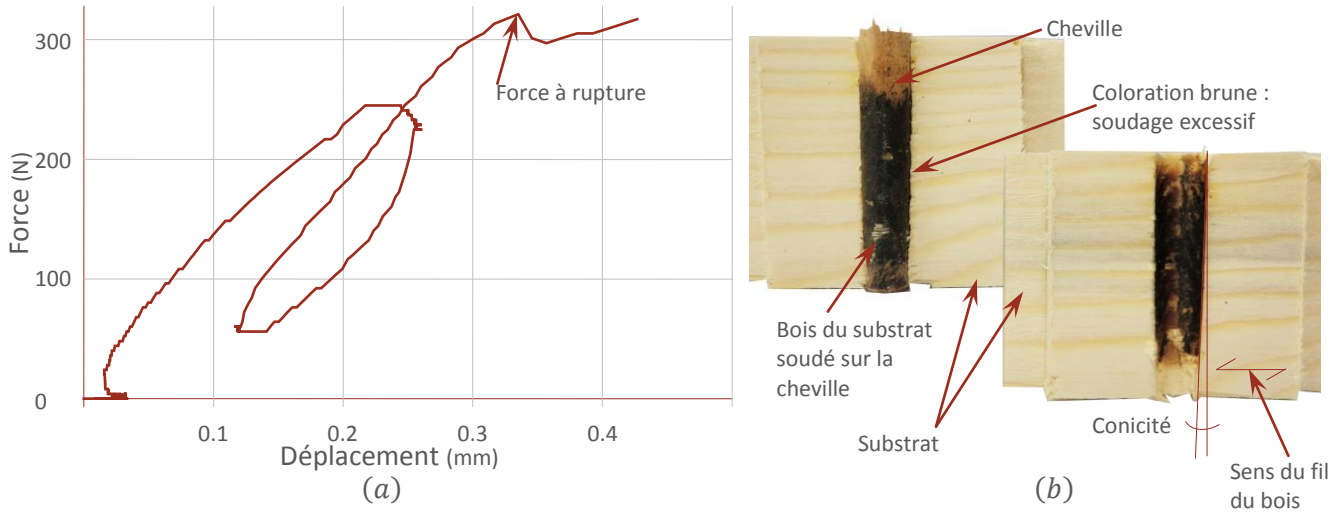


Figure 85 : *(a) Évolution force vs déplacement et (b) exemple de rupture pour un essai de traction radiale*

La figure 86 présente la force en échelle de couleur (iso-valeurs) par rapport aux trois masses volumiques en présence : celle de la cheville et des deux pièces à assembler. Parmi les deux pièces à assembler, il est possible de déterminer celle avec la masse volumique minimale $\rho_{\text{pièce min}}$ et celle avec la masse volumique maximale $\rho_{\text{pièce max}}$. Il apparait que les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les masses volumiques des pièces assemblées sont importantes. L'influence de la masse volumique des chevilles à travers ces quelques essais ne semble pas avoir d'influence ce qui parait logique puisqu'elles ne cassent jamais.

Ces premiers tests de soudage dans des bois de pays montrent que le soudage n'est pas optimal et que la marge de progression est grande. Le soudage du tourillon, pour être efficace, doit parvenir à souder autant les fibres tranchées par le perçage que celles qui ne le sont pas, ce qui est en soi une performance difficile avec un matériau compressible comme l'épicéa (*Picea abies*). Avant d'entreprendre une optimisation des paramètres mécaniques, il serait intéressant d'identifier les paramètres amenant de la variabilité sur le soudage en lui-même puisque les paramètres mécaniques, la mise en place et les tests sont maintenant parfaitement maitrisés. La masse volumique des bois semble jouer un rôle important, cependant étant donné le caractère très local du soudage la mesure de la masse volumique globale ne semble pas être un indicateur suffisamment pertinent. Il faudrait également s'intéresser à la constitution des cernes.

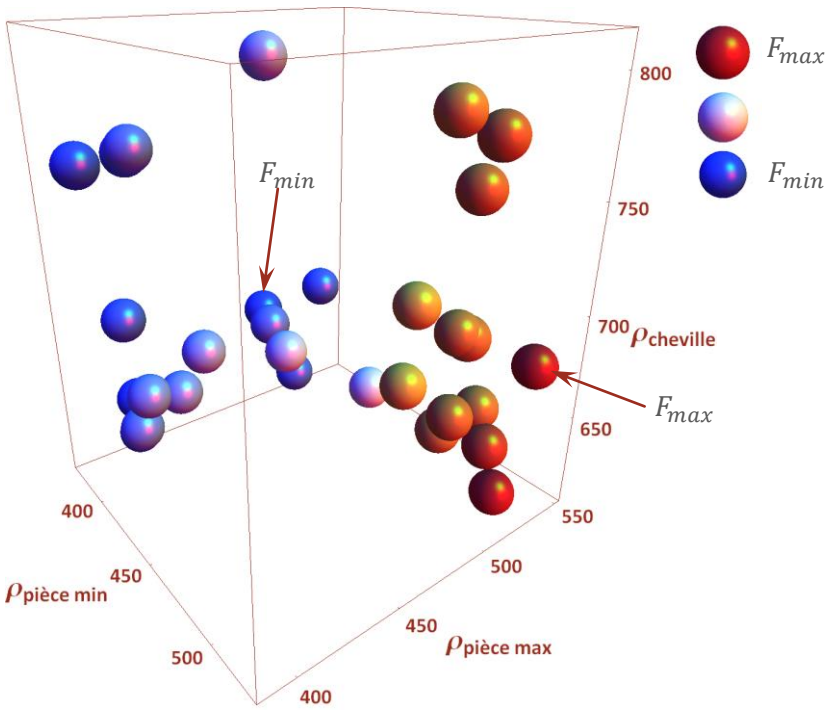


Figure 86 : *Évolution de la force en fonction des trois masses volumiques en présence*

4.3.2 Résistance et rigidité des assemblages tourillonnés en cisaillement

Après avoir caractérisé la performance du soudage des tourillons en hêtre dans de l'épicéa (*Picea abies*), il est intéressant de mesurer la résistance en cisaillement liée à ce mode de mise en place. Pour réaliser ce test, il a été choisi de ne cisailler qu'un seul plan. En effet, les éprouvettes type en arc de triomphe utilisées classiquement introduisent un moment préjudiciable à la mesure. C'est un dispositif identique à celui utilisé par PIRAZZI [9] qui est préféré. Ce montage d'essai consiste à incliner l'assemblage constitué de deux pièces pour injecter un effort de compression à chacune de ses extrémités. L'application de l'effort s'effectuant sur des pièces différentes à chaque extrémité le tourillon se trouve dans une situation de cisaillement quasi idéale. La figure 87 présente le montage d'essai en cisaillement. Ce montage est cependant relativement complexe à mettre en place car sa géométrie doit suivre la rotation des pièces pendant l'essai. Les pièces sont montées sur des axes entaillés servant de première rotule. Pour parfaire l'alignement des charges, des rotules parfaites constituées chacune d'une bille et d'un cône sont placées entre les mors de la machine. L'ensemble est soigneusement graissé pour limiter les frottements.

Les éprouvettes ont pour dimensions $L \times \ell \times h$ = 70 x 50 x 20 mm^3. Les chevilles ont une longueur initiale de 90 mm. Les caractéristiques des échantillons sont présentées dans le tableau 24.

Pour tester les éprouvettes, le protocole d'essais suivant a été mis au point :

- Détermination des propriétés des éprouvettes : dimensions, masse volumique. Les pièces sont conditionnées dans la salle mécanique pour une humidité du bois de 12% et à une température de 20°C.
- Perçage avec un foret de diamètre 8 mm des éprouvettes en bois d'épicéa (*Picea abies*) dans le sens de la hauteur des pièces.
- Soudage des éprouvettes avec une cheville en hêtre (*Fagus sylvatica*) de diamètre 10 mm.
- Attente minimum de trois jours avant l'essai sur les machines de tests. Les éprouvettes sont maintenues dans la salle conditionnée.
- Test de cisaillement de l'échantillon dans le sens longitudinal.

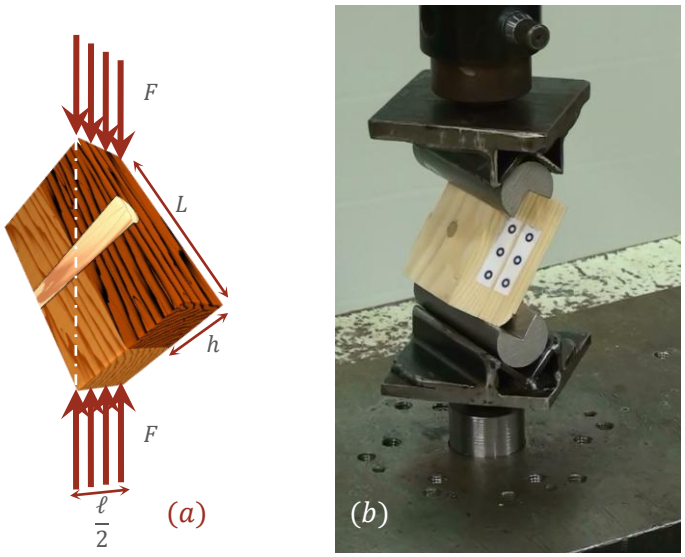


Figure 87 : *Montage de l'essai en cisaillement : (a) vue en coupe, (b) montage*

Tableau 24 : *Masses volumiques des pièces à assembler et des chevilles pour le test en cisaillement pour 28 échantillons*

	Moyenne (kg/m^3)	Ecart type (kg/m^3)	COV (%)
Pièces à assembler	489	42	9
Chevilles	680	63	9

De façon identique au test de traction sur le joint de soudage, le glissement a été mesuré à l'interface à l'aide du système de mesures sans contact. Dans le cas présent son utilisation s'est révélée indispensable pour obtenir des mesures de qualité.

L'allure de la force en fonction du glissement à l'interface (Figure 88) fait apparaitre trois phases distinctes dans le comportement. La première phase est linéaire et élastique, elle caractérise le fonctionnement en cisaillement de la cheville. Un cycle charge décharge compris entre 40% et 10% de l'effort de plastification permet d'obtenir les caractéristiques mécaniques de l'assemblage (Figure 83). La seconde phase débute lorsque la cheville se plastifie en cisaillement. Ce phénomène est possible car elle se trouve fortement comprimée transversalement à ce stade du chargement. Le repérage de ce point de fonctionnement appelé seuil plastique s'effectue de différentes manières suivant la phénoménologie développée. Sur certains essais la charge diminue quelque peu avant d'augmenter de nouveau, le seuil plastique est considéré comme étant le maximum atteint. Sur certains essais, la charge ne rechute pas après la phase de plastification, le seuil plastique est défini comme étant situé à un offset de 10 % de la rigidité élastique. Après l'entrée en plastification de la cheville, un effet de corde se produit. Cet effet de corde peut se développer lorsque le soudage est efficient. La cheville est alors retenue de part et d'autre du plan de contact. Après s'être déformées, les fibres suivent une double courbure qui engendre de la traction qui amène la rupture finale. La figure 89 présente l'ensemble des courbes d'essais obtenues pour le test en cisaillement.

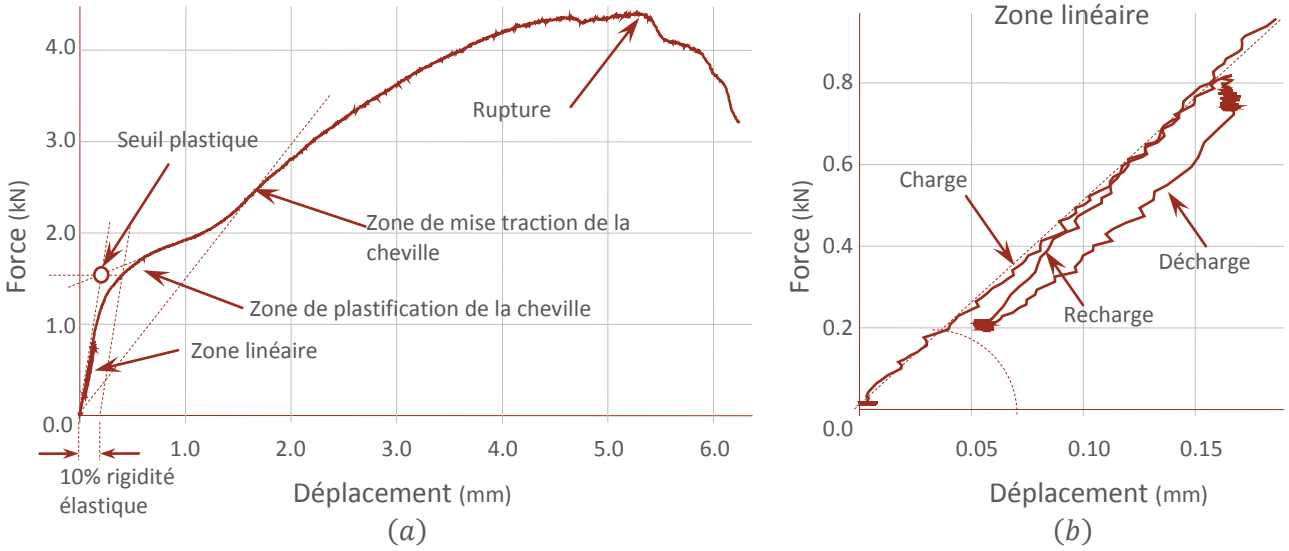


Figure 88 : *Évolution force – déplacement pour un essai en cisaillement de l'échantillon ci-4*

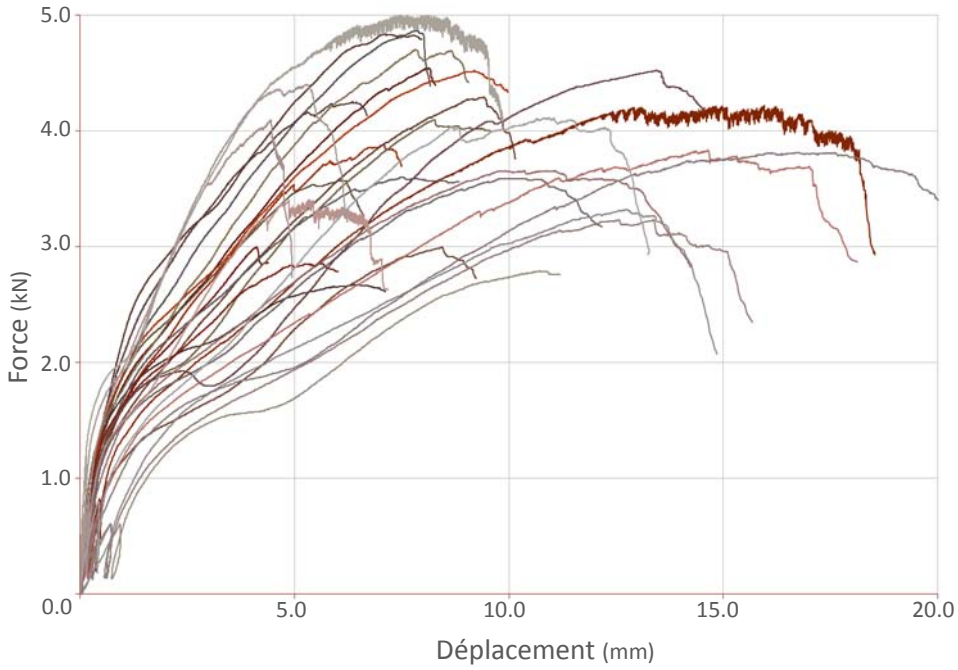


Figure 89 : *Faisceau des essais en cisaillement*

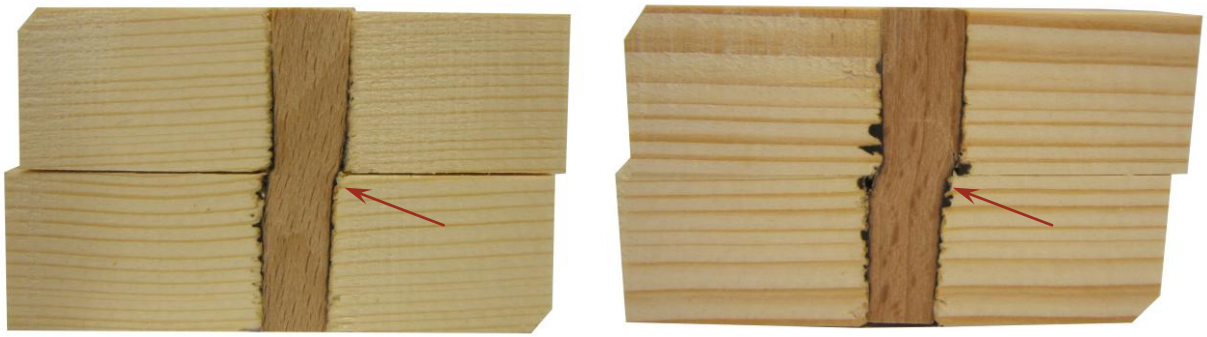


Figure 90 : *Création d'une rotule dans la cheville au niveau de l'interface des pièces : (a) pour les pièces avec des cernes fins et (b) des pièces à cernes épais*

Le tableau 25 indique les moyennes, écarts type et coefficients de variation des raideurs et des forces obtenues lors du test en cisaillement. Les coefficients de variation sont importants sur l'estimation des rigidités

mais possède une bonne reproductibilité pour la détermination de la force au seuil plastique et à rupture. Sur les éprouvettes, uniquement la masse volumique des échantillons a été relevée. A elle seule, la masse volumique ne permet pas d'expliquer ces variabilités (Figure 91). A cette échelle, les tourillons sont très sensibles à la morphologie du bois (cerne de croissance). L'analyse fine des cernes de croissances serait une piste à suivre pour expliquer cette variabilité.

Tableau 25 : *Raideurs et efforts maximaux obtenus pour le test en cisaillement pour 28 échantillons*

		Moyenne	Ecart type	COV (%)
Raideur (N/mm)	Charge	2472	1387	56
	Décharge	3092	1524	49
	Recharge	3632	1662	46
Seuil plastique (N)		1618	283	17
Force maximale (N)		3873	676	17

La valeur caractéristique de la force au seuil plastique selon l'annexe D de l'EUROCODE 0 [89], vaut 1480 N.

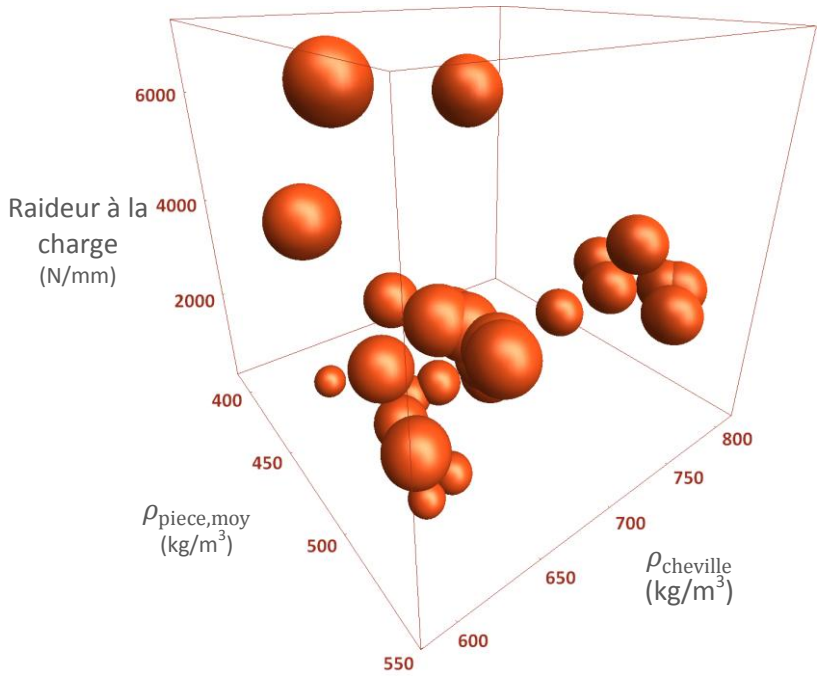


Figure 91 : *Raideur à la charge en fonction de la masse volumique moyenne des pièces à assembler* $\boldsymbol{\rho}_{\text{piece,moy}}$ *et de la masse volumique de la cheville* $\boldsymbol{\rho}_{\text{cheville}}$

La contrainte de cisaillement peut donc être déterminée au niveau du seuil plastique selon la relation suivante :

$$f_{v,\text{exp}} = \frac{4}{3}\frac{F_{\text{seuil pl.}}}{S} = \frac{4}{3}\frac{F_{\text{seuil pl.}}}{\pi\left(\frac{d_{ef}}{2}\right)^2} \quad \textbf{(183)}$$

d_{ef} représente le diamètre de la cheville à l'interface des deux pièces à assembler. Soit pour la force au seuil plastique moyen, une contrainte de cisaillement de $f_{v,\text{exp}} = 34$ MPa. Cette contrainte de cisaillement est une valeur apparente car elle prend en compte le phénomène de compression transversale. Le rapport entre la valeur moyenne à rupture et la valeur moyenne au seuil plastique est de 2,4. Après avoir plastifié, l'assemblage tourillonné montre une ductilité importante. A titre indicatif, quelques essais de cisaillement sur des assemblages où les tourillons ont été introduits en force montrent le comportement illustré sur la figure 92.

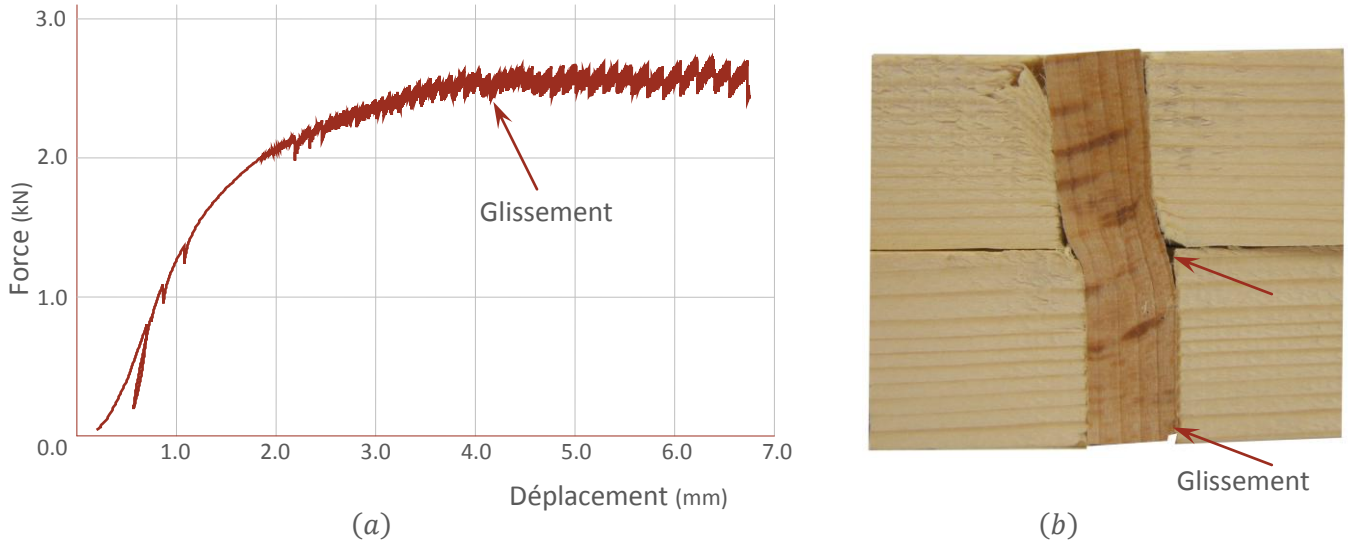


Figure 92 : *Cas type d'une cheville non soudée.*

4.3.3 Résistance et rigidité des assemblages tourillonnés en traction axiale

Le dernier test mis en place pour caractériser la liaison réalisée par le tourillon dans des lamelles en bois de pays est un test de traction axiale. Ce test reprend le principe utilisé pour caractériser la qualité du soudage. La résistance en traction axiale du tourillon n'est pas utilisée en direct dans le dimensionnement des éléments présentés dans ce travail: poutre, plancher et mur. En effet, dans ces éléments, les tourillons sont simplement sollicités en cisaillement lorsque des efforts standard leur sont appliqués. La résistance en traction du tourillon permet uniquement d'assurer la cohésion localisée de l'ensemble des éléments de structures. Dans une étape ultérieure de validation de la résistance des éléments, cette caractérisation sera de première importance. Dans la phase actuelle ce test permet d'avoir des indications sur la qualité du soudage et de ses qualités de résistance en cisaillement.

Pour conduire les expérimentations le protocole suivant a été suivi :

- Détermination des propriétés des éprouvettes : dimensions, masse volumique. Les pièces sont conditionnées dans la salle mécanique pour une humidité du bois de 12% et à une température de 20°C.
- Perçage avec un foret de diamètre 8 mm des éprouvettes en bois d'épicéa (*Picea abies*) dans le sens de la hauteur des pièces.
- Soudage des éprouvettes avec une cheville en hêtre (*Fagus sylvatica*) de diamètre 10 mm.
- Attente minimum de trois jours avant l'essai sur les machines de tests. Les éprouvettes sont maintenues dans la salle conditionnée.
- Test de traction de l'échantillon dans le sens axiale des chevilles.

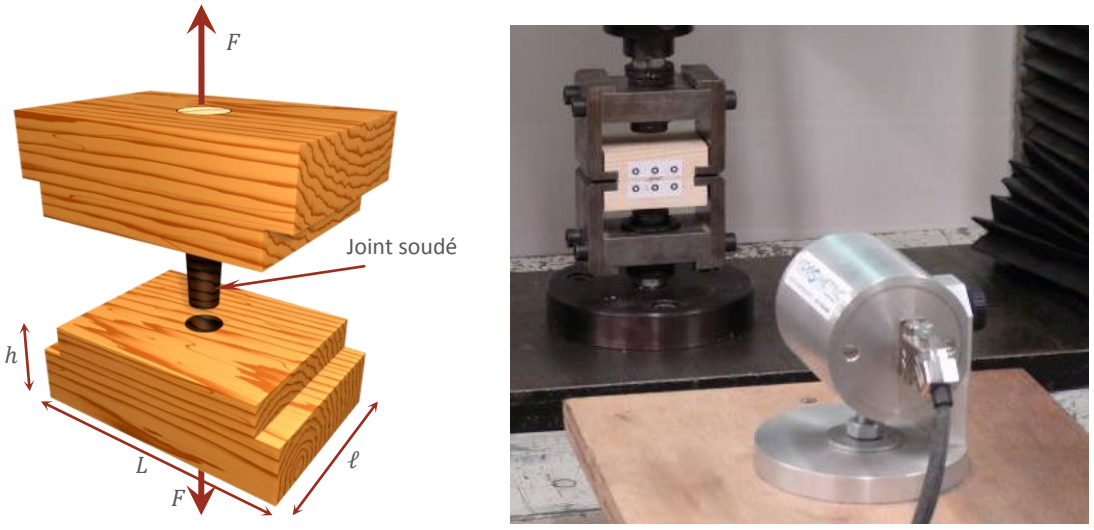


Figure 93 : *Montage de l'essai en traction axiale*

Les éprouvettes ont pour dimensions $L \times \ell \times h$ = 70 x 50 x 20 mm^3. Les chevilles ont une longueur initiale de 90 mm. Les caractéristiques des échantillons sont présentées dans le tableau 26.

Tableau 26 : *Masse volumique des pièces à assembler et des chevilles pour le test en traction axiale*

	Moyenne (kg/m^3)	Ecart type (kg/m^3)	COV (%)
Pièces à assembler	455	49	11
Chevilles	662	57	9

Pour évaluer la rigidité des assemblages, le système de mesures par analyse d'images a été également utilisé.

Le tableau 27 indique les moyennes, écarts type et coefficients de variation du test en traction axiale. Les coefficients de variation sont également assez importants.

Tableau 27 : *Raideurs et forces maximales obtenues pour le test en traction axiale*

		Moyenne	Ecart type	COV (%)
Raideur (N/mm)	Charge	1465	439	30
	Décharge	1632	554	34
	Recharge	1568	406	26
Force maximale (N)		1213	376	31

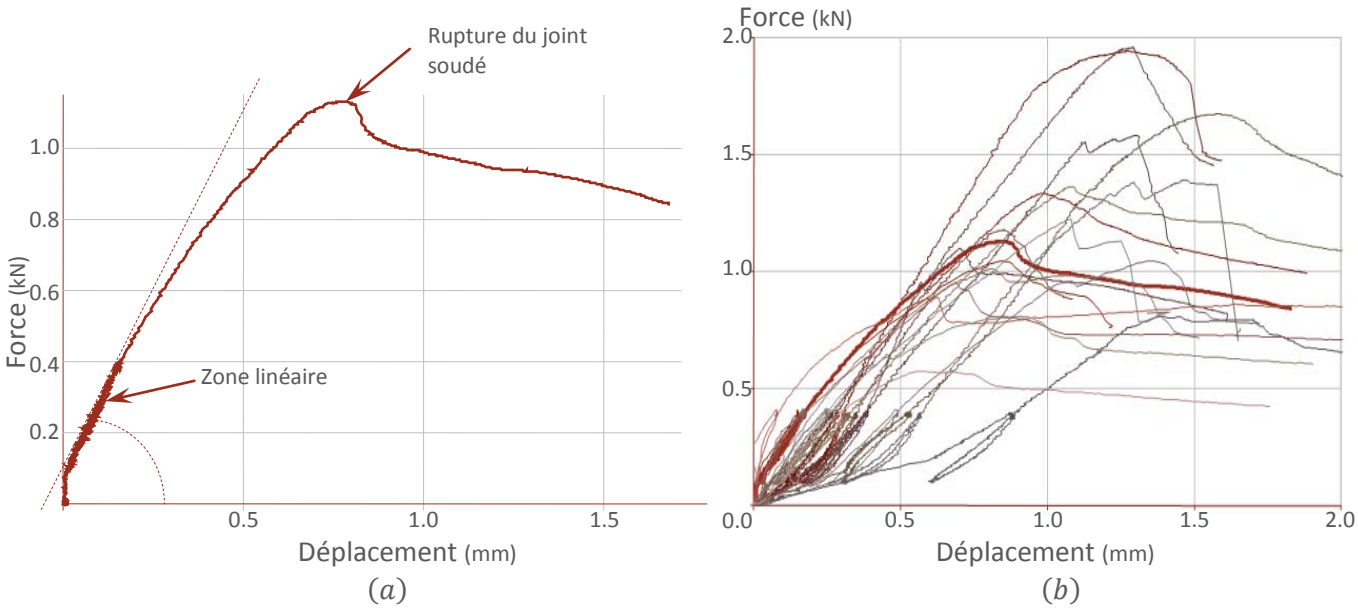


Figure 94 : *Évolution force – déplacement pour un essai en traction axiale (a) de l'échantillon ta-16 et (b) faisceau des échantillons*

La figure 94 montre l'évolution de la force en fonction du déplacement relatif entre les pièces. La courbe se décompose en trois zones caractéristiques. La première zone quasi linéaire caractérise l'élasticité de la liaison. Cette zone se termine lorsque la force chute en laissant apparaître un caractère adoucissant la plupart du temps. Cette chute de l'effort caractérise la rupture du joint de soudage. Si le tourillon ne tenait que par le soudage du bois la rupture de l'assemblage serait parfaitement fragile. Le caractère adoucissant n'est pas lié au soudage mais au coincement du tourillon dans son logement. Une observation locale montre que pendant le soudage, la cheville bois fond et arrive à se "visser" dans le bois d'été. Il est donc nécessaire d'appliquer un effort continu pour faire ressortir le tourillon de son logement (Figure 95). Suivant le sens où la cheville est enfoncée dans la pièce, c'est-à-dire radiale, tangentielle ou mixte, l'effort va varier. Comme dans les essais précédents, uniquement la masse volumique a été relevée. Pour allez plus loin, dans l'analyse de la variabilité des résultats, il serait important également de mettre en relation anatomie et résultats d'essais (Figure 96). Il peut être dit que le joint de soudure

renforce la liaison qui se crée entre le tourillon et son logement. Le matériau fondu plus rigide et dense que le bois comble les vides générés lors du perçage et adhère en certains endroits le long de la cheville.

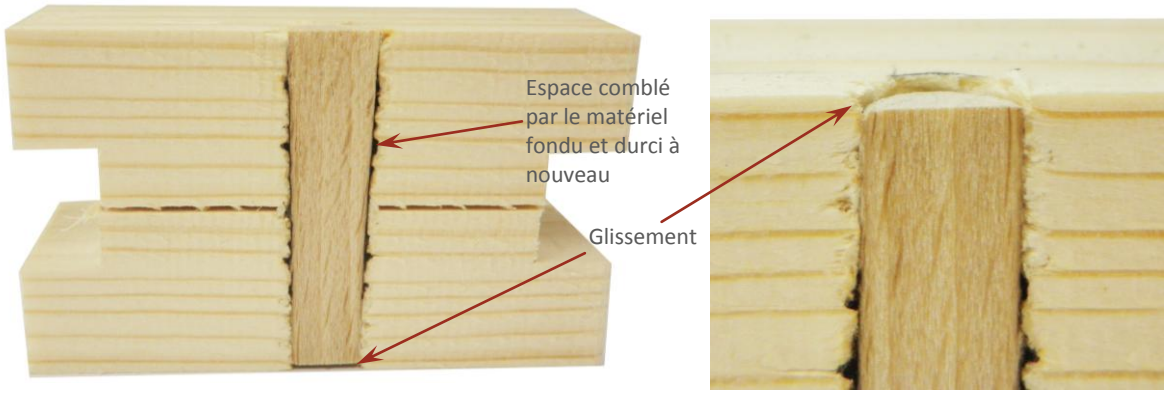


Figure 95 : *Coupe d'un échantillon testé avec glissement de la cheville après rupture du joint soudé*

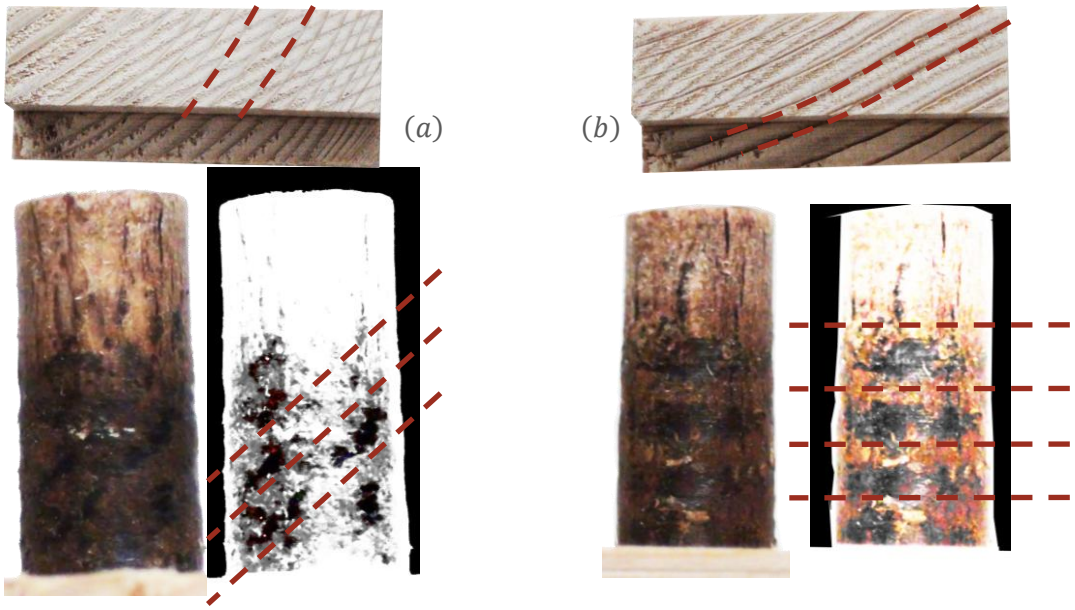


Figure 96 : *Représentation de « l'effet vis » causé par les cernes du substrat : (a) cernes avec un angle supérieur à 45° et (b) cernes avec un angle inférieur à 45°*

4.4 Conclusion

Dans cette partie, une attention particulière a été portée à la maîtrise des paramètres mécaniques de la mise en œuvre des tourillons dans des avivés de bois de pays de faible section. Une machine automatisée a été développée, informatisée et calibrée à cet effet. Elle permet de se placer dans des conditions industrielles pour effectuer des tests sur des assemblages unitaires et fabriquer des éléments ou des assemblages de construction. Cette machine est également un outil d'investigation très intéressant car son dimensionnement permet des mesures suffisamment fines des courants : le couple et l'effort à la mise en œuvre du tourillon peuvent être mesurés en temps réel.

L'optimisation du soudage de tourillons de hêtre (*Fagus sylvatica*) dans du bois de pays (*Picea abies*) ne constituait pas l'objectif principal de ce travail. Tous les éléments sont cependant maintenant rassemblés pour conduire cette étude ultérieure. Les pré-essais effectués montrent que les phénomènes mis en jeux sont particulièrement complexes et si optimisation est possible, elle doit se faire par rapport aux exigences mécaniques des éléments de structures dans leur contexte d'utilisation.

S'il est possible de modéliser les éléments de structures (poutre, poteau, plancher et paroi) pour s'approcher du comportement réel suite aux valeurs obtenues par essais unitaires, il sera également intéressant d'optimiser le joint soudé d'un élément unitaire pour améliorer le comportement global de la structure étudiée.

ELEMENTS DE STRUCTURE

Les éléments de structures présentés dans la section §1.1 à savoir : poutre, poteau, plancher et paroi sont réalisés en utilisant la technologie du soudage par friction rotative. Dans le but d'utiliser des bois locaux, ils sont conçus à partir de planches de sections courantes en bois d'épicéa (*Picea abies*). Cette partie montre la faisabilité et développe les moyens calculatoires pour dimensionner de tels éléments.

L'étude pour deux et trois éléments a permis d'intégrer l'approche de la méthode des γ abordée aux sections §1.2.2 et §1.2.3, leur généralisation suivra le même chemin. Elles sont comparées avec le modèle par éléments finis à la section §6 puis confrontées avec des résultats d'essais aux sections §7.1 et §7.2.

L'étude des poutres et des poteaux expose principalement la confrontation des modèles mathématiques avec l'expérimentation. La partie expérimentale décrit la fabrication, les essais et les interprétations. La dernière phase de cette étape utilisera les éléments de calculs présents dans l'EUROCODE 5 [4] pour investiguer le domaine viscoélastique des liaisons non abordé expérimentalement dans ce travail. C'est grâce à cette approche que les limites en termes de structures pourront être mises en évidence.



Figure 97 : *Composition réelle montrant le positionnement des éléments de structure réalisés*

La figure 97 illustre les deux principaux éléments composant une structure de type ossature réalisés en grandeur réelle, en lamelles croisées assemblées avec la technologie du soudage du bois par friction. Ces éléments sont décrits dans les sections suivantes : §8 pour le plancher et §9 pour les parois. Les modèles conçus sont comparés avec les essais puis une méthodologie de dimensionnement conclue les différentes sections.

« La matière demeure et la forme se perd.»

[Pierre de Ronsard, Extrait de Elégie contre les bûcherons de la forêt de Gastine]

5 AVIVES

Le bois utilisé provient des forêts des VOSGES, contenant principalement de l'épicéa (*Picea abies*). Le bois est réceptionné sous forme d'avivés de dimensions variables et de qualité minimale, en deux lots. Une étude systématique des avivés est faite afin d'avoir les caractéristiques intrinsèques de chacune des pièces, dans le but d'obtenir une adéquation plus forte entre la réalité et l'expérience. Il convient pour cela de mesurer la masse volumique, l'humidité et le module d'élasticité longitudinal de chaque pièce. Le bois étant un matériau orthotrope, il faudrait aussi mesurer les autres constantes élastiques, toutefois, les proportions entre le module d'élasticité longitudinal et le module de cisaillement d'une part, puis le module d'élasticité longitudinal et le module d'élasticité transversal d'autre part, sont obtenues selon la littérature [90]. Le premier lot est destiné principalement pour le plancher, le second pour les murs et les poutres.

5.1 Dimensions des avivés

Dans un premier temps, les avivés sont corroyés afin d'avoir les côtés et les faces de qualité raboté. Dans un second temps les dimensions des avivés sont mesurées : hauteur h, largeur b et longueur L. La précision des mesures est le millimètre.

La suite expose les dimensions standards, le nombre d'éléments est indiqué entre parenthèses. Les quatre hauteurs des avivés possibles sont 18 mm (26), 20 mm (649), 22 mm (140) et 24 mm (195). Les largeurs vont de 85 mm à 175 mm avec les largeurs les plus utilisées : 90 mm (195), 110 mm (162), 140 (181) et 160 (295). Les quatre longueurs standards des avivés sont 3000 mm (232), 3500 mm (260), 4000 mm (298) et 5000 mm (220).

5.2 La masse volumique

Après avoir mesuré la masse m des avivés, pour une précision de 20 g, la masse volumique se calcule selon la relation suivante :

$$\rho = \frac{m}{hbL} \qquad (184)$$

Avec les dimensions en mètre et la masse en kilogramme pour avoir une masse volumique ρ en kg/m^3. La figure 98 illustre la répartition de la masse volumique sur la population des avivés pour des intervalles de 50 kg/m^3 pour les deux lots.

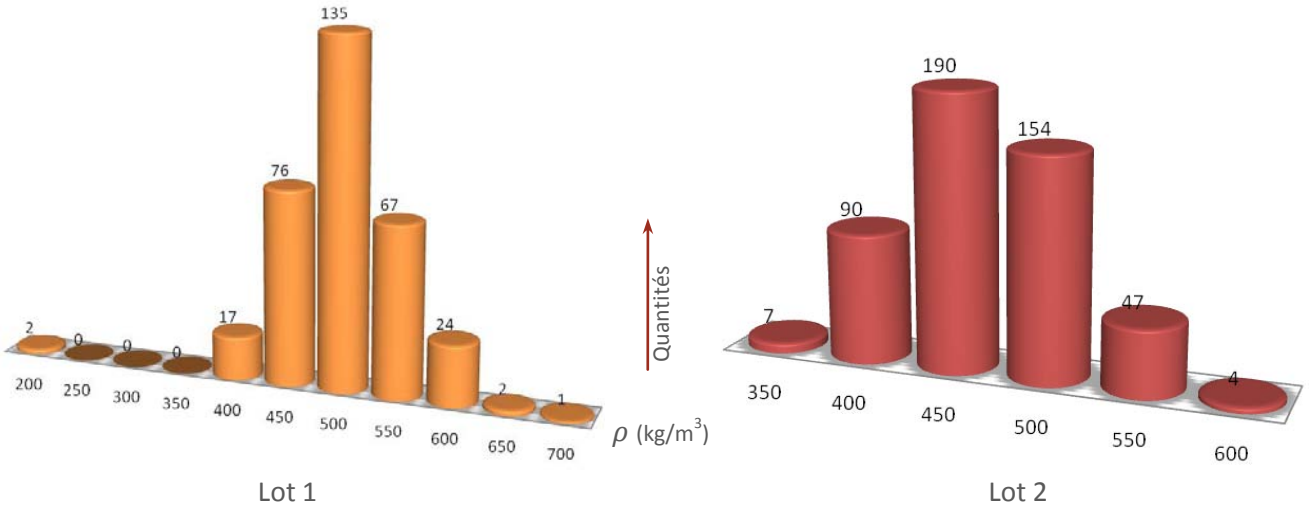


Figure 98 : *Répartition de la masse volumique pour le lot 1 et le lot 2*

Le tableau 28 indique les valeurs moyennes, les écarts types et le coefficient de variation de la masse volumique ρ des deux lots.

5.3 Module d'élasticité longitudinal

La détermination du module d'élasticité longitudinal peut se faire de deux manières : étude statique et étude dynamique.

Tableau 28 : *Données statistique de la masse volumique pour les deux lots*

ρ (kg/m^3)	Moyenne	Écart type	COV	Min	Max	Nb. Echantillons
Lot 1	476	54.23	11%	152	660	324
Lot 2	441	45.29	10%	329	586	492

5.3.1 Étude statique

Le protocole d'étude statique consiste à mesurer la flèche de l'avivé pour les deux côtés, soumis uniquement à son poids propre, puis de calculer la moyenne des flèches obtenues.

La figure 99 présente les paramètres pour le calcul de la flèche moyenne de l'avivé. Les distances $a_{\min}$ et $a_{\max}$ sont les distances mesurées lors de l'essai.

Il en découle les relations suivantes :

$$a_{\min} + f_{\max} = a_{\max} + f_{\min} = h_{\text{app}} \qquad (185)$$

Pour les deux cas présentés, le module d'élasticité doit être le même, donc il vient la relation suivante :

$$f_{\min} + c = f_{\max} - c = f \qquad (186)$$

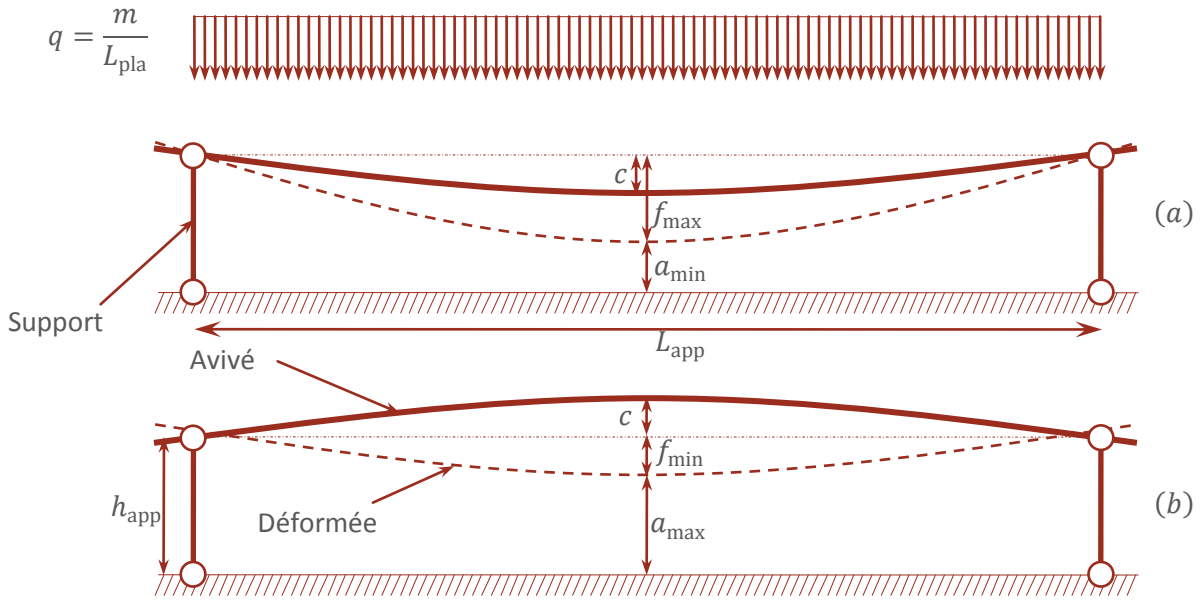


Figure 99 : *Paramétrage pour le calcul de la flèche moyenne : (a) sans contreflèche apparente, (b) avec contreflèche apparente*

Selon les relations (186), la flèche peut être déterminée :

$$f_{\min} + c = f$$
$$f_{\min} + (f_{\max} - f) = f$$
$$f = \frac{f_{\max} + f_{\min}}{2}$$

Ensuite, avec la relation (185),la flèche f s'exprime en fonction des distances mesurées :

$$f = \frac{h_{app} - a_{min} + h_{app} - a_{max}}{2} = h_{app} - \frac{a_{max} + a_{min}}{2} \quad (187)$$

Le chargement réparti dépend de la masse de l'avivé m exprimée en Newton. Il vient :

$$q = \frac{m}{L_{pla}} \quad (188)$$

Ainsi, le module d'élasticité longitudinal E_{pla} s'exprime en fonction de la flèche f et du chargement réparti q :

$$E_{pla,S} = \frac{5qL_{app}^4}{384 f I_{pla}} = \frac{5\frac{m}{L_{pla}}L_{app}^4}{384\left(h_{app} - \frac{a_{max} + a_{min}}{2}\right)I_{pla}} \quad (189)$$

Avec I_{pla} : inertie de l'avivé en mm^4.

5.3.2 Étude dynamique

Pour l'étude dynamique, seule la fréquence fondamentale est étudiée. Pour cela, il convient de faire vibrer l'avivé muni d'un accéléromètre. Il en résulte dans ce cas une trace de l'accéléromètre proche d'une sinusoïde amortie comme représentée à la figure 100(b). Le spectre devient relativement simple et la fréquence fondamentale ressort nettement (Figure 100(c)).

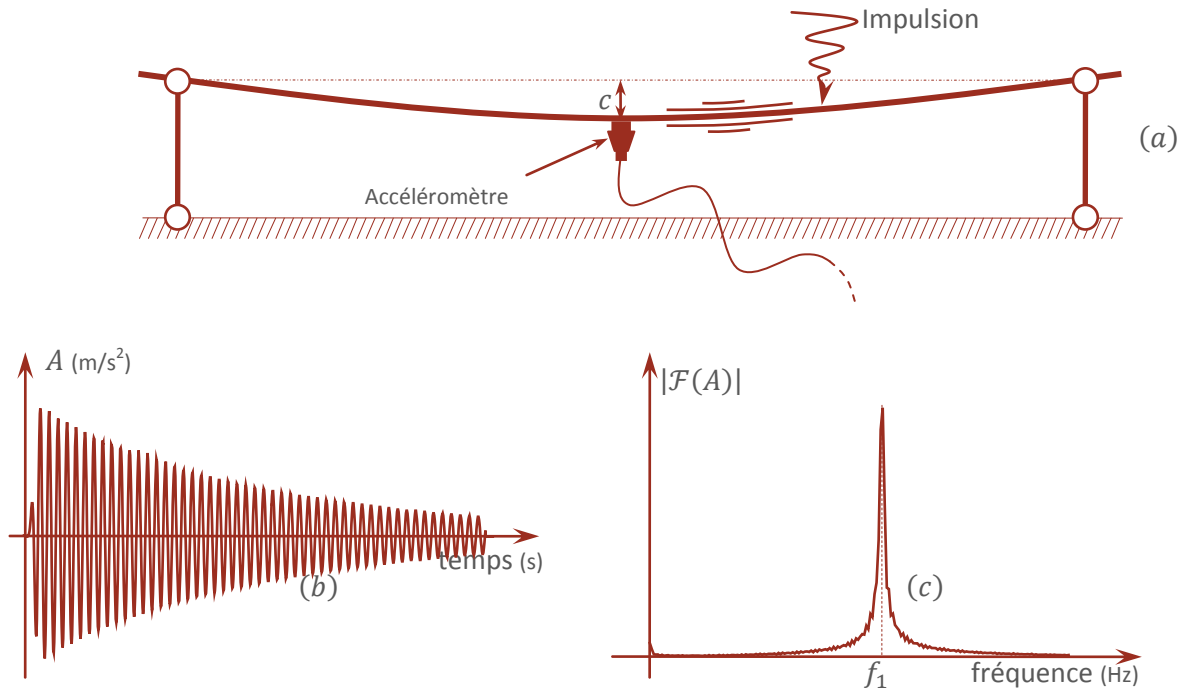


Figure 100 : *Vibration d'un avivé : (a) mode opératoire, (b) exemple de la trace de l'accéléromètre et de son (c) spectre*

Le module d'élasticité s'exprime de la manière suivante :

$$E_{pla,D} = \frac{4}{\pi^2}\frac{f_1^2 L_{app}^4 \frac{m}{L_{pla}}}{I} \quad (190)$$

5.3.3 Comparaison

Seul le lot 1 a été testé avec les deux méthodes. Le lot 2 a été testé uniquement avec l'approche dynamique. La figure 101 représente l'évolution du module d'élasticité issue des essais dynamiques en fonction de celui issue des essais statiques pour le lot 1. Une déviation de l'ordre de 5% est observée.

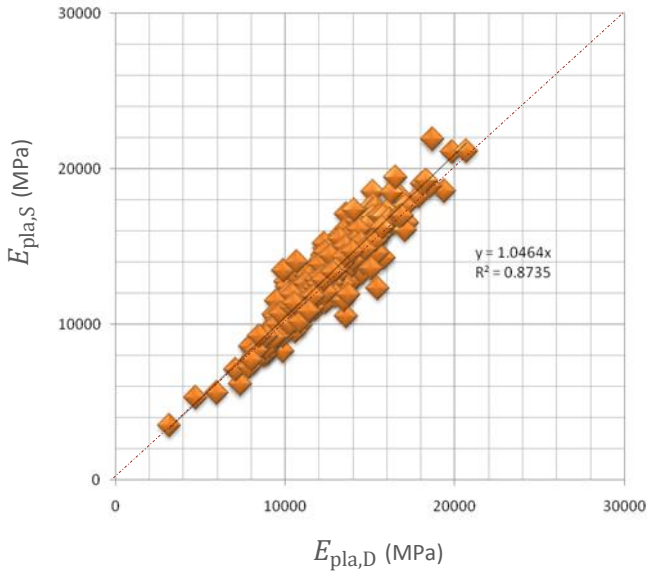


Figure 101 : *Module d'élasticité du lot 1 suite aux essais statique et dynamique*

Les relations (189) et (190) permettent d'exprimer la fréquence fondamentale f_1 en fonction de la flèche f. En faisant attention aux unités, et comme la fréquence et la flèche sont positives ici, il vient :

$$f_1 = \frac{25}{4}\pi\sqrt{\frac{5}{6}}\frac{1}{\sqrt{f}} \approx \frac{18}{\sqrt{f}} \qquad \textbf{(191)}$$

La figure 102 illustre cette relation avec les valeurs expérimentales acquises pour le lot 1. La flèche est comprise dans l'intervalle suivant : $[17.0,\ 67.5]$. La fréquence est comprise dans l'intervalle $[2.05,\ 3.81]$. Il apparait une légère différence entre la formule théorique et les observations expérimentales (191).

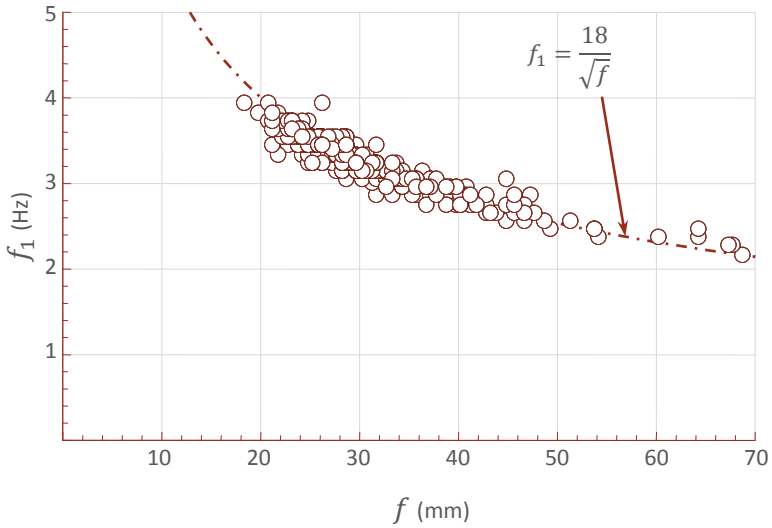


Figure 102 : *Évolution de la fréquence fondamentale en fonction de la flèche*

5.3.4 Répartition

La figure 103 illustre la répartition du module d'élasticité sur la population des avivés pour des intervalles de 1000 MPa.

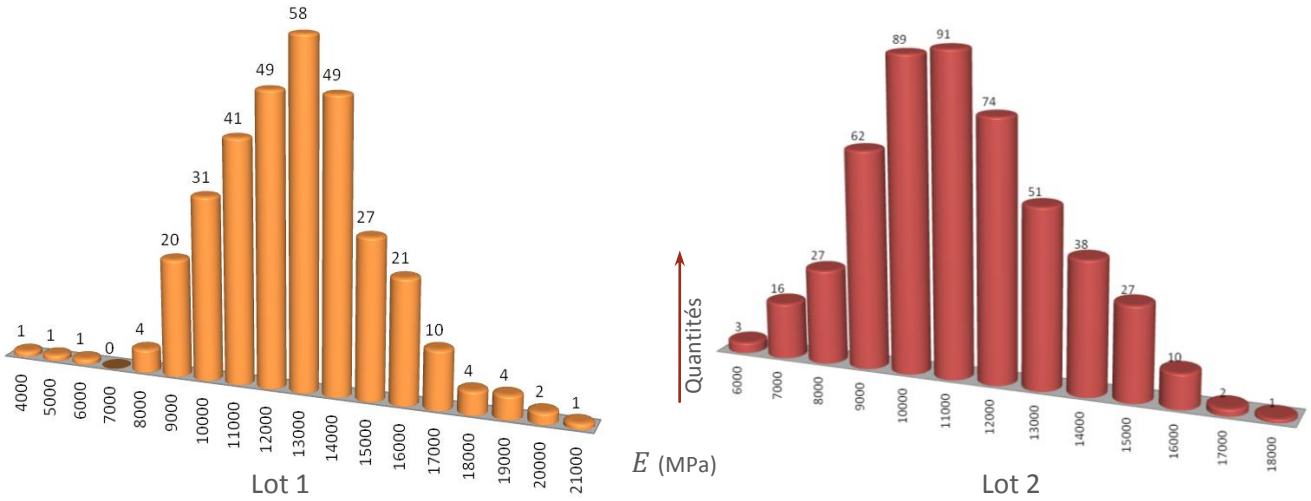


Figure 103 : *Répartition du module d'élasticité pour les deux lots*

Le tableau 29 indique les valeurs moyennes, les écarts types et le coefficient de variation du module d'élasticité longitudinal E des deux lots.

Tableau 29 : *Données statistique du module d'élasticité longitudinal pour les deux lots*

E (MPa)	Moyenne	Écart type	COV	Min	Max	Nb. Échantillons
Lot 1	12256	2470	20%	3153	20692	324
Lot 2	10690	2136	20%	5747	17025	492

5.4 Conclusion

Les masses volumiques et les modules d'élasticité longitudinaux sont déterminés selon les lots. Statistiquement, les deux lots ne sont pas identiques. Les avivés des lots sont relativement variés et représentent les caractéristiques possibles du bois de pays.

Le plancher décrit à la section §8, est fabriqué avec les avivés de 5 m de long, de section 24×90 mm^2. Lors de la réalisation, seulement quelques lamelles ont été testées. L'étude systématique des avivés a été effectuée après la fabrication du plancher. Les avivés restant ont été caractérisés et donne les caractéristiques suivantes :

- masse volumique : 497 kg/m^3,
- module d'élasticité longitudinal : 11815 MPa.

Ces données sont utilisées dans le modèle mathématique du plancher.

« Il ne suffit pas au modèle d'être exemplaire, il faut que nous en soyons saisis ; alors il prend valeur apostolique.»

[René Carbonneau, Extrait de Le destin de frère Thomas]

6 MODELISATION DES POUTRES

6.1 Introduction

Cette section expose les différentes modélisations numériques et analytiques d'une poutre composite reposant sur deux appuis. Dans un premier temps, le modèle par éléments finis est présenté. Ce modèle servira de comparaison avec le modèle analytique de GIRHAMMAR généralisé.

6.2 Modélisation par éléments finis d'une poutre composite

> **Définition 3 :** *La modélisation par éléments finis est une méthode d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles qui se construit sur une formulation équivalente du problème à résoudre* **[91]**.

6.2.1 Description de la modélisation

Le modèle par éléments finis, noté par la suite MEF, est réalisé avec le code de calcul CAST3M du CEA [92]. Ce logiciel à l'avantage d'être gratuit pour les domaines de la recherche et de l'enseignement. Son principal inconvénient est l'interface pour la réalisation du modèle. Toutefois, cela permet de mieux maîtriser le processus de la réalisation d'un modèle par éléments finis.

Cette section expose le modèle d'une poutre sur deux appuis composée de plusieurs lamelles de caractéristiques différentes ou identiques. La description de ce modèle repose sur cinq parties : le paramétrage, le maillage, la modélisation et le calcul proprement dit.

6.2.1.1 Généralités

Le MEF représente une poutre $(\mathcal{P})$ prismatique composée de n planches, reposant sur deux appuis, chargée par un chargement q. Ce modèle est en deux dimensions puisque la poutre étudiée, est chargée uniquement dans la direction de la hauteur de l'élément. Le plan d'étude est le plan moyen de la poutre (Définition 11), celui-ci est muni de la base $\{x, z\}$. Les planches sont considérées comme des matériaux orthotropes.

Le modèle est composé de six types d'éléments :

1. élément « poutre » : contenant l'ensemble des éléments « planche »,
2. élément « planche » : élément constitutif de l'élément « poutre »,
3. élément « joint » : qui représente la liaison à l'interface de deux éléments « planche »,
4. élément « appui » : élément qui supporte l'élément « poutre »,
5. élément « charge » : élément qui représente le chargement de l'élément « poutre »,
6. élément « complément » : élément qui représente les données complémentaires.

6.2.1.2 Le paramétrage

Les unités utilisées sont indiquées avec le paramètre considéré, généralement il correspond aux unités usuelles : mm, N, MPa $=$ N/mm^2.

Les paramètres de l'élément « poutre » sont au nombre de quatre :

1. nombre de planches : nbPla,
2. longueur de la poutre, en mm : L_{pou},
3. la portée, en mm : L_{eapp},
4. La longueur des débords, en mm : L_{bou}.

Les débords sont obtenus en utilisant la relation suivante : $L_{\text{bou}} = \left(L_{\text{pou}} - L_{\text{eapp}}\right)/2$. Ainsi l'élément « poutre » se trouve centré sur les éléments « appui ».

L'élément « planche » étant un matériau orthotrope, il suit la matrice de la loi de comportement avec les aménagements suivants : les directions 2 et 3 sont identiques et représentent le sens transversal, la direction 1 représente le sens longitudinal. Les paramètres de l'élément « planche » sont au nombre de huit :

1. hauteur de la $i^{\text{ème}}$ planche en mm : $h_{pla,i}$,
2. largeur de la $i^{\text{ème}}$ planche en mm : $l_{pla,i}$,
3. module d'élasticité longitudinal E_1 de la $i^{\text{ème}}$ planche en N/mm^2 : $E_{pla,i}$,
4. coefficient E_1/E_2 : coefEt,
5. coefficient E_1/G_{12} : coefEG,
6. coefficient $E_1/(\nu_{12} = \nu_{13})$, en (mm^2/kN) : coefnu1,
7. coefficient E_2/ν_{23}, en (mm^2/kN) : coefnu2,
8. La direction du sens longitudinal : PXX.

De ces paramètres, il en découle les relations suivantes :

$$E_{2,i} = E_{3,i} = E_{pla,i}\text{coefEt}$$

$$G_{12,i} = E_{pla,i}\text{coefEG}$$

$$\nu_{12,i} = \nu_{13,i} = E_{pla,i}/(\text{coefnu1}\times 1000)$$

$$\nu_{23,i} = E_{pla,i}\text{coefEt}/(\text{coefnu2} \times 1000)$$

Le facteur « 1000 » des deux dernières formules est issu de la concordance des unités.

L'élément « joint » connecte deux éléments « planche ». L'élément « joint » suit la loi de comportement élastique linéaire de COULOMB. Les paramètres de l'élément « joint » sont au nombre de six :

1. raideur des organes, N/mm : $K_{\text{org},i}$
2. espacement entre les organes, mm : $e_{\text{org},i}$
3. hauteur du joint, mm : h_{joi}
4. précision pour la réalisation du joint, mm : p_{joi}
5. raideur normal, N/mm^2 ou N/mm^3 : KN$_{\text{joi}}$
6. raideur de cisaillement, N/mm^2 ou N/mm^3 : KS$_{\text{joi},i}$

La raideur normal KN$_{\text{joi}}$ est donnée arbitrairement afin qu'elle n'impacte pas sur le modèle. La raideur de cisaillement est calculée avec la relation suivante : KS$_{\text{joi},i} = K_{\text{org},i}/e_{\text{org},i}$. Elle est ensuite divisée par la largeur de l'élément « planche » lors de la réalisation de la matrice des rigidités.

L'élément « appui » est constitué d'un matériau isotrope indéformable super rigide. Il est réparti de manière égale de part et d'autre des points extrêmes caractérisant la portée. Les paramètres de l'élément « appui » sont au nombre de quatre :

1. largeur des appuis, mm : b_{app}
2. épaisseur des appuis, mm : e_{app}
3. module d'élasticité des appuis, N/mm^2 : Y_{app}
4. longueur des appuis, mm : L_{app}

La longueur des appuis est décomposée en deux longueurs : à gauche L_{appg} et à droite L_{appd}, avec $L_{\text{app}} = L_{\text{appg}} + L_{\text{appd}}$. Il est pris l'ordre de grandeur suivant : $L_{\text{appg}} = L_{\text{appd}} = L_{\text{app}}/2$.

Si la longueur des débords est inférieure à la demi-longueur des appuis L_{appg}, la longueur des appuis L_{appg} est amputée de la différence $L_{\text{appg}} - L_{\text{bou}}$.

L'élément « charge » est appliqué sur l'élément « poutre » sur l'ultime ligne du dernier élément « planche ». Les paramètres de l'élément « charge » sont au nombre de quatre :

1. type de chargement : LOAD ∈ {"REPARTI", "TRIGO", "3POINTS", "4POINTS"}
2. module de chargement sinusoïdal ou réparti, N/mm : q_m
3. module de chargement trois points, N : $Q_{3\text{p}}$
4. module de chargement quatre points, N : $Q_{4\text{p}}$

L'élément « complément » est constitué de paramètres issus des paramètres des éléments précédents qui sont utilisés dans la section maillage. Les paramètres de l'élément « complément » sont au nombre de 10 :

1. précision pour le regroupement des nœuds proches : p_{el}
2. pas de discrétisation dans le sens longitudinal, (mm) : divx
3. pas de discrétisation dans le sens transversal, (mm) : divy
4. discrétisation optimale entre le début de l'élément « poutre » et le début de l'élément « appui » : div1
5. discrétisation optimale de la partie extérieure de l'élément « appui » : div2g
6. discrétisation optimale de la partie intérieure de l'élément « appui » : div2d
7. discrétisation optimale entre les deux extrémités intérieures des appuis : div3
8. discrétisation optimale de la hauteur de l'élément « planche » : div4_i
9. discrétisation dans le joint : div5
10. discrétisation totale : divtot

Selon les paramètres des autres éléments, les discrétisations peuvent être déterminées de la manière suivante :

$$\text{div1} = \left\lfloor \left(L_{\text{pou}} - L_{\text{appg}}\right)/\text{divx} \right\rfloor$$

$$\text{div2g} = \left\lfloor L_{\text{appg}}/\text{divx} \right\rfloor$$

$$\text{div2d} = \left\lfloor L_{\text{appd}}/\text{divx} \right\rfloor$$

$$\text{div3} = \left\lfloor \left(L_{\text{eapp}} - 2L_{\text{appd}}\right)/\text{divx} \right\rfloor$$

$$\text{div4}_i = \left\lfloor h_{\text{pla},i}/\text{divy} \right\rfloor$$

$$\text{divtot} = 2\text{div1} + 2(\text{div2g}+\text{div2d}) + \text{div3}$$

Ces 36 paramètres permettent de caractériser totalement l'élément « poutre ». La figure 104 présente les principaux paramètres.

6.2.1.3 Le maillage

La forme d'un élément « planche » est illustrée à la figure 105, où les paramètres géométriques cités précédemment prennent place. Le maillage des lignes est réalisé avec des segments de type SEG3, qui contiennent trois nœuds : deux aux extrémités et un au centre du segment. Le maillage des surfaces est dessiné avec des éléments rectangulaires dit quadrangle QUA8, qui contiennent huit nœuds : quatre dans les angles et quatre entre chaque angles. Ces éléments augmentent la précision du calcul en dépit du temps de calcul. Les lignes dans le sens de la hauteur, permettent par la suite de visualiser les contraintes dans la section de l'élément « planche », en supposant identique sur toute la largeur de l'élément « planche ». Le maillage est dessiné uniquement avec des rectangles, qui limitent le nombre d'éléments finis par rapport à des éléments triangulaires.

L'élément « planche » possède 16 nœuds. Les quatre nœuds 1, 8, 9 et 16 décrivent les limites de l'élément « planche ». Les appuis comme définis dans la section §C.1.3.3. sont placés aux nœuds 3 et 6. Les nœuds entourant le nœud 3 (resp. 6), c'est-à-dire les nœuds 2 et 4 (resp. 5 et 7) permettent d'avoir un appui plus important. Ensuite, les nœuds de 10 à 15 existent afin d'avoir un maillage régulier le long de la hauteur de l'élément « planche » et pour faciliter l'application du chargement.

Les pas de discrétisation divx et divy peuvent être compris comme la longueur des éléments. En effet pour un élément « poutre » de portée L_{eapp}, le rapport $L_{\text{eapp}}/\text{divx}$ désigne le nombre d'éléments constituant la ligne de longueur L_{eapp}, p.ex. : pour $L_{\text{eapp}} = 3$ m et divx $= 5$ mm, le nombre d'éléments constituant la ligne étudiée est de 600. Il en va de même pour la discrétisation selon la hauteur de l'élément « planche » avec le pas de discrétisation divy.

La définition des discrétisations optimales définies dans la section précédente : paramétrage, donne des maillages réguliers et facilite l'acquisition de points supplémentaires.

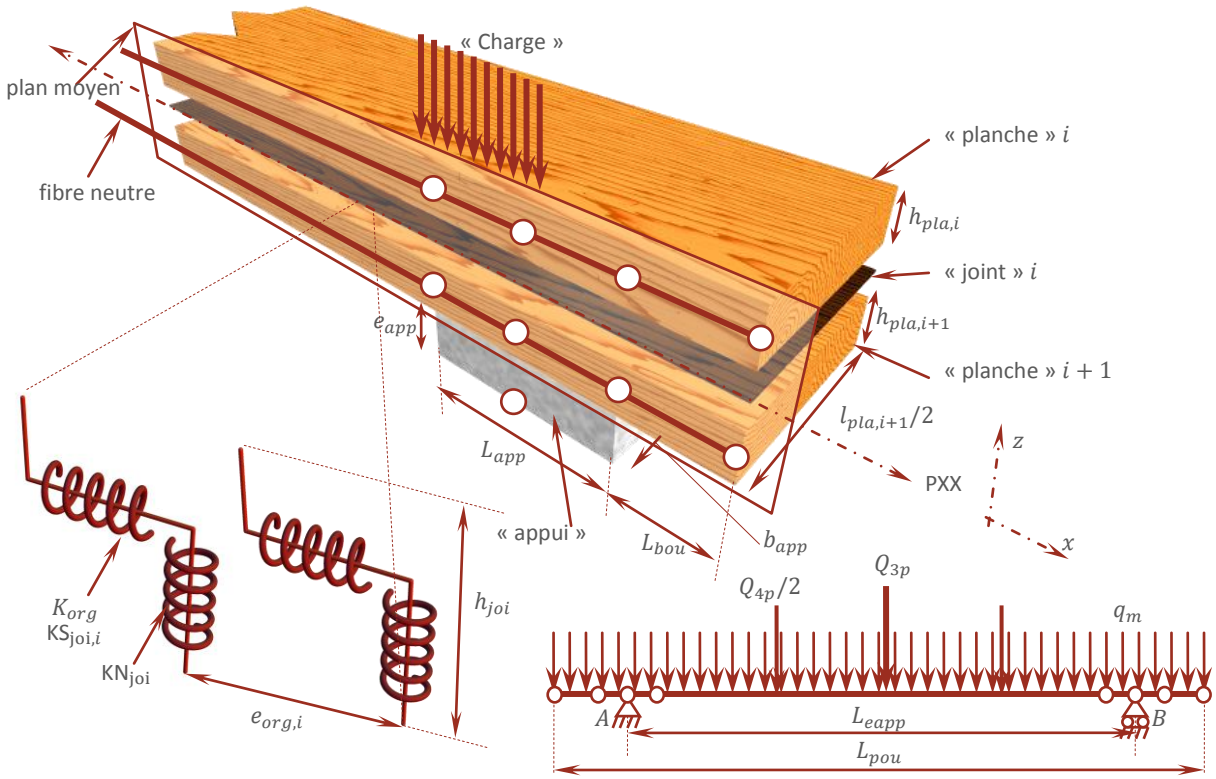


Figure 104 : *Paramétrage de la modélisation par éléments finis de la poutre*

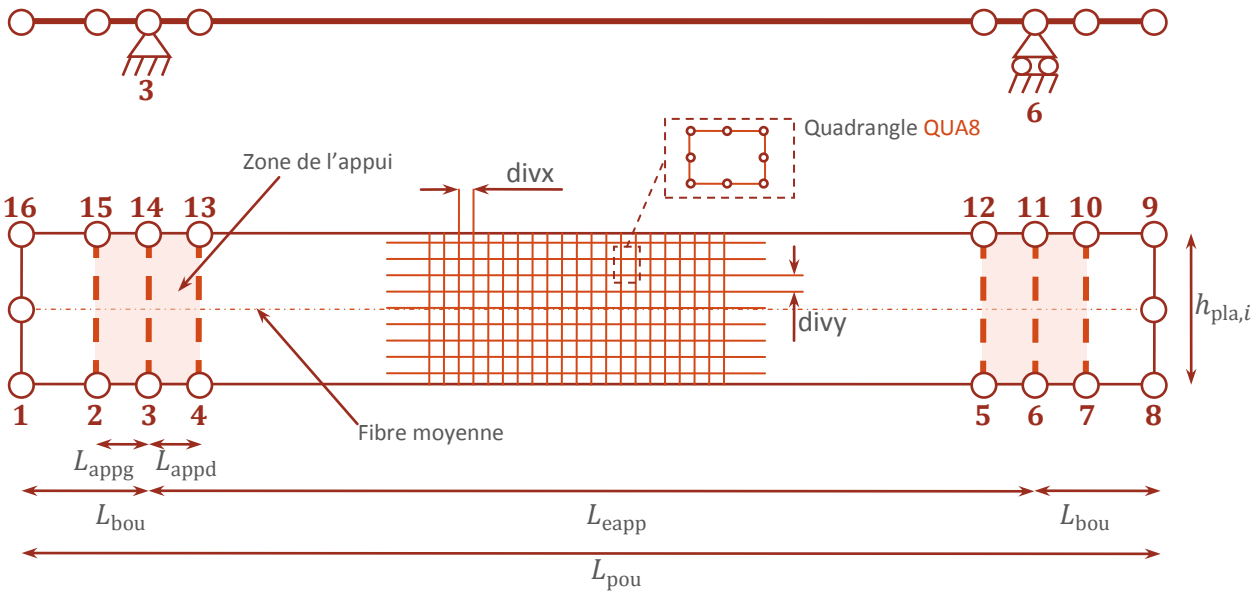


Figure 105 : *Elément « planche »*

Les éléments « joint » créent un élément de raccord d'un nœud p_i à un nœud p_{i+1}, ce raccord possède les propriétés énoncées auparavant. Afin de relier deux éléments « planche », le raccord relie l'ensemble des nœuds $p_i \in [\![1,8]\!]$ de l'élément « planche » i avec l'ensemble des nœuds $p_{i+1} \in [\![9,16]\!]$ de l'élément « planche » $i+1$. Il va de soit que les raccords doivent être réalisés entre les nœuds directement opposés, p.ex. : le nœud 3 avec le nœud 14 (Figure 106). Les éléments « joint » sont représentés par des segments de type RAC3 pour correspondre avec la définition des éléments « planche ».

La hauteur du joint est généralement faible (de l'ordre du millième de millimètre) afin d'avoir une poutre sensiblement proche de la réalité.

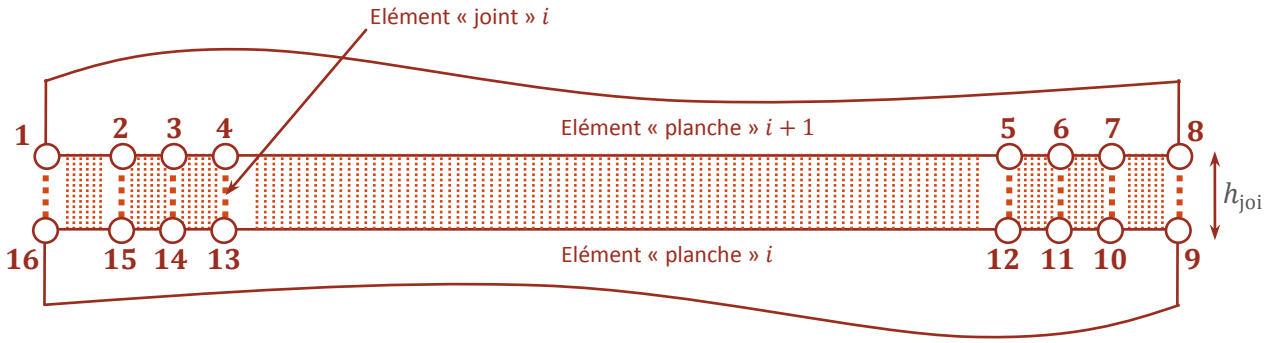


Figure 106 : *Elément « joint »*

L'élément « appui » peut être représenté de deux manières (Figure 107) :

1. juste par les nœuds 3 et 6 pour des appuis ponctuels (linéaire en trois dimensions) : type 1
2. constitué d'un rectangle (parallélépipède en trois dimensions). L'avantage est la diffusion des efforts et la diminution des concentrations des contraintes aux appuis : type 2.

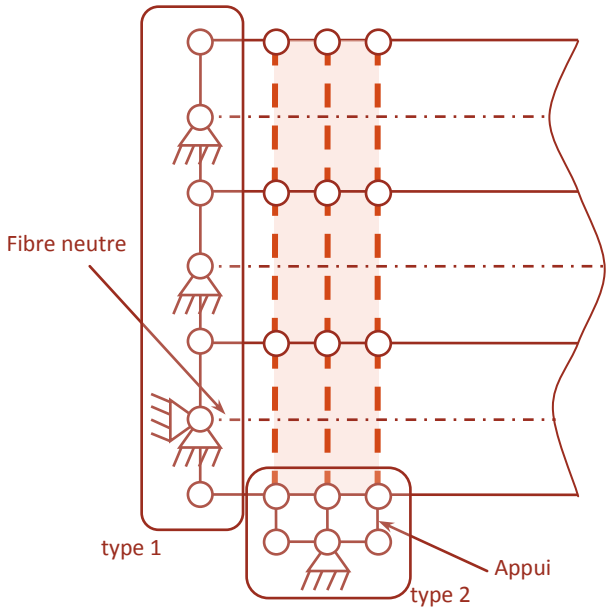


Figure 107 : *Les deux types d'appuis pour le MEF de la poutre*

L'élément « charge » doit avoir des points d'applications. Le chargement est constitué de deux familles : les chargements répartis et les chargements ponctuels. Les chargements répartis sont de deux types : uniforme sur la portée et de forme sinusoïdale sur la portée : le paramètre LOAD ∈ {"REPARTI", "TRIGO"} dans ces cas. Les nœuds d'application pour ces chargements sont constitués de l'ensemble des nœuds situés entres les nœuds 11 et les nœuds 14. Soit $p_{\text{char},i}$ un nœud compris entre les nœuds 11 et les nœuds 14. La force $F_{p_{\text{char},i}}$ qui doit lui être appliquée correspond à la relation suivante pour un chargement uniforme sur toute la portée :

$$F_{p_{\text{char},i}} = -q_m \frac{L_{\text{eapp}}}{1 + 2\text{div2d} + \text{div3}}$$

Pour un chargement sinusoïdal sur toute la portée, la relation est la suivante :

$$F_{p_{\text{char},i}} = -q_m \frac{L_{\text{eapp}}}{1 + 2\text{div2d} + \text{div3}} Sin\left(\frac{x_{p_{\text{pla},i}}}{L_{\text{eapp}}} 180\right)$$

Où $x_{p_{\text{pla},i}}$ est l'abscisse du nœud $p_{\text{char},i}$. Le signe « - » désigne le sens de l'application de la charge.

Les chargements ponctuels sont de deux types : 3 points et 4 points, il en découle le paramètre LOAD ∈ {"3POINTS", "4POINTS"}. L'application du chargement ponctuel se réalise sur un ou plusieurs nœuds. L'intérêt d'augmenter la surface d'application permet de diminuer les concentrations de contraintes et de diffuser la charge.

L'élément « poutre » est l'ensemble des n éléments « planche » et des $n-1$ éléments « joint ». Cet élément repose sur deux éléments « appui ». L'élément « planche » reposant sur les appuis est le $n^{\text{ième}}$ élément. L'élément

« planche » qui est chargé est le 1er élément. Ces dénominations permettent d'avoir le même ordre des éléments que le modèle de la méthode des γ généralisée.

6.2.1.4 Modèle mathématique

La modélisation mathématique repose sur des formulations selon le type du matériau et la forme des éléments composant le maillage. Dans le désir d'avoir un comportement élastique orthotrope des planches, le modèle choisi pour les éléments « planche » dans le logiciel CAST3M est MECANIQUE ELASTIQUE ORTHOTROPE. Il convient d'introduire les constantes élastiques caractérisant le matériau des éléments « planche ». Selon la matrice de HOOK (323), les coefficients listés dans le paragraphe précédent « paramétrage » prennent les valeurs suivantes selon [90] :

$$\text{coefnu1} = 30$$

$$\text{coefnu2} = 2$$

Selon les valeurs des coefficients de HOOK issues de la norme NF EN 338 [78], les coefficients pour convertir le module d'élasticité E_1 en module d'élasticité E_2 et en module de cisaillement G_{12} valent :

$$\text{coefEt} = 1/30 = 0.0333$$

$$\text{coefEG} = 1/16 = 0.0625$$

La direction principale du plan orthotrope est prise dans le sens de la longueur des éléments « planche », il vient :

$$\text{PXX} = \{1, 0\}$$

Le module d'élasticité $E_{pla,i}$ dans cette direction est une donnée pouvant varier et donc être différente selon les éléments « planche ».

La modélisation des éléments « joint » est prise comme élastique linéaire, et ayant choisi des éléments de raccord RAC3 pour suivre les formulations des éléments « planche », le modèle choisi dans le logiciel CAST3M est MECANIQUE ELASTIQUE JOI3.

La raideur de cisaillement $\text{KS}_{\text{joi},i}$ pouvant varier, elle dépend des considérations du modèle. La raideur normal $\text{KN}_{\text{joi}} = 9 \times 10^{10}$ N/mm/mm afin qu'il ne modifie pas le comportement souhaité du joint.

Les conditions aux limites dépendent du type d'étude souhaité. Toutefois, pour les études selon les éléments « charge » et le paramètre LOAD, pour reproduire grossièrement les conditions des modèles analytiques (sections §1.2.3 et §C.4), la fibre moyenne des éléments « planche » est bloquée aux extrémités dans la direction z, puis le centre de celle-ci est bloqué dans la direction x.

6.2.1.5 Calcul et interprétation

La rigidité effective de la poutre peut être calculée. Suite à la résolution du système, le champ des déplacements est obtenu. Après la détermination de la flèche zmax, la rigidité de la poutre peut être calculée selon le paramètre LOAD. Les formules sont présentées dans le tableau 30.

Tableau 30 : *Rigidité selon le paramètre LOAD*

LOAD	REPARTI	TRIGO	3POINTS	4POINTS
EIEF	$\frac{5 \text{ qm Leapp}^4}{384 \text{ zmax}}$	$\frac{\text{qm Leapp}^4}{\pi^4 \text{ zmax}}$	$\frac{\text{Q3P Leapp}^3}{48 \text{ zmax}}$	$\frac{\text{Q4P A}}{\text{zmax}}$

La raideur à l'interface peut être trouvée selon les coordonnées initiales des nœuds $\{x_{\text{abs}}, z_{\text{abs}}\}$,le champ des déplacements des nœuds $\{x_{\text{dep}}, z_{\text{dep}}\}$ et les éléments de la RdM (moment fléchissant et rotation), pour cela, une méthodologie doit être mise en place. Elle permettra de déterminer par la suite les raideurs à l'interface pour les essais des poutres pleines de la section §7.2. Selon les essais, seuls les déplacements de la fibre neutre des planches sont connus dans un intervalle entre l'application de la charge et des appuis tout en respectant l'hypothèse 4 de St VENANT.

Selon la relation (194), le calcul de la raideur à l'interface peut être calculé, il en découle :

$$K_{i,k} = \frac{\sum_{u=1}^{i} \delta N_{u,k}}{f_{i,k}}$$

$$K_{\mathrm{org},i,k} = \frac{\sum_{u=1}^{i} \delta N_{u,k}}{f_{i,k}} e_{\mathrm{org},i,k}$$

Avec $K_{i,k}$ raideur linéique et $K_{\mathrm{org},i,k}$ raideur par organe.

En retravaillant la relation (193), il vient le calcul du glissement :

$$f_{i,k} = x_{\mathrm{dep},i+1,k} - x_{\mathrm{dep},i,k} \pm z_{\mathrm{der},i} \frac{1}{2}\left(h_{pla,i} + h_{pla,i+1}\right)$$

Avec $z_{\mathrm{der},i,k}$ la rotation des sections, il faut pour cela, calculer la dérivée du champ de déplacement selon les abscisses, il en résulte :

$$z_{\mathrm{der},i,k} = \frac{z_{\mathrm{dep},i,k+1} - z_{\mathrm{dep},i,k-1}}{x_{\mathrm{abs},i,k+1} - x_{\mathrm{abs},i,k-1}}$$

Le calcul de la variation de l'effort normal se défini comme :

$$\delta N_{i,k} = \frac{N_{i,k+1} - N_{i,k-1}}{x_{\mathrm{abs},i,k+1} - x_{\mathrm{abs},i,k-1}}$$

Avec :

$$N_{i,k+1} = x_{\mathrm{der},i,k+1} E_{pla,i} h_{pla,i} l_{pla,i}$$

$$x_{\mathrm{der},i,k} = \frac{x_{\mathrm{dep},i,k+1} - x_{\mathrm{dep},i,k-1}}{x_{\mathrm{abs},i,k+1} - x_{\mathrm{abs},i,k-1}}$$

6.2.1.6 Limites

L'étude du maillage montre la présence d'interpénétration entre les éléments « planche » par exemple. Cependant, pour une amplification de 1, cette erreur est infinitésimale et difficile à déterminer [7]. Dans la suite, lors de l'utilisation du MEF, cette erreur est négligée.

Le frottement devrait en toute rigueur être intégré dans le modèle. MARTIN [7] a montré que le frottement influençait le résultat final autour de 2%. Pour cette raison, le modèle par éléments finis est libre de tout frottement.

6.2.2 Evolution des contraintes

A titre d'illustration, la poutre composite étudiée repose sur les valeurs numériques énoncées dans le tableau 31.

La figure 108 présente le maillage de la poutre composite étudiée (a), avec les conditions aux appuis de type 1 (b) et les conditions aux appuis de type 2 (c).

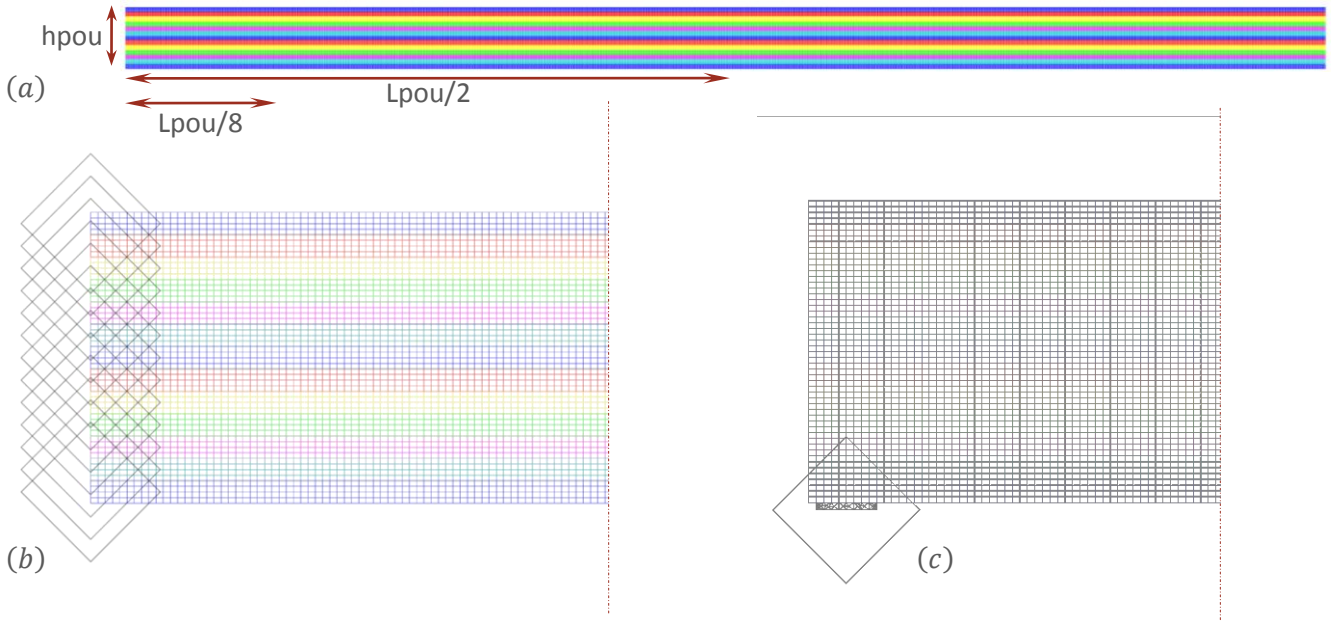


Figure 108 : *Maillage de la poutre composite dans le MEF : (a) vue globale, (b) blocage aux appuis (c) chargement sinusoïdal*

La figure 109 présente la poutre composite fléchie (a). Il est intéressant de noter la forme de la section aux extrémités, elles se gauchissent. Le glissement des lamelles est représenté dans l'image (b).

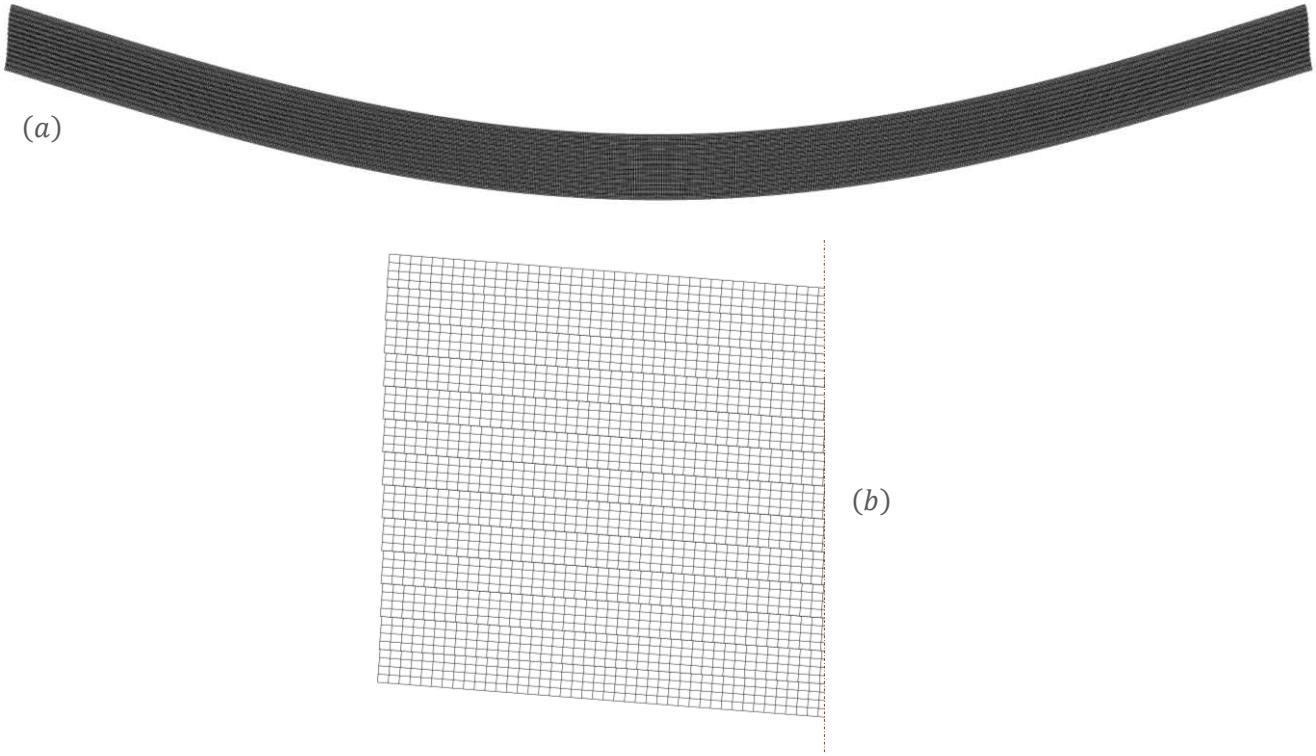


Figure 109 : *Allure de la déformée de la poutre composite dans le MEF*

La figure 110 indique les contraintes de flexion dans les lamelles avec une vue globale (a), une vue au niveau des appuis (b) où la contrainte est quasiment nulle et une vue au centre de la poutre (c) où la contrainte de flexion y est maximale.

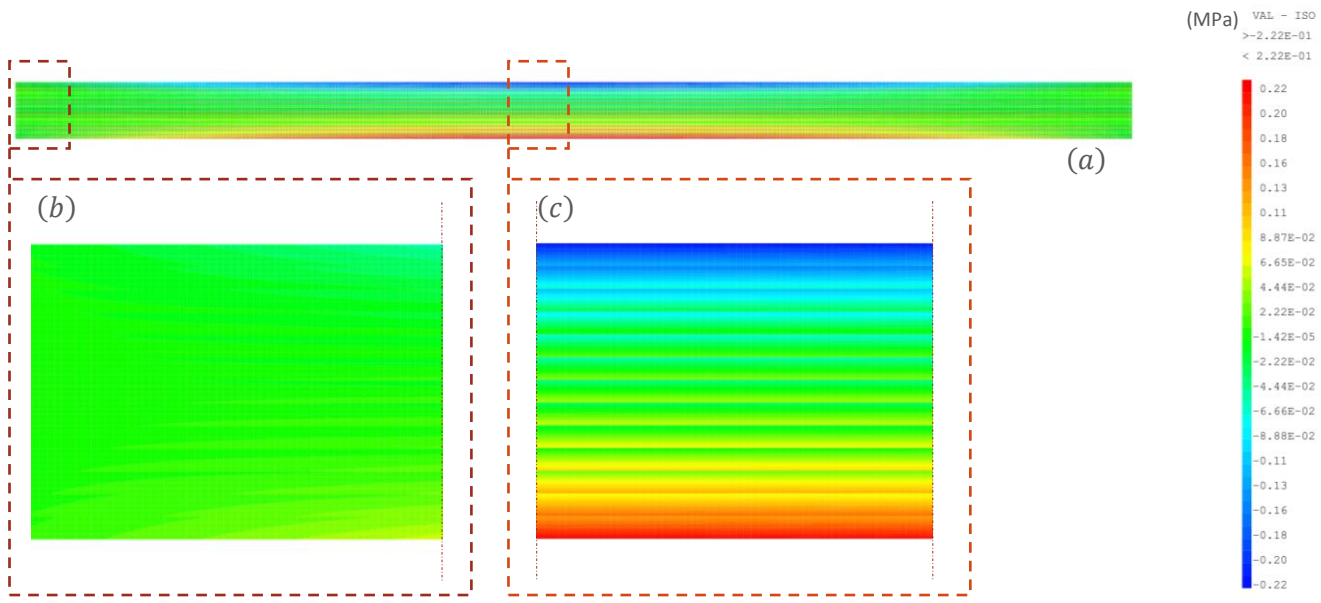


Figure 110 : *Contrainte de flexion (SMXX) du MEF*

De même, la figure 111 illustre les contraintes de cisaillement. L'échelle des iso-valeurs est réduite afin de voir les contraintes de cisaillement. En effet, les concentrations de contrainte au niveau des appuis masquent les contraintes de cisaillement sur le reste de la poutre composite.

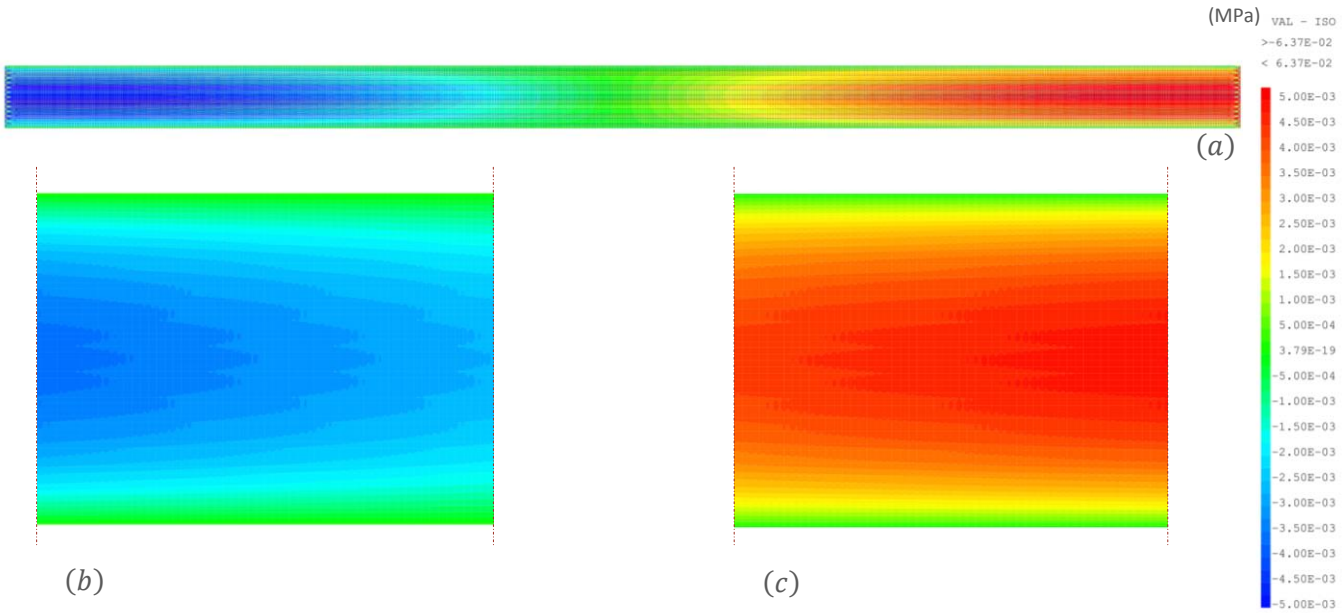


Figure 111 : *Contrainte de cisaillement (SMXY) du MEF*

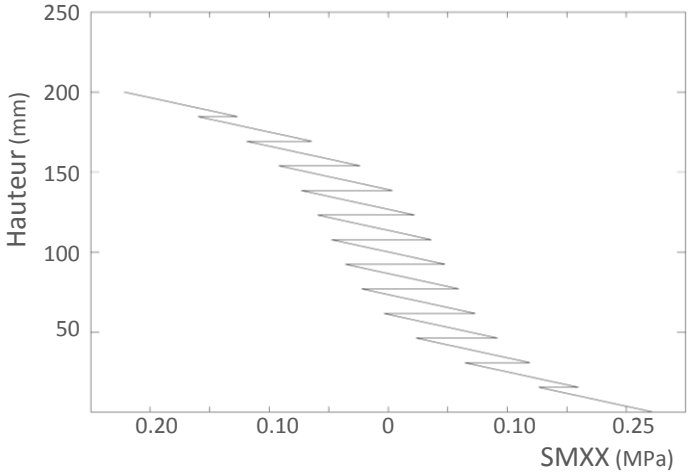


Figure 112 : *Diagramme des contraintes normales de forme sigmoïdale pour x = Lpou/2*

Les diagrammes de contraintes normales et de cisaillement pour une section donnée, sont représentés à la figure 113 pour $x = \text{Lpou}/8$ et à la figure 112 pour $x = \text{Lpou}/2$, selon les considérations de la figure 108. Il apparait que la contrainte de cisaillement est nulle au centre de la poutre, comme le montre la vue plus globale de la figure 111(a).

Il convient de comparer ce modèle afin de voir sa pertinence.

6.2.3 Comparaison

Puisque le MEF peut modéliser une poutre composite avec un nombre non limité de lamelles, la comparaison de celui-ci avec le modèle simplifié de KREUZINGER §1.2.4 peut être réalisée. Pour cela, il est pris une poutre composée de 13 lamelles avec les mêmes sections et caractéristiques répertoriées dans le tableau 31.

Tableau 31 : *Valeurs numériques pour la comparaison des modèles*

	n	h_i (mm)	b_i (mm)	A_i (mm^2)	I_i (mm^4)	E_i (MPa)	Lpou (m)	$e_{i,i\pm1}$ (mm)	$c_{i,i\pm1}$ (N/mm)	$K_{i,i\pm1}$ (N/mm^2)
Valeurs	13	200/n=15.4	160	2461.5	48551	11000	4	40	3500	87.5

La comparaison portera uniquement sur la part du moment et non de l'effort tranchant. Pour cela, les modules de cisaillement $G_i \to \infty$ MPa. Dans le MEF, le coefficient coefEG doit être relativement grand, il sera imposé à 4, ce qui évite des problèmes d'instabilité du calcul.

La poutre repose sur deux appuis simples, le chargement est un chargement sinusoïdal d'amplitude q_m de 0.1 N/mm.

Le calcul des erreurs des contraintes du modèle étudié par rapport aux modèles MEF s'effectue avec la relation suivante :

$$\epsilon = \frac{\text{modele analytique} - \text{MEF}}{\text{MEF}} \qquad \textbf{(192)}$$

Les contraintes normales sont comparées pour $x = \text{Lpou}/2$ et les contraintes de cisaillement sont étudiées en $x = \text{Lpou}/8$.

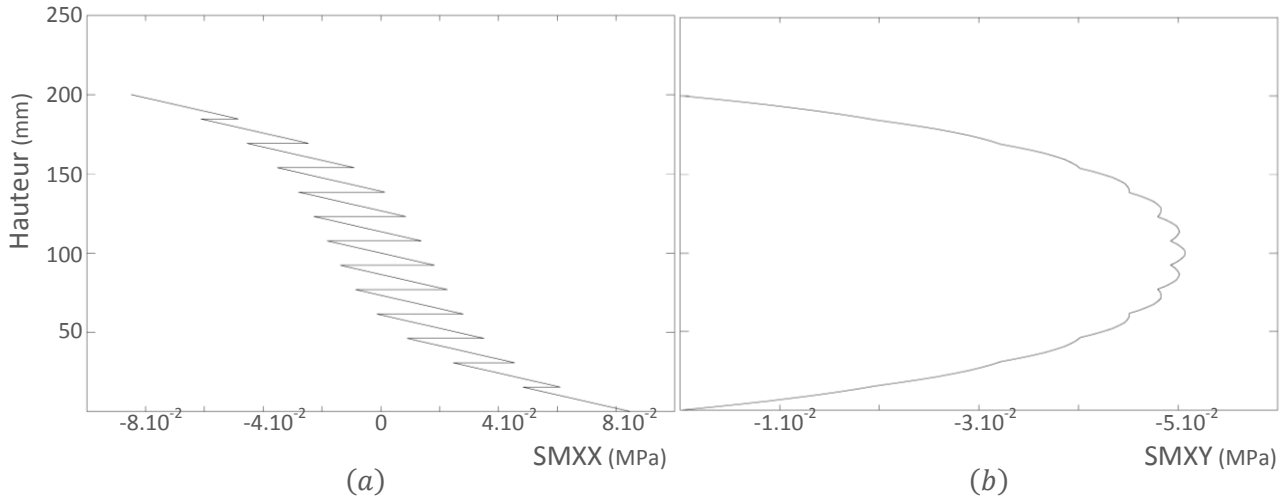


Figure 113 : *Diagramme des contraintes normales (a) et de cisaillement (b) pour x = Lpou/8*

La figure 114 illustre les diagrammes des contraintes normales et de cisaillement pour le modèle de KREUZINGER et le MEF. Il en résulte que pour la configuration présente, au vue de la contrainte normale totale, le modèle de KREUZINGER est linéaire par rapport au MEF qui tend vers une forme sigmoïdale. Ce phénomène a été obtenu par PIRAZZI [9], et conforte la remarque donnée à la fin de la section §1.2.1. Cependant, pour les contraintes normales une erreur de 20% est à noter au niveau des fibres extrêmes de la poutre et 98% autour du centre de la section. L'erreur au niveau des fibres extrêmes est celle qui importe puisque ces lamelles ont une plus grande part de traction ou de compression que celle au centre de la section. De même, pour les contraintes de cisaillement une erreur de 22% se situe au niveau des fibres extrêmes qui n'est pas trop gênante puisque la contrainte maximale est au centre de la section, pour une erreur de 9%.

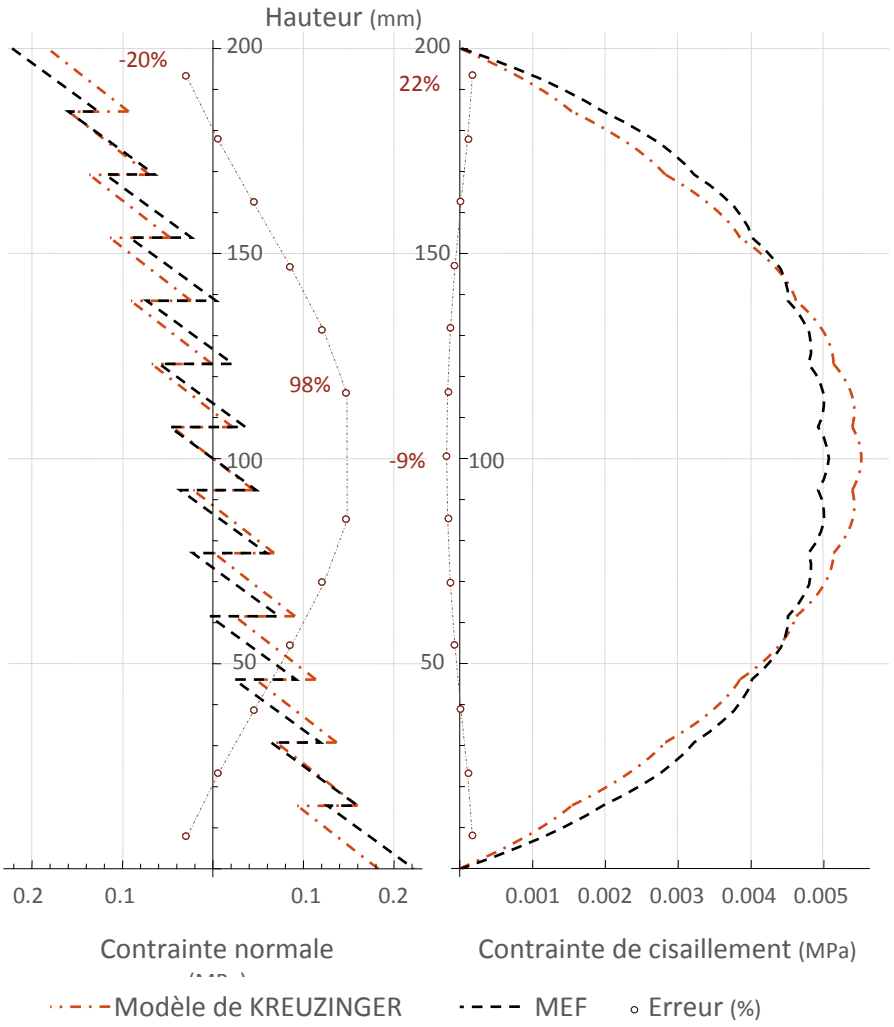


Figure 114 : *Diagramme des contraintes – comparaison entre les modèle de KREUZINGER et le MEF*

La figure 115 indique les contraintes normales, puis les contraintes de cisaillement du modèle de KREUZINGER en fonction du MEF. Il apparait bien l'écart énoncé précédemment, avec une analyse sur toute la hauteur de la poutre.

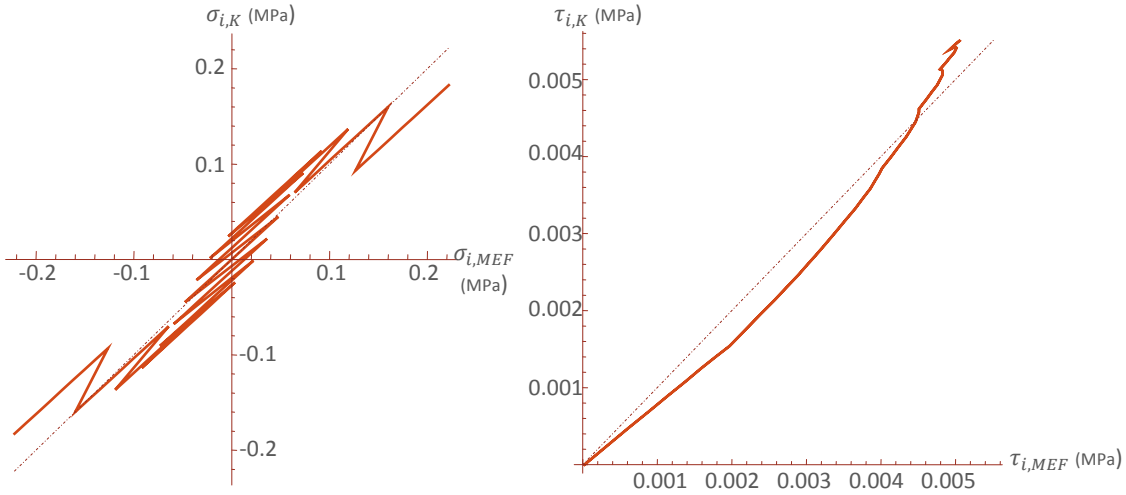


Figure 115 : *Diagrammes des contraintes du modèle de KREUZINGER en fonction du MEF*

Pour la rigidité effective, la figure 116 présente la déformée des deux modèles. Il vient que le modèle de KREUZINGER est moins souple que celui du MEF. Cette conclusion peut amener le doute sur la validité du MEF puisque le modèle étant une approximation numérique du problème, une question peut se poser : est-ce que la part de l'effort tranchant est bien supprimée ? Toutefois le comportement rejoint l'étude de PIRAZZI [9] sur le comportement entre le MEF et le modèle de KREUZINGER.

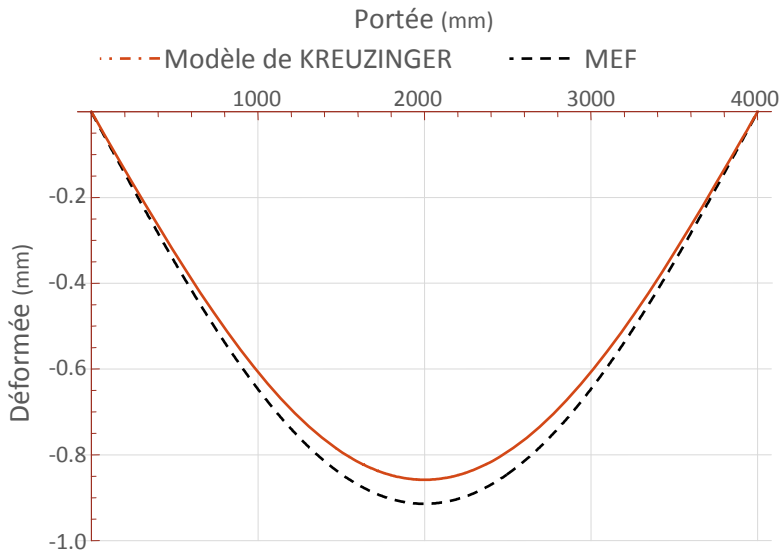


Figure 116 : *Déformée de la poutre pour le modèle de KREUZINGER et le MEF*

Le tableau 32 indique les valeurs numériques de la flèche (au centre de la portée) et de la rigidité effective des deux modèles. Le modèle de KREUZINGER prévoit la flèche d'une telle configuration, à 6% prêt. Ce modèle simplifié donne les bons ordres de grandeur mais possède une faiblesse au niveau des fibres extrêmes de la poutre.

Tableau 32 : *Valeur numérique de la flèche et de la rigidité pour le modèle de KREUZINGER et le MEF*

	MEF	Modèle simplifié	Erreurs
Flèche (mm)	0.91294	0.857747	6.1%
Rigidité (Nmm^2)	2.8787×10^{11}	3.06395×10^{11}	6.5%

Il convient de trouver un modèle qui pourrait être plus précis au niveau des fibres extrêmes de la poutre du point de vue des contraintes normales, puis d'obtenir une rigidité effective pas trop éloignée du MEF. Pour cela, le modèle exact de GIRHAMMAR semblerait convenir. L'utilisation de ce modèle demande une généralisation de la méthode au préalable, puisqu'elle serait limitée à deux éléments actuellement.

6.3 Généralisation de la méthode exacte

6.3.1 Généralisation

Cette section s'attache à généraliser la méthode exacte de GIRHAMMAR pour une poutre composée de n lamelles, soumise à un chargement de type sinusoïdal et reposant sur deux appuis. La méthode expliquée dans la section §1.2.3 est suivie globalement. Ainsi pour mieux maîtriser le mécanisme de généralisation, il convient de se référer à cette section ainsi que la section §C.5 décrivant le procédé pour la détermination des solutions récursives.

6.3.1.1 Mise en équation

En s'inspirant de la figure 13, la relation (87) devient pour le glissement entre la lamelle i et la lamelle $i+1$:

$$s_{t,i,i+1} = (u_{i+1} + w'v_{i+1}) - (u_i - w'v_i) = u_{i+1} - u_i + w'v_{i,i+1} \qquad (193)$$

Avec $v_{i,i+1} = v_i + v_{i+1}$. Il vient en prenant la même hypothèse que pour la section §1.2.3.1 au sujet de la raideur à l'interface, l'expression du flux de cisaillement :

$$t_{w,i,i+1} = K_{i,i+1}s_{t,i,i+1} = K_{i,i+1}\left(u_{i+1} - u_i + w'v_{i,i+1}\right) \qquad (194)$$

La relation entre l'effort normal et la variation du déplacement selon x peut être exprimée de la même manière que la relation (90) reprise ici :

$$N_i = -E_iA_i\frac{du_i}{dx} = -E_iA_iu_i' \qquad (195)$$

Le signe négatif est présent afin de suivre la convention prise à la note 1

Selon la figure 117(a), la formule reliant la variation de l'effort normal avec le flux de cisaillement s'écrit de la manière suivante :

$$N_i + t_{w,i,i+1}dx - t_{w,i-1,i}dx = N_i + dN_i\,, \quad \Rightarrow \frac{dN_i}{dx} - t_{w,i,i+1} + t_{w,i-1,i} = 0 \qquad (196)$$

Avec les conditions aux extrémités : $t_{w,0,1} = t_{w,n,n+1} = 0$ puisque par hypothèse $K_{0,1} = K_{n,n+1} = 0$ car il n'y a plus aucune interface. Ces n équations peuvent exprimer le flux de cisaillement $t_{w,i,i+1}$ en fonction des variations des efforts normaux : N_i' :

$$t_{w,i,i+1} = -\sum_{j=1}^{i} N_j' = \sum_{j=i+1}^{n} N_j' \qquad (197)$$

L'équilibre du tronçon illustré à la figure 117(b) permet d'aboutir à la relation liant l'effort tranchant T_i, le moment fléchissant M_i et les flux de cisaillement $t_{w,i,i+1}$ et $t_{w,i-1,i}$:

$$\begin{gathered} -M_i + T_i dx - t_{w,i,i+1}dx v_i - t_{w,i-1,i}dx v_i + (M_i + dM_i) = 0 \\ T_i = -M_i' + \left(t_{w,i,i+1} + t_{w,i-1,i}\right)v_i \end{gathered} \qquad (198)$$

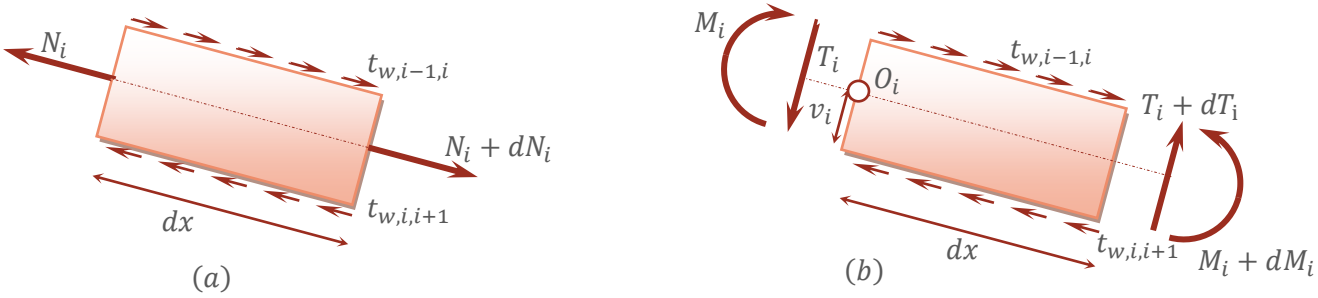


Figure 117 : *Equilibre du prisme élémentaire pour trois (ou plus) éléments*

Selon la dépendance différentielle de la relation (331), le chargement est la variation de l'effort tranchant, en prenant par hypothèse :

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (199)$$

Il en résulte pour $t_{w,1,0} = t_{w,n,n+1} = 0$:

$$q = T' = \sum_{i=1}^{n} T_i' = -\sum_{i=1}^{n} M_i'' + \left(t_{w,i,i+1}' + t_{w,i-1,i}'\right)v_i \qquad (200)$$

En considérant l'expression du moment fléchissant en fonction de la déformée (362), puis en utilisant la relation (194), il en découle la $n+1^{\text{ème}}$ équation différentielle :

$$q = T' = \sum_{i=1}^{n} T_i' = -w'''' \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{n} \left(K_{i,i+1}\left(u_{i+1}' - u_i' + w''v_{i,i+1}\right) + K_{i-1,i}\left(u_i' - u_{i-1}' + w''v_{i-1,i}\right)\right)v_i \qquad (201)$$

Cette équation différentielle complexe expose toute la force de cette généralisation. En effet, tous les paramètres sont reliés dans une seule équation différentielle.

Pour avoir l'équilibre total de la section, il faut ajouter l'équation de la nullité des contributions des efforts normaux des lamelles :

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 0 \qquad (202)$$

Il vient $n+2$ équations différentielles : n pour (196), 1 pour (201) et 1 pour (202). Avec $n+1$ fonctions inconnues u_i et w. Il convient de remplacer l'équation de l'équilibre des efforts normaux pour $s = \left\lfloor \frac{n}{2} + 1 \right\rfloor$ par l'équation précédente dans le but de garder une symétrie dans les expressions :

$$\frac{dN_s}{dx} - t_{w,s} + t_{w,s-1} = 0 \Rightarrow \sum N_i = 0$$

En effet, si la récurrence du système (196) est appliquée pour exprimer le flux de cisaillement en fonction de la variation de l'effort normal, il apparait finalement la relation suivante :

$$\sum \frac{dN_i}{dx} = 0 \qquad \textbf{(203)}$$

Donc cette relation est équivalente à la dérivée par rapport à l'abscisse de la relation (202).

Le système d'équations différentielles se compose donc :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} N_i = 0 \\ \dfrac{dN_i}{dx} - t_{w,i,i+1} + t_{w,i-1,i} = 0, \qquad \forall i \neq s \\ q = -w'''' \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{n} \left(K_{i,i+1}\left(u'_{i+1} - u'_i + w'' v_{i,i+1}\right) + K_{i-1,i}\left(u'_i - u'_{i-1} + w'' v_{i-1,i}\right)\right) v_i \end{cases} \qquad \textbf{(204)}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} E_i A_i u'_i = 0 \\ -E_i A_i u''_i - \left(u_{i+1} - u_i + w' v_{i,i+1}\right) + \left(u_i - u_{i-1} + w' v_{i-1,i}\right) = 0, \qquad \forall i \neq s \\ q = -w'''' \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{n} \left(K_{i,i+1}\left(u'_{i+1} - u'_i + w'' v_{i,i+1}\right) + K_{i-1,i}\left(u'_i - u'_{i-1} + w'' v_{i-1,i}\right)\right) v_i \end{cases}$$

Avec $t_{w,0,1} = t_{w,n,n+1} = 0$.

6.3.1.2 Résolution du système d'équations différentielle

La résolution du système suit la même trame que la section §1.2.3.2. Pour cela il convient de poser les formes des solutions cherchées selon les relations (94), (95) et (96) reprisent ici :

$$\begin{aligned} q(x) &= q_m Sin(\omega x) \\ w(x) &= -\frac{q_m}{\omega^4} \frac{1}{EI_{ef}} Sin(\omega x) = w_0 Sin(\omega x) \\ u_i(x) &= u_{0i} Cos(\omega x) \end{aligned} \qquad \textbf{(205)}$$

Le système de $n+1$ équations différentielles à $n+1$ fonctions inconnues (204) devient un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues beaucoup plus facile à résoudre.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} EA_i u_{0i} = 0 \\ \omega^2 EA_i u_{0i} - K_{i,i+1}\left(u_{0(i+1)} - u_{0i} + \omega w_0 v_{i,i+1}\right) + K_{i-1,i}\left(u_{0i} - u_{0(i-1)} + \omega w_0 v_{i-1,i}\right) = 0, \qquad \forall i \neq s \\ q_m = -\omega^4 w_0 \sum_{i=1}^{n} EI_i - \\ \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(K_{i,i+1}\left(\omega u_{0(i+1)} - \omega u_{0i} + \omega^2 w_0 v_{i,i+1}\right) + K_{i-1,i}\left(\omega u_{0i} - \omega u_{0(i-1)} + \omega^2 w_0 v_{i-1,i}\right)\right) v_i \end{cases} \qquad \textbf{(206)}$$

En effet, le système obtenu est linéaire et avec des mécanismes bien connus comme par exemple la méthode de CRAMER (§A.2), si le déterminant du système est non nul, alors il a une solution unique et calculable. Le système constitué des ***n* premières** équations de (206), peut se décomposer en une matrice $\mathcal{M}$ et un vecteur constant $\mathcal{B}$ selon §A.2 avec le vecteur inconnu $\{u0_i\}$. En étudiant les équations individuellement, deux types de coefficients ($\beta_{0,i}$ et $\beta_{1,i}$) apparaissent pour simplifier la forme des solutions recherchées (§C.5). Donc, en remplaçant les raideurs linéiques par les expressions suivantes :

$$K_{i,i\pm1} = \frac{EA_i\omega^2}{\beta_{s,i}}, \qquad \beta_{s,i} = \frac{1}{\beta_{0,i}} - 1, \qquad \textbf{(207)}$$

Et ensuite les rigidités EA_i par les expressions suivantes :

$$EA_i = \frac{EA_{i-1}\beta_{0,i-1}(1-\beta_{0,i})(1-\beta_{0,i-1}\beta_{1,i-1})}{\beta_{t,i}(1-\beta_{0,i-1})}, \qquad \beta_{t,i} = \frac{1}{\beta_{1,i}} - 1 \tag{208}$$

Il est possible d'écrire le déterminant de la matrice $\mathcal{M}$. Celui-ci peut se formuler de cette manière :

$$Det(\mathcal{M}) = +\omega^{2n-1} EA_1^{s-1} EA_n^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}^{s-1-j} \beta_{1,j}^{s-1-j} \prod_{j=2}^{s-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{s-1-j} \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}^{j-(s-1)} \beta_{1,j}^{j-(s-1)}$$

$$\prod_{j=s+1}^{n-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{j-(s+1)} (EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}) / \left((1-\beta_{0,1})(1-\beta_{0,n}) \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq s}}^{n-1} (1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}) \right) \tag{209}$$

Il apparait que compte tenu des paramètres utilisés, le $Det(\mathcal{M})$ ne peut être nul, puisque l'ensemble des termes est positif strictement et que les coefficients $\beta_{0,i}$ et $\beta_{1,i}$ sont inférieurs à 1. Le cas où l'une des raideurs linéique est infinie (cas d'une connexion parfaite) est à étudier en passant à la limite ($K_{i,i\pm1} \to \infty$). Une solution unique peut donc être obtenue.

En utilisant la méthode de CRAMER (§A.2), il convient de déterminer la formule du déterminant lorsque la $i^{\text{ème}}$ colonne est remplacée par le vecteur constant, la matrice obtenue est notée m_i. Le déterminant s'écrit selon l'indice i, comme il suit :

$$Det(m_i) = -w_0\omega^{2n} EA_1^{s-1} EA_n^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}^{s-1-j} \beta_{1,j}^{s-1-j} \prod_{j=2}^{s-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{s-1-j} \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}^{j-(s-1)} \beta_{1,j}^{j-(s-1)}$$

$$\prod_{j=s+1}^{n-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{j-(s+1)} \alpha_{n,i} / \left((1-\beta_{0,1})(1-\beta_{0,n}) \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq s}}^{n-1} (1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}) \right) \tag{210}$$

Avec :

$$\beta_{2,1} = \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \prod_{j=2}^{s-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}$$

$$\beta_{2,n} = \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \prod_{j=s+1}^{n-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}$$

$$\beta_{3,1} = \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \left(v_{1,2} + \sum_{i=2}^{s-1} v_{i,i+1} \prod_{j=2}^{i} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} \right) \tag{211}$$

$$\beta_{3,n} = \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \left(\sum_{i=s}^{n-2} v_{i,i+1} \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} + v_{n-1,n} \right)$$

Et

$$\alpha_{0,i} = \begin{cases} v_{i,i+1} - (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} \prod_{j=k+1}^{i} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i < s \\ -v_{i-1,i} + (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=i}^{n} v_{k-1,k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i > s \\ 1 & i = s \end{cases} \tag{212}$$

$$\alpha_{1,i} = \alpha_{0,i} \begin{cases} (EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}) & i \neq s \\ (-EA_1\beta_{3,1} + EA_n\beta_{3,n}) & i = s \end{cases} \tag{213}$$

$$\alpha_{n,i} = \alpha_{1,i} + \begin{cases} \sum_{u=i+1}^{s-1} \alpha_{1,u} \prod_{v=i}^{u-1} \beta_{0,v}\beta_{1,v} & i < s \\ \sum_{u=s+1}^{i-1} \alpha_{1,u} \prod_{v=u+1}^{i} \beta_{0,v}\beta_{1,v} & i > s \\ 0 & i = s \end{cases} \quad (214)$$

Ensuite, il apparait que la solution de ce système peut s'écrire selon CRAMER (§A.2) comme $Det(m_i)/Det(\mathcal{M})$. En observant les rapports des déterminants, il apparait que ceux-ci peuvent être simplifiés par le même facteur, dont l'expression est la suivante :

$$\omega^{2n-1} EA_1^{s-1} EA_n^{s-1} \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}^{s-1-j} \beta_{1,j}^{s-1-j} \prod_{j=2}^{s-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{s-1-j} \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}^{j-(s-1)} \beta_{1,j}^{j-(s-1)}$$
$$\prod_{j=s+1}^{n-1} \left(\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right)^{j-(s+1)} \Big/ \left((1-\beta_{0,1})(1-\beta_{0,n}) \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq s}}^{n-1} (1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}) \right) \quad (215)$$

Ainsi, les solutions u_{0i} s'expriment sous la forme suivante :

$$u_{0i} = \frac{Det(m_i)}{Det(\mathcal{M})} = -w_0 \omega \alpha_i \quad (216)$$

Avec :

$$\alpha_i = \frac{\alpha_{n,i}}{EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}} \quad (217)$$

Les relations (212), (213), (214) et (217) peuvent se reformuler plus simplement, en regroupant notamment les formules (212) et (213). De plus, au regard de la résolution du système présentée à la section §C.5, il est possible d'exprimer les termes α_i sous forme de relations récursives. Ces formules α_i simplifiées et récursives sont exprimées dans la section §6.3.1.5.

La résolution de la déformée à la troisième équation de (206), en utilisant l'expression simplifiée des solutions u_{0i} (216), devient en utilisant (207) :

$$w_0 = -\frac{q_m}{\omega^4} \frac{1}{EI_{ef}} \quad (218)$$

Avec :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{s-1} EA_i v_{i,i+1} \frac{v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})}{\beta_{s,i}} + \sum_{i=s+1}^{n} EA_i v_{i-1,i} \frac{v_{i-1,i} - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\beta_{s,i}} \quad (219)$$

Ainsi, il apparait la contribution des rigidités de section EA_i pour $i \neq s$.

6.3.1.3 Étude de la rigidité effective

La rigidité effective (219) obtenue dans la section précédente peut être retravaillée pour les cas où la raideur à l'interface entre les lamelles est infinie ou nulle. Cela permet de borner les valeurs de la rigidité effective.

Pour la rigidité effective minimale : pour $K_{i,i\pm1} = 0$, les termes $\beta_{0,i} = 0 \; \forall i \neq s$ ainsi le terme $\alpha_s = 0$ donc il vient :

$$\alpha_i = \begin{cases} +v_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} & i < s \\ -v_{i-1,i} + \sum_{k=i}^{n} v_{k-1,k} & i > s \\ 0 & i = s \end{cases}$$

Pour $i < s$ le terme $v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})$ vaut :

$$v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = v_{i,i+1} - \left(v_{i,i+1} - \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} - \left(v_{i+1,i+2} - \sum_{k=1}^{i+1} v_{k,k+1} \right) \right)$$

$$= v_{i,i+1} - \left(-\sum_{k=1}^{i-1} v_{k,k+1} + \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} \right) = v_{i,i+1} - v_{i,i+1} = 0$$

En effectuant de même pour $i > s$, le terme $v_{i-1,i} - (\alpha_{i-1} - \alpha_i) = 0$. Donc il est possible de retrouver la rigidité effective d'une poutre composée de n lamelles dissociées :

$$EI_{ef,\min} = \sum_{i=1}^{n} EI_i \qquad (220)$$

Pour la rigidité effective maximale, il convient de prendre $K_{i,i\pm1} \to \infty$. Les termes $\beta_{0,i} = 1 \; \forall i$ donc il vient les mêmes considérations que pour la détermination de la rigidité maximale pour la généralisation de la section §C.4.8 :

$$EI_{ef,\max} = \sum_{i=1}^{n} EI_i + EA_i a_i^2 \qquad (221)$$

Avec les distances a_i :

$$a_s = \frac{\sum_{u=1}^{n} (-1)^{\begin{cases} 0 & \text{si } u<s \\ 1 & \text{si } u>s \end{cases}} E_u A_u r_u}{\sum_{u=1}^{n} E_u A_u}$$

$$a_i = r_i + (-1)^{\begin{cases} 1 & si\ i<s \\ 0 & si\ i\geq s \end{cases}} a_s$$

$$r_i = \begin{cases} \sum_{t=i}^{s-1} v_{t,t+1}, & i < s \\ \sum_{t=s}^{i-1} v_{t,t+1}, & i > s \\ 0, & i = s \end{cases} \qquad (222)$$

Ces expressions sont similaires aux fonctions déterminées dans la section §C.4.8.

Il vient tout naturellement des formules (219), (220) et (221), l'ordre suivant : $EI_{ef,\max} > EI_{ef} > EI_{ef,\min}$. La rigidité effective est bornée et elle permet d'avoir dans ce cas un ordre de grandeur de la perte de EI_{ef} par rapport à $EI_{ef,\max}$ et du gain par rapport à $EI_{ef,\min}$. Pour cela, il faut introduire un paramètre qui permet de voir cette proportion [7] :

$$\mathfrak{G} = \frac{EI_{ef} - EI_{ef,\min}}{EI_{ef,\max} - EI_{ef,\min}} = \frac{EI_{ef} - EI_A}{EI_B} = \frac{EI_{ef} - EI_0}{EI_B} \qquad (223)$$

Ainsi $\mathfrak{G} = 0$ lorsque $EI_{ef} = EI_{ef,\min}$ et $\mathfrak{G} = 1$ lorsque $EI_{ef} = EI_{ef,\max}$. Le facteur $\mathfrak{G} \in [0,1]$ et peut s'écrire de la manière suivante :

$$EI_{ef} = \mathfrak{G}\left(EI_{ef,\max} - EI_{ef,\min}\right) - EI_{ef,\min} = \mathfrak{G}\, EI_B + EI_0 \qquad (224)$$

Où EI_B représente la rigidité de STEINER présentée à la section §1.2.4. Ainsi $\mathfrak{G}$ représente la pente de la droite affine d'abscisse EI_B et d'ordonnée à l'origine EI_0.

6.3.1.4 Contraintes

Avant d'exprimer les contraintes, il convient de reformuler les efforts normaux et les moments fléchissants selon les formes des paramètres obtenus précédemment.

L'expression du moment fléchissant de la lamelle i, s'exprime selon la relation (362) et l'expression de la déformée $w(x)$ (205) :

$$M_i(x) = EI_i w_0 \omega^2 Sin(\omega x) = \frac{EI_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} Sin(\omega x) \qquad (225)$$

L'expression de l'effort normal vaut selon les relations (195) et (205) :

$$N_i = EA_i u_i' = -EA_i w_0 \omega^2 \alpha_i Sin(\omega x) = -\frac{EA_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} \alpha_i Sin(\omega x) \qquad (226)$$

L'expression du flux de cisaillement s'exprime de la manière suivante :

$$t_{w,i,i+1} = K_{i,i+1} s_{t,i,i+1} = -K_{i,i+1} \frac{q_m}{\omega^3} \frac{1}{EI_{ef}} \left(v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \right) Cos(\omega x) \qquad (227)$$

Le calcul des contraintes suit la même logique que le calcul exposé aux sections §1.2.3.3 et §C.2.

Selon les notations choisies, à savoir les efforts normaux sont algébriques et le moment est positif, il vient la formule de la contrainte normale totale pour une lamelle i :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} z = -\frac{E_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} Sin(\omega x)(\alpha_i + z) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \qquad (228)$$

Pour la contrainte de cisaillement, il convient de suivre la même méthodologie de la section §1.2.2.9 ainsi que celle plus générale de l'Annexe §C.2. Il en résulte :

$$\tau_i(x,z) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \left(\frac{h_i}{2} - z \right) - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_i}{2} \right)^2 - z^2 \right) + \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \qquad (229)$$

Le calcul du maximum de la contrainte de cisaillement pour chaque lamelle s'effectue par la détermination des extrémums en z de $\tau_i(x,z)$ d'après la relation (229). Pour cela, il faut calculer les racines de $d\tau_i(x,z)/dz$. La variation de la contrainte de cisaillement selon la hauteur de la lamelle vaut :

$$\frac{\partial \tau_i(x,z)}{\partial z} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} + \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} z \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \qquad (230)$$

Donc le calcul des racines donnent la valeur de l'ordonnée $z_{\text{opt},i}$:

$$\frac{\partial \tau_i(x, z_{\text{opt},i})}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{\text{opt},i} = \frac{I_i}{A_i} \frac{\frac{\partial N_i(x)}{\partial x}}{\frac{\partial M_i(x)}{\partial x}} = -\alpha_i \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \qquad (231)$$

Pour un chargement sinusoïdal, $z_{\text{opt},i} = -\alpha_i$, mais il faudra faire attention lors de chargements plus complexes comme par exemple un chargement réparti ou ponctuel (Décomposition en série de FOURIER §C.3).

Ainsi la détermination de l'extrémum dépend de la variation de l'effort normal et de la variation du moment fléchissant pour chaque lamelle pondérée du rapport inertie avec la section de la lamelle considérée. Lorsque $z_{\text{opt},i}$ n'appartient pas à l'intervalle $[-h_i/2\,,h_i/2]$, cela signifie que la lamelle ne possède pas de maximum relatif, ainsi, selon la position de la lamelle dans la section, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement pour cette lamelle est le maximum en valeur absolue de la contrainte aux interfaces entourant la lamelle considérée.

Il est ainsi possible de calculer la position de l'extrémum de la contrainte de cisaillement pour chaque lamelle :

$$\tau_{i,max}(x) = \begin{cases} \max\left(\left| \tau_i\left(x, -\frac{h_i}{2}\right) \right|, \left| \tau_i\left(x, \frac{h_i}{2}\right) \right| \right), & z_{\text{opt},i} \notin \left[-\frac{h_i}{2}, \frac{h_i}{2} \right] \\ \left| \tau_i(x, z_{\text{opt},i}) \right|, & z_{\text{opt},i} \in \left[-\frac{h_i}{2}, \frac{h_i}{2} \right] \end{cases} \qquad (232)$$

Pour obtenir le flux de cisaillement à l'interface entre l'élément i et l'élément $i+1$, il faut calculer soit $\tau_i(x, -h_i/2)b_i$, soit $\tau_{i+1}(x, h_{i+1}/2)b_{i+1}$. Ce flux permet de calculer la force que reprend un organe dans l'interface, pour un espacement $e_{i,i\pm1}$ entre chaque organe :

$$F_{i,i\pm1}(x) = e_{i,i\pm1} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} = -e_{i,i\pm1} t_{w,i,i+1} \qquad (233)$$

6.3.1.5 Conclusion

La généralisation est réalisée pour un chargement de type sinusoïdal de forme énoncée à la relation (394). Comme il a été signalé dans les derniers paragraphes de la section §C.4.7, pour pouvoir représenter tous les types de chargement, il convient de prendre un chargement plus général dépendant du paramètre de sommation θ. Dans

le cas présent, il suffit d'affecter au paramètre $\omega = \pi/L$ l'indice de sommation : $\omega = \theta\pi/L$. Ainsi en suivant les considérations des dernières remarques de la section §C.4.7, tous les chargements possibles peuvent être calculés.

À noter à titre indicatif que la rigidité effective totale pour un chargement réparti sur un tronçon selon les paramètres de la section §C.1.4 et selon les relations (374) et (375) vaut :

$$w_z(x) = \frac{f(x)}{EI_{ef,\text{tot}}} = -\frac{2L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right)}{\theta^5} \left(Cos\left(\theta d \frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta \frac{\pi}{L}(d+l)\right)\right) \quad (234)$$

Avec $f(x)$ la fonction dépendante de l'abscisse x. L'expression de la déformée $w_z(x)$ dépend des valeurs de d et ℓ. Les expressions sont précisées à la section §C.1.4.2. qu'il faut considérer à la lumière de cette annexe et de la figure 205.

Ainsi pour un chargement ponctuel au centre de la poutre en suivant les recommandations de la section §C.1.10, il vient :

$$\frac{FL^3}{48EI_{ef,\text{tot}}} = \frac{2L^4}{\pi^5} \frac{F}{l} \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{1}{\theta^5} \left(Cos\left(\theta d \frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta \frac{\pi}{L}(d+l)\right)\right) \quad (235)$$

Donc :

$$EI_{ef,tot} = \frac{\pi^5}{96} \frac{l}{L} \frac{1}{\sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{1}{\theta^5} \left(Cos\left(\theta d \frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta \frac{\pi}{L}(d+l)\right)\right)} \quad (236)$$

Ainsi il convient de sommer suffisamment pour avoir la rigidité effective totale de la poutre composite étudiée. Cette relation est utilisée notamment pour la détermination de la raideur à l'interface des poutres expérimentales présentées à la section §7.2.

6.3.2 Formulaire

Cette partie a pour but de répertorier l'ensemble des formules qui peuvent être utilisées pour calculer une poutre composite de n lamelles partiellement liées soumise à un chargement de type sinusoidale.

$$v_{i,i+1} = v_i + v_{i+1} = \frac{h_i}{2} + \frac{h_{i+1}}{2} \quad (237)$$

Soit les paramètres dépendant de la raideur à l'interface entre les lamelles :

$$\beta_{s,i} = \frac{EA_i \omega^2}{K_i}, \qquad \beta_{0,i} = \frac{1}{1+\beta_{s,i}}, \qquad \beta_{0,s} = 1 \quad (238)$$

Soit les paramètres $\beta_{1,i}$:

$$\beta_{1,i} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \dfrac{EA_{i-1}\beta_{0,i-1}(1-\beta_{0,i-1}\beta_{1,i-1})(1-\beta_{0,i})}{EA_i(1-\beta_{0,i-1})}}, & 1 < i < s \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{EA_{i+1}\beta_{0,i+1}(1-\beta_{0,i+1}\beta_{1,i+1})(1-\beta_{0,i})}{EA_i(1-\beta_{0,i+1})}}, & n > i > s \\ 1, & i = 1 \; ou \; i = n \end{cases} \quad (239)$$

Soit les paramètres $\beta_{2,i}$:

$$\beta_{2,1} = \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \prod_{j=2}^{s-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}$$
$$\beta_{2,n} = \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \prod_{j=s+1}^{n-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} \quad (240)$$

Soit les paramètres $\beta_{3,i}$:

$$\beta_{3,1} = \prod_{j=1}^{s-1} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \left(v_{1,2} + \sum_{i=2}^{s-1} v_{i,i+1} \prod_{j=2}^{i} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} \right)$$
$$\beta_{3,n} = \prod_{j=s+1}^{n} \beta_{0,j}\beta_{1,j} \left(\sum_{i=s}^{n-2} v_{i,i+1} \prod_{j=i+1}^{n-1} \frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} + v_{n-1,n} \right) \quad (241)$$

Soit les paramètres $\alpha_{0,i}$, $\alpha_{1,i}$ et $\alpha_{n,i}$:

$$\alpha_{0,i} = \begin{cases} v_{i,i+1} - (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} \prod_{j=k+1}^{i} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i < s \\ -v_{i-1,i} + (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=i}^{n} v_{k-1,k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i > s \\ 1 & i = s \end{cases} \quad (242)$$

$$\alpha_{1,i} = \alpha_{0,i} \begin{cases} (EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}) & i \neq s \\ (-EA_1\beta_{3,1} + EA_n\beta_{3,n}) & i = s \end{cases} \quad (243)$$

$$\alpha_{n,i} = \alpha_{1,i} + \begin{cases} \sum_{u=i+1}^{s-1} \alpha_{1,u} \prod_{v=i}^{u-1} \beta_{0,v}\beta_{1,v} & i < s \\ \sum_{u=s+1}^{i-1} \alpha_{1,u} \prod_{v=u+1}^{i} \beta_{0,v}\beta_{1,v} & i > s \\ 0 & i = s \end{cases} \quad (244)$$

Soit les paramtres α_i :

$$\alpha_i = \frac{\alpha_{n,i}}{EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}} \quad (245)$$

Soit les paramètres α_i (formules récursives)

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{i+1}\beta_{0,i}\beta_{1,i} + v_{i,i+1} - (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1} \prod_{j=k+1}^{i} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i < s \\ \alpha_{i-1}\beta_{0,i}\beta_{1,i} - v_{i-1,i} + (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i}) \sum_{k=i}^{n} v_{k-1,k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i > s \\ \frac{\alpha_{\text{num},ss}}{\alpha_{\text{den},ss}} & i = s \end{cases} \quad (246)$$

$$\alpha_{\text{num},ss} = -EA_1\beta_{3,1} + EA_n\beta_{3,n}$$
$$\alpha_{\text{den},ss} = EA_1\beta_{2,1} + EA_s + EA_n\beta_{2,n}$$

Soit la rigidité effective EI_{ef} :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{s-1} EA_i v_{i,i+1} \frac{v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})}{\beta_{s,i}} + \sum_{i=s+1}^{n} EA_i v_{i-1,i} \frac{v_{i-1,i} - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\beta_{s,i}} \quad (247)$$

Les expressions des éléments de la RDM sont les suivant :

$$q(x) = q_m Sin(\omega x)$$
$$M_i(x) = EI_i w_0 \omega^2 Sin(\omega x) = \frac{EI_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} Sin(\omega x)$$
$$w(x) = w_0 Sin(\omega x) = -\frac{q_m}{\omega^4} \frac{1}{EI_{ef}} Sin(\omega x) \quad (248)$$
$$u_i(x) = w_0 \omega \alpha_i Cos(\omega x) = \frac{q_m}{\omega^3} \frac{1}{EI_{ef}} \alpha_i Cos(\omega x)$$

$$N_i(x) = -EA_i w_0 \omega^2 \alpha_i Sin(\omega x) = -\frac{EA_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} \alpha_i Sin(\omega x)$$

$$t_{w,i,i+1}(x) = K_{i,i+1} s_{t,i,i+1}(x) = K_{i,i+1} w_0 \omega \left(v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})\right) Cos(\omega x)$$
$$= K_{i,i+1} \frac{q_m}{\omega^3} \frac{1}{EI_{ef}} \left(v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})\right) Cos(\omega x)$$

Le flux de cisaillement peut aussi se calculer de la manière suivante :

$$t_{w,i,i+1}(x) = -\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial N_j(x)}{\partial x} \quad (249)$$

Les expressions des contraintes sont :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} z = -\frac{E_i}{EI_{ef}} \frac{q_m}{\omega^2} Sin(\omega x)(\alpha_i + z) \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2}$$

$$\tau_i(x,z) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \left(\frac{h_i}{2} - z\right) - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_i}{2}\right)^2 - z^2\right) + \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \le z \le \frac{h_i}{2} \quad (250)$$

Le maximum de la contrainte de cisaillement se calcul selon :

$$z_{\text{opt},i} = \frac{I_i}{A_i} \frac{\frac{\partial N_i(x)}{\partial x}}{\frac{\partial M_i(x)}{\partial x}}$$

$$\tau_{i,max}(x) = \begin{cases} \max\left(\left|\tau_i\left(x, -\frac{h_i}{2}\right)\right|, \left|\tau_i\left(x, \frac{h_i}{2}\right)\right|\right), & z_{\text{opt},i} \notin \left[-\frac{h_i}{2}, \frac{h_i}{2}\right] \\ \left|\tau_i(x, z_{\text{opt},i})\right|, & z_{\text{opt},i} \in \left[-\frac{h_i}{2}, \frac{h_i}{2}\right] \end{cases} \quad (251)$$

L'expression des efforts que reprennent les organes d'assemblage au niveau de l'interface i vaut :

$$F_{i,i\pm1}(x) = e_{i,i\pm1} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} = -e_{i,i\pm1} t_{w,i,i+1} \quad (252)$$

6.3.3 Comparaison

Comme pour le modèle précédemment présenté, il convient de comparer le modèle exact généralisé avec le MEF. Cette comparaison s'effectue avec les mêmes valeurs numériques indiquées dans la section §6.2.3 répertoriées dans le tableau 31.

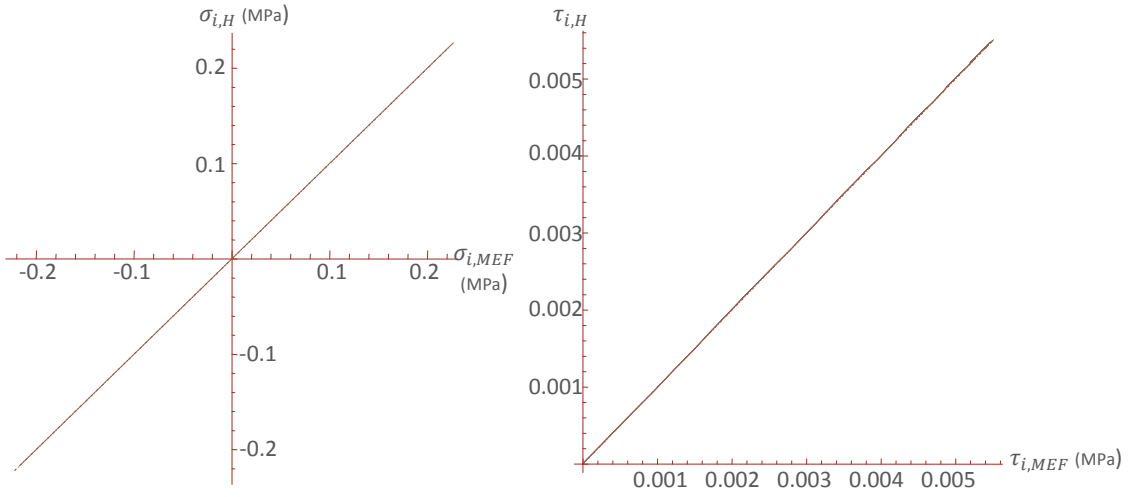


Figure 118 : *Diagrammes des contraintes du modèle généralisé selon la méthode de GIRHAMMAR en fonction du MEF*

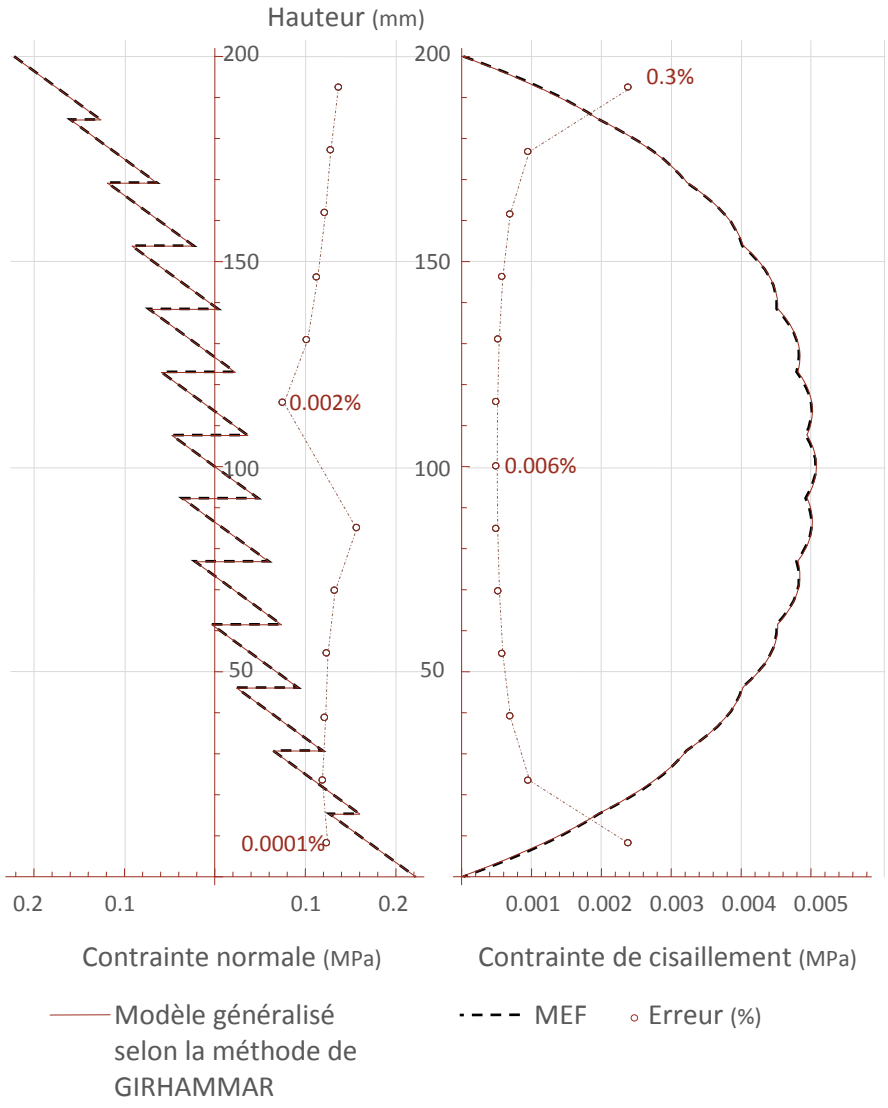


Figure 119 : *Diagramme des contraintes – comparaison entre le modèle généralisé selon la méthode de GIRHAMMAR et le MEF*

Dans tout les cas (Figure 119), le modèle exact généralisé a une erreur inférieure à 0.3% par rapport au MEF.

D'où les évolutions des contraintes normales et de cisaillement (Figure 118), les contraintes du modèle exact généralisé en fonction du MEF sont confondues.

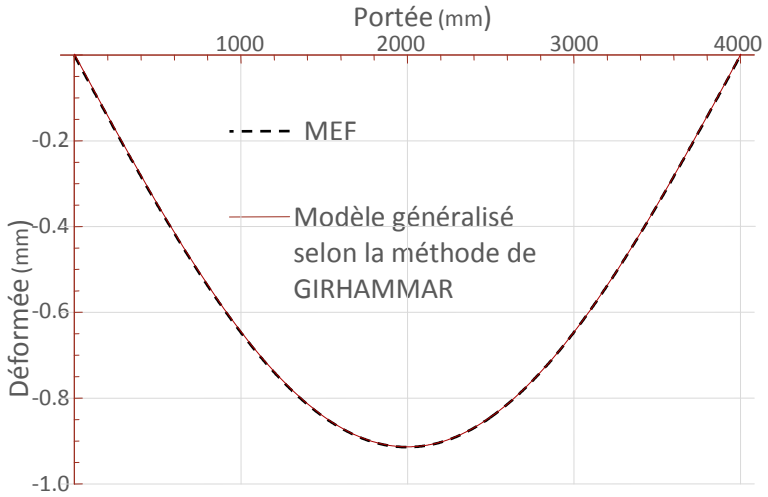


Figure 120 : *Déformée de la poutre pour le modèle généralisé selon la méthode de GIRHAMMAR et le MEF*

Le modèle exact généralisé possède les mêmes déformées et rigidités que le modèle MEF (Figure 120, Tableau 33)

Tableau 33 : *Valeurs numériques de la flèche et de la rigidité pour le modèle généralisé selon la méthode de GIRHAMMAR et le MEF*

	MEF	Modèle généralisé exact	Erreurs
Flèche (mm)	0.912	0.915	-0.1%
Rigidité (Nmm^2)	2.87×10^{11}	2.87×10^{11}	-0.1%

Cette comparaison montre la possibilité d'approcher de manière analytique une partie des possibilités du modèle numérique. En effet, il n'est question ici que d'une poutre reposant sur deux appuis et soumise à un chargement de type sinusoïdal. Ce modèle exacte généralisé est cependant limité par le fait qu'il ne considère pas l'influence de la déformée due aux efforts tranchants dans les lamelles (prise en compte dans le MEF et le modèle de KREUZINGER). Ainsi ce modèle ce limitera pour des poutres dont les lamelles seront suffisament élancée vis-à-vis de leur hauteur.

« Une poutre est un continuum de bois, dans une dimension principale, avant de fournir une matière à des objets façonnés.»

[Pierre Schaeffer, Extrait de La Musique concrète]

7 POUTRE ET POTEAU

La justification des poutres et des poteaux à connexions imparfaites dans les structures en bois sont très similaires car les vérifications en contraintes, déformations ou stabilité, font tous trois appels à la notion de rigidité effective des éléments. C'est pour cette raison qu'il a été choisi d'associer dans cette partie expérimentale les deux types d'éléments : éléments pleins et éléments ajourés (issus du plancher). Le but de cette partie est de mettre en œuvre des poutres à connexion imparfaite à l'aide de chevilles cylindriques soudées afin de tester leurs comportements et de montrer qu'elles peuvent être modélisées à partir des théories et modèles développés précédemment. En pratique, la comparaison entre théorie et expérimentation ne s'effectue pas de manière directe. À partir des résultats d'essais réalisés sur les poutres, les caractéristiques des connexions seront déduites par les modèles et comparés aux résultats des essais sur chevilles unitaires présentés précédemment. Pour conclure, une approche réglementaire en termes de dimensionnement sera conduite afin de mettre en évidence le potentiel d'éléments de structure de ce type.

7.1 Étude expérimentale

Afin de disposer d'un ensemble de données cohérentes et représentatives pour conduire la validation des modèles, deux types de poutres à liaisons imparfaites ont été mises en œuvre et testées. Le premier type de poutres est nommé « poutre pleine » dans la suite du document car ces poutres sont composées de lamelles d'égales épaisseurs et donne, après fabrication un aspect homogène de poutre en bois lamellé collé. Ces éléments sont fabriqués à l'aide de la machine développée afin de maîtriser parfaitement l'implantation des chevilles. Le second type de poutres testées dans cette partie est désigné sous le nom de poutres ajourées. Ces poutres n'ont pas été fabriquées expressément, mais sont issues d'un plancher fabriqué pour étudier la faisabilité d'éléments plans. Le plancher n'ayant pas été testé en résistance celui-ci a été redécoupé à la fin de son étude. C'est parce que ce plancher a été réalisé par un réseau de lames croisées que le redécoupage produit des poutres ajourées. Comme il est expliqué dans la suite du document, la mise en œuvre de ces éléments n'a pas été réalisée mécaniquement mais manuellement. Pour ces deux types de poutres, l'étude se divise en trois parties :

1. description de la réalisation des poutres,
2. étude des propriétés élastiques
3. étude à rupture

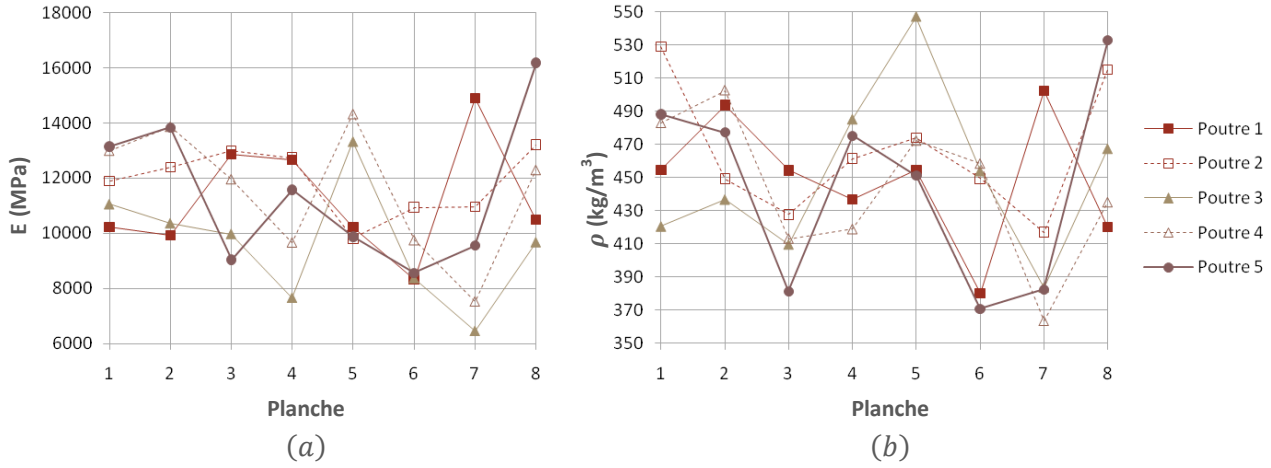
7.1.1 Fabrication des poutres pleines

Les poutres pleines sont fabriquées avec la machine prototype (§3.1) équipée de son guide afin de garantir l'alignement des chevilles ainsi qu'un empilage soigné des lamelles. Le procédé d'assemblage des lamelles par les chevilles est resté sensiblement le même tout le long de la fabrication, garantissant un soudage reproductible par cheville et par poutre. Les lames ont été assemblées deux à deux jusqu'à obtention de la hauteur de poutre souhaitée. Étant donné que le procédé de mise en place de la cheville n'est pas automatique (perçage plus soudage), la fabrication s'est limitée à la réalisation d'une série de cinq poutres composées de huit lamelles. Les cinq poutres sont identiques hormis les propriétés intrinsèques de chacune des lamelles constituant les poutres. Les lamelles ont été repérées afin de connaître leur position dans la hauteur de la poutre et permettre un dépouillement ultérieur précis. Les dimensions des lames sont répertoriées dans le tableau 35.

Tableau 34 : *Dimensions des lamelles*

	Longueur	hauteur	Largeur	Aire	Inertie
Paramètres	L_{pla}	h	b	$A = bh$	$I = bh^3/12$
Unités	m	mm	mm	mm^2	mm^4
Valeurs numériques	3.5	20	160	3200	106667

Les masses volumiques et les modules d'Young associés à chacune des lamelles sont représentés sur la figure 121, les valeurs sont indiquées dans le tableau 35.



(a) (b)

Figure 121 : *Propriétés des lamelles : (a) module d'élasticité, (b) masse volumique*

Les coefficients de variation (COV) sont supérieurs à 5% : cela montre que les lamelles sont diverses, donc les poutres auront des caractéristiques relativement différentes. Il en ressort que la poutre 2 est la plus homogène tandis que la poutre 5 est la plus hétérogène. Il apparait aussi que la poutre 2 semble avoir les meilleures caractéristiques en moyenne. Les modules d'élasticité des avivés utilisés vont de 6453 N/mm^2 à 16190 N/mm^2.

Tableau 35 : *Propriétés des lamelles*

Planche	Poutre 1		Poutre 2		Poutre 3		Poutre 4		Poutre 5	
	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ρ (kg/m^3)	E (MPa)	ρ (kg/m^3)	E (MPa)
1	455	10226	529	11900	420	11051	483	13009	488	13153
2	494	9934	449	12405	437	10360	503	13878	477	13832
3	454	12853	428	12988	410	9975	413	11971	381	9044
4	437	12659	461	12742	485	7659	419	9675	475	11572
5	455	10223	474	9811	547	13322	472	14340	451	9873
6	380	8317	449	10941	454	8369	458	9756	371	8561
7	502	14908	417	10958	384	6453	363	7524	382	9553
8	420	10497	515	13208	467	9675	435	12306	533	16190
μ	450	11202	465	11869	451	9608	443	11557	445	11472
η	39	2102	40	1197	51	2134	45	2361	60	2706
COV* (%)	9	19	8	10	11	22	10	20	13	24

*Le coefficient de variation (COV) représente le rapport entre l'écart type η et la moyenne μ : $\text{COV} = \eta/\mu$

Les planches sont assemblées deux à deux par des chevilles de hêtres (*Fagus sylvatica*) de 10 mm de diamètres cannelées. L'assemblage est conduit selon le plan présenté sur la figure 122. Les distances séparant les chevilles dans le sens du fil du bois et dans le sens perpendiculaire au fil du bois, vaut $e_1 = e_2 = 40$ mm. Les files d'organes sont au nombre de trois. L'assemblage des planches se déroule comme suit :

1. Positionnement des lames

2. Serrage par le vérin presseur
3. Perçage de deux lames avec une mèche de 8 mm de diamètre
4. Soudage avec une cheville de 10 mm de diamètre
5. Desserrage du vérin presseur
6. Déplacement de la poutre

Les paramètres de soudage sont les mêmes que ceux retenus lors des essais unitaires c'est-à-dire :

- Vitesse de rotation : 1500 tr/min
- Vitesse de descente : 17 mm/s

Comme les lamelles ont une hauteur de 20 mm, la distance de soudage est inférieure ou égale à 40 mm. L'introduction de la cheville s'effectue en moins de 2,3 secondes. Après avoir implanté une file d'organes, les têtes des chevilles sont arasées afin d'avoir une surface sans obstacle pour l'insertion des chevilles de la file suivante et ainsi ne pas gêner le vérin presseur.

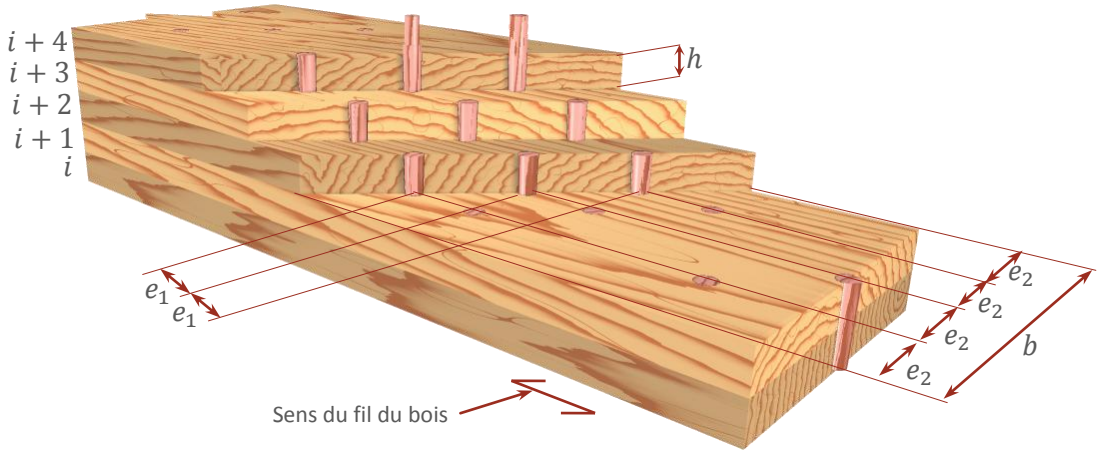


Figure 122 : *Schématisation de l'implantation des chevilles dans les joints i, i+1 et i+2*

Pour une planche de longueur de 3,5 m, le nombre de chevilles dans une rangée est de $3500/120 - 1 = 28$, soit par plan de cisaillement : $28 \times 3 = 84$ chevilles. Comme les poutres sont composées de huit lamelles, il y a sept plans de cisaillement : $84 \times 7 = 588$ chevilles au minimum dans une poutre.

La figure 123 présente la poutre 4 avec deux files de chevilles finies figure 123(c) avant arasement pour la fabrication de la dernière file d'assemblage entre la planche 8 (ici planche n°244) et le reste de la poutre 4 (ici planche n°255) : figure 123(d). Les figure 123(a) et (b) présente le vérin placé au plus prés de la zone de soudage.

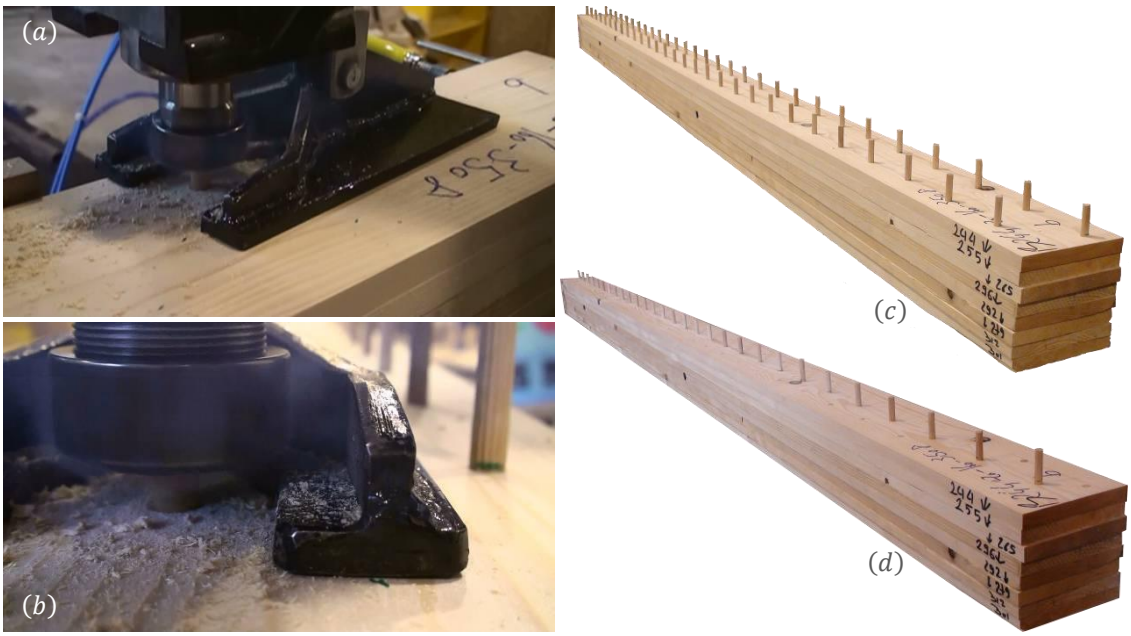


Figure 123 : *Réalisation de la poutre 4 : (a) et (b) insertion de chevilles par la machine, (c) et (d) poutres en cours d'élaboration*

Selon le paragraphe §C.4.8, les rigidités maximales (avec liaison parfaite : $K \to \infty$) et minimales (aucune liaison : $K = 0$) peuvent êtres déterminées. Pour cela, il convient de calculer les distances a_i pour $K \to \infty$ pour le calcul de $EI_{ef,\max}$.

Pour $K \to \infty$, et $A_i = bh$, la formule simplifiée (449) des distances a_i dépend uniquement de la hauteur h et des modules d'élasticité E_i des planches constituant la poutre. Les valeurs numériques des distances a_i selon cette relation sont présentées dans le tableau 36.

Tableau 36 : *Valeurs des distances a_i selon la poutre*

Planche	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5	
1	71.2	69.2	66.3	65.8	69.6	70
2	51.2	49.2	46.3	45.8	49.6	50
3	31.2	29.2	26.3	25.8	29.6	30
4	11.2	9.2	6.3	5.8	9.6	10
5	8.8	10.8	13.7	14.2	10.4	10
6	28.8	30.8	33.7	34.2	30.4	30
7	48.8	50.8	53.7	54.2	50.4	50
8	68.8	70.8	73.7	74.2	70.4	70

L'unité de a_i est exprimée en mm.

A titre indicatif, la dernière colonne représente les valeurs de a_i lorsque les modules d'élasticité sont tous identiques pour $n = 8$ éléments.

Les rigidités maximales et minimales sont calculées dans le tableau 37.

Tableau 37 : *Rigidités maximales et minimales des poutres*

Rigidité (Nmm^2)	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$EI_{ef,\max}$	6.01×10^{11}	6.67×10^{11}	5.24×10^{11}	6.43×10^{11}	7.14×10^{11}
$EI_{ef,\min}$	9.56×10^{9}	1.01×10^{10}	8.20×10^{9}	9.86×10^{9}	9.79×10^{9}
$EI_{ef,\max}/EI_{ef,\min}$	62.9	65.8	63.9	65.2	73.0

A titre indicatif, lorsque les modules d'Young sont identiques, il vient $EI_{ef,\max} = EIn^3$ et $EI_{ef,\min} = EIn$ donc le rapport $EI_{ef,\max}/EI_{ef,\min} = n^2$. Dans le cas présent $n^2 = 8^2 = 64$.

Pour une poutre ayant des modules d'élasticité identiques, le calcul du rapport $EI_{ef,\max}/EI_{ef,\min}$ revient à étudier le rapport des inerties : $I_{\max}/I_{\min} = n^3/n = n^2$. Pour $n = 8$, ce rapport vaut 64.

Même si la poutre 2 a les meilleurs caractéristiques en moyenne, la poutre 5 possède la rigidité maximale la plus élevée. L'étude du rapport entre les deux rigidités maximales et minimales montre que la poutre la plus hétérogène possède la valeur la plus élevée, la poutre 3 semble être la plus homogène de l'ensemble car très proche de la valeur 64.

Une fois la fabrication des poutres achevée, il convient de mesurer les caractéristiques de celles-ci : la masse volumique ρ_{ef} a été mesurée par pesée. Le tableau 38 indique les valeurs obtenues pour les masses m et les masses volumiques ρ_{ef} de chacune des poutres.

Tableau 38 : *Masses et masses volumiques des poutres*

	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
m (kg)	41.7	43.1	41.7	41.2	41.4
m_{ef} (kg/m)	11.9	12.3	11.9	11.7	11.8
ρ_{ef} (kg/m^3)	464	480	465	459	462
ρ_{moy} (kg/m^3)	450	465	451	443	445

La masse par unité de longueur m_{ef} est définie et utilisée dans le §7.1.2.1.

La masse volumique obtenue possède globalement les mêmes proportions qu'avec la masse volumique moyenne dont l'ordre des poutres des plus légères aux poutres les plus lourdes : 4, 5, 1, 3 et 2. Pour retrouver approximativement cette masse volumique ρ_{ef} à partir de la masse volumique moyenne ρ_{moy}, il faut tenir compte des perçages effectués et des chevilles insérées de masse volumique de 650 kg/m^3.

7.1.2 Étude des propriétés élastiques des poutres pleines

La rigidité effective telle qu'exprimée dans l'étude théorique précédente n'est pas une valeur mesurable en temps que telle, à part si un chargement sinusoïdal peut être produit réellement sur la poutre. Ce type de chargement est difficile à réaliser de manière exacte en pratique. Pour approcher directement la rigidité effective, un schéma de chargement simple en flexion 6 points pourrait être mis en œuvre. En effet la forme des diagrammes de flexion et d'efforts tranchant permettrait d'approcher la forme des diagrammes d'un chargement sinusoïdal. Les poutres fabriquées étant relativement courtes, ce type de chargement en flexion n'est cependant pas apparu comme un moyen suffisamment pertinent d'analyse car il allait introduire de la compression transversale au droit de chaque point de chargement et ainsi augmenter potentiellement la part de frottement entre planches, ce qui n'est pas pris en compte dans cette étude. Ne pouvant accéder directement à une estimation de la rigidité effective et connaissant le module d'élasticité de chacune des lamelles ainsi que leur emplacement, il est choisi de déterminer directement à partir d'un essai de flexion trois points la rigidité de cisaillement de l'interface. Le chargement en flexion trois points permet d'introduire un cisaillement constant entre la charge et les appuis. La mesure de la flèche est donc le reflet d'un cisaillement quasi constant dans chaque interface le long des poutres. Avant d'effectuer ce test de flexion 3 points qui est conduit jusqu'à rupture, d'autres tests de flexion dans le domaine élastique sont conduits. Un test de flexion 4 points et un test en vibration sont également réalisés afin de mettre en évidence le fonctionnement homogène de la poutre quel que soit son chargement.

La modélisation éléments finis permet d'illustrer les phénomènes de diffusion des charges au niveau des appuis et des charges qui perturbent un peu la théorie. Afin de montrer si cette diffusion a une influence au niveau de l'estimation de la raideur, le dépouillement des essais est complété avec le MEF.

Pour déterminer la proportion des rigidités obtenues par rapport aux rigidités minimales et maximales, il convient d'utiliser le facteur de gain et/ou de perte $\mathfrak{G}$ selon la relation (223) au §6.3.1.3. Un indice lui sera attribué pour caractériser la rigidité effective étudiée.

7.1.2.1 Essai dynamique

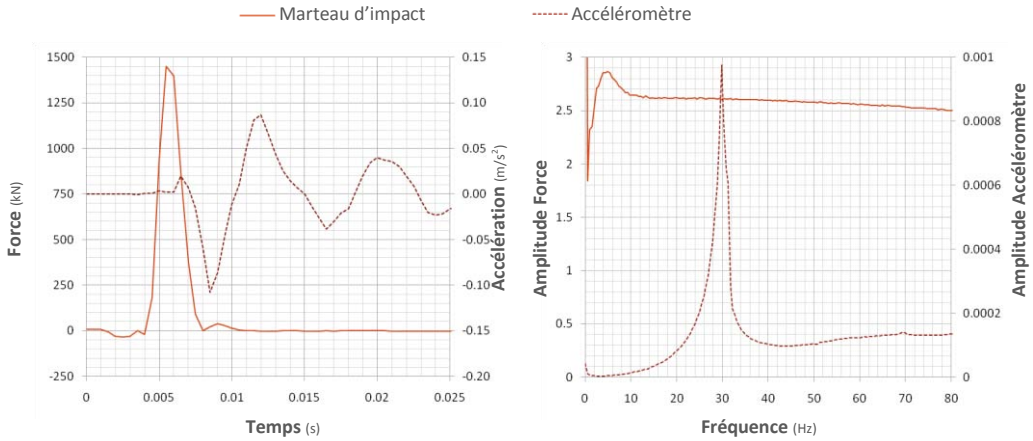
L'essai dynamique qui est réalisé est un essai en vibration libre. Comme pour le test des lames présentés à la section §5.3.2, il consiste à mettre en vibration la poutre dans le sens transversal pour déterminer les fréquences propres pour obtenir la rigidité apparente.

- **Protocole**

La poutre repose sur deux appuis ce qui libère une portée libre L_{dyn} de 3m

Deux accéléromètres ICP model 626B02 (PCB Piezotronics IMI Sensors) de sensibilité 49.8 mV/m/s^2, sont placés à la moitié et au quart de la portée L_{dyn} pour obtenir la fréquence fondamentale. Un marteau d'impact ICP permet de mesurer l'effort appliqué lors du choc et de connaître les fréquences acceptables. Les accéléromètres et le marteau sont reliés à une centrale DAQMX NI [93]. La figure 124 permet de justifier l'utilisation du fondamental pour calculer le module d'élasticité longitudinal. En effet le spectre du marteau d'impact est constant dans la zone d'étude du fondamental.

Grâce à l'analyse dynamique, les fréquences propres sont déterminées.



(a) (b)

Figure 124 : *Exemple de (a) trace et de (b) spectre d'un choc sur la poutre 3*

- **Formules**

La relation entre les fréquences propres et la rigidité effective apparente peut être déterminée selon les conditions aux limites. Selon la relation (159), le fondamental se calcule comme suit :

$$f_1 = \frac{\pi}{2L_{\text{dyn}}^2}\sqrt{\frac{EI_{ef,\text{dyn,app}}}{m_{ef}}} \qquad (253)$$

Où m_{ef} correspond au rapport de la masse volumique de la poutre ρ_{ef} avec l'aire de la section composée A_{ef} ou de la masse m de la poutre avec la longueur de celle-ci L_{pou} : $m_{ef} = \rho_{ef} \times A_{ef} = m/L_{\text{pou}}$. L'unité de m_{ef} est le kg/m. Les valeurs de m_{ef} sont indiquées dans le tableau 38.

- **Résultats**

Après avoir calculées les fréquences propres fondamentales pour chaque poutre et en utilisant la relation (253), la rigidité effective apparente peut être obtenue. Le tableau 39 récapitule les valeurs des fréquences fondamentales mesurées et des rigidités effectives apparentes déduites par le calcul. Le facteur de perte $\mathfrak{G}_{\text{dyn}}$ est également calculé.

Tableau 39 : *Rigidités et proportions pour l'essai dynamique*

	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
f_1 (Hz)	29.8	31.7	29.8	30.8	34.7
$EI_{ef,\text{dyn,app}}$ (Nmm²)	3.46×10^{11}	4.07×10^{11}	3.47×10^{11}	3.65×10^{11}	4.66×10^{11}
$\mathfrak{G}_{\text{dyn}}$ (%)	57	60	66	56	65

7.1.2.2 Essai en flexion 4 points

L'essai en flexion 4 points permet de déterminer la rigidité apparente par mesure de la flèche maximum à mi-portée. Cette flèche intègre de l'effet de cisaillement en plus de l'effet de flexion, elle est nommée : $EI_{ef,\text{4pts,app}}$. Entre les deux forces ponctuelles où le moment fléchissant est constant, l'effort tranchant est nul. En mesurant le rayon de courbure dans cette zone il est possible d'en déduire la rigidité de la poutre sans effet de cisaillement. En toute rigueur, cette rigidité devrait tendre vers la rigidité de poutre à raideur d'interface infinie, elle est nommée : $EI_{ef,\text{4pts,courb}}$.

- **Protocole**

En s'inspirant de la norme NF EN 408 [94], les poutres reposent sur deux appuis, la portée L_{4pts} est de 3 m, soit un débord de 250 mm environ. Les charges sont appliquées à $L_{\text{4pts}}/3$ et $2L_{\text{4pts}}/3$.

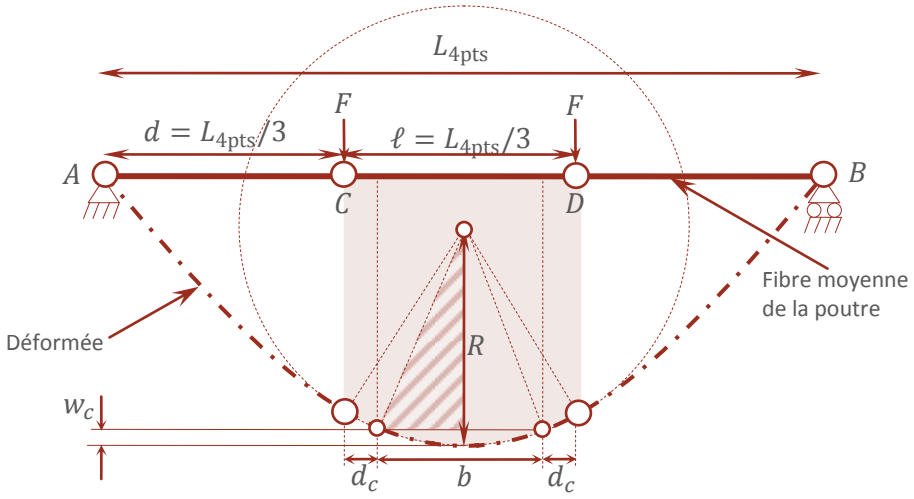


Figure 125 : *Rayon de courbure et déformée en flexion 4 points*

Un portique relié à un vérin ENERPAC […] permet d'appliquer le chargement nécessaire pour obtenir 10 mm de flèche au milieu de la portée L_{4pts}. Deux autres valeurs de la déformée sont mesurées à $d_F = 35$ mm des charges entre celles-ci : $b = L_{4pts}/3 - 2d_c$. Ces trois déplacements sont acquis avec des capteurs de déplacement de type LVDT (WA Driver Core HBM [82]). La force appliquée est mesurée à l'aide d'une cellule de charge U10M HBM [82]. Le tout est connecté à une centrale d'acquisition Spider8 HBM [82] muni du logiciel de traitement CATMAN de HBM [95].

- **Formules**

La flèche pour une poutre sur deux appuis soumise à un chargement de deux forces ponctuelles a pour équation :

$$f_{4pts} = \frac{Fd}{24EI_{ef,4pts,app}}\left(3L_{4pts}^2 - 4d^2\right) = \frac{Fd}{24EI_{ef,4pts,courb}}\left(3L_{4pts}^2 - 4d^2\right) + \frac{Fd}{GS_{ef,4pts,app}} \quad (254)$$

La rigidité de cisaillement effective apparente $GS_{ef,4pts,app}$ issue de la flèche d'effort tranchant unie les deux rigidités effectives de flexion : $EI_{ef,4pts,courb}$ et $EI_{ef,4pts,app}$ avec la relation :

$$GS_{ef,4pts,app} = \frac{24}{\left(3L_{4pts}^2 - 4d^2\right)\left(\frac{1}{EI_{ef,4pts,app}} - \frac{1}{EI_{ef,4pts,courb}}\right)} \quad (255)$$

De plus, entre les deux forces ponctuelles, comme le moment est constant, le rayon de courbure l'est aussi selon la relation (345). En utilisant le théorème de Pythagore dans la figure 125, il apparait :

$$(R - w_c)^2 + (b/2)^2 = R^2$$

La distance w_c se calcule en faisant la différence entre la flèche et la moyenne des déformées aux abscisses $d + d_c$ et $d + \ell - d_c$:

$$w_c = f - \frac{w_z(d + d_c) + w_z(d + \ell - d_c)}{2} \quad (256)$$

Il vient la relation entre le rayon de courbure et w_c :

$$R = \frac{w_c^2 + (b/2)^2}{2w_c} \quad (257)$$

Ainsi en combinant les relations (345) et (257), la rigidité effective de flexion peut s'exprimer de la manière suivante :

$$EI_{ef,4pts,courb} = M_y(d)R = Fd\frac{w_c^2 + (b/2)^2}{2w_c} \quad (258)$$

- **Résultats**

Les rigidités de flexions ainsi que la rigidité de cisaillement pour l'essai statique de flexion en 4 points, sont indiquées dans le tableau 40.

Tableau 40 : *Rigidités et proportions pour l'essai statique de flexion en 4 points*

	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$EI_{ef,4\text{pts,courb}}$ (Nmm²)	3.97×10^{11}	4.06×10^{11}	3.86×10^{11}	4.08×10^{11}	4.66×10^{11}
$\mathfrak{G}_{4\text{pts}}$ (%)	66	60	73	63	65
$EI_{ef,4\text{pts,app}}$ (Nmm²)	2.35×10^{11}	2.55×10^{11}	2.36×10^{11}	2.54×10^{11}	2.64×10^{11}
$GS_{ef,4\text{pts,app}}$ (N)	5.99×10^{5}	7.17×10^{5}	6.30×10^{5}	6.98×10^{5}	6.34×10^{5}

7.1.2.3 Essai en flexion 3 points

La rigidité de flexion apparente peut aussi être déterminée par flexion 3 points.

- **Protocoles**

En s'inspirant de la norme NF EN 408 [94], les poutres reposent sur deux appuis, la portée $L_{3\text{pts}}$ est de 3.35 m, soit un débord de 75 mm environ. La charge est appliquée à $L_{3\text{pts}}/2$.

Un portique relié à un vérin qui permet d'appliquer le chargement nécessaire pour obtenir la rupture de la poutre. Deux capteurs de déplacement de type LVDT (WA Driver Core HBM [82]) mesurent le déplacement à mi-portée $L_{3\text{pts}}$ de part et d'autre de la poutre afin de se prémunir des effets de torsion. La force appliquée est mesurée à l'aide d'une cellule de charge liée au vérin. Le tout est connecté à une centrale d'acquisition Spider8 HBM muni du logiciel de traitement CATMAN de HBM [95].

Le cycle de chargement (Figure 83) dépend de la force à rupture estimée F_{est}. Le tableau 41 récapitule les valeurs de la force maximale estimée ainsi qu'à 40% et 10%. Le pilotage du vérin est effectué en déplacement.

Tableau 41 : *Forces estimées*

	F_{est}	$0.1F_{\text{est}}$	$0.4F_{\text{est}}$
Force (kN)	10.0	1.0	4.0

Ainsi les vitesses de chargement sont déterminées en fonction des caractéristiques des poutres et de la force maximale estimée (Tableau 42).

Tableau 42 : *Vitesse de chargement*

	Charge	Décharge	Recharge
	F : 0 à $0.4F_{\text{est}}$	F : $0.4F_{\text{est}}$ à $0.1F_{\text{est}}$	F : $0.1F_{\text{est}}$ à rupture
Vitesse de déplacement (mm/s)	0.666	0.333	0.666

La figure 126 présente l'essai réalisé pour la poutre 1 avec le chargement et la présence des capteurs et de la caméra.

- **Formules**

Contrairement à l'essai de flexion 4 points, il n'est pas possible par mesure le long de la poutre de dissocier la flèche apparente d'effort tranchant et celle de flexion. Ayant estimé la rigidité de cisaillement apparente en flexion 4 points dans l'essai précédent, il est possible de réutiliser cette valeur pour déduire la rigidité de flexion apparente en flexion trois points.

Selon la norme NF EN 408 [94], la rigidité de cisaillement apparente peut être calculée en fonction de la rigidité effective réelle de flexion 4 points $EI_{ef,4\text{pts,courb}}$ obtenue dans la section précédente et de la rigidité effective apparente de la flexion 3 points $EI_{ef,3\text{pts,app}}$:

$$GS_{ef,3\text{pts}} = \frac{12}{L_{3\text{pts}}^2\left(\frac{1}{EI_{ef,3\text{pts,app}}} - \frac{1}{EI_{ef,4\text{pts,courb}}}\right)} \quad (259)$$

Ensuite, la valeur de la rigidité effective réelle de flexion 3 points peut être obtenue : $EI_{ef,3\text{pts,reel}}$.

$$EI_{ef,3\text{pts,reel}} = EI_{ef,3\text{pts,app}} + \frac{12\,EI^2_{ef,3\text{pts,app}}}{GS_{ef,3\text{pts}}L^2_{3\text{pts}} - 12EI_{ef,3\text{pts,app}}} \quad (260)$$

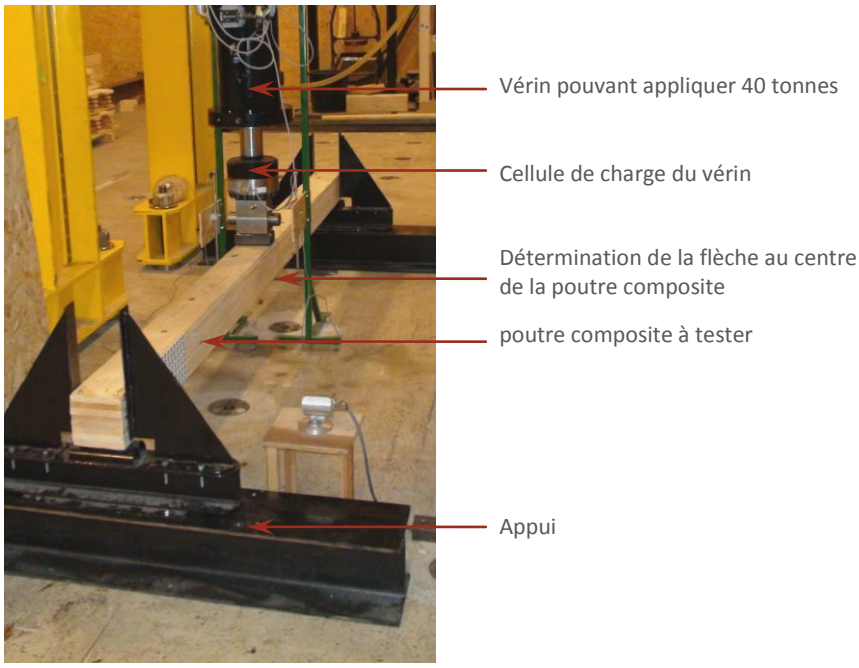


Figure 126 : *Flexion trois points de la poutre 1*

- **Résultats**

La figure 127 présente les courbes d'essais obtenues pour la flexion trois points sur les cinq poutres.

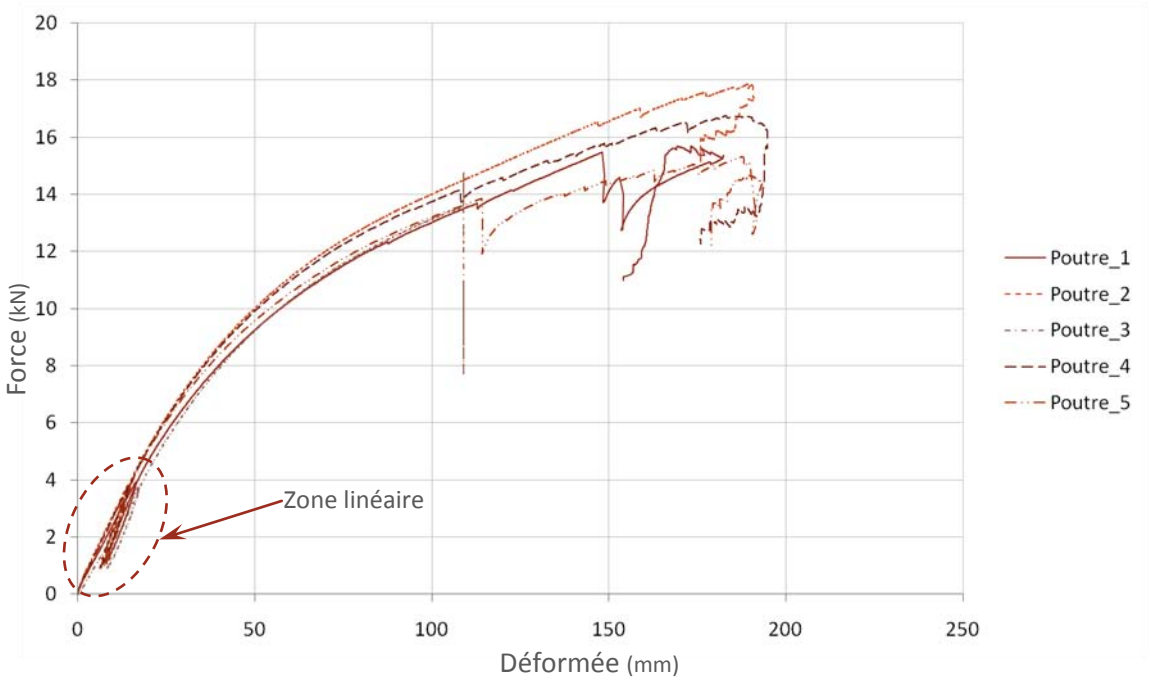


Figure 127 : *Evolution de la force en fonction de la déformée pour l'essai de flexion trois points pour les poutres pleines*

La détermination des rigidités apparentes s'effectue dans la zone linéaire présentée à la figure 127 pour la charge, la décharge et la recharge. La figure 128 montre la détermination des pentes pour la poutre 5.

Les pentes sont exprimées en kN/mm. Pour une poutre sur trois appuis la flèche se détermine selon la relation suivante :

$$f = \frac{FL^3}{48EI_{ef,3\text{pts,app}}} \Rightarrow \frac{F}{f} = \frac{48EI_{ef,3\text{pts,app}}}{L^3} \quad (261)$$

Il est ainsi possible de calculer la rigidité effective apparente des cinq poutres.

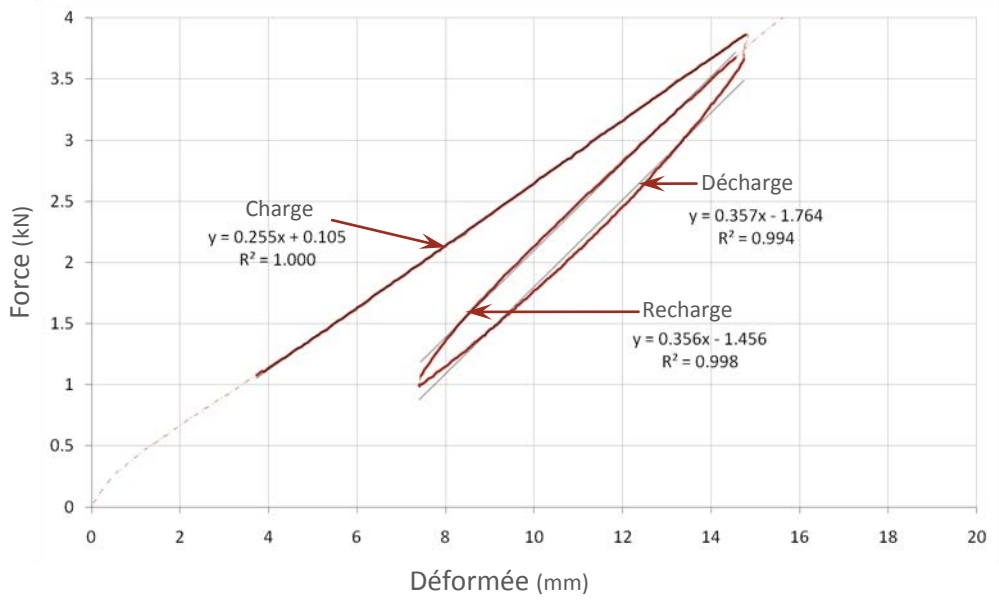


Figure 128 : *Détermination des pentes à la charge, décharge et recharge pour la poutre 5*

Les rigidités de flexions ainsi que la rigidité de cisaillement pour l'essai statique de flexion 3 points, sont indiquées dans le tableau 43.

Tableau 43 : *Rigidités et proportions pour l'essai statique de flexion 3 points*

		Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$EI_{ef,3pts,courb}$ (Nmm^2)	-	4.09×10^{11}	4.05×10^{11}	3.70×10^{11}	4.42×10^{11}	4.81×10^{11}
$EI_{ef,3pts,app}$ (Nmm^2)	Charge	1.75×10^{11}	1.87×10^{11}	1.72×10^{11}	1.91×10^{11}	1.90×10^{11}
	Décharge	2.36×10^{11}	2.53×10^{11}	2.28×10^{11}	2.63×10^{11}	2.66×10^{11}
	Recharge	2.37×10^{11}	2.52×10^{11}	2.27×10^{11}	2.64×10^{11}	2.65×10^{11}
$GS_{ef,3pts}$ (N)	Charge	6.25×10^{5}	7.13×10^{5}	5.90×10^{5}	7.94×10^{5}	6.60×10^{5}

7.1.2.4 Résumé et conclusion sur la rigidité apparente des poutres

Il convient de comparer les résultats obtenus pour les trois tests sur les poutres pleines (Tableau 44).

La figure 129 présente de manière graphique les résultats obtenus pour les différents essais. Il peut être remarqué tout d'abord que l'ensemble des mesures de rigidité quel que soit le système d'essais est très homogène. La mesure de la rigidité apparente de flexion obtenue par flexion trois points après déduction de la flèche de cisaillement calculée avec la rigidité de cisaillement obtenue par flexion 4 points est proche de la rigidité en flexion 4 points. Les rigidités apparentes en flexion 4 points et en flexion 3 points sont quasiment semblables. Ces deux constatations indiquent que les poutres lamellées assemblées par tourillons se comportent de manière homogène quel que soit leur mode de sollicitation.

Il peut être remarqué que le cisaillement des interfaces entre planches fait chuter la rigidité de flexion pure apparente de 20 % en moyenne. Ceci peut être considéré comme important car pour une poutre homogène, la déformée d'effort tranchant représente 3 à 4 % de la déformée totale. Il peut être remarqué que la rigidité de flexion pure apparente se situe également à 15 % en dessous de la rigidité d'une poutre homogène ou à raideur d'interface infinie. La rigidité obtenue par essais de vibration se situe également au même niveau. L'explication de cette différence provient du fait que le mode de chevillage par lamelles deux à deux ne permet pas d'atteindre une rigidité d'interface suffisamment importante. L'inertie apparente obtenue par le premier mode de vibration dont la déformée est sinusoïdale intègre de la déformation d'effort tranchant.

Tableau 44 : *Rigidités des poutres pleines*

	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$EI_{ef,max}$ (Nmm^2)	6.01×10^{11}	6.67×10^{11}	5.24×10^{11}	6.43×10^{11}	7.14×10^{11}

$EI_{ef,\min}$ (Nmm²)	9.56×10^{9}	1.01×10^{10}	8.20×109	9.86×10^{9}	9.79×10^{9}
$EI_{ef,\mathrm{dyn}}$ (Nmm²)	3.46×10^{11}	4.07×10^{11}	3.47×10^{11}	3.65×10^{11}	4.66×10^{11}
$EI_{ef,\mathrm{4pts,courb}}$ (Nmm²)	3.97×10^{11}	4.06×10^{11}	3.86×10^{11}	4.08×10^{11}	4.66×10^{11}
$EI_{ef,\mathrm{3pts},courb}$ (Nmm²)	4.09×10^{11}	4.05×10^{11}	3.70×10^{11}	4.42×10^{11}	4.81×10^{11}
$\mathfrak{G}_{\mathrm{dyn}}$ (%)	57	60	66	56	65
$\mathfrak{G}_{\mathrm{4pts}}$ (%)	66	60	73	63	65
$\mathfrak{G}_{\mathrm{3pts}}$ (%)	68	60	70	68	67
$EI_{ef,\mathrm{4pts,app}}$ (Nmm²)	2.35×10^{11}	2.55×10^{11}	2.36×10^{11}	2.54×10^{11}	2.64×10^{11}
$EI_{ef,\mathrm{3pts,app}}$ (Nmm²)	2.37×10^{11}	2.52×10^{11}	2.27×10^{11}	2.63×10^{11}	2.66×10^{11}
$GS_{ef,\mathrm{4pts}}$ (N)	5.99×10^{5}	7.17×10^{5}	6.30×10^{5}	6.98×10^{5}	6.34×10^{5}
$GS_{ef,\mathrm{3pts}}$ (N)	6.25×10^{5}	7.13×10^{5}	5.90×10^{5}	7.94×10^{5}	6.60×10^{5}

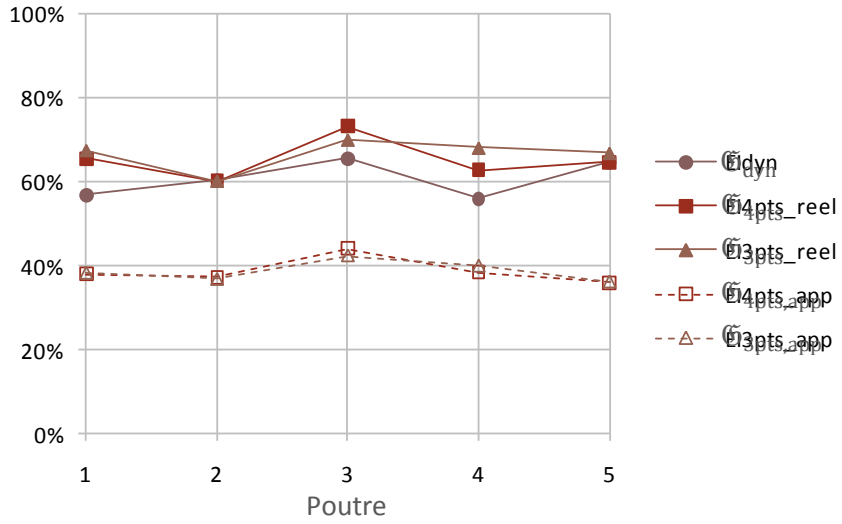


Figure 129 : *Facteur $\mathfrak{G}$ pour les poutres pleines*

7.1.3 Étude à rupture des poutres pleines

7.1.3.1 Détermination des valeurs caractéristiques lors de la rupture

Il convient de déterminer la force maximale $F_{\max}$ atteinte lors de la rupture des poutres pleines ainsi que la force au seuil élastique F_{seuil}. Pour obtenir cette dernière, il faut déterminer la pente après le seuil puis déterminer l'intersection entre la pente initiale et la pente après le seuil. La figure 130 présente la méthodologie.

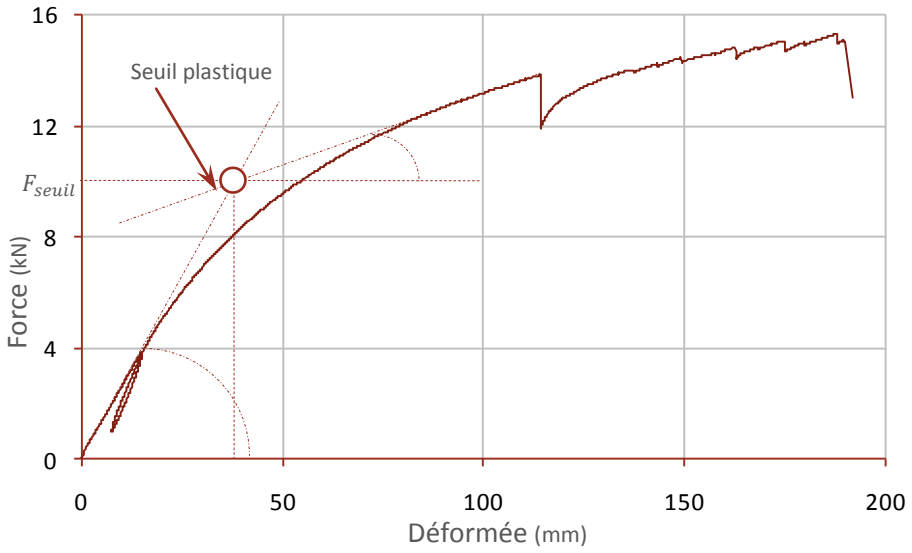


Figure 130 : *Détermination de la force au seuil plastique pour la poutre pleine 5*

Uniquement pour les tests de flexion trois points, les poutres ont été chargées jusqu'à rupture. En s'inspirant de la norme NF EN 408 [94], la résistance à la flexion des poutres peut être calculée selon la relation suivante :

$$f_{m,3\text{pts}} = \frac{M_{\max}}{W_{\max}} = \frac{F_{\max} L_{3\text{pts}}}{4} \frac{h_{\text{pou}}}{2I_{\text{pou}}} = \frac{F_{\max} L_{3\text{pts}}}{4} \frac{12 h_{\text{pou}}}{2 b_{\text{pou}} h_{\text{pou}}^3} = \frac{3}{2} \frac{F_{\max} L_{3\text{pts}}}{b_{\text{pou}} h_{\text{pou}}^2} \quad (262)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 45.

Tableau 45 : *Résistance à la flexion des poutres*

	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$F_{\max}$ (kN)	15.7	17.9	14.8	16.8	15.3
F_{seuil} (kN)	9.3	10.5	8.9	11	8.9
$F_{\max}/F_{\text{seuil}}$	1.69	1.70	1.66	1.53	1.72
$f_{m,3\text{pts}}$ (MPa)	19.3	21.9	18.1	20.6	18.8

La force au seuil plastique donne la valeur limite de la partie élastique. En utilisant la formule (252) du modèle exact généralisé, il est possible de remonter à la force appliquée au niveau des plans de cisaillement des chevilles. Comme le MEF tient compte de l'appui de type 2 et la possibilité d'avoir un débord (§6.2.1), une comparaison sur la force à l'interface des deux approches est aussi faite.

Il faut rappeler que la longueur de la poutre L_{pou} est de 3.50 m et la longueur entre les appuis $L_{3\text{pts}}$ est de 3.35 m, ce qui donne un débord de 75 mm de part et d'autre de la poutre. La figure 131 présente l'allure de la force au niveau des interfaces pour la poutre 1 selon le modèle exact généralisé et le MEF selon le type d'appui et la présence ou non de débord.

Il apparait que pour le MEF sans débord et le modèle exact généralisé, la force à l'interface maximale se trouve pour $x = 0$ et $x = L_{3\text{pts}}$. Pour le MEF avec débord la force à l'interface maximale se situe entre $x = 500$ et $x = 1500$. L'influence de l'appui est manifeste avec l'écoulement des charges vers les appuis que ne peut être réalisée avec le modèle exact généralisé et le MEF sans débord et donc sans appui. La figure 132 est un zoom sur la première moitié de la portée de la poutre 1 illustrée sur la figure 131 pour le plan de cisaillement numéro 4.

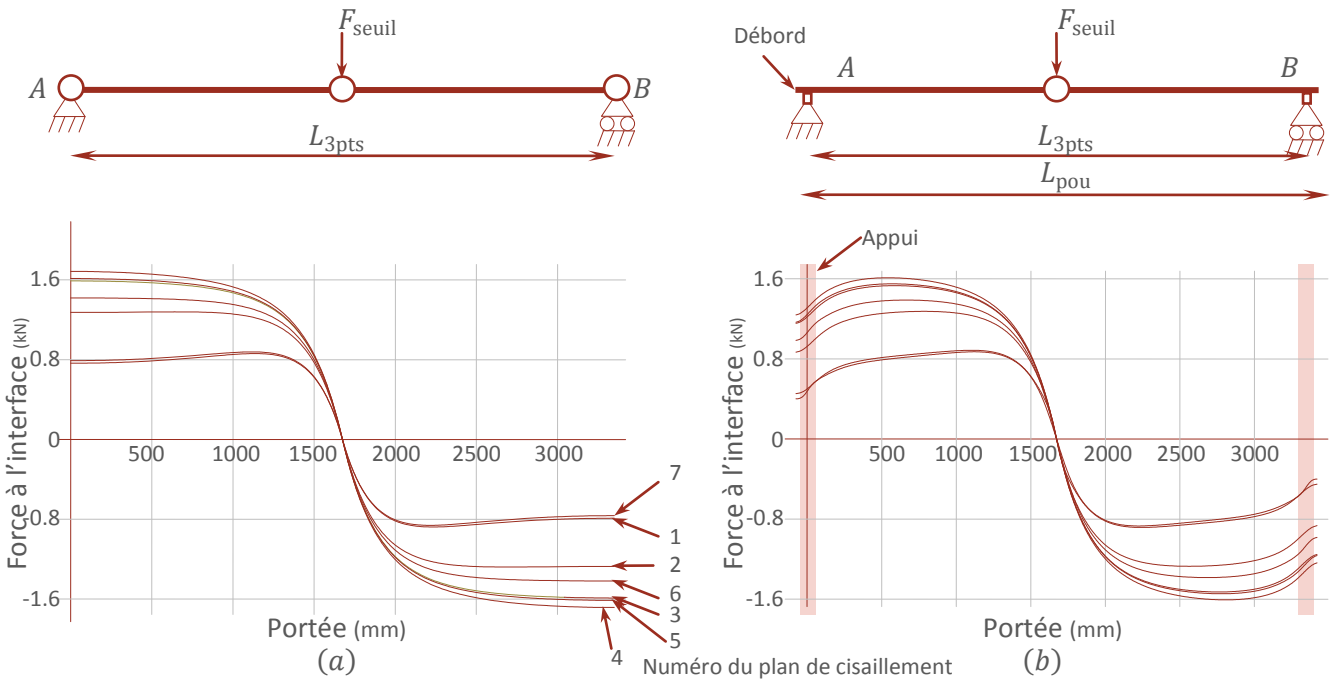


Figure 131 : *Evolution de la force à l'interface le long de la poutre 1 selon (a) le modèle exact généralisé et le MEF avec l'appui de type 1 sans débord puis (b) le MEF avec l'appui de type 2 et un débord*

Il apparait que la sollicitation des organes commence à diminuer pour une distance de $3h$ de l'appui pour un débord de 75 mm.

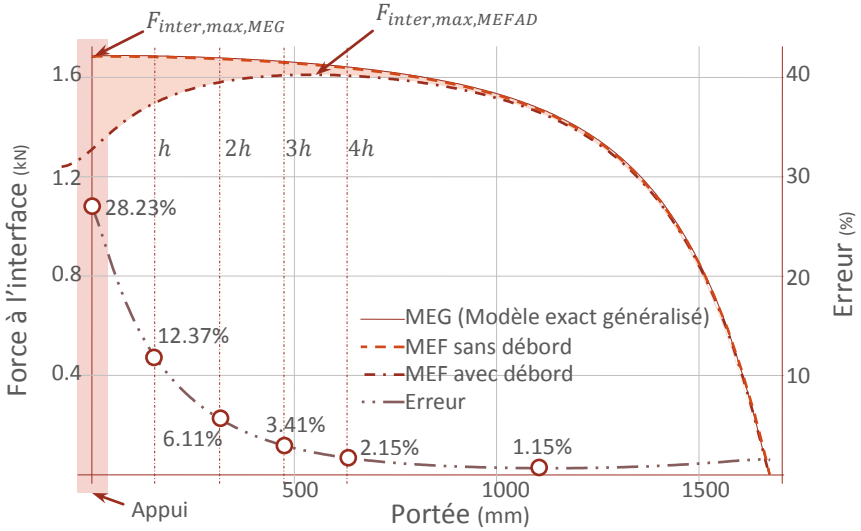


Figure 132 : *Agrandissement sur la première moitié de la portée de la force à l'interface numéro 4 selon les deux approches*

Le MEF sans débord avec ou sans le module de cisaillement est similaire au modèle exact généralisé. Il apparait donc que la présence du débord influence la redistribution de l'effort le long de l'interface.

Les forces maximales par organe et par plan de cisaillement pour les deux approches sont indiquées dans le tableau 46. Malgré l'influence du débord, la force maximale par organe est globalement similaire pour les deux approches. Il apparait que pour les interfaces 1 et 7, le débord augmente la force d'interface (+10%), pour les interfaces centrales (3,4 et 5), le débord diminue légèrement l'amplitude (-4%).

Tableau 46 : *Force par organe par plan de cisaillement selon l'interface*

F_{inter} (N)	Poutre	Interfaces						
		1	2	3	4	5	6	7
MEG et MEF sans débord $F_{inter,max,MEG}$	1	790	1273	1590	1685	1613	1419	764
	2	910	1492	1796	1879	1798	1524	1002
	3	826	1313	1554	1600	1453	1187	819
	4	991	1629	1902	1953	1794	1489	1059
	5	787	1291	1464	1528	1464	1293	940
Moyenne		861	1400	1661	1729	1624	1382	917
Ecart type		88	155	182	181	169	140	123
COV (%)		10	11	11	11	10	10	13
Valeur caractéristique (à 5%)		763	1240	1471	**1532**	1440	1225	810
MEF avec débord $F_{inter,max,MEFAD}$	1	886	1275	1532	1611	1550	1388	871
	2	1019	1482	1731	1799	1731	1505	1080
	3	906	1300	1500	1539	1416	1199	895
	4	1096	1606	1832	1875	1742	1491	1133
	5	876	1274	1416	1469	1416	1274	980
Moyenne		956	1388	1602	1659	1571	1371	992
Ecart type		97	150	173	172	161	134	114
COV (%)		10	11	11	10	10	10	11
Valeur caractéristique (à 5%)		849	1231	1422	**1472**	1394	1218	879

MEG désigne le modèle exact généralisé et MEFAD signifie modèle par éléments finis avec débord.

La valeur caractéristique de la force par organe par interface est déterminée selon la procédure de l'annexe D de l'EUROCODE 0 [89]. La valeur pour l'interface central est utilisée pour le dimensionnement selon l'EUROCODE 5 à la section §7.3.2.5. Le tableau 47 récapitule des valeurs obtenues par analyse inverse avec les modèles et la valeur obtenue par les essais unitaires en cisaillement présentés à la section §4.3.2. Ces forces par organe et par plan de cisaillement en moyenne et en caractéristique sont similaires quelle que soit la manière de les obtenir. Il faut noter que le modèle exact généralisé surestime la force à l'interface puisqu'il ne tient pas compte des débords.

Tableau 47 : *Force au seuil plastique moyenne et caractéristique*

F_{inter} (N)	Moyenne	Valeur caractéristique
Modèle exact généralisé	1729	1532
Modèle par éléments finis avec débord	1659	1472
Essais unitaire	1618	1480

7.1.3.2 Rupture des poutres pleines

Avec la disposition des chevilles dans la poutre, trois poutres ont vu leurs lamelles inférieures se casser. Il convient de les étudier cas par cas afin de mieux cerner la cause de la rupture.

La première poutre a cassé en traction au niveau de la dernière lamelle (Figure 133). Le module d'élasticité de la dernière lamelle valant 10497 MPa, cela laisse présager une faiblesse localement dans l'avivé en question. Bien qu'il y ait la présence de trois gros nœuds, ces derniers ne sont pas la cause directe de la rupture de la lamelle. Il est intéressant de noter que cette rupture ne s'est pas propagée au niveau adjacent puisque celui-ci possède un module d'élasticité longitudinal de 14968 MPa, protégeant du même coup la lamelle supérieure. Les chevilles ont

cédées aussi en deux endroits entre le deuxième et troisième niveau ainsi qu'entre le cinquième et le sixième niveau.

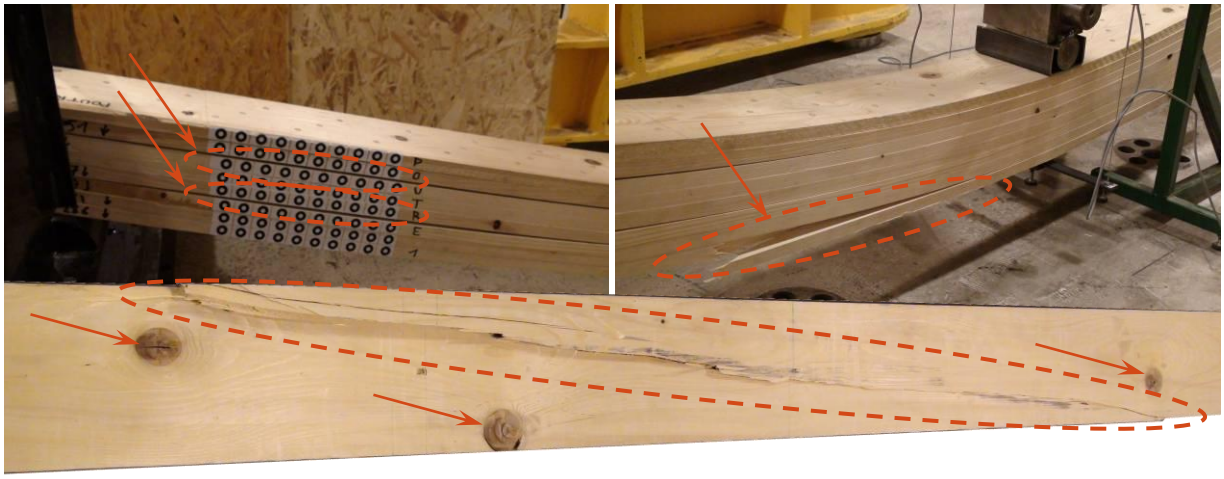


Figure 133 : *Rupture de la poutre pleine 1*

La rupture de la deuxième poutre pleine (Figure 134) est uniquement due à la rupture en cisaillement des chevilles entre le niveau 6 et le niveau 7. La dernière lamelle possède un module d'élasticité longitudinal de 13208 MPa et les deux précédentes possèdent un module d'Young longitudinal autour de 10900 MPa, ce noyau résistant a permis d'éviter la rupture en traction de la partie basse de la poutre.

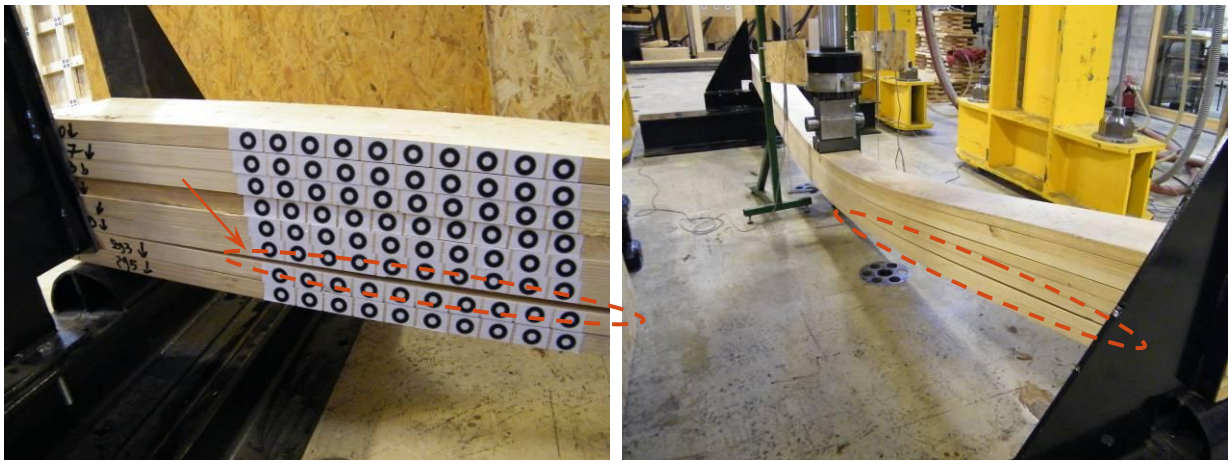


Figure 134 : *Rupture de la poutre pleine 2*

La cause de la rupture de la troisième poutre pleine (Figure 135) est liée aux propriétés faibles des trois dernières lamelles. En effet, les modules d'élasticités longitudinaux des trois dernières lamelles en partant du bas vers le centre de la poutre ont pour valeur : 8365 MPa, 6453 MPa et 9675 MPa. Ces trois lamelles se sont cassées principalement en traction. La présence de deux gros nœuds au centre de la poutre sur la dernière lamelle n'a pas diminué le risque de rupture.

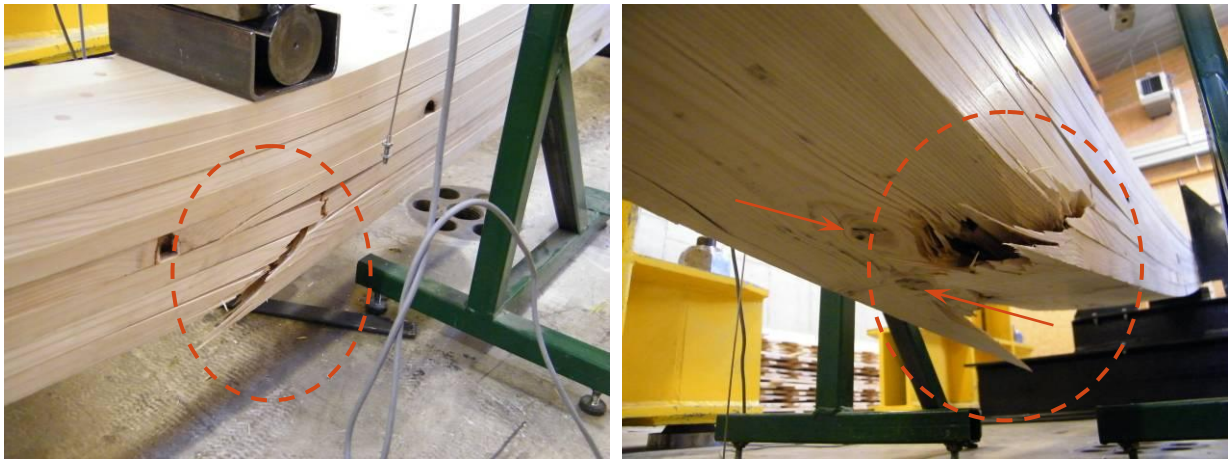


Figure 135 : *Rupture de la poutre pleine 3*

La quatrième poutre pleine (Figure 136) à suivit approximativement le même schéma de rupture que celui de la deuxième poutre pleine. La rupture de la poutre est uniquement due à la rupture en cisaillement des chevilles à l'interface entre les lamelles 2 et 3 puis entre les lamelles 6 et 7.

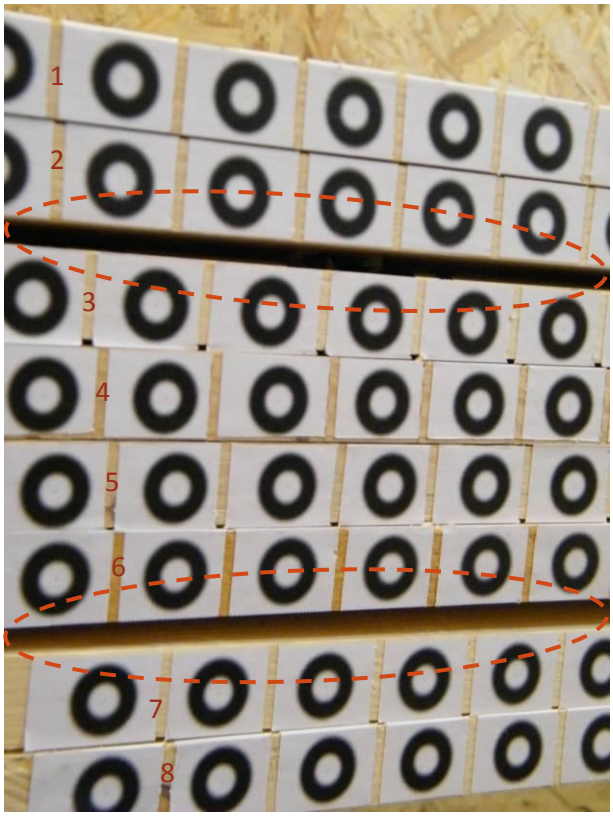


Figure 136 : *Rupture de la poutre pleine 4*

La rupture de la dernière poutre pleine (Figure 137) dénote par rapport aux autres poutres puisque la dernière lamelle a cédé en traction alors qu'elle avait le module d'élasticité longitudinal le plus élevé de l'ensemble des lamelles utilisées : 16190 MPa. La présence d'un nœud mort au centre de la lamelle, l'a probablement fragilisée. La lamelle juste au dessus a aussi cédée, mais certainement à la suite du choc causé par la rupture de la dernière lamelle.



Figure 137 : *Rupture de la poutre pleine 5*

L'essai de flexion trois points montre la probabilité de cause de rupture des lamelles pour la densité de chevilles présentes : 0.024 cheville/m ou 2.4 cheville/cm. Il faut aussi tenir compte que les ruptures sont effectives à partir de 100 mm de déplacement pour un effort ponctuel supérieur à 14 kN. Cela montre une grande souplesse des poutres pleines avec toutefois une résistance intéressante.

Autant la force au seuil élastique est équivalente pour les cinq poutres pleines avec un COV de 10% ainsi que pour la force à rupture (COV de 8%), autant le mode de rupture est varié.

7.1.4 Fabrication des pseudo-poutres du plancher

Comme il a été souligné lors de l'introduction de cette section, les pseudo-poutres sont issues du plancher à lames croisées. Le plancher est présenté et étudié dans la section §8. La section présente s'attache à caractériser les pseudo-poutres du plancher en flexion trois points. Comme il est impossible d'avoir les deux types de pseudo-poutres de longueur égale à la portée du plancher dans les deux sens, il a été choisi d'étudier les pseudo-poutres principales. Pour cela, le plancher a été découpé dans le sens de celles-ci. La figure 138 présente quelques étapes de la séparation des pseudo-poutres. De temps en temps, comme le niveau supérieur était entièrement recouvert de lamelles, il arrivait qu'une série de chevilles soit découpée. Il apparait bien sur la figure 138(e) une cheville cylindrique qui est devenue conique à la suite du soudage.

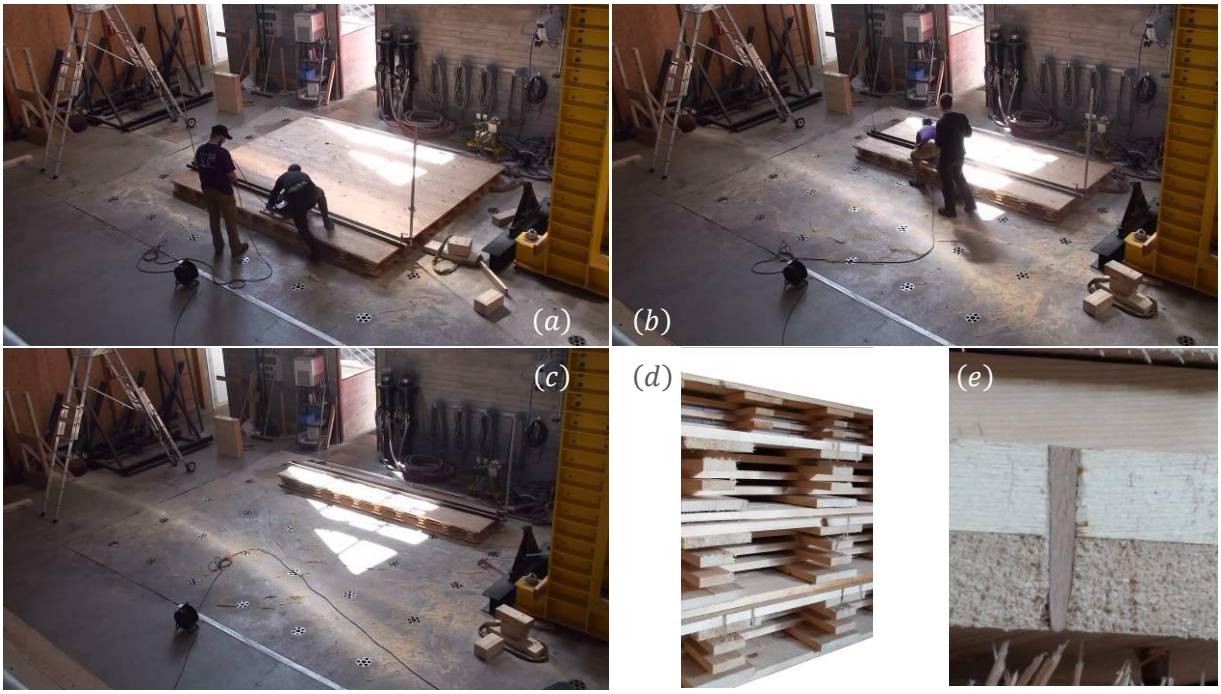


Figure 138 : *Préparation des pseudo-poutres à partir du plancher*

La suite présente le protocole d'essai en flexion trois points et les résultats obtenus.

7.1.5 Étude des propriétés élastiques des pseudo-poutres

- **Protocole**

En s'inspirant de la norme NF EN 408 [94], les pseudo-poutres reposent sur deux appuis, la portée $L_{3\text{pts}}$ est de 3.64 m, soit un débord de 180 mm. La charge est appliquée à $L_{3\text{pts}}/2$.

Un portique relié à un vérin permet d'appliquer le chargement nécessaire pour obtenir la rupture de la poutre. La force appliquée est mesurée à l'aide d'une cellule de charge liée au vérin. Le tout est connecté à une centrale d'acquisition HBM.

Le cycle de chargement (Figure 83) dépend de la force à rupture estimée F_{est}. Le tableau 48 récapitule les valeurs de la force maximale estimée ainsi qu'à 40% et 10%. Le pilotage du vérin est effectué en déplacement.

Tableau 48 : *Forces estimées pour les pseudo-poutres*

	F_{est}	$0.1F_{\text{est}}$	$0.4F_{\text{est}}$
Force (kN)	5.0	0.5	2.0

Ainsi les vitesses de chargement sont déterminées en fonction des caractéristiques des pseudo-poutres et de la force maximale estimée (Tableau 49).

La figure 139 présente l'essai de flexion trois points pour la pseudo-poutre 1 avec le chargement et la présence des cibles pour l'analyse d'images.

Tableau 49 : *Vitesse de chargement pour les pseudo-poutres*

	Charge	Décharge	Recharge
	F : 0 à $0.4F_{est}$	F : $0.4F_{est}$ à $0.1F_{est}$	F : $0.1F_{est}$ à rupture
Vitesse de déplacement (mm/s)	0.666	0.333	0.666

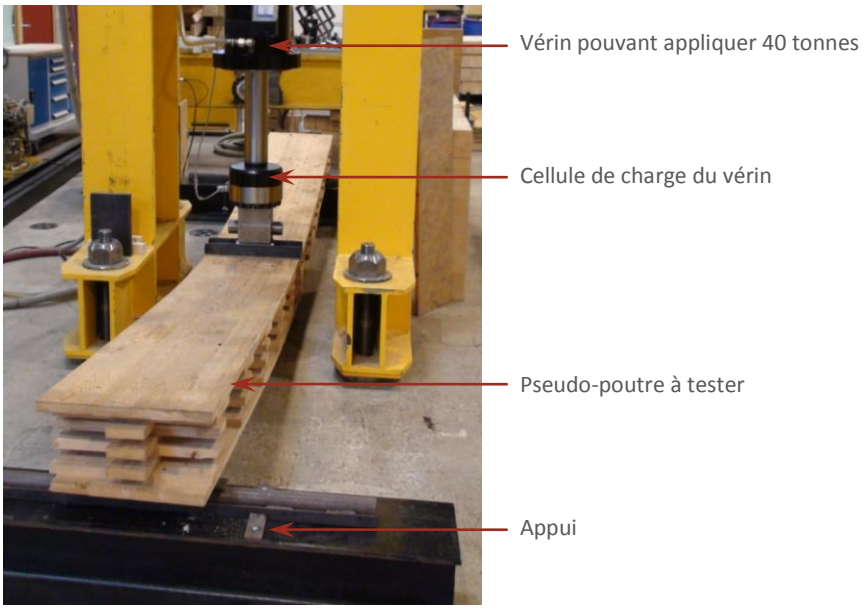


Figure 139 : *Flexion trois points de la Pseudo-poutre 1*

- **Résultats**

La figure 140 présente les courbes d'essais obtenues pour la flexion trois points sur les cinq pseudo-poutres du plancher.

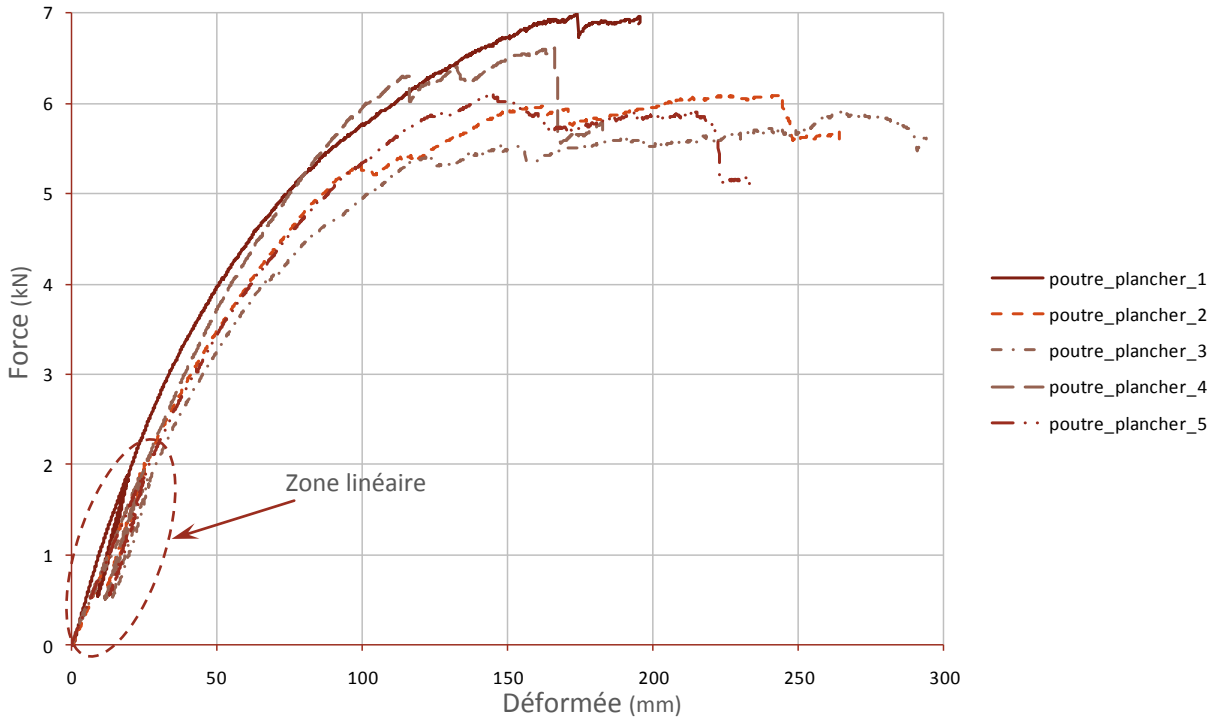


Figure 140 : *Evolution de la force en fonction de la déformée pour l'essai de flexion trois points pour les pseudo-poutres du plancher*

Le calcul des rigidités apparentes de flexion trois points s'effectue de la même manière que pour les poutres pleines, comme le précise la figure 128. Le tableau 50 indique les valeurs des rigidités apparentes obtenues pour les différentes phases du cycle de chargement.

Tableau 50 : *Rigidités des pseudo-poutres du plancher*

$EI_{ef,3pts,app}$ (Nmm^2)	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5	Moyenne	Ecart type	COV
Charge	9.61×10^{10}	8.25×10^{10}	6.81×10^{10}	7.88×10^{10}	7.60×10^{10}	8.03×10^{10}	1.03×10^{10}	13%
Décharge	1.28×10^{11}	1.03×10^{11}	1.03×10^{11}	1.11×10^{11}	1.10×10^{11}	1.11×10^{11}	9.56×10^{9}	9%
Recharge	1.26×10^{11}	1.01×10^{11}	1.02×10^{11}	1.11×10^{11}	1.10×10^{11}			

7.1.6 Etude à rupture des pseudo-poutres

La ruine des pseudo-poutres est uniquement due à la rupture en cisaillement des chevilles dans les plans se situant au centre de la section composite des pseudo-poutres. La Figure 141 représente la rupture type des pseudo-poutres dans le plan central, la Figure 141(b) présente une rupture dans plusieurs plans à la fois.

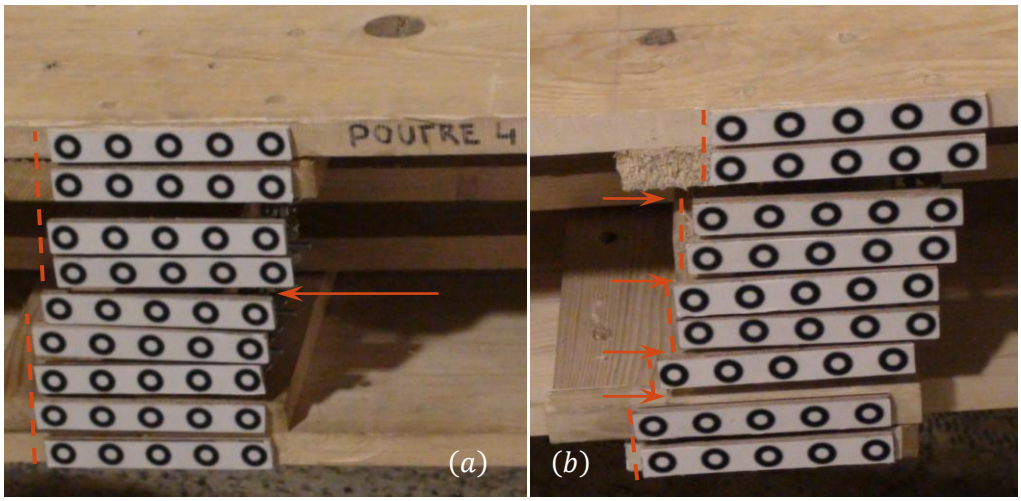


Figure 141 : *Rupture des pseudo-poutres du plancher : (a) rupture dans le plan moyen de la pseudo-poutre 4 et (b) rupture multiple dans plusieurs plans de cisaillement pour la pseudo-poutre 5*

7.2 Analyse de la rigidité d'interface

La détermination des raideurs à l'interface est réalisée par le calcul inverse de la rigidité effective obtenue à la section §6.3.1.5. Cette analyse étudie l'interface en globale. Le calcul utilise la relation reprise ici :

$$EI_{ef,tot} = \frac{\pi^5}{96}\frac{l}{L}\frac{1}{\sum_{\theta=1}^{\infty}\frac{1}{EI_{ef,\theta}}\frac{1}{\theta^5}\left(Cos\left(\theta d\frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta\frac{\pi}{L}(d+l)\right)\right)} \quad \textbf{(263)}$$

Avec $EI_{ef,\theta}$ qui dépend des caractéristiques des lamelles constituantes des poutres et de l'indice de sommation θ. De plus, par dichotomie, avec le MEF, il est possible d'obtenir les raideurs à l'interface des cinq poutres.

Le tableau 51 présente les raideurs de cisaillement moyennes des chevilles soudées par le calcul inverse des rigidités effectives selon les modèles mathématiques et les trois zones linéaires du cycle de chargement.

Si la cheville est considérée comme un organe de type tige (clou, broche…) selon l'EUROCODE 5 [4][§7.1] pour un assemblage avec pré-perçage, la raideur de cisaillement par organe et par plan se détermine selon la relation suivante :

$$K_{ser} = \frac{\rho_{\mathrm{m}}^{1.5} d}{23} \quad \textbf{(264)}$$

Comme la masse volumique ρ_m des avivés utilisés pour les cinq poutres pleines, est en moyenne de 451 kg/m^3, et que la raideur de cisaillement moyenne lors de la charge obtenue par analyse inverse est de 3563 N/mm, le diamètre d de l'organe de type tige équivalent vaut 8.6 mm.

Tableau 51 : *Raideurs d'assemblage moyennes obtenues par calcul inverse des organes à l'interface pour l'essai de flexion en trois points des poutres pleines*

			Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
$K_{\text{global,3pts}}$ (N/mm)	Charge	MEG	3435	3570	3553	3733	3524
		MEF1	3455	3595	3570	3760	3550
		MEF2	3550	3680	3700	3820	3765
	Décharge	MEG	5599	5795	5772	6330	5973
		MEF1	5620	5820	5790	6350	5995
		MEF2	5850	6030	6050	6620	6615
	Recharge	MEG	5641	5756	5725	6374	5935
		MEF1	5670	5780	5735	6395	5960
		MEF2	5920	5990	6000	6650	6585

Où MEG désigne la méthode exacte généralisée, MEF1 la modélisation par éléments finis avec le module de cisaillement infini et MEF2 la modélisation par éléments finis avec le module de cisaillement tel que G=E/16.

Il est possible de faire de même pour les pseudo-poutres. Le tableau 52 présente les raideurs de cisaillement moyennes selon la poutre.

Tableau 52 : *Raideurs d'assemblage moyennes obtenues par calcul inverse des organes à l'interface pour l'essai de flexion en trois points des pseudo-poutres du plancher*

$K_{\text{global,3pts}}$ (N/mm)	Poutre 1	Poutre 2	Poutre 3	Poutre 4	Poutre 5
Charge	2074	1695	1305	1593	1517
Décharge	3011	2273	2273	2505	2476
Recharge	3006	2270	2271	2504	2475

Selon la relation (264), comme les avivés des pseudo-poutres ont une masse volumique moyenne de 497 kg/m^3, la raideur de cisaillement moyenne pour la charge valant 1637 N/mm, le diamètre d de l'organe équivalent est de 3.4 mm. Pour la décharge/recharge, la raideur de cisaillement moyenne est de 2507 N/mm soit un diamètre d de l'organe équivalent de 5.2 mm.

La différence de raideurs de cisaillement obtenues entre les poutres pleines et les pseudo-poutres du plancher provient principalement de la manière de souder les chevilles : pour les poutres pleines, le soudage est réalisé avec la machine prototype garantissant la reproductibilité du procédé de soudage, tandis que pour les pseudo-poutres le soudage est réalisé manuellement avec une perceuse portative.

7.3 Approche de dimensionnement règlementaire

L'influence du fluage n'étant pas étudiée précisément dans ce travail, afin d'avoir un aperçu de ce phénomène, il convient d'étudier une poutre composite à l'image des cinq poutres pleines testées dans la section précédente en utilisant les éléments de dimensionnement des EUROCODES. Cette analyse permettra de mieux cerner les limites d'une poutre à connexions imparfaites en présence du fluage.

Dans un premier temps, la note de calculs d'une poutre homogène (en un seul élément) est conduite selon l'EUROCODE 5 [4], puis dans un second temps, la note de calculs d'une poutre composite pleine est présentée.

7.3.1 Note de calculs de la poutre pleine à connexion parfaite selon l'EUROCODE 5

7.3.1.1 Données du chargement

Note 2 : *Le chargement de la poutre est uniquement dans le plan moyen, ainsi le risque au déversement n'est pas considéré*

Les deux chargements uniformes appliqués sont de type chargement permanent g_k et chargements d'exploitation q_k. Leurs valeurs sont choisies de telle sorte de $g_k = q_k = 1.06\ kN/m$ soit $g_k/(g_k + q_k) = 0.5$.

Ces deux chargements conduisent à la détermination de deux combinaisons aux E.L.U. et deux combinaisons aux E.L.S.

Les deux combinaisons aux E.L.U. sont les suivantes :

$$\begin{aligned} q(Ed_1) &= 1.35g_k = 1.43\ kN/m, & k_{mod} &= 0.6 \\ q(Ed_2) &= 1.35g_k + 1.5q_k = 3.02\ kN/m, & k_{mod} &= 0.8 \end{aligned} \qquad (265)$$

Le coefficient partiel de sécurité $\gamma_M = 1.3$ selon l'EUROCODE 5 [4][§2.4.1(1)].

Les deux combinaisons aux E.L.S. sont les suivantes :

$$\begin{aligned} q(Ed_c) &= g_k + q_k = 2.12\ kN/m, & k_{def,bois} &= 0.6 \\ q(Ed_{qp}) &= g_k + \psi_2 q_k = 1.38\ kN/m, & \psi_2 &= 0.3 \end{aligned} \qquad (266)$$

L'étude est réalisée en classe de service 1, donc le coefficient de déformation vaut $k_{def} = 0.6$ selon l'EUROCODE 5 [4][§3.1.4(1)].

L'EUROCODE 0 [89][§A1.2.2(1)] donne les valeurs du facteur pour la valeur quasi-permanente de l'action selon la catégorie choisie. Dans cette exemple, la catégorie A : habitation et zones résidentielles est sélectionnée, donc $\psi_2 = 0{,}3$. Cela signifie que 30% de la charge variable est considérée pour le calcul de la flèche de fluage comme permanente.

7.3.1.2 Données sur le bois utilisé

Le bois utilisé est de classe de résistance **C24**. L'humidité choisie est 12% avec un coefficient de réduction $k_{red} = 1$ (même humidité initiale et finale).

Les dimensions sont prises selon les dimensions des cinq poutres composites étudiées précédemment soit : $h \times b \times L = 160 \times 160 \times 3350$ m^3.

Selon la norme NF EN 338 [78], les valeurs moyennes et caractéristiques sont indiquées selon la classe de résistance, ici, le tableau 53 récapitule ces données.

Tableau 53 : *Résistance à la flexion des poutres*

	Unité		
Valeurs moyennes			
Masse volumique moyenne	kg/m^3	ρ_{mean}	420
Module d'Young moyen	MPa	E_{mean}	11000
Module de cisaillement	MPa	G_{mean}	690
Valeurs caractéristiques			
Masse volumique caractéristique	kg/m^3	ρ_k	350
Module d'Young caractéristique	MPa	$E_{0.05}$	7400
Résistance caractéristique en flexion	MPa	$f_{m,k}$	24
Résistance caractéristique en cisaillement	MPa	$f_{v,k}$	3
Résistance caractéristique de compression parallèle au sens du fil du bois	MPa	$f_{c,0,k}$	21
Résistance caractéristique de traction parallèle au sens du fil du bois	MPa	$f_{t,0,k}$	14

Selon le §3.2(3) de l'EUROCODE 5 [4], pour du bois massif de section rectangulaire et de masse volumique caractéristique ρ_k inférieure à 700 kg/m^3, les valeurs caractéristiques de flexion et de traction peuvent être augmentées d'un facteur k_h. En effet, les valeurs caractéristiques des poutres de l'EN 338 [78] sont obtenues par essais sur des pièces dont la plus grande dimension de la section est 150 mm. Une poutre d'une section plus petite

a donc plus de chance d'avoir de meilleures caractéristiques mécaniques, car le nombre de défauts (nœuds, pente du fil…) défavorables se réduit. Cependant, pour les dimensions utilisées, le facteur $k_h = 1$.

7.3.1.3 Rigidité de la poutre

La rigidité de la poutre de section pleine se calcule de la manière suivante :

$$EI_{\text{homo}} = E_{mean}\frac{bh^3}{12} = 11000 \times 160 \times \frac{160^3}{12} = 6{,}01 \cdot 10^{11}\ \text{Nmm}^2 \qquad (267)$$

La rigidité de cisaillement se calcule en fonction du module de cisaillement et de la section réduite, il vient la relation suivante :

$$GS' = G_{mean}\frac{5}{6}bh\ = 690 \times 160 \times 160 = 1.47 \cdot 10^7\ \text{N} \qquad (268)$$

7.3.1.4 Vérification du bois

La vérification de la poutre bois s'effectue aux E.L.S. et aux E.L.U.

- **Vérification aux E.L.S.**

La vérification aux E.L.S. selon l'EUROCODE 5 [4] conduit à calculer la flèche w_{fin} avec la relation :

$$w_{fin} = w_{inst}(Ed_c) + w_{creep} = w_{inst}(Ed_c) + w_{inst}(Ed_{qp})k_{def,bois} \qquad (269)$$

Avec :

$w_{inst}(Ed_c)$ représente la flèche instantanée due à la combinaison caractéristique,

w_{creep} représente la flèche de fluage,

$w_{inst}(Ed_{qp})$ représente la flèche instantanée due à la combinaison quasi permanente.

Le chargement étudié est un chargement réparti, donc la flèche s'exprime selon la formule suivante :

$$f = \frac{5qL^4}{384EI_{homo}} + \frac{qL^2}{8GS'} \qquad (270)$$

Il vient les valeurs des flèches selon les combinaisons :

$$w_{inst}(Ed_c) = \frac{5q(Ed_c)L^4}{384EI_{homo}} + \frac{q(Ed_c)L^2}{8GS'} = 5.79 + 0.20 = 5.99\ mm$$

$$w_{inst}(Ed_{qp}) = \frac{5q(Ed_{qp})L^4}{384EI_{homo}} + \frac{q(Ed_{qp})L^2}{8GS'} = 3.76 + 0.13 = 3.89\ mm$$

$$w_{creep} = w_{inst}(Ed_{qp})k_{def,bois} = 3.89 \times 0.6 = 2.34\ mm$$

Ainsi

$$w_{fin} = 8.04 + 0.28 = 8.32\ mm$$

La vérification de la flèche s'effectue avec le critère suivant : $L/400 = 3350/400 = 8.375\ mm$

Le taux de travail vaut : $w_{fin}/(L/400) = 0.99$.

- **Vérifications aux E.L.U.**

La vérification aux E.L.U. s'effectue au centre de la poutre pour l'étude en flexion et aux appuis pour l'étude du cisaillement. Le tableau 54 récapitule l'ensemble des formules et des valeurs numériques. Comme les taux de travaux sont inférieurs à 1, alors la poutre est vérifiée aux E.L.U.

7.3.2 Note de calculs de la poutre pleine à connexion imparfaite en s'inspirant de l'EUROCODE 5

Soit une poutre pleine composée de huit lamelles, assemblées avec des chevilles en utilisant le soudage par friction rotative. Les dimensions globales de la poutre composite sont les mêmes que celles de la poutre homogène précédemment traitée.

Tableau 54 : *Vérification aux E.L.U. d'une poutre homogène*

		Ed_1	Ed_2	Unité	Formules
Vérification en flexion					
Moment fléchissant	$M_{y,d}$	2007425	4237897	Nmm	$M_{y,d} = \frac{q(Ed_i)L^2}{8}$
Contrainte normale de flexion	$\sigma_{m,y,d}$	2.94	6.21	MPa	$\sigma_{m,y,d} = \frac{6M_{y,d}}{h^2 b}$
Résistance de calcul en flexion	$f_{m,y,d}$	11.08	14.77	MPa	$f_{m,y,d} = \frac{k_{mod} f_{m,k}}{\gamma_M} k_h$
Taux de travail		**0.27**	**0.42**	-	$\boldsymbol{\frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}}}$
Vérification en cisaillement					
Effort tranchant	$V_{z,d}$	2397	5060	N	$V_{z,d} = \frac{q(Ed_i)L}{2}$
Contrainte de cisaillement	τ_d	0.14	0.30	MPa	$\tau_d = \frac{3V_{z,d}}{2hb}$
Résistance de calcul en cisaillement	$f_{v,d}$	1.15	1.54	MPa	$f_{v,d} = \frac{k_{mod} f_{v,k}}{\gamma_M}$
Taux de travail		**0.12**	**0.19**	-	$\boldsymbol{\frac{\tau_d}{f_{v,d}}}$

7.3.2.1 Données de l'assembleur

Les chevilles bois soudées ne font pas partie du panel des organes d'assemblage reconnus dans l'EUROCODE 5 [4]. Comme le diamètre de la cheville est initialement de 10 mm et abouti à 9 mm ou 8 mm au plan de cisaillement, une fois soudée selon les configurations, le fonctionnement de la cheville peut donc être assimilé à celui d'un organe de type tige. Il convient simplement de rappeler que la cheville est comparable en termes de rigidité à celle d'un clou de diamètre 6 mm selon [71].

La raideur de cisaillement de la cheville soudée est prise selon l'étude poutres présentées précédemment (§7.2). De plus selon l'EUROCODE 5 [4][§2.3.2.2], il convient de calculer la raideur K_{ser} obtenue en fonction du coefficient de déformation k_{def} et selon le cas avec le facteur ψ_2. Il vient :

$$K_{ser,fin} = K_{ser}, \quad \text{pour l'E.L.S. (calculs des flèches instantanées)}$$

$$K_{ser,fin} = \frac{K_{ser}}{1 + k_{def}}, \quad \text{pour l'E.L.S. (fluage) ou l'E.L.U. si cela génère le plus de contraintes} \qquad (271)$$

$$K_{ser,fin} = \frac{K_{ser}}{1 + \psi_2 k_{def}}, \quad \text{pour l'E.L.U. si cela génère le plus de contraintes}$$

Au regard des premières mesures de déplacements observées sur les essais des poutres tourillonnées, il apparait que celles-ci sont beaucoup trop souples par rapport à leurs capacités résistantes. Le nombre de tourillons étant déjà très importants, il ne parait pas réaliste d'en augmenter encore le nombre. Pour effectuer les calculs qui suivent il n'est donc pas utile d'aller chercher la rigidité non linéaire des tourillons en cisaillement, pour vérifier les capacités résistantes de la poutre. Contrairement aux préconisations de l'Eurocode 5 [4], la raideur des tourillons sera prise égale à K_{ser} et non pas à $2/3\ K_{ser}$ à l'état limite ultime. L'étude en non linéaire du comportement de la poutre et de la recherche de ses réelles capacités ultimes ne sont pas intégrées dans ce travail, étant donné l'état actuel de développement technique de ces éléments de construction. D'autre part, l'utilisation du modèle exacte généralisé pour approcher le comportement non-linéaire à l'aide de différentes adaptations nécessaires à ce genre de calculs, demanderait une étude plus particulière.

La valeur du coefficient ψ_2 est déterminée selon l'action qui génère le plus de contrainte : si cette action est la combinaison permanente (ici Ed_1) alors $\psi_2 = 1$. Il est ainsi possible de réduire le nombre de rigidités effectives à calculer en prenant les considérations présentées dans (271).

Le calcul du coefficient de déformation k_{def} doit suivre l'EUROCODE 5 [4][§2.3.2.2(3)]. Pour un assemblage composé de deux pièces de bois, il faut utiliser la relation suivante :

$$k_{def} = 2\sqrt{k_{def,1}k_{def,2}} \qquad (272)$$

Avec $k_{def,i}$ le coefficient de déformation de la pièce i. Comme les pièces ont les mêmes caractéristiques, il vient $k_{def} = 2k_{def,bois} = 2 \times 0.6 = 1.2$. Dans le cas présent, comme l'assembleur est un élément en bois il faudrait certainement revoir les formules précédentes. Pour la suite, l'étude utilisera simplement les relations telles que présentées précédemment. Le tableau 55 récapitule les valeurs des raideurs utilisables pour le calcul selon l'EUROCODE 5.

Tableau 55 : *Raideurs de cisaillement possibles pour une cheville soudée dans du bois d'épicéa (Picea abies)*

	K_{ser} (N/mm)	Ecart type (N/mm)	COV (%)	$K_{ser,fin}$ E.L.S. (Ed_{qp}) etE.L.U. ($\psi_2 = 1.0$)	$K_{ser,fin}$ E.L.U. ($\psi_2 = 0.3$)
Essais unitaire (25 échantillons)	2459	538	22%	1118	1808
Analyse inverse des poutres pleines (5 poutres)	3563	108	3%	1620	2620

L'espacement entre les chevilles est pris à 40 mm comme pour les cinq poutres testées. La raideur de cisaillement qui est la plus proche de l'étude est bien entendue celle issue des essais sur les poutres pleines, c'est donc cette raideur qui est choisie pour les calculs de la rigidité effective de la poutre composite.

7.3.2.2 Données du chargement

Le chargement utilisé est le même que pour l'étude de la poutre pleine homogène précédemment présentée. La détermination du moment fléchissant, et de l'effort tranchant global est le même que les valeurs obtenues dans le tableau 54. Il faut toutefois les déterminer, ainsi que les contraintes normales et de cisaillement, pour chacune des lamelles.

7.3.2.3 Données sur le bois utilisé

Les caractéristiques des lamelles sont les mêmes que celles énoncées dans la section précédente à savoir la classe de résistance du bois est **C24** et les valeurs caractéristiques associées sont indiquées dans le tableau 53. Les dimensions des lamelles sont $h \times b \times L = 20 \times 160 \times 3350$ mm^3. Le nombre de lamelles étant de huit, la poutre composite possède les dimensions suivantes : $8h \times b \times L = 160 \times 160 \times 3350$ mm^3.

Les modules d'élasticité sont exprimés de trois manières :

1. soit en valeur moyenne : $E_{mean,fin} = E_{mean}$, pour le calcul des flèches instantanées aux E.L.S.
2. soit en valeur finale dépendant du coefficient de déformation k_{def} : $E_{mean,fin} = E_{mean}/(1 + k_{def})$, pour le calcul de la flèche finale en tenant compte du fluage pour les E.L.S. ainsi que pour l'étude aux E.L.U. si cette disposition engendre le plus de contraintes.
3. soit en valeur finale dépendant du coefficient de déformation k_{def} et du facteur ψ_2 : $E_{mean,fin} = E_{mean}/(1 + \psi_2 k_{def})$, pour le calcul aux E.L.U si cette configuration génère le plus de contrainte.

7.3.2.4 Rigidité de la poutre

Les rigidités effectives maximales de la poutre de section pleine sont déterminées selon la formule (221). La rigidité minimale se détermine selon la relation (220), il vient :

$$EI_{\max} = E_{mean,fin}\frac{b(nh)^3}{12}, \qquad EI_{\min} = nE_{mean,fin}\frac{bh^3}{12} \qquad (273)$$

Le tableau 56 indique les valeurs de ces rigidités effectives selon les valeurs de $E_{mean,fin}$.

Selon la relation (247) du modèle exact généralisé, il est possible de calculer la rigidité effective pour le chargement sinusoïdal. Cependant, le chargement utilisé est un chargement réparti, il convient donc de faire des aménagements pour déterminer la rigidité effective totale.

La déformée a pour expression en série de FOURIER selon (402) :

$$SF(w)(x) = \frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin\left((2\theta-1)\frac{\pi}{L}x\right)}{(2\theta-1)^5}$$

Tableau 56 : *Rigidités effectives maximales et minimales selon la valeur de $E_{mean,fin}$*

	E_{mean}	$E_{mean}/(1+k_{def,bois})$	$E_{mean}/(1+\psi_2 k_{def,bois})$
$E_{mean,fin}$ (MPa)	11000	6875	9322
$EI_{\max}$ (Nmm^2)	6.01×10^{11}	3.76×10^{11}	5.09×10^{11}
$EI_{\min}$ (Nmm^2)	9.39×10^{9}	5.87×10^{9}	7.96×10^{9}

Or la flèche la plus défavorable est au milieu de la portée et vaut :

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5q_mL^4}{384EI_{ef,tot}}$$

La série de FOURIER de la déformée permet pour $x = L/2$ de calculer la flèche du chargement réparti en série de FOURIER, il vient :

$$\frac{5q_mL^4}{384EI_{ef,tot}} = \frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{(-1)^{\theta-1}}{(2\theta-1)^5}$$

donc la rigidité effective totale a pour expression en remplaçant la borne infinie par une borne finie θ_{max} :

$$\frac{1}{EI_{ef,tot,\theta_{max}}} = \frac{4\times384}{5\pi^5} \sum_{\theta=1}^{\theta_{max}} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{(-1)^{\theta-1}}{(2\theta-1)^5}$$

Le tableau 57 suivant présente les valeurs de $EI_{ef,tot,\theta_{max}}$ pour θ_{max} allant de 1 à 50, le rapport avec la valeur considérée comme véritable : $EI_{ef,tot,50}$, est indiquée aussi. La raideur de cisaillement utilisée est indiquée dans le tableau 55. Pour cette étude, la rigidité effective selon le modèle exact généralisé est similaire à la rigidité effective calculée par le MEF pour le module de cisaillement pris en compte ou non (erreur inférieure à 1%). Cette petite différence provient de la faible hauteur des lamelles.

Tableau 57 : *Rigidité effective totale selon le nombre de sommation θ_{max}*

	E.L.S. (Ed_c)		E.L.S. (Ed_{qp}) E.L.U ($\psi_2 = 1.0$)		E.L.U. ($\psi_2 = 0.3$)	
θ_{max}	$EI^{Ed_c}_{ef,tot,\theta_{max}}$ (Nmm^2)	erreur (%)	$EI^{Ed_{qp}}_{ef,tot,\theta_{max}}$ (Nmm^2)	erreur (%)	$EI^{\psi_2}_{ef,tot,\theta_{max}}$ (Nmm^2)	erreur (%)
1	1.9412×10^{11}	-1.00	9.6938×10^{10}	-1.03	1.4831×10^{11}	-1.01
2	1.9412×10^{11}	0.13	9.8073×10^{10}	0.13	1.5002×10^{11}	0.13
3	1.9412×10^{11}	-0.03	9.7914×10^{10}	-0.03	1.4978×10^{11}	-0.03
5	1.9412×10^{11}	0.00	9.7941×10^{10}	0.00	1.4982×10^{11}	-0.00
6	1.9412×10^{11}	0.00	9.7446×10^{10}	0.00	1.4983×10^{11}	0.00
10	1.9412×10^{11}	0.00	9.7446×10^{10}	0.00	1.4983×10^{11}	0.00
50	1.9412×10^{11}	0.00	9.7446×10^{10}	0.00	1.4983×10^{11}	0.00
$\mathfrak{G}$ (%)	31		15		24	
MEF $G \to \infty$	1.9595×10^{11}	0.94	9.8213×10^{10}	0.78	1.5122×10^{11}	0.90
MEF $G = E/16$	1.9540×10^{11}	0.07	9.7733×10^{10}	0.29	1.5008×10^{11}	0.19
$\mathfrak{G}$ (%)	31		15-15		24-24	

7.3.2.5 Vérification du bois

La vérification de la poutre bois s'effectue aux E.L.S. et aux E.L.U.

- **Vérifications aux E.L.S.**

La vérification aux E.L.S. selon l'EUROCODE 5 [4] demande de calculer la flèche w_{fin} avec la relation :

$$w_{fin} = w_{inst}(Ed_c) + w_{creep} = w_{inst}(Ed_c) + w_{fin}(Ed_{qp}) - w_{inst}(Ed_{qp}) \quad (274)$$

Avec :

$w_{fin}(Ed_{qp})$ représente la flèche finale due à la combinaison quasi permanente tenant compte du fluage.

Le chargement étudié est un chargement réparti, donc la flèche s'exprime selon la formule (270).

Il vient les valeurs des flèches selon les combinaisons :

$$w_{inst}(Ed_c) = \frac{5q(Ed_c)L^4}{384EI_{ef,tot,\theta_{max}}^{Ed_c}} = 17.90\ mm$$

$$w_{inst}(Ed_{qp}) = \frac{5q(Ed_{qp})L^4}{384EI_{ef,tot,\theta_{max}}^{Ed_c}} = 11.65\ mm$$

$$w_{fin}(Ed_{qp}) = \frac{5q(Ed_{qp})L^4}{384EI_{ef,tot,\theta_{max}}^{Ed_{qp}}} = 23.22\ mm$$

$$w_{creep} = w_{fin}(Ed_{qp}) - w_{inst}(Ed_{qp}) = 11.57\ mm$$

Ainsi

$$w_{fin} = 29.48\ mm$$

La vérification de la flèche s'effectue avec le critère suivant : $L/400 = 3350/400 = 8.375\ mm$

Le taux de travail vaut : $w_{fin}/(L/400) = 3.52 > 1$.

- **Vérifications aux E.L.U.**

La vérification aux E.L.U. s'effectue au centre de la poutre pour l'étude en flexion, et aux appuis pour l'étude du cisaillement car se sont les lieux les plus défavorables. Le calcul des contraintes est plus complexe que pour la poutre homogène puisqu'il faut calculer les contraintes pour chaque lamelle.

Dans un premier temps, il faut calculer les efforts normaux et les moments fléchissants dans chacune des lamelles selon les relations du formulaire §6.3.1.5. Dans un deuxième temps, avec l'aide de ce même formulaire, les contraintes normales et tangentielles doivent être calculées. Dans un troisième temps, les valeurs de résistance de calcul doivent être déterminées puis pour finir les taux de travaux peuvent être obtenus. Il faut aussi les calculer pour les deux cas : $\psi_2 = 0.3$ et $\psi_2 = 1.0$ afin de déterminer lequel génère le plus de contraintes selon l'EUROCODE 5 [4] [2.2.2(1)P et 2.3.2.2(2)].[explication de l'utilisation de Kser à la place de Ku].

Contraintes normales

Les expressions du formulaire (§6.3.1.5) de l'effort normal et du moment fléchissant de chaque lamelle doivent être légèrement modifiées puisque le chargement étant un chargement réparti et en vertu de la relation (403), le chargement a pour forme $q_\theta(x) = \beta_\theta q_m Sin(\theta\omega x)/\theta$. Il convient donc de diviser les expressions de l'effort normal et du moment fléchissant par θ. Il en résulte :

$$N_{i,\theta}(x) = -\beta_\theta EA_i w_0 \omega^2 \alpha_i \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta}$$

$$M_{i,\theta}(x) = -\beta_\theta EI_i w_0 \omega^2 \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta} \quad (275)$$

avec $\omega = \theta\pi/L$. Une fois les valeurs des α_i et w_0 obtenues en fonction de l'indice de sommation, il convient de sommer l'effort normal i et le moment fléchissant i jusqu'à la valeur de θ_{max}.

Ne connaissant pas l'influence des chevilles dans les lamelles, il convient de réduire la section en enlevant le diamètre de la cheville dans la largeur. Une largeur effective est ainsi obtenue de par la disposition constructive illustrée à la figure 122 :

$$b_{ef} = b - d_{tour}, \qquad A_{ef} = hb_{ef}, \qquad I_{ef} = \frac{b_{ef}h^3}{12} \tag{276}$$

Avec : d_{tour}, diamètre de la cheville.

La valeur du diamètre de la cheville est prise de manière forfaitaire à 10 mm : le diamètre originel. Ainsi $b_{ef} = 150$ mm, $A_{ef} = 3000$ mm^2 et $I_{ef} = 100000$ mm^3. La section est réduite de 6.25%.

Les contraintes normales s'expriment selon la formule (228) et (276) de la manière suivante :

$$\sigma_{i,\theta}(x,z) = \sigma_{i,N,\theta}(x,z) + \sigma_{i,M,\theta}(x,z) = \frac{N_{i,\theta}(x)}{A_{ef}} - \frac{M_{i,\theta}(x)}{I_{ef}}z \tag{277}$$

L'effort normal total $N_{i,tot}$, le moment fléchissant total $M_{i,tot}$ et les contraintes normales totales $\sigma_{i,N,tot}$ et $\sigma_{i,M,tot}$, sont déterminés en sommant selon l'indice de sommation θ en vertu du principe de superposition (Hypothèse 11).

Le tableau 58 récapitule les valeurs numériques des efforts normaux, des moments fléchissant et des contraintes normales pour $\theta_{max} = 50$. La figure 142 présente le diagramme des contraintes normales. Les modules d'élasticité longitudinaux sont calculés en tant que modules d'élasticité finaux et les raideurs sont aussi calculées en raideurs finales, pour les chargements $q(Ed_1)$ et $q(Ed_2)$.

Tableau 58 : *Effort normal, moment fléchissant, contraintes normales pour chaque lamelle selon la combinaison.*

	Combinaison	ψ_2	lamelles							
			1	2	3	4	5	6	7	8
$N_{i,tot}$ (N)	Ed_1	1.0	-7449	-3697	-1689	-486	486	1689	3697	7449
		0.3	-4868	-2416	-1104	-318	318	1104	2416	48868
	Ed_2	1.0	-15727	-7804	-3566	-1026	1026	3566	7804	15727
		0.3	-10278	-5101	-2331	-671	671	2331	5101	10278
$M_{i,tot}$ (N.mm)	Ed_1	1.0	11998	11998	11998	11998	11998	11998	11998	11998
		0.3	7837	7837	7837	7837	7837	7837	7837	7837
	Ed_2	1.0	25330	25330	25330	25330	25330	25330	25330	25330
		0.3	16546	16546	16546	16546	16546	16546	16546	16546
$\sigma_{N,i,tot}$ (MPa)	Ed_1	1.0	-2.33	-1.16	-0.53	-0.15	0.15	0.53	1.16	2.33
		0.3	-1.52	-0.76	-0.35	-0.10	0.10	0.35	0.76	1.52
	Ed_2	1.0	-4.91	-2.44	-1.12	-0.32	0.32	1.12	2.44	4.91
		0.3	-3.21	-1.59	-0.73	-0.21	0.21	0.73	1.59	3.21
$\sigma_{M,i,tot}$ (MPa)	Ed_1	1.0	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12	1.12
		0.3	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74	0.74
	Ed_2	1.0	2.38	2.38	2.38	2.38	2.38	2.38	2.38	2.38
		0.3	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55

Il apparait que chaque lamelle subit un effort normal (de traction (positif) ou de compression (négatif)), puis un moment fléchissant. Les contraintes de traction se nomment $\sigma_{t,0,d}$, elles valent $\sigma_{N,i,tot}(\geq 0)$; les contraintes de compression se nomment $\sigma_{c,0,d}$, elles valent $\sigma_{N,i,tot}(\leq 0)$. La contrainte due à la flexion s'écrit $\sigma_{m,d} = \sigma_{M,i,tot}$. La vérification des contraintes normales issues de ces efforts et moments, s'effectue selon les relations suivantes (EUROCODE 5 [4][6.2.3 et 6.2.4]) :

$$\begin{gathered} \frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \\ \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \end{gathered} \tag{278}$$

Comme une lamelle ne peut être en compression et en traction à la fois, que le risque de déversement n'est pas pris en compte et que le chargement n'est appliqué que dans le plan moyen étudié (x, z), la relation précédente peut être réduite à une seule inégalité :

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} \leq 1 \qquad \textbf{(279)}$$

Les résistances de traction $f_{t,0,d}$, compression $f_{c,0,d}$ et de flexion $f_{m,d}$ de calcul sont déterminées selon les formules suivantes :

$$f_{t,0,d} = \frac{f_{t,0,k} k_{mod}}{\gamma_M} k_{h,b}, \qquad f_{c,0,d} = \frac{f_{c,0,k} k_{mod}}{\gamma_M}, \qquad f_{m,d} = \frac{f_{m,k} k_{mod}}{\gamma_M} k_{h,h} \qquad \textbf{(280)}$$

Les valeurs numériques des résistances caractéristiques se trouvent dans le tableau 53. La valeur de k_{mod} dépend de la combinaison. La valeur de $k_{h,x}$ pour la résistance en flexion de calcul, est en fonction de la hauteur de la lamelle $(x = h)$, alors que le $k_{h,b}$ de la résistance en traction de calcul est en fonction de la largeur de la lamelle $(x = b)$. D'après l'EUROCODE 5 [4][§3.2], l'expression de $k_{h,x}$ vaut :

$$k_{h,x} = \begin{cases} \min\left(\left(\frac{150}{x}\right)^{0.2}; 1.3\right), & x < 150 \\ 1.0, & x \geq 150 \end{cases} \qquad \textbf{(281)}$$

Pour cette étude, $k_{h,h} = 1.3$ et $k_{h,b} = 1.0$. Les résistances de calcul sont répertoriées dans le tableau 59.

Tableau 59 : *Résistances de calcul selon la combinaison*

	Combinaison	
$f_{t,0,d}$	Ed_1	6.46
(MPa)	Ed_2	8.62
$f_{c,0,d}$	Ed_1	9.69
(MPa)	Ed_2	12.92
$f_{m,d}$	Ed_1	14.40
(MPa)	Ed_2	19.20

Le tableau 60 donne les taux de travaux pour chaque lamelle. Selon les efforts normaux obtenus dans le tableau 58 les quatre premières lamelles sont en compression et les quatre dernières sont en traction.

Les taux de travaux les plus importants sont situés pour les lamelles en tractions et plus particulièrement la dernière lamelle. L'étude des ruptures des poutres en flexion 3 points corrobore ce fait (§7.1.3).

Contraintes de cisaillement

La contrainte de cisaillement se calcule d'après la relation du formulaire §6.3.1.5.

$$\tau_{i,tot}(x,z) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial N_{i,tot}(x)}{\partial x}\left(\frac{h_i}{2} - z\right) - \frac{1}{I_i}\frac{\partial M_{i,tot}(x)}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_i}{2}\right)^2 - z^2\right) + \frac{1}{b_i}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial N_{k,tot}(x)}{\partial x} \qquad \textbf{(282)}$$

$$\text{pour} \quad -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2}$$

La figure 142 présente le diagramme des contraintes normales et de cisaillement le long de la hauteur de la section. Il apparait que le maximum pour la contrainte de cisaillement apparait dans les lamelles 4 et 5 (nombre pair de lamelles). Les valeurs des maximums de la contrainte de cisaillement pour chaque lamelle se déterminent d'après les formules de (251). Il faut pour déterminer $z_{\text{opt},i}$, préalablement calculer les variations des efforts normaux et des moments fléchissant pour chaque lamelle.

Tableau 60 : *Taux de travail des contraintes normales par lamelle en fonction des combinaisons*

	Combinaison	ψ_2	lamelles							
			1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}}$	Ed_1	1.0	0	0	0	0	0.02	0.08	0.18	0.36
		0.3	0	0	0	0	0.02	0.05	0.11	0.24
	Ed_2	1.0	0	0	0	0	0.04	0.13	0.28	0.57
		0.3	0	0	0	0	0.02	0.09	0.19	0.37
$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2$	Ed_1	1.0	0.058	0.014	0.002	0.0002	0	0	0	0
		0.3	0.025	0.006	0.001	0.0001	0	0	0	0
	Ed_2	1.0	0.145	0.036	0.007	0.0006	0	0	0	0
		0.3	0.062	0.015	0.003	0.0003	0	0	0	0
$\frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}}$	Ed_1	1.0	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078	0.078
		0.3	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051
	Ed_2	1.0	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124	0.124
		0.3	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081	0.081
Taux de travail	Ed_1	1.0	0.14	0.09	0.08	0.08	0.10	0.16	0.26	0.44
		0.3	0.08	0.06	0.05	0.05	0.07	0.10	0.17	0.29
	Ed_2	1.0	0.27	0.16	0.13	0.12	0.16	0.25	0.41	0.69
		0.3	0.14	0.10	0.08	0.08	0.11	0.17	0.27	0.45

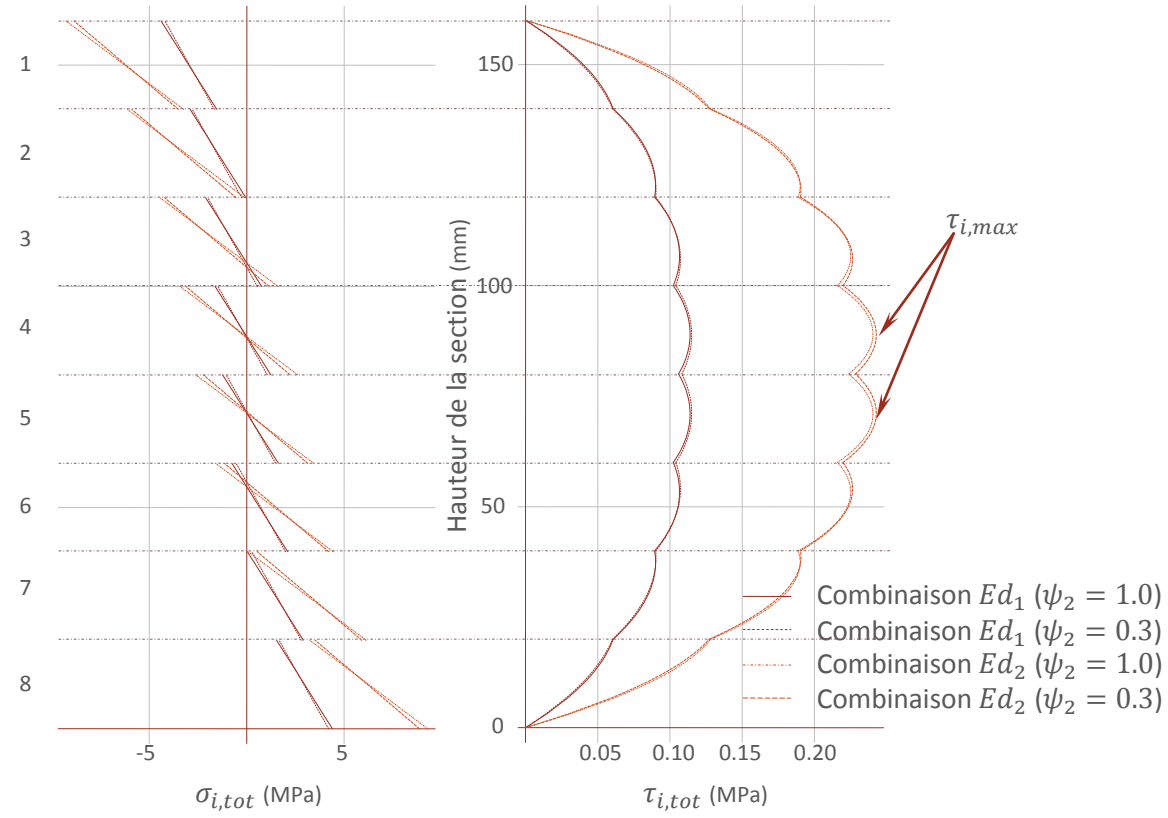


Figure 142 : *Diagramme des contraintes normales et tangentielles selon la combinaison étudiée et la valeur du facteur* $\boldsymbol{\psi_2}$

Il vient une relation beaucoup plus complexe pour l'ordonnée $z_{\mathrm{opt},i}$ suite au chargement réparti, comparé à un chargement sinusoïdal pur.

Le tableau 61 présente les valeurs des variations des efforts normaux, des variations des moments fléchissant, la valeur de $z_{\text{opt},i}$ puis la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.

La résistance en cisaillement de calcul est déterminée selon la formule suivante :

$$f_{v,d} = \frac{f_{v,k} k_{mod}}{\gamma_M} \quad \textbf{(283)}$$

Les valeurs numériques de la résistance caractéristique en cisaillement se trouvent dans le tableau 53. La valeur de k_{mod} dépend de la combinaison. Le tableau 59 indique les deux valeurs de la résistance en cisaillement de calcul.

Tableau 61 : *Contraintes de cisaillement par lamelle selon la combinaison*

	Combinaison	ψ_2	lamelles							
			1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\partial N_{i,tot}(x)}{\partial x}$ (N/mm)	Ed_1	1.0	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
		0.3	-10	-5	-2	-1	1	2	5	10
	Ed_2	1.0	-20	-10	-4	-1	1	4	10	20
		0.3	-20	-10	-5	-1	1	5	10	20
$\frac{\partial M_{i,tot}(x)}{\partial x}$ (N)	Ed_1	1.0	21	21	21	21	21	21	21	21
		0.3	19	19	19	19	19	19	19	19
	Ed_2	1.0	44	44	44	44	44	44	44	44
		0.3	39	39	39	39	39	39	39	39
$z_{\text{opt},i}$ (mm)	Ed_1	1.0	-15.62	-7.40	-3.32	-0.95	0.95	3.32	7.40	15.62
		0.3	-17.25	-8.58	-4.00	-1.17	1.17	4.00	8.58	17.25
	Ed_2	1.0	-15.62	-7.40	-3.32	-0.95	0.95	3.32	7.40	15.62
		0.3	-17.25	-8.58	-4.00	-1.17	1.17	4.00	8.58	17.25
$\tau_{i,tot}(x, z_{\text{opt},i})$ $\tau_{i,tot,max}$ (MPa)	Ed_1	1.0	0.061	0.090	0.1066	0.1139	0.1139	0.1066	0.090	0.061
		0.3	0.060	0.090	0.1073	0.1150	0.1150	0.1073	0.090	0.060
	Ed_2	1.0	0.128	0.190	0.225	0.241	0.241	0.225	0.190	0.128
		0.3	0.127	0.191	0.226	0.243	0.243	0.226	0.191	0.127

Tableau 62 : *Résistances en cisaillement de calcul selon la combinaison*

	Combinaison	
$f_{v,d}$	Ed_1	1.39
(MPa)	Ed_2	1.85

Soit la contrainte de cisaillement $\tau_{v,d} = \tau_{i,tot,max}$. Le taux de travail à calculer est le suivant :

$$\frac{\tau_{v,d}}{f_{v,d}} \leq 1 \quad \textbf{(284)}$$

Les valeurs numériques du taux de travail sont présentées dans le tableau 63 selon la combinaison et les valeurs du facteur ψ_2.

Tableau 63 : *Taux de travail pour la contrainte de cisaillement par lamelle en fonction des combinaisons*

	Combinaison	ψ_2	lamelles							
			1	2	3	4	5	6	7	8
Taux de travail	Ed_1	1.0	0.04	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.04
		0.3	0.04	0.07	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.04
	Ed_2	1.0	0.07	0.10	0.12	0.13	0.13	0.12	0.10	0.07
		0.3	0.07	0.10	0.12	0.13	0.13	0.12	0.10	0.07

Les taux de travaux pour les contraintes normales (Tableau 60) et les contraintes de cisaillement (Tableau 63) sont inférieurs à 1.

7.3.2.6 Vérification de l'organe d'assemblage

La relation (252) permet de calculer la force par organe et par plan de cisaillement. Pour cela il convient de calculer la somme des variations des efforts normaux du tableau 61 et de la multiplier par l'espacement entre les organes dans le plan considéré, ici $e_{i,i\pm1} = 40$ mm.

Le tableau 64 présente les valeurs de cette force à l'interface au niveau de l'appui car la force y est maximale pour le modèle exact généralisé. La figure 132 montre la différence de cette force à l'interface vers l'appui entre le modèle exact généralisé et le MEF avec la présence de débords. Il vient que les organes situés prêt de l'appui sont moins sollicités par rapport au modèle analytique. Ainsi, la détermination des efforts à l'interface au niveau des appuis au centre de la section, est surestimée d'environ 4% et les organes sont bien plus sollicités vers les appuis qu'ils le devraient.

Tableau 64 : *Force par organe et plan de cisaillement par interface selon la combinaison*

	Combinaison	ψ_2	Joint						
			1	2	3	4	5	6	7
$\sum_{k=1}^{i} \frac{\partial N_{k,tot}(x)}{\partial x}$ (N/mm)	Ed_1	1.0	-10	-14	-16	-17	-16	-14	-10
		0.3	-10	-14	-17	-17	-17	-14	-10
	Ed_2	1.0	-20	-30	-35	-36	-35	-30	-20
		0.3	-20	-30	-35	-37	-35	-30	-20
$F_{i,tot}(x, z_{\text{opt},i})$ (N)	Ed_1	1.0	388	572	655	678	655	572	388
		0.3	385	577	666	692	666	577	385
	Ed_2	1.0	819	1208	1382	1432	1382	1208	819
		0.3	813	1218	1407	1462	1407	1218	813

Ainsi, la première cheville reprend globalement la valeur de la force du tableau 64 pour chacun des plans. Il convient de vérifier les organes selon les résistances de calcul des organes obtenues selon les valeurs caractéristiques obtenues par essais (§7.1.3.1 et tableau 47).

La résistance d'un organe par plan de cisaillement de calcul s'exprime selon la relation suivante :

$$F_{v,Rd} = \frac{F_{v,Rk} k_{mod}}{\gamma_M} \quad \textbf{(285)}$$

Où $F_{v,Rk}$ est la valeur caractéristique de la résistance d'un organe par plan de cisaillement, ici $F_{v,Rk} = 1480$ N. Le tableau 65 donne les valeurs de calcul de cette résistance selon la combinaison.

Il convient de calculer le taux de travail en calculant $F_{i,tot}/F_{v,Rd}$, le tableau 66 donne les ratios selon la combinaison et le plan de cisaillement étudié.

Il apparait que les organes sont sollicités au-delà de leur résistance de calcul particulièrement pour la combinaison avec la charge d'exploitation. Ces données caractérisent seulement le premier organe sollicité de chaque interface selon le modèle exacte généralisé. En tenant compte du débord, il apparait que les premiers organes sont beaucoup moins sollicités mais restent toutefois supérieure à $F_{v,Rd}$.

Tableau 65 : *Résistances de l'organe en cisaillement de calcul selon la combinaison*

	Combinaison	
$F_{v,Rd}$	Ed_1	683
(N)	Ed_2	911

Tableau 66 : *Taux de travail pour l'effort par organe et par plan de cisaillement selon l'interface et selon la combinaison*

	Combinaison	ψ_2	Joint						
			1	2	3	4	5	6	7
$\frac{F_{i,tot}}{F_{v,Rd}}$ (%)	Ed_1	1.0	0.57	0.84	0.96	0.99	0.96	0.84	0.57
		0.3	0.56	0.84	0.98	**1.01**	0.98	0.84	0.56
	Ed_2	1.0	0.90	**1.33**	**1.52**	**1.57**	**1.52**	**1.33**	0.90
		0.3	0.89	**1.34**	**1.54**	**1.61**	**1.54**	**1.34**	0.89

7.3.2.7 Améliorations possibles

L'étude montre que pour les raideurs de cisaillement choisies, la poutre composite n'est pas vérifiée. Cependant, il est possible de quantifier la raideur de cisaillement souhaitée pour atteindre 50%, 75% et 90% de la rigidité de la poutre homogène.

La figure 143 présente l'évolution des rigidités effectives étudiées en fonction de la raideur linéique $K_{ser,fin}/e_{org}$ selon les définitions (271). Les rigidités effectives maximales respectives sont indiquées également. Le cas d'étude est représenté par des points. Il faut rappeler que les valeurs numériques des raideurs de cisaillement se trouvent dans le tableau 55, les rigidités effectives maximales dans le tableau 56 et les rigidités effectives dans le tableau 57 où la valeur de l'espacement entre les chevilles $e_{i,i\pm1}$ vaut 40 mm (§7.3.2.1).

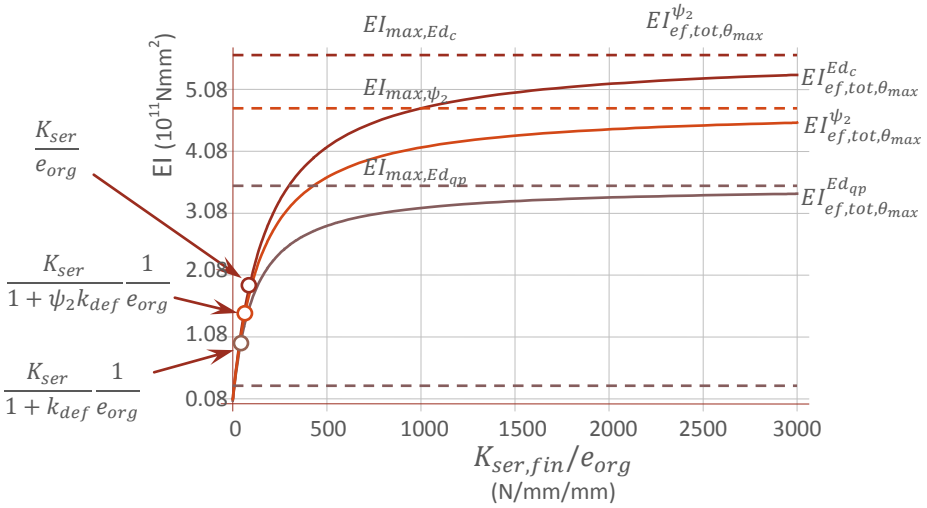


Figure 143 : *Evolution de la rigidité en fonction de la raideur linéique*

Le Tableau 67 présente les raideurs de cisaillement moyennes nécessaires pour atteindre 50%, 75% et 95% pour le facteur $\mathfrak{G}$, pour un espacement entre organe de 40 mm.

Tableau 67 : *Raideurs nécessaires pour atteindre 50%, 75% et 95% du facteur* $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{G}$ (%)	$K_{ser,i\%}$	$K_{ser,i\%}/K_{ser}$
95	146261	41.05
75	22956	6.44
50	7543	2.12

De plus, comme il n'est pas possible d'obtenir la raideur de cisaillement infinie pour reconstituer parfaitement la poutre composite, une autre méthode permet de parvenir à réduire la flèche excessive en ajoutant des lamelles. Il vient selon la raideur de cisaillement étudiée, le nombre de lamelles supplémentaires indiqué dans le Tableau 68. Les pourcentages entre parenthèse caractérisent le dépassement du critère de flèche. Les raideurs de cisaillement choisies sont celles présentes dans le Tableau 67 pour un espacement entre les organes de 40 mm.

Tableau 68 : *Nombre nécessaire de lamelles pour valider le critère de flèche (<8.4 mm) selon les raideurs de cisaillement*

K_{ser}	Nombre de lamelles	Surplus de lamelles
3563	21	+13
7554 (2.12×3563)	13	+5
22956 (6.44×3563)	10	+2
	9 (+4%)	+1
146261 (41.05×3563)	9	+1
	8 (+3%)	+0

7.4 Conclusion

La réalisation de poutres composées de huit lamelles assemblées par des chevilles soudées donne un aperçu de la faisabilité de ce type d'élément. Il apparait une grande souplesse de l'élément. L'utilisation du modèle exact généralisée et du MEF ont permis de calculer avec précision la raideur de cisaillement moyenne pour chaque interface.

Entre le MEF qui tient compte des débords et le modèle exact généralisé, une divergence peut être remarquée près de l'appui. En effet, que l'appui soit modélisé par MEF avec une plaque (type 2) ou qu'il soit juste représenté par le blocage adéquate des nœuds sur la fibre moyenne (type 1), il apparait une diminution de la sollicitation des organes à partir de trois fois la hauteur de la poutre. L'analyse par le modèle exact généralisé surestime cette sollicitation des organes.

L'étude du comportement de telles poutres en prenant en compte le fluage selon l'analyse de l'EUROCODE 5, montre que la réalisation de poutres pleines lamellées chevillées soudées ne permet pas d'obtenir des éléments compétitifs vis-à-vis des poutres à connexions parfaites. En effet, avec la raideur de cisaillement obtenue et la disposition constructive utilisée pour la mise en place des chevilles soudées, le nombre de lamelles supplémentaires nécessaires pour approcher le critère de flèche $L/400$, est important. S'il est possible d'augmenter la raideur de cisaillement des chevilles soudées de 6.44 fois la valeur obtenue par essai, les poutres lamellées chevillées soudées pourrait être envisagées avec, dans le cas présent, deux lamelles supplémentaires.

Enfin, l'utilisation de tels éléments est intéressante pour des sollicitations où le fluage n'a pas une part importante, par exemple les poteaux et autres éléments verticaux (comme les montants de portes et fenêtres).

La méthodologie est employée pour caractériser la raideur de cisaillement pour les pseudo-poutres du plancher. La raideur de cisaillement moyenne des organes est obtenue par analyse inverse avec le MEF ou le modèle exact généralisé. La valeur obtenue est inférieure à celle des poutres pleines, cela s'explique principalement par la méthode utilisée pour insérer les chevilles.

« Qui peut dire qu'il est sur un plancher solide?»

[Félix Leclerc]

8 PLANCHER

La réalisation d'un plancher de grandeur réelle avec des avivés utilisant la technologie du soudage du bois par friction rotative comme moyen d'assemblage, amène quelques considérations à prendre en compte. La réalisation d'un panneau massif non collé à l'image des panneaux massif de THOMAHOLZ [3] demande un volume de bois conséquent et un nombre d'organes d'assemblage important. Des planchers à lamelles croisées non massifs, type ajourés, sont comparables à des poutres. Ces éléments sont nommés par la suite pseudo-poutre. Les pseudo-poutres sont placées dans le sens des supports. Ainsi, pour un plancher de ce type, deux pseudo-poutres peuvent être considérées : principale (pseudo-poutre d'inertie maximale) et secondaire (pseudo-poutre d'inertie minimale) (Figure 144). La réflexion autour de la conception d'un plancher léger à lamelles croisées conduit à optimiser l'influence de plusieurs facteurs [70] :

- le volume de bois,
- dimensions du plancher : longueur, largeur et hauteur
- le nombre de pseudo poutres
- la surface de contact des planches
- la faisabilité

Selon [70], l'optimisation de ces facteurs donne une forme des pseudo-poutres en diabolo ou en « I », à l'image des poutres du même nom. Une pré-étude par éléments finis a permis de finaliser le choix du nombre de pseudo-poutres pour un plancher carré de quatre mètres de côté constitué de 10 pseudo-poutres principales (de section 4-1-1-1-4) et 10 pseudo-poutres secondaires (de section 2-1-1-2) comme la figure 144(b) le présente. Dans la suite les pseudo-poutres (PP) sont abrégées en PPP pour la principale et PPS pour la secondaire. La figure 144(a) indique également le nom des pseudo-poutres.

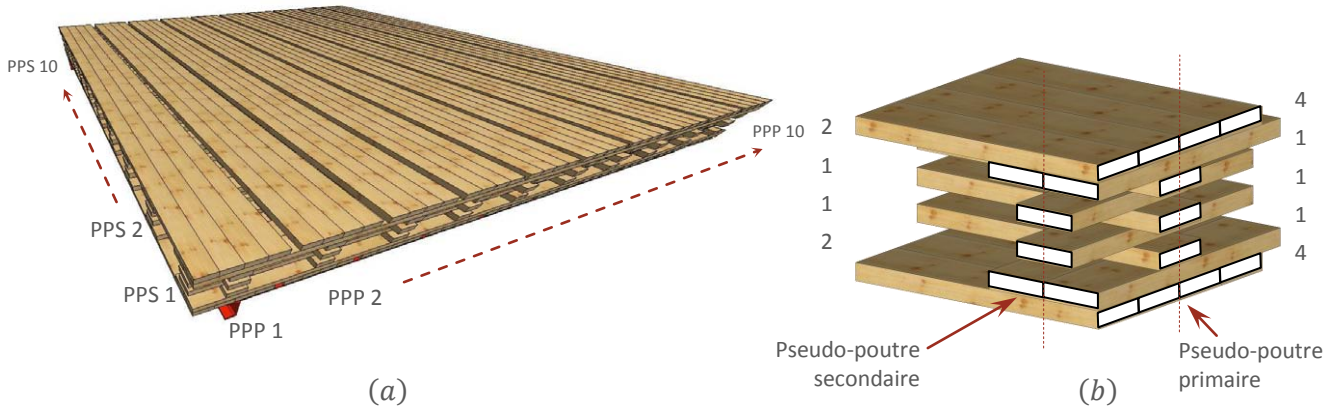


Figure 144 : *(a) Forme du plancher choisi avec et (b) section principale*

8.1 Etude théorique

8.1.1 MEF

Une modélisation par éléments finis paramétrables est réalisée pour « extrapoler » les calculs des propriétés du plancher, une fois confronté au plancher fabriqué et testé.

Le modèle par éléments finis, noté par la suite MEF, est réalisé avec le code de calcul CAST3M du CEA [92]. Cette section expose le paramétrage du modèle d'un plancher constitué de lamelles croisées de caractéristiques différentes ou identiques, sur deux, trois et quatre appuis.

8.1.1.1 Généralité

Le MEF représente un plancher composé de n niveaux, reposant sur deux, trois et quatre appuis, soumis à un chargement q. Chaque niveau possède un nombre de lamelles côte à côte ainsi qu'un espacement entre ces ensembles. Ce modèle est en trois dimensions. Les lamelles sont considérées comme des éléments de type poutre.

Ce modèle est beaucoup plus complexe du point de vue géométrique que celui représentant la poutre composite. En effet, selon le nombre de lamelles côte à côte, les entraxes des PP et le nombre de niveau, il faut déterminer les nœuds caractérisant les assemblages entre chaque lamelle. De plus, chaque niveau peut être différents des niveaux précédents, et il est possible d'attribuer des caractéristiques différentes pour chaque lamelle.

8.1.1.2 Le paramétrage

Les éléments composants le plancher sont définis par 23 paramètres. Dans la suite, l'indice k indique le niveau où ce trouve l'élément considéré.

La géométrie globale du plancher est définie selon les paramètres suivants :

- LongP longueur du plancher (m), cette longueur est selon la direction y, soit dans le sens des PPP,
- LargP largeur du plancher (m), cette longueur est selon la direction x, soit dans le sens des PPS

Pour simplifier légèrement le modèle, les lamelles dans un niveau ont les mêmes caractéristiques :

- hautPl hauteur de la lamelle (m),
- largPl largeur de la lamelle (m),
- YPl module d'élasticité longitudinal (Pa),
- NuPl coefficient de Poisson,
- RhoPl masse volumique de la lamelle (kg/m^3),
- ItorPl Inertie de torsion de la lamelle (m^4).

Le calcul de l'inertie de torsion s'effectue selon la relation suivante [96] pour $c = \text{largPl/hautPl}$

$$\text{ItorPl}_k = \gamma(c)\,\text{largPl}\,\text{hautPl}^3$$

$$\gamma(c) = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5 c}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n^5}Tanh\left(\frac{n\pi c}{2}\right) \qquad (286)$$

Note 3 : *La valeur de* ***c*** *diffère de la littérature puisque les lamelles ne sont pas positionnées sur chant, c'est-à-dire que la hauteur de la lamelle est inférieure à la largeur de celle-ci.*

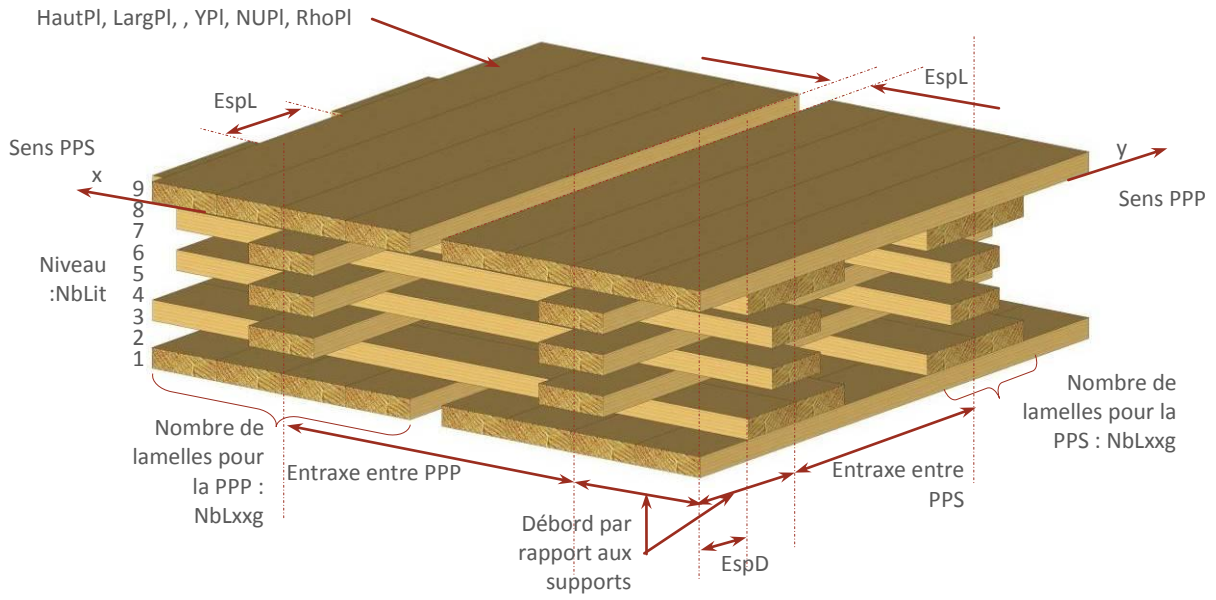


Figure 145 : *Paramétrage global des pseudo-poutres*

La PP est définie par les paramètres suivants comme le montre la figure 145 :

- NbLit nombre de niveaux (appelé aussi lit),
- NbLxxg nombre de PP,
- NbPl nombre de lamelles côte à côte par niveau,
- Vmax1 et Vmax2 nombre de lamelles maximales pour tous les niveaux
- EspD espacement de la planche au début et à la fin (m). Généralement, pour le premier et le dernier niveau, ce paramètre est nul. Il est calculé selon la relation suivante :

$$\mathrm{EspD_k} = \frac{Max(\mathrm{Vmax1},\mathrm{Vmax2}) - \mathrm{NbPl_k}}{2}\mathrm{LargPl_k} \quad \textbf{(287)}$$

- EspL espacement restant entre les lamelles (m). Ce paramètre permet aussi de vérifier si la solution envisagée est faisable ou non. Il se détermine selon :

$$\mathrm{EspL_k} = \frac{\mathrm{LargP} - 2\mathrm{EspD_k} - \mathrm{NbPl_k}\mathrm{NbLxxg_k}\mathrm{LargPl_k}}{\mathrm{NbLxxg_k} - 1} \quad \textbf{(288)}$$

Ainsi, si cette longueur est négative, cela indique que la configuration souhaitée n'est pas modélisable.

Puisque les lamelles sont modélisées au niveau de la fibre moyenne, l'inconvénient est de les relier entre elles lorsqu'il y a un assemblage. En réalité, les surfaces communes des lamelles sont en contact, pour parvenir à reproduire un comportement globalement similaire, il convient d'insérer des éléments dits fictifs (Figure 146). Ces éléments doivent avoir le même comportement qu'à l'interface entre les surfaces en contact, ainsi ils seront considérés comme des éléments de type poutre munis d'une matrice de rigidité d'assemblage. Les paramètres de l'élément fictif sont les suivants :

- Dtour diamètre de l'organe d'assemblage (m),
- Stour section de l'organe d'assemblage (m^2),
- Itour inertie de l'organe d'assemblage (m^4),
- Nutour coefficient de Poisson,
- YGtour module d'élasticité longitudinal (Pa),
- MVorg masse volumique de l'organe d'assemblage (kg/m^3)

Les données précédentes doivent permettre d'avoir un élément fictif avec une rigidité s'approchant de l'infini. Pour obtenir cette rigidité infinie le paramètre YGtour doit avoir une valeur de 10^{10}MPa. La figure 146 représente les raideurs d'assemblage utiles, ainsi les paramètres supplémentaires pour l'assemblage sont :

- Kx, Ky et Kz les raideurs en translation dans les directions x, y et z (N/m),
- Krx, Kry et Krz les raideurs en rotation autour des directions x, y et z (Nm/rad)
- NbOrg nombre d'organes composant l'assemblage,
- Ray1 distance de l'organe au centre de l'assemblage.

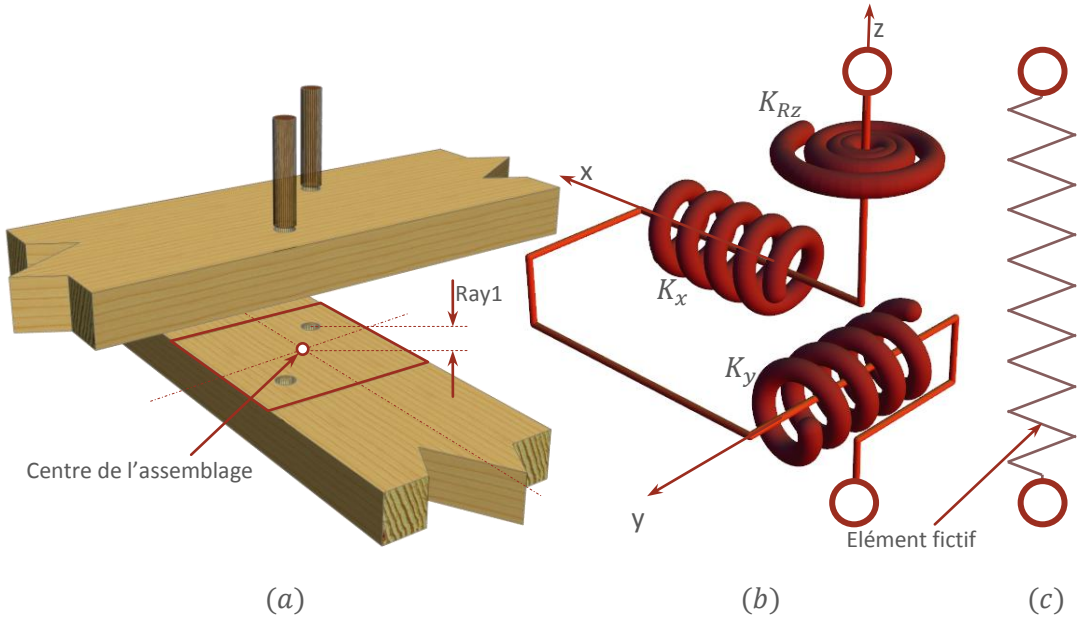


Figure 146 : *Schématisation de l'assemblage : (a) forme de l'assemblage, (b) raideurs utiles et (c) symbole pour la représentation du MEF*

Dans le cas présent, les raideurs en translation selon x et y et en rotation autour de z sont utilisées. Il est pris comme hypothèse que Kx = Ky = K1, et la raideur de rotation autour de z s'exprime selon la relation :

$$Krz = K1 \ Ray1^2 \ NbOrg \qquad (289)$$

8.1.1.3 Le maillage

Les nœuds sont les premiers éléments à placer. Comme les lamelles sont modélisées au niveau de la fibre neutre, les nœuds doivent être positionnés le long de cet axe.

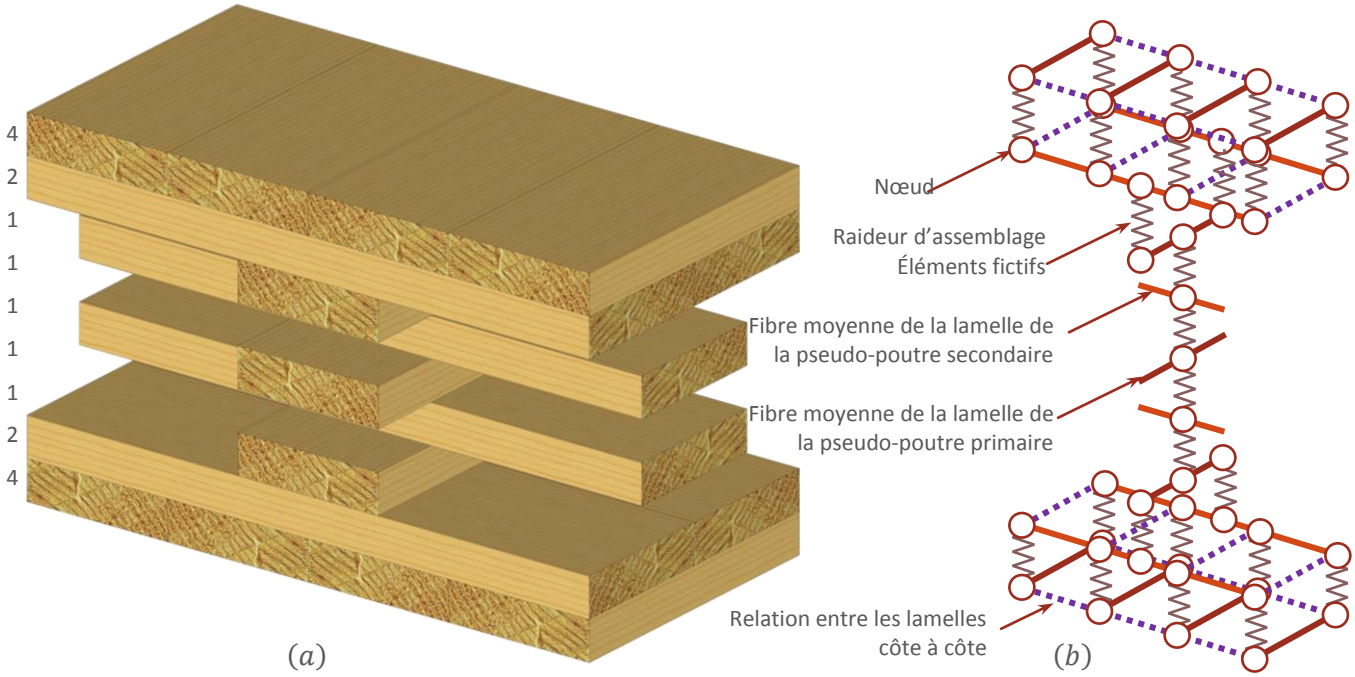


Figure 147 : *Modélisation de l'assemblage des pseudo-poutres principales (4-1-1-1-4) et secondaires (2-1-1-2) : (a) structure élémentaire et (b) modélisation par éléments finis de la structure élémentaire*

Comme la figure 147 le représente, les nœuds doivent être déterminés afin de les relier par des éléments de pseudo-poutre, des éléments fictifs et/ou des éléments de relation. Les éléments fictifs sont liés de manière rigide aux éléments des PP afin de se comporter comme deux surfaces en contact. La définition des éléments fictifs est la formulation SEG2.

Les éléments de PP sont symbolisés avec des éléments de type poutre de formulation SEG2 reliant les nœuds adéquats. Ces éléments se répartissent selon la configuration souhaitée pour le niveau en question. Hormis les nœuds des extrémités, il est intéressant de noter que chaque nœud possède obligatoirement une accroche entre une lamelle et un élément fictif.

Les éléments de relation contraignent les lamelles qui sont côte à côte, à se déplacer dans le même sens lorsqu'elles se déplacent à la suite d'une sollicitation. Les liaisons sont appliquées aux nœuds en vis-à-vis.

La tâche la plus complexe du modèle est la détermination des nœuds en fonction de la géométrie pour chaque niveau. Les nœuds du niveau k dépendent de l'emplacement des nœuds aux niveaux $k-1$ et $k+1$, sauf pour les niveaux 1 et n. Selon les configurations, des erreurs numériques sont possibles lorsque les éléments fictifs sont placés relativement proche et que la précision de l'élimination des nœuds superflus n'est pas suffisante. A contrario, lorsque la précision de l'élimination des nœuds communs entre les éléments fictifs et les lamelles est grande, les éléments fictifs ne sont plus verticaux mais de biais, ce qui entraine des erreurs supplémentaires. Toutefois, lorsqu'une géométrie est simple comme le plancher décrit précédemment, ces erreurs ne sont pas importantes : au point de vue disposition géométrique, l'erreur de placement d'un nœud dans la géométrie étudiée est de l'ordre de 10^{-4} mm.

Les nœuds sont regroupés dans un tableau PoPl, à partir duquel les droites sont obtenues. Celles-ci sont aussi rassemblées dans un tableau Lpl. La figure 148 représente un exemple du maillage du plancher étudié.

8.1.1.4 Le modèle mathématique

Les éléments lamelles ainsi que les éléments fictifs sont symbolisés selon la formulation de type MECANIQUE ELASTIQUE ISOTROPE POUTRE. Les paramètres utilisés sont issue du plancher réel présenté à la section suivante

(§8.2) : les lamelles ont pour dimensions : $24 \times 90 \times 4000$ mm^3, le module d'élasticité longitudinal pour chaque lamelle vaut 11815 MPa, la masse volumique des lamelles est de 497 kg/m^3.

Les éléments fictifs sont associés à une matrice des rigidités d'assemblage de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{rx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ry} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{rz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{rz} \\ -K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K_{rx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{ry} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{rz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{rz} \end{pmatrix} \quad \textbf{(290)}$$

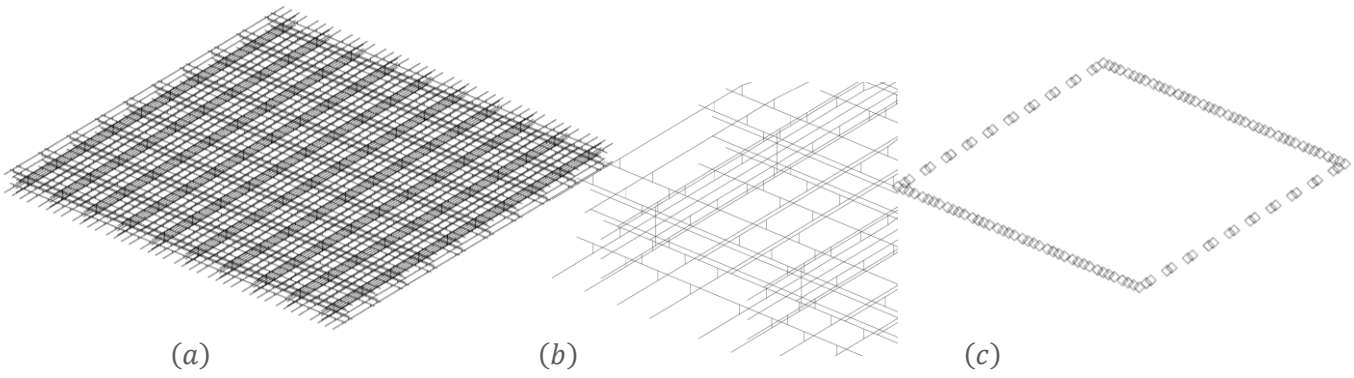
La valeur de K1 est la valeur obtenue lors des essais sur les pseudo-poutres en flexion trois points (§7.2), ainsi K1 = 1637 N/mm. Selon la disposition constructive présentée à la figure 146, la distance de la cheville au centre de l'assemblage est de 32 mm pour des lamelles de largeur 90 mm, ainsi la raideur de rotation autour de l'axe z vaut 3353 Nm/rad. Les autres raideurs sont prises comme infinies. Dans le modèle, suite à une étude sur l'influence de ces raideurs, une raideur de 10^9 N/m est choisie pour approcher l'infini.

Il convient ensuite de définir les relations entre les lamelles qui sont côte à côte. Selon le niveau où les relations sont créées, la définition de la relation est la suivante :

$$W\ \mathrm{Lpl}_{k,j} - W\ \mathrm{Lpl}_{k,j+1} = 0 \quad \textbf{(291)}$$

Où l'indice j désigne la $j^{\text{ième}}$ lamelle côte à côte, et W désigne le sens UX ou UY selon le niveau k étudié.

Les conditions aux limites sont multiples, en effet selon le type d'appuis supposés (le plancher repose sur x supports linéaires, sur x supports ponctuels…), les blocages sont différents. La figure 148 illustre le plancher étudié modélisé reposant sur 4 supports linéaires.



(a) (b) (c)

Figure 148 : *Maillage du plancher : (a) vue générale, (b) zoom sur le plancher et (c) conditions aux limites*

8.1.1.5 Calculs et interprétations

Des calculs statiques et dynamiques peuvent être réalisés sur le MEF du plancher. Le plancher modélisé est soumis à des efforts soit ponctuels, soit répartis pour les calculs statiques. Pour le chargement ponctuel, il convient de prendre un nombre de nœuds suffisants pour appliquer, par exemple, la charge au centre du plancher composé de 10 PPP et 10 PPS. La figure 149(a) représente la déformée sous une charge ponctuelle au centre du plancher. De plus, le chargement ne pouvant s'appliquer uniquement sur des nœuds, les nœuds où elle s'applique sont très fortement sollicités. Ainsi, la déformée est obtenue en dessous du plancher soit pour le niveau 1. Pour un chargement ponctuel de 1 kN au centre du plancher dans la direction x et au centre de la 5$^{\text{ième}}$ pseudo-poutre secondaire (PPS 5) (dans le sens y), il vient une flèche de 1.66 mm., pour un chargement ponctuel d'amplitude 1 kN au centre du plancher dans la direction y et au centre de la 5$^{\text{ième}}$ pseudo poutre principale (PPP 5) (dans le sens x), une flèche de 1.63 mm est obtenue.

Le calcul dynamique s'exécute pour les basses fréquences en dessous de 80 Hz. Il est ensuite possible de connaitre les fréquences propres de la structure et de visualiser la forme propre comme le montre la figure 149(b). La figure 151 montre les six premiers modes propres du plancher. La valeur de la fréquence propre $f_{m,n}$ est indiquée pour chaque forme propre (m, n) où les conventions suivent celles de la section §1.3.3, tel que m désigne l'indice du mode propre selon x et n selon y.

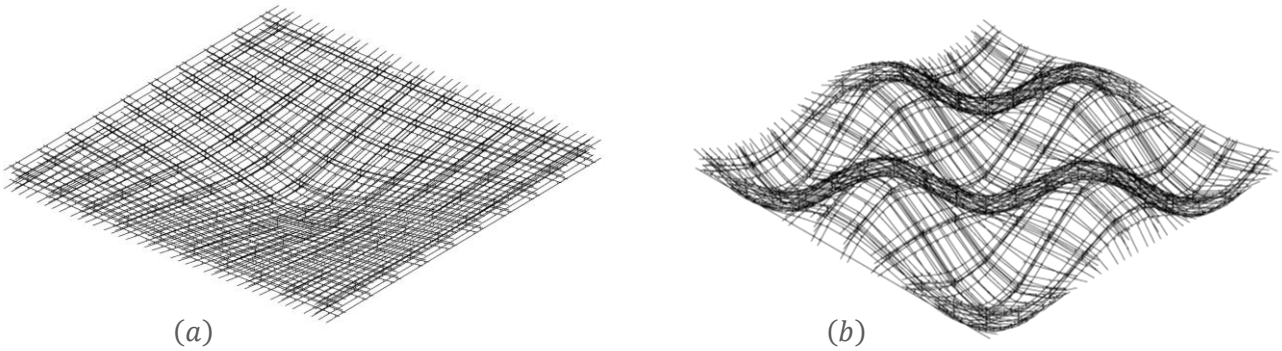


Figure 149 : *Plancher (a) déformé sous charge ponctuelle au centre et (b) sa forme propre pour m=n=3*

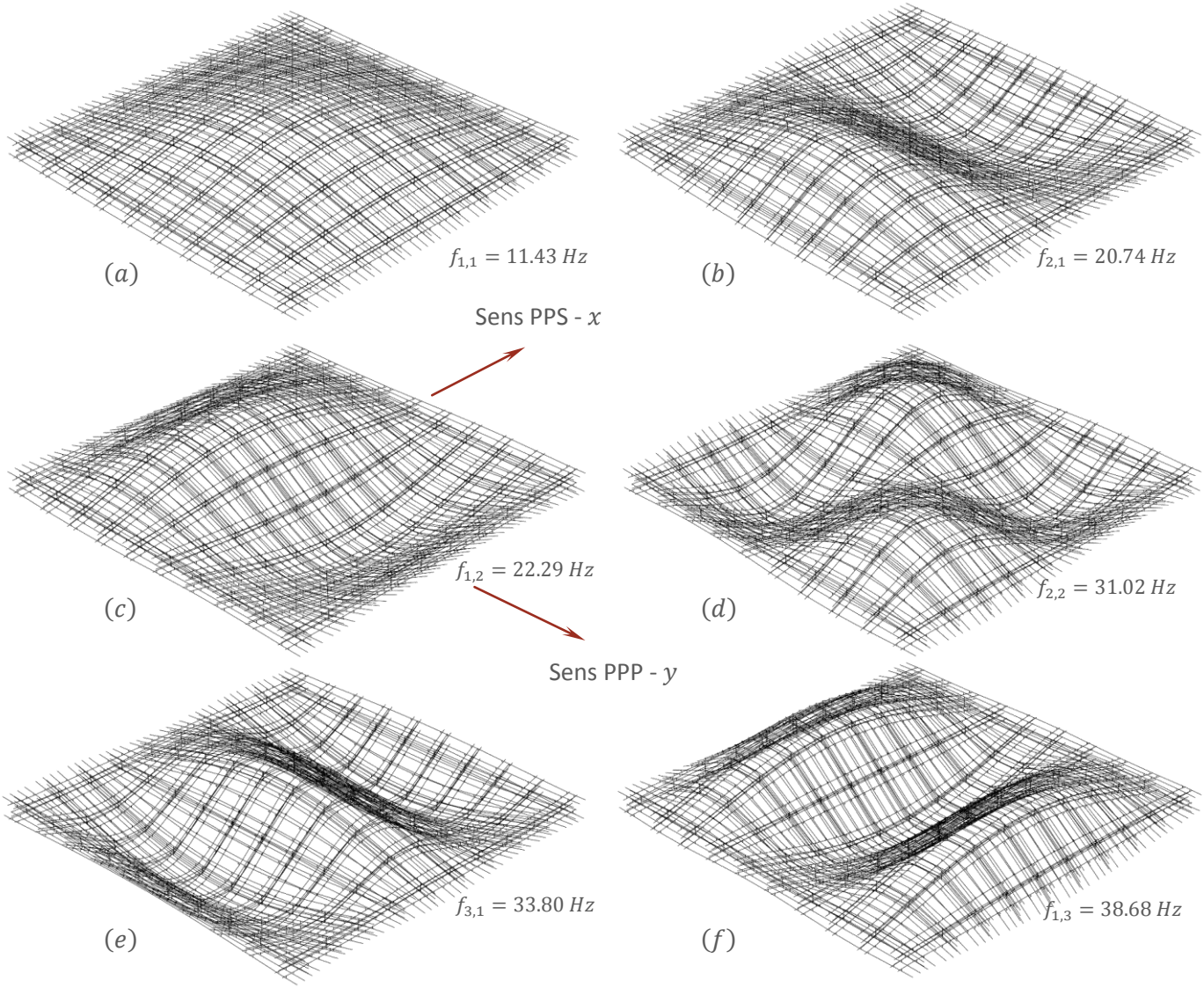


Figure 150 : *Les six premiers modes propres du plancher issus du MEF : (a) m=n=1, (b) m=2 et n=1, (c) m=1 et n=2, (d) m=n=2, (e) m=3 et n=1, (f) m=1 et n=3*

Une sollicitation avec un moment pur de torsion permet de calculer la rigidité de torsion. Ce type de chargement donne une déformée de type « selle de cheval » (figure 151(a)) si le plancher est simplement appuyé sur deux coins diagonalement opposés et chargé sur les deux autres. D'autres études peuvent être mises en place comme par exemple un chargement réparti sur le plancher supporté sur deux côtés (figure 151(b)).

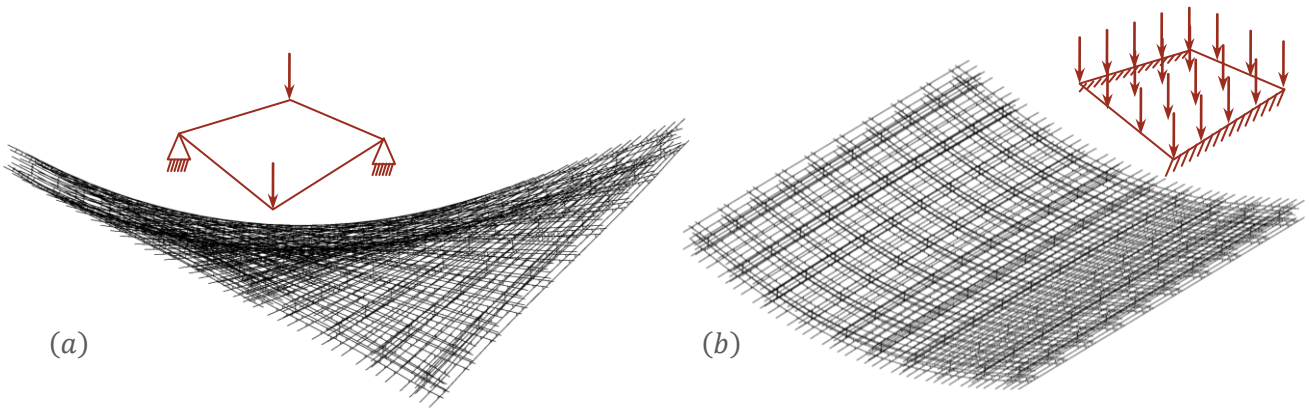


Figure 151 : *Autres déformées du plancher : (a) chargement dans les coins du plancher et (b) chargement réparti pour le plancher reposant sur deux appuis*

8.2 Etude expérimentale

8.2.1 Fabrication

Grâce à un projet de fin d'étude à l'ENSTIB [70], un plancher à l'échelle 1 a été conçu et fabriqué manuellement avec des perceuses professionnelles. Le plancher est composé de 175 avivés et environ 4900 tourillons soit approximativement deux tourillons par assemblage. Les tourillons sont insérés avec deux perceuses professionnelles, la vitesse de rotation est soit 1500 tr/min, soit 800-1000 tr/min lors de l'insertion. La vitesse d'insertion ne peut pas être identifiée précisément mais généralement, un tourillon est inséré entre deux et trois secondes. Le pré-perçage est réalisé avec un diamètre de sept millimètres. Le plancher est fabriqué en 51 heures, soit une moyenne de 1,6 tourillons par minute.

La figure 152 présente le montage du plancher du commencement (a) à l'achèvement (d). Le plancher est légèrement différent de celui envisagé, en effet, le dernier niveau faisant office de peau à cette structure, les planches sont toutes placées côte à côte, ainsi l'espacement des pseudo-poutres pour le dernier niveau est nul.

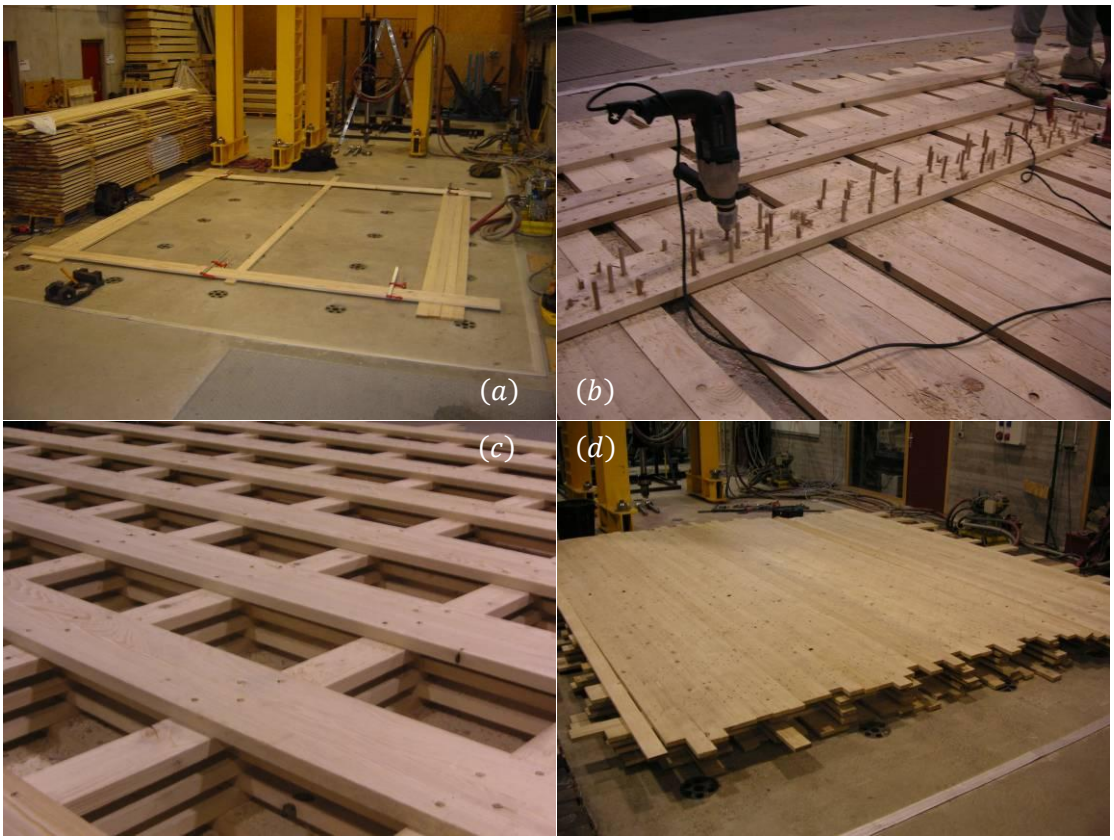


Figure 152 : *Fabrication du plancher à lames croisées* **[70]**

Une fois le plancher fini, celui-ci a été installé sur des appuis (Figure 153). Ces appuis sont composés de cadres métalliques qui sont placés dans les quatre coins et au milieu des quatre bords, puis un profilé métallique en

U est intercalé entre les cadres et les bords du plancher, réalisant ainsi des supports linéaires. Ces appuis forment un carré de 3.64 m de côté.



Figure 153 : *Installation du plancher sur ses appuis et finition des bords* **[70]**

Le plancher est simplement appuyé sur ces quatre côtés. Le plancher final a pour dimensions 216 mm x 4 m x 4 m et pèse 743 kg, soit une masse surfacique de 46.43 kg/m^2.

8.2.2 Présentation des essais statique

L'étude du plancher en statique permet d'obtenir le niveau de confort suite à un chargement de 1 kN au centre du plancher et de caractériser le comportement du plancher en tant que plaque mince.

Une étude préliminaire [70] est lancée afin de déterminer la ligne d'influence du plancher dans les deux sens principaux. Pour cela, un capteur de déplacement est positionné au centre de la pseudo-poutre à étudier (huit au total car les deux pseudo-poutres sont simplement appuyées sur les profilés métalliques). Ensuite un chargement ponctuel est appliqué au droit des capteurs de déplacement à tour de rôle. Des cibles sont placées au centre du plancher, pour mieux percevoir le comportement sous charge ponctuelle au centre du plancher. Les cibles sont filmées avec une caméra VIDEOMETRIC [86] puis analysées à l'aide du logiciel VDM Analyser 3D [88] pour obtenir le déplacement du plancher lors de l'application de la charge ponctuelle.

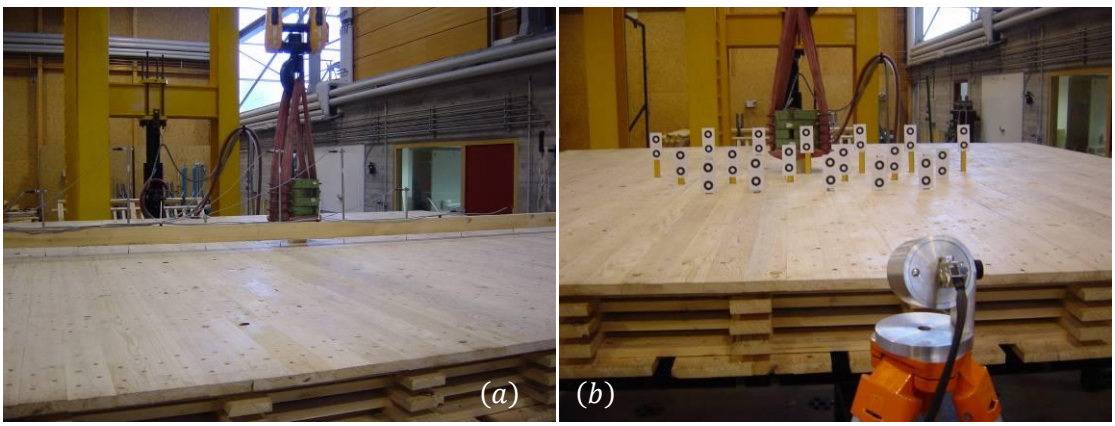


Figure 154 : *Tests statiques sur le plancher : (a) avec des capteurs de déplacement et (b) par analyse d'image* **[70]**

Une étude plus minutieuse est définie afin de caractériser le comportement en plaque mince du plancher. En utilisant le même banc d'essai avec les capteurs de déplacement (Figure 154(a)), le plancher est testé pour avoir les

lignes d'influence lorsqu'il repose simplement sur quatre, trois et deux supports, les autres étant libres (Figure 220). Les mesures sont réalisées dans les deux sens principaux du plancher. Les capteurs sont aussi placés soit au dessus du plancher soit en dessous au centre des pseudo-poutres étudiées. Cela permet par la suite le calcul des paramètres de la matrice de HOOK (324). Le plancher est soumis à une force ponctuelle de 1 kN au droit des pseudo-poutres. En reprenant les désignations de la figure 145, la figure 155 montre les deux cas d'étude du plancher : le cas 1 s'effectue dans le sens PPS, c'est-à-dire au centre des pseudo-poutres principales, le cas 2 se réalise dans le sens PPP, c'est-à-dire au centre des pseudo-poutres secondaires. Le positionnement des capteurs donne une vision de l'influence de la charge vis-à-vis des pseudo-poutres.

Les résultats obtenus sont comparés avec le modèle. Les lamelles du plancher ont pour section 24×90 mm^2 et pour module d'élasticité longitudinal 11815 MPa selon la section §8.1.1.4. La raideur d'assemblage pour le MEF est indiquée à la section §8.1.1.4. Le positionnement des capteurs est le plus proche possible de l'endroit d'application de la charge. Les déplacements obtenus sous le plancher sont donc de meilleures qualités car le capteur peut se positionner exactement sous le chargement.

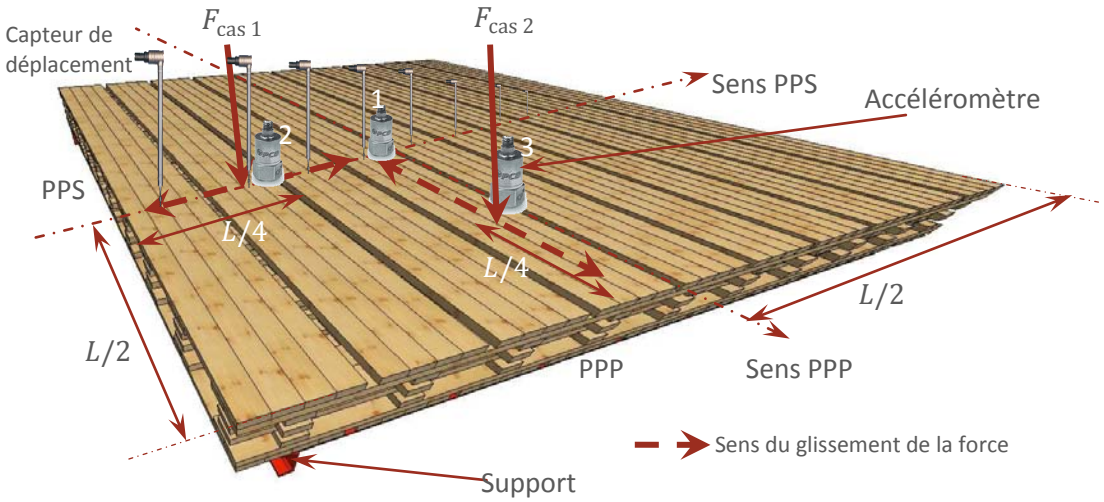


Figure 155 : *Cas de chargements pour l'étude statique et positionnement des accéléromètres pour l'étude dynamique*

La figure 156 montre la déformée au droit de PPP 5 dans le sens PPS (Figure 156). Les valeurs issues du modèle sont récupérées sous le plancher dans le but d'éviter les problèmes de déformée en excès causés par l'application de la force aux nœuds du maillage. Il apparait une erreur entre le MEF et l'essai pour des mesures effectuées sous le plancher de 11 %.

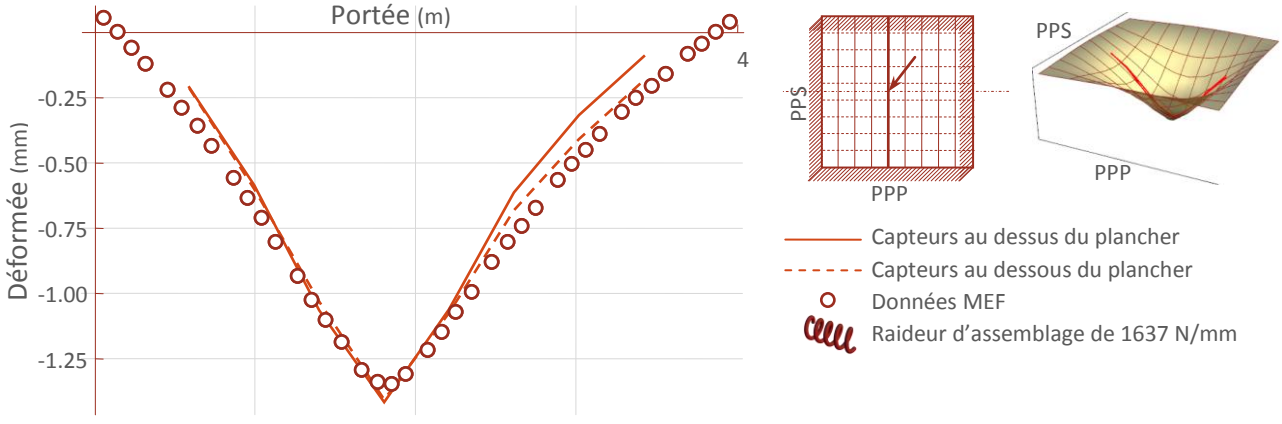


Figure 156 : *Déformée sur la cinquième pseudo-poutre principale du plancher, expérimentale et modélisée*

Pour le cas de l'application de la charge dans le sens PPP au droit de PPS 5 (Figure 157), il apparait que la déformée expérimentale est principalement sur la pseudo-poutre étudiée donnant une dissymétrie à l'allure de la déformée, alors que le MEF est globalement symétrique. Une erreur de 10 % peut être notée entre le MEF et les mesures expérimentales.

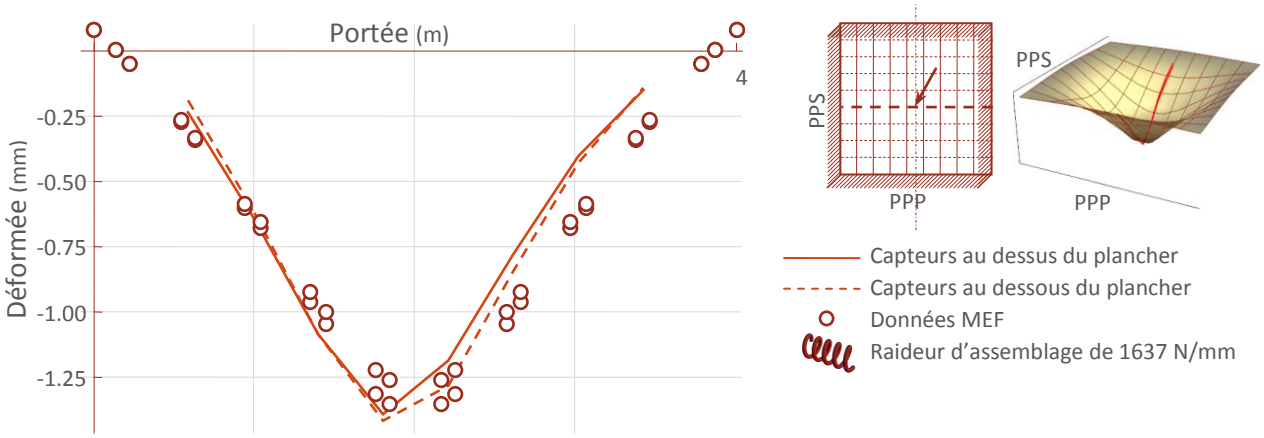


Figure 157 : *Déformée sur la cinquième pseudo-poutre secondaire du plancher, expérimentale et modélisée*

La flèche au centre de PPP 5 est de 1.41 mm et au centre de PPS 5 est de 1.35 mm. Le MEF a donc une erreur de 17 % pour la flèche obtenue au centre de PPP 5 et 21 % pour la flèche au centre de PPS 5. La flèche au centre du plancher est estimée à 1.46 mm. Le plancher est acceptable selon le critère d'ALLEN (§1.3.5.4). En effet, le plancher se situe près de la frontière entre les planchers acceptables et ceux inacceptables (Figure 30). De plus, selon OHLSSON, l'une des conditions pour avoir un plancher confortable est d'avoir une flèche inférieure à 1.5 mm.

Le calcul de la flèche selon la formule de CHUI conduit à déterminer la rigidité effective selon les PPS. Connaissant la raideur de cisaillement des chevilles dans les plans de cisaillement du plancher, il est donc possible de calculer la rigidité apparente de la pseudo-poutre secondaire. Le tableau 69 indique les deux rigidités effectives des PP.

Tableau 69 : *Rigidités effectives des pseudo-poutres du plancher*

	Charge	Décharge/Recharge
EI_{PPP} (Nmm^2)	8.03×10^{10}	1.11×10^{11}
EI_{PPS} (Nmm^2)	4.53×10^{10}	6.16×10^{10}

Le calcul des rigidités effectives du plancher D_x et D_y dans les deux directions se détermine selon les relations suivantes :

$$D_x = EI_{PPP}\frac{n_{PPP}}{L_{sup,PPP}}, \qquad D_y = EI_{PPS}\frac{n_{PPS}}{L_{sup,PPS}} \tag{292}$$

Avec :

n_{PPP} le nombre de pseudo-poutre principale,

n_{PPS} le nombre de pseudo-poutre secondaire,

$L_{sup,PPP}$ la distance entre les supports dans le sens des PPP et

$L_{sup,PPS}$ la distance entre les supports dans le sens des PPS.

Le tableau 70 présente les valeurs de ces rigidités pour 10 pseudo-poutres dans les deux directions et pour une portée entre les différents supports de 3.64 m.

Tableau 70 : *Rigidités effectives du plancher dans les deux directions principales*

	Charge	Décharge/Recharge
D_x (Nm^2/m)	220604	304945
D_y (Nm^2/m)	124451	169231

La flèche selon CHUI [37] est issue du calcul de la flèche d'une plaque rectangulaire mince sur 4 supports linéaires, soumise avec une charge ponctuelle P. Dans cette analyse, CHUI a simplifié l'expression de la rigidité principale (488) en considérant que le coefficient de POISSON était suffisamment petit afin de négliger la part de

la rigidité D_x (180). Dans le cas présent, le terme D_{xy} n'étant pas connu, il apparait utile de connaitre la valeur du coefficient de POISSON. La flèche de CHUI se reformule de la manière suivante :

$$d_p = \frac{4P}{Lb\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{17} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{35} \frac{1}{D_x \left(\frac{m}{L}\right)^4 + 2(\nu_2 D_x + 2D_k)\left(\frac{mn}{Lb}\right)^2 + D_y \left(\frac{n}{b}\right)^4} \qquad \textbf{(293)}$$

Le terme D_k dépend de la rigidité de cisaillement du parement du plancher et de la torsion des lamelles. L'une comme l'autre sont négliables devant les termes D_x et D_y. En effet, comme le plancher possède 175 lamelles et que la constante de torsion J_{tor} pour une section rectangulaire a pour expression :

$$J_{tor} = \frac{hb^3}{3} \qquad \textbf{(294)}$$

Il vient que la part de la torsion des lamelles s'évalue à $175 G_{12} J_{tor}/e_{PP}$, soit 1.85 Nm/m. Ainsi ce terme est très inférieur aux valeurs de D_x et D_y présentent dans le tableau 70. La rigidité de cisaillement du parement est de même, très petite devant les rigidités principales du plancher. La part de la rigidité effective D_x est donc relativement importante.

Ne connaissant pas la valeur des coefficients de POISSON (ν_1 et ν_2), il est possible de faire des suppositions de la part de la rigidité effective D_x dans l'effet de torsion du plancher. Dans le cas où $\nu_2 = 0$ et $D_k \to 0$, la flèche s'évalue à $d_p = 1.72$ mm (20% d'erreur). Pour $\nu_1 = 0.1$, la flèche vaut 1.61 mm (11% d'erreur). Enfin, pour $\nu_1 = 0.2$, la flèche vaut 1.51 mm (5% d'erreur). Pour avoir une adéquation entre la flèche réelle du plancher sous un chargement ponctuel de 1 kN au centre du plancher, il faut que le coefficient de Poisson ν_1 soit de 0.25 (1% d'erreur).

La ligne d'influence de la charge sur la médiane du plancher dans les deux sens permet de mieux visualiser le comportement du plancher d'un point de vue général (Figure 158). Il peut être remarqué une bonne prédétermination au centre du plancher avec une déviation jusqu'à 48 % pour les pseudo-poutres vers les appuis.

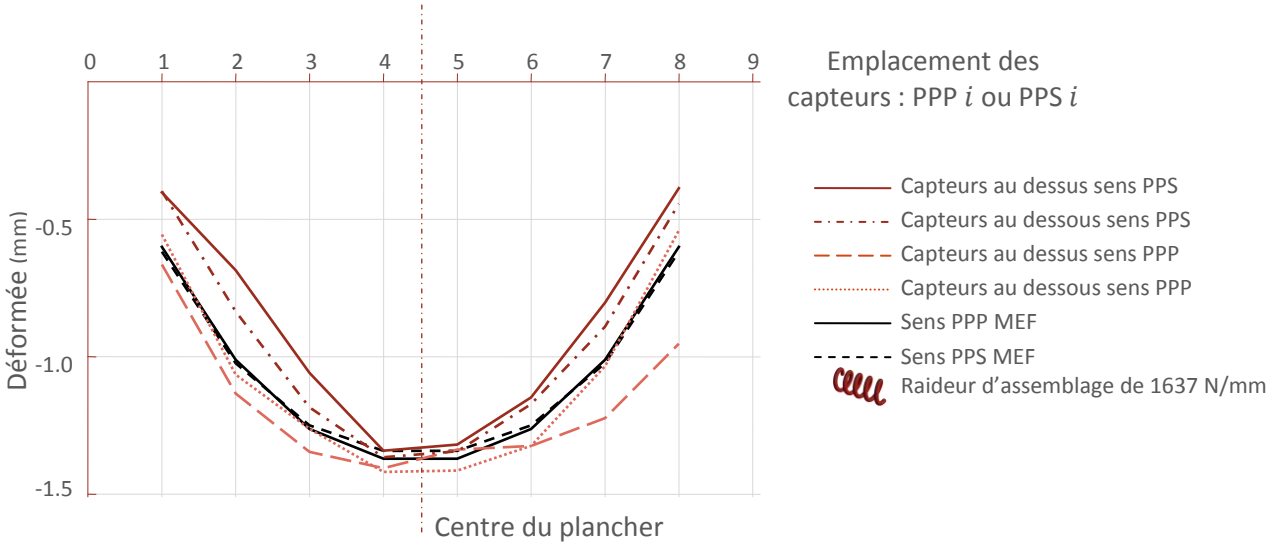


Figure 158 : *Lignes d'influence pour le plancher sur quatre supports*

8.2.3 Présentation des essais dynamique

Les premières études dynamiques sur le plancher [70], donne une fréquence fondamentale de 12.5 Hz, avec un amortissement de 4% et une réponse en vitesse pour une impulsion unitaire calculée de 7 mm/s/Ns. Le choc n'étant pas réalisé avec un marteau d'impact ou un système similaire, il n'était pas possible de remonter à la vitesse pour une impulsion unitaire à partir des essais. Dans cette section, une méthodologie est mise en place pour déterminer avec précision les fréquences propres du plancher, l'amortissement pour chaque mode ainsi que la détermination de la vitesse pour une impulsion unitaire.

8.2.3.1 Protocole d'essai

Le plancher repose sur quatre supports linéaires représentant un carré de 3.64 m de côté. Trois accéléromètres ICP model 626B02 (PCB Piezotronics IMI Sensors) de sensibilité 49.8 mV/m/s^2, sont placés au centre du plancher, au quart dans les deux sens principaux des pseudo-poutres comme l'illustre la Figure 155. L'application de la force de vibration est effectuée avec un marteau d'impact ICP (PCB Piezotronics IMI Sensors)

non loin du centre du plancher. L'ensemble des accéléromètres ainsi que le marteau sont reliés à une plateforme NI COMPACTDAQ contenant un conditionneur NI 9234 [93]. Le programme est implémenté dans LABVIEW [81]. Il en ressort les traces des accéléromètres et du marteau. Les fréquences ainsi que les spectres peuvent être déterminés.

Pour avoir une meilleure précision lors du traitement, il faut un minimum de 5 essais identiques, c'est-à-dire avec les mêmes conditions d'essais : application du choc au même endroit, échantillonnage identique, nombre de points obtenus identiques…

8.2.3.2 Analyse dynamique du système

Pour obtenir les propriétés spectrales, il convient de suivre les six étapes suivantes.

1. Calculer la trace moyenne par accéléromètre et pour le marteau d'impact pour un même protocole d'essai : même fréquence d'échantillonnage, acquisition du même nombre de points, application du choc au même endroit. La figure 159 présente les traces de l'accéléromètre au centre du plancher ainsi que celle du marteau. Ces courbes représentent la moyenne de 11 mesures.

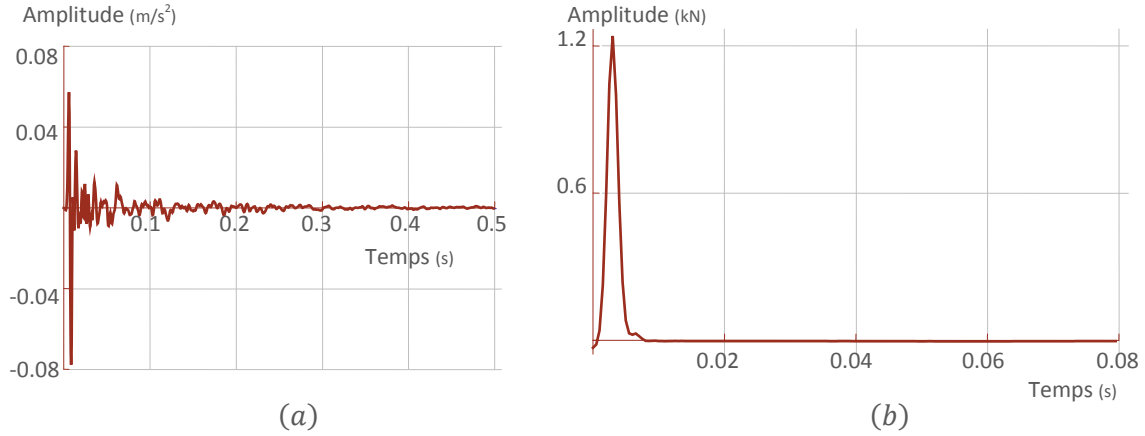


Figure 159 : *Moyennes des traces (a) de l'accéléromètre au centre du plancher et (b) du marteau d'impact*

2. Détermination des fréquences.

La détermination des fréquences se fait donc dans le domaine spectrale en déterminant la partie imaginaire selon [31] et [30]. Cette pratique donne des fréquences à la résonance plus propres et moins parasitées par le bruit et les faux pics. La figure 160 montre l'allure du spectre imaginaire du rapport accélération/force de l'accéléromètre au centre du plancher, en échelle linéaire.

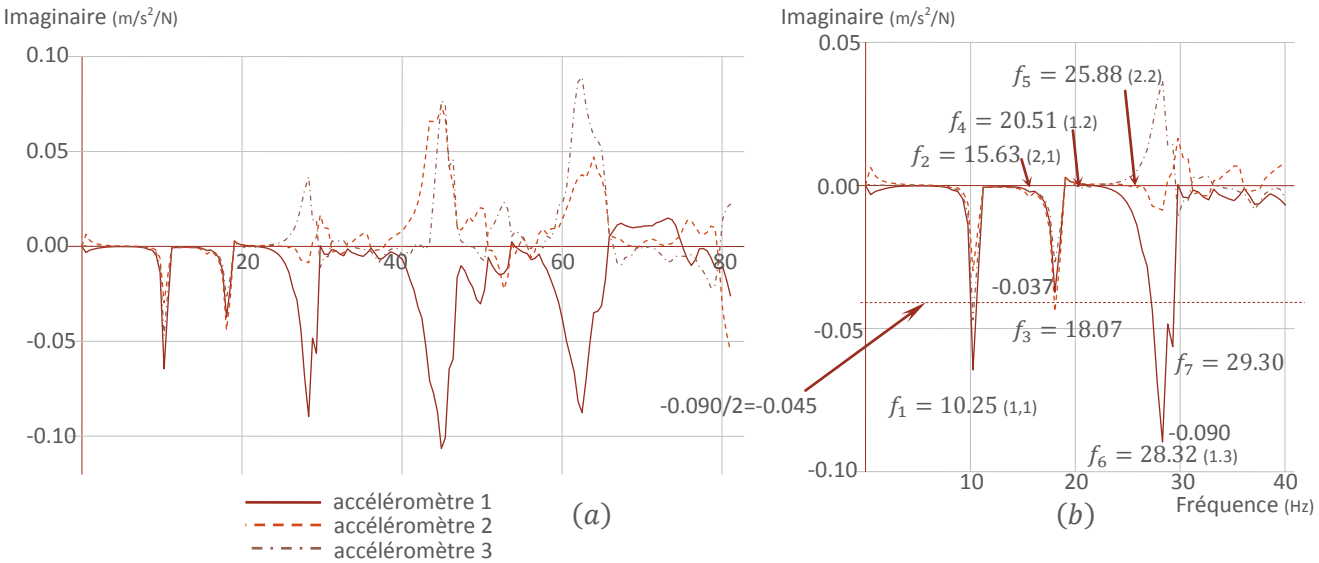


Figure 160 : *Spectre des accéléromètres / marteau : (a) spectre jusqu'à 80 Hz et (b) zoom sur les fréquences inférieures à 40 Hz*

La figure 160 montre les sept principales fréquences propres dans l'intervalle $[0, 40]$ et l'ensemble des fréquences propres sur l'intervalle $[0, 80]$. Par comparaison avec les modes propres issus du MEF (Figure

150), certains peuvent être caractérisés, les valeurs entre parenthèses rappellent la forme propre associée. Les fréquences f_2, f_4 et f_5 apparaissent très peu sur les spectres des trois accéléromètres puisque ceux-ci sont placés sur les lignes de vibrations. Selon OHLSSON [33], les pics qui se trouvent en dessous de la limite égale à la moitié de l'amplitude du pic le plus élevé dans le domaine $[0, 40]$, ne sont pas à considérer, ainsi, la fréquence propre f_3 ne doit pas être prise en compte.

Avec le lissage de cercle (Figure 161), la détermination des fréquences est plus précise comme le montre la figure 162 pour les deux premières fréquences.

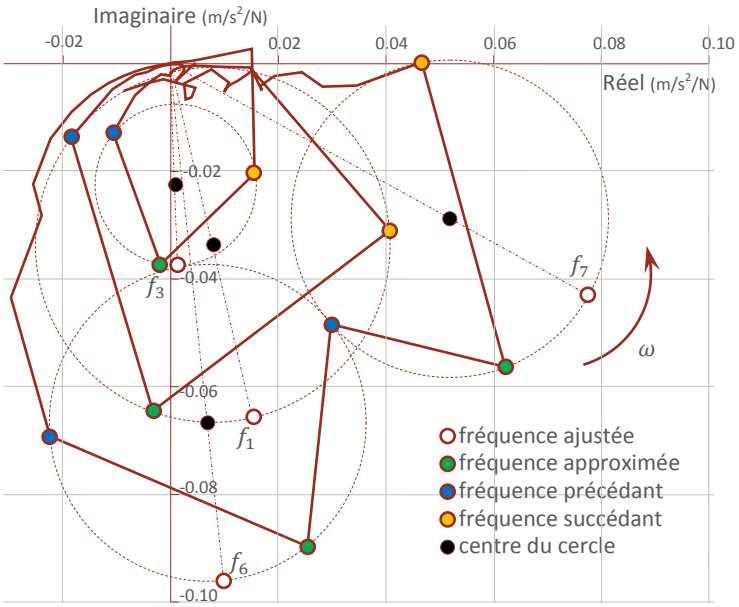


Figure 161 : *Lissage de cercle pour les six premières fréquences du plancher – plan de NYQUIST*

Les valeurs obtenues par la détection des maximums pour la partie imaginaire et les valeurs plus précises des fréquences propres sont répertoriées dans le tableau 71.

Tableau 71 : *Fréquences propres du plancher*

Fréquences propres (Hz)	f_1	f_3	f_6	f_7
Maximum	10.25	18.07	28.32	29.30
Lissage de cercle	10.46	18.15	28.16	29.53

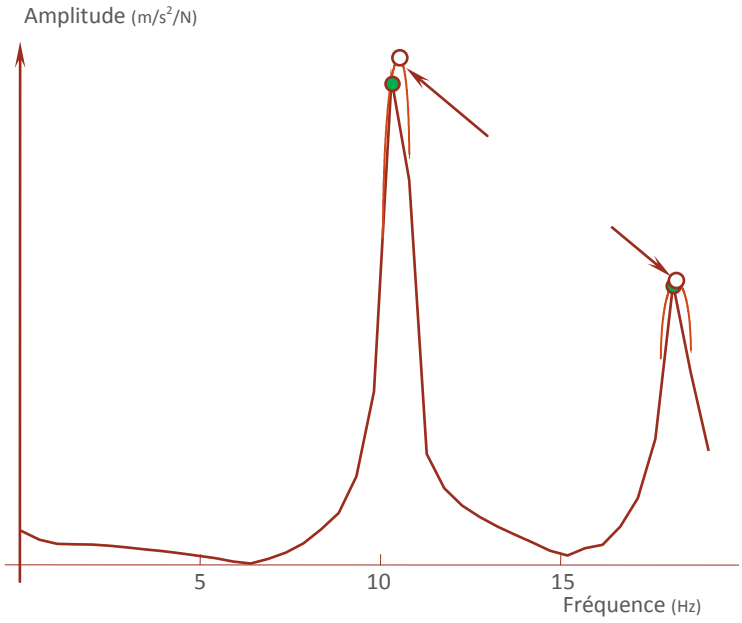


Figure 162 : *Amélioration de la détection de la fréquence*

La détermination de la fréquence selon OHLSSON d'après la relation (175) donne une valeur de 7.76 Hz soit une erreur de 26 %. Cette relation ne tient compte uniquement que de la rigidité linéaire principale du plancher (celle des PPP). Il vient aussi que selon cette valeur, il n'est pas possible d'utiliser la méthode que OHLSSON a mise en place pour l'étude du confort des planchers légers.

Selon les rigidités effectives obtenues dans les sections précédentes (Tableau 70), il est possible de calculer la fréquence fondamentale selon CHUI (180) sans l'effet de torsion dans le plancher ($\nu_1 = 0$) ou avec $\nu_1 = 0.25$. Sans la part de torsion dans le plancher, la fréquence fondamentale vaut 10.22 Hz, soit une sous-estimation de 2% de la fréquence réelle. Pour $\nu_1 = 0.25$, la fréquence fondamentale est de 11.10 Hz, soit une surestimation de 6%. Il est donc possible d'approcher la fréquence fondamentale du plancher. De plus, cette fréquence est supérieure à 8 Hz donc la méthode d'OHLSSON peut être conduite.

3. Détermination de l'amortissement

L'amortissement se détermine soit globalement (décrément logarithmique), soit localement pour chaque fréquence (méthode à 3dB ou demi puissance §1.3.5.2). Pour cela, il faut se placer dans le diagramme amplitude/fréquence, isoler le pic étudié, puis déterminer les points pour $|A|/\sqrt{2}$ autour de la résonnance selon la figure 26. L'amortissement réduit ζ est présenté dans le tableau 72 :

Tableau 72 : *Amortissement réduit expérimental pour le plancher*

Amortissement réduit (%)	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5	ζ_6
Méthode mi puissance	3.65	1.93	1.77	1.28	2.95	4.02

Le décrément logarithmique se détermine de la manière suivante (Figure 163) :

$$\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \textbf{(295)}$$

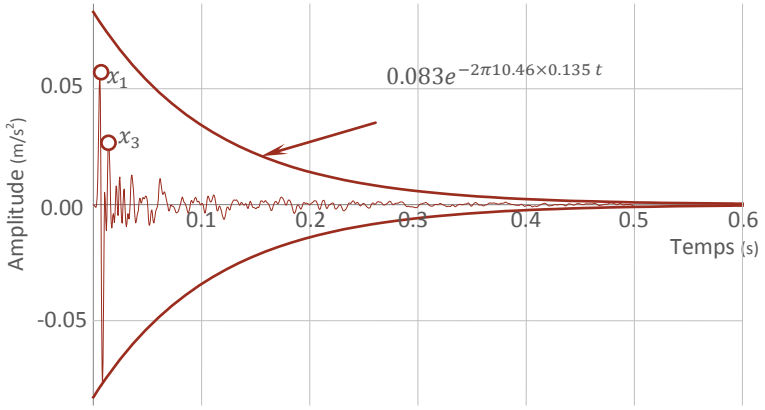


Figure 163 : *Détermination des pics successifs pour le signal temporel de l'accéléromètre 1*

La détermination de la courbe enveloppe donne un amortissement de 13.5%. Le calcul avec les extrémums successifs, ici x_1 et x_3,donne un amortissement de 6%. Il apparait un fort amortissement de la structure.

OHLSSON [33] a été amené, dans ses travaux, à présenter l'influence du facteur $\sigma_{0,k} = f_k\zeta_k$. En effet, ce facteur permet de qualifier plus précisément si le plancher possède un amortissement faible ou un amortissement fort. La figure 164 présente les couples (f_k, ζ_k) avec la limite $\sigma_0 = 0.4$ symbolisant la frontière entre la zone des planchers faiblement amortis et des planchers fortement amortis. Il apparait que le plancher est à la limite pour les fréquences inférieures à 40 Hz.

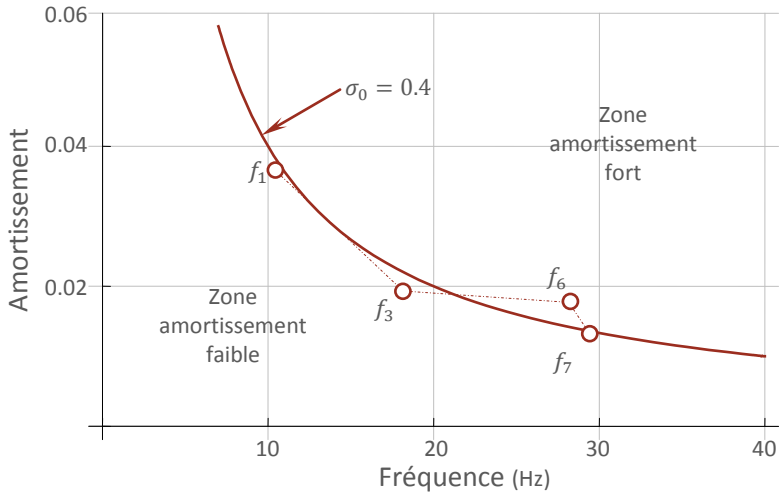


Figure 164 : *Amortissement en fonction de la fréquence*

4. Détermination des paramètres modaux associés

La détermination de ces paramètres peut s'effectuer selon un certain nombre de méthodes. La plus utilisée est le lissage de cercle (ou *circle fit*) dans le plan de NYQUIST (Figure 161).

Selon [31] [30], le paramètre modal est relié avec le diamètre du cercle obtenu pour la fréquence étudiée et l'amortissement, par la relation :

$$m_k = \frac{1}{D_k 2\zeta_k} \qquad \textbf{(296)}$$

Les paramètres modaux sont indiqués dans le tableau 73.

Tableau 73 : *Paramètre modal expérimental pour le plancher*

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Diamètre (m/s^2/N)	0.066	0.030	0.059	0.059	0.091	0.077
Paramètre modal (m/s^2/N)$^{-1}$	208	864	480	660	185	161

5. Détermination de la phase

La phase est obtenue en comparant itérativement le diagramme des phases du modèle de 6 DDL avec les paramètres modaux du tableau 73, les fréquences du tableau 71 et les amortissements du tableau 72. Le tableau 74 présente les valeurs numériques de la phase selon le mode considéré.

Tableau 74 : *phase expérimentale pour le plancher*

phase (rad)	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6
Lissage de cercle	-0.56	-0.53	0.45	0.31	0.52	0.61

6. Réponse en vitesse pour une impulsion unitaire

La détermination de la réponse en vitesse pour une impulsion unitaire permet de caractériser le confort. En effet, plus cette vitesse est faible, meilleur est le confort du plancher. Cette vitesse se calcule selon trois manières :

- La méthode 1 est réalisée en appliquant successivement des filtres passe bas pour garder uniquement la première fréquence, puis les deux premières, etc. Cela permet de tenir compte des fréquences propres faibles dont l'amplitude est faible, telle que celles du troisième mode (Figure 160).
- Ayant déterminé l'ensemble des facteurs modaux (fréquences, amortissements, phases, paramètres modaux), selon la relation analytique d'un système à un DDL, il suffit de sommer les modes (méthode 2) :

$$v_k = \frac{1}{m_k} e^{-t\zeta_k\omega_k} \left(Cos\left(\omega_k t\sqrt{1-\zeta_k^2} + \varphi_k\right) - \frac{\zeta_k}{\sqrt{1-\zeta_k^2}} Sin\left(\omega_k t\sqrt{1-\zeta_k^2} + \varphi_k\right) \right) \quad (297)$$

- La dernière méthode, nommée méthode 3, consiste à supposer que le plancher est un système à un DDL (oscillateur simple) avec pour raideur $k_1 = F/f = 1000/(1.41/1000) = 689655\ N/m$. Comme la fréquence fondamentale vaut $f_1 = 10.46\ Hz$, la masse associée vaut : $k_1/(2\pi f_1)^2 = 159.7\ kg$. Ensuite, la vitesse se calcule selon la relation (297). Le deuxième mode n'est pas pris en compte.

Le tableau 75 indique les vitesses pour une impulsion unitaire selon les trois méthodes décrites ci-dessus.

Tableau 75 : *Réponse en vitesse pour une impulsion unitaire selon les trois méthodes*

Vitesse pour une impulsion unitaire (mm/s/Ns)	v_1	v_2	v_3	v_4
Méthode 1	6.2	9.9	22.4	23.9
Méthode 2	4.2	-	6.0	7.5
Méthode 3	6.3	-	-	-

Les essais statiques donnent la souplesse du plancher : $a_{Ed} = 1.45$ mm/kN. Cette souplesse permet par la suite de calculer la vitesse pour une impulsion unitaire limite à ne pas dépasser. Le calcul de la vitesse pour une impulsion unitaire v conduit au calcul du facteur n_{40}. Ce facteur dépend des rigidités effectives des pseudo-poutres. Ces rigidités sont indiquées dans le tableau 70. Pour la charge, le facteur $n_{40} = 2.19$, ce qui signifie qu'il y a 2.19 modes qui agissent pour la détermination de la vitesse pour une impulsion unité.

La réponse en vitesse pour une impulsion unitaire se détermine selon la relation (176). Cette vitesse vaut 7.08 mm/s/Ns. Cette valeur est dans les ordres de grandeur des vitesses indiquées dans le tableau 75. Cela signifie que le plancher se comporte de manière similaire par rapport aux planchers dit « traditionnels » en solives avec des panneaux pour le parement supérieur. De plus, pour une pré-étude, le plancher peut être assimilé comme un oscillateur simple pour la détermination de cette vitesse avec une erreur de 16%.

Cette vitesse possède une limite qui garantit le confort du plancher. La vitesse pour une impulsion unitaire maximale s'exprime selon la formule (178). La figure 29 indique la valeur du facteur b selon la valeur de souplesse $a = 1.45$ mm/kN, il vient $b = 100$. La vitesse maximale $v_{max,lim}$ vaut 46 mm/s/Ns. Cette étude montre que le plancher est confortable et pourrait être légèrement plus souple. Selon la relation (178), il est clair que l'amortissement joue un rôle important. En effet, pour un amortissement classique de 1%, $v_{max,lim} = 11$ mm/s/Ns.

8.3 Conclusion et méthodologie de dimensionnement

Un plancher de 16 m^2 est conçu et fabriqué en lames croisées assemblées avec des chevilles selon la technologie du soudage du bois par friction. Le plancher est testé en statique selon plusieurs configurations : simplement appuyé sur 4 supports, simplement appuyé sur trois supports et un côté libre et simplement appuyé sur deux supports et les deux autres libres. Un chargement ponctuel est appliqué au centre de chaque pseudo-poutre du plancher dans le but d'obtenir les lignes d'influences. Les essais sont confrontés avec le MEF. Il en résulte un comportement similaire pour les essais pour les configurations sur 4 supports ou sur deux supports. Pour les essais sur trois supports, une déviation apparait entre le MEF et les résultats expérimentaux, principalement au niveau du bord appuyé à l'opposé du bord libre.

Des essais dynamiques ont été conduits pour caractériser le confort du plancher. Celui-ci possède quatre fréquences propres dans l'intervalle $[0, 40]$ Hz, ce n'est pas un problème majeur. En effet, le plancher possède une performance moyenne selon les critères d'OHLSSON (EUROCODE 5), le critère d'ALLEN et le critère de CHUI. Le plancher est moyennement amorti.

En comparaison avec les planchers « traditionnels », le plancher ajouré possède un comportement statique intéressant mais est médiocre pour le comportement dynamique principalement en fréquence. En effet, le fondamental vaut 10.46 Hz contre 18 Hz pour les planchers « traditionnels ». Pour atteindre cette fréquence, il

convient de rajouter deux lits intermédiaires (soit 20 lamelles) et de doubler la raideur de cisaillement des chevilles soudées. Au final, le plancher a une hauteur de $11\times24=264$ mm. De plus, le plancher n'aura qu'une flèche de 0.71 mm au centre sous un chargement ponctuel de 1 KN.

Le dimensionnement de ce plancher s'effectue selon le cheminement suivant :

- Calcul des rigidités des pseudo-poutres principales et secondaires avec le modèle par éléments finis ou le modèle exact généralisé,
- Calcul des critères de CHUI pour aboutir au comportement orthotrope du plancher : fréquence fondamentale et déformée au centre du plancher pour une charge ponctuelle,
- Vérification de la situation du plancher selon le critère d'ALLEN.
- Calcul des critères d'OHLSSON pour aboutir à la vitesse pour une impulsion unitaire,

Le calcul de la fréquence est plus précis selon la formule de CHUI par rapport à la formule simplifiée d'OHLSSON.

« Les hommes construisent trop de murs et pas assez de ponts. »

[Isaac Newton]

9 PAROIS

9.1 Etude expérimentale

Selon les formes de mur type ossature bois présentées dans la section §1.1, deux types de mur sont choisis :

1. Mur ossature bois avec un parement en avivés inclinés. L'ossature est réalisée avec des poutres de section 50 × 150 mm^2 (Figure 165(a)). Deux murs sont réalisés ainsi (Figure 165(b)).
2. Mur à lames croisées avec un parement en avivés inclinés. L'ossature est réalisée avec des lames croisées à l'image du plancher (nommée châssis), il possède cinq pseudo-montants par analogie avec l'ossature bois (Figure 165(c)). Des pseudo-lisses viennent s'intercaler régulièrement le long de la hauteur du châssis. Le parement est conçu de deux manières : les lamelles sont inclinées dans le même sens (nommé parement incliné) (Figure 165(b)), les lamelles sont inclinées dans la première moitié du mur dans un sens et dans l'autre sens pour la seconde moitié du mur (nommé parement en pointe de HONGRIE) (Figure 165(d)). Deux murs sont réalisés avec le parement incliné et deux autres avec le parement en pointe de HONGRIE.

Au total, six murs sont conçus et fabriqués.

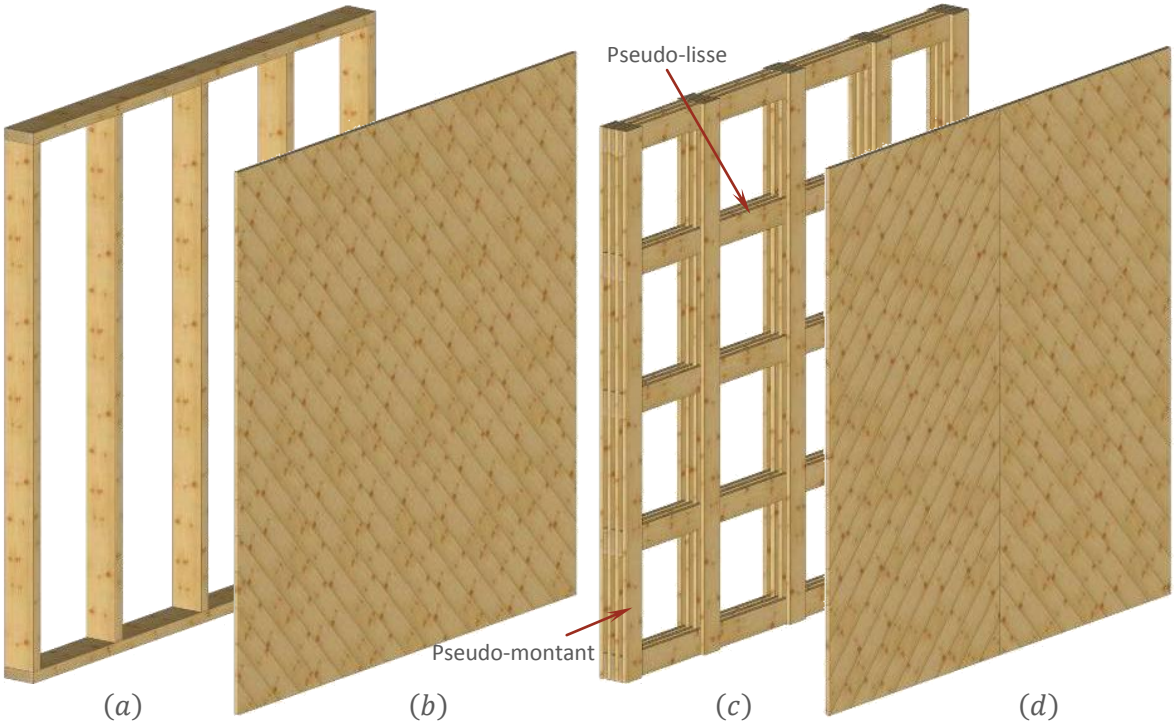


Figure 165 : *Ossatures et parements possibles*

9.1.1 Fabrication

Les six murs fabriqués sont codifiés de la manière suivante :

1. mur 0 et mur 1 : ossature bois (Figure 165(a)) avec un parement incliné (Figure 165(b)),
2. mur 2 et mur 3 : ossature en lames croisées (Figure 165(c)) avec un parement incliné (Figure 165(b)),

3. mur 4 et mur 5 : ossature en lames croisées (Figure 165(c)) avec un parement en pointe de HONGRIE (Figure 165(d)). La différence entre ces deux murs est l'orientation de la pointe : vers le haut pour le mur 4 et vers le bas pour le mur 5.

Les murs ont pour dimensions finales $0.16 \times 2.4 \times 2.4$ m^3.

Les lamelles sélectionnées pour la fabrication des parois sont en épicéa (*Picea abies*) et ont trois sections différentes :

- 24×90 mm^2 pour le parement du mur 0,
- 20×160 mm^2 pour les parements des murs 1 à 5,
- 20×140 mm^2 pour les châssis des murs 2 à 5.

Les lamelles utilisées ont les caractéristiques moyennes du lot 2 indiquées dans la section §5.4. La figure 166 présente les deux caractéristiques principales des lames utilisées : masses volumiques et module d'élasticité longitudinal. Le tableau 76 indique les valeurs moyennes, écarts type et coefficient de variation pour la masse volumique et le module d'élasticité de l'ensemble des lamelles utilisées.

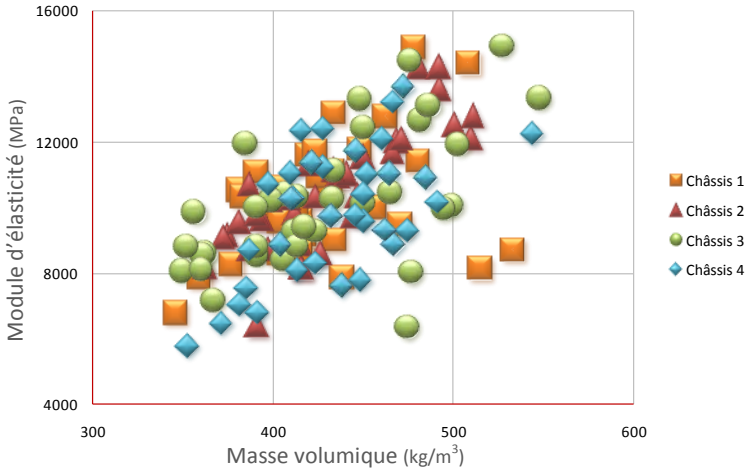


Figure 166 : *Répartition modules d'élasticité longitudinale en fonction de la masse volumique des avivés utilisés*

Tableau 76 : *Données statistiques des avivés utilisés dans la fabrication des parois*

	Masse volumique (kg/m^3)	Module d'élasticité (MPa)
μ	430	10170
	44.2	1919.0
COV (%)	10	19

La figure 167 illustre la fabrication d'un châssis du commencement (a) jusqu'aux finitions.



Figure 167 : *Fabrication d'un châssis pour les murs*

La fabrication des parois est réalisée manuellement avec les mêmes perceuses portatives utilisées pour la fabrication du plancher. Les paramètres de soudage des chevilles sont les mêmes que pour le soudage des chevilles du plancher : 1500 tr/min avec un temps de soudage inférieur à trois secondes. Les chevilles utilisées sont en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*), cylindriques et cannelées.

Les quatre châssis pour les murs à lames croisées sont identiques. Chaque châssis est réalisé avec 7 niveaux. Chaque niveau est constitué de 5 lamelles. Les pseudo-montants ont un espacement identique à ceux des ossatures bois. La figure 168 présente quelques étapes lors de la mise en place du parement en pointe de HONGRIE sur les châssis.

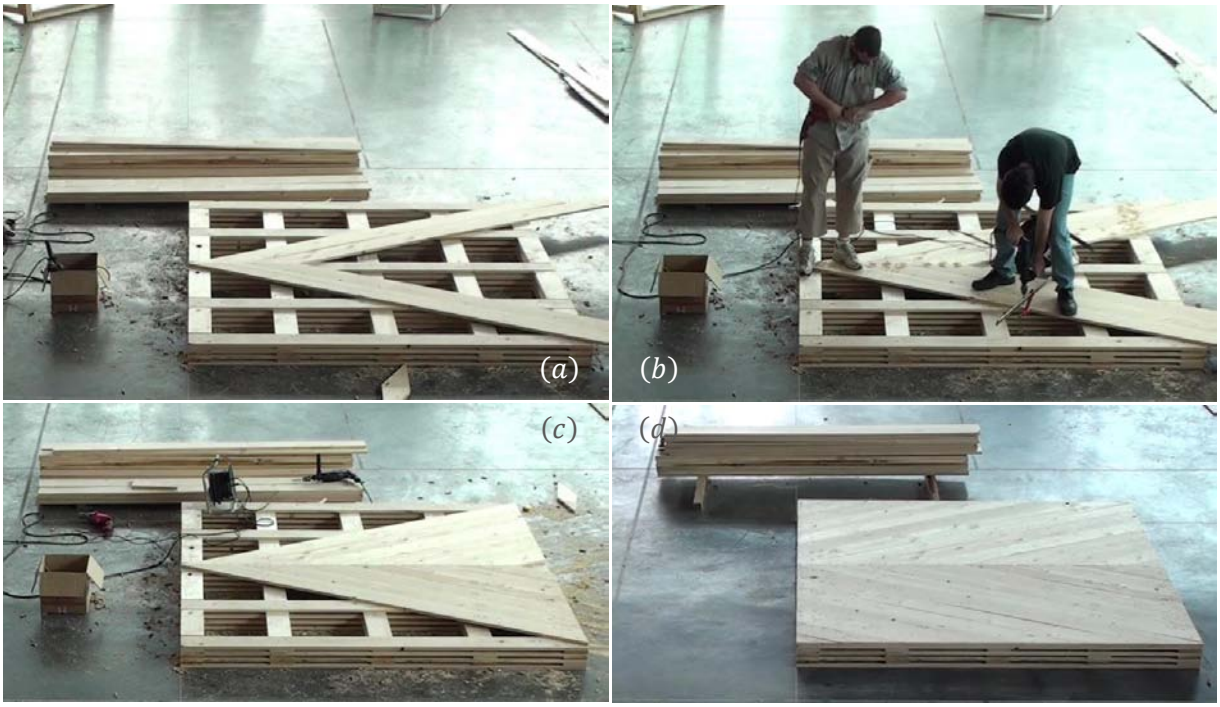


Figure 168 : *Positionnement du parement en pointe de HONGRIE*

Le fonctionnement du mur dépend principalement du parement (Figure 169). Dans la configuration de l'essai, si une force est appliquée en bas à droite et que le haut est fixé, il vient les comportements suivants :

- Pour le mur 0, les lamelles de la partie inférieure à la diagonale solliciteront le montant uniquement, donnant deux modes de fonctionnement selon la partie du mur.
- Pour le mur 1, la lamelle diagonale lie la lisse haute avec la lisse basse du cadre de l'ossature. Ce mur devrait être plus résistant que le précédent.
- Pour le mur 2, le comportement devrait être similaire avec toutefois une différence hormis le châssis car les pseudo-montants ont une inertie inférieure aux pseudo-lisses et que le parement est assemblé sur les pseudo-lisses.
- Pour le mur 3, le parement est chevillé soudé sur les pseudo-montants du châssis, puis par construction, la lamelle diagonale lie les deux pseudo-montants extrêmes. Le comportement devrait être identique aux deux murs précédents
- Pour le mur 4, la lamelle diagonale de la première moitié de la paroi lie la partie haute du pseudo-montant central avec la pseudo-lisse un peu à l'image du mur 0.
- Pour le mur 5, la lamelle lie le pseudo-montant central avec le pseudo-montant extrême.

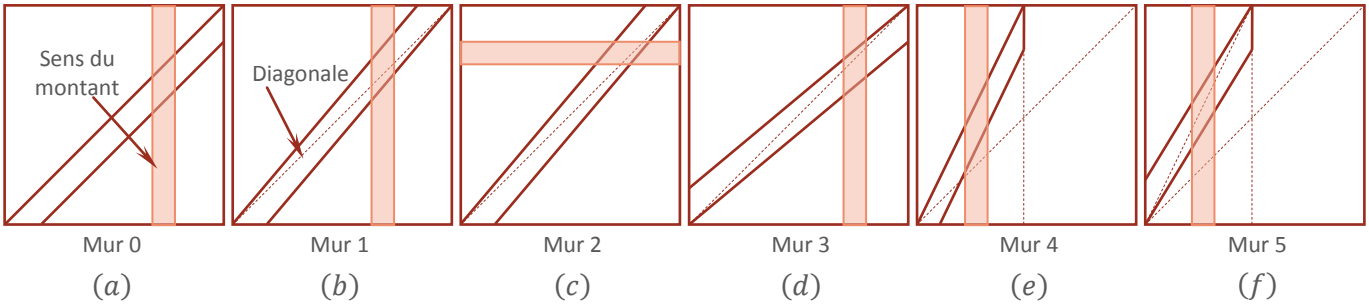


Figure 169 : *Disposition de la lamelle la plus grande du parement selon le mur*

Les assemblages des lames du châssis sont réalisés avec deux chevilles soudées comme sur la figure 170. Les distances $d_{a,1} = d_{b,1} = 140$ mm, il vient que les distances $d_{a,2} = d_{b,2} = 140/4 = 35$ mm. De plus, les perçages et les soudages sont effectués en quinconce d'un plan sur l'autre. Il se peut que les perçages et les soudages des lamelles du parement sur le châssis se situent sur des chevilles déjà soudées.

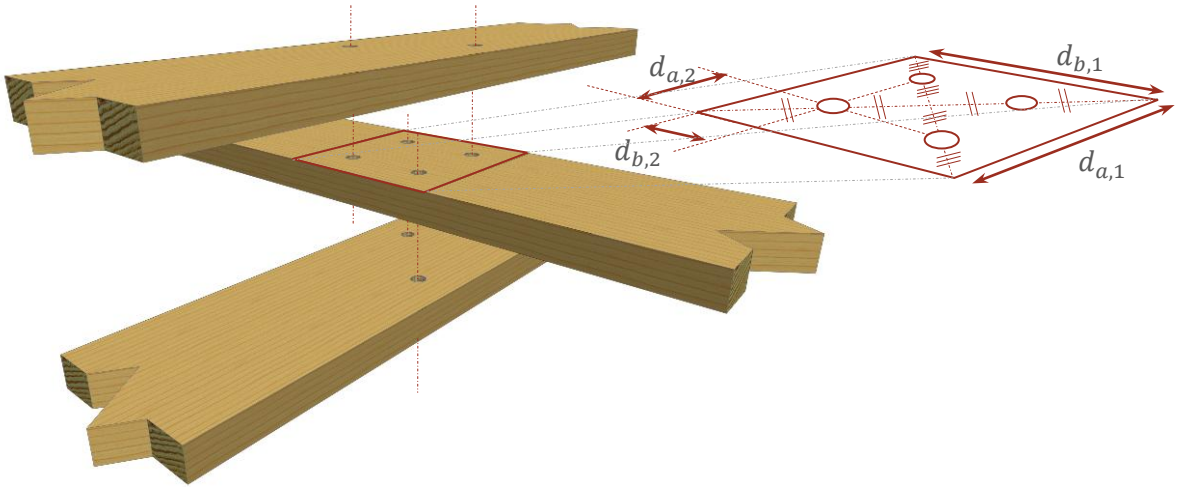


Figure 170 : *Pinces des assemblages des lames du châssis*

La fixation du parement sur l'ossature bois est réalisée avec trois chevilles soudées tant sur les bords qu'au centre du parement et quelle que soit la section des lamelles utilisées (Figure 171(b)). Pour la fixation du parement sur le châssis, les assemblages sont réalisés avec quatre chevilles soudées comme l'illustre la figure 171(a), pour les pseudo-montants centraux du parement en pointe de HONGRIE, l'assemblage est constitué de trois chevilles soudées (Figure 171(b)). Soient ℓ_1 la largeur des lamelles du châssis et ℓ_2 la largeur des lamelles du parement. Les valeurs numériques des distances indiquées dans la figure 171 sont répertoriées dans le tableau 77.

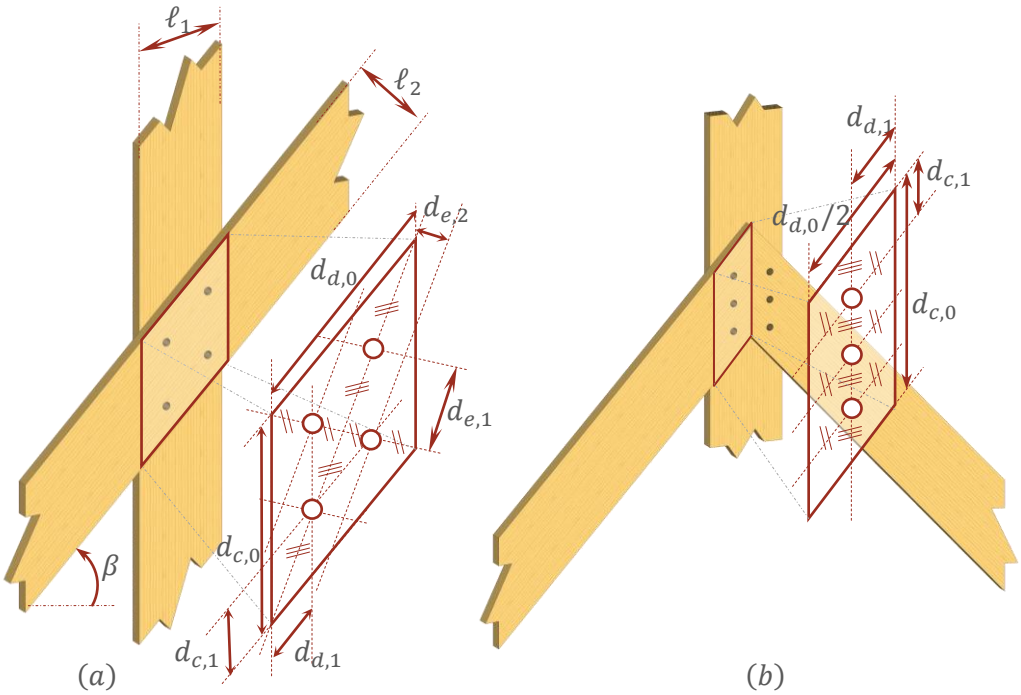


Figure 171 : *Pinces des chevilles soudées du parement sur les châssis : (a) quels que soient les pseudo-montants et les pseudo-lisses pour les parements inclinés, (b) pour les pseudo-montants centraux des parements en pointes de HONGRIE ou pour les parements inclinés fixés sur une ossature bois*

Tableau 77 : *Pinces des chevilles soudées du parement sur le châssis*

Unité (mm)	β (°)	ℓ_1	ℓ_2	$d_{c,0}$	$d_{c,1}$	$d_{d,0}$	$d_{d,1}$	$d_{e,1}$	$d_{e,2}$
mur 0	45.0	50	90	127.3	31.8	70.7	35.4	-	-
mur 1	46.5	50	90	130.8	32.7	72.7	36.3	-	-
mur 2	47.7	140	160	237.7	59.4	208.0	52.0	104.0	40.8
mur 3	42.3	140	160	216.3	54.1	189.3	47.3	92.8	41.5
mur 4	63.4	140	160	357.8	89.4	313.1	78.3	163.2	40.0
mur 5	60.0	140	160	320.2	80.0	280.1	70.0	145.0	40.0

L'assemblage du parement sur le châssis conduit à placer des pièces supplémentaires pour assurer le chevillage sur les bords des parois au niveau des pseudo-lisses. Afin que ces pièces n'interfèrent pas sur le comportement global du mur, un jeu est mis entre les extrémités des pièces et le bord des lamelles des pseudo-montants. La figure 172 présente ce montage.

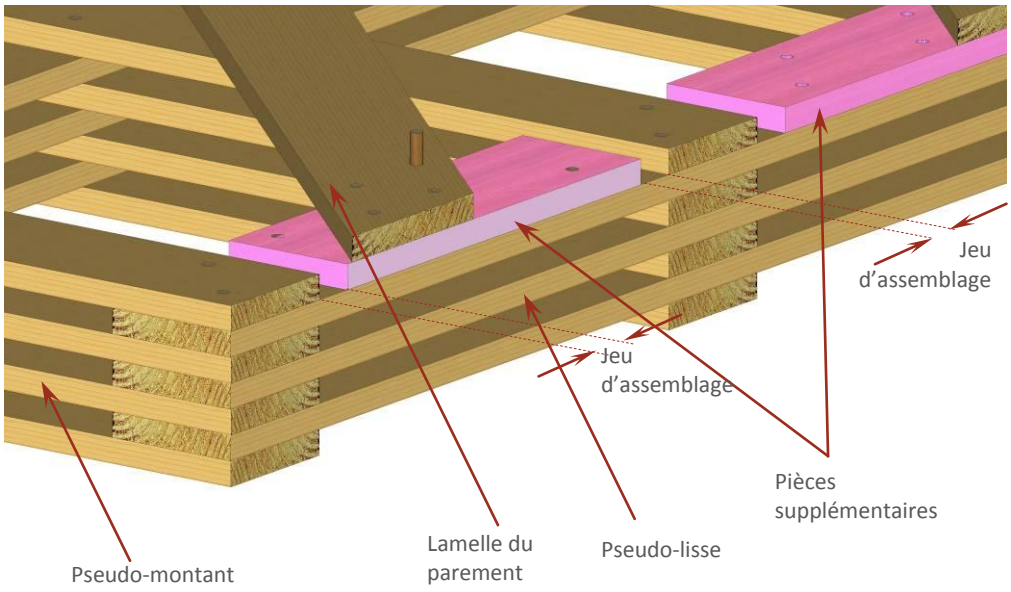


Figure 172 : *Détails d'assemblage du parement sur les pseudo-lisses du châssis*

Une donnée intéressante est le nombre de lamelles dans le parement en fonction des murs. Ce paramètre aura une importance pour l'étude des murs avec une structure de type ossature bois (mur 0 et mur 1). Le tableau 78 donne le nombre de lamelles dans le parement. Les lamelles de petites longueurs (aux extrémités ou au centre du parement) sont également comptabilisées. Plus le parement possède de lamelles plus il possède de chevilles soudées. Cela n'est pas le cas pour les parements en pointe de HONGRIE.

Tableau 78 : *Nombre de lamelles pour le parement selon les murs*

	mur 0	mur 1	mur 2	mur 3	mur 4	mur 5
Nombre de lamelles	30	21	21	21	2×14	2×14

9.1.2 Protocole des essais

En s'inspirant de la norme NF EN 594 [10], le cycle de chargement des murs suit l'allure présentée sur la figure 173. Les paliers sont pilotés en force afin de garantir la charge souhaitée. La vitesse de chargement est de 2 mm/min jusqu'au point 24 puis 4 mm/min pour finir l'essai de résistance.

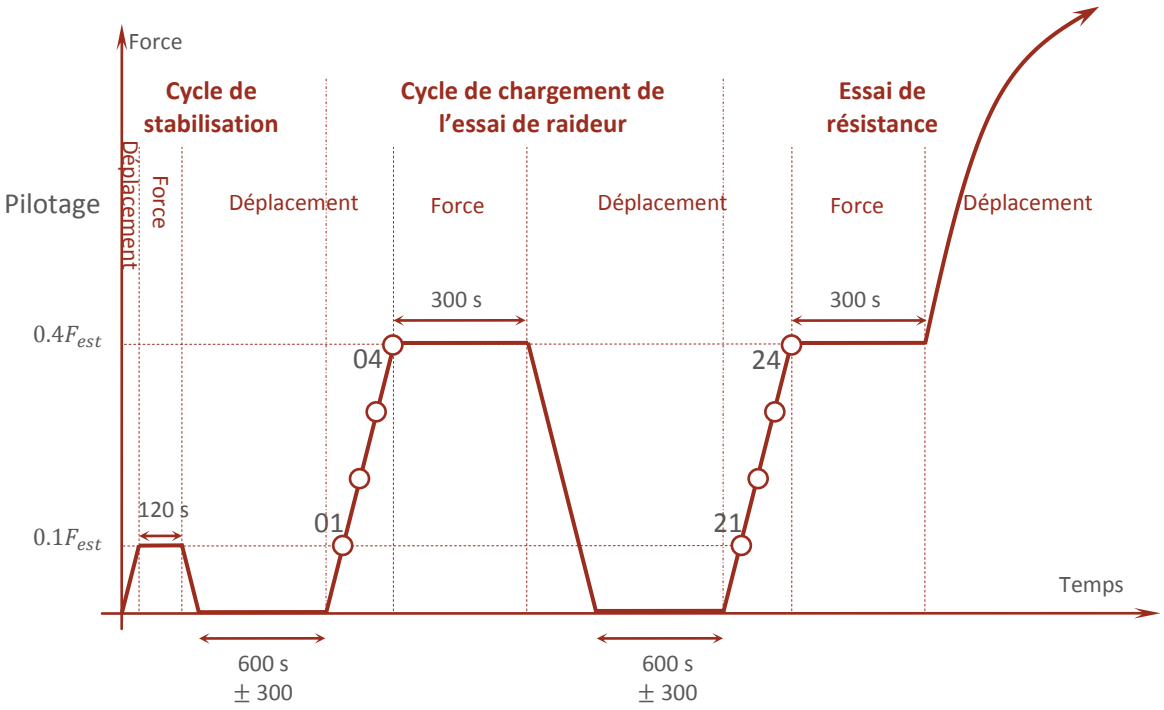


Figure 173 : *Cycle de chargement pour l'essai de contreventement*

La force estimée F_{est} est indiquée dans le tableau 79 selon les murs. Le cycle pour le test du mur 1 à été réalisé avec des valeurs différentes par rapport aux essais des autres murs.

Tableau 79 : *Forces estimées pour le cycle de contreventement*

Unité (kN)	F_{est}	$0.1F_{est}$	$0.4F_{est}$
mur 1	29	2.9	11.6
les autres murs	8	3.2	0.8

Selon la norme NF EN 594 [10], le calcul de la raideur expérimentale du mur se détermine selon la relation suivante :

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{F_{04} - F_{01}}{v_{04} - v_{01}} + \frac{F_{24} - F_{21}}{v_{24} - v_{21}}\right) \quad (298)$$

Les points 01, 04, 21 et 24 sont précisés sur la figure 173.

L'essai de contreventement est réalisé en s'inspirant de la norme NF EN 594. Pour faciliter l'application des différents efforts sur la structure, il convient de retourner la paroi (tête de la paroi en bas et pied du mur en haut). La figure 175 illustre le montage d'essai de contreventement.

Les limites de l'essai vis-à-vis de la norme sont :

- la non prise en compte du système d'ancrage avec un possible glissement de la paroi
- le fait que la paroi est à l'envers, pause le problème du poids propre de la structure
- le chargement des montants n'est pas appliqué.

Pour fixer le mur sur le profilé métallique, une poutre de jonction en épicéa est intercalée entre la pseudo-lisse basse de la paroi et le profilé. La poutre est assemblée sur le profilé à l'aide de 12 tirefonds de diamètre 12 mm. La poutre est collée à la pseudo-lisse du mur avec une résine polyuréthane. Comme les pseudo-lisses sont ajourées, il convient de rajouter des pièces pour améliorer le collage. Ces pièces sont également collées sur les avivées des pseudo-lisses (Figure 174).

Le même procédé est utilisé pour appliquer la force en tête du mur. Une poutre de jonction est collée avec de la résine polyuréthane sur les pseudo-lisses (Figure 174). Des pièces viennent également combler les espacements entre les lamelles de la pseudo-lisse pour améliorer le collage de la poutre sur celle-ci.

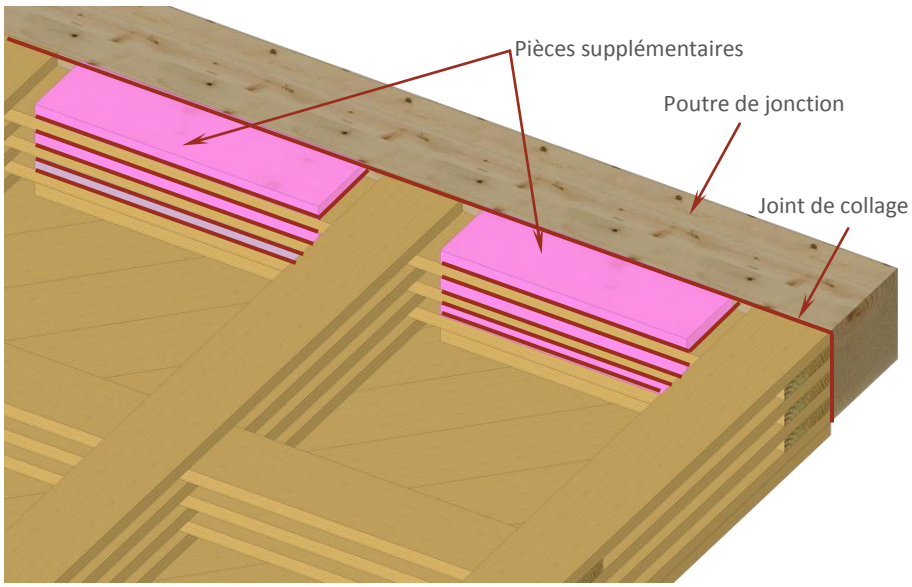


Figure 174 : *Détail de la fixation de la poutre sur la pseudo-lisse du châssis*

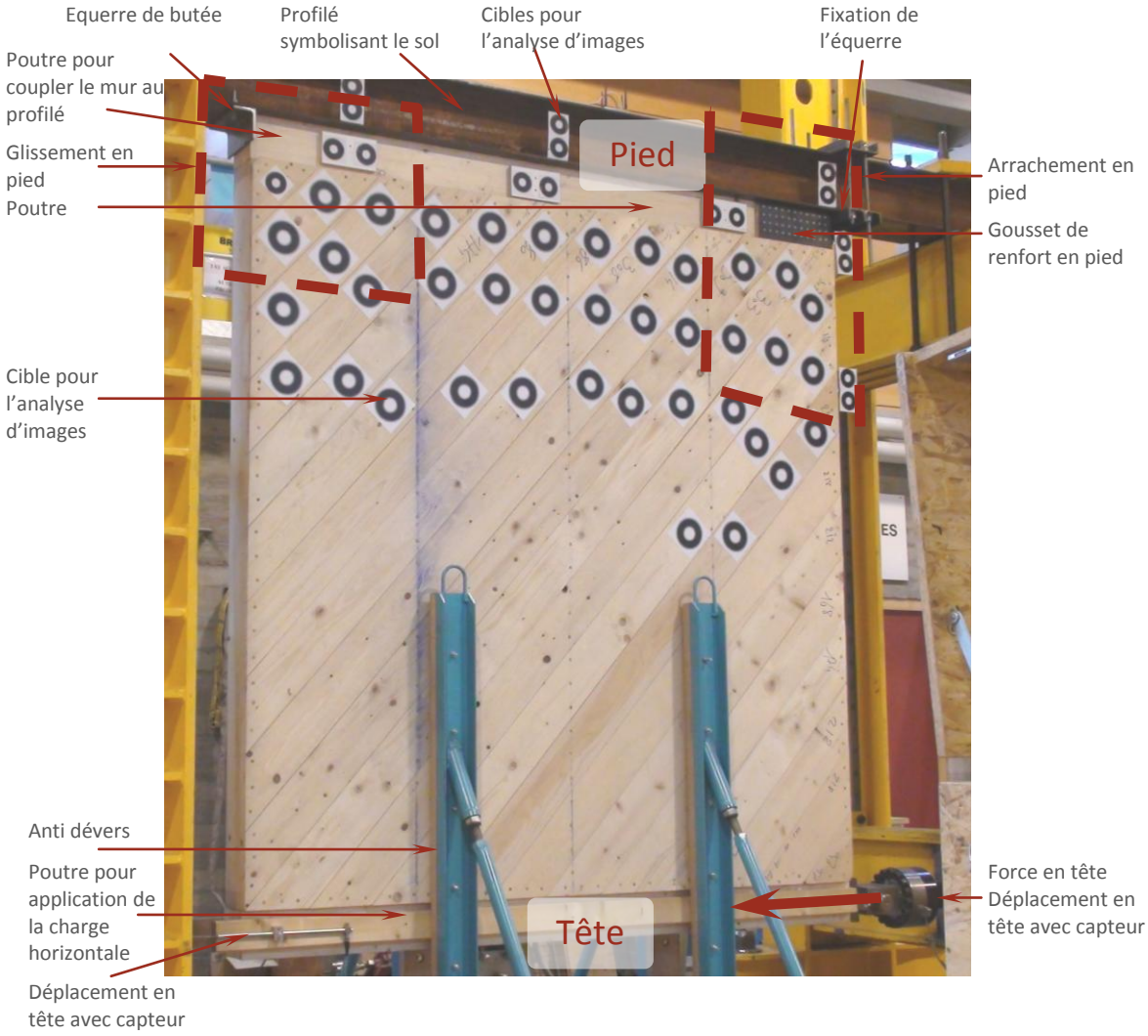


Figure 175 : *Montage pour l'essai de contreventement des murs chevillés soudés*

Pour ancrer le mur sur le profilé métallique, une équerre est réalisée avec un système de serrage sur le profilé, pour permettre un meilleur ajustement. L'équerre est soudée sur le système de fixation. La figure 176 présente ce système. Pour que ce système soit le plus optimal possible, les vides du pseudo-montant sont comblés de la même manière que pour le collage de la poutre de jonction. Une fois cette portion de montant lamellé collé réalisé, l'équerre est assemblée sur celui-ci avec 68 vis de diamètre 4 mm et de longueur 80 mm.

Afin de consolider la poutre de jonction en traction transversale dans la zone d'arrachement du pied, un gousset moisé composé de panneau OSB avec une plaque métallique de 5 mm d'épaisseur, est vissé à la poutre de jonction avec 2 × 44 vis de diamètre 4 mm et de longueur 80 mm (Figure 176).

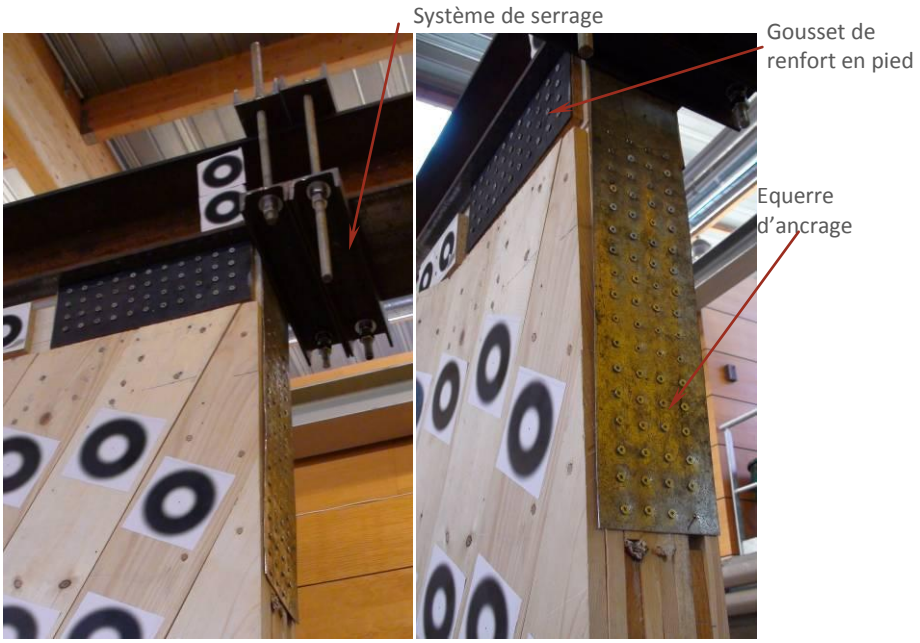


Figure 176 : *Système d'ancrage du pied des murs chevillés soudés*

Pour éviter le glissement sur le profilé métallique, une équerre de butée est vissée sur le profil. Cette équerre est relativement imposante afin d'agir sur la pseudo-lisse basse du mur testé, en plus de la poutre de jonction.

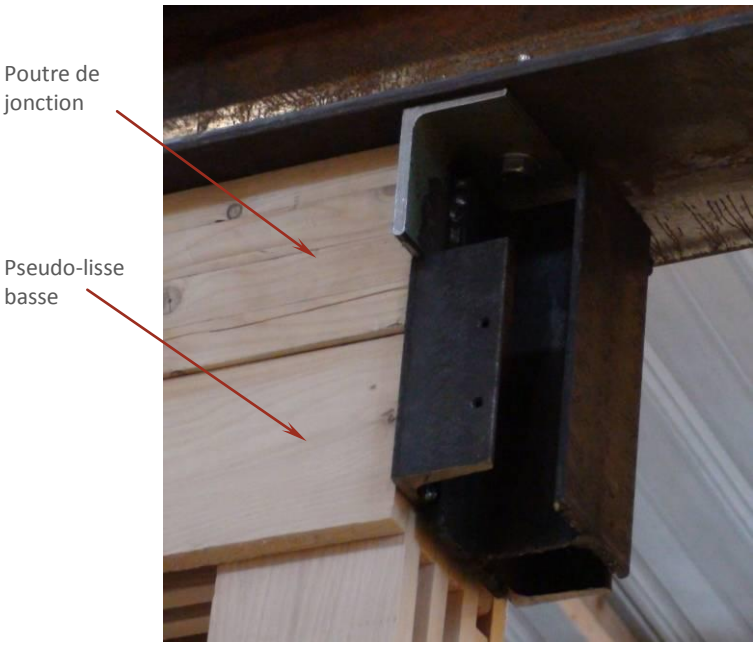


Figure 177 : *Equerre de butée pour limiter le glissement du mur*

Des anti-dévers permettent d'éviter le flambement de la paroi lors de l'essai (Figure 175) et favorise l'application du chargement dans le plan du mur.

L'application de la charge en tête de mur est réalisée en intercalant entre la poutre de jonction et l'embout du vérin, une plaque métallique vissée sur la poutre ainsi qu'une tôle graissée (Figure 178). Celle-ci permet de garantir le glissement de la tête du vérin vis-à-vis du déplacement de la plaque vissée lors de l'essai.

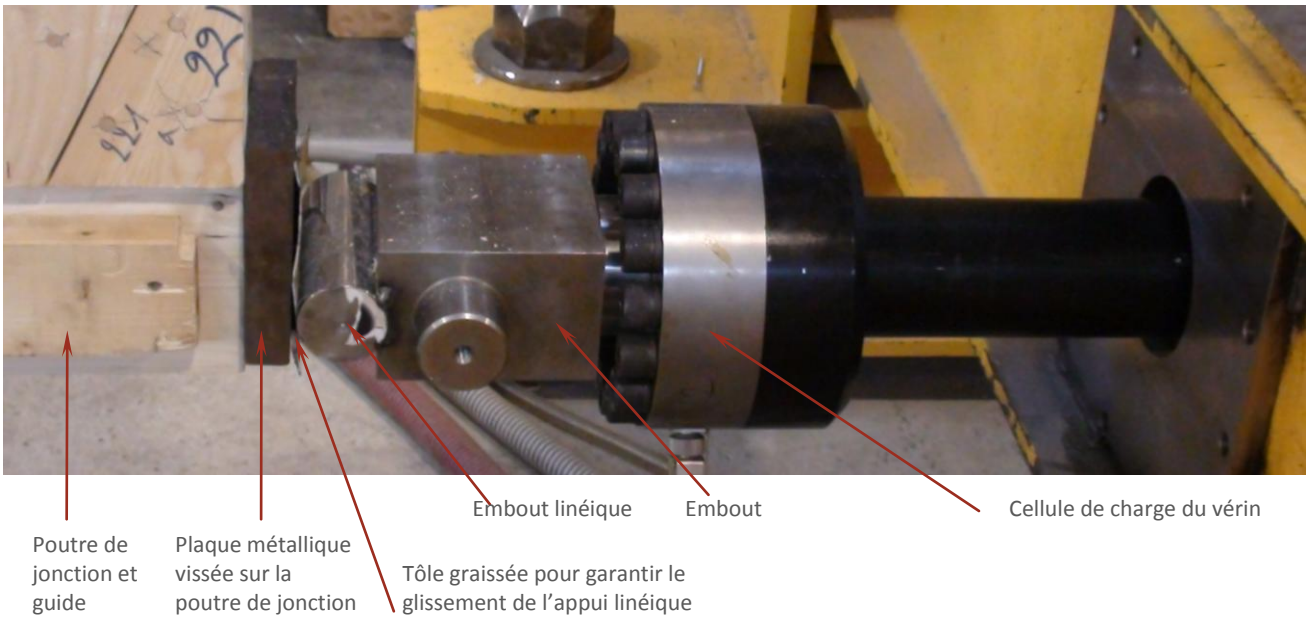


Figure 178 : *Dispositif pour l'application du chargement en tête de la paroi*

Pour quantifier le glissement en pied, l'arrachement en pied et le comportement des lamelles, des cibles sont placées sur le profilé métallique, sur la poutre de jonction, sur l'équerre d'ancrage et sur les lamelles des parements. Le déplacement en tête est déterminé avec un capteur de type LVDT (WA Driver Core HBM), la force est obtenue à l'aide de la cellule de force du vérin. L'ensemble est branché sur une centrale d'acquisition Spider8 HBM muni du logiciel CATMAN de HBM.

9.1.3 Résultats

Cette partie décrit dans un premier temps l'obtention des valeurs caractéristiques des parois : raideurs et forces maximales avec une étude plus fine sur la zone élastique (§9.1.3.1), puis dans un second temps l'étude des ruptures des parois (§9.1.3.2).

9.1.3.1 Etude zone élastique

La figure 179 présente l'ensemble des courbes d'essais obtenues pour le test de contreventement des parois. Il apparait une zone linéaire jusqu'à 10 mm de déplacement en tête. Le tableau 80 indique les valeurs des raideurs, des forces maximales et des forces obtenues pour un déplacement en tête de 5 mm : F_{5mm}, cette force multipliée par un facteur de 1.5 est le rapport entre la force maximale et la force à 1.5 fois celle pour un déplacement de 5 mm.

Les parois avec une structure de type ossature bois (mur 0 et mur 1) n'ont pas le même comportement dans la partie linéaire, il semble donc que la largeur des lamelles joue un rôle fondamental dans cette partie. Il faut rappeler que chaque lamelle des deux murs est fixée sur les montants et les lisses avec trois chevilles soudées. Il peut donc être remarqué que la paroi avec le plus grand nombre de lamelles dans le parement est deux fois plus rigide que celle avec le moins de lamelles. De plus la paroi qui possède le plus d'organes de liaisons, semble être plus résistante que celle qui en a moins. Il apparait une différence de comportement des deux murs vers 18 mm de déplacement en tête, le mur 0 semble se rigidifier. Ensuite lors de la rupture, le comportement des deux murs est identique avec un plateau suivit d'une rupture après 50 mm de déplacement en tête.

Logiquement les deux murs avec un châssis et un parement incliné (mur 2 et mur 3) doivent avoir le même comportement, toutefois, au vue des résultats obtenues, le mur 2 possède un comportement quasi similaire aux deux premiers murs alors que le mur 3 est le mur qui possède la meilleure résistance. Comme il sera indiqué par la suite, le mur 2 ne caractérise pas correctement le comportement d'une telle paroi puisqu'il y a eu une rupture prématurée. Le mur 3 possède la meilleure raideur. Le châssis semble être plus performant que la structure type ossature bois.

Les murs composés d'un châssis avec un parement en pointe de HONGRIE ont un comportement similaire sur tous les points. L'orientation de la pointe ne joue donc pas un rôle pour le contreventement de ce genre de parois. Il apparait que la force maximale atteinte est de l'ordre de 20% en dessous de celle du parement incliné. La raideur est la moitié de celle obtenue pour le mur 3. Ainsi, ces parois constituées d'un parement en pointe de HONGRIE

semblent être intéressantes au point de vue de l'orientation de l'effort. En effet quel que soit le sens d'application de la force en tête, ces parois répondront identiquement dans les deux sens contrairement au mur 3 où la présence de deux murs où l'orientation du parement incliné devra obligatoirement être opposée.

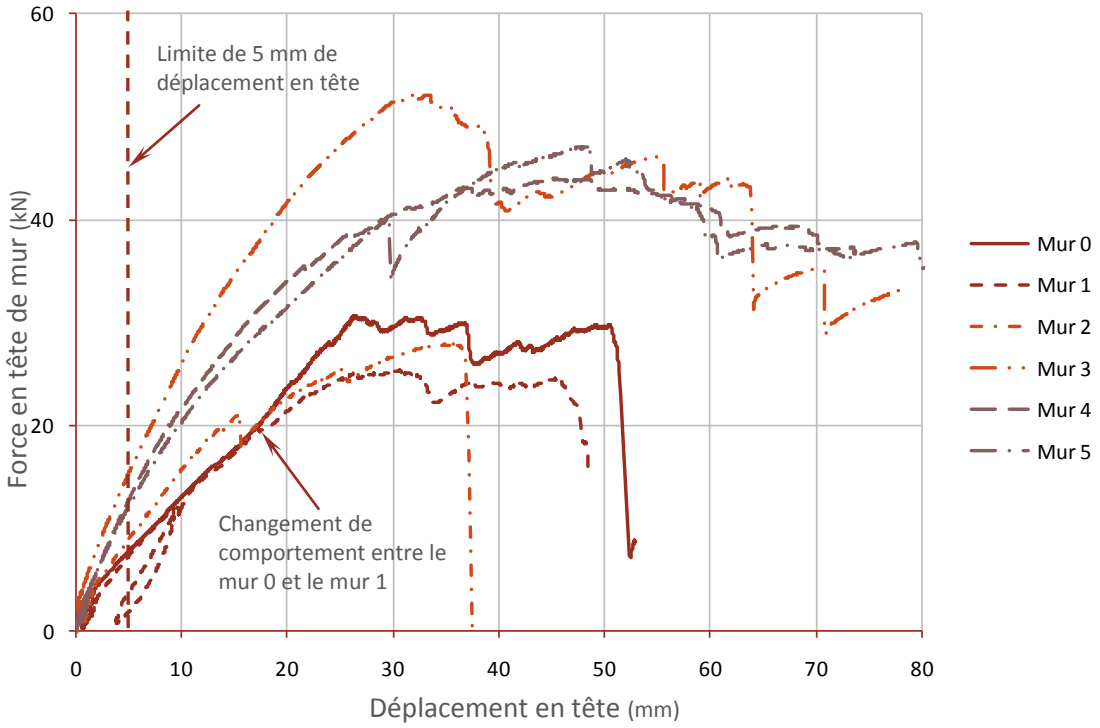


Figure 179 : *Faisceau des courbes d'essai de contreventement*

KÄLLSNER [97] à déterminé une relation exprimant la raideur d'un panneau de mur constitué d'un panneau type OSB avec son ossature. L'expression tient compte du glissement du panneau sur les montants et sur les lisses.

$$R_{KALL} = \frac{1}{\frac{2}{k_{ser,f}\left(b_p + \frac{h_p}{3}\right) + k'_{ser,f}\frac{h_p}{6}} + \frac{2h_p^2}{k_{ser,f}b_p^2\left(h_p + \frac{b_p}{3}\right)}} \quad (299)$$

Avec :

$k_{ser,f} = K_{ser}/s$ raideur linéique pour la couture sur les montants extérieurs et les lisses,

$k'_{ser,f} = K_{ser}/s'$ raideur linéique pour la couture sur les montants intermédiaires,

s (resp. s') est la distance entre les organes d'assemblage le long de l'ossature (resp. pour les montants intermédiaires),

b_p est la largeur du panneau de mur,

h_p est la hauteur du panneau de mur.

Donc pour un panneau de mur de hauteur $h_p = 2.4$ m, de largeur $b_p = 1.2$ m dont les assemblages sont réalisés avec des pointes de diamètre 2.1 mm et 55 mm de longueur, pour un espacement à la périphérie de l'ossature $s = 150$ mm et pour un espacement pour le montant intermédiaire $s' = 300$ mm, la raideur du panneau de mur est de 1.2 kN/mm. Comme il faut deux panneaux de mur de ce type pour réaliser les dimensions des parois étudiées, il faut doubler la raideur de panneau de mur précédente. La paroi doit donc avoir une raideur de 2.4 kN/mm. Pour 5 mm de déplacement cela donne un effort de 12 kN. Il peut donc être remarqué que les efforts pour 5 mm de déplacement des parois testées sont dans cet ordre de grandeur pour les murs avec un châssis. Pour les parois 0 et 1, la force pour 5 mm de déplacement en tête est inférieure de 38%.

Il semblerait que les parois sont trop résistantes par rapport à leur souplesse, spécialement pour les parois conçues avec un châssis. Ces châssis n'étant pas optimisés, il est possible de réduire la largeur des lamelles ainsi que le nombre de niveaux, ainsi ce type de paroi, avec le type d'assemblage utilisé pourrait être concurrentiel vis-à-vis des parois ossature bois « traditionnelles ». Il peut être aussi remarqué que les tests n'ont pas tenu compte du

système d'ancrage ainsi que du chargement des pseudo-montants. Le rapport $F_{max}/1.5F_{5mm}$ indique qu'en moyenne, les parois sont 2.36 fois trop résistantes par rapport a leur souplesse.

Tableau 80 : *Raideurs et forces maximales selon les murs chevillés soudés*

	mur 0	mur 1	mur 2	mur 3	mur 4	mur 5
Raideur R (kN/mm)	2.9	1.5	3.0	6.3	3.8	3.4
Force maximale F_{max} (kN)	31	25	28	52	44	47
Force pour un déplacement de 5 mm F_{5mm} (kN)	7.7	7.3	9.0	15.4	12.8	12.2
1.5 F_{5mm} (kN)	11.6	11.0	13.5	23.1	19.2	18.2
$\frac{F_{max}}{1.5F_{5mm}}$	2.6	2.3	2.1	2.3	2.3	2.6

9.1.3.2 Etude de la rupture

La figure 180 illustre la rupture du mur 0. Les chevilles soudées sur le contour du parement se sont cisaillées entrainant la rotation du parement et le glissement des montants. La figure 180(a) présente un montant intermédiaire qui s'est déplacé. Comme la force était appliquée dans le sens de tension des lamelles, l'ensemble des lamelles s'est resserré, donnant ainsi un comportement de panneau massif.



Figure 180 : *Rupture du mur 0*

La rupture de la paroi 1 a suivi le même schéma que le mur 0 (Figure 181). Toutefois, les montants semblent être assemblés avec la lisse puisqu'il n'apparait pas de glissement en tête ou en pied de ceux-ci et puisque les montants se vrillent légèrement. Les connexions du parement dans la zone de l'arrachement du pied sont cassées par cisaillement. La largeur des lamelles du parement n'influe pas sur le mode de rupture de la paroi.

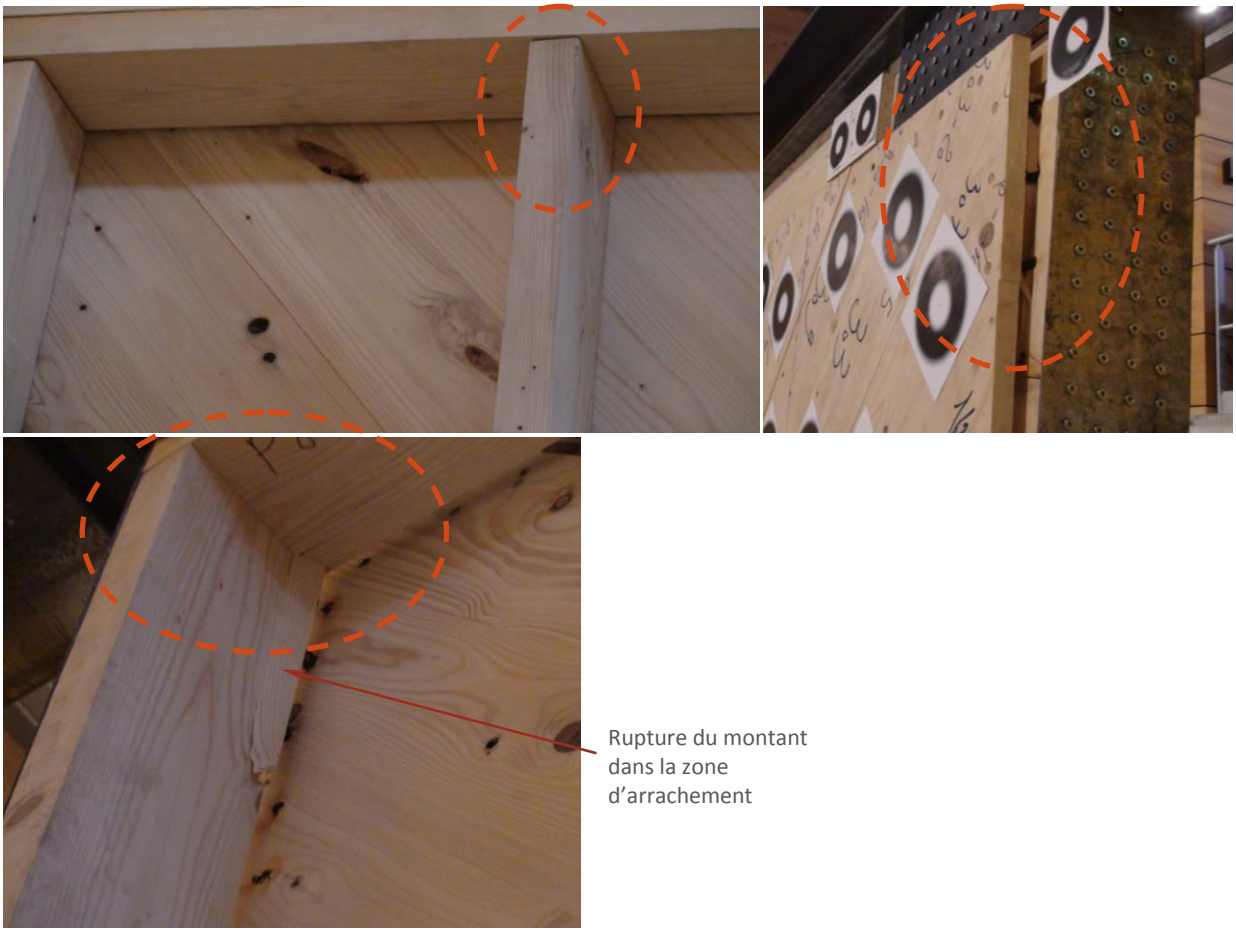


Figure 181 : *Rupture du mur 1*

La rupture du mur 2 est uniquement due à un mauvais collage de la poutre de jonction avec la lisse en tête de la paroi. Ceci a entrainé une rupture prématurée et un comportement similaire aux murs de type ossature bois (mur0 et mur 1).

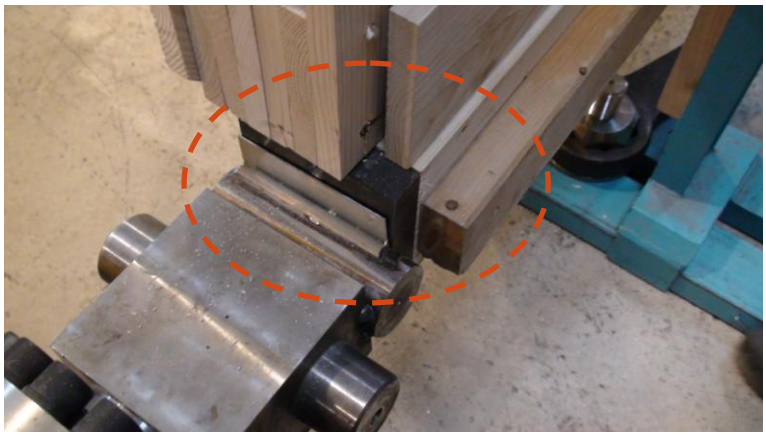


Figure 182 : *Rupture du mur 2*

La rupture du mur 3 est plus caractéristique pour ce système constructif (Figure 183). Le parement sous l'effet de l'action en tête s'est resserré comprimant les lamelles dans le sens de la largeur. Ensuite, la rupture a eu lieu entre le premier niveau du châssis sous le parement et le reste du châssis dans la zone d'arrachement. De plus, les chevilles sur le pourtour du châssis se sont cisaillées entrainant la rupture de la paroi.



Figure 183 : *Rupture du mur 3*

La rupture du mur 4 (Figure 184) s'est produite en deux temps :

- la moitié du mur au niveau du chargement a suivi le même cheminement que la paroi précédente : resserrement des lamelles avec ici une rupture des chevilles entrainant un gonflement du parement. Il apparait aussi comme pour le mur précédent, un cisaillement des chevilles sur le pourtour de cet ensemble.
- L'autre moitié du mur voit ses lamelles se séparer entrainant l'apparition d'un jeu. La rupture est due au gonflement de la première moitié de la paroi.



Figure 184 : *Rupture du mur 4*

La rupture de la paroi 5 est due aux mêmes effets que pour la paroi précédente : resserrement des lamelles pour la seconde moitié du mur avec rupture des chevilles sur le pourtour permettant ainsi à cet ensemble de pivoter, et rupture du pseudo-montant sous le chargement en tête. Il apparait ici un comportement différent pour la première moitié puisque la partie supérieure a entrainé le pseudo-montant et la partie inférieure a suivi le glissement de la première moitié du mur.

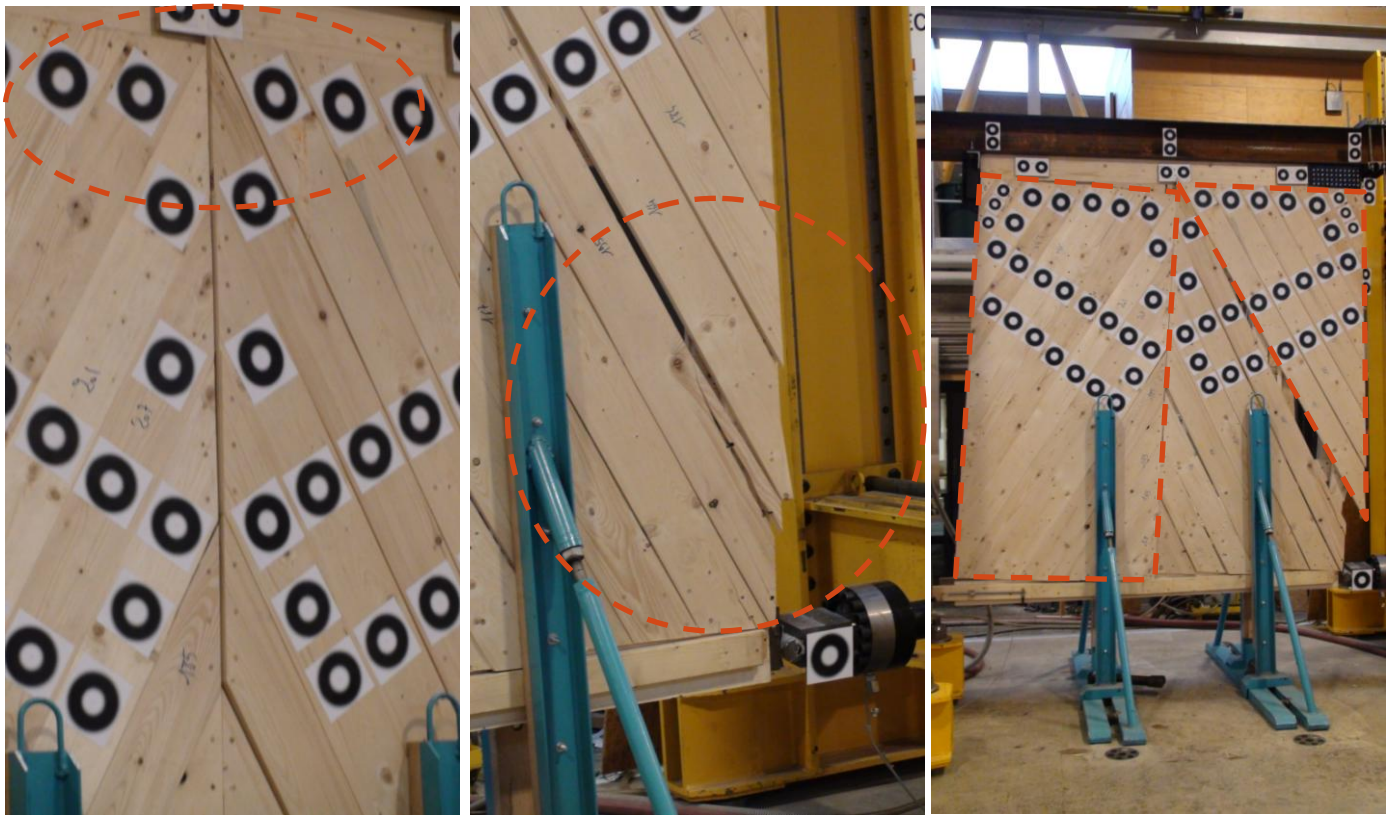


Figure 185 : *Rupture du mur 5*

Il semble donc que la rupture des parois avec un châssis et un parement en pointe de HONGRIE dont la pointe est vers le bas ou vers le haut donne le même schéma de rupture.

9.2 Conclusion

Ces parois donnent une vision d'ensemble des possibilités de la conception de mur utilisant la technologie du soudage du bois par friction rotative. Il faudrait maintenant réaliser ces parois de manière industrielle pour avoir un comportement plus juste notamment au niveau du soudage.

La structure avec le parement en pointe de HONGRIE est un moyen efficace pour contreventer dans les deux sens à l'aide d'une seule paroi. De plus, en optimisant les sections du châssis et du parement, ce système constructif permettrait très rapidement de fabriquer industriellement des parois compétitives par rapport au mur ossature bois « traditionnels » diminuant du fait l'utilisation des panneaux à base de bois collé.

Une étude théorique (modélisation mathématique) doit être menée afin de pouvoir dimensionner et optimiser ces parois.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail était de montrer la faisabilité des éléments de construction tels que poutres, poteaux, parois et planchers en utilisant la technologie récente du soudage du bois par friction rotative. Par le terme faisabilité, il faut comprendre réalisation mais également capacité à dimensionner à terme ces éléments. La technologie d'assemblage par tourillons soudés consiste à lier deux éléments percés ou non, avec une cheville en bois tournant à grande vitesse. Elle permet de créer des éléments structuraux sans utilisation d'assembleurs dit « traditionnels » (vis, clous, broches) et de s'affranchir de l'utilisation de colles.

Dans un contexte de développement durable cette technologie prend toute sa signification si, en plus, le bois utilisé lors des applications provient de forêts locales en l'occurrence ici les VOSGES. Pour constituer les éléments de structure, le bois est essentiellement de l'épicéa (*Picea abies*) et le bois des chevilles est principalement du bois de hêtre (*Fagus sylvatica*). L'épicéa sous forme d'avivés (planches) possède des caractéristiques convenables pour du bois qualifié visuellement. L'utilisation de planches comme éléments de base pour concevoir les éléments de structure s'explique par le fait que la technologie ne permet pas d'assembler des éléments de forte section et que ces planches sont des éléments difficiles à valoriser en générale. Ce point de rencontre des problématiques est ici un atout de développement. Chaque lamelle a été testée et qualifiée afin d'avoir des caractéristiques précises lors de la comparaison avec les modèles mathématiques.

La ligne directrice de ce travail a consisté à mener en parallèle du développement d'éléments de structure (conception réalisation), la modélisation pour à terme permettre l'optimisation pour satisfaire aux contraintes technologiques, réglementaires et de coût. Les points d'entrée en modélisation étant nombreux, le choix a été fait de « remonter » du plus petit assemblage (tourillon unitaire) aux éléments de structure. La raison majeure de cette approche est que ces organes de liaison peuvent être mis en place dans les éléments de structures en nombre limité par connexion.

Une des premières conséquences de la ligne directrice est que pour faire ce parallèle entre caractéristique locale et globale, il était absolument nécessaire de maîtriser le procédé de soudage pour que celui-ci soit reproductible et indépendant du facteur humain quel que soit la taille de l'élément fabriqué. En limitant les ambitions dans cette phase pré industrielle, il a été souhaité de rendre quasi automatique la fabrication d'assemblages et de poutres lamellées. Une machine prototype a donc été conçue et réalisée complètement. Le déplacement de la cheville ainsi que sa rotation ont été automatisés. Cette machine permet la gestion complète des paramètres de soudage rotatif. Un programme pilote avec précision et simplicité, les différents moteurs du prototype, agissant ainsi sur les caractéristiques principales du soudage telles que la vitesse de rotation de la

cheville lors de son introduction, la vitesse d'avancement, la détection du moment où la soudure est considérée comme acceptable, freinage etc. Entièrement modulable, ce logiciel donne la possibilité de programmer les cycles recherchés. Ce prototype permet à présent la réalisation d'éprouvettes soudées tout en mesurant en continue l'évolution du couple appliqué au tourillon et de la pression d'introduction.

Pour mesurer les caractéristiques de l'assemblage unitaire soudé, des tests ainsi que des protocoles d'essais ont été mis au point. Le test en traction du joint soudé (nommé traction radiale) permet de qualifier la performance du joint soudé, il a pu être montré que dans du bois de pays le soudage était imparfait dans le sens où la résistance en traction transversale du résineux n'était pas atteinte. Les paramètres utilisés pour réaliser la mise en place ont été pris dans la bibliographie, tout laisse à penser à la vue des résultats que ces paramètres ne sont pas les mieux adaptés et qu'un travail d'optimisation doit être fait en réfléchissant également sur la forme des éléments à assembler. Le test en cisaillement de la cheville soudée permet de mettre en évidence un comportement ductile de l'assemblage. L'évolution de la résistance du tourillon est tout d'abord élastique jusqu'à plastification du bois en cisaillement dans la zone où celui-ci est fortement comprimé au niveau de l'interface. Sur ce seuil, l'effet du soudage n'a que peu d'influence. En revanche, l'évolution post seuil est clairement liée au soudage qui permet la mise en traction du tourillon avec cependant un glissement très important. Ce test, réalisé sur un seul organe, permet d'obtenir une résistance au cisaillement par organe tout à fait comparable à celle déterminée sur les poutres. Ce résultat d'assemblage unitaire est utilisable pour la modélisation. En revanche, la raideur d'essai unitaire est plus faible que celle déterminée sur les poutres. Il apparait nécessaire de produire des éprouvettes de cisaillement avec plus d'organes pour déterminer la raideur par organe à introduire dans la modélisation : les bornes mini maxi étant à présent connues. Enfin un test de traction axiale permet d'obtenir la résistance en traction d'un tourillon directement utilisable en modélisation. Ce test individuel confirme également que le soudage est imparfait, il met également en évidence un effet de vissage par interpénétration des pièces du à l'écart de densité. En conclusion, dans leur ensemble, les tests mettant en jeu le soudage dans du bois de pays montrent une variabilité importante. Il sera nécessaire d'expliquer l'origine de cette variabilité avant de démarrer une phase d'optimisation des propriétés individuelles des organes puisque maintenant les matériels et protocoles développés le permettent.

Dans l'optique d'effectuer des vérifications réglementaires en termes de dimensionnement sur des planchers ou des murs en lames croisées tourillonnées tels qu'elles ont été imaginés dans ce travail, il était nécessaire de maîtriser le comportement des poutres à connexion imparfaite à plusieurs plans de cisaillement. D'un point de vu analytique, un seul modèle a été trouvé dans la bibliographie pour approcher ce type d'élément : la méthode de KEUZINGER. En comparant les résultats de ce modèle à un modèle éléments finis, il a pu être mis en évidence qu'un écart de contrainte existait entre les deux approches lorsque le nombre de poutres étaient importants. Sur la base de l'approche de GIRHAMMAR un modèle analytique a donc été redéveloppé en généralisant son approche : le modèle exact généralisé. Ce modèle permet d'approcher parfaitement la distribution non linéaire des contraintes dans la section ainsi que la rigidité de cette dernière. A l'aide du modèle MEF et du modèle généralisé, la rigidité de l'interface des poutres a pu être analysée avec précision.

Afin d'observer le comportement en grandeur d'emploi des poutres à 8 lames ont été assemblées à l'aide de la machine. Ces poutres ont été testées en leur appliquant différents chargements. Ces essais ont permis de montrer que les liaisons par tourillons soudés conduisaient à un comportement très homogène des éléments fabriqués. Du fait de la multiplicité des plans de cisaillement, ces dernières sont bien sûr plus souples que des éléments collés. Elles seront par là même très sensibles au fluage. Même en optimisant le nombre d'organes dans les plans de cisaillement et la qualité du soudage des tourillons, réaliser des poutres en bois lamellé soudé massives ne doit pas être un objectif si les éléments risquent de travailler en flexion avec des charges permanentes importantes. L'application à des poutres doit se limiter en nombre de lamelles pour constituer des poteaux comme des montants d'ossature par exemple où l'effet des phénomènes viscoélastiques a peu d'influence. Grâce au comportement ductile des tourillons soudés, les poutres ont également montré une ductilité importante. Ce comportement parfaitement maîtrisable est capable de dissiper de l'énergie. Des applications intéressantes peuvent être trouvées en structure pour se prémunir des effets sismiques par exemple.

Après ces premières expériences qui ont permis de comparer approche de modélisation et effet d'échelle des propriétés de l'organe de liaison, l'étude s'est orientée vers des systèmes tridimensionnels moins massifs où la souplesse du système de liaison peut s'exprimer plus largement. Un plancher de 16 m^2 est conçu et réalisé en lamelles croisées ajourées assemblées par chevilles soudées manuellement. Il est testé en statique et dynamique. Les tests statiques montrent un comportement de type plaque et donne l'allure de la déformée du plancher et les valeurs maximales de flèches pour situer le confort du plancher. L'étude dynamique détermine les fréquences

propres en dessous de 80 Hz. Les fréquences propres en dessous de 40 Hz permettent de calculer la vitesse d'impulsion unité qui caractérise entre autre le confort du plancher. Des modèles de plaques orthotropes et du plancher modélisé par éléments finis sont confrontés avec ces valeurs expérimentales obtenues. Il en découle un comportement limite par rapport aux normes en vigueurs au point de vue du confort. Cependant, soit en ajoutant deux niveaux au plancher, soit en augmentant les caractéristiques des assembleurs, il est possible d'obtenir un plancher compétitif vis-à-vis des autres types plus traditionnels.

Enfin, des parois de 2,4 x 2,4 m^2 pouvant être utilisées dans des structures ossature bois ont été réalisées manuellement et testées en cisaillement. Le temps de fabrication manuelle étant important le nombre d'organes permettant de lier ces éléments a donc été diminué volontairement. Néanmoins, les résultats d'essais sont très prometteurs. En regardant le domaine réglementaire, ces panneaux apparaissent déjà trop résistants par rapport à leur souplesse. Ils pourront donc sans trop de difficultés être optimisés. Ce sont les premiers éléments qui peuvent faire l'objet d'une industrialisation à très court terme. Leur comportement linéaire avant d'atteindre le seuil ductile important n'a pas encore été modélisé mais cela ne doit pas poser de difficulté majeure. Différentes configurations ont été proposées. Il sera important de s'intéresser à la demande du marché pour que le produit réponde de manière précise au besoin de mise en œuvre. Comme pour les poutres, le comportement ductile est à mettre en avant surtout sur l'aspect contreventement très important sur l'analyse en termes sismiques.

Ainsi, ce mémoire présente des éléments de calculs sur les constructions utilisant la technologie du soudage bois qui pourront aider à bâtir les éléments de justification nécessaires dans le futur contexte européen même si des éléments complémentaires sont encore à apporter au point de vue feu, cycle de vie… Des résultats prometteurs ont été montrés sur lesquels l'écueil du dogmatisme doit être évité afin que l'imagination en termes de développement prenne toute sa place. Si pour bâtir une construction assemblée à l'aide de tourillons soudés quelques poutres en bois massif ou même en bois lamellé-collé ou pire encore en béton ou en acier doivent être utilisés, il ne faut pas s'en offusquer. Dans le contexte actuel où le développement durable doit se construire au quotidien, toute planche apportée à l'édifice agrandit paradoxalement un peu notre fenêtre sur l'avenir et celle de nos descendants.

La mise en œuvre de cette technologie simple ne peut se concevoir que par une automatisation pointue à l'image de celle rencontrée dans les domaines d'industrialisation les plus poussés. Il a été montré que le domaine tridimensionnel propice à la mise en œuvre d'assemblages par tourillons soudés conduisait à une meilleure exploitation de la matière et à des éléments de structure plus performants. C'est donc vers de la réalisation tridimensionnelle entièrement robotisée que la technique ouvrira des voies nouvelles en termes de marchés et d'emplois.

ANNEXES

SOMMAIRE DES ANNEXES

A. OUTILS MATHEMATIQUES 217
A.1. Transformée en série de FOURIER 217
A.2. Méthode de résolution des systèmes linéaires par la méthode de CRAMER 218
B. CARACTERISTIQUES DES SECTIONS 221
B.1. Aire de la section 221
B.2. Moment statique 222
B.3. Centre de gravité 223
B.4. Moment d'inertie 223
B.5. Moment résistant 224
C. RDM 225
C.1. Principe d'analyse des éléments de type poutre 225
C.2. Calcul de la contrainte de cisaillement dans une lamelle pour une poutre composite 253
C.3. Série de FOURIER des chargements classiques 254
C.4. Généralisation de la méthode de HEIMESHOFF. 257
C.5. Vers la généralisation de la méthode exacte 273
C.6. Principe d'analyse des éléments de type plaque 276
D. DONNEES SUR LA MACHINE 285
D.1. Caractéristiques des moteurs NX430EAF et NX310EAP 285
D.2. Devis 287
E. REFERENCES 293
F. LISTE DES FIGURES 299
G. LISTE DES TABLEAUX 305

« La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul. »

[Galilée]

A. OUTILS MATHEMATIQUES

A.1. Transformée en série de FOURIER

La transformée de FOURIER permet d'écrire une fonction $g(x)$ qui s'y prête bien, en somme de sinus et de cosinus. Cette partie expose uniquement un rappel sur la méthode.

La fonction étudiée est supposée T-périodique, c'est-à-dire que

$$g(x+T) = g(x) \qquad \textbf{(300)}$$

Il peut aussi être dit que La fonction possède une translation de valeur T.

La série de FOURIER d'une fonction $g(x)$ s'écrit :

$$SF(g)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (Cos(k\omega x)a_k + Sin(k\omega x)b_k) \qquad \textbf{(301)}$$

Avec :

- ω : pulsation de la fonction. $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
- T : Période de la fonction.

Les coefficients a_k et b_k sont indépendants de x et se déterminent par les relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T g\,(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(302)}$$

a_0 correspond à la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle $[0, T]$.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)Cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(303)}$$

Pour les fonctions impaires, les coefficients a_k sont nuls.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)Sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(304)}$$

Pour les fonctions paires, les coefficients b_k sont nuls.

Si les points $\frac{T}{2} \pm kT\ \forall k \in \mathbb{N}$ correspondent à un centre de rotation d'angle $\pm T/2$, l'intégrale sur $[0, T]$ devient alors le double de l'intégrale sur $[0, T/2]$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)Cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \\ b_k &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} g(t)Sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \qquad \textbf{(305)}$$

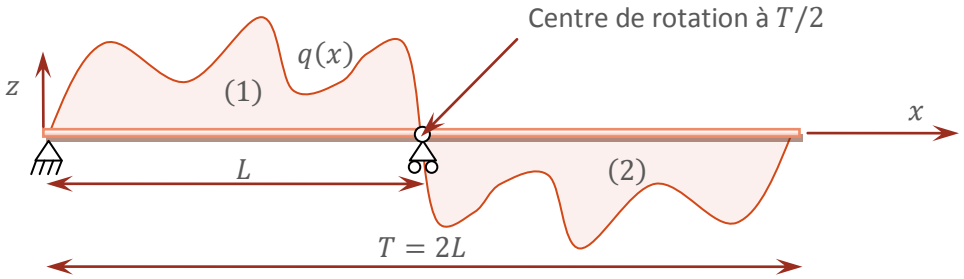


Figure 186 : *Poutre sur deux appuis avec un chargement périodique et son centre de rotation*

A.2. Méthode de résolution des systèmes linéaires par la méthode de CRAMER

La description de cette méthode est issue de [98] et de [99].

Soit un système linéaire de n équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j = d_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j = d_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j = d_n \end{cases} \quad (306)$$

Ce système peut être écrit de manière matricielle :

$$\mathcal{M} \cdot X = \mathcal{B} \quad (307)$$

Avec :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{B} = \{d_1, d_2, \cdots, d_n\} \quad (308)$$
$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

Pour savoir si le système possède une solution unique et calculable, il est nécessaire et suffisant que le déterminant de la matrice $\mathcal{M}$ soit non nul. Soit donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : $Det(\mathcal{M}) \neq 0$

Pour déterminer la solution x_i, il convient d'étudier le produit $x_i Det(\mathcal{M})$. L'une des propriétés des déterminants, est que lorsque celui-ci est multiplié par une constante, celle-ci multiplie tous les termes d'une colonne. Il est intéressant de multiplier la $i^{ème}$ colonne par le terme x_i :

$$x_i Det(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i}x_i & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i}x_i & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (309)$$

Une deuxième propriété des déterminants est la possibilité d'exprimer une colonne comme une combinaison linéaire de l'ensemble des colonnes pondérées par une constante, sans que cela change la valeur du déterminant. Dans le cas présent, il est fort utile de mettre la combinaison des autres coefficients pondérés des x_j, il vient d'après (306) :

$$x_i Det(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad (310)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & d_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & d_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

En gardant l'Hypothèse 1, il en résulte :

$$x_i = \frac{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & d_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & d_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}{Det(\mathcal{M})} = \frac{D_i}{D} \quad (311)$$

Dans les cas où l'hypothèse 1 n'est pas vérifiée, il apparait des cas dégénérés. Le cas où $D = 0$ et $D_i = 0\ \forall i$ signifie que le système possède une infinité de solutions. Dans les cas où $D = 0$ et qu'il y a, au moins, un $D_i \neq 0$, le système n'admet pas de solution.

« Il faut cacher la profondeur. Où ça ? A la surface.»

[Hugo von Hofmannsthal]

B. CARACTERISTIQUES DES SECTIONS

Définition 4 : *Une section représente une coupe du volume (ou de la matière) selon un plan.*

Il en découle une autre définition qui est plus utilisée dans la RdM :

Définition 5 : *Une section représente une coupe du volume selon un plan perpendiculaire à la fibre moyenne, qui est une ligne qui se trouve au centre de gravité de la section tout le long de l'élément étudié.*

Il est ensuite possible de connaitre les caractéristiques intrinsèques des sections : aires de la section, moments statiques, centre de gravité, moments d'inertie, moments résistants.

B.1. Aire de la section

L'aire de la section – notée A – est la mesure de celle-ci. L'aire de la section est la somme de tous les éléments infinitésimaux dS de celle-ci : soit donc la formule suivante :

$$A = \int_S dS \qquad (312)$$

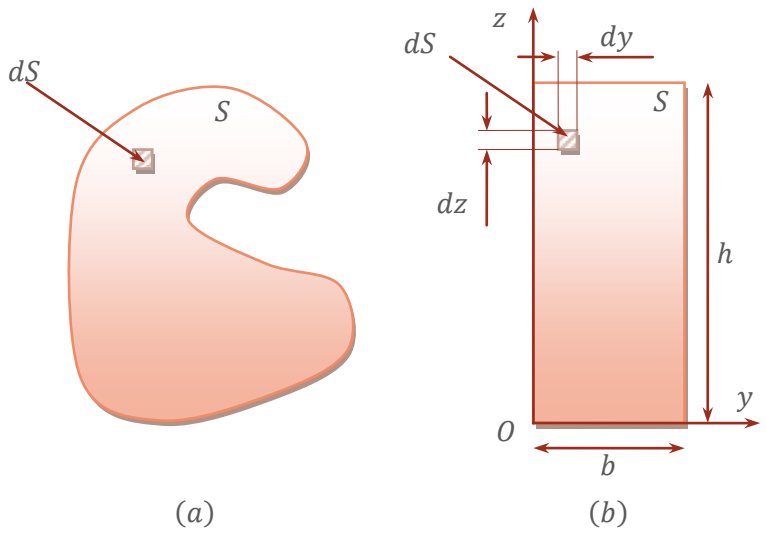


Figure 187 : *Aire d'une section quelconque (a) et d'une section rectangulaire (b)*

En suivant les notations de figure 187(b), il vient selon (312) :

$$A = \int_S dS = \int_0^h \int_0^b dydz = \int_0^h dz \int_0^b dy = hb$$

Le repère n'est pas important. En effet, si le centre O se trouvait aux coordonnées $½b$ pour y et $½h$ pour z, les bornes des intégrales aient $-b/2$ et $b/2$ pour y puis $-h/2$ et $h/2$ pour z.

Pour une section complexe, il est possible de scinder celle-ci en plusieurs sections plus simples (élémentaires) puis de faire la somme discrète de leurs aires.

L'unité de l'aire est le carré de l'unité de longueur.

B.2. Moment statique

Par analogie avec la formule du moment d'une force par rapport à un axe quelconque, il en résulte le calcul du moment de l'aire par rapport à un axe Δ : appelé moment statique – noté m_Δ.

> **Définition 6 :** *Le moment statique de l'aire est la somme du produit d'éléments de surface* ***dS*** *avec la distance à l'axe considéré*

Soit la relation suivante (Figure 188(a)) :

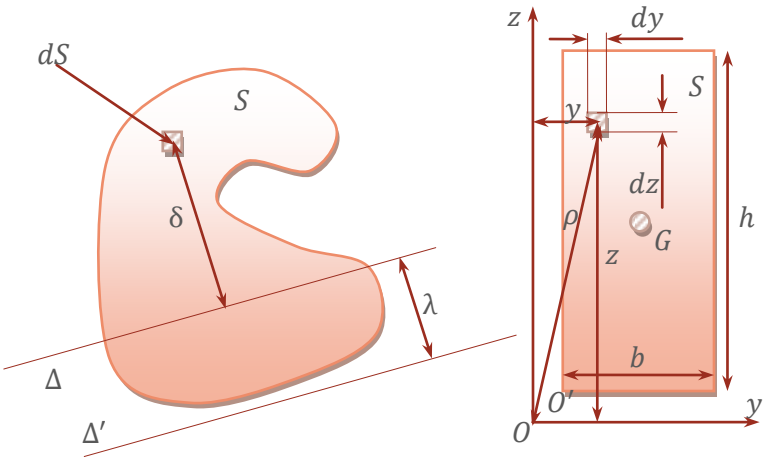
$$m_\Delta = \int_S \delta dS \qquad (313)$$

Où δ est la distante de dS à la droite Δ. Pour les coordonnées cartésiennes, il vient pour le moment statique de S par rapport à l'axe Ox :

$$m_y = \int_S z dS \qquad (314)$$

Et pour le moment statique de S selon l'axe Oz :

$$m_z = \int_S y dS \qquad (315)$$



(a) (b)

Figure 188 : *Moment statique d'une section quelconque (a) et d'une section rectangulaire (b)*

Soit pour une section rectangulaire selon l'axe $O'y$ avec les notations de la figure 188(b) :

$$m_y = \int_S z dS = \int_0^h \int_0^b z dy dz = \int_0^h z dz \int_0^b dy = \frac{bh^2}{2}$$

Il en est de même pour le moment statique selon l'axe $O'z$:

$$m_z = \int_S y dS = \frac{b^2 h}{2}$$

Par translation, il est possible de calculer le moment statique selon un autre axe. Par exemple selon les notations de la figure 188(a), pour λ contant pour dS il vient :

$$m_{\Delta'} = \int_S (\delta + \lambda) dS = \int_S \delta dS + \int_S \lambda dS = \int_S \delta dS + \lambda \int_S dS = m_\Delta + \lambda S \qquad (316)$$

Pour le calcul d'une section complexe, de même que pour le calcul de l'aire, il suffit de la scinder en sections élémentaires puis de sommer leurs moments statiques par rapport à l'axe considéré.

L'unité du moment statique est le cube de l'unité de longueur.

B.3. Centre de gravité

Toujours par analogie avec le moment d'une force, où l'aire correspond à la résultante des forces, soit la relation suivante pour un système d'axes cartésiens :

$$m_y = z_G S$$
$$m_z = y_G S \qquad (317)$$

Avec y_G et z_G les coordonnées d'un point particulier nommé centre de gravité, ou centre d'inertie. Car tel un barycentre (en prenant l'hypothèse que le matériau est homogène), il détermine le lieu central de la section. Lorsque les éléments dS sont affectés d'une caractéristique supplémentaire (par exemple une densité de masse), il est possible d'obtenir le centre de gravité d'un matériau hétérogène.

De ces résultats en utilisant les relations (316) et (317), le moment statique d'un axe passant par le centre de gravité est nul.

B.4. Moment d'inertie

Définition 7 : *Le moment d'inertie est la somme du produit des éléments de surface* $\boldsymbol{dS}$ *avec le carré de leurs distances à l'axe considéré.*

Soit donc la relation du moment d'inertie selon les notations de la figure 188 :

$$I_\Delta = \int_S \delta^2 dS \qquad (318)$$

En coordonnées cartésiennes, il vient les relations suivantes :

$$I_y = \int_S z^2 dS$$
$$I_z = \int_S y^2 dS \qquad (319)$$
$$I_{yz} = \int_S yz dS$$

Le terme I_{yz} est le moment d'inertie produit (ou centrifuge). Pour des axes orthogonaux, lorsque l'un des axes est axe de symétrie de la section, celui-ci est nul. Si les axes sont orthogonaux et que l'un au moins est axe de symétrie de la section, ces axes sont nommés axes principaux. Si les axes passent par le centre de gravité, ils sont nommés axes centraux. Si les axes orthogonaux passent par le centre de gravité et que l'un au moins est axe de symétrie de la section, ils sont donc nommés axes centraux principaux.

Selon la figure 188(b), le moment d'inertie par rapport au point O, appelé moment d'inertie polaire, se détermine de la manière suivante :

$$I_O = \int_S \rho^2 dS = \int_S (y^2 + z^2) dS = I_y + I_z \qquad (320)$$

Pour une section rectangulaire selon la figure 188(b), le calcul des moments d'inertie selon les axes centraux principaux vaut :

$$I_y = \int_S z^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \int_{-b/2}^{b/2} dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \int_S x^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{yz} = 0$$

De la même manière que pour le moment statique, il est possible de calculer les moments d'inertie par changement de base. Lors d'une translation, selon la figure 188(a), où les droites parallèles Δ et Δ′ distantes de la distance λ (constante pour dS), le moment statique selon l'axe Δ′ vaut :

$$I_{\Delta'} = \int_S (\delta^2 + \lambda^2) dS = \int_S \delta^2 dS + \int_S \lambda^2 dS = \int_S \delta^2 dS + \lambda^2 \int_S dS = I_\Delta + \lambda^2 S$$

C'est en cela que constitue le théorème de HUYGENS

> **Théorème 2 :** *Soit deux droites **Δ** et **Δ′** parallèles distantes de **λ**, le moment d'inertie selon la droite **Δ′** est égale au moment d'inertie selon la droite **Δ** additionné du produit de l'aire de la section avec le carré de la distance séparant les droites considérées.*

$$I_{\Delta'} = I_\Delta + \lambda^2 S \qquad \textbf{(321)}$$

L'unité du moment d'inertie est la quatrième puissance de l'unité de la longueur.

B.5. Moment résistant

> **Définition 8 :** *Le moment résistant est le rapport entre le moment d'inertie par rapport à l'axe considéré et la distance de cet axe jusqu'au point le plus éloigné de la section*

Le moment résistant – noté W – se calcule donc comme suit :

$$W_\Delta = \frac{I_\Delta}{\delta_{\max}} \qquad \textbf{(322)}$$

« On ne s'appuie que sur ce qui résiste.»

[François Andrieux]

C. RDM

C.1. Principe d'analyse des éléments de type poutre

Cette partie décrit les éléments de la Résistance des matériaux (parfois abrégé RdM) pour les poutres étudiées dans ce travail.

Soit la définition générale suivante selon [100][§1.1] :

> **Définition 9 :** *Une poutre est un solide engendré par une aire plane $\mathcal{S}$ dont le centre de gravité $\mathcal{G}$ décrit une courbe $\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1$, le plan de $\mathcal{S}$ restant normal à la courbe $\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1$. L'aire $\mathcal{S}$ est appelée section droite, ou tout simplement section de la poutre. La courbe $\mathcal{G}_0\mathcal{G}_1$ est appelée fibre moyenne de la poutre.*

Cette définition désigne le lieu géométrique qui caractérise une poutre (Figure 189).

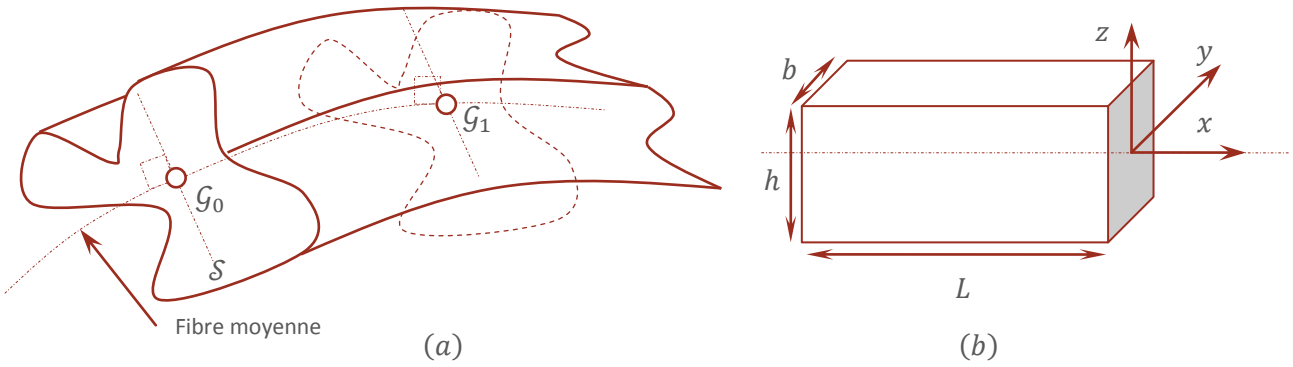


Figure 189 : *Définition (a) d'une poutre et (b) d'une poutre orientée*

Il en découle deux corollaires :

L'étude portera principalement sur des poutres dites droites :

> **Définition 10 :** *La poutre droite est une poutre dont la fibre moyenne est un segment de droite orientée.*

Ensuite, comme les poutres étudiées ont généralement une section rectangulaire, elles sont à plan moyen :

> **Définition 11 :** *La poutre à plan moyen est une poutre dont un plan passant par la fibre moyenne, est un plan de symétrie de la poutre.*

Les hypothèses sur le matériau et de la théorie des poutres sont présentées. Ces hypothèses permettent de simplifier l'approche de la RdM pour les poutres tout en restant le plus proche possible de la réalité. Il en résulte les définitions des contraintes et des déformations pour une section selon le type de chargement soumis à celle-ci. Enfin, une méthode pour faciliter la détermination des efforts de la RdM pour une poutre soumise à un chargement quelconque, est présentée.

Un repère (X, x, y, z) orthogonal est utilisé afin de visualiser les allures des grandeurs déterminées. Selon ce repère, la direction Xx est située parallèlement à la fibre moyenne d'une poutre droite (Définition 10), la direction Xz se situe selon la hauteur de la section étudiée tandis que la direction Xy est selon la largeur de la section considérée (Figure 189).

C.1.1. Hypothèses sur le matériau

Concernant la matière, il est nécessaire de poser quelques hypothèses.

- **Continuité**

Selon [101][§3] :

> **Hypothèse 2 :** *En restant dans le domaine macroscopique, Il est supposé que le matériau occupe totalement son volume*

Il est dit qu'il y a continuité de la matière.

- **Comportement élastique linéaire**

Un matériau est considéré comme élastique lorsqu'il retrouve sa forme après avoir été soumis à un cycle quelconque de charge/décharge et qu'il ne dissipe aucune énergie lors de ce cycle. La linéarité vient de la manière dont il revient à sa position initiale suite au cycle de charge/décharge [102][§1.4.3]. La figure 190 illustre les différents cas possibles :

(a) : Non élasticité du matériau car le matériau ne revient pas à sa position initial.
(b) : Non élasticité du matériau car le chemin de la décharge est différent de celui de la charge (dissipation de l'énergie).
(c) : Elasticité non linéaire du matériau car le chemin n'est pas une droite.
(d) : Elasticité linéaire du matériau

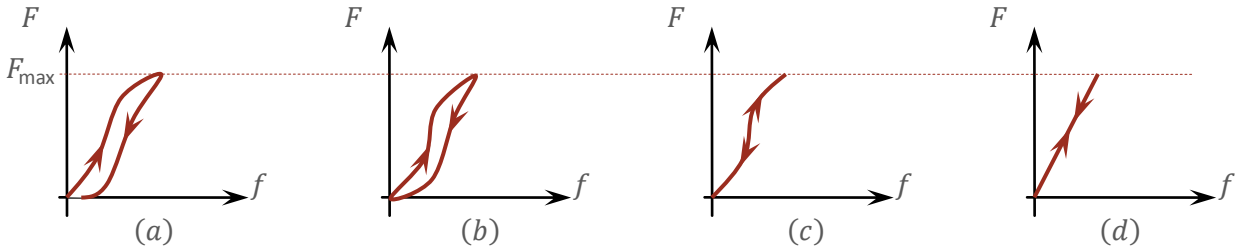


Figure 190 : *Cycles charge/décharge possibles* **[102]**

- **Matrice linéaire du comportement du matériau**

Suite à de nombreux essais, il est possible de mettre en évidence un comportement élastique linéaire durant la première phase de l'essai. Cette phase permet de relier la contrainte avec la déformation de manière linéaire. C'est la loi de HOOKE [101][§3].

> **Hypothèse 3 :** *Pour la majorité des matériaux, la dépendance directement proportionnelle entre les déformations et les sollicitations : la loi de HOOKE, reste en vigueur.*

Le matériau obéit donc à un comportement élastique linéaire jusqu'à une déformation et une contrainte appelée limite élastique. Les termes contrainte et déformation sont explicités ultérieurement à la section §C.1.3. Chaque matériau possède des comportements différents ou non, selon la direction de la sollicitation. Le niveau le plus général est l'anisotropie :

> **Définition 12. :** *L'anisotropie est la particularité d'un matériau à avoir des propriétés différentes selon la direction considérée.*

Le matériau anisotrope possède 21 coefficients caractérisant les directions de comportement. Le matériau bois, malgré son comportement anisotrope (§2.2.1.1) peut toutefois être représenté par un cas plus simple. Il se dégage quatre types d'anisotropie particuliers :

- l'orthotropie consiste à avoir trois directions de comportement différentes orthogonales. Le matériau possède trois plans de symétrie, ce comportement est caractérisé avec 9 constantes,
- l'orthotropie transverse est une simplification de la précédente avec une direction principale normale à un plan dont les comportements sont identiques. Il se caractérise avec 6 constantes,
- L'isotropie transverse est une simplification du cas précédent avec une relation liant la constante normale et les autres, il est caractérisé avec 5 constantes,

- l'isotropie est la particularité d'un matériau à avoir un comportement identique quelle que soit la direction considérée avec la relation suivante, il se caractérise avec 3 constantes.

Le bois est généralement représenté par un comportement orthotrope voir orthotrope transverse.

Les constantes caractérisant un matériau orthotrope sont trois modules d'élasticités (ou d'Young) : E_1, E_2 et E_3, trois modules de cisaillement (ou de Coulomb) : G_{12}, G_{13} et G_{23} et trois coefficients de Poisson : ν_{12}, ν_{13} et ν_{23}, les chiffres des indices représentent la direction considérée. Le double indice caractérise le plan constitué des deux directions indiquées.

La matrice reliant les déformations avec les contraintes, appelée matrice de HOOK : $\mathcal{M}_{\text{HOOK}}$, pour un matériau orthotrope s'exprime de la manière suivante [32] :

$$\mathcal{M}_{\text{HOOK}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{pmatrix} \quad \textbf{(323)}$$

Avec :

$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$, $\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$ et $\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$.

Pour une étude pseudo-plane, cette matrice peut se réduire à :

$$\mathcal{M}_{\text{HOOK}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad \textbf{(324)}$$

C.1.2. Hypothèses de la théorie des poutres

La théorie des poutres repose sur trois principales hypothèses : le principe de Saint Venant, l'hypothèse de Navier-Bernoulli et l'hypothèse des petits déplacements. Il vient ensuite des hypothèses simplificatrices tout en restant relativement proches de l'expérience.

- **Principe de Barré Saint Venant**

> **Hypothèse 4 :** *Si un corps est sollicité par un système de forces statiquement équivalentes, c'est-à-dire par des forces dont le vecteur et le moment principal sont égaux, et que d'autre part la zone d'application des charges soit peu étendue, par rapport aux dimensions du corps, les tensions dans les sections suffisamment éloignées de la zone d'application des forces dépendent peu de la manière dont la charge est appliquée* **[101]**[§25].

L'une des conséquences à ce principe est que les calculs de la RdM s'appliquent uniquement dans une zone suffisamment éloignée des appuis et du chargement : en général il suffit de se situer à une distance égale à la hauteur (Figure 191).

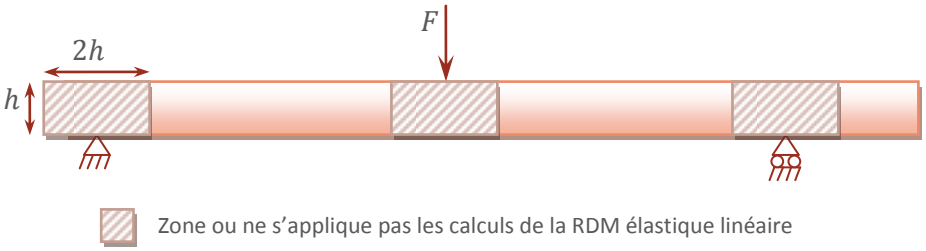


Figure 191 : *Limites du calcul de la RDM sur une poutre*

- **Hypothèse de Navier-Bernoulli**

> **Hypothèse 5 :** *Les sections normales à la fibre moyenne restent planes et normales à la fibre moyenne au cours du processus de déformation.*

Cette hypothèse est vraie pour une flexion qualifiée de pure : l'effort tranchant est nul. Cependant, dans la réalité, il est rare d'avoir des situations de flexion pure, mais plutôt une flexion simple : avec un effort tranchant non nul. Dans ce cas, l'hypothèse 5 n'est pas vérifiée car, dans le cas d'une flexion simple, les sections se gauchissent en forme de S très aplati. Ainsi une hypothèse plus générale peut être posée, appelée hypothèse de Navier-Bernoulli généralisée [100][§1.41] :

> **Hypothèse 6 :** *Deux sections droites infiniment voisines $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de la poutre deviennent, après déformation, deux sections $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}'_1$ infiniment voisines, en général gauches ; les sections $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}'_1$ sont superposables par déplacement.*

En fait, cette hypothèse revient à négliger les variations de l'effort tranchant dans l'étude de la déformation d'une poutre.

Selon [100][§1.5], pour améliorer les résultats de la théorie vis-à-vis de l'expérience, il faut aussi suivre trois autres hypothèses :

> **Hypothèse 7 :** *Une poutre est un corps dont une dimension (appelée longueur) est beaucoup plus grande que les deux autres (appelées transversales).*

Cela rejoint la définition de la poutre de [101][§3].

Le rapport entre les dimensions transversales et la longueur doit être compris entre 1/5 et 1/30. Si le rapport est plus petit que 1/30 alors il y aura certainement trop de déformation et il ne sera plus possible de suivre l'hypothèse 10 des petits déplacements.

> **Hypothèse 8 :** *Le rayon de courbure de la fibre moyenne doit être grand par rapport à la dimension transversale du plan moyen.*

Le rapport rayon de courbure de la fibre moyenne avec la dimension transversale du plan moyen doit être généralement supérieur à 5.

> **Hypothèse 9 :** *Lorsque la section de la poutre est variable, alors la variation doit être lente et surtout progressive.*

- **Hypothèse des petits déplacements**

En effet, cela permet de négliger la modification de la position des forces extérieures et des appuis. Ainsi, il est possible d'écrire les équations de la théorie statique sur un corps non déformé, déformable [101][§3].

> **Hypothèse 10 :** *Lors de l'application des forces extérieures, les déformations sont supposées petites par comparaison avec les dimensions du solide déformé*

- **Principe de superposition**

Selon les deux dernières hypothèses précitées, le principe de superposition peut être appliqué [103][§4.1].

> **Hypothèse 11 :** *En tout point d'une poutre, les effets élastiques (déplacements, déformations et contraintes) de toute combinaison linéaire d'actions sont combinaisons linéaires des effets élastiques élémentaires dus à chaque action considérée isolément.*

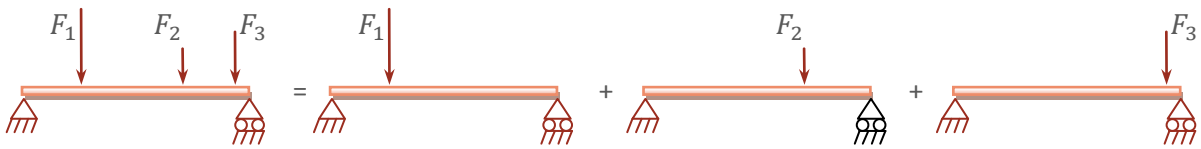


Figure 192 : *Principe de superposition*

La figure 192 illustre le principe de superposition pour trois forces ponctuelles. Il faut étudier les efforts et les déformations dus à chacune des forces puis en effectuer la somme.

- **Application des efforts extérieurs de manière quasi statique**

Afin de rester dans le domaine statique, les efforts extérieurs doivent être appliqués en quasi-statique [103][§4].

> **Hypothèse 12 :** *Les actions sont appliquées progressivement à la poutre et, une fois leurs valeurs finales atteintes, ne varient plus dans le temps.*

- **Poutre droite à plan moyen**

Pour encore plus simplifier l'étude de la poutre, soit l'hypothèse suivante (Figure 193) :

> **Hypothèse 13 :** *La poutre étudiée est considérée comme droite (Définition 10) et à plan moyen (Définition 11).*

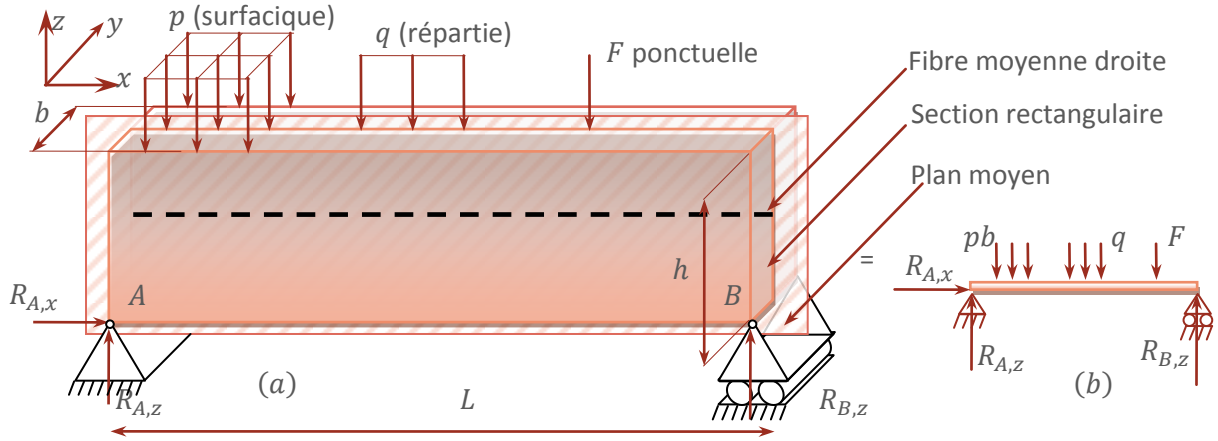


Figure 193 : *Poutre étudiée selon l'hypothèse 13 avec des forces extérieures, les appuis et leurs réactions*

Selon la figure 193(b), une telle poutre s'appelle poutre plane car elle est en flexion et les efforts sont appliqués dans le plan moyen.

C.1.3. Déformation et contrainte

La poutre est soumise à des efforts extérieurs et repose sur des appuis. Dans cette section, les forces extérieures sont répertoriées de manière non exhaustive (uniquement celles qui pourront être utilisées pour la suite). Ensuite, les appuis utilisés sont décrits pour aboutir aux calculs des réactions aux appuis.

C.1.3.1. Forces extérieures

Les forces peuvent être de trois types : forces surfaciques, forces linéiques et forces ponctuelles (Figure 193). Les forces surfaciques (p) qui sont appliquées sur une poutre, sont généralement ramenées dans le plan moyen de la poutre, elles sont donc converties en forces linéiques, aussi appelées « chargement réparti » (q) (ici $q = pb$). Les forces ponctuelles (F) sont aussi placées sur le plan moyen de la poutre [101][§13]. Ces forces engendrent des forces aux appuis puisque le système doit être en équilibre.

C.1.3.2. Force résultante

Les forces extérieures peuvent être regroupées en une force unique appelée force résultante ou résultante. La résultante est la somme des forces extérieures : $F_{\text{res}} = \sum F_{\text{ext},i}$. Pour le cas d'un chargement réparti q sur l'intervalle $[\![x_1, x_2]\!]$, la somme discrète est remplacée par la somme continue, il vient :

$$F_{\text{res}} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{0}^{q(x)} dzdx \qquad (325)$$

Par analogie avec le §B.2, la résultante représente l'aire de la surface engendrée par la forme du chargement q et de l'axe de la fibre neutre. Le point d'application se détermine comme l'abscisse du barycentre de cette surface. Selon le §B.3, il en découle :

$$x_{F_{\text{res}}} = \frac{1}{F_{\text{res}}} \int_{x_1}^{x_2} \int_{0}^{q(x)} x dz dx \qquad (326)$$

C.1.3.3. Appuis

Les appuis sont, dans le cas de l'étude, pour un plan (x, z), de trois types [101][§15] :

- articulé mobile : la rotation autour de y ainsi que le déplacement selon x sont libres, la direction de l'appui est le lieu de la force de réaction R_z, donc $R_x = 0$ et $M_y = 0$;
- articulé immobile : seule la rotation autour de y est libre, les deux directions x et z sont le siège des réactions : R_x et R_z, ainsi $M_y = 0$;
- encastré : trois réactions à l'appui, les deux forces de réaction R_x, R_z et le moment de réaction M_y.

Les appuis de la figure 193 sont : au point A un appui articulé immobile et au point B un appui mobile.

C.1.3.4. Détermination des réactions aux appuis

En connaissant les forces extérieures et le type d'appuis, pour des cas relativement simples, il est possible de calculer les réactions aux appuis. Pour le cas d'une poutre plane sur deux appuis, en nommant l'appui articulé immobile A et l'appui articulé mobile B, il faut déterminer les trois réactions aux appuis, à savoir : ($R_{A,x}$, $R_{A,z}$ et $R_{B,z}$). Pour cela il suffit de suivre la méthode suivante [101][§16] :

1. Calcul de la somme des projections selon x de toutes les forces, cette somme doit être nulle car la poutre est en équilibre selon cette direction :

$$\sum F_{\to x} = 0 \qquad (327)$$

D'où la détermination de la réaction $R_{A,x}$.

2. Calcul de la somme des moments créés par toutes les forces et la réaction $R_{B,z}$ au point A, elle doit être nulle aussi :

$$\sum M_A = 0 \qquad (328)$$

D'où la détermination de la réaction $R_{B,z}$.

3. Pour la détermination de la réaction selon z au point A, il suffit de faire la même chose que ci-dessus mais au point B où le moment est bien entendu nul.

$$\sum M_B = 0 \qquad (329)$$

D'où la détermination de la réaction $R_{A,z}$

4. Pour vérifier, il faut calculer la somme des projections selon z, de toutes les forces. De même, comme la poutre est en équilibre, alors cette somme doit être nulle :

$$\sum F_{\to z} = 0 \qquad (330)$$

C.1.3.5. Les forces intérieures

A l'échelle atomique, les constituants moléculaires du solide tentent de maintenir celui-ci dans son ensemble en s'opposant à tout ce qui pourrait le modifier et donc le déformer. Ces forces intérieures aussi appelées forces d'interactions qui sont présentes dans le solide alors qu'il n'est pas sollicité, ne sont pas prises en compte. Seules celles qui apparaissent une fois le corps chargé, le sont [101][§14].

Pour déterminer les efforts intérieurs, il faut utiliser la méthode des sections :

> **Définition 13 :** *La méthode consiste à couper (ou sectionner) de manière fictive le solide sollicité en deux parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Pour que chacune de ces parties puissent se trouver en équilibre sous l'action de leurs charges extérieures, il faut remplacer l'action exercée par la*

partie manquante, par un système de forces intérieures qui agissent dans la section. Ces forces sont les forces d'interaction entre les parties $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Les forces intérieures qui agissent dans la section du côté de la partie $\mathcal{A}$, seront en accord avec la troisième loi de NEWTON (principe de l'action-réaction), égale en valeur et de direction opposée aux forces intérieures agissant dans la section de la partie $\mathcal{B}$

Ces forces intérieures sont ensuite considérées, pour la partie étudiée comme des efforts extérieurs s'appliquant dans la section de cette partie. Pour le cas d'une poutre, le plus simple est de prendre un plan normal à la fibre moyenne. Pour une poutre plane telle qu'illustrée dans la figure 193, les efforts qui apparaissent lors de cette coupure sont au nombre de deux : selon x (N) et selon z (T_z) ; les moments, quant à eux, ne sont représentés que par celui de la direction y (M_y) (Figure 194).

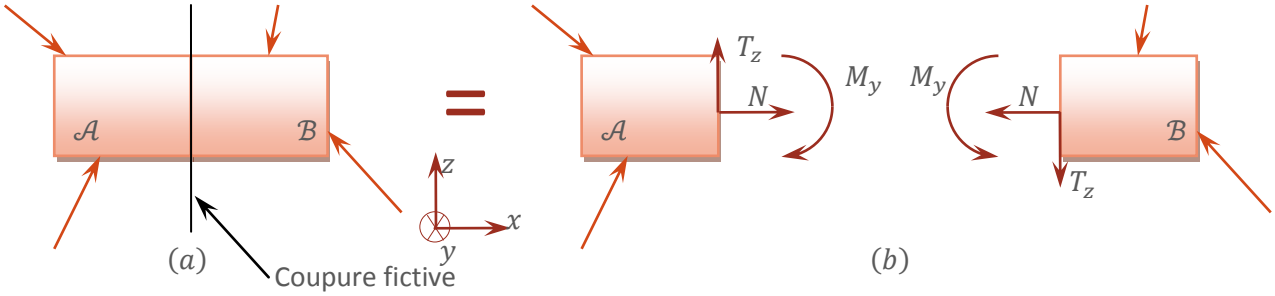


Figure 194 : *Méthode des sections*

L'effort (N) se nomme l'effort normal, il correspond à la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant dans la section sur sa normale (ou l'axe de la barre ou l'axe x).

L'effort (T_z) s'intitule l'effort tranchant, il correspond à la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant dans la section selon l'axe z.

Le moment M_y désigne le moment fléchissant (qui réalise une flexion de la section $\mathcal{S}$). Il correspond à la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie centraux principaux en y.

Toutefois, si les sollicitations extérieures sont dans le plan (x, y), alors l'effort normal est (N), l'effort tranchant est (T_y) et le moment fléchissant est (M_z). Il ne faut pas oublier qu'il existe un troisième moment : le moment de torsion (M_t) (moment autour de x). Celui-ci est négligé par la suite.

C.1.3.6. Prisme élémentaire

Soit un élément de la poutre plane de longueur infinitésimale : appelée dx. La section à x est supposée être la même en $x + dx$. Cet élément se nomme prisme élémentaire ou élément de poutre [100][§1.1]. Dans la suite, ce prisme sera utilisé afin de mettre en place les dépendances entres les efforts internes dans la section considérée.

C.1.3.7. Dépendances différentielles

Soit une poutre soumise à un chargement réparti q. En étudiant ce chargement pour un élément de poutre de longueur dx, il est possible de calculer l'équilibre de cet élément, et donc, de déterminer une relation entre l'effort tranchant et le chargement q. Il vient selon la figure 195(b) :

$$-T_z - q\,dx + (T_z + dT_z) = 0$$

Donc il apparait la relation suivante après simplification :

$$\frac{dT_z}{dx} = q \qquad (331)$$

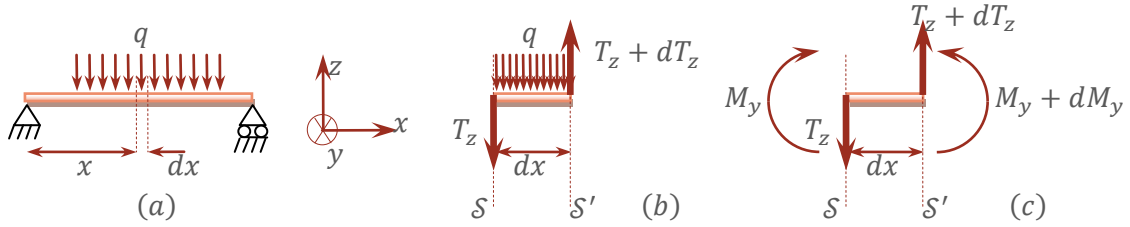


Figure 195 : *Equilibre d'un élément de poutre de longueur* $\boldsymbol{dx}$

En calculant le moment au centre de gravité de la section $\mathcal{S}$, il vient :

$$-M_y + (T_z + dT_z)dx + \left(M_y + dM_y\right) = 0$$

En négligeant les infiniment petits du second ordre ($dT_z dx$), il apparait :

$$\frac{dM_y}{dx} = -T_z \qquad \textbf{(332)}$$

Si l'équation (332) est dérivée par rapport à x, alors :

$$\frac{d^2M_y}{dx^2} = -q \qquad \textbf{(333)}$$

Les relations (331), (332) et (333) se nomment aussi comme les dépendances différentielles en flexion [101][§18]. Il en résulte selon ces trois équations que si l'effort tranchant est négatif, alors le moment fléchissant croît et inversement. De plus, si l'effort tranchant est constant, alors le moment fléchissant croît linéairement ; si l'effort tranchant est une droite, alors le moment suit une parabole, etc.

C.1.3.8. Contrainte dans la section

Soit un petit élément infinitésimal de section $\mathcal{S}$, d'aire $d\mathcal{S}$, situé aux coordonnées (y, z) de la fibre moyenne. Étant suffisamment petit pour considérer que les efforts internes ont une distribution uniforme, et que la résultante des efforts internes est placée au centre de gravité de $\mathcal{S}$, alors, le moment créé par ces efforts appliqués aux sections infinitésimales est nul. En ramenant les forces élémentaires dN et dT_z en efforts internes par unité de surface (Figure 196), il apparait les contraintes au point de coordonnées (y, z) de la fibre moyenne [101][§23].

Définition 14 : *Soit $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte normale et $\boldsymbol{\tau_y}$, $\boldsymbol{\tau_z}$ les contraintes tangentielles ou de cisaillement. Il vient :*

$$\sigma = \frac{dN}{d\mathcal{S}}, \qquad \tau_y = -\frac{dT_y}{d\mathcal{S}}, \qquad \tau_z = -\frac{dT_z}{d\mathcal{S}} \qquad \textbf{(334)}$$

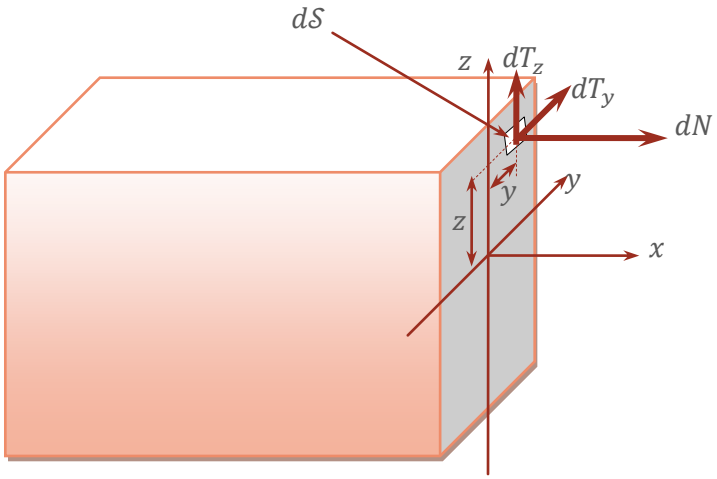


Figure 196 : *Définition des contraintes*

Il est donc possible d'établir les relations génériques, appelées principe d'équivalence entre les contraintes normales et tangentielles d'une part et des efforts internes d'autre part, donc d'après (334) il vient :

$$N = \int_{\mathcal{S}} \sigma d\mathcal{S} \qquad \textbf{(335)}$$

$$T_y = -\int_{\mathcal{S}} \tau_y d\mathcal{S}, \qquad T_z = -\int_{\mathcal{S}} \tau_z d\mathcal{S} \qquad \textbf{(336)}$$

$$M_y = \int_{\mathcal{S}} z\sigma d\mathcal{S} \qquad \textbf{(337)}$$

C.1.3.9. Déformation et contrainte dues à l'effort normal

L'application de charge axiale sur une poutre, engendre un déplacement des sections de la poutre. Géométriquement parlant, ces déplacements, en se fondant sur l'hypothèse de NAVIER-BERNOUILLI (Hypothèse 5), restent plans pendant le chargement en se déplaçant le long de la fibre moyenne (Figure 197). Donc, les tronçons de la poutre de longueur ℓ, s'allongent (ou se raccourcissent) d'une longueur $\Delta\ell$ avec leur allongement longitudinal relatif ε constant [101][§25] :

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} \qquad (338)$$

Ensuite, en utilisant la loi de HOOKE (Hypothèse 3), la relation linéaire entre la déformation longitudinale relative et la contrainte est dictée par la relation :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad ou \quad \sigma = E\varepsilon \qquad (339)$$

Où E représente le module d'élasticité de la poutre (ou module d'Young). E est une constante physique du matériau.

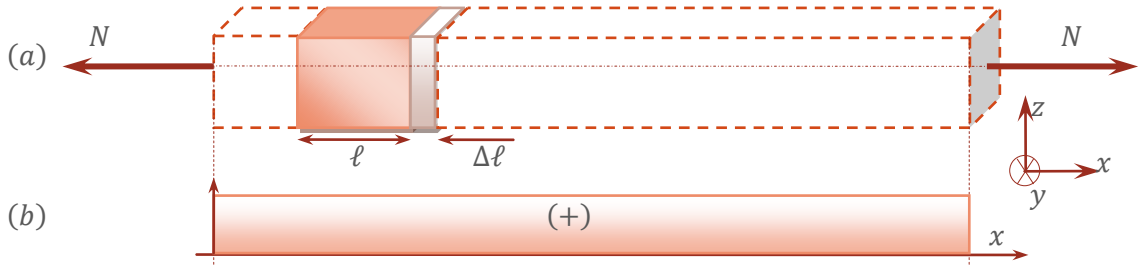


Figure 197 : *(a) Poutre sollicitée par un effort normal, (b) diagramme de l'effort normal*

Puisque E et ε sont constants, alors σ l'est aussi, ainsi la relation (335) devient :

$$N = \int_{\mathcal{S}} \sigma d\mathcal{S} = \sigma \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{N}{\mathcal{S}} \qquad (340)$$

En utilisant (339), il vient :

$$\varepsilon = \frac{N}{E\mathcal{S}} \qquad (341)$$

En prenant la convention suivante pour un effort normal de traction, l'allongement longitudinal est positif, donc la contrainte est positive, pour un effort normal de compression, l'allongement longitudinal est négatif (il s'agit d'un raccourcissement) alors la contrainte est négative. Dans la suite, cette convention est utilisée : effort de traction positif et effort de compression négatif.

Il existe une relation liant la déformation longitudinale calculée précédemment et la déformation transversale ε_t :

$$\varepsilon_t = -\upsilon\varepsilon \qquad (342)$$

Avec υ appelé coefficient de Poisson, c'est une constante reliant ε_t et ε.

C.1.3.10. Déformation et contrainte dues au moment fléchissant

Soit un élément de la poutre de longueur dx en flexion pure, c'est-à-dire avec un effort tranchant nul. D'après la relation (332), le moment est constant [101][§50].

Selon la figure 202, il est possible de calculer l'allongement de la ligne $\widehat{a_\iota b_\iota}$. Comme l'angle $d\theta$ est infiniment petit, la courbe $\widehat{a_\iota b_\iota}$ peut se déterminer avec la formule $(R+z)d\theta$. La longueur initiale étant $dx = Rd\theta$, soit l'allongement suivant :

$$\varepsilon = \frac{(R+z)d\theta - dx}{dx} = \frac{(R+z)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{z}{R} \qquad (343)$$

En utilisant cette équation avec la loi de HOOKE (Hypothèse 3), il vient la relation de la contrainte en fonction de la distance par rapport à la fibre moyenne et du rayon de courbure :

$$\sigma = E\frac{z}{R} \qquad (344)$$

Le terme $1/R$ qui représente l'inverse du rayon de courbure, se nomme la courbure (χ).

En remplaçant (344) dans l'équation (337), il apparait la relation entre le moment fléchissant et la courbure et au vue de (319) :

$$M_y = \int_S z\sigma dS = \int_S zE\frac{z}{R}dS = \frac{E}{R}\int_S z^2 dS = \frac{EI_y}{R}$$

$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{M_y}{EI_y} \qquad (345)$$

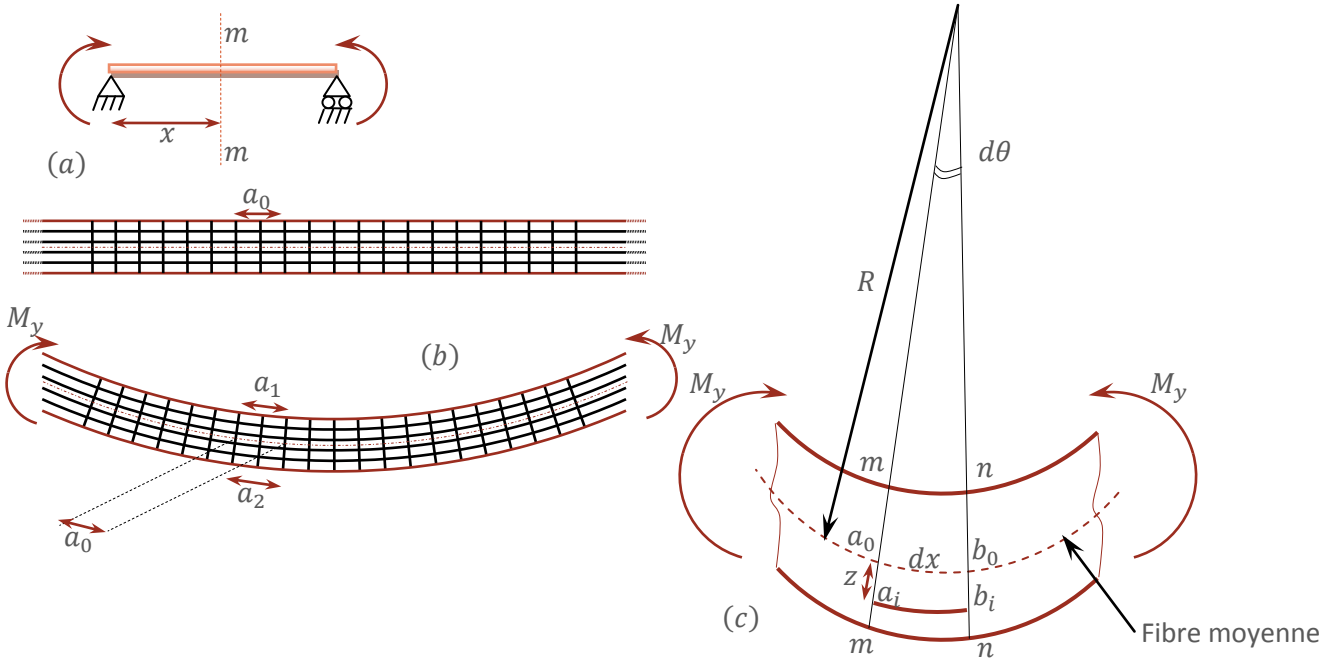


Figure 198 : *Poutre en flexion pure*

Maintenant, en utilisant (345) dans (344), il vient la formule de Navier :

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} \qquad (346)$$

Cette relation montre une évolution linéaire de la contrainte dans la section avec un minimum pour $z = 0$ et un maximum pour $z_{\max}$ (pour une section rectangulaire, $z_{\max} = h/2$).

Pour $z = z_{\max}$, la formule de NAVIER peut aussi s'écrire avec le moment résistant en flexion selon la relation (322) : $W_y = I_y/z_{\max}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} \qquad (347)$$

Cependant, dans notre étude, les poutres ne sont pas en flexion pure mais en flexion simple, avec un effort tranchant non nul. Les formules établies précédemment sont toutefois valables pour ce type de flexion, puisque au vu de l'hypothèse 10, la précision des résultats est suffisante pour accepter cette approximation.

C.1.3.11. Déformation et contrainte dues à l'effort tranchant

Pour une poutre sur deux appuis sollicitée par un chargement q, elle est en flexion simple [101][§51]. Un élément de la poutre de longueur dx est soumis à l'effort tranchant T_z et au moment fléchissant M_y. Pour une altitude z de la section de la poutre, le moment fléchissant crée deux efforts normaux qui s'appliquent sur l'élément $(m, n, m_1 n_1)$ (Figure 199).

D'après (334) et (335), l'équilibre de cet élément est le suivant :

$$N_1 + T_z - N_2 = 0 \qquad (348)$$

Avec :

$$T_z = \tau_z dS = \tau_z\, b(z)\, dx$$

$$N_1 = \int_{\mathcal{S}} \sigma_1 d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \frac{M_y \eta}{I_y} d\mathcal{S} = \frac{M_y}{I_y} \int_{\mathcal{S}} \eta d\mathcal{S} = \frac{M_y}{I_y} m_y(z)$$

$$N_2 = \int_{\mathcal{S}} \sigma_2 d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \frac{(M_y + dM_y)\eta}{I_y} d\mathcal{S} = \frac{M_y + dM_y}{I_y} \int_{\mathcal{S}} \eta d\mathcal{S} = \frac{M_y + dM_y}{I_y} m_y(z)$$

Ainsi (348) devient grâce à (332) :

$$\frac{M_y}{I_y} m_y(z) + \tau_z \, b(z) dx - \frac{M_y + dM_y}{I_y} m_y(z) = 0$$

$$\tau_z = \frac{dM_y}{dx} \frac{m_y(z)}{b(z) I_y} = T_z \frac{m_y(z)}{b(z) I_y} \qquad \textbf{(349)}$$

Cette formule se nomme la formule de JOURAVSKI.

Une autre expression bien utile est la relation entre la contrainte de cisaillement et la contrainte normale. Selon la figure 199, en posant $N_1 = N$ et $N_2 = N + dN$, il vient en utilisant l'équation (348) et après simplification, la relation suivante :

$$\tau_z = \frac{1}{b(z)} \int \frac{d\sigma}{dx} dS \qquad \textbf{(350)}$$

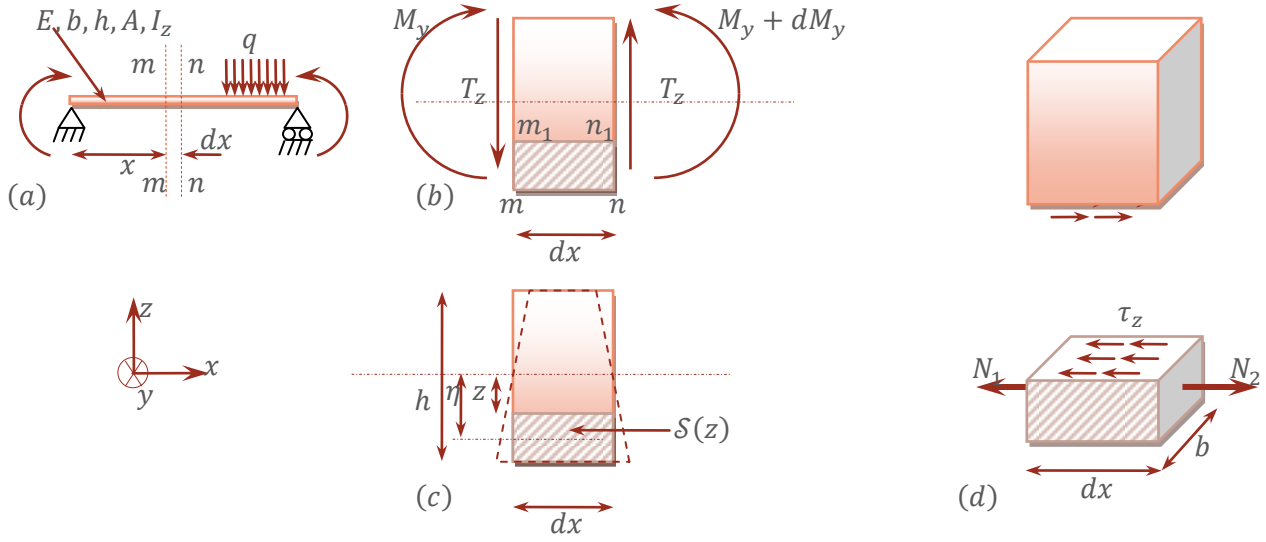


Figure 199 : *Poutre en flexion simple*

Pour une section $\mathcal{S}$ rectangulaire, la largeur $b(z)$ est constante pour tout z, alors le moment statique $m_y(z)$ vaut :

$$m_y(z) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \qquad \textbf{(351)}$$

Donc la contrainte tangentielle, varie selon une parabole, avec un minimum pour $z = h/2$ et un maximum pour $z = 0$. Soit $\tau_{z,\max}$ la contrainte tangentielle maximale :

$$\tau_{z,\max} = \frac{T_z m_y(z)}{b(z) I_y} = T_z \frac{\frac{bh^2}{8}}{b\frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{bh} = \frac{3}{2}\frac{T_z}{\mathcal{S}} \qquad \textbf{(352)}$$

En calculant la moyenne selon la formule (349), il vient :

$$\tau_{z,\text{moy}} = \frac{T_z}{\mathcal{S}} \qquad \textbf{(353)}$$

Donc il apparait que :

$$\tau_{z,\max} = \frac{3}{2}\tau_{z,\text{moy}} \qquad (354)$$

Selon la loi de HOOKE (Hypothèse 3) pour le cisaillement, la déformation peut être obtenue :

$$\gamma = \frac{\tau_z}{G} = \frac{T}{G\mathcal{S}'} \qquad (355)$$

Avec G module de cisaillement (ou module de Coulomb, ou encore module de glissement), et $\mathcal{S}'$ section réduite :

$$\mathcal{S}' = \frac{I_y^2}{\int_{\mathcal{S}} \frac{m_y^2(z)}{b} d\mathcal{S}} \qquad (356)$$

En pratique, en considérant que $\mathcal{S}' = k\mathcal{S}$ où k est proche de 1, pour des sections massives, la section réduite n'est pas toujours calculée et en première approximation, la section $\mathcal{S}$ est utilisée à sa place.

C.1.3.12. Glissement

Soit une poutre en flexion simple, soit un élément de cette poutre de longueur dx en équilibre (Figure 200).

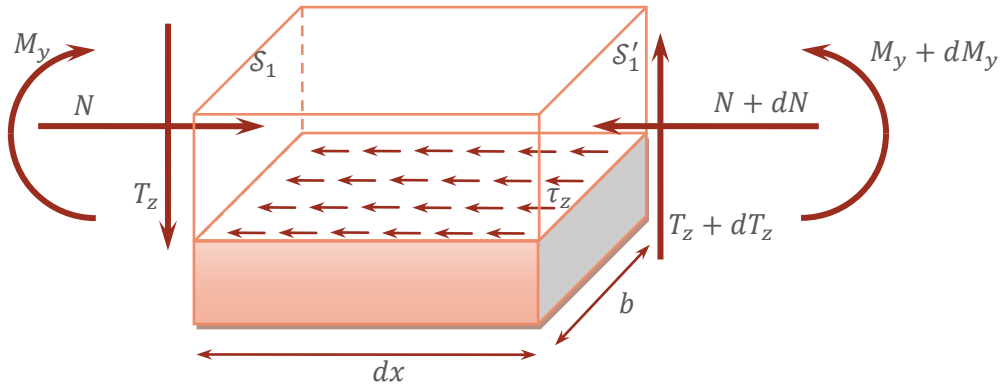


Figure 200 : *Effort de glissement*

Sur la section $\mathcal{S}_1$, l'effort normal dû au moment fléchissant qui s'applique sur $\mathcal{S}_1$ vaut :

$$N = \int_{\mathcal{S}_1} \sigma d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_1} \frac{M_y z}{I_y} d\mathcal{S} = \frac{M_y}{I_y} \int_{\mathcal{S}_1} z d\mathcal{S} = \frac{M_y}{I_y} m_{y,\mathcal{S}_1}$$

Sur la section $\mathcal{S}_1'$, il vient :

$$N + dN = \int_{\mathcal{S}_1'} \sigma d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}_1'} \frac{(M_y + dM_y)z}{I_y} d\mathcal{S} = \frac{(M_y + dM_y)}{I_y} \int_{\mathcal{S}_1'} z d\mathcal{S} = \frac{(M_y + dM_y)}{I_y} m_{y,\mathcal{S}_1'} = \frac{(M_y + dM_y)}{I_y} m_{y,\mathcal{S}_1}$$

La résultante :

$$dN = \frac{dM_y}{I_y} m_{y,\mathcal{S}_1}, \qquad (357)$$

tend à faire glisser le tronçon $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_1'$ par rapport à la partie inférieure. Cette quantité est équilibrée par la contrainte de cisaillement τ_z qui se déploie à l'interface du tronçon $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_1'$ et du reste de l'élément de poutre.

La quantité $\tau_z b$ est le flux de glissement (notée t_w), son unité est celle d'une force par unité de longueur.

Ainsi $t_w dx = dN$: la force rasante dépend de la résultante. Donc, le flux de cisaillement s'exprime comme la variation de l'effort normal du tronçon $\mathcal{S}_1\mathcal{S}_1'$ sur le reste de l'élément, il s'écrit :

$$t_w = \frac{dN}{dx} = \frac{dM_y}{dx} \frac{m_{y,\mathcal{S}_1}}{I_y} = T_z \frac{m_{y,\mathcal{S}_1}}{I_y} \qquad (358)$$

Il en résulte que le flux de cisaillement maximal se trouve au niveau de la fibre moyenne (analogie avec les relations (351)et (352)).

Une relation entre ce flux de cisaillement t_w et la contrainte de cisaillement τ_z peut être formulée :

$$t_w = \tau_z \, b \qquad (359)$$

C.1.3.13. Flèche, déplacement de la fibre moyenne

Suite aux diverses sollicitations, la poutre fléchit et donc se déforme. Ce déplacement, noté w, désigne la ligne élastique (ou déformée) de la poutre. La rotation, notée φ est l'angle que fait la tangente de la ligne élastique avec la fibre moyenne initiale. La déformée peut être aisément établie en fonction des sollicitations puisque que la courbure relie la déformée w avec la relation, bien connue, suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (360)$$

Et comme la courbure est reliée au moment fléchissant (345) :

$$\frac{M_y}{EI_y} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \qquad (361)$$

Le terme $\frac{dw}{dx}$ désigne donc la rotation, or par hypothèse (Hypothèse 10), elle est nécessairement très petite, donc $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \ll 1$.

Ainsi en première approximation :

$$\frac{1}{R} = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{d^2w}{dx^2} \qquad (362)$$

La résolution de cette équation différentielle permet de trouver la rotation φ et la déformée w.

Après avoir intégré une fois, il vient la rotation :

$$\varphi(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \int \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + C[1] \qquad (363)$$

Une seconde intégration fait apparaitre la déformée w :

$$w(x) = \iint \frac{M_y(x)}{EI_y} dx + C[1]x + C[2] \qquad (364)$$

Où $C[1]$ et $C[2]$ sont des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites.

Comme le moment est directement en relation avec le chargement, la déformée peut aussi être exprimée en fonction du chargement, en dérivant (362) deux fois et en remplaçant M_y avec la relation (333), il vient :

$$M_y(x) = \frac{d^2w(x)}{dx^2} EI_y(x) \Longrightarrow \frac{d^2M_y(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^2w(x)}{dx^2} EI_y(x)\right] = -q(x) \qquad (365)$$

Il existe x_f où la déformée est extrémale $\left(\varphi(x_f) = 0\right)$. Cette valeur est appelée généralement la flèche et se note f :

$$w(x_f) = w_{\max} = f$$

C.1.4. Méthode des paramètres initiaux

Pour des études relativement complexes, poutre sur deux appuis avec plusieurs tronçons chargés différemment, il est assez laborieux de résoudre le problème avec la méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique : n tronçons représentent $2n$ constantes avec les conditions aux appuis, il faut donc $2n$ équations supplémentaires pour pouvoir résoudre en continuité le problème [101][§55]. Il est donc fortement recommandé d'utiliser la méthode des paramètres initiaux qui diminue considérablement le nombre d'inconnues.

C.1.4.1. Méthodes

Pour appliquer cette méthode, il faut suivre cette procédure (Figure 201) :

1. Choisir une origine des coordonnées pour la poutre : cette origine doit être l'appui le plus à gauche, ici le point A.
2. Exprimer le moment fléchissant $M(x)$: il est obtenu en déterminant les moments créés par les forces situées à gauche du tronçon considéré à une distance x de l'origine des coordonnées.
3. Si un moment extérieur concentré M_i appliqué à la distance a de A, il est multiplié par un facteur $(z-a)^0 = 1$
4. Si la charge répartie est discontinue (tronçon (IV) de la figure 201), elle est prolongée jusqu'au bout de la poutre, afin de compenser ce surplus, il faut introduire une charge de même type compensatrice de sens inverse (Les charges extrapolées et les charges compensatrices sont habituellement représentées en pointillés).
5. Pour tous les tronçons, l'intégration est faite sans ouvrir les parenthèses.

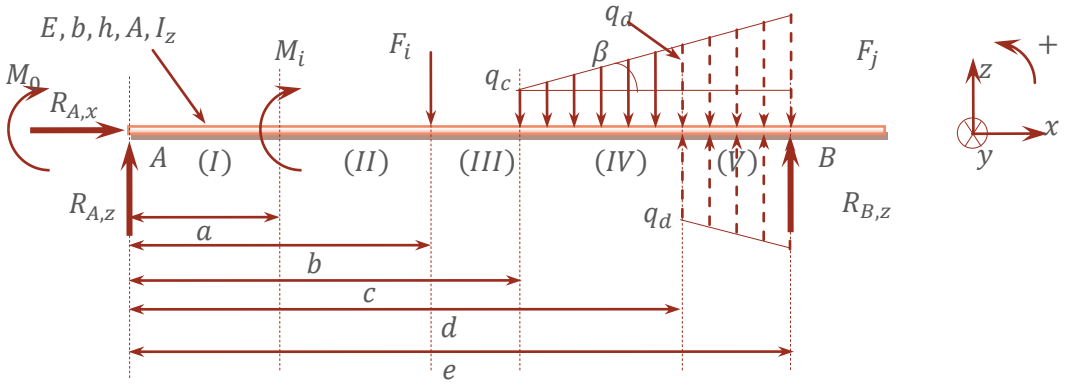


Figure 201 : *Méthode des paramètres initiaux*

Le moment fléchissant s'écrit de la manière suivante pour le tronçon (IV) :

$$M_y(x) = M_0 + R_{A,z}x + M_i(x-a)^0 - F_i(x-b)^1 - q_c\frac{(x-c)^2}{2} - k\frac{(x-c)^3}{6} \qquad (366)$$

Avec :

$$k = Tan(\beta) = \frac{q_d - q_c}{d-c}$$

Selon la relation (332), l'effort tranchant peut se calculer d'une manière similaire. Ensuite il suffit d'utiliser l'équation (362) pour avoir la flèche. Seuls deux constantes sont à déterminer, ces constantes sont les paramètres initiaux :

$C[1] = \varphi_0$ et $C[2] = w_0$.

Soit l'équation universelle de la ligne élastique :

$$w_z(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EI_y}\left[M_0\frac{x^2}{2!} + R_{A,z}\frac{x^3}{3!} + \sum_i M_i\frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_i F_i\frac{(x-b_i)^3}{3!} + \sum_i q_{c,i}\frac{(x-c_i)^4}{4!} + \sum_i k_i\frac{(x-c_i)^5}{5!} - \sum_i q_{d,i}\frac{(x-d_i)^4}{4!} - \sum_i k_i\frac{(x-d_i)^5}{5!}\right] \qquad (367)$$

Avec :

$$k_i = Tan(\beta_i) = \frac{q_{d,i} - q_{c,i}}{d_i - c_i}$$

La rotation peut être exprimée de la même manière :

$$\varphi_z(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI_y}\left[M_0\frac{x}{1!} + R_{A,z}\frac{x^2}{2!} + \sum_i M_i\frac{(x-a_i)^1}{1!} + \sum_i F_i\frac{(x-b_i)^2}{2!} + \sum_i q_{c,i}\frac{(x-c_i)^3}{3!} + \sum_i k_i\frac{(x-c_i)^4}{4!} - \sum_i q_{d,i}\frac{(x-d_i)^3}{3!} - \sum_i k_i\frac{(x-d_i)^4}{4!}\right] \qquad (368)$$

C.1.4.2. Exemple

Pour illustrer cette méthode, la détermination de l'effort tranchant, du moment fléchissant et de la flèche pour une poutre sur deux appuis, soumise à un chargement réparti uniforme sur un tronçon est présentée.

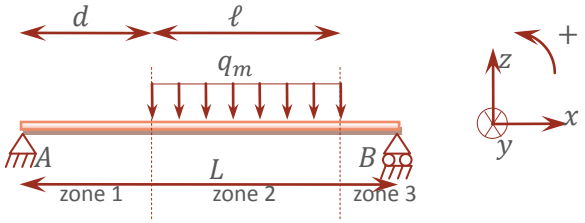


Figure 202 : *Poutre sur deux appuis chargée uniformément sur un tronçon*

Les trois zones ont pour intervalle :

Zone 1 $[0, d]$

Zone 2 $[d, d+\ell]$

Zone 3 $[d+\ell, L]$

Donc d'après ces délimitations, il vient tout naturellement la relation suivante à respecter :

$$L \geq d + \ell \tag{369}$$

- **Détermination des réactions aux appuis.**

Selon les formules (327) et (328) il vient :

$$\begin{cases} R_A + R_B = q_m \ell \\ -q_m \ell \left(d + \dfrac{\ell}{2} \right) + R_B L = 0 \end{cases}$$

Après résolution, soient les réactions aux appuis suivantes :

$$\begin{aligned} R_{A,z} &= \frac{q_m \ell (2L - 2d - \ell)}{2L} \\ R_{B,z} &= \frac{q_m \ell (2\mathrm{d} + \ell)}{2L} \end{aligned} \tag{370}$$

- **Détermination de l'effort tranchant**

Selon la relation (331) et en s'inspirant de la formule (366) il vient :

Zone 1 $T_{z,1}(x) = -R_{A,z}$

Zone 2 $T_{z,2}(x) = T_{z,1}(x) + q_m(x - d)$

Zone 3 $T_{z,3}(x) = T_{z,2}(x) - q_m\big(x - (d + \ell)\big)$

Il est possible de regrouper ces trois zones en l'écrivant de la manière suivante :

$$T_z(x) = \Big|_0 - R_{A,z}\Big|_d + q_m(x - d)\Big|_{d+\ell} - q_m\big(x - (d + \ell)\big)\Big|_L \tag{371}$$

Il faut comprendre dans cette écriture que tant que l'abscisse ne dépasse pas la valeur maximale de l'intervalle actuel, les termes à droite ne sont pas pris en compte dans le calcul, seuls les termes à gauche sont ajoutés les uns aux autres.

- **Détermination du moment fléchissant**

En utilisant la relation (366), il vient le calcul du moment fléchissant :

Zone 1 $M_{y,1}(x) = M_0 + R_{A,z}x$

Zone 2 $M_{y,2}(x) = M_{y,1}(x) - q_m \dfrac{(x - d)^2}{2!}$

Zone 3 $M_{y,3}(x) = M_{y,2}(x) + q_m \dfrac{\big(x - (d + \ell)\big)^2}{2!}$

Soit en regroupant ces trois zones :

$$M_y(x) = \left| M_0 + R_{A,z}x \right|_0 \left| - q_m \frac{(x-d)^2}{2!} \right|_d \left| + q_m \frac{\left(x-(d+\ell)\right)^2}{2!} \right|_{d+\ell}^{L} \quad (372)$$

Comme au point A, l'appui est un appui articulé (appui immobile selon §C.1.3), la constante $M_0 = 0$.

- **Détermination de la rotation des sections**

Selon les relations (363) et (368), la rotation des sections vaut :

Zone 1 $$EI_y\varphi_{z,1}(x) = EI_y\varphi_0 + M_0x + R_{A,z}\frac{x^2}{2!}$$

Zone 2 $$EI_y\varphi_{z,2}(x) = EI_y\varphi_{z,1}(x) - q_m\frac{(x-d)^3}{3!}$$

Zone 3 $$EI_y\varphi_{z,3}(x) = EI_y\varphi_{z,2}(x) + q_m\frac{\left(x-(d+\ell)\right)^3}{3!}$$

Soit en regroupant les trois zones :

$$EI_y\varphi_z(x) = \left| EI_y\varphi_0 + M_0x + R_{A,z}\frac{x^2}{2!} \right|_0 \left| - q_m\frac{(x-d)^3}{3!} \right|_d \left| + q_m\frac{\left(x-(d+\ell)\right)^3}{3!} \right|_{d+\ell}^{L} \quad (373)$$

- **Détermination de la déformée de la poutre**

Avec les relations (364) et (367), la déformée vaut :

Zone 1 $$EI_yw_{z,1}(x) = EI_yw_0 + EI_y\varphi_0x + M_0\frac{x^2}{2!} + R_{A,z}\frac{x^3}{3!}$$

Zone 2 $$EI_yw_{z,2}(x) = EI_yw_{z,1}(x) - q_m\frac{(x-d)^4}{4!}$$

Zone 3 $$EI_yw_{z,3}(x) = EI_yw_{z,2}(x) + q_m\frac{\left(x-(d+\ell)\right)^4}{4!}$$

Soit en regroupant les trois zones :

$$EI_yw_z(x) = \left| EI_yw_0 + EI_y\varphi_0x + M_0\frac{x^2}{2!} + R_{A,z}\frac{x^3}{3!} \right|_0 \left| - q_m\frac{(x-d)^4}{4!} \right|_d \left| + q_m\frac{\left(x-(d+\ell)\right)^4}{4!} \right|_{d+\ell}^{L} \quad (374)$$

Par hypothèse, les déplacements selon z des appuis étant nuls, les constantes φ_0 et w_0 peuvent être précisées.

Au point A, dans la zone 1 pour $x = 0$, il vient $w_0 = 0$.

Au point B, dans la zone 3 pour $x = L$, il apparait l'équation suivante à résoudre :

$$EI_y\varphi_0L + R_{A,z}\frac{L^3}{3!} - q_m\frac{(L-d)^4}{4!} + q_m\frac{\left(L-(d+\ell)\right)^4}{4!} = 0$$

En simplifiant et en regroupant, il en résulte :

$$EI_y\varphi_0 = -R_{A,z}\frac{L^2}{3!} + \frac{q_m}{4!\,\mathrm{L}}\left((L-d)^4 - \left(L-(d+\ell)\right)^4\right) \quad (375)$$

En remplaçant $R_{A,z}$ par son expression (370), il en découle :

$$EI_y\varphi_0 = \frac{q_m\ell}{24L}(2L-2d-\ell)\left(\ell^2 - 2d(2L-d) - 2\ell(L-d)\right)$$

Il est intéressant de connaitre le signe de ce coefficient ainsi que ceux des appuis. Selon la relation (369), le terme $(2L-2d-\ell)>0$ donc il convient d'étudier le second terme entre parenthèse $\left(\ell^2-2d(2L-d)-2\ell(L-d)\right)$. D'après la même relation (369), $2d(2L-d)+2\ell(L-d)\geq 2d(L+\ell)+2\ell^2>\ell^2$, ainsi $\left(\ell^2-2d(2L-d)-2\ell(L-d)\right)<0$. De plus, les relations (370) indiquent que les réactions aux appuis dépendent directement du signe du chargement q_m. Il apparait deux possibilités :

$$\begin{cases} EI_y\varphi_0<0\ et\ R_{A,z}>0\ pour\ \ q_m>0 \\ EI_y\varphi_0>0\ et\ R_{A,z}<0\ pour\ \ q_m<0 \end{cases} \qquad (376)$$

Pour les valeurs numériques suivantes : $q_m=1N/mm$, $L=4m$, $d=2L/3$, $\ell=L/6$ et $EI_y=10^{12}Nmm^2$, l'allure de l'effort tranchant, du moment, de la rotation des sections et de la déformée sont représentées à la figure 203.

C.1.4.3. Conclusion

Les valeurs extrémales ainsi que celles aux points d'abscisses x_0 et x_f sont présentées de manière générale dans le tableau 81. Le tableau 82 indique les valeurs numériques pour l'exemple de la figure 203 lorsque $d=2L/3$, $\ell=L/6$, $q_m=1N/mm$, $L=4m$ et $EI_y=10^{12}Nmm^2$.

Tableau 81 : *Valeurs aux points caractéristiques :*

Abscisse x	Tranchant	Moment	Déformée
0	$-R_A=-\dfrac{q_m\ell(2L-2d-\ell)}{2L}$	0	0
x_f (387)	$T_z(x_f)$	$M_y(x_f)$	$f=w_z(x_f)$
d	$-R_A$	$M_y(d)=R_Ad$	$w_z(d)$
x_0 (377)	0	$M_y(x_0)$	$w_z(x_0)$
$d+\ell$	$R_{B,z}$	$M_y(d+\ell)=R_Ad-\dfrac{q_m\ell^2}{2}$	$w_z(d+\ell)$
L	$R_{B,z}=\dfrac{q_m\ell(2d+\ell)}{2L}$	0	0

Avec :

$$EI_y\varphi_0=-R_{A,z}\frac{L^2}{3!}+\frac{q_m}{4!\,\mathrm{L}}\left((L-d)^4-\left(L-(d+\ell)\right)^4\right)$$

$$x_0=\frac{R_{A,z}}{q_m}+d=\ell\left(1-\frac{2\mathrm{d}+\ell}{2L}\right)+d$$

$$M_y(x_0)=R_Ax_0=R_{A,z}\left(\frac{R_{A,z}}{q_m}+d\right)$$

$$w_z(x_0)=-\frac{R_{A,z}^4}{24q_m^3}+EI_y\varphi_0x_0+\frac{R_{A,z}}{6}x_0^3$$

$$w_z(d)=EI_y\varphi_0d+R_{A,z}\frac{d^3}{6}$$

$$w_z(d+\ell)=EI_y\varphi_0(d+\ell)+R_{A,z}\frac{(d+\ell)^3}{6}--q_m\frac{\ell^4}{24}$$

Les expressions des valeurs au point d'abscisse x_f étant trop volumineuses, il convient pour les obtenir, de calculer $T_z(x)$ (371), $M_y(x)$ (372) et $w_z(x)$ (374) dans la zone adéquate puis de les exprimer avec $x=x_f$ (387).

Le chargement réparti uniforme sur un tronçon permet de réaliser tous les chargements répartis uniformes en passant par celui réparti uniformément sur toute la portée. En usant de la relation de la résultante : $F=q\ell$, où il est supposé l'existence d'un chargement q d'amplitude suffisante, le problème lorsque $\ell\to 0$ est éludé. Il en résulte le chargement ponctuel. La figure 204 illustre les principaux chargements déclinants du chargement réparti uniforme sur un tronçon.

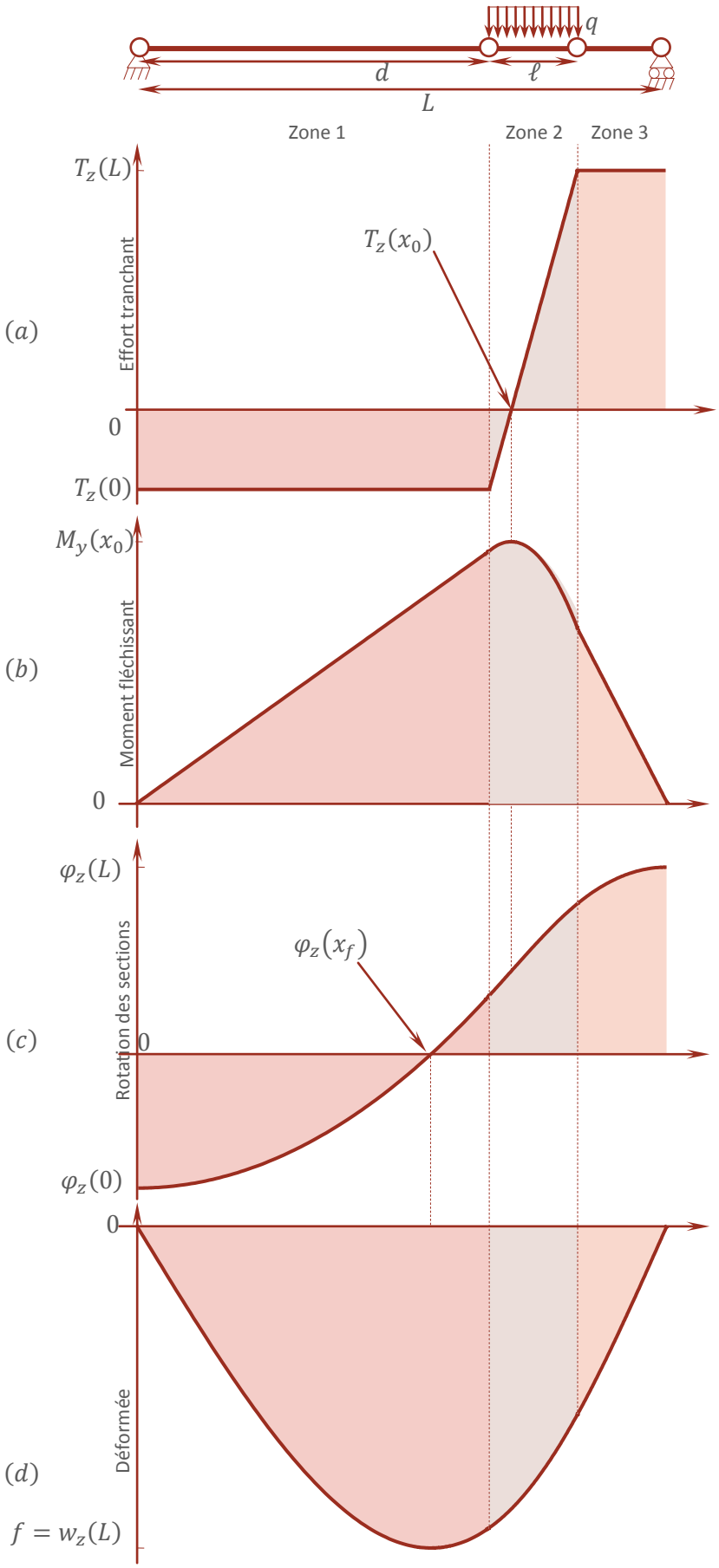


Figure 203 : *Allure de l'effort tranchant (a), du moment fléchissant (b), de la rotation (c) et de la déformée (d) pour une poutre sur deux appuis soumise à un chargement réparti* ***q*** *uniforme sur un tronçon de longueur* ***ℓ***

Ainsi grâce à ce simple chargement et avec le principe de superposition (Hypothèse 11), toutes les combinaisons linéaires possibles entre les chargements répartis uniformes sur un tronçon et les chargements ponctuels peuvent être étudiées à partir de l'exemple illustré dans cette section.

Tableau 82 : *Valeurs numériques aux points caractéristiques*

Abscisse x (mm)	Tranchant (N)	Moment (N.mm)	Déformée (mm)
0	$-R_A = -166.7$	0	0
$x_f = 2227.8$	-166.7	371295	-0.61
$d = 2666.7$	-166.7	444444	-0.58
$x_0 = 2833.3$	0	472222	-0.54
$d + \ell = 3333.3$	500	333333	-0.36
$L = 4000$	$R_{B,z} = 500$	0	0

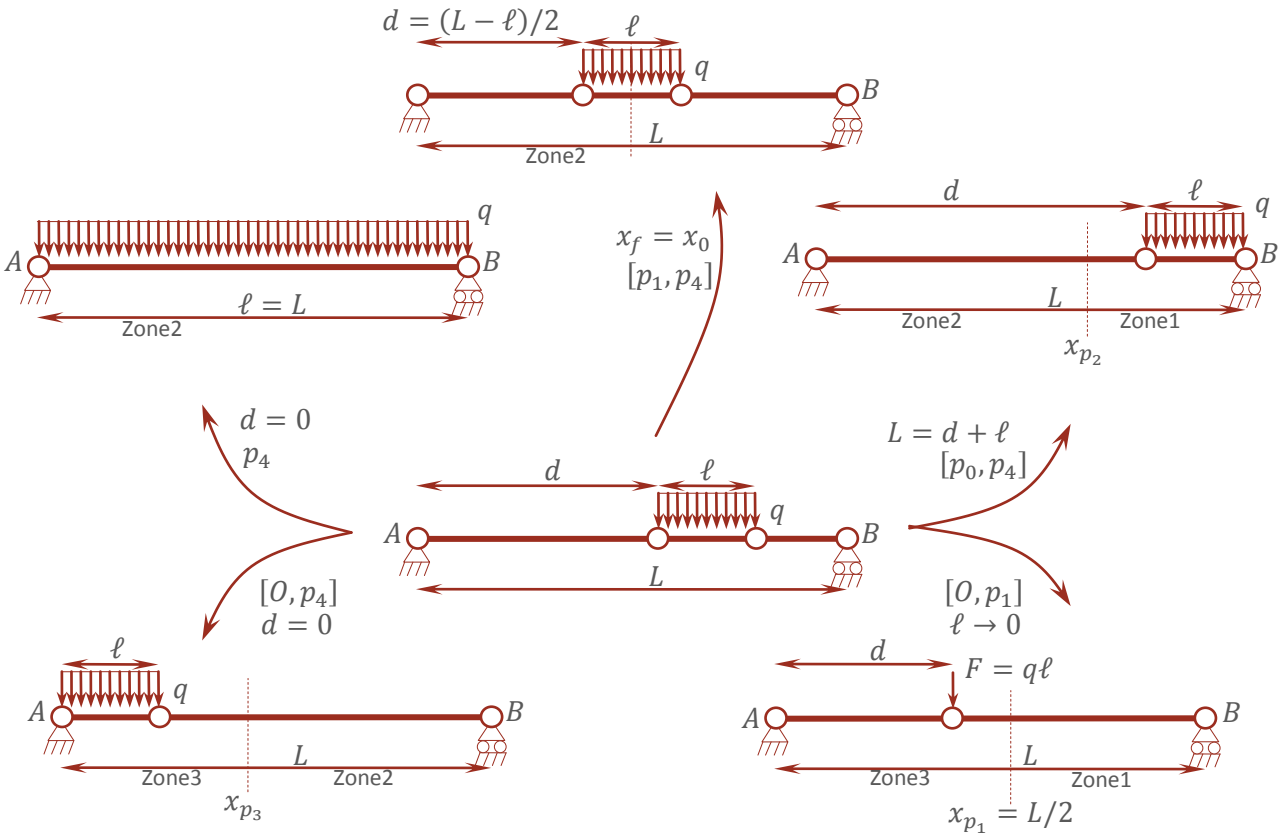


Figure 204 : *Les principaux types de chargements découlant du chargement réparti sur un tronçon*

C.1.5. Étude des points singuliers de l'exemple

Deux points sont particuliers dans cette étude. Le premier point est celui où l'effort tranchant s'annule et donc selon la relation (332), le moment possède un extrémum. Le second point est celui où la rotation s'annule, donc d'après la formule (363), il vient un extrémum pour la déformée.

Selon l'allure de l'effort tranchant illustré dans la figure 203(a), celui-ci s'annule pour une valeur x_0 dans l'intervalle $[d, d+\ell]$ (c'est-à-dire dans la zone 2). Pour l'obtenir il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$T_{z,2}(x_0) = -R_{A,z} + q_m(x_0 - d) = 0$$

Il vient :

$$x_0 = \frac{R_{A,z}}{q_m} + d = \ell\frac{(2L - 2d - \ell)}{2L} + d = \ell\left(1 - \frac{2d+\ell}{2L}\right) + d \qquad (377)$$

Pour cette valeur, le moment est maximal et a pour valeur :

$$M_{y,2}(x_0) = R_{A,z}x_0 - q_m\frac{(x_0 - d)^2}{2!} = R_{A,z}\left(d + \frac{R_{A,z}}{2q_m}\right) = \frac{q_m\ell}{8L^2}(2L - \ell)(2d + \ell)(2L - 2d - \ell) \qquad (378)$$

Le second point caractéristique est l'annulation de la rotation des sections en x_f (détermination de la flèche). Pour l'obtenir, il convient de résoudre l'équation suivante :

$$EI_y\varphi_z(x_f) = 0$$

Cependant, contrairement à l'effort tranchant, la rotation peut s'annuler dans l'une des trois zones. La figure 203(c) illustre le cas où la rotation des sections s'annule dans la zone 1. Pour un chargement symétrique par rapport au centre de la poutre du chargement étudié : c'est-à-dire pour $d = L - 2L/3 - L/6 = L/6$ et avec toujours $\ell = L/6$, il est évident que la rotation s'annulerait dans la zone 3. Il convient de déterminer les conditions où la flèche se trouve dans telle ou telle zone.

C.1.6. Détermination des conditions

Afin de trouver les lieux définissant les zones, il convient de déterminer des lieux connus ou facilement calculables puis de les rassembler. Le lieu le plus évident est celui délimité par la relation (369), en effet, la longueur $d + \ell$ ne pouvant pas dépasser L, il en résulte que pour le couple (ℓ, d) se situant en dessous de la droite $L - d - \ell = 0$, désigne les solutions possibles. Ainsi, pour une poutre sans débord, il est possible de connaitre les limites du système constitué des droites suivantes :

$$\begin{cases} d = 0 & (a) \\ \ell = 0 & (b) \\ L - d - \ell = 0 & (c) \end{cases} \qquad \textbf{(379)}$$

Pour une poutre avec des débords où L_A représente la longueur du débord au point A et L_B au point B, le problème revient pratiquement au même mais avec pour (379)(a) $d = -L_A$, et pour la relation (379)(c) $(L + L_A + L_B) - d - \ell = 0$. Ces trois droites dessinent un triangle qui contient les domaines recherchés. Pour les connaître, il faut étudier la limite entre la zone 1 et la zone 2, c'est-à-dire au point d'abscisse d, puis de définir la limite entre la zone 2 et la zone 3, c'est-à-dire au point d'abscisse $d + \ell$.

Lorsque $\varphi_z(d) = 0$ cela implique que le $\varphi_{z,1}(d) = \varphi_{z,2}(d) = 0$. Ainsi la flèche se situe précisément en ce point. A gauche de ce point se trouve la zone 1 tandis qu'à droite de ce point se trouve la zone 2. Il est nécessaire pour cela, de résoudre l'équation $\varphi_z(d) = 0$ pour obtenir la relation entre le couple (ℓ, d).

$$\varphi_z(d) = \varphi_{z,1}(d) = \varphi_{z,2}(d) = -\frac{q_m\ell}{24EI_yL}(2L - 2d - \ell)(-6d^2 + 2d(2L - d) + 2\ell(L - \mathrm{d}) - \ell^2)$$

Selon la relation (369), le terme $(2L - 2d - \ell) \neq 0$ donc il convient de résoudre :

$$-6d^2 + 2d(2L - d) + 2\ell(L - \mathrm{d}) - \ell^2 = 0$$

Suite à la résolution de cette équation du second degré en d, il en résulte :

$$d = \frac{1}{8}\left(2L - \ell \pm \sqrt{(2L - \ell)(2L + 7\ell)}\right)$$

Le terme doit être compris dans l'intervalle $[0, L]$, ainsi la solution avec le signe « + » devant la racine est conservée, l'autre étant négative. Soit d_A cette solution :

$$d_A = \frac{1}{8}\left(2L - \ell + \sqrt{(2L - \ell)(2L + 7\ell)}\right) \qquad \textbf{(380)}$$

Il convient de faire de même pour l'étude du lieu où $\varphi_z(d + \ell) = 0$ ainsi $\varphi_{z,2}(d + \ell) = \varphi_{z,3}(d + \ell) = 0$. Lorsque cela se vérifie, alors la flèche se trouve exactement à ce point. Soit la formule suivante pour $\varphi_z(d + \ell)$:

$$\varphi_z(d + \ell) = \varphi_{z,2}(d + \ell) = \varphi_{z,3}(d + \ell) = -\frac{q_m\ell}{24EI_yL}(2d + \ell)\left(8d^2 + 4L^2 - 12L\ell + 7\ell^2 + 2d(7\ell - 6L)\right)$$

Pour résoudre $\varphi_z(d + \ell) = 0$, il suffit de résoudre l'équation suivante puisque le reste ne peut s'annuler par définition :

$$8d^2 + 4L^2 - 12L\ell + 7\ell^2 + 2d(7\ell - 6L) = 0$$

En simplifiant cette expression avec les hypothèses intrinsèques au problème : $L > a > 0, L > \ell > 0, L > 0$ et la relation (369), c'est-à-dire en écartant la solution négative, il vient :

$$8d + 7\ell + \sqrt{(2L - \ell)(2L + 7\ell)} = 6L$$

D'où la solution suivante, notée d_B :

$$d_B = \frac{1}{8}\left(6L - 7\ell + \sqrt{(2L-\ell)(2L+7\ell)}\right) \quad \textbf{(381)}$$

En rassemblant (379), (380) et (381), il est possible de définir les lieux qui symbolisent les zones. La figure 205 illustre ce regroupement. Ainsi les zones sont en fonction du couple (ℓ, d) et de la longueur de la poutre L. Afin de généraliser l'approche et de ne plus dépendre de la portée, si $d = \eta_d L$ et $\ell = \eta_\ell L$ alors, en remplaçant dans toutes les précédentes formules établies il est possible de mettre L en facteur, donc pour $L = 1$, les valeurs du graphe de la figure 205 dépendent uniquement de la proportion $\eta_d = d$ et $\eta_\ell = \ell$. Il est intéressant pour préciser le graphe, de déterminer les points d'intersections entre ces limites, les coordonnées sont indiquées dans le tableau 83 :

- Le point O correspond à $d = 0$ et $\ell = 0$: chargement sur le point A, cet appui reprend l'intégralité du chargement.
- Le point p_0 correspond à $d = L$ et $\ell = 0$: chargement sur le point B, cet appui reprend l'intégralité de ce chargement.
- Le point p_1 correspond à l'intersection entre la droite $\ell = 0$ et les courbes $\varphi_z(d) = 0$ et $\varphi_z(d + \ell = 0$: chargement ponctuel au point d'abscisse $dA\ell = 0 = dB\ell = 0 = L/2$.
- Le point p_2 correspond à l'intersection entre la droite $L = d + \ell$ et la courbe $\varphi_z(d) = 0$: les coordonnées de ce point sont obtenues en résolvant ce système $\{L = d + \ell\,, \varphi_z(d) = 0\}$.
- Le point p_3 correspond à l'intersection entre la droite $d = 0$ et la courbe $\varphi_z(d + \ell) = 0$.
- Le point p_4 correspond à l'intersection entre les droites $d = 0$ et $L = d + \ell$: chargement réparti uniforme sur toute la portée.
- Le point p_{ex} correspond à l'exemple illustré à la figure 203 .

Tableau 83 : *Coordonnées des points d'intersections des domaines*

Points	ℓ	d
O	0	0
p_0	0	L
p_1	0	$L/2$
p_2	$2(3-\sqrt{2})L/7$	$(1+2\sqrt{2})L/7$
p_3	$2(3-\sqrt{2})L/7$	0
p_4	L	0
p_{ex}	$L/6$	$2L/3$

Suite aux résolutions présentées précédemment, il est possible d'affiner la définition des zones avec les conditions pour que la flèche s'y situe ou non. Les zones peuvent être définies de la manière suivante :

- Zone 1 : cette zone correspond à l'intervalle $[0, d]$. La flèche s'y trouve lorsque les conditions suivantes sont respectées pour le couple (ℓ, d) :

$$C_{\text{Zone 1}} = \begin{cases} l \geq 0 \\ L \geq d + \ell \\ d \geq d_A \end{cases} \quad \textbf{(382)}$$

- Zone 2 : cette zone coïncide avec l'intervalle $[d, d + \ell]$. La flèche est dans cette zone si les conditions suivantes sont respectées pour le couple (ℓ, d) :

$$C_{\text{Zone 2}} = \begin{cases} d \geq 0 \\ L \geq d + \ell \\ d \leq d_A \\ d \geq d_B \end{cases} \quad \textbf{(383)}$$

- Zone 3 : cette zone désigne l'intervalle $[d + \ell, \mathrm{L}]$. La flèche est dans cette zone si les conditions suivantes sont respectées pour le couple (ℓ, d) :

$$C_{\text{Zone 3}} = \begin{cases} d \geq 0 \\ l \geq 0 \\ d \leq d_B \end{cases} \quad \textbf{(384)}$$

Les droites délimitant l'espace des possibilités globales ont les propriétés suivantes :

- Le segment $[O, p_4]$ est défini par l'équation $d = 0$, il symbolise la disparition de la zone 1. Ce lieu désigne le chargement réparti sur un tronçon commençant obligatoirement au point A.
- Le segment $[0, p_0]$ est défini par la relation $\ell = 0$, il correspond à la disparition de la zone 2. Ce lieu désigne le chargement ponctuel le long de la poutre.
- Le segment $[p_0, p_4]$ défini par la relation $L = d + \ell$, coïncide avec la disparition de la zone 3. Ce lieu correspond au chargement réparti sur un tronçon se finissant obligatoirement au point B.

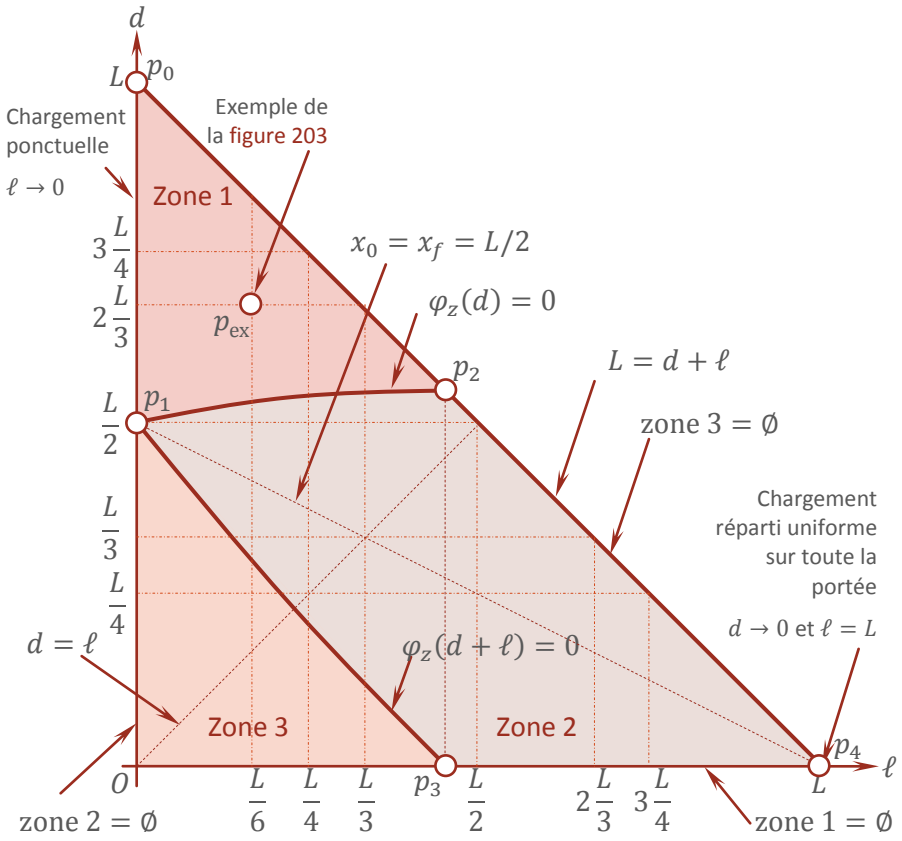


Figure 205 : *Lieux des zones selon les valeurs de* $\boldsymbol{d}$*, de* $\boldsymbol{\ell}$ *et de* $\boldsymbol{L}$

Le segment $[p_1, p_4]$ défini le lieu où $x_0 = x_f$ (Figure 207), il correspond au chargement symétrique par rapport au point du milieu de la poutre $(0, L/2)$: donc d et ℓ sont reliés par la relation :

$$d = (L - \ell)/2 \qquad \textbf{(385)}$$

Ce segment se trouve entièrement dans la deuxième zone.

Il faut maintenant exprimer la flèche dans ces trois zones.

C.1.7. Détermination de x_f

Pour situer le lieu de la flèche, il suffit de calculer la rotation φ_z aux deux points extrêmes de l'intervalle de chaque zone, puis de comparer le signe de chacun d'eux pour chaque intervalle. Ainsi, si le signe entre les bornes d'un intervalle est différent alors la rotation φ_z s'annule à l'intérieur.

Pour l'exemple étudié selon la figure 203(c), $\varphi_z(0) < 0$ et $\varphi_z(d) > 0$ donc $x_f \in [0, d]$. Étant donné que la rotation φ_z est un polynôme du 3ème degré, il y a au plus trois racines.

En simplifiant les expressions de la rotation φ_z dans les trois zones, il vient que pour les zones 1 et 3, φ_z est un polynôme du second ordre (donc deux racines), et pour la zone 2, φ_z est un polynôme du troisième degré (donc trois racines). La résolution conduit aux solutions suivantes :

- Racine de la zone 1

En résolvant la forme brute de $EI_y\varphi_{z,1}(x_f) = 0$:

$$EI_y\varphi_0 + M_0 x + R_{A,z}\frac{x^2}{2!} = 0$$

Il vient les racines suivantes, et comme par hypothèse $M_0 = 0$, l'expression des racines peut être simplifiée :

$$x_{f,\text{zone1}} = \frac{-M_0 \mp \sqrt{{M_0}^2 - 2EI_y\varphi_0 R_{A,z}}}{R_{A,z}} = \mp\sqrt{\frac{-2EI_y\varphi_0}{R_{A,z}}}$$

D'après la relation (376), le rapport $EI_y\varphi_0/R_{A,z}$ est toujours négatif quel que soit le signe du chargement q. Donc ces solutions sont toujours réelles. Comme $x_{f,\text{zone1}}$ doit être inclus dans l'intervalle $[0, d]$, la solution négative est logiquement rejetée. La solution peut s'écrire, en développant les expressions de $EI_y\varphi_0$ et de $R_{A,z}$, en la formule suivante :

$$x_{f,\text{zone1,2}} = \sqrt{\frac{2L\ell + 4dL - 2d\ell - 2d^2 - \ell^2}{6}}$$

- Racine de la zone 3

La résolution de $EI_y\varphi_{z,3}(x_f) = 0$ donne les racines suivantes :

$$x_{f,\text{zone3}} = L \mp \sqrt{\frac{2L^2 - 2dL - 2d^2 - \ell^2}{6}}$$

En faisant le même raisonnement que pour la résolution des racines de la zone 1, les deux racines de la zone 2 doivent être comprises dans l'intervalle $[d + \ell, L]$ donc il est possible de rejeter la plus grande.

$$x_{f,\text{zone3,1}} = L - \sqrt{\frac{2L^2 - 2dL - 2d^2 - \ell^2}{6}}$$

- Racine de la zone 2

La résolution de $EI_y\varphi_{z,2}(x_f) = 0$ se déroule pratiquement de la même manière, excepté l'aspect volumineux des solutions. Les trois racines simplifiées sont :

$$x_{f,\text{zone2,1}} = \frac{1}{2\beta L}(\phi_0 - \phi)$$

$$x_{f,\text{zone2,2}} = \frac{1}{4\beta L}(\phi + i\varphi)$$

$$x_{f,\text{zone2,3}} = \frac{1}{4\beta L}(\phi - i\varphi)$$

Avec :

$$\phi_0 = 3\beta\big(2d(L-\ell) + \ell(2L-\ell)\big)$$

$$\phi = \big(\beta + (2L-\ell)(2d+\ell)\big)\big(\beta + \ell(2L-2d-\ell)\big)$$

$$\psi = \sqrt{3}(\ell(2L-\ell)(2d+\ell)(2L-2d-\ell) - \beta^2)$$

$$\beta = \left[\ell(2L-\ell)(2d+\ell)(2L-2d-\ell)\left((L-\ell)^2 - 2d(L-\ell) + L\sqrt{(L-2d)^2 - 4\ell(L-d) + 2\ell^2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

Pour comparer les trois racines de la zone 2, il convient d'observer leurs évolutions. La figure 206(a) représente leurs évolutions. La forme finale du domaine de l'abscisse de la flèche est illustrée à la figure 206(b).

Les évolutions montrent que la racine $x_{f,\text{zone2,3}}$ se raccorde parfaitement avec les autres racines $x_{f,\text{zone1,2}}$ et $x_{f,\text{zone3,1}}$ le long des courbes $\varphi_z(d) = 0$ et $\varphi_z(d + \ell) = 0$. Il en résulte :

$$\begin{cases} x_{f,\text{zone1}} = x_{f,\text{zone1,2}} \\ x_{f,\text{zone2}} = x_{f,\text{zone2,3}} \\ x_{f,\text{zone3}} = x_{f,\text{zone3,1}} \end{cases} \quad \textbf{(386)}$$

Une fois les flèches obtenues dans les trois zones, le domaine des flèches possibles x_f est déduit de l'observation de l'allure de l'enveloppe des flèches possibles de la figure 206. Les valeurs $x_f(p_0)$ et $x_f(O)$ représentent les extrémums de x_f. En utilisant les coordonnées des points considérés, il en résulte :

$$x_f(O) = x_{f,\text{zone3,1}}(O) = x_{f,\text{min}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) L \approx 0{,}423L$$

Cette valeur est la valeur minimale où la flèche se situe.

$$x_f(p_0) = x_{f,\text{zone1,2}}(p_0) = x_{f,\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{3}} L \approx 0{,}577L$$

Cette valeur est le maximum où la flèche peut se trouver le long de la poutre.

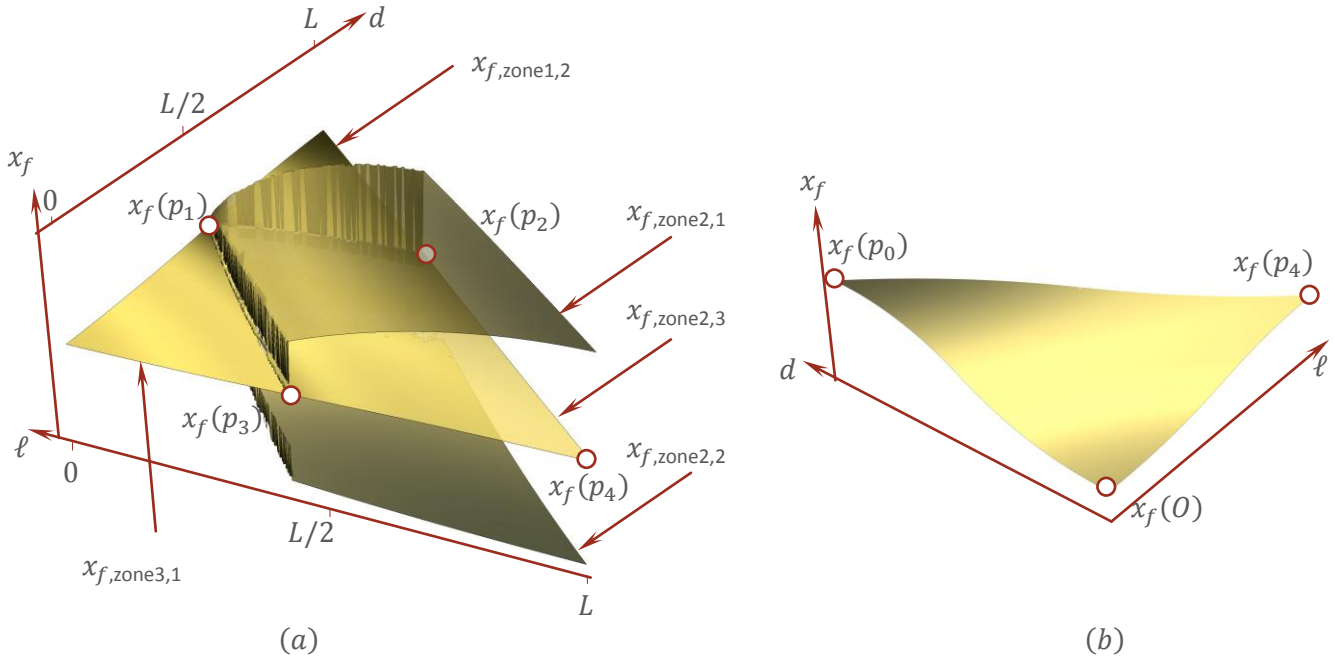


Figure 206 : *Lieux des racines de* $\boldsymbol{\varphi_z}$

La zone contenant la flèche pour une poutre de portée L est l'intervalle suivant : $[x_{f,\text{min}}, x_{f,\text{max}}]$. La définition de l'ensemble de x_f devient :

$$x_f \in \left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) L, \frac{L}{\sqrt{3}}\right] \text{ tel que } x_f = \begin{cases} x_{f,\text{zone1}} & (\ell, d) \in C_{\text{Zone 1}} \\ x_{f,\text{zone2}} & (\ell, d) \in C_{\text{Zone 2}} \\ x_{f,\text{zone3}} & (\ell, d) \in C_{\text{Zone 3}} \end{cases} \qquad \textbf{(387)}$$

Avec les conditions $C_{\text{Zone 1}}$, $C_{\text{Zone 2}}$ et $C_{\text{Zone 3}}$ décrites par les relations respectives suivantes : (382), (383) et (384). L'intersection de la surface représentant les valeurs possibles de x_f avec la surface des valeurs possibles de x_0 donne le lieu $x_0 = x_f$. Il correspond au segment $[p_1, p_4]$ (Figure 207). Sur cette ligne $x_0 = x_f = L/2$.

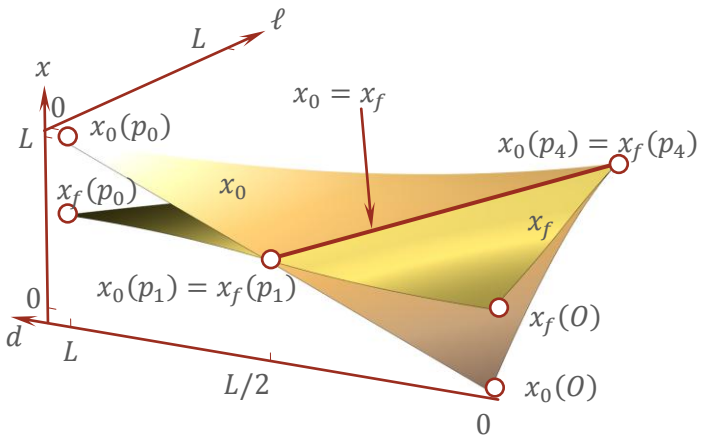


Figure 207 : *Intersections entre* $\boldsymbol{x_f}$ *et* $\boldsymbol{x_0}$

Dans l'intervalle $[p_1, p_4]$, le moment fléchissant ainsi que la déformée y sont maximaux au même point.

C.1.8. Détermination du lieu de la flèche et de la déformée en x_0.

Soit f_{x_0} la déformée au point x_0 où le moment fléchissant est maximal : $f_{x_0} = w_z(x_0)$.

Pour le chargement constant (Figure 208), $\ell = 0$ impose un chargement nul. Il n'est donc pas adapté pour visualiser le comportement de la zone $\ell \to 0$, en effet ce lieu est celui des chargements ponctuels (Figure 205). Soit F la résultante du chargement réparti uniforme étudié : $F = q\ell$. Cette force est placée sur la poutre à l'abscisse $d + \ell/2$, centre de « gravité » du chargement q de longueur ℓ. Ainsi la figure 209 illustre le lieu pour un chargement réparti uniforme dont la résultante est constante et vaut F.

Les relations exprimant la flèche selon la zone, combinées aux abscisses x_f dépendant aussi du couple (ℓ, d) (387) produis des formules volumineuses et complexes. Pour ces raisons, le lecteur est invité à parcourir l'Annexe XXX pour voir le cheminement du calcul de ces formules. Il convient donc d'étudier des cas particuliers qui porteront l'intérêt sur les frontières du domaine des valeurs (ℓ, d) possibles.

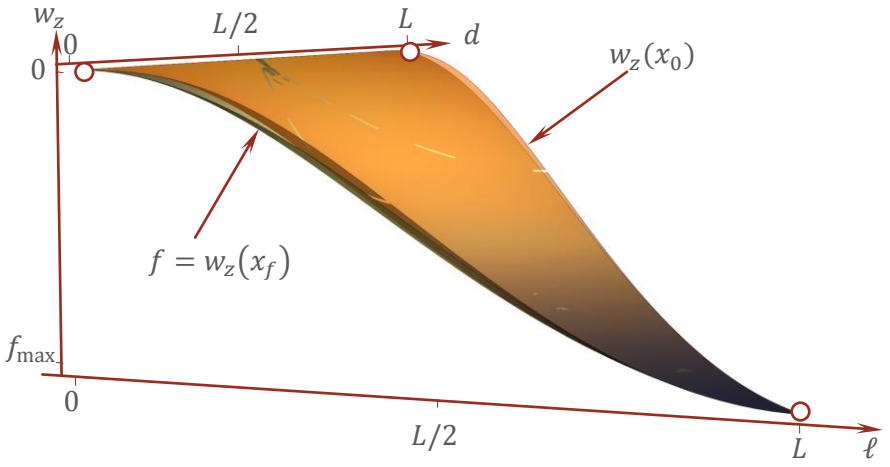


Figure 208 : *Lieu des flèches selon le couple (ℓ, d) pour un chargement constant $q = q_m$*

Pour une résultante F constante, la flèche la plus importante se situe pour le chargement ponctuel au point p_1 c'est à dire à mi-portée sur la poutre. Les flèches au point p_1 et celle au point p_4 (caractérisant un chargement réparti sur toute la portée avec $\ell = L$), se trouvent dans la zone 2, donc $w_z = w_{z,\text{zone 2}}$.

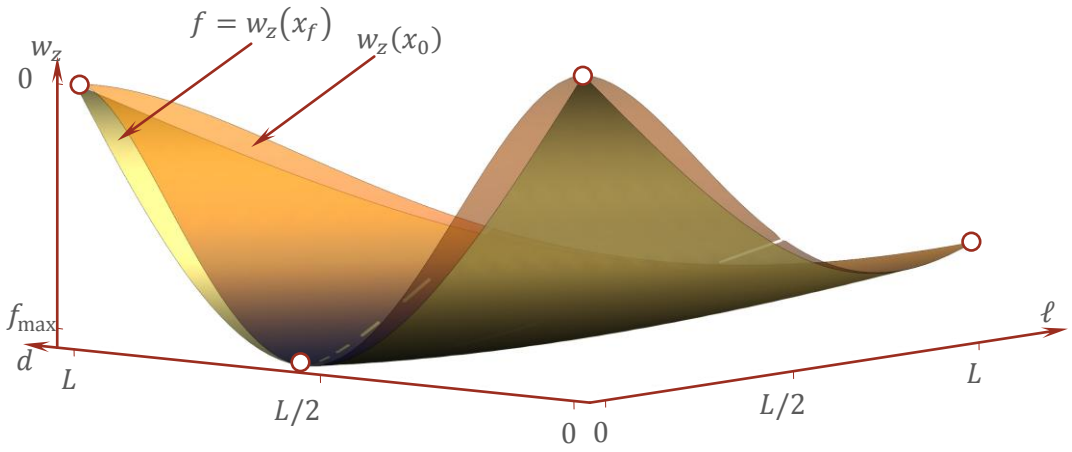


Figure 209 : *Lieu des flèches selon le couple (ℓ, d) pour un chargement $q = F/\ell$*

En ce plaçant dans le plan passant par le segment $[p_1, p_4]$ et parallèle à l'axe des amplitudes de w_z (Figure 210(a)), selon la relation (385),la flèche $w_z(x_f)$ peut être calculée en fonction du chargement : ℓ et q ou F. La simplification de $w_{z,\text{zone 2}}(x_{f,\text{zone2}})$ donne :

$$f_{[p_1,p_4],1}(\ell) = w_{z,\text{zone 2}}(x_{f,\text{zone2}}) = -\frac{q_m \ell}{384 E I_y}(8L^3 - 4L\ell^2 + \ell^3) \qquad \textbf{(388)}$$

En utilisant $q_m \ell = F$, il apparait l'autre version de $w_{z,\text{zone 2}}(x_{f,\text{zone2}})$ en fonction de F.

$$f_{[p_1,p_4],2}(\ell) = w_{z,\text{zone 2}}\left(x_{f,\text{zone2}}\right) = -\frac{q_m \ell}{384EI_y}(8L^3 - 4L\ell^2 + \ell^3) = -\frac{F}{384EI_y}(8L^3 - 4L\ell^2 + \ell^3) \qquad (389)$$

La figure 210(b) illustre l'évolution de la flèche selon les deux versions de $w_{z,\text{zone 2}}\left(x_{f,\text{zone2}}\right)$ pour $F = q_m L$ (Figure 209) et pour $q = q_m$ (Figure 208). Les flèches maximales pour $f_{[p_1,p_4],1}$ et pour $f_{[p_1,p_4],2}$ valent :

- Au point p_1 : $d = L/2$ et $\ell \to 0$, il apparait la flèche du chargement ponctuel à mi-portée :

$$f_{p,L/2}(0) = f_{[p_1,p_4],2}(p_1) = -\frac{FL^3}{48EI_y} = -\frac{q_m L^4}{48EI_y} \qquad (390)$$

- Au point p_4 : $d = 0$ et $\ell = L$, la flèche à mi-portée pour un chargement réparti uniforme sur toute la portée vaut :

$$f_{r,L/2}(L) = f_{[p_1,p_4],1}(p_4) = -\frac{q_m L^4}{384EI_y} \qquad (391)$$

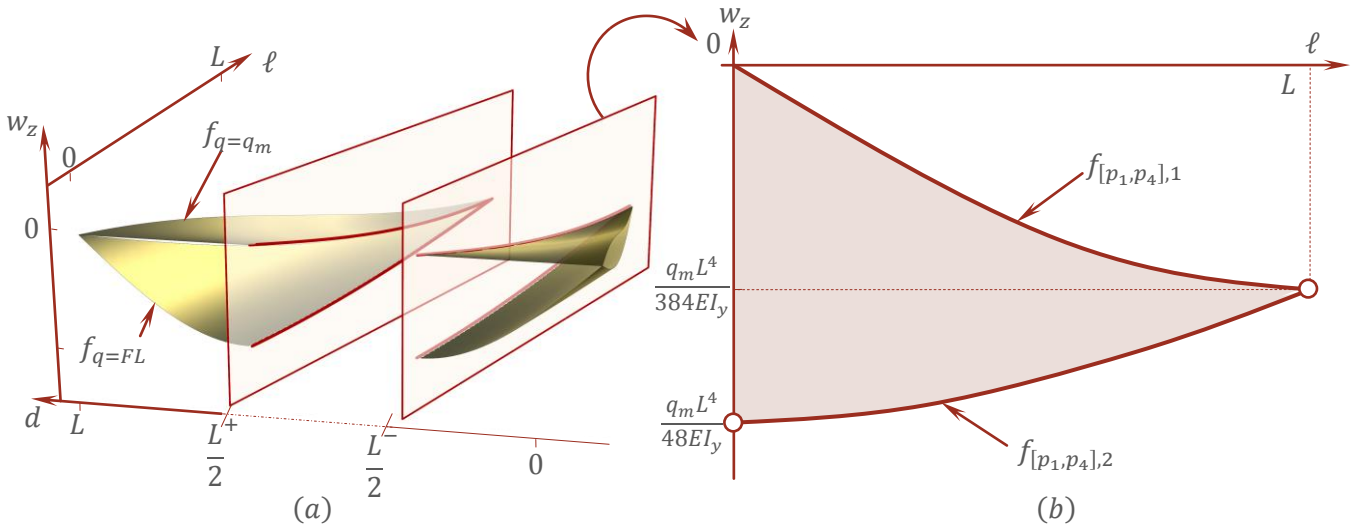


Figure 210 : *Flèche le long du segment* $[\boldsymbol{p_1, p_4}]$

Il en résulte le rapport entre les deux flèches : $f_{p,L/2}/f_{r,L/2} = 8/5 = 1{,}6$

C.1.9. Vers le chargement réparti uniforme sur toute la portée

Le chargement réparti uniforme se situe au point $p_4 = (\ell = L, d = 0)$ comme illustré à la figure 205. Les valeurs extrémales des éléments de la RdM peuvent donc être calculées.

La relation (370) conduit aux efforts des appuis :

$$R_{A,z} = \frac{q_m L}{2} \text{ et } R_{B,z} = \frac{q_m L}{2}$$

Ce chargement étant symétrique par rapport au centre de la poutre, les valeurs $x_0 = x_f = L/2$.

Le moment maximal vaut selon la relation (378) :

$$M_y(x_0) = \frac{q_m L^2}{8}$$

La flèche vaut selon la relation (391) :

$$f = w_z(x_f) = -\frac{5q_m L^4}{384EI_y}$$

C.1.10. Vers le chargement ponctuel

Le chargement ponctuel se trouve le long du segment $[O, p_0]$ comme illustré à la figure 205. C'est le lieu où $\ell \to 0$, il convient d'utiliser la relation de la résultante $q_m \ell = F$ pour circonvenir ce problème. Les valeurs extrémales des éléments de la RdM sont déterminées.

Selon la relation (370) il vient pour les efforts aux appuis :

$$R_{A,z} = \frac{q_m \ell (2L - 2d - \ell)}{2L} = \frac{F(2L - 2d - 0)}{2L} = \frac{F(L-d)}{L}$$
$$R_{B,z} = \frac{q_m \ell (2\mathrm{d} + \ell)}{2L} = \frac{F(2\mathrm{d} + 0)}{2L} = \frac{F\mathrm{d}}{L}$$

Selon la relation (377) il en résulte la valeur de x_0 :

$$x_0 = \ell\left(1 - \frac{2\mathrm{d} + \ell}{2L}\right) + d = 0 + d = d$$

L'effort tranchant change de signe en ce point. Le passage est relativement brutal puisque la zone 2 est réduite au point p_1. L'effort tranchant évolue de $-R_{A,z}$ à $R_{B,z}$ en ce point, se rapprochant du comportement d'une impulsion.

Le moment maximal vaut selon la formule (378) :

$$M_y(x_0) = \frac{q_m \ell}{8L^2}(2L - \ell)(2d + \ell)(2L - 2d - \ell) = \frac{F}{8L^2}(2L - 0)(2d + 0)(2L - 2d - 0) = F\frac{d(L-d)}{L}$$

La flèche vaut d'après le résultat (390) :

$$f = w_z(x_f) = -\frac{FL^3}{48EI_y}$$

C.1.11. Méthode des forces

Pour des poutres reposant sur plus de deux appuis, le système devient hyperstatique. Pour faciliter l'étude, les appuis supplémentaires sont placés entre les deux appuis les plus éloignés, ces appuis sont en fait des appuis intermédiaires. Pour connaitre les réactions des appuis intermédiaires, il convient d'utiliser la méthode des forces [101]§76. Cette méthode consiste à remplacer les appuis supplémentaires par des forces ponctuelles puis de les déterminer en fonction du chargement q appliqué sur la poutre. Le problème devient donc une poutre sur deux appuis soumise à un chargement q et des forces ponctuelles, dont la résolution est décrite précédemment.

La détermination des réactions aux appuis supplémentaires nécessite de connaitre le déplacement de la poutre soumise au chargement q sans appui intermédiaire, aux abscisses des appuis. Ensuite, il suffit de calculer les forces nécessaires pour annuler le déplacement aux appuis supplémentaires. Cela revient à la résolution d'un système linéaire de la forme [101] :

$\mathcal{M}X + B = 0$

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \cdots & \delta_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_{q1} \\ \vdots \\ \Delta_{qm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(392)}$$

Avec :

X_i : réaction à l'appui i,

δ_{ij} : déformée au point j pour une force unitaire $X_i = 1$,

Δ_{qj} : déformée au point j suite au chargement q.

En reprenant la déformée d'une poutre à rigidité constante sur deux appuis soumise à une force ponctuelle F :

$$w_{\text{zone }1}(x) = \frac{1}{EI}Fx\frac{(L-d)(d^2 - 2dL + x^2)}{6L}$$
$$w_{\text{zone }2}(x) = \frac{1}{EI}Fd\frac{(L-x)(d^2 - 2xL + x^2)}{6L} \quad \text{(393)}$$
$$w_{\text{zone }1}(d) = w_{\text{zone }2}(d) = \frac{1}{EI}Fd^2\frac{(L-d)^2}{3L}$$

Il vient de ces considérations que les éléments de $\mathcal{M}$ se trouvant strictement au dessus de la diagonale s'expriment avec la relation $\delta_{ij} = w_{\text{zone }2}\ \forall j > i$ et pour les éléments se trouvant strictement au dessous de la diagonale, se calculent via la relation $\delta_{ij} = w_{\text{zone }1}\ \forall j < i$. Bien entendu, les termes de la diagonale de $\mathcal{M}$ s'expriment avec $\delta_{ii} = w_{\text{zone }1}(d) = w_{\text{zone }2}(d)$.

Selon la relation (363), la déformée s'exprime en fonction du moment et de la rigidité, il en résulte que pour une rigidité constante le long de la poutre, les réactions aux appuis ne dépendent pas de la rigidité. Les réactions dépendent donc uniquement de leur position et du chargement q appliqué à la poutre étudiée.

En reprenant l'exemple de la section précédente, en intégrant un appui intermédiaire au niveau de la déformée maximale, il vient les valeurs numériques suivantes pour la réaction aux appuis et pour les éléments de la RdM. La figure 211 illustre l'allure des principes de la RdM pour ce cas d'étude.

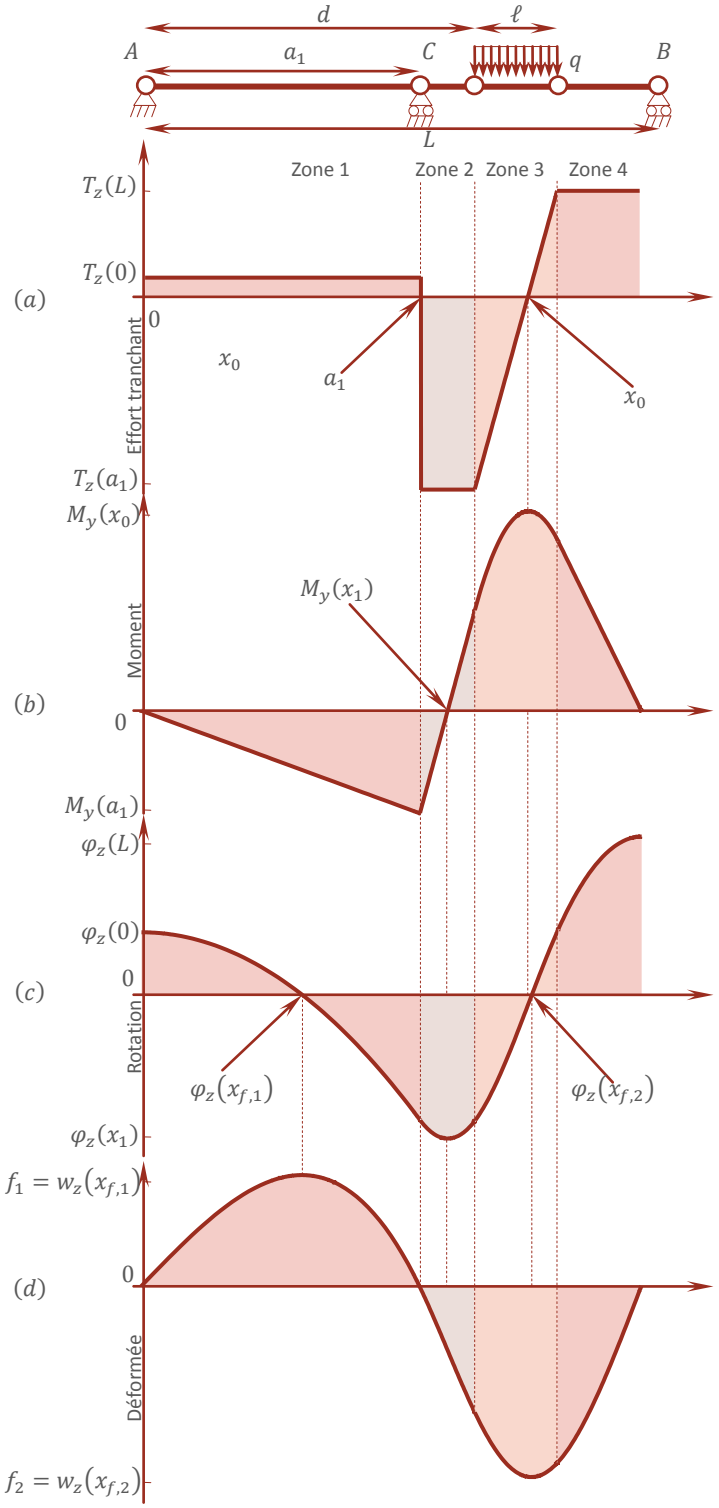


Figure 211 : *Allure de l'effort tranchant (a), du moment fléchissant (b), de la rotation (c) et de la déformée (d) pour une poutre sur trois appuis soumise à un chargement réparti* $\boldsymbol{q}$ *uniforme sur un tronçon de longueur* $\boldsymbol{\ell}$*. L'appui supplémentaire est placé à l'abscisse de la flèche de l'exemple (§C.1.4.2.) :* $\boldsymbol{a_1 = x_f}$

C.2. Calcul de la contrainte de cisaillement dans une lamelle pour une poutre composite

Soit une poutre composite de n lamelles. Comme il est montré dans la section §6.3, chaque lamelle subit un effort normal et un moment fléchissant. Comme la contrainte due à l'effort normal est exprimée selon (340) et que celle due au moment fléchissant est formulée par la relation (346), aux signes prêts, la contrainte normale totale dans une lamelle a pour expression :

$$\sigma_i(x,z) = \sigma_{i,N}(x,z) + \sigma_{i,M}(x,z) = \frac{N_i(x)}{A_i} - \frac{M_i(x)}{I_i} z \qquad (394)$$

La relation (350) met en relation la contrainte de cisaillement avec la contrainte normale. Il est donc possible de calculer la contrainte de cisaillement en utilisant l'expression de la contrainte normale totale (394). Il vient en supposant les dimensions de la lamelle constante dans la portée de la poutre composite :

$$\begin{aligned}
\tau_i(x,z) &= \frac{1}{b_i} \int_z^{h_i/2} \frac{\partial \sigma_i(x,z)}{\partial x} dz \int_0^{b_i} dy = \frac{1}{b_i} \left(\int_0^{b_i} dy \left(\int_z^{h_i/2} \frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} z dz \right) \right) \\
&= \frac{1}{b_i} \left(\int_0^{b_i} dy \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \int_z^{h_i/2} dz - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \int_z^{h_i/2} z dz \right) \right) \\
&= \frac{1}{b_i} \left(b_i \left(\frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \left(\frac{h_i}{2} - z \right) - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_i}{2} \right)^2 - z^2 \right) \right) + C[i] \right) \\
&= \frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \left(\frac{h_i}{2} - z \right) - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_i}{2} \right)^2 - z^2 \right) + \frac{1}{b_i} C[i]
\end{aligned}$$

La détermination de la constante $C[i]$ s'effectue en prenant comme hypothèse que le flux de cisaillement à l'interface entre la lamelle i et la lamelle précédente $i-1$ est similaire quelque soit la lamelle considérée. La contrainte de cisaillement pour l'élément $i-1$ a pour expression :

$$\tau_{i-1}(x,z) = \frac{1}{A_{i-1}} \frac{\partial N_{i-1}(x)}{\partial x} \left(\frac{h_{i-1}}{2} - z \right) - \frac{1}{I_{i-1}} \frac{\partial M_{i-1}(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_{i-1}}{2} \right)^2 - z^2 \right) + \frac{1}{b_{i-1}} C[i-1]$$

La coordonné z est locale et pour une lamelle i : $-h_i/2 \leq z \leq h_i/2$. Ainsi pour l'interface $i-1, i$ (entre la lamelle i et la lamelle $i-1$), il vient selon la relation (359) : $\tau_{i-1}(x, -h_{i-1}/2) b_{i-1} = \tau_i(x, h_i/2) b_i$, donc :

$$\frac{b_{i-1}}{A_{i-1}} \frac{\partial N_{i-1}(x)}{\partial x} h_{i-1} + 0 + C[i-1] = 0 + 0 + C[i]$$

Comme $A_{i-1} = h_{i-1} b_{i-1}$, il en résulte la relation de récurrence suivante :

$$C[i] = C[i-1] + \frac{\partial N_{i-1}(x)}{\partial x}$$

Il en découle :

$$C[i] = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \qquad (395)$$

Comme aux extrémités les flux de cisaillement et les contraintes de cisaillement sont nulles, il vient les limites suivantes :

$$C[0] = C[n] = 0 \qquad (396)$$

Pour finir, la contrainte de cisaillement pour la lamelle i, s'exprime de la manière suivante :

$$\tau_i(x,z) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} \left(\frac{h_i}{2} - z \right) - \frac{1}{I_i} \frac{\partial M_i(x)}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h_i}{2} \right)^2 - z^2 \right) + \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \qquad (397)$$

C.3. Série de FOURIER des chargements classiques

Dans cette partie, les chargements développés dans la section §C.1.4 sont transformés en série de FOURIER (§A.1). Plus précisément, les chargements sont calculés en série de sinus se rapprochant ainsi du chargement type de l'étude d'HEIMESHOFF [14] traitée dans la section §1.2.2. Les trois types de chargement simple sont illustrés à la figure 212. Comme pour la section §C.1.4, le chargement réparti uniforme sur un tronçon de longueur ℓ est étudié en premier. Ce dernier permet d'aboutir à un chargement réparti uniforme sur toute la portée de $(\mathscr{p})$ pour $d = 0$ et $\ell = L$. Il permet aussi d'obtenir un chargement ponctuel pour $\ell \to 0$.

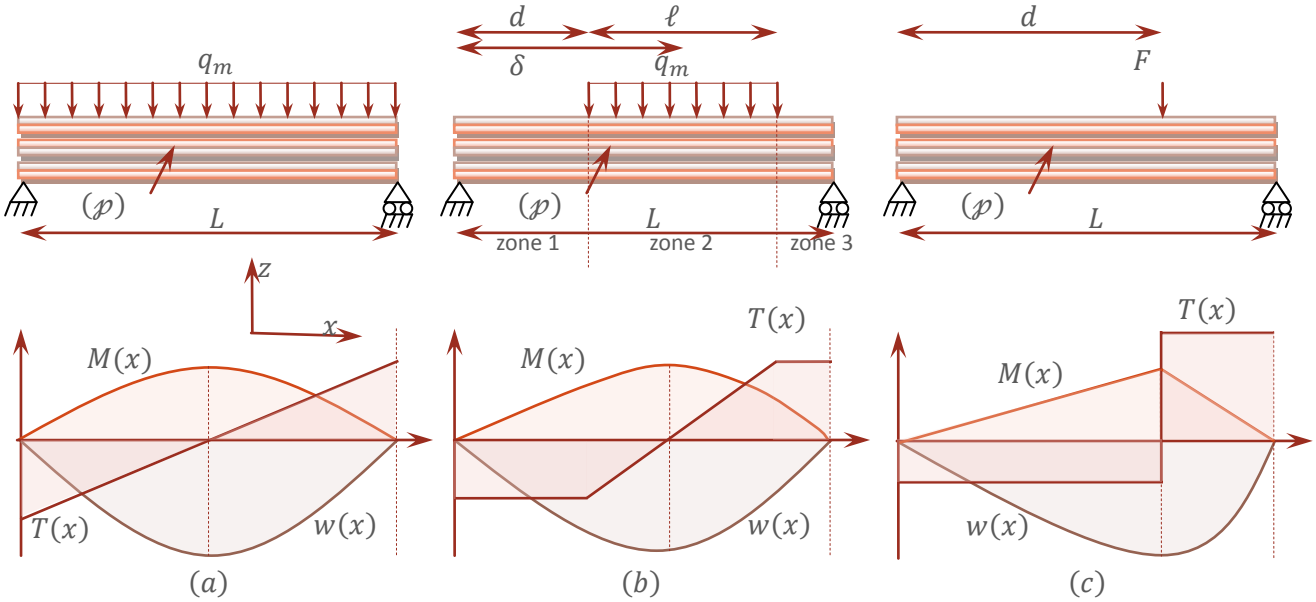


Figure 212 : *Chargements possibles : (a) réparti uniforme, (b) réparti uniforme sur un tronçon et (c) ponctuel*

C.3.1. Chargement réparti uniforme sur un tronçon

Soit $q(x)$ le chargement réparti uniforme sur un tronçon (Figure 212(b)). q a une amplitude q_m dans l'intervalle $[d, d+\ell]$ (zone 2) de la poutre et vaut 0 dans les intervalles $[0, d[$ (zone 1) et $]d+\ell, L]$ (zone 3).

Pour simplifier grandement les calculs, il est fort utile de supposer que la fonction étudiée ici est impaire, donc : $a_\theta = 0 \; \forall \theta \in \mathbb{N}$ (302).

En prenant $T = 2L$, il vient tout naturellement que l'étude du chargement doit être sur la demi-période $T : T/2 = L$. Selon (305) la fonction étudiée admet aux abscisses $T/2 \pm \theta T \; \forall \theta \in \mathbb{N}$ des centres de rotation d'angle $\pm T/2$. L'intégrale sur $[0, T]$ devient alors le double de l'intégrale sur $[0, T/2]$ (305).

Ainsi, d'après les hypothèses précédentes le coefficient de FOURIER b_θ s'exprime de la manière suivante :

$$b_\theta = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x) Sin(\theta\omega x)\, dx$$

En tenant compte des trois zones décrites précédemment, b_θ se découpe en trois parties :

$$b_\theta = \frac{2}{L}\int_0^{L} q(x) Sin(\theta\omega x)\, dx = \overbrace{\underbrace{\frac{2}{L}\int_0^{d} q(x) Sin(\theta\omega x)\, dx}_{=0 \text{ car } q(x)=0}}^{\text{zone 1}} + \overbrace{\frac{2}{L}\int_d^{d+\ell} q(x) Sin(\theta\omega x)\, dx}^{\text{zone 2}} + \overbrace{\underbrace{\frac{2}{L}\int_{d+\ell}^{L} q(x) Sin(\theta\omega x)\, dx}_{=0 \text{ car } q(x)=0}}^{\text{zone 3}}$$

L'amplitude de q est prise comme constante pour la variable d'intégration, il vient :

$$b_\theta = \frac{2}{L}\int_d^{d+\ell} q(x) Sin(\theta\omega x)\, dx = \frac{2}{L} q_m \int_d^{d+\ell} Sin(\theta\omega x)\, dx = \frac{2}{L} q_m \left[\frac{-Cos(\theta\omega x)}{\theta\omega}\right]_d^{d+\ell}$$

$$= \frac{2}{L} q_m \frac{Cos(\theta\omega d) - Cos\big(\theta\omega(d+\ell)\big)}{\theta\omega} = \frac{2}{\theta\pi} q_m \left(Cos\left(\theta d \frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta \frac{\pi}{L}(d+\ell)\right)\right)$$

Ainsi la série de FOURIER du chargement $q(x)$ a pour expression :

$$SF(q)(x) = \frac{2}{\pi} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right)}{\theta} \left(Cos\left(\theta d \frac{\pi}{L}\right) - Cos\left(\theta \frac{\pi}{L}(d+\ell)\right)\right) \quad \textbf{(398)}$$

Dans le cas où δ désigne le centre du tronçon chargé de longueur ℓ, il vient l'écriture suivante :

$$SF(q)(x) = \frac{4}{\pi} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{\theta} Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \delta\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \frac{\ell}{2}\right) \quad \textbf{(399)}$$

Cette écriture est un produit uniquement de trois fonctions sinusoïdales avec pour la première l'abscisse x, la deuxième l'abscisse du centre du tronçon et la dernière la demi longueur du tronçon.

Les séries de FOURIER de l'effort tranchant $SF(T)$, du moment fléchissant $SF(M)$, de la rotation $SF(\varphi)$ et de la déformée $SF(w)$ en découlent en utilisant les relations usuelles :

$$\begin{aligned}
SF(T)(x) &= -\frac{4\mathrm{L}}{\pi^2} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^2} Cos\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \delta\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \frac{\ell}{2}\right) \\
SF(M)(x) &= \frac{4\mathrm{L}^2}{\pi^3} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{\theta^3} Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \delta\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \frac{\ell}{2}\right) \\
SF(\varphi)(x) &= -\frac{4\mathrm{L}^3}{\pi^4} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI} \frac{1}{\theta^4} Cos\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \delta\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \frac{\ell}{2}\right) \\
SF(f)(x) &= -\frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI} \frac{1}{\theta^5} Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \delta\right) Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} \frac{\ell}{2}\right)
\end{aligned} \quad \textbf{(400)}$$

Afin de voir l'influence du paramètre de sommation, l'indice infini est remplacé par un indice fini : m.

C.3.2. Chargement réparti uniforme

Soit $q(x)$ le chargement réparti uniforme sur toute la portée. q a une amplitude q_m dans l'intervalle $[0, L]$ de la poutre (Figure 212(a)).

Soit il faut recalculer les termes b_θ soit il suffit de prendre $d = 0$ et $\ell = L$. La série de FOURIER pour ce chargement vaut selon (398) :

$$SF(q)(x) = \frac{2}{\pi} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right)}{\theta} \left(Cos(0) - Cos(\theta\pi)\right) = \frac{2}{\pi} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Sin\left(\theta \frac{\pi}{L} x\right)}{\theta} \left(1 - (-1)^\theta\right)$$

Pour θ pair, les termes sont nuls. Seuls les termes impairs doivent apparaître, donc la série de FOURIER de q s'exprime de la manière suivante :

$$SF(q)(x) = \frac{4}{\pi} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Sin\left((2\theta-1) \frac{\pi}{L} x\right)}{(2\theta-1)} \quad \textbf{(401)}$$

Les séries de FOURIER de l'effort tranchant $SF(T)$, du moment fléchissant $SF(M)$, de la rotation $SF(\varphi)$ et de la déformée $SF(w)$ en découlent en utilisant les relations usuelles :

$$\begin{aligned}
SF(T)(x) &= -\frac{4\mathrm{L}}{\pi^2} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Cos\left((2\theta-1) \frac{\pi}{L} x\right)}{(2\theta-1)^2} \\
SF(M)(x) &= \frac{4\mathrm{L}^2}{\pi^3} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{Sin\left((2\theta-1) \frac{\pi}{L} x\right)}{(2\theta-1)^3} \\
SF(\varphi)(x) &= -\frac{4\mathrm{L}^3}{\pi^4} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI} \frac{Cos\left((2\theta-1) \frac{\pi}{L} x\right)}{(2\theta-1)^4}
\end{aligned} \quad \textbf{(402)}$$

$$SF(w)(x) = -\frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI} \frac{Sin\left((2\theta-1)\frac{\pi}{L}x\right)}{(2\theta-1)^5}$$

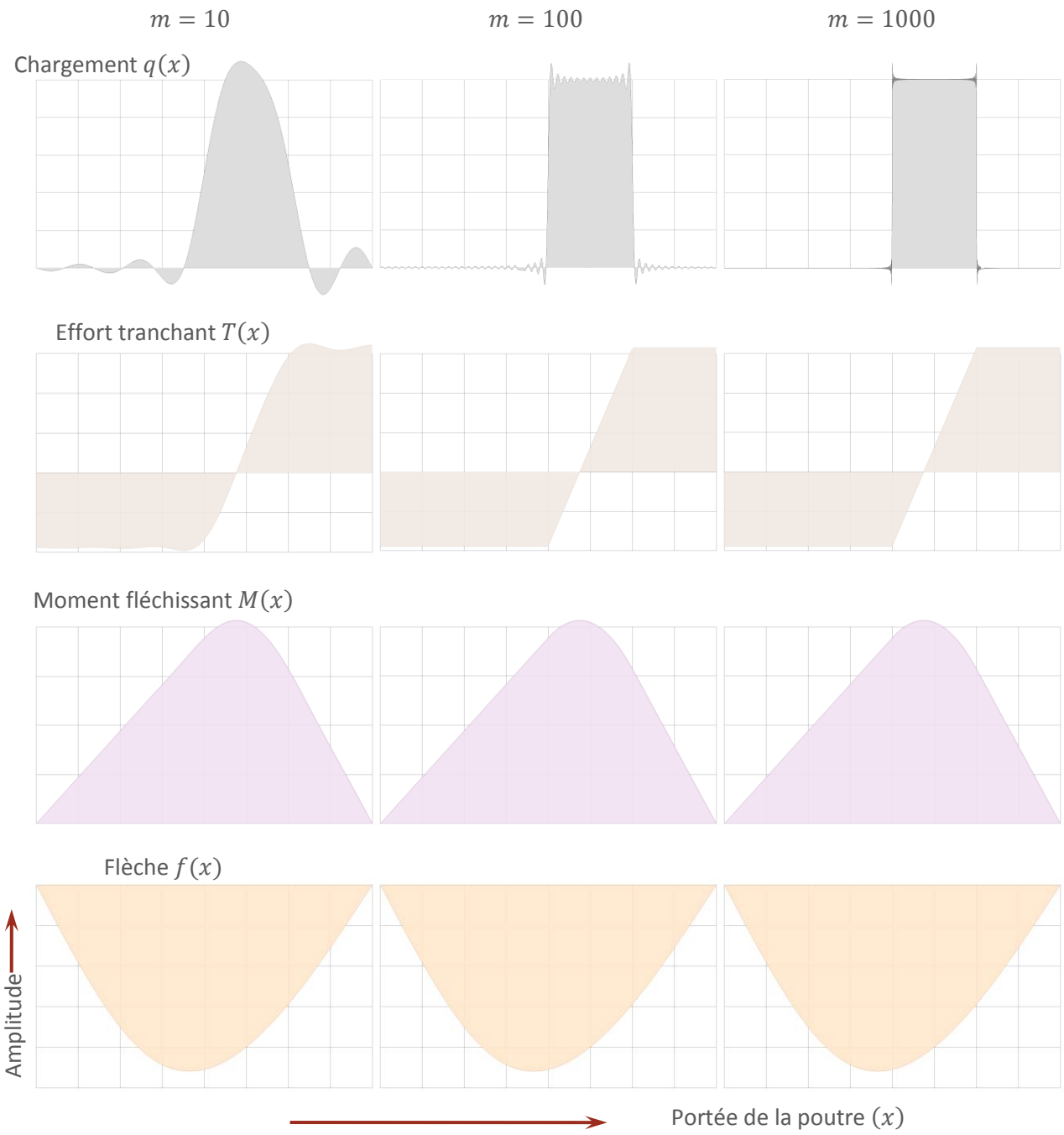


Figure 213 : *Approximation du chargement réparti sur un tronçon en série de FOURIER*

Comme pour le chargement réparti uniforme sur toute la portée de la poutre $(\mathcal{p})$, ce chargement est une bonne approximation du chargement réparti uniforme sur un tronçon, il est donc possible d'utiliser un tel chargement pour cette poutre $(\mathcal{p})$.

Les artéfacts au début et à la fin du chargement (effet de GIBBS) ne sont pas nuisibles puisqu'ils se compensent grossièrement les uns avec les autres autour des extrémités du chargement.

Pour le flèche, à $x = x_f = L/2$ il apparait que pour ce chargement le premier élément de $SF(w)(L/2) = -4q_m L^4/\pi^5 EI_\theta$ avec une rigidité EI_θ constante vis-à-vis du paramètre de sommation $EI_\theta = EI$. Ce premier terme suffit pour décrire la flèche du chargement q initiale : $-5q_m L^4/384EI$. L'erreur sur la flèche est de l'ordre de :

$$\frac{\frac{5q_mL^4}{384EI}-\frac{4q_mL^4}{EI\pi^5}}{\frac{5q_mL^4}{384EI}}=1-\frac{4\times384}{5\pi^5}=-0.4\%$$

Toutefois, comme la section suivante le décrira, la rigidité étudiée sera dépendante du paramètre de sommation θ. En nommant la rigidité pour $SF(w)(L/2)$: $EI_{\theta=1}$, il vient la relation suivante pour un chargement réparti uniforme :

$$\frac{\frac{5q_mL^4}{384EI}-\frac{4q_mL^4}{EI_{\theta=1}\pi^5}}{\frac{5q_mL^4}{384EI}}=1-\frac{4\times384}{5\pi^5}\frac{EI}{EI_{\theta=1}}=e$$

C.3.3. Chargement ponctuel ou chargement réparti sur un tronçon très petit devant la portée de la poutre

Pour le chargement ponctuel, il suffit de prendre ℓ petit devant les dimensions de la poutre étudiée. La formule (398) est donc identique. Les valeurs pour ℓ entre 1 et 10 mm suffisent pour avoir le comportement souhaité d'une poutre en flexion trois points.

C.3.4. Résumé

Suite aux paragraphes précédents, la forme générale de la série de FOURIER d'un chargement représenté à la figure 212 peut s'exprimer de la manière suivante en s'inspirant de (398) et (401) :

$$SF(q)(x)=\frac{2}{\pi}q_m\sum_{\theta=1}^{\infty}b_\theta\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta}=\sum_{\theta=1}^{\infty}\beta_\theta\left(q_m\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta}\right)=\sum_{\theta=1}^{\infty}\beta_\theta q_\theta(x) \qquad \textbf{(403)}$$

Avec $\beta_\theta=b_\theta\pi/2q_m$.

Le chargement type qui doit être choisi est $q_\theta(x)$, en effet comme le coefficient β_θ ne dépend pas de l'abscisse x, il sera pris en compte lors de la sommation finale.

Il en va de même pour les séries de FOURIER de l'effort tranchant, du moment fléchissant, de la rotation des sections et de la déformée.

C.4. Généralisation de la méthode de HEIMESHOFF.

Cette section présente une généralisation faussée par une erreur d'hypothèse. Toutefois, elle a pour mérite de voir et de percevoir les astuces et le mécanisme pour faciliter la généralisation de théorie qui revient à la détermination de solutions de systèmes linéaires de n équations différentielles inconnues pour n fonctions inconnues.

C.4.1. Hypothèses

Soit $(\mathcal{p})$ une poutre composée de n éléments assemblés ou non. Soit s l'indice correspondant à l'élément central de $(\mathcal{p})$.

La détermination de l'élément central sans tenir compte si n est pair $(n=2k)$ ou impair $(n=2k+1)$, avec $k\in\mathbb{N}$, doit suivre la relation suivante :

$$s=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1=k+1 \qquad \textbf{(404)}$$

En effet, pour une poutre composée d'un nombre impair, l'élément central existe et est le $k+1^{\text{ème}}$. Mais ce n'est pas le cas pour une poutre constituée d'un nombre pair d'éléments : l'élément central se trouve être l'interface entre l'élément k et l'élément $k+1$. L'entier impair immédiatement supérieur à $2k$ est donc choisi : soit $2k+1$, il est ainsi possible de déterminer l'indice de l'élément central selon (404). Autrement dit, le cas pair n'est qu'une simplification du rang impair supérieur, pour $n=2k$, il suffit d'étudier le cas à $2k+1$ puis de mettre les valeurs caractéristiques des éléments du niveau $2k+1$ à zéro (soit $A_{2k+1}=I_{2k+1}=0$).

Soit $i\in[\![1,n]\!]$, le $i^{\text{ème}}$ élément de $(\mathcal{p})$. L'élément i possède une section A_i, une inertie I_i, un module d'élasticité E_i et une longueur L.

Soit $(\mathcal{p})$ une poutre sur deux appuis soumise à un chargement sinusoïdal $q_\theta(x)$ décrit dans la section précédente. Ce chargement crée un effort tranchant $T_\theta(x)$, un moment fléchissant $M_\theta(x)$ et fait fléchir $(\mathcal{p})$:

$w_\theta(x)$. Le chargement a les conditions aux appuis telle que la flèche soit nulle : $w(0) = 0$ et $w(L) = 0$ et tel que le moment soit nul : $M(0) = 0$ et $M(L) = 0$ (Figure 214), pour $\theta \in \mathbb{N}$:

$$q_\theta(x) = q_m \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta} \qquad (405)$$

La période de q est $T = 2L$ et la pulsation $\omega = \pi/L$. Dans la suite, les deux notations sont utilisées : ω ou π/L.

Note 4 : *Durant toute cette étude, la déformée et les déformations dues à l'effort tranchant ne sont pas prises en compte.*

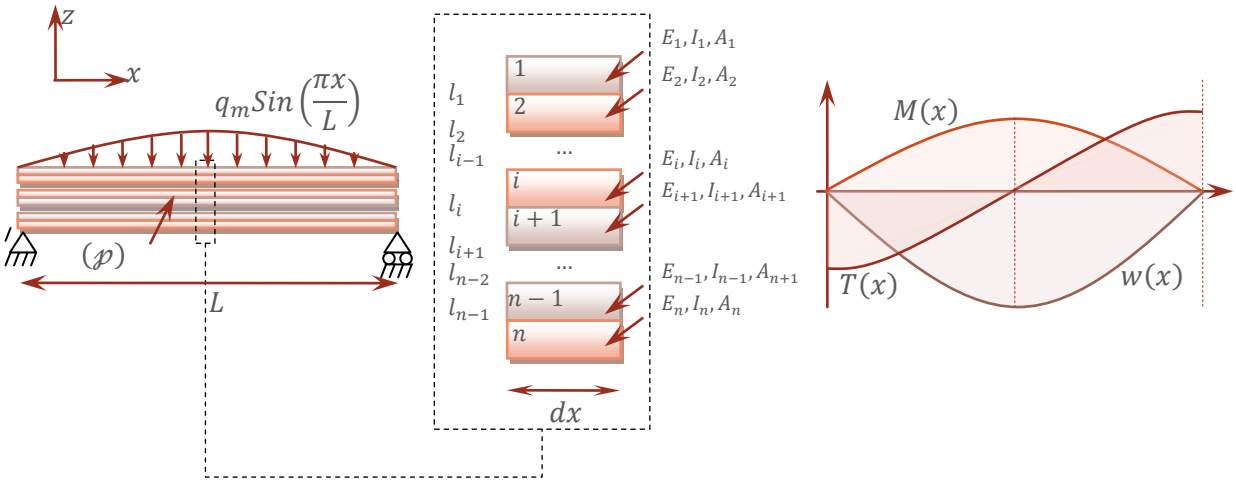


Figure 214 : *Chargement de la poutre composite sur deux appuis et ses diagrammes de la RDM*

C.4.2. Effort de la résistance des matériaux

En s'appuyant sur le calcul des efforts de la RDM pour un chargement sinusoïdal au §1.2.2.2, il vient le calcul des efforts dus au chargement $q_\theta(x)$. Il en résulte le calcul de l'effort tranchant (T_θ), du moment fléchissant (M_θ), de la rotation des sections (φ_θ) et la déformée (w_θ) :

- **Réactions aux appuis**

La force résultante de ce chargement se calcule de la même manière qu'au paragraphe §1.2.2.2 , il vient :

$$F_{\text{res}} = \int_0^{\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}} q_m \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta} dx = 2\frac{q_m}{\theta^2\omega} \qquad (406)$$

Comme le barycentre de cette résultante a pour abscisse $L/2$, les réactions aux appuis en découlent :

$$\begin{cases} R_A + R_B = F_{\text{res}} \\ -\frac{F_{\text{res}} L}{2} + R_B L = 0 \end{cases}$$

Il en résulte :

$$R_A = R_B = \frac{q_m}{\theta^2\omega}$$

- **Effort tranchant**

Comme le chargement est la variation de l'effort tranchant (331) :

$$q_\theta = \frac{dT_\theta}{dx} \Rightarrow T_\theta(x) = \int q_\theta(x)dx = -q_m \frac{1}{\theta^2\omega} Cos(\theta\omega x) + C[1]$$

Pour $T_\theta(0) = -R_A \Rightarrow C[1] = 0$

Donc l'effort tranchant vaut :

$$T_\theta(x) = -q_m \frac{1}{\theta^2\omega} Cos(\theta\omega x) = T_m \frac{Cos(\theta\omega x)}{\theta^2} \qquad (407)$$

- **Moment fléchissant**

Puisque l'effort tranchant et le moment fléchissant sont reliés avec (332) :

$$T_\theta = -\frac{dM_\theta}{dx} \Rightarrow M_\theta(x) = -\int T_\theta(x)dx = q_m \frac{1}{\theta^3\omega^2} Sin(\theta\omega x) + C[2]$$

Pour $M_\theta(0) = 0 \Rightarrow C[2] = 0$

Ainsi le moment fléchissant vaut :

$$M_\theta(x) = q_m \frac{1}{\omega^2}\frac{Sin(\theta\beta x)}{\theta^3} = M_m \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3} \quad (408)$$

- **Rotation**

La relation (363), exprime la rotation en fonction du moment fléchissant

$$\varphi_\theta(x) = \frac{1}{EI}\int M_\theta(x)dx = \frac{1}{EI}\left(-q_m \frac{1}{\omega^3}\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^4}\right) + C[3]$$

La détermination de la constante $C[3]$ est développée lors du calcul des constantes pour la déformée, $w(L) = 0$. La rotation s'exprime comme suit :

$$\varphi_\theta(x) = \frac{1}{EI} q_m \frac{1}{\omega^3}\frac{Sin(\theta\beta x)}{\theta^4} = \frac{1}{EI}\varphi_m \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^4} \quad (409)$$

- **Flèche**

Étant donné que la déformée a pour relation avec le moment (362) :

$$EI\, w''_\theta = M_\theta \Rightarrow w_\theta(x) = \frac{1}{EI}\iint M_\theta(x)dx = \frac{1}{EI}\left(C[4] + xC[3] - q_m \frac{1}{\omega^4}\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^5}\right)$$

Pour $w_\theta(0) = 0 \Rightarrow C[4] = 0$ et $w_\theta(L) = 0 \Rightarrow L\, C[3] = 0 \Rightarrow C[3] = 0$

Alors la déformée a pour expression :

$$w_\theta(x) = -\frac{1}{EI} q_m \frac{1}{\omega^4}\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^5} = \frac{1}{EI} w_m \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^5} \quad (410)$$

La figure 214 illustre l'allure des diagrammes de la RDM décrit ci-dessus.

C.4.3. Contraintes internes et déformations

En reprenant les considérations du §1.2.2.3, il vient les expressions des contraintes normales et des déformations (Figure 215) :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \pm\frac{N_i}{A_i} \pm \frac{M_i}{I_i} z \text{ pour } -v_i \le z \le v_i$$
$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,N} + \varepsilon_{i,M} = \pm\frac{N_i}{E_i A_i} \pm \frac{M_i}{E_i I_i} z \text{ pour } -v_i \le z \le v_i \quad (411)$$

De plus, en tenant compte du chargement représenté dans la figure 11, il est pris comme convention que les éléments se situant au dessus du $s^{\text{ème}}$ élément de $(\mathcal{p})$ sont soumis à un effort normal de compression, les éléments se situant au dessous du $s^{\text{ème}}$ élément de $(\mathcal{p})$ ainsi que le $s^{\text{ème}}$ élément sont soumis à un effort normal de traction. Il faut noter que même avec ces conventions, les éléments autour du $s^{\text{ème}}$ élément pourront avoir un changement de comportement (passer d'à priori un effort de traction à un effort de compression et vis et versa).

Les efforts normaux N_i n'étant pas pris comme valeur algébrique, le signe « - » doit être indiqué lors du calcul des contraintes et des déformations. En suivant les remarques précédentes pour le moment fléchissant, il en découle la relation suivante :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\ge s\end{cases}} \frac{N_i}{A_i} - \frac{M_i}{I_i} z \text{ pour } -v_i \le z \le v_i$$
$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,N} + \varepsilon_{i,M} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\ge s\end{cases}} \frac{N_i}{E_i A_i} - \frac{M_i}{E_i I_i} z \text{ pour } -v_i \le z \le v_i \quad (412)$$

C.4.4. Distances caractéristiques

Selon les caractéristiques des éléments de $(\mathcal{P})$, l'axe principal $(\mathcal{A})$ n'est pas forcément au centre de la section de $(\mathcal{P})$, pour cela il est utile de pouvoir formuler les hauteurs des éléments vis-à-vis de l'axe principal (Figure 215). Soit a_s la distance de l'élément s à $(\mathcal{A})$. La relation liant les longueurs a_s, a_{s-1}, h_s et h_{s-1} est la suivante :

$$a_s + a_{s-1} = \frac{h_s}{2} + \frac{h_{s-1}}{2} = v_s + v_{s-1}$$

Donc $a_{s-1} = v_s + v_{s-1} - a_s$. En faisant de même avec a_{s+1}, il vient : $a_{s+1} = v_s + v_{s+1} + a_s$. Il est donc possible d'exprimer les distances a_i en fonction de a_s par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$, et des demi-hauteurs des éléments notées v_i pour simplifier la notation :

La relation précédente implique une expression des a_i par récurrence :

$$a_i = \begin{cases} v_i + v_{i+1} + a_{i+1}, & i < s-1 \\ v_i + v_{i+1} - a_{i+1}, & i = s-1 \\ v_i + v_{i-1} + a_{i-1}, & i > s \end{cases} \qquad (413)$$

Après application de la récurrence pour les a_i, il vient

$$a_i = \begin{cases} r_i - a_s, & i < s \\ r_i + a_s, & i > s \\ a_s, & i = s \end{cases} = r_i + (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i \geq s\end{cases}} a_s \quad \text{avec} \quad r_i = \begin{cases} \sum_{t=i}^{s-1} v_t + v_{t+1}, & i < s \\ \sum_{t=s}^{i-1} v_t + v_{t+1}, & i > s \\ 0, & i = s \end{cases} \qquad (414)$$

La distance a_i représente la distance géométrique entre l'élément i et l'axe $(\mathcal{A})$, elle ne tient compte que des hauteurs des éléments et de la distance a_s.

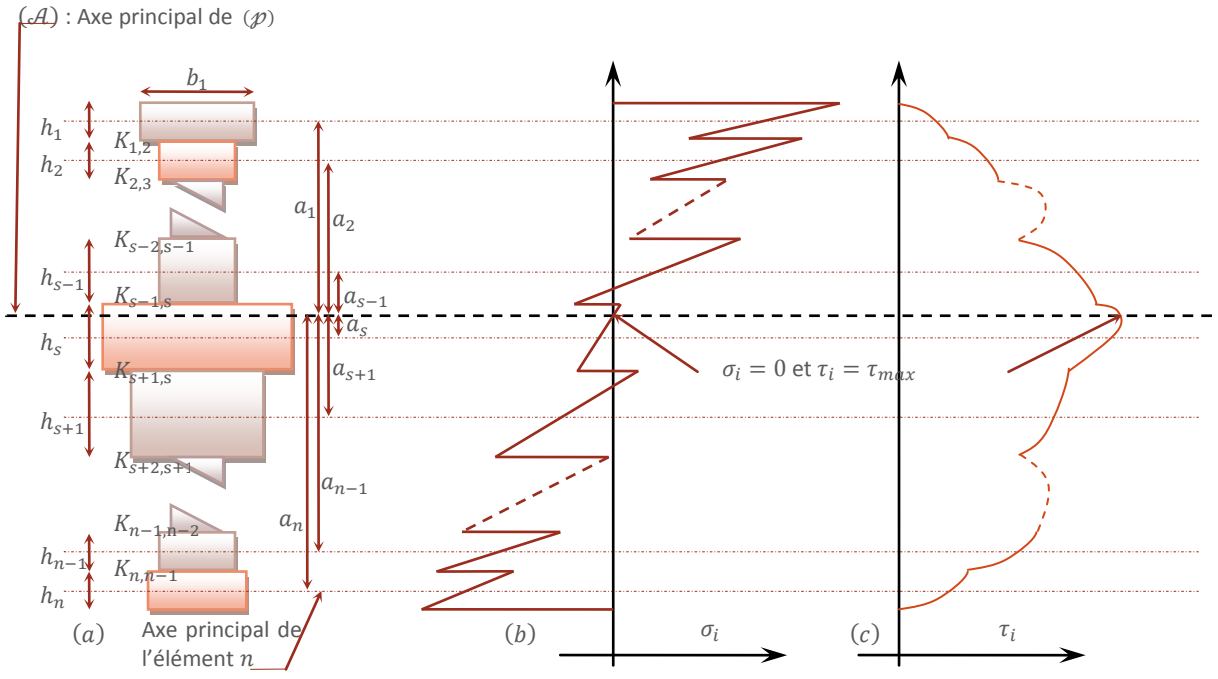


Figure 215 : *(a) Distances caractéristiques (b) diagrammes des contraintes normales et (c) contraintes de cisaillement*

C.4.5. Étude du glissement des éléments

En suivant les explications de §1.2.2.5, l'expression du glissement est rappelée ici :

$$f_{i,i\pm1} = \frac{t_{w,i,i\pm1} e_{i,i\pm1}}{c_{i,i\pm1}} = \frac{t_{w,i,i\pm1}}{K_{i,i\pm1}} \qquad (415)$$

Note 5 : *Voir la signification du double indice dans la section Notation.*

C.4.6. Etablissement du système d'équation

Selon les hypothèses de la section §C.4.3, à la lumière de la figure 11 dans la section §1.2.2.3, le calcul des déformations suit les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,u} &= (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s\\ 0 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} \frac{N_i}{E_i A_i} + \frac{M_i}{E_i I_i} v_i \\ \varepsilon_{i+1,o} &= (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i+1<s\\ 0 \text{ pour } i+1\geq s\end{cases}} \frac{N_{i+1}}{E_{i+1} A_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} v_{i+1}\end{aligned} \quad (416)$$

Puisque tous les éléments de $(\mathcal{P})$ ont la même courbure χ suite au chargement q_θ, les rapports $M_i/E_i I_i$ sont tous égaux à χ. De plus, la courbure est aussi égale à M_θ/EI_{ef}, où EI_{ef} désigne la rigidité effective (ou globale) de $(\mathcal{P})$ et M_θ son moment fléchissant global selon (345).

$$\chi = \frac{M_i}{E_i I_i} = \frac{M_\theta}{EI_{ef}} \quad (417)$$

De plus, le moment fléchissant M_θ de $(\mathcal{P})$ peut aussi s'écrire comme étant le cumul des sollicitations de chaque élément par rapport à l'axe $(\mathcal{A})$:

$$M_\theta = \sum_{i=1}^{n} (M_i + a_i N_i) \quad (418)$$

La distance a_i représente donc la distance entre l'application de l'effort normal considéré et l'axe $(\mathcal{A})$.

Comme $(\mathcal{P})$ n'est pas soumise à des efforts normaux, les efforts normaux de chaque élément doivent donc s'auto-compenser :

$$\Sigma \mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } i<s\\ 1 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} N_i = 0 \quad (419)$$

Cette équation permet de calculer un effort normal en fonction des autres. N_s est choisi pour être une combinaison linéaire des autres efforts normaux afin de suivre la logique de §C.4.4, d'après (419) :

$$N_s = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } i<s\\ 1 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} N_i \quad (420)$$

Les éléments i et $i+1$, les efforts normaux et les moments fléchissant (Figure 11(a)), créent un glissement de l'élément i sur l'élément $i \pm 1$. Ce glissement s'exprime avec le bilan au niveau de la liaison i :

$$\begin{aligned} f_{i,i+1} - \left(df_{i,i+1} + f_{i,i+1}\right) &= \left(dx + \mathcal{E}_{i,u} dx\right) - \left(dx + \mathcal{E}_{i+1,o} dx\right) \text{ pour } i < s \\ f_{i,i-1} - \left(df_{i,i-1} + f_{i,i-1}\right) &= \left(dx + \mathcal{E}_{i-1,u} dx\right) - \left(dx + \mathcal{E}_{i,o} dx\right) \text{ pour } i > s \end{aligned}$$

En simplifiant, il apparait :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i,u} dx - \mathcal{E}_{i+1,o} dx + df_{i,i+1} &= 0 \\ \mathcal{E}_{i-1,u} dx - \mathcal{E}_{i,o} dx + df_{i,i-1} &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{i,u} - \mathcal{E}_{i+1,o} + \dfrac{df_{i,i+1}}{dx} = 0 \;\; i < s \; (a) \\ \mathcal{E}_{i-1,u} - \mathcal{E}_{i,o} + \dfrac{df_{i,i-1}}{dx} = 0 \;\; i > s \; (b) \end{cases} \quad (421)$$

Comme dans l'équation (421) le terme du glissement est utilisé avec sa dérivée et en posant l'hypothèse que les raideurs $K_{i,i\pm1}$ sont constantes avec un comportement linéaire élastique, il vient en remplaçant (358) dans (415) et en dérivant cette dernière par rapport à x, la relation entre le glissement et l'effort normal est :

$$\frac{df_{i,i\pm1}}{dx} = \frac{1}{K_{i,i\pm1}} \frac{dt_{w,i,i\pm1}}{dx} = \frac{1}{K_{i,i\pm1}} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \; \forall i \neq s \quad (422)$$

Note 6 : *La relation précédente présente l'hypothèse erronée pour la définition du flux de cisaillement.*

Il convient d'éliminer $df_{i,i\pm1}/dx$ de l'équation (421) en utilisant (416), (417) et (422) :

$$\begin{cases} \left(-\frac{N_i}{E_iA_i}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)-\left(-\frac{N_{i+1}}{E_{i+1}A_{i+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i+1}\right)+\frac{1}{K_{i,i+1}}\frac{d^2N_i}{dx^2}=0 & \forall i<s-1\ (a) \\ \left(-\frac{N_{s-1}}{E_{s-1}A_{s-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s-1}\right)-\left(+\frac{N_s}{E_sA_s}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)+\frac{1}{K_{s-1,s}}\frac{d^2N_{s-1}}{dx^2}=0 & i=s-1\ (b) \\ \left(\frac{N_s}{E_sA_s}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)-\left(\frac{N_{s+1}}{E_{s+1}A_{s+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s+1}\right)+\frac{1}{K_{s+1,s}}\frac{d^2N_{s+1}}{dx^2}=0 & i=s+1\ (c) \\ \left(\frac{N_{i-1}}{E_{i-1}A_{i-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i-1}\right)-\left(\frac{N_i}{E_iA_i}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)+\frac{1}{K_{i,i-1}}\frac{d^2N_i}{dx^2}=0 & \forall i>s+1\ (d) \end{cases} \quad (423)$$

Pour le système (423),quatre cas sont identifiés afin de mettre bien en évidence l'hypothèse d'un effort normal de traction pour le $s^{\text{ème}}$ élément : le signe « + » devant le terme N_s pour l'équation (423)(b) indique ce point. L'équation (423)(c) mets en lumière le terme N_s afin de préciser la résolution future. Les équations (423)(a) et (b) font référence à la relation (421)(a) et les équations (423)(c) et (d) sont issues de (421)(b).

Ces $n-1$ équations différentielles du second ordre ne peuvent pas être résolues simplement. Dans le but de calculer les N_i, il faut additionner au système (423) l'équation (420). Les équations (417), (418) permettront d'exprimer la rigidité effective EI_{ef} de $(\mathcal{p})$.

Soit $(\mathcal{E})$le système d'équations (423) à résoudre.

C.4.7. Résolution du système d'équation

Le moment fléchissant M_θ a une forme sinusoïdale selon (408), il vient que la forme des efforts normaux recherchée est la même. En effet, comme $dN_i=\frac{dM_i}{I_i}m_i$ selon (357) où m_i est le moment statique de l'élément i. En exprimant $m_i=A_iz_i$ avec z_i la distance de la section i par rapport aux centres des inerties, qui reste à définir. N_i peut s'exprimer de la manière suivante, en utilisant (417) :

$$N_i=\frac{M_i}{I_i}A_iz_i=\frac{M_\theta}{EI_{ef}}E_iA_iz_i=\frac{M_m}{EI_{ef}}E_iA_iz_i\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3} \quad (424)$$

Avec :

- EI_{ef} : rigidité effective ou rigidité globale de $(\mathcal{p})$,

De plus, comme le moment fléchissant M_θ dépend de l'indice de sommation θ il en va de même pour les efforts normaux. Cette remarque sera plus approfondie suite à la résolution du système $(\mathcal{E})$.

La résolution d'équations différentielles à fonctions inconnues n'est pas évidente à mener. Puisque la forme de la solution est supposée et peut être simplifiée en :

$$N_i(x)=\alpha_i\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3}$$
$$\alpha_i=\frac{M_m}{EI_{ef}}E_iA_iz_i \quad (425)$$

Où α_i est une constante indépendante de x à déterminer en fonction des propriétés et des dimensions des éléments de$(\mathcal{p})$. De plus :

$$\frac{d^2N_i(x)}{dx^2}=-\theta^2\omega^2\alpha_iSin(\theta\omega x)=-\theta^2\omega^2N_i(x)$$

Donc $(\mathcal{E})$ devient :

$$\begin{cases}\left(-\frac{N_i}{E_iA_i}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)-\left(-\frac{N_{i+1}}{E_{i+1}A_{i+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i+1}\right)-\frac{\theta^2\omega^2}{K_{i,i+1}}N_i=0 & \forall i<s-1\ (a)\\ \left(-\frac{N_{s-1}}{E_{s-1}A_{s-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s-1}\right)-\left(+\frac{N_s}{E_sA_s}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)-\frac{\theta^2\omega^2}{K_{s-1,s}}N_{s-1}=0 & i=s-1\ (b)\\ \left(\frac{N_s}{E_sA_s}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)-\left(\frac{N_{s+1}}{E_{s+1}A_{s+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s+1}\right)-\frac{\theta^2\omega^2}{K_{s+1,s}}N_{s+1}=0 & i=s+1\ (c)\\ \left(\frac{N_{i-1}}{E_{i-1}A_{i-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i-1}\right)-\left(\frac{N_i}{E_iA_i}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)-\frac{\theta^2\omega^2}{K_{i,i-1}}N_i=0 & \forall i>s+1\ (d)\end{cases} \quad (426)$$

En nettoyant le coefficient devant les termes d^2N_i/dx^2, il vient :

$$\begin{cases}\left(-\frac{N_i}{E_iA_i}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)\frac{K_{i,i+1}}{\theta^2\omega^2}-\left(-\frac{N_{i+1}}{E_{i+1}A_{i+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i+1}\right)\frac{K_{i,i+1}}{\theta^2\omega^2}-N_i=0 & \forall i<s-1\ (a)\\ \left(-\frac{N_{s-1}}{E_{s-1}A_{s-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s-1}\right)\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}-\left(+\frac{N_s}{E_sA_s}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}-N_{s-1}=0 & i=s-1\ (b)\\ \left(\frac{N_s}{E_sA_s}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_s\right)\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}-\left(\frac{N_{s+1}}{E_{s+1}A_{s+1}}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s+1}\right)\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}-N_{s+1}=0 & i=s+1\ (c)\\ \left(\frac{N_{i-1}}{E_{i-1}A_{i-1}}+\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i-1}\right)\frac{K_{i,i-1}}{\theta^2\omega^2}-\left(\frac{N_i}{E_iA_i}-\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_i\right)\frac{K_{i,i-1}}{\theta^2\omega^2}-N_i=0 & \forall i>s+1\ (d)\end{cases} \quad (427)$$

Soit $k_{i,i\pm1}$ tel que :

$$k_{i,i\pm1}=\frac{\omega^2E_iA_i}{K_{i,i\pm1}} \quad (428)$$

Et en réorganisant, il vient :

$$\begin{cases}-N_i-\frac{N_i}{k_{i,i+1}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{N_{i+1}}{k_{i+1,i+2}}\frac{K_{i,i+1}}{K_{i+1,i+2}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{K_{i,i+1}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i,i+1}=0 & \forall i<s-1\ (a)\\ -N_{s-1}-\frac{N_{s-1}}{k_{s-1,s}}\frac{1}{\theta^2}-\frac{N_s}{E_sA_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}+\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s-1,s}=0 & i=s-1\ (b)\\ -N_{s+1}-\frac{N_{s+1}}{k_{s+1,s}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{N_s}{E_sA_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}+\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{s,s+1}=0 & i=s+1\ (c)\\ -N_i-\frac{N_i}{k_{i,i-1}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{N_{i-1}}{k_{i-1,i-2}}\frac{K_{i,i-1}}{K_{i-1,i-2}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{K_{i,i-1}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_\theta}{EI_{ef}}v_{i-1,i}=0 & \forall i>s+1\ (d)\end{cases} \quad (429)$$

Avec :

$$v_{i,i+1}=v_i+v_{i+1} \quad (430)$$

Il est très important pour la suite des calculs de préserver le terme E_sA_s pour faciliter la simplification des expressions des N_i.

En remplaçant les fonctions N_i et M_θ par leurs formes (425) et (408), puis en factorisant par $Sin(\theta\omega x)/\theta^3$, il vient :

$$\begin{cases}\frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3}\left(-\alpha_i-\frac{\alpha_i}{k_{i,i+1}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{\alpha_{i+1}}{k_{i+1,i+2}}\frac{K_{i,i+1}}{K_{i+1,i+2}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{K_{i,i+1}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}v_{i,i+1}\right)=0 & \forall i<s-1\ (a)\\ \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3}\left(-\alpha_{s-1}-\frac{\alpha_{s-1}}{k_{s-1,s}}\frac{1}{\theta^2}-\frac{\alpha_s}{E_sA_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}+\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}v_{s-1,s}\right)=0 & i=s-1\ (b)\\ \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3}\left(-\alpha_{s+1}-\frac{\alpha_{s+1}}{k_{s+1,s}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{\alpha_s}{E_sA_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}+\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}v_{s,s+1}\right)=0 & i=s+1\ (c)\\ \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3}\left(-\alpha_i-\frac{\alpha_i}{k_{i,i-1}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{\alpha_{i-1}}{k_{i-1,i-2}}\frac{K_{i,i-1}}{K_{i-1,i-2}}\frac{1}{\theta^2}+\frac{K_{i,i-1}}{\theta^2\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}v_{i-1,i}\right)=0 & \forall i>s+1\ (d)\end{cases} \quad (431)$$

Le terme α_s est a remplacé par la relation suivante issue de l'équation (420) :

$$\alpha_s = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } i<s \\ 1 \text{ pour } i>s\end{cases}} \alpha_i \qquad (432)$$

Donc pour résoudre (431), soit $Sin(\theta\omega x)/\theta^3 = 0\ \forall x \in [0, L]$ pour les quatre sortes d'équations où les seconds termes doivent être nuls. Comme $\forall x \in]0, L[\ Sin(\theta\omega x)/\theta^3 \neq 0$, la résolution de $(\mathcal{E})$ revient à résoudre un simple système $(\mathcal{E}')$ de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues.

Pour y parvenir, l'utilisation de la méthode matricielle semble adéquate. Selon l'équation (32), il est possible de mettre les coefficients des $\alpha_i\ \forall i \neq s$ sous forme de matrice et les constantes indépendante des α_i peuvent être mises sous forme de vecteurs. Il en résulte :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix}
-1-\frac{1}{k_{1,2}}\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{k_{2,3}}\frac{K_{1,2}}{K_{2,3}}\frac{1}{\theta^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1-\frac{1}{k_{2,3}}\frac{1}{\theta^2} & \frac{1}{k_{3,4}}\frac{K_{2,3}}{K_{3,4}}\frac{1}{\theta^2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & -\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & -\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & \cdots & -1-\frac{1}{k_{s-1,s}}\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & \cdots & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s-1,s}}{\theta^2\omega^2} \\
\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & \cdots & \frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & -1-\frac{1}{k_{s+1,s}}\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & \cdots & -\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & -\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} & -\frac{1}{A_sE_s}\frac{K_{s+1,s}}{\theta^2\omega^2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k_{n-2,n-3}}\frac{K_{n-1,n-2}}{K_{n-2,n-3}}\frac{1}{\theta^2} & -1-\frac{1}{k_{n-1,n-2}}\frac{1}{\theta^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{k_{n-1,n-2}}\frac{K_{n,n-1}}{K_{n-1,n-2}}\frac{1}{\theta^2} & -1-\frac{1}{k_{n,n-1}}\frac{1}{\theta^2}
\end{pmatrix} \qquad (433)$$

Le vecteur des constantes s'écrit de la manière suivante :

$$B = \frac{1}{\theta^2\omega^2}\frac{M_m}{EI_{ef}}\left\{K_{1,2}v_{1,2}, \cdots, K_{s-1,s}v_{s-1,s}, K_{s+1,s}v_{s,s+1}, \cdots, K_{n,n-1}v_{n,n-1}\right\}^T \qquad (434)$$

Le vecteur des inconnues est composé des $\alpha_i\ \forall i \neq s$:

$$X = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}^T \qquad (435)$$

L'application de la méthode de CRAMER (§A.2) permet d'exprimer les solutions non triviales de $(\mathcal{E}')$: $\alpha_i\ \forall i \neq s$ et peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\alpha_i = \frac{M_m}{EI_{ef}}\frac{K_{i,i\pm1}k_{i,i\pm1}}{\omega^2}\frac{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} \quad \forall i \neq s \qquad (436)$$

Avec :

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{t=i}^{s-1} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s \\ j\notin[\![i,t]\!]}}^{n} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right), & i < s \\
\displaystyle\sum_{t=s+1}^{i} v_{t-1,t} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s \\ j\notin[\![t,i]\!]}}^{n} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right), & i > s
\end{cases}$$

$$\mathfrak{F}_2 = \begin{cases}
\displaystyle\sum_{t=1}^{n} v_{t,t+1}(-1)^{\not\theta} \sum_{\substack{u\in\mathbb{U} \\ u\neq s \\ u\neq i}} K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\notin\mathbb{J}}}^{n}\left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right), & \text{type 1} \\
\displaystyle\sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s \\ u\neq i}}^{n} K_{u,u+1}k_{u,u+1}(-1)^{\not\theta} \sum_{t\in\mathbb{T}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\notin\mathbb{J}}}^{n}\left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right), & \text{type 2}
\end{cases}$$

$$\mathfrak{F}_3 = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n}\left(1+\theta^2 k_j\right)$$

$$\mathfrak{F}_4 = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} K_{u,u\pm1} k_{u,u\pm1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\notin[\![s,u]\!]\ u>s \\ j\notin[\![u,s]\!]\ u<s}}^{n} \left(1+\theta^2 k_j\right)$$

La fonction $\mathfrak{F}_2$ peut s'exprimer de deux manières : la somme des $K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1}$ pour $v_{t,t+1}$ (type 1) et inversement (type 2). Les bornes des sommes et des produits pour la fonction $\mathfrak{F}_2$ ainsi que le paramètre $\not{p}$ sont explicités dans le tableau 84. La forme de la formule des α_i $\forall i \neq s$ indique la présence des termes du $s^{\text{ème}}$ élément sous la forme A_sE_s. De plus le dénominateur ne dépend pas de l'indice i, il est identiques $\forall i \neq s$ et par extension selon la relation (420) $\forall i$.

Tableau 84 : *Intervalles et bornes pour la fonction* $\mathfrak{F}_2$

Conditions	Type 1	Type 2	Générale		$\mathbb{U}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{J}$	$\not{p}$
$i<s$	$i<t+1$	$u>i$	$t<s$	$u>s$	$[\![1+t,n]\!]$	$[\![i,u-1]\!]$	$[\![i,t]\!]\cup[\![s,u]\!]$	0
	$i<t+1$	$u>i$	$t+s$	$u<s$	$[\![1+t,n]\!]$	$[\![i,u-1]\!]$	$[\![i,t]\!]\cup[\![u,s]\!]$	0
	$i<t+1$	$u>i$	$t\geq s$		$[\![1+t,n]\!]$	$[\![i,u-1]\!]$	$[\![i,s]\!]\cup[\![t+1,u]\!]$	0
	$i\geq t+1$	$u<i$			$[\![1,t]\!]$	$[\![u,i-1]\!]$	$[\![u,t]\!]\cup[\![i,s]\!]$	1
$i>s$	$i\geq t+1$	$u<i$	$t\geq s$	$u>s$	$[\![1,t]\!]$	$[\![u,i-1]\!]$	$[\![s,u]\!]\cup[\![t+1,i]\!]$	0
	$i\geq t+1$	$u<i$	$t\geq s$	$u<s$	$[\![1,t]\!]$	$[\![u,i-1]\!]$	$[\![u,s]\!]\cup[\![t+1,i]\!]$	0
	$i\geq t+1$	$u<i$	$t<s$		$[\![1,t]\!]$	$[\![u,i-1]\!]$	$[\![u,t]\!]\cup[\![s,i]\!]$	0
	$i<t+1$	$u>i$			$[\![1+t,n]\!]$	$[\![i,u-1]\!]$	$[\![s,i]\!]\cup[\![t+1,u]\!]$	1

La forme des solutions α_i étant compliquée, il convient de les simplifier. Pour cela, il faut calculer le terme α_s en s'inspirant du raisonnement du §C.4.4. Cela doit aboutir à une forme similaire. En utilisant la relation (432), cela conduit à :

$$\alpha_s = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } i<s \\ 1 \text{ pour } i>s\end{cases}} \alpha_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s\end{cases}} K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1}(\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)$$

En séparant la somme en deux, avec les termes au numérateur en fonction de A_sE_s puis le reste, il vient

$$\alpha_s = \frac{M_m}{EI_{ef}} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} \left(\sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} \omega^2 (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s\end{cases}} K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1} A_s E_s \mathfrak{F}_1 + \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s\end{cases}} K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1} \mathfrak{F}_2 \right)$$
$$= \frac{M_m}{EI_{ef}} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} (\Sigma_1 + \Sigma_2)$$

De manière non triviale, après décomposition de $\mathfrak{F}_2$, $\Sigma_2 = 0$. Il en découle une simplification de la forme de α_s :

$$\alpha_s = \frac{M_m}{EI_{ef}} A_s E_s \frac{1}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s\end{cases}} K_{u,u\pm1}k_{u,u\pm1} \mathfrak{F}_1$$

En identifiant cette relation avec l'expression (425), il vient

$$\alpha_s = \frac{M_m}{EI_{ef}} A_s E_s z_s$$

Il convient de simplifier l'expression de z_s. En divisant numérateur et dénominateur par le coefficient du terme A_sE_s du dénominateur, à savoir : $\omega^2\mathfrak{F}_3$, les rapports $\mathcal{R}_4 = \mathfrak{F}_4/\omega^2\mathfrak{F}_3$ et $\mathcal{R}_1 = \mathfrak{F}_1/\omega^2\mathfrak{F}_3$ doivent être retravaillés. Le premier rapport se réduit à :

$$\mathcal{R}_4 = \frac{\mathfrak{F}_4}{\omega^2 \mathfrak{F}_3} = \frac{\sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} \frac{K_{u,u\pm1} k_{u,u\pm1}}{\omega^2} \prod_{\substack{j=1 \\ j\notin[\![s,u]\!]\ u>s \\ j\notin[\![u,s]\!]\ u<s}}^{n} \left(1+\theta^2 k_j\right)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \left(1+\theta^2 k_j\right)} = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} \frac{\frac{K_{u,u\pm1} k_{u,u\pm1}}{\omega^2}}{\prod_{j\in[\![s,u]\!]\ u>s} \left(1+\theta^2 k_j\right)}$$

Le second rapport se simplifie et s'exprime de la manière suivante en jouant sur les indices :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mathfrak{F}_1}{\omega^2 \mathfrak{F}_3} = \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} \sum_{t=u}^{s-1} \frac{v_{t,t+1}}{\prod_{j=u}^{t} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)}, & u<s \\ \sum_{t=s+1}^{u} \frac{v_{t-1,t}}{\prod_{j=t}^{u} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)}, & u>s \end{cases} = \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} \sum_{t=u}^{s-1} \frac{v_{t,t+1}}{\prod_{j=u}^{t} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)}, & u<s \\ \sum_{t=s}^{u-1} \frac{v_{t,t+1}}{\prod_{j=t+1}^{u} \left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)}, & u>s \end{cases}$$

Les termes $\left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)$ étant au dénominateur, pour simplifier les expressions, à l'image de la relation (44), soit γ_i tel que :

$$\gamma_i = \frac{1}{1+\theta^2 k_{i,i\pm1}} \quad \forall i \neq s \qquad \textbf{(437)}$$

Comme il a été précisé dans l'avant dernière remarque de la section § 1.2.2.7, ce paramètre tient compte de l'image du chargement. Une autre manière d'introduire l'indice de sommation θ peut être de l'intégrer dans le paramètre $k_{i,i\pm1}$.

De plus, en utilisant (428), les rigidités des sections avec la relation $K_i k_i \omega^2 / = A_i E_i$ réapparaissent. Ainsi, avec ces considérations, il en découle une forme plus simple pour les rapports $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_1$:

$$\mathcal{R}_4 = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} A_u E_u \prod_{\substack{j\neq s \\ j\in[\![s,u]\!]\ u>s \\ j\in[\![u,s]\!]\ u<s}} \gamma_j = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} A_u E_u \begin{cases} \prod_{j=u}^{s-1} \gamma_j, & u<s \\ \prod_{j=s+1}^{u} \gamma_j, & u>s \end{cases} = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} A_u E_u \xi_u$$

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} \sum_{t=i}^{s-1} v_{t,t+1} \prod_{j=i}^{t} \gamma_j, & i<s \\ \sum_{t=s}^{i-1} v_{t,t+1} \prod_{j=t+1}^{i} \gamma_j, & i>s \end{cases} = \frac{1}{\omega^2} \zeta_i$$

Deux nouveaux paramètres sont créés qui permettent de simplifier grandement l'expression de z_s et donc α_s. L'analyse des solutions $\alpha_i \ \forall i \neq s$, s'en trouvera simplifiée.

$$z_s = \frac{\sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases} 0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s \end{cases}} K_{u,u\pm1} k_{u,u\pm1} \mathcal{R}_1}{A_s E_s + \mathcal{R}_4} = \frac{\sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} (-1)^{\begin{cases} 0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s \end{cases}} A_u E_u \zeta_u}{A_s E_s + \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s}}^{n} A_u E_u \xi_u}$$

Finalement, pour avoir un dénominateur encore plus simple, et enlever la condition $u \neq s$, il convient de poser $\xi_s = 1$ qui contraint le paramètre $\gamma_s = 1$ afin d'avoir sa continuité. Les bornes $s+1$ et $s-1$ peuvent donc devenir s. En ce qui concerne le paramètre ζ_i, il faut pour que $\zeta_s = 0$ pour que la somme pour tout $u \neq s$ devienne pour tout u ($\Sigma_{u\neq s} = \Sigma_{\forall u}$). Il vient :

$$z_s = \frac{\sum_{u=1}^{n} (-1)^{\begin{cases} 0 \text{ pour } u<s \\ 1 \text{ pour } u>s \end{cases}} A_u E_u \zeta_u}{\sum_{u=1}^{n} A_u E_u \xi_u} \qquad \textbf{(438)}$$

Le paramètre ξ_u qui représente l'influence des liaisons séparant l'élément u vis-à-vis de l'élément central s de la poutre :

$$\xi_u = \begin{cases} \prod_{j=u}^{s} \gamma_j \,, u < s \\ \prod_{j=s}^{u} \gamma_j \,, u > s \\ 1 \qquad\qquad u = s \end{cases} \qquad (439)$$

Le paramètre ζ_u caractérise la distance séparant l'élément étudié u avec l'élément central s de la poutre en prenant en compte l'influence des liaisons les séparant.

$$\zeta_u = \begin{cases} \sum_{t=u}^{s-1} v_{t,t+1} \prod_{j=u}^{t} \gamma_j \,, & u < s \\ \sum_{t=s}^{u-1} v_{t,t+1} \prod_{j=t+1}^{u} \gamma_j \,, & u > s \\ 0 & u = s \end{cases} \qquad (440)$$

L'écriture des solutions $\alpha_i \; \forall i \neq s$ peut s'exprimer en fonction de α_s comme le raisonnement du §C.4.4 le montre. Il convient de reproduire dans un premier temps la simplification par le terme en facteur de $A_s E_s$ revenant à retrouver les rapports $\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_1$ précédemment déterminés ainsi qu'un nouveau rapport $\mathcal{R}_2 = \mathfrak{F}_2/\omega^2\mathfrak{F}_3$ à retravailler. De plus, en tenant compte des relations (428) et (437), les rigidités des sections $A_i E_i$ et les coefficients γ_i peuvent apparaitre. Il en résulte :

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mathfrak{F}_2}{\omega^2\mathfrak{F}_3} = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s \\ u\neq i}}^{n} \frac{K_{u,u+1}k_{u,u+1}}{\omega^2}(-1)^{\not\Phi} \sum_{t\in\mathbb{T}} \frac{v_{t,t+1}}{\prod_{j\in\mathbb{J}}\left(1+\theta^2 k_{j,j\pm1}\right)} = \sum_{\substack{u=1 \\ u\neq s \\ u\neq i}}^{n} A_u E_u (-1)^{\not\Phi} \sum_{t\in\mathbb{T}} v_{t,t+1} \prod_{j\in\mathbb{J}} \gamma_j$$

Avec la relation (425), il vient $\forall i \neq s$:

$$\alpha_i = \frac{M_m}{EI_{ef}} \frac{K_{i,i\pm1}k_{i,i\pm1}}{\omega^2} \frac{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2}{\omega^2 A_s E_s \mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_4} = \frac{M_m}{EI_{ef}} A_i E_i \frac{\omega^2 A_s E_s \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}{\sum_{u=1}^{n} A_u E_u \xi_u} = \frac{M_m}{EI_{ef}} A_i E_i z_i$$

Comme auparavant, deux termes apparaissent, l'un en fonction de $\mathcal{R}_1$ et l'autre en fonction du nouveau rapport $\mathcal{R}_2$. Il convient de faire disparaitre les termes contenant $A_s E_s$ au numérateur. Pour cela il faut suivre la même technique déjà décrite à la relation (49). Il vient :

$$z_i = \frac{\omega^2 A_s E_s \mathcal{R}_1 - \omega^2 \mathcal{R}_1 \sum_{u=1}^{n} A_u E_u \xi_u + \mathcal{R}_2}{\sum_{u=1}^{n} A_u E_u \xi_u} + \omega^2 \mathcal{R}_1 = \frac{-\zeta_i \mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_2}{\sum_{u=1}^{n} A_u E_u \xi_u} + \zeta_i$$

Pour avoir une relation similaire à la forme […], il faut montrer que z_i est une fonction de la forme $\vartheta\left(z_s, v_{u,u+1} \forall u \in [\![1,n]\!]\right)$. Il en résulte que le terme $-\zeta_i \mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_2$ doit être une fonction du numérateur de z_s.

Il faut décomposer l'étude en deux cas : $i < s$ et $i > s$ ce qui permet de décomposer les rapports $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_4$ et les paramètres ξ_u, ζ_i pour faciliter le traitement en utilisant les données du tableau 84.

Pour $i < s$ le rapport $\mathcal{R}_2$ peut se scinder en quatre sommes comme ceci :

$$\mathcal{R}_2 = -\sum_{\substack{u \\ [\![1,i-1]\!]}} A_u E_u \sum_{\substack{t \\ [\![u,i-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j \\ [\![u,t]\!] \\ [\![i,s]\!]}} \gamma_j + \sum_{\substack{u \\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_u E_u \sum_{\substack{t \\ [\![i,u-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j \\ [\![i,t]\!] \\ [\![u,s]\!]}} \gamma_j + \sum_{\substack{u \\ [\![s+1,n]\!]}} A_u E_u \sum_{\substack{t \\ [\![i,s-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j \\ [\![i,t]\!] \\ [\![s,u]\!]}} \gamma_j$$
$$+ \sum_{\substack{u \\ [\![s+1,n]\!]}} A_u E_u \sum_{\substack{t \\ [\![s,u-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j \\ [\![i,s]\!] \\ [\![t+1,u]\!]}} \gamma_j = \mathcal{R}_{2,1} + \mathcal{R}_{2,2} + \mathcal{R}_{2,3} + \mathcal{R}_{2,4}$$

Pour $i < s$, le facteur ζ_i est égal à :

$$\zeta_i = \sum_{\substack{t \\ [\![i,s-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j \\ [\![i,t]\!]}} \gamma_j$$

Pour $i < s$, $-\zeta_i \mathcal{R}_4$ peut se scinder en quatre parties :

$$-\zeta_i\mathcal{R}_4 = -\left(\sum_{\substack{u\\ [\![1,i-1]\!]}} A_uE_u\prod_{\substack{j\\ [\![u,s]\!]}}\gamma_j + A_iE_i\prod_{\substack{j\\ [\![i,s]\!]}}\gamma_j + \sum_{\substack{u\\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_uE_u\prod_{\substack{j\\ [\![u,s]\!]}}\gamma_j + \sum_{\substack{u\\ [\![s+1,n]\!]}} A_uE_u\prod_{\substack{j\\ [\![s,u]\!]}}\gamma_j\right)\sum_{\substack{t\\ [\![i,s-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![i,t]\!]}}\gamma_j$$
$$= -\left(\mathcal{R}_{4,1} + \mathcal{R}_{4,2} + \mathcal{R}_{4,3} + \mathcal{R}_{4,4}\right)\zeta_i$$

Selon les indices de sommation sur u, les sommes des rapports $-\zeta_i\mathcal{R}_4$ et $\mathcal{R}_2$ peuvent être regroupés pour être comparés.

Pour $\mathcal{R}_{2,1} - \mathcal{R}_{4,1}\zeta_i$, il suffit de décomposer le produit de $\mathcal{R}_{4,1}$ sur l'intervalle $[\![u,s]\!]$ en deux produits : $[\![u,s]\!] = [\![u,t]\!] \cup [\![t+1,s]\!]$ puis d'augmenter le produit de ζ_i sur l'intervalle $[\![i,t]\!]$ vers l'intervalle $[\![i,t]\!] \cup [\![t+1,s]\!] = [\![i,s]\!]$, pour cela il faut diviser par le même produit sur l'intervalle $[\![t+1,s]\!]$. Ainsi le produit sur les intervalles $[\![u,s]\!] \cup [\![i,t]\!]$ est similaire au produit sur les intervalles $[\![u,t]\!] \cup [\![i,s]\!]$. Les sommes en t peuvent donc être regroupées, il vient en identifiant avec les relations (439) et (440) :

$$\mathcal{R}_{2,1} + \mathcal{R}_{4,1}\gamma_i\zeta_i = -\prod_{\substack{j\\ [\![i,s]\!]}}\gamma_j \sum_{\substack{u\\ [\![1,i-1]\!]}} A_uE_u \sum_{\substack{t\\ [\![u,s-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![u,t]\!]}}\gamma_j = -\xi_i\sum_{\substack{u\\ [\![1,i-1]\!]}} A_uE_u\zeta_u$$

$-\mathcal{R}_{4,2}\zeta_i$ peut se mettre sous la forme $-\xi_i(A_iE_i\zeta_i)$

$\mathcal{R}_{2,2} - \mathcal{R}_{4,3}\zeta_i$ peut se simplifier en décomposant en deux parties la somme en t de ζ_i : l'intervalle de sommation $[\![i,s-1]\!]$ devient deux intervalles $[\![i,u-1]\!] \cup [\![u,s-1]\!]$.

$$\mathcal{R}_{2,2} - \mathcal{R}_{4,3}\zeta_i = \sum_{\substack{u\\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_uE_u \sum_{\substack{t\\ [\![i,u-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![i,t]\!]\\ [\![u,s]\!]}}\gamma_j$$

$$- \sum_{\substack{u\\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_uE_u\prod_{\substack{j\\ [\![u,s]\!]}}\gamma_j\left(\sum_{\substack{t\\ [\![i,u-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![i,t]\!]}}\gamma_j + \sum_{\substack{t\\ [\![u,s-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![i,t]\!]}}\gamma_j\right)$$

Les produits en j d'intervalles $[\![u,s]\!] \cup [\![i,t]\!]$ peuvent être combinés en utilisant $[\![u,s]\!] = [\![u,i-1]\!] \cup [\![i,s]\!]$ pour donner les intervalles $[\![i,s]\!]$ et $[\![u,t]\!]$. En identifiant avec les relations (439) et (440) il vient :

$$\mathcal{R}_{2,2} - \mathcal{R}_{4,3}\zeta_i = -\prod_{\substack{j\\ [\![i,s]\!]}}\gamma_j \sum_{\substack{u\\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_uE_u \sum_{\substack{t\\ [\![u,s-1]\!]}} v_{t,t+1}\prod_{\substack{j\\ [\![u,t]\!]}}\gamma_j = -\xi_i\sum_{\substack{u\\ [\![i+1,s-1]\!]}} A_uE_u\zeta_u$$

$\mathcal{R}_{2,3} - \mathcal{R}_{4,4}\zeta_i$ s'annule car les sommes et les produits sont rigoureusement identiques.

$\mathcal{R}_{2,4}$ est le dernier terme à retravailler, en l'identifiant l'expression pour $u > s$ de la relation (440), il en résulte :

$$\mathcal{R}_{2,4} = \prod_{\substack{j\\ [\![i,s]\!]}}\gamma_j \sum_{\substack{u\\ [\![s+1,n]\!]}} A_uE_u \sum_{\substack{t\\ [\![s,u-1]\!]}} v_{t,t+1} \prod_{\substack{j\\ [\![t+1,u]\!]}}\gamma_j = \xi_i\sum_{\substack{u\\ [\![s+1,n]\!]}} A_uE_u\zeta_u$$

Les différences $\left(\mathcal{R}_{2,1} - \mathcal{R}_{4,1}\zeta_i\right) - \mathcal{R}_{4,2}\zeta_i + \left(\mathcal{R}_{2,2} - \mathcal{R}_{4,3}\zeta_i\right)$ peuvent être regroupées en un seul élément en combinant les intervalles de sommation sur u en un : $[\![1,i-1]\!] \cup [\![i]\!] \cup [\![i+1,s-1]\!] = [\![1,s-1]\!]$. En y ajoutant $\mathcal{R}_{2,4}$, il en découle que $\mathcal{R}_2 - \zeta_i\mathcal{R}_4$ est le numérateur de z_s au signe prêt

$$\mathcal{R}_2 - \zeta_i\mathcal{R}_4 = -\xi_i\sum_{\substack{u\neq s\\ [\![1,n]\!]}} (-1)^{\begin{cases}0 \text{ pour } u<s\\ 1 \text{ pour } u>s\end{cases}} A_uE_u\zeta_u$$

Pour $i < s$, z_i peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$z_{\substack{i\\ i<s}} = \zeta_i - \xi_i z_s$$

En réalisant le même processus pour $i > s$, il vient tout naturellement :

$$z_{\substack{i\\ i>s}} = \zeta_i + \xi_i z_s$$

Donc l'écriture des z_i peut se généraliser avec la formulation suivante $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$$z_i = \zeta_i + (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} \xi_i z_s \qquad (441)$$

z_s est défini par l'expression (438). L'identification de (441) avec celle caractérisant les distances a_i (414) permet d'avoir l'égalité entre $z_s = a_s$. La relation (414) permet d'exprimer a_s en fonction de a_i et r_i résumée ici :

$$a_s = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} (a_i - r_i) \qquad (442)$$

En combinant les relations (442) dans (441) il en résulte :

$$z_i = \zeta_i + \xi_i(a_i - r_i) = (\zeta_i - \xi_i r_i) + \xi_i a_i \qquad (443)$$

En inversant cette expression pour obtenir a_i, la relation (414) est obtenue. Le terme $(\zeta_i - \xi_i r_i)$ représente la part des termes $v_{i,i+1}$ influencés par les liaisons considérées. Pour $i \in [\![s-1, s+1]\!]$, il vient $(\zeta_i - \xi_i r_i) = 0$ se qui est en accord au regard de la relation (53) pour trois éléments (§1.2.2.7). Le terme ξ_i correspond à la généralisation pour n éléments du coefficient $\gamma_{1 \text{ ou } 3}$ pour trois éléments.

La relation (425) peut finalement être précisée $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$$N_i(x) = \alpha_i \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3} = \frac{M_m}{EI_{ef}} E_i A_i z_i \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^3} = \frac{M_\theta}{EI_{ef}} E_i A_i z_i \qquad (444)$$

Le coefficient γ_i dépend du paramètre θ, donc tous les termes dépendant de γ_i dépendent aussi de θ, c'est le cas des distances a_i, z_i et de l'effort normal N_i. Les termes en fonction de l'indice de sommation θ se verront attribuer l'indice θ, p.ex. : $N_{i,\theta}$. De plus, comme le chargement est en fonction de θ, les ingrédients de la RDM ainsi que la rotation des sections et la déformée en dépendent (Cf C.4.2). Il convient de déterminer le nombre total de sommations permettant un minimum d'erreur. L'étude de cette erreur selon le type de chargement est développée dans la section i.

La solution a été déterminée à partir de la forme $q_\theta(x) = q_m Sin(\theta\omega x)/\theta$. Toutefois, une forme plus globale fonctionne : $q_\theta(x) = C[1]Sin(\theta\omega x)/\theta + C[2]Cos(\theta\omega x)\theta$, où $C[1]$ et $C[2]$ sont des constantes. Cela signifie que toutes les combinaisons linéaires à base de $Sin(\theta\omega x)/\theta$ et de $Cos(\theta\omega x)/\theta$ sont des chargements pour $(\mathcal{p})$. En conséquence, comme un grand nombre de fonctions peuvent être exprimées en série de FOURIER, il est possible de réutiliser les résultats précédents pour un chargement réparti uniforme, pour un chargement réparti uniforme sur un tronçon de $(\mathcal{p})$ ou même pour un chargement ponctuel (voir §C.3 à la lumière du §C.1.4.2.). Ensuite avec le principe de superposition (Hypothèse 11), tous les cas possible de chargement de $(\mathcal{p})$ sur n appuis peuvent être envisagés en suivant les recommandations des sections §C.1.4 et §C.1.11.

C.4.8. Détermination de la rigidité effective

En combinant les relations (417), (418) et (444), la rigidité effective a pour expression :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{n} E_i I_i + E_i A_i a_i z_i = \sum_{i=1}^{n} E_i I_i + E_i A_i a_i \big((\zeta_i - \xi_i r_i) + \xi_i a_i\big) \qquad (445)$$

Les rigidités effectives minimales et maximales sont déterminées de la même manière que dans la section §1.2.2.8.

Pour des liaisons de raideur nulle $(K = 0)$, les coefficients $\gamma_i = 0\ \forall i \neq s$, donc la valeur $z_s = a_s = 0$. La rigidité effective minimale a pour formule :

$$EI_{ef,\min} = EI_0 = \sum_{i=1}^{n} E_i I_i \qquad (446)$$

Pour des liaisons de raideur infinie $(K \to \infty)$, $\gamma_i = 1\ \forall i$, le terme $(\zeta_i - \xi_i r_i) = 0$ et $\xi_i = 1$, il en résulte la rigidité effective maximale :

$$EI_{ef,\max} = \sum_{i=1}^{n} E_i \big(I_i + A_i a_i^2\big) \qquad (447)$$

La même remarque peut être faite ici que pour la section §1.2.2.8 pour la similitude avec le théorème de HUYGENS (Théorème 2). Les expressions des distances a_i (414) et (438) pour la rigidité maximale peuvent être simplifiées. Pour $\gamma_i = 1\ \forall i$ d'après la relation (439), les termes $\xi_u = 1\ \forall u$ et $\zeta_u = r_u\ \forall u$, il vient :

$$a_s = \frac{\sum_{u=1}^{n}(-1)^{\begin{cases}0 & \text{si } u<s\\ 1 & \text{si } u>s\end{cases}} E_u A_u r_u}{\sum_{u=1}^{n} E_u A_u}$$

$$a_i = r_i + (-1)^{\begin{cases}1 & si\ i<s\\ 0 & si\ i\geq s\end{cases}} a_s$$

Lorsque en plus les hauteurs des éléments sont identiques $h_i = h\ \forall i$ alors $v_i = h/2\ \forall i$, $A_i = b_i h\ \forall i$ et $I_i = b_i h^3/12\ \forall i$ donc :

$$r_u = \begin{cases} \sum_{t=u}^{s-1} v_{t,t+1} & u < s \\ \\ \sum_{t=s}^{u-1} v_{t,t+1} & u > s \\ 0 & u = s \end{cases} = h \begin{cases} (s-u) & u < s \\ -(s-u) & u > s \\ 0 & u = s \end{cases} = (-1)^{\begin{cases}0 & si\ u<s\\ 1 & si\ u>s\end{cases}} h(s-u)$$

Donc a_s peut se simplifier de la manière suivante :

$$a_s = \frac{\sum_{u=1}^{n}(-1)^{\begin{cases}0 & si\ u<s\\ 1 & si\ u>s\end{cases}} E_u A_u r_u}{\sum_{u=1}^{n} E_u A_u} = \frac{\sum_{u=1}^{n}(-1)^{\begin{cases}0 & si\ u<s\\ 1 & si\ u>s\end{cases}} E_u b_u (-1)^{\begin{cases}0 & si\ u<s\\ 1 & si\ u>s\end{cases}} h(s-u)}{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u} = h\frac{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u (s-u)}{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u}$$

De même pour a_i:

$$a_i = r_i + (-1)^{\begin{cases}1 & si\ i<s\\ 0 & si\ i\geq s\end{cases}} a_s = (-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} h(s-i) + (-1)^{\begin{cases}1 & si\ i<s\\ 0 & si\ i\geq s\end{cases}} h\frac{\sum_{p=1}^{n} E_p b_p (s-p)}{\sum_{p=1}^{n} E_p b_p}$$

$$= \frac{(-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} h\sum_{u=1}^{n} E_u b_u (s-i) - (s-u)}{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u} = (-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} h\frac{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u (u-i)}{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u}$$

Il vient $\forall i$:

$$a_i = h(-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} \frac{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u (u-i)}{\sum_{u=1}^{n} E_u b_u} \quad \textbf{(448)}$$

Lorsque $b_i = b\ \forall i$, il vient $\forall i$:

$$a_i = h(-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} \frac{\sum_{u=1}^{n} E_u (u-i)}{\sum_{u=1}^{n} E_u} \quad \textbf{(449)}$$

Puis lorsque $E_i = E\ \forall i$, il vient $\forall i$:

$$a_i = h(-1)^{\begin{cases}0 & si\ i<s\\ 1 & si\ i\geq s\end{cases}} \frac{1}{2}(1+n-2i) \quad \textbf{(450)}$$

Il est également possible de calculer le facteur de perte définie dans la section §6.3.1.3 à savoir l'expression de $\mathfrak{G}$ (224) reprise ici :

$$\mathfrak{G} = \frac{EI_{ef} - EI_{ef,\min}}{EI_{ef,\max} - EI_{ef,\min}} = \frac{EI_{ef} - EI_0}{EI_B} \quad \textbf{(451)}$$

Avec $\mathfrak{G} \in [0,1]$.

Il faut aussi prendre en compte que la rigidité effective EI_{ef} est en fonction de θ et est notée $EI_{ef,\theta}$ lorsque ce sera le cas. Afin de calculer la rigidité effective totale $EI_{ef,\text{tot}}$, il convient de la déterminer en tenant compte de la déformée du chargement. En effet, par le principe de superposition (Hypothèse 11), la déformée pour le chargement de forme générale $\beta_\theta q_\theta(x) = \beta_\theta q_m Sin(\theta\omega x)/\theta$ peut être calculée en s'inspirant de la relation (410), puis en sommant cette valeur en θ. Il vient la déformée totale :

$$w(x) = w_m \sum_\theta \frac{\beta_\theta}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin(\theta\omega x)}{\theta^5} = \frac{1}{EI_{ef,\text{tot}}} \iint M(x)dx$$

Pour le chargement réparti uniforme il en découle :

$$w(x) = -\frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin\left((2\theta-1)\frac{\pi}{L}x\right)}{(2\theta-1)^5} = -\frac{q_m}{24}\frac{1}{EI_{ef,\text{tot}}} x(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

Pour $x = L/2$ la flèche vaut :

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{4L^4}{\pi^5} q_m \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin\left((2\theta-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2\theta-1)^5} = -\frac{5q_m L^4}{384} \frac{1}{EI_{ef,\text{tot}}}$$

Il vient donc :

$$\frac{1}{EI_{ef,\text{tot}}} = \frac{4\times 384}{5\pi^5} \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{Sin\left((2\theta-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2\theta-1)^5} = \frac{1536}{5\pi^5} \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{1}{EI_{ef,\theta}} \frac{(-1)^{\theta-1}}{(2\theta-1)^5}$$

Lorsque la rigidité effective est minimale (446) ou maximale (447), le terme $1/EI_{ef,\theta} = 1/EI_{ef,\text{min ou max}}$ est indépendant de θ et peut être sorti de la somme. Il vient l'égalité de $EI_{ef,\text{tot}} = 1/EI_{ef,\text{min ou max}}$ suite à la relation suivante :

$$\frac{1536}{5\pi^5} \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\theta-1}}{(2\theta-1)^5} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\theta=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\theta-1}}{(2\theta-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536} = 0.996$$

C.4.9. Détermination des contraintes

En suivant les définitions des contraintes normales de la section §C.4.3, de l'effort normale N_i (444), du moment (417), le cheminement pour le calcul des contraintes normales et de cisaillement conformément au §1.2.2.9 peut être suivi.

- **Contraintes normales**

Selon la relation (411), les contrainte dues à l'effort normal a pour expression :

$$\sigma_{i,N} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} \frac{N_i}{A_i} = (-1)^{\begin{cases}1 \text{ pour } i<s \\ 0 \text{ pour } i\geq s\end{cases}} \frac{E_i}{EI_{ef}} z_i M_\theta \text{ pour } -v_i + a_i \leq z \leq v_i + a_i \qquad (452)$$

Cette contrainte est constante sur toute la hauteur de l'élément i.

La contrainte due au moment fléchissant s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma_{i,M} = \frac{M_i}{I_i} z = \frac{E_i}{EI_{ef}} M_\theta z \text{ pour } -v_i + a_i \leq z \leq v_i + a_i \qquad (453)$$

La contrainte normale totale est la somme de ces deux contraintes précédentes :

$$\sigma_i = \sigma_{i,N} + \sigma_{i,M} = \frac{E_i}{EI_{ef}} M_\theta (z_i + z) \text{ pour } -v_i + a_i \leq z \leq v_i + a_i \qquad (454)$$

- **Contrainte tangentielle**

Selon la section §C.2, la contrainte de cisaillement se calcule selon la relation suivante :

$$\tau_i(x,z) = \frac{1}{A_i}\frac{\partial N_i(x)}{\partial x}\left(\frac{h_i}{2} - z\right) + \frac{1}{I_i}\frac{\partial M_i(x)}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{h_i}{2}\right)^2 - z^2\right) + \frac{1}{b_i}\sum_{k=1}^{i-1}\frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \text{ pour } -\frac{h_i}{2} \leq z \leq \frac{h_i}{2} \qquad (455)$$

La contrainte de cisaillement maximale se situe pour $\partial\tau_i(x,z)/\partial z = 0$.

- **Force au niveau de l'interface**

En calculant la contrainte de cisaillement d'après la relation précédente au niveau de l'interface entre la lamelle i et la lamelle $i+1$, la force par organe et par plan de cisaillement se détermine selon la relation suivante :

$$F_{i,i\pm1} = e_{i,i\pm1} \sum_{k=1}^{i} \frac{\partial N_k(x)}{\partial x} \qquad (456)$$

C.4.10. Comparaison

La comparaison s'effectue avec les mêmes valeurs numériques indiquées dans la section §6.2.3 dont les valeurs numériques sont répertoriées dans le tableau 31.

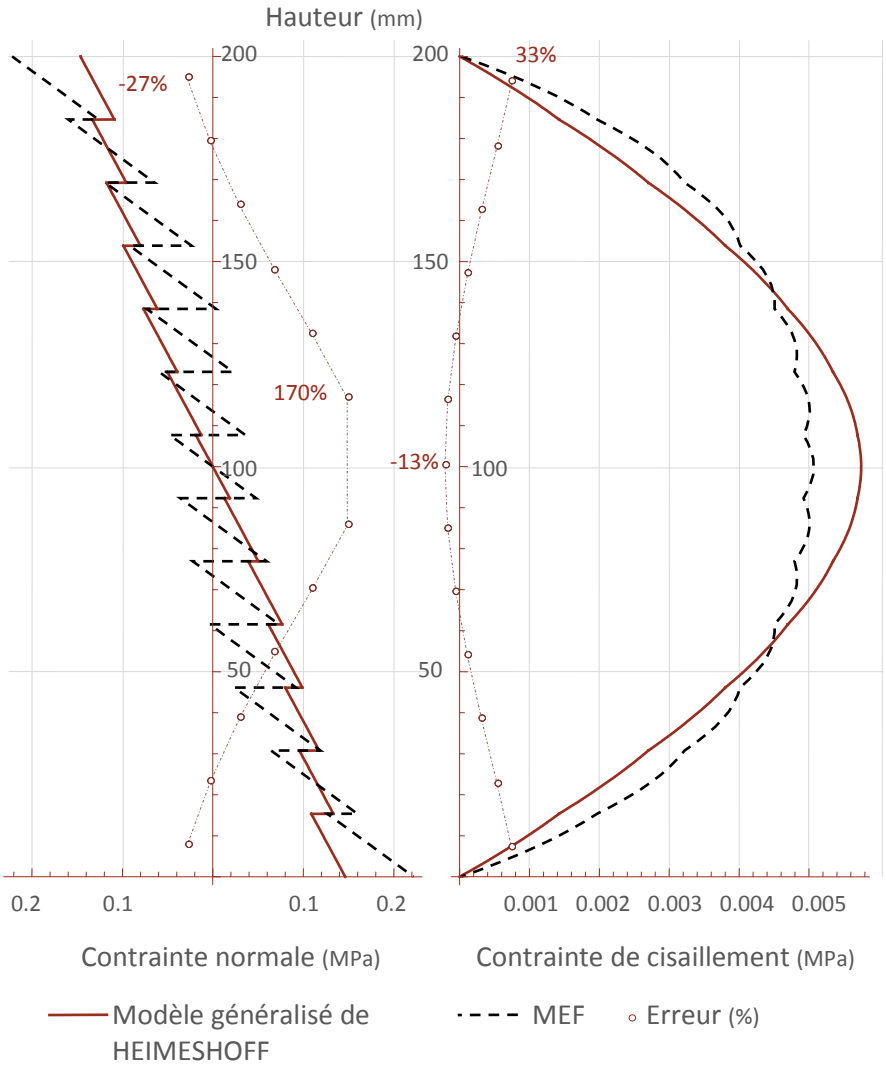


Figure 216 : *Diagramme des contraintes – comparaison entre le modèle généralisé selon la méthode de HEIMESHOFF et le MEF*

Selon les résultats présentés aux figure 216, figure 217 et figure 218, ce modèle ne représente pas du tout le comportement en flexion souhaité de la poutre composite. En effet, il possède un comportement antinomique du MEF puisqu'il minimise les contraintes aux extrémités et maximise les contraintes aux centres de la section pour l'étude présente.

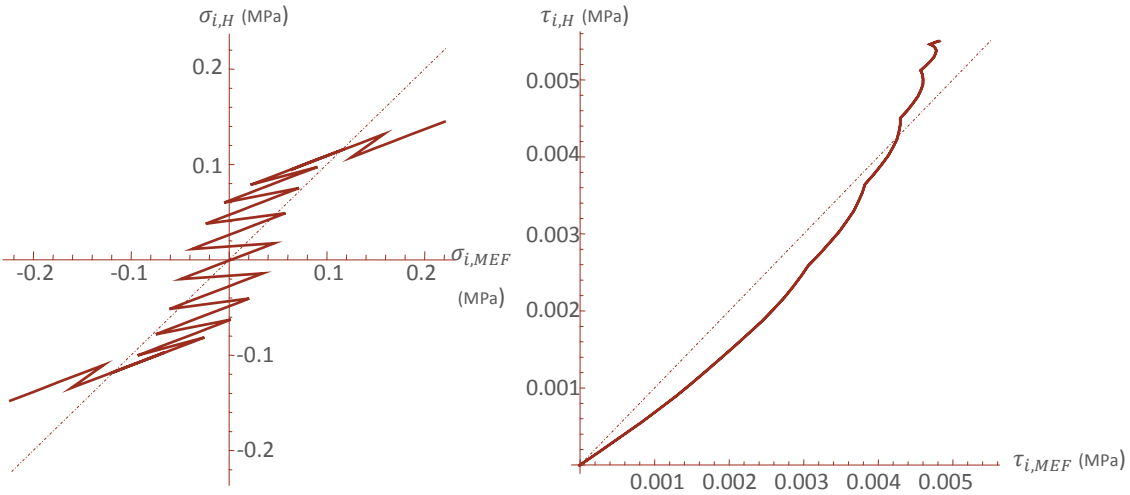


Figure 217 : *Diagrammes des contraintes du modèle généralisé selon la méthode de HEIMESHOFF en fonction du MEF*

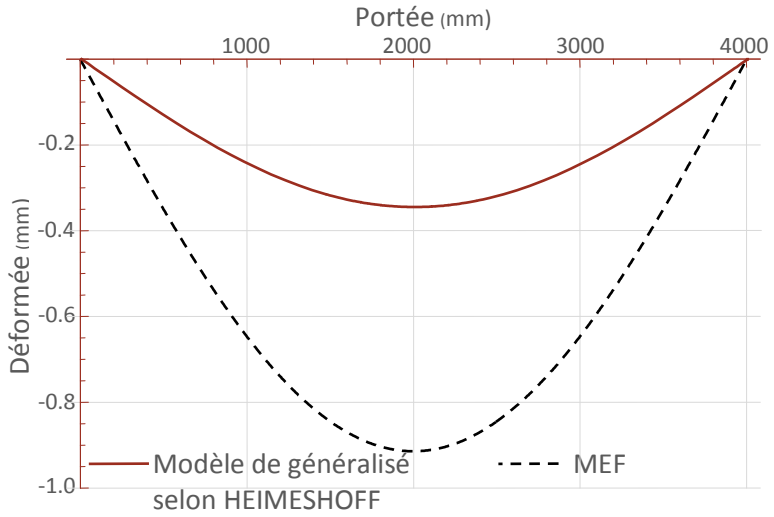


Figure 218 : *Déformée de la poutre pour le modèle généralisé selon la méthode de HEIMESHOFF et le MEF*

Les valeurs obtenues des flèches (Tableau 85) le confirment puisque la rigidité effective devient plus importante que prévu. Selon la figure 216, ce modèle ne tient pas compte du glissement des lamelles se situant entre l'élément i de l'élément s.

Comme cette généralisation ne satisfait pas le comportement de la poutre composite selon le MEF, il convient de généraliser la méthode exacte présentée à la section §1.2.3.

Tableau 85 : *Valeurs numériques de la flèche et de la rigidité pour le modèle généralisé selon la méthode d'HEIMESHOFF et le MEF*

	MEF	Modèle généralisé H	Erreurs
Flèche (mm)	0.91294	0.359156	61%
Rigidité (Nmm^2)	2.8787×10^{11}	7.31742×10^{11}	154%

C.5. Vers la généralisation de la méthode exacte

La partie traitée ici présente la démarche pour déterminer les coefficients remarquables permettant la généralisation du système linéaire de la section §6.3.1.1. Pour bien comprendre cette section, il convient de s'imprégner de la mise en équations du système étudié à la section §6.3.1.

Afin d'avoir une forme de solution plus facilement exploitable, il convient de calculer les équations pratiquement une à une pour apercevoir une forme générique qui puisse simplifier les expressions des solutions u_{0i} et w_0. Cette opération fastidieuse est pratiquement la seule manière pour voir apparaitre les paramètres qui simplifient les solutions.

La suite utilise les quatre premières équations pour percevoir la manière de parvenir à généraliser la méthode. Il va de soit que par symétrie par rapport à l'équation centrale, ici la nullité des contributions des efforts normaux, le mécanisme sera identique. Le but des ces simplifications est de faire disparaitre les termes EA_i et les raideurs $K_{i,i+1}$ des expressions des inconnues.

Il convient de simplifier l'écriture de la résolution de la première équation à résoudre, il vient :

$$-EA_1\omega^2 u_{01} + K_{1,2}\left(u_{02} - u_{01} + \omega w_0 v_{1,2}\right) = 0$$

$$u_{01} = K_{1,2}\frac{u_{02} + \omega w_0 v_{1,2}}{K_{1,2} + EA_1\omega^2} = \frac{u_{02} + \omega w_0 v_{1,2}}{1 + \dfrac{EA_1\omega^2}{K_{1,2}}} \qquad (457)$$

En posant les deux paramètres suivants :

$$\beta_{s,1} = \frac{EA_1\omega^2}{K_{1,2}}, \qquad \beta_{0,1} = \frac{1}{1+\beta_{s,1}} \qquad (458)$$

L'écriture de la solution u_{01} peut se simplifier en la relation suivante :

$$u_{01} = \beta_{0,1}\left(u_{02} + \omega w_0 v_{1,2}\right) \quad (459)$$

La seconde équation dépend des contributions de u_1, u_2, u_3 et w. Pour commencer le processus de simplification, il faut remplacer l'écriture de u_{01} par la relation (459). Il en résulte :

$$\begin{aligned} &-\omega^2 EA_2 u_{02} - K_{2,3}\left(u_{03} - u_{02} + \omega w_0 v_{2,3}\right) + K_{1,2}\left(u_{02} - u_{01} + \omega w_0 v_{1,2}\right) \\ &-\omega^2 EA_2 u_{02} - K_{2,3}\left(u_{03} - u_{02} + \omega w_0 v_{2,3}\right) + K_{1,2}\left(u_{02} - \beta_{0,1}\left(u_{02} + \omega w_0 v_{1,2}\right) + \omega w_0 v_{1,2}\right) \end{aligned} \quad (460)$$

En s'inspirant des relations (254), il vient les nouveaux paramètres :

$$\beta_{s,2} = \frac{EA_2\omega^2}{K_{2,3}}, \qquad \beta_{0,2} = \frac{1}{1+\beta_{s,2}} \quad (461)$$

L'équation (460) se simplifie en :

$$u_{02} = \frac{-\omega w_0 v_{1,2} EA_1 \beta_{0,1}\left(1-\beta_{0,2}\right) + EA_2\beta_{0,2}\left(u_{03} + \omega w_0 v_{2,3}\right)}{EA_2 + EA_1\beta_{0,1}\left(1-\beta_{0,2}\right)} \quad (462)$$

Cette forme contient toujours les termes des rigidités des sections 1 et 2. Il apparait une possible simplification en posant deux nouveaux paramètres de la forme :

$$\beta_{t,2} = \frac{EA_1\beta_{0,1}\left(1-\beta_{0,2}\right)}{EA_2}, \qquad \beta_{1,2} = \frac{1}{1+\beta_{t,2}} \quad (463)$$

Il en résulte :

$$u_{02} = u_{03}\beta_{0,2}\beta_{1,2} + \omega w_0\left(\beta_{0,2}\beta_{1,2}v_{2,3} - \left(1-\beta_{1,2}\right)v_{1,2}\right) \quad (464)$$

La troisième équation s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &-\omega^2 EA_3 u_{03} - K_{3,4}\left(u_{04} - u_{03} + \omega w_0 v_{3,4}\right) + K_{2,3}\left(u_{03} - u_{02} + \omega w_0 v_{2,3}\right) \\ &-\omega^2 EA_3 u_{03} - K_{3,4}\left(u_{04} - u_{03} + \omega w_0 v_{3,4}\right) \\ &\quad + K_{2,3}\left(u_{03} - \left(u_{03}\beta_{0,2}\beta_{1,2} + \omega w_0\left(\beta_{0,2}\beta_{1,2}v_{2,3} - \left(1-\beta_{1,2}\right)v_{1,2}\right)\right) + \omega w_0 v_{2,3}\right) \end{aligned} \quad (465)$$

En s'inspirant des relations (458)et (461), soit les deux nouveaux paramètres suivants :

$$\beta_{s,3} = \frac{EA_3\omega^2}{K_{3,4}}, \qquad \beta_{0,3} = \frac{1}{1+\beta_{s,3}} \quad (466)$$

L'équation (465) peut se simplifier en :

$$\begin{aligned} u_{03} &= \\ &\frac{\omega w_0 EA_2\beta_{0,2}\left(1-\beta_{0,3}\right)\left(\left(1-\beta_{1,2}\right)v_{1,2} + \left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)v_{2,3}\right) - EA_3\beta_{0,3}\left(1-\beta_{0,2}\right)\left(u_{04} + \omega w_0 v_{3,4}\right)}{-EA_3\left(1-\beta_{0,2}\right) - EA_2\beta_{0,2}\left(1-\beta_{0,3}\right)\left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)} \end{aligned} \quad (467)$$

En s'inspirant des paramètres (463), il vient :

$$\beta_{t,3} = \frac{EA_2\beta_{0,2}\left(1-\beta_{0,3}\right)\left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)}{EA_3\left(1-\beta_{0,2}\right)}, \qquad \beta_{1,3} = \frac{1}{1+\beta_{t,3}} \quad (468)$$

Finalement u_{03} s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{03} = u_{04}\beta_{0,3}\beta_{1,3} &\\ + \frac{\omega w_0}{\left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)}&\left(\left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)\beta_{0,3}\beta_{1,3}v_{3,4} - \left(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2}\right)\left(1-\beta_{1,3}\right)v_{2,3}\right. \\ &\left. - \left(1-\beta_{1,2}\right)\left(1-\beta_{1,3}\right)v_{1,2}\right) \end{aligned} \quad (469)$$

Les expressions des solutions commencent à devenir compliquées tout en respectant la règle fixée de faire disparaitre les termes EA_i et $K_{i,i+1}$.

La résolution de la quatrième équation demande de poser les quatre nouveaux paramètres selon les relations (458), (461), (463), (466) et (468) :

$$\beta_{s,4} = \frac{EA_4\omega^2}{K_{4,5}}, \qquad \beta_{0,4} = \frac{1}{1+\beta_{s,4}}, \qquad \beta_{t,4} = \frac{EA_3\beta_{0,3}\left(1-\beta_{0,4}\right)\left(1-\beta_{0,3}\beta_{1,3}\right)}{EA_4\left(1-\beta_{0,3}\right)}, \qquad \beta_{1,4} = \frac{1}{1+\beta_{t,4}} \quad (470)$$

L'expression de u_{04} devient :

$$\begin{aligned} u_{04} = u_{05}\beta_{0,4}\beta_{1,4} \\ + \frac{\omega w_0}{(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2})(1-\beta_{0,3}\beta_{1,3})}\Big((1-\beta_{0,2}\beta_{1,2})(1-\beta_{0,3}\beta_{1,3})\beta_{0,4}\beta_{1,4}v_{4,5} \\ -(1-\beta_{0,2}\beta_{1,2})(1-\beta_{0,3}\beta_{1,3})(1-\beta_{1,4})v_{3,4} - (1-\beta_{0,2}\beta_{1,2})(1-\beta_{1,3})(1-\beta_{1,4})v_{2,3} \\ -(1-\beta_{1,2})(1-\beta_{1,3})(1-\beta_{1,4})v_{1,2}\Big) \end{aligned} \quad (471)$$

Il apparait une certaine forme remarquable pour les solutions u_{0i}. De plus les formes des paramètres $\beta_{t,2}$, $\beta_{t,3}$ et $\beta_{t,4}$ peuvent être regroupés en une seule forme pour $i < s$:

$$\beta_{t,i} = \frac{EA_{i-1}\beta_{0,i-1}(1-\beta_{0,i})(1-\beta_{0,i-1}\beta_{1,i-1})}{EA_i(1-\beta_{0,i-1})}, \qquad \beta_{1,i} = \frac{1}{1+\beta_{t,i}} \quad (472)$$

Pour $\beta_{1,1} = 1$.

Par symétrie par rapport au $s^{\text{ème}}$ élément, il vient pour $i > s$:

$$\beta_{t,i} = \frac{EA_{i+1}\beta_{0,i+1}(1-\beta_{0,i})(1-\beta_{0,i+1}\beta_{1,i+1})}{EA_i(1-\beta_{0,i+1})}, \qquad \beta_{1,i} = \frac{1}{1+\beta_{t,i}} \quad (473)$$

Pour $\beta_{1,n} = 1$.

Les paramètres $\beta_{s,i}$ *et* $\beta_{0,i}$ peuvent aussi être généralisés en posant $\beta_{0,s} = 1$:

$$\beta_{s,i} = \frac{EA_i\omega^2}{K_{i,i\pm1}}, \qquad \beta_{0,i} = \frac{1}{1+\beta_{s,i}}, \text{ pour } i \neq s \quad (474)$$

En utilisant la relation déterminant la nullité des contributions des efforts normaux, la première équation de (206), la solution u_{0s} peut être déterminée en fonction de w_0, puis en remontant ou descendant vers les solutions extrémales u_{01} et u_{0n}, les solutions u_{0i} s'expriment en fonction de w_0. Il est ainsi possible de réduire l'expression des u_{0i} selon la relation suivante :

$$u_{0i} = \omega w_0 \alpha_i \quad (475)$$

Avec (solutions récursives) :

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{i+1}\beta_{0,i}\beta_{1,i} + v_{i,i+1} - (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i})\displaystyle\sum_{k=1}^{i} v_{k,k+1}\prod_{j=k+1}^{i}\frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i < s \\ \alpha_{i-1}\beta_{0,i}\beta_{1,i} - v_{i-1,i} + (1-\beta_{0,i}\beta_{1,i})\displaystyle\sum_{k=i}^{n} v_{k-1,k}\prod_{j=i}^{k-1}\frac{1-\beta_{1,j}}{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}} & i > s \\ -\dfrac{\alpha_{\text{num},s}}{\alpha_{\text{den},s}} & i = s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{num},s} = EA_1\prod_{j=1}^{s-1}\beta_{0,j}\prod_{j=2}^{s-1}\beta_{1,j}\left(v_{1,2} + \sum_{i=2}^{s-1} v_{i,i+1}\prod_{j=2}^{i}\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}\right) \\ - EA_n\prod_{j=s+1}^{n}\beta_{0,j}\prod_{j=s+1}^{n-1}\beta_{1,j}\left(\sum_{i=s}^{n-2} v_{i,i+1}\prod_{j=i+1}^{n-1}\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} + v_{n-1,n}\right) \end{aligned} \quad (476)$$

$$\alpha_{\text{den},s} = EA_1\prod_{j=1}^{s-1}\beta_{0,j}\prod_{j=2}^{s-1}\beta_{1,j}\prod_{j=2}^{s-1}\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}} + EA_s + EA_n\prod_{j=s+1}^{n}\beta_{0,j}\prod_{j=s+1}^{n-1}\beta_{1,j}\prod_{j=s+1}^{n-1}\frac{1-\beta_{0,j}\beta_{1,j}}{1-\beta_{1,j}}$$

L'expression de α_s est beaucoup plus compliquée que celles des α_i pour $i \neq s$ de prime abord, mais si les expressions étaient simplifiées en cassant les définitions récurrentes des α_i pour $i \neq s$, les expressions seraient tout aussi compliquées que celle de α_s

L'étude du terme $\alpha_{\text{den},s}$ montre que la rigidité de section EA_s n'apparait explicitement qu'ici. Pour retrouver les résultats de l'étude pour deux éléments (§1.2.3), il convient d'aménager les termes EA_n des expressions de $\alpha_{\text{num},s}$ et $\alpha_{\text{den},s}$ en leur attribuant par exemple un paramètre conditionnel qui vaut 1 pour $n > 2$ et 0 sinon.

La résolution de la deuxième équation de (206), en utilisant l'expression simplifiée des solutions u_{0i} (475) devient :

$$w_0 = \frac{q_m}{\omega^4}\frac{1}{EI_{ef}} \quad \textbf{(477)}$$

Avec :

$$EI_{ef} = \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i=1}^{s-1} EA_i v_{i,i+1}\frac{v_{i,i+1} - (\alpha_i - \alpha_{i+1})}{\beta_{s,i}} + \sum_{i=s+1}^{n} EA_i v_{i-1,i}\frac{v_{i-1,i} - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)}{\beta_{s,i}} \quad \textbf{(478)}$$

Ainsi, il apparait la contribution des rigidités de section EA_i pour $i \neq s$.

A titre de comparaison avec la généralisation de la méthode selon HEIMESHOFF énoncé à la section §C.4, il est possible d'exprimer le flux de cisaillement $t_{w,i,i+1}$ de deux manières : (194) et (197).

Il en résulte selon (195) :

$$\sum_{j=1}^{i} E_j A_j u_j'' + K_{i,i+1}\left(u_{i+1} - u_i + w' v_{i,i+1}\right) = 0 \quad \textbf{(479)}$$

Ou

$$\sum_{j=i+1}^{n} E_j A_j u_j'' - K_{i,i+1}\left(u_{i+1} - u_i + w' v_{i,i+1}\right) = 0 \quad \textbf{(480)}$$

Ces équations différentielles représentent globalement la version intégrée du système d'équations différentielles de la généralisation selon la méthode de GIRHAMMAR (423). La différence importante provient du terme représentant le flux de cisaillement. Celui-ci somme les dérivées secondes par rapport à x des déplacements selon x.

C.6. Principe d'analyse des éléments de type plaque

De la même manière que pour la théorie des éléments de type poutre, l'analyse des éléments de type plaque repose sur des hypothèses sur le matériau ainsi que sur la géométrie. L'étude des plaques dites minces sera présentée. La théorie décrite ici provient principalement de LEKHNITSKII [32] et de COURBON [104]. L'étude porte principalement sur un matériau orthotrope.

C.6.1. Hypothèses

> **Définition 15 :** *Soit une plaque d'épaisseur* $\boldsymbol{h}$*. Une plaque mince est un solide limité par deux plans voisins d'équations* $\boldsymbol{z = \pm h/2}$ **[104]** *dont l'épaisseur* $\boldsymbol{h}$ *est petite devant les autres dimensions du plan moyen. Le plan moyen est situé à* $\boldsymbol{z = 0}$ *et porte les même considérations que celles des poutres au point de vue de l'application des charges.*

En plus de l'hypothèse des petits déplacements (Hypothèse 10), quatre nouvelles hypothèses spécifiques à l'élément de type plaque mince doivent être posées.

- **Hypothèse sur l'application des charges extérieures** [104] [32]

  Hypothèse 14 : *Les forces extérieures sont appliquées dans le plan moyen ou normal à celui-ci.*

- **Hypothèses sur la contrainte selon la hauteur de la plaque mince** [104] [32]

  Hypothèse 15 : *La contrainte normale selon la hauteur (*$\boldsymbol{\sigma_z}$ *pour un repère cartésien) de la plaque mince sur tout plan parallèle au plan moyen est négligée.*

- **Hypothèse sur la flexion pure du plan moyen** [104] [32]

  Hypothèse 16 : *Lorsqu'une plaque mince est soumise à de la flexion, alors le plan moyen est simplement fléchit et dépend donc uniquement de son déplacement selon la hauteur.*

- **Hypothèses sur la planéité des sections après déformation à l'image de l'hypothèse de BERNOUILLI (**Hypothèse 5**)** [104] [32]

Hypothèse 17 : *Une section de la plaque mince normale au plan moyen reste plane à la suite de la déformation de celle-ci.*

Ainsi, selon cette hypothèse, il est possible d'exprimer les déplacements de la plaque mince selon les trois directions d'un plan cartésien par exemple [104] :

$$u = -z\frac{dw}{dx}, \qquad v = -z\frac{dw}{dy}, \qquad w = w(x,y) \tag{481}$$

C.6.2. Déformations et contraintes

En supposant que la loi de HOOK (Hypothèse 3) reste valide pour les plaques minces, la relation entre les déformations et les contraintes internes peut être établie. Pour un matériau orthotrope, la matrice de HOOK (324) permet de relier les déformations $\mathcal{E}$ et les contraintes $\mathcal{S}$ [32](61.3) :

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}_{\text{HOOK}}.\mathcal{S}, \qquad \begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0\\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix} \tag{482}$$

Où les déformations ont pour expression [32](61.2) :

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{pmatrix} \tag{483}$$

Le comportement est donc fonction de quatre constantes puisque $\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$, puis de la forme de la déformée w.

En résolvant (482) pour obtenir les contraintes, il vient [32](61.4) :

$$\begin{pmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0\\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0\\ 0 & 0 & G_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{pmatrix} \tag{484}$$

La contrainte de cisaillement τ_{xy} et les contraintes normales σ_x et σ_y entraînent un déséquilibre du tronçon élémentaire. Ainsi pour équilibrer ce tronçon, des contraintes de cisaillement selon les plans (x,z) et (x,y) apparaissent et se déterminent donc par la relation suivante [32](61.6) :

$$\begin{cases}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0\end{cases} \tag{485}$$

De plus, les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} s'annulent aux plans extrêmes pour $z = \pm h/2$.

Ainsi, en s'inspirant des principes d'équivalence de la section §C.1.3.8. , les moments fléchissants M_x et M_y, le moment de torsion M_{xy} puis les efforts tranchants N_x et N_y peuvent être calculés [32](61.8) :

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz\,, \qquad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz\,, \qquad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz \tag{486}$$

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} z dz\,, \qquad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zy} z dz$$

Ces formules selon les expressions des contraintes issues de (484) et (485) donnent les relations entre les moments et les efforts tranchants en fonction des variations de la déformée :

$$M_x = -D_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_{21}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = -D_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \qquad M_{xy} = -2D_k\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$
$$N_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(D_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad N_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(D_3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad \text{(487)}$$

Où :

$$D_1 = \frac{h^3}{12}\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad D_2 = \frac{h^3}{12}\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad D_k = \frac{h^3}{12}G_{12}, \qquad D_3 = D_1\nu_{21} + 2D_k \qquad \text{(488)}$$

Les paramètres D_1 et D_2 représentent les rigidités de flexion selon le sens 1 et le sens 2, le paramètre D_k représente la rigidité de torsion et la rigidité D_3 permet de simplifier les expressions des efforts tranchants, elle est toutefois appelée rigidité principale [32](61.17).

En s'inspirant de la manière d'obtenir les formules de NAVIER (346) et de JOURAVSKI (349), il vient les relations entre les contraintes et les principes de la RDM [32](61.12) :

$$\sigma_x = \frac{M_x}{\frac{h^3}{12}}z, \qquad \sigma_y = \frac{M_y}{\frac{h^3}{12}}z, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{\frac{h^3}{12}}z$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{N_x}{\frac{h^3}{12}}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right), \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{N_y}{\frac{h^3}{12}}\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \qquad \text{(489)}$$

LEKHNITSKII propose des formules pour déterminer les moments et efforts tranchants [32](61.23) puis les contraintes [32](61.24) pour une section normale à un vecteur arbitraire n.

C.6.3. Equation du plan moyen en flexion

L'équilibre de la plaque mince élémentaire (Figure 219) permet d'obtenir le système suivant [32](62.1) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N_x}{\partial x} + \dfrac{\partial N_x}{\partial y} + q = 0 \\ N_x = \dfrac{\partial M_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_{xy}}{\partial y} \\ N_y = \dfrac{\partial M_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_{xy}}{\partial x} \end{cases} \qquad \text{(490)}$$

En introduisant les expressions des efforts tranchants N_x et N_y (487) dans la première équation de (490), il vient l'équation caractéristique du plan moyen en flexion d'une plaque mince orthotrope :

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \qquad \text{(491)}$$

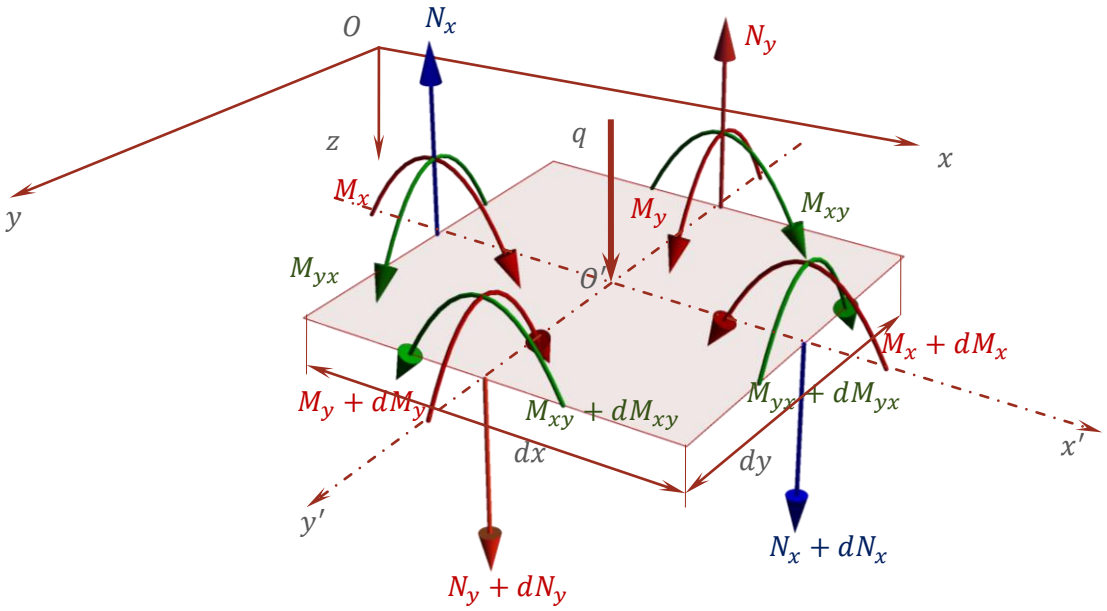


Figure 219 : *Equilibre de la plaque mince élémentaire (d'après* **[32]***)*

La résolution de cette équation caractéristique dépend de la forme du chargement puis des conditions aux bords de la plaque mince étudiée. Il convient de déterminer les conditions aux appuis (§C.6.4) puis, selon le type de chargement, il sera possible de calculer la déformée w en tout point de la plaque. Une fois la déformée calculée, en utilisant les relations (487), les efforts tranchants et les moments pourront être obtenus, puis, pour finir, les relations (489) permettront de calculer les contraintes.

C.6.4. Conditions aux appuis

Les conditions aux limites sur le contour sont de trois types :

1. Bord encastré : $w = 0$ et $\partial w/\partial n = 0$
2. Bord simplement appuyé : $w = 0$ et $M_n = 0$
3. Bord libre : $M_n = 0$ et $N_n + \partial M_{tn}/\partial s = 0$

Où $\partial/\partial s$ désigne la variation sur le contour de l'arc considéré. LEKHNITSKII [32] propose toutefois deux autres conditions : avec un bord chargé, et lorsque la déformée ainsi que la rotation de la section sont connues.

Dans le cas d'une plaque mince rectangulaire, les conditions aux limites [104] sont répertoriées dans le tableau 86.

Tableau 86 : *Conditions aux limites selon x et y d'une plaque mince*

	Selon x		Selon y	
Bord encastré	$w = 0,$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$w = 0,$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$
Bord simplement appuyé	$w = 0,$	$M_x = 0$	$w = 0,$	$M_y = 0$
Bord libre	$M_x = 0,$	$N_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0$	$M_y = 0,$	$N_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = 0$

Par exemple, quatre conditions doivent être respectées pour une plaque mince rectangulaire de dimensions $h \times L_x \times L_y$, appuyée simplement sur deux bords opposés ($y = 0$ et $y = L_y$) et libre pour les deux autres bords ($x = 0$ et $x = L_x$) :

$$w(x,0) = w(x,L_y) = M_y(x,0) = M_y(x,L_y) = 0$$

Pour les bords selon x, il convient de prendre les quatre conditions suivantes :

$$M_x(0,y) = M_x(L_x,y) = N_x(0,y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(0,y) = N_x(L_x,y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(L_x,y) = 0$$

C.6.5. Quelques formes de la déformée w pour un chargement ponctuel

Le chargement ponctuel est bien connu pour l'étude de plaques minces dont les conditions sont à bords simplement appuyés et/ou encastrés [32]. Cependant, pour des plaques minces dont les conditions d'au moins un bord est libre, se font rares dans la littérature. Toutefois une marche à suivre existe pour déterminer la déformée, elle est fondée sur la solution de LEVY décrite par COURBON [104].

Les déformées qui sont déterminées dans cette section sont de cinq types illustrés à la figure 220. Ces déformées ne sont pas simples à obtenir pour les cas (b) jusqu'au cas (e). Pour le cas (a), une solution avec une double somme existe mais, en utilisant la solution de LEVY, une solution plus concurrentielle en temps de calcul et en convergence peut être déterminée [32].

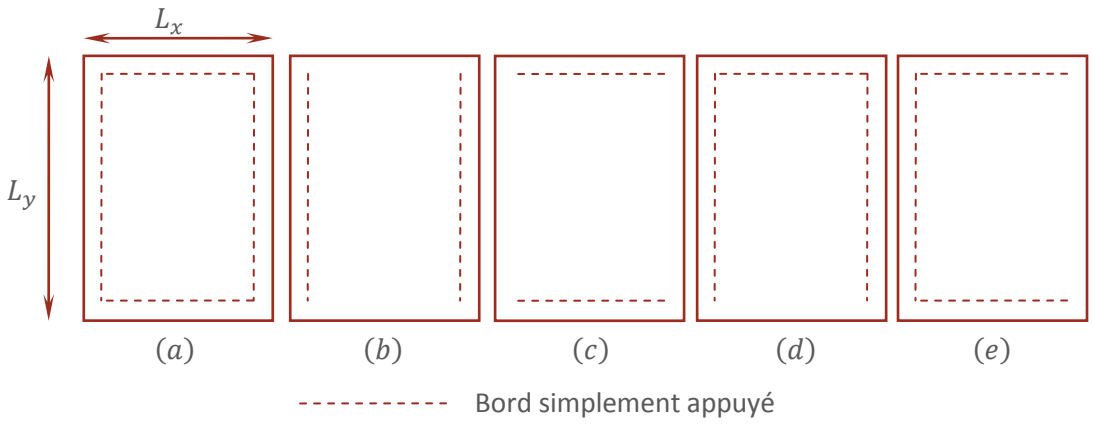


Figure 220 : *Les cinq types de conditions aux appuis : (a) plaque simplement appuyée sur les quatre bords, (b) plaque simplement appuyée sur les bords $\boldsymbol{x = 0}$ et $\boldsymbol{x = L_x}$, (c) plaque simplement appuyée sur les bords $\boldsymbol{y = 0}$ et $\boldsymbol{y = L_y}$, (d) plaque simplement appuyée sur tous bords sauf pour $\boldsymbol{y = 0}$ par exemple et (e) plaque simplement appuyée sur tous les bords sauf pour $\boldsymbol{x = 0}$ par exemple.*

La méthode de LEVY [104] consiste à choisir une forme pour la déformée w du type suivant :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right) \qquad \textbf{(492)}$$

Cette solution vérifie les conditions aux bords simplement appuyés car la fonction sinus s'annule pour $x = 0$ et $x = L_x$. Pour les cas (c) et (e), c'est-à-dire lorsque les bords sont simplement appuyés en $y = 0$ et $y = L_y$, il suffira d'intervertir x avec y et m avec n.

Il convient de choisir un chargement du même type :

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right) \qquad \textbf{(493)}$$

Avec :

$$q_m(y) = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} q(x,y) Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right) \qquad \textbf{(494)}$$

COURBON [104] indique les critères pour que la série de FOURIER du chargement puisse être valide mathématiquement. Il convient que le chargement s'annule pour $x = 0$ et $x = L_x$ puis que la fonction périodique $(-1)^m p(x + ma, y)$ soit continue et ses deux premières dérivés.

Le chargement ponctuel peut être calculé de deux manières : soit en disant qu'une force F est appliquée aux coordonnées x_0 et y_0, soit qu'un chargement réparti sur la surface centrée en (x_0, y_0) est relativement petit devant les dimensions de la plaque mince. La seconde méthode sera préconisée puisque cela permettra d'obtenir plus de cas de chargements, à l'image de l'étude du chargement réparti sur un tronçon pour une poutre sur deux appuis, à la section §C.1.4.3. .

La série de FOURIER d'un chargement de ce type, se calcule de la manière suivante :

$$q(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right) \quad (495)$$

Avec :

$$q(x,y)=\begin{cases}q_0, & x\in[\xi-d\xi,\xi+d\xi],y\in[\eta-d\eta,\eta+d\eta]\\ 0, & \text{sinon}\end{cases} \quad (496)$$

$$a_{mn}=\frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}q(x,y)\,Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)dxdy \quad (497)$$

Il vient :

$$a_{mn}=\frac{4}{L_xL_y}\int_{\xi-d\xi}^{\xi+d\xi}\int_{\eta-d\eta}^{\eta+d\eta}q_0\,Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)dxdy$$
$$=\frac{16q_0}{mn\pi^2}\,Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}d\xi\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}d\eta\right)Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}\xi\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}\eta\right) \quad (498)$$

En comparant (493) avec (495) , l'identification donne la forme de la fonction $q_m(y)$:

$$q_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16q_0}{mn\pi^2}\,Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}d\xi\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}d\eta\right)Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}\xi\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}\eta\right)Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right) \quad (499)$$

Au vu de la forme de l'équation de flexion (491), il est possible de trouver la solution particulière pour $a_{mn}Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)$ puis de la sommer ensuite sur n.

En introduisant le chargement $q_m(y)$ (499) et la forme de la déformée $w(x,y)$ (492) , il en résulte :

$$D_1\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4F_m-2D_3\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2F_m''+D_2F_m''''=a_{mn}Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right) \quad (500)$$

La résolution d'une telle équation s'effectue en deux temps : détermination de la solution de l'équation homogène, puis découverte d'une solution particulière pour l'équation différentielle avec le second membre. La résolution de l'équation différentielle sans second membre repose sur la détermination des racines de l'équation caractéristique suivante :

$$D_1\left(m\frac{\pi}{L_x}\right)^4-2D_3\left(m\frac{\pi}{L_x}\right)^2s^2+D_2s^4=0 \quad (501)$$

Les quatre racines de cette équation sont :

$$\pm\alpha_1=\pm m\frac{\pi}{L_x}\sqrt{\frac{D_3+\sqrt{D_3^2-D_1D_2}}{D_2}},\qquad \pm\alpha_2=\pm m\frac{\pi}{L_x}\sqrt{\frac{D_3-\sqrt{D_3^2-D_1D_2}}{D_2}} \quad (502)$$

La solution de l'équation homogène est la suivante :

$$F_{m,1}(y)=C[1]e^{\alpha_1m\frac{\pi}{L_x}y}+C[2]e^{-\alpha_1m\frac{\pi}{L_x}y}+C[3]e^{\alpha_2m\frac{\pi}{L_x}y}+C[4]e^{-\alpha_2m\frac{\pi}{L_x}y} \quad (503)$$

Pour déterminer la solution particulière de (500), il convient de choisir une solution de la forme du second membre puis de résoudre le système par identification. Il vient :

$$F_{m,2}(y)=b_{mn}Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)=\frac{a_{mn}}{\omega^4}Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right)\frac{1}{D_1\left(\frac{m}{L_x}\right)^4+2D_3\left(\frac{mn}{L_xL_y}\right)^2+D_2\left(\frac{n}{L_y}\right)^4} \quad (504)$$

Comme il a été énoncé précédemment, cette solution particulière doit être sommée sur n. La solution générale de (500) est la suivante :

$$F_m(y) = F_{m,1}(y) + F_{m,2}(y) = C[1]e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[2]e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[3]e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[4]e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y} + F_{mp}(y)$$
$$= C[1]e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[2]e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[3]e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[4]e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\omega^4} Sin\left(n\frac{\pi}{L_y}y\right) \frac{1}{D_1\left(\frac{m}{L_x}\right)^4 + 2D_3\left(\frac{mn}{L_xL_y}\right)^2 + D_2\left(\frac{n}{L_y}\right)^4} \quad (505)$$

Les quatre constantes d'intégrations $C[i]$ sont déterminées selon les conditions aux appuis selon y, la forme de la déformée validant les conditions aux appuis selon x. De par la forme en somme de fonctions exponentielles et de fonctions sinusoïdales, il est clair que le système à résoudre est de la forme d'un système linéaire dont la matrice des coefficients des inconnues est dense.

La fonction de la déformée s'exprime selon (505) et (492) :

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right)$$
$$= \left(C[1]e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[2]e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[3]e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y} + C[4]e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}y}\right. \quad (506)$$
$$\left. + F_{mp}(y)\right) Sin\left(m\frac{\pi}{L_x}x\right) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x,y)$$

Pour faciliter l'étude des constantes $C[i]$, celles-ci sont explicitées en fonctions de l'indice de sommation m, validé par le principe de superposition (Hypothèse 11). Pour simplifier l'écriture de la déformée, la solution particulière de $F_m(y)$ est nommée $F_{mp}(y)$ comme indiqué dans la relation (505). L'étude se scinde en trois cas : (a), (b) et (d) selon la figure 220. Les éléments de la RDM sont calculés à l'aide des relations (487).

C.6.5.1. Etude du cas (a) : plaque simplement appuyée sur les quatre bords

En utilisant les conditions aux appuis indiqués dans le tableau 86, il vient les quatre conditions aux appuis selon y pour $y = 0$ et $y = L_y$:

$$w_m(x,0) = w_m(x,L_y) = M_{my}(x,0) = M_{my}(x,L_y) = 0$$

Donc, il vient le système suivant :

$$C[1] + C[2] + C[3] + C[4] = 0$$
$$CC[1]e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} + C[2]e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} + C[3]e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} + C[4]e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} = 0$$
$$(\alpha_1^2 - \nu_{12})C[1] + (\alpha_1^2 - \nu_{12})C[2] + (\alpha_2^2 - \nu_{12})C[3] + (\alpha_2^2 - \nu_{12})C[4] = 0 \quad (507)$$
$$(\alpha_1^2 - \nu_{12})C[1]e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} + (\alpha_1^2 - \nu_{12})C[2]e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} + (\alpha_2^2 - \nu_{12})C[3]e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y}$$
$$+ (\alpha_2^2 - \nu_{12})C[4]e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} = 0$$

En l'écrivant sous forme matricielle il apparait une matrice dense, c'est-à-dire difficile à réduire. La méthode de CRAMER (§A.2) permet de pouvoir calculer rapidement un tel système linéaire.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} \\ (\alpha_1^2 - \nu_{12}) & (\alpha_1^2 - \nu_{12}) & (\alpha_2^2 - \nu_{12}) & (\alpha_2^2 - \nu_{12}) \\ (\alpha_1^2 - \nu_{12})e^{\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & (\alpha_1^2 - \nu_{12})e^{-\alpha_1 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & (\alpha_2^2 - \nu_{12})e^{\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} & (\alpha_2^2 - \nu_{12})e^{-\alpha_2 m\frac{\pi}{L_x}L_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C[1] \\ C[2] \\ C[3] \\ C[4] \end{pmatrix} \quad (508)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C.6.5.2. Etude du cas (b) : plaque simplement appuyée sur les deux bords $x = 0$ et $x = L_x$ et libre pour les deux autres

En utilisant les conditions aux appuis indiquées dans le tableau 86, il vient les quatre conditions aux appuis selon y pour $y = 0$ et $y = L_y$:

$$M_{my}(x,0) = M_{my}(x,L_y) = N_y(x,0) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}(x,0) = N_y(x,L_y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}(x,L_y) = 0$$

C.6.5.3. Etude du cas (d) : plaque simplement appuyée sur trois bords $x = 0$, $x = L_x$ et $y = 0$ et libre pour $y = L_y$

En utilisant les conditions aux appuis indiquées dans le tableau 86, il vient les quatre conditions aux appuis selon y pour $y = 0$ et $y = L_y$:

$$w_m(x,0) = M_{my}(x,0) = M_{my}(x,L_y) = N_y(x,L_y) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}(x,L_y) = 0$$

« La caractéristique des inventeurs, c'est justement de ne rien trouver. »

[Gilles Archambault, Extrait de La fleur aux dents]

D. DONNEES SUR LA MACHINE

D.1. Caractéristiques des moteurs NX430EAF et NX310EAP

SERVOMOTEURS SANS BALAIS
NX430EAF
ELECTRONIQUE DE COMMANDE (1)
DIGIVEX 15/30 et DIGIVEX 16/32
(230 V) (400 V)

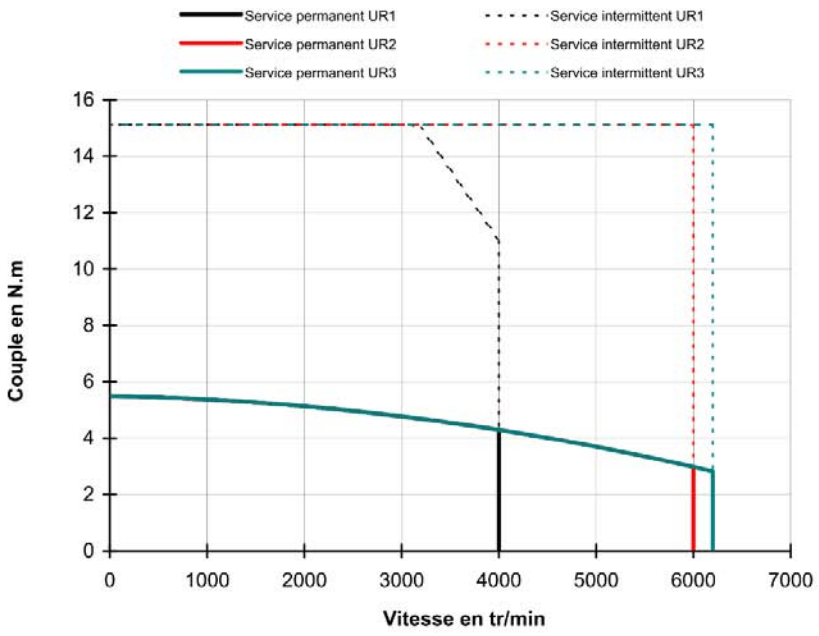
SSD DRIVES
PARVEX

Couple en rotation lente	M_o	Nm		5.5	
Courant permanent en rotation lente	I_o	A_{rms}		6.64	
Couple pic	M_p	Nm		18.8	
Courant pour obtenir le couple pic	I_p	A_{rms}		26.5	
FEM par 1000 t/min (25°C)*	Ke	V_{rms}		51.8	
Coefficient de couple électromagnétique	Kt	Nm/A_{rms}		0.828	
Résistance du bobinage (25°C)*	Rb	Ω		1.48	
Inductance du bobinage*	L	mH		6.8	
Inertie du rotor	J	kgm^2x10^{-5}		42.6	
Constante de temps thermique	Tth	min		18	
Masse du moteur	M	kg		4.8	
Tension du réseau d'alimentation	UR1 UR2 UR3	V_{rms}	230	400	480
Vitesse nominale	Nn1 Nn2 Nn3	t/min	4000	6000	6200
Couple nominal	Mn1 Mn2 Mn3	Nm	4.29	2.98	2.82
Courant nominal	In1 In2 In3	A_{rms}	5.28	3.76	3.58
Puissance nominale	Pn1 Pn2 Pn3	W	1800	1870	1830

Toutes les données sont en valeurs typiques pour des conditions d'utilisation standard

** Entre deux phases* *(1) Vérifier la disponibilité de ce variateur en 480 V*

Tensions et courants sont donnés en valeurs efficaces



Les caractéristiques sont données pour un pilotage optimal du moteur FICHE-009

Création: 30 juil 1999	Edition:	10/févr/2005		NX430EAF	. -

Figure 221 : *Caractéristique du moteur BRUSHLESS NX430EAF*

SERVOMOTEURS SANS BALAIS
NX310EAP
ELECTRONIQUE DE COMMANDE (1)
DIGIVEX 2/4
(230 V) (400 V)

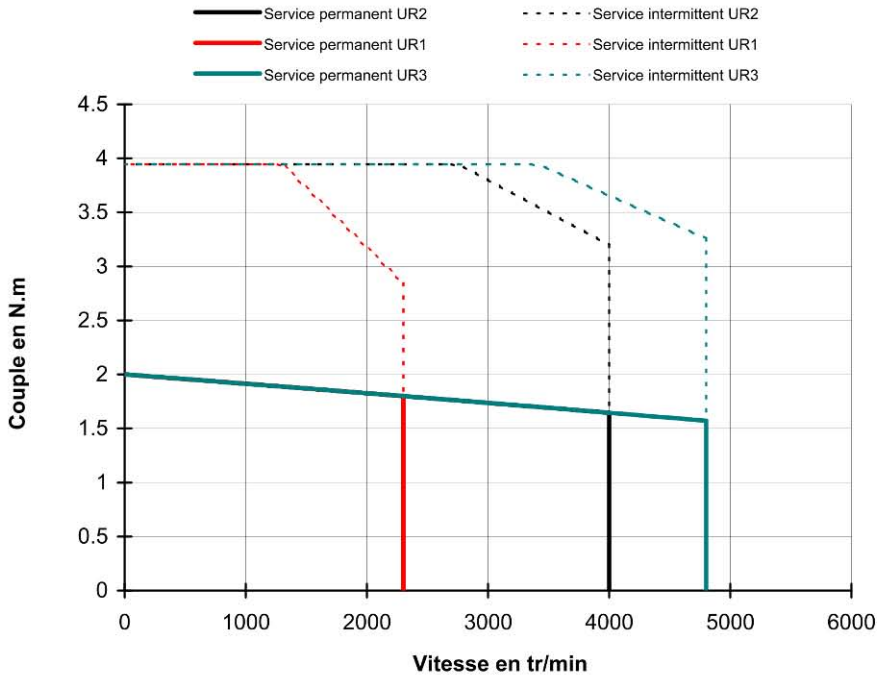
PARVEX

Couple en rotation lente	M_o	Nm		2	
Courant permanent en rotation lente	I_o	A_{rms}		1.39	
Couple pic	M_p	Nm		6.6	
Courant pour obtenir le couple pic	I_p	A_{rms}		5.56	
FEM par 1000 t/min (25°C)*	Ke	V_{rms}		88.9	
Coefficient de couple électromagnétique	Kt	Nm/A_{rms}		1.44	
Résistance du bobinage (25°C)*	Rb	Ω		20.7	
Inductance du bobinage*	L	mH		62	
Inertie du rotor	J	kgm^2x10^{-5}		7.9	
Constante de temps thermique	Tth	min		20	
Masse du moteur	M	kg		2.1	
Tension du réseau d'alimentation	UR1 UR2 UR3	V_{rms}	230	400	480
Vitesse nominale	Nn1 Nn2 Nn3	t/min	2300	4000	4800
Couple nominal	Mn1 Mn2 Mn3	Nm	1.80	1.65	1.57
Courant nominal	In1 In2 In3	A_{rms}	1.27	1.18	1.13
Puissance nominale	Pn1 Pn2 Pn3	W	430	690	790

Toutes les données sont en valeurs typiques pour des conditions d'utilisation standard

** Entre deux phases* *(1) Vérifier la disponibilité de ce variateur en 480 V*

Tensions et courants sont donnés en valeurs efficaces



Les caractéristiques sont données pour un pilotage optimal du moteur FICHE-009

Création: 11 mars 1999	Edition:	10/févr/2005	NX310EAP	.a

Figure 222 : *Caractéristiques du moteur BRUSHLESS NX310EAP*

D.2. Devis

D.2.1. Devis de la partie commande

PARVEX

Fax

A l'attention de :		**Monsieur BOCQUET**
Pour la	**:**	**Société ENSTIB**
Tel	**:**	**03.29.29.61.35 E-MAIL : jean-francois.bocquet@enstib.uhp-nancy.fr**
De	**:**	**Monsieur Philippe GRANDCHAMP / Christelle LAMBERT**
Date	**:**	**17/10/2006**
Page	**:**	**1/6**

Objet : Notre offre F0706029- D-/PG/CL
V/Réf. :

Pour faire suite à votre demande, veuillez trouver ci-après, nos meilleures conditions de prix et délais pour la fourniture éventuelle du matériel concernant :

PROJET : MOTORISATION COLONNE DE PERCAGE AXE Y ET BROCHE

Nous vous invitons à trouver ci-joint :

- En annexe 1 : le matériel proposé,
- En annexe 2 : les conditions commerciales
- En annexe 3 : Feuilles de calculs.

Dans l'espoir que notre offre retiendra toute votre attention, et, restant à votre disposition pour tout renseignement complémentaire, nous vous prions de croire, Monsieur, à l'assurance de nos sentiments les meilleurs.

Philippe GRANDCHAMP
Responsable Secteur EST

Isabelle DIDIER
Assistante d'Ingénieur Commercial

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

Figure 223 : *Devis de la partie commande de la machine (page 1)*

DONNEES

Course 100mm
Masse en mouvement 10kg
Effort sur 10mm de course : 400kg
Vitesse : 0,1 à 30mm/sec
1 cycle toutes les 15mn (estimé)
Motorisation de broche : NX 430EAFR7001 (5.5Nm – 4000tr – arbre claveté)
Consigne position envoyé par réseau CANOPEN (PC et développement de votre fourniture).

DESCRIPTIF DE NOTRE OFFRE

1) **Broche** :

Nous vous proposons un ensemble moteur frein brushless gamme NX avec variateur gamme Compax3.
Le moteur NX a été défini par vos soins, il sera équipé d'un résolver.
Eventuellement, un capteur d'effort pourra être monté pour être en boucle fermée ; ce capteur sera relié au variateur Compax3.
Une régulation en couple pourra être effectuée très précisemment, de l'ordre de 1% ou inférieur suivant le type de capteur utilisé.
Vous devrez monter une butée sur les mandrins pour encaisser l'effort axial de 400kg.
Le variateur Compax3 pourra être connecté sur bus de terrain CAN OPEN.
Avec une force de frottement de 2N, la fréquence max. d'oscillation possible sera de 10Hz

2) **Axe Y** :

Suite à notre entretien, nous modifions notre offre initiale et nous proposons un ensemble variateur, moteur et vis à billes avec guidage.
Pour cet axe, pilotage par variateur Compax3.

La vis à billes sera montée verticalement. Il s'agit de la gamme Parker ETB80 soit pas de 10mm, vis de diam 25mm.
Sur cet ensemble, sera monté un motoreducteur NX310 qui développe 4Nm en couple impulsionnel avec réducteur Jeu réduit (6') rapport 7.
Nous fournissons un ensemble vérin avec moteur en parallèle et guidage de tige longueur 100mm.
Avec l'utilisation du codeur Hiperface prise d'origine inutile .
Vitesse mini : 0,1mm/s
Precision de 0,05mm.

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

(Page 2)

PROPOSITION COMMERCIALE

❖ BROCHE

✓ **1 Servomoteur Brushless NX430 Réseau 230V**
Couple en rotation lente 5.5Nm
Vitesse maxi 4000 tr/min, Inertie 42.6kgm².10-5
Courant 9.4A (6.7Arms)
Raccordement embases connecteurs coudées
Arbre claveté 19 x 40, Bride B5 F100TL
Protection IP64, Masse 4.6kg
Equipé d'un frein
Réf. NX430EAFR7301

✓ **1 Variateur Compax3 Drive - 230V**
10Arms – 20A crête < 5 sec.
230V
Résolver
Interface CAN OPEN
C3T11 Gestion FDC CAN open
Réf. C3S100V2 F10 I21T11M00

✓ **1 Câble moteur pour NX LG 5M**
Réf. CC3UP1F1R0005

✓ **1 Câble résolveur pour NX LG 5M**
Réf. CC3UA1F1R0005

✓ **1 Câble programmation PC/RS232 vers Compax3 2.5m**
Réf. SSK01/02

✓ **1 Jeu connecteurs pour C3 S100V2**
Réf. ZBH 02/02

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

(Page 3)

❖ AXE Y

✓ **1 Servomoteur Brushless NX310 Réseau 230V**
Couple en rotation lente 2Nm
Vitesse maxi 2300 tr/min, Inertie 7.9kgm².10-5
Courant 2A (1.4Arms)
Raccordement embases connecteurs coudées
Arbre lisse 11 x 23, Bride B5 F75TL
Protection IP64, Masse 2kg
Avec codeur hiperface
Réf. NX310EUPR7000

Monté avec :

✓ **1 Réducteur GX3, taille 60, Jeu < 5'**
Réf. GX3N007R0200

✓ **1 Variateur Compax3 Drive - 230V**
2,5A
Codeur hyperface
Interface CAN OPEN
C3T11 Gestion FDC CAN open
Réf. C3S025V2F11 I21T11M00

✓ **1 Câble moteur pour NX LG 5M**
Réf. CC3UP1F1R0005

✓ **1 Câble hiperface pour NX LG 5M**
Réf. CC3UR1F1R0005

✓ **1 Câble programmation PC/RS232 vers Compax3 2.5m**
Réf. SSK01/02

✓ **1 Jeu connecteurs pour C3 S025V2**
Réf. ZBH 02/01

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

(Page 4)

- ✓ **1 Vérin ETB80 M10(L) vis à bilees pas 10mm**
  Motoréducteur en ligne
  Avec guidage de tige course 100mm
  Réf. ETB80 M10 LA90 FR 100A

TOTAL NET HT DE CETTE AFFAIRE ..... 8 000 €

OPTION :

- ✓ **Aide à la mise en service sur votre site**
  Réf. Forfait 1 jour.....1 000 € NET HT

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

(Page 5)

CONDITIONS DE VENTE

Ces prix s'entendent nets, hors taxes pour du matériel départ Les Ulis non emballé.

Conditions de paiement : VIREMENT BANCAIRE 30 JOURS LE 15 (date de livraison)

Facturation : Minimum de 152 € HT.

Validité de l'offre : 1 mois à dater de ce jour.

Délai de livraison : 5 semaines à réception de votre commande (hors congés usine)

Port et emballage : En supplément du montant total H.T. de la commande : comptez 2,5% de port et emballage.

Garantie : Un an, pièces et main d'oeuvre pour du matériel retourné par vos soins en nos ateliers.

Réserve de propriété :

La présente fait l'objet d'une clause de réserve de propriété conformément à la modification par la loi du 12 Mai 1980 de l'article de la loi du 13 Juillet 1967. Cette clause existe jusqu'au paiement intégral des fournitures objet de la vente.

Nos documentations commerciales et techniques peuvent être consultées et téléchargées à partir de notre site Internet : www.eurothermvv.fr - www.parvex.com

Clause de confidentialité :

SSD PARVEX s'engage à ne pas divulguer toutes les informations relatives à cette application.

SSD Drives PARVEX - Agence EST
9 Bis Rue des Vosges
88400 GERARDMER
www.ssddrives.co:m

Contact : Monsieur Philippe GRANDCHAMP
Tel : 03.29.27.10.45 - Fax : 03.29.27.10.55
E-mail : p.grandchamp@ssddrives.fr

(Page 6)

Mes livres ne sont pas des livres, mais des feuilles détachées et tombées presque au hasard sur la route de ma vie.

[François René de Chateaubriand]

E. REFERENCES

[1] J. PUECH, "Mise en valeur de la forêt française et développement de la filière bois," Mission 2009.

[2] KLH. (2009, Nov.) site de la société KLH. [Online]. http://www.klh.at

[3] E. THOMA, "Prefabricated laminated wood member," WO00/03850, Janvier 27, 2000.

[4] EUROCODE 5, "Conception et calcul des structures en bois," Norme NF EN 1995-1-1, P 21-711-1, 2006.

[5] B. SUTHOFF, A. SCHAAF, H. HENTSCHEL, and U. FRANZ, "Verfahren zum reibschweißartigen Fügen von Holz," DE19620273A1, Mai 20, 1996.

[6] Y. BENOIT and T. PARADIS, *Construction de maisons à ossature bois*, Quatrième tirage ed. Paris, France: ÉDITIONS EYROLLES & FCBA, 2008.

[7] P. MARTIN, "Etude du comportement des poutres lamellées clouées boulonnées en flexion," ENGREF, KOUROU, Thèse de doctorat 2006.

[8] K.-U. GLINIORZ, K. M. MOSALAM, and J. NATTERER, "Modeling of layered timber beams and ribbed shell frameworks," *Composites: Part B Engineering*, no. 33, pp. 367-381, 2002.

[9] C. PIRAZZI, "ZUR BERECHNUNG VON HOLZSCHALEN IN BRETTRIPPENBAUWEISE MIT ELASTISCHEM VERBUNDQUERSCHNITT," EPFL, LAUSANNE, Thèse de doctorat n° 3229, 2005.

[10] NF EN 594, "Structures en bois - Méthodes d'essai - Essai de raideur et résistance au contreventement des murs à ossature en bois," Norme 1995.

[11] BINDERHOLZ. (2009, Nov.) site de la société BINDERHOLZ. [Online]. http://www.binderholz.de

[12] E. THOMA, "Pre-fabricated laminated wood element," WO02/088483A1, Nov. 07, 2002.

[13] THOMA HOLZ. (2009, Nov.) site de la société THOMA HOLZ. [Online]. http://www.THOMA.at

[14] B. HEIMESHOFF, "Zur Berechnung von Biegeträgern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen im Ingenieurholzbau," *Holz als Roh- und Werktoff*, vol. 45, pp. 237-241, 1987.

[15] DIN 1052, "Calcul des structures en bois - Règles générales et règles pour les bâtiments," Norme allemande 2004-08.

[16] U. A. GIRHAMMAR, "A simplified analysis method for composite beams with interlayer slip," vol. 51, pp. 515-530, 2009, doi:10.1016/j.ijmecsci.2009.05.003.

[17] U. A. GIRHAMMAR, D. H. PAN, and A. GUSTAFSSON, "Exact dynamic analysis of composite beams with partial interaction," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 51, pp. 565-582, 2009, doi:10.1016/j.ijmecsci.2009.06.004.

[18] M. SCHÄFER, "Zum Tragverhalten von Flachdecken mit integrierten hohlkastenförmigen Stahlprofilen ," Konstruktiven Ingenieurbau Bergische Universität Wuppertal, Wuppertal, Thèse de doctorat ISBN 978-3-940795-07-6, 2007.

[19] G. HANSWILLE and M. SCHÄFER, "Zur praktischen Ermittlung der Verformungen von Verbundträgern und Flachdeckensystemen unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Verbundfuge," *Verlag für Architektur und technische Wissenschaften*, vol. 76, no. 11, pp. 845-854, 2007, DOI: 10.1002/stab.200710090.

[20] B. SZABÒ, "INFLUENCE OF SHEAR CONNECTORS ON THE ELASTIC BEHAVIOUR OF COMPOSITE GIRDERS," Helsinki University of Technology, HELSINKI, Thèse de doctorat ISBN 951-22-8446-4, 2006.

[21] A. ILIOPOULOS, "Zur rechnerischen Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons bei Verbundträgern," Fakultät für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität, BOCHUM, Thèse de doctorat 2005.

[22] N. CHALLAMEL, "On lateral–torsional vibrations of elastic composite beams with interlayer slip," *Journal of*

Sound and Vibration, vol. 325, pp. 1012-1022, 2009, doi:10.1016/j.jsv.2009.04.023.

[23] A. SCHOLZ, "Ein Beitrag zur Berechnung von Flachentragwerken aus Holz," Technischen Universitat München, Munich, Thèse de doctorat 2003.

[24] H. KREUZINGER and H.-J. BLASS, "Calculation models for prefabricated wood-based Loadbearing stressed skin panels for use in roofs," Europen Organisation For Technical Approvals (EOTA), Rapport technique TR 019, 2005.

[25] H. S. PHAM, "Optimisation et comportement en fatigue de la connexion bois-BFUP pour de nouveaux ponts mixtes," ENPC, Thèse de doctorat 2007.

[26] U. A. GIRHAMMAR and D. H. PAN, "Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 49, pp. 239-255, 2007, doi:10.1016/j.ijmecsci.2006.07.005.

[27] H. KREUZINGER, "Mechanically jointed beams and columns.," in *STEP 1.* Europe, 1995, ch. B11, pp. B11/1 - B11/8.

[28] V.-T. NGUYEN, J.-F. CARON, and K. SAB, "A model for thick laminates and sandwich plates," *Composites Science and Technology*, vol. 65, pp. 475-489, 2005, doi:10.1016/j.compscitech.2004.09.014.

[29] E. AMIOT, "Equations différentielles," Cours en classe préparatoire section MP 2006.

[30] A. GIRARD and N. ROY, *Dynamique des structures industrielles*. PARIS, FRANCE: LAVOISIER, 2003.

[31] J. HE and Z.-H. FU, *Modal Analysis*, Butterworth-Heinemann, Ed. OXFORD, 2001.

[32] S. G. LEKHNITSKII, *Anisotropic plates*, 3rd ed., Science Publishers, Gordon and Breach, Ed., 1984.

[33] S. V. OHLSSON, "Floor vibrations and human disconfort," CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, GÖTEBORG, Thèse de doctorat ISBN 91-7032-077-2, 1982.

[34] D. E. ALLEN and G. PERNICA, "Comment réduire la vibration des planchers," *Institut de Recherche en Construction (IRC)*, vol. Solutions constructives, no. 22, Dec. 1998.

[35] Y. H. CHUI, "Application of Ribbed-Plate Theory to Predict Vibrational Serviceability of Timber Floor Systems," in *7th World Conference in Timber Engineering*, vol. 4, Shah Alam, Malaysia, 2002, pp. 87-93.

[36] S. V. OHLSSON, "Springiness and human-induced floor vibrations - a design guide," Swedish Council for Building Research, STOCKHOLM, 1988.

[37] Y. H. CHUI, "A new design method to Control Vibrations Induced by Foot Steps in Timber Floors," in *CIB 37*, SCOTLAND.

[38] Y. H. CHUI and L. J. HU, "Calculation procedure for static deflection and fundamental natural frequency of wood-based floors," FORINTEK, New Brunswick CANANDA, Commentaire Non publié, 2002.

[39] L. A. ZANEGIN, "Method for welding wood," SU1790487A3, 1993.

[40] B. GFELLER and C. GERBER, "METHOD FOR CONNECTING TWO BODIES," WO03052017A1, Juin 26, 2003.

[41] Ch. GERBER and B. GFELLER, "Joint connection with welded thermoplastic dowels & Wood Welding Technologies (WWT)," *proceedings*, no. 4-4-1, 2000.

[42] R. CAZES, "Soudage par friction," *Technique de l'ingénieur*, vol. Traité génie mécanique, no. B7745, 2003.

[43] C. GANNE-CHEDEVILLE, "Soudage linéaire du bois : étude et compréhension des modifications physico-chimiques et développement d'une technologie d'assemblage innovante," UHP NANCY 1, EPINAL, Thèse de doctorat 2008.

[44] B. SUTHOFF and H.-J. KUTZER, "Verfahren zum reibschweißartigen Fügen von Holz," DE19746782A1, Octobre 23, 1997.

[45] B. STAMM and Y. WEINAND, "Souder du bois, une technique innovatrice," *Tracés*, vol. 17, pp. 22-24, Sep. 2006.

[46] K.-U. GLINIORZ and J. NATTERER, "Vom Holzkleben zum Holzschweißen," *Holzbau und Forschung*, pp. 70-73, Oct. 2001.

[47] B. GFELLER, M. ZANETTI, M. PROPERZI, A. PIZZI, F. PICHELIN, M. LEHMANN, and L. DELMOTTE, "Wood bonding by vibrational welding," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 17, no. 11, pp. 1573-1589, 2003.

[48] A. PIZZI, J.-M. LEBAN, F. KANAZAWA, M. PROPERZI, and F. PICHELIN, "Wood dowel bonding by high-speed rotation welding," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 18, no. 11, pp. 1263-1278, 2004.

[49] B. STAMM, "Development of friction welding of wood - physical, mechanical and chemical studies," EPFL, LAUSANNE, Thèse de doctorat n° 3396, 2005.

[50] C. CRISTESCU, D. JOHANSSON, and Y. CHEN, "METHOD OF PRODUCING A LAMINATE COMPRISING AT LEAST TWO LAYERS OF LIGNOCELLULOSIC MATERIAL JOINED BY HEAT TREAMENT AND PRESSING," WO2007/117195A1, Oct. 18, 2007.

[51] S. CORDULA, *10 arguments en faveur du bois*, Conférence Suisse de l'Economie du Bois Lignum, Ed. ZURICH, SUISSE: HOCHPARTERRE, 2009.

[52] M.-C. TROUY-TRIBOULOT and P. TRIBOULOT, "Matériau bois - Structure et caractéristiques," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Traité Construction, no. C925, 2009.

[53] F. HEGER, "Etude du phénomène de l'élimination de la mémoire de forme du bois densifié par post traitement thermo-hydro-mécanique," EPFL, LAUSANNE, Thèse de doctorat n° 3004, 2004.

[54] L. SALMEN, "Micromechanical understanding of the cell-wall structure," C.R. Biologies 327 2004.

[55] R. M. ROWELL, *Handbook of chemistry and wood composites*, R. M. ROWELL, Ed.: TAYLOR & FRANCIS, 2005.

[56] J. M. LEBAN, A. PIZZI, S. WIELAND, M. ZANETTI, M. PROPERZI, and F. PICHELIN, "X-ray microdensitometry analysis of vibration-welded wood," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 18, no. 6, pp. 673-685, 2004.

[57] C. GANNE-CHEDEVILLE, M. PROPERZI, A. PIZZI, LEBAN J.-M., and F. PICHELIN, "Edge and face linear vibration welding of wood panels," *Holz Roh Werkst*, vol. 65, pp. 83-85, 2007, DOI 10.1007/s00107-006-0125-9.

[58] L. DELMOTTE, C. GANNE-CHEDEVILLE, J.-M. LEBAN, A. PIZZI, and F. PICHELIN, "CP-MAS 13C NMR and FT-IR investigation of the degradation reactions of polymer constituents in wood welding," *Polymer Degradation and Stability*, vol. 93, pp. 406-412, 2008.

[59] M PROPERZI, J. M. LEBAN, A. PIZZI, S. WIELAND, F. PICHELIN, and M. LEHMANN, "Influence of grain direction in vibrational wood welding," *Holzforschung*, vol. 59, pp. 23-27, 2005, DOI 10.1515/HF.2005.004.

[60] M. BOONSTRA, A. PIZZI, C. GANNE CHEDEVILLE, M. PROPERZI, LEBAN J.-M., and F. PICHELIN, "Vibration welding of heat treated wood," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 20, pp. 359-369, 2006.

[61] NIDECKER. (2009, Nov.) Snowboard révolution. [Online]. http://www.snowboard-revolution.com/news/Nidecker-Snowboards-Updates.html

[62] V. LEFORT, "Barrique de bois, procédé de fabrication et machine pour mettre en oeuvre le procédé," FR2921290A1, Mar. 27, 2009.

[63] P. OMRANI1, J.-F. BOCQUET, A. PIZZI, J.-M. LEBAN, and MANSOURI H., "Zig-zag rotational dowel welding for exterior wood joints," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 21, no. 10, pp. 923-933, 2007.

[64] F., PIZZI, A. KANAZAWA, M. PROPERZI, L. DELMOTTE, and F. PICHELIN, "Parameters influencing wood-dowel welding by high-speed rotation," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 19, no. 12, pp. 1025-1038, 2005.

[65] M., BOGNER, G. H. ZUPCIC, "Welding of solid wood," *Drvna Industrija*, vol. 59, no. 3, pp. 113-119, 2008.

[66] S. BARTHES and M. LEMERCIER, "Assemblage par tourillons soudés Réalité ou utopie ? Application sur la chaise Zigzag de Rietveld," ENSTIB UHP NANCY 1, EPINAL, Projet de fin d'étude 2008.

[67] V. BOUCHET and J.-B. GOMEZ, "Assemblage par tourillons soudés - Application à la réalisation de la chaise « Zig-Zag » de Rietveld," ENSTIB UHP NANCY 1, EPINAL, Profet de fin d'étude 2009.

[68] A. RENAUD, "MinimalistZchair assembly by rotational dowelwelding," *Holz Roh Werkst*, 2008, DOI 10.1007/s00107-008-0264-2.

[69] T. STEVANOVIC, L. RESCH, A. DESPRES, C. GANNE-CHEDEVILLE, A. PIZZI, J.-F. BOCQUET, M. PROPERZI, and F. PICHELIN, "Comparison of rotational and linear welding of different wood materials," in *ILI FORUM 8*, ROME ITALY, 2007.

[70] L. LE BRAS and G. MENIER, "Plancher de lames alternées par soudage bois et optimisation du procédé "clou bois"," ENSTIB - UHP Nancy, EPINAL, Projet d'étude 2006.

[71] L. RESCH, A. DESPRES, A. PIZZI, J.-F. BOCQUET, and J.-M. LEBAN, "Welding-through doweling of wood panels," *Holz als Roh- und Werkstoff*, vol. 64, pp. 423-425, 2006, DOI 10.1007/s00107-005-0090-8.

[72] J.-F. BOCQUET, A. PIZZI, A. DESPRES, H. R. MANSOURI, L. RESCH, D. MICHEL, and F. LETORT, "Wood joints and laminated wood beams assembled by mechanically-welded wood dowels," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 21, no. 3-4, pp. 301-317, 2007.

[73] A. ZOULALIAN and A. PIZZI, "Wood-dowel rotation welding – a heat-transfer model," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 21, no. 2, pp. 97-108, 2007.

[74] C. GANNE-CHEDEVILLE, A. PIZZI, A. THOMAS, J.-M. LEBAN, J.-F. BOCQUET, A. DESPRES, and H. MANSOURI,

"Parameter interactions in two-block welding and the wood nail concept in wood dowel welding," *J. Adhesion Sci. Technol.*, vol. 19, no. 13-14, pp. 1157-1174, 2005.

[75] R. BOURGEOIS and D.COGNIEL, *Mémotech électrotechnique*, 4th ed., A. CAPLIEZ, Ed. PARIS, PARIS, FRANCE: Editions CATEILLA, 1994.

[76] SSD Drives, PARVEX, and PARKER, *Catalogue générale 2006*., 2006-01.

[77] SSD Drives, PARVEX, and PARKER, *Catalogue générale 2007*., 2007-01.

[78] NF EN 338, "Bois de structure - Classes de résistance," AFNOR, Norme P 21-353, 2003.

[79] PARVEX. (2009, Nov.) site de la société PARVEX. [Online]. http://www.parvex.com

[80] PARKER, *ET Series Electric Cylinders*. Ohio, Etats Unis, 2006, 1897/US.

[81] NATIONAL INSTRUMENT. (2009, Nov.) site LABVIEW. [Online]. http://www.labview.com

[82] HBM, *U10M Force transducers - Data sheet*. DARMSTADT, ALLEMAGNE: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2009.

[83] HBM, *U9B Capteurs de force - Caractéristiques techniques*. DARMSTADT, ALLEMAGNE: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 2009.

[84] MICRELEC. (2009, Nov.) Site de la société MECACEL ELECTRONIQUE. [Online]. http://www.micrelec.fr

[85] INSTRON. (2009, Nov.) Site de la société INSTRON. [Online]. www.instron.com

[86] VIDEOMETRIC. (2009, Nov.) site de la société VIDEOMETRIC. [Online]. http://www.videometric.com/

[87] VIDEOMETRIC. (2001-2004) VDM Grabber version 1.7.10. Logiciel.

[88] VIDEOMETRIC. (2001-2004) VDM Analyser 3D version 2.3.16. Logiciel.

[89] EUROCODE 0, "Bases de calcul des structures," AFNOR, Norme NF EN 1990, P 06-100-1, 2003.

[90] P. JODIN, *Le bois matériau d'ingénierie*, ARBOLOR, Ed. NANCY, FRANCE, 1994, Textes rassemblés par Philippe Jodin.

[91] P. SPITERI, "Approche variationnelle pour la méthode des éléments finis," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Traité Sciences fondamentales, no. AF503, 2004.

[92] CAST3M. (2009, Nov.) site de logiciel CAST3M du CEA. [Online]. http://www-cast3m.cea.fr

[93] NATIONAL INSTRUMENT. (2009, Nov.) site de National instrument. [Online]. http://www.ni.com/fr/

[94] NF EN 408, "Structures en bois - Bois de structure et bois lamellé collé - Détermination de certaines propriétés physiques et mécaniques," Norme P21-302, 2004.

[95] CATMAN. (1994-2003) CATMAN 4.5 release 3 HBM. Logiciel.

[96] Y. CHEVALIER, "Essais dynamiques sur composites - Caractérisation en basses fréquences," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Traité Plastiques et Composites, no. AM5400, 2003.

[97] B. KÄLLSNER, "Vindavstyvning av Träregelvaggär med skivor," in *Nordisk Träsymphorium*, STOCKOLM, 1982.

[98] MathWorld - A Wolfram Web Resource. (2010, Feb.) Cramer's rule. [Online]. http://mathworld.wolfram.com/CramersRule.html

[99] Wikipedia. (2010, Feb.) Règle de Cramer. [Online]. fr.wikipedia.org/wiki/Règle_de_Cramer

[100] J. COURBON, *Résistance des matériaux - Théorie des poutres*. Paris: Technique de l'Ingénieur, 1980, Archive.

[101] G. PISSARENKO, A. YAKOVLEV, and V. MATVEEV, *Aide mémoire de résistance des matériaux*. Moscou: Edition MIR, 1979.

[102] P. A. BOUCARD, *Cours de Dimensionnement des Structures - Résistance des Matériaux*., 2007.

[103] FOGLI, *Introduction à la théorie des poutres*.

[104] J. COURBON, "Plaques minces élastiques," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Traité Sciences fondamentales, no. A310, 2002.

[105] FINNFOREST. (2009, Nov.) site de la société FINNFOREST. [Online]. http://www.finnforest.com

[106] NF B 50-003, "Bois - vocabulaire (seconde liste)," AFNOR, Norme 1985.

[107] M. NOEL, "Elaboration d'un matériau composite innovant à base de bois et de bio-polymère d'acide lactique," ENSTIB - UHP NANCY 1, EPINAL, Thèse de doctorat 2007.

[108] C. BARTHRAM, "OPTIMISATION DU PROCEDE DE SOUDAGE DU BOIS PAR TOURILLONS CONIQUES A L'AIDE D'UN RESEAU DE NEURONES," ENSTIB - UHP NANCY, EPINAL, Rapport Master Recherche M2R 2009.

[109] U. A. GIRHAMMAR and V. K. A. GOPU, "Analysis of P-Delta effect composite concrete/timber beam-columns," *Instn Ciu. Engrs*, vol. 91, no. 9642, pp. 39-54, 1991.

[110] B. SUTHOFF, A. SCHAAF, and H. HENTSCHEL, "Neuartiges Verfahren zur Herstellung von linienförmigen Schweißverbindungen mittels eines Reibbolzens," DE19746308A1, Apr. 22, 1999.

[111] B. SUTHOFF, H. HENTSCHEL, and A. SCHAAF, "Reibschweißartige Fügung von Magnesium mit Stälhen und Nichteisenmetallen," DE19711236A1, Sep. 24, 1998.

[112] B. SUTHOFF, "Verfarhen und Vorrichtung zum Reibschweißverbinden," DE19924252A1, Nov. 30, 2000.

[113] J.-M. ESCANÉ, "Théorie des circuits électriques linéaires," *Techniques de l'ingénieur*, vol. Traité Électronique, no. E3000, 2002.

F. LISTE DES FIGURES

FIGURE 1 : *PRINCIPE D'UNE STRUCTURE EN BOIS DE PAYS EN TOURILLONS SOUDES A PARTIR D'AVIVES* 7
FIGURE 2 : *STRUCTURES EN BOIS LAMELLE : (A) PLAFOND DE LA PISCINE A BAR-DÜRHEIM (ALLEMAGNE) ET (B) LE PLAFOND DU STAND SUISSE A LA 35IEME EXPOSITION UNIVERSELLE DE HANOVRE (ALLEMAGNE, 2000)* 8
FIGURE 3 : *FORME DE LA POUTRE LAMELLEE SOUDEE* 8
FIGURE 4 : *EXEMPLE DE STRUCTURE OSSATURE BOIS DE TYPE PLATEFORME* 9
FIGURE 5 : *FORMES DES MURS LAMELLES SOUDES : (A) TYPE OSSATURE BOIS, (B) TYPE PANNEAU MASSIF CHEVILLE ET (C) TYPE PANNEAU MASSIF CHEVILLE AJOURE* 9
FIGURE 6 : *EXEMPLE DE STRUCTURES EN PANNEAUX MASSIFS* 10
FIGURE 7 : *FORMES DES PLANCHERS LAMELLES SOUDES : (A) TYPE TRADITIONNEL, (B) TYPE PANNEAU MASSIF CHEVILLE ET (C) TYPE PANNEAU MASSIF CHEVILLE AJOURE* 10
FIGURE 8 : *MODELE DE KREUZINGER POUR UN CHARGEMENT SINUSOÏDAL (D'APRES* [9]*)* 12
FIGURE 9 : *(A) POUTRE COMPOSEE DE TROIS ELEMENTS SOUMISE A UN CHARGEMENT SINUSOÏDAL, (B) SECTION DE LA POUTRE AVEC LES DISTANCES CARACTERISTIQUES ET (C) L'ALLURE DE L'EFFORT TRANCHANT, DU MOMENT FLECHISSANT, DE LA ROTATION ET DE LA DEFORMEE.* 13
FIGURE 10 : *CONTRAINTES NORMALES DANS LA SECTION* Si 15
FIGURE 11 : *REPRESENTATION SUR DEUX ELEMENTS DE LONGUEUR* dx *(A) DES EFFORTS NORMAUX ET DES MOMENTS ET (B) DU CISAILLEMENT RASANT DANS LA LIAISON (D'APRES* [14]*)* 15
FIGURE 12 : *SYSTEME DE COORDONNEES* 24
FIGURE 13 : *HYPOTHESES D'ETUDE : (A) POUTRE TYPE, (B) SECTION DE REFERENCE, (C) INTEGRATION DE LA RAIDEUR A L'INTERFACE ET (D) APPARITION DU GLISSEMENT (D'APRES* [27]*)* 27
FIGURE 14 : *ÉQUILIBRE DES PRISMES ELEMENTAIRES : (A) EQUILIBRE DES EFFORTS NORMAUX (B) EQUILIBRE DES MOMENTS ET EFFORTS TRANCHANTS* 28
FIGURE 15 : *SIMPLIFICATION DE LA POUTRE COMPOSEE DE* n *ELEMENTS EN UNE POUTRE COMPOSEE DE DEUX ELEMENTS* 29
FIGURE 16 : *INFLUENCE DU GLISSEMENT DANS LA DEFORMATION DE LA SECTION DUE AU FLUX DE CISAILLEMENT (D'APRES* [23]*)* 30
FIGURE 17 : *EXEMPLE DE DIAGRAMME DES CONTRAINTES NORMALES ET TANGENTIELLES (D'APRES* [23]*)* 32
FIGURE 18 : *SIMPLIFICATION DE L'ELEMENT DE POUTRE DE LONGUEUR* dx *ET INTRODUCTION DU CHARGEMENT DE RACCORDEMENT* pkx [23] 33
FIGURE 19 : *DEFORMATION EN CISAILLEMENT DU PRISME ELEMENTAIRE* 34
FIGURE 20 : *MODELE DES RIGIDITES EFFECTIVES EN ADMITTANCE : (A) HYPOTHESES DE CHARGEMENT, (B) MODELE DE KREUZINGER ET (C) MODELE DE GIRHAMMAR* 36
FIGURE 21 : *SYSTEME A UN DDL* 37
FIGURE 22 : *DIAGRAMME AMPLITUDES ET PHASES DES FACTEURS DYNAMIQUES* 39
FIGURE 23 : *FORMES PROPRES D'UNE POUTRE SUR DEUX APPUIS SIMPLES (D'APRES* [30]*)* 40
FIGURE 24 : *FORMES PROPRES D'UNE PLAQUE MINCE : (A) FONDAMENTALE M=N=1 ET (B) M=2 ET N=1 (D'APRES* [32]*)* 42
FIGURE 25 : *EXEMPLE : (A) TRACE D'UN ACCELEROMETRE, (B) TRACE DE MARTEAU D'IMPACT, (C) DIAGRAMME AMPLITUDE ET (D) DIAGRAMME DE PHASE* 44
FIGURE 26 : *DETERMINATION DE L'AMORTISSEMENT EXPERIMENTALEMENT (D'APRES* [30]*)* 44
FIGURE 27 : *DIAGRAMME AMPLITUDE ET PHASE POUR UN SYSTEME A QUATRE DDL* 45
FIGURE 28 : *LISSAGE DE CERCLE ET PLAN DE NYQUIST* 46
FIGURE 29 : *VALEURS ET RATIOS RECOMMANDES POUR A ET B* [4] 47
FIGURE 30 : *CRITERE DE CONCEPTION DES PLANCHERS LEGERS (D'APRES* [34]*)* 48
FIGURE 31 : *PLANCHER TYPE A BASE DE BOIS AVEC UNE DALLE BETON* 48
FIGURE 32 : *PHASES DU PROCEDE DU SOUDAGE LINEAIRE (SELON GIESE* [43]*)* 52
FIGURE 33 : *DE L'ARBRE AUX CARACTERISTIQUES D'ANISOTROPIE DU BOIS* [52] 54
FIGURE 34 : *PLAN LIGNEUX DES RESINEUX (PIN SYLVESTRE)* [52] 54
FIGURE 35 : *PLAN LIGNEUX DES FEUILLUS (FRENE (FRAXINUS) : A ZONE SEMI-POREUSE)* [52] 55
FIGURE 36 : *DEFINITION DE LA PAROI CELLULAIRE* [52] 55
FIGURE 37 : *CONSTITUANT DE LA CELLULOSE : (A)* β*-D-GLUCOSE ET (B) CELLOBIOSE (103 NM)* 56
FIGURE 38 : *EXEMPLE DE LA STRUCTURE CHIMIQUE DE LA CELLULOSE* 56
FIGURE 39 : *CONSTITUANT ELEMENTAIRE DES HEMICELLULOSES* 57
FIGURE 40 : *MONOLIGNOLS* 57
FIGURE 41 : *DESHYDROGENATION ENZYMATIQUE DE L'ALCOOL CONIFERYLIQUE (FENGEL ET WEGENER* [53]*)* 58
FIGURE 42 : *FORMULES TYPIQUES DE QUELQUES DILIGNOLS (FENGEL ET WEGENER* [53]*)* 58
FIGURE 43 : *MODELE MOLECULAIRE DU COMPOSITE BOIS* [53] 59
FIGURE 44 : *ORGANISATION DES PRINCIPAUX POLYMERES DU BOIS DU TRONC JUSQU'AUX MOLECULES* [54] 59
FIGURE 45 : *EVOLUTION DU MODULE D'ELASTICITE DU BOIS AVEC LA TEMPERATURE (D'APRES* [53]*)* 60
FIGURE 46 : *TEMPERATURE DE TRANSITIONS VITREUSES (SALMEN* [43]*)* 60

FIGURE 47 : *PYROLYSE ET COMBUSTION DE LA CELLULOSE* [55]....61
FIGURE 48 : *ETAPES PROBABLE DE DEGRADATION THERMIQUE DES HEMICELLULOSES (FENGEL ET WEGENER* [43]*)*....62
FIGURE 49 : *PRODUIT DE DEGRADATION DU BOIS (FENGEL ET WEGENER* [43]*)*....62
FIGURE 50 : *PRINCIPE DU SOUDAGE LINEAIRE*....63
FIGURE 51 : *INTERFACE SOUDEE MONTRANT L'EXISTENCE D'UN RESEAU DE FIBRES DE BOIS ENCHEVETREES LIE DANS UNE MATRICE DURCIE DE MATERIEL INTERCELLULAIRE* [47]....64
FIGURE 52 : *BILAN DES FACTEURS ENTRANT ET SORTANT LORS DU SOUDAGE DU BOIS (SELON* [43]*)*....64
FIGURE 53 : *TEMPERATURE A L'INTERFACE ET RESISTANCE EN CISAILLEMENT EN FONCTION DU TEMPS DE SOUDAGE (D'APRES* [43]*)*....65
FIGURE 54 : *(A) COUPE TRANSVERSALE POUR UNE ORIENTATION DU FIL DU BOIS A 90 D'UNE EPROUVETTE SOUDEE D'ERABLE (ACER CAMPESTRE)* [43]*, (B) MICRODENSITOMETRIE AUX RAYONS X DE L'INTERFACE SOUDEE DE DEUX PIECES DE HETRE (FAGUS SYLVATICA)* [56]....65
FIGURE 55 : *INFLUENCE DE L'ORIENTATION DU FIL DU BOIS SUR LA RESISTANCE EN CISAILLEMENT DU SOUDAGE D'ERABLE (ACER CAMPESTRE) (D'APRES* [43]*)*....66
FIGURE 56 : *SNOWBOARD NIDECKER* [61]....67
FIGURE 57 : *PRINCIPE DU SOUDAGE DU BOIS PAR FRICTION EN ROTATION : (A) LES PRINCIPAUX PARAMETRES ET (B) VUE EN COUPE DE L'ASSEMBLAGE SOUDE*....67
FIGURE 58 : *INFLUENCE DE LA CONICITE* [65]....68
FIGURE 59 : *DIFFERENTES CHAISES DE RIETVELD REALISEES (A) SELON* [68]*, (B) SELON* [66] *ET (C) SELON* [67]....69
FIGURE 60 : *SCHEMA CINEMATIQUE DE LA MACHINE A TOURILLONNER*....74
FIGURE 61 : *MOTEUR BRUSHLESS DE TYPE NX DE LA GAMME SSD DRIVES – PARVEX* [76]....75
FIGURE 62 : *SYSTEME DE VERIN CHOISI POUR LA MACHINE PROTOTYPE DE SOUDAGE : (A) SYSTEME DE GUIDAGE ET DE FIXATION, (B) VERIN VIS A BILLES.*....77
FIGURE 63 : *CYCLE TYPE*....78
FIGURE 64 : *ORGANISATION DE LA MACHINE*....84
FIGURE 65 : *REFERENCEMENT DES PIECES*....85
FIGURE 66 : *COMPOSITION DU MANDRIN [PE-MAN] : (A) VUE EXPLOSEE ET (B) COUPE VERTICALE*....85
FIGURE 67 : *MACHINE FINALISEE ET PRETE POUR FONCTIONNER*....86
FIGURE 68 : *EXEMPLE DE CYCLE A PROGRAMMER*....87
FIGURE 69 : *GRAFCET DU PERÇAGE ET DU SOUDAGE*....88
FIGURE 70 : *INTERFACE DE PILOTAGE DE LA MACHINE*....88
FIGURE 71 : *MONTAGE DE CALIBRATION*....89
FIGURE 72 : *DIMENSIONS DE LA PIECE MARTYRE ET DE LA CHEVILLE UTILISEE*....90
FIGURE 73 : *DECALAGE EN TEMPS ET EN COUPLE INITIALE*....91
FIGURE 74 : *SPECTRE DES SIGNAUX DES COUPLES*....91
FIGURE 75 : *SIGNAUX DES COUPLES SUPERPOSES*....92
FIGURE 76 : *FAISCEAU DE MESURE DU COUPLE LORS DU SOUDAGE DES LAMELLES POUR LA FABRICATION DES POUTRES*....93
FIGURE 77 : *FAISCEAU DE MESURE DE LA FORCE LORS DU SOUDAGE DES LAMELLES POUR LA FABRICATION DES POUTRES*....94
FIGURE 78 : *EVOLUTION FORCE APPLIQUEE EN FONCTION DU COUPLE APPLIQUE*....94
FIGURE 79 : *PRESENCE DES ZONES D'ACCROCHES POUR LES CHEVILLES DU PLANCHER*....95
FIGURE 80 : *CONICITE APRES SOUDAGE PAR FRICTION POUR UN PERÇAGE CYLINDRIQUE*....95
FIGURE 81 : *MONTAGE DE SOUDAGE*....96
FIGURE 82 : *PRESENTATION (A) DU CYCLE DE SOUDAGE ET (B) DE L'EVOLUTION DE LA FORCE APPLIQUEE ET DU COUPLE TRANSMIS LORS DU SOUDAGE DE CHEVILLES CYLINDRIQUES*....96
FIGURE 83 : *CYCLE DE CHARGEMENT POUR LES ESSAIS*....96
FIGURE 84 : *MONTAGE DE L'ESSAI EN TRACTION RADIALE*....97
FIGURE 85 : *(A) ÉVOLUTION FORCE VS DEPLACEMENT ET (B) EXEMPLE DE RUPTURE POUR UN ESSAI DE TRACTION RADIALE*....98
FIGURE 86 : *ÉVOLUTION DE LA FORCE EN FONCTION DES TROIS MASSES VOLUMIQUES EN PRESENCE*....99
FIGURE 87 : *MONTAGE DE L'ESSAI EN CISAILLEMENT : (A) VUE EN COUPE, (B) MONTAGE*....100
FIGURE 88 : *ÉVOLUTION FORCE – DEPLACEMENT POUR UN ESSAI EN CISAILLEMENT DE L'ECHANTILLON CI-4*....101
FIGURE 89 : *FAISCEAU DES ESSAIS EN CISAILLEMENT*....101
FIGURE 90 : *CREATION D'UNE ROTULE DANS LA CHEVILLE AU NIVEAU DE L'INTERFACE DES PIECES : (A) POUR LES PIECES AVEC DES CERNES FINS ET (B) DES PIECES A CERNES EPAIS*....101
FIGURE 91 : *RAIDEUR A LA CHARGE EN FONCTION DE LA MASSE VOLUMIQUE MOYENNE DES PIECES A ASSEMBLER* $\rho_{PIECE,MOY}$ *ET DE LA MASSE VOLUMIQUE DE LA CHEVILLE* $\rho_{CHEVILLE}$....102
FIGURE 92 : *CAS TYPE D'UNE CHEVILLE NON SOUDEE.*....103
FIGURE 93 : *MONTAGE DE L'ESSAI EN TRACTION AXIALE*....103
FIGURE 94 : *ÉVOLUTION FORCE – DEPLACEMENT POUR UN ESSAI EN TRACTION AXIALE (A) DE L'ECHANTILLON TA-16 ET (B) FAISCEAU DES ECHANTILLONS*....104
FIGURE 95 : *COUPE D'UN ECHANTILLON TESTE AVEC GLISSEMENT DE LA CHEVILLE APRES RUPTURE DU JOINT SOUDE*....105
FIGURE 96 : *REPRESENTATION DE « L'EFFET VIS » CAUSE PAR LES CERNES DU SUBSTRAT : (A) CERNES AVEC UN ANGLE SUPERIEUR A 45° ET (B) CERNES AVEC UN ANGLE INFERIEUR A 45°*....105
FIGURE 97 : *COMPOSITION REELLE MONTRANT LE POSITIONNEMENT DES ELEMENTS DE STRUCTURE REALISES*....109
FIGURE 98 : *REPARTITION DE LA MASSE VOLUMIQUE POUR LE LOT 1 ET LE LOT 2*....111
FIGURE 99 : *PARAMETRAGE POUR LE CALCUL DE LA FLECHE MOYENNE : (A) SANS CONTREFLECHE APPARENTE, (B) AVEC CONTREFLECHE APPARENTE*....112
FIGURE 100 : *VIBRATION D'UN AVIVE : (A) MODE OPERATOIRE, (B) EXEMPLE DE LA TRACE DE L'ACCELEROMETRE ET DE SON (C) SPECTRE*....113
FIGURE 101 : *MODULE D'ELASTICITE DU LOT 1 SUITE AUX ESSAIS STATIQUE ET DYNAMIQUE*....114
FIGURE 102 : *ÉVOLUTION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE EN FONCTION DE LA FLECHE*....114
FIGURE 103 : *REPARTITION DU MODULE D'ELASTICITE POUR LES DEUX LOTS*....115
FIGURE 104 : *PARAMETRAGE DE LA MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA POUTRE*....120
FIGURE 105 : *ELEMENT « PLANCHE »*....120

FIGURE 106 : *ELEMENT « JOINT »*..... 121
FIGURE 107 : *LES DEUX TYPES D'APPUIS POUR LE MEF DE LA POUTRE* 121
FIGURE 108 : *MAILLAGE DE LA POUTRE COMPOSITE DANS LE MEF : (A) VUE GLOBALE, (B) BLOCAGE AUX APPUIS (C) CHARGEMENT SINUSOÏDAL*..... 123
FIGURE 109 : *ALLURE DE LA DEFORMEE DE LA POUTRE COMPOSITE DANS LE MEF*..... 124
FIGURE 110 : *CONTRAINTE DE FLEXION (SMXX) DU MEF*..... 124
FIGURE 111 : *CONTRAINTE DE CISAILLEMENT (SMXY) DU MEF* 125
FIGURE 112 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES NORMALES DE FORME SIGMOÏDALE POUR* $x = Lpou/2$..... 125
FIGURE 113 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES NORMALES (A) ET DE CISAILLEMENT (B) POUR* $x = Lpou/8$..... 126
FIGURE 114 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES – COMPARAISON ENTRE LES MODELE DE KREUZINGER ET LE MEF*..... 127
FIGURE 115 : *DIAGRAMMES DES CONTRAINTES DU MODELE DE KREUZINGER EN FONCTION DU MEF*..... 127
FIGURE 116 : *DEFORMEE DE LA POUTRE POUR LE MODELE DE KREUZINGER ET LE MEF* 128
FIGURE 117 : *EQUILIBRE DU PRISME ELEMENTAIRE POUR TROIS (OU PLUS) ELEMENTS* 129
FIGURE 118 : *DIAGRAMMES DES CONTRAINTES DU MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE GIRHAMMAR EN FONCTION DU MEF* 137
FIGURE 119 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES – COMPARAISON ENTRE LE MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE GIRHAMMAR ET LE MEF*..... 138
FIGURE 120 : *DEFORMEE DE LA POUTRE POUR LE MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE GIRHAMMAR ET LE MEF*..... 138
FIGURE 121 : *PROPRIETES DES LAMELLES : (A) MODULE D'ELASTICITE, (B) MASSE VOLUMIQUE*..... 142
FIGURE 122 : *SCHEMATISATION DE L'IMPLANTATION DES CHEVILLES DANS LES JOINTS I, I+1 ET I+2* 143
FIGURE 123 : *REALISATION DE LA POUTRE 4 : (A) ET (B) INSERTION DE CHEVILLES PAR LA MACHINE, (C) ET (D) POUTRES EN COURS D'ELABORATION* 143
FIGURE 124 : *EXEMPLE DE (A) TRACE ET DE (B) SPECTRE D'UN CHOC SUR LA POUTRE 3* 146
FIGURE 125 : *RAYON DE COURBURE ET DEFORMEE EN FLEXION 4 POINTS*..... 147
FIGURE 126 : *FLEXION TROIS POINTS DE LA POUTRE 1*..... 149
FIGURE 127 : *EVOLUTION DE LA FORCE EN FONCTION DE LA DEFORMEE POUR L'ESSAI DE FLEXION TROIS POINTS POUR LES POUTRES PLEINES* 149
FIGURE 128 : *DETERMINATION DES PENTES A LA CHARGE, DECHARGE ET RECHARGE POUR LA POUTRE 5*..... 150
FIGURE 129 : *FACTEUR* $\mathfrak{G}$ *POUR LES POUTRES PLEINES* 151
FIGURE 130 : *DETERMINATION DE LA FORCE AU SEUIL PLASTIQUE POUR LA POUTRE PLEINE 5* 152
FIGURE 131 : *EVOLUTION DE LA FORCE A L'INTERFACE LE LONG DE LA POUTRE 1 SELON (A) LE MODELE EXACT GENERALISE ET LE MEF AVEC L'APPUI DE TYPE 1 SANS DEBORD PUIS (B) LE MEF AVEC L'APPUI DE TYPE 2 ET UN DEBORD* 153
FIGURE 132 : *AGRANDISSEMENT SUR LA PREMIERE MOITIE DE LA PORTEE DE LA FORCE A L'INTERFACE NUMERO 4 SELON LES DEUX APPROCHES* 153
FIGURE 133 : *RUPTURE DE LA POUTRE PLEINE 1* 155
FIGURE 134 : *RUPTURE DE LA POUTRE PLEINE 2* 155
FIGURE 135 : *RUPTURE DE LA POUTRE PLEINE 3* 155
FIGURE 136 : *RUPTURE DE LA POUTRE PLEINE 4* 156
FIGURE 137 : *RUPTURE DE LA POUTRE PLEINE 5* 156
FIGURE 138 : *PREPARATION DES PSEUDO-POUTRES A PARTIR DU PLANCHER*..... 157
FIGURE 139 : *FLEXION TROIS POINTS DE LA PSEUDO-POUTRE 1* 158
FIGURE 140 : *EVOLUTION DE LA FORCE EN FONCTION DE LA DEFORMEE POUR L'ESSAI DE FLEXION TROIS POINTS POUR LES PSEUDO-POUTRES DU PLANCHER* 158
FIGURE 141 : *RUPTURE DES PSEUDO-POUTRES DU PLANCHER : (A) RUPTURE DANS LE PLAN MOYEN DE LA PSEUDO-POUTRE 4 ET (B) RUPTURE MULTIPLE DANS PLUSIEURS PLANS DE CISAILLEMENT POUR LA PSEUDO-POUTRE 5*..... 159
FIGURE 142 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES NORMALES ET TANGENTIELLES SELON LA COMBINAISON ETUDIEE ET LA VALEUR DU FACTEUR* $\psi 2$..... 169
FIGURE 143 : *EVOLUTION DE LA RIGIDITE EN FONCTION DE LA RAIDEUR LINEIQUE* 172
FIGURE 144 : *(A) FORME DU PLANCHER CHOISI AVEC ET (B) SECTION PRINCIPALE*..... 175
FIGURE 145 : *PARAMETRAGE GLOBAL DES PSEUDO-POUTRES*..... 176
FIGURE 146 : *SCHEMATISATION DE L'ASSEMBLAGE : (A) FORME DE L'ASSEMBLAGE, (B) RAIDEURS UTILES ET (C) SYMBOLE POUR LA REPRESENTATION DU MEF*..... 177
FIGURE 147 : *MODELISATION DE L'ASSEMBLAGE DES PSEUDO-POUTRES PRINCIPALES (4-1-1-1-4) ET SECONDAIRES (2-1-1-2) : (A) STRUCTURE ELEMENTAIRE ET (B) MODELISATION PAR ELEMENTS FINIS DE LA STRUCTURE ELEMENTAIRE* 178
FIGURE 148 : *MAILLAGE DU PLANCHER : (A) VUE GENERALE, (B) ZOOM SUR LE PLANCHER ET (C) CONDITIONS AUX LIMITES*..... 179
FIGURE 149 : *PLANCHER (A) DEFORME SOUS CHARGE PONCTUELLE AU CENTRE ET (B) SA FORME PROPRE POUR* $m=n=3$..... 180
FIGURE 150 : *LES SIX PREMIERS MODES PROPRES DU PLANCHER ISSUS DU MEF : (A)* $m=n=1$, *(B)* $m=2$ *ET* $n=1$, *(C)* $m=1$ *ET* $n=2$, *(D)* $m=n=2$, *(E)* $m=3$ *ET* $n=1$, *(F)* $m=1$ *ET* $n=3$ 180
FIGURE 151 : *AUTRES DEFORMEES DU PLANCHER : (A) CHARGEMENT DANS LES COINS DU PLANCHER ET (B) CHARGEMENT REPARTI POUR LE PLANCHER REPOSANT SUR DEUX APPUIS* 181
FIGURE 152 : *FABRICATION DU PLANCHER A LAMES CROISEES* [70]..... 181
FIGURE 153 : *INSTALLATION DU PLANCHER SUR SES APPUIS ET FINITION DES BORDS* [70] 182
FIGURE 154 : *TESTS STATIQUES SUR LE PLANCHER : (A) AVEC DES CAPTEURS DE DEPLACEMENT ET (B) PAR ANALYSE D'IMAGE* [70]..... 182
FIGURE 155 : *CAS DE CHARGEMENTS POUR L'ETUDE STATIQUE ET POSITIONNEMENT DES ACCELEROMETRES POUR L'ETUDE DYNAMIQUE*..... 183
FIGURE 156 : *DEFORMEE SUR LA CINQUIEME PSEUDO-POUTRE PRINCIPALE DU PLANCHER, EXPERIMENTALE ET MODELISEE*..... 183
FIGURE 157 : *DEFORMEE SUR LA CINQUIEME PSEUDO-POUTRE SECONDAIRE DU PLANCHER, EXPERIMENTALE ET MODELISEE* 184
FIGURE 158 : *LIGNES D'INFLUENCE POUR LE PLANCHER SUR QUATRE SUPPORTS* 185
FIGURE 159 : *MOYENNES DES TRACES (A) DE L'ACCELEROMETRE AU CENTRE DU PLANCHER ET (B) DU MARTEAU D'IMPACT* 186
FIGURE 160 : *SPECTRE DES ACCELEROMETRES / MARTEAU : (A) SPECTRE JUSQU'A 80 HZ ET (B) ZOOM SUR LES FREQUENCES INFERIEURES A 40 HZ* 186
FIGURE 161 : *LISSAGE DE CERCLE POUR LES SIX PREMIERES FREQUENCES DU PLANCHER – PLAN DE NYQUIST*..... 187
FIGURE 162 : *AMELIORATION DE LA DETECTION DE LA FREQUENCE* 187
FIGURE 163 : *DETERMINATION DES PICS SUCCESSIFS POUR LE SIGNAL TEMPOREL DE L'ACCELEROMETRE 1* 188
FIGURE 164 : *AMORTISSEMENT EN FONCTION DE LA FREQUENCE*..... 189
FIGURE 165 : *OSSATURES ET PAREMENTS POSSIBLES* 193

FIGURE 166 : *REPARTITION MODULES D'ELASTICITE LONGITUDINALE EN FONCTION DE LA MASSE VOLUMIQUE DES AVIVES UTILISES* 194
FIGURE 167 : *FABRICATION D'UN CHASSIS POUR LES MURS* 195
FIGURE 168 : *POSITIONNEMENT DU PAREMENT EN POINTE DE HONGRIE* 195
FIGURE 169 : *DISPOSITION DE LA LAMELLE LA PLUS GRANDE DU PAREMENT SELON LE MUR* 196
FIGURE 170 : *PINCES DES ASSEMBLAGES DES LAMES DU CHASSIS* 196
FIGURE 171 : *PINCES DES CHEVILLES SOUDEES DU PAREMENT SUR LES CHASSIS : (A) QUELS QUE SOIENT LES PSEUDO-MONTANTS ET LES PSEUDO-LISSES POUR LES PAREMENTS INCLINES, (B) POUR LES PSEUDO-MONTANTS CENTRAUX DES PAREMENTS EN POINTES DE HONGRIE OU POUR LES PAREMENTS INCLINES FIXES SUR UNE OSSATURE BOIS* 197
FIGURE 172 : *DETAILS D'ASSEMBLAGE DU PAREMENT SUR LES PSEUDO-LISSES DU CHASSIS* 198
FIGURE 173 : *CYCLE DE CHARGEMENT POUR L'ESSAI DE CONTREVENTEMENT* 199
FIGURE 174 : *DETAIL DE LA FIXATION DE LA POUTRE SUR LA PSEUDO-LISSE DU CHASSIS* 199
FIGURE 175 : *MONTAGE POUR L'ESSAI DE CONTREVENTEMENT DES MURS CHEVILLES SOUDES* 200
FIGURE 176 : *SYSTEME D'ANCRAGE DU PIED DES MURS CHEVILLES SOUDES* 201
FIGURE 177 : *EQUERRE DE BUTEE POUR LIMITER LE GLISSEMENT DU MUR* 201
FIGURE 178 : *DISPOSITIF POUR L'APPLICATION DU CHARGEMENT EN TETE DE LA PAROI* 202
FIGURE 179 : *FAISCEAU DES COURBES D'ESSAI DE CONTREVENTEMENT* 203
FIGURE 180 : *RUPTURE DU MUR 0* 204
FIGURE 181 : *RUPTURE DU MUR 1* 205
FIGURE 182 : *RUPTURE DU MUR 2* 205
FIGURE 183 : *RUPTURE DU MUR 3* 206
FIGURE 184 : *RUPTURE DU MUR 4* 207
FIGURE 185 : *RUPTURE DU MUR 5* 208
FIGURE 186 : *POUTRE SUR DEUX APPUIS AVEC UN CHARGEMENT PERIODIQUE ET SON CENTRE DE ROTATION* 218
FIGURE 187 : *AIRE D'UNE SECTION QUELCONQUE (A) ET D'UNE SECTION RECTANGULAIRE (B)* 221
FIGURE 188 : *MOMENT STATIQUE D'UNE SECTION QUELCONQUE (A) ET D'UNE SECTION RECTANGULAIRE (B)* 222
FIGURE 189 : *DEFINITION (A) D'UNE POUTRE ET (B) D'UNE POUTRE ORIENTEE* 225
FIGURE 190 : *CYCLES CHARGE / DECHARGE POSSIBLES* [102] 226
FIGURE 191 : *LIMITES DU CALCUL DE LA RDM SUR UNE POUTRE* 228
FIGURE 192 : *PRINCIPE DE SUPERPOSITION* 229
FIGURE 193 : *POUTRE ETUDIEE SELON L'HYPOTHESE 13 AVEC DES FORCES EXTERIEURES, LES APPUIS ET LEURS REACTIONS* 229
FIGURE 194 : *METHODE DES SECTIONS* 231
FIGURE 195 : *EQUILIBRE D'UN ELEMENT DE POUTRE DE LONGUEUR* dx 231
FIGURE 196 : *DEFINITION DES CONTRAINTES* 232
FIGURE 197 : *(A) POUTRE SOLLICITEE PAR UN EFFORT NORMAL, (B) DIAGRAMME DE L'EFFORT NORMAL* 233
FIGURE 198 : *POUTRE EN FLEXION PURE* 234
FIGURE 199 : *POUTRE EN FLEXION SIMPLE* 235
FIGURE 200 : *EFFORT DE GLISSEMENT* 236
FIGURE 201 : *METHODE DES PARAMETRES INITIAUX* 238
FIGURE 202 : *POUTRE SUR DEUX APPUIS CHARGEE UNIFORMEMENT SUR UN TRONÇON* 239
FIGURE 203 : *ALLURE DE L'EFFORT TRANCHANT (A), DU MOMENT FLECHISSANT (B), DE LA ROTATION (C) ET DE LA DEFORMEE (D) POUR UNE POUTRE SUR DEUX APPUIS SOUMISE A UN CHARGEMENT REPARTI* q *UNIFORME SUR UN TRONÇON DE LONGUEUR* ℓ 242
FIGURE 204 : *LES PRINCIPAUX TYPES DE CHARGEMENTS DECOULANT DU CHARGEMENT REPARTI SUR UN TRONÇON* 243
FIGURE 205 : *LIEUX DES ZONES SELON LES VALEURS DE* d, *DE* ℓ *ET DE* L 246
FIGURE 206 : *LIEUX DES RACINES DE* φz 248
FIGURE 207 : *INTERSECTIONS ENTRE* xf *ET* $x0$ 248
FIGURE 208 : *LIEU DES FLECHES SELON LE COUPLE* ℓ, d *POUR UN CHARGEMENT CONSTANT* $q = qm$ 249
FIGURE 209 : *LIEU DES FLECHES SELON LE COUPLE* ℓ, d *POUR UN CHARGEMENT* $q = F/\ell$ 249
FIGURE 210 : *FLECHE LE LONG DU SEGMENT* $p1, p4$ 250
FIGURE 211 : *ALLURE DE L'EFFORT TRANCHANT (A), DU MOMENT FLECHISSANT (B), DE LA ROTATION (C) ET DE LA DEFORMEE (D) POUR UNE POUTRE SUR TROIS APPUIS SOUMISE A UN CHARGEMENT REPARTI* q *UNIFORME SUR UN TRONÇON DE LONGUEUR* ℓ. *L'APPUI SUPPLEMENTAIRE EST PLACE A L'ABSCISSE DE LA FLECHE DE L'EXEMPLE (§C.1.4.2.) :* $a1 = xf$ 252
FIGURE 212 : *CHARGEMENTS POSSIBLES : (A) REPARTI UNIFORME, (B) REPARTI UNIFORME SUR UN TRONÇON ET (C) PONCTUEL* 254
FIGURE 213 : *APPROXIMATION DU CHARGEMENT REPARTI SUR UN TRONÇON EN SERIE DE FOURIER* 256
FIGURE 214 : *CHARGEMENT DE LA POUTRE COMPOSITE SUR DEUX APPUIS ET SES DIAGRAMMES DE LA RDM* 258
FIGURE 215 : *(A) DISTANCES CARACTERISTIQUES (B) DIAGRAMMES DES CONTRAINTES NORMALES ET (C) CONTRAINTES DE CISAILLEMENT* 260
FIGURE 216 : *DIAGRAMME DES CONTRAINTES – COMPARAISON ENTRE LE MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE HEIMESHOFF ET LE MEF* 272
FIGURE 217 : *DIAGRAMMES DES CONTRAINTES DU MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE HEIMESHOFF EN FONCTION DU MEF* 272
FIGURE 218 : *DEFORMEE DE LA POUTRE POUR LE MODELE GENERALISE SELON LA METHODE DE HEIMESHOFF ET LE MEF* 273
FIGURE 219 : *EQUILIBRE DE LA PLAQUE MINCE ELEMENTAIRE (D'APRES* [32]*)* 279
FIGURE 220 : *LES CINQ TYPES DE CONDITIONS AUX APPUIS : (A) PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR LES QUATRE BORDS, (B) PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR LES BORDS* $x = 0$ *ET* $x = Lx$, *(C) PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR LES BORDS* $y = 0$ *ET* $y = Ly$, *(D) PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUS BORDS SAUF POUR* $y = 0$ *PAR EXEMPLE ET (E) PLAQUE SIMPLEMENT APPUYEE SUR TOUS LES BORDS SAUF POUR* $x = 0$ *PAR EXEMPLE.* 280
FIGURE 221 : *CARACTERISTIQUE DU MOTEUR BRUSHLESS NX430EAF* 285
FIGURE 222 : *CARACTERISTIQUES DU MOTEUR BRUSHLESS NX310EAP* 286

FIGURE 223 : *DEVIS DE LA PARTIE COMMANDE DE LA MACHINE (PAGE 1)* 287

G. LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : *Chargements des poutres A et B* 36
Tableau 2 : *Determination du couple de torsion a rupture d'un tourillon de 10 mm en hetre (Fagus sylvatica)* 75
Tableau 3 : *Vitesse de descente et choix du rapport de reduction* 76
Tableau 4 : *Caracteristique supplementaire du moteur NX430EAF* 77
Tableau 5 : *Etude du couple de demarrage* 78
Tableau 6 : *Etude du couple en vitesse constante de la pression* 79
Tableau 7 : *Etude du couple en vitesse constante de la torsion du tourillon* 79
Tableau 8 : *Etude du moment en phase de freinage* 79
Tableau 9 : *Etude de l'attente pour le moteur de la broche* 79
Tableau 10 : *Recapitulatif de cycle pour le moteur de la broche* 80
Tableau 11 : *Caracteristiques supplementaire du moteur NX310EAP* 80
Tableau 12 : *Caracteristiques de la vis a billes ETB80 M10* 81
Tableau 13 : *Caracteristiques du motoreducteur GX3…* 81
Tableau 14 : *Caracteristiques de l'ensemble mobile que doit deplacer le verin ETB80 M10* 81
Tableau 15 : *Caracteristiques de la pression exercee* 81
Tableau 16 : *Étude du demarrage pour le moteur de l'axe Y* 82
Tableau 17 : *Étude en vitesse constante pour le moteur de l'axe Y* 82
Tableau 18 : *Étude du freinage pour le moteur de l'axe Y* 82
Tableau 19 : *Étude de l'attente pour le moteur de l'Axe Y* 82
Tableau 20 : *Exemple de cycle pour le moteur de l'axe Y* 83
Tableau 21 : *Structure principale du tableau des objets* 87
Tableau 22 : *Masse volumiques des pieces a assembler et des chevilles pour le test de traction radiale pour 30 echantillons* 97
Tableau 23 : *Forces maximales obtenues pour le test de traction radiale pour 30 echantillons* 97
Tableau 24 : *Masses volumiques des pieces a assembler et des chevilles pour le test en cisaillement pour 28 echantillons* 100
Tableau 25 : *Raideurs et efforts maximaux obtenus pour le test en cisaillement pour 28 echantillons* 102
Tableau 26 : *Masse volumique des pieces a assembler et des chevilles pour le test en traction axiale* 104
Tableau 27 : *Raideurs et forces maximales obtenues pour le test en traction axiale* 104
Tableau 28 : *Donnees statistique de la masse volumique pour les deux lots* 112
Tableau 29 : *Donnees statistique du module d'elasticite longitudinal pour les deux lots* 115
Tableau 30 : *Rigidite selon le parametre LOAD* 122
Tableau 31 : *Valeurs numeriques pour la comparaison des modeles* 125
Tableau 32 : *Valeur numerique de la fleche et de la rigidite pour le modele de KREUZINGER et le MEF* 128
Tableau 33 : *Valeurs numeriques de la fleche et de la rigidite pour le modele generalise selon la methode de GIRHAMMAR et le MEF* 139
Tableau 34 : *Dimensions des lamelles* 142
Tableau 35 : *Proprietes des lamelles* 142
Tableau 36 : *Valeurs des distances A_i selon la poutre* 144
Tableau 37 : *Rigidites maximales et minimales des poutres* 144
Tableau 38 : *Masses et masses volumiques des poutres* 144
Tableau 39 : *Rigidites et proportions pour l'essai dynamique* 146
Tableau 40 : *Rigidites et proportions pour l'essai statique de flexion en 4 points* 148
Tableau 41 : *Forces estimees* 148
Tableau 42 : *Vitesse de chargement* 148
Tableau 43 : *Rigidites et proportions pour l'essai statique de flexion 3 points* 150
Tableau 44 : *Rigidites des poutres pleines* 150
Tableau 45 : *Resistance a la flexion des poutres* 152
Tableau 46 : *Force par organe par plan de cisaillement selon l'interface* 154
Tableau 47 : *Force au seuil plastique moyenne et caracteristique* 154
Tableau 48 : *Forces estimees pour les pseudo-poutres* 157
Tableau 49 : *Vitesse de chargement pour les pseudo-poutres* 158
Tableau 50 : *Rigidites des pseudo-poutres du plancher* 159
Tableau 51 : *Raideurs d'assemblage moyennes obtenues par calcul inverse des organes a l'interface pour l'essai de flexion en trois points des poutres pleines* 160

TABLEAU 52 : *RAIDEURS D'ASSEMBLAGE MOYENNES OBTENUES PAR CALCUL INVERSE DES ORGANES A L'INTERFACE POUR L'ESSAI DE FLEXION EN TROIS POINTS DES PSEUDO-POUTRES DU PLANCHER* 160
TABLEAU 53 : *RESISTANCE A LA FLEXION DES POUTRES* 161
TABLEAU 54 : *VERIFICATION AUX E.L.U. D'UNE POUTRE HOMOGENE* 163
TABLEAU 55 : *RAIDEURS DE CISAILLEMENT POSSIBLES POUR UNE CHEVILLE SOUDEE DANS DU BOIS D'EPICEA (PICEA ABIES)* 164
TABLEAU 56 : *RIGIDITES EFFECTIVES MAXIMALES ET MINIMALES SELON LA VALEUR DE* $E_{MEAN,FIN}$ 165
TABLEAU 57 : *RIGIDITE EFFECTIVE TOTALE SELON LE NOMBRE DE SOMMATION* θ_{MAX} 165
TABLEAU 58 : *EFFORT NORMAL, MOMENT FLECHISSANT, CONTRAINTES NORMALES POUR CHAQUE LAMELLE SELON LA COMBINAISON.* 167
TABLEAU 59 : *RESISTANCES DE CALCUL SELON LA COMBINAISON* 168
TABLEAU 60 : *TAUX DE TRAVAIL DES CONTRAINTES NORMALES PAR LAMELLE EN FONCTION DES COMBINAISONS* 169
TABLEAU 61 : *CONTRAINTES DE CISAILLEMENT PAR LAMELLE SELON LA COMBINAISON* 170
TABLEAU 62 : *RESISTANCES EN CISAILLEMENT DE CALCUL SELON LA COMBINAISON* 170
TABLEAU 63 : *TAUX DE TRAVAIL POUR LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT PAR LAMELLE EN FONCTION DES COMBINAISONS* 171
TABLEAU 64 : *FORCE PAR ORGANE ET PLAN DE CISAILLEMENT PAR INTERFACE SELON LA COMBINAISON* 171
TABLEAU 65 : *RESISTANCES DE L'ORGANE EN CISAILLEMENT DE CALCUL SELON LA COMBINAISON* 172
TABLEAU 66 : *TAUX DE TRAVAIL POUR L'EFFORT PAR ORGANE ET PAR PLAN DE CISAILLEMENT SELON L'INTERFACE ET SELON LA COMBINAISON* 172
TABLEAU 67 : *RAIDEURS NECESSAIRES POUR ATTEINDRE 50%, 75% ET 95% DU FACTEUR* $\mathfrak{G}$ 173
TABLEAU 68 : *NOMBRE NECESSAIRE DE LAMELLES POUR VALIDER LE CRITERE DE FLECHE (<8.4 MM) SELON LES RAIDEURS DE CISAILLEMENT* 173
TABLEAU 69 : *RIGIDITES EFFECTIVES DES PSEUDO-POUTRES DU PLANCHER* 184
TABLEAU 70 : *RIGIDITES EFFECTIVES DU PLANCHER DANS LES DEUX DIRECTIONS PRINCIPALES* 184
TABLEAU 71 : *FREQUENCES PROPRES DU PLANCHER* 187
TABLEAU 72 : *AMORTISSEMENT REDUIT EXPERIMENTAL POUR LE PLANCHER* 188
TABLEAU 73 : *PARAMETRE MODAL EXPERIMENTAL POUR LE PLANCHER* 189
TABLEAU 74 : *PHASE EXPERIMENTALE POUR LE PLANCHER* 189
TABLEAU 75 : *REPONSE EN VITESSE POUR UNE IMPULSION UNITAIRE SELON LES TROIS METHODES* 190
TABLEAU 76 : *DONNEES STATISTIQUES DES AVIVES UTILISES DANS LA FABRICATION DES PAROIS* 194
TABLEAU 77 : *PINCES DES CHEVILLES SOUDEES DU PAREMENT SUR LE CHASSIS* 197
TABLEAU 78 : *NOMBRE DE LAMELLES POUR LE PAREMENT SELON LES MURS* 198
TABLEAU 79 : *FORCES ESTIMEES POUR LE CYCLE DE CONTREVENTEMENT* 199
TABLEAU 80 : *RAIDEURS ET FORCES MAXIMALES SELON LES MURS CHEVILLES SOUDES* 204
TABLEAU 81 : *VALEURS AUX POINTS CARACTERISTIQUES :* 241
TABLEAU 82 : *VALEURS NUMERIQUES AUX POINTS CARACTERISTIQUES* 243
TABLEAU 83 : *COORDONNEES DES POINTS D'INTERSECTIONS DES DOMAINES* 245
TABLEAU 84 : *INTERVALLES ET BORNES POUR LA FONCTION* $\mathfrak{F}2$ 265
TABLEAU 85 : *VALEURS NUMERIQUES DE LA FLECHE ET DE LA RIGIDITE POUR LE MODELE GENERALISE SELON LA METHODE D'HEIMESHOFF ET LE MEF* 273
TABLEAU 86 : *CONDITIONS AUX LIMITES SELON X ET Y D'UNE PLAQUE MINCE* 279

RESUME (VERSION LONGUE)

La technologie récente du soudage du bois constitue un nouveau moyen d'assemblage. Ce procédé assemble deux pièces de bois sans aucun adhésif ni aucun assembleur « traditionnel » (clous, vis, broches métalliques…).

Le présent travail étudie la faisabilité (réalisation et dimensionnement) d'éléments de construction : poutres, poteaux, parois et planchers en utilisant le soudage du bois par friction avec des chevilles en bois de hêtre (*Fagus sylvatica*). Les éléments de structure sont composés d'avivés (planches) d'épicéa (*Picea abies*) provenant des forêts locales (VOSGES). Ces avivés présentent des caractéristiques mécaniques et physiques qualifiées individuellement pour permettre une comparaison précise avec les modèles mathématiques développés.

Pour satisfaire les contraintes technologiques, réglementaires et de coût, ces éléments de structure sont modélisés pour être optimisés. La modélisation va de l'assemblage unitaire aux éléments de structure. La maîtrise du procédé devient primordiale pour avoir une bonne reproductibilité indépendante du facteur humain. Dans cette optique, une machine prototype préindustrielle a été conçue et entièrement réalisée. Elle permet de maîtriser les paramètres essentiels : déplacement de la cheville et la rotation de celle-ci. Un logiciel entièrement modulable, pilote avec précision l'ensemble des moteurs de la machine pour maîtriser le procédé de soudage, il permet également la programmation de cycles adéquats. Ainsi, en mesurant en continu et en temps réel l'évolution du couple appliqué sur la cheville et la force lors de l'introduction dans le perçage, le prototype conçu permet de réaliser des éprouvettes soudées de qualité contrôlée.

Pour caractériser les assemblages unitaires, trois essais sont mis en place : traction du joint soudé, cisaillement de la cheville soudée et traction axiale de la cheville soudée. Ces trois tests donnent une qualification des performances de l'assemblage soudé. Seul l'essai de cisaillement est utilisé dans la suite en comparaison avec les essais des poutres pleines chevillées soudées. Les deux principaux paramètres du procédé : vitesse de rotation et la vitesse d'avance lors de l'introduction proviennent de la littérature. Nos essais montrent qu'ils peuvent être largement optimisés. Avant d'effectuer cette optimisation, l'étude des éléments à l'échelle 1 est effectuée pour identifier les facteurs et domaines pertinents.

L'étude des planchers et des parois à lames croisées nécessite la maîtrise du comportement de poutres à connexions imparfaites. Dans la littérature, un seul modèle analytique permet d'approcher ce type d'élément : le modèle de KREUZINGER. La comparaison de ce modèle avec un modèle par éléments finis (modèle numérique) montre l'existence d'un écart de contraintes et de rigidités entre les deux approches pour une poutre avec un nombre de lamelles importants. Un nouveau modèle analytique est développé sur la base de l'approche de GIRHAMMAR en le généralisant : le modèle exact généralisé. Ce modèle décrit parfaitement la distribution non linéaire des contraintes dans la section et la rigidité de la poutre pour un chargement quelconque (appuis simples). Ce modèle et le modèle par éléments finis ont permis d'analyser finement la rigidité à l'interface des poutres.

Une série d'essais en vraie grandeur est menée et a permis de montrer un comportement très homogène des poutres. Ces poutres sont plus souples que les éléments collés, ce qui leur confère une grande sensibilité vis-à-vis du fluage. Même en optimisant le nombre d'organes dans le plan de cisaillement et la qualité du joint soudé, la réalisation de telles poutres lamellées chevillées soudées massives ne semble pas judicieuse dans la majorité des cas. Cependant ce comportement est parfaitement maîtrisable et peut constituer un avantage considérable dans la construction, lors des séismes, par exemple.

Une autre série d'essais en vraie grandeur a été menée sur un plancher de 16 m^2 en lames croisées ajourées assemblées par chevilles soudées manuellement et testé en statique et en dynamique. L'étude statique permet de vérifier le comportement de type plaque et, selon les flèches obtenues, indique le confort du plancher. Ce point est complété par une analyse dynamique qui montre que le plancher a un comportement limite vis-à-vis des critères

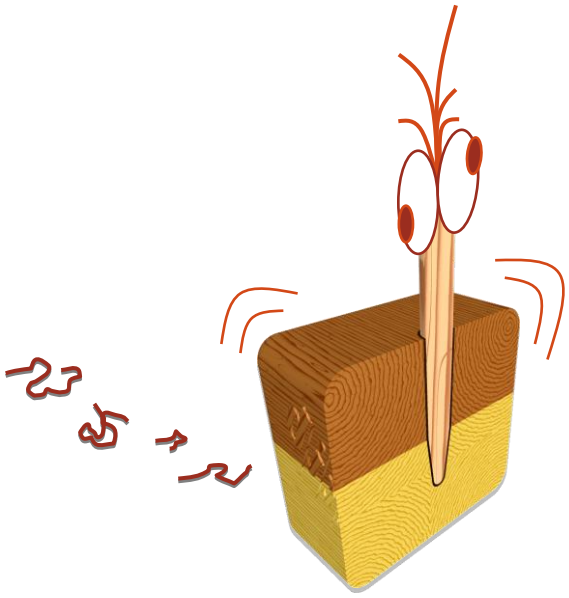
d'OHLSSON, d'ALLEN et de CHUI. Selon OHLSSON, la réponse en vitesse pour une impulsion unitaire est déterminée pour les fréquences inférieures à 40 Hz. La vitesse obtenue est inférieure à la vitesse limite. Elle est aussi relativement petite montrant l'aptitude du plancher aux critères de confort. Toutefois, le dimensionnement de tels planchers ne suit pas intégralement l'approche d'OHLSSON, il convient de faire un mixage entre l'approche de plaque orthotrope de CHUI et le critère d'OHLSSON. Pour un pré-dimensionnement, ce plancher peut être considéré comme un oscillateur simple.

Enfin, six parois de 2.4 x 2.4 m^2 sont réalisées manuellement, elles peuvent être utilisées dans les structures de type ossature bois. Ces parois ne sont pas optimisées mais les essais de contreventement donnent des résultats prometteurs. Ces murs sont 2.3 fois plus résistants que ce que demandent les critères habituels. Comme pour les poutres, le comportement ductile des parois doit être mis en avant comme un atout sur l'aspect contreventement en zones sismiques.

Ainsi, ce travail apporte les premiers éléments sur l'application du soudage du bois dans les éléments constructifs pouvant être utilisés dans le bâtiment. Il apparait que cette technologie d'assemblage est plus compétitive dans la réalisation d'éléments constructifs en 3D (planchers, parois) et qu'elle l'est moins pour la réalisation d'éléments de type poutre. Dans un contexte de développement durable, cette approche constructive, sans colle, ni assembleur métallique prend toute sa signification.

Mots clés RAMEAU : Bois – Soudage, Construction en bois, Poutres en bois

Mots clés libres : Poutres à connexions imparfaites



RESUME

Le soudage du bois constitue un nouveau procédé d'assemblage, deux pièces de bois sont assemblées sans aucun adhésif, ni organe métallique. Ce travail étudie la faisabilité d'éléments de construction en bois lamellé à échelle 1 comme des poutres, des parois et des planchers, en utilisant le soudage de chevilles (Fagus sylvatica) dans des avivés (Picea abies) des forêts locales (VOSGES).

La maîtrise du procédé étant primordiale pour étudier sa reproductibilité, une machine prototype est développée. Les paramètres d'asservissement et la mesure des efforts appliqués sont maîtrisés précisément par un logiciel. La fabrication contrôlée d'échantillons et de poutres soudées permet de caractériser les propriétés mécaniques élémentaires.

L'étude du comportement des poutres et des planchers fait appel à la théorie des poutres à connexions imparfaites. Une approche par éléments finis montre que le modèle analytique de KREUZINGER n'approche pas suffisamment la distribution des contraintes dans la section composite, un modèle analytique est développé selon l'approche de GIRHAMMAR : le modèle exact généralisé. Les essais de poutres montrent une trop grande souplesse de la liaison et sa sensibilité au fluage. Les essais sur le plancher conduisent à des caractéristiques intéressantes en termes de rigidité et de confort. Les parois, non optimisées, montrent des résultats prometteurs pour le contreventement.

Les premiers éléments sur l'utilisation du soudage du bois dans la construction sont présentés. Cette technologie se révèlerait compétitive dans la réalisation d'éléments constructifs en 3D. Dans un contexte de développement durable, cette approche constructive est porteuse d'avenir.

Mots clés RAMEAU : Bois – Soudage, Construction en bois, Poutres en bois

Mots clés libres : Poutres à connexions imparfaites

ABSTRACT

Wood welding is a new assembly concept; two pieces of wood can be connected without any adhesive or any metal fastener. This study present the feasibility in usable scale, to produce laminated elements for construction like beams, walls and floors, using welded dowels (Fagus sylvatica) to connect planks (Picea abies) from local forests (Vosges).

To be used, it is essential that the welding process has to be reproducible; a prototype machine was designed in this aim. It mastered the main parameters of welding like rotation speed and efforts. A convivial software pilot efficiently the machine. This allows a controlled fabrication of welded samples and beams to characterize their basic resistance properties.

The behaviour of beams and floors is given by composite beam with interlayer slip theory. A finite elements approach showed that the KREUZINGER's analytical model does not allow to describe well enough the stress distribution in a multi layer composite section, an analytical model is then develop from GIRHAMMAR's composite beams theory: the so call generalized exact model. Tests of beams show that the dowel connection is too weak and will have then a great sensitivity to creep. Tests on floor provide interesting features in terms of rigidity and comfort. The walls which are not optimized show encouraging results for racking resistance.

The first items for the use of wood welding in construction are presented. This technology will be competitive in achieving constructive elements in 3D. In a context of sustainable development, this constructive approach takes its full meaning.

RAMEAU key words: Wood – Welding, Wood construction, wood joist

Free key words: layered timber beam, composite beams with interlayer slip