T 1307/016

N° d'Ordre : ECL 88.02

Année 1988

T H E S E

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de ***DOCTEUR***

Spécialité ***MECANIQUE***

par

Gilles BRUN

DEVELOPPEMENT ET APPLICATION D'UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS POUR LE CALCUL DES ECOULEMENTS TURBULENTS FORTEMENT CHAUFFES

Soutenue le ***4 Mars 1988*** *devant la Commission d'Examen*

Jury MM. B. GAY, Président-Rapporteur
G. BAYLE-LABOURE
Y. COEFFE, Rapporteur
L. FULACHIER
D. GRAND
D. JEANDEL
B. LARROUTUROU
J. PERIAUX.

Ed 1

ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTEUR	A. MOIROUX
DIRECTEUR ADJOINT	R. RICHE

LISTE DES PERSONNES HABILITEES A ENCADRER DES THESES A L'E.C.L.

(Doctorat d'Etat ou Habilitation au sens de l'Arrêté du 5 juillet 1984)

Mathématiques-Informatique-Systèmes

B. DAVID	Professeur 2e Classe
C.M. BRAUNER	Professeur 2e Classe - Univ.- Bordeaux
J.F. MAITRE	Professeur 1ère Classe
F. CONRAD	Maître Assistant ENSM-St-Etienne
G. THOMAS	Maître de Conférences
F. MUSY	Maître de Conférences
Cl. SCHMIDT-LAINE	Chargée de Recherche au CNRS

Physicochimie des Matériaux

P. CLECHET	Professeur 1ère Classe
P. PICHAT	Directeur de Recherche au CNRS
J.M. HERRMANN	Chargé de Recherche au CNRS
N. JAFFREZIC	Chargée de Recherche au CNRS
G. ESCHALIER	Maître de Conférences
J. JOSEPH	Professeur 2e Classe
A. GAGNAIRE	Maître de Conférences
Cl. MARTELET	Maître de Conférences
J.R. MARTIN	Maître de Conférences
R. OLIER	Maître de Conférences
A. TAILLAND	Maître de Conférences
R. PHILIPPE	Maître Assistant IUT-St-Etienne

Métallurgie et Physique des Matériaux

P. GUIRALDENQ	Professeur 1ère Classe
D. TREHEUX	Professeur 2e Classe
B. COQUILLET	Maître de Conférences
D. JUVE (Mme)	Ingénieur d'Etude - 2e C.
NGUYEN Du	Assistant Titulaire

Electronique

P. VIKTOROVITCH	Directeur de Recherche au CNRS
R. BLANCHET	Professeur 2e Classe
S. KRAWCZYK	Chargé de Recherche au CNRS
P. LEYRAL	Maître Assistant
O. BONNAUD	Professeur - INSA - Rennes
J. BOREL	Direct. Technique Sté E.F.C.I.S.
J.P. CHANTE	Professeur - INSA - Lyon

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE établie entre le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'Ecole Centrale de Lyon et la société Métraflu. Aussi, je tiens à remercier, pour leur accueil, Mr le Professeur J. BATAILLE, Directeur du Laboratoire, et Mrs E. BENARROUS et G. BOIS, gérants de la société Métraflu.

Ma profonde gratitude va à Mr Denis JEANDEL, Professeur des Universités à l'Ecole Centrale de Lyon, qui m'a proposé ce sujet de thèse. Il a su me conseiller et me guider tout au long de ces années passées sous sa responsabilité.

Je remercie Mr Bernard GAY, Professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon I, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse et qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Mes remerciements vont également à Mr Yves COEFFE, Chef du Département de Recherches au Laboratoire National d'Hydraulique d'E.D.F., qui a bien voulu juger ce travail et en être rapporteur.

J'exprime aussi ma profonde gratitude à Mr Gerard BAYLE-LABOURE, Chef du Département de Combustion de la S.N.E.C.M.A, qui s'est constamment intéressé aux méthodes numériques développées au Laboratoire. Sa société a soutenu nos travaux par plusieurs contrats d'étude et cette thèse est le fruit de cette collaboration.

J'associe à ces remerciements Mr Dominique GRAND, Chef du Laboratoire de Physique, Modélisation et Logiciels du Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, qui a bien voulu participer à ce jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à Mr Louis FULACHIER, Directeur de Recherche à l'Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence de Marseille. Les travaux expérimentaux qu'il mène dans le domaine des écoulements fortement chauffés, nous ont fourni des données précieuses pour la validation des modèles employés.

Mr Bernard LARROUTUROU, Directeur de Recherche à l'INRIA de Sophia-Antipolis, a accepté de faire partie de ce jury. Qu'il en soit ici remercié.

Je remercie également Mr Jacques PERIAUX, Chef de Service aux Avions Marcel Dassault - Breguet Aviation, qui a bien voulu juger ce travail.

Je tiens enfin à exprimer ma profonde gratitude à tous les membres de l'équipe travaillant sur les méthodes d'Eléments Finis , au sein du Laboratoire. Cette thèse est , en effet, le résultat d'un travail d'équipe. En particulier, je remercie Mr Marc BUFFAT, Maître-Assistant à l'Université Claude Bernard - Lyon I. Sa grande compétence dans le domaine des méthodes numériques et de l'informatique m'a été trés précieuse. Il a pris une part trés importante dans la réalisation des travaux présentés ici. Je remercie également Mr Jean-François BRISON, Maître-Assistant à l'IUT de Saint-Etienne. Son expérience en ce qui concerne l'introduction de modèles de turbulence en éléments finis m'a été trés utile. Ma reconnaissance va également à Mr Daniel HENRY, Chargé de Recherches au CNRS, qui, par une lecture approfondie de ce rapport de thèse, a contribué à l'améliorer considérablement. J'associe également à ces remerciements Mr Eric SERRES, aujourd'hui Ingénieur à la Société Alsthom, qui, il y a quelques années, a participé à ces travaux.

Je remercie enfin Mme Pascale JEANDEL, Responsable du Service Informatique du Laboratoire, qui, par sa grande disponibilité, a contribué à faciliter mon travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION : 1

PREMIERE PARTIE : EQUATIONS D'EVOLUTION DES ECOULEMENTS TURBULENTS DE FLUIDE DILATABLE 5

I-1 : EQUATIONS INSTANTANEES : 7

I-1-1: Equations de conservation de la masse de la quantité de mouvement 7

I-1-2: Equation de conservation de l'énergie 8

I-1-3: Equation d'état 9

I-1-4: Système d'équations instantanées 10

I-1-5: Mise sous forme sans dimension 10

I-1-6: Hypothèses d'étude 13

I-2 : TRAITEMENT STATISTIQUE DES EQUATIONS INSTANTANEES : 14

I-2-1: Choix d'une décomposition 15

I-2-2: Système d'équations moyennes 17

I-2-3: Equations des corrélations $\vec{u}''\vec{u}''$ et $\vec{u}''T''$ .. 18

I-3 : HYPOTHESES DE FERMETURE : 21

I-3-1: Hypothèse de viscosité de turbulence 21

I-3-2: Equations d'évolution de l'énergie cinétique de turbulence et de la dissipation 23

I-3-3: Modélisation des équations sur k et ε 24

I-3-4: Système fermé d'équations 27

I-4 : LOIS DE PROCHES PAROIS : 30

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE : 35

DEUXIEME PARTIE : METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION 38

II-1 : SCHEMA DE DISCRETISATION EN TEMPS : 40

II-2 : METHODE DE DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS .. 43
II-2-1: Généralités 43
II-2-2: Présentation de la méthode sur un problème modèle 44
II-2-3: Méthode d'éléments finis appliquée au problème de Stokes 47

II-3 : APPLICATION AUX EQUATIONS D'EVOLUTION D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE DILATABLE : 50
II-3-1: Formulation faible du problème 50
II-3-2: Discrétisation du problème - Choix du type d'éléments utilisés 53
II-3-3: Espaces d'interpolation en pression 55
II-3-4: Espaces d'interpolation pour $\vec{Q}$, T, k et ε . 56
II-3-5: Equations discrétisées 58

II-4 : RESOLUTION DES EQUATIONS DISCRETES DE QUANTITE DE MOUVEMENT ET DE CONTINUITE : 61
II-4-1: Les méthodes de gradient 62
II-4-2: Application de l'algorithme de gradients conjugués à la résolution des équations de quantité de mouvement et de continuité 67

II-5 : RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES : 70
II-5-1: Structure et mode de stockage des matrices 70
II-5-2: Résolution des systèmes linéaires 72

II-6 : SCHEMA DE BALANCING DISSIPATION POUR LES ECOULEMENTS FORTEMENT CONVECTIFS : 73

II-7 : CALCUL DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LES PAROIS SOLIDES : 76

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE : 80

TROISIEME PARTIE : RESULTATS 83

III-1 : ECOULEMENT A L'AVAL D'UN ELARGISSEMENT BRUSQUE AXISYMETRIQUE : 85
III-1-1: Description de la configuration étudiée 85
III-1-2: Présentation des résultats 87

III-2 : JET AXISYMETRIQUE FORTEMENT CHAUFFE : 95
III-2-1: Dispositif expérimental 95
III-2-2: Conditions de calcul 97
III-2-3: Résultats et discussion 98

III-3 : COUCHE LIMITE FORTEMENT CHAUFFEE : 108
III-3-1: Dispositif expérimental 108
III-3-2: Conditions de calcul 109
III-3-3: Resultats et discussion 111
III-3-4: Conclusion 118

III-4 : TETES DE CHAMBRES DE MOTEURS D'AVIONS : 127
III-4-1: Description du problème 127
III-4-2: Conditions de calcul 128
III-4-3: Procédure de calcul des conditions aux limites en pression 129
III-4-4: Présentation des résultats 130
III-4-5: Conclusion 132

CONCLUSION 139

BIBLIOGRAPHIE DE LA TROISIEME PARTIE : 145

ANNEXE 1 : 150
ANNEXE 2 : 153

INTRODUCTION

L'optimisation des systèmes énergétiques utilisés dans le domaine aéronautique et mettant en jeu des milieux fluides, passe essentiellement par la vérification des performances sur des bancs d'essais généralement coûteux. Aujourd'hui cependant, les moyens de calcul et la modélisation ouvrent la voie à une nouvelle forme de contrôle du fonctionnement de ces systèmes par des études paramétriques plus exhaustives.

Pour la simulation de problèmes réels, deux aspects importants sont ainsi à considérer, à savoir: la géomètrie complexe des systèmes étudiés et le comportement thermodynamique des fluides surtout lorsqu'ils sont le siège d'échanges énergétiques forts (turbulence, combustion, mélange).

Dans le contexte plus particulier des chambres de combustion des machines à flux continu, l'approche macroscopique repose généralement sur des schémas de volumes finis initialement développés pour des géomètries régulières (Gosman [25]). Leur extension aux géomètries complexes passe la plupart du temps par l'introduction de coordonnées curvilignes généralisées (Butler [26]) ou par la transformation des domaines réels en domaines de calcul plus abordables (Thompson [27]). Le travail proposé vise à démontrer les avantages d'une discrétisation par éléments finis permettant une adaptation facile aux contours, sans faire appel à un système de coordonnées spécifique au problème traité.

En ce qui concerne la physique des fluides en présence dans les chambres de combustion, les variations de température dûes au caractère exothermique des réactions chimiques induisent des variations importantes de la masse volumique et du champ cinématique sous jacent. De nombreuses études sur le couplage

cinématique-thermique, réalisées tant du point de vue expérimental que numérique, se situent dans le domaine de validité de l'hypothèse de contaminant passif: les écarts de température sont faibles et le fluide peut être considéré comme incompressible. Pour les écoulements à fortes variations de température, des études expérimentales ont été réalisées depuis peu dans des configurations géomètriques simples (jet axisymétrique [13], couche limite sur paroi plane [12]) et il est donc maintenant possible de contrôler la validité des hypothèses de modélisation classiquement adoptées et de voir si elles permettent de rendre compte des modifications de l'écoulement observées expérimentalement.

Dans une première analyse, on présente donc le système d'équations régissant l'évolution des écoulements turbulents de fluide dit "dilatable". Les équations instantanées sont basées sur les principes fondamentaux de conservation auxquels on adjoint l'équation d'état des gaz parfaits. Elles sont écrites pour des écoulements bidimensionnels à faible nombre de Mach et font l'objet d'un traitement statistique. Les moments résultant de la non-linéarité des équations sont déduits d'hypothèses de modélisation proches de celles utilisées en situation incompressible. On obtient ainsi un système fermé d'équations comprenant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'enthalpie, une équation d'état simplifiée ainsi que deux équations d'évolution de grandeurs caractéristiques de la turbulence, à savoir l'énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation.

La méthode de résolution numérique, présentée au chapitre II, repose sur un schéma de discrétisation en temps semi-implicite qui linéarise les équations à chaque pas. Un processus séquentiel permet alors de résoudre successivement l'équation relative à la température, les équations couplées de quantité de mouvement et de conservation de la masse, puis les équations relatives aux échelles caractéristiques de turbulence. La technique de discrétisation spatiale par éléments finis repose sur une formulation faible du problème et le choix d'une décomposition du domaine en éléments triangulaires sur lesquels on effectue une interpolation linéaire des différentes variables. Un algorithme itératif original est développé pour résoudre

l'équation de quantité de mouvement tout en assurant la satisfaction de l'équation de continuité qui est alors considérée comme une contrainte. Une technique particulière est proposée pour la prise en compte de conditions aux limites imposées au voisinage des frontières pariétales.

Le code développé est tout d'abord validé sur une configuration isotherme correspondant au calcul de l'écoulement dans un tuyau comportant un élargissement brusque. Des comparaisons sont alors effectuées avec les résultats expérimentaux disponibles, les conclusions tirées d'un colloque AIRH sont également rappelées. Des calculs sont réalisés ensuite dans des configurations précédemment mentionnées et présentant de fortes variations de température . Les limitations du modèle et des approximations aux limites sont ainsi largement précisées.

Enfin des calculs sont réalisés dans des configurations à caractère plus industriel. On s'intéresse alors à l'écoulement dans le diffuseur et la tête de chambre d'un moteur d'avion. La complexité géométrique de tels domaines de calcul permet de mettre en évidence les capacités des méthodes d'éléments finis . La qualité des résultats obtenus rend possible l'utilisation de ces simulations numériques pour la conception ou l'optimisation des têtes de chambre.

Première Partie:

EQUATIONS D'EVOLUTION DES ECOULEMENTS TURBULENTS DE FLUIDE DILATABLE

Les équations instantanées d'évolution sont déduites des principes fondamentaux de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie, auxquels on adjoint une équation simplifiée d'état des gaz parfaits permettant de relier la masse volumique et la température. Le système d'équations ainsi obtenu, ainsi que sa mise sous forme sans dimension sont présentés dans un premier paragraphe.

La prise en compte d'écoulements turbulents nous conduit à effectuer un traitement statistique des équations, présenté au paragraphe I-2, qui fait apparaître des inconnues supplémentaires dans les équations moyennes.

Le modèle de fermeture utilisé, basé sur une hypothèse de viscosité de turbulence analogue à celle classiquement employée en incompressible, est présenté au paragraphe I-3. Deux équations d'évolution supplémentaires sont alors introduites: l'une pour l'énergie cinétique de turbulence k et l'autre pour son taux de dissipation ε. Ces équations sont, elles aussi, modélisées à partir d'hypothèses semblables à celles utilisées en incompressible.

Enfin, la résolution des équations au voisinage des parois solides n'étant possible qu'au prix d'un coût de calcul trés élevé, on préfère utiliser des lois d'équilibre local nous permettant de calculer les conditions aux limites à appliquer à une certaine distance de la frontière physique. Ces lois de parois sont présentées au paragraphe I-4.

I-1: EQUATIONS INSTANTANEES:

Dans le cadre de cette étude, seuls seront considérés des écoulements monophasiques et homogènes, c'est-à-dire des écoulements constitués d'une seule espèce chimique, présente sous forme soit liquide, soit gazeuse.

Les phénomènes de raréfaction étant d'autre part exclus, les hypothèses classiques de la mécanique des milieux continus sont vérifiées: l'évolution des différentes variables peut alors être décrite grâce aux équations aux dérivées partielles classiques de la mécanique des fluides.

I-1-1: Equations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement:

Dans le cadre d'une description eulérienne de l'écoulement, les équations de continuité et de quantité de mouvement, déduites des principes fondamentaux de conservation, s'écrivent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho . \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho . \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho . \vec{u} * \vec{u}) = -\mathrm{grad} p + \mathrm{div} \vec{\vec{\tau}} + \rho . g$$

$\vec{\vec{\tau}}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses qui, pour un fluide Newtonien, nous est donné par la loi de comportement:

$$\vec{\vec{\tau}} = \lambda . \mathrm{div}\, \vec{u}\, \vec{\vec{I}} + \mu . (\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\, \vec{u} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}^{t} \vec{u})$$

Les deux coefficients de viscosité λ et μ sont reliés par la loi de Stokes :

$$3 . \lambda + 2 . \mu = 0$$

Dans la suite, on examinera des situations dans

lesquelles la viscosité dynamique μ est indépendante de la pression et est classiquement reliée à la température du fluide par une loi de la forme:

$$\mu = a.T^n$$

où a et n sont deux constantes.

Dans l'équation de quantité de mouvement, les seules forces volumiques prises en compte sont les forces de gravité.

I-1-2: Equation de conservation de l'energie:

Les échanges énergétiques au sein de l'écoulement sont régis par le principe fondamental de conservation de l'énergie qui, pour l'énergie totale par unité de masse e_t, se traduit par:

$$\frac{\partial \rho . e_t}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho . \vec{u} . e_t \right) = \underbrace{-\mathrm{div}\ \vec{q}}_{\text{I}} + \underbrace{\mathrm{div}(p.\vec{u})}_{\text{II}} + \underbrace{\mathrm{div}(\vec{\vec{\tau}}:\vec{u})}_{\text{III}} + \underbrace{\rho . \vec{g} . \vec{u}}_{\text{IV}}$$

Les termes II et IV représentent, respectivement, la puissance des forces de pression et des forces de gravité. Le travail des forces visqueuses est traduit par le terme $\mathrm{div}(\vec{\vec{\tau}}:\vec{u})$. Le terme I est, quant à lui, représentatif des phénomènes de conduction: classiquement, le flux de chaleur $\vec{q}$ est exprimé, en fonction de la température T, par la loi de Fourier:

$$\vec{q} = - k . \overrightarrow{\mathrm{grad}\ T}$$

Les phénomènes de rayonnement sont, ici, supposés négligeables. D'autre-part, les sources volumiques d'énergie, hormis le travail des forces de gravité, sont nulles.

La combinaison des équations de conservation permet de

déduire des équations d'évolution pour l'énergie interne e_i, l'enthalpie h ou la température T, définies par:

$$e_i = e_t - \frac{1}{2}.u^2$$

$$h = e_i + \frac{p}{\rho}$$

$$h = C_p.T$$

Ainsi, l'équation d'enthalpie s'écrit:

$$\rho.\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\ h\right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\ p + \text{div}(\ k.\overrightarrow{\text{grad}}\ T\ ) + \vec{\vec{\tau}}.\text{grad}(\ \vec{u}\ )$$

Une équation pour la température en découle immédiatement, en particulier dans le cas, considéré ici, où C_p est constant.

I-1-3: Equation d'état:

Les principes fondamentaux de conservation décrits précédemment constituent un système de 3 équations, scalaires ou vectorielles, régissant l'évolution de 4 inconnues de même type:

- la vitesse $\vec{u}$
- la pression p
- la température T
- la masse volumique ρ

Dans de nombreux cas, le système est fermé en supposant que le fluide est incompressible: la masse volumique est alors supposée constante.

Dans d'autres cas, la compressibilité du fluide intervient par l'intermédiaire d'une équation d'état qui, pour un gaz parfait est:

$$\frac{p}{\rho} = r.T$$

Dans la suite, on verra qu'une forme simplifiée de la loi peut être appliquée à certains écoulements chauffés pour lesquels la pression a peu d'influence sur la masse volumique (*).

I-1-4: Système d'équations instantanées:

En résumé, le système fermé d'équations instantanées régissant l'évolution des variables $\vec{u}$, p, ρ, T est donc:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho.\vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho.\vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho.\vec{u}*\vec{u}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p + \operatorname{div}\vec{\vec{\tau}} + \rho.\vec{g} \\ \rho.C_p.\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T\right) = \dfrac{\partial p}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p + \operatorname{div}(k.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T) + \vec{\vec{\tau}}.\overrightarrow{\overrightarrow{\operatorname{gradu}}} \\ \dfrac{p}{\rho} = r.T \end{cases}$$

I-1-5: Mise sous forme sans dimension:

L'introduction d'échelles caractéristiques de l'écoulement nous permet d'écrire les équations instantanées sous forme sans dimension. Pour cela on choisit :

. L : une longueur caractéristique de l'écoulement

. U_0 , T_0 et p_0: respectivement une vitesse, une tempéra-

(*): Pour des écarts de température modérés, on retrouve cette hypothèse de base dans les problèmes de convection naturelle justifiables de l'hypothèse de Boussinesq (cf Spiegel [1] et Gray [2]) pour lesquels la compressibilité n'intervient que dans le terme de gravité.

ture et une pression de référence

. μ_0 et k_0 : une viscosité dynamique et une conductibilité thermique de référence.

Les variables sans dimension sont alors:

$$\underset{\sim}{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{L} \quad , \quad \underset{\sim}{t} = \frac{U_0}{L}.t \quad , \quad \underset{\sim}{\vec{u}} = \frac{\vec{u}}{U_0} \quad , \quad \underset{\sim}{T} = \frac{T-T_0}{T_0}$$

$$\underset{\sim}{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad , \quad \underset{\sim}{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad , \quad \underset{\sim}{k} = \frac{k}{k_0} \quad \text{et} \quad \underset{\sim}{\vec{\tau}} = \frac{L.\vec{\tau}}{U_0.\mu_0}$$

avec $\frac{1}{\rho_0} = \frac{r.T_0}{P_0}$

En ce qui concerne la pression, on effectue une décomposition de la forme:

$$p(\vec{x},t) = p_m(t) + p'(\vec{x},t)$$

où $p_m(t)$ est une valeur moyenne, à chaque instant, de la pression sur le domaine considéré et $p'(\vec{x},t)$ un écart par rapport à cette valeur moyenne, fonction de la position et du temps. Ainsi, dans les équations de quantité de mouvement n'apparait, à travers le gradient, qu'une contribution dite "dynamique" de la pression ($\overrightarrow{gradp} = \overrightarrow{gradp'}$), alors que, dans l'équation d'énergie et dans l'équation d'état, les deux contributions $p_m(t)$ et $p'(\vec{x},t)$ interviennent. On introduit donc deux variables sans dimension:

. une variable "thermodynamique": $\underset{\sim}{p} = \frac{p}{p_0}$

. une variable "dynamique": $\underline{p} = \frac{p-p_m}{\rho_0.U_0^2}$

L'introduction, dans les équations instantanées, des variables précédemment définies, nous conduit à construire les nombres sans dimension suivants:

. le nombre de Reynolds: $Re = \frac{\rho_0.U_0.L}{\mu_0}$ qui mesure le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité

. le nombre de Prandtl: $Pr = \dfrac{\mu_0 . C_p}{k_0}$ qui mesure le rapport entre diffusion cinématique et diffusion thermique

. le nombre de Froude: $Fr = \dfrac{U_0^2}{\|\vec{g}\| . L}$ qui mesure le rapport entre forces d'inertie et forces de gravité

. le nombre de Mach de référence: $M_0 = \dfrac{U_0}{C_0}$ avec $C_0 = \sqrt{\gamma . R . T_0}$

où $R = C_p - C_v$ et $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$ qui mesure le rapport entre la vitesse U_0 et la célérité du son C_0 dans les conditions de référence.

Les deux pressions sans dimension $\underline{p}$ et $\underline{\mathcal{P}}$ sont alors reliées par:

$$\underline{\mathcal{P}} = M_0^2 . \gamma . \underline{p} + \frac{p_m}{p_0}$$

Par mesure de simplification, les variables sans dimension sont maintenant notées:

$\vec{u}$, p, ρ, T, μ, k, $\vec{\vec{\tau}}$ et $\mathcal{P}$

Le système d'équations sans dimension s'écrit alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho . \vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho . \vec{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho . \vec{u} * \vec{u}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p - \dfrac{2}{3 . Re} . \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\mu . \operatorname{div} \vec{u}) + \dfrac{1}{Fr} . \rho . \dfrac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \\ \qquad + \dfrac{1}{Re} . \operatorname{div}\left[\mu . (\vec{\vec{\operatorname{grad}}}\, \vec{u} + \vec{\vec{\operatorname{grad}}}^{\,t} \vec{u})\right] \\ \rho . \left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T \right) = \dfrac{\gamma - 1}{\gamma} . \dfrac{d\mathcal{P}}{dt} + \dfrac{1}{Re . Pr} . \operatorname{div}(k . \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) \\ \qquad + \dfrac{M_0^2 . (\gamma - 1)}{Re} . \vec{\vec{\tau}} . \vec{\vec{\operatorname{grad}}}\, u \\ \mathcal{P} = \rho . (T + 1) \end{cases}$$

avec $\underline{\mathcal{P}} = M_0^2 . \gamma . \underline{p} + \dfrac{p_m(t)}{p_0}$

I-1-6: Hypothèses d'étude:

Dans la suite de cette étude, nous ne nous intéresserons qu'aux cas d'écoulements subsoniques pour lesquels le nombre de Mach M_0 reste faible devant l'unité. Les termes de dissipation visqueuse, qui ne sont sensibles que dans une zone trés mince, prés des parois solides (cf Fulachier [24]), peuvent être négligés dans l'équation d'énergie, pour les applications présentées ici. La pression thermodynamique se réduit à la fonction du temps $\frac{p_m}{p_0}$ et l'équation d'état devient:

$$\rho(T+1) = \frac{p_m}{p_0}$$

Pour les écoulements permanents en géométrie fixe(*), la pression est indépendante du temps: on choisit $p_m=p_0$.

L'équation d'énergie devient alors:

$$\rho.\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}}\ T\right) = \frac{1}{Re.Pr}.\text{div}(k.\overrightarrow{\text{grad}T})$$

L'équation d'état se réduit à une liaison directe entre la masse volumique ρ et la température T:

$$\rho.(T+1) = 1$$

Elle traduit la dilatabilité thermique du fluide.

Par ailleurs, pour un fluide à propriétés physiques constantes (viscosité cinématique, conductibilité thermique), on choisira:

$$\mu=1 \quad \text{et} \quad k=1$$

(*) : Cette simplification exclut le cas d'écoulements dans les cylindres de moteurs à piston, pour lesquels la pression moyenne est dépendante du temps.

Finalement, en l'absence d'effets de gravité significatifs (valeur grande du nombre de Froude), le système simplifié d'équations instantanées s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho.\vec{u}) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho.\vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho.\vec{u}*\vec{u}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p - \dfrac{2}{3.Re}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{u}) + \dfrac{1}{Re}.\mathrm{div}(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}^{t}\vec{u}) \\ \rho.\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\right) = \dfrac{1}{Re.Pr}.\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}T) \\ \rho.(T+1) = 1 \end{cases}$$

I-2: TRAITEMENT STATISTIQUE DES EQUATIONS INSTANTANEES:

Le système d'équations instantanées précédemment établi permet, en principe, la description d'écoulements turbulents. Pourtant, pour la plupart des écoulements réels, on ne peut accéder, de façon numérique directe, à l'ensemble des échelles caractéristiques de la turbulence: les moyens de calcul actuels sont insuffisants pour représenter les plus fines échelles spatiales et temporelles et il est difficile d'accéder aux conditions initiales et aux limites compatibles. Pour résoudre ce problème, plusieurs approches peuvent être utilisées. On retient, en particulier, les méthodes suivantes:

. les méthodes de fermeture en un point pour lesquelles on effectue un traitement statistique des équations. La non-linéarité des équations instantanées conduit à faire apparaître des moments statistiques eux-mêmes régis par des équations. La croissance dans l'ordre des moments ne peut être interrompue que par une hypothèse de fermeture à un niveau plus ou moins élevé

(cf Hanjalic [3] , Jones et Launder [4], Launder, Reece et Rodi [5])

.les méthodes de fermeture en deux points relèvent d'un même principe d'analyse statistique mais le niveau de description concerne les corrélations en deux points. L'approche par un formalisme spectral permet alors d'accéder aux spectres des corrélations au prix d'un nombre de degrés de liberté considérablement accru (cf Kraichnan [6], Orszag [7]).

.les méthodes de prise en compte des grandes structures de la turbulence qui reposent sur un filtrage des équations instantanées: les termes résiduels résultant toujours de la non-linéarité première des équations faisant l'objet d'une modélisation plus ou moins fine (modèle de viscosité (cf Reynolds[8]), approche spectrale (cf Bertoglio [9])).

Les deux derniers types de méthodes sont coûteux en temps de calcul et ne sont, pour l'instant, pas applicables à des écoulements à caractère industriel. Ainsi, seules les fermetures en un point ont été retenues ici. On adopte donc la description du champ turbulent qui consiste à décomposer les variables en une contribution moyenne et une contribution turbulente. La résolution numérique porte sur un système d'équations moyennes, incluant plusieurs hypothèses de fermeture qui seront décrites plus loin.

I-2-1: Choix d'une décomposition:

Toute variable φ, permettant de décrire l'évolution du fluide en écoulement turbulent, peut être considérée comme une fonction aléatoire du temps et de l'espace. Elle peut donc être décomposée en partie moyenne et partie fluctuante.

La partie moyenne $\overline{\varphi}$ peut être définie par:

$$\overline{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi . P(\varphi) . d\varphi$$

où P est la densité de probabilité de φ.

Pour un écoulement stationnaire, cette moyenne peut être

remplacée par une moyenne temporelle définie par:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{T} \int_{t}^{t+T} \varphi(\vec{x}, t) \, dt$$

dans laquelle la durée d'intégration T doit être grande par rapport aux échelles de temps de la turbulence.

Chaque variable φ s'écrit donc:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \quad \text{avec} \quad \overline{\varphi'} = 0.$$

Cette décomposition, appelée décomposition de Reynolds, est habituellement utilisée pour les écoulements incompressibles. Elle conduit à faire apparaître, dans les équations moyennes, des inconnues supplémentaires: les corrélations entre les fluctuations des différentes variables. Ainsi, dans l'équation de quantité de mouvement, le tenseur de Reynolds $\overline{\vec{u}' * \vec{u}'}$ apparaît.

Utilisée pour des écoulements à masse volumique variable, la décomposition de Reynolds conduit à une forme compliquée des équations moyennes faisant intervenir de nombreuses inconnues supplémentaires.

Considérons, par exemple, l'équation de continuité:
en posant:

$$\rho = \overline{\rho} + \rho' \quad \text{avec} \quad \overline{\rho'} = 0$$

$$\text{et} \quad \vec{u} = \overline{\vec{u}} + \vec{u}' \quad \text{avec} \quad \overline{\vec{u}'} = 0$$

on obtient:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\overline{\rho}\,\overline{\vec{u}}\right) + \operatorname{div}(\rho' \vec{u}') + \operatorname{div}(\overline{\rho}\,\vec{u}') + \operatorname{div}\left(\rho' \overline{\vec{u}}\right) = 0$$

En prenant la moyenne de cette équation, on aboutit finalement à:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\overline{\rho}\,\overline{\vec{u}}\right) + \operatorname{div}\left(\overline{\rho' \vec{u}'}\right) = 0$$

On voit donc apparaître une inconnue supplémentaire: la corrélation entre fluctuations de masse volumique et de vitesse $\overline{\rho' \vec{u}'}$.

L'utilisation d'une moyenne pondérée par la masse, appelée moyenne de Favre [10], permet, dans le cas des écoulements compressibles, d'obtenir une forme plus simple des équations moyennes. On écrit alors:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'' \quad \text{où } \tilde{\varphi} \text{ est défini par : } \tilde{\varphi} = \frac{\overline{\rho.\varphi}}{\bar{\rho}}$$

On a alors : $\overline{\rho.\varphi''} = \rho.\tilde{\varphi''} = 0$

Cette décomposition est appliquée à toutes les variables du problème hormis la masse volumique et la pression pour lesquelles la décomposition de Reynolds est conservée. On écrit donc:

- $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ avec $\overline{\rho'} = 0$
- $p = \bar{p} + p'$ avec $\overline{p'} = 0$
- $\vec{u} = \tilde{\vec{u}} + \vec{u}''$ avec $\tilde{\vec{u}''} = 0$
- $T = \tilde{T} + T''$ avec $\tilde{T''} = 0$

I-2-2: Système d'équations moyennes:

En utilisant la décomposition des variables décrite précédemment et en prenant la moyenne, au sens de Reynolds, des équations instantanées, on obtient le système d'équations moyennes suivant:

. équation de continuité:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\bar{\rho}.\tilde{\vec{u}} \right) = 0$$

. équation de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \bar{\rho}.\bar{\vec{u}}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\bar{\rho}.\bar{\vec{u}}*\bar{\vec{u}} \right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \bar{p} - \frac{2}{3.Re}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\bar{\vec{u}}\right)$$

$$+\frac{1}{Re}.\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\ \bar{\vec{u}} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}^{t}\bar{\vec{u}}\right)$$

$$-\mathrm{div}\left(\bar{\rho}.\widetilde{\vec{u}''*u''} \right)$$

. équation d'énergie:

$$\bar{\rho}.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \bar{\rho}.\bar{\vec{u}}.\widetilde{\mathrm{grad}T} = \mathrm{div}\left(\frac{1}{Re.Pr}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \bar{T}\right) - \mathrm{div}\left(\bar{\rho}.\widetilde{\vec{u}''.T''}\right)$$

. équation d'état:

$$\bar{\rho}.(\tilde{T}+1) = 1$$

De même qu'en situation incompressible, on voit donc apparaître des inconnues supplémentaires dûes au caractère non-linéaire des équations de départ.

Ainsi, l'équation de quantité de mouvement introduit le tenseur $\widetilde{\vec{u}''*u''}$ correspondant au tenseur de Reynolds et traduisant la présence de flux turbulents de quantité de mouvement. De même, l'équation d'énergie fait apparaître les corrélations $\widetilde{\vec{u}''.T''}$ correspondant à la présence de flux turbulents de température.

La résolution du système d'équations nécessite la connaissance de ces quantités: elles doivent donc être soit modélisées, soit calculées à partir des équations d'évolution qui les régissent.

I-2-3: Equations des corrélations $\widetilde{\vec{u}''*u''}$ et $\widetilde{\vec{u}''.T''}$:

Une équation d'évolution peut être obtenue pour chaque composante du tenseur de Reynolds $\widetilde{u_i''u_j''}$ à partir de l'équation instantanée de quantité de mouvement (cf annexe I). Elle peut

être écrite sous la forme:

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}.\,\widetilde{u_i''u_j''}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\overline{\rho}.\,\widetilde{u_k}.\,\widetilde{u_i''u_j''}\right)}{\partial x_k}=\underbrace{-\overline{\rho}.\,\widetilde{u_i''u_k''}.\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_k}-\overline{\rho}.\,\widetilde{u_j''u_k''}.\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_k}}_{I}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial\left(\overline{\rho}.\,\widetilde{u_i''u_j''u_k''}\right)}{\partial x_k}}_{II}$$

$$\underbrace{-\left(\overline{u_i''}.\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j}+\overline{u_j''}.\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}\right)}_{III}$$

$$\underbrace{-\left(\overline{u_i''}.\frac{\partial p'}{\partial x_j}+\overline{u_j''}.\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)}_{IV}$$

$$\underbrace{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\tau_{kj}u_i''}+\overline{\tau_{ki}u_j''}\right)}_{V}$$

$$\underbrace{-\overline{\tau_{kj}}.\frac{\partial\overline{u_i''}}{\partial x_k}-\overline{\tau_{ki}}.\frac{\partial\overline{u_j''}}{\partial x_k}}_{VI}$$

Dans le second membre de cette équation, le terme I représente le taux de production des tensions de Reynolds par le gradient de vitesse moyenne. Le terme II traduit la diffusion de ces tensions de Reynolds par la turbulence. Quant au terme IV, il correspond aux corrélations entre les fluctuations de vitesse et les gradients de pression. Les deux derniers termes d l'équation, quant à eux, représentent les corrélations entre le champ de vitesse et les tensions visqueuses.

Tous ces termes ont des formes identiques à celles obtenues dans le cas incompressible. Seul le terme III, qui fait intervenir la quantité $\overline{\vec{u}''}$, constitue un terme supplémentaire par rapport au cas incompressible.

Le terme VI traduit le fait que l'énergie est transferée du mouvement moyen vers les petites échelles de la turbulence où la viscosité moléculaire dissipe l'énergie. L'existence de ce transfert nous permet de supposer que, pour des échelles suffisamment petites, la dissipation se fait de façon isotrope. Si ce phénomène n'est pas modifié par les variations de masse volumique, on peut alors écrire:

$$\overline{\tau_{kj} \cdot \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ki} \cdot \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} = \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \delta_{ij}$$

où $\bar{\rho} \cdot \varepsilon = \overline{\tau_{ij} \cdot \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}$

ε représente alors le taux de dissipation de la turbulence par unité de volume.

De même qu'une équation d'évolution a été écrite sur les tensions de Reynolds, une équation peut être écrite sur les corrélations $\widetilde{\vec{u}''T''}$ (cf annexe II):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} \cdot \widetilde{\vec{u}''T''}\right) + \mathrm{div}\left(\bar{\rho} \cdot \vec{u} \cdot \widetilde{\vec{u}''T''}\right) = -\bar{\rho} \cdot \widetilde{\vec{u}''T''} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u$$
$$-\bar{\rho} \cdot \widetilde{\vec{u}''} * u'' \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \tilde{T}$$
$$+\mathrm{div}\left(\bar{\rho} \cdot \widetilde{\vec{u}'' * u'' T''}\right)$$
$$-\overline{T'' \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p} + \overline{T'' \cdot \mathrm{div}\vec{\tau}} + \overline{\vec{u}'' \cdot \mathrm{div}\Phi}$$

On note que ces équations font intervenir beaucoup d'inconnues supplémentaires. En particulier, on voit apparaître des corrélations d'ordre 3: les termes $\widetilde{u_i'' u_j'' u_k''}$ dans l'équation sur les tensions de Reynolds et les termes $\widetilde{u_i'' u_j'' T''}$ dans l'équation sur les corrélations vitesse-température.

L'écriture d'équations d'évolution sur ces dernières quantités conduit alors à faire apparaître des corrélations

d'ordre 4 et ainsi de suite, quelquesoit l'ordre auquel on se place. Des hypothèses doivent donc être introduites à un certain ordre afin d'obtenir un système fermé d'équations.

I-3: HYPOTHESES DE FERMETURE:

L'application d'hypothèses de fermeture à un ordre elevé, si elle nous conduit à une description plus fine de l'écoulement, s'accompagne d'un coût de calcul rapidement prohibitif.

En incompressible, de nombreux travaux ont conduit à l'élaboration de modèles du premier et du second ordre. Les modèles du premier ordre, qui reposent sur l'hypothèse de viscosité de turbulence décrite dans la suite, se classent suivant le nombre d'équations supplémentaires introduites (cf Rodi [11]). Les modèles du second ordre, quant à eux, consistent à écrire une équation d'évolution pour chaque composante du tenseur de Reynolds (cf Launder [5]). Ce deuxième type de modèle s'accompagne d'un coût de calcul plus élevé que les modèles du premier ordre. D'autre part, il semble que, pour des écoulements où l'anisotropie est peu importante, ils n'apportent pas d'amélioration notable des résultats (cf Rodi [11]).

Pour ce qui est des écoulements à masse volumique variable, trés peu de travaux ont été effectués jusqu'à présent, tant du point de vue expérimental que du point de vue de la modélisation. Ceci est dû, en grande partie, aux difficultés expérimentales rencontrées. Cependant des résultats sont disponibles depuis peu pour des configurations de base (cf Cheng [12] et Bahraoui [13]). Il est donc possible de vérifier si les hypothèses habituellement effectuées en situation incompressible, sont transposables au cas où de fortes variations de la masse volumique sont présentes.

I-3-1: Hypothèse de viscosité de turbulence:

Parmi les hypothèses de fermeture habituellement utilisées en incompressible, celle consistant à considérer les

corrélations $\overrightarrow{u''*u''}$ comme des termes de contraintes au même titre que les contraintes visqueuses est fréquemment utilisée. Ces corrélations sont alors reliées aux gradients de vitesse moyenne par l'intermédiaire d'une "viscosité de turbulence" (hypothèse de Boussinesq). On note que, si la viscosité cinématique est liée au fluide lui-même, la viscosité de turbulence, elle, est liée à l'écoulement en présence. En compressible, cette hypothèse se traduit par : (cf Jones [14])

$$-\overline{\rho}.\overrightarrow{u''*u''} = \frac{2}{3}.\left(\overline{\rho}.k + \mu_t.\mathrm{div}\vec{u}\right)\vec{\vec{J}} - \mu_t.\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}^t\vec{u}\right)$$

où $\vec{\vec{J}}$ est l'opérateur identité.

Dans cette expression, k est l'énergie cinétique de turbulence qui, ici, a pour définition:

$$k = \frac{1}{2}.\overline{u_i''u_i''}$$

Par analogie avec la théorie cinétique des gaz, la viscosité de turbulence μ_t peut être exprimée à l'aide d'une échelle de longueur appelée "longueur de mélange", notée l, correspondant au libre parcours moyen des particules matérielles. Cette hypothèse conduit à une expression du type:

$$\mu_t = \overline{\rho}.l^2.\left\|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{u}\right\|$$

Un modèle plus sophistiqué consiste à relier μ_t à des échelles caractéristiques de turbulence (l'énergie cinétique de turbulence et son taux de dissipation) par l'intermédiaire d'une expression du type:

$$\mu_t = C_\mu.\overline{\rho}.\frac{k^2}{\varepsilon}$$

C'est cette dernière approche qui a été choisie ici. Le calcul de μ_t nous oblige alors à introduire deux équations supplémentaires d'évolution: l'une pour k et l'autre pour son taux

de dissipation ε, défini au §I-2-3. De nouvelles hypothèses doivent être introduites dans les équations exactes afin d'obtenir un système fermé d'équations.

L'hypothèse consistant à considérer le tenseur $\widetilde{\vec{u}''*u''}$ comme une contrainte peut être généralisée aux autres variables du problème. Les corrélations $\widetilde{\vec{u}''}.T''$, calculées comme des flux turbulents de température, peuvent alors être exprimées en fonction du gradient de température moyenne par:

$$-\overline{\rho}.\widetilde{\vec{u}''}.T'' = -\frac{\mu_t}{Prt}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\tilde{T}$$

où Prt est un "nombre de Prandtl de la turbulence" qui est habituellement considéré comme constant, bien que cette hypothèse soit difficilement justifiable, même dans le cas où la température est un contaminant passif.

I-3-2: Equations d'évolution de l'énergie cinétique de turbulence et de la dissipation:

Comme nous l'avons vu précédemment, des équations d'évolution doivent être écrites pour k et ε.

En ce qui concerne k, une équation peut être déduite des équations des tensions de Reynolds. Elle s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}.k) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho}.\tilde{u}_k.k\right) = \underbrace{-\overline{\rho}.\overline{u_k''u_j''}.\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_j}}_{I}$$

$$\underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho}.\widetilde{u_k''k} + \overline{\rho}.\widetilde{u_k''\frac{p'}{\rho}}\right)}_{II}$$

$$-\overline{u_k''}.\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_k} + \overline{p'.\frac{\partial}{\partial x_k}(u_k'')}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\tau_{kj}u_j''}\right) - \overline{\rho}.\varepsilon$$

$$\text{avec } \overline{\rho}.\varepsilon = \overline{\tau_{kj}.\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}}$$

L'écriture d'une équation d'évolution sur le taux de dissipation ε s'accompagne de nombreuses manipulations: les détails du calcul ne sont pas donnés ici. On se réfèrera à Hanjalic et Launder [15] et Tennekes et Lumley [16] pour l'établissement de cette équation, dans le cas incompressible. Pour les écoulements à masse volumique variable, de nombreux auteurs se contentent d'utiliser la forme incompressible de cette équation (cf Jones [17]). Cependant, la forme complète de l'équation de dissipation dans le cadre de l'utilisation de moyennes de Favre a été établie par Kollmann [18] et est rappelée par Vandromme [19] . Cette équation est beaucoup plus compliquée que sa version incompressible: la présence de nombreux termes supplémentaires oblige soit à faire de nombreuses simplifications, soit à introduire des modélisations faisant intervenir des hypothèses difficilement vérifiables. Nous nous contenterons donc, ici, d'utiliser la forme incompressible de cette équation.

I-3-3: Modélisation des équations sur k et ε:

Les équations exactes d'évolution de k et ε contiennent de nombreux termes inconnus qu'il convient d'exprimer en fonction de variables principales du problème.

En incompressible, de nombreux travaux ont débouché sur l'écriture d'équations modélisées sur k et ε. Les hypothèses alors utilisées sont étendues au cas compressible.

Le terme de diffusion II apparaissant dans l'équation exacte sur k, est modélisé en utilisant une hypothèse analogue à celle introduite pour le flux turbulent de température. On écrit alors:

$$-\overline{\rho}.\widetilde{u_k k} + \overline{\rho.u_k''\frac{p'}{\rho}} = \frac{\mu_t}{\sigma_k}.\overrightarrow{\text{grad}}\ k$$

où σ_k est une constante dont la valeur est déterminée expérimentalement.

Le terme de production (terme I de l'équation exacte sur k) ne nécessite pas de modélisation supplémentaire: les composantes du tenseur $\overrightarrow{\sim}\overrightarrow{u"*u"}$ peuvent être calculées à l'aide de l'hypothèse de Boussinesq introduite au §I-3-1.

Pour les écoulements à nombre de Reynolds élevé, le terme $\overline{\tau_{kj}.u_j"}$ qui correspond à une diffusion moléculaire de k, est petit par rapport au terme de diffusion turbulente et est souvent négligé. Il est cependant modélisé ici par:

$$\overline{\tau_{kj}.u_j"} = \mu.\frac{\partial k}{\partial x_k}$$

L'application d'hypothèses semblables pour l'équation exacte sur ε conduit à une équation modélisée. On obtient donc un système de deux équations qui, à quelques variantes prés, relatives au cas traité, a la forme suivante:

$$\begin{cases} -\rho.\dfrac{\partial k}{\partial t} - \rho.\,u.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,k = \text{div}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,k\right] + \overline{\rho.\mathcal{P}} - \overline{\rho.\varepsilon} \\ -\rho.\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \rho.\,u.\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon = \text{div}\left[\left(\mu+\dfrac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\overrightarrow{\text{grad}}\,\varepsilon\right] + C_{\varepsilon 1}.\overline{\rho.\frac{\varepsilon}{k}.\mathcal{P}} - C_{\varepsilon 2}.\overline{\rho.\frac{\varepsilon^2}{k}} \end{cases}$$

où $\mathcal{P} = -\overrightarrow{\sim}\overrightarrow{u"*u"} : \overrightarrow{\text{grad}}\,u$

avec $-\overrightarrow{\sim}\overrightarrow{\rho.u"*u"} = \frac{2}{3}.\left(\rho.k + \mu_t.\text{div}\,u\right).\vec{\vec{\delta}} - \mu_t.\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,u + \overrightarrow{\text{grad}}^t u\right)$

Les constantes σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$et $C_{\varepsilon 2}$ apparaissant dans ce modèle ont été calibrées, en incompressible, par de nombreuses expériences numériques et par recoupement avec de nombreuses données expérimentales.

Des termes supplémentaires peuvent être introduits dans

les équations afin de prendre en compte les variations de masse volumique. Ainsi Vandromme [19] établit un système d'équations modélisées dans le cas du mélange de deux fluides de masse volumique différente. Ce modèle se caractérise par la présence d'un terme traduisant l'existence de l'expression $\overrightarrow{\widetilde{u''}}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \bar{p}$ dans l'équation exacte sur k. Ce terme est modélisé par une expression du type:

$$-C_3.\frac{1}{\bar{\rho}}.\sqrt{\overline{\rho'^2}}.k.\overrightarrow{\text{grad}}\ \bar{p}$$

Un terme de forme semblable est ajouté dans l'équation de dissipation. Les valeurs des constantes ainsi introduites sont ajustées dans le cas plan du mélange de deux gaz (hélium et azote), de masse volumique différente.

Jones, quant à lui, s'intéresse au cas d'écoulements avec combustion (cf [14], [17]). Les fluctuations $\overrightarrow{u''}$ sont alors exprimées, en fonction des corrélations $\overline{\rho'\overrightarrow{u''}}$, par la relation, déduite de la définition de la moyenne de Favre:

$$\overline{\rho'\overrightarrow{u''}} = -\bar{\rho}.\overrightarrow{u''}$$

Les corrélations $\overline{\rho'\overrightarrow{u''}}$ sont calculées en utilisant une hypothèse de type gradient, analogue à celle introduite au §I-3-1. Le terme $\overrightarrow{u''}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \bar{p}$ est donc modélisé par:

$$C_4.\frac{1}{\bar{\rho}^2}.\mu_t.\overrightarrow{\text{grad}}\ \bar{\rho}.\overrightarrow{\text{grad}}\ \bar{p}$$

Un terme de forme analogue est également introduit dans l'équation de dissipation. Là aussi, les constantes doivent être calibrées par des expériences numériques.

L'introduction de ces termes supplémentaires repose sur des hypothèses difficilement vérifiables et les résultats expérimentaux permettant de les valider ne sont pas disponibles

actuellement. Aussi, dans un premier temps, un modèle de turbulence analogue à celui utilisé en incompressible est choisi.

I-3-4: Système fermé d'équations:

Les hypothèses de modélisation introduites précédemment conduisent à un système fermé d'équations. L'introduction des grandeurs caractéristiques définies au paragraphe I-1-5 permet d'écrire les équations sous forme sans dimension. Pour cela, on définit une énergie cinétique de turbulence et une dissipation sans dimension, respectivement par:

$$\frac{k}{U_0^2} \quad \text{et} \quad \frac{L.\varepsilon}{U_0^3}$$

Par mesure de simplification, ces nouvelles variables sont notées k et ε.

Un nombre de Reynolds de la turbulence, noté Rt, correspondant à la notion de viscosité de turbulence, est alors introduit. Il est défini par:

$$\frac{1}{Rt} = C_\mu . \bar{\rho} . \frac{k^2}{\varepsilon}$$

L'équation de quantité de mouvement, aprés modélisation des tensions de Reynolds devient:

$$\frac{\partial \bar{\rho}.\tilde{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\bar{\rho}.\tilde{u}*\tilde{u}\right) = \underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\bar{p}}_{I} \underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{2}{3.Re}\mathrm{div}\,\vec{u}\right)}_{II}$$
$$\underbrace{+\mathrm{div}\left[\frac{1}{Re}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\,\vec{u} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}^{t}\vec{u}\right)\right]}_{III}$$
$$\underbrace{-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left[\frac{2}{3}.\left(\bar{\rho}.k + \frac{1}{Rt}\mathrm{div}\,\tilde{u}\right)\right]}_{IV}$$
$$\underbrace{+\mathrm{div}\left[\frac{1}{Rt}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\,\tilde{u} + \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}^{t}\tilde{u}\right)\right]}_{V}$$

Les termes I, II et IV du second membre, peuvent être regroupés: ils correspondent tous à l'expression de contraintes normales. On introduit alors une nouvelle variable, notée $\overline{p^*}$ et appelée "pression généralisée" qui est définie par:

$$\overline{p^*} = \overline{p} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{Re}\,\mathrm{div}\,\vec{\bar{u}} + \frac{1}{Rt}\,\mathrm{div}\,\tilde{u} + \overline{\rho}.k\right)$$

L'équation de quantité de mouvement fait intervenir la moyenne au sens de Reynolds de la vitesse: cette quantité sera, en fait, remplacée par la moyenne de Favre. Cette simplification est sans influence majeure: le terme de tension visqueuse, où apparaît $\vec{\bar{u}}$, est faible par rapport aux tensions de Reynolds et son influence n'est sensible que dans les zones de proche paroi. Le même raisonnement peut être appliqué à l'équation de température qui fait intervenir à la fois la valeur moyenne au sens de Favre et au sens de Reynolds.

En résumé, un système fermé d'équations sans dimension peut être écrit pour :

. la vitesse moyenne : $\tilde{u}$

. la pression moyenne généralisée : $\overline{p^*}$

. la température moyenne : $\tilde{T}$

. la masse volumique moyenne : $\overline{\rho}$

. l'energie cinétique de turbulence k et son taux de dissipation ε.

Plutôt que la vitesse moyenne, on préfère, en fait, utiliser la quantité de mouvement moyenne, notée $\vec{Q}$ et définie par: $\vec{Q} = \overline{\rho}.\tilde{u}$

Le système fermé d'équation prend alors la forme:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{Q}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\frac{\vec{Q}}{\overline{\rho}} * \vec{Q}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \overline{p^*}$$

$$+\mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt}\right)\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\frac{\vec{Q}}{\rho}+\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}_t\frac{\vec{Q}}{\rho}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}+\frac{\vec{Q}}{\rho}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\tilde{T}=\frac{1}{\rho}\cdot\mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{Re.Pr}+\frac{1}{Rt.Prt}\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}\tilde{T}}\right]$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\vec{Q}}{\rho}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,k=\frac{1}{\rho}\cdot\mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt.\sigma_k}\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}k}\right]+\mathcal{P}-\varepsilon$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\vec{Q}}{\rho}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varepsilon=\frac{1}{\rho}\cdot\mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt.\sigma_\varepsilon}\right)\overrightarrow{\mathrm{grad}\varepsilon}\right]+C_{\varepsilon 1}.\frac{\varepsilon}{k}.\mathcal{P}-C_{\varepsilon 2}.\frac{\varepsilon^2}{k}$$

$$\bar{\rho}=\frac{1}{(1+\tilde{T})}$$

avec: $\dfrac{1}{Rt}=C_\mu.\bar{\rho}.\dfrac{k^2}{\varepsilon}$

$$\mathcal{P}=\frac{1}{\rho}\cdot\left[\frac{1}{Rt}.\left(\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\frac{\vec{Q}}{\rho}+\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}_t\frac{\vec{Q}}{\rho}\right)-\frac{2}{3}.\left(-\rho.k+\frac{1}{Rt}.\mathrm{div}\frac{\vec{Q}}{\rho}\right).\vec{\vec{\mathcal{J}}}\right].\overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\frac{\vec{Q}}{\rho}$$

et $$\overline{p^*}=\bar{p}+\frac{2}{3}.\left[\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt}\right).\mathrm{div}\frac{\vec{Q}}{\rho}+\bar{\rho}.k\right]$$

Les constantes du modèle ont été calibrées par de nombreuses expériences numériques dans le cas incompressible. Dans le cas compressible, les mêmes valeurs sont utilisées, soit:

$$C_\mu=0.09\ ,\ C_{\varepsilon 1}=1.44\ ,\ C_{\varepsilon 2}=1.92\ ,\ \sigma_k=1\ ,\ \sigma_\varepsilon=1.3$$

Il faut noter que ces valeurs ont été obtenues dans des configurations d'écoulement particulières et leur extension à un écoulement quelconque est difficilement justifiable. En particulier, Ferziger [20] propose des lois d'évolution pour ces différents coefficients en fonction du type d'écoulement rencontré. L'étude d'un écoulement quelconque repose alors sur la décomposition du domaine en un certain nombre de zones prédé-

terminées où un type particulier d'écoulement apparaît : zone de mélange, écoulement de type jet, zone de cisaillement.....

I-4: LOIS DE PROCHES PAROIS :

A proximité d'une paroi solide, la résolution des équations différentielles nécessite l'utilisation d'un maillage de calcul trés fin. En effet, dans une zone mince, proche de la paroi, les coefficients de transport et d'échange varient de façon trés sensible. Ces fortes variations de l'ordre relatif des différents phénomènes physiques en présence, engendrent de trés fortes variations des variables du problème. La modélisation est alors insuffisante pour traiter ces zones sensibles. Toute approche des mécanismes physiques dans cette région nécessiterait la présence d'un nombre de points de calcul trés important.

Une alternative classique est l'utilisation de lois analytiques d'équilibre permettant le calcul des conditions aux limites à imposer à une certaine distance δ de la paroi. Ces lois reposent sur les approximations de la couche limite incompressible. Au voisinage de la paroi, les termes non linéaires d'inertie sont supposés négligeables et l'équation de quantité de mouvement dans la direction tangentielle s'intègre analytiquement sous la forme: (cf Cebeci et Smith [21])

$$\left. \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n} - \overline{u'v'} \right|_{\delta} = \left. \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n} \right|_{o} = \tau_p / \rho$$

Le second membre de la relation définit une contrainte pariétale τ_p et permet de faire intervenir une notion de vitesse de frottement, notée u_f, telle que :

$$\tau_p = \rho . u_f^2$$

L'introduction d'un modèle de longueur de mélange pour

la contrainte turbulente $\overline{u'v'}$ conduit alors à une expression intégrée de la composante tangentielle de vitesse. On a ainsi, dans la zone pleinement turbulente , la loi logarithmique:

$$\frac{\vec{u}.\vec{t}\,\Big|_{\delta}}{u_f} = \frac{1}{K}.\mathrm{Log}(Re.\delta.u_f) + C$$

où K est la constante de Karman.

Pour la sous-couche visqueuse, dans laquelle la contrainte turbulente est négligeable, on trouve, par ailleurs, la loi linéaire:

$$\frac{\vec{u}.\vec{t}\,\Big|_{\delta}}{u_f} = Re.\delta.u_f$$

Les constantes K et C ont été calibrées expérimentalement. Les valeurs classiquement utilisées sont:

$$K = 0.419 \quad \text{et} \quad C = 5.445$$

Le raccordement de la zone logarithmique et de la sous-couche visqueuse est alors obtenu pour une valeur de $Re.\delta.u_f$ de 11.6 .

Dans cette même zone de proche paroi, les équations d'évolution de k et ε se réduisent à un équilibre entre les termes de production et les termes de dissipation qui conduit aux relations :

$$k\Big|_{\delta} = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{et} \quad \varepsilon\Big|_{\delta} = \frac{u_f^3}{K.\delta}$$

En compressible, l'application d'un raisonnement analogue conduit à une forme simplifiée de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\bar{\rho}}{Re}\cdot\frac{\partial\,\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.t}}{\partial n} - \bar{\rho}.\,\widetilde{u''v''}\,\Big|_{\delta} = \frac{\bar{\rho}}{Re}\cdot\frac{\partial\,\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.t}}{\partial n}\,\Big|_{0} = \tau_p$$

Dans la zone pleinement turbulente, l'approximation entraîne

$$\bar{\rho}.\,\widetilde{u''v''} = \tau_p$$

L'introduction sur $\widetilde{u''v''}$ d'un modèle de longueur de mélange ne permet pas de retrouver analytiquement la loi logarithmique classique du fait de la variation transversale de $\bar{\rho}$. Les résultats expérimentaux montrent cependant la préservation de cette loi (cf Cheng et Ng [12]) à condition d'introduire les variations de viscosité cinématique ν en fonction de la température.

De tels résultats nous ont conduit à adopter, pour les écoulements chauffés, les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.t}\Big|_{\delta}}{u_f} = Re.\delta.u_f & \text{si} \quad Re.\delta.u_f < 11.6 \\ \dfrac{\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.t}\Big|_{\delta}}{u_f} = \dfrac{1}{K}.\mathrm{Log}(Re.\delta.u_f) + C & \text{si} \quad Re.\delta.u_f > 11.6 \end{cases}$$

$$\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.n}\Big|_{\delta} = 0$$

$$k\Big|_{\delta} = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\Big|_{\delta} = \frac{u_f^3}{K.\delta}$$

avec $$u_f^2 = \frac{1}{Re}.\frac{\partial\,\vec{\vec{u.t}}}{\partial n} - \widetilde{u''v''}\,\Big|_{\delta} = \left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt}\right).\frac{\partial\,\vec{\mathcal{X}}\,\vec{u.t}}{\partial n}\,\Big|_{\delta}$$

et la loi de variation de la viscosité :

$$\mu = a.T^n \quad \text{et} \quad Re = \frac{\overline{\rho}.U_0.L}{\mu} \quad (*)$$

En ce qui concerne la température $\tilde{T}$, on définit une température de frottement, notée T_f par:

$$T_f u_f = \left. \frac{1}{Re.Pr}.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} - \widetilde{u''T''} \right|_\delta = \left. \left(\frac{1}{Re.Pr}+\frac{1}{Rt.Prt}\right).\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right|_\delta$$

On adopte alors la loi d'équilibre turbulent:

$$\frac{\left. T_p-\tilde{T} \right|_\delta}{T_f} = \frac{1}{K'}.Log(Re.\delta.u_f) + C'$$

et, pour la sous couche visqueuse, la loi linéaire:

$$\frac{\left. T_p-\tilde{T} \right|_\delta}{T_f} = Re.Pr.\delta.u_f$$

T_p est la température à la paroi et K' et C' sont deux constantes. Les expériences de Cheng et Ng [12] montrent l'existence d'une loi de ce type pour une couche limite fortement chauffée. Les valeurs obtenues expérimentalement pour K' et C' sont alors:

$$K' = 0.8 \quad \text{et} \quad C' = 12.5$$

Ces valeurs sont trés différentes de celles obtenues par Antonia [23] ou Fulachier [24], dans le cas d'une couche limite faiblement chauffée. Ceux-ci obtiennent respectivement:

(*) : dans le cas de l'air, les valeurs de a et n déduites de Batchelor [22] sont $a=3.68\ 10^{-7}$ et $n=0.685$

$K' = 0.4$ et $C' = 2.$

$K' = 0.45$ et $C' = 3.13$

Pour les valeurs obtenues par Cheng et Ng, le raccordement des deux lois de parois correspond à $Re.\delta.u_f = 15.96$.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIERE PARTIE

[1] : E.A. SPIEGEL, G. VERONIS : "On the Boussinesq approximation for a compressible fluid". Astrophysic Journal 131 (1960).

[2] : D.D. GRAY, A. GIORGINI : "The validity of Boussinesq approximation for liquids and gases". Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 19 (1976).

[3] : K. HANJALIC : "Two dimensionnal asymmetrical turbulent flow in ducts". Ph. D. Thesis - University of London (1970).

[4] : W.P. JONES, B.E. LAUNDER : "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence". Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol 15 (1972).

[5] : B.E. LAUNDER, G.J. REECE, W. RODI : "Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure". J. Fluid Mechanics. Vol 68 (1975).

[6] : R.H. KRAICHNAN : "The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers". J. Fluid Mechanics. Vol 5 (1959).

[7] : S.A. ORSZAG : "Analytical theories of turbulence". J. Fluid Mechanics. Vol 41 (1970).

[8] : W.C. REYNOLDS : "Computation of turbulent flows". Ann. Rev. of Fluid Mech. 8 (1976).

[9] : J.P. BERTOGLIO, J. MATHIEU : "Study of subgrid models for sheared turbulence". Fourth Symposium on

Turbulent Shear Flows (1983).

[10]: A. FAVRE : "Equations des gaz turbulents compressibles". Journal de Mecanique. Vol 3 et 4 (1965).

[11]: W. RODI : "The prediction of the turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence". Thesis. Imperial College. London (1972).

[12]: R.K. CHENG, T.T. NG : "Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow". Physics of Fluids. 25(8) (1982).

[13]: E.M. BAHRAOUI, L. FULACHIER : "Quelques résultats sur un jet turbulent axisymétrique fortement chauffé". Journées d'étude sur les écoulements turbulents à masse volumique variable. Marseille (1985).

[14]: W.P. JONES, J.J. Mc GUIRK: "Mathematical Modelling of Gas-turbine Combustion Chambers". AGARD CP275 (1979).

[15]: K. HANJALIC, B.E. LAUNDER: "A Reynolds sress model of turbulence and its application to thin shear flows". J. Fluid Mechanics. Vol 52 (1972).

[16]: H. TENNEKES, J.L. LUMLEY: "A first course in turbulence". MIT Press (1973).

[17]: W.P. JONES: "Models for Turbulent Flows with variable density and Combustion". VKI Lectures Series (1979).

[18]: W. KOLLMANN: "Berechnung von turbulenten Verbrennungsvorgängen in Flammen und Brennkammern". Hab. Thesis RWTH Aachen (1979).

[19]: D. VANDROMME: "Modèle de turbulence à deux équations pour écoulement plan cisaillé à masse volumique variable". Thèse Université des Sciences et Techniques de Lille (1980).

[20]: J. FERZIGER: "Zonal modeling" Séminaire -Ecole Centrale de Lyon (1986).

[21]: T. CEBECI, A.M.O. SMITH: "Analysis of Turbulent boundary layers". Academic Press (1974).

[22]: G.K. BATCHELOR: "An introduction to Fluid Dynamics" Cambridge University Press (1967).

[23]: R.A. ANTONIA, H.Q. DANH, A. PRABBHU: "Response of a turbulent boundary layer to a step change in surface heat flux". J. Fluid Mechanics. Vol 80 (1977).

[24]: L. FULACHIER: "Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente. Effet de l'aspiration". These d'Etat. Université de Provence (1972).

[25]: A.D. GOSMAN, W.M. PUN, A.K. RUNCHAL, D.B. SPALDING , M. WOLFSHTEIN: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows - Academic - New York (1969)

[26]: T.D. BUTLER, L.D. CLOUTMAN, J.K. DUBOWICZ, J.D. RAMSHAW Los Alamos Laboratory Report. LA 8129-MS (1979).

[27]: J.F. THOMPSON: "Numerical Solution of flow problems using a body fitted coordinate system." Computational Fluid dynamics - Publishing Corp. (1980).

Deuxième Partie:

METHODE NUMERIQUE DE RESOLUTION

La méthode numérique de résolution des équations régissant l'évolution d'un écoulement turbulent de fluide "dilatable" se heurte à plusieurs difficultés , dont les principales sont :

- le couplage existant entre les différentes équations
- le caractère non-linéaire de ces équations , résultant à la fois de la présence de termes convectifs et de l'utilisation de l'hypothèse de viscosité de turbulence
- la prise en compte de l'équation de continuité : de nombreux travaux ont abouti au développement d'algorithmes permettant de traiter cette difficulté dans le cas des écoulements laminaires incompressibles. On se préoccupe, ici, de l'extension de tels algorithmes aux écoulements turbulents de fluides dilatables.
- le calcul des conditions aux limites le long des parois solides pour les différentes variables dépendantes considérées.

Par ailleurs , l'objectif de cette étude étant le traitement de problèmes industriels , la méthode numérique doit être capable de décrire de façon fine des domaines géométriquement complexes. Pour cela , une technique de discrétisation spatiale par éléments finis a été choisie.

Les deux premières difficultés exposées précédemment (couplage et non-linéarité des équations) sont résolues par le choix d'un schéma de discrétisation adapté (§II-1).

La méthode d'éléments finis employée ici, repose sur une

formulation faible du problème et une décomposition du domaine d'étude en un nombre fini d'éléments : les principes généraux de cette méthode et leur application aux équations d'évolution d'un fluide "dilatable" sont présentés dans les paragraphes II-2 et II-3.

L'équation de continuité est considérée comme une contrainte pour l'équation de quantité de mouvement. Un processus itératif permet alors la détermination du champ de pression par l'intermédiaire d'une technique de gradients conjugués (§II-4).

Enfin le paragraphe II-6 détaille la méthode de calcul des conditions aux limites le long des parois solides : les lois d'équilibre local permettent de rétablir des conditions de Dirichlet pour chaque composante de quantité de mouvement ainsi que pour k et ε. Une condition de Neumann non-homogène est , par contre, introduite pour la température T.

II-1 : SCHEMA DE DISCRETISATION EN TEMPS :

La discrétisation en temps du système d'équations aux dérivées partielles instationnaires du problème, repose sur un schéma de différences finies semi-implicite, séquentiel.

Connaissant $\vec{Q}^n, \overline{p^*}^n, \tilde{T}^n, \bar{\rho}^n, k^n, \varepsilon^n$ au temps $t=n.\Delta t$, on calcule $\vec{Q}^{n+1}, \overline{p^*}^{n+1}, \tilde{T}^{n+1}, \bar{\rho}^{n+1}, k^{n+1}, \varepsilon^{n+1}$ au temps $t=(n+1).\Delta t$ grâce aux phases successives suivantes:

. Phase 1: calcul de $\tilde{T}^{n+1}$

$$\frac{\tilde{T}^{n+1}-\tilde{T}^n}{\Delta t} + \vec{u}^n . \overrightarrow{\text{grad}}\ \tilde{T}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^n} \text{div}\left(\left(\frac{1}{Re.Pr} + \frac{1}{Rt^n.Prt}\right) \overrightarrow{\text{grad}}\ \tilde{T}^{n+1}\right)$$

. Phase 2: calcul de $\bar{\rho}^{n+1}$ par l'équation d'état :

$$\bar{\rho}^{n+1} = \frac{1}{\tilde{T}^{n+1}}$$

. Phase 3: calcul de $\vec{Q}^{n+1}$ et $\overline{p^*}^{n+1}$ par le système d'équations couplées :

$$\frac{\bar{\rho}^{n+1}-\bar{\rho}^{n}}{\Delta t}+ div(\vec{Q}^{n+1})= 0$$

$$\frac{\vec{Q}^{n+1}-\vec{Q}^{n}}{\Delta t}+ div\left(\vec{u}^{n} *\vec{Q}^{n+1}\right) = -\overrightarrow{grad}\,\bar{p}^{*n+1}$$

$$+div\left(\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt^{n}}\right)\left(\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\frac{\vec{Q}^{n+1}}{\bar{\rho}^{n+1}}+\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}^{t}\vec{u}^{n}\right)\right)$$

. Phase 4: calcul de k^{n+1} et ε^{n+1} par:

$$\frac{k^{n+1}- k^{n}}{\Delta t} + \vec{u}^{n} . \overrightarrow{grad}\ k^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}}. div\left(\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt^{n}.\sigma_{k}}\right)\overrightarrow{grad}\ k^{n+1}\right)$$

$$+ \mathcal{P}^{n+1} - \frac{\varepsilon^{n}}{k^{n}}. k^{n+1}$$

$$\frac{\varepsilon^{n+1}- \varepsilon^{n}}{\Delta t} + \vec{u}^{n} . \overrightarrow{grad}\ \varepsilon^{n+1} = \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}}. div\left(\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt^{n}.\sigma_{\varepsilon}}\right)\overrightarrow{grad}\ \varepsilon^{n+1}\right)$$

$$+ C_{\varepsilon 1}.\frac{\varepsilon^{n}}{k^{n}}.\mathcal{P}^{n+1} - C_{\varepsilon 2}.\frac{\varepsilon^{n}}{k^{n}}.\varepsilon^{n+1}$$

Le terme de production $\mathcal{P}^{n+1}$ est déduit de l'expression:

$$\mathcal{P}^{n+1}= \frac{1}{\bar{\rho}^{n+1}}.\left[\frac{1}{Rt^{n}}.\left(\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\,\vec{u}^{n+1} + \overrightarrow{\overrightarrow{grad}}^{t}\vec{u}^{n+1}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}.\left(\bar{\rho}^{n}.k^{n}+\frac{1}{Rt^{n}}.div\vec{u}^{n+1}\right).\vec{\vec{\delta}}\right].\overrightarrow{\overrightarrow{grad}}\,\vec{u}^{n+1}$$

Enfin, les nouvelles valeurs de Rt^{n+1} et $\vec{u}^{n+1}$ sont calculées par:

$$\frac{1}{Rt^{n+1}} = C_{\mu}.\bar{\rho}^{n+1}.\frac{(k^{n+1})^{2}}{\varepsilon^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad \vec{u}^{n+1} = \frac{\vec{Q}^{n+1}}{\bar{\rho}^{n+1}}$$

Ce schéma, de type semi-implicite, permet une linéarisation des équations à chaque pas de temps, tant en ce qui concerne les termes convectifs que les termes de diffusion, de production et de dissipation.

D'autre part, hormis pour $\vec{Q}^{n+1}$ et $\overline{p^*}^{n+1}$, les équations peuvent être résolues de façon séquentielle, le couplage étant réalisé par les valeurs obtenues au pas de temps précédent (exposant n) ou, si elles ont déjà été calculées, les valeurs obtenues au temps $(n+1).\Delta t$.

Les différentes phases du calcul s'enchaînent de la façon suivante: on commence par le calcul de la température $\tilde{T}^{n+1}$ qui permet de déterminer la masse volumique $\overline{\rho}^{n+1}$. On résoud ensuite simultanément les équations de quantité de mouvement et de continuité. La connaissance de $\vec{Q}^{n+1}$ et de $\overline{\rho}^{n+1}$ nous permet enfin de résoudre les équations sur k et ε de façon semi-implicite.

Nous verrons plus loin que l'algorithme en pression utilisé ainsi que la discrétisation en temps présentée ici, permettent de passer par une résolution découplée des deux composantes de quantité de mouvement. On évite ainsi d'avoir à construire, aprés discrétisation spatiale, une matrice de taille $2N.2N$ où N est le nombre de degré de liberté en $\vec{Q}$: on ne construit que 2 matrices de taille $N.N$.

Les tests numériques effectués ont montré que la prise en compte sous forme semi-implicite des termes de dissipation dans les équations en k et ε permet d'améliorer trés sensiblement la stabilité en temps du schéma. Ce traitement nous oblige à modifier légèrement l'expression du terme de dissipation dans l'équation sur k . Celui-ci est alors écrit sous la forme:

$$-\frac{\varepsilon}{k}.k$$

Si on suppose que toutes les variables du problème (ainsi que la quantité $\frac{\vec{Q}}{\overline{\rho}}$) admettent des développements de Taylor autour de leur valeur au temps $n.\Delta t$, on peut montrer que

l'erreur de ce schéma est en $O(\Delta t)$.

II-2 : METHODE DE DISCRETISATION EN ELEMENTS FINIS:

II-2-1: Generalités:

La résolution du système passe par une discrétisation spatiale des équations. Les principales techniques actuellement utilisées sont les suivantes:

. La Technique de différences finies: elle consiste à donner une approximation des opérateurs différentiels intervenant dans les équations. Cette technique a été trés largement développée: sa simplicité de mise en oeuvre la rend attrayante. Cependant, elle est difficilement adaptable à la description précise de géomètries compliquées habituellement rencontrées dans les situations industrielles.

. La Methode de discrétisation spectrale: elle consiste à décomposer les solutions du problème sur une base de fonctions non locales données (fonctions sinusoïdales, polynômes de Tchebichev, polynômes d'Hermite, etc...) qui satisfont généralement les conditions aux limites imposées (Dirichlet, Neumann, périodicité). Cette technique est généralement utilisée pour obtenir des approximations d'ordre élevé. Cependant, elle n'est applicable, pour l'instant, qu'à des géomètries trés simples. Le traitement de géomètries à caractère industriel reste difficile. Il passe par les méthodes de transformation de domaines ou par des découpages en sous-domaines simples.

. La Technique d'éléments finis: elle repose sur les mêmes principes que les méthodes spectrales mais la base d'approximation est formée de fonctions polynômiales à support local lié à une décomposition en éléments finis du domaine. Cette technique permet un choix trés vaste en ce qui concerne tant la forme des éléments (triangles, quadrangles,...) que les fonctions de base utilisées (fonctions linéaires, quadratiques, ...). Ce choix doit être fait de façon à obtenir une approxi-

mation suffisamment précise de la solution, tout en permettant une mise en oeuvre assez rapide et des temps de calcul modérés. Dans les problèmes d'écoulements de fluides, on se limite, en général, à l'utilisation d'éléments triangulaires (qui permettent des intégrations exactes) ou quadrangulaires et à des polynômes de degré 1 (interpolation linéaire) ou 2 (interpolation quadratique). Ces éléments sont bien adaptés aux méthodes de génération automatique de maillage. L'utilisation de triangles permet, d'autre-part, de décrire de façon précise des géomètries de forme trés compliquée.

Notons par ailleurs que la technique d'éléments finis se prète au raffinement local de maillages (cf Babuska [1]) et semble extensible au calcul à l'intérieur de géomètries déformables (cf Rusaouën [2]).

La méthode d'éléments finis, ici adoptée, s'appuie sur une décomposition du domaine en éléments triangulaires et une approximation linéaire des variables dépendantes à l'intérieur de chaque élément.

II-2-2: <u>Présentation de la méthode sur un problème modèle:</u>

Considérons le problème suivant:

$$(P1)\quad \begin{cases} \Delta u + T(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega & (P1\text{-}1) \\ u\Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

où Ω est domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et Γ est sa frontière. T est un opérateur fonction de u et de ses dérivées premières.

Soit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de carré mesurable. On définit alors la norme:

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} u^2(x).\,dx\right)^{1/2}$$

associée au produit scalaire:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x).\, v(x).\, dx$$

Construisons alors les espaces:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \;/\; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \;,\; \forall i=1,\ldots,n \right\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \;/\; u\Big|_\Gamma = 0 \right\}$$

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \;/\; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i .\, \partial x_j} \in L^2(\Omega) \;,\; \forall i=1,\ldots,n \right\}$$

Le problème (P1) faisant intervenir des dérivées secondes , il est naturel de chercher u dans $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

a/ <u>Formulation faible du problème:</u>

A partir du problème (P1), on peut construire un nouveau problème obtenu en multipliant l'équation (P1-1) par une fonction test v, en intégrant sur le domaine Ω et en appliquant une formule de Green sur les termes de plus haut degré (ici, le terme en Δu). On obtient alors le problème (P2) suivant:

$$(P2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que:} \\ \forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u .\, \nabla v .\, dx - \int_\Omega T(u).\, v .\, dx = 0 \end{cases}$$

On remarque que le problème (P2) ne fait plus intervenir que les dérivées premières de u. Ainsi, il n'est pas obligatoire de chercher les solutions de (P2) dans $H^2(\Omega)$: seule l'appartenance de u à $H_0^1(\Omega)$ est nécessaire. L'ensemble des solutions a donc été élargi et le problème est donc maintenant:

$$(P3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que:} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u .\, \nabla v .\, dx - \int_\Omega T(u).\, v .\, dx = 0 \end{cases}$$

Les problèmes (P1) et (P3) ne sont équivalents qu'au sens des distributions dans $H^{-1}(\Omega)$ (dual topologique de $H_0^1(\Omega)$) car la dérivée seconde d'une solution de (P3) n'existe pas forcément.

Cette formulation s'appelle la formulation variationnelle ou formulation faible du problème.

b/ Discrétisation spatiale du problème - Méthode de Galerkin:

La discrétisation spatiale du problème (P3) repose sur la construction d'un sous-ensemble V_h de dimension finie de $H_0^1(\Omega)$ dans lequel seront cherchées les solutions u_h ainsi que les fonctions tests v_h.

Soit une base de V_h dont les fonctions sont notées v_h^i (avec $i=1,\ldots,n_h$ où n_h est la dimension de V_h). Les solutions u_h peuvent alors être décomposées sur la base des v_h^i de V_h.

La méthode de Galerkin consiste à choisir comme fonction test v_h, les fonctions de base v_h^i de V_h. L'approximation du problème (P3) devient alors:

$$(P4)\quad \begin{cases} \text{Trouver } a_i \in \mathbb{R} \text{ pour } i=1,\ldots,n \text{ tels que:} \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_h . \nabla v_h^j \, d\Omega - \int_\Omega T(u_h) . v_h^j \, d\Omega = 0 \qquad \text{pour } j=1,\ldots,n_h \\ \text{avec } u_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_h} a_i . v_h^i \end{cases}$$

La résolution de (P3) est donc ramenée à celle de n_h équations sur les n_h coefficients a_i. Si l'opérateur T est linéaire, on est amené à résoudre un système matriciel linéaire.

La construction de l'espace d'approximation V_h repose sur la donnée d'un maillage du domaine Ω. La base de V_h est alors déterminée par le nombre de degrés de liberté choisi sur les éléments du maillage.

Quelques remarques:

L'application de la méthode à un problème non-homogène, c'est à dire à un problème où on a $u|_\Gamma = g$ avec $g \neq 0$, ne pose pas

de problème: une modification appropriée des espaces fonctionnels permet de se ramener au cas précédent.

Pour ce qui est de l'application à un problème mixte, c'est-à-dire lorsqu'on a à la fois des conditions de Dirichlet et de Neumann homogène $\left(u\Big|_{\Gamma_1} = g \ , \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \ , \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \right)$, on montre que les fonctions tests ne doivent vérifier que les conditions de Dirichlet : $v\Big|_{\Gamma_1} = 0$.

II-2-3: <u>Méthode d'éléments finis appliquée au problème de Stokes:</u>

L'application de la méthode décrite précédemment au problème de Stokes a été faite par de nombreux auteurs (cf Raviart [3], Glowinski [4]). Nous en rappelons ici les grandes lignes ainsi que les fondements mathématiques. Cette application conduit à introduire des conditions de compatibilité entre les espaces de discrétisation en vitesse et en pression, ce qui impose des contraintes sur le choix des éléments et des fonctions d'approximation à utiliser.

a/ <u>Formulation faible du problème:</u>

Considérons le problème de Stokes généralisé:

$$\begin{cases} \alpha . \vec{u} - \nu . \Delta \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \\ \vec{\nabla} . \vec{u} = 0 \end{cases}$$

avec $\vec{u}\Big|_{\Gamma} = \vec{g}$ et $\vec{g}$ tel que $\int_{\Gamma} \vec{g} . \vec{n} . d\Gamma = 0$

Une formulation faible du problème est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{u} \in \left(H^1(\Omega)\right)^N \text{ et } p \in L^2(\Omega) \text{ tels que:} \\ \nu.(\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{u},\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{v}) - (p,\ \text{div}\ \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall v \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \\ \qquad\qquad (q,\ \text{div}\ \vec{u}) = 0 \qquad \forall q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R} \\ \vec{u}\Big|_\Gamma = \vec{g} \end{cases}$$

Si les hypothèses du theorème de Brezzi sont vérifiées, alors le problème admet une solution unique $(\vec{u},\ p)$.

Rappelons, ici, le <u>Théorème de Brezzi:</u>

Soit le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{u}, p) \in V * P \text{ tels que} \\ \quad a(\vec{u}, \vec{v}) - b(\vec{v}, p) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \\ \qquad\qquad b(\vec{u}, q) = 0 \qquad \forall q \in P \end{cases}$$

Si:

H1/ l'opérateur a(.,.) est V-elliptique, c'est-à-dire si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(\vec{u}, \vec{u}) \geqslant \alpha . \|\vec{u}\|_V^2 \quad \forall \vec{u} \in V$$

H2/ la condition inf-sup est réalisée c'est-à-dire si

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \inf_{q \in P} \sup_{\vec{v} \in V} \frac{b(\vec{v}, q)}{\|\vec{v}\|_V . \|q\|_P} \geqslant \beta$$

Alors le problème admet une solution unique $(\vec{u}, \vec{v}) \in V * P$

Dans le cas du problème de Stokes, la démonstration de l'hypothèse (H1) est immédiate. Quant à la condition "inf-sup", elle peut être mise sous la forme équivalente (cf Girault [5]):

Pour $q \in P$ il existe un unique $\vec{v} \in V$ tel que:

$$\|q\|_P^2 = b(\vec{v}, q) \quad \text{et} \quad \|\vec{v}\|_V \leq c. \|q\|_P$$

On montre alors que cette condition est vérifiée, dans le cas du problème de Stokes, si on choisit:

$$P = L^2(\Omega)/\mathbb{R} \quad \text{et} \quad V = V_0 \quad \text{où}$$

$$V_0 = \left\{ \vec{v} \ / \ \vec{v} \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^N \text{ et } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

b/ <u>Approximation par éléments finis:</u>

Soient deux espaces de dimension finie P_h et V_h tels que:

$$P_h \subset P \quad \text{et} \quad V_h \subset V$$

Les hypothèses du theorème de Brezzi, écrites dans les espaces d'approximation P_h et V_h, sont alors:

. V_h-ellipticité:

$$\exists \alpha^* > 0 \text{ tel que } a(\vec{u}_h, \vec{u}_h) \geq \alpha^* . \left\| \vec{u}_h \right\|_{V_h}^2 \qquad \forall \vec{u}_h \in V_h$$

. Condition inf-sup discrète:

$$\exists \beta^* > 0 \text{ tel que } \inf_{q_h \in P_h} \sup_{\vec{v}_h \in V_h} \frac{b(\vec{v}_h, q_h)}{\left\| \vec{v}_h \right\|_{V_h} . \left\| q_h \right\|_{P_h}} \geq \beta^*$$

Des majorations d'erreur peuvent, d'autre part, être obtenues (cf Girault [5]). Or pour que ces majorations soient satisfaisantes, les coefficients α^* et β^* doivent être indépendants du paramètre de discrétisation h: on dit encore que les conditions du theorème de Brezzi doivent être vérifiées uniformément.

Dans le cas du problème de Stokes, l'ellipticité uniforme est facilement vérifiable. La condition inf-sup va, elle, par contre, conditionner le choix des espaces de discrétisation. Cette condition peut être mise sous la forme:

pour chaque $q_h \in P_h$, il existe $\vec{v}_h \in V_h$ tel que:

$$-\int_\Omega q_h . \operatorname{div} \vec{v}_h . d\Omega = \|q_h\|_P^2 \quad \text{et} \quad \|\vec{v}_h\|_V \leq c . \|q_h\|_P$$

avec c indépendant de h.

Cette condition traduit le fait que l'espace d'approximation de $\vec{v}_h$ ne peut être choisi indépendamment de celui de q_h. En particulier, le nombre de degrés de liberté sur $\vec{v}_h$ devra obligatoirement être supérieur à celui choisi pour q_h.

II-3: APPLICATION AUX EQUATIONS D'EVOLUTION D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE DILATABLE:

II-3-1: Formulation faible du problème:

La technique décrite précédemment peut être appliquée aux équations régissant l'évolution des variables $\vec{Q}$, $\overline{p^*}$, $\tilde{T}$, k et ε. Ces équations, discrétisées en temps, peuvent être réécrites sous la forme:

$$\alpha . \tilde{T}^{n+1} + \tilde{u}^n . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \tilde{T}^{n+1} - \frac{1}{\bar{\rho}^n} . \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{Re . Pr} + \frac{1}{Rt^n . Prt}\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \tilde{T}^{n+1}\right) = F_T^n$$

$$\alpha . \vec{Q}^{n+1} + \operatorname{div}\left(\tilde{u}^n * \vec{Q}^{n+1}\right) - \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n}\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \frac{\vec{Q}^{n+1}}{\bar{\rho}^{n+1}}\right) + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \overline{p^*}^{n+1} = \vec{F}_Q^n$$

$$\operatorname{div}\left(\vec{Q}^{n+1}\right) + S = 0$$

$$\alpha . k^{n+1} + \tilde{u}^n . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, k^{n+1} - \frac{1}{\bar{\rho}^n} . \operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n . \sigma_k}\right) \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, k^{n+1}\right)$$

$$+ \frac{\varepsilon^n}{k^n} . k^{n+1} = F_k^n$$

$$\alpha.\varepsilon^{n+1} + \mathfrak{u}^n \longrightarrow .\,\mathrm{grad}\ \varepsilon^{n+1} - \frac{1}{\bar{\rho}^n}.\,\mathrm{div}\left(\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n.\sigma_\varepsilon}\right)\longrightarrow \mathrm{grad}\ \varepsilon^{n+1}\right)$$

$$+C_{\varepsilon 2}.\frac{\varepsilon^n}{k^n}.\varepsilon^{n+1} = F_\varepsilon^n$$

où $\alpha = \dfrac{1}{\Delta t}$ $\qquad \mathfrak{u}^n = \dfrac{\vec{Q}^n}{\bar{\rho}^n}$

et $S = \dfrac{\bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^n}{\Delta t}$

$$F_T^n = \frac{\tilde{T}^n}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_Q^n = \frac{\vec{Q}^n}{\Delta t} - \mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n}\right).\longrightarrow {}^t\mathfrak{u}^n\right]$$

$$F_k^n = \frac{k^n}{\Delta t} + \mathcal{P}^{n+1}$$

$$F_\varepsilon^n = \frac{\varepsilon^n}{\Delta t} + C_{\varepsilon 1}.\frac{\varepsilon^n}{k^n}.\mathcal{P}^{n+1}$$

Les trois équations du système précédent, relatives aux variables scalaires $\tilde{T}^{n+1}$, k^{n+1} et ε^{n+1}, peuvent être mises sous la forme commune:

$$\alpha.\Phi^{n+1} + \mathfrak{u}^n \longrightarrow .\,\mathrm{grad}\ \Phi^{n+1} - \frac{1}{\bar{\rho}^n}.\,\mathrm{div}\left(\beta_\Phi^n.\longrightarrow \mathrm{grad}\ \Phi^{n+1}\right) + \gamma_\Phi^n.\Phi^{n+1} = F_\Phi^n$$

avec $\Phi = \tilde{T}$, k ou ε

$$\beta_T^n = \frac{1}{Re.Pr} + \frac{1}{Rt^n.Prt}$$

$$\beta_k^n = \frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n.\sigma_k}$$

$$\beta_\varepsilon^n = \frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n . \sigma_\varepsilon}$$

et $\quad \gamma_T^n = 0 \quad , \quad \gamma_k^n = \frac{\varepsilon^n}{k^n} \quad , \quad \gamma_\varepsilon^n = C_{\varepsilon 2} . \frac{\varepsilon^n}{k^n}$

Ces équations scalaires sont complétées par les conditions aux limites suivantes:

$$\Phi\Big|_{\Gamma_1} = \Phi^0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \quad \text{avec} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$$

De manière analogue au problème modèle présenté, on construit l'espace:

$$H_E^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ / \ v\Big|_{\Gamma_1} = 0 \right\}$$

La formulation faible des équations scalaires est alors:

Trouver $\Phi \in H^1(\Omega)$ tel que : $\forall\, v \in H_E^1(\Omega)$

$$\alpha . \int_\Omega \Phi^{n+1} . v . d\Omega + \int_\Omega \mathfrak{X}_n \overrightarrow{u} . \overrightarrow{\text{grad}} \Phi^{n+1} . v . d\Omega + \int_\Omega \beta_\Phi^n . \overrightarrow{\text{grad}} \Phi^{n+1} . \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v}{\overline{\rho}^n} . d\Omega$$

$$+ \int_\Omega \gamma_\Phi^n . \Phi^{n+1} . v . d\Omega - \int_\Gamma \beta_\Phi^n . \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial n} . \frac{v}{\overline{\rho}^n} . d\Gamma = \int_\Omega F_\Phi^n . v . d\Omega \qquad (II-3-1-1)$$

avec $\Phi\Big|_{\Gamma_1} = \Phi^0$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0$

En ce qui concerne les équations couplées de quantité de mouvement et de continuité, leur formulation faible est une extension de la formulation du problème de Stokes, à savoir:

Trouver $\vec{Q}^{n+1}$ et $\overline{p^*}^{n+1} \in \left(H^1(\Omega)\right)^2 \times L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ tels que :

$\forall\, \vec{v} \in \left(H_E^1(\Omega)\right)^2 \qquad \forall\, q \in L^2(\Omega)/\mathbb{R}$

$$\int_\Omega \text{div}\, \vec{Q}^{n+1} . q . d\Omega = - \int_\Omega S . q . d\Omega$$

$$\alpha.\int_\Omega \vec{Q}^{n+1}.\vec{v}.d\Omega + \int_\Omega div.\left(\vec{u}^{n}*\vec{Q}^{n+1}\right).\vec{v}.d\Omega$$

$$+\int_\Omega\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt^n}\right)\overline{\overline{grad}}\frac{\vec{Q}^{n+1}}{\rho^{n+1}}*\overrightarrow{grad}v.d\Omega+\int_\Omega\overrightarrow{grad}\overline{p^*}^{n+1}.v.d\Omega$$

$$-\int_\Gamma\left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt^n}\right).\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\vec{Q}^{n+1}}{\rho^{n+1}}\right).\vec{v}.d\Gamma=\int_\Omega\vec{F}_Q^n.\vec{v}.d\Omega$$

$$\text{avec}\quad \vec{Q}^{n+1}\Big|_{\Gamma_{Q1}}=\vec{Q}^{0}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\vec{Q}^{n+1}}{\partial n}\Big|_{\Gamma_{Q2}}=\vec{0}$$

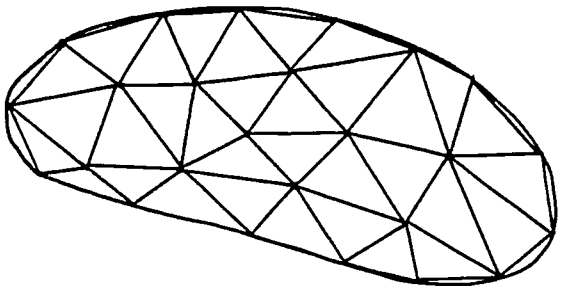
De même que pour le problème de Stokes, l'existence et l'unicité de la solution $\left(\vec{Q}^{n+1},\overline{p^*}^{n+1}\right)$ est démontrée si les hypothèses du théorème de Brezzi sont vérifiées.

En fait, la démonstration de la V-ellipticité de l'opérateur est moins immédiate que dans le cas du problème de Stokes. Elle peut cependant être montrée de façon assez simple si on utilise une formulation relative à $\vec{u}$ et non à $\vec{Q}$ et si on suppose que $\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}=0$.

II-3-2: <u>Discrétisation du problème - Choix du type d'éléments utilisés:</u>

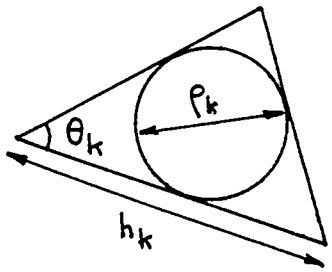
La discrétisation du problème passe par le choix de deux espaces d'approximation V_h et P_h pour les variables du problème. De même que pour le problème de Stokes, la satisfaction de la condition inf-sup discrète du théorème de Brezzi impose des conditions de compatibilité entre ces deux espaces.

L'ensemble des éléments utilisables pour la discrétisation du problème est trés vaste. On choisit ici les éléments triangulaires. Le domaine Ω est alors décomposé en un nombre fini d'éléments comme le montre le schéma suivant :



On voit que la réunion de tous les triangles ne correspond pas tout à fait au domaine de départ Ω si sa frontière n'est pas polygonale. Dans la pratique, le maillage doit donc être construit de façon à approximer avec une bonne précision le domaine initial.

Considérons un triangle e_k du maillage:



Soient:
- h_k la longueur du plus grand coté de e_k
- ρ_k le diamètre du plus grand cercle inscrit dans e_k
- θ_k le plus petit angle au sommet de e_k

on a alors:

$$\frac{h_k}{\rho_k} \leqslant \frac{2}{\sin\theta_k}$$

La triangulation $\mathcal{C}_h$ du domaine est dite "régulière" si il existe une constante $\sigma > 0$, telle que:

$$\frac{h_k}{\rho_k} \leqslant \sigma \qquad \forall\, e_k \in \mathcal{C}_h$$

Cette propriété peut se traduire par l'existence d'un angle limite θ_0 tel que $\theta_k \geqslant \theta_0$ $\forall\, e_k \in \mathcal{C}_h$

Les espaces d'approximation V_h et P_h doivent être des espaces de fonctions dont la restriction à chaque triangle est un polynôme.

II-3-3: Espace d'interpolation en pression:

La formulation faible du problème ne nous impose aucune condition de continuité de la pression aux interfaces des triangles puisque la seule condition est:

$$P_h \subset L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

Il est donc possible de calculer une approximation de la pression constante par élément. Cependant, ici, l'utilisation d'une approximation linéaire a été préférée. Ainsi, pour tout point $M(x,y)$ du domaine Ω_h , la valeur de la pression est calculée par:

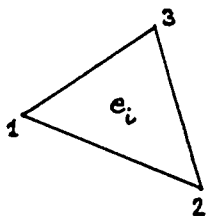
$$p_h(x,y) = a + b.x + c.y$$

où a, b et c sont déterminés de manière unique par la valeur de la pression aux sommets du triangle où est situé le point M. Les degrés de liberté en pression sont donc les valeurs aux noeuds du maillage.

La valeur de la pression au point M peut également être obtenue par l'utilisation des coordonnées barycentriques du point. On a alors:

$$p_h(x,y) = p_{1h}.L_1(x,y) + p_{2h}.L_2(x,y) + p_{3h}.L_3(x,y)$$

où p_{1h}, p_{2h}et p_{3h} sont les valeurs de la pression aux noeuds du triangle.



Les polynômes L_1, L_2 et L_3 sont alors donnés par:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2.\,\mathrm{Aire}(e_i)} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3-x_3y_2 & y_2-y_3 & x_3-x_2 \\ x_3y_1-x_1y_3 & y_3-y_1 & x_1-x_3 \\ x_1y_2-x_2y_1 & y_1-y_2 & x_2-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

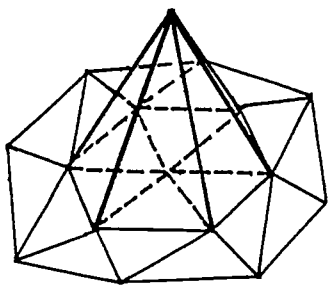
Par définition des coordonnées barycentriques, on a:

$$L(x_i, y_j) = \delta_{ij}$$

Cette propriété nous conduit à considérer les fonctions N_i définies par:

$$\begin{cases} N_i(x,y) = L_i(x,y) & \text{si } M \in S_i \\ N_i(x,y) = 0 & \text{si } M \notin S_i \end{cases}$$

où S_i est le "support" du noeud i, c'est à dire l'ensemble des triangles ayant le noeud i comme sommet. Ces fonctions peuvent être représentées par le schéma suivant:

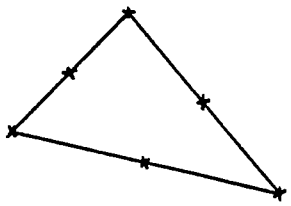


Le nombre de fonctions N_i (= nombre de noeuds du maillage) correspond au nombre de degrés de liberté en pression et on peut montrer que l'ensemble des N_i forme une base de l'espace d'approximation P_h. Si on décompose la pression sur cette base, les coefficients de la décomposition sont alors les valeurs aux noeuds du maillage. On note d'autre part que les fonctions N_i sont nulles partout sauf au voisinage du point i, ce qui, par la suite, limitera les opérations d'intégration et fixera la taille des matrices des systèmes linéaires à résoudre.

II-3-4: Espace d'interpolation pour $\vec{Q}$, $\tilde{T}$, k et ε:

Le choix d'une interpolation linéaire pour la pression nous oblige à utiliser une approximation au moins quadratique en vitesse (cf Th. de Brezzi). On est alors amené à introduire de

nouveaux degrés de liberté sur chaque élément du maillage. On peut, par exemple, choisir les milieux des côtés comme le montre le schéma suivant:



En fait, on préfère utiliser un nouveau maillage construit, à partir du précédent, en subdivisant chaque triangle en quatre triangles égaux, comme le montre le schéma suivant:



La vitesse est alors interpolée par des fonctions linéaires sur chaque triangle du nouveau maillage. On montre (cf Glowinski [6]) que la condition inf-sup du théorème de Brezzi est vérifiée si la triangulation de départ est régulière.

Pour le problème incompressible, on rappelle que l'estimation d'erreur sur la solution approchée est donnée par les expressions suivantes (cf Glowinski [6]) :

$$\left\| \vec{u}_h - \vec{u} \right\|_{\left(H^1(\Omega)\right)^N} \leq C.h. \left(\left\| \vec{u} \right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^N} + \left\| p \right\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \right)$$

$$\left\| p_h - p \right\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C.h. \left(\left\| \vec{u} \right\|_{\left(H^2(\Omega)\right)^N} + \left\| p \right\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \right)$$

Si $\vec{u} \in \left(H^2(\Omega)\right)^N$ et $p \in H^1(\Omega)$

On obtient donc une erreur en $\mathcal{O}(h)$.

On note enfin que les variables $\tilde{T}$, k et ε sont régies

par des équations d'évolution, au même titre que la quantité de mouvement $\vec{Q}$. Il semble donc logique de les interpoler de façon linéaire sur le même maillage $\mathcal{C}_h$.

II-3-5: Equations discrétisées:

Les espaces de discrétisation choisis nous ont conduit à introduire les bases de fonctions N_i définies au §II-3-3. Les différentes variables du problème peuvent alors être décomposées sur ces bases. On écrit donc:

$$\Phi_h^{n+1} = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i^{n+1} . N_i$$

$$\vec{Q}_h^{n+1} = \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i^{n+1} . N_i$$

$$\overline{p}_{2h}^{n+1} = \sum_{i=1}^{N2} \overline{p}_i^{n+1} . N2_i$$

où:

. Φ_h^{n+1} ($=\tilde{T}_h^{n+1}, k_h^{n+1}$ ou ε_h^{n+1}), $\vec{Q}_h^{n+1}$ et $\overline{p}_{2h}^{n+1}$ sont les fonctions interpolées des variables Φ^{n+1}, $\vec{Q}^{n+1}$, $\overline{p^*}^{n+1}$.

. Φ_i^{n+1}, $\vec{Q}_i^{n+1}$, $\overline{p}_i^{n+1}$ sont les valeurs au noeud i des fonctions Φ_h^{n+1}, $\vec{Q}_h^{n+1}$, $\overline{p}_{2h}^{n+1}$.

. Les fonctions N_i et $N2_i$ sont les fonctions de base des espaces d'interpolation V_h et P_h.

. N et N2 sont les nombres de noeuds des maillages du domaine.

Comme nous l'avons vu au §II-2-2b, la méthode de Galerkin consiste à prendre, comme fonctions tests, successivement toutes les fonctions de base des espaces de discrétisation. La formulation faible de chacune des équations nous conduit donc à un système de N équations.

Considérons, tout d'abord, les équations sur les variables scalaires Φ_h. La nouvelle formulation de ces équations est

alors:

Trouver les $\Phi_i^{n+1} \in \mathbb{R}$ pour $i=1,\ldots,N$ tels que:

$\forall j=1,\ldots,N$

$$\alpha.\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^{n+1}.\int_{\Omega_h} N_i.N_j.d\Omega_h + \sum_{i=1}^{N}\Phi_i^{n+1}.\int_{\Omega_h}\frac{\vec{Q}_h^n}{\overline{\overline{\rho^n}}}.\overrightarrow{\text{grad}N_i}.N_j.d\Omega_h$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^{n+1}.\int_{\Omega_h}\beta_\Phi^n.\overrightarrow{\text{grad}N_i}.\overrightarrow{\text{grad}}\frac{N_j}{\overline{\rho^n}}.d\Omega_h + \sum_{i=1}^{N}\Phi_i^{n+1}.\int_{\Omega_h}\gamma_h^n.N_i.N_j.d\Omega_h$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^{n+1}.\int_{\Gamma_h}\beta_\Phi^n.\frac{\partial N_i}{\partial n}.\frac{N_j}{\overline{\rho^n}}.d\Gamma_h = \int_{\Omega_h}F_\Phi^n.N_j.d\Omega_h \qquad (E.II-3-5-1)$$

On est donc maintenant ramené à la résolution d'un problème matriciel de la forme:

$$(A_{ij}).(\Phi_i) = (b_j)$$

où la matrice $A=(A_{ij})$ est non-symétrique: ses coefficients ont pour expression:

$$A_{ij} = \alpha.\int_{\Omega_h} N_i.N_j.d\Omega_h + \int_{\Omega_h}\frac{\vec{Q}_h^n}{\overline{\overline{\rho^n}}}.\overrightarrow{\text{grad}N_i}.N_j.d\Omega_h$$

$$+\int_{\Omega_h}\beta_\Phi^n.\overrightarrow{\text{grad}N_i}.\overrightarrow{\text{grad}}\frac{N_j}{\overline{\rho^n}}.d\Omega_h + \int_{\Omega_h}\gamma_h^n.N_i.N_j.d\Omega_h$$

$$-\int_{\Gamma_h}\beta_\Phi^n.\frac{\partial N_i}{\partial n}.\frac{N_j}{\overline{\rho^n}}.d\Gamma_h$$

Les intégrales sur le domaine Ω_h peuvent être remplacées par la somme des intégrales sur chaque triangle τ_l du maillage puisque:

$$\Omega_h = \bigcup_{l=1}^{n_e}\tau_l \quad \text{et} \quad \tau_l \cap \tau_m = \emptyset \quad \text{si} \quad l\neq m$$

où n_e est le nombre de triangles du maillage.

En pratique, les coefficients $\beta_\Phi^n, \gamma_\Phi^n$ et $\frac{1}{\overline{\rho}^n}$ intervenant dans les équations seront pris constants par élément: leur valeur est la moyenne des valeurs aux noeuds de l'élément.

La définition des fonctions N_i nous conduit à la formule:

$$\int_{\tau_l} N_i^{\alpha_i} . N_j^{\alpha_j} . N_k^{\alpha_k} . d\Omega = \frac{\alpha_i! . \alpha_j! . \alpha_k!}{(2+\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k)!} . 2 . \text{aire}(\tau_l).$$

si les noeuds i, j et k sont les sommets du triangle τ_l.

De même :

$$\int_{\tau_l} N_i^{\alpha_i} . N_j^{\alpha_j} . N_k^{\alpha_k} . d\Omega = 0$$

si un noeud ne fait pas partie de l'élément τ_l.

La matrice A est donc une matrice creuse. Cette propriété permettra, par la suite, de limiter la taille de stockage nécessaire.

De façon analogue aux équations scalaires, les équations de quantité de mouvement et de continuité conduisent à un système sur les $\vec{Q}_i$ et les p_i qui s'écrit:

Trouver les $\vec{Q}_i \in (\mathbb{R})^2$ pour $i=1,\ldots,N$ et les $\overline{p}_k \in \mathbb{R}$ pour $k=1,\ldots,N2$ tels que:
$\forall j=1,\ldots,N$

$$\alpha . \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i^{n+1} . \int_{\Omega_h} N_i . N_j . d\Omega_h + \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i^{n+1} . \int_{\Omega_h} div \left(\frac{\vec{Q}_h^n}{\overline{\rho}^n} . N_i \right) . N_j . d\Omega_h$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i^{n+1} . \int_{\Omega_h} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n} \right) . \overrightarrow{grad} \frac{N_i}{\overline{\rho}^{n+1}} . \overrightarrow{grad} N_j . d\Omega_h$$

$$- \sum_{k=1}^{N2} \overline{p}_k^{n+1} . \int_{\Omega_h} \overrightarrow{grad} N2_k . N_j . d\Omega_h$$

$$-\sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i^{n+1} \cdot \int_{\Gamma_h} \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{N_i}{\overline{\rho}^{n+1}} \right) \cdot N_j \cdot d\Gamma_h$$

$$= \int_{\Omega_h} \vec{F}_Q^n \cdot N_j \cdot d\Omega_h \qquad \text{(E.II-3-5-2)}$$

et $\forall l = 1, \ldots, N2$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_h} \left(div\left(\vec{Q}_i \cdot N_i \right) + S_h \right) \cdot N2_l = 0$$

Ce dernier système peut être mis symbôliquement sous la forme:

$$\begin{cases} A \cdot \vec{Q}_h + B^t \cdot p_h = F \\ B \cdot \vec{Q}_h = G \end{cases}$$ où B^t est l'opérateur transposé de B.

soit, sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{Q}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

Il sera résolu par l'intermédiaire d'un processus itératif basé sur une méthode de gradients conjugués.

II-4: RESOLUTION DES EQUATIONS DISCRETES DE QUANTITE DE MOUVEMENT ET DE CONTINUITE:

La forme faible de l'équation de continuité est écrite en utilisant les fonctions tests $N2_i$ de l'espace d'approximation P_h. Par contre, la quantité:

$$\mathcal{R}_h = div\left(\vec{Q}_i \cdot N_i \right) + S_h$$

est exprimée dans l'espace V_h.

Une meilleure homogénéïté des espaces est ici réalisée en projetant le résidu $\mathcal{R}_h$ dans l'espace d'approximation P_h. Dans cet espace, on aura alors une nouvelle expression du résidu:

$$\mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_h\right) = \sum_{j=1}^{N2} r_j . N2_j$$

dans laquelle les coefficients r_j sont issus de la formulation faible:

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N2} r_j . N2_j . N2_i . d\Omega_h = \sum_{\tau \in \mathcal{C}_{2h}} \int_{\tau} \mathcal{R}_h . N2_i . d\Omega_h \quad \forall i = 1, \ldots, N2$$

On peut alors montrer (cf Fortin [7]) que le problème est équivalent à:

Trouver $\vec{Q}_h \in V_h$ et $p_h \in P_h$ tels que l'équation E.II-3-5-2 est vérifiée et:

$$\| \mathcal{R}_{2h} \|^2_{L^2(\Omega)} \text{ est minimum}$$

La satisfaction de la "contrainte" de continuité est donc ramenée à un problème de minimisation de la fonctionnelle:

$$\| \mathcal{R}_{2h} \|^2_{L^2(\Omega)}$$

Cette minimisation est réalisée par l'intermédiaire d'un algorithme de gradients conjugués. Nous allons, dans un premier temps décrire le principe des méthodes de gradient puis nous détaillerons l'algorithme utilisé pour la résolution du problème.

II-4-1: <u>Les méthodes de gradients:</u>

Considérons la fonctionnelle quadratique:

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{1}{2} . x^t . H . x - b^t . x + a \quad \text{où } x \in \mathbb{R}^N$$

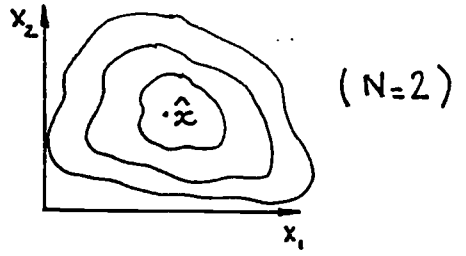
H étant une matrice symétrique N*N.

Le gradient de $f(x)$ est donné par: $g(x) = H.x - b$. Considérons un minimum local fort $\hat{x}$ de f, c'est-à-dire un point tel que:

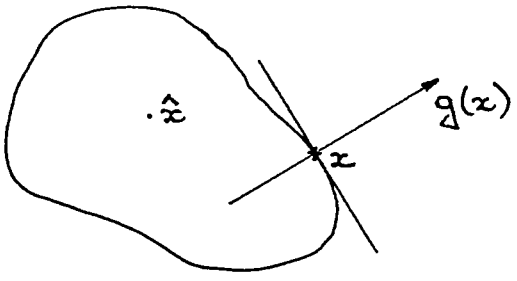
$\exists \varepsilon > 0$ tel que $f(\hat{x}) < f(x)$ quel que soit x dans un voisinage de $\hat{x}$ de rayon ε.

Soit $\hat{k}=f(\hat{x})$. On remarque que les surfaces d'isovaleur $f(x)=k$, avec $k>\hat{k}$, entourent $\hat{x}$ et ont la forme d'ellipsoïdes quand $k \longrightarrow \hat{k}$. Ces surfaces d'isovaleur sont notées L_k: elles sont définies par:

$$L_k = \{ x \in X , f(x)=k \}$$



Si un point x est situé sur L_k, c'est-à-dire si $f(x)=k$, alors le gradient de f en x est perpendiculaire à L_k, comme le montre le schéma suivant:



La recherche du minimum $\hat{x}$, c'est-à-dire la minimisation de la fonctionnelle f, passe par la construction d'une suite de points tels que:

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k . d_k$$

où d_k est appelée "direction de descente" et où τ_k est choisi de façon à ce que $f(x_{k+1})$ soit minimum.

Ceci revient à dire que l'on cherche le point où f est minimum sur la droite passant par x_k et de direction d_k.

a/ Méthode de gradients simples:

On peut montrer (cf Axelsson [8]) le théorème suivant:

Si $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ (fonctionnelle continue à dérivée continue), parmi toutes les directions de descente d au point x, celle où f décroît le plus rapidement est la direction du gradient $d=-g(x)$

Choisissons donc $d_k=-g(x_k)=-g_k$
On a alors

$$f(x_k-\tau.\, g_k) = \frac{1}{2}.\, g_k^T.\, H.\, g_k.\, \tau^2 - g_k^T.\, g_k.\, \tau + a_k$$

où a_k est indépendant de τ.
H étant définie positive, l'équation donnant $f(x_k-\tau.\, g_k)$ est donc une parabole dont le minimum est atteint pour:

$$\frac{df(x_k-\tau.\, g_k)}{d\tau} = g_k^t.\, H.\, g_k.\, \tau - g_k^t.\, g_k = 0$$

Soit pour $\tau = \dfrac{g_k^t.\, g_k}{g_k^t.\, H.\, g_k}$

L'algorithme de gradients simples est donc:

Connaissant x_k, calculer x_{k+1} par:

$$\begin{cases} g_k = H.\, x_k - b \\ \tau_k = \dfrac{g_k^t.\, g_k}{g_k^t.\, H.\, g_k} \\ x_{k+1} = x_k - \tau_k.\, g_k \end{cases}$$

Convergence de l'algorithme:

La convergence de cet algorithme est donnée par la relation (cf Axelsson [8]):

$$\| x_k - \hat{x} \|_H \leq \left(\frac{K(H)-1}{K(H)+1} \right)^k \cdot \| x_0 - \hat{x} \|_H$$

où $\|x\|_H = (x^t . H . x)^{1/2}$ (norme "énergie")

et où $K(H) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$: λ_{max} et λ_{min} étant la plus grande et la plus petite valeur propre de H.

On voit donc que plus K(H) est grand, moins la convergence de l'algorithme est rapide.

Si K(H) est grand, les courbes L_k ont des formes trés éloignées de "sphères" (cercles en dimension 2). Par contre, si K(H)=1 (<=> $H = \alpha . Id$), le processus converge en une itération (le gradient passe par le centre de la "sphère").

Préconditionnement de l'algorithme:

Considérons une matrice C, définie positive, qui peut être factorisée sous la forme $C = E . E^t$ et construisons une nouvelle fonctionnelle, notée $\tilde{f}$ obtenue à partir de f en effectuant la transformation:

$$y = E^t . x$$

On a alors:

$$\tilde{f}(y) = f(E^{-t} . y) = \frac{1}{2} . y^t . \tilde{H} . y - \tilde{b}^t . y + \tilde{a} \text{ où } \begin{cases} \tilde{H} = E^{-1} . H . E^{-t} \\ \tilde{b} = E^{-1} . b \\ \tilde{a} = a \end{cases}$$

On peut alors montrer (cf Axelsson [8]) que, si $\hat{x}$ est le minimum de f et $\hat{y}$ le minimum de $\tilde{f}$, on a:

$$\hat{y} = E^t . \hat{x}$$

Ainsi les minimisations de f et $\tilde{f}$ sont équivalentes. La convergence de l'algorithme de gradient simple appliqué à la minimisation de $\tilde{f}$ est déterminée par:

$$\| y_k - \hat{y} \|_{\tilde{H}} \leq \left(\frac{K(\tilde{H})-1}{K(\tilde{H})+1} \right)^k \cdot \| y_0 - \hat{y} \|_{\tilde{H}} \qquad \text{où} \quad K(\tilde{H}) = \frac{\tilde{\lambda}_{max}}{\tilde{\lambda}_{min}}$$

On montre facilement que $\tilde{H}$ et $C^{-1}.H$ ont les mêmes valeurs propres puisque:

$$C^{-1}.H = E^{-t}.\tilde{H}.E^{t}$$

On voit donc que si on arrive à construire une matrice C telle que $K(\tilde{H})$ soit proche de 1, alors la vitesse de convergence de l'algorithme sera considérablement améliorée. La condition "$K(\tilde{H})$ proche de 1" impose que le spectre de la matrice C soit "proche" de celui de H.

Les méthodes de préconditionnement consistent à choisir une matrice C convenable et à résoudre le problème en $\tilde{f}$.

b/ Méthode de gradients conjugués:

La méthode de gradients conjugués diffère de la méthode de gradients simples par le choix de la direction de descente utilisée.

On ne choisit plus, en effet, la direction $-g_k$ mais on construit la nouvelle direction par:

$$d_{k+1} = -g_k + \beta_k . d_k$$

Le calcul de β_k est fait de façon à minimiser, dans un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, l'erreur $\| x_k - \hat{x} \|_H$ (pour plus de détails, on se refèrera à Axelsson [8]). La valeur optimale de β_k est alors:

$$\beta_k = \frac{g_k^t . H . d_k}{d_k^t . H . d_k}$$

On montre que cette valeur de β_k impose:

$$g_k^t . g_l = 0 \quad \forall l \neq k$$

et $$d_k^t . H . d_l = 0 \quad \forall l \neq k$$

On dit alors que les directions de descente sont "conjuguées". L'algorithme correspondant s'appelle l'algorithme de gradients conjugués. Cet algorithme possède la propriété suivante:

> On obtient $x_k = \hat{x}$ pour $k \leq N$ où N est le nombre de degrés de liberté de la fonctionnelle ($x \in \mathbb{R}^N$).

Cette propriété assure donc la convergence de l'algorithme en un nombre fini d'itérations ($\leq N$). Il faut cependant noter que pour des problèmes à grand nombre de degrés de liberté, elle est d'un intérêt limité.

D'autre part, on montre (cf Axelsson [8]) que la convergence obéit à la relation suivante:

Si p est le plus petit entier tel que, à ε donné:

$$\left\| x_p - \hat{x} \right\|_H \leq \varepsilon . \left\| x_0 - \hat{x} \right\|_H \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^N$$

alors:

$$p \leq \frac{1}{2} . \sqrt{K(H)} . \mathrm{Log}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$$

On voit donc que, là aussi, la convergence est conditionnée par K(H). De même que pour l'algorithme de gradient simple, les méthodes de préconditionnement permettent d'accélérer la convergence.

II-4-2: <u>Application de l'algorithme de gradients conjugués à la résolution des équations de quantité de mouvement et de continuité:</u>

Comme nous l'avons vu, la résolution des équations de quantité de mouvement et de continuité a été ramenée au problème suivant:

Trouver $\vec{Q}_h \in V_h$ et $p_h \in P_h$ tels que:

$$A.\vec{Q}_h = \overrightarrow{-\text{grad}}\ p_h + F$$

et $\left\| \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_h\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ est minimum.

Ce problème est résolu en utilisant un algorithme de gradients conjugués qui comprend les différentes étapes suivantes (cf Buffat [9]):

. <u>une étape d'initialisation</u> qui consiste à choisir un champ de pression initial $p_0 \in P_h$

Connaissant p_0, on calcule $\vec{Q}_0$ par:

$$A.\vec{Q}_0 = \overrightarrow{-\text{grad}}\ p_0 + F$$

On peut donc en déduire :

$$r_0 = \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_0\right)$$

On initialise alors : $W_0 = r_0$, $\vec{Z}_0 = \vec{Q}_0$ et $d\vec{Z}_0 = \vec{Q}_0$.

. Pour $k>0$, connaissant $p_k, \vec{Q}_k, r_k, W_k, \vec{Z}_k$ et $d\vec{Z}_k$ on calcule $p_{k+1}, \vec{Q}_{k+1}, r_{k+1}, W_{k+1}, \vec{Z}_{k+1}$ et $d\vec{Z}_{k+1}$ par:

. <u>étape de descente:</u>

On calcule τ_k tel que $\left\|\mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_k+\tau_k.\vec{Z}_k\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ soit minimum, ce qui nous donne:

$$\tau_k = - \frac{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_k\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_k\right) \right\rangle}{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_k\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_k\right) \right\rangle}$$

(où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$)

Connaissant τ_k, on en déduit:

$$p_{k+1} = p_k + \tau_k . W_k$$

$$\vec{Q}_{k+1} = \vec{Q}_k + \tau_k . \vec{Z}_k$$

Connaissant $\vec{Q}_{k+1}$, on peut calculer:

$$r_{k+1} = \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_{k+1}\right)$$

. Construction des directions de descente pour l'étape suivante:

On construit la direction de descente W_{k+1} de façon à ce que:

$$\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_{k+1}\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_{k}\right) \right\rangle = 0$$

Pour cela, on calcule $d\vec{Z}_{k+1}$ tel que:

$$A.\, d\vec{Z}_{k+1} = \overrightarrow{-\text{grad}}\; r_{k+1}$$

et ρ_{k+1} par:

$$\rho_{k+1} = -\frac{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(d\vec{Z}_{k+1}\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_{k}\right) \right\rangle}{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_{k}\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Z}_{k}\right) \right\rangle}$$

W_{k+1} et $\vec{Z}_{k+1}$, les nouvelles directions de descente, sont alors données par:

$$\begin{cases} W_{k+1} = r_{k+1} + \rho_{k+1}\cdot W_k \\ \vec{Z}_{k+1} = d\vec{Z}_{k+1} + \rho_{k+1}\cdot \vec{Z}_k \end{cases}$$

Quelques remarques:

L'étape d'initialisation de l'algorithme consiste à choisir un champ de pression p_0. En fait, à chaque pas de temps, il est logique de choisir, comme champ initial, celui obtenu au pas de temps précédent.

A chaque itération, on est amené à résoudre:

. deux systèmes linéaires, non symétriques d'ordre N: un pour chaque composante de $d\vec{Z}_k$.

. un système linéaire d'ordre N2 permettant de calculer $\mathcal{R}_{2h}\left(d\vec{Z}_k\right)$.

On remarque que le calcul de la direction de descente $\vec{W}_{k+1}$ n'est pas fait de façon analogue à celle décrite au paragraphe précédent ou à celle proposée par Polak-Ribière et détaillée dans Glowinski [10] qui consiste à calculer des directions de descente conjuguées pour la pression. Ceci nous conduirait à:

$$\rho_{k+1} = -\frac{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_{k+1}\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_k\right) \right\rangle}{\left\langle \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_k\right), \mathcal{R}_{2h}\left(\vec{Q}_k\right) \right\rangle}$$

En fait, ici, les directions de descente conjuguées sont celles relatives à l'erreur r_{k+1} . Ceci permet d'accélérer la convergence de l'algorithme de façon trés sensible, comme le montre Buffat [9].

Une technique de préconditionnement peut être appliquée à l'algorithme précédent. Un préconditionneur efficace est alors l'opérateur (cf Cahouet [11]):

$$C^{-1} = \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n}\right).(Id)^{-1} + \alpha.(\Delta)^{-1}$$

II-5: RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES:

L'écriture des équations discrétisées du problème nous conduit à résoudre plusieurs systèmes matriciels, à chaque pas de temps, qui sont:

. un systeme linéaire non symétrique de dimension N pour chaque variable scalaire.

. deux systèmes linéaires non symétriques de dimension N et un système linéaire symétrique de dimension N2 pour chaque itération de l'algorithme de gradient.

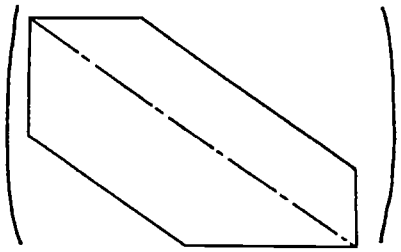
II-5-1: Structure et mode de stockage des matrices:

Comme nous l'avons vu au §II-4, les matrices obtenues sont des matrices creuses puisque un élément A(i,j) de la matrice A est non nul si i et j sont deux noeuds voisins.

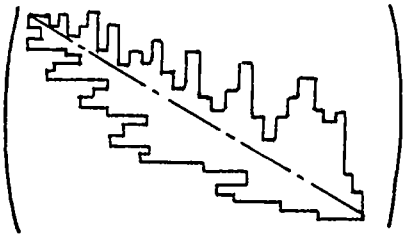
Cette propriété doit être mise à profit afin de minimiser l'espace utilisé en mémoire de l'ordinateur. Pour cela, deux modes de stockage sont utilisables:

. le stockage "bande": on ne stocke que les éléments

compris dans une bande de part et d'autre de la diagonale, les éléments non nuls étant tous situés dans cette bande :



. le stockage "profil": pour la partie située au-dessus de la diagonale, chaque colonne est stockée jusqu'au dernier élément non nul. Pour la partie située sous la diagonale, on stocke chaque ligne à partir du premier élément non nul.



Ce dernier mode de stockage nous oblige à connaître l'adresse du premier élément non nul de chaque ligne et de chaque colonne. En éléments finis, cette adresse nous est donnée par les numéros des voisins du noeud considéré.

D'autre part, même si la matrice est non-symétrique, son profil est symétrique: en effet, si deux noeuds ne sont pas voisins, alors les éléments A(i,j) et A(j,i) de la matrice A sont nuls.

Il est évident que, dans les deux modes de stockage présentés ici, le nombre d'éléments stockés dépend de la numérotation du maillage. On dispose de plusieurs algorithmes de numérotation qui permettent d'optimiser la taille de la matrice. Pour le stockage "bande", l'algorithme "Reverse Cuthill-Mc Kee" est utilisé. Dans le cas du stockage "profil", l'algorithme "Reverse King" est préféré.

En éléments finis triangulaires, on montre que le mode

de stockage "profil" est plus avantageux que le stockage "bande": dans certains cas, une réduction de 50% de la taille nécessaire peut être obtenue (cf Buffat [11]) . Il a donc été choisi ici.

II-5-2: Résolution des systèmes linéaires:

La résolution des systèmes linéaires est faite en utilisant une factorisation de la matrice A en:

. une matrice triangulaire inférieure L
. une matrice diagonale D
. une matrice triangulaire supérieure U

telles que : $A = L.D.U$

Dans le cas où la matrice A est symétrique, on a alors $U=L^T$.

La résolution du problème linéaire $A.x=b$ est donc ramenée à la résolution de 2 problèmes triangulaires et d'un problème diagonal:

. on cherche d'abord y tel que $L.y=b$
. puis z tel que $D.z=y$
. et enfin x tel que $U.x=z$

Cette méthode de résolution est trés intéressante si on a à résoudre plusieurs fois le même système, pour des seconds membres différents: l'étape la plus coûteuse est la décomposition de la matrice qui est faite une seule fois. Cette propriété est en particulier trés intéressante pour l'algorithme en pression décrit au paragraphe précédent.

Les matrices triangulaires L et U, obtenues aprés décomposition, ne sont plus des matrices creuses: de nombreux éléments nuls ont été remplacés par des éléments non nuls. Cependant, le profil de la matrice est conservé: les éléments non nuls ne sont rajoutés qu'à "l'intérieur" du profil. Ainsi, la taille des matrices L et U est déterminée par la numérotation du maillage utilisé.

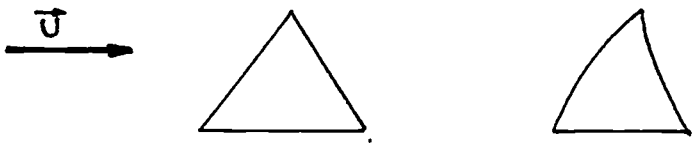
Dans le cas de problèmes à nombre de degrés de liberté élevé, des techniques itératives de résolution sont préférées (cf Buffat [12]).

II-6: SCHEMA DE "BALANCING DISSIPATION" POUR LES ECOULEMENTS FORTEMENT CONVECTIFS:

L'application de la méthode de Galerkin au calcul d'écoulements où les phénomènes convectifs sont dominants, conduit à l'apparition d'oscillations de la solution sans signification physique. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que les méthodes classiques telles que les schémas centrés en différence finies ou la méthode de Galerkin en éléments finis, consistent à traiter de façon symétrique un phénomène physique (convection) à caractère non-symétrique (cf Hughes [13]).

Pour résoudre ce problème, de nombreuses méthodes ont été proposées tant en différences finies qu'en éléments finis. La méthode la plus simple consiste à raffiner le maillage dans les zones où apparaissent les oscillations. Cependant, cette technique s'accompagne d'un coût de calcul rapidement prohibitif. D'autre-part, le raffinement ne peut être fait qu'a posteriori: les zones où apparaissent les oscillations peuvent difficilement être prédéterminées.

Une méthode plus sophistiquée consiste à traiter le terme convectif de façon "dissymétrique" en privilégiant l'information venant de l'amont. Cette technique revient à utiliser, dans la formulation faible des équations, des fonctions tests différentes des fonctions de base N_i définies au §II-3-3. Pour un problème unidimensionnel, on construit ainsi des fonctions dissymétriques selon le schéma suivant:



fonction N_i fonction transformée

Pour une équation stationnaire de convection-diffusion, l'emploi de fonctions de base linéaires et de fonctions tests paraboliques permet d'atteindre la solution exacte à partir d'éléments finis de taille constante. Cette méthode, dite d

Petrov-Galerkin, revient à adjoindre un opérateur de diffusion artificielle dont le coefficient décroît lorsque la taille des éléments diminue (cf Hughes [13]).

Malheureusement, l'extension de la méthode au cas bidimensionnel s'accompagne d'une dégradation de la solution (cf Heinrich [14]) dûe en particulier à la présence d'une diffusion numérique transversale à l'écoulement.

Pour éviter ce phénomène, on reprend ici une technique de "balancing dissipation", dévéloppée par Hughes [13] et Kelly [14]. Elle consiste à ajouter, au terme convectif, un terme de diffusion artificielle n'agissant que dans le sens de l'écoulement. Dans un repère lié à la vitesse locale, ce terme s'écrit donc:

$$\mathrm{div}\left(\overset{\Rightarrow}{K}.\overrightarrow{\mathrm{grad}(\ )} \right) \qquad \text{où} \qquad \overset{\Rightarrow}{K} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le repère fixe $(\vec{x}, \vec{y})$ le tenseur $\overset{\Rightarrow}{K}$ devient:

$$\overset{\Rightarrow}{K} = (K_{ij}) = K. \begin{pmatrix} (\cos\theta)^2 & \cos\theta.\sin\theta \\ \cos\theta.\sin\theta & (\sin\theta)^2 \end{pmatrix}$$

où θ est l'angle entre la vitesse de convection et l'axe $\vec{x}$. Ainsi, les termes K_{ij} du tenseur peuvent être mis sous la forme:

$$K_{ij} = \frac{\alpha.U_i.U_j}{\|\vec{U}\|^2}.\frac{1}{2}.\|\vec{U}\|.h$$

Le coefficient α est lié au Reynolds local R_h (cf Hughes [13]) défini, pour chaque élément du maillage, par:

$$R_h = \frac{\|\vec{U}\|.h}{\nu} \quad \text{où h est une dimension caractéristique de l'élément considéré.}$$

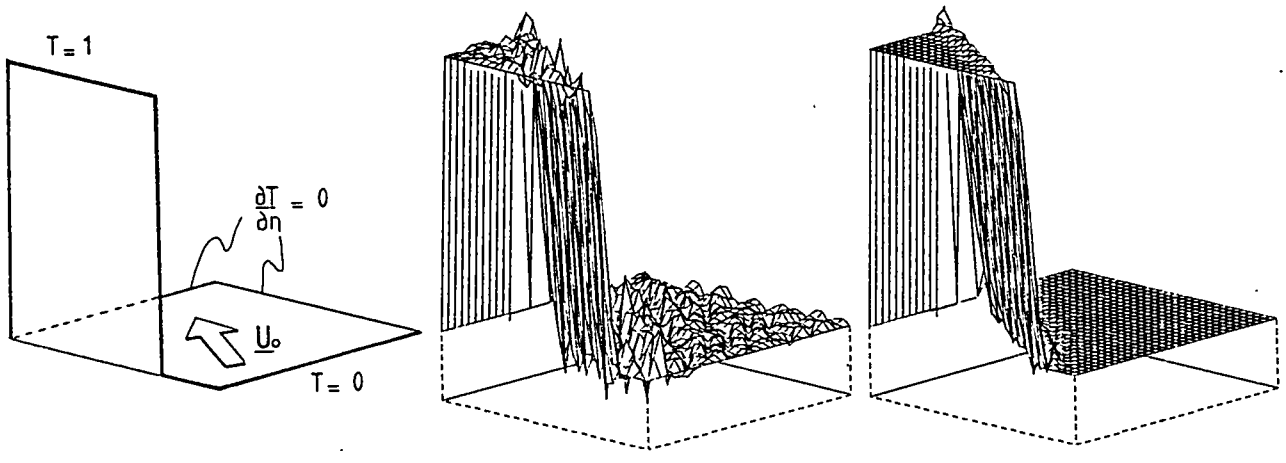
Dans le cas monodimensionnel linéaire, le coefficient α est donné par:

$$\alpha = \coth\left(\frac{R_h}{2}\right) - \frac{2}{R_h}$$

En situation bidimensionnelle, aucune expression exacte de α ne peut être obtenue. On utilisera ici une approximation de la relation précédente définie par:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R_h}{8} & \text{si } R_h \leqslant 4 \\ \alpha = 1 - \dfrac{2}{R_h} & \text{si } R_h > 4 \end{cases}$$

Les figures présentées ci-dessous montrent l'amélioration obtenue avec ce schéma dans le cas de la convection d'un front de température sur un domaine carré (cf Brison [14] et Jeandel [15]). Les conditions aux limites sont données sur la figure (1-a). Les résultats obtenus par la méthode de Galerkin classique sont donnés sur la figure (1-b) pour un nombre de Peclet de 10^{-6}. L'introduction du schéma de "balancing dissipation" permet de diminuer considérablement les oscillations numériques, comme le montre la figure (1-c) sans, pour autant, introduire de diffusion transversale sensible.



1-a 1-b 1-c

II-7: CALCUL DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LES PAROIS SOLIDES:

Comme nous l'avons vu, les conditions aux limites à imposer le long des parois solides se résument à:

$$\begin{cases} \dfrac{\vec{Q}.\vec{t}\,\Big|_\delta}{\rho.u_f} = Re.\delta.u_f & \text{si } Re.\delta.u_f < 11.6 \\ \dfrac{\vec{Q}.\vec{t}\,\Big|_\delta}{\rho.u_f} = \dfrac{1}{K}.Log(Re.\delta.u_f) + C & \text{si } Re.\delta.u_f > 11.6 \end{cases}$$

$$\vec{Q}.\vec{n}\,\Big|_\delta = 0$$

$$k\Big|_\delta = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\Big|_\delta = \frac{u_f^3}{K.\delta}$$

$$\begin{cases} \dfrac{T_P - \tilde{T}\,\Big|_\delta}{T_f} = \dfrac{1}{K'}.Log(Re.\delta.u_f) + C' & \text{si } Re.\delta.u_f > 15.96 \\ \dfrac{T_P - \tilde{T}\,\Big|_\delta}{T_f} = Re.Pr.\delta.u_f & \text{si } Re.\delta.u_f \leq 15.96 \end{cases}$$

avec $$u_f^2 = \left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt}\right).\frac{\partial \vec{u}.\vec{t}}{\partial n}\,\Big|_\delta$$

$$T_f u_f = \left(\frac{1}{Re.Pr}+\frac{1}{Rt.Prt}\right).\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n}\,\Big|_\delta$$

Dans le cas général d'une paroi dont la tangente $\vec{t}$ et la normale $\vec{n}$ sont inclinées par rapport aux axes du repère, ces conditions aux limites conduisent à un système couplé d'équations sur les deux composantes de la quantité de mouvement. On

est donc amené à développer une méthode de calcul des conditions à imposer sur chaque composante de $\vec{Q}$.

La technique choisie ici consiste, au temps $(n+1)\Delta t$, à calculer u_f à partir des valeurs de la quantité de mouvement au pas de temps précédent par la relation:

$$\left(u_f^{n+1}\right)^2 = \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n}\right) \cdot \left. \frac{\partial \frac{\vec{Q}^n}{\rho^n} \cdot \vec{t}}{\partial n} \right|_\delta$$

Cette vitesse de frottement est obtenue sur chaque arête frontière du maillage où la normale et la tangente peuvent être définies.

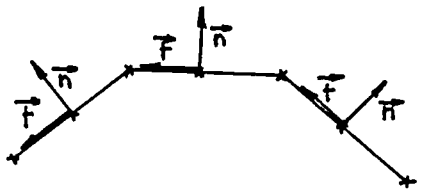
A partir de cette valeur de u_f, des conditions de Dirichlet sont rétablies pour chaque composante de $\vec{Q}^n$, par résolution du système, écrit sous forme faible:

$$(S.II\text{-}7\text{-}1) \qquad \begin{cases} \int_\Gamma \left. \vec{Q}^{n+1} \cdot \vec{n} \right|_\delta \cdot N_i \cdot d\Gamma = 0 \\ \int_\Gamma \left. \vec{Q}^{n+1} \cdot \vec{t} \right|_\delta \cdot N_i \cdot d\Gamma = \int_\Gamma F\left(u_f^{n+1}\right) \cdot N_i \cdot d\Gamma \end{cases}$$

où $F\left(u_f^{n+1}\right) = \dfrac{\bar{\rho}^{n+1} \cdot u_f^{n+1}}{K} \cdot Log\left(Re \cdot \delta \cdot u_f^{n+1}\right) + C$ si $Re \cdot \delta \cdot u_f^{n+1} > 11.6$

et $F\left(u_f^{n+1}\right) = \bar{\rho}^{n+1} \cdot Re \cdot \delta \cdot \left(u_f^{n+1}\right)^2$ si $Re \cdot \delta \cdot u_f^{n+1} \leqslant 11.6$

En fait, pour des problèmes de précision de calcul, la condition de débit nul est imposée sous forme stricte aux noeuds du maillage fin qui ne font pas partie du maillage grossier. Ces noeuds étant "entourés" par deux arêtes alignées, la normale $\vec{n}$ et la tangente $\vec{t}$ peuvent être définies sans problème, comme le montre le schéma suivant:



Pour des raisons de stabilité numérique, une technique de relaxation est introduite sur u_f . A chaque pas de temps $(n+1)\Delta t$, un processus itératif est utilisé. A l'itération i+1, il est constitué par les différentes séquences décrites ci-dessous:

1/ Calcul de u_f par $u_f^2 = \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt^n}\right) \cdot \left. \frac{\partial \frac{\vec{Q}_i^{n+1}}{\rho^{n+1}} \cdot \vec{t}}{\partial n} \right|_\delta$.

2/ Calcul de $\left(u_f^{n+1}\right)_{i+1}$ par $\left(u_f^{n+1}\right)_{i+1} = (1-\alpha) \cdot \left(u_f^{n+1}\right)_i + \alpha . u_f$

3/ Calcul des conditions aux limites sur Γ par résolution du système (S.II-7-1)

4/ Calcul de $\vec{Q}_{i+1}^{n+1}$ par résolution de l'équation de quantité de mouvement

5/ Retour à la séquence 1 tant que:

$$\left\| \left(u_f^{n+1}\right)_{i+1} - u_f \right\| \geqslant \varepsilon$$

Sinon faire : $u_f^{n+1} = \left(u_f^{n+1}\right)_{i+1}$

L'initialisation de ce processus consiste à prendre:

- $\vec{Q}_o^{n+1} = \vec{Q}^n$
- $\left(u_f^{n+1}\right)_o = u_f^n$

La valeur du coefficient α est déterminée empiriquement en

fonction de l'écart entre u_f^n et la valeur de u_f calculée pour i=0.
La connaissance de u_f^{n+1} nous permet de calculer les conditions aux limites à imposer sur k et ε par les relations:

$$k^{n+1}\Big|_\delta = \frac{\left(u_f^{n+1}\right)^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{et} \quad \varepsilon^{n+1}\Big|_\delta = \frac{\left(u_f^{n+1}\right)^3}{K.\delta}$$

Pour l'équation relative à la température, on peut également rétablir une condition à la limite pariétale de type Dirichlet non-homogène, mais les essais effectués montrent l'existence de trés fortes instabilités numériques. On choisit alors d'introduire une condition de Neumann non-homogène.

Dans la formulation faible du problème thermique, l'intégration par partie des termes de diffusion fait apparaître le terme de bord:

$$\int_\Gamma \left(\frac{1}{Re.Pr} + \frac{1}{Rt^n.Prt}\right).\frac{\partial \tilde{T}^{n+1}}{\partial n}.N_i.d\Gamma$$

La définition de T_f nous conduit alors à calculer ce terme sous la forme:

$$\int_\Gamma u_f^n.T_f^{n+1}.N_i.d\Gamma$$

où T_f^{n+1} est donné par:

$$\frac{T_p - \tilde{T}^n\Big|_\delta}{T_f^{n+1}} = \frac{1}{K'}.Log\left(Re.\delta.u_f^n\right) + C' \qquad \text{si } Re.\delta.u_f^n \geqslant 15.96$$

$$\frac{T_p - \tilde{T}^n\Big|_\delta}{T_f^{n+1}} = Re.Pr.\delta.u_f^n \qquad \text{si } Re.\delta.u_f^n \leqslant 15.96$$

BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIEME PARTIE

[1] : I. BABUSKA, O.C. ZIENKIEWICZ, J. GAGO, E.R. DE A. OLIVEIRA: "Accuracy estimates and adaptative refinements in Finite Element computations". Ed. John Wiley and Sons (1986).

[2] : G. RUSAOUEN: "Elements finis déformables applicables aux problèmes d'aérodynamique interne". Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Lyon (1987).

[3] : P.A. RAVIART: "Les methodes d'Eléments Finis en mécanique des fluides". DER EDF. Ed. Eyrolles (1981).

[4] : R. GLOWINSKI: "Numerical methods for non-linear variational problem". Ed. Springer Verlag (1981).

[5] : V. GIRAULT, P.A. RAVIART: "Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations". Ed. Springer-Verlag (1986).

[6] : R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU: "Approximation par éléments finis mixtes du problème de Stokes en formulation vitesse-pression". CRAS Paris, T.268A (1978).

[7] : M. FORTIN, R. GLOWINSKI: "Méthodes de Lagrangien augmenté". Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Ed. Dunod (1982).

[8] : O. AXELSSON, V.A. BARKER: "Finite Element Solution of boundary value problems: Theory and Computation". Computer Science and Applied Mathematics. Ed. Academic Press (1984).

[9] : M. BUFFAT: "Finite Element Analysis on microcomputer of laminar flow". 2nd International conference on

microcomputer in engineering development and application of software. Swansea UK (1986).

[10]: J. CAHOUET, J.P. CHABARD: "Some fast 3-D finite element solvers for generalized Stokes problem". Rapport EDF-DER HE/41/87-03 (1987).

[11]: M. BUFFAT: "Formulation moindres carrés adaptée au traitement des effets convectifs dans les équations de Navier-Stokes". Thèse de Docteur-Ingénieur UCB-Lyon I (1981).

[12]: M. BUFFAT: "Méthode de gradients conjugués pour la prédiction des écoulements à grand nombre de Reynolds". 6ieme Congrés Français de Mécanique. Lyon (1983).

[13]: T.J.R. HUGHES, A. BROOKS: "A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion". Finite Element Methods for Convection dominated flows. ASME-AMD Vol 34 (1979).

[14]: I. CHRISTIE, D. GRIFFITHS, A. MITCHELL , O.C. ZIENKIEWICZ: "Finite Element methods for second order differential equations with significant first derivates". Int. J. Num. Methods Eng. -Vol 10 (1976).

[15]: J.C. HEINRICH, P. HUYAKORN, O.C. ZIENKIEWICZ, A. MITCHELL: "An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation". Int. J. Num. Methods Eng. -Vol 11 (1977).

[16]: D.W. KELLY, S. NAKAZAWA, O.C. ZIENKIEWICZ: "A note on upwind and anisotropic balancing dissipation in finite element approximations to convective diffusion problems". Int. J. Num. Methods Eng. -Vol 15 (1980).

[17]: J.F. BRISON , M. BUFFAT, D. JEANDEL, E. SERRES: "Finite Element simulation of turbulent flows, using a two-equation model". Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows- Swansea UK - Pineridge Press (1985).

[18]: D. JEANDEL, M. BUFFAT, P. CARRIERE: "Numerical Methods for 2D and 3D Heat Transfer calculations". Introduction to numerical solution of industrial flows. VKI Lecture Series 86-07 (1986).

Troisième Partie:

RESULTATS

Dans un premier temps, le code de calcul est validé sur une configuration isotherme. Pour cela, des calculs sont effectués dans le cas de l'écoulement à l'aval d'un élargissement brusque en situation axisymétrique. Des comparaisons sont effectuées avec les résultats expérimentaux de Szczepura [1]. Des comparaisons sont également possibles avec d'autres résultats numériques issus de méthodes de calcul différentes [2].

Le code de calcul est ensuite validé dans le cas d'écoulements chauffés. La première configuration étudiée concerne le cas d'un jet axisymétrique correspondant aux résultats expérimentaux de Bahraoui [3]. On s'affranchit ainsi des problèmes de conditions aux limites le long de parois solides. Des calculs sont effectués d'une part en présence de forts écarts de température et, d'autre part, en présence d'un chauffage faible pour lequel l'hypothèse de contaminant passif est applicable. La deuxième configuration étudiée correspond aux résultats expérimentaux de Ng [4]. Elle concerne le cas d'une couche limite : ceci nous permet de tester les lois d'équilibre et les procédures utilisées pour le calcul des conditions aux limites le long des parois solides. Des calculs sont réalisés à la fois dans le cas isotherme et dans le cas où la plaque plane est chauffée à une température de 1250K.

Les comparaisons effectuées entre ces différents calculs

et les résultats expérimentaux correspondants, permettent de voir si les hypothèses de modélisation habituellement effectuées dans le cas isotherme rendent compte des modifications entraînées par la présence de forts écarts de température sur les caractéristiques principales de l'écoulement. Ainsi, des renseignements concernant les améliorations à apporter aux hypothèses de modélisation peuvent être obtenus, pour mieux prendre en compte l'influence de fortes variations de masse volumique.

Enfin , l'application du code de calcul à des configurations industrielles est présentée: des calculs sont effectués sur des géomètries de têtes de chambre de moteurs d'avion. La forme trés compliquée de ces domaines d'étude permet de justifier l'utilisation de la méthode d'éléments finis. La répartition du débit dans les différentes sections de sortie est prédite grâce à une méthode particulière d'estimation des conditions aux limites en pression à imposer le long de ces sections. Des comparaisons tant qualitatives que quantitatives sont effectuées avec les résultats expérimentaux disponibles. Elles concernent à la fois la répartition des débits, l'évolution des pressions statiques et l'allure du champ cinématique. Enfin les possibilités d'optimisation de géomètries offertes par la méthode sont illustrées par des calculs effectués sur différentes variantes d'une même géomètrie initiale.

III-1: ECOULEMENT A L'AVAL D'UN ELARGISSEMENT BRUSQUE AXISYMETRIQUE:

Les calculs présentés ici ont été effectués dans le cadre du groupe de travail AIRH sur la modélisation fine des écoulements [2]. La configuration étudiée correspond à l'expérience de Szczepura [1]. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux sont effectuées pour les grandeurs macroscopiques (profils radiaux et axiaux de vitesse) et pour les quantités turbulentes (énergie cinétique de turbulence, longueur de mélange).

III-1-1: Description de la configuration étudiée:

La description géométrique du problème est donnée par la figure 2. Les expériences ont été réalisées pour un rapport de rayon de 1.945. Le fluide utilisé est de l'eau et le nombre de Reynolds, basé sur le diamètre D et la vitesse sur l'axe juste à l'aval de l'élargissement, vaut:

$$Re_d = 8.95.10^5$$

Les mesures sont effectuées par anémométrie Laser-Doppler: elles concernent les différentes composantes de la vitesse moyenne, les composantes du tenseur de Reynolds et les corrélations triples de vitesse. Le domaine d'étude s'étend axialement de x=0.05D à x=3D et radialement de r=-0.05D à r=0.43D. Les mesures sont données tous les 0.1D suivant l'axe $\vec{x}$ et tous les 0.0125D suivant le rayon. Un maillage de mesure plus fin est utilisé au voisinage de l'élargissement brusque.

Les résultats expérimentaux permettent d'estimer une longueur de mélange locale. Pour cela, une viscosité de turbulence μ_t est déduite de la définition:

$$- \rho . \overline{u' v'} = \mu_t . \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

et la longueur de mélange L est calculée par la relation:

$$L = \frac{\mu_t}{k^{1/2}}$$

Les valeurs de L sont extrapolées jusqu'à la paroi en utilisant la relation linéaire, déduite des lois habituelles d'équilibre en paroi:

$$L = C_\mu^{1/4} . K . y$$

Les calculs sont effectués dans un domaine allant de la position x=-0.25D (section S1 de la figure 2) jusqu'à la position x=6D. Les conditions aux limites imposées dans la section d'entrée sont déduites des hypothèses d'écoulement établi en conduite. Le profil d'entrée pour ε est déduit des profils de k

et de μ_t par la loi:

$$\varepsilon = C_\mu . \rho . \frac{k^2}{\mu_t}$$

Les différentes conditions aux limites imposées sur les autres frontières du domaine sont décrites par la figure 3.

Les calculs sont effectués sur un maillage comportant 462 noeuds en pression et 1767 noeuds en vitesse: une visualisation du maillage grossier (maillage en pression) est donnée par la figure 3. Tous les résultats sont rendus sans dimension grâce à la vitesse maximum à l'entrée et au diamètre du tuyau à l'aval de l'élargissement.

III-1-2: Présentation des résultats:

Une première caractéristique importante de l'écoulement à l'aval d'un élargissement brusque est la longueur de la zone de recirculation. Expérimentalement, une longueur correspondant à 2.25D est obtenue. Les résultats numériques, quant à eux, nous donnent une longueur de 2D. L'accord entre ces deux résultats est donc assez satisfaisant et l'ensemble des résultats numériques présentés dans le cadre de l'AIRH [2] conduit également à des valeurs proches des résultats expérimentaux.

Le tracé des lignes de courant dans la zone de recirculation, donné par la figure 4, ainsi que le profil de vitesse axiale à x=0.05D (fig. 6) montrent que la deuxième zone de recirculation, mise en évidence expérimentalement au voisinage du coin supérieur, n'est pas obtenue numériquement. Ceci est tout à fait conforme à l'ensemble des résultats issus du modèle k-ε (cf[2]). La mise en évidence d'un tel phénomène ne serait possible qu'en utilisant un maillage de calcul extrèmement fin.

Les tracés de profils axiaux et radiaux de vitesse axiale, donnés par les figures 6 à 8, montrent que la décroissance de la vitesse sur l'axe, dans la zone de recirculation, est surestimée par la simulation numérique. Par contre, à l'aval de cette zone, la décroissance obtenue expérimentalement est plus forte que celle mise en évidence par le calcul. Le profil radial à x=1.5D (fig. 7) montre que, mis à part au voisinage de

l'axe de symétrie, le comportement de la vitesse est bien prédit.

La figure 9 fait apparaître une sous-estimation du niveau d'energie cinétique de turbulence dans la zone de recirculation, juste à l'aval de l'élargissement (x=0.05D). La figure 10 donne le profil radial d'énergie cinétique à l'abscisse x=1.5D. La figure 11, quant à elle, fait apparaître l'évolution longitudinale de l'énergie cinétique à l'altitude r=0.257D (correspondant à la position de l'élargissement). Le maximum se situe approximativement à x=1.5D. La position précise de ce pic peut être visualisée sur la figure 5 qui montre les lignes d'isovaleurs de k dans la zone comprise entre x=-0.25D et x=3D.

Ces résultats sont, là aussi, tout à fait conformes aux autres résultats numériques obtenus dans cette configuration par d'autres auteurs [2].

Les tracés des profils de longueur de mélange, donnés par les figures 12 à 14, montrent que la forme générale est assez bien déterminée. On constate pourtant que les valeurs, tant sur l'axe de symétrie que dans la zone de recirculation, sont surrestimées. Il faut cependant constater que les données expérimentales font apparaître une zone d'incertitude large dans laquelle sont généralement situés les résultats numériques.

En conclusion, l'ensemble de ces comparaisons montre que le code de calcul permet d'obtenir des résultats tout à fait conformes à ceux obtenus à l'aide de méthodes numériques différentes. Les écarts constatés par rapport aux données expérimentales sont donc sans doute plus liés au modèle de turbulence qu'à la méthode numérique utilisée. Il faut cependant remarquer que seule l'utilisation d'une méthode numérique beaucoup plus précise (méthode spectrale par exemple) permettrait de distinguer de façon nette l'influence de la méthode numérique et l'influence du modèle de turbulence.

Des prédictions généralement moins bonnes sont obtenues dans le cas d'un élargissement brusque plan. Ainsi, les expériences de Kim [5], où le rapport entre la hauteur du canal amont et la hauteur de la marche h vaut 2, conduisent à une longueur de recirculation d'environ 7h, pour un nombre de Reynolds valant 44580. Les simulations numériques effectuées tant en différences finies (cf Mansour [6]) qu'en éléments finis

(cf Brison [7], Jeandel [8]) donnent des résultats compris entre 5h et 5.5h. Des conclusions analogues sont mises en évidence par Nallasamy [9] qui compare les résultats obtenus avec différents codes de calcul: de meilleurs résultats sont obtenus dans le cas axisymétrique que dans le cas plan. Par ailleurs, de façon générale, Chieng [10] remarque que plus le rapport e/d entre la hauteur de l'élargissement e et la hauteur du canal amont d est grand, moins les résultats sont sensibles au modèle de turbulence utilisé. Les gradients de pression à l'aval de l'élargissement devenant élevés gouvernent, de façon déterminante, l'évolution de l'écoulement. Conformément à ce point de vue, on a ainsi de meilleurs résultats dans le cas axisymétrique présenté (e/d=1) que dans le cas de l'expérience de Kim (e/d=0.5). Dans le cas de l'élargissement en tuyau, l'existence d'écarts importants sur k entre résultats numériques et expérimentaux et leur faible répercussion sur la longueur de la zone de recirculation semble confirmer cette remarque.

Ces écarts peuvent s'expliquer par le fait que le modèle k-ε ne semble pas trés bien adapté à la prédiction d'écoulements où de fortes courbures des lignes de courant existent. Des modifications du modèle standard ont été proposées, permettant de mieux prendre en compte l'influence de ces courbures (cf Bradshaw [11]). On note enfin que l'utilisation de lois logarithmiques dans la zone de recirculation et au voisinage du point de recollement n'est pas trés justifiée. Des lois de parois modifiées ont été proposées par Chieng [10] ou Amano [12]. Quant à Iacovides [13] et Launder [14], ils proposent une méthode permettant d'éviter l'utilisation de lois d'équilibre local en effectuant le calcul jusqu'à la paroi au prix d'un nombre de degrés de liberté accru.

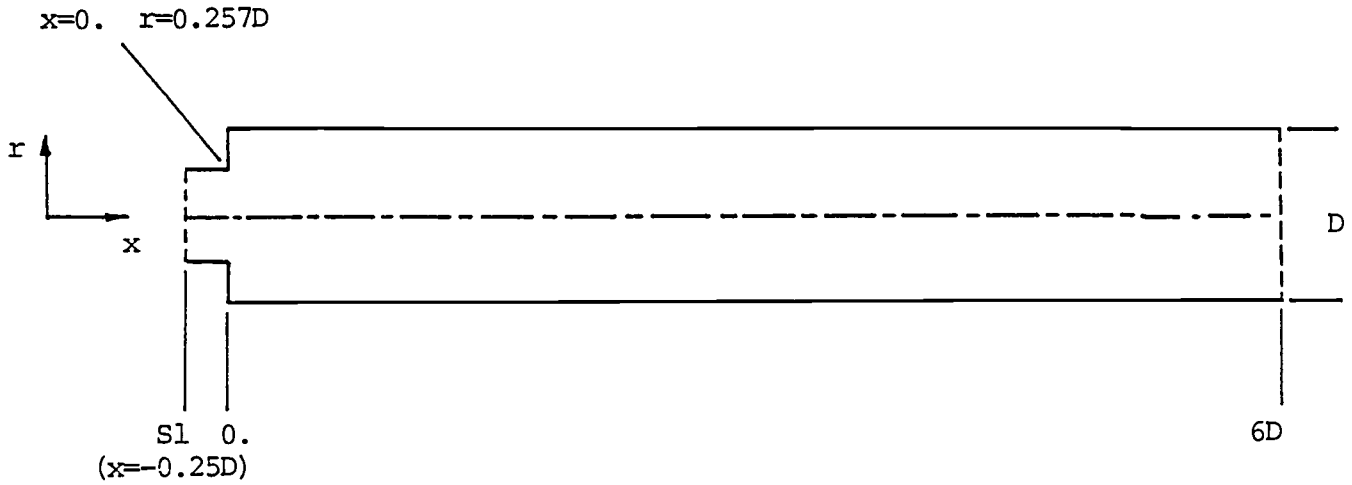


Fig 2 : ELARGISSEMENT BRUSQUE - CONFIGURATION ETUDIEE

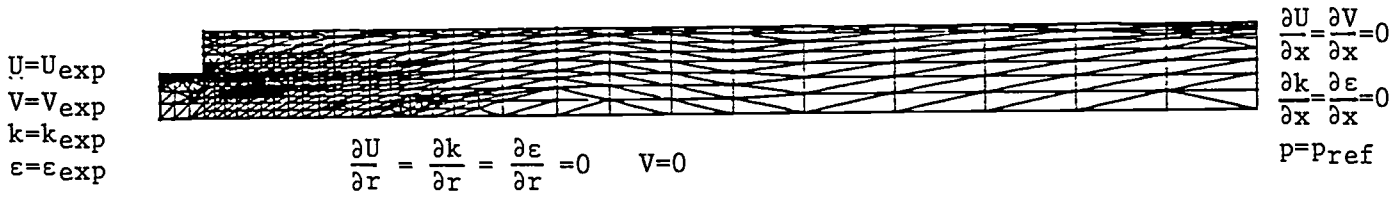


Fig 3 : ELARGISSEMENT BRUSQUE - MAILLAGE EN PRESSION

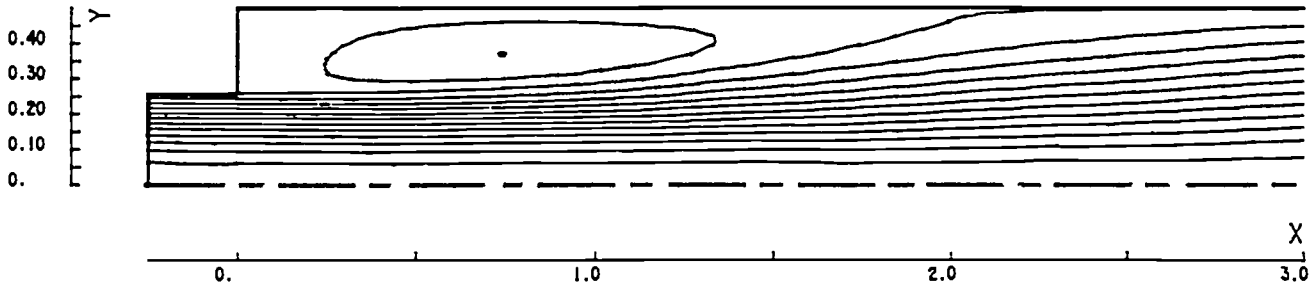


Fig 4 : LIGNES DE COURANT

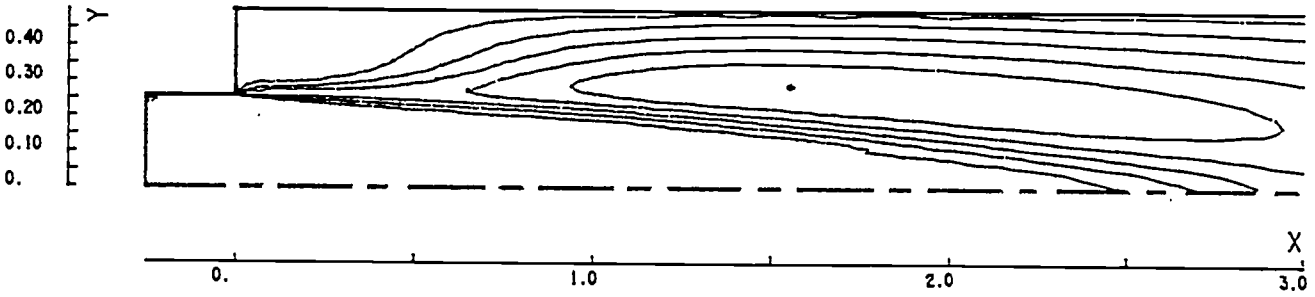


Fig 5 : LIGNES ISO-ENERGIE CINETIQUE DE TURBULENCE

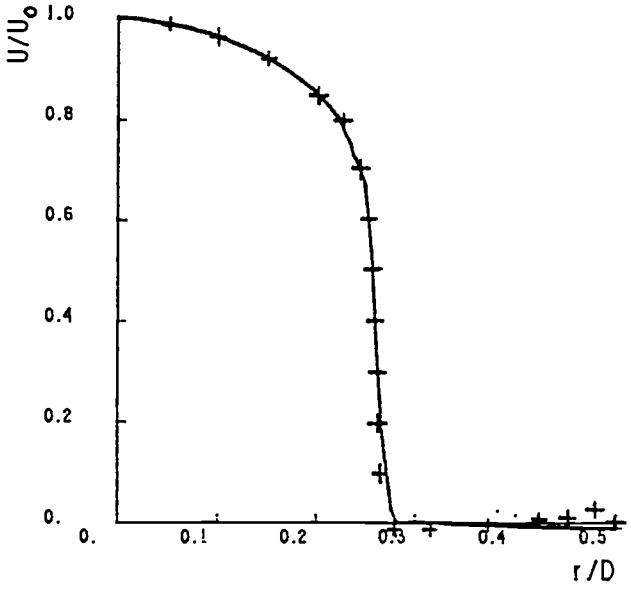


Fig 6 : PROFIL DE VITESSE
A X/D=0.05
(+ : exp. ,— : calcul)

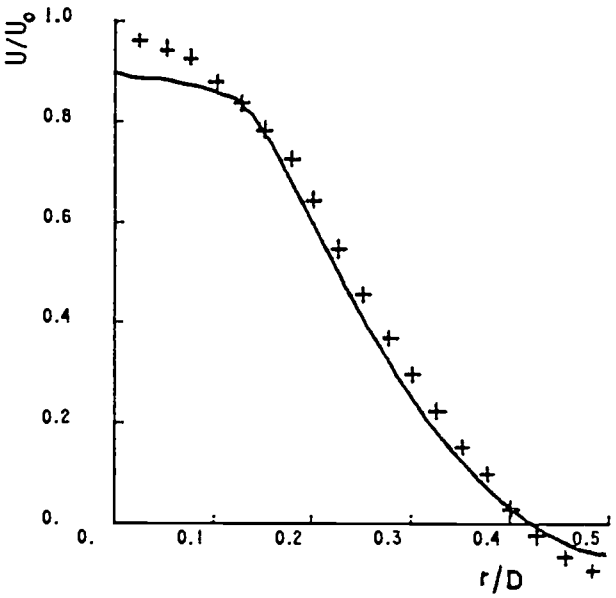


Fig 7 : PROFIL DE VITESSE
A X/D=1.5
(+ : exp. ,— : calcul)

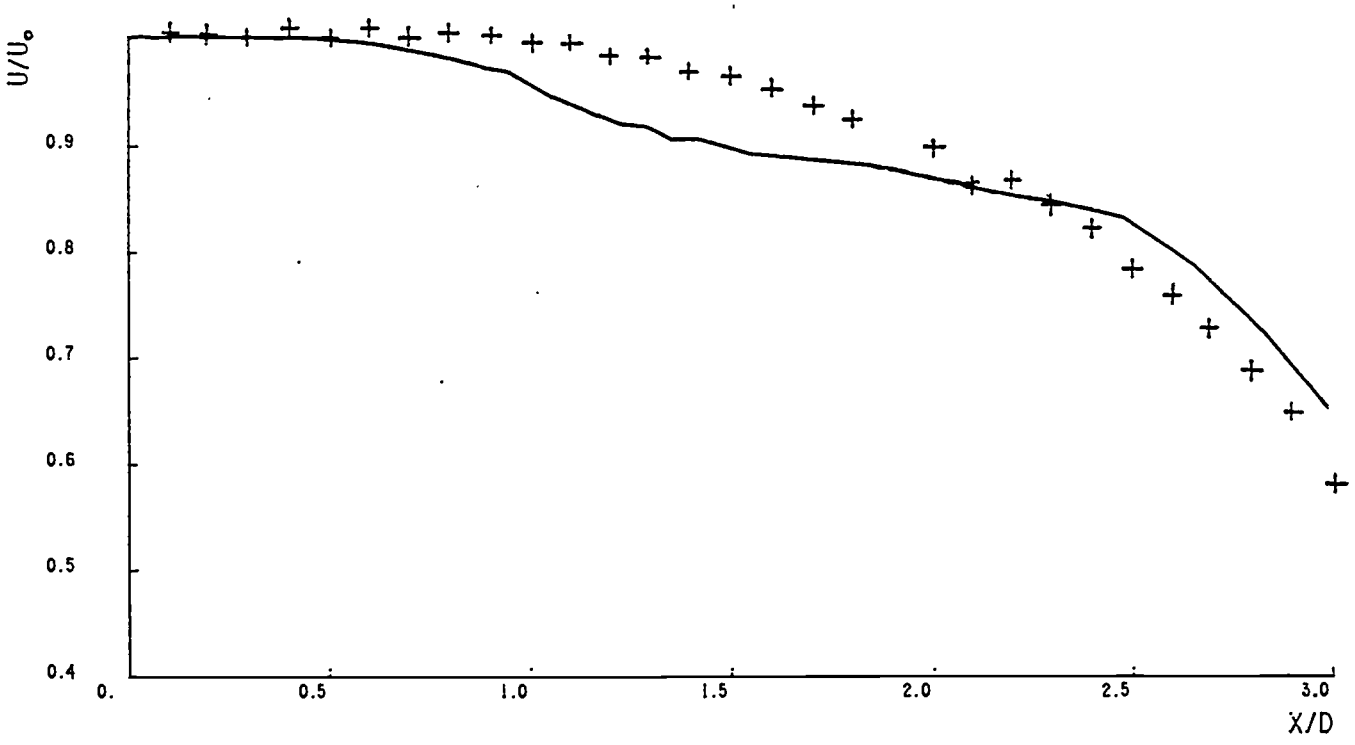


Fig 8 : PROFIL DE VITESSE SUR L'AXE
(+ : exp. ,— : calcul)

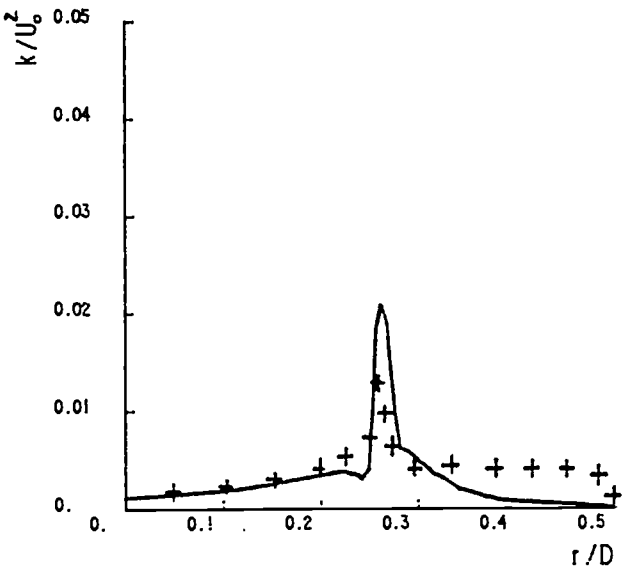


Fig 9 : PROFIL DE k A X/D=0.05
(+ : exp. , —— : calcul)

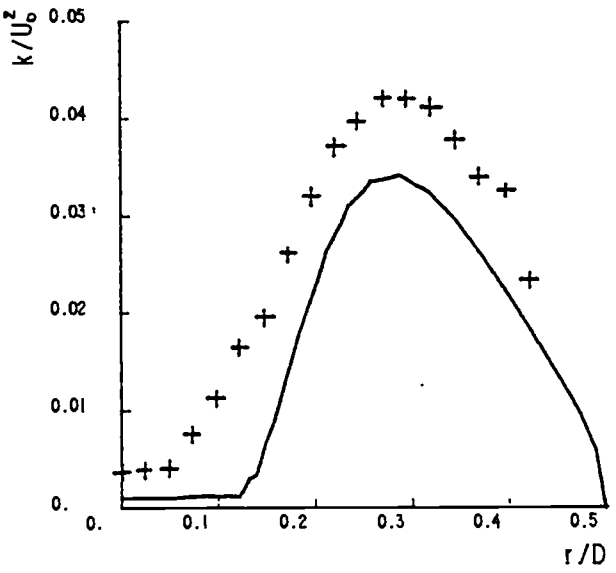


Fig 10 : PROFIL DE k A X/D=1.5
(+ : exp. , —— : calcul)

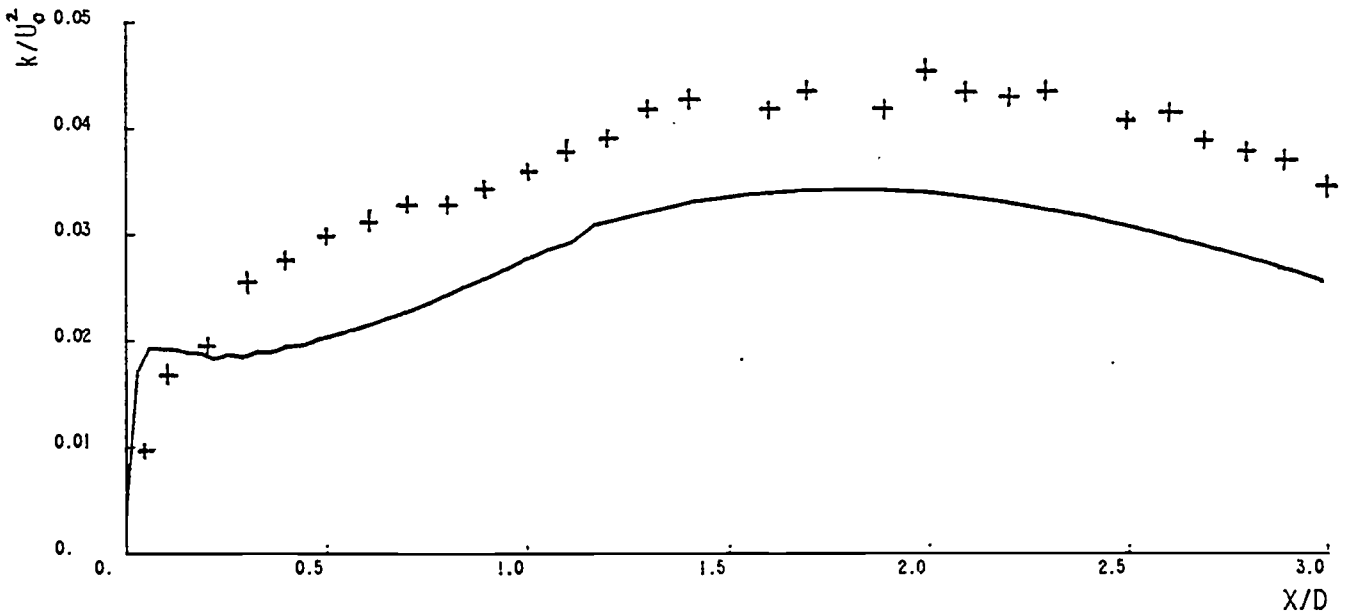


Fig 11 : PROFIL AXIAL DE k A r= 0.257D
(+ : exp. , —— : calcul)

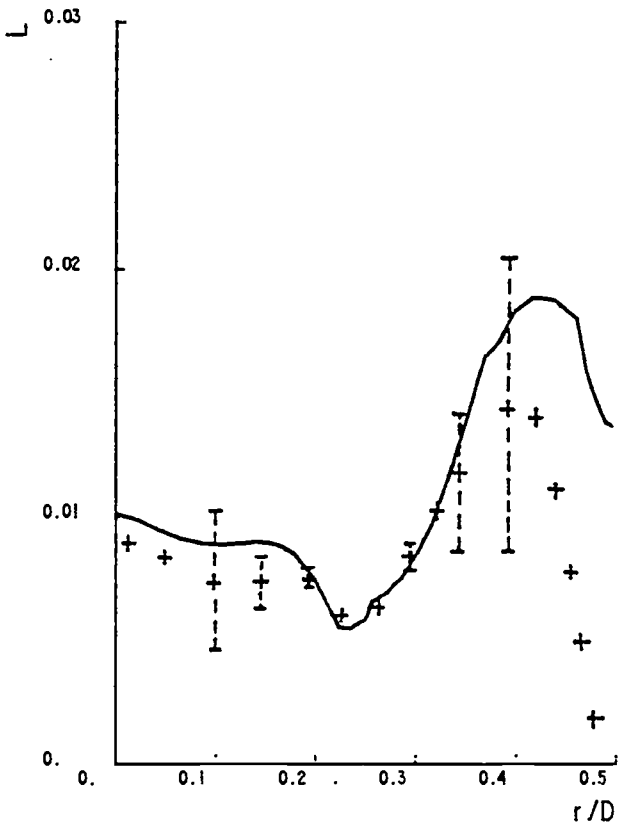


Fig 12 : PROFIL DE LONGUEUR DE MELANGE A X/D=0.5
(+ : exp. , —— : calcul)

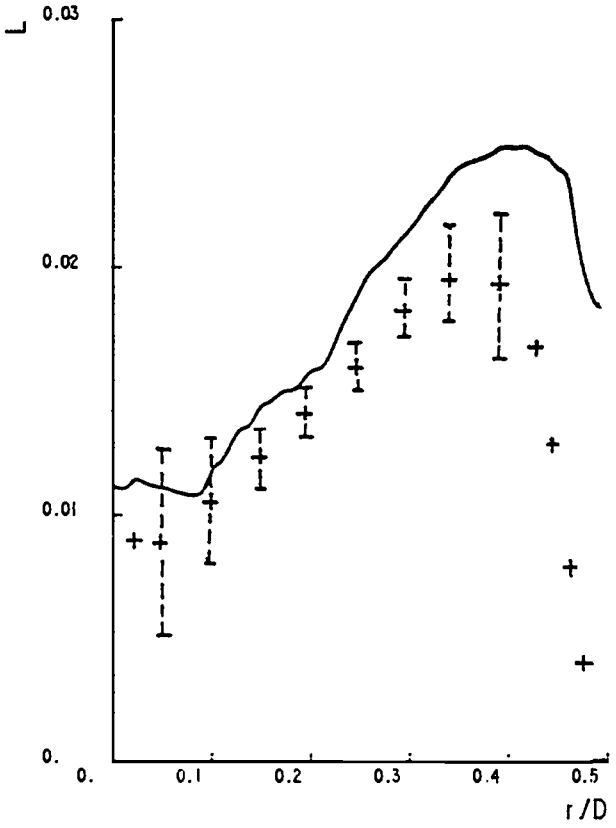


Fig 13 : PROFIL DE LONGUEUR DE MELANGE A X/D=1.5
(+ : exp. , —— : calcul)

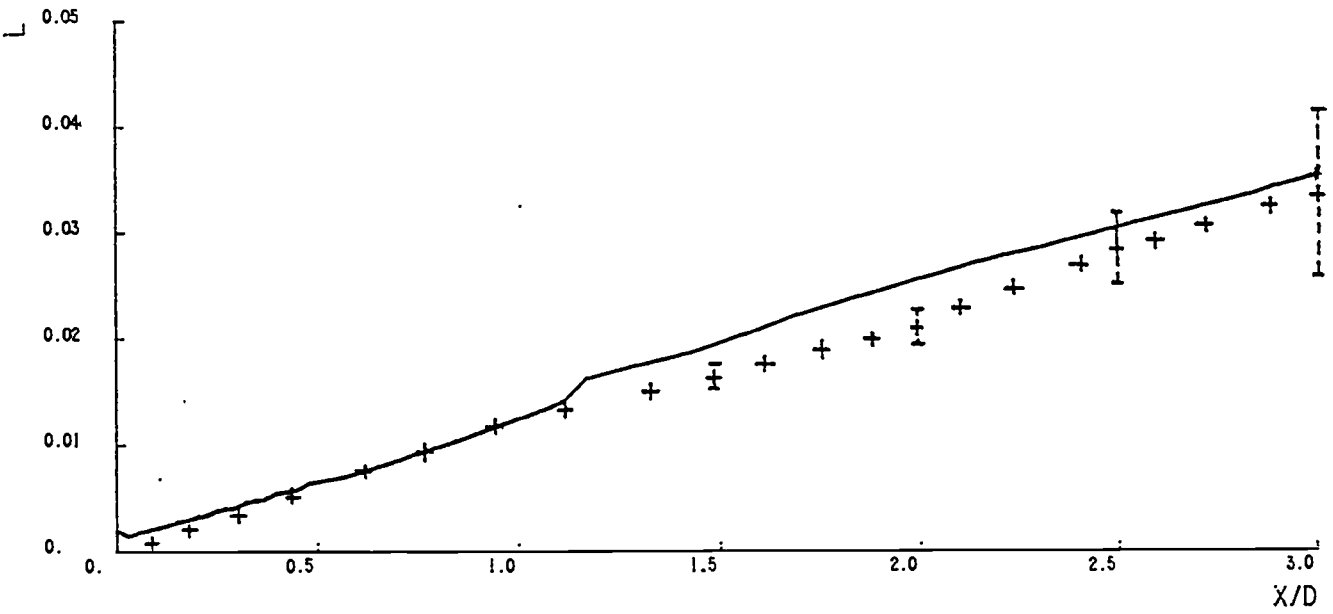


Fig 14 : PROFIL DE LONGUEUR DE MELANGE SUR L'AXE
(+ : exp. , —— : calcul)

III-2: JET AXISYMETRIQUE FORTEMENT CHAUFFE:

Les calculs effectués ici sont basés sur les résultats expérimentaux obtenus par Bahraoui [3] dans le cas d'un jet rond qui peut être fortement chauffé à sa base par l'existence d'une flamme. Ce dispositif permet d'engendrer des écarts de température trés nettement supérieurs à ceux pour lesquels l'hypothèse de contaminant passif est applicable. Jusqu'alors, les études avaient essentiellement été faites en présence de faibles écarts de température. On peut, par exemple, citer les travaux de Dekeyser [15], d'Antonia [16] ou de Chevray [17]. Dans ces expériences, la température est principalement utilisée comme un marqueur pour l'analyse de la turbulence, le champ thermique étant sans influence notable sur le champ dynamique.

III-2-1: Dispositif expérimental:

Le dispositif expérimental, représenté par le schéma de la figure 15, est constitué par un jet annulaire dont les diamètres intérieur et extérieur valent, respectivement, d=18.2 mm et D=25.3mm (fig. 15).

Au centre du jet, un orifice permet le passage d'un jet coaxial de faible débit constitué par un prémélange d'air et de propane qui, une fois enflammé, chauffe le jet annulaire dans sa partie inférieure . Les visualisations de la flamme en présence ou non de jet annulaire (figure 16) montrent que celui-ci ne participe pas à la combustion: la forme de la flamme est à peu prés identique dans les deux cas.

Le débit du jet principal est de $15 m^3/h$ et le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse de débit et sur l'épaisseur du jet D-d, vaut 8200.

Dans le conduit central, le débit d'air est de $0.73\ m^3/h$ pour un débit de propane de $0.04\ m^3/h$. La température maximale de la flamme, atteinte à 1.4D à l'aval de l'orifice de sortie, est de 2000K.

Afin d'obtenir un point de comparaison, le jet annulaire

peut être également faiblement chauffé à sa base au moyen de résistances électriques placées dans le conduit central. L'écart maximum entre la température de sortie et la température extérieure est alors d'environ 22K.

Les mesures de vitesse axiale moyenne sont effectuées grâce à des tubes de pression spéciaux, conçus pour des écoulements allant jusqu'à des températures de 900K. Les grandeurs ainsi obtenues correspondent à des valeurs moyennes au sens de Favre (cf Bahraoui [3]). La température moyenne, quant à elle, est mesurée à l'aide de thermocouples et de fils froids. Il semble que les résultats correspondent plutôt à des valeurs moyennes au sens de Favre, l'écart entre moyenne de Favre et de Reynolds n'étant toutefois que de l'ordre de 8%. Les fluctuations de température sont mesurées par des fils froids en platine ($d=0.63\mu m$).

Les profils de vitesse radiale sont obtenus à partir des profils de vitesse axiale par intégration de l'équation de continuité. L'intégration de l'équation de quantité de mouvement permet le calcul des tensions de Reynolds $\rho.\overline{u''v''}$. De même, l'équation d'enthalpie fournit les valeurs de flux de chaleur turbulent $\rho.\overline{v''T''}$.

L'intégration des équations moyennes est effectuée dans 3 sections de mesure correspondant à:

$$x/D = 4.5 \quad , \quad x/D = 8 \quad \text{et} \quad x/D = 11.$$

La connaissance des profils de vitesse moyenne et de tensions de Reynolds permet de déterminer les profils de viscosité de turbulence ν_t par la relation de définition:

$$-\rho.\overline{u''v''} = \rho.\nu_t.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}$$

De même, la connaissance de la température moyenne et des corrélations $\rho.\overline{v''T''}$ donne la diffusivité thermique de la turbulence α_t par la relation:

$$-\rho.\overline{u''T''} = \rho.\alpha_t.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}$$

A partir de ces deux quantités, le nombre de Prandtl de

la turbulence peut être obtenu: il obéit à la définition suivante:

$$Prt = \frac{\nu_t}{\alpha_t}$$

III-2-2: Conditions de calcul:

La section initiale de calcul correspond à x/d= 4.5. L'estimation de l'énergie cinétique de turbulence est issue de la relation :

$$-\frac{\overline{u''v''}}{k} = 0.30$$

dont la validité, établie en incompressible assez loin de l'axe, a été étendue aux écoulements fortement chauffés. Le raccordement des profils de k sur l'axe a été fait empiriquement.

Les profils d'entrée pour la dissipation sont déduits des profils d'énergie cinétique de turbulence par la relation de définition de ν_t:

$$\varepsilon = C_\mu . \frac{k^2}{\nu_t} \qquad \text{avec } C_\mu = 0.09$$

Radialement, le domaine de calcul s'étend de l'axe de symétrie jusqu'à une distance r/D=8. Or les profils expérimentaux ne sont disponibles que jusqu'à r/D=1.6 (à l'extérieur de cette zone, une valeur faible est imposée pour chaque variable du problème, on remarque en particulier, que l'existence d'une valeur faible de vitesse axiale facilite la convergence de l'algorithme en pression).

Dans le sens axial, le domaine de calcul s'étend jusqu'à x/D=12.5. Dans cette section, une référence en pression est imposée et des conditions de Neumann homogènes sont appliquées aux autres variables.

La description du maillage de calcul et des conditions aux limites est donnée par la figure 17. Le maillage en pression

comprend 221 noeuds et 384 éléments alors que le maillage fin comprend 825 noeuds et 1536 éléments. Les calculs présentés ici ont été effectués sans introduction du schéma de Balancing Dissipation décrit au §II-6. La valeur du nombre de Prandtl de la turbulence est fixé à 0.5. Cette valeur semble à peu prés conforme aux résultats expérimentaux obtenus dans le cas faiblement chauffé (cf Chevray[17], Bahraoui [3]). Par contre, les mesures obtenues dans le cas fortement chauffé (cf Bahraoui [3]) font apparaître des valeurs plus élevées de ce nombre de Prandtl ainsi que de trés fortes variations de cette quantité dans le sens radial.

III-2-3: Résultats et discussion:

a/ Vitesse et température moyennes:

Les évolutions de la vitesse et de la température sur l'axe sont données sur les figures 18 et 19, à la fois dans le cas faiblement chauffé et dans le cas fortement chauffé.

Les résultats concernant le cas faiblement chauffé sont particulièrement satisfaisants pour la vitesse, sauf dans une petite zone située à l'entrée du domaine de calcul où s'effectue un ajustement en fonction des conditions d'entrée. Les résultats obtenus pour la température font apparaître une décroissance moins rapide des courbes numériques par rapport aux courbes expérimentales. L'écart reste à peu prés constant tout au long de l'axe de symétrie.

Dans le cas fortement chauffé, l'évolution axiale de la température semble à peu prés conforme au cas précédent: la décroissance est sous-estimée d'une valeur sensiblement constante. Mais, contrairement au cas faiblement chauffé, cet écart se retrouve également sur l'évolution de la vitesse: ceci semble dû au couplage existant entre la vitesse et la température par l'intermédiaire de la masse volumique.

Les profils radiaux de vitesse et de température sont donnés sur les figures 20 et 21 pour deux sections correspondant à x/D=8 et x/D=11. Dans le cas faiblement chauffé, les profils de vitesse sont tout à fait conformes aux profils expérimentaux. Pour les profils de température, on retrouve l'écart sur l'axe déjà constaté sur les tracés de profils axiaux. On peut cepen-

dant noter que cet écart reste constant: la forme des profils est donc bien prédite et l'écart n'est qu'un "décalage" de la courbe (cf, en particulier, le profil à x/D=11).

Dans le cas fortement chauffé, l'écart constaté sur l'axe ne se maintient pas constant et les courbes numériques se rapprochent des courbes expérimentales, tant en ce qui concerne la vitesse que la température.

b/ Grandeurs caractéristiques de la turbulence:

Les résultats concernant la viscosité de turbulence sont présentés par la figure 22. Les courbes sont rendues sans dimension grâce à la vitesse maximale U_m mesurée et grâce à la demi-largeur des profils expérimentaux, notée δ_u et définie par la position où la vitesse est égale à $U_m/2$.

Aussi bien dans le cas faiblement chauffé que dans le cas fortement chauffé, des écarts sont à noter entre résultats expérimentaux et numériques. Dans le premier cas, la différence entre les valeurs maximales est de l'ordre de 10% alors que, dans le deuxième cas, elle est de l'ordre de 30% environ.

Les données expérimentales font apparaître une réduction assez faible des niveaux de viscosité de turbulence, en présence de températures élevées. Cette diminution est également observée numériquement mais elle est amplifiée. On peut constater que la forme générale des profils est assez bien prédite. L'existence d'un maximum de ν_t pour une position proche de $r/\delta_u=1$ est plus nette dans le cas fortement chauffé, aussi bien numériquement qu'expérimentalement.

L'ensemble de ces résultats se retrouve sur les profils de tensions de Reynolds, donnés par la figure 23 et déduits des résultats précédents par:

$$-\widetilde{u''v''} = \nu_t \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}$$

On note que, contrairement aux profils de ν_t, l'écart observé entre les résultats expérimentaux et numériques est à peu prés identique dans les deux cas d'étude. En effet, si on a constaté une réduction de ν_t dans le cas fortement chauffé,

celle-ci s'accompagne d'un accroissement des gradients transversaux de vitesse moyenne. Dans les deux cas, on obtient cependant une sous-estimation des niveaux de tensions de Reynolds.

La figure 24 montre des profils radiaux de corrélation $\widetilde{v''T''}$; calculée par:

$$-\widetilde{v''T''} = \frac{\nu_t}{Prt}.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial r}$$

Une réduction des niveaux sans dimension de $\widetilde{v''T''}$, dûe au chauffage fort est observée expérimentalement. Cette diminution n'est pas correctement prédite par le calcul qui fait apparaître une surévaluation des niveaux de $\widetilde{v''T''}$ de l'ordre de 10 à 15%.

Des données expérimentales sont également disponibles en ce qui concerne les fluctuations de température. Cette quantité a été calculée numériquement par résolution de l'équation d'évolution:

$$\frac{\partial \widetilde{T''^2}}{\partial t} + \vec{\tilde{u}}.\overrightarrow{grad}\ \widetilde{T''^2} = \frac{1}{\rho}.\overline{\overline{div}}\left[\left(\frac{1}{Re.Pr}+\frac{1}{Rt.Prt}\right).\overrightarrow{grad}\ \widetilde{T''^2}\right]$$

$$+ \mathcal{P}_\theta - R_\varepsilon.\frac{\varepsilon}{k}.\widetilde{T''^2}$$

où $\mathcal{P}_\theta = -2.\overline{\vec{u}''T''}.\overrightarrow{grad}\ \tilde{T} = 2.\frac{\nu_t}{Prt}.(\overrightarrow{grad}\ \tilde{T})^2$ et $R_\varepsilon = \frac{\varepsilon_\theta}{\widetilde{T''^2}}.\frac{k}{\varepsilon} = 1$

Cette équation est établie à partir de l'équation exacte d'évolution de $\widetilde{T''^2}$ par l'utilisation d'hypothèses analogues à celles ayant amené à la construction des équations modélisées sur k et ε (cf Dekeyser [15], Spalding [18]).

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 25. On remarque que, si la forme des profils est assez bien prédite, les niveaux sont, par contre, trés surestimés.

On note que l'existence d'un minimum local sur l'axe, dans le cas faiblement chauffé, pour x/D=8, est bien prédit. Numériquement, ce minimum persiste jusqu'à x/D=11. Dans le cas fortement chauffé, aucun minimum sur l'axe n'est observé, aussi

bien en ce qui concerne les résultats expérimentaux que numériques. Il faut noter que l'équation en $\widetilde{T''^2}$ utilisée n'a pas fait l'objet de validations trés poussées, même dans le cas où la température est un contaminant passif et la valeur des constantes utilisée peut être remise en cause. Ceci peut permettre, entre autre d'expliquer les écarts observés. Pour une analyse plus fine, on pourra se référer aux expériences numériques de Brière [19] qui propose une valeur R_ε=1.25 et à l'évaluation de R_ε en fonction du Reynolds de turbulence indiquée par Newmann [20].

c/ Discussion des résultats:

Les résultats présentés montrent que le comportement des quantités moyennes (vitesse et température) est assez bien prédit. Les écarts observés entre résultats expérimentaux et numériques atteignent une valeur maximale de l'ordre de 15%. Pour le cas fortement chauffé, on retrouve des écarts du même ordre sur la tension de Reynolds et sur le flux $\widetilde{v''T''}$. Plus précisement, les valeurs de $\widetilde{v''T''}$ observées expérimentalement sont inférieures aux valeurs calculées, alors que les valeurs de $\widetilde{u''v''}$ mesurées sont, elles, supérieures aux valeurs calculées. Cette contradiction peut, en partie, être levée par l'utilisation d'un nombre de Prandtl de la turbulence plus fort (les résultats expérimentaux montrent, en effet, une augmentation trés sensible de ce nombre de Prandtl avec le chauffage). Il conviendrait de plus de prendre en considération les variations observées dans le sens radial, surtout au voisinage de l'axe de symétrie (cf Bahraoui [3]).

Une meilleure connaissance des conditions aux limites à imposer serait, d'autre part, nécessaire, en particulier en ce qui concerne l'énergie cinétique de turbulence. L'étendue limitée du domaine d'étude rend, en effet, les résultats particulièrement sensibles aux conditions imposées à l'amont.

D'un point de vue pratique, dans le cas d'un jet rond, Rodi [21] propose l'utilisation de lois de variations du paramètre C_μ, qui intervient dans la définition de ν_t, pour le cas d'écoulements isothermes.

Une simulation plus précise de la cinématique et de la

thermique nécessite sans doute de s'écarter du modèle de viscosité de turbulence de Boussinesq. Ainsi, une équation, algébrique ou non, peut être introduite pour les corrélations $\widetilde{\vec{u}}$"T" (cf Rodi [22]).

On peut aussi envisager de construire, par l'analyse dimensionnelle, une diffusivité de turbulence thermique de la forme:

$$\alpha_t = \frac{\nu_t}{Prt} = c.\frac{k.\widetilde{T"^2}}{\varepsilon_\theta}$$

et d'introduire deux équations supplémentaires gouvernant l'évolution des quantités scalaires $\widetilde{T"^2}$ et ε_θ. Un tel modèle permet, en particulier de s'affranchir de la relation:

$$\frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon} = R_\varepsilon.\frac{\widetilde{T"^2}}{k}$$

vérifiée par Béguier [23] pour des écarts de température faibles. La combinaison de ces deux dernières relations revient, en effet, à introduire une valeur constante du nombre de Prandtl de turbulence:

$$Prt = \frac{c}{R_\varepsilon.C_\mu}$$

Les travaux menés par Zahibo [39], qui utilise un modèle pour les tensions de Reynolds et les flux de chaleur, tout en conservant l'hypothèse R_ε=cste pour le calcul de $\widetilde{T"^2}$, conduisent à des résultats trés proches de ceux présentés ici. Une remise en cause de cette hypothèse semble donc être indispensable pour obtenir une amélioration sensible de ces résultats.

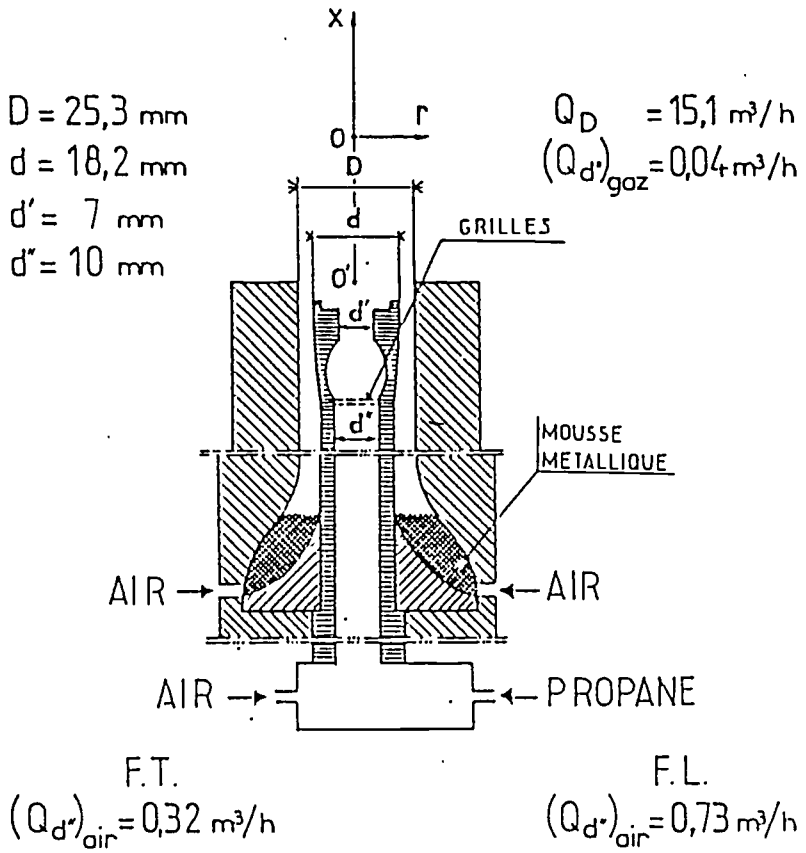
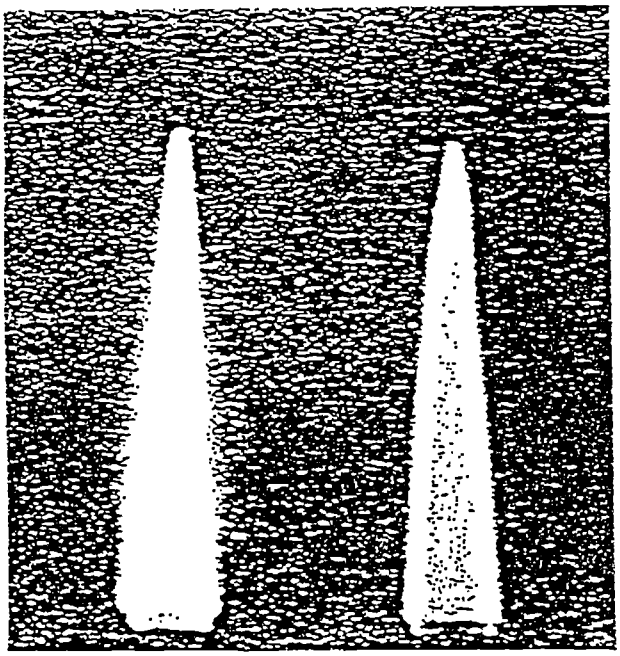


Fig 15 : JET AXISYMETRIQUE - DISPOSITIF EXPERIMENTAL



Flamme laminaire

Flamme laminaire
sans écoulement extérieur

Fig 16 : VISUALISATIONS DE LA FLAMME

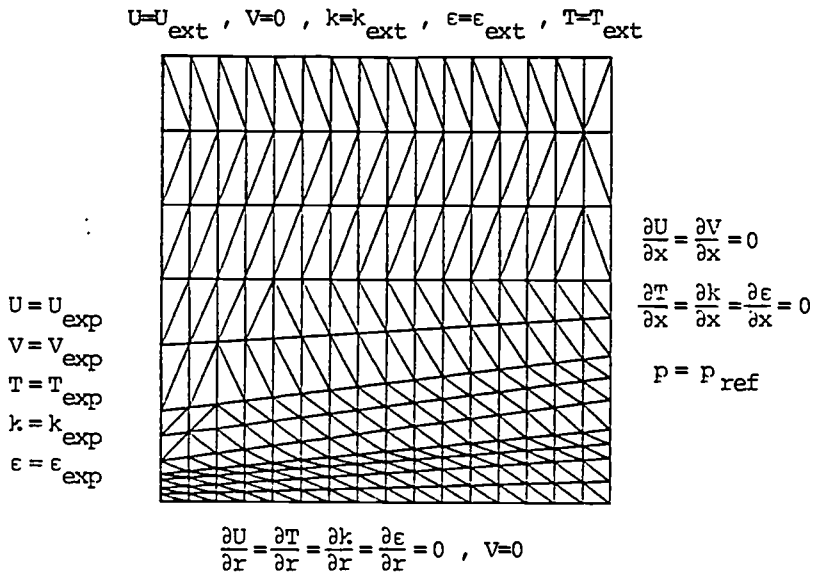


Fig 17 : JET AXISYMETRIQUE - MAILLAGE EN PRESSION
- CONDITIONS AUX LIMITES

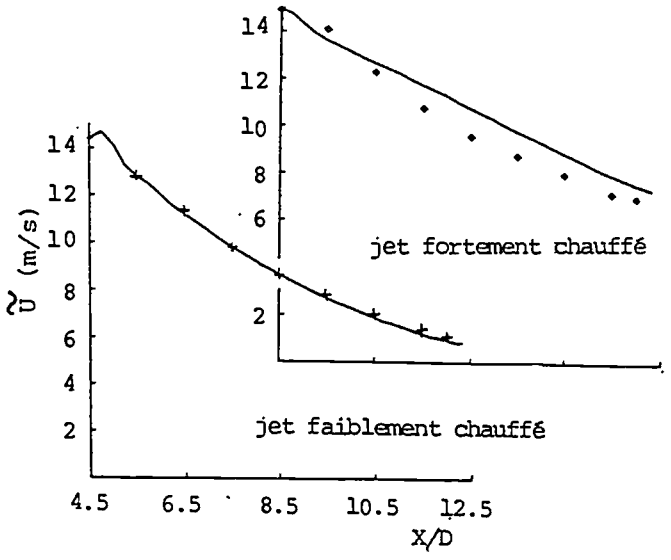


Fig 18 : DECROISSANCE DE LA VITESSE
SUR L'AXE
(+,♦ : exp. ,——: calcul)

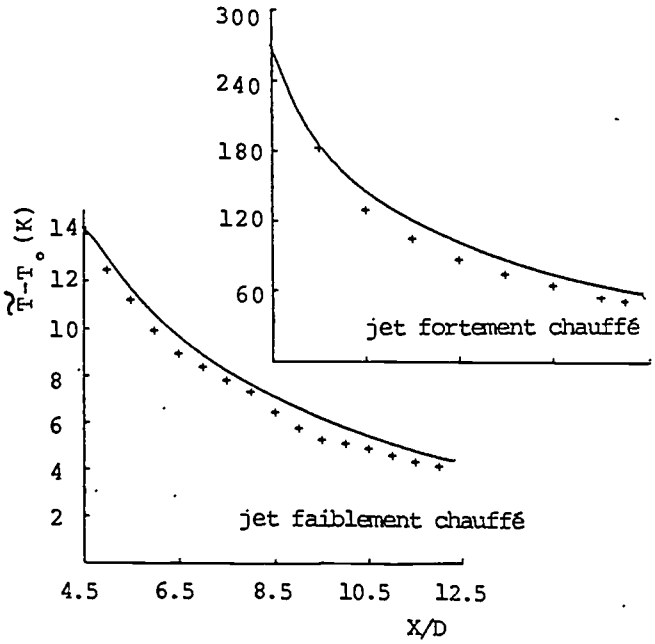
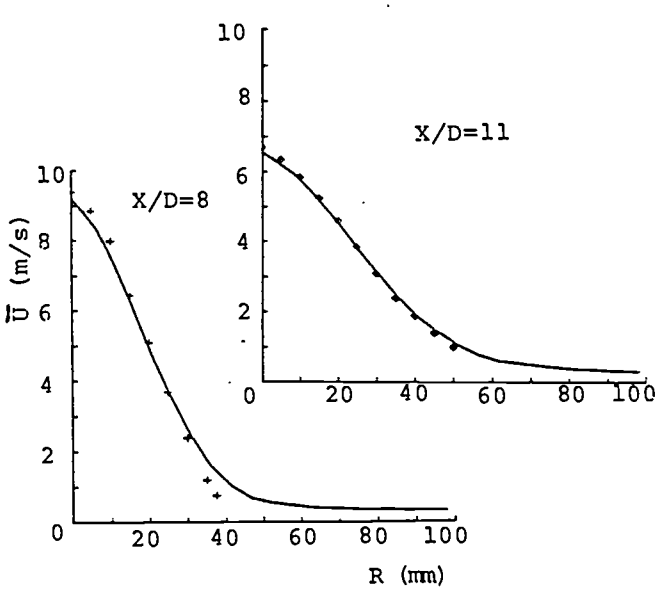
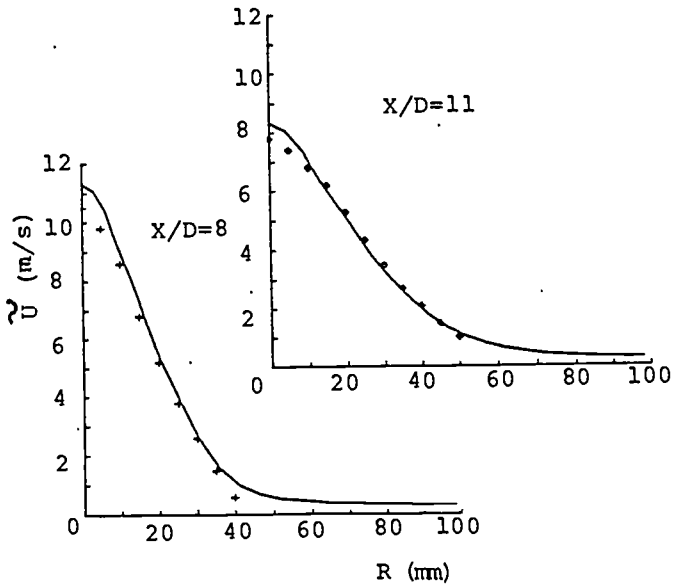


Fig 19 : DECROISSANCE DE LA TEMPERATURE
SUR L'AXE
(+,♦ : exp. ,——: calcul)

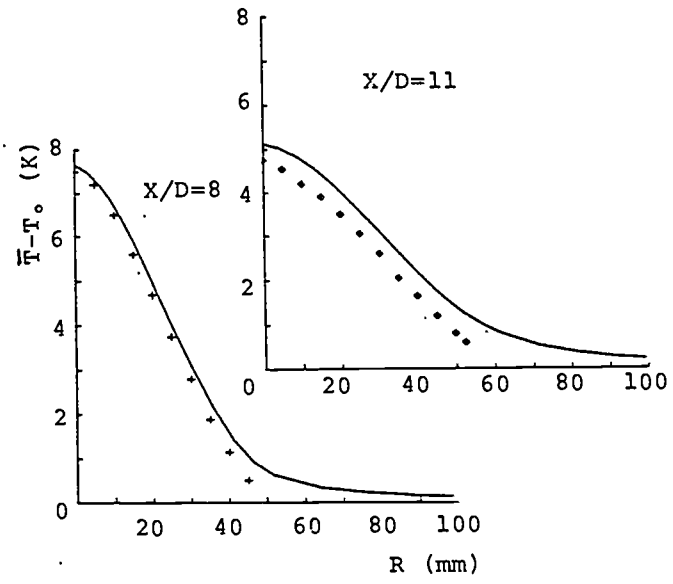


a / jet faiblement chauffé

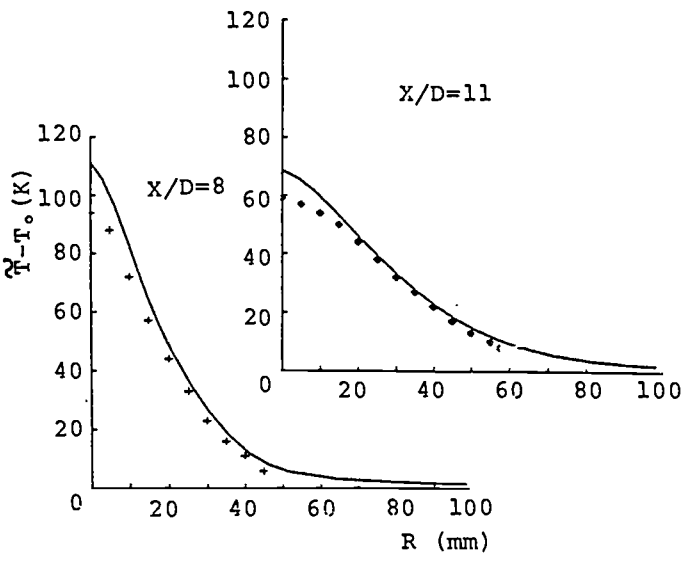


b / jet fortement chauffé

Fig 20 : PROFILS RADIAUX DE VITESSE
(+,• : exp. , — : calcul)

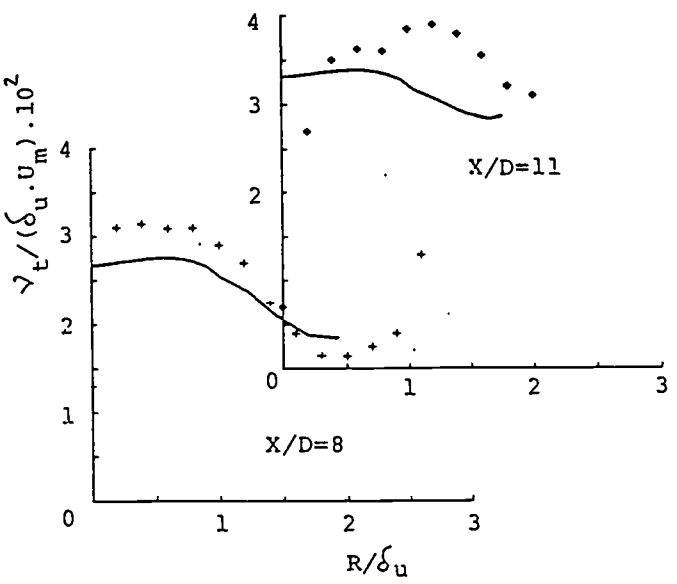


a / jet faiblement chauffé

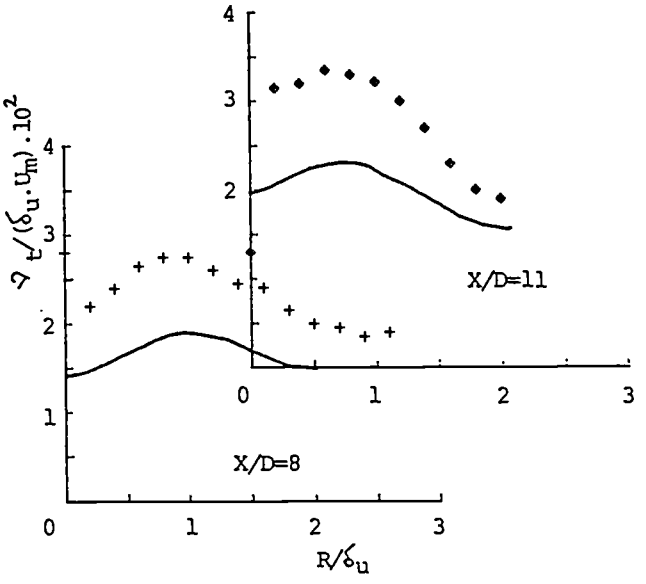


b / jet fortement chauffé

Fig 21 : PROFILS RADIAUX DE TEMPERATURE
(+,• : exp. , — : calcul)

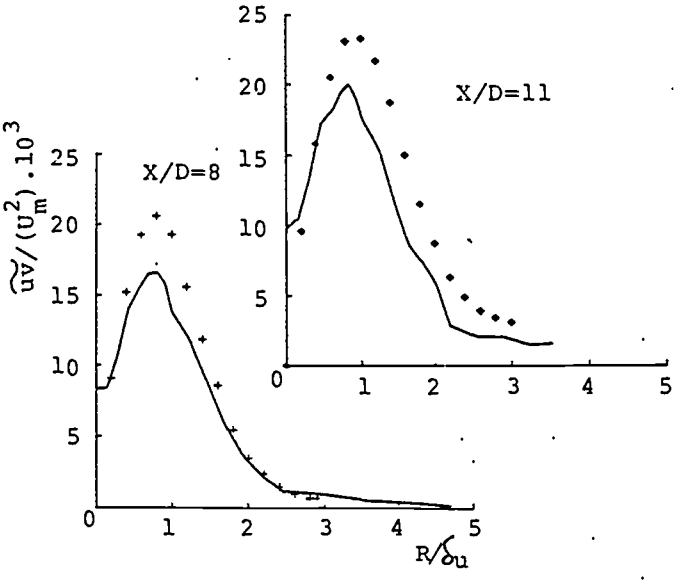


a / jet faiblement chauffé

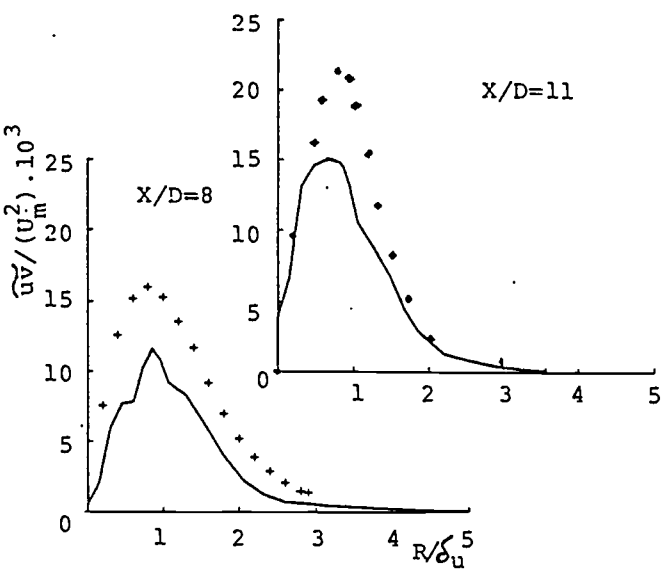


b / jet fortement chauffé

Fig 22 : PROFILS RADIAUX DE VISCOSITE DE TURBULENCE
(+,• : exp. , —— : calcul) .

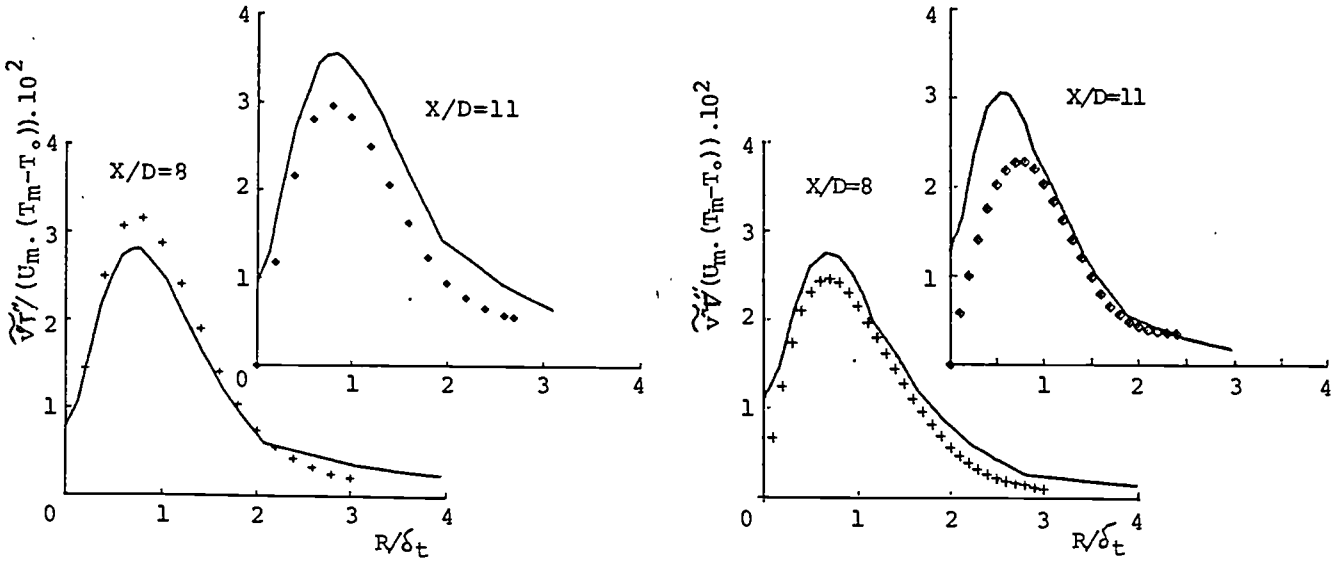


a / jet faiblement chauffé



b / jet fortement chauffé

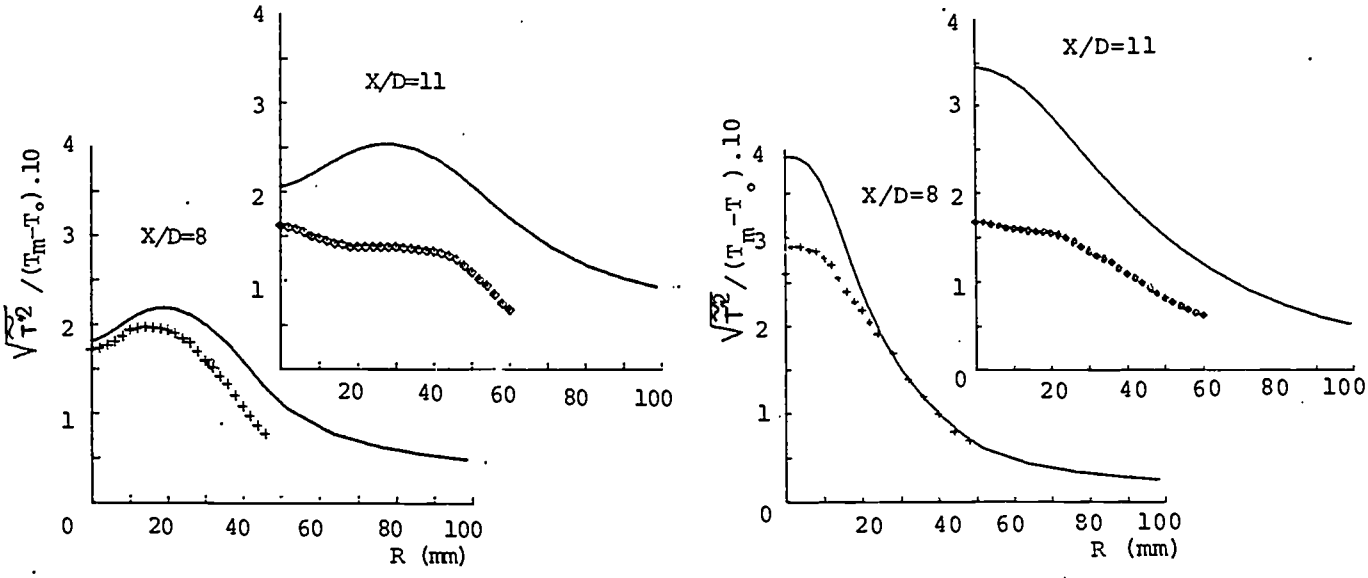
Fig 23 : PROFILS RADIAUX DES CORRELATIONS $\widetilde{uv}$
(•,+ : exp. , —— : calcul)



a / jet faiblement chauffé b / jet fortement chauffé

Fig 24 : PROFILS RADIAUX DES CORRELATIONS $\widetilde{v'T'}$

(+,• : exp. ,—— : calcul)



a / jet faiblement chauffé b / jet fortement chauffé

Fig 25 : PROFILS RADIAUX DE FLUCTUATIONS DE TEMPERATURE

(+,• : exp. ,—— : calcul)

III-3: COUCHE LIMITE FORTEMENT CHAUFFEE:

Les études réalisées dans le cas d'une couche limite chauffée sont de deux types:

. d'une part celles effectuées en présence de faibles écarts de température: l'hypothèse de contaminant passif peut alors être utilisée (cf Fulachier [24], Antonia [25])

. d'autre part celles où l'ampleur des écarts de température oblige à prendre en compte les variations de masse volumique (cf Nicholl [26] et Rotta [27]). La configuration étudiée ici fait partie de cette deuxième catégorie: elle correspond aux travaux expérimentaux de Ng [4] où une plaque plane peut être chauffée jusqu'à une température de 1250K. Aprés avoir décrit le dispositif expérimental et les techniques de mesure utilisées, nous présentons les résultats obtenus et les conclusions que l'on peut en tirer.

III-3-1: Dispositif expérimental:

La figure 26 donne une description du dispositif expérimental. Il est constitué par une chambre de tranquillisation de 60cm suivie par un convergent permettant d'obtenir une section carrée de 10cm de côté. Celui-ci est relié à une veine d'essai comportant une plaque rugueuse de 25cm de long puis à une plaque lisse de même longueur. Ces deux plaques sont entourées de parois métalliques afin de minimiser l'influence des perturbations extérieures. Elles sont prolongées par une plaque en céramique de 25cm chauffée électriquement au moyen de 9 lames en Kanthal de 25mm de large et 0.125mm d'épaisseur.

Des mesures sont effectuées d'une part en situation isotherme et d'autre part dans le cas où la plaque plane est chauffée à une température de 1250K. Dans les deux cas, la vitesse à l'extérieur de la couche limite est fixée à 10.5m/s.

Les mesures de vitesse instantanée sont effectuées à l'aide d'une technique d'anémométrie Laser-Doppler: les valeurs de la vitesse moyenne, des fluctuations et des tensions de Reynolds en sont déduites. Des résultats sont également disponi-

bles en ce qui concerne les corrélations triples $\overline{u' v'^2}$ et $\overline{v' k}$.

Les mesures de densité sont effectuées, quant à elles, par une technique de "Rayleigh Scattering".

Les résultats sont disponibles dans 6 sections correspondant aux distances x=35 , 70 , 95 , 125 , 155 et 182mm par rapport au début de la plaque chauffée.

III-3-2: Conditions de calcul:

Comme nous l'avons vu, la première section de mesure correspond à l'abscisse x=35mm. Cette section est donc choisie comme section d'entrée du domaine de calcul qui s'étend, dans le sens de l'écoulement jusqu'à la position x=195mm. Les conditions aux limites sur chacune des variables correspondent aux données expérimentales. Ainsi, la température ambiante étant choisie comme température de référence, le profil d'entrée sur $\tilde{T}$ est déduit du profil de masse volumique par la relation sans dimension:

$$\tilde{T} = \frac{1}{\frac{\rho}{}} - 1$$

Les profils de chaque composante de la quantité de mouvement sont déduits des valeurs de $\bar{\rho}$ et de la vitesse moyenne. Il faut constater que les mesures de vitesse correspondent à des moyennes au sens de Reynolds et non au sens de Favre. Ainsi, la détermination des valeurs de la quantité de mouvement ne peut pas être faite de façon exacte.

La connaissance des profils d'énergie cinétique de turbulence et des tensions de Reynolds nous permet de déterminer les valeurs à imposer pour la dissipation par les deux lois suivantes:

$$\nu_t = \frac{-\overline{u' v'}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

et $\varepsilon = C_\mu \cdot \frac{k^2}{\nu_t}$

Dans la section de sortie (x=195mm), des conditions de flux nul (Neumann homogène) sont imposées pour chacune des variables. Dans le sens vertical (direction y), le domaine de calcul s'étend de la position $y=\delta$ imposée jusqu'à la position y=35mm, l'origine étant prise sur la plaque plane. La valeur de δ (qui correspond à la position où sont appliquées réellement les conditions aux limites) est choisie de façon à ce que le premier noeud du maillage soit situé dans une zone où les lois d'équilibre de la turbulence sont applicables. Ainsi, les essais numériques effectués nous ont conduit à prendre, pour la configuration étudiée:

. cas isotherme : δ=1mm $\left(\frac{\delta . u_f}{\nu}=30\right)$

. cas chauffé : δ=3mm $\left(\frac{\delta . u_f}{\nu}=60\right)$

Sur la frontière située à y=35mm, on impose une valeur constante de la composante longitudinale de quantité de mouvement. Cette valeur correspond à la vitesse à l'extérieur de la couche limite. Une condition de flux nul est, par contre, imposée pour la composante verticale de $\vec{Q}$. De plus, on impose une valeur constante de pression tout le long de cette frontière. Pour ce qui est des variables k et ε, une valeur faible est imposée: elle correspond à une extrapolation des données expérimentales. La température est fixée à une valeur constante, égale à la température ambiante.

L'ensemble de ces conditions aux limites ainsi que le maillage de calcul utilisé sont décrits par le schéma de la figure 27. Le maillage en pression comporte 300 noeuds et 528 éléments alors que le maillage fin est constitué par 1127 noeuds et 2112 éléments. Le schéma de "balancing dissipation" est sans influence sur les résultats présentés. D'autre part, les calculs dans le cas fortement chauffé ont été effectués avec deux

valeurs du nombre de Prandtl de la turbulence: 0.9 et 1.5. La première de ces deux valeurs correspond à celle classiquement utilisée dans le cas où la température est un contaminant passif (cf Fulachier [24]) , alors que la deuxième est utilisée pour tester l'influence d'une augmentation de ce nombre de Prandtl sur les résultats.

III-3-3: Résultats et discussion:

a/ Evolution de la vitesse et de la masse volumique:

Les résultats obtenus pour la couche limite isotherme sont donnés par les figures 28 à 30: ils concernent les profils de vitesse longitudinale moyenne (fig. 28), d'énergie cinétique de turbulence (fig. 29) et de tensions de Reynolds (fig. 30). Ils sont présentés dans deux sections correspondant à x=125mm et à x=182mm.

On note que ces courbes mettent en évidence un accord satisfaisant entre résultats expérimentaux et numériques. On peut cependant constater que les valeurs de vitesse calculées en paroi sont légèrement sous-estimées, alors que les valeurs de k et de $\overline{u'v'}$ sont trés bien prédites. Ceci peut s'expliquer par le choix d'une valeur de $\frac{\delta . u_f}{\nu}$ trop faible (limite de la zone logarithmique)

Dans le cas fortement chauffé, nous avons testé les lois de paroi décrites au paragraphe I-4. Nous avons, par ailleurs, utilisé des relations imposant la conservation de la contrainte tangentielle et du flux normal (contribution laminaire et turbulente) entre la position $y=\delta$ et la paroi. On définit alors u_f et T_f par:

$$\overline{\rho_p . u_f^2} = \overline{\rho} . \left(\frac{1}{Re} + \frac{1}{Rt} \right) . \left. \frac{\partial \vec{u} . \vec{t}}{\partial n} \right|_\delta$$

$$\overline{\rho_p . T_f u_f} = \overline{\rho} . \left(\frac{1}{Re . Pr} + \frac{1}{Rt . Prt} \right) . \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \right|_\delta \qquad \text{(III-3-1)}$$

On maintient cependant la validité des lois logarithmiques pour la vitesse et la température moyenne, décrites au paragraphe I-4. Par contre, ces définitions de u_f et T_f, données par

(III-3-1) nous conduisent, pour k et ε, aux relations:

$$k\Big|_{\delta} = \left(\frac{\overline{\rho_p}}{\rho_\delta}\right).\frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{et} \quad \varepsilon\Big|_{\delta} = \left(\frac{\overline{\rho_p}}{\rho_\delta}\right).\frac{u_f^3}{K.\delta}$$

Rappelons que les lois décrites au paragraphe I-4 consistent à écrire:

$$u_f^2 = \left(\frac{1}{Re}+\frac{1}{Rt}\right).\frac{\partial \vec{u.t}}{\partial n}\Big|_{\delta}$$

$$T_f u_f = \left(\frac{1}{Re.Pr}+\frac{1}{Rt.Prt}\right).\frac{\partial \tilde{T}}{\partial n}\Big|_{\delta} \qquad \text{(III-3-2)}$$

Ce qui nous conduit, pour k et ε, à:

$$k\Big|_{\delta} = \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}} \quad \text{et} \quad \varepsilon\Big|_{\delta} = \frac{u_f^3}{K.\delta}$$

Les résultats obtenus dans les deux cas sont présentés dans les figures 31 à 34. Les courbes en trait interrompu sont relatives à la définition (III-3-1) alors que les courbes en trait plein correspondent à la définition (III-3-2). Elles sont obtenues pour un nombre de Prandtl de la turbulence de 0.9. Les coefficients de la loi logarithmique sur la température sont ceux obtenus expérimentalement par Cheng [28], c'est-à-dire:

$$K' = 0.8 \quad \text{et} \quad C' = 12.5$$

Les résultats sont présentés dans les deux sections correspondant aux positions x=125mm et x=182mm. Les profils de vitesse (fig. 31) montrent que les valeurs en paroi sont surestimées d'environ 10%, par rapport à l'expérience. L'utilisation des relations (III-3-1) conduit à des valeurs légèrement supérieures à celles obtenues avec (III-3-2). Expérimentalement (cf

Ng [4]) et numériquement, le chauffage entraîne un accroissement de la vitesse en paroi , le calcul amplifiant légèrement ce phénomène.

L'évaluation de la valeur de la masse volumique à la position $y=\delta$ semble trés bien réalisée par l'utilisation de (III-3-2) alors que les lois (III-3-1) conduisent à une valeur plus élevée (cf fig. 32). Dans les deux cas, on peut remarquer que l'allure des profils dans la couche limite est assez mal prédite: en particulier, les résultats obtenus avec les relations (III-3-2) mettent en évidence une diffusion transversale trop importante.

b/ Evolutions de k et $\widetilde{u"v"}$:

Les profils d'énergie cinétique et de corrélations $\widetilde{u"v"}$, donnés sur les figures 33 et 34, font apparaître des écarts importants, au voisinage de la paroi, suivant la définition de u_f et de T_f utilisée. La définition (III-3-2) conduit ainsi à des résultats plus satisfaisants que la définition (III-3-1). On voit donc que, quel que soit la variable examinée (vitesse moyenne, masse volumique, k ou $\widetilde{u"v"}$), l'utilisation de cette définition nous donne des résultats meilleurs.

Les résultats présentés dans les figures 33 et 34 montrent que, mis à part au voisinage de la paroi, les niveaux de k et de $\widetilde{u"v"}$ sont sous-estimés par l'approche numérique.

La comparaison des résultats expérimentaux dans le cas isotherme et dans le cas chauffé, montre que l'énergie cinétique k n'est pas fortement affectée par la présence d'écarts de température importants. On constate cependant un léger accroissement de la valeur en paroi: cet accroissement est mis en évidence à la fois expérimentalement et numériquement.

Les profils de corrélations $\widetilde{u"v"}$ conduisent à des conclusions semblables à celles obtenues pour k: la forme et les niveaux des profils ne semblent pas être modifiés de façon trés sensible par la présence d'un chauffage important. Les résultats numériques mettent cependant en évidence une légère augmentation de la valeur en paroi qui n'est pas constatée expérimentalement.

L'influence des forts écarts de température est beaucoup

plus sensible pour la contrainte de Reynolds définie par:

$$\tau_p = -\bar{\rho}.\widetilde{u''v''}$$

Les profils de la figure 35 montrent une diminution trés sensible de cette quantité. Cette diminution, constatée à la fois expérimentalement et numériquement est dûe à une diminution importante de la masse volumique sans accroissement proportionnel de niveaux des corrélations $\widetilde{u''v''}$, comme le constate Ng [4] et comme le font apparaître de façon trés nette les résultats présentés ici.

Le modèle de turbulence utilisé permet donc de bien mettre en évidence ce phénomène.

Les écarts constatés entre résultats expérimentaux et numériques peuvent s'expliquer par le fait que la méthode de mesure utilisée nous conduit à des valeurs moyennes au sens de Reynolds, alors que les variables calculées sont des valeurs moyennes au sens de Favre. Le passage de l'une à l'autre de ces deux quantités n'est pas immédiat: on a, en effet, la relation:

$$\tilde{\Phi} = \bar{\Phi}.\left(1+\frac{\overline{\rho'\Phi}}{\bar{\rho}.\bar{\Phi}}\right)$$

On est donc amené à connaître la quantité $\overline{\rho'\Phi}$ qui est difficilement accessible tant du point de vue expérimental que numérique.

L'obtention de résultats expérimentaux relatifs à des valeurs moyennes au sens de Favre permettrait de tirer des conclusions indiscutables des comparaisons entre l'expérience et le calcul.

c/ <u>Résultats obtenus avec Prt=1.5:</u>

L'examen des résultats présentés précédemment et, en particulier, ceux relatifs aux profils de masse volumique (fig. 32) montrent l'existence d'une diffusivité thermique trop forte, qui peut s'expliquer par l'utilisation d'un nombre de Prandtl de la turbulence trop faible.

Cette remarque est tout à fait compatible avec les

conclusions déduites, par Bahraoui [3], de l'étude du jet axisymétrique chauffé: les résultats expérimentaux font apparaître un accroissement sensible du nombre de Prandtl avec le chauffage.

Un calcul a donc été effectué en utilisant une valeur de Prandtl de la turbulence de 1.5. Ce choix ne repose sur aucune donnée expérimentale et a été fait de façon arbitraire. Cependant, il nous permet de bien mettre en évidence l'influence d'un accroissement significatif de Prt sur les caractéristiques de l'écoulement.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 36 à 39. Une amélioration sensible des valeurs de vitesse longitudinale, dans une zone proche de la paroi, est obtenue (fig. 36): l'écart entre courbes expérimentales et numériques est à peu prés réduit de moitié. Les profils de masse volumique (fig. 37) sont, eux aussi, sensiblement améliorés par l'utilisation d'un nombre de Prandtl fort. L'allure de ces profils est alors trés proche de celle obtenue expérimentalement. Cependant, on constate que la valeur à la paroi, remarquablement bien prédite avec Prt=0.9, est ici sous-estimée d'environ 4%.

La comparaison des profils d'énergie cinétique de turbulence (fig. 38) et des corrélations $\widetilde{u''v''}$ (fig. 39) montrent que les valeurs à la paroi ne sont pas fortement modifiées. Par contre des modifications notables apparaissent dans la zone "centrale" de la couche limite (y compris entre 7 et 20mm). Des valeurs plus élevées sont en effet obtenues et le recoupement avec les résultats expérimentaux est alors meilleur.

On voit donc que l'utilisation d'un nombre de Prandtl de la turbulence fort apporte une amélioration sensible des résultats, ceci quelle que soit la variable examinée.

Un phénomène analogue à celui observé expérimentalement dans le cas du jet axisymétrique chauffé (cf Bahraoui [3]) est donc mis en évidence: la présence de fortes variations de température s'accompagne d'un accroissement significatif du nombre de Prandtl de la turbulence.

Des études expérimentales complémentaires seraient donc nécessaires pour évaluer la valeur de ce nombre de Prandtl et pour déterminer une loi de variation de cette quantité en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

d/ Evolution des quantités intégrales:

Les comparaisons d'épaisseurs de couche limite cinématique obtenues dans le cas isotherme et dans le cas chauffé sont données sur la figure 40. L'épaisseur de couche limite, notée δ, est définie par la position où la vitesse est égale à 99% de la vitesse extérieure.

Les résultats obtenus dans la configuration isotherme sont tout à fait conformes aux résultats expérimentaux. Dans le cas fortement chauffé, on note expérimentalement un trés leger accroissement de l'épaisseur de la couche limite. Ce phénomène n'est pas mis en évidence par le calcul. Cependant, on peut remarquer que les résultats obtenus avec un nombre de Prandtl de la turbulence de 1.5 (courbes en pointillés) sont meilleurs que ceux obtenus avec une valeur de 0.9 (courbes en trait plein). En particulier, la pente de la courbe est bien déterminée. L'écart observé semble être dû à la zone initiale où le fort accroissement observé expérimentalement n'est pas mis en évidence par la simulation numérique.

Les tracés d'épaisseur de déplacement sont donnés par la figure 41. Cette quantité est définie par:

$$\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\overline{\rho} \cdot \tilde{u}}{\rho_0 \cdot u_0} \right) . dy$$

Dans le cas isotherme, les résultats numériques sont supérieurs à ceux obtenus expérimentalement: ceci est dû aux écarts déjà observés sur les profils de vitesse moyenne (fig. 28). De même que pour δ, la présence d'un chauffage important se traduit par une augmentation de δ_1: ce phénomène est observé à la fois expérimentalement et numériquement.

Les écarts obtenus pour les deux valeurs du nombre de Prandtl de la turbulence sont beaucoup moins importants que ceux constatés pour δ et ne permettent pas de choisir de façon claire pour l'une ou l'autre de ces deux valeurs.

Les résultats relatifs à la couche limite thermique sont donnés par les figures 42 et 43. Ils concernent:

. l'épaisseur de couche limite thermique, notée δ_T, définie par la position où la température est égale à 99,5% de

l'écart (T_W-T_0) entre les valeurs de température en paroi et à l'extérieur de la couche limite (fig. 42)

. l'épaisseur d'enthalpie (fig. 43) définie par:

$$\delta_{T1} = \int_0^\infty \frac{\overline{\rho}.\tilde{u}}{\rho_0.u_0}.\left(\frac{T-T_0}{T_W-T_0}\right).dy = \int_0^\infty \frac{\overline{\rho}.\tilde{u}}{\rho_0.u_0}.\left(\frac{\rho_0/\overline{\rho}-1}{\rho_0/\rho_W-1}\right).dy$$

Les valeurs obtenues pour δ_T sont supérieures aux données expérimentales. Une amélioration sensible est obtenue en utilisant une valeur de Prt forte. Ces résultats sont tout à fait compatibles avec les profils de masse volumique.

Les profils de δ_{T1} font apparaître un trés bon accord entre l'expérience et le calcul. L'influence du nombre de Prandtl de la turbulence est alors beaucoup moins importante que pour δ_T: une constatation analogue a déjà été faite pour les quantités relatives à la couche limite cinématique.

On remarque d'autre part que l'évolution de δ_{T1} est linéaire, aussi bien pour Prt=0.9 que pour Prt=1.5. Ceci est tout à fait conforme aux résultats obtenus par Ng [4]. Le nombre de Stanton, défini par:

$$St = \frac{d\delta_{T1}}{dx}$$

est donc constant tout au long de la couche limite. Cette quantité peut être interprétée comme une mesure du flux de chaleur en paroi Q_W, puisque on a la relation:

$$St = \frac{Q_W}{\rho_0.u_0.C_p.(T_0-T_W)}$$

Les valeurs obtenues sont:

$St = 2.41.10^{-3}$ pour Prt=0.9

$St = 2.28.10^{-3}$ pour Prt=1.5

Ces résultats sont proches de ceux obtenus par Antonia [25] dans le cas d'une couche limite faiblement chauffée ($\Delta T_{max} \approx 15°C$, $St = 2.1.10^{-3}$) , bien que les conditions expérimentales soient trés différentes.

III-3-4: Conclusion:

En résumé, les principales modifications de l'écoulement entrainées par la présence d'un chauffage fort sont assez bien mises en évidence par l'utilisation du modèle k-ε.

Une réduction notable de la contrainte de Reynolds a ainsi été observée alors que l'énergie cinétique de turbulence et les corrélations $\widetilde{u"v"}$ n'ont pas subi de modifications trés sensibles. De même, le comportement des quantités intégrales δ_1, δ_T et δ_{T1} est correctement prédit; le flux thermique en paroi est également bien estimé.

D'autre part, l'évaluation de la vitesse et de la température de frottement doit être faite en utilisant la définition (III-3-2): ceci est tout à fait clair sur les résultats obtenus pour k et $\widetilde{u"v"}$ (cf fig. 33 et 34).

Enfin, une augmentation sensible du nombre de Prandtl de la turbulence semble être une des conséquences majeures de la présence de fortes variations thermiques. Une évaluation expérimentale de ce nombre de Prandtl serait donc souhaitable et d'un point de vue pratique l'introduction, dans le modèle de turbulence, d'une loi de variation de ce nombre de Prandtl en fonction des variables du problème serait nécessaire.

On peut constater d'autre part que la réalisation de mesures de valeurs moyennes au sens de Favre, et non au sens de Reynolds, permettrait d'effectuer des confrontations plus correctes et nous autoriserait donc à tirer des conclusions plus précises de ces comparaisons.

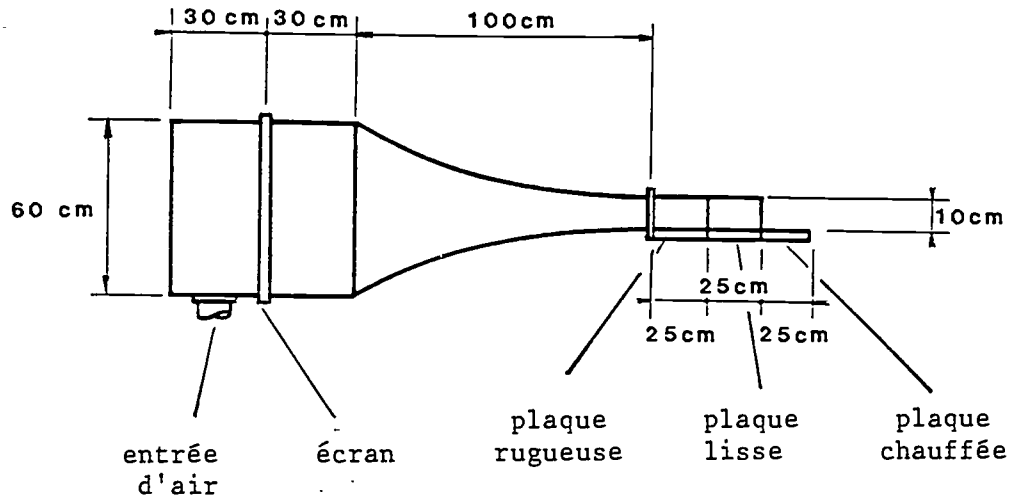


Fig 26 : COUCHE LIMITE SUR PLAQUE PLANE
DISPOSITIF EXPERIMENTAL

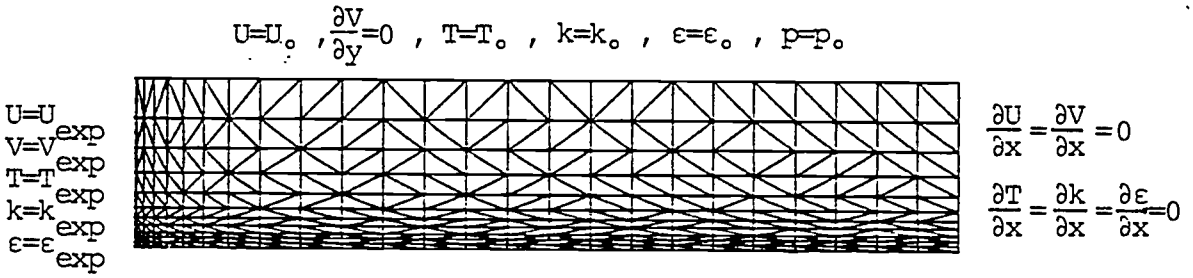


Fig 27 : MAILLAGE EN PRESSION
CONDITIONS AUX LIMITES

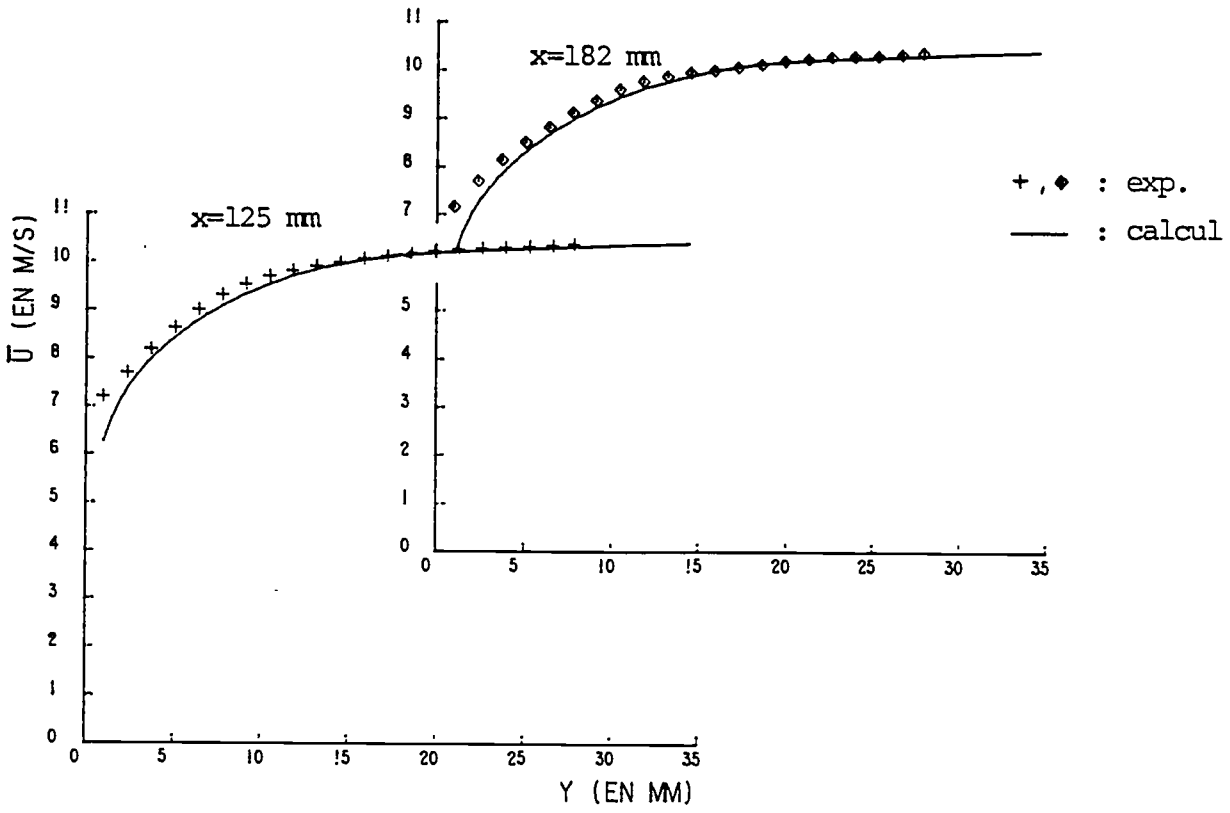


Fig 28 : COUCHE LIMITE ISOTHERME - PROFILS DE VITESSE

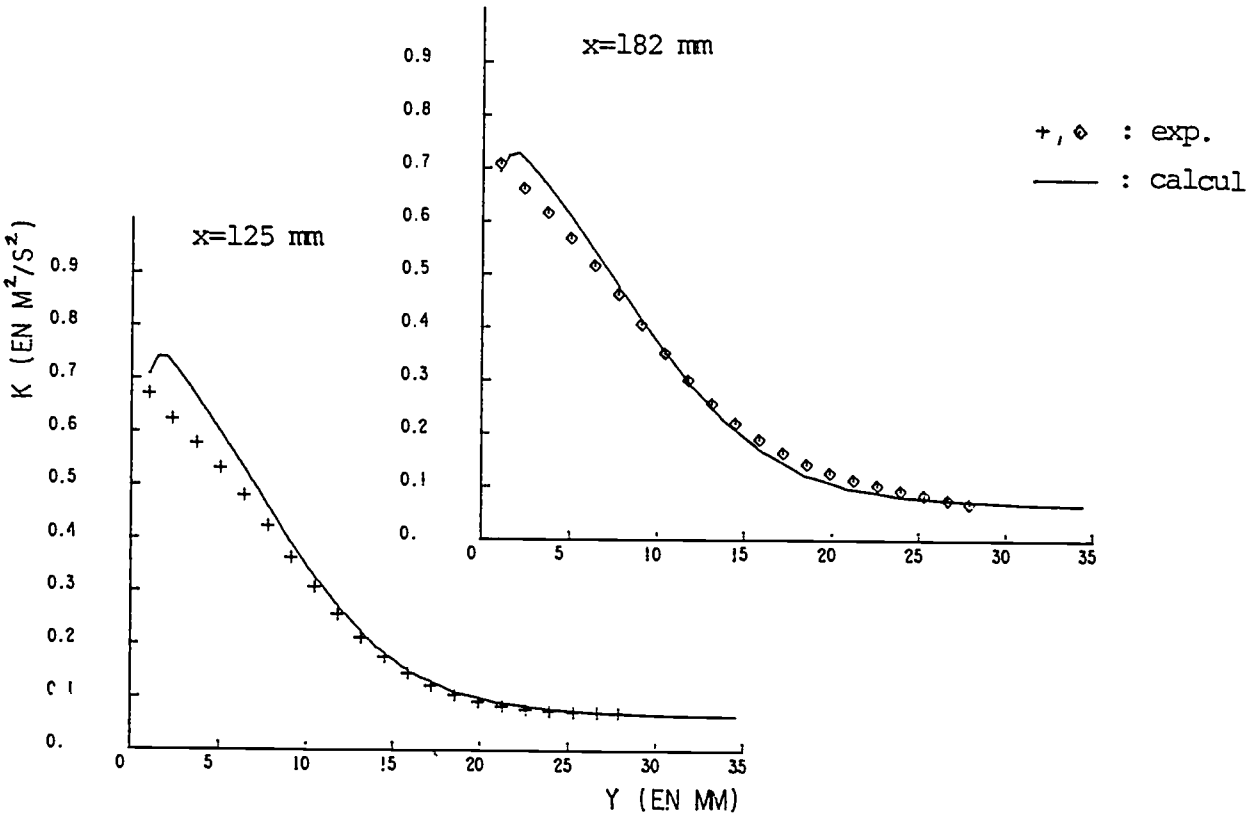


Fig 29 : COUCHE LIMITE ISOTHERME - PROFILS DE k

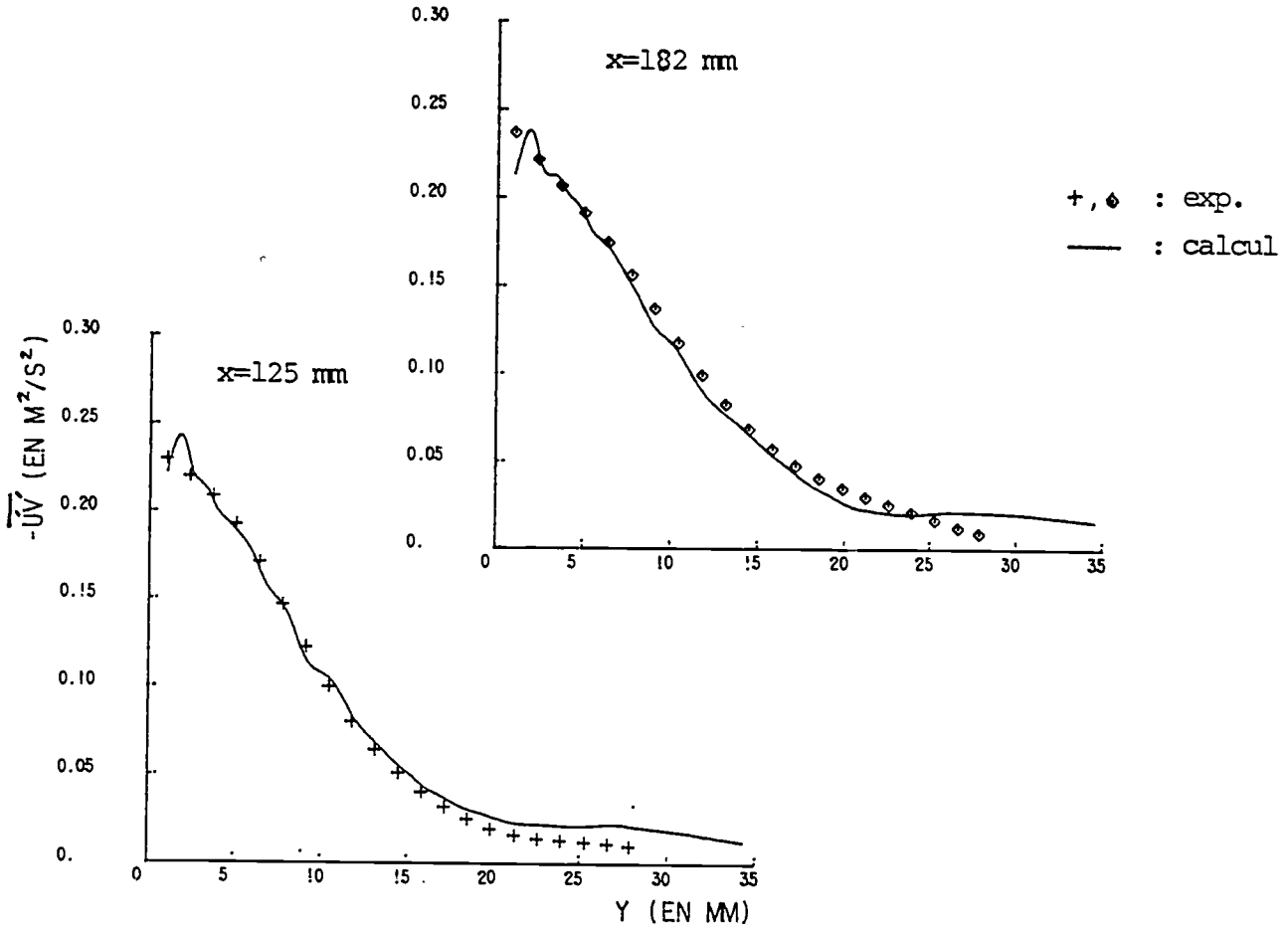


Fig 30 : COUCHE LIMITE ISOTHERME - PROFILS DE $\widetilde{uv}$

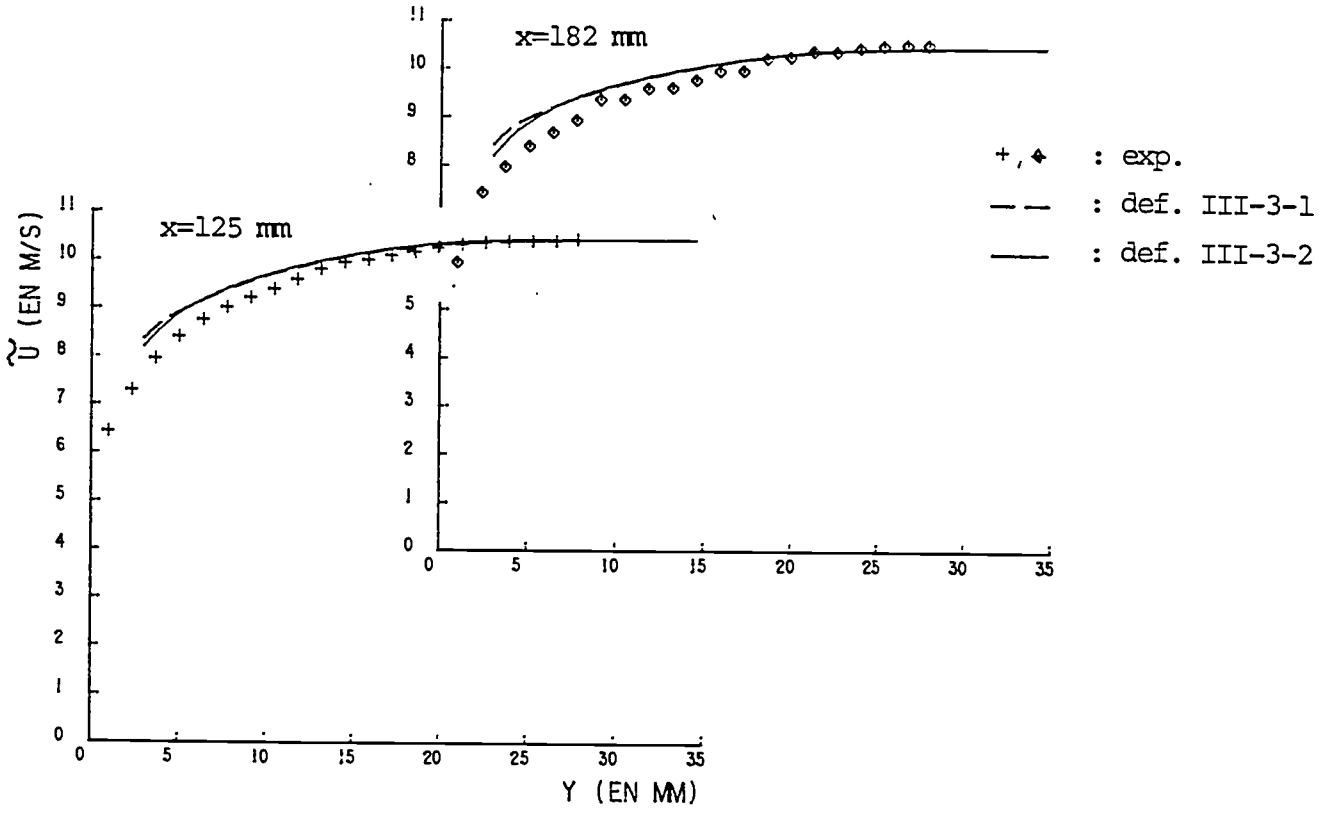


Fig 31 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE VITESSE

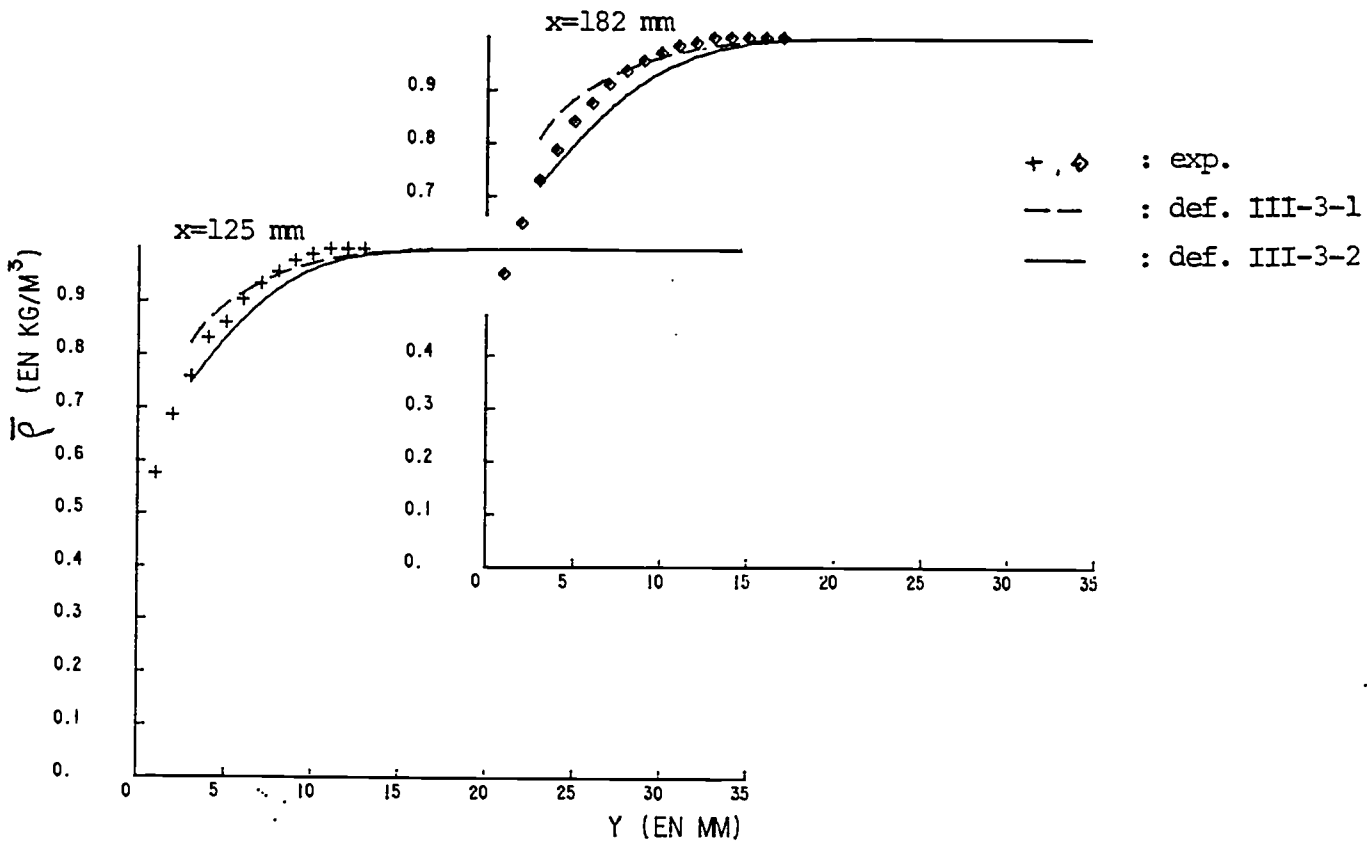


Fig 32 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE MASSE VOLUMIQUE

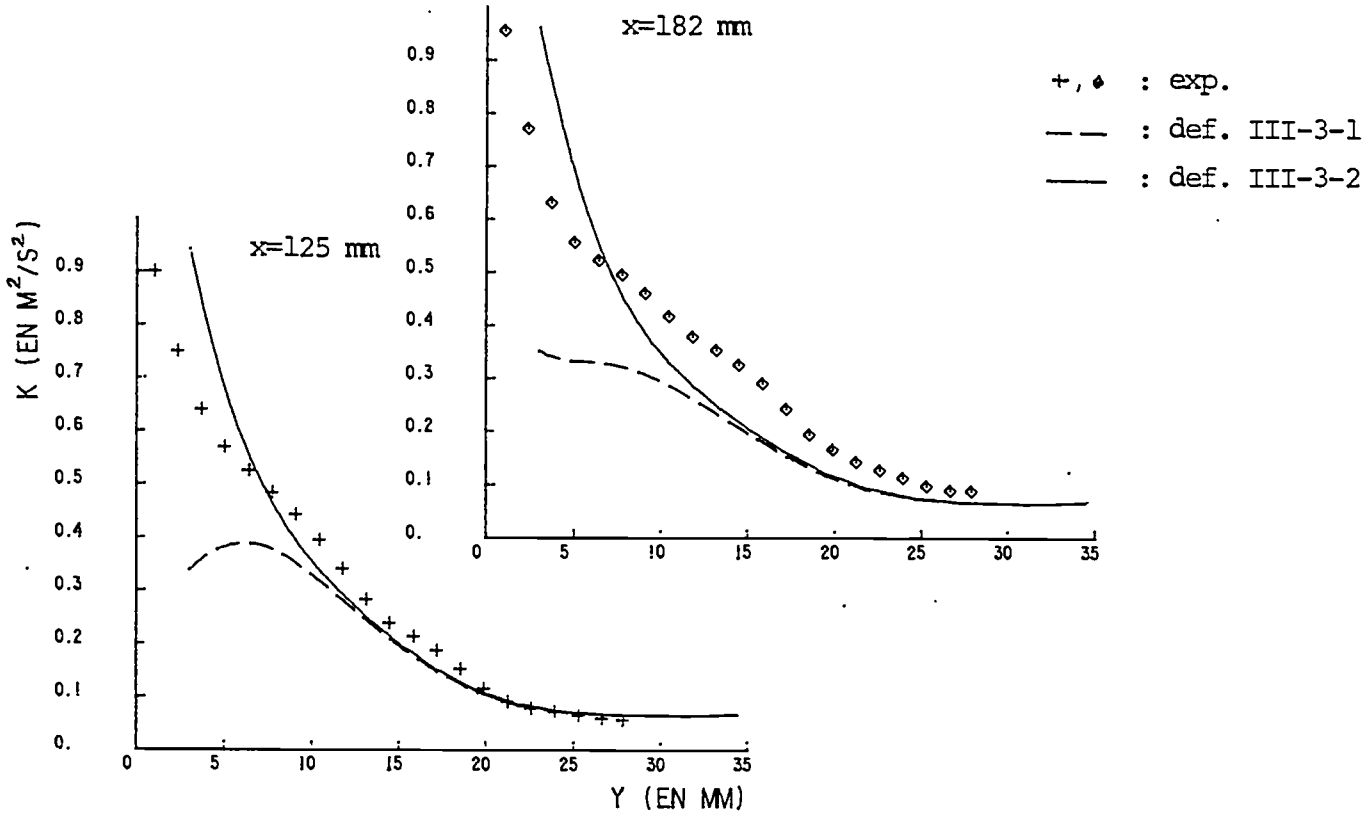


Fig 33 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE k

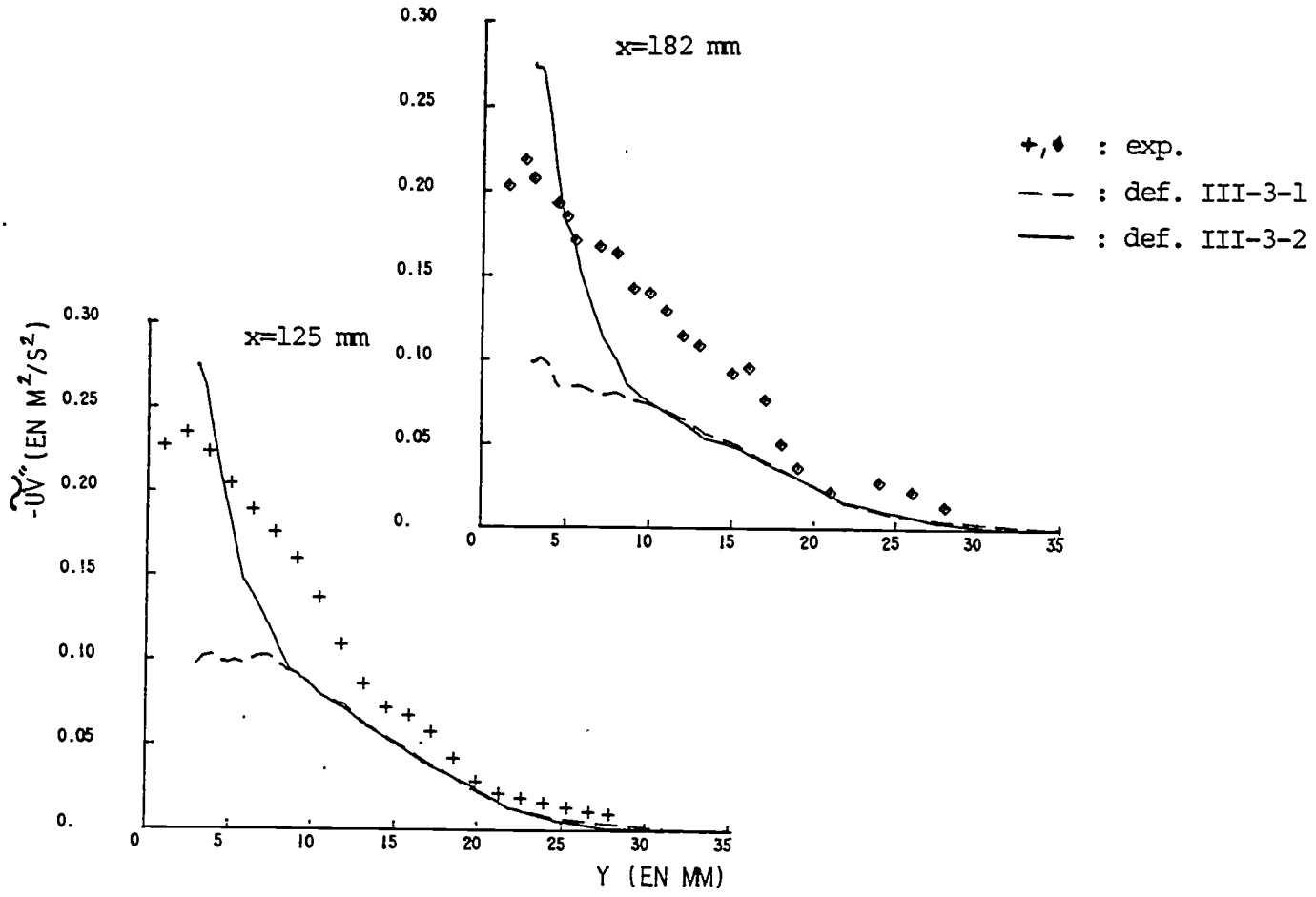


Fig 34 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE $\widetilde{uv}$

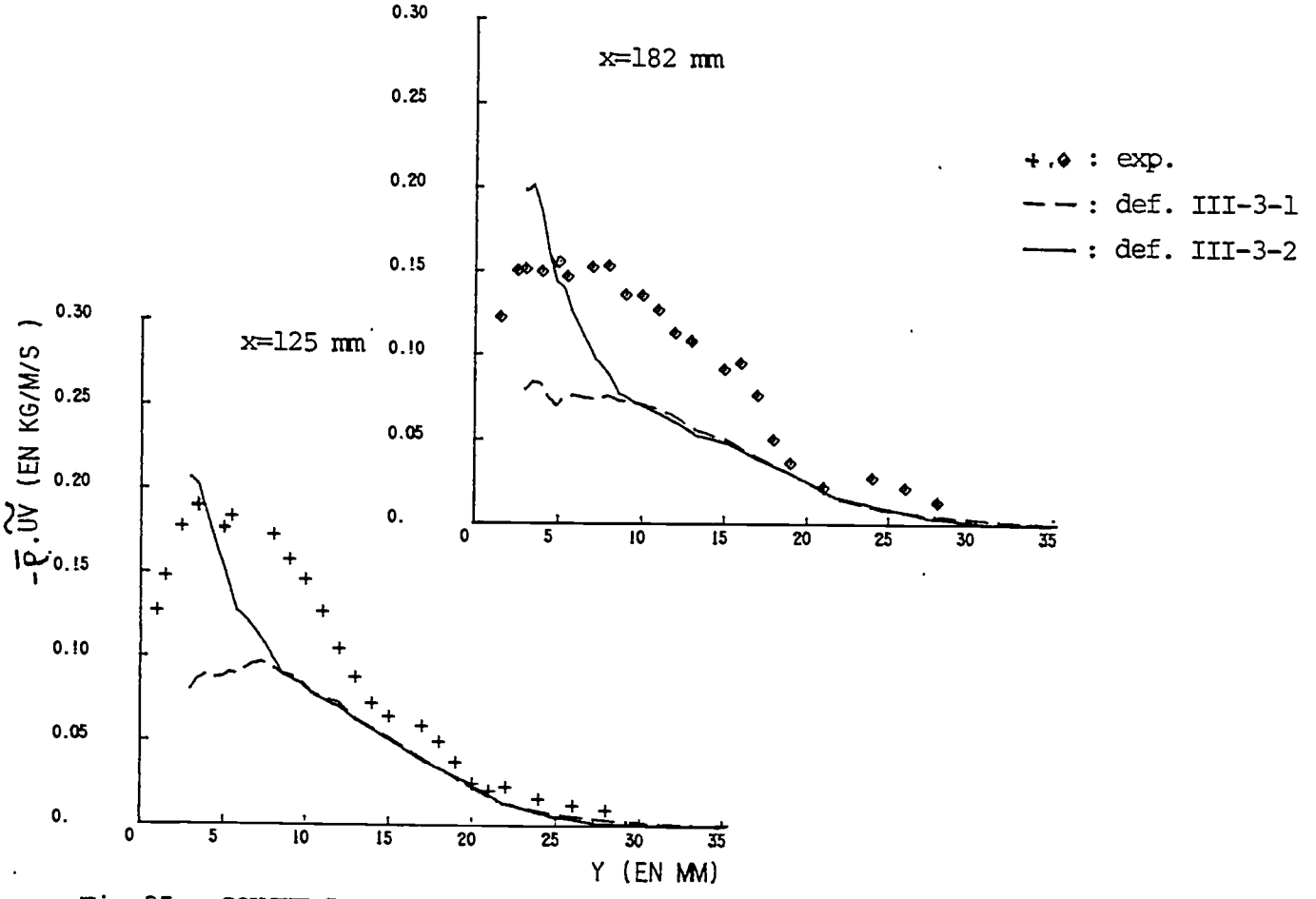


Fig 35 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE TENSIONS DE REYNOLDS

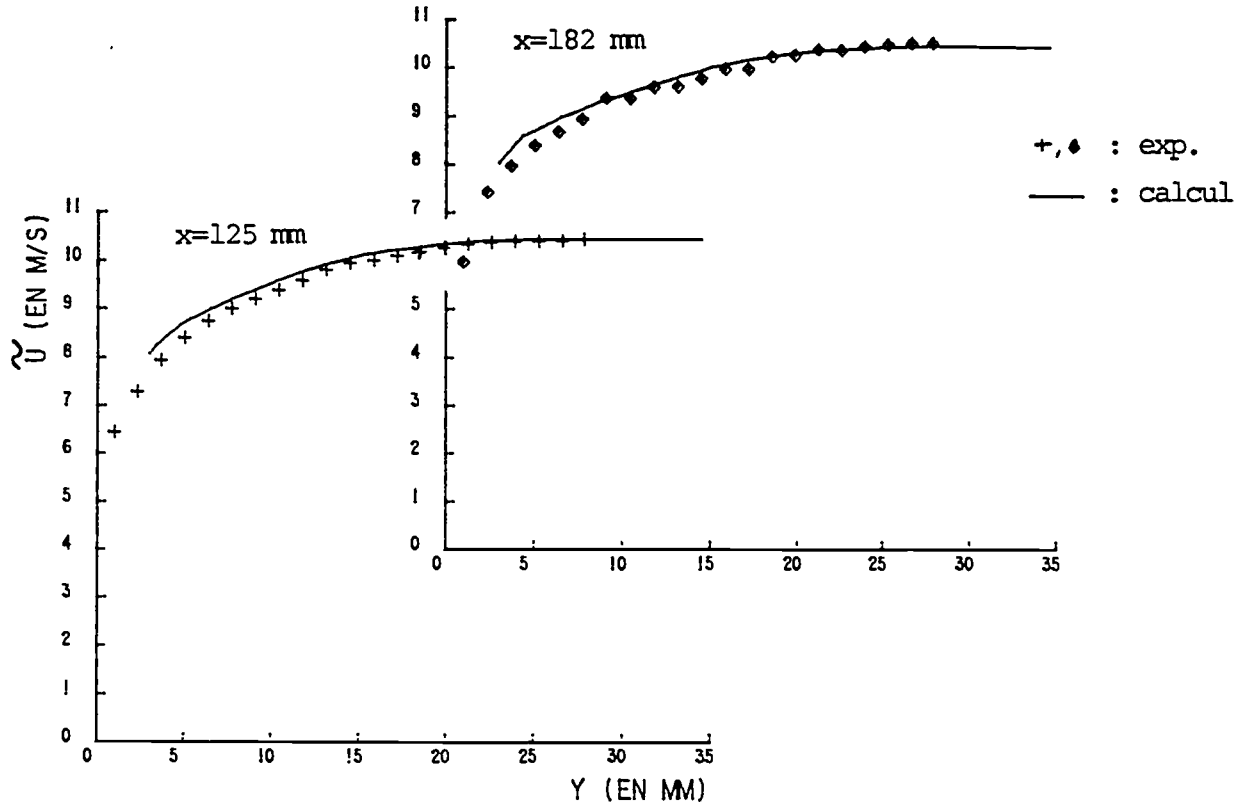


Fig 36 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE VITESSE (Pr_t=1.5)

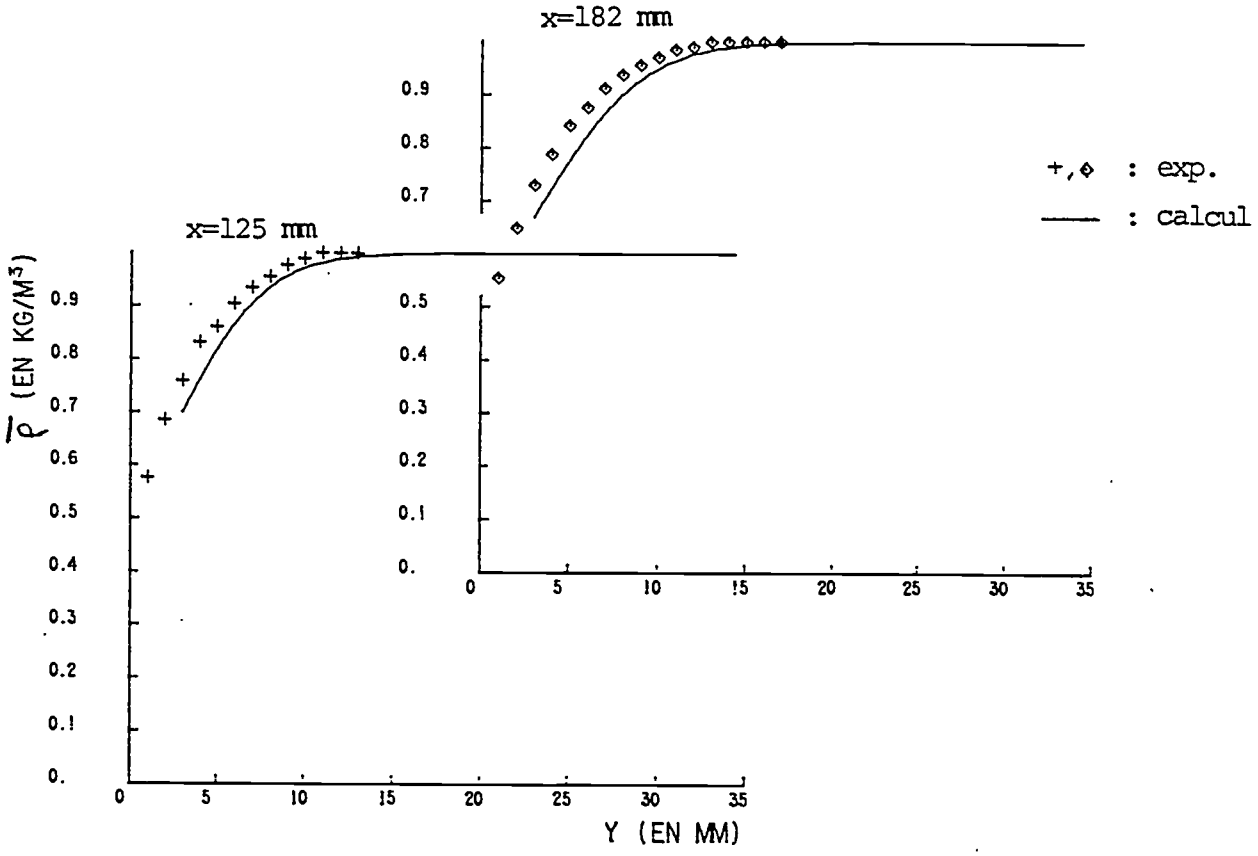


Fig 37 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE MASSE VOLUMIQUE (Pr_t=1.5)

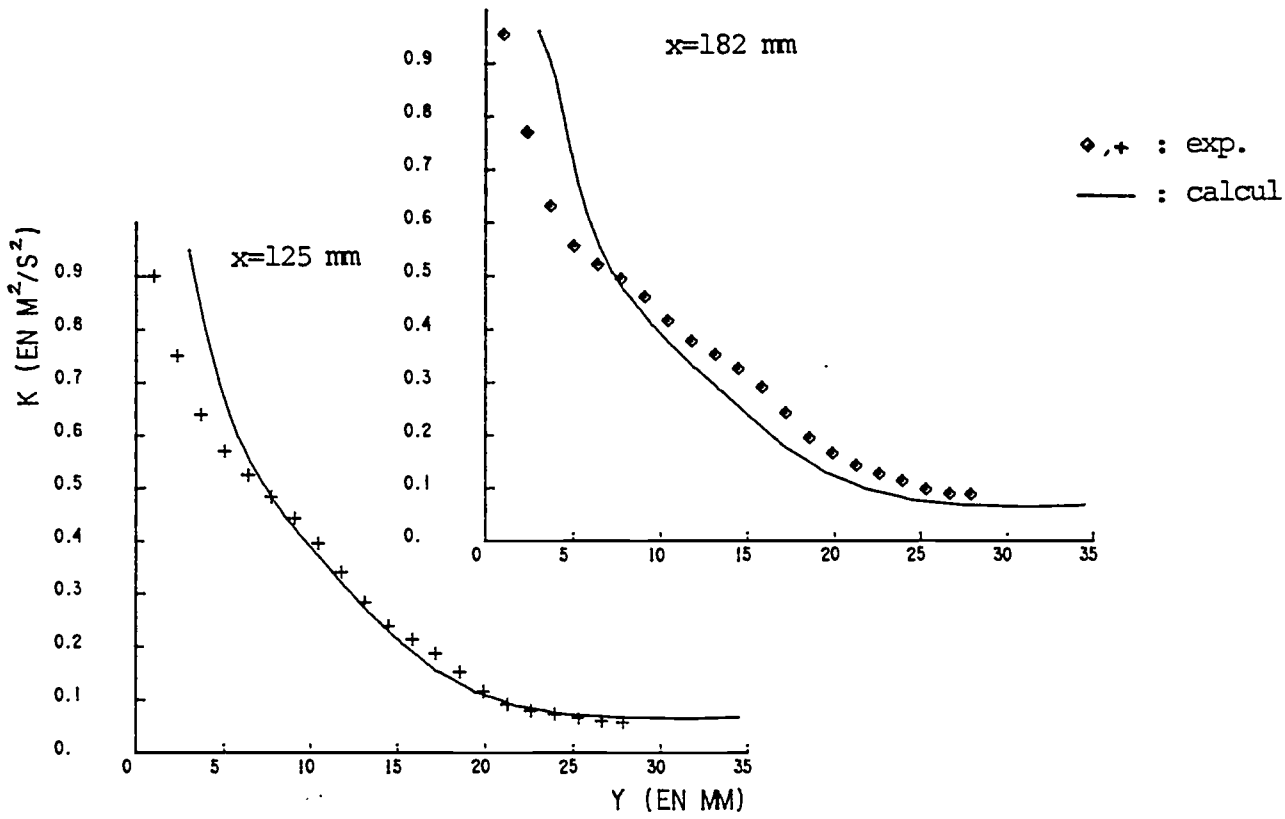


Fig 38 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE k (Pr_t=1.5)

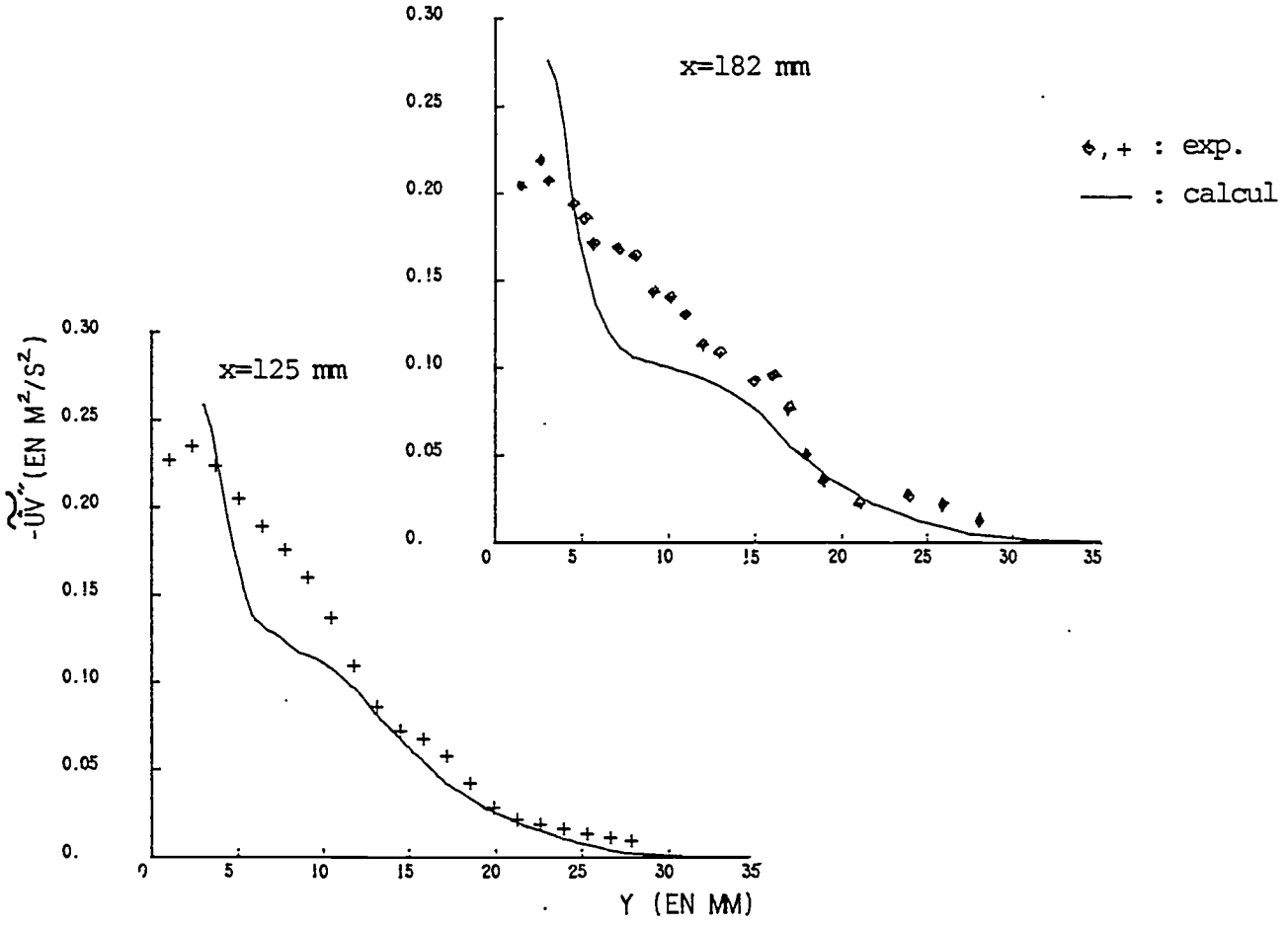
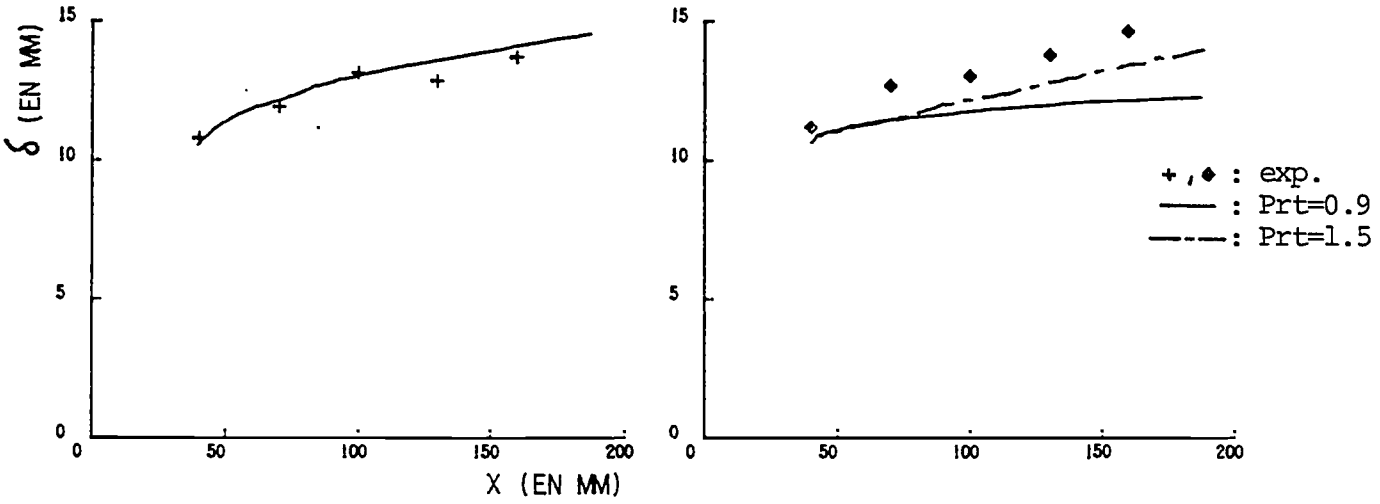
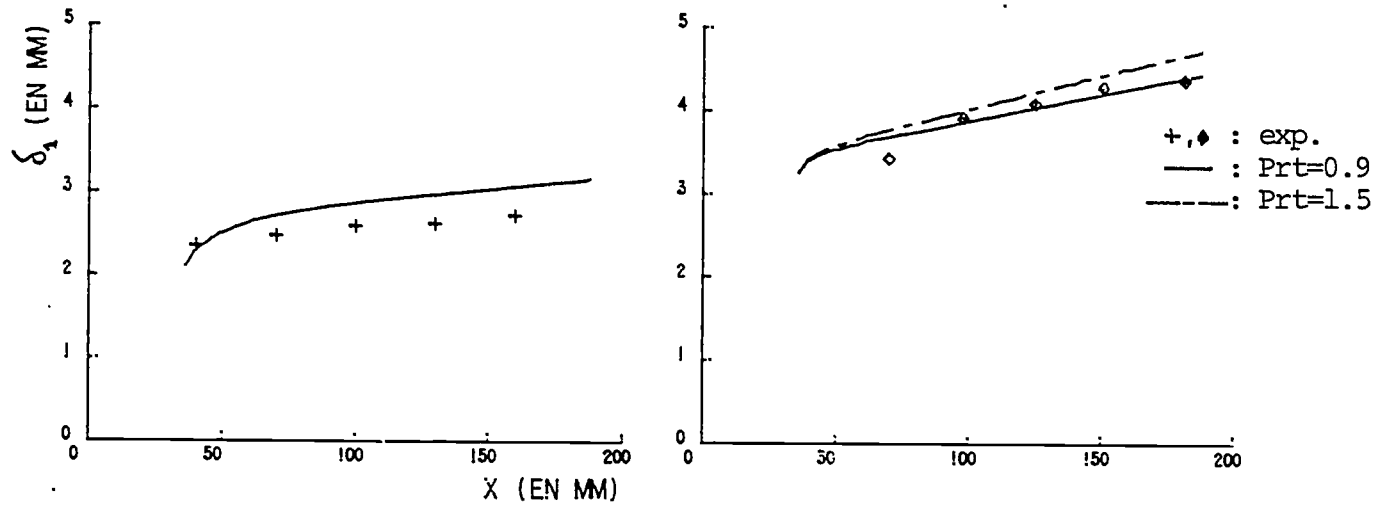


Fig 39 : COUCHE LIMITE CHAUFFEE - PROFILS DE $\widetilde{uv}''$ (Pr_t=1.5)



a/ cas isotherme b/ cas chauffé

Fig 40 : EPAISSEURS DE COUCHE LIMITE CINEMATIQUE



a/ cas isotherme b/ cas chauffé

Fig 41 : EPAISSEURS DE DEPLACEMENT

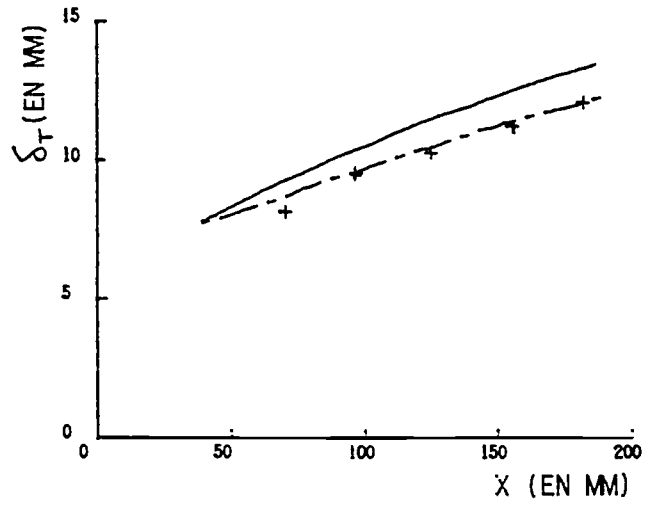


Fig 42 : EPAISSEUR DE COUCHE LIMITE THERMIQUE

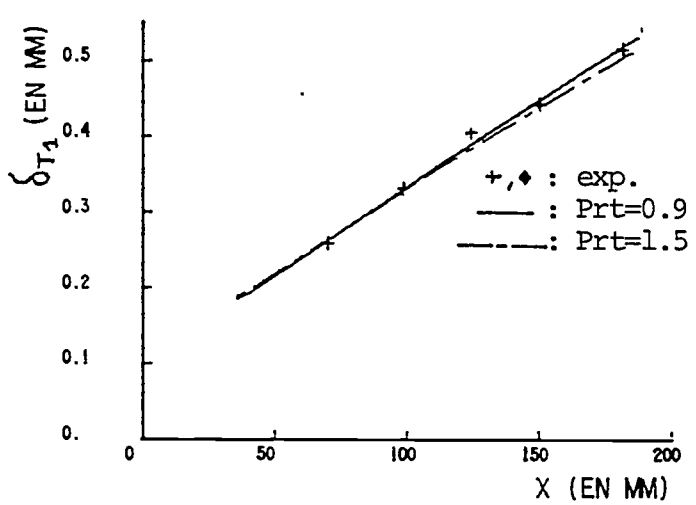


Fig 43 : EPAISSEUR D'ENTHALPIE

III-4: TETES DE CHAMBRE DE MOTEURS D'AVIONS:

Dans ce paragraphe, on met plus particulièrement l'accent sur les capacités de la méthode à traiter la cinématique du champ turbulent à l'intérieur de géomètries complexes. Les chambres de combustion, de part les différents éléments qui les constituent, se prètent tout particulièrement à une étude progressive des performances du code présenté. On a, en effet, d'une part les têtes de chambre où ont lieu des phénomènes purement cinématiques et, d'autre part les tubes à flamme, sièges de phénomènes de combustion et d'effets exothermiques trés importants. Nous abordons, ici, par voie numérique, l'étude des têtes de chambres de façon à donner une qualification industrielle aux travaux de développement de l'algorithme effectués en laboratoire.

La connaissance précise du champ aérodynamique à l'amont d'une chambre de combustion de moteur d'avion est indispensable pour avoir une estimation correcte des performances du moteur. La forme géométriquement trés compliquée de tels domaines d'étude rend l'utilisation des méthodes de discrétisation en différences finies peut satisfaisante et les études numériques menées jusqu'alors ont été faites sur des configurations trés simplifiées (cf Shyy [30]). L'emploi de la technique d'éléments finis permet, par contre, une description précise de la géomètrie et trouve donc ici pleinement sa justification. Les calculs présentés ont été effectués à la SNECMA et concernent plusieurs configurations réelles de têtes de chambre.

III-4-1: Description du problème:

De façon trés schématique, un moteur d'avion peut être décomposé en trois zones principales: la zone de compression, la zone de combustion et la zone de détente (cf fig. 44). La première d'entre elles, constituée généralement de plusieurs étages de compresseurs, fournit l'air sous haute pression qui est, ensuite, pour l'essentiel, injecté dans la chambre de combustion pour servir de comburant. L'étage de détente permet de récupérer

l'énergie fournie par la combustion. L'alimentation de la chambre de combustion se fait par l'intermédiaire d'un diffuseur et d'une "tête de chambre" dont une description schématique est donnée par la figure 45. Cette tête de chambre est constituée par:

. deux conduits, appelés contournements interne et externe, qui servent à alimenter la chambre à l'aval des injecteurs de carburant, au travers d'orifices appelés trous primaires et secondaires. Une partie de l'air passant dans ces deux conduits est utilisée pour refroidir la turbine à l'aval.

. plusieurs orifices situés à l'amont de la chambre de combustion dont certains servent à alimenter la chambre au niveau des injecteurs de carburant et les autres à refroidir le "fond de chambre".

. deux carénages , appelés "casquettes" , qui permettent d'assurer une bonne répartition du débit entre les différents orifices décrits précédemment et qui améliorent le comportement de l'écoulement autour de la chambre de combustion.

De plus, plusieurs séries d'orifices, tant au niveau des contournements interne et externe qu'au niveau du fond de chambre, permettent de refroidir les parois métalliques: ils sont appelés "films de refroidissement".

La conception d'une telle tête de chambre doit être faite en cherchant à optimiser les pertes de charge afin d'améliorer les performances globales du moteur. Elle doit, de plus, être faite en s'assurant de la stabilité de l'écoulement autour de la chambre de combustion. En effet, l'utilisation du moteur pour des régimes et des angles d'incidence variés, engendre l'existence de profils de vitesse parfois trés perturbés en entrée du diffuseur. On doit donc s'assurer que, quelles que soient les conditions de fonctionnement, la chambre est correctement alimentée en air frais et que les phénomènes d'extinction, dûs à un défaut d'alimentation, sont impossibles.

III-4-2: Conditions de calcul:

Comme nous l'avons vu, l'approche numérique développée ici est bidimensionnelle (plane ou axisymétrique). Or la configuration étudiée est, elle, tridimensionnelle puisque les injec-

teurs de carburant, en particulier, sont distribués de façon régulière, dans un plan radial, tout autour de la chambre de combustion.

Le calcul est alors réalisé dans un plan médian, situé entre deux injecteurs et passant par l'axe de symétrie. Les débits en fond de chambre, qui sont physiquement localisés au voisinage des injecteurs, sont répartis uniformément au travers d'une section équivalente permettant ainsi de construire un problème axisymétrique proche de la configuration réelle.

Le domaine de calcul est, d'autre part, limité, dans le sens axial, par un plan amont situé à l'entrée du prédiffuseur et par un plan aval situé juste avant les trous primaires.

A l'entrée, les valeurs du débit et le niveau d'énergie cinétique de turbulence sont déduits des conditions de fonctionnement du moteur. Des conditions d'entrée pour la dissipation, sont obtenues à partir d'une échelle de longueur de mélange (cf Shyy [30]). Le manque d'informations expérimentales en ce qui concerne le champ thermique, nous a conduit à effectuer des calculs en situation isotherme. La répartition du débit dans les différentes sections de sortie est déterminée par les valeurs imposées sur la pression: elles sont ici issues d'une procédure de calcul particulière.

III-4-3: <u>Procédures de calcul des conditions aux limites en pression:</u>

La répartition du débit dans les différentes sections de sortie est déterminée d'une part par la configuration géométrique du domaine d'étude et, d'autre part, par les valeurs de pression statique imposées à l'aval. Ces valeurs sont ici estimées à partir de la pression totale à l'intérieur de la chambre p_t et du coefficient de perte de charge (noté α_i) qui existe entre la section de sortie numéro i et la chambre. Un simple calcul monodimensionnel de perte de charge nous conduit, en effet, à la relation (cf Jeandel [31]):

$$p_{s_i} = p_t + (\alpha_i - 1).\frac{1}{2}.\rho_i.U_i^2$$

où p_{s_i}, ρ_i et U_i sont, respectivement, la pression statique, la masse volumique moyenne et la vitesse de débit dans la section i.

L'estimation des coefficients de perte de charge est ici déduite de mesures de vitesse et de pression moyennes en situation réelle.

La condition à la limite apparaît donc sous la forme d'une liaison non-linéaire entre la vitesse et la pression. Elle nécessite donc un processus itératif de convergence, les composantes de la vitesse satisfaisant, par ailleurs, une condition de Neumann homogène. Notons que ce dernier type de conditions est également appliqué sur les autres variables du problème (k et ε).

La répartition du débit ainsi obtenue peut être comparée aux résultats expérimentaux disponibles.

III-4-3: Présentation des résultats:

Une comparaison purement qualitative des résultats obtenus d'une part par le calcul (fig. 46a) et d'autre part par une visualisation de l'écoulement obtenue par analogie hydraulique (fig. 46b) montre que l'allure générale de l'écoulement est bien prédite. En particulier, les zones de recirculation juste à l'aval du diffuseur ont une taille trés proche de celle observée expérimentalement. D'autre part, le comportement de l'écoulement autour des casquettes semble correctement simulé. On remarque cependant que, à l'aval des casquettes, l'existence de zones de recirculation n'est pas mise en évidence par le calcul. Ceci est dû, en fait, aux conditions aux limites imposées: expérimentalement, le débit d'air ne peut s'écouler que par un orifice situé au centre du fond de chambre alors que numériquement, il est réparti sur une zone plus large, comme on peut le constater sur le tracé des lignes de courant.

On peut remarquer que l'utilisation de la technique d'éléments finis permet une description particulièrement précise des frontières du domaine d'étude.

La figure 47 montre une visualisation du maillage en vitesse utilisé pour l'étude d'une deuxième tête de chambre: il

est constitué par 2308 éléments. Les sections de sortie sont numérotées de 2 à 7 et elles correspondent :

. au contournement interne (section 2)

. au film de refroidissement interne (section 3)

. au passage central situé au niveau de l'injecteur de carburant (section 4)

. au passage destiné au refroidissement du fond de chambre (section 5)

. au film de refroidissement externe (section 6)

. au contournement externe (section 7)

Les coefficients de perte de charge entre chacune de ces sections et la chambre sont déduits de résultats expérimentaux. Le débit d'entrée est imposé dans la section 1. Des visualisations des lignes de courant et des lignes isobares sont données sur les figures 48 et 49. Elles font apparaître l'existence de zones de recirculation trés importantes de part et d'autre de la sortie du diffuseur. D'autre part, on constate un comportement assez "malsain" des lignes de courant au voisinage des casquettes. En effet, une partie de l'écoulement semblant se diriger vers le fond de chambre est déviée pour, finalement, passer par les contournements interne et externe. Un tel comportement n'est pas trés satisfaisant du point de vue aérodynamique et peut se traduire par l'existence de pertes de charge élevées.

Les études expérimentales menées sur cette configuration géomètrique nous permettent d'effectuer des validations quantitatives de nos résultats.

En particulier, l'évolution des pressions statiques le long des contournements interne et externe nous est donnée par des mesures effectuées le long des parois: la confrontation entre résultats expérimentaux et numériques est présentée sur la figure 50. Les valeurs de pression sont rendues sans dimension par l'utilisation des valeurs de pression statique (p_{ref}) et dynamique (q) en un point situé en sortie du diffuseur. L'abscisse curviligne, elle, est rendue sans dimension grâce à une valeur de référence notée s_{ref}. Pour le contournement interne, l'abscisse curviligne est comptée à partir du point I alors que, pour le contournement externe, elle est comptée à partir du point O (cf figure 47). La comparaison des résultats expérimentaux et numériques est assez satisfaisante, en particu-

lier pour le contournement interne.

Des comparaisons entre les débits dans les différentes sections de sortie sont données sur le tableau 51. On remarque que l'accord avec l'expérience est particulièrement bon: le code de calcul nous permet donc de prévoir, de façon précise, la répartition du débit en sortie, la description géométrique fine permettant une bonne détermination des pertes de charge autour des casquettes . La méthode d'éléments finis apporte ainsi une amélioration trés sensible par rapport aux méthodes classiques de volumes finis (cf Shyy [30], Syed [32], Dutoya [33]).

Dans une seconde expérience numérique, la géomètrie des "casquettes" a été modifiée de façon à améliorer l'allure des lignes de courant. La nouvelle géomètrie ainsi que le maillage de calcul utilisé (3120 éléments) sont donnés sur la figure 52. Les casquettes ont été allongées et renforcées à leur extrémité afin d'assurer une meilleure résistance aux efforts subis. Les visualisations des lignes de courant et des lignes isobares sont données sur les figures 53 et 54. On note une meilleure configuration de l'écoulement au voisinage des casquettes. D'autre part, les zones de recirculation à l'aval du diffuseur ont été réduites de façon trés sensible. Les diminutions de pertes de charge constatées expérimentalement confirment ces résultats.

III-4-5: Conclusion:

Les calculs présentés ici montrent l'aptitude de la méthode d'éléments finis à décrire, de façon précise, des domaines géométriquement complexes. Le modèle de turbulence et la méthode numérique utilisées permettent, de plus, d'accéder aux caractéristiques principales de l'écoulement. Cette méthode employée à la SNECMA pour l'optimisation et la conception des têtes de chambre, s'avère trés utile et des calculs sont en cours permettant de traiter complètement l'aérodynamique à l'extérieur de la chambre de combustion, c'est-à-dire dans tout le domaine décrit par la figure 45. D'autre part, des études de stabilité de l'écoulement sont possibles par modification du profil de vitesse à l'entrée. Le domaine d'application de cette méthode est donc vaste et peut être étendu à d'autres problèmes et à d'autres configurations géomètriques.

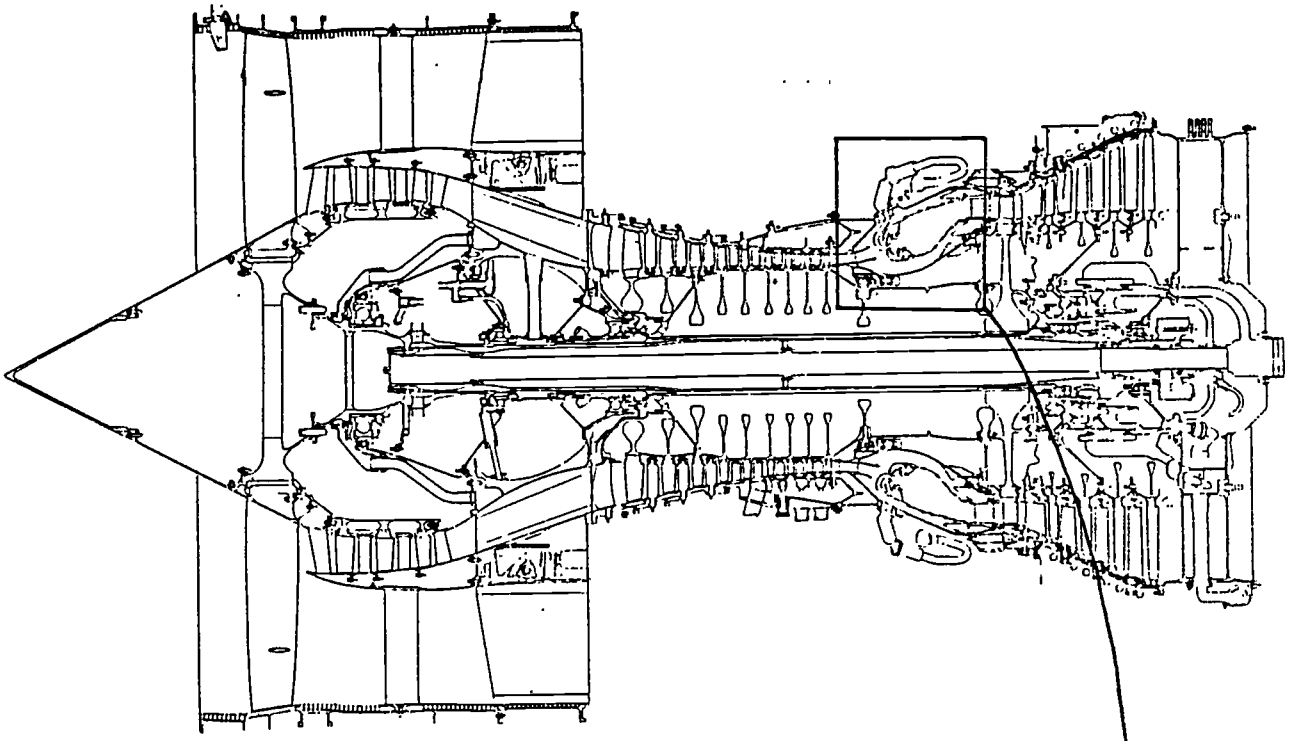


Fig 44 : COUPE D'UN MOTEUR D'AVION (CFM 56-3)

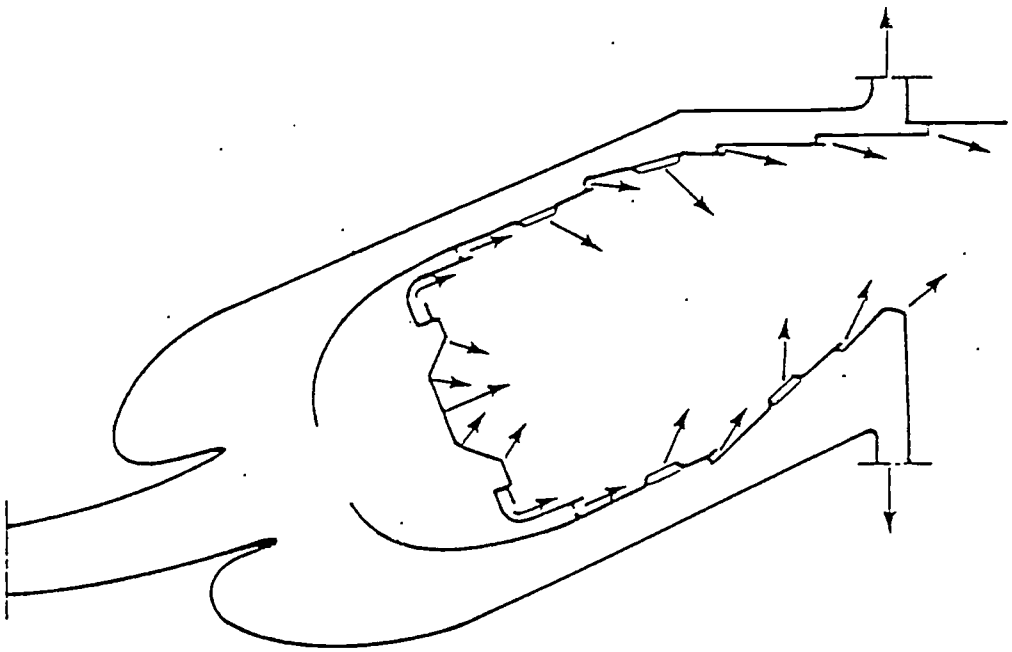
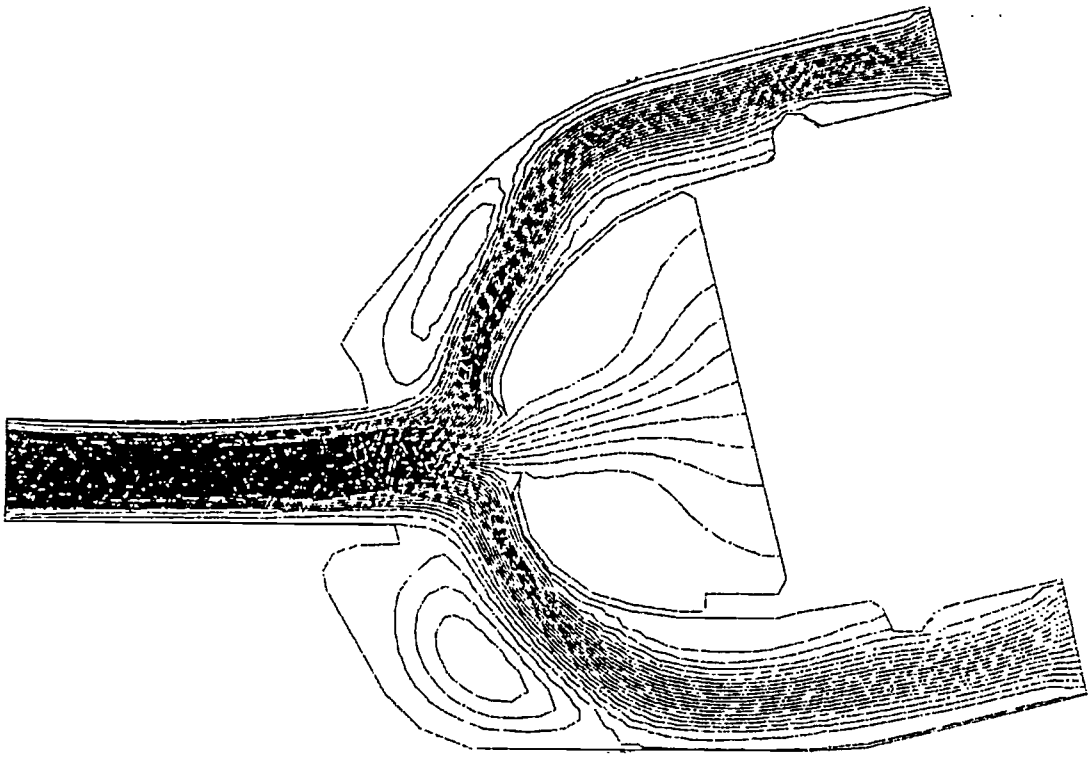
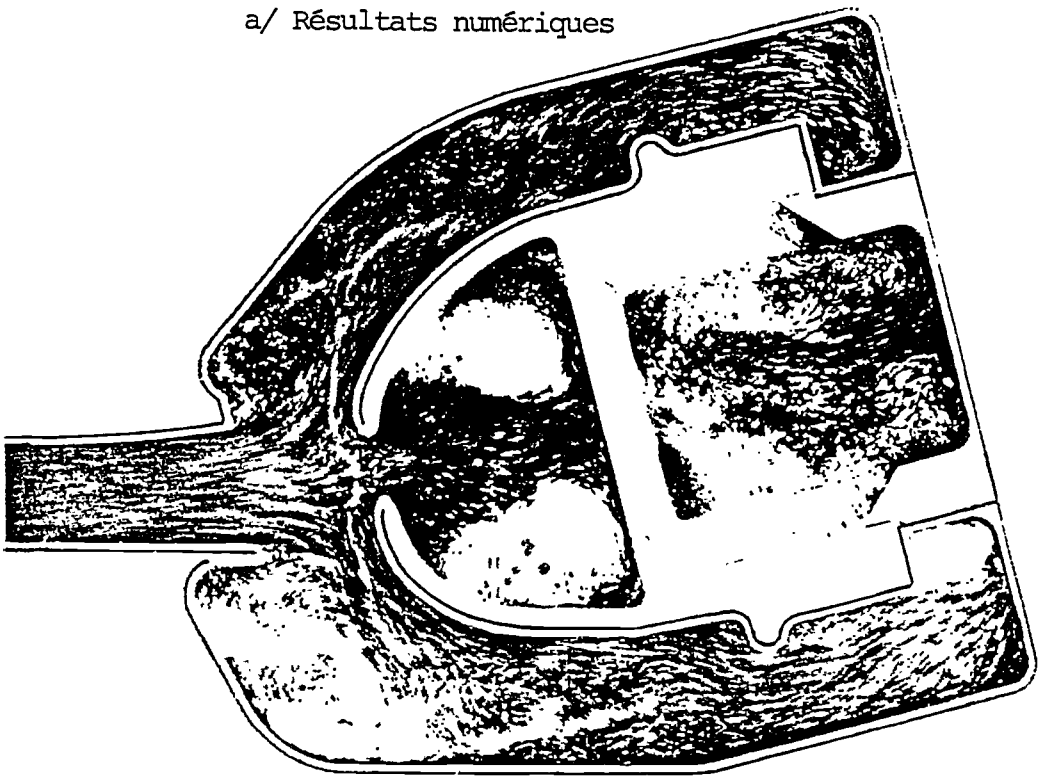


Fig 45 : SCHEMA D'UNE TETE DE CHAMBRE
DE MOTEUR D'AVION



a/ Résultats numériques



b/ Analogie hydraulique

Fig 46 : COMPARAISON ENTRE RESULTATS NUMERIQUES

ET ANALOGIE HYDRAULIQUE

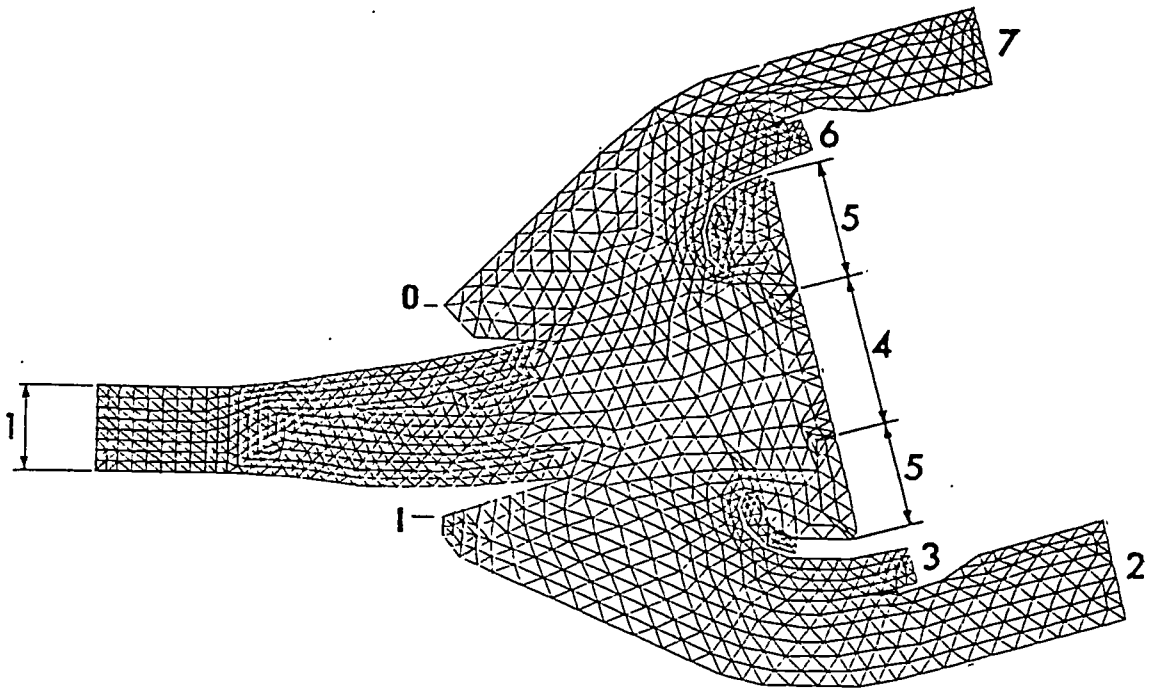


Fig 47 : TETE DE CHAMBRE - MAILLAGE EN VITESSE

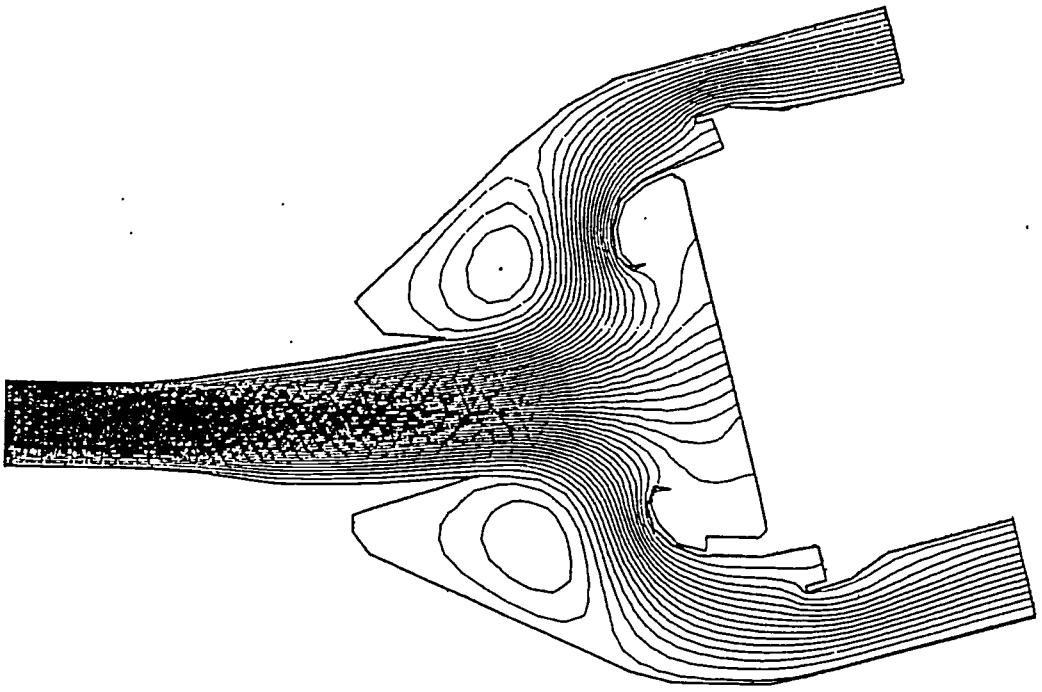


Fig 48 : LIGNES DE COURANT

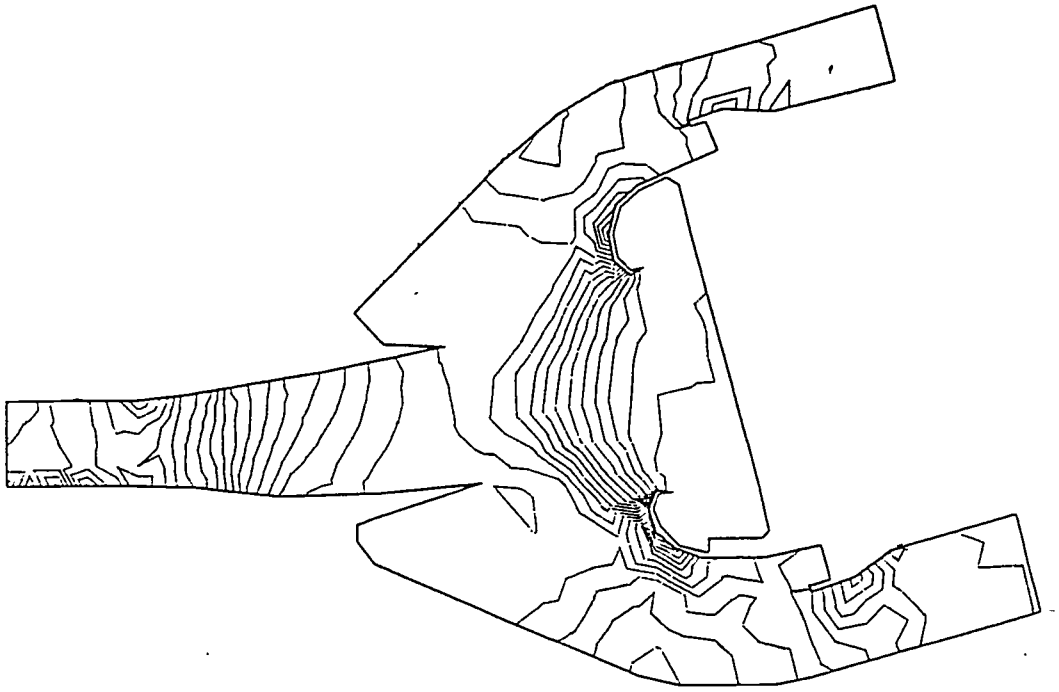
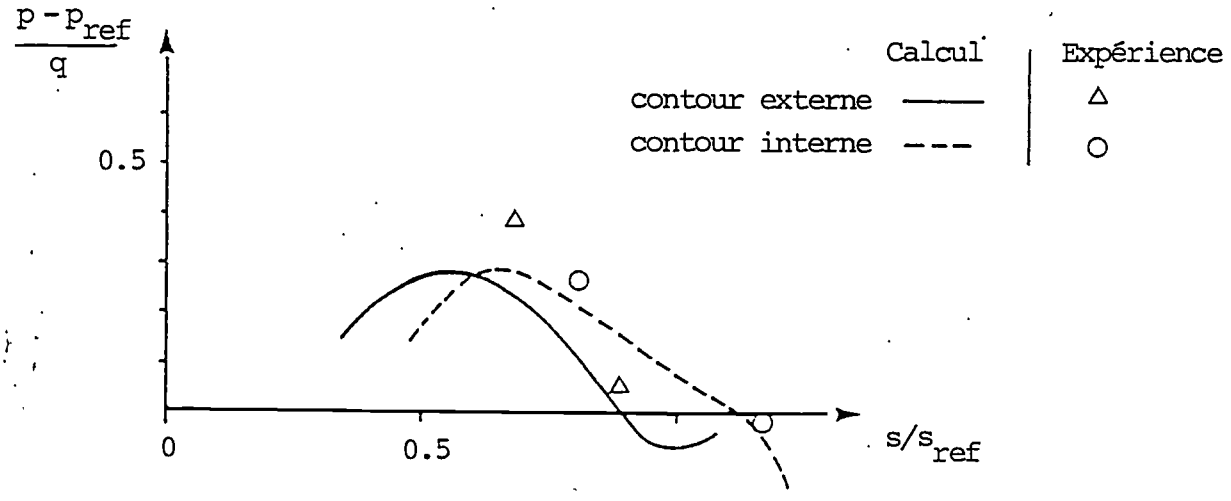


Fig 49 : LIGNES ISOBARES



origines des abscisses : O pour le contournement externe
I pour le contournement interne

p_{ref} : pression statique en sortie diffuseur

q : pression dynamique en sortie diffuseur

Fig 50 : EVOLUTION DES PRESSIONS STATIQUES
LE LONG DES PAROIS

	expérience	calcul
section 2	31.7	30.7
section 3	2.8	3.3
section 4 5	28.1	27.2
section 6	4.3	5.1
section 7	32.7	33.6

Fig 51 : REPARTITION DU DEBIT EN SORTIE
(comparaisons expérience-calcul)

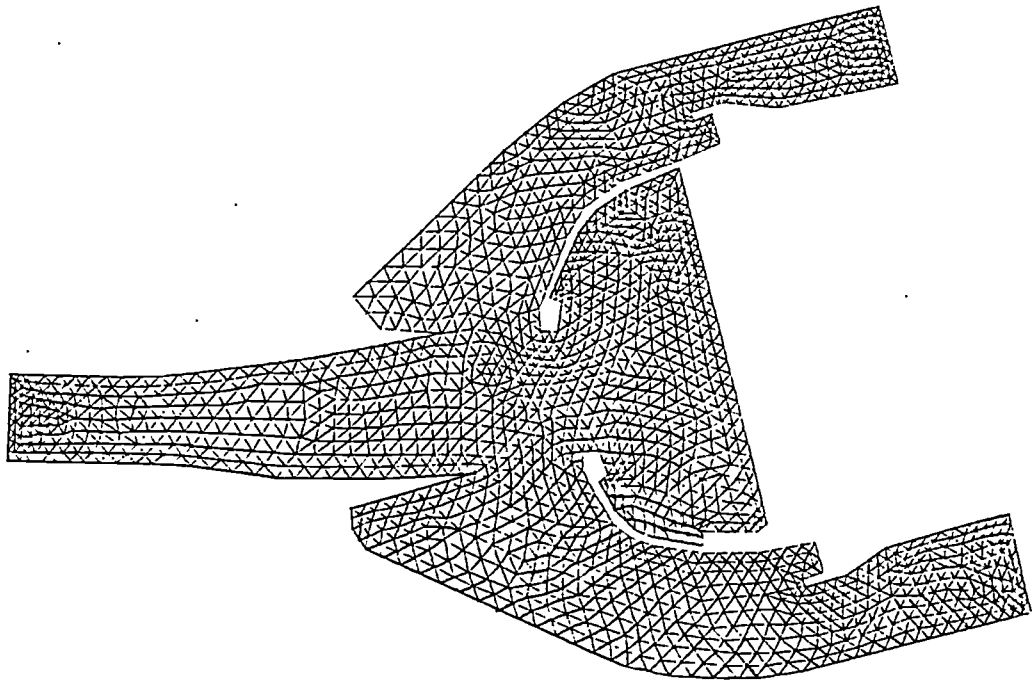


Fig 52 : TETE DE CHAMBRE - GEOMETRIE MODIFIEE
MAILLAGE EN VITESSE

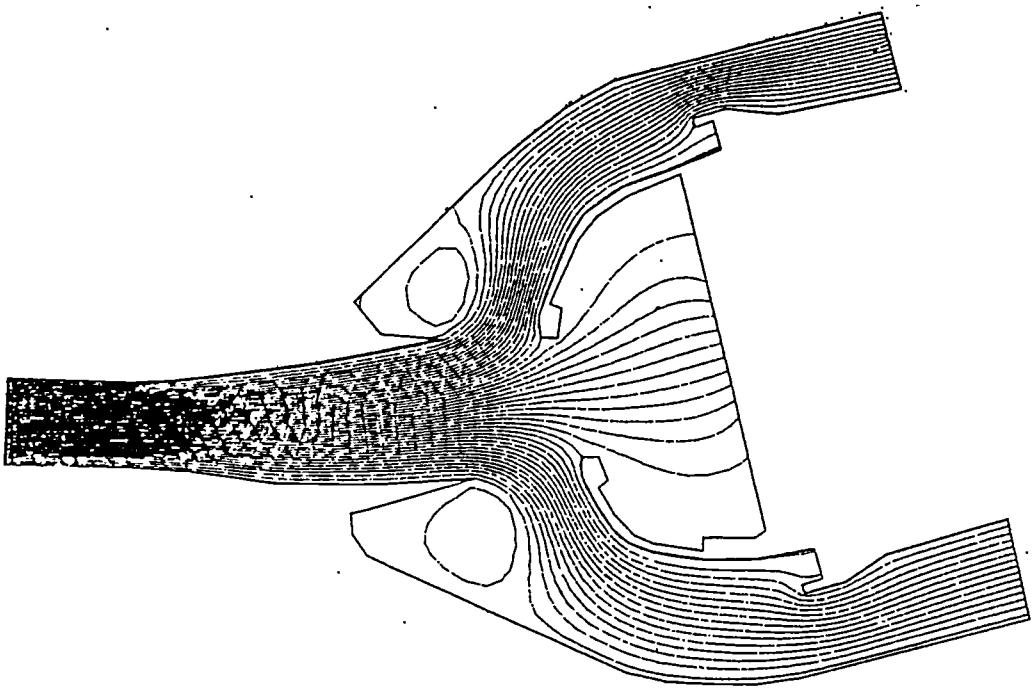


Fig 53 : GEOMETRIE MODIFIEE - LIGNES DE COURANT

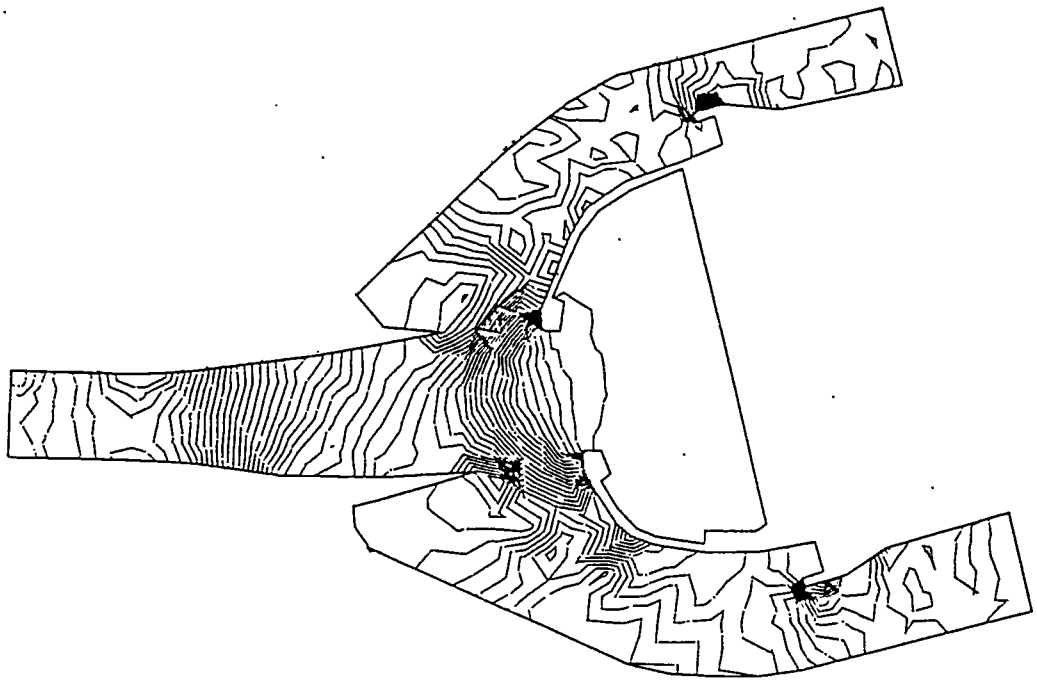


Fig 54 : GEOMETRIE MODIFIEE - LIGNES ISOBARES

CONCLUSION

BILAN DES TRAVAUX EFFECTUES:

Rappelons, tout d'abord, les deux buts principaux poursuivis dans le cadre de cette étude, à savoir:

. la modélisation des écoulements turbulents soumis à de fortes variations de température

. la mise en place d'un code de calcul capable de traiter, dans ce cadre d'approximations, des problèmes industriels comportant des domaines d'étude complexes.

Les équations classiques de conservation, écrites pour un fluide "dilatable" ($\rho=f(T)$), sont moyennées aprés décomposition des différentes variables en partie moyenne et partie fluctuante. Le système d'équations ainsi obtenu est fermé grâce à une hypothèse de viscosité de turbulence et par l'introduction de deux équations supplémentaires d'évolution: l'une pour l'énergie cinétique de turbulence et l'autre pour son taux de dissipation. Au voisinage des parois, des lois d'équilibre local sont utilisées.

La résolution numérique du système fermé d'équations est effectuée grâce à un schéma de discrétisation en temps semi-implicite et grâce à l'écriture d'une formulation faible du problème. La discrétisation spatiale repose alors sur la construction de deux maillages triangulaires du domaine d'étude: l'un pour la pression et l'autre pour les autres variables du problème (quantité de mouvement, température, énergie cinétique de turbulence et dissipation). Les lois d'équilibre en paroi sont utilisées pour rétablir des conditions aux limites de Dirichlet pour chaque variable, hormis la température pour laquelle une condition de flux est utilisée.

Parmi d'autres expériences numériques (couche limite, conduite, jets, ...), l'application du code à une configuration isotherme (écoulement à l'aval d'un élargissement brusque axisy-

métrique) a permis de valider la méthode numérique et de rappeler les limitations du modèle de turbulence k-ε.

Des expériences où de fortes variations de température existent ont ensuite été simulées numériquement. La première concerne l'étude d'un jet annulaire pouvant être fortement chauffé à sa base (expérience de Bahraoui [3]). La deuxième est relative à une couche limite sur plaque plane (expérience de Ng [4]). Dans les deux cas, on constate que le modèle proposé permet de rendre compte, de façon à peu prés satisfaisante, de l'évolution des quantités moyennes (vitesse et température), les résultats obtenus pour les grandeurs caractéristiques de la turbulence faisant apparaître des écarts plus sensibles avec l'expérience. L'amélioration de ces résultats passe sans doute par l'utilisation de modèles plus fins. Pour ce qui concerne la turbulence thermique, on peut alors reconsidérer l'évaluation de corrélations $\overrightarrow{\tilde{u}}"T"$ par l'introduction d'une équation d'évolution modélisée ou reprendre la modélisation du champ thermique par l'intermédiaire des quantités scalaires que sont la variance $\tilde{T}"^2$ et son taux de dissipation ε_θ. La sensibilité importante du nombre de Prandtl de la turbulence aux écarts de température ne pouvant pas être prise en compte par le modèle actuel, on est, en effet, contraint d'introduire des échelles caractéristiques supplémentaires.

Pour ce qui concerne les conditions aux limites au voisinage des parois, prises ici dans la zone d'équilibre de la couche limite, on a noté qu'il était préférable de s'appuyer sur un équilibre des corrélations $\overrightarrow{\tilde{u}}"\overrightarrow{\tilde{v}}"$ (et non $\bar{\rho}.\overrightarrow{\tilde{u}}"\overrightarrow{\tilde{v}}"$) pour estimer une vitesse de frottement.

Enfin, une analyse plus fine de l'influence de fortes variations de température sur l'évolution de la turbulence nécessite la réalisation d'études expérimentales permettant de mettre en correspondance les quantités calculées et les quantités mesurées, en fournissant toutes les conditions d'entrée et aux frontières nécessaires au calcul (moyennes au sens de Favre, énergie cinétique de turbulence, corrélations d'ordre 2, échelles de turbulence,...).

La capacité des méthodes d'éléments finis à traiter des problèmes plus industriels a, ensuite, été mise en évidence

grâce aux travaux réalisés sur les têtes de chambre de moteurs d'avion. On a pu, en particulier, vérifier la convergence des processus itératifs utilisés pour le traitement des conditions aux limites de parois et des conditions de pression à l'aval. Un premier pas a également été accompli dans le sens d'une utilisation du code de calcul en vue de l'optimisation des géomètries de têtes de chambre.

On peut constater que l'emploi de la méthode d'éléments finis s'accompagne d'un coût de calcul sensiblement plus élevé que les méthodes classiques (différences finies). Cet inconvénient peut cependant être atténué par le développement de méthodes automatiques d'optimisation de maillage, permettant de réduire le nombre de degrés de liberté utiles.

PERSPECTIVES DE DEVELOPPEMENT:

Les perspectives de développement du code de calcul concernent d'une part les modèles physiques utilisés et, d'autre part, les méthodes numériques employées.

Comme nous l'avons dit précédemment, l'amélioration des résultats passe par l'utilisation d'un modèle de turbulence thermique plus fin. Le modèle cinématique doit, lui aussi, être amélioré: on peut alors envisager d'utiliser des équations d'évolution relatives aux moments d'ordre 2 (composantes du tenseur de Reynolds). Il faut cependant émettre quelques réserves sur l'utilisation d'un tel modèle en raison du nombre de paramètres à ajuster et en raison de l'augmentation des coûts de calcul. D'un point de vue pratique, on pourrait se contenter d'utiliser un modèle algébrique pour les composantes du tenseur de Reynolds, couplé à un modèle k-ε (cf Rodi [22], Warfield [34]). D'autre part, les lois classiques d'équilibre en paroi, déduites d'hypothèses de couche limite, ne sont, en toute rigueur, pas applicables à des écoulements pariétaux quelconques. On doit ainsi, tenter de s'affranchir de l'utilisation de telles lois. L'utilisation de modèles simplifiés dans ces zones, devrait permettre d'effectuer le calcul jusqu'à la paroi. On doit tout de même souligner le caractère empirique de ces lois de raccordement, généralement issues du modèle de viscosité de Van Driest [35].

L'application du code aux écoulements à nombre de Mach plus élévé est également une extension nécessaire. On doit alors considérer l'équation d'état complète ainsi que des termes supplémentaires dans l'équation d'énergie. De même que les modèles physiques, les modèles numériques utilisés doivent alors être validés dans de telles situations.

L'extension du domaine d'application du code passe d'une part par la diminution du temps de calcul et, d'autre part, par la minimisation de l'espace mémoire nécessaire. Le premier de ces deux objectifs peut être atteint avec des méthodes de préconditionnement de l'algorithme itératif en pression. Simultanément, l'introduction de méthodes itératives de résolution des systèmes linéaires permettra de réduire trés sensiblement l'espace utilisé en mémoire de l'ordinateur.

Il faut aussi rappeler que l'amélioration de la précision des calculs nécessite le développement de méthodes capables de réduire au maximum la diffusion numérique artificiellement introduite par les méthodes de "décentrement". On peut, en particulier, envisager d'utiliser un schéma en temps d'ordre plus élevé (cf [36]) ou des méthodes particulières de traitement des termes convectifs. Une méthode possible est l'utilisation de "pseudo-éléments finis" (cf [37]): le calcul du terme convectif est alors effectué par une technique proche des méthodes de volumes finis, c'est-à-dire par bilan sur une cellule élémentaire correspondant au support de chaque noeud (ensemble des éléments dont le noeud considéré est un des sommets).

La méthode d'éléments finis semble , d'autre part, bien adaptée au développement des techniques d'adaptation de maillage. Ainsi, on peut envisager de mettre au point des techniques de raffinement local, le critère de raffinement prenant, par exemple, en compte une estimation de l'erreur commise localement par rapport à la solution exacte. On peut également considérer les méthodes permettant de suivre l'évolution d'un domaine déformable dans le temps ou permettant de suivre l'évolution de la solution par positionnement optimum des points de calcul (suivi d'un front ou d'un choc...).

Enfin, l'extension du code au calcul d'écoulements tridimensionnels est envisagée. Elle ne peut cependant êtr

effectuée que dans le cadre des améliorations évoquées précédemment (temps de calcul et espace mémoire). On peut déjà noter les calculs tridimensionnels en convection naturelle effectués par Carrière [38] dans le cadre des approximations de Boussinesq, et les travaux menés par ailleurs sur les équations d'Euler en présence de chocs [37]. Dans le cas des écoulements turbulents, un vaste travail de validation des modèles reste à faire et un niveau approprié de description de la turbulence reste à définir.

BIBLIOGRAPHIE DE LA TROISIEME PARTIE

[1] : R. T. SZCZEPURA : "Flow characteristics of an axisymmetric sudden pipe expansion: results obtained from turbulence studies rig. Part 1: Mean and Turbulence velocity results". CEGB Report TPRD/B/0702/N85 (1985).

[2] : A. I. R. H : Compte-rendu de la 12eme réunion du groupe de travail sur la modélisation fine des écoulements. EDF Chatou - Rapport à paraître (1987).

[3] : E. M. BAHRAOUI : "Contribution à l'étude d'un jet turbulent axisymétrique en présence de forts gradients de température". Thèse d'état - Université d'Aix-Marseille II (1987).

[4] : T. T. NG : "Experimental study of a Chemically reacting turbulent boundary layer". Ph. D. Thesis - Lawrence Berkeley Laboratory - University of California (1981).

[5] : J. KIM, S. J. KLINE, J. P. JOHNSTON : "Investigation of a reattaching turbulent shear layer: Flow over a backward-facing step". Transaction of the ASME. J. Fluid Engng. Vol 102 (1980).

[6] : N. M. MANSOUR, J. KIM, P. MOIN : "Computation of turbulent flows over backward-facing step". Turbulent Shear Flow Symposium. Karlsruhe (1983).

[7] : J. F. BRISON, M. BUFFAT, D. JEANDEL, E. SERRES : "Finite Element Simulation of Turbulent Flows, using a two-equation model". Numerical Methods in laminar and turbulent flows - Swansea - Pineridge Press (1985).

[8] : D. JEANDEL, G. BRUN, S. MEUNIER, M. DESAULTY : "Simulation numérique de l'intéraction diffuseur-tête de chambre". Advance Technology for Aero Gas Turbine Components - AGARD CP421 (1987).

[9] : M. NALLASAMY : "Turbulence Models and their applications to the prediction of internal flows: a review". Computer and Fluids - Vol 15 n°2 (1987).

[10]: C.C. CHIENG, B.E. LAUNDER : "On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion". Numerical Heat Transfer - Vol 3 (1980).

[11]: P. BRADSHAW :"Effect of streamline curvature on turbulent flows". AGARDograph n°169 (1973).

[12]: R.S. AMANO : "Development of a turbulence near wall model and its application to separated and reattached flows". Num. Heat Transfer - Vol 7 (1984).

[13]: H. IACOVIDES, B.E. LAUNDER : "PSL- an economical approach to the numerical analysis of near wall, elliptic flow". J. Fluids Engng 106 (1984).

[14]: B.E. LAUNDER : "Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: time to abandon wall functions?" Int. J. Heat and Mass Transfer n°27 (1984).

[15]: I. DEKEYSER : "Etude d'un jet plan dissymétrique chauffé en régime turbulent incompressible". Thèse d'Etat - Université d'Aix-Marseille II (1982).

[16]: R.A. ANTONIA, A. PRABBHU, S.E. STEPHENSON :"Conditionnally sampled measurements in a heated turbulent jet". J. Fluid Mech. Vol 72-Part 3 (1975).

[17]: R. CHEVRAY, N.K. TUTU : "Intermittency and preferential

transport of heat in a round jet". J. Fluid Mech. Vol 88-Part 1 (1978).

[18]: D. B. SPALDING : "Concentration fluctuations in a round turbulent jet". Chemical Engineering Science. Vol 26 (1971).

[19]: E. BRIERE : "Modélisation de la variance des fluctuations de température d'un écoulement turbulent avec prise en compte de la chaîne de mesure". Thèse - Ecole Centrale de Arts et Manufactures (1987).

[20]: G.R. NEWMAN, B.E. LAUNDER, J.L. LUMLEY : "Modelling behaviour of homogeneous scalar turbulence". J. Fluid Mech. Vol 111(1981).

[21]: W. RODI : "The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence". Thèse - University of London - Imperial College (1972).

[22]: W. RODI : "Turbulence models and their application in hydraulics". AIRH (1984).

[23]: C. BEGUIER, I. DEKEYSER, B.E. LAUNDER : "Ratio of scalar and velocity dissipation time scales in shear flow turbulence". Physics of Fluid n°21 (3) (1978).

[24]: L. FULACHIER : "Contribution à l'étude des analogies des champs dynamique et thermique dans une couche limite turbulente - Effet de l'aspiration". Thèse d'Etat - IMST - Marseille (1972).

[25]: R.A. ANTONIA, H.Q. DANH, A. PRABBHU : "Response of a turbulent boundary layer to step change in surface heat flux". J. Fluid Mech. Vol 80-Part 1 (1977).

[26]: C.I.H. NICHOLL : "Some dinamical effects of heat on a turbulent boundary layer". J. Fluid Mech. Vol 40-Part

2 (1970).

[27]: J.C. ROTTA : "The turbulent boundary layer on a flat plate with severe surface heating at subsonic flow". Wärme-und Stoffübertragung Vol 7 (1974).

[28]: R.K. CHENG, T.T. NG : "Some aspects of strongly heated turbulent boundary layer flow". Phys. of Fluids 25 (1982).

[29]: A.J. CHAMBERS, R.A. ANTONIA, L. FULACHIER : "Turbulent Prandtl number and spectral characteristics of a turbulent mixing layer". Int. J. Heat and Mass Transfer n°8 (1985).

[30]: W. SHYY : "A further assessment of numerical annular dump diffusor flow calculations". 21st Joint Propulsion Conference -Monterey - California - AIAA-85-1440 (1985).

[31]: D. JEANDEL, G. BRUN, S. MEUNIER, M. DESAULTY : "Numerical simulation of diffusor-combustor dome interaction". 8th International Symposium on air breathing engines - Cincinnati - USA (1987).

[32]: S. SYED, A.A.E. SHABAYECK : "Development and validation of a curvilinear code for gas turbine combustors". AIAA-86-0217 (1986).

[33]: D. DUTOYA : "Simulation of flow and heat transfer in annular cavities between disks in turbomachinery". AGARD Conference Proceedings n°390 (1985).

[34]: M.J. WARFIELD, B. LAKSHMINARAYANA : "Computation of rotating turbulent flow with an algebraic Reynolds stress model". AIAA Journal - Vol 25 (7) - (1987).

[35]: E.R. VAN DRIEST : "On turbulent flow near a wall". J. Aeronaut. Science - 23 - (1956).

[36]: V. SELMIN, L. QUARTAPELLE : "Calculation of compressible flows by the Taylor-Galerkin finite element method". Finite Element in Flow problems - Antibes - France (1986).

[37]: F. ANGRAND, V. BILLEY, A. DERVIEUX, J. PERIAUX, B. STOUFFLET : "2D and 3D Euler flow calculations with a second order Galerkin Finite Element method". AIAA Paper (1985).

[38]: Ph. CARRIERE : "Calcul bidimensionnel et tridimensionnel par éléments finis pour la modélisation des phénomènes de convection naturelle". Thèse de 3ième cycle - Université Claude Bernard - Lyon (1983).

[39]: I.N. ZAHIBO : "Modélisation d'un jet turbulent d'air vertical chauffé par une flamme". Rapport de DEA - IMST (1987).

ANNEXE 1 :
EQUATION SUR LES COMPOSANTES DU TENSEUR DE REYNOLDS

Considérons l'équation relative à la composante i de la quantité de mouvement. Par multiplication par la fluctuation u''_j on obtient :

$$u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i) + u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_i) = u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik}) - u''_j \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

De même, par permutation des indices i et j, on obtient :

$$u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_j) + u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_j) = u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{jk}) - u''_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

Par sommation de ces deux équations et en prenant la moyenne, au sens de Reynolds, du résultat on obtient donc :

$$\overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_j)} + \overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_j)} = \overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik})} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{jk})} - \overline{u''_j \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}} - \overline{u''_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_j}}$$

Or :

$$\overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_j)} = \overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho . \tilde{u}_i\right)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho . \tilde{u}_j\right)} + \overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u''_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u''_j)}$$

$$\overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot \tilde{u}_i\right)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \cdot \tilde{u}_j\right)} = \overline{\rho \cdot u''_j \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}} + \tilde{u}_i \cdot \overline{u''_j \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$+ \overline{\rho \cdot u''_i \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}} + \tilde{u}_j \cdot \overline{u''_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$= \tilde{u}_i \cdot \overline{u''_j \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \tilde{u}_j \cdot \overline{u''_i \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$(\text{car } \overline{\rho \cdot \varphi''} = 0)$$

$$\overline{u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u''_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u''_j)} = \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot u''_i \cdot u''_j)}$$

$$+ \overline{u''_i u''_j \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\rho \cdot \frac{\partial u''_i u''_j}{\partial t}}$$

$$- \overline{\rho \cdot u''_i \cdot \frac{\partial u''_j}{\partial t}} - \overline{\rho \cdot u''_j \cdot \frac{\partial u''_i}{\partial t}}$$

De plus :

$$\overline{u''_j \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot u_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot u_j}{\partial x_k}} = \overline{u''_j \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot \tilde{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot \tilde{u}_j}{\partial x_k}}$$

$$+ \overline{u''_j \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot u''_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial \rho \cdot u_k \cdot u''_j}{\partial x_k}}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{\left(\rho \cdot u_k \cdot u''_i u''_j\right)} + \overline{u''_i u''_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho \cdot u_k)}$$

$$= \tilde{u}_i \cdot \overline{u''_j \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u_k)}{\partial x_k}} + \overline{u''_j \cdot \rho \cdot u_k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$$

$$+ \tilde{u}_j \cdot \overline{u''_i \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u_k)}{\partial x_k}} + \overline{u''_i \cdot \rho \cdot u_k} \cdot \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho . u_k . u''_i u''_j}\right) + \overline{u''_i u''_j . \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k)}$$

et, en utilisant l'équation de conservation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k) = 0$$

on obtient finalement :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho . u''_i \tilde{u}''_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho . \tilde{u}_k . u''_i \tilde{u}''_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho . u''_i \tilde{u}''_j u''_k}\right)$$

$$+ \overline{\rho . u''_i \tilde{u}''_k} . \frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{u}_j + \overline{\rho . u''_j \tilde{u}''_k} . \frac{\partial}{\partial x_k}\tilde{u}_i$$

$$= -\overline{u''_i . \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}} - \overline{u''_j . \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} - \overline{u''_i . \frac{\partial p'}{\partial x_j}} - \overline{u''_j . \frac{\partial p'}{\partial x_i}}$$

$$+ \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(u''_i . \tau_{kj})} - \overline{\tau_{kj} . \frac{\partial u''_i}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(u''_j . \tau_{ki})} - \overline{\tau_{ki} . \frac{\partial u''_j}{\partial x_k}}$$

ANNEXE 2 :
EQUATION SUR LES COMPOSANTES DU FLUX TURBULENT DE TEMPERATURE

Considérons l'équation d'enthalpie. Par multiplication par la fluctuation de la composante i de vitesse, on obtient:

$$u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . T) + u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . T) = u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\Phi_k)$$

De même, en multipliant l'équation sur u_i par la fluctuation de température T", on obtient:

$$T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i) + T'' \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_i) = T'' \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik}) + T'' \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

En sommant ces deux équations et en prenant la moyenne, au sens de Reynolds, du résultat on obtient:

$$\overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . T)} + \overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k . T)}$$

$$= \overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik})} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\Phi_k)} - \overline{T'' \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

Or :

$$\overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . T)} = \overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho . \tilde{u}_i\right)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . \tilde{T})}$$

$$+ \overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u''_i)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . T'')}$$

$$\overline{T'' \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho . \tilde{u}_i\right)} + \overline{u''_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho . \tilde{T})} = \overline{\rho . T'' \cdot \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}} + \tilde{u}_i . \overline{T'' \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$+ \overline{\rho . u''_i . \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}} + \overline{\tilde{T} . u''_i . \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$= \overline{\tilde{u}_i . T'' . \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\tilde{T} . u''_i . \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$$(\text{car } \overline{\rho . \varphi''} = 0)$$

$$\overline{T'' . \frac{\partial}{\partial t}(\rho . u''_i)} + \overline{u''_i . \frac{\partial}{\partial t}(\rho . T'')} = \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho . u''_i . T'')}$$

$$+ \overline{u''_i T'' . \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\rho . \frac{\partial u''_i T''}{\partial t}}$$

$$- \overline{\rho . u''_i . \frac{\partial T''}{\partial t}} - \overline{\rho . T'' . \frac{\partial u''_i}{\partial t}}$$

De plus :

$$\overline{T'' . \frac{\partial \rho . u_k . u_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i . \frac{\partial \rho . u_k . T}{\partial x_k}} = \overline{T'' . \frac{\partial \rho . u_k . \tilde{u}_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i . \frac{\partial \rho . u_k . \tilde{T}}{\partial x_k}}$$

$$+ \overline{T'' . \frac{\partial \rho . u_k . u''_i}{\partial x_k}} + \overline{u''_i . \frac{\partial \rho . u_k . T''}{\partial x_k}}$$

$$= \overline{\tilde{u}_i . T'' . \frac{\partial (\rho . u_k)}{\partial x_k}} + \overline{T'' . \rho . u_k . \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{u}_i}$$

$$+ \overline{\tilde{T} . u''_i . \frac{\partial (\rho . u_k)}{\partial x_k}} + \overline{u''_i . \rho . u_k . \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{T}}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho . u_k . u''_i T''\right) + \overline{u''_i T'' . \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho . u_k)}$$

Donc, finalement, en utilisant l'équation de conservation de la masse, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho . \tilde{u}''_i T''\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho . \tilde{u}_k . \tilde{u}''_i T''\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho . u''_i \tilde{T}'' u''_k\right)$$

$$+ \overline{\rho}\,\widetilde{u''_i u''_k}\cdot\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_k} + \overline{\rho}\,\widetilde{T''u''_k}\cdot\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_k}$$

$$= -\overline{T''}\cdot\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \overline{T''\cdot\frac{\partial p'}{\partial x_i}}$$

$$+ \overline{u''_i\cdot\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k}} + \overline{T''\cdot\frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}}$$

dernière page de la thèse

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu la demande du Directeur de Thèse
M. D. JEANDEL - Professeur - E.C.L.

et les rapports de Y. COEFFE - Chef du Départ. Recherche - LNH-EDF-DER
B. GAY - Professeur - UNIV. LYON I

Monsieur BRUN Gilles

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du titre de **DOCTEUR**
Spécialité **Mécanique.**

Fait à Ecully, le 11 février 1988

L'Administrateur provisoire,
de l'E.C.L.

A. MOIROUX