T 1513

N° d'Ordre : ECL 90-28

Année 1990

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de ***DOCTEUR***

Spécialité : ***MECANIQUE***

par

Frédéric POMMEL

DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE DE RESOLUTION QUASI ELLIPTIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER STOKES TRIDIMENSIONNELLES APPLIQUEE AUX TURBOMACHINES

Soutenue le ***18 Septembre 1990*** devant la Commission d'Examen

Jury, Messieurs : J. CHAUVIN, Professeur, *Président*

Examinateurs	J. ALBANO P. FERRAND M. FRANSSON, Pr. J.L. KUENY F. LEBOEUF, Pr.
Personnalités invitées	J. BERNARD A. EL MARJANI

P.1

N° d'Ordre : ECL 90-28 Année 1990

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de ***DOCTEUR***

Spécialité : ***MECANIQUE***

par

Frédéric POMMEL

DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE DE RESOLUTION QUASI ELLIPTIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER STOKES TRIDIMENSIONNELLES APPLIQUEE AUX TURBOMACHINES

Soutenue le ***18 Septembre 1990*** devant la Commission d'Examen

Jury, Messieurs : J. CHAUVIN, Professeur, *Président*

Examinateurs	J. ALBANO P. FERRAND M. FRANSSON, Pr. J.L. KUENY F. LEBOEUF, Pr.
Personnalités invitées	J. BERNARD A. EL MARJANI

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de LYON, dirigé par Monsieur D. JEANDEL. Je les remercie pour l'accueil qu'il m'ont réservé.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Pascal FERRAND pour sa direction scientifique et son aide précieuse durant ces trois années qui ont permis l'aboutissement de cette thèse.

Je tiens à remercier le Monsieur le professeur F. LEBOEUF qui dirige le groupe turbomachines et Monsieur G. BOIS, gérant de la société METRAFLU pour l'aide constante qu'ils m'ont apportée dans le développement de ce travail.

J'adresse ma plus grande gratitude à Monsieur le professeur CHAUVIN directeur du LEMFI, d'avoir accepter la présidence du jury de thèse.

Je remercie Monsieur FRANSSON, professeur à l'école Polytechnique Fédérale de Lausanne ainsi que Monsieur le professeur KUENY de l'Institut National Polytechnique de Grenoble et directeur du CREMHYG pour avoir accepter de juger ce travail.

Que Monsieur ALBANO du Centre National d'Etude Spatiale, Monsieur BERNARD responsable du service turbine a la SNECMA et Monsieur le professeur EL MARJANI qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury de thèse reçoivent ici l'expression de ma gratitude.

Mes remerciement s'adresse enfin à tout le personnel du laboratoire et de la société METRAFLU pour leur accueil, leur contribution à ce travail et l'ambiance amicale que j'ai rencontré.

Le financement de ce travail a été assuré conjointement par le Centre National d'Etudes Spatiales et la société METRAFLU auxquels j'adresse ma très sincère gratitude

SOMMAIRE

I Introduction 1

I-1 Introduction. 2

I-2 Principales caractéristiques des écoulements dans les canaux interaubes. 2

I-3 Les méthodes numériques. 5
I-3-1 Les codes Euler. 5
I-3-2 Les codes parabolisés. 5
I-3-3 Les codes Navier-Stokes complets 6

1-4 Découplage vitesse/pression 7

II Descriptif succinct de la méthode générale 10

II-1 Introduction 11
II-2 Domaine de calcul - conditions aux limites. 11

II-3 Séparation du domaine de calcul complet en domaines restreints ... 13

II-4 Procédure de résolution dans un domaine restreint 14
II-4-1 Résolution du champ de vitesse et de température 15
II-4-2 Résolution du champ de pression statique 16
II-4-3 Vérification des conditions aux limites 17
II-4-4 Procédure de résolution dans le domaine complet 18

III Les équations de base 22

III-1 Introduction 23

III-2 Equations de conservation et relation d'état 23

III-3 Adimensionnalisation 25

III-4 Mise sous forme vectorielle 27

III-5 Traitement statistique 29

III-6 Transformation géométrique 33

III-7 Découplage 35
III-7-1 Equation de quantité de mouvement et d'énergie 36
III-7-2 Equation de correction de pression 36
III-7-3 Calcul de la masse volumique 38

III-8 Conclusion 38

IV Discrétisation 40

IV-1 Introduction 41

IV-2 Domaine d'étude et maillage 41

IV-3 Schéma de résolution du champ de vitesse et de température 44
IV-3-1 Discrétisation temporelle 44
IV-3-2 Décomposition des termes visqueux 50

IV-3-3 Linéarisation temporelle 50
IV-3-3-1 Linéarisation temporelle des termes visqueux 51

IV-3-4 Discrétisation spatiale du membre implicite 53
IV-3-4-1 Discrétisation selon la direction longitudinale 54

IV-3-4-2 Factorisation approximative 56
IV-3-4-3 Discrétisation dans le plan transversal 57

IV-3-5 Discrétisation spatiale du résidu 60

IV-3-6 Dissipation artificielle 63

IV-3-7 Méthode de résolution 66
IV-3-7-1 Conditions aux limites latérales 66
IV-3-7-2 Introduction des conditions aux limites 68
IV-3-7-3 Résolution du système matriciel 76

IV-4 Schéma de résolution du champ de pression statique 77
IV-4-1 Introduction 77
IV-4-2 Résolution sur la frontière du domaine 78
IV-4-3 Calcul des points à l'intérieur du Domaine 79

IV-5 Interêts de la formulation 80
IV-5-1 Correection monodimensionnelles dans le domaine restreint 81
IV-5-2 Procédure itérative en temps dans le domaine restreint 83
IV-5-3 Résolution dans le domaine complet 84
IV-5-3-1 Corrections monodimensionnelles dans le domaine complet 84
IV-5-3-2 Conservation de lapression d'arrêt amont 85
IV-5-3-3 Algorithme de résolution dans le domaine complet 86

IV-6 Conclusion 88

V Modèle de turbulence 90

V-1 Introduction 91

V-2 Les modèles algébriques 92

V-3 Le modèle de Baldwin-Lomax 93

V-4 Modifications du Modèle 94

V-4-1 Adaptation aux problèmes tridimensionnels 94
V-4-2 Traitement des décollements 95
V-4-3 Choix des constantes 95
V-4-4 Echelle de longueur 97

V-5 Modèle final 100

V-6 Formulation adimensionnelle 101

VI Résultats 103

VI-1 Introduction 104

VI-2 Coude à "90°" 106
VI-2-1 Caractéristiques géométriques 106
VI-2-2 Initialisation et analyse de la convergence 108
VI-2-3 Analyse des résultats 110
VI-2 Etude sur un maillage raffiné 112

VI-3 Coude de Stanitz 113
VI-3-1 Caractéristiques géométriques 115
VI-3-2 Cas test N°1 - Ms = 0,26 115
VI-3-3 Cas test N°2 - Ms = 0,4 118
VI-3-3-1 Etude sur un maillage raffiné 119
VI-3-4 Cas test N°3 - Ms = 0,8 120

VI-4 Grille de turbine 120
VI-4-1 Conditions aérodynamiques 121
VI-4-1 Résultats 121

VI-5 Conclusions 123

Conclusions 124

CHAPITRE I

Introduction

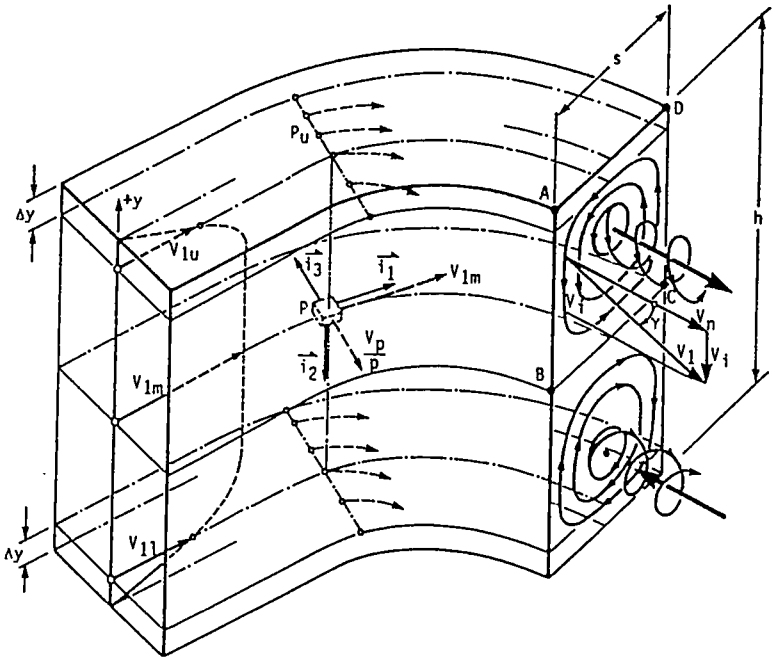
I-1 Introduction

L'objectif de cette étude est de modéliser les écoulements qui se développent dans les turbomachines. Ces écoulements sont excessivement complexes, leur étude d'un point de vue théorique ou expérimental reste largement du domaine de la recherche. Pour les aborder, il est nécessaire d'effectuer quelques simplifications. Ces simplifications sont de deux types: la première concerne le système étudié. Dans notre cas, nous restreindrons notre démarche à l'étude des écoulements stationnaires dans les canaux interaubes d'une roue isolée. Pour adapter la méthode de résolution aux écoulements étudiés, les caractéristiques générales de ce type d'écoulement seront tout d'abord présentées. La seconde simplification s'applique aux équations qui gouvernent le système. Ces simplifications peuvent être nombreuses. Sachant que cette étude concerne les canaux interaubes, les principales méthodes tridimensionnelles, basées sur des formes plus ou moins simplifiées des équations de Navier-Stokes, seront ensuite présentées. Ceci nous permettra, dans une troisième partie de définir les principales caractéristiques d'une nouvelle technique de résolution des équations de Navier-Stokes adaptée aux turbomachines.

I-2 Principales caractéristiques des écoulements dans les canaux interaubes.

Un canal interaube désigne l'espace situé entre deux aubages d'une roue de turbomachine. L'écoulement qui se développe dans ce type de canal possède certaines caractéristiques particulières. En premier lieu, il s'agit d'un écoulement interne car limité par quatre parois solides . Sur ces parois, des couches limites se développent, dont l'importance dépend de la géométrie de la veine. Ainsi, dans certaines veines très étroites, elles influencent fortement le comportement du fluide dans le reste du canal.

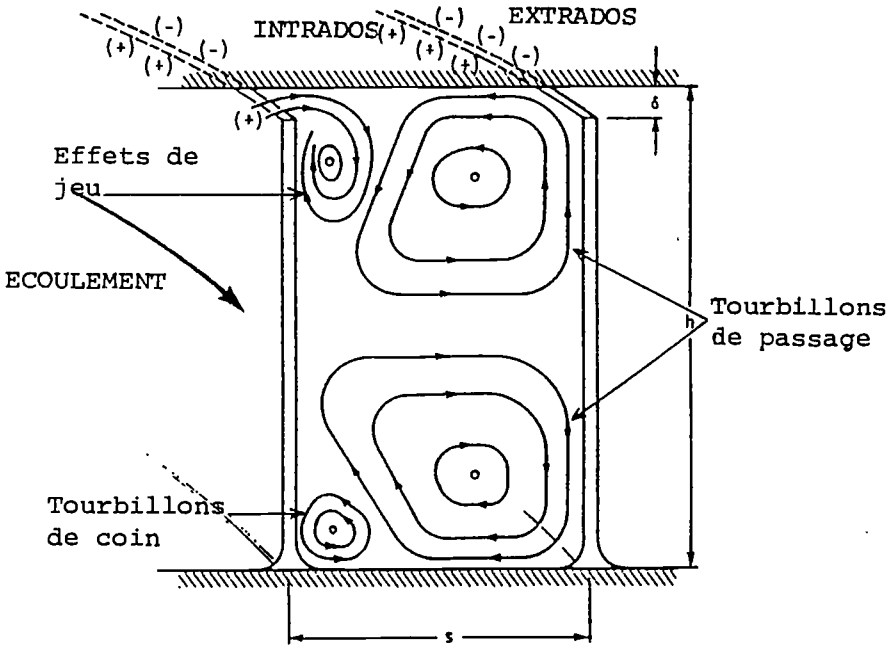
Si on excepte les couches limites bidimensionnelles sur les aubages de grandes envergures qui sont communes à tous les écoulements de fluides visqueux, les phénomènes tridimensionnels qui apparaissent dans les canaux interaubes sont regroupés sous l'appellation "écoulements secondaires". Ce vocable regroupe de nombreux phénomènes qui ont fait l'objet d'études approfondies ces trente dernières années. Une étude sur le



Tourbillons de passage (d'après Vavra / /)

Figure -1-

sujet peut être consulté dans les références [1, 2, 3]. Notre propos ici se limitera à référencer les principales particularités.



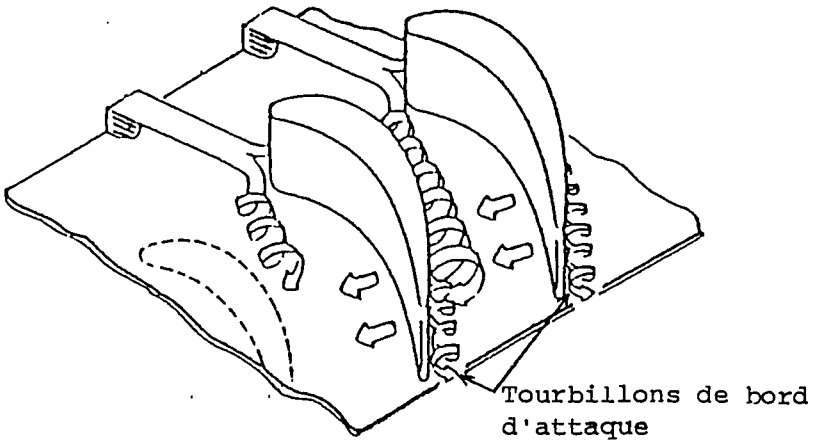
Phénomènes secondaires (d'après Vavra / /)

Figure -2-

En premier lieu, on peut citer les tourbillons de passage schématisés sur la figure 1. Ces tourbillons résultent d'une part, du profil de vitesse à l'entrée du canal et d'autre part de la courbure longitudinale des profils. La figure 2 visualise également ces tourbillons de passage ainsi que les tourbillons de coins et les effets de jeu. Les tourbillons de coins sont créés par la combinaison de deux phénomènes. En premier lieu, il s'agit de l'interaction des couches limites qui se développent sur les aubages et sur le carter. Puis, se rajoute un transport de fluide de base énergie par le tourbillon de passage vers le coin coté extrados. La conjonction de ces deux phénomènes génère une zone d'accumulation de pertes.

Les tourbillons de jeu sont dus à la coupure des surfaces portantes que sont les aubages. Cette discontinuité du champ de pression génère des tourbillons au niveau des jeux entre les aubes et le carter. Ces phénomènes ont été décrit et modélisés par Leboeuf [4]

La figure 3 représente les tourbillons de bord d'attaque encore appelés tourbillons de fer à cheval. Du fait de la présence du bord d'attaque des aubages, deux tourbillons sont créés. Un du coté intrados et un autre du coté extrados. Ces deux tourbillons s'enroulent à l'intérieur ou à l'extérieur du tourbillon de passage. Il faut cependant noter que l'influence exacte de ces tourbillons au niveau des pertes reste à ce jour sujet à contreverse [5].



Tourbillons de bord d'attaque

Figure -3-

Tous les phénomènes cités plus haut sont complexes. Leur modélisation demeure un des objectifs majeur pour la conception et l'analyse des performances des turbomachines modernes.[6]

I-3 Les méthodes numériques

Les méthodes numériques utilisées pour modéliser les écoulements sont multiples. Notre centre d'interêt étant les canaux interaubes, nous concentrerons cette section à l'étude des méthodes tridimensionnelles basées sur les équations de Navier-Stokes qui seules peuvent reproduire les phénomènes cités précédemment. En fonction du degré de complexité des équations utilisées, nous pouvons les classer en trois catégories: la première regroupe les schémas utilisant les équations d'Euler. Ils sont regroupés ici sous le sigle "code Euler". Ensuite viennent les codes utilisant les simplifications de type parabolique. Enfin, ceux conservant les équations complètes sont placés sous l'appellation " Navier-Stokes complet". Ces trois types de schéma seront présentés successivement de façon a connaître leurs principales qualités et limitations.

I-3-1 Les codes Euler

L'approximation utilisée consiste à négliger les termes visqueux dans les équations. Le but de cette simplification est de produire un système dont la résolution nécessite un coût raisonnable. Cette hypothèse est basée sur l'idée que les effets de la viscosité restent limités aux parois et sont sans grande influence en dehors de ces zones. La transposition de cette hypothèse aux turbomachines reste cependant limitée car, comme nous l'avons vue précédemment, les effets visqueux sont, entre autre, largement responsable de la création des effets secondaires. Malgré ces restrictions, les codes Euler sont largement développés et utilisés de part leur relative simplicité de mise en oeuvre et leur faible coût d'utilisation.

I-3-2 Les codes parabolisés

La parabolisation consiste à négliger les termes diffusifs dans la direction de convection dominante. De cette façon, le système d'équation prend une structure mathématique de type parabolique. La résolution peut

alors s'effectuer par une technique de marche spatiale, de l'amont vers l'aval, en avançant dans la direction longitudinale. L'avantage de cette méthode réside dans un gain en temps calcul et un stockage réduit en mémoire centrale. Sa seule limitation théorique concerne l'existence d'une direction de convection dominante. Ceci implique par exemple, l'impossibilité théorique de traiter des zones de recirculation.

A l'origine ces méthodes furent développées pour des régimes supersoniques. Dans ce type d'écoulement, le transfert d'information s'éffectue uniquement de l'amont vers l'aval. La progression spatiale est donc parfaitement adaptée. En régime subsonique, le transfert s'effectue aussi de l'aval vers l'amont par l'intermédiaire du champ de pression statique. Lin et Rubin [7] ont montré que les méthodes parabolisées n'étaient pas stables pour ce type d'écoulement.

Pour assurer la stabilité du schéma, Pantakar et Spalding [7] préconisent un décentrement aval du gradient de pression statique de manière à restituer les effets elliptiques liés à cette variable. Plusieurs balayages amont-aval sont alors nécessaires. Ce type de méthode est alors appelé "quasi-parabolique". De telles méthodes ont été développées pour traiter des géométries présentant de courbures longitudinales. Citons principalement les travaux de Pratap, Spalding et Pantakar [8, 9]. Une étude détaillée de ces différentes méthodes se trouve dans la référence [10]. Leur utilisation reste cependant complexe et limitée à des configurations géométriques simples.

I-3-3 Les codes Navier-Stokes complets

Pour ces méthodes, les équations ne sont pas simplifiées si l'on excepte les termes instationnaires qui ne sont pas pris en compte dans cette étude. Elles ne souffrent donc d'aucune limitation théorique. Les limitations reposent sur les hypothèses liées aux schémas numériques utilisés. Une des principale difficulté pour leur exploitation tient au temps calcul et à la place mémoire qu'elles nécessitent. En effet, les temps calcul et la place mémoire nécessaire à leur fonctionnement les rendent actuellement peu utilisables pour les ingénieurs. Leur utilisation, par ce fait, reste encore du domaine de la recherche.

Notre objectif est de définir une méthode, utilisant les équations de Navier-Stokes complète, mais avec une technique de résolution particulière; apparentée à celle utilisée pour les calculs parabolisés, de manière à obtenir un stockage mémoire et un temps de résolution réduit. Les principales caractéristiques de cette technique seront définies au Chapitre II.

1-4 Découplage vitesse/pression

Si, d'un point de vue théorique, les équations de Navier Stockes composées des équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie sont suffisantes pour décrire le comportement de n'importe quel type d'écoulement, dans la pratique, l'équation de continuité pose des problèmes de résolution lorsque l'écoulement est incompressible Ceci est compréhensible lorsque l'on étudie cette équation. Elle est basée sur la masse volumique ρ elle même reliée à la pression statique par une loi d'évolution, généralement la loi d'état.

$$\frac{p}{\rho.R.T} = Z(p,T) \tag{1.1}$$

Dans un écoulement de type incompressible, les variations de masse volumique sont très faibles. La pression statique peut subir des gradients importants. Or la pression est toujours définie par l'équation (1.1). Ainsi à température fixée, les variations de pression statique ne sont reliées qu'aux gradients de masse volumique. Pour évaluer correctement cette pression, il faut obtenir une grande précision sur la masse volumique, puisque ce sont de très faibles variations sur ρ qui régissent le champ de pression. Une étude de Estivalezes [11] menée sur ce sujet montre, que dans un écoulement d'air pour un Mach inférieur à 0,1, la précision sur la masse volumique, nécessaire pour reproduire les écarts de pression, est largement supérieure à celle que l'on peut obtenir par une méthode numérique.

Pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes ont été développées parmi lesquelles celle qui consiste à découpler la résolution de la pression statique des autres variables (vecteur vitesse et température) du système. C'est cette méthode que nous avons retenue. Le problème se trouve découplé en deux parties distinctes résolues successivement à l'aide

d'un processus itératif. Le premier système est composé des trois équations de quantité de mouvement et de l'équation d'énergie. Ce système est résolu par un algorithme indépendant, qui permet de déterminer le champ de vitesse et de température à pression fixée. Un second algorithme permet de résoudre une équation dont l'inconnue est la pression statique. Cette équation est résolue à vitesse et température imposées. Pour construire cette nouvelle équation, on prend la divergence des équations de quantité de mouvement. On obtient ainsi une équation sous la forme d'un laplacien de pression :

$$\Delta p = F(\rho, V) \tag{1.2}$$

ou en terme de correction :

$$\Delta \delta p = F'(\rho, V) \tag{1.3}$$

La fonction $F'(\rho,V)$ appelée fonction source provient du non respect de la continuité par le champ de vitesse. Cette fonction diffère suivant que l'écoulement est considéré comme compressible ou non. Néanmoins la méthode de résolution reste identique dans les deux cas puisque la structure de l'équation n'est pas modifiée. La masse volumique est ensuite déduite de la pression statique par l'intermédiaire de la loi d'état(1.1).

Au delà de ce premier point, l'intérêt d'un découplage tel que nous venons de le définir, réside dans la possibilité d'un traitement spécifique de chacun des systèmes; ce traitement étant lié à leurs natures différentes. Ainsi, les équations de quantité de mouvement ont un caractère parabolique (en l'absence de décollement), le transfert d'informations s'effectue vers l'aval tandis que le transfert vers l'amont passe par la pression statique. Les schémas numériques associés à chacun des systèmes doivent tenir compte de ces spécificités.

Les chapitres suivant seront consacrés à présenter dans le détail, les schémas numériques conçus pour résoudre ces deux systèmes. Cette méthode est la continuation de travaux entrepris au laboratoire de mécanique des fluides de l' E.C.L par Vallat [10] puis poursuivis par El Marjani [12].

Le chapitre II présentera, dans ses grandes lignes, l'ensemble de la méthode de résolution. Ceci permettra de définir les domaines d'étude et de positionner les différents algorithmes utilisés. Dans le troisième chapitre, les équations seront détaillées puis mises sous une forme adaptée au traitement numérique. Conformément aux conclusions de la section précédente, les équations de base seront découplées pour former deux systèmes distincts. Le chapitre IV sera consacré à la présentation des discrétisations numériques. Ma contribution personnelle portant principalement sur l'algorithme de résolution des équations de quantité de mouvement et d'énergie, celui-ci sera présenté en détail. Le schéma de résolution de de correction de pression ayant été l'objet des travaux de El Marjani [12] et Parkinson [13], sa présentation sera plus succincte. Le modèle de turbulence introduit sera ensuite présenté. Ceci fera l'objet du chapitre V. Enfin, les résultats obtenus pour différentes configurations d'écoulement, seront analysés. Ces configurations sont de deux types: tout d'abord, des canaux courbes permettront de valider la méthode dans des configurations représentatives des turbomachines. Ensuite, les résultats obtenus sur une grille de turbine seront présentés.

- CHAPITRE II -

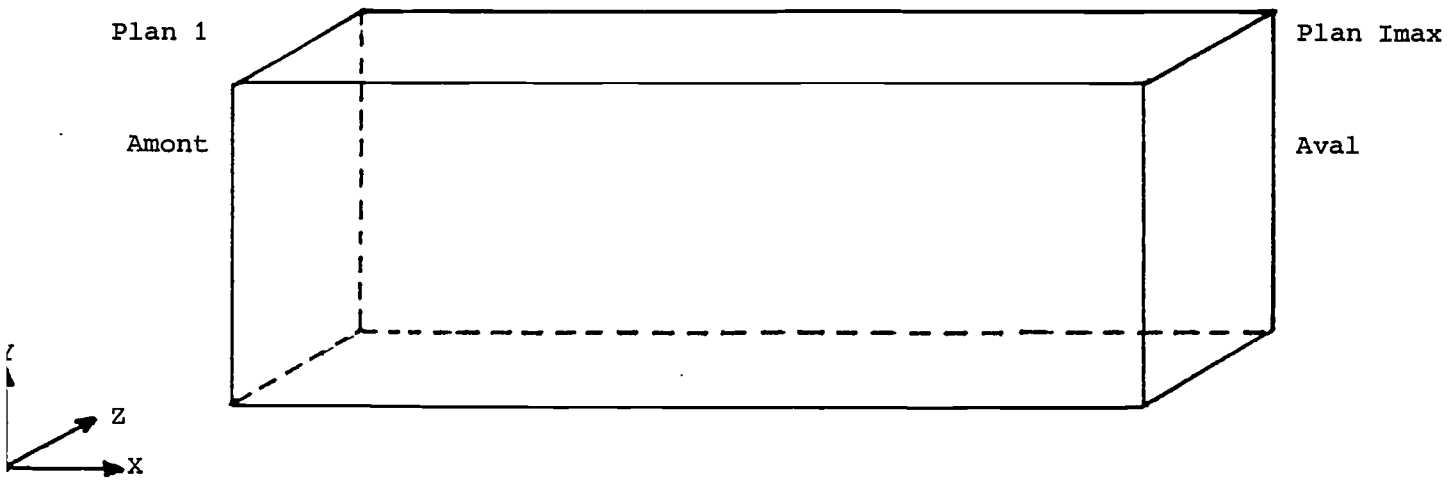
Descriptif succinct de la méthode générale

II-1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de présenter dans son ensemble la méthode numérique mise au point pour résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Pour rester succinct et permettre une bonne compréhension de l'intégralité de la méthode, seules les principales lignes directrices seront tracées en nous affranchissant de toute justification ou validation. Chacun des points exprimés ici sera ensuite repris, détaillé et validé dans les chapitres suivants. Cette étape est apparue nécessaire compte tenu de l'originalité et de la complexité de cette méthode. En effet, comme nous le verrons par la suite, plusieurs algorithmes de résolution sont utilisés et c'est dans leurs couplages et nombreuses interdépendances que résident les principales difficultés de cette méthode. Ce sont ces mécanismes qu'il nous a semblé nécessaire de définir afin de donner une cohérence au schéma général, avant de donner une description plus détaillée de chacun des algorithmes. Ce chapitre nous servira ainsi de fil conducteur pour la suite de cette présentation.

Nous étudierons successivement le domaine de calcul, la méthode associée à chacun des systèmes d'équations pour finir par le schéma général.

II-2 Domaine de calcul - Conditions aux limites

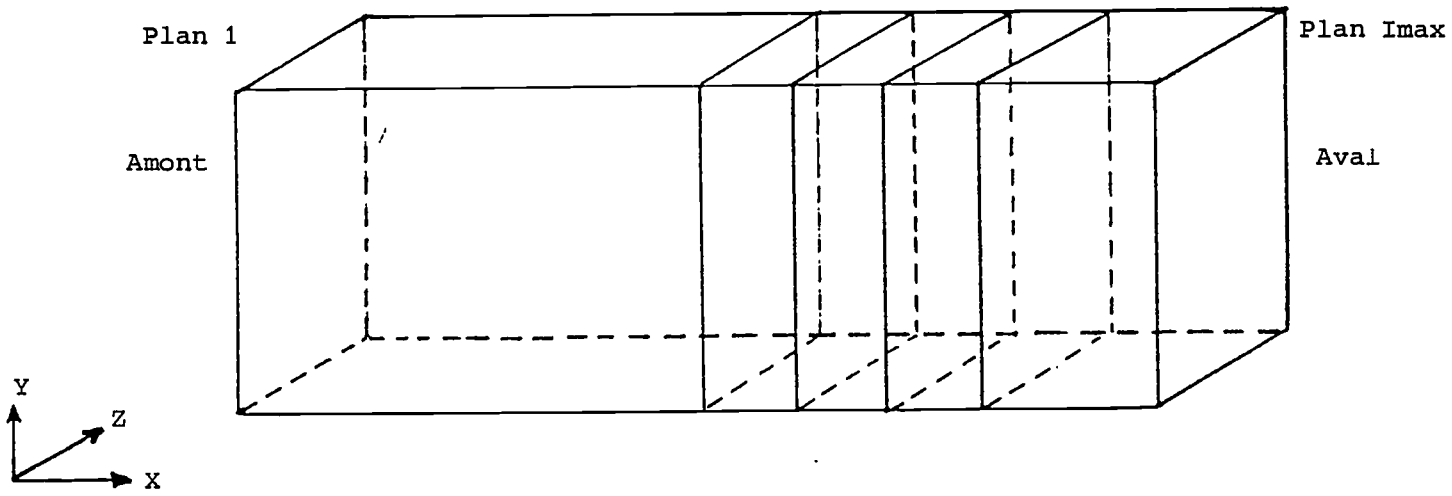


Domaine de calcul

- Figure 1 -

Avant d'aborder le problème des algorithmes, il est nécessaire d'étudier le domaine de calcul ainsi que ses conditions aux limites. Pour faciliter l'explication, on peut considérer un domaine schématisé par un canal de section rectangulaire limité par les plans d'entrée (plan 1) et de sortie (plan Imax) (figure 1).

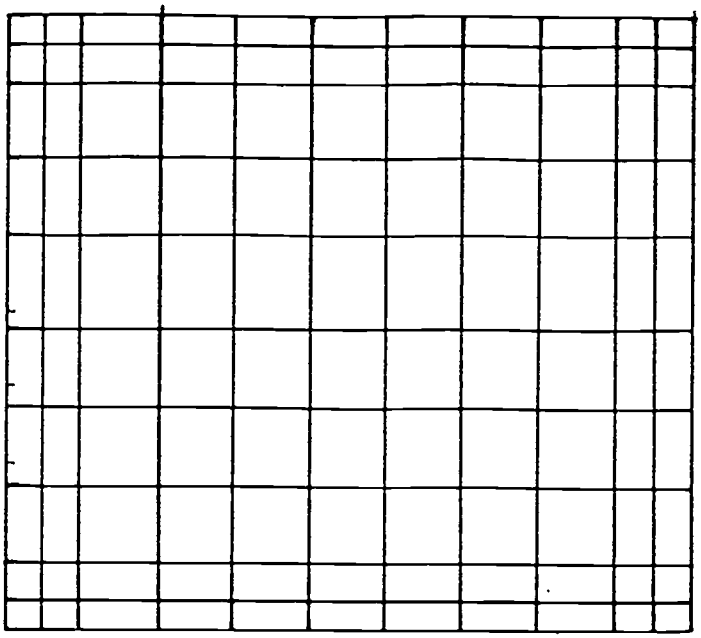
Un maillage structuré est construit tout d'abord en fractionnant le domaine en Imax plans entre l'amont et l'aval suivant la direction X (figure 2). Chaque plan est ensuite discrétisé dans les deux directions transversales Y et Z (figure 3). Le plan 1 est le plan d'entrée ou plan amont, le plan Imax est le plan de sortie ou plan aval. Les conditions aux limites imposées sur les frontières de ce domaine sont les suivantes :

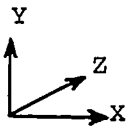


Domaine de calcul

- Figure 2 -

Sur les parois latérales, les conditions aux limites sont fonction de la configuration physique du domaine. On peut ainsi imposer des conditions d'adhérence en présence de parois solides, de Neuman ou de périodicité. Ces conditions seront examinées par la suite .





Maillage dans un plan transversal

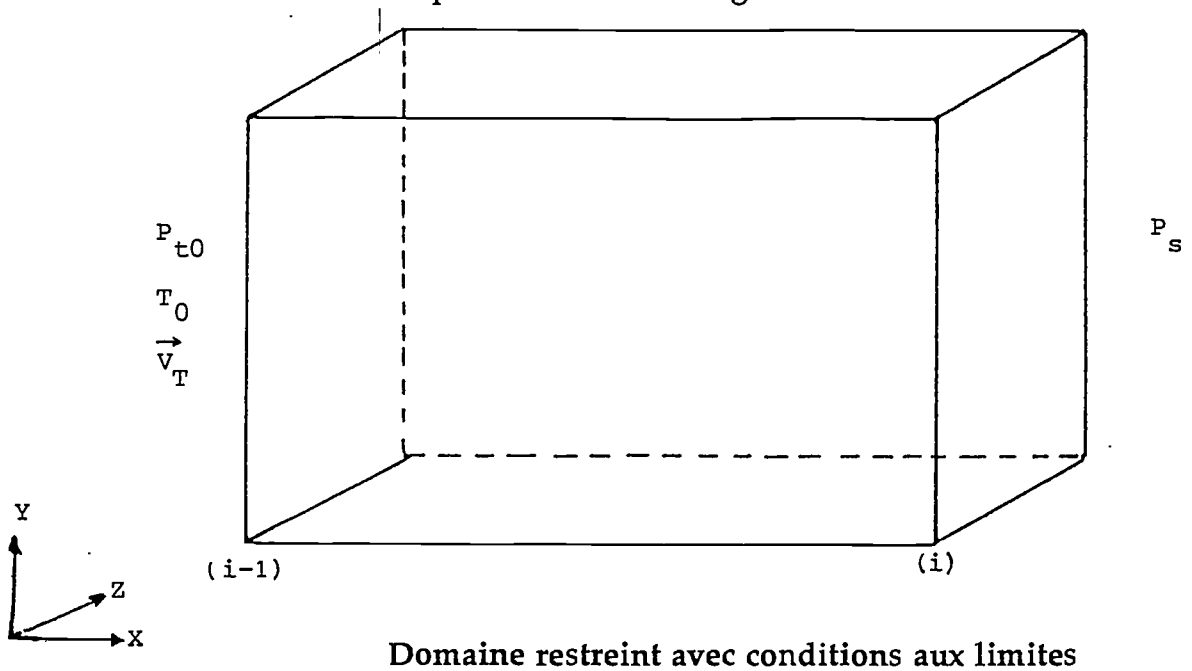
- Figure 3 -

Dans le plan d'entrée, les conditions qu'il est nécessaire de connaître sont les grandeurs d'arrêt (pression et température) ainsi que les angles d'entrée de l'écoulement (ou les vitesses secondaires). Dans le plan de sortie, le champ de pression doit être connu. Ces conditions, qui sont celles imposées dans notre schéma, répondent à la physique des phénomènes étudiés. On peut ainsi remarquer que le débit n'est nullement imposé et sera donc un résultat de calcul.

II - 3 Séparation du domaine de calcul complet en domaines restreints

La résolution d'un problème visqueux à grand nombre de Reynolds nécessite une discrétisation fine près des parois. En tridimensionnel, le nombre de points de discrétisation devient donc important d'autant que la géométrie des turbomachines est complexe. Notre objectif consiste à établir un schéma numérique, d'une part qui évite un stockage en mémoire trop important, et d'autre part, qui limite la charge de calcul. Pour cela, le problème n'est plus considéré dans son ensemble, mais comme une suite de problèmes locaux résolus séparément. En effet, à partir du domaine complet, il est possible d'extraire une succession de domaines restreints sur lesquels le même type de conditions aux limites amont-aval

est imposé. Pour illustrer notre propos, considérons un domaine restreint constitué de deux plans (i - 1) et (i) (Figure 4).



Domaine restreint avec conditions aux limites

- Figure 4 -

Dans ce nouveau domaine, les conditions aux limites sont identiques à celles imposées dans le domaine complet. Ainsi dans le plan (i) correspondant au plan aval, la pression statique est imposée. Dans le plan (i - 1) qui correspond au plan amont, la pression d'arrêt, la température d'arrêt et les vitesses transversales sont imposées. Ces conditions étant fixées, il est possible de résoudre les équations dans ce domaine restreint. Le problème constitué à l'origine de Imax plans se retrouve donc décomposé en Imax problèmes. Nous allons maintenant présenter la procédure de résolution utilisée au niveau de chaque domaine restreint puis, la technique de couplage des domaines restreints entre eux sera présentée de manière à reconstituer le domaine complet.

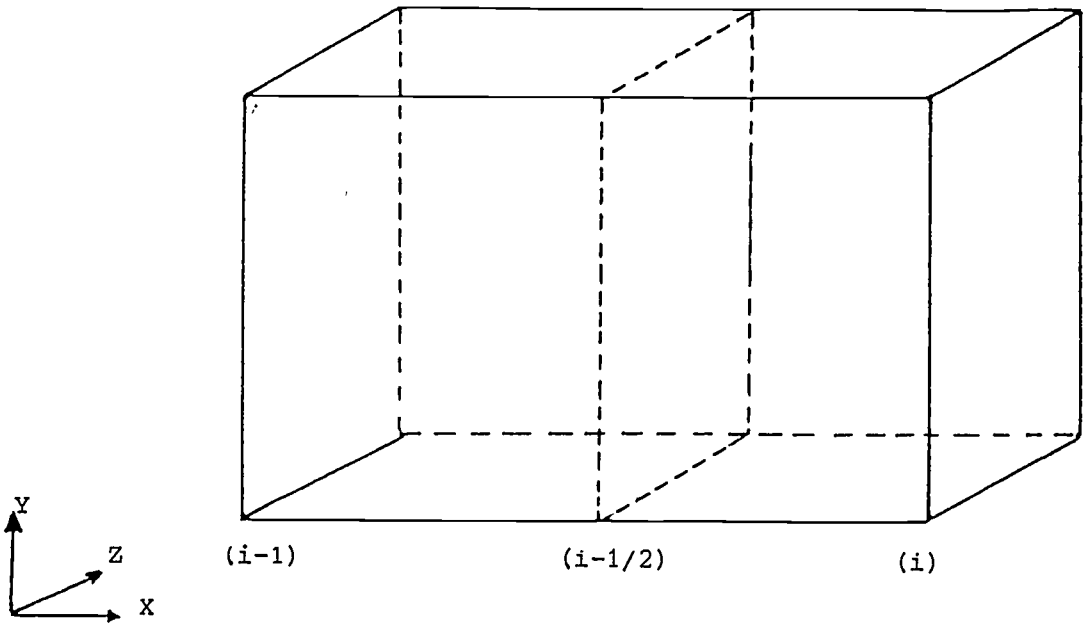
II-4 Procédure de résolution dans un domaine restreint.

La méthode de résolution utilisée, repose sur une technique de correction des champs initiaux associés, à chacune des variables du problème. Au départ, le domaine complet est initialisé par un champ de vitesse, un champ de pression et un champ de température. Dans chaque domaine restreint, la procédure de résolution est identique. A partir des

champs d'initialisation, un processus itératif corrige les champs de vitesse et de température pour vérifier les équations de quantité de mouvement et d'énergie puis, le champ de pression statique pour vérifier la conservation locale de la masse. Ce processus se reproduit jusqu'à convergence. Cette section sera consacrée à décrire ces deux algorithmes successifs en commençant par la résolution des champs de vitesse et de température.

II-4-1 Résolution du champ de vitesse et de température.

Le premier système est constitué des trois équations de quantité de mouvement et de l'équation d'énergie. Ces quatre équations sont résolues en considérant la pression fixée dans le domaine d'étude. Ces équations sont écrites dans un plan intermédiaire noté (i - 1/2) situé au milieu du segment (i - 1), (i) (figure 5). Le schéma de discrétisation selon la direction X est centré dans ce plan, et fait intervenir les valeurs des plans (i-1) et (i).



Domaine d'étude des champs de vitesse et de température

- Figure 5 -

Le caractère principalement parabolique du système (en l'absence de zone de recirculation) nécessite une discrétisation qui permet le transfert d'informations de l'amont vers l'aval. C'est pourquoi les champs initiaux

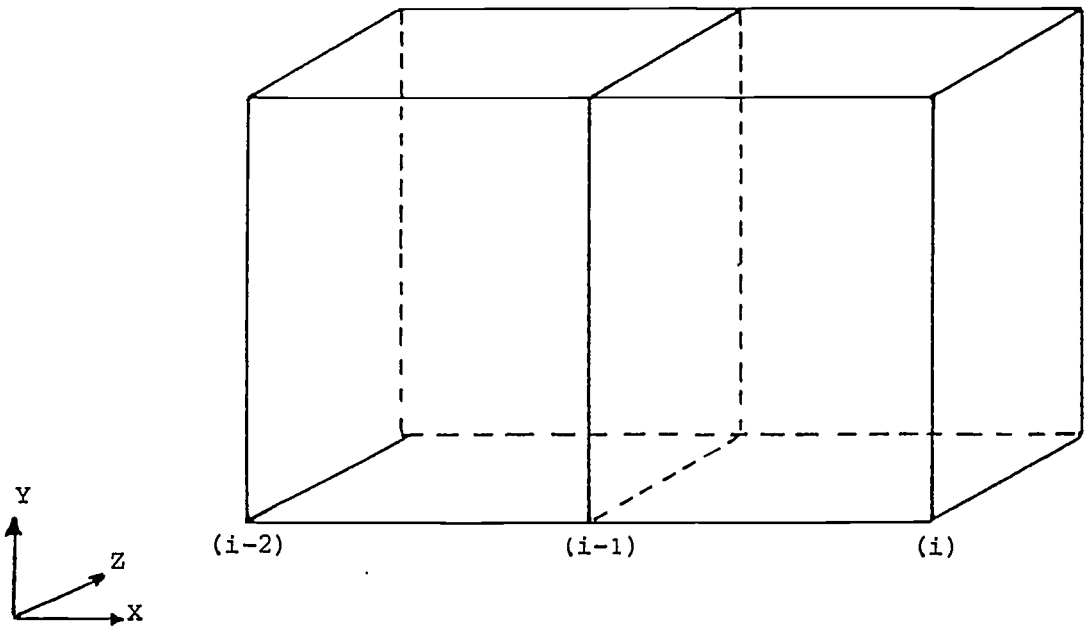
situés dans le plan (i-1) sont fixés et les corrections δV et δT ne sont appliquées que dans le plan (i).

On obtient ainsi une transmission des informations de l'amont (plan (i-1)) vers l'aval (plan (i)). Cette hypothèse de corrections nulles exceptées dans le plan de calcul (i) permet de limiter le nombre d'inconnues à un seul plan. La dimension du système de résolution est donc équivalente à celle d'un problème bidimensionnel. La taille du système est ainsi fortement réduite de même que le temps de calcul nécessaire à sa résolution.

Les champs de vitesse et de température ayant été modifiés, nous pouvons passer à l'étape suivante qui concerne le champ de pression statique.

II-4-2 Résolution du champ de pression statique

Pour ce second système, la technique de résolution est différente, pour pouvoir restituer le caractère elliptique lié au champ de pression. Cet effet est essentiel pour une restitution correcte de l'écoulement .



Domaine d'étude du champ de pression statique

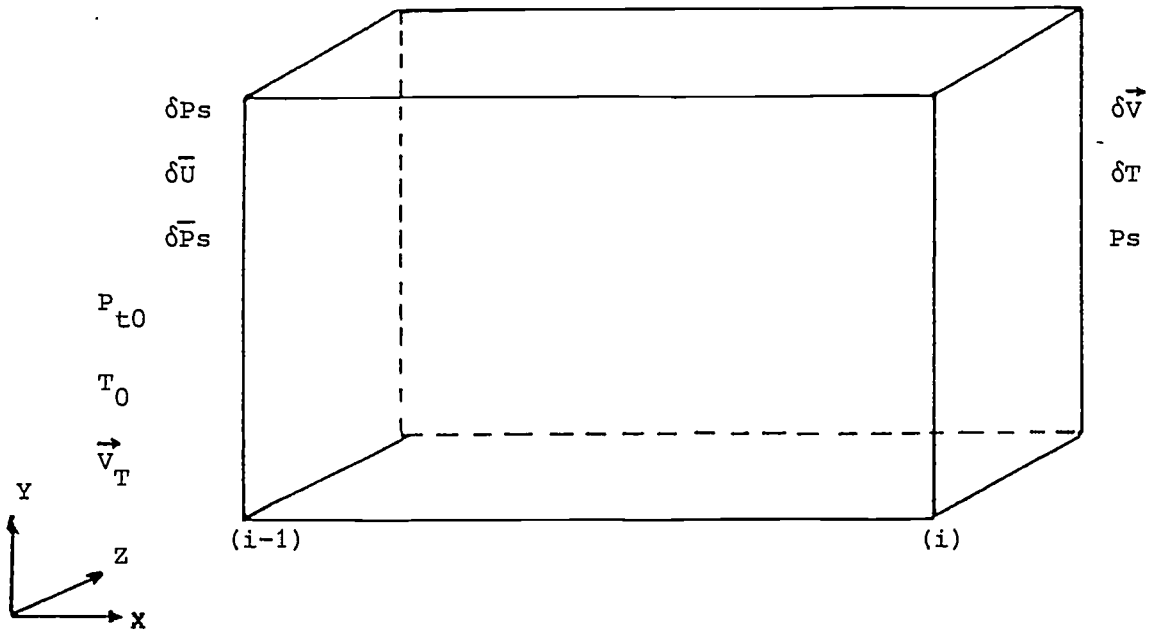
- Figure 6 -

Le domaine restreint est étendu à trois plans notés (i-2), (i-1) et (i) (Figure 6). De cette manière, la géométrie et notamment les courbures longitudinales (selon X) sont correctement prises en compte. Les champs de vitesse et de température sont fixés dans tout ce domaine ; la résolution du champ de vitesse a généré la fonction source F (ρ,V) de l'équation de correction de pression statique dans le plan (i-1). Le champ de pression statique est imposé sur les frontières amont et aval (plans (i-2) et (i)) du domaine. Les corrections de pression statique générées par la fonction source F (ρ,V) sont calculées dans le plan central (i-1).

L'extension du domaine à trois plans ainsi que des conditions aux limites appliquées à l'amont et à l'aval de ce domaine permet, par l'utilisation d'une technique appropriée, (voir chapitre V) de bien reproduire l'influence elliptique liée à cette variable.

II-4-3 Vérification des conditions aux limites

L'algorithme numérique procède donc de la façon suivante: à partir de champs initiaux, la vitesse et la température sont corrigées dans le plan de calcul (i). Ensuite, les corrections de pression sont effectuées dans le plan (i.-1). Ces corrections sont schématisées sur la figure 7:



Localisation des corrections et des conditions aux limites dans le domaine

- Figure 7 -

Les corrections de pression statique dans le plan (i.-1) modifient les conditions aux limites, sur la pression totale, imposée dans ce plan. Pour rétablir cette pression totale, un algorithme supplémentaire est introduit. Une nouvelle équation monodimensionnelle basée sur la conservation de la pression totale moyenne dans le plan amont et sur la conservation du débit entre les deux plans, (i-1) et (i), introduit deux termes de corrections supplémentaires δU et δP dans le plan (i-1). Ainsi le niveau moyen des grandeurs d'arrêt, est conservé dans le plan (i-1) tandis que le débit entre les plans (i-1) et (i) est stabilisé.

L'algorithme de résolution enchaîne donc successivement ces trois étapes jusqu'à convergence c'est à dire jusqu'à ce que les différentes corrections deviennent négligeables.

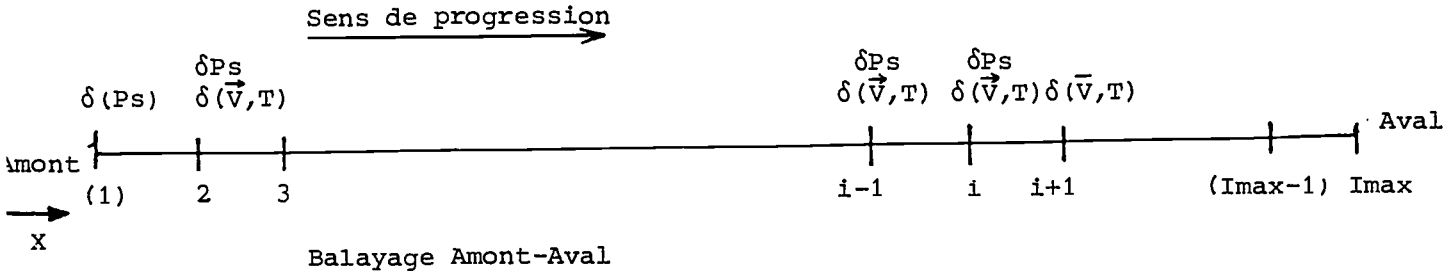
Le processus de résolution dans le domaine restreint étant maintenant défini, il convient de coupler ces différents domaines pour reconstituer le domaine complet.

II -4-5 Procédure de résolution dans le domaine complet

Pour résoudre le domaine complet, il suffit de reproduire la procédure précédente pour chaque plan de calcul. La technique qui consiste à résoudre successivement chaque plan du domaine s'appelle un balayage. Durant un balayage, le choix de domaines restreints successifs doit être lié aux caractéristiques de notre problème. Pour définir cette procédure, il est tout d'abord nécessaire de regarder le fonctionnement de l'algorithme ainsi que les informations indispensables à une bonne convergence. Ensuite, en fonction du comportement physique du phénomène étudié, une procédure adéquate sera mise en place. Dans un domaine restreint quelconque, la solution obtenue à convergence dépend fortement des conditions appliquées sur les frontières amont et aval de ce domaine. Ces conditions sont fonction des champs initiaux qui sont modifiés à chaque balayage. Les seules conditions physiques qui ne sont jamais modifiées et qui permettent de fixer correctement l'écoulement sont les conditions imposées à l'amont et à l'aval du domaine complet (plan 1 et Imax). Ce sont donc ces conditions qu'il est nécessaire de transmettre à chaque domaine restreint. Pour un écoulement subsonique, le caractère mixte (elliptique - parabolique) des équations fait que ce transfert s'effectue d'une part de l'amont vers l'aval

(caractère parabolique), mais aussi de l'aval vers l'amont (caractère elliptique). Pour permettre à ce double transfert de s'effectuer correctement, une procédure particulière a été mise en place :

Dans une première étape, le domaine est résolu en avançant plan par plan de l'amont vers l'aval. Cette procédure peut être schématisée de manière unidimensionnelle par la figure 8 ci-dessous :



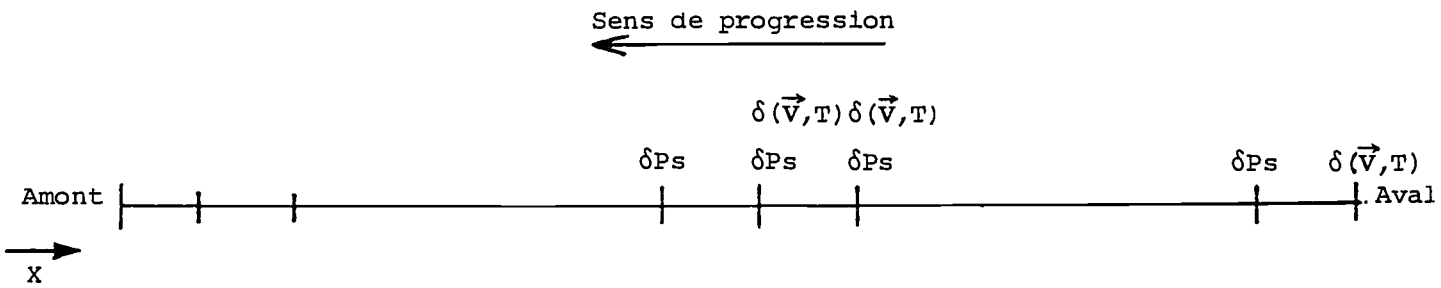
Balayage Amont-Aval

- Figure 8 -

Sur cette figure, la ligne transversale désigne le domaine de calcul décrit dans sa direction longitudinale. Les graduations numérotées de 1 à Imax représentent les plans de calcul. Dans chaque domaine restreint, les champs initiaux sont corrigés d'une quantité de pression statique δP et d'une quantité de vitesse δV et de température δT. La correction δP est appliquée à l'amont du domaine restreint, traduisant ainsi le caractère elliptique du champ de pression. A l'inverse, les corrections (δV, δT) s'effectuent à l'aval du domaine ce qui permet un transfert de l'information de type parabolique par l'intermédiaire du champ de vitesse. Le balayage s'effectuant de l'amont vers l'aval, les conditions aux limites du plan d'entrée se propage par l'intermédiaire des corrections de vitesse dans le sens de cette progression. Pour comprendre ce phénomène, prenons par exemple le domaine constitué des plans (i.-1) et (i). A convergence, on obtient une correction δP dans le plan (i-1) et une correction $\delta(U,T)$ dans le plan (i). Nous passons alors à l'étude du domaine suivant constitué cette fois des plans (i) et (i+1). Dans ce domaine les conditions aux limites sont, comme toujours, les grandeurs d'arrêt amont (Pto (i), Tto (i)) et la pression statique aval (Ps (i+1)) Or les champs de vitesse et de température dans le plan (i) ont été corrigés lors de la résolution du domaine précédent, ainsi les

conditions d'arrêt imposées dans ce plan sont fonction du domaine précédent. A l'inverse, la pression statique fixée dans le plan (i+1) n'a pas été modifiée. La nouvelle correction dans le domaine (i), (i+ 1) sera donc dépendante de la somme des corrections effectuées depuis l'entrée du domaine complet jusqu'au domaine de calcul courant donc, implicitement des conditions imposées dans le plan 1.

A l'inverse les conditions imposées dans le plan Imax n'ont été que partiellement propagées vers l'amont, à raison d'un plan à chaque balayage. Pour comprendre ce point particulier, considérons le dernier domaine restreint constitué des plans (Imax-1) et (Imax). Les conditions appliquées dans le plan Imax (champ de pression statique) sont également celles du domaine complet. Ainsi les corrections δPs effectuées dans le plan (Imax-1) seront fonction du champ imposé en Imax. Nous voyons ainsi que l'information contenue dans le dernier plan s'est propagée d'un plan vers l'amont. Pour que cette information issue de l'aval se transmette plus rapidement, un second balayage s'effectue en parcourant le domaine de l'aval vers l'amont (figure 9).



Balayage Aval-Amont

- Figure 9 -

Cette fois ci, le phénomène est inversé, les informations contenues dans le champ de pression statique imposé dans le plan Imax se propagent par l'intermédiaire de corrections de pression statique jusqu'à l'entrée du domaine. Comme précédemment, le phénomène peut se comprendre sur un exemple. Considérons le domaine restreint constitué des plans (i) et (i +1). A convergence, on obtient des corrections δP dans le

plan (i) et $\delta(U,T)$ dans le plan (i+1). Le domaine restreint suivant est le domaine comprenant les plans (i-1) et (i). Comme toujours les grandeurs d'arrêt sont imposées dans le plan amont (i-1) tandis que la pression statique est imposée dans le plan aval qui est ici le plan (i). Nous pouvons alors noter que les grandeurs d'arrêt n'ont pas encore été modifiées alors que la pression statique qui vient d'être corrigée contient des informations en provenance de l'aval. De proche en proche, le champ de pression statique transmet vers l'amont les informations imposées à l'aval.

Le schéma général de résolution se compose donc d'une suite de balayages se déroulant alternativement de l'amont vers l'aval puis de l'aval vers l'amont. Cette double procédure s'effectue plusieurs fois jusqu'à convergence. Les deux principaux paramètres qui permettent de juger la convergence du système sont les corrections obtenues dans chaque domaine restreint ainsi que les variations de débit entre deux plans ou d'un balayage sur l'autre. Le convergence est obtenue lorsque les corrections sur l'ensemble de ces paramètres deviennent négligeables.

Dans ce chapitre, nous avons présenté les grandes lignes d'une méthode de résolution des équations de Navier-Stokes. Le domaine d'étude a été défini puis décomposé en plusieurs domaines restreints. Le fonctionnement général du processus de résolution dans chaque domaine restreint a ensuite été présenté. Enfin, la procédure finale de résolution élaborée pour parcourir le domaine complet en tenant compte des conditions aux limites et des transferts d'informations a été détaillée.

Le cadre général de cette étude étant maintenant posé, les systèmes d'équations utilisés dans les différents algorithmes vont être précisés. Ceci fera l'objet du chapitre suivant. Ensuite , les discrétisations utilisées pour constituer les schémas numériques de résolution pourront être détaillées.

- CHAPITRE III -

Les équations de base

III-1 Introduction

Le chapitre II nous a permis de définir une méthode particulière de résolution des équations de Navier-Stokes. La présentation de cette méthode s'est faite de manière générale sans entrer dans le détail des équations à résoudre ni des algorithmes de résolution. Ce chapitre a pour but de présenter le système d'équations pour définir son domaine d'application ainsi que les hypothèses mathématiques et physiques qui ont conduit à sa construction. Cette première étape étant effectuée, le système adimensionnalisé sera écrit sous une forme vectorielle avant discrétisation. Pour permettre un traitement de la turbulence, une moyenne temporelle sera appliquée. Ensuite par une transformation géométrique, le système sera écrit dans un repère curviligne quelconque. Enfin, conformément au principe de découplage entre les champs de vitesse - température et le champ de pression, les équations de quantité de mouvement et d'énergie seront dissociées de l'équation de continuité pour former deux systèmes distincts.

III-2 Equations de conservation et relation d'état

Les équations qui régissent les mouvements d'un fluide visqueux sont déduites des principes fondamentaux de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Dans le cadre de ce travail, nous nous limiterons à l'étude des écoulements monophasiques, homogènes, sans réactions chimiques dans un état liquide ou gazeux. En l'absence de forces extérieures, les équations se mettent sous la forme différentielle suivante :

- Conservation de la masse.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho.V) = 0 \qquad (3.1)$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho.V) + \mathrm{div}\,(\rho.V.V) = -\,\mathrm{Grad}\,p + \mathrm{Div}\,\tau \qquad (3.2)$$

- Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho.E_t) + \text{div}(\rho.V.E_i) = -\text{Div}(q_c) + \text{Div}(\rho.V) + \text{Div}(\tau : V) \quad (3.3)$$

Dans l'équation (3.2), $\overline{\overline{\tau}}$. désigne le tenseur des contraintes visqueuses. Pour un fluide Newtonien, il s'exprime sous la forme :

$$\tau = \lambda.\text{Div}(V.I) + \mu\,[\text{Grad}\,V + \text{Grad}^t V] \quad (3.4)$$

λ et μ sont les coefficients de viscosité du fluide, ils sont reliés entre eux par la loi de Stokes :

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (3.5)$$

Dans l'équation (3.3) $\vec{q_c}$ représente le flux de chaleur qui s'exprime par la loi de Fourier :

$$\vec{q_c} = -k.\vec{\nabla}T$$

Dans le système défini par les équations (3.1) (3.2), et (3.3), on dénombre quatre variables indépendantes qui sont : la masse volumique ρ, le vecteur vitesse $\vec{V}$., la pression statique p et l'énergie interne totale par unité de masse E_t.

L'énergie interne totale E_t est reliée à l'énergie interne E_i par :

$$E_t = E_i + 1/2.||\vec{V}|| \quad (3.7)$$

Et l'énergie interne est reliée à la température par :

$$E_i = C_v.T \quad (3.8)$$

Equation d'état

Ce système est composé de trois équations scalaires et vectorielle pour un total de quatre inconnues. Le système est fermé par l'introduction de l'équation thermique d'état :

$$\frac{P}{\rho.R.T} = Z(\rho, T) \tag{3.9}$$

Ou Z est appelé facteur de compressibilité.

Avec cette nouvelle équation, le système est complet, sa résolution numérique peut être abordée.

III-3 Adimensionnalisation

Ces équations sont rendues adimensionnelles par l'introduction de grandeurs caractéristiques de l'écoulement. Ces grandeurs sont les suivantes :

L : longueur caractéristique de l'écoulement.
V_o : Vitesse de référence
T_o : Température de référence.
ρ_o : masse volumique de référence
μ_o : viscosité dynamique du Fluide
k_o : Conductivité thermique de référence

A partir de ces grandeurs, les variables sans dimension sont définies : $z' = \frac{z}{L}$ et $R' = \frac{z}{L}$ pour les longueur, $U' = \frac{U}{V_o}$ pour le vecteur vitesse, $T' = \frac{T}{T_o}$ pour la Température, $\rho' = \frac{\rho}{\rho_o}$ pour la masse volumique, $\mu' = \frac{\mu}{\mu_o}$ pour la viscosité dynamique et $k' = \frac{k}{k_o}$ pour la conductivité thermique.

De plus, en combinant les grandeurs de référence, on fait apparaître de nouvelles échelles caractéristiques :

$t' = \frac{t.L}{V_o}$ pour le temps

$P' = \frac{p}{\rho V_o^2}$ pour la pression

$E_o' = \frac{E}{V_o^2}$ pour l'énergie interne massique

$q_o' = \frac{q}{\rho V_o^3}$ pour le flux de chaleur.

Ces nouvelles grandeurs de référence permettent d'adimensionnaliser toutes les autres variables du système. L'introduction de ces variables sans dimension dans les équations fait apparaître deux nouveaux nombres. Il s'agit du nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho_o V_o . L}{\mu_o}$ et du nombre de Prandtl : $Pr = \frac{\mu_o . C_p}{k_o}$

Le système se présente alors sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \mathrm{Div}\,(\rho . V) \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho' U) + \mathrm{Div}\,(\rho' V' . V') = - \mathrm{Grad}(p') + \frac{1}{Re} \mathrm{Grad}(\lambda' \mathrm{Div}\, V') + \frac{1}{Re} \mathrm{Div}\,(\mu' (\mathrm{Grad}\, V' + \mathrm{Grad}^t V')) \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho' E_t') + \mathrm{div}\,(\rho' V' E_t') + \mathrm{Div}\,(\rho' V') = \frac{1}{Re} (\mathrm{Div}\, q_c' + \tau' \mathrm{Grad}\, V') \tag{3.11}$$

avec:

$$\vec{q_c'} = \frac{\gamma_c . k}{Pr} \nabla \vec{E}$$

$$\bar{\bar{\tau}}' = \frac{\bar{\bar{\tau}}}{Re}$$

Par la suite, toutes les variables seront sans dimension, pour simplifier les notations, les ' qui permettent de les distinguer seront supprimés.

III-4 Mise sous forme vectorielle.

Le système d'équation précédent doit être écrit dans un repère de coordonnées cylindriques (z,R,θ) tournant à une vitesse de rotation constante Ω. On peut alors l'exprimer sous la forme vectorielle suivante :

$$(3.12)\qquad \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta}+\vec{H}= \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \vec{Ev}}{\partial z}+\frac{\partial \vec{Fv}}{\partial R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \vec{Gv}}{\partial \theta}+\vec{Hv}\right\}+\vec{D}.$$

Les vecteurs $\vec{E}$, $\vec{F}$, et $\vec{G}$ contiennent les termes convectifs tandis que les vecteurs $\vec{Ev}$, $\vec{Fv}$ et $\vec{Gv}$ contiennent les termes visqueux. Les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{Hv}$ sont constitués des termes liés à la courbure du repère initial. Les termes dus à la rotation sont regroupés dans le vecteur $\vec{D}$. Le choix d'exprimer ces équations dans un repère cylindrique est lié à la volonté de prendre en compte la rotation de la géométrie étudiée : principalement des grilles annulaires. Les vecteurs de l'équation (3.12) s'expriment sous la forme suivante :

$$\vec{q}=\begin{vmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho E_o\end{vmatrix}\qquad \vec{E}=\begin{vmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (\rho E_o+p)u\end{vmatrix}\qquad \vec{F}=\begin{vmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (\rho E_o+p)v\end{vmatrix}$$

$$\vec{G}=\begin{vmatrix}\rho w\\ \rho wu\\ \rho wv\\ \rho w^2+p\\ (\rho E_o+p)w\end{vmatrix}\qquad \vec{Ev}=\begin{vmatrix}0\\ \tau_{11}\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\\ \beta_1\end{vmatrix}\qquad \vec{Fv}=\begin{vmatrix}0\\ \tau_{21}\\ \tau_{22}\\ \tau_{23}\\ \beta_2\end{vmatrix}$$

$$\vec{Gv} = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{31} \\ \tau_{32} \\ \tau_{33} \\ \beta_3 \end{vmatrix} \qquad \vec{H} = \begin{vmatrix} \rho\, v \\ \rho\, \varpi w \\ \rho\,(w^2+w^2) \\ 2\rho\, vw \\ (\rho\, E_o + p)\, v \end{vmatrix} \qquad \vec{Hv} = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} - \tau_{33} \\ 2\tau_{23} \\ \beta_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\, \Omega^2 R + 2\rho\, \Omega\, \omega \\ -2\rho\, \Omega\, \omega \\ \rho\, \Omega^2 R\, v \end{vmatrix}$$

Les termes u, v et w désignent les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ suivant les directions z,R et θ. Les quantités β_i (i =1,2 ou 3) correspondent à la relation :

$$\bar{\bar{\tau}} \,.\, \vec{V} = \frac{\gamma_c . k}{Pr} \nabla \vec{E}$$

Ils désignent respectivement :

$$(3.13) \qquad \begin{vmatrix} \beta_1 = \tau_{11}u + \tau_{12}v + \tau_{13}w + \dfrac{\gamma_c . k}{Pr}\dfrac{\partial e}{\partial z} \\ \beta_2 = \tau_{21}u + \tau_{22}v + \tau_{23}w + \dfrac{\gamma_c . k}{Pr}\dfrac{\partial e}{\partial R} \\ \beta_3 = \tau_{31}u + \tau_{32}v + \tau_{33}w + \dfrac{\gamma_c . k}{Pr}\dfrac{\partial e}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Les τ_{ij} (i = 1,2 ou 3 et j = 1,2 ou 3) sont les éléments du tenseur des contraintes visqueuses $\bar{\bar{\tau}}$. Ils sont donnés par :

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} = \lambda \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial R} + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2\,\mu \dfrac{\partial u}{\partial z} + \lambda \dfrac{v}{R} \\ \tau_{12} = \mu \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial R} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \right\} \end{vmatrix}$$

$$
\left|
\begin{aligned}
\tau_{13} &= \mu \left\{ \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\
\tau_{22} &= \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial R} + \lambda \frac{v}{R} \\
\tau_{23} &= \mu \left\{ \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R} \right\} \\
\tau_{33} &= \tau_{22} = \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2\mu \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \lambda \frac{v}{R}
\end{aligned}
\right. \qquad (3.14)
$$

avec : $\tau_{21} = \tau_{12}$; $\tau_{31} = \tau_{13}$; $\tau_{32} = \tau_{23}$

III-5 Traitement statistique

Le système d'équations que nous venons d'établir permet, en principe, de décrire les écoulements fluides en régime laminaire ou turbulent. Dans la pratique, les échelles temporelles et spatiales caractéristiques des petites structures turbulentes demandent pour être résolues, une finesse du maillage qui n'est pas accessible avec les moyens de calcul actuels. Pour contourner ce problème, on effectue un traitement statistique des équations. Cette décomposition dite "de Reynolds" donne pour une variable quelconque f :

$$f = \overline{f} + f' \qquad (3.15)$$

$\overline{f}$ est la moyenne temporelle définie par :

$$\overline{f} = \int_0^T f(t+\tau)\, d\tau \qquad (3.16)$$

f' est la fluctuation de f par rapport à $\overline{f}$. Elle est caractérisée par :

$$\overline{f'} = 0 \qquad (3.17)$$

Cette technique, appliquée aux équations de Navier-Stokes introduit les corrélations du type $\overline{u'v'}$ et $\overline{u'e'}$ qui traduisent les effets de la turbulence. Apparaissent alors de nouvelles inconnues et le système n'est plus fermé. Il est donc nécessaire de définir de nouvelles équations différentielles ou des relations algébriques permettant de déterminer ces corrélations. Avant cela, pour réduire le nombre de corrélations et obtenir le même formalisme pour les écoulements compressibles ou incompressibles, une nouvelle méthode peut être proposée. Une moyenne dite de "Favre" [14] est effectuée pour toute variable g quelconque sous la forme suivante :

$$g = \tilde{\tilde{g}} + g'' \tag{3.18}$$

g étant définie par :

$$\tilde{\tilde{g}} = \frac{\overline{\rho g}}{\bar{\rho}} \tag{3.19}$$

et comme précédemment :

$$\overline{\rho g''} = 0 \tag{3.20}$$

La moyenne selon Reynolds reste appliquée sur les variables ρ et p alors que les autres variables sont moyennées par la méthode de Favre. Nous obtenons ainsi les équations de Navier-Stokes moyennées Le détail de cette formulation ainsi que les relations concernant chacun des termes qui la composent sont précisées dans l'Annexe 1.

La formulation des équations moyennées fait apparaître des termes de fluctuations de vitesse ($\overline{\rho u'v'}$) ainsi que des termes de fluctuations entre l'énergie interne et les vitesses ($\overline{\rho u'v'}$). Pour fermer le système, l'hypothèse la plus couramment employée est l'hypothèse de Boussinesq. Les corrélations doubles sur les vitesses ($\overline{\rho u'v'}$) appelées également tensions de Reynolds sont reliées au champ de vitesse moyen par l'intermédiaire de la viscosité turbulente (notée μ_t) de la façon suivante :

$$\overline{\rho u'v'} = \frac{2}{3}\left\{ \bar{\rho} k + \mu_t \, \mathrm{Div}(\vec{V}) \right\} \bar{\bar{I}} - \mu_t \left\{ \mathrm{Grad}\, \tilde{\tilde{V}} + \mathrm{Grad}^t \tilde{\tilde{V}} \right\} \tag{3.22}$$

$\overline{\overline{I}}$ est la matrice identité et k représente l'énergie cinétique turbulente:

(3.23) $$k = \frac{1}{2} \sum \overline{u_i v_i}$$

L'hypothèse de Boussinesq peut être généralisée aux autres corrélations ainsi les corrélations vitesses-Energie sont reliées aux gradients de température moyenne par :

(3.24) $$\overline{\rho} \cdot \overline{u'v'} = -\frac{\mu_t}{P_{rt}} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}}\, T$$

Dans cette relation le terme P_{rt} est appelé nombre de Prandtl turbulent par analogie au nombre de Prandtl précédemment introduit. Ce nombre sera supposé constant.

Le système vectoriel devient alors:

(3.25) $$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{G}}{\partial \theta} + \vec{H} = \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \vec{Ev}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{Fv}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{Gv}}{\partial \theta} + \vec{Hv} \right\} + \vec{D}.$$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{w}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{E}}_o \end{vmatrix} \qquad \vec{E} = \begin{vmatrix} \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}}^2 + \overline{p} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}}\tilde{\tilde{v}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}}\tilde{\tilde{w}} \\ (\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{E}}_o + \overline{p})\,\tilde{\tilde{u}} \end{vmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{vmatrix} \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}}\tilde{\tilde{u}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}}^2 + p \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}}\tilde{\tilde{w}} \\ (\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{E}}_o + \overline{p})\,\tilde{\tilde{v}} \end{vmatrix}$$

$$\vec{G} = \begin{vmatrix} \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{w}} \\ \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{w}}\tilde{u} \\ \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{w}}\tilde{v} \\ \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{w}}^2 + \overline{p} \\ (\overline{\rho}\ \tilde{\tilde{E}}_o + \overline{p})\, w \end{vmatrix} \qquad \vec{Ev} = \begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{11}} \\ \overline{\tau_{12}} \\ \overline{\tau_{13}} \\ \overline{\beta_1} \end{vmatrix} \qquad \vec{Fv} = \begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{21}} \\ \overline{\tau_{22}} \\ \overline{\tau_{23}} \\ \overline{\beta_2} \end{vmatrix}$$

$$\vec{Gv} = \begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{31}} \\ \overline{\tau_{32}} \\ \overline{\tau_{33}} \\ \overline{\beta_3} \end{vmatrix} \qquad \vec{H} = \begin{vmatrix} \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{v}} \\ \overline{\rho}\ \tilde{\tilde{v}}\tilde{\tilde{w}} \\ \overline{\rho}\ (\tilde{\tilde{w}}^2 + \tilde{\tilde{v}}^2) \\ 2\,\overline{\rho}\ \tilde{\tilde{v}}\tilde{\tilde{w}} \\ (\overline{\rho}\ \tilde{\tilde{E}}_o + \overline{p})\, \tilde{\tilde{v}} \end{vmatrix} \qquad \vec{Hv} = \begin{vmatrix} 0 \\ \overline{\tau_{21}} \\ \overline{\tau_{22}} - \overline{\tau_{33}} \\ 2\,\overline{\tau_{23}} \\ \overline{\beta_2} \end{vmatrix}$$

$$\vec{D} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho\,\Omega^2 R + 2\rho\,\Omega\,\omega \\ -2\rho\,\Omega\,\omega \\ \rho\,\Omega^2 R\, v \end{vmatrix}$$

avec :

$$\overline{\tau_{11}} = \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2(\mu + \mu_t)\frac{\partial u}{\partial z} + \lambda \frac{v}{R}$$

$$\overline{\tau_{12}} = (\mu + \mu_t) \left\{ \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\}$$

$$\overline{\tau_{13}} = (\mu + \mu_t) \left\{ \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

(3.26)

$$\overline{\tau_{22}} = \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2(\mu + \mu_t)\frac{\partial v}{\partial R} + \lambda \frac{v}{R}$$

$$\overline{\tau_{23}} = (\mu + \mu_t) \left\{ \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial R} - \frac{w}{R} \right\}$$

$$\overline{\tau_{33}} = \lambda \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} + 2(\mu + \mu_t)\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \lambda \frac{v}{R}$$

III-6 Transformation géométrique

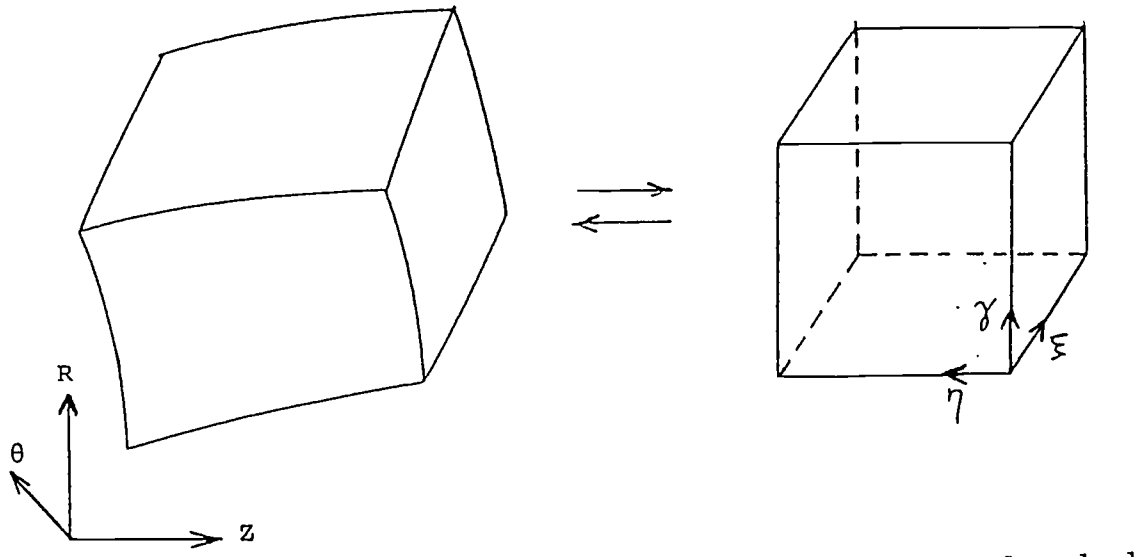
Les équations ont été écrites dans un système de coordonnées cylindriques. Un tel système, s'il possède certains avantages tels que le prise en compte de la rotation, n'est pas parfaitement adapté aux discrétisations nécessaires dans le cadre d'une méthode numérique. Pour des géométries complexes, les maillages sont souvent non orthogonaux notamment près des parois. Ces non-orthogonalités nécessitent l'emploi de formules d'interpolations sources d'erreurs numériques.

Il est préférable de transformer le système d'équations dans un repère de coordonnées curvilignes. Cette étape supplémentaire augmente le nombre d'opérations arithmétiques lors de la résolution mais permet de s'affranchir des problèmes liés à la géométrie et ainsi de traiter correctement l'écoulement quelque soit l'environnement dans lequel il évolue.

Pour passer du repère cylindrique (z, R,θ) au repère curviligne (ξ,η,γ), nous utilisons une transformation ponctuelle indépendante du temps , définie à l'aide des relations générales suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \xi = \xi\,(z, R, \theta) \\ \eta = \eta\,(z, R, \theta) \\ \gamma = \gamma\,(z, R, \theta) \end{array} \right. \qquad (3.27)$$

Dans le repère transformé, le domaine sera systématiquement de forme cubique (figure 1). La direction ξ sera définie comme direction de convection dominante.Les deux autres directions (η et γ) définissent les plans transversaux.



a - domaine physique

b - domaine de calcul

- Figure 1 -

La technique numérique utilisée est décrite par Viviand [15] et Vinokur [16]. Les métriques sont discrétisés par des relations centrées précises au second ordre en espace. Cependant cette formulation n'est pas conservative, ainsi, pour éviter de générer des erreurs numériques aucune moyenne ne sera effectuée sur les métriques. Ceux-ci seront recalculés en chaque point de maillage.

Dans le repère transformé (ξ,η,γ), l'équation vectorielle (3-25) devient :

$$(3.28)\qquad \frac{\partial \vec{q'}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E'}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F'}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{G'}}{\partial \gamma} + \vec{H'} = \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \vec{Ev'}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{Fv'}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{Gv'}}{\partial \gamma} + \vec{Hv'} \right\} + \vec{D'}.$$

avec:

$$\vec{q'} = \frac{\vec{q}}{J}$$

$$\vec{E'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \xi_z.\vec{E} + \xi_R.\vec{F} + \frac{\xi_\theta.}{R}\vec{G} \right\}$$

$$\vec{F'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \eta_z.\vec{E} + \eta_R.\vec{F} + \frac{\eta_\theta.}{R}\vec{G} \right\}$$

$$\vec{G'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \gamma_z.\vec{E} + \gamma_R.\vec{F} + \frac{\gamma_\theta.}{R}\vec{G} \right\}$$

(3..28)
$$\vec{E_v'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \xi_z.\vec{E_v} + \xi_R.\vec{F_v} + \frac{\xi_\theta.}{R}\vec{G_v} \right\}$$

$$\vec{F_v'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \eta_z.\vec{E_v} + \eta_R.\vec{F_v} + \frac{\eta_\theta.}{R}\vec{G_v} \right\}$$

$$\vec{G_v'} = \frac{\vec{1}}{J}\left\{ \gamma_z.\vec{E_v} + \gamma_R.\vec{F_v} + \frac{\gamma_\theta.}{R}\vec{G_v} \right\}$$

$$\vec{H'} = \frac{\vec{H}}{J} \quad ; \quad \vec{H_v'} = \frac{\vec{H_v}}{J} \quad \text{et} \quad \vec{D'} = \frac{\vec{D}}{J}$$

Les termes ξ_z , ξ_R , ξ_θ , η_z , η_R , η_θ , γ_z , γ_R et γ_θ expriment les dérivés des nouvelles coordonnées en fonction des anciennes (ex: $\xi_z = \frac{\partial \xi}{\partial z}$). On les nomme métriques de la transformation. J est le jacobien de cette transformation, il est donné par :

(3.30)
$$J = \frac{\partial(\xi,\eta,\gamma)}{\partial(z,R,\theta)}. = \text{Det} \begin{vmatrix} \xi_z & \eta_z & \gamma_z \\ \xi_R & \eta_R & \gamma_R \\ \frac{\xi_\theta}{R} & \frac{\eta_\theta}{R} & \frac{\gamma_\theta}{R} \end{vmatrix}$$

III-7 Découplage

Pour permettre l'étude d'écoulement compressible et incompressible, notre méthode de résolution repose sur un découplage du

système initial en deux systèmes distincts. Le premier système constitue des équations de quantité de mouvement et d'énergie qui permettent de modifier les champs de vitesse et de température. Le second composé d'une équation de correction de pression qui permet de corriger le champ de pression statique pour respecter la continuité locale de la masse.

Le premier système va être présenté. Ensuite, l'équation de correction de pression sera construite.

III-7-1 Equation de quantité de mouvement et d'énergie

Ce système est constitué de l'équation vectorielle (3.27) auquel on retire l'équation de continuité. On obtient aussi :

$$\frac{\partial \vec{q}'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{G}'}{\partial \gamma} + \vec{H}' = \frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \vec{Ev}'}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{Fv}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{Gv}'}{\partial \gamma} + \vec{Hv}' \right\} + \vec{D}'. \tag{3.31}$$

Le secteur inconnu $\vec{q}$ ayant pour composantes:

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{u}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{v}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{w}} \\ \overline{\rho}\,\tilde{\tilde{E}}_o \end{vmatrix}$$

III-7-2 Equation de correction de pression

Classiquement, l'équation de pression est obtenue en prenant la divergence des équations de quantité de mouvement [12]. Pour un écoulement incompressible, elle se présente sous la forme suivante :

(3.32) $$\frac{1}{\rho}\Delta p = f(\Theta) + 2.\psi + (\vec{J} + \vec{w}).(\vec{J} + \vec{w})$$

avec: $$\Theta = \nabla.\vec{V}$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2}.\nabla.\vec{V}$$

$$\psi = \frac{1}{3}\Theta^2 - \frac{1}{4}.\mu.\Phi$$

$$f(\Theta) = \frac{4}{3}\frac{\nu}{Re}\nabla(\Theta) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\Theta + \nabla(\Theta\vec{V})\right)$$

Par suite des corrections appliquées au champ de vitesse, l'équation de continuité : $\Theta = \nabla.\vec{V} = 0$ n'est plus respectée. La fonction $F(\Theta)$ n'est plus nulle. On construit alors une équation de correction de pression statique de façon à annuler cette fonction source :

(3.33) $$\nabla \delta P = -\rho f(\Theta)$$

Le nouveau champ $p + \delta p$ vérifie $F(\Theta) = 0$ et, cette fonction étant linéaire en Θ , $\Theta = \nabla.\vec{V} = 0$.

En compressible, le processus est identique, l'équation de pression se présente sous la forme :

(3.34) $$\Delta p = f(\Theta) - \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i}.\frac{\partial \rho V_i}{\partial x_j}\right\} + \frac{V_j}{\rho}.\frac{\partial \rho V_j}{\partial x_i}.\frac{\partial \rho}{\partial x_i} -$$

$$\rho.\vec{V}\ \vec{Grad}(\vec{V}\ \vec{Grad}\,\rho) + (\lambda + 2\mu)\,Div\left\{\vec{Grad}(\vec{V}\ \vec{Grad}\,\rho)\right\}$$

avec : $$\Theta = \nabla(\rho.\vec{V})$$

(3.35)

et : $$f(\Theta) = (\lambda + 2\mu)\nabla\left(\frac{\Theta}{\rho}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\Theta + 2\nabla(\Theta\vec{V})\right)$$

En stationnaire $\Theta = \nabla.\rho\vec{V} = 0$ correspond à l'équation de continuité. Comme précédemment, pour annuler la fonction source F (Θ), l'équation de correction du champ de pression statique s'écrit :

(3.36) $$\nabla \delta P = - f(\Theta)$$

III -7- 3 Calcul de la masse volumique

- Equation d'état.

A chaque itération temporelle on modifie les champ de vitesse et de température puis le champ de pression. En compressible, il convient d'ajuster ensuite la masse volumique aux nouvelles conditions de l'écoulement. Pour cela, nous utilisons l'équation thermique d'état :

(3.37) $$\frac{P.v}{P.T} = Z(R,T)$$

ou Z désigne le facteur de compressibilité.

Pour un gaz ou un mélange quelconque, il existe des tables donnant Z en fonction de la pression et de la température. Dans le cas d'un gaz parfait, tel que l'air qui nous préoccupe ici, on a Z = 1. L'équation (5.7) devient alors :

(3.38) $$\frac{P}{\rho} = R.T$$

p étant le pression statique, ρ la masse volumique, R la constante des gaz parfaits et T la température statique.

III-8 Conclusion

Après avoir présenté (Chapitre II) le processus général de résolution, ce chapitre a été consacré à décrire les équations qui composent nos systèmes .

Les équations de conservation, qui régissent les mouvements d'un fluide visqueux ont été introduites, adimensionnalisées puis mises sous une forme vectorielle adaptée à un traitement numérique.

Un traitement statistique a ensuite été appliqué pour permettre la prise en compte de la turbulence puis, une transformation géométrique ponctuelle, nous a permis d'écrire le système dans une repère curviligne quelconque. Enfin, le système initial a été découplé. Une premier système est composé de l'équation vectorielle construite précédemment auquel on a retiré l'équation de continuité. Pour le second, une équation de correction de pression a été construite.

Pour permettre la résolution numérique, ces équations doivent maintenant être discrétisées. Ceci fera l'objet du chapitre suivant. Ensuite, pour modéliser les corrélations turbulentes apparues lors du traitement statistique, un modèle de turbulence sera introduit.

- CHAPITRE IV -

Discrétisation

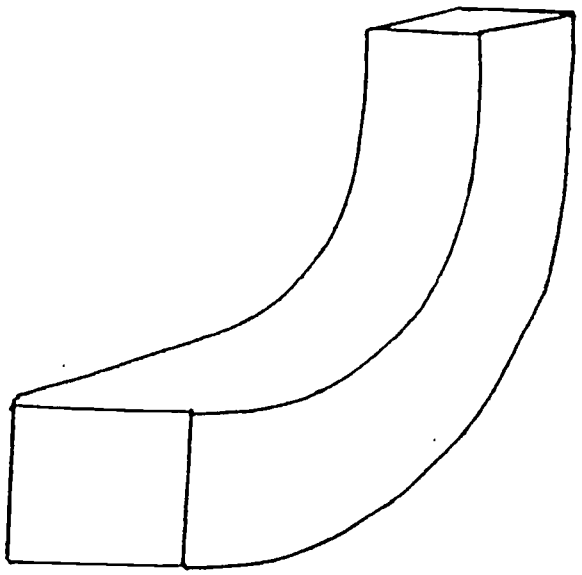
IV-1 Introduction

Le système original constitué des équations de Navier-Stokes a été décomposé en deux systèmes distincts. La résolution s'effectue par un processsus itératif pseudo-instationnaire qui résoud, à chaque itération temporelle, les deux algorithmes numériques jusqu'à convergence. Ce chapitre a pour but de présenter les schémas numériques utilisés.

Dans une première partie, le domaine d'étude et le maillage seront définis. Ensuite, le schéma de résolution du champ de vitesse et de température sera détaillé : les discrétisations temporelles et spatiales seront introduites puis, le système matriciel obtenu sera résolu. La section trois sera consacrée à la présentation du schéma de résolution de l'équation de correction de pression statique. Les deux algorithmes étant définis, nous procéderons alors à leur couplage dans un domaine restreint puis dans le domaine d'étude complet.

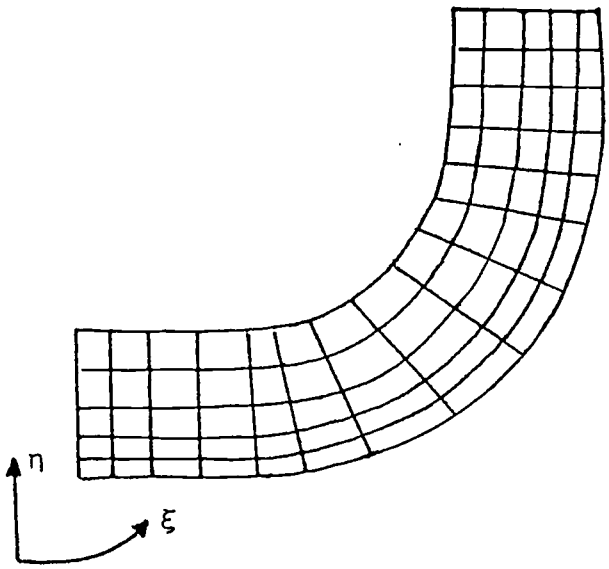
IV-2 Domaine d'étude et maillage

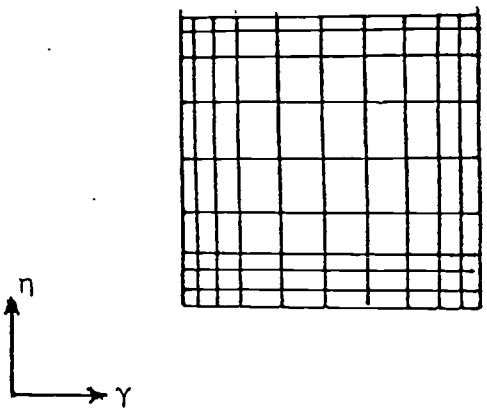
Cette méthode est basée sur un fractionnement du domaine d'étude en une suite de domaines restreints. Le domaine physique (figure 1) est tout d'abord maillé dans les trois directions spatiales. Le maillage utilisé est structuré de type "front de grille". Il est constitué de IMAX plans transversaux dans la direction ξ (figure 2a). Chacun de ces plans est lui même maillé dans les directions η et γ (figure 2b)



Domaine physique

- Figure 1 -

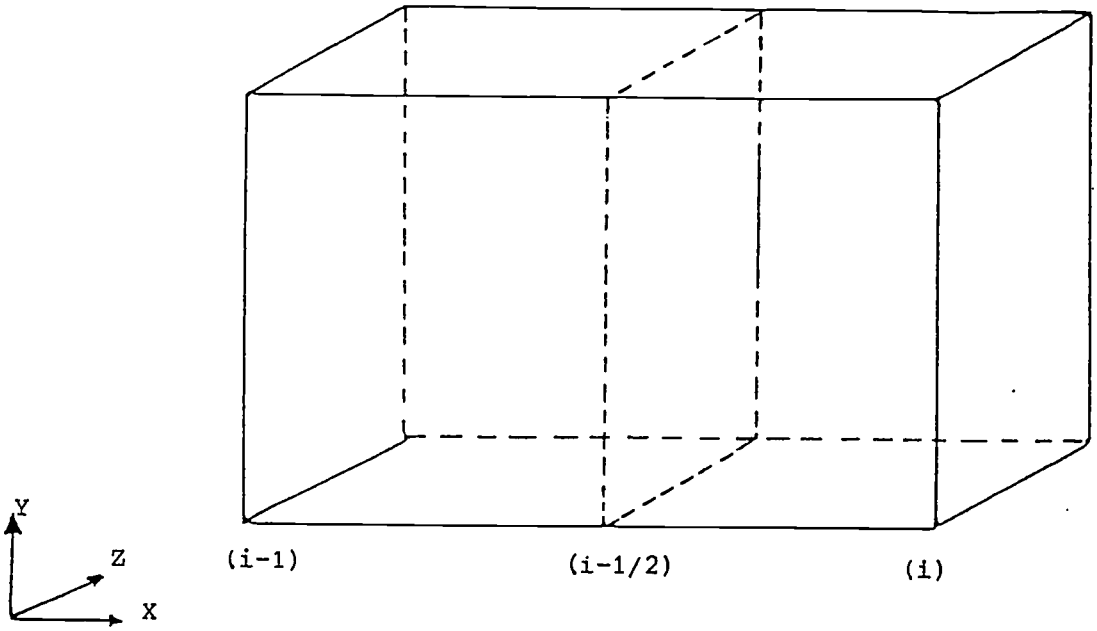




Coupe longitudinale **Coupe transversale**

Figure 2a Figure 2b

Un domaine restreint quelconque est constitué de deux plans consécutifs notés (i-1) et (i) (figure 3). C'est dans ce domaine que le processus de résolution sera défini. Pour décrire les équations de manière centrée, un plan intermédiaire noté (i- 1/2) est introduit. L'équation vectorielle (3-31) sera écrite dans ce plan.

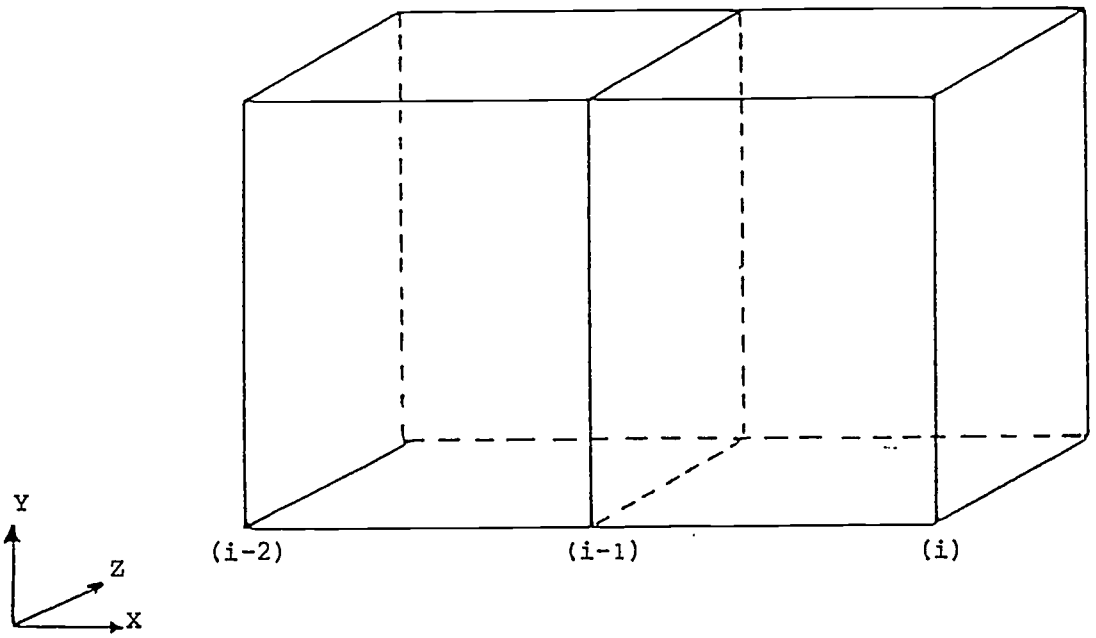


Domaine d'étude du champ de vitesse et de température

- Figure 3 -

Avant de définir le domaine d'étude du champ de pression statique, il est nécessaire de rappeler deux aspects particuliers liés à ce champ : le premier point concerne l'influence de la configuration géométrique sur l'écoulement et notamment des courbures longitudinales. Ces courbures influent fortement sur les phénomènes secondaires par l'intermédiaire de la pression statique. Ainsi, une bonne prise en compte de ces courbures est déterminante pour la définition correcte du champ de pression et accentue l'importance d'un calcul précis sur les parois. Le second point concerne le caractère elliptique du champ de pression statique. C'est par son intermédiaire que le transfert d'information de l'aval vers l'amont s'effectue. Ce second point n'est pas indépendant du premier car l'importance des effets elliptiques augmentent avec les courbures longitudinales. La technique de résolution appliquée à notre équation doit pouvoir gérer ces deux aspects du problème afin de restituer correctement le comportement physique de l'écoulement.

Les équations de quantité de mouvement seront résolues dans un domaine constitué de deux plans notés (i-1) et (i) (figure 3). La fonction source $F(\Theta)$ sera calculée au centre de ce domaine dans un plan intermédiaire noté (i-1/2)



Domaine d'étude du champ de pression statique

- Figure 4 -

Pour permettre le transfert d'informations de l'aval vers l'amont et rester cohérent, avec les conditions aux limites imposées dans le domaine complet (grandeurs d'arrêt imposées dans le plan d'entrée et pression statique dans le plan de sortie), les corrections δp générées par la fonction source seront calculées dans le plan (i-1). Le champ de pression statique du plan (i) sera imposé, c'est à dire que les corrections de pression seront nulles dans ce plan. Les corrections effectuées dans le plan amont (i-1) dépendront de la pression statique imposée dans la plan aval (i). Cette discrétisation traduit correctement le caractère elliptique du champ de pression.

Notre équation se présentant sous la forme d'un laplacien et l'objectif étant une prise en compte précise des courbures longitudinales, le domaine restreint est étendu à trois plans notés (i-2), (i-1) et (i) (Figure 4). Les corrections de pression seront calculées dans le plan central (i-1) et seront imposées nulles dans le plan amont (i-2) et aval (i).

IV-3 Schéma de résolution du champ de vitesse et de température

IV-3-1 Discrétisation temporelle

Le schéma de résolution est basé sur un processus itératif, à chaque itération, les champs de vitesse et de température sont modifiés d'une quantité $\Delta \overline{q}^n$. Cette étude se limite aux écoulements stationnaires, il serait donc possible de supprimer le terme instationnaire ($\frac{\partial \vec{q}}{\partial t}$) du système (3.31). Ce terme a cependant été conservé car sa présence permet un meilleur conditionnement du système matriciel en renforçant la dominance diagonale de celui-ci. Le schéma numérique devient alors plus stable. L'introduction d'une variable temporelle qui peut appaître comme une direction d'intégration supplémentaire, permet en fait une plus grande rapidité de convergence du schéma. La résolution stationnaire sera obtenue par itérations temporelles successives jusqu'à convergence.

Le schéma de discrétisation temporelle s'écrit sous une forme générale à l'aide de la formule de Pade :

$$(4.1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\overline{q}^{n} = \frac{1}{\Delta t}\,\frac{(1+\theta_2)\,\Delta - \theta_2 \nabla}{1+\theta_1 \Delta t}\,\overline{q}^{n} + (\theta_1 - \theta_2 - 1/2)\,\vartheta(\Delta t) + \vartheta(\Delta t^2)$$

où $\overline{q}^{n}$ désigne la valeur du vecteur $\overline{q}$ à l'instant t lui même défini par $t = n\,\Delta t$. Δt étant le pas de discrétisation temporel.

Les symboles Δ et ∇ sont des opérateurs de discrétisation définis par les relations suivantes:

$$(4.2)\qquad \Delta\,\overline{q}^{n} = \overline{q}^{n+1} + \overline{q}^{n}$$

$$(4.3)\qquad \nabla\,\overline{q}^{n} = \overline{q}^{n} - \overline{q}^{n-1}$$

L'opérateur Δ symbolise une différentiation avancée et l'opérateur ∇ une différentiation retardée.

La relation (4.1) est dite générale car elle contient deux paramètres θ_1 et θ_2 qui permettent, suivant leurs valeurs, de modifier le caractère explicite ou implicite du schéma ainsi que sa précision temporelle. Cette formule peut être développée, elle prend alors la forme suivante :

$$(4.4)\qquad \Delta\,\overline{q}^{n} - \frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\,\overline{q}^{n} = \frac{\Delta t}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{q}^{n} + \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\,\overline{q}^{n-1}$$

$$+ (\theta_1 - \theta_2 - 1/2)\,\vartheta(\Delta t^2) + \vartheta(\Delta t^3)$$

Le terme instationnaire $\left(\frac{\partial \Delta\,\overline{q}^{n}}{\partial t}\right)$ de la relation (4.4) peut être obtenu à partir du système (3.31). Pour cela, le système (3.31) est écrit à l'étape de temps n :

$$(4.5)\qquad \frac{\partial \vec{q}^{n}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}^{n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}^{n}}{\partial \eta} + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{G}^{n}}{\partial \gamma} + \vec{H}^{n} =$$

$$\frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \vec{Ev}^{n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{Fv}^{n}}{\partial \eta} + \frac{1}{R}\frac{\partial \vec{Gv}^{n}}{\partial \gamma} + \vec{Hv}^{n} \right\} + \vec{D}^{n}.$$

De manière identique, l'équation (3.31) peut être écrite à l'étape de temps (n+1). Ensuite, en soustrayant terme à terme l'équation écrite à l'étape de temps (n+1) de celle écrite à l'étape de temps n et en utilisant l'opérateur de discrétisation Δ on obtient :

$$(4.6)\qquad \frac{\partial \Delta \vec{q}^{n}}{\partial t} + \frac{\partial \Delta \vec{E}^{n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta \vec{F}^{n}}{\partial \eta} + \frac{1}{R}\frac{\partial \Delta \vec{G}^{n}}{\partial \gamma} + \Delta \vec{H}^{n} =$$

$$\frac{1}{Re}\left\{ \frac{\partial \Delta \vec{Ev}^{n}}{\partial \xi} + \frac{\partial \Delta \vec{Fv}^{n}}{\partial \eta} + \frac{1}{R}\frac{\partial \Delta \vec{Gv}^{n}}{\partial \gamma} + \Delta \vec{Hv}^{n} \right\} + \Delta \vec{D}^{n}.$$

L'équation de pression étant découplée, les termes de pression seront supposés temporellement constants. Ainsi, ils disparaissent dans l'équation (4.6) car $\Delta p^{n} = p^{n-1} - p^{n} = 0$.

Les termes instationnaires $(\frac{\partial \Delta \vec{q}^{n}}{\partial t})$ et $(\frac{\partial \vec{q}^{n}}{\partial t})$ de l'équation (4.4) peuvent maintenant être remplacés par leurs expressions tirées respectivement des équations (4.5) et (4.6). Le système ainsi obtenu est le suivant :

$$(4.7).\qquad \Delta \vec{q}^{n} - \left\{\frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\right\}\cdot\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta \vec{E}^{n} - \frac{\Delta \vec{Ev}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\Delta \vec{F}^{n} - \frac{\Delta \vec{Fv}^{n}}{Re}) \right.$$

$$[A] \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \gamma}(\Delta \vec{G}^{n} - \frac{\Delta \vec{Gv}^{n}}{Re}) + \Delta \vec{S}^{n} \right\} =$$

$$- \frac{\Delta t}{1+\theta_2}\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(\vec{E}^{n} - \frac{\vec{Ev}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\vec{F}^{n} - \frac{\vec{Fv}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(\vec{G}^{n} - \frac{\vec{Gv}^{n}}{Re}) \right\}$$

$$[B]$$

$$+ \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta \vec{q}^{n-1} + (\theta_1 - \theta_2 - 1/2)\vartheta(\Delta t^2) + \vartheta(\Delta t^3)$$

Dans le système (4.7) on peut regrouper les termes en deux parties (notées A et B) de significations différentes. Dans la partie A (à gauche de l'égalité) les termes apparaissent sous la forme d'une différence temporelle entre l'étape de temps n et l'étape de temps (n+1) (Ex : $\Delta E^{n} = E^{n+1} - E^{n}$). L'ensemble de ces valeurs n'est donc pas connu à l'étape de temps n et forme la partie implicite du schéma. La partie B (située à droite de l'égalité) regroupe les vecteurs diffusifs et convectifs exprimés à l'étape de temps n

ainsi que les différences temporelles entre les étapes de temps n et (n-1). L'ensemble de ces termes, connu à l'étape de temps n est appelé partie explicite ou résidu. Ces deux parties agissent différemment dans le processus de résolution. La partie implicite permet de contrôler la rapidité de convergence du système vers la solution mais théoriquement ne modifie pas le résultat final. A l'inverse, c'est du résidu dont dépend la précision du calcul. Ces deux groupes de variables doivent être discrétisés en fonction de leur tâche respective. Ainsi la partie implicite doit être discrétisée pour limiter le nombre d'itérations temporelles nécessaires pour atteindre la convergence. Cependant sa résolution ne doit pas être trop complexe pour éviter des temps de résolution, à chaque itération, trop important. A l'inverse, le résidu doit être déterminé de façon très précise pour assurer la qualité des résultats. Il faut néanmoins préciser qu'une compatibilité dans la discrétisation des parties A et B est indispensable pour obtenir une solution convergée.

C'est l'ensemble de ces considérations qui nous ont guidés dans l'élaboration de l'algorithme numérique qui est maintenant présenté. Pour agir sur le poids respectif des deux parties, on dispose de deux paramètres θ_1 et θ_2. θ_1 permet de gérer le caractère implicite du système. Pour $\theta_1 = 0$, les termes implicites de l'équation (4.7) disparaissent. Le schéma est appelé explicite, on peut déterminer directement l'inconnue $\overline{q}^{n+1}$ en fonction du résidu connu à l'étape de temps précédente n. Pour $\theta_1 = 0$, le schéma est implicite. On obtient alors un système d'équations reliant les variables aux étapes de temps n et (n+1). Il se présente sous la forme matricielle suivante :

$$[A]\,\Delta\,\overline{q}^{n} = \mathrm{Res}^{n}$$

Le paramètre θ_2 modifie le nombre de points de discrétisation temporelle. Si $\theta_2 = 0$, seuls, $\overline{q}^{n}$ et $\overline{q}^{n+1}$ sont pris en compte. Si θ_2 est différent de 0, le vecteur $\overline{q}^{n-1}$ intervient dans le schéma. Enfin, ces deux paramètres réunis, jouent sur la précision de la discrétisation temporelle. Si la relation : $\theta_1=\theta_2+1/2$ est respectée, le schéma est précis au second ordre, dans les autres cas, la précision temporelle est du second ordre.

La formule générale de Pade permet de reproduire un grand nombre de schémas numériques largement utilisés dans la littérature. Le tableau ci-dessous permet de référencer les principales méthodes utilisées.

θ_1	θ_2	Schéma	Erreur de Troncature
1	0	Euler Implicite	$\vartheta(\Delta t^3)$
0	0	Euler Explicite	$\vartheta(\Delta t^2)$
1/2	0	Schéma trapézoïdal centré implicite (Cranck-Nicholson)	$\vartheta(\Delta t^3)$
1	1/2	Schéma décentré en trois points implicite	$\vartheta(\Delta t^3)$

Chacun de ces schémas présente bien évidemment ses avantages et ses inconvénients. Le choix dépend du domaine d'application, des équations traitées (Euler ou Navier-Stokes) et de leur comportement numérique. L'algorithme étant itératif, il est nécessaire de s'assurer de la bonne stabilité numérique du processus jusqu'à convergence. Beam et Warming [17,18] ont étudié la stabilité d'un schéma temporel développé à partir de la formule de Pade pour définir la stabilité inconditionnelle du schéma en fonction des paramètres θ_1 et θ_2

Leur étude a porté sur deux types d'équations, la première est une équation linéaire bidimensionnelle de type hyperbolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (4.8)$$

Pour un schéma précis au second ordre en temps, c'est-à-dire vérifiant la notation $\theta_1 = \theta_2 + 1/2$, le schéma est inconditionnellement stable pour :

(4.9) $$\theta_2 > 0$$

La seconde étude portait sur des équations linéaires bidimensionnelles de type parabolique :

(4.10) $$\frac{\partial u}{\partial t} = C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_3 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

Dans ce cas, la stabilité inconditionnelle du schéma est liée à la condition :

(4.11) $$\frac{1+.2\theta_1}{1+.\theta_2} \geq 4$$

Pour un schéma précis au premier ordre en temps, ces mêmes auteurs ont montré que la stabilité inconditionnelle du schéma nécessitait la vérification de la relation.

(4.12) $$\theta_1 - 1/2 \geq \theta_2 \geq 0$$

Les équations de Navier Stokes qui forment notre système sont plus complexes que celles étudiées ci-dessus, du fait de leur comportement mixte (hyperbolique - parabolique) et des non linéarités qui les composent, cependant l'expérience montre que le respect de ces conditions permet généralement d'assurer une bonne stabilité à la méthode.

Les différents choix que permet la formule générale de Pade viennent d'être présentés. En fonction des valeurs θ_1 et θ_2, le caractère (implicite-explicite), le décentrement temporel et la précision du schéma peuvent être modifiés ; leur influence sur la stabilité du schéma numérique a été précisée. Pour garder une plus grande liberté d'action, les paramètres θ_1 et θ_2 seront choisis en fonction de la géométrie étudiée et des difficultés rencontrées. Ainsi, pour des configurations complexes, où il est avant tout

nécessaire d'assurer une bonne convergence quitte à augmenter le nombre d'itérations, nous pourrons utiliser, par exemple, un schéma explicite ou du premier ordre. Pour des configurations plus simples, l'objectif sera d'augmenter la rapidité de convergence en utilisant un schéma implicite plus précis. Dans tous les cas, l'objectif étant une solution stationnaire, la qualité finale des résultats ne sera pas modifiée. Dans la suite de la présentation, l'équation sera utilisée sans fixer a priori les valeurs θ_1 et θ_2.

IV-3-2 Décomposition des termes visqueux

Pour faciliter la discrétisation des vecteurs diffusifs, ceux-ci sont décomposés en quatre parties, en utilisant la technique suivante :

$$\vec{Ev} = \vec{Ev1}(\overline{q}, \overline{q}_\zeta) + \vec{Ev2}(\overline{q}, \overline{q}_\eta) + \vec{Ev3}(\overline{q}, \overline{q}_\gamma) + \vec{S1}(\overline{q})$$

$$\vec{Fv} = \vec{Fv1}(\overline{q}, \overline{q}_\zeta) + \vec{Fv2}(\overline{q}, \overline{q}_\eta) + \vec{Fv3}(\overline{q}, \overline{q}_\gamma) + \vec{S2}(\overline{q}) \qquad (4.13)$$

$$\vec{Gv} = \vec{Gv1}(\overline{q}, \overline{q}_\zeta) + \vec{Gv2}(\overline{q}, \overline{q}_\eta) + \vec{Gv3}(\overline{q}, \overline{q}_\gamma) + \vec{S3}(\overline{q})$$

Le vecteur visqueux est décomposé en trois vecteurs contenant respectivement les dérivées de $\overline{q}$ selon ζ ($\overline{q}_\zeta$), selon η ($\overline{q}_\eta$) et selon γ ($\overline{q}_\gamma$). Le quatrième vecteur contient les termes associés à la courbure du repère initial.

Cette étape étant achevée, poursuivons notre développement. Notre objectif est d'obtenir un système matriciel de la forme (Imp) . $\Delta \overline{q}_n$=Res. Pour cela, il faut que tous les termes implicites soient linéairement fonction de $\Delta \overline{q}$ ce qui n'est pas le cas. Pour l'obtenir, une linéarisation temporelle des vecteurs implicites est nécessaire.

IV-3-3 Linéarisation temporelle

La linéarisation est obtenue en utilisant un développement limité en série de Taylor du second ordre en temps. Pour les vecteurs convectifs $\vec{E}$, $\vec{F}$ et $\vec{G}$, le développement s'effectue de la façon suivante:

$$(4.14) \qquad \overline{E}^{n+1} = \overline{E}^{n} + \left\{ \frac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{q}} \right\} \left\{ \overline{q}^{n+1} - \overline{q}^{n+1} \right\} + \vartheta(\Delta t^2)$$

Ou encore, en utilisant une notation plus symbolique :

$$(4.15) \qquad \Delta \overline{E}^{n} = [A]^{n} \Delta \overline{q}^{n} + \vartheta(\Delta t^2)$$

$[A]^{n} = \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial \overline{q}}$ est appelée matrice jacobienne de linéarisation.

Pour les autres vecteurs convectifs, la procédure est identique :

$$(4.16) \qquad \Delta \overline{F}^{n} = [B]^{n} \Delta \overline{q}^{n} + \vartheta(\Delta t^2)$$

avec : $[B]^{n} = \left(\dfrac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{q}}\right)$

$$(4.17) \qquad \Delta \overline{G}^{n} = [C]^{n} \Delta \overline{q}^{n} + \vartheta(\Delta t^2)$$

avec : $[C]^{n} = \left(\dfrac{\partial \overline{G}}{\partial \overline{q}}\right)$

On peut noter que ce développement étant précis au second ordre, il n'altère pas la précision temporelle du schéma

IV-3-3-1 Linéarisation temporelle des termes visqueux

Les termes visqueux contiennent des dérivées secondes et des dérivées croisées dans les trois directions spatiales. La discrétisation de chacun de ces termes nécessite un nombre de points importants ce qui rend le système matriciel plus complexe. Sa résolution demanderait un temps de calcul et un stockage pour la partie implicite important. En fait, sans perdre en précision, il est possible de placer dans la partie explicite, les vecteurs diffusifs contenant les dérivées croisées. Pour effectuer ce transfert, on effectue l'approximation suivante :

$$\Delta \overline{Ev_2}^{n} = \Delta \overline{Ev_2}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2)$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\overline{Ev_3}^n &= \Delta\overline{Ev_3}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2) \\
\Delta\overline{Fv_1}^n &= \Delta\overline{Fv_1}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2) \\
\Delta\overline{Fv_3}^n &= \Delta\overline{Fv_3}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2) \\
\Delta\overline{Gv_1}^n &= \Delta\overline{Fv_1}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2) \\
\Delta\overline{Gv_2}^n &= \Delta\overline{Fv_2}^{n+1} + \vartheta(\Delta t^2)
\end{aligned}
\qquad (4.18)
$$

Beam et Warming [19] préconisent de modifier le paramètre θ_1, associé à ces vecteurs en introduisant un nouveau paramètre $\overline{\theta_1}$, de manière à dissocier leur traitement des conditions imposées sur le membre implicite. Cette approximation ne modifie pas la précision du schéma temporel mais, en faisant passer certains termes de la partie implicite vers la partie explicite, il est possible de générer des problèmes de stabilité lorsque le pas de temps est grand par rapport à un CFL de 1 (critère explicite). L'intérêt du paramètre $\overline{\theta_1}$ réside dans la possibilité de minimiser leur influence et permettre une convergence.

Les termes visqueux qui ne font apparaître des dérivées secondes que dans une seule direction sont également linéarisés :

$$\Delta\overline{Ev_1}^n = [M]^n \Delta\overline{q}^n + \vartheta(\Delta t^2)$$

avec : $$[M]^n = \left(\frac{\partial\overline{E_{v1}}}{\partial\overline{q}}\right)$$

$$\Delta\overline{Fv_2}^n = [P]^n \Delta\overline{q}^n + \vartheta(\Delta t^2) \qquad (4.19)$$

avec : $$[P]^n = \left(\frac{\partial\overline{F_{v2}}}{\partial\overline{q}}\right)$$

$$\Delta\overline{Gv_3}^n = [Q]^n \Delta\overline{q}^n + \vartheta(\Delta t^2)$$

avec : $$[Q]^n = \left(\frac{\partial\overline{G_{v3}}}{\partial\overline{q}}\right)$$

Ces modifications successives sont introduites dans l'équation (4.7) qui devient alors :

$$(4.20).\quad \Delta\vec{q}^{n} - \left\{\frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}([A]^n - \frac{[M]^n}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\eta}([B]^n - \frac{[C]^n}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}([C]^n - \frac{[Q]^n}{Re})\right\}\Delta\vec{q}^{n} = \left\{\frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\right\}\cdot\frac{1}{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\bar{Ev}_2{}^n - \bar{Ev}_3{}^n) + \frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{Fv}_1{}^n - \bar{Fv}_3) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\bar{Gv}_1{}^n - \bar{Gv}_3{}^n)\right\} - \frac{\Delta t}{1+\theta_2}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(\bar{E}^n - \frac{\bar{Ev}^n}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(\bar{F}^n - \frac{\bar{Fv}^n}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\bar{G}^n - \frac{\bar{Gv}^n}{Re})\right\}$$

la notation utilisée dans le membre implicite est symbolique, l'opérateur de dérivation affecte la matrice jacobienne et la variable $\Delta\bar{q}$:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[X]^n\right\}\Delta\vec{q}^{n} = \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[X]^n\,\Delta\vec{q}^{n}\right\}$$

Le schéma temporel étant maintenant décrit, nous allons étudier les discrétisations spatiales.

IV-3-4 Discrétisation spatiale du membre implicite

L'équation (4. 20) est composée d'une partie implicite et d'une partie explicite qui contiennent des termes aux fonctions différentes. Leurs discrétisations spatiales sont présentées successivement.

Les discrétisations spatiales doivent s'effectuer selon les trois directions ξ, η et γ . Notre méthode consiste à résoudre le système dans un domaine restreint, elle impose un traitement particulier de la direction ξ qui a été choisie comme direction de convection dominante. La discrétisation dans cette direction sera décrite dans une première partie, ensuite, les discrétisations dans les directions η et γ seront définies.

IV-3-4-1 Discrétisation selon la direction longitudinale

Cette discrétisaton s'effectue dans le domaine restreint défini au paragraphe IV-2. Dans le repère transformé, le domaine est discrétisé dans les trois directions spatiales avec des pas de discrétisation $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et $\Delta\gamma$ constants et égaux à l'unité. La notation utilisée pour séparer les points de maillage est la suivante : dans la direction ξ, on utilise l'indice i (i = 1 à IMAX), dans la direction η l'indice j (j = 1 à JMAX) et dans la direction γ l'indice k (k=1 à KMAX).

- Discrétisation du terme convectif

Le terme convectif $\frac{\partial}{\partial\xi}[A]^n \Delta\bar{q}^n$ contient des dérivées du premier ordre. La discrétisation utilisée est précise au second ordre et centrée dans le plan (i- 1/2) :

$$(4.21) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[A]^n \Delta\bar{q}^n\right\}_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta\xi}\left\{[A]_i^n \Delta\bar{q}_i^n - [A]_{i-1}^n \Delta\bar{q}_{i-1}^n\right\}$$

- Discrétisation des termes diffusifs

Le terme diffusif $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{[M]^n}{Re}\right)$ regroupe les dérivées secondes selon ξ. Ces dérivées peuvent s'exprimer sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} f\Delta\bar{q}^n\right\}$$

ou α et f sont des quantités scalaires. En utilisant une discrétisation centrée précise au second ordre, on obtient :

$$(4.22) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha} f\Delta\bar{q}\right\}\right\}_{i-1/2} = \frac{\alpha_i}{2}\left\{f_{i+1}\Delta\bar{q}_{i+1} - f_{i-1}\Delta\bar{q}_{i-1}\right\}$$

$$\frac{\alpha_{i-1}}{2}\left\{f_i\Delta\bar{q}_i - f_{i-2}\Delta\bar{q}_{i-2}\right\}$$

avec: $\Delta\xi = 1$

Les formules de discrétisation (4.21) et (4.22) font intervenir des corrections Δq dans les plans (i-2), (i-1), (i) et (i+1). On peut noter que les plans (i-2) et (i+1) sortent du domaine restreint défini comme domaine de résolution de ces équations. De plus, la prise en compte de ces quatre plans nécessite un système matriciel important avec un temps de résolution proportionnel à cette taille. Enfin, si on regarde le schéma dans son ensemble (chapitre II), on voit que les plans (i-2), (i-1) et (i+1) sont corrigés durant la résolution des autres domaines restreints. Dans ces plans, les champs de vitesse et de température sont déjà convergés. On peut donc imposer :

$$\Delta\bar{q}_{i-2} = \Delta\bar{q}_{i-1} = \Delta\bar{q}_{i+1} = 0$$

Pour les variables écrites dans le plan (i -1/2), on utilise une moyenne des variables physiques sous la forme :

$$\Delta q_{i-1/2} = 1/2\,(\Delta q_i + \Delta q_{i-1})$$

qui avec l'hypothèse précédente donne :

$$\Delta q_{i-1/2} = 1/2\ \Delta\ q_i.$$

A l'inverse pour éviter les erreurs numériques, les métriques sont directement calculés dans le plan (i - 1/2). Les seules corrections conservées sont celles du plan (i), de cette façon, le système de résolution devient numériquement équivalent à un problème bidimensionnel.

Cette approximation est la principale hypothèse du schéma numérique. On suppose, du fait de l'existence d'une direction de convection dominante dans la direction ξ, que le transfert du champ de vitesse s'effectue de façon parabolique du plan (i-1) vers le plan (i).

Un problème apparait lorsque localement la direction de l'écoulement s'inverse. Dans ces zones, le transfert s'effectue dans la direction opposée à ξ et la stabilité du schéma n'est plus assurée. Pour assurer la convergence en présence de décollements, l'hypothèse de Flare qui consiste à utiliser les valeurs absolues des vitesses contravariantes a été introduite. Cette formulation décrite dans l'annexe ne permet pas une

description précise des écoulements décollés mais asssure la bonne convergence du schéma.
Avec cette hypothèse, l'équation(4-20) devient:

$$(4.23)\qquad \Delta\bar{q}_i^{\,n} - \left\{\frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}\right\}\cdot\left\{ ([A]_i^n - \frac{[M]_i^n}{Re}) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}([B]^n - \frac{[C]^n}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}([C]^n - \frac{[Q]^n}{Re}) \right\}_{i-1/2}\right\}\Delta\bar{q}_i^{\,n} = Res_{i-1/2}^n$$

Le terme $Res_{i-1/2}^n$ désigne le membre explicite écrit pour l'étape de temps n dans le plan (i - 1/2).

IV-3-4-2 Factorisation approximative

Le terme implicite du système (4.22) peut être factorisé de manière à faire apparaître deux facteurs contenant chacun un des deux opérateurs spatiaux associés aux directions η et γ. Cette factorisation est dite approximative car l'expression obtenue n'est pas totalement équivalente à l'équation (4.23). Si on pose $h=\frac{\theta_1 \Delta t}{1+\theta_2}$, l'erreur introduite porte sur des termes en h^2. La précision temporelle du schéma étant du premier ou du second ordre, cette erreur n'affecte pas la précision temporelle générale du schéma. Enfin, cette erreur agit uniquement sur le membre implicite, il ne modifie donc pas la précision des résultats à convergence. Avec la factorisation, la relation s'écrit sous la forme suivante :

$$(4.25)\qquad \left\{[I] + \frac{h}{2}[A]_i^n - \frac{[M]_i^n}{Re} + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{[B]^n - \frac{[P]^n}{Re}\right\}_{i-1/2}\right\}$$

$$\left\{[I] + \frac{h}{2}[A]_i^n - \frac{[M]_i^n}{Re} + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{[C]^n - \frac{[Q]^n}{Re}\right\}_{i-1/2}\right\}\Delta\bar{q}_i^{\,n} = Res_{i-1/2}^n$$

où [I] désigne la matrice identité.

Cette technique permet de faciliter la résolution en décomposant le système matriciel initial en deux systèmes plus simples car ne comportant qu'une direction de dérivation, et donc plus rapides à résoudre. La procédure de résolution se compose de trois séquences successives :

- Première étape:

$$(4.26)\quad \left\{[I] + \frac{h}{2}[A]_i^n - \frac{[M]_i^n}{Re} + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{[B]^n - \frac{[P]^n}{Re}\right\}_{i-1/2}\right\}\Delta\bar{q}_i^{\,*} = Res_{i-1/2}^n$$

- Deuxième étape :

$$(4.27)\quad \left\{[I] + \frac{h}{2}[A]_i^n - \frac{[M]_i^n}{Re} + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{[C]^n - \frac{[Q]^n}{Re}\right\}_{i-1/2}\right\}\Delta\bar{q}_i^{\,n} = \Delta\bar{q}_i^{\,*}$$

- Troisième étape :

$$\bar{q}^{n+1} = \bar{q}^n + \Delta\bar{q}^n$$

IV-3-4-3 Dicrétisation dans le plan transversal

Les directions η et γ du plan transversal n'étant pas privilégiées, l'une par rapport à l'autre, leur traitement s'effectuera de manière simultanée. Comme précédemment, nous présenterons successivement la discrétisation des termes convectifs puis diffusifs du membre implicite.

Discrétisation des termes convectifs.

Ces dérivées sont au nombre de deux, les formules utilisées sont centrées et précises au second ordre. Pour un point quelconque d'indice (j, k) du plan i, on obtient :

$$(4.28)\quad \left\{\frac{\partial}{\partial\eta}[B]^n\right\}_{i-1/2,j,k}\Delta\bar{q}_i^{\,n} = \frac{1}{2}\left\{[B]_{j+1,k}^{\,n} + [B]_{j-1,k}^{\,n}\right\}_{i-1/2}\Delta\bar{q}_i^{\,n}$$

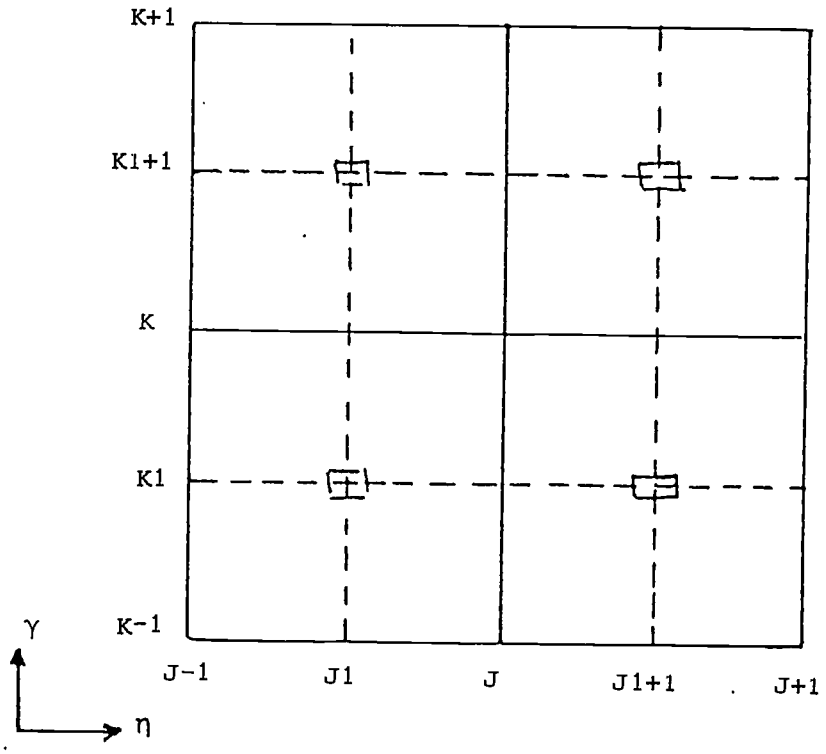
$$\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}[C]^n\right\}_{i-1/2,j,k}\Delta\bar{q}_i^{\,n} = \frac{1}{2}\left\{[C]_{j,k+1}^{\,n} + [C]_{j,k-1}^{\,n}\right\}_{i-1/2}\Delta\bar{q}_i^{\,n}$$

Discrétisation des termes diffusifs

Les termes diffusifs sont $\frac{\partial}{\partial\eta}\left([P]^n.\Delta q^n \right)$ et $\frac{\partial}{\partial\gamma}\left([Q]^n.\Delta q^n \right)$, ils font intervenir des dérivées secondes respectivement selon η et γ. Ils se présentent sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\, f\,\Delta\bar{q}^{\,n}\right\} \text{ et } \frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}\, f\,\Delta\bar{q}^{\,n}\right\}$$

où α, β, f et g sont des quantités scalaires quelconques. Les formules utilisées sont centrées et précises au second ordre. Pour limiter le nombre de points intervenant dans ces discrétisations, on utilise un sous maillage présenté sur la figure (4) ci-dessous. Les points d'indice j et k indiquent le maillage initial tandis que ceux d'indice j1 et k1 désignent le nouveau maillage



- Figure 4 -

Dans cette configuration, les relations sont les suivantes :

[1]

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\, f\,\Delta\bar{q}^{\,n}\right\} = \alpha_{j1+1}\left\{ f_{j+1}\,\Delta\bar{q}_{j+1} - f_j\,\Delta\bar{q}_j \right\} - \alpha_{j1}\left\{ f_j\,\Delta\bar{q}_j - f_{j-1}\,\Delta\bar{q}_{j-1} \right\} \quad [2] \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left\{\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}\, f\,\Delta\bar{q}^{\,n}\right\} = \beta_{k1+1}\left\{ f_{k+1}\,\Delta\bar{q}_{k+1} - f_k\,\Delta\bar{q}_k \right\} - \beta_{k1}\left\{ f_k\,\Delta\bar{q}_k - f_{k-1}\,\Delta\bar{q}_{k-1} \right\} \tag{4.30}$$

Les quantités α et β contiennent les métriques de la transformation géométrique. Ils sont évalués directement en j1 et k1 sans effectuer de moyenne pour ne pas introduire d'erreurs numériques supplémentaires.

Les matrices jacobiennes [P], [Q] sont discrétisées suivant les formules (4-29) et (4-30) et décomposées en deux matrices respectivement : [P1], [P2] et [Q1], [Q2] en référence à l'indice des métriques α_{j1+1} (terme 1) et α_{j1} (terme 2). Le détail des calculs conduisant à ces matrices jacobiennes se trouve en Annexe.

Ces relations sont introduites dans les systèmes (4.26) et (4.27) qui deviennent :

$$[AA]_{j,k}^{\,n}\,\Delta\bar{q}_{j-1,k}^{\,*} + [BB]_{j,k}^{\,n}\,\Delta\bar{q}_{j,k}^{\,*} + [BB]_{j+1,k}^{\,n}\,\Delta\bar{q}_{j,k}^{\,*} = Res_{j,k}^{n} \tag{4.32}$$

avec :

$$[AA]_{j,k}^{\,n} = -h\left\{ \frac{1}{2}\,[B]_{j-1,k}^{\,n} - \frac{[P_2]_{j-1,k}^{\,n}}{Re} \right\}$$

$$[BB]_{j,k}^{\,n} = \left\{ [I] + h\left\{ \frac{1}{2}[A]_{j,k}^{\,n} - \frac{[M]_{j,k}^{\,n}}{Re} + \frac{[P_1]_{j,k}^{\,n} + [P_2]_{j,k}^{\,n}}{Re} \right\} \right\}$$

$$[CC]_{j,k}^{n} = h\left\{ \frac{1}{2} [B]_{j+1,k}^{n} - \frac{[P_1]_{j+1,k}^{n}}{Re} \right\}$$

et :

(4.33) $$[AA]_{j,k}^{n} \Delta\bar{q}_{j,k-1}^{n} + [BB]_{j,k}^{n} \Delta\bar{q}_{j,k}^{n} + [BB]_{j,k}^{n} \Delta\bar{q}_{j,k+1}^{n} = Res_{j,k}^{n}$$

avec

$$[AA]_{j,k}^{n} = -h\left\{ \frac{1}{2} [C]_{j,k-1}^{n} - \frac{[Q_2]_{j,k-1}^{n}}{Re} \right\}$$

$$[BB]_{j,k}^{n} = \left\{ [I] + h \left\{ \frac{1}{2} [A]_{j,k}^{n} - \frac{[M]_{j,k}^{n}}{Re} + \frac{[Q_1]_{j,k}^{n} + [Q_2]_{j,k}^{n}}{Re} \right\} \right\}$$

$$[CC]_{j,k}^{n} = h\left\{ \frac{1}{2} [C]_{j,k+1}^{n} - \frac{[Q_1]_{j,k+1}^{n}}{Re} \right\}$$

IV-3--5 Discrétisation spatiale du résidu

Pour garder une cohérence avec la discrétisation du membre implicite, le résidu est lui aussi discrétisé à l'aide de formules centrées précises au second ordre. A l'inverse du membre implicite, aucune hypothèse n'est introduite dans le résidu, au niveau de la discrétisation suivant ξ (dans le membre implicite seules les corrections du plan i était conservées). A convergence, ce sont bien donc bien les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles complètes qui sont résolues. La seule restriction concerne l'approximation de Flare qui est introduite, en présence de zones de recirculation, de façon pour permettre un bonne compatibilité des systèmes.

Nous allons traiter successivement les vecteurs convectifs qui ne contiennent que des dérivées premières pour ensuite étudier les discrétisations des vecteurs diffusifs.

Discrétisation des termes convectifs.

Les vecteurs convectifs sont au nombre de trois. Les formules utilisées sont centrées et précises au second ordre. Pour un point d'indice (j,k) dans le plan (i - 1/2) nous obtenons :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} E^n \right\}_{i-1/2,j,k} = \left\{ E_i^n - E_{i-1}^n \right\}_{j,k}$$

(4.34)
$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} F^n \right\}_{i-1/2,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ F_{j+1}^n - F_{j-1}^n \right\}_{i-1/2,k}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} G^n \right\}_{i-1/2,j,k} = \frac{1}{2} \left\{ G_{k+1}^n - G_{k-1}^n \right\}_{i-1/2,j}$$

Discrétisation des termes diffusifs

Les vecteurs diffusifs sont classés en deux catégories en fonction des dérivées qu'ils contiennent. La première regroupe les vecteurs contenant des dérivées secondes et la seconde ceux qui contiennent des dérivées croisées selon deux directions spatiales. Ces deux catégories seront toutes traitées séparément en commençant par celles contenant les dérivées secondes. Ces termes au nombre de trois sont:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(E_{v1}^n \right) , \frac{\partial}{\partial \eta}\left(F_{v2}^n \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(G_{v3}^n \right)$$

Les formules utilisées étant centrées au second ordre. Ces termes s'expriment sous la forme suivante :

(4.35)
$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(E_{v1}^n \right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} E_{pv1}^n \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(F_{v2}^n \right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \eta} F_{pv2}^n \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(G_{v3}^n \right) = \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} G_{pv3}^n \right)$$

où α désigne les métriques de la transformation géométrique.

En un point d'indice (i-1/2, j, k) nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} E^n_{v1} = \left\{ \frac{\alpha_i}{2} \left\{ E^n_{pv1_{i+1}} - E^n_{pv1_{i-1}} \right\}_{j,k} - \frac{\alpha_{i-1}}{2} \left\{ E^n_{pv1_i} - E^n_{pv1_{i-2}} \right\} \right\}_{j,k}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} F^n_{v2} = \left\{ \frac{\alpha_{j1-1}}{2} \left\{ F^n_{pv2_{j+1}} - F^n_{pv2_j} \right\}_{j,k} - \frac{\alpha_{j1}}{2} \left\{ F^n_{pv2_j} - F^n_{pv2_{j-1}} \right\} \right\}_{i-1/2,k}$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} G^n_{v3} = \left\{ \frac{\alpha_{k1-1}}{2} \left\{ G^n_{pv3_{k+1}} - G^n_{pv3_k} \right\}_{j,k} - \frac{\alpha_{k1}}{2} \left\{ G^n_{pv3_k} - G^n_{pv3_{k-1}} \right\} \right\}_{i-1/2,j}$$

Pour les dérivées selon η et γ , on utilise le sous maillage présenté sur la figure (4). Pour les dérivées croisées, la procédure est identique, ainsi en un point (i-1/2),j, k) nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} E^n_{v2} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial\eta} E^n_{pv2} \right\}$$

$$= \alpha_i \left\{ E^n_{pv2_{j1+1}} - E^n_{pv2_{j1}} \right\}_{i,k} - \alpha_{i-1} \left\{ E^n_{pv2_{j1+1}} - E^n_{pv2_{j1}} \right\}_{i-1,k}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} E^n_{v3} = \frac{\partial}{\partial\xi} \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial\gamma} E^n_{pv3} \right\}$$

$$= \alpha_i \left\{ E^n_{pv3_{k1+1}} - E^n_{pv3_{k1}} \right\}_{i,j} - \alpha_{i-1} \left\{ E^n_{pv3_{k1+1}} - E^n_{pv3_{k1}} \right\}_{i-1,kj}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} F^n_{v1} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} F^n_{pv1} \right\} =$$

$$\alpha_{j1+1} \left\{F^n_{pv1_i} - F^n_{pv1_{i-1}}\right\}_{j1+1,k} - \alpha_{j1} \left\{F^n_{pv1_i} - F^n_{pv1_{i-1}}\right\}_{j1,k}$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} F^n_{v3} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} F^n_{pv3} \right\} =$$

$$\alpha_{j1+1} \left\{F^n_{pv3_{k1+1}} - F^n_{pv3_{k1}}\right\}_{i-1/2,j1+1} - \alpha_{j1} \left\{F^n_{pv3_{k1+1}} - F^n_{pv3_{k1}}\right\}_{i-1/2,j1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} G^n_{v1} = \frac{\partial}{\partial \gamma}\left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} G^n_{pv1} \right\} =$$

$$\alpha_{k1+1} \left\{G^n_{pv1_i} - G^n_{pv1_{i-1}}\right\}_{j,k1+1} - \alpha_{k1} \left\{G^n_{pv1_i} - G^n_{pv1_{i-1}}\right\}_{j,k1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} G^n_{v2} = \frac{\partial}{\partial \gamma}\left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} G^n_{pv2} \right\} =$$

$$\alpha_{k1+1} \left\{G^n_{pv2_{j1+1}} - G^n_{pv2_{j1}}\right\}_{i-1/2,\, k1+1} - \alpha_{k1}\left\{G^n_{pv2_{j1+1}} - G^n_{pv2_{j1}}\right\}_{i-1/2,k1}$$

IV-3-6 Dissipation artificielle

Les formules de discrétisations centrées utilisées pour représenter les dérivées spatiales ne sont pas dissipatives. Or un schéma numérique génère de faibles erreurs qui, par accumulation, peuvent provoquer des oscillations néfastes au bon comportement numérique du schéma. Pour résorber ces oscillations, on doit ajouter des termes supplémentaires, dont le comportement dissipatif permet de résorber ces oscillations. Ces termes sont de deux sortes, dans le membre implicite, ils permettent de limiter les

oscillations dans le processus de convergence. Dans le résidu, ils doivent lisser les oscillations spatiales à convergence. Leur présence étant uniquement introduite pour des problèmes d'ordre numérique et non pas par la physique, ces termes ne doivent pas modifier le comportement général de l'algorithme itératif ni a fortiori les corrections issues de cette procédure [20].

Dans le membre implicite, on introduit un terme diffusif contenant des dérivées spatiales du second ordre sous la forme :

$$\varepsilon_i \frac{h}{J} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right\} J \Delta q^n \tag{4.36}$$

ε_i est appelé coefficient de dissipation implicite.

Dans le résidu, les termes diffusifs introduits sont du quatrième ordre pour limiter l'influence de la dissipation numérique sur les résultats. Ils se présentent sous la forme suivante :

$$\varepsilon_l \frac{\Delta t}{8.(1+\theta_2)} \frac{1}{J} \left\{ \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^4}{\partial \gamma^4} \right\} J \; q^n \tag{4.37}$$

ε_l est appelé coefficient de dissipation explicite.

Les deux paramètres ε_i et ε_l seront définis en fonction de l'écoulement étudié et du maillage utilisé. Toutefois, pour ne pas altérer le comportement numérique, l'ordre de grandeur de ces coefficients doit rester proche de l'unité.

La présence d'un terme de dissipation artificielle, dans la direction longitudinale, n'est pas toujours nécessaire dans une telle méthode. Bien que les formules soient centrées dans cette direction, il faut remarquer que les corrections sont appliquées à l'aval du domaine (plan i) ; on crée ainsi de manière implicite un décentrement du schéma qui le rend dissipatif. Ce terme ne sera introduit que pour certaines géométries particulières.

La présence de ces nouveaux termes modifie l'équation (4-7) posée inittialement que devient alors:

$$\Delta\vec{q}^{n} - \left\{\frac{\theta_1\Delta t}{1+\theta_2}\right\}\cdot\left\{ \frac{\partial}{\partial\xi}(\Delta\vec{E}^{n} - \frac{\Delta\vec{Ev}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(\Delta\vec{F}^{n} - \frac{\Delta\vec{Fv}^{n}}{Re}) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\Delta\vec{G}^{n} - \frac{\Delta\vec{Gv}^{n}}{Re}) + \Delta\vec{S}^{n} + \frac{\varepsilon_i}{J}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\right\} J\,\Delta q^{n} \right\} =$$

$$- \frac{\Delta t}{1+\theta_2}\left\{ \frac{\partial}{\partial\xi}(\vec{E}^{n} - \frac{\vec{Ev}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\eta}(\vec{F}^{n} - \frac{\vec{Fv}^{n}}{Re}) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(\vec{G}^{n} - \frac{\vec{Gv}^{n}}{Re}) \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_1}{8}\frac{1}{J}\left\{\frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + \frac{\partial^4}{\partial\eta^4} + \frac{\partial^4}{\partial\gamma^4}\right\} J\; q^{n} \right\}$$

$$+ \frac{\theta_2}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\bar{q}^{n-1} + (\theta_1 - \theta_2 - 1/2)\vartheta(\Delta t^2) + \vartheta(\Delta t^3)$$

Pour ne pas modifier la solution obtenue à partir de ce système, il convient de miniser l'infuence de ces nouvequx termes par l'utilisation des paramètres ε_i et ε_1. Les expressions (4.36) et (4.37) seront discrétisées par des formules de différentiation centrées du second ordre. L'ajout de ces termes ne modifie pas la forme générale de l'algorithme de résolution. Il prend alors la structure suivante :

$$(4.38)\qquad [AA]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j-1,k}^{\,*} + [BB]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j,k}^{\,*} + [BB]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j+1,k}^{\,*} = Res_{j,k}^{n}$$

avec :

$$[AA]_{j,k}^{n} = -h\left\{ \frac{1}{2}\,[B]_{j-1,k}^{n} - \frac{[P_2]_{j-1,k}^{n}}{Re} + \varepsilon_i\frac{J_{k-1}}{J_k}\,[I] \right\}$$

$$[BB]_{j,k}^{n} = \left\{[I] + h\left\{\frac{1}{2}[A]_{j,k}^{n} - \frac{[M]_{j,k}^{n}}{Re} + \frac{[P_1]_{j,k}^{n} + [P_2]_{j,k}^{n}}{Re} + \frac{2}{3}\varepsilon_i[I]\right\}\right\}$$

$$[CC]_{j,k}^{n} = h\left\{ \frac{1}{2}\,[B]_{j+1,k}^{n} - \frac{[P_1]_{j+1,k}^{n}}{Re} + \varepsilon_i\frac{J_{j+1}}{J_j}\,[I] \right\}.$$

et :

(4.39) $$[AA]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j,k-1}^{n} + [BB]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j,k}^{n} + [CC]_{j,k}^{n}\,\Delta\bar{q}_{j,k+1}^{n} = Res_{j,k}^{n}$$

avec:

$$[AA]_{j,k}^{n} = -h\left\{ \frac{1}{2}[C]_{j,k-1}^{n} - \frac{[Q_2]_{j,k-1}^{n}}{Re} + \varepsilon_i \frac{J_{j-1}}{J_j}[I] \right\}$$

$$[BB]_{j,k}^{n} = \left\{[I] + h\left\{\frac{1}{2}[A]_{j,k}^{n} - \frac{[M]_{j,k}^{n}}{Re} + \frac{[Q_1]_{j,k}^{n} + [Q_2]_{j,k}^{n}}{Re} + \frac{2}{3}\varepsilon_i[I]\right\}\right\}$$

$$[CC]_{j,k}^{n} = h\left\{ \frac{1}{2}[C]_{j,k+1}^{n} - \frac{[Q_1]_{j,k+1}^{n}}{Re} + \varepsilon_i \frac{J_{k+1}}{J_k}[I] \right\}$$

IV-3-7 Méthode de résolution

Les équations (4.38) et (4.39) forment deux systèmes matriciels, qui se présentent sous la forme :

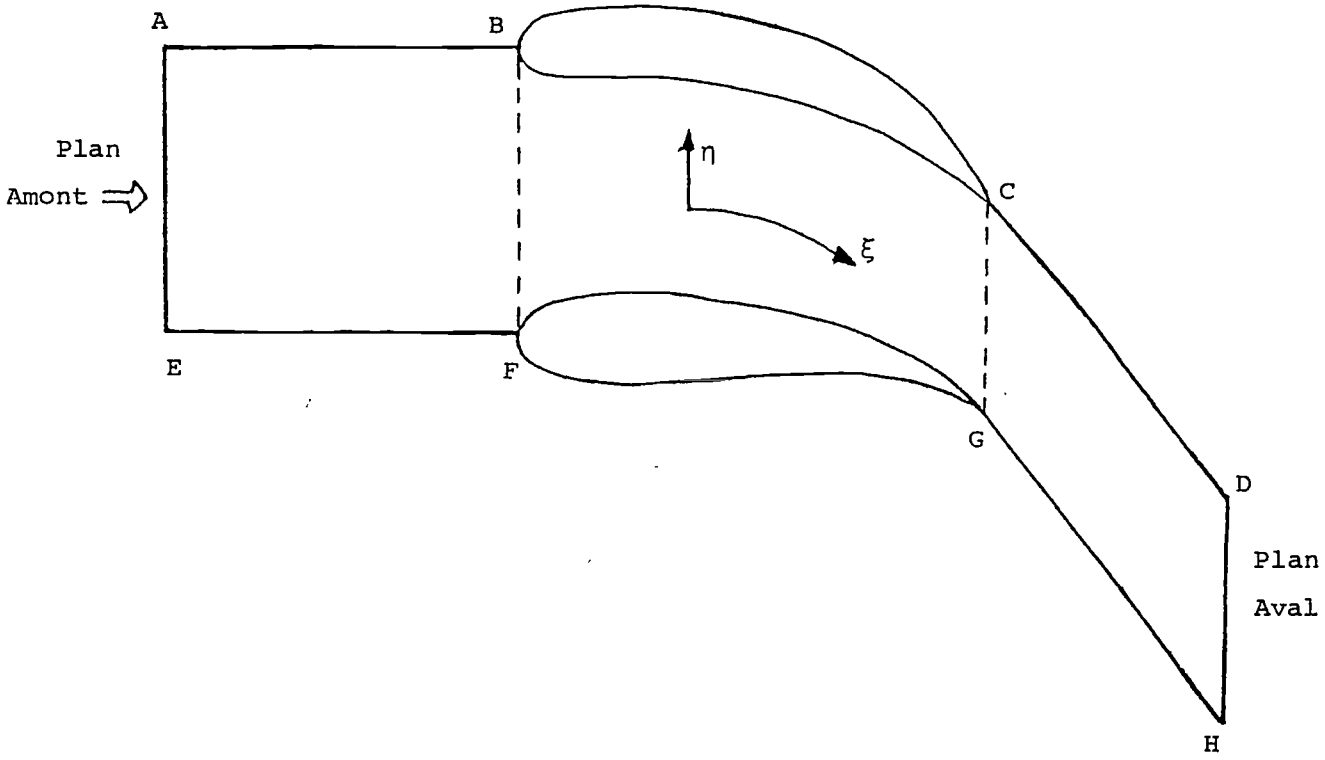
$$[A] \,.\, [X] = [b]$$

[A] est la matrice implicite constituée des matrices [AA], [BB] et [CC] des équations (4.38) et (4.39). Le vecteur [X] est le vecteur inconnu qui regroupe les termes Δq^* ou Δq^n et le vecteur [b] contient les résidus. Pour résoudre ce système deux étapes préalables sont nécessaires. En premier lieu, il convient de définir les conditions aux limites applicables aux frontières latérales du domaine, ensuite, ces conditions étant introduites dans le système, nous étudierons la structure de la matrice [A] afin de définir, une technique de résolution performante réunissant un encombrement mémoire réduit et un temps de résolution minimum.

IV-3-7-1 Conditions aux limites latérales

Les conditions aux limites latérales doivent reproduire dans le schéma numérique les conditions physiques imposées à l'écoulement aux frontières du domaine d'étude. Pour les dénombrer et ensuite les formuler

mathématiquement, il est au préalable nécessaire d'étudier l'environnement physique dans lequel évolue l'écoulement. Notre domaine d'étude concerne les turbomachines. Une turbomachine est composée d'une suite de roues aubées statiques ou en rotation. Pour des raisons pratiques, nos travaux se limitent à l'étude des grilles isolées, on ne prend pas en compte l'influence des roues situées en aval et en amont. De cette manière, on peut limiter le domaine à un seul canal interaube, la présence des autres aubages de la roue est prise en compte par des conditions de périodicité spatiale. Ce domaine peut être schématisé par une coupe longitudinale (figure 5).



- Figure 5 -

Sur les frontières transversales (direction γ) non représentées sur cette figure, on trouve le moyeu et le carter donc des parois solides tout le long du domaine.

Dans cette configuration, on peut définir trois types de conditions aux limites.

- Conditions de Dirichlet :

Cette condition signifie que la valeur de la variable est connue sur la frontière. Ce type de condition s'applique principalement sur les parois solides où la vitesse est nulle. Dans notre domaine, cela concerne les parois latérales (moyeu et carter) ainsi que les aubages (segments BC et FG).

- Condition de Neuman :

Dans ce cas, c'est la dérivée normale à la frontière qui est imposée. Ce type de condition est généralement utilisé sur le champ de température en présence de parois solides.

- Conditions de périodicité :

Cette condition porte sur l'égalité des champs aérodynamiques (valeurs et dérivées normales) de deux frontières distinctes. Cette condition s'applique en dehors des aubages sur les segments AB - EF et CD - GH.

Ces trois conditions étant maintenant précisées, étudions le formalisme mathématique nécessaire à leur implantation dans le système matriciel.

IV-3-7-2 Introduction des conditions aux limites :

- Conditions de Dirichlet

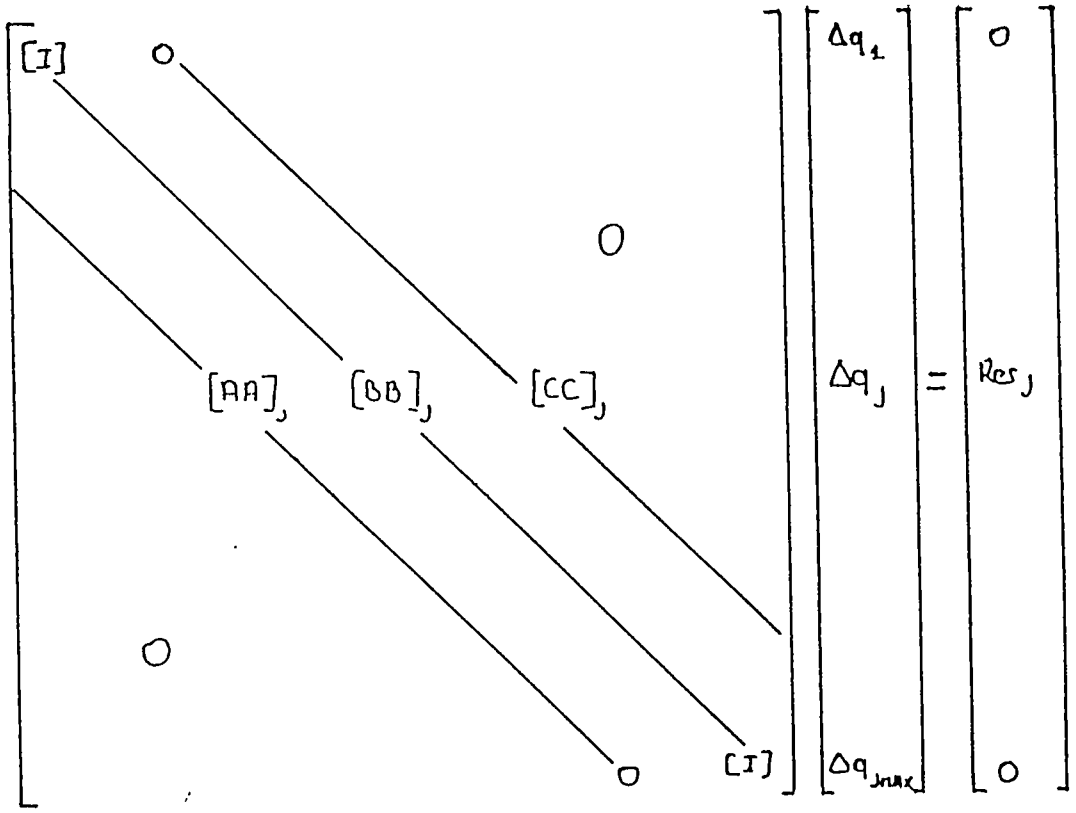
La valeur de la variable q est connue sur la frontière. Pour la frontière j = 1, nous obtenons :

$$\bar{q}_1 = Cte$$

Donc les corrections appliquées à cette variable doivent être nulles:

(4-40) $$\Delta\bar{q}_1^{\,*} = \Delta\bar{q}_1^{\,n} = 0$$

Avec ces conditions, le système matriciel prend la forme suivante :



La matrice [A] est de type tridiagonale par bloc car tous les éléments qui la composent sont nuls à l'exception des trois matrices [AA], [BB] et [CC].

- Conditions de Neumann

Dans ce cas, la dérivée normale à la frontière est connue. Par exemple, en j = 1: $\frac{\partial}{\partial n} q_1 = cte.$ $\vec{n}$ est la direction normale à la frontière.

Appliquée aux corrections, cette condition devient :

$$\Delta \frac{\partial}{\partial n} \bar{q}_1 = \frac{\partial}{\partial n} \Delta \bar{q}_1 = 0$$

Dans le repère (ξ, η, γ) , la normale $\vec{n}$ a pour composante $(n_\xi, n_\eta, n_\gamma)$ et la dérivée devient :

$$\frac{\partial}{\partial n}\Delta\bar{q}_1 = n_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta\bar{q}_1 + n_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\Delta\bar{q}_1 + n_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}\Delta\bar{q}_1 = 0$$

Pour limiter le nombre de points, le maillage dans le plan transversal sera pris orthogonal ainsi, pour la frontière J = 1, l'expression ci-dessus se limite à :

$$\frac{\partial}{\partial n}\Delta\bar{q}_1 = n_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta\bar{q}_1 + n_\eta \frac{\partial}{\partial \eta}\Delta\bar{q}_1 = 0$$

Pour discrétiser le terme $\frac{\partial}{\partial \eta} q_1$, on utilise une formulation décentrée au premier ordre :

$$\left\{ n_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta\bar{q}_1 \right\}_{i-1,j,k} = n_\xi \left\{ \bar{q}_{i,1,,k} - \bar{q}_{i-1,1,k} \right\}$$

Sachant que $\Delta q_{i-1,1,k} = 0$ dans le schéma, l'expression se résume alors à :

$$\left\{ n_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\Delta\bar{q}_1 \right\}_{i-1,j,k} = n_\xi \ \bar{q}_{i,1,,k}$$

Le terme $\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta q_1$ peut être discrétisé par des dérivées du premier ou second ordre. Pour laisser un plus grand choix sur l'ordre de discrétisation utilisé, une formulation générale a été construite. Cette formule de discrétisation utilise un décentrement amont ou aval en fonction de la frontière considérée. Pour la frontière d'indice j = 1, on utilise un décentrement à droite :

(4-41) $$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}\Delta\bar{q}_1 \right\}_{j=1} = (2-\alpha)\left\{\Delta\bar{q}_2 - \Delta\bar{q}_1\right\} - \beta\left\{\Delta\bar{q}_3 - \Delta\bar{q}_1\right\}$$

Décentrement à gauche (j = JMAX):

(4-42) $$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}\Delta\bar{q}_1 \right\}_{j-jmax} = (2-\alpha)\left\{\Delta\bar{q}_{jmax-1} - \Delta\bar{q}_{jmax}\right\} - \beta\left\{\Delta\bar{q}_{jmax-2} - \Delta\bar{q}_{jmax}\right\}$$

Les paramètres α et β permettent de gérer la précision de ces formules. Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, les formules sont précises au premier ordre et pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1/2.$, la précision est du second ordre.

En regroupant ces expressions, on obtient sur les frontières les équations suivantes :

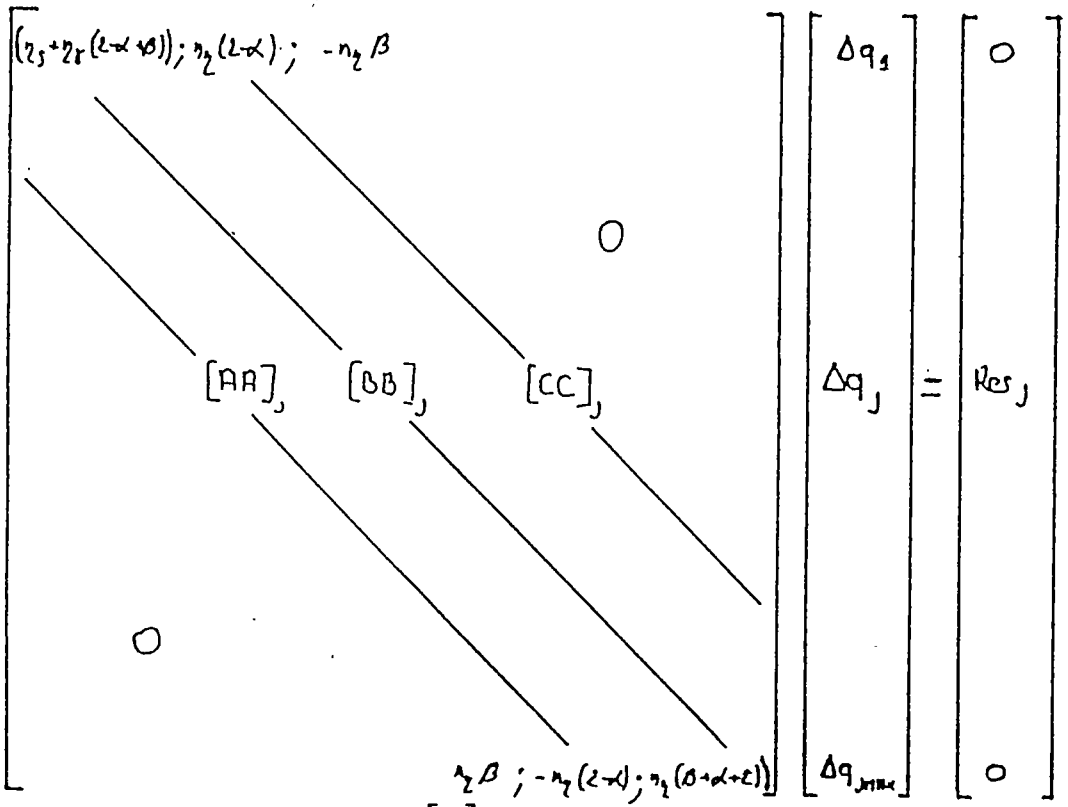
- Frontière $j = 1$

$$(4\text{-}43) \qquad \left[n_\xi + n_\eta \, (2 - \alpha + \beta) \right] \Delta\bar{q}_1 + n_\eta \left[2 - \alpha \right] \Delta\bar{q}_1 - n_\eta \, \beta \, \Delta\bar{q}_3 = 0$$

- Frontière $j = JMAX$

$$(4\text{-}44) \qquad \beta \, n_\eta \, \Delta\bar{q}_{jmax-2} + n_\eta \left[2 - \alpha \right] \Delta\bar{q}_{jmax-1} + \left[n_\xi + n_\eta \, (2 - \alpha + \beta) \right] \Delta\bar{q}_{jmax} = 0$$

les formules ci-dessus ont été établies pour des dérivées selon η (indice j), pour des dérivées selon γ (indice k), la formulation est identique, elle ne sera donc pas détaillée.Avec les conditions aux limites de type Neuman, le système matriciel prend la forme suivante :



La matrice [A] perd sa structure de type tridiagonale par blocs qui est très intéressante pour établir une technique de résolution performante.

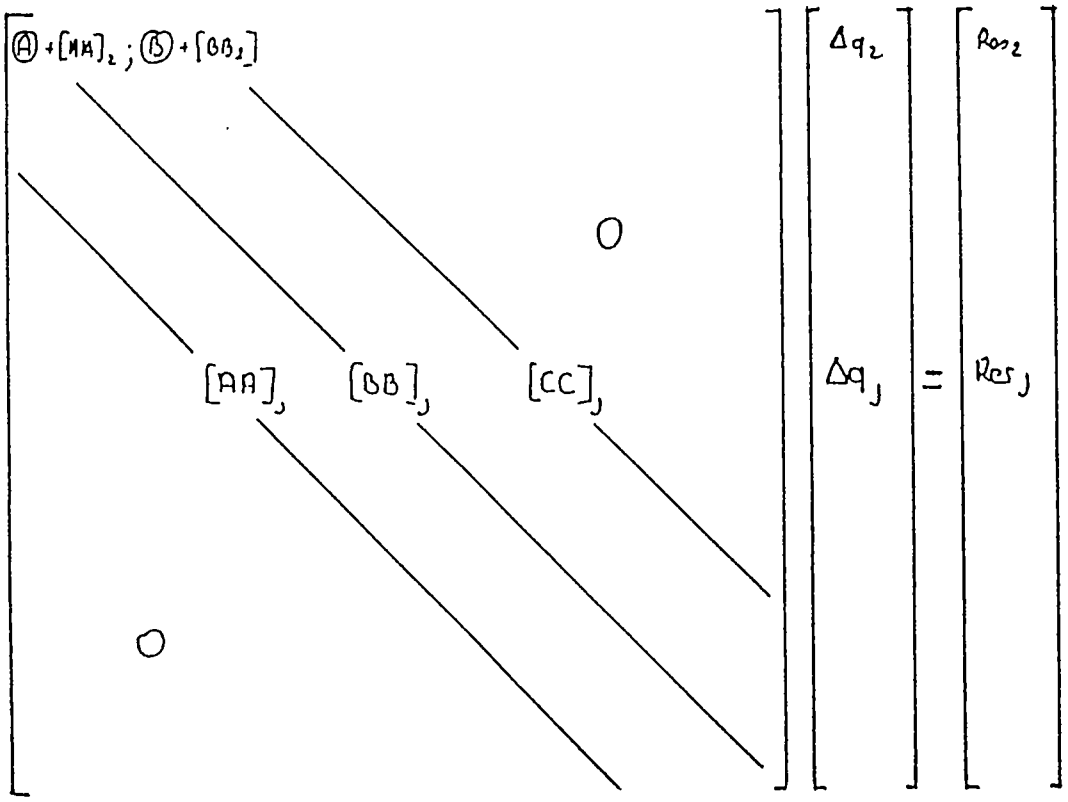
Pour retrouver cette structure, il est préférable de résoudre les variables aux frontières de manière explicite en exprimant les équations sous la forme :

$$\Delta\bar{q}_1 = \frac{n_\eta \left[\alpha - 2\right] \Delta\bar{q}_1 + n_\eta \beta \Delta\bar{q}_3}{n_\xi + n_\eta (2-\alpha+\beta)}$$

(4-45)

$$\Delta\bar{q}_{jmax} = \frac{n_\eta \left[\alpha - 2\right] \Delta\bar{q}_{jmax-1} + n_\eta \beta \Delta\bar{q}_{jmax-2}}{n_\xi + n_\eta (2-\alpha+\beta)}$$

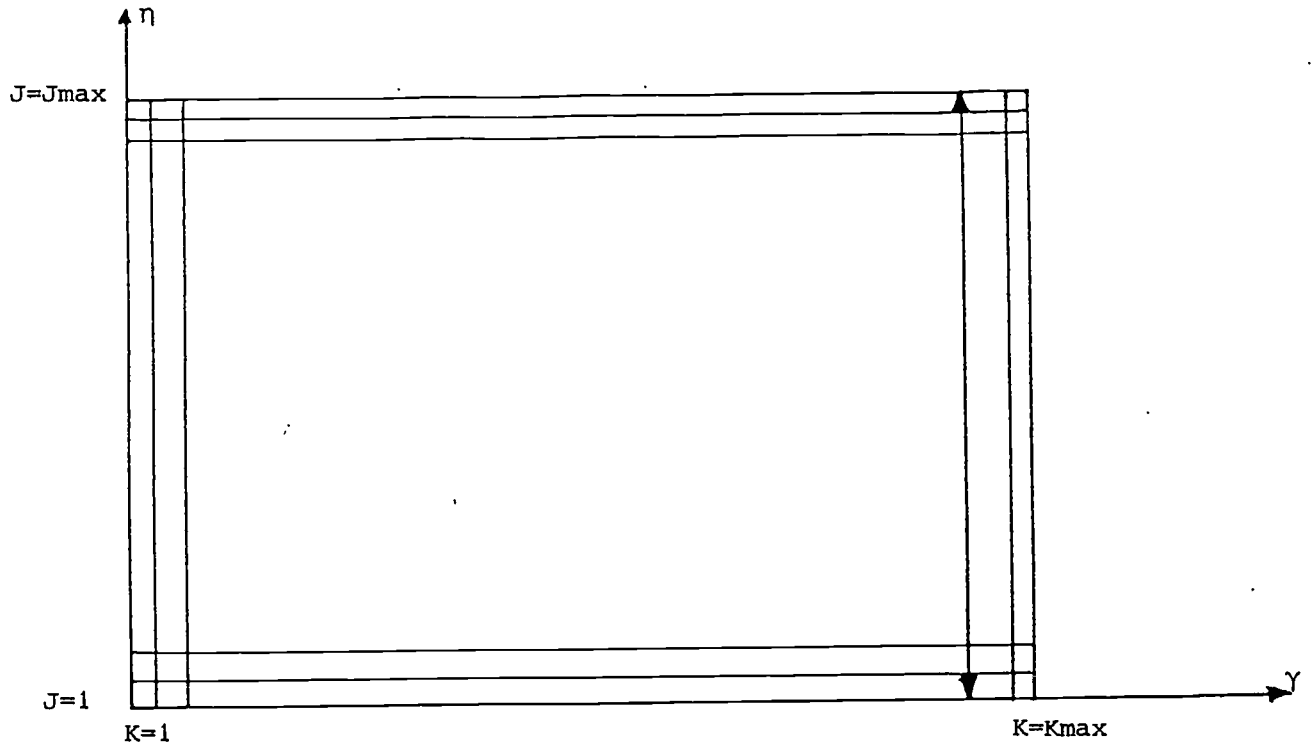
Le système se réduit alors à la forme suivante :



- Conditions de périodicité

Ces conditions sont indispensables pour traiter un écoulement dans le canal interaube d'une grille de turbomachine. En dehors du canal, la condition principale à respecter sur la frontière prolongeant les aubages est la périodicité circonférentielle associée au nombre d'aubes.

Pour exprimer ces conditions, considérons un plan de calcul schématisé par la figure ci-dessous :



- Figure 6 -

La périodicité spatiale est appliquée entre les frontières J = 1 et J=JMAX, soit une longueur notée L. Reproduire la périodicité sur ces frontières exige le respect des conditions suivantes : Pour deux points opposés (indice k identique) situés sur les frontières périodiques, nous avons :

$$\bar{q}_{1,k} = \bar{q}_{jmax,k}$$

et: (4-46)

$$\frac{\partial}{\partial n}\bar{q}_{1,k} = \frac{\partial}{\partial n}\bar{q}_{jmax,k}$$

Ou, en terme de correction:

$$\Delta \bar{q}_{1,k} = \Delta \bar{q}_{jmax,k}$$

et: (4-47)

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta \bar{q}_{1,k} = \frac{\partial}{\partial n} \Delta \bar{q}_{jmax,k}$$

L'expression numérique de la dérivée normale nécessite des discrétisations dans le domaine de calcul qui peuvent s'exprimer par une formulation centrée ou décentrée. Pour appliquer une dérivée centrée sur les lignes j = 1 et j = JMAX, il faut connaître des informations sur les lignes j = O ou j = JMAX +1, points qui sont en dehors du domaine de calcul. Il est donc nécessaire d'appliquer une dérivée décentrée. En appliquant l'égalité de variables sur les lignes j = 1 et j = JMAX et l'égalité des dérivées décentrées au premier ordre, on aboutit finalement à égaliser la variable sur la ligne j = 2 et j = IMAX - 1. Ce procédé impose de façon implicite, deux périodicités de longueur L et (L -$\Delta\eta$). Il y a d'une part incohérence car la condition est double, et d'autre part une erreur de l'ordre de 2 $\Delta\eta$. Il est préférable d'appliquer les conditions (4 - 47) sur des lignes intermédiaires d'indice j = 1/2 et j = JMAX - 1/2 ce qui va introduire une erreur de l'ordre de $\Delta\eta$, mais sans faire apparaître d'incohérence.

Les équations discrétisées deviennent alors :

- Pour les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta \bar{q}_{1,k} = \Delta \bar{q}_{1,k} - \Delta \bar{q}_{2,k}$$

(4-48)

$$\frac{\partial}{\partial n} \Delta \bar{q}_{jmax,k} = \Delta \bar{q}_{jmax,k} - \Delta \bar{q}_{jmax-1,k}$$

- Pour les variables :

$$\Delta \bar{q}_{1,k} = \frac{1}{2}(\Delta \bar{q}_{1,k} + \Delta \bar{q}_{2,k})$$

$$\Delta \bar{q}_{jmax,k} = \frac{1}{2}(\Delta \bar{q}_{jmax,k} + \Delta \bar{q}_{jmax-1,k})$$

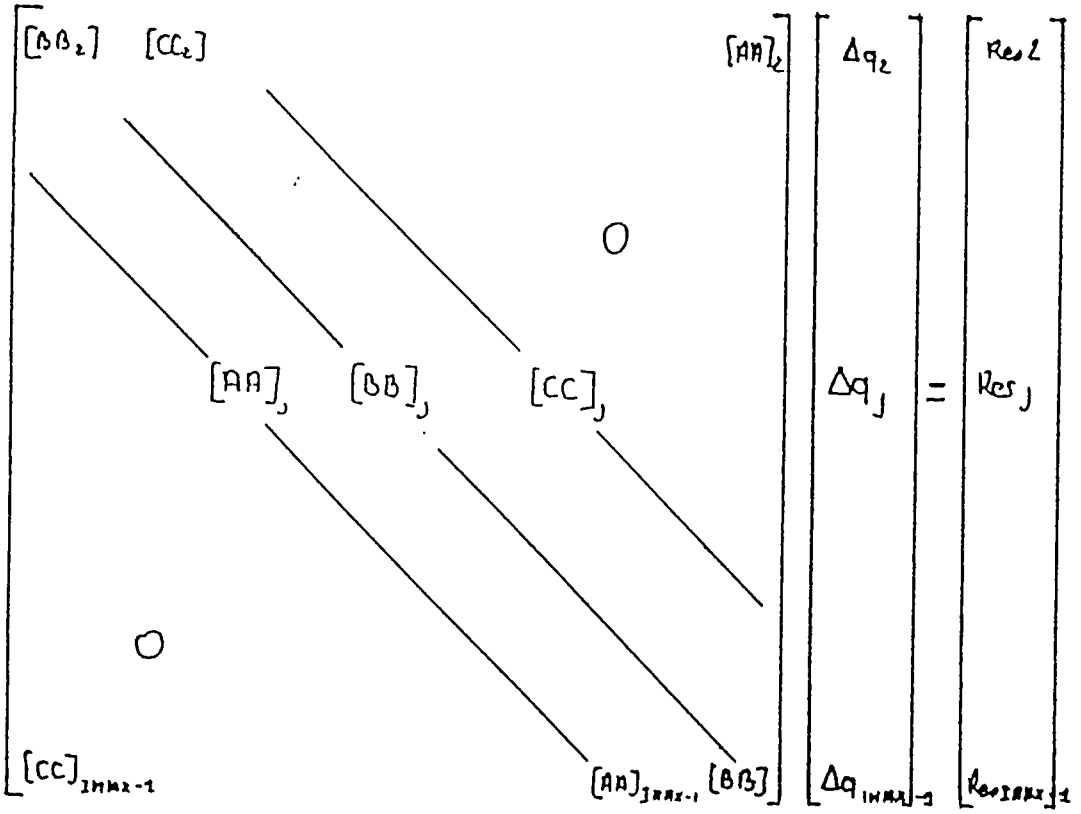
L'égalité des dérivées et des variables conduit à :

$$\Delta \bar{q}_{1,k} = \Delta \bar{q}_{jmax-1,k}$$

$$\Delta \bar{q}_{2,k} = \Delta \bar{q}_{jmax,k}$$

Ceci nous conduit en fait à réduire notre domaine de périodicité à une longueur (L - $\Delta\eta$). Cette perte de précision n'est en fait pas trop pénalisante dans la pratique compte tenu du raffinement du maillage nécessaire près des frontières. Comme précédemment, les variables sur les frontières seront résolues de manière explicite.

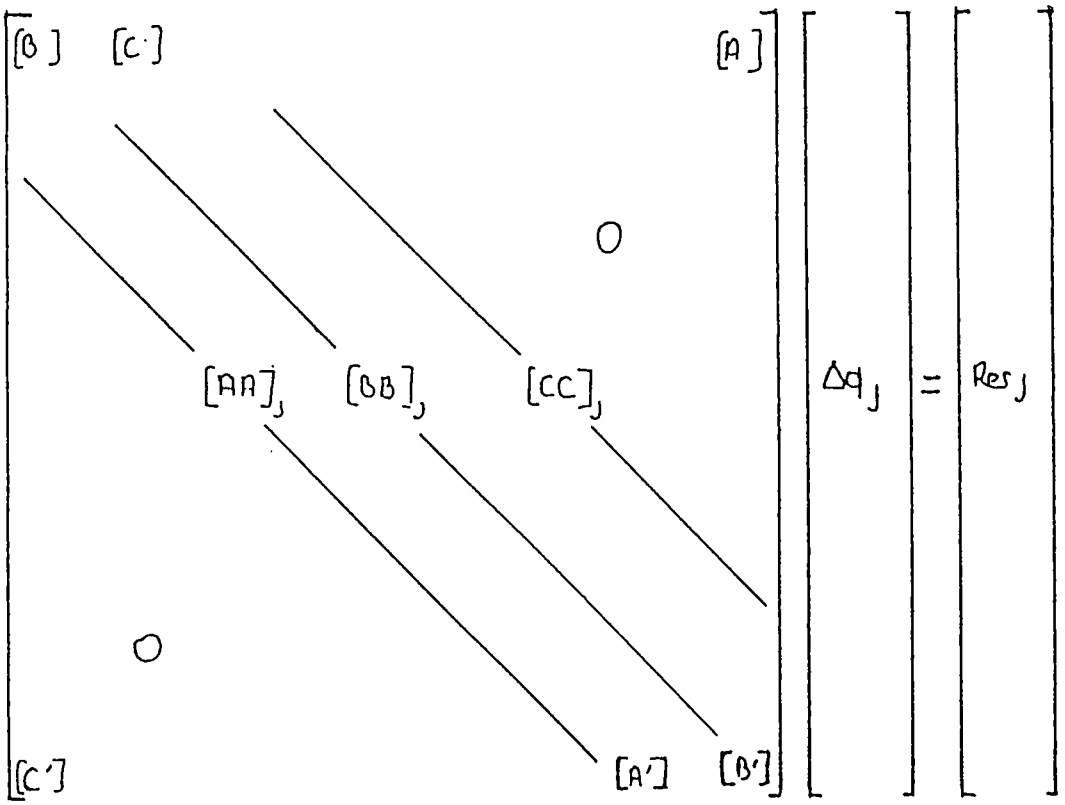
Le système matriciel avec les conditions de périodicité prend la forme suivante :



Ce système garde sa structure tridiagonale par blocs mais nous voyons apparaître dans les deux coins opposés de la matrice les éléments $[AA]_2$ et $[BB]_{jmax-1}$ que traduisent l'influence de la périodicité sur notre système. Une matrice de ce type est appelée tridiagonale par blocs périodiques.

IV-3-7-3 Résolution du système matriciel..

Afin de définir une technique de résolution applicable au système quelque soit le type de conditions aux limites imposées aux frontières, nous les avons regroupées de façon à obtenir un système général de la forme :



Les éléments [A], [B], [C], [A'] [B'] et [C'] contiennent les conditions aux limites, leur contenu sera variable suivant le type de conditions imposées.

Un algorithme de résolutions d'un tel système a été développé par Steger [21] , il propose une factorisation de cette matrice en une matrice supérieure [L] et une inférieure [U]. Cette méthode possède deux avantages : elle ne nécessite l'inversion que d'un seul élément par ligne ce qui permet,

l'inversion étant une des opérations plus coûteuse en temps calcul, de limiter le coût de la résolution. De plus, les éléments peuvent être stockés sous une forme vectorielle ce qui réduit au minimum l'emplacement mémoire nécessaire. Ces deux aspects étant parmi les priorités définies pour notre algorithme, ce sont eux qui ont motivé notre choix. Les détails de la procédure de factorisation et de résolution se trouvent en Annexe.

IV-4 Schéma de résolution du champ de pression statique

IV-4-1 Introduction

Dans une première étape, les équations de quantité de mouvement et d'énergie ont été résolues dans une domaine réduit à deux plans consécutifs notés (i-1) et (i). La résolution de ce système d'équations a permis de modifier le champ de vitesse et de température. Suite à ces corrections, la conservation locale de la masse n'est plus respectée. Notre objectif maintenant est de corriger la pression statique de manière à respecter l'équation de continuité. Dans un premier temps, une équation de correction de pression sera construite. Les écoulements étudiés englobant tout le domaine subsonique, nous étudierons successivement les domaines incompressibles puis compressibles. Ensuite ces équations seront résolues. Pour cela, une méthode originale a été développée par El Marjani [12] puis étudiée par Parkinson [13]. Cette technique est composée de deux étapes distinctes : dans un premier temps, une méthode intégrale donne la solution sur la frontière du domaine. Cette solution sur la frontière est ensuite utilisée comme condition aux limites pour obtenir par une méthode bidimensionelle [22], la solution à l'intérieur du domaine de calcul. Ces deux techniques seront successivement présentées En conclusion, nous obtiendrons un algorithme général englobant l'ensemble de la méthode.

Pour reproduire finement la géométrie de ce domaine et déterminer avec précision la pression sur la frontière, une technique originale basée sur la méthode des éléments frontières a été développée par El Marjani [12] et par Parkinson[13].

IV-4-2 Résolution sur la frontière du domaine

Pour résoudre sur la frontière, on utilise une formulation intégrale B.E.M. (Boundary Element Method). En un point M de la surface Σ du domaine D, l'équation intégrale se présente sous la forme :

$$(4\text{-}50) \qquad 4\,\Pi\,\delta\,Ps\,(M) = \int_{\Gamma} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}\delta Ps\,d\sigma - \int_{\Gamma} \delta Ps\,\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{r}\,d\sigma + \int_{D} \frac{1}{r} f(\Theta)\,d\Omega$$

Les détails de cette formulation se trouve en Annexe 1

Pour discrétiser les intégrales A et B, les frontières du domaine sont divisées en surfaces élémentaires τ_k, appelée éléments, constituées de neuf noeuds de maillage. Sur chaque élément, les intégrales surfaciques A et B sont discrétisées à l'aide de fonctions d'interpolations quadratiques qui permettent une description précise de la géométrie. Par cette technique, chaque point du maillage se trouve directement influencé par tous les autres points de la surface

Après discrétisation, le système se présente sous la forme matricielle suivante :

$$(4\text{-}51) \qquad \sum\sum h_{ki}\,(M)\,\delta\,P_{ki}\,(M) = B(M) + \sum\sum g_{ki}\,(M)\,\frac{\partial}{\partial \eta}(\delta\,P_{ki}\,(M))$$

L'indice k désigne l'élément et l'indice i le numéro du noeud sur l'élément h_{ki} et g_{ki} désignent respectivement les coefficients d'influence associés aux intégrales A et B. Enfin B (M) regroupe les intégrales C qui représentent l'influence de la fonction source $F(\Theta)$.

On peut noter que dans ce système, les inconnues peuvent être en chaque point δp ou $\frac{\partial}{\partial n}\delta p$ en fonction des conditions aux limites imposées. De plus la discrétisation en éléments surfaciques implique qu'un point géométrique peut être commun à plusieurs éléments. Ceci permet une excellente définition des dérivées normales qui sont associées à la surface élémentaire τ_k. Ainsi, dans un angle, plusieurs dérivées normales sont

définies ce qui donne une bonne définition des points anguleux et des conditions aux limites.

Les conditions aux limites couramment employée sont $\frac{\partial}{\partial n}$ $\delta p=0$ en présence de parois solides ou dans le cas de frontière libre du type périodique:

(4-52) $$\delta p_A = \delta p_B \text{ et } \frac{\partial}{\partial n}\delta p_A = -\frac{\partial}{\partial n}\delta p_B$$

pour deux points A et B homologues par périodicité.

En fonction des conditions aux limites, le système (5 11) est arrangé de manière à obtenir l'équation matricielle suivante :

(4-53) $$[A] \,.\, [X] = [b]$$

La matrice $[A]$ est une matrice pleine qui regroupe les coefficients d'influence h_{ki} ou g_{ki}. Le vecteur $[X]$ regroupe les inconnues δp ou $\frac{\partial}{\partial n}\delta p$ et le vecteur $[b]$ les termes sources ainsi que les conditions aux limites La résolution s'effectue à l'aide d'une décomposition de type $[L] .[U]$.

Par la résolution du système (4-53), nous connaissons les valeurs de δp sur la frontière du plan de calcul. La technique des éléments frontières utilisée a permis d'incorporer avec précision et en tenant compte de la géométrie, l'aspect tridimensionel du champ de pression statique. Le traitement de la pression à l'intérieur du domaine s'effectue à l'aide d'une méthode itérative bidimensionnelle qui utilise comme condition aux limites les corrections obtenues précédemment. L'aspect tridimensionnel ayant été correctement introduite par le biais de la frontière, cette correction bidimensionnelle apparait largement suffisante dans le cadre des écoulements internes [12].

IV-4-3 Calcul des points à l'intérieur du Domaine

La méthode utilisée ici est une méthode itérative implicite nommée MSI (Modified Strougly Implicit) développée par Alkalaï [22] pour le calcul des écoulements potentiels. Cette technique déjà utilisée pour résoudre un laplacien de pression par El Marjani [12] ne sera présenté que succinctement. Les détails de la formulation se trouve dans l'annexe .

Notons cependant que l'équation de correction se présente dans le domaine transformé (ξ,η,γ) sous la forme :

(4-54) $$(\frac{1}{J}).\nabla \delta P = - f(\Theta)$$

Le laplacien est discrétisé sur une molécule à neuf noeuds dans le plan (η,γ). Pour limiter les erreurs numériques, le maillage utilisé est celui du champ de vitesse. Le système matriciel qui en résulte se présente sous la forme :

(4-55) $$[M] \; . \; [\delta P] = [S]$$

Le vecteur S regroupe la fonction source $F(\Theta)$. La matrice $[M]$ est inversée par une procédure itérative basée sur une décomposition $[L].[U]$ qui allie une grande rapidité de résolution avec un stockage en mémoire minimum.

Le processus de résolution de l'équation de correction de pression vient d'être défini. Il est maintenant possible de présenter l'algorithme complet de résolution dans le domaine restreint avec ses conditions aux limites.

IV-5 Intérêts de la formulation

Le principal interêt de cette formulation réside dans l'utilisation d'une méthode intégrale sur la frontiere du domaine. La technique des éléments frontiere permet de minimiser le nombre de points de discrétisation dans le domaine restreint tout en permettant une excellente précision sur la géometrie et sur les résultats. De plus, la formulation intégrale permet une définition exacte des normales sur les points anguleux. Actuellement, la principale limitation vient de l'utilisation d'un

laplacien bidimensionnel pour la résolution à l'intérieur du domaine restreint. Tous ces points seront plus amplement détaillés dans la référence [13].

IV-4-3-4 Couplage des l'Algorithme vitesse-pression-température

Le processus de résolution se déroule dans un domaine limité à deux plans (figure 2). Dans ce domaine, les conditions imposées en amont sont les conditions d'arrêt et les vitesses transversales (plan i-1) et en aval, la pression statique (plan i). La résolution repose sur une méthode itérative pseudo-temporelle avec un découplage entre les champs de vitesse et de température d'une part et le champ de pression statique d'autre part. A chaque itération temporelle, nous résolvons les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les corrections de vitesse δV et de température δT sont appliquées dans le plan aval (i). Ensuite, pour résorber les défauts de masse créés par la modification du champ de vitesse, une correction de pression est effectuée dans la plan (i-1) par la procédure que nous venons de décrire.

IV-5-1 Correction monodimensionnnelles dans le domaine restreint

Avec cette procédure, il apparait une contradiction entre la correction de pression statique dans le plan (i-1) et la conservation de la pression d'arrêt dans ce même plan. Pour résoudre ce problème, une équation monodimensionnelle basée sur la conservation globale de la pression totale est introduite. Cette équation utilise un coefficient de perte de pression totale calculé entre les stations (i) et (i-1). En incompressible, l'équation se présente sous la forme suivante :

$$(4\text{-}56) \qquad Po_{i-1} = Po_i + K_i \rho \left\{ \frac{V^2_{i-1} + V^2_i}{2} \right\}$$

Les termes Po_i et V_i désigne les valeurs de pression d'arrêt et de vitesse longitudinale, moyennées dans le plan i.

L'équation (4-56) peut également se mettre, en utilisant la définition de Po en i et (i-1), sous la forme :

(4-57) $$\frac{1-K_i}{1+K_i} Po_{i-1} + \frac{K_i}{1+K_i} Ps_{i-1} - \frac{1}{1+K_i} Ps_i = \frac{1}{2}\rho V^2_i$$

ou encore:

$$a_{i-1}\, Po_{i-1} + b_{i-1}\, Ps_{i-1} + b_i\, Ps_i = \frac{1}{2}\rho V^2_i$$

avec :

$$a_{i-1} = \frac{1-K_i}{1+K_i} \quad ; \quad b_{i-1} = \frac{K_i}{1+K_i} \quad \text{et} \quad b_i = \frac{-1}{1+K_i}$$

Cette équation couplée à la définition de la pression d'arrêt incompressible :

(4-58) $$Po_i = Ps_i + 1/2\,\rho\, V^2 i$$

permet de créer deux corrections moyennes $\delta Ps_{(i-1)}$ et $\delta V(i-1)$ de manière à conserver la pression d'arrêt moyenne dans le plan (i-1) et le débit entre les plans i et (i-1). Pour générer les corrections $\delta Ps_{(i-1)}$, l'équation (5.17)) est mise sous une forme différentielle:

(4-59) $$b_{i-1}\, \delta Ps_{i-1} + b_i\, \delta Ps_i - \rho\, d\left\{\frac{V_i}{2}\right\} = - a_{i-1}\, \delta Po_{i-1}$$

En introduisant :

$$\rho\, d\left\{\frac{V_i}{2}\right\} = \rho \left\{V_i \frac{d\vec{M}}{d\xi}\right\} \cdot \left\{d\vec{V_i} \cdot \Delta\vec{\xi}\right\} = \left\{V_i \frac{d\vec{M}}{d\xi}\right\} \frac{dQ_i}{\vartheta_i}$$

ou ϑ_i est le volume situé entre les plans (i-1) et (i) et Qi le débit traversant le plan i.

Nous obtenons alors :

(4-60) $$b_{i-1}\, \delta Ps_{i-1} + b_i\, \delta Ps_i - \left\{V_i \frac{d\vec{M}}{d\xi}\right\} \frac{Q_{i-1}}{\vartheta_i}$$

$$= - a_{i-1}\, \delta Po_{i-1} + \left\{V_i \frac{d\vec{M}}{d\xi}\right\} \frac{Q_{i-1}}{\vartheta_i}$$

Ces équations utilisent d'une part, les débits traversant les plans (i-1) et (i) et d'autre part, les pertes générées entre ces deux plans: $\delta Po_{(i-1)}$. En fixant $\delta Ps_{(i)}=0$ (Conditions limites aval), on calcule la correction de pression statique moyenne $\delta Ps_{(i-1)}$ dans le plan (i-1). A chaque itération temporelle, les équations (4.57) et (4.60) permettent ainsi de corriger le débit et la pression statique moyenne dans le plan (i-1) en fonction du débit dans le plan (i) et de la pression d'arrêt moyenne imposée en (i-1).

Actuellement, la formulation est uniquement incompressible. Une extension en compressible doit être envisagé. Cependant, cette méthode utilisant une technique de petites corrections, son utilisation pour des écoulements légèrement compressible peut être envisagée dans l'attente d'une nouvelle formulation compressible.

IV-5-2 Procédure itérative en temps dans le domaine restreint

Dans le domaine restreint i, la procédure itérative de résolution schématisée par la figure 7, est la suivante : Pour une étape de temps Δt , on résout les équations de quantité de mouvement et d'énergie. Les corrections δV et δT résultantes sont appliquées dans le plan i. Pour résorber les défauts de masse créés par ces corrections , une équation de correction de pression statique est ensuite résolue. Les corrections δPs sont positionner dans le plan (i-1). Les corrections de vitesse et de pression ayant modifiées le débit aval et la pression d'arret amont, une formulation unidimensionnelle basée sur les valeurs moyennes a été introduite . Cette technique génère deux nouvelles correction δV et δPs dans le plan (i-1).Ces trois étapes successives étant effectuées , on passe à l'étape de temps suivante et ceci jusqu'à convergence temporelle.

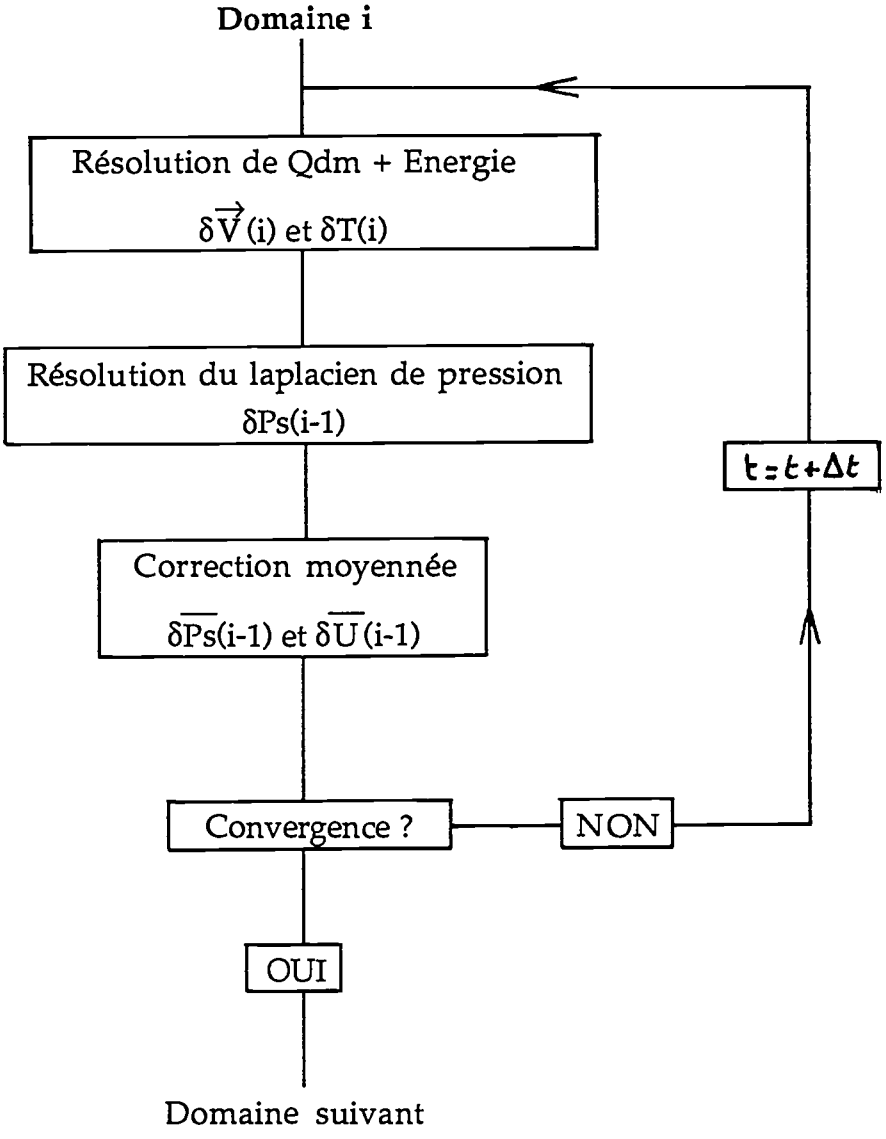


figure -7-

IV-5-3 Résolution dans le domaine complet

IV-5-3 -1 Corrections monodimensionnelles dans le domaine complet

Le débit qui est une inconnue de notre problème est ajusté dans chaque domaine restreint en fonction du débit calculé à l'aval de ce domaine. Ainsi chaque domaine restreint converge vers un débit qui dépend de la pression statique aval locale qui lui est imposée. Pour uniformiser le débit dans tout le canal, les équations monodimensionnelles élaborées précédemment dans un domaine limité à deux plans , sont

étendues à tout le domaine d'étude. Le système obtenue se présente sous la forme suivante:

$$a_1 Po_1 + \sum_k b_k Ps_k = \frac{1}{2}\rho V^2_i$$

(4-61)

$$a_1 \delta Po_1 + \sum_k b_k \delta Ps_k = \left\{ V_i \frac{d\vec{M}}{d\xi} \right\} \frac{dQ_i}{\vartheta_i}$$

Pour i variant de 1 à IMAX

Ce système est résolu après convergence dans chaque domaine restreint, juste avant de passer au domaine suivant. Cette technique possède en outre l'avantage d'incorporer les grandeurs d'arret amont (plan 1) et la pression statique aval (plan IMAX) qui sont les seules grandeurs jamais modifiées. A chaque étape, les informations contenues à l'aval et à l'amont se propage dans tout le domaine, accélèrant ainsi le processus de convergence dans l'ensemble du canal. Cette formulation n'existe que pour des écoulement incompressible, cependant sont extension aux régimes compressible ne devrait pas poser de problème majeur.

IV-5-3-1 · Conservation de la pression d'arrêt amont

Le processus qui consiste à conserver la pression d'arret moyenne au niveau de chaque plan ne convient pas dans le plan d'entrée. Dans ce plan pour assurer l'unicité de la solution, il est nécessaire de conserver localement les grandeurs d'arret. Dans ce but, une technique basée sur les relations de compatibilité a été mise en place [23] :

Dans le premier domaine restreint, les deux relations à respecter sont d'une part les relations de compatibilitée et, d'autre part la conservation locale de la masse. En utilisant le concept de compressibilité artificielle , la première relation se présente sous la forme:

(4-62) $$Ps^{n+1} - 2\rho [A]^n U^{n+1} = Ps^* - 2\rho [A]^n U^*$$

L'indice n désigne l'étape de temps précédente et l'indice (n+1) l'étape de temps après convergence du processus itératif. L'indice * représente les valeurs obtenus par le schéma avant vérification de cette

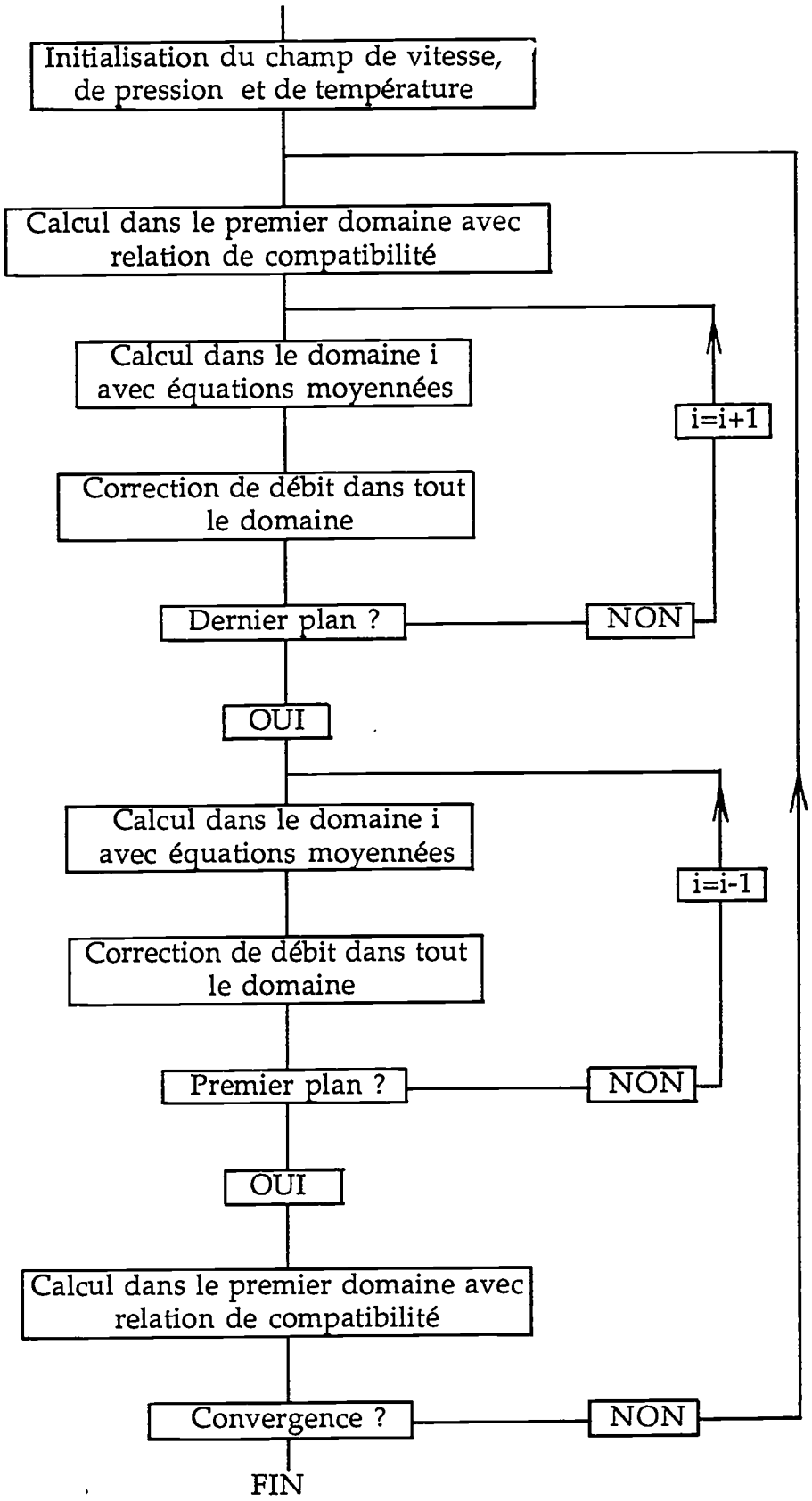
relation. (A) symbolise le vecteur propre dans la direction ξ écrit à l'étape de temps n. La seconde relation s'écrit sous la forme:

(4-63) $$Ps^{n+1} - 0.5\,\rho\,(U^2)^{n+1} = Ps^{*} - 0.5\,\rho\,(U^{*})^2$$

Les deux équations ci-dessus sont résolues par un processus itératif pour chaque point du plan d'entrée. Cette méthode remplace lors de la résolution du domaine 1 (plans 1 et 2) les équations monodimensionnelles. Ainsi les conditions d'arret amont ne sont pas modifiées et on assure l'unicité de la solution indépendamment du processus de convergence.

IV-5-3-2 Algorithme de résolution dans le domaine complet

Le processus de résolution dans le domaine complet se déroule comme suit: dans un premier temps, le domaine est initialisé par des champs de vitesse de température et de pression statique.Le processus itératif de correction des champs initiaux débute dans le premier domaine restreint (plan 1 et 2) en utilisant les relations de compatibilité. La convergence obtenue dans ce domaine, le processus se reproduit dans le domaine suivant (plans 2 et 3) en utilisant cette fois, les équations monodimensionnelles. A convergence , les équations moyennées sont a nouveau résolues pour uniformiser le débit dans tout le canal. Le processus se poursuit par résolutions successives des domaines restreints jusqu'au plan de sortie Pour permettre un meilleur transfert des conditions amont et aval dans l'ensemble du domaine, et augmenter ainsi la vitesse de convergence, le processus se poursuit en reparcourant le canal de l'aval (plan IMAX) vers l'amont. (cf chapitre II). Le domaine numéro 1 étant de nouveau atteint, on teste le niveau de convergence. Si celui-ci est insuffisant, on recommence la procédure en utilisant les champs corrigés par les balayages précédents.



Algorithme général de résolution

VI-6 Conclusion

Apres avoir présenté le processus général de résolution (Chapitre II), puis détaillé les équations dans le chapitre III, ce nouveau chapitre à été consacré aux discrétisations numériques.

Pour permettre une meillleure stabilité numérique, les termes temporels ont été conservés. Le schéma utilise un processus itératif en temps jusqu'a convergence. La discrétisation temporelle utilise la formule générale de Pade qui permet de chosir la précision et le caractère plus ou moins implicite du schéma temporel. Les formules de discrétisation spatiale du membre implicite et du membre explicite sont toutes centrées et précise au second ordre. Pour limiter l'accumulation d'erreurs numériques, et vue l'utilisation de formules centrées, des termes de dissipation numériques ont été rajoutés dans le membre implicite et dans le résidu.Dans la direction longitudinale, les corrections sont supposées nulles à l'exception du plan de calcul courant. Cette hypothèse permet de rendre d'un point de vue numérique, le système équivalent à celui d'un problème bidimensionnel mais, impose l'existence d'un direction de convection dominante. Cette condition est imposée pour des problèmes de convergence, mais lorsque la convergence est obtenue, les équations de Navier-Stokes complètes ont été vérifiées. Les équations sont ensuite factorisées selon les deux directions tranversales. Le système matriciel obtenu se présente sous la forme d'une matrice tridiagonale par blocs. Sa résolution est basée sur une décomposition [L].[U], adaptée aux conditions aux limites utilisées.

L'équation de correction de pression est résolu par deux algorithmes successifs. La technique des éléments frontiere permet de résoudre le laplacien tridimensionnel sur la frontiere du domaine restreint en tenant compte des efffets élliptiques. A l'interieur du domaine, une méthode bidimensionnelle est utilisée. Pour ternir compte des conditions aux limites amont et de la conservation du débit, une équation monodimensionnellle est introduite. La résolution dans le domaine complet s'effectue par balayages successifs de l'amont vers l'aval puis de l'aval vers l'amont pour permettre un meilleur tranfert des conditions imposées aux extrémités du canal.

Les équations utilisées étant moyennées, le chapitre suivant sera consacré au modèle de turbulence. Ensuite nous validerons cette méthode sur plusieurs configurations caractéristiques des turbomachines.

- CHAPITRE V -

Modèle de turbulence

V-1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à la description du modèle de turbulence utilisé dans le schéma numérique.

La turbulence demeure l'un des problèmes non résolu de la physique moderne. Pourtant, il est de première importance, pour obtenir une représentation fidèle des écoulements à grand nombre de Reynolds, de prendre en compte ces phénomènes dans la modélisation. Le traitement statistique appliqué aux équations instantanées (cf chapitre III) fait apparaître des corrélations doubles. L'effet de la turbulence est introduit par l'intermédiaire de ces corrélations qui peuvent être interprétées comme des contraintes supplémentaires. Ces termes peuvent être déterminés par des équations différentielles ou par des relations algébriques. Ce sont ces équations ou relations qui constituent le modèle de turbulence. Un grand nombre de ces modèles utilisent le concept de Boussinesq qui relie les tensions de Reynolds aux gradients de vitesse moyenne. D'autres, plus récents ne sont pas astreints à cette hypothèse restrictive. Cependant, ils nécessitent la résolution d'un plus grand nombre d'équations et, par conséquent demandent un temps calcul et un stockage en mémoire difficilement compatible avec les ressources informatiques actuelles. Les modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq sont classés en fonction du nombre d'équations utilisées pour déterminer la viscosité turbulente. On trouve ainsi des modèles à zéro, une ou deux équations. A notre stade de développement, et compte tenu de la complexité de la méthode, il apparait logique pour une première approche de la turbulence de se limiter aux modèles algébriques. Des développements futurs nécessiteront certainement l'utilisation de modèles plus complexes mais cette première étape semble le chemin logique dans l'élaboration d'un schéma numérique performant. Les modèles algébriques ont été largement utilisés dans la littérature, la section suivante sera consacrée à décrire leurs principaux aspects et leurs limitations. Ceci nous permettra de choisir un modèle dont la formulation et les adaptations nécessaires à son utilisation dans une géométrie interne et tridimensionnelle, seront ensuite détaillées.

V-2 Les modèles algébriques.

Ces modèles relient la viscosité turbulente aux grandeurs moyennes de l'écoulement par l'intermédiaire de relations algébriques. Les modèles les plus usités sont basés sur l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl qui permet de calculer la répartition de viscosité turbulente par la relation suivante:

$$\nu_\tau = C.\mu.\, l^2.\, \left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right| \qquad (5.1)$$

Où l, appelé longueur de mélange, est un paramètre qui dépend du type d'écoulement considéré. Parmi les modèles les plus utilisés, citons les travaux de Cebecci Smith [24] et de Baldwin et Lomax [25]. Dans ces deux modèles, l'écoulement est divisé en deux zones possédant chacune une loi de variation propre de ν_t. Pour délimiter ces zones, la formulation proposée par Baldwin et Lomax possède l'avantage de ne pas nécessiter le calcul, toujours délicat, de l'épaisseur de quantité de mouvement.

Ces domaines admettent certaines restrictions. En effet, basés uniquement sur le concept de tourbillons visqueux, ils ne rendent que partiellement compte de la physique du phénomène. Ainsi, lorsque l'écoulement devient complexe, ils sont rapidement pris en défaut. Leur utilisation reste limitée à l'étude des phénomènes simples excluant notamment les forts gradients de pression statique et les flux transversaux de vitesse . Ils présentent cependant l'avantage d'une plus grande facilité de mise en oeuvre tout en permettant une bonne stabilité au schéma numérique général. Parmi les modèles existants, nous avons choisi celui développé par Baldwin et Lomax. L'intérêt de ce modèle réside dans le fait qu'il ne nécessite pas le calcul de l'épaisseur de couche limite, quantité très difficile à évaluer pour un écoulement interne tridimensionnel. De plus, ce modéle a fait l'objet de nombreux développements et adaptation pour des configurations internes tridimensionnelles. C'est ce modèle que nous allons maintenant décrire.

V-3 Le modèle de Baldwin-Lomax

Le modèle de Baldwin-Lomax repose sur la séparation de l'écoulement en deux couches visqueuses : une couche interne et une couche externe.

Dans la zone interne, la répartition de viscosité turbulente est reliée au gradient de vitesse par l'hypothèse de longueur de mélange de Prandtl:

$$\mu_{ti} = \rho.(K.D.Y)^2. \left|\frac{\partial U}{\partial Y}\right| \qquad (5\text{-}2)$$

Où Y est la distance normale à la paroi et K la constante de Von Karman. D représente la fonction d'amortissement de Van Driest qui permet de tenir compte de la proximité de la paroi. Elle est donnée par :

$$D = 1- \exp\left|\frac{-Y\sqrt{\rho_\omega|\sigma_\omega|}}{A^+\mu_\omega}\right| \qquad (5\text{-}3)$$

L'indice ω représente les valeurs à la paroi.

Dans la zone interne, la viscosité turbulente est donnée par la relation suivante :

$$\mu_{te} = K.C_{cp}.F_{wake}.F_{kleb} \qquad (6\text{–}4)$$

K_{kleb} est la fonction d'intermittance de Klebanoff :

$$F_{kleb} = \left[1 +5.5 \left\{\frac{C_{kleb}.Y}{Y_{max}}\right\}\right]^{-1} \qquad (6\text{-}5)$$

et F_{wake} s'exprime par :

$$F_{wake} = \min\left[Y_M.F_M.\frac{Y_M\,|\Delta U|^2}{F_M}\right] \qquad (6\text{-}6)$$

où:

$$F_M = \max\left[Y.\frac{|\partial U|}{\partial Y}.D \right] \qquad (5\text{-}7)$$

Y_M étant la valeur de Y pour laquelle $F = F_{max}$.

En pratique, pour délimiter ces deux zones, il convient de choisir le minimum entre μ_{te} et μ_{ti} en un point donné de l'écoulement [25,26].

V-4 Modifications du Modèle

Le modèle de Baldwin-Lomax fut développé pour des études sur des plaques planes ce qui impose les caractéristiques suivantes :

L'écoulement est bidimensionnel, une géométrie externe (1 seule paroi) et sans décollement. En conséquence, les constantes utilisées par le modèle furent déterminées pour une telle configuration.

Ces écoulements ne correspondent pas à ceux rencontrés en turbomachines. Dans nos applications, ils sont fortement tridimensionnels et se développent dans des géométries internes. De plus, il est nécessaire que le modèle supporte des zones décollées ne serait-ce qu'en cours de calcul. Il convient donc d'adapter le modèle de base aux applications des turbomachines. Nous verrons successivement les différentes modifications qu'il a été nécessaire d'introduire.

V-4-1 Adaptation aux problèmes tridimensionnels

L'utilisation du modèle dans une configuration tridimensionnel impose le remplacement du gradient de vitesse normal à la paroi $\frac{dU}{dy}$ par un gradient local tridimensionnel [27,29,30],. Pour cela nous utilisons le rotationnel [w]

Ces modifications apparaissent dans les équations (5-2) et (5-7) qui deviennent alors :

(5-8) $$\nu_{ti} = (K.Y.D)^2 \, |w|$$

(5-9) $$F = Y. \, |w| .D$$

V-4-2 Traitement des décollements

Dans le modèle, le coefficient de Van Driest, équation (5-3), s'exprime en fonction des valeurs à la paroi (indice ω). Au voisinage d'un point de décollement, le terme de tension τ_ω s'annule ce qui provoque l'annulation du coefficient de Van Driest et par suite de μ_{te} et μ_{ti}.

Pour éviter ceci, Visbal et Knight [26] préconisent l'utilisation du terme de tension locale τ . La fonction de Van Driest devient alors :

(5-10) $$D = 1 - \exp\left\{\frac{-Y.\sqrt{\rho.\tau}}{A^+.\mu_t}\right\}?$$

Il faut préciser qu'une telle formulation ne permet pas un traitement correct des décollements mais simplement d'éviter l'annulation de μ_t dans une telle zone.

Cette nouvelle formulation rend le calcul implicite puisque μ_t, apparait dans l'expression de D. Il faut donc utiliser une méthode itérative pour converger sur μ_t.

V-4-3 Choix des constantes

Le modèle utilise 5 constantes fixées par les auteurs par analogie avec le modèle de Cebecci-Smith. Elles ont pour valeur :

k = 0.4 (constante de Karman).
A^+ = 26
k = 0.0168
C_{cp} = 1.6
C_{kleb} = 0.3

De nombreux auteurs ont cherché à adapter ces constantes dont les valeurs varient suivant les études. Le tableau ci-dessous résument les principales valeurs utilisées ainsi que le type d'application.

Auteurs - Références	Valeurs des constantes	Caractéristique du code
Doyle - D. Knigth [29]	$K = 0.0168$ $K = 0,4$ $C_{cp} = 2.08$ $C_{Kleb} = 0.3$	Navier Stockes 3D Calcul de coins en écoulement externe
Visbal - D. Knigth [26]	$K = 0.40$ $k = 0.0168$ $C_{cp} = 1.6$ $C_{Kleb} = 0.3$	2D Etude des ondes de chocs
York - D. Knight [31]	$K = 0.40$ $k = 0.0168$ $C_{cp} = F(Mach)$ $C_{Kleb} = F(Mach)$	2D Variation de C_{cp} et C_{kleb} en fonction du nombre de Mach.
J.J. Gorshi T.R. Govindan B. Lakshminarayana [28]	$Ccp = 1.6$ $K = 0,4$ $C_{kleb} = 0.3$ $k = 0.0168$ $C_{wk} = 0.25$	Navier Stockes 3D externe 1 coefficient de plus (C_{wk})

Notons également que York et Knight [31] ont déterminé des variations de C_p et C_{kleb} en fonction du nombre de Mach et du coefficient de frottement à la paroi.

De par la simplicité du modèle, il ne faut pas attendre une universalité des constantes celles-ci devront certainement être modifiées en fonction du cas traité. Pour notre application, les constantes seront utilisées sous forme de paramètres et ajustées en fonction de la configuration étudiée.

V-4-4 Echelle de longueur

Dans le modèle, Y représente la distance normale à la paroi. Cette définition évidente en écoulement externe, en présence d'une seule paroi, amène plusieurs questions en écoulements internes:

1. Quelle paroi utiliser ?
2. Quelle est l'influence des autres parois ?

Dans la littérature nous trouvons une étude menée par Doyle D. Knight [29] sur l'interaction de deux parois en écoulement externe bidimensionnel. Les auteurs ont défini une échelle de longueur prenant en compte la distance à deux parois. Nous nous sommes inspirés de cette méthode pour définir une échelle de longueur pour les écoulements tridimensionnels internes.

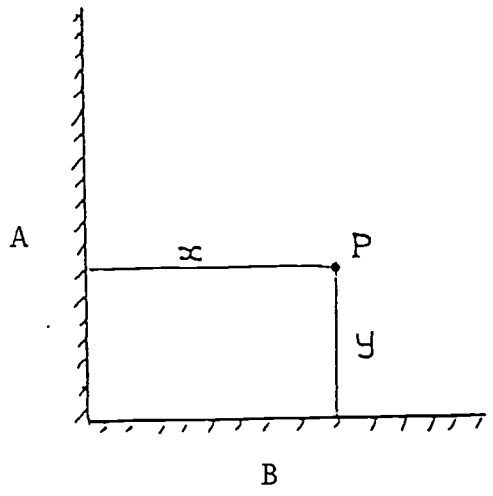


figure 1

Pour un point P situé à une distance x de la paroi A et à une distance y de la paroi B (figure 1) , la formule dite de Buleev nous donne :

$$d = \frac{2.xy}{x + y + (x^2 + y^2)^{1/2}} \qquad (5\text{-}11)$$

On peut vérifier la cohérence de cette formule par une étude aux limites::

$$\lim_{y \to 0} d = x \qquad (5\text{-}12)$$

$$\lim_{x \to 0} d = y \qquad (5\text{-}13)$$

et sur la diagonale aux deux parois (x=y) :

$$d = \frac{x}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad (5\text{-}14)$$

En se basant sur cette expression bidimensionnelle, il est possible de définir la formulation tridimensionnelle suivante: soit un point P situé aux distances x,y,z et h respectivement des parois A,B,C et D (figure 2).

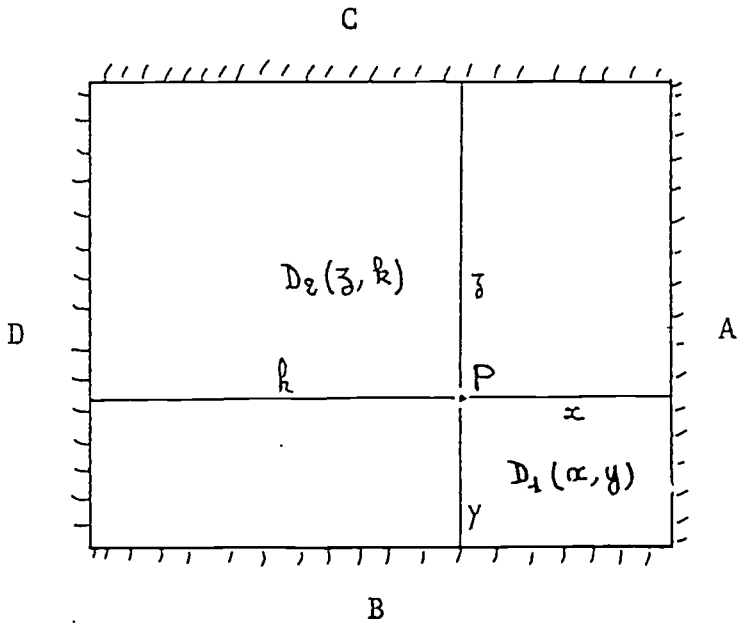


figure 2

D_1 (x,y) et D_2 (z,h) sont définies à partir de la formule de Buleev par:

$$D_1 = \frac{x.y}{x + y + (x^2 + y^2)^{1/2}} \qquad (5\text{-}15)$$

$$D_1 = \frac{z.h}{z + h + (z^2 + h^2)^{1/2}} \qquad (5\text{-}16)$$

L'échelle de longueur d est constitué à partir de D_1 et D_2 de la façon suivante:

$$d = \frac{D_1.D_2}{D_1 + D_2 + (D_1^2 + D_2^2)^{1/2}} \qquad (5\text{-}17)$$

Cette formulation en deux étapes revient à utiliser la formulation générale suivante:

$$d = \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{h} + \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right]^{1/2} + \left[\frac{1}{z^2} + \frac{1}{h^2}\right]^{1/2}} \qquad (5\text{-}18)$$

$$\ldots\ldots \frac{}{\left[\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)^{1/2}\right\}^2 + \left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{h} + \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{h^2}\right)^{1/2}\right\}^2\right]^{1/2}}$$

Une étude aux limites permet de valider la formulation:

Centre de l'écoulement (x = y = z = h)

$$d = \frac{x}{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \qquad (5\text{-}19)$$

Sur les diagonales:

$$\frac{4}{d} = (2+\sqrt{2}).\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]^2\right] \qquad x=y$$

(5-19) $z=h$

$$\frac{4}{d} = (2+\sqrt{2}).\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{h}+\left[\frac{1}{z^2}+\frac{1}{h^2}\right]^2\right]$$

Etude aux limites:

$$\lim_{x\to\infty \text{ et } z\to\infty} \frac{d}{2} = \frac{1}{y}+\frac{1}{h}+\left[\frac{1}{y^2}+\frac{1}{h^2}\right]^{1/2}$$

(5-19)

$$\lim_{x\to\infty \text{ et } z\to\infty} \frac{d}{2} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right]^{1/2}$$

Ainsi pour chacune de ces conditions on retrouve une formulation équivalente à celle utilisée par York et Knight.

Cette formulation permet de donner en un point quelconque de l'écoulement, une échelle de longueur en tenant compte de toutes les parois avoisinantes . Une étude aux limites a montré que l'influence des parois sur le point d'étude diminuait en fonction de la distance qui les séparait de celui-ci. De plus aux limites, on retrouve bien les valeurs initiales. Un reproche peut être fait à cette formulation qui ne respecte pas parfaitement la symétrie. Cependant dans la pratique, les écarts de symétrie restent très faible ce qui ne gène pas le bon déroulement du calcul.

V-5 Modèle Final

En incluant toutes les modifications citées précédemment, nous trouvons le modèle suivant :

1- Zone interne

$$\mu_{ti} = \rho\,(K.D.d)^2.\,|\omega|$$

avec: d = distance aux parois
K = 0.4
$|\omega|$ = rotationnel

et:

$$\Delta = 1 - \exp\left[\frac{-d\sqrt{\rho.\tau}}{A^+.\mu}\right]$$

1- Zone externe:

$$\mu_{te} = k\,.C_{cp}.F_w.F_k$$

avec:

$$F_k = \left[1 + 5.5\left(\frac{C_{kleb}\,d}{d_{max}}\right)^6\right]^{-1}$$

$$F_w = \min\left[d_m.F_m.\frac{d_m\,|\Delta U|}{F_M}\right]$$

$$F_M = \max\,[\,d.\,|\omega|.D]$$

V- 6 Formulation adimensionnelle

Nos équations générales étant composées de variables adimensionnelles, il est nécessaire de transformer notre formulation afin d'utiliser les mêmes variables.

Nous utilisons les variables suivantes :

$$U' = \frac{U}{U_\infty} \text{ et } \rho' = \frac{\rho}{\rho_\infty}$$

$$L' = \frac{L}{L_\infty} \text{ et } \mu' = \frac{\mu}{\mu_\infty}$$

On en déduit : $$|\omega'| = |\omega|\frac{L_\infty}{U_\infty}$$

- Formulation du modèle adimensionnel :

1°) Zone interne

$$\mu_{ti} = \rho'.l'^2 \,|\, \omega \,|\, .Re$$

- Fonction de Van Driest

$$D' = 1 - \exp\left[\frac{-L'L_\infty \sqrt{\rho'.\mu_t'.|\omega_3|.\rho_\infty.\mu_{t\infty}} \frac{U_\infty}{L_\infty}}{A^+ \mu_3.\mu_\infty} \right]$$

devient:

2) Zone externe

$$\mu_{te}' = \rho'.k.C_{cp}.F'_w.F'_{kleb}.Re$$

avec:

$$F'_w = \frac{d'_{max}}{F'_{max}} . U' . L'_\infty . U'_\infty$$

Un modèle de turbulence de type longueur de mélange basé sur la formulation développée par Baldwin et Lomax puis adapté aux écoulements internes tridimensionnels a été présenté. Ce modèle a été introduit dans le schéma général de résolution. Il convient maintenant de le valider sur une géométrie caractéristique. Ce dernier point fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE VI

Résultats

VI-1 Introduction

Dans ce chapitre, les résultats obtenus par le schéma numérique développé précédemment seront analysés. Ce chapitre se découpe en deux étapes, dans un premier temps, le code sera testé sur des configurations "test" pour lesquelles nous possédons des résultats expérimentaux. Pour que ces validations s'effectuent dans des géométries proches des configurations physiques réelles des turbomachines, nous avons choisi des canaux courbes de sections rectangulaire. Les écoulements qui se développent sont donc fortement tridimensionnels. Ces écoulements complexes ont été utilisés afin de définir les possibilités et les limites de ce schéma numérique. A chaque étape, nous étudierons successivement le comportement numérique du code (stabilité numérique, convergence, temps C.P.U), puis les résultats seront analysés.

Chacun des cas test présenté sera utilisé pour valider plus particulièrement, un ou plusieurs éléments du code. Dans une seconde partie, les résultats obtenus sur une grille de turbine industrielle seront analysés.

Le code utilisé pour ses résultats avait les caractéristiques suivantes: le schéma de discrétisation temporel utilisé est celui de Crank-Nicholson ($\theta_1 = 0.5$ et $\theta_2 = 0$). Ce schéma est précis au second ordre en temps et respecte les critères de stabilités définis par Beam et Warming (). De plus il est implicite de manière à augmenter la rapidité de convergence. Dans la version utilisée ici, deux modifications ont été effectuées par rapport au schéma général. En premier lieu les termes diffusifs selon ξ ont été négligés. Ceci correspond à une hypothèse de type parabolique sur le champ de vitesse. Ces termes seront introduits ultérieurement. La seconde modification concerne la factorisation approximative utilisée dans le plan transversal (cf IV-3-4-2). Cette factorisation a été supprimée. La technique de résolution utilisée en l'absence de factorisation n'a pas été présentée car elle fait partie des travaux réalisées par Benbouta [32]. Cette méthode utilise un algorithme de Gauss-Seidel avec un accélérateur de convergence développé par Sidi.

Les champs d'initialisation utilisés pour débuter les calculs étant bidimensionnels, les corrections lors des premier balayages sont très importantes. Pour faciliter la convergence et limiter les corrections, les vitesses secondaires ont été relaxées lors des premiers balayages. Leur réintroduction se fait de manière progressive sur plusieurs balayages. Ceci augmente le nombre de balayages nécessaires mais limite les itérations temporelles et permet d'assurer la convergence du schéma.

La première configuration étudiée concerne un coude de section carrée formant un angle de 90° dans sa direction longitudinale. Cette géométrie appelée coude à 90° a été étudiée expérimentalement par Taylor et Whitelaw [32,33 et 34]. Nous disposons ainsi de résultats détaillées du champ de vitesse dans différentes sections du canal. Le régime étudié est incompressible et turbulent, ceci nous permettra de valider le calcul du champ de vitesse et le comportement du modèle de turbulence. Cette géométrie, de par sa courbure longitudinale, génère de forts écoulements secondaires qui seront plus particulièrement analysés. Une étude sur l'influence du maillage sera présentée parallèlement.

La seconde configuration concerne un autre coude de section rectangulaire présentant également un angle de 90° entre l'entrée et la sortie. Ce coude conçu et étudié par Stanitz ,Osborn et Mizisiw [37,39] présente un rapport de section de deux entre l'entrée et la sortie. Les mesures expérimentales ont été effectuées sur le champ de pression statique pariétal et sur le champ de pression d'arrêt dans le plan de sortie. Cette étape nous permettra donc de valider plus particulièrement, le calcul du champ de pression statique pour des régimes compressibles et incompressibles.

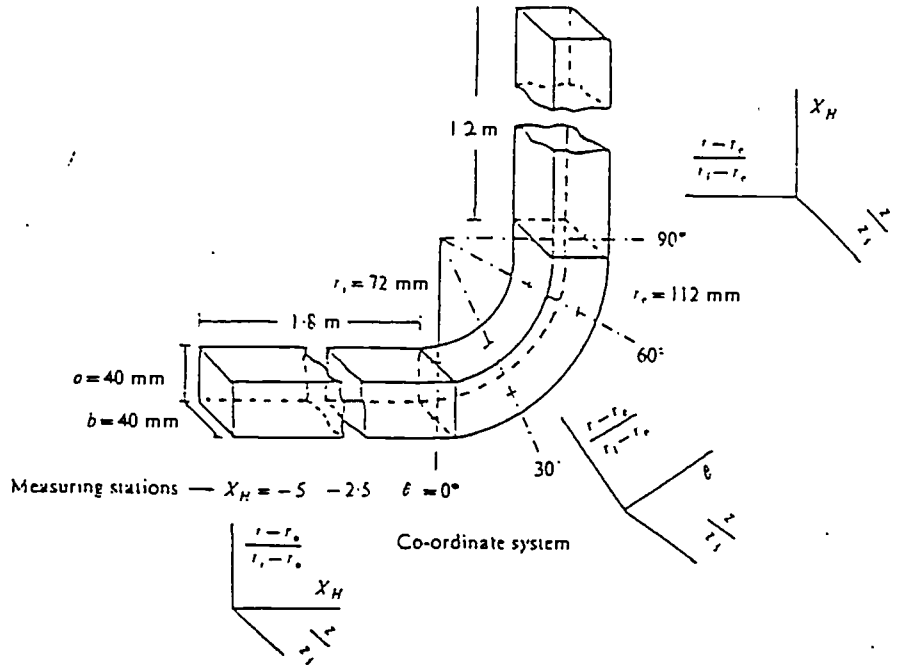
La dernière application concerne le calcul de l'écoulement dans une grille rectiligne de turbine. Cette géométrie nous permettra d'analyser le comportement du code de calcul dans une configuration réelle de turbomachines.

VI-2 Coude à "90°"

VI-2-1 Caractéristiques géométriques

La figure 1 représente le coude défini par Taylor et all [33] avec ses principales caractéristiques géométriques. Il s'agit d'un coude de section carré formant un angle de 90° dans sa direction longitudinale. Les caractéristiques géométriques et aérodynamiques sont les suivantes :

Rayon de courbure moyen:	R = 0,092M
Diamètre hydraulique:	Dh = 0,004 m
Vitesse débitante:	Ve = 1,01 m/sec.
Reynolds:	Re = 40.000

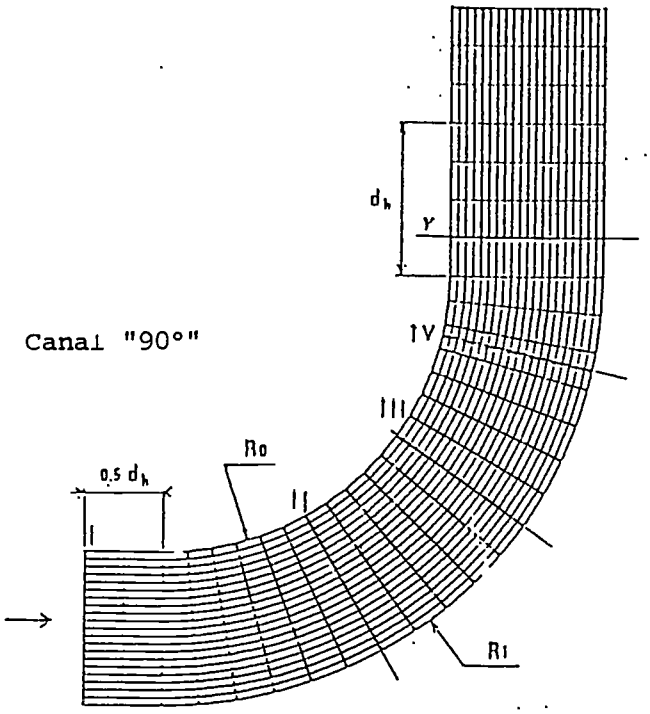


- Figure 1 -

Le Reynolds calculé à partir du Diamètre hydraulique et de la vitesse débitante est de 40.000.

La figure 2 représente une coupe longitudinale du coude avec le maillage utilisé. Ce maillage comporte 30 plans dans la direction longitudinale. Dans chaque plan, il y a 21 x 21 points de discrétisations répartis régulièrement soit un total de 13.230 points de calcul.

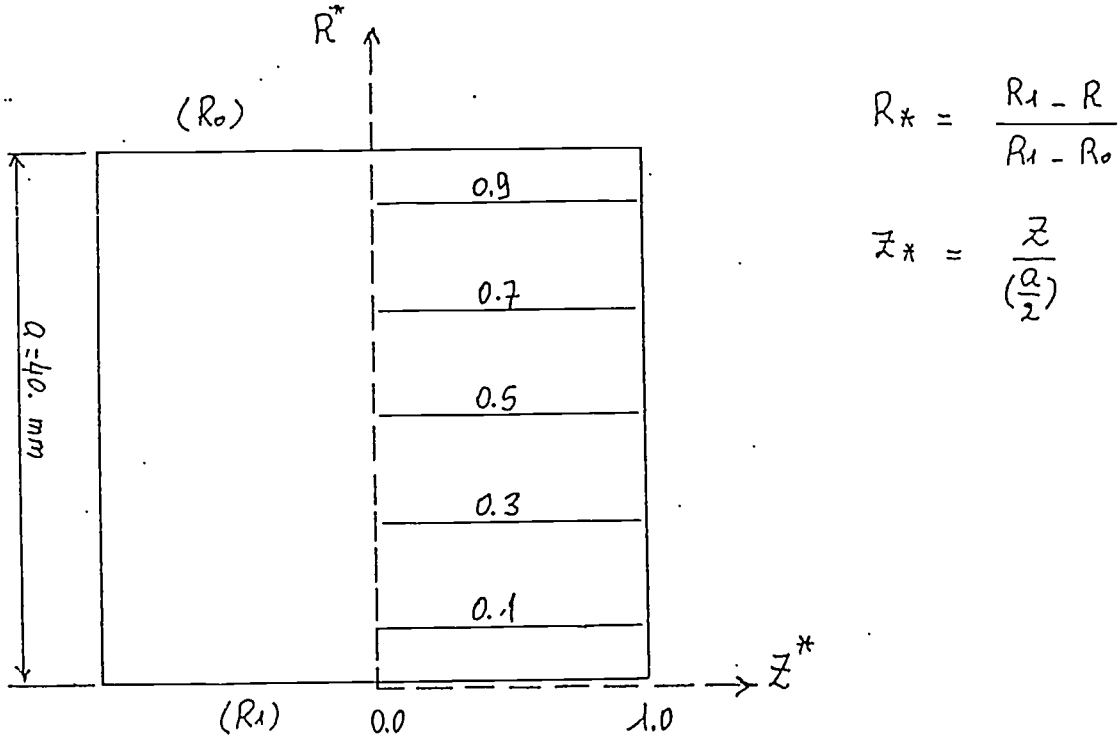
Les plans de mesure notés I, II, II, et IV sont positionnés sur la Figure 2. Les mesures du champ de vitesse ont été effectuées dans chacun de ces plans selon cinq lignes à rayon constant (Figure 3).



Maillage avec les plans de mesure

- Figure 2 -

Le rayon noté R*=0.1 est situé prés de l'intrados et, celui noté R*=0.9, se trouve coté extrados. La ligne Z*=0 est au centre de la section, celle située à Z*=1 est sur la paroi latérale. L'écoulement étant symétrique par rapport à la ligne Z*=0, les mesures ont été effectuées sur une seule moitié du canal. Les comparaisons entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux se feront dans ces plans.



- Figure 3 -

VI-2-2 Initialisation et analyse de la convergence

Le champ de pression statique à été initialisé à partir d'un calcul potentiel bidimensionnel. Un gradient longitudinal a été ajouté pour les pertes. En l'absence de données expérimentales sur le champ de pression statique aval, ce gradient à été approximé et introduit linéairement dans chaque station de calcul. Le champ de vitesse initial a été obtenu à partir des mesures de la station I extrapolées ensuite dans tout le canal.

Les calcul ont été effectué sur un ordinateur Alliant FX80 en mode vectoriel monoprocesseur. La convergence a été obtenue après 40 balayages. Le temps C.P.U nécessaire a été de 6 heures 49 minutes soit 10 minutes 1" secondes par balayages. On peut noter que 40 balayages apparaissent excessifs, dés le 30éme, les corrections deviennent négligeables. Les 10 derniers balayages ont été fait à titre de validation, pour s'assurer de la convergence du schéma. Les critères pour définir la convergence sont: le niveau de correction de pression statique dans chaque plan de calcul et la

stabilité du débit d'une part en chaque plan du canal et, d'autre part d'un balayage sur l'autre.

La figure 4 représente le pourcentage de correction de pression statique maximale dans chaque plan par rapport à la dynamique.

Lors des premiers balayages, les corrections sont importantes (jusqu'à 30% pour le premier balayage), ces fortes corrections sont nécessaires pour corriger le champ de pression d'initialisation bidimensionnel. On peut noter que deux pics de corrections apparaissent au 1er balayage pour les plan 5 et 22 qui correspondent aux changements de courbure. Au 20eme balayage, ces corrections deviennent inférieures tandis qu'au 40eme, elles sont inférieures à 1%. Le calcul est alors considéré comme convergé.

La figure 6 permet d'analyser la convergence sur le débit en chaque plan pour différents balayages. Le débit étant une inconnue du problème, sa valeur est recalculée en chaque plan. Cette valeur doit cependant être constante dans tout le canal et d'un balayage sur l'autre. Si d'importantes variations de débit sont à noter lors des premiers balayages, on s'aperçoit que dés le 20eme, ses variations deviennent négligeables. Au 40eme balayage, le débit est complètement stabilisé. Le débit étant une valeur globale, sa convergence rapide (supérieure à la convergence sur la pression statique) doit être attribuée aux corrections monodimensionnelles qui permettent un transfert rapide des informations imposées à l'amont et à l'aval. A l'inverse, les corrections de pression statique sont des valeurs locales qui nécessitent un temps de convergence plus important car la transmission des effets tridimensionnels dans tout le canal, s'effectuent plus lentement .

On peut cependant noter que le débit atteint à convergence est différent du débit initial (balayage 1 , plan 1) calculé à partir des mesures expérimentales. Cet écart tient à deux raisons. Tout d'abord, il faut noter que la pression statique aval, en l'absence de données expérimentales, a été extrapolée. Un faible écart sur cette variable imposée en sortie peut modifier le débit. Le second point concerne le champ de vitesse, les couches limites pariétales étant surrestimées, un déficit apparait logiquement sur le débit. Ce second point sera détaillé ultérieurement.

Pour vérifier la stabilité de la solution obtenue, les calculs ont été poursuivis sur 20 balayages supplémentaires Aucun écart de solution n'ayant été constaté, le niveau de convergence peut être considéré comme stable. En conclusion la convergence du schéma numérique peut être considéré comme correcte. Les corrections de pression statique et de vitesse (ou de débit), importantes lors des premiers balayages sont devenue négligeables.

VI-2-3 Analyse des résultats

Le maillage utilisé dans le plan transversal (21 x 21) ne permet pas de prétendre obtenir une description précise des couches limites pariétales. cette validation du champ de vitesse se limitera à un aspect qualificatif qui doit pouvoir reproduire les principales tendances de l'écoulement.

Dans un premier temps, les comparaisons entre les résultats numériques et les mesures expérimentales des champs de vitesse longitudinales et transversales seront présentées. Ensuite, les champs de pression statique et les vecteurs vitesse au centre de l'écoulement seront analysés.

Analyse de l'écoulement

L'écoulement qui se développe dans ce coude, présente certaines caractéristiques qu'il convient de préciser. Tout d'abord, il faut noter l'existence de forts écoulements secondaires (jusqu'à 45% de la vitesse longitudinale). De plus, la conduite étant de dimension restreinte, ces écoulements influent sur le champ longitudinal. Au centre du canal (Z*=0), les écoulements secondaires provoquent une sous déflexion des vitesses longitudinales, un transfert de quantité de mouvement s'effectue de l'extrados (R*=0.1) vers l'intrados (R*=0.9) . Il en résulte une couche limite plus épaisse coté extrados et plus faible coté intrados. Prés des parois latérales, la présence des tourbillons visqueux provoque, à l'inverse, une sur déflexion importante coté extrados. Ceci induit une couche limite très faible dans les coins coté extrados. Au contraire, coté intrados, bien que la sur déflexion soit plus faible, la couche limite s'épaissie.

Profils de vitesse

Les profils de vitesse longitudinale sont regroupés sur les figures 6, 8 et 10 respectivement pour les plans II, III et IV. Les vitesses transversales se trouvent sur les planches 7,9 et 11. Globalement, on retrouve les principaux mécanismes de cet écoulement à l'exception des écoulements secondaires qui sont sous évalués dans la courbure (Figure 9). Ainsi, le niveau de vitesse longitudinale au centre de la section sont correctement reproduits dans le plan II (Figure 6). L'accélération sur l'intrados a été correctement captée. Ceci est à mettre en relation avec le bon niveau des écoulements secondaires dans ce même plan (Figure 7).

A l'inverse, dans le plan III où les vitesses secondaires sont sous évaluées (Figure 9), on note des écarts sur les vitesses longitudinales coté extrados (Figure 8e). Ce profil est incorrect au centre (Z*=0) car on sous évalue le transfert de l'extrados vers l'intrados ce qui provoque une vitesse excessive et donc réduit l'épaisseur de la couche limite. Dans le coin, la sur-déflexion de l'écoulement est insuffisante pour diminuer la couche limite. Dans le plan IV, bien que les vitesses secondaires soient mieux reproduites (Figure 11), le phénomène constaté sur les vitesses longitudinales s'accentue (Figure 10). L'évolution selon Z* ne reproduit pas correctement le gradient de vitesse.

Sur les couches limites pariétales, des écarts significatifs apparaissent. Ces écarts semblent principalement imputables au trop faible nombre de points de discrétisations près des parois qui ne permettent pas de reproduire les gradients locaux. Ce déficit de vitesse près des parois doit être mis en relation avec la perte de débit enregistrée lors de l'analyse de la convergence.

En conclusion, nous pouvons noter que si les principaux phénomènes sont correctement captés, les écoulements secondaires on été sous estimés. A l'inverse, les couches limites sont largement surestimées. Pour expliquer ces écarts, deux problèmes se superposent: l'insuffisance du raffinement du maillage prés des parois empêche la capture d'importants tourbillons et étale fictivement l'épaisseur de la couche limite sur au moins, les deux premières mailles. Ceci est particulièrement notables dans les coins où il y a un cumul de la viscosité dans deux directions.

VI-2-4 Etude sur un maillage raffiné

Suite au résultats obtenus, cette même configuration a été calculée en utilisant un maillage plus raffiné. Le nouveau maillage comprend le même nombre de points dans la direction longitudinale (Figure 12), le raffinement a porté sur les directions transversales qui comptent maintenant 41*41 points (Figure 13). L'objectif avec ce nouveau maillage consiste à étudier l'influence du raffinement sur le schéma et plus particulièrement à obtenir une meilleure description des écoulements secondaires. Comme précédemment, les résultats présentés ont été obtenus après 40 balayages pour un niveau de convergence identique. Les planches 14,15 et 16 présentent les profils de vitesses longitudinales dans les plans II,III et IV. Les comparaisons s'effectuent avec les mesures expérimentales et avec les résultats obtenus sur le maillage précédent. Les planches 17,18 et 19 présentent les vitesses transversales obtenues dans ces mêmes plans.

Dans un premier temps, on peut constater une nette augmentation des vitesses secondaires (Figures 17,18 et 19) dont les niveaux deviennent conformes aux mesures expérimentales. Ceci est principalement net dans le plan III (Figure 18) où un fort déficit avait été constaté lors du premier calcul. Ce bon niveau de vitesse agit sur le champ longitudinal et notamment sur l'intrados (R*= 0.9) où l'évolution selon Z* du profil se trouve maintenant reproduit (Figures 15e et 16e). L'apparition de ce phénomène en présence de forts écoulements secondaires montre la forte dépendance du champ longitudinal envers les tourbillons secondaires, et la nécessité d'un traitement correct de ces tourbillons pour effectuer une simulation réaliste de l'écoulement. Il faut cependant préciser que si l'évolution selon Z* a été captée, un déficit apparait encore au centre (Z*= 0) dans les plans III et IV. Ce déficit correspond à une prépondérance des termes convectifs sur les termes diffusifs, il est également sensible sur les vitesses transversales dans le plan IV (Figure 19) où l'on note coté intrados, des vitesses V légèrement excessives. Cette sous estimation des effets visqueux semble imputable au modèle de turbulence qui ne peut gérer les gradients de vitesse à l'extérieur des zones pariétales et ne tient donc pas compte des fluctuations selon Z* hors des parois latérales. De plus, malgré l'augmentation du nombre de points de calcul, ce nombre reste encore insuffisant dans les couches limites pour pouvoir calculer avec précision les

gradients locaux indispensables pour une évaluation précise de la viscosité turbulente.

Pour visualiser l'aspect fortement tridimensionnnel du champ de vitesse longitudinal, les vecteurs vitesse ont été tracés pour différents plans longitudinaux. La figure 20 représente les vecteurs vitesses au centre du canal, dans le plan de symétrie et la Figure 21 dans un plan proche d'une paroi latérale. On remarque au centre de l'écoulement, coté intrados, un fort déficit de vitesse en sortie du coude. Ce déficit n'existe pas sur la figure 21 où, au contraire on note une déviation des vecteurs vitesse de l'extrados vers l'intrados. Cette déviation est la conséquence de la présence des tourbillons prés des parois latérales.

Champ de pression statique pariétal

Sur la figure 22, les isovaleurs du champ de pression statique pariétal sont reproduites.

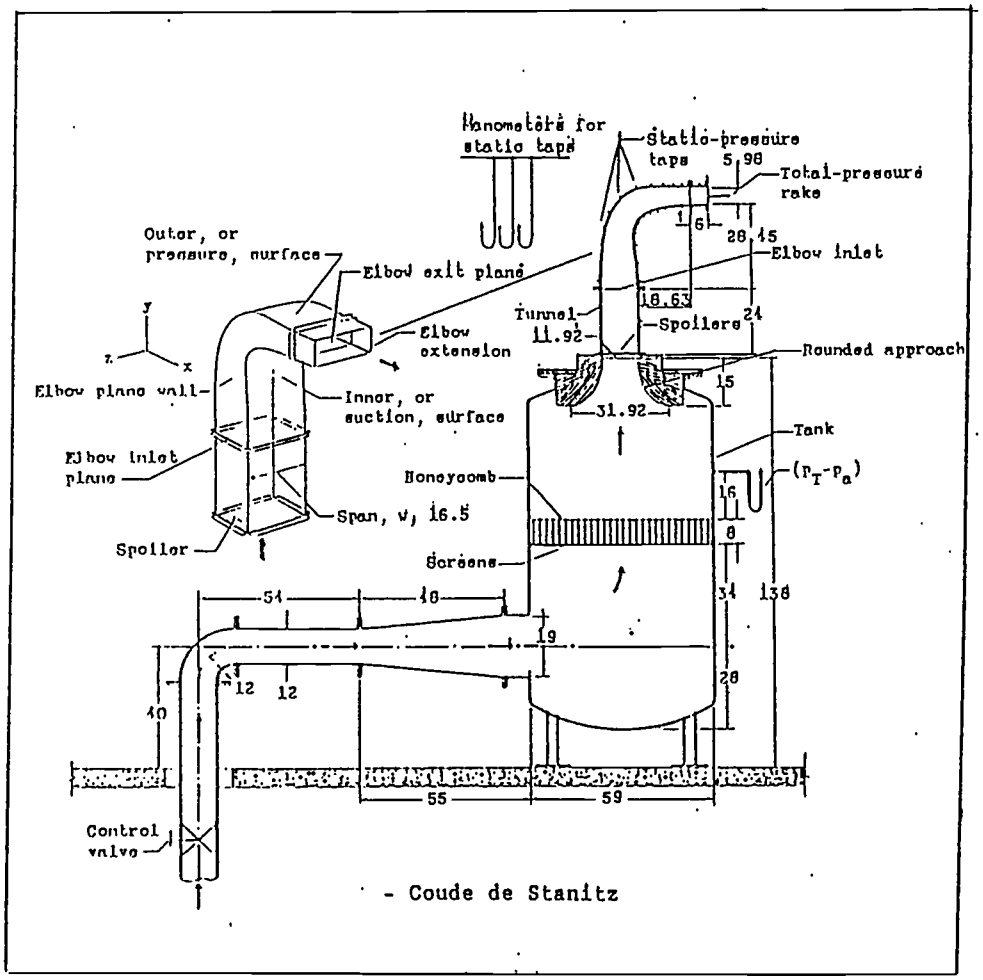
Sur cette vue tridimensionnelle du coude, on peut noter les forts gradients de pression statique entre l'intrados et l'extrados. Sur l'extrados, le champ de pression statique, bidimensionnel à l'entrée du canal, prend une structure tridimensionnelle dans la courbure. Ceci est à relier à l'importance des vitesses secondaires existantes dans cette zone. En sortie l'écoulement reprend sa structure bidimensionnelle. On peut noter la bonne restitution de l'ellipticité de la pression statique. En effet, les gradients apparaissent avant le début de la la courbure (jusque dans le plan d'entrée).

VI-3 Coude de Stanitz

Le choix de la configuration utilisée pour valider le code a été faite en fonction d'impératifs que nous allons détailler maintenant. En premier lieu, la configuration devait permettre le calcul d'écoulement compressible mais également incompressible afin de valider sur un même cas les deux modes de fonctionnement de notre modèle. Pour permettre cette validation, il était nécessaire de posséder des mesures expérimentales précises de l'écoulement. Jusqu'à présent, notre méthode a été validée sur des géométries où nous possédions des résultats expérimentaux détaillés du champ de vitesse. Il était donc intéressant de choisir une expérience

détaillant le champ de pression statique et éventuellement de pression totale. Enfin, ce cas test devait être représentatif des écoulements rencontrés en turbomachines, c'est-à-dire possédant de fortes courbures pour générer de forts écoulements secondaires.

Toutes ces considérations nous ont amené à porter notre choix sur l'expérience réalisée par Stanitz et al. [37]. Les mesures ont porté sur un coude de section rectangulaire (41.9 x 30.3 cm à l'entrée) formant un angle de 90° dans la direction longitudinale (Figure 23).



- Figure 23 -

Le rapport de section entre la sortie et l'entrée du canal est de 2. Il a été dessiné par Stanitz [39] à partir d'un calcul potentiel bidimensionnel de telle sorte qu'aucun décollement n'ait lieu. Diverses mesures ont été effectuées pour deux valeurs de pression statique correspondant à des nombres de Mach en sortie de M = 0.26 et M = 0.4 Les mesures portent

principalement sur la pression statique sur les parois côté intrados et extrados pour le Mach M = 0.26 et sur le champ de pression totale en sortie du coude pour le Mach M = 0.4.

En dernier lieu, il faut signaler que ce coude a été utilisé à diverses reprises pour valider des codes de calcul [36,40]. Aussi nous avons la possibilité de comparer nos résultats à ceux obtenus par d'autres codes.

VI-3-1 Caractéristiques géométriques

Le maillage utilisé est composé de 50 plans transversaux (figure 25) dans chacun de ces plans, il y a 17 x 17 points de discrétisation (Figure 25) soit un total de 14 450 points de calcul.

Les calculs ont été effectués sur un ordinateur Alliant FX80 en monoprocesseur et en mode vectoriel. Trois conditions d'écoulements différentes ont été imposées. Ces conditions correspondent à des nombres de Mach de sortie M = 0.26, M = 0.4 et M = 0.8. Les deux premiers nombres de Mach correspondant aux conditions expérimentales définies par Stanitz . Ces résultats vont maintenant être détaillés.

VI-3-2 Cas test n°1 - Ms = 0.26

Dans cette configuration, l'écoulement reste incompressible. Il est néanmoins intéressant de faire un calcul afin de connaître le comportement du code dans cette nouvelle géométrie.

Avant de débuter le calcul, il convient de déterminer les conditions à fixer à l'entrée et à la sortie du domaine. Notre programme nécessite la connaissance du champ de pression d'arrêt dans le plan d'entrée ainsi que le champ de pression statique dans le plan de sortie. Dans l'expérience, seul les niveaux de pression statique à l'entrée et à la sortie sont connue. Le champ de pression statique a été imposé uniforme. Pour déterminer la pression d'arrêt, la connaissance du profil de vitesse expérimentale eut été nécessaire dans tout le plan d'entrée. Celui-ci a donc été extrapolé en fonction de données bidimensionnelles. La vitesse maximale à l'entrée, la masse volumique et la température ont été imposées. Les conditions du calcul sont donc les suivantes :

En entrée :

Pression totale	Pt_0 =	106 280 pa
Vitesse	Ve_{max} =	44 m/s
Masse volumique	ρ_e =	1.25 Kg/m^3
Température	Te =	285°K

En sortie :

Pression statique	Ps_e =	101 450 pa

40 balayages amont-aval ont été réalisés. En fait, le calcul était convergé dès le 30 ème balayage, les corrections de pression étant toutes inférieures à 1 %. Le temps CPU nécessaire a été de 4h 53 minutes soit 7 minutes 05 secondes par balayage.

Les critères de convergence utilisés sont le niveau de correction de pression et de débit. La figure 26 montre le pourcentage de correction de pression effectué dans chaque plan de calcul. Ce pourcentage est pris par rapport à la pression dynamique.

Durant le premier balayage, les corrections sont très importantes (jusqu'à 80 %). Ceci provient du champ d'initialisation bidimensionnel de la pression statique. Dès le 10ème balayage les corrections ne dépassent pas 2 %. Au 40 ème, elles sont inférieures à 0,5 %, le calcul est donc parfaitement convergé.

La convergence sur le débit (figure 27) est encore plus rapide. Si des écarts importants existent au premier balayage (12 %) entre le 1er et le dernier plan, ils deviennent négligeables dès le 3ème balayage. Cette rapidité de convergence s'explique par les corrections monodimensionnelles qui permettent d'ajuster le débit en permanence en fonction des conditions imposées à l'amont et à l'aval du domaine.

La figure 28 représente les courbes d'isobars statique selon une coupe longitudinale dans le plan de symétrie ($Z^* = 0,5$). On observe sur le coté extrados, les variations de pression qui se produisent bien avant le

début de la courbure. Les effets elliptiques liés à la pression sont donc clairement mis en évidence sur l'intrados, ces forts gradients apparaissent plus loin en aval du domaine, dans la deuxième partie du coude (entre 45° et 90° de déviation moyenne). Ce phénomène peut être observé également sur les figures 29 et 30. Ces figures représentent les coefficients de pressions statiques pour différentes ordonnées selon Z* exprimé comme : ($Ps= P_s - P_{atm}/P_{o1} - P_{atm}$) où P_{atm} et P_{o1} représentent respectivement la pression atmosphérique et la pression totale à l'entrée. Sur ces figures, les symboles X représentent les valeurs expérimentales mesurées par Stanitz et all (). Ces comparaisons montrent une bonne concordance entre les valeurs calculées et l'expérience. Le gradient de pression transversal est en particulier correctement reproduit.

Des différences apparaissent en sortie. Ces écarts s'expliquent par une mauvaise approximation de la pression statique à l'aval. En effet, pour imposer une pression statique uniforme à l'aval, il a été nécessaire d'allonger le canal afin d'obtenir, dans le dernier plan de calcul un écoulement peu perturbé par les effets secondaires. Ceci nous a obligé à extrapoler la valeur de la pression statique. Cependant, les tourbillons créés dans la zone courbe du canal sont convectés dans la partie aval rectiligne ; la condition de pression statique uniforme est donc incompatible avec le champ de vitesse. Ceci provoque une oscillation spatiale du champ de pression statique dans la partie rectiligne située à l'aval. Pour corriger ce défaut, il faut changer la condition sur la pression statique supposée uniforme en sortie et la remplacer par une dérivée normale nulle dans le dernier plan ainsi qu'une valeur moyenne de P_s imposée pour régler le débit de masse. Cette nouvelle condition pourra être imposée ultérieurement; Les figures 31, 32, 33 et 34 présentent la pression statique mesurée et calculée sur les parois du canal, du côté extrados et intrados respectivement. Alors que l'accord entre les mesures et les résultats du calcul est très satisfaisant du côté de l'intrados (figure. 33), il apparaît, entre les deux séries de résultats, un écart du côté de l'extrados qui s'accroît dans la partie rectiligne aval du canal. Ce phénomène traduit, encore une fois, le défaut de la condition à la limite aval qui élimine tout gradient transversal assez loin en amont.

La figure 35 représente les courbes d'iso pression d'arrêt pour une coupe transversale dans le plan de sortie (plan 40). La pression d'arrêt est

définie par $P = (P_{to} - P_t)/P_{to} - P_o)$ ou P_{To} représente la pression d'arrêt amont P_a la pression atmosphérique et Pt la pression d'arrêt du point considéré. Les pertes se situent principalement près des parois latérales, dans la couche limite. Nous observons des couches limites très épaisses ; ceci est dû au maillage transversal (Figure 25) qui est trop lâche pour reproduire correctement cette zone. On perçoit nettement, côté intrados les torsions des isobares liées aux tourbillons.

Ces tourbillons sont également visibles sur la figure 36. Leur position semble conforme à la visualisation expérimentale présentée figure 37. Les résultats recoupent donc correctement les mesures expérimentales ; cependant, pour obtenir des validations plus précises, il faudra utiliser un maillage plus fin surtout au niveau des plans transversaux.

VI-3-3 Cas test n°2 - Ms = 0.4

Les conditions aux limites imposées ont été définies de façon identiques au cas précédent ($M_s = 0.2$). Elles sont données ci-dessous :

En entrée :

Pression totale	$Pt_o =$	112 762 pa
Vitesse	$Ve_{max} =$	75 m/s
Masse volumique	$\rho_e =$	1.25 Kg/m^3
Température	Te =	285°K

En sortie :

Pression statique	$Ps_e =$	101 640 pa

Les résultats que nous allons présenter sont ceux du 40ème balayage. Le temps CPU nécessaire a été de 5 heures 18 minutes soit 7 minutes 50 secondes par balayage. Les figures 38 et 39 montrent le comportement du calcul vers la convergence au niveau de l'erreur de pression et sur le débit. les évolutions de pression statique (figure 40) sont identiques à celle déjà présentées pour une nombre de Mach = 0.26. La figure 41 représente dans le même plan, les évolutions de masse volumique. On

observe nettement les effets de compressibilité. Les mesures expérimentales ont été obtenues pour une coupe transversale en sortie (Plan 41). La figure 42 représente, dans ce plan, les iso-valeurs de pression d'arrêt. La figure 43 permet de les comparer aux iso-valeurs calculées. Dans les deux cas, les pertes sont concentrées près des parois excepté sur l'intrados où apparaissent des torsions d'isobares liées aux écoulements secondaires. par rapport à l'expérience, les pertes calculées sont plus éloignées de la paroi. Ceci est lié au maillage utilisé dans les plans transversaux qui est trop lâche pour reproduire correctement la couche limite. Cependant, les écoulements secondaires sont correctement positionnés. Les figures 44a et b représentent les vecteurs vitesses liés aux écoulements secondaires calculés par un code Euler (44a) et Navier-Stokes (44b) d'E.D.F . Ces courbes ont été extraites de la référence [40]. Ces écoulements sont comparables à ceux obtenus par notre code (44c).

VI-3--3-1 Etude sur un maillage raffiné

Dans cette même configuration,des calculs ont été effectués sur un maillage plus fin. Ce maillage, présenté sur les figures 45 et 46 comporte toujours 50 plans transversaux mais, chaque plan comporte maintenant 33*33 points de discrétisations.

Les résultats présentés ont été obtenus après 40 balayages. La figure 47 présente les courbes iso-pression statique sur la frontière du domaine d'étude. Sur cette vue, on peut noter les forts écarts de pression statique sur l'extrados et principalement dans les coins ce qui dénote l'importance des tourbillons. Le variation de masse volumique dans le plan de symétrie sont représentées sur la figure 48 ce qui démontre la nature compressible de l'écoulement.

Enfin, la figure 49 présente les isovaleurs de pression d'arrêt dans le plan de sortie. Cette figure est à mettre en paralèlle avec la figure 43 sur les mesures expérimentales dans ce même plan. Avec ce nouveau maillage, on note que la largeur de la couche limite devient comparable à celle mesurée expérimentalement. Dans le coin coté intrados, on remarque toujours la présence d'une survitesse absente des mesures expérimentales. Sur l'extrados, si la structure complexe des profils expérimentaux n'est pas reproduite, la localisation des pertes a été reproduite de manière

satisfaisante. Comme précédemment, l'utilisation d'un maillage plus fin a donc permis une meilleure définition des structures complexes de l'écoulement tout en gardant un bon comportement numérique.

VI-3-4 Cas test n°3 -Ms = 0.8

Malgré l'absence de données expérimentales, il nous est apparu intéressant de connaître le comportement du code pour nombre de Mach plus élevé. les données ont été déterminées afin d'obtenir un Mach en sortie $M_s = 0.8$. On impose :

En entrée :

Pression totale	$Pt_o =$	149 460 pa
Vitesse	$Ve_{max} =$	138 m/s
Masse volumique	$\rho_e =$	1.25 Kg/m3
Température	Te =	285°K

En sortie :

Pression statique	$Ps_e =$	102.600 pa

Les résultats ont été obtenus après 40 balayages. Le temps CPU nécessaire était de 8 heures 16 minutes. Le niveau de convergence (figure 45) est identique au cas précédent. La figure 50 montre les fortes variations de masse volumique au niveau du plan de symétrie ce qui démontre la forte compressibilité de l'écoulement pour ce nombre de Mach

VI-4 Grille de turbine

L'application traitée concerne le calcul de l'écoulement dans un grille rectiligne de turbine . Cette configuration a fait l'objet d'une étude expérimentale à l'Ecole Centrale de Lyon [41]. Cette étude a permis notamment de mettre en évidence l'importance des effets liés aux écoulements secondaires. Notre objectif ici, a été de tester le code dans une configuration typique des turbomachines. Le maillage utilisé comporte 38 points dans la direction longitudinale et 17 points équidistants dans les deux directions transversales (Figure 51). Des conditions de périodicité spatiales

ont été appliquées en amont et en aval des aubages. Cependant, pour faciliter la convergence en regard du nombre de point de discrétisation, le bord d'attaque et le bord de fuite ont été amincis. Notre objectif, sur cette configuration se limitera à un aspect qualitatif, l'influence du maillage sur la précision des résultats ayant été précédemment démontré, nous nous limiterons à montrer les capacité de la méthode dans une configuration réelle de turbomachine. Une étude plus quantitative avec confrontations expérimentales figurant dans le référence [13].

VI-5-1 Conditions aérodynamiques

Les aubages présentent une hauteur L= 0,274 mètre et une corde de 0,163 mètre. Le pas interaubes est de 0.141 m. Les conditions aérodynamiques sont les suivantes: à l'amont de la grille, le nombre de Mach est égal à 0.044 et le nombre de Reynolds (calculé à partir de la corde et de la vitesse extérieure) est de 165 000.

VI-5-2 Résultats

Les résultats présentés ont été obtenus après 60 balayages effectués sur un Alliant FX 80.

La figure 52 présente la répartition de pression statique sur l'intrados et l'extrados de l'aubages. Ont peut noter la forte augmentation de pression statique sur l'intrados, au niveau du bord d'attaque qui a été reproduite malgré le faible nombre de point de discrétisation dans la direction longitudinale. Cette variation est cependant dilatée dans la direction longitudinale du fait de l'amincissement du bord d'attaque. Au bord de fuite, on remarque une accélération dans les trois derniers plans précédent la fin de l'aubages. Cette accélération à déjà été constaté sur cette géométrie lors des calcul de l'O.N.E.R.A [42]. Après le bord de fuite, il se produit une recompression dans le sillage. Les courbes iso-pression statique dans sur les frontières extérieurs du domaine, sont présentées sur la figure 53 et 54. La figure 54 présente les variation de pression statique sur l'extrados ainsi qu'une de deux parois latérales. On note sur l'extrados et la paroi latérale, l'influence du bord d'attaque sur le champ de pression statique qui ressent l'influence de l'aubage plusieurs plans en amont. De plus, on peut remarquer sur l'extrados, les courbures des isobars

principalement prés des coins formés entre l'aubage et la paroi. Ceci traduit l'influence des écoulements secondaires localisés dans ces zones. A l'inverse, sur l'intrados, les isobars restent pratiquement constante sur toute la largeur de l'aube. Ces constatations sont conformes aux mesures expérimentales effectuées par Onvani [41].

Les figures 55 et 56 représentent les vecteurs vitesse obtenus respectivement dans le plan de symétrie et dans un plan situé prés d'une paroi latérale. Les échelles de longueur étant propre à chaque tracé, les vecteurs représentés ne donne qu'une indication sur le module de la vitesse relative au tracé considéré. On peut cependant noter d'importantes différences entre les champs de vitesse de ces deux plans. Dans le plan situé prés de la paroi latérale, on remarque, au bord d'attaque, une déviation des vecteurs vitesses sur l'extrados vers l'intrados. Cette déviation qui n'est pas sensible au centre du canal, est la conséquence de la présence des écoulements secondaires. Au bord de fuite, la forte déviation de la vitesse de l'extrados vers l'intrados. Cette fuite, déjà sensible au niveau du plan de symétrie, est accentuée par le présence de deux tourbillons contrarotatifs. Ce phénomène, est conforme aux mesures expérimentales et aux calcul menés sur cette même grille de turbine par Cambier et Escande [42]. La figure 57 présente la projection des vecteurs vitesses dans un plan situé juste après le bord de fuite. Ce plan ayant un angle de 63° par rapport à la direction longitudinale, les vecteurs qui le composent représentent les vitesses contravariantes. Coté extrados, on remarque une sur-déflexion déjà visible sur le planches 55 et 56. Cette déviation s'accentue logiquement prés de la paroi latérale du fait de la présence du tourbillons de passage.

La figure 58 montre les iso pression d'arrêt dans ce même plan. Tout d'abord, il faut noter que les isovaleurs restent perpendiculaire aux parois latérales ce qui recoupe les calcul fait par l 'ONERA (figure 58) malgré l'utilisation de nombres de Mach différents. Une zone d'accumulation de pertes apparaît coté extrados, dans le sillage.

En conclusion, les résultats obtenus sur la grille de turbine apparaissent, malgré l'utilisation d'un maillage grossier, satisfaisant. Les phénomènes physiques sont correctement reproduits aussi bien pour le champ de pression statique que pour les champ de vitesse. Il convient dans

l'avenir d'utiliser un maillage plus précis pour permettre une validation détaillés de l'écoulement.

VI-6 Conclusions

Le schéma numérique développé dans la première partie a été utilisé pour calculer différentes géométries présentant des caractéristiques de turbomachines.

Un coude à "90°" a tout d'abord été calculé. Les résultats obtenus montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux sur le champ de vitesse. L'utilisation dans une même géométrie de différents maillage a permis de mettre en évidence l'influence du raffinement sur les résultats. L'analyse du champ de pression statique a montré un bonne restitution des effets elliptiques liés à cette variable.

Le coude de Stanitz a ensuite été testé pour différents régimes compressibles et incompressibles. La pression statique pariétale obtenue est en accord avec les mesures expérimentales. Pour le Mach de 0.4, les valeurs du champ de pression d'arrêt calculées ont montré un accord satisfaisant avec les mesures.

Enfin, une grille de turbine a été calculée. Malgré l'utilisation d'un maillage grossier, les résultats obtenus permettent de mettre en évidence les principaux phénomènes physiques de cet écoulement.

conclusions

VII Conclusions

Un algorithme numérique basé sur les équation de Navier-Stokes a été développé pour simuler les écoulements tridimensionnels dans les canaux interaubes de turbomachines.

La méthode procède par résolutions successives dans des domaines restreints limités à deux plans. Dans chaque domaine restreint, une procédure itérative pseudo temporelle résoud les équations de quantité de mouvement et d'énergie puis, une équation de correction de pression statique et ceci, jusqu'à convergence temporelle. Le domaine complet est parcouru de l'amont vers l'aval puis de l'aval vers l'amont jusqu'à convergence.

Les équations de quantité de mouvement et d'énergie écrites dans un repère cylindrique ont été mises sous une forme adimensionnelle. Un traitement statistique a été appliqué pour introduire la turbulence. Ensuite, les équations sont transformées dans un repère curviligne général. Une équation de correction de pression statique a été construite, en prenant la divergence des équations de quantité de mouvement, de manière à respecter la continuité locale de la masse. Cette équation a été formulée pour des écoulements compressibles et incompressibles.

La procédure de résolution du champ de vitesse et de température utilise le schéma de Beam et Warming discrétisé en temps à l'aide de la formule générale de Pade. Les discrétisations utilisées pour les dérivées temporelle et spatiale ont été détaillées. L'équation de correction de pression est résolue par une technique particulière couplant une méthode intégrale sur la frontière (Boundary Element Method) puis une technique itérative bidimensionnelle à l'intérieur du domaine. Pour permettre la conservation des conditions aux limites, un système d'équations monodimensionnelles exprimant la conservation de la pression d'arrêt moyenne à l'amont et du débit , qui est une inconnue du problème, a été implantée.

Pour prendre en compte la turbulence, un modèle de type longueur de mélange a été développé. Ce modèle, inspiré des travaux de Baldwin et Lomax, a été adapté aux écoulements tridimensionnels internes.

Une échelle de longueur capable de prendre en compte la proximité de plusieurs parois à été construite.

Cette méthode a été appliquée sur différentes géométries. Tout d'abord, dans une série de canaux courbes où, des confrontations avec des résultats expérimentaux ont permis de valider différentes parties du code. Ensuite, une grille de turbine a été étudiée. Pour chacune de ces configurations, un soin particulier a été apporté pour analyser le comportement numérique et s'assurer de la convergence. L'utilisation de champs bidimensionnels pour l'initialisation crée de fortes corrections lors des premiers balayages, qui peuvent dans certains cas gêner la convergence du schéma temporel. Pour assurer cette convergence lors des premiers balayages, les vitesses secondaires ont été relaxées. Leur réintroduction s'effectuant progressivement au cours des balayages. Dans l'avenir, l'utilisation de champs d'initialisation plus réalistes devrait permettre d'améliorer le comportement numérique de la méthode.

Pour le coude à "90°", les résultats obtenus montrent un bon accord avec les résultats expérimentaux sur le champ de vitesse. L'influence du raffinement du maillage a été mis en évidence. L'analyse du champ de pression statique a montré une bonne restitution de l'aspect tridimensionel de l'écoulement ainsi que des effets elliptiques liés à cette variable.

Le coude de Stanitz à été testé pour différents régimes compressibles et incompressibles. La pression statique pariétale obtenue est en accord avec les mesures expérimentales. Pour le Mach de 0.4, les valeurs du champ de pression d'arrêt calculées ont montré un accord satisfaisant avec les mesures. L'utilisation d'un maillage plus raffiné a ensuite permis une résolution plus précise de l'écoulement. Le comportement numérique du code a finalement été testé pour un nombre de Mach plus important validant ainsi la méthode pour tout une gamme de vitesse allant de l'incompressible au haut subsonique.

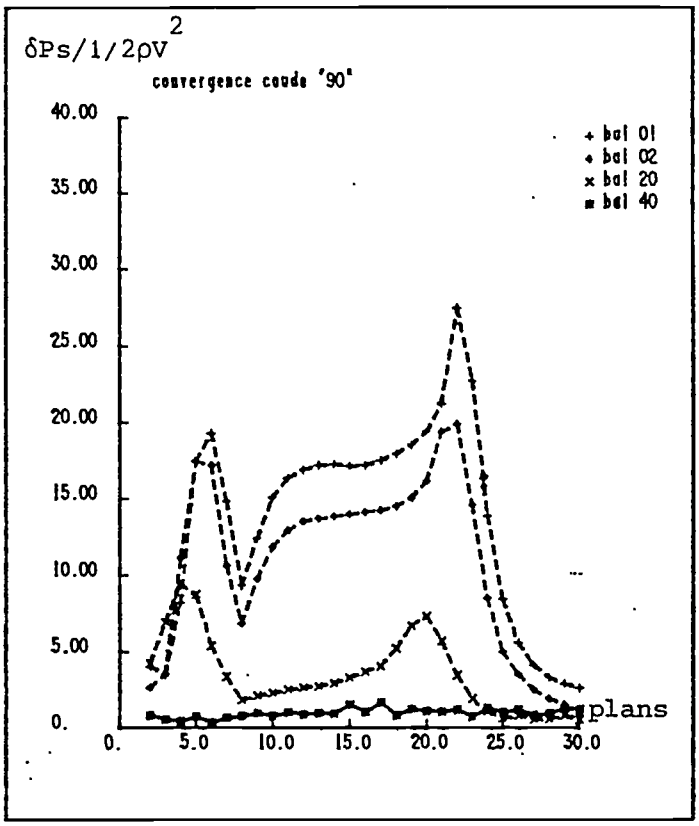
Les calculs effetctués sur une grille de turbine ont finalement permis de tester le modèle dans une configuration réelle de turbomachines. Les résultats obtenus permettent, malgrés l'utilisation d'un maillage grossier, de mettre en évidence les principaux phénomènes physiques qui régissent un tel écoulement.

Suite à ces différents tests, la robustesse et les capacités de la méthode pour simuler des écoulements dans des configurations tridimensionnelles complexes ont été présentées. Sa validation sur de nombreuses géométries devra cependant être poursuivie. L'utilisation de maillage très fins, rendu possible par les faibles besoins en stockage mémoire et les temps calcul raisonnables, devra être généralisée.

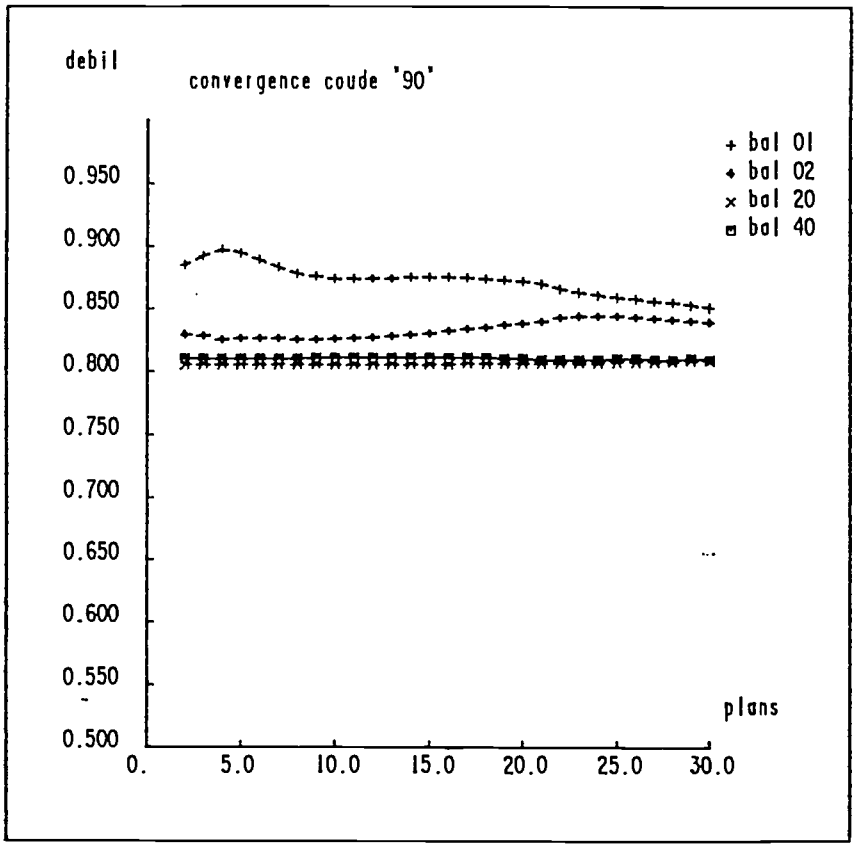
Pour le futur, les résultats obtenus permettent d'envisager l'étude de configurations industrielles complexes et notamment l'étude des turbines avec jets de refroidissement. Dans ce but, une modélisation de ces jets devra préalablement être introduite dans le code.

FIGURES

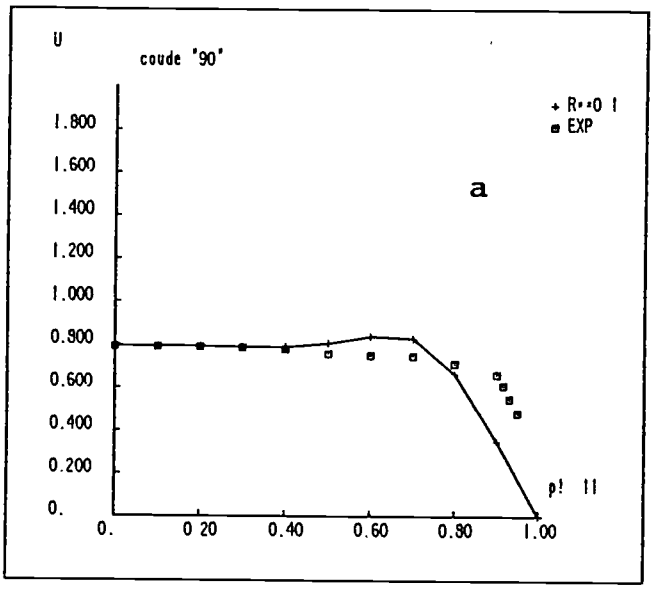
* _ *

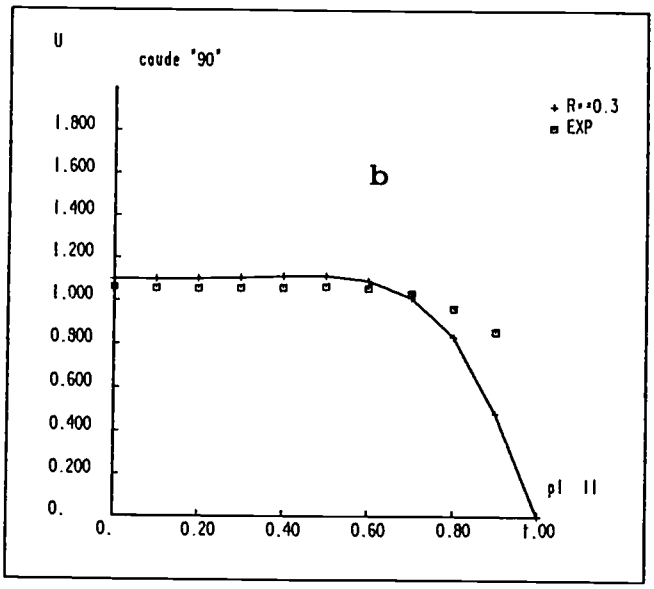


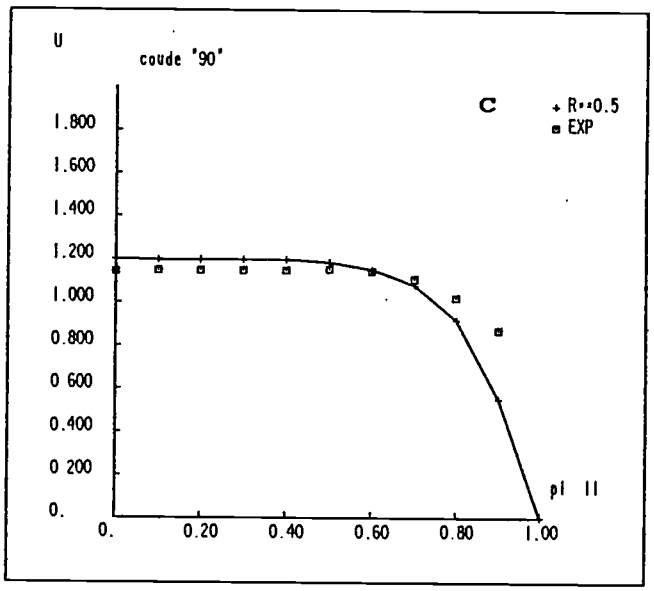
- Figure 4 -

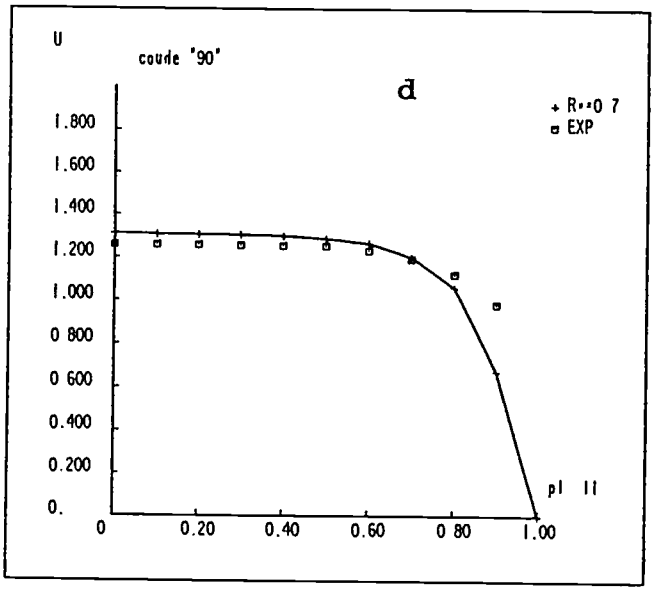


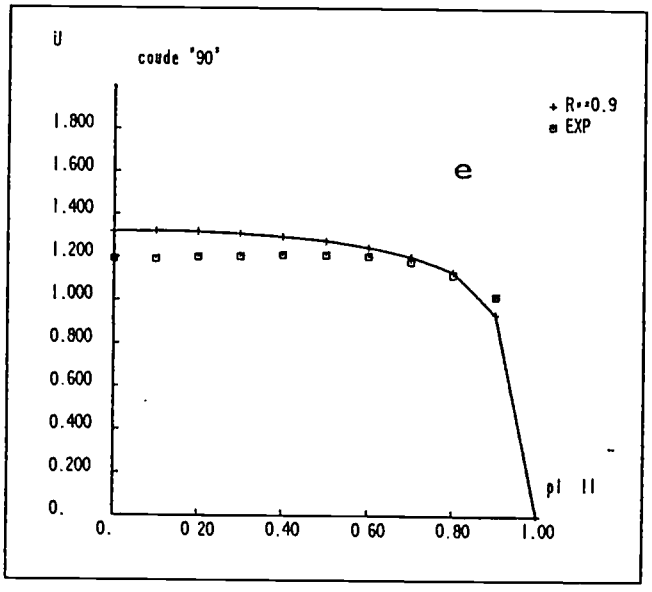
- Figure 5 -


U
coude '90'
+ R*=0 1
EXP
a
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0. 0 20 0.40 0.60 0.80 1.00
pl II

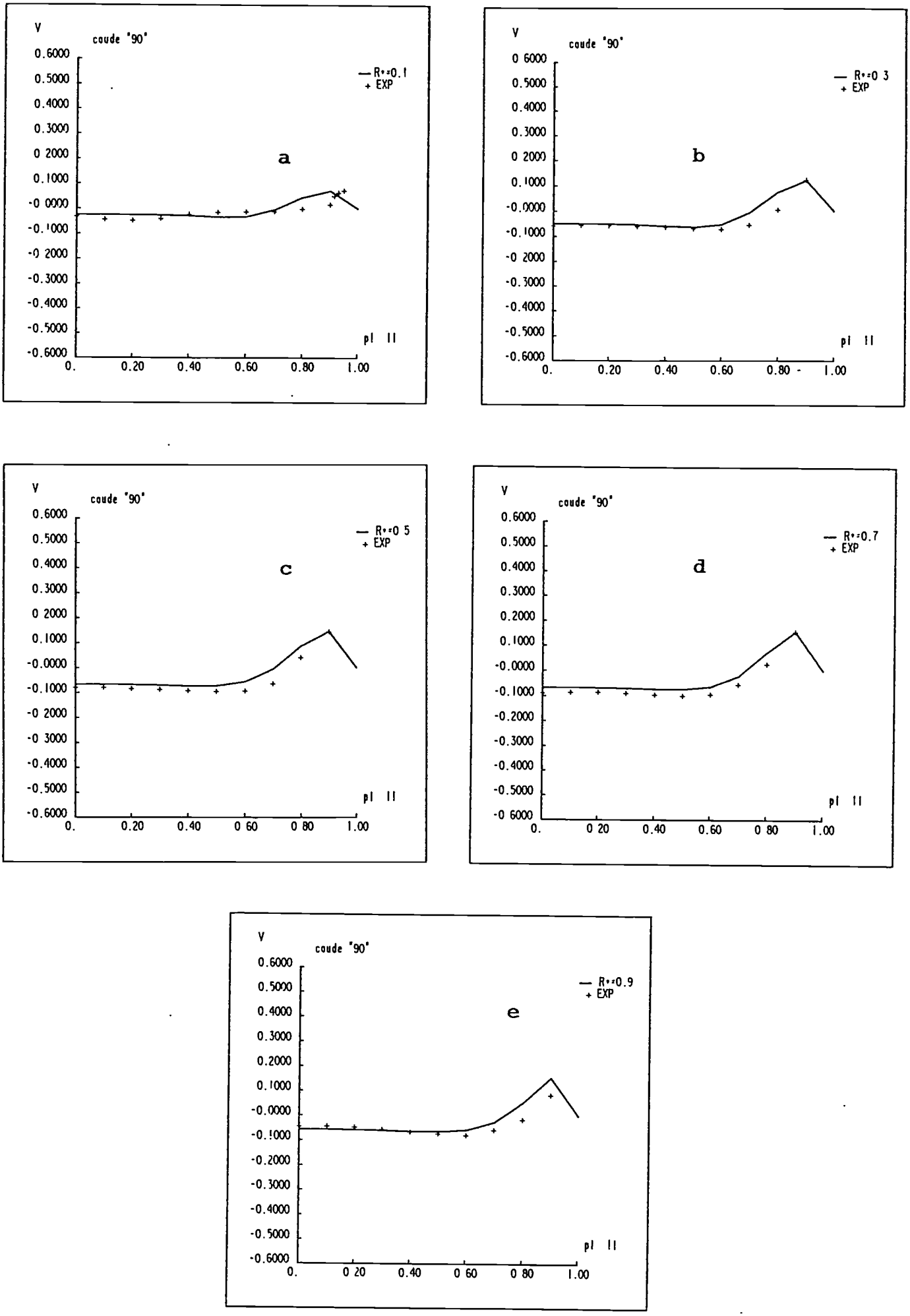

U
coude '90'
+ R*=0.3
EXP
b
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0. 0.20 0.40 0.60 0.80 1.00
pl II


U
coude '90'
c
+ R*=0.5
EXP
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0 600
0.400
0 200
0.
0. 0.20 0.40 0.60 0.80 1.00
pl II

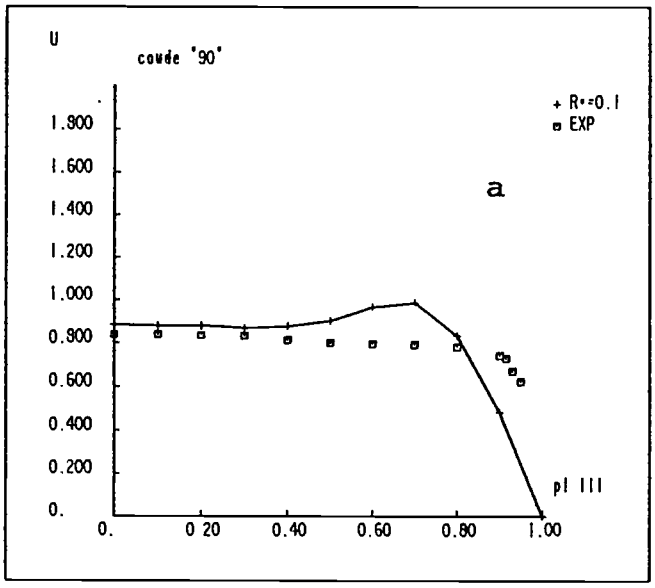

U
coude '90'
d
+ R*=0 7
EXP
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0 800
0 600
0.400
0.200
0.
0 0.20 0.40 0.60 0 80 1.00
pl II

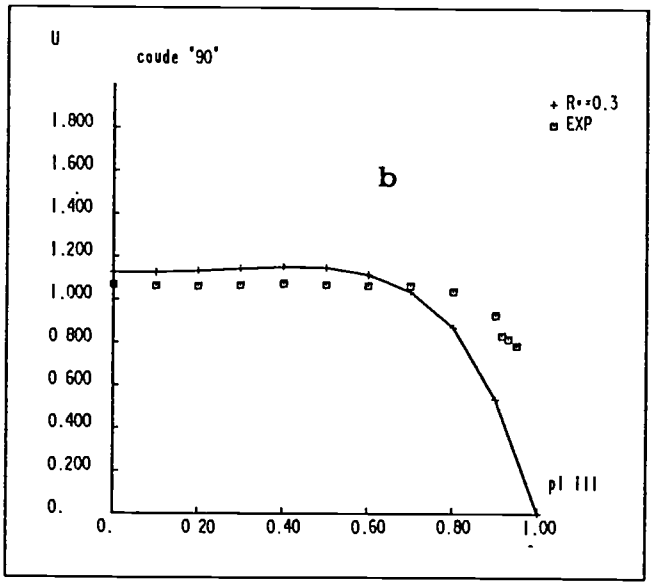

U
coude '90'
+ R*=0.9
EXP
e
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0. 0 20 0.40 0 60 0.80 1.00
pl II

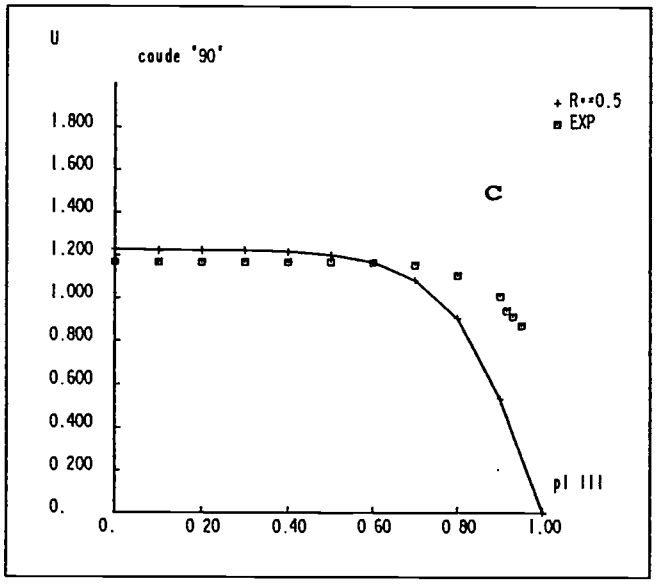
– Figure 6 –

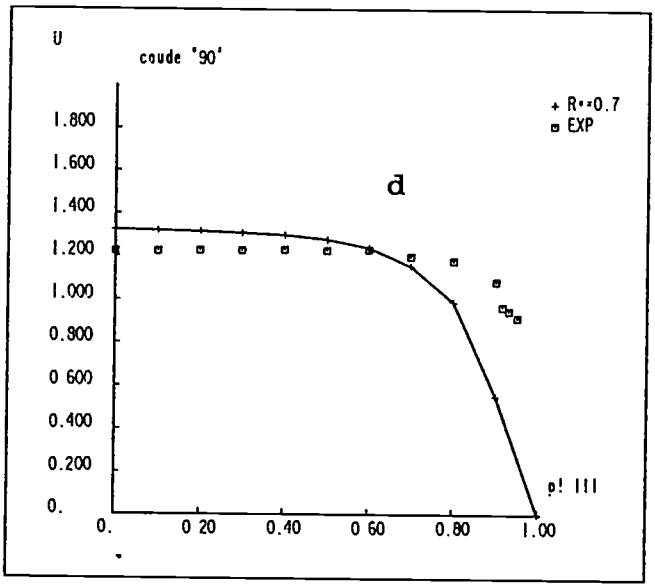

V
coude "90"
— R*=0.1
+ EXP
a
pl II
V
coude "90"
— R*=0 3
+ EXP
b
pl II
V
coude "90"
— R*=0 5
+ EXP
c
pl II
V
coude "90"
— R*=0.7
+ EXP
d
pl II
V
coude "90"
— R*=0.9
+ EXP
e
pl II

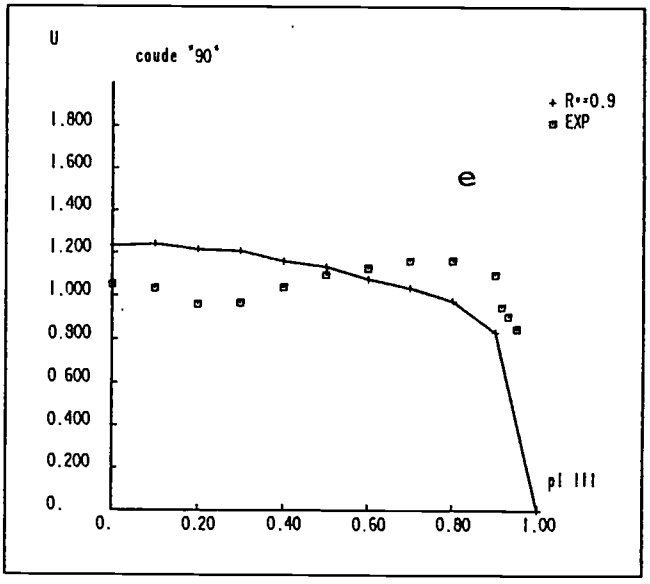
- Figure 7 -


U
coude '90'
+ R*=0.1
EXP
a
1.900
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl III

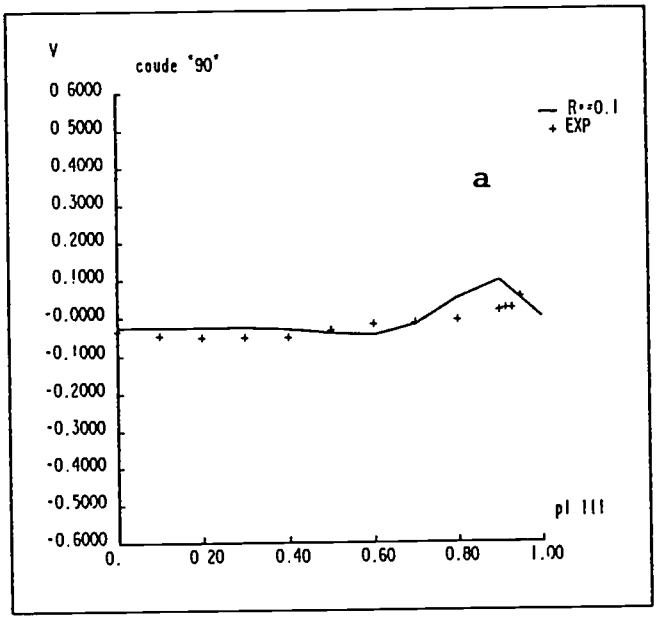

U
coude '90'
+ R*=0.3
EXP
b
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0 800
0 600
0.400
0.200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl III

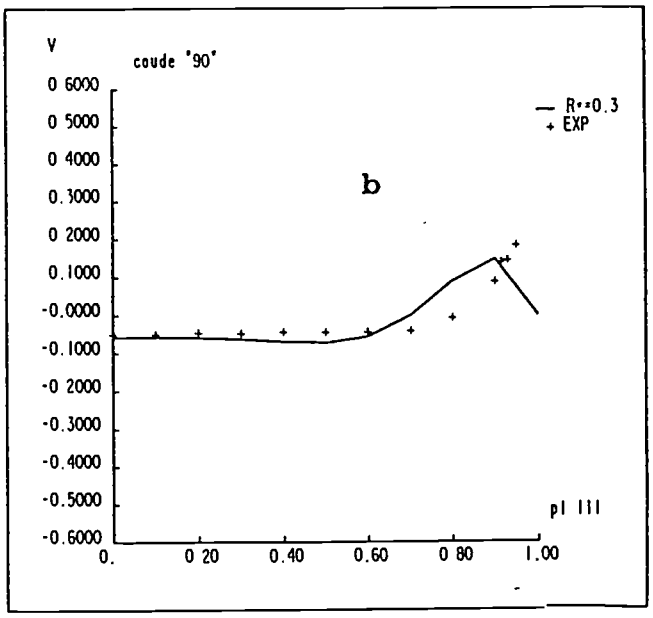

U
coude '90'
+ R*=0.5
EXP
c
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0 20
0.40
0 60
0 80
1.00
pl III

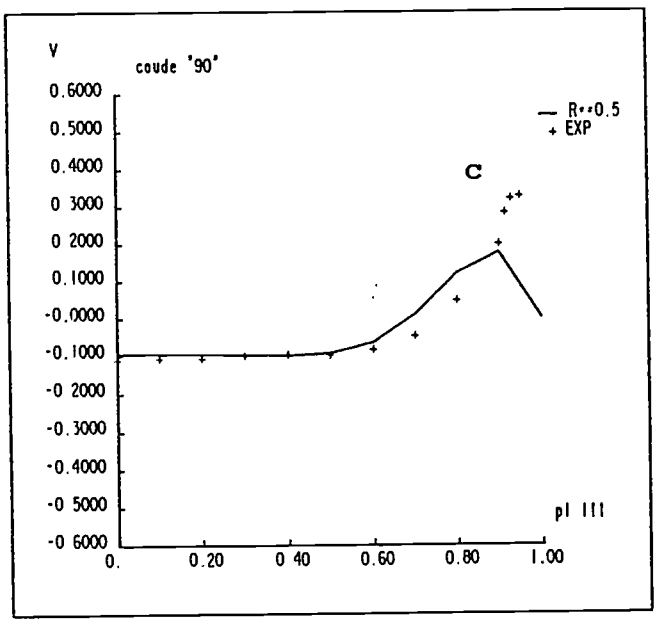

U
coude '90'
+ R*=0.7
EXP
d
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0 600
0.400
0.200
0.
0.
0 20
0.40
0 60
0.80
1.00
pl III

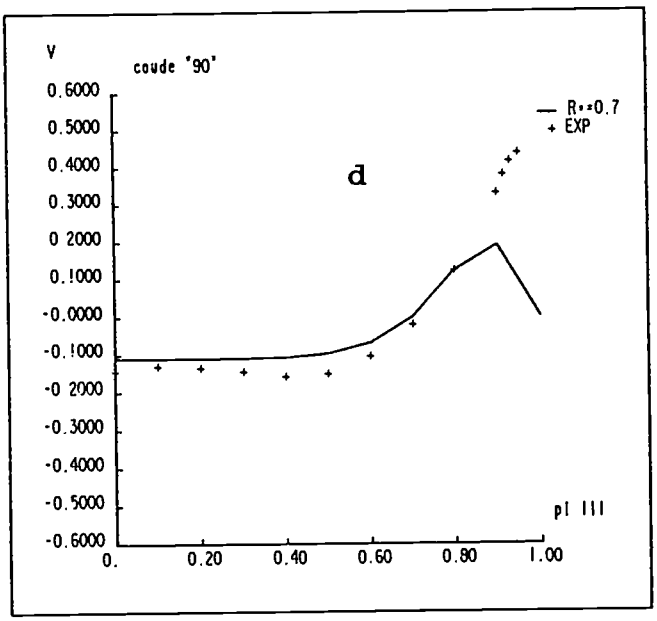

U
coude '90'
+ R*=0.9
EXP
e
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0 600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl III

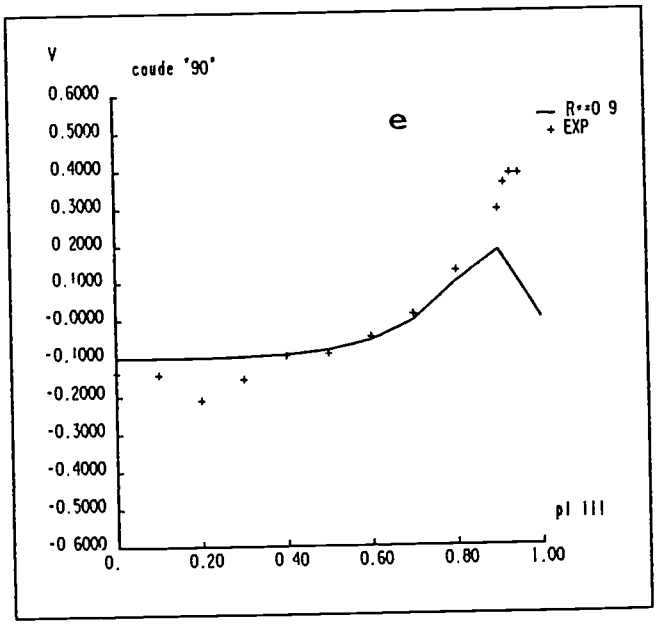
– Figure 8 –


V
coude '90'
0 6000
0 5000
0.4000
0.3000
0.2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
— R**0.1
+ EXP
a
pl III

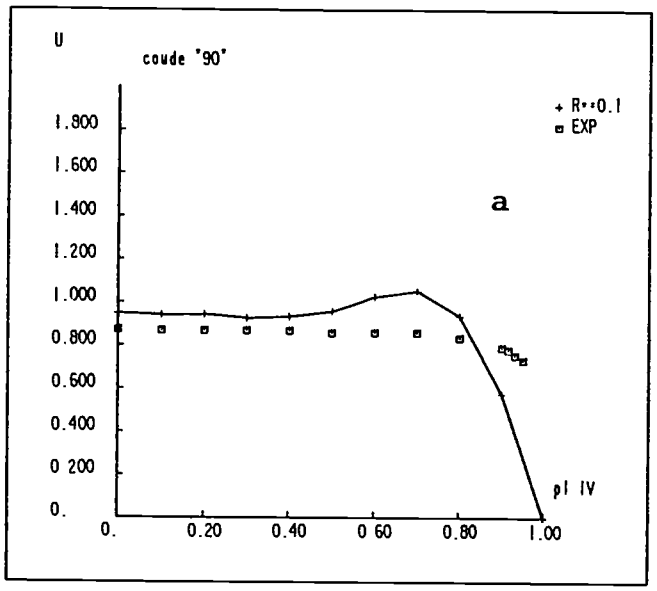

V
coude '90'
0 6000
0 5000
0 4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0 2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0.60
0 80
1.00
— R**0.3
+ EXP
b
pl III

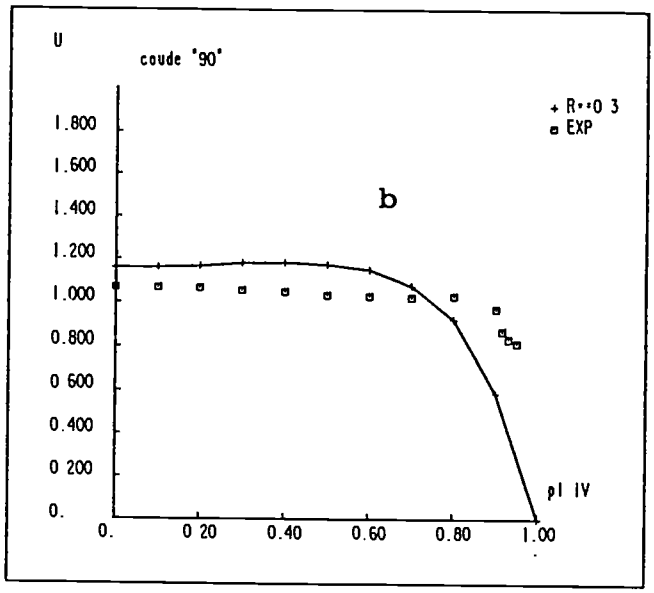

V
coude '90'
0.6000
0.5000
0.4000
0 3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0 2000
-0.3000
-0.4000
-0 5000
-0 6000
0.
0.20
0 40
0.60
0.80
1.00
— R**0.5
+ EXP
c
pl III

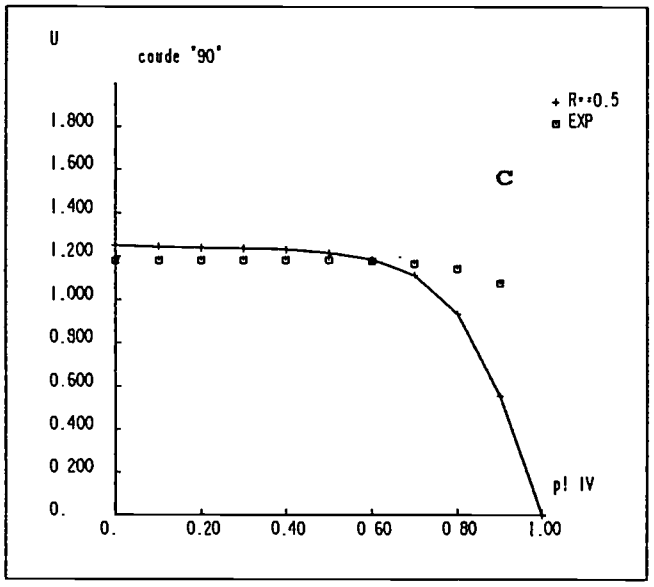

V
coude '90'
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0 2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
— R**0.7
+ EXP
d
pl III

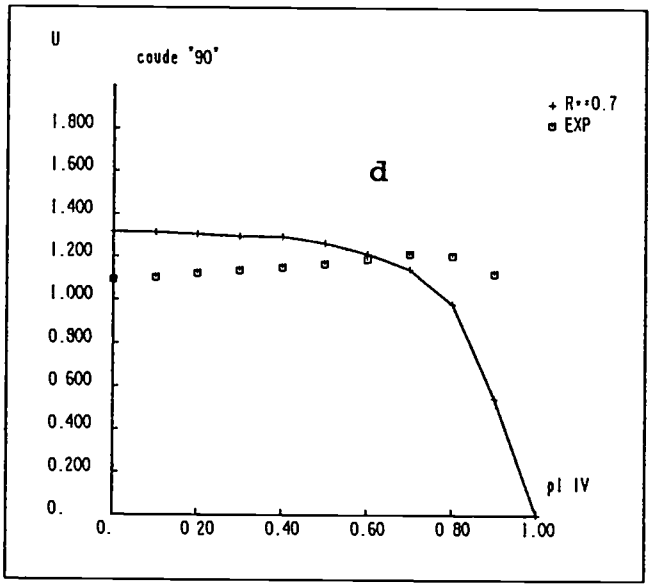

V
coude '90'
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0 6000
0.
0.20
0 40
0.60
0.80
1.00
— R**0 9
+ EXP
e
pl III

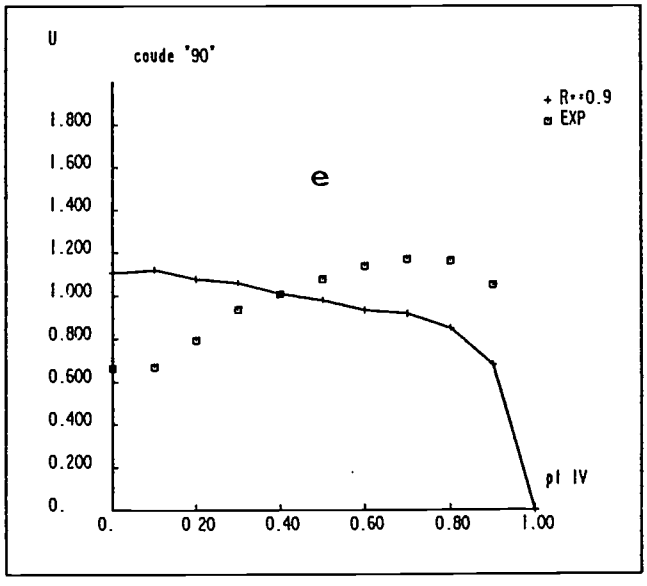
– Figure 9 –


U
coude "90"
+ R=0.1
EXP
a
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0.20
0.40
0 60
0.80
1.00
pl IV

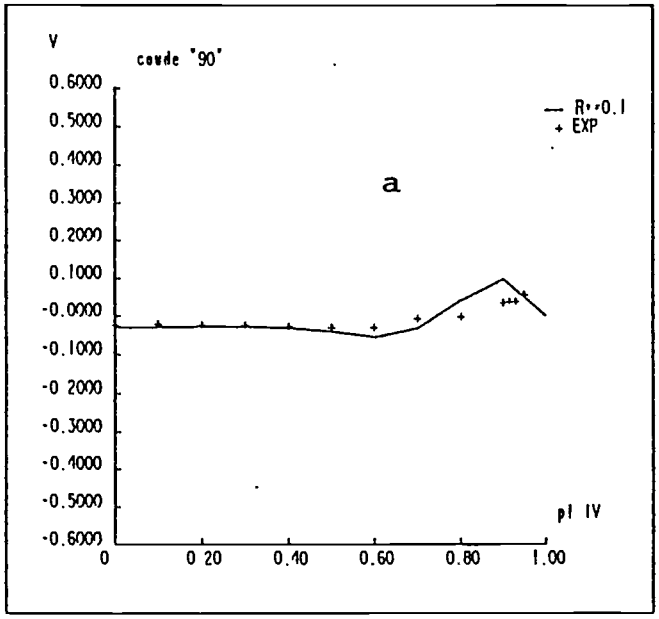

U
coude "90"
+ R=0 3
EXP
b
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0 600
0.400
0 200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

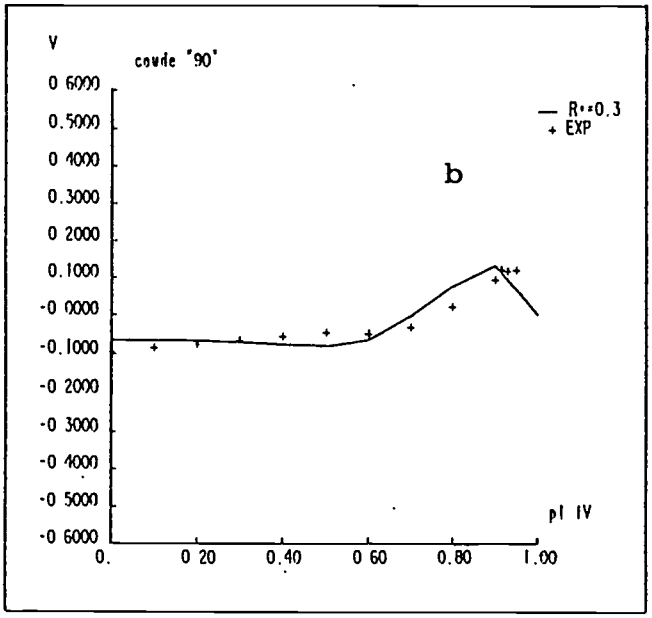

U
coude "90"
+ R=0.5
EXP
c
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0.20
0.40
0 60
0 80
1.00
pl IV

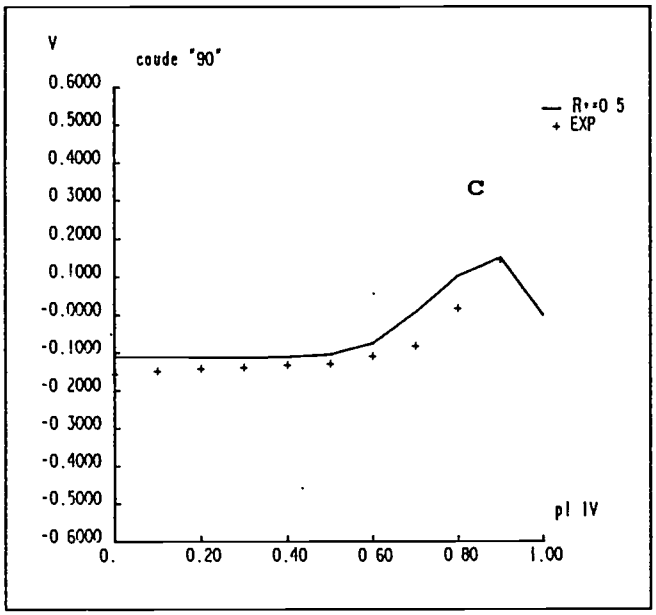

U
coude "90"
+ R=0.7
EXP
d
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0 600
0.400
0.200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0 80
1.00
pl IV

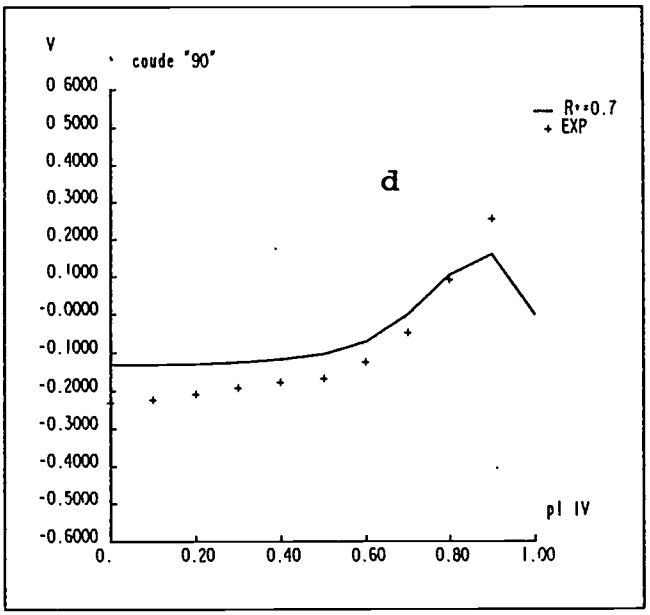

U
coude "90"
+ R=0.9
EXP
e
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

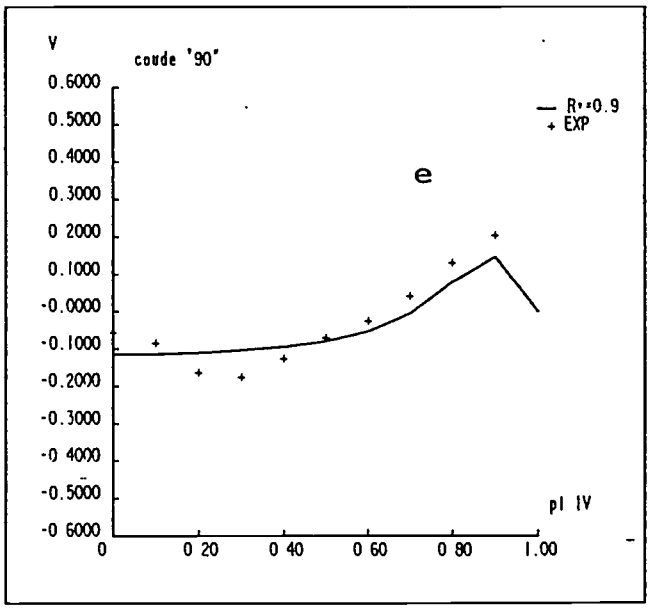
– Figure 10 –


V
coude "90"
R**0.1
+ EXP
a
pl IV

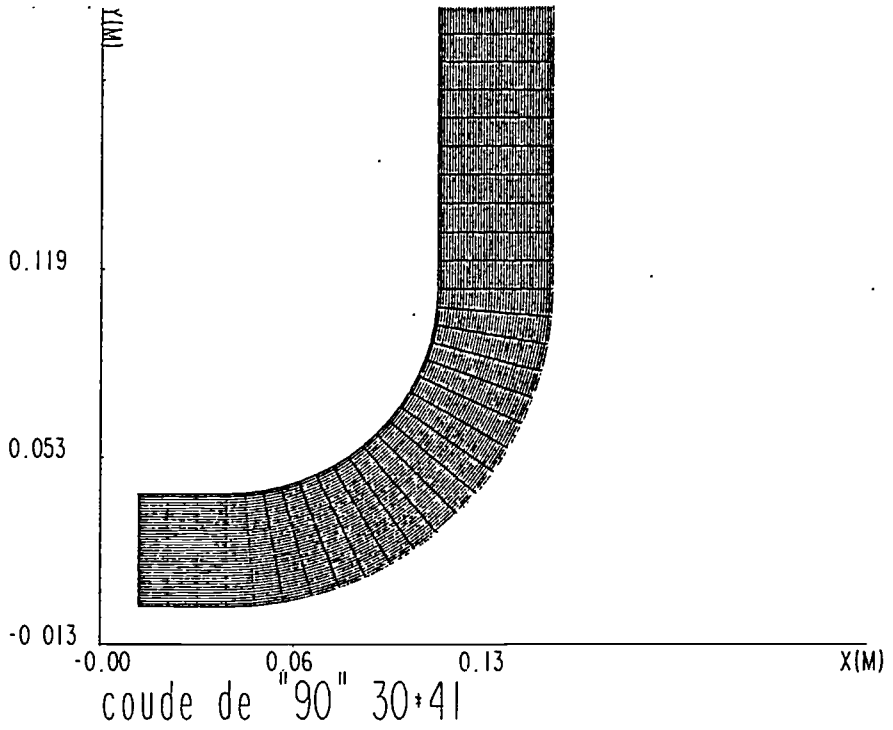

V
coude "90"
R**0.3
+ EXP
b
pl IV


V
coude "90"
R**0 5
+ EXP
c
pl IV

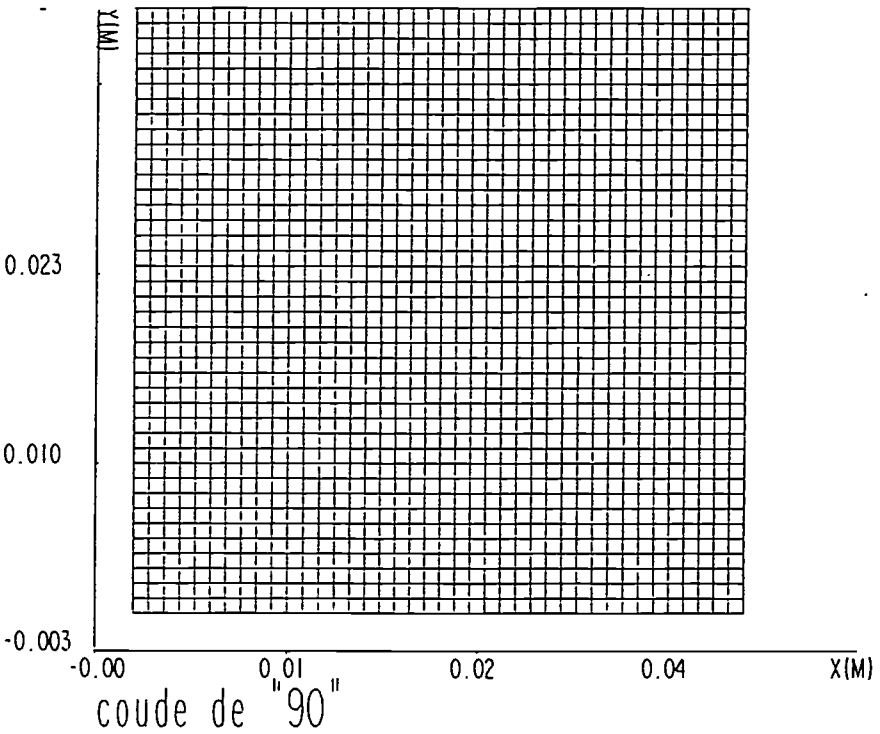

V
coude "90"
R**0.7
+ EXP
d
pl IV


V
coude "90"
R**0.9
+ EXP
e
pl IV

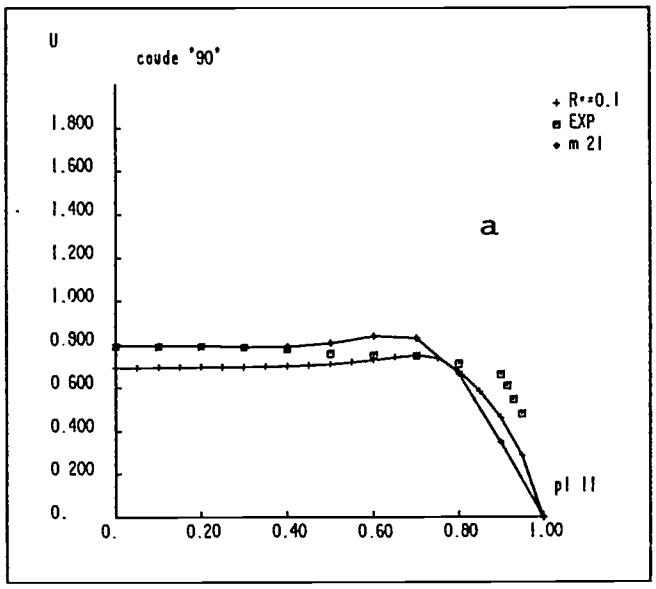
- Figure 11 -

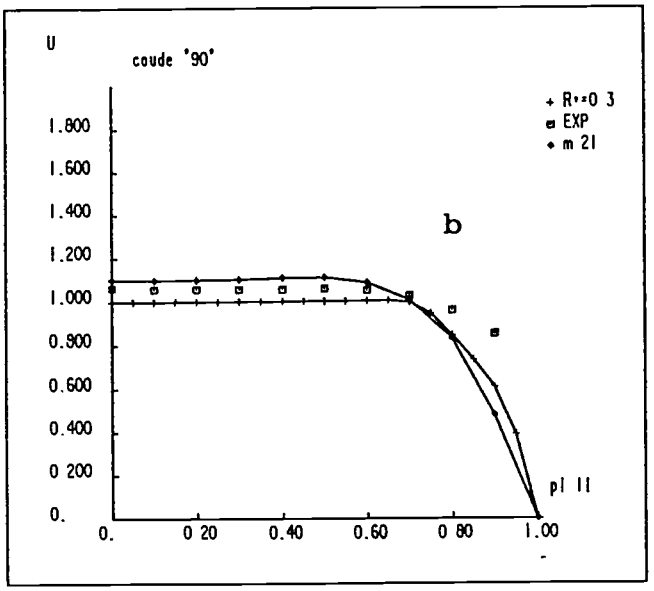


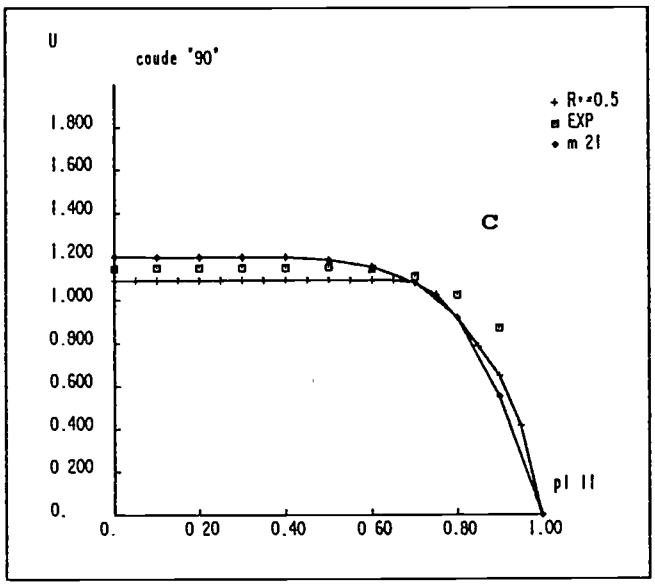
– Figure 12 –

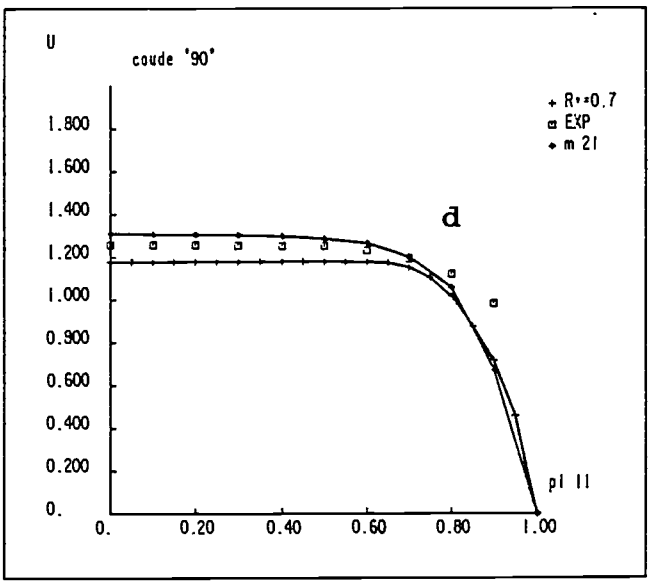


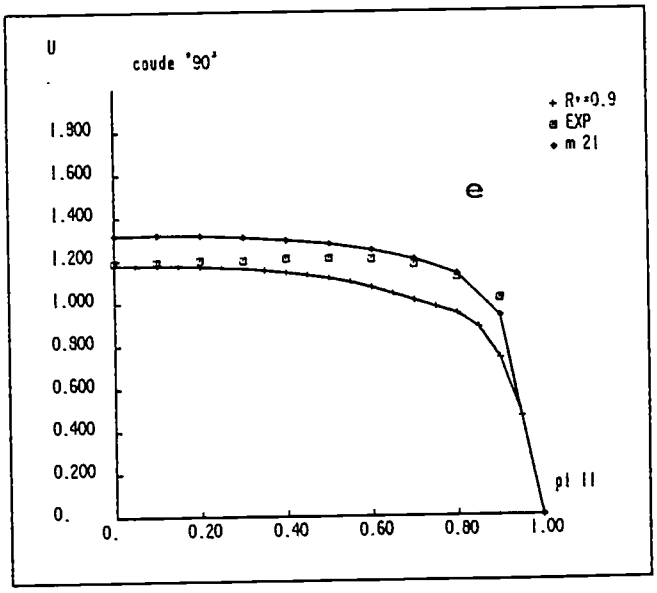
– Figure 13 –


U
coude '90'
+ R*=0.1
EXP
m 21
a
pl 11
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0 600
0.400
0 200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00

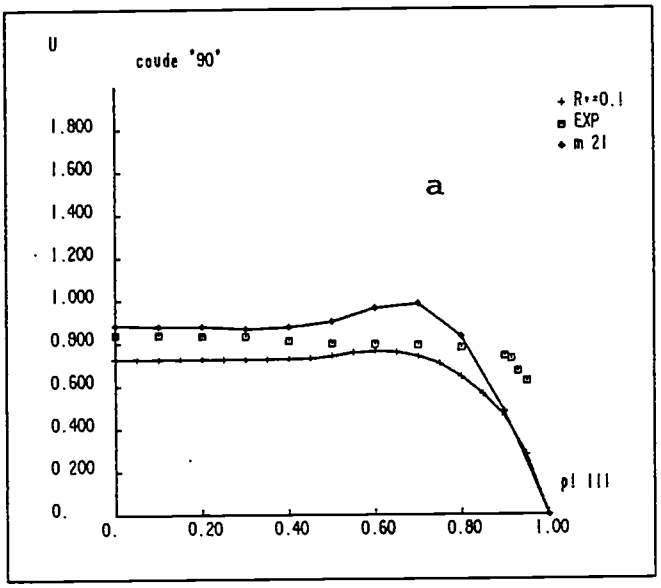

U
coude '90'
+ R*=0 3
EXP
m 21
b
pl 11
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0 20
0.40
0.60
0 80
1.00

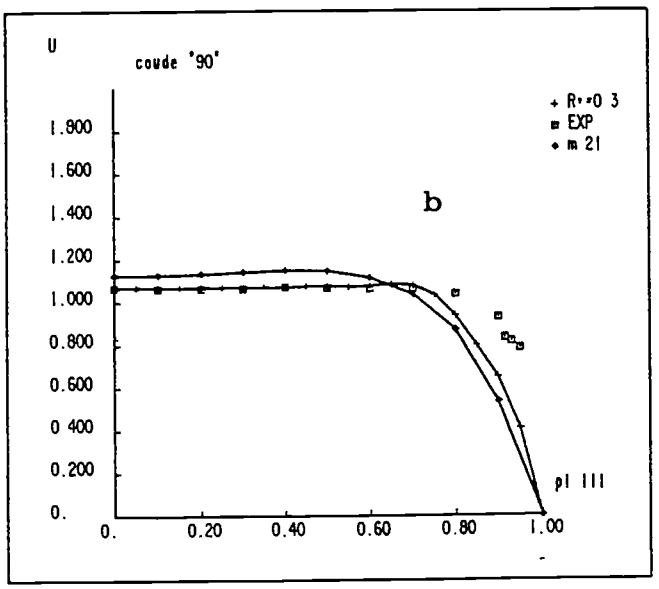

U
coude '90'
+ R*=0.5
EXP
m 21
c
pl 11
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0 20
0.40
0 60
0.80
1.00

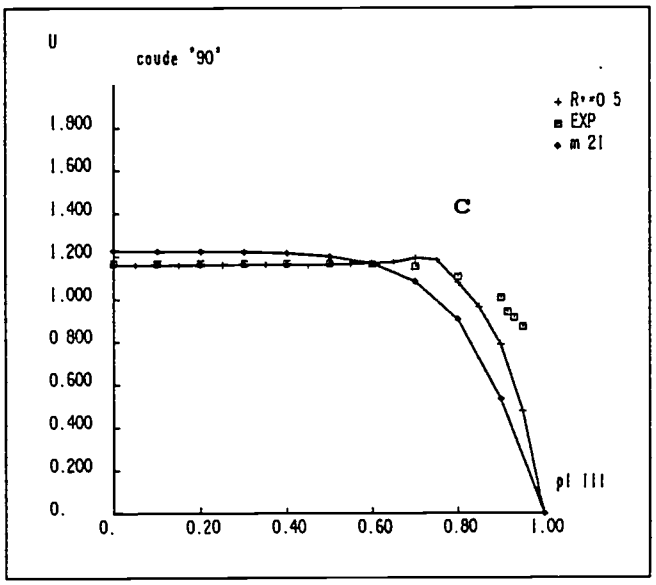

U
coude '90'
+ R*=0.7
EXP
m 21
d
pl 11
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00

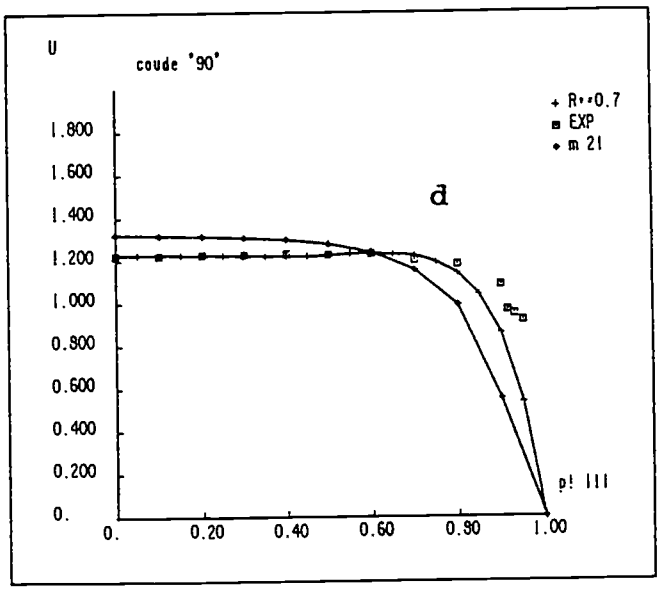

U
coude '90'
+ R*=0.9
EXP
m 21
e
pl 11
1.900
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00

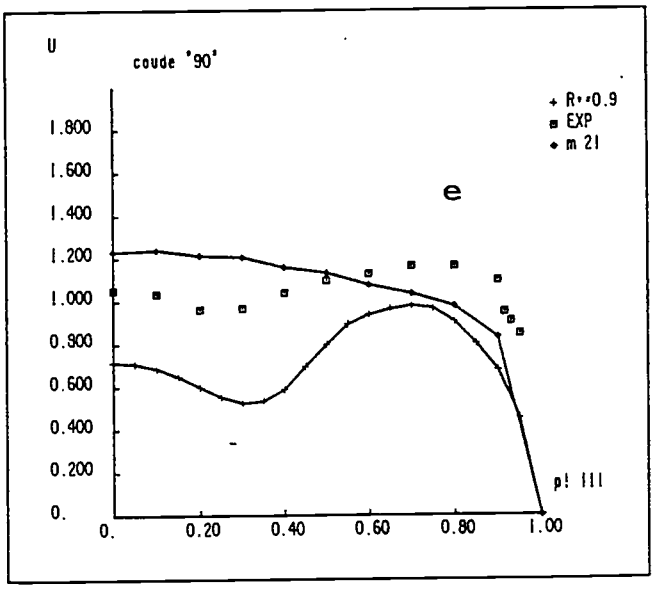
- Figure 14 -


U
coude '90'
+ R*=0.1
EXP
m 21
a
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0 200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
p! III

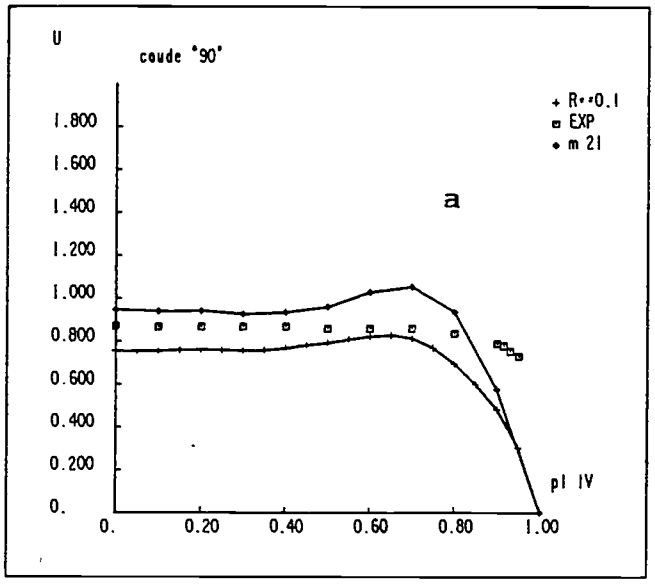

U
coude '90'
+ R*=0 3
EXP
m 21
b
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0 400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
p! III

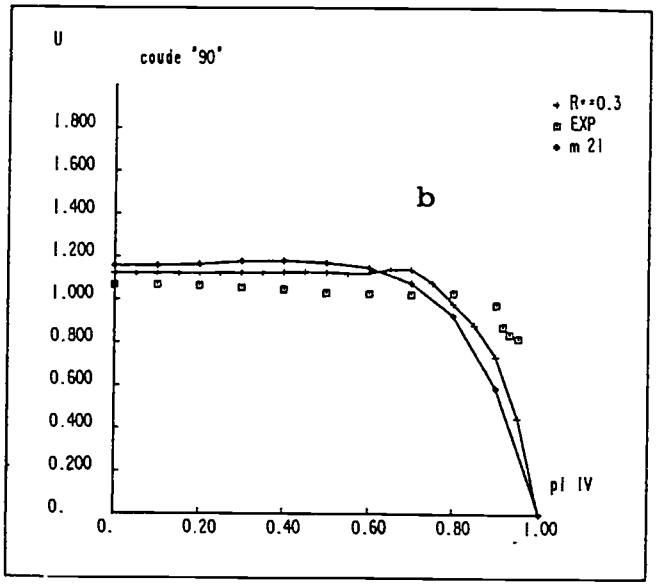

U
coude '90'
+ R*=0 5
EXP
m 21
c
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0 800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
p! III

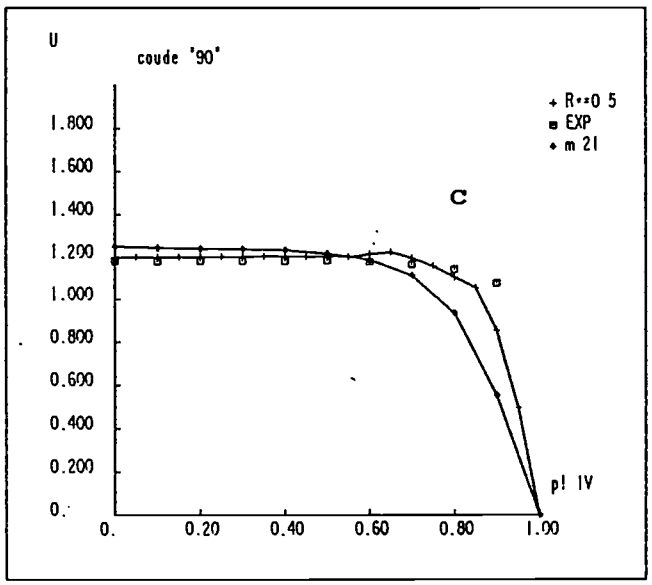

U
coude '90'
+ R*=0.7
EXP
m 21
d
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.90
1.00
p! III

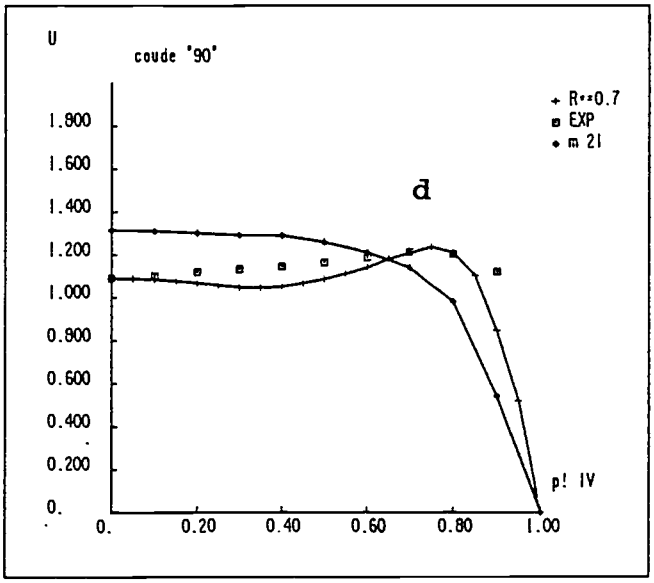

U
coude '90'
+ R*=0.9
EXP
m 21
e
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
p! III

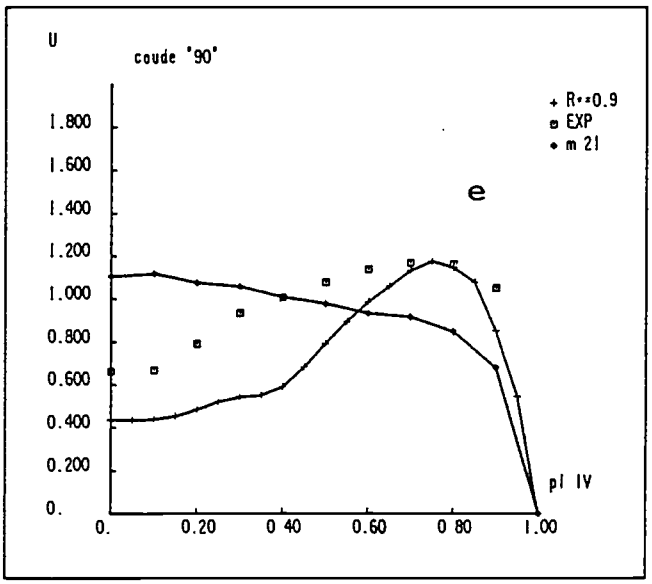
– Figure 15 –


U
coude '90'
+ R**0.1
EXP
m 21
a
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

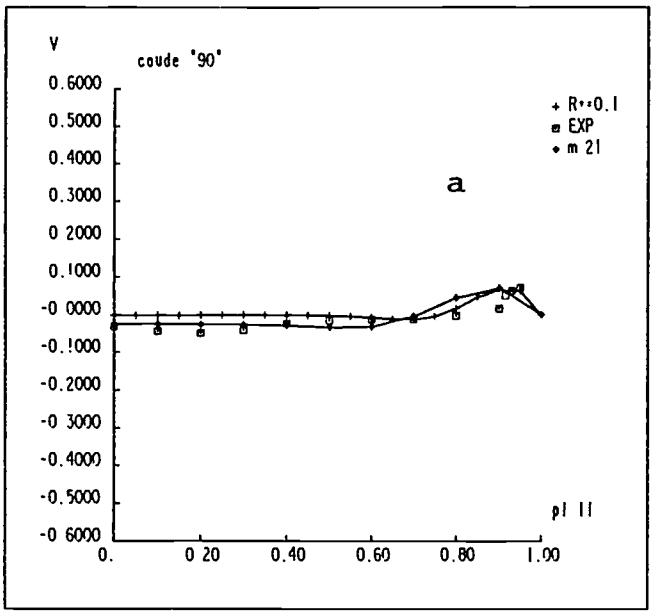

U
coude '90'
+ R**0.3
EXP
m 21
b
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

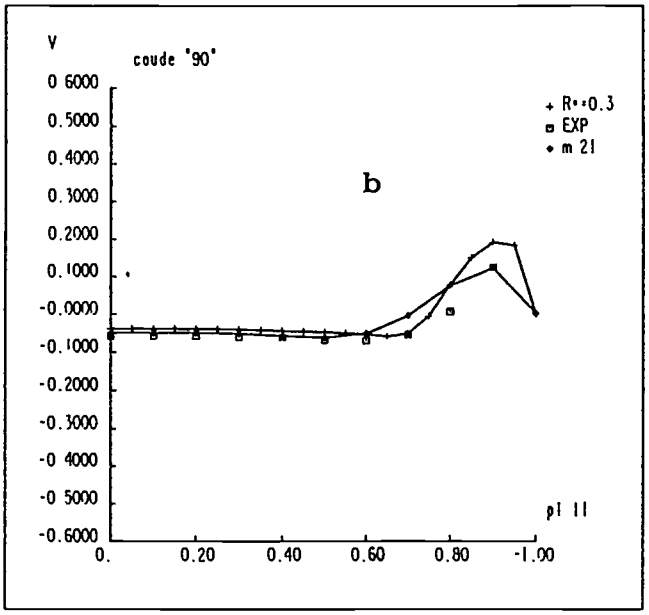

U
coude '90'
+ R**0 5
EXP
m 21
c
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

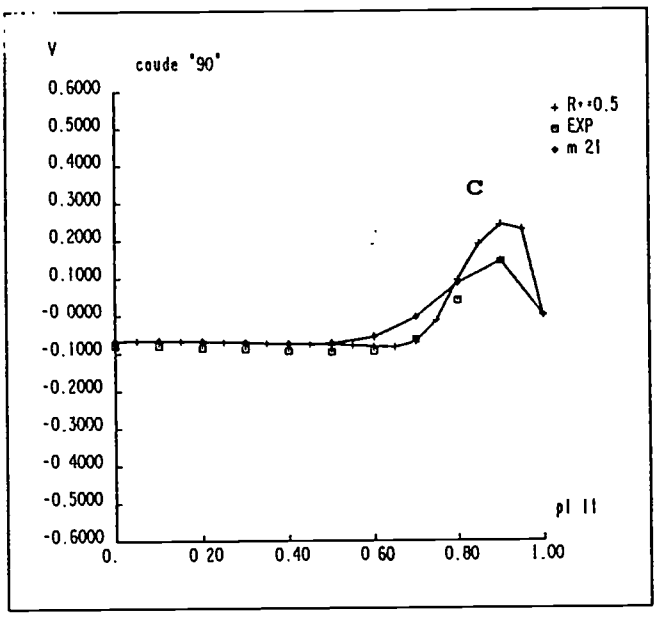

U
coude '90'
+ R**0.7
EXP
m 21
d
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.900
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
pl IV

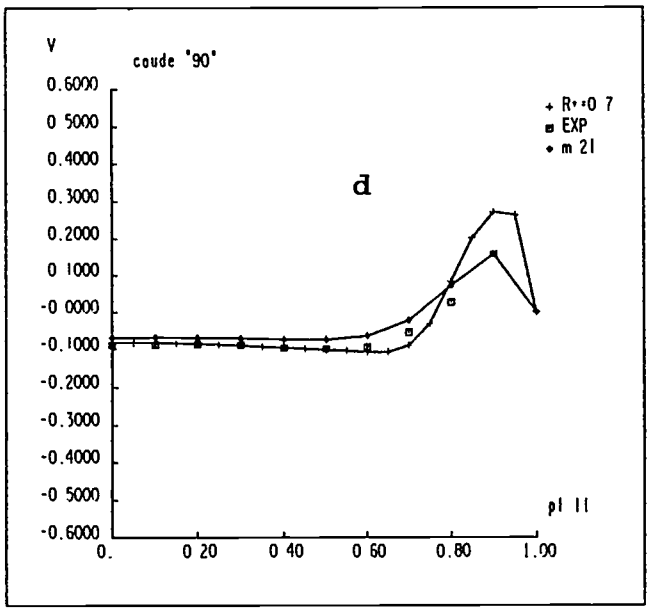

U
coude '90'
+ R**0.9
EXP
m 21
e
1.800
1.600
1.400
1.200
1.000
0.800
0.600
0.400
0.200
0.
0.
0.20
0 40
0.60
0 80
1.00
pl IV

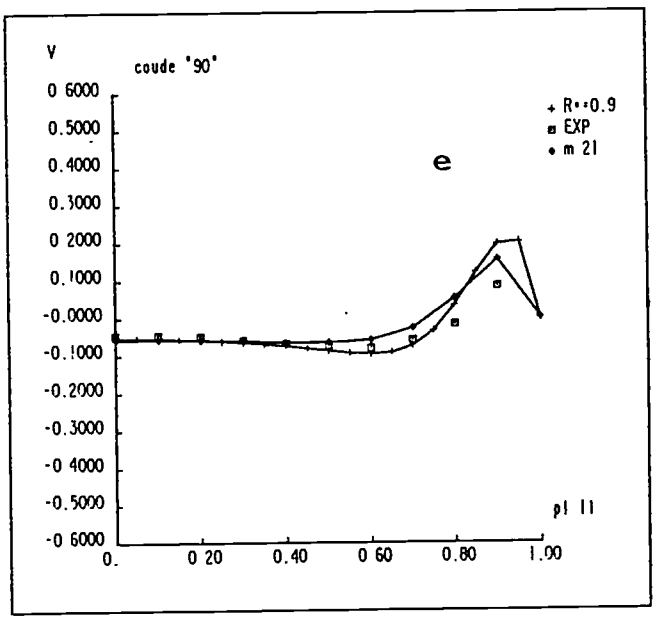
– Figure 16 –


V
coude '90'
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0 0000
-0.1000
-0.2000
-0 3000
-0.4000
-0.5000
-0 6000
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
+ R**0.1
EXP
m 21
a
pl 11

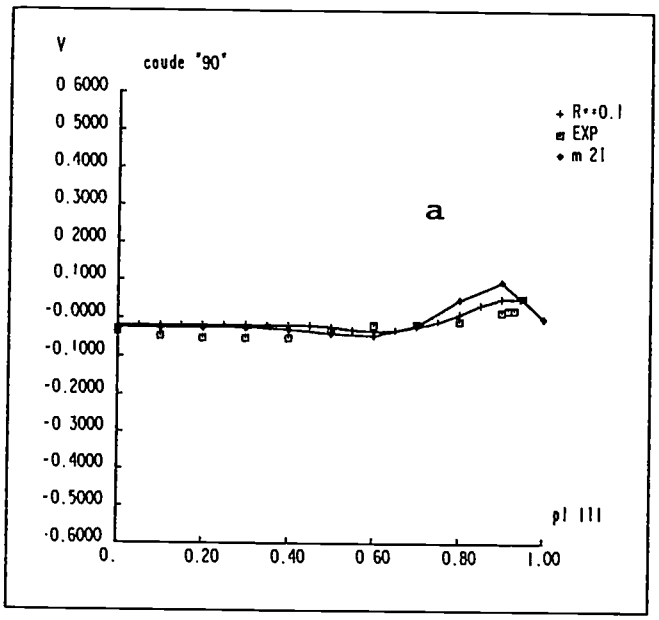

V
coude '90'
0 6000
0.5000
0.4000
0.3000
0.2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0 4000
-0 5000
-0.6000
0.
0.20
0.40
0.60
0.80
-1.00
+ R**0.3
EXP
m 21
b
pl 11

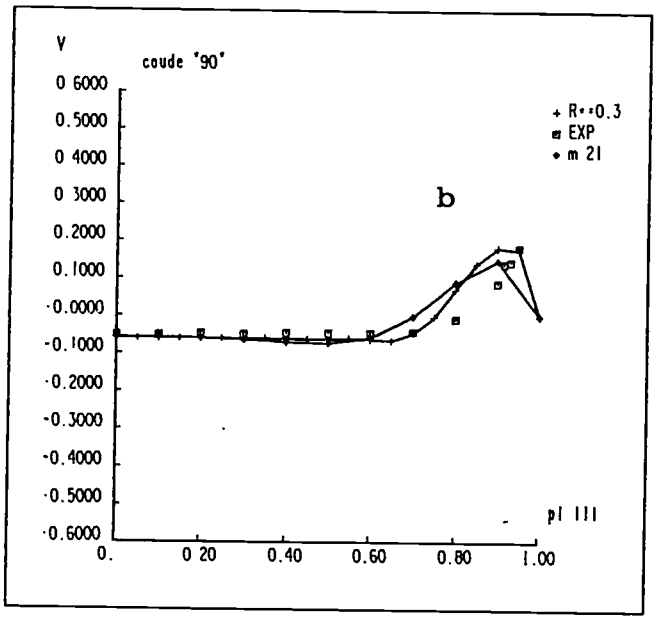

V
coude '90'
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0.2000
0.1000
-0 0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0 4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0 60
0.80
1.00
+ R**0.5
EXP
m 21
c
pl 11

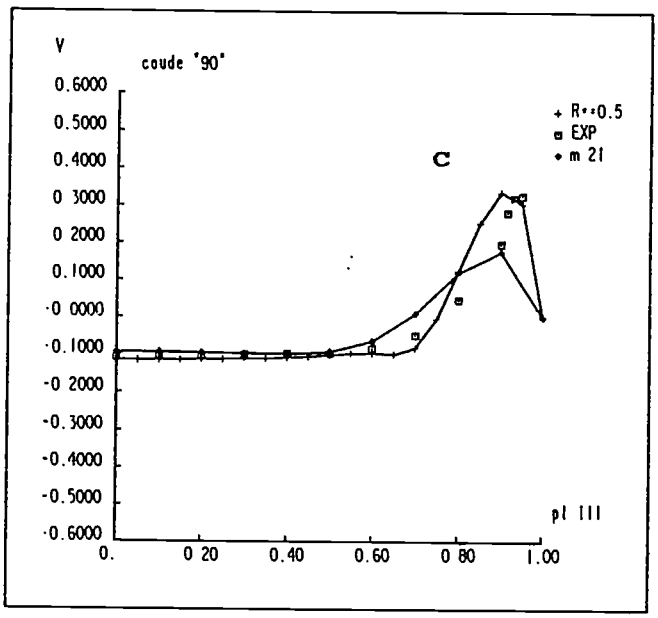

V
coude '90'
0.6000
0 5000
0.4000
0.3000
0.2000
0 1000
-0 0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0.4000
-0 5000
-0.6000
0.
0 20
0 40
0 60
0.80
1.00
+ R**0 7
EXP
m 21
d
pl 11

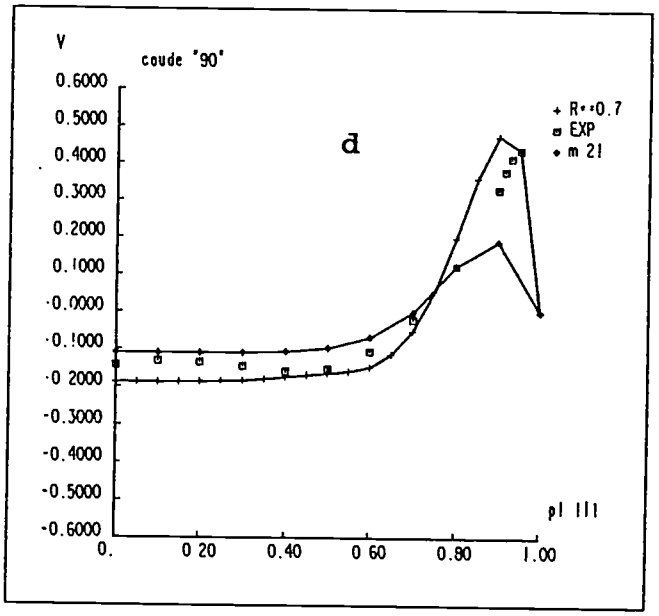

V
coude '90'
0 6000
0.5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0 4000
-0.5000
-0 6000
0.
0 20
0.40
0 60
0.80
1.00
+ R**0.9
EXP
m 21
e
pl 11

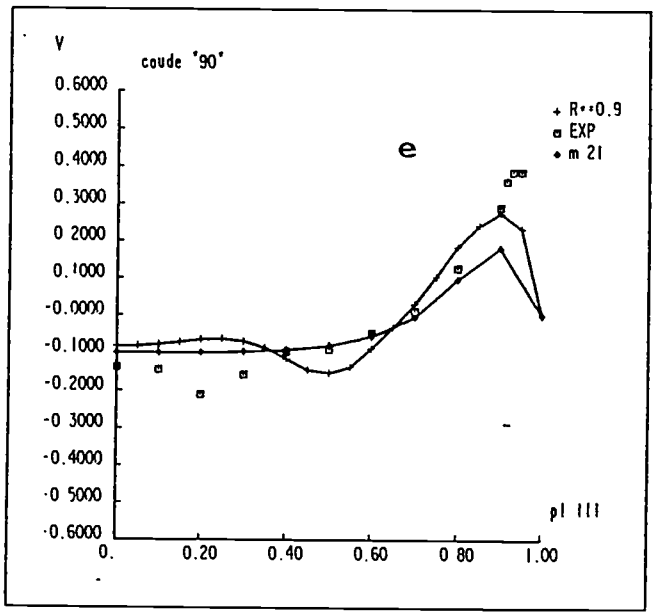
– Figure 17 –


V
coude "90"
0 6000
0 5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0 3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0.20
0.40
0 60
0.80
1.00
+ R=0.1
EXP
m 21
a
pl III

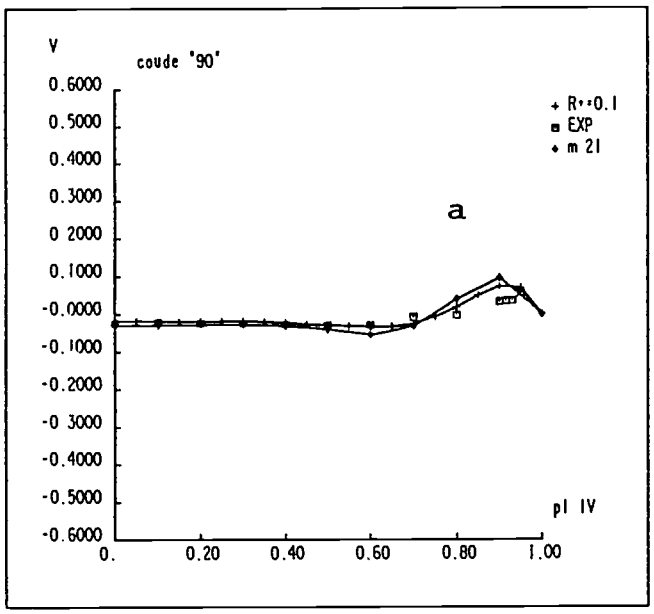

V
coude "90"
0 6000
0.5000
0 4000
0 3000
0.2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0.60
0.80
1.00
+ R=0.3
EXP
m 21
b
pl III

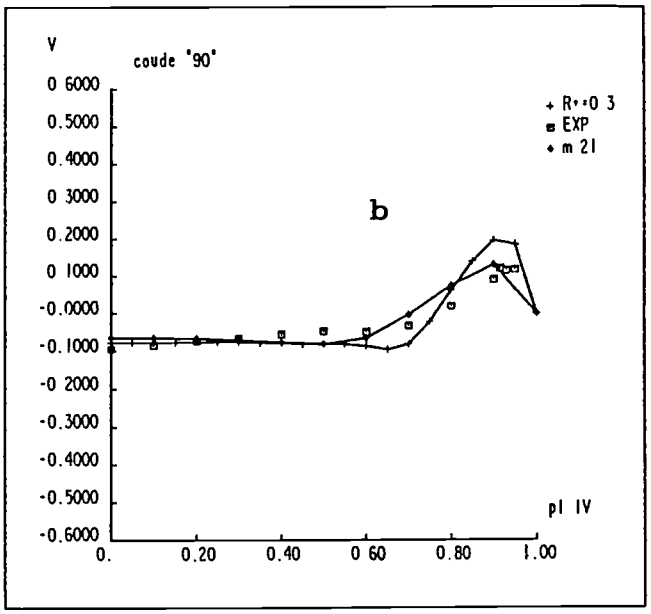

V
coude "90"
0.6000
0.5000
0.4000
0 3000
0 2000
0.1000
-0 0000
-0.1000
-0 2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0.60
0 80
1.00
+ R=0.5
EXP
m 21
c
pl III

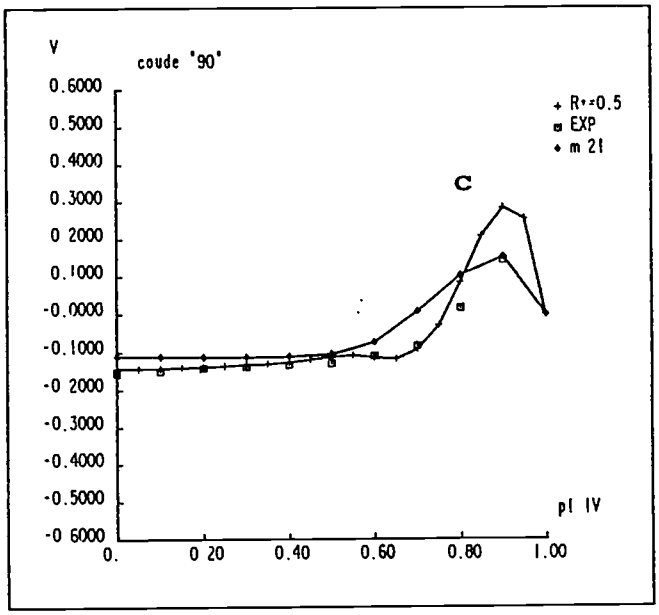

V
coude "90"
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0.2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0 2000
-0.3000
-0.4000
-0.5000
-0.6000
0.
0 20
0.40
0 60
0.80
1.00
+ R=0.7
EXP
m 21
d
pl III

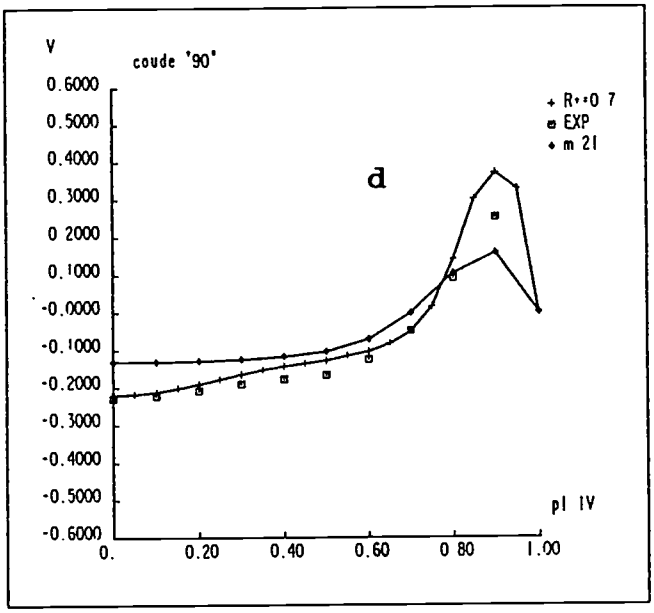

V
coude "90"
0.6000
0.5000
0.4000
0.3000
0 2000
0.1000
-0.0000
-0.1000
-0.2000
-0 3000
-0.4000
-0 5000
-0.6000
0.
0.20
0.40
0.60
0 80
1.00
+ R=0.9
EXP
m 21
e
pl III

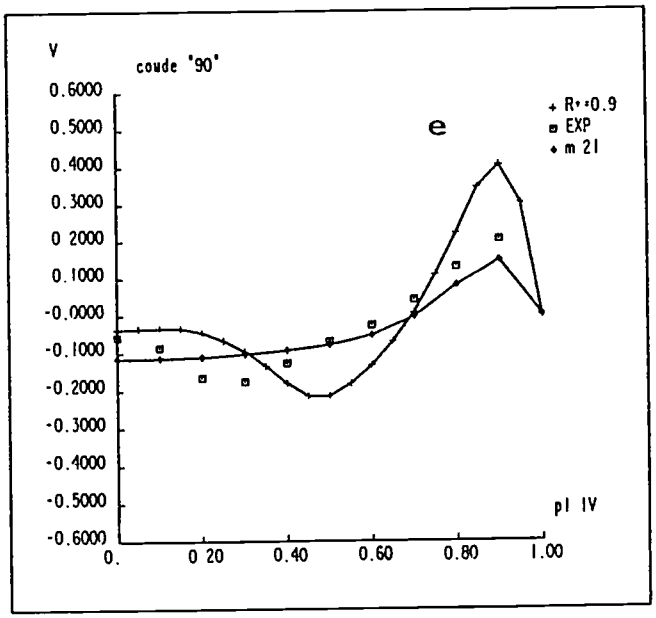
– Figure 18 –


V
coude '90'
+ R*=0.1
EXP
m 21
a
pl IV


V
coude '90'
+ R*=0 3
EXP
m 21
b
pl IV


V
coude '90'
+ R*=0.5
EXP
m 21
c
pl IV


V
coude '90'
+ R*=0 7
EXP
m 21
d
pl IV


V
coude '90'
+ R*=0.9
EXP
m 21
e
pl IV

– Figure 19 –

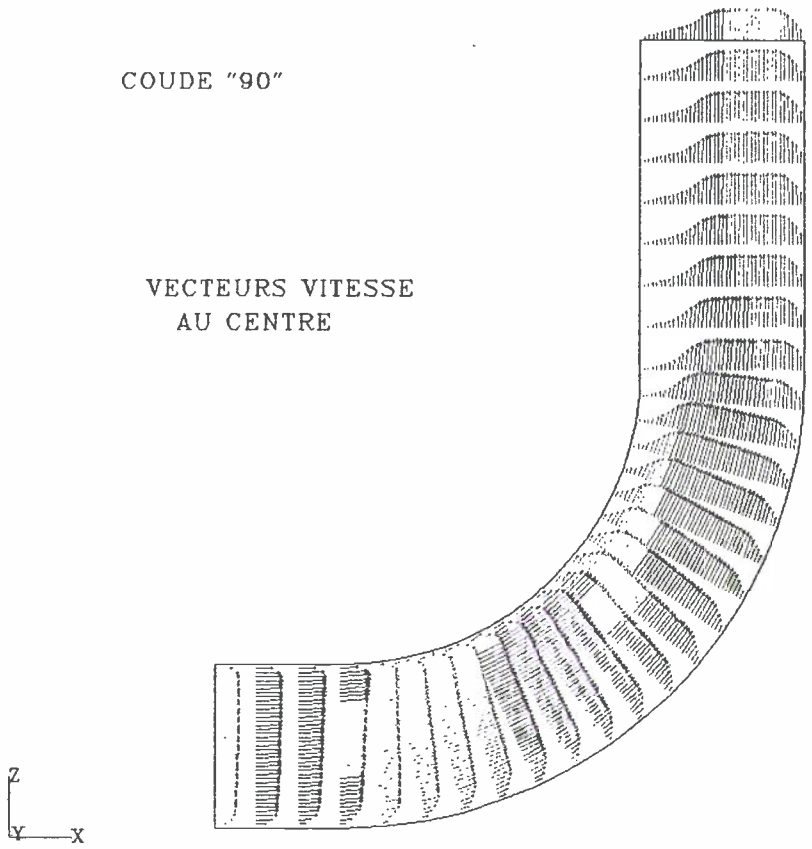


figure -20-

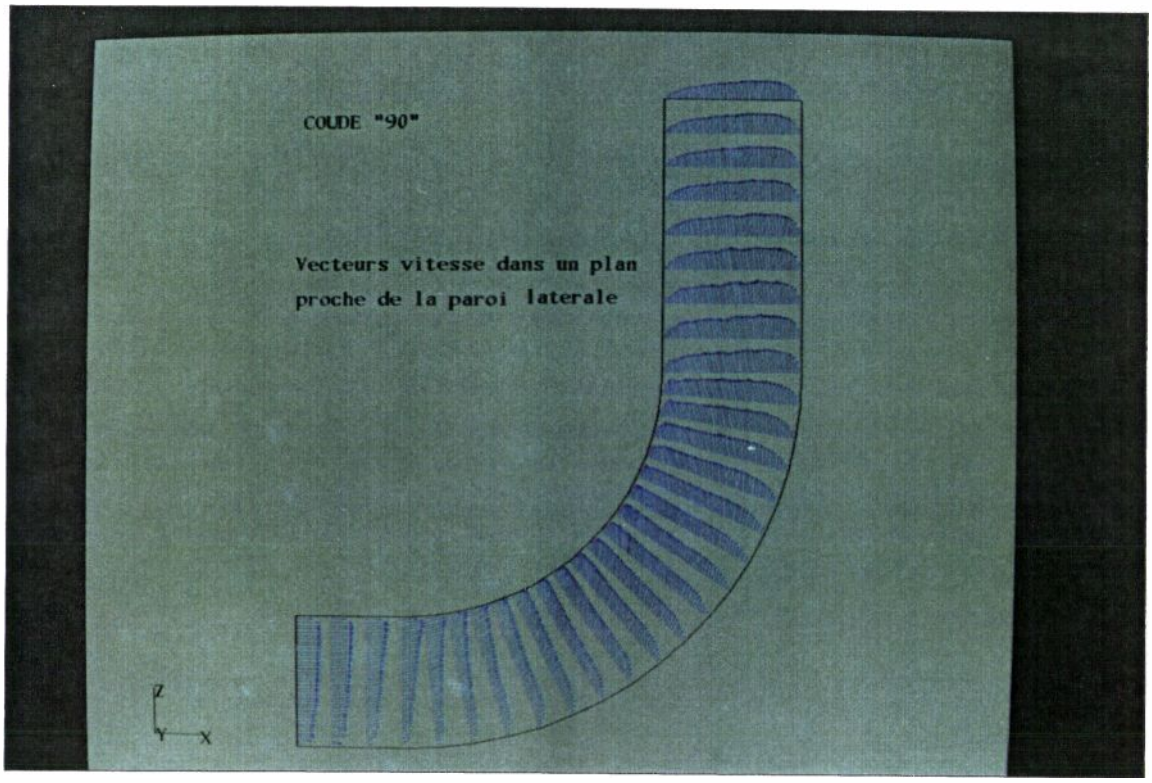


figure -21-

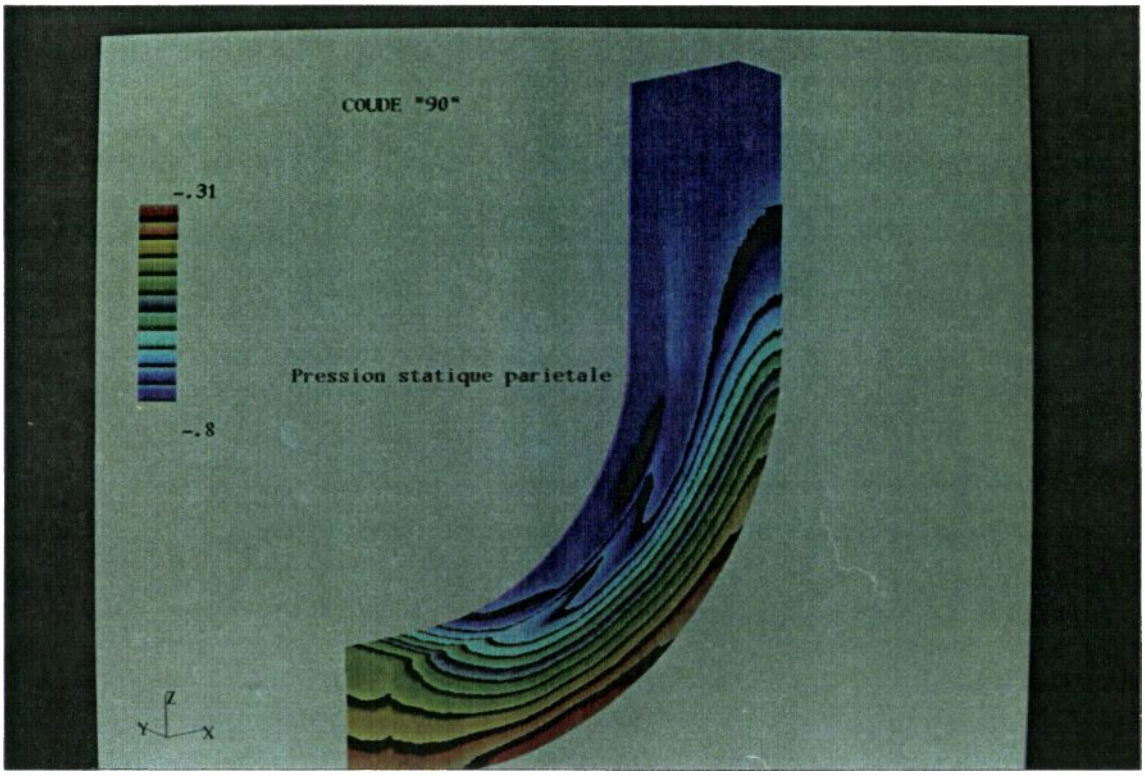


figure -22-

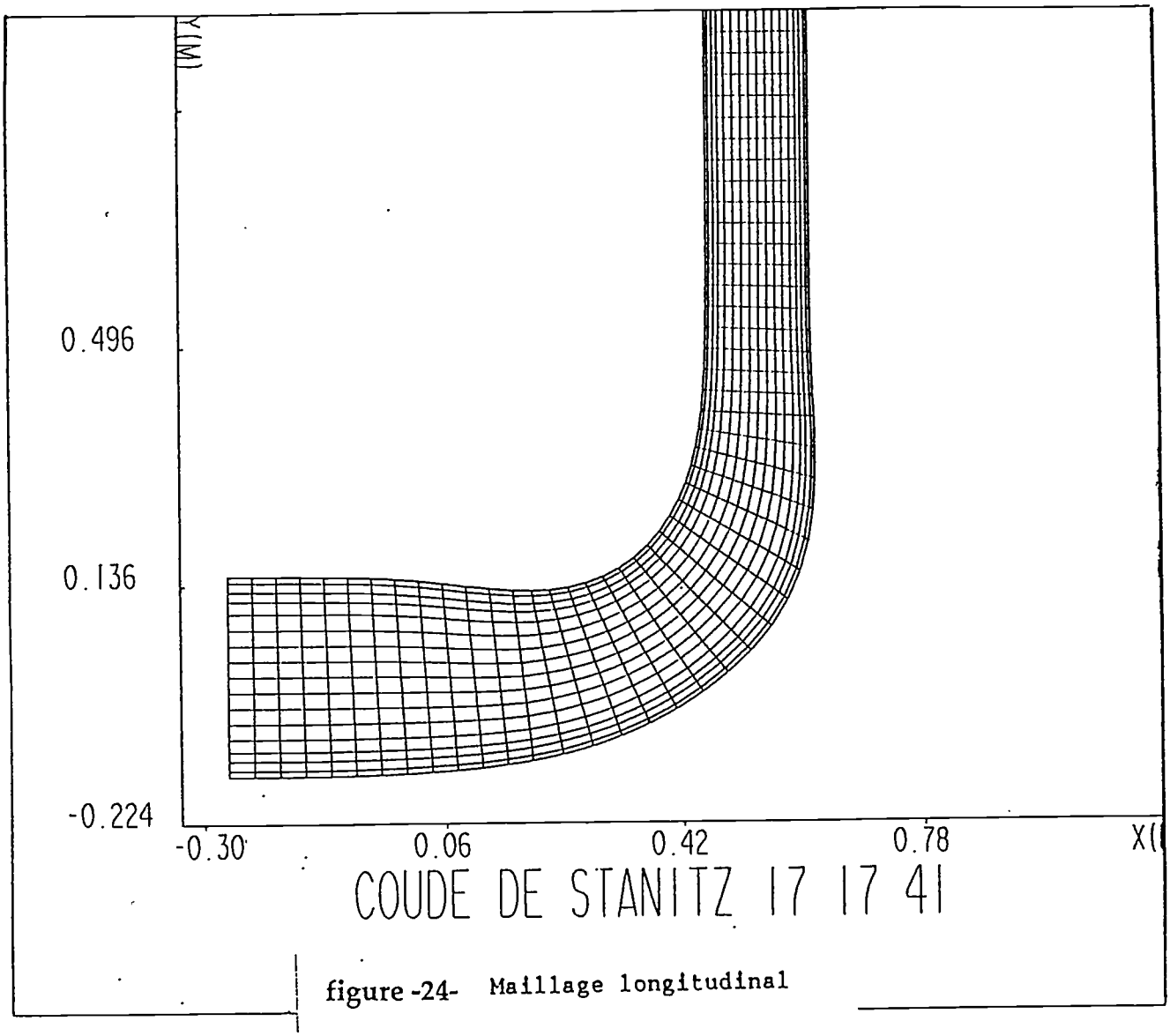


figure -24- Maillage longitudinal

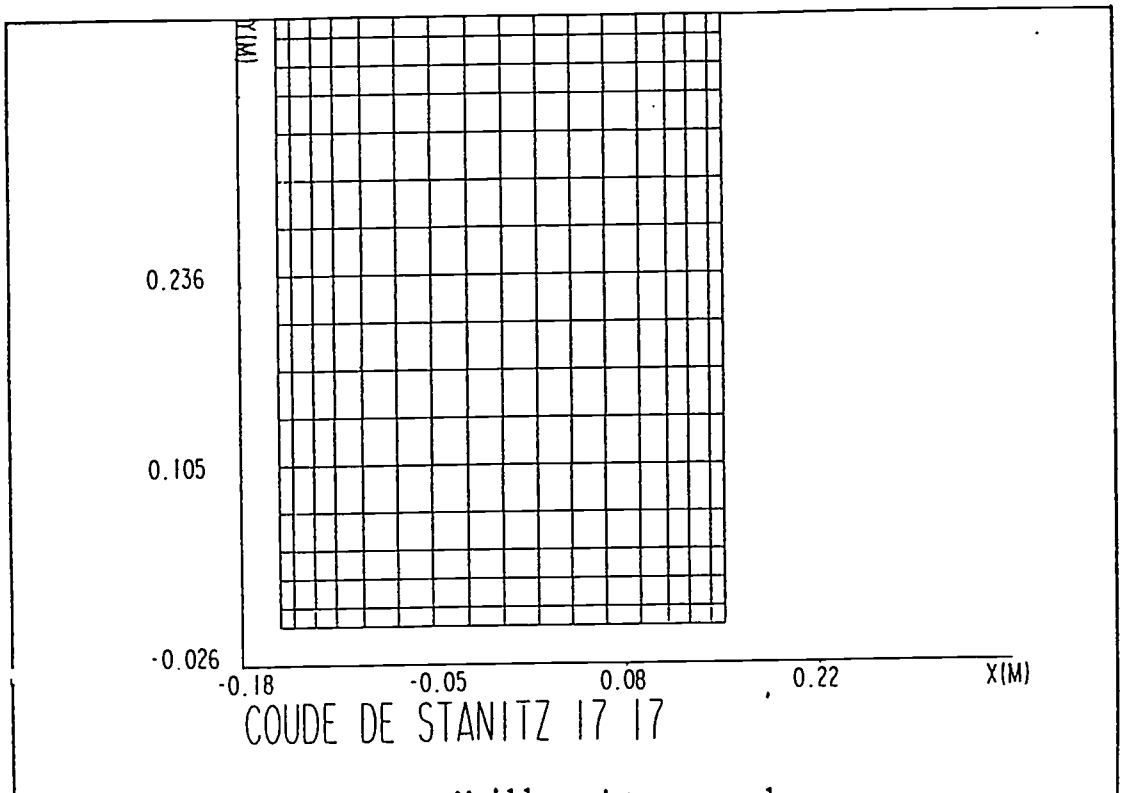


figure -25- Maillage transversal

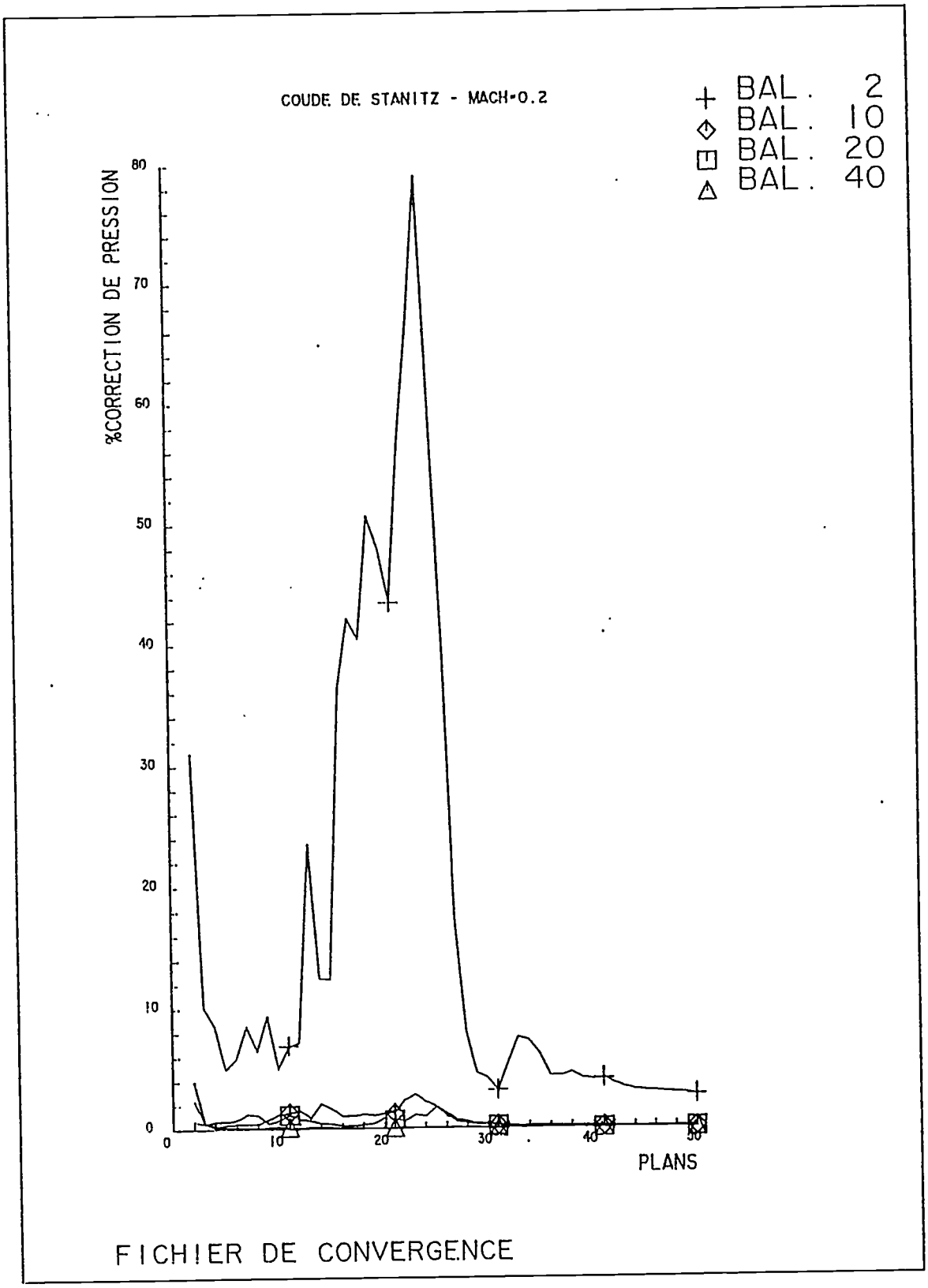

COUDE DE STANITZ - MACH=0.2
BAL. 2
BAL. 10
BAL. 20
BAL. 40
%CORRECTION DE PRESSION
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
PLANS
FICHIER DE CONVERGENCE

figure -26-

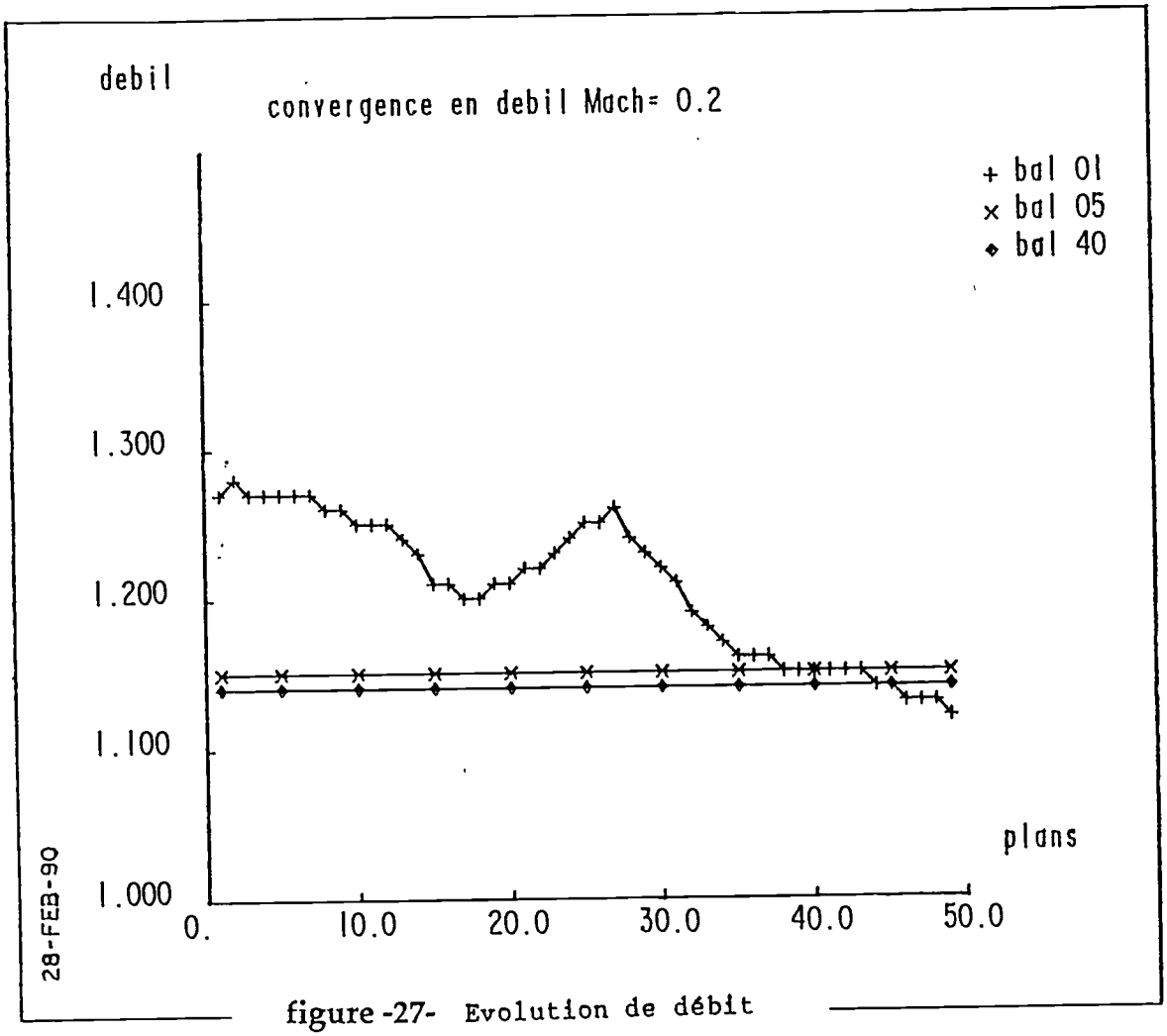


figure -27- Evolution de débit

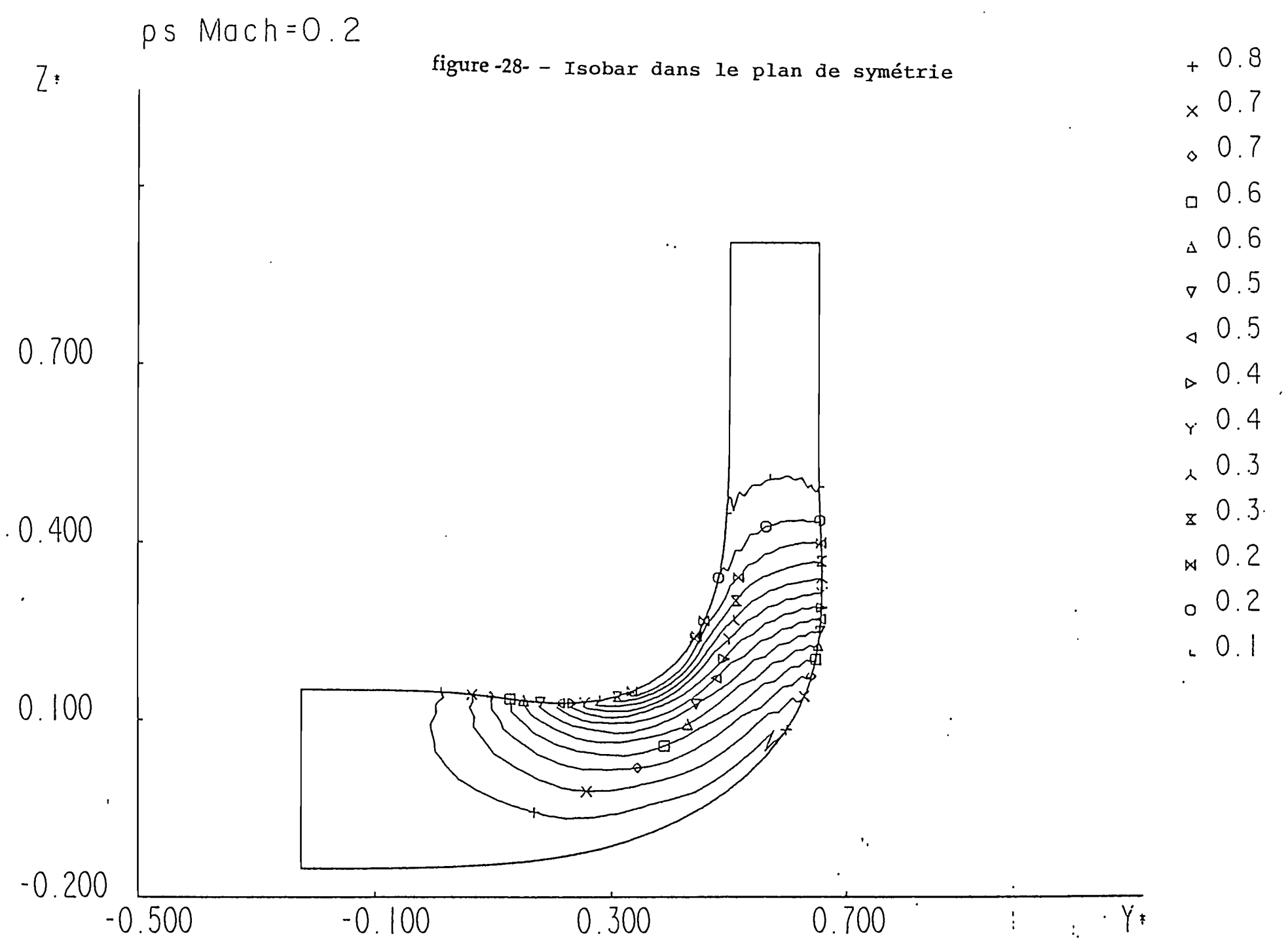


figure -28- – Isobar dans le plan de symétrie

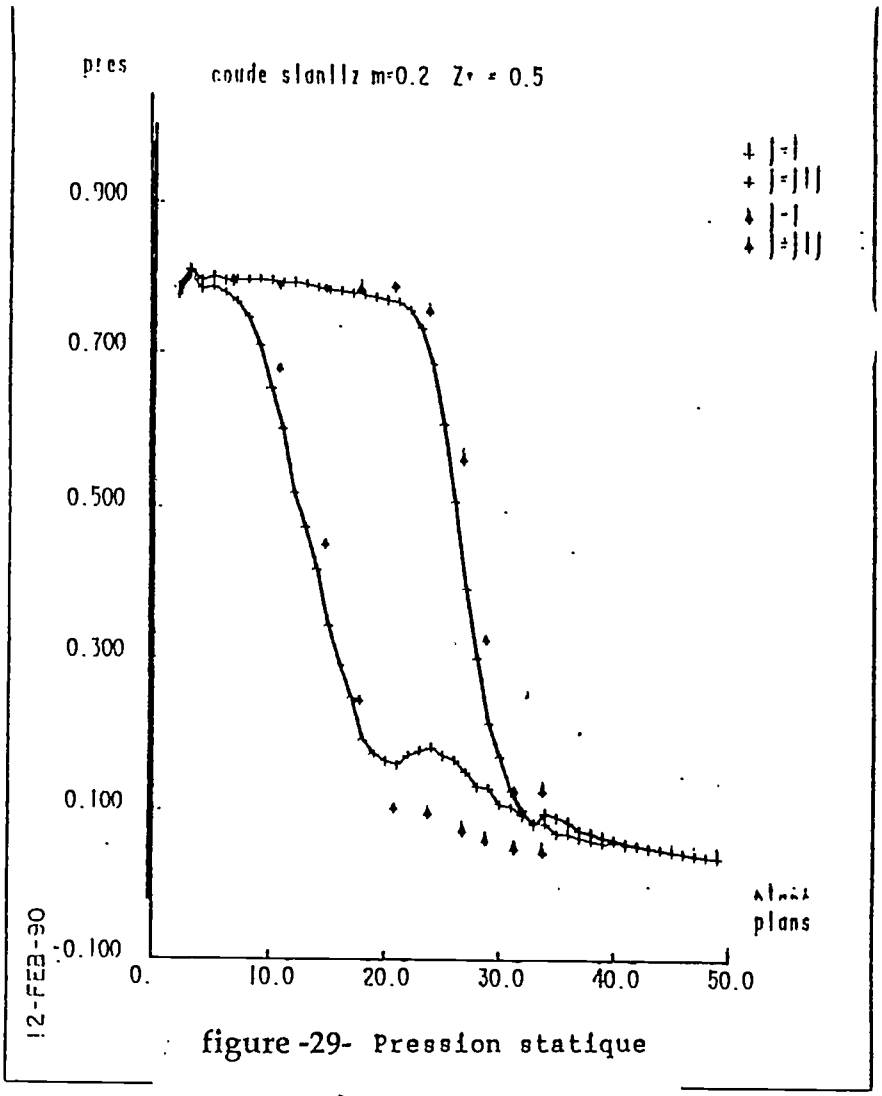


figure -29- Pression statique

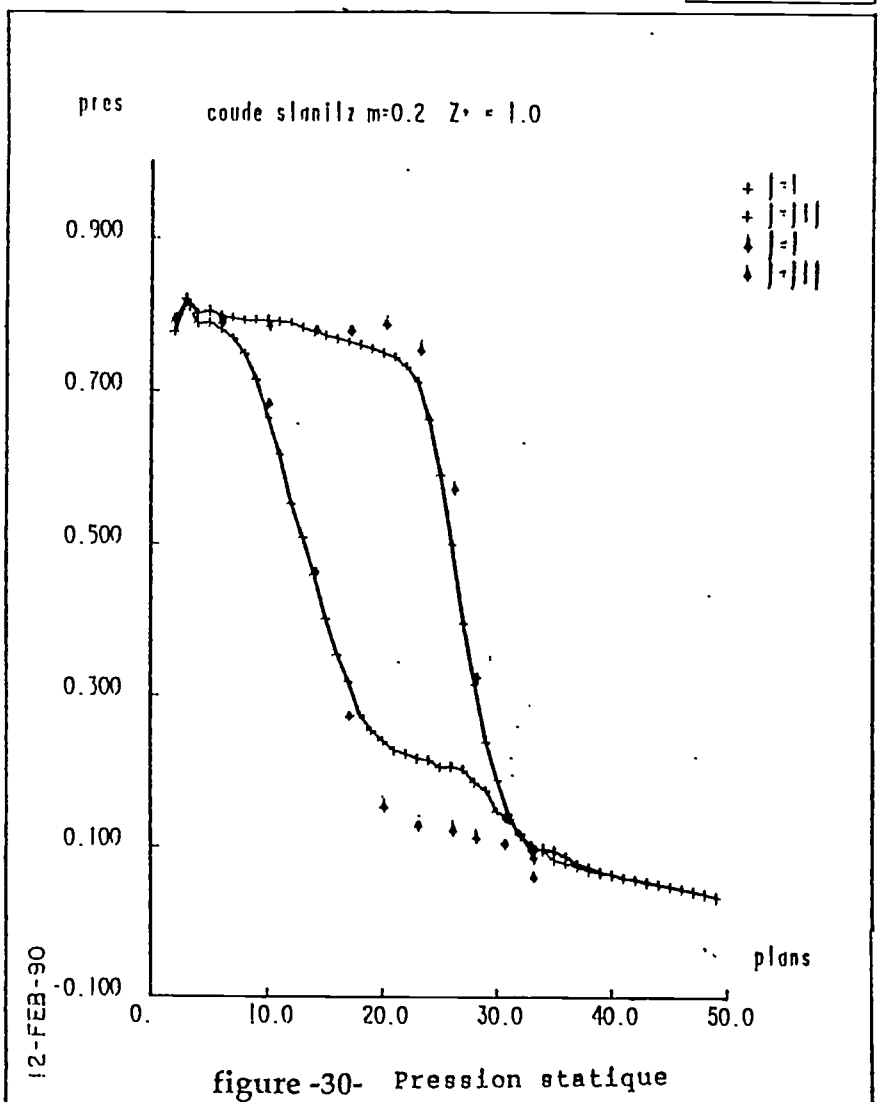


figure -30- Pression statique

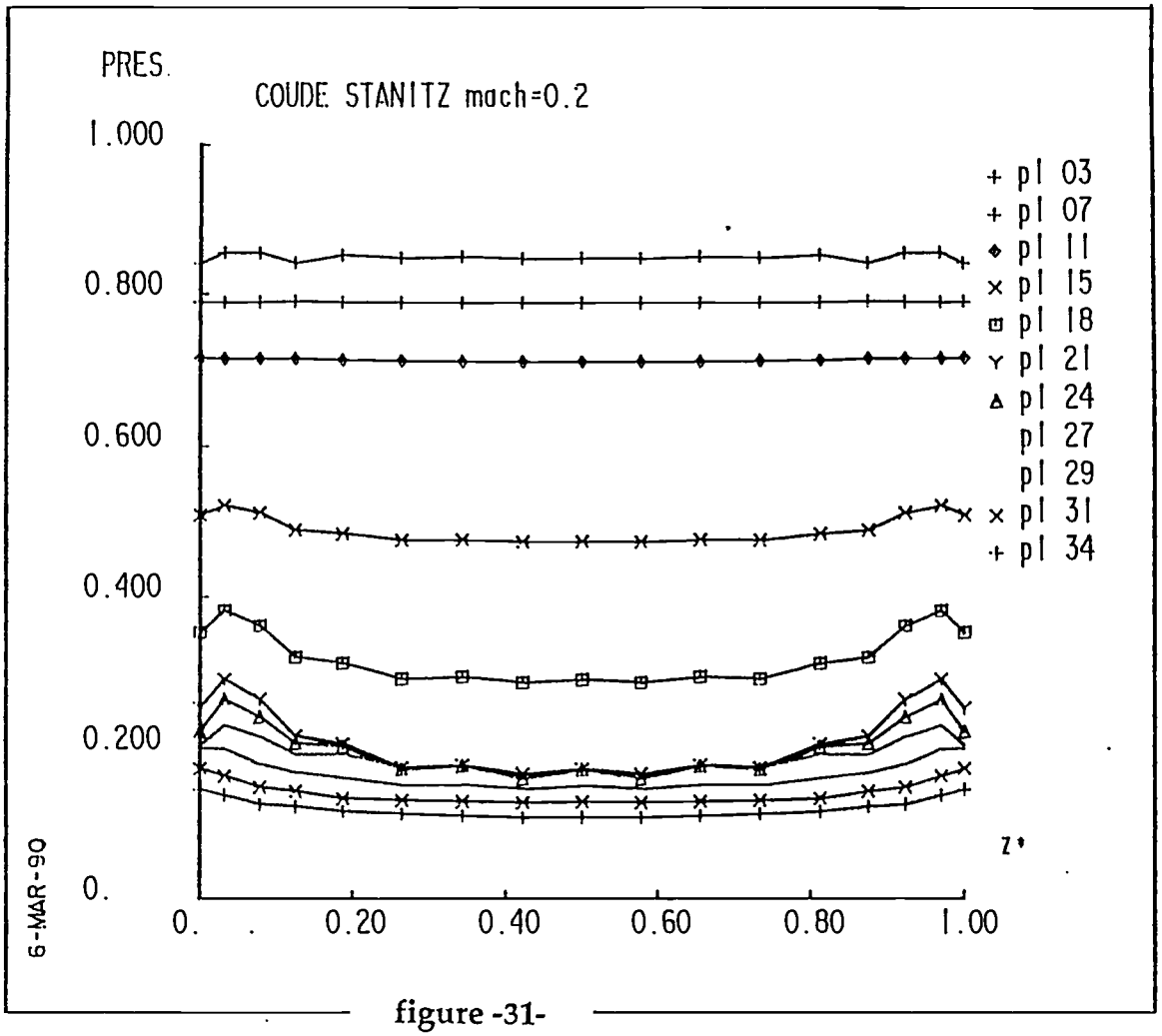


figure -31-

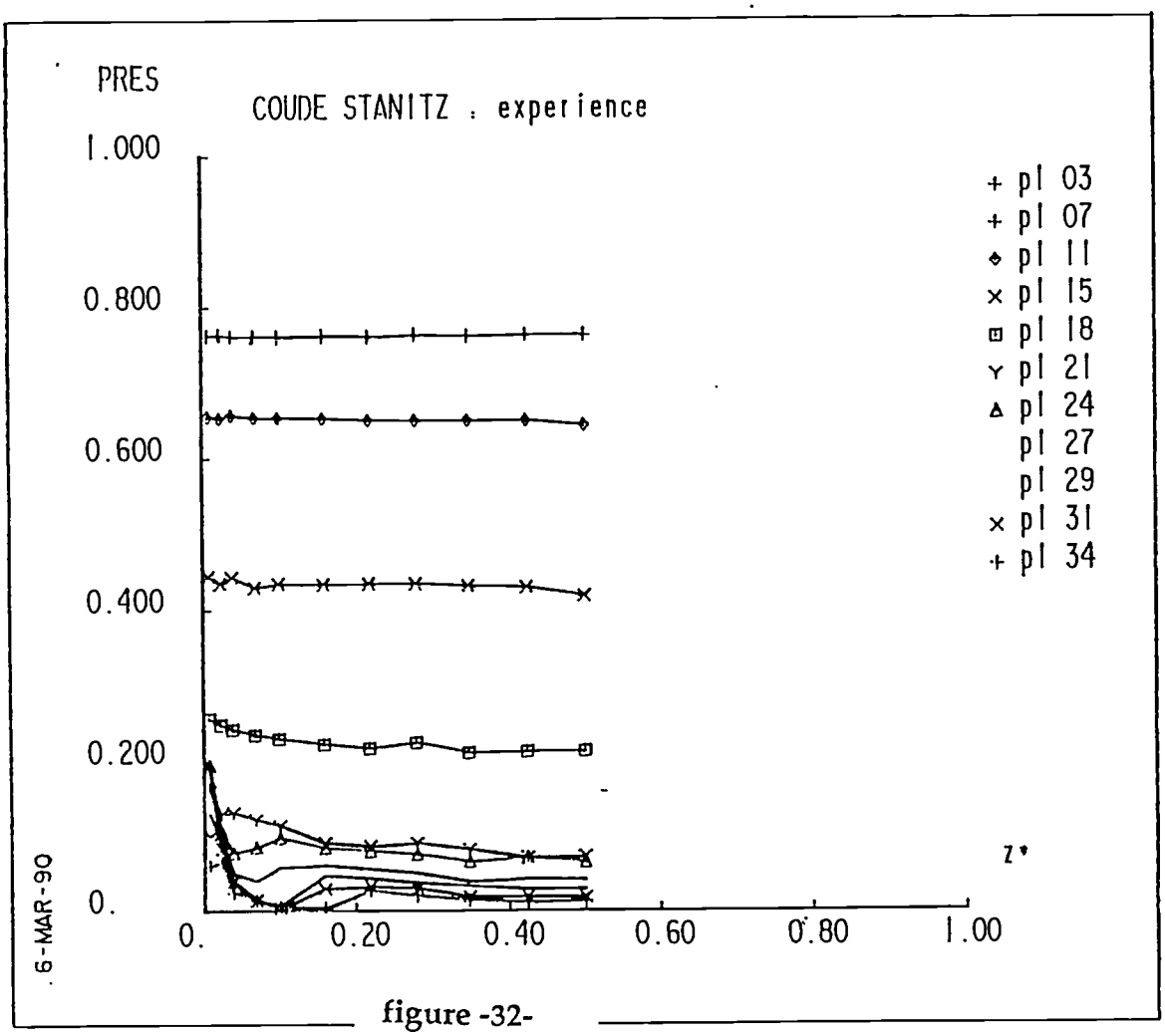


figure -32-

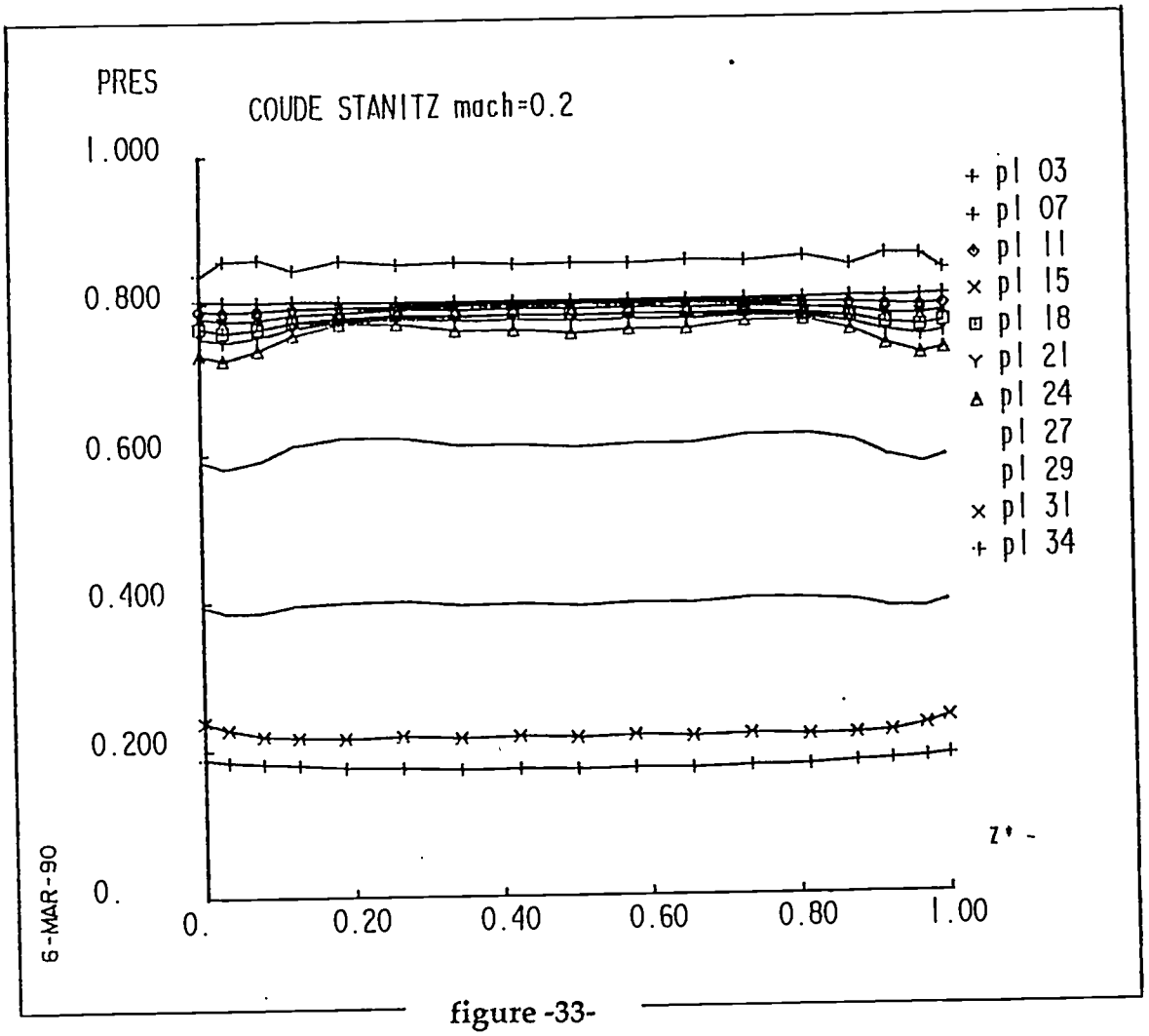


figure -33-

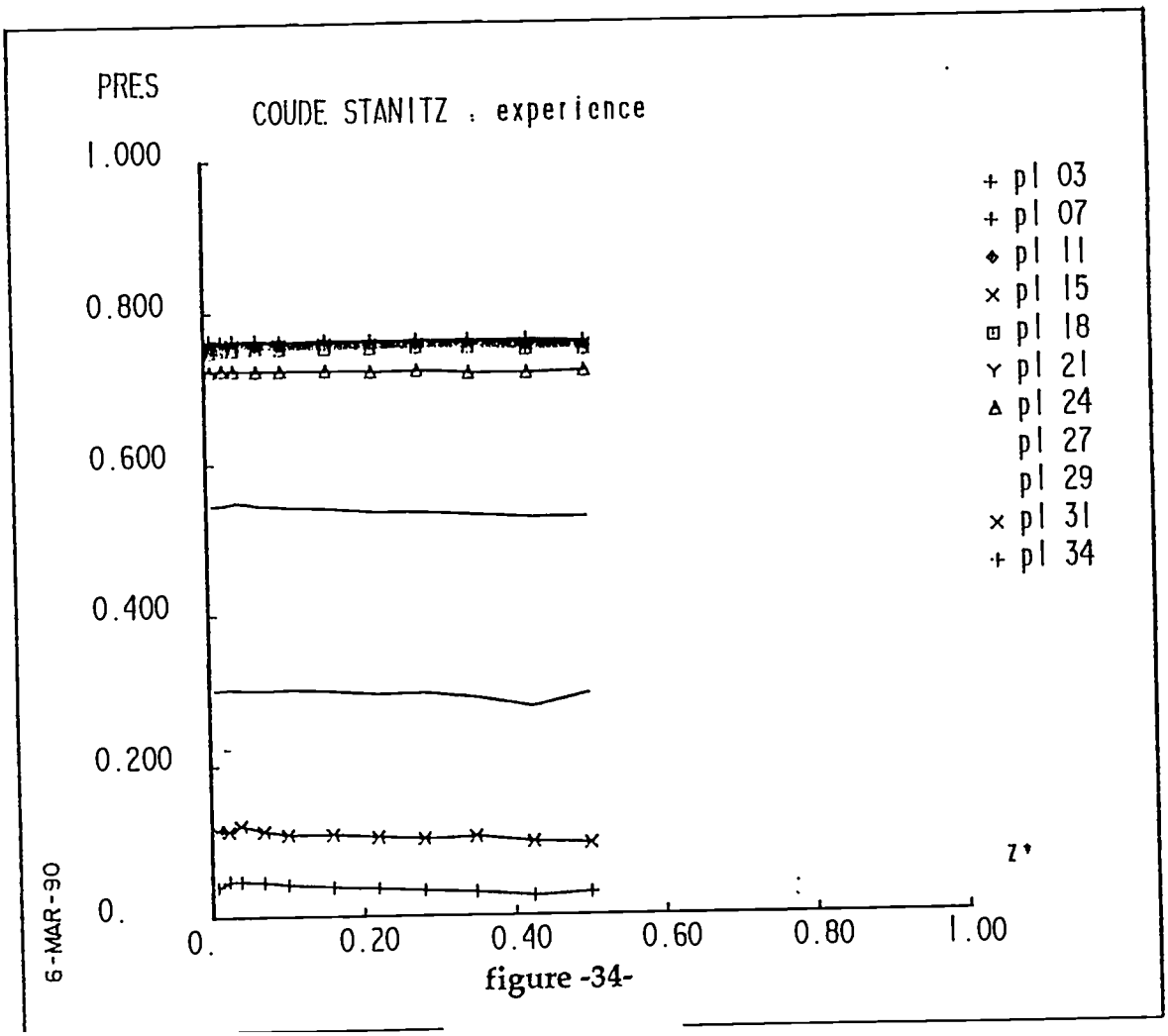


figure -34-

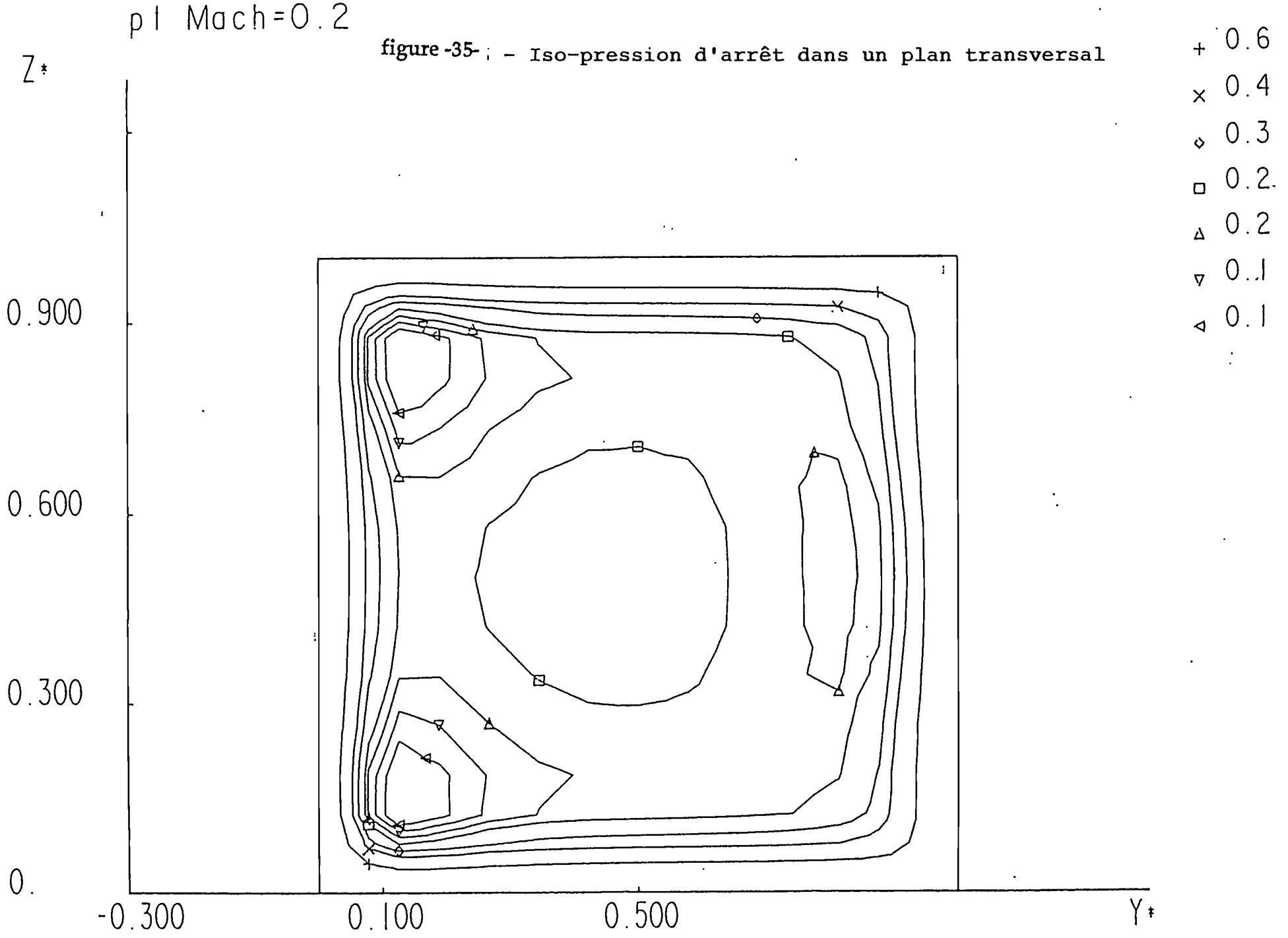


figure -35- : - Iso-pression d'arrêt dans un plan transversal

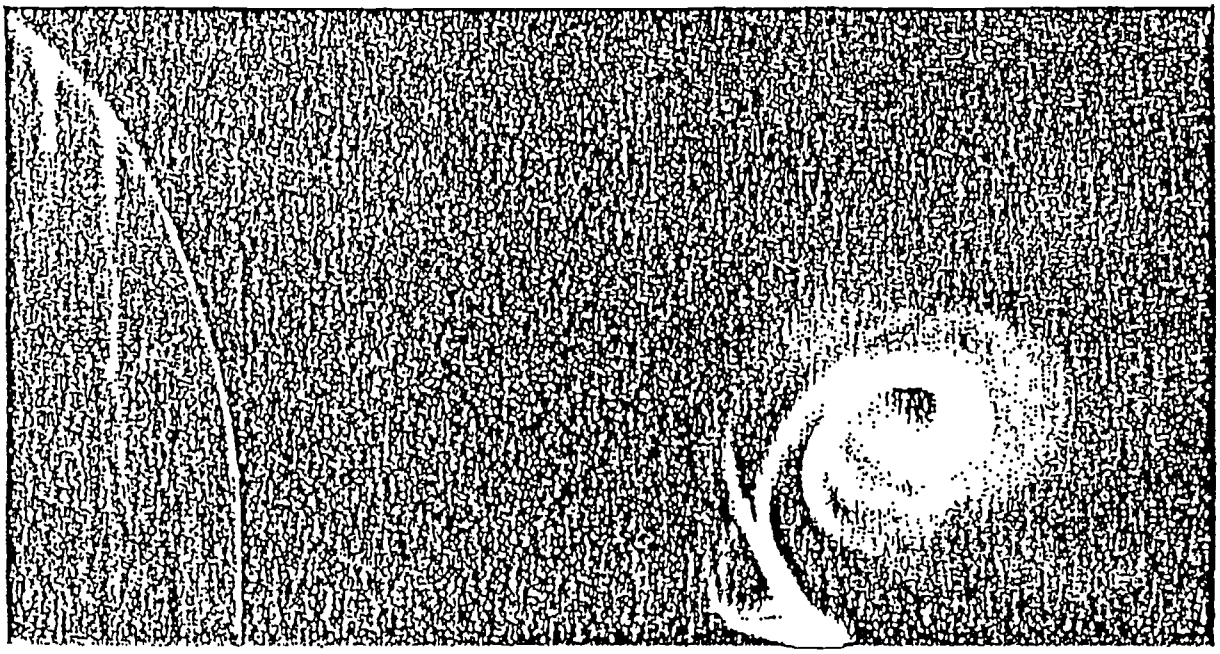


figure -37- Visualisation expérimentale

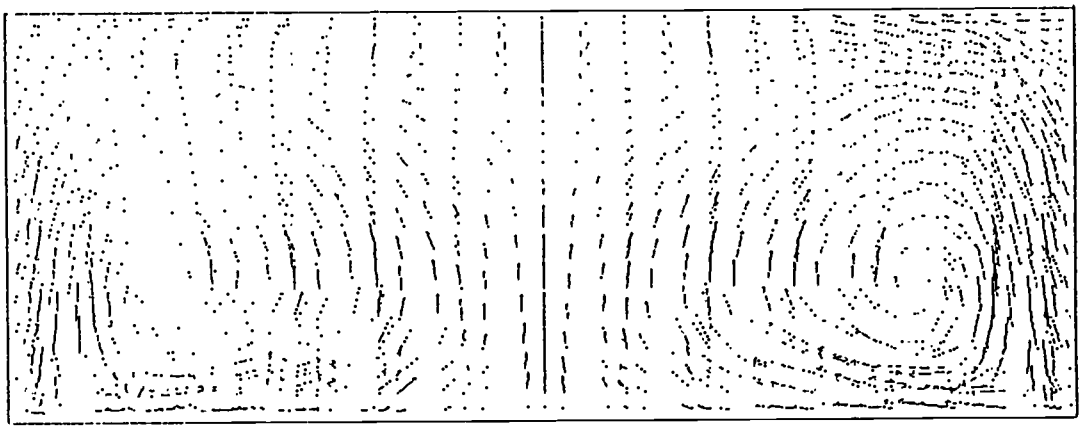


figure -36- Vitesses secondaires

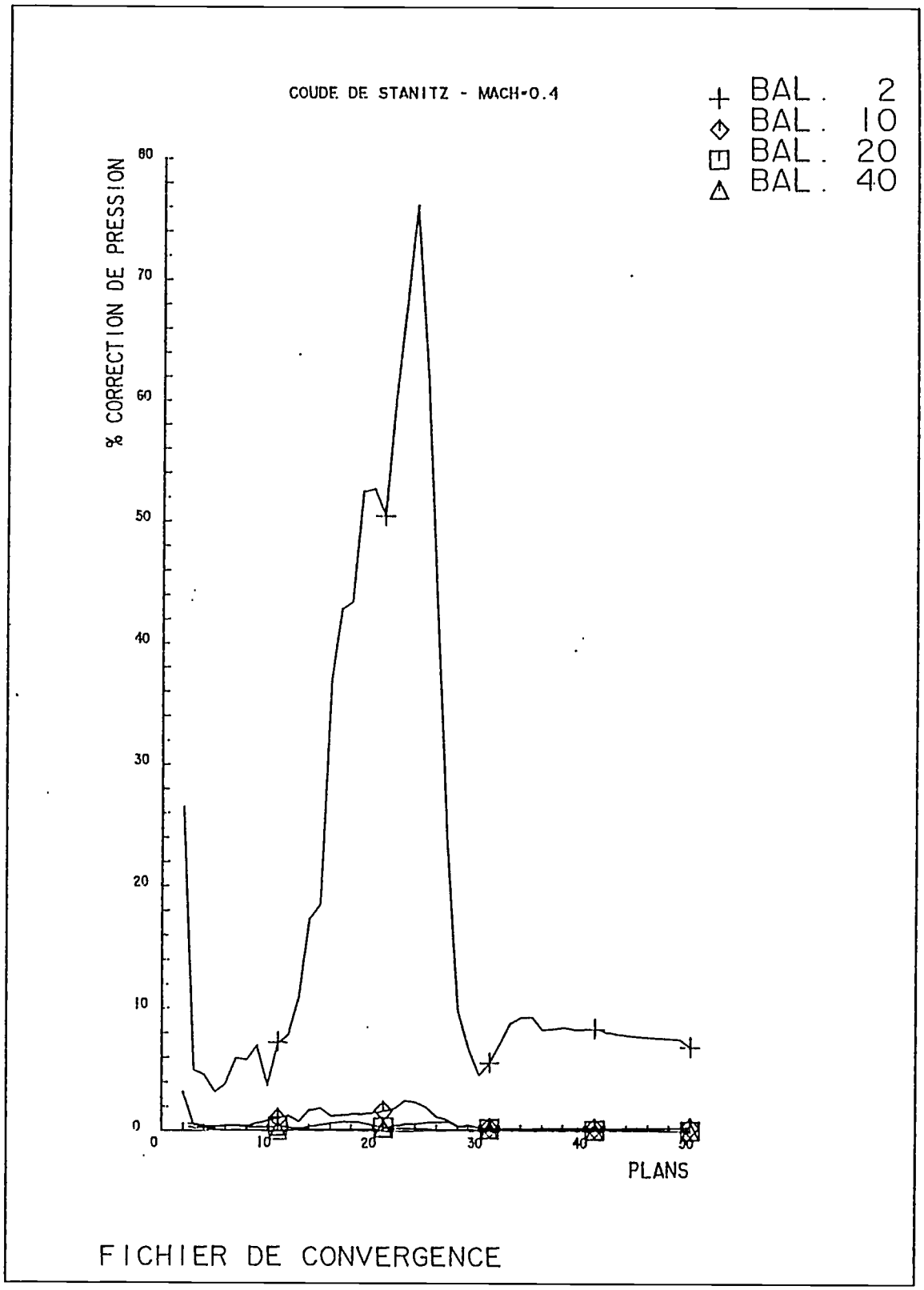

COUDE DE STANITZ - MACH-0.4
BAL. 2
BAL. 10
BAL. 20
BAL. 40
% CORRECTION DE PRESSION
0
10
20
30
40
50
60
70
0
10
20
30
40
50
PLANS
FICHIER DE CONVERGENCE

figure -38-

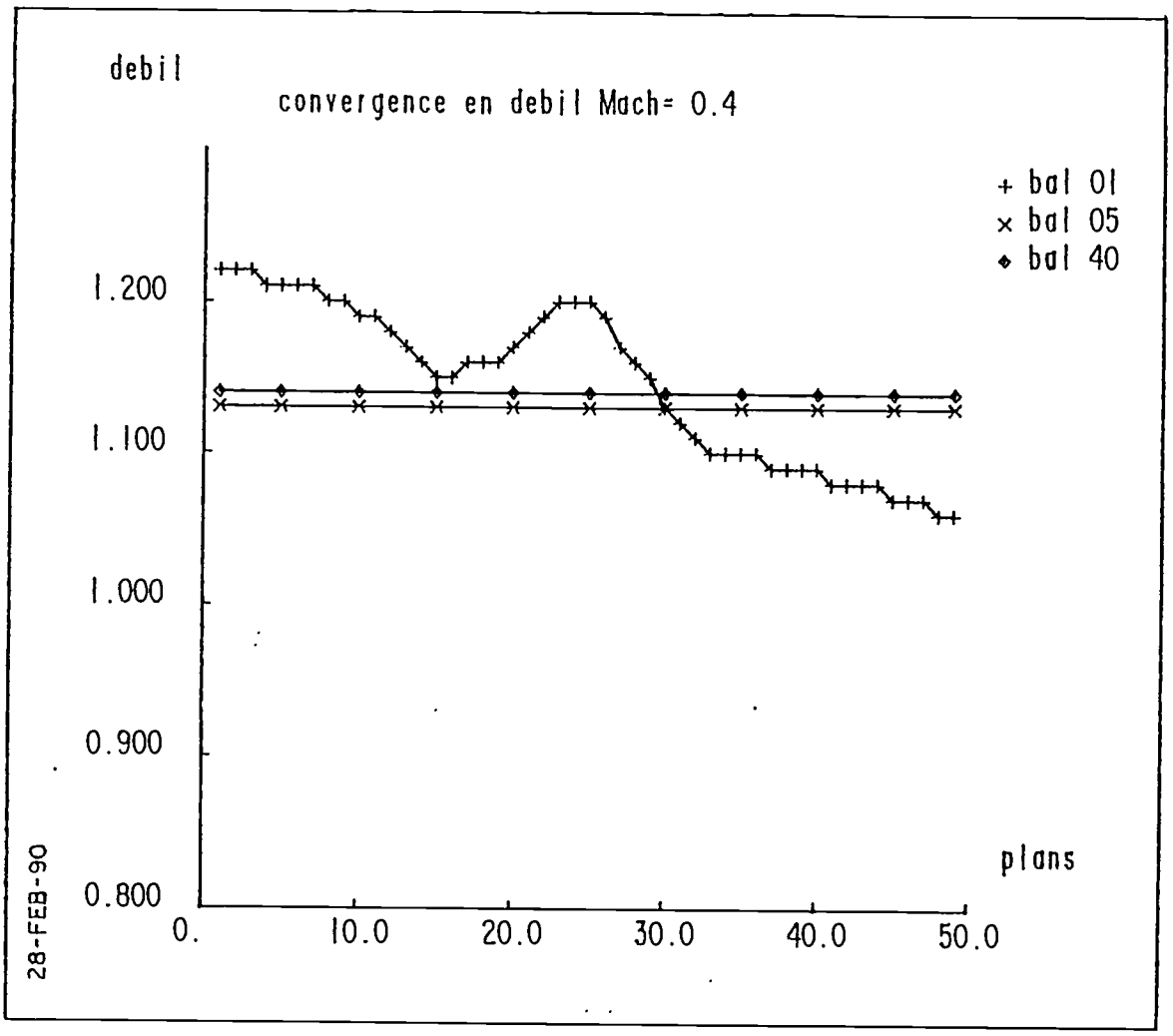


figure -39- - Evolution du débit

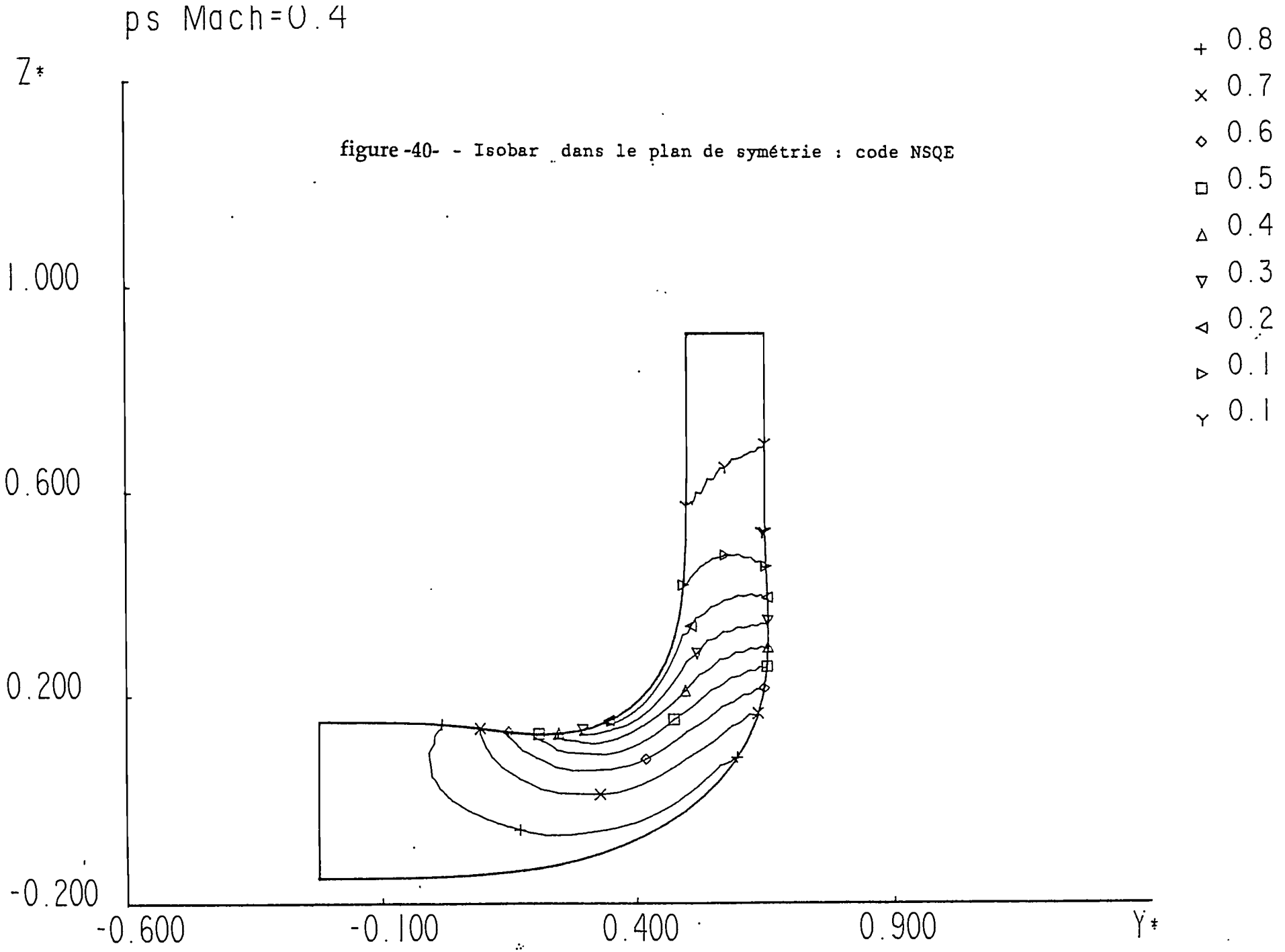


figure -40- - Isobar dans le plan de symétrie : code NSQE

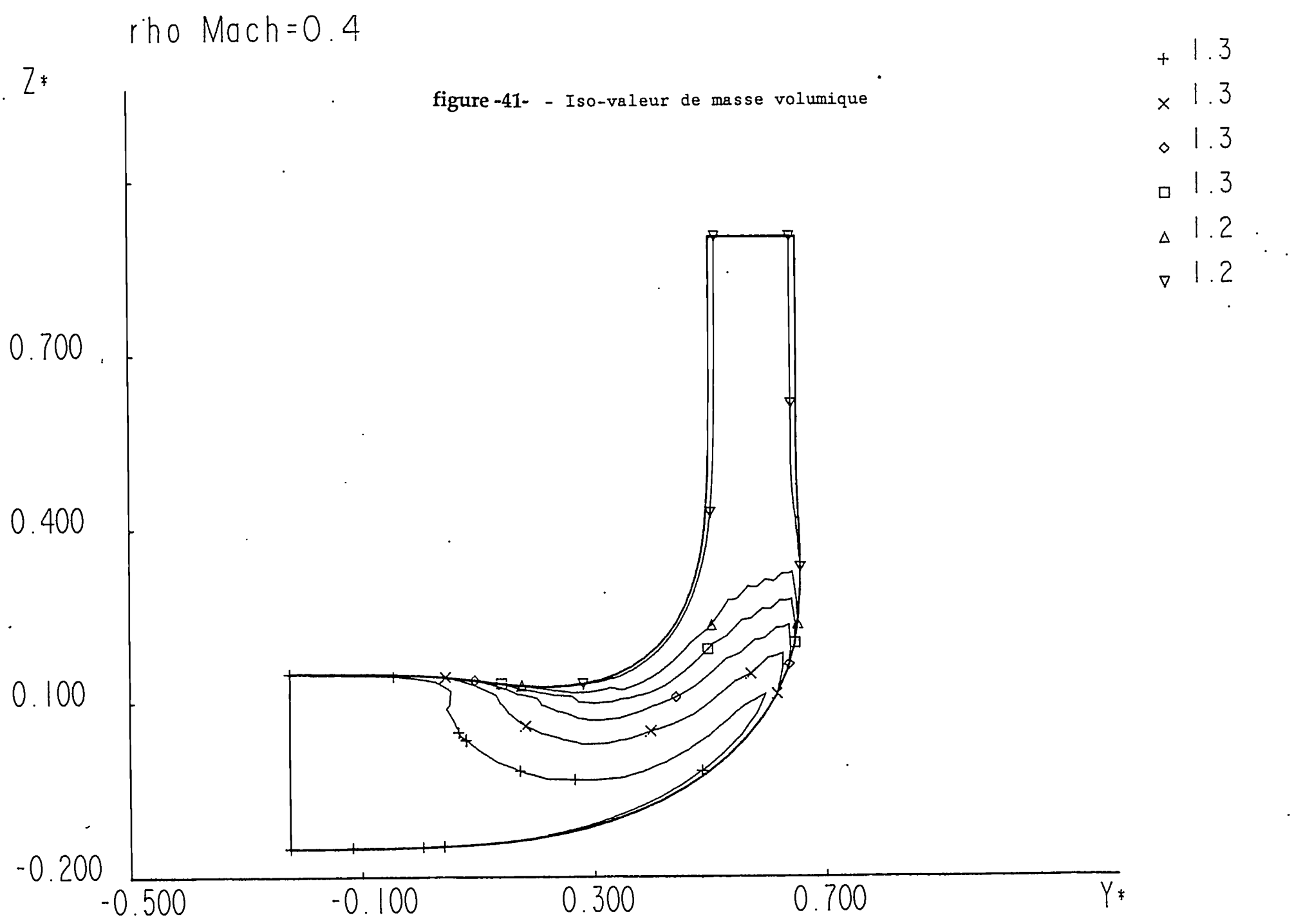


figure -41- - Iso-valeur de masse volumique

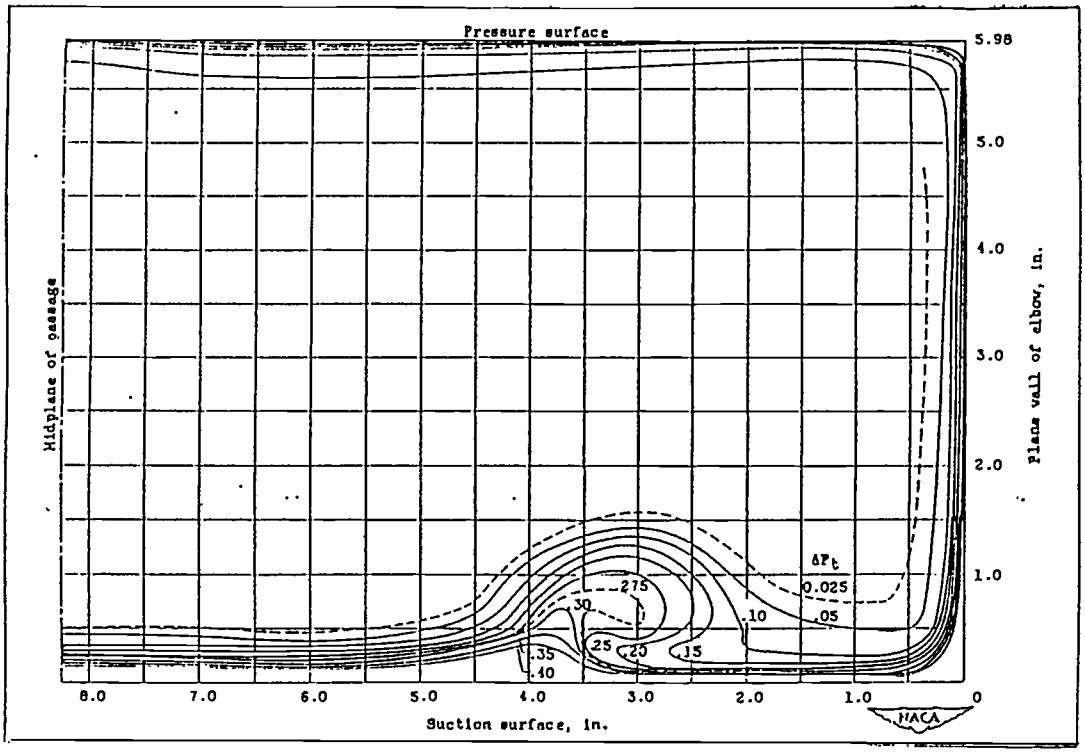


figure -42- - Iso-pression d'arrêt : mesures expérimentales

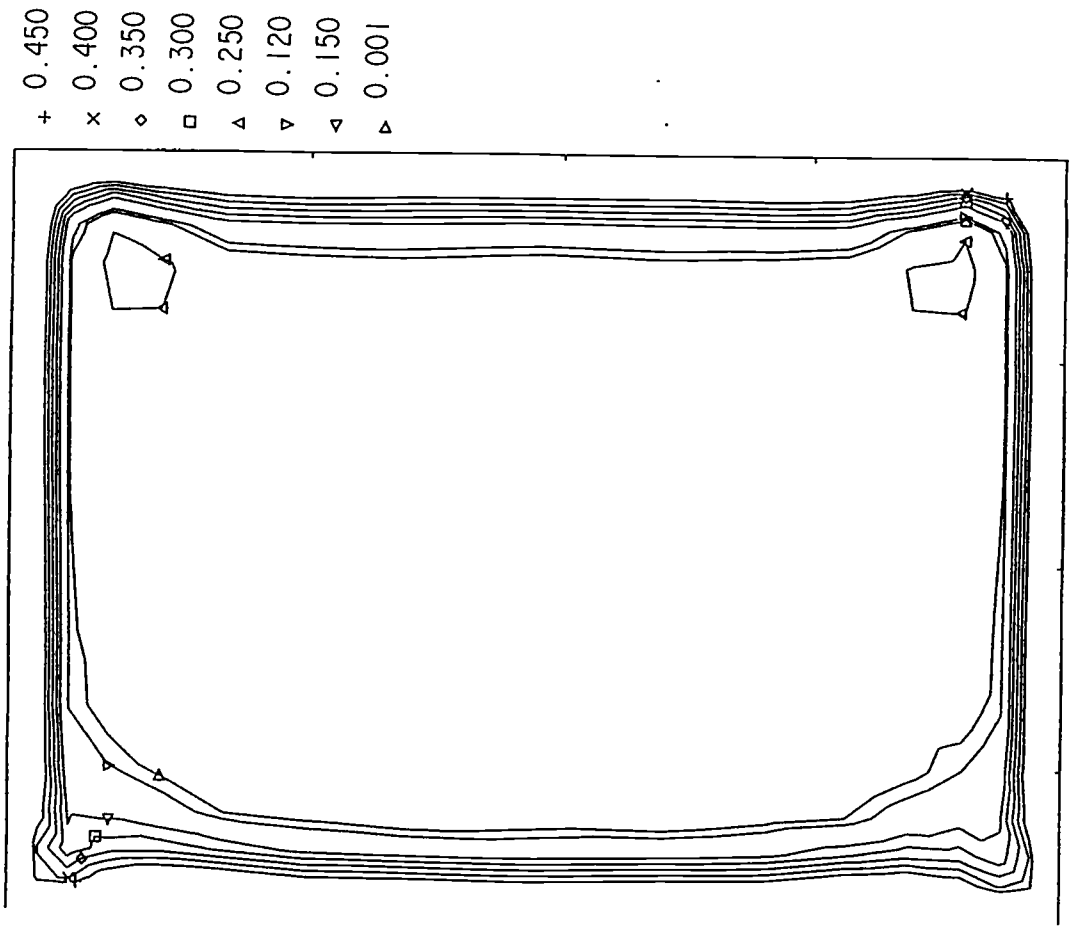
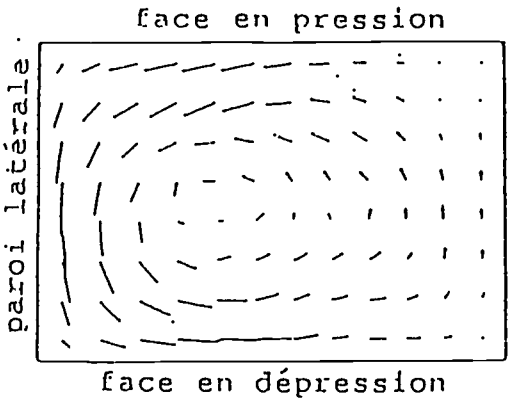


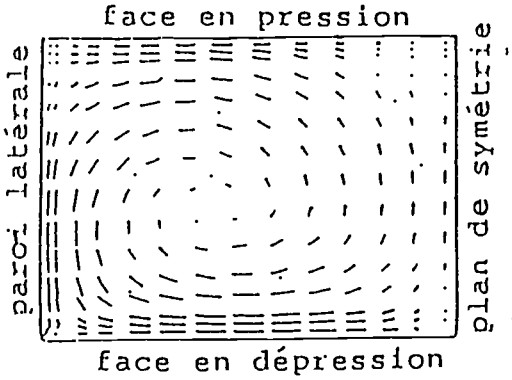
figure -43-

EULER E.D.F



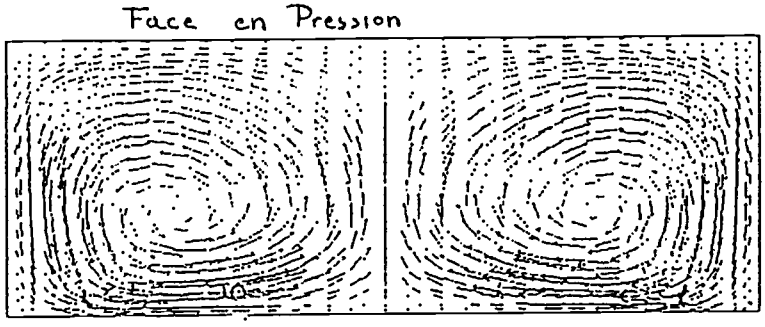
– Figure 44a –

NJS - k-ε E.D.F



– Figure 44b –

N.S.P



– Figure 44c –

Vecteurs vitesse dans le plan de sortie

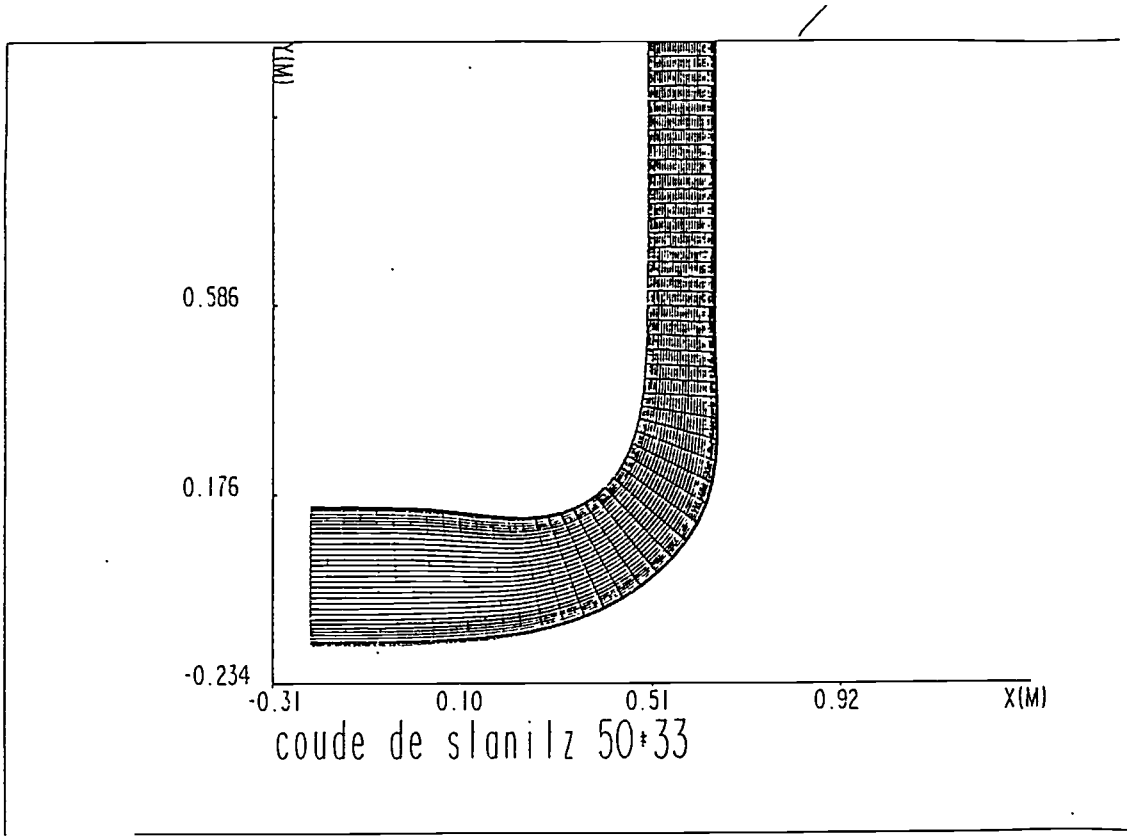


figure -45-

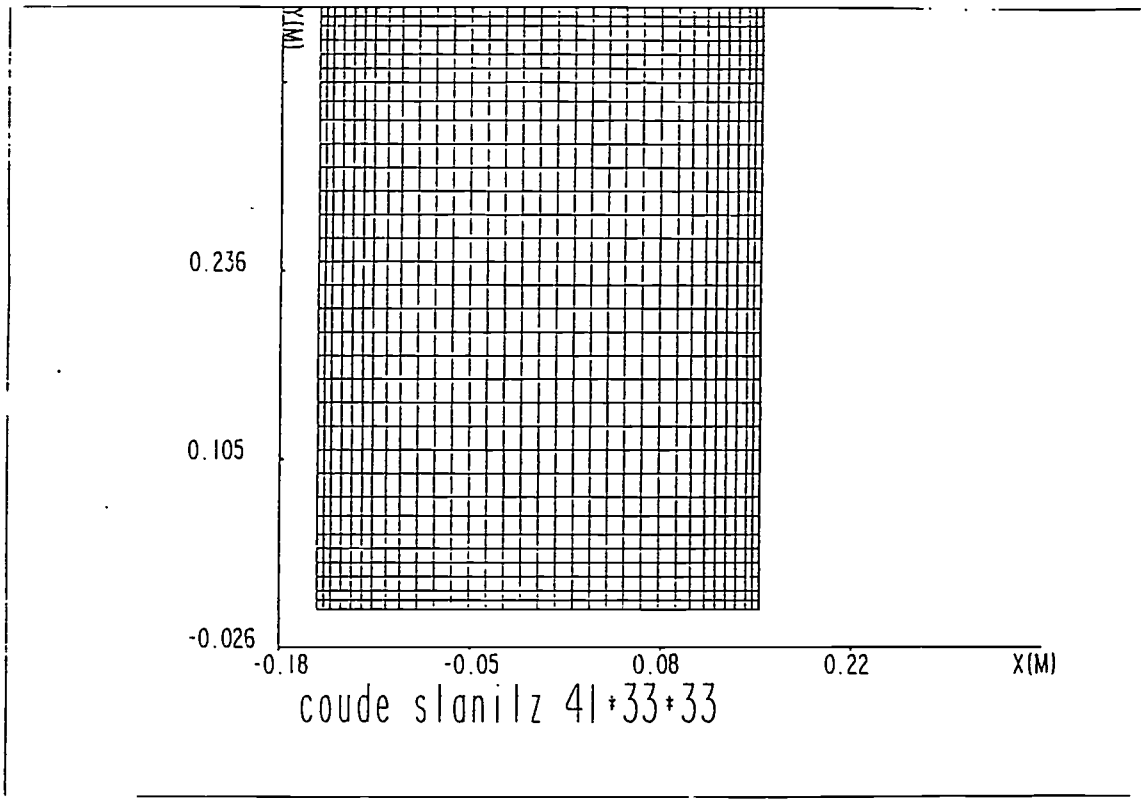
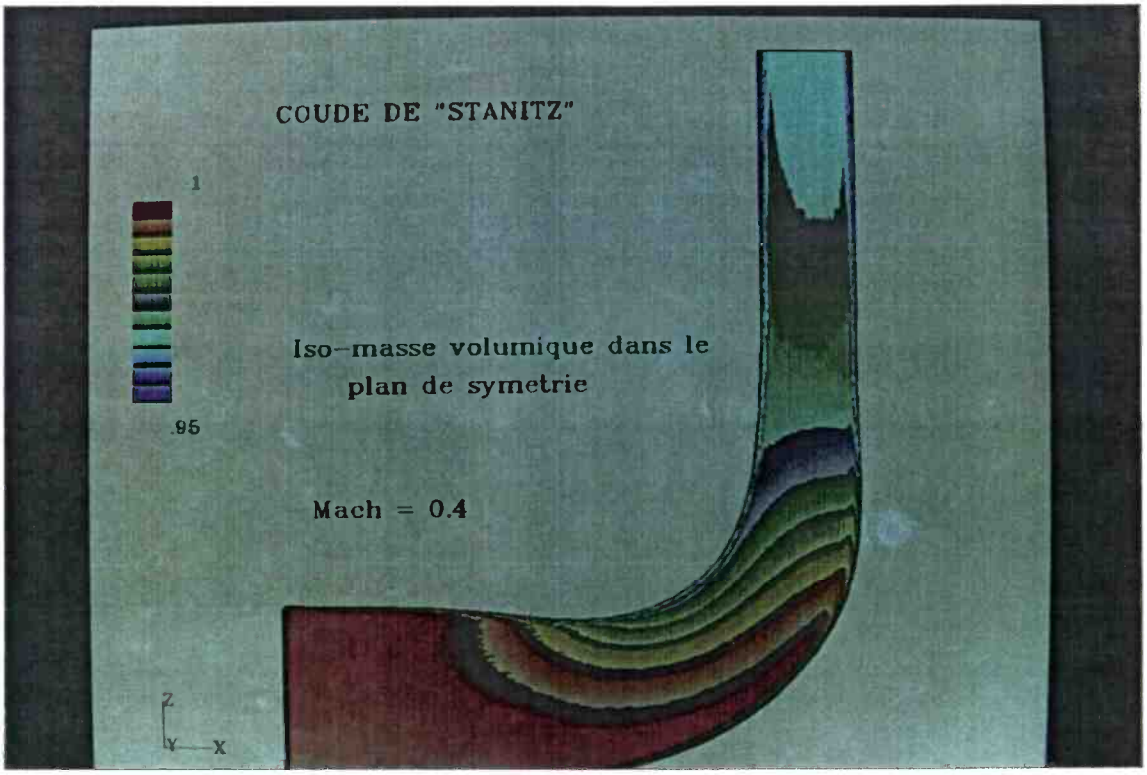
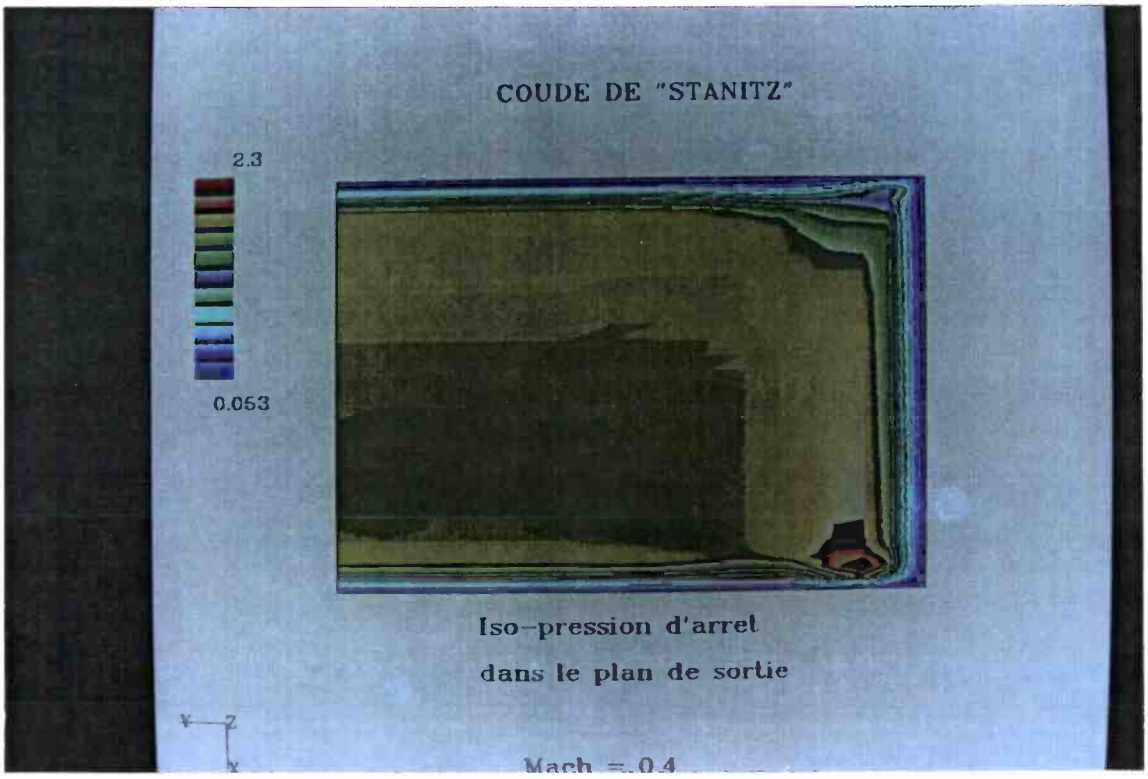


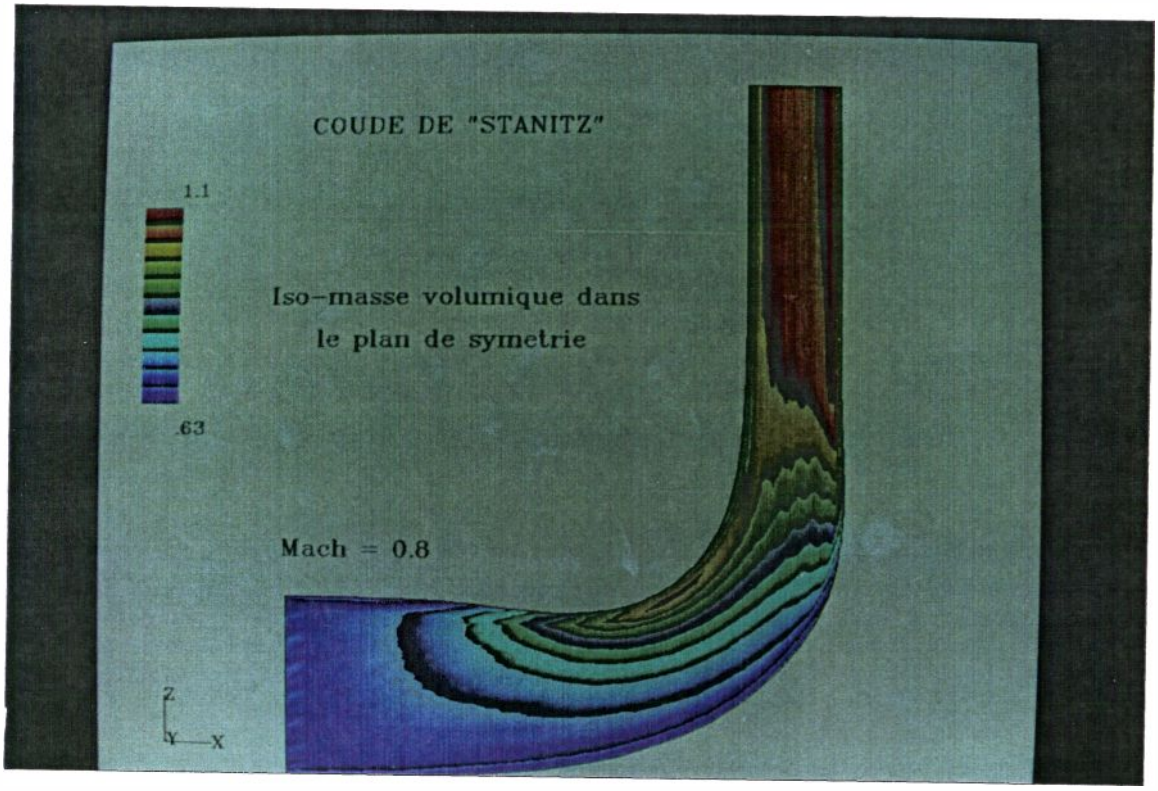
figure -46-



- Figure 47 -



- Figure 48 -


COUDE DE "STANITZ"
1.1
Iso-masse volumique dans
le plan de symetrie
.63
Mach = 0.8
Z
Y
X

- Figure 49 -

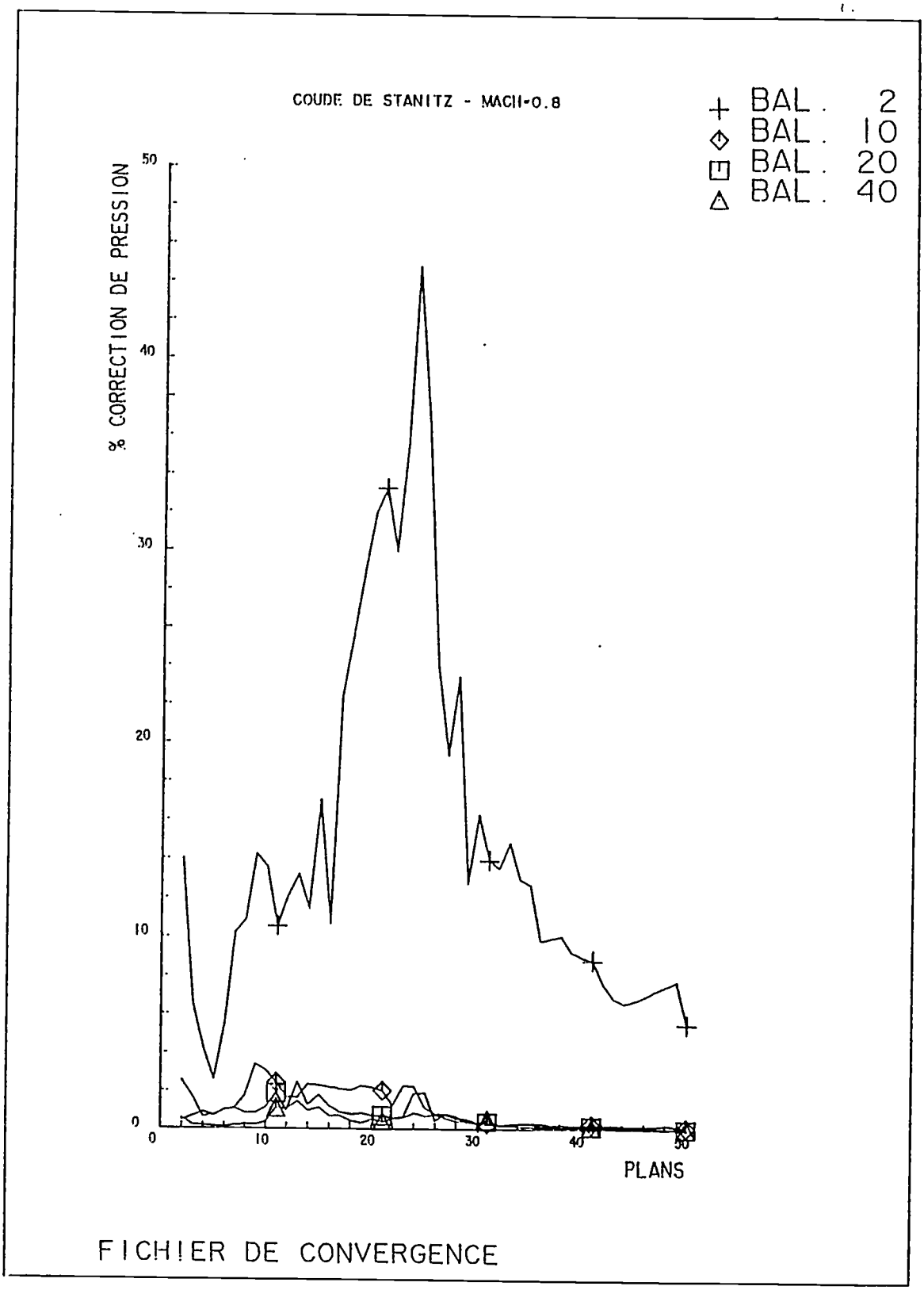

COUDE DE STANITZ - MACH=0.8
BAL. 2
BAL. 10
BAL. 20
BAL. 40
% CORRECTION DE PRESSION
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
PLANS
FICHIER DE CONVERGENCE

figure -49-

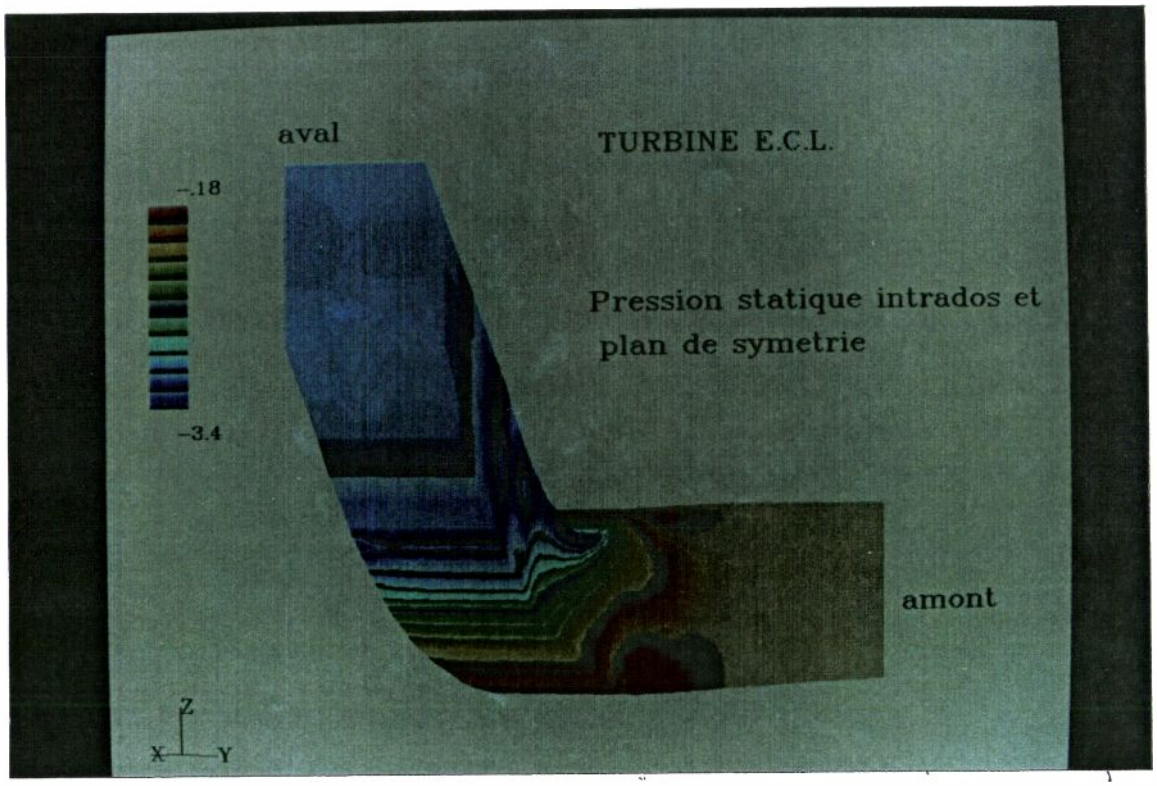


figure -50-

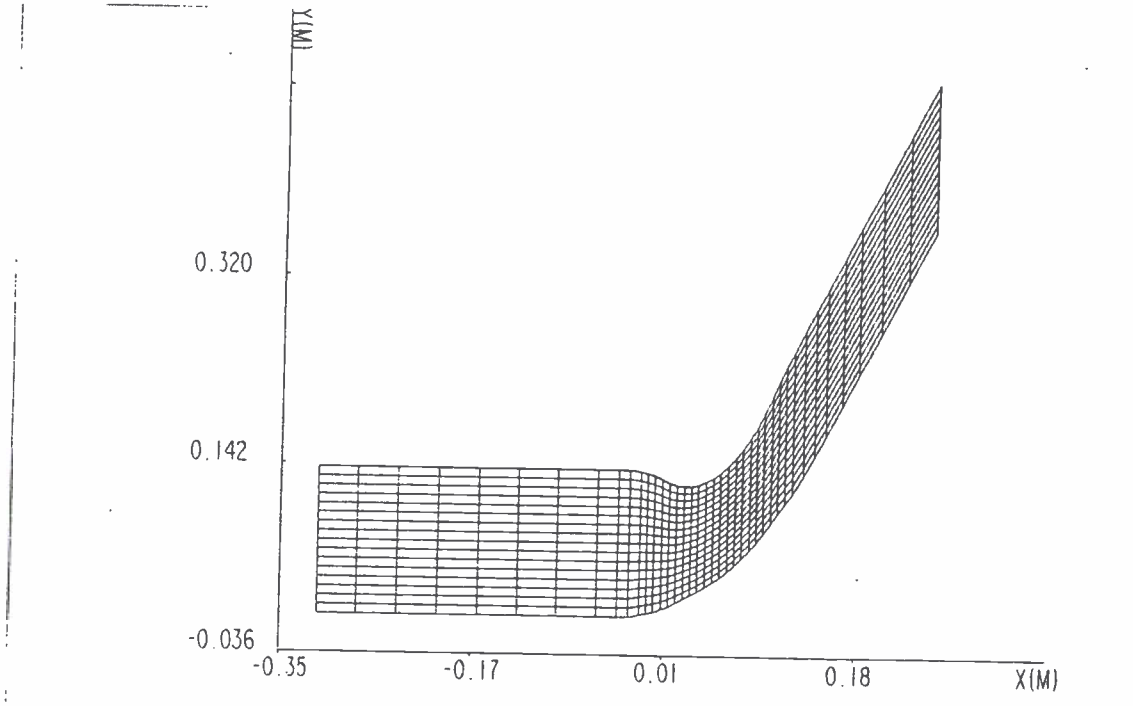


figure -51-

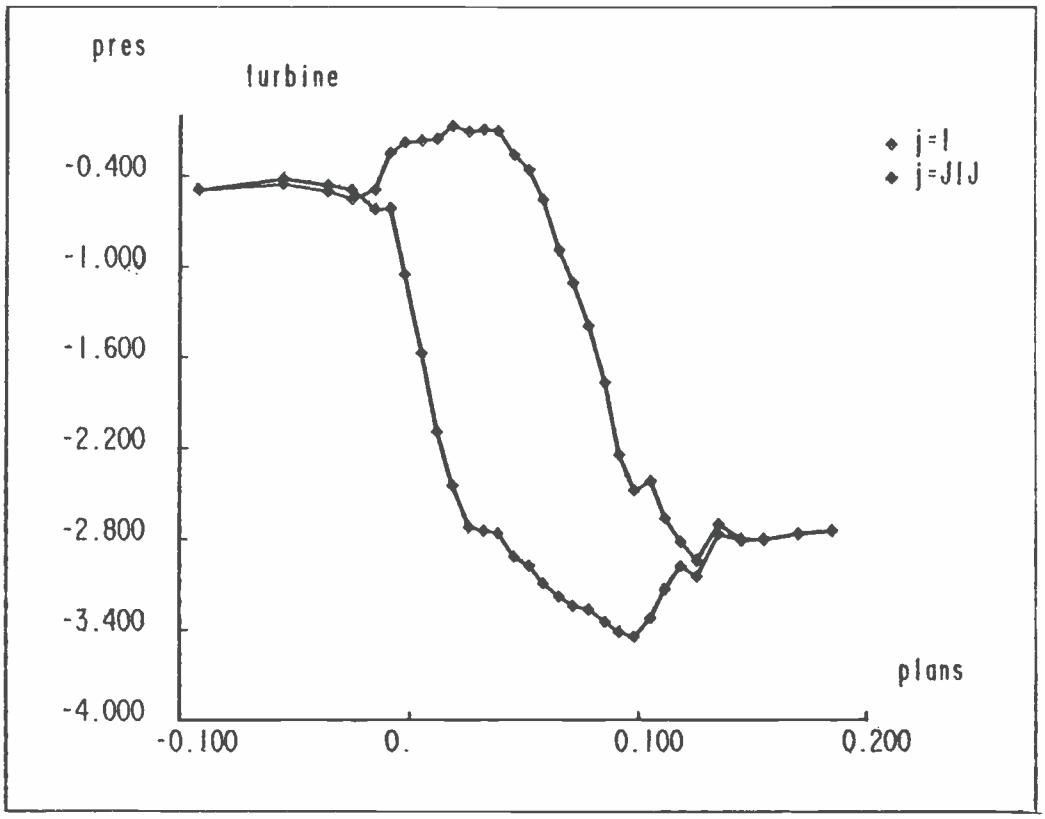


figure -52-

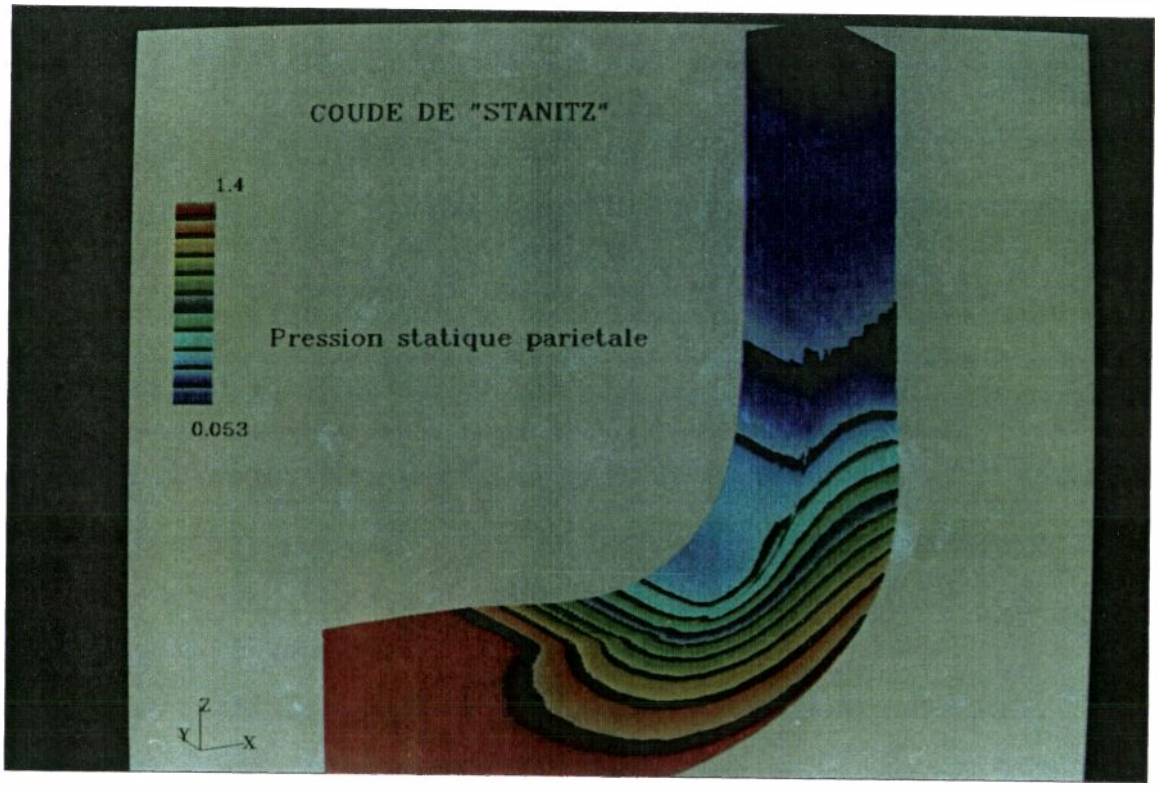
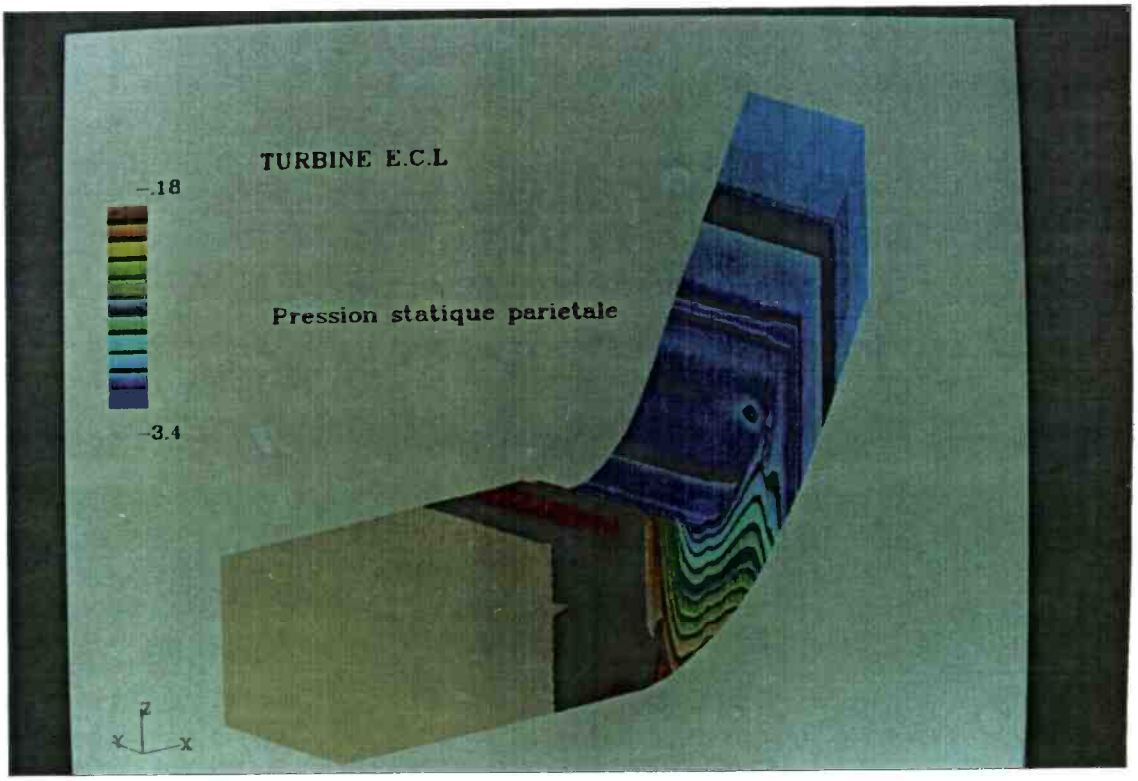
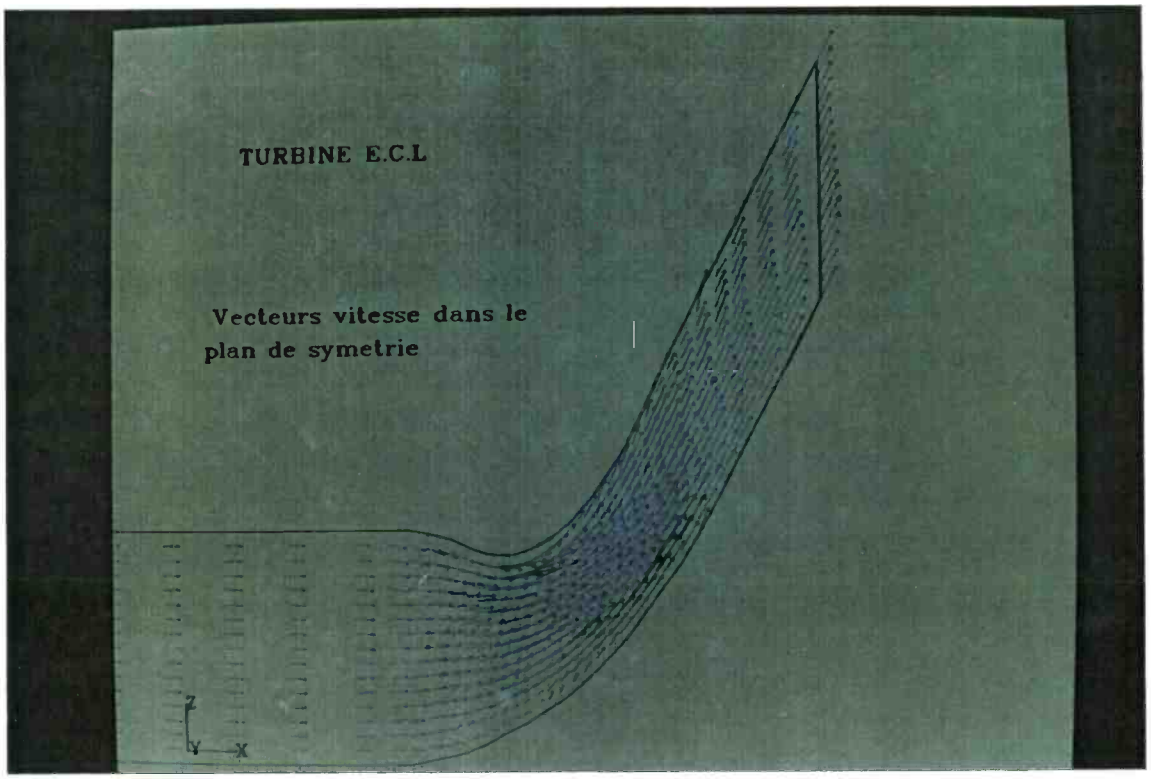


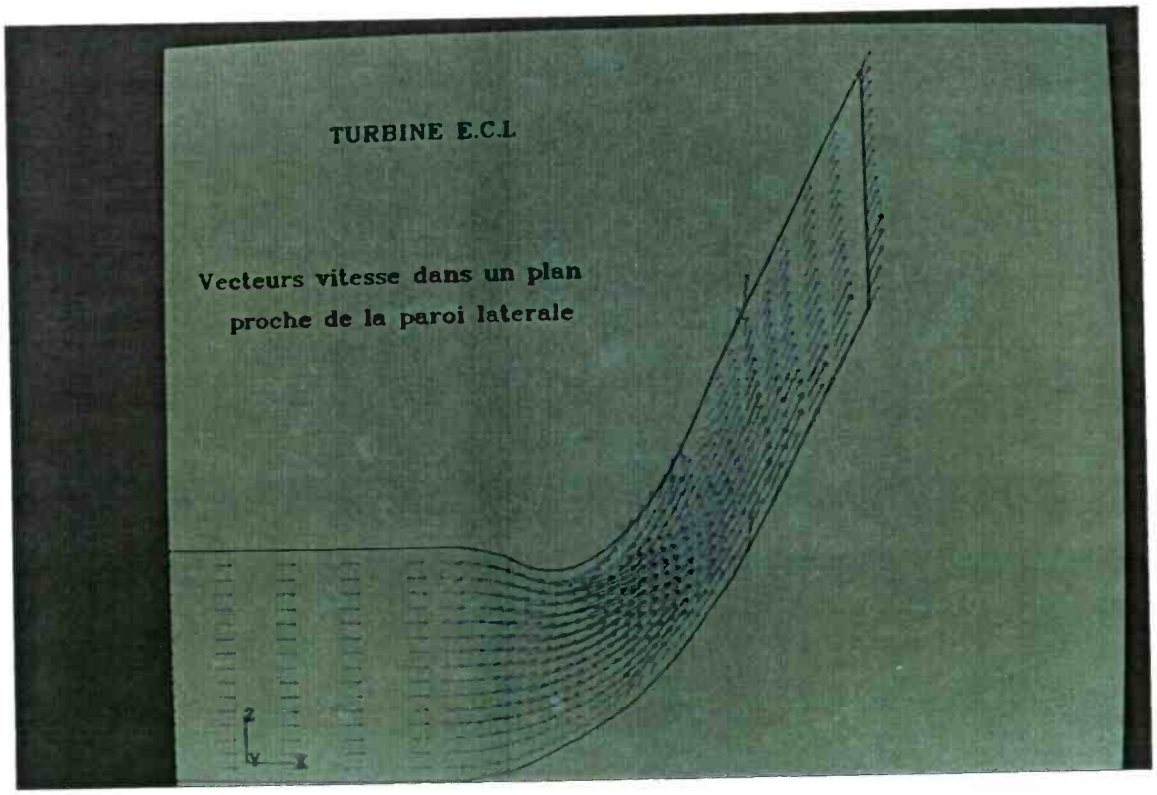
figure -53-



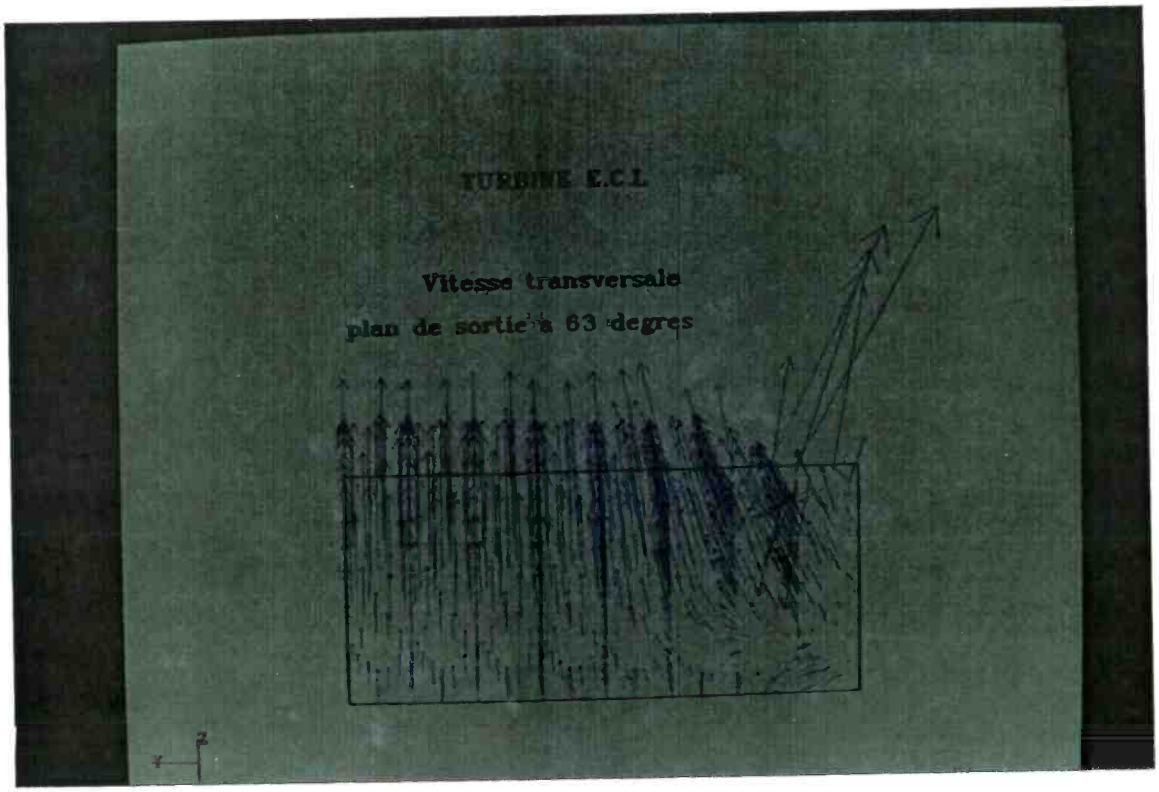
– Figure 54 –



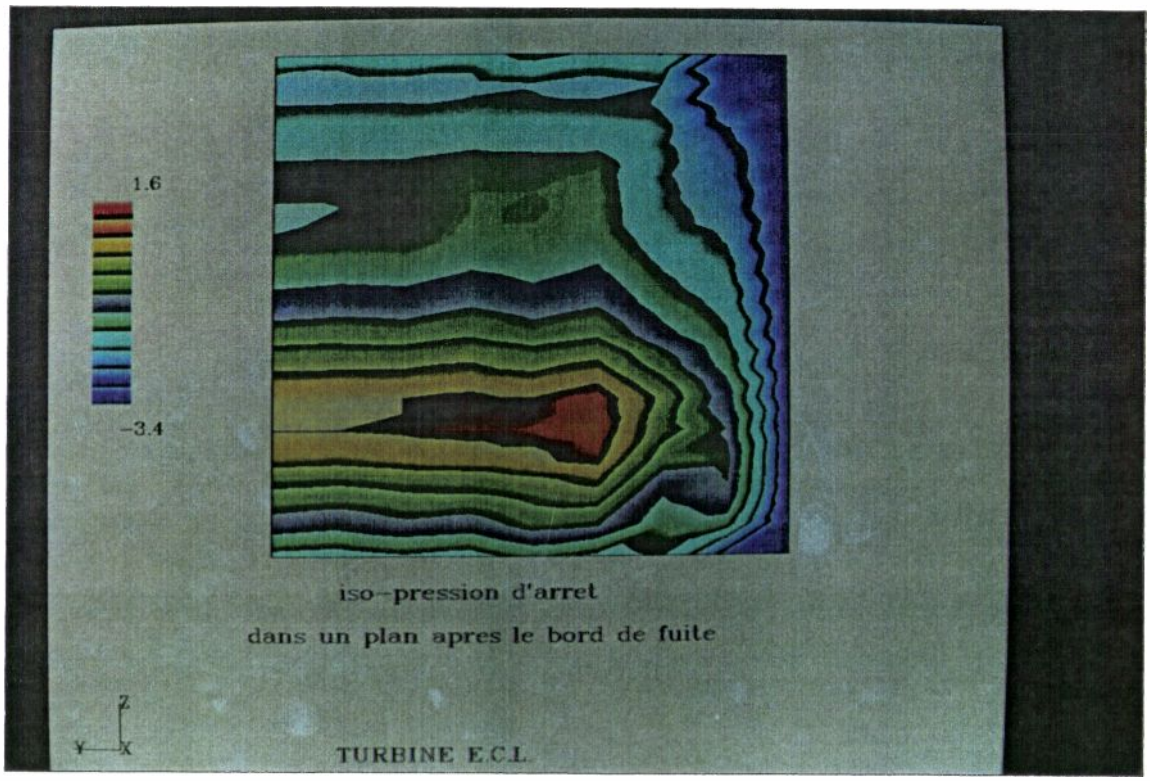
– Figure 55 –



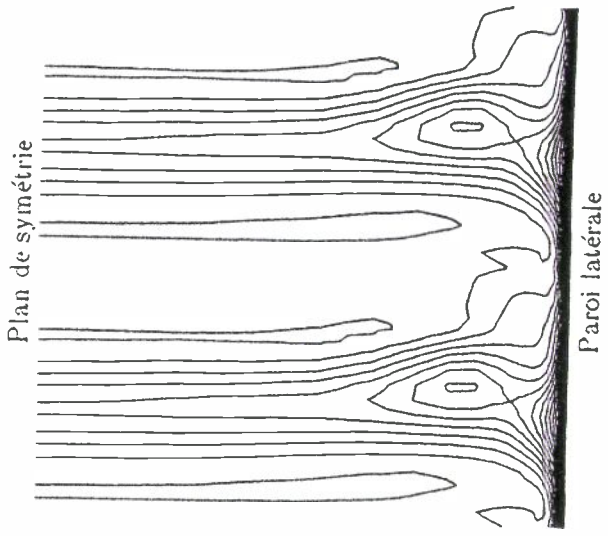
– Figure 56 –



– Figure 57 –



- Figure 58 -



- Courbes iso-pression d' arrêt dans le plan $x = 1{,}52\ C_r$

- Figure 59 -

ANNEXE I

I-1 Résolution sur la frontière du domaine

- Principe général de la méthode

Considérons un volume D ayant une frontière Σ le principe de résolution est basé sur le concept de solution fondamental de l'équation :

(1) $$\Delta \delta p^* = - \Delta (M)$$

Δ (M) désigne la fonction dirac qui introduit une source unitaire en un point M de D.δp étant la correction apportée en un point G quelconque de D suite à la présence de Δ(M). Cette équation admet comme solution dans un domaine tridimensionnel. r étant la distance qui sépare les points M et G.

En multipliant l'équation de correction (1) par δp et l'équation fondamentale par δp puis en intégrant dans le domaine D, on obtient :

$$\int_D \delta p^* \ \nabla^2 \delta p \ d\tau = \int_D (-\rho f(\Theta)) \ \delta p^* \ d\tau$$

et (2)

$$\int_D \delta p \ \nabla^2 \delta p \ d\tau = - \int_D \Delta (M) \ \delta p \ d\tau$$

Ces intégrales volumiques sont transformées en intégrales surfaciques en utilisant la formule de Green, puis combinées pour donner l'expression générale suivante :

(3) $$4 \pi T \delta p(M) = \int_D \frac{1}{r} \rho f(\Theta) \ d\tau + \int_\Sigma \frac{1}{r} \frac{1}{\eta} (\delta p) \ d\tau - \int_\Sigma \delta p \ \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{r}\right) \ d\tau$$

Une quantité δp en un point M de D est donnée en fonction de l'intégrale sur D de la fonction source F (Θ) et des intégrales surfaciques des conditions aux limites sur Σ qui sont de type Neumann (dérivée normale) ou Dirichlet (valeur imposée). la valeur du coefficient T dépend de la position du point M dans D.

- Calcul des intégrales surfaciques

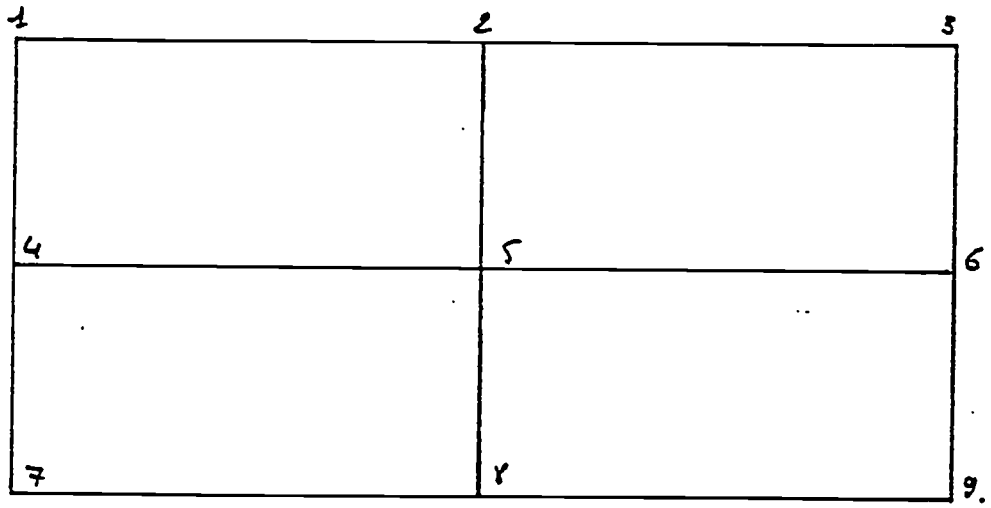
Pour résoudre les intégrales surfaciques de l'équation (3), la surface est divisée en plusieurs surfaces élémentaires notées σ_k composées de neuf noeuds de maillage (figure 1). Sur chacun de ces éléments, les quantités δp et $\frac{\partial}{\partial \eta} \delta p$ sont exprimées par des fonctions d'interpolations quadratiques. En un point quelconque de l'élément, nous écrivons :

$$\delta p = \sum \Phi_i \, \delta p_{ki}$$

(4)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \delta p = \sum \Phi_i \frac{\partial}{\partial \eta} \delta p_{ki}$$

δp et $\frac{\partial}{\partial \eta} \delta p$ désignant les valeurs relatives au ième noeud de l'élément k.



Surface élémentaire

Figure 1

Sur chaque élément (Figure 1) les intégrales sont évaluées de la manière suivante :

En un point M de la surface Σ l'équation (3) se présente sous la forme matricielle suivante :

$$(8) \qquad \sum \delta p_{ki}\ h_{ki}(M) = \vec{B}(M) + \sum \frac{\partial}{\partial \eta} \delta p_{ki}\ g_{ki}(M)$$

$\vec{B}(M)$ contient l'intégrale volumique des termes sources associés au point M.

Les valeurs calculées sur la frontière à l'aide de l'équation ci-dessus sont soit δp, soit $\frac{\partial}{\partial \eta}\delta p$ en fonction des conditions aux limites imposées. En considérant tous les points de la surface Σ nous obtenons le système matriciel suivant :

$$(9) \qquad [A]\ \vec{X} = \vec{Y}$$

Le vecteur $\vec{X}$ correspont aux inconnues à déterminer (δp ou $\frac{\partial}{\partial \eta}\delta p$). $\vec{Y}$ contient les termes source $\vec{B}(M)$ ainsi que les conditions aux limites sur la frontière. la matrice [A] est composée des coefficients $h_{ki}(M)$ ou $g_{ki}(M)$ en fonction des inconnues.

La matrice [A] est une matrice pleine, sa résolution s'effectue par une méthode de décomposition [L] . [U] .

II Résolution à l'intérieur du Domaine

Pour résoudre le laplacien de pression (équation 5) on utilise une méthode implicite développée par Alkalaï ( ). Dans le repère curviligne (ξ,η,γ), le laplacien bidimensionnel s'exprime comme suit :

$$(10) \qquad \frac{1}{J}\Delta \delta p = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{J}\left(A_4 \delta p_\xi + A_2 \delta p_\eta + A_6 \delta p_\gamma\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{1}{J}\left(A_5 \delta p_\xi + A_6 \delta p_\eta + A_3 \delta p_\gamma\right)\right)$$

Les coefficients A_1, A_1 .....A_6 représentent les produits scalaires des secteurs covariants ($\Delta\xi$, $\Delta\eta$ et $\Delta\gamma$). Ils sont donnés par :

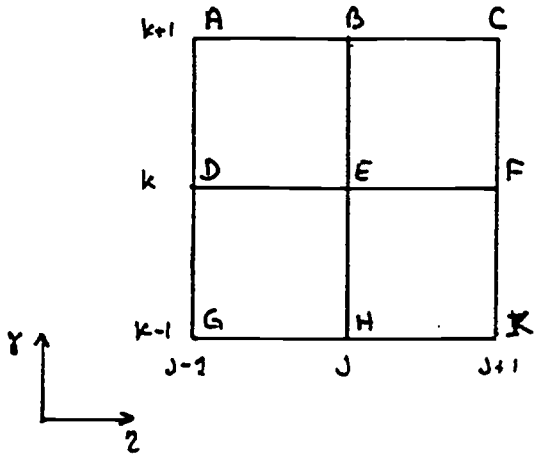
$$
\begin{aligned}
A_1 &= \vec{\Delta\xi} \,.\, \vec{\Delta\xi} \\
A_2 &= \vec{\Delta\eta} \,.\, \vec{\Delta\eta} \\
A_3 &= \vec{\Delta\gamma} \,.\, \vec{\Delta\gamma} \\
A_4 &= \vec{\Delta\zeta} \,.\, \vec{\Delta\eta} \qquad (11) \\
A_5 &= \vec{\Delta\zeta} \,.\, \vec{\Delta\gamma} \\
A_6 &= \vec{\Delta\eta} \,.\, \vec{\Delta\gamma}
\end{aligned}
$$

L'équation de correction de pression se présente alors sous la forme matricielle suivante :

$$[M]\ \vec{\delta p} = \vec{Q}$$

où $\vec{Q}$ regroupe les termes sources de la fonction f (Θ)

L'opérateur [M] est discrétisé sur molécule à neuf noeuds dans le plan (i-1). (figure 2)



Molécule de discrétisation

- Figure 2 -

Notons que cette discrétisation s'effectue sur la maillage utilisé pour le champ de vitesse et de température. Le principe est identique à celui utilisé par Alkalaï ( ) et El Marjani ( ). En un point d'indice (j,k) nous obtenons :

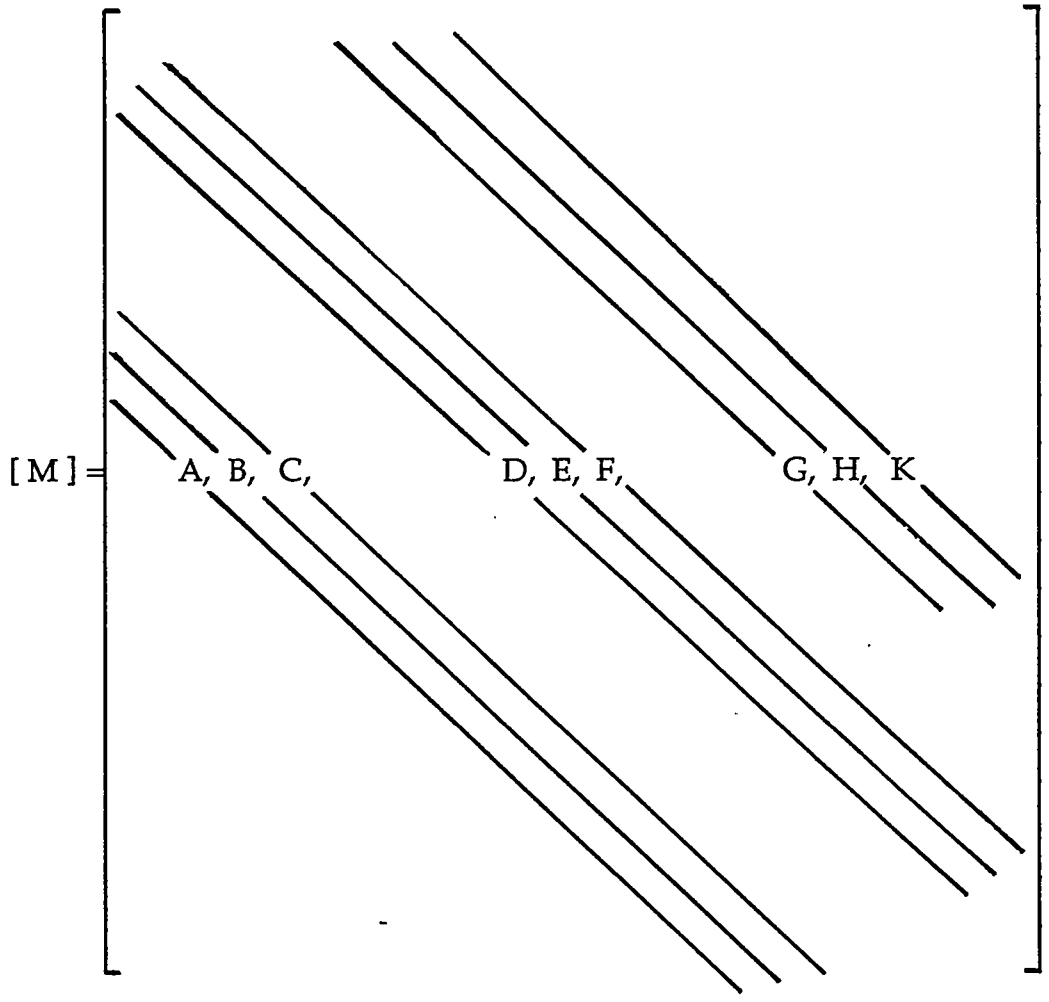
$$(12) \qquad [M] . \delta p_{j,k} = A_{j,k}\, \delta p_{j-1,k-1} + B_{j,k}\, \delta p_{j-1,k} + C_{j,k}\, \delta p_{j-1,k+1}$$

$$+ C_{j,k}\, \delta p_{j,k-1} + D_{j,k}\, \delta p_{j,k} + E_{j,k}\, \delta p_{j,k+1}$$

$$+ G_{j,k}\, \delta p_{j+1,k-1} + H_{j,k}\, \delta p_{j+1,k} + K_{j,k}\, \delta p_{j+1,k+1}$$

L'expression des termes A,B,C..... K se trouve dans la référence ( ).

Cette discrétisation en chaque point du plan (i-1) conduit à une matrice composée de neuf diagonales non nulles :



La résolution de système matriciel utilise une procédure appelée M.S.I. (Modified Strongly Implicit). Le principe repose sur une décomposition de la matrice [M] en une matrice inférieure [L] et une supérieure [U] tel que:

$$[M] = [L] . [U]$$

Le processus de résolution est itératif en utilisant une formulation de type "delta". A une étape quelconque n la procédure utilise les trois étapes suivantes :

Etape 1 : $[L]\ \Delta\delta p^* = [Q]^n - [L]\ \Delta\delta p^n$

(13) Etape 2 : $[U]\ \Delta\delta p^n = \Delta\delta p^*$

Etape 3 : $\delta p^n = \delta p^{n+1} - \Delta\delta p^n$

avec : $\Delta\delta p^n = \delta p^{n+1} - \delta p^n$

REFERENCES

1 - G.K SEROVY
"Secondary flow in axial-Flow compressors" Thermodynamics and fluid mechanics of turbomachinery.
pp 601 - 619. NATO - ASI Series 1985.

2 - C.H. SIEVERDING
"Secondary flows in straight and annular turbines cascades". Thermodynamics and fluid mechanics of turbomachinery.
pp 621 - 664. NATO - ASI Series 1985.

3 - M.H. VAVRA
"Aero-thermodynamics and flows in turbomachines".
J. Wiley and Sons - 1960.

4 - F. LEBOEUF
"Contribution théorique et expérimentale à l'étude des écoulements secondaires dans un compresseur axial transsonique".
Thèse de Docteur d'état ès Sciences - LYON I - Juin 1984.

5- F. LEBOEUF
Communications privées.

6 - J. BERNARD, F. FALCHETTI
"Calcul des écoulements secondaires dans une turbine axiale ".
AGARD -Luxembourg . Septembre 1989.

7 - SC. RUBIN , A. LIN
"Marching with parabolized Navier-Stokes equations".
I.J.T. Vol 18, 1980.

8 - S.V. PATANKAR, D.B. SPALDING
"A calculation procedure for heat, Mass and Momentum transfer in three-dimensional parabolic flows".
Int. Journal heat and Mass transfert Vol. 15, 1972.

9 - S.V. PATANKAR, V.S. PRATA, D.B. SPALDING
"Prediction of turbulent flow in curved pipes".
J.F.M., Vol. 67 - 1975.

10 - B. VALLAT
"Calcul d'écoulements internes en turbomachines à l'aide d'une version parabolisée des Equation de Navier stokes".
Thèse de docteur Ingénieur. E.C.L. Juillet 1985.

11 - J.L. ESTIVALEZES
"Calcul d'écoulements instationnaires internes et externes par un algorithme de pression implicite à pas séparé"
Thèse de doctorat - Avril 1989

12 - A. EL MARJANI
"Contribution expérimentale et théorique à l'étude des écoulements tridimensionnels visqueux dans les turbomachines".
Thèse de docteur d'état . E.C.L. Septembre 1987.

13 - E. PARKINSON
"Utilisation de la méthode des éléments frontières dans la résolutions des équation de Navier-Stokes quasi elliptique".
Thèse de Doctorat - A paraître.

14 - A. FAVRE
"Equations des gaz turbulents compressibles"
Journal de mécanique. Vol 4 . Septembre 1965.

15 - H. VIVIAND
"Formes conservatives des équations de la dynamique des Gaz".
La recherche Aérospastiale, n°1, 1974

16 - M. VINOKUR
"Conservation equations of gasdynamics in curvilinear coordinate systems".
J. of computation physics, Vol. 14 February 1974.

17 - R.M. BEAM, R.F. WARMING
"An implicit factorised scheme for the compressible Navier-Stokes equations"
AIAA Journal Avril 1978

18 - R.M. BEAM, R.F. WARMING
"An implicite finite-difference algorithm for hyperbolic systems in conservation-law form"
Journal of Computational Physics 1976

19 - R.M. BEAM, R.F. WARMING
"On the constrution and application of implicit factorised schemes for conservation law"
SIAM-AMS Proceeding 1978

20 - T.H. PULLIAM
"Artificial dissipation models for the euler equations"
AIAA Journal Decembre 1986

21 - J.L. STEGER
"Implicit finite difference simulation of flow about arbitrary geometries with application to airfoils"
AIA Paper. Albuquerque. Juillet 1977

22 - K. ALKALAI
"Etude théorique d'écoulements bidimensionels et tridimensionnels potentiels avec termes sources rotationnels. Application aux turbomachines".
Thèse de Docteur Ingénieur E.C.L. Décembre 1983

23 P. FERRAND, A. EL MARJANI
communicqtions privées

24 CEBECCI , SMITH
"Analysis of turbulent boundary layers"
Academic Press. 1974

25 B.S. BALDWIN, H. LOMAX
"Then layer approxiamtion and algebraic model for separated turbulent flows
AIAA Paper, Alabama, January. 1978

26 M. VISBAL , D. KNIGHT
"The Balwin-Lomax turbulence model for two dimensionnal shock wake/boundary layers interactions"
AIAA Journal, vol 22. 1984

27 J.G. MARVIN
"Turbulence closure modeling for computationnal aerodynamics".
AIAA Journal, Vol. 21. 1983

28 J.J. GORSHI , R GOVIDANT, B.LAKSHMINARAYANA
"Computation of three-dimensionnal turbulent shear flows in a corner"
AIAA journal, Vol 22. 1985

29 D.D. KNIGHT
"A hybrid explicite - implicite numerical algorithm for the three-dimensional compressible Navier -Stokes equations";
AIAA Journal, Vol 22. 1984

30 B. LAKSHMINARAYANA
"Turbulence modeling for complex shear flows"
AIAA Journal, vol 24. 1986

31 D. YORK, D. KNIGHT.
"Calculation of a class of two-dimensional turbulent boundary layers flows using the baldwin-Lomax model"
AIAA paper, january. 1985

32 N. BENBOUTA, P. FERRAND
" Convergence acceleration for linear systems iterative resolution and application to computational fluid mechanics"
Hight Performance Computing. 1989

33 A.M. TAYLOR , J.H. WHITELAW
"Measurements of laminar and turbulent flows in a curved duct whith thin inlet boundary layers"
NASA Contractors Reports, January. 1981

34 A.M. TAYLOR , J.H. WHITELAW
"Developping flow in a s-shaped ducts"
NASA contractors reports.

35 HUMPHREY, A.M. TAYLOR , J.H. WHITELAW
"Laminar flow in a square duct of strong curvature"
J. Fluid Mech, Vol. 83. 1977

36 J. MOORE, J.G. MOORE
"A calculation procedure for three-dimensionnal, viscous, compressible duct flow"
journal of Fluids Engineering. 1980

37 J. STANITZ ,W. OSBORN , J. MIZISIW
"An experimental investigation of secondary flow in an accelerating rectangualr elbow with 90° of turning".
NACA TN 3015. 1953

38 H. JACQUIDES , E. LAUNDERB., P.A. LOIZOU
"Numerical computation of turbulent flow through a square-sectionned 90° bend"
Heat and fluid flow, January. 1987

39 J. STANITZ
"Design of two-dimensionnal channels with prescribed velocity distribution along the channel walls".
NACA TN 2593. 1952

40 E. CAUDIU, J.F. COMBES
"Calcul d'écoulements tridimensionnels dans les turbomachines hydrauliques par éléments finis"
EDF, bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, n°2. 1988

41 A. ONVANI
"Etude expérimentale des écoulements secondaires en grille de turbine en absence et en présence d'injections discrètes à la paroi"
Thèse de Doctorat de 3eme Cycle. Lyon I . 1983

42 L. CAMBIER, B. ESCANDE
"Calcul de l'écoulement tridimensionnel turbulent dans un aubage rectiligne de turbine"
Secondary Flows in Turbomachines - Agard conference proceeding . 1989

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par l'arrêté du 21 Mars 1988 et l'arrêté du 23 Novembre 1988,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Mr P. FERRAND — Chargé de Recherche CNRS - LMFA ECL Ecully (69)

et les rapports de

Mr J.L. KUENY — Maître de Conférences - CREMHYG - Grenoble (38)

Mr J. CHAUVIN — Professeur - LEMFI - Orsay (91)

Monsieur **POMMEL Frédéric**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR**

Spécialité : MECANIQUE

Fait à Ecully, le 12 septembre 1990

P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur
de l'Administration de la Recherche

F. LEBOEUF