

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Pascal SERRIER

Professeur agrégé de mécanique

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

ANALYSE de L'INFLUENCE des non-linearites dans l'approche crone : Application en isolation vibratoire

Soutenue le 30 septembre 2008

Après avis de : MM.

Gérard GISSINGER

Professeur à l'Université de Haute Alsace

Rapporteurs

Jean-Claude TRIGEASSOU

Professeur à l'Université de Poitiers

Devant la Commission d'examen formée de :

MM. **Gérard GISSINGER,**

Professeur à l'Université de Haute Alsace

Rapporteurs

Jean-Claude TRIGEASSOU,

Professeur à l'Université de Poitiers

Xavier MOREAU,

Professeur à l'Université Bordeaux 1

Directeur de thèse

Luc DUGARD,

Directeur de recherche au GIPSA-Lab de Grenoble

Examineurs

Franck GUILLEMARD,

Ingénieur à PSA Peugeot Citroën

Vincent HERNETTE,

Ingénieur à PSA Peugeot Citroën

Alain OUSTALOUP,

Professeur à l'ENSEIRB

Ali ZOLGHADRI,

Professeur à l'Université Bordeaux 1

*A Séverine,
A mes parents,*

« Il n'est pas nécessaire qu'un auteur comprenne ce qu'il écrit. Les critiques se chargeront de le lui expliquer. »

Antoine François Prévost d'Exiles, dit l'abbé Prévost,
Romancier, historien et journaliste (1697 - 1783)

Remerciements

Ce travail a été effectué dans l'équipe CRONE du département LAPS du laboratoire IMS, UMR 5218 du CNRS.

Je tiens à remercier, en premier lieu, Xavier Moreau, directeur de cette thèse pour son soutien constant, son éternelle bonne humeur et son grand professionnalisme. J'ai énormément appris à son contact.

Cette thèse doit également beaucoup au Professeur Alain Oustaloup, responsable de l'équipe CRONE et dont les encouragements ont été une puissante source de motivation. Nos relations pendant ces quelques années ont été bien plus que professionnelles.

Je remercie M. Jean-Claude Trigeassou, professeur émérite à l'Université de Poitiers et Monsieur Gérard Gissinger, professeur à l'Université de Haute-Alsace, pour avoir accepté la tâche de rapporteurs de cette thèse.

J'adresse toute ma gratitude à Franck Guillemard et Vincent Hernet, ingénieurs à PSA-Peugeot Citroën. Leurs connaissances de l'automobile et nos nombreuses discussions ont permis d'ancrer ces travaux dans la réalité industrielle.

Je remercie également les membres des équipes CRONE et ARIA, et particulièrement les doctorants, qui ont contribué à faire avancer ces travaux dans la joie et la bonne humeur.

J'adresse enfin une pensée particulière à Séverine, sans qui je n'aurais, peut-être, jamais mis les pieds à Bordeaux. Je n'ai jamais eu à regretter la décision de l'accompagner là-bas.

Introduction générale

La transmission des vibrations est un problème récurrent dans les dispositifs mécaniques de tous genres, dès lors qu'ils comportent des pièces mobiles. Ces vibrations peuvent en effet avoir de nombreuses conséquences néfastes pour les mécanismes : génération de bruit, création de jeux mécaniques, perte de la précision, usure prématurée des composants, dégradation des pièces (parfois jusqu'à la rupture) par des phénomènes de fatigue, etc.

Lorsqu'il n'est pas possible de réduire les vibrations à la source, ou de déplacer en dehors des fréquences des vibrations les modes de résonance du mécanisme qui en est victime (en le rigidifiant par exemple), l'introduction d'un dispositif d'isolation appelé suspension s'avère très souvent nécessaire. Cette solution donne de très bons résultats dans la plupart des cas. En revanche, lorsque les caractéristiques du mécanisme à isoler sont amenées à évoluer (par ajout d'éléments par exemple), il peut arriver que la suspension, bien dimensionnée initialement, ne remplisse plus son rôle de façon satisfaisante.

L'approche CRONE, appliquée à la conception de suspension, permet d'éviter cet écueil. Elle repose sur les notions mathématiques de dérivation et d'intégration non entières et permet de garantir la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse du dispositif à isoler. Ainsi, l'approche CRONE permet de mettre en défaut l'interdépendance masse-amortissement incontournable dans l'approche « entière » de la mécanique. L'isolation vibratoire est d'ailleurs devenue un axe majeur de recherche au sein de l'équipe CRONE du département LAPS du laboratoire IMS.

Quelle que soit la technologie retenue (mécanique ou hydropneumatique), la réalisation d'une suspension CRONE s'appuie sur l'association de cellules capacitives et dissipatives. En ce qui concerne la technologie hydropneumatique, celle-ci est bien adaptée à la réalisation d'une suspension CRONE, notamment dans le domaine de l'automobile. Cependant, cette technologie présente des particularités en raison du caractère non linéaire de ses composants. La prise en compte de ces non-linéarités dans le fonctionnement d'une suspension CRONE est l'un des axes développés dans l'ERT¹ CRONE.

¹ L'équipe CRONE a obtenu en partenariat avec PSA le label *Equipe de Recherche Technologique* (ERT) du Ministère pour une durée de 4 ans à compter du 1^{er} janvier 2007.

Les travaux présentés dans cette thèse se situent dans la continuité de ceux initiés par X. Moreau et A. Oustaloup dans les années 1990, et poursuivis par C. Nouillant de 2001 à 2003 dans le cadre du Contrôle Global du Châssis (CGC) et par O. Altet de 2002 à 2004 dans le cadre des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH).

Organisation et contenu de la thèse

Ce mémoire de thèse est organisé en deux parties, la première étant constituée de trois chapitres et la seconde de deux chapitres.

La première partie, consacrée aux aspects fondamentaux, concerne la synthèse et la réalisation en technologie hydropneumatique d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. La seconde partie a pour but de montrer l'intérêt et les performances d'un tel concept dans un secteur applicatif privilégié, à savoir celui des suspensions de véhicules automobiles.

Le chapitre 1 rappelle tout d'abord les définitions et les résultats fondamentaux liés à l'intégration non entière. Des exemples de systèmes dont le comportement met en jeu des phénomènes non entiers sont également présentés au début. Le cœur du chapitre s'intéresse à la synthèse et à la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. La synthèse d'un tel intégrateur est fondée sur la récursivité fréquentielle. La réalisation, quant à elle, utilise le lien avec les systèmes à paramètres localisés, en particuliers les réseaux ou arrangements de cellules dissipatives et capacitives (cellules RC). Une validation expérimentale est effectuée à l'aide d'une réalisation en technologie électrique. Cette expérience met également en évidence l'intérêt de l'intégration non entière en ce qui concerne la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Le chapitre 2 est consacré à la réalisation en technologie hydropneumatique d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. Au travers d'un exemple d'illustration, à savoir un dispositif de suspension hydropneumatique, les spécificités de cette technologie sont mises en évidence : la non-linéarité des éléments capacitifs et la dépendance de leur capacité à la masse suspendue. Dans ce chapitre, un modèle d'analyse aux petites amplitudes permet de s'affranchir de la prise en compte des non-linéarités traitées au chapitre suivant. La dépendance des capacités des accumulateurs à la masse suspendue, quant à elle, se traduit par des résultats remarquables :

- la robustesse de la rapidité (propriété intrinsèque de la technologie hydropneumatique)
- et la robustesse du degré de stabilité (propriété intrinsèque de l'approche CRONE) vis-à-vis des variations de la masse suspendue.

Le chapitre 3 est consacré à l'extension au cas non linéaire des résultats du chapitre 2 obtenus dans le cadre d'une approche linéaire. Ainsi, une méthode basée sur la décomposition en série de Volterra est proposée. Cette décomposition est habituellement utilisée pour la modélisation et l'identification des systèmes non linéaires comme le montre la synthèse bibliographique proposée au début de ce chapitre. L'utilisation des séries de Volterra permet ici de montrer que la robustesse de la rapidité et la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue ne sont pas affectées par la présence des non-linéarités.

Après avoir développé les aspects fondamentaux dans la première partie, et ce indépendamment de tout secteur applicatif, la seconde partie est consacrée à l'application aux suspensions de véhicules automobiles.

Le chapitre 4 présente, dans le cadre de la dynamique du véhicule, les développements d'un modèle de validation à 14 degrés de liberté, dont l'utilisation constitue l'étape ultime avant implantation de tout organe sur véhicule. Ces développements sont effectués à l'aide des torseurs et du formalisme de Lagrange. Ensuite, un modèle quart de véhicule, utilisé d'abord pour l'analyse de la dynamique verticale puis pour la synthèse d'une suspension CRONE dans le chapitre 5, est présenté. Une attention toute particulière est apportée aux hypothèses qui définissent le domaine de validité de chacun de ces modèles. Afin d'alléger la présentation, les outils mathématiques et les détails des calculs nécessaires à l'établissement rigoureux du modèle de validation sont renvoyés en annexes I et II respectivement.

Le chapitre 5 est consacré à la synthèse et la réalisation en technologie hydropneumatique d'une suspension CRONE pour un véhicule automobile. Compte tenu de la conclusion du chapitre 3, la synthèse s'appuie sur les méthodes présentées dans les chapitres 1 et 2. La validation de la suspension sur le modèle à 14 degrés de liberté du chapitre 4 est faite dans un second temps. Une réflexion sur l'influence des non-linéarités clôt ce chapitre.

Avant-propos

L'apport de la thèse de P. SERRIER peut être défini chronologiquement par sa contribution scientifique dans chacun des chapitres.

Dans le *chapitre 1*, les apports se situent, non pas au niveau de la *synthèse* (ou de l'approximation) d'un intégrateur d'ordre non entier bornée en fréquence dans la mesure où celle-ci est fondée sur la récursivité fréquentielle [Oustaloup, 1995], mais au niveau de sa *réalisation* à l'aide d'un nombre *réduit* N de cellules RC. Un tel résultat n'est possible que grâce à la présence d'une cellule purement capacitive située à l'entrée des différents arrangements étudiés et dont la capacité est déterminée de manière optimale. Les aspects méthodologiques sont présents tout au long de la progression de ce chapitre, en particulier pour passer du concept (l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence caractérisé par 4 paramètres de synthèse de haut niveau) aux réalisations (caractérisées par N paramètres dissipatifs et $N+1$ paramètres capacitifs). Les développements se veulent génériques ne privilégiant aucun domaine de la physique en particulier, même s'il est vrai que l'analogie « électrique » est utilisée pour les schémas afin de faciliter la compréhension.

Dans le *chapitre 2*, les contributions portent, d'une part, sur la mise en évidence des propriétés d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence dans le cas particulier où celui-ci est réalisé en technologie hydropneumatique et, d'autre part, sur la définition d'une transformation mathématique permettant de reproduire avec les paramètres de synthèse de haut niveau de l'intégrateur les propriétés observées jusque là seulement avec les paramètres technologiques des réalisations. Cette transformation permet d'introduire de la souplesse dans le processus itératif de conception puisqu'il n'est plus nécessaire, dans un premier temps tout au moins, de définir dans les moindres détails la solution technologique pour en apprécier ses performances.

Dans le *chapitre 3*, les apports concernent l'introduction et l'exploitation des séries de Volterra pour l'analyse de l'influence des non-linéarités des composants hydropneumatiques sur le comportement dynamique de la suspension CRONE. Ainsi une synthèse bibliographique concernant les séries de Volterra est proposée et accompagnée d'exemples d'illustration, facilitant ainsi la compréhension des méthodes de calcul des différents noyaux. Ensuite, les avantages et les limites d'une telle approche sont présentés de manière claire et objective. Enfin, l'un des aspects intéressants des séries de Volterra, à savoir la possibilité de pouvoir continuer l'analyse dans le domaine fréquentiel malgré la présence de non-linéarités, est exploité pour expliquer pourquoi la robustesse de la rapidité et la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue ne sont pas affectées par les non-linéarités des éléments capacitifs.

Dans le *chapitre 4*, P. SERRIER exploite ses compétences dans le domaine de la modélisation des systèmes mécaniques polyarticulés pour établir de manière rigoureuse et didactique un modèle de validation d'un véhicule automobile à 14 degrés de liberté. L'accent est mis, d'une part, sur la difficulté d'établir un modèle de connaissance précis et, d'autre part, sur la nécessité d'introduire des hypothèses simplificatrices qu'il faut constamment avoir à l'esprit dans la mesure où elles définissent le domaine de validité du modèle. En complément, la notion de modèle de synthèse est introduite et illustrée dans le cadre des suspensions.

Enfin, dans le *chapitre 5*, la contribution se situe au niveau de la conception d'une version de la suspension CRONE Hydractive, conception qui exploite les développements des chapitres précédents.

Xavier MOREAU
Directeur de thèse

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE	- 7 -
ORGANISATION ET CONTENU DE LA THESE	- 9 -
AVANT-PROPOS.....	- 11 -
TABLE DES MATIERES	- 13 -
CHAPITRE 1 SYSTEMES A DERIVEES NON ENTIERES.....	- 17 -
1.1 - Introduction.....	- 17 -
1.2 - Généralisation de l'ordre de dérivation : rappel.....	- 19 -
1.2.1 - Intégration non entière.....	- 19 -
1.2.2 - Dérivation non entière	- 21 -
1.3 - Exemples d'illustration	- 22 -
1.3.1 - Systèmes à paramètres distribués.....	- 22 -
1.3.2 - Systèmes à paramètres localisés	- 23 -
1.3.3 - Conclusion.....	- 28 -
1.4 - Méthode descendante : du concept à la réalisation	- 28 -
1.4.1 - Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle.....	- 29 -
1.4.2 - Réalisation à l'aide d'un arrangement de cellules ZY	- 31 -
1.4.3 - Exemple d'illustration.....	- 39 -
1.4.4 - Conclusion.....	- 47 -
1.5 - Méthode ascendante : de la réalisation au concept	- 48 -
1.5.1 - Réalisation à l'aide d'un réseau en cascade de cellules RC identiques en gamma.....	- 49 -
1.5.2 - Validation expérimentale.....	- 52 -
1.5.3 - Conclusion.....	- 54 -
1.6 - Etude du comportement dynamique d'un SDNE.....	- 55 -
1.6.1 - Etude du régime forcé.....	- 58 -
1.6.2 - Etude du régime libre.....	- 62 -
1.7 - Conclusion.....	- 67 -
CHAPITRE 2 SYNTHÈSE D'UN INTEGRATEUR D'ORDRE NON ENTIER BORNE EN FREQUENCE REALISE EN TECHNOLOGIE HYDROPNEUMATIQUE	- 69 -
2.1 - Introduction.....	- 69 -
2.2 - Description du support d'étude.....	- 70 -
2.3 - Application de la démarche descendante dans le cadre du support d'étude.....	- 72 -
2.3.1 - Synthèse d'une suspension de référence.....	- 72 -
2.3.2 - Cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série	- 84 -
2.3.3 - Cas d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma.....	- 99 -
2.3.4 - Conclusion sur la démarche descendante.....	- 102 -
2.4 - Définition d'une transformation mathématique traduisant l'influence de la variation de masse	- 103 -
2.5 - Application de la démarche ascendante dans le cadre du support d'étude	- 105 -

2.5.1 - Calcul des paramètres physiques	- 105 -
2.6 - Conclusion.....	- 109 -
CHAPITRE 3 ANALYSE DE L'INFLUENCE DES NON-LINEARITES D'UN INTEGRATEUR D'ORDRE NON ENTIER BORNE EN FREQUENCE REALISE EN TECHNOLOGIE HYDROPNEUMATIQUE	- 111 -
3.1 - Introduction.....	- 111 -
3.2 - Mise en évidence de l'influence des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques sur les performances temporelles du support d'étude	- 112 -
3.2.1 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement parallèle de cellules RC série	- 112 -
3.2.2 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement en cascade de cellules RC en gamma.....	- 112 -
3.2.3 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma	- 113 -
3.3 - La décomposition en série de Volterra : un outil d'analyse des non-linéarités	- 114 -
3.3.1 - Définition.....	- 114 -
3.3.2 - Approche fréquentielle	- 117 -
3.3.3 - Détermination des noyaux de Volterra d'un système non linéaire.....	- 119 -
3.3.4 - Réalisation d'un noyau d'ordre k	- 135 -
3.3.5 - Application des décompositions en série de Volterra	- 141 -
3.4 - Etude des non-linéarités dans un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquences réalisé en technologie hydropneumatique par un arrangement parallèle de cellules RC série dans le cas où la résistance hydraulique est linéaire.....	- 142 -
3.4.1 - Etude de l'influence de l'amplitude d'entrée	- 142 -
3.4.2 - Détermination des noyaux de Volterra de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence ..	- 144 -
3.4.3 - Mise en évidence de l'influence des noyaux d'ordre 1, 2 et 3 par la représentation du système sous forme d'un diagramme de gain équivalent.....	- 150 -
3.5 - Conclusion.....	- 159 -
CHAPITRE 4 MODELES DE VALIDATION D'UN VEHICULE AUTOMOBILE ET MODELES DE SYNTHESE POUR LA SUSPENSION	- 161 -
4.1 - Introduction.....	- 161 -
4.2 - Modèles de validation	- 162 -
4.2.1 - Modèles à corps déformables.....	- 162 -
4.2.2 - Modèles à corps rigides	- 163 -
4.3 - Modèles de synthèse	- 179 -
4.3.1 - Exemple d'illustration : la suspension de véhicule	- 179 -
4.4 - Conclusion.....	- 193 -
CHAPITRE 5 VERS LA SUSPENSION CRONE HYDRACTIVE.....	- 195 -
5.1 - Introduction.....	- 195 -
5.2 - Véhicule support.....	- 196 -
5.3 - Suspension de référence	- 197 -
5.3.1 - Présentation	- 197 -
5.3.2 - Performances de la suspension de référence évaluées par un modèle de synthèse quart de véhicule.....	- 199 -
5.4 - Choix d'une architecture de suspension	- 204 -
5.4.1 - Prise en compte de contraintes liées à l'implantation sur véhicule	- 204 -
5.5 - Synthèse du mode souple de la suspension CRONE hydractive.....	- 211 -

5.5.1 - Analyse des performances du mode souple de la suspension CRONE hydractive à l'aide du modèle de synthèse	- 211 -
5.5.2 - Analyse des performances de la suspension CRONE hydractive pour la tenue de roue à l'aide du modèle de synthèse	- 215 -
5.6 - <i>Note sur le battement de roue</i>	- 216 -
5.7 - <i>Mise en place d'une stratégie hydractive</i>	- 218 -
5.8 - <i>Validation des performances à l'aide d'un modèle à 14 degrés de liberté</i>	- 219 -
5.8.1 - Définition d'un profil pour les sollicitations route.....	- 219 -
5.9 - <i>Conclusion</i>	- 228 -
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	- 231 -
ANNEXE I LA REPRESENTATION DES CHAMPS DE VECTEURS PAR LES TORSEURS EN MECANIQUE	- 237 -
ANNEXE II APPLICATION DU FORMALISME DE LAGRANGE A UN EXEMPLE DE MODELE DE VEHICULE A QUATRE ROUES	- 241 -
BIBLIOGRAPHIE	- 256 -

Chapitre 1

Systemes à Dérivées Non Entières

1.1 - Introduction

Si le concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière (réelle ou complexe) sont issus des travaux de mathématiciens célèbres tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy, remontant ainsi au début du XIX^{ème} siècle [Dugowson, 1994], sa synthèse et ses applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de la seconde moitié du XX^{ème} siècle et du début du XXI^{ème} siècle [Cois, 2002] [Lin, 2001] [Miller, 1993] [Oldham, 1974] [Oustaloup, 1995] [Samko, 1993].

Les travaux qui font l'objet de ce chapitre s'inscrivent dans le cadre de ces contributions scientifiques, le contexte d'étude étant plus particulièrement celui de la synthèse et la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence.

Plus précisément, après une introduction générale pour situer le contexte, la deuxième partie est d'abord consacrée aux définitions et aux interprétations de l'intégration et de la dérivation d'ordre non entier. Ensuite, à titre d'illustration, des exemples de Systemes à Dérivées Non Entières (SDNE), tant à paramètres distribués faisant l'objet de phénomènes de diffusion, qu'à paramètres localisés, sont proposés dans la troisième partie. Ces exemples montrent, si nécessaire, que l'intégration et la dérivation d'ordre non entier ne sont pas seulement des concepts mathématiques résultant d'une volonté de généralisation, mais qu'ils sont bien présents notamment en Physique et dans la nature d'une manière plus générale.

La quatrième partie est consacrée à une méthode de synthèse et de réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence utilisant le lien avec les systèmes à paramètres localisés. Le point de départ de la méthode est la synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle. Ainsi, à partir des quatre paramètres de synthèse de haut niveau qui caractérisent un tel intégrateur, les N pôles et les N zéros de l'approximation sont calculés conformément à la méthode d'Oustaloup [Oustaloup, 1995]. Ensuite, la réalisation à partir de deux arrangements de cellules résistives R et capacitives C est développée de manière analytique indépendamment de tout contexte applicatif. C'est la raison pour laquelle la terminologie bond-graph est utilisée afin de conserver un caractère générique à la démarche.

Les relations entre les N pôles et les N zéros, d'une part, et les N éléments résistifs R et les $N+1$ éléments capacitifs C , d'autre part, sont établies. Le principal résultat est que la récursivité fréquentielle conduit à une distribution récursive des R et des C (récursivité systémique) pour l'un des arrangements, et à une distribution quelconque pour l'autre. A titre d'illustration, un exemple est proposé en fixant arbitrairement $N = 10$. Les impédances d'entrée de chacun des arrangements ainsi réalisés reproduisent parfaitement la réponse fréquentielle de l'intégrateur d'ordre 0.25 borné en fréquence retenu pour l'exemple.

La cinquième partie propose une démarche inverse à la précédente. En effet, dans certaines applications, il n'est pas possible de disposer d'une distribution des valeurs des éléments R et C . Une alternative consiste à utiliser des cellules RC identiques à l'exception de la première cellule C_0 à l'entrée qui est purement capacitive. Cette cellule C_0 joue un rôle essentiel dans la réalisation d'un comportement non entier surtout avec un nombre N réduit de cellules. Ainsi, le principal intérêt sur le plan pratique est l'utilisation, non seulement de cellules RC *identiques*, mais aussi d'un *nombre faible* de cellules grâce, notamment, à la présence de cette cellule C_0 en entrée dont la valeur optimale garantit le comportement non entier sur une décade. Contrairement à la méthode précédente où tous les comportements d'ordre non entier compris entre 0 et 1 sont réalisables *a priori*, cette seconde méthode conduit *a posteriori* à un ordre seulement compris entre 0.5 et 0.6. La valeur précise de l'ordre non entier dépend directement du nombre de cellules N et surtout de la valeur optimale de C_0 , offrant ainsi moins de degrés de liberté dans le choix de l'ordre. Un exemple d'illustration est ensuite proposé avec $N = 4$ et $C_0 = C/6$, conduisant à un comportement d'ordre 0.578 sur une décade. Ce résultat est comparé avec le comportement d'ordre 0.5 obtenu lui aussi sur une décade mais avec $N = 100$. Cet exemple fait ensuite l'objet d'une validation expérimentale à l'aide d'un montage électrique constitué d'un amplificateur opérationnel et d'un arrangement cascade composé de 4 cellules RC identiques en gamma ($R = 1 \text{ M}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$) et d'une cellule purement capacitive ($C_0 = 1/6 \text{ }\mu\text{F}$). Ce résultat, confirmé par l'expérience, est d'autant plus remarquable qu'avec $N = 4$ et $C_0 = 0$ ou $C_0 = C$, par exemple, il n'y a pas de comportement non entier.

Enfin, la dernière partie traite de l'analyse du comportement dynamique d'un SDNE résultant de l'association d'un élément I de stockage d'énergie (au sens de la terminologie bond-graph : masse en translation, inertie en rotation, inductance électrique ou hydraulique,...) et d'une fractance telle que définie par A. Le Méhauté [Le Méhauté, 1998]. L'objectif de l'étude d'un tel SDNE ainsi défini est double :

- d'abord comparer les comportements dynamiques obtenus avec une fractance et avec son approximation par un réseau de N cellules RC, notamment lorsque N est faible (par exemple $N = 4$) ;
- ensuite mettre en évidence les propriétés de robustesse de l'amortissement vis-à-vis des variations de l'élément I .

1.2 - Généralisation de l'ordre de dérivation : rappel

1.2.1 - Intégration non entière

1.2.1.1 - Définition

Inspirée de la formule de Cauchy [Miller, 1993] [Oldham, 1974] [Samko, 1993], la définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre m d'une fonction $f(t)$, notée ${}_0I_t^m f(t)$ avec $m > 0$, a été établie au XIX^{ème} siècle sous la forme :

$${}_0I_t^m f(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}} f(\tau) d\tau, \quad (1.1)$$

avec $t > 0$, $m \in \mathbb{R}^+$ et où $\Gamma(m)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(m) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1} dx. \quad (1.2)$$

1.2.1.2 - Interprétation géométrique

La difficulté d'attribuer à cet opérateur un sens géométrique [Adda, 1997] [Moreau, 2005] [Nigmatullin, 1992] [Podlubny, 2005], comparable à celui que l'on accorde à l'intégration d'ordre entier, n'est certes pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté.

Néanmoins, dans le cas où l'ordre m est réel, la définition (1.1) peut être interprétée comme l'aire de la surface que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction $h(t)$ définie par :

$$h(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}}. \quad (1.3)$$

Ainsi, si m est égal à 1, ${}_0I_t^m f(t)$ est une intégrale classique, toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même « poids ». Si m est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de « poids » que les plus anciennes. La figure 1.1 représente les variations du facteur d'oubli $h(t)$ pour des valeurs de m comprises entre 0.1 et 1. A travers cette interprétation, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration m mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.

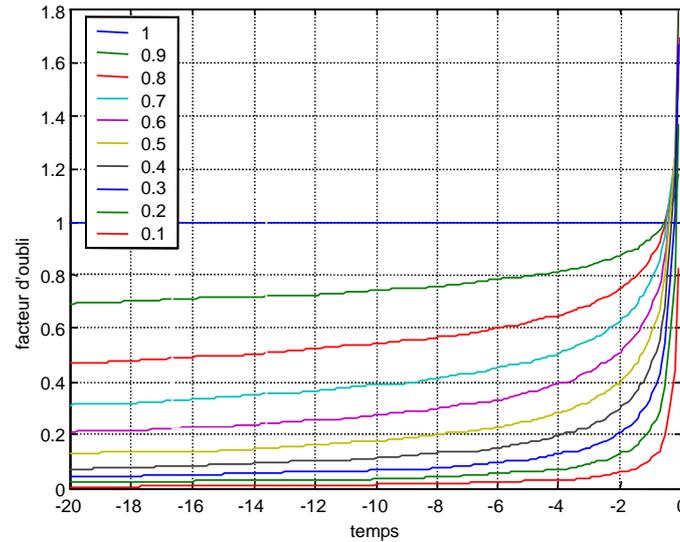


Figure 1.1 – Courbes représentatives des variations du facteur d'oubli $h(t)$ dans le cas d'une intégrale d'ordre réel m tel que $0.1 < m < 1$

1.2.1.3 - Interprétation système

Dans le cadre d'une approche système où $u(t)$ désigne l'entrée et $y(t)$ la sortie, l'intégrale d'ordre m de $u(t)$, notée $y(t) = {}_0I_t^m u(t)$, soit :

$$y(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{\Gamma(m) (t-\tau)^{1-m}} u(\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

peut être interprétée comme le produit de convolution entre la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système et son entrée $u(t)$, soit :

$$y(t) \triangleq \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau = h(t) * u(t). \quad (1.5)$$

La transformée de Laplace de $h(t)$, notée $H(s)$, qui n'est autre que la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre $m > 0$, est donnée par [Oldham, 1974] :

$$H(s) = TL\{h(t)\} = TL\left\{\frac{1}{\Gamma(m) t^{(1-m)}}\right\} = \frac{1}{s^m}. \quad (1.6)$$

Une des propriétés remarquables de la réponse impulsionnelle d'un intégrateur non entier est l'auto-similarité [Ren, 1996] qui traduit l'invariance lors d'un changement d'échelle de temps, soit :

$$h(Kt) = \frac{1}{\Gamma(m) (Kt)^{(1-m)}} = K^{(m-1)} h(t), \quad (1.7)$$

où K est une constante. Il est à noter que les réponses impulsionnelles de type exponentiel ne possèdent pas cette propriété.

La figure 1.2 présente les réponses fréquentielles et impulsionnelles d'un intégrateur généralisé pour des ordres m compris entre 0 et 2.

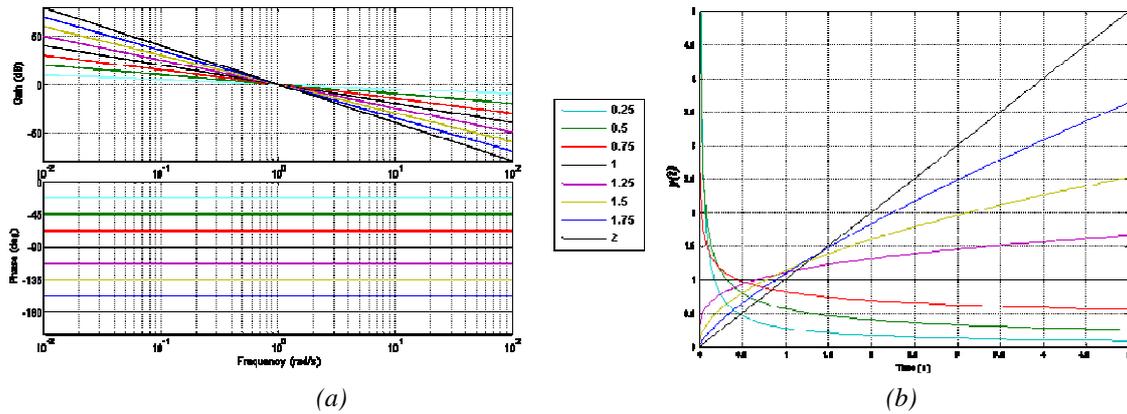


Figure 1.2 – Réponses fréquentielles (a) et impulsionnelles (b) d'un intégrateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et 2

1.2.2 - Dérivation non entière

La définition de Riemann-Liouville de l'intégrale d'ordre m d'une fonction $f(t)$, notée ${}_0I_t^m f(t)$ avec $m > 0$, étendue à des ordres négatifs, soit :

$${}_0I_t^{-m} f(t) = {}_0D_t^m f(t), \quad (1.8)$$

est généralement divergente [Samko, 1993].

La manière la plus simple pour définir une dérivée non entière d'ordre $m > 0$ (intégrale d'ordre négatif) consiste à dériver à l'ordre entier n , avec $n = \text{Ent}[m] + 1$, l'intégrale d'ordre non entier $(n-m) > 0$, soit :

$${}_0D_t^m f(t) \stackrel{\Delta}{=} {}_0D_t^{m-n+n} f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt} \right)^{(n)} {}_0D_t^{-(n-m)} f(t), \quad (1.9)$$

ou encore, sachant que ${}_0D_t^{-(n-m)} f(t) = {}_0I_t^{(n-m)} f(t)$,

$${}_0D_t^m f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt} \right)^{(n)} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(n-m)(t-\tau)^{1-(n-m)}} f(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

A titre d'exemple :

$${}_0D_t^{0.75} f(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{d}{dt} \right)^{(1)} {}_0I_t^{0.25} f(t). \quad (1.11)$$

1.3 - Exemples d'illustration

1.3.1 - Systèmes à paramètres distribués

D'une manière générale, la mise en équation des phénomènes de diffusion associés aux systèmes à paramètres distribués conduit naturellement aux SDNE [Podlubny, 2002]. Les exemples sont nombreux dans les domaines de la Physique tels que l'électrochimie [Kuhn, 2005], l'électromagnétisme [Benchellal, 2005] [Canat, 2005], ou encore la thermique [Agrawal, 2004] [Battaglia, 2001] [Kusiak, 2005].

A titre d'illustration, considérons un milieu semi-infini mono-dimensionnel homogène, de conductivité λ , de diffusivité α et de température initiale nulle en tout point (figure 1.3). Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . Il en résulte une variation de température, notée $T(x,t)$, fonction du temps t et de l'abscisse x du point de mesure de température à l'intérieur du milieu.

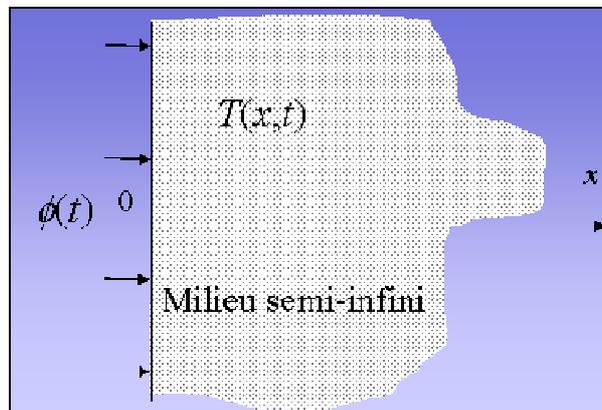


Figure 1.3 – Exemple d'illustration en thermique d'un phénomène de diffusion dans un milieu semi-infini

Le transfert de chaleur est régi par le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \varphi(t), \quad x = 0, \quad t > 0 \\ T(x,t) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

La transformation de Laplace de la première équation conduit à :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{T}(x,s) = 0, \quad \text{où } \bar{T}(x,s) = \mathbf{L}\{T(x,t)\}, \quad (1.13)$$

relation qui définit une équation différentielle par rapport à la variable x , dont la solution est immédiate et s'exprime par :

$$\bar{T}(x, s) = K_1(s) e^{-x\sqrt{s/\alpha}} + K_2(s) e^{x\sqrt{s/\alpha}}. \quad (1.14)$$

La prise en compte des conditions aux limites dictées par les deux autres équations du système (1.12) permet d'établir un transfert de la forme :

$$H(x, s) = \frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}} e^{-x\sqrt{s/\alpha}}, \quad (1.15)$$

où ρ et C_p sont des constantes.

Dans le cas où $x = 0$, le transfert (1.15) n'est autre que l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ qui se réduit alors à :

$$Z_e(s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{\lambda\rho C_p}}, \quad (1.16)$$

qui, dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), se traduit par :

$$T(0, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\rho C_p}} {}_0I_t^{0.5} \varphi(t), \quad (1.17)$$

relation qui exprime un résultat bien connu à travers lequel l'impédance thermique d'entrée d'un milieu semi-infini plan est définie par un intégrateur d'ordre 0.5. Ce résultat permet d'exprimer analytiquement la température $T(0, t)$ uniquement en fonction de l'intégrale d'ordre 0.5 du flux $\varphi(t)$.

Dans le cas des milieux finis tridimensionnels, la géométrie introduit des effets de bord qui conduisent, aussi bien dans le cas d'une approche théorique [Cois, 2002] avec un modèle de connaissance, que dans le cas d'une approche expérimentale avec un modèle de comportement [Cois, 2002], à une impédance d'entrée $Z_e(s)$ de la forme

$$Z_e(s) = \frac{\bar{T}(0, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5} + \dots + b_N s^{0.5N}}{1 + a_1 s^{0.5} + \dots + a_M s^{0.5M}} \quad (1.18)$$

qui, dans le domaine temporel (les conditions initiales étant nulles), se traduit par une équation différentielle dans laquelle apparaissent des dérivées dont les ordres sont multiples de 0.5, soit :

$$T(0, t) + a_1 D^{0.5} T(0, t) + \dots + a_M D^{0.5M} T(0, t) = b_0 \varphi(t) + b_1 D^{0.5} \varphi(t) + \dots + b_N D^{0.5N} \varphi(t), \quad (1.19)$$

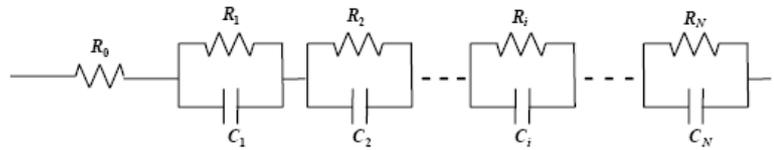
où D représente l'opérateur de différentiation, N et M étant des entiers positifs.

1.3.2 - Systèmes à paramètres localisés

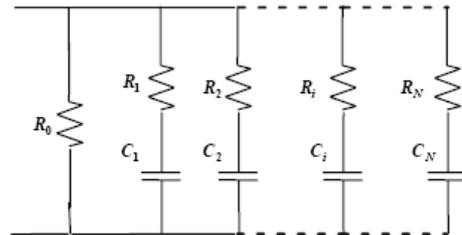
Que le caractère localisé des paramètres d'un système résulte d'une discrétisation spatiale (méthode des éléments finis), ou d'une réelle localisation des éléments d'un circuit ou d'un réseau (électrique : figure 1.4; mécanique : figure 1.5 ; hydraulique : figure 1.6 ;...), le lien avec les SDNE a fait l'objet de nombreux travaux [Oustaloup, 1995].

Les éléments capacitifs (condensateur en technologie électrique, ressorts en mécanique et accumulateurs en hydraulique) sont désignés par la lettre C dans les figures 1.4, 1.5 et 1.6 et dans l'ensemble de cette thèse. Les éléments résistifs (résistance électrique, amortisseur et résistance hydraulique) sont désignés par la lettre R .

Arrangement série de cellules RC en parallèle



Arrangement parallèle de cellules RC en série



Arrangement en cascade de cellules RC en gamma

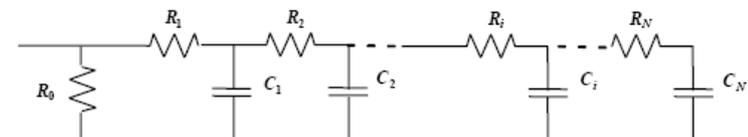
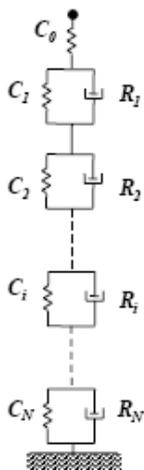
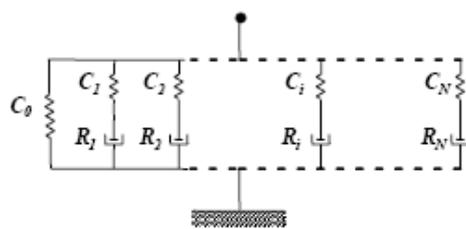


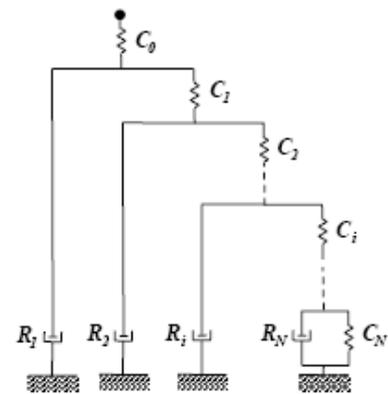
Figure 1.4 – Exemples d'arrangements de réseaux RC électriques



Arrangement parallèle de cellules RC en série



Arrangement série de cellules RC en parallèle



Arrangement en cascade de cellules RC en gamma

Figure 1.5 – Exemples d'arrangements de réseaux RC mécaniques

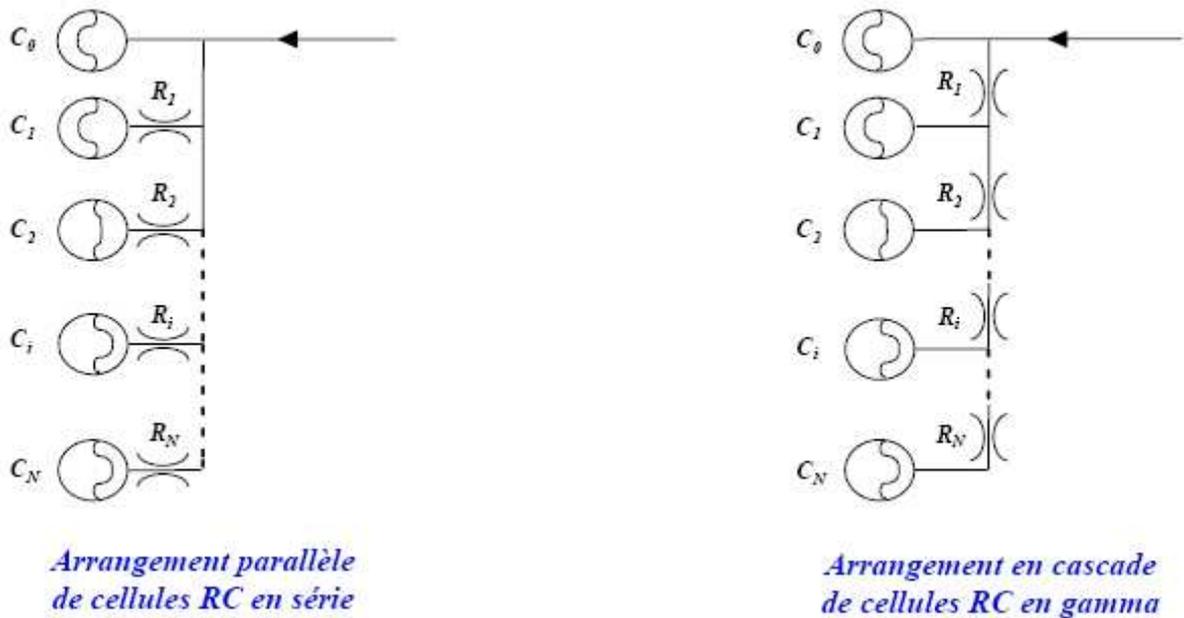


Figure 1.6 – Exemples d’arrangements de réseaux RC hydro-pneumatiques

A titre d’illustration, considérons de nouveau l’exemple thermique d’un milieu cette fois-ci fini mono-dimensionnel homogène de longueur L , de conductivité λ , de diffusivité α et de température initiale nulle en tout point (figure 1.7). Il est soumis à une densité de flux $\varphi(t)$ sur la surface normale sortante \vec{n} . Il en résulte une variation de température, notée $T(x,t)$, fonction du temps t et de l’abscisse x du point de mesure de température à l’intérieur du milieu.

Ce milieu fini fait l’objet d’une discrétisation spatiale à pas constant Δx conduisant à N tranches identiques, où $N = L/\Delta x$. Chacune de ces tranches étant le siège de phénomènes capacitifs et dissipatifs, une cellule RC en gamma lui est associée, d’où le réseau thermique de la figure 1.8 constitué d’un arrangement cascade de N cellules RC identiques en gamma [Pointot, 2004].

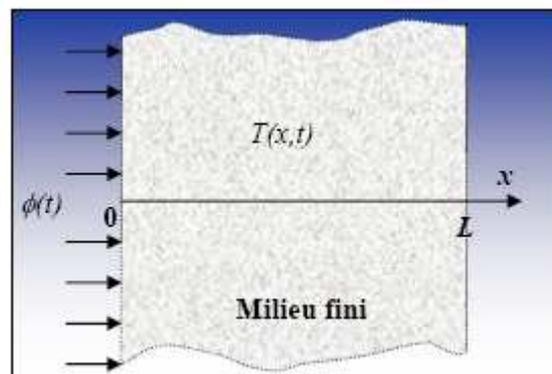


Figure 1.7 – Exemple d’illustration d’un milieu fini faisant l’objet d’une discrétisation spatiale à pas constant Δx

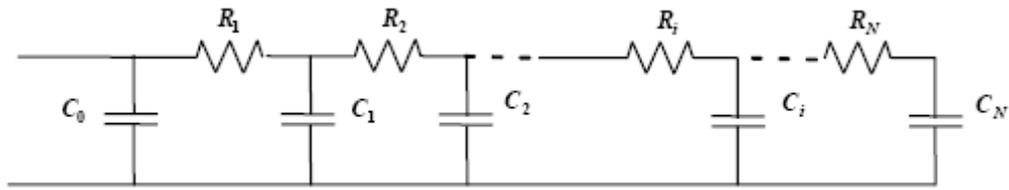


Figure 1.8 – Réseau thermique constitué d’un arrangement cascade de N cellules RC identiques en gamma et associé à la discrétisation du milieu fini de la figure 1.7

La mise en équation de ce réseau thermique conduit à une impédance d’entrée $Z_e(s)$ de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{C_{N-1} s + \frac{1}{R_N + \frac{1}{C_N s}}}}}}} \quad (1.20)$$

La figure 1.9 présente la réponse fréquentielle $Z_e(j\omega)$ de l’impédance d’entrée du réseau thermique. Deux comportements apparaissent clairement : un comportement intégrateur d’ordre 1 (effet capacitif) aux basses et hautes fréquences, et un comportement intégrateur d’ordre 0.5 aux moyennes fréquences.

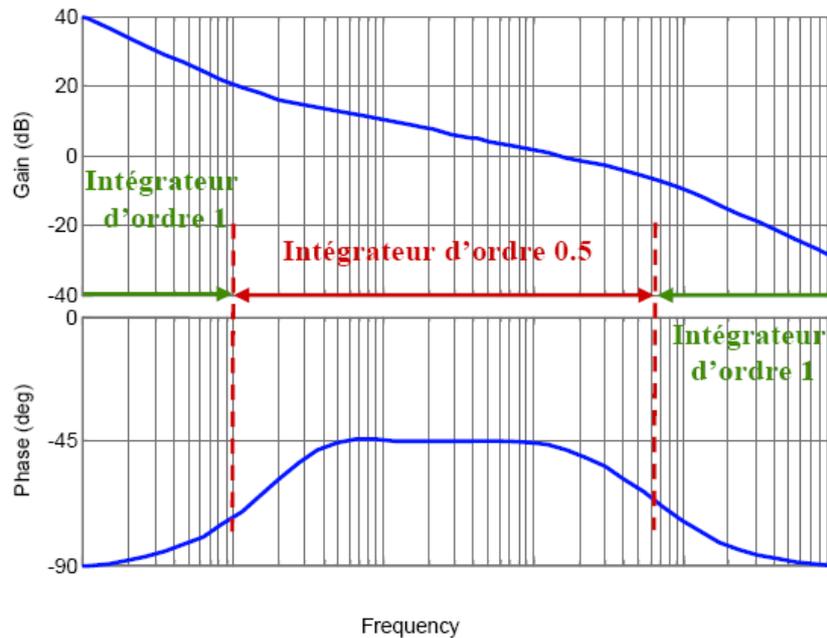


Figure 1.9 – Réponse fréquentielle $H_N(0,j\omega)$ de l’impédance d’entrée du réseau thermique

L'impédance d'entrée peut être caractérisée par un modèle de comportement de la forme [Cois, 2002] [Poinot, 2004]

$$I_e(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.21)$$

où ω_b et ω_h sont des fréquences transitionnelles basse et haute, D_0 une constante et où $m = 0.5$.

Ainsi, l'expression (1.21) permet avec 4 paramètres (m , D_0 , ω_b et ω_h) de caractériser le comportement du réseau thermique composé de $N+1$ capacités C et N résistances R , soit un total de $2N+1$ paramètres, N étant d'autant plus important que L est grand et que Δx est petit. Ce résultat met bien en avant la propriété de compacité ou de parcimonie paramétrique que présente l'opérateur de dérivation non entière. Il est vrai que l'impédance résultant d'une discrétisation spatiale se présente sous la forme d'un modèle entier de très grande dimension.

En posant :

$$D(s) = s I_e(s), \quad (1.22)$$

l'expression (1.22) permet d'introduire la notion de dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence [Oustaloup, 1995], soit :

$$D(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.23)$$

dont la réponse fréquentielle dans le cadre de l'exemple thermique traité dans ce paragraphe est donnée figure (1.10).



Figure 1.10 – Réponse fréquentielle $D(j\omega)$ du dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence associé au réseau thermique

1.3.3 - Conclusion

Les exemples de SDNE à paramètres distribués ou localisés sont nombreux dans les domaines de la Physique. Au-delà de l'*analyse* et de la caractérisation de ces systèmes, et par souci applicatif, il est essentiel d'être capable de reproduire leurs comportements non entiers : c'est le domaine de la *synthèse* et de la réalisation qui est traité dans les paragraphes suivants.

1.4 - Méthode descendante : du concept à la réalisation

Aussi bien dans le cadre de l'analyse que dans celui de la synthèse de comportements d'ordre non entier, ces derniers se situent souvent sur un intervalle fréquentiel borné. Ainsi, une troncature à la fois du côté des basses et des hautes fréquences consiste à limiter à un intervalle fréquentiel le transfert de différentiation $(s/\omega_d)^m$, ce qui revient à lui substituer le transfert de différentiation borné en fréquence :

$$D(s) = D_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.24)$$

avec

$$\sqrt{\omega_b \omega_h} = \omega_d \text{ et } D_0 = (\omega_b / \omega_d)^m, D_0 \in \mathfrak{R}. \quad (1.25)$$

Dans un contexte de causalité intégrale [Cois, 2002] [Lin, 2001] [Trigeassou, 1999], l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence est utilisé, soit :

$$I(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.26)$$

expression qui traduit (figure 1.11) un comportement intégrateur d'ordre

- 1 aux basses et hautes fréquences,
- $(1 - m)$ aux moyennes fréquences.

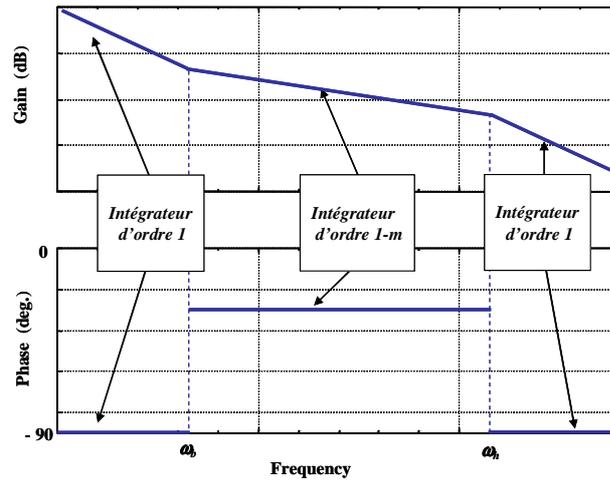


Figure 1.11 – Diagrammes asymptotiques de Bode d'un intégrateur non entier borné en fréquence

Dans [Aoun, 2004] et [Podlubny, 2002], un tour d'horizon de plusieurs méthodes de synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier est proposé. Parmi ces méthodes, la méthode d'Oustaloup [Oustaloup, 1995] fondée sur la récursivité fréquentielle présente l'avantage d'une grande simplicité de mise en œuvre. Cette méthode qui conduit à une excellente précision quant aux résultats obtenus, est le point de départ de la méthode descendante présentée dans la suite de ce paragraphe.

1.4.1 - Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle

La synthèse repose sur une distribution récursive de N zéros et N pôles réels, soit :

$$D(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s), \quad (1.27)$$

avec

$$D_N(s) = D_0 \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right), \quad (1.28)$$

où les relations de passage entre les paramètres de la forme idéale $D(s)$ (1.24) et ceux de la forme réelle $D_N(s)$ (1.28) sont données par [Oustaloup, 1995] :

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}}, \quad \eta = (\alpha\eta)^{1-m}, \quad \alpha = (\alpha\eta)^m,$$

$$\omega_1' = \sqrt{\eta} \omega_b, \quad \omega_N' = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \omega_h, \quad \frac{\omega_i'}{\omega_i} = \alpha > 1,$$

$$\frac{\omega_{i+1}'}{\omega_i'} = \eta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \alpha\eta > 1.$$
(1.29)

α et η sont appelés facteurs récursifs.

La figure 1.12 présente les diagrammes de Bode de la forme idéale d'un dérivateur non entier borné en fréquence ainsi que ceux de la forme réelle correspondante.

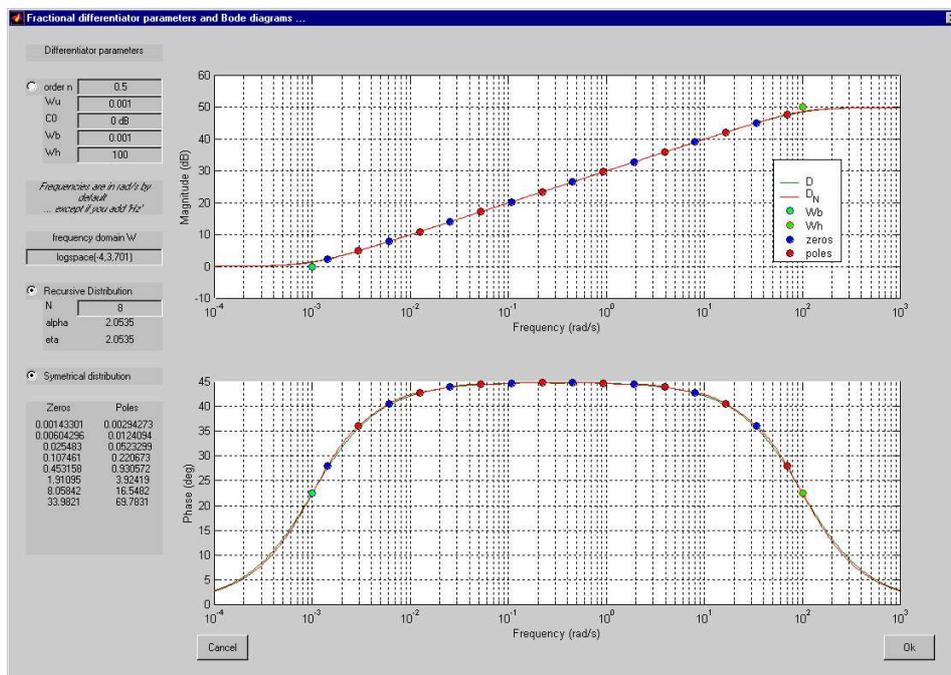


Figure 1.12 – Diagrammes de Bode de la forme idéale d'un dérivateur généralisé borné en fréquence ainsi que ceux de la forme réelle correspondante

De la même façon, dans un contexte de causalité intégrale, l'expression (1.26) de la forme idéale $I(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence est approximée par la forme réelle $I_N(s)$ définie par :

$$I_N(s) = \frac{D_0}{s} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_i'}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right).$$
(1.30)

Dans un contexte de simulation numérique d'un SDNE, cette forme réelle se prête bien à une représentation d'état. Le lecteur intéressé trouvera dans [Aoun, 2004] et [Pointot, 2005] tous les détails nécessaires à sa mise en œuvre.

1.4.2 - Réalisation à l'aide d'un arrangement de cellules ZY

La réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence utilise ici le lien avec les systèmes à paramètres localisés. Cette étude se voulant générique, aucun domaine de la Physique n'est privilégié, d'où l'emploi d'une terminologie générale en ce qui concerne les variables de puissance, à savoir le flux généralisé $f(t)$ (vitesse, courant, débit, flux thermique,...) et l'effort généralisé $e(t)$ (force, tension, pression, température,...). Si la terminologie utilisée pour les variables de puissance relève largement de l'approche Bond-Graph [Dauphin, 2000], les schémas retenus pour représenter ces systèmes relèvent d'avantage des schémas « électriques » respectant l'analogie énergétique, et ce dans la mesure où la lecture de ces schémas est plus abordable pour un non spécialiste que ne le sont les schémas Bond-Graph.

Ainsi, la figure 1.13 présente un système à paramètres localisés constitué de $N+1$ cellules. Chaque cellule comporte une impédance Z_i et une admittance Y_i , ces dernières pouvant être des combinaisons ou arrangements d'éléments capacitifs C , résistifs R et inertiels I . Quant aux notations $F(s)$ et $E(s)$, elles désignent les transformées de Laplace des flux $f(t)$ et des efforts $e(t)$ généralisés, les indices e et s précisant l'entrée et la sortie du système.

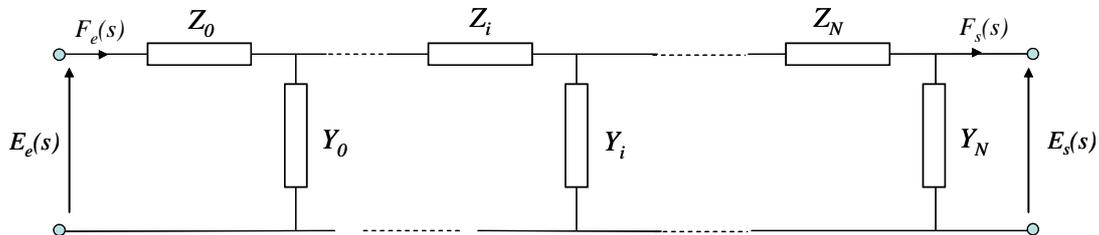


Figure 1.13 – Système à paramètres localisés représenté sous la forme d'un arrangement de cellules ZY : les Z_i représentent des impédances et les Y_i des admittances

Afin de faciliter la mise en équation de ces arrangements (notamment pour établir les expressions analytiques de leurs impédances d'entrée $Z_e(s)$), une approche matricielle est retenue. Ainsi, pour une cellule de rang i (figure 1.14) considérée séparément, les relations entrée/sortie entre les variables de puissance sont de la forme

$$\begin{pmatrix} E_{ei}(s) \\ F_{ei}(s) \end{pmatrix} = [T_i] \begin{pmatrix} E_{si}(s) \\ F_{si}(s) \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

où $[T_i]$ désigne la matrice de transfert de la cellule i dont l'expression est donnée par :

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 + Y_i(s) Z_i(s) & Z_i(s) \\ Y_i(s) & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

L'impédance d'entrée $Z_{ei}(s)$ de la cellule i (extraite de son environnement et connectée à une charge infinie, d'où un flux généralisé nul en sortie) est donnée par le rapport entre le premier terme diagonal $(1+Y_i(s) Z_i(s))$ et le terme non diagonal $Y_i(s)$ de la 2^{ème} ligne-1^{ère} colonne, soit :

$$Z_{ei}(s) = \left. \frac{E_{ei}(s)}{F_{ei}(s)} \right|_{F_{si}=0} = \frac{1 + Y_i(s) Z_i(s)}{Y_i(s)}. \quad (1.33)$$

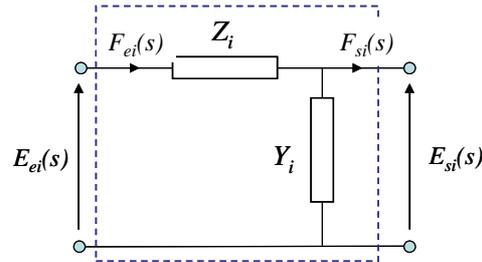


Figure 1.14 – Représentation schématique d'une cellule de rang i avec ses variables de puissance

La matrice globale de transfert $[T]$ du système est obtenue en faisant le produit des $N+1$ matrices locales $[T_i]$, soit :

$$[T] = \prod_{i=0}^N [T_i] = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

d'où il est facile d'extraire l'impédance d'entrée $Z_e(s)$, soit :

$$Z_e(s) = \left. \frac{E_e(s)}{F_e(s)} \right|_{F_s=0} = \frac{a_{11}(s)}{a_{21}(s)}. \quad (1.35)$$

Cette approche matricielle (relation (1.34)) fait apparaître naturellement un processus itératif pour $i = 1$ à N (initialisé avec l'expression de la matrice de transfert pour $i = 0$), auquel on peut associer un processus de croissance du réseau (figure 1.15). A chaque itération, l'impédance d'entrée peut être calculée, et ses réponses fréquentielle et impulsionnelle tracées, facilitant ainsi l'analyse de la contribution de chaque cellule quant au comportement non entier souhaité (cf. 1.4.3 – Exemple d'illustration).

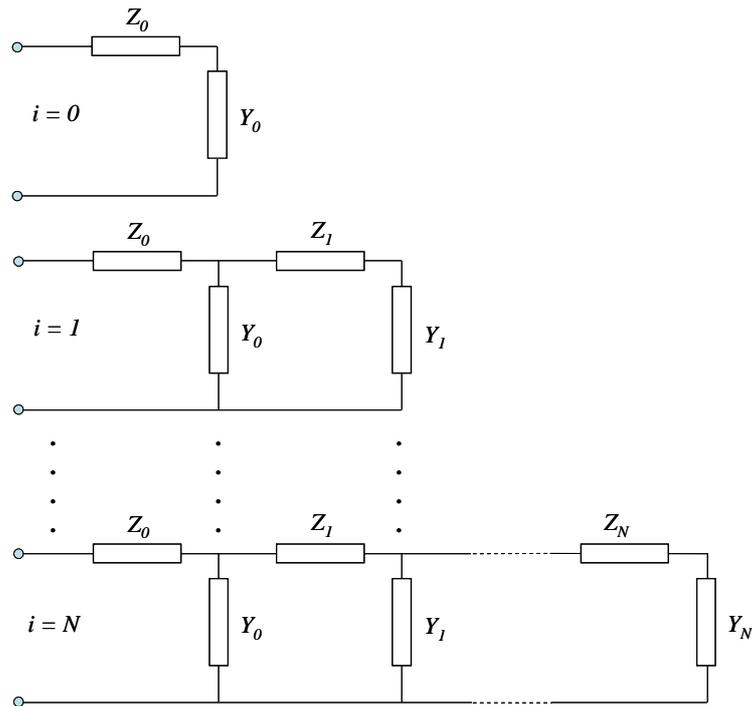


Figure 1.15 – Illustration du processus de croissance du réseau associé au processus itératif du calcul matriciel de l'impédance d'entrée

La suite du paragraphe est consacrée à la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence à l'aide de deux arrangements particuliers, à savoir un arrangement parallèle de cellules RC en série et un arrangement cascade de cellules RC en gamma.

1.4.2.1 - Réalisation à l'aide d'un arrangement parallèle de cellules RC série

La figure 1.16 présente un réseau constitué d'un arrangement parallèle de $N+1$ cellules RC en série. Dans ce cas particulier, les Z_i et Y_i de la figure 1.13 ont pour expression :

$$\begin{cases} Z_i(s) = 0 \quad \forall i \in [0; N] \\ Y_i(s) = \frac{C_i s}{1 + R_i C_i s} \quad \forall i \in]0; N] \\ Y_0(s) = C_0 s \end{cases} \quad (1.36)$$

chaque matrice $[T_i]$ se résumant à

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_i(s) & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

La matrice de transfert $[T]$ du réseau est alors donnée par :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=0}^N Y_i(s) & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

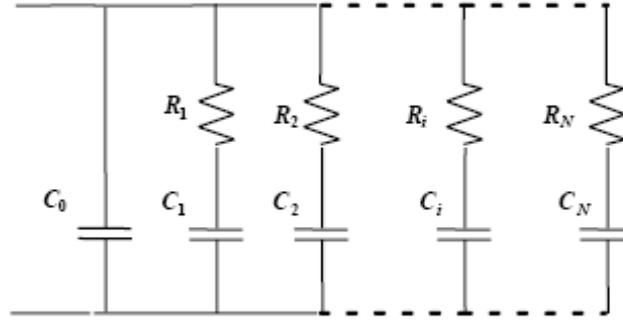


Figure 1.16 – Réseau constitué d'un arrangement parallèle de $N+1$ cellules RC en série

Finalement, l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ est de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_i s}{1 + R_i C_i s} \right)}, \quad (1.39)$$

ou encore, en introduisant les fréquences transitionnelles $\omega_{zi} = 1/R_i C_i$,

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_i s}{1 + \frac{s}{\omega_{zi}}} \right)}. \quad (1.40)$$

Afin d'établir les relations entre les paramètres physiques (R_i et C_i) et la distribution récursive des fréquences transitionnelles (ω_i et ω'_i), l'inverse de l'impédance $Z_e(s)$, soit :

$$Z_e^{-1}(s) = C_0 s + \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_i s}{1 + \frac{s}{\omega_{zi}}} \right), \quad (1.41)$$

est interprété comme étant la décomposition en éléments simples de l'inverse de la relation (1.30), soit :

$$I_N^{-1}(s) = \frac{s}{D_0} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right), \quad (1.42)$$

dont la décomposition en éléments simples est donnée par

$$I_N^{-1}(s) = \frac{s}{D_0} \prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega'_i}{\omega_i} \right) + \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_i s}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \right), \quad (1.43)$$

avec

$$a_i = \frac{1}{D_0} \left(\frac{\prod_{l=1, l \neq i}^N \left(1 - \frac{\omega_l'}{\omega_l} \right)}{\prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{\omega_l'}{\omega_l} \right)} \right). \quad (1.44)$$

L'identification membre à membre des relations (1.41) et (1.43) permet de déterminer les paramètres physiques R_i et C_i , soit :

$$C_0 = \frac{1}{D_0} \prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega_i'}{\omega_i} \right), \quad C_i = a_i \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{C_i \omega_i'}. \quad (1.45)$$

Sachant que (relation (1.29))

$$\frac{\omega_i'}{\omega_i} = \frac{1}{\alpha}, \quad (1.46)$$

l'expression de C_0 se réduit à

$$C_0 = \frac{1}{D_0} \frac{1}{\alpha^N}. \quad (1.47)$$

De la même manière, sachant que (relation (1.29))

$$\frac{\omega_i'}{\omega_i} = (\alpha\eta)^{i-1} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_i'}{\omega_i} = \frac{(\alpha\eta)^{i-1}}{\alpha}, \quad (1.48)$$

l'expression de C_i se réduit à

$$C_i = \frac{1}{D_0} \left(\frac{\prod_{l=1}^N \left(1 - \frac{(\alpha\eta)^{i-l}}{\alpha} \right)}{\prod_{l=1, l \neq i}^N \left(1 - (\alpha\eta)^{i-l} \right)} \right). \quad (1.49)$$

Le rapport de deux capacités successives C_{i+1}/C_i s'exprime alors uniquement en fonction des facteurs récurrents α et η , soit :

$$\frac{C_{i+1}}{C_i} = \frac{(1 - \alpha^{i-1} \eta^i) \left(1 - \frac{1}{(\alpha\eta)^{N-i}} \right)}{\left(1 - \frac{1}{\alpha (\alpha\eta)^{N-i}} \right) (1 - (\alpha\eta)^i)}. \quad (1.50)$$

De la même manière, compte tenu de la relation (1.45) concernant les résistances R_i , le rapport de deux résistances successives R_{i+1}/R_i s'exprime lui aussi uniquement en fonction des facteurs récurrents α et η , soit :

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \frac{1}{\alpha\eta} \frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha(\alpha\eta)^{N-i}}\right) (1 - (\alpha\eta)^i)}{\left(1 - \frac{1}{(\alpha\eta)^{N-i}}\right) (1 - \alpha^{i-1} \eta^i)}. \quad (1.51)$$

Sachant que le produit $\alpha\eta$ est supérieur à l'unité, si $1 \ll i \ll N$, les relations (1.50) et (1.51) se réduisent à :

$$\frac{C_{i+1}}{C_i} = \frac{1}{\alpha} \quad (1.52)$$

et

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} = \frac{1}{\eta}. \quad (1.53)$$

Finalement, dans le cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série, la récursivité fréquentielle (distribution récursive des fréquences transitionnelles ω_i et ω_i' : relations (1.29)) engendre la récursivité systémique (distribution récursive des paramètres R_i et C_i : relations (1.52) et (1.53)).

1.4.2.2 - Réalisation à l'aide d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma

La figure 1.17 présente un réseau constitué d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma. Dans ce cas particulier, les Z_i et Y_i de la figure 1.13 ont pour expression :

$$\begin{cases} Z_i(s) = R_i \quad \forall i \in]0; N[\\ Y_i(s) = C_i s \quad \forall i \in]0; N[\\ Y_0(s) = C_0 s \\ Z_0 = 0 \end{cases}, \quad (1.54)$$

chaque matrice $[T_i]$ se résumant alors à

$$[T_i] = \begin{bmatrix} 1 + R_i C_i s & R_i \\ C_i s & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

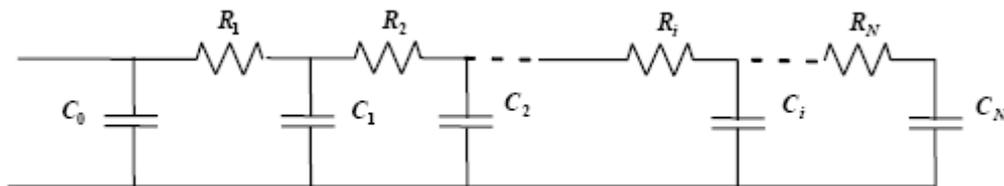


Figure 1.17 – Réseau constitué d'un arrangement cascade de N cellules RC en gamma

Finalement, l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ est de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{C_{N-1} s + \frac{1}{R_N + \frac{1}{C_N s}}}}}}}} \quad (1.56)$$

Afin d'établir les relations entre les paramètres physiques (R_i et C_i) et la distribution récursive des fréquences transitionnelles (ω_i et ω'_i), la relation (1.56) de l'impédance $Z_e(s)$ est décomposée, à l'aide du logiciel de calcul formel Maple ([Heck, 1996]), en une fraction continue simple de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{A_0 s + B_0 + \frac{1}{-A_1 s - B_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^i (A_i s + B_i) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^N (A_N s + B_N)}}}}}}, \quad (1.57)$$

où

$$\begin{cases} A_0 = C_0, & B_0 = \frac{1}{R_1}, & B_1 = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) R_1, \\ A_i = \frac{C_{i-1}}{A_{i-1}} R_i^2 C_i & \text{pour } i = 1 \text{ à } N \\ B_i = \frac{1}{B_{i-1}} \left(1 + \frac{R_i}{R_{i+1}}\right) \left(1 + \frac{R_i}{R_{i-1}}\right) & \text{pour } i = 2 \text{ à } N \end{cases} \quad (1.58)$$

De la même façon, l'expression (1.30) de la forme réelle $I_N(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence est décomposée, toujours à l'aide du logiciel Maple, en une fraction continue simple de la forme :

$$I_N(s) = \frac{1}{\lambda_0 s + \sigma_0 + \frac{1}{-\lambda_1 s - \sigma_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^i (\lambda_i s + \sigma_i) + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^N (\lambda_N s + \sigma_N)}}}}}}, \quad (1.59)$$

$$\text{où} \quad \lambda_i \text{ et } \sigma_i \in \mathfrak{R}^+ . \quad (1.60)$$

Compte tenu du degré de complexité, la relation (1.59) est obtenue quel que soit N uniquement sous forme numérique.

L'identification membre à membre des relations (1.57) et (1.59) permet d'obtenir un système $2N+1$ équations, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = \lambda_0 \\ R_1 = \frac{1}{\sigma_0} \\ C_1 = \frac{\lambda_1}{R_1^2} \\ R_2 = \frac{R_1}{\frac{\sigma_1}{R_1} - 1} \\ C_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1}{R_2^2 C_1} \end{array} \right. \text{ensuite pour } i = 3 \text{ à } N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_i = \frac{R_{i-1}}{\frac{\sigma_{i-1} \sigma_{i-2}}{1 + \frac{R_{i-1}}{R_{i-2}}} - 1} \\ C_i = \frac{\lambda_i \lambda_{i-1}}{R_i^2 C_{i-1}} \end{array} \right. . \quad (1.61)$$

La résolution du système (1.61) pour obtenir les valeurs numériques des C_i et R_i se fait de manière itérative. Ainsi, les valeurs de C_0 et R_1 étant immédiates d'après (1.61), C_1 et R_2 sont calculées à partir de la valeur de R_1 , puis C_2 grâce aux valeurs de C_1 et R_2 . A partir du rang $i = 3$, les relations de récurrence sont utilisées en commençant d'abord par la résistance R_i qui dépend des valeurs de R_{i-1} et R_{i-2} , puis par la capacité C_i qui dépend de C_{i-1} et R_i , les λ_i et σ_i étant des constantes issues de la décomposition (1.59).

Remarque

*Dans le cas d'un réseau en cascade de cellules RC en gamma, l'absence d'expression analytique de la décomposition en fraction continue de la forme réelle $I_N(s)$ ne permet pas d'exprimer les R_i et les C_i en fonction des facteurs récursifs α et η , et ce afin d'étudier **analytiquement** la manière dont ces paramètres sont distribués. C'est la raison pour laquelle l'exemple proposé au paragraphe suivant a pour objectif, non seulement d'illustrer la démarche descendante du concept à la réalisation, mais aussi de comparer **numériquement** la manière dont les paramètres R_i et C_i sont distribués pour chacun des réseaux étudiés.*

1.4.3 - Exemple d'illustration

Le point de départ de l'exemple d'illustration de la méthode descendante est la forme idéale $I(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, soit :

$$I(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (1.62)$$

où $m = 0.25$, $\omega_b = 0.01$ rad/s et $\omega_h = 100$ rad/s. Quant à D_0 , il est calculé arbitrairement pour que le module de $I(j\omega)$ soit égal à l'unité pour la fréquence médiane $\omega_m = \sqrt{\omega_b \omega_h}$, soit :

$$D_0 = \sqrt{\frac{\omega_b^{m+1}}{\omega_h^{m-1}}}. \quad (1.63)$$

Compte tenu de (1.63) et des valeurs de m , ω_b et ω_h considérées pour l'exemple, $D_0 = 0.3162$ dont l'unité dépend du domaine de la Physique considéré.

La figure 1.18 présente les diagrammes de Bode de la forme idéale $I(s)$ où l'on peut observer, notamment, un blocage de phase à $(m-1) 90^\circ$, soit -67.5° .

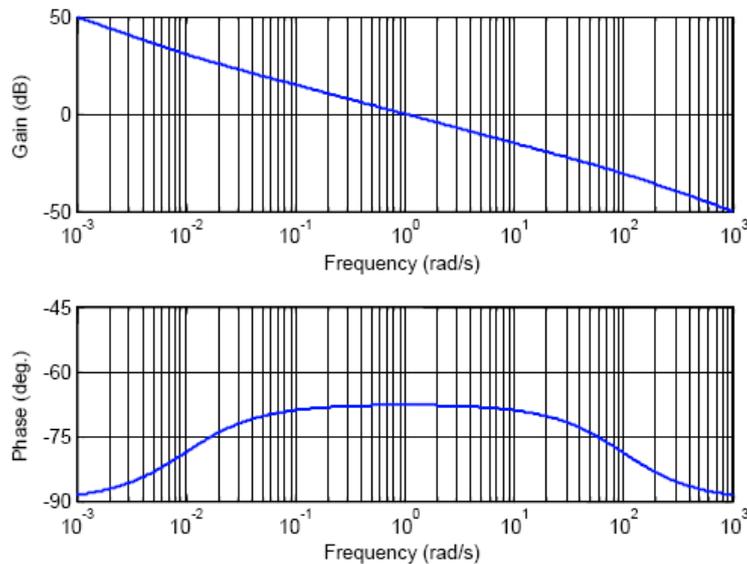


Figure 1.18 – Diagrammes de Bode de la forme idéale $I(s)$

L'étape suivante consiste à déterminer les $2N$ paramètres de la forme réelle $I_N(s)$. Sachant que pour cet exemple d'illustration N est choisi arbitrairement égal à 10, on obtient (compte tenu des relations (1.29)) d'abord les valeurs des facteurs récursifs, soit $\alpha = 1.259$ et $\eta = 1.995$, puis celles des fréquences transitionnelles, soit :

$$\begin{array}{ll}
 \omega_1 = 0.0141 \text{ rad/s} & \omega_1 = 0.0178 \text{ rad/s} \\
 \omega_2 = 0.0355 \text{ rad/s} & \omega_2 = 0.0447 \text{ rad/s} \\
 \omega_3 = 0.0891 \text{ rad/s} & \omega_3 = 0.112 \text{ rad/s} \\
 \omega_4 = 0.224 \text{ rad/s} & \omega_4 = 0.2818 \text{ rad/s} \\
 \omega_5 = 0.562 \text{ rad/s} & \omega_5 = 0.708 \text{ rad/s} \\
 \omega_6 = 1.412 \text{ rad/s} & \omega_6 = 1.778 \text{ rad/s} \\
 \omega_7 = 3.548 \text{ rad/s} & \omega_7 = 4.467 \text{ rad/s} \\
 \omega_8 = 8.912 \text{ rad/s} & \omega_8 = 11.22 \text{ rad/s} \\
 \omega_9 = 22.39 \text{ rad/s} & \omega_9 = 28.184 \text{ rad/s} \\
 \omega_{10} = 56.23 \text{ rad/s} & \omega_{10} = 70.795 \text{ rad/s}
 \end{array} \quad (1.64)$$

La figure 1.19 présente les diagrammes de Bode des formes idéale $I(s)$ et réelle $I_N(s)$. On peut observer la parfaite superposition des tracés.

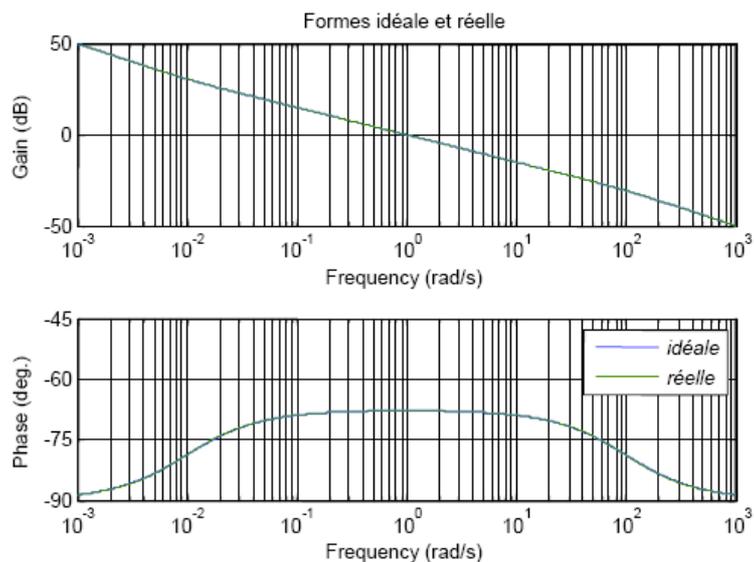


Figure 1.19 – Diagrammes de Bode des formes idéale $I(s)$ et réelle $I_N(s)$

La dernière étape consiste à calculer les valeurs des $N+1$ éléments capacitifs C et des N éléments résistifs R selon le réseau retenu pour la réalisation.

Pour un réseau réalisé à l'aide d'un arrangement parallèle de cellules RC en série, les relations (1.45) conduisent à

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0.3162 \\
 C_1 &= 0.7849 & R_1 &= 90.194 \\
 C_2 &= 0.5167 & R_2 &= 54.549 \\
 C_3 &= 0.3903 & R_3 &= 28.744 \\
 C_4 &= 0.3046 & R_4 &= 14.667 \\
 C_5 &= 0.2401 & R_5 &= 7.406 \\
 C_6 &= 0.1898 & R_6 &= 3.729 \\
 C_7 &= 0.1498 & R_7 &= 1.881 \\
 C_8 &= 0.1173 & R_8 &= 0.9562 \\
 C_9 &= 0.0897 & R_9 &= 0.4979 \\
 C_{10} &= 0.0627 & R_{10} &= 0.2835
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Afin de garder un caractère générique, les unités des éléments résistifs R et capacitifs C sont volontairement omises dans la mesure où elles dépendent du domaine considéré.

A titre de vérification, ces valeurs sont introduites dans l'expression (1.39) de l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ du réseau ainsi réalisé. La figure 1.20 présente les diagrammes de Bode de la forme réelle $I_N(s)$ et de l'impédance $Z_e(s)$. Là encore, on peut observer la parfaite superposition des tracés.

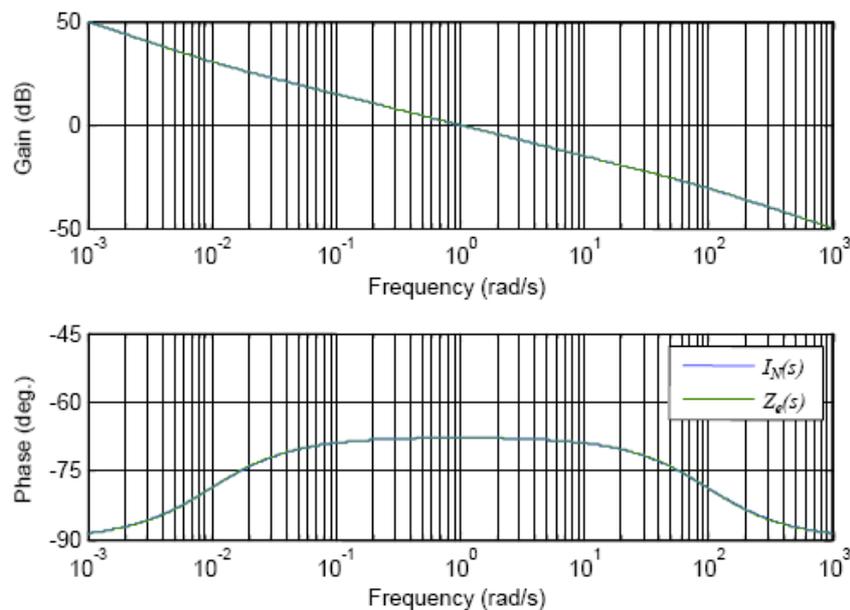


Figure 1.20 – Diagrammes de Bode de la forme réelle $I_N(s)$ et de l'impédance $Z_e(s)$

Enfin, pour un réseau réalisé à l'aide d'un arrangement cascade de cellules RC en gamma, les relations (1.61) conduisent à

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 0.3162 \\
 C_1 &= 0.2294 & R_1 &= 0.1307 \\
 C_2 &= 0.2042 & R_2 &= 0.2964 \\
 C_3 &= 0.2234 & R_3 &= 0.5733 \\
 C_4 &= 0.2641 & R_4 &= 1.123 \\
 C_5 &= 0.3194 & R_5 &= 2.244 \\
 C_6 &= 0.3811 & R_6 &= 4.593 \\
 C_7 &= 0.4284 & R_7 &= 9.858 \\
 C_8 &= 0.4142 & R_8 &= 23.638 \\
 C_9 &= 0.2860 & R_9 &= 73.812 \\
 C_{10} &= 0.0959 & R_{10} &= 436.65
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

A titre de vérification, ces valeurs sont introduites dans l'expression (1.56) de l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ du réseau ainsi réalisé. La figure 1.21 présente les diagrammes de Bode de la forme réelle $I_N(s)$ et de l'impédance $Z_e(s)$. Là encore, on peut observer la parfaite superposition des tracés.

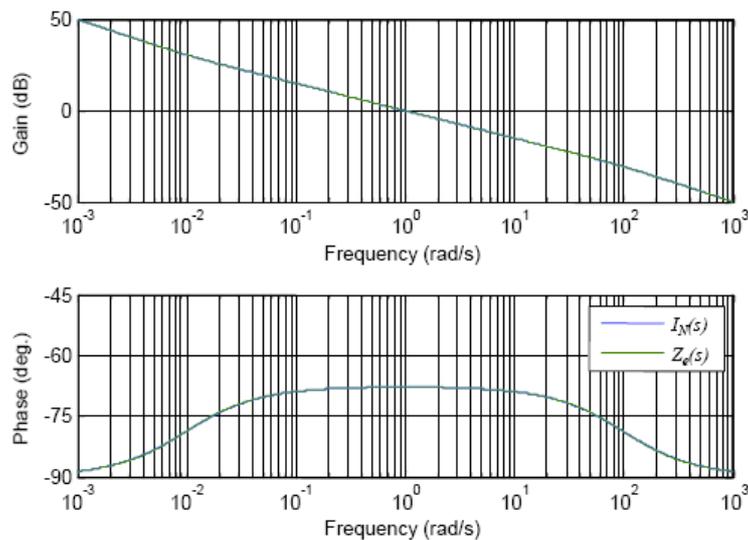


Figure 1.21 – Diagrammes de Bode de la forme réelle $I_N(s)$ et de l'impédance $Z_e(s)$

La figure 1.22 illustre le processus de croissance des deux réseaux étudiés lors du processus itératif du calcul matriciel de l'impédance d'entrée.

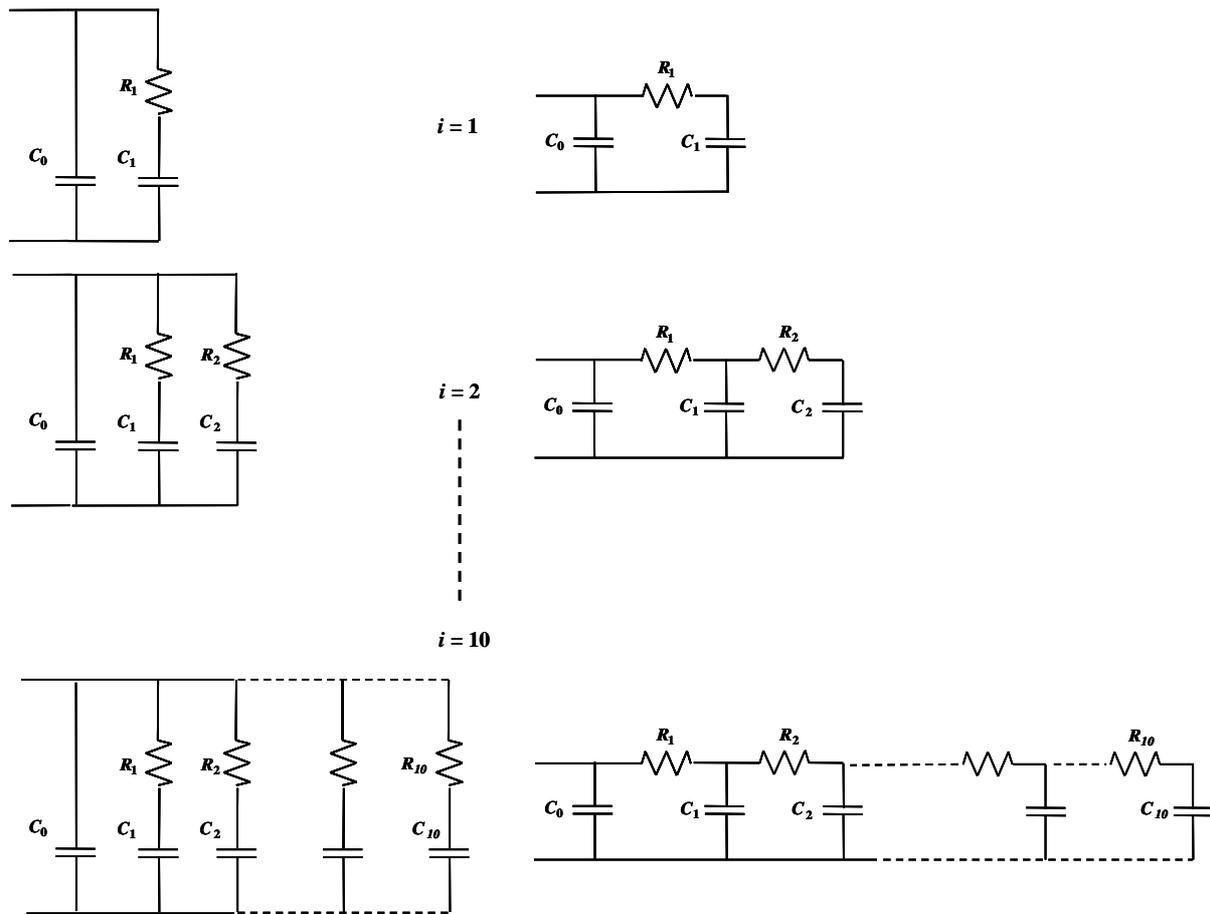


Figure 1.22 – Illustration du processus de croissance des deux réseaux étudiés lors du processus itératif du calcul matriciel de l'impédance d'entrée

A l'itération $i = 1$ (figure 1.22), les deux arrangements sont parfaitement identiques avec une impédance d'entrée $Z_e(s)$ de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{K_1}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_{b1}}}{1 + \frac{s}{\omega_{h1}}} \right), \quad (1.67)$$

où
$$K_1 = \frac{1}{C_0 + C_1}, \quad \omega_{b1} = \frac{1}{R_1 C_1} \quad \text{et} \quad \omega_{h1} = \frac{C_0 + C_1}{C_0 R_1 C_1}. \quad (1.68)$$

Il est à noter, d'après (1.68), que le rapport $\alpha_1 = \omega_{h1} / \omega_{b1}$ est supérieur à l'unité, soit :

$$\alpha_1 = \frac{\omega_{h1}}{\omega_{b1}} = 1 + \frac{C_1}{C_0} > 1, \quad (1.69)$$

traduisant ainsi que la quantité $(1+s/\omega_{b1})/(1+s/\omega_{h1})$ est une cellule à avance de phase. Le maximum d'avance de phase φ_{m1} est apporté à la fréquence médiane $\omega_{m1} = \sqrt{\omega_{b1} \omega_{h1}}$ et a pour expression :

$$\varphi_{m1} = \arcsin \left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1 + 1} \right). \quad (1.70)$$

Ce comportement est parfaitement identique à celui de la forme réelle de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence toujours pour $i = 1$, soit :

$$I_{N(s)} = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} \right). \quad (1.71)$$

Afin de faciliter l'analyse des réponses fréquentielles et impulsionnelles (figure 1.23), le tableau 1.1 résume pour $i = 1$ les principales caractéristiques des expressions (1.67) et (1.71).

$i = 1$	C_0	C_1	R_1	K_1	ω_{b1} ras/s	ω_{h1} rad/s	α_1	φ_{m1} deg.
$I_N(s)$				0.3162	0.0141	0.0178	1.259	6.6
$Z_e(s)$ parallèle/série	0.3162	0.7849	90.19	0.9082	0.0141	0.049	3.475	33.6
$Z_e(s)$ cascade/gamma	0.3162	0.2294	0.1307	1.833	33.35	57.56	1.726	15.5

Tableau 1.1 - Principales caractéristiques des expressions (1.67) et (1.71).

La figure 1.23 présente les réponses fréquentielles (a, b, c) et impulsionnelles (d, e, f) associées à chaque itération ($i = 1$ à 10) du processus de croissance pour :

- la forme réelle $I_N(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence (a et d) ;
- l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement parallèle de cellules RC en série (b et e) ;
- l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement cascade de cellules RC en gamma (c et f).

On peut remarquer en observant la figure 1.23 que le processus itératif qui conduit à des réponses parfaitement identiques pour $i = 10$, ne se traduit pas pour $I_N(s)$ et $Z_e(s)$ de la même manière au cours de la croissance.

En effet, pour la forme réelle $I_N(s)$ (figure 1.23.a) la valeur $(m - 1) 90^\circ = - 67.5^\circ$ du blocage de phase est atteinte par valeur inférieure à partir de la 6^{ème} itération, la progression de la réponse fréquentielle lorsque i augmente se faisant des basses vers les hautes fréquences.

Pour l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement parallèle de cellules RC en série (figure 1.23.b) la valeur du blocage de phase est atteinte par valeur supérieure pratiquement à la dernière itération, la progression de la réponse fréquentielle lorsque i augmente se faisant là aussi des basses vers les hautes fréquences.

Pour l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement cascade de cellules RC en gamma (figure 1.23.c) la valeur du blocage de phase est atteinte par valeur inférieure à partir de la 3^{ème} itération, la progression de la réponse fréquentielle lorsque i augmente se faisant des hautes vers les basses fréquences contrairement aux deux cas précédents.

Compte tenu de la dualité temps-fréquence en ce qui concerne les systèmes linéaires, les réponses impulsionnelles (figure 1.23 d, e et f) ne font qu'illustrer dans le domaine temporel les comportements observés dans le domaine fréquentiel.

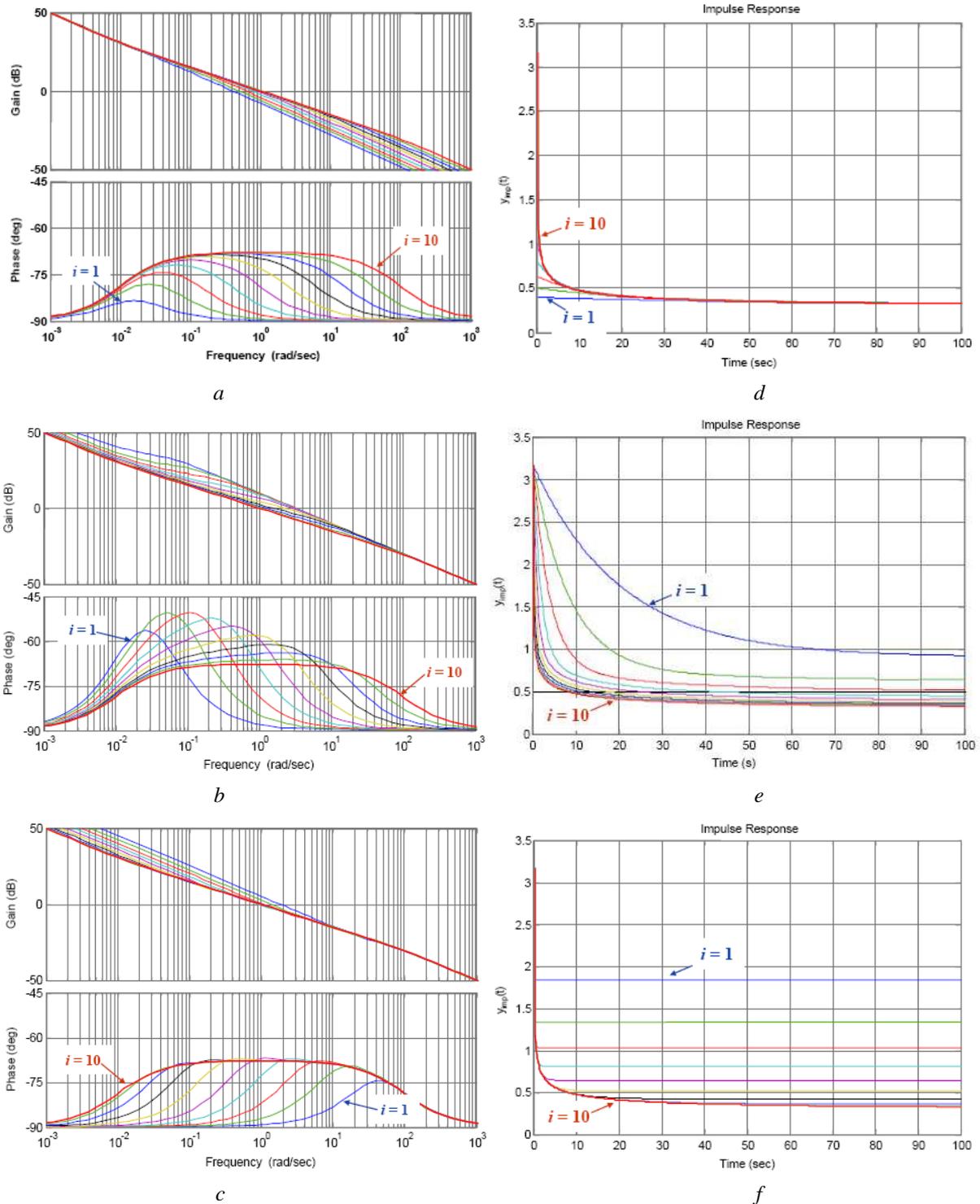


Figure 1.23 – Réponses fréquentielles (a, b, c) et impulsionnelles (d, e, f) associées à chaque itération du processus de croissance pour :

- la forme réelle $I_N(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence (a et d)
- l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement parallèle de cellules RC en série (b et e)
- l'impédance d'entrée $Z_e(s)$ de l'arrangement cascade de cellules RC en gamma (c et f)

La figure 1.24 présente la distribution des R_i et des C_i pour les deux arrangements.

Pour l'arrangement parallèle de cellules RC en série (figure 1.24.a) les R_i et les C_i diminuent quand i augmente, illustrant bien pour ce cas précis le lien entre les récursivités fréquentielle et systémique (relations (1.52) et (1.53)).

Par contre, pour l'arrangement cascade de cellules RC en gamma (figure 1.24.b) où la valeur de $R_{10} = 436.65$ n'apparaît pas compte tenu de l'échelle adoptée pour faciliter la comparaison, les R_i augmentent avec i alors que les C_i varient autour d'une valeur moyenne de l'ordre de 0.3.

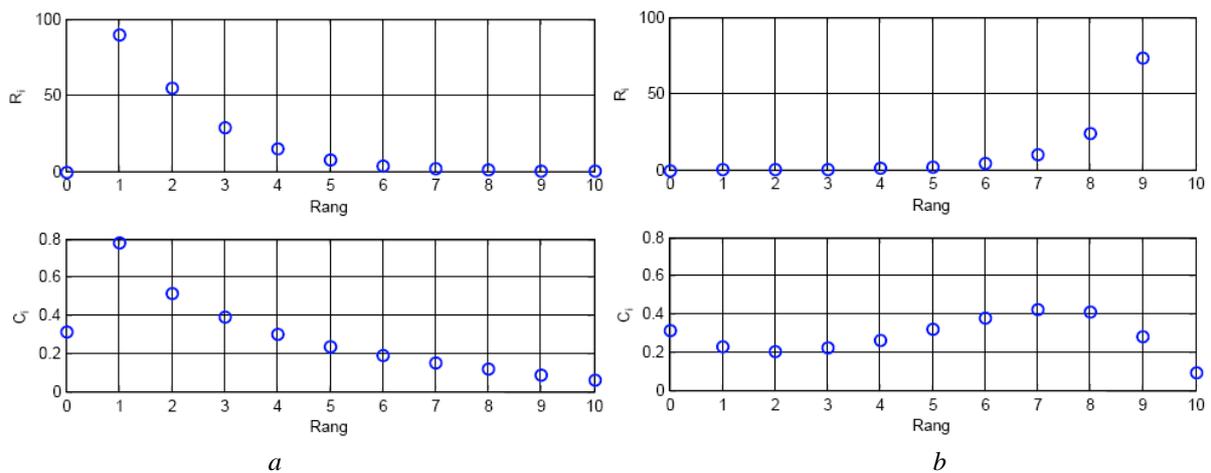


Figure 1.24 – Distribution des R_i et des C_i pour l'arrangement parallèle de cellules RC en série (a) et l'arrangement cascade de cellules RC en gamma (b)

Grâce à la méthodologie développée, cet exemple illustre bien l'aptitude que possèdent les deux arrangements étudiés à réaliser le comportement d'ordre non entier spécifié à partir des quatre paramètres de synthèse de haut niveau (D_0 , m , ω_b et ω_b) qui caractérisent la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence.

1.4.4 - Conclusion

La figure 1.25 résume la démarche descendante du concept à la réalisation. Ainsi le principal intérêt sur le plan méthodologique est la parcimonie paramétrique que présente la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. Ainsi, en fonction du contexte applicatif qui fixe la nature du critère d'optimisation à utiliser [Moreau, 2002] [Moreau, 2004] [Serrier, 2007], la détermination des paramètres optimaux se fait sur les 4 paramètres de synthèse de haut niveau et non sur les $2N+1$ paramètres du réseau réalisé. Enfin, il faut souligner l'excellente qualité en matière d'approximation et de réalisation obtenue avec cette démarche.

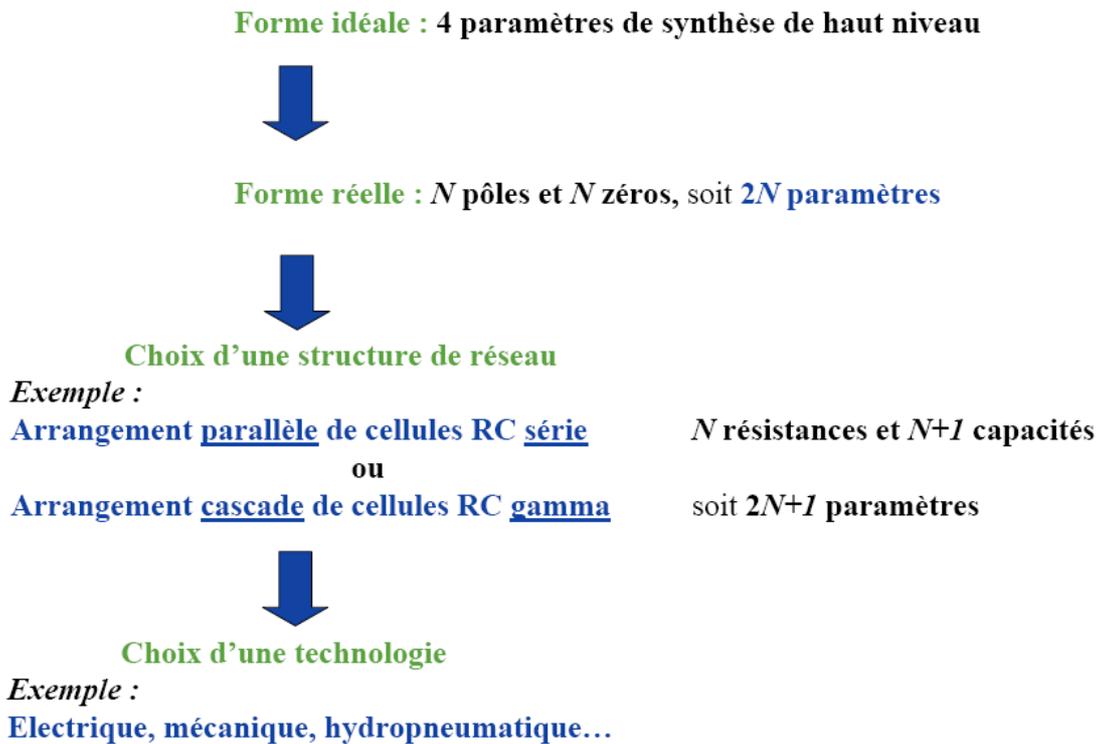


Figure 1.25 – Illustration de la démarche descendante : du concept à la réalisation

Dans certaines applications il n'est pas possible de disposer d'une distribution des composants comparable à celle étudiée dans le cadre de cette méthode descendante. C'est la raison pour laquelle le paragraphe suivant présente les liens existants entre une réalisation à l'aide d'un arrangement de cellules RC identiques et le comportement d'ordre non entier résultant.

1.5 - Méthode ascendante : de la réalisation au concept

La récursivité fréquentielle conduit

- à une distribution récursive des paramètres (récursivité systémique, figure 1.24.a) dans le cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série
- et à une distribution quelconque (figure 1.24.b) dans le cas d'un arrangement cascade de cellules RC en gamma.

Ces deux distributions paramétriques sont d'autant plus importantes que la plage fréquentielle du comportement non entier est importante et que le nombre N de cellules est lui aussi important. Dans certaines applications, il n'est pas possible de disposer de telles distributions paramétriques. Une alternative consiste à utiliser des cellules RC parfaitement identiques. Dans ce cas, l'arrangement parallèle de cellules RC identiques en série ne présente plus d'intérêt pour la réalisation d'un comportement non entier dans la mesure où l'expression (1.39) de l'impédance d'entrée se résume alors à un intégrateur en cascade avec une cellule à avance de phase du premier ordre, soit :

$$Z_e(s) = \frac{1}{(C_0 + NC)s} \left(\frac{1 + RCs}{1 + \left(\frac{C_0}{C_0 + NC} \right) RCs} \right). \quad (1.72)$$

Par contre l'arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma présente toujours un intérêt.

1.5.1 - Réalisation à l'aide d'un réseau en cascade de cellules RC identiques en gamma

La figure 1.26 présente un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma à l'exception de la cellule C_0 à l'entrée qui est purement capacitive et dont la valeur fait l'objet d'une attention toute particulière dans la suite de ce paragraphe. En effet, cette cellule joue un rôle essentiel dans la réalisation d'un comportement non entier avec un nombre N réduit de cellules.

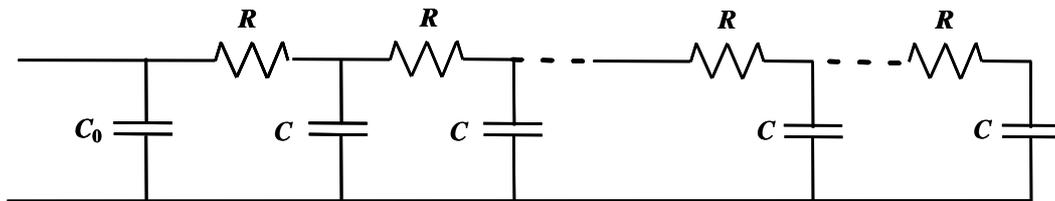


Figure 1.26 – Arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma

La figure 1.27 présente les diagrammes de Bode de l'impédance d'entrée de l'arrangement de la figure 1.26 pour chaque itération i , où $i = 1$ à $N = 100$, et avec $C_0 = 0$ (figure 1.26.a) et $C_0 = C$ (figure 1.26.b), sachant que les valeurs des R et des C sont choisies arbitrairement égales à l'unité. Dans les deux cas, l'impédance d'entrée est identique aux basses fréquences (comportement capacitif) et converge vers un comportement asymptotique d'ordre 0.5 aux moyennes fréquences ; seul le comportement aux hautes fréquences est différent (comportement résistif pour $C_0 = 0$ et comportement capacitif pour $C_0 = C$).

Dans les deux cas, malgré un nombre de cellules N relativement important ($N = 100$) le comportement d'ordre 0.5 aux moyennes fréquences s'observe seulement sur une décade environ.

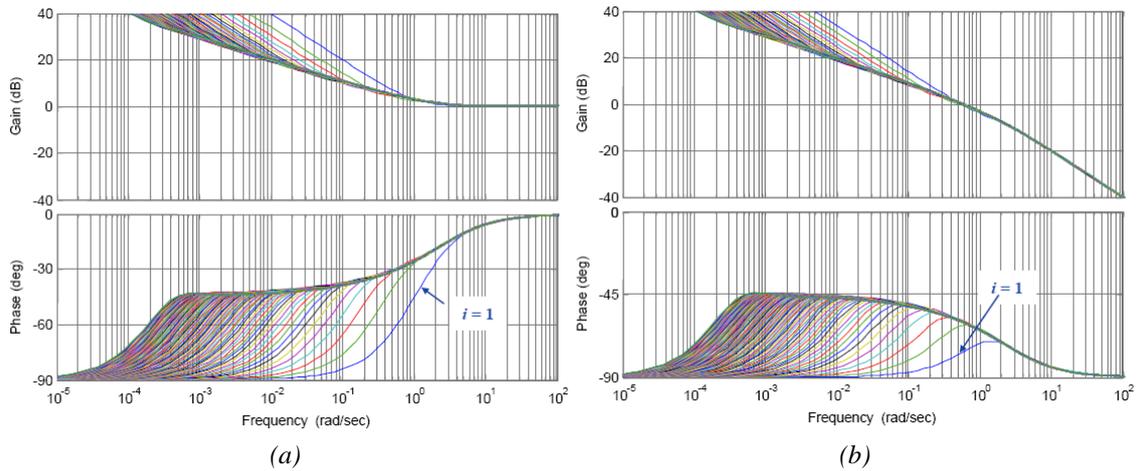


Figure 1.27 – Diagrammes de Bode de l’impédance d’entrée de l’arrangement de la figure 1.26 pour chaque itération i , où $i = 1$ à $N = 100$, avec $C_0 = 0$ (a) et $C_0 = C$ (b)

La figure 1.28 présente les mêmes diagrammes de Bode, mais pour un nombre N limité à 4 cellules, illustrant ainsi l’absence de comportement non entier pour un nombre de cellules aussi faible.

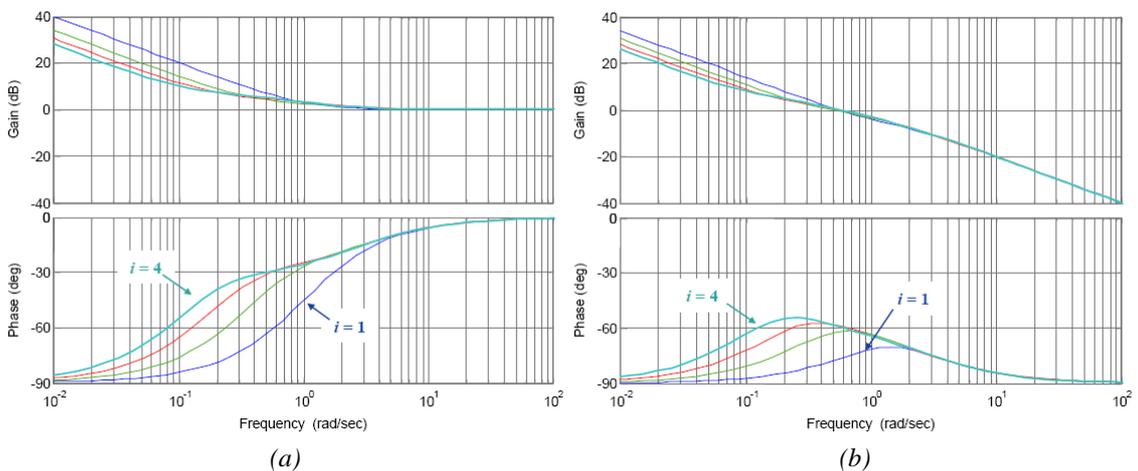


Figure 1.28 – Diagrammes de Bode de l’impédance d’entrée de l’arrangement de la figure 1.26 pour chaque itération i , où $i = 1$ à $N = 4$, avec $C_0 = 0$ (a) et $C_0 = C$ (b)

Quel que soit le nombre de cellules N , l’impédance d’entrée $Z_{e_N}(s)$ est composée d’un intégrateur en cascade avec un élément $D_N(s)$ à avance de phase, soit :

$$Z_{e_N}(s) = \frac{1}{s} D_N(s). \tag{1.73}$$

L’introduction de la pulsation $\omega_c = 1/RC$, de la fréquence réduite $\Omega = \omega/\omega_c$ et du rapport des capacités $a = C/C_0$ permet de réduire la réponse fréquentielle $D_N(j\omega)$ à une expression de la forme :

$$D_N(j\Omega) = D_0 \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^N b_i (j\Omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^N a_i (j\Omega)^i} \right), \quad (1.74)$$

$$\text{où} \quad D_0 = \frac{1}{C_0 + NC} \quad (1.75)$$

et où les a_i et b_i sont des réels, les a_i étant plus particulièrement des fonctions du rapport a entre les capacités C et C_0 , soit :

$$a_i = f(a) \quad . \quad (1.76)$$

Pour un nombre de cellules N donné, il existe une valeur optimale de a différente de l'unité, c'est-à-dire $C_0 \neq C$, qui conduit à un comportement d'ordre non entier aux moyennes fréquences. Ce résultat est d'autant plus remarquable qu'il reste vrai avec un nombre de cellules N faible et que le comportement non entier résultant correspond à un ordre différent de 0.5.

Ainsi, à titre d'illustration, considérons de nouveau un nombre N limité à 4 cellules. Dans ce cas particulier, l'argument de $D_N(j\Omega)$, noté $\varphi(\Omega, a)$, a pour expression :

$$\varphi(\Omega, a) = \arctg\left(\frac{10\Omega - 7\Omega^3}{1 - 15\Omega^2 + \Omega^4}\right) - \arctg\left(\frac{\left(\frac{10(1+a)}{1+4a}\right)\Omega - \left(\frac{7+a}{1+4a}\right)\Omega^3}{1 - \left(\frac{15+6a}{1+4a}\right)\Omega^2 + \left(\frac{1}{1+4a}\right)\Omega^4}\right). \quad (1.77)$$

La figure 1.29 présente les diagrammes de phase de $D_N(j\Omega)$ pour $N = 4$ paramétré par le rapport $a = C/C_0$. Le maximum d'avance de phase φ_m apporté par $D_N(j\Omega)$ augmente avec le rapport a . Pour $a = 6$, un blocage de phase d'une valeur $\varphi_m = 52^\circ$ sur une décade apparaît clairement, mettant en évidence un comportement non entier d'ordre $m = 52^\circ/90^\circ$, soit 0.578.

Par ailleurs, lorsque ce comportement non entier existe, on constate que la valeur particulière de la fréquence réduite $\Omega = 1$ (soit $\omega = \omega_c$) appartient à la plage fréquentielle où ce comportement est observé. Ainsi, une méthode de calcul de la valeur optimale de a consiste :

- à calculer la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \Omega} \varphi(\Omega, a)$ de l'argument de $D_N(j\Omega)$ par rapport à Ω ,
- puis, pour $\Omega = 1$, à calculer la valeur de a qui annule cette dérivée partielle, soit :

$$\left. \frac{\partial}{\partial \Omega} \varphi(\Omega, a) \right|_{\Omega=1} = 0, \quad (1.78)$$

conduisant ainsi pour $N = 4$ à une valeur de $a = 6.017$.

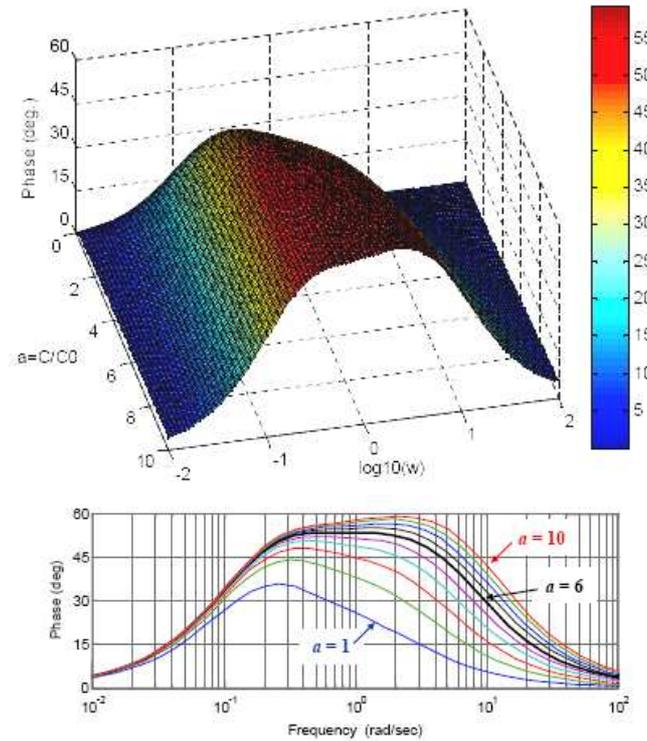


Figure 1.29 – Diagrammes de phase de l’impédance d’entrée pour $N = 4$ paramétré par le rapport $a = C/C_0$

La figure 1.30 présente les diagrammes de Bode de l’impédance d’entrée avec $a = 6$ et pour chaque itération i , où $i = 1$ à $N = 4$. Cette figure doit être comparée à la figure 1.28.a où $a = \infty$ ($C_0 = 0$) et à la figure 1.28.b où $a = 1$ ($C_0 = C$), figures pour lesquelles N est aussi égal à 4.

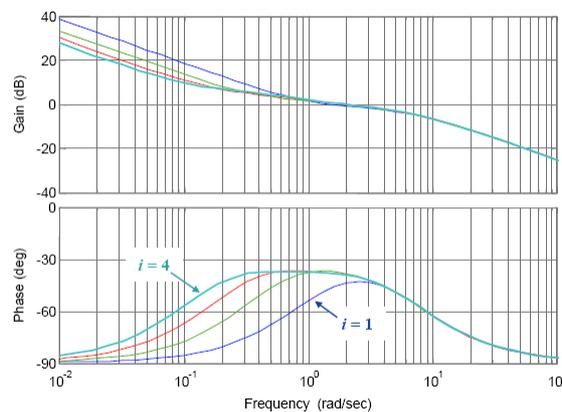


Figure 1.30 – Diagrammes de Bode de l’impédance d’entrée avec $a = 6$ et pour chaque itération i , où $i = 1$ à $N = 4$

1.5.2 - Validation expérimentale

Afin de valider expérimentalement ce résultat remarquable, un arrangement cascade de 4 cellules RC identiques en gamma associé à un amplificateur opérationnel est réalisé (figure 1.31). La valeur de chaque résistance R est de $1 \text{ M}\Omega$ et celle de chaque capacité C de 1

μF . Quant à la valeur C_0 de $1/6 \mu\text{F}$ non standard, elle est obtenue par l'association de plusieurs capacités en série.

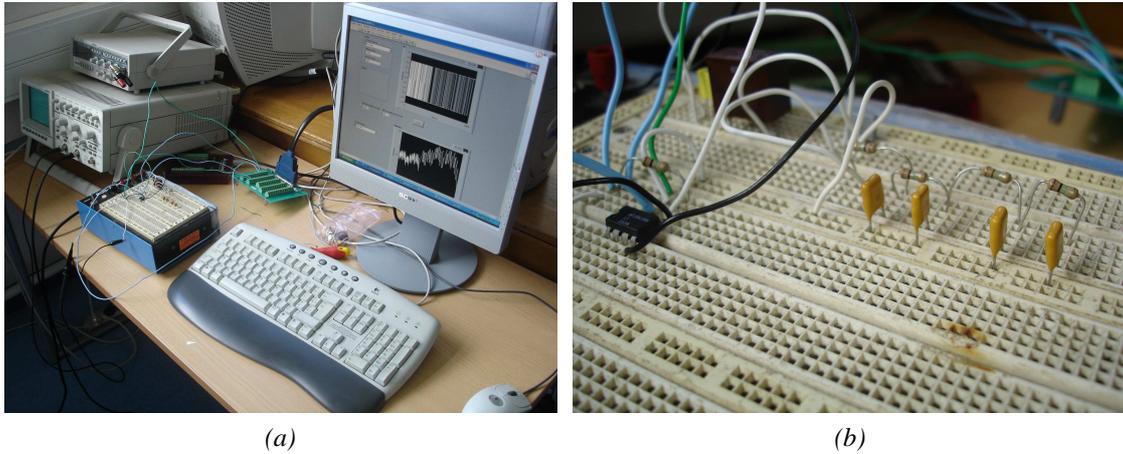


Figure 1.31 – Vues d'ensemble :
du dispositif expérimental (a) et de l'arrangement cascade de 4 cellules RC identiques en gamma (b)

L'objectif étant de comparer les réponses fréquentielles simulée et mesurée, une méthode d'identification non paramétrique [Trigeassou, 1999] est utilisée. Cette méthode permet d'estimer la réponse fréquentielle $\hat{H}(\omega)$ d'un système à partir de données temporelles. Plus précisément, elle consiste à calculer la densité spectrale croisée $\varphi_{yu}(\omega)$ entre la sortie y et l'entrée u , et la densité spectrale de l'entrée $\varphi_{uu}(\omega)$, la réponse fréquentielle étant ensuite obtenue en faisant le rapport des deux densités spectrales, soit :

$$\hat{H}(\omega) = \frac{\varphi_{yu}(\omega)}{\varphi_{uu}(\omega)} . \quad (1.79)$$

Le signal d'entrée utilisé (figure 1.32) est une Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA) dont le contenu spectral est parfaitement adapté à la plage fréquentielle étudiée et dont l'amplitude est choisie pour que l'amplificateur opérationnel fonctionne uniquement dans son domaine linéaire.

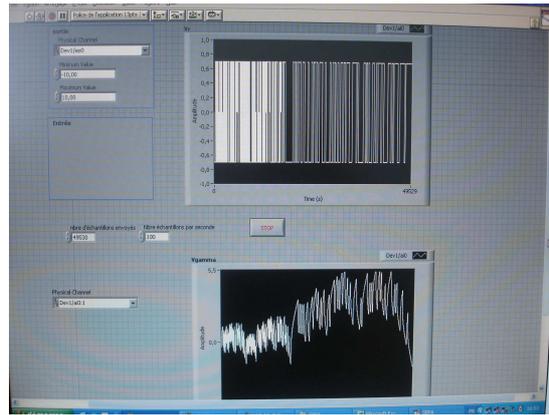


Figure 1.32 – Copie d’écran de l’interface : le signal d’entrée (en haut) et la réponse du circuit (en bas)

La figure 1.33 présente les réponses fréquentielles simulée (en bleu) et estimée (en rouge). Indépendamment de toute quantification du degré de corrélation qui existe entre ces deux réponses, l’excellente superposition des courbes permet de considérer que la validation expérimentale est très satisfaisante.

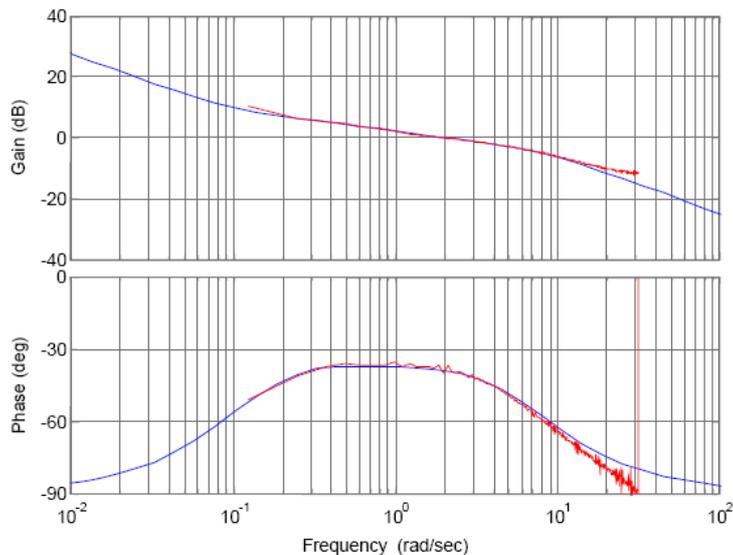


Figure 1.33 – Réponses fréquentielles simulée (en bleu) et estimée (en rouge)

1.5.3 - Conclusion

La figure 1.34 résume la démarche ascendante de la réalisation au concept. Ainsi, le principal intérêt sur le plan pratique est l’utilisation d’un **nombre faible** de cellules RC **identiques** grâce, notamment, à la présence d’une cellule purement capacitive en entrée dont la valeur optimale garantit le comportement non entier sur une décade. Contrairement à la méthode descendante où tous les comportements d’ordre non entier compris entre 0 et 1 sont

réalisables, la valeur de l'ordre comprise entre 0.5 et 0.6 est la conséquence directe du nombre de cellules N et de la valeur optimale du rapport a , offrant ainsi moins de degrés de liberté dans le choix de l'ordre. Ce résultat est comparable à celui obtenu avec les réseaux de Sierpinski [Ramus, 2002].

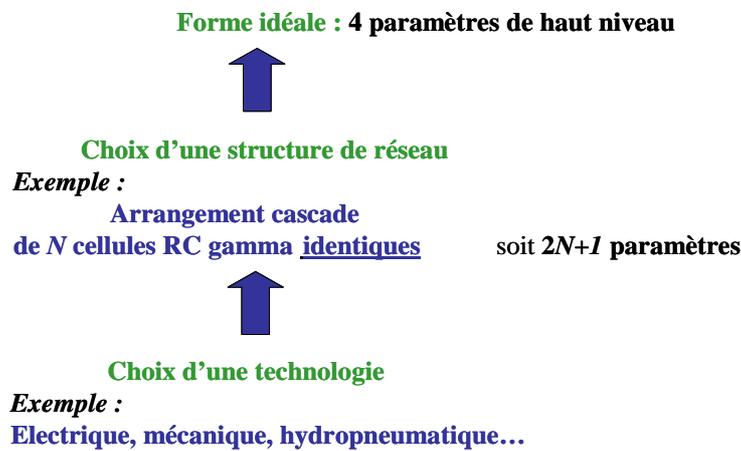


Figure 1.34 – Illustration de la démarche ascendante : de la réalisation au concept

1.6 - Etude du comportement dynamique d'un SDNE

Ce dernier paragraphe est consacré à l'analyse du comportement dynamique d'un SDNE résultant de l'association d'un élément I de stockage d'énergie (au sens de la terminologie bond-graph : masse en translation, inertie en rotation, inductance électrique ou hydraulique,...) et d'une fractance telle que définie par A. Le Méhauté [Le Méhauté, 1998].

Pour l'élément I , la relation causale entre ses variables de puissance est de la forme :

$$f_I(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_I(\tau) d\tau + f_I(0) , \quad (1.80)$$

où $f_I(t)$ et $e_I(t)$ représentent le flux et l'effort généralisés, $f_I(0)$ étant la condition initiale sur le flux et l un paramètre caractéristique de l'élément I .

Quant à la fractance, c'est un élément dont l'effort généralisé $e_\lambda(t)$ est proportionnel à l'intégrale non entière de son flux généralisé $f_\lambda(t)$, soit :

$$e_\lambda(t) = \lambda \int_0^t \frac{1}{\Gamma(1-m)(t-\tau)^{-m}} f_\lambda(\tau) d\tau + e_\lambda(0), \quad (1.81)$$

où $e_\lambda(0)$ est une fonction liée à la prise en compte des conditions initiales et où $\lambda \in R^+$ et $m \in [0, 1]$; si $m = 0$ alors la fractance se résume à un élément C purement capacitif, si $m = 1$ alors la fractance n'est autre qu'un élément R purement dissipatif.

L'objectif de l'étude d'un tel SDNE ainsi défini est double :

- d'abord comparer les comportements dynamiques obtenus avec une fractance et avec son approximation par un réseau de N cellules RC, notamment lorsque N est faible (par exemple $N = 4$) ;
- ensuite mettre en évidence les propriétés de robustesse de l'amortissement vis-à-vis des variations de l'élément I .

A ce titre, la relation (1.81) est réécrite sous la forme d'un produit de convolution, soit :

$$e_\lambda(t) = g(t) * f_\lambda(t) + e_\lambda(0), \quad (1.82)$$

où $g(t)$ représente soit la réponse impulsionnelle $h(t)$ de la fractance, soit celle de son approximation, notée $\tilde{h}(t)$.

Remarque à propos des conditions initiales

La prise en compte des Conditions Initiales (CI) dans le cadre des SDNE fait l'objet de nombreux travaux [Hartley, 2002] [Hartley, 2007] [Lorenzo, 2007.a] [Lorenzo, 2007.b]. Cependant, à ce jour, aucune formulation ne fait l'unanimité au sein de la communauté. C'est la raison pour laquelle l'étude comparative présentée dans ce paragraphe se focalise d'abord sur le régime forcé sous l'hypothèse de conditions initiales nulles. Ensuite, l'étude du régime libre est présentée en commençant, dans un premier temps, par l'approximation de la fractance pour laquelle il n'y a aucun problème quant à la prise en compte des conditions initiales. Puis, compte tenu des résultats obtenus avec l'approximation pour des conditions initiales particulières, l'étude du régime libre est traité avec la fractance.

Là encore, cette étude se voulant générique, aucun domaine de la Physique n'est privilégié, même si les schémas retenus pour représenter ce système relève d'avantage des schémas « électriques ».

Ainsi, la figure 1.35 représente le schéma du SDNE étudié où $e_0(t)$ est une source d'effort généralisé et $f(t)$ le flux généralisé traversant l'élément I caractérisé par le paramètre l . Plus précisément, le schéma de la figure 1.35.a représente l'association de l'élément I avec la fractance et le schéma de la figure 1.35.b celle de l'élément I avec l'approximation de la fractance par le réseau cascade de 4 cellules RC identiques en gamma étudié au paragraphe 1.5.

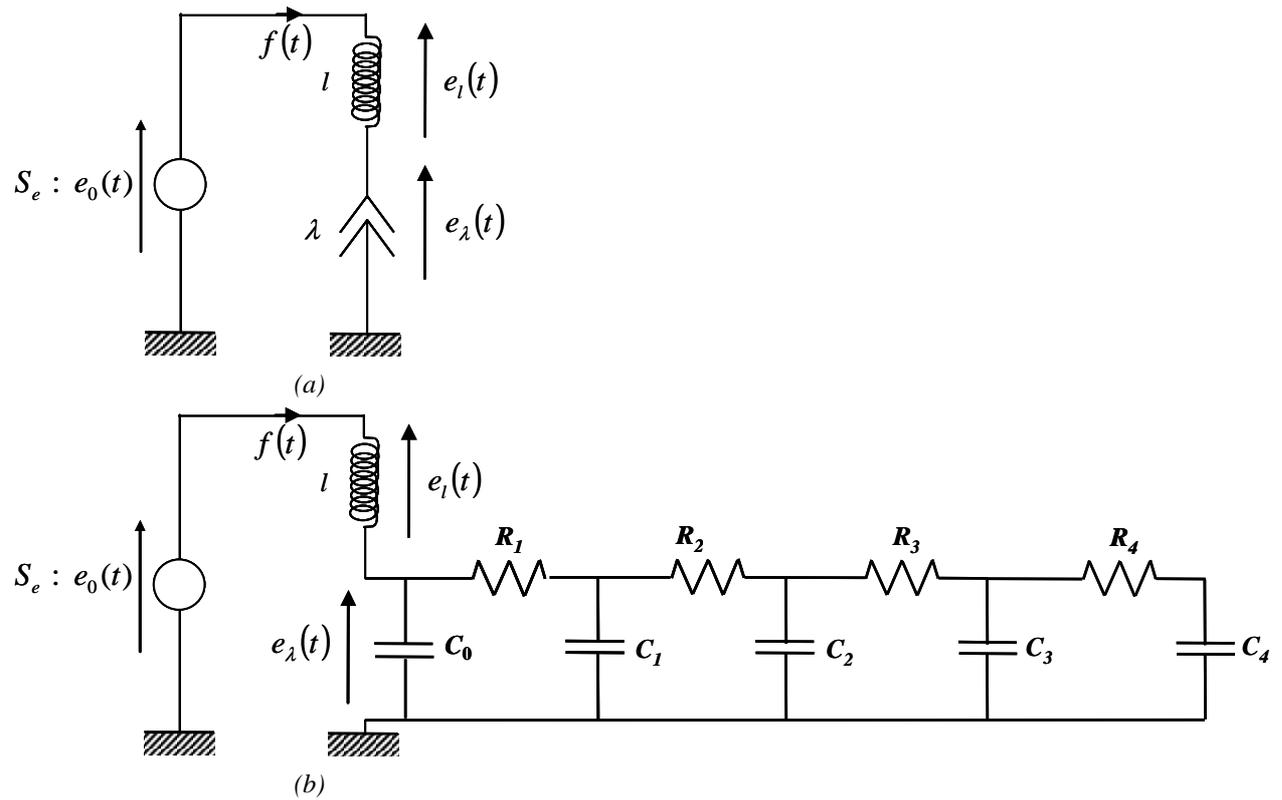


Figure 1.35 – Illustration dans le domaine électrique de l’association d’un élément I avec une fractance (a) et d’un élément I avec l’approximation de la fractance par le réseau cascade de 4 cellules RC identiques en gamma étudié au paragraphe 1.5

L’élément I et la fractance étant associés en série, ils sont traversés par le même flux généralisé $f(t)$. De plus, l’effort généralisé total $e_0(t)$ est égal à la somme des efforts généralisés partiels $e_l(t)$ et $e_\lambda(t)$, soit :

$$e_0(t) = e_l(t) + e_\lambda(t). \tag{1.83}$$

Finalement, l’ensemble des relations causales qui modélise le système est de la forme :

$$\begin{cases} e_l(t) = e_0(t) - e_\lambda(t) \\ f(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_l(\tau) d\tau + f(0) . \\ e_\lambda(t) = g(t) * f(t) + e_\lambda(0) \end{cases} \tag{1.84}$$

La figure 1.36 représente le schéma fonctionnel causal du SDNE établi à partir des relations (1.84) pour la simulation.

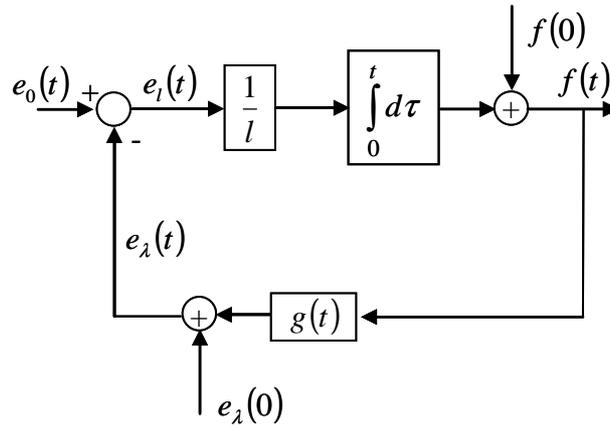


Figure 1.36 – Schéma fonctionnel causal du SDNE pour la simulation

Un tel schéma fait apparaître de manière explicite une structure bouclée qui est exploitée au paragraphe suivant. De plus, le système étant linéaire le principe de superposition est appliqué pour étudier séparément le régime forcé ($e_0(t) \neq 0$ et $CI = 0$) et le régime libre ($e_0(t) = 0$ et $CI \neq 0$).

1.6.1 - Etude du régime forcé

Sous l’hypothèse de conditions initiales nulles, la transformée de Laplace des relations (1.84), soit :

$$\begin{cases} E_l(s) = E_0(s) - E_\lambda(s) \\ F(s) = \frac{1}{l s} E_l(s) \\ E_\lambda(s) = G(s) F(s) \end{cases}, \quad (1.85)$$

permet d’établir le schéma fonctionnel pour l’analyse, schéma présenté figure 1.37 où $\beta(s)$ représente la fonction de transfert en boucle ouverte dont l’expression est donnée par :

$$\beta(s) = G(s) \frac{1}{l s}, \quad (1.86)$$

avec pour la fractance

$$G(s) = H(s) = \frac{1}{\lambda s^{1-m}} \quad (1.87)$$

et pour son approximation (relation (1.73))

$$G(s) = \tilde{H}(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{N=4} b_i (RC s)^i}{1 + \sum_{i=1}^{N=4} a_i (RC s)^i} \right). \quad (1.88)$$

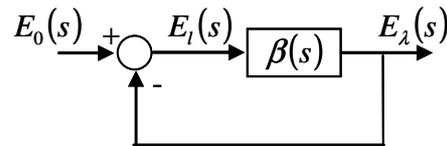


Figure 1.37 – Schéma fonctionnel du SDNE établi pour l'analyse

Ainsi, dans le cas de la fractance, l'expression de $\beta(s)$ est de la forme :

$$\beta(s) = \frac{b}{s^n}, \quad (1.89)$$

où $n = 2 - m$ et $b = 1/(l\lambda)$, conduisant ainsi à un transfert de boucle fermée $T(s) = E_\lambda(s)/E_0(s)$ de la forme :

$$T(s) = \frac{b}{s^n + b}. \quad (1.90)$$

La figure 1.38 présente les réponses du SDNE obtenues avec la fractance (en vert) et son approximation (en bleu) pour la valeur nominale l_0 du paramètre l . Plus précisément, les réponses fréquentielles de l'intégrateur non entier et de son approximation sont présentées figure 1.38.a ; les lieux de Black-Nichols en boucle ouverte figure 1.38.b ; les diagrammes de gain du transfert de boucle fermée figure 1.38.c et les réponses indicielles de l'effort généralisé $e_\lambda(t)$ à un saut échelon $e_0(t)$ d'amplitude unitaire figure 1.38.d.

Il est important de noter l'excellente superposition des réponses fréquentielles (figure 1.38.c) et indicielles (figure 1.38.d) de la boucle fermée obtenues avec l'intégrateur d'ordre non entier et avec son approximation. Ce résultat est d'autant plus intéressant que le comportement non entier n'est synthétisé que sur une décade (figure 1.38.a). En fait, le point essentiel pour l'obtention d'un tel résultat est l'appartenance de la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_i à cette décade (figure 1.38.b).

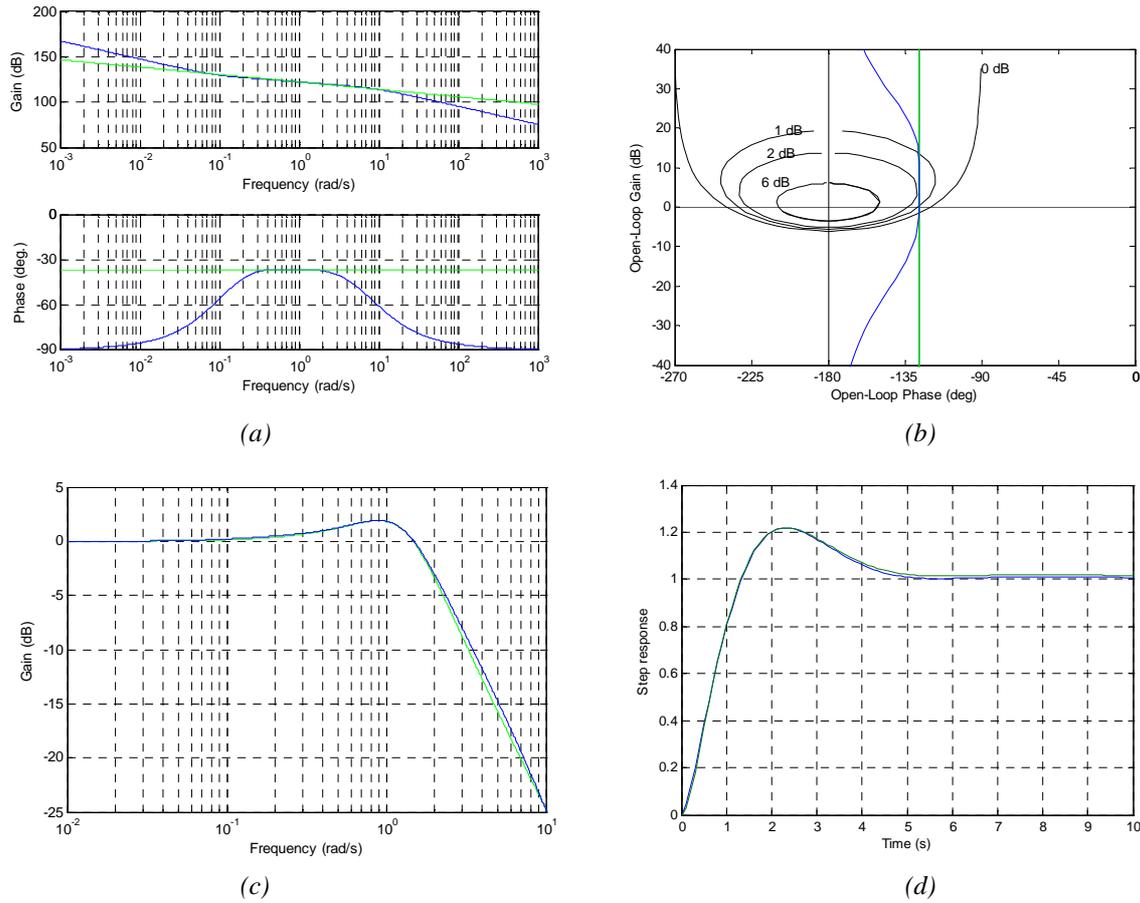


Figure 1.38 – Comparaison des réponses du SDNE obtenues avec la fractance (en vert) et son approximation (en bleu) : réponses fréquentielles de l'intégrateur non entier et de son approximation (a) ; lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (b) ; diagrammes de gain du transfert de boucle fermée (c) et réponses indicielles de l'effort généralisé $e_m(t)$ à un saut échelon $e_0(t)$ d'amplitude unitaire (d)

Remarque

Dans le cadre de la simulation numérique, l'obtention des réponses fréquentielles des SDNE ne pose pas de problème particulier. En effet, la manipulation de nombres complexes en présence d'exposants non entiers ne présente pas de difficulté. Par contre, l'obtention des réponses temporelles est plus délicate. Ainsi, la réponse $e_\lambda(t)$ à un saut échelon unitaire $u(t)$ (figure 1.38.d), dont la transformée de Laplace compte tenu de la relation (1.90) a pour expression :

$$E_\lambda(s) = \frac{b}{s(s^n + b)}, \tag{1.91}$$

est obtenue après une décomposition de la relation (1.91) sous la forme

$$E_\lambda(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{s^n}{(s^n + b)} \right), \tag{1.92}$$

ou encore,

$$E_\lambda(s) = \frac{1}{s} - \frac{s^n}{s(s^n + b)}, \quad (1.93)$$

puis par transformée inverse de Laplace, soit :

$$e_\lambda(t) = \text{TL}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s^n}{s(s^n + b)} \right\} = u(t) - E_n[-bt^n], \quad (1.94)$$

où $E_n[-bt^n]$ est la fonction de Mittag-Leffler [Hartley, 2002] définie par

$$E_n[-bt^n] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-b)^i t^{in}}{\Gamma(in+1)}. \quad (1.95)$$

Ainsi, la réponse indicielle présentée figure 1.38.d est obtenue en programmant la relation (1.94) avec la série (1.95) tronquée à $i = 100$, valeur choisie suffisamment élevée pour considérer la réponse en présence de la fractance comme « exacte » comparativement à la réponse obtenue avec l'approximation.

Compte tenu de l'excellente aptitude que possède le réseau cascade de 4 cellules RC identiques en gamma à approximer le comportement de la fractance dans son association avec un élément I , la suite de ce paragraphe se focalise, dans un premier temps, sur les performances obtenues avec une telle approximation.

Par ailleurs, le paramètre l de l'élément I est considéré comme incertain. Sa valeur nominale l_0 et ses valeurs extrémales l_{min} et l_{max} sont choisies pour que la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u appartienne toujours à l'intervalle fréquentiel où le blocage de phase est présent.

Ainsi, la figure 1.39 illustre l'influence des variations du paramètre l sur le comportement dynamique du SDNE. Plus précisément, les lieux de Black-Nichols en boucle ouverte sont présentés figure 1.39.a ; les diagrammes de gain du transfert de boucle fermée figure 1.39.b et les réponses indicielles de l'effort généralisé $e_\lambda(t)$ à un saut échelon $e_0(t)$ d'amplitude unitaire figure 1.39.c.

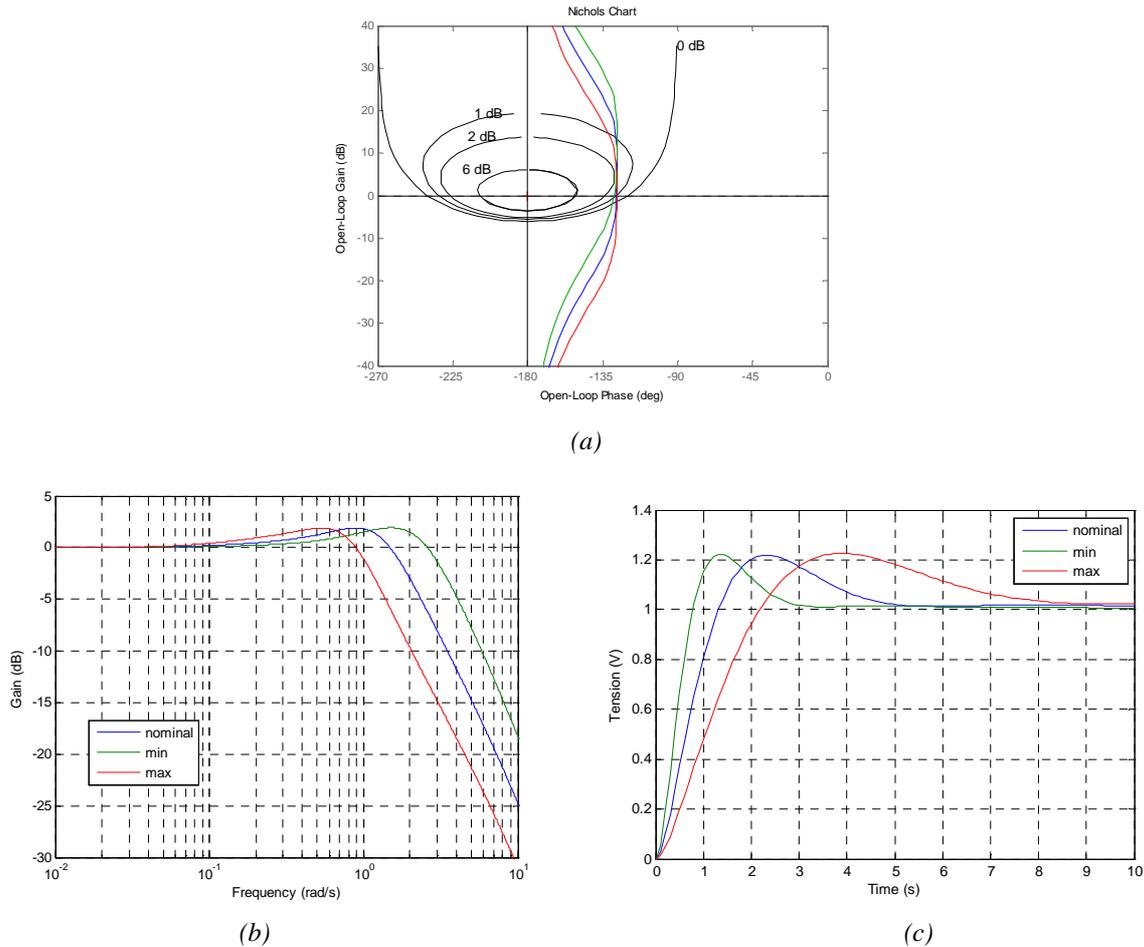


Figure 1.39 – Illustration de l’influence des variations du paramètre l sur le comportement dynamique du SDNE (l_0 en bleu, l_{min} en vert et l_{max} en rouge) : lieux de Black-Nichols en boucle ouverte (a) ; diagrammes de gain du transfert de boucle fermée (b) et réponses indicielles de l’effort généralisé $e_m(t)$ à un saut échelon $e_0(t)$ d’amplitude unitaire (c)

La tangence des lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte au même contour d’amplitude lorsque l varie entre l_{min} et l_{max} (figure 1.39.a) explique la robustesse du facteur de résonance des réponses fréquentielles du transfert $T(s)$ (figure 1.39.b) et la robustesse du premier dépassement réduit des réponses indicielles (figure 1.39.c) vis-à-vis des variations de l .

1.6.2 - Etude du régime libre

Afin de faciliter l’analyse de l’influence des conditions initiales sur le régime libre, une représentation d’état du réseau cascade de 4 cellules RC identiques en gamma est développée, soit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B u \\ y = C \underline{x} + D u \end{cases}, \quad (1.96)$$

où

$$u = f(t), \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 = e_\lambda(t) \\ x_2 = e_{C_1}(t) \\ x_3 = e_{C_2}(t) \\ x_4 = e_{C_3}(t) \\ x_5 = e_{C_4}(t) \end{pmatrix}, \quad y = e_\lambda(t), \quad (1.97)$$

les $e_{C_i}(t)$ étant les efforts généralisés aux bornes des éléments C_i , et où

$$A = \begin{bmatrix} -1/R_1 C_0 & 1/R_1 C_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/R_1 C_1 & \frac{-1}{C_1} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) & 1/R_2 C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 C_2 & \frac{-1}{C_2} \left(\frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \right) & 1/R_3 C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 C_3 & \frac{-1}{C_3} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} \right) & 1/R_4 C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 C_4 & -1/R_4 C_4 \end{bmatrix}, \quad (1.98)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/C_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \text{et} \quad D = 0. \quad (1.99)$$

La transformée de Laplace de la relation (1.96) conduit à

$$\underset{(1 \times 1)}{Y} = \underset{(1 \times 5)}{C[sI - A]^{-1}} \underset{(5 \times 1)}{\underline{x}(0)} + \underset{(1 \times 1)}{C[sI - A]^{-1} B} \underset{(1 \times 1)}{U}, \quad (1.100)$$

où $\underline{x}(0)$ représente le vecteur des conditions initiales associées aux éléments C_i . La relation (1.100) peut se réécrire sous la forme

$$Y = \sum_{i=1}^5 (\Psi_i(s) x_i(0)) + \tilde{H}(s) U, \quad (1.101)$$

$$\text{où} \quad \Psi_i(s) = (C[sI - A]^{-1}) \quad \text{et} \quad \tilde{H}(s) = (C[sI - A]^{-1} B). \quad (1.102)$$

Finalement, le retour dans le domaine temporel par la transformée de Laplace inverse conduit à

$$e_\lambda(t) = \sum_{i=1}^5 (TL^{-1}\{\Psi_i(s) x_i(0)\}) + \tilde{h}(t) * f(t), \quad (1.103)$$

relation de la forme

$$e_\lambda(t) = e_\lambda(0) + \tilde{e}_\lambda(t), \quad (1.104)$$

en posant
$$e_\lambda(0) = \sum_{i=1}^5 (TL^{-1}\{\Psi_i(s) x_i(0)\}) \tag{1.105}$$

et
$$\tilde{e}_\lambda(t) = \tilde{h}(t) * f(t) . \tag{1.106}$$

Ainsi, le schéma fonctionnel de la figure 1.36 est complété conformément aux développements précédents (Cf. figure 1.40).

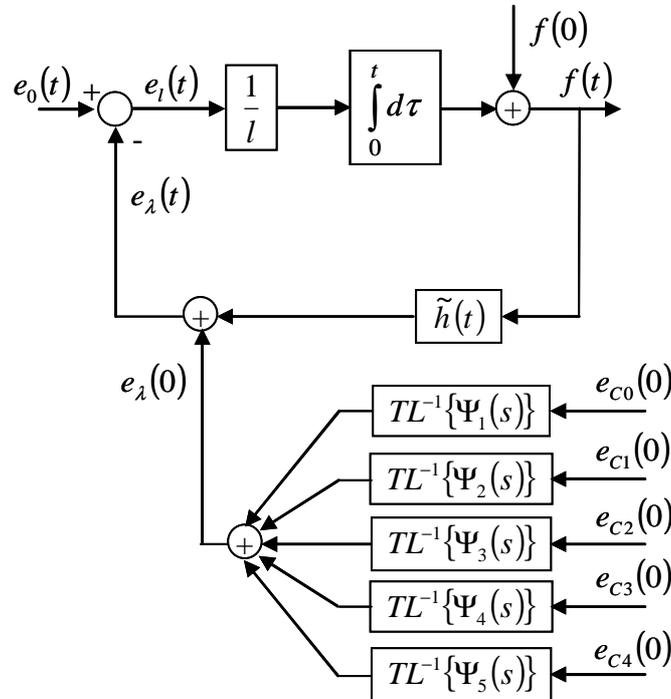


Figure 1.40 – Schéma fonctionnel pour la simulation avec prise en compte des conditions initiales $e_{Ci}(0)$ associées aux éléments C_i

Pour l'étude du régime libre $e_0(t) = 0$, les conditions initiales retenues sont :

$$f(0) = 0 \text{ et } e_{Ci}(0) = 1 \quad \forall i \in [0 ; 4] . \tag{1.107}$$

Pour ces conditions initiales et pour la valeur nominale l_0 de l , la figure 1.41.a présente les contributions de chaque terme de la somme définie par la relation (1.105). Quant à la figure 1.41.b, elle présente le tracé en vert de $e_\lambda(0)$ (résultat de la somme des tracés de la figure 1.41.a) ainsi que les tracés de $\tilde{e}_\lambda(t)$ en rouge et de $e_\lambda(t)$ en bleu.

Il est intéressant de noter que la somme $e_\lambda(0)$ des contributions de toutes les conditions initiales $e_{Ci}(0)$ est égale à l'unité.

Enfin, la figure 1.42 présente les réponses libres de $e_\lambda(t)$ pour les mêmes conditions initiales mais pour les valeurs nominale l_0 et extrémales l_{min} et l_{max} de l , illustrant ainsi la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations du paramètre l .

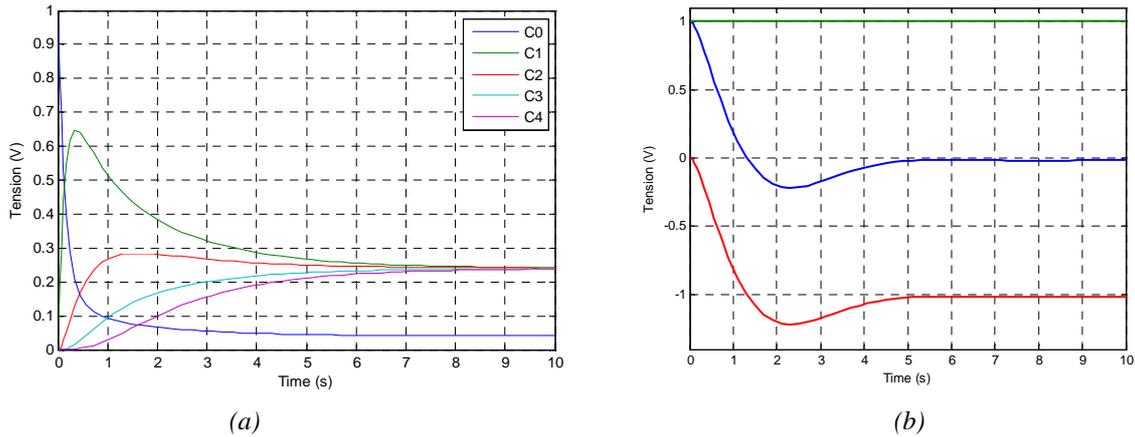


Figure 1.41 – Contributions de chaque terme de la somme définie par la relation (1.105) (a) et tracés de $e_\lambda(0)$ (en vert), de $\tilde{e}_\lambda(t)$ (en rouge) et de $e_\lambda(t)$ (en bleu) (b)

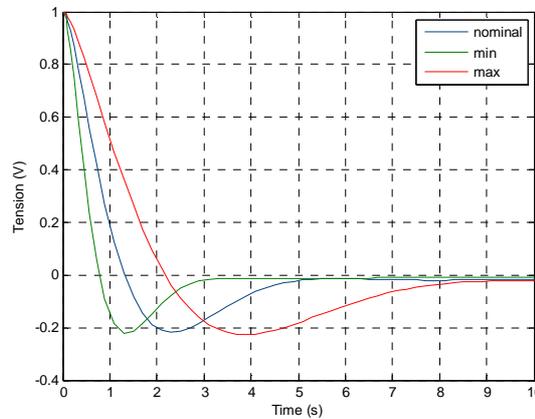


Figure 1.42 – Réponses libres de $e_\lambda(t)$ pour les valeurs nominale l_0 (en bleu) et extrémales l_{min} (en vert) et l_{max} (en bleu) de l

L'intérêt, dans un premier temps, d'utiliser l'approximation de la fractance pour la prise en compte des conditions initiales est de constater, pour ce cas particulier, que $e_\lambda(0)$ se résume à une constante (unitaire si tous les $e_{C_i}(0) = 1$ et si $f(0) = 0$). Dans un deuxième temps, il est donc possible d'affirmer, toujours pour ce cas particulier, que $e_\lambda(0)$ est une constante unitaire et de remplacer la réponse impulsionnelle $\tilde{h}(t)$ de l'approximation par celle de la fractance, à savoir $h(t)$. Ainsi, dans ces conditions d'étude du régime libre ($e_0(t) = 0, f(0) = 0$ et $e_\lambda(0) = 1$), le système d'équations (1.84) se résume à :

$$\begin{cases} e_i(t) = -e_\lambda(t) \\ f(t) = \frac{1}{l} \int_0^t e_i(\tau) d\tau \\ e_\lambda(t) = h(t) * f(t) + e_\lambda(0) \end{cases}, \quad (1.108)$$

où
$$h(t) = \frac{t^{-m}}{\lambda \Gamma(1-m)}. \quad (1.109)$$

La transformée de Laplace du système (1.108), soit :

$$\begin{cases} E_l(s) = -E_\lambda(s) \\ F(s) = \frac{1}{l s} E_l(s) \\ E_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda s^{1-m}} F(s) + \frac{e_\lambda(0)}{s} \end{cases}, \quad (1.110)$$

puis, l'élimination par substitution de $E_l(s)$ et de $F(s)$ conduit à une expression de la forme

$$E_\lambda(s) = -\frac{1}{\lambda s^{1-m}} \frac{1}{l s} E_\lambda(s) + \frac{e_\lambda(0)}{s}, \quad (1.111)$$

qui finalement se résume à

$$E_\lambda(s) = \frac{s^n}{s(s^n + b)} e_\lambda(0), \quad (1.112)$$

toujours en posant $n = 2 - m$ et $b = 1/(l\lambda)$. Sachant que $e_\lambda(0) = 1$, le retour dans le domaine temporel à l'aide de la transformée inverse de Laplace conduit à :

$$e_\lambda(t) = \text{TL}^{-1} \left\{ \frac{s^n}{s(s^n + b)} \right\} = E_n[-bt^n], \quad (1.113)$$

expression qui n'est autre que la fonction de Mittag-Leffler définie par la relation (1.95).

La figure 1.43 présente, pour la valeur nominale l_0 de l , la réponse en régime libre de $e_\lambda(t)$ obtenue avec l'approximation (en bleu) et avec la fonction de Mittag-Leffler (en vert) tronquée à l'ordre 100. Là encore, on peut observer l'excellente superposition des deux courbes.

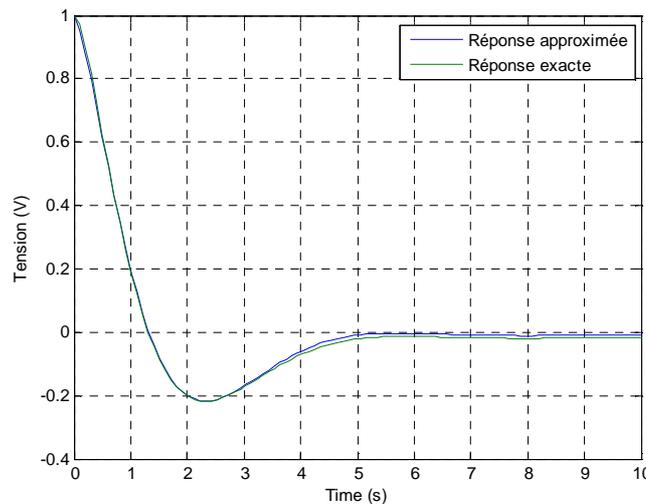


Figure 1.43 – Réponse en régime libre de $e_\lambda(t)$ obtenue avec l'approximation (en bleu) et avec la fonction de Mittag-Leffler (en vert) tronquée à l'ordre 100

1.7 - Conclusion

Si l'extension de la notion d'ordre de dérivation au corps des réels et des complexes date du XIX^{ème} siècle, l'application de la dérivation non entière est plus récente puisqu'elle date de la 2^{ème} partie du XX^{ème} siècle. En effet, pendant longtemps, ce nouvel opérateur a été considéré par les physiciens comme un concept mathématique sans application possible pour les sciences physiques. Aujourd'hui son application, notamment en sciences pour l'ingénieur, s'avère significative et largement répandue dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'automatique, la thermique, l'électrochimie, ...

Dans ce chapitre, deux méthodes de réalisation d'un intégrateur $I(s)$ d'ordre non entier borné en fréquence sont présentées.

Le point de départ de la première est la synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle. Ensuite, indépendamment de tout contexte applicatif, deux arrangements de cellules RC sont utilisés pour obtenir une impédance d'entrée dont la réponse fréquentielle est identique à celle de l'intégrateur d'ordre non entier. Cette première méthode présente un intérêt évident sur le plan méthodologique dans la mesure où l'optimisation concerne seulement les 4 paramètres de synthèse de haut niveau de $I(s)$. Les relations établies entre les différents paramètres de la forme idéale $I(s)$, de la forme réelle $I_N(s)$ et des arrangements de cellules RC permettent d'aboutir finalement aux valeurs des $2N+1$ paramètres physiques (les R et les C) du système, valeurs qui font l'objet d'une distribution. Cette méthode permet de réaliser tous les comportements d'ordre non entier compris entre 0 et 1.

A partir du constat qu'il n'est pas toujours possible de disposer d'une distribution des R et des C selon le contexte applicatif, la seconde méthode propose une démarche inverse. Ainsi, un arrangement cascade de cellules RC *identiques* en gamma est choisi *a priori*. La méthode se résume alors pour un nombre N donné de cellules à déterminer la valeur optimale d'un seul paramètre, à savoir la capacité C_0 de la cellule placée à l'entrée de l'arrangement. Cette valeur optimale assure un comportement non entier sur une décade avec un ordre compris entre 0.5 pour un $N = 100$ et 0.578 pour $N = 4$.

Enfin, le dernier paragraphe met en évidence le fait que si l'intégrateur d'ordre non entier est immergé dans une structure bouclée, alors son approximation même limitée à une décade est satisfaisante dès l'instant où elle est effectuée au voisinage de la fréquence au gain unité en boucle ouverte. Par ailleurs, la propriété de robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques se traduisant par des variations de gain en boucle ouverte est remarquable.

Le chapitre suivant traite de la synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence à l'aide de réseaux de cellules RC réalisés en technologie hydropneumatique. Aux propriétés présentées dans ce chapitre 2 et exploitées dans le chapitre suivant, s'ajoutent des spécificités liées à la technologie hydropneumatique, notamment la dépendance des éléments capacitifs C à la pression statique et leur comportement non linéaire lié à la loi des gaz parfaits.

Chapitre 2

Synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique

2.1 - Introduction

L'une des applications de l'intégration d'ordre non entière est l'isolation vibratoire, où la robustesse du degré de stabilité peut être recherchée. Dans ce domaine et plus particulièrement pour les suspensions de véhicules, la technologie hydropneumatique est une alternative intéressante à la quasi-omniprésente technologie mécanique. Elle nécessite notamment, pour un même débattement de suspension, un encombrement bien moindre que celui nécessaire en mécanique. Ce chapitre traite de l'application en technologie hydropneumatique de la démarche proposée dans le chapitre précédent pour la synthèse et la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier.

Du fait des propriétés spécifiques à cette technologie, la méthode de synthèse du chapitre précédent conduit, après quelques aménagements, à des performances tout à fait remarquables et qui peuvent être intéressantes notamment dans le contexte automobile.

Ce chapitre est limité à l'étude aux petites variations d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence. L'influence des non-linéarités des composants hydropneumatiques est alors négligeable. Les non-linéarités sont traitées au chapitre 3.

Les démarches ascendantes et descendantes présentées dans le chapitre précédent sont ici appliquées et particularisées pour tenir compte des spécificités de la technologie hydropneumatique.

Le fil conducteur de ce chapitre est un support d'étude utilisant, comme dispositif de suspension, un arrangement de cellules RC réalisées en technologie hydropneumatique.

La première partie est consacrée à la présentation du support d'étude et à l'établissement d'un modèle rigoureux de son comportement.

La seconde partie est consacrée à l'application de la démarche descendante pour choisir les caractéristiques technologiques des composants hydropneumatiques à utiliser dans le cadre du support d'étude. Dans cette partie, des arrangements parallèles de cellules RC en série ainsi que des arrangements en cascade de cellules RC en gamma sont considérés.

Enfin, dans la troisième partie de ce chapitre, les résultats obtenus à l'aide de la démarche ascendante dans le cadre du support d'étude sont proposés et analysés.

2.2 - Description du support d'étude

Le support d'étude est un dispositif hydraulique composé d'une masse M reliée mécaniquement à un vérin hydraulique simple effet (figure 2.1). Ce vérin est appelé vérin de suspension par analogie au vérin de suspension des véhicules automobiles équipés de suspension hydropneumatique.

La masse suspendue M peut varier de 75 à 150 kg grâce à la présence de masses additionnelles.

Le vérin de suspension est connecté à un circuit hydraulique composé de deux parties.

- La première est constituée d'un groupe électropompe équipé d'un conjoncteur-disjoncteur et d'un distributeur commandé en courant $i(t)$ délivrant un débit $q_c(t)$. Son rôle est de maintenir à une valeur de référence la position d'équilibre statique de la masse M pour toutes les valeurs comprises au moins entre 75 et 150 kg. Cet objectif est atteint grâce à la présence d'une boucle de régulation de hauteur.

- La seconde est un réseau hydropneumatique constitué d'accumulateurs hydropneumatiques et de résistances hydrauliques. Ce réseau joue pour la masse M le rôle d'une suspension. Plusieurs types de réseaux hydropneumatiques peuvent ainsi être étudiés.

Les accumulateurs hydropneumatiques, aussi appelés sphères de suspension, sont des éléments capacitifs au même titre que les condensateurs en électricité et les ressorts en mécanique. Ils sont constitués d'une sphère métallique qui contient une membrane en élastomère. Cette membrane divise l'espace intérieur en deux cavités indépendantes. Une des cavités est reliée au fluide du circuit hydraulique auquel est raccordée la sphère, l'autre cavité contient un gaz neutre (azote), à une pression P_0 (pression de tarage) et à un volume V_0 au repos.

Les amortisseurs hydrauliques sont des éléments résistifs comme les résistances électriques et les amortisseurs mécaniques. Pour cette raison, ils sont également désignés par le terme résistance hydraulique par la suite.

Le schéma de commande associé au support d'étude est présenté figure 2.2. La boucle externe qui régule la position d'équilibre statique à une valeur égale à la moitié de la course du vérin de suspension, présente une rapidité identique à celle du régulateur de hauteur d'un véhicule équipé d'une suspension hydropneumatique [Moreau, 2003], rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 0.1 rad/s. Quant à la boucle interne qui fait l'objet d'une présentation détaillée au paragraphe suivant, elle est synthétisée pour présenter une rapidité identique à celle du mode de pompage de la masse suspendue d'un véhicule de tourisme équipé d'une suspension hydropneumatique [Moreau, 2004], rapidité caractérisée par une fréquence au gain unité en boucle ouverte de 6 rad/s. Ces deux boucles sont donc dynamiquement découplées.

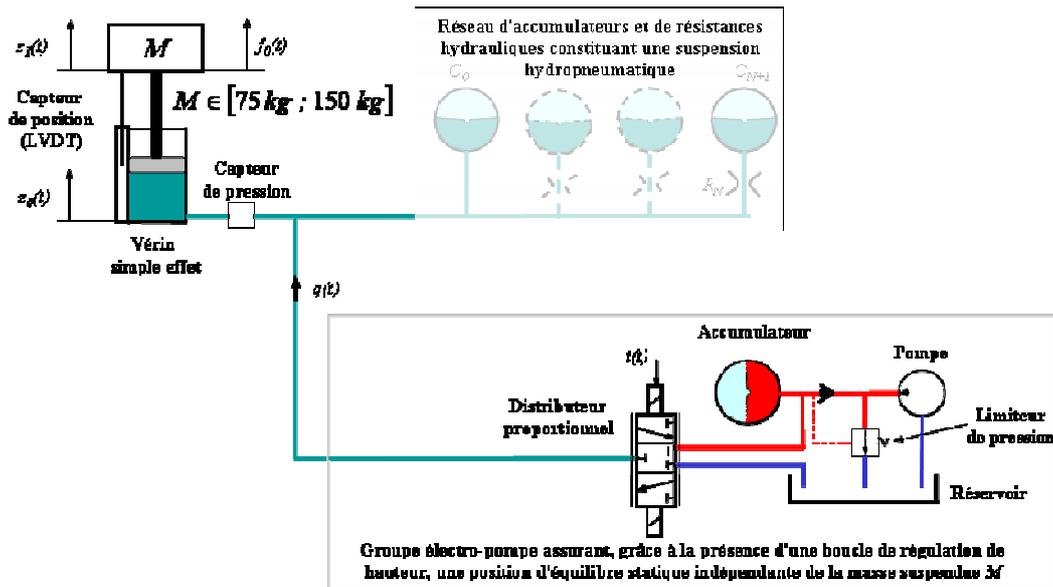


Figure 2.1 - Schéma hydraulique du support d'étude pour l'étude des réseaux hydropneumatiques

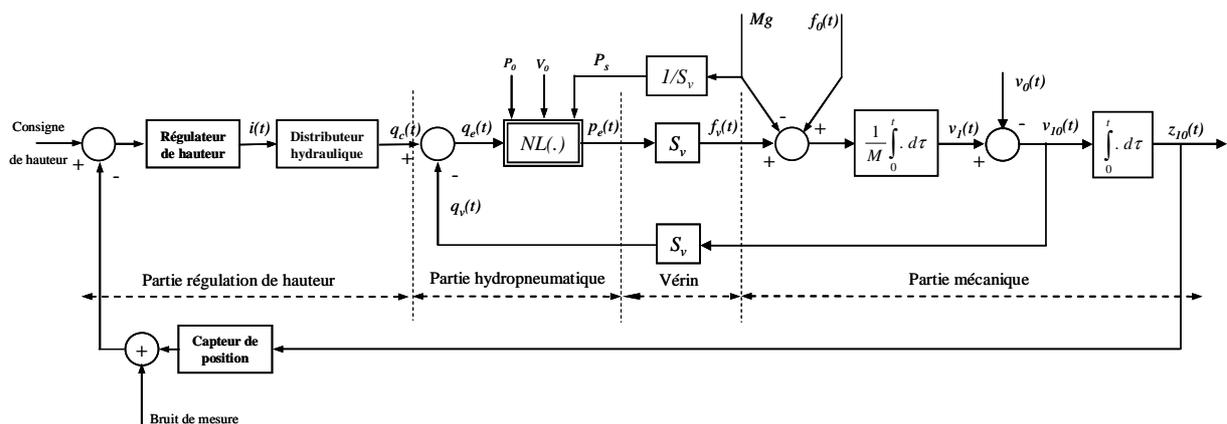


Figure 2.2 - Schéma de commande associé au support d'étude présenté figure 2.1

A travers ce support d'étude, il est donc possible de s'intéresser non seulement à l'étude du régime libre de la masse M , en lui imposant des conditions initiales (essai de lâcher), mais également à l'étude du régime forcé, consécutif soit à une excitation en force (génération de la force $f_0(t)$), soit à un déplacement vertical du corps du vérin (déplacement $z_0(t)$). Sur un dispositif réel, la présence d'un capteur de pression et d'un capteur de débattement permet l'estimation des caractéristiques du régime libre (en particulier le facteur d'amortissement) et du régime forcé harmonique stationnaire (notamment l'impédance hydraulique d'entrée du réseau étudié).

2.3 - Application de la démarche descendante dans le cadre du support d'étude

L'objectif de cette partie est de déterminer les paramètres technologiques des éléments capacitifs et dissipatifs du réseau hydraulique (*ie* la suspension) pour satisfaire les spécifications d'un cahier des charges. Pour cela, il est nécessaire dans un premier temps de réaliser la synthèse de la suspension. Le terme synthèse peut être employé ici car le schéma fonctionnel de la figure 2.2 montre que la suspension joue le même rôle que le régulateur d'une boucle de commande, dont le procédé $G(s)$ est un intégrateur de pulsation transitionnelle dépendant de la masse suspendue.

Dans le cadre de cette thèse, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques est recherchée. Des travaux précédents [Oustaloup, 1995], [Moreau, 2002] ont montré l'intérêt de la dérivation non entière pour répondre à cette problématique et plus particulièrement d'une suspension dont la fonction de transfert débit-pression est un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence.

Comme cela est montré par la suite dans le paragraphe 2.3.1.3, l'utilisation de la technologie hydropneumatique engendre des propriétés spécifiques dont il convient de tenir compte lors de la synthèse de la suspension. A cette fin, une méthode de synthèse originale est développée dans le paragraphe 2.3.1.4.2.

Une fois la fonction de transfert idéale de la suspension déterminée à l'aide de la méthode de synthèse, les paramètres technologiques permettant de réaliser cette suspension sont déduits. Cette démarche se situe dans le fil de la méthode descendante présentée au chapitre 1. Les cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série et d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma sont traités successivement.

2.3.1 - Synthèse d'une suspension de référence

Dans un premier temps, et à titre de comparaison pour la suite, un réseau avec $N=1$ est utilisé comme élément de référence. Ce réseau correspond à la toute première itération pour la construction d'un réseau à N cellules, quel que soit l'arrangement choisi, qu'il s'agisse d'un arrangement parallèle de cellules RC en série ou d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma.

Les spécifications du cahier des charges pour la synthèse de cette suspension de référence sont les suivantes :

- une pulsation au gain unité de 6 rad/s pour la masse minimale ;
- une marge de phase de 45° pour la masse minimale.

Ces spécifications sont issues du domaine de l'automobile dont le support d'étude se veut être représentatif en termes de dynamique. La synthèse de la suspension nécessite en premier lieu un modèle de la boucle interne du schéma de commande présenté figure 2.2.

2.3.1.1 - Modélisation de la boucle interne : prise en compte des non-linéarités

Dans la mesure où la boucle externe est dynamiquement découplée, celle-ci est volontairement négligée dans la suite.

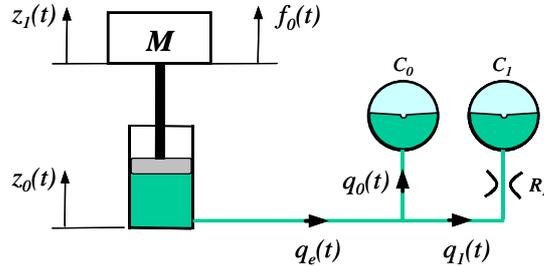


Figure 2.3 - Schéma hydraulique du support d'étude en considérant un arrangement parallèle de deux cellules dont une RC ($N=1$), point de départ pour la construction d'un arrangement de $N+1$ cellules.

L'application du principe fondamental de la dynamique à la masse M conduit à une équation de la forme

$$M \ddot{z}_1(t) = f_0(t) + f_v(t) - Mg, \quad (2.1)$$

où $f_0(t)$ désigne la force d'excitation appliquée à la masse M et $f_v(t)$ la force développée par le vérin résultant de la pression $p_v(t)$, soit :

$$f_v(t) = S_v p_v(t), \quad (2.2)$$

avec S_v la section utile du vérin.

Si on néglige les pertes de charge dans la canalisation qui relie le vérin au réseau hydraulique, alors la pression $p_e(t)$ à l'entrée du réseau est égale à la pression $p_v(t)$ dans le vérin.

Lorsque le régulateur de hauteur ne fonctionne pas en raison du découplage dynamique [Moreau 2004], le débit entrant $q_e(t)$ dans le réseau hydraulique est égal au débit de déplacement $q_v(t)$ généré par la vitesse de débattement $v_0(t) - v_1(t)$ du vérin, soit :

$$q_e(t) = q_v(t), \quad (2.3)$$

avec

$$q_v(t) = S_v (v_0(t) - v_1(t)), \quad (2.4)$$

où $v_0(t)$ et $v_1(t)$ représentent les vitesses verticales de la base du vérin ($v_0(t) = dz_0(t)/dt$) et de la masse M ($v_1(t) = dz_1(t)/dt$).

Le débit $q_e(t)$ entrant dans le réseau se répartit en un débit $q_0(t)$ dans la cellule de rang 0 et un débit $q_1(t)$ dans la cellule de rang 1, soit :

$$q_e(t) = q_0(t) + q_1(t). \quad (2.5)$$

De plus, la relation non linéaire $NL_{C_i}(\cdot)$ entre la pression du gaz $p_i(t)$ et la variation de volume du liquide $v_{li}(t)$ de la sphère de rang i est de la forme [Serrier, 2006]

$$p_i(t) = \frac{P_s}{\left(1 - \frac{P_s}{P_{0i} V_{0i}} v_{li}(t)\right)^\gamma}, \quad (2.6)$$

où P_s désigne la pression statique dans le vérin ($P_s = Mg/S_v$), P_{0i} et V_{0i} la pression de gonflage et le volume de la sphère de rang i , γ une constante caractérisant l'évolution du gaz dans la sphère ($\gamma=1,4$ pour une évolution adiabatique, 1 pour une évolution isotherme), $v_{li}(t)$ étant donné par

$$v_{li}(t) = \int_0^t q_i(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

La relation (2.6) est issue de la modélisation de la sphère dans laquelle l'azote est considéré comme un gaz parfait.

La figure 2.4 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé à la sphère de rang i .

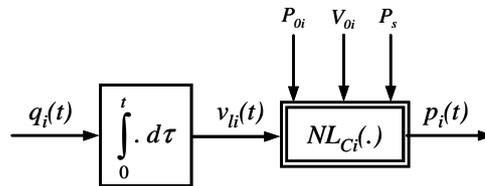


Figure 2.4 - Schéma fonctionnel non linéaire associé à la sphère de rang i

Par ailleurs, la relation générale entre le débit $q_i(t)$ traversant la résistance hydraulique de rang i et la perte de charge $\Delta p_{Ri}(t)$ aux bornes de celle-ci est notée $NL_{Ri}(\cdot)$, soit :

$$q_i(t) = NL_{Ri}(\Delta p_{Ri}(t)). \quad (2.8)$$

Le schéma fonctionnel non linéaire (respectant les causalités intégrales) associé au réseau hydropneumatique de l'itération 1 ($N = 1$) est donné figure 2.5. L'absence de résistance hydraulique dans la cellule de rang 0 conduit à l'égalité $p_0(t) = p_e(t)$.

Finalement, la figure 2.6 présente le schéma fonctionnel de la boucle interne associé à l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique quel que soit le nombre de cellules considéré. Ce modèle constitue le **modèle de validation**.

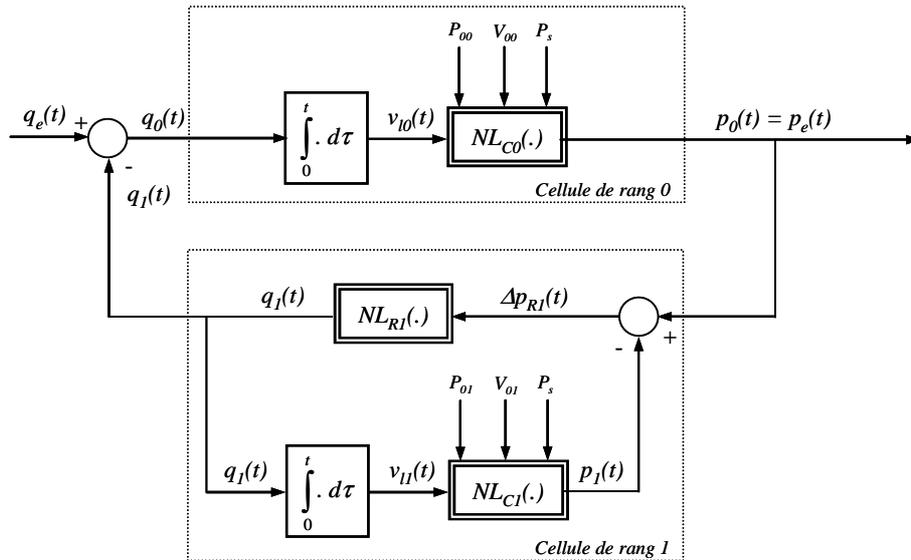


Figure 2.5 - Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydro-pneumatique de la suspension de référence (itération 1 : $N = 1$)

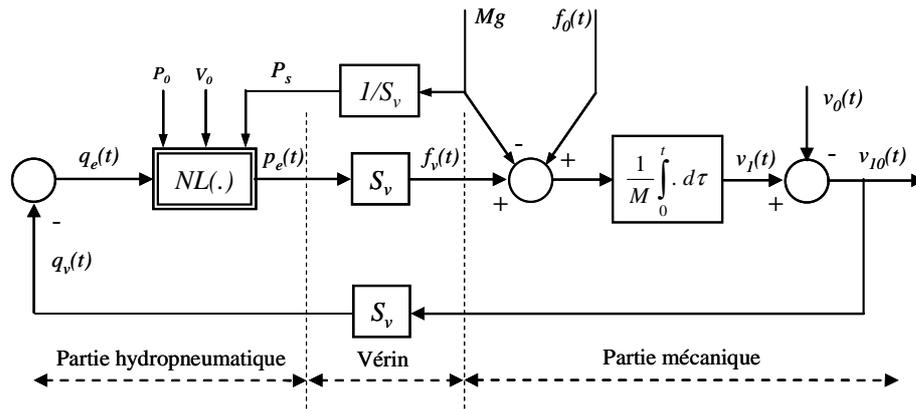


Figure 2.6 - Schéma fonctionnel non linéaire associé à l'ensemble masse-vérin-réseau hydro-pneumatique (cf. boucle interne de la figure 2.2)

2.3.1.2 - Linéarisation

Afin de faciliter la synthèse de la suspension de référence, nous ne nous intéresserons ici qu'à l'étude du comportement du support d'étude aux petites variations. Ainsi, les non-linéarités des composants hydro-pneumatiques deviennent négligeables et il est alors possible de réaliser la synthèse sur un modèle linéarisé. Ce paragraphe détaille l'obtention d'un modèle linéarisé pour le support d'étude. La prise en compte des non-linéarités fait l'objet du chapitre 3.

Les non-linéarités $NL_{C_i}(\cdot)$ (relation (2.6)) et $NL_{R_i}(\cdot)$ (relation (2.8)) de la cellule RC de rang i peuvent être décomposées en série de Taylor, soit :

- pour la sphère

$$p_i(t) = P_s + \frac{1}{C_i} v_{li}(t) + NL_{C_i}^*(v_{li}(t)), \quad (2.9)$$

où $NL_{C_i}^*(v_{li}(t))$ représente la somme des termes d'ordre supérieur à 1 de la série et C_i la capacité hydropneumatique de la sphère de rang i , soit :

$$C_i = \frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma P_s^2}, \quad (2.10)$$

(la capacité de la sphère est analogue à la souplesse d'un ressort en mécanique, dans le sens où plus la capacité d'une sphère de suspension est grande, plus le ressort équivalent est souple, c'est-à-dire plus sa raideur est grande) ;

- pour la résistance hydraulique

$$q_i(t) = \frac{1}{R_i} \Delta p_{R_i}(t) + NL_{R_i}^*(\Delta p_{R_i}(t)), \quad (2.11)$$

où $NL_{R_i}^*(\Delta p_{R_i}(t))$ représente la somme des termes d'ordre supérieur à 1 de la série et R_i la résistance de rang i .

La figure 2.7 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydraulique du support d'étude dans le cas $N = 1$ en tenant compte de la décomposition en série de Taylor.

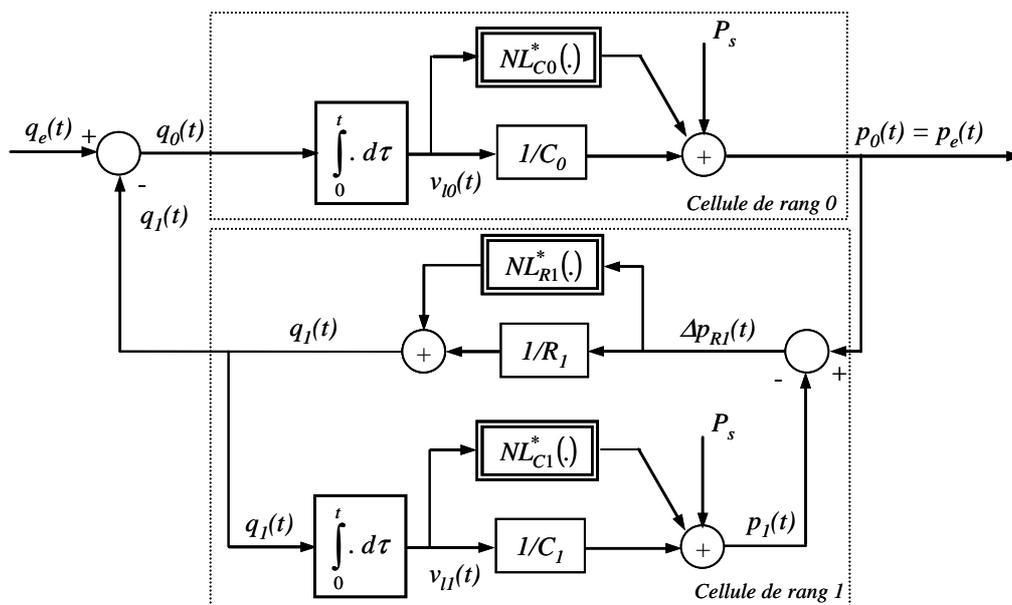


Figure 2.7 - Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension de référence en mode souple ($N = 1$) après décomposition en série de Taylor

La figure 2.8 présente le schéma fonctionnel de l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique en tenant compte de la décomposition en série de Taylor. Le réseau hydropneumatique est décomposé en une partie linéaire regroupée dans Z_{He} et une partie non linéaire regroupée dans Δ .

On peut remarquer que, contrairement au schéma de la figure 2.6, le poids Mg n'apparaît plus de manière *explicite* dans le bilan des efforts extérieurs appliqués à la masse M dans la mesure où il est compensé par la pression statique P_s du réseau hydropneumatique ($Mg = S_v P_s$). Par contre il apparaît toujours de manière *implicite* dans les expressions des capacités C_i et des relations non linéaires $NL_{C_i}^*(\cdot)$.

La synthèse du réseau hydropneumatique se fait sous l'hypothèse de petites variations, ce qui revient à négliger dans un premier temps la partie non linéaire Δ . Le modèle linéaire ainsi défini constitue le *modèle de synthèse*.

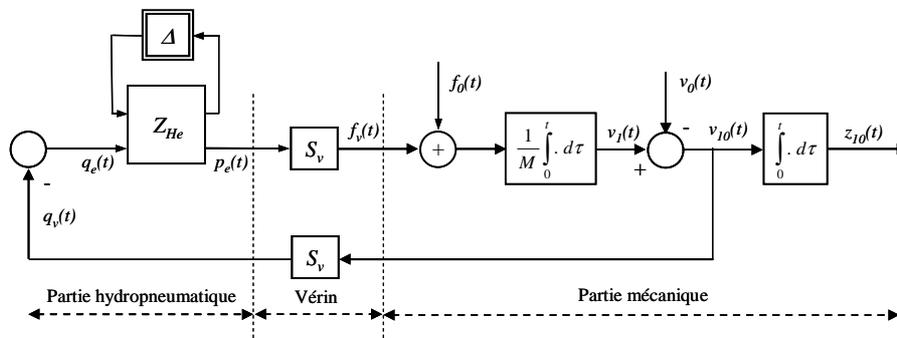


Figure 2.8 - Schéma fonctionnel de l'ensemble masse-vérin-réseau hydropneumatique après décomposition en série de Taylor

2.3.1.3 - Synthèse de la fonction de transfert cible de la suspension

La relation (1.39), particularisée pour $N=1$, permet d'écrire l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension de référence sous la forme :

$$I_e^1(s) = \frac{1}{C_0 s + \frac{C_1 s}{1 + R_1 C_1 s}}, \quad (2.12)$$

soit

$$I_e^1(s) = \frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{1}{s} \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{C_0 + C_1 + R_1 C_1 C_0 s} \right), \quad (2.13)$$

expression de la forme

$$\frac{P_e(s)}{Q_e(s)} = \frac{D_s^1}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b^1}}{1 + \frac{s}{\omega_h^1}} \right), \quad (2.14)$$

où

$$D_s^1 = \frac{1}{C_0 + C_1}, \quad \omega_b^1 = \frac{1}{R_1 C_1} \quad \text{et} \quad \omega_h^1 = \frac{C_0 + C_1}{R_1 C_1 C_0}. \quad (2.15)$$

A partir du cahier des charges, la méthode classique de synthèse d'un régulateur à avance de phase conduit aux paramètres suivants :

- pour le gain $D_s^1 = 1,1340 \cdot 10^{10} \text{ Pa.m}^{-3}$;
- pour les fréquences transitionnelles $\omega_b^1 = 2,48 \text{ rad/s}$ et $\omega_h^1 = 14,5 \text{ rad/s}$.

Les diagrammes de Bode de $I_e^1(s)$ ainsi que les diagrammes de Bode de la boucle ouverte sont présentés figure 2.9.

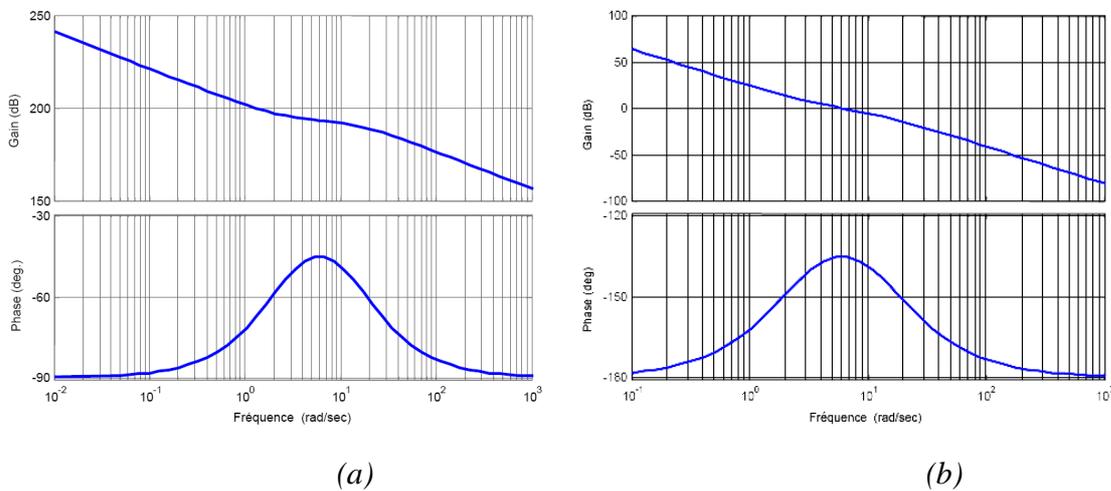


Figure 2.9 - Diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension (a) et de la boucle ouverte (b)

La réponse indicielle $z_I(t)$ de la masse suspendue résultant d'un échelon de position verticale $z_0(t)$ du corps du vérin est donnée figure 2.10.

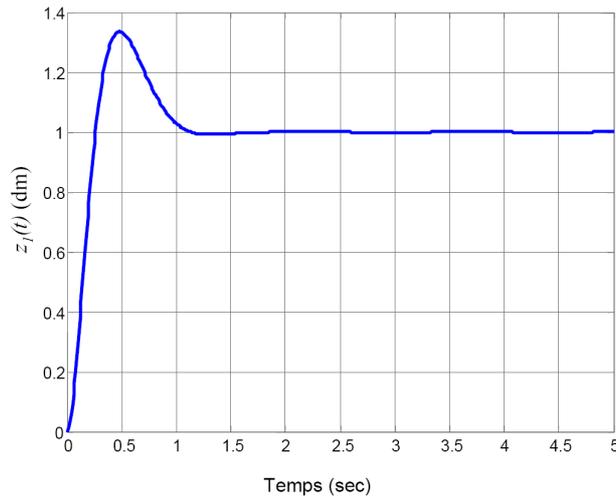


Figure 2.10 - Réponse indicielle de la position verticale de la masse suspendue

2.3.1.4 - Calcul des paramètres physiques de la suspension de référence

Les paramètres physiques (capacités et résistances) se déduisent des paramètres issus de la synthèse D_s^1 , ω_b^1 et ω_h^1 par les relations (2.15). Cela conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} C_0 &= 1.5083 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5/\text{N} \\ C_I &= 7.3106 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5/\text{N} \\ R_I &= 5.5156 \cdot 10^9 \text{ Ns}/\text{m}^5 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les ressorts équivalents aux cellules C_0 et C_I ont pour raideurs respectives 6537 N/m et 1549 N/m. L'amortisseur équivalent à la résistance hydraulique a un coefficient de frottement visqueux de 543 Ns/m.

2.3.1.5 - Calcul des paramètres technologiques

Les couples de paramètres technologiques (pression de tarage et volume pour les sphères, dimensions caractéristiques pour la résistance) correspondant à ces paramètres physiques ne sont pas uniques. Le choix des paramètres technologiques est fait en fonction de plusieurs règles :

- pour les sphères
 - la pression de tarage de chacune des sphères doit être inférieure à la pression statique ;
 - afin d'anticiper sur la réalisation, les volumes des sphères sont choisis parmi les volumes normalisés, à savoir 75, 120, 160, 190, 320, 350, 400, 450, 600, 650, 700 ou 1500 cm³ ;
 - lors du fonctionnement, la membrane de la sphère ne doit jamais arriver en butée contre le bas de la sphère, cela pourrait l'endommager gravement ;

- pour les résistances
 - o les résistances n'étant pas normalisées, les seules contraintes sont celles de la fabrication. Une solution simple pour la réalisation d'une résistance hydraulique consiste à introduire une restriction de diamètre et de longueur donnée dans une canalisation [Serrier, 2005b]. Sous certaines hypothèses, notamment le fait que l'écoulement a lieu en régime laminaire, ce type de résistance hydraulique peut posséder une caractéristique linéaire. Le choix des dimensions se fait de façon à faciliter la fabrication. Il est alors intéressant de se limiter aux diamètres normalisés de perçage et d'adapter la longueur du perçage en conséquence.

La prise en compte de ces impératifs conduit à choisir les paramètres technologiques suivants :

- pour la sphère purement capacitive, de capacité C_0 , un volume de 75 cm^3 et une pression de tarage de 15 bars (la précision lors du gonflage des sphères est de l'ordre du bar) ;
- pour la sphère de la cellule RC, de capacité C_1 , un volume de 400 cm^3 et une pression de tarage de 14 bars ;
- pour la résistance hydraulique, un diamètre de perçage de 5,5 mm pour une longueur de 15,4 mm.

2.3.1.6 - Influence de la variation de masse

2.3.1.6.1 - Influence sur les paramètres physiques de la suspension

La relation (2.10) qui donne l'expression de la capacité de chaque sphère en fonction du volume de la sphère, de sa pression de tarage et de la pression statique montre que les capacités des sphères dépendent de la valeur de la masse suspendue.

Pour déterminer la réponse du système pour une masse suspendue différente de la masse minimale, il est alors nécessaire de calculer les valeurs correspondantes des paramètres physiques (ou des paramètres de haut niveau : cf. paragraphe 2.4) de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension.

La relation (2.10) permet de calculer les capacités des sphères en fonction de la masse suspendue. Ainsi, lorsque la masse suspendue est égale à la masse maximale,

$$C_0^{M_{\max}} = \frac{P_{i0} V_{i0}}{\gamma P_s^{M_{\max}^2}} = C_0 \left(\frac{M_{\min}}{M_{\max}} \right)^2 = 3,7709 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5 / \text{N} \quad (2.17)$$

et

$$C_1^{M_{\max}} = C_1 \left(\frac{M_{\min}}{M_{\max}} \right)^2 = 1,8277 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / \text{N}. \quad (2.18)$$

Quant aux paramètres du régulateur à avance de phase, ils deviennent alors

$$D_s^1 = \frac{1}{C_0^{M_{\max}} + C_1^{M_{\max}}} = 4.5357 \cdot 10^{10} \text{ Pa.m}^{-3}, \quad (2.19)$$

$$\omega_b^1 = \frac{1}{R_1 C_1^{M_{\max}}} = 9,9 \text{ rad/s} \quad (2.20)$$

et

$$\omega_h^1 = \frac{C_0 + C_1}{R_1 C_1 C_0} = 58 \text{ rad/s}. \quad (2.21)$$

Les diagrammes de Bode du régulateur à avance de phase obtenus avec la masse suspendue maximale (en vert) et la masse suspendue minimale (en bleu) sont présentés figure 2.11.

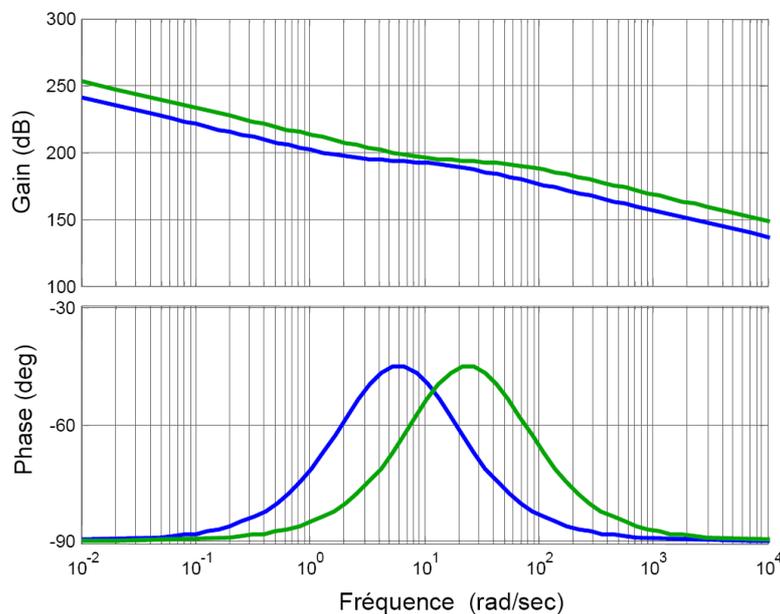


Figure 2.11 - Diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension de référence avec la masse suspendue : minimale (en bleu) et maximale (en vert)

La figure 2.11 permet de constater que la forme des diagrammes de gain et de phase n'est pas modifiée par la variation de masse suspendue. Les diagrammes de phase et de gain sont tout simplement translatés vers les hautes fréquences quand la masse augmente. Ce résultat se généralise à toute variation de masse (telle que les membranes des sphères ne viennent pas en butée) : lorsque la masse varie, les diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension de référence sont translatés vers les hautes fréquences. Cette propriété remarquable se généralise également à tout arrangement parallèle de cellules RC en série et à tout arrangement en cascade de cellules RC en gamma, comme cela est démontré dans les paragraphes suivants.

2.3.1.6.2 - Influence sur le comportement de la boucle ouverte

Les diagrammes de Bode de la boucle ouverte, obtenus pour la masse minimale (en bleu) et pour la masse maximale (en vert) sont donnés à la figure 2.12.

Cette figure montre que

- la phase subit uniquement une translation vers les hautes fréquences ;
- la pulsation au gain unité est très peu modifiée.

Ces deux propriétés sont généralisables à toutes les variations de masses.

Le fait que la pulsation au gain unité est peu modifiée est une propriété bien connue des suspensions hydropneumatiques. La figure 2.13 montre l'évolution de la pulsation au gain unité en fonction de la masse suspendue pour un quart de véhicule équipé d'une suspension mécanique ou hydropneumatique.

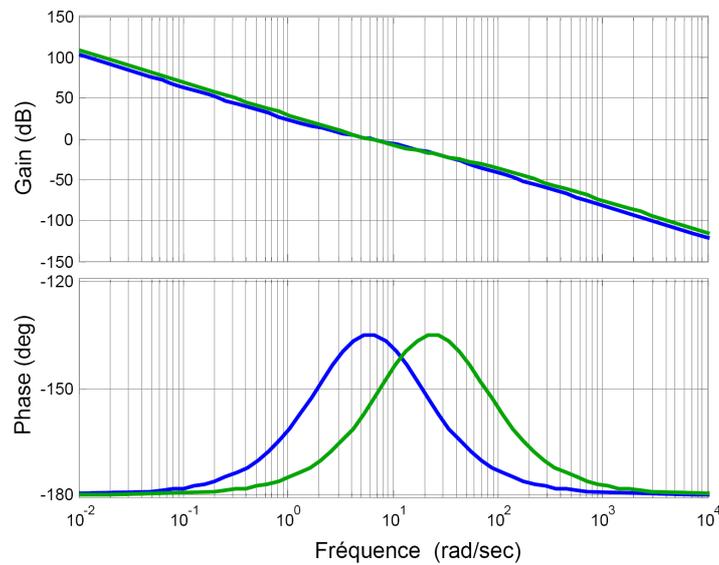


Figure 2.12 - Diagrammes de Bode de la boucle ouverte obtenus pour la masse suspendue minimale (en bleu) et la masse suspendue maximale (en vert)

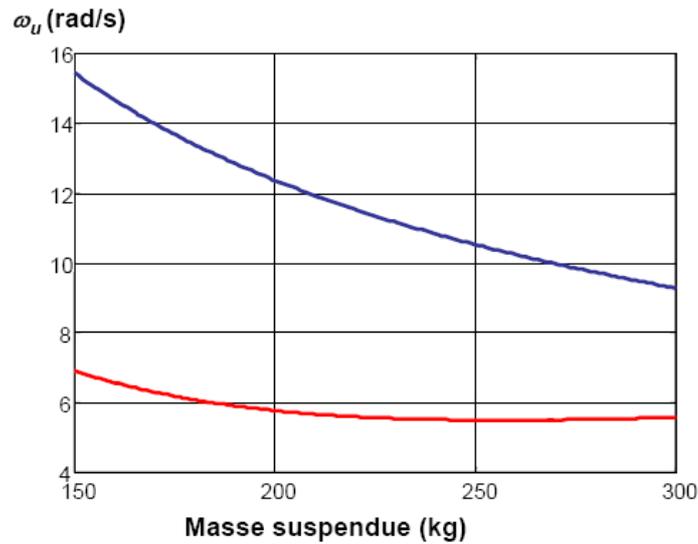


Figure 2.13 - Variation de la pulsation au gain unité en fonction de la masse suspendue pour un quart de véhicule équipé d'une suspension mécanique (en bleu) ou hydropneumatique (en rouge)

La figure 2.14 présente l'influence de la variation de la masse suspendue sur les lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte.

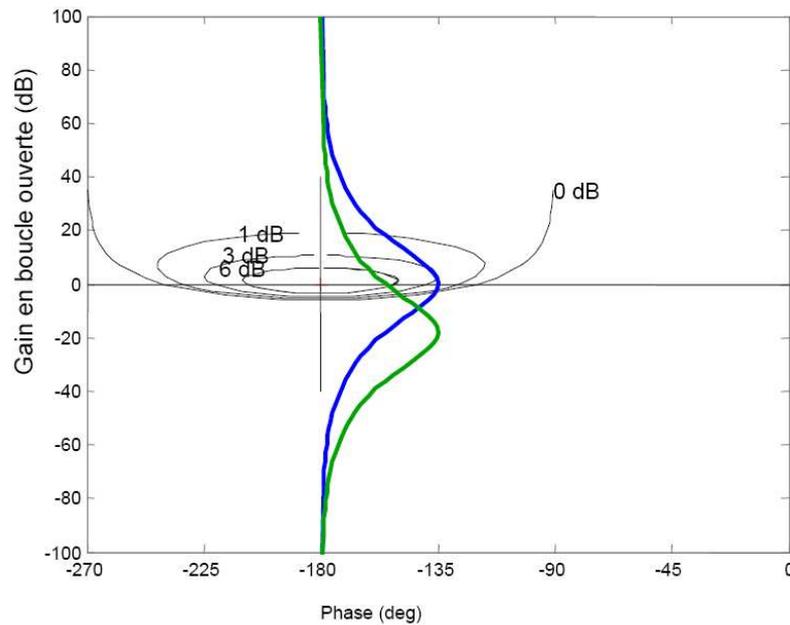


Figure 2.14 - Lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte obtenus pour la masse suspendue minimale (en bleu) et la masse suspendue maximale (en vert)

2.3.1.6.3 - Influence sur la réponse temporelle

La faible variation de la pulsation au gain unité se traduit sur les réponses temporelles par une iso-rapidité de la réponse indicielle quelle que soit la masse suspendue.

En revanche, en raison de la translation vers les hautes fréquences de la courbe de phase, comme le montrent les lieux de Black-Nichols de la figure 2.14, l'avance de phase maximale apportée par le régulateur à avance de phase ne se situe plus à la fréquence au gain unité ω_u . Il en résulte une diminution du degré de stabilité du système. Dans un contexte automobile, cette diminution est préjudiciable au confort des passagers.

La figure 2.15 présente les réponses indicielles de la position verticale de la masse suspendue pour les masses extrémales.

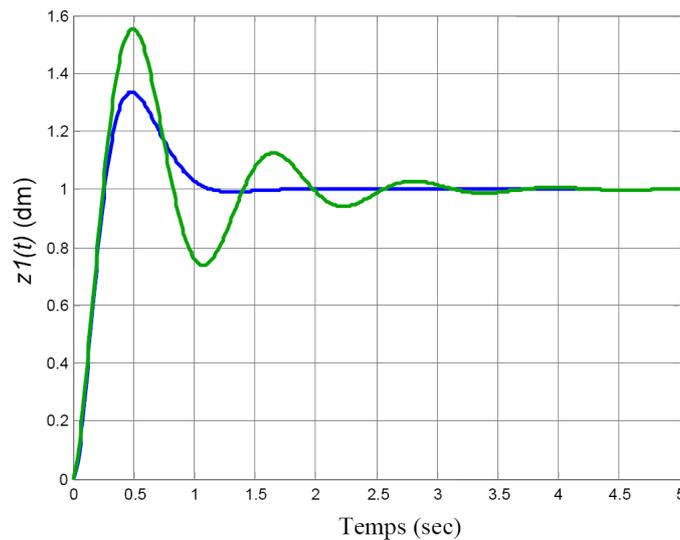


Figure 2.15 - Réponses indicielles de la position de la masse suspendue pour les deux valeurs extrémales de la masse suspendue

La réalisation d'une suspension CRONE en technologie hydropneumatique permet à la fois d'obtenir, grâce à la méthodologie de la commande CRONE, la robustesse du degré de stabilité, tout en conservant la robustesse de la rapidité apportée par l'utilisation de la technologie hydropneumatique. Dans cette perspective, la partie suivante présente une adaptation des développements du chapitre précédent à la technologie hydropneumatique afin de réaliser une suspension CRONE pour le support d'étude.

2.3.2 - Cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série

Dans cette partie, le réseau hydropneumatique relié au vérin de suspension est composé d'un arrangement parallèle de cellules RC en série.

2.3.2.1 - Modélisation de la boucle interne : prise en compte des non-linéarités

A partir de la modélisation obtenue pour la suspension de référence au paragraphe 2.3.1.1, la généralisation à un réseau parallèle de $N+1$ cellules RC en série de la modélisation

de la boucle est immédiate. La figure 2.16 présente le schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydro-pneumatique de la suspension CRONE pour N quelconque.

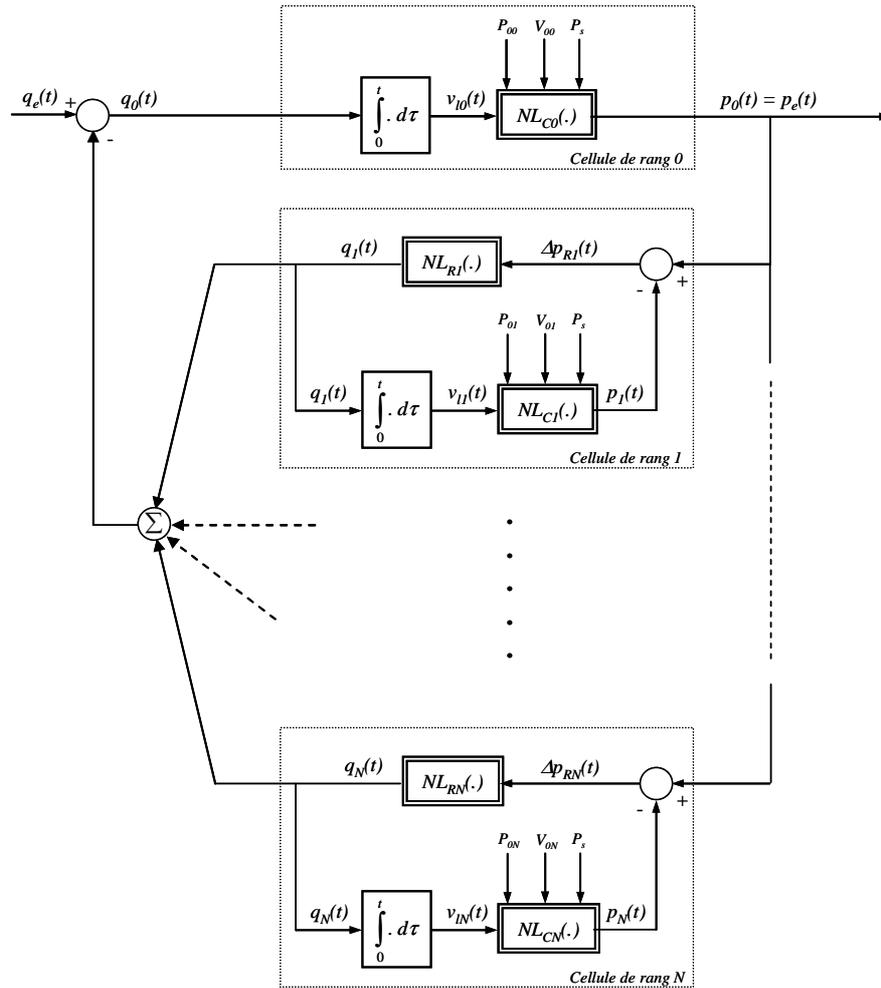


Figure 2.16 - Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydro-pneumatique de la suspension CRONE pour N quelconque

2.3.2.2 - Linéarisation

Le schéma fonctionnel de la figure 2.17 est une extension du schéma de la figure 2.7 pour un réseau parallèle de cellules RC série avec N quelconque. L'obtention d'un modèle de synthèse linéaire pour la synthèse d'une suspension CRONE réalisée par un arrangement parallèle de N cellules RC en série est alors immédiate.

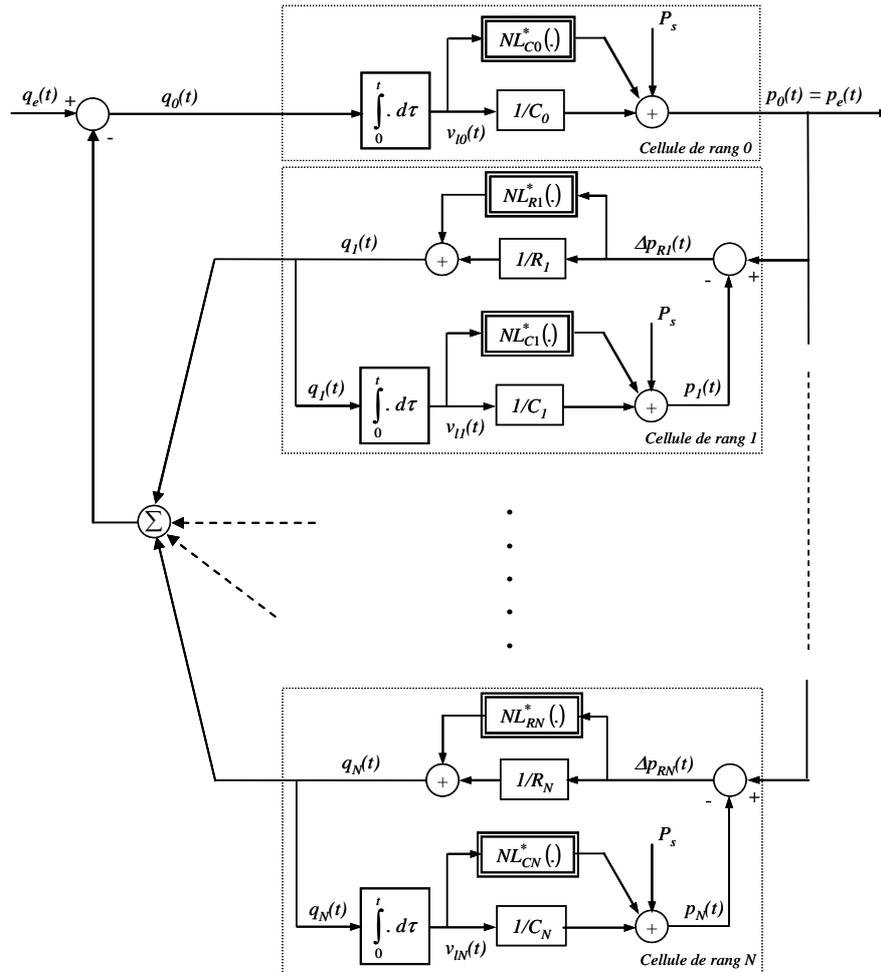


Figure 2.17 - Schéma fonctionnel non linéaire associé au réseau hydropneumatique de la suspension CRONE après décomposition en série de Taylor

2.3.2.3 - Influence de la variation de la masse suspendue sur la fonction de transfert de la suspension dans le cas général

Le paragraphe 2.3.1.6 a permis de montrer l'influence de la variation de la masse suspendue dans le cas de la suspension de référence, qui n'est qu'un cas particulier ($N=1$) d'un arrangement parallèle de cellules RC en série. Dans ce paragraphe, le résultat obtenu dans le cas $N=1$ est généralisé à N quelconque.

La méthode descendante du chapitre 1 permet d'établir les relations entre d'une part, les pôles et les zéros de la forme réelle $I_N(s)$ de l'intégrateur d'ordre non entier formé par la suspension (fonction de transfert débit-pression, ou impédance hydraulique, de la suspension) et, d'autre part, les paramètres physiques des composants de la suspension (capacités et résistances ou raideurs et coefficients de frottement visqueux). Cependant, dans le cas d'une réalisation en technologie hydropneumatique, les paramètres physiques varient en fonction de

la masse suspendue. L'objectif de ce paragraphe est donc d'analyser l'influence de la variation de masse suspendue sur le comportement de la suspension.

La pression statique P_s dont dépend chacune des capacités (relation (2.10)) s'exprime en fonction du poids Mg et de la section S_v du vérin, soit :

$$P_s = \frac{Mg}{S_v}. \quad (2.22)$$

En remplaçant dans la relation (2.10) la pression statique P_s par son expression (2.22), on constate que les capacités C_i dépendent notamment du carré de la masse suspendue M , soit :

$$C_i = \frac{S_v^2 P_{0i} V_{0i}}{\gamma (Mg)^2}. \quad (2.23)$$

Ainsi, les variations ou incertitudes de la masse suspendue M affectent, non seulement le procédé $G(s)$ (cf introduction du paragraphe 2.3), défini par la relation (2.55), mais aussi la forme réelle $I_N(s)$ du régulateur compte tenu des relations (1.39) entre les paramètres physiques et les paramètres de $I_N(s)$.

Ce résultat conduit à une problématique nouvelle en matière de commande dans la mesure où les incertitudes du régulateur sont usuellement toujours considérées comme négligeables devant celles du procédé. Cette problématique est renforcée, dans ce cas particulier lié à la technologie hydropneumatique, par le couplage entre les incertitudes du procédé et celles du régulateur.

Afin d'analyser l'influence des variations de la masse M sur les facteurs récursifs α et η , et donc sur le comportement non entier d'ordre m du réseau hydropneumatique de la suspension CRONE, l'état de charge minimal est considéré comme état de référence. Ainsi, à partir des relations (1.29), les notations suivantes sont introduites pour $M = M_{min}$:

$$\frac{\omega_{i+1_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \frac{\omega_{i+1_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \alpha\eta > 1, \quad (2.24)$$

$$\frac{\omega_{i+1_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \eta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i_{min}}}{\omega_{i_{min}}} = \alpha > 1 .$$

L'objectif est de vérifier si ces relations sont toujours vraies pour l'état de charge maximal $M = M_{max}$, soit :

$$\frac{\dot{\omega}_{i+1_{max}}}{\dot{\omega}_{i_{max}}} = \frac{\omega_{i+1_{max}}^{??}}{\omega_{i_{max}}} = \alpha\eta > 1, \quad (2.25)$$

$$\frac{\dot{\omega}_{i+1_{max}}}{\dot{\omega}_{i_{max}}} = \eta > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{i_{max}}^{??}}{\omega_{i_{max}}} = \alpha > 1 .$$

A partir de la relation (2.23) concernant la capacité C_i , il est facile de montrer que la variation relative de cette capacité est liée à deux fois celle de la masse M , soit :

$$\frac{\Delta C_i}{C_i} = -2 \frac{\Delta M}{M} . \quad (2.26)$$

Sachant par ailleurs (relation (1.45)) que

$$\dot{\omega}_i = \frac{1}{C_i R_i} , \quad (2.27)$$

on en déduit aisément (les résistances étant constantes) que

$$\frac{\Delta \dot{\omega}_i}{\dot{\omega}_i} = 2 \frac{\Delta M}{M} . \quad (2.28)$$

Le rapport de deux zéros consécutifs pour le chargement maximal peut alors s'exprimer en fonction de ces mêmes zéros obtenus pour le chargement minimal et de leur variation associée, soit :

$$\frac{\dot{\omega}_{i+1_{max}}}{\dot{\omega}_{i_{max}}} = \frac{\dot{\omega}_{i+1_{min}} + \Delta \dot{\omega}_{i+1}}{\dot{\omega}_{i_{min}} + \Delta \dot{\omega}_i} , \quad (2.29)$$

ou encore, après factorisation,

$$\frac{\dot{\omega}_{i+1_{max}}}{\dot{\omega}_{i_{max}}} = \frac{\dot{\omega}_{i+1_{min}}}{\dot{\omega}_{i_{min}}} \frac{1 + \frac{\Delta \dot{\omega}_{i+1}}{\dot{\omega}_{i+1_{min}}}}{1 + \frac{\Delta \dot{\omega}_i}{\dot{\omega}_{i_{min}}}} , \quad (2.30)$$

soit, en tenant compte de la relation (2.18),

$$\frac{\dot{\omega}_{i+1_{max}}}{\dot{\omega}_{i_{max}}} = \frac{\dot{\omega}_{i+1_{min}}}{\dot{\omega}_{i_{min}}} \frac{1 + 2 \frac{\Delta M}{M_{min}}}{1 + 2 \frac{\Delta M}{M_{min}}} , \quad (2.31)$$

d'où l'égalité, après simplification,

$$\frac{\omega'_{i+1\max}}{\omega'_{i\max}} = \frac{\omega'_{i+1\min}}{\omega'_{i\min}} . \quad (2.32)$$

Compte tenu de la relation (2.14), on peut donc affirmer que

$$\frac{\omega'_{i+1\max}}{\omega'_{i\max}} = \alpha \eta . \quad (2.33)$$

Par ailleurs, selon la relation (1.45) issue de l'identification terme à terme entre la décomposition en éléments simples de la forme réelle de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, d'une part, et l'impédance hydraulique du réseau de suspension, d'autre part, on peut écrire que

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega'_i}{\omega_i} \right) = C_0 D_0 , \quad (2.34)$$

ou encore, sachant que

$$C_0 = S_v^2 \frac{P_{00} V_{00}}{\gamma (M g)^2} \quad (2.35)$$

et que

$$\frac{1}{D_0} = \sum_{i=0}^N \frac{C_i}{S_v^2} = \sum_{i=0}^N \left(\frac{P_{0i} V_{0i}}{\gamma (M g)^2} \right) , \quad (2.36)$$

alors

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\omega'_i}{\omega_i} \right) = \frac{1}{S_v^2} + \frac{1}{S_v^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_{0i} V_{0i}}{P_{00} V_{00}} \right) = cste . \quad (2.37)$$

Cette dernière relation met en évidence que le produit des rapports d'un pôle et d'un zéro de même rang est constant et indépendant de la masse M . Ainsi, sachant que

$$\frac{\omega'_{i\min}}{\omega_{i\min}} = \alpha > 1 , \quad (2.38)$$

on peut donc affirmer que

$$\frac{\omega'_{i\max}}{\omega_{i\max}} = \alpha > 1 . \quad (2.39)$$

Finalement, sachant que la relation entre l'ordre de dérivation m et les paramètres récurrents α et η est donnée par [Oustaloup, 1995] :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)}, \quad (2.40)$$

on constate que l'ordre m est insensible aux variations de la masse M .

En résumé, les paramètres récurrents α et η sont indépendants des variations de la masse M . Ainsi le comportement asymptotique d'ordre non entier de $I_N(j\omega)$, caractérisé pour le diagramme de gain par une pente de $(m-1)20\text{dB/dec}$ et pour le diagramme de phase par un blocage à $(m-1)\pi/2$, n'est pas modifié ; seule la plage fréquentielle où ce comportement asymptotique existe est translatée vers les hautes fréquences quand la masse augmente (et réciproquement vers les basses fréquences quand elle diminue). De plus, il est démontré dans [Serrier, 2004] que la fréquence au gain unité en boucle ouverte reste très peu sensible aux variations de M . Ces deux résultats se traduisent alors au niveau de la dynamique en boucle fermée, non seulement par la robustesse du degré de stabilité (propriété intrinsèque de l'approche CRONE), mais aussi par la robustesse de la rapidité (propriété intrinsèque de la technologie hydropneumatique). Les résultats présentés au paragraphe suivant illustrent ces propriétés remarquables.

2.3.2.4 - Détermination des paramètres physiques de l'arrangement parallèle de cellules RC série

Ce paragraphe traite de la détermination, dans le cadre du support d'étude, des paramètres physiques (résistance et capacité) de l'arrangement parallèle de cellules RC en série. La première étape de cette détermination passe par la synthèse de la fonction de transfert désirée de la suspension constituée par l'arrangement hydropneumatique, c'est-à-dire le calcul des quatre paramètres de synthèse de haut niveau. A partir des résultats du paragraphe précédent, une méthode de synthèse originale est proposée. Une fois ces paramètres calculés, la démarche descendante conduit naturellement aux paramètres physiques des cellules hydropneumatiques.

2.3.2.4.1 - Données utilisées pour la synthèse de la suspension

Les données nécessaires à la synthèse de la suspension admettent le classement suivant.

a - Données spécifiant les performances du système

ω_u : fréquence au gain unité en boucle ouverte ; elle fixe la rapidité de la dynamique de la boucle fermée. Dans le cas particulier qui nous intéresse, $\omega_u = cste \forall M \in [M_{\min}; M_{\max}]$;

M_ϕ : marge de phase ;

Q : facteur de résonance en boucle fermée ;
 ξ : facteur d'amortissement en boucle fermée.

Chacune de ces trois dernières données détermine le degré de stabilité en boucle fermée et notamment l'amortissement ξ de la dynamique (étant donné le caractère biunivoque de ces données dans le contexte CRONE) ; c'est-à-dire que seule l'une d'elles est nécessaire à la synthèse de la suspension.

b - Données spécifiant les performances de robustesse du système

ω_A et ω_B : fréquences extrémales de la plage fréquentielle qu'occupe le gabarit ; en définissant la longueur du gabarit à travers son encombrement fréquentiel, elle détermine le degré de robustesse du système.

2.3.2.4.2 - Suspension CRONE idéale

La suspension CRONE idéale est caractérisée par une impédance hydraulique qui n'est autre que la fonction de transfert d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, soit :

$$I_e(s) = \frac{D_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad (2.41)$$

m , ω_b , ω_h et D_0 étant les paramètres de synthèse de haut niveau [Moreau, 2003].

a - Détermination de l'ordre m

La relation

$$m = 2 - n \quad (2.42),$$

traduit le fait que m s'exprime par la différence entre l'ordre 1 du comportement asymptotique du procédé et l'ordre non entier n associé au gabarit (n est la somme de l'ordre d'intégration du procédé, 1 ici, et de l'ordre non entier du régulateur, $1-m$). n se déduit des spécifications sur la marge de phase, le facteur de résonance ou le facteur d'amortissement. Son calcul s'effectue de la manière suivante :

- soit à partir de la marge de phase M_ϕ . La marge de phase est définie par :

$$M_\phi = \pi + \arg \beta(j\omega_u) = \pi - n \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (2 - n) = m \frac{\pi}{2}, \quad (2.43)$$

D'où l'on tire m :

$$m = \frac{2}{\pi} M_{\phi} ; \quad (2.44)$$

- soit à partir du facteur de résonance Q . On se fixe la valeur de Q et l'on considère la formule établie dans l'espace des fréquences [Oustaloup, 1991], soit :

$$Q = \frac{1}{\sin\left[(2-m)\frac{\pi}{2}\right]}, \quad (2.45)$$

de laquelle on en déduit m :

$$m = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{Q}\right); \quad (2.46)$$

- soit à partir du facteur d'amortissement ξ .

On s'impose la valeur de ξ , puis l'on considère la formule établie à la fois dans l'espace des temps et dans le domaine opérationnel [Oustaloup, 1991], soit :

$$\xi = -\cos\left(\frac{\pi}{2-m}\right), \quad (2.47)$$

d'où l'on tire m :

$$m = 2 - \frac{1}{\pi} \arccos(-\xi). \quad (2.48)$$

b - Détermination des fréquences transitionnelles ω_b et ω_h

Les conditions sur ω_b et ω_h , à savoir :

$$\omega_b \ll \omega_A \quad \text{et} \quad \omega_h \gg \omega_B, \quad (2.49)$$

permettent de déterminer ω_b et ω_h sans calcul. L'expérience conduit à choisir ω_b et ω_h tels que :

$$\omega_b = \frac{\omega_A}{15} \quad \text{et} \quad \omega_h = 15\omega_B. \quad (2.50)$$

c - Détermination du gain D_0

La fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u étant telle que

$$|\beta(j\omega_u)| = 1, \quad (2.51)$$

soit

$$|I_e(j\omega_u) G(j\omega_u)| = 1, \quad (2.52)$$

on en déduit D_0 :

$$D_0 = \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_b}\right)^2} \right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{\omega_u |G(j\omega_u)|}, \quad (2.53)$$

avec

$$|G(j\omega_u)| = \frac{1}{M\omega_u}. \quad (2.54)$$

2.3.2.4.3 - Support d'étude : synthèse du dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence

Le procédé est caractérisé par une fonction de transfert de la forme :

$$G(s) = \frac{1}{M s}, \quad (2.55)$$

avec $M \in [75 \text{ kg}; 150 \text{ kg}]$.

Le problème posé consiste à déterminer les caractéristiques du régulateur CRONE idéal (ou suspension CRONE idéale) qui assure au système :

- d'une part une marge de phase de 45° à une fréquence au gain unité de 6 rad/s ;
- d'autre part un gabarit excentré (géométriquement) par rapport à la fréquence ω_u .

a - Calcul de m

D'après la relation (2.44), l'ordre m est donné par

$$m = \frac{2}{180} \cdot 45 = 0.5. \quad (2.56)$$

b - Calcul de ω_b et ω_h

Compte tenu des spécificités liées à la technologie hydropneumatique, à savoir :

$$\omega_u = cste \quad \forall M \in [M_{\min}, M_{\max}] \quad \text{et} \quad \omega_A = f(M^2) \quad \text{et} \quad \omega_B = g(M^2), \quad (2.57)$$

spécificités qui se traduisent par une translation du gabarit sur l'axe fréquentiel quand la masse M varie, on choisit :

$$\omega_{B \min} = \omega_B (M = M_{\min}) = \omega_u \quad \text{et} \quad \omega_{A \max} = \omega_A (M = M_{\max}) = \omega_u, \quad (2.58)$$

d'où l'on tire

$$\omega_{A \min} = \omega_A (M = M_{\min}) = \left(\frac{M_{\min}}{M_{\max}} \right)^2 \omega_{B \min}. \quad (2.59)$$

La figure 2.18 résume cette configuration.

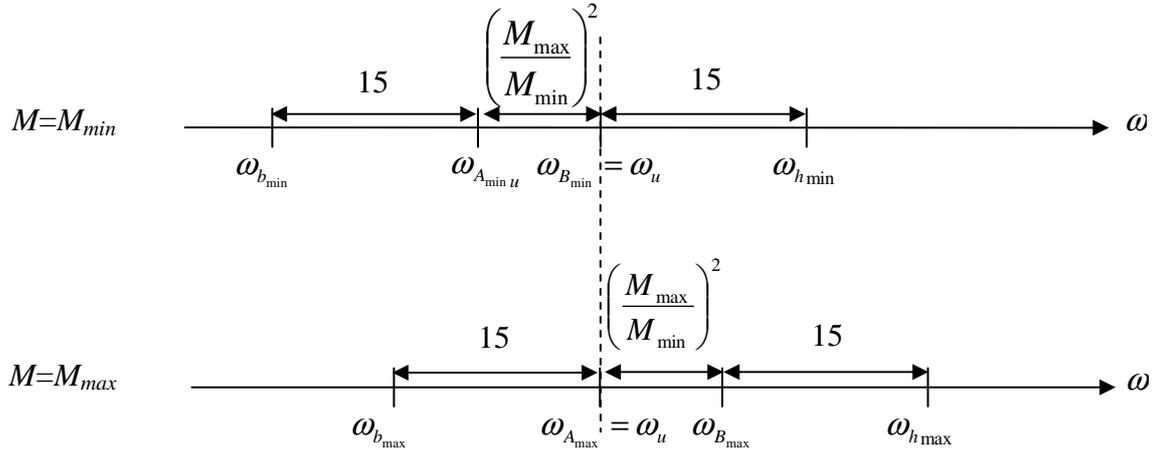


Figure 2.18 - Illustration de l'excentration du gabarit par rapport à ω_u

L'application numérique conduit à :

$$\omega_{B \min} = 6 \text{ rad/s}, \quad \omega_{A \min} = \left(\frac{75}{150} \right)^2 \cdot 6 = 1.5 \text{ rad/s}, \quad (2.60)$$

soit un gabarit s'étendant sur 2 octaves, d'où l'on tire

$$\omega_{b \min} = \frac{\omega_{A \min}}{15} = 0.1 \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \omega_{h \min} = 15 \omega_{B \min} = 90 \text{ rad/s}. \quad (2.61)$$

c - Calcul de $D_{0 \min}$

Compte tenu de la relation (2.67), $D_{0 \min}$ est fixé par

$$D_{0 \min} = D_0 (M = M_{\min}) = \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{h \min}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_{b \min}} \right)^2} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{M_{\min} \omega_u^2}, \quad (2.62)$$

soit, numériquement :

$$D_{0\min} = \left(\frac{1 + \left(\frac{6}{90}\right)^2}{1 + \left(\frac{6}{0.1}\right)^2} \right)^{\frac{0.5}{2}} \frac{1}{75.6^2} = 349 \text{ N s / m}^5. \quad (2.63)$$

2.3.2.4.4 - Suspension CRONE réelle

La suspension CRONE réelle doit présenter une réponse fréquentielle d'ordre entier, $I_e^N(j\omega)$, qui approxime au mieux la réponse fréquentielle d'ordre non entier m , $I_e(j\omega)$, de la suspension CRONE idéale, soit :

$$I_e^N(j\omega) = \frac{D_0}{s} \prod_{i=1}^N \left(\frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_{Zi}}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_{Pi}}} \right), \quad (2.64)$$

avec

$$\frac{\omega_{Zi+1}}{\omega_{Zi}} = \frac{\omega_{Pi+1}}{\omega_{Pi}} = \alpha \eta, \quad \frac{\omega_{Pi}}{\omega_{Zi}} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\omega_{Zi+1}}{\omega_{Pi}} = \eta, \quad (2.65)$$

où

$$\omega_{Z1} = \sqrt{\eta} \cdot \omega_b \quad \text{et} \quad \omega_{PN} = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \omega_h, \quad (2.66)$$

et

$$\alpha \eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \eta = (\alpha \eta)^{1-m} \quad \text{et} \quad \alpha = (\alpha \eta)^m. \quad (2.67)$$

L'application numérique des relations (1.79), conduit avec $N=5$ à

$$\alpha \eta = 3.9, \quad \alpha = 1.975 \quad \text{et} \quad \eta = 1.975; \quad (2.68)$$

- pour la masse $M_{\min}=75$ kg :

$$\begin{aligned} D_{0\min} &= 349 \text{ N / m}, \\ \omega_{Z1} &= 0.1405 \text{ rad / s}, & \omega_{P1} &= 0.2774 \text{ rad / s}, \\ \omega_{Z2} &= 0.5477 \text{ rad / s}, & \omega_{P2} &= 1.081 \text{ rad / s}, \\ \omega_{Z3} &= 2.1351 \text{ rad / s}, & \omega_{P3} &= 4.215 \text{ rad / s}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}\omega_{Z4} &= 0.323 \text{ rad/s}, & \omega_{P4} &= 16.432 \text{ rad/s}, \\ \omega_{Z5} &= 32.44 \text{ rad/s}, & \omega_{P4} &= 64.05 \text{ rad/s};\end{aligned}$$

- pour la masse $M_{max}=150$ kg :

$$\begin{aligned}D_{0max} &= 1396 \text{ N/m}, \\ \omega_{Z1} &= 0.562 \text{ rad/s}, & \omega_{P1} &= 1.11 \text{ rad/s}, \\ \omega_{Z2} &= 2.19 \text{ rad/s}, & \omega_{P2} &= 4.33 \text{ rad/s}, \\ \omega_{Z3} &= 8.54 \text{ rad/s}, & \omega_{P3} &= 16.9 \text{ rad/s}, \\ \omega_{Z4} &= 33.29 \text{ rad/s}, & \omega_{P4} &= 65.7 \text{ rad/s}, \\ \omega_{Z5} &= 129.77 \text{ rad/s}, & \omega_{P4} &= 256 \text{ rad/s}.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Ensuite, compte tenu des relations (1.45) issues de la décomposition en éléments simples, les paramètres physiques sont calculés, soit :

$$\begin{aligned}C_0 &= 9.419 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5 / \text{N}, \\ C_1 &= 1.706 \cdot 10^{-10} \text{ m}^5 / \text{N}, & R_1 &= 4.170 \cdot 10^{10} \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_2 &= 5.726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / \text{N}, & R_2 &= 3.189 \cdot 10^{10} \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_3 &= 2.678 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / \text{N}, & R_3 &= 1.749 \cdot 10^{10} \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_4 &= 1.289 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / \text{N}, & R_4 &= 9.322 \cdot 10^9 \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_5 &= 5.555 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5 / \text{N}, & R_5 &= 5.549 \cdot 10^9 \text{ Ns} / \text{m}^5.\end{aligned}\tag{2.71}$$

2.3.2.5 - Paramètres technologiques

Les paramètres technologiques permettant d'obtenir les paramètres physiques calculés ci-dessus sont les suivants :

- pour les accumulateurs (choix dans un catalogue fournisseur pour les volumes V_{0i}):

$$\begin{aligned}P_{00} &= 7 \text{ bar}, & V_{00} &= 75 \text{ cm}^3, \\ P_{01} &= 13 \text{ bar}, & V_{01} &= 750 \text{ cm}^3, \\ P_{02} &= 8 \text{ bar}, & V_{02} &= 400 \text{ cm}^3, \\ P_{03} &= 15 \text{ bar}, & V_{03} &= 100 \text{ cm}^3, \\ P_{04} &= 10 \text{ bar}, & V_{04} &= 75 \text{ cm}^3, \\ P_{05} &= 5 \text{ bar}, & V_{05} &= 75 \text{ cm}^3,\end{aligned}\tag{2.72}$$

- pour les résistances :

$$\begin{aligned}
 d_{R1} &= 3 \text{ mm}, & l_{R1} &= 23 \text{ mm}, \\
 d_{R2} &= 3 \text{ mm}, & l_{R2} &= 17.6 \text{ mm}, \\
 d_{R3} &= 3.5 \text{ mm}, & l_{R3} &= 17.87 \text{ mm}, \\
 d_{R4} &= 4 \text{ mm}, & l_{R4} &= 16.25 \text{ mm}, \\
 d_{R5} &= 4.5 \text{ mm}, & l_{R5} &= 15.5 \text{ mm}.
 \end{aligned}
 \tag{2.73}$$

2.3.2.6 - Réponses fréquentielles et temporelles

La figure 2.19 présente les réponses fréquentielles obtenues avec la suspension de référence ((a), (c) et (e)) et la suspension CRONE ((b), (d) et (f)) pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu $M = 75$ kg, en vert $M = 150$ kg).

La figure 2.20 présente les réponses indicielles obtenues avec la suspension de référence (a) et la suspension CRONE (b) pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu $M = 75$ kg, en vert $M = 150$ kg).

Ces figures montrent que, grâce à la combinaison de la méthodologie CRONE et de la technologie hydropneumatique, la robustesse du degré de stabilité est obtenue, mais également la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse.

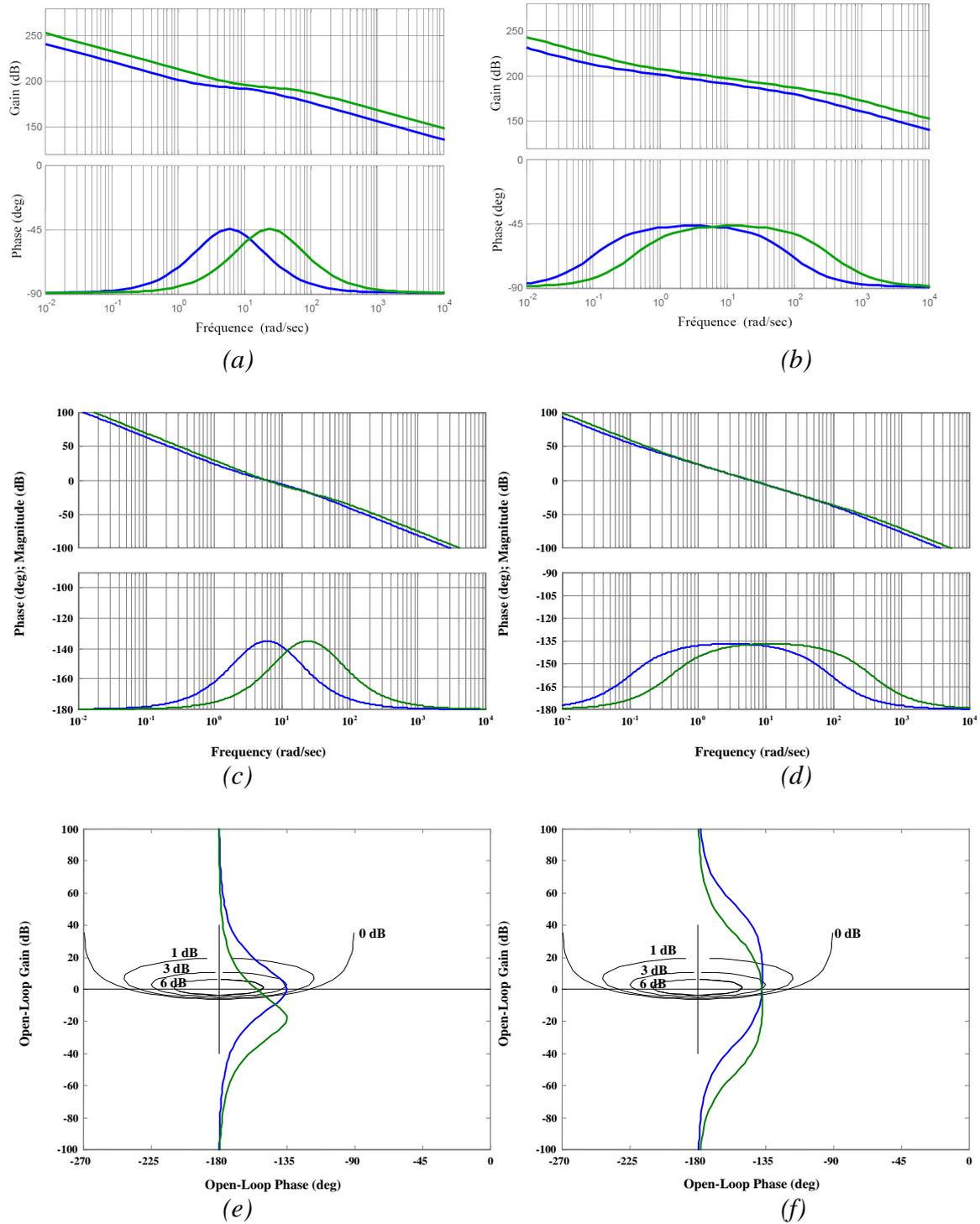


Figure 2.19 - Réponses fréquentielles obtenues avec la suspension traditionnelle ((a), (c) et (e)) et la suspension CRONE ((b), (d) et (f)) pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu $M = 75$ kg, en vert $M = 150$ kg)

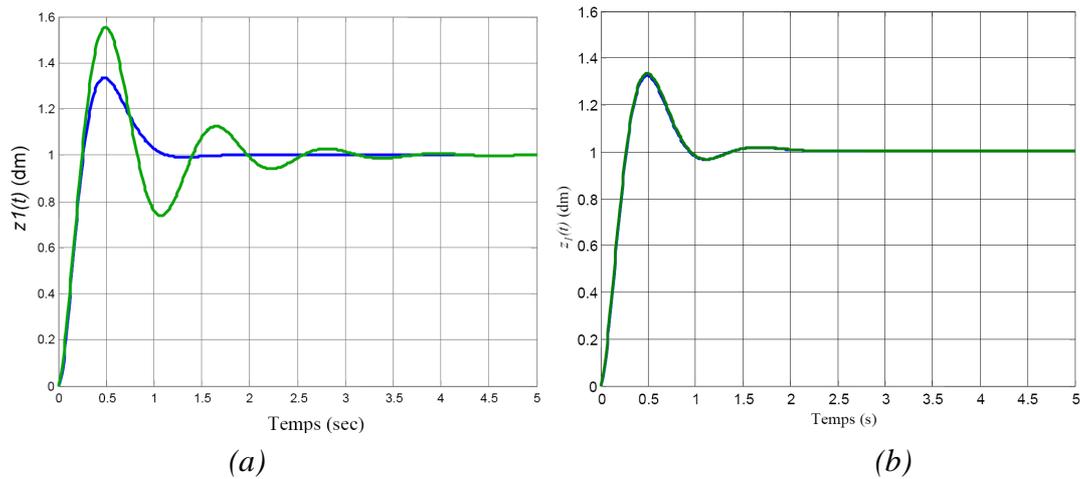


Figure 2.20 - Réponses indicielles de la masse suspendue obtenues avec la suspension traditionnelle (a) et la suspension CRONE (b) pour les deux valeurs extrêmes de la masse suspendue M (en bleu $M = 75$ kg, en vert $M = 150$ kg)

2.3.3 - Cas d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma

2.3.3.1 - Modélisation de la boucle interne

La modélisation de la boucle interne du support d'étude se fait de façon analogue, dans le cas d'un arrangement en cascade de cellules RC en gamma, à la modélisation dans le cas d'un arrangement parallèle de cellules RC série. La mise en équation conduit au schéma fonctionnel non linéaire de la figure 2.21.

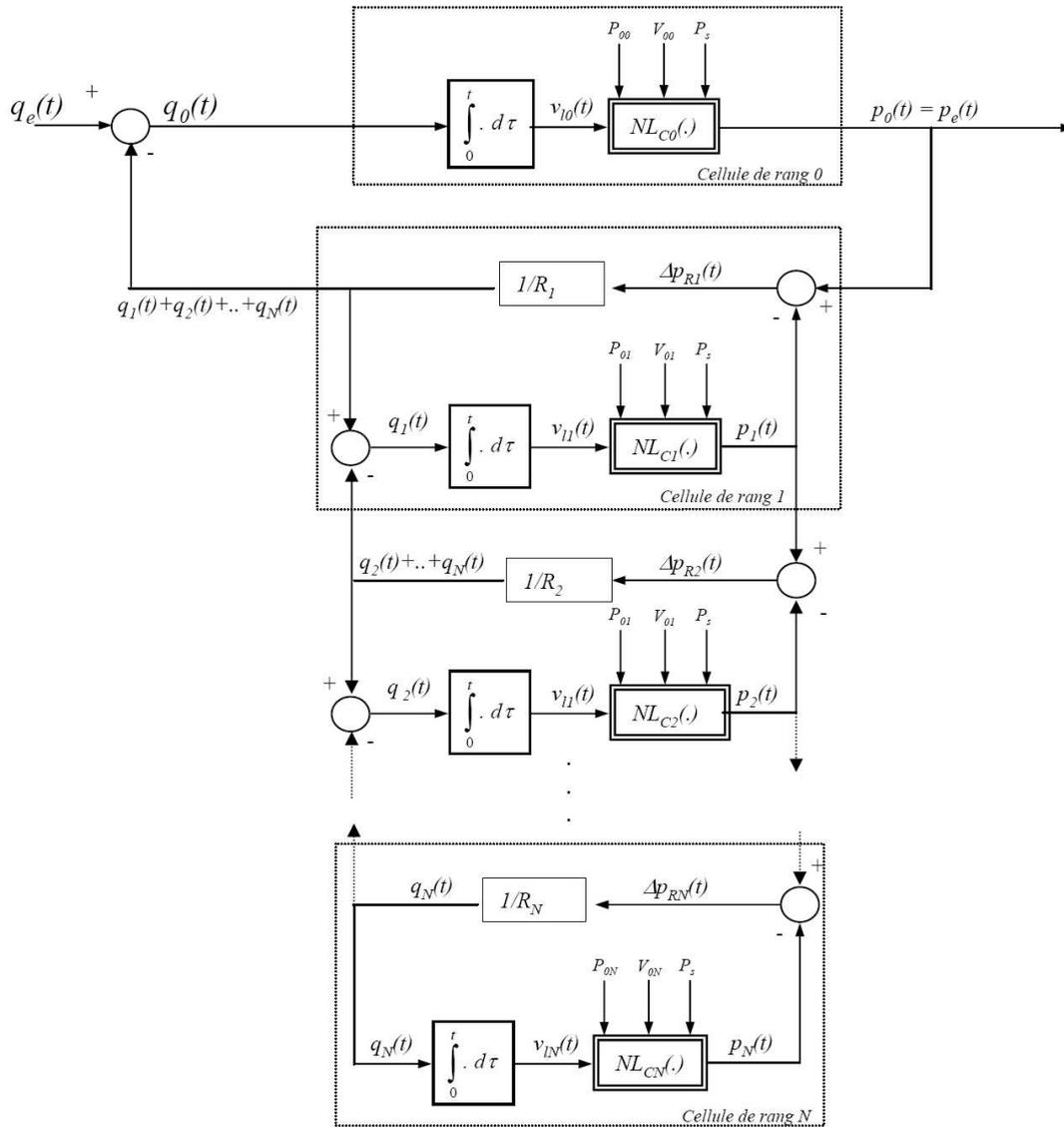


Figure 2.21 - Schéma fonctionnel non linéaire associé à l'arrangement parallèle de cellules RC en gamma réalisé en technologie hydropneumatique

2.3.3.2 - Linéarisation

De façon analogue à celle décrite dans le paragraphe 2.3.1.2, il est nécessaire en vue d'appliquer la méthode de synthèse développée au chapitre précédent, de linéariser le modèle de validation obtenu pour l'arrangement parallèle de cellules RC en série.

2.3.3.3 - Influence de la variation de la masse suspendue sur la fonction de transfert de la suspension

Il est montré dans le chapitre précédent que l'impédance d'entrée de l'arrangement parallèle de cellules RC en gamma est de la forme :

$$Z_e(s) = \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{C_{N-1} s + \frac{1}{R_N + \frac{1}{C_N s}}}}}}}} \quad (2.74)$$

Lorsque la masse suspendue varie, les résistances ne varient pas mais les capacités varient dans le rapport des masses au carré. Ainsi tous les termes en s de l'impédance d'entrée de l'arrangement varient dans le rapport des masses au carré. Cela se traduit, d'une part, par une invariance de la forme de cette impédance, et d'autre part, par une translation, vers les hautes fréquences lorsque la masse augmente, des diagrammes de Bode de la fonction de transfert.

La variation de la masse suspendue a donc le même effet sur le réseau hydropneumatique, que celui-ci soit constitué d'un arrangement parallèle de cellules RC série ou d'un arrangement parallèle de cellules RC en gamma [Serrier, 2004], [Serrier, 2005] (cf. figure 2.24).

2.3.3.4 - Détermination des paramètres physiques de l'arrangement parallèle de cellules RC en gamma

La démarche descendante présentée dans le chapitre précédent est de nouveau appliquée. Cela conduit aux paramètres physiques suivants :

$$\begin{aligned} C_0 &= 9.2796 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5 / N, \\ C_1 &= 2.3303 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N, \quad R_1 = 2.4798 \cdot 10^9 \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_2 &= 3.7995 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N, \quad R_2 = 3.7628 \cdot 10^9 \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_3 &= 6.4823 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N, \quad R_3 = 7.130 \cdot 10^9 \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_4 &= 8.8905 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N, \quad R_4 = 1.6715 \cdot 10^{10} \text{ Ns} / \text{m}^5, \\ C_5 &= 5.8203 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N, \quad R_5 = 6.8323 \cdot 10^{10} \text{ Ns} / \text{m}^5. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Les raideurs et coefficients de frottement visqueux équivalents sont alors

$$\begin{aligned}
 k_0 &= 10\,625 \text{ N/m}, \\
 k_1 &= 4\,231 \text{ N/m}, \quad b_1 = 244.5 \text{ Ns/m}, \\
 k_2 &= 2\,595 \text{ N/m}, \quad b_2 = 371 \text{ Ns/m}, \\
 k_3 &= 1\,521 \text{ N/m}, \quad b_3 = 703 \text{ Ns/m}, \\
 k_4 &= 1\,109 \text{ N/m}, \quad b_4 = 1\,648 \text{ Ns/m}, \\
 k_5 &= 1\,694 \text{ N/m}, \quad b_5 = 6\,737 \text{ Ns/m}.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

2.3.3.5 - Paramètres technologiques

Les paramètres technologiques permettant d'obtenir les paramètres physiques calculés ci-dessus sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= 7 \text{ bar}, \quad V_{00} = 75 \text{ cm}^3, \\
 P_{01} &= 18 \text{ bar}, \quad V_{01} = 75 \text{ cm}^3, \\
 P_{02} &= 5.5 \text{ bar}, \quad V_{02} = 400 \text{ cm}^3, \\
 P_{03} &= 9 \text{ bar}, \quad V_{03} = 400 \text{ cm}^3, \\
 P_{04} &= 13 \text{ bar}, \quad V_{04} = 400 \text{ cm}^3, \\
 P_{05} &= 8 \text{ bar}, \quad V_{05} = 400 \text{ cm}^3,
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

pour les accumulateurs hydrauliques et

$$\begin{aligned}
 d_{R1} &= 6 \text{ mm}, \quad l_{R1} = 21.88 \text{ mm}, \\
 d_{R2} &= 5.5 \text{ mm}, \quad l_{R2} = 23.44 \text{ mm}, \\
 d_{R3} &= 4.5 \text{ mm}, \quad l_{R3} = 19.90 \text{ mm}, \\
 d_{R4} &= 3.5 \text{ mm}, \quad l_{R4} = 17.08 \text{ mm}, \\
 d_{R5} &= 2.5 \text{ mm}, \quad l_{R5} = 18.18 \text{ mm}.
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

pour les résistances hydrauliques.

2.3.3.6 - Réponses fréquentielles et temporelles

Les réponses fréquentielles et temporelles obtenues avec un arrangement cascade de cellules RC en gamma sont strictement identiques à celles obtenues avec un arrangement parallèle de cellules RC en série. Cela s'explique par le fait que la fonction de transfert à partir de laquelle ont été déterminés les paramètres physiques est la même dans les deux cas.

2.3.4 - Conclusion sur la démarche descendante

Au travers de la synthèse et de la réalisation d'une suspension CRONE en technologie hydropneumatique pour un support particulier, les paragraphes précédents montrent l'intérêt de la méthode descendante et les propriétés remarquables qui découlent de l'utilisation de la technologie hydropneumatique. La démarche descendante développée au chapitre 1 permet de déterminer de nombreux paramètres technologiques à partir de seulement quatre paramètres

de synthèse de haut niveau obtenus par une méthode de synthèse propre à la technologie hydropneumatique.

2.4 - Définition d'une transformation mathématique traduisant l'influence de la variation de masse

Les paragraphes 2.3.2.3 et 2.3.3.3 montrent qu'une variation de la masse suspendue se traduit par une translation des diagrammes de gain de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension. Cette translation correspond à la transformation \mathcal{T} suivante :

$$\mathcal{T} : F(s) \rightarrow F(s^*) \quad (2.79)$$

avec $s^* = k s$, le facteur k étant fonction de la variation de la masse suspendue. Pour un passage d'une masse M_1 à une masse M_2 ,

$$k = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2. \quad (2.80)$$

Ainsi, si $I_e(s)$ est l'impédance d'entrée de la suspension pour la masse minimale, alors $I_e \left(s \left(\frac{M_{\min}}{M_{\max}} \right)^2 \right)$ est l'impédance d'entrée de la suspension pour la masse maximale.

La définition de cette transformation permet de déterminer l'influence de la variation de masse directement sur la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence sans avoir à passer par son approximation et les paramètres physiques des composants. La figure 2.22 représente la prise en compte de l'influence de la variation de masse par application directe de la transformation \mathcal{T} sur la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence.

La figure 2.23 illustre la prise en compte, grâce à la transformation \mathcal{T} définie précédemment, de la variation de la masse suspendue sur les réponses fréquentielles d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. Ainsi, I_{\max} représente la réponse fréquentielle de la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence pour la masse maximale déduite, grâce à la transformation \mathcal{T} , de la réponse I_{\min} de ce même intégrateur pour la masse minimale. ZN_{\min} et ZN_{\max} représentent les réponses fréquentielles de l'impédance d'entrée du réseau hydropneumatique de la suspension CRONE pour la masse minimale et la masse maximale. La parfaite superposition des réponses fréquentielles pour chacune des masses met en évidence l'intérêt d'une telle transformation. En effet, il est possible de prédire l'influence des variations de la masse suspendue sur le comportement fréquentielle de la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, caractérisé par quatre paramètres de synthèse de haut niveau, sans établir l'expression de l'impédance d'entrée du réseau hydropneumatique, caractérisée par $N+1$ capacités et N résistances.

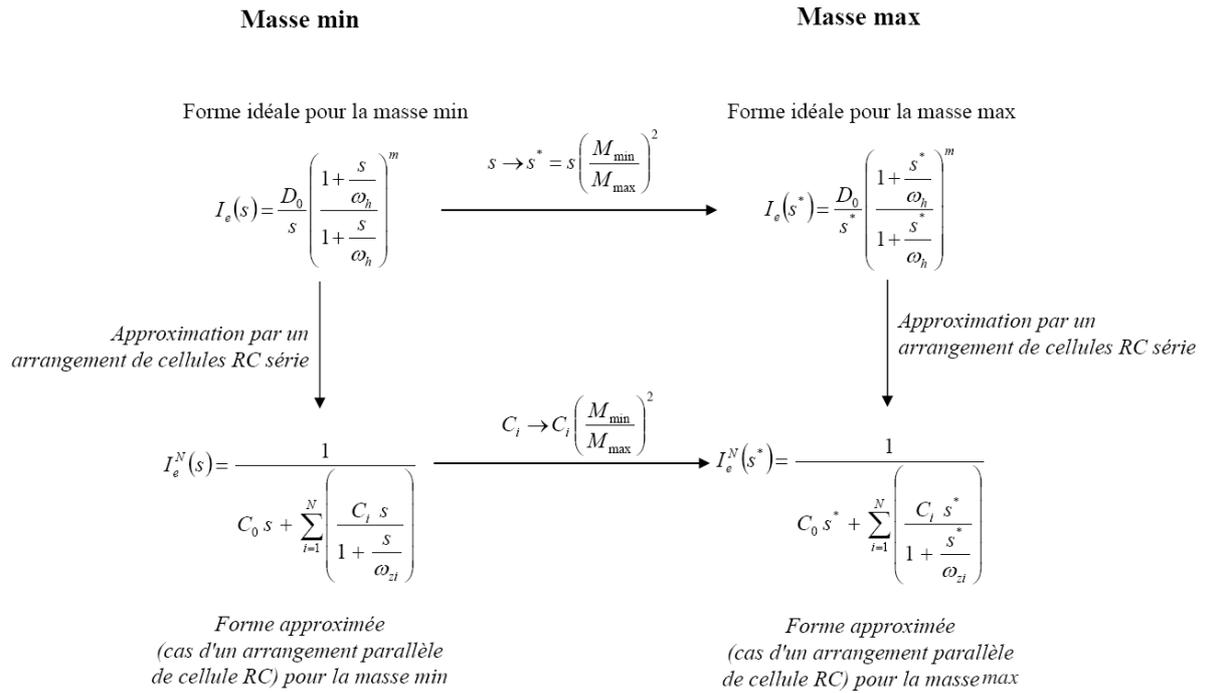


Figure 2.22 - Prise en compte de l'influence de la variation de masse par la définition d'une transformation équivalente

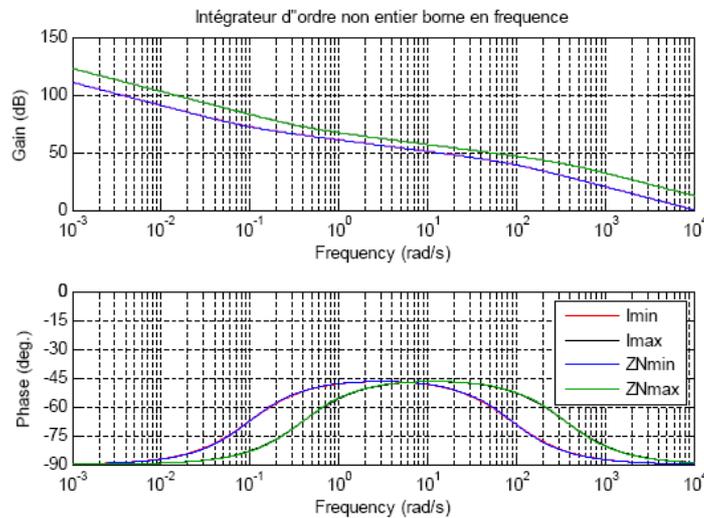


Figure 2.23 - Illustration de la prise en compte de l'influence de la variation de masse par la définition de la transformation \mathcal{T} : l_{\min} et l_{\max} représentent les réponses fréquentielles de la forme idéale l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence pour la masse minimale et la masse maximale ; ZN_{\min} et ZN_{\max} représentent les réponses fréquentielles de l'impédance d'entrée du réseau hydro-pneumatique de la suspension CRONE pour la masse minimale et la masse maximale

2.5 - Application de la démarche ascendante dans le cadre du support d'étude

Dans le cadre de ce chapitre, la démarche *ascendante* présentée au paragraphe précédent est appliquée au cas du support d'étude.

Dans un souci de cohérence, afin de pouvoir comparer les performances obtenues avec celles obtenues précédemment par la démarche *descendante*, un arrangement en cascade de 6 cellules RC en gamma (dont 1 purement capacitive, $N=5$) est choisi.

2.5.1 - Calcul des paramètres physiques

Les cellules RC étant toutes identiques, les seuls paramètres à déterminer sont :

- la capacité de la cellule C_0 ;
- la capacité C et la résistance R des cellules RC.

Cela revient à déterminer le rapport a entre la capacité C_0 et les capacités C ainsi que les capacités C et les résistances.

Au total, il y a donc uniquement trois paramètres à déterminer.

2.5.1.1 - Calcul du paramètre a

Le rapport a dépend uniquement du nombre de cellules. Dans le chapitre précédent, il est montré que pour $N=4$, le paramètre a optimal est de 6,017.

Dans le cas de l'exemple traité ici, $N=5$. En appliquant la méthode détaillée au paragraphe 1.5.1 du chapitre 1, on obtient :

$$I_5^e(j\Omega) = D_0 \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^5 b_i (j\Omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^5 a_i (j\Omega)^i} \right), \quad (2.81)$$

où
$$D_0 = \frac{1}{C_0 + 5C} \quad (2.82)$$

et

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{15+20a}{1+5a} \\
a_2 &= \frac{35+21a}{1+5a} & b_1 &= 15 \\
a_3 &= \frac{28+8a}{1+5a} & b_2 &= 35 \\
a_4 &= \frac{9+a}{1+5a} & b_3 &= 28 \\
a_5 &= \frac{1}{1+5a} & b_4 &= 9 \\
& & b_5 &= 1
\end{aligned} \quad (2.83)$$

La valeur optimale de a est alors déterminée en calculant la dérivée partielle de

$$\varphi(\Omega, a) = \operatorname{arctg}\left(\frac{15\Omega - 28\Omega^3 + \Omega^5}{1 - 35\Omega^2 + 9\Omega^4}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\left(\frac{15+20a}{1+5a}\right)\Omega - \left(\frac{28+8a}{1+5a}\right)\Omega^3 + \left(\frac{1}{1+5a}\right)\Omega^5}{1 - \left(\frac{35+21a}{1+5a}\right)\Omega^2 + \left(\frac{9+a}{1+5a}\right)\Omega^4}\right). \quad (2.84)$$

On obtient alors $a=5,29$.

2.5.1.2 - Calcul des paramètres R et C

1^{ère} condition : positionnement fréquentiel du blocage de phase

Le produit RC agit sur le positionnement fréquentiel du blocage de phase. Numériquement, on constate que pour $N=5$, le blocage de phase (considéré ici comme la zone où la phase varie de moins de 5%) s'étend entre $\omega_A^a = 0,18\omega_c$ et $\omega_B^a = 2,17\omega_c$ où l'exposant a est relatif à la démarche ascendante et où $\omega_c = 1/RC$. Le blocage de phase est donc centré sur la pulsation $0,625\Omega_c$, c'est-à-dire $\frac{0,625}{RC}$.

Afin de conserver la robustesse de la rapidité obtenue dans le cadre de la démarche descendante, il convient de choisir $\omega_B^a = \omega_u$, soit

$$\omega_c = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_u}{2,17}, \quad (2.85)$$

ce qui conduit, avec les spécifications précédentes, à un produit RC égale à 0.36.

2^{ème} condition : fréquence au gain unité

La fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u est telle que

$$|\beta(j\omega_u)| = 1, \quad (2.86)$$

soit

$$|I_5^e(j\omega_u) G(j\omega_u)| = 1, \quad (2.87)$$

où

$$\frac{1}{C \left(5 + \frac{1}{a}\right)} \left| \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^N b_i (jRC\omega_u)^i}{1 + \sum_{i=1}^N a_i (jRC\omega_u)^i} \right) \right| |G(j\omega_u)| = 1, \quad (2.88)$$

avec

$$|G(j\omega_u)| = \frac{1}{M\omega_u}. \quad (2.89)$$

Cette équation s'exprime enfin sous la forme :

$$\frac{1}{C} \frac{\sqrt{\left(1 - b_2 R^2 C^2 \omega_u^2 + b_4 R^4 C^4 \omega_u^4\right)^2 + \left(b_1 RC \omega_u + b_3 R^3 C^3 \omega_u^3 + b_5 R^5 C^5 \omega_u^5\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - a_2 R^2 C^2 \omega_u^2 + a_4 R^4 C^4 \omega_u^4\right)^2 + \left(a_1 RC \omega_u + a_3 R^3 C^3 \omega_u^3 + a_5 R^5 C^5 \omega_u^5\right)^2}} = \left(5 + \frac{1}{a}\right) M \omega_u, \quad (2.90)$$

où le produit RC est connu (relation (2.85)). La seule inconnue est alors C .

Le calcul conduit à une capacité $C = 2.1064 \cdot 10^{-11} \text{ m}^5 / N$, soit une raideur équivalente de 4681 N/m, et à une résistance hydraulique $R = 4.9233 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^5$, soit un coefficient de frottement visqueux équivalent de 485 N/ms.

La capacité de la cellule C_0 est alors $C_0 = 3.985 \cdot 10^{-12} \text{ m}^5 / N$.

2.5.1.3 - Calculs des paramètres technologiques

Les paramètres technologiques permettant d'atteindre les valeurs précédentes sont, pour les sphères :

$$\begin{aligned} P_{01} &= 11,7 \text{ bar}, & V_{01} &= 320 \text{ cm}^3 \\ P_{00} &= 9,4 \text{ bar}, & V_{00} &= 75 \text{ cm}^3 \end{aligned} \quad (2.91)$$

2.5.1.4 - Réponses temporelles et fréquentielles

Les diagrammes de Bode de la fonction de transfert de cette suspension obtenue par la démarche ascendante, pour la masse minimale et la masse maximale sont présentées figure 2.24.

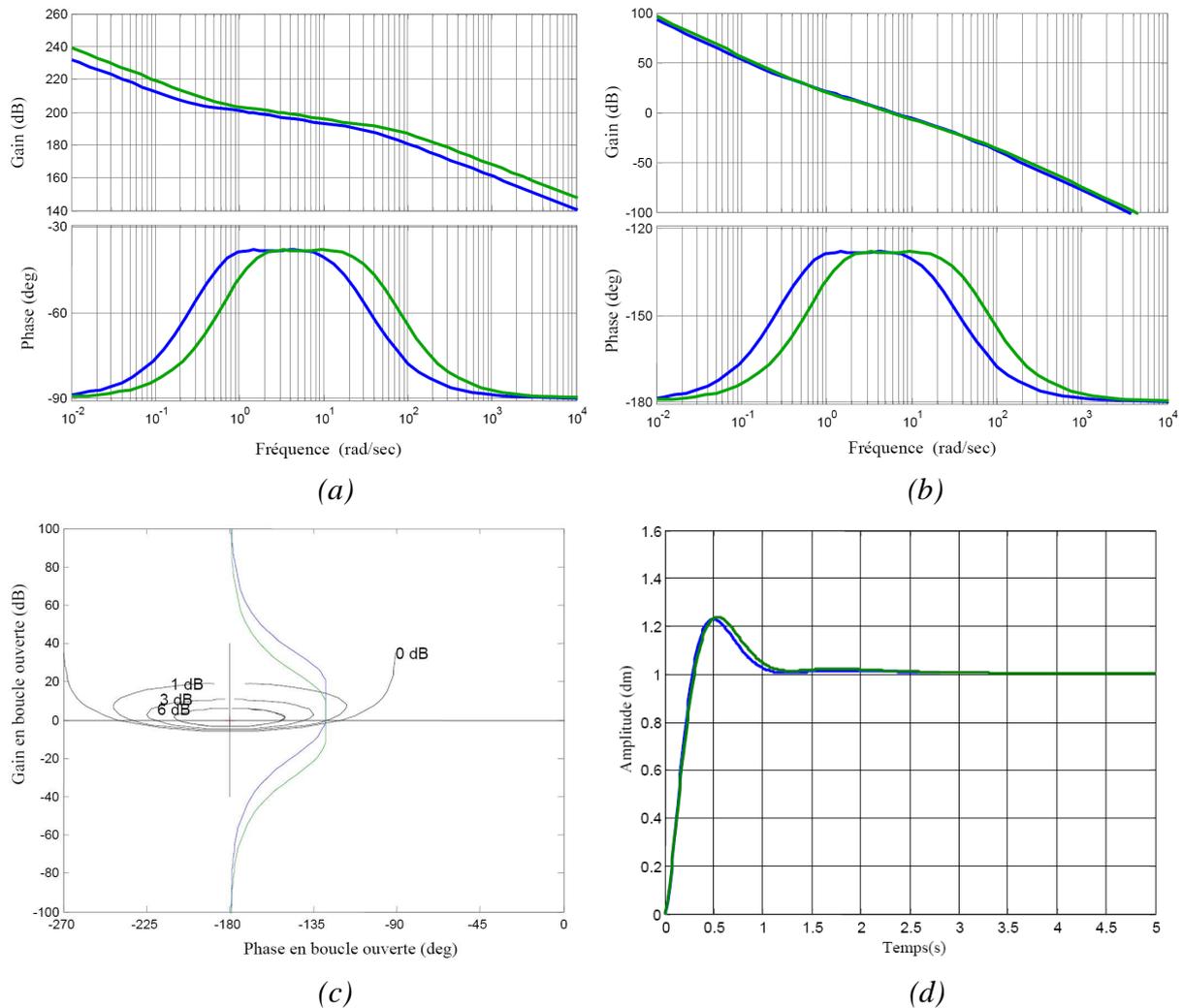


Figure 2.24 - Réponses fréquentielles et temporelles obtenues dans le cadre de la démarche ascendante : diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique de la suspension (a), diagrammes de Bode de la boucle ouverte (b), Lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte (c) et réponses indicielles de la masse suspendue (d)

Ces courbes montrent bien l'intérêt de la démarche descendante : à partir d'un nombre réduit de cellules identiques, les résultats présentés sont tout à fait encourageants. Cette démarche présente cependant deux limites : le manque de degré de liberté dans le choix de l'ordre de dérivation et la longueur fréquentielle moindre du blocage de phase. En effet, à partir du même nombre de cellules, le blocage de phase est moins étendu avec l'architecture en gamma comportant des cellules identiques qu'avec les architectures comportant des cellules différentes.

2.6 - Conclusion

Dans ce chapitre 2, les méthodes proposées au chapitre 1 ont été appliquées à travers la conception d'une suspension CRONE en technologie hydropneumatique. La robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue présentée au chapitre 1 est confirmée. Elle est complétée par la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, conséquence d'une des spécificités de cette technologie.

Les deux démarches et les trois architectures proposées au chapitre 1 sont ici mises en œuvre et comparées. L'avantage économique de la démarche ascendante est à nuancer par les limites de cette méthode. Il n'en demeure pas moins qu'elle peut s'avérer très intéressante pour des applications particulières où le facteur économique est primordial.

La définition d'une transformation équivalente permettant de prendre en compte à un haut niveau l'influence des variations de la masse suspendue sur la forme idéale de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence constitue un résultat important. En effet, une telle transformation évite ainsi de devoir descendre au niveau de la réalisation technologique, et ce quel que soit le réseau hydropneumatique retenu.

Chapitre 3

Analyse de l'influence des non-linéarités d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique

3.1 - Introduction

Dans le chapitre 2, la synthèse d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique est présentée. Cette synthèse est effectuée sous l'hypothèse de petites variations autour des positions d'équilibre. Les performances présentées dans ce même chapitre 2 sont également obtenues, en simulation, sous cette hypothèse. Cependant, en raison du caractère non linéaire de la compression et de la détente d'un gaz, les accumulateurs hydropneumatiques possèdent des caractéristiques non-linéaires. C'est parfois également le cas des résistances hydrauliques notamment dans un contexte de suspension de véhicule automobile.

L'objectif de ce chapitre 3 est la prise en compte des non-linéarités dans l'approche CRONE.

Après la mise en évidence de l'influence des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques sur le comportement dynamique du support d'étude présenté au chapitre 2, une synthèse bibliographique concernant la mise en œuvre de la décomposition en série de Volterra est proposée. Cette synthèse bibliographique est ponctuée d'exemples d'illustration afin de faciliter la compréhension des concepts décrits.

Dans un second temps, les séries de Volterra sont utilisées pour caractériser l'influence des non-linéarités de la suspension CRONE. Le principal résultat est que la robustesse de la rapidité et la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue ne sont pas affectées par les non-linéarités des accumulateurs.

3.2 - Mise en évidence de l'influence des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques sur les performances temporelles du support d'étude

Cette partie complète les résultats présentés dans le chapitre précédent. Les paramètres technologiques obtenus dans le cadre des paragraphes 2.3.2.5 et 2.3.3.5 sont utilisés. Seules les non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques sont prises en compte. Les résistances hydrauliques sont supposées présenter des caractéristiques linéaires.

3.2.1 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement parallèle de cellules RC série

La figure 2.1 présente les réponses indicielles du support d'étude décrit au chapitre 2 dans le cas où l'intégrateur d'ordre non entier est réalisé par un arrangement parallèle de cellules RC en série sans et avec prise en compte des non-linéarités des sphères. Les paramètres technologiques utilisés pour la simulation sont ceux de la relation (2.72).

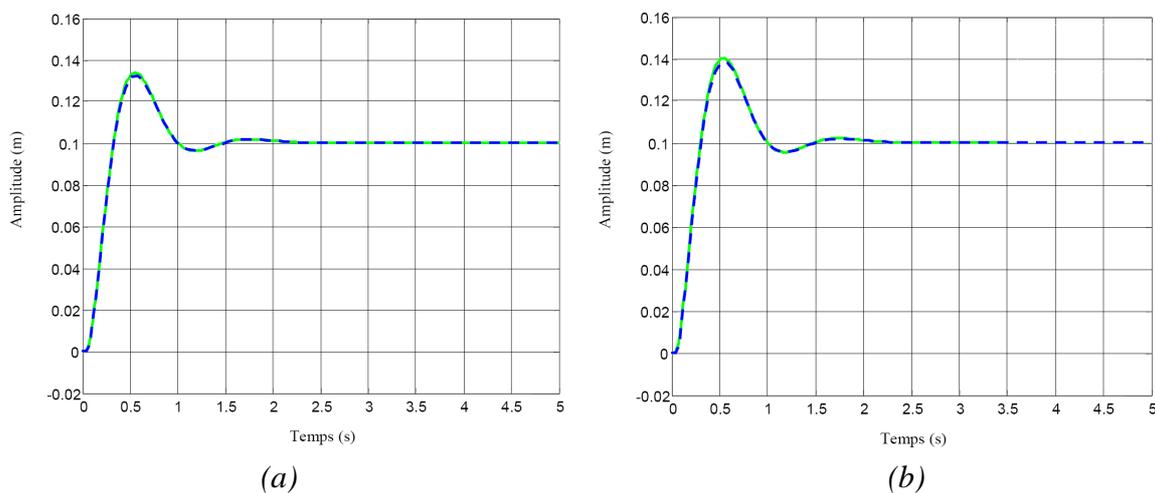


Figure 3.1 - Réponses indicielles du support d'étude sans (a) et avec (b) prise en compte des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques et dans le cas d'une réalisation par un arrangement parallèle de cellules RC en série (en vert : masse minimale, en bleu pointillé : masse maximale)

A la lecture de ces courbes, il apparaît que les non-linéarités n'ont aucune influence sur la robustesse (du degré de stabilité et de la rapidité). La seule modification notable du comportement est une augmentation du premier dépassement de l'ordre de 25 %.

3.2.2 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement en cascade de cellules RC en gamma

Les réponses obtenues avec une suspension CRONE réalisée par un arrangement cascade de cellules RC en gamma sont identiques aux réponses présentées figure 3.1. Cela

signifie que l'influence des non-linéarités est indépendante du type de réalisation choisi : arrangement cascade de cellules en gamma ou arrangement parallèle de cellules RC série ([Serrier, 2006], [Serrier, 2006e]).

3.2.3 - Cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma

A partir des paramètres physiques et technologiques calculés dans le chapitre précédent, à savoir

- pour la capacité C_0 :

$$P_{00} = 9,4 \text{ bar}, \quad V_{00} = 75 \text{ cm}^3, \quad (3.1)$$

- pour les autres capacités C_i :

$$P_{0i} = 11,7 \text{ bar}, \quad V_{0i} = 320 \text{ cm}^3, \quad (3.2)$$

il est possible de simuler les réponses indicielles de la position verticale de la masse suspendue pour les valeurs extrémales de celle-ci en tenant compte, ou non, des non-linéarités des accumulateurs.

La figure 3.2 présente la comparaison entre les modèles linéaire (en rouge) et non linéaire (en bleu) pour la masse suspendue minimale (a) et maximale (b).

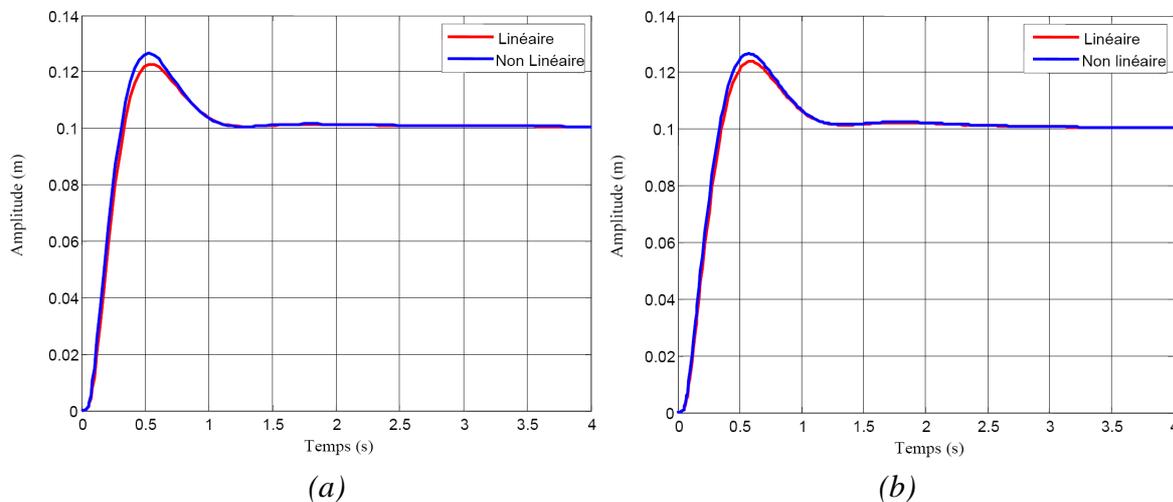


Figure 3.2 - Réponses indicielles du support d'étude dans le cadre de la démarche ascendante : comparaison entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire pour la masse minimale (a) et pour la masse maximale (b)

La figure 3.3 présente la comparaison entre les deux modèles pour les masses extrémales.

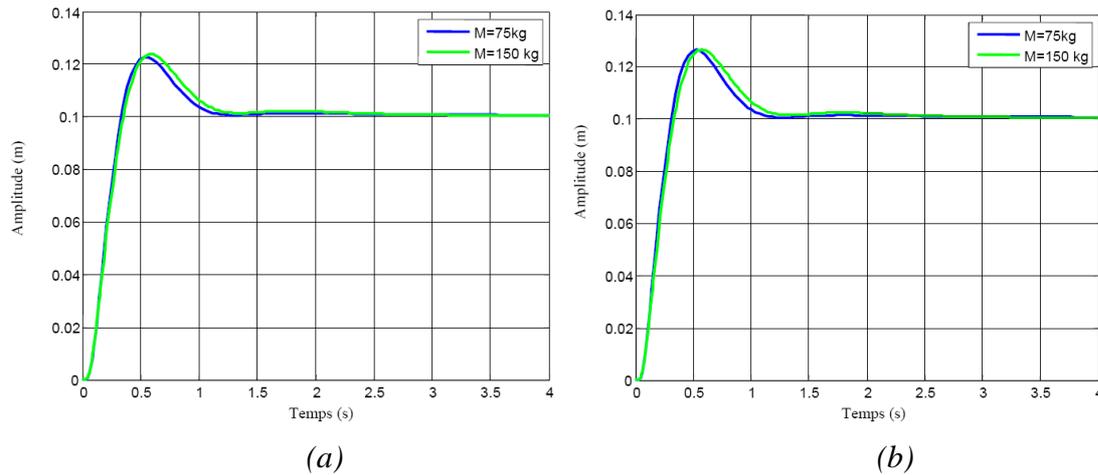


Figure 3.3 - Réponses indicielles du support d'étude dans le cadre de la démarche ascendante : réponses des modèles linéaire (a) et non linéaire (b) pour les masses extrêmes

Les résultats de simulation présentés figures 3.2 et 3.3 montrent, une nouvelle fois, que les non-linéarités n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité et agissent principalement sur l'amplitude du premier dépassement.

3.3 - La décomposition en série de Volterra : un outil d'analyse des non-linéarités

Afin d'analyser l'influence des non-linéarités sur le comportement du système, une méthode basée sur la décomposition en série de Volterra est proposée dans ce chapitre.

3.3.1 - Définition

Les séries de Volterra sont un outil mathématique permettant de décrire le comportement d'un système non linéaire. Elles ont été introduites par Volterra au cours des années 30 [Volterra, 1959]. Elles ont ensuite été utilisées par Wiener [Wiener, 1958] et Barret [Barret, 1963] pour l'étude et l'analyse des systèmes non linéaires. Worden *et al* [Worden, 1998] présentent les séries de Volterra comme une généralisation du produit de convolution, bien connu pour les systèmes linéaires,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ désignent, respectivement, l'entrée et la sortie du système. Le système linéaire est caractérisé de façon unique par sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

La généralisation de la relation (3.3) a été proposée par Volterra en 1959 ([Volterra, 1959]) et prend la forme d'une série infinie :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots, \quad (3.4)$$

où

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^k u(t - \tau_i) d\tau_i, \quad (3.5)$$

soit par exemple, pour le noyau d'ordre 3,

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) u(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \quad (3.6)$$

Ainsi, la réponse temporelle $y(t)$ d'un système non linéaire peut s'exprimer en fonction de son entrée $u(t)$ sous la forme

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (3.7)$$

Une définition rigoureuse est proposée dans [Lamnabhi-Lagarrigue, 1994]. Pour cela, on considère que le système non linéaire dont on cherche une représentation entrée-sortie est un système non linéaire analytique de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) u(t) \\ y(t) = l(t, x(t)) \end{cases}, \quad (3.8)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ et $x(0) = x_0$.

On considère par ailleurs que les fonctions $f(t, x(t))$, $g(t, x(t))$ et $l(t, x(t))$ sont analytiques et que $f(t, x) = [f^1(t, x), \dots, f^n(t, x)]$ et $g(t, x) = [g^1(t, x), \dots, g^n(t, x)]$.

Définition 1

Un système admet une représentation sous forme de séries de Volterra, s'il existe des fonctions

$$w_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*,$$

localement bornées, continues par morceaux, telles que quelque soit $T > 0$, il existe $\varepsilon(T) > 0$ tel que pour toute fonction continue par morceau $u(\cdot)$ vérifiant $|u(t)| \leq \varepsilon$ sur $[0, T]$, la série

$$y(t) = w_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) u(\sigma_1) \dots u(\sigma_k) d\sigma_1 \dots d\sigma_k \quad (3.9)$$

converge absolument et uniformément sur $[0, T]$.

La fonction $w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k)$ est alors appelée noyau de Volterra d'ordre k .

La relation (3.9) peut encore être simplifiée si le système (3.8) présente des propriétés particulières. En effet si :

- les conditions initiales du système sont nulles (ce qui peut toujours être obtenu par simple changement de variable sans modifier le caractère analytique du système), la fonction $w_0(t)$ est nulle ;

- chacune des fonctionnelles qui composent la série est réalisable, alors $w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = 0 \quad \forall \sigma_i > t, i \in [1, k]$;

- le système est stationnaire, les différentes fonctionnelles qui composent la série de Volterra le sont aussi et le noyau d'ordre k peut encore s'écrire sous la forme $w_k(t, \sigma_1, \dots, \sigma_k) = h_n(t - \sigma_1, \dots, t - \sigma_k) = h_n(\tau_1, \dots, \tau_k)$.

Ainsi, dans le cas d'un système stationnaire, causal ($u(t) = 0, \forall t < t_0$), réalisable et pour des conditions initiales nulles, la relation (3.9) devient

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(t - \tau_i) d\tau_i. \quad (3.10)$$

Les fonctions $h_k(t_1, \dots, t_k)$ correspondent, par analogie au cas linéaire à une généralisation de la notion de réponse impulsionnelle. Le premier terme de la série correspond en effet à un produit de convolution, la fonction $h_1(t)$ peut donc être interprétée comme la réponse impulsionnelle de la partie linéaire du système. Les autres termes de la relation (4.11) sont une généralisation du produit de convolution et les fonctions $h_k(t_1, \dots, t_k)$ sont désignées réponses impulsionnelles d'ordre k (réponses des parties quadratiques, cubiques, ...).

Il est possible de montrer que les noyaux de Volterra sont multilinéaires et symétriques [Rugh, 1981] c'est-à-dire

$$h_k(\alpha e_1, \dots, \alpha e_k) = \alpha^k h_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \quad (3.11)$$

et

$$h_k(e_1, \dots, e_k) = h_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}), \quad (3.12)$$

où $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ sont les permutations de $\{1, 2, \dots, k\}$.

Un système non linéaire peut alors être représenté comme un ensemble de “boîtes noires” mises en parallèle, chacune étant responsable d'un ordre de non-linéarité. La réponse correspondant aux différents ordres de non-linéarités peut ainsi être détaillée individuellement.

Remarque sur la stabilité

La stabilité stricte d'un système linéaire nécessite que l'intégrale du module de la réponse impulsionnelle de celui-ci soit finie et que sa fonction de transfert ne comporte de pôles ni dans le demi-plan complexe à partie réelle positive, ni sur l'axe imaginaire. Les

noyaux temporels et fréquentiels d'un système non linéaire décrit par une série de Volterra devront vérifier ces deux propriétés. Ils représentent une généralisation des fonctions de transfert d'ordre 1 aux ordres plus élevés.

3.3.2 - Approche fréquentielle

Les formules de transformation de Laplace et de Fourier monovariabiles peuvent être généralisées aux fonctions multivariabiles [Lubbock, 1969]. Comme dans le cas linéaire, il est donc possible de donner une représentation des réponses impulsionnelles d'ordre k (noyaux de Volterra d'ordre k) dans le domaine opérationnel et également de définir leur transformée de Fourier généralisée.

Définition 2

La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle d'ordre k (noyaux de Volterra d'ordre k) est définie par [Crum, 1974] :

$$H_k(s_1, \dots, s_k) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) e^{-s_1\tau_1 - \dots - s_k\tau_k} d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (3.13)$$

avec $s_i = \rho_i + j\delta_i$, et où

$$h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \frac{1}{(2\pi j)^k} \int_{\rho_1 - j\infty}^{\rho_1 + j\infty} \dots \int_{\rho_k - j\infty}^{\rho_k + j\infty} H_k(s_1, \dots, s_k) e^{s_1\tau_1 + \dots + s_k\tau_k} ds_1 \dots ds_k. \quad (3.14)$$

Définition 3

La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'ordre k (noyaux de Volterra d'ordre k) est définie par :

$$H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) e^{-j\omega_1\tau_1 - \dots - j\omega_k\tau_k} d\tau_1 \dots d\tau_k, \quad (3.15)$$

avec

$$h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_k(j\omega_1, \dots, j\omega_k) e^{j\omega_1\tau_1 + \dots + j\omega_k\tau_k} d\omega_1 \dots d\omega_k. \quad (3.16)$$

Comme dans le cas linéaire, la transformée de Laplace multivariable s'avère être un outil particulièrement pratique pour l'étude de systèmes non linéaires.

Théorème 1 - Théorème de convolution

La transformée de Laplace de l'intégrale de convolution :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) g_k(t_1 - \tau_1, \dots, t_k - \tau_k) d\tau_1 \cdots d\tau_k, \quad (3.17)$$

est égale au produit :

$$P = H_k(s_1, \dots, s_n) G_k(s_1, \dots, s_n). \quad (3.18)$$

La transformée de Laplace multivariable permet également d'étendre le théorème de la valeur initiale et le théorème de la valeur finale aux systèmes non linéaires.

La fonction $H_1(s_1)$ est une fonction de transfert classique qui correspond à la partie linéaire du système. C'est également la fonction de transfert du système linéarisé. Elle peut être représentée aisément sous forme de diagrammes de Bode.

La fonction $H_2(s_1, s_2)$ peut également être représentée dans le plan de Bode. Cependant ses diagrammes de gain et de phase sont alors des surfaces. Pour les ordres plus élevés, la représentation graphique perd de son intérêt.

La transformée de Laplace $Y(s)$ d'un système non linéaire soumis à une entrée $U(p)$ s'exprime

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s_1, s_2) + Y_3(s_1, s_2, s_3) + \dots \quad (3.19)$$

où les composantes Y_i de la réponse dans le domaine opérationnel sont de la forme

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s) U(s) \\ Y_2(s_1, s_2) &= H_2(s_1, s_2) U(s_1) U(s_2) \\ Y_3(s_1, s_2, s_3) &= H_3(s_1, s_2, s_3) U(s_1) U(s_2) U(s_3) \\ &\vdots \\ Y_n(s_1, s_2, \dots, s_n) &= H_n(s_1, s_2, \dots, s_n) U(s_1) U(s_2) \dots U(s_n), \end{aligned} \quad (3.20)$$

où $H_i(s_1, \dots, s_i)$ est la transformée de Laplace du noyau de Volterra d'ordre i et où $U(s)$ est la transformée de Laplace de l'entrée.

Il est possible de représenter la décomposition d'un système non linéaire par une mise en cascade des différents noyaux fréquentiels, le noyau d'ordre 1 représentant la partie linéaire et les noyaux d'ordre 2 à n représentant les non-linéarités du système, comme illustré à la figure 3.4.

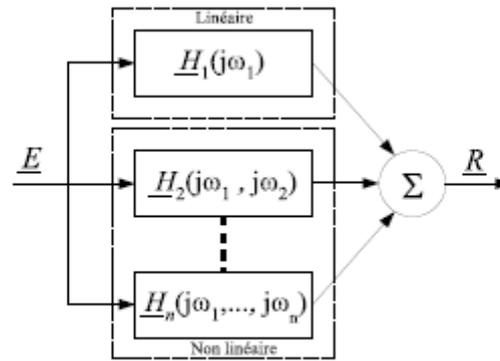


Figure 3.4 - Système non linéaire décomposé à partir de noyaux de Volterra

3.3.3 - Détermination des noyaux de Volterra d'un système non linéaire

La difficulté principale liée à l'utilisation des séries de Volterra est la détermination des noyaux. Ceux-ci peuvent être déterminés soit analytiquement, soit expérimentalement par identification, soit directement dans l'espace temporel, soit à partir de leur expression dans l'espace opérationnel.

3.3.3.1 - Détermination analytique des noyaux de Volterra dans le domaine temporel

La première solution pour déterminer les noyaux de Volterra d'un système consiste à décomposer en série de Taylor les caractéristiques des parties non linéaires d'un système, puis, par des manipulations analytiques, à faire apparaître des produits de convolution dans la relation entrée-sortie du système. Les expressions des noyaux de Volterra sont obtenues par identifications termes à termes.

Cette méthode est peu utilisée car elle nécessite une bonne connaissance du système et une articulation relativement simple entre les différents sous-systèmes. Pour cette raison, cette méthode n'est indiquée ici que pour mémoire. Le lecteur intéressé pourra en trouver une illustration dans [Bard, 2005].

3.3.3.2 - Détermination analytique des noyaux de Volterra dans le domaine fréquentiel

3.3.3.2.1 - « harmonic probing method » ou « growing exponential method »

Une méthode classique de détermination des noyaux, dite " harmonic probing method " peut être utilisée [Rugh, 1981]. Elle consiste à considérer en entrée du système une entrée particulière $u(t)$ de type somme d'exponentielles complexes:

$$u(t) = \sum_{r=1}^{n_r} e^{j\omega_r t} . \quad (3.21)$$

Dans ce cas, si le système est décomposable en série de Volterra, la réponse temporelle $y(t)$ du système s'exprime, d'après la relations (3.10),

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r(t-\tau_i)} \right) d\tau_i. \quad (3.22)$$

Cela peut également s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t), \quad (3.23)$$

où

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r=1}^{n_t} e^{j\omega_r(t-\tau_i)} \right) d\tau_i. \quad (3.24)$$

Il est donc possible d'exprimer les réponses impulsionnelles $y_k(t)$ de chaque noyau d'ordre k en fonction de la transformée de Laplace du noyau d'ordre k (donnée par la relation 4.14). Cette expression devient d'ailleurs simple lorsque $n_t = k$. En effet, pour le noyau d'ordre 1, d'après la relation (3.13) :

$$H_1(s_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) e^{-s_1 \tau_1} d\tau_1, \quad (3.25)$$

or, si $n_t = 1$, la relation (3.24) devient pour $k = 1$:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) e^{j\omega_1(t-\tau)} d\tau = H_1(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}, \quad (3.26)$$

ce qui conduit de façon évidente à :

$$y_1(t) = H_1(j\omega_1) e^{j\omega_1 t}. \quad (3.27)$$

De même pour le noyau d'ordre 2, si $n_t=2$, c'est-à-dire si :

$$u(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t}, \quad (3.28)$$

alors, la formule (3.24) donne

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \left(e^{j\omega_1(t-\tau_1)} + e^{j\omega_2(t-\tau_1)} \right) \left(e^{j\omega_1(t-\tau_2)} + e^{j\omega_2(t-\tau_2)} \right) d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.29)$$

ce qui se développe en :

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) \left(e^{j\omega_1(t-\tau_1)+j\omega_1(t-\tau_2)} + e^{j\omega_1(t-\tau_1)+j\omega_2(t-\tau_2)} \right. \\ \left. + e^{j\omega_2(t-\tau_1)+j\omega_1(t-\tau_2)} + e^{j\omega_2(t-\tau_1)+j\omega_2(t-\tau_2)} \right) d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.30)$$

En remarquant que, d'après la relation (3.13) :

$$H_2(s_1, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.31)$$

$$H_2(s_1, s_1) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.32)$$

et

$$H_2(s_2, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_2\tau_1 - s_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.33)$$

la relation (3.30) peut s'exprimer sous la forme :

$$y_2(t) = H_2(j\omega_1, j\omega_1) e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_1 t} + 2H_2(j\omega_1, j\omega_2) e^{j\omega_1 t} e^{j\omega_2 t} + H_2(j\omega_2, j\omega_2) e^{j\omega_2 t} e^{j\omega_2 t}. \quad (3.34)$$

Ces résultats, démontrés pour les ordres $k=1$ et $k=2$, sont généralisables à toutes les réponses impulsionnelles des noyaux d'ordre $k>0$:

$$y_k(t) = \sum_{\substack{\text{Toutes les combinaisons} \\ \text{des } R \text{ fréquences prises} \\ \text{par groupe de } k}} \sum_{\substack{\text{Toutes les permutations} \\ \text{de } \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_k}}} H_k(j\omega_{r_1}, \dots, j\omega_{r_k}) \prod_{i=1}^k e^{j\omega_{r_i} t}. \quad (3.35)$$

Lorsque $n_i=k$, ce résultat se simplifie :

$$y_k(t) = \sum_{\substack{\text{Toutes les permutations} \\ \text{de } \omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_k}}} H_k(j\omega_{r_1}, \dots, j\omega_{r_k}) \prod_{i=1}^k e^{j\omega_{r_i} t}. \quad (3.36)$$

Ainsi, lorsque l'entrée $u(t)$ du système non linéaire peut s'exprimer comme une somme d'exponentielles complexes, la réponse temporelle $y(t)$ peut s'exprimer en fonction des transformées de Laplace des noyaux de Volterra du système.

Afin de déterminer ces noyaux, il suffit alors de remplacer la sortie et l'entrée du système par leurs expressions dans l'équation différentielle régissant le comportement du système et d'identifier terme à terme les composants de l'équation.

Cette méthode de détermination est assez efficace mais nécessite que les phénomènes non linéaires puissent être correctement approximés par des polynômes.

Illustration 1

A titre d'exemple d'illustration, considérons le support d'étude présenté au chapitre précédent. Le réseau hydropneumatique le plus simple qui peut être utilisé avec ce support est constitué d'une cellule RC avec une résistance hydraulique possédant une caractéristique linéaire. Ce réseau est représenté figure 3.5.

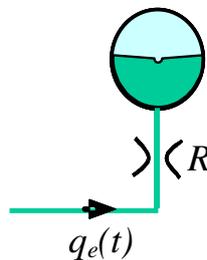


Figure 3.5 - Réseau hydropneumatique de base pour l'exemple d'illustration 1

Soit R la résistance hydraulique de cette cellule de base et P_0 et V_0 les pressions de gonflage et le volume de la sphère hydropneumatique. Les équations (2.1) à (2.4) régissant le

comportement du support d'étude restent valables. Le débit entrant dans le réseau et la pression dans le vérin de suspension sont liés par la relation :

$$P_e(t) = R q_e(t) + \frac{P_s}{\left(1 - \frac{P_s}{P_0 V_0} \int_0^t q_e(\tau) d\tau\right)^\gamma}, \quad (3.37)$$

le paramètre thermodynamique γ pouvant être assimilé à 1.

Le schéma fonctionnel associé à la boucle interne du support d'étude peut alors se mettre sous la forme présentée figure 3.6.

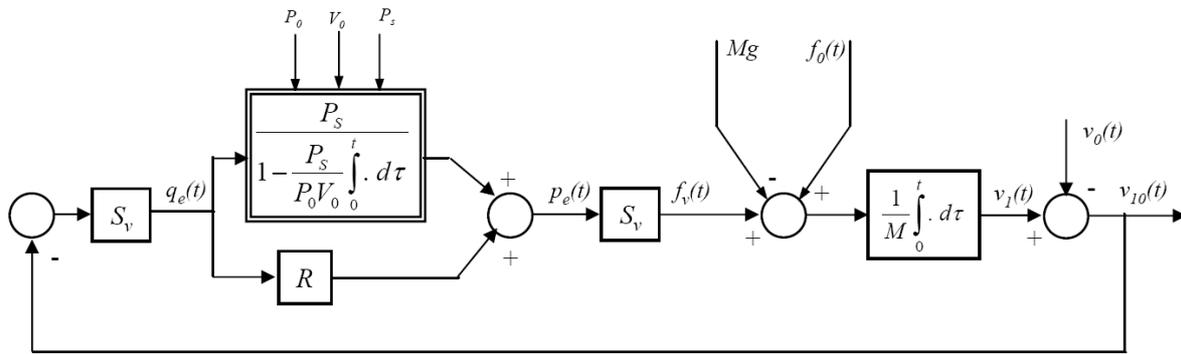


Figure 3.6 - Schéma fonctionnel du support d'étude avec réseau de base

Afin de déterminer les noyaux de Volterra de la suspension hydropneumatique, il est nécessaire de décomposer en série de Taylor la caractéristique pression-débit de l'accumulateur hydraulique, soit

$$p_a(t) = P_s + \frac{P_s^2}{P_0 V_0} \int_0^t q_e(\tau) d\tau + \frac{P_s^3}{(P_0 V_0)^2} \left(\int_0^t q_e(\tau) d\tau \right)^2 + \frac{P_s^4}{(P_0 V_0)^3} \left(\int_0^t q_e(\tau) d\tau \right)^3 + \dots, \quad (3.38)$$

avec $p_a(t)$ la pression dans l'accumulateur, ce qui conduit à un polynôme du type :

$$p_a(t) \approx P_s + c_{s1} \int_0^t q_e(\tau) d\tau + c_{s2} \left(\int_0^t q_e(\tau) d\tau \right)^2 + c_{s3} \left(\int_0^t q_e(\tau) d\tau \right)^3. \quad (3.39)$$

Une simulation permet de montrer qu'une troncature à l'ordre 3 de la décomposition en série de Taylor est tout à fait satisfaisante.

Pour appliquer la méthode décrite ci-dessus, supposons que le débit d'entrée dans la cellule $q_e(t)$ est de la forme :

$$q_e(t) = \sum_{r=1}^{n_i} e^{j\omega_r t}. \quad (3.40)$$

Pour déterminer le noyau d'ordre 1, posons :

$$q_e(t) = e^{j\omega t}. \quad (3.41)$$

Dans ce cas, la pression dans l'accumulateur s'exprime, selon l'équation (3.27) ;

$$p_a(t) = H_1^a(j\omega_1)e^{j\omega_1 t}, \quad (3.42)$$

où le noyau de Volterra d'ordre i de l'accumulateur est noté H_i^a . Or, la pression dans l'accumulateur vérifie la relation 3.39, d'où

$$H_1^a(j\omega_1)e^{j\omega_1 t} = P_s + c_{s1} \frac{e^{j\omega_1 t}}{j\omega_1 t} + c_{s2} \frac{e^{2j\omega_1 t}}{(j\omega_1 t)^2} + c_{s3} \frac{e^{3j\omega_1 t}}{(j\omega_1 t)^3}. \quad (3.43)$$

Par identification des termes en $e^{j\omega_1 t}$, on en déduit

$$H_1^a(j\omega_1) = \frac{c_{s1}}{j\omega_1}. \quad (3.44)$$

Pour déterminer le noyau d'ordre 2, on considère

$$q_e(t) = e^{j\omega_1 t} + e^{j\omega_2 t} \quad (3.45)$$

Dans ce cas, la pression dans l'accumulateur s'exprime, selon l'équation (3.34) ;

$$p_a(t) = H_1^a(j\omega_1)e^{j\omega_1 t} + H_1^a(j\omega_2)e^{j\omega_2 t} + H_2^a(j\omega_1, j\omega_1)e^{2j\omega_1 t} + H_2^a(j\omega_2, j\omega_2)e^{2j\omega_2 t} + 2H_2^a(j\omega_1, j\omega_2)e^{j(\omega_1+\omega_2)t}. \quad (3.46)$$

En remplaçant ces expressions de q_e et p_a dans l'équation (3.38) puis par identification, on obtient :

$$H_2^a(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{c_{s2}}{j\omega_1 j\omega_2}. \quad (3.47)$$

Le noyau d'ordre 3, obtenu par la même méthode, est donnée par

$$H_3^a(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) = \frac{c_{s3}}{j\omega_1 j\omega_2 j\omega_3}. \quad (3.48)$$

Les noyaux d'ordre supérieur sont nuls.

La figure 3.7 présente la réalisation d'un modèle d'accumulateur hydraulique par décomposition en série de Volterra.

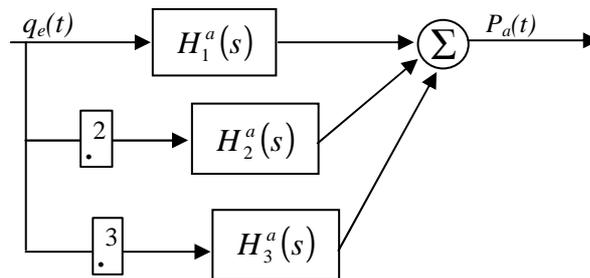


Figure 3.7 - Réalisation d'un modèle d'accumulateur hydraulique par décomposition en série de Volterra

Illustration 2 : détermination des noyaux de Volterra du support d'étude complet

Pour déterminer les noyaux de Volterra du système constitué par le support d'étude complet, la première solution consiste à écrire l'équation différentielle régissant le comportement du support d'étude. Dans le cas simple étudié ici où la suspension est

constituée d'une seule cellule RC, l'équation différentielle liant la vitesse $v_0(t)$ du support et la vitesse $v_1(t)$ de la masse suspendue est

$$v_1(t) = \frac{1}{M} \int_0^t \left[-Mg + S_v \left[R S_v (v_0(\tau) - v_1(\tau)) + P_s + \sum_{i=1}^3 c_{s_i} S_v^i \left(\int_0^\theta v_0(\theta) - v_1(\theta) d\theta \right)^i \right] \right] d\tau. \quad (3.49)$$

En remplaçant dans cette expression, l'entrée par une somme d'exponentielles complexes et la sortie par sa décomposition de Volterra, on obtient (cette procédure est informatisable avec un logiciel de calcul formel) :

$$H_1^{se}(s) = \frac{S_v^2 (R s_1 + c_{s1})}{M s_1^2 + S_v^2 R s_1 + S_v^2 c_{s1}} \quad (3.50)$$

et

$$H_2^{se}(s_1, s_2) = \frac{S_v^3 c_{s2} (1 - H_1^{se}(s_1) - H_1^{se}(s_2) + H_1^{se}(s_1) H_1^{se}(s_2)) (s_1 + s_2)}{(s_1 s_2) (M (s_1 + s_2)^2 + S_v^2 R (s_1 + s_2) + S_v^2 c_{s1})}, \quad (3.51)$$

soit,

$$H_2^{se}(s_1, s_2) = \frac{S_v^3 c_{s2} s_2 s_1 (s_1 + s_2) M^2}{(M (s_1 + s_2)^2 + S_v^2 R (s_1 + s_2) + S_v^2 c_{s1}) (M s_1^2 + S_v^2 R s_1 + S_v^2 c_{s1}) (M s_2^2 + S_v^2 R s_2 + S_v^2 c_{s1})} \quad (3.52)$$

ou, en fonction du noyau d'ordre 1

$$H_2^{se}(s_1, s_2) = M^2 S_v^3 c_{s2} \frac{H_1^{se}(s_1) s_1 H_1^{se}(s_2) s_2 H_1^{se}(s_1 + s_2) (s_1 + s_2)}{(R s_1 + c_{s1}) (R s_2 + c_{s1}) R (s_1 + s_2) + c_{s1}}, \quad (3.53)$$

où les noyaux de Volterra d'ordre i du support d'étude complet sont notés $H_i^{se}(s)$.

Les limites de cette méthode apparaissent rapidement : l'expression du noyau d'ordre 3 est très compliquée et il est très difficile d'obtenir les noyaux d'ordre supérieurs à 3 en raison d'un temps de calcul important.

3.3.3.2.2 - Algèbre de George

Une autre méthode permettant de déterminer les noyaux de Volterra d'un système consiste à utiliser l'algèbre de George [George, 1959]. Cet algèbre permet de déterminer les noyaux de Volterra d'un système non linéaire constitué de sous-systèmes qui admettent eux même une représentation par une série de Volterra. Seules les grandes propriétés et les principes généraux seront présentés ici. Dans le cadre d'une définition de cette algèbre, la notation opérationnelle $\underline{\mathbf{H}}[.]$ sera substituée à la fonctionnelle donnée par la relation (4.40), soit :

$$y(t) = \underline{\mathbf{H}}[u(t)], \quad (3.54)$$

ou bien, sous forme implicite (vis-à-vis de la variable temporelle) :

$$\mathbf{y} = \underline{\mathbf{H}}[\mathbf{u}]. \quad (3.55)$$

La relation (3.41) étant une somme de fonctionnelles, il est également possible d'utiliser la notation :

$$y = \underline{\mathbf{H}}[u] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \underline{\mathbf{H}}_k [u], \tag{3.56}$$

où $y = \underline{\mathbf{H}}_k [u]$ désigne la fonctionnelle :

$$y_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \prod_{i=1}^k u(\sigma_i) d\sigma_i. \tag{3.57}$$

Cette algèbre est munie de 3 opérations :

- l'addition notée '+' (voir figure (3.8.a)) ;
- la multiplication notée '•' (voir figure (3.8.b)) ;
- la mise en cascade notée '*' (voir figure (3.8.c)).

Il possède également un élément neutre, noté $\underline{\mathbf{I}}$, et un élément nul, noté $\underline{\mathbf{0}}$, qui vérifient les relations :

$$\underline{\mathbf{I}} * \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} * \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{H}} \tag{3.58}$$

et

$$\underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{H}}. \tag{3.59}$$

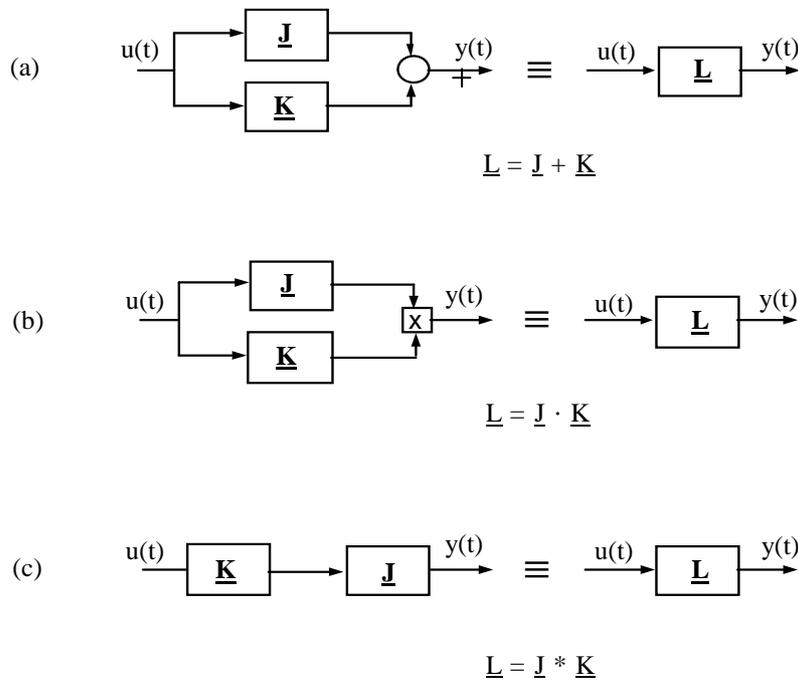


Figure 3.8 - Opérations élémentaires de l'algèbre de George

Dix règles opératoires sont associées à cette algèbre.

Règle 1 : Commutativité par rapport à la loi +

$$\underline{J} + \underline{K} = \underline{K} + \underline{J} \quad (3.60)$$

Règle 2 : Associativité par rapport à la loi +

$$\underline{J} + (\underline{K} + \underline{L}) = (\underline{J} + \underline{K}) + \underline{L} \quad (3.61)$$

Règle 3 : Commutativité par rapport à la loi •

$$\underline{J} \bullet \underline{K} = \underline{K} \bullet \underline{J} \quad (3.62)$$

Règle 4 : Associativité par rapport à la loi •

$$\underline{J} \bullet (\underline{K} \bullet \underline{L}) = (\underline{J} \bullet \underline{K}) \bullet \underline{L} \quad (3.63)$$

Règle 5 : Associativité par rapport à la loi *

$$\underline{J} * (\underline{K} * \underline{L}) = (\underline{J} * \underline{K}) * \underline{L} \quad (3.64)$$

Règle 6 : Distributivité à droite de la loi + par rapport à la loi *

$$(\underline{J} + \underline{K}) * \underline{L} = (\underline{J} * \underline{L}) + (\underline{K} * \underline{L}) \quad (3.65)$$

Règle 7 : Distributivité à droite de la loi • par rapport à la loi *

$$(\underline{J} \bullet \underline{K}) * \underline{L} = (\underline{J} * \underline{L}) \bullet (\underline{K} * \underline{L}) \quad (3.66)$$

Règle 8 : Non commutativité de la loi *

$$\underline{J} * \underline{K} \neq \underline{K} * \underline{J} \quad (3.67)$$

Règle 9 : Non distributivité des lois + et • par rapport à la loi *

$$\underline{L} * (\underline{J} + \underline{K}) \neq (\underline{L} * \underline{J}) + (\underline{L} * \underline{K}) \quad (3.68)$$

$$\underline{L} * (\underline{J} \bullet \underline{K}) \neq (\underline{L} * \underline{J}) \bullet (\underline{L} * \underline{K}) \quad (3.69)$$

Règle 10 : Loi de composition o

On introduit la loi de composition o définie de la façon suivante :

$$\underline{A}_s * (\underline{B}_n + \underline{C}_m + \dots + \underline{P}_p) = \underline{A}_s \circ (\underline{B}_n + \underline{C}_m + \dots + \underline{P}_p)^s, \quad (3.70)$$

une telle loi étant distributive par rapport à la loi +.

Concernant l'ordre du système résultant de l'addition, de la multiplication ou de la mise en cascade de deux systèmes, il est défini de la façon suivante :

- le système $\underline{L} = \underline{A}_n + \underline{B}_m$ est d'ordre $\max(n, m)$;
- le système $\underline{L} = \underline{A}_n \bullet \underline{B}_m$ est d'ordre $m + n$;
- le système $\underline{L} = \underline{A}_n * \underline{B}_m$ est d'ordre nm ;
- le système $\underline{L} = \underline{A}_s * (\underline{B}_n + \underline{C}_m + \dots + \underline{P}_r)$ est d'ordre $n + m + \dots r$.

Grâce à l'algèbre de George, il est possible de déduire la réponse impulsionnelle ou la transformée de Fourier d'un système résultant de l'association de plusieurs systèmes non linéaires. On démontre en effet que :

- pour un terme de la forme $\underline{L}_n = \underline{K}_n + \underline{J}_n$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par les relations

$$l_n(t_1, \dots, t_n) = h_n(t_1, \dots, t_n) + k_n(t_1, \dots, t_n) \quad (3.71)$$

et

$$L_n(s_1, \dots, s_n) = H_n(s_1, \dots, s_n) + K_n(s_1, \dots, s_n) ; \quad (3.72)$$

- pour un terme de la forme $\underline{L}_{n+m} = \underline{K}_n \underline{J}_m$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par

$$l_{n+m}(t_1, \dots, t_{n+m}) = h_n(t_1, \dots, t_n) k_m(t_{n+1}, \dots, t_{n+m}) \quad (3.73)$$

et

$$L_{n+m}(s_1, \dots, s_{n+m}) = H_n(s_1, \dots, s_n) K_m(s_{n+1}, \dots, s_{n+m}) ; \quad (3.74)$$

- pour un terme de la forme $\underline{L}_{n+m+\dots+r} = \underline{A}_s \circ (\underline{B}_n \underline{C}_m \dots \underline{P}_r)$, la réponse impulsionnelle et la transformée de Fourier correspondante sont données par

$$l_{n+m+\dots+r}(t_1, \dots, t_{n+m+\dots+r}) = \int_0^{t_s} \dots \int_0^{t_1} a_s(\tau_1, \dots, \tau_s) b_n(t_1 - \tau_1, \dots, t_n - \tau_1) c_m(t_{n+1} - \tau_2, \dots, t_{n+m} - \tau_2) \dots p_r(t_{n+m+\dots+1} - \tau_s, \dots, t_{n+m+\dots+r} - \tau_s) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_s \quad (3.75)$$

et

$$L_{n+m+\dots+r}(s_1, \dots, s_{n+m+\dots+r}) = A_s(s_1 + \dots + s_n, s_{n+1} + \dots + s_{n+m}, \dots, s_{n+m+\dots+1} + \dots + s_{n+m+\dots+r}) \dots \underline{B}_n(s_1, \dots, s_n) \underline{C}_m(s_{n+1}, \dots, s_{n+m}) \dots \underline{P}_r(s_{n+m+\dots+1}, \dots, s_{n+m+\dots+r}) \quad (3.76)$$

L'algèbre de George est un outil intéressant, il nécessite toutefois de disposer d'une représentation par une série de Volterra des sous-systèmes composant le système non linéaire à étudier. Pour obtenir ces représentations généralement plus simples, la méthode de l'harmonic probing peut être avantageusement utilisée.

Un exemple d'utilisation conjointe de la méthode de l'harmonic probing et de l'algèbre de George pour la détermination des noyaux de Volterra d'une suspension automobile est donné dans [Serrier, 2006].

Illustration 3

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent, c'est-à-dire le support d'étude équipé d'un réseau hydropneumatique réduit à une cellule RC.

Les noyaux de Volterra correspondant à l'accumulateur étant connus, il est possible, grâce à l'algèbre de George de déterminer les noyaux de Volterra du support d'étude complet.

La résistance hydraulique et l'accumulateur étant en parallèle dans le schéma fonctionnel, les noyaux de Volterra H_i^s de la suspension s'expriment, conformément à la loi + de l'algèbre de George :

$$H_1^s(j\omega_1) = \frac{c_{s1}}{j\omega_1} + R, \quad (3.77)$$

$$H_2^s(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{c_{s2}}{j\omega_1 j\omega_2} \quad (3.78)$$

et

$$H_3^s(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) = \frac{c_{s3}}{j\omega_1 j\omega_2 j\omega_3}. \quad (3.79)$$

Le schéma fonctionnel de la boucle interne du support d'étude se ramène alors à celui de la figure 3.9.

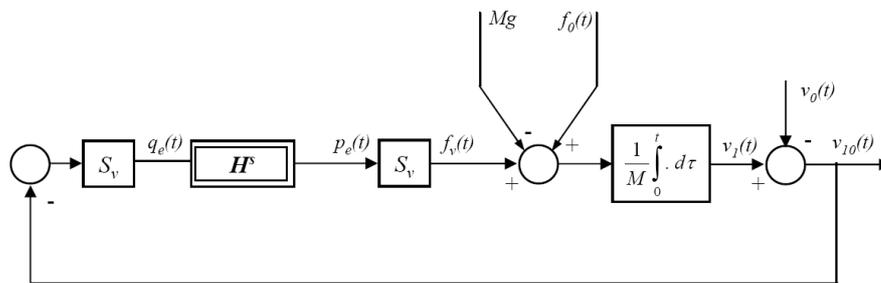


Figure 3.9 - Schéma fonctionnel de la boucle interne du support d'étude à partir d'une représentation du réseau hydropneumatique sous forme de fonctionnelle

L'ensemble des blocs de la boucle ouverte se trouve en cascade, le bloc de suspension étant le seul élément non linéaire. La boucle ouverte peut alors se ramener à un unique bloc dont les noyaux de Volterra H_i^{BO} s'expriment, conformément à la loi * de l'algèbre de George (il n'est pas tenu compte de l'entrée f_0 dans cette illustration) :

$$H_1^{BO}(j\omega_1) = \left(\frac{c_{s1}}{j\omega_1} + R \right) \frac{S_v^2}{M j\omega_1}, \quad (3.80)$$

$$H_2^{BO}(j\omega_1, j\omega_2) = \left(\frac{c_{s2}}{j\omega_1 j\omega_2} \right) \frac{S_v^3}{M(j\omega_1 + j\omega_2)} \quad (3.81)$$

et

$$H_3^{BO}(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) = \left(\frac{c_{s3}}{j\omega_1 j\omega_2 j\omega_3} \right) \frac{S_v^4}{M(j\omega_1 + j\omega_2 + j\omega_3)}. \quad (3.82)$$

La nouvelle représentation fonctionnelle du support d'étude est donnée figure 3.10.

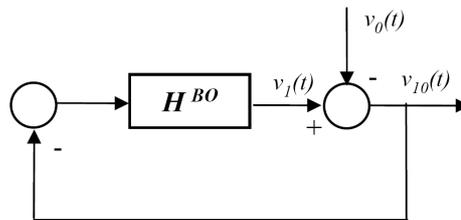


Figure 3.10 - Nouvelle représentation fonctionnelle issue de la représentation donnée figure 4.10.

Pour calculer les noyaux de la série de Volterra du système en boucle fermée, la boucle de commande de la figure 3.10 est transformée en une boucle de commande équivalente représentée par le schéma de la figure 3.11 dans lequel le système S est caractérisé par :

$$S : \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots \quad (3.83)$$

Concernant ce système S, on peut écrire en utilisant l'algèbre de George :

$$\underline{S} = \underline{I} - \underline{BO} * \underline{S} \quad (3.84)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots &= \underline{I} - \underline{BO}_1 \circ (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots) \\ &\quad - \underline{BO}_2 \circ (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots)^2 \\ &\quad - \underline{BO}_3 \circ (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots)^3 \quad (3.85) \\ &\quad - \underline{BO}_4 \circ (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 + \dots)^4 \\ &\quad - \dots \end{aligned}$$

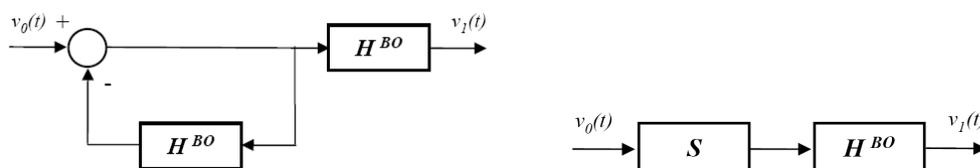


Figure 3.11 - Transformation de la boucle de commande

En regroupant les termes d'ordre identique dans la relation (3.85), on a alors :

$$\underline{S}_1 = \underline{I} - \underline{BO}_1 \circ \underline{S}_1, \quad (3.86)$$

$$\underline{S}_2 = -\underline{BO}_1 \circ \underline{S}_2 - \underline{BO}_2 \circ \underline{S}_1^2 \quad (3.87)$$

et

$$\underline{S}_3 = -\underline{BO}_1 \circ \underline{S}_3 - \underline{BO}_3 \circ \underline{S}_1^3 - 2\underline{BO}_2 \circ (\underline{S}_1 \underline{S}_2). \quad (3.88)$$

D'après les développements précédents, les transformées de Fourier des noyaux d'ordres 1, 2 et 3 du développement en série de Volterra du système S sont donc :

$$S_1(j\omega_1) = \frac{1}{1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1)}, \quad (3.89)$$

$$S_2(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{-H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2)}{(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1 + j\omega_2))(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1))(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_2))} \quad (3.90)$$

et

$$S_3(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) = \frac{-H_3^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3)S_1(j\omega_1)S_1(j\omega_2)S_1(j\omega_3) - 2H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2 + j\omega_3)S_1(j\omega_1)S_2(j\omega_2, j\omega_3)}{1 + H_3^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3)}. \quad (3.91)$$

Finalement, étant donné que :

$$\underline{T} = \underline{BO} * \underline{S} \quad (3.92)$$

alors, (relation (3.76)) :

$$T_1(j\omega_1) = H_1^{\text{BO}}(j\omega_1)S_1(j\omega_1), \quad (3.93)$$

$$T_2(j\omega_1, j\omega_2) = H_1^{\text{BO}}(j\omega_1 + j\omega_2)S_2(j\omega_1, j\omega_2) + H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2)S_1(j\omega_1)S_1(j\omega_2) \quad (3.94)$$

et

$$\begin{aligned} T_3(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) &= H_1^{\text{BO}}(j\omega_1 + j\omega_2 + j\omega_3)S_3(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3) \\ &+ H_3^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3)S_1(j\omega_1)S_1(j\omega_2)S_1(j\omega_3) . \\ &+ 2H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2 + j\omega_3)S_1(j\omega_1)S_2(j\omega_2, j\omega_3) \end{aligned} \quad (3.95)$$

En remplaçant les noyaux de Volterra S_1 et S_2 par leur expression, on obtient :

$$T_1(j\omega_1) = \frac{H_1^{\text{BO}}(j\omega_1)}{1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1)} = \frac{\left(\frac{c_{s1} + Rj\omega_1}{j\omega_1}\right) \frac{S_v^2}{M j\omega_1}}{1 + \left(\frac{c_{s1} + Rj\omega_1}{j\omega_1}\right) \frac{S_v^2}{M j\omega_1}} = \frac{S_v^2 (c_{s1} + Rj\omega_1)}{M (j\omega_1)^2 + S_v^2 (c_{s1} + Rj\omega_1)} \quad (3.96)$$

et

$$T_2(j\omega_1, j\omega_2) = H_1^{\text{BO}}(j\omega_1 + j\omega_2) \frac{-H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2)}{(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1 + j\omega_2))(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1))(1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_2))} + H_2^{\text{BO}}(j\omega_1, j\omega_2) \frac{1}{1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_1)} \frac{1}{1 + H_1^{\text{BO}}(j\omega_2)} \quad (3.97)$$

L'expression de $T_3(j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3)$, bien que plus volumineuse, s'obtient de façon analogue.

Remarque

Une méthode plus simple est proposée dans [George, 1959]. Elle consiste à remarquer qu'un système à boucle de retour du type de celui présenté figure 3.12 (a), est équivalent au système présenté figure 3.12 (b) avec la relation

$$T = BO * (I - T). \quad (3.98)$$

Cette expression se développe selon les règles de l'algèbre de Georges

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots = (BO_1 + BO_2 + BO_3) * (I - T_1 - T_2 - T_3 - \dots) \quad (3.99)$$

soit,

$$T_1 + T_2 + T_3 + \dots = BO_1 \circ (I - T_1 - T_2 - T_3 - \dots) + BO_2 \circ (I - T_1 - T_2 - T_3 - \dots)^2 + BO_3 \circ (I - T_1 - T_2 - T_3 - \dots)^3 \quad (3.100)$$

En regroupant les éléments de même ordre, on obtient directement :

$$T_1 = BO_1 * (I - T_1), \quad (3.101)$$

soit,

$$T_1 = (I + BO_1)^{-1} * BO_1, \quad (3.102)$$

de même,

$$T_2 = (I + BO_1)^{-1} * BO_2 (I - T_1)^2, \quad (3.103)$$

$$T_3 = (I + BO_1)^{-1} [-2BO_2 (I - T_1)(T_2) + BO_3 (I - T_1)^3], \quad (3.104)$$

$$T_4 = (I + BO_1)^{-1} [-2BO_2 (I - T_1)(T_3) + BO_2 T_2^2 + BO_3 (I - T_1)^2 T_2] \quad (3.105)$$

et ainsi de suite.

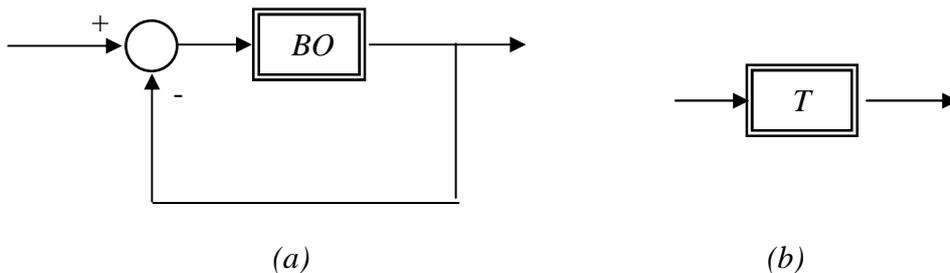


Figure 3.12 - Système non linéaire à retour unitaire et système non linéaire équivalent

Cette seconde méthode est plus simple à mettre en œuvre et conduit aux mêmes résultats. Elle permet notamment d'écrire plus simplement

$$T_2(s_1, s_2) = \frac{H_2^{BO}(s_1, s_2)(I - T_1(s_1))(I - T_1(s_2))}{1 + H_1^{BO}(s_1 + s_2)} \quad (3.106)$$

et

$$T_3(s_1, s_2, s_3) = \frac{H_3^{BO}(s_1, s_2, s_3)(I - T_1(s_1))(I - T_1(s_2))(I - T_1(s_3)) - 2H_2^{BO}(s_1, s_2 + s_3)(I - T_1(s_1))T_2(s_2, s_3)}{1 + H_1^{BO}(s_1 + s_2 + s_3)} \quad (3.107)$$

3.3.3.2.3 - Utilisation d'une représentation matricielle

Pour un système non linéaire admettant une représentation d'état de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = A_{11}X + A_{12}X^2 + \dots + D_{10}u \\ Y = C_{11}X \end{cases}, \quad (3.108)$$

où X est le vecteur d'état, u l'entrée et Y la sortie et où

$$X^2 = X \otimes X, \quad X^3 = X^2 \otimes X \quad (3.109)$$

avec \otimes le produit tensoriel défini par

$$A_{[m,n]} \otimes B_{[p,q]} = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n} * B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n} * B \end{bmatrix} = C_{[m,p,q,n]}, \quad (3.110)$$

avec $a_{i,j}$ l'élément de l'intersection ligne i et de la colonne j de la matrice A , il est possible d'obtenir l'expression des noyaux de Volterra à partir d'une forme particulière de la représentation d'état.

En effet, un système admettant une représentation sous la forme (3.63) peut être représenté sous la forme bilinéaire plus compacte

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + D(\tilde{x} \otimes u) + Bu \\ y = C\tilde{x} \end{cases} \quad (3.111)$$

Afin d'obtenir cette forme, considérons dans un premier temps

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^2) &= [\dot{X} \otimes X] + [X \otimes \dot{X}] \\ &= [(A_{11}X) \otimes X + (A_{12}X^2) \otimes X + (B_{10}u) \otimes X] + \\ &\quad [X \otimes (A_{11}X) + X \otimes (A_{12}X^2) + X \otimes (B_{10}u)] \quad (3.112) \\ &= [A_{11} \otimes I + I \otimes A_{11}]X^2 + [A_{12} \otimes I + I \otimes A_{12}]X^3 \\ &\quad + [B_{10} \otimes I + I \otimes B_{10}](X \otimes u) \\ &= A_{22}X^2 + A_{23}X^3 + B_{21}(X \otimes u) \end{aligned}$$

où I est la matrice identité possédant autant de colonnes et de lignes que le vecteur d'état possède de lignes.

Ensuite, en introduisant

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} X \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

le système (3.108) peut être mis sous la forme (3.111), avec

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}^2 \\ \dot{X}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \otimes u \\ X^2 \otimes u \\ X^3 \otimes u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (3.114)$$

Les expressions des transformées de Laplace des noyaux de Volterra sont alors obtenues directement ([Sain, 1990]) :

$$\begin{aligned} P_1(s) &= C(sI - A)^{-1} B, \\ P_2(s_1, s_2) &= C[(s_1 + s_2)I - A]^{-1} D \left\{ [(s_1 I - 1)^{-1} B] \otimes I_1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Illustration

Reprenons l'exemple traité avec les méthodes précédentes.

Afin d'établir une représentation d'état du support d'étude, les équations régissant son comportement peuvent être réagencées sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{v}_1(t) = \frac{1}{M} \left\{ -Mg + f_0(t) + S_v \left[R S_v (v_0(t) - v_1(t)) + P_s + c_{s1} v_l(t) + c_{s2} v_l^2(t) + c_{s3} v_l^3(t) \right] \right\}, \\ \dot{v}_l(t) = S_v (v_0(t) - v_1(t)) \end{cases} \quad (3.116)$$

où $v_l(t)$ est le volume d'huile injecté dans l'accumulateur hydraulique.

Le comportement du support d'étude peut alors être représenté sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_{11} X + A_{12} X^2 + A_{13} X^3 + D_{10} u, \\ Y = C_{11} X \end{cases}, \quad (3.117)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_l(t) \end{pmatrix}, X^2 = \begin{pmatrix} v_1^2(t) \\ v_1(t)v_l(t) \\ v_l(t)v_1(t) \\ v_l^2(t) \end{pmatrix}, A_{11} = \begin{pmatrix} -\frac{S_v^2 R}{M} & \frac{S_v c_{s1}}{M} \\ -S_v & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & S_v c_{s2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & S_v c_{s3} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 8}, \quad (3.119)$$

$$u = \begin{pmatrix} v_0(t) \\ f_0(t) \end{pmatrix}, D_{10} = \begin{pmatrix} \frac{S_v^2 R}{M} & \frac{1}{M} \\ \frac{S_v}{M} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.120)$$

$$Y = (v_1(t)), \quad C_{11} = (1 \ 0). \quad (3.121)$$

Cette représentation d'état peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A \tilde{x} + D(\tilde{x} \otimes u) + B u, \\ y = C \tilde{x} \end{cases}, \quad (3.122)$$

avec

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} X \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

et

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}^2 \\ \dot{X}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \otimes u \\ X^2 \otimes u \\ X^3 \otimes u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{10} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (3.124)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^2) &= [\dot{X} \otimes X] + [X \otimes \dot{X}] \\ &= [(A_{11} X) \otimes X + (A_{12} X^2) \otimes X + (A_{13} X^3) \otimes X + (B_{10} u) \otimes X] + \\ &\quad [X \otimes (A_{11} X) + X \otimes (A_{12} X^2) + X \otimes (A_{13} X^3) + X \otimes (B_{10} u)] \\ &= [A_{11} \otimes I + I \otimes A_{11}] X^2 + [A_{12} \otimes I + I \otimes A_{12}] X^3 + [A_{13} \otimes I + I \otimes A_{13}] X^4 \\ &\quad + [B_{10} \otimes I + I \otimes B_{10}] (X \otimes u) \\ &= A_{22} X^2 + A_{23} X^3 + A_{24} X^4 + B_{21} (X \otimes u) \end{aligned} \quad (3.125)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(X^3) &= \frac{d}{dt}(X^2 \otimes X) = \left[\frac{d}{dt}(X^2) \otimes X \right] + [X^2 \otimes \dot{X}] \\ &= [(A_{22} X^2) \otimes X + (A_{23} X^3) \otimes X + (B_{21} X \otimes u) \otimes X] + [X^2 \otimes (A_{11} X) + X^2 \otimes (A_{12} X^2) + X^2 \otimes (B_{10} u)] \\ &= [A_{22} \otimes I + I \otimes A_{11}] X^3 + [A_{23} \otimes I + I \otimes A_{12}] X^4 + [B_{21} \otimes I + I \otimes B_{10}] (X^2 \otimes u) \\ &= A_{33} X^3 + A_{34} X^4 + B_{31} (X^2 \otimes u) \end{aligned} \quad (3.126)$$

3.3.3.3 - Détermination des noyaux de Volterra par identification

La méthode la plus usitée de détermination des noyaux de Volterra à partir d'un système réel consiste à identifier ceux-ci à partir de la réponse du système à des entrées bien choisies. Cette méthode a donné lieu à de nombreuses publications. Cette méthode n'étant pas utilisée par la suite, elle n'est citée ici que pour mémoire. Le lecteur intéressé se référera utilement à [Rugh, 1981], [Fliess, 1981], [Doyle, 2002].

3.3.4 - Réalisation d'un noyau d'ordre k

Ce paragraphe présente une méthode qui permet la réalisation d'un noyau d'ordre k . Pour cela, on considère tout d'abord le système d'ordre 2 de la figure 3.13, composé de trois sous systèmes linéaires de réponses impulsionnelles $h_a(t)$, $h_b(t)$ et $h_c(t)$.

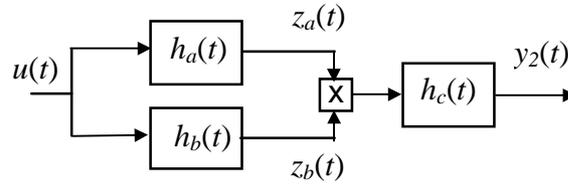


Figure 3.13 - Système d'ordre 2

La réponse de ce système à une entrée $u(t)$ est donnée par :

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} h_c(\sigma) z_a(t-\sigma) z_b(t-\sigma) d\sigma, \quad (3.127)$$

ou encore,

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_c(\sigma) h_a(\sigma_1) h_b(\sigma_2) u(t-\sigma-\sigma_1) u(t-\sigma-\sigma_2) d\sigma d\sigma_1 d\sigma_2. \quad (3.128)$$

En posant $\tau_1 = \sigma + \sigma_1$ et $\tau_2 = \sigma + \sigma_2$, la relation (3.128) devient,

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_c(\sigma) h_a(\tau_1 - \sigma) h_b(\tau_2 - \sigma) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\sigma d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.129)$$

ou encore

$$y_2(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.130)$$

en posant :

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \int_0^{\infty} h_c(\sigma) h_a(\tau_1 - \sigma) h_b(\tau_2 - \sigma) d\sigma. \quad (3.131)$$

Par définition, la transformée de Laplace du noyau d'ordre 2 est donnée par :

$$H_2(s_1, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1\tau_1 - s_2\tau_2} d\tau_1 d\tau_2, \quad (3.132)$$

soit

$$H_2(s_1, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_c(\sigma) h_a(\tau_1 - \sigma) h_b(\tau_2 - \sigma) e^{-s_1\tau_1 - s_2\tau_2} d\sigma d\tau_1 d\tau_2. \quad (3.133)$$

En utilisant le changement de variable $\tau_1 - \sigma = \sigma_1$ et $\tau_2 - \sigma = \sigma_2$, la relation (3.133) peut encore s'écrire sous la forme :

$$H_2(s_1, s_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_c(\sigma) h_a(\sigma_1) h_b(\sigma_2) e^{-s_1\sigma_1} e^{-s_2\sigma_2} e^{-(s_1+s_2)\sigma} d\sigma d\sigma_1 d\sigma_2, \quad (3.134)$$

ou encore

$$H_2(s_1, s_2) = H_a(s_1) H_b(s_2) H_c(s_1 + s_2). \quad (3.135)$$

Ainsi, cette démonstration due à Schetzen [Schetzen, 1965], révèle que si un système d'ordre 2 peut être caractérisé par une fonction de transfert analogue à celle de la relation (3.130), un tel système admet la réalisation de la figure 3.13 dans laquelle $h_a(t)$, $h_b(t)$ et $h_c(t)$ correspondent aux réponses impulsionnelles de systèmes caractérisés par les transmittances $H_a(s)$, $H_b(s)$ et $H_c(s)$.

Ce type de synthèse peut se généraliser à des ordres supérieurs. Pour les ordres 3, 4 et 5, on cherchera une décomposition des fonctions de transfert $H_3(s_1, s_2, s_3)$, $H_4(s_1, s_2, s_3, s_4)$ et $H_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ sous la forme :

$$H_3(s_1, s_2, s_3) = H_a(s_1) H_b(s_2) H_c(s_1 + s_2) H_d(s_3) H_e(s_1 + s_2 + s_3), \quad (3.136)$$

$$H_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = H_a(s_1) H_b(s_2) H_c(s_1 + s_2) H_d(s_3) H_e(s_1 + s_2 + s_3) H_f(s_4) H_g(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) \quad (3.137)$$

et

$$H_5(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = H_a(s_1) H_b(s_2) H_c(s_1 + s_2) H_d(s_3) H_e(s_1 + s_2 + s_3) H_f(s_4) H_g(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) H_h(s_5) H_i(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5). \quad (3.138)$$

Les réalisations correspondantes sont alors respectivement données par les schémas (a), (b) et (c) de la figure 3.14.

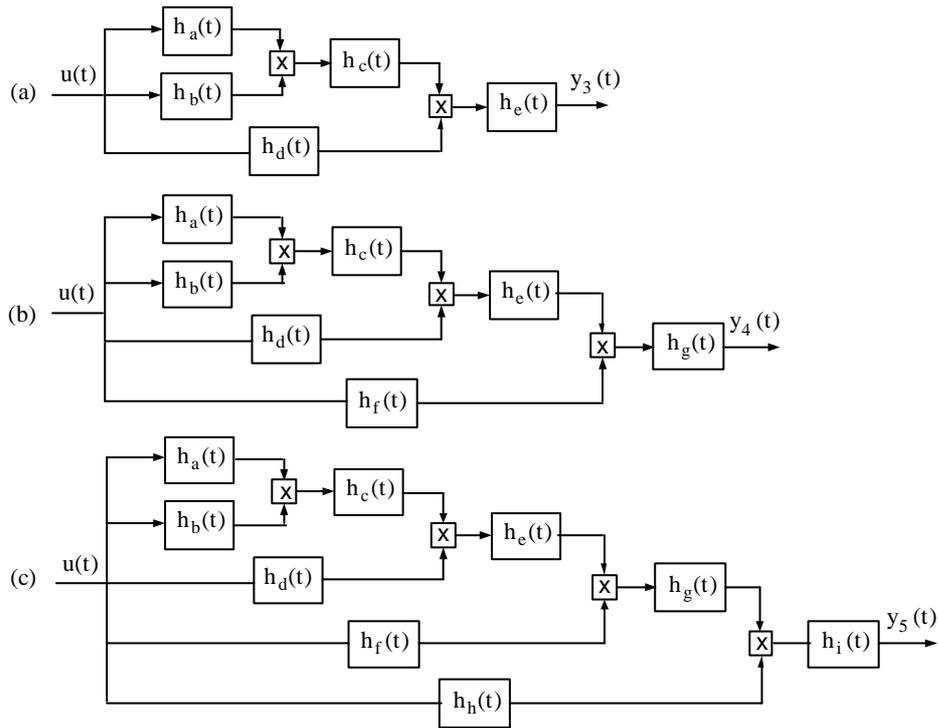


Figure 3.14 - Réalisation de systèmes d'ordre 3 (a), 4 (b) et 5 (c)

Ces réalisations ne sont cependant pas les seules possibles. D'autres réalisations sont utilisables [Doyle 2002]. Elles sont connues dans la littérature sous le nom de réalisations d'Hammerstein ou réalisations de Wiener. Ces réalisations sont représentées par les figures figure 3.15 et figure 3.16. Elles ont le mérite de faire apparaître un faible nombre de paramètres ce qui simplifie leur utilisation dans des problèmes d'identification. En revanche, cette parcimonie peut s'avérer contraignante pour caractériser certains phénomènes non linéaires.

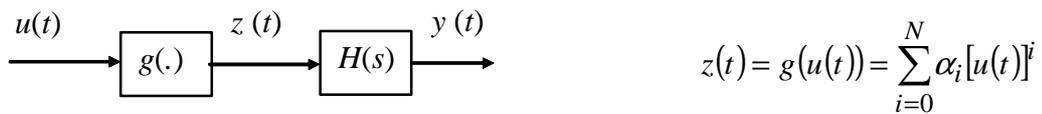


Figure 3.15 - Réalisation d'Hammerstein

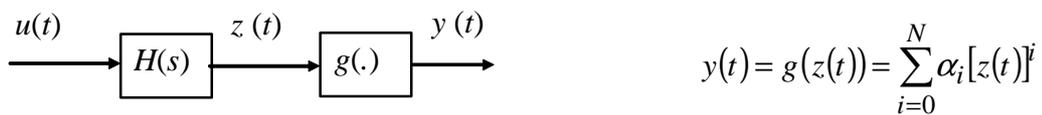


Figure 3.16 - Réalisation de Wiener

Partant de ces deux structures de base, des généralisations portant le nom de réalisations d'Uryson sont permises. Ces réalisations sont représentées par la figure 3.17.

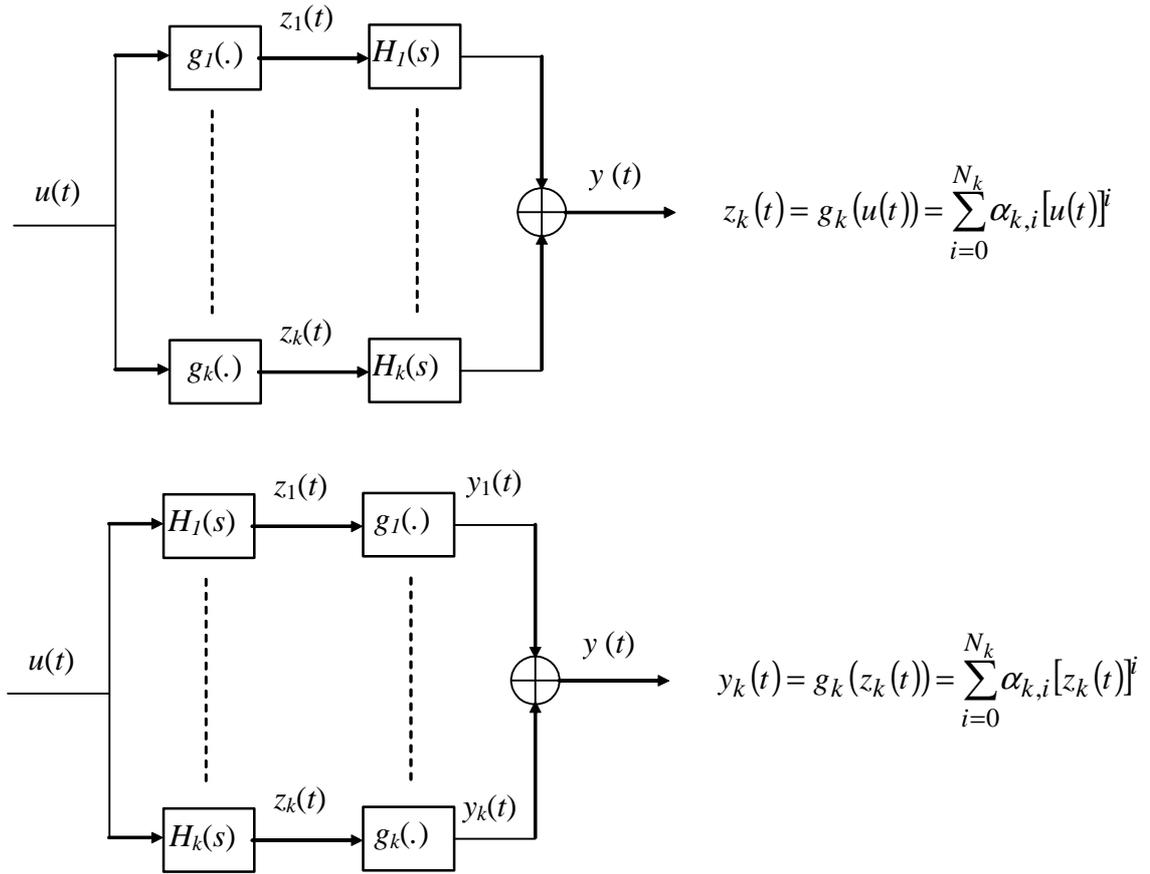


Figure 3.17 - Réalisations d'Uryson

Illustration 1

Reprenons l'exemple d'illustration déjà traité dans les paragraphes précédents. Intéressons nous à la réalisation des noyaux de Volterra du support d'étude complet en vue de sa simulation.

La réalisation du noyau d'ordre 1 ne pose aucun problème, ce noyau étant une fonction de transfert classique.

L'expression du noyau d'ordre 2, obtenue par l'utilisation de l'algèbre de George,

$$T_2(s_1, s_2) = \frac{H_2^{BO}(s_1, s_2)(I - T_1(s_1))(I - T_1(s_2))}{1 + H_1^{BO}(s_1 + s_2)} \tag{3.139}$$

ne permet pas, à première vue, d'obtenir une réalisation simple du noyau.

Pour arriver à cette réalisation, il importe de séparer les fonctions de s_1 , s_2 et $s_1 + s_2$. En effet, cette séparation permet de distinguer les différents niveaux pour la réalisation des noyaux.

Il est possible d'exprimer simplement le noyau d'ordre 2 de la boucle ouverte en fonction des variables s_1 et s_2 et de constantes :

$$H_2^{BO}(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1} \frac{1}{s_2} \frac{S_v^3 c_{s_2}}{M(s_1 + s_2)}, \tag{3.140}$$

Une réalisation possible de ce noyau d'ordre 2 (adapté à un logiciel de simulation tel que Matlab/Simulink) est proposée figure 3.18.

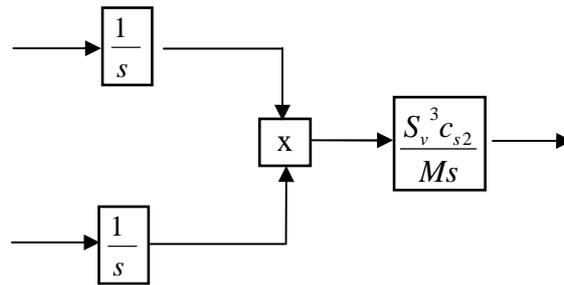


Figure 3.18 - Réalisation du noyau d'ordre 2 de la boucle ouverte adaptée à l'utilisation d'un logiciel de simulation

En remarquant que

$$\frac{1}{1 + H_1^{BO}(s_1 + s_2)} = \frac{M(s_1 + s_2)^2}{M(s_1 + s_2)^2 + S_v^2 R(s_1 + s_2) + S_v^2 c_{s1}}, \quad (3.141)$$

il est alors possible de proposer une réalisation du noyau d'ordre 2 du support d'étude sous la forme de la figure 3.19.

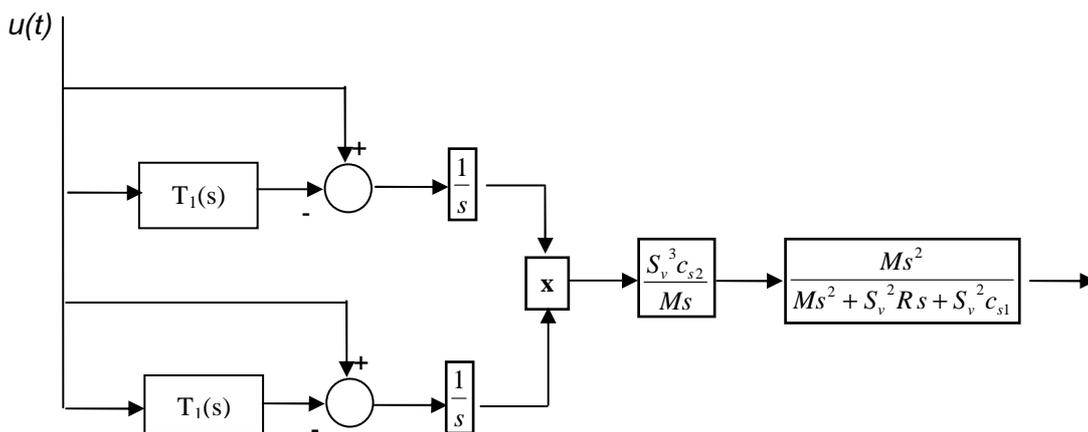


Figure 3.19 - Réalisation du noyau d'ordre 2 du support d'étude

Les réalisations des noyaux d'ordre 3 et 4 à l'aide de Simulink sont présentées respectivement figure 3.20 et figure 3.21.

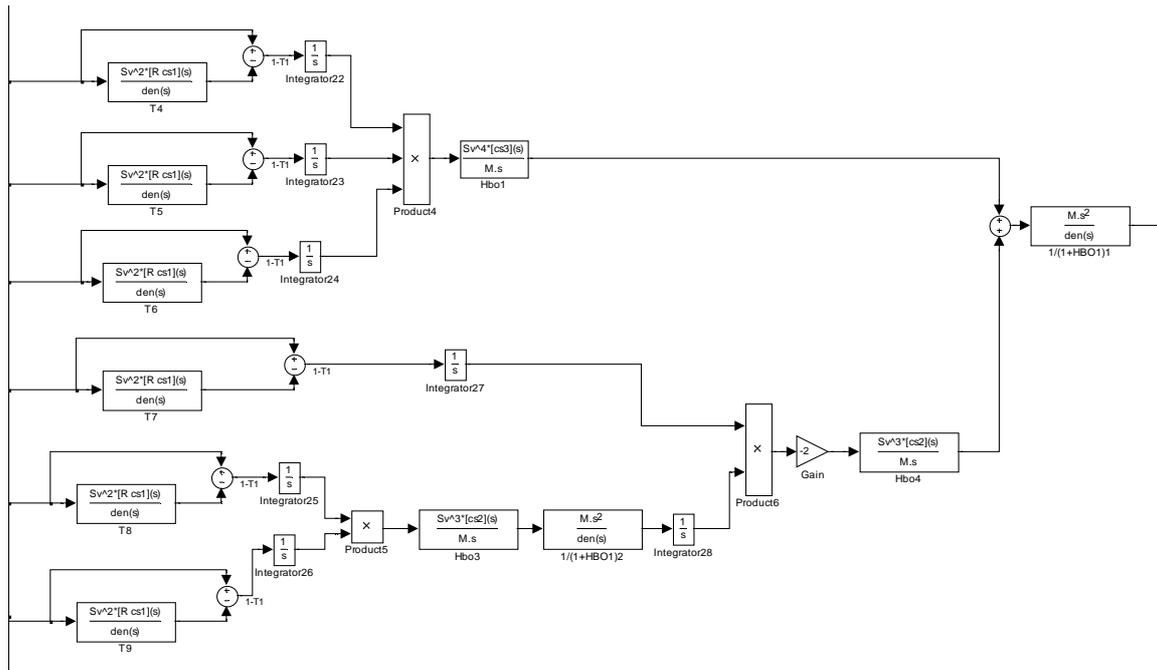


Figure 3.20 - Réalisation du noyau d'ordre 3 à l'aide de Matlab/Simulink

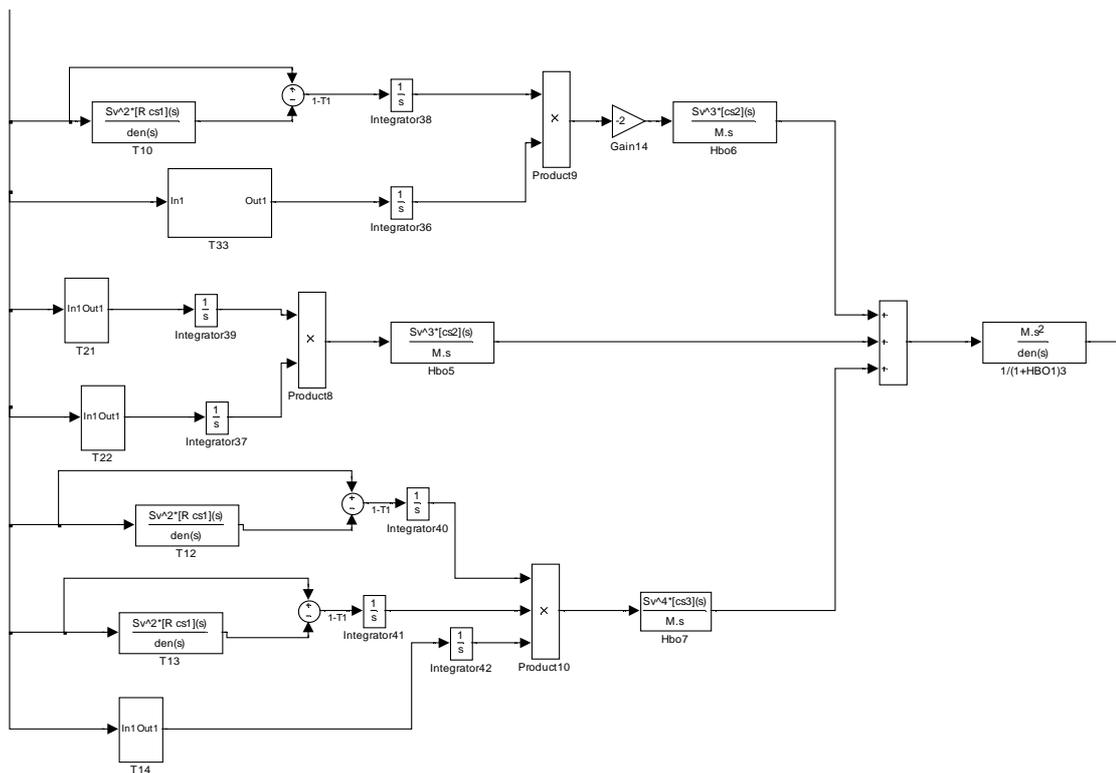


Figure 3.21 - Réalisation du noyau d'ordre 4 à l'aide de Matlab/Simulink

Illustration 2

La deuxième solution pour la réalisation des noyaux en vue de la simulation consiste à utiliser la représentation matricielle du système et à la transcrire sous forme de représentation d'état. La figure 3.22 illustre la réalisation d'un noyau d'ordre 3 par cette méthode.

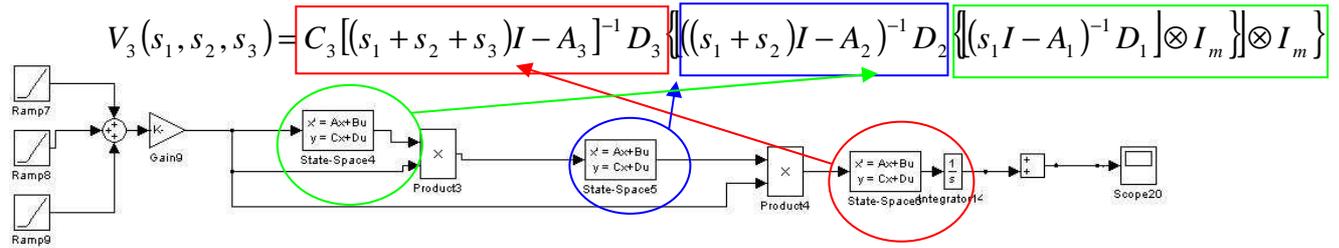


Figure 3.22 - Réalisation d'un noyau d'ordre 3 à partir d'une représentation d'état du système non linéaire

3.3.5 - Application des décompositions en série de Volterra

Le premier intérêt de la décomposition en série de Volterra consiste à pouvoir déterminer les réponses temporelles de chacun des noyaux. Dans le cas de l'illustration des paragraphes précédents, les réponses indicielles du système linéarisé et du système non linéaire sont données figure 3.23.

Les paramètres utilisés pour la simulation sont :

- une masse suspendue de 75 kg ;
- un vérin de section 3.14 cm² ;
- pression de tarage de l'accumulateur : 20 bars ;
- volume de l'accumulateur : 120 cm³ ;
- coefficient de frottement visqueux équivalent de la résistance hydraulique : 400 Ns/m.

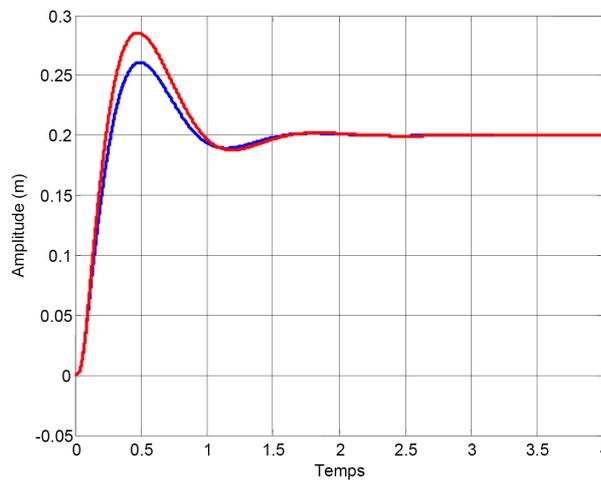


Figure 3.23 - Réponses indicielles du support d'étude dans le cadre de l'exemple d'illustration obtenues à l'aide d'un modèle linéaire (en bleu) et non-linéaire (en rouge)

La figure 3.24 présente les réponses indicielles de chacun des noyaux de Volterra ainsi que les réponses cumulées des noyaux d'ordre 1 à 4.

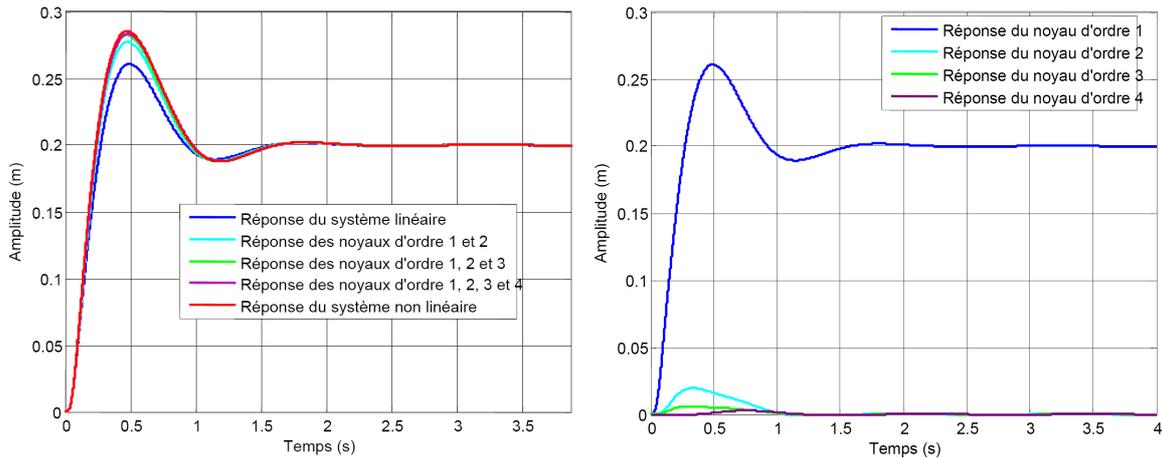


Figure 3.24 - Réponses indicielles du support d'étude : (a) contribution cumulée de des noyaux de Volterra d'ordre 1 à 4, (b) contribution de chacun des noyaux

Par analogie avec les décompositions en série de Taylor, il est possible de remarquer que la contribution de chacun des noyaux est de plus en plus faible.

3.4 - Etude des non-linéarités dans un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquences réalisé en technologie hydropneumatique par un arrangement parallèle de cellules RC série dans le cas où la résistance hydraulique est linéaire

Dans cette partie, l'étude des non-linéarités est effectuée à partir du support d'étude présenté au chapitre 2 équipé d'une suspension CRONE réalisée par un arrangement parallèle de cellules RC en série. Les paramètres physiques et technologiques des composants de cette suspension sont donnés par les relations (2.71) et (2.72) (page 96).

3.4.1 - Etude de l'influence de l'amplitude d'entrée

Les figures 3.25 et 3.26 montrent la position verticale de la masse suspendue du support d'étude pour des sollicitations $z_0(t)$ en échelon de différentes amplitudes et pour les deux masses suspendues extrêmes. Les réponses obtenues ont été normalisées de façon à être comparables et à montrer l'influence de l'amplitude d'entrée sur la réponse indicielle.

Ces figures montrent que l'augmentation de l'amplitude se traduit par une diminution de la rapidité du système et par un premier dépassement de plus en plus important. En revanche, la robustesse vis-à-vis des variations de la masse suspendue est conservée indépendamment de l'amplitude.

Ces deux figures sont similaires en raison de la robustesse de la rapidité et du degré de stabilité obtenue par la suspension CRONE, et ce, en dépit des non-linéarités.

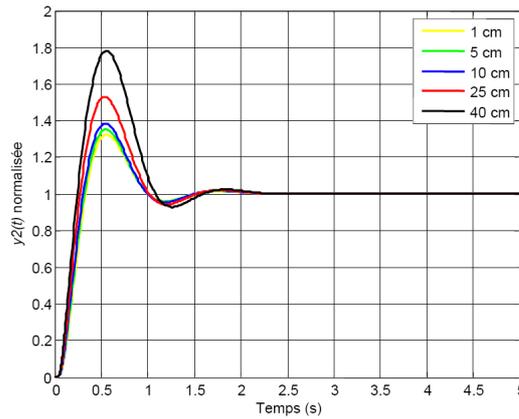


Figure 3.25 - Réponses indicielles normalisées pour différentes amplitudes de l'entrée ($M=75$ kg)

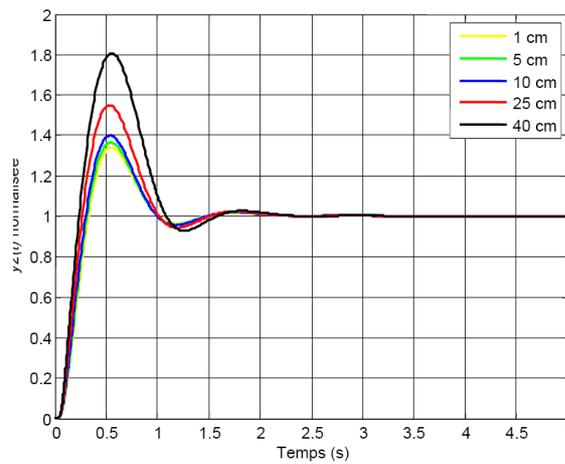


Figure 3.26 - Réponses indicielles normalisées pour différentes amplitudes de l'entrée ($M=150$ kg)

La figure 3.27 représente le premier dépassement en fonction de l'amplitude du saut échelon en entrée. Les points obtenus forment une courbe qui peut, avec une faible erreur, être approximée par une cubique.

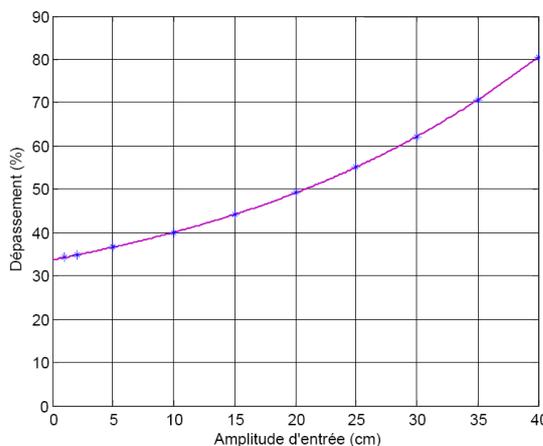


Figure 3.27 - Dépassement en % de la réponse indicielle en fonction de l'amplitude d'entrée (croix bleu) et son approximation par une cubique (en violet)

3.4.2 - Détermination des noyaux de Volterra de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence

Le schéma fonctionnel causal de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé par un arrangement parallèle de cellules RC série, donnée figure 3.28 et obtenue au chapitre 2, peut-être mis sous la forme présentée figure 3.29, où H^i est la représentation sous forme de série de Volterra de la cellule d'ordre i . La méthode de l'harmonic probing présentée précédemment permet en effet de déterminer pour chacune des cellules une représentation sous forme de noyaux de Volterra, tronquée ici à l'ordre trois, ordre tout à fait suffisant vu l'amplitude de la sollicitation considérée, soit :

$$H^0 = H_1^0(s) + H_2^0(s_1, s_2) + H_3^0(s_1, s_2, s_3), \quad (3.142)$$

avec $H_1^0(s)$, $H_2^0(s_1, s_2)$ et $H_3^0(s_1, s_2, s_3)$ les trois premiers noyaux de Volterra de la cellule purement capacitive et dont les expressions sont :

$$H_1^0(s) = \frac{1}{C_{00} s}, \quad H_2^0(s_1, s_2) = \frac{1}{P_s} \frac{1}{C_{00}^2 s_1 s_2}, \quad H_3^0(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{P_s^3} \frac{1}{C_{00}^3 s_1 s_2 s_3}. \quad (3.143)$$

Ces résultats sont obtenus en posant :

$$C_{00} = \frac{P_{00} V_{00}}{P_s^2} \quad (3.144)$$

et en remarquant que la décomposition en série de Taylor de la fonction pression-débit de l'accumulateur hydraulique s'exprime alors :

$$p_0(t) = P_s + \frac{1}{C_0} q_0(t) + \frac{1}{P_s} \frac{1}{C_0^2} q_0^2(t) + \frac{1}{P_s^2} \frac{1}{C_0^3} q_0^3(t) + o(q_0^4). \quad (3.145)$$

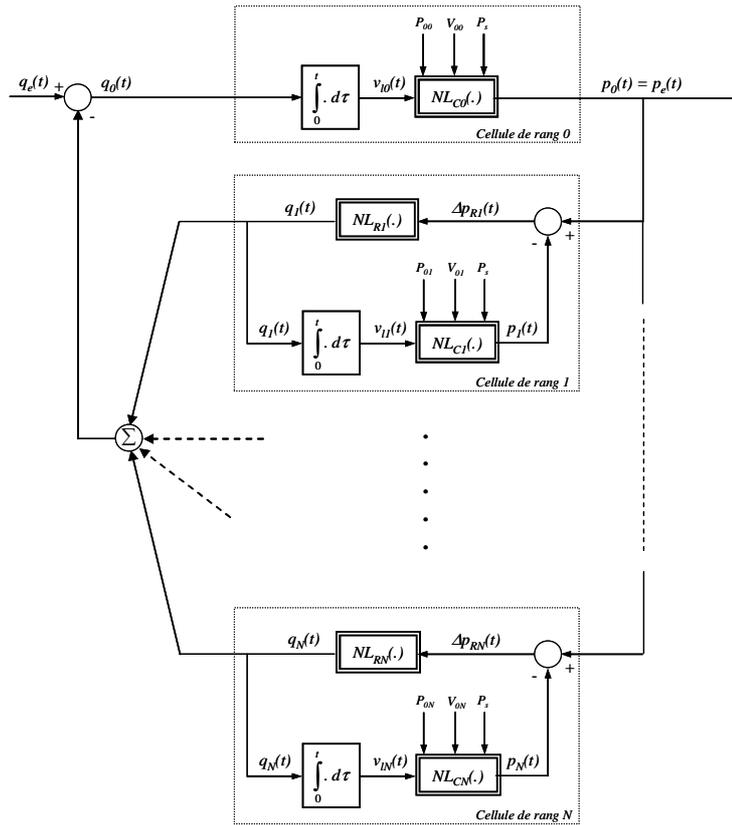


Figure 3.28 - Schéma fonctionnel causal d'une suspension CRONE réalisée par un arrangement parallèle de N cellules RC en série

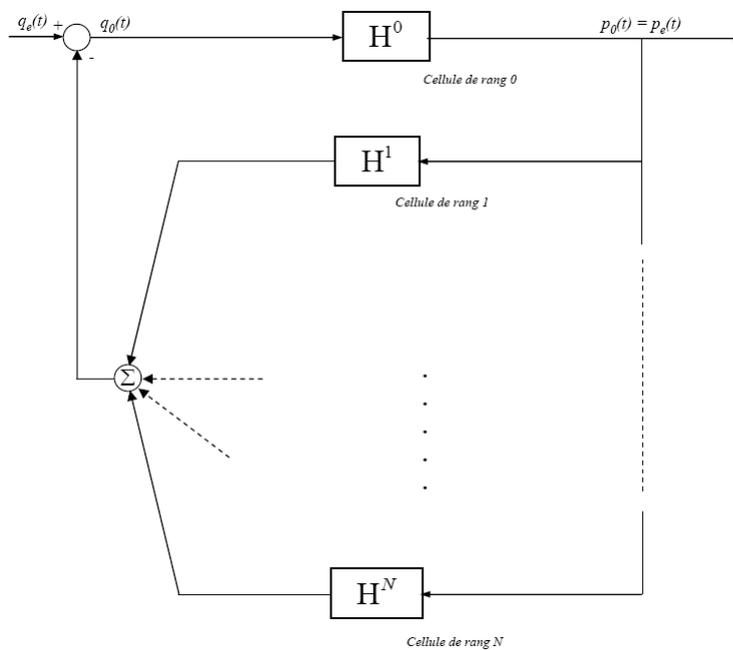


Figure 3.29 - Modification du schéma fonctionnel de la figure 3.28

Les noyaux de Volterra des cellules i , $i=1$ à 5, peuvent être déterminés à partir de la méthode de l'harmonic probing ou de l'algèbre de George, cette dernière méthode permettant d'obtenir des formes plus exploitables pour la réalisation des noyaux.

Le schéma fonctionnel causal de la cellule i est présenté figure 3.30.

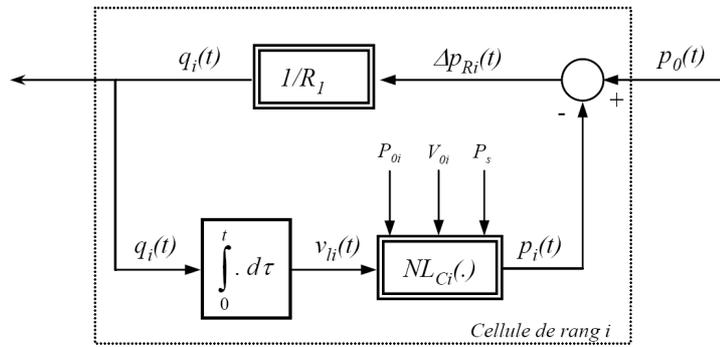


Figure 3.30 - Schéma fonctionnel causal de la cellule RC de rang i

Ce schéma peut être ramené à celui de la figure 3.31.

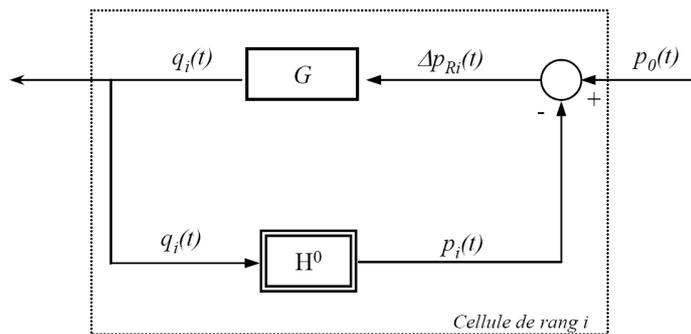


Figure 3.31 - Modification de la figure 3.30

avec $G=1/R$ et enfin à celui de la figure 3.32.

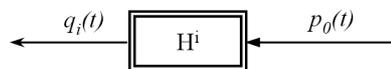


Figure 3.32 - Représentation sous forme de série de Volterra de la cellule de rang i

Il est alors possible d'écrire

$$H^1 = G * (I - H^0 H^1), \tag{3.146}$$

ainsi, en regroupant les termes d'ordre identique

$$H_1^1(s) = \frac{G}{1 + G H_1^0(s)}, \text{ ou } H_1^1(s) = \frac{C_{0i} s}{1 + R_i C_{0i} s}, \tag{3.147}$$

$$H_2^1(s_1, s_2) = -\frac{H_1^1(s_1)}{s_1} \frac{H_1^1(s_2)}{s_2} \frac{H_1^1(s_1 + s_2)}{C_{0i}^2 P_s} \quad (3.148)$$

ou, plus simplement encore,

$$H_2^1(s_1, s_2) = -H_1^1(s_1 + s_2) H_1^1(s_1) H_1^1(s_2) H_2^0(s_1, s_2) \quad (3.149)$$

soit,

$$H_2^1(s_1, s_2) = -\frac{C_{0i}(s_1 + s_2)}{P_s (1 + R_i C_{0i}(s_1 + s_2))(1 + R_i C_{0i}s_1)(1 + R_i C_{0i}s_2)}. \quad (3.150)$$

L'algèbre de George permet d'obtenir une expression simple du noyau d'ordre 3 :

$$H_3^1(s_1, s_2, s_3) = -H_1^1(s_1 + s_2 + s_3) [H_1^1(s_1) H_1^1(s_2) H_1^1(s_3) H_3^0(s_1, s_2, s_3) + 2H_2^0(s_1, s_2 + s_3) H_1^1(s_1) H_1^2(s_2, s_3)] \quad (3.151)$$

soit, sous forme non symétrique,

$$H_{3NS}^1(s_1, s_2, s_3) = \frac{-C_{0i}(s_1 + s_2 + s_3)(C_{0i}R_i(s_2 + s_3) - 1)}{(C_{0i}R_i(s_1 + s_2 + s_3) + 1)(C_{0i}R_i(s_2 + s_3) + 1)(C_{0i}R_i s_3 + 1)(C_{0i}R_i s_2 + 1)(C_{0i}R_i s_1 + 1)P_s^2} \quad (3.152)$$

ou, sous forme symétrique,

$$H_3^1(s_1, s_2, s_3) = \frac{1}{3} [H_{3NS}^1(s_1, s_2, s_3) + H_{3NS}^1(s_2, s_1, s_3) + H_{3NS}^1(s_3, s_2, s_1)], \quad (3.153)$$

d'où

$$H_3^1(s_1, s_2, s_3) = \frac{-C_{0i}(s_1 + s_2 + s_3)}{[C_{0i}R_i(s_1 + s_2 + s_3) + 1](C_{0i}R_i s_3 + 1)(C_{0i}R_i s_2 + 1)(C_{0i}R_i s_1 + 1)P_s^2} \left[\frac{C_{0i}R_i(s_2 + s_3) - 1}{C_{0i}R_i(s_2 + s_3) + 1} + \frac{C_{0i}R_i(s_1 + s_2) - 1}{C_{0i}R_i(s_1 + s_2) + 1} + \frac{C_{0i}R_i(s_1 + s_3) - 1}{C_{0i}R_i(s_1 + s_3) + 1} \right]. \quad (3.154)$$

La décomposition en série de Volterra de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence peut enfin être obtenue en utilisant une nouvelle fois l'algèbre de George sur le système représenté figure 3.33.

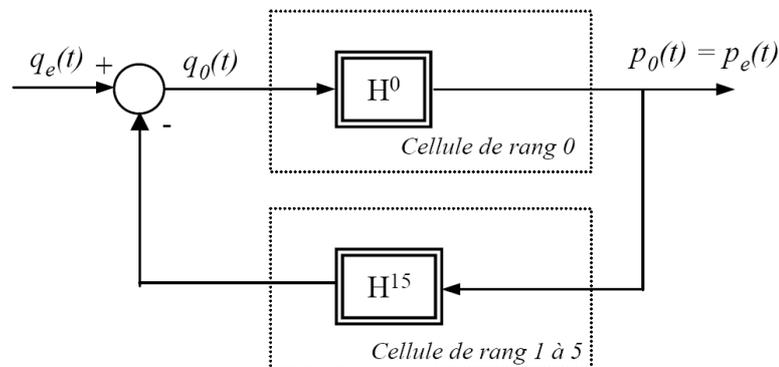


Figure 3.33 - Schéma fonctionnel causal de la suspension CRONE réalisée par un arrangement parallèle de cellules RC série où les cellules sont représentées par leur décomposition en série de Volterra

La fonctionnelle H^{15} représente la décomposition en série de Volterra de l'ensemble des cellules RC et n'est autre que la somme des décompositions de chacune des cellules.

Soit H^S la représentation en série de Volterra de la suspension constituée par l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. H^S s'exprime en fonction de H^{15} et H^0 :

$$H^S = H^0(I - H^{15}H^S), \quad (3.155)$$

soit, en appliquant les règles de l'algèbre de George

$$\begin{aligned} H_1^S + H_2^S + H_3^S &= [H_1^0 + H_2^0 + H_3^0] * (I - [H_1^{15} + H_2^{15} + H_3^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]) \\ &= H_1^0 * (I - [H_1^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]) - [H_2^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^2 - [H_3^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^3 \\ &\quad + H_2^0 * (I - [H_1^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]) - [H_2^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^2 - [H_3^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^3 \\ &\quad + H_3^0 * (I - [H_1^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]) - [H_2^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^2 - [H_3^{15}] * [H_1^S + H_2^S + H_3^S]^3 \end{aligned} \quad (3.156)$$

d'où

$$H_1^S = H_1^0(I - H_1^{15}H_1^S), \quad (3.157)$$

$$H_2^S = H_1^0(-H_1^{15}H_2^S - H_2^{15}H_1^{S^2}) + H_2^0(I - H_1^{15}H_1^S)^2, \quad (3.158)$$

$$H_3^S = H_1^0(H_1^{15}H_3^S - 2H_2^{15}H_1^SH_2^S - H_3^{15}H_1^{S^3}) - 2H_2^0(I - H_1^{15}H_1^S)H_1^{15}H_2^S + H_3^0(I - H_1^{15}H_1^S)^3, \quad (3.159)$$

ainsi,

$$H_1^S = \frac{H_1^0}{1 + H_1^0H_1^{15}}, \quad (3.160)$$

ou, en remplaçant les différents noyaux de Volterra par leurs expressions :

$$H_1^S = \frac{1}{C_{00}s + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}s}{1 + R_i C_{0i}s}} = \frac{1}{C_{00}s + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}s}{1 + R_i C_{0i}s}}. \quad (3.161)$$

Cette expression est identique à la fonction de transfert de la suspension obtenue dans le cadre des petites variations.

Pour le noyau d'ordre 2 de la suspension,

$$H_2^S = \frac{-H_1^0H_2^{15}H_1^{S^2} + H_2^0(I - H_1^{15}H_1^S)^2}{1 + H_1^0H_1^{15}} \quad (3.162)$$

ou

$$\begin{aligned} H_2^S(s_1, s_2) &= \frac{-H_1^0(s_1 + s_2)H_2^{15}(s_1, s_2)H_1^S(s_1)H_1^S(s_2)}{1 + H_1^0(s_1 + s_2)H_1^{15}(s_1 + s_2)} \\ &\quad + \frac{H_2^0(s_1, s_2)(I - H_1^{15}(s_1)H_1^S(s_1))(I - H_1^{15}(s_2)H_1^S(s_2))}{1 + H_1^0(s_1 + s_2)H_1^{15}(s_1 + s_2)}. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Ainsi, le noyau d'ordre 2 de la suspension s'exprime :

$$H_2^s(s_1, s_2) = \frac{C_{00} + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}}{[1 + R_i C_{0i} (s_1 + s_2)](1 + R_i C_{0i} s_1)(1 + R_i C_{0i} s_2)}}{P_{st} s_1 s_2 \left[C_{00} + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}}{1 + R_i C_{0i} (s_1 + s_2)} \right] \left[C_{00} + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}}{1 + R_i C_{0i} s_1} \right] \left[C_{00} + \sum_{i=1}^5 \frac{C_{0i}}{1 + R_i C_{0i} s_2} \right]} \quad (3.164)$$

La représentation graphique en trois dimensions de ce noyau est donnée figure 3.34.

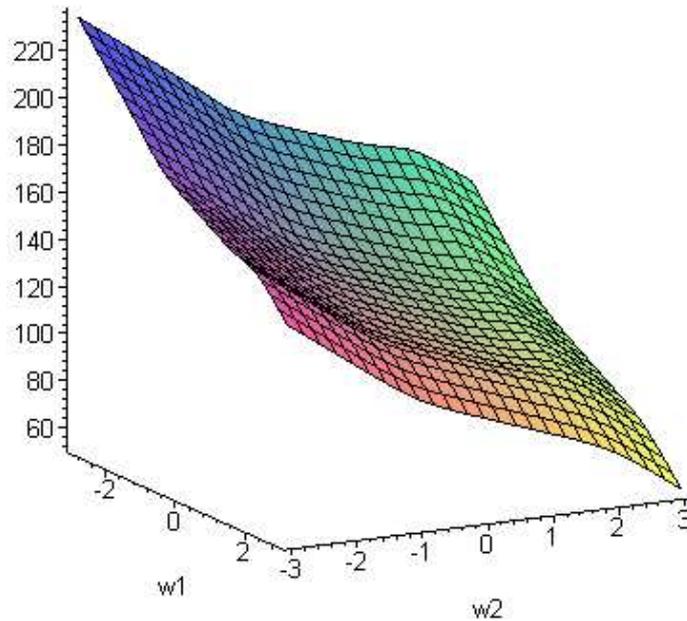


Figure 3.34 - Représentation en trois dimension du noyau de Volterra d'ordre deux de la suspension CRONE

Les figures 3.35, 3.36 et 3.37 présentent les réponses indicielles de la masse suspendue et de chacun des trois premiers noyaux de Volterra du support d'étude. Les amplitudes d'entrées respectives sont 10 cm, 25 cm et 40 cm.

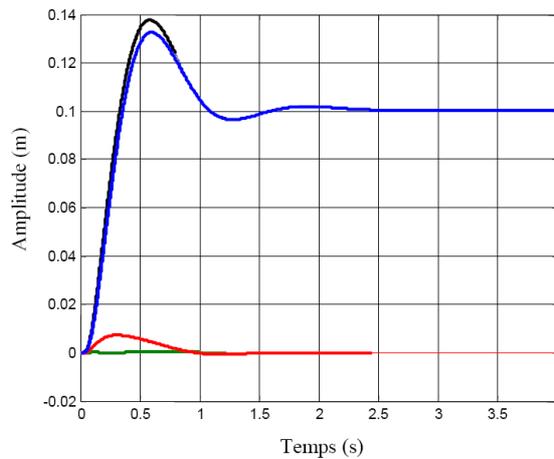


Figure 3.35 - Réponses indicielles du support d'étude pour une entrée d'amplitude 10 cm (modèle non linéaire en noir, noyau d'ordre 1 en bleu, noyau d'ordre 2 en rouge et d'ordre 3 en vert)

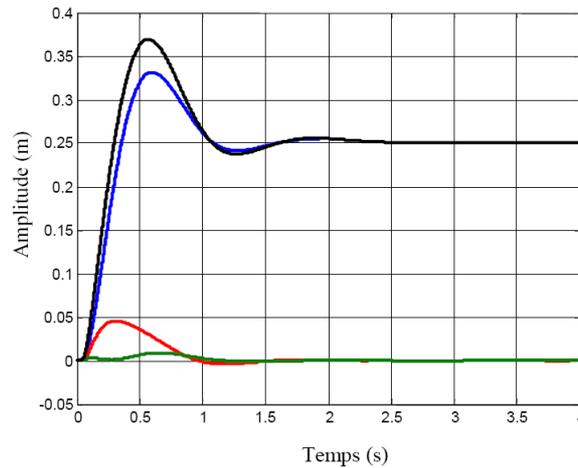


Figure 3.36 - Réponses indicielles du support d'étude pour une entrée d'amplitude 25 cm (modèle non linéaire en noir, noyau d'ordre 1 en bleu, noyau d'ordre 2 en rouge et d'ordre 3 en vert)

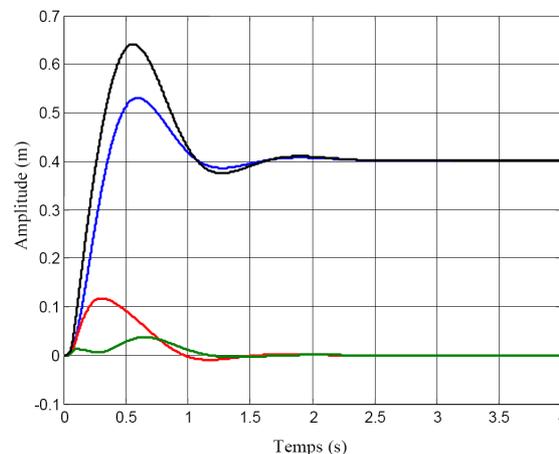


Figure 3.37 - Réponses indicielles du support d'étude pour une entrée d'amplitude 40 cm (modèle non linéaire en noir, noyau d'ordre 1 en bleu, noyau d'ordre 2 en rouge et d'ordre 3 en vert)

3.4.3 - Mise en évidence de l'influence des noyaux d'ordre 1, 2 et 3 par la représentation du système sous forme d'un diagramme de gain équivalent

Pour un système non linéaire, comme cela a été montré précédemment, une entrée sinusoïdale comportant une unique pulsation conduit à une sortie présentant un fondamental à cette pulsation et des harmoniques ; l'importance des harmoniques dépendant de l'amplitude de l'entrée.

Ainsi, pour un système non linéaire représenté par ses trois premiers noyaux de Volterra $H^1(s_1)$, $H^2(s_1, s_2)$, $H^3(s_1, s_2, s_3)$ la sortie $s(t)$ à une entrée du type $A \sin \omega t$ est de la forme :

$$s(t) = \text{Im} \left(A H^1(j\omega) e^{j\omega t} + A^2 H^2(j\omega, j\omega) e^{2j\omega t} + A^3 H^3(j\omega, j\omega, j\omega) e^{3j\omega t} \right). \quad (3.165)$$

L'entrée ne comportant pas de composante aux pulsations 2ω et 3ω , il n'est pas possible de tracer de diagramme de gain comme dans le cas linéaire. Cependant, en

considérant une entrée particulière comprenant des composantes à différentes pulsations, il est possible d'établir des pseudo-diagrammes de gain décrivant, pour une pulsation donnée le rapport entrée-sortie, la composante de la sortie à la pulsation considérée étant alors fonction des différents noyaux de Volterra du système.

Pour des raisons de causalité, l'entrée du système constitué par l'exemple d'illustration est une entrée en vitesse. La vitesse correspondante à un échelon de position peut être approximé à une entrée triangulaire similaire à celle représentée figure 3.38 (a). La position correspondante est obtenue figure 3.38 (b) par intégration.

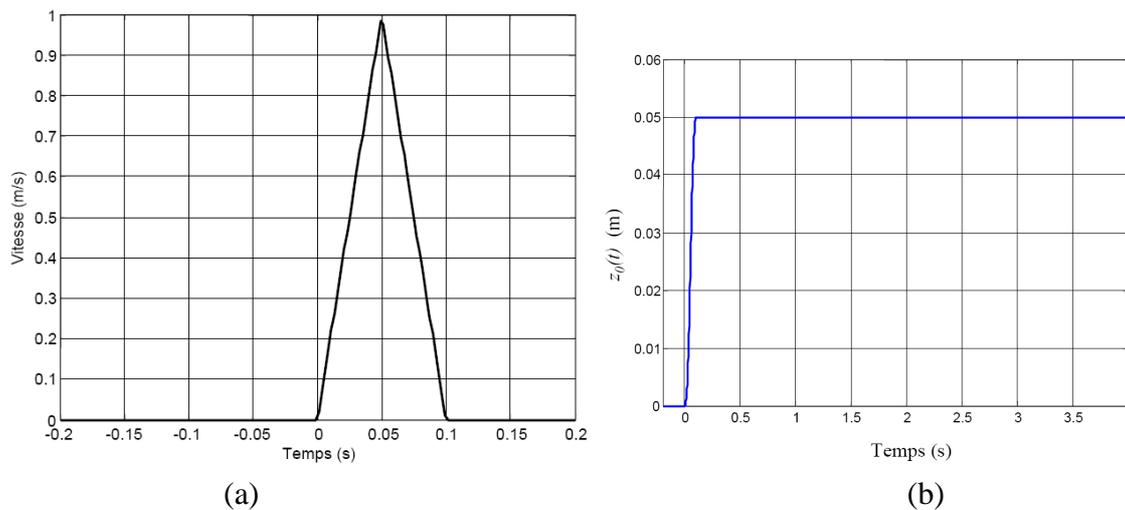


Figure 3.38 - Entrée en vitesse (a) et son équivalent en position (b) pour l'obtention d'un pseudo-diagramme de gain du système non linéaire

La fonction triangulaire utilisée ici est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 20t & \text{si } 0 \leq t < 0.05 \\ -20t + 2 & \text{si } 0.05 < t < 0.1 \\ 0 & \text{si } t > 0.1 \end{cases} \quad (3.166)$$

Afin d'obtenir un diagramme de gain équivalent, la décomposition en série de Fourier de ce signal triangulaire est effectué. Pour cela, le signal d'entrée représenté figure 3.38 (a) est supposé périodique de période suffisamment longue par rapport à la durée du régime transitoire de la sortie. Une période de 6 secondes, temps long vis-à-vis du temps de réponse du système s'avère suffisante en pratique.

La décomposition en série de Fourier est définie par

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \operatorname{Re}\left[(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t}\right] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}, \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j}\right) e^{jk\omega_0 t} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2j}\right) e^{-jk\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

avec

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned} \tag{3.168}$$

Les deux cents premiers coefficients de la décomposition en série de Fourier de l'entrée sont représentés figure 3.39.

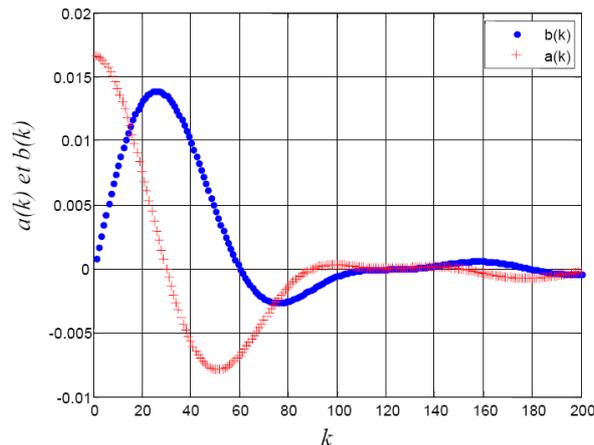


Figure 3.39 - Coefficients de la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée

La figure 3.40 présente la reconstruction du signal à partir des cent premiers termes de la série de Fourier correspondante.

En utilisant la représentation par série de Volterra du système, la réponse est donnée par

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - jb_k) H_1(j\omega_0 k) e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a_k - jb_k)(a_l - jb_l) e^{j(k+l)\omega_0 t} H_2(jk\omega_0, jl\omega_0) + \dots \tag{3.169}$$

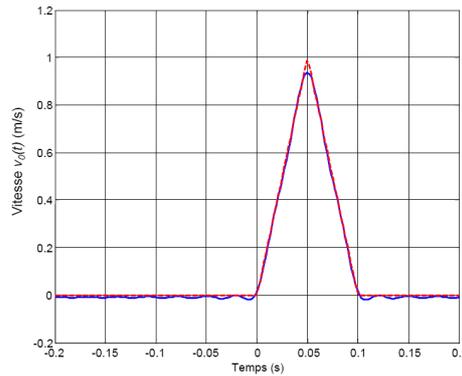


Figure 3.40 - Reconstruction du signal d'entrée à partir de sa décomposition en série de Fourier (en rouge le signal original, en bleu le signal reconstruit)

Pour la fréquence ω_i , l'amplitude de sortie A_{ω_i} est donnée par :

$$A_{\omega_i} = \text{Re} \left\{ \begin{aligned} &(-jb_k)H_1(j\omega_0k) + \sum_{k+l=\omega_i/\omega_0}^{\infty} (-jb_k)(-jb_l)H_2(jk\omega_0, jl\omega_0) + \\ &\sum_{k+l+m=\omega_i/\omega_0}^{\infty} (-jb_k)(-jb_l)(-jb_m)H_3(jk\omega_0, jl\omega_0, jm\omega_0) \end{aligned} \right\}. \quad (3.170)$$

A partir de cette expression, il est possible de déterminer, pour chaque fréquence, le rapport entre la sortie et l'entrée.

La figure 3.41 présente le diagramme de gain obtenu par cette méthode pour l'exemple d'illustration dans le cas où la suspension est réalisée par un arrangement parallèle de cellules RC en série, pour une masse suspendue de 75 kg, et pour le signal d'entrée représenté figure 3.38 (a) (diagramme de gain établi entre la vitesse d'entrée et la vitesse de la masse suspendue en sortie).

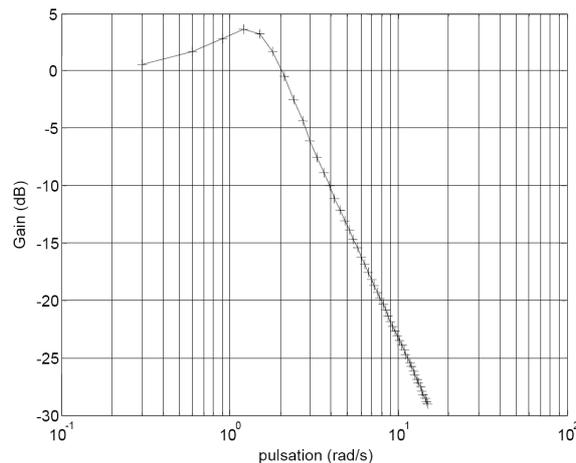


Figure 3.41 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude ($M=75$ kg)

La figure 3.42 présente les pseudo-diagrammes de gain du support d'étude obtenus à partir de différentes amplitudes du signal d'entrée.

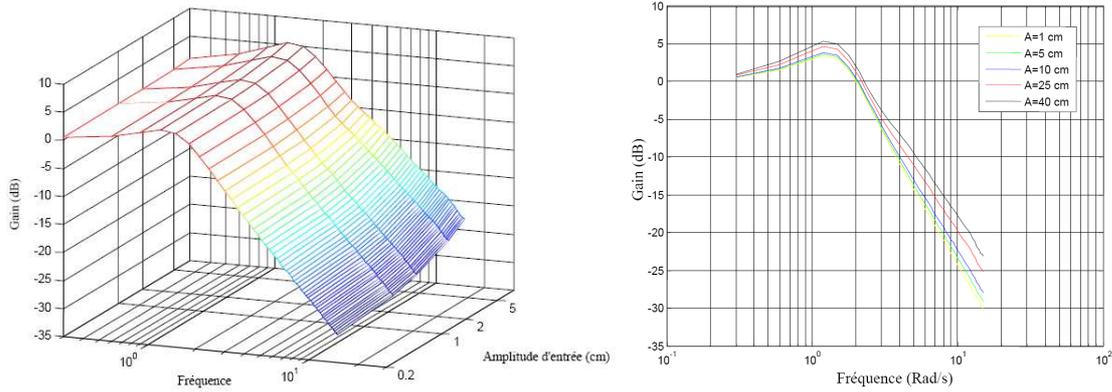


Figure 3.42 - Pseudo-diagrammes de gain du support d'étude pour différentes amplitudes en 3D (gauche) et en 2D (droite) ($M=75$ kg)

La figure 3.43 présente les mêmes courbes obtenues cette fois avec une masse suspendue de 150 kg.

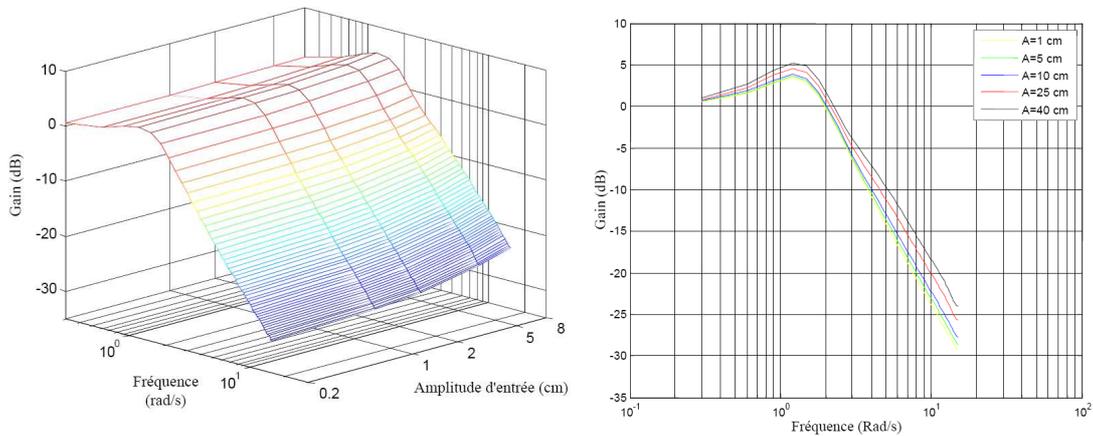


Figure 3.43 - Pseudo-diagrammes de gain du support d'étude pour différentes amplitudes en 3D (gauche) et en 2D (droite) ($M=150$ kg)

La comparaison entre ces différentes courbes permet de constater que les non-linéarités de la suspension n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue constatées dans le cas des petites amplitudes (chapitre 2).

Les figures 3.44 à 3.48 présentent la comparaison, pour chacune des amplitudes d'entrées considérées, des pseudo-diagrammes de gain pour les valeurs extrémales de la masse suspendue.

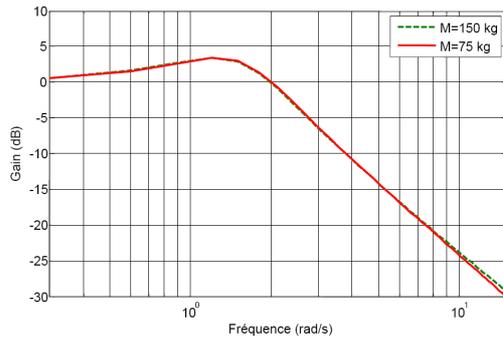


Figure 3.44 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude pour une amplitude d'entrée de 1 cm

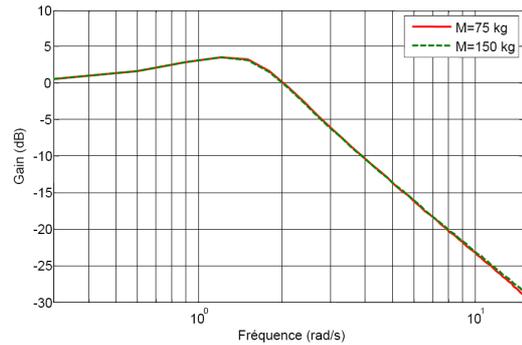


Figure 3.46 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude pour une amplitude d'entrée de 5 cm

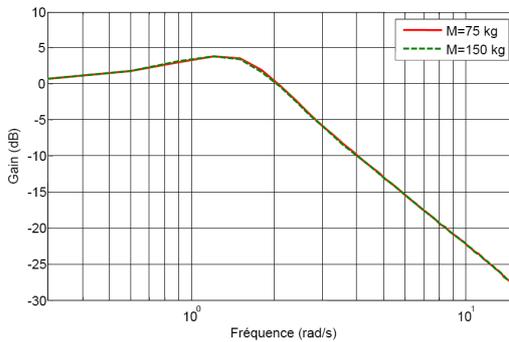


Figure 3.45 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude pour une amplitude d'entrée de 10 cm

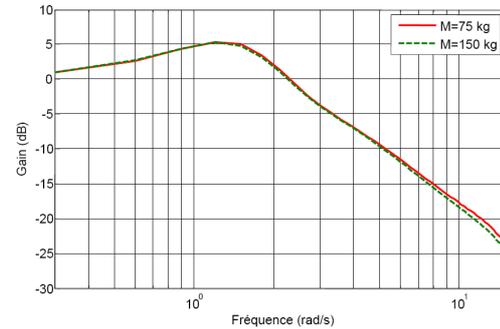


Figure 3.47 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude pour une amplitude d'entrée de 25 cm

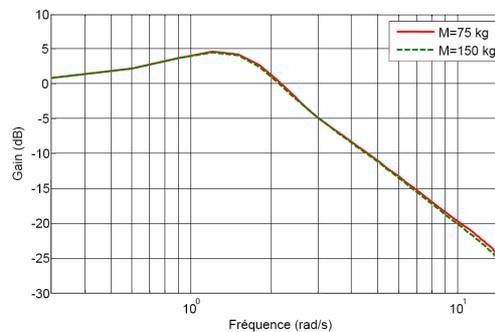


Figure 3.48 - Pseudo-diagramme de gain du support d'étude pour une amplitude d'entrée de 40 cm

Les figures 3.49 et 3.50 montrent les pseudo-lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert équivalente en boucle ouverte du système non linéaire pour les différentes amplitudes d'entrées et respectivement pour $M=75$ kg et $M=150$ kg.

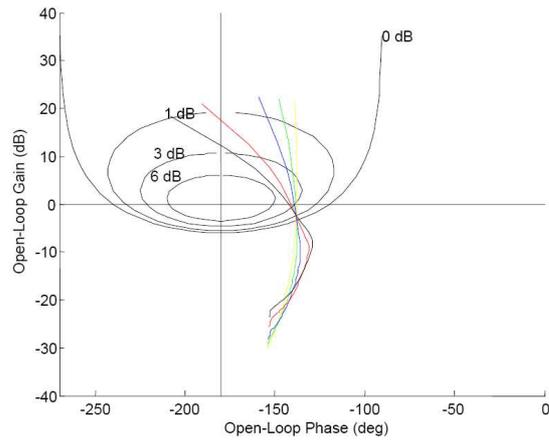


Figure 3.49 – Pseudo-lieux de Black-Nichols pour différentes amplitudes et pour la masse suspendue minimale

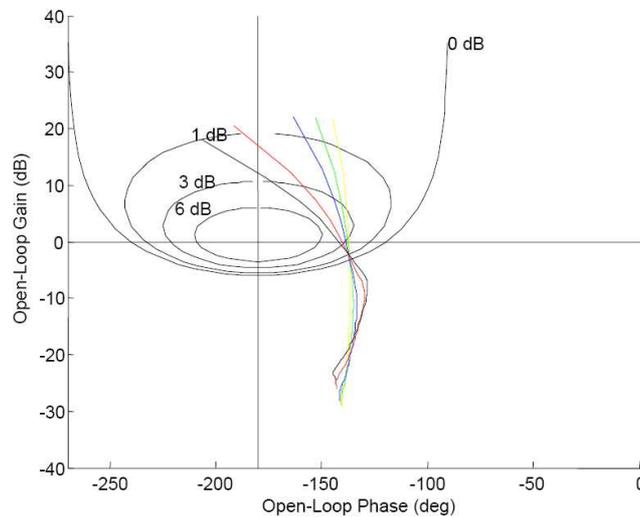


Figure 3.50 - Pseudo-lieux de Black-Nichols pour différentes amplitudes et pour la masse suspendue maximale

Les figures 3.51 à 3.55 comparent deux à deux les lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte pour les deux masses suspendues. En traits fins sont tracés également les lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle linéaire pour comparaison.

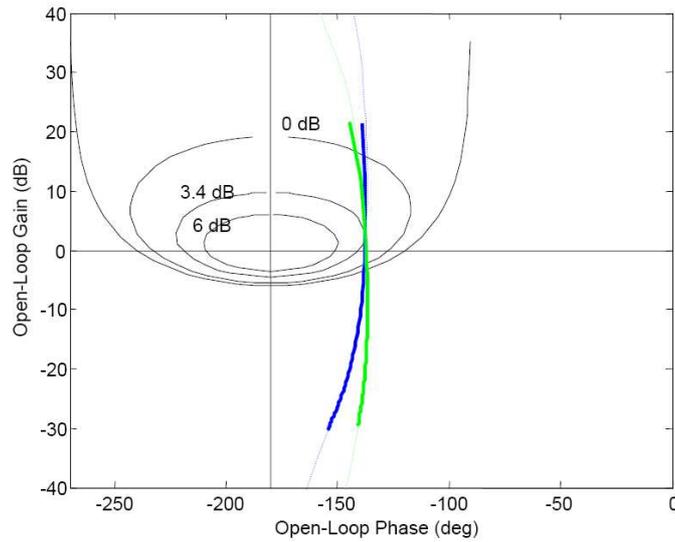


Figure 3.51 - Pseudo-lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert) pour une amplitude d'entrée de 1 cm

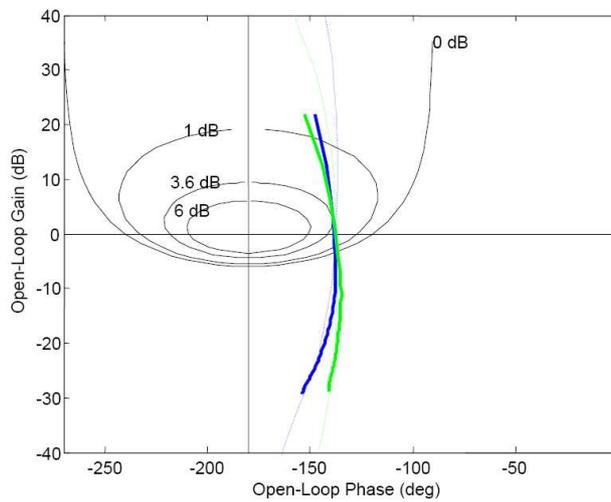


Figure 3.52 - Pseudo-lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert) pour une amplitude d'entrée de 5 cm

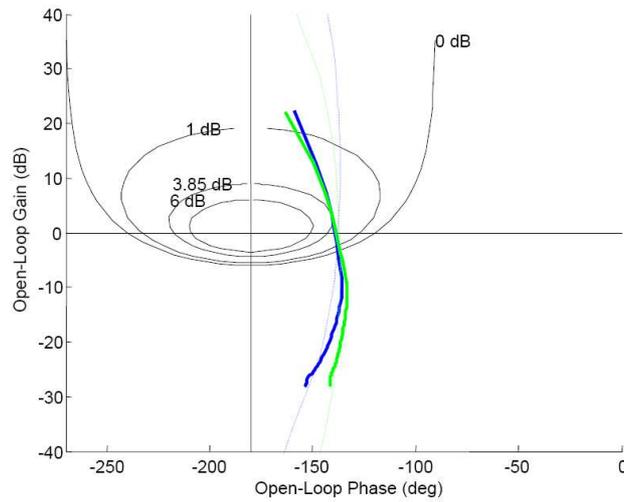


Figure 3.53 - Pseudo-lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert) pour une amplitude d'entrée de 25 cm

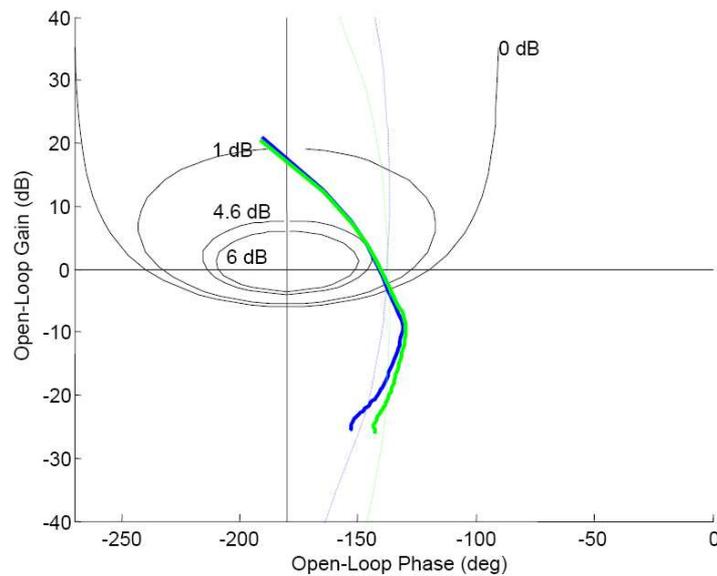


Figure 3.54 - Pseudo-lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert) pour une amplitude d'entrée de 40 cm

Ces figures permettent de tirer deux conclusions :

- l'influence des non-linéarités sur la fonction de transfert en boucle ouverte ne semble pas aisément représentable par une transformation mathématique simple à l'image de celle qui est définie au chapitre 2 pour représenter l'influence de la variation de la masse suspendue ;
- l'influence de la variation de la masse suspendue est de moins en moins marquée avec l'augmentation de l'amplitude d'entrée et donc l'augmentation de la contribution des noyaux d'ordre supérieurs à 1. Cette conclusion n'est pas évidente étant donnée la dépendance du noyau d'ordre 2 aux capacités C_i (relation (3.164)).

3.5 - Conclusion

Ce chapitre a permis de mettre en évidence l'intérêt des séries de Volterra pour l'étude de l'influence des non-linéarités dans la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. L'un des aspects intéressants des séries de Volterra est la possibilité de continuer à travailler dans le domaine fréquentiel avec des systèmes non linéaires. L'intérêt est de déterminer des diagrammes de gain équivalents. Cependant, ces diagrammes ne sont valables que pour un seul type d'entrée. De plus, ils nécessitent un temps de calcul très long et leur domaine de validité est lié au nombre de noyaux pris en compte. La première partie de ce chapitre montre que l'obtention des noyaux de Volterra d'ordre élevé reste difficile. C'est la raison pour laquelle les séries de Volterra restent utilisées principalement pour établir des modèles de systèmes par identification des noyaux.

Une autre difficulté liée à l'utilisation des séries de Volterra est l'interprétation des réponses fréquentielles d'ordre supérieur à 1. De nombreux travaux ont été menés dans ce domaine [Peyton, 1989b], [Peyton, 1991], [Chua, 1979], [Zhang, 1994] mais les résultats actuels ne sont pas encore satisfaisants. Une piste intéressante pour passer outre l'*interprétation* des noyaux multi-dimensionnels est l'utilisation d'équations différentielles linéaires associées aux noyaux de Volterra [Vazquez Feijoo, 2005], [Vazquez Feijoo, 2006]. Cependant, l'établissement de ces équations différentielles nécessite la *connaissance* des noyaux de Volterra du système.

Dans ce chapitre, seule la prise en compte des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques a été traitée. La prise en compte des non-linéarités des résistances hydrauliques pourrait se faire de la même façon. Il faut tout de même noter que la prise en compte simultanée des deux types de non-linéarités apparaît très difficile.

Ce chapitre termine la partie 1 consacrée aux aspects théoriques et indépendamment du secteur applicatif. La partie 2 est dédiée à l'application au domaine de l'automobile des résultats de cette partie 1.

Chapitre 4

Modèles de validation d'un véhicule automobile et modèles de synthèse pour la suspension

4.1 - Introduction

Dans le chapitre 1, l'intérêt de l'intégration non entière pour la robustesse du degré de stabilité est rappelé. Des pistes originales pour la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier par un réseau de cellules capacitives et dissipatives sont explorées. Le chapitre 2 met en évidence et démontre les propriétés remarquables, obtenues dans un contexte d'isolation vibratoire sur un exemple d'illustration, de la combinaison entre intégration non entière et technologie hydropneumatique. Le chapitre 3 permet de vérifier que les résultats remarquables obtenus dans le chapitre 2 dans le cadre d'une approche linéaire restent valables malgré la prise en compte des non-linéarités intrinsèques de certains composants hydropneumatiques. Ces trois chapitres, qui constituent la partie I de ce mémoire montrent donc l'intérêt de la réalisation en technologie hydropneumatique des suspensions CRONE, et ce en dehors de tout secteur applicatif. La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à l'exploitation dans le domaine automobile des résultats forts de la première partie.

L'objectif de ce chapitre 4 est, tout d'abord, de donner un aperçu des modèles utilisés pour la conception et la validation des suspensions automobiles en insistant sur les hypothèses simplificatrices qui définissent les limites du domaine de validité.

L'objectif n'est pas de faire un état des lieux exhaustif des différents modèles du véhicule utilisés dans la littérature, tel qu'il a pu être fait à plusieurs reprises, notamment dans [Stéphane, 2004] mais, d'une part, de mettre l'accent sur la difficulté qu'il y a à développer un modèle de validation et, d'autre part, de donner un aperçu des possibilités d'analyse offerte par un modèle de synthèse, à savoir le modèle quart de véhicule.

A partir des modèles détaillés dans ce chapitre 4, la synthèse d'une suspension et l'analyse de son intérêt dans le domaine automobile sont effectuées dans le chapitre 5.

4.2 - Modèles de validation

De nombreux modèles de validation sont actuellement utilisés. Cependant, il n'existe pas de modèle de référence standard qui puisse être utilisé pour l'automobile par tous les acteurs du développement et de la recherche. L'objectif de cette partie est de montrer les limites des principaux simulateurs et les difficultés pour construire un simulateur fiable et peu complexe.

Dans une première approche, les modèles de validation peuvent être classés en deux groupes :

- les modèles où les solides sont considérés comme des corps déformables ;
- les modèles dans lesquels les différentes parties du véhicule sont considérées comme étant des corps rigides, à l'exception des pneumatiques, des ressorts et amortisseurs de suspension.

4.2.1 - Modèles à corps déformables

Pour les systèmes à corps déformables, la modélisation fait très souvent appel à la méthode des éléments finis grâce à laquelle un corps peut être représenté par un grand nombre d'éléments polygonaux de base, reliés entre eux par leurs sommets [Bonnet, 2007]. Il est à noter qu'il est possible de ne considérer qu'un certain nombre de corps comme étant déformables. La figure 4.1 présente la modélisation complète par éléments finis d'un véhicule automobile. Cette figure est issue d'un travail précédent de l'auteur visant à valider une méthode de calcul des transmissions des vibrations dans une structure complexe par l'assemblage d'éléments plus simples. La figure 4.2 présente quelques uns de ces éléments plus simples : un modèle éléments finis d'une suspension avant ainsi qu'un modèle de suspension arrière reliée au berceau.

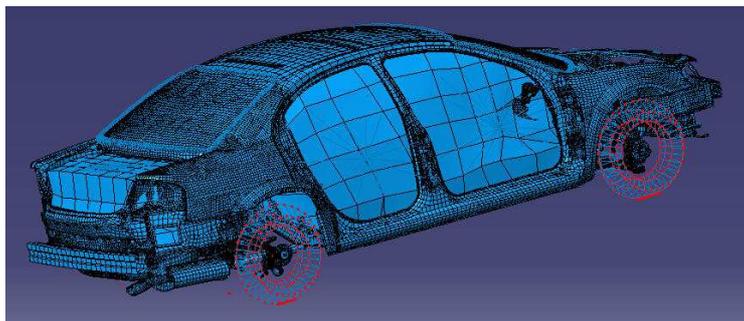


Figure 4.1 – Modélisation par éléments finis d'un véhicule automobile

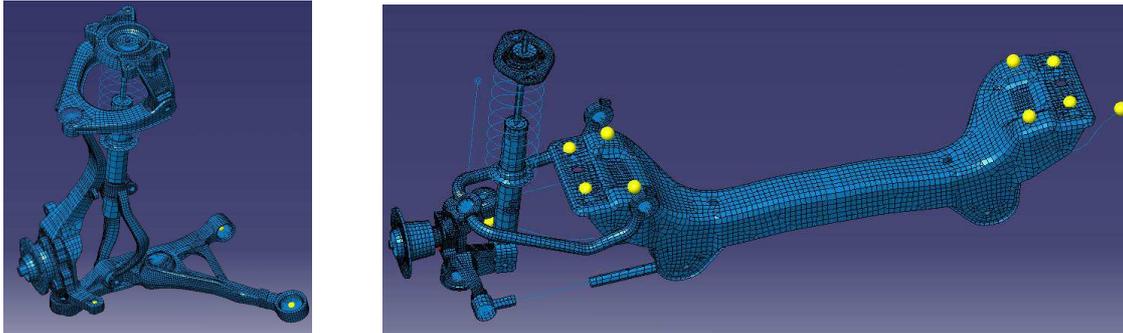


Figure 4.2 – Détails de la modélisation d'une suspension avant et de l'essieu arrière

Les modèles par éléments finis présentent l'avantage de fournir des résultats très précis pour lesquels l'erreur par rapport à la réalité peut être estimée avec précision [Kikuchi, 2007]. Ils peuvent être utilisés pour des simulations mettant en jeu des phénomènes complexes tels que des chocs, des interactions fluide – structure, des grandes déformations, etc. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils nécessitent, outre un important temps de calcul, une description très précise du système à modéliser. De plus, à partir des résultats obtenus pour un véhicule, il est très difficile d'extrapoler les résultats pour un autre type de véhicule. Pour ces raisons, les modèles par éléments finis qui sont très utilisés pour des simulations de crash, pour l'étude des vibrations de l'ensemble du véhicule et pour des vérifications de résistances mécaniques sont peu utilisés pour la dynamique du véhicule dans son environnement. Il est tout de même courant de trouver des modélisations par éléments finis des pneumatiques incorporées dans des modèles à base de corps rigides.

4.2.2 - Modèles à corps rigides

Les modèles à corps rigides sont les plus utilisés par les mécatroniciens lors de la conception ou de la re-conception d'organes, d'actionneurs ou de lois de commande.

Deux catégories de modèles de validation à corps rigides peuvent être définies : les modèles complexes et les modèles à quatre roues. En effet, beaucoup de laboratoires ou d'industriels disposent de modèles complexes, développés en interne ou par des sociétés spécialisées. Cependant, il est courant que des validations s'effectuent sur des modèles plus simples dits « modèles à quatre roues ».

Les modèles complexes, parmi lesquels peuvent être cités le modèle de base de CALLAS, logiciel de simulation de véhicule de la société SERA CD ou encore le modèle de l'environnement de simulation CarMaker de la société allemande IPG [Juricic, 2004], sont tous construits selon la même logique. Cette logique, qui a été reprise par Delphi et le projet VERTEC (projet d'une durée de trois ans coordonné par Pirelli et ayant notamment pour objectif le développement d'un modèle de véhicule) est en partie détaillée dans [Connair, 1999] et [Gianguilio, 2006].

Ces simulateurs sont organisés autour d'un noyau qui, généralement, représente le châssis du véhicule. Ce châssis est doté dans l'espace de six degrés de liberté², ce qui correspond au cas le plus général. Le châssis peut se déplacer en translation et en rotation suivant trois axes orthogonaux :

- les translations correspondent au déplacement du véhicule suivant ses axes longitudinal, transversal et vertical (mouvement de pompage de la caisse),
- les rotations correspondent, quant à elles, au lacet, au roulis et au tangage de la caisse.

De façon générale, les entrées du noyau central correspondent aux composantes des actions mécaniques exercées sur la caisse par son environnement, c'est-à-dire aussi bien par les organes du véhicule en liaison avec le châssis comme les suspensions, que par les effets aérodynamiques entraînés par le déplacement du véhicule dans l'air. Les angles de chasse, carrossage et pincement, résultant d'un autre bloc décrivant le comportement cinématique des suspensions, peuvent aussi être des entrées de ce bloc. Les sorties de ce noyau sont les paramètres cinématiques du châssis. Ces variables sont calculées par la résolution d'un système d'équations non linéaires issues de l'écriture du principe fondamental de la dynamique appliqué à la caisse ou de l'application du formalisme de Lagrange.

Il est également possible de considérer dans le noyau central l'ensemble, déformable, constitué par le châssis et les masses non suspendues. Dans ce cas, les entrées du noyau central sont les actions mécaniques exercées sur cet ensemble ainsi que la position verticale du point de contact roue-sol pour chacune des roues. Les sorties sont les variables cinématiques qui lui sont associées. Il est à noter qu'il y a autant de variables cinématiques associées à un ensemble que de degrés de liberté de cet ensemble. Pour l'ensemble masse suspendue – masses non suspendues, en général seize degrés de libertés sont pris en compte. Ces degrés de libertés correspondent aux six degrés de liberté de la masse suspendue auxquels s'ajoutent quatre degrés de liberté en translation verticale des masses non suspendues (degrés correspondant au battement de roue), quatre degrés de liberté en rotation correspondant à la rotation des roues autour de leurs axes de révolution, ainsi que deux degrés de liberté correspondant au braquage des roues avant.

Autour du noyau central s'articulent les modèles des différents organes du véhicule (figure 4.3) tels que la direction, les suspensions, le système de freinage, le groupe moto-propulseur, etc... La modélisation de chacun de ces organes n'est pas développée ici.

La finesse de la modélisation adoptée pour le noyau central conditionne de façon importante la qualité du simulateur et son domaine de validité. Le noyau des simulateurs comporte généralement un modèle quatre roues, avec quelques raffinements. Il est cependant possible d'employer des modèles plus complexes allant jusqu'à 38 degrés de liberté tels que

² Sont appelés «degrés de liberté» les mouvements indépendants possibles entre un solide et un autre. Un solide dans l'espace, non contraint par des liaisons avec d'autres éléments, possède six degrés de liberté.

ceux développés dans [Venture, 2003]. Il y est proposé la modélisation d'un véhicule par un système multicorps de 42 solides (figure 4.4).

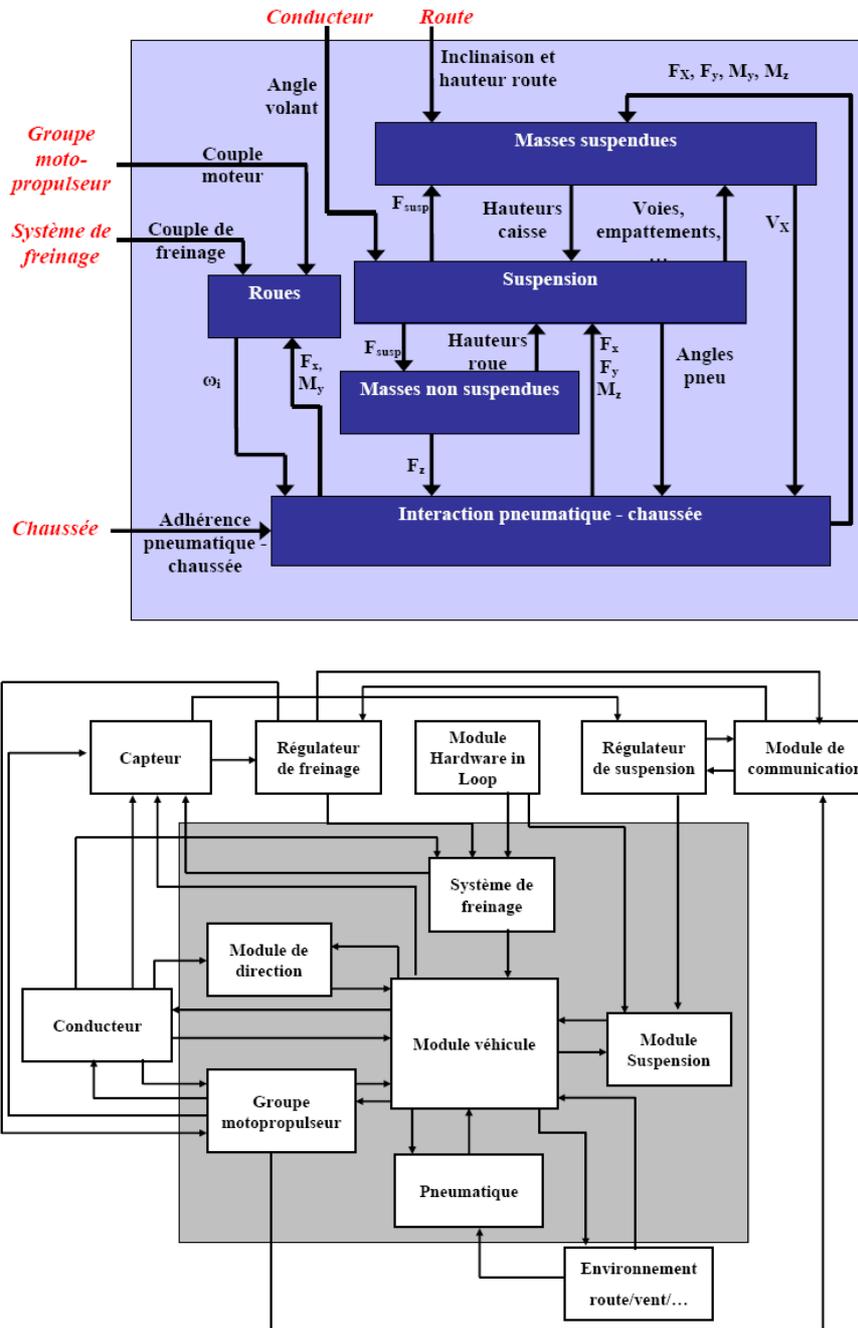


Figure 4.3 – Exemples d'architectures d'un simulateur de véhicule

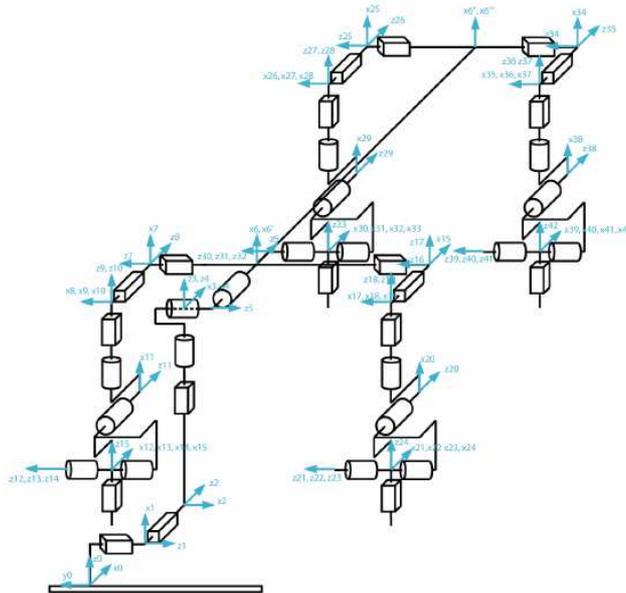


Figure 4.4 – Modèle à 38 degrés de liberté proposé dans [Venture 03]

Il est à noter que des modèles très complets, basés intégralement sur le formalisme bond-graph, ont été proposés ([Margolis, 2001]).

4.2.2.1 - Exemple d'un modèle classique à quatre roues

4.2.2.1.1 - Présentation du modèle

Le modèle à quatre roues (figure 4.5) est fréquemment utilisé, notamment à des fins de validation, comme par exemple dans [Kruczek, 2004], [Park, 1998]. Ce modèle est constitué de cinq solides supposés indéformables. Un premier solide représente l'ensemble des masses suspendues, c'est-à-dire les éléments du véhicule dont le poids est supporté par les suspensions : châssis et son habillage, bloc moteur, sièges, passagers, etc. Les quatre autres solides représentent les masses non suspendues, c'est-à-dire les éléments dont le poids est supporté directement par les pneumatiques sans passer par l'intermédiaire des suspensions. Les masses non suspendues comportent notamment les roues, les pièces mécaniques assurant la liaison des roues aux châssis, les éléments assurant la direction des roues, etc. Les masses non suspendues sont séparées en quatre solides selon leur localisation par rapport à l'ensemble du véhicule. Une convention largement adoptée consiste à numérotter les masses non suspendues de 1 à 4 en commençant par les masses non suspendues situées à l'avant gauche du véhicule (numérotées 1), puis par l'avant droit et l'arrière gauche et en terminant par l'arrière droit (masses non suspendues numérotées 4).

Les masses suspendues sont reliées aux masses non suspendues par l'intermédiaire des suspensions, éléments déformables dont la masse et l'inertie sont supposées nulles car déjà prises en compte en partie dans les masses suspendues et en partie dans les masses non suspendues. Les suspensions peuvent, elles aussi, être numérotées de 1 à 4 selon la même convention que celle utilisée pour les masses non suspendues. Les pneumatiques lient les

masses non suspendues à la route. Ce sont des éléments déformables, de masse et d'inertie supposées nulles car déjà incluses dans les masses non suspendues.

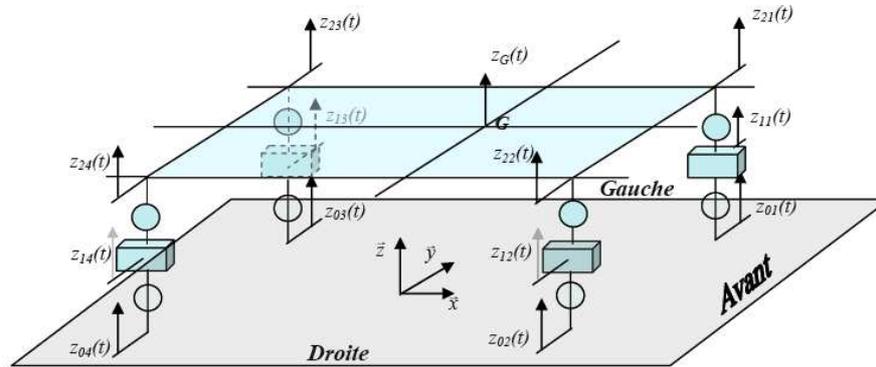


Figure 4.5 – Modèle à quatre roues où les éléments déformables (suspensions et pneumatiques) ont été remplacés par des sphères

Le modèle à quatre roues proposé ici comporte 16 degrés de liberté³ : 6 degrés de liberté pour le mouvement de la caisse dans l'espace, les masses non suspendues ont chacune un degré de liberté de translation verticale, les roues possèdent toutes un degré de liberté en rotation autour de leur axe de révolution, les roues avant possèdent chacune un degré de liberté correspondant au braquage.

Il est à noter qu'il est possible de considérer à partir de ce modèle des véhicules à quatre roues directrices de façon similaire à ce qui est fait avec un modèle plus simple comme dans [Ellouze, 2001].

Le modèle à quatre roues est très fréquemment utilisé pour uniquement l'étude de la dynamique verticale d'un véhicule. Dans ce cas, seuls sept degrés de liberté sont étudiés : le pompage de la caisse, son tangage et son roulis, et les quatre déplacements verticaux des masses non suspendues.

Quoiqu'il en soit, les équations dynamiques associées au comportement de ce modèle apparemment simple sont loin d'être triviales et il est nécessaire d'être très rigoureux quant aux hypothèses formulées pour leur obtention. En effet, très généralement de nombreuses hypothèses sont formulées implicitement afin d'obtenir des formes simplifiées des équations. L'objet de la partie suivante est de mettre en évidence ces hypothèses par une application rigoureuse à l'aide des torseurs et du formalisme d'Euler-Lagrange. L'objectif plus large est de montrer la difficulté à établir un modèle rigoureux pour un système aussi complexe qu'un véhicule automobile.

En général, le principe fondamental de la dynamique (PFD) est choisi pour écrire les équations correspondant au modèle quatre roues. Cependant, le principe fondamental de la

³ La notion de degré de liberté est à comprendre comme mouvement indépendant possible. Dans le schéma de la figure 4.5, les degrés de liberté correspondant au braquage des roues avant sont des entrées du module véhicule et sont considérés comme des paramètres de calcul. Un degré de liberté n'est donc pas forcément un état.

dynamique ne peut être utilisé que si la cinématique est précise, c'est-à-dire que si les liaisons entre les solides sont détaillées. Cela n'est pas le cas avec le modèle quatre roues présenté figure 4.5. Le fait de ne pas disposer d'information précise sur les liaisons entraîne inévitablement des simplifications notamment sur la position des points d'application des efforts. En effet, le principe fondamental de la dynamique s'applique sur un solide ou un ensemble de solide ne possédant pas de mouvement relatif entre eux. Pour le modèle quatre roues, l'application du PFD consiste à isoler successivement la masse suspendue et chacune des masses non suspendues. Pour chacun de ces éléments, il est nécessaire de faire un bilan des actions mécaniques exercées par l'extérieur sur le solide considéré. Le bilan doit faire apparaître pour chaque action mécanique sa direction, sa norme et son point d'application. A partir du modèle quatre roues présenté figure 4.5, il n'est pas possible d'arriver à ce niveau de détail. Les actions mécaniques exercées par les suspensions sur la caisse comportent une composante que l'on peut considérer verticale (nous reviendrons sur cette hypothèse par la suite) et des composantes suivant les axes longitudinaux et transversaux du véhicule, composantes qui permettent de mettre en mouvement le véhicule. Afin de déterminer ces composantes, qui ne sont pas égales aux efforts longitudinaux et transversaux des pneumatiques, il est nécessaire de connaître parfaitement la géométrie et les liaisons entre les pièces participant à la transmission de ces efforts du pneumatique à la caisse.

Pour cette raison, nous proposons, dans la suite, l'écriture des équations de comportement du véhicule quatre roues par le formalisme de Lagrange. Celui-ci est mis en œuvre à l'aide de la représentation sous forme de torseurs des champs de vecteurs. Le lecteur peu familiarisé avec cette représentation très classique en mécanique trouvera en annexe I la définition des notions nécessaires.

4.2.2.1.2 - Paramétrage du modèle en vue de l'application du formalisme de Lagrange

La première étape nécessaire à tout problème de mécanique consiste à mettre en place un paramétrage adapté, c'est-à-dire à introduire des repères liés aux solides et des paramètres à la fois géométriques et cinématiques. Les paramètres géométriques permettent de décrire la géométrie du système en positionnant les uns par rapport aux autres les points importants. Les paramètres cinématiques correspondent aux degrés de liberté entre les solides.

Le premier repère qu'il convient de mettre en place est un repère de référence, fixe par rapport à la terre. Ce repère est désigné par la suite R_0 . Il est constitué d'un trièdre orthonormé direct $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que \vec{z}_0 soit vertical vers le haut.

Il convient ensuite d'associer un repère au châssis (figure 4.6). Le repère châssis $\mathfrak{R}_G(\vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$ est orienté de tel façon que l'axe \vec{x}_G correspond à l'axe longitudinal de la caisse. Il est orienté de l'arrière vers l'avant. L'axe \vec{z}_G correspond à l'axe vertical de la caisse, il est orienté du bas vers le haut. L'axe \vec{y}_G correspond à l'axe transversal de la caisse, il est orienté de façon à ce que le trièdre $(\vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{z}_G)$ soit direct. L'origine G du repère châssis est le centre de gravité de la caisse. Le repère châssis est positionné par rapport au repère global par

trois angles, θ , φ , et ψ , qui désignent respectivement le roulis, le tangage et le lacet de la caisse. Ces angles ont été définis par la Society of Automotive Engineers (SAE) [Gillespie, 1992]. Afin de bien comprendre ce que représentent ces angles, il est nécessaire d'introduire un repère supplémentaire.

Le repère route $\mathfrak{R}_R(\bar{x}_R, \bar{y}_R, \bar{z}_R)$ a pour origine la projection suivant l'axe \bar{z}_0 sur le plan (\bar{x}_0, \bar{y}_0) du centre de gravité de la caisse, G. L'axe \bar{z}_R est confondu avec l'axe \bar{z}_0 . L'axe \bar{x}_R (respectivement \bar{y}_R) résulte de la normalisation de la projection du vecteur \bar{x}_G (respectivement \bar{y}_G) sur le plan (\bar{x}_0, \bar{y}_0) .

Le repère châssis est obtenu à partir du repère route par deux rotations successives. La première rotation correspond à l'angle de tangage φ autour de l'axe \bar{y}_R . Cette rotation engendre le repère $(G, \bar{x}_G, \bar{y}_R, \bar{z}')$. La seconde rotation est une rotation autour de \bar{z}' correspondant au roulis θ .

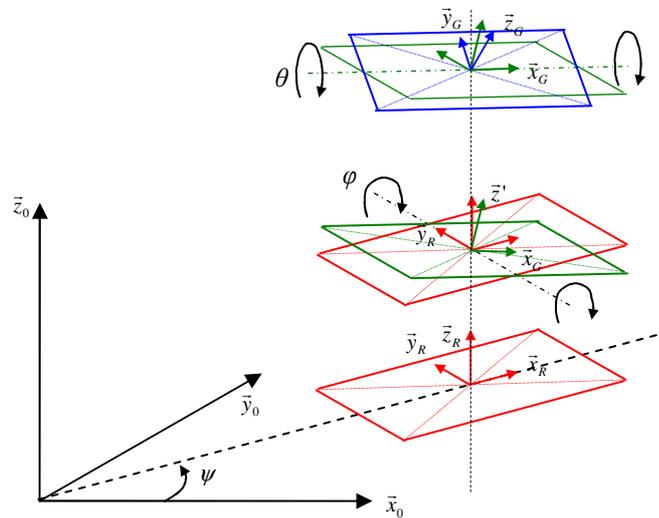


Figure 4.6 – Positionnement relatif des repères de référence (en noir), route (en rouge) et châssis (en bleu)

Enfin, à chacun des pneumatiques est associé un repère $\mathfrak{R}_{P_i}(\bar{x}_{P_i}, \bar{y}_{P_i}, \bar{z}_{P_i})$ ($i = 1$ à 4 ; $i = 1$ désigne le coté avant gauche, $i = 2$ le coté avant droit, $i = 3$ le coté arrière gauche et $i = 4$ le coté arrière droit du véhicule). Les repères des pneumatiques ont pour origine les points de contact P_i entre les pneumatiques i et la route (figure 4.7). Le vecteur \bar{z}_{P_i} est un vecteur normé, normal à la route au point de contact P_i . Le vecteur \bar{x}_{P_i} est tangent à la route, orthogonal au vecteur \bar{z}_{P_i} et dirigé suivant l'axe longitudinal de la roue i , orienté de l'arrière vers l'avant. Le vecteur \bar{y}_{P_i} est tel que le repère pneumatique $\mathfrak{R}_{P_i}(\bar{x}_{P_i}, \bar{y}_{P_i}, \bar{z}_{P_i})$ soit un repère orthonormé direct.

Nous faisons ici l'hypothèse simplificatrice que, à l'arrêt, sur route plate, les vecteurs \bar{z}_{P_i} sont colinéaires au vecteur \bar{z}_0 , les vecteurs \bar{x}_{P_i} et \bar{y}_{P_i} étant alors contenus dans le plan

(\vec{x}_0, \vec{y}_0) . Cette hypothèse revient à supposer que, au repos, les roues ne possèdent pas de carrossage. Cette propriété peut être obtenue lors de la conception du véhicule par la cotation dimensionnelle des trains.

Les paramètres à introduire correspondent aux translations de la caisse dans l'espace. Le centre de gravité de la caisse G peut être repéré par rapport au repère global par

$$\vec{OG} = X_G \vec{x}_0 + Y_G \vec{y}_0 + Z_G \vec{z}_0, \quad (4.1)$$

où X_G , Y_G , et Z_G sont les coordonnées du centre de gravité dans le repère de référence. Cependant, ce paramétrage n'est pas le plus judicieux dans les calculs, ni le plus utilisé, étant donné qu'il ne représente aucune grandeur mesurable sur le véhicule réel. En général, les vitesses du centre de gravité par rapport au repère global sont introduites :

$$\vec{V}_{G,C/R_0} = V_x \vec{x}_G + V_y \vec{y}_G + V_z \vec{z}_G, \quad (4.2)$$

où V_x , V_y , V_z représentent respectivement la vitesse longitudinale du véhicule, la vitesse transversale et la vitesse de pompage.

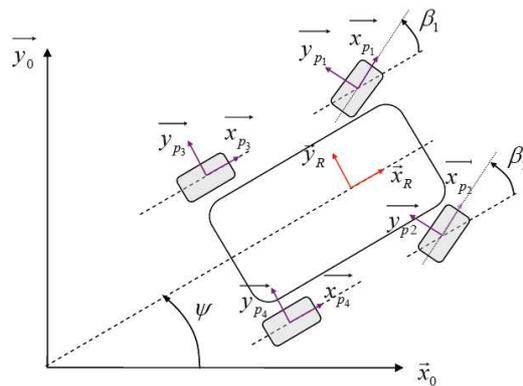


Figure 4.7 – Positionnement des repères pneumatiques par rapport au repère de référence et au repère route

Dans la suite du document, pour alléger l'écriture des équations, les dérivées des coordonnées du centre de gravité sont remplacées par V_x , V_y , V_z . Les formules de passage de l'une de ces notations à l'autre sont :

$$V_x = \frac{dX_G}{dt} \cos \varphi \cos \psi + \frac{dY_G}{dt} \cos \varphi \sin \psi - \frac{dZ_G}{dt} \sin \varphi, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
V_y &= \frac{dX_G}{dt} (\sin \theta \sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi) \\
&+ \frac{dY_G}{dt} (\sin \theta \sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi) \\
&+ \frac{dZ_G}{dt} \sin \theta \cos \varphi
\end{aligned} \tag{4.4}$$

et

$$\begin{aligned}
V_z &= \frac{dX_G}{dt} (\cos \theta \sin \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) \\
&+ \frac{dY_G}{dt} (\cos \theta \sin \varphi \sin \psi - \sin \theta \cos \psi) . \\
&+ \frac{dZ_G}{dt} \cos \theta \cos \varphi
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Les points d'attache des suspensions peuvent être repérés par rapport au centre de gravité de la caisse. Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'attache des suspensions 1, 2, 3 et 4 sur la caisse. Ces points sont repérés par :

$$\overrightarrow{GA_1} = L_1(t)\overrightarrow{x_G} + l_1(t)\overrightarrow{y_G} , \tag{4.6}$$

$$\overrightarrow{GA_2} = L_2(t)\overrightarrow{x_G} + l_2(t)\overrightarrow{y_G} , \tag{4.7}$$

$$\overrightarrow{GA_3} = -L_3(t)\overrightarrow{x_G} + l_3(t)\overrightarrow{y_G} \tag{4.8}$$

et
$$\overrightarrow{GA_4} = -L_4(t)\overrightarrow{x_G} - l_4(t)\overrightarrow{y_G} , \tag{4.9}$$

où les l_i représentent les demies voies du véhicule et les L_i représentent les empattements. Pour se placer dans le cas le plus réaliste possible, ces distances sont supposées pouvant être toutes différentes et variables dans le temps.

Les centres de gravité des masses non suspendues G_{MNS_i} peuvent être positionnés par rapport au centre du repère de référence⁴ :

$$\overrightarrow{OG_{MNS_1}} = X_G \overrightarrow{x_0} + Y_G \overrightarrow{y_0} + L_1 \overrightarrow{x_R} + l_1 \overrightarrow{y_R} + z_{a1}(t) \overrightarrow{z_0} , \tag{4.10}$$

$$\overrightarrow{OG_{MNS_2}} = X_G \overrightarrow{x_0} + Y_G \overrightarrow{y_0} + L_2 \overrightarrow{x_R} - l_2 \overrightarrow{y_R} + z_{a2}(t) \overrightarrow{z_0} , \tag{4.11}$$

$$\overrightarrow{OG_{MNS_3}} = X_G \overrightarrow{x_0} + Y_G \overrightarrow{y_0} - L_3 \overrightarrow{x_R} + l_3 \overrightarrow{y_R} - z_{a3}(t) \overrightarrow{z_0} \tag{4.12}$$

⁴ D'autres paramétrages, en apparence plus simple, sont possibles. L'intérêt du paramétrage introduit ici est qu'il permet de retrouver une forme bien connue pour l'équation de la dynamique verticale des masses non suspendues.

et

$$\overrightarrow{OG_{MNS_4}} = X_G \overrightarrow{x_0} + Y_G \overrightarrow{y_0} - L_4 \overrightarrow{x_R} - l_4 \overrightarrow{y_R} + z_{a4}(t) \overrightarrow{z_0}, \quad (4.13)$$

où les $z_{ai}(t)$ représentent la hauteur des masses non suspendues.

Il est important de noter que les centres de gravité des masses non suspendues ne sont pas toujours situés au droit des points d'attache des suspensions. Ce n'est le cas que lorsque le véhicule n'a ni roulis ni tangage.

Le point de contact P_i entre le pneumatique i et le sol est supposé être à la verticale du centre de gravité des masses non suspendues :

$$\overrightarrow{G_{MNS_1}P_1} = -(r_0 + d_{p1}(t)) \overrightarrow{z_0}, \quad (4.14)$$

$$\overrightarrow{G_{MNS_2}P_2} = -(r_0 + d_{p2}(t)) \overrightarrow{z_0}, \quad (4.15)$$

$$\overrightarrow{G_{MNS_3}P_3} = -(r_0 + d_{p3}(t)) \overrightarrow{z_0} \quad (4.16)$$

et

$$\overrightarrow{G_{MNS_4}P_4} = -(r_0 + d_{p4}(t)) \overrightarrow{z_0}, \quad (4.17)$$

où r_0 est le rayon sous charge des pneumatiques lorsque le véhicule est immobile et où d_{pi} correspond à la déformation du pneumatique i . L'altitude z_{pi} , par rapport au repère de référence, du point de contact entre le pneumatique i et le sol peut également être introduite :

$$\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{z_0} = z_{pi}. \quad (4.18)$$

Une fois tous ces paramètres définis, il est possible d'appliquer le formalisme de Lagrange au modèle à quatre roues afin de déterminer les équations du mouvement.

4.2.2.1.3 - Application du formalisme de Lagrange

Les équations de Lagrange, obtenues à partir du principe des puissances virtuelles, peuvent, dans leur utilisation la plus fréquente, être présentées comme des « tranches » du théorème de l'énergie cinétique dans lequel on aurait séparé la contribution de chacun des « p » variables cinématiques du système. Ces tranches forment un ensemble de « p » équations possédant « p » inconnues.

Les équations de Lagrange peuvent donc être considérées comme une extension du théorème de l'énergie cinétique pour les systèmes dont la cinématique est décrite par plus d'un paramètre [Chevalier, 1996].

Dans le cas d'un système Σ constitué de plusieurs solides S_k , l'équation de Lagrange relative au paramètre q_i pour le système Σ s'écrit de façon générale :

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T_{\Sigma/R_G}}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial T_{\Sigma/R_G}}{\partial q_i} = Q_i(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_G) + \sum_{j,k=1}^{j,k=n} Q_i(S_j \leftrightarrow S_k) + \lambda a_i. \quad (4.19)$$

Dans cette équation, q_i désigne le déplacement généralisé i du système, \dot{q}_i désigne le flux généralisé (dérivée par rapport au temps de q_i : cette notation étant largement utilisée par la suite), T_{Σ/R_G} représente l'énergie cinétique du système Σ en mouvement par rapport au repère galiléen R_G . $Q_i(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_G)$ est un coefficient énergétique représentant l'action des efforts extérieurs ayant un effet sur q_i . $Q_i(S_j \leftrightarrow S_k)$, quant à lui, est un coefficient énergétique représentant les effets sur le terme Q_i des efforts internes au système Σ . Enfin, λa_i est appelé multiplicateur de Lagrange, il traduit l'existence de liens entre les différents paramètres q_i . Si les q_i sont tous indépendants, λa_i est nul.

L'énergie cinétique T_Σ du système est la somme des énergies cinétiques de chacun des éléments, soit :

$$T_\Sigma = T_{MS} + T_{MNS1} + T_{MNS2} + T_{MNS3} + T_{MNS4}, \quad (4.20)$$

où T_{MS} représente l'énergie cinétique de la masse suspendue et T_{MNSi} , i allant de 1 à 4, représente l'énergie cinétique des masses non suspendues i .

L'énergie cinétique T_{MS} de la masse suspendue peut être calculée comme étant la moitié du comoment entre le torseur cinétique \mathcal{C}_{C/R_0} de la masse suspendue dans son mouvement par rapport au repère global R_0 supposé galiléen⁵ et de son torseur cinématique \mathcal{C}_{C/R_0} . Le torseur cinétique \mathcal{C}_{C/R_0} peut s'exprimer, au centre de gravité de la caisse, soit :

$$\mathcal{C}_{C/R_0} = \left\{ \begin{array}{c} M_C \overrightarrow{V_{G/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}} \end{array} \right\}_G, \quad (4.21)$$

où M_C désigne la masse de la caisse et où $\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}}$ est le moment cinétique de la masse suspendue dans son mouvement par rapport au repère global R_0 .

Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}} = I_C \overrightarrow{\Omega_{C/R_0}}, \quad (4.22)$$

⁵ Il est montré dans [Chevalier, 1996] que l'erreur commise lors de cette approximation est inférieure à 1%.

où I_C désigne la matrice d'inertie de la caisse exprimée au centre de gravité G , $\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0}$ désigne le vecteur instantané de rotation de la caisse, et s'exprime conformément à la définition des angles de tangage, roulis et lacet :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = \dot{\psi}(t) \overrightarrow{z_0} + \dot{\phi}(t) \overrightarrow{y_R} + \dot{\theta}(t) \overrightarrow{x_G}. \quad (4.23)$$

Le calcul du moment cinétique de la caisse donne généralement lieu à la formulation de deux hypothèses.

Hypothèse 1

La matrice d'inertie I_C de la caisse est de la forme :

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

lorsqu'elle est exprimée dans le repère lié à la caisse $\mathfrak{R}_G(G, \overline{x}_G, \overline{y}_G, \overline{z}_G)$. Cette hypothèse revient à supposer que les axes du repère véhicule sont les axes principaux d'inertie du véhicule.

L'expérience dans ce domaine [Brossard, 2006] suggère plutôt d'utiliser une matrice de la forme :

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & I_{Czx} \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ I_{Czx} & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Toutefois, dans la suite de ce document, c'est la forme simplifiée de l'expression (4.24) qui est utilisée pour des raisons de simplicité.

Hypothèse 2

En général, le vecteur instantané de rotation est considéré égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} + \dot{\phi} \overrightarrow{y_G} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_G}. \quad (4.26)$$

En réalité, d'après les définitions adoptées, ce vecteur est égal à :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} &= (\dot{\theta} - \dot{\psi} \sin \varphi) \overrightarrow{x_G} \\ &+ (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \cos \varphi \sin(\theta)) \overrightarrow{y_G} \\ &+ (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\phi} \sin \theta) \overrightarrow{z_G} \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'approximation de l'équation (4.26) revient donc à supposer que les angles de tangage et roulis restent faibles.

Ces deux hypothèses conduisent à écrire le torseur cinétique sous la forme

$$\mathcal{O}_{C/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} M_C (\overrightarrow{V_x x_G} + \overrightarrow{V_y y_G} + \overrightarrow{V_z z_G}) \\ I_{C_x} \dot{\theta} \overrightarrow{x_G} + I_{C_y} \dot{\phi} \overrightarrow{y_G} + I_{C_z} \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} \end{array} \right\}_G. \quad (4.28)$$

Le torseur cinématique exprimé au point G est défini par :

$$\mathcal{O}_{G/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{MS/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{G,S/R_0}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} + \dot{\phi} \overrightarrow{y_G} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_G} \\ \overrightarrow{V_x x_G} + \overrightarrow{V_y y_G} + \overrightarrow{V_z z_G} \end{array} \right\}_G. \quad (4.29)$$

L'énergie cinétique de la masse suspendue T_{MS} est donc donnée par :

$$T_{MS} = \frac{1}{2} \left[M_C (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + I_{C_x} \dot{\theta}^2 + I_{C_y} \dot{\phi}^2 + I_{C_z} \dot{\psi}^2 \right]. \quad (4.30)$$

La suite des calculs peut être menée de façon similaire. Afin de ne pas alourdir inutilement cette partie, le développement des calculs et les hypothèses introduites sont reportées en annexe 2.

4.2.2.1.4 - Bilan

Finalement, l'écriture des quatorze équations de Lagrange relatives au 14 variables du système (seize degré de liberté auxquels sont retranchés les angles de braquage qui sont imposés par l'environnement du système) conduit à un système de quatorze équations à quatorze inconnues décrivant le comportement du système en fonction des entrées choisies (efforts suspensions, efforts verticaux de la chaussée sur les pneumatiques, etc) :

- dynamique de translation longitudinale

$$\begin{aligned} (M_C + 2M_{mns1} + 2M_{mns3}) \dot{V}_x - 2\dot{\psi} l_1 (M_{mns1} + M_{mns3}) \\ = (F_{xp1} + F_{xp2}) \cos \beta_1 - (F_{yp1} + F_{yp2}) \sin \beta_1 + F_{xp3} + F_{xp4}, \quad (4.31) \\ - \frac{1}{2} \rho_{air} C_x S_f V_{aéro}^2 \end{aligned}$$

- dynamique de translation transversale

$$\begin{aligned} (M_C + 2M_{mns1} + 2M_{mns3}) \dot{V}_y - 2\dot{\psi} L_1 (M_{mns1} + M_{mns3}) \\ = (F_{xp1} + F_{xp2}) \sin \beta_1 + (F_{yp1} + F_{yp2}) \cos \beta_1 + F_{yp3} + F_{yp4}, \quad (4.32) \end{aligned}$$

- dynamique de translation verticale de la masse suspendue

$$M_C \dot{V}_z = -M_C g + F_{susp1} + F_{susp2} + F_{susp3} + F_{susp4}, \quad (4.33)$$

- dynamique de translation verticale des 4 masses non suspendues

$$M_{MNS1} \ddot{z}_{a1} = -M_{MNS1} g + F_{Zp1} - F_{susp1}, \quad (4.34)$$

$$M_{MNS1} \ddot{z}_{a2} = -M_{MNS1} g + F_{Z_{p2}} - F_{susp2} , \quad (4.35)$$

$$M_{MNS3} \ddot{z}_{a3} = -M_{MNS3} g + F_{Z_{p3}} - F_{susp3} \quad (4.36)$$

et

$$M_{MNS3} \ddot{z}_{a4} = -M_{MNS3} g + F_{Z_{p4}} - F_{susp4} , \quad (4.37)$$

- dynamique de rotation en tangage

$$I_{C_y} \ddot{\phi} = -L_1 (F_{susp1} + F_{susp2}) + L_3 (F_{susp3} + F_{susp4}) + \frac{1}{2} \rho_{air} z_G C_x S_f V_{aéro}^2 , \quad (4.38)$$

- dynamique de rotation en roulis

$$I_{C_z} \ddot{\theta} = l_1 (F_{susp1} + F_{susp2}) + l_3 (F_{susp3} - F_{susp4}) , \quad (4.39)$$

- dynamique de rotation en lacet

$$\begin{aligned} & \left[I_{C_y} + 2I_{MNS1Z} + 2I_{MNS3Z} + 2M_{MNS1} (l_1^2 + L_1^2) + 2M_{MNS3} (l_3^2 + L_3^2) \right] \ddot{\psi} \\ & - 2 [M_{MNS1} l_1 + M_{MNS3} l_3] \dot{V}_x - 2 [M_{MNS1} L_1 + M_{MNS3} L_3] \dot{V}_y \\ & + 2I_{MNS1Z} \ddot{\beta}_1 = F_{X_{p1}} (L_1 \sin \beta_1 - l_1 \cos \beta_1) + F_{X_{y1}} (l_1 \sin \beta_1 + L_1 \cos \beta_1) \\ & + F_{X_{p2}} (L_1 \sin \beta_1 + l_1 \cos \beta_1) + F_{X_{y1}} (-l_1 \sin \beta_1 + L_1 \cos \beta_1) \\ & - F_{X_{p3}} l_3 - F_{Y_{p3}} L_3 + F_{X_{p4}} l_3 + F_{Y_{p4}} L_3 + M_{p1} + M_{p2} + M_{p3} + M_{p4} , \end{aligned} \quad (4.40)$$

- dynamique de rotation des 4 roues

$$I_{MNS1} \dot{\omega}_1 = C_{mot1} - F_{Xp1} r , \quad (4.41)$$

$$I_{MNS1} \dot{\omega}_2 = C_{mot2} - F_{Xp2} r , \quad (4.42)$$

$$I_{MNS3} \dot{\omega}_3 = C_{mot3} - F_{Xp3} r \quad (4.43)$$

et

$$I_{MNS3} \dot{\omega}_4 = C_{mot4} - F_{Xp4} r . \quad (4.44)$$

Douze hypothèses ont été formulées pour arriver à ce système. La justification de l'introduction de ces hypothèses est donnée en annexe 2. Elles sont rappelées dans le cadre de ce bilan.

Hypothèse 1

La matrice d'inertie I_C de la caisse est de la forme :

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{C_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{C_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{C_z} \end{pmatrix} , \quad (4.45)$$

lorsqu'elle est exprimée dans le repère \mathfrak{R}_G lié à la caisse. Cette hypothèse revient à supposer que les axes du repère véhicule sont les axes principaux d'inertie du véhicule.

Hypothèse 2

En général, le vecteur instantané de rotation est considéré égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = \dot{\psi} \overrightarrow{z}_G + \dot{\phi} \overrightarrow{y}_G + \dot{\theta} \overrightarrow{x}_G. \quad (4.46)$$

Hypothèse 3

Les vitesses de variation des voies et empattements sont supposées négligeables devant les autres termes.

Hypothèse 4

La forme générale de la matrice d'inertie des masses non suspendues, exprimée dans le repère pneumatique I , est donnée par

$$I_{MNS1} = \begin{pmatrix} I_{MNS1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{MNS1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{MNS1z} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Hypothèse 5

Le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0}$ peut être supposé égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0} = \beta_1 \overrightarrow{z}_0 + \omega_1 \overrightarrow{y}_{p1} + \dot{\psi} \overrightarrow{z}_G, \quad (4.48)$$

où β_1 est l'angle de braquage des roues avant gauche, où ω_1 est leur vitesse de rotation et où \overrightarrow{y}_{p1} désigne l'axe de rotation des roues.

Hypothèse 6

Les efforts aérodynamiques sont modélisables par un torseur appliqué au centre de gravité de la caisse G . Dans [Venture, 2003], le torseur des efforts aérodynamique est proposé sous la forme

$$\{\mathcal{T}_{aéro}\} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \rho_{air} C_x S_f V_{aéro}^2 \overrightarrow{x}_G \\ \frac{1}{2} \rho_{air} z_G C_x S_f V_{aéro}^2 \overrightarrow{y}_G \end{array} \right\}_G, \quad (4.49)$$

avec ρ_{air} la masse volumique de l'air supposée constante et égale à $1,225 \text{ kg/m}^3$, S_f la surface frontale du véhicule et C_x le coefficient de pénétration dans l'air.

Hypothèse 7

Les actions mécaniques provenant du groupe motopropulseur ou du système de freinage peuvent être considérées comme des actions mécaniques extérieures. En réalité, il s'agit d'actions mécaniques internes à notre système d'étude. Cependant, les étudier comme telles nécessiterait la prise en compte des éléments de la chaîne de transmissions (boite de

vitesse, différentiel, etc) et du système de freinage (étriers notamment). Cela fait l'objet d'un développement rigoureux (et complexe) dans [Brossard, 2006].

De plus, ces actions mécaniques peuvent se ramener au torseur

$$\{\tau_{C_{mot} \rightarrow roue_i}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{mot_i} \quad y_{p_i} \end{array} \right\}_{G_{MNS_i}} . \quad (4.50)$$

Hypothèse 8

Les actions mécaniques exercées par la suspension i sur la caisse du véhicule peuvent être représentées par le torseur

$$\{\tau_{Suspi \rightarrow Caisse}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{suspi} \quad \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_i} . \quad (4.51)$$

Hypothèse 9 :

La vitesse du point d'attache de la suspension sur les masses non suspendues est identique à la vitesse du centre de gravité des masses non suspendues.

Hypothèse 10

Les angles de braquage avant sont égaux.

Hypothèse 11

Les masses suspendues avant ont des caractéristiques similaires (masse et inerties). Il en est de même pour les masses suspendues arrière.

Hypothèse 12

Le véhicule est symétrique droite-gauche, par conséquent les empattements et les voies sont identiques à droite et à gauche.

Les équations présentées ci-dessus permettent de construire le noyau d'un modèle de validation globale qui est utilisé dans le chapitre 5 pour la validation du comportement de la suspension CRONE hydractive. A ce noyau, il s'agit d'associer des blocs décrivant le comportement des organes du véhicule.

4.2.2.2 - Conclusion sur les modèles de validation

Généralement, les modèles de validation supposent, dans un premier temps, une cinématique très sommaire du véhicule. Des mesures sur banc d'essais permettent ensuite d'enrichir le modèle à l'aide de tables (LUT : Look Up Table) comprenant les variations des grandeurs caractéristiques telles que la voie, l'empattement, le carrossage, etc, en fonction des débattements des suspensions et de la position de la crémaillère de direction. Ces tables

tiennent compte aussi bien de la cinématique des trains, imposée par les différentes liaisons entre les éléments, que de l'élastocinématique.

L'élastocinématique désigne l'ensemble des phénomènes liés, d'une part, à la déformation intrinsèque des pièces constituant un train de véhicule et, d'autre part, à la présence de cales viscoélastiques utilisées en tant qu'élément de liaison filtrant entre le train et le châssis. L'élastocinématique introduit des déformations supplémentaires difficiles à modéliser simplement, c'est pourquoi elles sont prises en compte uniquement au travers de tables.

Les déformations liées à l'élastocinématique sont bien moins importantes (sur le plan cinématique) que les déformations liées aux liaisons principales des pièces du véhicule. Cependant, l'élastocinématique engendre des effets parfois non négligeables, principalement lors des situations extrêmes du véhicule (freinage d'urgence, virage serré à vitesse élevée...). C'est pourquoi un modèle de validation se doit de tenir compte des effets de l'élastocinématique.

4.3 - Modèles de synthèse

Au contraire, les modèles de synthèse utilisés dans le cadre des fonctions châssis (direction, freinage et suspension) se limitent souvent à une géométrie et une cinématique très simples ne tenant pas compte des déformations générées par l'élastocinématique.

4.3.1 - Exemple d'illustration : la suspension de véhicule

4.3.1.1 - Quelques éléments technologiques

Les suspensions de véhicule sont essentiellement constituées d'un élément capacitif (ressort métallique ou ressort à gaz) et d'un élément dissipatif (amortisseur). La figure 4.8 présente deux suspensions avant, l'une mécanique, l'autre hydropneumatique (appelée encore oléopneumatique).

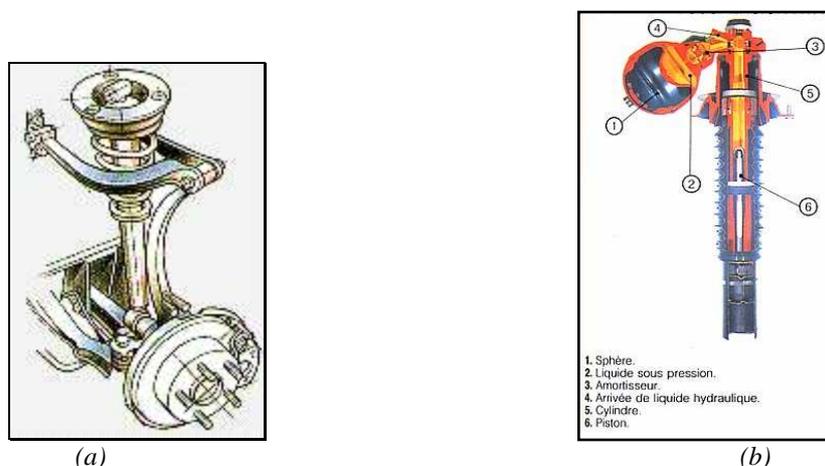


Figure 4.8 – Exemples de suspensions avant : mécanique (a) et hydropneumatique (b)

Les ressorts de suspension des véhicules de tourisme dans leur domaine nominal de fonctionnement sont linéaires (ou quasi-linéaire pour les ressorts à gaz). Par contre, les amortisseurs sont volontairement non linéaires afin de limiter pour les grandes vitesses de débattement l'effort transmis par l'amortisseur à la caisse. La figure 4.9 présente un amortisseur de suspension hydro-pneumatique et sa caractéristique pression-débit non linéaire.

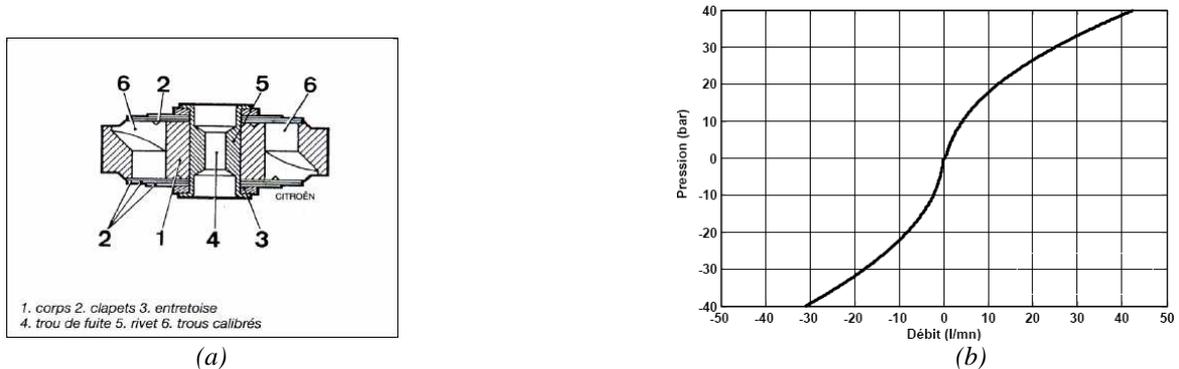


Figure 4.9 – Amortisseur de suspension hydro-pneumatique (a) et sa caractéristique pression-débit non linéaire (b)

4.3.1.2 - Présentation du modèle quart de véhicule

Le modèle de synthèse le plus utilisé pour la conception de suspension est sans aucun doute le modèle quart de véhicule présenté figure 4.10.

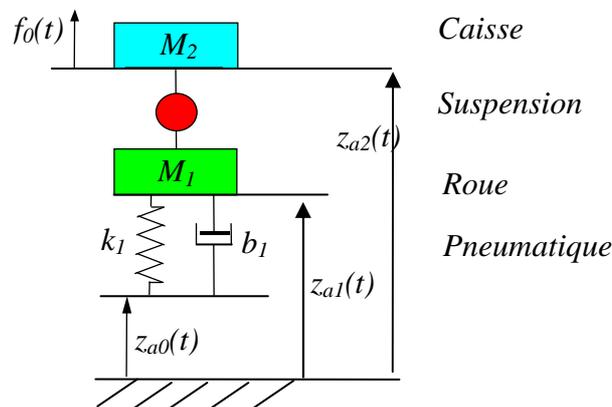


Figure 4.10 – Modèle quart de véhicule pour la conception de suspension

Ce modèle est utilisé pour l'étude de la dynamique verticale d'un quart de véhicule. La caisse du véhicule y est représentée par une masse M_2 en translation verticale par rapport au centre roue, lui-même en translation verticale par rapport à la route. Les masses non suspendues sont modélisées par une masse M_1 dont le centre de gravité est confondu avec le centre roue. La position verticale de caisse par rapport à un référentiel arbitraire (référentiel

fixe et supposé galiléen) est désignée $z_{a2}(t)$. $z_{a1}(t)$ et $z_{a0}(t)$ désignent respectivement la position verticale du centre roue et la hauteur du point de contact pneumatique-chaussée par rapport au même référentiel.

La raideur verticale équivalente du pneumatique est noté k_I . Son coefficient de frottement visqueux est noté b_I . Le comportement vertical du pneumatique est supposé linéaire dans la plage de fonctionnement considérée.

Un effort noté $f_0(t)$ représente les actions extérieures appliquées au quart de véhicule, comme par exemple les reports de charge consécutifs aux actions du conducteur.

Les sollicitations exercées sur la quart de véhicule peuvent être classées selon leur origine : sollicitations route ou sollicitations conducteur. La figure 4.11 illustre ces deux types de sollicitations.

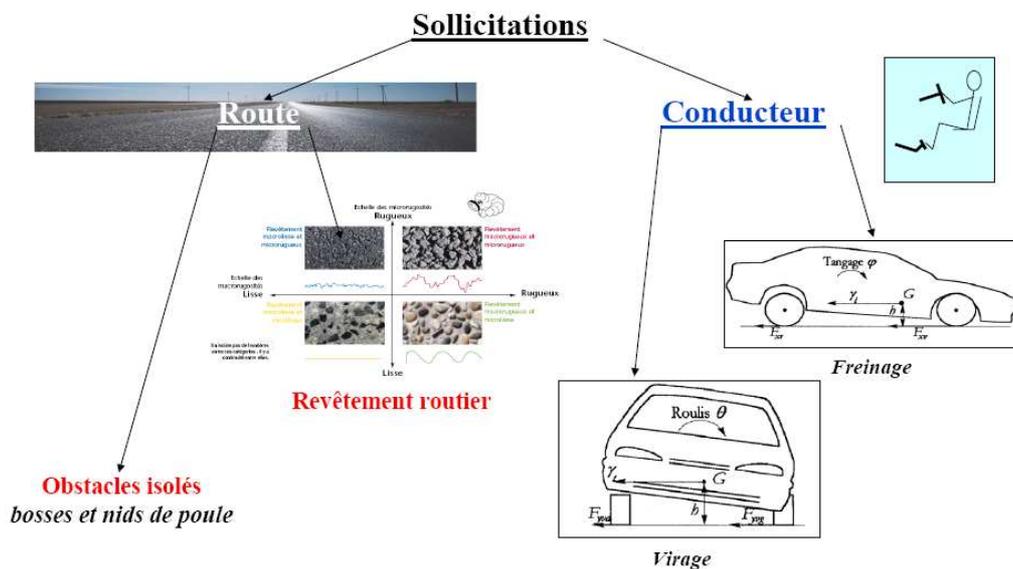


Figure 4.11 – Illustration des deux principales catégories de sollicitations appliquées au véhicule

Le modèle quart de véhicule permet l'étude simultanée :

- du confort, lié à la physiologie du corps humain ;
- de la tenue de route, caractérisée par l'aptitude que possède le véhicule à suivre une trajectoire imposée par son conducteur.

Il peut être utilisé aussi bien pour la conception de suspension d'un essieu avant ou d'un essieu arrière et quelle que soit la technologie utilisée (suspension mécanique ou hydropneumatique). En effet, il repose sur l'hypothèse que l'ensemble masses suspendues – masses non suspendues a un mouvement principalement vertical, les déformations horizontales de cet ensemble pouvant être négligées. Cette hypothèse est confirmée par de nombreux travaux qui montrent que pour les architectures les plus courantes de suspension (suspensions Mac-pherson et suspensions à bras tirés) les variations de voies et

d'empattements sont faibles devant les mouvements verticaux ([Merlet, 1996], [Makita, 1999]).

4.3.1.3 - Analyse du modèle quart de véhicule

Les grandeurs d'intérêt lors de la conception d'une suspension sont :

- pour le **confort** :

- *proprioceptif*, l'accélération verticale de la caisse, notée $a_{z2}(t)$ (il s'agit de limiter cette accélération pour avoir un véhicule confortable) ;

- *visuel*, le déplacement vertical de la caisse, noté $z_2(t)$, (moins il y a d'oscillations de la caisse lors des régimes transitoires, plus le véhicule est confortable : notion de tenue de caisse) ;

- pour le **fonctionnement**, le débattement de suspension, noté $z_{12}(t) = z_{a1}(t) - z_{a2}(t)$ (il s'agit de limiter le débattement de suspension afin de ne pas atteindre les butées mécaniques) ;

- pour la **tenue de route**, la composante dynamique des efforts verticaux développés par le pneumatique (appuis au sol), notée $f_N(t)$. Pour faciliter l'analyse, cette composante peut être réduite en la divisant par la composante statique, soit $f_N(t)/(M_1+M_2)g$, où g représente l'accélération de pesanteur. Pour obtenir une bonne tenue de route, il est nécessaire de réduire les variations de cette grandeur.

Dans le cas très général représenté par la figure 4.10 où aucune hypothèse n'est formulée concernant le type de suspension, l'écriture du principe fondamental de la dynamique conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} M_2 \ddot{z}_{a2}(t) = f_0(t) + f_{susp \rightarrow M_2}(t) - M_2 g \\ M_1 \ddot{z}_{a1}(t) = -f_{susp \rightarrow M_2}(t) + f_{pneu \rightarrow M_1} - M_1 g \end{cases}, \quad (4.52)$$

où $f_{susp \rightarrow M_2}(t)$ représente l'effort exercé par la suspension sur la masse suspendue et où $f_{pneu \rightarrow M_1}$ est l'effort exercé par le pneumatique sur les masses non suspendues.

L'étude de la position d'équilibre statique permet de montrer que le système (4.52) est équivalent au système

$$\begin{cases} M_2 \ddot{z}_2(t) = f_0(t) + f_{susp \rightarrow M_2}^d(t) \\ M_1 \ddot{z}_1(t) = -f_{susp \rightarrow M_2}^d(t) + f_{pneu \rightarrow M_1}^d \end{cases}, \quad (4.53)$$

où $f^d_{susp \rightarrow M_2}(t)$ et $f^d_{pneu \rightarrow M_1}(t)$ désignent les parties dynamiques des efforts de suspension et des pneumatiques. z_1 et z_2 désignent les positions verticales des masses non suspendues et suspendues par rapport à leur position d'équilibre statique.

L'étude de ce nouveau système d'équation fait apparaître des comportements invariants et des dilemmes quel que soit le type de suspension considéré.

La figure 4.12 issue de [Moreau, 1995] présente les points invariants et les comportements asymptotiques invariants des diagrammes de gain des fonctions de transfert :

- $H_a(s) = \frac{s^2 Z_2(s)}{V_0(s)}$ entre l'accélération de la masse suspendue et la vitesse

d'élongation du profil routier ;

- $H_{12}(s) = \frac{Z_{12}(s)}{V_0(s)}$ entre le débattement de suspension et la vitesse d'élongation du

profil routier ;

- et $H_{01}(s) = \frac{Z_{01}(s)}{V_0(s)}$ entre la déformation du pneumatique et la vitesse d'élongation du

profil routier ;

obtenus avec des suspensions passive (en vert) et active (en bleu) pour lesquelles $\omega_1 = 106,8 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 39,7 \text{ rad/s}$.

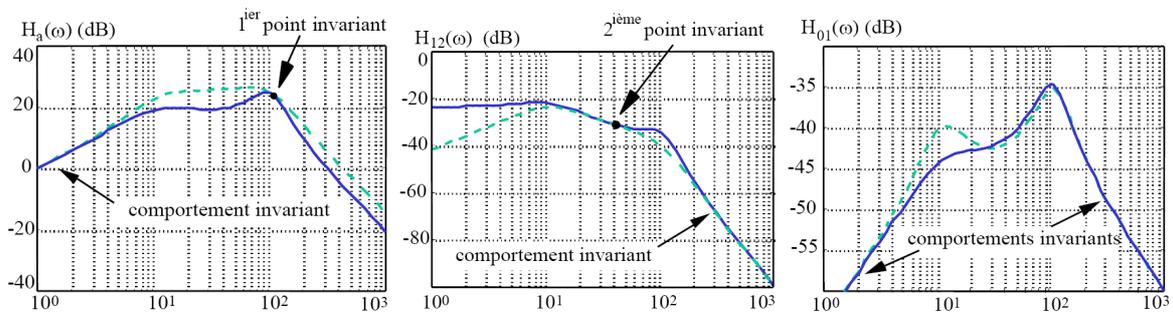


Figure 4.12 – Comportements et points invariants liés à une suspension de véhicule (passif en vert, actif en bleu)

C. Yue [Yue, 1989] et J. K. Hedrick [Hedrick, 1990] également ont mis en évidence l'existence de dilemmes indépendants du type de suspension considéré.

Le premier concerne l'accélération et la déformation du pneumatique : pour les hautes fréquences, le confort et la tenue de route ne peuvent être simultanément améliorés. Par contre, bien que cela ne constitue pas un dilemme, ils ont mis en évidence que, pour les basses

fréquences, (et notamment au voisinage de la fréquence propre de la caisse), la tenue de route et le confort peuvent être améliorés.

Le deuxième dilemme concerne la déformation du pneumatique et le débattement de suspension. En effet, l'amélioration de la tenue de route entraîne une augmentation du débattement et accroît donc les risques d'atteindre les butées de fin de course qui génèrent des chocs.

Enfin, le troisième est relatif à l'accélération et au débattement de la suspension. Il traduit le fait qu'une amélioration du confort proprioceptif entraîne une augmentation du débattement.

Afin de mettre en évidence ces dilemmes, le paragraphe suivant est consacré à l'étude d'une suspension passive traditionnelle dont les éléments sont supposés linéaires.

4.3.1.4 - Cas d'une suspension passive traditionnelle aux petites variations

La figure 4.13 représente une suspension passive (mécanique ou hydropneumatique). La suspension est constituée d'un élément capacitif (ressort ou sphère de suspension) de raideur équivalente k_2 et d'un élément dissipatif (amortisseur) de coefficient de frottement visqueux b_2 .

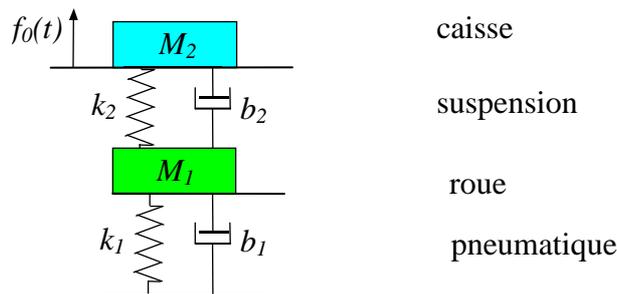


Figure 4.13 – Modèle quart de véhicule correspond à une suspension passive

Les équations régissant le comportement de ce modèle sont

$$M_2 \ddot{z}_2(t) = k_2(z_1(t) - z_2(t)) + b_2(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) + f_0(t) \quad (4.54)$$

et

$$M_1 \ddot{z}_1(t) = -k_2(z_1(t) - z_2(t)) - b_2(\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)) + k_1(z_0(t) - z_1(t)) + b_1(\dot{z}_0(t) - \dot{z}_1(t)). \quad (4.55)$$

A partir de ces équations, il est possible de mettre en évidence plusieurs dilemmes concernant le choix des éléments de la suspension :

- une raideur de suspension importante favorise la tenue de la caisse mais dégrade l'isolation vibratoire (dilemme tenue de caisse – isolation vibratoire) ;

- une raideur de suspension importante réduit les variations de l'effort vertical du pneumatique donc améliore la tenue de route mais augmente l'accélération verticale de la caisse lors des franchissements d'obstacles (dilemme confort - tenue de route) ;
- un coefficient de frottement visqueux important diminue le battement de roue et améliore le confort visuel mais accroît l'accélération verticale.

Afin d'illustrer ces dilemmes, des critères peuvent être définis pour qualifier le confort visuel, le confort proprioceptif et la tenue de route du véhicule. Dans [Moreau, 1995], des critères relatifs au confort proprioceptif, à la tenue de route et aux limites de fonctionnement de la suspension sont définis à partir des réponses fréquentielles du modèle quart de véhicule.

Afin de pouvoir utiliser les critères dans le cas où la suspension est non linéaire, il n'est pas possible de se baser sur les réponses fréquentielles. Une solution alternative consiste à définir un critère à partir de la réponse temporelle à un type de sollicitation. Des critères liés à la réponse temporelle pour caractériser le confort proprioceptif et la tenue de route sont définis dans [Fischer, 2003] dans le cas d'entrées périodiques.

Les critères suivants peuvent être utilisés :

- pour le confort lié au ressenti des accélérations verticales,

$$J_1 = \frac{1}{\int_0^{\infty} [\ddot{z}_2^{ref}(\tau)]^2 d\tau} \int_0^{\infty} [\ddot{z}_2(\tau)]^2 d\tau, \quad (4.56)$$

où z_2^{ref} est la variation, par rapport à la position d'équilibre, de la position verticale de la masse suspendue d'un modèle quart de véhicule de référence ;

- pour le confort lié aux oscillations de la caisse,

$$J_2 = \frac{1}{\int_0^{\infty} [\dot{z}_2^{ref}(\tau) - |\dot{z}_2^{ref}(\tau)|]^2 d\tau} \int_0^{\infty} [\dot{z}_2(\tau) - |\dot{z}_2(\tau)|]^2 d\tau, \quad (4.57)$$

ce critère permet de quantifier le caractère oscillatoire de la réponse temporelle dans la mesure où il sera d'autant plus important que la vitesse verticale de la masse suspendue change de signe fréquemment ;

- pour la tenue de route,

$$J_3 = \frac{1}{\int_0^{\infty} [f_z^{ref}(\tau)]^2 d\tau} \int_0^{\infty} [f_z(\tau)]^2 d\tau, \quad (4.58)$$

où f_z désigne l'effort vertical de la chaussée sur le pneumatique, l'exposant *ref* indiquant que cet effort est obtenu à partir d'un modèle quart roue de référence.

La figure 4.14 présente la variation de ces trois critères en fonction du coefficient de frottement b_2 de la suspension utilisée dans un modèle quart de véhicule dont les paramètres sont les suivants :

$$\begin{aligned} M_2 &= 255 \text{ kg,} \\ M_1 &= 36 \text{ kg,} \\ k_2 &= 6\,755 \text{ N/m,} \\ k_1 &= 170\,000 \text{ N/m,} \end{aligned} \quad (4.59)$$

et pour une sollicitation route de type montée de trottoir. Sur cette figure, les trois critères ont été multipliés par des coefficients (respectivement $K_1=31,5$, $K_2=6,09$, $K_3=1.407$), de façon à ce que leurs valeurs varient entre 0 et 100 dans la plage considérée.

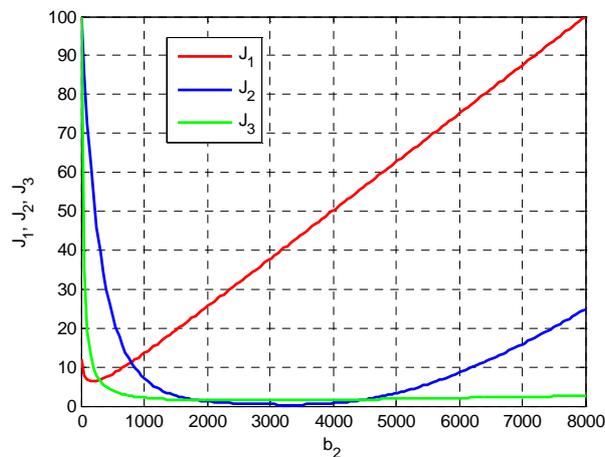


Figure 4.14 – Variation des critères J_1 , J_2 , J_3 normalisés en fonction du coefficient de frottement visqueux

Cette figure met en évidence la présence de dilemmes entre les trois critères définis.

La figure 4.15 montre la variation de la somme de trois critères en fonction du coefficient de frottement visqueux. Le minimum de ce critère global est de l'ordre de 0,94 et est atteint pour un coefficient de frottement visqueux de 2980 Ns/m environ. La suspension de référence est une suspension possédant un coefficient de frottement visqueux de 2418 Ns/m. Ce coefficient correspond au linéarisé tangent à l'origine de la caractéristique Force – Vitesse de débattement de l'amortisseur arrière d'une citroën C5.

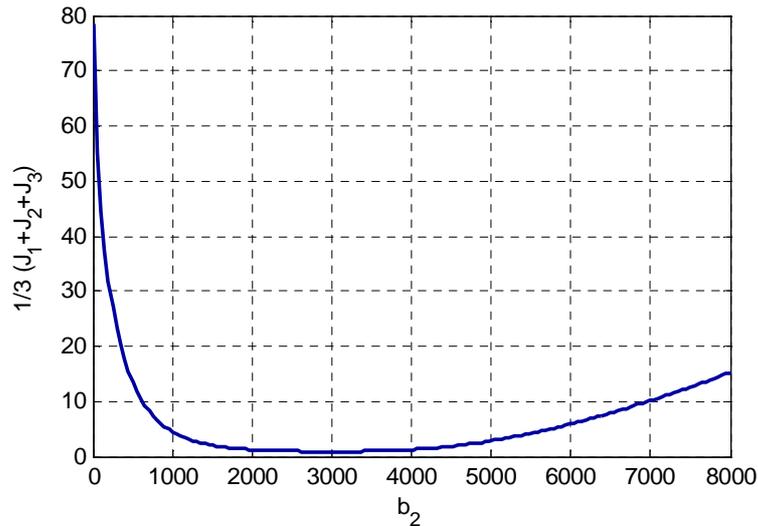


Figure 4.15 – Variation d'un critère global en fonction du coefficient de frottement visqueux

Une première réponse aux dilemmes énoncés et illustrés ci-dessus peut être apportée en utilisant des composants non linéaires.

Dans le cas d'une suspension hydropneumatique, la sphère de suspension et l'amortisseur hydraulique sont des composants non linéaires. Cependant, dans le cas de la sphère, comme cela est montré dans le chapitre 4, ces non-linéarités, qui peuvent être qualifiées de « parasites » car ne résultant pas d'un choix de conception, ont une influence très faible sur le comportement de la suspension. A l'inverse, l'amortisseur est un composant dont la caractéristique est choisie volontairement non linéaire. La non-linéarité de l'amortisseur est donc une non-linéarité que l'on peut qualifier de fonctionnelle.

4.3.1.5 - Analyse d'une suspension à amortisseur non linéaire

La caractéristique de l'amortisseur, présentée figure 4.16, est à la fois non linéaire et non symétrique en détente et en compression. La non-symétrie de cette caractéristique est liée au fait :

- d'une part, que vue du véhicule, la chaussée présente plus de bosses que de trous, en raison du rayon du pneumatique ;
- d'autre part, que la perception du conducteur n'est pas la même suivant le sens de l'accélération verticale subie.

La définition de cette dissymétrie par les constructeurs automobiles relevant plus du savoir faire et de l'expérience que d'un réel critère objectif, nous considérons dans la suite uniquement des amortisseurs dont la caractéristique a été symétrisée.

De plus, il est à noter que cette dissymétrie entraîne des phénomènes gênants, tel que l'enfoncement du véhicule lors du franchissement d'obstacles à profils harmoniques.

Des simulations de la réponse d'un modèle quart de véhicule à :

- des sollicitations route de type obstacle isolé ;
- des sollicitations route harmonique à la fréquence de caisse (de l'ordre du hertz) ;
- des sollicitations route harmonique à la fréquence de roue (de l'ordre de la dizaine de hertz) ;
- des sollicitations conducteur harmonique à la fréquence de caisse ;
- des sollicitations conducteur à profil rectangulaire (coup de frein ou accélération brusque)

permettent de montrer que la caractéristique non-linéaire force vitesse de l'amortisseur peut se décomposer en deux zones :

- une zone pour laquelle la vitesse de débattement est comprise entre $-0,4$ et $0,4 \text{ m.s}^{-1}$ correspondant au domaine de contribution de la vitesse « caisse » en réponse aux sollicitations conducteurs et route, d'une part, et de la vitesse roue en réponse aux sollicitations conducteurs, d'autre part ;
- une zone pour laquelle la vitesse de débattement est inférieure à $-0,4 \text{ m.s}^{-1}$ ou supérieure à $0,4 \text{ m.s}^{-1}$ et qui correspond au domaine de contribution de la vitesse roue en réponse aux sollicitations route. La figure 4.16 représente ces deux zones.

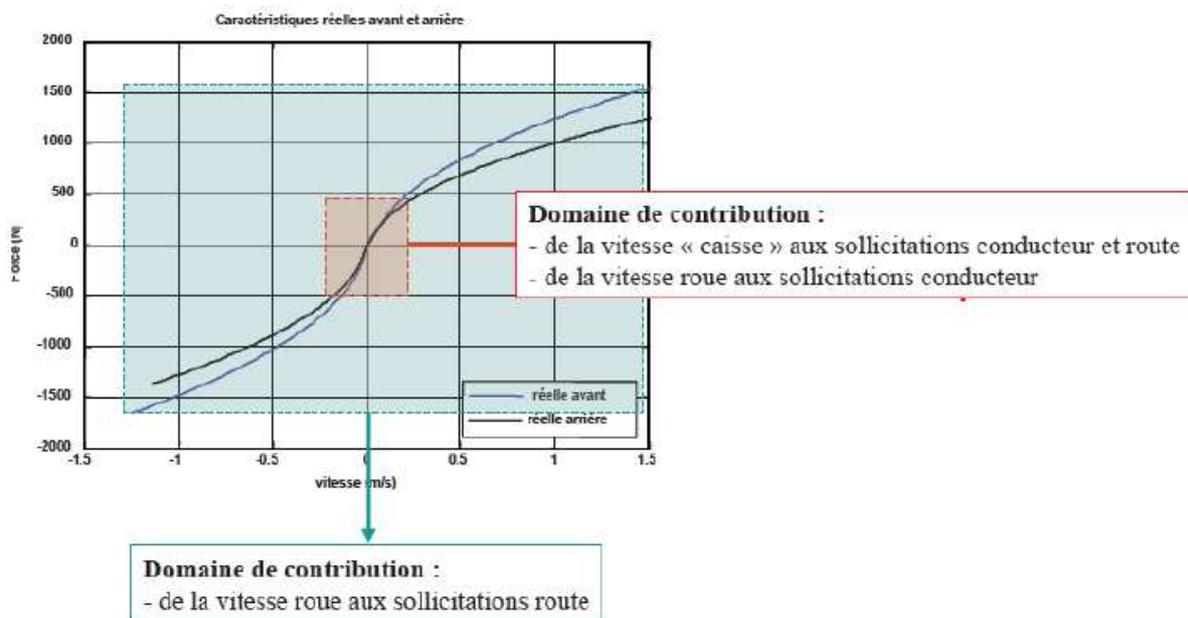


Figure 4.16 – Domaine de contribution de la caisse et de la roue sur la caractéristique non linéaire de l'amortisseur

Il est également possible de montrer que sur les sollicitations route de type obstacle isolé, les non-linéarités permettent d'améliorer le confort visuel et proprioceptif mais dégradent la tenue de route.

Afin d'illustrer cette affirmation, une loi (simple) d'aide à la spécification des amortisseurs est proposée :

$$f_a(v) = F_{a0} \tanh\left(\frac{b_{eq}}{F_{a0}} v\right) \quad (4.60)$$

où $f_a(v)$ est la force développée par l'amortisseur et v est la vitesse de débattement de la suspension. F_{a0} est la valeur vers laquelle tend l'effort développé par l'amortisseur tandis que b_{eq} correspond au linéarisé tangent à l'origine de la caractéristique force débattement. Pour un b_{eq} donné, plus F_{a0} est élevé et plus la caractéristique de l'amortisseur se rapproche d'une caractéristique linéaire. La figure 4.17 illustre cette caractéristique force-vitesse de débattement pour plusieurs jeux de paramètres.

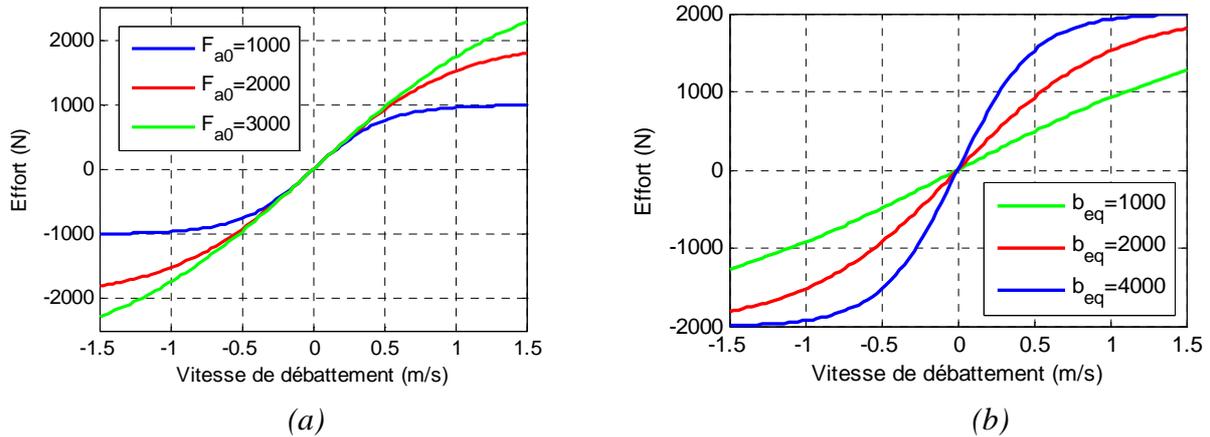


Figure 4.17 – Loi d'aide à la spécification pour les amortisseurs hydrauliques non linéaires avec différents jeux de paramètres ((a) $b_{eq}=2000$, (b) $F_{a0}=2000$)

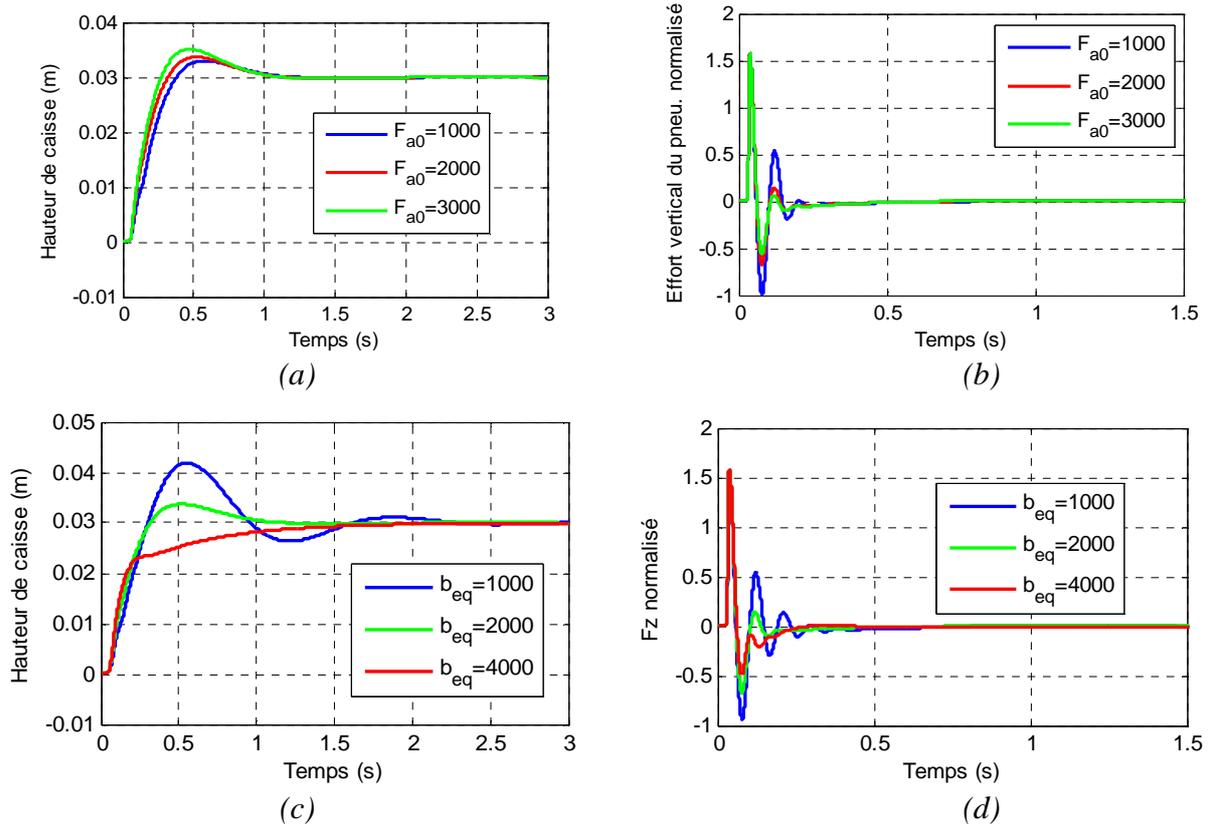


Figure 4.18 – Réponses temporelles obtenue à l'aide d'un quart de véhicule lors d'une montée de trottoir (évolution de la hauteur de caisse (a) et (c) et de l'effort vertical pneumatique chaussée (c) et (d) pour différents jeux de paramètres de la caractéristique non linéaire de l'amortisseur ($b_{eq}=2000$ (a) et (b) et $F_{a0}=2000$ (c) et (d))

Les figures précédentes illustrent le fait que lorsque le paramètre F_{a0} augmente, c'est-à-dire lorsque la non-linéarité diminue, le confort diminue mais les variations de l'appui au sol augmentent. La figure 4.19 représente (en bleu) la caractéristique réelle de l'amortisseur hydraulique arrière d'une citroën C5 et la caractéristique obtenue à partir d'une optimisation à iso-pondération du critère défini ci-dessus. Les paramètres obtenus par optimisation sont

$$\begin{aligned} b_{2eq} &= 2537 \text{ Ns/m} \\ F_{a0} &= 1657 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.61)$$

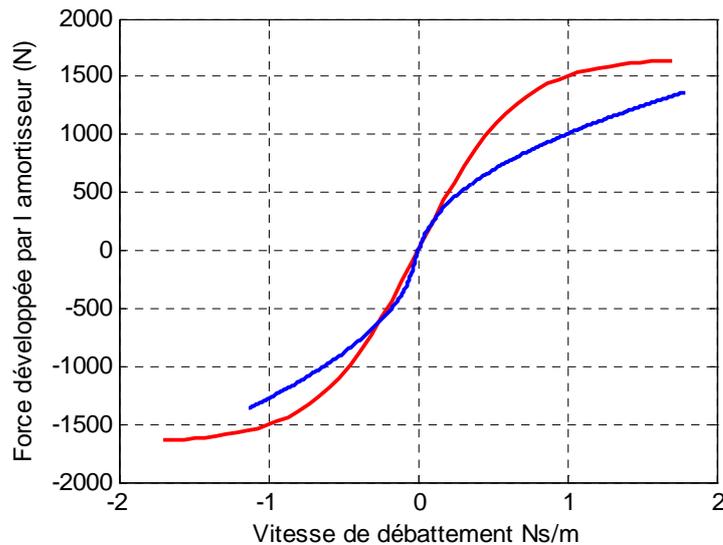


Figure 4.19 – Comparaison de la caractéristique réelle d'un amortisseur arrière de C5 (en bleu) et d'une caractéristique en tangente hyperbolique obtenue après optimisation (en rouge)

Avec ces paramètres la valeur du critère est 0,6. La valeur obtenue pour ce critère avec la caractéristique de l'amortisseur réel est 0,64.

4.3.1.5.1.1 - Analyse d'une suspension hydractive

La présence de non-linéarités permet de passer outre certains dilemmes, mais ne permet pas de tous les contourner. Une solution supplémentaire consiste à introduire différents états de suspension en fonction de la situation de conduite. C'est le principe de la suspension hydractive implantée sur la XM par Citroën en 1989 et qui équipe désormais la Citroën C6.

La suspension hydractive Citroën possède un état souple et un état ferme. La différence entre ces deux états est obtenue par l'adjonction d'une sphère de suspension supplémentaire isolée ou connectée au circuit par l'intermédiaire d'une électrovanne. La figure 4.20 représente le circuit hydraulique d'une suspension hydractive Citroën.

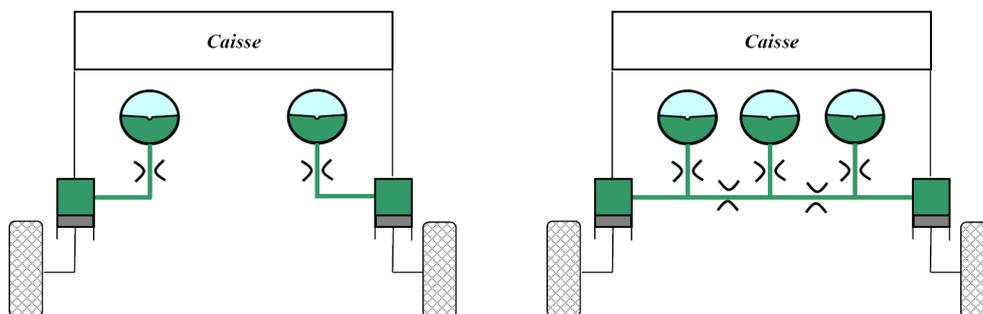


Figure 4.20 – Circuit hydraulique équivalent d'une suspension hydractive en mode ferme (gauche) et en mode souple (droite)

La stratégie de commande est la suivante :

- sur route plate, en ligne droite et à vitesse constante, lorsque que le conducteur n'agit pas, la suspension est en mode confort ;
- dès que le conducteur agit sur les commandes, la suspension passe en mode ferme. Elle passe également en mode ferme lorsque les débattements de suspension sont supérieurs à un seuil⁶.

L'intérêt de cette stratégie est montré dans le chapitre 5.

4.3.1.5.1.2 - Suspensions semi-actives et actives

Le principe des suspensions semi-actives est d'adapter le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur en fonction des besoins. Le principe des suspensions actives consiste à ajouter un élément actif à la suspension.

Les suspensions semi-actives les plus classiques utilisent un dispositif permettant de faire varier la section de laminage d'un fluide dans l'amortisseur. Ces solutions ont été largement étudiées et il existe désormais des amortisseurs dont le coefficient de frottement visqueux est continument variable. A titre d'illustration, il est possible de citer le système de contrôle continu de l'amortissement de Sachs [Causemann, 1999] qui est constitué d'une vanne proportionnelle permettant d'obtenir un ajustement continument variable de l'amortissement avec des temps de commutation de l'ordre de 11 à 40 ms.

Les derniers développements autour des suspensions semi-actives concernent l'utilisation des propriétés magnéto rhéologiques des fluides. Un champ magnétique permet de faire varier la viscosité du fluide et donc le coefficient de frottement visqueux de l'amortisseur ([Kim, 2003]). Une production en série a été expérimentée avec le système MRC (Magnetic Ride Control) en 2002 sur la Cadillac Seville STS ([Gilbert 2002]).

⁶ Cela revient à créer une boucle de régulation non linéaire, les débattements dépendant directement de la suspension.

De nombreux travaux ont également été menés sur les suspensions actives. Les actionneurs les plus étudiés sont hydrauliques (par exemple [Williams, 1997]), hydro pneumatique [Moreau, 2001], pneumatique et électro-mécanique [Buckner, 2000]. La plupart de ces actionneurs sont utilisés en combinaison d'un ressort de suspension afin de supporter la charge statique du véhicule. L'inconvénient principal de ces systèmes est l'énergie importante qu'ils demandent.

Le tableau 4.1 résume les caractéristiques des suspensions actives et semi actives ([Fischer 2003]).

Classification of suspension systems. Natural frequencies: f_B body and f_W wheel

System	System representation	Force range	Operation range	Actuator/sensor demand	Max. energy demand	Improvements compared to passive system	
						Comfort	Safety
Passive			—	—	—	—	—
Slowly variable/adaptive			$< f_B$	$4-8/\geq 1$	ca. 50 W	15-20%	10-25%
Semi-active			$f_B - f_W$	$4-8/\geq 8$	ca. 50 W	20-30%	10-25%
Active partially loaded			$0 - f_B$	$4-8/\geq 12$	1-2 kW	> 30%	—
Active fully loaded			$0 - f_W$	$4/\geq 12$	1.5-7 kW	> 30%	25%

D. Fischer, R. Aemmerl / Control Engineering Practice 12 (2004) 1551-1567

Tableau 4.1 - Classification des systèmes de suspension

4.4 - Conclusion

La première partie de ce chapitre rappelle les principaux modèles utilisés lors de la conception d'une suspension et montre, au travers du développement d'un modèle de véhicule à quatre roues, la difficulté à établir un modèle précis.

La deuxième partie de ce chapitre, au travers de l'utilisation du modèle de synthèse quart de véhicule, permet de décrire le contexte dans lequel se situent ces travaux.

La figure 4.21 issue de [Fischer 2003] donne une classification des différents types de suspension en fonction de l'énergie nécessaire et de la fréquence à laquelle agissent les dispositifs additionnels.

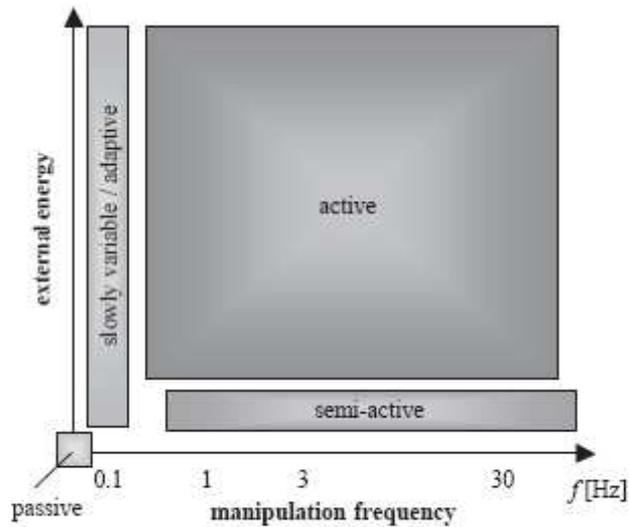


Figure 4.21 – Comparaison entre les suspensions passives, semi-actives, adaptatives et actives

Les travaux développés dans ce mémoire s'intéressent à la conception d'une suspension hydractive (qui se situe dans la famille des suspensions adaptatives) réalisée en technologie hydropneumatique. La conception d'une telle suspension nécessite la détermination de nombreux paramètres technologiques. La méthodologie CRONE, grâce à la compacité de l'opérateur de dérivation non entière, permet de déterminer tous les paramètres technologiques des composants à partir d'un faible nombre de 4 paramètres de haut niveau.

Les modèles présentés dans ce chapitre sont utilisés dans le chapitre 5 pour la synthèse et la validation d'une suspension CRONE réalisée en technologie hydropneumatique.

Chapitre 5

Vers la suspension CRONE hydractive

5.1 - Introduction

Une application directe des développements des chapitres précédents est la synthèse et la réalisation d'une suspension automobile. L'intérêt de la suspension CRONE, qui assure la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, en particulier dans le domaine de l'automobile, a été mis en évidence dans le cadre de travaux précédents. Ainsi, un prototype a été conçu sur lequel la réalisation de la suspension CRONE a été faite en technologie hydropneumatique avec un arrangement parallèle de cellules RC en série dont les paramètres technologiques étaient distribués récursivement [Moreau, 1995]. Si une telle suspension est optimale vis-à-vis des sollicitations de la route, elle présente une moins bonne tenue de caisse sur sollicitations conducteur, d'où le concept de suspension CRONE hydractive. Cette suspension, à l'image de la suspension hydractive Citroën, présente un mode souple, privilégié en l'absence de sollicitations conducteur (favorisant ainsi l'isolation vibratoire et donc le confort), et un mode ferme activé dès l'apparition des sollicitations conducteur (favorisant ainsi la tenue de route et donc la sécurité). L'acronyme CRONE est conservé dans la mesure où le mode souple assure la robustesse de la tenue de caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue.

Dans ce chapitre, une réalisation par un arrangement cascade de cellules RC en gamma est proposée pour le mode souple de la suspension CRONE hydractive. Dans le secteur automobile, cette réalisation présente l'avantage d'apporter un amortissement supplémentaire en roulis. En effet, les arrangements cascade de cellules RC en gamma comportent des amortisseurs hydrauliques transversaux contrairement aux arrangements parallèles de cellules RC en série.

Dans ce chapitre 5, la synthèse et la réalisation, en technologie hydropneumatique par un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma, du mode souple d'une suspension CRONE hydractive sont proposées à l'aide des modèles présentés au chapitre précédent. Pour cette synthèse, les contraintes spécifiques à l'implantation sur véhicule sont détaillées.

Préalablement à la synthèse du mode souple de la suspension CRONE hydractive, et afin d'estimer ses performances, une suspension de référence est tout d'abord définie et analysée.

Dans un second temps, la suspension CRONE est validée à l'aide du modèle à 14 degrés de liberté dont les équations et les hypothèses de construction ont été présentées au chapitre 4.

5.2 - Véhicule support

Le véhicule support de ce chapitre est un véhicule léger de tourisme dont les principaux paramètres sont regroupés dans le tableau 5.1.

Paramètres	Valeur numérique
Masse suspendue	1400 à 1900 kg
Masse suspendue av.	889 à 1050 kg
Masse suspendue ar.	510 à 850 kg
Masse non suspendue av.	42 kg
Masse non suspendue ar.	36 kg
Voie av.	1.52 m
Voie ar.	1.50 m
Demi-empattement av. (distance centre de gravité - essieu avant)	1 à 1.22 m
Demi-empattement ar.	1.74 à 1.52 m
Empattement total	2.74 m
Démultiplication angle volant/ angle de braquage	1/16
Inertie de la caisse autour de l'axe x	430 à 580 kg.m ²
Inertie de la caisse autour de l'axe y	1870 à 2550 kg.m ²
Inertie de la caisse autour de l'axe z	2050 à 2800 kg.m ²
Rayon des roues sous charge	0.3 m
Inertie des masses non suspendues autour de leurs axes de rotation	1.1 kg.m ²
Raideur de la barre anti-dévers avant	50 600 Nm/rad
Raideur de la barre anti-dévers arrière	43 500 Nm/rad
Section équivalente des vérins de suspension avant	$4.15 \cdot 10^{-4}$ m ²
Section équivalente des vérins de suspension arrière	$3.5 \cdot 10^{-4}$ m ²
Coefficient d'amortissement visqueux équivalent des pneumatiques	100 Ns/m
Raideur équivalente des pneumatiques à pression constructeur	350 000 N/m
Hauteur du centre de gravité à l'équilibre statique pour la masse nominale	0.58 m
Coefficient de frottement au contact roue/sol	0.8

Tableau 5.1 - Principaux paramètres du véhicule support

La masse suspendue maximale est obtenue en ajoutant à la masse suspendue minimale le poids de cinq passagers, soit environ 400 kg et 100 kg de bagages. Sur ces 500 kg supplémentaires, 340 kg (3 passagers et les bagages) sont ajoutés sur l'essieu arrière et 160 kg

sur l'essieu avant. La nouvelle répartition des masses déplace le centre de gravité du véhicule vers l'arrière et justifie ainsi la variation des empattements, selon les relations :

$$L_v = \frac{M_{ar}}{M_2} L \quad \text{et} \quad L_r = \frac{M_{av}}{M_2} L . \quad (5.1)$$

Les inerties du véhicule sont également modifiées par la variation de la masse suspendue.

La faible variation relative de masse sur l'essieu avant ne justifie pas la mise en place d'une suspension CRONE. En revanche, la variation relative (+2/3) de masse sur l'essieu arrière est suffisante pour justifier cette mise en place. Par la suite, la synthèse d'une suspension CRONE hydractive n'est donc effectuée que sur l'essieu arrière. L'essieu avant est, quant à lui, équipé de la même suspension pour toutes les simulations effectuées dans ce chapitre, à savoir une suspension hydractive telle que décrite figure 4.20 du chapitre 4.

5.3 - Suspension de référence

5.3.1 - Présentation

Afin de pouvoir évaluer les performances de la suspension CRONE hydractive, le choix d'une suspension de référence est nécessaire. La suspension représentée figure 5.1 est utilisée en tant que référence. Cette suspension correspond à la transposition à un quart de véhicule de la suspension hydractive équipant en série le véhicule dont les caractéristiques sont données page précédente et présentée au chapitre 4. L'indice 1 correspond à la cellule RC la plus proche du vérin de suspension. L'indice 2 se réfère à la sphère centrale de l'essieu et aux résistances hydrauliques correspondantes.

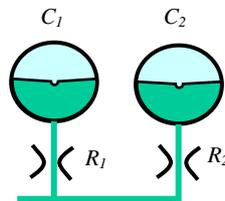


Figure 5.1 - Schéma hydraulique de la suspension de référence

Les paramètres de cette suspension sont :

- pour les pressions de tarage des sphères : $P01 = 25$ bar et $P02 = 22$ bar,
- pour les volumes des sphères : $V00 = 385$ cm³ et $V01 = 385$ cm³,
- pour les résistances hydrauliques, les coefficients de frottement visqueux équivalent (déterminés à partir de la linéarisation des caractéristiques non linéaires des résistances hydrauliques) : $b_1 = 1500$ Ns/m, $b_2 = 1000$ Ns/m.

Grâce à la présence d'une électrovanne Tout-Ou-Rien (TOR), cette suspension peut fonctionner selon deux modes :

- le premier mode dit confort ou souple, (figure 5.2 (a)),
- le second mode dit ferme (figure 5.2 (b)) dans lequel l'électrovanne isole la cellule centrale du reste du réseau de suspension.

Les diagrammes de Bode du transfert débit-pression de cette suspension, obtenues aux petites variations, pour les masses suspendues extrémales et pour les deux modes de fonctionnement, sont données figure 5.3. Les dénominations « mode ferme » et « mode souple » sont relatives à la raideur statique équivalente de la suspension. En raison d'une sphère supplémentaire, qui ajoute de la souplesse à la suspension, la raideur de la suspension en mode souple est plus faible qu'en mode ferme. Ce comportement est analogue à celui obtenu par l'association de deux ressorts en série.

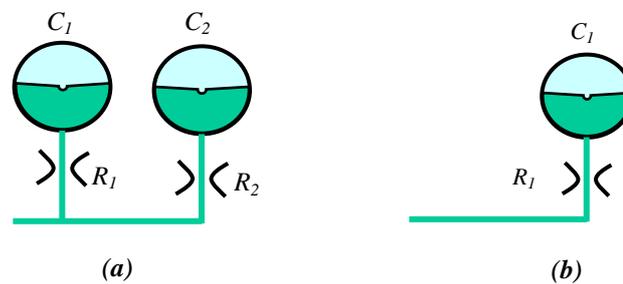


Figure 5.2 - Schéma hydraulique de la suspension de référence en modes souple (a) et ferme (b)

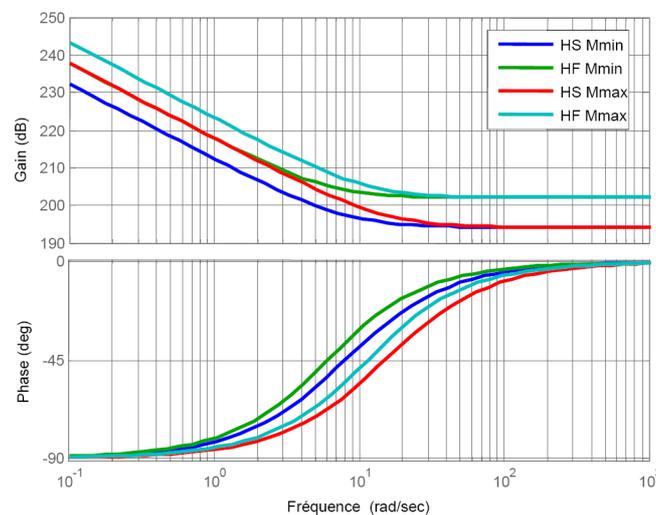


Figure 5.3 - Diagrammes de Bode de la fonction de transfert débit-pression de la suspension de référence pour les deux modes (souple et ferme) et pour les valeurs extrémales des masses suspendues

5.3.2 - Performances de la suspension de référence évaluées par un modèle de synthèse quart de véhicule

Pour l'analyse des performances de cette suspension, le modèle de synthèse quart de véhicule présenté au chapitre 4 est, dans un premier temps, utilisé. La représentation de ce modèle est rappelée figure 5.4. A partir de ce modèle, deux modèles peuvent être déclinés, l'un pour l'étude du comportement de la caisse, essentiellement aux fréquences proches de la fréquence propre de caisse, et l'autre pour l'étude du comportement de la roue, sur les sollicitations route essentiellement. Le premier modèle fournit de bonnes indications sur le confort du véhicule, le second sur la tenue de roue.

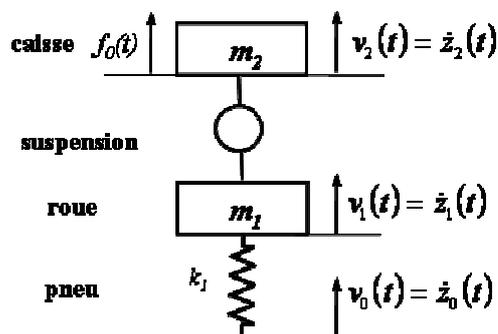


Figure 5.4 - Modèle quart de véhicule

5.3.2.1 - Analyse du confort

Le modèle présenté figure 5.4 est assez représentatif du confort du véhicule aux basses et moyennes fréquences. A ces fréquences, la roue suit bien la route et le modèle quart de véhicule se simplifie comme présenté figure 5.5.

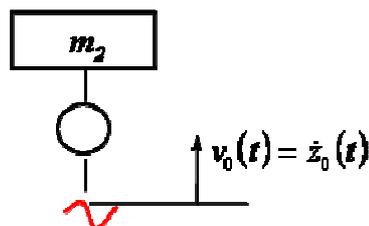


Figure 5.5 - Modèle quart de véhicule simplifié pour l'analyse du confort basses et moyennes fréquences

Le schéma fonctionnel correspondant à ce modèle simplifié est alors analogue à une boucle de régulation à retour unitaire [Ramus, 2001].

Les figures 5.6 et 5.7 présentent respectivement les diagrammes de Bode et les lieux de Black-Nichols de la boucle ouverte de ce modèle avec la suspension de référence dans différentes configurations : mode souple (HS), mode ferme (HF), pour la masse suspendue minimale (Mmin) et maximale (Mmax).

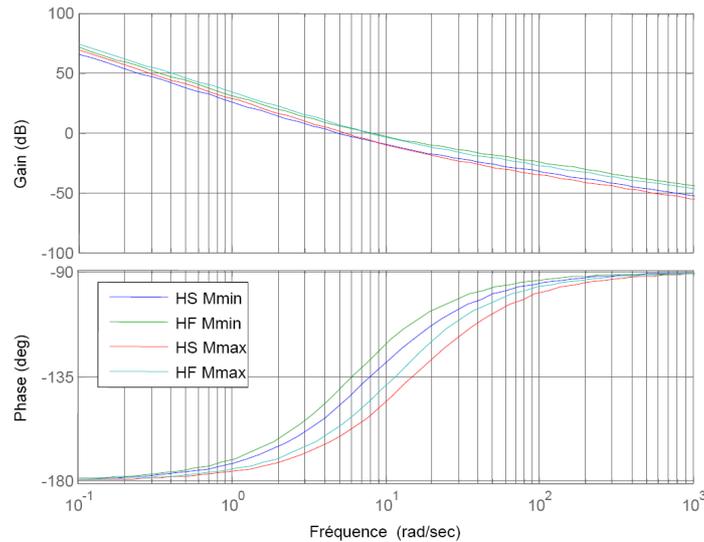


Figure 5.6 - Diagrammes de Bode en boucle ouverte

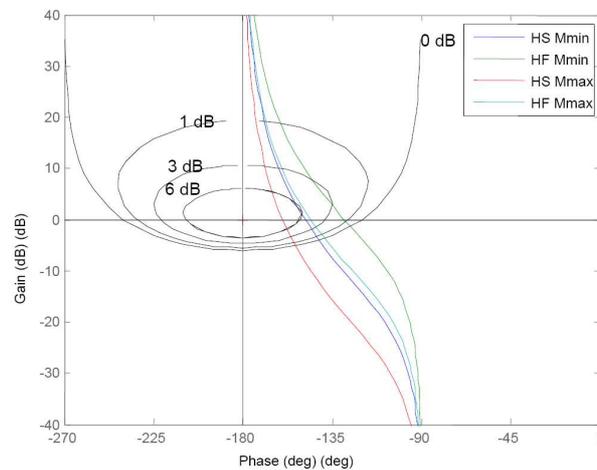


Figure 5.7 - Lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle quart de véhicule équipé de la suspension de référence pour différentes configurations

Ces figures montrent que :

- le degré de stabilité est bien meilleur en mode ferme qu'en mode souple, traduisant une plus grande résonance de la masse suspendue en mode souple ;
- la rapidité est plus importante en mode ferme qu'en mode souple ;
- l'isolation vibratoire est bien meilleure en mode souple qu'en ferme ;
- l'augmentation de la masse suspendue dégrade les performances, aussi bien en terme de degré de stabilité qu'en terme d'isolation vibratoire.

Ces conclusions se retrouvent également dans les figures 5.8 et 5.9 présentant respectivement les diagrammes de gain de la transmission absolue du système et les réponses indicielles de la masse suspendue.

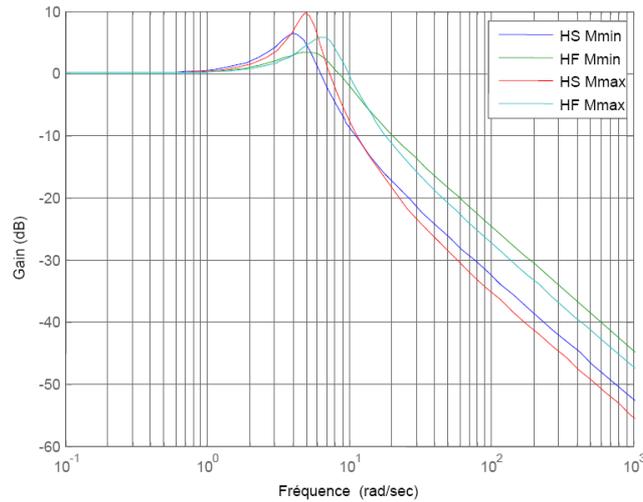


Figure 5.8 - Transmission absolue : diagrammes de gain du transfert $V_2(s)/V_1(s)$

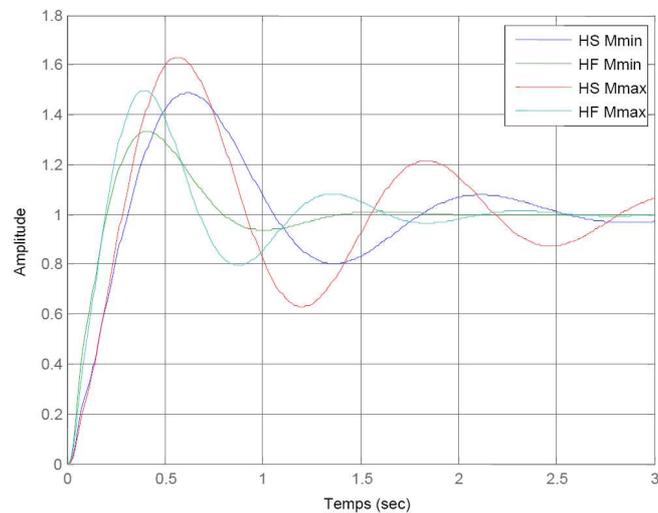


Figure 5.9 – Réponses indicielles de la masse suspendue

5.3.2.2 - Analyse de la tenue de route

L'analyse de la tenue de route d'un véhicule se ramène dans le cas d'un modèle d'analyse quart de véhicule à l'analyse du degré de stabilité de la roue, appelé encore tenue de route [Moreau, 1995]. En effet, la tenue de route dépend principalement des appuis du véhicule sur le sol. Ces appuis sont liés à la déformation du pneumatique via la raideur verticale de celui-ci. Aux basses fréquences, le déplacement vertical $z_1(t)$ de la roue est très proche de l'élongation $z_0(t)$ du profil routier. Aux hautes fréquences (fréquences supérieures à la fréquence propre des masses non suspendues), le comportement de la roue dépend de la suspension. A ces fréquences, le déplacement $z_2(t)$ de la masse suspendue peut être considéré comme négligeable. Le modèle quart de véhicule de la figure 5.4 peut alors se simplifier. La figure 5.10 présente le modèle simplifié issu du modèle quart de véhicule pour l'étude de la tenue de route.

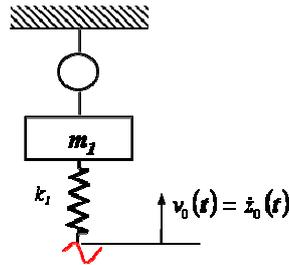


Figure 5.10 - Modèle simplifié pour l'étude de la tenue de roue

La figure 5.11 présente les diagrammes de gain de la fonction de transfert $V_1(s)/V_0(s)$ obtenue à partir de ce modèle simplifié présenté figure 5.10.

La figure 5.12 présente les diagrammes de gain de cette même fonction de transfert obtenue à partir du modèle quart de véhicule présenté figure 5.4. Les différences n'apparaissent qu'au voisinage de la fréquence propre de caisse.

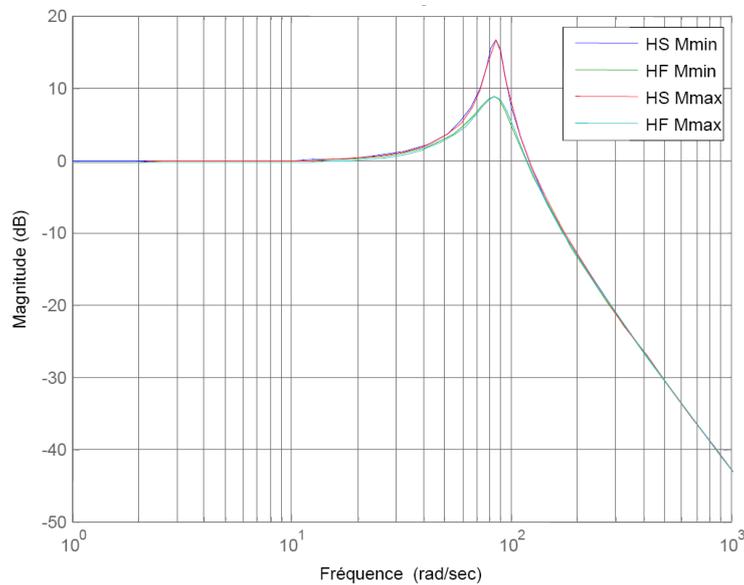


Figure 5.11 - Diagrammes de gain du transfert $V_1(s)/V_0(s)$ issu du modèle simplifié

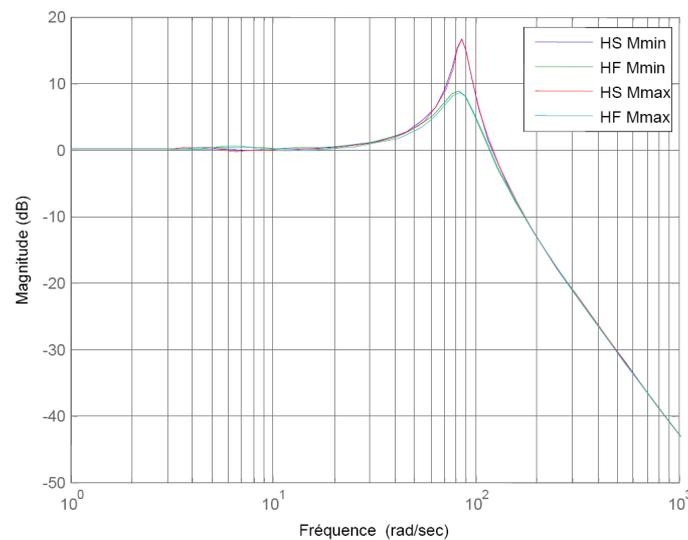


Figure 5.12 - Diagramme de gain du transfert $V_1(s)/V_0(s)$ issu du modèle quart de véhicule complet

La figure 5.13 présente les réponses indicielles de la roue lors d'un franchissement d'obstacle avec le modèle quart de véhicule équipé de la suspension hydraulique de référence en mode souple (HS) ou en mode ferme (HF) pour les masses minimale et maximale.

Ces réponses montrent que la tenue de roue est bien meilleure en mode ferme.

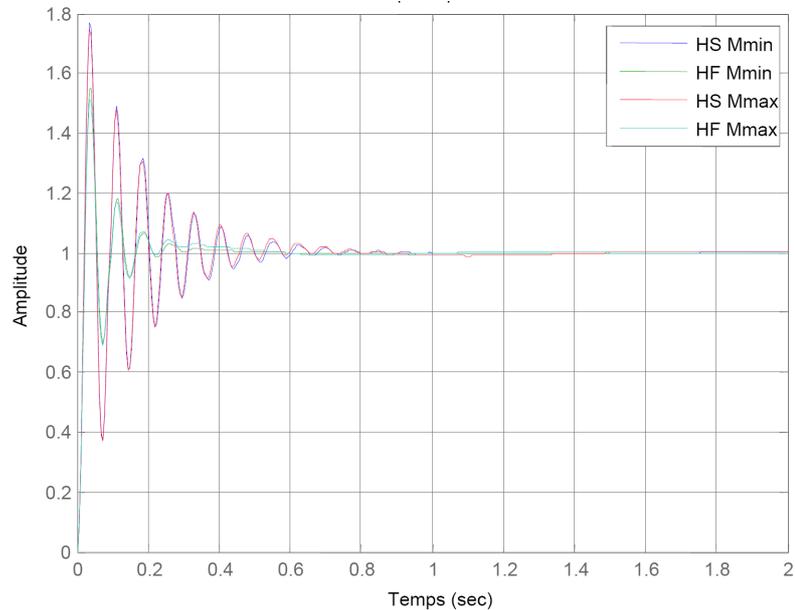


Figure 5.13 - Réponses indicielles de la roue lors d'un franchissement d'obstacle

5.3.2.3 - Analyse du comportement de la caisse sur sollicitations conducteur

L'un des aspects importants du comportement de la caisse vis-à-vis des sollicitations du conducteur tient essentiellement à la raideur de la suspension, c'est-à-dire au gain statique de la fonction de transfert force - débattement de la suspension. La raideur statique de la suspension en mode ferme étant plus importante que celle obtenue avec le mode souple (en effet, l'ajout d'une sphère revient à augmenter la souplesse de la suspension et donc à en diminuer la raideur), la tenue de caisse est ainsi bien meilleure en mode ferme qu'en mode souple.

5.3.2.4 - Conclusion partielle

- Les constats précédents dictent la stratégie à adopter pour le pilotage de la suspension :
- en l'absence d'action conducteur (ligne droite et vitesse constante), l'isolation vibratoire doit être privilégiée, la suspension doit donc être en mode souple.
 - dès que le conducteur à une action (accélération, freinage ou virage), la suspension doit passer en mode ferme afin de privilégier la tenue de route.

Ces constats constituent la base de travail pour la conception de la suspension CRONE hydraulique.

5.4 - Choix d'une architecture de suspension

Comme cela est montré dans les chapitres précédents, plusieurs arrangements sont envisageables pour la réalisation d'une suspension CRONE hydractive : arrangement parallèle de cellules RC en série ou arrangement cascade de cellules RC en gamma. Comme le montre le chapitre 3, les performances de ces deux arrangements dans le cadre du support d'étude sont équivalentes. Cependant, l'arrangement parallèle conduit à une dispersion bien plus importante des paramètres technologiques que dans le cas de l'arrangement en cascade.

Indépendamment de cet argument, dans le cas de l'implantation sur véhicule, il est préférable de choisir un arrangement cascade de cellules en gamma comme le montre le paragraphe suivant.

5.4.1 - Prise en compte de contraintes liées à l'implantation sur véhicule

Dans le cadre de l'implantation sur véhicule d'une suspension CRONE hydractive, plusieurs solutions sont envisageables. La première consiste à considérer séparément chacun des quarts de véhicule. Dans ce cas, le nombre d'éléments nécessaires pour équiper un essieu est simplement le double de celui utilisé lors de la synthèse sur un quart de véhicule. La seconde solution consiste à mutualiser les sphères purement capacitives. En effet, l'association de deux sphères purement capacitives de capacité C_i et C_j est équivalente à une seule sphère de capacité $C_i + C_j$. Si les deux sphères possèdent des volumes identiques, la sphère équivalente pourra être une sphère de même volume et de pression de tarage la somme des pressions de tarage de chacune des sphères. La figure 5.15 illustre les deux solutions d'implantation sur un essieu d'une suspension à une cellule RC et une cellule purement capacitive. Cette suspension pour laquelle $N = 1$ correspond à l'itération $i = 0$ lors de la réalisation du mode souple de suspension CRONE hydractive comportant N cellules RC (cf paragraphe 1.5.1 du chapitre 1).

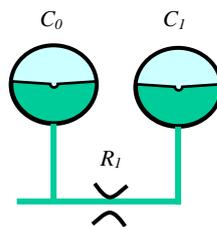


Figure 5.14 - Suspension CRONE à 1 cellule RC et 1 cellule purement capacitive ($N=1$)

Au-delà de l'argument sur la diminution du nombre de sphère, les deux implantations proposées à la figure 5.15 ne sont pas équivalentes. En effet, si le comportement du véhicule en pompage est identique pour ces deux implantations, le comportement en roulis obtenu avec ces deux architectures n'est pas le même. En effet, la mutualisation d'une des sphères de suspension conduit à créer un lien entre les deux vérins de suspension. Afin de caractériser

l'influence de ce lien sur les performances du véhicule en roulis, un modèle pour l'analyse est proposé pour la prise en compte du roulis et du pompage.

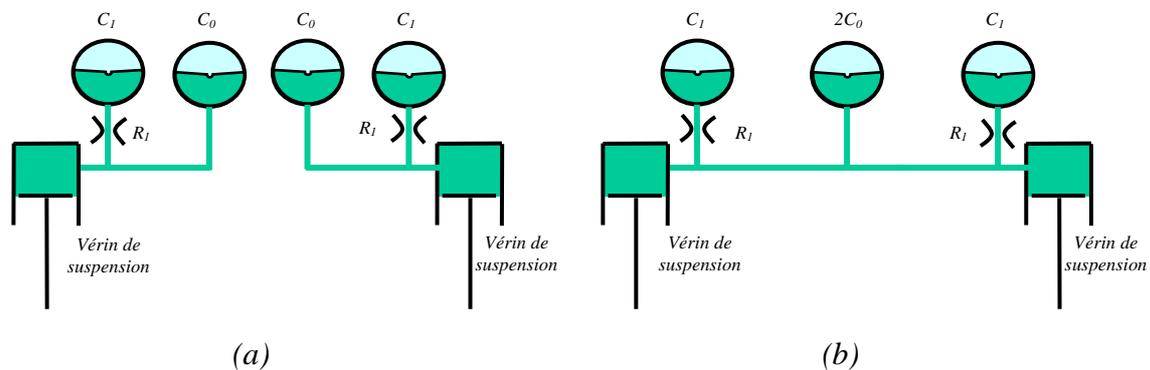


Figure 5.15 - Deux solutions d'implantation d'une suspension multisphères sur un essieu de véhicule : avec vérins de suspension indépendants (a) ou avec sphère centrale mutualisée (b)

5.4.1.1 - Modélisation aux petites variations d'un essieu de véhicule équipé d'une suspension hydropneumatique pour l'étude des modes de pompage et de roulis

Dans le cas général, une suspension réalisée en technologie hydropneumatique peut être représentée sous la forme générale d'un réseau hydraulique [Serrier, 2006c] reliant les deux vérins de suspension d'un même essieu (figure 5.16). Cette représentation permet de construire un modèle simple d'analyse pour la prise en compte simultanée des modes de roulis et de pompage.

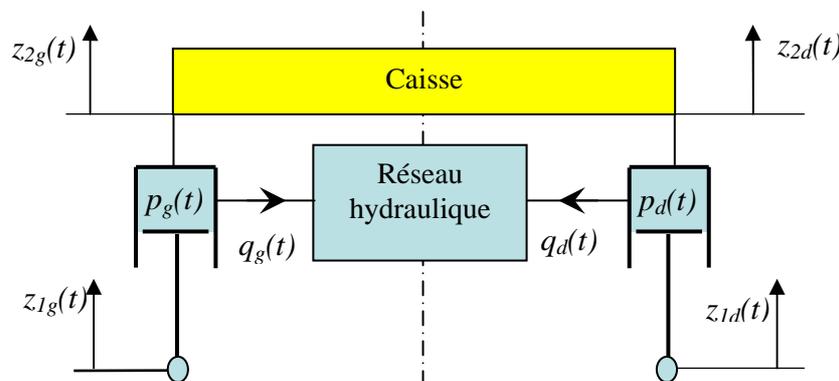


Figure 5.16 – Représentation d'une suspension de véhicule sous forme d'un réseau hydraulique

Soient $p_g(t)$ et $p_d(t)$, respectivement la pression dans le vérin gauche et dans le vérin droit de suspension. Leurs transformées de Laplace respectives sont notées $P_g(s)$ et $P_d(s)$. $q_g(t)$ et $q_d(t)$ représentent respectivement le débit de déplacement dans le vérin gauche et

dans le vérin droit de suspension. Leurs transformées de Laplace respectives sont, quant à elles, notées $Q_g(s)$ et $Q_d(s)$.

Quel que soit le réseau hydraulique, il est caractérisé par une matrice d'impédance hydraulique \mathbf{I}_H telle que :

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_H \mathbf{Q}, \quad (5.2)$$

avec

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_g(s) \\ P_d(s) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_g(s) \\ Q_d(s) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

et

$$\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} I_{H11}(s) & I_{H12}(s) \\ I_{H21}(s) & I_{H22}(s) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Dans le cadre de l'isolation vibratoire d'un essieu de véhicule automobile, on a pour des raisons de symétrie :

$$I_{H11}(s) = I_{H22}(s) \quad \text{et} \quad I_{H12}(s) = I_{H21}(s). \quad (5.5)$$

La matrice d'impédance mécanique \mathbf{I}_M de la suspension est, quant à elle, définie par :

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}_M \mathbf{V}(s), \quad (5.6)$$

avec

$$\mathbf{F}(s) = \begin{pmatrix} U_g(s) \\ U_d(s) \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

où $U_g(s)$ est la transformée de Laplace de la force $u_g(t)$ exercée par le fluide sur la tige du vérin gauche de suspension, de même pour $U_d(s)$ qui est la transformée de Laplace de $u_d(t)$,

et

$$\mathbf{V}(s) = \begin{pmatrix} V_{12g}(s) \\ V_{12d}(s) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

où $V_{12g}(s)$ est la transformée de Laplace de la différence $\dot{z}_{1g}(t) - \dot{z}_{2g}(t)$, vitesse de débattement du vérin gauche de suspension, de même pour $V_{12d}(s)$.

$z_{2g}(t)$ et $z_{2d}(t)$ représentent les hauteurs de caisse au droit des centres des roues gauche et droite, et $z_{1g}(t)$ et $z_{1d}(t)$ les hauteurs des centres des roues gauche et droite. Ces quatre variables sont définies par rapport à leur position d'équilibre statique.

Le passage de la matrice d'impédance hydraulique \mathbf{I}_H à la matrice d'impédance mécanique \mathbf{I}_M se fait en introduisant les relations suivantes :

$$P_g(s) = \frac{U_g(s)}{S_V}, \quad P_d(s) = \frac{U_d(s)}{S_V}, \quad (5.9)$$

$$Q_g(s) = S_V V_{21g}(s) \quad \text{et} \quad Q_d(s) = S_V V_{21d}(s), \quad (5.10)$$

où S_V est la section du vérin, d'où la relation :

$$\mathbf{I}_M = S_V^2 \mathbf{I}_H. \quad (5.11)$$

Le passage de la matrice d'impédance mécanique \mathbf{I}_M à la matrice de transfert force-débattement \mathbf{D} se fait en introduisant la relation

$$V_{12}(s) = s Z_{12}(s), \quad (5.12)$$

où

$$Z_{12}(s) = \begin{pmatrix} Z_{12g}(s) \\ Z_{12d}(s) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

d'où la relation

$$\mathbf{D} = s \mathbf{I}_M. \quad (5.14)$$

Ainsi, il est possible de lier les matrices d'impédance hydraulique, d'impédance mécanique et de transfert force-débattement par les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{I}_M = S_V^2 \mathbf{I}_H \\ \mathbf{D} = s \mathbf{I}_M = s S_V^2 \mathbf{I}_H \end{cases}. \quad (5.15)$$

Il est possible de montrer [Serrier, 2006c] que la relation matricielle entre les efforts de suspension $U_g(s)$ et $U_d(s)$ et les débattements de suspension $Z_{12g}(s)$ et $Z_{12d}(s)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} U_g(s) \\ U_d(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{12}(s) & D_{11}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12g}(s) \\ Z_{12d}(s) \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

où $D_{ij}(s)$ désigne le terme à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de transfert force-débattement \mathbf{D} .

A partir de cette relation, il est possible d'en déduire la relation entre les efforts d'une suspension équivalente en pompage et en roulis (définie au centre de gravité du véhicule où il y a un découplage naturel : approche modale) et les débattements des suspensions :

$$\begin{pmatrix} U_z(s) \\ U_\theta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}(s) & D_{12}(s) \\ D_{12}(s) & D_{11}(s) \\ \frac{k_{bad}}{2c} & -\frac{k_{bad}}{2c} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12g}(s) \\ Z_{12d}(s) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

où k_{bad} désigne la raideur de la barre anti-dévers, soit finalement

$$\begin{pmatrix} U_z(s) \\ U_\theta(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}(s) + D_{12}(s) & D_{12}(s) + D_{11}(s) \\ c(D_{11}(s) - D_{12}(s)) + \frac{k_{bad}}{2c} & c(D_{12}(s) - D_{11}(s)) - \frac{k_{bad}}{2c} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{12g}(s) \\ Z_{12d}(s) \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

En pompage pur, les débattements droite et gauche sont égaux. L'équation de mouvement de la caisse en pompage se ramène alors à

$$Z(s) = \frac{1}{m_2 s^2} (F_0(s) + D_Z(s) Z_{12}(s)), \quad (5.19)$$

avec

$$D_Z(s) = 2(D_{11}(s) + D_{12}(s)). \quad (5.20)$$

En roulis pur, les débattements droite et gauche sont opposés, l'équation du mouvement de la caisse en roulis devient alors

$$\Theta(s) = \frac{1}{J_x s^2} (C_r(s) - D_\theta(s) (\Theta_{roue}(s) - \Theta(s))), \quad (5.21)$$

où

$$D_\theta(s) = 2c^2 (D_{11}(s) - D_{12}(s)) + k_{bad}. \quad (5.22)$$

Dans le cas de la suspension de référence, selon l'architecture choisie à l'implantation, la matrice d'impédance hydraulique s'exprime :

- en mode souple :

$$\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

lorsque les vérins droite et gauche sont indépendants (figure 5.15 (a)), et

$$\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2C_0 s + \frac{2}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} & \frac{1}{2C_0 s + \frac{2}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} \\ \frac{1}{2C_0 s + \frac{2}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} & \frac{1}{2C_0 s + \frac{2}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

lorsque les vérins sont liés par une canalisation transversale ;

- en mode ferme :

$$\mathbf{I}_H = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

quelle que soit l'architecture choisie pour l'implantation (en mode ferme, la communication avec la sphère centrale et entre les deux vérins de suspension est bloquée).

En pompage, quelle que soit l'architecture, l'équation de mouvement de la caisse, obtenue à l'aide des relations (5.19) et (5.20), est identique :

$$Z(s) = \frac{1}{m_2 s^2} \left(F_0(s) + \frac{S_v^2 s}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} Z_{12}(s) \right). \quad (5.26)$$

L'équation en roulis dépend de l'architecture :

$$\Theta(s) = \frac{1}{J_x s^2} \left[C_r(s) - \left[2c^2 \frac{S_v^2 s}{C_0 s + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}}} + k_{bad} \right] (\Theta_{roue}(s) - \Theta(s)) \right], \quad (5.27)$$

pour la première implantation,

$$\Theta(s) = \frac{1}{J_x s^2} [C_r(s) - k_{bad} (\Theta_{roue}(s) - \Theta(s))], \quad (5.28)$$

pour la seconde.

Ces deux équations montrent que la réponse en roulis est différente selon l'implantation. Dans le cas où les deux cotés de l'essieu sont indépendants, les raideurs des suspensions s'ajoutent à la raideur de la barre anti-dévers. Dans le cas où la communication entre les deux vérins de suspension est possible librement, seule la barre anti-dévers s'oppose au roulis. De plus, le véhicule ne bénéficie plus de l'amortissement supplémentaire offert par les suspensions.

Remarque

La suspension présentée figure 5.15 (b) diffère de la suspension hydractive utilisée sur les véhicules de série et présentée dans le chapitre 4 par l'absence d'une résistance hydraulique sur la canalisation centrale qui relie les vérins de suspension gauche et droite. Cette absence ne fait aucune différence sur le mode ferme. Elle a revanche son importance pour le mode confort :

- en pompage, la présence de cette résistance fait que la suspension hydractive de série présente en haute fréquence un comportement résistif préjudiciable à l'isolation vibratoire ;

- en roulis, la présence de la résistance hydraulique sur la canalisation entraîne un amortissement supplémentaire qui permet de réduire la résonance et est donc bénéfique au confort des passagers.

5.4.1.2 - Conclusion relative aux contraintes d'implantation sur véhicule

Pour des raisons économiques et d'encombrement, il est possible de mutualiser, lors de l'implantation sur véhicule d'une suspension hydropneumatique comportant une cellule purement capacitive, la sphère de cette cellule pour les vérins de suspension droite et gauche.

L'utilisation de cette sphère à la fois pour la suspension droite et la suspension gauche conduit à créer une communication hydraulique entre les vérins de suspension droite et gauche. Cette communication favorise une bonne isolation vibratoire en roulis. Cependant, la présence d'une résistance hydraulique dans cette communication est nécessaire afin de limiter le phénomène de résonance.

A partir de ce constat, la synthèse et la réalisation, par un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma, du mode souple d'une suspension CRONE hydractive sont développées dans ce chapitre. En effet, dans le cadre d'une application automobile, ce type d'architecture permet, d'une part, par un nombre réduit d'éléments identiques, d'obtenir des performances remarquables à un coût faible, d'autre part, l'architecture en gamma se prête plus facilement à une implantation sur véhicule de par la présence de résistance hydraulique dans la canalisation transversale (résistances absentes dans le cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série). En revanche, comme cela a été montré dans les chapitres 2 et 3, le fait de ne prendre que des cellules identiques limite les degrés de liberté dont dispose le concepteur. Ainsi, dans le cas du mode souple de la suspension CRONE hydractive, l'ordre de dérivation, et donc le degré de stabilité, est imposé.

Le mode ferme de la suspension CRONE hydractive est ici choisi identique au mode ferme de la suspension de référence car celui-ci offre des performances satisfaisantes.

5.5 - Synthèse du mode souple de la suspension CRONE hydractive

Une méthode de détermination des paramètres physiques pour une suspension CRONE réalisée par un arrangement cascade de cellules RC identiques en gamma est proposée dans le chapitre 3. Cependant, dans le contexte applicatif de ce chapitre, une autre méthode est proposée ici. Elle consiste à conserver les composants de la cellule résistive et capacitive de la suspension de référence. La capacité de la cellule purement capacitive est déterminée à partir de la capacité des autres sphères en fonction du nombre de cellules (*cf.* chapitre 2).

La figure 5.17 **donne le schéma hydraulique du mode souple de la suspension CRONE hydractive**, réalisée avec un arrangement cascade de cinq cellules RC en gamma (dont une purement capacitive).

Les paramètres de cette réalisation sont :

- pour les pressions de tarage des sphères : $P01 = P02 = P03 = P04 = 25$ bar, $P00 = 4$ bar ;
- pour les volumes des sphères : $V00 = V01 = V02 = V03 = V04 = 385$ cm³ ;
- pour les résistances hydrauliques, le coefficient de frottement visqueux équivalent, $b1 = b2 = b3 = b4 = 1500$ Ns/m.

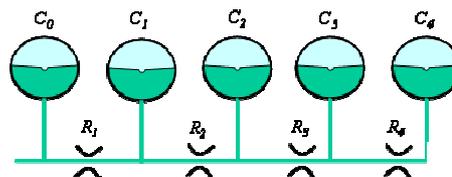


Figure 5.17 – Schéma hydraulique du mode souple de la suspension CRONE hydractive réalisée avec un arrangement cascade de quatre cellules RC en gamma

5.5.1 - Analyse des performances du mode souple de la suspension CRONE hydractive à l'aide du modèle de synthèse

Dans cette partie, les performances du mode souple de la suspension CRONE hydractive, dont la réalisation est détaillée au paragraphe précédent, sont analysées à l'aide de modèles simples. Les performances obtenues en mode ferme ne sont pas détaillées, celui-ci étant identique au mode ferme de la suspension hydractive de référence déjà analysée précédemment. Les courbes représentatives du mode ferme ne sont présentées qu'afin de situer le mode souple de la suspension CRONE hydractive.

Les figures 5.18 à 5.21 illustrent, à l'aide de modèles simplifiés, les performances obtenues avec le mode souple de la suspension CRONE hydractive. La dénomination « Crone S Mmin » et « Crone S Mmax » des légendes de ces figures désignent les tracés relatifs à la suspension CRONE hydractive en mode souple. Les dénominations « Ref S Mmin » et « Ref S Mmax » désignent les tracés relatifs à la suspension de référence en mode souple. Enfin, les dénominations « Mode F min » et « Mode F max » se rapportent au mode ferme, aussi bien de

la suspension CRONE que de la suspension de référence, pour les masses suspendues minimales et maximales.

Le mode souple de la suspension CRONE hydractive présente bien une raideur statique moins importante que celle du mode ferme. La fréquence au gain unité est sensiblement la même pour la suspension CRONE et la suspension de référence quel que soit le mode de fonctionnement de celles-ci. En revanche, le mode souple de la suspension CRONE présente un meilleur degré de stabilité que le mode souple de suspension de référence. De plus, la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue est bien présente.

Le mode souple de la suspension CRONE hydractive conduit à une meilleure isolation vibratoire que le mode souple de la suspension de référence pour les fréquences supérieures à la fréquence propre de roue. Entre la fréquence de caisse et la fréquence de roue, l'isolation vibratoire est meilleure avec la suspension de référence. Il s'agit d'un inconvénient pour lequel des éléments de solution sont proposés dans la partie « conclusions générales et perspectives ».

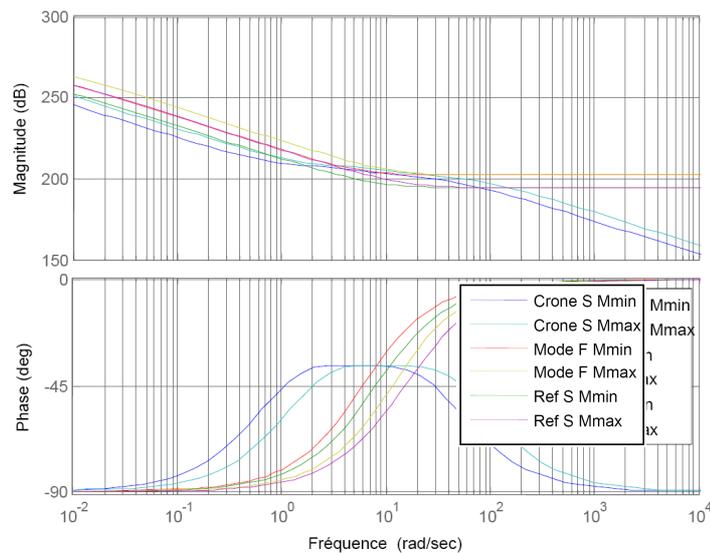


Figure 5.18 – Diagrammes de Bode de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension CRONE pour la masse minimale (en bleu) et pour la masse maximale (en bleu clair) et de la suspension de référence dans le cadre d'une stratégie hydractive

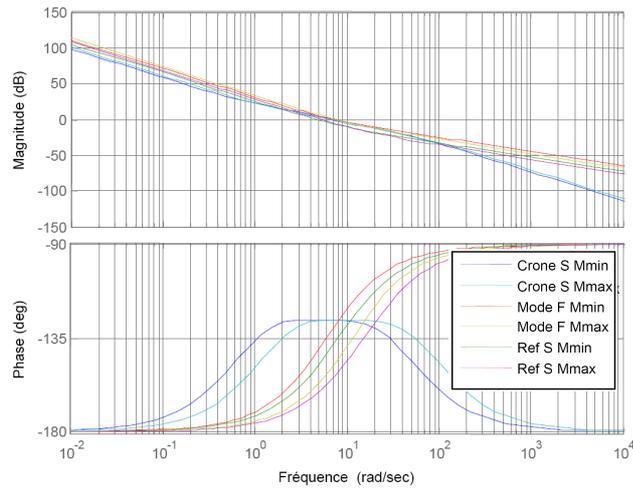


Figure 5.19 – Diagrammes de Bode de la boucle ouverte du modèle quart de véhicule pour la suspension CRONE pour la masse minimale (en bleu) et pour la masse maximale (en bleu clair) et de la suspension de référence dans le cadre d’une stratégie hydractive

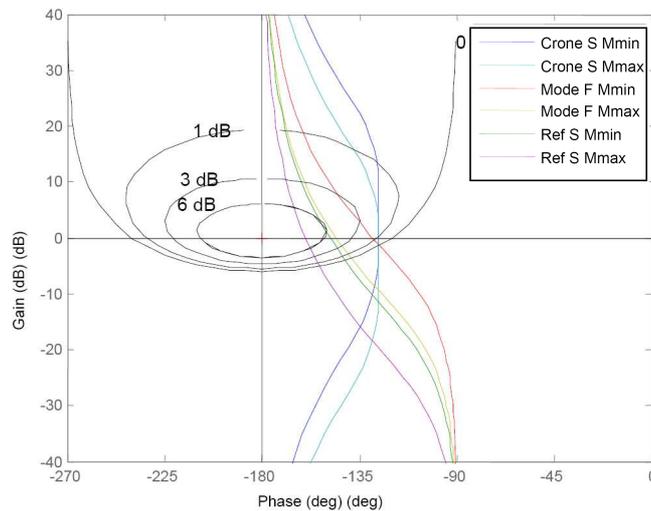


Figure 5.20 – Lieux de Black-Nichols de la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle quart de véhicule avec la suspension CRONE pour la masse minimale (en bleu) et pour la masse maximale (en bleu clair) et de la suspension de référence dans le cadre d’une stratégie hydractive

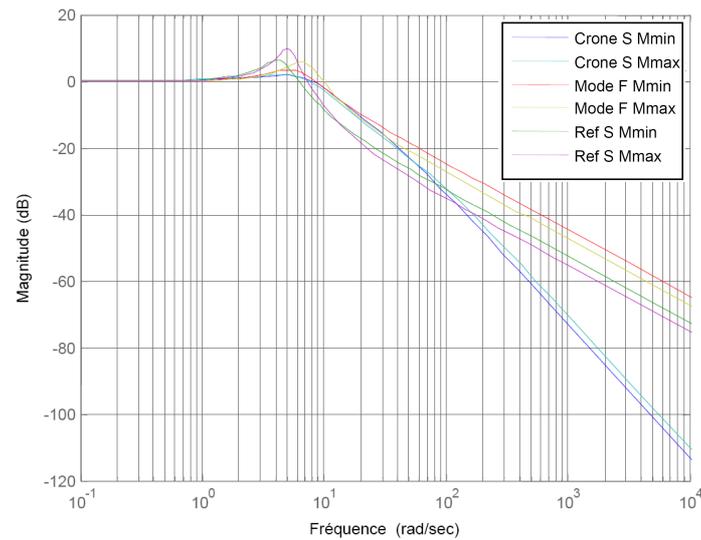


Figure 5.21 – Diagrammes de gain de la transmission absolue du modèle quart de véhicule pour la suspension CRONE pour la masse minimale (en bleu) et pour la masse maximale (en bleu clair) et de la suspension de référence dans le cadre d'une stratégie hydractive

La figure 5.22 présente les réponses indicielles du modèle quart de véhicule obtenues avec la suspension de référence en mode souple, avec la suspension CRONE en mode souple et avec le mode ferme (identique pour les deux suspensions).

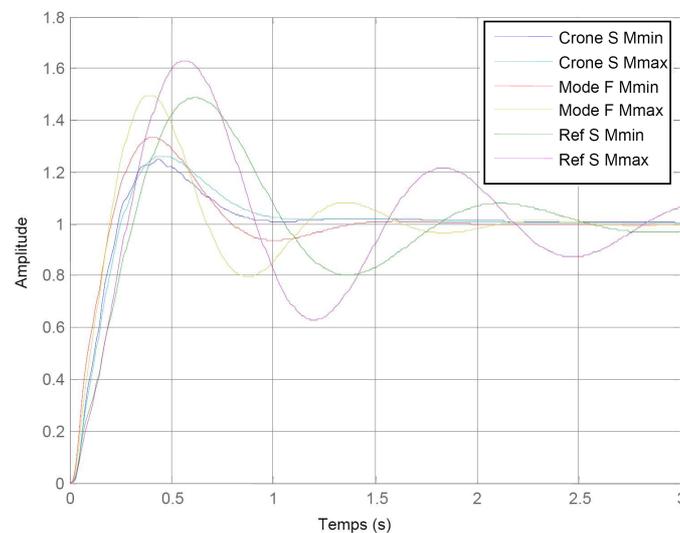


Figure 5.22 – Réponses indicielles comparées du modèle quart de véhicule obtenues avec la suspension de référence et avec la suspension CRONE en modes souple et ferme

La réponse indicielle obtenue avec la suspension CRONE présente des petites oscillations supplémentaires qui ne sont pas visibles sur les autres réponses. Comme cela est montré dans le paragraphe suivant, elles proviennent d'une mauvaise tenue de roue.

5.5.2 - Analyse des performances de la suspension CRONE hydractive pour la tenue de roue à l'aide du modèle de synthèse

La figure 5.23 présente les diagrammes de gain de la fonction de transfert $V_I(s)/V_0(s)$ pour le modèle quart de véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple, de la suspension CRONE hydractive en mode souple et de l'une ou l'autre de ces suspensions en mode ferme. En mode souple, la tenue de roue est meilleure avec la suspension CRONE qu'avec la suspension de référence lorsque la masse suspendue est maximale. Cela n'est cependant pas vrai lorsque la masse suspendue est minimale. Ce constat, qui peut sembler paradoxal, est justifié dans le paragraphe suivant.

La figure 5.24 présente, quant à elle, les réponses indicielles du déplacement vertical du centre roue à un déplacement vertical du sol pour le modèle quart de véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple, de la suspension CRONE hydractive en mode souple et de l'une ou l'autre de ces suspensions en mode ferme. Cette figure confirme les conclusions précédentes.

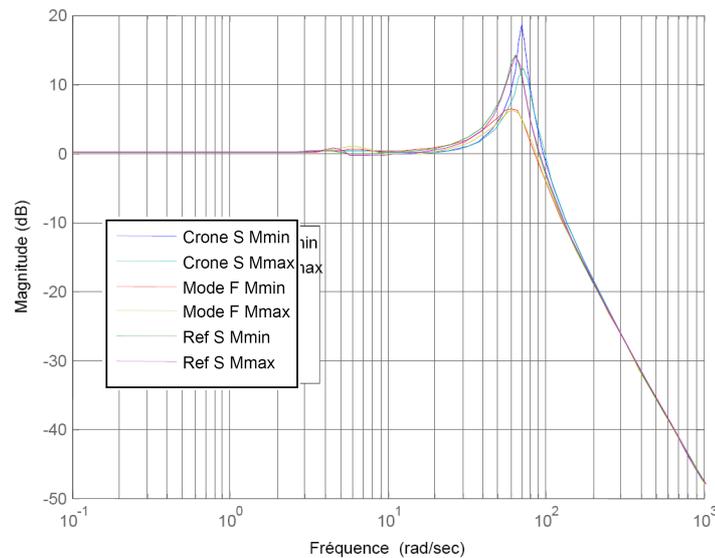


Figure 5.23 – Diagrammes de gain de la fonction de transfert $V_I(s)/V_0(s)$ pour le modèle quart de véhicule équipé de la suspension de référence et de la suspension CRONE hydractive pour différentes configurations

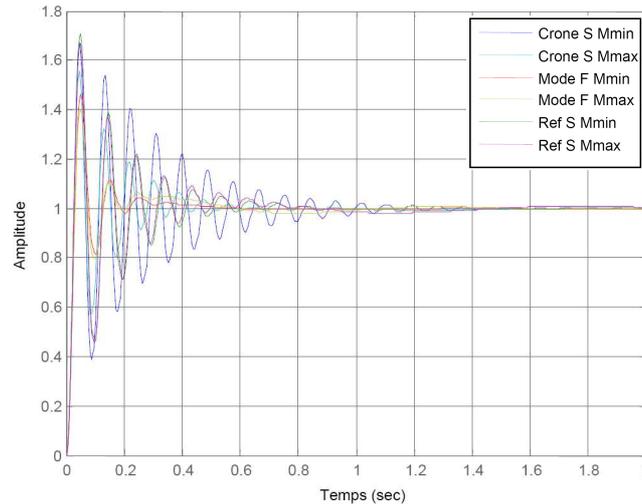


Figure 5.24 – Réponses indicielles du déplacement vertical du centre roue à un déplacement vertical du sol pour le modèle quart de véhicule équipé de la suspension de référence et de la suspension CRONE hydractive pour différentes configurations

5.6 - Note sur le battement de roue

Le modèle quart de véhicule simplifié pour l'étude de la tenue de roue (figure 5.10) permet de déterminer une expression simple de la réponse fréquentielle du transfert $Z_1(s)/Z_0(s) = V_1(s)/V_0(s)$, soit :

$$\frac{Z_1(j\omega)}{Z_0(j\omega)} \approx \frac{k_1}{m_1(j\omega)^2 + D(j\omega) + k_1} = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \frac{D(j\omega)}{k_1} + 1}, \quad (5.29)$$

où $D(s)$ est la fonction de transfert force-débattement de la suspension. Cette expression est une bonne approximation pour les fréquences voisines et supérieures à la fréquence propre de la roue, ici aux alentours de 71 rad/s (soit 11 Hz).

Ainsi, la force $f(t)$ exercée par la suspension sur les masses non suspendues peut être décomposée en

- une force $f_C(t)$, dite capacitive, c'est-à-dire liée aux éléments capacitifs de la suspension et uniquement fonction du déplacement du centre roue ;
- une force $f_R(t)$, dite résistive ou dissipative, liée aux éléments dissipatifs de la suspension et uniquement fonction de la vitesse de déplacement du centre roue.

On a alors

$$f(t) = f_C(t) + f_R(t) \quad (5.30)$$

avec

$$\langle f_C(t), f_R(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f_C(t) f_R(t) dt = 0. \quad (5.31)$$

Dans le cas d'une sollicitation route sinusoïdale, soit $z_0(t) = Z_0 \cos(\omega t)$, il est aisé de démontrer que la vitesse de déplacement du centre roue $v_I(t)$ et le déplacement du centre roue $z_I(t)$, dont les expressions sont de la forme

$$z_I(t) = Z_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \quad (5.32)$$

et

$$v_I(t) = Z_1 \omega \cos\left(\omega t + \phi_{10} + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.33)$$

où ϕ_{10} représente le déphasage de $z_I(t)$ par rapport à $z_0(t)$, sont orthogonaux.

La projection de la force de suspension selon $v_I(t)$ et $z_I(t)$ permet de déterminer que, dans le cas d'une sollicitation route sinusoïdale,

$$f_c(t) = |D(j\omega)| \cos(\arg(D(j\omega))) Z_1 \cos(\omega t + \phi_{10}(\omega)) \quad (5.34)$$

et

$$f_R(t) = |D(j\omega)| \sin(\arg(D(j\omega))) Z_1 \cos(\omega t + \phi_{10}(\omega)). \quad (5.35)$$

Le battement de roue peut être limité en imposant pour la suspension une contrainte sur la force dissipative, l'objectif étant de dissiper l'énergie de la roue. Ainsi, à la fréquence propre de roue ω_1 et pour le mode souple, la force dissipative exercée par la suspension CRONE doit être supérieure ou à la limite égale à la force dissipative de la suspension hydractive de référence. Cette contrainte se traduit alors par

$$\left[|D(j\omega_1)| \sin(\arg(D(j\omega_1))) \right]_{CRONE} \geq \left[|D(j\omega_1)| \sin(\arg(D(j\omega_1))) \right]_{ref}. \quad (5.36)$$

La figure 5.25, qui présente les diagrammes de Bode des transferts force-débattement de la suspension hydractive en mode souple (en bleu) et de la suspension CRONE hydractive en mode souple (en vert), permet de se rendre compte simplement que cette contrainte n'est pas vérifiée avec le dimensionnement initial. En effet, le gain des deux fonctions de transfert est similaire à la pulsation propre de roue tandis que la phase de la suspension CRONE hydractive est beaucoup plus faible. La fonction sinus étant croissante entre 0 et 90°, la relation 5.35 ne peut pas être vérifiée.

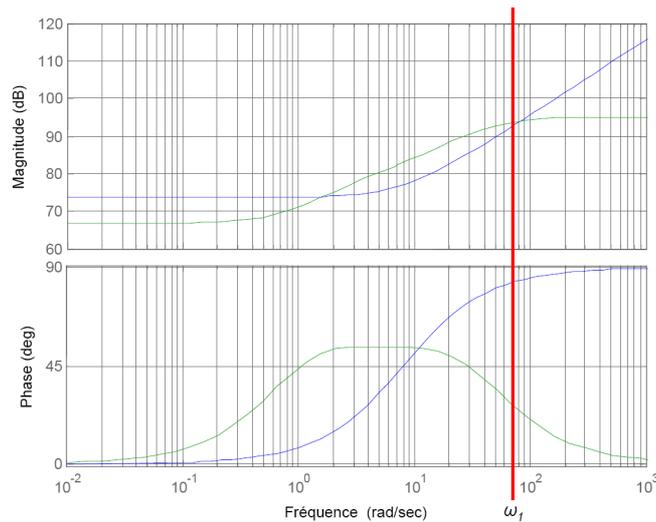


Figure 5.25 – Diagrammes de Bode des transferts force-débattement de la suspension hydractive en mode souple (en bleu) et de la suspension CRONE avec le dimensionnement original (en vert) pour la masse minimale

La suspension de référence ayant ici un battement de roue relativement faible, la contrainte (5.35) s'avère très sévère.

La limitation du battement de roue n'est pas primordiale lorsque la suspension CRONE hydractive est en mode souple. En effet, dès lors que des actions conducteur sont détectées, la stratégie de pilotage d'une suspension hydractive (CRONE ou pas) impose le passage en mode ferme, et ce afin d'améliorer la tenue de route. Cependant, il est tout de même nécessaire de limiter raisonnablement le battement de roue (même en mode souple) afin de ne pas exciter les modes propres des trains roulants qui peuvent alors générer des vibrations et des bruits, sources d'inconfort vibroacoustique.

La gestion des commutations lors des passages du mode souple au mode ferme (et réciproquement) est réalisée par un superviseur non détaillé dans cette thèse. Ce superviseur est une machine à états pour laquelle chacun des modes constitue un état. Le système de suspension hydractive s'inscrit dans le cadre des Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH) [Nouillant, 2002] [Altet, 2004].

5.7 - Mise en place d'une stratégie hydractive

Dans le cadre d'une stratégie hydractive, le mode CRONE dont les performances sont présentées ci-dessus est adopté comme mode confort. Le mode ferme peut être obtenu soit en ne conservant pas la cellule purement capacitive mais en ne conservant qu'une cellule RC, soit en conservant toutes les cellules RC et en isolant simplement la cellule purement capacitive. La deuxième solution engendre une suspension ayant une raideur statique plus faible qu'avec la première solution et donc une tenue de caisse moins bonne sur sollicitations conducteur. Pour cette raison, la première solution est adoptée dans la suite de ce chapitre.

Le mode ferme ainsi obtenu est semblable au mode ferme de la suspension de référence.

5.8 - Validation des performances à l'aide d'un modèle à 14 degrés de liberté

Dans la suite de ce chapitre les performances de la suspension CRONE sont validées comparativement à la suspension de référence à l'aide d'un modèle de validation à 14 degrés de liberté construit à partir des hypothèses et des équations recensées au chapitre 4.

Dans ce modèle, les pneumatiques sont définis à l'aide du modèle de Pacejka qui comporte une centaine de paramètres. Les caractéristiques non linéaires des accumulateurs hydropneumatiques des suspensions sont également prises en compte.

La suspension avant du véhicule est une suspension hydractive dont les caractéristiques des amortisseurs hydrauliques ont été linéarisées. Pour toutes les simulations présentées par la suite, les modes souple ou ferme des suspensions avant et arrière sont identiques (pas d'analyse de configurations croisées telles que souple avant/ferme arrière et réciproquement).

Devant le très grand nombre de simulations qu'il est possible de réaliser, le choix a été fait de restreindre la validation à l'observation du comportement du véhicule en pompage, en roulis et en tangage. Les simulations présentées par la suite n'ont pas pour prétention de correspondre à des situations de vie réelles du véhicule (bien qu'il soit possible d'imaginer des situations plus ou moins réalistes se rapprochant des situations simulées). Elles correspondent plus à des essais analytiques objectifs réalisables sur banc qu'à des essais subjectifs réalisés par des essayeurs.

Seules les sollicitations route sont abordées ici. En effet, les sollicitations conducteur entraînent le passage en mode ferme (mode identique pour la suspension CRONE hydractive et la suspension de référence), mode ferme qui n'a pas fait l'objet d'une synthèse particulière dans ce chapitre.

5.8.1 - Définition d'un profil pour les sollicitations route

Afin d'évaluer le comportement du véhicule sur une sollicitation route réaliste de type obstacle isolé, un profil est défini conformément à la figure 5.26. L'équation décrivant le profil de cet obstacle est :

$$z_0(x) = \frac{h}{2} (th(a(x - x_0)) - th(a(x - x_1))), \quad (5.37)$$

où th représente la tangente hyperbolique et où les grandeurs caractéristiques de cet obstacle sont :

- la hauteur de l'obstacle h ;
- l'angle α de la pente de l'obstacle ;

- les positions x_0 et x_1 qui correspondent aux distances depuis le début de l'obstacle et pour lequel la moitié de la hauteur est atteinte ;
- la longueur L de l'obstacle.

Ces grandeurs caractéristiques sont liées par les relations :

$$a = \frac{2}{h} \tan \alpha \quad \text{et} \quad x_1 = x_0 + L. \quad (5.38)$$

Un autre avantage de ce type d'obstacle est qu'il est parfaitement dérivable, à l'inverse d'un profil d'obstacle en créneau, et peut donc être utilisé sans approximation pour une simulation causale dans laquelle l'entrée sol s'exprime en vitesse et non en position.

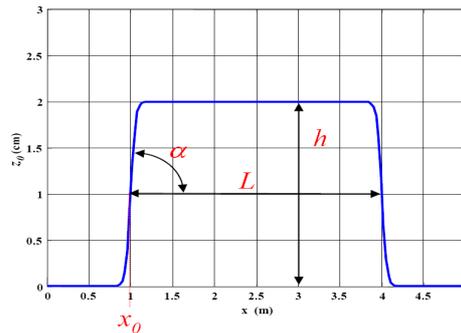


Figure 5.26 – Profil routier pour l'étude du comportement du véhicule sur sollicitation route de type obstacle isolé

5.8.1.1 - Essai en pompage « sur banc »

Pour cet essai, les quatre points de contact roue-sol se déplacent verticalement de la même amplitude. Ce test correspond à un essai sur un banc quatre vérins. Seule la phase de montée est ici étudiée. La simulation permet de mettre en évidence l'influence du couplage entre les essieux avant et arrière, notamment sur la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue.

La figure 5.27 présente l'évolution de la hauteur du centre de gravité du véhicule au cours de cet essai lorsque le véhicule est équipé de la suspension de référence (à l'avant et à l'arrière) en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive (uniquement à l'arrière) en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

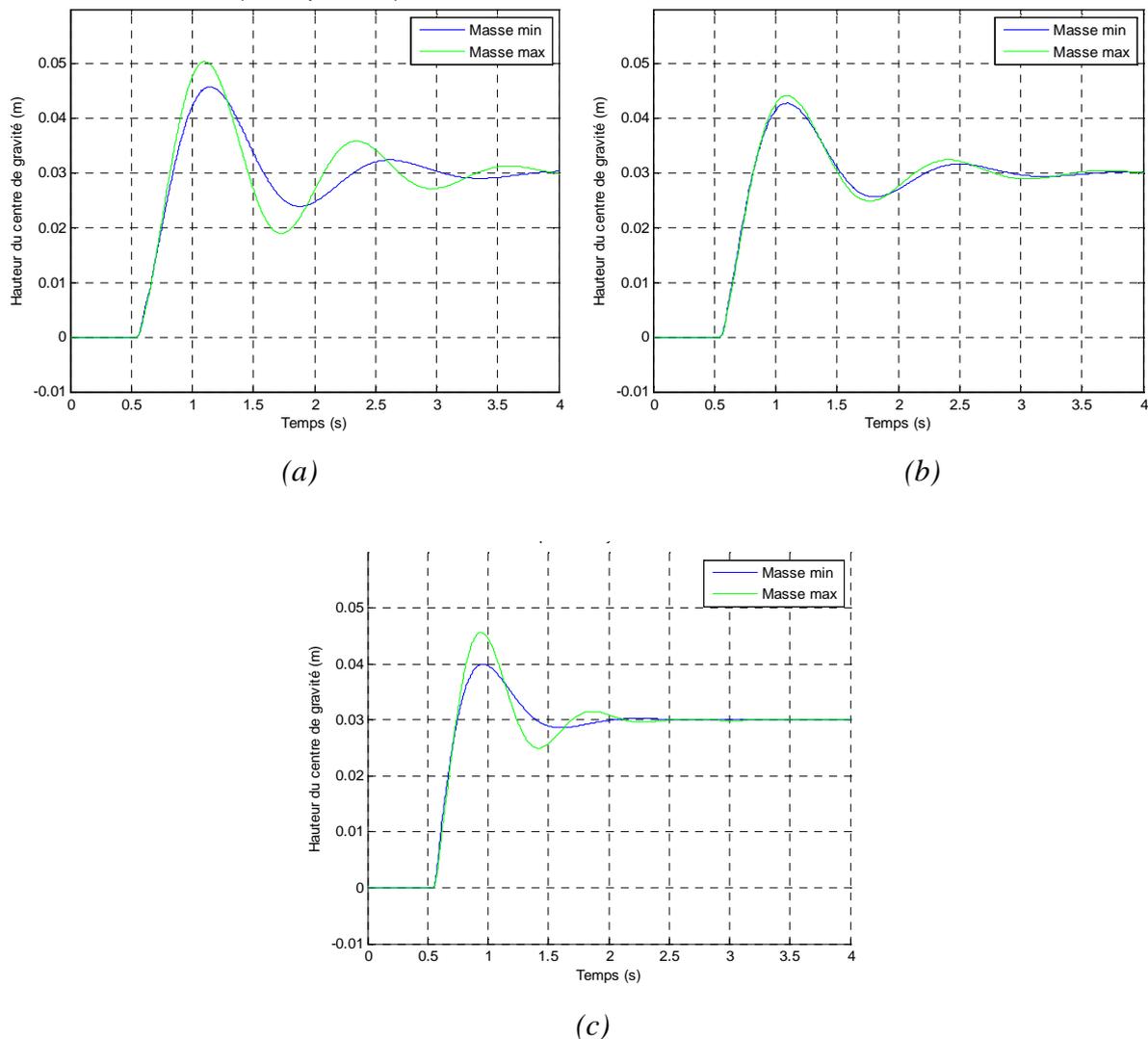


Figure 5.27 – Evolution de la hauteur du centre de gravité du véhicule équipé de la suspension de référence (à l'avant et à l'arrière) en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive (uniquement à l'arrière) en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

La suspension CRONE hydractive en mode souple permet bien d'obtenir la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations de la masse suspendue. Elle présente un meilleur degré de stabilité que la suspension de référence en mode souple. L'amortissement des réponses de la figure 5.27 (b) est plus faible que celui obtenu pour un essai de pompage à l'aide du modèle quart de véhicule. Cela s'explique par la présence du couplage en l'essieu avant et l'essieu arrière. Il a été fait le choix de ne pas redimensionner la suspension avant. Le degré de stabilité de l'essieu avant est bien moindre que celui obtenu avec la suspension CRONE hydractive en mode souple pour l'essieu arrière. La figure 5.27 conduit donc à s'interroger sur le choix du non-redimensionnement la suspension avant. Il serait possible de redimensionner celle-ci (sans toutefois mettre en place de stratégie CRONE) afin d'obtenir un degré de stabilité de l'essieu avant plus comparable avec celui obtenu pour l'essieu arrière.

La figure 5.28 présente l'évolution de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

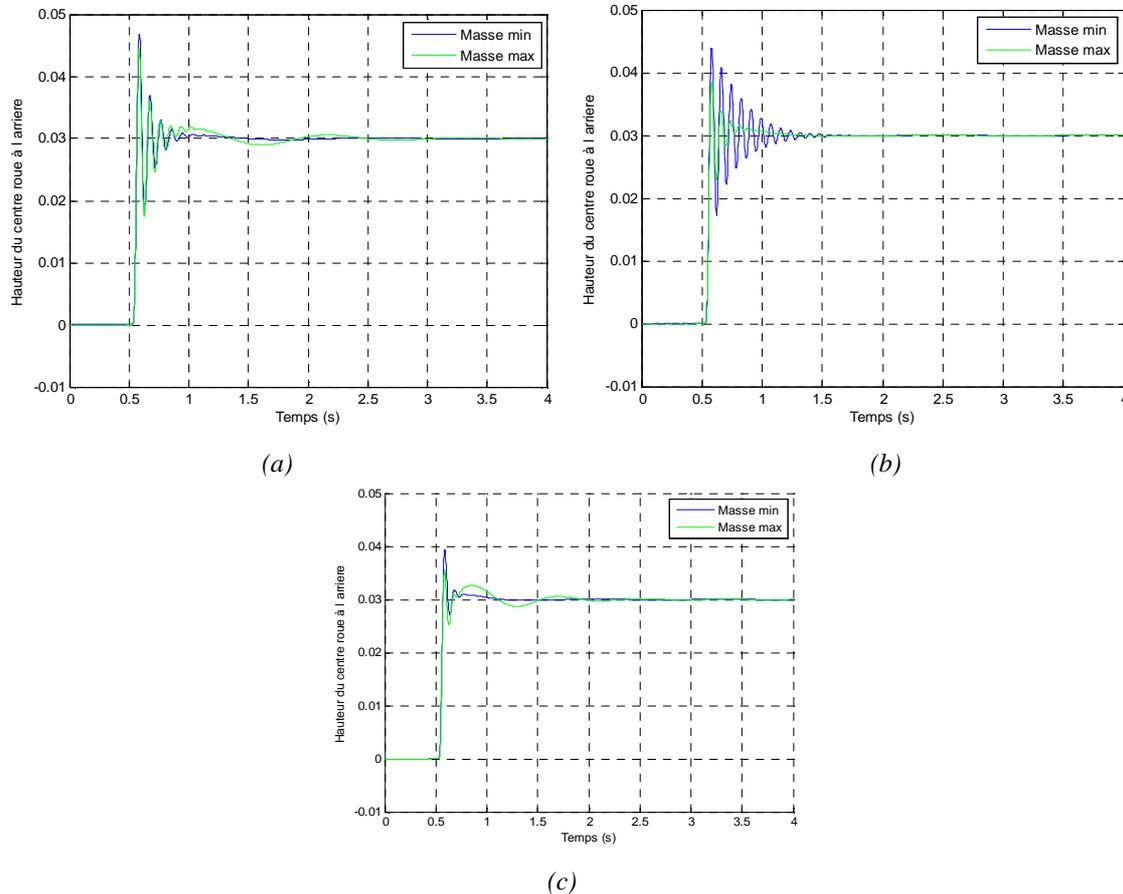


Figure 5.28 – Evolution de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

Cette figure 5.28 montre d'abord que le mode ferme est bien à privilégier pour le contrôle du battement de roue et donc pour la tenue de route. Le mode souple de la suspension CRONE hydractive entraîne un battement de roue relativement important. Comme cela a été dit précédemment, des pistes pour limiter le battement de roue sont proposées dans le cadre des perspectives.

5.8.1.2 - Essai en roulis « sur banc »

Lors de cet essai, les roues du côté gauche sont sollicitées par la montée sur l'obstacle défini dans le paragraphe 5.8.1. Aucune sollicitation route n'est présente sur le côté droit du véhicule.

La figure 5.29 présente l'évolution de l'angle de roulis du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

Lorsque la suspension est en mode ferme, le roulis est mieux amorti qu'en souple, aussi bien pour la suspension de référence que pour la suspension CRONE hydractive. L'évolution de l'angle de roulis est similaire entre le mode souple de la suspension de référence et le mode souple de la suspension CRONE hydractive. Il s'agit là d'un point intéressant dans le sens où le mode souple de la suspension CRONE hydractive n'est dimensionné que pour le pompage. La réponse en roulis n'est que la conséquence des choix faits lors de la synthèse en pompage. Ce constat se justifie sans doute par la présence de la barre anti-dévers, dont la raideur en torsion est plus importante que la raideur équivalente des suspensions.

Par ailleurs, quelle que soit la suspension considérée et quel que soit son mode de fonctionnement, le temps de raideur en roulis varie peu. Cette propriété étonnante peut s'expliquer par le fait que l'inertie en roulis varie peu lorsque la masse suspendue varie. Cependant, toute tentative d'explication se heurte ici à la limite de validité du modèle. En effet, l'augmentation de l'inertie en roulis a été supposée se faire dans le rapport de l'augmentation des masses suspendues. Un modèle plus fin prenant en compte, d'une part, la nouvelle position du centre de gravité du véhicule⁷ et, d'autre part, la position du centre de gravité des masses ajoutées à l'avant et à l'arrière, serait sans doute nécessaire.

⁷ La notion d'*inertie* traduit « l'éloignement » de la masse d'un système par rapport à son centre de gravité. Lorsque le centre de gravité d'un système se déplace, il est en théorie nécessaire de recalculer l'inertie en fonction de la nouvelle distribution des masses. Cela n'a pas été fait ici.

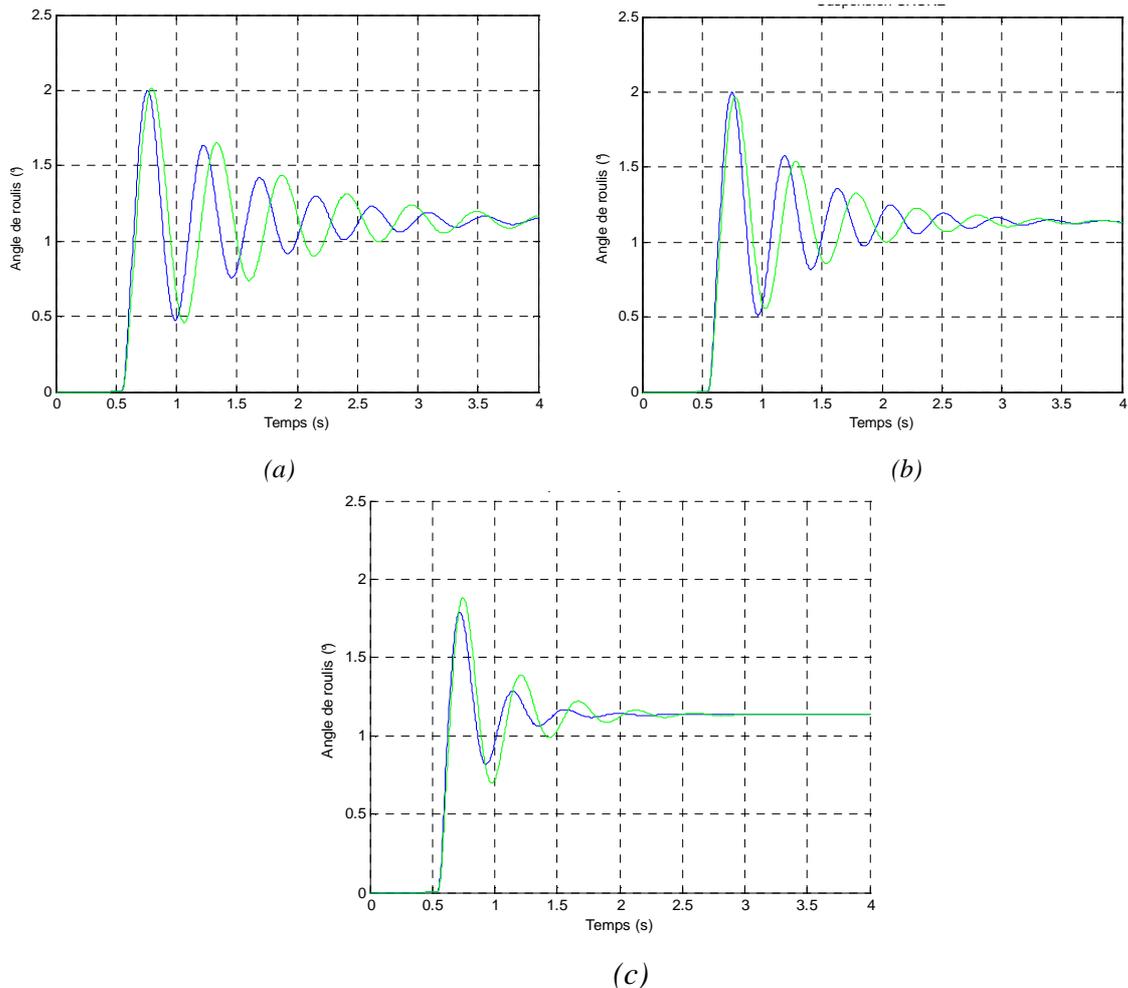


Figure 5.29 – Evolution, lors d'un essai de roulis, de l'angle de roulis du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

La figure 5.30 présente l'évolution de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipée de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

Les résultats sont très proches de ceux présentés figure 5.28 pour l'essai en pompage pur. Cela s'explique par le fait que la roue arrière gauche subit exactement la même sollicitation pour l'essai de pompage et l'essai de roulis.

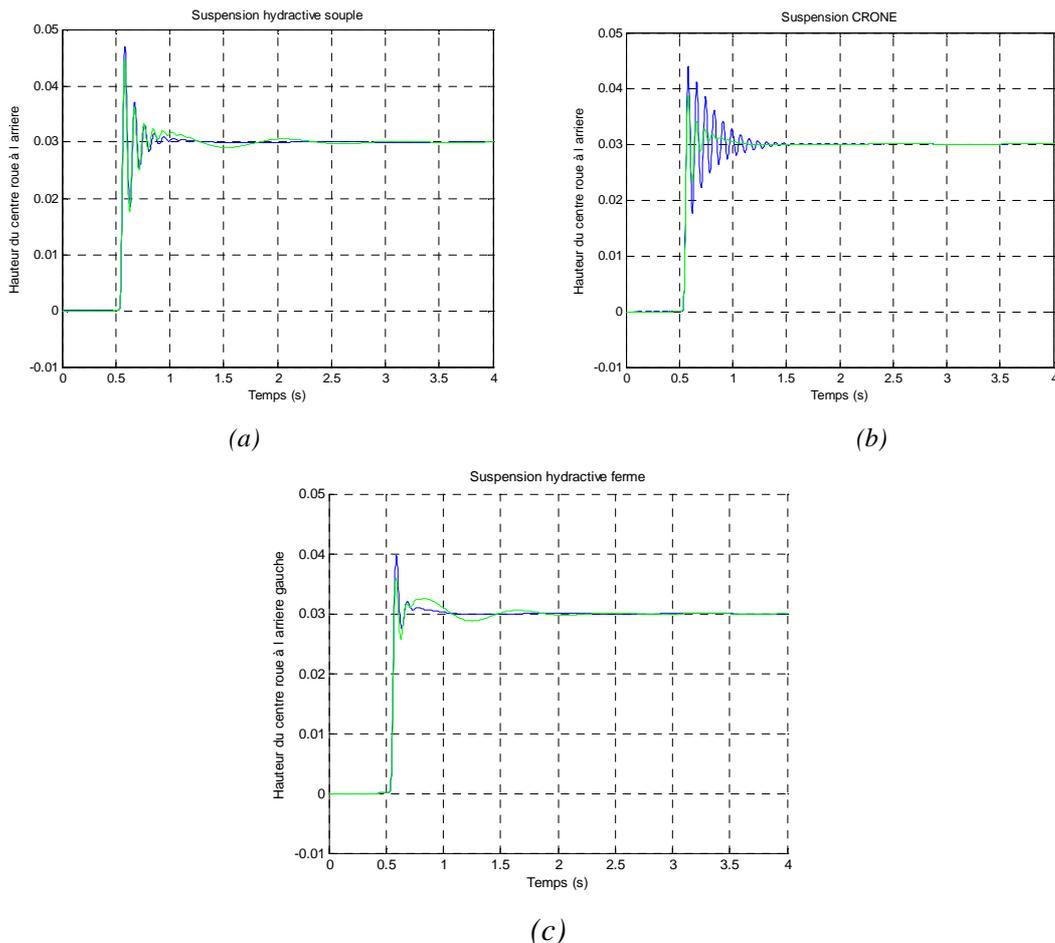


Figure 5.30 – Evolution, lors d'un essai de roulis, de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

5.8.1.3 - Essai en tangage « sur banc »

Afin de solliciter le mode de tangage du véhicule, l'essieu arrière est sollicité par la montée sur l'obstacle défini précédemment, les points de contacts roues avant – sol ne subissant pour leur part aucun mouvement.

La figure 5.31 présente l'évolution, lors d'un essai de tangage, de l'angle de tangage du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

Tout comme pour le roulis, les résultats obtenus avec la suspension CRONE hydractive en mode souple en tangage sont uniquement la conséquence des choix faits lors de la synthèse en pompage. La figure 5.31 montre une certaine robustesse du degré de stabilité en tangage, degré de stabilité qui est d'ailleurs bien meilleur qu'avec la suspension de référence en mode souple.

Contrairement aux résultats présentés en roulis, les résultats en tangage sont très différents selon la suspension considérée. Cela est dû au fait qu'il n'y a pas d'équivalent à la barre anti-dévers pour le contrôle du tangage.

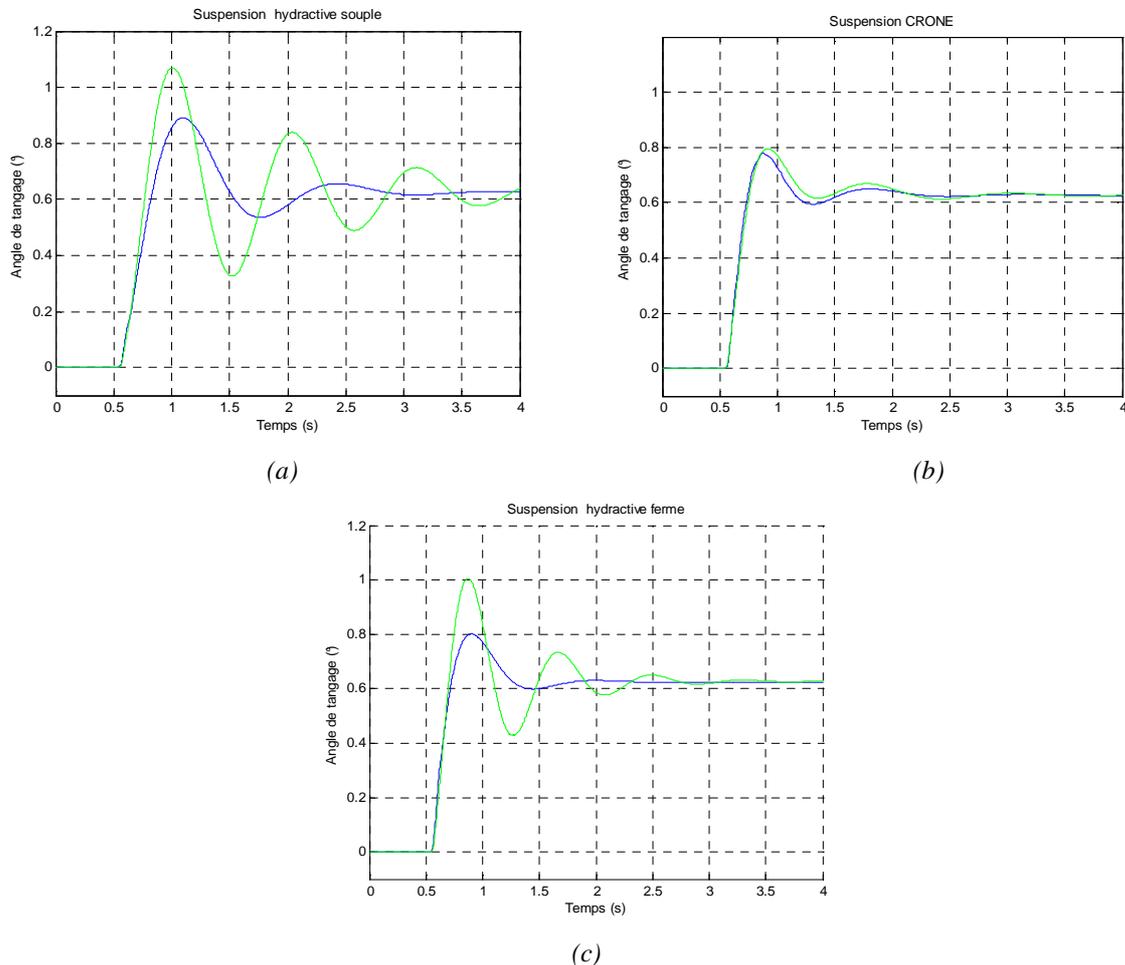


Figure 5.31 – Evolution, lors d'un essai de tangage, de l'angle de tangage du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

La figure 5.32 présente l'évolution, lors d'un essai de tangage, de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert).

Cette figure, pour laquelle les différences par rapport aux figures 5.30 et 5.28 obtenues en roulis et en pompage sont notables, met en évidence l'apparition d'un phénomène de couplage avant-arrière lors du tangage du véhicule. Ainsi, le battement de la roue arrière gauche est plus limité que dans les cas précédents de roulis et de pompage.

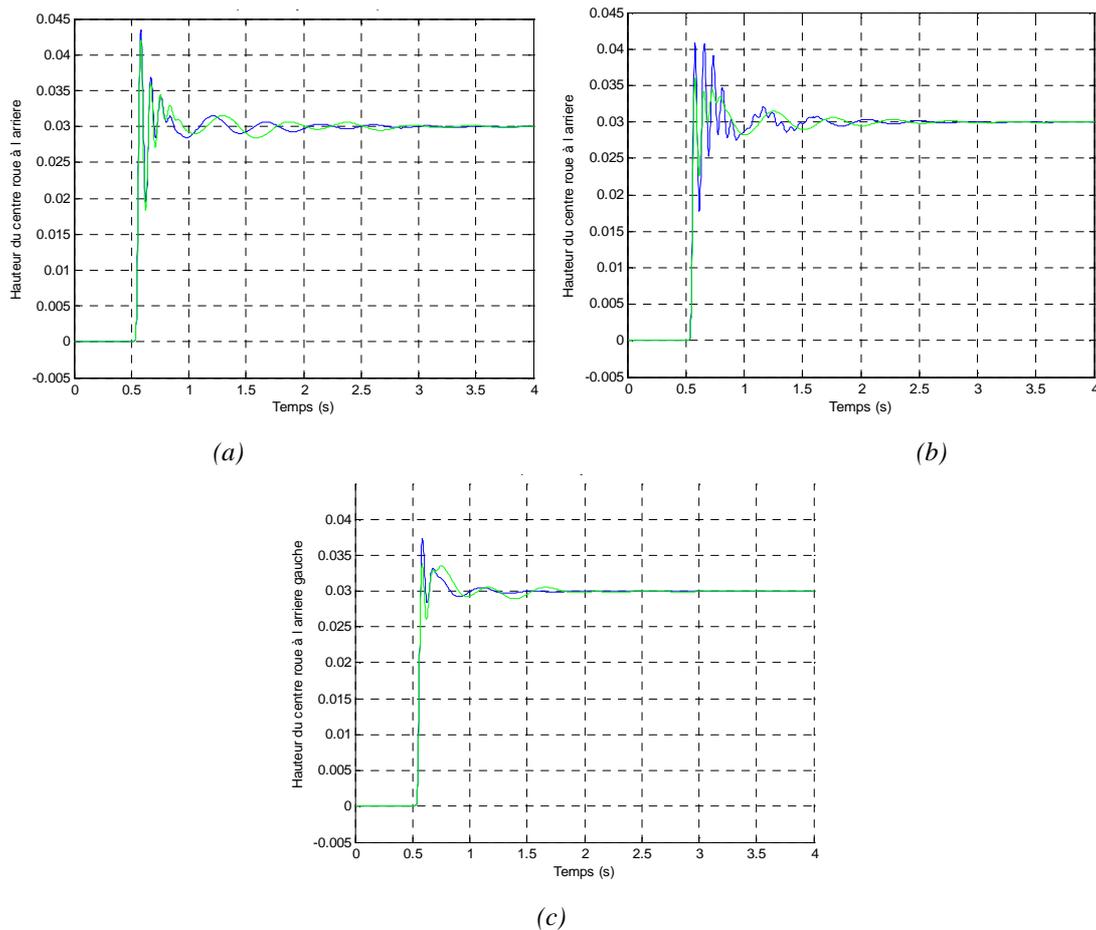


Figure 5.32 – Evolution, lors d'un essai de tangage, de la hauteur du centre de la roue arrière gauche du véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple (a), de la suspension CRONE hydractive en mode souple (b) et de l'une des deux suspensions en mode ferme (c) pour la masse minimale (en bleu) et la masse maximale (en vert)

Notes sur l'influence des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques

Les simulations précédentes sur le modèle de validation à 14 degrés de libertés ont toutes été réalisées en tenant compte des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques. Les mêmes simulations en utilisant un modèle linéarisé de la suspension CRONE hydractive montre que l'influence des non-linéarités est ici très faible et négligeable.

Plusieurs raisons justifient ce constat :

- les non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques ne sont pas des non-linéarités très marquées vu le domaine de fonctionnement de l'accumulateur ;
- dans le contexte de l'automobile, les sollicitations sont d'amplitudes trop faibles pour que les non-linéarités aient une influence notable. Dans le chapitre 3, afin que les contributions des noyaux d'ordre 2 et 3 ne soient plus négligeables, des amplitudes de 10 cm au minimum sont nécessaires. Les sollicitations proposées ici ne dépassent pas les 3 cm ;
- le mode souple de la suspension CRONE hydractive fait appel à une architecture multi-sphère. Dans ce cas, le débit d'huile qui pénètre dans chaque sphère est réduit en fonction de l'impédance hydraulique de la cellule. Ainsi, plus le nombre de cellules est important,

moins la variation du volume d'huile au sein de chaque sphère est importante. L'hypothèse de petites variations autour du point d'équilibre est alors d'autant plus réaliste.

5.9 - Conclusion

Dans ce chapitre 5, la synthèse et la réalisation en technologie hydropneumatique d'une suspension CRONE hydractive pour véhicule automobile sont proposées. Le développement de cette suspension est effectué sur un véhicule léger de tourisme équipé en série d'une suspension hydractive. Les variations des masses suspendues sur l'essieu avant étant relativement faibles, le choix de n'équiper que l'essieu arrière d'une suspension CRONE hydractive est justifié. La suspension qui équipe en série l'essieu avant est alors conservée sans re-dimensionnement.

Concernant l'essieu arrière, le mode souple de la suspension CRONE hydractive est conçu à partir d'une suspension hydractive de référence. La réalisation de ce mode souple est basée sur un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma présenté au chapitre 1. L'analyse comparative, sur des modèles simples, des modes souples de la suspension CRONE hydractive et de la suspension de référence fait apparaître :

- une meilleure isolation vibratoire *aux hautes fréquences* avec la suspension CRONE hydractive ;
- une meilleure tenue de caisse sur sollicitation route avec la suspension CRONE hydractive ;
- une dégradation de l'isolation vibratoire *aux moyennes fréquences* avec la suspension CRONE hydractive;
- une moins bonne tenue de roue lorsque la masse est minimale.

Ce dernier phénomène est peu gênant tant que le battement de roue reste inférieur à une certaine limite. En effet, lorsque la suspension CRONE hydractive est en mode souple, la tenue de route n'est pas privilégiée. Il faut simplement veiller à ne pas exciter, de manière trop importante, les modes propres des éléments des trains roulants.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des performances d'un véhicule complet équipé de la suspension CRONE hydractive. Pour cela, le modèle à quatorze degrés de liberté développé au chapitre 4 est utilisé. Afin de limiter le nombre de simulations, l'analyse se focalise sur le comportement du véhicule en pompage, roulis et tangage.

Seules les sollicitations routes sont considérées dans la mesure où, dès lors que le conducteur agit sur les organes de conduite (volant et pédales), le superviseur de la suspension hydractive (CRONE ou pas) ordonne le passage en mode ferme.

Les simulations effectuées montrent que le comportement du véhicule équipé de la suspension CRONE hydractive en mode souple est, au moins, aussi bon que celui obtenu avec

la suspension de référence. Dans le cas du roulis, la suspension CRONE hydractive conduit à des résultats similaires à ceux obtenus avec la suspension de référence. Dans le cas du tangage, les résultats sont bien meilleurs : la suspension CRONE hydractive conduit à une meilleure tenue de caisse tout en garantissant la robustesse du degré de stabilité. Il s'agit là d'un résultat remarquable dans la mesure où la synthèse du mode souple de la suspension CRONE hydractive n'est effectuée qu'en tenant compte du mode de pompage.

Conclusion générale et perspectives

L'interprétation et la discussion des principaux résultats présentés dans ce document font l'objet de la conclusion.

Le *chapitre 1* qui résume les aspects fondamentaux commence par rappeler les définitions et les principales propriétés des opérateurs différentiels non entiers. Dans un second temps, deux méthodes de réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence sont présentées. Ces deux méthodes conduisent à la réalisation, par des arrangements de cellules RC, de dispositifs pour lesquels la réponse fréquentielle de l'impédance d'entrée présente un comportement d'ordre non entier.

La première des deux méthodes proposées dans ce chapitre permet, à partir de la fonction de transfert $I_e(s)$ d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence (caractérisé par 4 paramètres dits de haut niveau), de déterminer les $2N+1$ paramètres physiques (R et C) d'un réseau de telle façon que la réponse fréquentielle de l'impédance d'entrée de ce réseau constitue une très bonne approximation de la réponse fréquentielle du transfert $I_e(s)$. L'originalité de ces travaux provient de l'aspect méthodologique : à partir de la *fonction de transfert* d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, il est possible d'en proposer une *réalisation physique*.

La seconde méthode consiste à réaliser un dispositif présentant un comportement d'ordre non entier sur une plage fréquentielle à partir d'un faible nombre de *cellules RC identiques*. Cette méthode permet de réaliser des intégrateurs d'ordre non entier dont l'ordre est compris entre 0,5 et 0,578.

La dernière partie du chapitre 1 valide, à partir d'une réalisation expérimentale en technologie électrique, la seconde méthode et met en évidence l'intérêt de l'intégration d'ordre non entier dans le cadre de la robustesse du degré de stabilité vis-à-vis des variations paramétriques.

Le *chapitre 2* s'attache à illustrer et à démontrer les propriétés spécifiques liées à la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence en technologie hydropneumatique à travers l'exemple d'un dispositif de suspension hydropneumatique. Les éléments capacitifs utilisés dans cette technologie présentent en effet deux particularités : leur caractéristique est non linéaire et la valeur de leur capacité dépend de la masse suspendue.

La première de ces particularités n'est pas traitée dans le chapitre 2, pour lequel tous les développements sont effectués sous l'hypothèse de petites amplitudes.

La seconde particularité se traduit par une simple translation de la réponse fréquentielle de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension.

Cette propriété conduit à des performances remarquables, à savoir, la robustesse du degré de stabilité et la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse suspendue.

Deux méthodes, à l'image des méthodes développées dans le chapitre 1 pour la synthèse et la réalisation d'une suspension CRONE en technologie hydropneumatique, sont alors proposées et illustrées. La première méthode commence par la détermination des 4 paramètres de haut niveau d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence, en tenant compte dès cette étape de la spécificité de la technologie hydropneumatique. Elle se poursuit par le calcul des paramètres physiques puis technologiques (pression de tarage et volume des accumulateurs hydropneumatiques).

Une transformation mathématique permettant de prendre en compte l'influence des variations de la masse suspendue directement sur la fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence déterminée en début de méthode est définie. Elle évite ainsi le calcul des paramètres technologiques pour la prévision du comportement vis-à-vis des variations de la masse suspendue d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique et utilisé dans un contexte d'isolation vibratoire.

Le *chapitre 3* s'attache à la prise en compte des non-linéarités dans le cas d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. A l'aide de la décomposition en série de Volterra, outil mathématique fréquemment utilisé pour l'identification des systèmes non linéaires, la représentation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence est proposée sous la forme d'une somme de noyaux. Le noyau de Volterra d'ordre 1 représente la partie linéaire du système. Les noyaux de Volterra d'ordre supérieur permettent de décomposer la partie non linéaire du système sous la forme de plusieurs sous-systèmes réagissant chacun à une puissance différente de l'entrée. Ainsi, la contribution du noyau d'ordre k à la réponse temporelle du système non linéaire à une entrée $u(t)$ est fonction de $u(t)^k$.

La décomposition en noyaux de Volterra permet d'établir une pseudo-réponse fréquentielle du système non linéaire à un type d'entrée. A partir des pseudo-diagrammes de gain du support d'étude hydropneumatique présenté au chapitre 2, il est montré que les non-linéarités n'affectent pas la robustesse du degré de stabilité obtenue grâce à un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique.

Le *chapitre 4* est consacré, d'une part, à la mise en place d'un modèle de validation à 14 degrés de liberté pour l'étude de la dynamique des véhicules automobiles et, d'autre part, à l'étude de modèles de synthèse et d'analyse pour la dynamique verticale du véhicule.

Grâce aux formalismes de Lagrange et à l'utilisation des torseurs, outil mathématique spécifique à la mécanique, il est montré que l'écriture des équations régissant le

comportement du modèle de validation à 14 degrés de liberté nécessite la mise en place d'au moins 12 hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses limitent le domaine de validité du modèle et augmentent les incertitudes sur les résultats.

Afin de situer le contexte dans lequel se placent les travaux présentés au chapitre 5, un état des suspensions automobiles est présenté en dernière partie.

Le *chapitre 5* propose la synthèse et la réalisation en technologie hydropneumatique d'une suspension CRONE hydractive pour l'essieu arrière d'un véhicule automobile. Une suspension CRONE hydractive est une suspension présentant plusieurs états de fonctionnement et dont le mode confort garantit la robustesse du degré de stabilité de la caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue. Cette suspension CRONE hydractive est réalisée à partir d'une suspension de référence par un arrangement en cascade de cellules RC identiques en gamma. Dans un premier temps, les performances de cette suspension sont évaluées en pompage à l'aide d'un modèle quart de véhicule. Dans un second temps, les performances en pompage, roulis et tangage du véhicule équipé de la suspension CRONE hydractives sont observées à partir du modèle à 14 degrés de libertés développé au chapitre 4. Pour ces simulations, le modèle de la suspension CRONE hydractive tient compte des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques.

Parmi les résultats de simulation, plusieurs points sont à souligner :

- en *pompage*, le mode souple de la suspension CRONE hydractive permet d'obtenir la robustesse du degré de stabilité et la robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, performance prévisible au vu des résultats présentés dans les chapitres précédents ;

- en *roulis*, le véhicule équipé de la suspension CRONE hydractive en mode souple se comporte de la même façon que le véhicule équipé de la suspension de référence en mode souple. Ce résultat est lié au fait que, en mode souple, la barre anti-dévers dicte pour une grande part le comportement du véhicule en roulis.

- en *tangage*, le degré de stabilité du véhicule équipé de la suspension CRONE hydractive en mode souple est robuste vis-à-vis des variations de la masse suspendue et la tenue de caisse est bien meilleure qu'avec la suspension hydractive de référence en mode souple. Ces résultats sont remarquables dans la mesure où le mode souple de suspension CRONE hydractive n'a fait l'objet d'une synthèse que pour le pompage.

Il est à noter que dans le contexte des suspensions automobiles, les non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques ont très peu d'influence sur les performances. Ce constat est d'autant plus vrai que le nombre de cellules utilisées pour la réalisation du mode souple de la suspension CRONE hydractive est grand.

Les perspectives à moyen terme s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Concernant l'influence des non-linéarités d'un intégrateur d'ordre non entier réalisé en technologie hydropneumatique, les travaux présentés dans ce mémoire ouvrent de nombreuses voies.

Tout d'abord, *la prise en compte dès la conception de l'influence des non-linéarités* des accumulateurs constitue le prolongement direct des résultats des chapitres 2 et 3. En effet, maintenant que l'influence des non-linéarités est explicitée, il reste à adapter la méthode de synthèse présentée dans le chapitre 2 pour garantir par exemple un premier dépassement donné malgré la présence des non-linéarités. Pour cela, la *définition d'une transformation mathématique* permettant de représenter l'influence des non-linéarités directement sur le comportement fréquentiel de l'intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence serait intéressante, à l'image de ce qui est présenté pour la prise en compte de l'influence des variations de la masse suspendue.

Ensuite, le travail qui a été fait pour l'influence des non-linéarités des accumulateurs hydrauliques doit être poursuivi avec la prise *en compte des non-linéarités des résistances* hydrauliques. En effet, en isolation vibratoire, de nombreuses suspensions possèdent des amortisseurs non linéaires. Les non-linéarités des sphères sont liées aux propriétés de détente et de compression des gaz : elles peuvent être qualifiées de *parasites* dans le sens où elles ne sont pas recherchées par le concepteur. A l'inverse les non-linéarités des résistances hydrauliques peuvent être qualifiées de *fonctionnelles* au sens où elles répondent à une spécification du cahier des charges. La caractérisation de l'influence de ces non-linéarités est donc fondamentale.

Pour cela, l'utilisation des séries de Volterra peut être poursuivie. La prise en compte des non-linéarités des résistances hydrauliques devra se faire, au moins dans un premier temps, indépendamment des non-linéarités des accumulateurs hydropneumatiques afin de faciliter le calcul des noyaux, déjà complexe par ailleurs. Cela ne pose pas de problème particulier dans la mesure où les non-linéarités des résistances sont généralement beaucoup plus marquées que celles des sphères.

Une autre piste consiste à n'intégrer dans le réseau hydropneumatique qu'une seule résistance hydraulique non-linéaire, les autres étant toutes linéaires. Dans le cas d'une architecture en cascade de cellules RC en gamma, la première résistance hydraulique est celle traversée par le débit le plus important. Il est alors judicieux de « concentrer les non-linéarités fonctionnelles » sur cette résistance. Dans le cas d'un arrangement parallèle de cellules RC en série, la résistance la plus susceptible d'avoir une caractéristique non linéaire est celle associée à la cellule présentant la plus faible impédance hydraulique.

Dans le cas où seule une résistance hydraulique est non linéaire, le calcul des noyaux de Volterra est alors grandement simplifié.

Au **niveau applicatif**, la suspension CRONE hydractive peut faire l'objet de nombreux développements futurs.

Tout d'abord, **le contrôle du battement de roue** peut être amélioré. Il est montré dans le chapitre 5 que le battement de roue dépend, notamment, de la phase apportée par la suspension à la fréquence propre de roue. Il est possible de mieux contrôler la roue en ajoutant une cellule à avance de phase à la suspension CRONE hydractive en mode souple. Pour être efficace, cette cellule doit être bien dimensionnée de façon à apporter le maximum de phase à la fréquence propre de roue.

La fonction de transfert de l'impédance hydraulique d'entrée de la suspension CRONE hydractive en mode souple devient alors :

$$I_e(s) = \frac{K_0}{s} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^m \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}} \right).$$

Ainsi, la cellule non entière à avance de phase est consacrée au degré de stabilité du mode de caisse (et à sa robustesse vis-à-vis des variations de la masse suspendue) et la cellule entière à avance de phase, quant à elle, est dédiée au degré de stabilité de la roue. Cette perspective fait d'ores et déjà l'objet de développements.

En second lieu, le chapitre 5 montre les performances obtenues sur un modèle à 14 degrés de liberté par un véhicule équipé au niveau de l'essieu arrière d'une suspension CRONE hydractive et sur l'essieu avant d'une suspension hydractive (qui n'a pas fait l'objet d'un redimensionnement). Le **redimensionnement de la suspension de l'essieu avant**, afin d'accorder son comportement dynamique avec celui de la suspension CRONE hydractive de l'essieu arrière, doit être envisagé pour optimiser les performances globales du véhicule.

En troisième point, la méthode présentée dans le chapitre de 5 pour la synthèse et la réalisation du mode souple de la suspension CRONE hydractive ne tient compte que du mode de pompage. Dans le futur, cette **synthèse peut se faire dans l'espace modal** au centre de gravité du véhicule où les modes de pompage, de roulis et de tangage sont naturellement découplés. Cette approche conduit à trois suspensions virtuelles, l'une pour le pompage, l'une pour le roulis et la troisième pour le tangage. Une fois les suspensions virtuelles définies au centre de gravité, il est possible de revenir dans l'espace local au niveau des points d'ancrage des suspensions à l'aide d'une matrice de passage géométrique. Cette dernière résulte de l'hypothèse châssis indéformable.

Enfin, la gestion du passage d'un mode à un autre n'a pas été abordée dans ce mémoire. La **définition d'un superviseur** permettant la gestion des modes de suspension en tenant compte des autres organes du véhicule, dans une stratégie de Contrôle Globale du

Châssis (CGC), peut être faite. Dans le même esprit, des dispositifs additionnels à la suspension, tel qu'un dispositif hydraulique d'anti-roulis à l'image de celui présenté dans [Serrier, 2006d], peuvent également être pilotés par ce superviseur.

Pour finir, *l'implantation sur véhicule* d'une suspension CRONE hydractive est désormais nécessaire afin de valider au cours d'essais réels les performances constatées en simulation. Cette implantation fait l'objet d'un travail de thèse en collaboration avec PSA à compter du 1^{er} Octobre 2008.

Annexe I

La représentation des champs de vecteurs par les torseurs en mécanique

I.1 - Définition

Un torseur est un outil mathématique permettant de représenter un champ de vecteurs équiprojectif⁸ par sa réduction en un point donné P de l'espace en deux vecteurs particuliers :

- la résultante du champ, notée \vec{R} , ce vecteur étant indépendant du point où le torseur est exprimé ;
- le moment en P du champ noté \overrightarrow{M}_P .

L'ensemble des moments du champ dans tout l'espace représente le champ lui-même. La résultante est un vecteur caractéristique du champ permettant, à partir de l'expression du moment du champ en un point particulier, de retrouver le champ en tout point. Cette réduction est rendue possible par le caractère équiprojectif du champ de vecteurs qui implique une relation dite de Varignon entre les moments du champ en deux points quelconques O et P de l'espace :

soit un espace affine E

$$\forall O \in E, \forall P \in E, \overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{M}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP} . \quad (\text{I.1})$$

Un champ de vecteurs équiprojectif est donc pleinement défini par la connaissance de sa résultante et de son moment en un point arbitraire. Un torseur \mathcal{T} , exprimé en un point quelconque de l'espace O, appelé point de réduction du torseur, sera noté par la suite :

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M}_O \end{array} \right\}_O . \quad (\text{I.2})$$

⁸ Dans un espace affine euclidien E, un champ de vecteurs $(\vec{v}_P)_{P \in E}$ est équiprojectif si :

$\forall P \in E, \forall Q \in E, \vec{v}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{v}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}$, où \cdot représente un produit scalaire.

Les torseurs sont très utilisés en mécanique du solide indéformable et des systèmes car, comme cela est expliqué par la suite, il est possible de décrire un grand nombre de champs de vecteurs significatifs par des torseurs. Pour plus d'informations sur les torseurs et leur utilisation en mécanique générale, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Brossard, 1994].

I.2 - Opérations sur les torseurs

Il est possible d'additionner des torseurs à la condition qu'ils soient exprimés au même point et qu'ils représentent des grandeurs similaires. Dans ce cas, la somme de deux torseurs est un torseur ayant pour résultante la somme des résultantes et pour moment la somme des moments.

La seconde opération importante pour les torseurs est le comoment. Soient deux torseurs $\mathcal{J}_1 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{array} \right\}_O$ et $\mathcal{J}_2 = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{20} \end{array} \right\}_O$ réduits (*i.e.* exprimés) au même point O de l'espace.

Le comoment P de ces deux torseurs est un scalaire défini par :

$$\mathcal{J} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{10} \end{array} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{20} \end{array} \right\}_O = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_{20} + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_{10}. \quad (\text{I.3})$$

Cette opération est une opération commutative.

I.3 - Torseur des efforts extérieurs appliqués à un système

Une action mécanique exercée par un élément de son environnement⁹ sur un système est modélisable par un torseur dont la résultante correspond à la force exercée par cet élément sur le système et dont le moment au point d'application de l'action mécanique correspond au couple exercé par l'élément sur le système.

Ainsi, à titre d'exemple, l'action mécanique exercée par la pesanteur sur un système de masse M peut être représentée par un torseur $\mathcal{J}_{pes \rightarrow \Sigma}$ dont

- la résultante est un vecteur vertical orienté vers le bas ayant pour norme le produit de la masse M par l'accélération de la gravité g ;

- le moment exprimé au centre de gravité G du système est nulle :

$$\mathcal{J}_{pes \rightarrow \Sigma} = \left\{ \begin{array}{c} -Mg \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G, \quad (\text{I.4})$$

où \vec{z} est un vecteur unitaire vertical orienté vers le haut.

⁹ Dans ce contexte, l'environnement d'un système désigne tout ce qui n'est pas inclus dans le système.

I.4 - Torseur cinématique d'un solide

Le mouvement d'un solide peut, à chaque instant, être modélisé par un torseur qui représente le champ de vecteurs des vitesses de chacun des points du solide. Le torseur cinématique d'un solide S en mouvement par rapport à un référentiel R_0 , \mathcal{O}_{S/R_0} , a pour moment en un point quelconque du solide la vitesse de ce point par rapport au référentiel R_0 et pour résultante un vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ tel que pour tout point du solide la relation de Varignon (équation I.1) soit vérifiée. Ainsi, il s'exprime en un point M du solide du considéré:

$$\mathcal{O}_{S/R_0} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{M,S/R_0}} \end{array} \right\}_M . \quad (I.5)$$

La définition rigoureuse du vecteur instantané de rotation nécessite des développements non négligeables qui ne sont pas traités ici mais sont présents dans [Brossard, 1994b]. Il est à noter que

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} = -\overrightarrow{\Omega_{R_0/S}} . \quad (I.6)$$

En pratique le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$ appelé vecteur instantané de rotation est un vecteur porté par l'axe autour duquel le solide S est en rotation à l'instant considéré, sa norme est égale à la vitesse de rotation du solide autour de cet axe, le signe étant lié au sens de rotation. Ainsi le torseur cinématique \mathcal{O}_{S/R_0} d'un solide indéformable S en rotation, à la vitesse ω , autour d'un axe de vecteur directeur \vec{x} passant par le point O appartenant au solide S , s'exprime :

$$\mathcal{O}_{S/R_0} = \left\{ \begin{array}{c} \omega \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O . \quad (I.7)$$

I.5 - Torseur cinétique d'un solide

Un système matériel Σ peut être considéré comme un ensemble de points M , chacun de masse élémentaire dm . Lorsque que cet ensemble matériel est en mouvement par rapport à un repère R , on définit la quantité de mouvement élémentaire d'un point M par rapport au repère R comme étant le produit de la vitesse du point M par rapport à R et de sa masse élémentaire : $\overrightarrow{V_{M/R}} dm$.

On associe le torseur cinétique \mathcal{C}_{S/R_0} de l'ensemble matériel Σ dans le mouvement par rapport à R au champ des quantités de mouvements élémentaires des points de Σ par rapport à R que l'on peut définir en un point P quelconque :

$$\mathcal{C}_{S/R_0} = \left\{ \begin{array}{c} \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{V_{M/R}} dm \\ \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}} dm \end{array} \right\}_P . \quad (I.8)$$

La quantité $\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{V_{M/R}} dm$ est appelée résultante cinétique de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R. Cette grandeur est égale à la quantité de mouvement de Σ dans son mouvement par rapport à R :

$$\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{V_{M/R}} dm = M \overrightarrow{V_{G/R}}, \quad (\text{I.9})$$

avec M la masse totale de l'ensemble Σ et $\overrightarrow{V_{G/R}}$ la vitesse du centre de gravité G de Σ par rapport à R.

La quantité $\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{V_{M/R}} dm$ est appelée moment cinétique en P de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport à R et généralement notée $\overrightarrow{\sigma_{P,\Sigma/R}}$.

Pour un solide, le moment cinétique au point peut se calculer en fonction de la matrice d'inertie du solide exprimée au point O, de la vitesse du point O par rapport à R et du vecteur \overrightarrow{OG} :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,\Sigma/R}} = [I]_O \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + M \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{V_{O/R}}. \quad (\text{I.10})$$

Pour plus d'informations, le lecteur intéressé peut se reporter à [TI 94b].

I.6 - Torseur dynamique d'un solide

Le torseur dynamique \mathcal{D}_{S/R_0} d'un solide S est un torseur ayant :

- pour résultante une quantité appelée résultante dynamique, et égale à

$$\iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\Gamma_{M/R}} dm = M \overrightarrow{\Gamma_{G/R}},$$

où $\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$ désigne l'accélération du point M par rapport à un repère R ;

- pour moment une quantité appelée moment dynamique, notée $\overrightarrow{\delta_{P,\Sigma/R}}$

lorsqu'elle est exprimée au point P, et définie par :

$$\overrightarrow{\delta_{P,\Sigma/R}} = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M/R}} dm.$$

Dans le cas d'un solide, il est possible d'écrire :

$$\overrightarrow{\delta_{P,\Sigma/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{P,\Sigma/R}} \right]_R + M \overrightarrow{V_{P/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R}}. \quad (\text{I.11})$$

Si le point P est fixe par rapport à R, cette relation devient

$$\overrightarrow{\delta_{P,\Sigma/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{P,\Sigma/R}} \right]_R, \quad (\text{I.12})$$

Si le point P est le centre d'inertie de S, c'est-à-dire si $P \equiv G$,

$$\overrightarrow{\delta_{G,\Sigma/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G,\Sigma/R}} \right]_R. \quad (\text{I.13})$$

Annexe II

Application du formalisme de Lagrange à un exemple de modèle de véhicule à quatre roues

II.1 - Calcul de l'énergie cinétique T_Σ du système

L'énergie cinétique T_Σ du système est la somme des énergies cinétiques de chacun des éléments, soit :

$$T_\Sigma = T_{MS} + T_{MNS1} + T_{MNS2} + T_{MNS3} + T_{MNS4} , \quad (\text{II.14})$$

où T_{MS} représente l'énergie cinétique de la masse suspendue et T_{MNSi} , i allant de 1 à 4, représente l'énergie cinétique des masses non suspendues i .

II.1.1 - Calcul de l'énergie cinétique de la masse suspendue

L'énergie cinétique T_{MS} de la masse suspendue peut être calculée comme étant la moitié du comoment entre le torseur cinétique \mathcal{C}_{C/R_0} de la masse suspendue dans son mouvement par rapport au repère global R_0 supposé galiléen¹⁰ et de son torseur cinématique \mathcal{U}_{C/R_0} . Le torseur cinétique \mathcal{C}_{C/R_0} peut s'exprimer, au centre de gravité de la caisse, soit :

$$\mathcal{C}_{C/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} M_C \overrightarrow{V_{G/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}} \end{array} \right\}_G , \quad (\text{II.15})$$

où M_C désigne la masse de la caisse et où $\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}}$ est le moment cinétique de la masse suspendue dans son mouvement par rapport au repère global R_0 .

Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}}$ s'exprime :

$$\overrightarrow{\sigma_{G,C/R_0}} = I_C \overrightarrow{\Omega_{C/R_0}} , \quad (\text{II.16})$$

¹⁰ Il est montré dans [Chevalier 96] que l'erreur commise lors de cette approximation est inférieure à 1%.

où I_C désigne la matrice d'inertie de la caisse exprimée au centre de gravité G , $\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0}$ désigne le vecteur instantané de rotation de la caisse, et s'exprime conformément à la définition des angles de tangage, roulis et lacet :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = \dot{\psi}(t) \overrightarrow{z}_0 + \dot{\phi}(t) \overrightarrow{y}_R + \dot{\theta}(t) \overrightarrow{x}_G. \quad (\text{II.17})$$

Le calcul du moment cinétique de la caisse donne généralement lieu à la formulation de deux hypothèses.

Hypothèse 1

La matrice d'inertie I_C de la caisse est de la forme :

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}, \quad (\text{II.18})$$

lorsqu'elle est exprimée dans le repère lié à la caisse $\mathfrak{R}_G(G, \overrightarrow{x}_G, \overrightarrow{y}_G, \overrightarrow{z}_G)$. Cette hypothèse revient à supposer que les axes du repère véhicule sont les axes principaux d'inertie du véhicule.

L'expérience dans ce domaine [Brossard, 2006] suggère plutôt d'utiliser une matrice de la forme :

$$I_C = \begin{pmatrix} I_{Cx} & 0 & I_{Czx} \\ 0 & I_{Cy} & 0 \\ I_{Czx} & 0 & I_{Cz} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.19})$$

Toutefois, dans la suite de ce document, c'est la forme simplifiée de l'expression (24) qui est utilisée.

Hypothèse 2

En général, le vecteur instantané de rotation est considéré égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = \dot{\psi} \overrightarrow{z}_G + \dot{\phi} \overrightarrow{y}_G + \dot{\theta} \overrightarrow{x}_G. \quad (\text{II.20})$$

En réalité, d'après les définitions adoptées, ce vecteur est égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{C/R_0} = (\dot{\psi} \cos(\varphi) \cos(\theta) - \dot{\phi} \sin(\theta)) \overrightarrow{z}_G + (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \cos(\varphi) \sin(\theta)) \overrightarrow{y}_G + (\dot{\theta} - \dot{\psi} \sin(\varphi)) \overrightarrow{x}_G. \quad (\text{II.21})$$

L'approximation de l'équation (II.7) revient donc à supposer que les angles de tangage et roulis restent faibles.

Ces deux hypothèses conduisent à écrire le torseur cinétique sous la forme

$$\mathcal{C}_{C/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} M_C \left(V_x \overrightarrow{x_G} + V_y \overrightarrow{y_G} + V_z \overrightarrow{z_G} \right) \\ I_{Cx} \dot{\theta} \overrightarrow{x_G} + I_{Cy} \dot{\phi} \overrightarrow{y_G} + I_{Cz} \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} \end{array} \right\}_G. \quad (\text{II.22})$$

Le torseur cinématique exprimé au point G est défini par :

$$\mathcal{U}_{C/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{MS/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{G,S/R_0}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} + \dot{\phi} \overrightarrow{y_G} + \dot{\theta} \overrightarrow{x_G} \\ V_x \overrightarrow{x_G} + V_y \overrightarrow{y_G} + V_z \overrightarrow{z_G} \end{array} \right\}_G. \quad (\text{II.23})$$

L'énergie cinétique de la masse suspendue T_{MS} est donc donnée par :

$$T_{MS} = \frac{1}{2} \left[M_C (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + I_{Cx} \dot{\theta}^2 + I_{Cy} \dot{\phi}^2 + I_{Cz} \dot{\psi}^2 \right]. \quad (\text{II.24})$$

II.1.2 - Calcul de l'énergie cinétique des masses non suspendues

De la même façon que précédemment, l'énergie cinétique T_{MNSi} des masses non suspendues peut être calculée à partir des torseurs cinétiques et cinématiques. Il est nécessaire de calculer séparément les énergies cinétiques de chacune des masses non suspendues.

Le torseur cinétique \mathcal{C}_{MNS_1/R_0} des masses non suspendues 1 (avant gauche) s'exprime au point G_{MNS_1} , soit :

$$\mathcal{C}_{MNS_1/R_0} = \left\{ \begin{array}{l} M_{MNS_1} \overrightarrow{V_{G_{MNS_1}/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_{MNS_1}, MNS_1/R_0}} \end{array} \right\}_{G_{MNS_1}}, \quad (\text{II.25})$$

où M_{MNS_1} représente la masse totale des masses non suspendues 1, $\overrightarrow{V_{G_{MNS_1}/R_0}}$ représente la vitesse du centre de gravité des masses non suspendues avant gauche et $\overrightarrow{\sigma_{G_{MNS_1}, MNS_1/R_0}}$ représente le moment cinétique des masses non suspendues dans leur mouvement par rapport à R_0 , exprimé en leur centre de gravité.

La vitesse $\overrightarrow{V_{G_{MNS_1}/R_0}}$ du centre de gravité est, par définition, égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OG_{MNS_1}}$, en considérant le repère R_0 comme fixe :

$$\overrightarrow{V_{G_{MNS_1}/R_0}} = \left[\frac{d \overrightarrow{OG_{MNS_1}}}{dt} \right]_{R_0}. \quad (\text{II.26})$$

Remarque

La notation $\left[\frac{d}{dt} \right]_{R_x}$ désigne la dérivée par rapport au temps d'un objet mathématique (vecteur, scalaire, etc) en considérant le repère R_x comme fixe. Cette notion est très importante en mécanique. Pour s'en convaincre, il suffit de comparer les dérivées d'un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x_G}$ par rapport au temps, dans les repères \mathfrak{R}_G et R_0 . La première dérivée est nulle, le vecteur $\overrightarrow{x_G}$ étant fixe dans le repère \mathfrak{R}_G , la seconde ne l'est pas. Une

formule générale, appelée formule de la base mobile, permet de dériver un vecteur dans un repère en passant par sa dérivée dans un autre repère :

soit \vec{u} un vecteur quelconque, soient R_1 et R_2 deux repères orthonormés directs, soit $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$ le vecteur instantané de rotation de R_2 dans son mouvement par rapport à R_1 , la dérivée de \vec{u} par rapport au temps dans le repère R_1 peut être calculée par :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt} \right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{u}. \quad (\text{II.27})$$

L'équation (II.13) peut s'écrire en fonction de la vitesse du centre de gravité de la caisse. En effet,

$$\overrightarrow{V_{G_{MNS_1}/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{OG_{MNS_1}}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{GG_{MNS_1}}}{dt} \right]_{R_0} = \overrightarrow{V_{G,C/R_0}} + \left[\frac{d\overrightarrow{GG_{MNS_1}}}{dt} \right]_{R_0}. \quad (\text{II.28})$$

Il reste donc à calculer la dérivée par rapport au temps du vecteur $\overrightarrow{GG_{MNS_1}}$, soit :

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{GG_{MNS_1}}}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} &= \left[\frac{d(L_1(t)\vec{x}_R + l_1(t)\vec{y}_R - [Z_G(t) - z_{a1}(t)]\vec{z}_0)}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} \\ &= \dot{L}_1(t)\vec{x}_R + L_1(t) \left[\frac{d\vec{x}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} + \dot{l}_1(t)\vec{y}_R + l_1(t) \left[\frac{d\vec{y}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} - [\dot{Z}_G(t) - \dot{z}_{a1}(t)]\vec{z}_0 - [Z_G(t) - z_{a1}(t)] \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

La dérivée par rapport au temps du vecteur \vec{z}_0 dans le repère R_0 est nulle car ce vecteur est fixe par rapport à R_0 . Les autres dérivées des vecteurs unitaires peuvent être calculées par la formule de la base mobile :

$$\left[\frac{d\vec{x}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathfrak{R}_R/\mathfrak{R}_0}} \wedge \vec{x}_R = \dot{\psi} \vec{z}_G \wedge \vec{x}_R \quad (\text{II.30})$$

$$\text{et} \quad \left[\frac{d\vec{y}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} = \overrightarrow{\Omega_{\mathfrak{R}_R/\mathfrak{R}_0}} \wedge \vec{y}_R = \dot{\psi} \vec{z}_G \wedge \vec{y}_R. \quad (\text{II.31})$$

Lorsque l'hypothèse 2 (angles de roulis et tangage faibles) n'est pas vérifiée, ces expressions font intervenir les cosinus et les sinus des angles de tangage et de roulis. L'hypothèse 2 permet donc de simplifier ces expressions en considérant que les vecteurs \vec{z}_G et \vec{z}_R sont identiques. Les dérivées dans le repère R_0 des vecteurs de base du repère route deviennent alors

$$\left[\frac{d \vec{x}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} = \dot{\psi} \vec{y}_R \quad (\text{II.32})$$

et

$$\left[\frac{d \vec{y}_R}{dt} \right]_{\mathfrak{R}_0} = -\dot{\psi} \vec{x}_R. \quad (\text{II.33})$$

Il est à noter que la simplicité des équations résultantes de l'hypothèse 2 justifie largement l'hypothèse, d'autant que la précision supplémentaire apportée par la non-prise en compte de cette hypothèse est faible.

Ainsi, lorsque l'hypothèse 2 est prise en compte, le vecteur vitesse du centre de gravité des masses non suspendues avant gauche s'exprime :

$$\vec{V}_{G_{MNS1}/\mathfrak{R}_0} = V_x \vec{x}_G + (\dot{L}_1 - l_1 \dot{\psi}) \vec{x}_R + V_y \vec{y}_G + (\dot{l}_1 + L_1 \dot{\psi}) \vec{y}_R + \dot{z}_{a1} \vec{z}_0. \quad (\text{II.34})$$

La simplicité (relative) de cette expression vient de l'hypothèse 2 qui permet de poser :

$$V_z \vec{z}_G \approx \dot{Z}_G \vec{z}_0. \quad (\text{II.35})$$

A ce stade, une nouvelle hypothèse est généralement introduite.

Hypothèse 3

Les vitesses de variation des voies et empattements sont supposées négligeables devant les autres termes. Les figures II.1 et II.2 représentent les variations de demi-empattement et de demie-voie d'un véhicule [Venture, 2003], montrant les faibles variations relatives de ces grandeurs. Ainsi, le vecteur vitesse du centre de gravité des masses non suspendues avant gauche se simplifie :

$$\vec{V}_{G_{MNS1}/\mathfrak{R}_0} = V_x \vec{x}_G - l_1 \dot{\psi} \vec{x}_R + V_y \vec{y}_G + L_1 \dot{\psi} \vec{y}_R + \dot{z}_{a1} \vec{z}_0. \quad (\text{II.36})$$

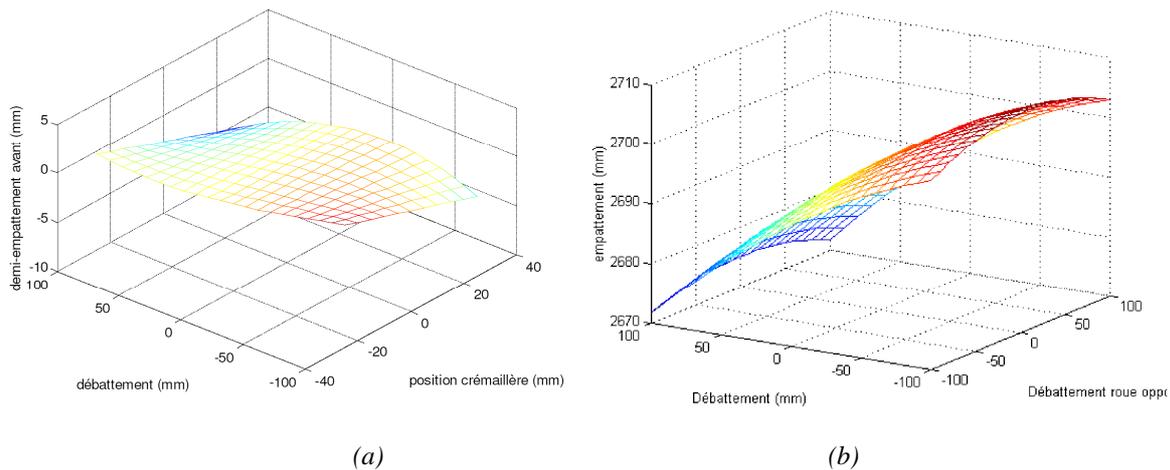


Figure II.1 – Variation de demi-empattement :

(a) avant : fonction de la position crémaillère et du débattement

(b) arrière : fonction des débattements de la roue sollicitée et de la roue opposée

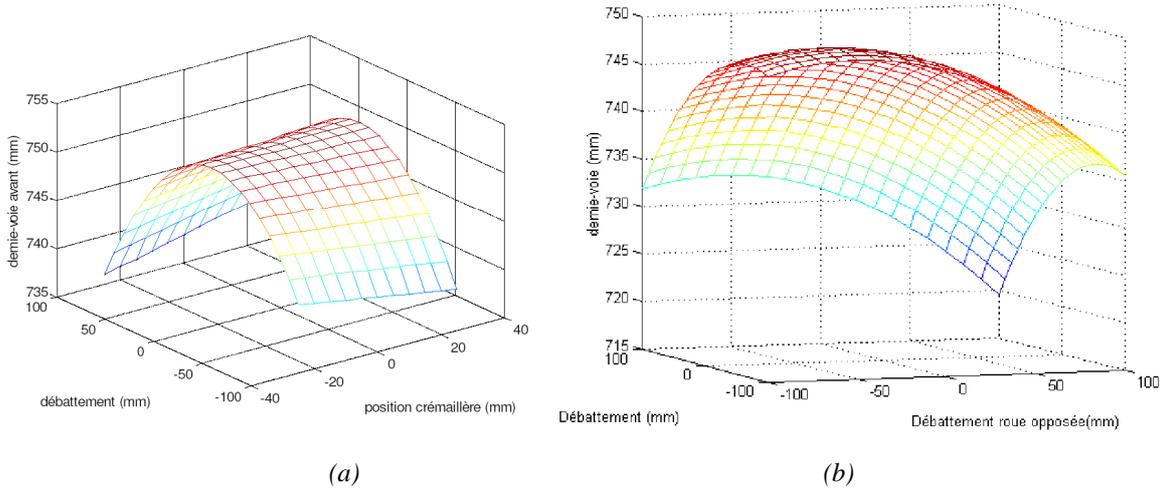


Figure II.2 – Variation de demie-voie :

(a) avant : fonction de la position crémaillère et du débattement

(b) arrière : fonction des débattements de la roue sollicitée et de la roue opposée

Au centre de gravité des masses non suspendues, le moment cinétique des masses non suspendues avant gauche s'exprime

$$\overrightarrow{\sigma}_{G_{MNS1}, MNS1/R_0} = I_{MNS1} \overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0} . \quad (\text{II.37})$$

Hypothèse 4

La forme générale de la matrice d'inertie des masses non suspendues, exprimée dans le repère pneumatique 1, est donnée par

$$I_{MNS1} = \begin{pmatrix} I_{MNS1x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{MNS1y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{MNS1z} \end{pmatrix} . \quad (\text{II.38})$$

Hypothèse 5

Le vecteur instantané de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0}$ peut être supposé égal à :

$$\overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0} = \beta_1 \overrightarrow{z_0} + \omega_1 \overrightarrow{y_{p1}} + \dot{\psi} \overrightarrow{z_G} , \quad (\text{II.39})$$

où β_1 est l'angle de braquage des roues avant gauche, où ω_1 est leur vitesse de rotation et où $\overrightarrow{y_{p1}}$ désigne l'axe de rotation des roues. Cet axe est défini dans le repère pneumatique, représenté figure 9.

Cette hypothèse revient à postuler que l'axe de rotation des roues lors d'un braquage est toujours vertical et que les masses non suspendues se résument principalement aux masses qui subissent les deux rotations (jante, pneumatique, etc...).

L'hypothèse 2 permet aussi d'approximer le vecteur instantané de rotation des masses non suspendues par rapport au repère R_0 par:

$$\overrightarrow{\Omega}_{MNS1/R_0} = (\dot{\psi} + \dot{\beta}_1) \overrightarrow{z_0} + \omega_1 \overrightarrow{y_{p1}}. \quad (\text{II.40})$$

Le moment cinétique des masses non suspendues 1 s'exprime alors :

$$\overrightarrow{\sigma}_{G_{MNS1}, MNS1/\mathfrak{R}_0} = I_{MNS1y} \omega_1 \overrightarrow{y_{p1}} + I_{MNS1z} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_1) \overrightarrow{z_0}. \quad (\text{II.41})$$

Considérant ce qui a été écrit dans le paragraphe précédent, le torseur cinématique des masses non suspendues 1 dans leur mouvement par rapport au repère 0 s'exprime :

$$\mathcal{V}_{ms1/\mathfrak{R}_0} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{MNS1/\mathfrak{R}_0} \\ \overrightarrow{V}_{G_{MNS1}, MNS1/\mathfrak{R}_0} \end{array} \right\}_{G_{MNS1}} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_1) \overrightarrow{z_0} + \omega_1 \overrightarrow{y_{p1}} \\ V_x \overrightarrow{x_G} - l_1 \dot{\psi} \overrightarrow{x_R} + V_y \overrightarrow{y_G} + L_1 \dot{\psi} \overrightarrow{y_R} + \dot{z}_{a1} \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{G_{MNS1}}. \quad (\text{II.42})$$

Finalement, l'énergie cinétique T_{MNS1} s'exprime :

$$T_{MNS1} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS1} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a1}^2 \right] + I_{MNS1y} \omega_1^2 + I_{MNS1z} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_1)^2 \right\}, \quad (\text{II.43})$$

avec M_{MNS1} la masse totale des masses non suspendues à l'avant gauche.

Le résultat de l'équation (II.30) peut être transposé aux autres masses non suspendues en tenant compte du fait que les roues arrière sont considérées comme ne braquant pas.

Ainsi, l'énergie cinétique T_{MNS2} des masses non suspendues avant droit s'exprime finalement sous la forme :

$$T_{MNS2} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS2} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a2}^2 \right] + I_{MNS2y} \omega_2^2 + I_{MNS2z} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_2)^2 \right\}, \quad (\text{II.44})$$

avec M_{MNS2} la masse totale des masses non suspendues à l'avant droit.

De la même manière, l'énergie cinétique T_{MNS3} des masses non suspendues arrière gauche s'exprime finalement :

$$T_{MNS3} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS3} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a3}^2 \right] + I_{MNS3y} \omega_3^2 + I_{MNS3z} \dot{\psi}^2 \right\}, \quad (\text{II.45})$$

avec M_{MNS3} la masse totale des masses non suspendues arrière gauche.

Enfin, l'énergie cinétique T_{MNS4} des masses non suspendues arrière droit s'exprime :

$$T_{MNS4} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS4} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a4}^2 \right] + I_{MNS4y} \omega_4^2 + I_{MNS4z} \dot{\psi}^2 \right\}, \quad (46)$$

avec M_{MNS4} la masse totale des masses non suspendues arrière droit.

L'énergie cinétique totale T_Σ du système est donc la somme des énergies cinétiques calculées ci-dessus

II.2 - Calcul du membre de droite des équations de Lagrange

Afin d'expliquer le calcul des coefficients énergétiques Q_i , il est nécessaire d'introduire les notions de vitesse et de puissance virtuelles. Une définition mathématique rigoureuse de la vitesse virtuelle peut être trouvée dans [Aimé, 1996]. Il s'agit ici uniquement d'expliquer simplement ce concept.

Pour faire simple, il est possible d'imaginer pour un mécanisme des mouvements qui ne correspondent pas forcément au mouvement réellement possible de ce système. Ce mouvement fictif, appelé mouvement virtuel, peut permettre d'estimer des efforts de liaison, des rigidités de pièces, etc. Un mouvement virtuel est représenté par la vitesse virtuelle instantanée de tous ses points M, cette vitesse pouvant elle-même être représentée par un torseur cinématique. A un mouvement virtuel est associée une puissance virtuelle. Les grandeurs virtuelles sont notées de la même façon que les grandeurs réelles auxquelles est ajouté * en exposant. Ainsi, la vitesse virtuelle du point M dans son mouvement par rapport au repère R_0 est notée $\overrightarrow{V}_{M/R_0}^*$. Cette vitesse est définie par

$$\overrightarrow{V}_{M/R_0}^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} \dot{x}_i^*, \quad (\text{II.47})$$

où \overrightarrow{OM} désigne le vecteur position du point M et est tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(x_i, t), \quad (\text{II.48})$$

avec x_i , i allant de 1 à n , les paramètres permettant de décrire la position du point M [Hautcoeur, 2006].

Cette définition provient de l'extension de la définition de la vitesse réelle qui peut être exprimée sous la forme :

$$\overrightarrow{V}_{M/R_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}. \quad (\text{II.49})$$

Il est possible de montrer que le champ $\{\mathcal{E}^*\}$ des vitesses virtuelles d'un solide peut se mettre sous la forme d'une somme de torseur :

$$\{\mathcal{E}^*\} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i^* \{\mathcal{E}_i^*\} \quad (\text{II.50})$$

où $\{\mathcal{E}_i^*\}$ est un torseur exprimé en un point M quelconque par :

$$\{\mathcal{E}_i^*\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \overrightarrow{\Omega}}{\partial \dot{x}_i} \\ \frac{\partial \overrightarrow{V}_{M/R_0}}{\partial \dot{x}_i} \end{array} \right\}_M. \quad (\text{II.51})$$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs exercés sur le solide S s'exprime alors

$$\mathcal{P}_e = \{\mathcal{E}^*\} \otimes \{\mathcal{T}_{\overline{\Sigma} \rightarrow S}\} = \sum_{i=0}^n \dot{x}_i^* Q_i (\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_G), \quad (\text{II.52})$$

$$\text{où} \quad Q_i(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_G) = \{\mathcal{C}_i^*\} \otimes \{\mathcal{T}_{\bar{\Sigma} \rightarrow S}\}, \quad (\text{II.53})$$

$$\text{soit} \quad Q_i(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_G) = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{x}_i^*}. \quad (\text{II.54})$$

Le terme $Q_i(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_G)$ correspond au premier terme du membre de droite présent dans l'équation relative au paramètre i de Lagrange (équation 4.19).

De la même façon, le terme $Q_i(S_j \leftrightarrow S_k)$ est donné par : $\{\mathcal{C}_{S_k/S_j}^*\} \otimes \{\mathcal{T}_{S_j \rightarrow S_k}\}$, où $\{\mathcal{C}_{S_k/S_j}^*\}$ est la vitesse virtuelle du solide S_k par rapport au solide S_j et où $\{\mathcal{T}_{S_j \rightarrow S_k}\}$ est le torseur des actions mécaniques exercées par la solide S_j sur le solide S_k .

II.2.1 - Bilan des efforts extérieurs appliqués au véhicule

II.2.1.1 - Poids des masses suspendues

Le poids des masses suspendues du véhicule peut être représenté par un torseur $\{\tau_{Pes \rightarrow MS}\}$ dont les éléments de réduction au centre de gravité G de la caisse sont :

$$\{\tau_{Pes \rightarrow MS}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_C g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G. \quad (\text{II.55})$$

Choisissons un champ de vitesse virtuelle(s) compatible avec les liaisons. Ce champ de vitesse virtuelle peut s'écrire (il s'agit ici du champ des vitesses réelles) :

$$\{\mathcal{C}_{\mathcal{O}/R_0}^*\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{MS/R_0} \\ \vec{V}_{G,S/R_0} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\psi}^* \vec{z}_G + \dot{\phi}^* \vec{y}_G + \dot{\theta}^* \vec{x}_G \\ V_x^* \vec{x}_G + V_y^* \vec{y}_G + V_z^* \vec{z}_G \end{array} \right\}_G. \quad (\text{II.56})$$

La puissance virtuelle $P_{pes/caisse}$ développée par l'action de la pesanteur sur la caisse est le comoment entre le torseur $\{\tau_{Pes \rightarrow MS}\}$ et le torseur $\{\mathcal{C}_{\mathcal{O}/R_0}^*\}$, d'où son expression :

$$P_{pes/caisse} = -M_C g \left(-\sin \varphi V_x^* + \sin \theta \cos \varphi V_y^* + \cos \theta \cos \varphi V_z^* \right). \quad (\text{II.57})$$

II.2.1.2 - Efforts aérodynamiques

Hypothèse 6

Les efforts aérodynamiques sont modélisables par un torseur appliqué au centre de gravité de la caisse G . Dans [Venture, 2003], le torseur des efforts aérodynamiques est proposé sous la forme

$$\{\mathcal{T}_{aéro}\} = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \rho_{air} C_x S_f V_{aéro}^2 \vec{x}_G \\ \frac{1}{2} \rho_{air} z_G C_x S_f V_{aéro}^2 \vec{y}_G \end{array} \right\}_G, \quad (\text{II.58})$$

avec ρ_{air} la masse volumique de l'air supposée constante et égale à $1,225 \text{ kg/m}^3$, S_f la surface frontale du véhicule et C_x le coefficient de pénétration dans l'air. Le vecteur vitesse aérodynamique s'exprime

$$\vec{V}_{aéro} = \vec{V}_x + \vec{V}_{air/sol} . \quad (\text{II.59})$$

Sa norme $V_{aéro}$ est souvent considérée comme égale à la vitesse V_x du véhicule. Cela revient à supposer que les autres composantes du vecteur vitesse du véhicule sont négligeables devant la vitesse longitudinale, et que la vitesse du vent est également très faible devant celle-ci.

La puissance virtuelle $P_{aéro}^*$ développée par les efforts aérodynamiques s'exprime

$$P_{aéro}^* = \{ \mathcal{T}_{aéro} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{\mathcal{O}/R_0}^* \} , \quad (\text{II.60})$$

relation qui conduit à une expression finale de la forme

$$P_{aéro}^* = -\frac{1}{2} \rho_{air} C_x S_f V_{aéro}^2 V_x^* + \frac{1}{2} \rho_{air} z_G C_x S_f V_{aéro}^2 \dot{\phi}^* . \quad (\text{II.61})$$

II.2.1.3 - Efforts pneumatiques

Les efforts pneumatiques sont modélisables par un torseur appliqué au point de contact roue sol. Le repère le plus simple pour exprimer le torseur d'action mécanique exercé par le sol sur le pneumatique i est le repère lié au pneumatique i . Au point P_i de contact du pneumatique sur le sol, ce torseur s'exprime :

$$\{ \mathcal{T}_{Route \rightarrow Pneu_i} \} = \left\{ \begin{array}{l} F_{x_{pi}} \vec{x}_{pi} + F_{y_{pi}} \vec{y}_{pi} + F_{z_{pi}} \vec{z}_0 \\ M_{pi} \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{P_i} , \quad (\text{II.62})$$

où $F_{x_{pi}}$ désigne l'effort pneumatique longitudinal, $F_{y_{pi}}$ l'effort transversal, $F_{z_{pi}}$ la charge verticale du pneumatique et M_{pi} est le moment d'auto-alignement.

La puissance virtuelle des efforts extérieurs appliqués au pneumatique i peut être calculée comme étant le comoment entre le torseur des efforts extérieurs appliqués au pneumatique et le torseur cinématique du pneumatique dans son mouvement par rapport au référentiel R_0 .

Le torseur cinématique décrivant le mouvement virtuel du pneumatique 1 s'exprime, au centre de gravité des masses non suspendues G_{MNS1} sous la forme :

$$\{ \mathcal{C}_{ms1/R_0}^* \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{MNS1/R_0} \\ \vec{V}_{G_{MNS1}, MNS1/R_0} \end{array} \right\}_{G_{MNS1}} \approx \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\psi}^* + \beta_1^*) \vec{z}_0 + \omega_1^* \vec{y}_{p1} \\ (V_x^* - l_1 \dot{\psi}^*) \vec{x}_R + (V_y^* + L_1 \dot{\psi}^*) \vec{y}_R + \dot{z}_{al}^* \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{G_{MNS1}} . \quad (\text{II.63})$$

Afin de calculer la puissance virtuelle des efforts extérieurs exercés sur le pneumatique i , il est nécessaire de déplacer ce torseur au point de contact pneumatique sol :

$$\left\{ \mathcal{L}_{ms1/\mathcal{R}_0}^* \right\} \approx \left\{ \begin{array}{l} (\dot{\psi}^* + \dot{\beta}_1^*) \vec{z}_0 + \omega_1^* \vec{y}_{p1} \\ (V_x^* - l_1 \dot{\psi}^*) \vec{x}_R + (V_y^* + L_1 \dot{\psi}^*) \vec{y}_R + \dot{z}_{a1} \vec{z}_0 - r \omega_1^* \vec{x}_{p1} \end{array} \right\}_{P_1}. \quad (\text{II.64})$$

La puissance virtuelle P_{Pneu1}^* développée par les efforts pneumatiques à l'avant gauche du véhicule s'exprime alors

$$P_{Pneu1}^* = M_{pi} (\dot{\psi}^* + \dot{\beta}_1^*) + F_{Xpi} \left[-r \omega_1 + (V_x^* - l_1 \dot{\psi}^*) \cos \beta_1 + (V_y^* + L_1 \dot{\psi}^*) \sin \beta_1 \right] \\ + F_{Ypi} \left[(V_y^* + L_1 \dot{\psi}^*) \cos \beta_1 - (V_x^* - l_1 \dot{\psi}^*) \sin \beta_1 \right] + F_{Zpi} \dot{z}_{a1}^*. \quad (\text{II.65})$$

Les expressions pour les trois autres pneumatiques sont similaires.

II.2.1.4 - Poids des masses non suspendues

Le poids des masses non suspendues du véhicule peut être représenté par un torseur $\{\tau_{Pes \rightarrow MNS}\}$ dont les éléments de réduction au centre de gravité G_{MNSi} des masses non suspendues i sont de la forme :

$$\{\tau_{Pes \rightarrow MNS}\} = \left\{ \begin{array}{l} -M_{MNSi} g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{MNSi}}. \quad (\text{II.66})$$

Le torseur cinématique décrivant le mouvement virtuel des masses non suspendues 1 au point G_{MNS1} est donné par l'équation (II.49).

La puissance virtuelle de la pesanteur sur les masses non suspendue 1 s'exprime alors

$$P_{Pes \rightarrow MNS1}^* = -M_{MNS1} g \dot{z}_{a1}^*. \quad (\text{II.67})$$

Les expressions pour les trois autres masses non suspendues sont similaires.

II.2.1.5 - Actions mécaniques provenant du groupe motopropulseur ou du système de freinage

Hypothèse 7

Les actions mécaniques provenant du groupe motopropulseur ou du système de freinage peuvent être considérées comme des actions mécaniques extérieures. En réalité, il s'agit d'actions mécaniques internes à notre système d'étude. Cependant, les étudier comme telles nécessiterait la prise en compte des éléments de la chaîne de transmissions (boîte de vitesse, différentiel, etc) et du système de freinage (étriers notamment). Cela fait l'objet d'un développement rigoureux (et complexe) dans [Brossard, 2006].

De plus, ces actions mécaniques peuvent se ramener au torseur

$$\{\tau_{Cmot \rightarrow roue_i}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_{mot_i} \vec{y}_{pi} \end{array} \right\}_{G_{MNSi}}. \quad (\text{II.68})$$

Dans ce cas, la puissance virtuelle liée au couple de freinage ou au couple moteur s'écrit simplement :

$$P_{moti}^* = C_{moti} \omega_i^* . \quad (II.69)$$

II.2.2 - Bilan des efforts intérieurs au système

II.2.2.1 - Efforts de suspension

Hypothèse 8

Les actions mécaniques exercées par la suspension i sur la caisse du véhicule peuvent être représentées par le torseur

$$\left\{ \tau_{Suspension \rightarrow Caisse} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{suspension} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{A_i} . \quad (II.70)$$

Cela revient à postuler

- d'une part que la suspension n'exerce aucun couple sur la caisse, la liaison entre la caisse et la suspension est donc une liaison rotule parfaite ;
- d'autre part que l'effort de la suspension est toujours vertical, hypothèse peu réaliste mais très simplificatrice. Il serait plus réaliste de postuler que l'effort suspension est porté par le vecteur $\overrightarrow{A_i G_{MNS_i}}$.

Remarque :

Les actions mécaniques de la barre anti-roulis peuvent être incluses directement dans la norme de l'effort $F_{suspension}$: c'est ce qui est fait ici.

Le torseur $\left\{ \tau_{Suspension \rightarrow Caisse} \right\}$ possédant un moment nul au point d'application de l'effort, la puissance virtuelle $P_{suspension}^*$ liée à l'effort de la suspension i est le produit scalaire de l'effort $F_{suspension} \vec{z}_0$ et de la vitesse relative $\overrightarrow{V_{A_i / G_{MNS_i}}}$ du point d'attache A_i de la suspension sur la caisse et du point d'attache de la suspension sur les masses non-suspendues.

Hypothèse 9 :

La vitesse du point d'attache de la suspension sur les masses non suspendues est identique à la vitesse du centre de gravité des masses non suspendues.

Ainsi, la puissance virtuelle $P_{suspension}^*$ s'exprime

$$P_{suspension}^* = F_{suspension} \left(V_Z - \dot{z}_{ai}^* \pm L_1 \dot{\phi}^* \pm l_1 \dot{\theta}^* \right) . \quad (II.71)$$

II.2.3 - Multiplicateurs de Lagrange

Tous les paramètres ayant été choisis indépendants et le calcul des efforts de liaison n'ayant pas d'intérêt ici, il est inutile d'introduire des multiplicateurs de Lagrange.

II.3 - Résumé et Bilan final

Le modèle considéré ici est un véhicule à quatre roues dont les deux roues avant sont directrices. Le véhicule se déplace sur un sol plan. Le modèle comporte cinq solides possédant au total quatorze degrés de liberté (6 pour la caisse, 2 pour chaque ensemble de masses non suspendues). Les entrées de ce modèle sont :

- les angles de braquage avant ;
- les couples moteurs ou de freinage sur chaque roue ;
- les efforts de suspension et de la barre anti-roulis ;
- les efforts verticaux pneumatiques.

Les voies et les empattements peuvent également être des entrées du modèle si elles ne sont pas considérées constantes.

Les sorties de ce modèle sont les valeurs, à chaque instant, des paramètres cinématiques du véhicule et de leur primitive :

- vitesses et positions du véhicule ;
- vitesses verticales et positions verticales des masses non suspendues ;
- vitesses de rotation des roues ;
- vitesses et angles de roulis, tangage et lacet.

Les entrées et les sorties listées ci-dessus peuvent être liées par des blocs indépendants représentant les organes du véhicule (par exemple les efforts de suspension sont fonction des débattements de suspension calculés à partir des sorties). Cela conduit alors à un schéma bloc similaire à celui présenté figure 4.3.

En résumé, l'énergie cinétique totale du système est la somme des énergies cinétiques partielles stockées dans les différents éléments inertiels, soit :

$$T_{MS} = \frac{1}{2} \left[M_C (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + I_{Cx} \dot{\theta}^2 + I_{Cy} \dot{\phi}^2 + I_{Cz} \dot{\psi}^2 \right], \quad (\text{II.72})$$

$$T_{MNS1} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS1} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a1}^2 \right] + I_{MNS1y} \omega_1^2 + I_{MNS1z} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_1)^2 \right\}, \quad (\text{II.73})$$

$$T_{MNS2} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS2} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a2}^2 \right] + I_{MNS2y} \omega_2^2 + I_{MNS2z} (\dot{\psi} + \dot{\beta}_2)^2 \right\}, \quad (\text{II.74})$$

$$T_{MNS3} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS3} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a3}^2 \right] + I_{MNS3y} \omega_3^2 + I_{MNS3z} \dot{\psi}^2 \right\}, \quad (\text{II.75})$$

$$T_{MNS4} = \frac{1}{2} \left\{ M_{MNS4} \left[(V_x - l_1 \dot{\psi})^2 + (V_y + L_1 \dot{\psi})^2 + \dot{z}_{a4}^2 \right] + I_{MNS4y} \omega_4^2 + I_{MNS4z} \dot{\psi}^2 \right\}. \quad (\text{II.76})$$

Toujours pour résumer, les puissances virtuelles des efforts extérieurs et intérieurs sont données par :

$$P_{pes/caisse} = -M_C g \left(-\sin \varphi V_x^* + \sin \theta \cos \varphi V_y^* + \cos \theta \cos \varphi V_z^* \right), \quad (\text{II.77})$$

$$P_{aéro}^* = -\frac{1}{2} \rho_{air} C_x S V_{aéro}^2 V_x^* + \frac{1}{2} \rho_{air} z_G C_x S V_{aéro}^2 \dot{\varphi}^*, \quad (\text{II.78})$$

$$P_{Pneu_i}^* = M_{pi} \omega_1^* + F_{Xpi} \left[-r \omega_1 + (V_x^* \pm l_1 \dot{\psi}^*) \cos \beta_1 + (V_y^* \pm L_1 \dot{\psi}^*) \sin \beta_1 \right] \\ + F_{Ypi} \left[(V_y^* \pm L_1 \dot{\psi}^*) \cos \beta_1 - (V_x^* \pm l_1 \dot{\psi}^*) \sin \beta_1 \right] + F_{Zpi} \dot{z}_{a1}^*, \quad (\text{II.79})$$

$$P_{Pes \rightarrow MNS_1}^* = -M_{MNS_1} g \dot{z}_{a1}^*, \quad (\text{II.80})$$

$$P_{mot_i}^* = C_{mot_i} \omega_i^*, \quad (\text{II.81})$$

$$P_{suspi}^* = F_{suspi} \left(V_z^* - \dot{z}_{ai}^* \pm L_1 \dot{\varphi}^* \pm l_1 \dot{\theta}^* \right), \quad (\text{II.82})$$

où $i = 1$ à 4 (extrémités du véhicule).

Il est important de rappeler que 9 hypothèses ont été formulées pour obtenir ces expressions simplifiées.

En appliquant l'équation de Lagrange (4.19) pour chacun des quatorze paramètres considérés, on obtient un système de quatorze équations différentielles à 14 inconnues décrivant le comportement du véhicule.

Des hypothèses supplémentaires sont généralement formulées, notamment :

Hypothèse 10

Les angles de braquage avant sont égaux.

Hypothèse 11

Les masses suspendues avant ont des caractéristiques similaires (masse et inerties). Il en est de même pour les masses suspendues arrière.

Hypothèse 12

Le véhicule est symétrique droite-gauche, par conséquent les empattements et les voies sont identiques à droite et à gauche.

Finalement, les équations obtenues pour ce modèle sont :

- dynamique de translation longitudinale

$$\begin{aligned} (M_C + 2M_{mns1} + 2M_{mns3}) \dot{V}_X - 2\ddot{\psi} l_1 (M_{mns1} + M_{mns3}) \\ = (F_{Xp1} + F_{Xp2}) \cos(\beta_1) - (F_{yp1} + F_{yp2}) \sin(\beta_1) + F_{Xp3} + F_{Xp4} \end{aligned} \quad (II.83)$$

- dynamique de translation transversale

$$\begin{aligned} (M_C + 2M_{mns1} + 2M_{mns3}) \dot{V}_y - 2\ddot{\psi} L_1 (M_{mns1} + M_{mns3}) \\ = (F_{Xp1} + F_{Xp2}) \sin(\beta_1) + (F_{yp1} + F_{yp2}) \cos(\beta_1) + F_{Yp3} + F_{Yp4} \end{aligned} \quad (II.84)$$

- dynamique de translation verticale de la masse suspendue

$$M_C \dot{V}_Z = -M_C g + F_{susp1} + F_{susp2} + F_{susp3} + F_{susp4} \quad (II.85)$$

- dynamique de translation verticale des 4 masses non suspendues

$$M_{MNS1} \ddot{z}_{a1} = -M_{MNS1} g + F_{Zp1} - F_{susp1} \quad (II.86)$$

$$M_{MNS1} \ddot{z}_{a2} = -M_{MNS1} g + F_{Zp2} - F_{susp2} \quad (II.87)$$

$$M_{MNS3} \ddot{z}_{a3} = -M_{MNS3} g + F_{Zp3} - F_{susp3} \quad (II.88)$$

$$M_{MNS3} \ddot{z}_{a4} = -M_{MNS3} g + F_{Zp4} - F_{susp4} \quad (II.89)$$

- dynamique de rotation en tangage

$$I_{Cy} \ddot{\phi} = -L_1 (F_{susp1} + F_{susp2}) + L_3 (F_{susp3} + F_{susp4}) \quad (II.90)$$

- dynamique de rotation en roulis

$$I_{Cz} \ddot{\theta} = l_1 (F_{susp1} + F_{susp2}) + l_3 (F_{susp3} - F_{susp4}) \quad (II.91)$$

- dynamique de rotation en lacet

$$\begin{aligned} [I_{Cy} + 2I_{MNS1Z} + 2I_{MNS3Z} + 2M_{MNS1} (l_1^2 + L_1^2) + 2M_{MNS3} (l_3^2 + L_3^2)] \ddot{\psi} - 2[M_{MNS1} l_1 + M_{MNS3} l_3] \dot{V}_X \\ - 2[M_{MNS1} L_1 + M_{MNS3} L_3] \dot{V}_y + 2I_{MNS1Z} \ddot{\beta}_1 = F_{Xp1} (L_1 \sin \beta_1 - l_1 \cos \beta_1) + F_{Xy1} (l_1 \sin \beta_1 + L_1 \cos \beta_1) \\ + F_{Xp2} (L_1 \sin \beta_1 + l_1 \cos \beta_1) + F_{Xy1} (-l_1 \sin \beta_1 + L_1 \cos \beta_1) - F_{Xp3} l_3 - F_{Yp3} L_3 + F_{Xp4} l_3 + F_{Yp4} L_3 \\ + M_{p1} + M_{p2} + M_{p3} + M_{p4} \end{aligned} \quad (II.92)$$

- dynamique de rotation des 4 roues

$$I_{MNS1} \dot{\omega}_1 = C_{mot1} - F_{Xp1} r \quad (II.93)$$

$$I_{MNS1} \dot{\omega}_2 = C_{mot2} - F_{Xp2} r \quad (II.94)$$

$$I_{MNS3} \dot{\omega}_3 = C_{mot3} - F_{Xp3} r \quad (II.95)$$

$$I_{MNS3} \dot{\omega}_4 = C_{mot4} - F_{Xp4} r \quad (II.96)$$

Bibliographie

- [Adda, 1997] Adda F.B. - Geometric interpretation of the fractional derivative – Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis, Vol. 11, pp 21-52, 1997.
- [Agrawal, 2004] Agrawal O.M.P. – Application of Fractional Derivatives in Thermal Analysis of Disk Brakes – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 191-206, 2004, Kluwer Academic Publishers.
- [Aimé, 1996] Aimé P. *Sur la dynamique des systèmes mécaniques*, Annales de l’Institut Henri Poincaré, section A, tome 64, n° 2, p. 155-176, 1996.
- [Aoun, 2004] Aoun M., Malti R., Levron F. and Oustaloup A. – Numerical Simulations of Fractional Systems : An Overview of Existing Methods and Improvements – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 117-131, 2004, Kluwer Academic Publishers.
- [Al-Baiyat, 1986] Al-Baiyat S. A. et Sain M. K. - Control design with transfer functions associated to higher order Volterra kernels - Proceedings of the 25th IEEE Conference on Decision and Control, p. 1306 - 1307, Athens, Grece, 1986.
- [Al-Baiyat, 1989] Al-Baiyat S. A. et Sain M. K. - A Volterra method for nonlinear control design - Proceedings of the IFAC Nonlinear Systems Design Symposium, p. 125 - 130, Capri, Italy, 1989.
- [Altet, 2004] Altet O., *Vers les Systèmes Dynamiques Hybrides Non Entiers: application au Contrôle Global du Châssis de véhicules équipés de la suspension CRONE Hydractive*, thèse de doctorat de l’Université Bordeaux 1, 2004.
- [Bard, 2005] Bard Delphine, *Compensation des non-linéarités des systèmes haut-parleurs à pavillon*, thèse de doctorat de l’Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.

- [Barrett, 1963] Barrett J. F. - The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems - Journal of Electronics Control, Vol. 15, p 567 - 615, 1963.
- [Bartos, 1988] Bartos J. and Sun H. H. - Characterization of abrupt nonlinearity by the Volterra-Fourier method - Journal of the Franklin Institute, Vol. 325, No. 4, p. 465 - 484, 1988.
- [Barry, 2006] Barry P., Prise en compte de la torsion et de la flexion de la caisse d'un véhicule automobile en vue de la simulation, rapport de contrat de recherche PSA – LAPS, octobre 2006.
- [Battaglia, 2001] Battaglia J.L., Cois O., Puigsegur L. and Oustaloup A. – Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model – International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, N°14, pp. 2671-2680, 2001.
- [Bedrosian, 1971] Bedrosian E. and Rice O. S. - The output properties of Volterra systems (nonlinear systems with memory) driven by harmonic and gaussian inputs - Proceedings of the IEEE, Vol.59, No. 12, p. 1688 - 1707, 1971.
- [Benchellal, 2005] Benchellal A., Bachir S., Poinot T. and Trigeassou J.C. – Identification of non-integer model of induction machines – Chapter in Fractional differentiation and its applications, U-Books Edition, pp. 471-482, 2005.
- [Billings, 1990] Billings S. A. and Peyton Jones J. C. - Mapping non-linear integro-differential equations into the frequency domain - International Journal of Control, Vol. 52, No. 4, p. 863 - 879, 1990.
- [Billings, 1991] Billings S. A. and Zhu Q. M. - Rational model identification using an extended least-squares algorithm - International Journal of Control, Vol. 54, No. 3, p. 529 - 546, 1991.
- [Bône, 1994] Bône J.-C., Morel J. et Boucher M., *Mécanique générale Cours et applications avec exercices et problèmes résolus*, Edition Dunod, 1994, ISBN : 2 10 002036 6.

- [Bonnet, 2007] Bonnet M., Frangi A. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Editeur : Ecole Polytechnique, ISBN : 273021349X, 2007.
- [Brockett, 1976] Brockett R. W. - Volterra series and geometric control theory - *Automatica*, Vol. 12 p. 167 - 176, 1976.
- [Brossard, 1994a] Brossard J.-P., *Mécanique générale, Cinématique générale*, Techniques de l'Ingénieur, article A1661, vol. AFP 3, 1994.
- [Brossard, 1994b] Brossard J.-P., *Mécanique générale, Dynamique générale. Forme vectorielle*, Techniques de l'Ingénieur, article A1664, vol. AFP 3, 1994.
- [Brossard, 1994c] Brossard J.-P., Cours de mécanique générale, INSA de Lyon, 1994, disponible en téléchargement sur <http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/download.php?id=103321&id2=1>.
- [Brossard, 2006] Brossard J.-P. *Dynamique du véhicule. Modélisation des systèmes complexes*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2006, ISBN : 2-88074-644-2.
- [Buckner, 2000] Buckner, G., Schuetze, K., & Beno, J., Active vehicle suspension control using intelligent feedback linearization. In Proceedings of the American control conference, Chicago, USA (pp. 4014–4018), 2000.
- [Canat, 2005] Canat S. and Faucher J. – Modeling, identification and simulation of induction machine with fractional derivative – Chapter in Fractional Differentiation and its Applications, U-Books Edition, pp. 459-470, 2005.
- [Causeman, 1999] Causemann, P., **Kraftfahrzeugstossdampfer**, Landsberg Germany, MI-Verlag, 1999
- [Chevalier, 1996] Chevalier L., *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*, Editions Ellipse, 1996, ISBN : 2-7298-5556- 4.
- [Chua, 1979] Chua L. O. and Ng C. Y. - Frequency-domain analysis of nonlinear systems : formulation of transfer functions - *Electronic Circuits and Systems*, Vol. 3, No. 6, p. 257 -269, 1979.

- [Cois, 2002] Cois O. - Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique - Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, 2002.
- [Connair, 1999] Connair K., Bodie M., Chaumette P., *Development of a Common Vehicle Model for Chassis Control Design*, SAE technical paper number 1999-01-0732, 1999
- [Crum, 1974] Crum L. A. and Heinen J. A. - Simultaneous reduction and expansion of multidimensional Laplace transform kernels - SIAM Journal on Applied Mathematics - Vol. 26 - No 4 - p. 753 - 771, 1974.
- [Dauphin, 2000] Dauphin-Tanguy G., *Les bond-graphs*, Edition Hermès, Paris, 2000.
- [Doyle, 2002] Doyle F. J, Pearson R. K., Ogunnaike B. A. – Identification and Control using Volterra Models – Communications and Control Engineering series, Springer 2002.
- [Dugowson, 1994] Dugowson S. - Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation - Thèse de Doctorat de l'Université Paris Nord, 1994.
- [Ellouze, 2001] Ellouze M., *Modélisation et commande de robots mobiles à roues en présence de glissement*, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris soutenue en 2001.
- [Fischer, 2003] Daniel Fischer et Rolf Isermann, Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions, Control Engineering Practice 12 (2004) pp 1353-1367.
- [Fliess, 1975] Fliess M. - Calcul symbolique non commutatif pour les asservissements non linéaires et non stationnaires - Optimization Techniques, part 2, Lecture Notes Computer Science, No. 41, p. 496 - 509, 1975.
- [Fliess, 1981] Fliess M. - Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives - Bulletin de la Société Mathématique de France - Vol. 109, p. 3 - 40, 1981.
- [George, 1959] George D. A. - Continuous non linear systems - Technical Report 355, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. 1959.

- [Gilbert, 2002] Gilbert, R., & Jackson, M, Magnetic ride control. GM TechLink 4, 2002.
- [Gillespie, 1992] Gillespie Thomas, *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, PA, 1992.
- [Gianguilio, 2006] Gianguilio E., *14 d.o.f. VERTEC model, Vehicle Dynamic Simulator Implementation and validation*, 3rd International Colloquium on Vehicle-Tyre-Road Interaction, mars 2006.
- [Hartley, 2002] Hartley T.T. and Lorenzo C.F. - Dynamics and Control of Initialized Fractional-Order Systems – *Journal of Nonlinear Dynamics*, Vol. 29, pp. 201-233, 2002, Kluwer Academic Publishers.
- [Hautcoeur, 2006] Hautcoeur P., Introduction à la mécanique analytique : formalisme de Lagrange, document de cours disponible à l'adresse <http://scienc.industrielles.free.fr/formalisme%20lagrange/Formalisme%20de%20Lagrange.pdf>, 2006
- [Hartley, 2007] Hartley T.T. and Lorenzo C.F. – Application of incomplete gamma functions to the initialization of fractional-order systems – *Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-35843*, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7, 2007.
- [Heck, 1996] Heck A., *Introduction to Maple*, Springer-Verlag Telos Edition, 1996.
- [Hedrick, 1990] J. K. Hedrick. Invariant properties of automotive suspensions. *Journal of Automotive Engineering*, 204 (D):21–27, 1990.
- [Jimenez, 2005] Jimenez Alonso F., *Experimental Analysis of vehicle dynamics. Validation of a novel vehicle mathematical model using advanced instrumentation*, European Conference of Transport Research Institute, Young Researcher Seminar, The Hague, 2005.
- [Jacquinot, 2000] Jacquinot E., Bodson P., *Simulink Car, Modèle simplifié de dynamique du véhicule*, document interne PSA, 2000.
- [Juricic, 2004] Juricic J., Intelligent testing for intelligent vehicles - simulation, HIL and test automation, article published in *MIRA New Technology*, vol. 129, juillet 2004

- [Kikuchi, 2007] Kikuchi F. , Saito H., Remarks on a posteriori error estimation for finite element solutions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 199, Issue 2, pp. 329-336, 2007.
- [Kim, 2003] Kim Jeong-Hoon et Lee Chong-Won, Semi-active damping control of suspension systems for specified operational response mode, *Journal of Sound and Vibration* 260 pp. 307–328, 2003
- [King, 1990] Kim S. B. and Powers E. J. - Orthogonal representations of frequency Domain Volterra Models for arbitrary inputs - Higher Order Statistics, *Proceedings of the International Signal Processings*, p. 298 - 292, 10-12 juillet 1991, Chamrousse, France.
- [King, 1990] King F. D. - Functional series and the control of nonlinear systems - *Proceedings of the 1990 American Control Conference*, Vol. 1, p. 663 - 664, 1990.
- [Kirnbauer, 1992] Kirnbauer T. and Jörgj H. P. -Nonlinear predictive control using Volterra series models - *proceedings of IFAC Nonlinear Control Systems design symposium*, p. 558 - 562 , Bordeaux, France, juin 1992.
- [Kruczek, 2004] Kruczek A. and Stribrsky A., *A Full-Car Model for Active Suspension - Some Practical Aspects*, In *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics*. Istanbul: Bogazici University, 2004.
- [Kuhn, 2005] Kuhn E., Forgez C. and Friedrich G. – Fractional and diffusive representation of a 42 V Ni-mH battery – Chapter in *Fractional differentiation and its applications*, U-Books Edition, pp. 423-434, 2005.
- [Kusiak, 2005] Kusiak A., Battaglia J.L. and Marchal R. – Heat flux estimation in CrN coated tool during MDF machining using non integer system identification technique – Chapter in *Fractional differentiation and its applications*, U-Books Edition, pp. 377-388, 2005.
- [Lamnabhi-Lagarrigue, 1994] Lamnabhi-Lagarrigue F. - *Analyse des systèmes non linéaires - Traité des nouvelles technologies*, série Automatique, Hermès Paris 1994.

- [Le Méhauté, 1998] Le Méhauté A., Nigmatullin R. et Nivanen L., *Flèche du temps et géométrie fractale*, Edition Hermès, Paris, 1998.
- [Lesiak, 1978] Lesiak C. and Krener A. J. - The existence and the uniqueness of Volterra series for nonlinear systems - IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC 23, No. 6, p. 1090 - 1095, 1978.
- [Lin, 2001] Lin J. - Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier - Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [Lorenzo, 2007.a] Lorenzo C.F. and Hartley T.T. – Initialization of fractional differential equations: background and theory – Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-34810, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7, 2007.
- [Lorenzo, 2007.b] Lorenzo C.F. and Hartley T.T. – Initialization of fractional differential equations: theory and application – Proceedings of the ASME 2007, DETC2007-34814, Las Vegas, Nevada, USA, September 4-7, 2007.
- [Lubbock, 1969] Lubbock J. K. and Bansal V. S. - Multidimensional Laplace transforms for solution of non linear equations - Proc I.E.E. - Vol. 116 - N° 12 - pp 2075 - 2082 - 1969.
- [Makita, 1999] Makita M. *An application of suspension kinematics for intermediate level vehicle handling simulation*, JSAE Review 20, pp. 471-477, 1999.
- [Mantaras, 2004] Mantaras Daniel, Luque Pablo and Vera Carlos, *Development and validation of a three-dimensional kinematic model for the McPherson steering and suspension mechanisms*, Mechanism and Machine Theory 39, pp. 603–619, 2004.
- [Merlet, 1996] Merlet J.P. Modélisation géométrique de mécanismes de suspension automobile, Rapport de recherche de l'INRIA, N° 2817, Mars 1996, ISSN 0249-6399
- [Miller, 1993] Miller K.S. and Ross B. – An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations – Wiley, New York, 1993.
- [Moreau, 1995] Moreau X., La dérivation non entière en isolation vibratoire et son application dans le domaine de l'automobile. La suspension CRONE : du concept à la réalisation, Thèse de doctorat, 1995

- [Moreau, 2002] Moreau X., Ramus-Serment C. and Oustaloup A. – Fractional Differentiation in Passive Vibration Control – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 343-362, 2002, Kluwer Academic Publishers.
- [Moreau 2003] Moreau X., Diplôme national d'habilitation à diriger des recherches. *Dérivateur d'ordre non entier : différentes approches de synthèse et applications au contrôle des vibrations*, 2003
- [Moreau, 2004] Moreau X., Altet O. and Oustaloup A. – The CRONE Suspension : Management of Comfort-Road Holding Dilemma – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 461-484, 2004, Kluwer Academic Publishers.
- [Moreau, 2005] Moreau X., Altet O. and Oustaloup A. – Fractional differentiation: an example of phenomenological interpretation – Chapter in Fractional differentiation and its applications, U-Books Edition, pp. 275-287, 2005.
- [Nigmatullin, 1992] Nigmatullin R. – A fractional integral and its physical interpretation – Theoret. and Math. Phys., Vol. 90, N° 3, pp. 242-251, 1992.
- [Oldham, 1974] Oldham K.B. and Spanier J. – The Fractional Calculus – Academic Press, New York, 1974.
- [Oustaloup, 1991] Oustaloup A., *La commande CRONE*, Edition Hermès, Paris, 1991.
- [Oustaloup, 1995] Oustaloup A., *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Edition Hermès, Paris, 1995.
- [Park, 1998] Park J. and Kim Y., *Decentralized Variable Structure Control for Active Suspensions Based on a Full-Car Model*, Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Control Applications, Trieste, Italy, Septembre 1998.
- [Peyton, 1989a] Peyton Jones J. C. and Billings S. A. - Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models - International Journal of Control, Vol. 50, No. 5, p. 1925 - 1940, 1989.

- [Peyton, 1989b] Peyton Jones J. C. et Billings S. A. - Interpretation of non-linear frequency response functions - International Journal of Control, Vol. 52, No. 2, p. 319 - 346, 1989.
- [Peyton, 1991] Peyton Jones J. C. and Billings S. A. - Describing functions, Volterra series, and the analysis of non-linear systems in the frequency domain - International Journal of Control, Vol. 53, No. 4, p. 871 - 887, 1991.
- [Podlubny, 2005] Podlubny I. – Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation – Chapter in Fractional differentiation and its applications, U-Books Edition, pp. 3-18, 2005.
- [Podlubny, 1999] Podlubny I. – Fractional Differential Equations – Academic Press, San Diego, 1999.
- [Podlubny, 2002] Podlubny I., Petras I., Vinagre B.M., O’Leary P. and Dorcak L. – Analogue Realizations of Fractional-Order Controllers – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 281-296, 2002, Kluwer Academic Publishers.
- [Poinot, 2004] Poinot T. and Trigeassou J.C. – Identification of Fractional Systems Using an Output-Error Technique – Journal of Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 133-154, 2004, Kluwer Academic Publishers.
- [Poinot, 2005] Poinot T., Trigeassou J.C. and Benchellal A. – Modelling and simulation of fractional systems – Chapter in Fractional differentiation and its applications, U-Books Edition, pp. 533-544, 2005.
- [Raghavan, 1991] Raghavan M. An atlas of linkages for independent suspensions, SAE Paper n° 911925, 1991.
- [Ramus *et al*, 2002] Ramus-Serment C., Moreau X., Nouillant M., Oustaloup A. and Levron F. – Generalised approach on fractional response of fractal networks – Journal of Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 14, pp. 479-488, 2002.
- [Reddy, 1973] Reddy P. K. and Reddy D. C. - Volterra kernels in nonlinear systems - Electronics letters, Vol. 9, No. 18, p. 426 - 427, 1973.

- [Ren, 1996] Ren F.Y., Yu Z.G. and Su F. – Fractional integral associated to self-similar set of the generalised self-similar set and its physical interpretation – Phys. Lett. A, Vol. 219, pp. 59-68, 1996.
- [Rugh, 1981] Rugh W. J., "Nonlinear System Theory - the Volterra-Wiener Approach", Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1981.
- [Sain, 1982] Sain M. K. Peczkowski J. L. - An approach to robust nonlinear control design - Proceedings of the Twentieth Joint Automatic Control Conference, paper FA-3D, June 1982.
- [Sain, 1990] Sain P. M., Sain M. K. et Michel A. N., "On coordinated feedforward excitation of nonlinear servomechanism". *Proceedings of American Control Conference*, pp. 1695-1700, May 1990.
- [Samko, 1993] Samko S.G., Kilbas A. A. and Marichev O.I. – Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications – Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [Schetzen, 1965a] Schetzen M. - Measurement of the kernels of a non-linear system of finite order - International Journal of Control, Vol. 1, No. 3, p. 251 - 263, 1965.
- [Schetzen, 1965b] Schetzen M. - Synthesis of a class of non-linear systems - International Journal of Control, Vol. 1, No. 3, p. 401 - 414, 1965.
- [Schetzen, 1980] Schetzen M. - The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems - John Wiley & sons, New York 1980.
- [Serrier, 2004] Serrier P. *Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique – Application à la suspension CRONE Hydractive*, Mémoire de stage de MASTER EEA Recherche, Ecole Doctorale des SPI de l'université Bordeaux 1, 2004.
- [Serrier, 2005] Serrier P., Moreau X. et Oustaloup A. – Synthèse fondée sur la récursivité fréquentielle d'un dérivateur d'ordre non entier borné en fréquence réalisé en technologie hydropneumatique – Actes des Journées Nationales du GDR MACS, JDMACS, Lyon 2005.

- [Serrier, 2005b] P. Serrier, X. Moreau et A. Oustaloup, Synthesis of a limited-bandwidth fractional differentiator made in hydropneumatic technology, ASME 2005, International Design Engineering Technical Conferences, Long Beach, California, USA, septembre 2005.
- [Serrier, 2006] Serrier P., Moreau X. et Oustaloup A. –Volterra series based analysis of components nonlinearities in a limited-bandwidth fractional differentiator achieved in hydropneumatic technology – Proceedings of 2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications - FDA 06, Porto, Portugal, 2006.
- [Serrier, 2006c] P. Serrier, X. Moreau et A. Oustaloup, Analyse en pompage et en roulis d'un essieu de véhicule équipé de suspensions hydropneumatiques en vue de la synthèse de la suspension CRONE hydractive, CIFA 2006 (Conférence Internationale Francophone d'Automatique, IEEE), Bordeaux, France, Juin 2006.
- [Serrier, 2006d] P. Serrier, X. Moreau and A. Oustaloup, Active roll control device for vehicles equipped with hydropneumatic suspensions, 4th IFAC-Symposium on Mechatronic Systems, Heidelberg, Allemagne, 12 – 14 septembre 2006.
- [Serrier, 2006e] P. Serrier, X. Moreau, J. Sabatier, A. Oustaloup, Taking into account of non-linearities in the CRONE approach: application to vibration isolation, IECON'06 , IEEE, Paris, 7-10 Nov. 2006.
- [Serrier, 2007] Serrier P., Moreau X. et Oustaloup A. – Limited-Bandwidth Fractional Differentiator: Synthesis and Application in Vibration Isolation – Chapter in Advances in Fractional Calculus, Springer Edition, pp. 287-302, 2007.
- [Stéphane, 2004] Stéphane J., *Contribution à l'étude et à la validation expérimentale d'observateurs appliqués à la dynamique du véhicule*, Thèse de doctorat de l'Université Technologique de Compiègne, soutenue en décembre 2004.
- [Trigeassou, 1999] Trigeassou J.-C., T. Poinot, J. Lin, Oustaloup A., Levron F. - Modeling and identification of a non integer order system - Proc ECC'99, European Control Conference, Karlsruhe, Germany, 1999.

[Vazquez Feijoo, 2005]

Vazquez Feijoo J.A., K. Worden et R. Stanway, Associated Linear Equations for Volterra operators, *Mechanical Systems and Signal Processing* 19 pp 57–69, 2005.

[Vazquez Feijoo, 2006]

Vazquez Feijoo J.A., K. Worden et R. Stanway, Analysis of time-invariant systems in the time and frequency domain by associated linear equations (ALEs), *Mechanical Systems and Signal Processing* 20, pp 896–919, 2006.

[Venture, 2003]

G. Venture, *Identification des paramètres dynamiques d'une voiture*, thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes, 2003.

[Volterra, 1959]

Volterra V., "Theory of functionals and of integrals and integro-differential equations". New York. Dover. 1959

[Wiener, 1958]

Wiener N. - *Nonlinear Problems in Random Theory* - New York : Wiley 1958.

[Williams, 1997]

Williams, R. A., Automotive active suspensions. *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers*, 211, 415–444, 1997

[Worden, 1998]

Worden K. Manson G. , Random vibrations of a duffing oscillator using the Volterra series, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 217, n°4, pp. 781-789, 1998.

[Yue, 1989]

Yue C., Butsuen T. and Hedrick J. K., Alternative control laws for automotive active suspensions, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 111, pp. 286-291, 1989.

[Zhang, 1994]

H. Zhang, S.A. Billings, Analysing nonlinear systems in the frequency-domain-II: The Phase Response, *Mechanical, Systems and Signal Processing* 8 (1) pp 45–62, 1994.

Résumé

Cette thèse traite de la synthèse et de la réalisation d'un intégrateur d'ordre non entier borné en fréquence. La réalisation est faite par un réseau constitué d'un faible nombre de cellules capacitives et dissipatives. La première partie de ce mémoire s'attache à développer des méthodes permettant de déterminer les paramètres physiques des éléments du réseau à partir des quatre paramètres de haut niveau qui caractérisent l'intégrateur d'ordre non entier à réaliser. Les spécificités liées à une réalisation en technologie hydropneumatique sont détaillées. Il est montré, dans un contexte d'isolation vibratoire, qu'elles conduisent à des performances remarquables de robustesse du degré de stabilité et de robustesse de la rapidité vis-à-vis des variations de la masse suspendue, et ce, malgré l'existence de non-linéarités. Les non-linéarités sont étudiées à l'aide des séries de Volterra.

La seconde partie est consacrée à l'application au secteur de l'automobile des résultats de la première partie. La synthèse et la réalisation d'une suspension CRONE hydractive, suspension multi-états dont le mode souple assure la robustesse du degré de stabilité de la caisse vis-à-vis des variations de la masse suspendue, sont proposées et validées en simulation sur un modèle de véhicule à 14 degrés de liberté.

Mots clés

Dérivées non entières, systèmes non entiers, suspension CRONE, technologie hydropneumatique, modélisation de véhicules automobiles, suspension hydractive, série de Voltera

Abstract

The thesis deals with the synthesis and the realisation of a band limited fractional differentiator. The realisation is made thanks to a small number of resistive and capacitive cells (RC cells). The first part of this thesis is about some new methods to compute the physical parameters of the RC cells from the 4 high-level parameters of the band limited fractional differentiator. The specificities of a realisation using hydropneumatic technology are detailed. It is shown that, in vibration isolation, they lead to remarkable performances. The stability degree robustness and the rapidity robustness towards the variation of the sprung mass value are obtained in spite of non-linearities. Volterra serie expansion is used to study the non-linearities.

The second part is about the application of the previous results to the automotive field. The design and the realisation of an hydractive CRONE suspension is proposed. An hydractive CRONE suspension is a suspension with several operating modes and which allows to obtain the stability degree robustness. The hydractive CRONE suspension is then test with a 14 degrees of freedom model of a car.

Keywords

Fractional differentiation, fractional systems, CRONE suspension, hydropneumatic technology, vehicle modelling, hydractive suspension, Volterra series