AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA PLASTICITE DE TRANSFORMATION DANS LES MONO ET POLYCRISTAUX METALLIQUES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 1986028 S
Cote S/M3 86/14
Loc Magasin

présenté à

l'U.E.R SCIENCES EXACTES ET NATURELLES DE L'UNIVERSITE DE METZ.

pour obtenir le grade de DOCTEUR - INGENIEUR

par

UNIVERSITE DE METZ BIBLIOTHEQUE

Etienne PATOOR

Ingénieur Arts et Métiers

Laboratoire de Physique et Mécanique des Materiaux

U.A. C.N.R.S.

Greco-C.N.R.S. "Grandes Déformations et Endommagement "

A VERONIQUE ET ISIS .

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Les déformations anélastiques ou inélastiques des matériaux en général, et plus particulièrement des métaux, ont souvent pour origine, des mécanismes physiques élémentaires bien connus et identifiés par les métallurgistes.

Il s'agit essentiellement de la création et de l'annihilation des "défauts" de structure, de leurs mouvements et de leurs interactions.

Ces défauts peuvent être ponctuels (lacunes, intersticiels), linéaires (dislocations), surfaciques (fautes d'empilement) ou volumiques (précipités, maclage, phases nouvelles).

Nous nous intéressons ici, aux déformations engendrées par les défauts volumiques correspondant à la formation et au développement de plaquettes de phase nouvelle, à partir d'une phase mère. La déformation provient dans ce cas de la différence de géomètrie (volume et forme) des deux phases.

Par ailleurs, les transformations de phase peuvent se produire (ou disparaître) aussi bien sous l'effet d'un gradient de température que sous l'action d'une contrainte mécanique. Nous sommes donc en présence d'un comportement thermomécanique appelé plasticité de transformation.

La déformation observée peut résulter de ce seul mécanisme ou du couplage de celui-ci avec d'autres phénomènes.

Dans cette étude, nous nous limitons au cas où la transformation de phase est du type martensitique.

A l'origine, le nom de "martensite" désigne le produit résultant de la transformation, au cours d'un refroidissement rapide de l'austénite des alliages fer - carbone.
La martensite est alors le constituant de trempe des aciers ; elle confère à ceux-ci, une augmentation très importante de la dureté et de la résistance mécanique.

Par extension, le terme de "transformation martensitique" est appliquée à un grand nombre de système d'alliages ou de métaux purs dont les transformations présentent certaines analogies avec le système fer - carbone :

- alliages de fer : Fe-C, Fe-Ni, Fe-Cr, Fe - Mn, Fe-Ni-Cr...
- alliages de métaux nobles : Cu-Zn, Cu-Sn, Cu-Al...
- alliages à base de titane et de zirconium : Ni-Ti...
- métaux - purs : Co, Ti, Zr...

En introduction à la conférence internationale sur la transformation martensitique ICOMAT - 82, M. Cohen à défini : "les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un changement de phase soit de nature martensitique :

1) Existence d'une déformation (anélastique) du réseau cristallin associé à un changement de forme macroscopique.

2) La diffusion n'est pas nécessaire à la transformation.

3) La cinétique de la transformation et les aspects morphologiques et microstructuraux (plans d'habitat, directions de transformation) sont influencés fortement par l'énergie mécanique associée à la déformation de transformation."

Ainsi, la caractéristique essentielle de la martensite n'est par forcement l'augmentation de dureté ou de résistance mécanique. Elle peut, dans certains cas, s'accompagner de comportements spécifiques, tels que :

- la pseudoélasticité
- l'effet mémoire de forme.

L'intérêt technologique et industriel de la transformation martensitique est très important, que ce soit pour les traitements thermiques dans les aciers, ou pour la mise en oeuvre de dispositifs utilisant les effets mémoire de forme.

Dans le domaine de la science des matériaux, elle présente aussi un aspect plus fondamental, car le changement de réseau cristallin associé au mécanisme de déformation peut-être facilement observable aux rayons X.

En général, le comportement global observé en plasticité de transformation est difficile à analyser, car plusieurs phénomènes peuvent interagir.

Du fait des incompatibilités mécaniques associées à la formation des plaquettes de martensite, celle-ci sont fortement influencées par les contraintes internes. En même temps, il est fréquent d'observer des couplages plasticité de transformation - plasticité classique qui compliquent beaucoup l'analyse du phénomène.

Les caractéristiques géométriques de la transformation martensitique (plan d'habitat, directions de transformation) sont définies au chapitre II.

Les différentes contributions à la déformation totale sont discutées dans le chapitre III. Par la suite, nous isolons les termes dus à la seule plasticité de transformation et nous limitons notre étude au cas de la plasticité de transformation parfaite.

La loi de comportement du monocristal en plasticité de transformation parfaite est établie au chapitre III et l'étude du polycristal est effectuée selon deux approches différentes dans les chapitres IV (étude phénoménologique) et V (méthode d'homogénéisation).

A partir de cette étude de la plasticité de transformation parfaite, le couplage avec la plasticité classique est abordé au chapitre VI dans le cas particulier des laitons biphasés.

C H A P I T R E II

Plasticité de transformation

et

Transformation Martensitique

II.1° - GENERALITES SUR LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

Les transformations martensitiques sont des transformations du premier ordre présentant une déformation homogène de réseau à caractère fortement déviatorique [1] [2] [3].

Dans une transformation du premier ordre, la phase transformée coexiste avec la phase mère, ce qui implique :

- l'existence d'une interface, appelée plan d'habitat pour la transformation martensitique.

- la présence d'une déformation élastique (ou plus généralement plastique) accommodant le champ de contraintes internes dû à la déformation de réseau (déformation de Bain).

Ces transformations résultent d'un déplacement coopératif d'atomes ne nécessitant que de faibles réarrangements sans diffusion (de l'ordre de 10^{-1} à 10^{-2})

Le plan d'habitat est généralement semi-cohérent et à indices irrationnels. Les relations d'orientation sont bien définies et correspondent le plus souvent à l'alignement de plans et de directions denses (*).

La création de l'interface et les contraintes internes liées à la déformation homogène de réseau absorbent de l'énergie et tendent à s'opposer à l'apparition de la nouvelle phase. Celle-ci apparaîtra, non pas quand son énergie libre sera tout juste inférieure à celle de l'ancienne phase, mais quand existera une différence finie, parfois importante, appelée force motrice, capable de surmonter le handicap de l'énergie d'interface et de l'énergie de déformation (figure II.1).

Il est donc nécessaire de refroidir au-dessous de T_o (température d'équilibre thermochimique des deux phases) et jusqu'à une température M_s (Martensite start) pour disposer d'une force motrice suffisante.

---

* K.S : Kurdjmov-Sachs $(111)_A \;//\; (011)_M$; $[\bar{1}01]_A \;//\; [\bar{1}\bar{1}1]_M$

N : Nishiyama-Wasserman $(111)_A \;//\; (011)_M$; $[11\bar{2}]_A \;//\; [0\bar{1}1]_M$

G.T : Grenniger-Troiano $(111)_A \;//\; (011)_M$; $[5,\overline{12},17]_A \;//\; [7,\overline{17},17]_M$

La transformation martensitique présente la plupart du temps, un caractère athermique : à chaque température comprise entre M_s et la température de fin de transformation M_f (Martensite finish) correspond une fraction volumique donnée de martensite formée.

Au chauffage, la transformation inverse martensite → austénite débute à une température A_s (Austénite start) et se termine à une température A_f (Austénite finish).

Selon les métaux ou alliages, la déformation associée à la transformation martensitique est soit irréversible, lorsque la transformation est accompagnée de déformation plastique dans la phase mère (cas des alliages Ferreux), soit réversible dans le cas contraire (alliages à base de métaux nobles, Ni - Ti,...).

La température de début de transformation peut être modifiée par l'action d'une contrainte mécanique extérieure. Ainsi une pression hydrostatique a pour effet d'abaisser le point M_s (figure II.2). A l'inverse une contrainte de traction, ou de compression, élève cette température.

Cette influence des contraintes peut s'expliquer du point de vue thermodynamique. L'énergie mécanique fournie par les contraintes extérieures s'ajoute (ou se retranche) à la force motrice d'origine chimique et facilite (ou rend plus difficile) la transformation.

II.2° - ASPECTS CRISTALLOGRAPHIQUES DE LA TRANSFORMATION

La déformation martensitique peut être définie comme étant un mode de déformation ayant pour origine un changement des paramètres du réseau cristallin. Ce changement de réseau appellé déformation de Bain s'accompagne d'un niveau de contraintes internes très important du fait de la coexistence des deux phases. Il est donc accompagné d'un mécanisme d'accommodation à réseau invariant qui relaxe les contraintes.

L'une des théories cristallographique les plus importantes est la théorie phénoménologique développée par Wechsler, Lieberman et Read[4] .

Cette théorie repose sur les deux axiomes suivant :

- Parmi toutes les déformations géomètriques possibles permettant de passer de la maille de la phase mère à la maille de la martensite, celle qui se produira effectivement est celle qui entraînera le minimum de distorsion et nécessitera ainsi une énergie minimale.

- l'interface séparant les deux phases est supposée être un plan invariant, c'est-à-dire un plan de distorsion nulle dont la position reste fixe au cours de la déformation.

La déformation de Bain correspond au premier axiome.

La figure (II.3) montre la déformation de Bain transformant une maille orthorhombique en maille monoclinique dans un alliage de Cu-26,7 Zn - 4,15 Al [5] . Une telle déformation n'est pas compatible avec l'existence d'un plan invariant, une déformation supplémentaire à réseau invariant est donc nécessaire pour assurer la deuxième hypothèse. Cette déformation peut-être assurée par maclage ou par glissement (figure II.4), celui-ci peut se réaliser soit dans l'austénite, soit dans la martensite[6].

L'addition des deux déformations n'assure toujours pas l'invariance en position du plan d'habitat, une transformation supplémentaire par rotation est donc nécessaire pour décrire totalement la transformation globale.

A partir des mesures cristallographiques effectuées sur les deux phases et des données de la normale $\vec{u}$ et de la direction $\vec{l}$ du glissement à réseau invariant, la théorie phénomérologique de W.L.R. permet de déterminer :

- l'amplitude de f du glissement dans la direction $\vec{l}$.
- la relation d'orientation mutuelle.
- la normale $\vec{n}$ au plan d'habitat.
- la direction $\vec{m}$ de transformation.
- l'amplitude g de la déformation dans la direction $\vec{m}$.

Dans la suite de cette étude nous considérons le mécanisme de la transformation martensitique, non plus au niveau de la maille, mais a une échelle supérieure en considérant qu'un élément d'austénite de volume V se transforme en martensite de volume V_M par la combinaison d'une dilatation normale au plan d'habitat et d'un glissement parallèle à ce plan (figure II.5). La normale au plan d'habitat, la direction de transformation, et l'amplitude de la déformation seront supposées connues et intrinsèques à la transformation.

Les symétries du réseau cristallin de l'austénite impliquent l'existence de plusieurs systèmes équivalents appelés variants.

II.3° - INFLUENCE DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX

La transformation martensitique apparait dans de nombreux domaines.

Dans les ferreux elle intervient plus particulièrement lors des opérations de soudage ou lors de traitements thermomécaniques où elle permet l'obtention de pièces présentant des caractéristiques mécaniques spécifiques. Il est donc important de bien connaître la zone de stabilité de la martensite afin d'optimiser au mieux ces opérations.

On la rencontre également dans une classe d'acier particulier (TRIP STEEL), aciers qui ont la particularité de posséder une phase martensitique de faible dureté (pauvre en carbone). Cette phase peut être obtenue par un écrouissage à froid de l'austénite. Un revenu ultérieur produit une martensite très dure par précipitation du carbone (figure II.6).

On obtient ainsi un acier qui possède une très bonne aptitude au formage à froid et qui, après une opération de revenu, possède les qualités mécaniques d'un acier à haute limite d'élasticité.

Dans les métaux non ferreux, la transformation martensitique intervient dans l'effet mémoire de forme (figure II.7) et dans la pseudoélasticité (possibilité d'obtenir des déformations réversibles atteignant des valeurs de 10 %) (figure II.8) [7] .

II.4° - THERMOELASTICITE, PSEUDOELASTICITE, MEMOIRE DE FORME

Suivant la valeur de la force motrice nécessaire pour transformer l'austénite en martensite, les transformations martensitique peuvent être classées en deux catégories.

D'une façon générale, la formation des plaquettes de martensite implique une modification de forme de la région transformée. Il s'ajoute en outre, une variation relative de volume, lorsque le produit martensitique et la phase mère ont des densités différentes. En conséquence, la formation de la martensite entraîne la création de contraintes au sein de la matrice non transformée, dont l'importance est d'autant plus grande que les plaquettes de martensite sont plus épaisses. Deux cas peuvent se produire :

- le niveau de contraintes atteint la limite d'élasticité de la phase mère. La matrice se déforme alors plastiquement et entraîne le blocage de l'interface martensite - austénite. La transformation inverse se produit alors par nucléation de la phase haute température dans la martensite. Ceci se produit pour des valeurs élevées de la force motrice.

- au contraire, si l'énergie motrice de la transformation est insuffisante pour fournir le travail mécanique correspondant à la déformation plastique, la croissance des plaquettes de martensite peut être stoppée avant que la limite d'élasticité de la matrice ne soit atteinte. A une température donnée, il existe donc une taille critique de plaquette. La martensite formée est en équilibre thermoélastique. Les plaquettes se développeront ou se contracteront selon le sens de la modification de la température. Ainsi par exemple, un abaissement de celle-ci en augmentant la différence d'énergie libre entre les deux phases permet à la plaquette de se développer.

Les alliages qui présentent un comportement thermoélastique possèdent la propriété particulière de subir des déformations réversibles de plusieurs pourcent (8 à 10 %) sous des contraintes de quelques centaines de MPa (figure II.9) [7, 8].

En fonction de la température, plusieurs comportements peuvent être distingués dans les alliages thermoélastiques :

* Pseudoélasticité ($T > A_f$) Figure II.10

Pour une contrainte supérieure à une contrainte critique (fonction de la température) la déformation résulte de la formation de martensite au sein de la matrice austénitique. Cette martensite se développe généralement selon un seul variant. La fraction volumique de martensite formée augmente avec la contrainte. La décharge s'effectue de façon totalement réversible, le dernier variant apparu disparait en premier. Après une décharge complète, aucune déformation ne subsiste.

* effet mémoire de forme ($T < M_f$) Figure II.11

Pour une température inférieure à M_f le matériau est totalement en phase martensitique. Cette martensite d'origine thermique est formée de plusieurs variants qui accommodent le niveau de contraintes internes. Ces variants sont tels que la déformation macroscopique traduit uniquement un changement de volume, aucun changement de forme macroscopique ne se produisant (figure II.11.b).

L'action d'un champ de contraintes extérieures favorise certains variants au détriment d'autres et induit de cette façon un changement de forme macroscopique (figure II.11 c et d). La martensite étant stable à cette température, une déformation permanente subsiste après décharge (figure II.11.d).

Si l'on chauffe maintenant le matériau à une température supérieure à A_f , celui-ci retourne à l'état austénitique par une transformation cristallographique inverse et retrouve sa forme de départ (figure II.11.e).

Le comportement pseudoélastique et l'effet mémoire interviennent lors de transformation martensitique thermoélastique quand le niveau de contrainte est insuffisant pour initier du glissement plastique dans l'une des deux phases. Le diagramme température - contrainte de la figure (II.12) montre les domaines d'existence de l'effet mémoire et de la pseudoélasticité pour deux alliages A et B. Pour l'alliage B qui possède une contrainte d'écoulement plastique très faible les domaines d'existence de ces deux phénomènes sont très étroits.

La transformation martensitique présente encore d'autres particularités mécaniques dans les alliages thermoélastiques, par exemple :

* l'effet mémoire "double-way"

Dans l'effet mémoire de forme décrit précédemment, la forme de la matrice austénitique est "mémorisée". Pour certain alliages il est possible d'obtenir la mémorisation de deux formes : celle de la phase austénitique et celle de la phase martensitique.Pour obtenir cet effet sur un alliage thermoélastique, il faut déformer plastiquement le matériau en phase martensitique de façon à faire apparaitre des dislocations.
Comme précédemment le matériau retrouve sa forme initiale lorsque la température dépasse A_f .
En revanche, si on le refroidit à nouveau, les variants de martensite, ne se forment pas de façon aléatoire mais de façon à accommoder le champ de contraintes internes induit par les dislocations. Cette formation sélective des variants, permet au matériau de "mémoriser" une seconde forme.

II.5° - PLASTICITE DE TRANSFORMATION

Lors d'une transformation de phase, les matériaux présentent un adoucissement mécanique considérable au voisinage de la température de transformation. A cette température, la réponse des matériaux à une sollicitation mécanique, même très faible, n'est ni celle de la phase mère, ni celle de la phase produit. Ce phénomène, observé pour la première fois par Sauveur en 1924 pour la transformation ferrite-austénite ($Fe\alpha - \gamma$) et en 1937 par Wasserman durant la transformation martensitique des alliages Fe-30 % Ni, est appellé plasticité de transformation. Cet effet a fait l'objet de nombreux travaux, sur des matériaux très divers [10, 19] (figure II.13).

Deux mécanismes principaux ont été proposés pour expliquer l'origine de la plasticité de transformation.

Dans le premier cas, ce phénomène est du à l'accommodation des contraintes internes qui résultent de la différence de volume entre la phase mère et la phase transformée. La déformation de la phase mère est provoquée par la superposition du champ de contraintes internes et du champ de contraintes appliquées, contraintes appliquées qui vont orienter l'écoulement suivant leur sens d'application. Cette idée émise par De Jong et Rathenau [10] est à la base de plusieurs modélisations :

- Greenwood et Johnson en 1964 à partir d'une approche macroscopique [11]
- Kot et Weiss [12] en 1970 avec une approche microscopique
- Abrassart (1972 modification de la théorie de Greenwood et Johnson) [13].
- Poirier (1982 généralisation du modèle de Kot et Weiss) [14].

Pour le second mécanisme, la plasticité de transformation est due à l'orientation préférentielle des plaquettes de martensite sous l'action de la contrainte appliquée.

Cette orientation va en effet provoquer une déformation supplémentaire dans le sens de la contrainte appliquée. Seul Magee [15] a développé un modèle quantitatif sur cette base.

a) modélisation de Greenwood et Johnson

Greenwood et Johnson font l'hypothèse que la déformation s'effectue en totalité dans la phase la plus ductile, et peut être calculée à partir du critère isotrope de Von Mises. Ils obtiennent alors l'expression suivante pour la valeur de la plasticité de transformation :

$$\varepsilon^{PT} = \frac{5}{6} \frac{\sigma}{\sigma_e} \frac{\Delta V}{V}$$

σ : étant la contrainte appliquée

σ_e : la limite élastique de la phase la plus ductile

$\frac{\Delta V}{V}$: la variation volumique due à la transformation.

Ce modèle a été testé par Greenwood et Johnson sur plusieurs matériaux dans le cas où la contrainte appliquée est faible par rapport à la limite élastique. Les résultats obtenus (tableau II.1) montrent un bon accord avec les mesures expérimentales.

TABLEAU II.1 : Travaux de Greenwood et Johnson [11].

Comparaison pour divers matériaux, des valeurs expérimentales et des valeurs déterminées à l'aide du modèle de Greenwood et Johnson pour $d\epsilon^{PT}/d\sigma$ durant une transformation de phase.

Métal	Transformation	$\frac{d\epsilon^{PT}}{d\sigma}\left(10^{-5}\,MPa^{-1}\right)$		Valeur approximative de la contrainte d'écoulement dans la phase la plus déformable(MPa)	$\frac{\Delta V}{V}$ (%)
		Expérimental	Calculé		
Uranium	$\alpha \rightleftharpoons \beta$	138	133	14	1,12
			93	20	
Uranium	$\beta \rightleftharpoons \gamma$	780	730	1,6	0,70
Zirconium	$\alpha \rightleftharpoons \beta$	880	-	-	0,66
Titane	$\alpha \rightleftharpoons \beta$	830	-	1,4	-
Fer	$\alpha \rightleftharpoons \gamma$	240	200	9,5	1,16
Fe-0,39 % C	$\alpha + Fe_3C \rightleftharpoons \gamma$	68	-		1,0
Cobalt	$\epsilon \rightleftharpoons \alpha$	2,8	2,6	233	0,36

Le modèle de Greenwood et Johnson a été établi sur la base de nombreuses hypothèses qui ont été répertoriées par Abrassart [13].

H1 - L'inclusion est plastiquement indéformable

H2 - La matrice est un corps rigide parfaitement plastique

H3 - On peut appliquer les critères classiques de plasticité ainsi que les équations de Lévy-Von Mises au niveau microscopique.

H4 - Les équations de Lévy-Von Mises sous forme intégrale sont valides, ce qui implique que les chargements locaux s'éloignent peu de chargements proportionnels.

H5 - La forme de l'interface n'a pas d'influence ; les auteurs ont effectués le calcul en supposant cette forme sphérique.

H6 - ϵ^{PT} est petit devant $\frac{\Delta V}{V}$. Par suite $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ est également petit

H7 - La transformation est compléte

H8 - ϵ^{PT} est constant sur l'interface.

b) modèle d'Abrassart [13]

Le modèle de Greenwood et Johnson ne donne aucune indication sur l'évolution du taux de martensite formée, et d'après l'hypothése H6 il nécessite un rapport $\frac{\sigma}{\sigma_e}$ petit. Abrassart à modifié ce modèle et obtenu la relation suivante :

$$\varepsilon^{PT} = \frac{3}{4} \frac{\sigma}{\sigma_e} \frac{\Delta V}{V} \left(x - \frac{2}{3} x^{3/2} \right)$$

avec x la fraction volumique de martensite formée. Cette relation abouti à des valeurs de plasticité de transformation trois fois plus faible que celles déterminées par le modèle de Greenwood et Johnson.

c) les modèles microscopiques [12] [14]

Kot et Weiss [12] fondent leur modèle sur la superposition d'un champ de contraintes appliquées faibles et d'un champ de contraintes internes élevées.

A partir de l'équation d'Orowan ils obtiennent pour la vitesse de déformation :

$$\dot{\gamma} = b \rho V^* \exp \left[- D/(\tau_I - \tau) \right]$$

avec
- $\dot{\gamma}$: vitesse de déformation
- b : vecteur de Burger
- ρ : densité de dislocations mobiles
- V^* : vitesse limite de ces dislocations
- D : contrainte de Gilman
- τ : contrainte appliquée
- τ_I : contraintes internes

ce qui conduit en notant γ_p la plasticité de transformation à la relation suivante :

$$\gamma_p = \bar{\gamma} \, x \, D \, \frac{\tau}{\tau_x^2}$$

avec $\bar{\gamma}$ la déformation moyenne de cisaillement associée à la transformation.

Cette approche à été généralisée par Poirier [14] qui a considéré le cas où du fluage se produisait dans les deux phases et en tenant compte d'une orientation privilégiée, il obtient ainsi la relation :

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_A(1-x) + \dot{\gamma}_B x + C\,\gamma_a^o\,\sigma\, x(1-x) + \alpha\,\gamma_T^o\,\frac{dx}{dT}$$

où :

- A est la phase mère
- B la phase formée
- $\dot{\gamma}$ la vitesse de déformation totale
- $\dot{\gamma}_A(1-x)$ le fluage dans la phase A
- $\dot{\gamma}_B x$ le fluage dans la phase B
- $C\gamma_a^o\sigma x(1-x)$ la part due au déplacement des dislocations qui vont accommoder la déformation de transformation (cisaillement et variation volumique) autour des volumes B. L'accommodation ne s'effectue que dans la phase A.
- $\alpha\,\gamma_T^o\,dx/dT$ la part due à la déformation de transformation de cisaillement elle est directement liée au taux de phase formée dx/dT ; elle est pondérée par un coefficient qui tient compte de l'orientation préférentielle possible.

d) Modèle cristallographique de Magee [15]

Magee a développé un modèle quantitatif liant la déformation de transformation à la cinétique de la transformation sous contrainte, en opérant une moyenne à partir des déformations liées à la formation des différentes plaquettes de martensite.

Il obtient ainsi :

$$\overline{\varepsilon}^{p} = \frac{\int_{\theta} \varepsilon(\theta) f_t^{\sigma}(\theta) d\theta}{\int_{\theta} f_t^{\sigma}(\theta) d\theta}$$

avec $$\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2}\left(\gamma_o \sin 2\theta + \varepsilon_o (1 + \cos 2\theta)\right)$$

En notant :

γ_o : le cisaillement lié à la transformation

ϵ_o : la variation volumique de la transformation

θ : l'orientation des plaquettes par rapport à l'axe de traction

f_t^{σ} : fraction volumique transformée sous une contrainte σ en fonction de l'orientation de la plaquette.

e) Conclusion

A l'heure actuelle le modèle de Magee et le modèle de Greenwood et Johnson sont considérés comme étant les modèles de bases de la plasticité de transformation. Cependant chacun des deux modèles ne décrit correctement qu'un aspect particulier de ce phénomène et il n'existe pas de modèle général décrivant l'ensemble du domaine couvert par le terme plasticité de transformations. Magee peut être directement appliqué dans le cas des transformations présentant une variation volumique nulle, le modèle de Greenwood et Johnson dans le cas où le cisaillement peut être négligé et où toute la déformation s'effectue par glissement plastique dans la phase mère. Ces hypothèses ne correspondent pas au cas de la transformation martensitique, où nous avons à la fois variation volumique et cisaillement, et où la déformation causée par le changement de réseau cristallin entre les deux phases peut intervenir seule ou couplée avec du glissement plastique dans la phase mère.

Le modèle de Poirier, basé sur la théorie des dislocations, se heurte lui à la difficulté de déterminer les paramètres d'entrée d'un tel calcul.

De plus ces différents modèles n'ont été établis que pour des chargements monodimensionnels.

Une détermination générale, tridimensionnelle, de la loi de comportement des matériaux durant la transformation martensitique sous contrainte reste donc à établir.

L'objectif de ce travail est de contribuer à l'établissement d'une telle loi, en précisant les différents mécanismes responsables de la déformation, et en introduisant la notion de couplage entre deux modes de déformation pour décrire la plasticité de transformation.

Le problème général en plasticité de transformation est fort complexe, car pouvant recouvrir des situations très dissemblables. Les difficultés de modélisation de ce phénomène sont de deux ordres :

- la détermination de l'interaction entre la contrainte et la température

- la détermination des différents mécanismes de couplage entre ce mode de déformation et le glissement plastique.

II.6° - PLASTICITE DE TRANSFORMATION PARFAITE ET PLASTICITE DE TRANSFORMATION COUPLEE

Nous allons dans ce travail décrire la plasticité de transformation en considérant la transformation martensitique comme un mode de déformation s'effectuant par la composition d'une dilatation normale à l'interface des deux phases et d'un glissement parallèle à ce plan.

A une échelle plus fine, ce mécanisme peut être décomposé en une déformation homogène de réseau (déformation de Bain), une déformation à réseau invariant et une rotation assurant l'invariance du plan d'habitat. Ces déformations sont réversibles.

Selon la nature de la transformation, deux cas sont à distinguer :

- pour les martensites thermoélastiques, les contraintes internes engendrées par la déformation de Bain sont presque exclusivement accommodées dans la martensite par la déformation à réseau invariant associée. Dans ce cas la plasticité de transformation est dite parfaite.

- pour les martensites non thermoélastiques, le niveau de contraintes internes est tel que deux mécanismes interviennent pour le relaxer. D'une part un écoulement plastique dans la phase la plus ductile, d'autre part, dans la martensite ,la déformation à réseau invariant intrinsèque à la transformation. On dit alors que la plasticité de transformation est couplée.

Dans ce travail nous nous intéressons au cas de la plasticité de transformation parfaite, étape indispensable avant de pouvoir aborder le problème du couplage.

Dans les chapitres suivants, nous allons décrire, pour la plasticité de transformation parfaite, les lois de comportement du monocristal (chapitre III) et du polycristal. Pour le polycristal deux approches différentes sont effectuées (chapitre IV et V).

Dans le chapitre VI, une première approche indirecte de la plasticité de transformation couplée est abordée à l'aide d'une méthode d'homogénéisation, dans le cas où le matériau est constitué de deux phases, l'une plastique, l'autre pseudoélastique, et où les fractions volumiques restent constantes c'est le cas de certains laitons biphasés.

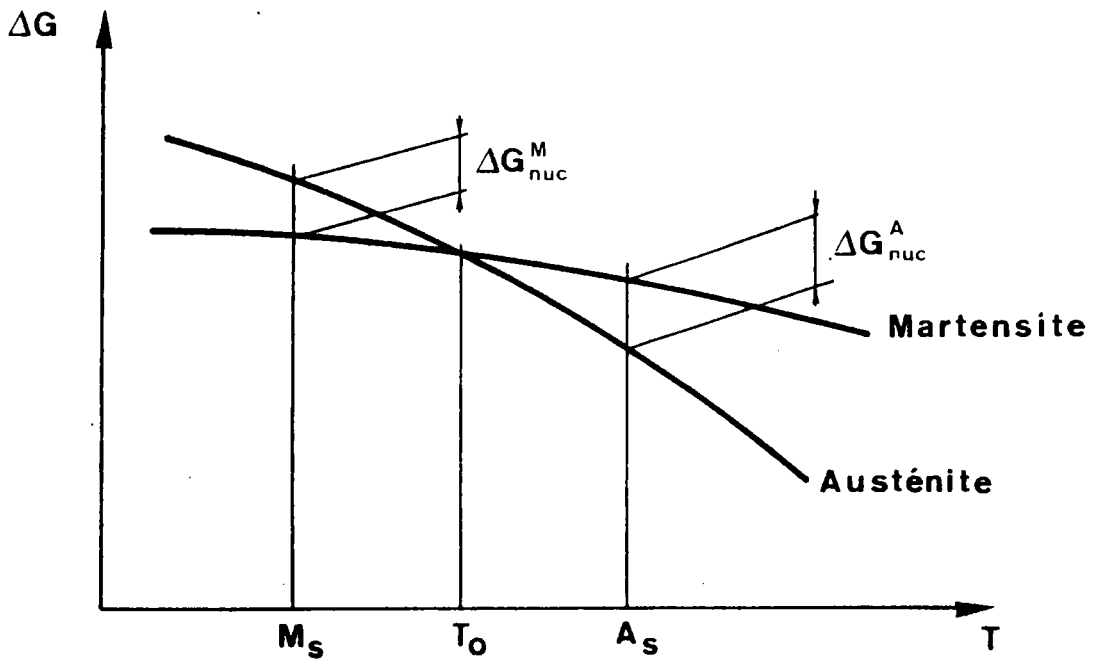


FIGURE II.1 : Diagramme représentant l'énergie libre de Gibbs, en l'absence de contraintes externes, de l'austénite et de la martensite en fonction de la température.

T_o : Température d'équilibre thermochimique.

$T > T_o$ l'austénite est stable.

$T < T_o$ la martensite est stable.

M_s : Température de formation de la martensite.

$T < M_s$ formation de la martensite.

$T > M_s$ le materiau reste à l'état austénitique.

ΔG^{M}_{nuc} : Force motrice de formation de la martensite.

A_s : Température au dessus de laquelle, la martensite se transforme en austénite.

ΔG^{A}_{nuc} : Force motrice de formation de l'austénite à partir de l'état martensitique.

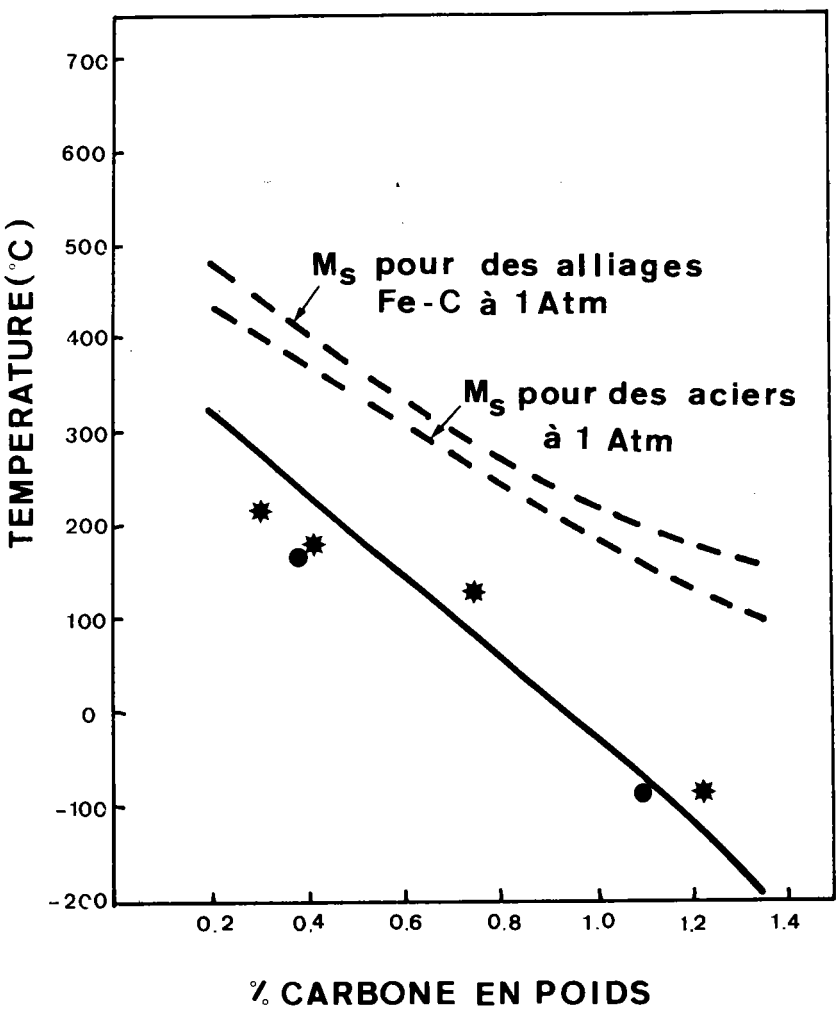


FIGURE II.2 : Effet d'une pression hydrostatique sur la température M_s d'alliage Fe-Ni d'après Radcliffe et al. [42].

——— M_s calculé à 4200 MPa .

● M_s mesuré à 4200 MPa pour des aciers.

✸ M_s mesuré à 4200 MPa pour des alliages Fe-C.

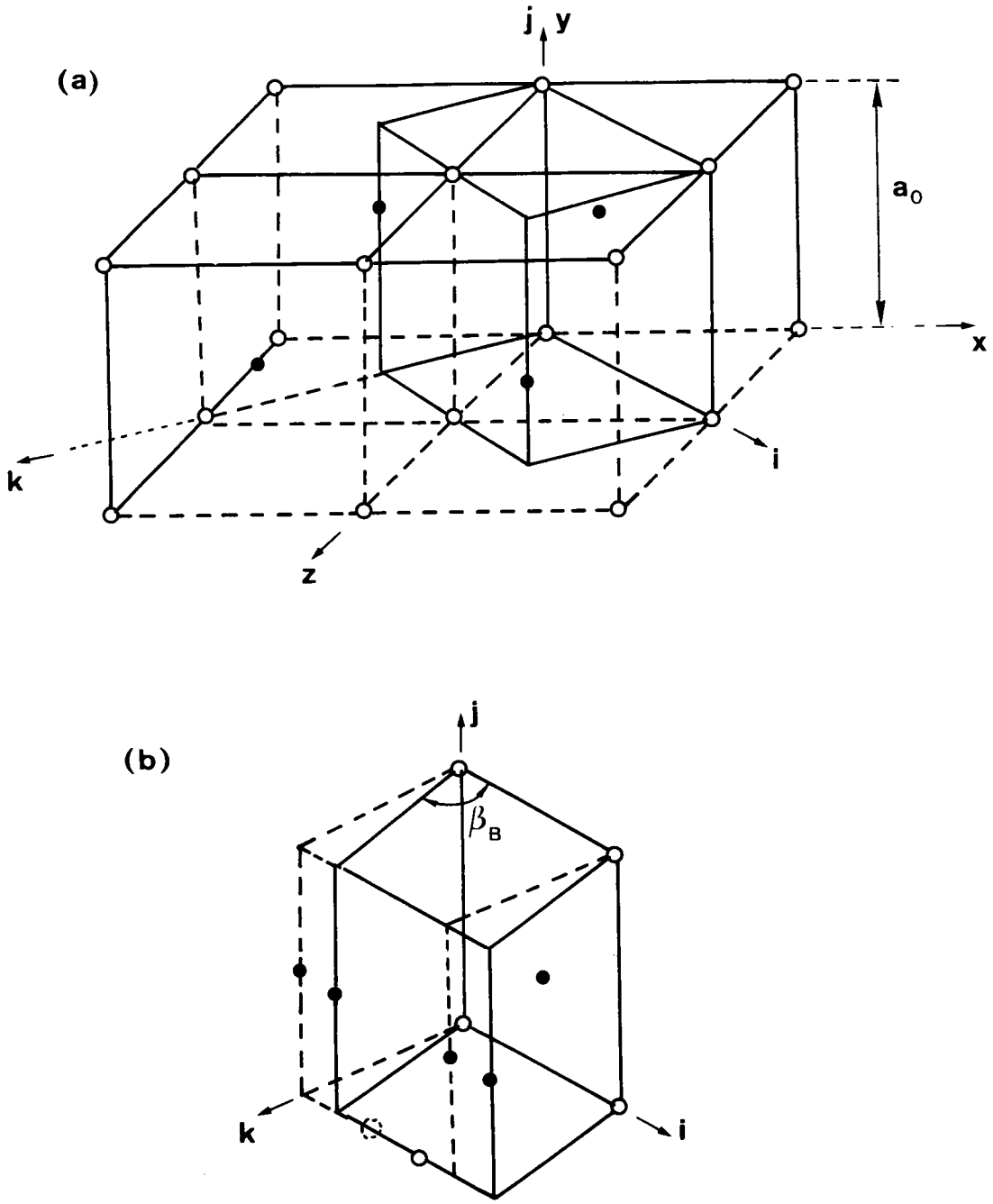
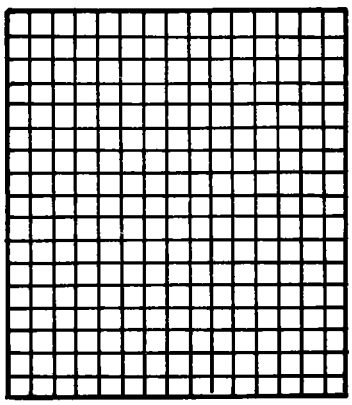
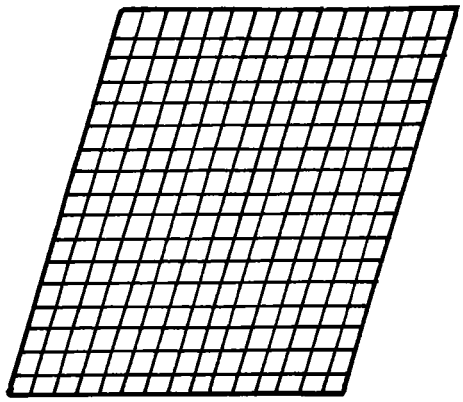


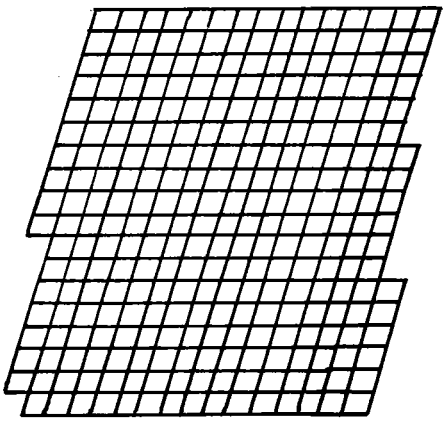
FIGURE II.3 : Déformation de Bain transformant une maille orthorombique en maille monoclinique dans un alliage Cu-26,7Zn-4,15Al, d'après Zhu-Wei-Juang [5] .



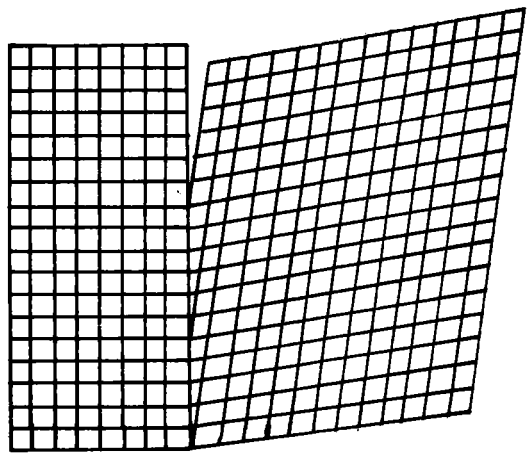
Réseau initial

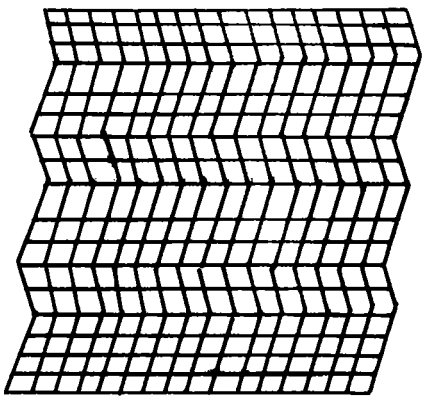


Déformation homogène
de réseau
(Déformation de Bain)

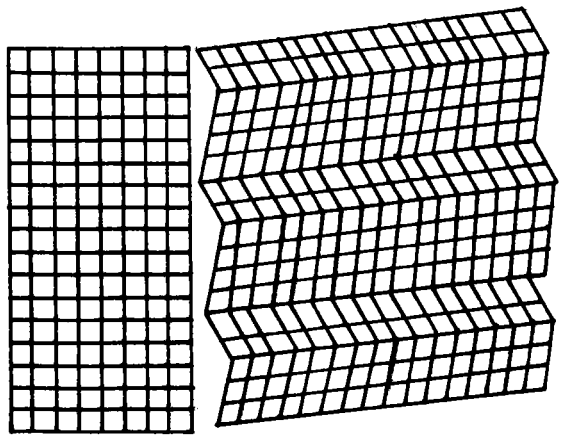


a)





b)



Déformation à réseau invariant

a) glissement

b) maclage

Rotation

FIGURE II.4 : Décomposition de la déformation du réseau cristallin pendant une transformation martensitique.

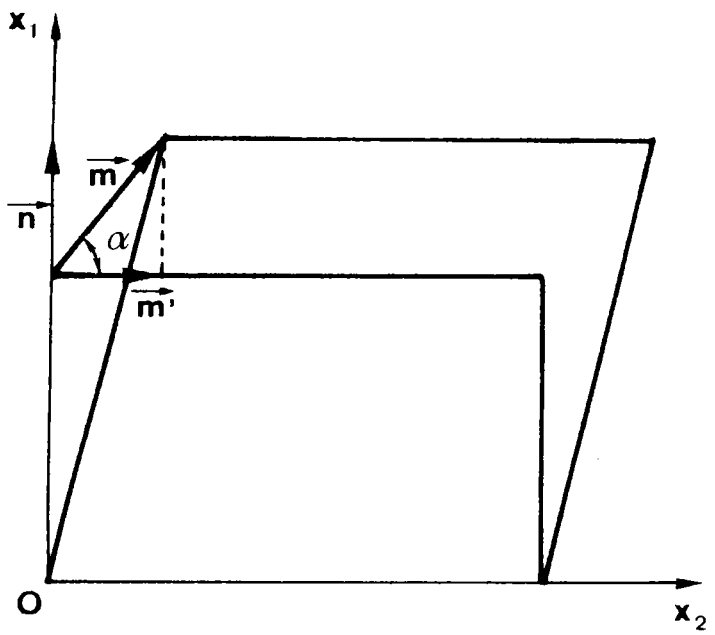
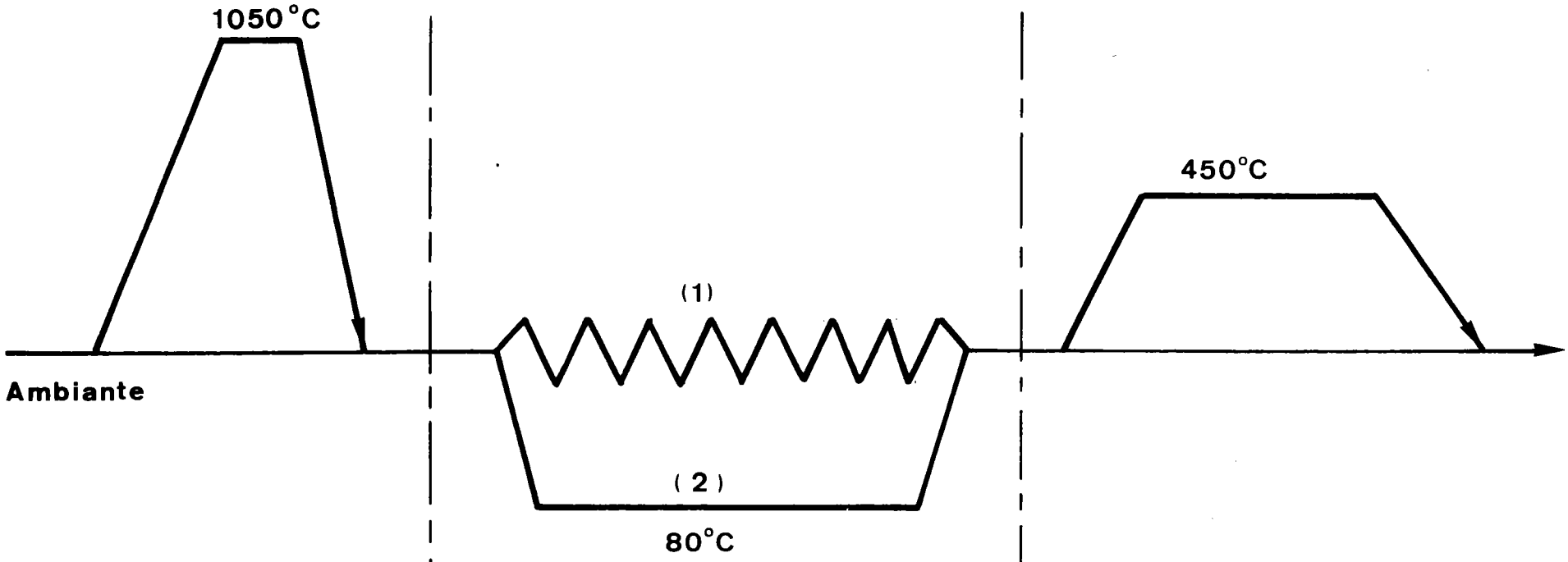


FIGURE II.5 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique.

$\vec{n}$: normale au plan d'habitat.
$\vec{m}$: direction de transformation.
$\vec{m}'$: projection sur le plan d'habitat de la direction $\vec{m}$.
α : angle formé par les directions $\vec{m}$ et $\vec{m}'$.



Structure γ par hypertrempe.

Structure martensitique obtenue par:
(1) écrouissage.
(2) traitement cryogénique.

Martensite durcie par précipitation.
Revenu à 450°C.

FIGURE II.6 : Schéma du traitement thermique du Z8CNDA 15.07
Obtention d'un TRIP STEEL.

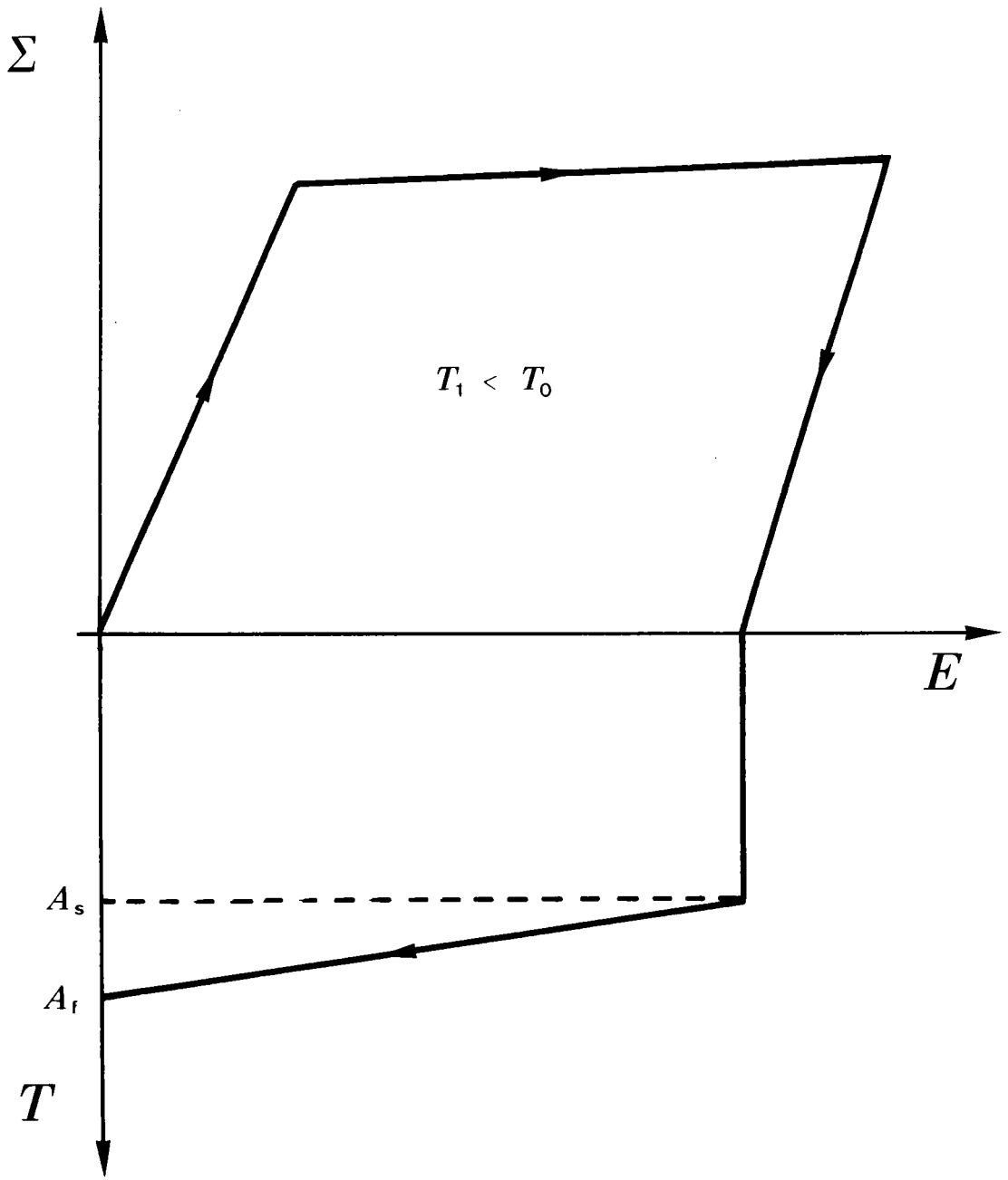


FIGURE II.7 : Représentation schématique de l'effet "mémoire de forme".

(1) Déformation à une température T_1 inférieure à T_0, température d'équilibre thermochimique entre la martensite et l'austénite.

(2) Chauffage jusqu'à une température supérieure à A_f température où toute la martensite formée est retransformée en austénite.

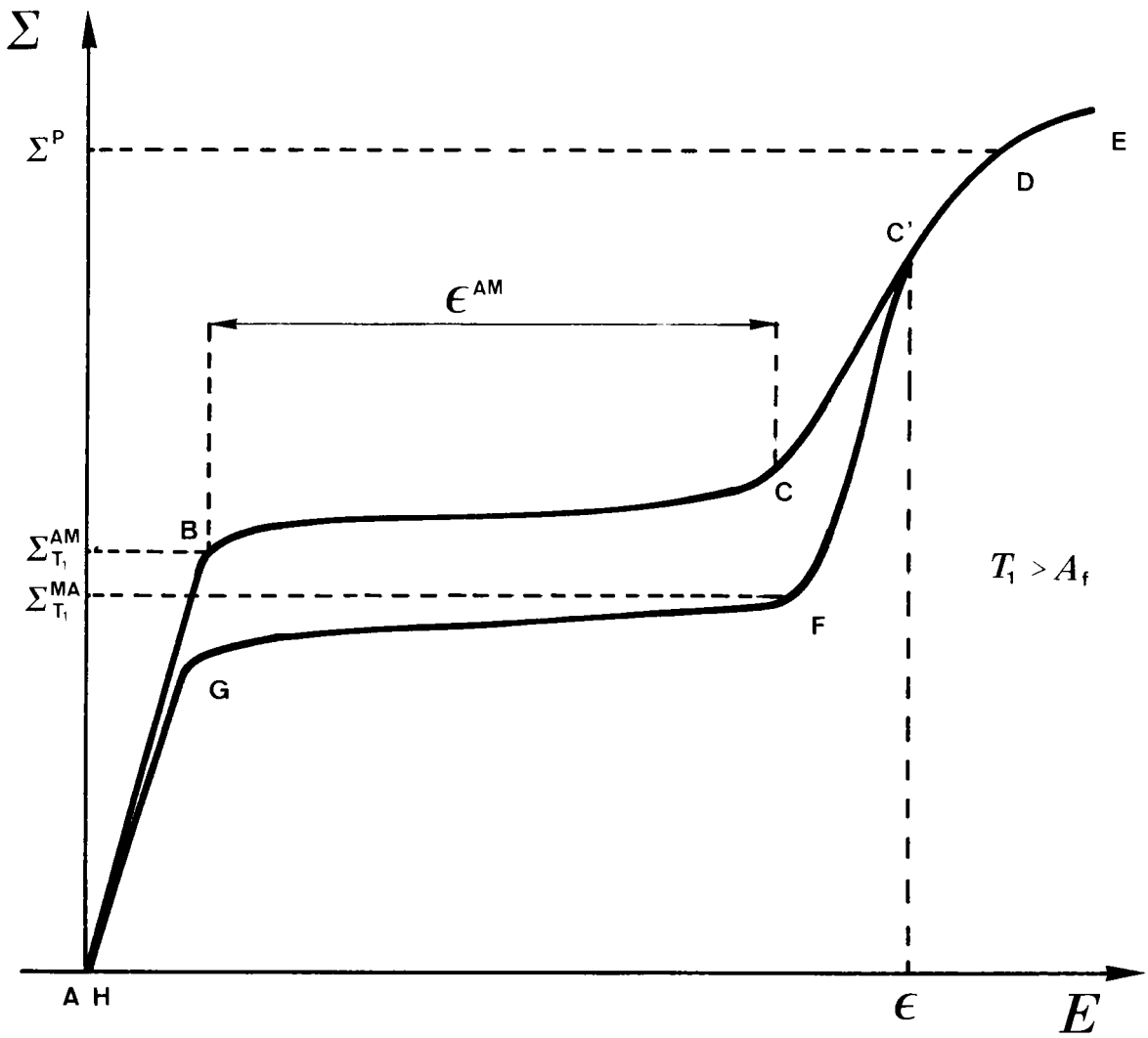


FIGURE II.8 : Représentation schématique d'une courbe contrainte-déformation montrant un comportement pseudoélastique.
La température de l'essai est supérieure à la température A_f.

- $\Sigma^{AM}_{T_1}$: Contrainte nécessaire pour former de la martensite à la température T_1 .
- $\Sigma^{AM}_{T_1}$: Contrainte de formation de l'austénite à la température T_1 à partir de la martensite.
- Σ^{p} : Seuil de plasticité de la martensite.
- ε : Déformation totale en fin de transformation.

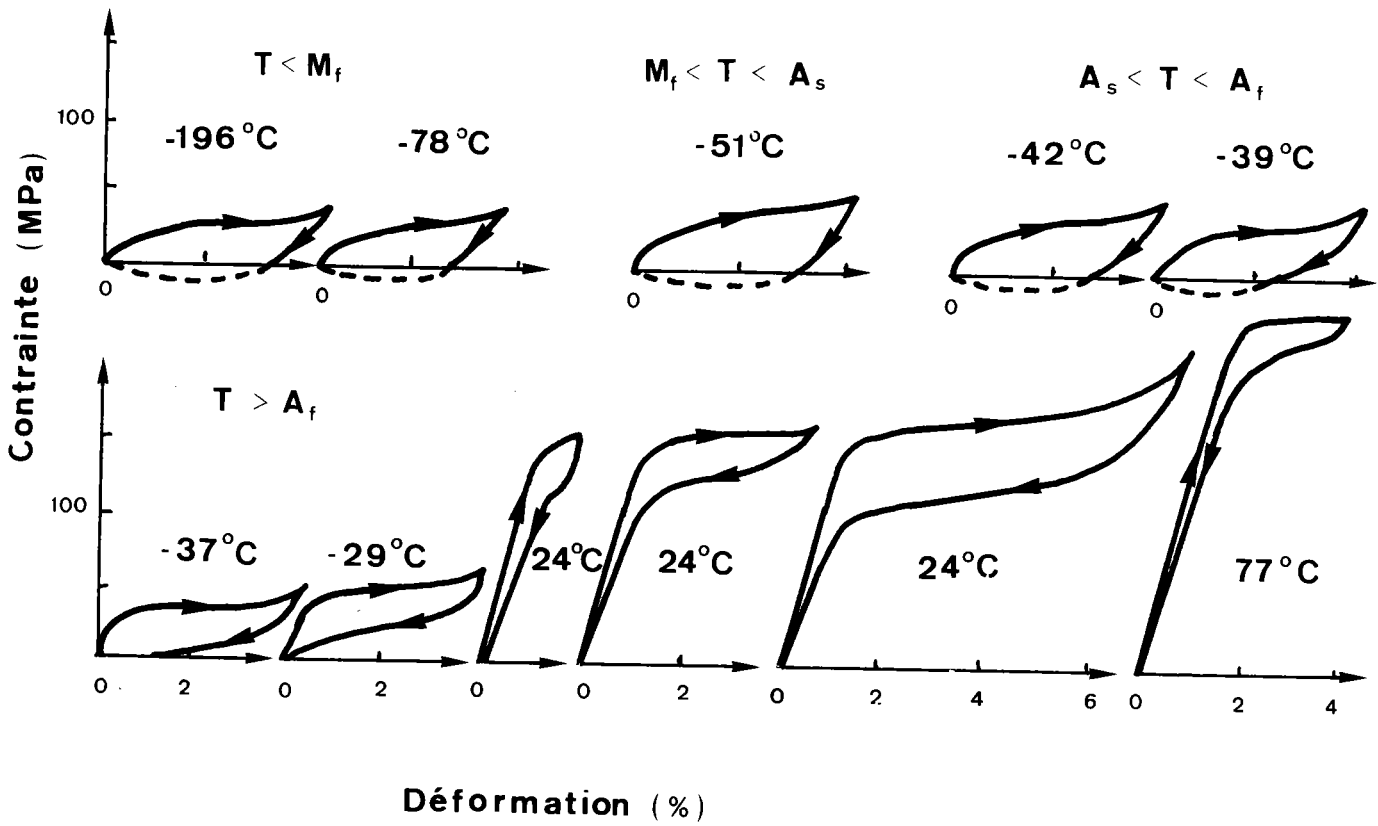


FIGURE II.9 : Courbes contrainte-déformation d'un monocristal de Cu-34,7Zn-3,05Sn(en poids) en fonction de la température de l'essai d'après Eisenwasser [43]. Cet alliage thermoélastique présente:

+ un comportement pseudoélastique pour $T > A_f$

+ un effet mémoire de forme pour $T < M_f$

Températures caractéristiques de la transformation pour cet alliage:

$$\begin{cases} M_s = -52°C \\ M_f = -65°C \\ A_s = -50°C \\ A_f = -38°C \end{cases}$$

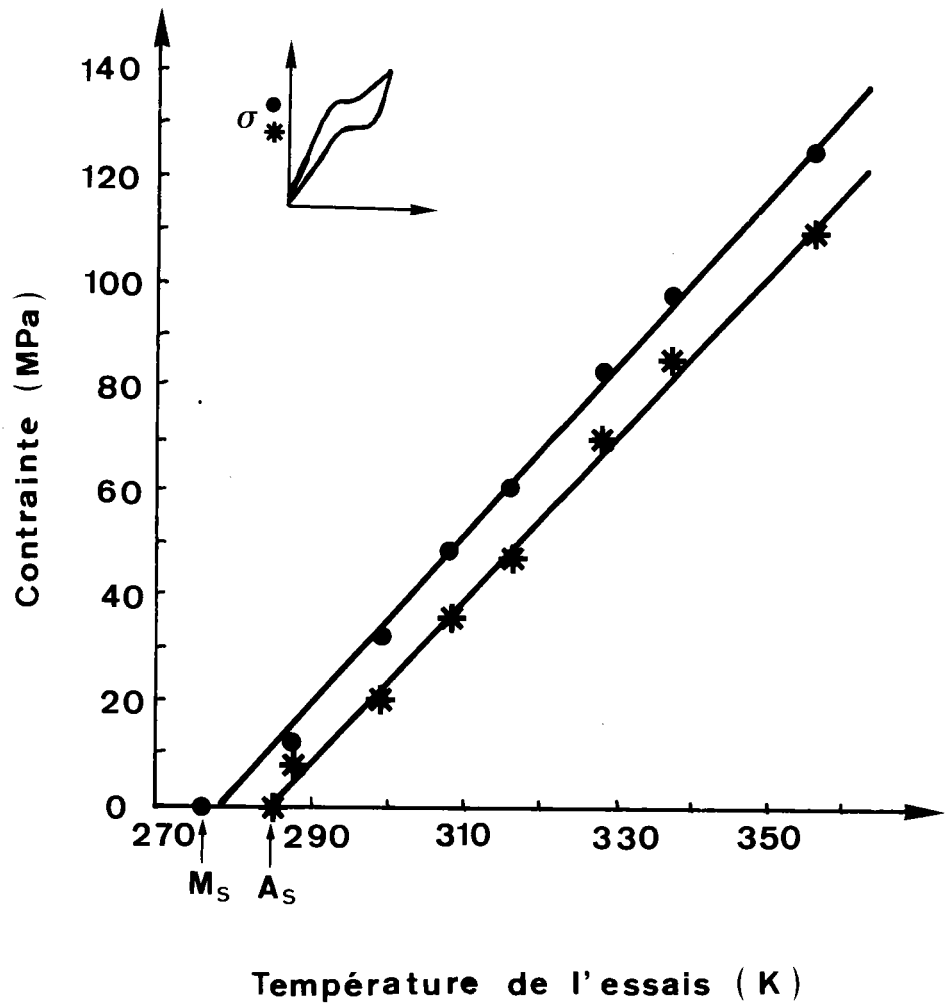


FIGURE II.10 : Contrainte critique induisant la transformation martensitique en fonction de la température de l'essai pour un polycristal de Cu-34,1Zn-1,8Sn (en pourcentage atomique) d'après Pops [9].

● Contrainte critique de charge.

✱ Contrainte critique de décharge (transformation inverse).

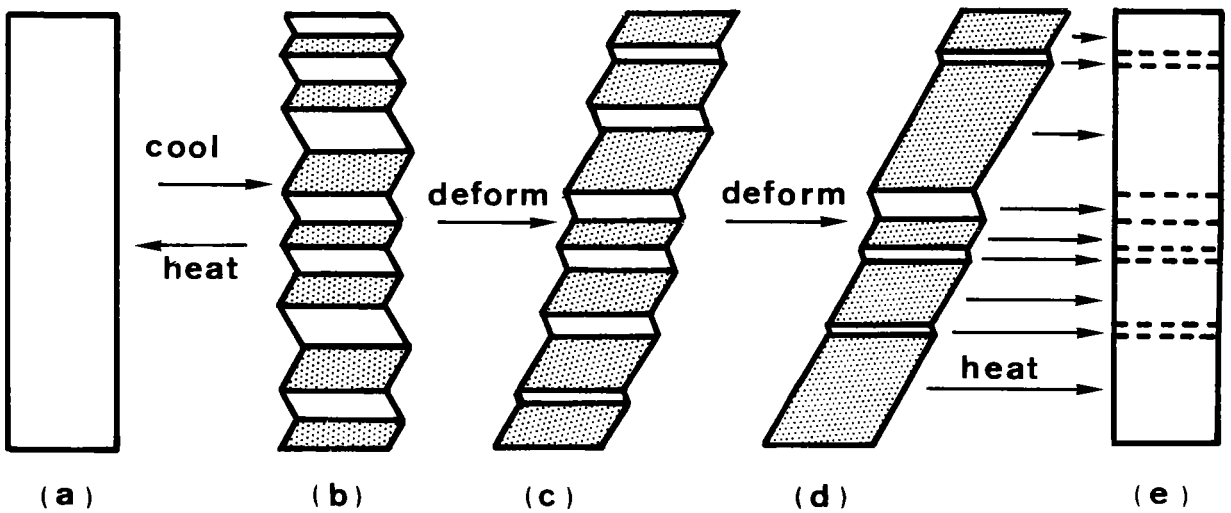


FIGURE II.11 : Représentation schématique de l'effet mémoire de forme.

(a) et (e) .....état austénitique.

(b) , (c) et (d) état martensitique.

(b) .....formation de deux variants autoaccommodants.

(c) et (d) un variant est favorisé par le champ de contraintes externes.

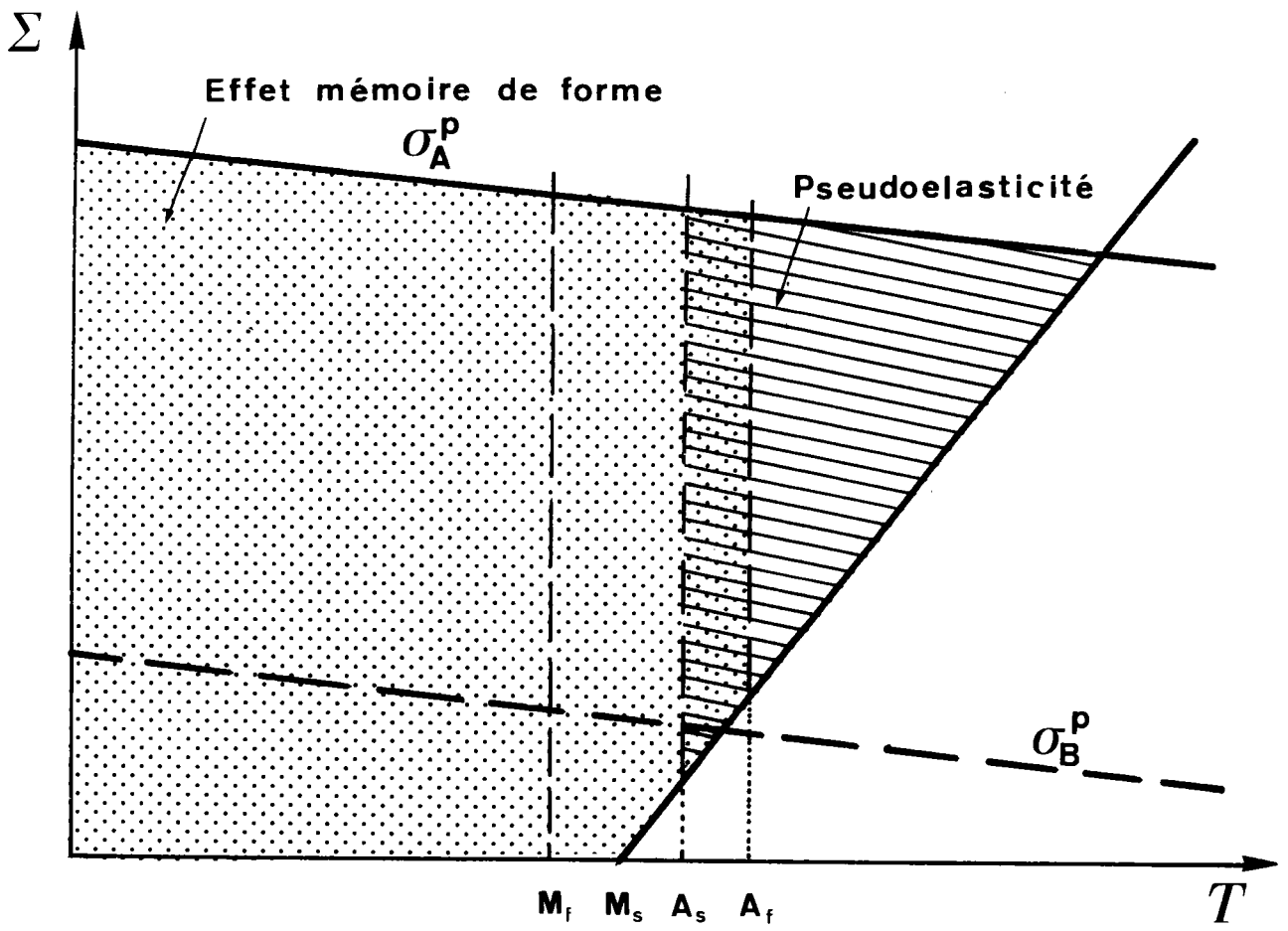


FIGURE II.12 : Domaine d'existence de l'effet mémoire de forme et de la pseudoélasticité pour deux alliages A et B. L'alliage A presente une contrainte d'écoulement plastique σ_A^p élevée. L'alliage B posséde un σ_B^p faible.

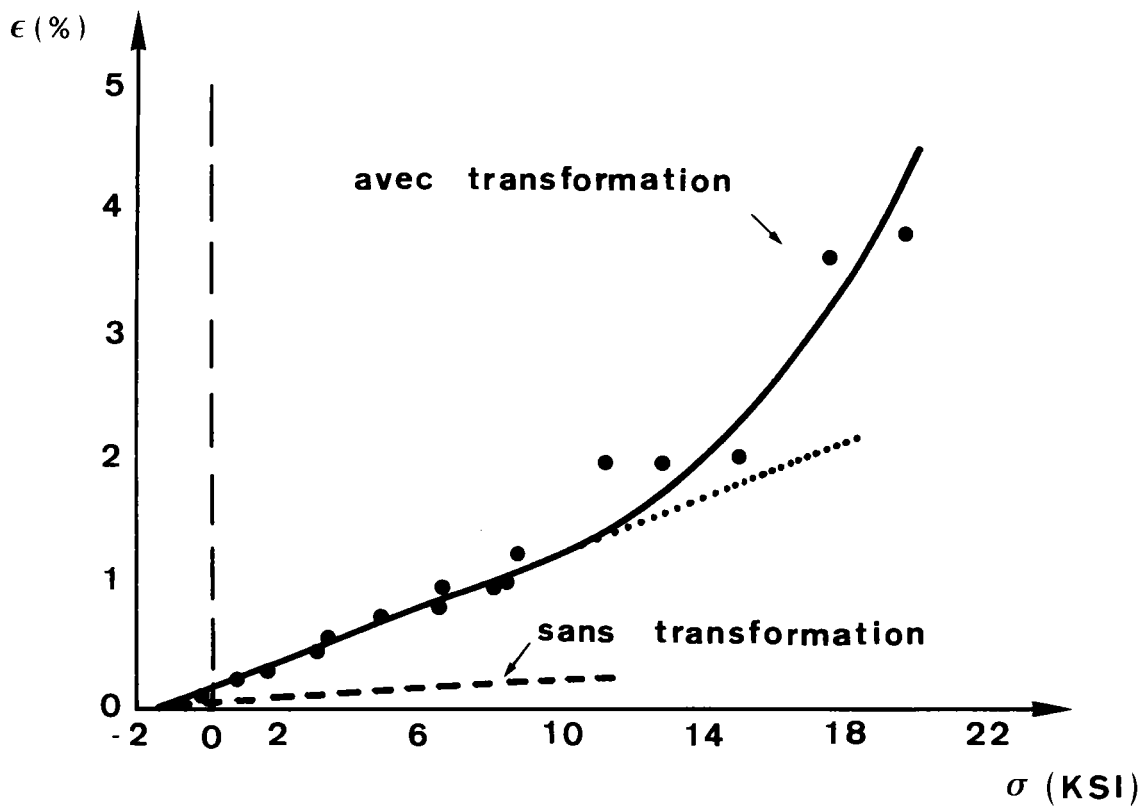


FIGURE II.13 : Plasticité de transformation pour un alliage Fe-15,1Ni d'après Sattler et al. [16].

CHAPITRE III

LOIS DE COMPORTEMENT

DU MONOCRISTAL

III.1°- INTRODUCTION

Le terme "plasticité de transformation" recouvre de fait une grande variété de situations qui correspondent, à l'échelle physique, à une "déformation" associée à un changement de phase.

Deux cas extrêmes peuvent se présenter. Cette déformation peut être la seule déformation de Bain, ou la déformation de Bain plus la transformation à réseau invariant vue au chapitre II. Dans ce cas, la déformation de transformation est directement associée à la transformation elle-même. On est dans le cas de la "plasticité de transformation parfaite."

A l'autre extrême, la déformation observée peut aussi recouvrir, en plus de la déformation de Bain, des déformations en plasticité classique dans l'une des phases ou dans les deux. On a alors couplage entre plasticité classique et "plasticité de transformation".

Deux grandes familles de modèle ont été développées depuis le milieu des années 60 pour décrire la déformation macroscopique engendrée par la transformation martensitique. Mais aucun des deux mécanismes imaginés ne rend compte de la totalité du phénomène [18] [19] .

Pour Greenwood et Johnson [11] la déformation a pour origine la différence de volume entre les deux phases, différence qui entraine une élévation suffisante du niveau de contrainte interne au voisinage de l'interface pour que la phase la plus ductile s'écoule plastiquement.

On peut objecter à ce modèle qu'il néglige totalement une caractéristique de la transformation qui est l'existence d'un cisaillement sur le plan d'habitat et que le calcul des contraintes internes, qui y est fait surestime de plus en plus celles-ci au fur et à mesure que les zones plastifiées d'austénite se rejoignent.

Une autre objection réside dans le choix de la limite d'élasticité de l'austénite qui y est fait et qui ne tient pas compte de la grande vitesse d'avancement de l'interface durant la transformation (de l'ordre de la vitesse du son). De plus les calculs effectués dans ce modèle supposent que la fraction volumique de la phase transformée ne varie pas.

Des tentatives pour améliorer ce modèle ont été faites (Abrassart, Gautier [13] [18]) mais elles ne résolvent pas totalement les objections ci-dessus.

L'autre classe de modèles, développée par Magee [15] , part de l'aspect cristallographique de la transformation. Il considère que les plaquettes de martensite se forment selon des orientations préférentielles et peuvent être orientées par un champ de contraintes extérieures.
Ce modèle donne de très bons résultats dans les premiers stades de la transformation, mais très vite il diverge avec l'expérience car il ne peut prendre en compte le champ de contrainte interne créé par les incompatibilités, champ de contrainte qui peut être assez fort pour activer des variants dont l'orientation n'est par favorable au sens de Magee. Par ailleurs, le modèle de Magee est purement monodimensionnel, il n'envisage pas les cas de chargement thermomécanique et ne peut prendre en compte la plasticité classique de la phase mère ou de la phase formée.

Pour ces raisons, de nombreux auteurs préfèrent décrire la déformation de transformation à l'aide de modèles empiriques fondés sur une combinaison de ces deux mécanismes.

Leblond et al.[19] ont tenté de donner une base théorique à de tels modèles à partir d'une méthode d'homogénéïsation. Ils considèrent, qu'à l'échelle microscopique, seule la plasticité classique intervient, et que la distinction, au niveau macroscopique, entre plasticité classique et plasticité de transformation n'est que la conséquence du processus d'homogénéïsation. La critique que l'on peut faire d'une telle démarche est qu'elle ne s'appuie pas sur la physique de la transformation.

Le problème à résoudre est complexe et ne peut être aboré qu'au travers de méthodes d'homogénéïsation. Deux phénomènes couplés sont alors à distinguer, la plasticité classique des deux phases et la plasticité de transformation qui doit être considérée comme un mode de déformation intrinsèque à la transformation martensitique.
Ce n'est qu'à partir de la description microscopique de ces deux phénomènes et des couplages qui les lient, que l'on obtiendra par homogénéisation la détermination du comportement macroscopique.

De nombreux travaux ayant déjà été éffectué sur la plasticité classique, nous nous attacherons dans le cadre de cette thèse à préciser les caractéristiques du terme de "plasticité de transformation parfaite",d'abord pour le monocristal (chapitre III), puis pour le polycristal (chapitre IV et V).

Le mécanisme de déformation associé à la transformation martensitique s'apparente beaucoup au glissement plastique, mais des différences notables existent entre ces deux modes de déformations.

Tout d'abord, on peut signaler l'existence, d'une variation volumique intrinsèque au changement de phase, (les critères de plasticité sont dans ce cas sensible à la contrainte normale) et la réversibilité de la déformation (avec éventuellement une hystérésis).

La déformation est limitée par le taux de transformation. De plus l'existence de rotations de réseaux intrinsèques à la transformation affectent les réponses élastiques des deux phases. Ce mode de déformation est de plus très sensible aux chargements thermomécaniques.

III.2°- CINEMATIQUE DE LA TRANSFORMATION

On considère maintenant un monocristal, subissant une transformation martensitique. A partir des caractéristiques locales de la transformation, on détermine les grandeurs macroscopiques liées à celle-ci, puis on définit un seuil de transformation ainsi que la loi d'écoulement qui lui est associée.

On ne prend en compte dans ce chapitre, pour déterminer la déformation, que des termes liès à la plasticité de transformation. On suppose, pour cela, que les deux phases sont loin de leur seuil d'écoulement en plasticité classique.

III.2.1 Calcul de la déformation totale

Soit un volume V subissant une transformation martensitique et V_m le volume transformé à un instant t.

A cet instant, le volume V_m est formé de n bandes de martensite (figure III.1)

La déformation totale moyenne du volume V est égale à la moyenne volumique des déformations totales locales.

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V}\int \varepsilon_{ij}^T(r)\,dV \qquad \text{(III.1)}$$

En plasticité les relations étant incrémentales, il est nécéssaire de connaître l'expression de l'incrément de déformation totale au cours du temps, mais on ne peut dériver directement la relation (III.2) car $\epsilon_{ij}^{T}(r)$ subit une discontinuité au passage du plan d'habitat séparant les deux phases. Il faut donc utiliser la méthode développée par GERMAIN (III.1) où l'on cherche à dériver par rapport au temps l'intégrale de volume d'une fonction discontinue [19] .

On obtient ainsi :

$$\frac{dE_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}^{T}\,dV\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{V}\int_{V_A} \varepsilon_{ij}^{A}\,dV + \frac{1}{V}\int_{V_M} \varepsilon_{ij}^{M}\,dV\right]$$

$$= \frac{1}{V}\int_{V_A} \frac{d\varepsilon_{ij}^{A}}{dt}\,dV + \frac{1}{V}\int_{V_M} \frac{d\varepsilon_{ij}^{M}}{dt}\,dV + \frac{1}{V}\int_S \Delta\varepsilon_{ij}\,v_n\,dS \qquad \text{(III.2)}$$

avec

- S : surface du plan d'habitat
- v_n : vitesse de déplacement de ce plan
- $\Delta\varepsilon_{ij}^{AM}$: valeur de la discontinuité au passage de S
- ε_{ij}^{A} : déformation dans l'austénite,
- ε_{ij}^{M} : déformation dans la martensite.

Cette discontinuité de déformation résultant de la transformation martensitique, $\Delta\epsilon_{ij}$ n'est autre que la déformation intrinsèque liée à la transformation ϵ_{ij}^{AM}, qui est uniforme tout au long du plan d'habitat.

La relation (III.2) s'écrit donc, sous forme incrémentale, en faisant l'hypothèse que la déformation à l'intérieur de l'austénite et de la martensite est uniforme et en notant :

$$\frac{V_A}{V} = 1 - x$$

$$\frac{V_M}{V} = x$$

$$\frac{\int_S v_n\,dS}{V} = dx$$

$$dE_{ij}^{T} = (1-x)\,dE_{ij}^{A} + x\,dE_{ij}^{M} + \varepsilon_{ij}^{AM}\,dx \qquad \text{(III.3)}$$

$d\epsilon_{ij}^{A}$ étant l'incrément de déformation totale de l'austénite
et $d\epsilon_{ij}^{M}$ l'incrément de défomation totale de la martensite .
Dans la suite, on supposera qu'il n'y a pas de plasticité classique ni dans la martensite formée, ni dans l'austénite. De plus, on supposera que l'élasticité est homogène, c'est-à-dire que les constantes élastiques sont les mêmes dans l'austénite et la martensite.

Pour les petites déformations, la déformation totale se décompose en partie élastique dE^{e} et en partie plastique dE^{PT} telle que :

$$dE^{T} = dE^{e} + dE^{PT}$$

(III.3) devient alors :

$$dE_{ij}^{e} + dE_{ij}^{PT} = (1-x)\,dE_{ij}^{eA} + x\,dE_{ij}^{eM} + \varepsilon_{ij}^{AM}\,dx$$

et puisque le milieu est homogène du point de vue élastique, on obtient :

$$dE_{ij}^{e} = (1-x)\,dE_{ij}^{eA} + x\,dE_{ij}^{eM}$$

donc $$dE_{ij}^{PT} = \varepsilon_{ij}^{AM}\,dx \qquad \text{(III.4)}$$

Ce terme correspond au cas de la plasticité de transformation parfaite.

Cette relation uniquement valable pour le milieu élastique homogène donne la déformation globale de transformation en fonction de la fraction volumique transformée x.

Dans le cas d'une élasticité hétérogène et, (ou) anisotrope, il faudrait corriger cette formule en tenant compte du tenseur localisation pour les milieux hétérogènes et anisotropes.

Nous précisons maintenant cette relation en fonction de la structure fine des variants formés.

III.2.2 Déformation et Rotation associées à la transformation martensitique

En générale, la transformation martensitique résulte de la formation de plusieurs variants, chaque variant ayant une orientation différente et une fraction volumique différente. La quantité globale dx est alors à détailler ainsi que le tenseur ϵ_{ij}^{AM} . On le fait tout d'abord dans le cas d'un variant.

III.2.2.1 Cas où la transformation s'éffectue selon un seul variant

Soit $(o , \vec{n}, \vec{m}', \vec{n} \wedge \vec{m}')$ un repère cartésien rectangulaire ayant pour origine le point O supposé fixe.

Soit $\vec{n}$ la normale unitaire au plan d'habitat du variant considéré et $\vec{m}'$ la projection sur ce plan d'habitat du vecteur $\vec{m}$ direction unitaire du déplacement (figure III.2).

Dans ce repère les coordonnées U_i^{AM} du déplacement $\vec{U}^{AM}$ d'un point P de coordonnées xi, résultant de la transformation de phase de tout l'élément de volume s'écrivent :

$$U_i^{AM} = g x_k n_k m_i \qquad \text{(III.5)}$$

en notant g la valeur du déplacement caractéristique sur le variant considéré.

g est une caractéristique intrinsèque de la transformation

Soit β^{AM} le tenseur gradient du déplacement.

$$\beta_{ij}^{AM} = U_{i,j}^{AM} \qquad \text{(III.6)}$$

Ce tenseur peut se décomposer en une partie symétrique notée ϵ^{AM} représentant le tenseur déformation et une partie antisymétrique ω^{AM} représentant le tenseur rotation "plastique" associé à la transformation.

$$\beta_{ij}^{AM} = \varepsilon_{ij}^{AM} + \omega_{ij}^{AM} \qquad \text{(III.7)}$$

le tenseur ϵ_{ij}^{AM} s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{AM} = \frac{1}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right) g = R_{ij}\, g \qquad \text{(III.8)}$$

en notant $R_{ij} = \frac{1}{2}\left(m_i n_j + m_j n_i\right)$

R_{ij} est appellé tenseur d'orientation du variant.

Dans le repère $(0, \vec{n}, \vec{m}', \vec{n} \wedge \vec{m}')$ le tenseur R_{ij} s'écrit :

$$R = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 0 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 2\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

en notant α l'angle formé par les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{m}'$ dans le plan $(\vec{m}, \vec{n})$.

A partir de la relation (III.4) on peut écrire maintenant, lorsqu'une fraction volumique dx est transformée :

$$dE_{ij}^{PT} = R_{ij}\, g\, dx \qquad \text{(III.9)}$$

Pour certains problèmes de texture cristallographique, il est important de pouvoir calculer la rotation du réseau cristallin et la rotation totale.

Pour la transformation martensitique il faut distinguer deux types de rotation, d'abord les rotations de réseau associées au passage d'une structure austénique à une structure martensitique, puis un second type de rotation, associée à la progression de la transformation de façon à assurer la continuité entre les deux phases.

Le premier type de rotation est accessible à l'aide de relations cristallographiques [4], le second type en considérant la transformation martensitique comme un mode de déformation. De cette façon on obtient pour la rotation "plastique" l'expression suivante :

$$\omega_{ij}^{AM} = \frac{1}{2}\left(m_i n_j - m_j n_i\right) g = S_{ij}\, g \qquad \text{(III.10)}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(m_i n_j - m_j n_i\right)$$

et s'écrivant dans le repère considéré :

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

de la même façon que pour (III.9) on obtient :

$$d\Omega_{ij}^{PT} = S_{ij}\; g\; dx \qquad \text{(III.11)}$$

A partir de ces relations on peut calculer la variation de volume engendrée par la transformation.

Le tenseur déformation associé est à trace non nulle on obtient donc :

$$d\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = dE_{ii}^{PT} = R_{ii}\, g\, dx \qquad \text{(III.12)}$$

Soit également : $\dfrac{\Delta V}{V} = E_{ii}^{PT} = R_{ii}\, g\, x$

avec $R_{ii} = \sin\alpha$ (III.13)

donc $E_{ii}^{PT} = xg \sin\alpha$ (III.14)

L'angle α est donc la valeur caractéristique de la variation de volume associée à la transformation, il détermine l'importance de celle-ci.

On remarque aussi que le taux de martensite formée détermine l'ampleur de la déformation due à la transformation.

La valeur maximale de la déformation E^{PT} pour un système à un seul variant actif est donné par :

$$E_{ij}^{PT} = g\ R_{ij}$$

on obtient donc durant la transformation :

$$o \leqslant E_{ij}^{PT} \leqslant g\, R_{ij} \qquad \text{(III.15)}$$

ou encore :

$$E_{ij}^{PT} = \epsilon_{ij}^{AM} x \qquad \text{avec} \qquad o \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{(III.16)}$$

On peut montrer une autre propriété qui nous servira par la suite, le double produit $R_{ij}\ R_{ij}$ a la valeur suivante :

$$R_{ij}R_{ij} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin^2\alpha\right) \qquad \text{(III.17)}$$

III.2.2.2 Cas de la déformation avec plusieurs variants actifs

Soit un volume V comportant n bandes de martensite de volume v^n chaque bande étant constitué d'un variant différent (figure III.3).

L'accroissement de déformation sur ce volume sera égale à la moyenne des accroissements.

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_n R_{ij}^n \; g \; \frac{d\,V^n}{V}$$

soit :

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_n R_{ij}^n \; g \; dx^n \qquad \text{(III.18)}$$

en notant dx^n le taux de martensite formée suivant le variant n de matrice d'orientation R_{ij}^n.

On a les propriétés suivantes :

$$\sum_n dx^n = dx \qquad \text{(III.19)}$$

$$\sum_n x^n = x \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{III.20}$$

$$\left(\epsilon_{ij}^{AM} \right)^n = R_{ij}^n \quad g \tag{III.21}$$

De la même façon on a pour les rotations :

$$d\Omega_{ij}^{PT} = \sum_n S_{ij}^n \, g \, dx^n \tag{III.22}$$

$$d\Omega_{ij}^{PT} = \sum_n \left(\omega_{ij}^{AM} \right)^n dx^n \tag{III.23}$$

$$\left(\omega_{ij}^{AM} \right)^n = S_{ij}^n \, g \tag{III.24}$$

et la variation volumique s'écrit maintenant pour x égal à 1 :

$$\frac{\Delta V}{V} = \sum_n \frac{\Delta V^n}{V} = \sum_n \left(\varepsilon_{ii}^{AM} \right)^n = \sum_n g R_{ii}^n$$

Soit :

$$\frac{\Delta V}{V} = g \sin \alpha \tag{III.25}$$

III.3° ETUDE DU COMPORTEMENT EN SOLLICITATION UNIAXIALE

III.3.1 Introduction

Avant d'aborder les aspects "statiques" de la transformation martensitique pour un état de contrainte tridimensionnel, on traite le cas unidimensionnel de la traction uniaxiale ; ceci permet de présenter les caractéristiques essentielles du comportement (seuils, fonction potentielle, règle d'écoulement, transformation inverse) qui seront développées dans la suite du chapitre, d'abord pour une transformation s'éffectuant selon un seul variant, puis dans le cas général où plusieurs variants peuvent être activés.

Cette étude est effectuée avec l'hypothèse que nous nous trouvons loin des seuils de plasticité classique de l'austénite et de la martensite, les seules déformations existantes sont donc les déformations élastiques des deux phases et la déformation due à la plasticité de transformation parfaite. Ceci est le cas pour les alliages de Cu-Zn-Al.

III.3.2 Résultats expérimentaux et interprétations dans le cas de la traction uniaxiale sur un monocristal d'alliage Cu Zn Al

La figure (III.4) obtenue en traction [20] pour un monocristal d'alliage Cu Zn Al, à une température supérieure de 70 K à la température Ms, est la courbe typique contrainte-déformation d'un monocristal subissant une transformation martensitique sous contrainte.

Lors de la décharge on remarque que cette déformation est réversible et qu'il existe une hystérésis.

La courbe, qui possède six stades de déformation, peut être décrite de la façon suivante (fig III.5).

1er stade partie OA

L'austénite se déforme élastiquement jusqu'à une contrainte critique σ_s^M qui dépend de la température et de l'orientation du monocristal d'austénite.

σ_s^M est compris entre la valeur zéro pour une température égale à Ms et σ_p^A valeur où l'austénite s'écoulera plastiquement.

2ème stade partie AB

Sous l'effet de la contrainte appliquée, l'austénite se transforme en martensite, la déformation obtenue est alors égale à la somme des déformations élastiques des deux phases et de la déformation associée à la transformation. C'est ce dernier terme qui est prépondérant. La partie AB possède une légère pente positive correspondant à un phénomène d'écrouissage.

En B toute l'austénite est transformée, ce point correspond à la contrainte σ_f^M qui dépend elle aussi de la température de l'essai.

3ème stade partie B.C

Toute l'austénite étant transformée, il ne reste plus, pour des niveaux de contrainte supérieurs à σ_f^M , comme contribution à la déformation, que la déformation élastique de la martensite, et cela, jusqu'au moment où le seuil de plasticité de celle-ci sera atteint ou qu'une nouvelle transformation de phase intervienne (ce qui est parfois le cas dans les Cu-Zn-Al [21]).

4ème stade partie C.D

Si dans le stade précédent, on procède à une décharge de l'échantillon, on décrira élastiquement la portion CD de la courbe jusqu'à atteindre la contrainte σ_s^A telle que l'énergie mécanique associée à cette contrainte ne soit plus suffisante pour empêcher la martensite, non stable à cette température, de retourner à l'état austénitique.

σ_s^A est inférieur à σ_f^M du fait de l'existence d'une hystérésis.

5ème stade partie D.E

La contrainte continuant à décroître, la transformation inverse se poursuit jusqu'au moment où il ne reste plus de martensite. Du fait de l'hystérésis cette transformation se déroule pour des niveaux de contrainte inférieurs à ceux de la transformation martensitique.

6ème stade partie E.O

Pour une contrainte inférieure à σ_f^A nous sommes de nouveau dans un état totalement austénitique. Pour un état de contrainte nul, nous voyons que nous revenons à l'origine et qu'il ne reste aucune déformation permanente. La transformation est totalement réversible.

On a vu au paragraphe précédent qu'il est possible d'écrire l'incrément de déformation durant le stade B.C de la façon suivante (d'après III.3):

$$dE^T = (1 - x)\, d\epsilon^A + x\, d\epsilon^M + \epsilon^{AM}\, dx$$

La même relation décrit aussi la transformation inverse D.E, mais dans ce cas on a $d\epsilon^A$, $d\epsilon^M$ et dx qui sont négatifs.

Si on considère un point M compris entre A et B. Il lui correspond une fraction volumique x de martensite formée.

Lors d'une décharge à partir de M on obtient pour dE^T , avec dx égal à zéro:

$dE^T = x\, d\epsilon^M + (1 - x)\, d\epsilon^A$ avec $d\epsilon^M$ et $d\epsilon^A$ négatif et ceci jusqu'au point N situé sur la droite D.E.

Si la décharge continue au-delà du point N, on entre dans le domaine de la transformation inverse.

A partir de l'état de contrainte appliquée, de l'évolution de cet état de contrainte, et de l'état d'avancement de la transformation on peut donner les valeurs suivantes à l'incrément de déformation :

a) $dE^T = x d\epsilon^M + (1 - x)\, d\epsilon^A$ avec $dx = 0$

ce résultat est obtenu quand :

- $x = 0$ et $\sigma < \sigma_s^M$
- $x = 1$ et $\sigma > \sigma_s^A$
- $x \in [0,1[$ et $\sigma_s^M \leqslant \sigma < \sigma_f^M$ avec $d\sigma < 0$
- $x \in]0,1]$ et $\sigma_s^A > \sigma \geqslant \sigma_f^A$ avec $d\sigma > 0$

dE^T sera positif si l'incrément de contrainte est positif, dans le cas contraire dE^T est négatif.

b) $dE^T = x d\epsilon^M + (1 - x)\, d\epsilon^A + \epsilon^{AM} dx$ avec $dx \neq 0$

On a dans ce cas présence de plasticité de transformation. Comme dans le cas précédent dE^T évolue dans le même sens que la contrainte, on a $dx > 0$ quand :

$x \in [0,1[$ et $\sigma \in [\sigma_s^M, \sigma_f^M[$ et $d\sigma > 0$

et $dx < 0$ quand

$X \in]0,1]$ et $\sigma \in [\sigma_s^A, \sigma_f^A[$ et $d\sigma < 0$

Dans ce paragraphe on a décrit qualitativement les différents phénomènes observés lors d'une transformation martensitique dans le cas d'un essai de traction. Dans les paragraphes suivants, on propose une modélisation de ces phénomènes à partir de la cristallographie de la transformation et d'une approche thermodynamique.

III.4° ETUDE DU COMPORTEMENT POUR UN SEUL VARIANT

III.4.1 Introduction

On se limite au cas où un seul variant est actif. Dans ce paragraphe on étudie les aspects thermodynamiques de la transformation martensitique, de façon à mettre en évidence une loi à seuil, faisant intervenir la variation volumique, intrinsèque à la transformation, ainsi qu'une contrainte critique.

On démontre que le principe du travail maximal s'applique aussi à la plasticité de transformation parfaite et peut être étendu au cas où la température est une variable de chargement. On détermine ensuite la loi de comportement du monocristal monovariant et on présente une première application de cette étude. La plasticité de transformation étant réversible, on étudie ensuite la transformation inverse.

III.4.2 Variation de l'énergie libre de Gibbs.Fonction seuil

On étudie dans ce paragraphe la variation de l'énergie libre de Gibbs associée à la formation d'une plaquette de martensite de volume V_M à une température T et pour un champ de contrainte extérieur Σ_{ij}.

A partir d'une telle étude on détermine une fonction seuil pour la transformation martensitique du monocristal.

La variation d'énergie libre s'exprime par [22] [23] :

$$\Delta G = \Delta G_c V_M + \Gamma S + E_{int} + E_{incl} + E_{irr} \qquad \text{(III.26)}$$

avec :

ΔG_c : variation d'énergie libre chimique, fonction de la température, égale à la différence d'énergie libre entre la martensite et l'austénite.

$$\Delta G_c = G^M - G^A$$

ΔG_c s'annule à la température d'équilibre thermochimique T_o la martensite formée étant stable si ΔG_c est négatif et instable quand cette valeur est positive (figure III.6).

E_{int} : énergie mécanique d'interaction résultant du travail du champ des forces extérieures appliquées créant une contrainte uniforme Σ_{ij}.

$$E_{int} = -\int_V \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{AM} dV = -V_M \Sigma_{ij} R_{ij} g \qquad \text{(III.27)}$$

Γ : est l'énergie de l'interface austénite - martensite. Elle peut être négligée devant les autres termes dans les cas envisagés ici.

E_{irr}: énergie dissipée par frottement et par production de défauts irréversibles dans l'austénite et dans la martensite [23] .
Dans le cas de la pseudoélasticité et des martensites thermoélastiques ce terme est quasiment nul.

E_{incl} : énergie élastique associée aux incompatibilités entre l'austénite et la martensite ainsi qu'aux incompatibilités entre les différents variants de martensite.

$$E_{incl} = -\frac{1}{2}\int_{V_M} \sigma_{ij}\, \varepsilon_{ij}^{AM}\, dV \qquad \text{(III.28)}$$

σ_{ij} est le champ de contraintes internes qui est associé aux incompatibilités de la transformation martensitique.

Par exemple, dans le cas d'une plaquette de martensite unique ayant la forme d'une inclusion ellipsoïdale, on peut utiliser la méthode d'Eshelby pour calculer E_{incl} [24].

Dans ce cas, σ_{ij} est la contrainte uniforme qui règne dans l'inclusion. En notant C_{ijkl} les constantes élastiques et en les supposant identique dans la martensite et dans l'austénite, on a :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}^{e}$$

en supposant de plus que l'élasticité est isotrope, on obtient :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij}^{e} + \frac{\nu}{1-2\nu}\, \varepsilon_{kk}^{e}\, \delta_{ij}\right)$$

D'autre part comme

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{AM}$$

et $$\varepsilon_{ij}^{e} = \varepsilon_{ij}^{T} - \varepsilon_{ij}^{AM}$$

ou encore en utilisant le tenseur d'Eshelby S_{ijkl} [24] on a :

$$\varepsilon_{ij}^{e} = S_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}^{AM} - \varepsilon_{ij}^{AM}$$

En faisant l'hypothèse que les inclusions sont sphériques et l'élasticité isotrope, le tenseur d'Eshelby se réduit à deux coefficients scalaires α et β tels que :

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \beta \varepsilon^{AM}_{ij} + \frac{1}{3}(\alpha - \beta)\varepsilon^{AM}_{kk}\delta_{ij}$$

avec :

$$\beta = \frac{2}{15}\frac{4-5\nu}{1-\nu}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

donc :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left[(\beta-1)\varepsilon^{AM}_{ij} - \frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}\varepsilon^{AM}_{kk}\delta_{ij}\right]$$

ce qui donne pour l'énergie d'inclusion :

$$E_{incl} = \mu\left[(1-\beta)\varepsilon^{AM}_{ij}\varepsilon^{AM}_{ij} + \frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}\varepsilon^{AM}_{kk}\varepsilon^{AM}_{mm}\right]V_M \qquad \text{(III.29)}$$

Dans le cas où un seul variant est actif, on a :

$$E_{incl} = \left[(1-\beta)R_{ij}R_{ij} + \frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}R_{kk}R_{mm}\right]\mu g^2 V_M \qquad \text{(III.30)}$$

et en prenant pour ν la valeur usuelle de $\nu = 0{,}3$

on obtient:

$$\beta \simeq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu} \simeq \frac{1}{4}$$

La relation (III.30) devient ainsi :

$$E_{incl} = \left[\frac{R_{ij} R_{ij}}{2} + \frac{R_{kk} R_{mm}}{4} \right] \mu g^2 V_M$$

soit en utilisant la définition du tenseur R_{ij} :

$$E_{incl} = \frac{\mu g^2 V_M}{4} \left(1 + 2 \sin^2 \alpha \right) \qquad \text{(III.31)}$$

Dans le cas où la variation de volume est nulle, on retrouve le résultat classique, pour une inclusion sphérique en milieu isotrope.

$$E_{incl} = \frac{1}{2} \mu V \varepsilon^p_{ij} \varepsilon^p_{ij} \qquad \text{(III.32)}$$

Le terme E_{incl} est considérable par rapport à E_{int} car l'hypothèse d'inclusion de forme sphérique, qui a été faite, interdit la relaxation des contraintes internes par une croissance orientée du volume V_M .
La croissance de la martensite s'effectue par une augmentation d'épaisseur des plaquettes formées. Dans ces plaquettes les contraintes internes peuvent être annulées ou considérablement affaiblies par une forme éllipsoïdale particulière.

On est amené à distinguer deux stades dans la croissance de la martensite.

- un stade de "germination" avec passage d'une inclusion de forme sphérique à une plaquette.
- un stade de "croissance" caractérisé par l'augmentation de l'épaisseur de la plaquette.

Pour les grandes déformations et les effets macroscopiques c'est le stade de croissance qui est prépondérant.

On se limite à l'étude de ce stade qui correspond à $E_{incl} = 0$. Il n'en serait pas de même dans le cas d'un monocristal à plusieurs variants ou dans le cas d'un polycristal.

Pour la variation de l'énergie libre de Gibbs on obtient alors :

$$\Delta G = \Delta G_c(T) V_M - \Sigma_{ij} R_{ij} g V_M \qquad \text{(III.33)}$$

La martensite se forme pour ΔG égal à zéro, c'est-à-dire si :

$$\Delta G_c(T) = \Sigma_{ij} R_{ij} g \qquad \text{(III.34)}$$

Ce qui peut être assimilé à une fonction seuil.
Le produit $\Sigma_{ij} R_{ij}$ est égal à la contrainte résolue sur le variant considéré c'est-à-dire à la projection dans la direction $\overrightarrow{m}$ du vecteur contrainte sur le plan d'habitat.

On obtient la relation (III.35) qui est équivalente à la loi de Schmid en plasticité classique, mais qui fait intervenir la trace de Σ car R_{ii} est différent de zéro.

on a donc :

$$\Sigma_{ij} R_{ij} = \frac{\Delta G_c(T)}{g} \qquad \text{(III.35)}$$

ou encore :

$$\Sigma_{ij} R_{ij} - \frac{\Delta G_c(T)}{g} = 0$$

Ce résultat contient la forme proposé par Patel et Cohen [25] pour interpréter l'effet d'une contrainte de traction sur la température M_s.

En effet en tenant compte des propriétés de R_{ij} , on obtient en traction simple à partir de (III.35).

$$\tau \cos\alpha + \sigma_n \sin\alpha = \frac{\Delta G_c(T)}{g}$$

où τ est la cission résolue sur le plan d'habitat dans la direction $\overrightarrow{m'}$ et σ_n la contrainte normale au plan d'habitat.

La formule (III.35) décrit le seuil initial de la transformation. On précise maintenant l'évolution de ce seuil lorsque la transformation progresse, c'est-à-dire l'écrouissage.

III.4.3 Ecrouissage du monocristal

Il faut maintenant déterminer la fonction seuil non plus à l'instant zéro de la transformation mais tout au long de celle-ci.

Pour un monocristal se transformant selon un seul variant la progression de la transformation s'effectue quasiment à contrainte constante avec une pente d'écrouissage très faible. On peut donc considérer l'écrouissage comme constant tout au long de la transformation.

En notant H cette pente, on écrit qu'à un accroissement dx du taux de transformation, correspond, sur le variant actif, une augmentation de la contrainte résolue critique égale à :

$$R_{ij}\, d\Sigma_{ij} = H g\, dx \qquad \text{(III.36)}$$

A chaque instant il faut donc avoir pour la contrainte l'expression suivante :

$$R_{ij}\, \Sigma_{ij} = \frac{\Delta G_c(T)}{g} + H g\, x \qquad \text{(III.37)}$$

On obtient, ainsi une fonction notée $F(\Sigma_{ij}, T, x)$ qui dépend de l'état de contrainte Σ_{ij}, de la température T et des paramètres d'écrouissage H et qui sert de fonction de charge pour la transformation. Elle doit être nulle tout au long de la transformation et négative quand le seuil n'est pas atteint.

$$f(\Sigma_{ij}, T, x) = R_{ij}\, \Sigma_{ij} - \frac{\Delta G_c(T)}{g} - H g\, x \qquad \text{(III.38)}$$

Cette fonction caractérise le seuil de transformation, mais nous verrons qu'elle peut également servir pour décrire l'écoulement du matériau (matériau standard) [26] .

III.4.4 Loi d'écoulement

Dans le paragraphe précédent, il a été démontré les conditions nécéssaires sur l'état de contrainte et la température pour que la transformation puisse se produire.

Maintenant, on propose d'établir une relation qui relie la déformation aux paramètres de chargement Σ_{ij} et T.

III.4.4.1 Loi de comportement en plasticité de transformation

On ne peut écrire qu'une relation incrémentale entre dE_{ij}^{PT} et $d\Sigma_{ij}$ et dT que l'on peut mettre sous la forme :

$$dE_{ij}^{PT} = A_{ijkl}\, d\Sigma_{kl} + B_{ij}\, dT \qquad \text{(III.39)}$$

avec la condition $f(\Sigma_{ij}, T, x) = o$

Par ailleurs, $d E_{ij}^{PT}$ doit être nulle pour une variation des paramètres de chargement $d\Sigma_{ij}$, dT et telle que $d_y f$, la différentielle de la fonction f à écrouissage constant, soit nulle.

On doit donc avoir :

$$dE_{ij}^{PT} = H_{ij}\, d_y f \qquad \text{(III.40)}$$

avec $$d_y f = \frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} d\Sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT$$

La relation (III.39) s'écrit alors :

$$dE_{ij}^{PT} = H_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma_{kl}} d\Sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \qquad \text{(III.41)}$$

et l'on a : $$\begin{cases} A_{ijkl} = H_{ij} \dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{kl}} \\ B_{ij} = H_{ij} \dfrac{\partial f}{\partial T} \end{cases}$$

Pour le calcul de $d_y f$, il est raisonnable de supposer que seul $\Delta G_c(T)$ dépend de T.

La relation (III.41) montre que H_{ij} est un tenseur symétrique à trace non nulle car il en est ainsi de $d E_{ij}^{PT}$.

Dans le cas d'un seul variant, la formule (III.9) montre que H_{ij} doit être proportionnel à R_{ij}.

Pour être plus général et déterminer le tenseur H_{ij} nous proposons de démontrer que dans le cas de la plasticité de transformation le principe du travail maximal est vérifié.

III.4.4.2 Principe du travail maximal

La détermination de la loi d'écoulement passe par la détermination du tenseur H_{ij}. Pour ce faire, on démontre la validité du principe du travail maximal en plasticité de transformation.

On doit dans ce cas tenir compte de la variation volumique car la composante normale du vecteur contrainte sur le plan d'habitat joue un rôle très important.

III.4.4.2.1 Etude à température constante

Soit un état de contrainte Σ_{ij} situé sur le seuil de transformation. Pour cet état on peut écrire l'expression de la fonction seuil, et calculer le travail de déformation dW dans la déformation réelle dE_{ij}^{PT}.

$$\Sigma_{ij} R_{ij} - \frac{\Delta G_c(T)}{g} - H g x = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

$$dW = \Sigma_{ij}\, dE_{ij}^{PT} \qquad \text{(III.43)}$$

Considérons maintenant un état de contrainte virtuel Σ_{ij}^{*} tel que $f(\Sigma_{ij}^{*}, T, x) < 0$.

Pour cet état de contrainte on a :

$$\Sigma_{ij}^{*} R_{ij} - \frac{\Delta G_c(T)}{g} - H g x < 0 \qquad \text{(III.44)}$$

$$dW^{*} = \Sigma_{ij}^{*}\, dE_{ij}^{PT} \qquad \text{(III.45)}$$

A partir des relations (III.42) et (III.44) on obtient l'inégalité :

$$(\Sigma_{ij} R_{ij} - \Sigma_{ij}^{*} R_{ij}) \geqslant 0$$

qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma^*_{ij}) R_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{(III.46)}$$

sans changer le sens de cette inégalité, on peut la multiplier par les quantités positives que sont g et dx. On obtient alors :

$$(\Sigma_i - \Sigma^*_i) R_{ij} \quad g\, dx \geqslant 0$$

Or d'après la relation (III.9) le produit R_{ij} gdx est égal à dE^{PT}_{ij} d'où l'expression du travail maximal :

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma^*_{ij})\, dE^{PT}_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{(III.47)}$$

En utilisant la définition du tenseur R_{ij} et en notant :

$$\begin{cases} \tau = \Sigma_{12} \\ \sigma_n = \Sigma_{22} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau^* = \Sigma^*_{12} \\ \sigma_n^* = \Sigma^*_{22} \end{cases}$$

on obtient pour (III.47) la relation suivante :

$$\left[(\tau - \tau^*)\cos\alpha + (\sigma_n - \sigma_n^*)\sin\alpha\right] g\, dx \geqslant 0 \qquad \text{(III.48)}$$

La relation (III.48) met bien en évidence la contribution de la contrainte normale. Dans le cas où la variation volumique est nulle, $\sin\alpha$ est nul, et il ne reste plus qu'un terme proportionnel à la cission résolue.

III.4.4.2.2 Extension du principe du travail maximal au cas où la température est une variable

Soit un état de contrainte Σ_{ij} et de température T, tel qu'il soit situé sur le seuil de transformation. On a pour cet état les relations suivantes :

$$\Sigma_{ij} R_{ij} - \frac{\Delta G(T)}{g} - H g x = 0 \qquad \text{(III.49)}$$

$$dW = \Sigma_{ij} dE_{ij}^{pT} \qquad \text{(III.50)}$$

Pour un état virtuel de contrainte Σ_{ij}^{*} et de température T*, tel qu'il n'y ait pas de transformation, nous avons de la même façon :

$$\Sigma_{ij}^{*} R_{ij} - \frac{\Delta G(T^{*})}{g} - H g x < 0 \qquad \text{(III.51)}$$

$$dW^{*} = \Sigma_{ij}^{*} dE_{ij}^{pT} \qquad \text{(III.52)}$$

De la même façon qu'au paragraphe précédent, à partir des relations (III.49), (III.51) et (III.9) et en multipliant par les quantités positives g et dx on obtient l'inégalité suivante :

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma_{ij}^{*}) dE_{ij}^{pT} - [\Delta G(T) - \Delta G(T^{*})] dx \geqslant 0 \qquad \text{(III.53)}$$

Cette inégalité défini le principe du travail maximal en plasticité de transformation, elle tient compte des variations volumiques engendrées par la transformation et de l'influence de la température. Comme pour le paragraphe 4.4.1. on fait l'hypothèse que seul la variation d'énergie libre chimique dépend de la température.

III.4.4.3 Potentiel en plasticité de transformation

La démonstration du principe du travail maximal permet de définir complètement le tenseur $d E_{ij}^{PT}$ par l'intermédiaire de H_{ij} . La fonction f servira alors de potentiel et comme en plasticité classique on sera dans le cas des matériaux standards [28] .

Considérons deux états de contrainte et de température infiniment voisin, situé à la limite de transformation, nous avons pour ces états :

$$\begin{cases} f(\Sigma_{ij}, T, \alpha) = 0 \\ f(\Sigma_{ij} + d\Sigma_{ij}, T + dT, \alpha) = 0 \end{cases}$$

ce qui peut se traduire par :

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} d\Sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} dT = 0 \qquad \text{(III.54)}$$

Le principe du travail maximal en plasticité de transformation étendu aux variations de température donne d'après la relation (III.53)

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma_{ij}^{*}) dE_{ij}^{PT} - [\Delta G(T) - \Delta G(T^{*})] d\alpha \geqslant 0$$

Si on considère l'état $\Sigma_{ij} + d\Sigma_{ij}$, $T + dT$ comme état virtuel on obtient alors :

$$-d\Sigma_{ij} dE_{ij}^{PT} - [\Delta G(T) - \Delta G(T+dT)] d\alpha \geqslant 0$$

Cette inégalité doit être vérifiée quels que soient dT et $d\Sigma_{ij}$ choisis respectant la condition (III.54) on doit donc avoir :

$$\left[\Delta G_c(T) - \Delta G_c(T+dT)\right] d\alpha + d\Sigma_{ij}\, dE_{ij}^{pT} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \Delta G_c(T)}{\partial T}\, dT\, d\alpha + dE_{ij}^{pT} d\Sigma_{ij} = 0 \qquad \text{(III.55)}$$

en identifiant (III.54) et (III.55) on en déduit les relations suivantes :

$$dE_{ij}^{pT} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} \qquad \text{(III.56)}$$

$$\frac{\partial \Delta G_c(T)}{\partial T}\, d\alpha = dL \frac{\partial f}{\partial T} \qquad \text{(III.57)}$$

La fonction f est donc un potentiel, on peut donc considérer le matériau comme standard dans le cas où la transformation s'effectue selon un seul variant.

nous avons :

$$\begin{cases} dE_{ij}^{pT} = d\lambda \dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} \\ dE_{ij}^{pT} = H_{ij}\, d_\gamma f \end{cases}$$

on en déduit que :

$$\frac{H_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}}} = \frac{d\lambda}{d_\gamma f} = a(\Sigma_{ij}, T, \alpha)$$

soit $d\lambda = a\ (\Sigma_{ij}, T, x)$ (III.58)

avec les règles d'écoulement suivantes :

$$\begin{cases} \text{si } f = o \quad \text{et} \quad d_y f > o & dE_{ij}^{PT} = a \dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} d_y f \\ \text{si } f < o \quad \text{ou} \quad d_y f \leqslant o & dE_{ij}^{PT} = o \end{cases} \qquad \text{(III.59)}$$

L'incrément de déformation, en plasticité de transformation pour le monocristal monovariant s'écrit :

$$dE_{ij}^{PT} = a \frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma_{hk}} d\Sigma_{hk} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \qquad \text{(III.60)}$$

avec $f\ (\Sigma_{ij}, T, x) = \Sigma_{ij} R_{ij} - \dfrac{\Delta G_c(T)}{g} - Hg\, x$

III.4.4.4 Identification

La règle d'écoulement (III.59) et la relation (III.60) déterminent totalement le comportement du monocristal en plasticité de transformation dans le cas où un seul variant est actif.

Il faut maintenant identifier les différents termes intervenant dans ces relations.

La relation (III.38) donne l'expression de la fonction f pour un variant dans le cas du monocristal :

$$f\ (\Sigma_{ij}, T, x) = \Sigma_{ij} R_{ij} - \frac{\Delta G_c(T)}{g} - Hg\, x$$

on en déduit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} = R_{ij} \\ \dfrac{\partial f}{\partial T} = \dfrac{\partial f}{\partial \Delta G_c(T)} \dfrac{\partial \Delta G_c(T)}{\partial T} = -\dfrac{B}{g} \end{cases} \qquad \text{(III.61)}$$

On fait, l'hypothèse que seul la variation d'énergie libre dépend de la température et que cette dépendance est linéaire de coefficient B.
A partir de ces hypothéses, (III.60) s'écrit maintenant :

$$dE_{ij}^{PT} = a R_{ij} \left(R_{hk} \, d\Sigma_{hk} - \frac{B}{g} dT \right) \qquad \text{(III.62)}$$

Il reste à identifier le paramètre a(Σ_{ij}, T , x)
Pour une transformation à température constante la relation (III.62) devient :

$$d E_{ij}^{PT} = a R_{ij} R_{hk} \, d\Sigma_{hk}$$

D'après la relation (III.36) on a :

$$R_{hk} \, d\Sigma_{hk} = H g \, dx$$

On peut donc écrire :

$$dE_{ij}^{PT} = a R_{ij} \; Hg \; dx \qquad \text{(III.63)}$$

et en identifiant (III.63) à (III.9) on obtient

$$a R_{ij} \; Hg \; dx = R_{ij} \; g \; dx$$

on a donc pour valeur de a (Σ_{ij}, T , x) :

$$a = \frac{1}{H} \qquad \text{(III.64)}$$

La valeur de l'incrément de déformation en plasticité de transformation pour un monocristal à un seul variant, est donné par la relation suivante :

$$dE_{ij}^{PT} = \frac{R_{ij}}{H}\left(R_{hk}\, d\Sigma_{hk} - \frac{B}{g}\, dT\right) \qquad \text{(III.65)}$$

La valeur de H peut être identifiée en effectuant à température constante un essai de traction uniaxial.

Dans ce cas la relation (III.65) devient :

$$dE_{ij}^{PT} = \frac{R_{ij}}{H}\, R_{33}\, d\Sigma_{33}$$

Ce qui nous donne pour dE_{33}^{PT} :

$$dE_{33}^{PT} = \frac{R_{33}\, R_{33}}{H}\, d\Sigma_{33}$$

Nous pouvons de cette façon déterminer H, et aussi, en mesurant les autres composantes de dE_{ij}^{PT} déterminer les composantes du tenseur R_{ij} .

En utilisant la définition de R_{ij} , dans le repère du variant actif, les coordonnées de dE_{ij}^{PT} sont données par les relations suivantes:

$$\begin{cases} dE_{22}^{PT} = \frac{\sin\alpha}{H}\left[\cos\alpha\, d\tau + \sin\alpha\, d\sigma_n - \frac{B}{g}\, dT\right] & \text{(III.66)} \\ dE_{12}^{PT} = dE_{21}^{PT} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{H}\left[\cos\alpha\, d\tau + \sin\alpha\, d\sigma_n - \frac{B}{g}\, dT\right] \end{cases}$$

Les autres composantes sont nulles.

III.4.4.5 Conclusion

Dans ce paragraphe, à partir des caractéristiques microscopiques de la transformation martensitique, on a obtenu la loi et les règles d'écoulement macroscopiques du monocristal dans le cas où un seul variant et actif. On a montré que le matériau est standard.
Pour la détermination du seuil de transformation, nous avons retrouvé les résultats obtenus par Patel et Cohen [25] dans le cas d'un essai de traction.

Ces résultats vont maintenant être étendus au cas de la transformation inverse.

III.4.5 Etude de la transformation inverse

On a vu au paragraphe III.3 qu'en plasticité de transformation sous contrainte, lors de la décharge, il y a réversibilité de la déformation, à condition de rester à des niveaux de contrainte tels que ni l'austénite ni la martensite ne se déforment plastiquement.

On va maintenant étudier l'évolution de la déformation lors de la décharge. Dans ce paragraphe on se limitera encore au cas où seul un variant est actif.

On définit de la même façon que pour la charge une fonction potentielle pour la décharge.

Du fait de l'existence des contraintes internes et des modifications de structure engendrées par la transformation, l'énergie libre de formation de l'austénite à partir de la martensite, noté ΔG_d, est différente de ΔG_c, et on obtient :

$$\Delta G_c(T) > \Delta G_d(T) \qquad \text{(III.67)}$$

c'est-à-dire que la contrainte résolue critique de décharge est inférieure à la contrainte résolue critique de charge.

$$R_{ij}\Sigma_{ij} = \frac{\Delta G_d(T)}{g} + Hgx < \frac{\Delta G_c(T)}{g} + Hgx \qquad \text{(III.68)}$$

Ceci définit la fonction de décharge $f^d\ (\Sigma_{ij}, T, x)$

$$f^d(\Sigma_{ij}, T, x) = R_{ij} - \frac{\Delta G_d(T)}{g} - Hgx \qquad \text{(III.69)}$$

Et, de la même façon qu'au paragraphe (III.4.4.1), pour une variation de l'état de contrainte et de température qui maintienne le matériau sur la limite de transformation inverse, on doit avoir une variation de déformation dE_{ij}^{PT} nulle, c'est-à-dire, satisfaisant à la relation :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{ij}} d\Sigma_{ij} + \frac{\partial f^d}{\partial T} dT = 0$$

et écrire $d E_{ij}^{PT}$ sous la forme :

$$dE_{ij}^{PT} = H_{ij}^d \left(\frac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{ij}} d\Sigma_{ij} + \frac{\partial f^d}{\partial T} dT \right) \qquad \text{(III.70)}$$

ou encore en notant $d_y f^d$ la différentielle à écrouissage constant de la fonction de décharge :

$$dE_{ij}^{PT} = H_{ij}^{d}\, d_y f^{d} \qquad \text{(III.71)}$$

mais cette fois-ci, contrairement à (III.40) la transformation est caractérisée par un $d_y f^d$ négatif.

On peut de la même façon étendre le principe du travail maximal au cas de la décharge.
On obtient en effet pour un état de contrainte situé sur la limite d'écoulement les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{ij} R_{ij} - \dfrac{\Delta G_d(T)}{g} - H g x = 0 \\ \\ dW = \Sigma_{ij}\, dE_{ij}^{PT} \end{cases} \qquad \text{(III.72)}$$

et pour un état virtuel tel qu'il n'y ait pas de décharge :

$$\begin{cases} \Sigma_{ij}^{*} R_{ij} - \dfrac{\Delta G_d(T)}{g} - H g x > 0 \\ \\ dW^{*} = \Sigma_{ij}^{*}\, dE_{ij}^{PT} \end{cases} \qquad \text{(III.73)}$$

ce qui donne :

$$\left(\Sigma_{ij} - \Sigma_{ij}^{*}\right) R_{ij} \leqslant 0 \qquad \text{(III.74)}$$

dx étant négatif lors de la décharge, on obtient finalement à l'aide de la relation (III.9) :

$$(\Sigma_{ij} - \Sigma^*_{ij})\, dE^{PT}_{ij} \geqslant 0 \qquad \text{(III.75)}$$

Durant la décharge, le principe du travail maximal est respecté et cela également dans le cas où l'on fait varier la température.

On peut donc considérer la fonction de décharge comme un potentiel de plasticité de transformation.

De la même façon on peut montrer que lors de la décharge le matériau est standard, et écrire :

$$dE^{PT}_{ij} = a \frac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{hk}} d\Sigma_{hk} + \frac{\partial f^d}{\partial T} dT \right) \qquad \text{(III.76)}$$

en identifiant, on obtient alors :

$$\frac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{ij}} = R_{ij}$$

$$\frac{\partial f^d}{\partial T} = -\frac{B}{g}$$

$$a(\Sigma_{ij}, T, x) = \frac{1}{H}$$

ce qui donne pour (III.76) :

$$dE^{PT}_{ij} = \frac{R_{ij}}{H} \left(R_{hk}\, d\Sigma_{hk} - \frac{B}{g} dT \right) \qquad \text{(III.77)}$$

Cette relation est semblable à (III.65) déterminée pour la charge, ceci n'est pas étonnant, la transformation étant réversible. La différence réside dans les niveaux des seuils d'écoulement et dans le signe de la déformation.

Si on considère maintenant les règles d'écoulement du matériau pendant la charge et la décharge, on obtient en fonction de f (fonction de charge) et de f^d (fonction de décharge) les valeurs suivantes pour dE_{ij}^{PT}:

$$\begin{cases} \text{si } f = o \quad \text{et} \quad d_y f > o & dE_{ij}^{PT} = a \dfrac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} d_y f \\ \text{si } f < o \quad \text{et} \quad f^d = o \text{ et } d_y f^d < o & dE_{ij}^{PT} = a \dfrac{\partial f^d}{\partial \Sigma_{ij}} d_y f^d \end{cases} \qquad \text{(III.78)}$$

Dans tous les autres cas dE_{ij}^{PT} est nulle.

III.4.6 Conclusion

Nous avons établis le même type de loi pour la transformation martensitique et pour la transformation inverse. Dans le cas où on se situe loin des seuils de plasticité classique des deux phases et où il ne se produit pas de réorientation dans la martensite, les deux lois d'écoulement sont identiques. La différence réside dans la valeur du seuil de transformation et dans le signe des déformations.

Dans le cas où la plasticité classique intervient dans une des deux phases où si il y a transformation par réorientation dans la martensite, les coefficients B et H peuvent différer, ainsi que le tenseur d'orientation R_{ij} . Il est nécessaire dans ce cas d'étudier de plus près l'influence des rotations et des contraintes internes.

Comme dans un polycristal, il est fréquent d'observer plusieurs variants actifs, nous proposons donc, dans ce qui suit, d'étudier le comportement du monocristal d'austénite lorsque plusieurs variants sont actifs.

III.5° ETUDE DU COMPORTEMENT DANS LE CAS OU PLUSIEURS VARIANTS SONT ACTIFS

III.5.1 Introduction

Dans le cas d'un polycristal au fur et à mesure que la transformation avance, le niveau de contraintes internes dans un grain donné augmente du fait des incompatibilités entre la martensite et la phase mère. Il arrive un moment où l'intensité du champ de contraintes internes et son orientation sont tels qu'un autre variant peut être activé. Ainsi si dans le cas du CuZnAl 70 % de la déformation résulte de la formation d'un seul variant, 20 % ont pour origine la formation d'un second variant [20].

Par ailleurs dans le cas où la transformation a uniquement une origine thermique, il se forme en général quatre variants dit autoaccomodants, qui minimisent le champ de contraintes internes [29] .

Il est donc important de déterminer le comportement d'un monocristal en plasticité de transformation quand plusieurs variants sont activés.

III.5.2 Fonction seuil et écrouissage

Dans le cas où plusieurs variants sont actifs le terme d'énergie d'inclusion dans la relation (III.26) doit tenir compte de l'énergie d'interaction entre variants, celle-ci pouvant être faible dans le cas des variants compatibles ou au contraire fortes dans le cas des variants incompatibles [30] .

On ne peut plus considérer le terme E_{incl} comme nul pour la détérmination de la fonction seuil, on doit tenir compte du fait que la croissance d'une plaquette de martensite selon un variant n sera à l'origine d'un champ de contraintes internes qui intéragira sur le variant m.

Comme pour la plasticité classique on déterminera une matrice décrouissage H dont les termes H^{nm} représentent l'interaction entre les variants n et les variants m [31].

Si on note R^n_{ij} la matrice d'orientation, on doit avoir, à chaque instant, pour le variant n, la relation suivante :

$$R^n_{ij}\,\Sigma_{ij} = \frac{\Delta G_c(T)}{g} + \sum_m H^{nm} g\, x^m \qquad \text{(III.79)}$$

En écrivant cette relation, on fait l'hypothèse implicite que le seuil initial de transformation est le même pour tous les variants car la variation d'énergie libre chimique nécessaire à la formation d'un variant isolé a été supposée identique pour tous.

La relation (III.79) définit la fonction de charge pour chaque variants.

L'intersection des régions de l'espace telles que :

$$R^n_{ij}\,\Sigma_{ij} < \frac{\Delta G_c(T)}{g} + \sum_m H^{nm} g\, x^m \qquad \text{(III.80)}$$

constitue le domaine élastique du monocristal, que l'on note $F(\Sigma_{ij}, T, x^m) = o$. La frontière de transformation est donc formée de l'assemblage de plusieurs surfaces.

III.5.3 Principe du travail maximal

Nous allons maintenant étendre le principe du travail maximal au cas où plusieurs variants sont actifs. On obtienten effet pour un état de contrainte et de température situé sur la limite d'écoulement :

$$\begin{cases} dW = \Sigma_{ij}\, dE^{pT}_{ij} = \Sigma_{ij} \sum_m R^m_{ij}\, g\, dx^m \\ F(\Sigma_{ij}, T, x^m) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.81)}$$

et pour un état virtuel tel que cette limite ne soit pas atteinte :

$$\begin{cases} dW = \Sigma_{ij}\, dE^{pT}_{ij} = \Sigma_{ij} \sum_m R^m_{ij}\, g\, dx^m \\ F(\Sigma_{ij}, T, x^m) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.82)}$$

En comparant (III.81), (III.82) et (III.80), on vérifie la validité du principe du travail maximal dans le cas où plusieurs variants sont actifs.

Ce résultat peut être étendus au cas où la température varie.

La fonction $F(\Sigma_{ij}, T, x^m)$ qui sert à caractériser la charge du monocristal dans le cas où plusieurs variants sont actifs, peut donc aussi jouer le rôle de potentiel, le monocristal est donc standard, on peut maintenant déterminer sa loi d'écoulement.

III.5.4 Loi d'écoulement

Nous avons montré dans les deux paragraphes précédents que dans le cas où n variants sont actifs il existe une fonction de charge qui joue aussi le rôle de potentiel, on peut donc écrire la loi d'écoulement de la façon suivante :

$$dE^{pT}_{ij} = a \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{ij}} \left(\frac{\partial F}{\partial \Sigma_{hk}} d\Sigma_{hk} + \frac{\partial F}{\partial T} dT \right) \qquad \text{(III.83)}$$

En utilisant la définition (III.80) de $F(\Sigma_{ij}, T, x^m)$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{B}{g} \qquad \text{(III.84)}$$

ceci en supposant que seul la variation d'énergie libre chimique dépend de la température, et que cette dépendance est linéaire de coefficient B.

Pour obtenir le terme $a\frac{\partial F}{\partial \Sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{hk}}$ on remarque que d'aprés la relation (III . 18) et la relation (III . 79) on a :

$$dE_{ij}^{pT} = \sum_n R_{ij}^n g \, d\alpha^n$$

$$\sum_m H^{nm} g \, d\alpha^m = R_{ij}^n \, d\Sigma_{ij}$$

nous pouvons donc écrire en inversant la matrice H^{nm} :

$$dE_{ij}^{pT} = \sum_n R_{ij}^n \sum_m \left(H^{nm}\right)^{-1} R_{hk}^m \, d\Sigma_{hk} \qquad \text{(III.85)}$$

par analogie avec (III.77) nous obtenons la loi d'écoulement thermomécanique suivante :

$$dE_{ij}^{pT} = \sum_n R_{ij}^n \sum_m \left(H^{nm}\right)^{-1} \left[R_{hk}^m \, d\Sigma_{hk} - \frac{\beta}{g} dT \right] \qquad \text{(III.86)}$$

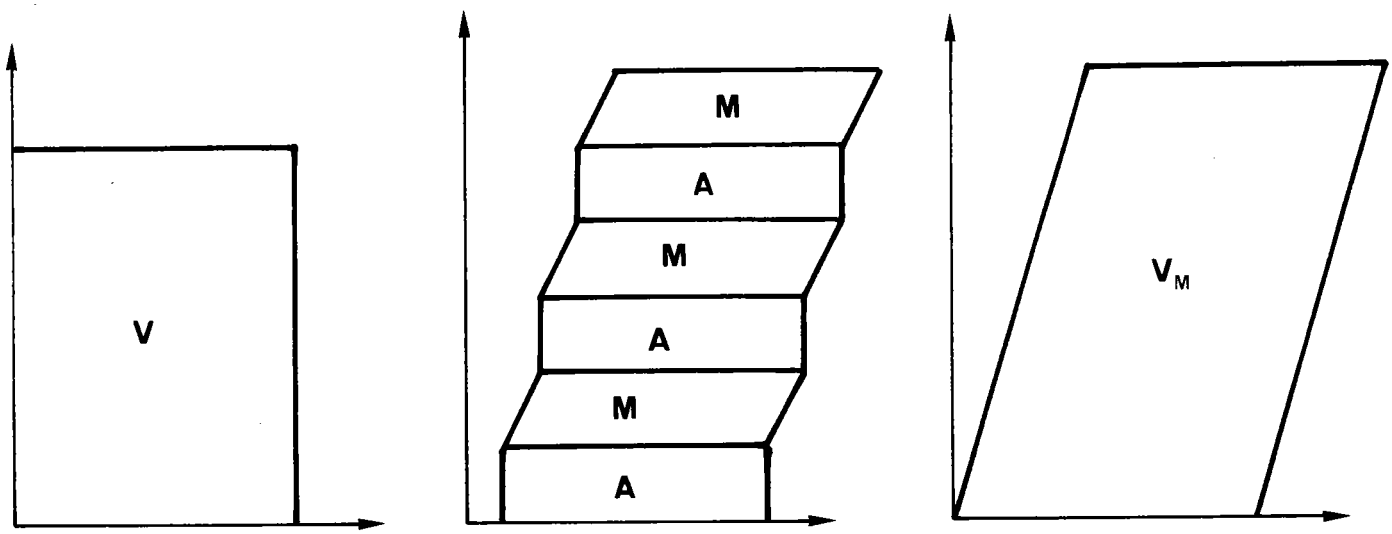
III.6° - CONCLUSION

Dans ce chapitre, à partir d'une description microscopique de la transformation martensitique, nous avons obtenu l'expression de la déformation globale d'un monocristal en plasticité de transformation. Dans cette expression nous avons isolé le terme propre au changement de phases. Une loi de contrainte résolue maximale analogue à la loi de Schmid en plasticité classique a été établie pour la plasticité de transformation.

De même, il a été montré l'existence d'un potentiel pseudoélastique, et une loi d'écoulement à été formulée pour le monocristal, ceci quelque soit le nombre de variants activés.

Dans les chapitres suivants, partant des résultats établis pour le monocristal, nous allons décrire la plasticité de transformation pour le polycristal.

Tout d'abord sous une forme phénoménologique, en utilisant le même formalisme que pour le monocristal, dans le chapitre IV. Puis au chapitre V nous utilisons une méthode d'homogénéisation permettant à partir des caractéristiques microscopiques de la transformation d'obtenir la description du comportement macroscopique du polycristal.



austénite V_m :volume transformé en martensite martensite

FIGURE III.1 : Transformation d'un volume V d'austénite en volume V_M de martensite.

Déformation du volume initial et changement de volume entrainé par la transformation.

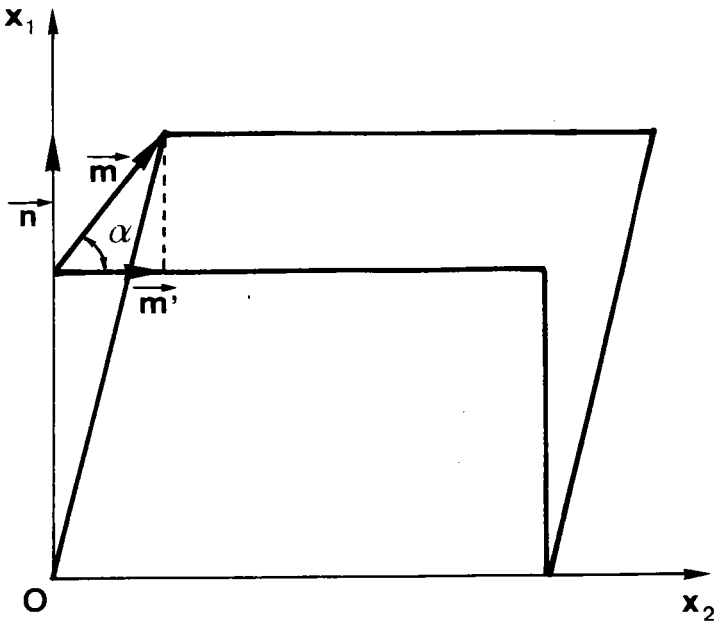


FIGURE III.2 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique.

$\vec{n}$: normale au plan d'habitat.
$\vec{m}$: direction de transformation.
$\vec{m}'$: projection sur le plan d'habitat de la direction $\vec{m}$.
α : angle formé par les directions $\vec{m}$ et $\vec{m}'$.

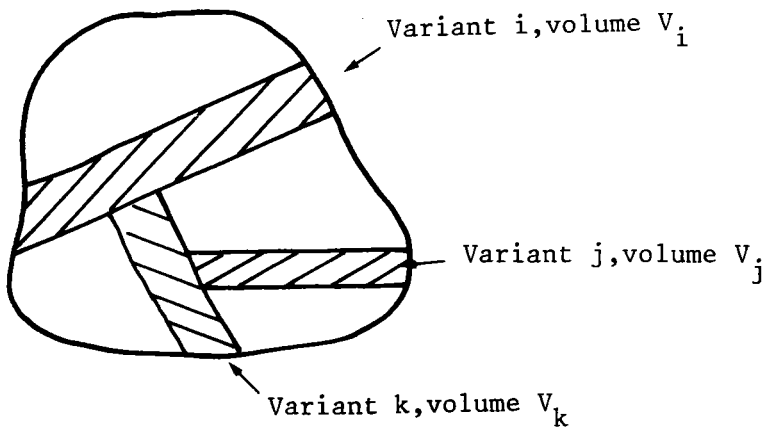


FIGURE III.3 : Transformation d'un volume V d'austénite en n bandes de martensite de volume V_i ,constituées chacunes d'un variant différent.

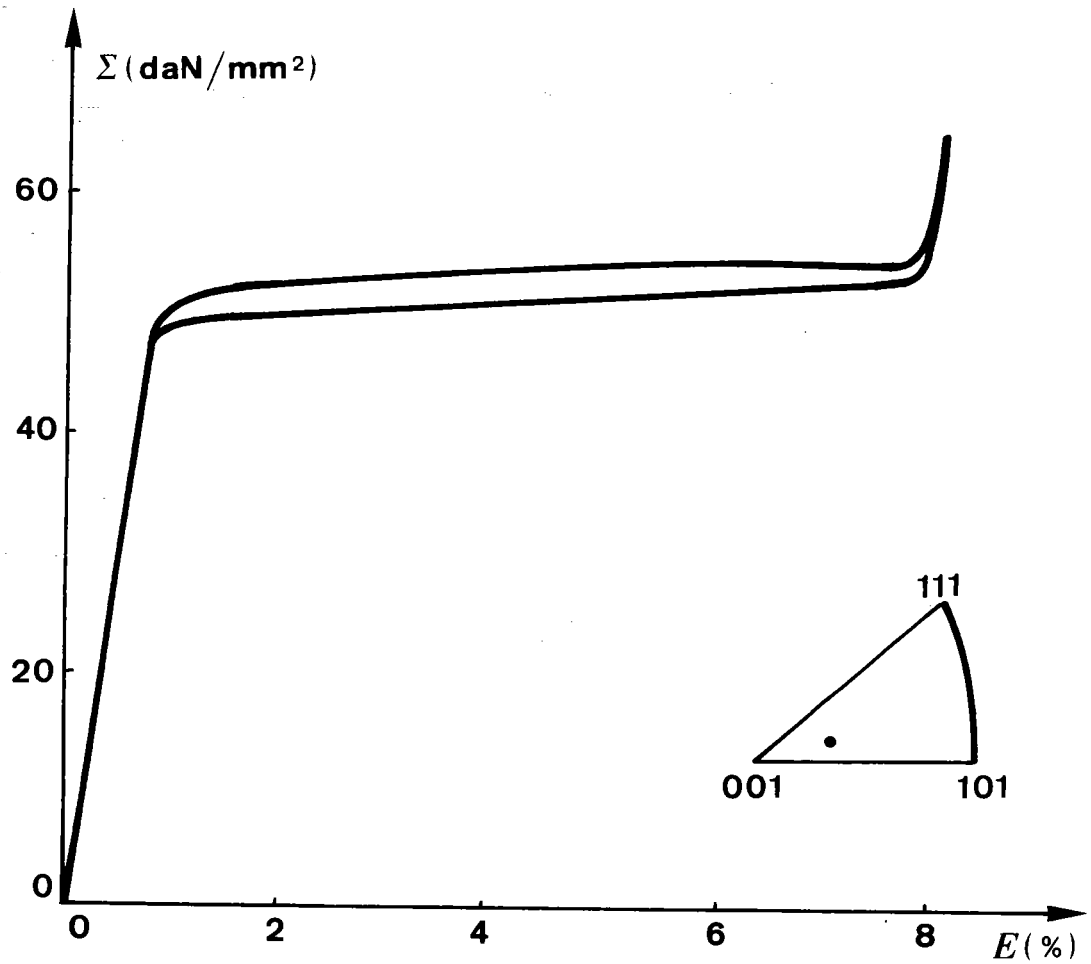


FIGURE III.4 : Courbe de traction typique d'un monocristal.
Alliage 74,3%Cu-18,4%Zn-7,3%Al (en poids)

M_s =203 K
T =273 K (température de l'essai)

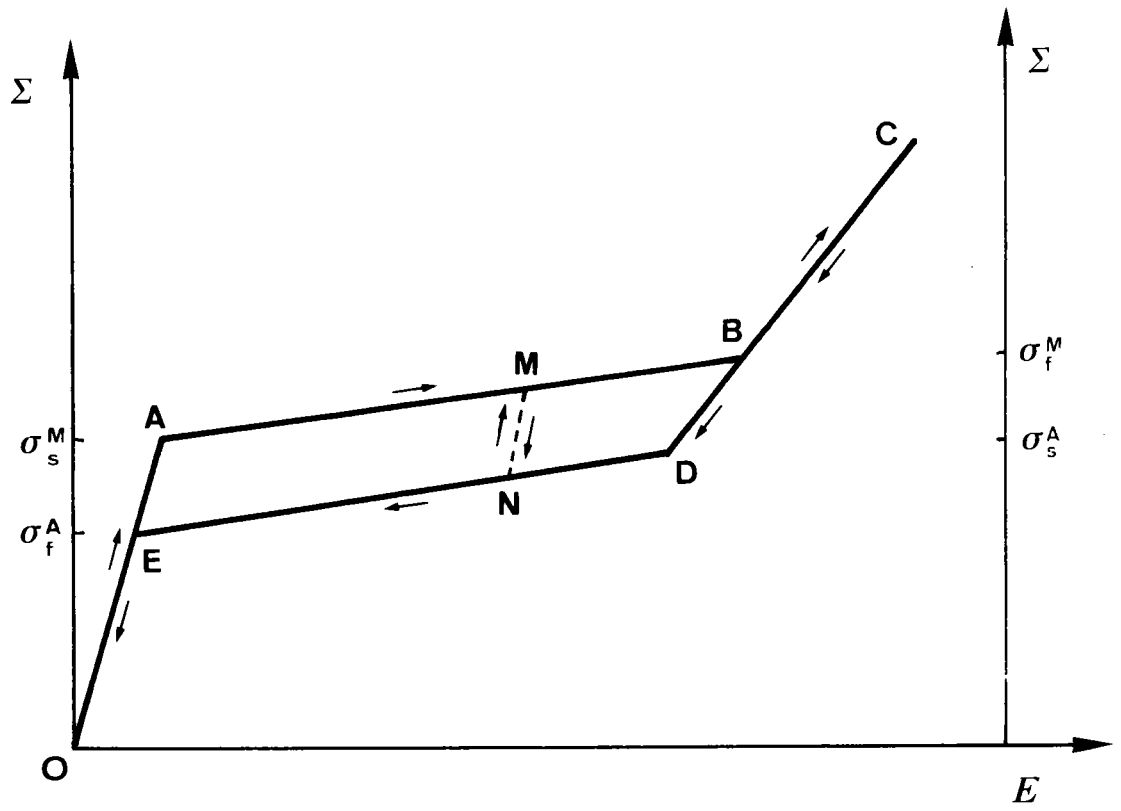


FIGURE III.5 : Modélisation de la courbe contrainte-déformation d'un monocristal pseudoélastique en traction uniaxiale isotherme.

σ_s^M : Contrainte seuil de formation de la martensite à la température de l'essai.

σ_f^M : Contrainte pour laquelle le monocristal est entièrement transformé en martensite.

σ_s^A : Contrainte seuil de formation de l'austénite lors d'une décharge à partir d'un état entièrement martensitique(dépend de la température de l'essai).

σ_f^A : Contrainte pour laquelle le monocristal est entièrement retransformé en austénite lors d'une décharge.

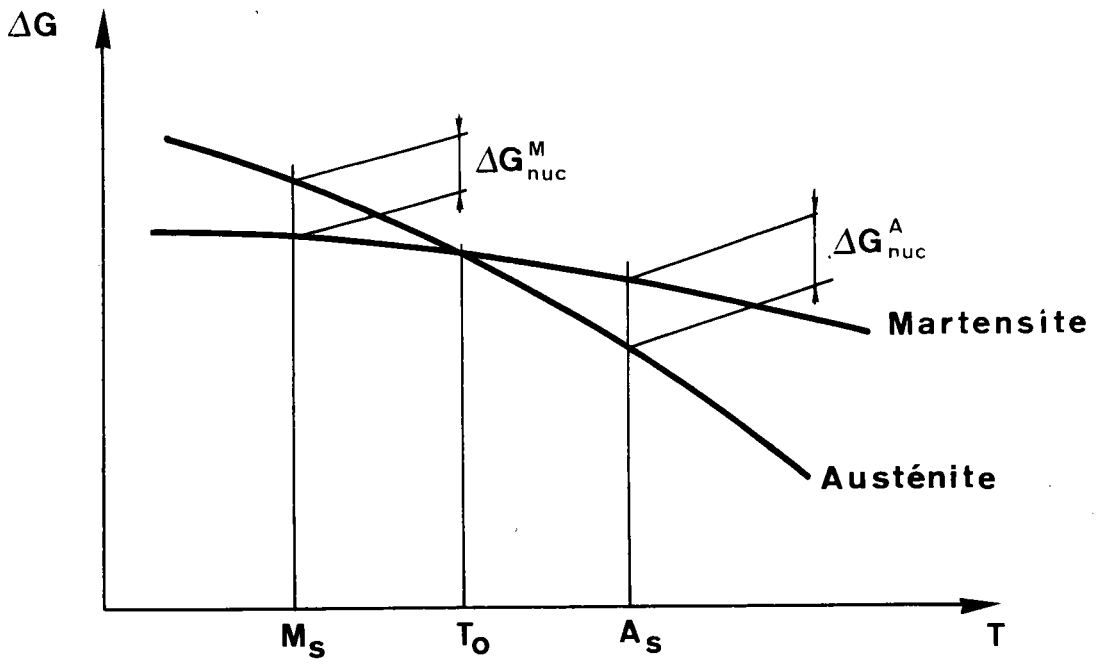


FIGURE III.6 : Diagramme représentant l'énergie libre de Gibbs de l'austénite et de la martensite en fonction de la température.

T_o représente la température d'équilibre thermochimique.

pour $T > T_o$ l'austénite est stable.

$T < T_o$ la martensite est stable.

M_s représente la température de formation de la martensite.

$T < M_s$ formation de la martensite.

$T > M_s$ le materiau reste à l'état austénitique.

A_s représente la température au dessus de laquelle, la martensite se transforme en austénite.

C H A P I T R E IV

LOIS DE COMPORTEMENT PHENOMENOLOGIQUE

POUR LE POLYCRISTAL

EN PLASTICITE DE TRANSFORMATION

IV.1°- INTRODUCTION

La modélisation de la déformation liée à la transformation martensitique nous a permis de définir diverses propriétés pour le monocristal.

Ces propriétés peuvent être étendues au polycristal de manière directe, par des méthodes d'homogénéïsation, ou d'un point de vue phénoménologique par l'intermédiaire d'une fonction seuil et d'une loi d'écoulement pour le polycristal. C'est ce deuxième point de vue qui est développé dans ce chapitre.

En plasticité classique, à la loi de Schmid du monocristal, on fait correspondre le critère de Tresca pour le polycristal. De la même façon en plasticité de transformation parfaite on peut établir un critère de déformation du polycristal à partir de la loi de contrainte résolue maximale établie au chapitre III pour le monocristal.

On peut également établir un critère symétrique analogue au critère de Von Mises.

A partir d'un tel critère on peut mettre en évidence une fonction de charge du polycristal, et comme la propriété du travail maximal se conserve lors du passage monocristal-polycristal, cette fonction de charge sert aussi de potentiel pour la déformation [26] . On peut donc de la même façon que pour la plasticité classique établir une loi d'écoulement à partir d'un critère de plasticité. Dans ce chapitre nous établissons la loi d'écoulement à partir d'un critère symétrique.

Dans la dernière partie de ce chapitre, la loi d'écoulement est appliquée au cas de la traction uniaxiale ; les résultats obtenus sont confrontés aux données expérimentales de la littérature et aux prévisions obtenues à l'aide :

- du modèle de Patel et Cohen [25] pour l'étude de l'influence d'une contrainte sur la température de transformation.
- du modèle de Greenwood et Johnson [11] et du modèle de Magee [15] pour les valeurs de la déformation.

Les données expérimentales utilisées sont celles obtenues par E. Gautier [18] pour les alliages de Fe-Ni-C et Fe-Ni-C-Cr. Bien que ces résultats expérimentaux ne concernent pas directement la plasticité de transformation parfaite, il est intéressant de les confronter à nos résultats. Car la plupart des études en plasticité de transformation portent sur les alliages de Fe-Ni et il est intéressant de comparer qualitativement, sur ces matériaux, la part de déformation due à la plasticité de transformation parfaite, et celle due au couplage avec la plasticité classique de la matrice austénitique.

IV.2° - CRITERE DE LA CONTRAINTE RESOLUE MAXIMALE

Dans le chapitre précédent, on a montré l'existence pour le monocristal en plasticité de transformation, d'un critère d'écoulement analogue à celui de Schmid, mais faisant intervenir la contrainte normale.

Dans ce chapitre on généralise ce résultat au cas du polycristal. On considère le matériau comme continu et isotrope. On fait l'hypothèse que tous les variants sont équiprobables et que la transformation se produit sur le variant de contrainte résolue maximale, quand celle-ci atteint une valeur critique k.

Cette valeur critique dépend de la température, et nous la noterons k (t) pour l'instant.

Soit un champ de contrainte extérieur Σ_{ij} et soit un variant défini par sa normale $\vec{n}$ au plan d'habitat et sa direction de déplacement $\vec{m}$ (figure IV.1). Le vecteur contrainte sur le plan d'habitat de normale $\vec{n}$ s'écrit :

$$T_i = \Sigma_{ij}\, n_j \qquad \text{(IV. 1)}$$

La transformation de phase se produit sur le variant de normale $\vec{n}$, quand la contrainte résolue dans la direction de transformation est égale à k (T).

C'est-à-dire quand :

$$T_i\, m_i = k(T) \qquad \text{(IV.2)}$$

ce qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Sigma_{ij}\, n_j m_i = k(T) \qquad \text{(IV.3)}$$

en identifiant avec la relation (III.35) du chapitre précédent, on déduit la valeur de k (T) et on obtient :

$$\Sigma_{ij}\, n_j m_i = \frac{\Delta G(T)}{g} \qquad \text{(IV.4)}$$

On peut expliciter encore d'avantage cette relation en faisant intervenir la contrainte normale au plan d'habitat et la cission dans le plan d'habitat et dans la direction du déplacement.

Soit $\vec{m}'$ la projection du déplacement $\vec{m}$ sur le plan d'habitat, en notant σ_n la projection de $\vec{T}$ sur la normale $\vec{n}$ et τ sa projection sur $\vec{m}'$ on obtient pour la relation (IV.4)

$$(\sigma_n n_i + \tau m'_i)\, m_i = \frac{\Delta G(T)}{g}$$

d'où :

$$\sigma_n \sin\alpha + \tau \cos\alpha = \frac{\Delta G(T)}{g} \qquad \text{(IV.5)}$$

où α est l'angle formé par les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{m}'$.
Ce critère est analogue à celui établis par Patel et Cohen [25] .
En effet, en considérant le cas de la traction uniaxiale on obtient à l'aide d'un cercle de Mohr (figure IV.2) :

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{2} \Sigma \sin 2\theta \\ \sigma_n = \pm \frac{1}{2} \Sigma (1 + \cos 2\theta) \end{cases}$$

Σ étant la contrainte appliquée et θ l'angle formée entre l'axe de traction et la normale au plan d'habitat.

La relation (IV.5) devient alors :

$$\frac{1}{2} \Sigma \sin 2\theta \cos\alpha \pm \frac{1}{2} \Sigma (1 + \cos 2\theta) \sin\alpha = k(T)$$

en multipliant cette relation par g, valeur du déplacement sur un variant, et en notant :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = g \sin\alpha \\ \gamma_0 = g \cos\alpha \end{cases}$$

on retrouve la relation classique de Patel et Cohen .

$$\frac{1}{2}\gamma_0 \Sigma \sin 2\theta \pm \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma (1+\cos 2\theta) = U$$

avec : $U = \Delta G(T)$

Si nous considérons la température comme une constante, nous pouvons représenter ce critère dans le plan (τ , σ_n) par deux droites symétriques passant par :

$$\begin{cases} \sigma_n = \dfrac{\Delta G(T)}{g \sin\alpha} \\ \tau = \pm \dfrac{\Delta G(T)}{g \cos\alpha} \end{cases}$$

(figure IV.4)

Lorsque la variation de volume due à la transformation est nulle, l'angle α est nul, et ce critère prend la forme du critère de Tresca, en plasticité classique.

IV.3° - CRITERE SYMETRIQUE

Le critère fondamental pour les mécanismes de déformation par glissement est le critère découlant de la loi expérimentale de Schmid, que nous avons étendu à la plasticité de transformation.

Le critère de Tresca suppose l'isotropie initiale de la matière. Il ne dépend que des contraintes principales, qui sont classées dans un ordre décroissant.

Si l'on se refuse à classer ces contraintes dans un ordre prédéterminé, on obtient une autre classe de critère de plasticité : les critères symétriques (du type Von Mises en plasticité classique).

Nous allons dans ce paragraphe déterminer un critère de ce type pour la plasticité de transformation, qui prendra en compte la variation volumique intrinsèque à la transformation martensitique.

Dans les critères symétriques on considère que la déformation plastique intervient quand l'énergie de déformation atteint un certain seuil [32] .

Ceci se traduit par :

$$W_d = \int \Sigma_{ij} \, dE_{ij} \leqslant W_c \qquad \text{(IV.6)}$$

en notant W_c le seuil critique de l'énergie de déformation, Σ_{ij} le champ de contrainte appliquée et E_{ij} la déformation.

En décomposant (IV.6) en partie sphérique et déviatorique on obtient :

$$W_d = \int S_{ij} \, de_{ij} + \frac{1}{3} \int \Sigma_{kk} \, dE_{mm} \qquad \text{(IV.7)}$$

avec $\begin{cases} S_{ij} & \text{déviateur des contraintes } \Sigma_{ij} \, . \\ e_{ij} & \text{déviateur des déformations } E_{ij} \, . \end{cases}$

Soit I_1 , le premier invariant du tenseur des contraintes, et J_2 , le second invariant du déviateur des contraintes. Pour un milieu isotrope, le premier terme de la relation (IV.7) est proportionnel à J_2 et le second à I_1^2 . On propose donc, pour la plasticité de transformation, d'utiliser comme critère symétrique, le critère de Drucker-Prager [33] :

$$\sqrt{J_2} + A I_1 = K \qquad \text{(IV.8)}$$

Ce critère tient compte dans le terme AI_1 de la variation de volume intrinsèque à la transformation. Si cette variation est nulle, nous retrouvons le critère de Von Mises.

La détermination des constantes A et B se fait par identification avec la relation (IV.4) sur deux essais particuliers.

Pour un essai de cisaillement on a :

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ J_2 = \tau^2 \end{cases} \qquad \text{(IV.9)}$$

et d'après (IV.4) :

$$\tau = \frac{\Delta G(T)}{g \cos\alpha}$$

à partir de la relation (IV.8) on en déduit la valeur de K :

$$K = \frac{\Delta G(T)}{g \cos\alpha} \qquad \text{(IV.10)}$$

Le paramètre A est identifié à l'aide d'un essai en pression hydrostatique, pour lequel on a :

$$\begin{cases} I_1 = 3\sigma \\ J_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(IV.11)}$$

de même la relation (IV.4) donne :

$$\sigma \sin\alpha = \frac{\Delta G(T)}{g}$$

et (IV.8) devient :

$$3 A \sigma = K$$

Nous obtenons pour A la valeur suivante :

$$A = \frac{tg\alpha}{3} \qquad (IV.12)$$

l'expression (IV.8) s'écrit maintenant :

$$\sqrt{J_2} + \frac{tg\alpha}{3} I_1 = \frac{\Delta G(T)}{g \cos\alpha} \qquad (IV.13)$$

Nous avons donc établi un critère symétrique pour la plasticité de transformation, ce critère, valable dans le cas de matériau initialement isotrope, ne dépend que de I_1 , J_2 et de T.

Au chapitre précédent nous avons montré que le monocristal vérifie, pour la plasticité de transformation, le principe du travail maximal et qu'il se comporte comme un matériau standard. Mandel a démontré pour la plasticité classique [26] que si ces propriétés sont vérifiées pour un monocristal, elles le sont également pour le polycristal.

En supposant que le principe du travail maximal s'applique pour le polycristal, nous allons établir maintenant la loi d'écoulement associée au critère symétrique.

IV.4° - LOI D'ECOULEMENT ASSOCIEE AU CRITERE SYMETRIQUE.

On a vu dans le chapitre sur le monocristal que la déformation totale pouvait s'obtenir par la relation (III.3) :

$$dE_{ij}^{T} = (1 - x)\, d\epsilon_{ij}^{A} + x\, d\epsilon_{ij}^{M} + \epsilon_{ij}^{AM}\, dx$$

Si on ne considère que les termes liés à la plasticité de transformation parfaite, c'est-à-dire en considérant qu'il n'y a pas de plasticité dans les deux phases et en négligeant les déformations élastiques, on obtient alors :

$$dE_{ij}^{PT} = \varepsilon_{ij}^{AM} d\alpha$$

Ces relations s'étendent au cas du polycristal.

Celui-ci étant un matériau standard, on peut déterminer la loi d'écoulement du polycristal lié au critère symétrique établi au paragraphe (IV.3), et écrire :

$$dE_{ij}^{PT} = a \frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \Sigma_{hk}} d\Sigma_{hk} + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right) \qquad (IV.14)$$

en notant f la fonction de charge du polycristal liée au critère symétrique .

$$f(I_1, J_2, T) = \sqrt{J_2} + \frac{tg\alpha}{3} I_1 - \frac{\Delta G(T)}{g \cos\alpha} \qquad (IV.15)$$

En supposant que seul $\Delta G(T)$ est une fonction linéaire de la température : $\Delta G(T) = BT + C$

On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial \Delta G(T)} \frac{\partial \Delta G(T)}{\partial T}$$

$$= -\frac{1}{g \cos\alpha} \frac{\partial \Delta G(T)}{\partial T} = -\frac{B}{g \cos\alpha} \qquad (IV.16)$$

De même en supposant que $\Delta G(T)$ est indépendante du niveau de contrainte, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma_{ij}} = \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \Sigma_{ij}} + \frac{tg\alpha}{3} \frac{\partial I_1}{\partial \Sigma_{ij}}$$

$$= \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3} \delta_{ij} \qquad (IV.17)$$

Ce qui donne pour la loi de comportement (IV.14)

$$dE_{ij}^{PT} = a\left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3}\delta_{ij}\right)\left[\left(\frac{S_{hk}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3}\delta_{hk}\right)d\Sigma_{hk} - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right] \qquad (IV.18)$$

Il reste à identifier le facteur de proportionalité a pour déterminer complètement $d\,E_{ij}^{PT}$.

Pour cela on peut procéder à partir d'un essai à contrainte constante et à température variable (figure IV.3).

Dans ce cas la loi de comportement (IV.18) s'écrit :

$$dE_{ij}^{PT} = a\left(\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3}\delta_{ij}\right)\left(-\frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right) \qquad (IV.19)$$

et la variation de volume intrinsèque à la transformation :

$$d\,E_{kk}^{PT} = -a\,tg\alpha\,\frac{B}{g\cos\alpha}\,dT \qquad (IV.20)$$

d'où la valeur de a :

$$a = -\frac{g\cos\alpha}{B\,tg\alpha}\,\frac{dE_{kk}^{PT}}{dT} \qquad (IV.21)$$

comme on a par ailleurs :

$$dE_{ij}^{PT} = \varepsilon_{ij}^{AM} \, dx$$

soit pour la variation volumique :

$$dE_{kk}^{PT} = \frac{\Delta V}{V} \, dx \qquad \text{(IV.22)}$$

on obtient la relation suivante :

$$a = - \frac{\Delta V}{V} \frac{g \cos\alpha}{B \, r_g \alpha} \frac{dx}{dT} \qquad \text{(IV.23)}$$

La fraction volumique de martensite formée au cours d'un essai à contrainte constante varie linéairement avec la température [18] et nous pouvons écrire :

$$\frac{dx}{dT} = - A \qquad \text{(IV.24)}$$

et l'on obtient finalement :

$$a = \frac{\Delta V}{V} \frac{A}{B} \frac{g \cos\alpha}{r_g \alpha} \qquad \text{(IV.25)}$$

La loi d'écoulement du polycristal en plasticité de transformation, associé au critère symétrique (IV.13) s'écrit :

$$dE_{ij}^{PT} = \frac{\Delta V}{V} \frac{A}{B} \frac{g \cos\alpha}{r_g \alpha} \left[\frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{r_g \alpha}{3} \delta_{ij} \right] \left[\left(\frac{S_{kk}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{r_g \alpha}{3} \delta_{kk} \right) d\Sigma_{kk} - \frac{B \, dT}{g \cos\alpha} \right] \qquad \text{(IV.26)}$$

A partir de (IV.26) et de la relation (IV.22) on peut déterminer l'évolution du taux de martensite formé en fonction de l'évolution de l'état de contrainte et de température.

On a en effet d'après (IV.26) :

$$d E^{PT}_{kk} = \frac{\Delta V}{V} \frac{A}{B} \frac{g \cos\alpha}{tg\alpha} tg\alpha \left[\left(\frac{S_{kk}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3} \delta_{kk} \right) d\Sigma_{kk} - \frac{B}{g \cos\alpha} dT \right]$$

ce qui identifié avec (IV.22) donne :

$$dx = \frac{A}{B} g \cos\alpha \left[\left(\frac{S_{kk}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{tg\alpha}{3} \delta_{kk} \right) d\Sigma_{kk} - \frac{B dT}{g \cos\alpha} \right] \qquad \text{(IV.27)}$$

Il faut remarquer que les relation (IV.26) et (IV.27) ne sont valables que pour $\alpha \neq 0$.

A partir de la description de la plasticité de transformation dans le monocristal, on a mis en évidence plusieurs propriétés (fonction potentiel, matériau standard) qui peuvent s'étendre au polycristal.

A partir de ces propriétés et d'un critère de plasticité de transformation symétrique de type Von Mises on détermine une loi phénoménologique de l'écoulement du matériau pour la transformation martensitique.

Dans la suite de ce chapitre on compare les résultats obtenus à l'aide des relations (IV.26) et (IV.27) avec les résultats expérimentaux déjà publiés pour les alliages de Fe-Ni-C et Fe-Ni-Cr-C [18] . La comparaison s'effectue pour une sollicitation du matériau en traction uniaxiale.

IV.5° - COMPARAISONS DES RESULTATS OBTENUS EN TRACTION UNIAXIALE AVEC LES DONNEES EXPERIMENTALES POUR LES ALLIAGES DE Fe-Ni-C ET DE Fe-Ni-Cr-C

IV.5.1 Introduction

La littérature abonde de résultats expérimentaux concernant les alliages Fe-Ni-C et Fe-Ni-C-Cr. De plus la plasticité de transformation de ce matériau a déjà fait l'objet de nombreuses modélisations [11,15] , [18, 19] .

La déformation de ces alliages résulte d'un couplage entre plasticité classique et plasticité de transformation parfaite. Le modèle phénoménologique, qui ne tient pas compte de ce couplage, ne pourra donc pas décrire la totalité de la déformation observée.

Cependant on peut distinguer 3 domaines d'action des contraintes et de la température sur ces alliages (figure IV.4).

* Un domaine élastique A, où la contrainte appliquée est inférieure à la limite d'écoulement plastique de l'austénite
  C'est le domaine de validité du modèle de Patel et Cohen [25] , dans cette zone nous avons plasticité de transformation parfaite.

* Un domaine B, où le niveau de contrainte appliqué est sensiblement égal au seuil d'écoulement $\sigma_{e_{0,2}}$

* Un domaine C, où les niveaux de contraintes sont très supérieurs à $\sigma_{e_{0,2}}$

On peut donc, pour ces alliages appliquer le modèle phénoménologique au domaine A. Dans les domaines B et C où le couplage est important, il permettra néanmoins de mettre en évidence l'importance du couplage.

IV.5.2 Détermination de la loi d'écoulement en traction uniaxiale

En traction uniaxiale, l'état de contrainte a pour expression :

$$\Sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Les invariants J_2 et I_1 s'écrivent :

$$J_2 = \frac{\Sigma^2}{3} \qquad I_1 = \Sigma$$

La loi d'écoulement (IV.26) s'écrit alors :

$$dE_{ij}^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{A}{B}\,\frac{g\cos\alpha}{tg\alpha}\left[\frac{\sqrt{3}\,S_{ij}}{2\Sigma} + \frac{tg\alpha}{3}\,\delta_{ij}\right]\left[\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\,d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right] \qquad \text{(IV.28)}$$

ce qui s'écrit pour les différentes composantes :

$$dE_{11}^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{A}{B}\,\frac{g\cos\alpha}{tg\alpha}\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\,d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right)$$

$$dE_{22}^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{A}{B}\,\frac{g\cos\alpha}{tg\alpha}\left(\frac{tg\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\,d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right) \qquad \text{(IV.29)}$$

$$dE_{33}^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{A}{B}\,\frac{g\cos\alpha}{tg\alpha}\left(\frac{tg\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\,d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right)$$

$$dE_{ij}^{PT} = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq j$$

De ces relations on déduit l'expression de la variation de volume pour la traction uniaxiale :

$$dE_{kk}^{PT} = \frac{\Delta V}{V} \frac{A}{B} g \cos\alpha \left[\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3} d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha} \right] \qquad (IV.30)$$

et à partir de (IV.2) on obtient l'évolution de la fraction volumique de martensite formée :

$$dx = \frac{A}{B} g \cos\alpha \left[\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3} d\Sigma - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha} \right] \qquad (IV.31)$$

Les relations (IV.29) (IV.30) et (IV.31) sont établies dans le cas où la transformation s'accompagne d'une variation volumique non nulle, ce qui est le cas pour les alliages Fe-Ni-Cr-C ou Fe-Ni-C.

Lorsque la variation volumique peut être négligée, comme c'est le cas pour les alliages de Cu-Zn-Al, l'angle α est nul. L'identification de la constante a de la relation (IV.14) doit être établie à partir d'un autre type d'essai, la relation (IV.21) n'étant plus définie.

IV.5.3 Comparaisons des différents résultats

Trois aspects de la transformation sont étudiés dans ce paragraphe, tout d'abord les interactions entre contraintes et température pour la détermination du seuil de déformation.

B.U. METZ

On compare tout d'abord les résultats obtenus à l'aide du modèle développé dans ce chapitre avec les résultats obtenus par Patel et Cohen [25] et avec les résultats expérimentaux de Gautier [18] .

Dans une deuxième partie on étudie la cinétique de la transformation et on confronte nos résultats à ceux de Gautier et à ceux du modèle de Onedera et Tamura [34] .

Pour terminer on étudie la relation entre déformation et taux de transformation. Et nous confrontons nos résultats avec ceux obtenus par les modèles de Magee [15] , Greenwood et Johnson [11] et Abrassart [13] ainsi qu'avec l'expérience [18] .

IV.5.3.1 Détermination du seuil de transformation

A partir du critère symétrique défini au paragraphe (IV.2), nous obtenons une relation liant la température et la contrainte pour définir l'état limite de transformation. Patel et Cohen [25] ont établis des relations similaires entre ces deux variables pour différents états particuliers de sollicitation. La comparaison entre les résultats de Patel et Cohen, nos résultats et les valeurs effectives trouvées par ces auteurs est montrée dans le tableau (IV.1) pour la traction, la compression et pour une pression hydrostatique.

Pour ces trois états de sollicitation le critère (IV.13) s'écrit :

a) en traction uniaxiale

Les invariants ont pour expression :

$$\begin{cases} J_2 = \dfrac{\Sigma^2}{3} \\ I_1 = \Sigma \end{cases}$$

et le critère (IV.13) devient :

$$\frac{\Sigma}{\sqrt{3}} + \frac{tg\alpha}{3}\Sigma = \frac{\Delta G(T)}{g\cos\alpha} \qquad (IV.32)$$

en notant M_s la température de début de transformation martensitique, nous obtenons:

$$\frac{dM_s}{d\Sigma} = \frac{g\cos\alpha}{B}\,\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3} \qquad (IV.33)$$

b) <u>en compression uniaxiale</u>

dans ce cas les invariants s'écrivent :

$$\begin{cases} J_2 = \dfrac{\Sigma^2}{3} \\ I_1 = \Sigma \quad \text{(avec ici } \Sigma \text{ négatif)} \end{cases}$$

la relation (IV.13) donne alors :

$$\frac{dM_s}{d\Sigma} = \frac{g\cos\alpha}{B}\,\frac{\sqrt{3}-tg\alpha}{3} \qquad (IV.34)$$

c) <u>pour la pression hydrostatique</u>

On a pour les invariants les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} J_2 = 0 \\ I_1 = 3\Sigma \quad (\Sigma \text{ est négatif}) \end{cases}$$

le critère (IV.13) s'écrit donc

$$\Sigma \tau_g \alpha = \frac{\Delta G(T)}{g \cos \alpha} \qquad (IV.35)$$

d'où la relation suivante :

$$\frac{dM_s}{d\Sigma} = - \frac{g \sin \alpha}{B} \qquad (IV.36)$$

A partir des relations (IV.33), (IV.34) et (IV.36), on étudie pour trois modes de sollicitation, l'influence d'une contrainte appliquée sur la température de transformation, on compare les résultats (tableau (IV.1)) à ceux de Patel et Cohen.

		Fe - 20 Ni - 0,5 C		Fe - 30 Ni
		Traction	Compression	hydrostatique
$\frac{dM_s}{d\Sigma}$	Patel et Cohen [25]	+ 0,155	0,104	- 0,055
	nos résultats	0,164	0,130	- 0,055
	expériences [25]	0,145	0,094	- 0,083

Tableau (IV.1) Valeurs de $dM_s/d\Sigma$ calculées à partir de Patel et Cohen et du modèle phénoménologique. Comparaisons avec les résultats expérimentaux de Patel et Cohen.

Le tableau (IV.1) montre que nos résultats sont proches de ceux calculés par Patel et Cohen, la différence provient du choix du critère qui a été éffectué dans les deux modèles. Implicitement Patel et Cohen se servent du critère de la contrainte résolue maximale, établi au paragraphe (IV.2), alors que nous utilisons un critère symétrique, qui a été identifié à l'aide d'un essai de pression hydrostatique, ce qui explique la concordance des résultats des deux modèles pour cet état de sollicitation.

ESSAI	E	$\sum$ appliques ou $\sum$ traction	M_s ou T (expérience) [18]	M_s calculé	
				Patel et Cohen	modèle phénoménologique
Statique	$2,5.10^{-2}$	250 MPa	4° C	26° C	33° C
Dynamique	$1,6.10^{-2}$	270 MPa	30° C	29° C	36° C
	$0,4.10^{-2}$	216 MPa	22,5° C	22° C	27° C

Tableau (IV.2) : Valeurs de M_s en essai statique et en essai dynamique en présence d'une déformation plastique de l'austénite. Alliage Fe-Ni-C. Comparaison des résultats obtenus à l'aide du modèle de Patel et Cohen et des modèles phénoménologique avec les résultats expérimentaux de Gautier.

Le tableau (IV.2) donne, pour un alliage de Fe-Ni-C, la valeur de la température seuil de transformation, calculée par le modèle décrit dans ce chapitre et par la relation de Patel et Cohen. Il donne également les résultats expérimentaux de Gautier pour des essais à contrainte constante (statique) et des essais à température constante (dynamique).

La corrélation est bonne entre les valeurs calculées par notre modèle et celles déterminées à l'aide du modèle de Patel et Cohen. Pour des essais de type dynamique, ces résultats sont en bon accord avec l'expérience, cela n'est pas le cas pour les essais statiques.

Les essais réalisés par Gautier ont été effectués pour des contraintes supérieures au seuil d'écoulement plastique de la matrice (180 MPa pour les alliages de Fe-Ni-C) nous avons donc, dans le cas pour un essais statique, plastification de la matrice avant même le début de la transformation martensitique. Cette plastification joue un rôle d'inhibiteur pour la transformation [18] .

Le modèle présenté ici ne s'applique donc pas aux essais statiques. Il serait intéressant, de refaire ces expériences pour des contraintes inférieures à la limite d'élasticité de l'austénite.

IV.5.3.2 Cinétique de la transformation

On étudie ici l'évolution de taux de martensite formée en fonction de l'évolution de la contrainte ou de la température.

Le modèle phénomènologique indique l'existence de relation linéaire entre x, fraction volumique de martensite formée, et la température des essais statiques, ainsi qu'entre x et la contrainte pour les essais de type dynamique (relation IV.31).

Ce qui est en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux obtenus par Gautier [18] (figureIV.6 et figure IV.7).

On compare maintenant de façon quantitative, la cinétique de transformation déterminée par notre modèle avec les résultats expérimentaux obtenus par E. Gautier et les prévisions du modèle de Onodera et Tamura. Ces résultats sont rassemblés au tableau IV.3.

Onodera et Tamura [34] étudient la cinétique de la transformation sous contrainte à partir des relations de Patel et Cohen. Ils font l'hypothèse que la cinétique de transformation est liée à l'énergie mécanique d'intéraction du champ de contrainte extérieur, énergie qu'ils calculent comme Patel et Cohen.

Ils obtiennent ainsi la relation suivante :

$$x(\Sigma) = \frac{1}{\psi_0}\int_0^{\psi_0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{A}{B}\frac{\Sigma}{2}\left(g\cos\alpha\sin 2\theta\cos\psi \pm g\sin\alpha\left(1+\cos 2\theta\right)\right) - W\right]d\theta\, d\psi$$

en notant :

θ : angle entre la normale au plan d'habitat et la direction de traction .

ψ : orientation de la direction de cisaillement par rapport à la direction de cisaillement maximum dans le plan d'habitat.

ψ_0 : valeur maximale de ψ .

W : travail minimum pour induire la transformation, dépend de la température.

Après intégration ils obtiennent :

$$x(\Sigma) = \frac{A}{B}\left(\frac{\Sigma}{2}\left(2g\,\frac{\cos\alpha}{\pi}\,\frac{\sin\psi_0}{\psi_0} + g\sin\alpha\right) - W(T)\right)$$

Il est admis que l'angle ψ_o peut être pris égal à zéro. On obtient alors pour $\frac{dx}{d\Sigma}$ la forme suivante :

$$\frac{dx}{d\Sigma} = \frac{A}{2B} g\left[\frac{2\cos\alpha}{\pi} + \sin\alpha\right] \qquad \text{(IV.37)}$$

	modèle phénoménologique	modèle Onodera et Tamura [34]	résultats expérimentaux [18]
$\frac{dx}{d\Sigma}$	$1{,}9.10^{-3}$	$1{,}2.10^{-3}$	$1 .10^{-3}$
$\frac{dx}{dT}$	$1{,}2.10^{-2}$	-	$1 ,2.10^{-2}$

Tableau (IV.3) Cinétique de transformation en essais statique et en essais dynamiques pour des alliages de Fe-Ni-C-Cr et de Fe-Ni-C .

Valeurs utilisées pour le calcul [18] :

$$\begin{cases} A = 1{,}2.10^{-2}\ K \\ B = 0{,}76\ N.m.m^{-3} \\ g \sin\alpha = 0{,}03 \\ g \cos\alpha = 0{,}19 \end{cases}$$

Les résultats du tableau (IV.3) montrent un excellent accord entre le modèle phénoménologique et l'expérience pour la valeur de $d\varepsilon/dT$. Cela est dû au fait que cette expérience est celle qui a servit à déterminer la valeur de a dans la relation (IV.23).

En revanche il existe un écart d'un facteur deux pour $d\varepsilon/d\Sigma$ par rapport aux résultats expérimentaux. La différence est beaucoup plus faible avec les résultats obtenu par Onodéra et Tamura, et peut être expliquée comme pour le paragraphe (IV.5.3.1) par le fait que Patel et Cohen se fondent sur un critère de contrainte résolue maximale et non un critère symétrique.

La différence observée entre nos résultats et l'expérience, provient du fait que notre modèle est élaboré pour la plasticité de transformation parfaite, ce qui n'est pas le cas dans les alliages de Fe-Ni-C où le couplage avec la plasticité classique est très important.

IV.5.3.3 Evolution de la plasticité de transformation avec le taux de martensite formée

Nous allons étudier cette évolution d'après les différents modèles et d'après les résultats expérimentaux obtenus pour des essais statiques et dynamiques.

Trois types de comparaisons sont effectuées :

- la forme des courbes $E^{PT} = f(x)$
- la valeur initiale de $\dfrac{dE^{PT}}{dx}$
- la valeur de $\dfrac{dE^{PT}}{dx}$ pour $x = 1$

Nos calculs ont été effectués en utilisant la relation (IV.29) obtenue pour la traction uniaxiale :

$$dE_M^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{A}{B}\,\frac{g\cos\alpha}{tg\alpha}\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3}\,d\Sigma_{II} - \frac{B\,dT}{g\cos\alpha}\right)$$

relation qui peut s'écrire aussi à partir de la relation (IV.31)

$$dE_M^{PT} = \frac{\Delta V}{V}\,\frac{\sqrt{3}+tg\alpha}{3\,tg\alpha}\,dx \qquad \text{(IV.38)}$$

En notant σ_e la limite d'élasticité de l'austénite, la relation de Greenwood et Johnson s'écrit :

$$E^{PT} = \frac{5}{6}\,\frac{\Delta V}{V}\,\frac{\Sigma}{\sigma_e}\,x \qquad \text{(IV.39)}$$

et la relation d'Abrassart :

$$E^{PT} = \frac{3}{4}\,\frac{\Delta V}{V}\,\frac{\Sigma}{\sigma_e}\left(x - \frac{2}{3}\,x^{3/2}\right) \qquad \text{(IV.40)}$$

Pour les trois modèles E^{PT} est proportionnel à la contrainte appliquée et varie dans le même sens. Mais dans les modèles d'Abrassart et de Greenwood et Johnson nous n'avons pas d'indication sur l'évolution du taux de martensite formée en fonction de l'évolution de l'état de contrainte et de température.

Les courbes expérimentales obtenues par Gautier pour des essais de type statique (figure IV.8) ou dynamique (figure IV.9) pour un alliage de Fe-Ni-C montrent une grande dépendance du type de sollicitation sur l'allure des courbes $E^{PT} = f(X)$. Nous n'avons pas dans la relation (IV.31) une telle dissymétrie de comportement suivant le type d'essai effectué.

Cela est du au fait que nous déterminons la contribution à la déformation apportée par la plasticité de transformation parfaite, uniquement avec la relation (IV.29). Or pour les alliages de Fe-Ni-C le couplage plasticité de transformation pure, plasticité classique est très fort.

Pour un essai statique effectué sous une contrainte appliquée supérieure à la limite d'élasticité de l'austénite, la plastification de la matrice abaisse le seuil de transformation M_s . Le durcissement de la matrice entraîné par l'écrouissage et l'action des contraintes internes engendrées par les premières plaquettes de martensite formées conduisent à rendre actif des variants de martensite dont l'orientation n'était pas favorable au début de la transformation, et ainsi à abaisser le rapport $dE^{PT}/d\alpha$ au fur et à mesure que la transformation avance [18] . A l'inverse, plus la contrainte appliquée sera forte, plus elle sera suffisante pour modifier l'action du champ des contraintes internes et activer ainsi le variant dont l'orientation, par rapport au champ de contrainte extérieure, est la plus favorable. C'est ce résultat qui apparait dans le tableau (IV.4). Pour une contrainte appliquée de 250 MPa la valeur initiale de $dE^{PT}/d\alpha$ est égale à 0,12, valeur qui est proche de celle déterminée à l'aide de la théorie de Magee et qui correspond à la valeur maximale de la déformation du variant le mieux orienté par rapport au champ de contrainte extérieur.

Ce résultat est aussi très proche de celui donné par le modèle phénoménologique, qui est donc en accord sur ce point avec le mécanisme de Magee.

Pour les essais de type dynamique les valeurs de déformations obtenues en plasticité de transformation sont trois à six fois supérieures aux valeurs maximales autorisées par le mécanisme de Magee et par la relation (IV.29) (figure IV.9). De même les valeurs de $dE^{PT}/d\alpha$ sont très élevées et varient entre 0,2 et 0,6 [18].
Là encore le couplage plasticité de transformation parfaite, plasticité classique est responsable de cet écart.

Si on regarde maintenant, pour un essai statique l'influence de la contrainte appliquée sur le taux de déformation (tableau IV.5), on trouve un bon accord entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus à l'aide du modèle de Greenwood et Johnson.

Un tel calcul ne peut être éffectué à l'aide de la relation (IV.29) pour le régime statique car la variation de l'état de contrainte est nulle. Par contre σ et T jouent un rôle symétrique en plasticité de transformation parfaite entre essais statiques et essais dynamiques. Nous pouvons donc comparer les résultats obtenus pour $dE^{PT}/d\Sigma$ en régime statique avec ceux déterminés en régime dynamique avec la relation (IV.29). Nous obtenons dans ce cas la valeur 13.10^{-5} MPa^{-1} , valeur qui est en accord avec les résultats expérimentaux et avec la théorie de Greenwood et Johnson.

	modèle phénoménologique	modèle de Magee	résultats expérimentaux essais statique [18]				
			50 MPa	100 MPa	160 MPa	200 MPa	250 MPa
$\frac{dE^{PT}}{dx}$ initial	0,12	0,12	0,016	0,04	0,09	0,104	0,12
$\frac{dE^{PT}}{dx}$ linéaire	0,12	0,12	0	0,65.10	1,08.10	1,14.10	-

Tableau (IV.4) valeur de $\frac{dE^{PT}}{dx}$ pour un alliage de Fe-Ni-C.

Alliage	G.J. (MPa^{-1})	A (MPa^{-1})	Mesure (MPa^{-1})	Données utilisées σ_e (MPa)	$\frac{\Delta V}{V}$
60 NCD 11 a	12.10^{-5}	$3,6\ 10^{-5}$	$7\text{-}10.10^{-5}$	210	0.03
60 NCD 11 b	9.10^{-5}	$2,7.10^{-5}$	5.10^{-5}	280	
Fe-Ni-C	12.10^{-5}	3.10^{-5}	$10\text{-}12.10^{-5}$	180	0,026
Fe-Ni-C-Cr	12.10^{-5}	3.10^{-5}	$10\text{-}12.10^{-5}$	180	0,026

Tableau (IV.5) valeurs de $dE^{PT}/d\Sigma$ calculées par Gautier [18] à partir des modèles Greenwood-Johnson et Abrassart.

IV.6° - CONCLUSION

Bien qu'étudiés dans le cas défavorable où plasticité de transformation parfaite et plasticité classique soient fortement couplées, les calculs effectués à l'aide du modèle phénoménologique, développé dans ce chapitre, aboutissent à des résultats intéressants.

Nous avons en effet pu montrer la convergence de nos résultats avec ceux obtenus par Patel et Cohen pour la cinétique de la transformation et pour la détermination du seuil de transformation.

Nous avons montré aussi la cohérence de nos calculs avec ceux effectués par Magee, pour la plasticité de transformation développée par la plaquette de martensite ayant l'orientation la plus favorable par rapport au champ de contrainte extérieur, ainsi que l'accord avec les valeurs de $dE^{PT}/d\Sigma$ obtenues par Greenwood et Johnson.

Il serait intéressant d'appliquer maintenant, ce modèle phénoménologique pour décrire la plasticité de transformation dans les alliages de CU-Zn-Al, alliages où n'intervient que la plasticité de transformation parfaite. Il serait nécessaire pour cela de réaliser une nouvelle identification du paramètre de proportionnalité a, car ces matériaux présentent une variation volumique nulle lors de la transformation martensitique.

Le modèle que nous venons de développer permet l'étude du couplage plasticité de transformation parfaite, plasticité de transformation classique à partir de la relation (III.3). On se heurte cependant à plusieurs difficultés pour la mise en oeuvre de cette relation. Tout d'abord l'anisotropie de la transformation, cette anisotropie n'est pas prise en compte dans les critères étudiés aux paragraphes (IV.2) et (IV.3). Ensuite la détermination du champ de contraintes internes dans le matériau, détermination où l'anisotropie de la transformation ainsi que le nombre de variants actifs par grain et les possibilités d'accommodation des déformations par la plasticité de transformation parfaite jouent un grand rôle. Ce travail est actuellement entrepris dans le laboratoire et ne fait pas partie de cette thèse. Il en est de même de l'application du modèle phénoménologique aux alliages de Cu-Zn-Al, alliages pour lesquels nous avons plasticité de transformation parfaite.

Un modèle phénoménologique décrivant le passage du monocristal au polycristal reste toutefois imparfait car il ne tient pas compte de la microstructure. Nous allons dans le cadre du chapitre V effectuer une approche plus fine pour la plasticité de transformation parfaite.

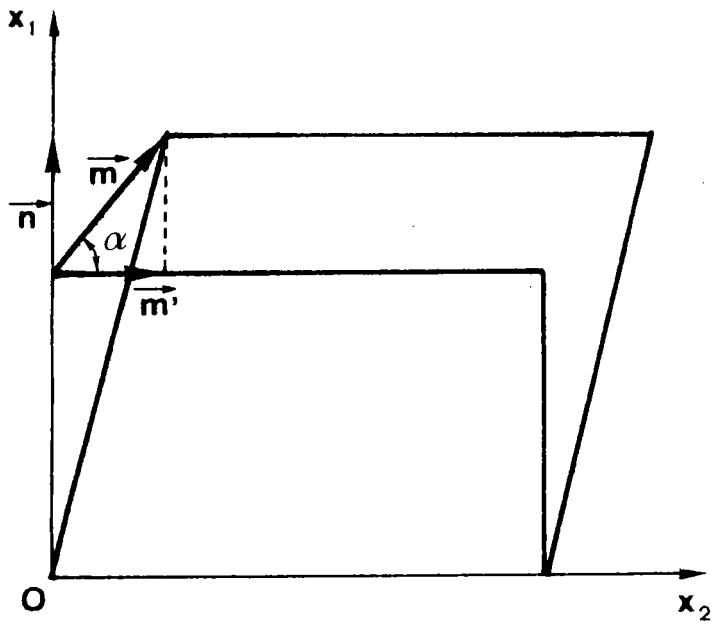
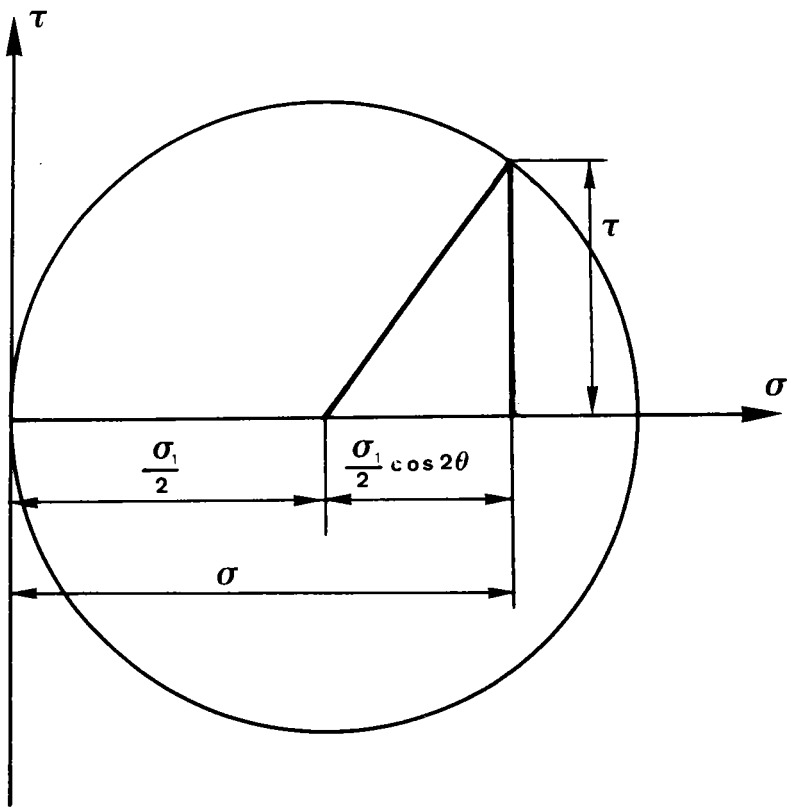


FIGURE IV.1 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique.

$\vec{n}$: normale au plan d'habitat.
$\vec{m}$: direction de transformation.
$\vec{m'}$: projection sur le plan d'habitat de la direction $\vec{m}$.
α : angle formé par les directions $\vec{m}$ et $\vec{m'}$.



$$\begin{cases} \sigma = \dfrac{\sigma_1}{2}(1.\cos 2\theta) \\ \tau = \dfrac{\sigma_1}{2}\sin 2\theta \end{cases}$$

FIGURE IV.2 : Contrainte normale et contrainte tangentielle en traction uniaxiale, en fonction de la contrainte appliquée σ_1 et de l'angle θ formé par la direction de traction et la normale à la facette.

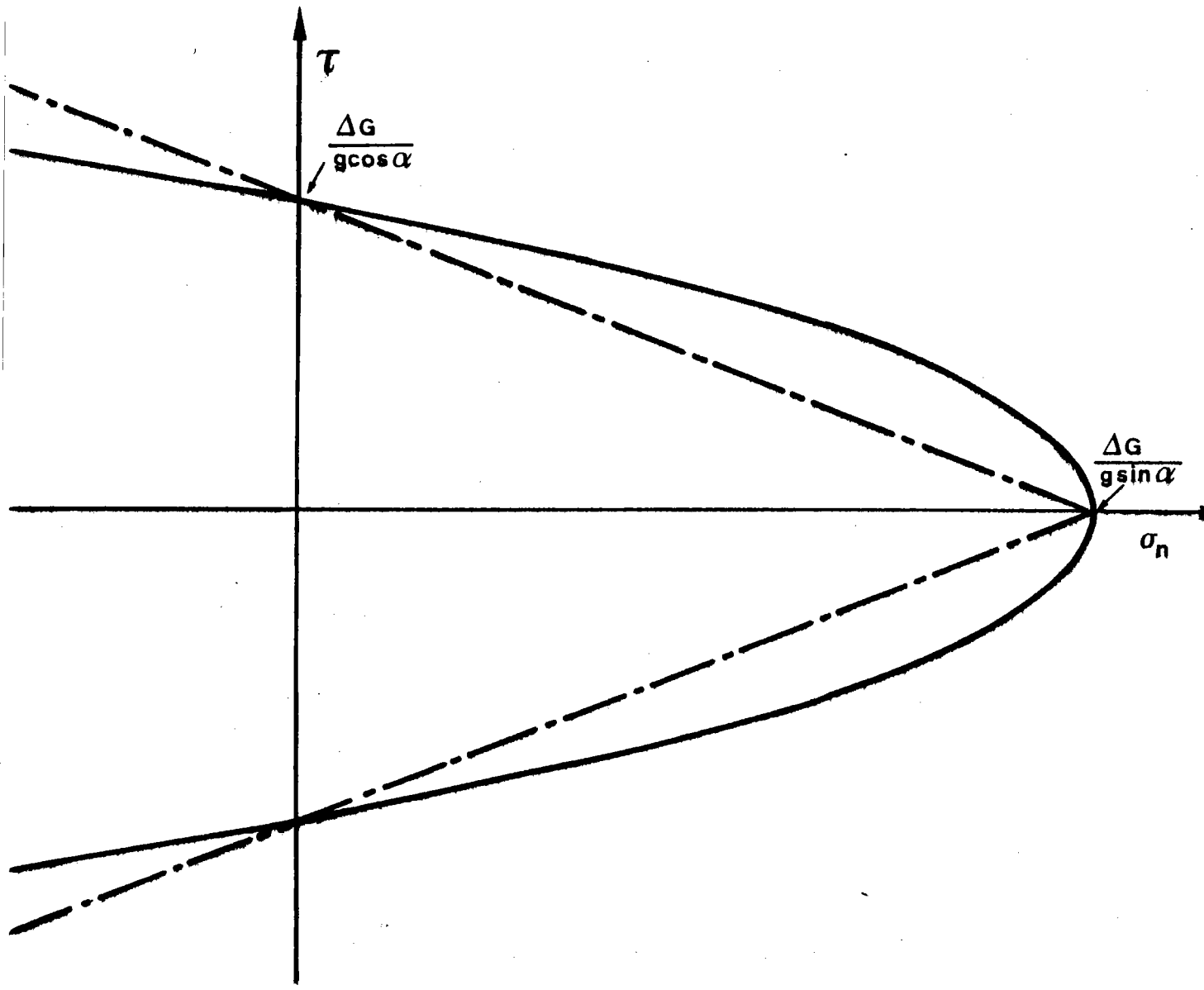


FIGURE IV.3 : Comparaison du critére de contrainte résolue maximale et du critére symétrique de Drucker-Prager pour la plasticité de transformation parfaite.

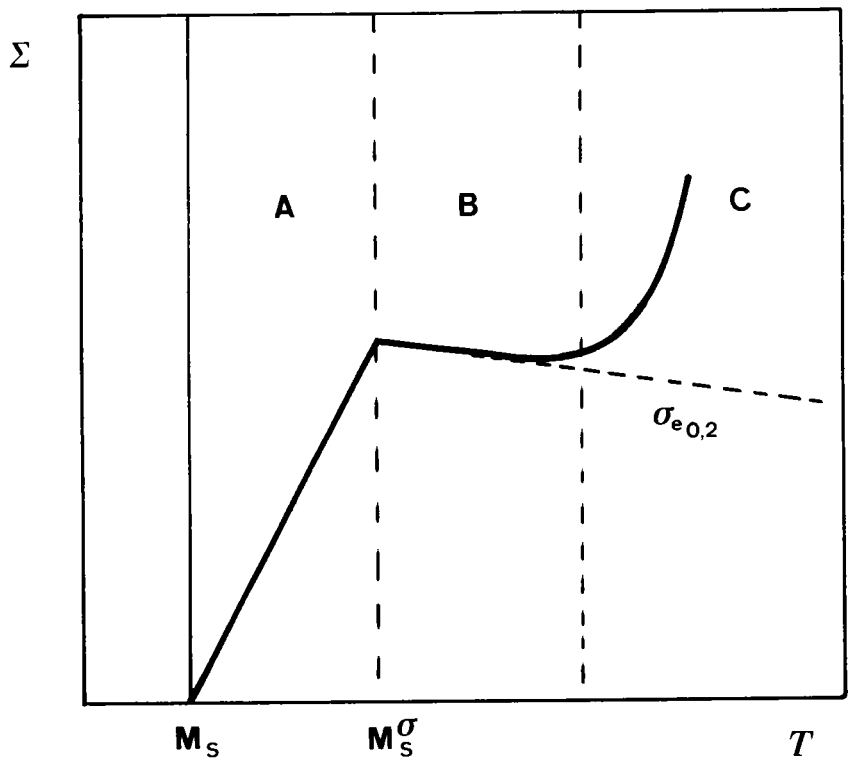


FIGURE IV.4 : Représentation schèmatique de la contrainte nécéssaire pour induire une transformation martensitique dans les alliages ferreux en fonction de la température de l'essai[25].

Zone A : La contrainte est inférieure à la limite d'élasticité de la matrice.
M_s^σ température limite de cette zone.

Zone B : La contrainte nécessaire est égale à la contrainte d'écoulement plastique de la matrice.

Zone C : Déformation plastique importante de la matrice, augmentation très importante de la contrainte critique de transformation avec la température.

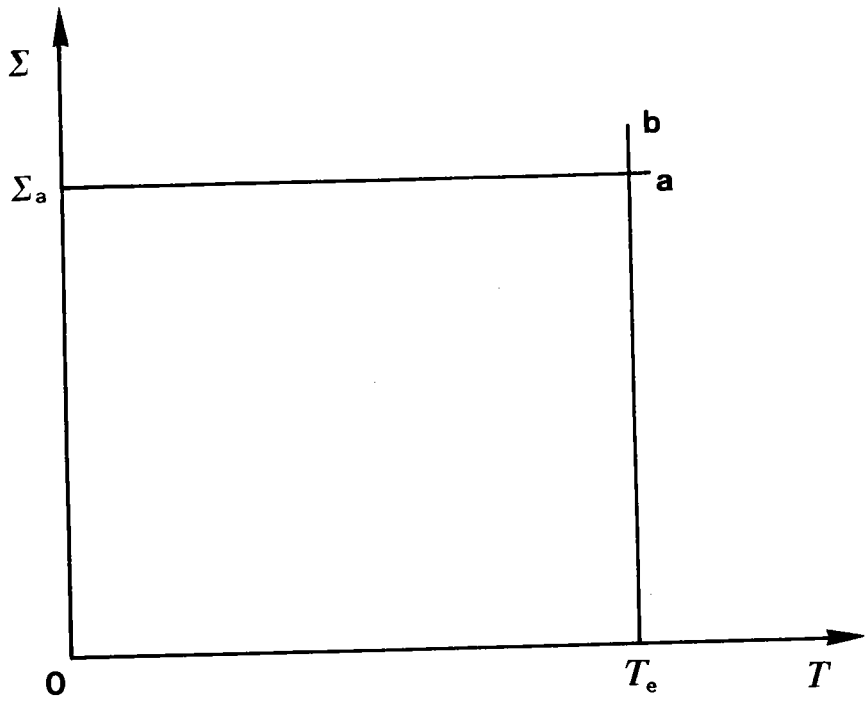


FIGURE IV.5 : Représentation schématique des essais statiques et des essais dynamiques.

a: essai statique { ΔΣ = 0
T variable

b: essai dynamique { ΔT =0
Σ variable

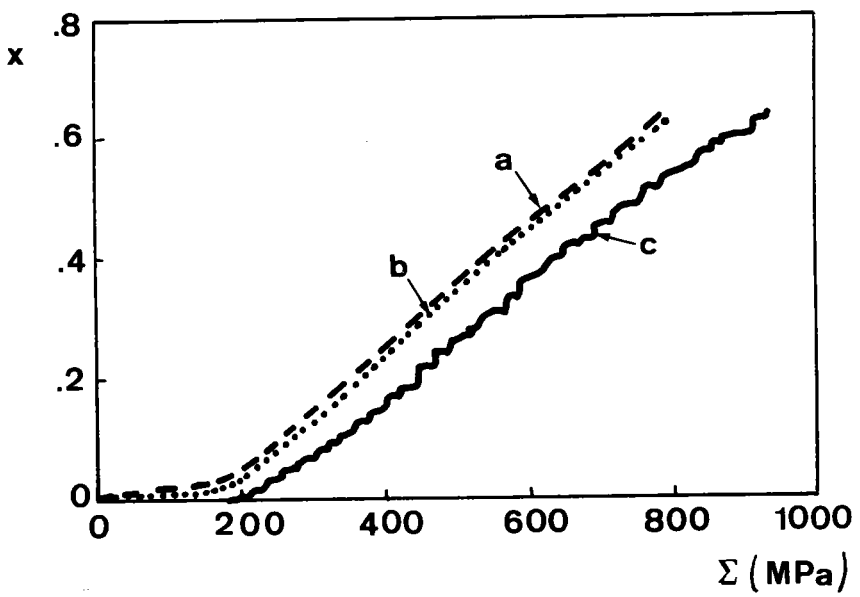


FIGURE IV.6 : Variation de la cinétique de transformation en fonction de la contrainte appliquée pour trois conditions de sollicitations. Alliage Fe-Ni-C.
Température de l'essai: 0°C [18].

courbe a: $\dot{\varepsilon} = 1.10^{-4} s^{-1}$

b: $\dot{\varepsilon} = 8.10^{-4} s^{-1}$

c: $\dot{F} = 18\ N.s^{-1}$

$\dot{\sigma} = 2{,}6\ MPa.s^{-1}$

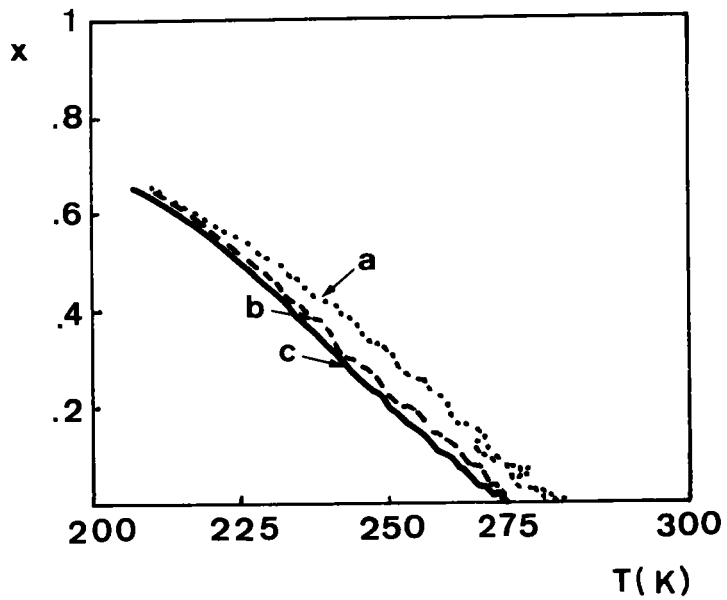


FIGURE IV.7 : Variation de la cinétique de transformation en fonction de la température pour trois contraintes appliquées. Alliage Fe-Ni-C [18].

courbe a: Σ= 10 MPa
b: Σ=160 MPa
c: Σ=250 MPa

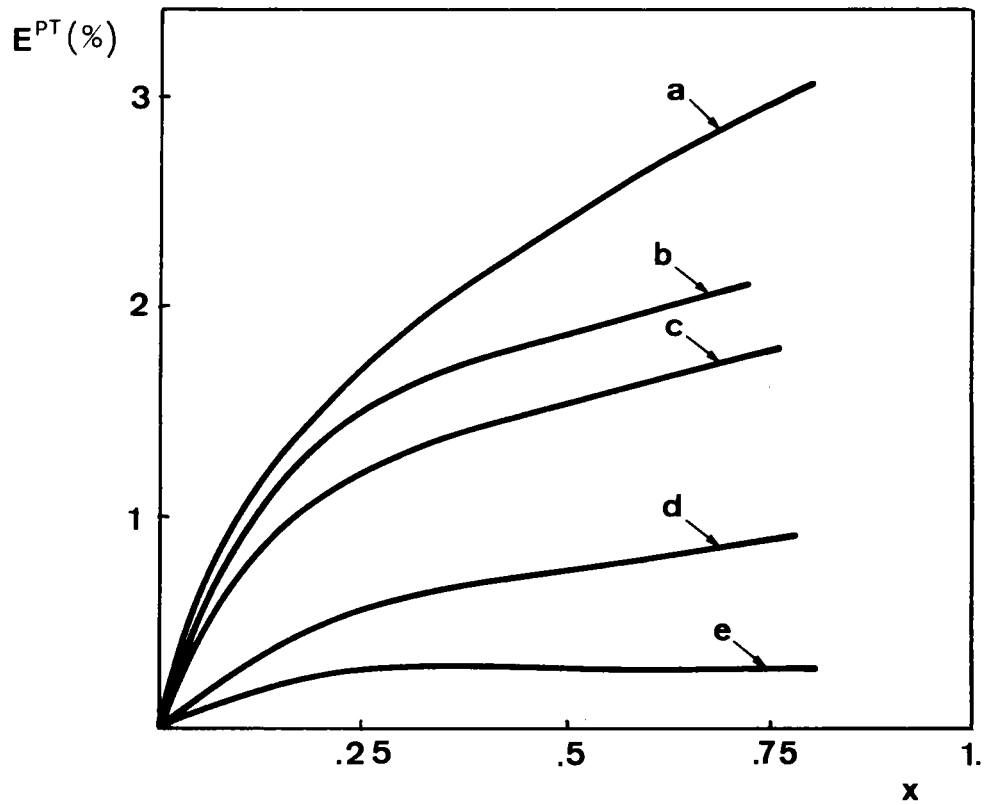


FIGURE IV.8 : Variation de la déformation en plasticité de transformation en fonction du taux de phase formée pour différentes contraintes appliquées en essai statique.
Alliage Fe-Ni-C [18].

courbe a: Σ=250 MPa
b: Σ=200 MPa
c: Σ=160 MPa
d: Σ=100 MPa
e: Σ= 50 MPa

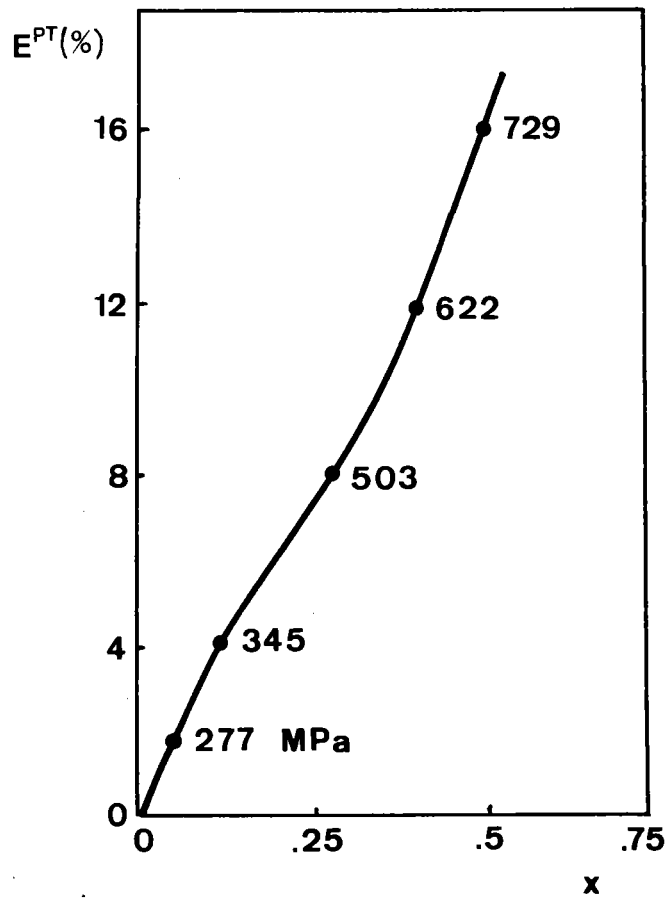


FIGURE IV.9 : Variation de la déformation en plasticité de transformation en fonction du taux de phase formée pour un essai dynamique à $\dot{F}$ constant.
Alliage Fe-Ni-C [18].

C H A P I T R E V

LE POLYCRISTAL EN PLASTICITE DE TRANSFORMATION PARFAITE

HOMOGENEISATION PAR UNE METHODE AUTO-COHERENTE

V.1° - INTRODUCTION

Nous avons proposé au chapitre précédent une description phénoménologique de la plasticité de transformation martensitique, qui a l'avantage d'être directe et qui ne nécessite que la connaissance du champ de contraintes externes et les caractéristiques macroscopiques du matériau.

Cette méthode qui ignore la microstructure du polycristal rend difficile la prise en compte de phénomènes tels que les déformations élastiques et plastiques des deux phases, la plasticité de transformation par réorientation et surtout l'anisotropie de la transformation.

C'est pourquoi, pour modéliser la plasticité de transformation parfaite du polycristal, nous allons utiliser les méthodes d'homogénéisation qui ont été développées à partir d'aspects microscopiques pour décrire le comportement macroscopique [35].

Ces méthodes ont déjà été utilisées pour modéliser l'élasticité du polycristal et la plasticite classique.

La méthode employée est le schéma auto-cohérent à accommodation élasto-plastique développée par Berveiller et Zaoui [36].

Nous allons, dans un premier temps, rappeller la loi de comportement du monocristal, puis établir une relation d'interaction entre les grains et calculer les valeurs moyennes des contraintes et des déformations.

Nous déterminerons tout d'abord le problème de manière général afin de déterminer la contribution de la plasticité de transformation à la déformation totale. Puis nous adapterons ensuite le modèle au cas particulier des alliages Cu-Zu-Al dont la particularité est de présenter une très faible variation volumique et de se transformer totalement pour des contraintes inférieures à la limite d'élasticité de l'austénite.De plus, en traction uniaxiale, ces matériaux se déforment pratiquement avec un seul variant (70 % de la déformation) par grain [20].

Dans cette étude on négligera les déformations élastiques du matériau.

Les résultats de ce modèle sont confrontés avec les résultats expérimentaux obtenus au laboratoire sur des mono et polycristaux de Cu-Zu-Al déformés en traction uniaxiale.

On s'attache dans ce chapitre au seul cas des chargements mécaniques. En effet un chargement thermique fait intervenir plusieurs variants dans chaque grain et nécessite donc pour sa résolution la connaissance des interactions entre variants.

V.2° - MODELISATION DE LA PLASTICITE DE TRANSFORMATION PARFAITE

V.2.1 Caractérisation des déformations en plasticité de transformation

Soit un polycristal de volume V, formé de n grains de volume v^I et de fraction volumique (figure V.1):

$$F^I = \frac{V^I}{V} \qquad (V.1)$$

L'accroissement de la déformation s'écrit comme étant la moyenne des accroissement dans chaque grains. L'incrément de déformation en plasticité de transformation a pour expression :

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_J \left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^J F^J \qquad (V.2)$$

$(d\,\epsilon_{ij}^{PT})^J$ étant l'incrément de déformation pour le grain J. On a vu au chapitre III que cette quantité s'écrit (relation III.18) dans le cas où plusieurs variants sont actifs :

$$\left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^J = \sum_h \left(R_{ij}^h\right)^J q\, dx_J^h \qquad (V.3)$$

Ce qui donne pour l'accroissement de déformation du polycristal :

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_{J} F^{J} \sum_{h} \left(R_{ij}^{h}\right)^{J} g \, dx_{J}^{h} \qquad (V.4)$$

De même, on obtient pour la rotation de plasticité de transformation $(\omega_{ij}^{h})^{I}$ associée au variant h du grain I à partir des relations établies au chapitre III:

$$\left(\omega_{ij}^{h}\right)^{I} = \left(S_{ij}^{h}\right)^{I} g \, x_{I}^{h} \qquad (V.5)$$

La valeur de la rotation Ω_{ij}^{I} associée à la transformation du grain I s'écrit alors :

$$\Omega_{ij}^{I} = \sum_{h} \left(S_{ij}^{h}\right)^{I} g \, x_{I}^{h} \qquad (V.6)$$

V.2.2 Ecrouissage intracristallin

On a vu au chapitre III que les systèmes potentiellement actifs obéissent à une loi seuil, et on a montré l'existence d'un écrouissage dans le monocristal.

Pour le polycristal, on fait l'hypothèse que seul l'écrouissage intracristallin intervient et que les contraintes s'exerçant sur les grains résultent de l'addition du champ de contraintes externes avec le champ de contraintes internes provenant des incompatibilités intergranulaires [31].

On suppose que l'écrouissage intracristallin est linéaire et caractérisé par une matrice d'écrouissage H dont les termes H^{nm} représentent la contribution de l'écrouissage sur le variant n due à l'interaction avec le variant m [30] [37].

Pour un accroissement de contrainte $d\sigma_{ij}$, l'accroissement de contrainte réduite $d\sigma^n$ sur le variant n est caractérisé par :

$$d\sigma^n = R^n_{ij}\, d\sigma_{ij} \qquad (V.7)$$

La variation de contrainte critique sur le variant n du fait de la progression de la transformation s'écrit :

$$d\sigma^n_c = \sum_m H^{nm} g\, dx^m \qquad (V.8)$$

Pour les variants actifs et qui le restent, on doit avoir la relation suivante :

$$d\sigma^n_c = d\sigma^n \qquad (V.9)$$

ce qui s'écrit :

$$R^n_{ij}\, d\sigma_{ij} = \sum_m H^{nm} g\, dx^m \qquad (V.10)$$

V.2.3 Evaluation des contraintes intergranulaires

On a vu au paragraphe (V.2.2) qu'il est nécessaire de connaître les contraintes s'exerçant sur chaque grain, et que ce problème se ramène à la détermination du champ de contraintes internes. Pour cela on considére chaque grain comme une inclusion homogène d'Eshelby subissant une déformation sous contraintes ϵ_{ij}^{PT} . Si on ramène l'inclusion à sa forme initiale par une déformation élastique $-\epsilon_{ij}^{PT}$, on crée à la surface de l'inclusion une distribution de force dF_i qui s'exprime par :

$$dF_i = -\sigma_{ij}\, n_j\, dS \qquad (V.11)$$

σ_{ij} étant la contrainte dans l'inclusion et n_j la normale à la surface de celle-ci.

En supposant l'élasticité linéaire et isotrope on écrit :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij}^{e} + \frac{\nu}{1+2\nu}\,\varepsilon_{kk}^{e}\,\delta_{ij}\right) \qquad (V.12)$$

étant la déformation élastique qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij}^{e} = \varepsilon_{ij}^{T} - \varepsilon_{ij}^{PT}$$

D'autre part on peut relier la déformation totale à la déformation de transformation à l'aide du tenseur d'Eshelby S_{ijkl} [24] .

Ce qui donne alors :

$$\varepsilon_{ij}^{T} = S_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}^{PT}$$

d'où :

$$\varepsilon^{e}_{ij} = S_{ijkl}\,\varepsilon^{PT}_{kl} - \varepsilon^{PT}_{ij} \qquad (V.13)$$

En faisant l'hypothèse que les inclusions sont sphériques et l'élasticité isotrope, le tenseur d'Eshelby se réduit à deux facteurs scalaires α et β fonction du rapport de Poisson de la matrice.

$$\left|\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1+\nu}{1-\nu} \\ \\ \beta = \dfrac{2}{15}\,\dfrac{4-5\nu}{1-\nu} \end{array}\right. \qquad (V.14)$$

on obtient alors :

$$\varepsilon^{T}_{ij} = \beta\,\varepsilon^{PT}_{ij} + \frac{1}{3}(\alpha-\beta)\,\varepsilon^{PT}_{kk}\,\delta_{ij} \qquad (V.15)$$

Dans une inclusion sphérique la contrainte prend la valeur suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left[(\beta-1)\,\varepsilon^{PT}_{ij} + \left(\frac{\alpha-\beta}{3} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\alpha-1)\right)\varepsilon^{PT}_{kk}\,\delta_{ij}\right] \qquad (V.16)$$

ce qui donne en combinant avec les relations (V.14) :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left[(\beta-1)\,\varepsilon^{PT}_{ij} - \frac{1}{15}\,\frac{1+5\nu}{1-\nu}\,\varepsilon^{PT}_{kk}\,\delta_{ij}\right] \qquad (V.17)$$

ε^{PT}_{kk} étant proportionnel à la variation de volume $\frac{\Delta V}{V}$, le terme $\frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}\varepsilon^{PT}_{kk}\delta_{ij}$ donne la valeur de la contrainte interne engendrée par la variation de volume. Si on annule ce terme, on retrouve la formule classique :

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\beta - 1)\varepsilon^{p}_{ij}$$

On a obtenu avec l'expression (V.17) la valeur des contraintes intergranulaires, en l'absence de champ de contraintes extérieures et en ne considérant qu'une seule inclusion dans une matrice infinie.

On généralise cette expression en considérant que la matrice est déformée en plasticité de transformation de manière uniforme par un champ E^{PT}_{ij} et en superposant un champ de contraintes uniforme Σ_{ij} appliqué à l'infini.

L'expression de la contrainte dans l'inclusion devient alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu\left[(1-\beta)(E^{PT}_{ij} - \varepsilon^{PT}_{ij}) + \frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}(E^{PT}_{kk} - \varepsilon^{PT}_{kk})\delta_{ij}\right] \qquad (V.18)$$

Pour simplifier l'écriture de la relation (V.18) on prend comme valeur pour le rapport de Poisson la valeur usuelle $\nu = 0,3$

Dans ce cas β est très proche de 0,5 et le coefficient $\frac{1}{15}\frac{1+5\nu}{1-\nu}$ très proche de 0,25.

La relation (V.18) s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \mu\left[E^{PT}_{ij} - \varepsilon^{PT}_{ij}\right] + \frac{1}{2}\mu\left[E^{PT}_{kk} - \varepsilon^{PT}_{kk}\right] \qquad (V.19)$$

Les contraintes ne se relaxant pas de façon exclusivement élastique comme l'avait supposé Kroner [38] mais de façon élastoplastique [39] on utilise donc un modèle auto-cohérent à accommodation élastoplastique isotrope et on introduit le coefficient α d'accommodation de plasticité de transformation.

On obtient de cette façon une loi d'interaction élastoplastique donnant la valeur des contraintes intragranulaires sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \alpha\mu\left[E^{pT}_{ij} - \varepsilon^{pT}_{ij}\right] + \frac{\alpha\mu}{2}\left[E^{pT}_{kk} - \varepsilon^{pT}_{kk}\right]\delta_{ij} \qquad (V.20)$$

Au début de la transformation, le matériau étant entièrement formé d'une phase austénitique élastique, le coefficient α doit être égal à 1 (cela est aussi le cas en plasticité classique [31]).

Au fur et à mesure que la transformation avance, les possibilités de relaxation des contraintes internes par des déformations supplémentaires de plasticité de transformation augmentent, la valeur de α doit donc diminuer.

En plasticité classique le coefficient α diminue très rapidement pour atteindre des valeurs proches de 10^{-2} . En plasticité de transformation la relaxation s'éffectue plus difficilement du fait des incompatibilités entre variants. Le coefficient α atteint donc des valeurs plus élevées ($0{,}2 < \alpha < 0{,}3$ pour les alliages de Cu-Zn-Al)

V.2.4 Description de la transformation

A partir de la loi d'interaction (V.20) et de la connaissance du comportement de chaque constituant on détermine pour chaque grain la fraction volumique transformée selon chaque variant, et par suite la contribution à la déformation du polycristal due à chaque grain.

La déformation macroscopique de transformation est obtenue en faisant la moyenne sur tout le volume transformé.

On examine tout d'abord le comportement du monocristal.

Par analogie avec la loi de Schmid un variant n est actif lorsque la contrainte résolue atteint une valeur critique σ_c^n . En tenant compte de l'écrouissage et en faisant l'hypothèse que l'état initial σ_c^o est identique pour tous les variants, on obtient à partir de la relation (V.8) :

$$\sigma_c^n = \sigma_c^o + \sum_m H^{nm} g x^m \qquad (V.21)$$

Le comportement du variant n est caractérisé par :

* n est actif, c'est-à-dire $dx^n > o$

si :
$$\begin{cases} R_{ij}^n \, d\sigma_{ij} = d\sigma_c^n \\ \sigma_{ij} \, R_{ij} = \sigma_c^o + \sum_m H^{nm} g x^m \end{cases} \qquad (V.22)$$

* n est inactif, c'est-à-dire $dx^n = o$

si : $\sigma_{ij} R_{ij}^n < \sigma_c^o + \sum_m H^{nm} g x^m$

ou bien si :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} R_{ij}^n = \sigma_c^o + \sum_m H^{nm} g x^m \\ R_{ij}^n \, d\sigma_{ij} < d\sigma_c^n \end{cases} \qquad (V.23)$$

De même les variants n sont inactifs quelles que soient les valeur de $R_{ij}^n \, d\sigma_{ij}$ et $R_{ij}^n \sigma_{ij}$ si le volume est entièrement transformé, c'est-à-dire si :

$$\sum_n x^n = 1$$

Les hypothèses de ce modèle ne permettent pas de traiter directement du phénomène de transformation par réorientation, c'est-à-dire de la transformation d'un variant de martensite en un autre variant de martensite, il faudrait pour cela distinguer pour un même variant la contrainte résolue critique de transformation de l'austénite en martensite et celle de transformation de la martensite de variant n en martensite de variant m par réorientation.

V.2.5 Equations obtenues pour un variant actif n du grain I

La loi d'intéraction (V.20) donne pour le grain I la relation suivante sous forme incrémentale :

$$d\sigma_{ij}^{I} = d\Sigma_{ij} + \alpha\mu\left[dE_{ij}^{PT} - \left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^{I}\right] + \frac{\alpha\mu}{2}\left[dE_{kk}^{PT} - \left(d\varepsilon_{kk}^{PT}\right)^{I}\right]\delta_{ij} \qquad (V.24)$$

L'accroissement de déformation dans le grain I $\left(d\epsilon_{ij}^{PT}\right)^{I}$ due à la transformation de phase est obtenue à l'aide de la relation (V.3).

$$\left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^{I} = \sum_{n}\left(R_{ij}^{n}\right)^{I} g\, d\alpha_{I}^{n}$$

et $d\,E_{ij}^{PT}$ par la relation (V.2).

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_{I}\left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^{I} F^{I}$$

Le variant n étant supposé actif, on peut écrire pour ce variant à l'aide des relations (V.10) :

$$\left(R_{ij}^{n}\right)^{I} d\sigma_{ij}^{I} = \sum_{m} H_{I}^{nm}\, g\, dx_{I}^{m}$$

et en combinant avec la relation (V.24) on obtient.

$$\sum_m H^{nm} g\, dx_I^m = (R_{ij}^n)^I \left(d\Sigma_{ij} + \alpha\mu \left[dE_{ij}^{PT} - (d\varepsilon_{ij}^{PT})^I \right] + \frac{\alpha\mu}{2} \left[dE_{kk}^{PT} - (d\varepsilon_{kk}^{PT})^I \right] \delta_{ij} \right)$$

Si on remplace maintenant $(d\epsilon_{ij}^{PT})^I$ et $(d\epsilon_{kk}^{PT})^I$ par leurs valeurs :

$$\sum_m H^{nm} g\, dx_I^m = (R_{ij}^n)^I \left(d\Sigma_{ij} + \alpha\mu \left[dE_{ij}^{PT} - \sum_m (R_{ij}^m)^I g\, dx_I^m \right] + \frac{\alpha\mu}{2} \left[dE_{kk}^{PT} - \sum_m (R_{kk}^m)^I g\, dx_I^m \right] \delta_{ij} \right)$$

et en remplaçant de même $d\,E_{ij}^{PT}$ et $d\,E_{kk}^{PT}$ par leurs valeurs, on obtient alors :

$$\sum_m H^{nm} g\, dx_I^m = (R_{ij}^n)^I \left(d\Sigma_{ij} + \alpha\mu \left[\sum_J F^J \sum_m (R_{ij}^m)^J g\, dx_J^m - \sum_m (R_{ij}^m)^I g\, dx_I^m \right] + \frac{\alpha\mu}{2} \left[\sum_J F^J \sum_m (R_{kk}^m)^J g\, dx_J^m - \sum_m (R_{kk}^m)^I g\, dx_I^m \right] \delta_{ij} \right)$$

$(R_{kk}^m)^J$ étant égal à $\sin\alpha$, en divisant par g l'expression précédente, on obtient finalement pour le variant n du grain I :

$$\sum_m H^{nm}\, dx_I^m = (R_{ij}^n)^I \left(\frac{d\Sigma_{ij}}{g} + \alpha\mu \left[\sum_J F^J \sum_m (R_{ij}^m)^J dx_J^m - \sum_m (R_{ij}^m)^I dx_I^m \right] + \frac{\alpha\mu}{2} \left[\sum_J F^J \sum_m dx_J^m - \sum_m dx_I^m \right] \sin\alpha\, \delta_{ij} \right) \quad (V.25)$$

Pour chacun des variants actifs des N grains du polycristal on obtient une relation du type (V.25).

Ces relations sont des fonctions linéaires du taux de martensite formée sur les différents variants actif dx_I^n

V.2.6 Conclusion

Nous avons obtenu un système d'équations linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues. Le problème est totalement déterminé et nous pouvons calculer pour chaque variant actif n du grain I le taux de martensite formée dx_I^n

A partir de la connaissance des dx_I^n pour tout les variants actifs du grain I, la relation (V.3) permet d'obtenir l'accroissement de déformation $(d\epsilon_{ij}^{PT})^I$ de ce grain.

A l'aide de la relation (V.2) nous pouvons déterminer la déformation macroscopique associée à la transformation martensitique.

Parallèlement, la relation (V.24) donne accès aux accroissements de contraintes internes dans chaque grains $d\sigma_{ij}^I$ en fonction du taux de martensite formée. A l'aide des relations de comportement du monocristal (V.22) et (V.23) nous pouvons ensuite déterminer pour chaque grain les variants actifs et ceux qui ne le sont pas.

Nous obtenons ainsi de proche en proche la loi de comportement du polycristal en plasticité de transformation.

V.3° - APPLICATION AU CAS DE LA TRANSFORMATION SOUS CONTRAINTES DES ALLIAGES DE Cu-Zn-Al

V.3.1 Introduction

Le choix des alliages de Cu-Zn-Al pour tester le modèle développé au paragraphe (V.2) comporte de multiples avantages :

- ces matériaux ne présentent pas de couplage entre plasticité classique et plasticité de transformation parfaite

- la transformation martensitique sous contrainte s'effectue principalement selon un seul variant

- la variation volumique du à la transformation est négligeable.

On contourne ainsi le problème de la détermination de la matrice H d'interactions entre variants, on simplifie fortement le système d'équations (V.25). Le modèle, qui ne rend compte que de la plasticité de transformation parfaite, peut alors être confronté aux résultats expérimentaux.

On applique le modèle précédent à chaque grain, en considérant que seul le variant le plus favorablement orienté est actif [40] , et que la variation volumique peut être considérée comme négligeable.

Dans ce cas, la relation (V.3) devient pour le grain I :

$$\left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^{I} = R_{ij}^{I}\, g\, dx^{I} \qquad (V.26)$$

Et on obtiendra pour la déformation macroscopique, d'après la relation (V.20) :

$$dE_{ij}^{PT} = \sum_{J} F^{J} R_{ij}^{J}\, g\, dx^{J} \qquad (V.27)$$

Lorsque la variation volumique est négligée la relation (V.4) s'écrit pour un grain I :

$$d\sigma_{ij}^{I} = d\Sigma_{ij} + \alpha\mu\left(dE_{ij}^{PT} - \left(d\varepsilon_{ij}^{PT}\right)^{I}\right) \qquad (V.28)$$

On retrouve là l'expression utilisée en plasticité classique [31], [35, 36],[39].

V.3.2 Ecrouissage dans le cas où un seul variant est actif

On ne considère que l'écrouissage intracristallin, l'écrouissage du aux changements de texture et d'orientation n'est pas pris en compte.

Dans ce cas la matrice d'écrouissage $\mathbf{H}$ se réduit au scalaire H qui a pour valeur la pente $d\tau/dg$ du diagramme (τ, g) obtenu au cours d'un essai de traction sur un monocristal (figure V.2).

V.3.3 Description de la transformation

Dans le cas où un seul variant est actif par grain, les relations (V.22) et (V.23) qui décrivent le comportement d'un variant n du grain I deviennent les relations de comportement du grain et s'écrivent :

* le grain I se transforme, c'est-à-dire $dx^I > o$

si :
$$\begin{cases} R_{ij}^I \, d\sigma_{ij}^I = H g \, dx^I \\ \sigma_{ij}^I \, R_{ij}^I = \sigma_c^o + H g \, x^I \end{cases} \qquad (V.29)$$

* le grain I ne se transforme pas, c'est-à-dire $dx^I = o$

si :
$$\sigma_{ij}^I R_{ij}^I < \sigma_c^o$$

ou bien si :
$$\begin{cases} \sigma_{ij}^I \, R_{ij}^I = \sigma_c^o \\ R_{ij}^I \, d\sigma_{ij}^I < H g \, dx^I \end{cases} \qquad (V.30)$$

si le grain I est déjà totalement transformé on a :

$$x^I = 1$$

V.3.4 Loi de comportement

A partir de la loi d'interaction (V.28) on obtient pour chaque grain actif, l'équation suivante :

$$R_{ij}^{I} d\sigma_{ij}^{I} = H g\, dx^{I} = R_{ij}^{I}\left[d\Sigma_{ij} + \alpha\mu\left(dE_{ij}^{PT} - (d\varepsilon_{ij}^{PT})^{I} \right)\right] \qquad (V.31)$$

en remplaçant dE_{ij}^{PT} et $(d\epsilon_{ij}^{PT})^{I}$ par les expressions données en (V.27) et (V.26) on obtient :

$$H g\, dx^{I} = R_{ij}^{I}\left[d\Sigma_{ij} + \alpha\mu\left(\sum_{J} R_{ij}^{J} g\, dx^{J} - R_{ij}^{I} g\, dx^{I} \right)\right] \qquad (V.32)$$

La relation (III.17)

$$R_{ij}^{I} R_{ij}^{I} = \frac{1}{2}\left(1 + \sin^{2}\alpha\right)$$

permet de simplifier cette expression. De plus la variation de volume étant faible pour les alliages de Cu-Zn-Al, l'angle α est négligeable et la relation (V.32) peut s'écrire :

$$\left(H + \frac{\alpha\mu}{2}\right) dx^{I} - \alpha\mu\, R_{ij}^{I} \sum_{J} R_{ij}^{J}\, dx^{J} = \frac{R_{ij}^{I} d\Sigma_{ij}}{g} \qquad (V.33)$$

Les équations (V.33) constituent un système de n équations linéaires à n inconnues, les inconnues étant les fractions volumiques de martensite formées dans les grains actifs. Il y a autant d'équations de ce type que de grains actifs. Le système est entièrement déterminé et permet de calculer tout les dx^I . Nous pouvons maintenant déterminer de proche en proche la loi de comportement du polycristal pour la plasticité de transformation, en l'absence de variation volumique et pour des transformations s'effectuant selon un seul variant par grain.

V.4° - APPLICATION A LA TRACTION UNIAXIALE

V.4.1 Equations de comportement en traction uniaxiale

Nous allons simplifier encore le problème en considérant le chargement extérieur comme étant une traction uniaxiale.

Le tenseur Σ_{ij} s'écrit : $$\left(\Sigma_{ij}\right) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{33} \end{Vmatrix}$$

La relation (V.33) s'écrit alors :

$$\left(H + \frac{\alpha\mu}{2}\right) g\, dx^I - \alpha\mu R^I_{ij} \sum_J R^J_{ij}\, g\, dx^J = R_{33}\, d\Sigma_{33} \qquad \text{(V.34)}$$

Le terme $\sum_J R^J_{ij}\ g\ dx^I$ représente l'incrément de déformation macroscopique $d\,E^{PT}_{ij}$. Pour un polycristal isotrope, ce tenseur s'écrit en traction uniaxiale.

$$\left(d\,E^{PT}_{ij}\right) = \begin{Vmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} d\,E^{PT}_{33}$$

Lorsque la transformation s'effectue sans variation de volume, la superposition d'une pression hydrostatique quelconque ne perturbe pas le système. Si on exerce une pression hydrostatique égale à :

$$\frac{\alpha\mu}{2} \begin{vmatrix} R_{11}^{I} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}^{I} & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}^{I} \end{vmatrix} dE_{33}^{PT}$$

la relation (V.34) devient alors :

$$\left(H + \frac{\alpha\mu}{2}\right) g\, dx^{I} - \frac{3}{2}\alpha\mu R_{33}^{I} dE_{33}^{PT} = R_{33}^{I} d\Sigma_{33} \qquad (V.35)$$

Le problème est alors considérablement simplifié, car nous n'avons plus besoin dans ce cas pour la résolution numérique de connaître la totalité de la matrice d'orientation R_{ij} mais seulement sa composante R_{33}.

V.4.2 Evaluation du paramètre d'accomodation plastique

Tous les termes de l'équation (V.35) sont connus à l'exception du facteur d'accommodation plastique α.

Ce paramètre dépend de l'état d'avancement de la déformation.

Dans le cas d'un chargement monotone on peut, en plasticité classique, approximer la loi d'intéraction de façon isotrope en adoptant la loi de Hencky pour la description de l'écoulement plastique [31]. Sous une forme particulière liée au critère de Von Mises, cette loi s'écrit ;

$$E_{ij}^{P} = h\,(J_2)\, S_{ij}$$

avec S_{ij} le déviateur des contraintes et J_2 son deuxième invariant. α peut alors être approximé par :

$$\alpha = \left(1 + \mu\, h\,(J_2)\right)^{-1}$$

La transformation martensitique sous contrainte de traction dans les Cu-Zn-Al étant compatible avec les hypothèses faites en plasticité classique nous allons pouvoir prendre pour h (J_2) la même valeur.

Celui-ci dans le cas de la traction uniaxiale a pour expression :

$$h(J_2) = \frac{3}{2}\frac{E^p}{\Sigma} \qquad (V.36)$$

La variation de α s'écrit donc de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{1}{1+\frac{3}{2}\mu\frac{E^{pT}}{\Sigma}} \qquad (V.37)$$

α a pour valeur 1 au début de la transformation. Au fur et à mesure que celle-ci avance et que les possibilités d'accommodation plastique augmente, la valeur de ce paramètre diminue.

Dans un premier temps, dans le but de simplifier la résolution du système (V.35), nous allons imposer à α une valeur comprise entre 0 et 1 et constante durant toute la transformation. Dans un deuxième temps, nous ajusterons la valeur de à l'état de l'écoulement à l'aide de la relation (V.37), la résolution du système (V.35) sera alors plus rigoureuse. Une comparaison de ces deux modes de résolution est effectué au paragraphe V.5.

V.5° RESULTATS NUMERIQUES ET CONFRONTATION AVEC L'EXPERIENCE

V.5.1 Résultats obtenus pour α fixé à priori

Les résultats numériques que nous présentons maintenant ont été obtenus à partir de la résolution du système d'équation (V.35).

Les facteurs d'orientation R_{33} ont été choisi de façon à être répartis régulièrement entre un maximum de 0,50 et un minimum de 0,35.

L'influence du nombre d'orientations prises en compte pour effectuer le calcul est présenté en figure (V.3).

On a ensuite mis en évidence l'influence des différents paramètres intervenant au cours de la détermination de la loi de comportement du polycristal.

La figure (V.4) montre l'influence du déplacement g dans la direction de transformation.

Le rôle du facteur d'écrouissage H du monocristal est mis en évidence sur la figure (V.6) et celui du module élastoplastique $\alpha\mu$ sur la figure (V.7)

V.5.1.1 Influence du nombre d'orientations

Deux difficultés limitent l'exploitation du modèle. D'une part un nombre d'orientations trop faible conduit à une description insatisfaisante du polycristal isotrope, d'autre part les temps de calcul augmentent très rapidement avec le nombre de grain.

La figure (V.3) montre que le résultat varie peu à partir de N = 10. Dans la suite des calculs 17 orientations différentes seront prises en compte.

V.5.1.2 Influence du déplacement g

La valeur de ce déplacement n'a aucune influence sur l'allure des courbes en début de transformation. En revanche il joue un rôle très important sur la valeur limite de la déformation obtenu en plasticité de transformation, comme le montre la figure (V.4).

Si l'on rapporte la valeur du déplacement g à celle de la déformation plastique en fin de transformation on trouve une relation linéaire de rapport 2,33, valeur qui est à rapprocher de la valeur 2,24 déterminée par Sachs en plasticité classique (figure V.5). Cette relation est intéressante car elle permet de prévoir la déformation pseudoélastique que l'on peut obtenir dans le cas d'un polycristal à partir de la déformation intrinsèque associée au changement de phase.

V.5.1.3 Influence de l'écrouissage H du monocristal

La figure (V.6) met en évidence une influence faible de ce paramètre pour les valeurs de H inférieures à 10 daN/mm^2.

Pour le glissement simple, en plasticité classique, les valeurs de H sont de l'ordre de $\mu/1000$, soit ici proche de 4 daN/mm^2. Dans les alliages de Cu-Zn-Al où la variation volumique et faible, on doit se rapprocher de cette valeur. Ceci est du à la prédominance de l'écrouissage intracristallin.

V.5.1.4 Influence du module élastoplastique $\alpha\mu$

C'est le facteur qui a la plus forte influence sur l'allure des courbes comme le montre la figure (V.7)

Pour un module élastoplastique faible nous nous rapprochons du modèle de Sachs où $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}$ et où tous les systèmes sont activés en même temps.

A l'inverse pour de forts modules élastoplastiques les contraintes internes sont très élevées et le durcissement du polycristal est très important.

On remarque que ce module n'a aucune influence sur la valeur de la plasticité de transformation en fin de transformation.

V.5.2 Résultats obtenus avec α variable

Les résultats obtenus en fixant la valeur de α ont montré la grande importance du module élastoplastique $\alpha\mu$ sur l'allure des courbes.

Une résolution plus rigoureuse du système d'équations (V.35) a donc été effectué, en déterminant à chaque instant de la transformation, la valeur de α à l'aide de la relation (V.37).

Cette valeur diminue rapidement, passant de 1 en début de transformation à une valeur palier de 0,2, avant d'augmenter en fin de transformation (figure (V.8)). Cette augmentation tient au fait que les possibilités d'accommodation plastique diminuent en fin de transformation, la plupart des grains étant déjà totalement transformé.

Les différents paramètres intervenant dans le calcul de la déformation ont peu d'influence sur la valeur de α, comme le montre la figure (V.9) pour l'écrouissage H du monocristal.

Les courbes contrainte déformation présentent un début de déformation plus progressif que celles obtenues avec α constant (figure V.10). L'accroissement du module de cisaillement à pour éffet d'augmenter la pente d'écrouissage du polycristal.

V.5.3 Comparaison avcec les résultats expérimentaux

A partir des caractéristiques de monocristaux (figure V.12) obtenus au laboratoire sur un alliage de Cu-Zu-Al (73,7 wt % Cu ; 19 wt % Zn ; 7,3 wt % Al) nous avons calculé les courbes de déformation du polycristal en fixant tout d'abord le coefficient α , puis en le déterminant grâce à la relation (V.37). Nous avons ensuite comparé ces résultats avec les courbes expérimentales du polycristal (figure V.13). Les résultats sont représentés en figure (V.14).

De la même façon, à partir de la courbe expérimentale du polycristal, nous avons déterminé l'évolution du facteur α d'accommodation en plasticité de transformation et nous l'avons comparé avec celle calculée par le modèle (figure V.15).

Les figures (V.14) et (V.15) montrent un très bon accord entre les valeurs calculés pour α variable et les valeurs expérimentales.

V.6° - CONCLUSION

La loi du comportement du polycristal qui a été obtenue par une méthode d'homogénéisation auto-cohérente est en très bon accord avec les données expérimentales obtenues pour des Cu-Zn-Al. Il en est de même du facteur d'accommodation en plasticité de transformation dont l'évolution correspond bien à celle prévue par le modèle.

Cependant l'hypothèse d'un seul variant actif par grain est loin d'être une règle générale et il est nécessaire d'étendre ce modèle au cas de plusieurs variants actifs. Ce problème est actuellement étudié au Laboratoire

Il est également nécessaire d'étendre ce modèle au cas du couplage plasticité de transformation parfaite, plasticité classique (cas des alliages à base de fer). Une première approche est effectué au chapitre VI à partir d'une méthode autocohérente simplifié où nous déterminons la loi de comportement dans le cas particulier où la fraction volumique reste constante (cas des laitons biphasés).

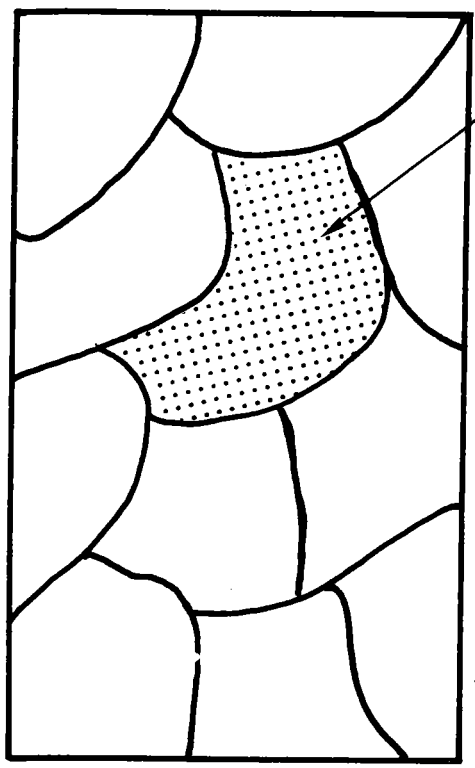


FIGURE V.1 : Transformation d'un polycristal de volume V formé de n grains de volume V^I et de fraction volumique F^I .

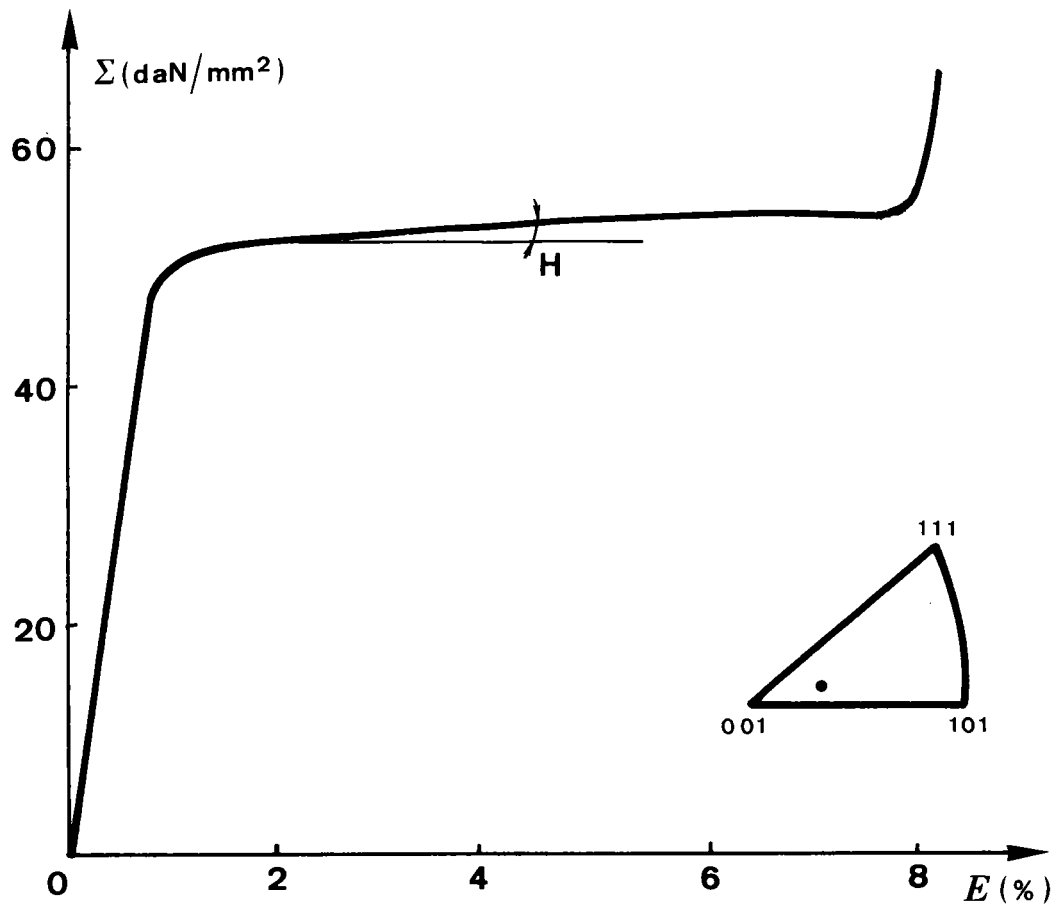


FIGURE V.2 : "Ecrouissage" H d'un monocristal de Cu-Zn-Al en traction uniaxiale,pendant la transformation martensitique.

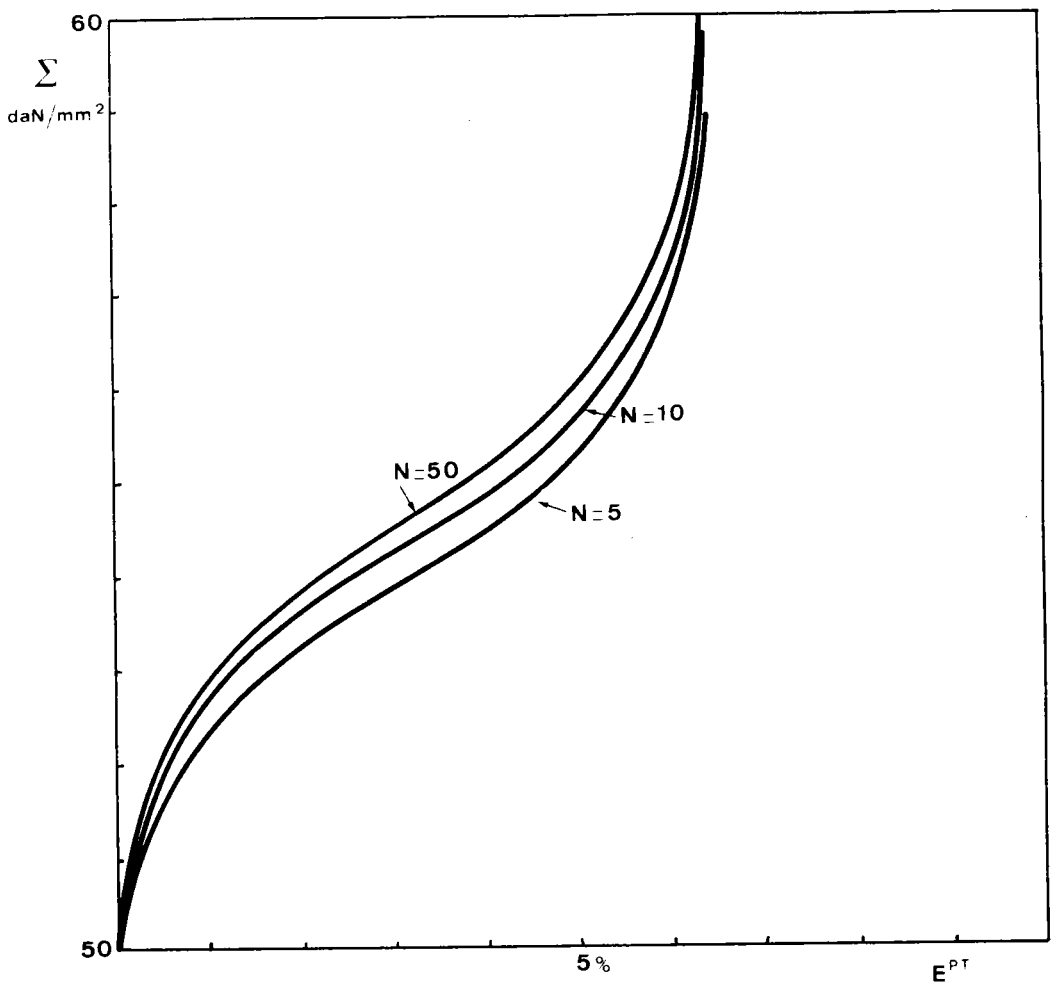


FIGURE V.3 : Influence du nombre d'orientations prises en compte pour déterminer le comportement du polycristal à l'aide de la méthode d'homogénéisation développée au chapitre V. Dix orientations différentes sont nécessaires au minimum pour obtenir une bonne précision.

Valeur des paramétres utilisés pour le calcul :

$\alpha = 0,01$ $\quad\quad$ $\sigma_c^0 = 22,5$ daN/mm^2

$g = 15\%$ $\quad\quad$ $H = 0$

$\mu = 4000$ daN/mm^2

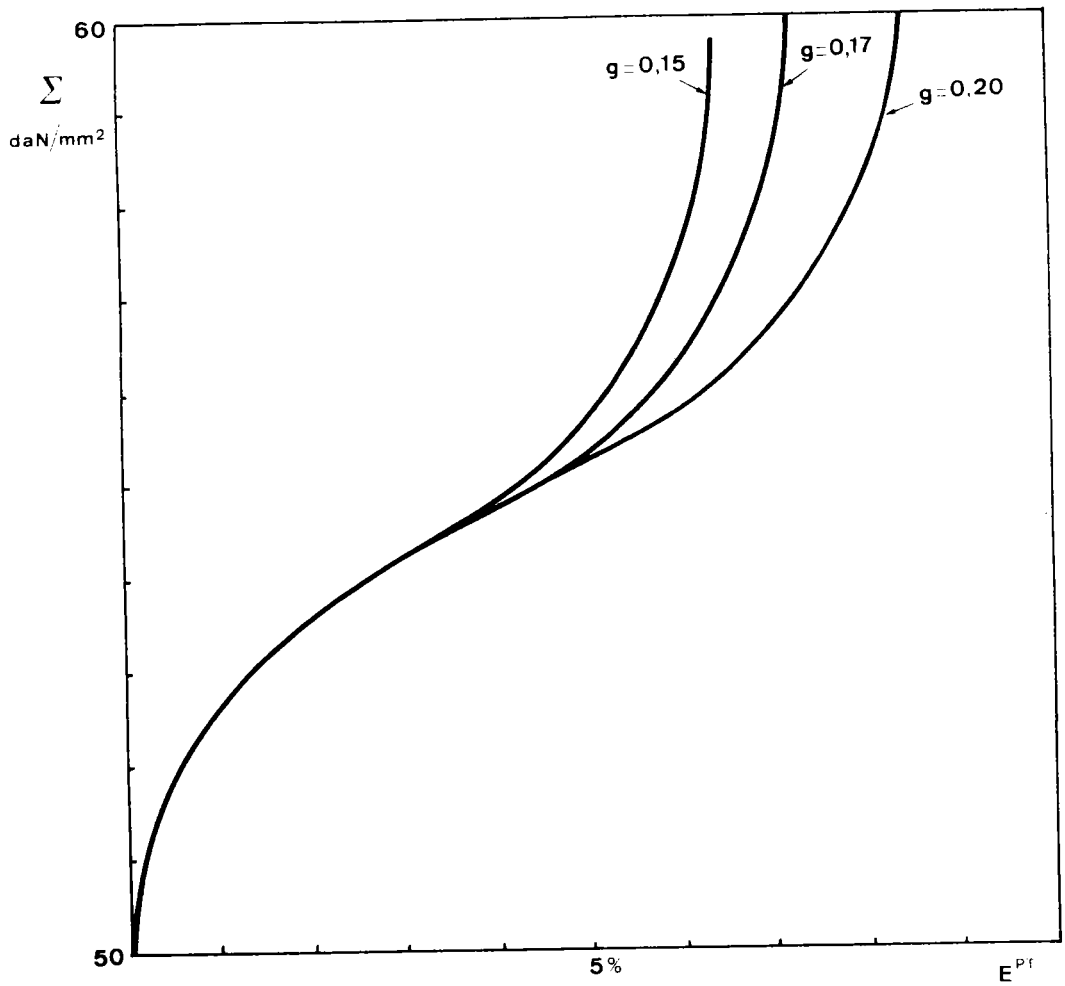


FIGURE V.4 : Influence du déplacement g dans la direction de transformation, sur l'allure des courbes contrainte-déformation d'un polycristal d'alliage Cu-Zn-Al déterminées, pour la traction uniaxiale, à l'aide de la méthode d'homogénéisation développée au chapitre V.

Valeurs utilisées pour la détermination numérique :

$$\begin{cases} \mu = 4000 \text{ daN/mm}^2 \\ \sigma_c^0 = 22,5 \text{ daN/mm}^2 \\ H = 0 \text{ daN/mm}^2 \\ \alpha = 0,01 \end{cases}$$

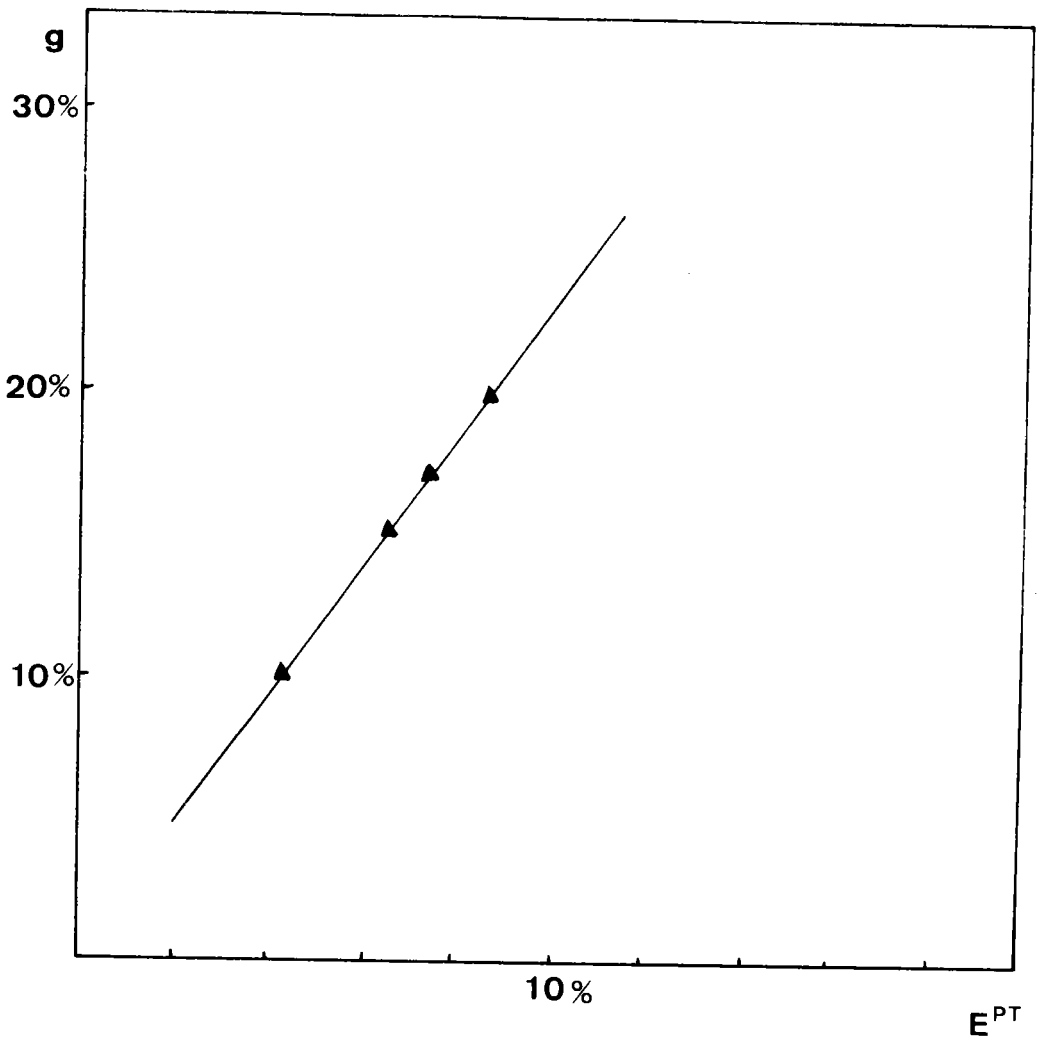


FIGURE V.5 : Relation entre la valeur du déplacement g intrinséque au mécanisme de transformation martensitique et la valeur de la déformation en fin de transformation.

Cette relation a été établie à partir des courbes de la figure V.4.

$$\frac{g}{E^{PT}} = 2,33$$

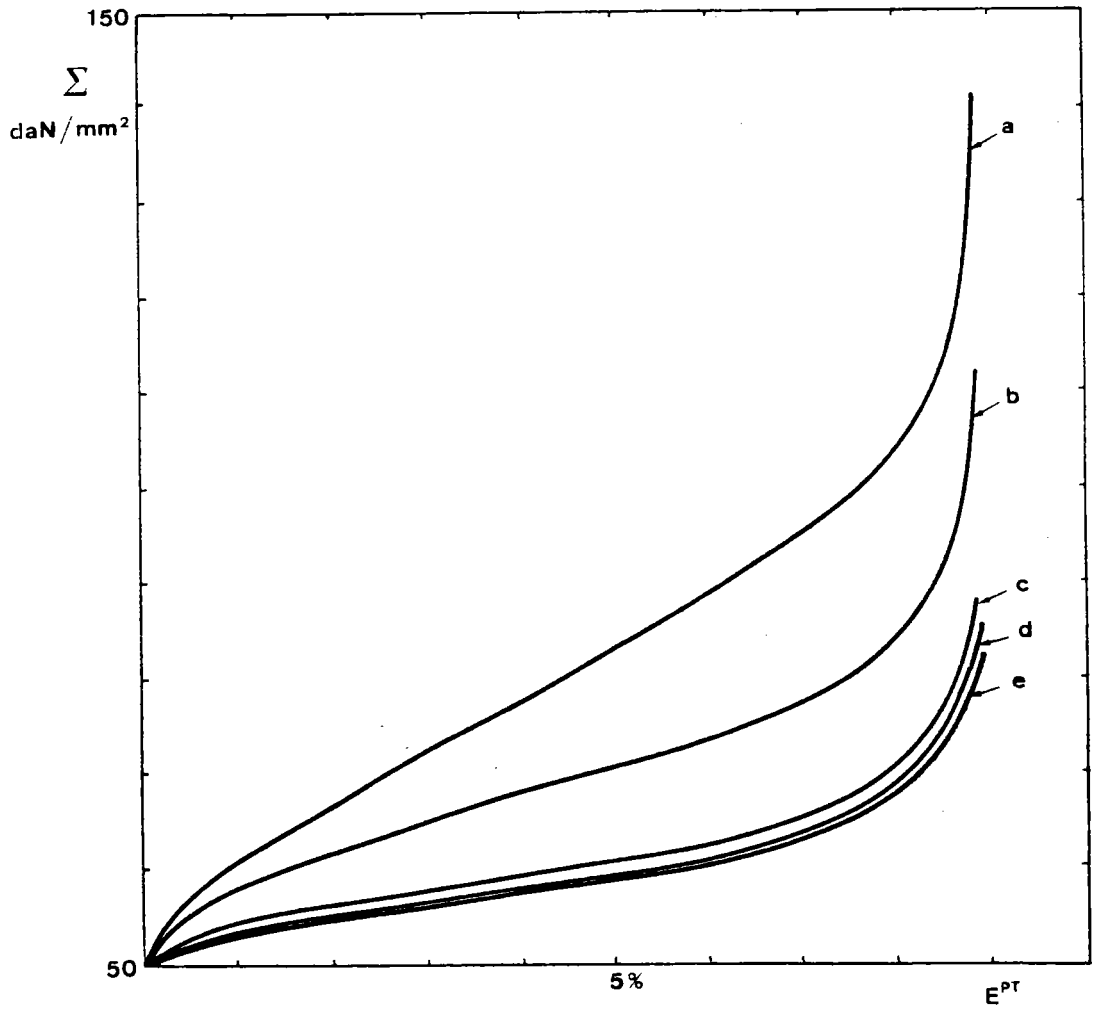


FIGURE V.6 : Influence de l'écrouissage H du monocristal sur l'allure des courbes contrainte-déformation du polycristal.

courbe a : H = 100 daN/mm²
b : H = 50 daN/mm²
c : H = 10 daN/mm²
d : H = 5 daN/mm²
e : H = 0 daN/mm²

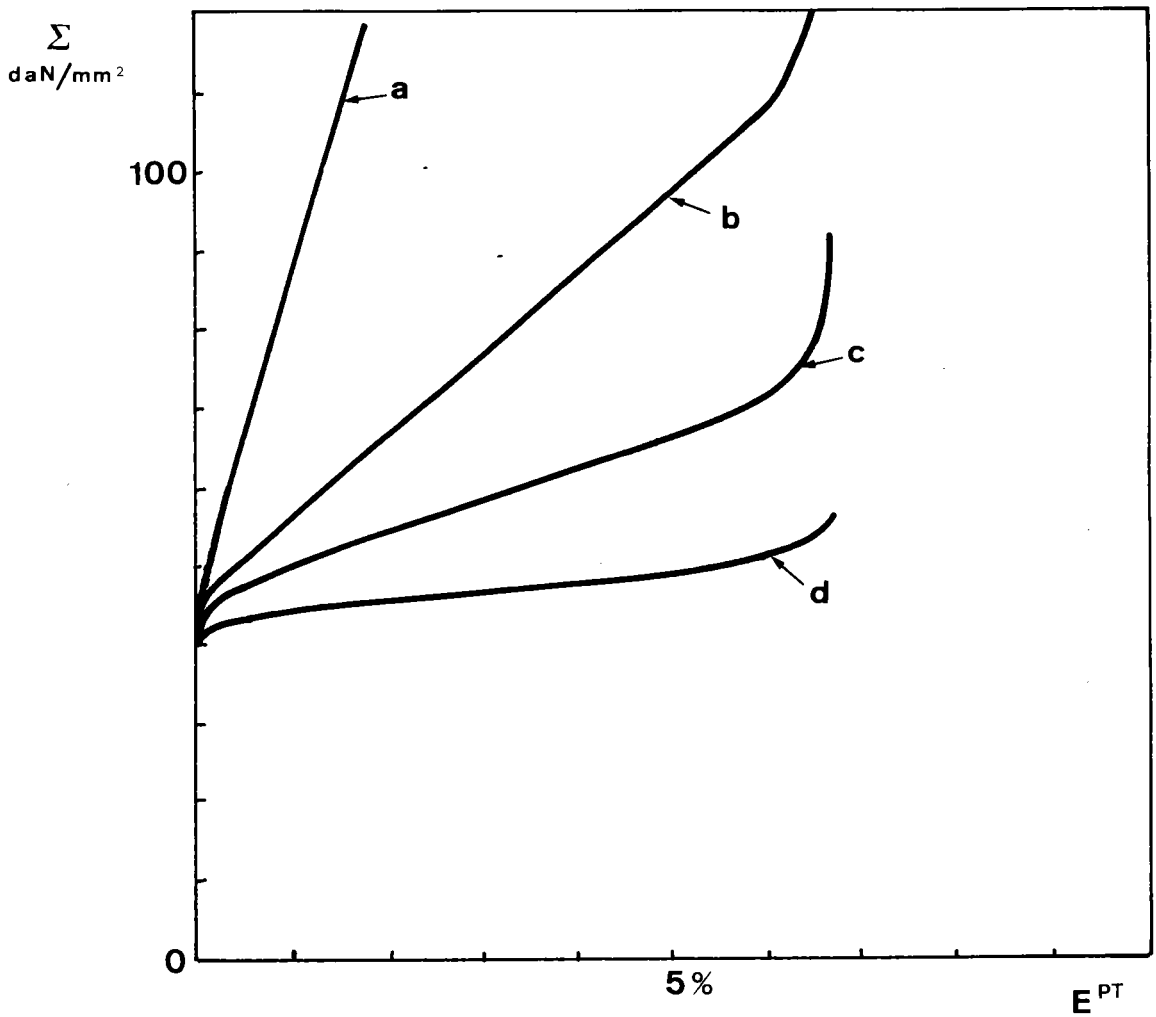


FIGURE V.7 : Influence du module élastoplastique $\alpha\mu$.

courbe a : $\alpha\mu$ = 4000 daN/mm^2
b : $\alpha\mu$ = 1000 daN/mm^2
c : $\alpha\mu$ = 400 daN/mm^2
d : $\alpha\mu$ = 40 daN/mm^2

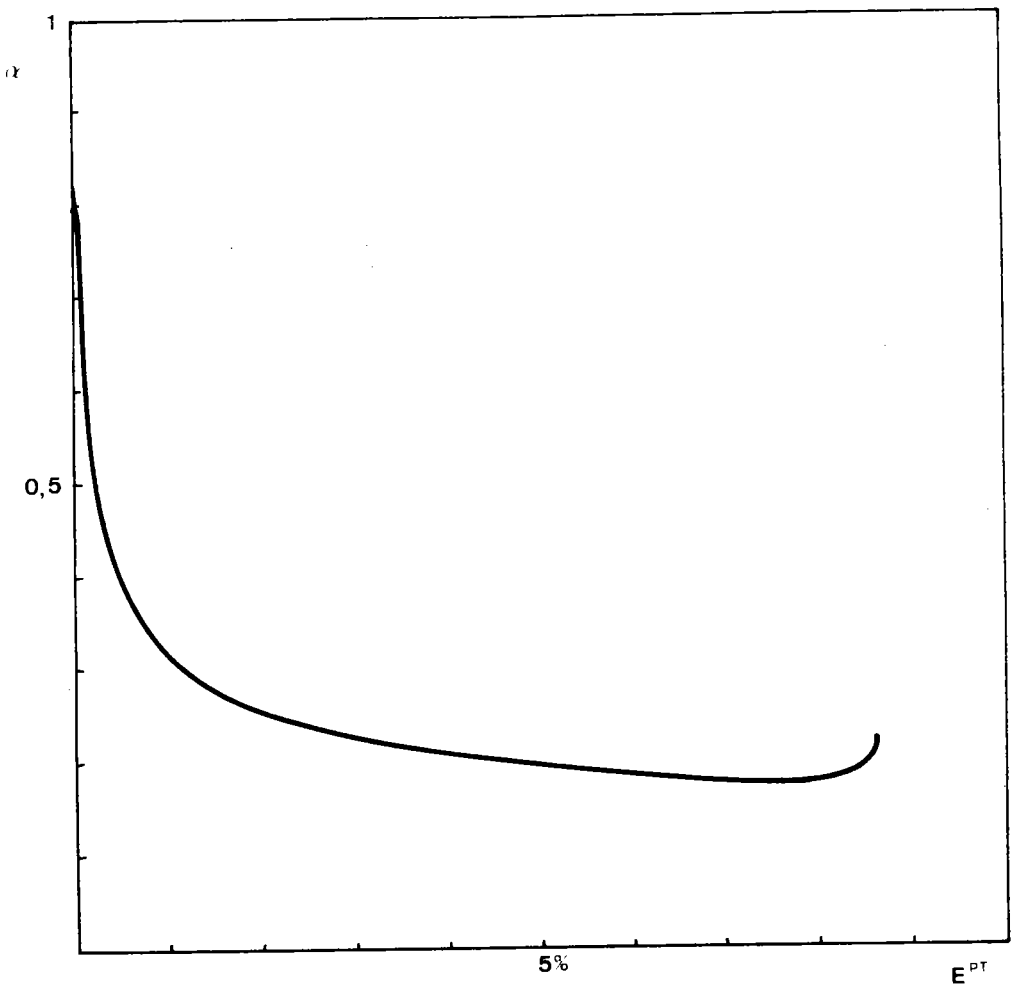


FIGURE V.8 : Evolution du paramètre d'accommodation plastique α en fonction de la déformation en plasticité de transformation.
Evolution calculée à l'aide de la méthode exposée au paragraphe V.4.2.

Valeurs utilisées pour la détermination numérique :

μ = 4000 daN/mm^2
σ_c^0 = 19,65 daN/mm^2
H = 7,42 daN/mm^2
g = 20 %

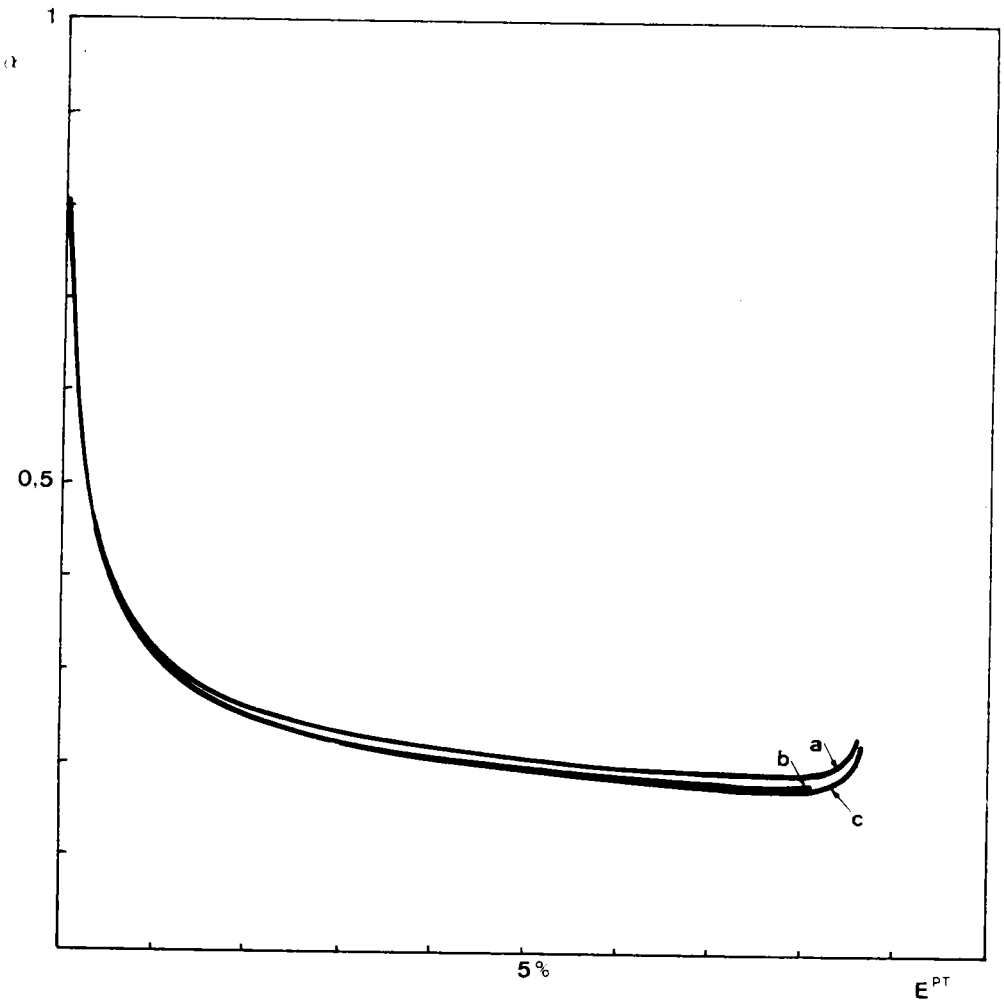


FIGURE V.9 : Influence de l'écrouissage H du monocristal sur l'évolution du paramètre d'accommodation plastique α .

Valeurs de H étudiées :

courbe a : H = 18,65 daN/mm^2
b : H = 7,48 daN/mm^2
c : H = 5,00 daN/mm^2

Valeurs utilisées pour la détermination numérique :

μ = 4000 daN/mm^2
σ_c^0 = 19,65 daN/mm^2
g = 20 %

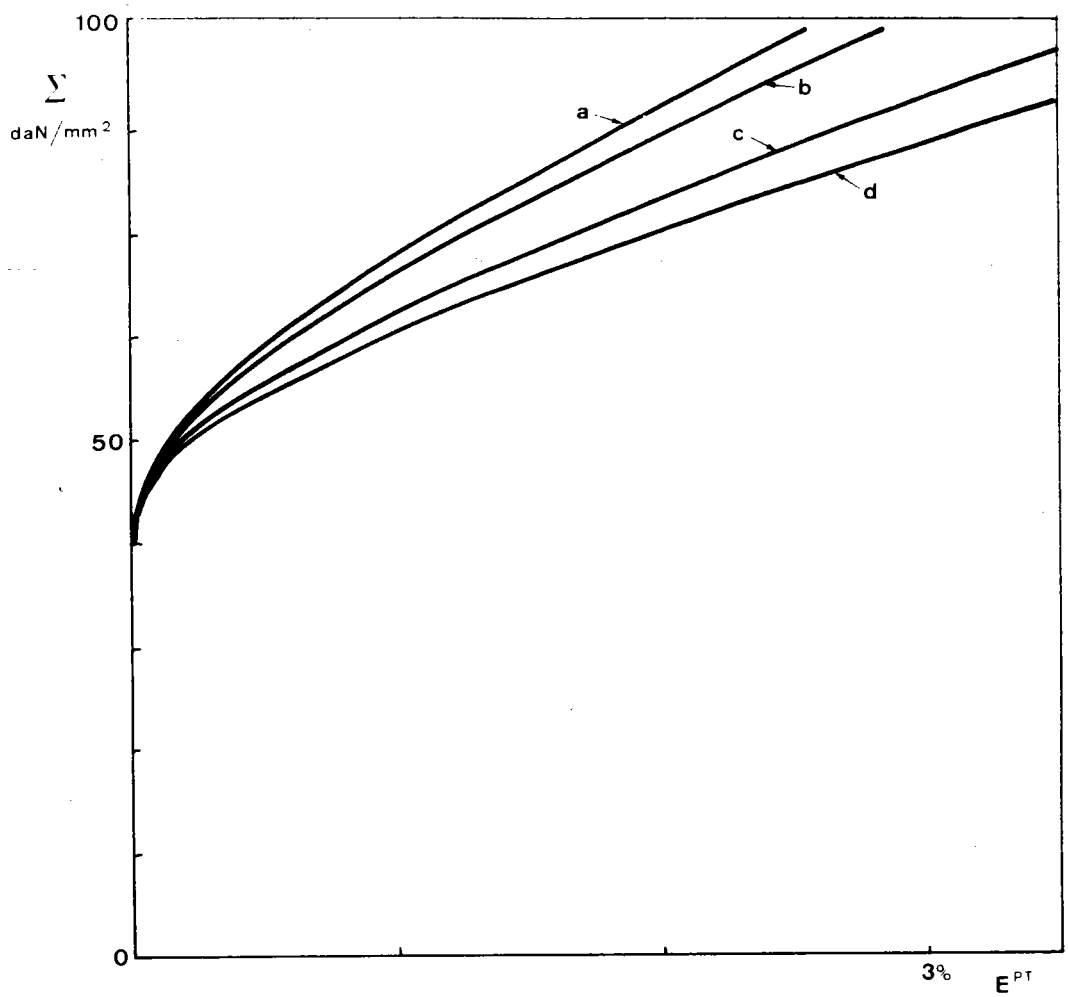


FIGURE V.10 : Influence du module de cisaillement μ sur l'allure des courbes contrainte-déformation d'un polycristal d'alliage Cu-Zn-Al, déterminées, sans fixer α à priori, à l'aide de la méthode d'homogénéisation développée au chapitre V.

Valeurs de μ étudiées :

courbe a : $\mu = 5000$ daN/mm^2
b : $\mu = 4000$ daN/mm^2
c : $\mu = 3000$ daN/mm^2
d : $\mu = 2500$ daN/mm^2

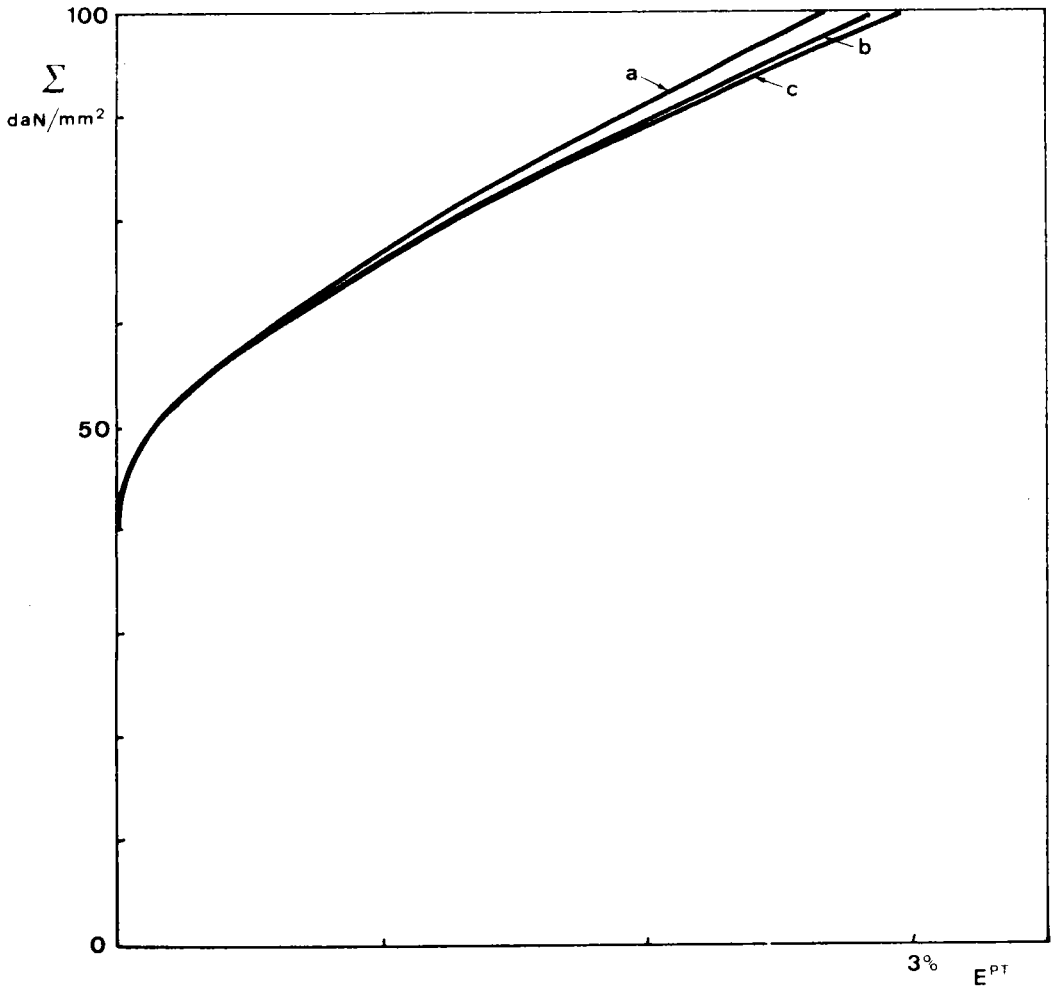


FIGURE V.11 : Influence de l'écrouissage H du mono cristal sur l'allure des courbes contrainte-déformation d'un polycristal d'alliage Cu-Zn-Al, déterminées, sans fixer α à priori, à l'aide de la méthode d'homogénéisation développée au chapitre V.

Valeurs de H étudiées (pour μ =4000 daN/mm^2) :

courbe a : H = 18,65 daN/mm^2
b : H = 7,48 daN/mm^2
c : H = 5,00 daN/mm^2

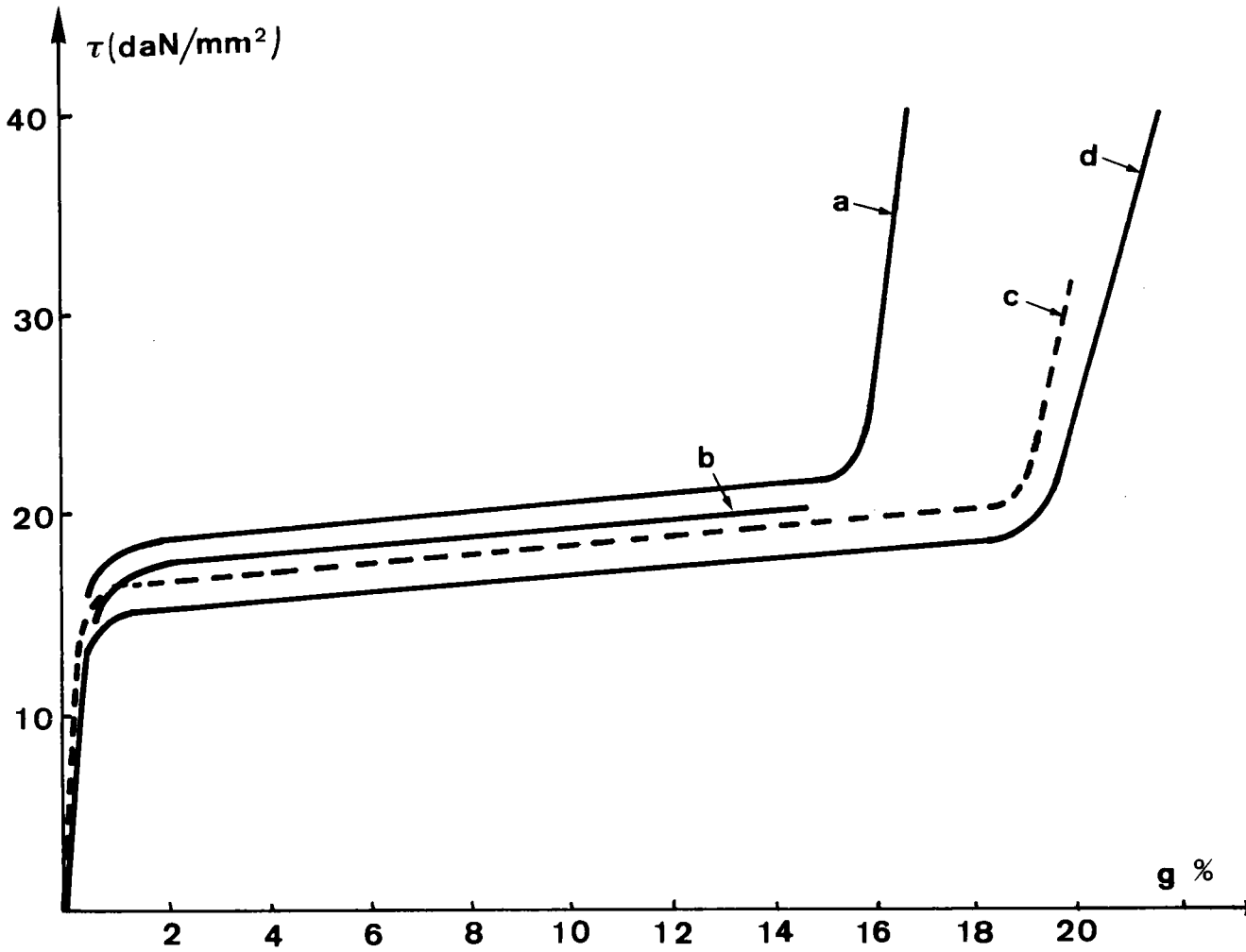


FIGURE V.12 : Courbes de traction résolue pour des monocristaux de Cu-18,4Zn-7,3Al (% massique) selon des orientations cristallographiques differentes [20] .

Pour ces alliages M_s = 213 K .

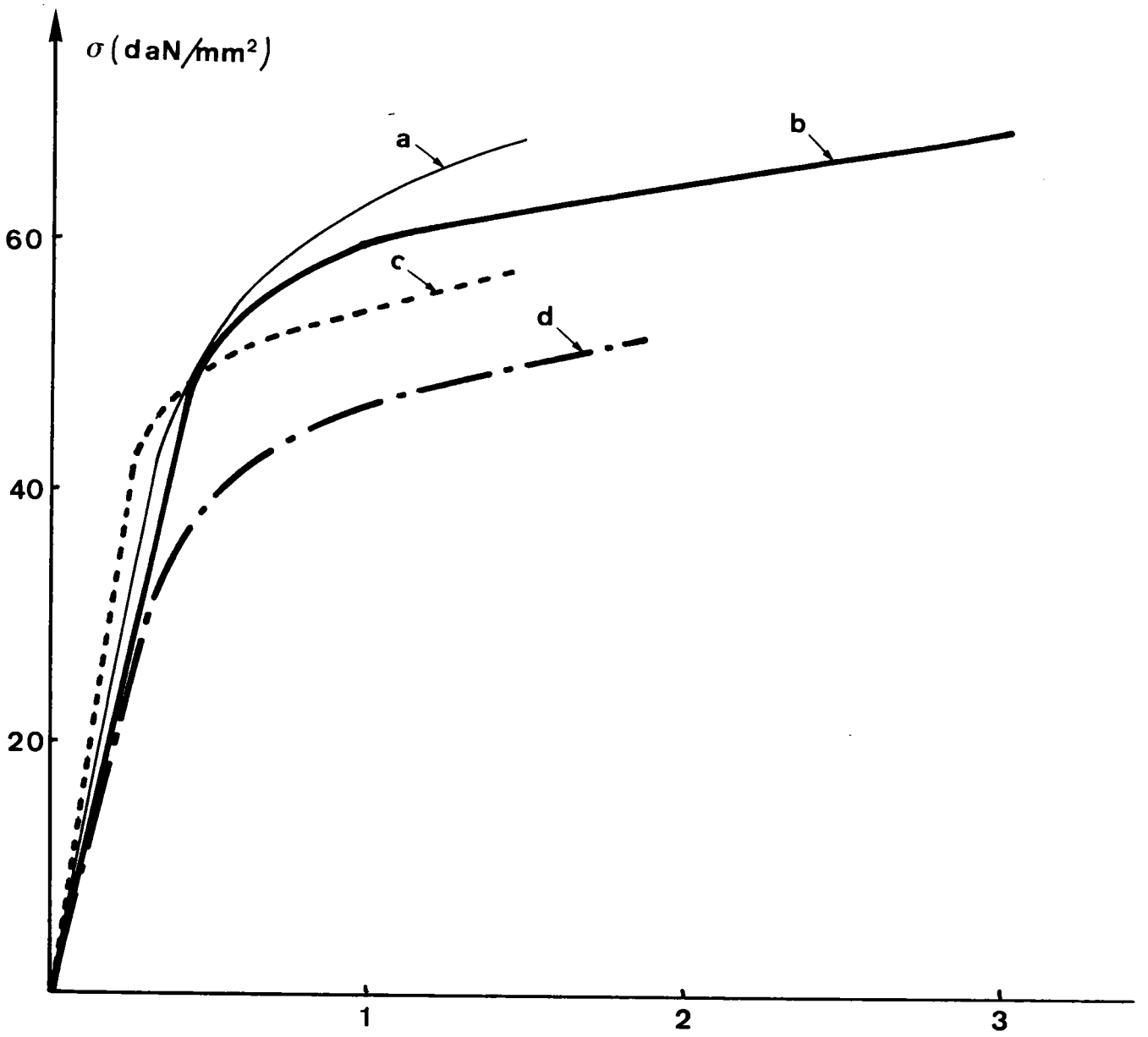


FIGURE V.13 : Courbes de traction obtenues sur des polycristaux de Cu-18,4Zn-7,3Al (% massique) [20] .

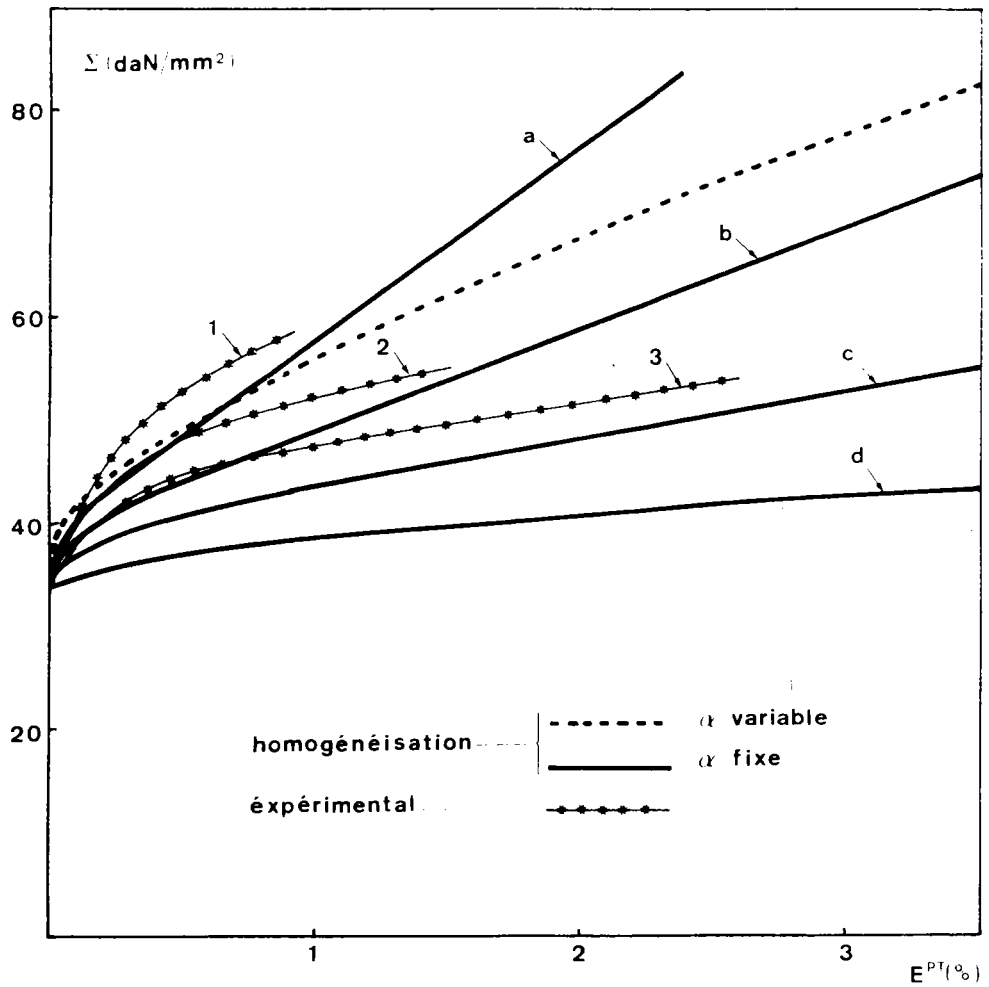


FIGURE V.14 : Comparaison pour la traction uniaxiale des courbes contrainte-déformation calculées, avec la méthode d'homogénéisation développée au chapitre V, avec les courbes expérimentales obtenues sur des polycristaux de Cu-18,4Zn-7,3Al.

Valeurs utilisées pour la détermination numérique :

μ = 3000 daN/mm²

σ_c^0 = 16,8 daN/mm²

H = 18,65 daN/mm²

g = 20 %

courbe a : α = 0,5

b : α = 0,25

c : α = 0,1

d : α = 0,01

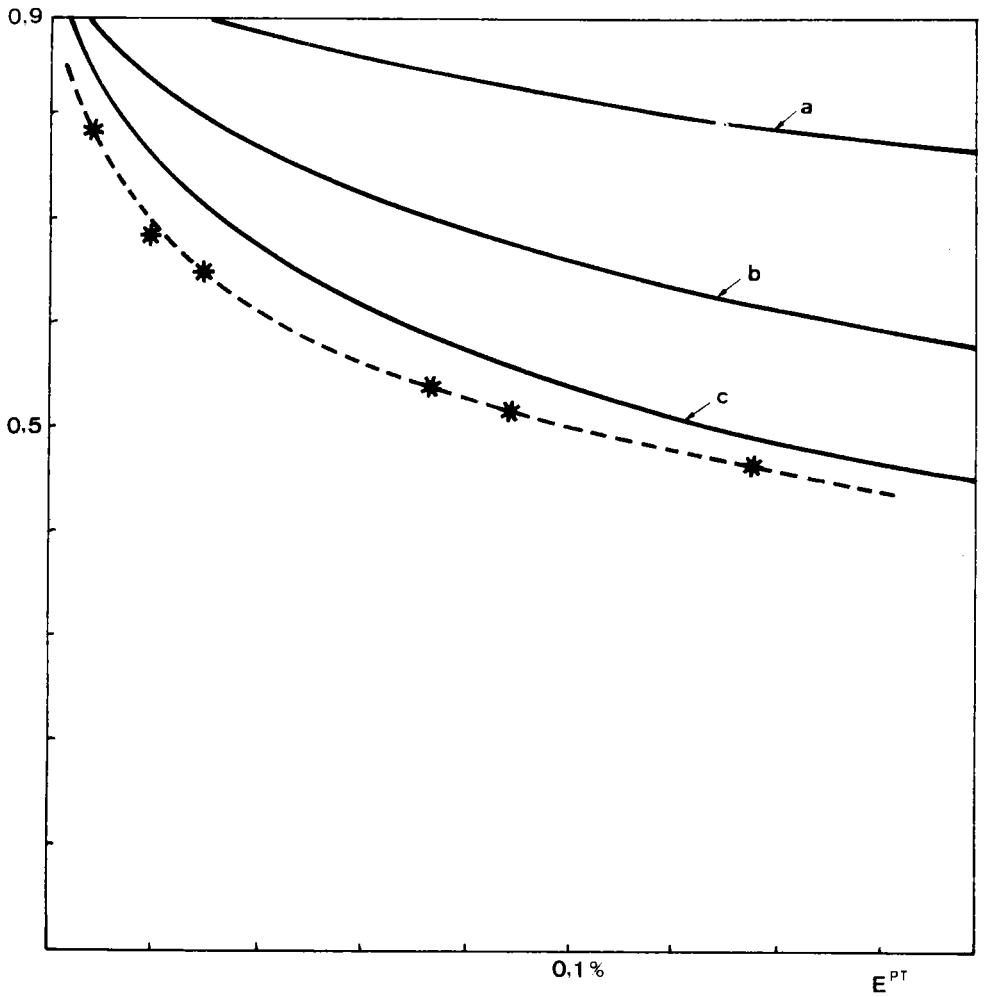


FIGURE V.15 : Evolution du paramètre d'accommodation plastique α lors de la transformation martensitique d'un polycristal de Cu-Zn-Al.

✱ Valeurs expérimentales obtenues à partir de la courbe b de la figure V.13.

——— Evolution calculée à l'aide de la méthode exposée au paragraphe V.4.2.

Valeurs utilisées pour la détermination numérique :

σ_c^0 = 16,8 daN/mm

H = 0 daN/mm

g = 17 %

courbe a : α = 1000 daN/mm^2

b : α = 4392 daN/mm^2

c : α = 10000 daN/mm^2

C H A P I T R E VI

Le polycristal biphasé.

Application à la conception d'un

matériau "bimodule"

VI.1° - INTRODUCTION

Dans les chapitres IV et V nous avons, par deux approches différentes, déterminé les lois de comportement du polycristal en plasticité de transformation parfaite.

Nous avons vu que pour de nombreux matériaux, la plasticité de transformation n'est pas parfaite mais couplée à de la plasticité classique (glissement ou maclage) dans l'une des deux phases. Pour obtenir la loi de comportement globale du polycristal, il est donc nécessaire de tenir compte de ce couplage. Une première approche de cette question est abordée dans ce chapitre.

L'une des principales difficultés de la résolution de ce problème réside dans la détermination des intéractions entre ces deux modes de déformation que sont le glissement plastique et la transformation martensitique. Celles-ci peuvent être fort complexe. Ainsi la plastification de la phase mère entraine des modifications importantes pour les conditions d'apparition et de stabilité de la martensite [41] .

De même la déformation résultant du couplage est parfois plus importante que celle que l'on pourrait attendre d'une simple addition des deux effets [18] .

Nous allons dans ce chapitre, étudier une configuration particulière où l'on peut déterminer facilement l'intéraction entre transformation de phase et plasticité classique.

Il s'agit des alliages biphasés, dont l'une des phases se déforme en plasticité classique et l'autre en plasticité de transformation parfaite. Les phases α et β des alliages de Cu-Zn-Al présentent ces propriétés.

Dans une telle configuration, l'intéraction résulte de l'effet des seules contraintes internes engendrées par les hétérogénéités de comportement des deux phases. Nous allons déterminer ces contraintes internes à l'aide d'une méthode d'homogénéïsation, en utilisant le shéma auto-cohérent simplifié décrit par Berveiller et Zaoui [42].

A partir de la description du rôle des contraintes internes dans ce type de matériau, nous allons mettre en évidence un phénomène analogue à l'effet Bauschinger en plasticité classique pour le polycristal : l'effet "bimodule" ; c'est-à-dire un comportement qui présente des modules d'élasticité" différents en traction et en compression.

Nous allons ensuite déterminer au paragraphe VI.4. les conditions nécessaires à l'apparition d'un tel effet et l'influence des caractéristiques du matériau sur celui-ci.

VI.2° - MODELISATION A L'AIDE D'UNE METHODE AUTO-COHERENTE SIMPLIFIEE

Différentes études en plasticité classique ont montré qu'en première approximation, il était possible de résoudre le problème du comportement du polycristal biphasé, avec une bonne précision, à l'aide d'un schéma auto-cohérent simplifié. Ce modèle s'est avéré satisfaisant en plasticité classique pour décrire :

- l'effet Bauschinger.
- l'état transitoire où une phase est en écoulement plastique alors que l'autre à un comportement élastique.
- et pour étudier l'endommagement des matériaux, en estimant la fraction volumique de "vide" (trous, fissures, cavités) compatible avec les mesures expérimentales du module d'Young et du coefficient de Poisson.

Une démarche identique est effectuée ici dans le cas où une phase (la phase β) a un comportement pseudoélastique (plasticité de transformation parfaite) et ou l'autre (la phase α) a un comportement élastoplastique.

On détermine le comportement du polycristal pour un chargement mécanique en traction uniaxiale et on considère la température comme une constante. On néglige de même la variation volumique intrinsèque à la transformation martensitique. Un tel effet ne peut être pris en compte par le modèle simplifié décrit dans ce chapitre.

Cette restriction est tout à fait justifiée pour les alliages de Cu-Zn-Al, alliages où la variation volumique est très faible.

Le modèle auto-cohérent simplifié considère chaque phases comme une entité continue et isotrope. Chaque phase est successivement considérée comme inclusion dans une matrice infinie dont le comportement est celui recherché [42].

En traction uniaxiale on peut décrire le comportement de chacune des deux phases par les relations suivantes :

$$\begin{cases} d\sigma_\alpha = 3\mu_\alpha(\varepsilon_\alpha)\, d\varepsilon_\alpha \\ d\sigma_\beta = 3\mu_\beta(\varepsilon_\beta)\, d\varepsilon_\beta \end{cases} \qquad \text{(VI.1)}$$

où μ_α et μ_β représentent les "modules tangents".

On suppose que le biphasé a le même comportement isotrope que l'on peut écrire sous la forme :

$$d\Sigma = 3\mu(E)\, dE \qquad \text{(IV.2)}$$

En considérant chaque phases comme une inclusion sphérique incompressible à comportement isotrope dans une matrice homogène ayant le comportement recherché, on peut utiliser la solution d'Eshelby au problème de l'inclusion [24] et écrire :

$$d\varepsilon_\alpha = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_\alpha} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$d\varepsilon_\beta = \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_\beta} \qquad \text{(IV.4)}$$

En notant C_α et C_β les fractions volumiques des deux phases on obtient :

$$dE = c_\alpha \, d\varepsilon_\alpha + c_\beta \, d\varepsilon_\beta \qquad \text{(VI.5)}$$

$$d\Sigma = c_\alpha \, d\sigma_\alpha + c_\beta \, d\sigma_\beta \qquad \text{(VI.6)}$$

avec :

$$c_\alpha + c_\beta = 1 \qquad \text{(VI.7)}$$

En remplaçant $d\epsilon_\alpha$ et $d\epsilon_\beta$ par leurs expressions dans (VI.3) et (VI.4)
on obtient pour la relation (VI.5) :

$$5\mu \left[\frac{c_\alpha}{3\mu + 2\mu_\alpha} + \frac{c_\beta}{3\mu + 2\mu_\beta} \right] = 1$$

ce qui peut s'écrire encore en utilisant (VI.7) :

$$\mu^2 + 2\mu \, \frac{5 c_\alpha (\mu_\beta - \mu_\alpha) + (2\mu_\alpha - 3\mu_\beta)}{6} - \frac{2}{3} \mu_\alpha \mu_\beta = 0 \qquad \text{(VI.8)}$$

La relation (VI.8) permet à partir de la connaissance de μ_α et μ_β de déterminer la valeur de μ (racine positive de VI.8).
Si on remplace dans l'équation (VI.1) $d\epsilon_\alpha$ par sa valeur dans la relation (VI.3) on obtient la relation suivante :

$$d\sigma_\alpha = 3\mu_\alpha \, \frac{5\mu}{3\mu + 2\mu_\alpha} \, dE$$

relation qui combinée avec l'expression (VI.2) donne

$$d\sigma_\alpha = \frac{5\mu_\alpha}{3\mu + 2\mu_\alpha} d\Sigma \qquad (VI.9)$$

On obtient de la même façon une relation similaire pour la phase β

$$d\sigma_\beta = \frac{5\mu_\beta}{3\mu + 2\mu_\beta} d\Sigma \qquad (VI.10)$$

A l'aide de ces relations on peut déterminer, de proche en proche, le comportement du biphasé tout en connaissant le niveau de contraintes internes dans les deux phases.

Ainsi le calcul de μ à l'aide de la relation (VI.8) permet en fixant $d\Sigma$ de déterminer les accroissements de contraintes et de déformations dans les deux phases ainsi que l'accroissement de déformation macroscopique. Et à partir de la connaissance du niveau de contraintes internes σ_α et σ_β dans les deux phases on peut déterminer les modules μ_α et μ_β et ainsi déterminer μ .

VI.3° - CARACTERISATION DU BIMODULE

Le matériau biphasé se caractérise par un niveau de contraintes internes élevé du à la différence de comportement des deux phases. Ceci a des répercussions sur le comportement macroscopique du polycristal.

Un des premiers effets dû à cette hétérogénéïté de comportement est l'apparition sur une courbe de traction d'une zone intermédiaire comprise entre la partie où le matériau a un comportment élastique et la partie où les deux phases sont en écoulement plastique (figure VI.1).

Dans cette partie intermédiaire une phase est déjà en écoulement plastique alors que la seconde a encore un comportement élastique.

Un deuxième effet, plus difficile à mettre en évidence expérimentalement, l'effet "Bimodule", ne se produit que pour un état particulier de précontrainte du matériau.

Après un premier chargement en traction uniaxiale qui plastifie la phase α et introduit ainsi des contraintes internes dans le matériau, lors de la décharge, la phase α est élastique alors que la phase β doit d'abord revenir à l'état austénitique, avant d'avoir un comportement élastique.

La phase β aura un comportement élastique quand la contrainte interne dans cette phase sera inférieure à σ_f^A (figure VI.2).

Le matériau présente un effet "bimodule" quand l'état de contrainte interne sera tel que la contrainte σ_f^A dans la phase β sera atteinte pour un niveau de contrainte extérieur appliquée nul.

Dans cet état, suivant le signe de la sollicitation extérieure qui lui est appliquée, le comportement macroscopique du polycristal sera différent :

- en traction la phase pseudoélastique possède un "module" faible due à la transformation martensitique. La phase élastoplastique est dans le domaine élastique.
- en compression les deux phases sont dans le domaine élastique

Le module effectif macroscopique sera donc plus élevé en compression qu'en traction (figure VI.2.c). C'est cette caractéristique que nous appelons l'effet "Bimodule".

Nous allons dans la suite de ce chapitre à l'aide du modèle auto-cohérant simplifié décrit au paragraphe (VI.2) modéliser ce phénomène et discuter des conditions d'apparition de l'effet "bimodule".

VI.4° - CONDITIONS D'OBTENTION DU BIMODULE

Le modèle décrit au paragraphe précédent a la particularité de donner la valeur de la contrainte interne dans chaque phases, correspondant à un chargement donné. Le modèle considére chaque phases comme continues et isotropes et il suppose que la contrainte est homogène à l'intérieur de chaque phases. On peut donc déterminer les conditions d'existence du bimodule à partir de l'allure de la courbe contrainte déformation du polycristal, de la connaissance des lois de comportement des deux phases et des relations obtenues au paragraphe (VI.2).

Pour simplifier la discussion on suppose que les lois de comportement des deux phases sont linéaires par morceaux et que les constantes d'élasticité sont les mêmes dans les deux phases.

Deux cas peuvent se présenter : soit la phase α s'écoule plastiquement pour des niveaux de contrainte inférieures à ceux nécessaire pour transformer la phase β , soit celle-ci à un seuil de transformation inférieur à la limite d'élasticité de la phase α .

On note σ_α^P la limite d'élasticité de la phase α , σ_β^M le seuil de transformation de la phase β et Δ la différence entre ces deux valeurs de contrainte.

$$\Delta = \sigma_\beta^M - \sigma_\alpha^P \qquad \text{(VI.11)}$$

On étudie tout d'abord le cas où Δ est positif, dans ce cas nous obtenons les courbes représentées à la figure (IV.3) pour le polycristal et les deux phases.

Six domaines peuvent être distingués sur la courbe du polycristal (figure VI.3.a).

- un premier domaine OA où les deux phases sont élastiques. En considérant que le comportement des deux phases est linéaires par morceaux et que les constantes d'élasticité dans les deux phases sont les mêmes, les relations (VI.9) et (VI.10) montrent que le module du biphasé est alors le même que celui des deux phases. On note μ_{el} le module du matériau dans le domaine élastique.

- un domaine AB où la phase β reste élastique mais où la phase α s'écoule plastiquement. Si on note μ_p le module tangent de la phase α pour l'écoulement plastique et μ_A celui du polycristal en AB on obtient à partir des relations (VI.9) et (VI.10) :

$$d\sigma_\alpha = \frac{5\mu_p}{3\mu_A + 2\mu_p}\, d\Sigma \quad ; \quad d\sigma_\beta = \frac{5\mu_{el}}{3\mu_A + 2\mu_{el}}\, d\Sigma$$

on pose alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} A2 = \dfrac{5\mu_p}{3\mu_A + 2\mu_p} \\ \\ B2 = \dfrac{5\mu_{el}}{3\mu_A + 2\mu_{el}} \end{array} \right. \qquad \text{(VI.12)}$$

- un domaine BC, où les deux phases sont en écoulement plastique, et où on note μ_{ps} le module de la phase β, et μ_B le module macroscopique, et Σ_{max} la valeur de la contrainte macroscopique au point C.

A partir des relations (VI.9) et (VI.10) on défini A3 et B3 comme au stade précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A3 = \dfrac{5\mu_p}{3\mu_c + 2\mu_p} \\ \\ B3 = \dfrac{5\mu_{ps}}{3\mu_c + 2\mu_{ps}} \end{array} \right. \qquad \text{(VI.13)}$$

- Dans le domaine CD les deux phases ont un comportement élastique (en supposant que la phase β a un comportement identique en CD et en OB). Le comportement macroscopique et celui des deux phases sont alors identiques comme dans le domaine OA.

On note H la valeur $\Sigma_C - \Sigma_D$, caractéristique de l'hystéresis de la transformation de phase.

- Dans la zone DE, alors que la phase α est dans le domaine élastique, la phase β subit la transformation inverse Martensite ⟶ Austénite. On défini les coefficients A5 et B5 en notant μ_D le module macroscopique dans cette zone.

$$\begin{cases} A5 = \dfrac{5\mu_{el}}{3\mu_D + 2\mu_{el}} \\ \\ B5 = \dfrac{5\mu_{ps}}{3\mu_D + 2\mu_{ps}} \end{cases} \qquad \text{(VI.14)}$$

- Dans la dernière zone, EF, les deux phases ont à nouveau un comportement élastique et cela jusqu'au point F où la phase α s'écoule plastiquement. (Pour simplifier cette étude on supposera qu'il n'y a pas d'effet Bauschinger dans la phase α).

A partir de cette description schématique, on peut maintenant rechercher les conditions d'existence du bimodule et décrire l'influence des différents paramètres qui interviennent dans sa détermination.

La première condition est l'existence de la zone EF. En effet, si lors d'une décharge, le niveau de contraintes internes dans le matériau est tel que la phase α s'écoule plastiquement en compression, alors que la phase β n'est pas encore redevenu totalement austénitique, il ne peut alors exister de bimodule.

Cette condition revient à déterminer l'existence d'un point E' tel que simultanément la phase α se plastifie et la phase β est entièrement retransformée en austénite.

Une telle condition s'écrit :

$$\Sigma_{OE'} = \Sigma_{max} - H - \Sigma_{DE'} \qquad \text{(VI.15)}$$

en utilisant les relations (VI.9) et (VI.14) on obtient :

$$\Sigma_{DE'} = \frac{1}{B5}\,\sigma_{\beta}^{DE'}$$

La condition d'existence de E' s'exprime dans la phase β par l'égalité entre les contraintes $\sigma_{\beta}^{DE'}$ et σ_{β}^{BC}.

En utilisant la relation (VI.12) on peut donc écrire :

$$\Sigma_{DE'} = \frac{B3}{B5}\,\Sigma_{BC} \qquad \text{(VI.16)}$$

Σ_{BC} peut s'écrire de la façon suivante :

$$\Sigma_{BC} = \Sigma'_{max} - \Sigma_{OA} - \Sigma_{AB}$$

avec :
$$\begin{cases} \Sigma_{OA} = \sigma_{\alpha}^{p} \\ \Sigma_{AB} = \dfrac{\Delta}{B2} \end{cases}$$

donc :

$$\Sigma_{BC} = \Sigma'_{max} - \sigma_{\alpha}^{p} - \frac{\Delta}{B2} \qquad \text{(VI.17)}$$

et la relation (VI.15) s'écrit alors :

$$\Sigma_{OE'} = \Sigma'_{max} - H - \frac{B3}{B5}\left(\Sigma_{max} - \sigma_{\alpha}^{p} - \frac{\Delta}{B2}\right) \qquad \text{(VI.18)}$$

On détermine maintenant la valeur de Σ'_{max} en utilisant le fait que la phase α doit se plastifier, sous une contrainte de compression, en E' (en supposant qu'il n'y a pas d'effet Bauschinger). Cela se traduit par la relation suivante :

$$\sigma_{\alpha}^{CD} + \sigma_{\alpha}^{DE'} = 2\left(\sigma_{\alpha}^{OA} + \sigma_{\alpha}^{AB} + \sigma_{\alpha}^{BC}\right) \qquad \text{(VI.19)}$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^{CD} = H \\ \sigma_\alpha^{OA} = \sigma_\alpha^{p} \\ \sigma_\alpha^{BC} = A3\,\Sigma_{BC} \quad \text{(d'après la relation VI.13)} \\ \sigma_\alpha^{DE'} = A5\,\Sigma_{DE'} \quad \text{(d'après la relation VI.14)} \end{cases}$$

(VI.19) s'écrit donc, en remplaçant $\Sigma_{DE'}$ et Σ_{BC} par leurs expressions dans les relations (VI.16) et (VI.17) :

$$H + A5\,\frac{B3}{B5}\left(\Sigma'_{max} - \sigma_\alpha^{p} - \frac{\Delta}{B2}\right) = 2\left(H + \sigma_\alpha^{p} + A3\left(\Sigma'_{max} - \sigma_\alpha^{p} - \frac{\Delta}{B2}\right)\right) \quad \text{(VI.20)}$$

soit la valeur de Σ'_{max} suivante :

$$\Sigma'_{max} = \frac{2\sigma_\alpha^{p} + H + \left(\sigma_\alpha^{p} + \frac{\Delta}{B2}\right)\left(\frac{B3}{B5} - 2A3\right)}{A5\,\frac{B3}{B5} - 2A3} \quad \text{(VI.21)}$$

Nous avons existence du point E' si Σ'_{max} existe, c'est-à-dire si la valeur calculée en (VI.21) est positive et appartient à la partie BC de la courbe macroscopique, c'est-à-dire si :

$$\Sigma'_{max} \geqslant \sigma_\alpha^{p} + \frac{\Delta}{B2} \quad \text{(VI.22)}$$

Σ'_{max} est fonction :

- de la différence entre les deux contraintes seuils (Δ).
- du seuil de plasticité de la phase α (σ_α^P).
- de l'importance de l'hystéresis de la transformation de la phase $\beta(H)$.
- des modules tangents des deux phases ($\mu_p, \mu_{ps}, \mu_{el}$).
- de la composition du biphasé (C_α , C_β)

Dans le cas où Σ'_{max} est défini, nous avons la valeur suivante pour la contrainte macroscopique en ce point :

$$\Sigma_{OE'} = \left(1 - \frac{B3}{B5}\right)\Sigma'_{max} - H + \frac{B3}{B5}\left(\sigma_\alpha^P + \frac{\Delta}{B2}\right) \qquad (VI.23)$$

La déformation en ce point s'exprime par :

$$E_{OE'} = E'_{max} - \frac{H}{3\mu_{el}} - \frac{\Sigma_{DE'}}{3\mu_E}$$

avec :

$$E'_{max} = \frac{\sigma_\alpha^P}{3\mu_{el}} + \frac{1}{3\mu_B}\frac{\Delta}{B2} + \frac{\Sigma_{BC}}{3\mu_C}$$

donc d'après les relations (VI.16) et (VI.17) on obtient :

$$E_{OE'} = \frac{1}{3}\left[\frac{\sigma_\alpha^P - H}{\mu_{el}} + \frac{1}{\mu_B}\frac{\Delta}{B2} + \left(\frac{1}{\mu_C} - \frac{1}{\mu_E}\frac{B3}{B5}\right)\left(\Sigma'_{max} - \sigma_\alpha^P - \frac{\Delta}{B2}\right)\right] \qquad (VI.24)$$

A partir de (VI.21), (VI.23) et (VI.24) on peut, en fonction des paramètres définis ci-dessus, tracer dans le plan (Σ , E) la courbe caractéristique du point E'.

Cette courbe délimite deux demi-plan.

Dans l'un, la phase α se plastifie avant que la phase β redevienne totalement austénitique. Dans l'autre, la zone EF existe réalisant ainsi la première condition d'existence du "bimodule". (figure VI.4)

La deuxième condition est la possibilité d'obtenir un état de contrainte interne tel que le point de fonctionnement E soit situé sur l'axe des abscisses, cela se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{oE'} < 0 & \text{(VI.25)} \\ \Sigma_{oE} = 0 & \text{(VI.26)} \end{cases}$$

La condition (VI.26) se traduit de la façon suivante :

$$\Sigma_{oE} = \left(1 - \frac{B3}{B5}\right)\Sigma_{max} - H + \frac{B3}{B5}\left(\sigma_{\alpha}^{\rho} + \frac{\Delta}{B2}\right) = 0 \qquad \text{(VI.27)}$$

On obtient ainsi la valeur de la précharge nécessaire pour obtenir un tel état de contrainte interne après déchargement :

$$\Sigma_{max} = \frac{\sigma_{\alpha}^{\rho} + \frac{\Delta}{B2} - \frac{B5}{B3}H}{1 - \frac{B5}{B3}} \qquad \text{(VI.28)}$$

Pour que l'effet "bimodule" soit possible, Σ_{max} doit être positive et satisfaire à la relation (VI.22). Si cette condition est réalisée la valeur de la déformation permanente au point de "bimodule" est donnée par l'expression suivante :

$$E_{OE} = \frac{1}{3}\left[\frac{\sigma_\alpha^p - H}{\mu_{el}} + \frac{1}{\mu_B}\frac{\Delta}{B2} + \left(\frac{1}{\mu_c} + \frac{1}{\mu_E}\frac{B3}{B5}\right)\left(\Sigma_{max} - \sigma_\alpha^p - \frac{\Delta}{B2}\right)\right] \quad \text{(VI.29)}$$

La prédéformation nécéssaire pour obtenir une telle déformation permanente est donnée par :

$$E_{max} = \frac{\Sigma_{max}}{3\mu_c} + \sigma_\alpha^p\left(\frac{1}{3\mu_{el}} - \frac{1}{3\mu_c}\right) + \frac{\Delta}{B2}\left(\frac{1}{3\mu_B} - \frac{1}{3\mu_c}\right) \quad \text{(VI.30)}$$

Au point de fonctionnement du "bimodule", l'amplitude maximale de la contrainte admissible en compression est donnée par la valeur de Σ_{OF}. Plus cette valeur sera grande, plus l'effet sera stable.

La valeur de Σ_{OF} est donnée par :

$$\Sigma_{OF} = \Sigma_{OE} + H + \left(A5\frac{B3}{B5} - 2A3\right)\left(\Sigma_{max} - \sigma_\alpha^p - \frac{\Delta}{B2}\right) - 2\left(\sigma_\alpha^p - A2\frac{\Delta}{B2}\right) \quad \text{(VI.31)}$$

A partir de ces considérations, on peut, suivant les caractéristiques des deux phases et leur fraction volumique respective, étudier les conditions d'apparition de l'effet "bimodule", dans le cas où Δ (la différence des seuils : $\sigma_\beta^M - \sigma_\alpha^P$) est positive.

Dans le cas où Δ est négative la même étude peut être menée. La principale différence de comportement entre ce cas et celui étudié précédemment provient de la zone AB de la courbe de traction du polycristal (figure VI.3). Dans cette zone nous avons maintenant la phase α qui se comporte élastiquement alors que la phase β subit une transformation martensitique sous contrainte.

L'existence en décharge de la zone EF où les deux phases ont un comportement élastique est liée à la valeur de Σ''_{max}

$$\Sigma''_{max} = \sigma_\alpha^p + \frac{2\sigma_\alpha^p + \Delta - H}{A5\,\frac{B3}{B5} - 2A3} - \frac{\Delta}{A5}(1 - A5) \qquad \text{(VI.32)}$$

cette valeur doit être, comme Σ'_{max}, positive et satisfaire à l'inégalité

$$\Sigma''_{max} \geqslant \sigma_\alpha^p + \Delta\left(1 + \frac{1}{A5}\right) \qquad \text{(VI.33)}$$

si cette condition est réalisée le point E' est défini par :

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma_{OE'} &= \Sigma''_{max}\left(1 - \frac{B3}{B5}\right) - H + \frac{\Delta}{A5}\left(1 + \frac{B3}{B5}(1 - A5)\right) + \sigma_\alpha^p\,\frac{B3}{B5} \\ E_{OE'} &= \frac{\Delta + \sigma_\alpha^p + H}{3\mu_{el}} + \left(\frac{1}{3\mu_c} - \frac{B3}{B5}\,\frac{1}{3\mu_E}\right)\left(\Sigma''_{max} + \frac{\Delta}{A5}(1 - A5) - \sigma_\alpha^p\right) \end{aligned}\right. \qquad \text{(VI.34)}$$

Si la valeur $\Sigma_{OE'}$ est négative on peut déterminer la valeur de la précharge Σ_{max} nécessaire pour obtenir l'éffet bimodule :

$$\Sigma_{max} = \frac{\sigma_\alpha^p + \frac{\Delta}{A5}\left(1 - A5 + \frac{B5}{B3}\right) - H\frac{B5}{B3}}{1 - \frac{B5}{B3}} \qquad (VI.35)$$

Σ_{max} doit vérifier :

$$\Sigma_{max} \geqslant \sigma_\alpha^p + \Delta\left(1 - \frac{1}{A5}\right)$$

La valeur de la prédéformation s'écrit alors :

$$E_{max} = \frac{\Sigma_{max}}{3\mu_c} + \sigma_\alpha^p\left(\frac{1}{3\mu_{el}} - \frac{1}{3\mu_c}\right) + \frac{\Delta}{A5}\left(\frac{A5}{3\mu_{el}} + \frac{1}{3\mu_E} - \frac{A5-1}{3\mu_c}\right) \qquad (VI.36)$$

L'amplitude de la déformation permanente au point de fonctionnement du bimodule s'obtient par :

$$E_{OE} = \frac{\Delta + \sigma_\alpha^p + H}{3\mu_{el}} + \left(\frac{1}{3\mu_c} - \frac{B3}{B5}\frac{1}{3\mu_E}\right)\left(\Sigma_{max} + \frac{\Delta}{A5}(1-A5) - \sigma_\alpha^p\right) \qquad (VI.37)$$

La charge maximale en compression est donnée par :

$$\Sigma_{OF} = H + \left(A5\frac{B3}{B5} - 2A3\right)\left(\Sigma_{max} - \sigma_\alpha^p + \frac{\Delta}{A5}(1-A5)\right) - \Delta - 2\sigma_\alpha^p \qquad (VI.38)$$

VI.5° - Discussion des résultats numériques

VI.5.1 Conditions d'existence de l'effet "bimodule". Courbe caractéristique

Pour cette première approche du problème, nos calculs ont été effectués à partir d'une modélisation linéaire du comportement des deux phases (figure VI.5). Les valeurs relatives des modules tangents utilisés sont données dans le tableau (VI.1)

μ_{el}	μ_p	μ_{ps}
100	1	0,1

Tableau (VI.1) valeurs relatives des modules tangent

Les figures (VI.6) et (VI.7) donnent les allures de courbes de traction obtenues numériquement pour différentes valeurs de précharge. Selon la valeur de la précharge, deux comportements différents sont distingués lors de la décharge. Pour les faibles valeurs de précharge la décharge s'effectue en partie élastiquement. Pour les valeurs plus élevées elle est entièrement "plastique". Le point E' apparait comme point de transition entre ces deux comportements.

Si l'ordonnée du point E' est négative, il existe une valeur de précharge telle que l'effet "bimodule" se produit (figure V.6).

Au contraire, une ordonnée positive du point E' rend impossible l'obtention d'un effet "bimodule" (figure V.7).

A partir de la modélisation linéaire de l'allure des courbes de déformation des deux phases, on a déterminé au paragraphe (VI.4) les conditions d'existence et les coordonnées du point E'.

La figure (VI.8) montre, dans un diagramme contrainte-déformation, le lieu de ce point en fonction de la proportion de phase α dans le biphasé, les caractéristiques des phases α et β étant fixées. Cette courbe caractéristique permet de prévoir le domaine de composition où l'effet "bimodule" peut se manifester. Ainsi dans le cas présenté à la figure (VI.9), il ne peut exister de "bimodule" que pour des alliages comportant plus de 60 % de phase α .

VI.5.2 Effets des différents paramètres sur la courbe caractéristique

Trois paramètres ont une influence importante sur l'allure de cette courbe :

- la différence Δ entre les seuils d'écoulement des deux phases.
- la valeur de σ_α^P , seuil de plasticité de la phase α .
- la valeur H de l'hystérésis de la phase β .

La figure VI.9 montre qu'une valeur de Δ négative est plus favorable pour obtenir l'effet "bimodule". De même, toute augmentation de la limite d'élasticité de la phase α , en augmentant le niveau de contrainte nécessaire pour plastifier cette phase est favorable (figure VI.11 et figure VI.12).

A l'inverse la figure (VI.13) montre l'effet néfaste de tout accroissement de la valeur de l'hystérésis de la phase β .

En règle générale, tout paramètre qui aura tendance à augmenter le niveau de contrainte interne dans la phase α sera néfaste à l'effet "bimodule".

VI.5.3 Détermination de l'effet "bimodule"

Un quatrième facteur influe sur l'existence de l'effet "bimodule" : la valeur du rapport R entre le module de compression et le module de traction. Celui-ci est déterminé par les valeurs relatives des différents modules tangent des deux phases et la composition du biphasé.

	Valeur du module μ_{ps} de la phase β									
% α	0 .1	0.05	0.1	0.2	0.5	0.8	1	2	5	10
35 %	1261	261	135	72	33	23	19	12	6,49	4,20
40 %	122	54	38	27	17	13	12	8,41	5,23	3,63
45 %	12	11	11	10	8,78	7,86	7,40	5,96	4,23	3,14
50 %	5,98	5,93	5,86	5,73	5,39	5,12	4,96	4,38	3,45	2,73
55 %	4,00	3,98	3,96	3,92	3,80	3,70	3,64	3,37	2,86	2,39
60 %	3	2,99	2,98	2,96	2,91	2,87	2,84	2,71	2,42	2,11
65 %	2,40	2,40	2,39	2,38	2,36	2,33	2,32	2,25	2,08	1,88

Tableau VI.2 valeur de $R = \frac{\mu_{comp}}{\mu_{tract}}$ avec $\mu_{el} = 100$ $\mu_p = 1$

Le tableau (VI.2) montre qu'en considérant le rapport μ_{el}/μ_p comme constant et égal à 100, plus le rapport μ_{el}/μ_{ps} est élevé, plus le rapport des modules au point de bimodule est élevé.

A l'inverse, plus ce rapport est faible et plus la dissymétrie entre le comportement des deux phases et importante entrainant une augmentation du niveau de contraintes internes, ce qui va à l'encontre de l'effet recherché.

En revanche si les modules μ_p et μ_{ps} sont voisins la probabilité d'existence de l'effet bimodule est très importante mais le rapport des pentes est très faible ! Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre les deux.

Un tel compromis a été établis pour les courbes présentées (figure VI.14 et VI.15)

Dans l'une Δ est positif, dans l'autre négatif, les valeurs des modules tangents sont ceux donnés au tableau (VI.1) et la proportion des phases dans les deux cas est égale à 65 % de phase α .

Le niveau de contrainte atteint dans le cas où Δ est positif est beaucoup plus important.

VI.6° - CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons montré, à partir d'un modèle très simple qu'un matériau biphasé constitué d'une phase pseudoélastique et d'une phase élastoplastique, peut présenter un effet "bimodule" dû à la dissymétrie du comportement des deux phases à la décharge et aux contraintes internes introduites par un chargement initial.

Cet effet "bimodule" est analogue à l'effet Bauschinger où la dissymétrie concerne la différence des contraintes d'écoulement.

Nous avons tenté d'observer ce phénomène sur un polycristal biphasé de laiton (α + β) dans lequel la phase α est élastoplastique et la phase β pseudoélastique. Nous avons observé un effet Bauschinger très important mais l'effet "bimodule" n'a pu être observé. Ceci provient du fait, que le matériau polycristallin étudié présente en réalité un grand nombre d'orientations cristallographiques différentes pour lesquelles les seuils de transformation sont répartis dans un large domaine de contrainte. La transition entre les modules de traction et de compression se fait alors de façon progressive, puisque, pour une contrainte macroscopique donnée, seule une partie des grains participe à l'effet "bimodule".

Des essais sont actuellement en cours sur un tricristal (β , α , β) dans lequel les conditions d'introduction des contraintes internes peuvent être mieux maitrisées.

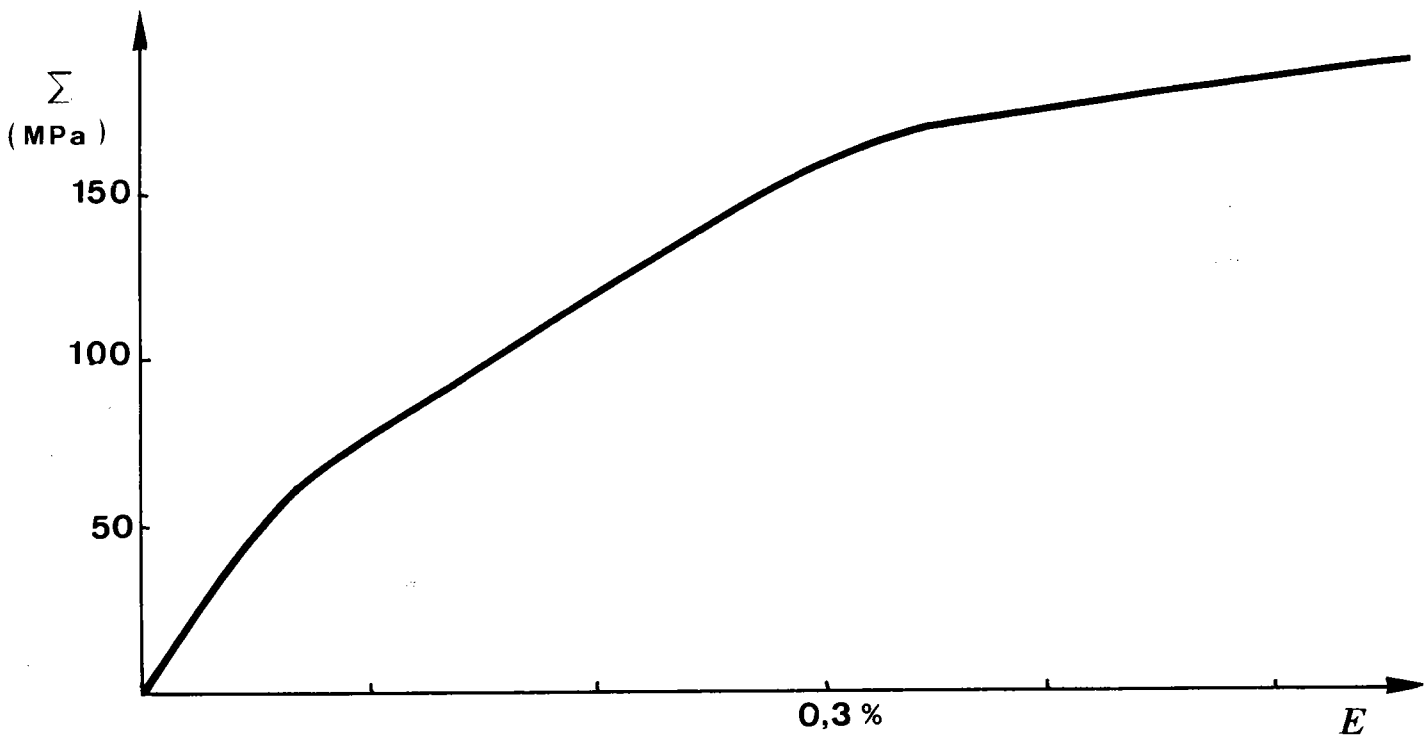
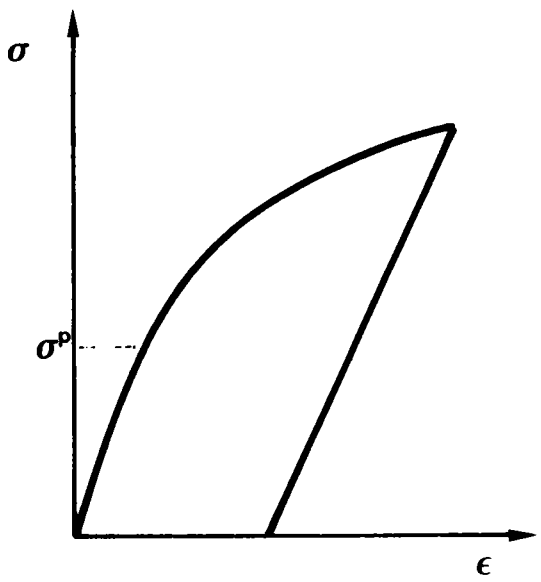
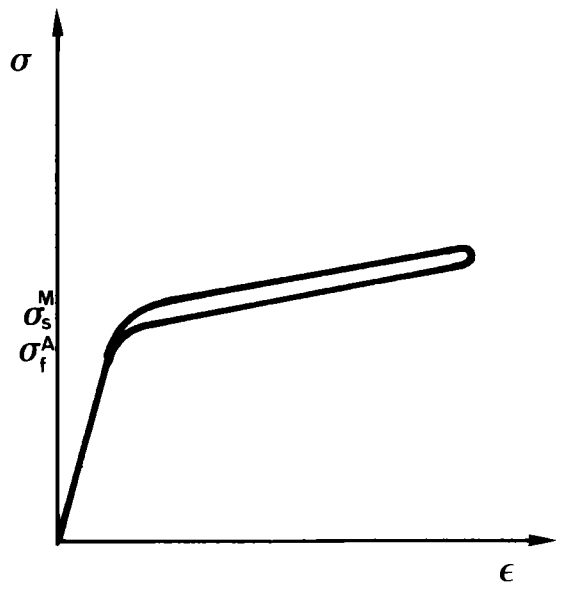


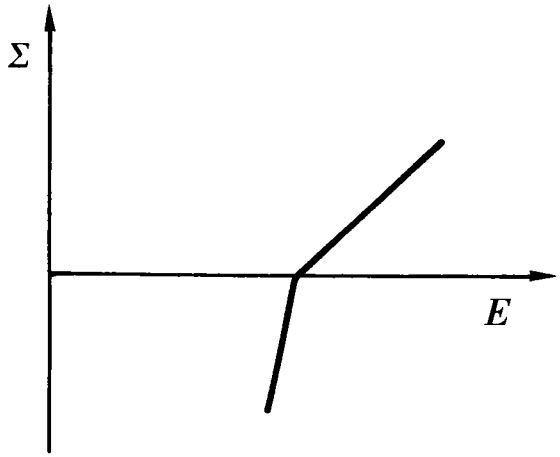
FIGURE VI.1 : Courbe expérimentale en traction uniaxiale pour un alliage de Cu-Zn-Al biphasé (α , β)montrant la zone intermédiaire (B) où une phase est en écoulement plastique alors que la seconde à toujours un comportement élastique.



2.a : Comportement de la phase α.



2.b : Comportement de la phase β .



2.c :Représentation schématique de l'effet "bimodule".

FIGURE VI.2 : Comportement des phases α et β du matériau biphasé, représentation schématique de l'effet "bimodule".

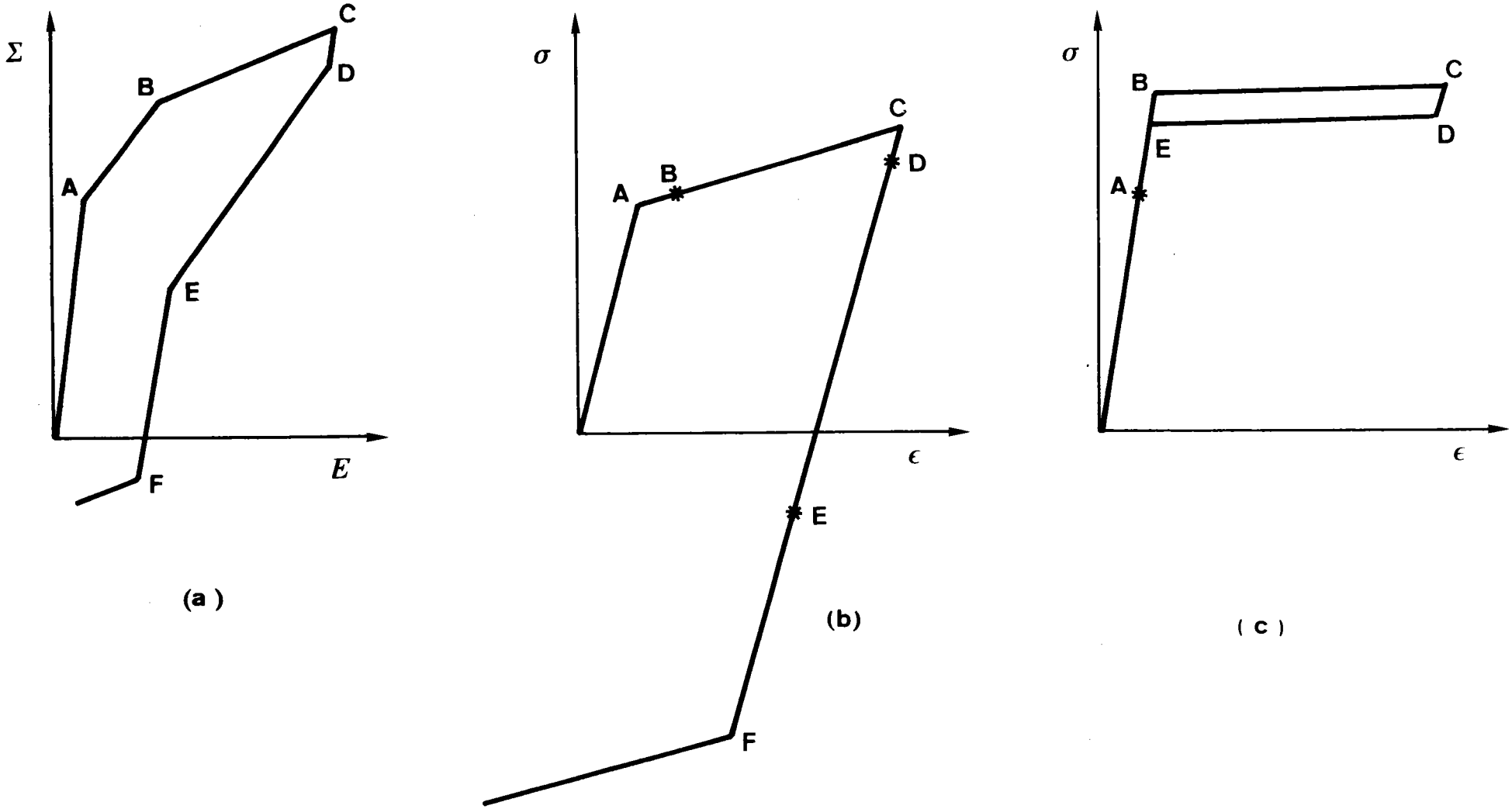


FIGURE VI.3 : Schéma décrivant l'évolution des contraintes dans le biphasé et dans les deux phases.

3.a : Courbe de traction du biphasé.

3.b : Evolution des contraintes dans la phase α (supposée sans éffet Bauschinger).

3.c : Evolution des contraintes dans la phase β .

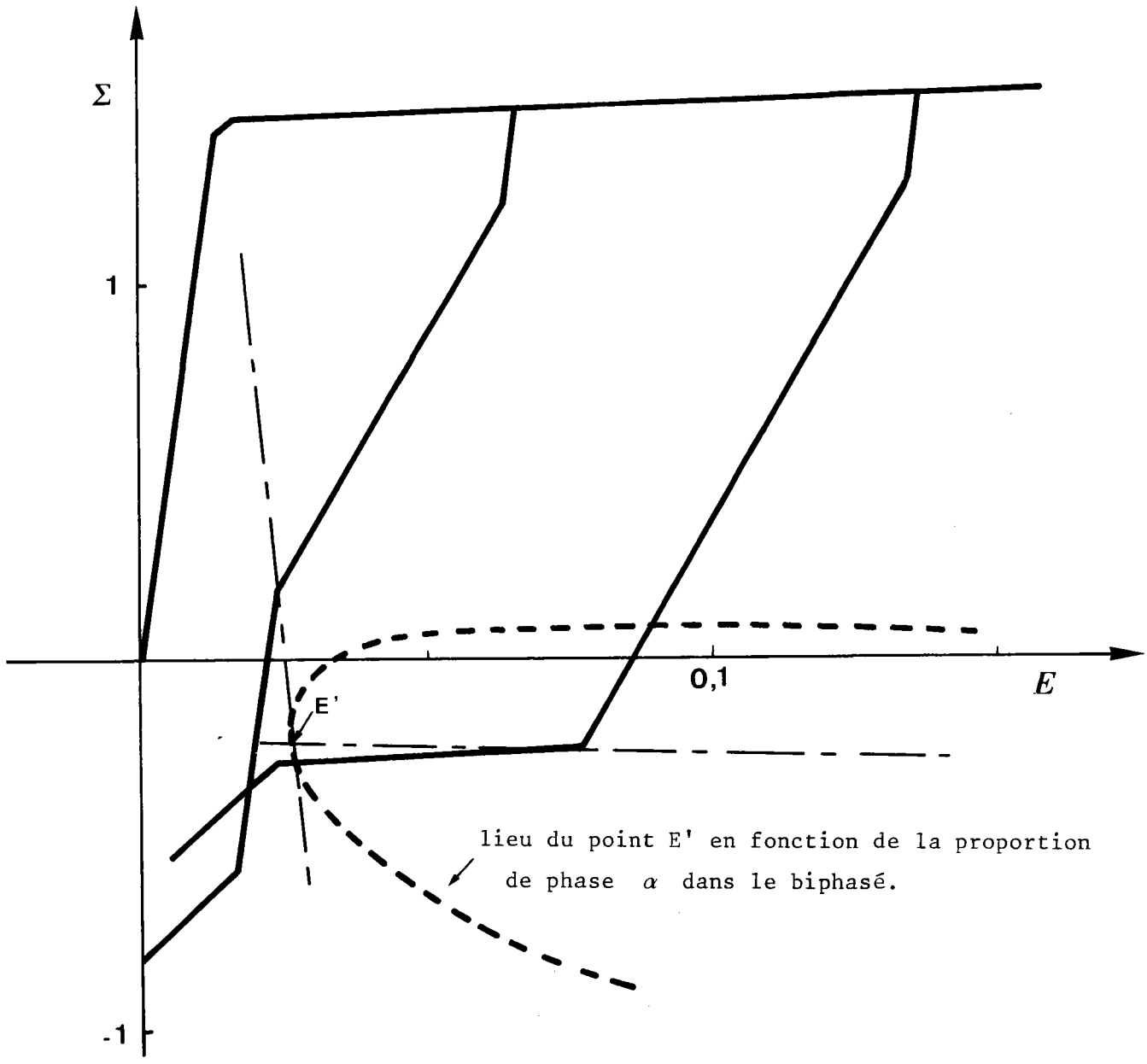


FIGURE VI.4 : Construction et lieu du point E' à partir des courbes de traction-compression d'alliage biphasé (α , β).

Le point E' est le point où on a à la fois plastification de la phase α et retour à un comportement élastique de la phase β aprés retransformation en austénite.

La courbe caractéristique du point E' définit deux demi-plans,dans l'un la phase α se plastifie avant que la phase β redevienne totalement austénitique (point E_2),dans l'autre il existe une zone où les deux phases se déchargent élastiquement.

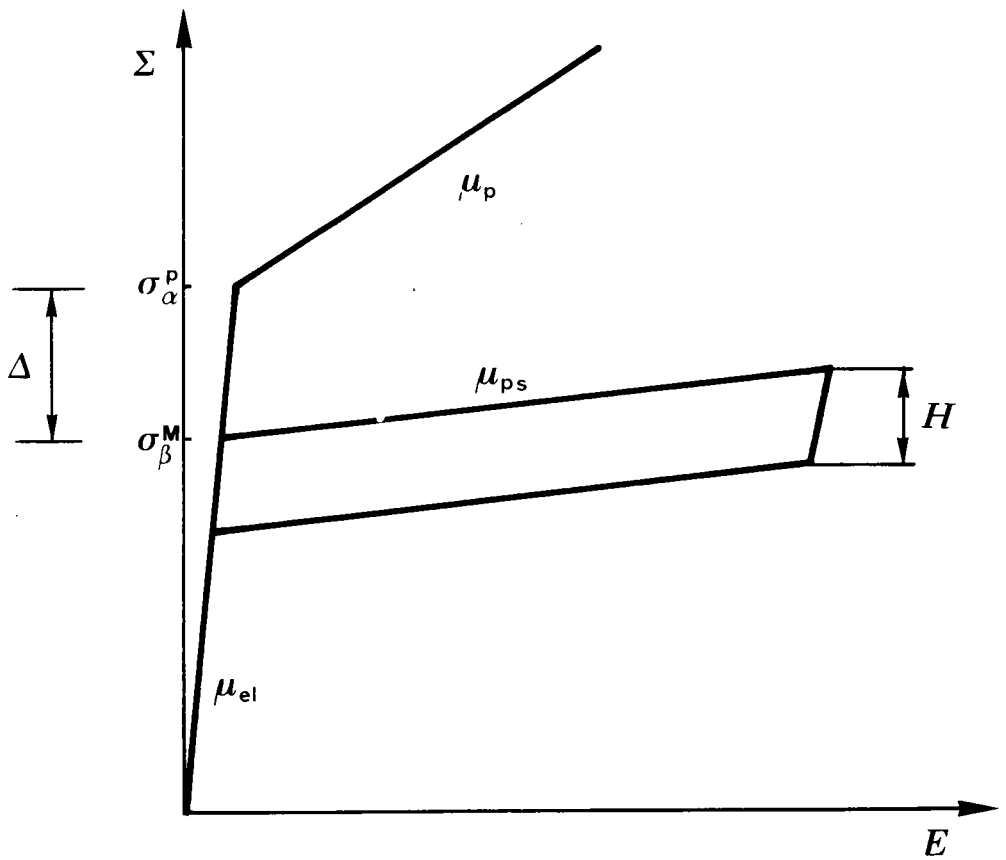


FIGURE VI .5 : Modélisation des phases α et β du matériau biphasé.

σ_β^M : Contrainte critique de transformation
: de la phase β .

σ_α^p : Seuil d'écoulement plastique de la phase α .

Δ : Différence des deux seuils d'écoulement.

$$\Delta = \sigma_\beta^M - \sigma_\alpha^p$$

μ_{el} : Module tangent élastique des deux phases.

μ_p : Module tangent de la phase α dans le domaine plastique.

μ_{ps} : Module tangent de la phase β en plasticité de transformation.

H : Valeur de l'hystérésis de la transformation pour la phase β .

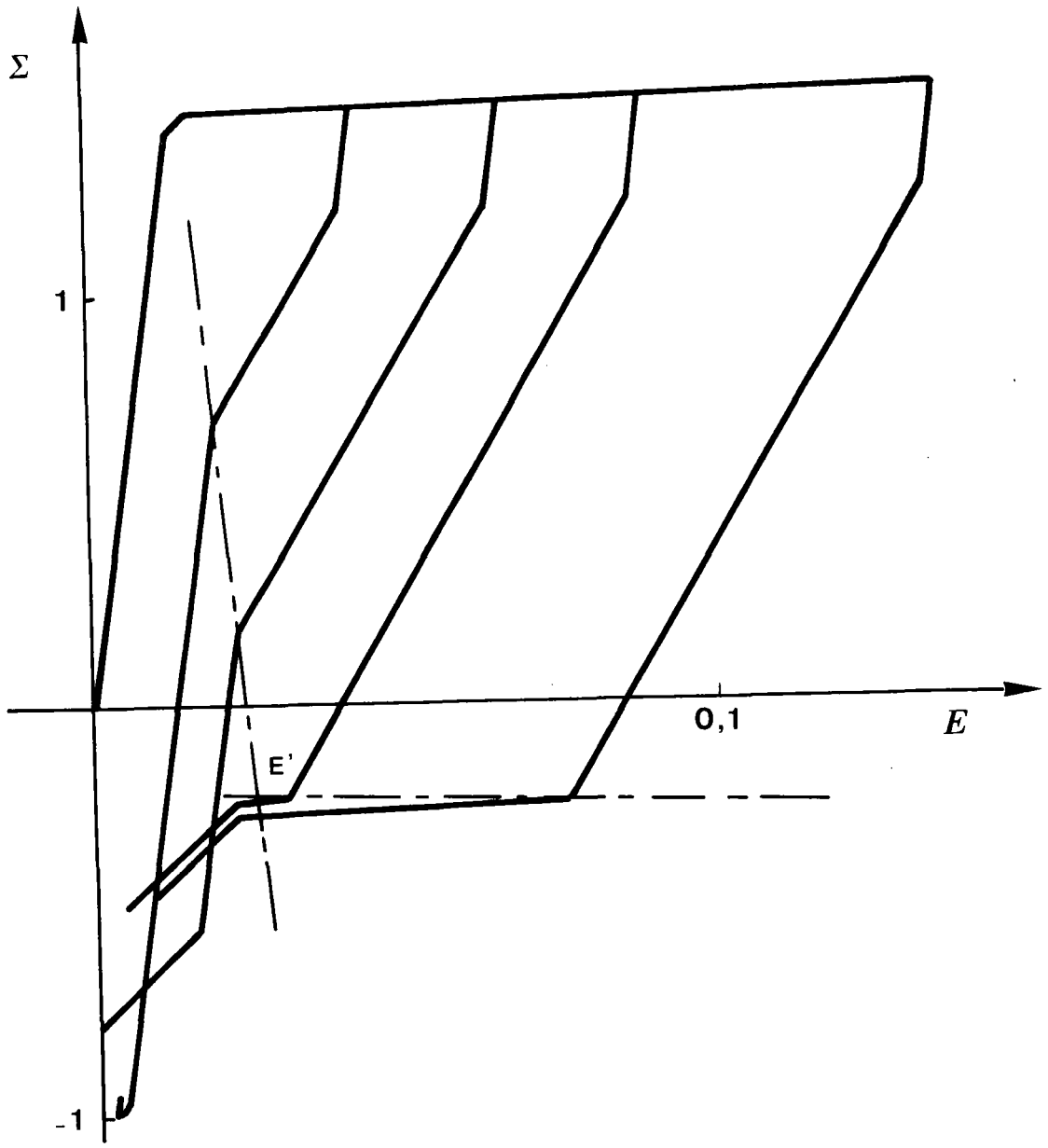


FIGURE VI.6 : Courbes de traction-compression du biphasé déterminées numériquement pour différentes valeurs de la précharge.

Pour les précharges σ_1 et σ_2 une partie de la décharge s'effectue élastiquement.

Pour les précharges σ_3 et σ_4 la décharge s'effectue entiérement en domaine "plastique".

Le point E' apparaît comme point de transition entre ces deux comportements.

Pour l'alliage biphasé representé dans cette figure, l'ordonnée du point E' est négative,il existe donc une valeur particuliére de précharge telle que pour cette valeur,l'effet "bimodule" puisse se produire.

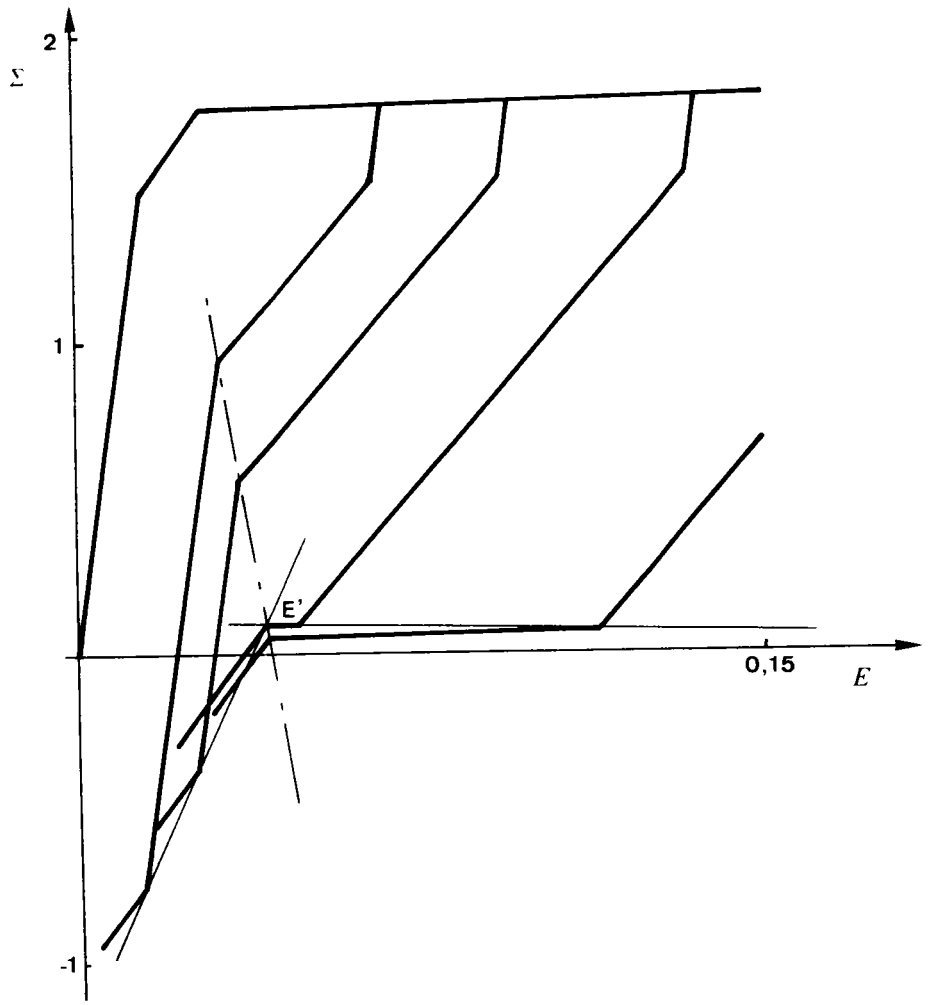
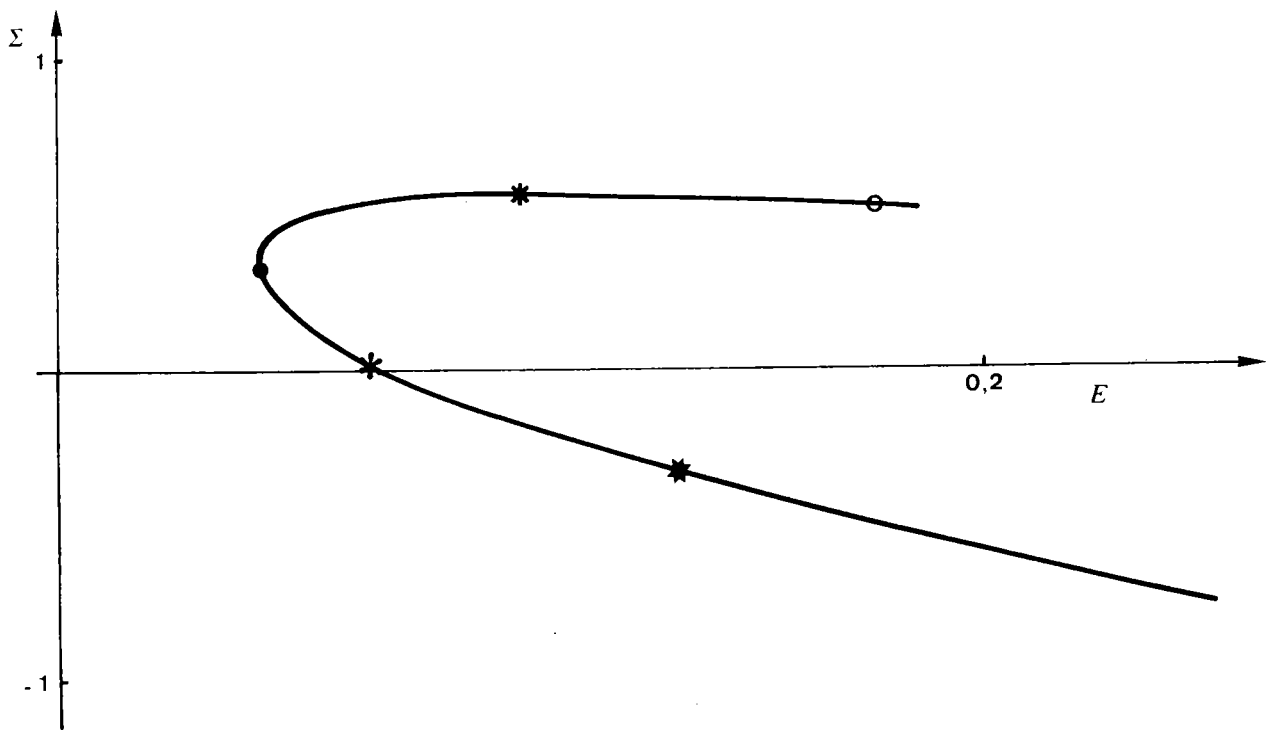


FIGURE VI.7 : Courbes de traction-compression du biphasé déterminées numériquement pour différentes valeurs de la précharge.

Pour l'alliage biphasé représenté dans cette figure, l'ordonnée du point E' est positive.Quelque soit la précharge appliquée,ce matériau ne pourra présenter d'effet "bimodule".



Proportion de phase α dans le biphasé :

o 38%	✱ 60%
✱ 40%	✱ 70%
● 46%	

FIGURE VI.8 : Courbe caractéristique du point E' dans un diagramme (E ; Σ) en fonction de la proportion de phase α dans le biphasé.

Les paramétres de ce biphasé sont :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha}^{p} = 1. \\ \Delta = 1. \\ H = 0.25 \end{cases}$$

Pour cet alliage biphasé il ne peut exister d'effet "bimodule" que pour des proportions de phase α supérieures à 60%.

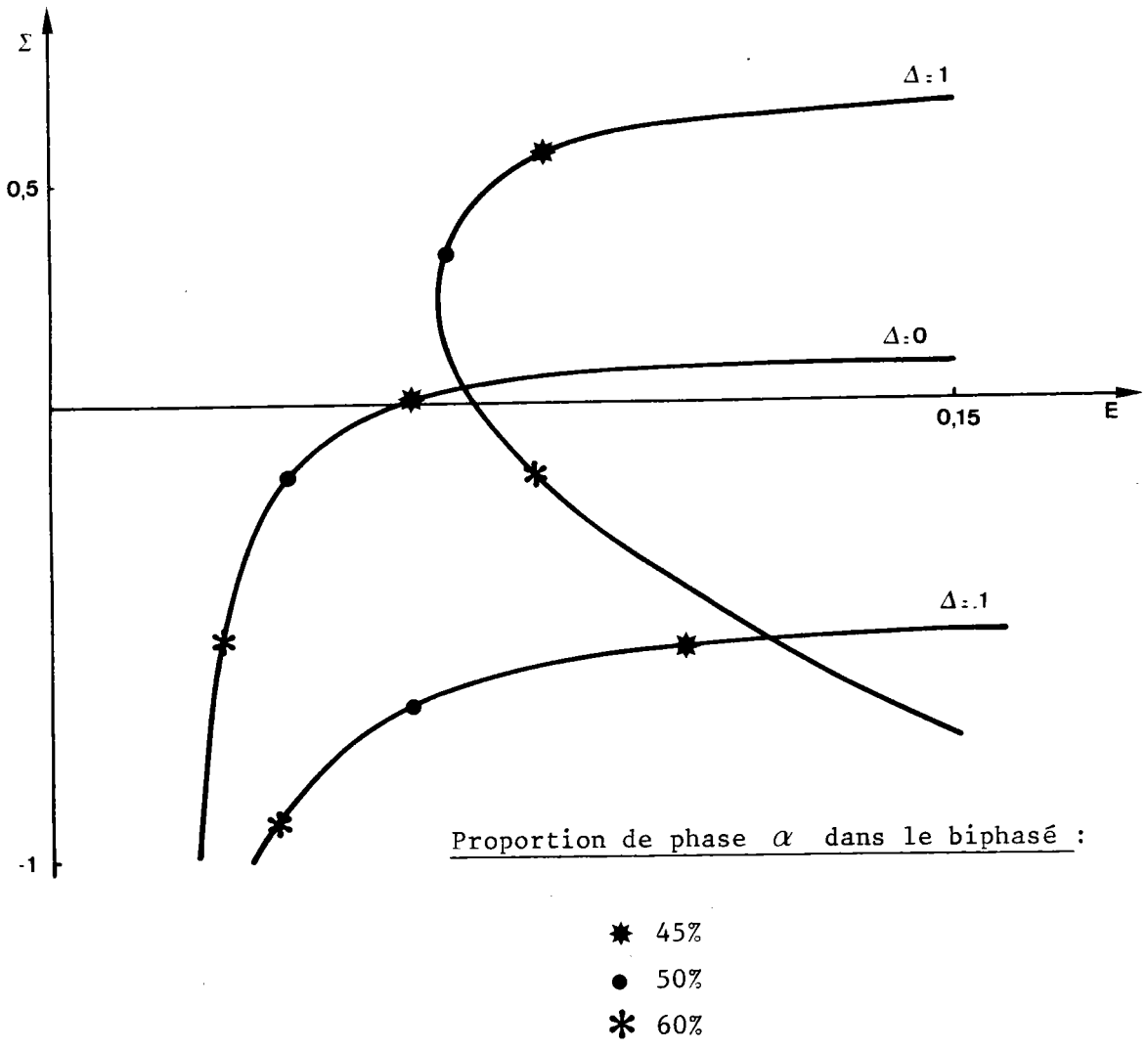


FIGURE VI.9 : Influence sur la courbe caractéristique du point E' de la différence Δ des seuils d'écoulement des phases α et β du matériau biphasé.

Ces courbes ont été déterminées en prenant comme valeurs caractéristiques pour les paramétres des deux phases :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha}^{P} = 2. \\ H = 0.25 \end{cases}$$

Trois allures de courbe sont possibles :

- L'écoulement "plastique" des deux phases à lieu pour la même contrainte seuil.
  Dans ce cas,on a : $\Delta = 0$
- La phase α est plus ductile que la phase β .
  Dans ce cas,on a : $\Delta > 0$
- La phase β est la plus ductile.
  Dans ce cas,on a : $\Delta < 0$

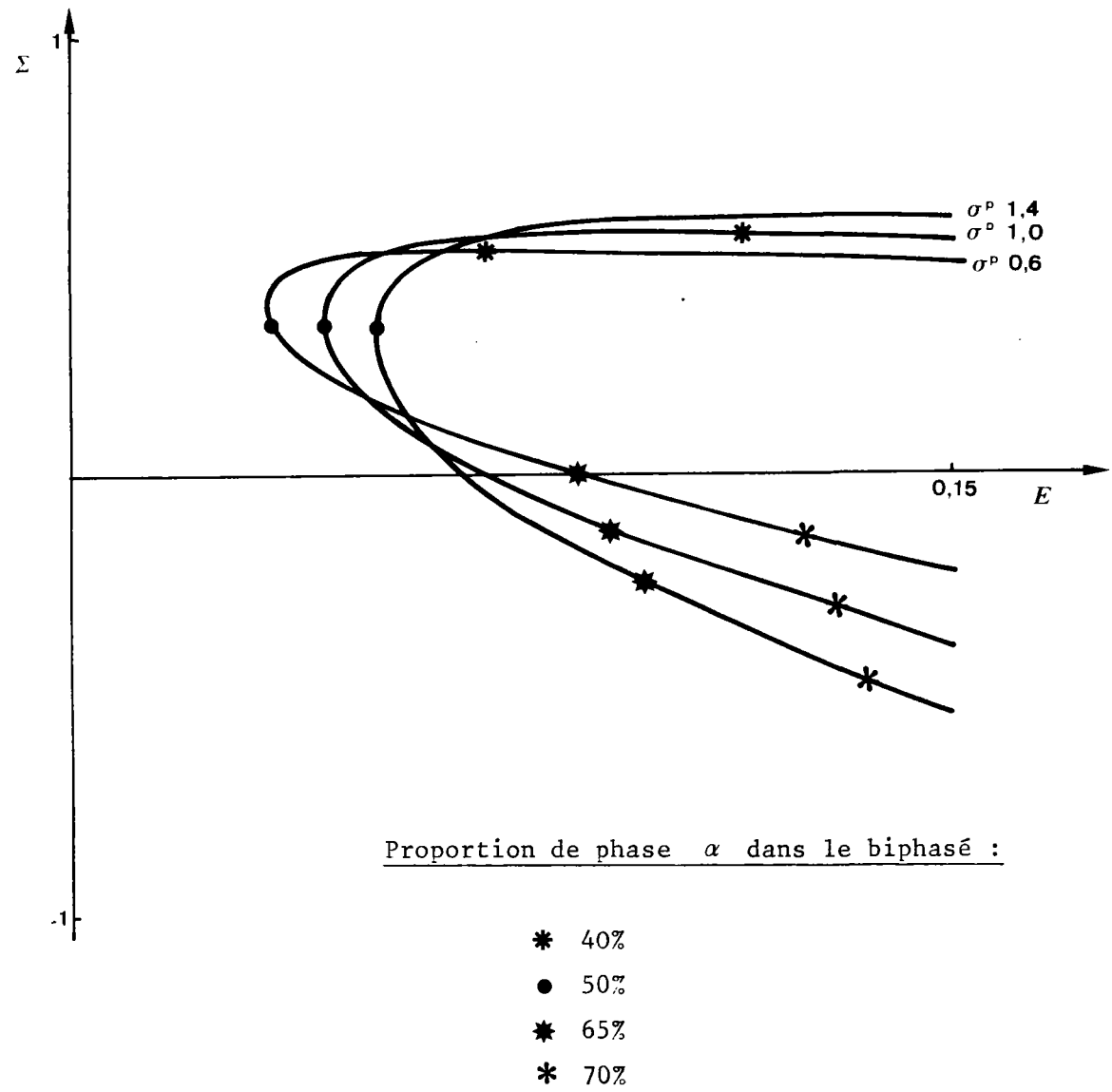


FIGURE VI.10 : Influence sur la courbe caractéristique de la variation du seuil d'écoulement plastique de la phase α ,pour Δ positif pris égal à l'unité.

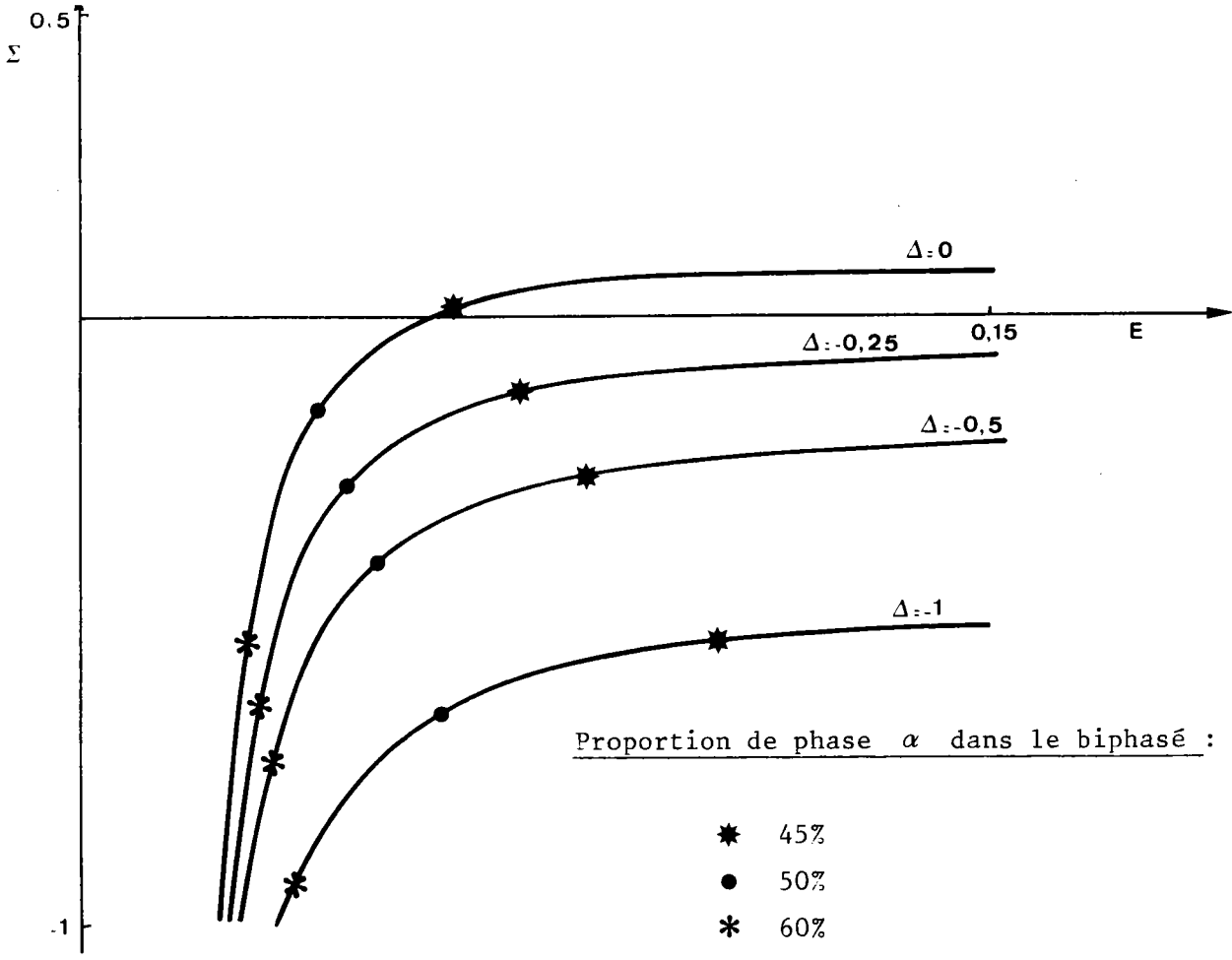


FIGURE VI.11 : Influence pour Δ négatif de la variation du seuil de transformation de la phase β : σ_β^M .
σ_α^p est pris égal à deux.

Si
- $\sigma_\beta^M = 2.$ alors $\Delta = 0.$
- $\sigma_\beta^M = 1.75$ $\Delta = -0.25$
- $\sigma_\beta^M = 1.5$ $\Delta = -0.5$
- $\sigma_\beta^M = 1.0$ $\Delta = -1.0$

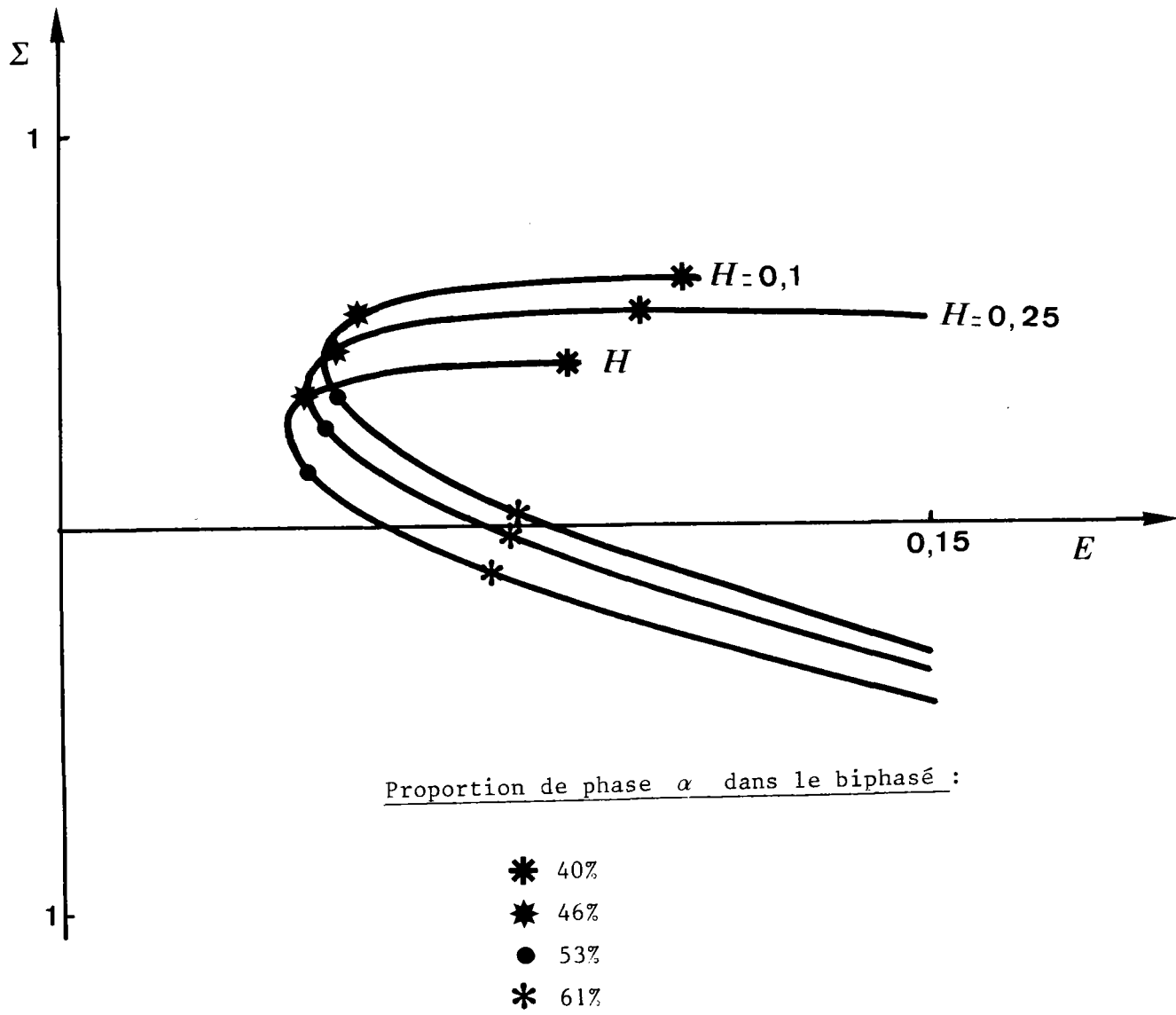


FIGURE VI.12 : Evolution pour Δ positif de l'allure de la courbe caractéristique du point E' en fonction de la valeur de l'hystérésis H de la phase β .

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha}^{p} = 1. \\ \Delta = 1. \end{cases}$$

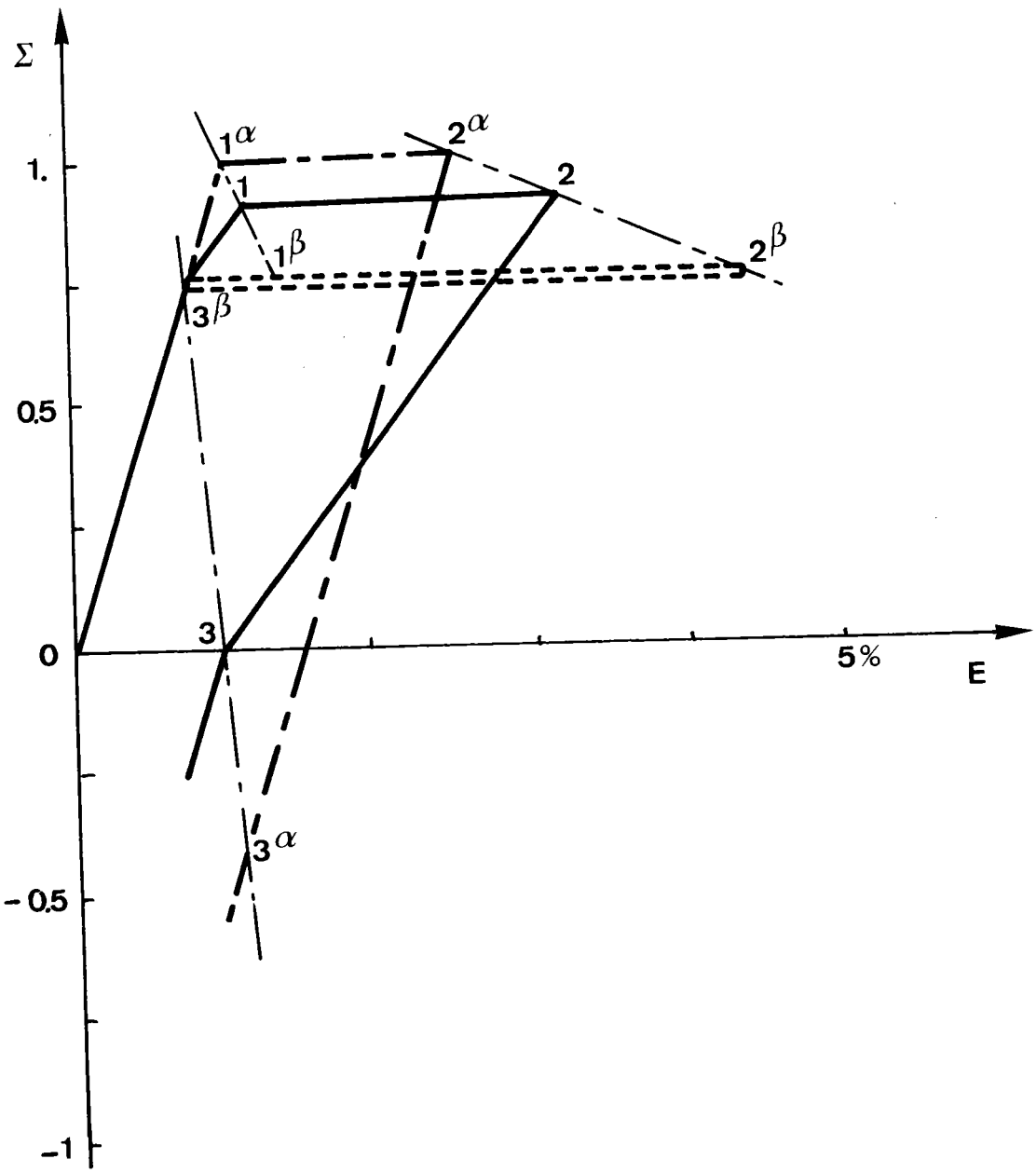


FIGURE VI.13 : Détermination à l'aide du schéma auto-cohérent simplifié développé au chapitre VI d'un alliage biphasé (α, β) présentant un effet "bimodule", pour une valeur Δ négative ($\Delta = \sigma_{\beta}^{M} - \sigma_{\alpha}^{P}$).

La détermination a été effectuée pour un alliage comportant 35% de phase β .

Les niveaux de contraintes internes dans les deux phases ainsi que la relation entre ces contraintes et la contrainte macroscopique dans le biphasé sont représentées sur cette figure, durant un cycle de préchargement.

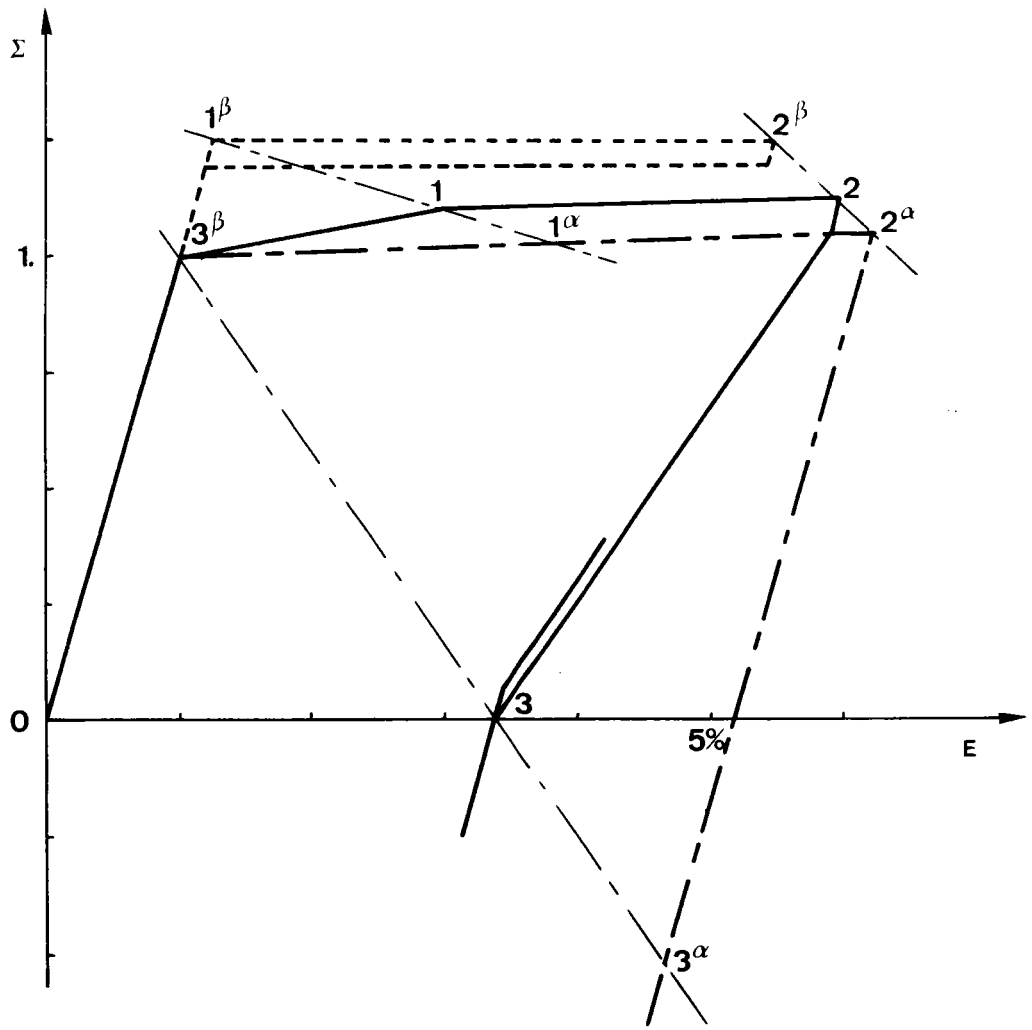


FIGURE VI.14 : Détermination à l'aide du schéma auto-cohérent simplifié développé au chapitre VI d'un alliage biphasé (α ,β) présentant un effet "bimodule",pour une valeur Δ positive ($\Delta = \sigma_{\beta}^{M} - \sigma_{\alpha}^{P}$).

La détermination a été effectuée pour un alliage comportant 35% de phase β .
Les niveaux de contraintes internes dans les deux phases ainsi que la relation entre ces contraintes et la contrainte macroscopique du biphasé sont représentées sur cette figure,durant un cycle de préchargement.

CHAPITRE VII

CONCLUSION

La plasticité de transformation résulte d'une interaction complexe entre plusieurs mécanismes de déformation. Les modélisations existantes présentent l'inconvénient de ne décrire, chacune, qu'un aspect du phénomène, aucune modelisation générale du comportement des matériaux en plasticité de transformation n'ayant encore été établie.

Nous nous sommes attachés à l'étude de ce phénomène quand il a pour origine la transformation martensitique et nous avons décrit cette transformation comme un mode de déformation anélastique, caractérisé par une variation volumique et par un cisaillement parallèle au plan d'habitat.

L'étude du problème nous a conduit à considérer deux types de plasticité de transformation :

- La plasticité de transformation parfaite, pour laquelle le seul mécanisme de déformation qui intervient est le mécanisme intrinsèque à la transformation martensitique.

- La plasticité de transformation couplée, où un écoulement plastique dans l'une des deux phases, ou dans les deux, se superpose au mécanisme lié à la transformation.

Le problème de la détermination des lois de comportement peut alors se subdiviser en deux étapes :

- étude du comportement en plasticité de transformation parfaite.

- étude du couplage plasticité de transformation parfaite - plasticité classique.

Nous nous sommes attachés à décrire les lois de comportement thermomécanique des mono et polycristaux en plasticité de transformation parfaite.

Nous avons démontré, pour le monocristal, l'existence d'une loi de contrainte résolue maximale analogue à la loi de Schmid en plasticité classique, ainsi que la validité du principe du travail maximal. A partir de ces deux résultats, nous avons pu établir la loi de comportement thermomécanique du monocristal en plasticité de transformation parfaite.

Une étude phénoménologique du polycristal, nous a permis d'établir deux critères de plasticité de transformation (un critère de contrainte résolue maximale, analogue au critère de Tresca, et un critère symétrique analogue à celui de Von Mises). Nous avons, de la même façon, établi une loi phénoménologique du comportement thermomécanique pour la plasticité de transformation parfaite du polycristal.

Bien que partant d'une approche différente , nos résultats sont compatibles avec ceux établis par Patel et Cohen et par Magee. En revanche, notre modèle ne décrivant que la plasticité de transformation parfaite nous n'avons pu le confronter de façon significative avec les données expérimentales disponibles sur la plasticité de transformation des alliages métalliques. En effet, dans les alliages à base de fer, le couplage avec la plasticité classique est très important et rend difficile la confrontation entre les résultats expérimentaux et la théorie proposée.

Une identification expérimentale de ce modèle est actuellement entreprise au laboratoire sur des alliages de Cu-Zn-Al, alliages pour lesquels le couplage est négligeable.

Une modélisation phénoménologique du polycristal présente cependant l'inconvénient de ne pas tenir compte de la microstructure. Ceci rend difficile la prise en compte de l'anisotropie de la transformation, ainsi que l'étude du couplage plasticité de transformation parfaite, plasticité classique.

Une seconde modélisation du polycristal tenant compte de la microstructure a donc été entreprise à l'aide d'une méthode d'homogénéisation.

Nous avons obtenu de cette façon une loi de comportement totalement explicite qui présente un bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus au laboratoire sur des alliages de Cu-Zn-Al en traction uniaxiale.

Une difficulté majeure subsiste pourtant : la détermination des interactions entre les différents variants. Par analogie avec la plasticité classique, nous avons pris en compte cette interaction sous la forme d'une matrice d'écrouissage, dont la détermination est entreprise par ailleurs au laboratoire. Pour l'instant seule l'étude des systèmes à un seul variant actif par grain est entièrement déterminée. Dans le cas de la plasticité de transformation couplée, la difficulté est encore plus grande, car aux inte-

ractions entre variants, il faut ajouter l'interaction entre plastification de la matrice et initiation (et, ou propagation) de la transformation martensitique.

Une telle étude, ne peut être réalisée qu'à partir de méthodes d'homogénéisation. Une première approche a été effectuée sur des laitons biphasés, alliages pour lesquels le couplage est simple à modéliser. Un effet analogue à l'effet Bauschinger, mais ayant pour origine une dissymétrie de comportement des deux phases, a été mis en évidence : il s'agit de l'effet "bimodule".

Ce n'est qu'à partir du moment, où une solution sera apportée aux problèmes des interactions entre variants, et entre variants et systèmes de glissement (ou dislocation) qu'il sera possible d'établir une loi générale de comportement des alliages métalliques en plasticité de transformation.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- B. JAOUL, 1965, Etude de la plasticité et application aux métaux (Dunod).

- Métallurgie physique, 1978, chapitre 31 : Transformations par cisaillement (La Documentation Française).

- Z. NISHIYAMA, 1978, Martensitic Transformation (Academic Press).

- L. DELAEY, H. WARLIMONT, 1974, Martensitic Transformations in Copper - Silver - and Gold - based Alloys (Pergamon Press).

- J. PERKING , 1975, Shape Memory Alloys (Pergamon Press).

- Icomat 82 : Proceedings of the international Conference on Martensitic Transformations (L. DELAEY, M. CHANDRASEKARAN ed, Leuren Belgium 1982).

- J. Mandel, Udine 1971, Plasticité Classique et Viscoplasticité (SPRINGER).

B I B L I O G R A P H I E

1. M. COHEN
   Proceedings ICOMAT, 1982

2. G. GUENIN
   Colloque "Transitions Structurales sans Diffusion", AUSSOIS, 1983

3. L. KAUFMAN, M. COHEN
   Progress in Metal Physics, 7, 1958

4. M.S. WECHSLER, D.S. LIEBERMAN, T.A. READ
   Trans. AIME, 197, 1953, 1503

5. ZHU WEI JUANG, CHEN WEI YE, T.Y. HSU
   Acta Met., 11, 1985, 2075

6. J.S. BOWES, D.P. DUNNE
   Acta. Met. 17, 1969, 677

7. H. WARLIMONT, L. DELAEY, R.V. KRISHNAN, H. TASS
   Mater. Sci., 9, 1974, 1536

8. K. OTSUKA
   Proceedings ICOMAT, 1982

9. H. POPS
   Met. Trans., 1, 1970, 251

10. M. DE JONG, G.W. RATHENAU
    Acta Met., 9, 61, 714

11. G.W. GREEWOOD, R.H. JOHNSON
    Proc. Roy. Soc. Ser., A283, 1965, 403

12. R.A. KOT, V. WEISS
    Met. Trans., 1, 1970, 2685

13. F. ABRASSART
    Thèse d'Etat, Nancy, 1972

14. J.P. POIRIER
    J. of Geophysical Research, 87, 1982, 6791

15. C.L. MAGEE
Ph. D. Thesis, CARNEGIE MELLON University, 1966

16. H.P. SATTLER, G. WASSERMAN
J. Less Common Metals, 28, 1972, 119

17. A. KU LIN , M. COHEN, B.L. AVERBACH
Trans. AIME, 1952, 661

18. E. GAUTIER
Thèse d'Etat, NANCY, 1985

19. J.B. LEBLOND, G. MOTTET, J.C. DEVAUX
(à paraître)

20. M. BERVEILLER, A. EBERHARDT, S. DOMINIAK, E. PATOOR
A.T.P. - CNRS : MAT 4 - Plasticité des Matériaux Solides (1983-1985)

21. H. SATO, K. TAKEZAWA, S. SATO
Sci. Rep. RITU, A29, 1981

22. P. WOLLANTS, M. DE BONTE, J.R. ROSS
Z. Metallkd, 70, 1979, 113

23. H. WARLIMONT
Mater. Sci. and Eng., 25, 1976, 139

24. J.D. ESHELBY
Prog. Solid. Mech., 2, 1961, 89

25. J.R. PATEL, M. COHEN
Acta Met., 1, 1953, 531

26. J. MANDEL
Udine, 1971, Plasticité Classique et Viscoplasticité

27. J. MANDEL
Cours de MMC, Annexe XX "Plasticité", Dunod, 1962

28. A. ZAOUI
Cours ENSTA, 1983, Comportement des Matériaux

29. H. TAS, L. DELAEY, A. DERUYTTERE
Scripta Met., 5, 1971, 1117

30. O. FASSI-FEHRI
Thèse d'Etat, METZ, 1985

31. M. BERVEILLER
Thèse d'Etat, PARIS VI, 1978

32. J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE
Mécanique des Matériaux Solides, CH. 5, Plasticité (Dunod, 1985)

33. D.C. DRUCKER, W. PRAGER
Quart. Appl. Math., 10, 1952, 157

34. H. ONEDERA, I. TAMURA
N.S.F. US/JAPAN, Seminar, 1979, 12

35. A. ZAOUI
7° Congrès Français de Mécanique, 1985

36. M. BERVEILLER, A. ZAOUI
15° colloque du Groupe Français de Rhéologie, 1981

37. M.O. BENSALAH
(à paraître)

38. E. KRÖNER
Acta Met., 9, 1961, 155

39. M. BERVEILLER, A. ZAOUI
J. Mech. Phys. Solids, 26, 1979, 325

40. A. ZAOUI
Thèse d'Etat, PARIS, 1970

41. M. BERVEILLER, A. ZAOUI
Res. Mech. Letters, 1, 1981, 119

42. S.V. RADCLIFFE, M. SCHATZ
Acta Met., 10, 1962, 201

43. J.D. EISENWASSER, L.C. BROWN
Met. Trans., 3, 1972, 1359

TABLE DES ILLUSTRATIONS

FIGURES DU CHAPITRE II 25

Fig II. 1 : Energie libre de Gibbs, en l'absence de contraintes externes, de l'austénite et de la martensite en fonction de la température. 25

Fig II. 2 : Effet d'une pression hydrostatique sur la température M d'alliage Fe-Ni. 26

Fig II. 3 : Déformation de Bain transformant une maille orthorombique en maille monoclinique. 27

Fig II. 4 : Décomposition de la déformation du réseau cristallin pendant une transformation martensitique. 28

Fig II. 5 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique. 29

Fig II. 6 : Obtention d'un TRIP STEEL. 30

Fig II. 7 : Représentation schématique du comportement d'un alliage présentant un effet "mémoire de forme". 31

Fig II. 8 : Représentation schématique du comportement pseudoélastique. 32

Fig II. 9 : Courbes contrainte - déformation d'un monocristal d'alliage Cu-Zn-Sn en fonction de la température d'essai. 33

Fig II.10 : Contrainte critique induisant la transformation martensitique en fonction de la température de l'essai. 34

Fig II.11 : Représentation schématique de l'effet "mémoire de forme". 35

Fig II.12 : Domaine d'existence de l'effet mémoire de forme et de la pseudoélasticité. 36

Fig II.13 : Plasticité de transformation pour un alliage Fe-15,1-Ni. 37

FIGURES DU CHAPITRE III 81

Fig III.1 : Transformation d'un volume V d'austénite en volume V_M de martensite. 81

Fig III.2 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique. 82

Fig III.3 : Transformation d'un volume V d'austénite en n bandes de martensite de volume V_i , constituées chacunes d'un variant différent. 82

Fig III.4 : Courbe de traction typique d'un monocristal d'alliage Cu-Zn-Al. 83

Fig III.5 : Modélisation de la courbe contrainte - déformation d'un monocristal pseudoélastique en traction uniaxiale isotherme. 84

Fig III.6 : Energie libre de Gibbs de l'austénite et de la martensite en fonction de la température. 85

FIGURES DU CHAPITRE IV 115

Fig IV. 1 : Déformation d'un élément de volume d'austénite par la transformation martensitique. 115

Fig IV. 2 : Cercle de Mohr, indiquant la contrainte normale et la contrainte tangentielle en traction uniaxiale. 116

Fig IV. 3 : Comparaison du critère de contrainte résolue maximale et du critère symétrique analogue au critère de Drucker - Prager pour la plasticité de transformation parfaite. 117

Fig IV. 4 : Représentation schématique de la contrainte nécessaire pour induire une transformation martensitique dans les alliages ferreux en fonction de la température de l'essai. 118

Fig IV. 5 : Représentation schématique des essais statiques et des essais dynamiques. 119

Fig IV. 6 : Cinétique de transformation en fonction de la contrainte appliquée. 120

Fig IV. 7 : Cinétique de la transformation en fonction de la température. 121

Fig IV. 8 : Déformation en plasticité de transformation en fonction du taux de phase formée pour différentes contraintes appliquées (essai statique). 122

Fig IV. 9 : Déformation en plasticité de transformation en fonction du taux de phase formée pour un essai dynamique. 123

FIGURES DU CHAPITRE V 147

Fig V. 1 : Transformation d'un polycristal de volume V. 147

Fig V. 2 : "Ecrouissage d'un monocristal" durant la transformation martensitique. 148

Fig V. 3 : Nombre d'orientations prises en compte pour déterminer le comportement du polycristal. 149

Fig V. 4 : Influence du déplacement g sur l'allure des courbes contrainte - déformation du polycristal. 150

Fig V. 5 : Relation entre g et la déformation en fin de transformation. 151

Fig V. 6 : Influence de l'écrouissage du monocristal sur l'allure des courbes contrainte - déformation du polycristal. 152

Fig V. 7 : Influence du module élastoplastique. 153

Fig V 8 : Evolution calculée du paramètre d'accommodation plastique en fonction de la déformation. 154

Fig V. 9 : Influence de l'écrouissage du monocristal sur le paramètre d'accommodation plastique α. 155

Fig V.10 : Influence du module de cisaillement sur l'allure des courbes contrainte - déformation du polycristal, sans fixer α à priori. 156

Fig V.11 : Influence de l'écrouissage du monocristal sur l'allure des courbes contrainte - déformation du polycristal, sans fixer α à priori. 157

Fig V.12 : Courbes expérimentales de traction résolue pour des monocristaux d'alliage Cu-Zn-Al. 158

Fig V.13 : Courbes de traction expérimentales obtenues sur des polycristaux d'alliage Cu-Zn-Al. 159

Fig V.14 : Comparaison pour la traction uniaxiale des courbes contrainte - déformation expérimentales et calculées. 160

Fig V.15 : Comparaison pour la traction uniaxiale des évolutions expérimentales et calculées du paramètre d'accommodation plastique α. 161

FIGURES DU CHAPITRE VI 184

Fig VI. 1 : Courbe de traction expérimentale d'un alliage Cu-Zn-Al biphasé. 184

Fig VI. 2 : Comportement des phases α et β du biphasé et représentation schématique de l'effet "bimodule". 185

Fig VI. 3 : Schéma décrivant l'évolution des contraintes dans le biphasé et dans les deux phases. 186

Fig VI. 4 : Construction et lieu du point E' 187

Fig VI. 5 : Modélisation des phases α et β du biphasé. 188

Fig VI. 6 : Courbes de traction - compression du biphasé calculées pour différentes valeurs de pré-charge.
Ordonnée du point E' négative. 189

Fig VI. 7 : Courbes de traction - compression du biphasé calculées pour différentes valeurs de précharge.
Ordonnée du point E' positive. 190

Fig VI. 8 : Courbe caractéristique du point E' en fonction de la proportion de phase α dans le biphasé. 191

Fig VI. 9 : Influence sur la courbe caractéristique du point E' de la différence des seuils d'écoulement des deux phases. 192

Fig VI.10 : Influence sur la courbe caractéristique du seuil d'écoulement plastique de la phase α pour un Δ positif. 193

Fig VI.11 : Influence, pour Δ négatif de la variation du seuil de transformation de la phase β, sur la courbe caractéristique. 194

Fig VI.12 : Evolution pour Δ positif de la courbe caractéristique en fonction de la valeur de l'hystérésis de la phase β. 195

Fig VI.13 : Représentation à l'aide du schéma autocohérent simplifié d'un alliage biphasé présentant un effet "bimodule" pour une valeur de Δ négative. 196

Fig VI.14 : Représentation à l'aide du schéma autocohérent simplifié d'un alliage biphasé présentant un effet "bimodule" pour une valeur de Δ positive. 197

- Avant Propos 2

- Chapitre I : Introduction 5

- Chapitre II : Plasticité de transformation transformation martensitique 9

II.1 Généralités sur la transformation martensitique 10

II.2 Aspects cristallographiques de la transformation 11

II.3 Influence de la transformation martensitique sur le comportement mécanique des matériaux 13

II.4 Thermoélasticité, Pseudoélasticité, Mémoire de Forme 14

II.5 Plasticité de transformation 17

a modélisation de Greenwood et Johnson 18
b modèle d'Abrassart 20
c modèles microscopiques 20
d modèle cristallographique de Magee 21
c conclusion 22

II.6 Plasticité de transformation parfaite et plasticité de transformation couplée 23

Figures du chapitre II 25

- Chapitre III : Loi de comportement du monocristal 38

III.1 Introduction 39

III.2 Cinématique de la transformation 41

III.2.1 Calcul de la déformation totale 41

III.2.2 Déformation et rotation associées à la transformation martensitique 44

III.2.2.1 Cas où la transformation s'effectue selon un seul variant 44

III.2.2.2 Cas de la déformation avec plusieurs variants actifs 48

III.3 Etude du comportement en sollicitation uniaxiale 50

III.3.1 Introduction 54

III.3.2 Résultats expérimentaux et interprétations dans le cas de la traction simple sur un monocristal d'alliage Cu-Zn-Al 50

III.4 Etude du comportement pour un seul variant 54

III.4.1 Introduction 54

III.4.2 Variation de l'énergie de Gibbs Fonction seuil 54

III.4.3 Ecrouissage du monocristal 60

III.4.4 Loi d'écoulement 61

III.4.4.1 Loi de comportement en plasticité de transformation 61

III.4.4.2 Principe du travail maximal 62

III.4.4.2.1 Etude à température constante 63

III.4.4.2.2 Extension du principe du travail maximal au cas où la température est une variable 65

III.4.4.3 Potentiel en plasticité de transformation 66

III.4.4.4 Identification 68

III.4.4.5 Conclusion 71

III.4.5 Etude de la transformation inverse 71

III.4.6 Conclusion 75

III.5 Etude du comportement dans le cas où plusieurs variants sont actifs 76

III.5.1 Introduction 76

III.5.2 Fonction seuil et écrouissage 76

III.5.3 Principe du travail maximal 77

III.5.4 Loi d'écoulement 78

III.6 Conclusion 80

Figures du chapitre III 81

- Chapitre IV : Loi de comportement phénoménologique pour le polycristal en plasticité de transformation 86

IV.1 Introduction 87

IV.2 Critère de la contrainte résolue maximale 88

IV.3 Critère symétrique 91

IV.4 Loi d'écoulement associée au critère symétrique 94

IV.5 Comparaisons des résultats obtenus en traction uniaxiale avec les données expérimentales pour les alliages de Fe-Ni-C et de Fe-Ni-Cr-C 99

IV.5.1 Introduction 99

IV.5.2 Détermination de la loi d'écoulement en traction uniaxiale 100

IV.5.3 comparaisons des différents résultats 101

IV.5.3.1 détermination du seuil de transformation 102

a en traction uniaxiale 102
b en compression uniaxiale 103
c pour une pression hydrostatique 103

IV.5.3.2 Cinétique de transformation 106

IV.5.3.3 Evolution de la plasticité de transformation avec le taux de martensite formée 109

IV.6 Conclusion 113

Figures du Chapitre IV 115

- Chapitre V : Le polycristal en plasticité de transformation parfaite
Homogénéisation par une méthode auto-cohérente 124

V.1 Introduction 125

V.2 Modelisation de la plasticité de transformation parfaite 126

V.2.1 Caractérisation des déformations en plasticité de transformation 126

V.2.2 Ecrouissage intracristallin 127

V.2.3 Evaluation des contraintes intergranulaires 129

V.2.4 Description de la transformation 132

V.2.5 Equations obtenues pour un variant actif n du grain I 134

V.2.6 Conclusion 136

V.3 Application au cas de la transformation sous contraintes des alliages de Cu-Zn-Al 136

V.3.1 Introduction 136

V.3.2 Ecrouissage dans le cas où un seul variant est actif 138

V.3.3 Description de la transformation 138

V.3.4 Loi de comportement 139

V.4 Application à la traction uniaxiale 140

V.4.1 Equations de comportement en traction uniaxiale 140

V.4.2 Evaluation du paramètre d'accommodation plastique 141

V.5 Résultats numériques et confrontation avec l'expérience 142

V.5.1 Résultats obtenus pour α fixé à priori 142

V.5.1.1 Influence du nombre d'orientations 143

V.5.1.2 Influence du déplacement g 143

V.5.1.3 Influence de l'écrouissage H du monocristal 144

V.5.1.4 Influence du module élastoplastique $\alpha\mu$ 144

V.5.2 Résultats obtenus avec α variable 144

V.5.3 Comparaison avec les résultats expérimentaux 145

V.6 Conclusion 146

Figures du chapitre V 147

- Chapitre VII : Conclusion 198

- Références bibliographiques 202

- Bibliographie 203

- Table des Figures 206

- Table des matières 213