

THÈSE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

Ecole Doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : **Acoustique**

par **Nicolas DRIOT**

Maître ès Sciences Physiques

**ETUDE DE LA DISPERSION VIBROACOUSTIQUE DES
TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES**

Soutenue le 12 décembre 2002

JURY

Messieurs :	J. L. GUYADER	
	P. Y. HENNION	
	A. KAHRAMAN	Rapporteur
	G. LALLEMENT	Président du jury
	D. LE HOUEDÉC	Rapporteur
	J. PERRET-LIAUDET	Directeur de thèse
	J. SABOT	Invité

THÈSE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le titre de **DOCTEUR**

Ecole Doctorale : Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : **Acoustique**

par **Nicolas DRIOT**

Maître ès Sciences Physiques

**ETUDE DE LA DISPERSION VIBROACOUSTIQUE DES
TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES**

Soutenue le 12 décembre 2002

JURY

Messieurs	J. L. GUYADER	
	P. Y. HENNION	
	A. KAHRAMAN	Rapporteur
	G. LALLEMENT	Président du jury
	D. LE HOUEDÉC	Rapporteur
	J. PERRET-LIAUDET	Directeur de thèse
	J. SABOT	Invité

71899

Ecole Centrale de Lyon
BIBLIOTHEQUE
36, avenue Guy de Collongue
F - 69134 ECULLY CEDEX

ECOLE CENTRALE DE LYON
Liste des personnes habilitées à diriger des recherches

A	<i>AIT-EL-HADJ Smâil</i>	<i>professeur</i>	GRESTI	ECL	
	<i>ARQUES Philippe</i>	<i>professeur</i>		ECL	
	<i>AURIOL Philippe</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL	
	<i>BAILLY Christophe</i>	<i>maître de conférence</i>	LMFA	ECL	
B	<i>BATAILLE Jean</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL	
	<i>BAYADA Guy</i>	<i>professeur</i>	MAPLY	INSA	
	<i>BEN HADID Hamda</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL	
	<i>BERGHEAU Jean-Michel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE	
	<i>BEROUAL Abderrhamane</i>	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL	
	<i>BERTOGLIO Jean-Pierre</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS	
	<i>BLA IZE Alain</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	UCBL	
	<i>BLANC-BENON Philippe</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS	
	<i>BLANCHET Robert</i>	<i>professeur</i>	LEOM	ECL	
	<i>BRUN Maurice</i>	<i>professeur</i>	LMFA	ECL	
	<i>BUFFAT Marc</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL	
	C	<i>CAMBON Claude</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS
<i>CAMBOU Bernard</i>		<i>professeur</i>	LTDS	ECL	
<i>CARRIERE Philippe</i>		<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS	
<i>CHAMBAT Michèle</i>		<i>professeur</i>	MAPLY	UCBL	
<i>CHAMPAGNE Jean- yves</i>		<i>maître de conférence</i>	LMFA	INSA	
<i>CHAMPOUSSIN Jean-Claude</i>		<i>professeur</i>	LMFA	ECL	
<i>CHAUVET Jean-Paul</i>		<i>professeur</i>	IFOS	ECL	
<i>CHEN Liming</i>		<i>professeur</i>	ICTT	ECL	
<i>CLERC Guy</i>		<i>professeur</i>	CEGELY	UCBL	
<i>COMTE-BELLOT Geneviève</i>		<i>professeur émérite</i>	LMFA	ECL	
<i>COQUILLET Bernard</i>		<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL	
<i>CREPEL Pierre</i>		<i>chargé de recherche</i>	MAPLY	CNRS	
D		<i>DAVID Bertrand</i>	<i>professeur</i>	ICTT	ECL
		<i>DUBUJET Philippe</i>	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
E	<i>ESCUDIE Dany</i>	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS	
F	<i>FERRAND Pascal</i>	<i>directeur de recherche</i>	LMFA	CNRS	
G	<i>GAFFIOT Frédéric</i>	<i>professeur</i>	LEOM	ECL	
	<i>GAGNAIRE Alain</i>	<i>maître de conférence</i>	LEOM	ECL	
	<i>GALLAND Marie-Annick</i>	<i>maître de conférence</i>	LMFA	ECL	
	<i>GAY Bernard</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL	
	<i>GENCE Jean-Noël</i>	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL	
	<i>GENDRY Michel</i>	<i>chargé de recherche</i>	LEOM	CNRS	
	<i>GEORGES Jean-Marie</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	CNRS	
	<i>GRENET Geneviève</i>	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS	
	<i>GUIRALDENQ Pierre</i>	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	UCBL	

H	HAMADICHE Mahmoud	<i>maître de conférence</i>	LMFA	UCBL
	HEIBIG Arnaud	<i>professeur</i>	MAPLY	INSA
	HELLOUIN Yves	<i>maître de conférence</i>		ECL
	HENRY Daniel	<i>chargé de recherche</i>	LMFA	CNRS
	HERRMANN Jean-Marie	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
	HOLLINGER Guy	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
J	JAFFREZIC-RENAULT Nicole	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
	JEANDEL Denis	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
	JEZEQUEL Louis	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
	JOSEPH Jacques	<i>professeur</i>	LEOM	ECL
	JUVE Daniel	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
	JUVE Denyse	<i>ingénieur de recherche</i>	IFOS	ECL
K	KAPSA Philippe	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
	KRAHENBUHL Laurent	<i>directeur de recherche</i>	CEGELY	CNRS
	KRAWCZYK Stanislas	<i>directeur de recherche</i>	LEOM	CNRS
L	LACHAL Aimé	<i>PRAG</i>	MAPLY	INSA
	LANCE Michel	<i>professeur</i>	LMFA	UCBL
	LANGLADE-BOMBA Cécile	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
	LE HELLEY Michel	<i>professeur</i>		ECL
	LEBOEUF Francis	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
	LOUBET Jean-Luc	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
	LYONNET Patrick	<i>professeur</i>	LTDS	ENISE
M	MAITRE Jean-François	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
	MARION Martine	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
	MARTELET Claude	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
	MARTIN Jean-Michel	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
	MARTIN Jean-René	<i>professeur</i>	IFOS	ECL
	MATHIA Thomas	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS
	MATHIEU Jean	<i>professeur émérite</i>	LMFA	ECL
	MAZUYER Denis	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
	MIDOL Alain	<i>maître de conférence</i>	LTDS	UCBL
	MOREL Robert	<i>professeur</i>	LMFA	INSA
	MOUSSAOUI Mohand	<i>professeur</i>	MAPLY	ECL
	MUSY François	<i>maître de conférence</i>	MAPLY	ECL
N	NICOLAS Alain	<i>professeur</i>	CEGELY	ECL
	NICOLAS Laurent	<i>directeur de recherche</i>	CEGELY	CNRS
P	PERKINS Richard	<i>professeur</i>	LMFA	ECL
	PERRET-LIAUDET Joël	<i>maître de conférence</i>	LTDS	ECL
	PERRIN Jacques	<i>professeur</i>		INSA
	PICHAT Pierre	<i>directeur de recherche</i>	IFOS	CNRS
	POUSIN Jérôme	<i>professeur</i>	MAPLY	INSA
	PONSONNET Laurence	<i>maître de conférence</i>	IFOS	ECL
	PREVOT Patrick	<i>professeur</i>	ICTT	INSA

R	REBOUX Jean-Luc	professeur	LTDS	ENISE
	ROBACH Yves	professeur	LEOM	ECL
	ROJAT Gérard	professeur	CEGELY	UCBL
	ROUSSEAU Jacques	professeur émérite	LTDS	ENISE
	ROUY Elisabeth	professeur	MAPLY	ECL
S	SALVIA Michelle	maître de conférence	IFOS	ECL
	SANDRI Dominique	maître de conférence	MAPLY	UCBL
	SCHATZMAN Michelle	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
	SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
	SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
	SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS
	SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	IFOS	CNRS
	STREMSDOERFER Guy	professeur	IFOS	ECL
	SUNYACH Michel	professeur	LMFA	UCBL
T	TARDY Jacques	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	THOMAS Gérard	professeur	CEGELY	ECL
	THOUVEREZ Fabrice	maître de conférence	LTDS	ECL
	TREHEUX Daniel	professeur	IFOS	ECL
V	VANNES André-Bernard	professeur	IFOS	ECL
	VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	LEOM	CNRS
	VINCENT Léo	professeur	IFOS	ECL
	VOLPERT Vitaly	directeur de recherche	MAPLY	CNRS
Z	ZAHOUANI Hassan	professeur	LTDS	ENISE

RESUME

Pour des transmissions par engrenages fabriquées en grande série, il n'est pas rare de constater des écarts de niveaux de bruit de plus de 10 dB. L'origine de cette variabilité est connue puisque ce sont les tolérances de fabrication qui autorisent de telles variations de comportement.

Nous proposons une méthodologie permettant de prendre en compte les tolérances de fabrication et de les inclure dans les modèles de prédiction du bruit rayonné par les boîtes de vitesses. Les tolérances de fabrication sont modélisées par une approche stochastique et plus particulièrement par la méthode d'échantillonnage de Taguchi. Cette méthode a d'abord fait l'objet d'une étude comparative puis est utilisée pour la prédiction de la variabilité des boîtes de vitesses dont la micro géométrie des dents varie. Les résultats statistiques valident complètement la méthode Taguchi et prouvent son efficacité en terme de compromis précision/rapidité.

Mots clés : Engrenages, Dynamique, Acoustique, Variabilité, Incertitude, Tolérances, Stochastique.

ABSTRACT

This study deals with the prediction of vibroacoustic behavior variability of mass produced gearboxes. Indeed, noise measurements on populations of high-volume gearboxes often reveal large variability, mainly due to tolerances associated with certain gear design parameters introduced to accommodate certain manufacturing errors.

We propose and implement a methodology able to include tolerances in gears dynamic models. The statistical tolerancing Taguchi's method is used for this purpose. This method is first validated in terms of accuracy/computational time ratio by using dynamic systems having statistical mechanical characteristics. Then, we focus on gearboxes for which tooth micro geometry is disturbed by known manufacturing errors. Numerous statistical results are displayed concerning transmission error variability, natural modes variability and noise levels variability. Results strongly correlate to experimental measurements done in automotive industry and validate Taguchi's method.

Keywords : Gears, Dynamic, Acoustic, Variability, Uncertainty, Tolerances, Stochastic.

Thèse effectuée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes UMR CNRS 5513, de l'Ecole Centrale de Lyon.

Bâtiment H10

36 Avenue Guy de Collongue

69134 Ecully Cedex FRANCE

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon, UMR CNRS 5513, dirigé par Philippe KAPSA. Je tiens à le remercier pour son accueil sympathique qui a contribué à l'élaboration de ce mémoire.

En premier lieu, je tiens à exprimer ma reconnaissance sincère et profonde à Joël PERRET-LIAUDET qui a plus que largement contribué à la direction de cette thèse en m'accordant sa confiance en chaque instant. Merci pour l'ensemble des discussions scientifiques, merci pour ton intuition et ta disponibilité sans commune mesure.

Je suis très reconnaissant envers le Professeur émérite Gérard LALLEMENT de l'Université de Franche Comté, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont témoignée Messieurs le Professeur Donatien LE HOUEDDEC de l'Ecole Centrale de Nantes et le Professeur Ahmet KAHRAMAN, directeur du Center of Gear Research de l'Université de Toledo (USA) en acceptant de rapporter le manuscrit de ce travail et, plus particulièrement à Ahmet KAHRAMAN d'avoir lu et d'avoir été présent le jour de la soutenance. La distance et la barrière de la langue constituent des difficultés majeures, merci à vous d'avoir été là et gageons qu'une collaboration future sera possible.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs les Professeurs, Jean Louis GUYADER de l'Insa de Lyon et le professeur Pierre Yves HENNION de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6, pour leurs apports et observations lors du jury de thèse.

Enfin, il serait injuste de ne pas citer Monsieur le Professeur Jean SABOT, initiateur du sujet de thèse, sans qui l'entame de ces travaux n'aurait été possible. Merci pour votre confiance.

Merci également aux membres des équipes Mécanismes et Fabrication, Emmanuel RIGAUD pour sa participation active à l'ensemble des calculs, François MAYEUX pour sa participation à l'élaboration des codes informatiques, Alain LE BOT pour sa culture scientifique, Bertrand HOUX et Christophe JANOLIN pour m'avoir donné leur confiance dans les diverses activités d'enseignement et à tous pour l'ambiance générale qui règne dans ce groupe. Merci également à Nathalie PERRET-LIAUDET pour sa collaboration au chapitre 1 de ce mémoire, maintenant tu fais un peu partie de l'équipe !

Une énorme pensée à toutes celles et ceux, alsaciens, qui m'ont soutenu ce jeudi 12 décembre 2002, merci pour le témoignage de votre amitié profonde et réconfortante, vous savez déjà ce que vous représentez à mes yeux, Natacha, Nelly, Jean Christophe, Franck, Rémi, Stéphane, Stéphane et ... Thomas.

Pour leur soutien constant, l'aide, je remercie l'ensemble de ma famille et de mes proches, avec un hommage tout particulier pour mes parents, Maryse et Pierre.

SOMMAIRE GENERAL

Liste des personnes de l'ECL habilitées à encadrer des thèses :	2
Résumé :	5
Remerciements :	6
Sommaire :	7
Nomenclature :	8
Introduction Générale :	9
Chapitre I : Variabilité du comportement dynamique des transmissions par engrenages : origines, conséquences, méthodes de calcul :	14
Chapitre II : Application des méthodes stochastiques à des systèmes dynamiques simples et validité de la méthode Taguchi :	58
Chapitre III : Etude de la variabilité vibroacoustique d'une transmission par engrenages simple étage par la méthode Taguchi :	94
Chapitre IV : Variabilité des sources d'excitation, des caractéristiques modales et des vitesses critiques des transmissions par engrenages :	130
Conclusion générale et perspectives :	157
Références bibliographiques :	161
Dernière page de la thèse :	167

NOMENCLATURE

- A : nombre scalaire ou fonction
- $i : i^2 = -1$
- A^* : nombre conjugué du nombre complexe A
- $\text{Re}(A)$: partie réelle du nombre complexe A
- $\text{Im}(A)$: partie imaginaire du nombre complexe A
- \underline{A} : nombre flou
- $[1,10]$: intervalle allant de 1 à 10 incluant les bornes
- $\{A\}$: vecteur
- $[A]$: matrice
- A_{ij} : élément i ième ligne, j ième colonne de la matrice $[A]$
- ${}^t[A]$: transposée de la matrice $[A]$
- $N*N$: dimension N d'un vecteur ou d'une matrice
- $\{x\} \bullet \{y\}$: produit scalaire des vecteurs $\{x\}$ et $\{y\}$
- $\|\{x\}\|$: norme du vecteur $\{x\}$
- $\{\nabla\} \bullet$: opérateur gradient
- $|x|$: valeur absolue du scalaire x
- \dot{x} , \ddot{x} : dérivée 1^{ère} et 2^{ième} respectivement par rapport au temps de la fonction temporelle $x(t)$
- \tilde{x} : transformée de Fourier de la fonction $x(t)$
- \otimes : produit de convolution
- $\langle x(t) \rangle$: valeur moyenne temporelle de la fonction $x(t)$
- $\overline{f(x,y,z)}$: moyenne spatiale de la fonction f en coordonnées cartésiennes
- $\frac{\partial f}{\partial x}$: dérivée partielle de la variable ou fonction par rapport à x

INTRODUCTION GENERALE

Les engrenages constituent en général le meilleur choix technologique lorsqu'on veut transmettre un mouvement de rotation à vitesse élevée sous un couple moteur important. En effet, outre l'avantage d'avoir un rendement élevé et une bonne précision, ce type de mécanisme conduit, par rapport aux autres solutions technologiques, à la plus faible perturbation de la loi entrée-sortie (loi de transmission). Pour toutes ces raisons, les engrenages sont exploités dans de nombreux domaines et en particulier dans celui des moyens de transport (air, mer et terre) et dans celui des machines. Depuis de nombreuses années, les performances générales de ces mécanismes ont été améliorées, notamment leur puissance massique, leur durée de vie et leur capacité de charge. Cependant, peu de travaux théoriques et numériques ont été effectués sur leur nuisance acoustique. Depuis une quinzaine d'années, compte tenu des exigences accrues des usagers en matière de confort et des nouvelles normes sur la pollution sonore, les concepteurs de transmissions par engrenages sont de plus en plus préoccupés par ces problèmes de bruit.

On sait actuellement prédire le bruit rayonné pour une transmission simplifiée. Pour des transmissions enfermées dans un carter, le bruit rayonné résulte essentiellement des vibrations de ce dernier. Elles sont induites par le processus d'engrènement et ont pour principale origine, en l'absence de jeux, l'erreur statique de transmission sous charge. Le calcul du bruit rayonné s'effectue alors en trois étapes : la première concerne le calcul des sources d'excitation internes de la transmission qui a fait l'objet de nombreuses études. La seconde étape concerne la prédiction du comportement vibratoire de toutes les composantes de la transmission (roues, arbres, roulements et carter). Là aussi, cette étape est généralement bien maîtrisée et la littérature abonde de nombreux exemples. Enfin, la dernière étape concerne la prédiction du rayonnement acoustique connaissant le champ vibratoire du carter. Les modèles acoustiques actuels sont efficaces pour des géométries simplifiées des carters. Toutefois, il reste, encore aujourd'hui des développements à effectuer pour prendre en compte des géométries de plus en plus complexes. En résumé, le calcul et l'évaluation des nuisances acoustiques sont assez bien maîtrisés et les prédictions obtenues se confrontent bien avec les résultats expérimentaux.

Toutefois, lors de la fabrication en grande série de transmissions et plus généralement, de tout système mécanique, on constate expérimentalement une grande variabilité des performances vibroacoustiques de ces objets, l'écart maximal du bruit rayonné pouvant atteindre facilement plus de 10 décibels. Ce phénomène de dispersion est préjudiciable à une qualité constante de production puisqu'une partie non négligeable peut échapper aux normes établies.

Les origines de la dispersion sont très diverses mais proviennent principalement des écarts de géométrie (denture, roue, axes) associés à l'introduction de tolérances autour des côtes nominales des

caractéristiques de l'engrenage. La fabrication à l'identique d'une transmission par engrenages, ou de tout système mécanique actif ou passif, est impossible. Aussi, les concepteurs contournent cette difficulté en autorisant la géométrie à évoluer entre certaines limites. Ces limites constituent les bornes des tolérances. Le produit fabriqué devient, du point de vue du modélisateur, un objet entaché d'incertitude. L'incertitude peut concerner, outre la géométrie, les caractéristiques mécaniques (élasticité, amortissement...).

La réduction de la dispersion ou encore de la variabilité des performances d'un produit fabriqué en grande série nécessite un choix judicieux des tolérances de fabrication. En théorie, on pourrait augmenter la précision de fabrication en choisissant des tolérances plus strictes, mais malheureusement le coût de fabrication serait trop élevé. Du point de vue du fabricant, la réduction des écarts de performances doit se faire à coût raisonnable et il apparaît indispensable d'effectuer un choix sur les tolérances à modifier pour réduire la variabilité. La prédiction des écarts de comportement nécessite de modéliser l'incertitude inhérente à la fabrication et de l'introduire et la propager à travers un modèle de comportement dynamique du système étudié. C'est principalement sur cet aspect que s'est orienté ce travail. A notre connaissance, très peu d'études concernent la prédiction des écarts de comportement vibroacoustique de transmissions par engrenages fabriquées en grande série.

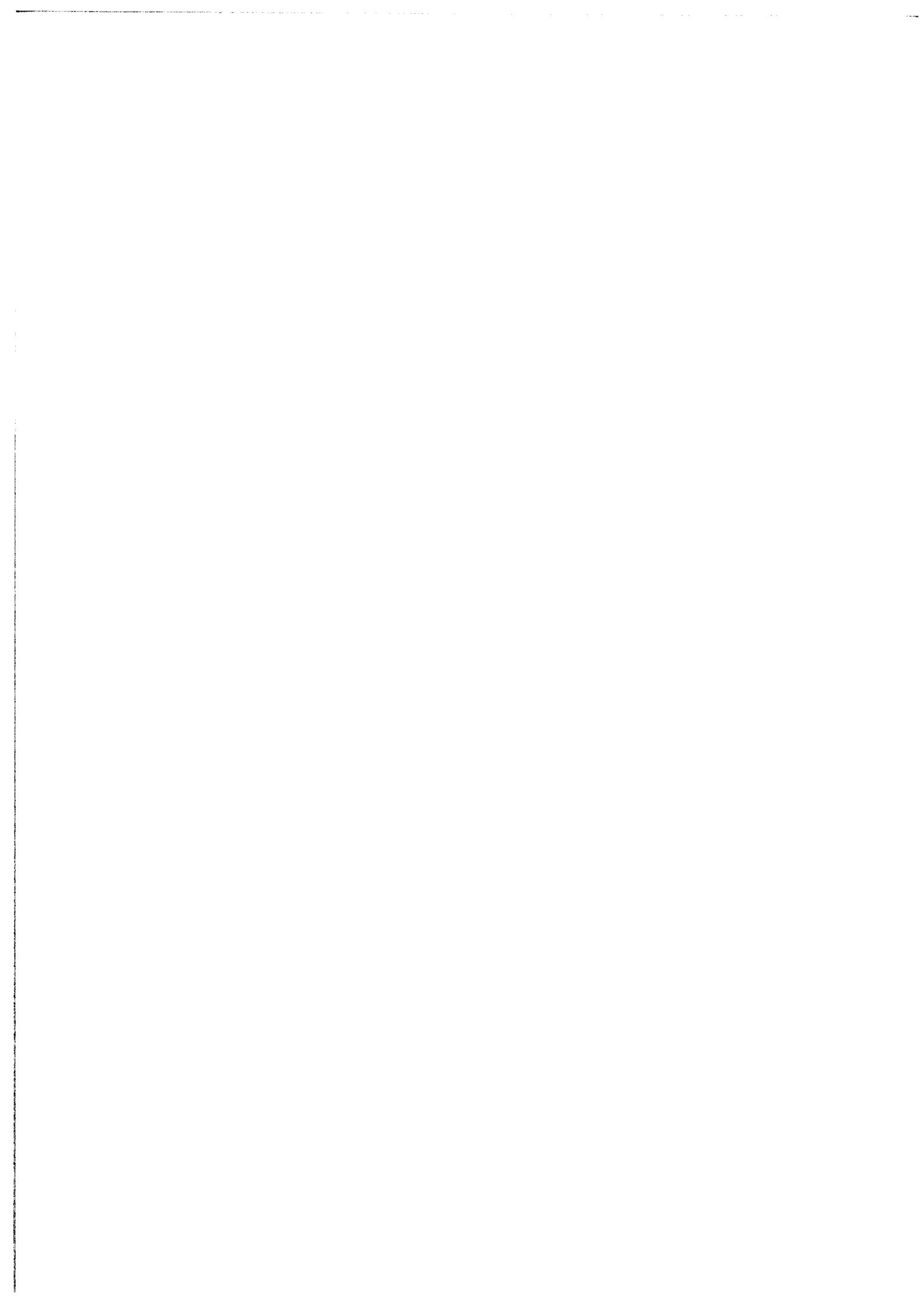
Ce mémoire se décompose en quatre chapitres. Le premier chapitre, de type bibliographique, rappelle les principaux phénomènes propres au comportement vibroacoustique des boîtes de vitesses. Les modèles servant à la prédiction du rayonnement acoustique complet, des sources d'excitation internes aux niveaux de bruit, sont précisément décrits. Enfin, ce chapitre présente les méthodes de traitement de l'incertitude dans les systèmes mécaniques et de la faisabilité de coupler une méthode de traitement de l'incertitude avec la prédiction du rayonnement acoustique des transmissions par engrenages.

Le second chapitre se propose de comparer diverses méthodes stochastiques capables de traiter l'incertitude des paramètres de systèmes dynamiques simples à faible nombre de degrés de liberté. Les résultats obtenus valident en particulier une méthode peu utilisée en analyse dynamique de systèmes mécaniques incertains. Les systèmes dynamiques retenus sont du type linéaire, linéaire et paramétrique (équation différentielle du second ordre de type Matthieu-Hill) et non linéaire.

Le troisième chapitre présente une étude complète d'une transmission par engrenages, dont la denture est entachée d'erreurs de fabrication, par la méthode validée au chapitre précédent. Nous verrons notamment que la méthode retenue permet de construire un plan d'expériences et donc d'effectuer une analyse de sensibilité. Ce chapitre présente de nombreux résultats sur la variabilité du comportement vibratoire et acoustique mais les temps de calcul, bien qu'optimisés, restent longs.

Enfin, le dernier chapitre traite plus particulièrement de la variabilité des sources d'excitation internes de plusieurs engrenages, et montrent que l'approche utilisée permet de prédire efficacement

les plages de vitesses pour lesquelles on observe d'importants niveaux vibratoires et acoustiques. Outre un grand nombre de résultats et, à la lumière de ceux ci, nous discutons de la faisabilité d'une approche multi méthodes pour le traitement de la variabilité des nuisances vibroacoustiques des transmissions par engrenages dans le but d'optimiser les temps de calcul et les manipulations numériques.



CHAPITRE I.....14

VARIABILITÉ DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES : ORIGINES, CONSEQUENCES, METHODES DE CALCULS	14
I. Introduction.	14
II. Comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages : principaux phénomènes.....	15
A. Des sources d'excitation au bruit rayonné : phénoménologie.....	15
a) Principales sources d'excitation dynamique.	15
b) L'erreur statique de transmission sous charge.	16
c) Déformations élastostatiques et fluctuation de la raideur d'engrènement.	17
d) Défauts de géométrie : caractéristiques et conséquences.....	18
e) Comportement dynamique des transmissions par engrenages.	20
f) Comportement acoustique des transmissions par engrenages.	21
B. De la source d'excitation au bruit rayonné : méthodes de calculs retenues.	22
a) Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge.	23
b) Calcul de la raideur d'engrènement.	26
c) Calcul de la réponse vibratoire de l'ensemble de la transmission par engrenages.....	27
d) Calcul du rayonnement acoustique du carter de la transmission.	30
C. Récapitulatif de la démarche de calcul.....	36
III. Variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages : origines, caractéristiques et conséquences.	37
A. Principales sources de la variabilité de comportement.	37
B. Les défauts de fabrication et de montage, source importante de variabilité.....	38
a) Tolérancement, aspects généraux.	38
b) Tolérancement et engrenages.	39
C. Conclusion.	41
IV. Prise en compte et traitement de l'incertitude dans les modèles dynamiques.....	42
A. Introduction.	42
B. L'approche possibiliste.	43
a) Modélisation de l'incertitude par des nombres flous.	43
b) L'arithmétique floue.....	44
c) Arithmétique des intervalles adaptée à la formulation éléments finis.....	45
C. L'approche stochastique.	47
a) Modélisation de l'incertitude par des grandeurs aléatoires.....	48
b) Traitement des grandeurs aléatoires dans les modèles mécaniques.....	49
c) Commentaires.....	52
V. Choix d'une méthodologie appliquée au comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages.	53
A. Quelle approche pour les défauts de géométrie ?.....	53
B. Quelle approche pour la prédiction du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages. .	53
a) Calcul des sources d'excitation internes : erreur de transmission et raideur d'engrènement.	54
b) Calcul de la réponse vibratoire de la transmission par engrenages.....	54
c) Calcul du rayonnement acoustique du carter.	55
VI. Conclusion.....	55

Chapitre I

VARIABILITÉ DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES : ORIGINES, CONSEQUENCES, METHODES DE CALCULS

I. Introduction.

L'étude du comportement dynamique des transmissions par engrenages reste encore un problème complexe. En effet, pour le cas de transmissions fermées, i.e. enveloppées dans un carter, le bruit rayonné résulte pour l'essentiel de l'état vibratoire du carter de la transmission induit par des sources d'excitation internes et/ou externes. Les sources internes sont associées majoritairement au processus d'engrènement et sont transmises au carter via tous les composants de la transmission : roues, arbres, roulements ou paliers. Les sources externes sont associées d'une part aux actionneurs et aux récepteurs, tels que les moteurs et les trains roulants, et d'autre part aux vibrations de la structure d'accueil communiquées à la transmission par ses points d'attache. Lors de l'utilisation de la transmission dans un milieu fluide dit léger (type air), la connaissance de l'état vibratoire du carter hors charge fluide suffit à prédire les nuisances acoustiques. Le problème de rayonnement acoustique est dit standard mais reste complexe au vu d'une part, de la géométrie de la surface vibrante et, d'autre part, de la richesse du contenu fréquentiel des sources d'excitation.

En plus du problème de la prédiction du comportement vibroacoustique d'une transmission se situe un constat expérimental : on observe une grande variabilité des niveaux de bruit rayonné par un échantillon de transmissions fabriquées en grande série. Par exemple, dans le cas de boîtes de vitesses automobiles, les écarts de bruit entre deux échantillons peuvent être supérieurs à 10 dB. Ces écarts sont généralement associés aux dispersions des sources excitatrices qu'induisent les défauts de géométrie et de montage liés au processus de fabrication. Ils peuvent être également associés aux variations des caractéristiques mécaniques (raideur, amortissement, etc.). Il apparaît qu'actuellement, la prédiction des dispersions du comportement vibratoire et acoustique d'une transmission par engrenages reste un problème très difficile.

Dans ce contexte, ce chapitre de nature bibliographique a pour objet de rendre compte d'une part, de l'état actuel des connaissances sur les caractéristiques du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages et d'autre part, de décrire les méthodologies existantes permettant d'inclure l'incertain dans des modèles dynamiques de structures et de mécanismes. Plus précisément, une première partie est consacrée à la description du comportement dynamique des transmissions par engrenages ainsi qu'à la description des méthodes de résolution numérique traitant le problème complet de la modélisation des sources d'excitation jusqu'au calcul du bruit rayonné. On décrit, en second lieu, les origines de la variabilité du comportement vibroacoustique. La troisième partie de ce chapitre est dédiée à la description des diverses approches et méthodes permettant l'analyse dynamique de structures ou mécanismes à paramètres incertains. Enfin, la dernière partie de ce chapitre présentera

la stratégie adoptée pour la prédiction de la variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages.

II. Comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages : principaux phénomènes.

Cette partie est consacrée à la description des principaux phénomènes gouvernant le comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages, ainsi qu'à la description de la modélisation retenue pour le calcul de ce dernier.

A. Des sources d'excitation au bruit rayonné : phénoménologie.

a) Principales sources d'excitation dynamique.

Les forces généralisées qui engendrent la réponse vibratoire des carters sont multiples (Rémond, Velex et Sabot, 1993). On peut distinguer d'une part les excitations internes, propres au fonctionnement de la transmission, et d'autre part, les excitations externes.

Parmi les sources d'excitation internes, il y a celles qui résultent d'interactions fluide-solide. Il s'agit essentiellement :

- de l'excitation des carters par des écoulements et par des projections de lubrifiant,
- de l'excitation des carters par des émissions acoustiques internes (bruit d'engrènement associé au phénomène de « fluid pumping » ou aspiration refoulement de l'air entre les dents et rayonnement acoustique des roues).

Parmi les excitations internes, il y a également celles qui résultent d'interactions solide-solide. Il s'agit essentiellement :

- des fluctuations des forces de contact au niveau des dentures, transmises aux paliers ou roulements puis au carter, qui engendrent l'erreur statique de transmission,
- des fluctuations des forces de contact au niveau des roulements qui engendrent leurs propres défauts,
- des fluctuations des forces de frottement au niveau des dentures,
- des forces de contact engendrées par des chocs autorisés par la présence des jeux fonctionnels.

Quant aux sources d'excitation externes, elles sont associées aux fluctuations du couple moteur, aux fluctuations du couple de charge, aux variations de l'inertie de charge et aux vibrations transmises via les points de fixation par la structure d'accueil.

Cependant, il est bien établi que l'erreur statique de transmission sous charge constitue la source d'excitation vibratoire interne dominante. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés à ce type d'excitation et nous nous proposons maintenant de décrire ce qu'est l'erreur statique de transmission.

b) L'erreur statique de transmission sous charge.

La transmission d'un mouvement de rotation uniforme peut s'obtenir à l'aide de deux roues de friction en contact. Le mouvement est transmis de manière idéale si aucun glissement relatif d'une roue sur l'autre n'est observé. Malheureusement, cette solution technologique n'est valable que pour de faibles valeurs des couples d'entrée et de sortie. Aussi, dans le cas des transmissions de puissance i.e. pour des couples de charge importants, l'entraînement en rotation s'obtient par obstacle que sont les dentures, pour le cas des engrenages. Seul le nombre de dents conditionne le rapport de transmission. Afin d'assurer une loi entrée sortie linéaire, la solution technologique retenue est le profil en développante de cercle car il est insensible à l'entraxe. D'un point de vue théorique, le rapport de transmission i reste ainsi à chaque instant constant :

$$\forall t \quad i = \dot{\theta}_1 / \dot{\theta}_2 = Z_2 / Z_1 \quad (I.1)$$

où $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ constituent les vitesses de rotation de l'arbre d'entrée et de sortie et Z_1 , Z_2 les nombres de dents respectivement des roues menante et menée. En réalité, on observe toujours une fluctuation $i(t)$ du rapport de transmission autour de sa valeur moyenne et théorique, fluctuation dont l'origine par vocable est l'erreur statique de transmission sous charge. Plus précisément, l'erreur statique de transmission sous charge est définie comme l'écart entre la position angulaire réelle qu'occupe la roue menée et celle qu'elle occuperait si l'engrenage était géométriquement parfait et infiniment rigide (Welbourn, 1979). Cette erreur peut s'exprimer soit par un écart de position angulaire, soit par un déplacement des dents en prise exprimé sur le plan d'action, lieu des points de contact théorique.

Parce qu'elle dépend des situations instantanées des couples de dents en prise, l'erreur de transmission fluctue au cours de l'engrènement et constitue par la même une source excitatrice. Lors du fonctionnement de la transmission, cette erreur donne alors naissance à des surcharges dynamiques sur les dentures et engendre, via les arbres et les paliers, des surcharges dynamiques (moments et forces) sur le carter. On peut distinguer l'erreur statique de transmission de l'erreur dynamique de transmission (Welbourn, 1979, Pearce, 1986). La première est mesurée pour des vitesses très faibles de fonctionnement alors que la seconde prend en compte les effets dynamiques lorsque la vitesse augmente. De plus, lors de l'application d'un couple moteur et pour des vitesses de rotation faibles, on parle d'erreur statique de transmission sous charge. Enfin, pour de faibles vitesses de fonctionnement et pour des couples moteur juste suffisants pour assurer le contact entre dents sans déformation, on parle d'erreur cinématique de transmission.

L'erreur statique de transmission sous charge possède trois origines physiques principales qui interagissent entre elles (Welbourn 1979, Pearce 1986, Rémond et al. 1993), à savoir :

- les défauts de géométrie qui résultent de la fabrication (défauts propres à la denture et au corps de roue) et du montage de la transmission (défauts de parallélisme des arbres, défauts de positionnement des paliers ou roulements, etc.),
- les déformations élastostatiques des dents et des corps de roue induites par la transmission du couple moteur à l'organe de sortie,
- les déformations de l'ensemble de la transmission (arbres, roulements, carter) modifiant la position relative des roues en prise.

Afin de fournir un ordre de grandeur, l'erreur statique de transmission sous charge, exprimée comme un écart de position selon le plan d'action, est généralement exprimée en micromètre et sa fluctuation est de l'ordre de la dizaine de micromètres dans le cas des boîtes de vitesses automobiles.

c) Déformations élastostatiques et fluctuation de la raideur d'engrènement.

La transmission d'un couple moteur entraîne, par l'intermédiaire de la denture, la déformation élastique de l'engrenage (denture et corps de roue). Il existe deux contributions aux déformations : d'une part une contribution associée à la flexion des dents et des corps de roue et d'autre part une contribution associée aux contacts locaux entre dents de type hertzien. Vu que les points de contact sur les profils des dents, que la répartition de charge entre chacun des couples de dents en prise et que le nombre des dents en prise évoluent au cours de l'engrènement, ces déformations élastiques dépendent étroitement des positions angulaires des deux roues. Ces déformations se caractérisent au cours de l'engrènement par un rapprochement des dents entre elles le long de la ligne d'action, rapprochement qui n'est donc pas constant selon les positions angulaires des roues. Ce rapprochement constitue l'erreur statique de transmission. On peut, pour chaque position angulaire, modéliser selon la ligne d'action et à partir de l'effort transmis et du rapprochement des dents entre elles, une raideur de liaison entre les roues que l'on appelle communément la raideur d'engrènement. Comme l'erreur statique de transmission, cette raideur évolue au cours de l'engrènement et est fortement conditionnée par :

- l'évolution cyclique du nombre de couples de dents en prise,
- l'évolution des lignes de contact sur le plan d'action,
- l'évolution de la répartition de charge le long de ces lignes de contact.

La raideur d'engrènement s'exprime généralement, pour chaque position angulaire de la roue menante, comme la pente de la relation non linéaire effort-déplacement qui lie l'erreur statique de transmission sous charge à l'effort transmis (raideur linéarisée). Par ailleurs, la fluctuation de la raideur d'engrènement possède un contenu fréquentiel identique à celui de l'erreur statique de transmission sous charge. En régime de fonctionnement stationnaire, elle est périodique et constitue par la même une source d'excitation de type paramétrique. Le contenu fréquentiel détaillé de l'erreur statique de transmission sous charge ainsi que celui de la raideur d'engrènement seront évoqués ultérieurement.

Enfin, il n'est pas inutile de rappeler que la fluctuation d'amplitude de la raideur d'engrènement est fortement liée à la macro géométrie de l'engrenage. On observe des fluctuations d'amplitudes de

raideur moins grandes pour des engrenages à denture hélicoïdale par rapport à des engrenages à denture droite. Cela s'explique par un nombre moyen de couples de dents en prise plus élevé pour des dentures hélicoïdales, entre 2 et 5 contre 1 et 3 pour des dentures droites. Pour avoir une idée de l'ordre de grandeur de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement, citons l'exemple de la raideur d'un couple de dent en prise pour un engrenage normal (angle de pression 20° , non corrigé) en acier à denture droite qui est égale à environ $13,9 \text{ N}/\mu\text{m}$ et par mm de largeur de denture (Welbourn 1979).

d) Défauts de géométrie : caractéristiques et conséquences.

Les défauts de géométrie constituent l'une des principales origines physiques de l'erreur statique de transmission sous charge (Welbourn, 1979, Perret-Liaudet 1992, Rémond et al., 1993). Ils sont à l'origine, dans un même ordre de grandeur que les déformations élastiques, de la modification de la répartition de charge le long des lignes de contact et de la fluctuation de position angulaire des roues en prise. La norme AFNOR NF-E-23-006 relative à la précision des engrenages parallèles à denture en développante fournit la définition exacte de chacun des défauts ainsi que les tolérances d'usinage et de montage des engrenages selon leur taille et leur classe de précision. L'ordre de grandeur caractéristique de ces défauts se situe entre le micron et la dizaine de microns pour des classes de précision usuelles de la mécanique générale et de l'automobile. Les principaux défauts et leurs conséquences respectives sont les suivants :

1. Défauts de profil et de distorsion : ils proviennent, hors usure, du processus de taillage et se caractérisent par des écarts de forme, pour le premier, entre le profil réel et le profil en développante de cercle et, pour le second, entre l'hélice réelle et l'hélice théorique. Le spectre de l'erreur de transmission induit par ces défauts comporte deux groupes de raies, l'un associé à la fréquence d'engrènement (produit de la fréquence de rotation d'une roue par son nombre de dents) et ses harmoniques, et l'autre associé aux fréquences de rotation des roues. En général, on considère que ces défauts sont identiques sur chaque dent (dispersion d'une dent à l'autre négligée) de telle sorte que seules les composantes à la fréquence d'engrènement sont retenues.
2. Erreurs de division : elles sont également liées au processus de taillage et traduisent un pas non rigoureusement constant d'une dent à l'autre. Le spectre de l'erreur de transmission engendré par ces défauts comporte pour l'essentiel des raies associées aux fréquences de rotation des deux roues et leurs harmoniques (Welbourn, 1979, Munro 1991, Rémond et al. 1993). L'introduction de telles erreurs dans les modèles de calcul de l'erreur de transmission reste délicate car on observe souvent un pas aléatoire de distribution normale.
3. Défauts d'excentricité : ce défaut peut résulter soit de la fabrication de la roue, soit de l'assemblage de la roue sur l'arbre (faux rond). On peut le caractériser par le fait que le

centre de rotation de la roue est distinct du centre du cercle de base. D'après Welbourn (1979), l'excentricité d'une roue se caractérise essentiellement par la présence, dans le spectre de l'erreur de transmission, de raies à la fréquence de rotation de la roue excentrée et à des bandes latérales autour de la raie d'engrènement et de ses harmoniques (phénomène de modulation à la fréquence de rotation de la roue excentrée). En réalité le spectre de l'erreur statique de transmission peut s'avérer, en fonction des nombres de dents, plus riche notamment en basse fréquence (Brière, 1991).

4. Défauts de parallélisme : ces défauts, qui comprennent l'inclinaison et la déviation, résultent aussi bien de l'usinage des dentures que du montage des roues, des arbres et des paliers. Ces défauts de mésalignement influencent fortement la répartition de la charge sur la dent et donc conditionnent la raideur d'engrènement. La déviation est, en général, plus influente que l'inclinaison. D'un point de vue spectral, il apparaît donc au niveau de l'erreur statique de transmission des composantes à la fréquence d'engrènement et ses harmoniques. N'oublions pas que, résultat classique, un défaut de parallélisme peut aussi induire des composantes au double des fréquences de rotation des arbres.
5. Corrections de denture : Il ne s'agit pas, bien entendu, de défauts de géométrie mais prennent leur place ici car elles correspondent à des modifications intentionnelles de la géométrie des dents. Elles couvrent la modification du profil et la modification longitudinale du flanc de denture. Elles consistent en un enlèvement de matière sur la denture le plus souvent linéaire par rapport à la développante (correction droite) voir parabolique (appelé bombé dans le sens longitudinal). En fait, ces corrections permettent d'une part de minimiser les fluctuations de l'erreur statique de transmission pour un couple nominal donné et d'autre part d'éviter les phénomènes d'impact à la prise de contact d'une paire de dents. Les corrections optimales dépendent de l'amplitude des déformations élastiques des dents en prise et nécessitent un calcul de ces dernières.

D'un point de vue spectral, et en régime de fonctionnement stationnaire, nous venons de constater que la fluctuation de l'erreur statique de transmission sous charge possède un caractère nettement périodique. Les fréquences caractéristiques sont les fréquences de rotation des roues et la fréquence d'engrènement. Son spectre est riche sur une large gamme de fréquences. Un schéma représentatif est présenté figure (I.1) ainsi que les origines possibles de chacune de ses composantes fréquentielles. Si l'on connaît bien les origines de ces composantes, les amplitudes respectives de chacune restent difficiles à évaluer. Notons simplement que l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission varie selon le type d'engrenage et la charge transmise, de quelques micromètres à quelques dizaines de micromètres.

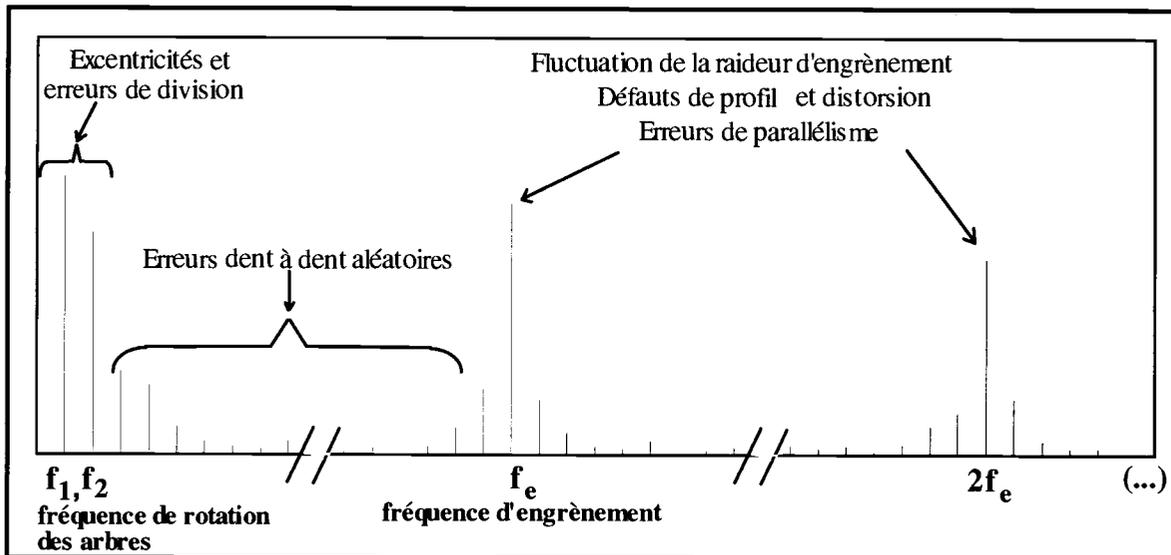


Figure 1.1 : Spectre de l'erreur de transmission et origines des raies dominantes.

e) Comportement dynamique des transmissions par engrenages.

L'étude précédente du processus d'engrènement met en évidence deux grandeurs déterminantes : l'erreur statique de transmission sous charge et la raideur d'engrènement. La première constitue une source d'excitation solidienne de type déplacement si elle est exprimée suivant la ligne d'action et la seconde décrit les caractéristiques élastiques instantanées du couplage entre les roues. Cette dernière constitue aussi une source excitatrice, cette fois-ci de nature paramétrique. En effet, en régime stationnaire, la raideur évolue de manière périodique notamment à la fréquence d'engrènement. La réponse vibratoire de la transmission est donc gouvernée par ces deux grandeurs. Un modèle dynamique discret qui demeure réaliste nécessite alors l'introduction de ces deux grandeurs dans l'équation (matricielle) du mouvement (Perret-Liaudet 1992, Rigaud 1998) : celle-ci est de type paramétrique à coefficients périodiques dont les propriétés sont bien connues. On peut discerner les solutions de l'équation homogène (vibrations libres) des solutions particulières (réponses forcées). Les premières révèlent l'existence de régimes instables (solutions non bornées) et les secondes des réponses multi fréquentielles et, phénomènes associés de résonance dite paramétrique (Perret-Liaudet 1992). Au regard du contenu spectral de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement et compte tenu des caractéristiques élastodynamiques du mécanisme, il apparaît que la prédiction du comportement dynamique de la transmission peut s'appuyer sur une approche de type modal (approche basse fréquence).

Par ailleurs, des mesures vibratoires effectuées sur des carters de boîtes de vitesses révèlent la présence de phénomènes d'amplification dynamique pour des régimes de fonctionnement particuliers : ces régimes sont qualifiés de régimes critiques et doivent être évités car ils sont à l'origine des plus fortes nuisances vibroacoustiques. Ils correspondent en fait à l'excitation en résonance de modes du

mécanisme dont l'énergie potentielle de déformation est localisée sur la denture mais aussi sur les roulements (Rigaud 1996).

Pour être complet et compte tenu de la présence de jeux fonctionnels, des phénomènes de cliquetis (« gear rattle ») peuvent apparaître lorsque l'engrenage est peu chargé : c'est le cas des pignons fous. Ces phénomènes peuvent aussi apparaître pour des engrenages chargés lors d'amplifications dynamiques importantes sur la denture. Toutefois ces derniers phénomènes semblent limités au cas des engrenages droits (Kahraman 1990). Dans le cadre de ce travail de thèse, nous ne prendrons pas en compte de tels phénomènes non linéaires.

Enfin, les sources d'amortissement lors du fonctionnement d'un engrenage sont a priori nombreuses (liaisons imparfaites, amortissement structural, amortissement visqueux induit par la lubrification, rayonnement acoustique, etc.) et restent très difficiles à prendre en compte. Malheureusement, peu de travaux considèrent ce problème. En fait, l'amortissement est souvent introduit a posteriori par un amortissement visqueux équivalent plus simple à traiter lors des calculs. C'est cette démarche que nous avons retenue dans ce travail.

f) Comportement acoustique des transmissions par engrenages.

Le comportement acoustique des transmissions par engrenages de type fermé (i.e. possédant une enveloppe) est conditionné par la géométrie du carter rayonnant, par la nature des fluides interne et externe et par la réponse vibratoire forcée de la transmission complète. L'ensemble des études publiées et relatives au bruit rayonné par les boîtes de vitesses révèlent que les couplages fluide structure avec le fluide extérieur (le plus souvent de l'air) peuvent être négligés. Il est également important de souligner que la présence de lubrifiant à l'intérieur du carter peut modifier le champ vibratoire de celui-ci. Il n'existe, à notre connaissance, aucun travail prenant en compte cet effet.

La résolution du problème acoustique complet nécessite, a priori, la prise en compte des sources acoustiques internes tels le phénomène de « fluid pumping » et le rayonnement des corps de roue. La résolution de l'acoustique interne reste toutefois complexe : les travaux de Sibe (1997) fournissent de précieux résultats quant à la transparence acoustique de carter excité par des émissions acoustiques internes. Cependant, l'étude du problème complet (champ acoustique interne + excitation du mécanisme par l'erreur de transmission + champ acoustique externe) n'est pas, à notre avis, achevé.

Si l'ensemble des couplages fluide-structure ainsi que des sources acoustiques internes sont négligés, la prédiction du rayonnement acoustique de la transmission ne nécessitera que la connaissance du champ vibratoire du carter induit par l'erreur statique de transmission sous charge. La prédiction du rayonnement acoustique constitue alors un problème standard. Ce problème reste toutefois délicat car la géométrie d'un carter est généralement complexe notamment de part ses irrégularités de surface qui favorisent les phénomènes de diffraction acoustique.

Les premiers modèles de prédiction du bruit rayonné sont de nature semi-empirique, recherchant une fonctionnelle reliant la puissance acoustique à la source d'excitation par une loi linéaire en introduisant des hypothèses simplificatrices (Laskin 1968).

Suite à l'apparition de moyens informatiques de plus en plus performants, il est aujourd'hui possible de prédire de manière plus précise l'ensemble des caractéristiques du bruit rayonné par les boîtes de vitesses. Les travaux de Ducret (1997) fournissent certaines caractéristiques essentielles du rayonnement acoustique des transmissions par engrenages. Par exemple, la diffraction acoustique liée à la géométrie tridimensionnelle des carters (présence des boîtiers de roulement, nervure...) entraîne une réduction de la puissance acoustique rayonnée dans certaines bandes de fréquence. Soulignons que l'étude du rayonnement du carter seul ou non équipé ne permet pas de prédire correctement les niveaux acoustiques de la transmission. En effet, le modèle doit inclure l'ensemble des composantes de la transmission (engrenage, arbres, roulements ...) afin d'accéder à l'état vibratoire correct du carter. L'introduction d'un baffle pour la prédiction de la puissance acoustique rayonnée par une seule face simplifie considérablement les calculs sans nuire à leur précision. Par opposition, la directivité du bruit rayonné s'en trouve fortement affectée. On retrouve également de forts niveaux acoustiques pour des régimes de fonctionnement critiques.

Compte tenu des études réalisées, il apparaît que l'influence des différents paramètres de fonctionnement de la transmission sur le niveau de bruit n'est pas triviale et en particulier il n'existe pas de loi directe liant les paramètres de fonctionnement au bruit rayonné. Les seules tendances confirmées concernent un lien entre l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge et le niveau de bruit rayonné (+ 6dB / octave) d'une part et d'autre part, entre la vitesse de rotation moyenne de la transmission et le niveau de bruit rayonné (+ 6dB / octave). Enfin, pour fixer un ordre de grandeur, si l'on considère des transmissions d'automobile (boîte et pont), les niveaux de puissance acoustique sont compris entre 70 et 90 dB.

B. De la source d'excitation au bruit rayonné : méthodes de calculs retenues.

Après avoir décrit les principaux phénomènes propres au comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages, nous présentons les méthodes numériques permettant de résoudre complètement le problème, de l'erreur statique de transmission sous charge au bruit rayonné par le carter. On se positionne ici dans un cadre purement déterministe, à savoir que les défauts de géométrie sont supposés parfaitement connus. On peut alors discerner trois étapes de calcul : (i) le calcul de l'erreur statique de transmission sous charge, (ii) le calcul de la réponse vibratoire de l'ensemble de la transmission induite par cette erreur et (iii) le calcul du rayonnement acoustique du carter. A chaque étape nous précisons les hypothèses retenues ainsi que les données et caractéristiques qu'il est possible de prendre en compte.

a) Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge.

On considérera par la suite que le couple moteur appliqué est suffisant pour assurer un contact même partiel des couples de dents en prise. Aussi, la non linéarité introduite par le jeu entre dents n'est pas prise en compte ainsi que les pertes éventuelles de contact entre denture. Il s'agit là d'une hypothèse forte mais réaliste si le couple de charge demeure suffisant.

Comme source excitatrice, nous ne considérerons que les sources dominantes, i.e. l'erreur statique de transmission sous charge et la fluctuation de la raideur d'engrènement. L'erreur de transmission tiendra compte des déformations élastostatiques des dents et des corps de roue ainsi que des défauts de géométrie et corrections volontaires de denture. Elle est exprimée suivant la ligne d'action pour chaque position de la roue menante. La figure (I.2) présente la position de la ligne d'action pour deux couples de dents en prise dans le cas d'un engrenage droit. Sur cette figure R_{bi} constitue le rayon de base de la roue i et α l'angle de pression de fonctionnement.

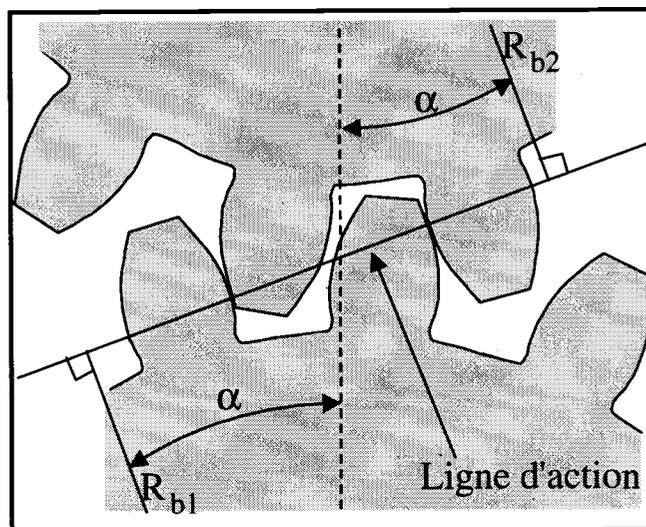


Figure I.2 : Coupe d'engrenage à denture droite et représentation de la ligne d'action.

Nous présentons ci-après un outil numérique qui permet de calculer l'évolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge d'un engrenage à denture droite ou hélicoïdale, à partir de ses caractéristiques géométriques, de ses corrections de forme, de ses défauts et des conditions de fonctionnement (couple moteur). Cet outil s'appuie notamment sur les calculs des déformations en flexion des dents d'engrenages et des corps de roue. La résolution des équations non linéaires qui gèrent le contact entre les roues dentées permet de calculer, pour différentes positions successives θ de la roue menante, le rapprochement des dents en prise. Les hypothèses retenues sont : l'amplitude des déformations et des déplacements associés reste faible (de l'ordre du μm), les corps en contact obéissent aux lois de l'élasticité linéaire, les contacts étroits de type hertzien sont introduits via des approches semi-empiriques, les surfaces en contact sont lisses et possèdent des dérivées premières continues.

Calcul des déformations élastostatiques des engrenages.

Le calcul de l'erreur statique de transmission sous charge nécessite en premier lieu d'estimer les déformations élastostatiques des dents en prise. Rigaud (1998) a développé un modèle original s'appuyant sur une description par éléments finis 3D de chaque roue dentée. Ce modèle permet de prendre en compte précisément la géométrie de l'engrenage (profil en développante de cercle, trochoïde de raccordement en pied de dent). Il permet également de prendre en compte plusieurs dents successives ainsi que l'ensemble du corps de la roue (roue pleine ou roue avec voile). Les éléments choisis sont volumiques de type hexaédrique à 20 noeuds et 3 degrés de liberté par noeuds. Par ailleurs, la roue dentée est encastrée sur son arbre. A partir de ce modèle, sont effectués un certain nombre de calculs statiques qui permettent de déterminer la matrice de souplesse associée aux noeuds des surfaces des dents [H]. Pour être plus clair, le calcul des coefficients de cette matrice de souplesse est déduit des déplacements selon la normale au profil de la roue de chacun des noeuds appartenant à l'une des dents lorsque l'on applique une charge unitaire sur l'un des autres noeuds. Cette matrice de souplesse reste identique pour l'ensemble des positions de la roue menante et ne nécessite qu'une seule étape préliminaire de calculs. Toutefois et conformément aux hypothèses de départ, il faut noter que, d'une part, les déformations élastiques des dents varient de façon linéaire avec la charge et, d'autre part, que vu l'ordre de grandeur (quelques microns) des déformations, des défauts de géométrie et/ou des corrections de forme est faible devant celui des dimensions de la dent, on suppose que la matrice de souplesse de la roue dentée reste constante.

Calcul de l'erreur statique de transmission sous charge.

On définit l'erreur statique de transmission sous charge comme le rapprochement des dents entre elles δ exprimé le long de la ligne d'action de l'engrenage. Pour évaluer son évolution temporelle, on la calcule pour plusieurs positions successives θ de la roue menante. Le nombre de positions selon la précision retenue, est au minimum de 32 points sur une période d'engrènement.

Pour chaque position angulaire θ , l'analyse cinématique du fonctionnement de l'engrenage permet de déterminer la ligne de contact théorique pour chaque couple de dents en prise (lieu des contacts sur les surfaces des dents en prise). Chaque ligne de contact théorique est alors discrétisée en un nombre de noeuds noté N. Ce nombre dépend de la largeur de denture et de la précision voulue pour le calcul de la répartition de charge sur la dent. La matrice de souplesse $[H_c]$ qui couple l'ensemble de ces noeuds est déduite de la matrice de souplesse de la denture précédemment évoquée par interpolation. En effet, les points discrets sur les lignes de contact ne sont que rarement coïncidents avec les noeuds du maillage éléments finis. La matrice résultante $[H_c]$ est carrée, non diagonale mais symétrique définie positive. Le système discret des N équations gouvernant l'équilibre statique du contact des deux roues, pour chaque position angulaire du pignon, s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[H_c]\{P\} = \delta\{I\} - \{e\} + \{Y\} \quad (\text{I.2})$$

$${}^t\{I\}\{P\} = F \quad (\text{I.3})$$

$$\text{soit } P_k = 0 \text{ or } Y_k = 0 \quad (\text{I.4})$$

soumis aux contraintes

$$P_k \geq 0, Y_k \geq 0 \text{ et } \delta \geq 0. \quad (\text{I.5})$$

avec :

- $\delta(\theta)$ l'erreur statique de transmission sous charge exprimée selon la ligne d'action théorique qui est une inconnue scalaire,
- $\{P\}$ le vecteur de dimension N, représentatif de la répartition de charge, également inconnu,
- $\{I\}$ le vecteur de dimension N, de composantes égales à 1,
- $\{e\}$ le vecteur de dimension N, représentant les écarts initiaux (défauts et corrections de géométrie) entre les dents suivant la ligne d'action, qui constitue une donnée du problème,
- $\{Y\}$ le vecteur, de dimension N, représentant des variables de jeu, écarts finaux inconnus entre les profils chargés (« slack variables »),
- F l'effort normal à la dent, représentant la charge transmise (couple moteur),
- k un indice représentant le numéro des noeuds sur la ligne de contact.

Les équations (I.2) et (I.3) représentent respectivement l'équation d'équilibre statique et l'équation telle que la somme des charges réparties soit égale à la charge transmise. L'équation (I.4) exprime le fait que le contact est établi ou non au noeud k. Plus précisément, si il y a contact au noeud k alors Y_k est nul (jeu final entre profil nul) et P_k est positif. Par contre, lorsque Y_k est différent de zéro, cela signifie que le noeud k n'est pas en contact et la pression P_k est nulle. Ainsi les contraintes définies par l'équation (I.5) impose que les vecteurs $\{Y\}$ et $\{P\}$ possèdent des composantes positives et que de plus l'erreur statique de transmission sous charge corresponde à une avance de position angulaire de la roue menée.

Pour résoudre ce système, une méthode de type simplexe, modifiée et décrite par Conry et Seireg (1971) s'avère très efficace. Cette méthode a en effet été appliquée avec succès à plusieurs reprises (Houser 1985). La résolution fournit l'erreur de transmission sous charge exprimée suivant la ligne d'action ainsi que la répartition de charge, ceci pour chaque position de la roue menante. Bien que la méthode du simplexe soit dédiée à la programmation linéaire, l'introduction de l'équation (I.4) traduit un problème non linéaire. La répartition de charge ainsi que l'erreur statique de transmission sous charge sont alors des fonctions non linéaires du couple transmis.

Revenons maintenant sur le vecteur des écarts initiaux qui constitue un point important du problème. Ce vecteur permet de décrire précisément la micro géométrie des dents en incluant les défauts de géométrie et les corrections de denture. En effet, comme les défauts et les corrections de

denture modifient les surfaces conjuguées en contact, ils induisent des écarts initiaux entre les dents que l'on peut exprimer selon la ligne d'action en chaque noeud de la ligne de contact. A titre d'exemple, l'introduction d'une correction longitudinale de type bombé pour un engrenage droit, entraîne une augmentation des écarts initiaux au fur et à mesure que l'on s'écarte du centre de la dent selon une loi d'évolution de type parabolique. Si l'engrenage est peu chargé, la charge se répartira au centre de la dent avec possibilité que des points en bords de dent ne soient pas en contact. Par ailleurs, soulignons que les défauts de géométrie type mésalignement des arbres sont également introduits via ce vecteur « défauts ».

Enfin, la contribution hertzienne locale aux déformations élastiques des dents peut être introduite sous forme linéarisée dans la matrice de souplesse à partir de formulation semi-empirique.

A titre d'exemple, nous présentons, figure (I.3), un exemple d'évolution temporelle sur deux périodes d'engrènement de l'erreur statique de transmission sous charge pour différents couples moteur allant de 1500 N à 7500 N. L'engrenage choisi pour cet exemple est à denture droite, sans voile, en acier et possède 37/71 dents.

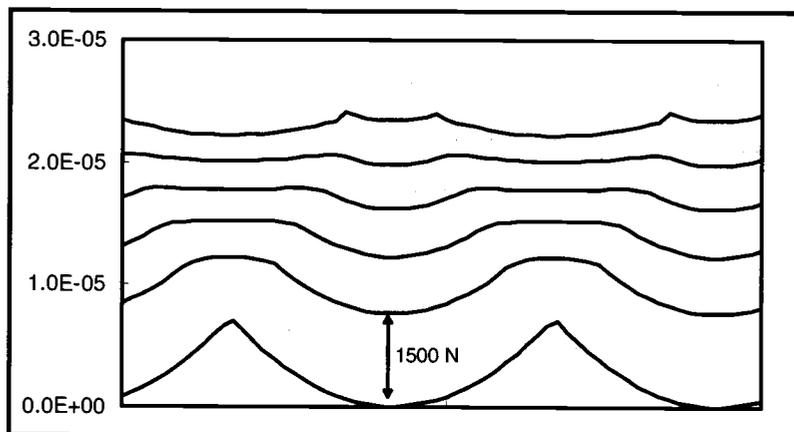


Figure I.3 : EST en mètres sur deux périodes d'engrènement.

b) Calcul de la raideur d'engrènement.

Comme précisé plus haut, la fluctuation de la raideur d'engrènement constitue également une source d'excitation interne des boîtes de vitesses. Elle rend compte du couplage élastique des roues qui engrènent. De manière standard la raideur d'engrènement est définie comme étant égale à :

$$K_e(\theta) = \frac{\partial F}{\partial \delta(\theta, F)} \quad (\text{I.6})$$

où F est la charge transmise (couple moteur) et $\delta(\theta, F)$ l'erreur de transmission sous charge préalablement calculée. Il s'agit donc de la raideur linéarisée autour de l'équilibre statique. Elle

dépend de la position angulaire θ de la roue menante et du couple moteur. Techniquement, elle est évaluée par un calcul numérique à l'aide d'un schéma aux différences centrées autour du couple moteur choisi. Cette représentation reste valable dans les limites que confèrent la linéarisation. Toutefois, la raideur d'engrènement est une fonction non linéaire du couple de charge transmis. Son évolution temporelle est périodique dont la période fondamentale généralement retenue est égale à la période d'engrènement. C'est l'hypothèse que nous retiendrons sous couvert que les défauts de géométrie basse fréquence influent peu sur la raideur d'engrènement.

c) Calcul de la réponse vibratoire de l'ensemble de la transmission par engrenages.

Le calcul de la réponse dynamique de la transmission excitée par l'erreur statique de transmission sous charge nécessite, pour prendre en compte l'ensemble des composantes de la transmission (engrenages, lignes d'arbres, roulements, carter), d'utiliser la méthode des éléments finis. Dans ce cadre, des éléments spécifiques prenant en compte non seulement l'engrènement mais aussi les propriétés élastiques des roulements sont introduits (Perret-Liaudet, 1992, Rigaud, 1998). La méthode retenue est générale et peut s'appliquer à diverses transmissions.

Nous présentons la modélisation retenue pour le calcul du champ vibratoire d'une transmission par engrenages ainsi que sa résolution numérique.

Lorsque l'excitation présente un spectre large bande, l'utilisation de méthodes de discrétisation temporelle de l'équation régissant les vibrations forcées de la transmission peut conduire à des temps de calcul prohibitifs. La prise en compte des excitations à basse fréquence (fréquences de rotation des arbres) nécessite une discrétisation temporelle sur une période longue et la prise en compte des excitations à haute fréquence (fréquence d'engrènement et ses harmoniques) nécessite un pas de temps fin. Le nombre de pas nécessaire à la discrétisation temporelle des signaux devient donc très grand, ce qui nous a conduit à exploiter une autre méthode de résolution.

Perret-Liaudet (1992, 1996) a développé une méthode baptisée Méthode Spectrale Itérative qui permet, en régime stationnaire, de résoudre les systèmes d'équations à coefficients périodiques en minimisant les temps de calcul. Cette méthode s'appuie non pas sur une description temporelle des grandeurs, très coûteuse en temps de calcul, mais sur une description spectrale de la fluctuation de la raideur d'engrènement et du vecteur d'excitation induit par l'erreur de transmission. Son utilisation s'avère donc particulièrement intéressante lorsque l'excitation peut être décrite sous la forme d'un spectre possédant un nombre limité de raies. Elle ne s'applique qu'aux équations linéaires (à coefficients périodiques ou non). Cette méthode est décrite ci-après.

Nous supposons que le couple moteur est suffisant pour prévenir toute perte de contact entre dentures. De même, nous supposons que si les efforts dynamiques restent suffisamment faibles devant les efforts statiques induits par le couple moteur, la valeur moyenne de la raideur d'engrènement n'est pas affectée par les déformations dynamiques de la transmission de même que les raideurs des

roulements. Le comportement vibratoire de la transmission peut alors être décrit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.

Une fois la transmission discrétisée par la méthode des éléments finis, le système des équations régissant la réponse forcée nodale $\{X(t)\}$ de la transmission peut s'écrire, pour un régime stationnaire et par assemblage des différents éléments, sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} + K_e(t)[D]\{X\} = \{F(t)\} + \{E(t)\} \quad (I.7)$$

Dans cette équation, $[M]$ et $[K]$ sont les matrices classiques de masse et de raideur fournies par la méthode des éléments finis. Le couplage élastique entre les roues en prise est introduit par le terme $K_e(t)$ qui représente la variation de la raideur d'engrènement. La matrice $[D]$ est associée aux caractéristiques de l'engrenage et la matrice $[C]$ représente les termes de dissipation que nous introduirons ultérieurement par des taux d'amortissement modaux visqueux équivalents. Enfin, les vecteurs $\{F(t)\}$ et $\{E(t)\}$ constituent les efforts généralisés associés aux éventuelles excitations externes et internes. En régime de fonctionnement stationnaire, la variation de la raideur d'engrènement est une fonction périodique du temps. Après avoir déterminé la base modale associée à l'équation matricielle homogène à coefficients constants (la raideur périodique est alors remplacée par sa valeur moyenne, l'équation du mouvement du système à plusieurs degrés de liberté s'écrit dans cette base :

$$[m]\{\ddot{q}\} + [c]\{\dot{q}\} + [k]\{q\} + g(t)[d]\{q\} = \{s(t)\} \quad (I.8)$$

où $[m]$, $[c]$ et $[k]$ sont les matrices diagonales de masse, d'amortissement et de raideur, $\{q\}$ est le vecteur des coordonnées modales, $\{s(t)\}$ est le vecteur des forces généralisées, et $[d]$ est la matrice non diagonale déduite des caractéristiques géométriques de l'engrenage (Rigaud 1998) et de la fluctuation centrée $g(t)$ de la raideur périodique d'engrènement qui couple les équations de mouvement.

La méthode utilisée fournit directement le spectre complexe de la réponse vibratoire pour chacun des degrés de liberté de la transmission discrétisée par la méthode des éléments finis. La procédure de calcul associée à cette méthode consiste tout d'abord en une transformation de Fourier de l'équation (I.8). Après quelques calculs élémentaires, on montre que la nouvelle équation matricielle qui régit, en régime de fonctionnement stationnaire, les vibrations forcées de la transmission peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\tilde{q}\} = [H,]\{\tilde{s}\} - [H,]\{\tilde{g}\} \otimes [d]\{\tilde{q}\} \quad (I.9)$$

où le signe tilde désigne une transformée de Fourier fréquentielle, \otimes un produit de convolution et la matrice diagonale $[H_t]$ est la matrice des fonctions complexes de réponse en fréquence des modes propres. On résout ensuite cette équation matricielle par itérations successives selon le schéma suivant :

$$\{\tilde{q}\}^{j+1} = [H_t]\{\tilde{s}\} - [H_t](\{\tilde{g}\} \otimes [d]\{\tilde{q}\}^j) \quad (\text{I.10})$$

avec comme solution initiale $\{\tilde{q}\}^1 = [H_t]\{\tilde{s}\}$.

Un test de convergence basé sur l'écart entre deux solutions successives et sur le nombre d'itérations permet d'arrêter le processus itératif. On effectue ainsi le calcul direct des spectres de la réponse vibratoire en chaque degré de liberté du système. A partir de nombreux tests effectués avec cette méthode, Perret-Liaudet (1992, 1996) a constaté que la solution est obtenue avec un faible nombre d'itérations et que le temps de calcul associé à cette méthode est entre 10 et 100 fois plus court qu'avec les méthodes d'intégration temporelle habituellement utilisées pour la résolution des équations différentielles à coefficients périodiques.

Toutefois quelques remarques s'imposent :

1. la taille des éléments finis utilisés dépend de la fréquence maximale d'étude et, doit être inférieure à $\lambda_{\max}/4$ afin d'obtenir une bonne précision du champ de déplacement,
2. la matrice de raideur $[K]$ inclut les roulements. Ils sont pris en compte par des matrices de raideur $[K_r]$ préalablement calculées qui dépendent de la charge statique qu'ils subissent. Lors du calcul dynamique, on suppose que ces matrices n'évoluent pas, donc que la charge dynamique appliquée au roulement est faible face à la charge statique,
3. si on considère une base modale tronquée, on n'oubliera pas de prendre en compte la matrice de flexibilité résiduelle incluant l'effet des modes supérieurs non utilisés.

Modes de denture et modes de roulement.

Parmi l'ensemble des modes de la transmission, nous avons évoqué la présence de modes particuliers pour lesquels, excités en résonance par l'erreur de transmission, de fortes amplifications dynamiques étaient relevées. Ces modes sont dénommés « modes critiques » et correspondent à une énergie potentielle de déformation localisée dans la zone d'engrènement et au niveau des roulements (Rigaud 1996, 1998). Ces modes sont identifiés à l'aide d'un calcul énergétique. Pour chacun des modes de la transmission, nous définissons les coefficients ρ_e^i et ρ_r^i :

$$\rho_e^i = \frac{\langle \{\phi_i\} \langle K_e \rangle [D] \{\phi_i\} \rangle}{\langle \{\phi_i\} [K] \{\phi_i\} \rangle} \quad (\text{I.11})$$

$$\rho_r^i = \frac{\langle \{\phi_i\} [K_r] \{\phi_i\} \rangle}{\langle \{\phi_i\} [K] \{\phi_i\} \rangle} \quad (\text{I.12})$$

où $\{\phi_i\}$ désigne le i ème vecteur propre et $\langle K_e \rangle$ la valeur moyenne temporelle de la fluctuation de raideur d'engrènement, l'indice t signifiant le vecteur transposé. Ces coefficients sont compris entre 0 et 1. Les modes dont le coefficient ρ_e^i est non nul sont appelés modes de denture, et les modes dont le coefficient ρ_r^i est non nul sont appelés modes de roulement. Un mode critique est un mode dont les deux coefficients sont différents de zéro. Plus ces coefficients sont proches de 1, plus les niveaux associés à leur excitation en résonance sont élevés.

L'analyse du comportement vibratoire de la transmission nécessite de prendre en compte tous les modes critiques, même si la base mode sur laquelle est développée la réponse forcée est tronquée. Des critères simples nous permettent de tester le bien fondé de la troncature.

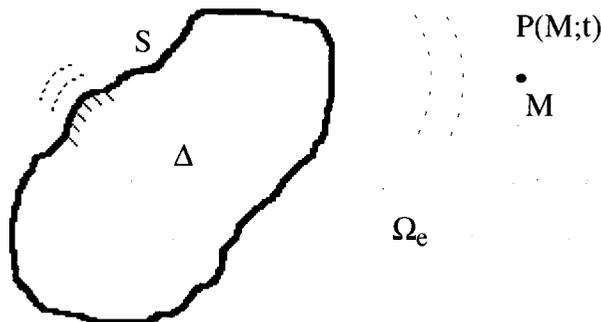
d) Calcul du rayonnement acoustique du carter de la transmission.

L'étape précédente permet d'obtenir le spectre complexe de la réponse vibratoire forcée de l'ensemble de la transmission et, plus particulièrement du carter en chaque nœud discrétisé. En négligeant le couplage fluide-structure, la réponse vibratoire forcée du carter constitue alors une donnée pour la prédiction du rayonnement acoustique externe de la transmission. Nous décrivons à présent ce problème de rayonnement acoustique ainsi que sa résolution numérique. Pour de plus amples informations le lecteur pourra consulter le travail de Ducret (1997).

Formulation du problème de rayonnement acoustique.

Equation d'Helmholtz

On considère un domaine spatial Ω_e non borné dans lequel se trouve une structure tridimensionnelle dont les vibrations induisent un rayonnement dans l'espace environnant (carter d'une transmission). Soient Δ le domaine occupé par la transmission et S la frontière séparant les deux domaines (surface du carter) que l'on suppose régulière et animée d'un mouvement vibratoire.



La transformée de Fourier de la fluctuation de pression acoustique \tilde{P} rayonnée par les vibrations harmoniques de pulsation ω de la structure vérifie dans tout l'espace Ω_e , l'équation de propagation d'Helmholtz en absence de sources directes :

$$\Delta \tilde{P}(M; \omega) + k^2 \tilde{P}(M; \omega) = 0 \quad (\text{I.13})$$

où $k = \omega/c_0$ est le vecteur d'onde et c_0 , la célérité du son dans l'air, Δ désigne le Laplacien.

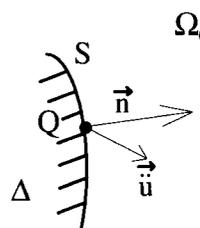
Par abus de notation, le signe tilde sera omis et on appellera P la pression acoustique. L'équation résultante est l'équation fréquentielle suivante :

$$(\Delta + k^2)P = 0 \quad (\text{I.14})$$

Conditions limites

Pour finir de poser le problème de rayonnement, il nous reste à exprimer les conditions limites que doit satisfaire toute solution P de l'équation (I.14). La forme des conditions limites exprime le comportement de l'onde acoustique à la surface S et à l'infini.

- *Condition limite à la surface S* : La paroi de la structure est supposée imperméable. En l'absence de couplage air-structure, il y a continuité des vitesses normales locales, c'est-à-dire égalité entre la vitesse normale de la structure et la vitesse normale de l'air au contact. La condition limite à la surface peut s'exprimer alors par un opérateur agissant localement sur la pression et sur l'accélération normale à la surface de la structure vibrante ($\{\ddot{\mathbf{u}}\} \cdot \{\mathbf{n}\} = \ddot{u}_{s, \{\mathbf{n}\}} = \ddot{U}$ où $\{\mathbf{n}\}$ est un vecteur unitaire normal, extérieur à la surface) :



$$\frac{\partial P}{\partial n}(Q; \omega) = -\rho_0 \ddot{U}(Q; \omega) \quad (\text{I.15})$$

où ρ_0 est la masse volumique de l'air occupant le domaine de propagation.

- *Condition limite à l'infini* : Le domaine de propagation Ω_e n'étant pas borné, toute solution de (I.14) doit vérifier la condition de Sommerfeld, traduisant le caractère propagatif de l'onde acoustique à l'infini. Cette condition traduit le fait que, loin des sources, le champ décroît comme une onde sphérique. Elle s'écrit dans \mathcal{R}^3 :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} |P(r)| &= \theta\left(\frac{1}{r}\right) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial P(r)}{\partial r} + ikP(r) \right| &= \theta\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

- *Remarques* : On peut également travailler avec la vitesse normale \dot{U} . En effet, en régime harmonique on a la relation $\ddot{U} = i\omega\dot{U}$. Par ailleurs, toutes les grandeurs calculées ou introduites sont complexes.

Formulation intégrale directe du problème.

Formulation pour un point M n'appartenant pas à la surface vibrante

Cette méthode nécessite la connaissance d'une solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz en espace libre sous la forme d'un noyau dit de Green. Physiquement, ce noyau de Green représente le champ créé par une source ponctuelle isotrope placée en un point de l'espace. Il vérifie la condition de Sommerfeld à l'infini et la condition limite à la surface S homogène.

La pression acoustique $P(M;\omega)$ rayonnée en un point M dans l'espace environnant Ω_e par la vibration harmonique de pulsation ω d'un carter de transmission peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P(M;\omega) &= \iint_S \left(P(q;\omega) \cdot \partial_{n_q} G_o(M,q;\omega) + \rho_o \ddot{U}(q;\omega) \cdot G_o(M,q;\omega) \right) dS_q \\ M &\in \Omega_e/S \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

- $\partial_{n_q} \equiv \frac{\partial}{\partial n_q}$ est la dérivée partielle suivant la normale extérieure au point q, $\{n_q\}$:

$$\frac{\partial}{\partial n_q} = \{\nabla_q\} \cdot \{n_q\}$$

- G_o est le noyau de Green de l'équation d'Helmholtz en espace libre :

$$G_o(M,q;\omega) = \exp(-ikR(M,q)) / 4\pi R(M,q) \text{ et } R(M,q) = \|\{M\} - \{q\}\|$$

- $\ddot{U}(q,\omega)$ est la réponse accélération normale de la structure au point q.

Cette formulation (I.17) a l'avantage de conduire à une intégration qui se limite à la surface vibrante S . Elle décrit un rayonnement localisé sur la frontière de la structure et ne prend en compte que la partie diffractée de l'onde émise. Il suffit alors de connaître la répartition de la pression à la surface pour ensuite calculer la pression dans l'espace environnant.

Formulation pour un point Q appartenant à la surface vibrante

La pression pour un point Q appartenant à la surface S est obtenue lorsque l'on fait tendre le point M infiniment près de la surface vibrante. La formulation intégrale de surface ainsi obtenue s'écrit pour une surface S sans point anguleux :

$$\frac{1}{2}P(Q; \omega) = \left\{ \iint_S (P(q; \omega) \cdot \partial_{n_q} G_o(Q, q; \omega) + \rho_o \ddot{U}(q; \omega) \cdot G_o(Q, q; \omega)) dS_q \right\} \quad (I.18)$$

$Q \in S$

On peut simplifier le calcul du rayonnement acoustique du carter en traitant le problème face du carter par face du carter. Il est évident qu'une telle décomposition néglige les phénomènes de diffraction liés aux raccordements des faces. Néanmoins, les carters de transmission sont souvent constitués de faces de rigidité différentes de telle sorte que c'est la face la plus fine qui contribue majoritairement au bruit rayonné. Dans ce contexte, il est possible de baffler (plan rigide infini) la face vibrante la plus élastique du carter. En utilisant la technique du point source image, l'équation (I.18) prendra la forme suivante :

$$\frac{1}{4}P(Q; \omega) = i\omega\rho_o \iint_S \dot{U}(q; \omega) G_o(Q, q; \omega) dS_q \quad (I.19)$$

$Q \in S$

Le calcul de la pression surfacique ne nécessite plus que la connaissance des vitesses normales sur la surface S . L'équation (I.19) est connue sous le nom d'intégrale de Rayleigh. Ducret (1997) a montré que cette approche convenait parfaitement si l'on se contente d'évaluer la puissance acoustique rayonnée.

Résolution numérique de l'intégrale de Rayleigh.

La résolution numérique des équations (I.17) à (I.19) est complexe et nécessite une discrétisation de la surface en éléments finis de frontière. Avec l'aide d'une technique de collocation, on exprime

l'équation matricielle vérifiée par la pression surfacique. La résolution met en œuvre des techniques adaptées à l'inversion de matrices non symétriques.

Technique de collocation.

Nous nous proposons d'utiliser la méthode la plus simple qui est une discrétisation directe par collocation. Le principe de cette méthode consiste à discrétiser la surface S , surface de la structure vibrante et bord du domaine acoustique, par un nombre fini d'éléments de surface sur lesquels les variables (vitesses normales et pression) sont interpolées en fonction de leurs valeurs aux nœuds. La formulation intégrale directe de surface est alors vérifiée aux nœuds du maillage. La taille maximale des éléments de surface est définie par rapport à la longueur d'onde maximale acoustique. On prend comme limite de taille, 6 éléments par longueur d'onde acoustique.

Généralement le maillage de la structure utilisé pour le calcul vibratoire ne correspond pas au maillage appliqué pour les calculs acoustiques. Le passage du maillage structural au maillage acoustique fait appel à des techniques d'interpolation.

L'ordre de la méthode de collocation (en fait le degré des polynômes d'interpolation) dépend du type d'éléments retenus pour la discrétisation de la surface. Dans notre cas on utilisera préférentiellement des éléments quadrilatéraux à 4 nœuds ainsi que des éléments triangulaires à 3 nœuds. La technique de collocation sera d'ordre 1.

Méthode d'intégration numérique.

Suite à la discrétisation l'équation (I.19) prend la forme d'un système matriciel :

$$[A]\{P\} = [B]\{\dot{U}\} \quad (I.20)$$

où les vecteurs représentent les valeurs nodales de la pression et de la vitesse normale.

Les coefficients des matrices $[A]$ et $[B]$ sont donnés par des intégrales sur les éléments de surface dont l'intégrand dépend des fonctions d'interpolation aux différents nœuds ainsi que de la fonction de Green.

La méthode d'intégration numérique classiquement utilisée est du type méthode de quadrature de Gauss. Il est possible de choisir le nombre de points de la quadrature afin d'augmenter la précision du calcul. Néanmoins, celle-ci est beaucoup plus sensible à l'ordre de la collocation.

Par résolution du système matriciel et, connaissant les vitesses normales en chaque nœud, on obtient les pressions nodales. On possède alors toutes les grandeurs complexes sur la surface vibrante nécessaires au calcul du rayonnement acoustique.

Calcul de la puissance acoustique rayonnée.

Niveau de puissance acoustique rayonnée en régime harmonique.

La formule de la puissance acoustique rayonnée est, en régime harmonique pour une pulsation ω :

$$\Pi_{ac}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_m \iint_{S_m} \text{Re}(P_m(\omega) \cdot \dot{U}_m^*(\omega)) dS_m \quad (\text{I.21})$$

où m représente l'élément de surface S_m . Les valeurs de la pression P_m et de la vitesse normale \dot{U}_m sur cette surface sont extrapolées à partir de leurs valeurs nodales et des fonctions d'interpolation. On définit également le niveau de puissance acoustique rayonnée, en régime harmonique par :

$$\Pi_{ac}^{dB}(\omega) = 10 \log\left(\frac{\Pi_{ac}(\omega)}{\Pi_{ac}^{ref}}\right) \quad (\text{I.22})$$

$$\text{où } \Pi_{ac}^{ref} = 10^{-12} \text{ Watt .}$$

Niveau de puissance acoustique totale rayonnée.

Pour un spectre discret de raies, on peut calculer le niveau de puissance acoustique totale :

$$\Pi_{actot}^{dB} = 10 \log\left(\sum_{\omega} 10^{\Pi_{ac}^{dB}(\omega)/10}\right) \quad (\text{I.23})$$

Niveau de vitesse quadratique en régime harmonique.

Afin de calculer le facteur de rayonnement de la structure, il faut connaître la puissance injectée à la structure. Elle se calcule à partir de la moyenne spatiale de la vitesse quadratique moyenne

$\langle V^2(\omega) \rangle$ et s'écrit :

$$W_{inj}(\omega) = \rho_0 c_0 S \langle V^2(\omega) \rangle \quad (\text{I.24})$$

Les résultats présentés au chapitre III, ne feront pas appel à un niveau de puissance injectée, mais à un niveau de vitesse quadratique défini comme suit :

$$\Pi_{\text{vit}}^{\text{dB}}(\omega) = 10 \log \left(\frac{\langle V^2(\omega) \rangle}{2.5 \cdot 10^{-15}} \right) \quad (\text{I.25})$$

Facteur de rayonnement.

Le facteur de rayonnement σ de la structure se calcule aisément :

$$\sigma(\omega) = \frac{\Pi_{\text{ac}}(\omega)}{W_{\text{inj}}(\omega)} \quad (\text{I.26})$$

C. Récapitulatif de la démarche de calcul.

La figure I.4 présente schématiquement le principe de calcul complet du bruit des transmissions par engrenages. L'erreur de transmission est abrégée EST et E.F. signifie éléments finis. Le calcul complet s'effectue en trois étapes. Bien que maîtrisée, la procédure est fastidieuse car elle nécessite beaucoup de manipulations entre les trois étapes de calculs.

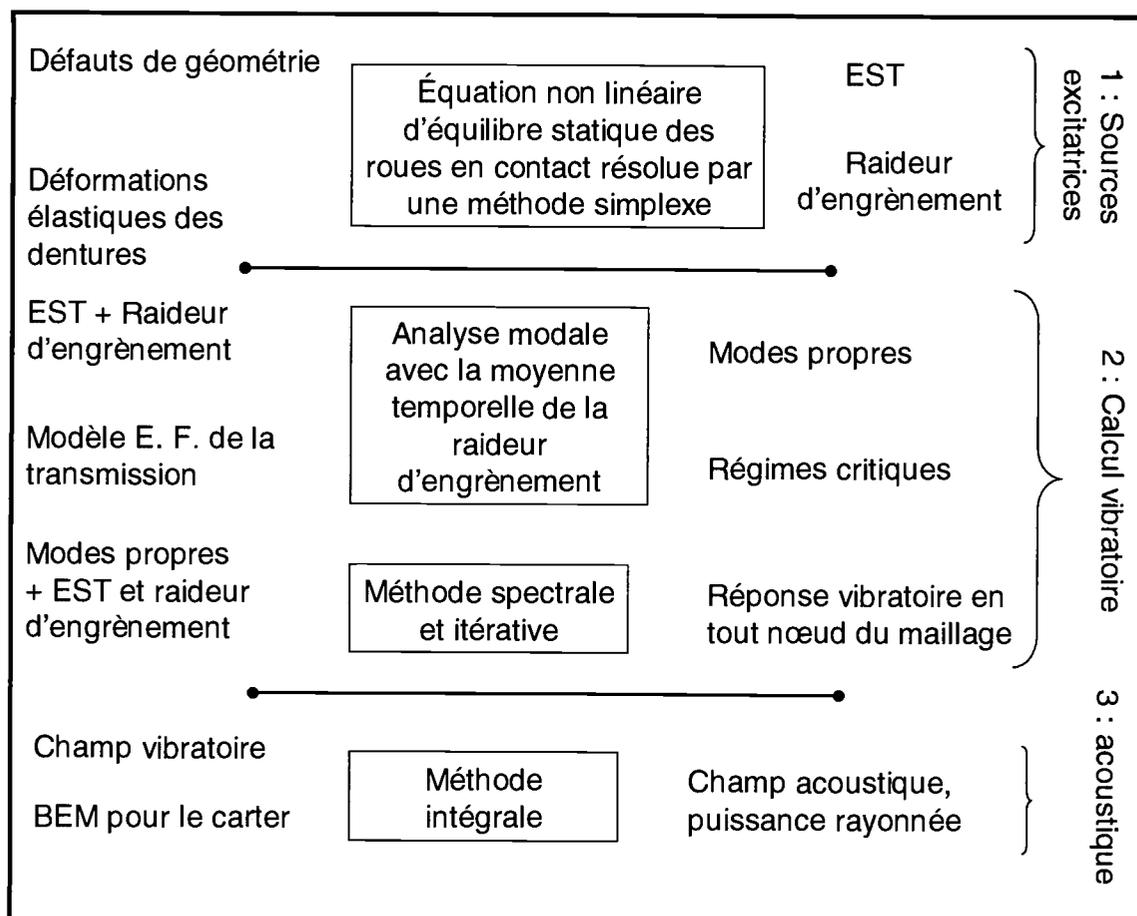


Figure I.4 : Principe du calcul du bruit rayonné par les transmissions par engrenages.

III. Variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages : origines, caractéristiques et conséquences.

Les mesures de bruit sur des boîtes de vitesses révèlent souvent d'importants écarts entre deux échantillons d'une même série. Les origines de cette variabilité sont diverses et le plus souvent interactives car elles agissent en premier lieu sur les sources d'excitation interne et externe des transmissions par engrenages. L'influence respective des diverses origines de la variabilité est mal connue car peu de travaux concernent la prise en compte et l'analyse de ce phénomène. Toutefois, on attribue généralement cette dispersion aux défauts de fabrication et de montage inhérents à la production de tels mécanismes.

A. Principales sources de la variabilité de comportement.

Parmi l'ensemble des sources de variabilité, il y a lieu de distinguer celles intervenant dès le début de vie du produit de celles intervenant au cours du cycle de vie. On souhaite ici recenser l'ensemble possible des sources affectant le comportement vibroacoustique (de l'erreur de transmission au bruit rayonné) des transmissions par engrenages.

Parmi les origines de la variabilité du comportement intervenant dès le début de vie de la transmission, il convient de citer :

- les défauts de fabrication : ils affectent la micro géométrie de chacun des constituants de la transmission et notamment des dentures, on reviendra ultérieurement sur l'importance de leur influence,
- les défauts de montage, tel que par exemple le mésalignement des arbres, défaut qui affecte entre autre l'orientation et le positionnement des constituants de la transmission,
- les ajustements entre pièces, autorisant l'apparition éventuelle de jeux non intentionnels,
- la disparité, dans une série, des conditions limites au niveau des liaisons entre composants de la transmission,
- la disparité des conditions limites au niveau des points de fixation de la transmission sur sa structure d'accueil,
- la valeur des précharges sur chacun des roulements,
- la hauteur de lubrifiant présent dans le carter de la transmission,
- les sources d'amortissement notamment au niveau des liaisons,
- l'hétérogénéité des lots de matériaux et des traitements utilisés, modifiant les propriétés mécaniques (élasticité, densité volumique, ...) de l'ensemble de la transmission,
- le régime de fonctionnement, et notamment les couples moyens appliqués et les vitesses moyennes de rotation des arbres,

- les fluctuations autour des couples moyens qui constituent des sources d'excitation externes,
- les effets de la température modifiant par exemple les conditions de lubrification au niveau des contacts entre dentures et au niveau des contacts roulements/arbres.

La variabilité du comportement vibroacoustique constatée en cours du cycle de vie du produit est attribuée à l'usure inhérente au fonctionnement de tels mécanismes. L'usure concerne les composants en contact et plus particulièrement les dentures dont la forme géométrique peut évoluer. L'usure concerne également les contacts au niveau des roulements. Bien que les mécanismes d'usure soient encore mal maîtrisés, il est possible de minimiser leurs impacts par des traitements particuliers intervenant après fabrication des pièces.

Il apparaît très peu de modèles dynamiques actuels permettant de prendre en compte les conséquences de l'usure du mécanisme.

B. Les défauts de fabrication et de montage, source importante de variabilité.

Parmi l'ensemble des sources à l'origine de la variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages, il est certain que les défauts de fabrication et d'assemblage jouent un rôle prépondérant. En effet, les défauts de géométrie modifient les conditions de contact entre dentures et influent directement sur la source d'excitation interne que constitue l'erreur de transmission. Bien que les écarts entre le profil théorique en développante de cercle et le profil réel des dents soient faibles par rapport à la taille de la denture, Nonaka et Kubo (1992) ont pu montrer d'importantes variations des niveaux de bruit mesurés à proximité du carter d'une boîte de vitesses pour des faibles variations des défauts. Ces défauts de fabrication dépendent étroitement du processus de fabrication retenu et sont contrôlés via l'introduction de tolérances autour de la géométrie nominale.

a) Tolérancement, aspects généraux.

Compte tenu du processus de fabrication, un objet fabriqué en grande série reste unique au sens de sa micro géométrie. Il est en effet impossible d'obtenir une cote précise (ou un positionnement) et on est obligé d'accepter de légères variations autour de la valeur souhaitée appelée cote nominale. Cette variation est bornée et la différence entre les cotes minimale et maximale autorisées s'appelle la tolérance, ou intervalle de tolérance. Plus l'intervalle est petit, plus grande est la précision souhaitée et on doit adapter le processus de fabrication en conséquence. La taille de l'intervalle de tolérance constitue la qualité. Il existe dix huit classes de qualité normalisées par l'ISO. Plus le chiffre de la classe de qualité diminue, meilleure est la précision, et plus le processus de fabrication s'avère coûteux. La relation entre coût de fabrication et classe de qualité est fortement non linéaire. Parmi les tolérances normalisées, on trouve les tolérances dimensionnelles, les tolérances de forme, les tolérances de position et les tolérances de battement. Chaque pièce fabriquée est tolérancée de telle sorte qu'il sera toujours possible de les assembler pour le montage du système mécanique.

(ajustements, jeux fonctionnels). La cotation fonctionnelle permet de prévoir et calculer les liens qui existent entre jeux fonctionnels et dimensions tolérancées.

L'un des points importants du problème posé par l'introduction des tolérances autour des dimensions nominales concerne la manière dont peut évoluer la cote à l'intérieur de l'intervalle de tolérance. En général cette évolution est représentée à l'aide de la statistique : la cote est considérée comme une variable aléatoire bornée dont la distribution est soit uniforme, soit normale. La cote nominale correspond alors à la valeur moyenne de la variable aléatoire et l'écart type est donnée par les bornes de l'intervalle de tolérance. Le cas d'une cote représentée par une variable de distribution uniforme est le plus défavorable au sens de la fabrication. Ceci dit, les études statistiques conduites après fabrication montrent que l'évolution des cotes tolérancées tend en majorité vers des distributions normales tronquées ou des distributions de type loi de Weibull à trois paramètres (Fanchon 1994). Pour le cas d'une distribution normale, la cote nominale correspond à la valeur moyenne alors que l'écart type est égal à l'intervalle de tolérance divisé par six. Dans cette configuration on a 99.74% de chance que la cote réelle soit comprise dans l'intervalle de tolérance : dans ce cas, le processus de fabrication et /ou la machine sont réputés adaptés. La distribution normale est tronquée au delà des bornes de l'intervalle de tolérance.

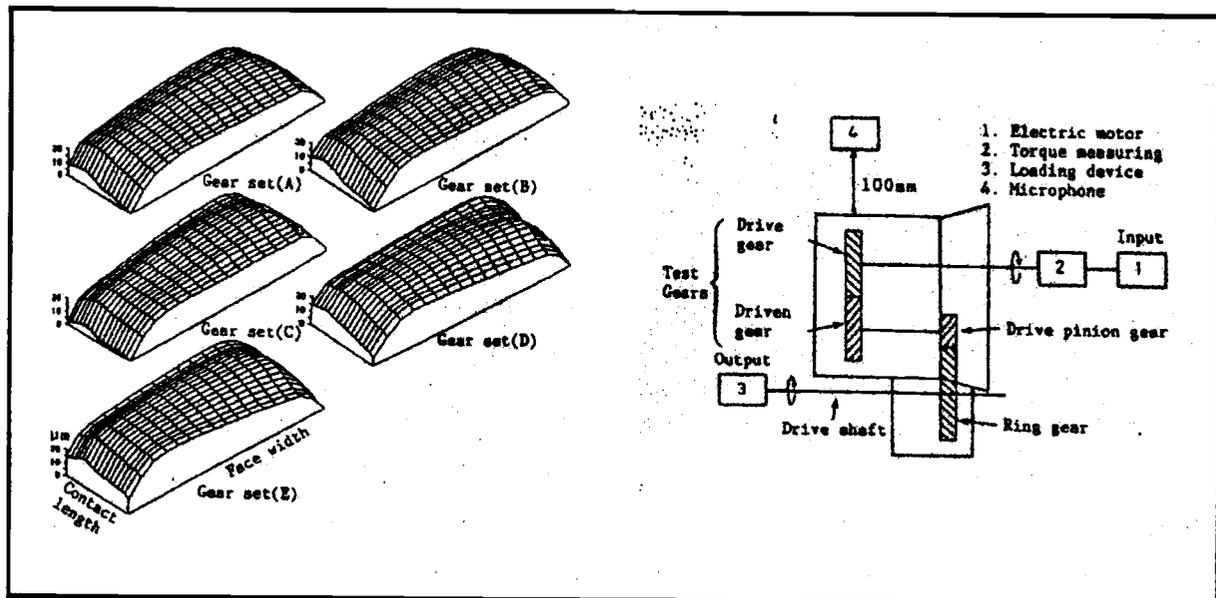
b) Tolérancement et engrenages.

L'ensemble des études prenant en compte les tolérances et l'incertitude qu'elles induisent sur la géométrie d'une transmission par engrenages montre que c'est la variation de la micro géométrie des dents qui contribue majoritairement à la variabilité de l'erreur de transmission (Sundaresan et al 1991, Nonaka et al 1992, Yu 1998). La norme NF ISO 1328 prévoit treize classes de qualité (0 à 12) pour les dentures, 0 étant la plus précise. Cette norme donne les définitions et les écarts entre forme réelle et forme théorique des dents. Les défauts concernent les erreurs de pas et de division, les erreurs de profil, les erreurs d'hélice, les mésalignements et le faux rond. La classe de qualité attribuée à la fabrication de la denture dépend fortement du domaine d'emploi de l'engrenage : à titre d'exemple, les engrenages utilisés dans le secteur automobile et camion correspondent à des dentures de qualité comprise entre la classe 5 et la classe 8. De telles dentures sont généralement taillées par outil crémaillère puis rectifiées et rasées.

L'effet de l'introduction des tolérances sur la denture est rarement pris en compte de manière directe. Les travaux s'y rapportant consistent principalement en la recherche séparée de la macro géométrie et des corrections de denture minimisant l'erreur de transmission, alors que les tolérances sont choisies au préalable. Dans ce cadre, la recherche des corrections de denture, une fois choisie la macro géométrie de l'engrenage et les tolérances de fabrication, répond simultanément à deux critères (Sundaresan 1991, Yu 1998) : le premier critère consiste à minimiser la valeur crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge, et le deuxième critère impose qu'elle reste la plus insensible possible aux tolérances de fabrication. Pour Sundaresan (1991), les deux paramètres affectés par

l'introduction des erreurs de fabrication correspondent à une erreur de profil des dents et sont supposés indépendants. La recherche de la correction optimale est réalisée à l'aide d'un plan d'expériences pour lequel la fonction à optimiser est une combinaison linéaire de la valeur crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge et d'un indice de sensibilité de celle ci calculé à l'aide des réponses fournies par le plan d'expériences. Une étude similaire (Yu 1998) utilise la même approche, mais le nombre de variables affectées par les tolérances est supérieur et, un certain degré de corrélation entre elles est introduit permettant une représentation plus réaliste du processus de fabrication.

La variabilité du comportement vibroacoustique des boîtes de vitesses a été appréhendée d'un point de vue expérimental. Ainsi, Nonaka et al (1992) présente des mesures de bruit rayonné par un carter de transmission pour des dentures dont les flancs sont différents. Malgré le nombre restreint d'engrenages testés (5), ils restent représentatifs d'une population d'engrenages fabriqués en grande série. La figure I.5a représente les cinq erreurs composées (plusieurs défauts peuvent intervenir) de la surface entre géométrie réelle et géométrie théorique. Ces surfaces tiennent compte des dentures de la roue menante et de la roue menée et correspondent à une moyenne de mesures effectuées pour quatre couples successifs de dents en prise. Les mesures ont été faites pour 16 positions de rotation de l'engrenage (« contact length ») et suivant 16 points sur la ligne de contact (« face width »).



Figures I.5 a, b : Erreur composée de surface pour 5 engrenages testés et dispositif expérimental (d'après Nonaka et al 1992).

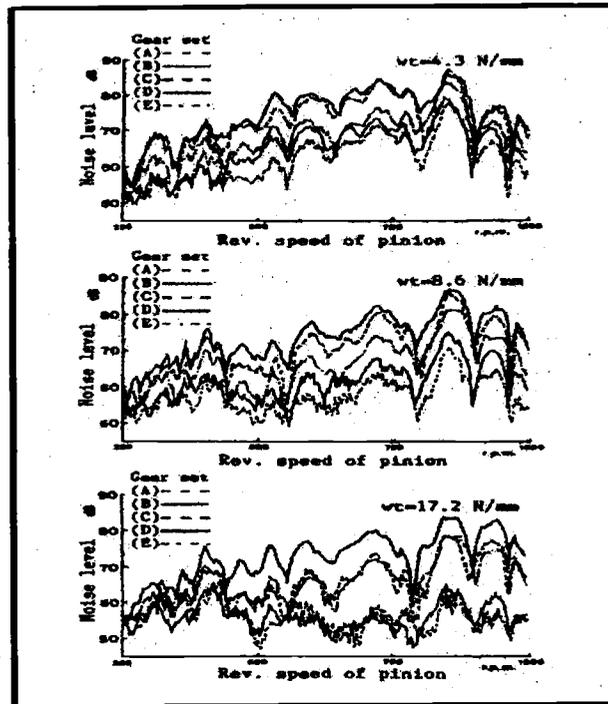


Figure I.6 : Spectres de bruit mesurés en fonction de la vitesse de la roue menante (d'après Nonaka et al 1992).

Le dispositif expérimental de l'étude est présenté figure I.5b. La figure I.6 présente les relevés des spectres du bruit rayonné par les cinq configurations d'engrenage et ce pour trois valeurs du couple transmis. L'écart constaté sur les niveaux de bruit peut être supérieur à 10 dB alors que les erreurs de forme sont de l'ordre de la dizaine de μm .

C. Conclusion.

Le problème du tolérancement des engrenages apparaît comme un problème complexe. Il existe en fait deux approches distinctes. La première consiste à rechercher les corrections optimales de denture en supposant les tolérances de fabrication connues. La seconde consiste à donner expérimentalement ou après calcul la variabilité induite par les tolérances de fabrication que l'on suppose connues. Malheureusement, la prédiction de la variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages n'a jamais été traitée numériquement. Il faut tout d'abord disposer d'un modèle de comportement dynamique suffisamment fin pour rendre compte des phénomènes propres à ce type de mécanisme. Après quoi, il est nécessaire d'introduire dans ce modèle l'incertitude liée au tolérancement des engrenages et plus particulièrement aux tolérances relatives à la micro géométrie des dents. Il convient alors de disposer de méthodologies efficaces en terme de précision et de rapidité en temps de calculs permettant d'accéder aux écarts de performances vibroacoustiques. En clair, l'objectif est de connaître, dès la conception, la variabilité du comportement vibroacoustique liée à la fabrication et à l'assemblage du système mécanique. A terme, on pourra utiliser ces informations

pour réduire les écarts de performances entre produits en choisissant l'ensemble des tolérances garantissant simultanément un écart moindre et un coût de fabrication raisonnable.

Le calcul du comportement vibroacoustique d'une boîte de vitesses est très complexe, mais les modèles déjà présentés se confrontent assez bien avec l'expérience (Zhang 1999). Tous ces modèles supposent que les données du problème sont exactement connues et ne prennent pas en considération l'incertitude liée aux tolérances. Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'elles peuvent être alors les approches qui permettraient de modéliser cette incertitude et également de la « propager » à travers de tels modèles déterministes de comportement vibratoire et acoustique.

IV. Prise en compte et traitement de l'incertitude dans les modèles dynamiques.

L'analyse de systèmes mécaniques sujets à de l'incertitude combine deux méthodologies : une méthodologie modélisant l'incertitude et une méthodologie modélisant le système mécanique déterministe. La combinaison de ces méthodologies permet d'investir avec plus ou moins de succès les variabilités du comportement statique, des paramètres modaux, du comportement vibratoire et plus rarement du rayonnement acoustique.

A. Introduction.

On a vu que seule l'introduction d'incertitude dans les modèles mécaniques de comportement permettait de simuler la variabilité du comportement statique ou dynamique liée à la fabrication et au montage du mécanisme. Comment introduire l'incertitude et comment gérer sa propagation au travers du modèle de comportement dynamique retenu ?

Généralement la modélisation d'une structure ou mécanisme passe par une mise en équation des phénomènes physiques régissant le comportement du système et par une résolution analytique ou plus souvent numérique du système d'équations. Cette modélisation prend en compte des hypothèses simplificatrices et de ce fait ne représente pas exactement le comportement statique ou dynamique du système réel. La modélisation est elle-même entachée d'une incertitude en comparaison au système réel. Ainsi, il convient de distinguer incertitude de modélisation et système ayant des paramètres incertains. Soize (2000) propose par exemple une méthode probabiliste permettant de traiter les incertitudes de modélisation par éléments finis liées à la réduction de modèle. La méthode est basée sur un tirage aléatoire des matrices réduites de masse, de raideur et d'amortissement selon un processus Monte Carlo et fournit les bornes du comportement dynamique du système mécanique ainsi modélisé, et par là même les domaines de validité de la modélisation retenue. Pour ce qui nous concerne, nous n'avons pas abordé ce type de problèmes et dans ce qui suit, les méthodes décrites ci après ne traite pas de cet aspect.

L'incertitude peut être liée à la fabrication (Bernhard 1996), comme on l'a vu précédemment, mais aussi à d'autres origines (propriétés du lubrifiant par exemple), aussi les descriptions qui suivent

ne prennent pas en compte la nature de l'incertitude des paramètres. On verra que le choix d'une méthodologie est en partie conditionné par l'information dont on dispose quant à la nature de l'incertitude.

La prédiction du comportement dynamique et acoustique de systèmes mécaniques se fait, dans le domaine basse fréquence vu par le système, à l'aide d'une modélisation spatiale par éléments finis. Aussi les méthodes de traitement de l'incertitude doivent pouvoir tenir compte des propriétés inhérentes aux calculs éléments finis.

Il existe deux approches distinctes pour le traitement de l'incertitude : l'approche possibiliste et l'approche probabiliste ou stochastique. Chacune nécessite une modélisation de l'incertitude ainsi qu'un traitement spécifique au travers du modèle mécanique. Les informations obtenues pour la réponse vibratoire et acoustique sont également de nature différente. La description de chacune des approches se fera en trois points : modélisation de l'incertitude et introduction dans le modèle puis, propagation et traitement mathématique et numérique adapté au modèle, et enfin, type d'informations obtenues sur les grandeurs en sortie (réponse vibratoire, niveaux de bruit rayonné etc).

Enfin, une analyse critique de chacune des approches permettra de sélectionner celle qui s'adapte le plus aisément au modèle de comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages pour lequel la micro géométrie des dentures est incertaine.

B. L'approche possibiliste.

L'approche possibiliste est encore peu utilisée dans le domaine de la mécanique des solides. Elle utilise les notions de nombres flous dont l'algèbre est particulière. Son développement est assez récent et fut introduit par Zadeh en 1965. L'arithmétique floue est une extension de l'arithmétique des intervalles elle-même assez récente. Le but ici n'est pas de faire une description complète de l'arithmétique des ensembles flous donc, on renvoie le lecteur à l'ouvrage de Kaufmann et Gupta (1991) pour une description détaillée.

a) Modélisation de l'incertitude par des nombres flous.

Une première façon de quantifier l'incertitude de la valeur d'un paramètre consiste à donner des bornes à la valeur de ce paramètre : on obtient ainsi un intervalle fermé appelé intervalle de confiance. Un nombre flou consiste en une extension de ce modèle puisqu'on considère non pas un seul intervalle traduisant l'incertitude mais plusieurs intervalles pondérés par un indice de confiance α compris entre 0 et 1. Au degré de confiance $\alpha = 1$ l'intervalle de confiance se réduit à une seule ou plusieurs valeurs certaines. Au degré de confiance $\alpha = 0$ l'intervalle de confiance est le plus large, la valeur prise par le paramètre est la plus entachée d'incertitude. Un nombre flou convexe est un nombre dont la taille de l'intervalle de confiance décroît lorsque α varie de 0 à 1. Ce modèle permet de définir une fonction d'appartenance qui définit complètement le nombre flou noté par la suite \mathbf{A}

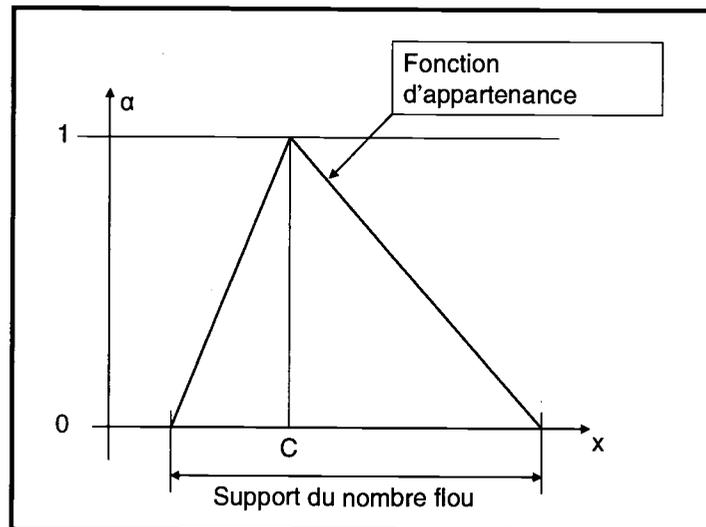


Figure I.7 : Fonction d'appartenance d'un nombre flou \underline{A} triangulaire, normal et convexe.

La valeur C est la valeur la plus souhaitée et est appelée la valeur crête. Un nombre flou dont la valeur maximale de la fonction d'appartenance est 1 est dit normal. Un nombre flou dont l'un des intervalles contient 0 est dit mixte. Connaissant le support et la valeur crête du nombre flou, il est possible de construire la fonction d'appartenance : celle-ci peut être linéaire ou quadratique. La forme de la fonction d'appartenance permet de représenter l'évolution du degré d'incertitude pour un indice de confiance donné. Plus les intervalles se resserrent lorsque α croît, plus le degré d'incertitude diminue. L'usage d'une loi linéaire est considéré comme une représentation d'une incertitude normale, on parlera alors de nombre flou triangulaire (figure I.7).

Les nombres flous permettent de prendre en compte différents types de paramètres incertains mais aussi des paramètres qualitatifs. Les nombres complexes incertains peuvent également être modélisés à l'aide de nombres flous, cependant il est impératif de discerner partie réelle et partie imaginaire. La construction d'un nombre flou ne requiert que les bornes d'évolution des paramètres ainsi que la valeur souhaitée ou théorique représentée par la valeur crête C . Par contre, le choix d'une forme particulière de la fonction d'appartenance est plus délicat. Ce problème reste d'actualité et limite à l'heure actuelle l'utilisation des nombres flous aux problèmes de recalage (Plessis et al 2000) des caractéristiques modales d'un système mécanique. Les données expérimentales donnent une estimation du degré d'incertitude et donc du choix de la forme de la fonction d'appartenance.

Enfin, bien que la représentation de l'incertitude par des nombres flous semble satisfaisante, on ne connaît pas a priori l'évolution de la valeur du paramètre dans chaque intervalle de confiance. Cette difficulté est contraignante puisque les bornes de l'intervalle constituent la seule information disponible.

b) L'arithmétique floue.

Après avoir décrit les nombres flous, on présente brièvement l'algèbre qui en découle. L'évaluation de fonction simples de nombres flous se fait essentiellement de deux façons : la première,

le principe d'extension de Zadeh (1975) représente une extension des opérateurs classiques de l'espace des réels. Les valeurs de la fonction sont évaluées en utilisant toutes les combinaisons de valeurs prises par les paramètres du problème. Après quoi un algorithme particulier permet de reconstruire le nombre flou solution et en particulier fournit les bornes des intervalles de confiance pour chaque valeur de α . En ce sens, le processus est proche d'une simulation Monte Carlo. Le principe d'extension présente deux inconvénients : il ne garantit pas la convexité de la solution et est difficilement adaptable aux problèmes d'algèbre linéaire et donc aux problèmes mécaniques qu'ils soient linéaires ou non.

La deuxième manière consiste à effectuer des coupes de la fonction d'appartenance en fonction de α et de travailler par intervalles successifs. En clair, on choisit α ce qui donne un intervalle, on calcule les bornes de l'intervalle solution en supposant que les bornes solutions sont atteintes aux bornes de l'intervalle d'entrée, puis on réitère l'opération pour différentes valeurs de α . L'arithmétique des intervalles initiée par Moore (1966) est utilisée sur la base de cette seconde approche. Les difficultés associées à son utilisation proviennent des bornes solutions surestimées lorsque la fonction fait apparaître une multi occurrence de la même variable, et de la difficulté de traiter les intervalles contenant la valeur 0 lorsqu'il apparaît des fractions. Cependant, c'est cette seconde approche par α -coupures qui est utilisée en dynamique des structures (Tison 2000) ou en conception robuste soumis à de l'imprécision (Antonsson 1995, Wood 1989). Enfin, le traitement des fonctions de nombres flous complexes nécessite de scinder partie réelle et partie imaginaire puisqu'il n'existe aucune relation d'ordre dans l'algèbre des nombres complexes.

Dans ces cas, l'arithmétique floue peut se réduire à l'arithmétique des intervalles.

c) Arithmétique des intervalles adaptée à la formulation éléments finis.

L'application de l'arithmétique des intervalles aux problèmes mécaniques modélisés par éléments finis nécessite quelques modifications prenant en compte les propriétés spécifiques aux éléments finis. Cette adaptation a fait l'objet d'un travail récent (Dessombz 2000), et nous en présentons les grandes idées.

La modélisation par éléments finis conduit à la résolution de systèmes d'équations matricielles. Le cas le plus simple de la réponse statique d'une structure mécanique à comportement linéaire, permet à lui seul de mettre en évidence les problèmes rencontrés. Ce problème mécanique s'écrit sous la forme suivante :

$$[A]\{X\}=\{b\} \quad (I.26)$$

L'introduction d'incertitude via des intervalles dans la matrice $[A]$ pose déjà quelques problèmes. Reprenons l'exemple proposé par Behnke (1991) qui en est révélateur : la matrice $[A]$ est de dimension deux, symétrique et malgré l'introduction des intervalles doit le rester. Pour se faire, les

intervalles caractérisant les termes A_{11} et A_{22} sont égaux ainsi que les intervalles caractérisant les termes A_{12} et A_{21} . Le vecteur $\{b\}$ est lui aussi décrit par des intervalles : $b_{11} = b_{21} = [2, 2.625]$. On cherche alors les intervalles caractérisant le vecteur $\{X\}$. Or, dans le cas où $A_{11} = [3, 4]$ et $A_{12} = [1, 2]$, la solution du problème est obtenue pour une matrice $[A]$ qui n'est pas symétrique. La solution mathématique fournie à l'aide d'un algorithme numérique ne correspond pas à un problème physique. D'autre part, les valeurs minimales et maximales du vecteur $\{X\}$ ne correspondent que rarement à une combinaison des valeurs extrêmes des paramètres de $[A]$ et $\{b\}$. Dessombz (2000) propose une formulation adaptée permettant de gérer ces deux points simultanément. Cette formulation passe par une réécriture des matrices éléments finis sous forme de série de matrices pour lesquelles un seul paramètre est un intervalle. Cette réécriture n'est valable que pour de faibles variations des termes de la matrice puisqu'elle néglige l'égalité 2 à 2 des termes extra diagonaux. Puis, la modification de l'algorithme numérique de recherche des bornes de la solution permet de ne pas trop les surestimer tout en garantissant que la solution trouvée correspond bien à un problème physique.

L'application de cette méthodologie est abondamment illustrée par des exemples de comportement statique et dynamique de structures linéaires, et permet d'accéder aux bornes de grandeurs tels les modes propres (déformée et fréquence), ainsi qu'aux bornes de la fonction de transfert. On présente le cas d'une barre encastrée libre en traction compression dont le module de Young varie. Cet exemple est tiré des travaux de Dessombz (2000). La barre (figure I.8) est discrétisée par éléments finis de type poutre à deux nœuds et l'amortissement est de type hystérétique.

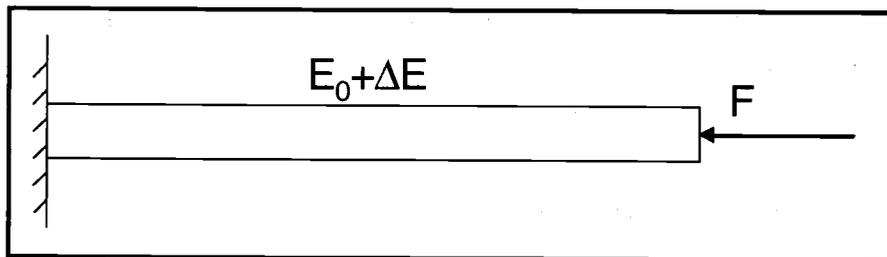


Figure I.8 : Barre encastrée libre en traction compression (d'après Dessombz 2000).

On présente figure I.9 la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction de transfert pour une variation du module de Young égale à $\pm 10\%$ autour de la valeur déterministe, et un amortissement de 4%. La figure représente l'enveloppe de la fonction de transfert ainsi que sa valeur déterministe.

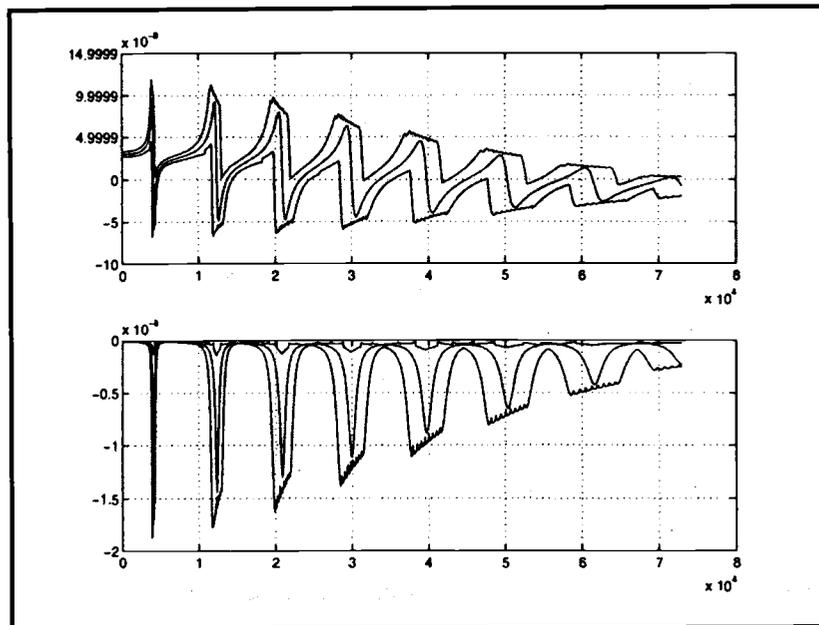


Figure I.9 : Parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert, $\Delta E = \pm 10\%$, amortissement de 4% (d'après Dessombz 2000).

Afin d'être plus complet on peut également citer les travaux de Dimarogonas (1995) sur la dynamique des rotors dont les matrices éléments finis sont représentées par des matrices intervalles. L'application directe de l'arithmétique des intervalles n'est pas possible et il semble indispensable d'en adapter la formulation à chaque type problème.

L'ensemble des travaux faisant intervenir ce type d'analyse traite de systèmes d'équations matricielles linéaires à coefficients constants, or le cas de la dynamique des transmissions par engrenages, et plus généralement des mécanismes, est plus complexe puisque la source excitatrice interne est souvent corrélée aux propriétés élastiques du système en mouvement (lorsque deux organes sont en contact par exemple). Enfin, à notre connaissance, aucun calcul de rayonnement acoustique de systèmes mécaniques à paramètres incertains n'a été investi à l'aide d'une approche possibiliste.

C. L'approche stochastique.

La littérature est très abondante concernant cette approche car la théorie des processus stochastiques est bien plus ancienne. L'ouvrage de Papoulis (1965) fait office de référence et permet de bien comprendre la mécanique des processus aléatoires ainsi que leurs traitements adaptés et leurs applications. Toutefois, l'application des processus aléatoires à la dynamique des structures possédant des paramètres incertains n'a débuté qu'après la moitié du 20^{ème} siècle du fait des progrès du calcul numérique et de l'informatique. L'utilisation de la statistique semble un moyen naturel de modéliser l'incertitude et de prendre en compte l'information disponible. En effet, c'est l'avènement de la mécanique statistique qui fait apparaître la première formulation mesurant le manque d'information

via une grandeur, l'entropie. Cette modélisation de l'incertitude est introduite dans les travaux de Soize (2000).

A présent nous allons voir comment l'utilisation d'une approche stochastique permet de traiter le cas des systèmes mécaniques possédant des paramètres incertains. Le lecteur trouvera une bibliographie très complète dans l'article d'Ibrahim (1987).

a) Modélisation de l'incertitude par des grandeurs aléatoires.

Le cas le plus simple est de représenter un paramètre incertain par une variable aléatoire de densité de probabilité définie (Ibrahim 1987). Théoriquement le choix d'une densité de probabilité impose de connaître tous les moments statistiques de la variable aléatoire. En pratique, la connaissance des trois premiers moments statistiques permet de définir une loi de probabilité adaptée. Nous avons déjà évoqué ce problème lors du tolérancement de pièces fabriquées en grande série. Les bornes de l'intervalle de tolérance fournissent l'écart type de la variable aléatoire alors que la cote nominale correspond à la valeur moyenne. La densité de probabilité retenue par les fabricants est très souvent de type loi de Gauss ou plus rarement loi de Weibull. Les densités de probabilité les plus répandues dans le cas de la dynamique des systèmes possédant des paramètres incertains sont : loi de Gauss, loi de Weibull et loi de distribution uniforme. Afin de simplifier la résolution des problèmes mécaniques dont certains paramètres sont aléatoires, on considère généralement qu'ils sont statistiquement indépendants, ce qui n'est pas toujours vrai. Cette représentation de l'incertitude a été largement employée (Lee 1994, Collins 1969, Singh 1993, Bogdanoff 1961, Balmès 1999). Les paramètres affectés par l'incertitude sont généralement liés aux propriétés mécaniques des systèmes étudiés (masses, raideurs et amortissement). L'introduction de variables aléatoires dans les modèles mécaniques est aisée contrairement au traitement de la réponse du système mécanique stochastique modélisé. La seule difficulté réside dans la prise en compte d'une dépendance statistique entre les variables aléatoires car on ne connaît que rarement la densité de probabilité conjointe. L'indépendance statistique des paramètres est majoritairement supposée et systématiquement dans le cas de systèmes discrets. Cette hypothèse n'empêche pas la corrélation des termes des matrices de masse, de raideur et d'amortissement apparaissant dans le système d'équations différentielles matriciel.

La modélisation des paramètres incertains par des variables aléatoires implique qu'ils soient parfaitement localisés sur la structure ou le mécanisme. Or, l'épaisseur d'une pièce peut varier en fonction de la position sur la pièce. Une modélisation par une seule variable aléatoire de la valeur de l'épaisseur ne permet pas une présentation réaliste de ce phénomène. Dans de tels cas on a recours aux champs aléatoires. Pour un champ aléatoire d'espace, si l'on fixe l'aléa on obtient une trajectoire de cet espace. Les champs aléatoires représentent le cœur des méthodes éléments finis stochastiques. L'introduction de champs aléatoires lors de la construction d'un modèle éléments finis est plus délicate. Aussi, l'idée est de remplacer le champ aléatoire par un ensemble de variables plus faciles à gérer. On distingue deux techniques. Une discrétisation spatiale pour laquelle le champ aléatoire est

remplacé par un vecteur aléatoire auquel on associe une matrice de corrélation spatiale des composantes du vecteur : la taille du maillage éléments finis dépend de la plus petite longueur de corrélation. La construction des matrices éléments finis associées se fait à l'aide de diverses techniques : la méthode du point central (DerKiureghian, 1988), la méthode de l'intégrale pondérée (Deodatis, 1991), la méthode d'interpolation (Liu 1986) entre autres. L'autre technique consiste en une discrétisation spectrale du champ aléatoire, on parle alors de méthode spectrale éléments finis stochastiques (Ghanem 1999). Les méthodes spectrales consistent en une projection du champ aléatoire sur une base de fonctions déterministes dépendant de la variable espace. Par exemple, soit $G(x, \Omega)$ un champ aléatoire d'espace, x représentant la partie spatiale et Ω l'aléa, une discrétisation spectrale conduit à :

$$G(x, \Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\Omega) \Phi_k(x) \quad (\text{I.27})$$

Les méthodes de discrétisation spectrale permettent de séparer l'aléa de la partie spatiale. Les fonctions propres de la fonction de covariance constituent une base, donc sont orthogonales et forment la base de l'expansion de Karhunen-Loeve (Ghanem 1991). D'autres fonctions tels les polynômes de Legendre peuvent constituer une base de décomposition. L'expansion de Karhunen-Loeve reste toutefois la plus efficace car le nombre de termes nécessaires, pour une précision donnée, est plus faible que celui associé à des bases de polynômes orthogonaux.

Nous allons voir maintenant comment gérer la propagation des ces grandeurs aléatoires (variable ou champ) au travers des modèles mécaniques.

b) Traitement des grandeurs aléatoires dans les modèles mécaniques.

Après avoir modélisé l'incertitude par des grandeurs aléatoires, on souhaite connaître son impact sur le comportement (statique, modal et dynamique) du système. On recense quatre groupes de méthodes stochastiques :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes de simulation type Monte Carlo,
- Les méthodes de perturbation, série de Taylor et Chaos polynomial,
- Les méthodes d'échantillonnage suivant un plan d'expériences, méthode Taguchi.

Les méthodes analytiques.

La méthode analytique permet de trouver la densité de probabilité d'une fonction de variable aléatoire. Ce calcul est décrit dans le livre de Papoulis (1965). Les limitations sont très vite atteintes car la méthode impose une connaissance explicite de la fonction pour effectuer le calcul, or les

modèles mécaniques de structures ou de mécanismes se réduisent rarement à une fonction triviale. Toutefois, il est possible, pour des systèmes mécaniques linéaires possédant peu de paramètres variables, d'approximer la réponse à l'aide d'une surface de réponse (Lemaire 1998) ou d'un réseau de neurones (Hurtado 2002). Si la recherche d'une représentation analytique par surface de réponse a déjà fait ses preuves (à condition que les variations des paramètres soient très faibles par rapport à leur valeur déterministe) dans le domaine de la dynamique des structures ou mécanismes, il n'en n'est pas de même quant à l'utilisation des réseaux de neurones. Malheureusement, les modèles de comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages sont trop complexes et il semble difficile d'obtenir une fonction analytique les approchant.

Simulation Monte Carlo.

Quelque soit le problème mécanique à paramètres aléatoires traité, la simulation Monte Carlo est toujours employée. En effet, les méthodes Monte Carlo sont considérées comme la référence en matière de prédiction et représentation des phénomènes aléatoires. Elle consiste à résoudre les équations du modèle mécanique pour un grand nombre de réalisations des paramètres. Les tirages sélectionnés prennent en compte les densités de probabilité de chacune des variables et les dépendances statistiques éventuelles. Chaque calcul est stocké et la statistique est effectuée à la fin. Leur précision dépend fortement du nombre de réalisations nécessaires (en général un très grand nombre) et de ce fait les temps de calcul associés sont très importants. Néanmoins toutes les méthodes d'approximation ont fait l'objet de comparaison avec une simulation Monte Carlo.

Les méthodes de perturbation, série de Taylor et Chaos polynomial.

L'ensemble de ces méthodes appartient aux méthodes d'expansion. La méthode de perturbation et la méthode d'expansion suivant une série de Taylor consistent en un développement de la fonction réponse autour du système déterministe. Le développement est généralement tronqué à l'ordre 2 puisque seuls interviennent les deux premiers moments statistiques (moyenne et écart-type) des paramètres aléatoires. On trouve des applications de ces deux méthodes dans le cas de systèmes mécaniques discrets et dans le cas de systèmes mécaniques continus possédant des champs aléatoires discrétisés spatialement. La résolution du système d'équations se fait en trois étapes : introduction des termes aléatoires et développement en série des termes du système d'équation, identification des termes de même ordre de grandeur et résolution des équations obtenues pour chaque ordre (en général 0, 1 et 2). L'équation d'ordre 0, qui n'est autre que l'équation déterministe, fournit la valeur moyenne de la réponse et l'application de l'opérateur espérance mathématique aux équations d'ordre 1 et 2 fournit l'écart type de la réponse. On peut également coupler un développement en série avec une simulation Monte Carlo pour la recherche du moment d'ordre 2 de la réponse. Leur simplicité de mise en œuvre leur assure un certain succès mais les limites de tels développements en série sont vite atteintes, car des problèmes de convergence apparaissent lors de fortes variations des paramètres

aléatoires. On trouvera dans Chen (1973, 1974) des applications de la méthode des perturbations aux cas des systèmes dynamiques discrets, chez Collins (1969) la même approche appliquée au cas du calcul des paramètres modaux. La méthode d'expansion de Taylor a été utilisée par Graham (1998) pour le calcul d'une réponse statique d'une plaque en flexion, dont le module de Young est un champ aléatoire discrétisé spatialement et entre autres par Singh (1993) pour le calcul de la réponse dynamique fréquentielle de systèmes dynamiques discrets. Enfin, les temps de calcul associés à ces méthodes sont très courts, puisqu'on ne résout généralement que peu d'équations.

La méthode du chaos polynomial consiste à développer un paramètre aléatoire en une série de polynômes orthogonaux à variables gaussiennes indépendantes (Ghanem 1991, Dessombz 2000). La résolution du problème consiste à décomposer les grandeurs aléatoires suivant un chaos polynomial que l'on introduit dans le système d'équations, puis en utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynômes on accède à un système d'équations linéaires simples à résoudre qui permet d'estimer les moments statistiques de la réponse. La méthode spectrale d'élément fini stochastique initiée par Ghanem utilise le chaos polynomial. Les champs aléatoires sont discrétisés spectralement à l'aide d'une expansion de Karhunen-Loeve, puis la partie aléatoire est décomposée suivant un chaos polynomial introduit dans le modèle élément fini. La solution est recherchée sous forme d'une série tronquée de polynômes chaotiques. Généralement le degré des polynômes utilisés ne dépasse pas 10 et la précision des résultats est bien entendu conditionnée par le degré de ceux-ci. Les temps de calcul augmentent non linéairement avec le degré des polynômes et sont plus importants que ceux associés aux méthodes de perturbation ou développement de Taylor. On peut également coupler chaos polynomial et simulation Monte Carlo pour estimer plus précisément les moments statistiques de la réponse. On trouvera chez Dessombz (2000) de nombreuses applications du chaos polynomial pour l'analyse modale et le comportement dynamique de structures continus possédant des paramètres aléatoires.

Les méthodes d'échantillonnage.

Le principe des méthodes d'échantillonnage est identique à celui des simulations Monte Carlo mais en constitue une optimisation car le nombre de tirages est optimisé. Le calcul déterministe n'est lancé que pour des valeurs particulières des paramètres aléatoires et la statistique est faite en aval. Le choix de combinaisons particulières des paramètres d'entrée prend la forme d'un plan d'expériences. Ce choix est délicat et nécessite souvent une bonne connaissance de l'influence des paramètres sur le système mécanique étudié. Les travaux de Taguchi en matière de plan d'expériences ont contribué à une meilleure compréhension de la mécanique des plans d'expériences. La méthode d'échantillonnage proposée par Taguchi est inspirée des méthodes d'intégration numérique de type quadrature de Gauss. Nous verrons dans le chapitre suivant la description complète de la méthodologie. Elle permet d'accéder aux premiers moments d'une fonction de plusieurs variables simplement, avec une précision

d'estimation décroissante avec l'augmentation de l'ordre du moment à estimer. Les deux premiers moments sont estimés avec précision alors que le skewness et le kurtosis sont souvent entachés d'imprécision. Cependant, la précision des prédictions dépend évidemment du nombre de combinaisons des paramètres aléatoires pour lesquels on lance le calcul.

Les temps de calcul sont très inférieurs à ceux requis pour une simulation Monte Carlo, mais s'avèrent plus importants que ceux associés aux méthodes d'expansion. A notre connaissance ce type de méthodologie n'a quasiment pas été appliqué à la prédiction du comportement dynamique de systèmes mécaniques, seul Bogdanoff (1961) traite un oscillateur à un degré de liberté dont la masse, la raideur et l'amortissement visqueux équivalent sont aléatoires. Il constate une forte variabilité de la réponse fréquentielle du système, particulièrement à proximité de la résonance. Malheureusement aucune comparaison n'existe avec d'autres méthodologies. Une autre utilisation de ce type de méthodologie appliqué aux structures hystérétiques se trouve dans Zhao (1999). Les résultats sont comparés avec succès avec ceux obtenus par simulation Monte Carlo.

c) Commentaires.

On le constate aisément, l'approche stochastique est riche en méthodologies, de plus toutes fournissent au moins les deux premiers moments statistiques de la réponse choisie et, couplées aux simulations Monte Carlo, la densité de probabilité de la sortie. La connaissance des quatre premiers moments permettraient d'estimer la densité de probabilité à l'aide de méthodes inspirées par les travaux de Poirion (2001). Rares sont celles qui respectent le formalisme mathématique de la méthode des éléments finis : l'introduction de variables aléatoires décomposées ou non rend les matrices du modèle mécanique presque sûrement non positives. Seules les méthodes Monte Carlo et les méthodes d'échantillonnage conservent les propriétés des matrices.

La résolution des problèmes mécaniques de comportement statique de structures est plus aisée que celle du comportement dynamique et vibratoire. Si l'analyse modale de systèmes possédant des paramètres aléatoires ne pose pas de problème, il en est différemment de la réponse dynamique. En effet, l'expansion de la réponse vibratoire sur la base des modes propres est très délicate dans ce cas. Sur quelle base modale doit-on décomposer la réponse vibratoire stochastique ? L'hypothèse la plus répandue consiste à effectuer une analyse modale dans le but d'obtenir la statistique des fréquences propres, puis à décomposer la réponse forcée stochastique sur la base des modes propres déterministes ou des modes prenant en compte les modifications (Balmès 1999). La notion de modes propres n'existe pas pour ce type de systèmes mécaniques, car chaque système aléatoire possède ses propres modes différents des modes moyens. Les problèmes de réduction modale sont abordés dans Balmès (1998, 2001). Cette difficulté conduit certains auteurs à calculer la réponse dynamique en inversant directement la matrice stochastique de raideur dynamique à l'aide d'une série de Neumann (Adhikari 1999, Bhattacharyya 2002).

La grande majorité des systèmes mécaniques étudiés sont des systèmes linéaires discrets ou continus soumis à des efforts extérieurs constants ou harmoniques. La résolution des équations gouvernant les systèmes non linéaires rend l'application des méthodes stochastiques très délicate. Chiostrini (1999) traite du cas d'un oscillateur de Duffing à un degré de liberté avec succès. Enfin, à notre connaissance, aucun problème de rayonnement acoustique de systèmes mécaniques à paramètres aléatoires n'a été abordé de la source excitatrice jusqu'au rayonnement acoustique. On trouvera dans Le Moyne (2000) une étude sur l'influence d'une imprécision des fréquences propres sur les résultats d'un calcul de rayonnement acoustique par éléments de frontière. Il s'agit en réalité d'une étude de sensibilité plus que de l'application d'une méthode stochastique. La grandeur la plus affectée par de telles imprécisions est la puissance acoustique rayonnée.

V. Choix d'une méthodologie appliquée au comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages.

Il convient maintenant de choisir l'une des approches énumérées pour traiter le cas de la variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages fabriquées en grande série. En effet, la littérature ne fait que rarement référence aux systèmes mécaniques actifs que sont les mécanismes. Dans la suite de ce mémoire, nous ne prendrons en compte que les erreurs de fabrication ayant une influence sur la micro géométrie des dentures et sur le parallélisme des arbres de la transmission.

A. Quelle approche pour les défauts de géométrie ?

Les défauts de géométrie sont inhérents au processus de fabrication. L'étape de conception permet d'en fixer les limites grâce à l'introduction des tolérances. Cette étude de conception fournit en premier lieu la géométrie nominale ainsi que les bornes des défauts caractérisant la variation de la géométrie après fabrication. A ce stade on pourrait utiliser l'approche possibiliste et modéliser la variation de géométrie par un nombre flou. Le problème de la description par un nombre flou se pose : de quelle façon évolue la variation de la géométrie entre les bornes de l'intervalle. Or, les études statistiques effectuées en sortie de chaîne de fabrication démontrent que la variation de géométrie suit le plus souvent soit une loi Gaussienne, soit une loi de Weibull. La modélisation par un nombre flou ne permet pas de tirer partie de cette information. On privilégiera donc une modélisation de l'incertitude par une approche stochastique.

B. Quelle approche pour la prédiction du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages.

La prédiction du comportement vibroacoustique des boîtes de vitesses se fait en trois étapes : la première prend en compte les conditions de contact instantanées et permet d'obtenir les sources

d'excitation internes, la seconde intègre les sources d'excitation internes et permet de prédire la réponse vibratoire de toute la transmission et enfin, la dernière utilise le champ vibratoire du carter pour estimer les niveaux de bruit rayonné. Nous allons examiner les diverses possibilités pour chacune des étapes.

a) Calcul des sources d'excitation internes : erreur de transmission et raideur d'engrènement.

Il est généralement admis que pour des dentures corrigées, le minimum de la valeur crête à crête de l'erreur de transmission n'est pas obtenu en présence de défauts de géométrie. Les défauts de géométrie représentent une variation autour de la géométrie nominale. Ce constat implique qu'un raisonnement par bornes min-max lors de la résolution du système d'équations I.2 échoue. Si on souhaite connaître la borne maximale de l'erreur de transmission, il faudrait scinder en deux parties l'intervalle décrivant la variation de géométrie. On double ainsi les temps de calcul. Une approche stochastique semble ainsi mieux adaptée, mais toutes les méthodes probabilistes de type perturbation sont difficiles à introduire dans une méthode de résolution numérique simplexe. On privilégiera une méthode d'échantillonnage pour cette étape donnant accès aux deux premiers moments statistiques de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement, voire à la densité de probabilité.

b) Calcul de la réponse vibratoire de la transmission par engrenages.

L'équation régissant le comportement dynamique de la transmission par engrenages est l'équation I.7. Nous nous intéressons uniquement aux défauts affectant la micro géométrie des dentures, donc les matrices obtenues à l'aide d'une discrétisation par éléments finis du mécanisme ne sont pas affectées. Les seuls termes sujets à la variabilité sont la fluctuation de raideur d'engrènement $K_e(t)$ et l'excitation de type déplacement $E(t)$ résultant de l'erreur de transmission. La résolution de cette équation différentielle paramétrique matricielle se fait après une analyse modale classique où intervient la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement. Cette grandeur est estimée à partir du calcul de l'erreur de transmission et dépend également des défauts de géométrie. La recherche des caractéristiques modales pourrait s'effectuer à l'aide d'une approche intervalle. Pour se faire, les bornes de l'intervalle d'entrée peuvent être obtenues à l'aide des deux premiers moments statistiques de la raideur d'engrènement précédemment calculée, et de l'inégalité de Tchebycheff.

En revanche, il apparaît difficile de combiner approche intervalle et résolution numérique de cette équation, ce pour plusieurs raisons. L'erreur de transmission et la raideur d'engrènement sont complètement corrélées puisque issues du même calcul, mais on ne connaît pas, a priori, la relation qui les lie. Le processus de résolution numérique fait apparaître un schéma itératif qui pourrait être source de divergence pour le calcul des bornes de la réponse vibratoire. A chaque itération on risque de surestimer fortement la variabilité et d'obtenir in fine un intervalle trop large. L'usage d'une approche intervalle semble alors mal adapté.

L'approche probabiliste ne résout toutefois pas le problème de la corrélation entre raideur d'engrènement (donc modes propres) et excitation liée à l'erreur de transmission : le choix d'une base modale fixe ne représente pas la population de transmissions fabriquées en série puisqu'à chaque solution modale correspond sa propre excitation. La seule méthode qui permet de faire le calcul réel est une méthode d'échantillonnage, mais l'automatisation d'un tel calcul est difficile à mettre en place.

c) Calcul du rayonnement acoustique du carter.

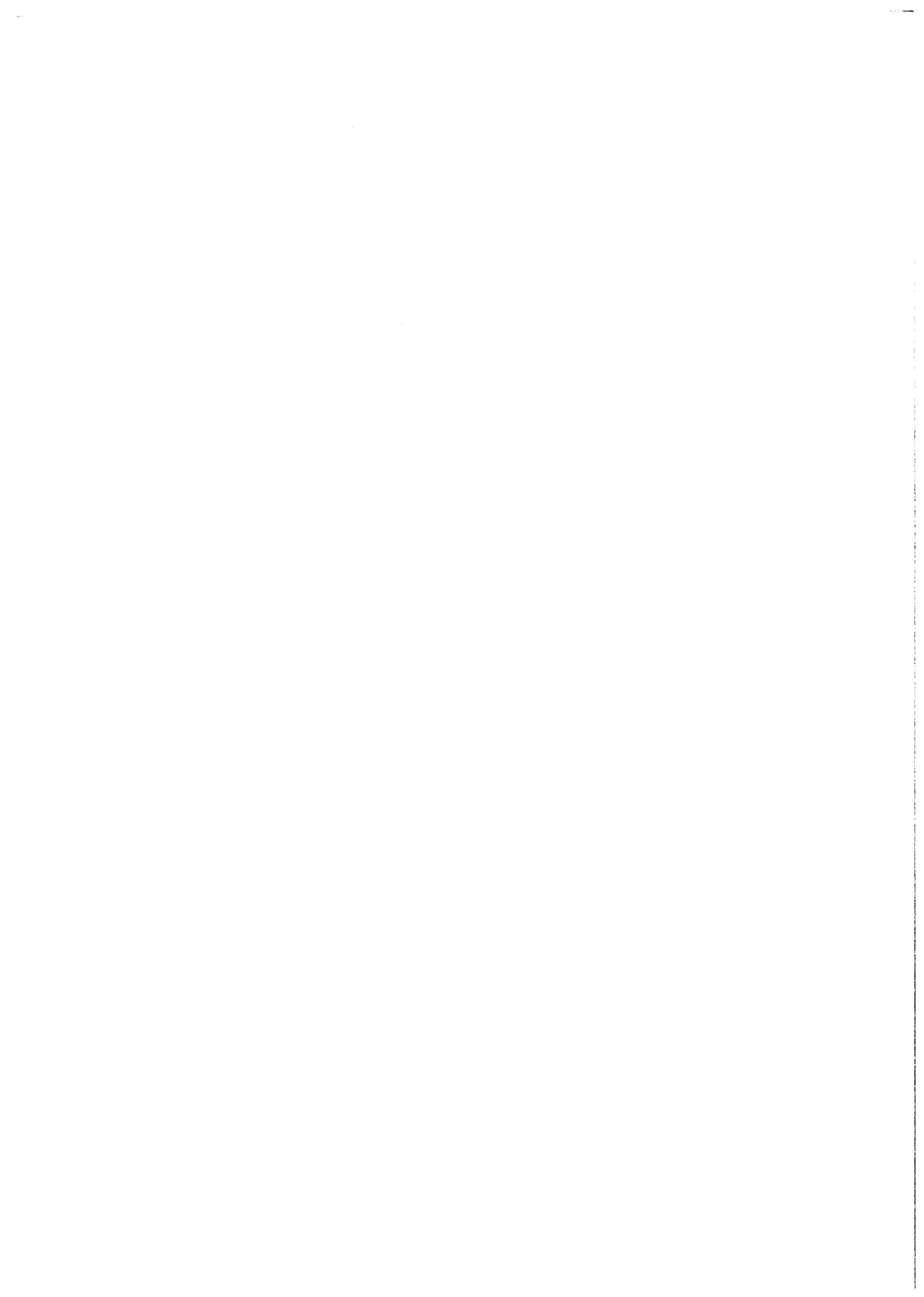
Les grandeurs vibratoire et acoustique représentatives du niveau de rayonnement acoustique sont toutes obtenues après une intégration sur l'ensemble de la surface vibrante. La notion de répartition spatiale est indissociable de celle de l'énergie injectée à la surface et de celle émise par cette surface. En d'autres termes, seul le produit du champ de vitesse par le champ de pression intervient dans la perception sonore. La moyenne d'un produit de deux variables aléatoires statistiquement corrélées n'est pas égale aux produits des valeurs moyennes de chaque variable. De même, la notion de valeur minimum d'un champ vibratoire n'existe pas. Toutes ces difficultés démontrent que soit la connaissance des bornes des champs vibratoires et des champs de pression, soit la connaissance des moments statistiques de ces grandeurs ne permettent pas d'accéder simplement aux niveaux sonores moyens et à leur variabilité. Là encore, l'approche stochastique à l'aide d'une méthode d'échantillonnage permet de s'affranchir de ces difficultés.

VI. Conclusion.

La prédiction de la variabilité du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages est un problème difficile nécessitant un mariage entre approches traitant l'incertitude et méthodes de résolution numérique complexe. Nous nous orientons vers l'usage d'une approche stochastique pour résoudre ce problème. Parmi les méthodes disponibles, il apparaît que la méthode d'échantillonnage proposée par Taguchi et modifiée par D'Errico (1988) est la plus simple à mettre en œuvre en conservant un bon degré de précision.

Cependant, le manque d'exemples d'application aux mécanismes et plus généralement aux systèmes mécaniques, nous conduit à tester cette méthode sur des systèmes dont le comportement déterministe est bien connu, afin d'estimer son efficacité par rapport à d'autres techniques probabilistes : simulation Monte Carlo, méthode des perturbations et méthode d'expansion en série de Taylor.

Cette première étape fait l'objet du chapitre suivant.



CHAPITRE II	58
APPLICATION DE MÉTHODES STOCHASTIQUES A DES SYSTEMES DYNAMIQUES SIMPLES ET VALIDITE DE LA MÉTHODE TAGUCHI	58
I. <i>Introduction.</i>	58
II. <i>Description des méthodes stochastiques.</i>	58
A. Simulation de Monte Carlo.....	59
B. Méthode Taguchi.....	60
C. Méthode d'expansion en série de Taylor.	63
D. Méthode des perturbations.....	65
III. <i>Systèmes dynamiques à un seul degré de liberté possédant des paramètres incertains.</i>	66
A. Oscillateur linéaire à paramètres incertains.	66
a) Description du système mécanique et application des méthodes stochastiques.....	66
b) Variabilité de la réponse forcée aléatoire en déplacement.....	68
c) Oscillateur linéaire sous forme adimensionnelle.	70
B. Oscillateur linéaire et paramétrique à paramètres incertains.....	71
a) Description du système et comportement déterministe.	71
b) Application des méthodes stochastiques.	74
c) Variabilité de la réponse forcée aléatoire en déplacement.	75
C. Oscillateur non linéaire de type vibro-impact à paramètres incertains.....	78
a) Description du système et comportement déterministe.	78
b) Oscillateur non linéaire à paramètres incertains.	80
IV. <i>Systèmes dynamiques à deux degrés de liberté possédant des paramètres incertains.</i>	81
A. Système à deux degrés de liberté classique.	81
a) Description du système et comportement déterministe.	81
b) Variabilité du comportement dynamique.	82
B. Système à deux degrés de liberté sensible à l'amortissement.	86
a) Description du système et comportement déterministe.	86
b) Variabilité du comportement dynamique lorsque l'amortissement est incertain.	87
V. <i>Conclusion.</i>	91

Chapitre II

APPLICATION DE MÉTHODES STOCHASTIQUES A DES SYSTEMES DYNAMIQUES SIMPLES ET VALIDITE DE LA MÉTHODE TAGUCHI

I. Introduction.

Comme nous l'avons vu précédemment, la mise en oeuvre d'une approche stochastique reste la mieux adaptée à notre problème, et plus particulièrement celle de la méthode Taguchi. Néanmoins, cette méthodologie a été très peu appliquée dans le domaine de la dynamique des structures et des mécanismes. Dans le but d'éprouver son efficacité nous allons la confronter à d'autres méthodes stochastiques plus largement utilisées dans ce domaine : simulation Monte Carlo, méthode de perturbation et méthode d'expansion de Taylor. Nous nous focaliserons ici sur deux points : d'une part, la précision des résultats obtenus et, d'autre part, les temps de calcul associés. La simulation Monte Carlo sera prise comme référence. Nous verrons dans quelle mesure sa précision est garantie.

Les systèmes mécaniques retenus pour cette étude comparative sont simples mais génériques : tous ne possèdent qu'un ou deux degrés de liberté et leur comportement dynamique déterministe est bien connu. Par contre, ils couvrent un large éventail de techniques de résolution numérique d'équation différentielle du second ordre de telle sorte que la faisabilité des méthodes stochastiques utilisées pourra être jugée. En effet, les équations différentielles sont du type linéaire, linéaire et paramétrique et non linéaire. On s'intéressera plus particulièrement à la variabilité des réponses fréquentielles de chacun des systèmes mécaniques.

L'organisation du chapitre est la suivante : la première partie est consacrée à la description des méthodes stochastiques impliquées dans cette étude comparative, la deuxième partie concerne la description des systèmes mécaniques à un degré de liberté retenus ainsi que des méthodes de résolution de leur comportement déterministe, et les résultats obtenus dans le cas où les paramètres mécaniques sont aléatoires. La dernière partie traite des systèmes à deux degrés de liberté dont les paramètres mécaniques sont incertains. L'ensemble des résultats stochastiques permettra de valider la méthode de Taguchi.

II. Description des méthodes stochastiques.

Les méthodes retenues sont la simulation Monte Carlo, la méthode d'expansion en série de Taylor, la méthode des perturbations et la méthode Taguchi dont on décrit maintenant leurs mises en oeuvre.

A. Simulation de Monte Carlo.

Les méthodes de simulation Monte Carlo sont généralement utilisées pour obtenir des prédictions statistiques de référence et permettent ainsi de juger de l'efficacité d'autres techniques d'approximation. La simulation Monte Carlo est une méthode d'échantillonnage en ce sens que le calcul déterministe est lancé pour un grand nombre d'échantillons des variables aléatoires d'entrée. La statistique est effectuée a posteriori, ce qui implique de conserver les résultats déterministes de tous les tirages. Le tirage des valeurs aléatoires respecte bien entendu les densités de probabilité de chacun des paramètres d'entrée ainsi que les éventuelles corrélations statistiques. La précision des résultats statistiques de sortie, pour un calcul déterministe supposé fin, dépend majoritairement de deux conditions.

D'une part, la génération des valeurs aléatoires conditionne fortement la précision des estimations. Il apparaît cependant difficile de construire son propre générateur de nombres aléatoires. Nous utiliserons un générateur déjà existant dont nous souhaitons estimer les limites. Le générateur utilisé fournit un nombre aléatoire de densité de probabilité uniforme entre 0 et 1. Nous souhaitons générer des variables aléatoires de densité de probabilité gaussienne de valeur moyenne μ_x et d'écart type σ_x donnés. L'algorithme de Box et Muller permet la transformation d'une variable aléatoire, soit Y de réalisation y, de densité uniforme sur l'intervalle [0,1] en une variable gaussienne X de réalisation x sur tout l'espace des réels par l'égalité suivante :

$$x = \sigma_x \sqrt{-2 \ln(y) \times \cos(2\pi y)} + \mu_x \quad (\text{II.1})$$

D'autre part, le nombre de tirages conditionne fortement la précision des estimations statistiques. Afin de déterminer le nombre de tirages minimum à effectuer avec ce générateur, nous recalculons l'écart type d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite ($\mu_x=0$ et $\sigma_x=1$) par un processus Monte Carlo. La figure II.1 présente, en échelle log-log, l'erreur relative commise sur l'écart type recalculé en fonction du nombre de tirages. Cette erreur relative est inférieure à 1 % pour un nombre de tirages égal à 30000. La loi de convergence, également représentée figure II.1, est en $1/\sqrt{n}$ où n est le nombre de tirages.

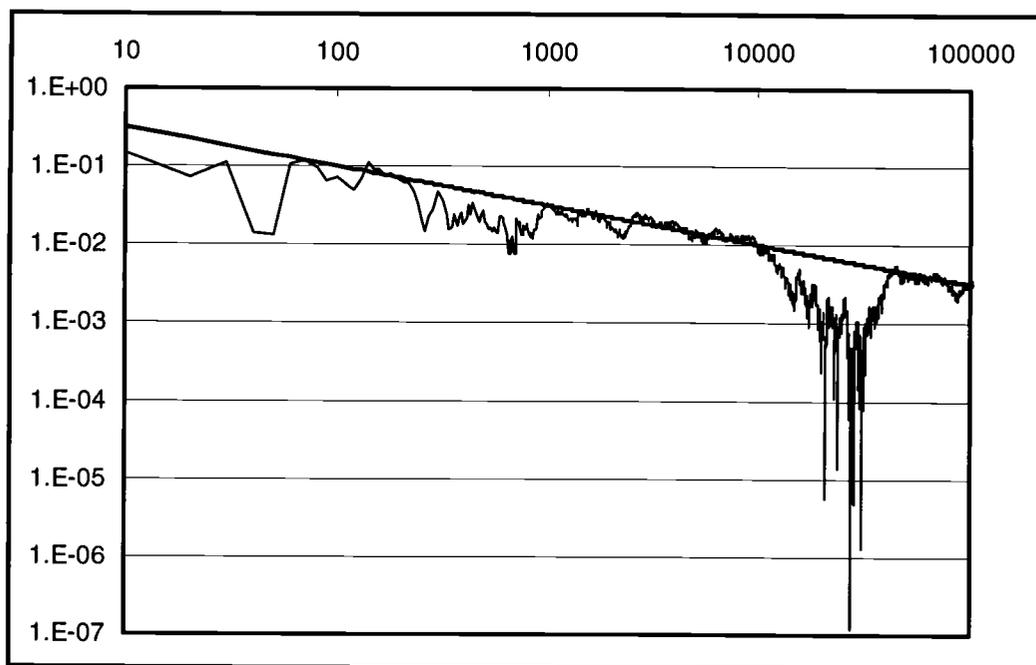


Figure II.1 : Erreur relative de l'écart type recalculé et fonction $1/\sqrt{n}$ en fonction du nombre de tirages.

Enfin, précisons que la simulation Monte Carlo est le seul outil permettant d'établir directement la densité de probabilité des variables de sortie.

B. Méthode Taguchi.

La méthode que nous allons décrire a d'abord été introduite par Taguchi dans le but de fournir aux concepteurs un outil d'aide au choix des tolérances. Des améliorations introduites par D'Errico (1988) permettent d'accroître sa précision sans en changer le principe. C'est cette dernière que nous utiliserons.

Principe de la méthode Taguchi modifiée par D'Errico.

Elle s'appuie sur des méthodes d'intégration numérique de type quadrature de Gauss-Hermite et permet d'estimer simplement les moments statistiques d'une fonction de plusieurs variables aléatoires.

Soient les expressions théoriques des deux premiers moments statistiques d'une fonction f de k variables aléatoires indépendantes $\{x\}=(x_1, \dots, x_k)$, de densités de probabilité $p_1(x_1), \dots, p_k(x_k)$, à savoir l'espérance de f :

$$E[f(\{x\})] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\{x\}) \times p_1(x_1) \dots p_k(x_k) \times dx_1 \dots dx_k \quad (\text{II.2})$$

et la variance de f :

$$\text{var}[f(\{x\})] = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\{x\}) - E[f(\{x\})])^2 \times p_1(x_1) \dots p_k(x_k) \times dx_1 \dots dx_k \quad (\text{II.3})$$

Dans les travaux de D'Errico (1988), chaque densité de probabilité $p_i(x_i)$ est discrétisée en un certain nombre de points (généralement au moins 3) et, un poids w_i est affecté à chaque point. Le poids tient compte du type de distribution de la variable aléatoire. La fonction $f(\{x\})$ est évaluée pour toutes les combinaisons de points de l'ensemble des variables : par exemple, si la fonction dépend de 4 variables aléatoires discrétisées en 3 points chacune, il faut effectuer $3^4=81$ fois le calcul de la fonction. Soient M le nombre de combinaisons de points et f_i la valeur de f pour la i ème combinaison, les deux premiers moments statistiques de la fonction f sont estimés par :

$$E[f(\{x\})] = \sum_{i=1}^M W_i f_i \quad (\text{II.4})$$

$$\text{var}[f(\{x\})] = \sum_{i=1}^M W_i (f_i - E[f(\{x\})])^2 \quad (\text{II.5})$$

$$W_i = \prod_{i=1}^k w_i \quad (\text{II.6})$$

La précision des estimations augmente avec le nombre de points de discrétisation de chaque variable aléatoire, et on peut montrer qu'un minimum de 3 points par variable est indispensable en présence de variations non linéaires de la fonction. L'étape délicate concerne le choix des points et des poids associés à chaque variable aléatoire.

Principe du calcul des points de discrétisation et des poids associés.

Nous décrivons le principe de calcul des points et poids à l'aide d'un exemple monodimensionnel. On souhaite estimer la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-t^2} dt \quad (\text{II.7})$$

où $g(t)$ est une fonction de la variable t définie pour tout t sur l'espace des réels. La formule d'intégration numérique de Gauss-Hermite permet d'approximer cette intégrale par la somme suivante :

$$\sum_{k=1}^n A_k g(\eta_k) \quad (\text{II.8})$$

où les η_k correspondent aux zéros du polynôme d'Hermite de degré n , et les A_k sont des valeurs tabulées obtenues en résolvant un système d'équations tel que l'estimation de l'intégrale (II.7) soit exacte pour $g(t)$ égale à un polynôme de degré n . Ces valeurs se trouvent dans de nombreux ouvrages (Abramowitz, 1972).

Le problème ainsi décrit est équivalent au notre lorsque $g(t)$ est une fonction de la variable aléatoire t de densité de probabilité $\exp(-t^2)$. Si la variable aléatoire t possède une densité de probabilité gaussienne $p(t)$ définie par :

$$p(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (\text{II.9})$$

le changement de variable suivant :

$$x = \frac{t - \mu_t}{\sqrt{2}\sigma_t} \quad (\text{II.10})$$

donne d'après la formule II.8 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)p(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu_t + \sigma_t \sqrt{2}x) e^{-x^2} dx \cong \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} A_k g(\mu_t + \sqrt{2}\sigma_t \eta_k) \quad (\text{II.11})$$

En résumé les tables de l'ouvrage d'Abramowitz (1972) fournissent les valeurs des points d'abscisses à multiplier par $\sqrt{2}$ et à traduire par μ_t ainsi que les poids à diviser par $\sqrt{\pi}$. Le principe est identique pour des densités de probabilité uniforme ou de Weibull. La figure II.2 présente les points d'abscisses et les poids associés pour une variable aléatoire gaussienne ou uniforme, échantillonnée avec 3 points.

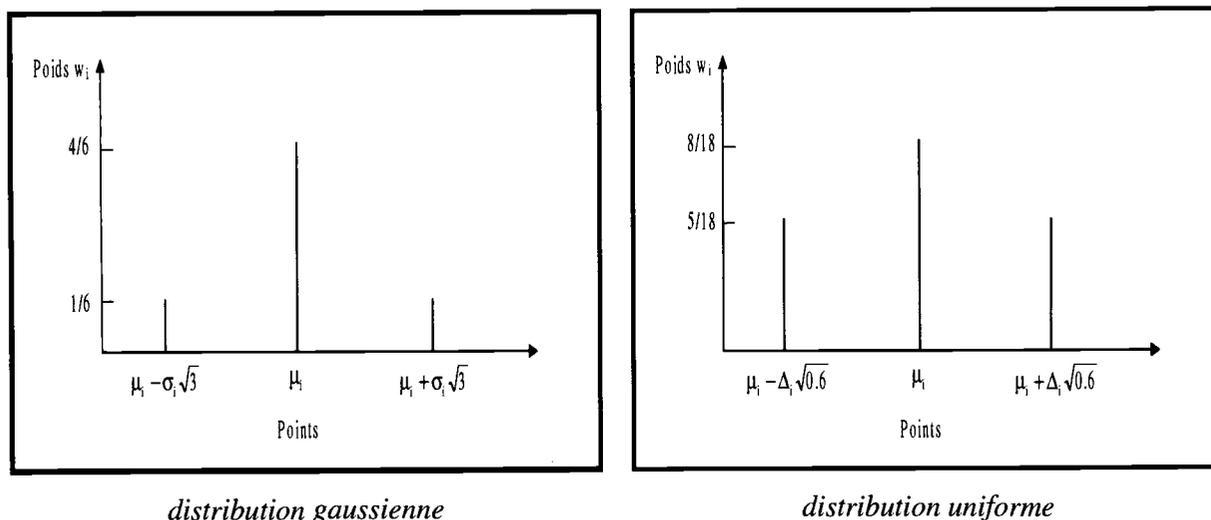


Figure II.2 : Points et poids pour une discrétisation en 3 points d'une variable aléatoire.

Commentaires.

La méthode Taguchi est simple à mettre en œuvre et approxime les moments statistiques d'une fonction de variables aléatoires de densité de probabilité connue. La méthode peut être modifiée si les variables sont statistiquement dépendantes (Jackson 1980, Rosenblueth 1975). L'estimation des valeurs de la fonction ne nécessite pas la connaissance d'une forme analytique de cette fonction, ce qui constitue une des forces de la méthode Taguchi. Néanmoins, on n'a pas accès à la densité de probabilité de la fonction. Enfin, les temps de calcul dépendent étroitement du nombre de variables aléatoires et peuvent s'avérer importants pour de grands nombres.

C. Méthode d'expansion en série de Taylor.

Les méthodes basées sur un développement des réponses autour des valeurs moyennes des variables aléatoires en série de Taylor au deuxième ordre sont les plus répandues dans la littérature. C'est une méthode qui a été largement appliquée dans le cadre de la dynamique des structures. Dans ce cadre, on trouvera dans Hien (1990) et Muscolino (2000) une description très complète de l'ensemble des calculs de modes propres aléatoires et réponses dynamiques aléatoires.

Principe de la méthode.

On rappelle ici les grandes idées de cette méthode. Soit $\{x\} = (x_1, \dots, x_k)$ un vecteur de k variables aléatoires dont on connaît au moins les deux premiers moments statistiques, et f une fonction. On définit : $\{x\} = \{x_0\} + \{x_1\}$ ou encore $x_i = x_{i0} + x_{i1}$ pour $i=1, \dots, k$, où $\{x_0\}$ est le vecteur des paramètres moyens et $\{x_1\}$ la fluctuation aléatoire centrée du vecteur $\{x\}$. On effectue alors le développement en

série de Taylor au second ordre de la fonction f autour du vecteur des paramètres moyens $\{x_0\}$ comme suit :

$$f(\{x\}) \cong f(\{x_0\}) + \sum_k \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x_{k0}} x_{k1} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right|_{x_{k0} x_{l0}} x_{k1} x_{l1} \quad (\text{II.12})$$

L'espérance mathématique appliquée au développement II.12 fournit directement les deux premiers moments de la fonction f . En supposant l'indépendance statistique des variables aléatoires, on obtient :

$$E[f(\{x\})] \cong f(\{x_0\}) + \frac{1}{2} \sum_k \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right|_{x_{k0}} E[x_k^2] \quad (\text{II.13})$$

et

$$\text{var}[f(\{x\})] \cong \sum_k \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{x_{k0}}^2 E[x_k^2] \quad (\text{II.14})$$

La connaissance de la densité de probabilité des variables aléatoires n'est pas nécessaire puisque seuls les deux premiers moments interviennent dans les équations II.13 et II.14. Du point de vue de l'efficacité de l'approximation, la précision dépend étroitement du rapport écart type/valeur moyenne des variables aléatoires et de la sensibilité du système. De plus, lorsque le calcul analytique des dérivées partielles de la fonction n'est pas possible, l'efficacité de la méthode dépend du schéma numérique utilisé pour l'estimation des dérivées. En terme de temps de calcul, cette méthode est très rapide car elle ne nécessite qu'un minimum d'opérations.

Application au calcul des modes propres aléatoires et au calcul de la réponse dynamique d'un système linéaire.

Le calcul des modes propres aléatoires s'effectue en plusieurs étapes. La première étape consiste à écrire chaque grandeur aléatoire, matrice de masse, de raideur, valeur propre et déformée propre sous forme d'une expansion en série de Taylor au second ordre. On injecte ces expansions dans l'équation aux valeurs propres déterministes et on regroupe les termes de même ordre 0, 1 et 2. L'équation aux valeurs propres d'ordre 0 ainsi obtenue n'est autre que l'équation aux paramètres moyens et est résolue de manière classique.

Les équations aux valeurs propres d'ordre 1 et 2 font intervenir les dérivées partielles premières et secondes de l'ensemble de toutes les variables aléatoires. Ces équations sont ensuite multipliées par la

transposée de la matrice des vecteurs propres obtenus aux paramètres moyens. Après quelques manipulations, on obtient aisément les dérivées premières et secondes des valeurs propres aléatoires. Ces termes sont réintroduits dans le développement en série de Taylor et fournissent après application de l'opérateur espérance les moments statistiques des valeurs propres aléatoires. Le calcul des dérivées partielles premières et secondes des vecteurs propres est nettement plus délicat. Il existe plusieurs techniques, nous n'en décrivons que deux.

La première consiste à utiliser l'équation aux valeurs propres déterministes ainsi que la condition de normalisation des vecteurs par rapport à la matrice de masse que l'on dérive directement. Cette technique est développée dans Nelson (1976). Les expressions des dérivées partielles sont ensuite introduites dans l'expansion en série de Taylor des vecteurs propres aléatoires et l'application de l'espérance fournit les deux premiers moments statistiques des vecteurs propres aléatoires. Cette technique fournit les expressions exactes des dérivées partielles mais reste coûteuse en temps de calcul.

La seconde consiste à supposer que tout vecteur propre aléatoire s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs propres obtenus aux paramètres moyens (Kleiber 1992). Les coefficients de la combinaison linéaire sont aléatoires et sont calculés à l'aide de la condition d'orthonormalité par rapport à la matrice de masse aléatoire et la condition d'orthogonalité par rapport à la matrice de raideur aléatoire. Les expressions des dérivées partielles sont ensuite introduites dans l'expansion en série de Taylor des vecteurs propres aléatoires et l'application de l'espérance fournit les deux premiers moments statistiques des vecteurs propres aléatoires. Cette technique souffre du problème de précision liée à la troncature de la combinaison linéaire. Certains auteurs proposent de compléter la somme tronquée par un mode de correction statique (Wang 1991).

Le principe du calcul de la réponse dynamique est analogue. La seule question réside dans le fait de savoir sur quelle base de vecteurs propres la réponse sera décomposée. La majorité des travaux utilisent la base de vecteurs propres obtenue aux paramètres moyens. Ce choix simplifie nettement les calculs et, en particulier, la résolution des équations gouvernant les réponses nodales. Cependant, le passage dans la base physique couple statistiquement les réponses nodales ce qui n'est, à notre connaissance, jamais pris en compte dans la littérature.

D. Méthode des perturbations.

La méthode des perturbations est sensiblement identique à la méthode d'expansion en série de Taylor. Toutes les grandeurs affectées par l'aléa sont développées sous forme d'une série en puissance croissante d'un petit paramètre. Soit x la variable aléatoire, son développement s'écrit :

$$x = x_0 + x_1 \varepsilon + x_2 \varepsilon^2 + x_3 \varepsilon^3 + \dots \quad (\text{II.15})$$

x_0 correspond à la valeur moyenne de la variable x et ε représente un paramètre d'ordre ou d'échelle. Généralement, le développement est tronqué au premier ordre : dans ce cas, x_1 représente la variable aléatoire centrée $x-x_0$, de telle sorte que $\sigma_x^2 = E[x_1^2]$ est l'écart type de x .

Après introduction des développements dans l'équation modélisant le système mécanique, on regroupe les termes de même ordre et on résout les équations obtenues à l'ordre 0 puis 1. L'application de l'opérateur espérance statistique fournit les moments statistiques de la réponse. La précision des estimations dépend du rapport écart type/valeur moyenne des paramètres d'entrée et de la sensibilité du système. Le calcul des valeurs et vecteurs propres est traité par Collins (1969). Pour la réponse dynamique, on pourra se reporter à Chen (1974).

III. Systèmes dynamiques à un seul degré de liberté possédant des paramètres incertains.

Nous souhaitons étudier la faisabilité de la méthode Taguchi pour la prédiction de la variabilité des réponses fréquentielles de systèmes dynamiques ayant des paramètres incertains. Pour se faire, on considère trois systèmes dynamiques simples possédant un degré de liberté dont le comportement déterministe est bien connu : un oscillateur linéaire, un oscillateur linéaire et paramétrique (au sens qu'il existe une excitation interne, par exemple une fluctuation temporelle de raideur) et un oscillateur non linéaire de type vibro-impact. On va comparer les résultats obtenus avec la méthode Taguchi à l'aide des trois autres méthodes stochastiques précédemment décrites : simulation Monte Carlo, expansion de Taylor et méthode de perturbation. Les résultats de référence seront donnés par une simulation de Monte Carlo effectuée avec 30000 tirages.

A. Oscillateur linéaire à paramètres incertains.

a) Description du système mécanique et application des méthodes stochastiques.

On considère comme premier exemple d'application la réponse forcée de l'oscillateur linéaire décrit figure II.3 et régie par :

$$\ddot{x} + 2\xi\Omega\dot{x} + \Omega^2x = f \sin(\omega t) \quad (\text{II.16})$$

Dans cet exemple, on suppose que le taux d'amortissement visqueux équivalent ξ et la pulsation propre non amortie Ω sont des paramètres incertains décrits par des densités de probabilité gaussiennes tronquées statistiquement indépendantes. La troncature est introduite parce que les paramètres incertains possèdent des valeurs physiquement bornées. Notamment, il convient de garantir des valeurs positives de Ω et ξ . Pour des variables gaussiennes, la troncature se fait à plus ou moins trois fois l'écart type autour de la valeur moyenne.

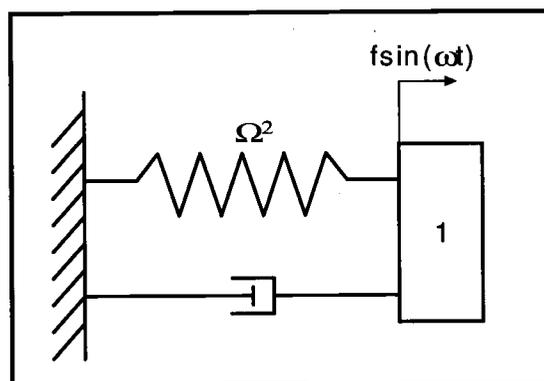


Figure II.3 : Oscillateur linéaire étudié.

On s'intéresse à la valeur RMS de la réponse déplacement en fonction de la pulsation excitatrice ω , liée au module $\|x\|$ de la réponse par l'égalité suivante :

$$\|x\| = \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{2} \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{2} x_{\text{RMS}} \quad (\text{II.17})$$

Compte tenu de l'équation II.17, le calcul des moments statistiques du module s'obtient en fonction des moments statistiques de la valeur RMS par les relations suivantes :

$$E(\|x\|) \cong \sqrt{2E(\langle x^2(t) \rangle)} \quad (\text{II.18})$$

$$\text{var}(\|x\|) \cong \frac{\text{var}(\langle x^2(t) \rangle)}{2E(\langle x^2(t) \rangle)} \quad (\text{II.19})$$

L'application des méthodes d'échantillonnage Monte Carlo et Taguchi ne pose aucun problème car on peut travailler directement avec le module de la réponse forcée. De même, le développement en série de Taylor est simple à mettre en œuvre en travaillant directement sur le module de la réponse forcée et ses dérivées partielles. Dans notre application, l'expansion de Taylor est tronquée à l'ordre 2.

Par contre, l'application d'une méthode de perturbation implique quelques développements si l'on souhaite travailler en module. En effet, il est plus simple de travailler sur la valeur RMS. Pour revenir au module on utilisera les approximations II.18 et II.19. Pour ce faire, l'amortissement visqueux équivalent et la pulsation propre non amortie sont réécrits de la façon suivante :

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \xi_1 \quad (\text{II.20})$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \Omega_1 \quad (\text{II.21})$$

Le paramètre ε est un paramètre de perturbation que l'on suppose 'petit'.

L'indice 0 désigne la valeur moyenne de la grandeur aléatoire alors que l'indice 1 représente la fluctuation aléatoire gaussienne centrée. De même, la réponse forcée temporelle du système est développée comme suit :

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \quad (\text{II.22})$$

L'équation II.22 permet de fournir l'expression des deux premiers moments statistiques de la valeur RMS de la réponse déplacement, soient :

$$E\langle x^2(t) \rangle \cong \langle x_0^2(t) \rangle + \varepsilon^2 \langle E\langle x_1^2(t) \rangle \rangle \quad (\text{II.23})$$

$$\sigma^2\langle x^2(t) \rangle \cong 4\varepsilon^2 E\langle x_0 x_1(t) \rangle^2 \quad (\text{II.24})$$

En négligeant le terme d'ordre 2 dans l'équation II.23, la valeur moyenne de la réponse correspond exactement à la réponse aux paramètres moyens. Il reste à calculer la solution perturbée en insérant les égalités II.20, II.21 et II.22 dans l'équation II.16 et regrouper les termes de même ordre. On obtient alors, à l'ordre 1, l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_0 \Omega_0 \dot{x}_1 + \Omega_0^2 x_1 = -2\dot{x}_0 (\xi_0 \Omega_1 + \xi_1 \Omega_0) - 2\Omega_0 \Omega_1 x_0 \quad (\text{II.23})$$

La résolution de l'équation II.23 est aisée et permet d'obtenir la solution perturbée $x_1(t)$.

b) Variabilité de la réponse forcée aléatoire en déplacement.

On s'intéresse à la variabilité du module de la réponse forcée en déplacement dans le cas où les paramètres sont incertains. Les paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires de densité de probabilité gaussiennes volontairement tronquées et statistiquement indépendantes. Le taux d'amortissement visqueux équivalent ξ et la pulsation propre non amortie Ω ont respectivement 4 % et 1 rad/s comme valeurs moyennes et 4 ‰ et 0.05 rad/s pour écarts types. Les moments statistiques de la réponse sont estimés à l'aide d'une simulation Monte Carlo de 30000 tirages, d'une méthode d'expansion en série de Taylor, d'une méthode de perturbation et d'une méthode Taguchi avec neuf points de discrétisation pour chaque variable aléatoire. Nous présentons figure II.4 l'estimation de la valeur moyenne du module de la réponse forcée en fonction de la pulsation excitatrice ω par les quatre méthodes stochastiques.

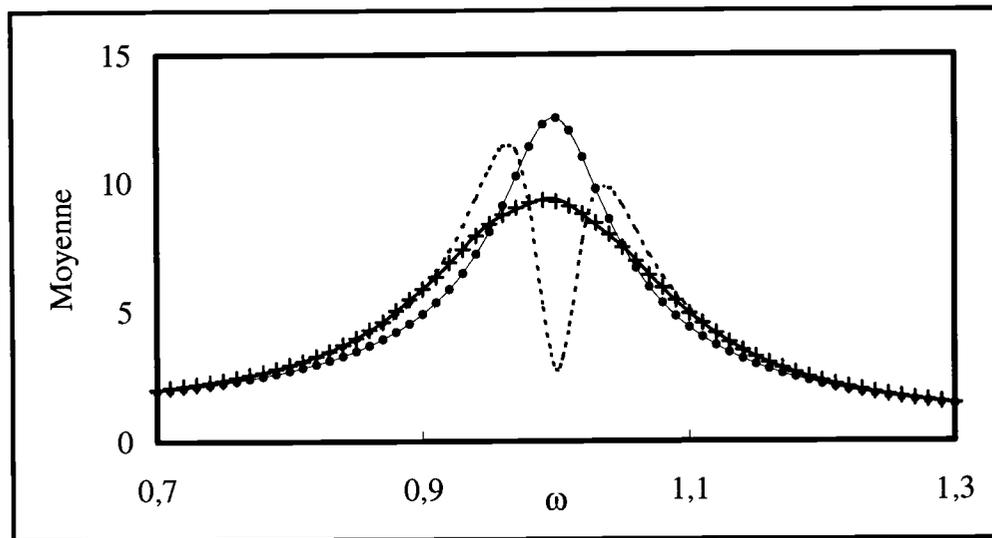


Figure II.4 : Moyenne du module de la réponse déplacement.

+++ M.C.; —Taguchi; ---Taylor; ●●●Perturbation.

La réponse aléatoire fait apparaître un élargissement du pic de résonance déterministe et une diminution sensible du niveau de résonance. La figure II.4 ne représente qu'un comportement moyen du système et aucune des réponses prises parmi les réponses possibles n'aura un tel comportement. Il est possible de donner les bornes du comportement de la population des systèmes incertains en utilisant simultanément la valeur moyenne et l'écart type de la réponse aléatoire. La figure II.5 présente l'estimation de l'écart type obtenue à l'aide des quatre méthodes stochastiques.

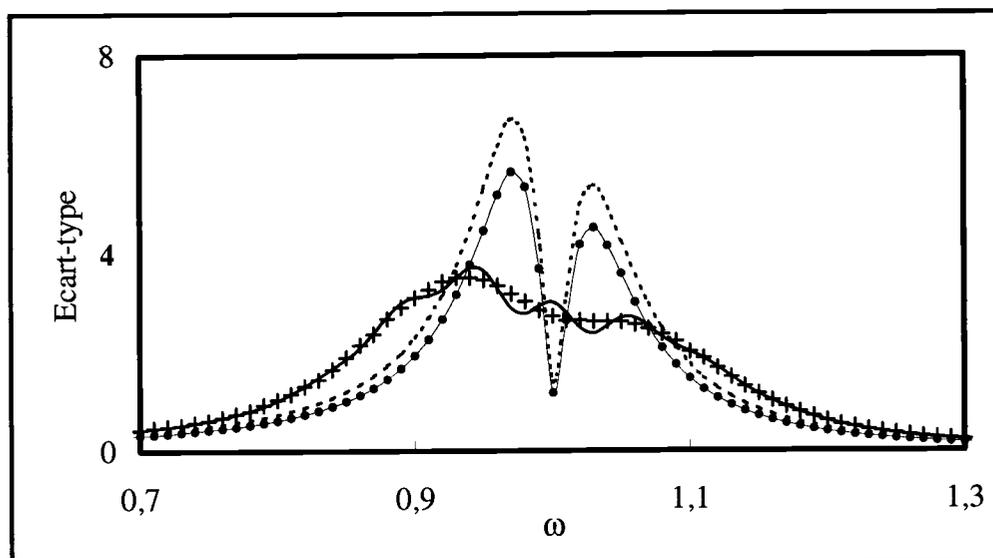


Figure II.5 : Ecart type du module de la réponse déplacement.

+++ M.C.; —Taguchi; ---Taylor; ●●●Perturbation.

Comme on peut le constater la méthode Taguchi avec neuf points de discrétisation est en bon accord avec la simulation de Monte Carlo, au contraire des méthodes de Taylor et de perturbation. On notera toutefois des oscillations qui résultent essentiellement de la discrétisation de la pulsation propre Ω . La méthode de Taylor diverge autour de la résonance car le rapport écart type/valeur moyenne des paramètres d'entrée est trop élevé. La méthode de perturbation fournit la réponse aux paramètres moyens qui correspond ici à la réponse déterministe et diverge lors de l'estimation de l'écart type pour les mêmes raisons. Il faut noter que l'application d'une méthode Taguchi à trois points de discrétisation ne permet pas d'obtenir des estimations proches de celles de la simulation Monte Carlo.

Outre les bornes de la réponse aléatoire, il est intéressant de quantifier séparément l'occurrence probabiliste de la résonance et la variabilité de son niveau. La première est principalement liée à la statistique de la pulsation propre. Pour quantifier la seconde, il suffit d'effectuer la statistique sur la réponse fréquentielle adimensionnelle par rapport à la fréquence de résonance aléatoire évaluée à chaque tirage ou, sous couvert d'un faible taux d'amortissement, par rapport à la fréquence propre Ω . Cette information s'obtient à l'aide du système écrit sous forme adimensionnelle.

c) Oscillateur linéaire sous forme adimensionnelle.

On s'intéresse à présent au même oscillateur linéaire dont l'équation du mouvement II.16 est réécrite en adimensionnalisant le temps. En posant $\tau = \omega t$, il vient :

$$x''(\tau) + 2\xi x'(\tau) + x(\tau) = \frac{f}{\Omega^2} \sin\left(\frac{\omega}{\Omega} \tau\right) \quad (\text{II.24})$$

L'application des différentes méthodes stochastiques est identique au cas précédent. Par contre, cette réécriture du système permet de quantifier séparément l'occurrence probabiliste de la résonance de la variabilité du niveau atteint au pic d'amplification. La figure II.6 présente l'estimation de l'écart type effectuée à l'aide des quatre méthodes stochastiques.

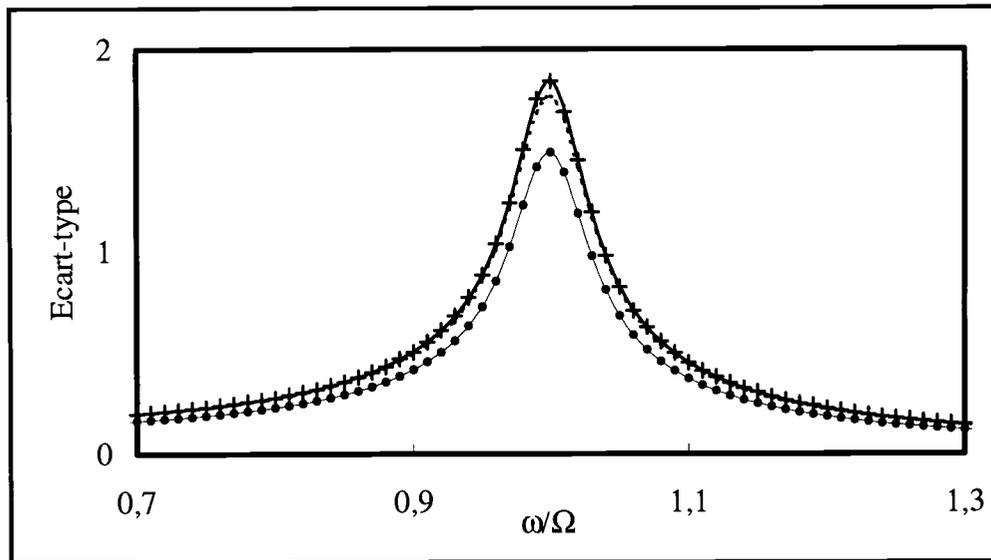


Figure II.6 : Ecart type de l'amplitude de la réponse déplacement adimensionnée.

+++ M.C.; —Taguchi; ---Taylor; ●●●Perturbation.

On constate un très bon comportement de la méthode Taguchi avec neuf points vis à vis de la simulation de Monte Carlo et une forte amélioration des prédictions fournies par la méthode de Taylor. Seule la méthode de perturbation sous estime encore la variabilité. Cette représentation donne accès directement à la variabilité du niveau de résonance, cependant elle reste difficile à mettre en œuvre dans le cas des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

B. Oscillateur linéaire et paramétrique à paramètres incertains.

a) Description du système et comportement déterministe.

On considère dans ce deuxième exemple un oscillateur linéaire et paramétrique (fluctuation temporelle de la raideur, harmonique dans notre cas) décrit figure II.7, dont l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\xi\Omega\dot{x} + (\Omega^2 + \alpha \sin(\omega t))x = f \quad (\text{II.25})$$

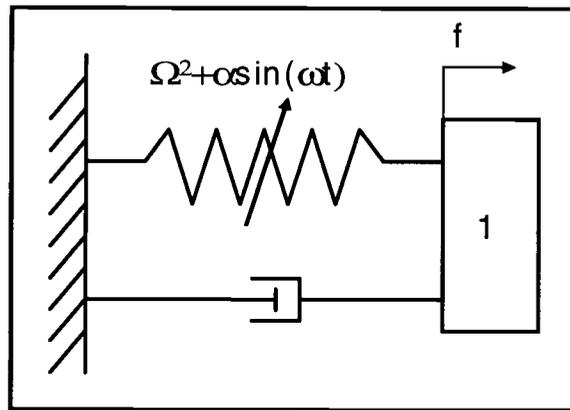


Figure II.7 : Oscillateur linéaire et paramétrique.

Deux phénomènes principaux gouvernent le comportement dynamique déterministe d'un tel système. Les solutions de l'équation homogène révèlent l'existence de régimes instables alors que les solutions particulières en régime forcé révèlent l'existence de résonances paramétriques (Bolotin 1964, Nayfeh 1979, Perret-Liaudet 1996).

Les réponses libres sont, soit asymptotiquement stables (décroissance exponentielle d'une solution quasi périodique vers l'équilibre statique), soit instables (croissance exponentielle), soit périodiques de pulsation Ω ou $\Omega/2$. Ces dernières délimitent les régions stable et instable. Le type de solution est conditionné simultanément par l'amplitude de l'excitation paramétrique α et sa pulsation ω . Les solutions dépendent également de l'amortissement ξ . Il existe une valeur seuil α^* en dessous de laquelle la stabilité asymptotique du système est garantie. Dans le cas où le système est asymptotiquement stable, la réponse forcée est périodique ou quasi périodique gouvernée par des composantes dont les fréquences s'expriment comme combinaison linéaire des fréquences excitatrices interne et externe. Dans notre cas d'étude où l'effort extérieur est constant (fréquence excitatrice externe nulle), la réponse est périodique de pulsation fondamentale ω et $\alpha^* = \Omega^2 \sqrt{8\xi}$.

On observe alors des résonances paramétriques lors de la coïncidence fréquentielle entre la pulsation d'excitation paramétrique ω et la pulsation propre du système non paramétrique Ω ou ses sous harmoniques, soit : $\omega = \Omega/n$ avec n entier non nul. La plupart des auteurs consacre la terminologie résonance paramétrique pour $n \neq 1$ et résonance paramétrique principale lorsque $n = 1$.

Il n'existe pas de solution analytique pour le problème forcé à l'équation II.25. La résolution numérique peut se faire dans le domaine temporel, mais on a recours à une méthode travaillant dans le domaine spectral (Méthode Spectrale Itérative, Perret-Liaudet 1996) pour des raisons de coût numérique moindre.

A titre d'illustration et pour compléter la description du comportement déterministe, on présente figure II.8 la valeur moyenne temporelle de la réponse forcée en déplacement en fonction de la pulsation d'excitation interne ω de l'équation II.25. La courbe en trait fin correspond au système dont

les valeurs des paramètres sont 5% pour ξ , 1 rad/s pour Ω , 0.3 pour α et $f=1$, les niveaux de réponse étant linéaires vis-à-vis de l'effort externe. Les deux autres courbes correspondent à des valeurs limites des paramètres telles que la stabilité de la réponse est assurée.

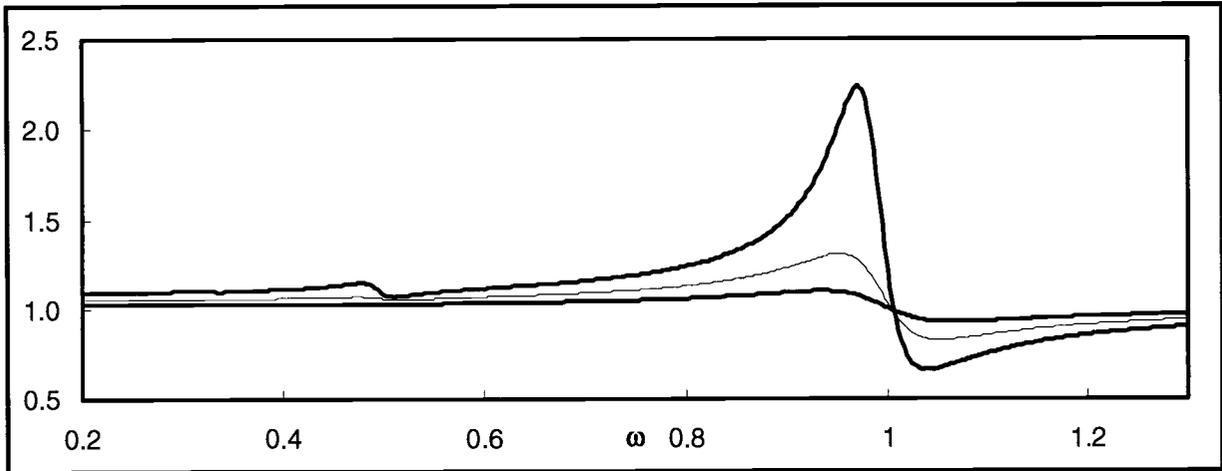


Figure II.8 : Valeur moyenne temporelle de la réponse forcée en déplacement en fonction de la pulsation excitatrice interne.

Clairement, la réponse d'un tel système n'est pas harmonique puisque la valeur moyenne temporelle n'est pas nulle. On constate, pour la valeur moyenne temporelle de la réponse, une anti-résonance autour de la pulsation propre $\Omega=1$ rad/s et autour de $\Omega/2$, même si le niveau de cette dernière reste faible comparé à la résonance principale. Il sera intéressant d'évaluer l'efficacité des méthodes stochastiques en présence de ce type de phénomène. On présente figure II.9 la valeur RMS de la réponse forcée pour les mêmes cas que précédemment.

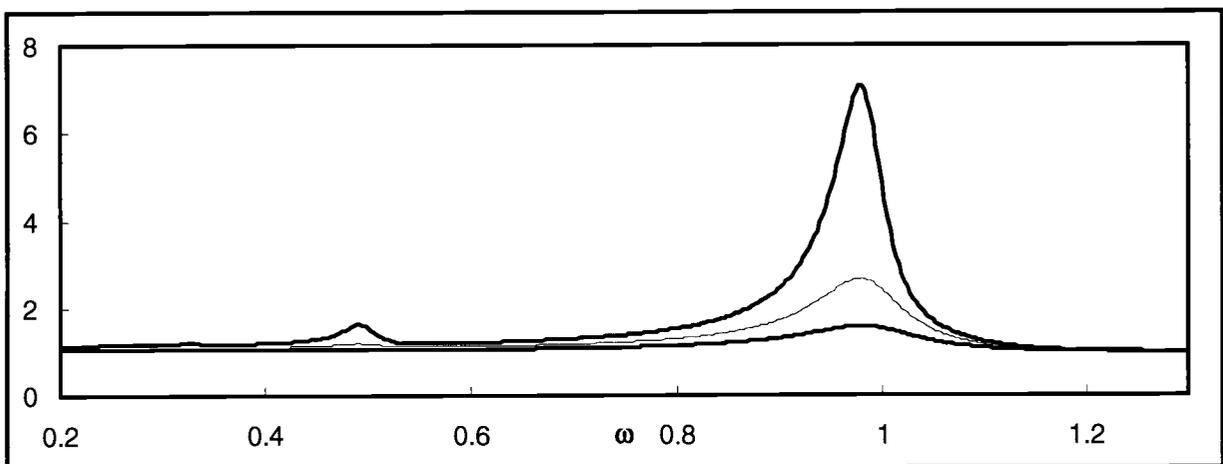


Figure II.9 : Valeur RMS de la réponse forcée en déplacement en fonction de la fréquence d'excitation interne.

Les phénomènes d'anti résonance n'existent plus et on retrouve des résonances autour de $\Omega=1$ rad/s et autour de $\Omega/2$. Les pulsations de résonance sont plus proches des valeurs prévues par la théorie que celles observées pour la valeur moyenne temporelle de la réponse. On aperçoit plus nettement la résonance sous harmonique d'ordre 2, mais celle-ci n'apparaît vraiment que pour des valeurs limites des paramètres. Cependant, le niveau de cette résonance est trop faible pour que l'on s'y intéresse lorsque les paramètres deviennent incertains.

b) Application des méthodes stochastiques.

Les paramètres incertains introduits dans ce système sont le taux d'amortissement visqueux équivalent ξ , la pulsation propre Ω et l'amplitude de l'excitation paramétrique α . Ils sont introduits par des variables aléatoires gaussiennes statistiquement indépendantes et tronquées, comme pour le cas de l'oscillateur linéaire, afin d'assurer une probabilité d'instabilité nulle. En particulier, on garantit à chaque tirage $\alpha/\sqrt{8\xi\Omega^2} < 1$. Dans cette application, on s'intéresse à la valeur RMS de la réponse forcée en déplacement définie par :

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \quad (\text{II.26})$$

L'emploi d'une simulation Monte Carlo et de la méthode Taguchi ne pose aucun problème. Par contre l'application d'une expansion en série de Taylor est très fastidieuse car le calcul numérique de la réponse forcée fait appel à un processus itératif. Enfin, l'application d'une méthode de perturbation amène quelques développements. On développe les paramètres aléatoires comme suit :

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 \quad (\text{II.27})$$

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon\Omega_1 \quad (\text{II.28})$$

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 \quad (\text{II.29})$$

De même, la réponse forcée de l'équation du mouvement II.25 peut se développer comme suit :

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) \quad (\text{II.30})$$

On injecte les égalités II.27, II.28, II.29 et II.30 dans l'équation différentielle II.25 et on regroupe les termes selon les ordres. Après troncature à l'ordre 2, on obtient deux équations différentielles, une à l'ordre 0, II.31 et une à l'ordre 1, II.32 :

$$\ddot{x}_0 + 2\xi_0\Omega_0\dot{x}_0 + (\Omega_0^2 + \alpha_0 \sin(\omega t))x_0 = f \quad (\text{II.31})$$

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_0\Omega_0\dot{x}_1 + (\Omega_0^2 + \alpha_0 \sin(\omega t))x_1 = -2(\xi_1\Omega_0\dot{x}_0 + \xi_0\Omega_1\dot{x}_0 + \Omega_0\Omega_1x_0) - \alpha_1 \sin(\omega t)x_0 \quad (\text{II.32})$$

L'équation II.31 se résout sans difficulté, la réponse x_0 correspond à celle du système déterministe aux paramètres moyens. Connaissant x_0 , la réponse x_1 est obtenue en résolvant l'équation II.32. L'application des approximations II.23 et II.24 fournit les moments de la valeur quadratique de la valeur RMS de la réponse forcée. Les moments statistiques de la valeur RMS s'obtiennent à l'aide des moments statistiques de sa valeur quadratique par les approximations suivantes :

$$E(x_{\text{RMS}}) \cong \sqrt{E(\langle x^2(t) \rangle)} \quad (\text{II.33})$$

$$\text{var}(x_{\text{RMS}}) \cong \frac{\text{var}(\langle x^2(t) \rangle)}{4E(\langle x^2(t) \rangle)} \quad (\text{II.34})$$

c) Variabilité de la réponse forcée aléatoire en déplacement.

On s'intéresse à la variabilité de la réponse forcée autour de la résonance paramétrique principale soit ω proche de 1. Le taux d'amortissement ξ , la pulsation propre Ω et l'amplitude de l'excitation paramétrique α sont les paramètres incertains du système modélisés par des variables aléatoires gaussiennes statistiquement indépendantes. Les valeurs moyennes et écart-types des paramètres sont respectivement 0,05 et 0,005 pour ξ , 1 et 0,01 pour Ω et 0,3 et 0,03 pour α . Les densités de probabilité sont tronquées à plus ou moins trois fois l'écart-type afin d'assurer une probabilité d'instabilité paramétrique nulle. L'estimation des deux premiers moments statistiques de la réponse est faite à l'aide d'une simulation Monte Carlo, d'une méthode Taguchi avec 3 points de discrétisation par variables (27 calculs au total) et une méthode de perturbation précédemment développée. La figure II.10 présente l'estimation de la valeur moyenne de la valeur moyenne temporelle de la réponse forcée en déplacement. Les trois méthodes stochastiques fournissent des prédictions quasi identiques. La valeur moyenne de la valeur moyenne temporelle de la réponse forcée correspond quasi exactement à la réponse aux paramètres moyens. La figure II.11 présente la valeur moyenne de la valeur RMS de la réponse forcée en déplacement. Là aussi la valeur moyenne correspond quasiment à la valeur aux paramètres moyens de telle sorte que la méthode de perturbation est valide.

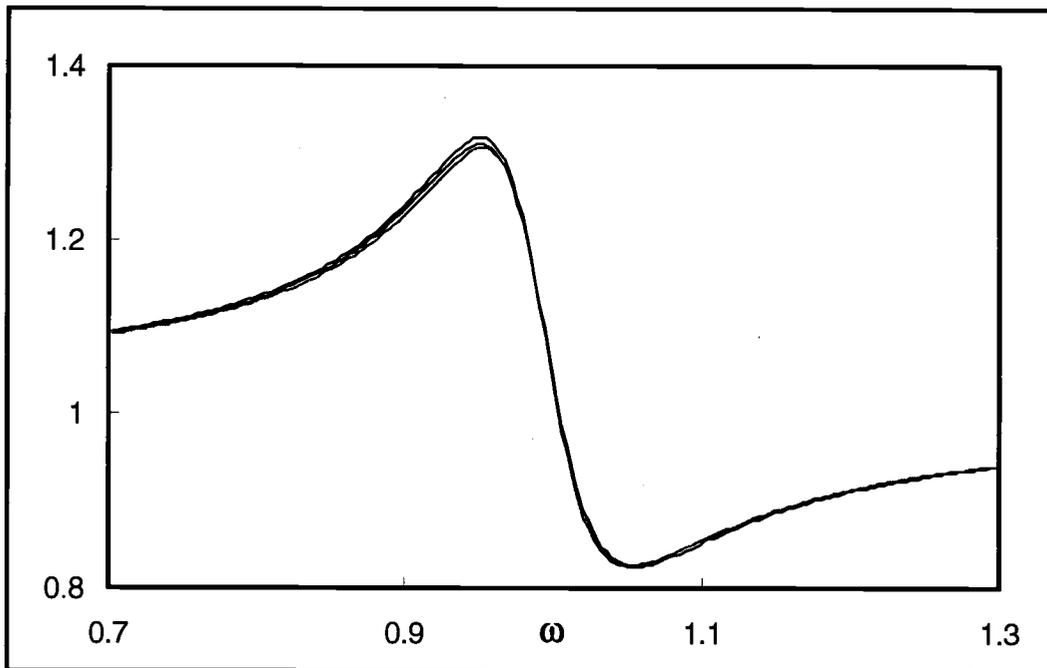


Figure II.10 : Valeur moyenne de la moyenne temporelle de la réponse en déplacement. Par Monte Carlo ; Taguchi ; Perturbation.

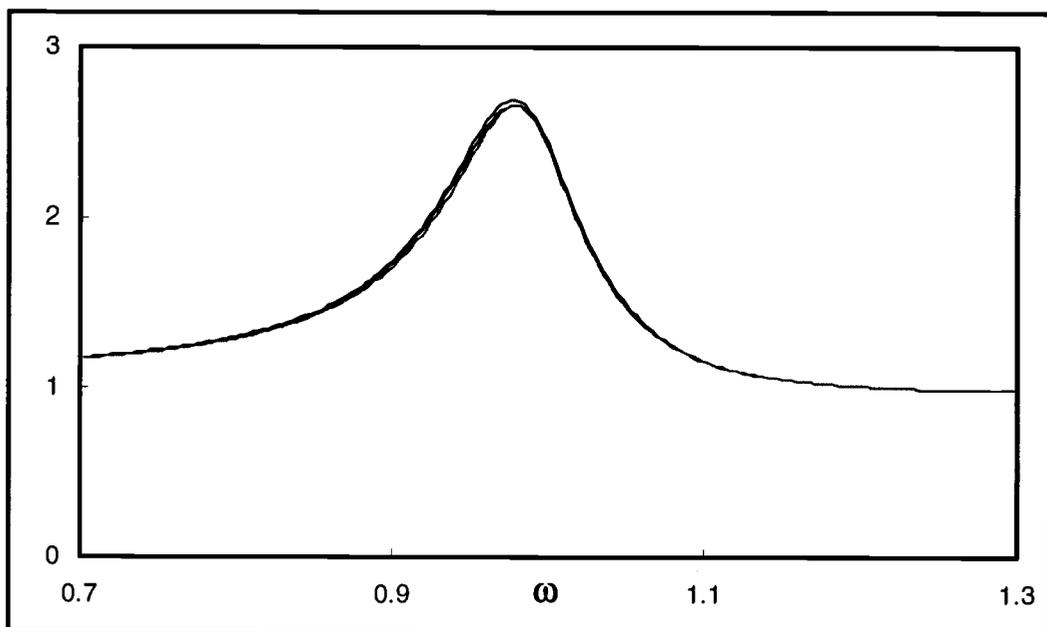


Figure II.11 : Valeur moyenne de la valeur RMS de la réponse en déplacement. Par Monte Carlo ; Taguchi ; Perturbation.

La figure II.12 présente l'estimation de l'écart type de la valeur moyenne temporelle de la réponse forcée alors que la figure II.13 présente l'écart type de la valeur RMS. On constate un très bon accord entre la méthode Taguchi et la simulation Monte Carlo au contraire de la méthode de perturbation. Lors de la prédiction de l'écart type de la valeur moyenne, la méthode de perturbation diverge deux

fois sur les pics de résonance et d'anti résonance déterministes. De plus, la méthode de perturbation ne fournit jamais des estimations proches des autres méthodes en dehors des pics d'amplification. Pour ce qui concerne la valeur RMS, on retrouve le comportement rencontré avec l'oscillateur linéaire à un degré de liberté.

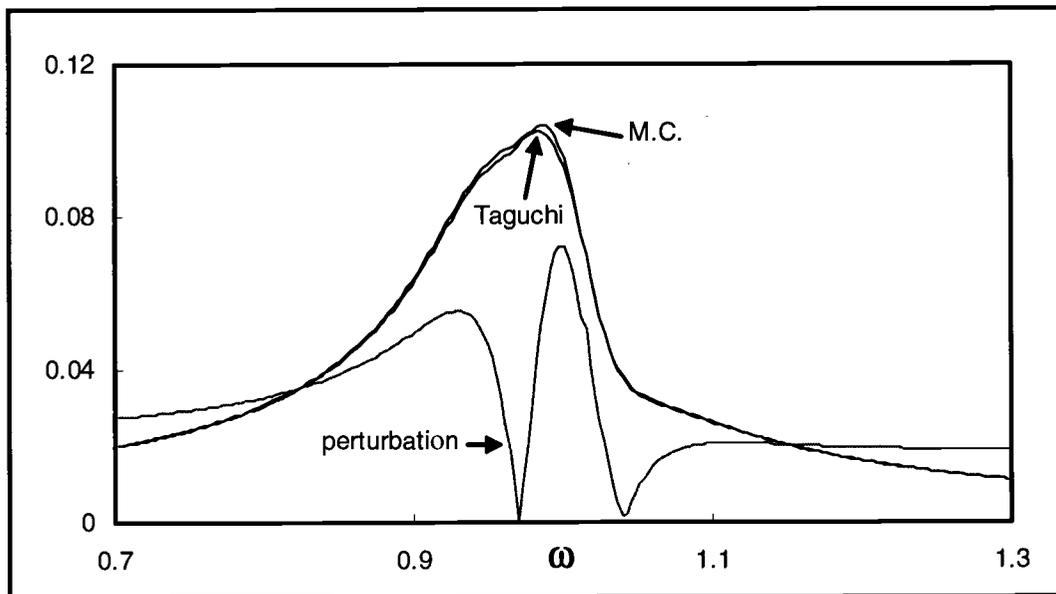


Figure II.12 : Ecart type de la moyenne temporelle de la réponse en déplacement. Par Monte Carlo ; Taguchi ; Perturbation.

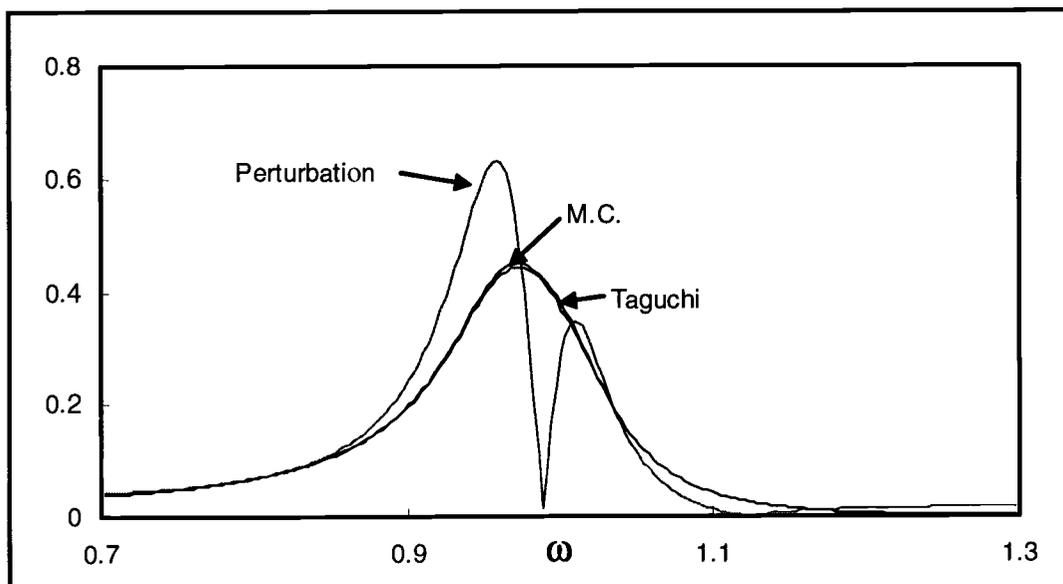


Figure II.13 : Ecart type de la valeur RMS de la réponse en déplacement. Par Monte Carlo ; Taguchi ; Perturbation.

En résumé, la méthode de perturbation semble inadaptée au traitement des systèmes mécaniques linéaires et paramétriques. Il est vrai que la variabilité d'entrée est déjà conséquente, mais la méthode Taguchi fournit des estimations très proches de celles obtenues par simulation Monte Carlo.

C. Oscillateur non linéaire de type vibro-impact à paramètres incertains.

a) Description du système et comportement déterministe.

On considère ici le système non linéaire à un degré de liberté représenté figure II.14.

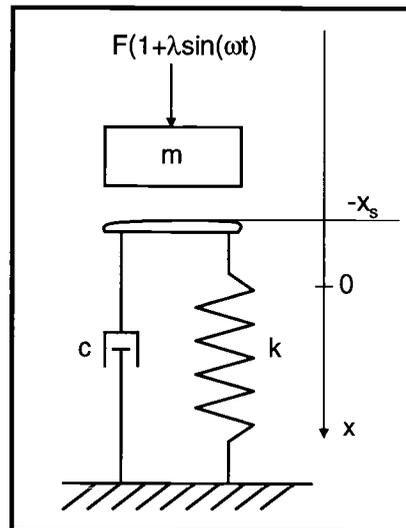


Figure II.14 : Oscillateur non linéaire de type vibro-impact.

Le système représente un oscillateur linéaire dont la masse peut décoller, introduisant une non linéarité géométrique. Le contact est sec sans force d'adhésion. Pour simplifier le traitement numérique d'un tel système, la raideur de contact est supposée linéaire et l'amortissement introduit correspond à un amortissement linéaire visqueux équivalent. On superpose à l'effort statique F , une force harmonique normale. L'équation du mouvement régissant les vibrations forcées s'écrit :

$$m\ddot{x} + H(c\dot{x} + kx)[c\dot{x} + kx] = F(1 + \lambda \sin(\omega t)) \quad (\text{II.35})$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside.

Pour écrire l'équation du mouvement II.35 sous forme adimensionnelle, on introduit la pulsation propre de contact $\Omega^2 = k/m$ et la position d'équilibre statique $x_s = mg/k$. L'équation adimensionnelle s'obtient aisément en effectuant les changements de variables suivants : $\tau = \Omega t$, $\varpi = \omega/\Omega$, $q = x - x_s$ et $2\xi = c/m\Omega$. L'équation II.35 devient :

$$q'' + 2\xi q' + (1 + q) = 1 + \lambda \sin(\varpi \tau) \quad \text{si } q \geq -1$$

$$q'' = 1 + \lambda \sin(\omega t) \quad \text{si } q < -1 \quad (\text{II.36})$$

où q' désigne la dérivée par rapport à τ . La première équation correspond à celle d'un oscillateur linéaire classique et la deuxième à celle d'un vol libre soumis à une excitation harmonique.

Les expressions analytiques des solutions (Perret-Liaudet 1997) permettent de construire la réponse du système par morceaux à ces deux équations. La difficulté résulte de la méconnaissance des temps τ pour lesquels le contact s'établit ou se rompt. En effet, ces temps ne sont pas connus de manière explicite. Cependant, dans cette étude, nous allons nous intéresser à la résonance non linéaire principale qui correspond à la réponse forcée dont la fréquence dominante est égale à la fréquence excitatrice. Pour ce faire il convient de déterminer les solutions périodiques du système non linéaire II.36 de période égale à la période d'excitation. Supposons connu l'instant initial τ_0 d'entrée en contact, on calcule le temps qui correspond à la première perte de contact τ_1 à l'aide de la solution de l'oscillateur linéaire. Puis, la réponse obtenue à cet instant est introduite sous forme de conditions initiales dans la solution du vol libre. Puisque l'on connaît la position où le contact se rétablit, on en déduit l'instant final correspondant τ_2 à l'aide de la solution vol libre. En imposant une condition de périodicité ($\tau_2 = \tau_0 + T$ et $v_2 = v_0$), on peut construire la solution complète pour une période entière en recherchant τ_0 qui correspond au déphasage de la réponse. Le schéma suivant (figure II.15) illustre la démarche : q_+ correspond à la solution de l'oscillateur linéaire, q à celle du vol libre, τ_1 l'instant de la première perte de contact et τ_2 l'instant pour lequel le contact se rétablit.

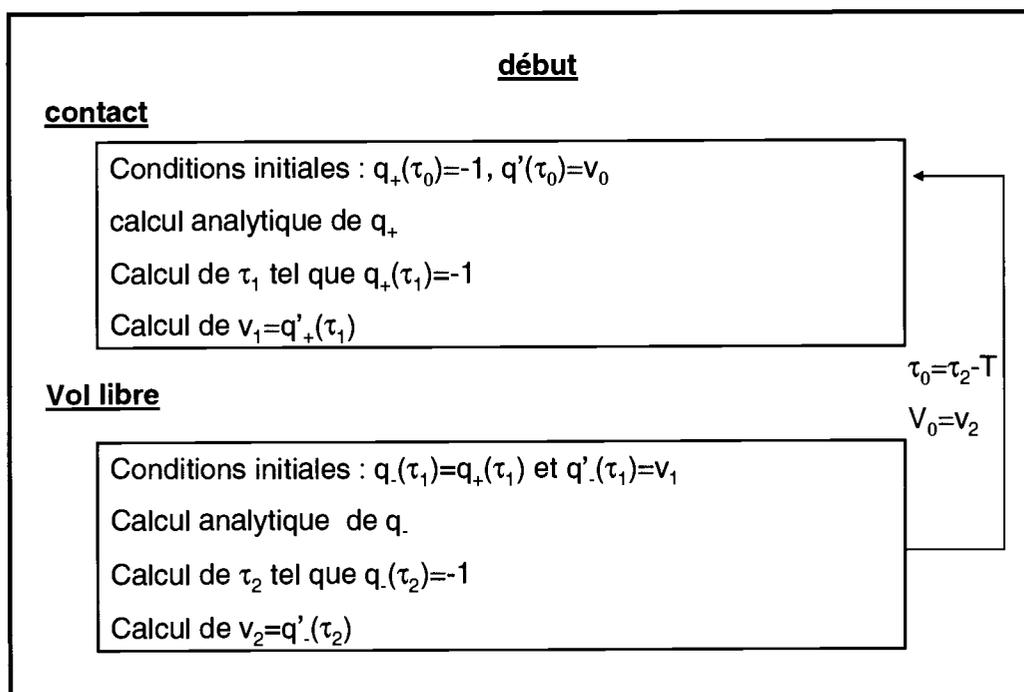


Figure II.15 : Principe de résolution de l'équation II.36.

De plus, cette technique peut être assortie d'un calcul de stabilité des solutions obtenues (Perret-Liaudet 1997) et permet de caractériser la réponse en fréquence autour de la résonance principale non linéaire. La figure II.16 présente la résonance principale non linéaire de ce système dans le cas où $m=1$ kg, $F=1$ N, $c=0,05$ kg/s, $k=1$ N/m et $\lambda=0,075$. Plus précisément, il s'agit de l'amplitude crête à crête de la réponse T-périodique en fonction de la pulsation excitatrice ω .

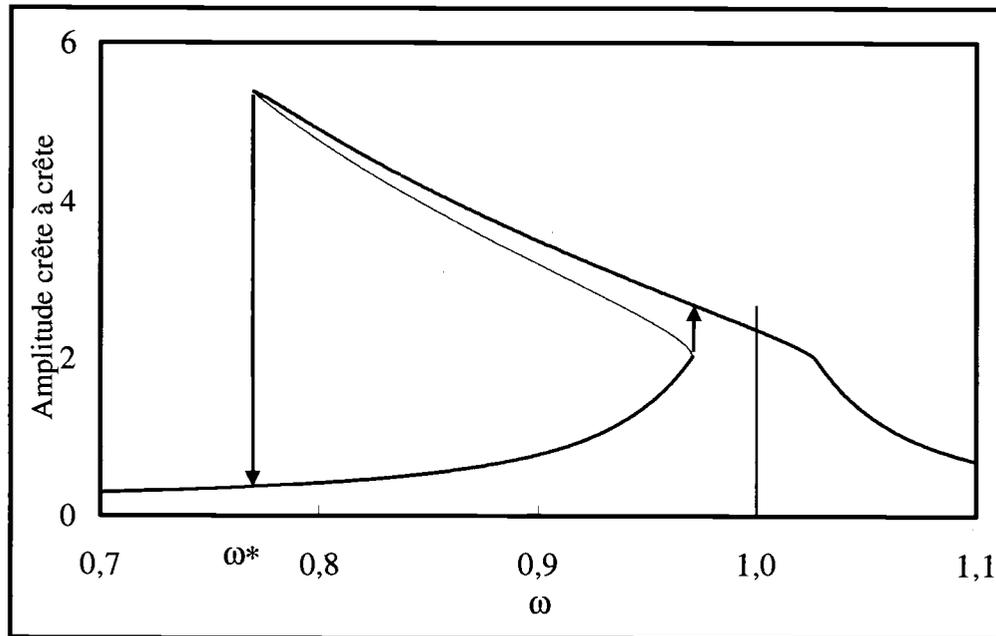


Figure II.16 : Résonance non linéaire principale en déplacement.

— réponse stable; — réponse instable.

La résonance principale de ce système présente un comportement de type mollissant associé à la perte de contact. Au cours d'un balayage décroissant et quasi-statique de la fréquence excitatrice, on observe donc un saut d'amplitude à une pulsation $\omega^*=0,7652$ rad/s inférieure à la pulsation de résonance obtenue pour de faibles amplitudes de la réponse. Un autre saut d'amplitude est observé lors d'un balayage croissant mais à une valeur de fréquence plus élevée. Enfin, le comportement d'un tel système dépend du rapport entre la charge dynamique et la charge statique appliquées. Pour de faibles valeurs de l'excitation harmonique, on retrouve le comportement d'un oscillateur linéaire classique.

b) Oscillateur non linéaire à paramètres incertains.

Nous considérons maintenant ce système en supposant que l'amortissement c , la raideur k et la force excitatrice σ sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes. On choisit de les décrire par des densités de probabilité uniformes dont les valeurs moyennes sont celles de la figure II.16 et les plages de variation sont respectivement égales à $\pm 0,01$ kg/s, $\pm 0,03$ N/m et $\pm 0,005$.

Le tableau II.1 présente les deux premiers moments statistiques obtenus pour la pulsation de saut ω^* . La méthode Taguchi (3 points, 27 configurations) s'avère très précise et rapide alors que la variabilité est conséquente. L'emploi des méthodes de Taylor et de perturbation est, dans ce cas, inadapté.

	Monte-Carlo (30000)	Taguchi (27)
Moyenne	$7.391 \cdot 10^{-1}$	$7.395 \cdot 10^{-1}$
Ecart type	$1.458 \cdot 10^{-1}$	$1.454 \cdot 10^{-1}$

Tableau II.1: Moments statistiques de la pulsation de saut ω^* (rad/s).

IV. Systèmes dynamiques à deux degrés de liberté possédant des paramètres incertains.

On s'intéresse maintenant à la variabilité du comportement dynamique de systèmes possédant deux degrés de liberté. Nous allons juger de l'efficacité de la méthode Taguchi en comparant les résultats obtenus à ceux d'une simulation Monte Carlo. Le premier système dynamique va permettre de montrer que la méthode Taguchi est une méthode de résolution efficace pour des systèmes linéaires où interviennent plusieurs modes propres. Le second système étudié illustrera les problèmes que l'on peut rencontrer lorsque le comportement dynamique est très sensible aux valeurs des caractéristiques de l'amortissement.

A. Système à deux degrés de liberté classique.

a) Description du système et comportement déterministe.

On présente à présent le système mécanique à deux degrés de liberté. La figure II.17 illustre ce système.

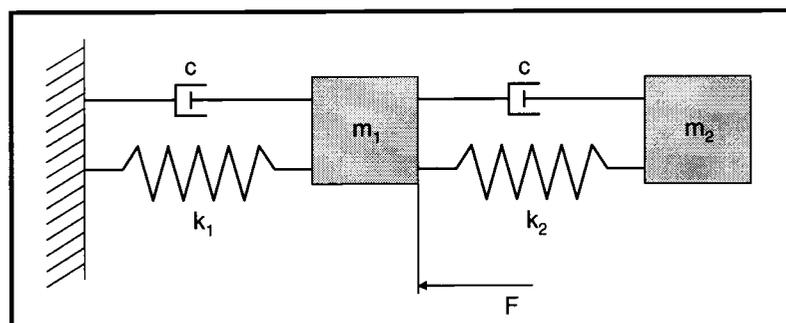


Figure II.17 : Système dynamique à deux degrés de liberté.

L'équation différentielle régissant les vibrations forcées de ce système est la suivante :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (\text{II.37})$$

$$\text{où } [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ et } \{F\} = \begin{Bmatrix} F \cos(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

L'effort imposé sur la masse 1 est un effort harmonique de pulsation Ω . La réponse forcée est cherchée sous forme d'une expansion à l'aide des deux modes propres du système. L'amortissement est introduit après l'analyse modale sous forme d'un amortissement modal linéaire visqueux équivalent. On présente, figure II.18, la réponse fréquentielle en amplitude du déplacement de ce système pour les valeurs : $m_1=2$ kg, $m_2=5$ kg, $k_1=4$ N/m, $k_2=1$ N/m, un amortissement modal de 2 % sur chacun des modes et une amplitude de l'effort extérieur égale à 2 N.

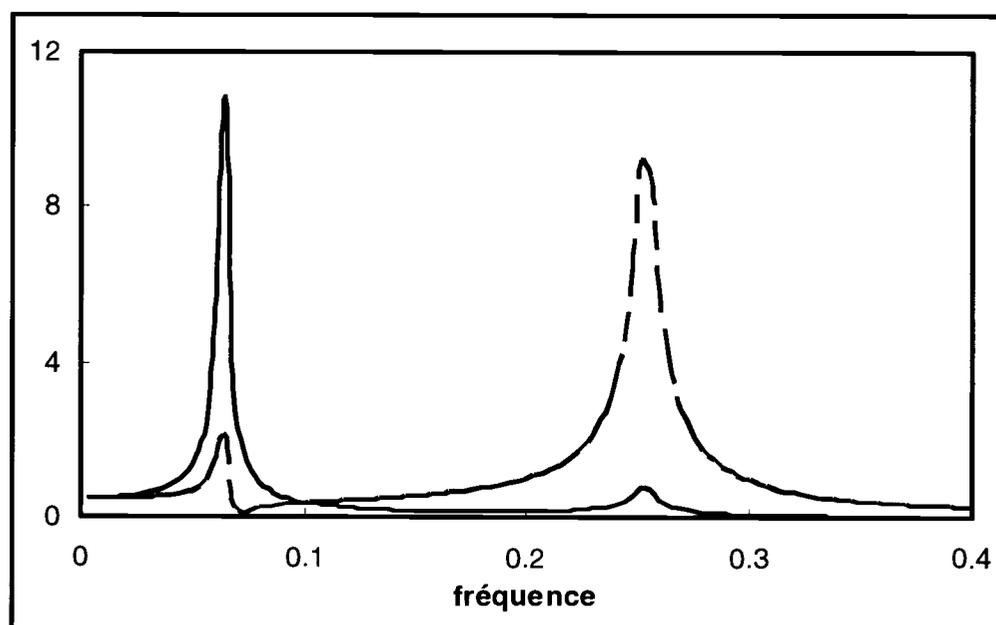


Figure II.18 : Amplitude de la réponse déplacement (m) en fonction de la fréquence d'excitation. --- réponse m_1 , — réponse m_2 .

Les fréquences de résonance sont égales à 0.0640 Hz et 0.252 Hz. Les modes sont suffisamment éloignés de telle sorte qu'on peut considérer qu'ils sont découplés. Les pics de résonance sont fins car l'amortissement est faible.

b) Variabilité du comportement dynamique.

On s'intéresse à la prédiction du comportement dynamique lorsque les raideurs k_1 et k_2 sont des paramètres incertains. On les modélise par des variables aléatoires statistiquement indépendantes de

densité de probabilité gaussienne. Les valeurs moyennes correspondent aux valeurs déterministes ($k_1=4$ N/m, $k_2=1$ N/m) et les écarts types sont égaux à 10 % de la valeur moyenne. La dispersion d'entrée est déjà conséquente. Nous calculons la valeur moyenne et l'écart type de l'amplitude de la réponse déplacement à l'aide d'une simulation de Monte Carlo de 30000 tirages, d'une méthode Taguchi avec trois points de discrétisation par variable aléatoire et d'une méthode Taguchi avec quatre points de discrétisation par variable aléatoire.

La figure II.19 présente la valeur moyenne de l'amplitude de déplacement de la masse 1 en fonction de la fréquence d'excitation, obtenue par les trois méthodes stochastiques.

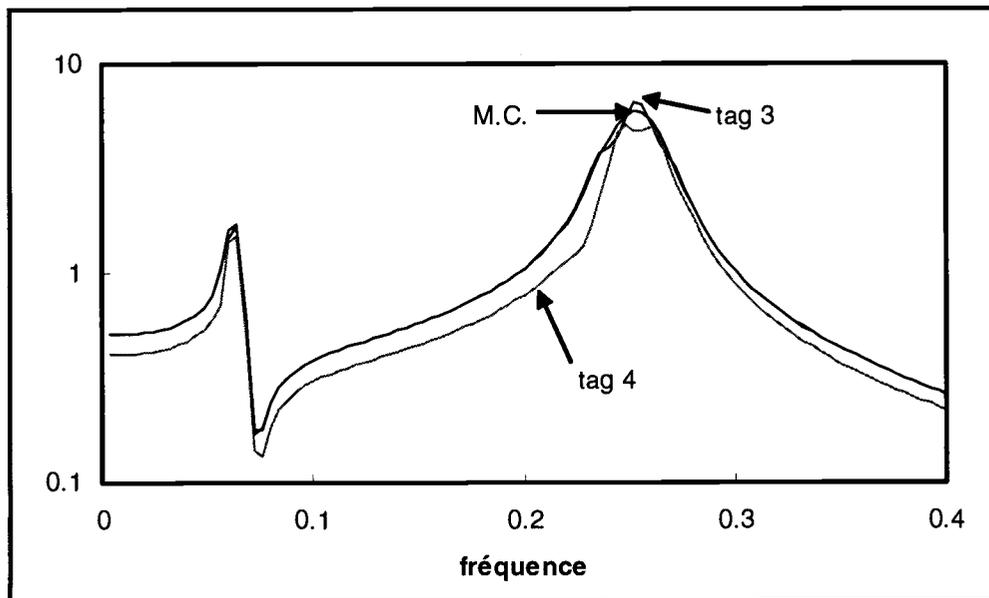


Figure II.19 : Valeur moyenne de l'amplitude de la réponse forcée en déplacement de la masse 1 en fonction de la fréquence d'excitation par Monte Carlo, Taguchi 3 points, Taguchi 4 points.

La méthode Taguchi utilisée avec quatre points de discrétisation par variable est moins performante que la même méthode avec trois points. En effet, la discrétisation en quatre points n'inclue pas la valeur moyenne des variables aléatoires, de telle sorte que la réponse aux paramètres moyens n'apparaît pas lors de l'estimation des moments statistiques de la réponse. Ce problème est d'autant plus gênant que les distributions des variables aléatoires sont gaussiennes donc privilégiant des réponses autour des paramètres moyens. La méthode Taguchi à trois points de discrétisation fournit une estimation identique à celle donnée par la simulation Monte Carlo sauf aux pics de résonance où le niveau prédit n'est pas exactement le même. La figure II.20 présente les mêmes résultats obtenus pour la réponse forcée de la masse 2. Les conclusions sont identiques, il subsiste un écart de prédiction aux pics de résonance. En fait, on retrouve les mêmes problèmes déjà rencontrés pour le système linéaire à un degré de liberté. Lorsque l'amortissement est très faible, le nombre de points de discrétisation de chacune des variables aléatoires doit être important. On pourrait affiner

l'estimation en augmentant le nombre de points de discrétisation, par exemple neuf points de discrétisation par variable.

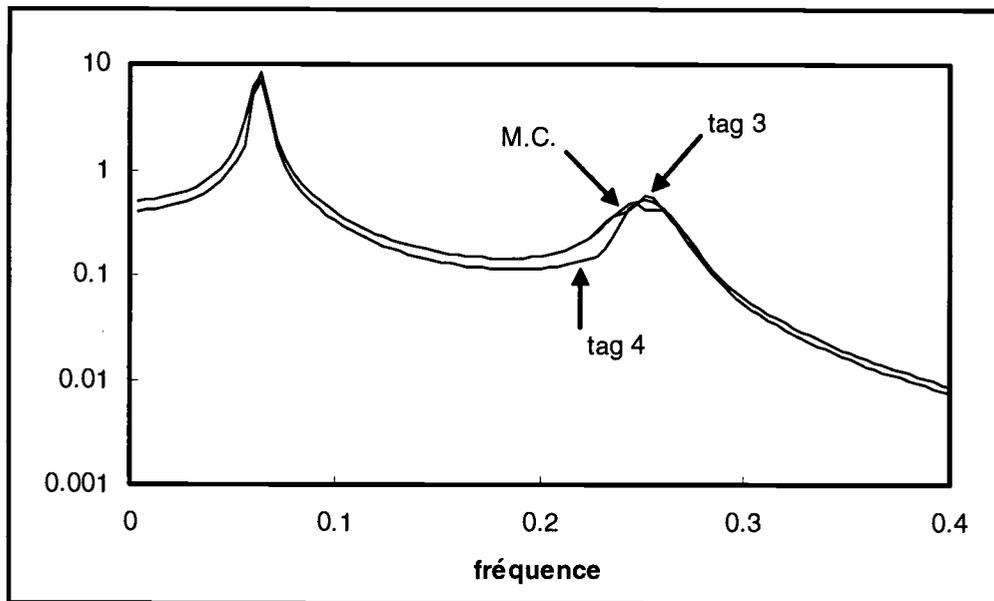


Figure II.20 : Valeur moyenne de l'amplitude de la réponse forcée en déplacement de la masse 2 en fonction de la fréquence d'excitation. Par Monte Carlo, Taguchi 3 points, Taguchi 4 points.

On présente maintenant les écarts types calculés à l'aide des trois méthodes stochastiques. La figure II.21 présente l'écart type de la réponse de la masse 1 alors que la figure II.22 présente l'écart type de la réponse de la masse 2.

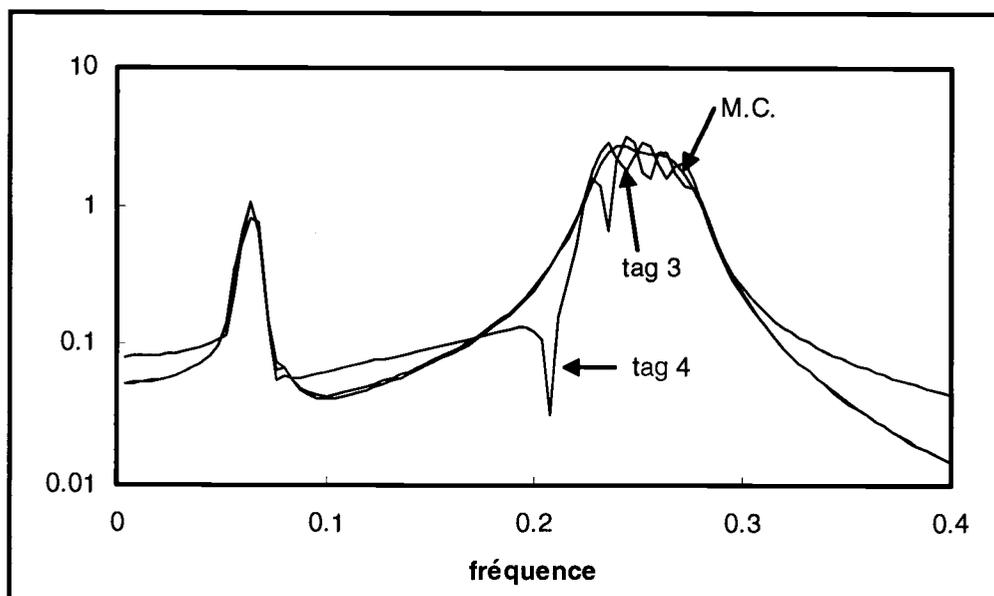


Figure II.21 : Ecart type de l'amplitude de la réponse forcée en déplacement de la masse 1 en fonction de la fréquence d'excitation. Par Monte Carlo, Taguchi 3 points, Taguchi 4 points.

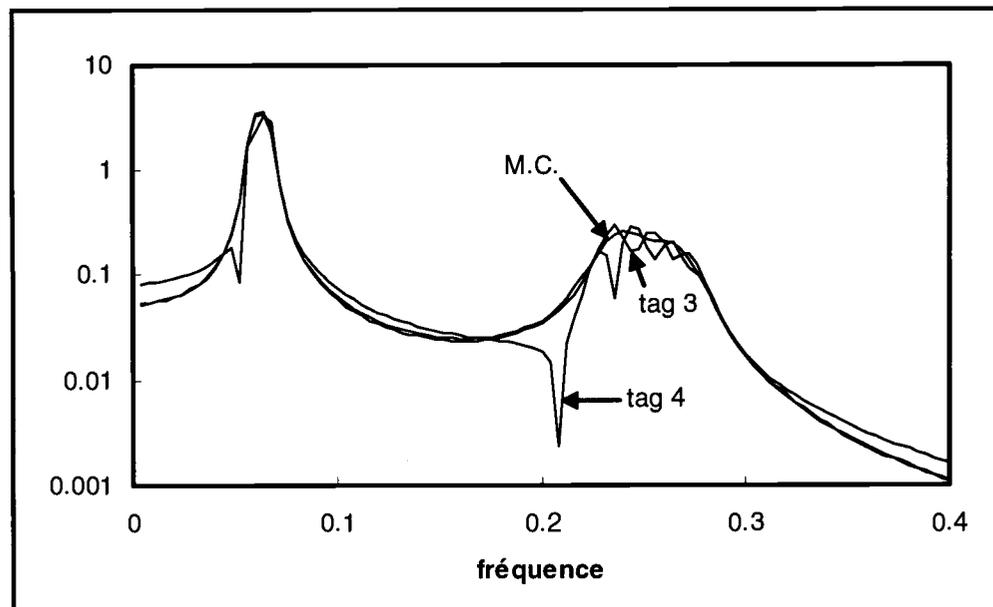


Figure II.22 : Ecart type de l'amplitude de la réponse forcée en déplacement de la masse 2 en fonction de la fréquence d'excitation. Par Monte Carlo, Taguchi 3 points, Taguchi 4 points.

La variabilité est conséquente puisque les écarts types prédits aux pics de résonance sont du même ordre de grandeur que les niveaux moyens de réponse. Les courbes de prédiction fournies par les méthodes Taguchi font apparaître des oscillations dont le nombre correspond au nombre de points de discrétisation. Ces oscillations sont dues à une forte variation des fréquences de résonance.

L'écart de prédiction entre la méthode Taguchi à 3 points et la méthode Taguchi à 4 points s'accroît fortement. Clairement, le choix d'une méthode Taguchi comprenant un nombre pair de points de discrétisation n'est pas valide dans le traitement des systèmes dynamiques à paramètres incertains modélisés par des variables gaussiennes. La méthode Taguchi 3 points fournit, malgré un amortissement faible (pic aigu) et une variabilité d'entrée forte, des résultats satisfaisants au regard de la simulation Monte Carlo. Rappelons que la simulation Monte Carlo a été effectuée avec 30000 tirages alors que la méthode Taguchi n'a nécessité que 9 calculs.

En conclusion de cette étude, il apparaît quelques points importants :

- le choix du nombre de points de discrétisation doit permettre d'effectuer un calcul de la réponse aux paramètres moyens,
- lorsque les modes propres sont bien découplés on retrouve les caractéristiques de la variabilité du comportement d'un oscillateur linéaire à un degré de liberté,
- le choix d'une base de vecteurs propres aléatoires ne se pose pas contrairement à l'application d'une méthode de perturbation, et
- les performances des méthodes Taguchi sont très bonnes même pour une dispersion d'entrée conséquente et des pics de résonance aigus.

B. Système à deux degrés de liberté sensible à l'amortissement.

On s'intéresse à présent à la variabilité du comportement dynamique d'un système mécanique possédant deux degrés de liberté, dont le comportement diffère fortement selon les valeurs d'amortissement introduites.

a) Description du système et comportement déterministe.

Le système dynamique étudié est représenté figure II.23.

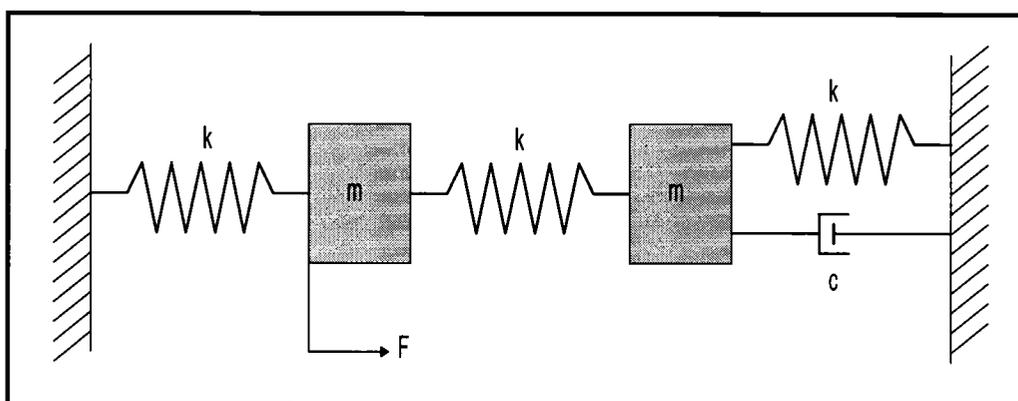


Figure II.23 : Système mécanique à deux degrés de liberté.

L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (\text{II.38})$$

$$\text{où } [M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; [K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ et } \{F\} = \begin{Bmatrix} F \cos(\Omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

On s'intéresse à la réponse forcée en déplacement pour un effort harmonique, pour $m=k=1$, et plus particulièrement à la réponse de la masse où est appliqué cet effort. Le module de la réponse déplacement se calcule directement, sans analyse modale du système, et est donné par :

$$|X| = \frac{F\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{(a^2 - 1)^2 + a^2 b^2}} \quad (\text{II.39})$$

où $a = 2 - \Omega^2$ et $b = c\Omega$.

La réponse forcée dépend sensiblement des valeurs de l'amortissement c . En effet, lorsque c est grand (au-delà de 2), la masse sujette à l'amortissement se trouve 'bloquée' et la réponse ne présente plus qu'une seule résonance. La figure II.24 illustre ce phénomène. Elle représente le module défini par l'équation II.39 en fonction de la fréquence excitatrice Ω pour diverses valeurs de l'amortissement. Le passage de deux à une seule résonance semble s'effectuer pour des valeurs de l'amortissement proches de 1. Les valeurs des pulsations de résonance sont $\Omega_1= 1$ et $\Omega_3= 1.732$ rad/s pour un amortissement inférieur à 1 et, $\Omega_2= 1.41421$ rad/s pour un amortissement supérieur à 1.

Il apparaît intéressant de tester la méthode Taguchi dans le cas où l'amortissement c est un paramètre incertain modélisé par une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme. La plage de variation de celui-ci doit être centrée autour de 1 car dans le cas où cette plage est centrée autour d'une valeur plus élevée, le comportement sera dominé par l'apparition d'un seul pic de résonance.

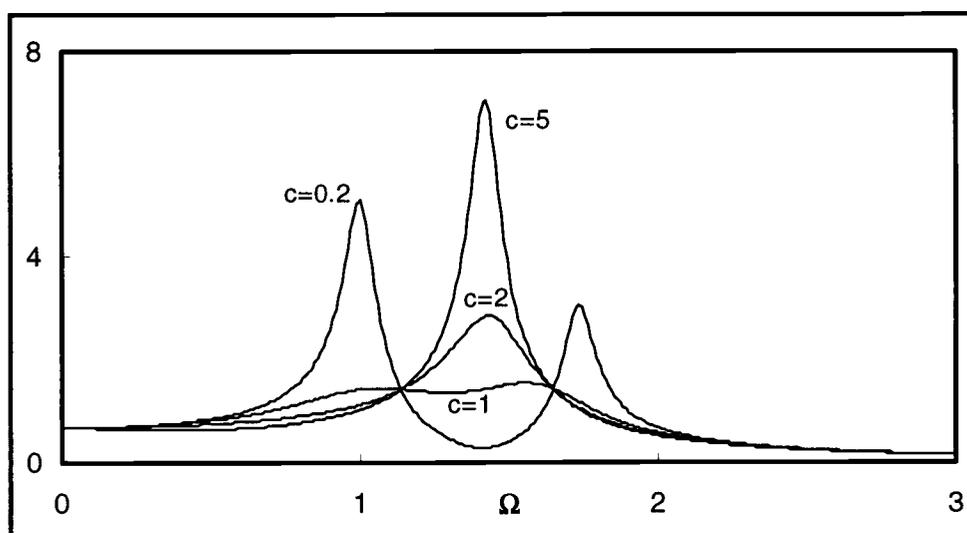


Figure II.24 : Module de la réponse déplacement, pour plusieurs valeurs de c .

b) Variabilité du comportement dynamique lorsque l'amortissement est incertain.

On s'intéresse à la variabilité de la réponse fréquentielle en déplacement de la masse où est appliqué l'effort harmonique. L'amortissement c est un paramètre aléatoire de densité de probabilité uniforme $p(c)$ (figure II.25) dans l'intervalle $[0.1, 2.1]$.

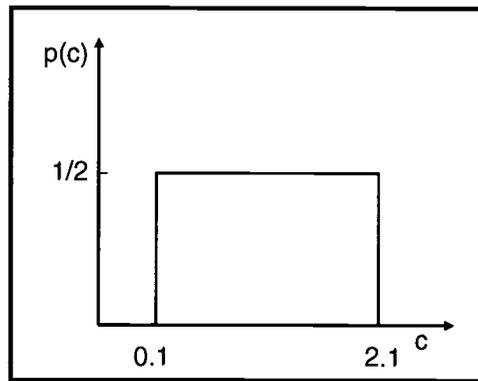


Figure II.25 : Densité de probabilité de l'amortissement c .

Les moments statistiques du module de la réponse forcée en déplacement sont estimés à l'aide d'une simulation Monte Carlo de 30000 tirages et de la méthode Taguchi à trois points de discrétisation pour la variable aléatoire. Les valeurs des points et des pondérations associées sont données par la figure II.2.

La figure II.26 présente les résultats obtenus pour la valeur moyenne de la réponse forcée en fonction de la pulsation Ω alors que la figure II.27 présente les résultats pour l'écart type de cette même réponse. Le comportement aléatoire ne présente pas de résonance fine mais des résonances apparaissent autour des trois pulsations de résonance déterministes Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 et plus particulièrement lors de l'estimation de l'écart type : il y a bien un mélange de réponses fréquentielles à deux pics et à un pic. Enfin, la valeur moyenne de la réponse ne correspond pas avec la réponse aux paramètres moyens de telle sorte qu'une méthode de perturbation à l'ordre 0 échouerait.

L'estimation de la valeur moyenne par la méthode Taguchi est très correcte vis à vis des résultats fournis par la simulation Monte Carlo. Par opposition, l'estimation de l'écart type est mauvaise autour des pulsations de résonance déterministes. La méthode Taguchi sous estime fortement la variabilité. Enfin, la variabilité des niveaux de réponse est conséquente puisque l'écart type est du même ordre de grandeur que la valeur moyenne.

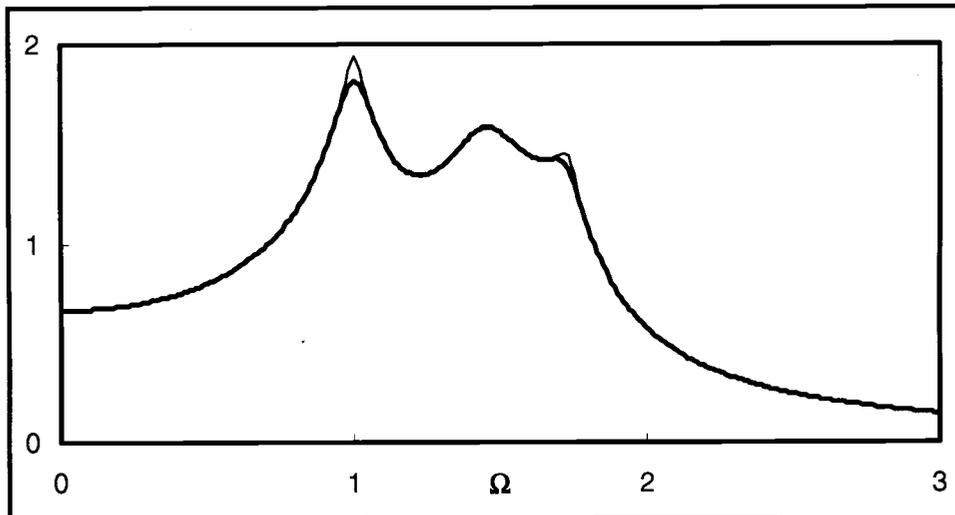


Figure II.26 : Moyenne du module de la réponse déplacement (m). trait fin : Monte Carlo, trait épais : Taguchi 3 points.

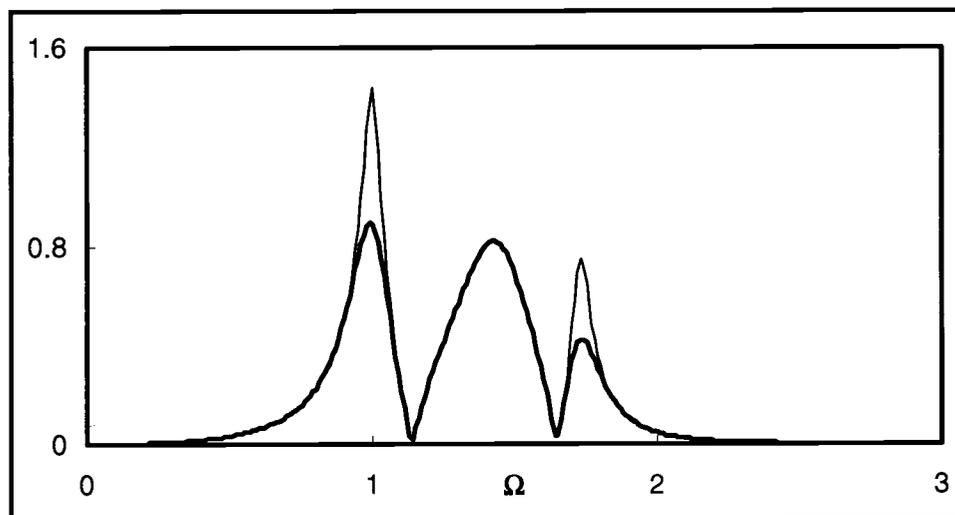


Figure II.27 : Ecart type du module de la réponse déplacement (m). trait fin : Monte Carlo, trait épais : Taguchi 3 points.

Les résultats de la méthode Taguchi à trois points ne sont pas satisfaisants, aussi nous allons effectuer le même calcul pour neuf points de discrétisation. Les valeurs de l'amortissement et les poids associés sont donnés dans le tableau II.2.

Valeurs de c	Poids associé
0.13184	0.040635
0.26397	0.09032
0.48663	0.130305
0.77575	0.15617
1.1	0.165115
1.42425	0.15617
1.71337	0.130305
1.93603	0.09032
2.06816	0.040635

Tableau II.2 : Valeurs de c et poids associés pour une discrétisation en 9 points.

La figure II.28 présente l'estimation de la valeur moyenne de la réponse fréquentielle obtenue par simulation Monte Carlo et par la méthode Taguchi à 9 points alors que la figure II.29 présente l'estimation de l'écart type.

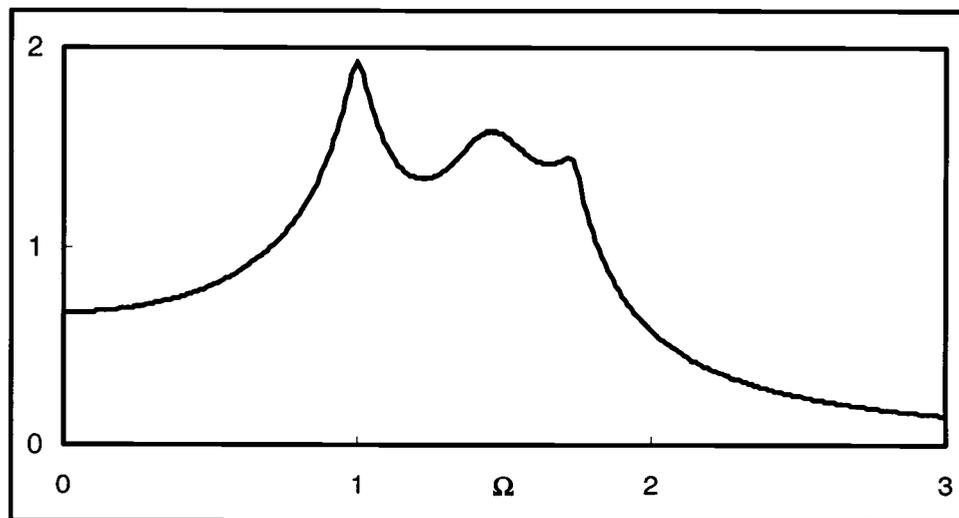


Figure II.28 : Moyenne du module de la réponse déplacement (m). trait fin : Monte Carlo, trait épais : Taguchi 9 points.

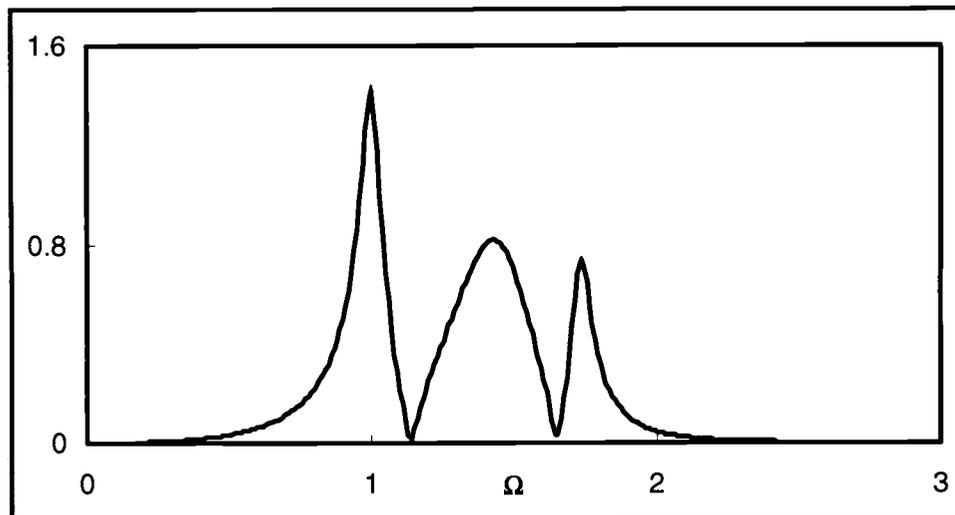


Figure II.29 : Ecart type du module de la réponse déplacement (m). trait fin : Monte Carlo, trait épais : Taguchi 9 points.

Les prédictions sont identiques à celles obtenues par simulation Monte Carlo que ce soit pour la valeur moyenne ou pour l'écart type.

V. Conclusion.

L'ensemble de résultats présentés permet d'apporter des informations précieuses, d'une part sur l'efficacité des méthodes stochastiques traitant des systèmes dynamiques possédant des paramètres incertains, d'autre part sur le comportement aléatoire de tels systèmes.

En premier lieu, la méthode Taguchi s'avère performante pour l'ensemble des systèmes étudiés contrairement aux méthodes de perturbation ou d'expansion en série de Taylor fastidieuses à mettre en œuvre voir inadaptées, particulièrement pour le cas du système non linéaire. Une attention particulière doit être portée sur le choix du nombre de points de discrétisation des variables aléatoires. Ce choix est dicté essentiellement par la nécessité d'effectuer un calcul aux paramètres moyens qui impose un nombre impair de points de discrétisation. D'autre part, le nombre de points dépend beaucoup de la sensibilité du système et de la variabilité d'entrée.

Le comportement dynamique aléatoire est, quant à lui, caractérisé par plusieurs phénomènes :

- on observe un élargissement des pics de résonance dû à une variation des fréquences propres du système,
- Les niveaux de réponse sont fortement affectés par la variabilité d'entrée et sont couplés aux variations des lieux de résonance,
- La représentation en valeur moyenne et écart type des réponses fréquentielles ne permet pas de quantifier séparément la variabilité des niveaux de la variabilité des lieux de résonance et, ne fournit une information qu'en terme de bornes du comportement,

- La simulation Monte Carlo est la seule méthode permettant de connaître directement la densité de probabilité des réponses aléatoires et donc susceptible de fournir une information complète sur la réponse aléatoire,
- Les variabilités peuvent être importantes puisque les valeurs des écarts types sont souvent du même ordre de grandeur que les réponses moyennes à proximité des résonances,
- La réponse aux paramètres moyens n'est qu'une approximation souvent erronée de la valeur moyenne du comportement dynamique.

Le traitement du comportement dynamique des boîtes de vitesses s'appuie sur une modélisation éléments finis de la transmission et sur la résolution d'une équation différentielle paramétrique matricielle après analyse modale. Il apparaît délicat de mettre en œuvre une méthode de perturbation pour le traitement du comportement dynamique lorsque les valeurs de raideur (excitation interne) et les valeurs d'excitation externes (cf paragraphe III.B) sont sujettes à incertitude. Aussi, le chapitre suivant présente l'étude complète d'une transmission par engrenages dont la micro géométrie des dentures est affectée par l'introduction des tolérances de fabrication par la méthode Taguchi.

CHAPITRE III.....94

ETUDE DE LA VARIABILITÉ VIBROACOUSTIQUE D'UNE TRANSMISSION PAR ENGRENAGES SIMPLE ETAGE PAR LA MÉTHODE TAGUCHI	94
<i>I. Introduction.</i>	94
<i>II. Les plans d'expériences : un outil original.</i>	94
A. Pourquoi les plans d'expériences ?	94
B. La mécanique des plans d'expériences.	95
a) Les plans factoriels complets.....	95
b) Calcul des effets des facteurs.	96
c) Le modèle linéaire.	96
d) Notion de résidus.....	97
e) Notion d'interaction, calcul des coefficients d'une interaction.....	97
f) Les plans d'expériences fractionnaires.	98
C. La démarche Taguchi associée aux plans d'expériences.	99
a) Graphes linéaires associés à un modèle.....	99
b) Les tables orthogonales de Taguchi.....	100
D. L'analyse de variance.	101
a) Pourquoi l'analyse de variance ?.....	101
b) Le processus d'analyse de variance.	101
E. Conclusion.	102
<i>III. Description de la transmission par engrenages étudiée : défauts de géométrie, modélisation globale de la transmission et principe de calcul de la variabilité.</i>	103
A. Caractéristiques de l'engrenage et défauts de géométrie.	103
B. Géométrie de la transmission et modélisation globale.....	104
a) Géométrie de la transmission.	104
b) Modélisation globale de la transmission.....	104
C. Plan d'expériences retenu et principe du calcul de la variabilité.....	109
a) Choix du plan d'expériences, choix des valeurs des défauts	110
b) L'analyse de variance.....	111
c) Méthode de calcul de la variabilité	111
<i>IV. Résultats.</i>	112
A. Résultats pour la classe de qualité P8-D8.....	113
a) Erreur de transmission sous charge, raideur d'engrènement et modes propres de la transmission.	113
b) Réponse vibratoire.	116
c) Rayonnement acoustique.....	116
d) Conclusion.	121
B. Résultats pour la classe de qualité P8-D7.	121
a) Erreur statique de transmission sous charge.	121
b) Réponse vibratoire.	122
c) Rayonnement acoustique.....	123
C. Résultats pour la configuration P7-D8.....	125
D. Calculs des moments statistiques du bruit rayonné.....	126
<i>V. Conclusion.</i>	127

Chapitre III

ETUDE DE LA VARIABILITÉ VIBROACOUSTIQUE D'UNE TRANSMISSION PAR ENGRENAGES SIMPLE ETAGE PAR LA MÉTHODE TAGUCHI

I. Introduction.

On se propose, dans ce chapitre, d'étudier la variabilité d'une transmission par engrenages à l'aide de la méthode d'échantillonnage de Taguchi décrite précédemment (aussi nommée méthode de tolérancement statistique). La source de variabilité est liée aux défauts de géométrie de l'engrenage et plus particulièrement à des défauts de micro géométrie des dentures. L'application de la méthode de tolérancement statistique de Taguchi permet simultanément d'estimer les moments statistiques des grandeurs propres au comportement vibroacoustique d'un système mécanique tolérancé et d'étudier l'influence de chacun des paramètres affectés par l'introduction des tolérances.

En effet, la discrétisation des valeurs des défauts de géométrie tolérancés implique de construire un plan d'expériences factoriel complet dont les résultats fournissent, outre les moments statistiques de la réponse vibratoire et acoustique de la transmission, une information sur l'influence respective de chacun des défauts de géométrie introduits. L'organisation du chapitre est la suivante.

La première partie de ce chapitre présente brièvement l'outil plan d'expériences ainsi que la méthode d'analyse de variance utile à la hiérarchisation des facteurs du plan d'expériences dont le lecteur trouvera toutes les informations dans l'ouvrage de Pillet (1999). La deuxième partie présente la transmission par engrenages étudiée, sa modélisation ainsi que les défauts de géométrie introduits dans le modèle. On y décrira également le plan d'expériences retenu. Enfin, la dernière partie présente les résultats obtenus pour diverses classes de qualité de fabrication des défauts considérés. Les résultats concernent l'erreur de transmission, le champ vibratoire du carter de la transmission et les niveaux de bruit rayonné.

Cela permettra de conclure quant à la faisabilité d'une telle méthodologie.

II. Les plans d'expériences : un outil original.

A. Pourquoi les plans d'expériences ?

La démarche expérimentale reste incontournable pour l'acquisition des connaissances dans le domaine industriel. Une bonne démarche d'acquisition devra fournir des résultats faciles à interpréter en un minimum d'essais sans négliger la précision. La méthode des plans d'expériences permet de concilier précision et rapidité d'analyse. La construction d'un plan d'expériences est complexe, nous verrons que Taguchi a, là aussi, contribué à faciliter ce processus. Il conviendra de ne pas confondre méthode d'échantillonnage Taguchi avec méthode de construction d'un plan d'expériences même si elles sont historiquement liées.

La méthodologie traditionnelle consiste à étudier un système facteur par facteur. Elle fixe l'ensemble des facteurs non étudiés à une valeur moyenne et fait varier le facteur retenu. On peut ainsi estimer l'effet d'un facteur sur le système. Mais qu'en est-il lorsque tous les facteurs évoluent en même temps ?

Pour être capable de répondre à cette question, il faut effectuer un maillage de l'espace des paramètres et faire une mesure de la réponse en chaque nœud du maillage. Le nombre de mesures devient très vite important. La méthode des plans d'expériences fractionnaires établit un plan d'expérimentation comportant un minimum d'essais non choisis au hasard.

Les informations fournies par un plan d'expériences sont de deux types : l'influence des facteurs sur la réponse et l'existence d'interaction entre eux puis un modèle (linéaire, quadratique) de la réponse.

B. La mécanique des plans d'expériences.

a) Les plans factoriels complets.

L'étude d'un plan factoriel complet consiste à prendre en compte toutes les combinaisons possibles des valeurs, appelées niveaux, données aux facteurs. Le nombre d'essais à effectuer est facile à calculer : pour un plan comportant 3 facteurs à 2 niveaux et 2 facteurs à 4 niveaux, on aura $2^3 \times 4^2 = 128$ essais.

Un plan complet n'est que peu intéressant mais il permet de comprendre la mise en place générale des plans factoriels complets ou fractionnaires. L'ensemble des combinaisons est représenté par une matrice d'expérience dont les colonnes représentent les facteurs et leurs différents niveaux et les lignes, les combinaisons de niveaux de plusieurs facteurs. Il existe différentes notations : Taguchi, Yates. Nous utiliserons celle de Taguchi plus claire à la lecture des matrices d'expérimentation. Taguchi nomme les niveaux par des chiffres, le plus bas (1) représentant la valeur la plus faible du paramètre. A titre d'exemple le tableau III.1 présente une matrice pour 2 facteurs (A, B) à 3 niveaux (1, 2, 3), les réponses sont notées Y_i .

# essai	A	B	réponse
1	1	1	Y_1
2	1	2	Y_2
3	1	3	Y_3
4	2	1	Y_4
5	2	2	Y_5
6	2	3	Y_6
7	3	1	Y_7
8	3	2	Y_8
9	3	3	Y_9

Tableau III.1 : Plan d'expériences complet à 2 facteurs et 3 niveaux chacun.

b) Calcul des effets des facteurs.

La technique utilise les réponses données à chaque essai du plan et la moyenne de celles-ci, notée M . La formule du calcul de l'effet moyen E_{Ai} du facteur A au niveau i est :

$$E_{Ai} = \text{moyenne des réponses lorsque A est au niveau } i - M. \quad (\text{III.1})$$

Cet effet moyen représente l'écart qu'induit le facteur A au niveau i sur la réponse par rapport à la moyenne des réponses. L'effet global du facteur A est le double de l'effet moyen. L'effet de A est symétrique par rapport à la valeur moyenne des réponses. L'estimation de l'effet d'un facteur à deux niveaux nécessite uniquement la connaissance d'une seule valeur de l'effet moyen. On appelle degrés de liberté (noté ddl) le nombre de calculs nécessaires à l'estimation de l'influence d'un facteur. On peut montrer que le nombre de degrés de liberté est donné, pour un facteur à n niveaux, par :

$$\underline{\text{ddl}} = n-1 \quad (\text{III.2})$$

c) Le modèle linéaire.

Un modèle de réponse permet d'estimer la réponse pour des combinaisons de facteurs non testées par le plan d'expériences. Le modèle linéaire est le plus simple à construire, un modèle plus complexe nécessitant un nombre d'expériences plus important. Vigier (1988) propose une écriture matricielle de ce modèle. Supposons que l'on étudie 3 facteurs A, B et C respectivement à 2, 3 et 2 niveaux, on écrira :

$$Y = M + A + B + C.$$

L'écriture matricielle prendra la forme :

$$Y = \{E_{A1} \ E_{A2}\} \bullet \{A\} + \{E_{B1} \ E_{B2} \ E_{B3}\} \bullet \{B\} + \{E_{C1} \ E_{C2}\} \bullet \{C\}.$$

Les vecteurs des effets moyens sont aussi appelés les coefficients du modèle. Les vecteurs $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$ prennent différentes valeurs selon le choix du niveau des facteurs : par exemple A est au niveau 1, alors $\{A\} = \{1 \ 0\}$, B est au niveau 2, $\{B\} = \{0 \ 1 \ 0\}$. Le modèle évoqué permet de calculer la réponse théorique pour une des lignes du plan factoriel. Il suffit de remplacer les vecteurs par leurs valeurs selon la combinaison de niveaux considérée.

d) Notion de résidus.

Les résidus sont définis comme la différence entre la réponse issue du plan d'expériences et celle calculée grâce au modèle matriciel théorique. Ils sont notés r . Il y a autant de résidus que de combinaisons dans le plan. On peut démontrer que la somme des résidus est nulle. A quoi doit-on la présence des résidus ?

Il est impossible d'intégrer tous les facteurs ayant une influence, même faible, sur la réponse. Lors des mesures, on ne connaît que les valeurs des paramètres étudiés. Les paramètres non étudiés peuvent prendre différentes valeurs lors des divers essais du plan. La réponse à une configuration figée n'est donc pas unique, même lors de la répétition de la mesure. Il est généralement admis que la distribution des réponses d'une mesure identique suit la loi normale de Gauss. Cette variabilité est appelée variabilité naturelle.

Nous verrons lors de l'analyse de l'influence des facteurs (analyse de variance) l'utilisation des résidus. Ils symbolisent la manifestation de la variabilité naturelle du processus étudié.

e) Notion d'interaction, calcul des coefficients d'une interaction.

Il n'est pas rare de constater l'existence d'interactions entre 2 voire 3 paramètres. Les plans d'expériences permettent d'inclure les interactions, principalement celles à 2 facteurs, les autres étant considérées comme négligeables.

On appellera action d'ordre 1 les facteurs eux mêmes, et action d'ordre 2 les interactions. On introduit les termes d'interaction dans le modèle comme suit :

$$Y = M + A + B + AB.$$

Si les facteurs A et B ont chacun 2 niveaux la matrice d'interaction sera carrée de dimension deux. Le modèle matriciel correspondant s'écrit :

$$Y = M + \{E_{A1} E_{A2}\} \bullet \{A\} + \{E_{B1} E_{B2}\} \bullet \{B\} + \{A\} \bullet [I_{Ai,Bj}] \bullet \{B\}.$$

Le calcul des coefficients de la matrice d'interaction se fait comme suit :

$$I_{Ai,Bj} = (\text{moyenne des réponses lorsque } A = i, B = j) - M - E_{Ai} - E_{Bj}. \quad (\text{III.3})$$

Le nombre de ddl associés à une interaction est égal au produit des ddl de chaque facteur.

$$\text{ddl(I)} = (n_A - 1) \times (n_B - 1) \quad (\text{III.4})$$

Il n'est pas nécessaire de calculer tous les coefficients de la matrice. En effet, la somme des coefficients par ligne et par colonne est nulle.

f) Les plans d'expériences fractionnaires.

Lorsque le nombre de facteurs ou/et le nombre de niveaux augmente, le nombre d'essais à réaliser devient très grand, incompatible avec la réalité industrielle. Il paraît indispensable de réduire le nombre de mesures tout en conservant une bonne précision. Est-il nécessaire de réaliser toutes les expériences du plan factoriel pour estimer les coefficients du modèle linéaire ?

Il est possible d'extraire un plan factoriel fractionnaire du plan complet sous certaines conditions et, d'estimer les coefficients du modèle de manière identique. L'extraction de plans fractionnaires du plan complet ne se fait pas au hasard. La condition d'orthogonalité est indispensable pour pouvoir calculer sans biais les coefficients du modèle linéaire.

On appellera actions disjointes deux actions n'ayant aucun facteur en commun. Un préalable au critère d'orthogonalité est le critère d'équilibrage : une action est dite équilibrée si tous les niveaux qui lui sont associés sont présents en un nombre égal de fois dans la colonne. On dit alors que deux actions sont orthogonales, si, à chaque niveau de l'une, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois. Un plan est dit orthogonal si toutes les actions disjointes qu'il comporte sont orthogonales deux à deux. La condition d'orthogonalité fixe le nombre minimum de lignes que contiendra le plan fractionnaire. Elle se résume comme suit : le nombre minimum de lignes du plan fractionnaire devra être le Plus Petit Commun Multiple du produit du nombre de niveaux de toutes les actions disjointes prises deux à deux.

Une autre condition sur le nombre minimal de lignes est à prendre en considération. Le nombre de ddl d'un modèle conditionne également le nombre minimum d'essais à effectuer. Nous souhaitons calculer tous les coefficients du modèle matriciel, il est donc nécessaire d'avoir autant d'équations que d'inconnues. Considérons, par exemple le modèle suivant :

$$Y=M+A+B+C+D+BC+CD$$

niveaux	3	3	2	3	6	6
ddl	1	2	2	1	2	2

Ce dernier nécessitera au moins 12 essais donc un plan contenant 12 lignes. La condition d'orthogonalité impose en revanche 18 essais. Le plan fractionnaire aura donc 18 lignes contre 54 au plan complet.

C. La démarche Taguchi associée aux plans d'expériences.

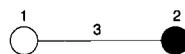
La mise au point de plans fractionnaires adaptés à un modèle est une procédure assez fastidieuse et complexe. Taguchi (1987) a développé une méthode originale permettant, à partir de quelques tables standard (plan), de résoudre facilement la plupart des problèmes industriels en matière de plans d'expériences. Les tables standard de Taguchi considèrent que les actions d'ordre 2 sont négligeables sauf quelques unes parfaitement identifiées. Les interactions d'ordre supérieur à 2 sont nulles.

a) Graphes linéaires associés à un modèle.

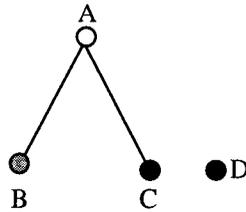
La méthode est fondée sur une représentation graphique du modèle que l'on souhaite identifier. Dans cette représentation, les facteurs sont symbolisés par des ronds. Lorsqu'on réalise une expérience, tous les facteurs ne sont pas aussi faciles à modifier. Pour répondre à cette préoccupation, Taguchi distingue quatre groupes représentés de façons différentes.

- Groupe 1, facteurs dont il est très difficile de modifier la valeur ○
- Groupe 2, facteurs plus faciles à modifier ●
- Groupe 3, facteurs faciles à modifier ●
- Groupe 4, facteurs très faciles à modifier. ●

Les interactions entre deux facteurs sont représentées par une ligne : l'interaction entre la colonne 1 et 2 se place en colonne 3.



La représentation d'un modèle est alors très simple : par exemple, $Y=M+A+B+C+D+AB+AC$



et ceci quelque soit le nombre de niveaux des facteurs.

b) Les tables orthogonales de Taguchi.

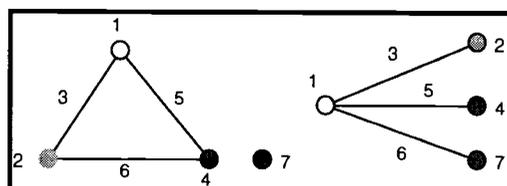
Les tables orthogonales se présentent comme un plan d'expériences classique, à ceci près que l'affectation des colonnes aux actions n'est pas précisée. A titre d'exemple, le plan exposé tableau III.2 est la table standard $L_8(2^7)$ selon Taguchi. L'affectation des colonnes se fait à l'aide des graphes linéaires fournis avec chaque table, ainsi qu'avec le triangle des interactions.

Les graphes linéaires fournis avec les tables indiquent le type de modèle que l'on peut étudier. Il y en a, en général, plusieurs pour une même table, permettant d'élargir le choix du plan fractionnaire à utiliser. Les graphes linéaires sont utiles pour placer les actions d'ordre 1 sans qu'elles soient confondues avec des interactions. La table $L_8(2^7)$ permet l'étude d'un système de 3 facteurs à 2 niveaux incluant les actions d'ordre 2 et celles d'ordre 3.

A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	1	1	2	2
1	2	2	2	2	1	1
2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	2	1	2	1
2	2	1	1	2	2	1
2	2	1	2	1	1	2

Tableau III.2 : Table standard $L_8(2^7)$.

L'introduction d'un quatrième facteur, D, que l'on pose égal à ABC (cette action étant négligeable devant toutes les autres) est une façon de construire un plan fractionnaire. Le plan présenté permet d'étudier l'influence de 7 facteurs sans interaction sans qu'aucun ne soit confondu avec l'autre. Comme on le constate avec la table $L_8(2^7)$ le facteur C ne se place pas en colonne 3, réservée à l'interaction AB. Voici les graphes linéaires associés à la table $L_8(2^7)$.



Le triangle d'interactions permet de rechercher d'autres configurations non prévues par les graphes linéaires. Ce triangle indique la colonne qui sera alias des interactions. Il recense l'ensemble des interactions entre colonnes (de 1 à 7) ainsi que leurs places dans le plan.

En résumé, la démarche Taguchi facilite la recherche d'un plan adapté. Il est d'abord nécessaire de se donner un modèle à étudier. Il faut choisir le nombre de niveaux de chaque facteur, calculer le nombre de ddl du modèle, prendre en compte le critère d'orthogonalité pour connaître le nombre minimal de lignes du plan. A ce stade plusieurs tables peuvent convenir. Ensuite vient l'établissement des graphes linéaires du modèle et la comparaison avec les graphes standards des tables retenues. Enfin, ayant trouvé un graphe standard semblable à celui du modèle, il ne reste plus qu'à affecter à chaque facteur sa colonne. Le calcul des coefficients du modèle est strictement identique à celui des plans classiques.

D. L'analyse de variance.

a) Pourquoi l'analyse de variance ?

Jusqu'à présent nous avons décrit des plans d'expériences et la mise en place des coefficients du modèle. Mais supposons qu'aucun des facteurs retenus n'aie une influence sur la réponse. Dans ce cas le calcul des effets moyens donnerait tout de même des effets non nuls. Il faut être capable de distinguer les effets significatifs des effets uniquement dus à la variabilité naturelle du processus.

L'analyse de variance permet de répondre à ce besoin. Elle fournit également une hiérarchisation de l'influence des facteurs sur la réponse du système en comparant les variances estimées pour chaque paramètre. On peut alors se permettre de négliger certains facteurs par rapport à l'ensemble des autres.

Dans la suite l'utilisation des plans d'expériences se fera en calculant numériquement la réponse à chaque combinaison de facteurs. Le processus n'aura donc aucune variabilité naturelle.

b) Le processus d'analyse de variance.

Il s'agit de calculer une estimation de la variance induite par chaque facteur et leur interaction à partir des coefficients du modèle matriciel. Par ailleurs, l'existence des résidus est une manifestation de la variabilité naturelle du processus. L'analyse de variance compare les estimations des variances des facteurs à celle des résidus afin de déterminer si l'effet calculé pour un facteur est significatif.

La comparaison des estimations se fait à l'aide d'un test dit de Snedecor. Il consiste à comparer le rapport entre la variance d'un facteur et celle de la résiduelle avec des valeurs tabulées suivant une distribution appelée loi F. Les valeurs données par la loi F prennent en considération le nombre de ddl ainsi que la probabilité, appelée risque, de se tromper au moment de conclure à la signification réelle de l'influence du facteur. Le tableau III.3, appelé tableau d'analyse de variance résume le processus.

Source	Somme des carrés	ddl	Variances	F_{exp}	$F_{theorique}$ risque de 1% ou 5%	Significatif ?
A	$S_A = \frac{N \sum E_A^2}{n_A}$	$n_A - 1 = \mu_A$	$V_A = \frac{S_A}{n_A - 1}$	$\frac{V_A}{V_R}$	Donné par la table loi de F	Oui si $F_{exp} > F_{theo}$
AB	$S_{AB} = \frac{N \sum I_{AB}^2}{n_A n_B}$	$(n_A - 1)(n_B - 1) = \mu_{AB}$	$V_{AB} = \frac{S_{AB}}{\mu_{AB}}$	$\frac{V_{AB}}{V_R}$	Donné par la table loi de F	Oui si $F_{exp} > F_{theo}$
Résidus	$S_R = \sum r^2$	$\mu_R = N - \text{ddl du modèle}$	$V_R = \frac{S_R}{\mu_R}$			

Tableau III.3 : Tableau d'analyse de variance.

Les valeurs $F_{theorique}$ sont données en fonction des ddl du numérateur (V_A ou V_{AB}) et du dénominateur (V_R). Le nombre d'essais total est noté N.

La méthode décrite concerne l'analyse de variance pour un plan d'expériences non répété. Dans le cas où l'on répète le plan plusieurs fois l'analyse est assez semblable. Le calcul des coefficients du modèle matriciel se fera avec les valeurs moyennes des réponses. On peut alors calculer les réponses théoriques de chaque combinaison de facteurs et les variances associées comme précédemment. Mais cette fois, il y a autant de résidus que de réponses pour une combinaison donnée. A titre d'exemple, si l'on répète un plan à 8 lignes 3 fois, on aura $8 \times 3 = 24$ résidus. De plus, si le modèle linéaire est de 5 ddl il restera $24 - 5 = 19$ ddl associés aux résidus, au lieu de $8 - 5 = 3$ dans le cas sans répétition.

La répétition d'un plan permet d'augmenter le nombre de ddl associés aux résidus et de ce fait la précision de l'analyse de variance.

E. Conclusion.

La mise en place d'un plan d'expériences représente une étape délicate où le savoir faire des concepteurs influe de manière cruciale. Dans le cas de notre étude, l'application de la méthode de tolérancement statistique de Taguchi nous impose d'effectuer un plan complet, puisque toutes les combinaisons de points des variables discrétisées sont nécessaires au calcul des moments statistiques de la réponse. Le choix de la table représentant la matrice d'expérience tient compte de ce problème et

la seule question réside dans la possibilité d'y inclure des colonnes représentant l'interaction des facteurs. La valeur des niveaux sera également imposée par la discrétisation des tolérances modélisant les défauts de géométrie. A présent, nous allons présenter la transmission par engrenages utilisée pour illustrer la faisabilité d'une telle méthodologie.

III. Description de la transmission par engrenages étudiée : défauts de géométrie, modélisation globale de la transmission et principe de calcul de la variabilité.

Nous souhaitons prédire la variabilité du comportement vibroacoustique d'une transmission par engrenages fabriquée en grande série par la méthode de tolérancement statistique de Taguchi. Dans un premier temps, nous allons décrire l'ensemble des caractéristiques de cette transmission, sa modélisation globale ainsi que les défauts de géométrie retenus et responsables de la variabilité du comportement dynamique. Ces défauts de géométrie sont conscris dans des intervalles de tolérance définis par la norme française AFNOR NF E 23-006. Puis, nous présentons le plan d'expériences retenu pour l'étude de la variabilité et le processus de calcul de cette variabilité.

A. Caractéristiques de l'engrenage et défauts de géométrie.

La transmission étudiée est équipée d'un engrenage à denture hélicoïdale à axes parallèles dont les principales caractéristiques géométriques sont présentées dans le tableau III.4.

	Pignon moteur	Roue menée
Z	17	71
Rayon de base (mm)	23.397	97.718
Module normal (mm)	2.676	2.676
Sens d'hélice	Gauche	Droite
Angle d'hélice de base	24°	
Angle de pression apparent de fonctionnement	18.877°	
Largeur de denture (mm)	20	
Entraxe (mm)	128	

Tableau III.4 : Caractéristiques géométriques de l'engrenage.

La macro géométrie de l'engrenage n'est pas affectée par les erreurs de fabrication. La micro géométrie des dentures correspond, avant l'introduction des tolérances, à une géométrie incluant des corrections de dentures volontaires. Ces corrections sont constituées de dépouilles de type parabolique sur les profils et de bombé dans le sens longitudinal (hélice). Les corrections sont identiques pour toutes les dents. Cette définition de la géométrie représente le cas d'un engrenage idéal, non affecté

par les tolérances, que l'on appelle cas déterministe par la suite. La matrice de souplesse intervenant dans l'équation I.2 est déduite d'une modélisation éléments finis 3D des roues dentées (Rigaud, 1998). A titre d'illustration on présente figure III.1 le maillage utilisé pour ce calcul.

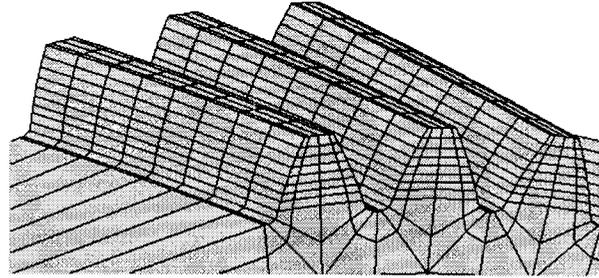


Figure III.1 : Maillage éléments finis 3D de denture.

Les défauts de géométrie retenus et les tolérances associées sont l'erreur totale de profil et l'erreur totale de distorsion. L'erreur totale de distorsion inclue l'erreur d'inclinaison et l'erreur de forme longitudinale. Les défauts de géométrie sont introduits par des variations linéaires selon l'hélice et le profil et dont l'amplitude est donnée par la classe de qualité. Ces amplitudes sont modélisées par des variables aléatoires. La forme réelle des flancs de denture correspond ainsi à une combinaison des corrections et des défauts sur le profil et l'hélice. On remarquera que la manière dont sont introduits les défauts est classique et largement utilisée dans la littérature.

B. Géométrie de la transmission et modélisation globale.

a) Géométrie de la transmission.

Le carter de la transmission est de forme proche d'un parallélépipède rectangle. Il est constitué d'un bâti en acier sur lequel sont fixées deux plaques rectangulaires (face côté libre et face côté moteur). Celles-ci supportent les boîtiers de roulements à rouleaux coniques qui guident en rotation les deux arbres de la transmission. Les dimensions des deux plaques sont 420 mm × 650 mm et la longueur des arbres de 153 mm. La plaque rectangulaire côté libre est en acier d'épaisseur 6 mm. Elle soutient deux boîtiers de roulements de 25 mm de hauteur et de 60 mm de rayon. La plaque rectangulaire montée côté moteur est également en acier mais possède une épaisseur de 40 mm. Les boîtiers de roulements qu'elle soutient ne sont pas proéminents. Enfin, le bâti a une épaisseur de 40 mm et est encastré sur une semelle infiniment rigide.

b) Modélisation globale de la transmission.

Nous décrivons ci-après le modèle dynamique de la transmission complète basé sur la méthode des éléments finis.

Lignes d'arbres

Nous discrétisons les arbres par des éléments classiques de poutre à 2 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud. Ces éléments prennent en compte les déformations de torsion, de flexion et de traction-compression.

Nous modélisons chacune des roues dentées en prise par des éléments de masse et d'inertie en rotation concentrées aux noeuds des lignes d'arbres correspondants. Les déplacements de chaque roue sont définis par les degrés de liberté associés à son centre (3 translations et 3 rotations repérant l'orientation instantanée de la roue).

La vitesse maximale de rotation de la transmission restant limitée, nous négligeons les effets gyroscopiques.

Pour décrire le couplage élastique entre les lignes d'arbres induit par le contact entre les différents couples de dents en prise, nous introduisons une matrice $[D]$ (équation I.7) symétrique qui couple les 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menante aux 6 degrés de liberté du noeud central de la roue menée. Il s'agit donc d'une matrice carrée de rang 12. Elle est calculée à partir des caractéristiques géométriques de l'engrenage. Dans le repère local orthonormé direct (X, Y, Z) défini sur la figure III.2, la matrice de couplage s'écrit sous la forme suivante :

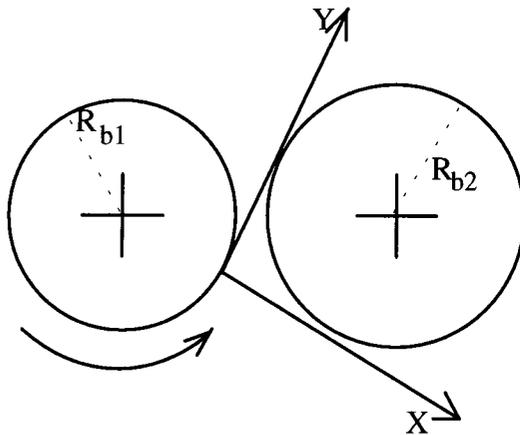
$$[D] = {}^t\{T\} \bullet \{T\} \quad (\text{III.5})$$

avec

$${}^t\{T\} = \{0, 1, \tan\beta, R_{b1}\tan\alpha\tan\beta, -R_{b1}\tan\beta, R_{b1}, 0, -1, -\tan\beta, R_{b2}\tan\alpha\tan\beta, -R_{b2}\tan\beta, R_{b2}\}$$

où R_{b1} et R_{b2} sont les rayons de base des roues menante et menée,
 α est l'angle de pression apparent de fonctionnement,
 β est l'angle d'hélice de base.

Nous modélisons les caractéristiques inertielles et élastiques des organes situés en amont et en aval de la transmission par des inerties en rotation (représentant le moteur et la charge) couplées aux lignes d'arbres par des raideurs purement torsionnelles (représentant les accouplements flexibles).



Z est parallèle aux axes,
 Y est orienté selon la ligne d'action,
 X est orienté de la roue menante vers la
 roue menée

Figure III.2. Plan apparent de l'engrenage. Définition du repère local.

Roulements

La modélisation des roulements s'appuie sur l'hypothèse de bagues intérieure et extérieure rigides. Les déplacements de chacune de ces bagues sont représentés par un seul noeud à 6 degrés de liberté attaché à l'arbre d'une part (bague intérieure) et au boîtier de roulement fixé sur le carter d'autre part (bague extérieure). Nous modélisons la raideur du roulement, induite par la déformation des contacts hertziens entre les éléments roulants et les bagues, par une matrice symétrique de dimension 10, qui couple 5 degrés de liberté de la bague intérieure à 5 degrés de liberté de la bague extérieure (la rotation autour de l'axe correspondant à l'arbre est libre).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{xx} & \mathbf{k}_{xy} & \mathbf{k}_{xz} & \mathbf{k}_{x\theta x} & \mathbf{k}_{x\theta y} \\ & \mathbf{k}_{yy} & \mathbf{k}_{yz} & \mathbf{k}_{y\theta x} & \mathbf{k}_{y\theta y} \\ & & \mathbf{k}_{zz} & \mathbf{k}_{z\theta x} & \mathbf{k}_{z\theta y} \\ & & & \mathbf{k}_{\theta x\theta x} & \mathbf{k}_{\theta x\theta y} \\ & & & & \mathbf{k}_{\theta y\theta y} \end{bmatrix}$$

L'évaluation des différents termes de cette matrice est complexe. En effet, la nature et le nombre de contacts entre les éléments roulants et les bagues intérieure et extérieure rendent difficile la prédiction de l'état d'équilibre du roulement.

Même lorsque le roulement est préchargé, la raideur du roulement évolue (faiblement) avec la charge appliquée. Aussi, les valeurs que nous introduisons correspondent aux raideurs des roulements autour de la position d'équilibre statique induite par l'application du couple de charge. La résolution des équations d'équilibre statique non linéaires permettent de fournir les raideurs de roulement introduites dans le modèle. Ces valeurs restent inchangées quelque soit la valeur de l'effort dynamique et sont déterminées en supposant que le jeu du roulement est nul. Cette hypothèse reste valable pour des faibles fluctuations de l'effort dynamique autour de l'effort statique ayant servi au calcul des raideurs de roulement.

En définitive, la modélisation retenue prend en compte l'ensemble des couplages élastiques entre la bague intérieure et la bague extérieure des roulements. Elle permet notamment d'introduire les raideurs angulaires qui couplent la flexion des lignes d'arbres aux déformations en flexion du carter. Pour certaines simulations numériques destinées à mettre en évidence un certain nombre d'évolutions paramétriques du comportement dynamique de la transmission, nous ne conservons que les termes diagonaux k_{xx} , k_{yy} , k_{zz} , $k_{\theta_x\theta_x}$ et $k_{\theta_y\theta_y}$. On donne figure III.3 les valeurs des raideurs des termes diagonaux des matrices modélisant les roulements.

	○	●
k_{xx}	1.1 E9	1.4 E9
k_{yy}	1.1 E9	1.4 E9
k_{zz}	4.6 E7	1.7 E8
$k_{\theta_x\theta_x}$	1 E5	1 E5
$k_{\theta_y\theta_y}$	1 E5	1 E5

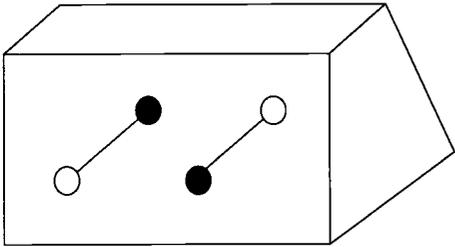
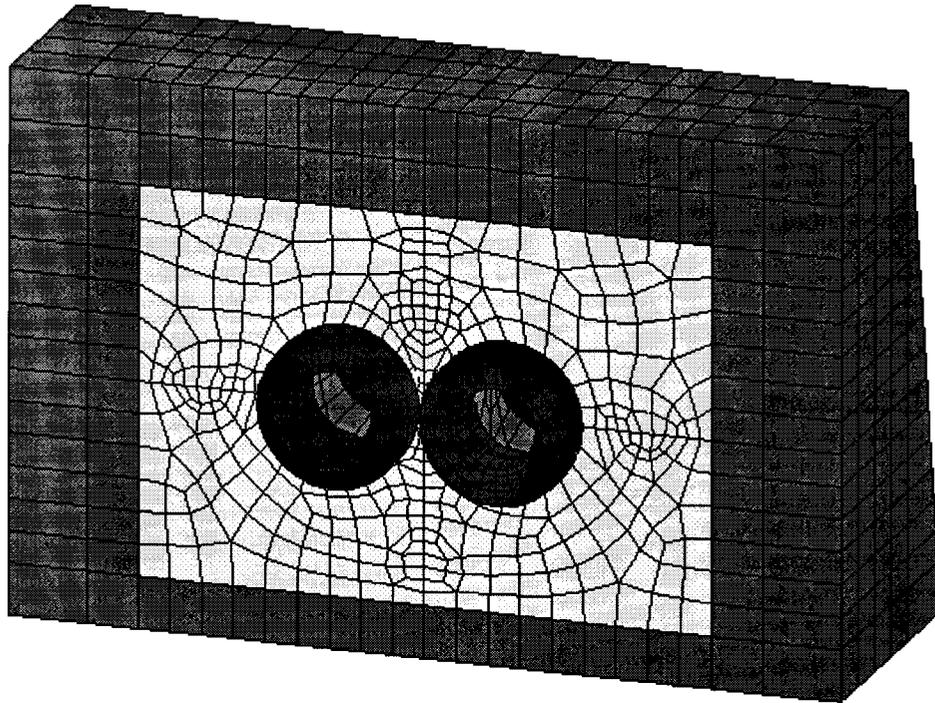


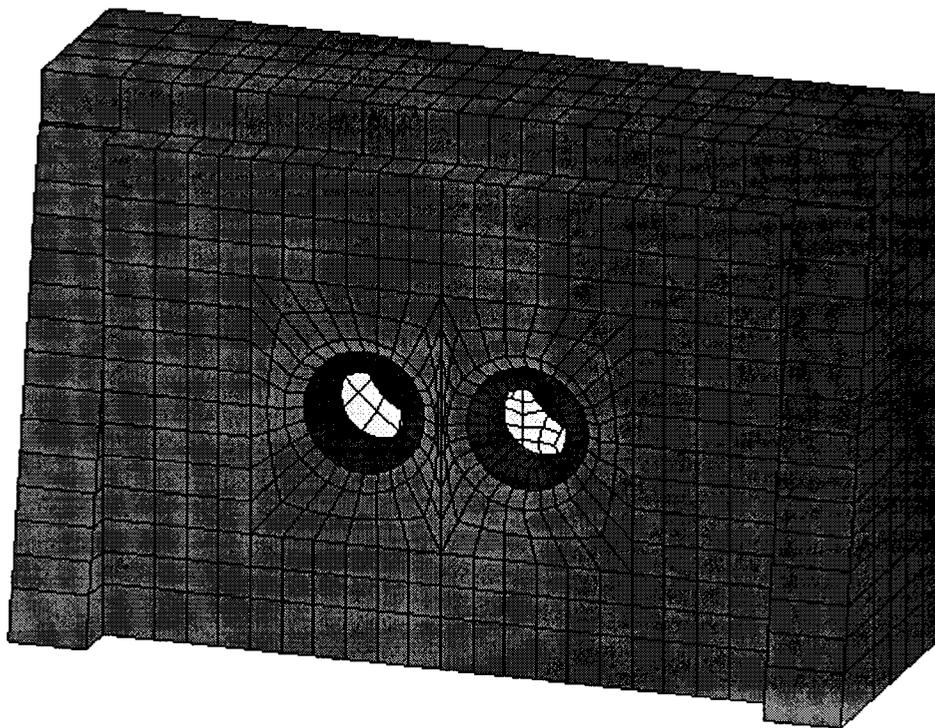
Figure III.3 : Emplacement des roulements et valeurs des raideurs. Raideurs axiales N/m, Raideurs angulaires Nm/rad.

Carter

Le carter de la transmission est discrétisé par des éléments de plaques en flexion à 4 noeuds et 6 degrés de liberté par noeud et des éléments volumiques à 8 noeuds et 3 degrés de liberté par noeud (figure III.4). La liaison entre ces deux types d'éléments est effectuée en superposant un élément de plaque et un élément volumique. Les liaisons élastiques entre le carter de la transmission et son environnement ne sont pas prises en compte. Le carter est encastré à sa base.



face libre



face moteur

Figure III.4 : Maillage vibratoire du carter.

Modèle dynamique et modèle acoustique

Le modèle complet comprend environ 1800 éléments, 2900 nœuds et 10400 degrés de liberté. Le nombre de degré maîtres est d'environ 500 et incluent la denture et les roulements. Le code de calcul éléments finis est le code Ansys. Cette modélisation par éléments finis permet d'extraire la base modale moyenne (au sens temporel). La densité modale, assez pauvre sur la bande de fréquences analysée justifie l'approche basse fréquence. Enfin, via la méthode spectrale itérative on prédit le champ vibratoire de l'ensemble des nœuds du maillage et en particulier le champ vibratoire du carter.

La prédiction du rayonnement acoustique du carter nécessite une discrétisation spatiale de la surface vibrante en éléments de frontière. En général, le maillage utilisé pour le calcul vibratoire est plus grossier que celui utilisé pour le calcul acoustique. Ducret (1997) a montré que la participation respective de chacune des faces de ce carter au rayonnement acoustique était très différente. La face côté libre est la plus mince et, de ce fait, est celle qui vibre le plus. Les niveaux de vitesse quadratique de chacune des faces du carter diffèrent d'un facteur 100 pour une excitation identique. Dans notre cas, nous considérons que seule cette face participe au bruit rayonné. Pour accroître la rapidité des calculs, nous faisons l'hypothèse de plaque bafflée qui ne nuit pas à la prédiction de la puissance acoustique. Le maillage acoustique sera le même que le maillage vibratoire pour lequel on bouche le passage des arbres à l'aide de pistons rigides. La taille des éléments de ce maillage limite l'étude acoustique à des fréquences proches de 1500 Hz. On présente figure III.5 le maillage acoustique de la plaque rayonnante.

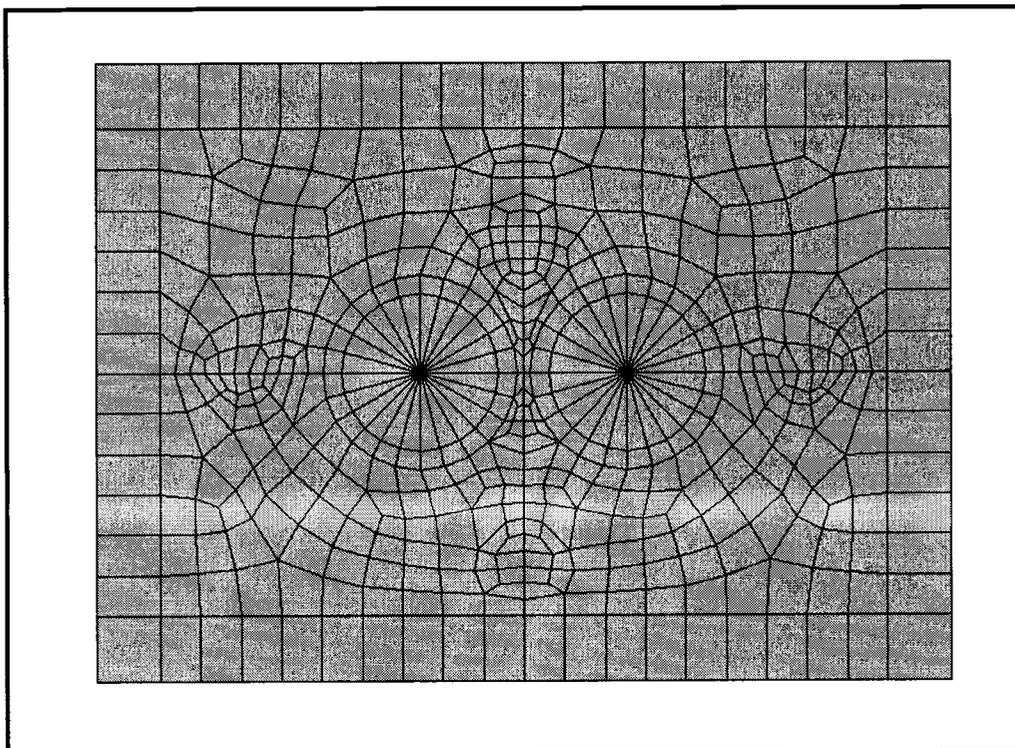


Figure III.5 : Maillage acoustique de la plaque rayonnante.

C. Plan d'expériences retenu et principe du calcul de la variabilité

a) Choix du plan d'expériences, choix des valeurs des défauts

Nous avons choisi de ne retenir que deux types de défauts de géométrie à savoir l'erreur totale de profil et l'erreur totale de distorsion. En effet, il est généralement admis que ces deux défauts prédominent dans le comportement dynamique. Afin de prendre en compte une éventuelle non linéarité des réponses, nous donnons 3 niveaux à chaque facteur (profil noté P et distorsion notée D). Il s'agit de choisir le plan adapté à notre étude. Notre modèle s'écrit :

$$Y=M+P+D+PD$$

Niveaux	3	3	9
Ddl	2	2	4

La condition sur le nombre de ddl impose un minimum de 9 essais de même que la condition d'orthogonalité.

Le graphe linéaire du modèle est le suivant : $\overset{P}{\circ} \text{---} \overset{D}{\circ}$.

La comparaison de ce graphe avec ceux des tables standards de Taguchi, nous amène à choisir le plan standard $L_9(3^4)$. Cette table est décrite tableau III.5a. La colonne 1 sera associée au défaut de profil P, alors que la colonne 2 sera associée au défaut de distorsion D. Les colonnes 3 et 4 serviront au calcul des coefficients de l'interaction conformément aux indications du graphe linéaire.

facteurs	1	2	3	4
	1	1	1	1
	1	2	2	2
	1	3	3	3
	2	1	2	3
	2	2	3	1
	2	3	1	2
	3	1	3	2
	3	2	1	3
	3	3	2	1

a) Table standard $L_9(3^4)$.

Niveau	Valeur
1	$0 - \Delta \frac{\sqrt{3}}{3}$
2	0
3	$0 + \Delta \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Correspondance entre le niveau et la valeur donnée au défaut.

Tableaux III.5.

Les valeurs données aux 3 niveaux de chaque défaut pour le calcul des différentes réponses (erreur statique, vitesse quadratique moyenne, niveau de puissance acoustique) dépendent de l'intervalle de tolérance $IT=2\Delta$ fixé par la classe de qualité associée au défaut. Afin de calculer la

variabilité, nous modélisons chaque défaut par une variable aléatoire gaussienne. La valeur moyenne μ est toujours nulle, quelque soit le défaut. Par ailleurs, il est admis que l'écart type σ de chaque défaut dépend de l'intervalle de tolérance IT de la manière suivante : $\sigma = IT/6 = \Delta/3$. Le tableau III.5b donne la correspondance niveau du défaut/valeur du défaut.

b) L'analyse de variance.

On effectue l'analyse de variance selon le tableau III.3. Cependant, le modèle de plan d'expériences retenu ne permet pas de calculer la variance résiduelle car le plan est saturé (pas de ddl pour les résidus). Ceci n'est pas gênant dans la mesure où les calculs sont numériques donc sans variabilité naturelle. Ainsi, l'analyse de variance permettra de classer par ordre d'importance l'influence des défauts en hiérarchisant les variances calculées pour chaque défaut.

c) Méthode de calcul de la variabilité.

L'étude de la dispersion porte sur l'erreur statique de transmission sous charge, sur le niveau de vitesse quadratique moyenne et sur le niveau de puissance acoustique. Elle consiste à estimer trois caractéristiques de la distribution statistique de la réponse calculée : la valeur moyenne, l'écart moyen défini comme la différence entre la valeur moyenne et la valeur référence (ie valeur sans défaut de géométrie) et l'écart type de la distribution. Dans le langage qualité, le terme variabilité correspond à l'écart type.

Pour se faire, nous utilisons la méthode d'échantillonnage décrite dans le chapitre précédent. Les calculs de la valeur moyenne, écart moyen et écart type de la réponse tiennent compte des pondérations imposées par le choix de la distribution. Le tableau III.6 donne la pondération pour chaque combinaison de niveaux des défauts modélisés par des variables gaussiennes. L'essai numéro 1 est l'essai en l'absence de défauts de géométrie et constitue le cas idéal du point de vue de la conception.

	P	D	Pondération
Essai 8	1	1	1/36
Essai 7	1	2	4/36
Essai 9	1	3	1/36
Essai 2	2	1	4/36
Essai 1	2	2	16/36
Essai 3	2	3	4/36
Essai 5	3	1	1/36
Essai 4	3	2	4/36
Essai 6	3	3	1/36

Tableau III.6 : Pondérations pour chaque combinaison de niveaux.

IV. Résultats.

L'ensemble des résultats présentés correspond au régime de fonctionnement stationnaire suivant : le couple moteur est égal à 60 Nm et la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée est égale à 1000 trs/min. La fréquence d'engrènement, composante harmonique fondamentale de l'erreur statique de transmission sous charge, est alors égale à $f_e = 283.33$ Hz. L'erreur statique de transmission sous charge est une fonction périodique de période égale à la période d'engrènement $T_e = 1/f_e$. Son spectre est constitué de raies à la fréquence d'engrènement et à tous les harmoniques qui lui sont associés. Il n'apparaît pas nécessaire d'effectuer les calculs avec l'ensemble des harmoniques, ainsi on ne retient que les composantes à la fréquence d'engrènement et aux 4 harmoniques suivants, soient 5 raies.

Les classes de qualité associées au défaut de profil et au défaut de distorsion sont les classes 7 et 8, cette dernière étant la moins précise. Nous avons testé 3 configurations de classe de qualité dans l'ordre suivant P8-D8, P8-D7 et P7-D8. On fournit dans le tableau III.7 les intervalles de tolérance IT associés. Ces classes de qualité sont des classes courantes pour l'industrie automobile.

	Profil P	Distorsion D
Classe 8	IT= 36 μm	IT= 40 μm
Classe 7	IT= 26 μm	IT= 24 μm

Tableau III.7 : Intervalle de tolérance par défaut et classe de qualité.

A. Résultats pour la classe de qualité P8-D8.

a) Erreur de transmission sous charge, raideur d'engrènement et modes propres de la transmission.

La figure III.6 présente les neuf spectres de l'erreur statique de transmission sous charge correspondant aux neuf essais du plan d'expériences. On constate clairement des différences de niveaux entre les essais. Les raies d'ordre élevé sont le plus affectées par l'introduction des tolérances de fabrication. La fluctuation temporelle reste périodique mais sa forme varie de manière significative puisque la raie 2 est fortement affectée par les défauts de géométrie.

L'essai 1 constitue l'essai où l'amplitude de l'erreur statique de transmission sous charge est la moins grande. Ce résultat est logique puisque cet essai représente une transmission exempte de défaut de fabrication et optimisée pour avoir un niveau d'excitation le plus faible possible. Néanmoins, d'autres configurations, comme l'essai 7, induisent des niveaux identiques d'excitation, cela démontre que les défauts de fabrication ne pénalisent pas toujours la géométrie des surfaces en contact durant l'engrènement.

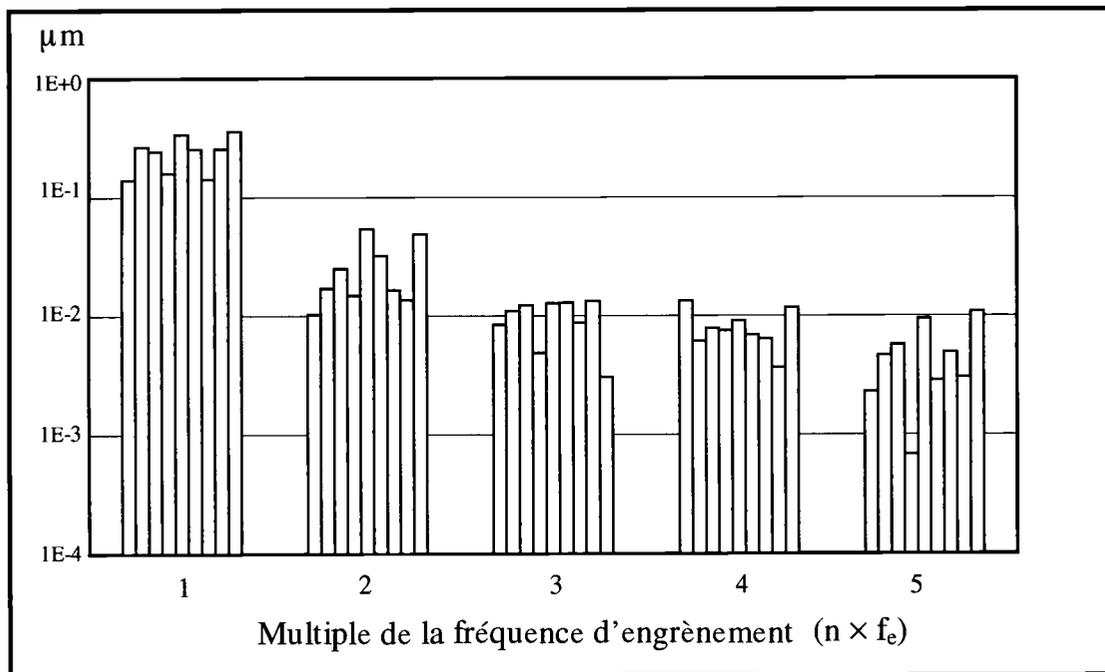


Figure III.6 : Spectres de l'erreur de transmission pour les neuf essais du plan d'expériences dans l'ordre croissant des essais (1 à 9).

Bien que la classe de qualité utilisée soit une classe courante, les différences ne sont pas négligeables entre les produits fabriqués. On s'attend à des écarts importants de niveaux de bruit rayonné pour ce type de produits.

Il est intéressant de savoir quel est le défaut le plus influent sur la variabilité : cette question peut être résolue en effectuant une analyse de variance à l'aide de la méthode décrite en début de chapitre. Le résultat est cependant connu d'avance et le défaut de distorsion est prépondérant pour le cas des engrenages à denture hélicoïdale. En effet, la longueur de contact sur chaque dent est fortement affectée par ce défaut. La confirmation de ce résultat représente un bon test pour la validité de l'analyse de variance. En outre, l'analyse de variance nous renseigne sur l'existence éventuelle d'une interaction entre les deux défauts de fabrication. Le tableau III.8 présente les résultats de l'analyse de variance raie par raie.

	Raie 1	Raie 2	Raie 3	Raie 4	Raie 5
Variance P	$1.19 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-4}$	$4.05 \cdot 10^{-6}$	$2.51 \cdot 10^{-6}$	$3.97 \cdot 10^{-6}$
Variance D	$1.95 \cdot 10^{-2}$	$3.59 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	$6.94 \cdot 10^{-6}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$
Variance PD	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$2.32 \cdot 10^{-4}$	$1.61 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$

Tableau III.8 : Variances (EST en amplitude) des défauts et de leur interaction par raie.

Comme on peut le constater, le défaut de distorsion domine le défaut de profil pour toutes les raies du spectre. De plus, il semble exister une interaction forte entre ces défauts puisque les écarts induits par le changement simultané des deux défauts sont plus importants que ceux induits par le seul défaut de profil. On en conclue qu'une étude précise de sensibilité de l'erreur de transmission aux défauts de géométrie ne peut se conduire qu'en incluant tous les facteurs définissant la géométrie 3D des surfaces en contact.

La raideur d'engrènement constitue également une source d'excitation (de type paramétrique) des transmissions par engrenages. Cette grandeur est issue du même calcul que celui de l'erreur statique. La valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement permet de calculer la base des vecteurs propres de toute la transmission, base sur laquelle sera développée la réponse vibratoire. Le tableau III.9 présente la valeur moyenne temporelle $\langle K_e \rangle$ pour les neuf essais du plan d'expériences, ainsi que les fréquences propres des 25 premiers modes propres. On ne retient que ces 25 modes car le dernier harmonique de la source d'excitation est d'environ 1500 Hz.

	Essai 1	Essai 2	Essai 3	Essai 4	Essai 5	Essai 6	Essai 7	Essai 8	Essai 9
$\langle K_e \rangle$ (N/ μ m)	349	340	332	326	320	320	326	320	320
Fréquence propre (Hz)	23.9	23.9	23.9	23.9	23.9	23.9	23.9	23.9	23.9
	90.4	90.4	90.4	90.4	90.4	90.4	90.4	90.4	90.4
	319.5	319.5	319.5	319.5	319.5	319.5	319.5	319.5	319.5
	543.4	543.3	543.1	543	542.9	542.9	543	542.9	542.9
	596.7	596.4	596	595.8	595.5	595.5	595.8	595.5	595.5
	614.1	614.1	614.1	614.1	614	614	614	614	614
	629.8	629.7	629.7	629.7	629.6	629.6	629.7	629.6	629.6
	677	676.9	676.8	676.8	676.7	676.7	676.8	676.7	676.7
	730.8	730.7	730.5	730.5	730.3	730.3	730.5	730.3	730.3
	855	855	855	855	855	855	855	855	855
	868.5	868.4	868.4	868.3	868.3	868.3	868.3	868.3	868.3
	962.1	962.1	962.1	962.1	962.1	962.1	962.1	962.1	962.1
	968.2	968.2	968.2	968.2	968.2	968.2	968.2	968.2	968.2
	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3	978.3
	1131.4	1131.4	1131.3						
	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6	1194.6
	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6	1212.6
	1287.4	1286.7	1286.2	1285.7	1285.2	1285.2	1285.7	1285.2	1285.2
	1371.2	1371.2	1371.1	1371.1	1371	1371	1371.1	1371	1371
	1434	1434	1434	1434	1434	1434	1434	1434	1434
	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1	1467.1
	1562.5	1561.9	1561.9	1561	1560.5	1560.5	1561	1560.5	1560.5
	1776.1	1776.1	1776						
	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4	1842.4
	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9	1904.9

Tableau III.9 : Raideur d'engrènement et fréquences propres des 25 premiers modes. Les modes affectés sont en gras.

La raideur d'engrènement varie peu d'un essai à l'autre. Plusieurs hypothèses permettent d'expliquer cela : soit l'engrènement est très fortement chargé et la raideur couplant les roues dentées n'évolue plus, soit les défauts de géométrie choisis n'affectent pas la raideur d'engrènement dans ce cas. La première hypothèse ne semble pas valable car un couple de charge de 60 Nm correspond à une charge d'environ 2500 N répartie, pour un engrènement hélicoïdal, sur deux dents au minimum. On en conclue que la raideur d'engrènement est peu affectée dans ce cas là par l'introduction des défauts de géométrie et de ce fait les fréquences propres évoluent peu.

Pour l'application retenue, nous devrions principalement observer des variations de niveaux de bruit plutôt des variations de localisation fréquentielle de ces niveaux.

b) Réponse vibratoire.

On s'intéresse ici à la réponse vibratoire et plus particulièrement à l'état vibratoire du carter de la transmission. On rappelle que la face côté libre est la face prépondérante pour le rayonnement acoustique du carter. La figure III.7 présente les résultats pour les spectres du niveau de vitesse quadratique (défini par les équations I.23 et I.24) sur cette face élastique.

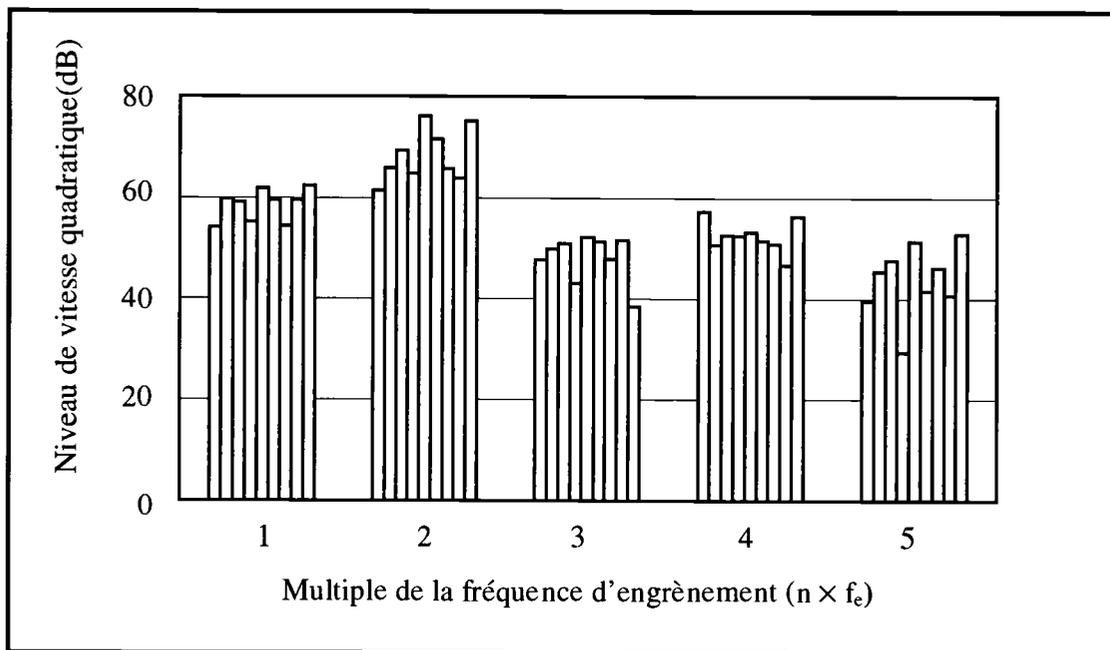


Figure III.7 : Spectres du niveau de vitesse quadratique de la face élastique pour les 9 essais du plan d'expériences dans l'ordre croissant des essais.

La raie 2 est la raie dominante du spectre. Elle correspond à une excitation en quasi résonance du mode 4 ($f = 544$ Hz) par le premier harmonique de l'erreur de transmission. La raie 4 est importante car elle correspond à une excitation en résonance du mode 15 par le 3^{ème} harmonique de l'erreur de transmission. Là encore, on constate des écarts importants (plus de 15 dB) entre les neuf essais du plan d'expériences. Ces écarts sont liés aux écarts relevés sur l'erreur de transmission. Dans le cas d'un système déterministe, la connaissance du niveau de vitesse quadratique et du facteur de rayonnement suffit pour estimer la puissance acoustique rayonnée. Dans notre étude, il est possible que le facteur de rayonnement soit lui aussi sujet à d'importantes variations.

c) Rayonnement acoustique.

On s'intéresse à présent au rayonnement acoustique de la face élastique. La figure III.8 présente les neuf spectres du niveau de puissance acoustique rayonnée (équations I.20 et I.21) par la face élastique du carter. Ces spectres sont similaires à ceux obtenus pour le niveau de vitesse quadratique. La relation entre vitesse quadratique et puissance acoustique est linéaire et le coefficient de proportionnalité correspond au facteur de rayonnement. Ainsi, on remarque que les variations entre les

essais du plan d'expériences sont identiques pour la vitesse quadratique (figure III.7) et pour la puissance acoustique rayonnée (Figure III.8). On en conclue que le facteur de rayonnement évolue très peu d'un essai à l'autre.

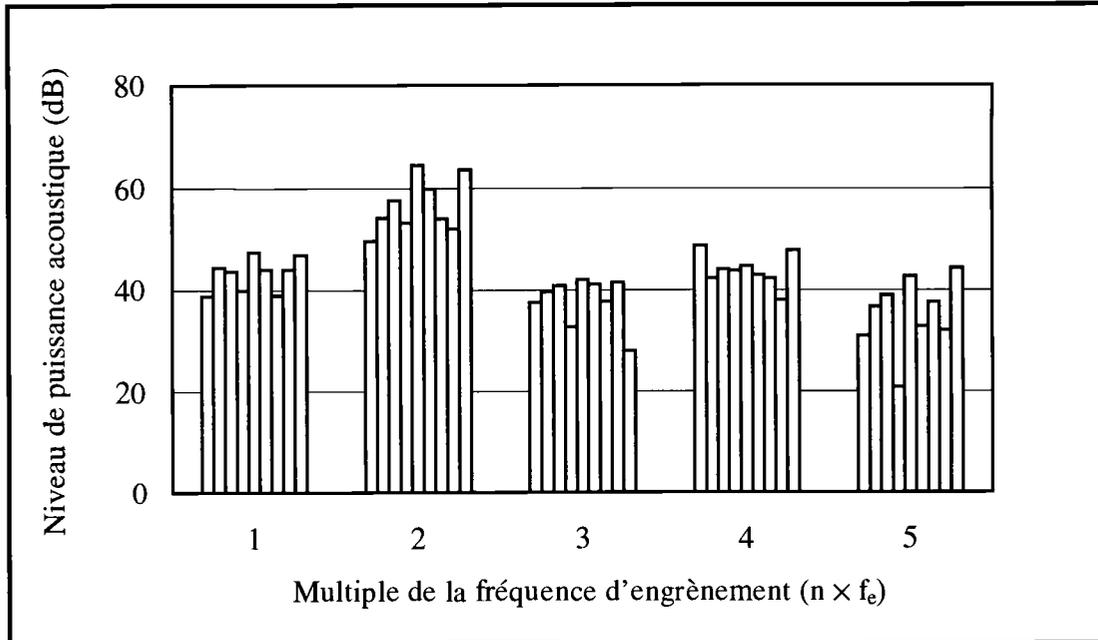


Figure III.8 : Spectres du niveau de puissance acoustique rayonnée pour les 9 essais du plan d'expériences dans l'ordre croissant des essais.

La figure III.9 présente le facteur de rayonnement pour l'essai de référence, essai 1. Son évolution est similaire à celle du facteur de rayonnement d'une plaque bafflée. Cependant, la fréquence critique d'une plaque en acier de 6 mm d'épaisseur est d'environ 1900 Hz. On ne retrouve pas ce résultat car le champ vibratoire de la face élastique tient compte de toutes les composantes de la transmission et, est donc très différent de celui d'une plaque. On ne peut pas faire d'étude acoustique d'une transmission par engrenages en ne considérant que son carter.

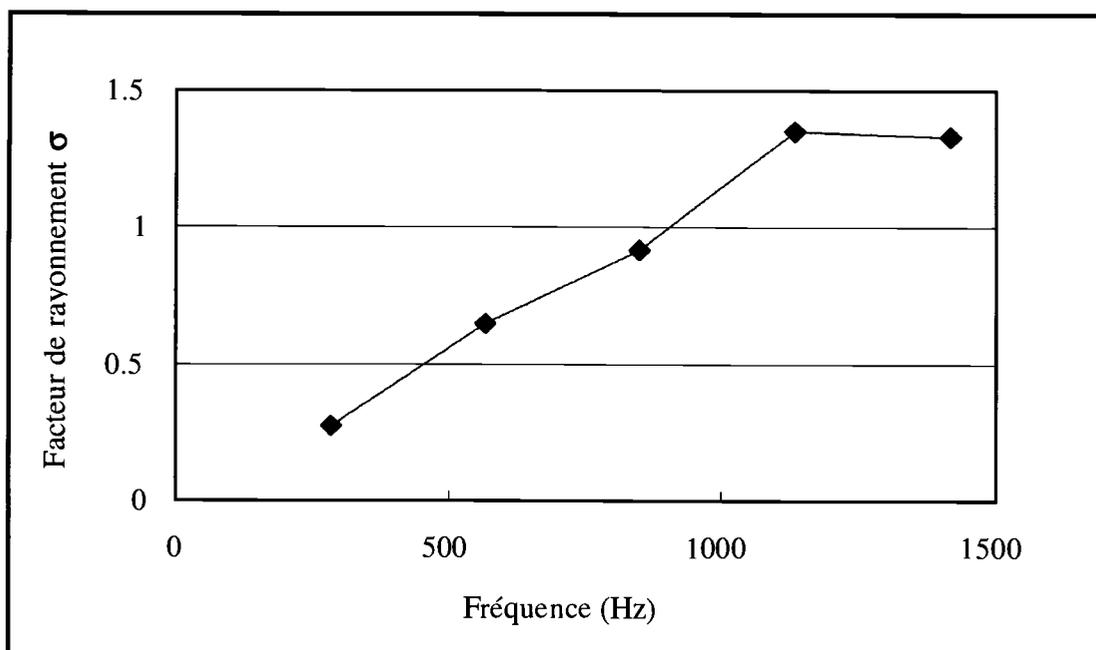


Figure III.9 : Facteur de rayonnement de la face élastique côté libre.

Dans le but de confirmer les résultats de l'analyse de variance effectuée avec l'erreur statique de transmission sous charge, on présente, tableau III.10, les résultats de l'analyse de variance sur la puissance acoustique exprimée en Watts raie par raie.

	Raie 1	Raie 2	Raie 3	Raie 4	Raie 5
Variance P	$5.78 \cdot 10^{-17}$	$7.85 \cdot 10^{-13}$	$9.12 \cdot 10^{-18}$	$1.76 \cdot 10^{-16}$	$3.40 \cdot 10^{-17}$
Variance D	$5.97 \cdot 10^{-16}$	$1.02 \cdot 10^{-12}$	$5.70 \cdot 10^{-17}$	$3.90 \cdot 10^{-16}$	$7.52 \cdot 10^{-17}$
Variance PD	$1.34 \cdot 10^{-16}$	$1.13 \cdot 10^{-12}$	$2.75 \cdot 10^{-17}$	$7.24 \cdot 10^{-16}$	$1.14 \cdot 10^{-16}$

Tableau III.10 : Variances (puissance acoustique en Watts) induites par les défauts et leur interaction par raie.

Le défaut de distorsion est encore dominant et l'existence d'une interaction entre les défauts est confirmée. Cette interaction peut se représenter graphiquement à l'aide d'une matrice. La figure III.10 présente la matrice obtenue : chaque combinaison du plan d'expériences est représentée en ordonnées par la puissance acoustique totale exprimée en Watts. Si on fixe la valeur d'un défaut de géométrie (par exemple P) on obtient une certaine évolution de la puissance acoustique totale selon l'autre défaut (respectivement D). En changeant la valeur du premier défaut (P), la nouvelle évolution en fonction de D diffère de la première. Ceci démontre clairement qu'une modélisation de la réponse doit intégrer un terme de couplage entre les défauts.

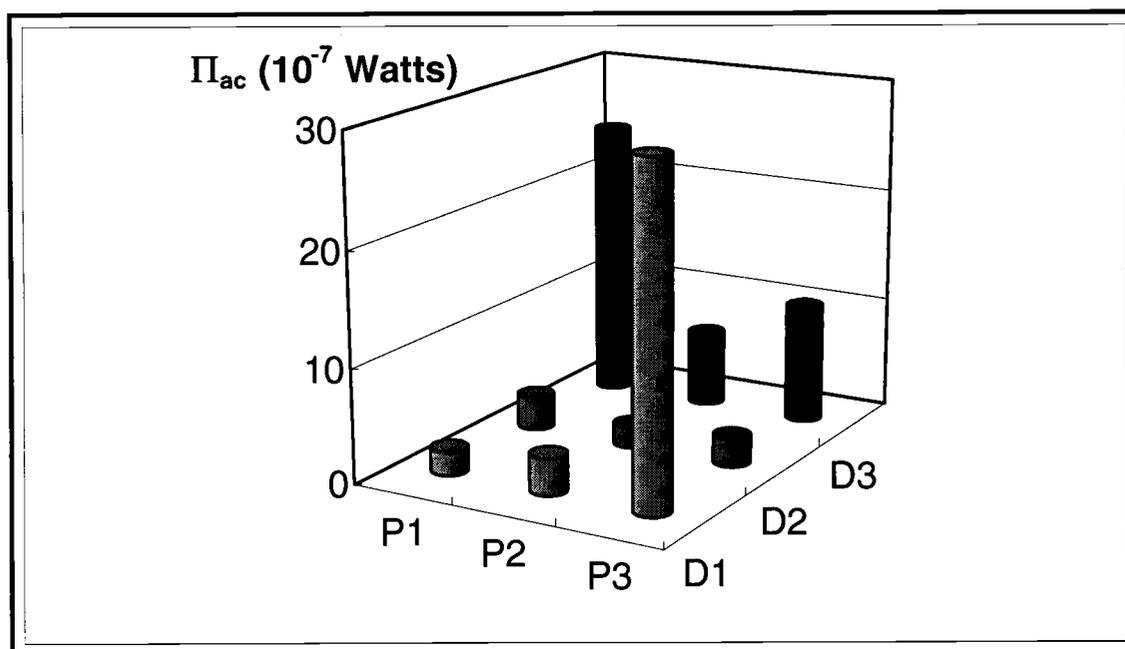
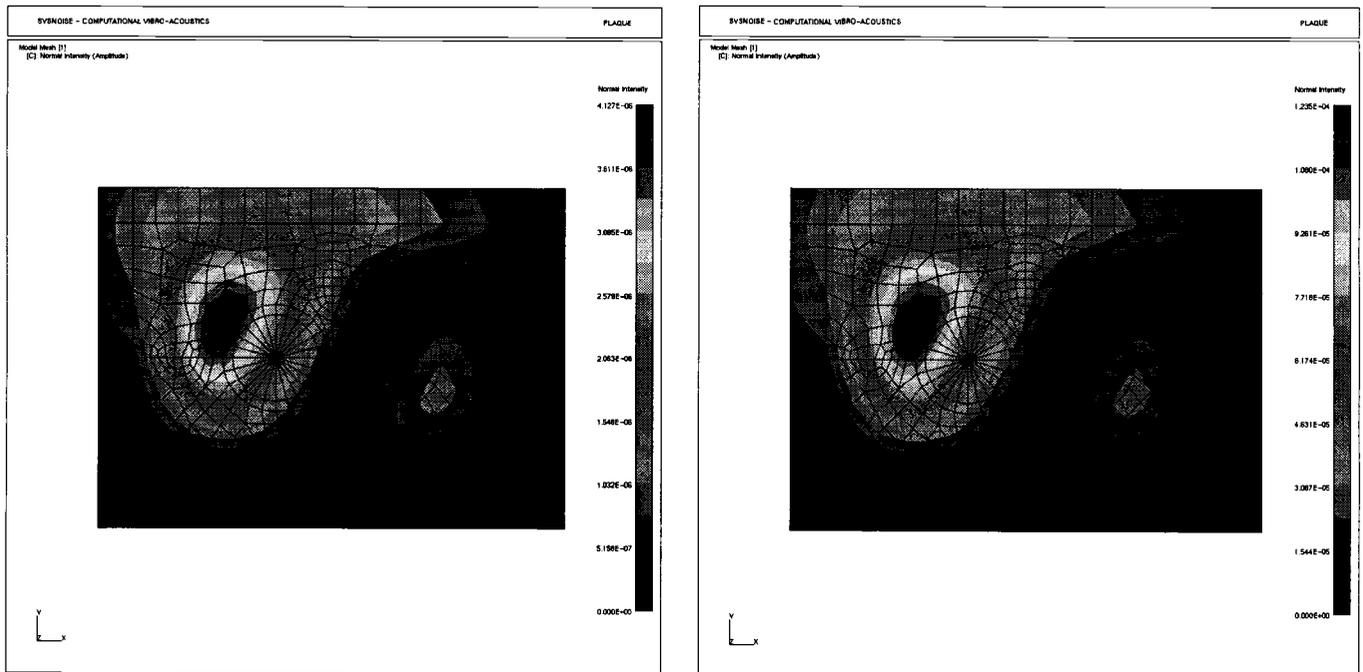


Figure III.10 : Matrice des réponses du plan d'expériences en terme de puissance acoustique totale.

Par ailleurs, il apparaît intéressant de savoir si les variations de niveaux de puissance acoustique sont liées à une modification de la répartition spatiale sur la surface vibrante de l'amplitude de l'intensité acoustique normale à la surface vibrante. Pour ce faire, on considère les essais 1 et 5 et la raie 2 et on effectue une carte de répartition de l'amplitude de l'intensité sur la face élastique. Ces essais correspondent aux deux extrêmes en terme de niveaux (environ 10 dB d'écart entre eux). Les figures III.11 a et b présentent la répartition spatiale de l'amplitude de l'intensité normale acoustique obtenue pour la raie 2.



(a)

(b)

Figures III.11 : Répartition spatiale de l'amplitude de l'intensité normale acoustique, (a) essai 1 ;
(b) essai 5.

Qualitativement, la répartition spatiale est quasi identique et seule l'échelle des niveaux est différente. Quantitativement, on peut donc rechercher un coefficient de proportionnalité entre ces deux champs d'intensité. Un calcul simple d'optimisation quadratique permet de trouver ce coefficient. Soient f et g deux champs d'intensité spatiaux, on définit la norme de ces champs par : $\|f\|_2 = \iint f dS$, où dS correspond à un élément de surface. On cherche un coefficient β tel que :

$$\min_{\beta} \|f - \beta g\|_2^2 \tag{III.6}$$

soit

$$F(\beta) = \|f - \beta g\|_2^2 \tag{III.7}$$

la condition

$$\frac{\partial F(\beta)}{\partial \beta} = 0 \tag{III.8}$$

conduit à

$$\beta = \frac{\|f \times g\|_2}{\|g \times g\|_2} \tag{III.9}$$

Après calcul, on obtient $\beta=29.95$. L'erreur relative entre les deux champs est alors de l'ordre de 10^{-7} . On peut ainsi conclure que les variations de niveaux ne sont pas expliquées par une différence de répartition spatiale mais bien par une différence de niveaux en chaque point de la surface pour une répartition quasi identique.

Enfin, on présente figure III.12, les résultats concernant le niveau de puissance acoustique totale par essai. L'essai de référence est le moins bruyant mais il existe des configurations de défauts pour lesquelles on obtient des niveaux sonores quasi identiques. L'écart maximal entre les essais est de plus de 10 dB ce qui semble d'un bon ordre de grandeur au regard des constats expérimentaux en sortie de chaîne de production.

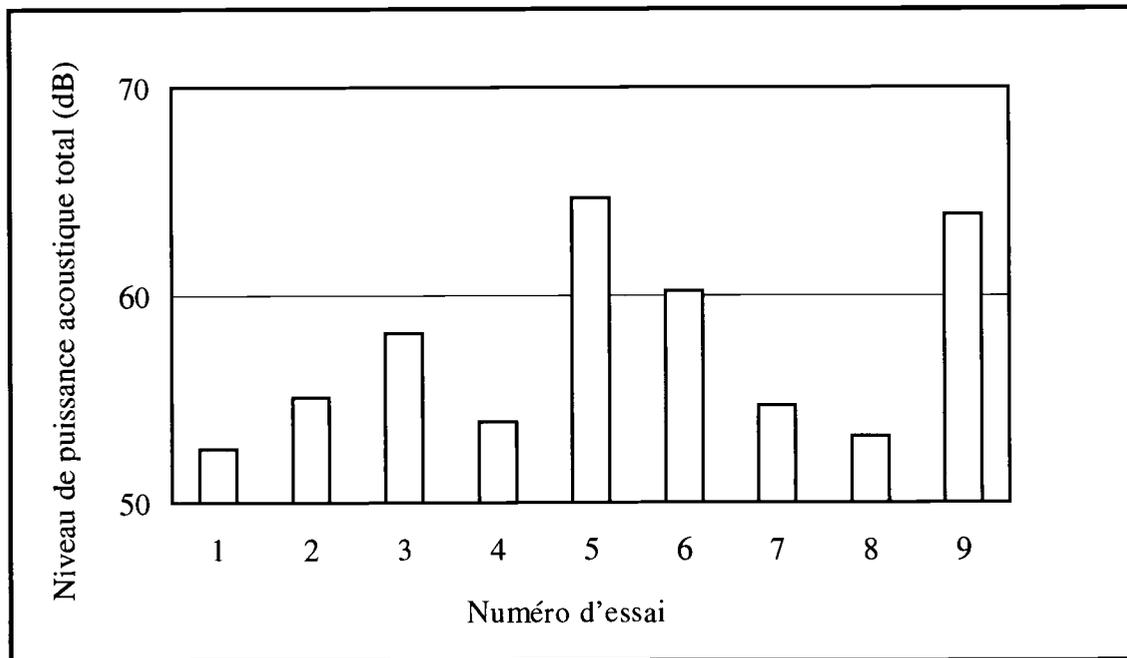


Figure III.12 : Niveaux de puissance acoustique totale rayonnée par chaque essai.

d) Conclusion.

L'analyse de variance démontre que le défaut de distorsion est le plus influent. Ainsi, il apparaît judicieux de privilégier un changement de la classe de qualité affectée à ce défaut si on souhaite réduire efficacement la variabilité des niveaux de bruit rayonné. Afin de conforter le propos, nous allons maintenant choisir une nouvelle configuration des tolérances affectées aux défauts de fabrication profil et distorsion.

B. Résultats pour la classe de qualité P8-D7.

Nous conservons la classe de qualité 8 pour le défaut de profil et choisissons une classe de qualité 7 pour le défaut de distorsion.

a) Erreur statique de transmission sous charge.

La figure III.13 présente les neuf spectres de l'erreur de transmission pour cette configuration de défauts. Les écarts entre les essais sont fortement réduits, particulièrement sur la raie 1. L'ensemble des spectres présente la même allure que celle de la configuration précédente. L'essai de référence

reste l'essai pour lequel la source d'excitation est la plus faible pour l'harmonique fondamental, mais cette tendance n'est pas confirmée sur les raies suivantes. Ceci constitue une différence majeure avec la configuration précédente.

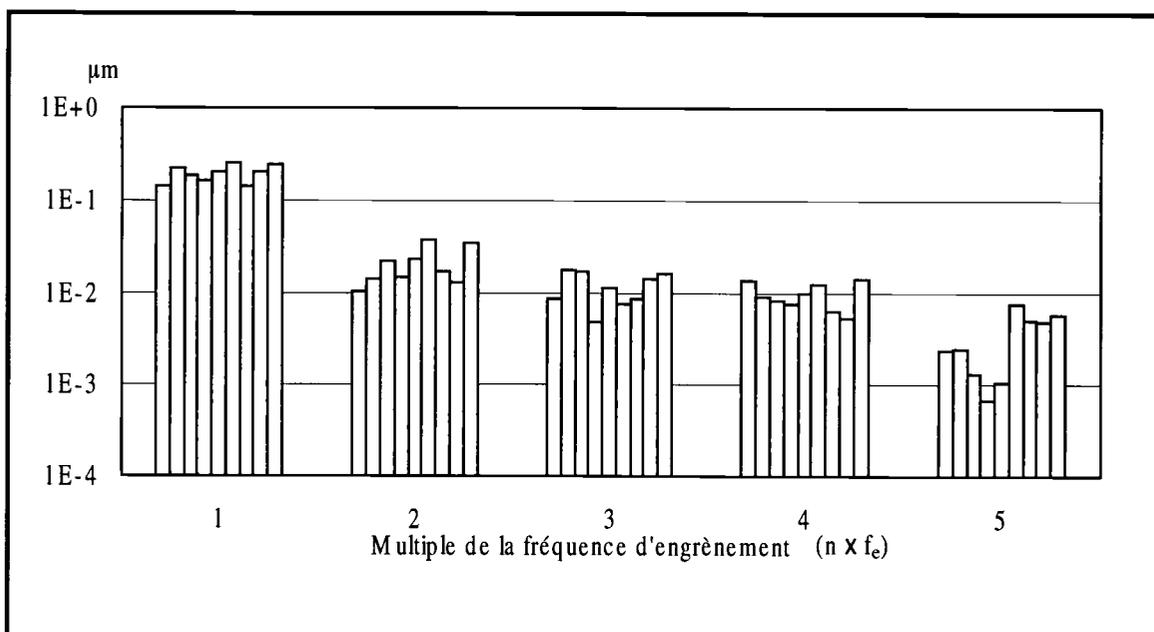


Figure III.13 : Spectres de l'erreur statique de transmission sous charge par ordre croissant des essais.

En augmentant la précision de fabrication du défaut de distorsion, on s'attend à donner une importance relative plus grande au défaut de profil. L'analyse de variance, dont les résultats sont présentés tableau III.11, confirme cette tendance. L'interaction a également une influence réduite mais ne disparaît pas.

	Raie 1	Raie 2	Raie 3	Raie 4	Raie 5
Variance P	$4.17 \cdot 10^{-4}$	$6.88 \cdot 10^{-5}$	$3.34 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-6}$	$7.85 \cdot 10^{-6}$
Variance D	$5.16 \cdot 10^{-3}$	$2.54 \cdot 10^{-4}$	$4.14 \cdot 10^{-5}$	$8.65 \cdot 10^{-6}$	$4.53 \cdot 10^{-6}$
Variance PD	$5.33 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$3.28 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$5.30 \cdot 10^{-6}$

Tableau III.11 : Variances (EST en amplitude) des défauts et de leur interaction par raie.

b) Réponse vibratoire.

La figure III.14 présente les spectres du niveau de vitesse quadratique pour chacun des essais du plan d'expériences. Là encore les écarts subsistent mais sont réduits et, l'essai 1 reste l'essai le moins rayonnant sur la raie dominante.

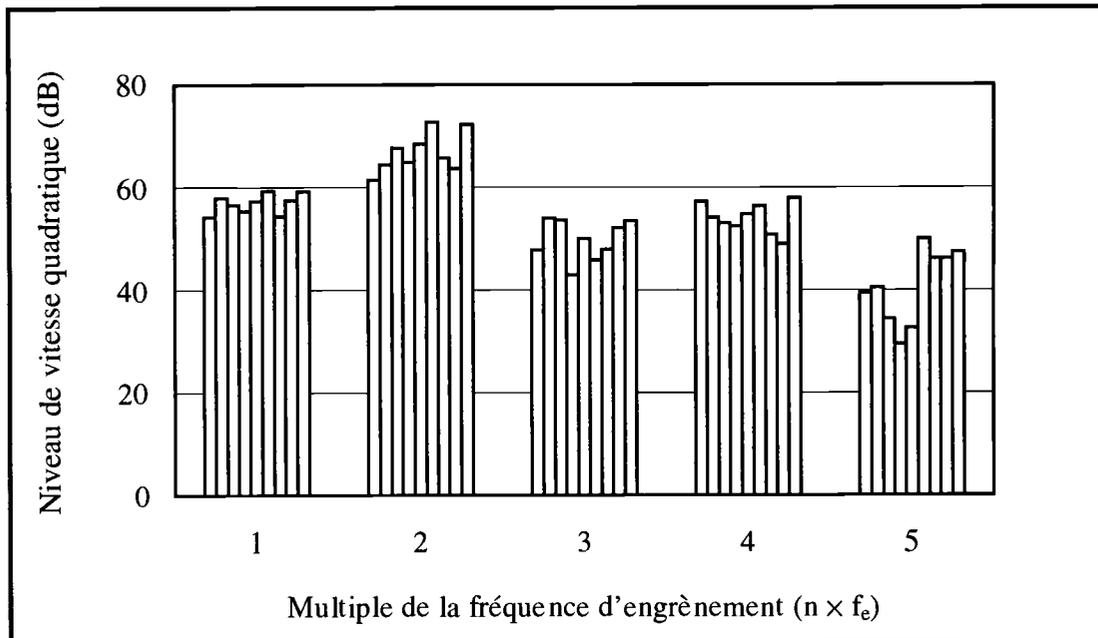


Figure III.14 : Spectres du niveau de vitesse quadratique pour chacun des essais dans l'ordre croissant.

c) Rayonnement acoustique.

La figure III.15 présente les spectres du niveau de puissance acoustique rayonnée pour chacun des essais du plan d'expériences. Ces spectres sont proportionnels à ceux de la vitesse quadratique car le facteur de rayonnement n'évolue que très peu. Les conclusions sont donc identiques à celles du paragraphe précédent.

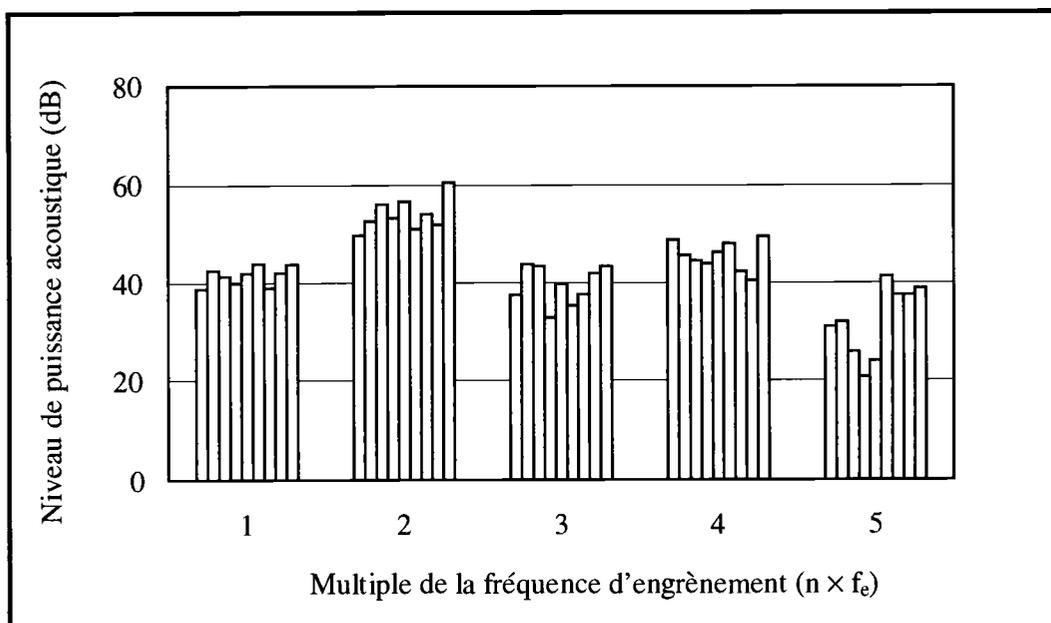


Figure III.15 : Spectres du niveau de puissance acoustique rayonnée pour chacun des essais dans l'ordre croissant.

La figure III.16 présente le niveau de puissance acoustique totale rayonnée pour chacun des essais du plan d'expériences. L'essai de référence reste le moins bruyant, mais d'autres configurations de défauts engendrent quasiment les mêmes niveaux sonores. Il apparaît que les essais sont moins dispersés autour de l'essai référence. Nous préciserons ces résultats en présentant le calcul des moments statistiques des niveaux de bruit au paragraphe D).

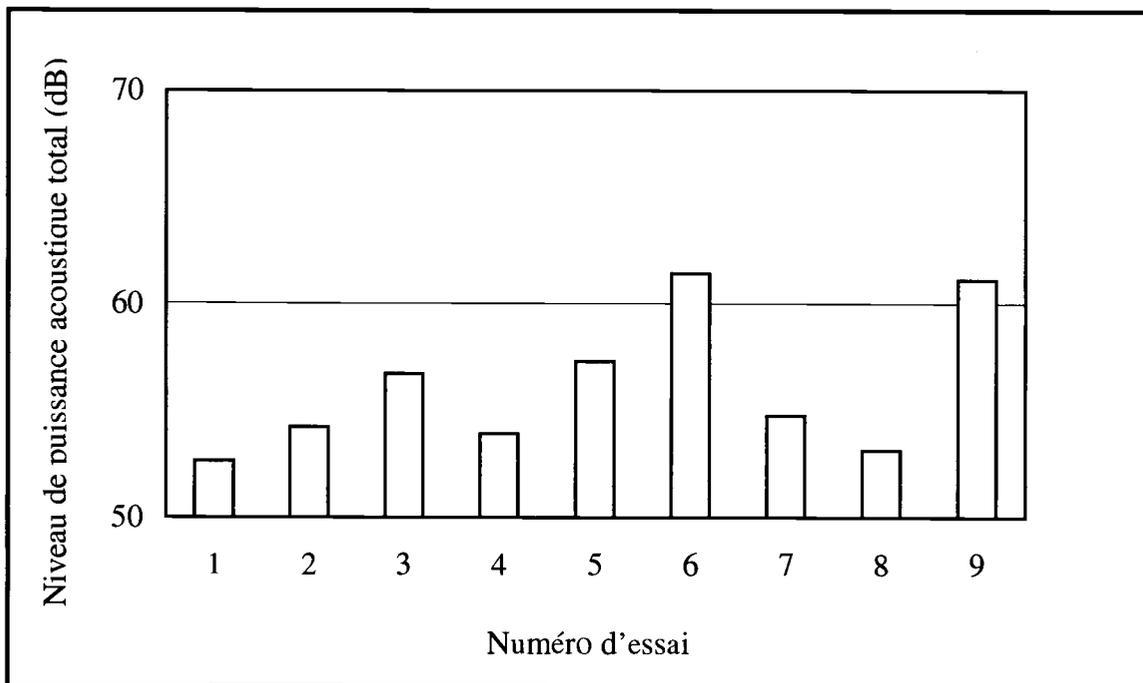


Figure III.16 : Niveaux de puissance acoustique rayonnée pour chacun des essais.

La figure III.17 représente la matrice d'expérience pour la puissance acoustique totale rayonnée exprimée en Watts. Comme on peut le constater, l'interaction entre les deux défauts de géométrie demeure.

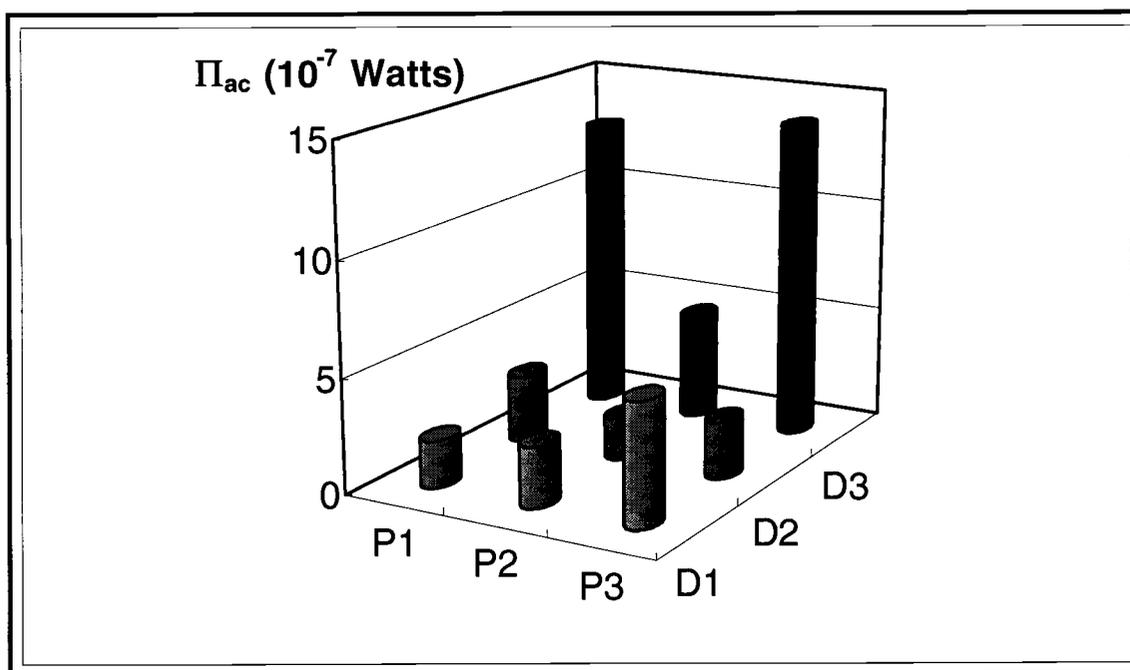


Figure III.17 : Matrice d'expérience à l'aide de la puissance acoustique totale rayonnée.

C. Résultats pour la configuration P7-D8.

A présent, nous souhaitons examiner le cas où la classe de qualité affectée au défaut de profil est la classe de qualité 7 alors que celle du défaut de distorsion est de 8. Cette configuration devrait fournir des résultats intermédiaires en terme de réduction de la variabilité des niveaux sonores.

Pour ne pas alourdir la présentation, on se contentera ici de présenter les résultats obtenus pour les niveaux de puissance acoustique totale rayonnée. La figure III.18 présente les niveaux de puissance acoustique totale rayonnée pour chacun des essais du plan d'expériences. Les écarts entre les essais ont augmenté par rapport à la configuration P8-D7 mais restent inférieurs à ceux de la configuration P8-D8. Néanmoins, l'essai de référence n'est plus l'essai le moins bruyant, l'essai 4 est devenu le moins sonore.

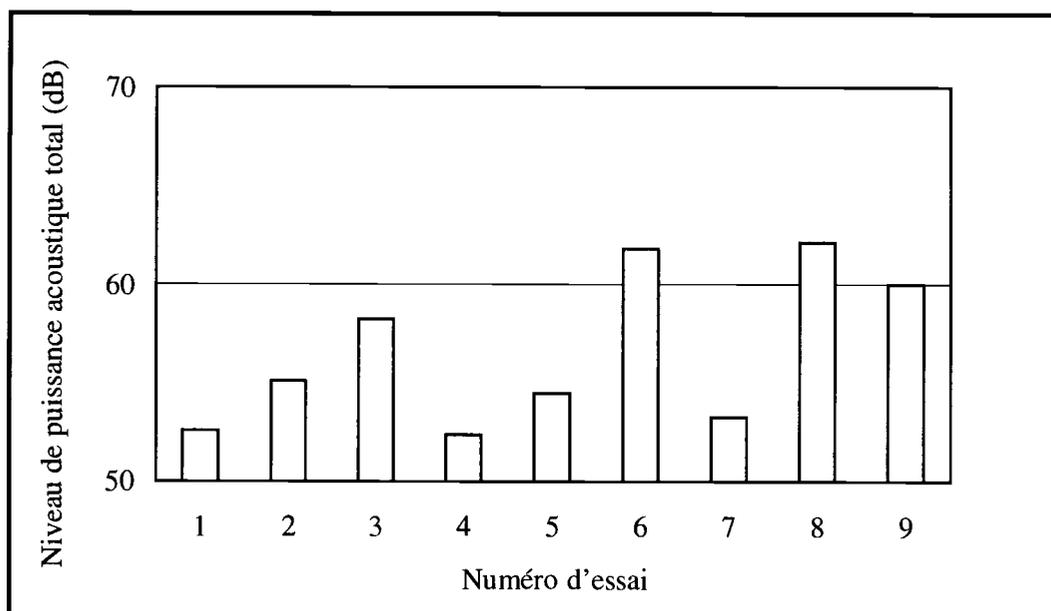


Figure III.18 : Niveaux de puissance acoustique totale rayonnée pour chacun des essais.

D. Calculs des moments statistiques du bruit rayonné.

A présent, nous allons quantifier les écarts entre les niveaux sonores rayonnés pour les trois configurations de classe de qualité. Nous utilisons la méthode d'échantillonnage de Taguchi et les résultats de chacun des plans d'expériences. Les calculs doivent être effectués pour des puissances exprimées en Watts, puis converties en décibels. Nous présentons, tableau III.12, les résultats obtenus pour les trois configurations de classe de qualité. La configuration P8-D7 est la configuration la plus intéressante avec une valeur moyenne et un écart type qui restent les plus faibles. Toutefois, on remarquera que les niveaux sonores sont faibles car inférieurs à 60 dB pour l'ensemble des configurations. On peut interpréter ce fait en précisant que pour le régime choisi, les modes excités par l'erreur de transmission ne sont pas des modes critiques en terme de bruit. Le gain de réduction de variabilité est surtout perceptible sur l'écart type du bruit rayonné et non sur sa valeur moyenne.

Afin de préciser les niveaux de bruit supérieurs atteints pour chaque configuration, nous calculons, à l'aide de l'inégalité de Tchebycheff, le seuil garantissant que seulement 4% au maximum de la production soit susceptible d'être plus élevé. Si on utilise l'inégalité de Tchebycheff, c'est que rien ne garantit que la distribution du bruit rayonné soit de type gaussien. Le calcul montre que ce seuil est de 65.3 dB pour la configuration P8-D8, 62.2 dB pour la configuration P8-D7 et 63.2 dB pour la configuration P7-D8. Le gain est conséquent puisque les puissances sont divisées par 2 entre la configuration P8-D8 et P8-D7.

	P8-D8	P8-D7	P7-D8
Valeur moyenne			
Π_{actot} (dB)	56.4	55	55.5
(Watts)	$4.35 \cdot 10^{-7}$	$3.17 \cdot 10^{-7}$	$3.57 \cdot 10^{-7}$
Ecart moyen (dB)	3.8	2.4	2.9
Ecart type (Watts)	$5.85 \cdot 10^{-7}$	$2.67 \cdot 10^{-7}$	$3.51 \cdot 10^{-7}$

Tableau III.12 : Moments statistiques des niveaux de bruit pour l'ensemble des configurations.

V. Conclusion.

L'application d'une méthode d'échantillonnage Taguchi couplée à l'utilisation des plans d'expériences avec une analyse de variance nous a permis de traiter le problème de la dispersion du bruit rayonné par une transmission par engrenages. Il a été possible d'étudier l'influence des défauts sur la variabilité des niveaux sonores et d'estimer, sans la surestimer, la variabilité induite par l'introduction des tolérances. La stratégie retenue consiste en une approche directe car le calcul complet est mené de bout en bout. Bien qu'efficace, elle est lourde à mettre en oeuvre car aucune tâche n'est automatisée. C'est pourquoi, l'emploi d'une simulation Monte Carlo n'a pas été possible. Dans ce contexte, on est conscient que les résultats présentés souffrent de l'absence de comparaison.

Notre étude a montré que les écarts de performance étaient conséquents et impliquaient essentiellement une variabilité forte des niveaux sonores. En effet, pour ce régime de fonctionnement, on a pu constater que la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement est peu affectée par l'introduction des défauts de géométrie. De ce fait, on n'aurait pu ne conserver qu'une seule base de vecteurs propres pour le calcul des champs vibratoires et acoustiques et ainsi diminuer sensiblement les temps de calcul.

L'écart moyen fournit une indication de la valeur moyenne des nuisances acoustiques par rapport à une transmission référence (sans défaut de géométrie), tandis que l'écart type permet de donner la fourchette dans laquelle se situeront les niveaux de bruit rayonné. D'autre part, nous avons observé une proportionnalité entre les trois réponses calculées. Ceci est dû aux conditions de fonctionnement de la transmission (régime de rotation et couple moteur faibles).

L'optimisation de la variabilité passe par un choix judicieux des classes de qualité affectées à chaque défaut de géométrie. Cette condition impose de connaître la sensibilité du système et l'usage des plans d'expériences permet de répondre à cette question. Dans notre exemple, les deux défauts de géométrie sont influents mais l'augmentation de la précision de fabrication sur le défaut de distorsion constitue un choix plus judicieux.

L'application de la méthode Taguchi implique, dans cette étude, d'effectuer neuf essais pour chaque configuration de tolérances. Ce nombre d'essais dépend du nombre de défauts introduits. On rappelle que pour chaque essai, il faut effectuer un calcul complet : évaluer successivement l'erreur statique de transmission sous charge, la raideur d'engrènement, les modes propres de la transmission, la réponse vibratoire, puis le bruit rayonné par des approches et des codes de calcul distincts. La mise en application reste lourde même si l'application de la méthode Taguchi permet de réduire fortement le nombre d'essais. Il serait souhaitable d'envisager une procédure plus rapide pour des cas où le nombre de défauts est supérieur (3, 4 etc) voire de scinder le calcul en plusieurs étapes, chaque étape faisant l'objet d'un traitement statistique à l'aide d'une méthode différente. Le chapitre suivant examine, au travers de résultats statistiques concernant les sources d'excitation et la base modale de la transmission, la faisabilité de l'utilisation d'autres méthodes stochastiques.

CHAPITRE IV	130
VARIABILITÉ DES SOURCES D'EXCITATION, DES CARACTÉRISTIQUES MODALES ET DES VITESSES CRITIQUES	
DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES	130
<i>I. Introduction.</i>	130
<i>II. Un premier exemple de modèle dynamique.</i>	131
A. Description de l'engrenage et géométrie nominale.....	131
B. Erreur statique de transmission sous charge et raideur d'engrènement.....	132
C. Introduction des défauts de géométrie et résultats statistiques.....	135
a) Description des défauts de géométrie.	135
b) Statistique de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement.	136
D. Modèle dynamique et plages de vitesses critiques.....	138
a) Description du modèle dynamique.	138
b) Introduction des tolérances et plages de vitesses critiques.	140
<i>III. Un second modèle dynamique de transmission.</i>	143
A. Description de l'engrenage et résultats nominaux.	143
B. Statistiques de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement.	145
a) Statistique de l'erreur de transmission, effet de la charge transmise.	145
b) Statistique de la raideur d'engrènement, effet de la charge transmise.	148
c) Corrélation statistique entre erreur de transmission et raideur d'engrènement.	149
d) Influence de la distribution des défauts de géométrie.....	150
C. Modèle dynamique éléments finis et plages de vitesses critiques.....	151
a) Description du modèle dynamique.	151
b) Statistique des modes propres et plages de vitesses critiques.....	152
D. Conclusion sur les résultats statistiques.....	154
<i>IV. Discussion sur la gestion du calcul de la variabilité</i>	155

Chapitre IV

VARIABILITÉ DES SOURCES D'EXCITATION, DES CARACTÉRISTIQUES MODALES ET DES VITESSES CRITIQUES DES TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES

I. Introduction.

Comme nous l'avons illustré dans le chapitre précédent, la méthode d'échantillonnage de Taguchi couplée à l'utilisation des plans d'expériences permet d'analyser efficacement la variabilité des nuisances sonores de transmissions par engrenages. Les résultats alors obtenus permettent directement de prédire la variabilité des niveaux de bruit rayonné. Toutefois, bien que simple à mettre en oeuvre, la méthode Taguchi nécessite de reconduire le calcul complet du rayonnement acoustique plusieurs fois, sachant que de multiples étapes de calcul demeurent nécessaires pour lesquelles les manipulations restent lourdes. Dans ce contexte, il était intéressant d'envisager le traitement de la variabilité sous un autre angle en recherchant une stratégie adaptée à chaque étape du calcul. En clair, nous nous sommes attachés à discerner, étape par étape, la variabilité des sources d'excitation puis des modes propres de la transmission du calcul dynamique puis acoustique. De ce point de vue, l'usage simultané de diverses méthodes stochastiques doit apporter gain de temps et rendre plus facile l'ensemble des manipulations. Par exemple, l'application d'une méthode de perturbation pour le calcul de la réponse vibratoire pourrait limiter considérablement le nombre de calculs puisqu'elle ne nécessite pas la discrétisation des variables aléatoires d'entrée.

Dans ce contexte, l'objectif de ce chapitre est de présenter les travaux réalisés en vue d'explorer des stratégies distinctes à chaque étape du calcul acoustique. Plus particulièrement, nous nous sommes en premier lieu focalisés sur la source excitatrice i. e. l'erreur statique de transmission, pour laquelle des simulations Monte Carlo nous ont permis de conclure. Par ailleurs, nous avons exploré les effets de la variabilité de la raideur d'engrènement sur les modes propres de la transmission et par voie de conséquence sur les régimes critiques (en terme de nuisance vibroacoustique) dont sont le siège une transmission par engrenages.

Ces deux informations, erreur statique de transmission sous charge et régimes critiques de fonctionnement, sont d'un intérêt capital dans le problème de la variabilité des performances vibroacoustiques de transmissions par engrenages.

L'organisation du chapitre est la suivante. La première partie est consacrée à l'étude d'un engrenage droit et d'un modèle dynamique (4 ddl) simplifié de transmission par engrenages. Après avoir décrit la géométrie nominale de cet engrenage, nous présentons des résultats déterministes concernant son comportement. L'introduction de défauts typiques de fabrication permet alors d'estimer la variabilité des vitesses critiques d'un tel système. La deuxième partie présente une étude similaire effectuée avec un engrenage à la géométrie plus complexe couplé à un modèle dynamique

éléments finis. La variabilité des sources d'excitation est fournie, puis l'analyse concernant l'occurrence des régimes critiques (vitesse et couple) est présentée.

Sur la base des résultats obtenus, nous concluons sur la phénoménologie gouvernant la variabilité du bruit rayonné, mais aussi sur l'efficacité attendue de la méthode d'échantillonnage de Taguchi.

II. Un premier exemple de modèle dynamique.

Nous nous intéressons ici à un modèle dynamique de transmission par engrenages simple étage à denture droite. Nous décrivons tout d'abord l'engrenage étudié ainsi que les résultats (erreur statique de transmission sous charge et raideur d'engrènement) déterministes dans le cas où la géométrie des dentures n'est pas affectée par les tolérances de fabrication. L'introduction de ces tolérances traitées par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi fournissent des résultats statistiques importants quant à la variabilité des sources d'excitation de la transmission. Enfin, l'usage d'un modèle dynamique simple à quatre degrés de liberté permet d'estimer efficacement les plages de régimes stationnaires (vitesses critiques) à éviter si l'on souhaite minimiser les nuisances vibroacoustiques.

A. Description de l'engrenage et géométrie nominale.

L'engrenage étudié est un engrenage droit dont les caractéristiques macro géométriques sont données dans le tableau IV.1.

	Pignon	Roue menée
Nombre de dents	37	71
Rayon de base (mm)	52.153	100.077
Module normal (mm)	3	
Angle de pression	20°	
Largeur de denture (mm)	24	
Entraxe (mm)	162	

Tableau IV.1 : Caractéristiques géométriques principales de l'engrenage.

Nous introduisons des corrections de denture paraboliques sur le profil de denture et la longueur des dents. Ces corrections ont été choisies afin de minimiser la valeur crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge, dénommée δ_{pp} , pour une charge transmise appliquée égale à 6000 N. Cette charge est dénommée charge optimale. La correction sur la largeur de la dent est de forme parabolique d'amplitude maximale égale à 16 μm au plan médian de la dent. La correction de profil est également de type parabolique avec une amplitude de 20 μm centrée au milieu du profil de la dent.

Cette géométrie constitue alors la géométrie nominale et optimale. Les tolérances de fabrication affecteront la micro géométrie des dentures autour de ces valeurs nominales. Le corps des deux roues est ici supposé rigide et seules les dentures se déforment sous l'application de la charge transmise.

B. Erreur statique de transmission sous charge et raideur d'engrènement.

Le calcul de l'erreur statique de transmission sous charge et de la raideur d'engrènement est décrit dans le premier chapitre de ce manuscrit. Nous ne précisons ici que les données clés que nécessite ce calcul. La rotation du pignon est discrétisée en 32 positions. La matrice de souplesse associée à la ligne de contact entre les dentures est de dimension 18×18 pour un couple de dents en prise et tient compte des déformations hertziennes de manière linéaire. L'engrenage étant à denture droite, toute la largeur de la dent peut être en contact. Vu la géométrie de l'engrenage, le nombre de couples de dents en prise est au maximum de 2. Les corrections de denture induisent un écart entre les surfaces réelles des dents et les surfaces théoriques, écart qui est introduit dans l'équation d'équilibre statique I.2 sous forme du vecteur $\{e\}$. Ce vecteur est différent selon les 32 positions du pignon, et est, par conséquent, réinitialisé pour chaque position.

Nous présentons, figure IV.1, les évolutions temporelles de l'erreur statique de transmission sous charge calculées pour diverses charges transmises croissantes. On présente ces évolutions sur deux périodes d'engrènement et pour les charges égales à 0 N, 1500 N, 3000 N, 4500 N, 6000 N et 7500 N.

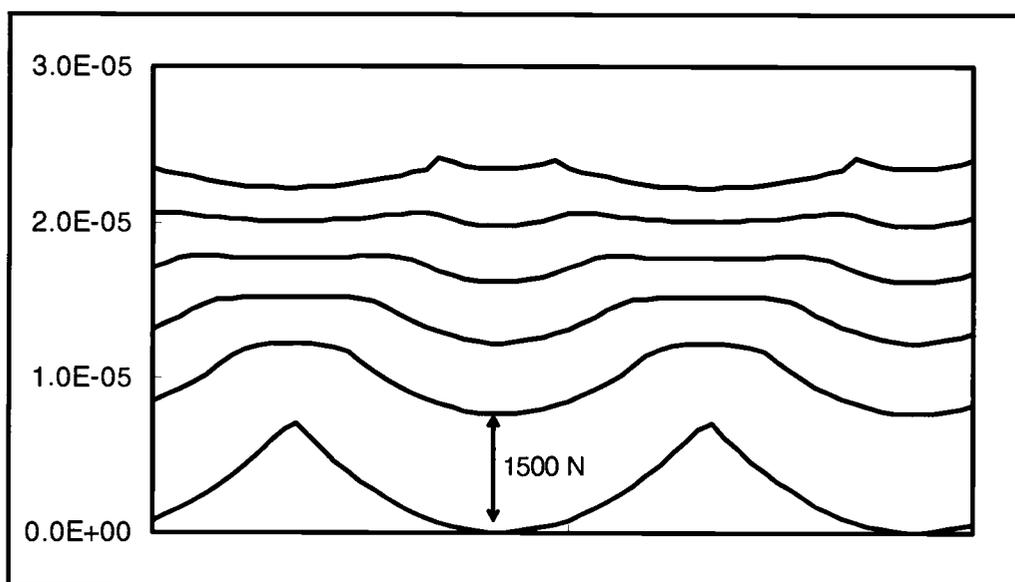


Figure IV.1 : Evolution temporelle de l'erreur statique de transmission sous charge (m) pour deux périodes d'engrènement et plusieurs charges appliquées (0-7500 N) par pas de 1500 N.

L'erreur de transmission est de l'ordre de la dizaine de micromètre. Son évolution temporelle pour une charge nulle correspond à l'erreur cinématique de transmission où seules les corrections de denture interviennent. On reconnaîtra dans sa variation temporelle le type de corrections de nature

parabolique. Nous présentons figure IV.2 l'évolution de l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge en fonction de la charge appliquée.

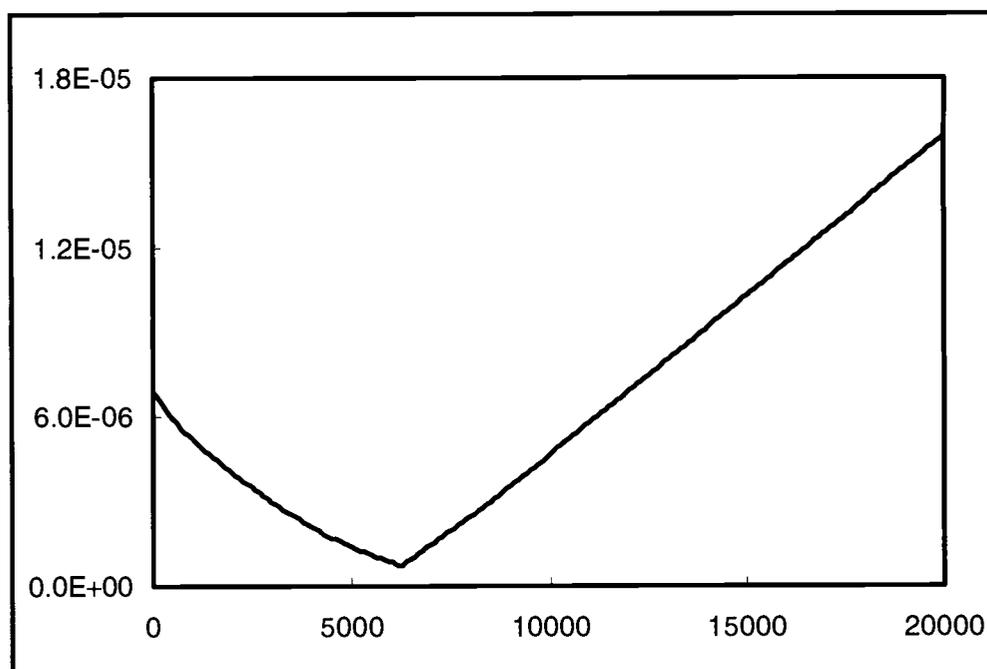


Figure IV.2 : Evolution de l'amplitude crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge δ_{pp} (m) en fonction de la charge appliquée (N).

Conformément aux choix introduits, les corrections de denture minimisent l'erreur de transmission pour une charge appliquée égale à 6000 N. On remarquera qu'au-delà de la charge optimale, la variation de l'amplitude crête à crête est quasi linéaire avec la charge.

Le calcul de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement est décrit dans le premier chapitre par l'équation I.6. Le calcul de la dérivée partielle est numérique selon la relation suivante pour les 32 positions du pignon :

$$K_e \approx \delta F / [\Delta(F + \delta F) - \Delta(F)] \quad (\text{IV.1})$$

Nous présentons, figure IV.3, l'évolution temporelle de la raideur d'engrènement pour une charge égale à 3000 N sur deux périodes d'engrènement.

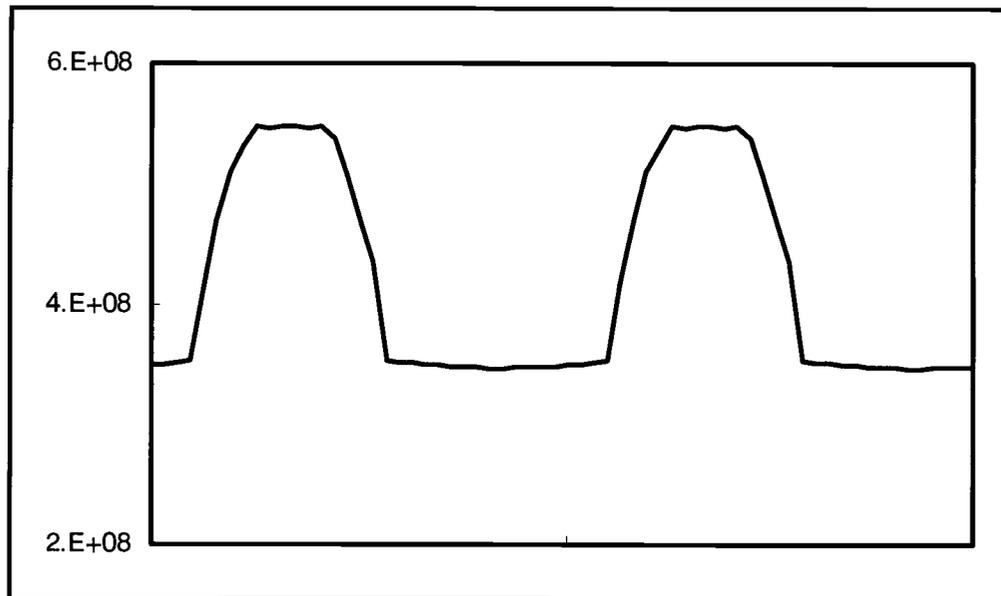


Figure IV.3 : Evolution temporelle de la raideur d'engrènement (N/m) pour une charge appliquée de 3000 N.

La variation d'une paire à deux paires de dents en prise est clairement mise en évidence. On remarquera en outre que l'amplitude de la fluctuation n'est pas négligeable avec des niveaux crête à crête de l'ordre de 40 % de la valeur moyenne.

Par ailleurs, nous présentons figure IV.4 l'évolution de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement $\langle K_e \rangle$ en fonction de la charge appliquée.

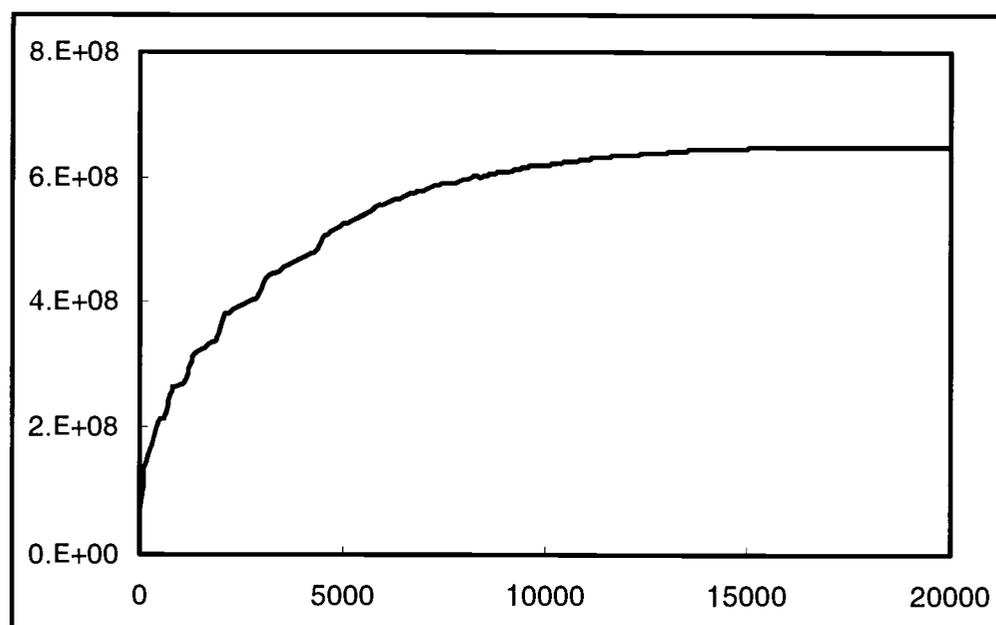


Figure IV.4 : Evolution de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement $\langle K_e \rangle$ (N/m) en fonction de la charge appliquée N .

Ce résultat permet d'exhiber le caractère non linéaire de la raideur. Il faut notamment atteindre des charges élevées (> 10000 N) pour que la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement évolue très peu. Pour l'engrenage défini précédemment, les variations les plus fortes s'observent autour de la charge optimale.

C. Introduction des défauts de géométrie et résultats statistiques.

a) Description des défauts de géométrie.

L'ensemble des intervalles de tolérances pour les défauts de géométrie introduits (erreur de profil, erreur longitudinal et mésalignement des arbres) correspond à la classe de qualité 7 définie par la norme française AFNOR NF E23-0006. Il s'agit d'une classe de qualité standard couramment utilisée dans l'industrie (boîte de vitesses, machines outils ...). Les défauts introduits sont décrits figure IV.5.

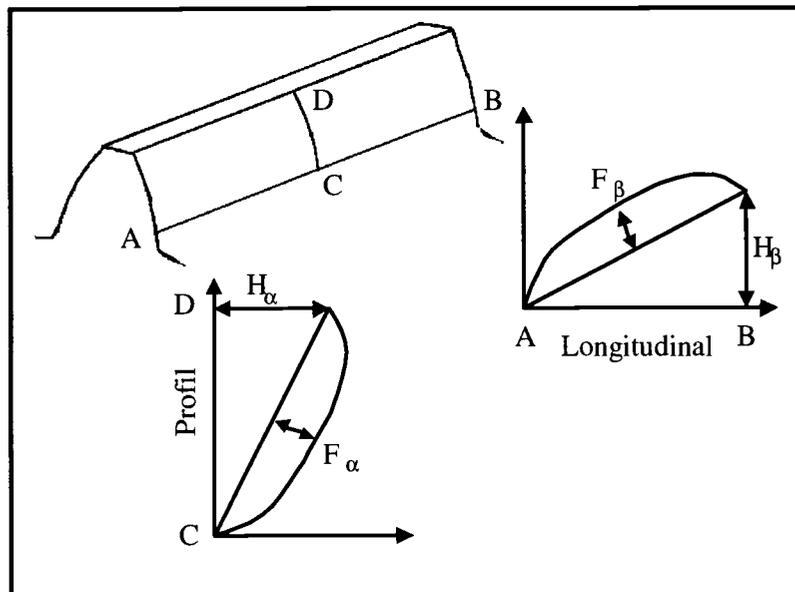


Figure IV.5 : Description des défauts de géométrie introduits.

Ces défauts de géométrie combinent des défauts de forme de la dent et des défauts d'alignement des arbres exprimés par deux paramètres dans le sens de la largeur, soient respectivement F_β et H_β . Les défauts introduits le long du profil sont exprimés par deux paramètres F_α et H_α . Le symbole F désigne des erreurs de forme quadratique alors que le symbole H désigne des erreurs de forme linéaire. Ces quatre paramètres permettent aisément de construire le vecteur $\{e\}$ des écarts entre les surfaces des dents en contact. On notera que ces paramètres permettent aussi de décrire les corrections de denture précédemment introduites. En absence de défauts de géométrie, on retrouve bien la micro géométrie nominale. L'introduction des tolérances rend la variation de ces paramètres incertaine. Nous choisissons de les modéliser par des variables aléatoires de densité de probabilité gaussienne, statistiquement indépendantes. La connaissance de la classe de qualité permet de fixer les deux

premiers moments statistiques de ces paramètres. Le tableau IV.2 donne la valeur moyenne et l'écart type de chacun des paramètres pour la classe de qualité 7. Les valeurs moyennes correspondent à la géométrie nominale des dentures corrigées.

	Moyenne (μm)	Ecart type (μm)
F_α	20	4.53
H_α	0	3.4
F_β	16	4
H_β	0	4.63

Tableau IV.2 : Moments statistiques des défauts de géométrie modélisés par des variables aléatoires gaussiennes.

b) Statistique de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement.

Pour évaluer la variabilité nous avons employé une simulation Monte Carlo de 30000 tirages et comparé les résultats à la méthode Taguchi avec trois points de discrétisation par paramètre aléatoire (81 essais au total). La simulation Monte Carlo est toutefois la seule méthode permettant d'obtenir la densité de probabilité des variables de sortie. Nous nous intéressons ici à la valeur crête à crête de l'erreur statique de transmission sous charge δ_{pp} ainsi qu'à la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement $\langle K_e \rangle$. La première est directement liée aux niveaux de réponses dynamiques et acoustiques alors que la seconde est liée à la base modale du modèle dynamique de la transmission.

Nous présentons, figure IV.6, les densités de probabilité de δ_{pp} obtenues par simulation Monte Carlo pour deux valeurs de la charge appliquée : la charge optimale et la demi charge optimale.

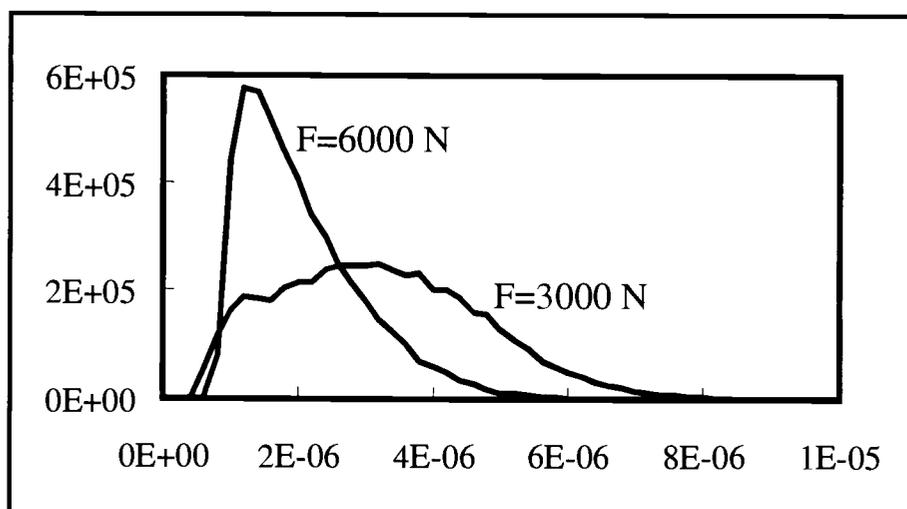


Figure IV.6 : Densité de probabilité de δ_{pp} (m) pour la charge optimale et la demi charge optimale.

Il apparaît clairement que la forme de la densité de probabilité dépend fortement de la charge appliquée. La forme des densités de probabilité rappelle la loi de Weibull, mais il est impossible de généraliser ce constat comme nous le verrons ultérieurement. Nous présentons, tableau IV.3, les deux premiers moments statistiques estimés par simulation Monte Carlo et par la méthode Taguchi pour la valeur crête à crête de l'erreur de transmission et pour la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement. Comme on peut le constater la méthode Taguchi reste valide pour un nombre de tirages considérablement plus faible que celui requis par la simulation Monte Carlo.

	$E(\delta_{pp})$ μm	$\sigma(\delta_{pp})$ μm	$E(\langle K_e \rangle)$ $\text{N}/\mu\text{m}$	$\sigma(\langle K_e \rangle)$ $\text{N}/\mu\text{m}$	
Monte Carlo	1.95	0.91	545	25.2	F=6000 N
Taguchi	1.79	1.06	547	26.7	
Nominale	0.84		557		
Monte Carlo	3.11	1.48	432	31	F=3000 N
Taguchi	3.10	1.49	431	29.5	
Nominale	3		429		

Tableau IV.3 : Moments statistiques de δ_{pp} et de $\langle K_e \rangle$, comparaison des estimations.

La variabilité est importante puisque le rapport écart type /valeur moyenne atteint plus de 40 % pour l'erreur de transmission. La raideur d'engrènement est moins sensible aux tolérances puisque le rapport écart type/valeur moyenne n'excède pas 10 %. On s'attend alors à une forte variation des niveaux de réponse dynamique plutôt qu'à une variation de leur occurrence fréquentielle. D'autre part, la valeur crête à crête de l'erreur de transmission obtenue pour la géométrie nominale et la charge optimale est très éloignée de la valeur moyenne statistique affectée par les tolérances. Ceci confirme le constat déjà évoqué, à savoir qu'une perturbation de la micro géométrie des dentures affecte particulièrement les sources d'excitation autour du point de conception. Le mécanisme est particulièrement sensible dès lors que l'on s'écarte de la géométrie optimisée pour une charge particulière.

L'erreur de transmission et la raideur d'engrènement sont issues du même calcul et sont donc couplées. Malheureusement il n'existe pas de relation triviale entre ces grandeurs. La simulation Monte Carlo tout comme la méthode Taguchi permet toutefois d'estimer le coefficient de corrélation statistique entre ces deux grandeurs. Celui-ci est égal à -0.37 pour une charge appliquée de 3000 N et égal à -0.04 pour une charge de 6000 N. Là encore, le coefficient de corrélation dépend fortement du couple transmis et il arrive que la corrélation soit faible, dans notre cas pour la charge optimale.

A présent, nous allons introduire ces données dans un modèle dynamique simple, de telle sorte qu'il sera possible d'estimer, via la raideur d'engrènement, les vitesses critiques pour lesquelles les plus forts niveaux de bruit sont relevés.

D. Modèle dynamique et plages de vitesses critiques.

a) Description du modèle dynamique.

On introduit un modèle dynamique simplifié afin d'illustrer la méthode d'extraction des vitesses critiques. Ce modèle est présenté figure IV.7.

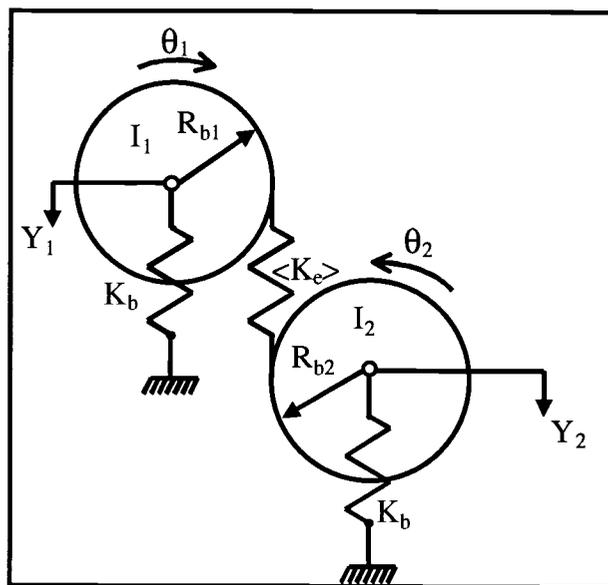


Figure IV.7 : Modèle dynamique à quatre degrés de liberté.

Il se compose de deux disques rigides d'inertie I_1 et I_2 couplés par la raideur d'engrènement (valeur moyenne temporelle). Nous introduisons des raideurs identiques K_b et représentatives de l'élasticité des roulements connectées au centre de rotation des disques. Ce modèle comporte quatre degrés de liberté, deux en translation Y_1 et Y_2 et deux en rotation θ_1 et θ_2 . Les déplacements en translation sont parallèles à la ligne d'action de l'engrènement alors que les positions angulaires repèrent la rotation de chacune des roues. Ce modèle semi défini positif peut se ramener à un modèle à trois degrés de liberté en posant $x = R_{b1}\theta_1 - R_{b2}\theta_2$, où x constitue l'erreur dynamique de transmission.

Les modes propres du modèle à 3 ddl se calculent analytiquement. Nous présentons l'évolution des trois fréquences propres (f_1 , f_2 et f_3) de ce modèle en fonction de la valeur K_b de raideur des roulements sur la figure IV.8. Pour ces calculs, les paramètres ont pour valeur : $I_1 = 2 \text{ kg m}^2$, $I_2 = 15 \text{ kg m}^2$ et $\langle K_e \rangle = 4.24 \cdot 10^8 \text{ N/m}$.

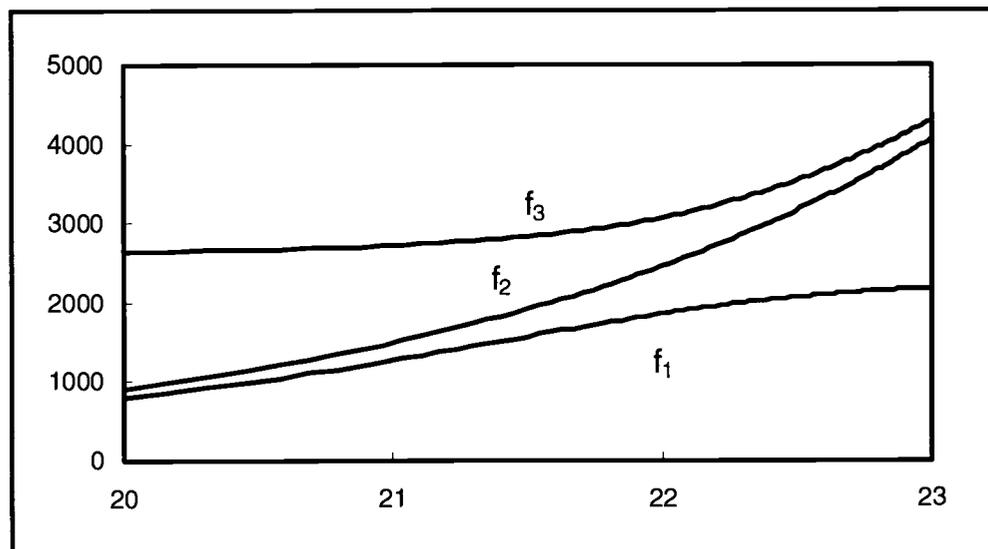


Figure IV.8 : Evolution des trois fréquences propres (Hz) en fonction du logarithme népérien de la raideur de roulement K_b .

Les fréquences ne se croisent jamais mais il apparaît judicieux de choisir une valeur de raideur des roulements telle que les fréquences soient les plus proches afin de détecter un éventuel croisement modal. Nous choisissons $K_b = 3.58 \cdot 10^9$ N/m.

L'extraction des modes liés aux vitesses critiques se fait selon la procédure décrite dans le premier chapitre. Pour le modèle utilisé, nous trouvons que seuls le mode 1 et le mode 3 ont des coefficients énergétiques sur la denture non nuls. Ces modes sont donc les modes critiques. Ils correspondent à une localisation majoritaire de l'énergie potentielle élastique modale dans la zone d'engrènement.

Les vitesses critiques de fonctionnement stationnaire correspondent à une excitation en résonance de ces modes critiques par l'erreur de transmission i.e. lorsque il y a coïncidence entre les fréquences des modes et les fréquences caractéristiques de l'erreur de transmission. Cette dernière étant une fonction périodique du temps, l'excitation peut être à la fréquence fondamentale (fréquence d'engrènement, premier harmonique) et tous ses harmoniques. Ainsi, les résonances ont lieu lorsque :

$$n \times Z_j \times f_{\text{rot},j} = f_i \quad (\text{IV.2})$$

où n est un entier décrivant l'harmonique qui excite le mode, j représente une des roues (1-pignon ou 2-roue menée), Z_j le nombre de dents de la roue j , $f_{\text{rot},j}$ la fréquence de rotation de la roue j et i représente un des modes critiques (1 ou 3). Pour une vitesse critique N_j exprimée en tours/min l'égalité IV.2 devient :

$$N_j = 60 \times f_i / n \times Z_j. \quad (\text{IV.3})$$

Il est entendu que l'excitation principale est à la fréquence d'engrènement.

b) Introduction des tolérances et plages de vitesses critiques.

L'introduction des tolérances de fabrication entraîne une variation aléatoire de la raideur moyenne d'engrènement, donc des fréquences propres des modes critiques. Les plages de vitesses critiques se déduisent de l'égalité IV.3 dès lors que l'on connaît les deux premiers moments statistiques des fréquences propres critiques par l'inégalité de Tchebycheff. Nous présentons tableau IV.4 l'estimation des deux premiers moments statistiques des fréquences propres critiques des modes 1 et 3 pour la charge optimale et la demi charge optimale.

	$E(f_1)$ Hz	$\sigma(f_1)$ Hz	$E(f_3)$ Hz	$\sigma(f_3)$ Hz	
Monte Carlo	1947	14.1	3314	48.4	F=6000 N
Taguchi	1948	14.9	3318	55.9	
Nominale	1954		3341		
Monte Carlo	1864	28.2	3081	63.2	F=3000 N
Taguchi	1864	26.4	3080	60.4	
Nominale	1864		3075		

Tableau IV.4 : Moments statistiques des fréquences propres critiques pour deux valeurs de la charge appliquée.

De même, le tableau IV.5 présente le calcul des deux premiers moments statistiques des coefficients énergétiques ρ_1 et ρ_3 des modes 1 et 3.

	$E(\rho_1)$	$\sigma(\rho_1)$	$E(\rho_3)$	$\sigma(\rho_3)$	
Monte Carlo	31.4 %	2.4 %	68.6 %	2.4 %	F=6000 N
Taguchi	31.2 %	2.2 %	68.7 %	2.2 %	
Nominale	30.3 %		69.7 %		
Monte Carlo	42.7 %	3.7 %	57 %	3.7 %	F=3000 N
Taguchi	42.9 %	3.5 %	57 %	3.5 %	
Nominale	43 %		57 %		

Tableau IV.5 : Moments statistiques des coefficients énergétiques ρ_1 et ρ_3 pour deux charges appliquées.

La variabilité des fréquences propres critiques reste modérée puisque le rapport écart type/valeur moyenne ne dépasse pas 2 %. Néanmoins, la variabilité est plus importante lorsque on applique une charge inférieure à la charge optimale. La répartition de l'énergie potentielle élastique diffère selon la charge appliquée. On constate que l'écart type des coefficients énergétiques est le même pour les deux modes critiques. Cela est lié au fait que, quelque soit la configuration géométrique de l'engrenage, la

somme des coefficients énergétiques doit être égale à 100 %. Les fréquences propres critiques sont bien séparées et il ne peut y avoir de croisement de modes. Cependant il n'est pas exclu d'observer un échange de la répartition énergétique. Afin d'illustrer ce constat, nous présentons figure IV.9 l'évolution des fréquences propres en fonction de la valeur moyenne de la raideur d'engrènement, pour le système décrit précédemment. Enfin, il y a lieu de souligner que là encore les estimations fournies par la méthode Taguchi sont en bon accord avec les résultats obtenus par simulation Monte Carlo.

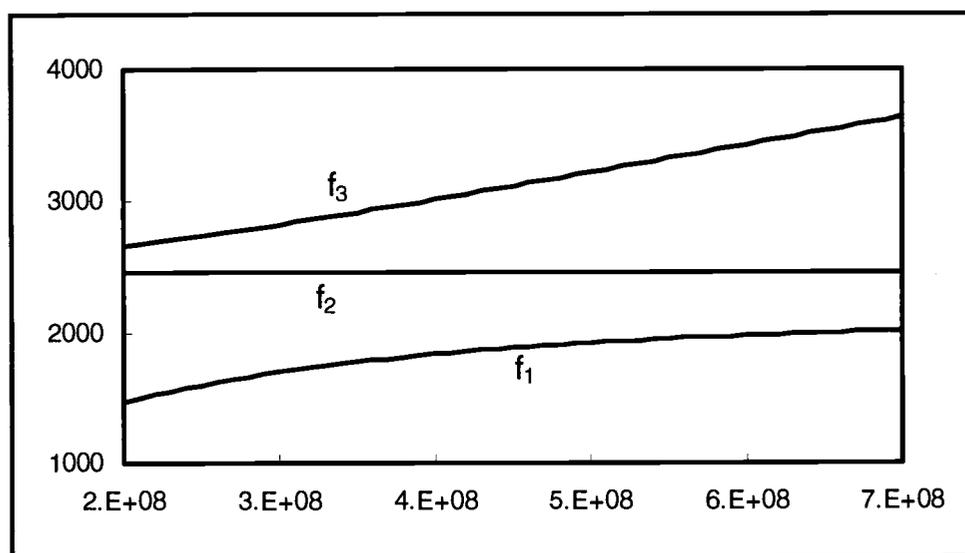


Figure IV.9 : Evolution des fréquences propres (Hz) en fonction de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement (N/m) pour une raideur de roulement $K_b = 3.58 \cdot 10^9$ N/m, $I_1 = 2$ kg m² et $I_2 = 15$ kg m².

Connaissant la variabilité des fréquences propres critiques, nous sommes en mesure de calculer les plages de vitesses critiques. Elles sont obtenues à l'aide de l'inégalité de Tchebycheff. Nous présentons figure IV.10 les plages de vitesses critiques pour la roue menée ($j = 2$) et pour une excitation en résonance à la fréquence d'engrènement ($n=1$) relatives aux deux modes critiques. D'après l'inégalité de Tchebycheff, la vitesse critique de fonctionnement d'une telle transmission par engrenages fabriquée en classe de qualité 7, a une probabilité minimum de 96 % d'être incluse dans ces plages de vitesses.

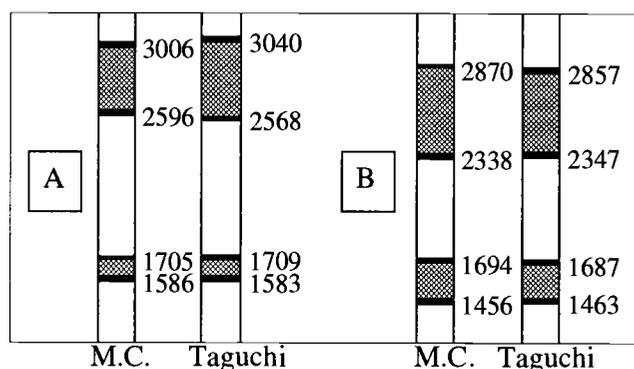


Figure IV.10 : Plages de vitesses critiques de la roue menée (tours/min) pour une charge de 6000 N (A) et pour une charge de 3000 N (B).

Les variations en terme de vitesses peuvent atteindre 500 tours/min. On peut en conclure que les défauts de fabrication affectent fortement le fonctionnement d'une population d'engrenages fabriqués en grande série, ceci même si la classe de qualité représente un bon compromis précision/coût de fabrication.

En résumé, cet exemple simple permet de mettre en évidence quelques points importants :

- Les résultats statistiques et notamment les densités de probabilité évoluent fortement selon la charge transmise appliquée,
- La sensibilité des sources d'excitation est maximale autour de la charge optimale,
- Il est impossible d'ignorer la corrélation statistique entre l'erreur de transmission et la raideur d'engrènement,
- Malgré l'usage d'une classe de qualité correcte, la variation des vitesses critiques peut être importante et,
- On constate un bon accord entre les estimations fournies par simulation Monte Carlo et la méthode Taguchi, et une nette diminution des temps de calcul.

Nous allons maintenant étudier un modèle dynamique plus complet de transmission par engrenages et essayer de dégager une tendance de l'évolution des résultats statistiques en fonction de la charge appliquée. Ce second exemple sera également l'occasion de montrer qu'il est possible d'observer des transferts énergétiques pour des modes propres très proches. Ce problème de « croisement » modal constitue un handicap réel lors de la prédiction de la réponse dynamique au même titre que celui de la dépendance statistique de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement.

III. Un second modèle dynamique de transmission.

Avant de présenter le second modèle dynamique introduit, nous présentons l'engrenage retenu. Les caractéristiques géométriques sont identiques à l'engrenage précédemment utilisé, mais on tient compte ici des corps des roues.

A. Description de l'engrenage et résultats nominaux.

Les caractéristiques géométriques sont données dans le tableau IV.1. Par contre dans cette application, les corps de roue sont des voiles minces pouvant se déformer sous l'effet de la charge appliquée sur la denture. Or, la prise en compte de la structure des corps de roue influe fortement sur la raideur d'engrènement. Puisque les corrections de denture introduites sont également identiques au cas précédent, la charge optimale n'est pas la même. Le calcul des sources d'excitation est identique sauf qu'il est nécessaire de recalculer la matrice de souplesse de la ligne de contact. Nous présentons quelques résultats pour la géométrie exempte de défauts de fabrication. La figure IV.11 montre l'évolution de l'amplitude crête à crête de l'erreur de transmission en fonction de la charge appliquée sur la denture.

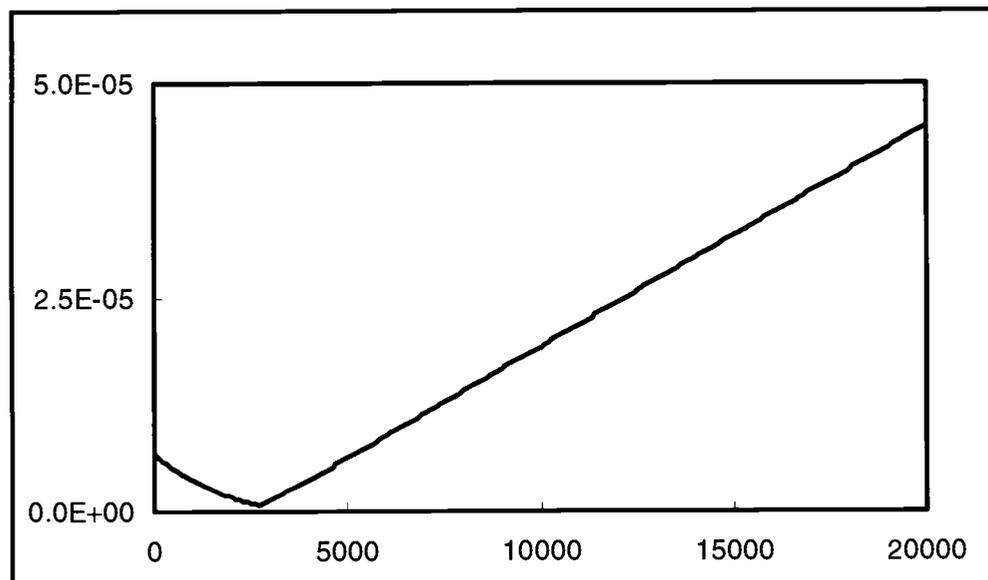


Figure IV.11 : Evolution de l'amplitude crête à crête δ_{pp} (m) de l'erreur de transmission en fonction de la charge appliquée (N).

L'amplitude de l'erreur de transmission est supérieure au cas précédent ce qui s'explique par les déformations des voiles minces rendant la roue dentée plus souple. La charge optimale est égale à 2700 N alors que les corrections de denture sont identiques au cas précédent. De même, nous présentons figure IV.12 l'évolution temporelle de l'erreur de transmission sur deux périodes d'engrènement pour plusieurs charges appliquées allant de 0 à 7500 N par pas de 1500 N.

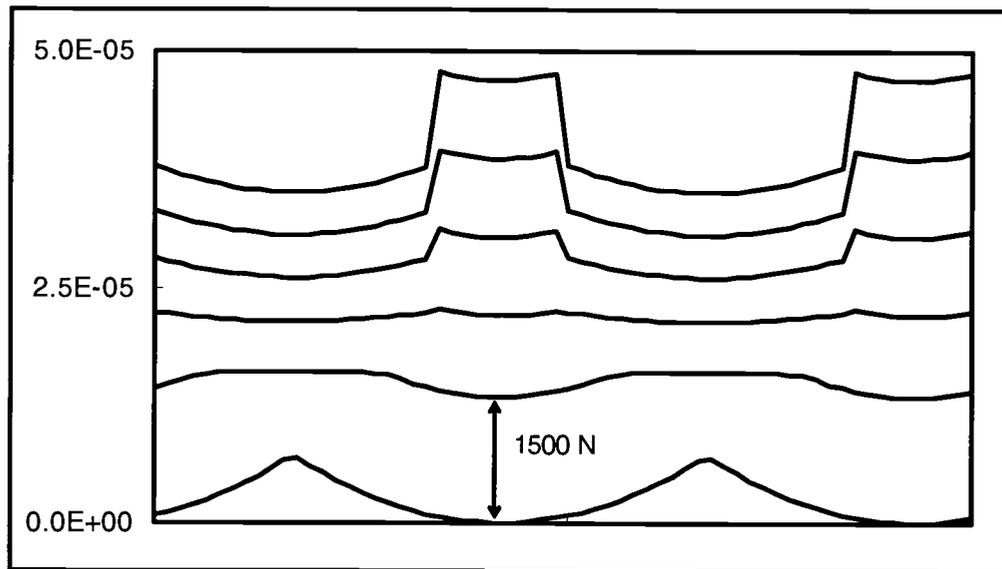


Figure IV.12 : Evolution temporelle de l'erreur de transmission (m) sur deux périodes d'engrènement pour plusieurs charges appliquées allant de 0 N à 7500 N par pas de 1500 N.

Pour une charge appliquée nulle, on retrouve l'erreur cinématique de transmission marquée par des formes paraboliques dues aux corrections introduites. La forme de l'évolution temporelle a changé, donc le contenu spectral de l'erreur de transmission a évolué en ce sens que les niveaux de chaque composante fréquentielle se trouvent modifiés. Par ailleurs, nous présentons, figure IV.13, l'évolution de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement en fonction de la charge appliquée.

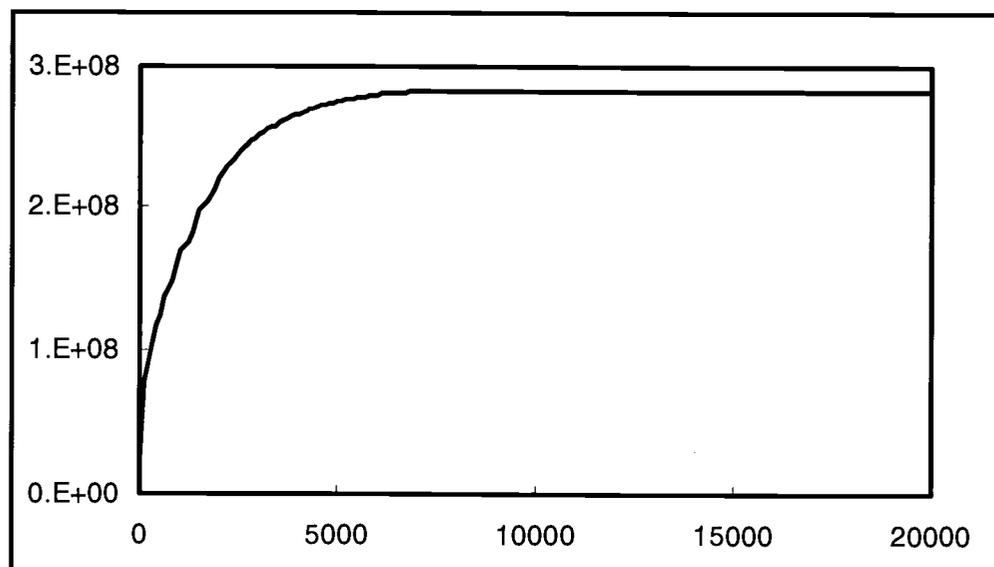


Figure IV.13 : Evolution de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement $\langle K_e \rangle$ (N/m) en fonction de la charge appliquée (N).

Comme attendu, la raideur d'engrènement est bien plus faible que dans le cas de l'engrenage ayant des corps de roue rigides. Ainsi, l'évolution de la raideur est semblable au cas précédent, cependant le comportement linéaire (plateau) est atteint pour une valeur beaucoup plus faible de la charge appliquée.

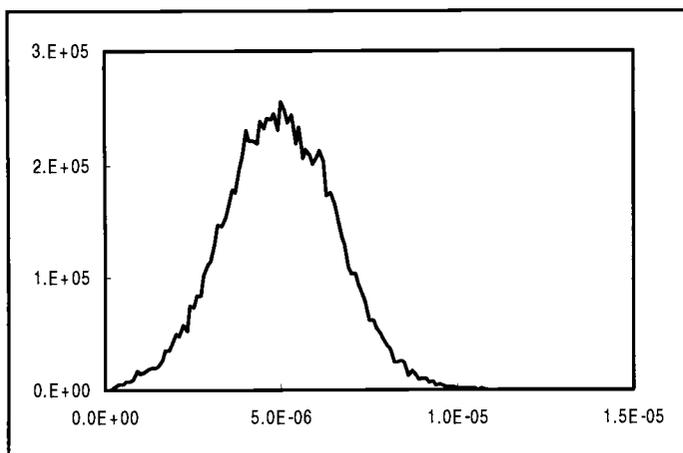
L'introduction des tolérances de fabrication est identique à l'exemple précédent et les défauts de fabrication considérés ne changent pas. Nous rappelons que les quatre paramètres décrivant la géométrie des dentures sont modélisés par des variables aléatoires de densités de probabilité gaussiennes, statistiquement indépendantes dont les deux premiers moments statistiques sont donnés dans le tableau IV.2.

B. Statistiques de l'erreur de transmission et de la raideur d'engrènement.

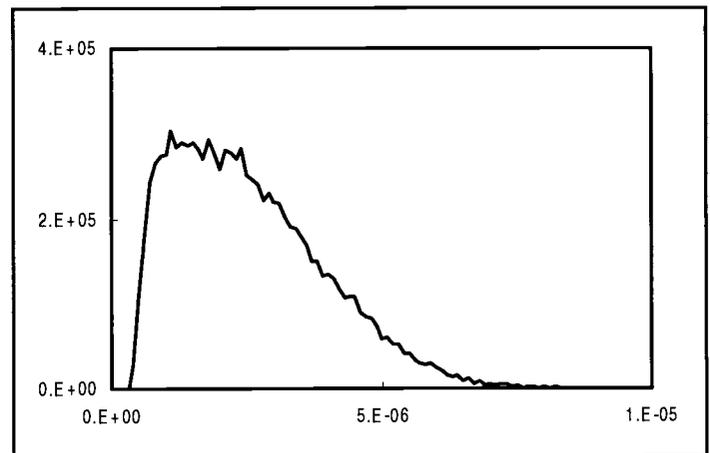
Les estimations des résultats statistiques sont obtenues à l'aide d'une simulation Monte Carlo (30000 tirages) comparées aux résultats d'une méthode Taguchi avec trois points de discrétisation par variable aléatoire (81 configurations).

a) Statistique de l'erreur de transmission, effet de la charge transmise.

Nous présentons, figure IV.14, les densités de probabilité obtenues pour la valeur crête à crête de l'erreur de transmission, pour plusieurs charges transmises appliquées.



(a)



(b)

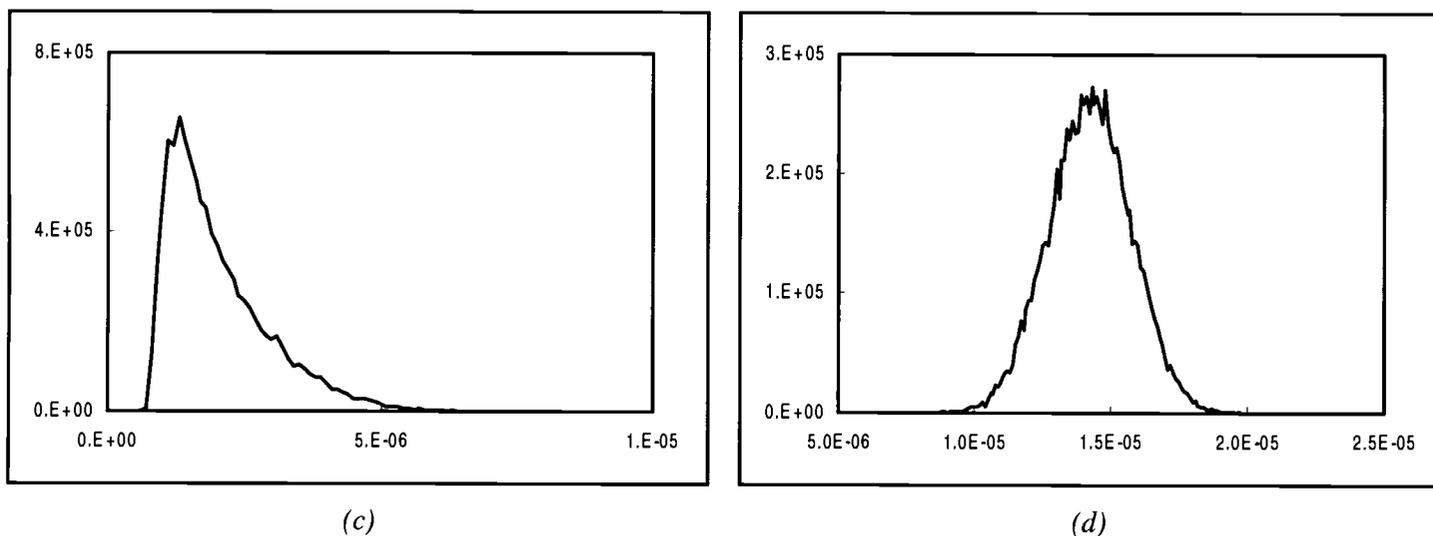


Figure IV.14 : Densités de probabilité de δ_{pp} (m) en fonction de la charge : 500 N (a), 1500 N (b), 3000 N (c) et 8000 N (d).

Les densités de probabilité sont quasi symétriques à faible et à forte charge (cas (a) et (d)) et ressemblent fortement à des densités de probabilité gaussiennes. Les densités de probabilité autour de la charge optimale sont (cas (b) et (c)) dissymétriques et ressemblent à des lois de type Weibull. A faible charge, c'est l'erreur cinématique de transmission qui gouverne le comportement. A très forte charge les défauts de géométrie n'ont qu'une influence secondaire sur l'erreur de transmission, ce sont les déformations des dentures qui participent majoritairement à l'erreur de transmission. Il apparaît difficile d'expliquer pourquoi la densité de probabilité est de type gaussien. Nous présentons tableau IV.6 les estimations de la valeur moyenne de δ_{pp} par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

Charge (N)	$E(\delta_{pp})$ Monte Carlo (μm)	$E(\delta_{pp})$ Taguchi (μm)
500	5.00	5.005
1500	2.59	2.79
3000	2.063	2.22
8000	14.3	14.3

Tableau IV.6 : Valeurs moyennes de δ_{pp} pour diverses charges, obtenus par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

De même, nous présentons les estimations des écart types de δ_{pp} , tableau IV.7.

Charge (N)	$\sigma(\delta_{pp})$ Monte Carlo (μm)	$\sigma(\delta_{pp})$ Taguchi (μm)
500	1.601	1.64
1500	1.38	1.35
3000	0.945	1.01
8000	1.515	1.52

Tableau IV.7 : Ecart types de δ_{pp} pour diverses charges, obtenues par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

Les prédictions fournies par la méthode Taguchi restent en très bon accord avec celles de la simulation Monte Carlo.

Par ailleurs, il faut noter que l'amplitude crête à crête de l'erreur de transmission n'est pas la seule caractéristique de l'erreur de transmission à être affectée par les tolérances de fabrication. La forme même de l'évolution temporelle évolue avec la micro géométrie des dentures, même si l'erreur de transmission reste périodique à la période d'engrènement. La figure IV.15 illustre ce propos : elle représente trois évolutions temporelles de l'erreur de transmission à la charge optimale pour trois configurations géométriques choisies parmi les 81 qu'impliquent la méthode Taguchi.

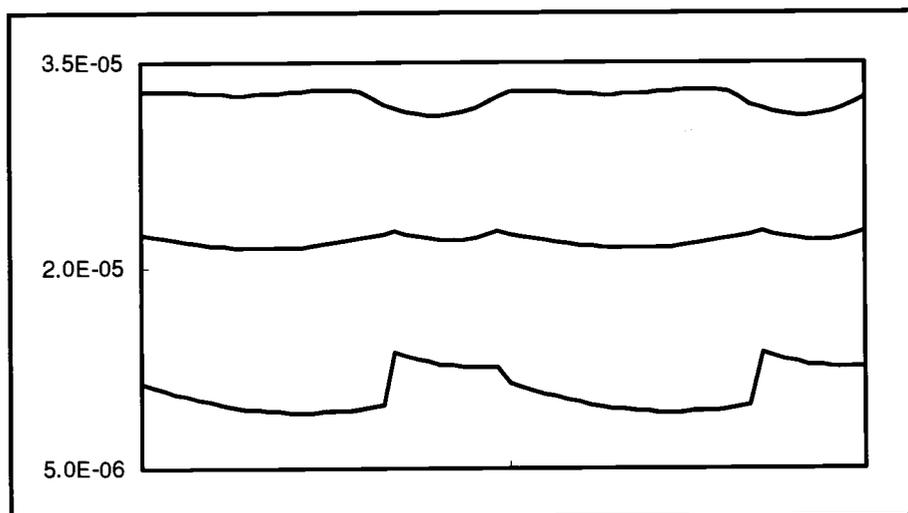


Figure IV.15 : Trois évolutions temporelles de l'erreur de transmission (m) à la charge optimale sur deux périodes d'engrènement.

On s'aperçoit alors que l'erreur de transmission représentant une population de transmissions par engrenages fabriquées en grande série possède toutes les caractéristiques d'un processus stochastique périodique.

b) Statistique de la raideur d'engrènement, effet de la charge transmise.

Nous présentons, figure IV.16, les densités de probabilité obtenues pour la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement, pour plusieurs charges transmises appliquées. Les courbes en clair correspondent à des densités de probabilité gaussiennes dont les moments statistiques sont ceux estimés par simulation Monte Carlo.

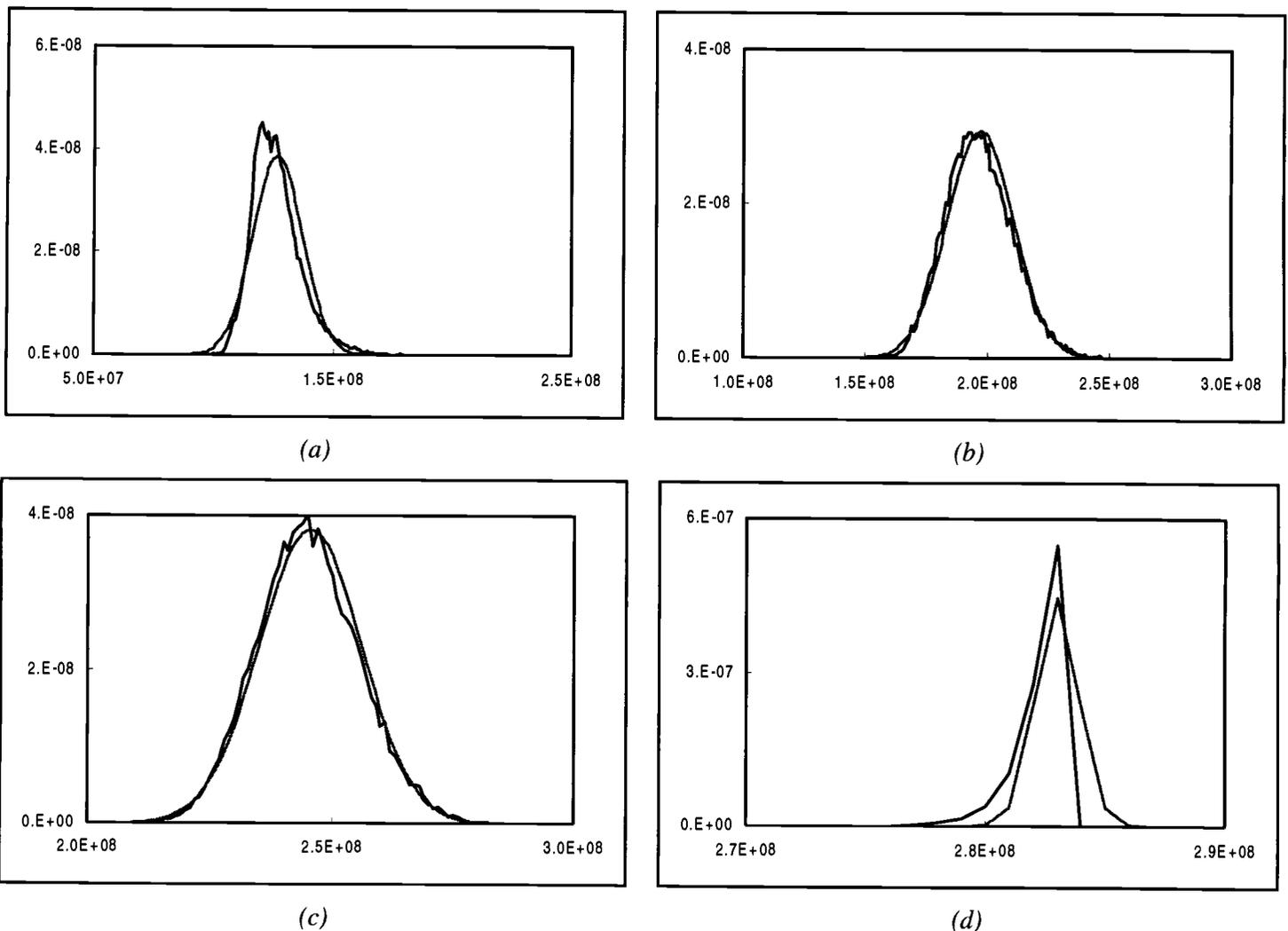


Figure IV.16 : Densités de probabilité de $\langle K_e \rangle$ (N/m) en fonction de la charge : 500 N (a), 1500 N (b), 3000 N (c) et 8000 N (d).

De manière générale, la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement $\langle K_e \rangle$ est proche d'une distribution gaussienne et plus particulièrement autour de la charge optimale. Ce comportement est assez remarquable.

Nous présentons tableau IV.8 les estimations de la valeur moyenne de δ_{pp} par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

Charge (N)	$E(\langle K_e \rangle)$ Monte Carlo (N/ μm)	$E(\langle K_e \rangle)$ Taguchi (N/ μm)
500	126.6	127
1500	197	197
3000	245.6	247.6
8000	283	282

Tableau IV.8 : Valeurs moyennes de $\langle K_e \rangle$ pour diverses charges, obtenues par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

De même, nous présentons les estimations des écart types de $\langle K_e \rangle$, tableau IV.9.

Charge (N)	$\sigma(\langle K_e \rangle)$ Monte Carlo (N/ μm)	$\sigma(\langle K_e \rangle)$ Taguchi (N/ μm)
500	10.36	10.6
1500	13.6	12.8
3000	10.47	10.5
8000	0.89	0.95

Tableau IV.9 : Ecart types de $\langle K_e \rangle$ pour diverses charges, obtenus par simulation Monte Carlo et méthode Taguchi.

Là encore, on note un bon comportement de la méthode Taguchi vis-à-vis de la simulation Monte Carlo. Le rapport écart type/valeur moyenne reste inférieur à 10 % et ce quelque soit la charge appliquée ; la variabilité est donc assez faible et particulièrement à forte charge. A très forte charge, on retrouve la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement obtenue pour la géométrie nominale. Ceci s'explique par le fait qu'à ces charges élevées la raideur d'engrènement devient quasi constante.

c) Corrélation statistique entre erreur de transmission et raideur d'engrènement.

Physiquement la raideur d'engrènement résulte de l'évolution de l'erreur de transmission aussi, il semble donc naturel qu'elles soient statistiquement corrélées. Nous présentons tableau IV.10 l'estimation du coefficient de corrélation entre δ_{pp} et $\langle K_e \rangle$ calculée par simulation Monte Carlo.

Charge (N)	Coefficient de corrélation
500	-0.154
1500	-0.376
3000	0.233
8000	0.431

Tableau IV.10 : Coefficients de corrélation entre δ_{pp} et $\langle K_e \rangle$, obtenus par simulation Monte Carlo.

L'erreur de transmission et la raideur d'engrènement sont bien corrélées. Cependant d'autres simulations ont montré qu'il n'existait a priori aucune logique quant à l'évolution du coefficient de corrélation en fonction de la charge. Néanmoins, ce coefficient semble positif pour des valeurs de la charge appliquée supérieures à celle de la charge optimale et, négatif pour des valeurs inférieures. En effet, la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement croît toujours avec la charge alors que l'amplitude crête à crête de l'erreur de transmission décroît avant la charge optimale et croît après la charge optimale (figure IV.11) : le changement de signe du coefficient de corrélation autour de la charge optimale traduit cette évolution. Cependant, on suppose que ce coefficient ne peut jamais être nul.

d) Influence de la distribution des défauts de géométrie.

Nous avons vu que les densités de probabilité de la valeur crête à crête de l'erreur de transmission et surtout de la valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement possédaient des formes remarquables lorsque les densités de probabilité des défauts de géométrie étaient considérées comme des variables aléatoires gaussiennes. Nous souhaitons voir si les densités de probabilité des sources d'excitation possèdent également des formes particulières dans le cas où les défauts de géométrie ont une autre forme de densité de probabilité. Ainsi, nous avons effectué une autre simulation Monte Carlo de 30000 tirages pour des densités de probabilité uniformes des défauts de géométrie. La figure IV.17 présente les densités de probabilité de δ_{pp} et de $\langle K_e \rangle$ pour des défauts de géométrie de densité de probabilité uniforme dont la valeur moyenne et l'écart type sont identiques au cas gaussien, ceci pour une charge appliquée égale à 3000 N.

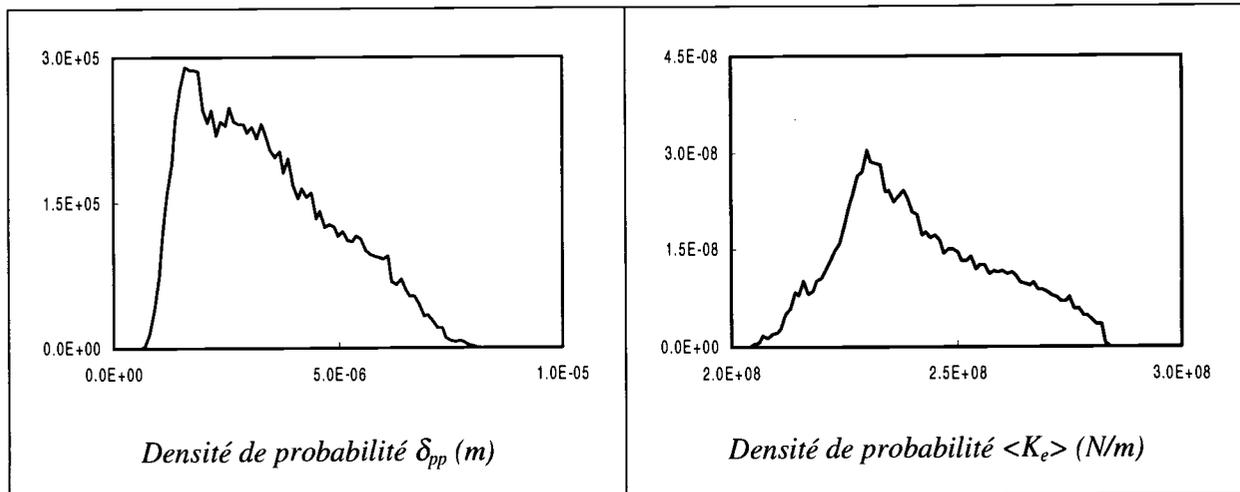


Figure IV.17 : Densités de probabilité des sources d'excitation pour des défauts de densité de probabilité uniforme, pour une charge appliquée de 3000 N.

Il semble que la densité de probabilité de l'erreur de transmission conserve une certaine dissymétrie alors que celle de la raideur n'a plus un caractère gaussien. Il est alors évident que le choix de la densité de probabilité des défauts de géométrie conditionne fortement les résultats statistiques. La connaissance du fabricant sur l'évolution des défauts de fabrication dans l'intervalle de tolérance fixé prend ici toute son importance. Enfin, soulignons que les résultats obtenus pour le cas gaussien laissaient supposer qu'il existait une relation linéaire entre les défauts de géométrie et les sources d'excitation, il n'en est rien.

C. Modèle dynamique éléments finis et plages de vitesses critiques.

a) Description du modèle dynamique.

Le modèle dynamique retenu est basé sur une formulation éléments finis. Les rayons des arbres sont égaux à 45 mm pour le pignon et 85 mm pour la roue menée. La distance entre les roulements à billes est de 75 mm. Le pignon et la roue menée sont modélisés par des masses concentrées et des inerties en rotation rapportées sur le nœud représentant le centre de la roue. Les arbres sont modélisés par des éléments de poutre à deux nœuds et six degrés de liberté par nœuds. Les deux roues sont couplées par une matrice de raideur précisée à un facteur près dans le chapitre précédent (paragraphe III. B. b.) par l'équation III.5, matrice multipliée par $\langle K_e \rangle$. Les roulements sont modélisés par des matrices de raideur diagonales de dimension 5×5 , comme décrit dans le chapitre précédent (paragraphe III. B. b.). Les valeurs de raideur sont : $k_{xx} = k_{yy} = 9.00 \cdot 10^8$ N/m, $k_{zz} = 1.00 \cdot 10^8$ N/m et $k_{\theta_x \theta_x} = k_{\theta_y \theta_y} = 5.00 \cdot 10^4$ Nm/rad. Le couple transmis et le couple de frein sont connectés aux arbres par des inerties en rotation et des raideurs en torsion. Ce modèle est illustré figure IV.18.

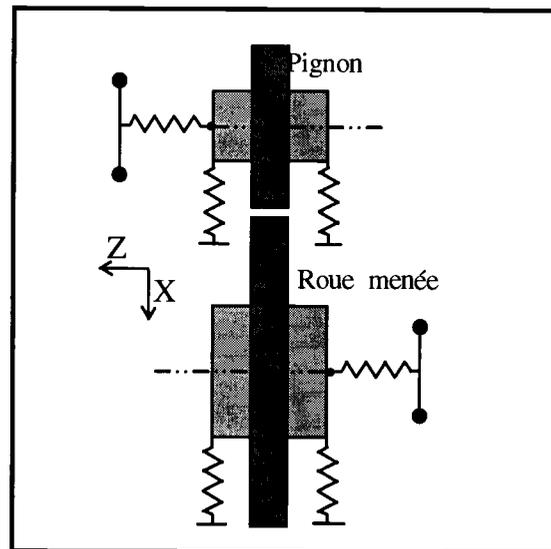


Figure IV.18 : Modèle dynamique éléments finis de la transmission.

Au complet, ce modèle possède 40 éléments et 200 degrés de liberté. Afin d'accéder aux vitesses critiques, nous effectuons une analyse modale permettant d'extraire les modes critiques. Nous nous contenterons des 15 premiers modes.

b) Statistique des modes propres et plages de vitesses critiques.

Nous présentons tableau IV.11 les deux premiers moments statistiques des fréquences propres et des coefficients énergétiques de denture pour une charge appliquée égale à 3000 N, obtenus par simulation Monte Carlo (a) et par la méthode Taguchi (b).

$E(f_i)$	$E(\rho_i)$ %	$\sigma(f_i)$ Hz	$\sigma(\rho_i)$ %
1- 0 Hz	0	0	0
2- 250 Hz	3.6	0.2	0.15
3- 407 Hz	2.6	0.22	0.1
4- 720 Hz	0	0	0
5- 1379 Hz	0	0	0
6- 1676 Hz	0	0	0
7- 1758 Hz	32	12.6	2.88
8- 1738 Hz	2.6	0.9	3.8
9- 2144 Hz	0	0	0
10- 2420 Hz	28	14	0.7
11- 3666 Hz	0	0	0
12- 4126 Hz	24	20	0.8
13- 5061 Hz	0	0	0
14- 5169 Hz	0	0	0
15- 5374 Hz	7.2	8	0.5

(a)

$E(f_i)$	$E(\rho_i)$ %	$\sigma(f_i)$ Hz	$\sigma(\rho_i)$ %
1- 0 Hz	0	0	0
2- 250 Hz	3.6	0.17	0.15
3- 407 Hz	2.6	0.17	0.1
4- 720 Hz	0	0	0
5- 1379 Hz	0	0	0
6- 1676 Hz	0	0	0
7- 1758 Hz	31	12.6	4.3
8- 1738 Hz	3.6	1	5.5
9- 2144 Hz	0	0	0
10- 2420 Hz	28	14	0.7
11- 3666 Hz	0	0	0
12- 4125 Hz	23.6	20	0.9
13- 5061 Hz	0	0	0
14- 5169 Hz	0	0	0
15- 5373 Hz	7.2	7.8	0.5

(b)

Tableau IV.11 : Moments statistiques des fréquences propres et des coefficients énergétiques pour une charge appliquée de 3000 N. (a) simulation Monte Carlo, (b) méthode Taguchi.

Les modes critiques sont surlignés en gras. Ce cas de figure est très intéressant car il existe deux modes critiques très proches l'un de l'autre, à savoir le 7^{ième} et le 8^{ième}. L'ordre des fréquences n'est pas respecté car nous avons classé les modes par valeur du coefficient énergétique et non par valeur fréquentielle croissante. Cette méthode de classement impose que le 7^{ième} mode a toujours été le mode le plus énergétique. La statistique effectuée sur la fréquence propre s'est faite après le calcul du coefficient énergétique. En fait, on constate que deux modes critiques proches peuvent s'échanger la répartition de l'énergie potentielle élastique localisée à la zone d'engrènement. La bande de fréquences dans laquelle on observera une réponse dynamique importante couvre, dans ce cas, deux modes critiques proches et non un seul. Cet échange énergétique implique que l'écart type du coefficient énergétique du mode le moins critique est grand devant sa valeur moyenne. Le coefficient énergétique, défini dans le premier chapitre, s'apparente en fait à un coefficient de type MAC et de ce fait tient compte de la déformée modale. Le transfert énergétique correspond alors à une importante modification de forme propre. On soulignera que ce transfert n'est possible qu'entre deux modes dont le coefficient ρ est non nul.

Les autres modes critiques sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que ce type de phénomène ne se reproduise pas à d'autres fréquences.

Enfin, on observera là encore que la méthode Taguchi fournit de très bonnes estimations, excepté lors du transfert énergétique où la variabilité est trop importante.

Les plages de vitesses critiques du pignon sont obtenues comme précédemment. Nous présentons figure IV.19, les plages de vitesses critiques (tours/min) correspondant aux deux premiers modes les plus critiques (mode 7 et 10) excités par la fréquence d'engrènement ($n=1$) et son premier harmonique ($n=2$). L'inégalité de Tchebycheff et l'écart type des fréquences critiques permettent d'estimer les plages de vitesses critiques. La vitesse critique possède une probabilité minimale de 96 % de se trouver dans cette plage. Par exemple, la plage de vitesse critique du pignon associée au mode 7, pour une excitation à la fréquence d'engrènement ($n=1$) est de 210 tours/min autour de 2800 tours/min. De même, la plage de vitesse critique associée au mode 10 excité par le premier harmonique de la fréquence d'engrènement ($2f_e$) est de 110 tours/min autour de 2000 tours/min.

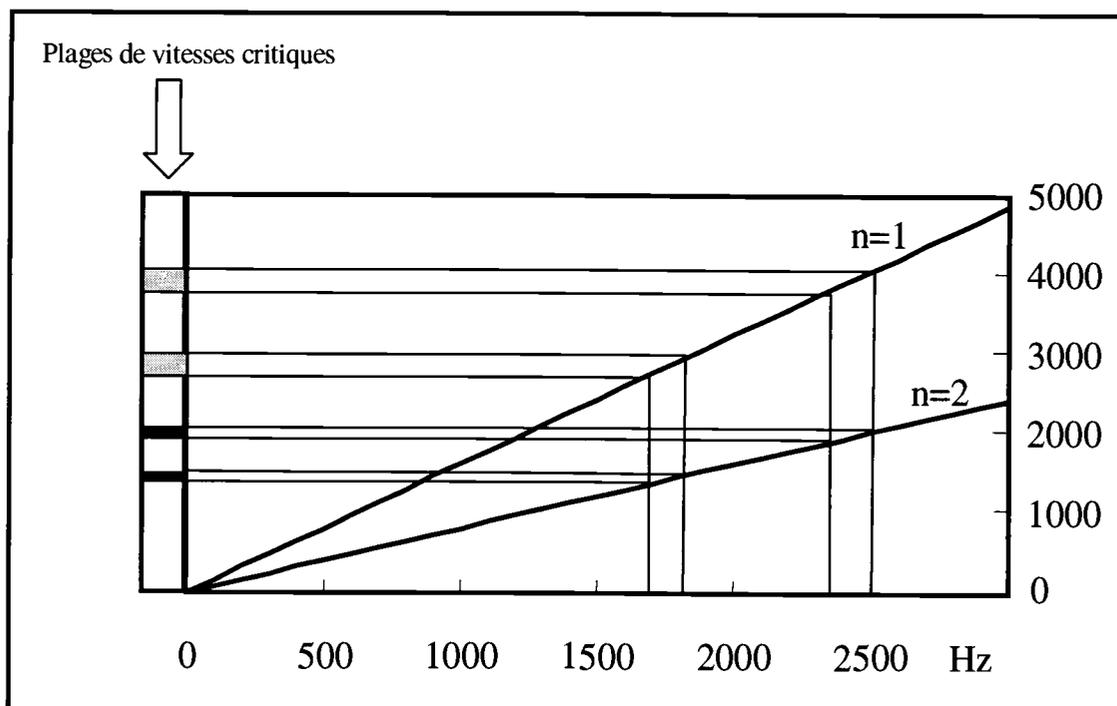


Figure IV.19 : Plages de vitesses critiques du pignon (tours/min) correspondant aux deux modes les plus critiques pour une excitation à la fréquence d'engrènement ($n=1$) et à son premier harmonique ($n=2$).

D. Conclusion sur les résultats statistiques.

Avant de poursuivre, il semble important de dresser un bilan des principaux résultats obtenus.

- Les résultats statistiques évoluent fortement selon la charge transmise appliquée et dépendent étroitement de la forme des densités de probabilité des défauts de géométrie, l'information donnée par le fabricant s'avère indispensable,
- La sensibilité des sources d'excitation est maximale autour de la charge optimale car les valeurs statistiques des sources d'excitation sont très différentes des résultats nominaux,
- Il est impossible d'ignorer la corrélation statistique entre l'erreur de transmission et la raideur d'engrènement de plus, cette corrélation ne semble suivre aucune tendance particulière suivant la charge appliquée,
- La valeur moyenne temporelle de la raideur d'engrènement présente des densités de probabilité de type gaussien pour des défauts gaussiens, quelque soit la charge appliquée,
- Pour une charge fixée, l'erreur de transmission et la raideur d'engrènement modélisant la population de transmissions fabriquées sont des processus stochastiques périodiques corrélés,

- L'amplitude crête à crête de l'erreur de transmission présente des densités de probabilité dissymétriques (type Weibull) à faible et à forte charge alors que ces mêmes densités sont de type gaussien autour de la charge optimale,
- Le spectre de l'erreur de transmission est affecté par les tolérances de fabrication même si les fréquences caractéristiques restent les mêmes,
- Pour des modes propres critiques proches (quelques Hertz), on peut observer des échanges énergétiques via un transfert énergétique modifiant les formes propres entre les deux modes,
- Malgré l'usage d'une classe de qualité correcte, la variation des vitesses critiques est importante et,
- On constate un bon accord entre les estimations fournies par simulation Monte Carlo et par la méthode Taguchi accompagné d'une nette diminution des temps de calcul.

L'ensemble de ces conclusions permet de donner des pistes afin de mener à bien le calcul de la variabilité des nuisances vibroacoustiques des transmissions par engrenages. Il semble en effet difficile d'envisager un traitement systématique similaire à celui du chapitre III. Nous allons voir dans la partie suivante comment on pourrait décomposer le calcul de la variabilité des sources d'excitation jusqu'au bruit rayonné.

IV. Discussion sur la gestion du calcul de la variabilité.

Le calcul du rayonnement acoustique des transmissions par engrenages se décompose en trois étapes : le calcul des sources d'excitation qui comprend :

- calcul de l'erreur statique de transmission sous charge et celui de la raideur d'engrènement,
- le calcul du champ vibratoire de toute la transmission et notamment celui du carter puis,
- le calcul du rayonnement acoustique des faces vibrantes du carter.

Ce calcul complet est très lourd à gérer car il nécessite l'emploi de plusieurs méthodologies numériques distinctes qui restent difficiles à automatiser pour l'ensemble des tâches. L'emploi d'une simulation Monte Carlo de même que l'emploi d'une méthode Taguchi est de ce fait inenvisageable bien que ce soit la manière la plus fiable pour effectuer le calcul complet.

Une idée naturelle consiste à décomposer le calcul de la variabilité suivant les trois étapes du calcul déterministe. Cependant, comme nous l'avons vu de nombreuses difficultés apparaissent : corrélations statistiques entre les sources d'excitation, transferts énergétiques, choix de la base modale sur laquelle est décomposée la réponse dynamique, calcul des moments statistiques de la puissance acoustique rayonnée connaissant uniquement le champ vibratoire moyen et son écart type...

Pour ce qui concerne le calcul des sources d'excitation la simulation Monte Carlo et la méthode Taguchi peuvent être utilisées car les temps de calcul demeurent raisonnables. En effet, la simulation Monte Carlo fournit toutes les caractéristiques statistiques à introduire comme données d'entrée pour le calcul vibratoire. La méthode Taguchi, elle, ne permet pas d'accéder aux densités de probabilité des sources, et on a vu qu'il était impossible de les donner a priori. Toutefois, il existe un grand nombre de méthodes mathématiques permettant de reconstruire la densité de probabilité à partir des moments statistiques et à partir d'une forme approchée de celle-ci. Pour cette étape ces deux méthodes semblent adaptées moyennant quelques développements supplémentaires.

Le calcul de la variabilité de la réponse vibratoire de la transmission est plus délicat à gérer. Les temps de calcul sont conséquents, particulièrement ceux associés à l'analyse modale aussi l'emploi d'une simulation Monte Carlo est trop contraignant à mettre en œuvre. L'application d'une méthode de perturbation, satisfaisante pour le cas des systèmes mécaniques linéaires et paramétriques à un degré de liberté (cf chapitre II) semble ici inadaptée. En effet, la méthode de perturbation associée au calcul de la réponse dynamique doit tenir compte des corrélations statistiques des sources d'excitation et d'un possible croisement modal. Or cette méthode nécessite le choix d'une base fixe de vecteurs propres, base qui est corrélée statistiquement à l'erreur de transmission. En clair, le problème reste très complexe. Par contre, l'application d'une méthode Taguchi modifiée afin de prendre en compte la dépendance statistique entre base propre et source d'excitation semble envisageable. Nous ne voyons guère que cette dernière qui soit utilisable avec efficacité en terme simplicité/précision.

Enfin, le calcul du rayonnement acoustique est lui aussi délicat. Les temps de calcul sont certes raisonnables mais nous rappelons que la puissance acoustique est définie comme le produit du champ de pression et du champ de vitesse de la surface vibrante. Il semble difficile de s'affranchir de cette dépendance physique et de ce fait d'appliquer une méthode de perturbation. Là encore, la méthode Taguchi nous paraît la meilleure technique adaptée à ce problème.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette étude a été conduite dans le but de fournir une méthodologie permettant la prédiction des écarts de bruit entre des transmissions par engrenages fabriquées en grande série et, plus particulièrement sur la faisabilité de combiner une approche traitant de modèles à paramètres incertains avec des méthodologies de calcul numérique liées à la dynamique des engrenages.

Expérimentalement, il n'est pas rare de constater, en sortie de chaîne de production des différences de 10 décibels voire plus entre les produits fabriqués. Cette variabilité qui affecte autant les comportements vibroacoustiques que les performances mêmes des systèmes mécaniques, a pour origine les tolérances de fabrication imposées par les concepteurs. Malheureusement, il est impossible de réduire toutes les tolérances pour diminuer la variabilité des comportements sous peine d'un coût de fabrication trop élevé. La réduction de la variabilité passe donc par un choix judicieux des tolérances à resserrer et de celles à élargir. Cette étape nécessite la connaissance d'une relation entre variabilité de sortie et variabilité d'entrée par une méthode rapide et précise. C'est précisément de ce problème dont nous avons traité.

Dans un premier temps, la description des principaux phénomènes liés au comportement vibroacoustique des boîtes de vitesses, ainsi que la description des méthodes de résolution numérique de ce comportement, ont montré à quel point le problème s'avérait complexe et long. Déjà, le calcul complet des sources d'excitation internes au bruit rayonné n'est pas simple à réaliser pour une géométrie exempte de défauts de fabrication.

En second lieu, une étude bibliographique, a mis en avant les diverses approches s'appliquant au cas de systèmes mécaniques possédant des paramètres incertains, incertitude pouvant provenir des tolérances de fabrication. L'approche stochastique nous a semblé la mieux adaptée parce qu'elle implique des méthodes de calculs mieux adaptées à mettre en oeuvre dans le cas du calcul du comportement vibroacoustique des transmissions par engrenages. Dans le cadre d'une approche stochastique, il existe diverses méthodes comme par exemple les simulations Monte Carlo, les méthodes de perturbation, le chaos polynomial, les développements en série de Taylor, capables de prendre en compte l'incertitude affectant des paramètres, telle la géométrie ou encore les caractéristiques mécaniques des matériaux. Parmi elles, la méthode d'échantillonnage de Taguchi nous a paru prometteuse, bien qu'elle n'ait été que très peu appliquée dans le domaine de la dynamique des systèmes mécaniques.

Afin de valider la méthode d'échantillonnage de Taguchi, nous l'avons confronté à d'autres méthodes stochastiques plus répandues en nous appuyant sur l'étude de systèmes dynamiques simples mais représentatifs des méthodologies numériques existantes dans ce contexte. La méthode Taguchi s'est avérée très efficace, bien qu'il faille rester prudent quant à sa mise en œuvre (choix des points de discrétisation notamment).

Nous avons ensuite réalisé une étude complète de la variabilité du bruit rayonné par une transmission par engrenages dont la denture est affectée par les tolérances de fabrication. Nous avons vu que l'utilisation de la méthode Taguchi permet, outre la prédiction des écarts de bruit rayonné, d'effectuer une analyse de sensibilité via une méthode de plan d'expériences. Les écarts de bruit obtenus (de l'ordre de 10 dB) semblent réalistes au vu des classes de qualité de fabrication choisies et des constats industriels expérimentaux. Toutefois, le calcul est très laborieux et nécessite beaucoup de temps et de manipulations numériques car le calcul déterministe nécessite plusieurs étapes distinctes. Il est apparu important de réduire les temps de calcul tout en conservant la précision des estimations.

Le calcul complet du rayonnement acoustique d'une transmission par engrenages s'effectue donc en plusieurs étapes. Plutôt que de voir le passage d'une étape à l'autre comme un handicap (cas pour la mise en place de la méthode Taguchi), il semble possible de choisir une approche multi méthodes pour le calcul complet, chaque étape étant combinée avec une méthode stochastique différente et adaptée.

Aussi, la dernière partie de ce travail s'est focalisée sur le passage entre le calcul des sources d'excitation internes de la transmission et le calcul de la réponse vibratoire via une analyse modale. L'application d'une simulation Monte Carlo et d'une méthode Taguchi sur des engrenages dont les dentures étaient affectées par les tolérances de fabrication, a montré que les comportements statistiques des sources d'excitation internes (erreur statique de transmission sous charge et raideur d'engrènement) étaient très complexes et ne présentaient aucune forme de modélisation simple. De plus aucune hypothèse simplificatrice telle une distribution gaussienne de la raideur d'engrènement ne peut être formulée. Scinder les deux étapes nécessite d'avoir à disposition toute l'information statistique sur les sources d'excitation, aussi seule une simulation Monte Carlo est capable de fournir toute l'information via leurs densités de probabilité. Le calcul de la réponse vibratoire n'en serait pas pour autant plus simple. En effet, deux phénomènes majeurs rendent l'utilisation de méthodes stochastiques type perturbation très délicate : les sources d'excitation sont statistiquement corrélées et l'erreur de transmission régule les niveaux vibratoires alors que la raideur gouverne la base propre de la transmission. Il apparaît impossible de découpler ces deux grandeurs sous peine d'obtenir des résultats ne représentant pas la population de transmissions fabriquées en grande série. Aussi, pour le calcul de la réponse vibratoire nous préconisons l'usage d'une méthode Taguchi aménagée pour prendre en compte les corrélations statistiques.

Enfin, le passage du calcul vibratoire au calcul acoustique n'a pu être traité, mais la relation non triviale entre champ de pression acoustique et champ de vitesse du carter rayonnant paraît délicate à prendre en compte. De plus, le calcul de la puissance acoustique fait intervenir le produit des deux champs, donc un couplage certain. Là encore, nous préconisons une méthode d'échantillonnage.

A la lumière de ce travail, deux directions de poursuite se dégagent :

- La première consiste à se satisfaire de la méthode Taguchi pour le calcul complet de la variabilité des nuisances sonores et à automatiser l'ensemble des tâches numériques. Ainsi, il serait possible de se focaliser sur la réduction de la variabilité par un processus d'optimisation permettant d'obtenir le jeu le plus judicieux de tolérances, choix combinant variabilité réduite et coût de fabrication acceptable.
- La seconde consiste à développer l'idée d'une approche multi méthodes. En effet, même si les comportements statistiques des sources d'excitation internes sont complexes, ils présentent un comportement de processus stochastiques périodiques. Peut être faut il chercher dans cette voie d'autres méthodes de traitement d'équations différentielles intégrant des processus stochastiques ?

Il n'en reste pas moins que la qualité des prédictions de la variabilité des transmissions par engrenages et, plus généralement de systèmes mécaniques, est tributaire des méthodes de modélisation en l'absence d'incertitude. Pour le cas de l'étude du comportement dynamique des engrenages, des résultats expérimentaux font apparaître, sous certaines conditions de fonctionnement, des comportements non linéaires probablement dus par exemple à des chocs entre dentures. Il serait intéressant d'explorer la variabilité d'occurrence de ce type de comportement. Enfin, la modélisation de l'amortissement reste un problème d'actualité car peu de travaux ont à ce jour concerné ce problème. Peut être serait il judicieux d'envisager d'appliquer des méthodes de traitement de l'incertain pour ce problème puisqu'on ne sait pas le prendre en compte de manière exacte.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ABRAMOWITZ M., STEGUN I. A., 1972, "Handbook of Mathematical Functions", New York, Dover Publications.
- ADHIKARI S., MANOHAR C. S., 1999, "Dynamic Analysis of Framed Structures with Statistical Uncertainties", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 44, p. 1157-1178.
- ANTONSSON K. E., OTTO K. N., 1995, "Imprecision in Engineering Design", Journal of Mechanical Design, 50th Anniversary special issue, Vol 117 (2), p. 25-32.
- BALMES E., 1998, "Predicted Variability and Differences Between Tests of a Single Structure", Proceedings of IMAC Conference Santa Barbara.
- BALMES E., 1999, "Description et Prédiction de la Variabilité des Propriétés Vibratoires", Actes du 4^{ième} Colloque National en Calcul des Structures, Giens 1999, Vol 1, p. 505-510.
- BALMES E., 2001, "Using Expansion and Interface Reduction to Enhance Structural Modification Methods", Proceedings of IMAC Conference, Kissimmee.
- BEHNKE H., 1991, "The Calculation of Guaranteed Bounds for Eigenvalues using Complementary Variational Principles", Computing, Vol 47, p. 11-27.
- BERNHARD R. J., 1996, "The Limits of Predictability due to Manufacturing and Environmentally Induced Uncertainty", Proceedings of Inter-Noise 1996, Liverpool England, p. 2867-2871.
- BHATTACHARYYA B., CHAKRABORTY S., 2002, "Stochastic Dynamic Sensitivity of Uncertain Structures Subjected to Random Earthquake Loading", Journal of Sound and Vibration, Vol 249 (3), p. 543-556.
- BOGDANOFF J. L., CHENEA P. F., 1961, "Dynamics of Some Disordered Linear Systems", International Journal of Mechanical Science, Vol 3, p. 157-169.
- BOLOTIN V., 1964, "The Dynamic Stability of Elastic Systems", traduit du Russe, Holden-Day Inc., San-Fransisco, p. 145-277.
- BRIÈRE P., 1991, "Contribution à l'Etude du Comportement Dynamique des Réducteurs Harmoniques", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, 203 p.
- CHEN P. C., SOROKA W. W., 1973, "Impulse Response of a Dynamic System with Statistical Properties", Journal of Sound and Vibration, Vol 31 (3), p.309-314.
- CHEN P. C., SOROKA W. W., 1974, "Multi Degree Dynamic Response of a System with Statistical Properties", Journal of Sound and Vibration, Vol 37 (4), p.547-556.
- CHIOSTRINI S., FACCHINI L., 1999, "Response Analysis Under Stochastic Loading in Presence of Structural Uncertainties", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 46, p. 853-870.
- COLLINS J. D., THOMSON W. T., 1969, "The Eigenvalue Problem for Structural Systems with Statistical Properties", AIAA Journal, Vol 7 (4), p.642-648.

- CONRY T. F., SEIREG A., 1971, "A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact", *Journal of Applied Mechanics (ASME)*, Vol 93 (1), p. 387-392.
- DEODATIS G., 1991, "Weighted Integral Method I : Stochastic Stiffness Matrix", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol 117 (8) p. 1851-1864.
- DEODATIS G., SHINOZUKA M., 1991, "Weighted Integral Method II : Response Variability and Reliability", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol 117 (8) p. 1865-1877.
- DERKIUREGHIAN A., KE J. B., 1988, "The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol 3 (2), p. 83-91.
- D'ERRICO J.R., ZAINO jr N.A., 1988, "Statistical Tolerancing using a Modification of Taguchi's Method", *Technometrics*, Vol 30 (4), p. 397-405.
- DESSOMBZ O., 2000, "Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°36 2000, 161 p.
- DIMAROGONAS A. D., 1995, "Interval Analysis of Vibrating Systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 183 (4), p. 739-749.
- DUCRET P., 1997, "Prédiction du Bruit Rayonné par les Carters des Transmissions à Engrenages", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9709, 150 p.
- FANCHON J. L., 1994, "Guide des Sciences et Technologies Industrielles", Editions Nathan, Afnor, 544 p.
- GHANEM R. G., SPANOS P. D., 1991, "Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach", Springer-Verlag, New York.
- GHANEM R., 1999, "Ingredients for a General Purpose Stochastic Finite Elements Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 168, p. 19-34.
- GRAHAM L., DEODATIS G., 1998, "Variability Response Functions for Stochastic Plate Bending Problems", *Structural Safety*, Vol 20, p. 167-188.
- HIEN T.D., KLEIBER M., 1990, "Finite Element Analysis Based on Stochastic Hamilton Variational Principle", *Computers and Structures*, Vol 37 (6), p.893-902.
- HOUSER D. R., 1985, "Gear Noise Sources and their Prediction Using a Mathematical Model", *Proceedings of the OEM Conference*, Philadelphia.
- HURTADO J. E., 2002, "Analysis of One-Dimensional Stochastic Finite Elements Using Neural Network", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol 17, p. 35-44.
- IBRAHIM R. A., 1987, "Structural Dynamics with Parameter Uncertainties", *Applied Mech Rev ASME*, Vol 40 (3), p.309-328.
- JACKSON J. E., 1980, "Principal Components and Factor Analysis : Part 1- Principal Components", *Journal of Quality Technology*, Vol 12, p. 201-213.
- KAHRAMAN A., SINGH R., 1990, "Nonlinear Dynamics of a Spur Gear Pair", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 146 (1), p. 49-75.

- KAUFMANN A., GUPTA M. M., 1991, "Introduction to Fuzzy Arithmetic", Van Nostrand Reinhold, New York, 361 p.
- KLEIBER M., HIEN T.D., 1992, "The Stochastic Finite Element Method", John Wiley and Sons, Chichester-England.
- LASKIN I., 1968, "Prediction of Gear Noise from Design Data", AGAMA paper 299.03.
- LE MOYNE S., TEBEC J. L., 2000, "Influence d'une Erreur de Prédiction des Fréquences Propres sur les Résultats d'un Calcul de Rayonnement Acoustique par Méthode Eléments de Frontière", *Compte Rendu de l'Académie des Sciences, Série IIB*, p. 329-333.
- LEE C., SINGH R., 1994, "Analysis of Discrete Vibratory Systems with Parameters Uncertainties, Part I : Eigensolution", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 174 (3), p. 379-394.
- LEE C., SINGH R., 1994, "Analysis of Discrete Vibratory Systems with Parameters Uncertainties, Part II : Impulse Response", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 174 (3), p. 395-412.
- LEMAIRE M., 1998, "Eléments Finis et Fiabilité : un Mariage à la Mode", *Fiabilité des Matériaux et Structures*, Vol 19, p. 95-112.
- LIU W. K., BELITSCHKO T., MANI A., 1986, "Random Field Finite Elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol 23, p. 1831-1845.
- MOORE R. E., 1966, "Interval Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- MUNRO R., 1991, "A Review of the Theory and Measurement of Gear Transmission Error", 1st International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, p. 3-10.
- MUNRO R., YILDIRIM N., HALL D. M., 1991, "Optimum Profile Relief and Transmission Error in Spur Gears", 1st International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, p. 35-44.
- MUSCOLINO G., RICCIARDI G., IMPOLLONIA N., 2000, "Improved Dynamic Analysis of Structures with Mechanical Uncertainties under Deterministic Input", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol 15, p. 199-212.
- NAYFEH A., MOOK D., 1979, "Non Linear Oscillations". John Wiley, New-York, p. 258-365.
- NELSON R. B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives", *AIAA Journal*, Vol 14 (9), p. 1201-1205.
- NONAKA T., KUBO A., KATO S., OHMORI T., 1992, "Silent Gear Design for Mass-Produced Gears with Scatters in Tooth Form Accuracy", *Proceedings of 1992 International Power Transmission and Gearing Conference ASME*, Scottsdale Arizona, 13-16 septembre 1992, Vol 2, p.589-595.
- PAPOULIS A., 1965, "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", Mac Graw-Hill series in Systems Science, 583 p.
- PEARCE W., NIELSEN M., ROUVEROL W., 1986, "Reducing Gear Noise Excitation", *Proceedings of the 2nd World Congress on Gearing*, Paris, Vol. 1, p. 587-598.

- PERRET-LIAUDET J., 1992, "Etude des Mécanismes de Transfert entre l'Erreur de Transmission et la Réponse Dynamique des Boîtes de Vitesses Automobiles", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9207, 198 p.
- PERRET-LIAUDET J., SABOT J., 1996, "Effet du Jeu entre Dents et de la Raideur d'Engrenement sur la Dynamique Non Linéaire des Engrenages", Publications du LMA, deuxième colloque du GDR 1138 Vibroacoustique, Marseille, p. 111-132.
- PERRET-LIAUDET J., SABOT J., 1997, "Vibro-Impacts dans les Contacts Hertiens : Etude de la Résonance Principale", Publications du LMA numéro 144, 3^{ième} Colloque du GDR 1138 Vibroacoustique, p. 105-124.
- PILLET M., 1999, "Les Plans d'Expériences par la Méthode Taguchi", Les Editions d'Organisation, 330 p.
- PLESSIS G., LALLEMAND B., TISON T., LEVEL P., 2000, "Fuzzy Modal Parameters", Journal of Sound and Vibration, Vol 233 (5), p. 797-812.
- POIRION F., 2001, "Simulation of Random Vectors with Given Moments", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol 16 (2), p. 115-120.
- RÉMOND D., VELEX P., SABOT J., 1993, "Comportement Dynamique et Acoustique des Transmissions par Engrenages - Synthèse bibliographique", Publication du CETIM, 192 p.
- RIGAUD E., 1998, "Interactions Dynamiques entre Denture, Lignes d'Arbres, Roulements et Carter dans les Transmissions par Engrenages", Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon, numéro 9818, 184 pages.
- RIGAUD E., SABOT J., 1996, "Effect of Elasticity of Shafts, Bearings, Casing and Couplings on the Critical Rotational Speeds of a Gearbox", VDI Berichte N°1230, p. 833-845.
- ROSENBLUETH E. , 1975, "Point Estimates for Probability Moments", Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol 72 (10), p. 3812-3814.
- SIBÉ A., 1997, "Etude de la Transparence Acoustique des Carters des Transmissions à Engrenages", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Lyon N°9724, 208 p.
- SINGH R., LEE C., 1993, "Frequency Response of Linear Systems with Parameter Uncertainties", Journal of Sound and Vibration, Vol 168 (1), p. 71-92.
- SOIZE C., 2000, "A Nonparametric Model of Random Uncertainties for Reduced Matrix Models in Structural Dynamics", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol 15 (3), p.277-294.
- SUNDARESAN S., ISHII K., HOUSER D. R., 1993, "A Robust Optimization Procedure with Variations on Design Variables and Constraints", Advances in Design Automation ASME, Vol 65 (1), p.379-386.
- SUNDARESAN S., ISHII K., HOUSER D., 1991, "Design of Helical Gears with Minimum Transmission Error under Manufacturing and Operating Variances", Proceedings of the International Conference on Motion and Power Transmissions, Hiroshima, p. 92-97.
- TAGUCHI G., KONISHI S., 1987, "Orthogonal Arrays and Linear Graph", American Supplier Institute Press.

- TISON T., LALLEMAND B., LEVEL P., 2000, "Formalisme Flou : Une Autre Approche Pour l'Analyse Non Déterministe en Dynamique des Structures ", Actes de la Table Ronde MV2, Approches Robustes en Dynamique des Structures, 14 Décembre 2000.
- VIGIER M., 1988, "Pratique des Plans d'Expériences", Les Editions d'Organisation.
- WANG B. P. ,1991, "Improved Approximate Method for Computing Eigenvector Derivates in Structural Dynamics", AIAA Journal, Vol 29 (6), p. 1018-1021.
- WELBOURN D. B., 1979, "Fundamental Knowledge of Gear Noise- A Survey", Conference on Noise and Vibrations of Engines and Transmissions, Cranfield Institute of Technology, paper C177/79, p. 9-29.
- WOOD K. L., ANTONSSON K. E., 1989, "Computations with Imprecise Parameters in Engineering Design : Background and Theory", Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design ASME, Vol 111 (4), p.616-625.
- YU J. C., ISHII K., 1993, "A Robust Optimization Method for Systems with Significant Non Linear Effects", Advances in Design Automation ASME, Vol 65 (1), p.371-378.
- YU J. C., ISHII K., 1998, "Design for Robustness Based on Manufacturing Variation Patterns", Journal of Mechanical Design ASME, Vol 120 (2), p.196-202.
- ZADEH L. A., 1965, "Fuzzy Sets", Information and Control, Vol 8, p. 338-353.
- ZADEH L. A., FU K. S., TANAKA K., SHIMURA M., 1975, "Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes", Academic Press, New York.
- ZHANG G., RIGAUD E., PASCAL J.C., SABOT J., "Gearboxes : Indirect Identification of Dynamic Forces Transmitted to Housing through Bearings", Proceedings of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Vol 3, juin 1999, Paris, p. 2065-2078.
- ZHAO Y. G., ONO T., IDOTA H., 1999, "Response Uncertainty and Time Variant Reliability Analysis for Hysteretic MDF Structures", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol 28, p. 1187-1213.

PUBLICATIONS DES TRAVAUX DE THESE

Reuves internationales avec comité de lecture

N. DRIOT, E. RIGAUD, J. SABOT et J. PERRET-LIAUDET : *Allocation of Gear Tolerances to Minimize Gearbox Noise Variability*. *Acta-Acustica*, Vol 87, pp 67-76, 2001.

Conférences internationales avec comité de lecture et actes

N. DRIOT, E RIGAUD, J. SABOT et J. PERRET-LIAUDET : *Prediction of Gearbox Noise Variability From Tolerances on Profile and Helix Angle*. Proceedings of **Internoise 2000**, pp 3605-3610, Nice 27-30 août 2000, France.

N. DRIOT, J. PERRET-LIAUDET et E. RIGAUD : *Gearbox Critical Speeds Variability Prediction Induced by Manufacturing Dispersion*. Proceedings of **ICSV 8**, International congress on sound and vibration, Hong Kong 2-6 juillet 2001, Chine.

J. PERRET-LIAUDET, N. DRIOT : *Taguchi's Method for Predicting the Frequency Response Dispersion of Dynamic System*. Proceedings of **ICSV 8**, International congress on sound and vibration, Hong Kong 2-6 juillet 2001, Chine.

N. DRIOT, E. RIGAUD et J. PERRET-LIAUDET : *Variability of Critical Rotational Speeds of Gearbox Induced by Misalignment and Manufacturing Errors*. Proceedings of JSME, International conference on motion and power transmissions, **MPT2001 Fukuoka** 15-17 novembre 2001, Japon.

A. LE BOT, E. RIGAUD, J. PERRET-LIAUDET et N. DRIOT : *A Hybrid Model for the Prediction of Noise Radiated by Gearbox*. Proceedings of **Internoise 2002**, Dearborn MI, 15-17 août 2002, Etats-Unis.

Conférences nationales avec comité de lecture et actes

N. DRIOT, J. PERRET-LIAUDET : *Méthode Taguchi Appliquée à la Prédiction de la Variabilité des Réponses Fréquentielles de Systèmes Discrets Linéaire, Paramétrique et Non Linéaire*. Actes du **5^{ième} Colloque National en Calcul des Structures**, Vol 2, pp 1049-1056 Giens 15-18 mai 2001, France.

E. RIGAUD, F. MAYEUX, N. DRIOT et J. PERRET-LIAUDET : *Effet de la Dispersion des Précharges des Roulements sur la Variabilité des Régimes Critiques d'une Boîte de Vitesses*. **13^{ième} Colloque Vibrations, Chocs et Bruit 2002**, Lyon, 12-14 juin 2002, France.

Autres

N. DRIOT : *Variabilité du Comportement Vibroacoustique des Boîtes de Vitesses*. Poster présenté lors des **12^{ième} Rencontres Régionales de la Recherche** de la région Rhône-Alpes, 26 septembre 2001, Lyon, France.

J. PERRET-LIAUDET, N. DRIOT : *Quelques Aspects sur la Prédiction du Comportement Vibroacoustique des Engrenages*. Présenté par N. DRIOT, **journée SFA thématique sources vibratoires et acoustiques dans les transports routiers**, Technocentre Renault, 11 juin 2002, Guyancourt, France.

N. DRIOT : *La Prise en Compte des Incertitudes dans les Modèles Dynamiques de Mécanismes : Application aux Boîtes de Vitesses*. Présentation au **9^{ième} Colloque de la Recherche de l'Intergroupe des Ecoles Centrales**, Ecole Centrale Nantes, 3-5 juillet 2002.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur J. PERRET-LIAUDET

et les rapports de

Monsieur A. KAHRAMAN

Associate Professor - Director Center of Gear Research - The University of Toledo - Mechanical,
Industrial and Manufacturing Engineering Department - Mail Stop 312 - TOLEDO - OHIO 43606-3390

et de

Monsieur D. LE HOUEDÉC

Professeur - Laboratoire Mécanique et Matériaux - Ecole Centrale de Nantes - BP 92101 -
44321 NANTES Cedex 3

Monsieur DRIOT Nicolas

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL et ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 11 décembre 2002

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes



F. LEBOEUF

RESUME

Pour des transmissions par engrenages fabriquées en grande série, il n'est pas rare de constater des écarts de niveaux de bruit de plus de 10 dB. L'origine de cette variabilité est connue puisque ce sont les tolérances de fabrication qui autorisent de telles variations de comportement.

Nous proposons une méthodologie permettant de prendre en compte les tolérances de fabrication et de les inclure dans les modèles de prédiction du bruit rayonné par les boîtes de vitesses. Les tolérances de fabrication sont modélisées par une approche stochastique et plus particulièrement par la méthode d'échantillonnage de Taguchi. Cette méthode a d'abord fait l'objet d'une étude comparative puis est utilisée pour la prédiction de la variabilité des boîtes de vitesses dont la micro géométrie des dentures varie. Les résultats statistiques valident complètement la méthode Taguchi et prouvent son efficacité en terme de compromis précision/rapidité.

Mots clés : Engrenages, Dynamique, Acoustique, Variabilité, Incertitude, Tolérances, Stochastique.

ABSTRACT

This study deals with the prediction of vibroacoustic behavior variability of mass produced gearboxes. Indeed, noise measurements on populations of high-volume gearboxes often reveal large variability, mainly due to tolerances associated with certain gear design parameters introduced to accommodate certain manufacturing errors.

We propose and implement a methodology able to include tolerances in gears dynamic models. The statistical tolerancing Taguchi's method is used for this purpose. This method is first validated in terms of accuracy/computational time ratio by using dynamic systems having statistical mechanical characteristics. Then, we focus on gearboxes for which tooth micro geometry is disturbed by known manufacturing errors. Numerous statistical results are displayed concerning transmission error variability, natural modes variability and noise levels variability. Results strongly correlate to experimental measurements done in automotive industry and validate Taguchi's method.

Keywords : Gears, Dynamic, Acoustic, Variability, Uncertainty, Tolerances, Stochastic.

Thèse effectuée au Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes UMR 5031
de l'Ecole Centrale de Lyon.

Bâtiment H10

36 Avenue Guy de Collongue

69134 Ecully Cedex FRANCE

