

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Lucas DARBAS

Propriétés faisceautiques de l'homologie de Hochschild supérieure

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le vendredi 8 septembre 2023
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Rapporteurs avant soutenance :

Grégory GINOT Professeur des Universités, LAGA, Université Paris 13
Bernhard KELLER Professeur des Universités, IMJ-PRG, Université Paris 7

Composition du Jury :

Président :	Geoffrey POWELL	Directeur de Recherche CNRS, LAREMA, Université Angers
Examineurs :	Grégory GINOT	Professeur des Universités, LAGA, Université Paris 13
	Bernhard KELLER	Professeur des Universités, IMJ-PRG, Université Paris 7
	Michel VAQUIE	Chargé de Recherche CNRS, IMT, Université Toulouse 3
	Christine VESPA	Professeure des Universités, I2M, Aix-Marseille Université
Dir. de thèse :	Friedrich WAGEMANN	Maître de Conférences, LMJL, Nantes Université
Co-enc. de thèse :	Hossein ABBASPOUR	Maître de Conférences, LMJL, Nantes Université

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mes encadrants Hossein Abbaspour et Friedrich Wagemann pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce travail de thèse de doctorat. Leur accompagnement essentiel pour définir et atteindre mes objectifs de recherche remontait déjà à l'époque où j'étais encore étudiant à l'Université de Nantes. Je tiens également à remercier le comité de suivi individuel composé de Grégory Ginot et Geoffrey Powell pour leurs précieux rapports annuels sur mon travail m'apportant une expertise complémentaire.

Enfin, je voudrais adresser toute ma reconnaissance à mes parents Sandrine et Stanislas ainsi qu'à mes grand-parents Nicole, Jean-Pierre, Marie-Thérèse et Jean-Louis sans qui jamais je n'aurais eu accès à l'Université. J'ai aussi une pensée pour mon frère Corentin, qui m'a ouvert la voie.

SOMMAIRE

Introduction	7
Conventions	15
1 Foncteur de Hochschild supérieur	19
1.1 Homologie de Hochschild d'ordre supérieur	21
1.2 Localisation	24
2 Cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur des schémas	31
2.1 Décomposition de Hodge	34
2.2 Schémas Affines	39
2.3 Modules sur un préfaisceau de CDGA	46
2.4 Lien entre les deux définitions	49
3 Cohomologie de Hochschild des schémas	53
3.1 Généralisation du théorème de Swan	53
3.2 Suites Spectrales	58
A Colimites homotopiques	61
A.1 Structure de modèle projective	61
A.2 Structure de modèle de Reedy	62
A.3 Poussé-en-avant homotopique	64
B Ensembles simpliciaux	69
B.1 Lemme de Yoneda	69
B.2 Squelette	71
B.3 Ensemble simplicial minimal	72
Bibliographie	73

INTRODUCTION

Initialement, le *complexe de Hochschild* $C(A, M)$ d'une algèbre associative A à coefficients dans un A -bimodule M est défini par le complexe de chaîne

$$\cdots \longrightarrow M \otimes A \otimes A \otimes A \longrightarrow M \otimes A \otimes A \longrightarrow M \otimes A \longrightarrow M$$

où la différentielle $d : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes A^{\otimes n-1}$ est définie par $d = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ avec

$$d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \begin{cases} ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n & \text{si } i = 0 \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n & \text{si } 0 < i < n \\ a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} & \text{si } i = n \end{cases}$$

Ce complexe est relié à la résolution libre canonique de l'algèbre associative A et ses groupes d'homologie $H_n(A, M)$ permettent¹ de calculer le produit de torsion de M et A sur $A^e = A \otimes A^{\text{op}}$ lorsque l'anneau de base est un corps :

$$H_n(A, M) \cong \text{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

Également, le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg donne² un isomorphisme naturel entre les groupes d'homologie $HH_n(A) = H_n(A, A)$ d'une algèbre lisse A et son complexe de de Rham :

$$HH_n(A) \cong \Omega_A^n$$

On peut aussi définir un complexe de cochaîne $C^n(A, M) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, M)$ dont les groupes de cohomologie $H^n(A, M)$ permettent³ de calculer le module d'extensions de A et M sur A^e lorsque l'anneau de base est un corps :

$$H^n(A, M) \cong \text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$$

1. Lod98, p. 12.

2. Lod98, p. 103.

3. Lod98, p. 41.

C'est en suivant cette formule que Swan⁴ a défini les groupes de *cohomologie de Hochschild* d'un schéma X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} par $\text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^n(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$ où $\delta : X \rightarrow X \times X$ est le morphisme diagonal de X .

Il existe une autre manière de visualiser le complexe $C(A, M)$ d'une algèbre commutative A à coefficients dans un A -module M . Ce dernier provient du foncteur de Loday⁵

$$\mathcal{L}(A, M) : \mathbf{Fin}' \longrightarrow \mathbf{Mod}$$

qui associe à un ensemble pointé fini K le module $M \otimes A^{\otimes K \setminus *}$. L'action d'une application pointée $f : K \rightarrow L$ est donnée par la formule

$$f_* \left(\bigotimes_{x \in K} a_x \right) = \bigotimes_{y \in L} \left(\prod_{f(x)=y} a_x \right)$$

En composant le foncteur de Loday avec le cercle simplicial \mathbf{S}^1

$$\cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \{*, s_0\sigma, s_1\sigma\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \{*, \sigma\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \{*\}$$

on obtient un module simplicial $\mathbf{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Fin}' \rightarrow \mathbf{Mod}$ dont le complexe de chaîne associé⁶ est $C(A, M)$. Il apparaît en chaque degré une copie de M à la place du point de base de \mathbf{S}^1 et des copies de A à la place des autres simplexes de \mathbf{S}^1 . En suivant cette approche, Pirashvili⁷ a remplacé le cercle \mathbf{S}^1 par d'autres ensembles simpliciaux pointés K pour obtenir de nouveaux complexes de (co)chaîne $C(K, A, M)$ et de nouveaux foncteurs (co)homologiques $H(K, A, M)$.

Une des premières propriétés⁸ remarquables de l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative est sa compatibilité avec la localisation. Plus précisément, si S est une partie multiplicative d'une algèbre commutative A alors les groupes d'homologie de Hochschild $HH_n(S^{-1}A)$ de l'anneau de fractions de A défini par S sont isomorphes aux $S^{-1}A$ -modules $S^{-1}HH_n(A) = (S^{-1}A) \otimes_A HH_n(A)$. Ces isomorphismes furent utilisés par Swan pour étudier la cohomologie de Hochschild des schémas affines.

4. Swa96.

5. Lod98, p. 221.

6. Wei94, p. 259.

7. Pir00.

8. Lod98, p. 14.

Au Chapitre 1, nous allons définir le *foncteur de Hochschild supérieur* et en rappeler les principales propriétés. Nous étudierons en particulier l'*homologie de Hochschild d'ordre supérieur*, c'est à dire l'homologie de Hochschild supérieure associée aux sphères. Nous démontrerons ensuite que les complexes $C(K, A) = C(K, A, A)$ associés aux ensembles simpliciaux pointés et connexes commutent avec la localisation des algèbres commutatives sur un corps de caractéristique nulle.

Théorème 1.2.3

Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe, A une algèbre commutative sur un corps de caractéristique nulle et S une partie multiplicative de A . Le morphisme canonique de CDGA

$$S^{-1}C(K, A) \longrightarrow C(K, S^{-1}A)$$

est un quasi-isomorphisme.

En travaillant sur un anneau de base contenant \mathbb{Q} , Loday a établi⁹ l'existence d'une λ -décomposition pour l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative A à coefficients dans un A -module M

$$H_n(A, M) \cong H_n^{(1)}(A, M) \oplus \dots \oplus H_n^{(n)}(A, M)$$

telle que $H_n^{(n)}(A, M) \cong M \otimes_A \Omega_A^n$. Cette décomposition se situant au niveau du complexe, Swan en a déduit¹⁰ l'existence d'une décomposition de Hodge pour la cohomologie de Hochschild d'un schéma lisse et séparé X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F}

$$HH^n(X, \mathcal{F}) = \mathbb{E}xt_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(X, \mathcal{T}_X^q \otimes \mathcal{F})$$

en utilisant la définition de Grothendieck et Loday ainsi que la suite spectrale de Hodge

$$E_2^{pq} = \mathbb{E}xt_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \implies \mathbb{E}xt_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$$

9. Lod98, p. 145.

10. Swa96, p. 62.

où \mathcal{C}_X est le complexe de faisceau sur X associé à $U \mapsto C(\mathcal{O}_X(U))$, $\mathcal{H}_X = H(\mathcal{C}_X)$ son homologie et \mathcal{T}_X^q le faisceau dual de Ω_X^q . Par ailleurs, en utilisant une autre suite spectrale, Pirashvili a généralisé¹¹ la λ -décomposition de Loday à la (co)homologie de Hochschild d'ordre d d'une algèbre commutative A par une autre décomposition telle que

$$H_n^{[d]}(A) \cong \bigoplus_{i+jd=n} H_{i+j}^{(j)}(A, A)$$

lorsque d est impair.

Swan a exploré une troisième définition de la cohomologie de Hochschild d'un schéma séparé X . Basée sur la définition de Gerstenhaber et Schack¹² de la cohomologie de Hochschild d'un diagramme d'algèbre \mathcal{O} à coefficients dans un \mathcal{O} -module \mathcal{M} , soit $\text{Ext}_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ où $\mathcal{O}^e = \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}^{\text{op}}$, il s'agit de considérer le diagramme

$$\mathcal{O} : U \longmapsto \mathcal{O}_X(U)$$

sur la catégorie des ouverts affines de X . Les \mathcal{O}_X -modules induisent naturellement des \mathcal{O} -modules par restrictions aux ouverts affines.

Au Chapitre 2, nous allons définir la *K-cohomologie d'un schéma X à coefficients dans un \mathcal{O}_X module \mathcal{F}* , soit $H(K, X, \mathcal{F})$. En adaptant la suite spectrale de Hodge ainsi que le théorème HKR de Pirashvili, nous allons démontrer l'existence d'une *décomposition de Hodge pour la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur d'un schéma lisse et séparé sur un corps de caractéristique nulle*.

11. Pir00, p. 166-167.

12. GS88, p. 183.

Théorème 2.1.5

Soient $d > 0$ un entier, X un schéma séparé et lisse sur un corps de caractéristique nulle et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) = H^n(\mathbf{S}^d, X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{p+jd=n} H^p(X, \mathcal{D}_X^j \otimes \mathcal{F})$$

où \mathcal{D}_X^j est le faisceau dual de Ω_X^j si d est impair et le faisceau dual de la $j^{\text{ème}}$ puissance symétrique sur \mathcal{O}_X de Ω_X^1 si d est pair.

Nous nous assurerons ensuite que la cohomologie $H(K, X, \mathcal{F})$ est isomorphe à la cohomologie $H(K, A, M)$ dans le cas où K est connexe, $X = \text{Spec}(A)$ est affine sur un corps de caractéristique nulle et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ est quasi-cohérent.

Théorème 2.2.3

Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine sur un corps de caractéristique nulle et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Il existe un isomorphisme naturel

$$H(K, X, \mathcal{F}) \cong H(K, A, M)$$

Nous comparerons dans ce cas les deux suites spectrales à notre disposition.

Théorème 2.2.7

Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine sur un corps de caractéristique nulle et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. La suite spectrale de Hodge aboutissant à $H(K, X, \mathcal{F})$ est naturellement isomorphe à la suite spectrale de Pirashvili aboutissant à $H(K, A, M)$.

Pour adapter aux ordres supérieurs la troisième définition de Swan de la cohomologie de Hochschild d'un schéma séparé, nous définirons dans un premier temps une structure de modèle sur la catégorie des modules sur un préfaisceau de CDGA en utilisant les méthodes de Schwede et Shipley¹³.

Théorème 2.3.1

Soit \mathcal{A} un préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé X . La catégorie $\mathcal{A}\text{-mod}$ des préfaisceaux de \mathcal{A} -module sur X est une catégorie de modèle monoïdale symétrique telle que les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les épimorphismes.

Puis, dans un second temps, nous généraliserons cette troisième définition de Swan de la cohomologie de Hochschild d'un schéma séparé X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} aux ordres supérieurs en montrant qu'elle coïncide avec notre définition de $H_{[d]}(X, \mathcal{F})$ lorsque l'on se base sur un corps de caractéristique nulle et que \mathcal{F} est quasi-cohérent.

Théorème 2.4.3

Soient $d > 0$ un entier, X un schéma séparé sur un corps de caractéristique nulle, \mathcal{O} son préfaisceau structural et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^n\left(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}(\mathcal{O}, \mathcal{F})\right)$$

Dans le cas de la cohomologie de Hochschild d'ordre 1 d'un schéma X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on dispose toujours de la première définition donnée par Swan. Elle arrive avec une suite spectrale de Grothendieck

$$E_2^{pq} = H^p\left(X \times X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \times X}}^q(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})\right) \implies \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{p+q}(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})$$

où $\delta : X \rightarrow X \times X$ est le morphisme diagonal de X .

13. SS00.

Au Chapitre 3, nous allons démontrer que la définition de Grothendieck et Loday de la cohomologie de Hochschild d'un schéma séparé sur un corps est isomorphe à celle de Swan. Ceci avait été démontré¹⁴ par Swan dans le cas d'un schéma X quasi-projectif sur un corps en recollant des résolutions spécifiques¹⁵ données sur les ouverts affines de X . Nous utiliserons notre étude des préfaisceaux ainsi que les méthodes de Spaltenstein¹⁶ pour établir une équivalence faible naturelle de \mathcal{O}_X -module $\mathcal{C}_X \simeq \mathbb{L}\delta^*\delta_*\mathcal{O}_X$.

Théorème 3.1.4

Soit X un schéma séparé sur un corps, $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Il existe un isomorphisme naturel

$$HH^n(X, \mathcal{F}) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^n(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})$$

Enfin, nous montrerons que la suite spectrale de Hodge est isomorphe à la suite spectrale de Grothendieck dans le cas des schémas lisses et séparés sur un corps, ce qui avait été démontré¹⁷ par Swan dans le cas d'un schéma lisse et quasi-projectif sur un corps.

Théorème 3.2.1

Soient X un schéma lisse et séparé sur un corps, $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Les deux suites spectrales

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \implies HH^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

$$H^p(X \times X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \times X}}^q(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})) \implies \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{p+q}(\delta_*\mathcal{O}_X, \delta_*\mathcal{F})$$

sont naturellement isomorphes.

14. Swa96, p. 60.

15. Swa96, p. 78.

16. Spa88.

17. Swa96, p. 61.

En annexe, nous donnons les définitions usuelles de la colimite homotopique d'un foncteur avec notamment le cas bien connu des poussés-en-avant homotopiques. Nous en rappelons le calcul dans les catégories de modèles propre à gauche. Dans un second paragraphe, nous exploitons ces notions dans la catégorie des ensembles simpliciaux. Après avoir donné une version homotopique du lemme de Yoneda, nous rappelons les notions de squelette et d'ensemble simplicial minimal qui pourront être utilisés de manière indépendante pour démontrer le théorème 1.2.3.

CONVENTIONS

Algèbre homologique

Soit \mathbf{A} une catégorie abélienne. Un complexe C dans \mathbf{A} est un diagramme

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

tel que $d_{n-1}d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Son *homologie* est l'objet \mathbb{Z} -gradué HC de \mathbf{A} défini par $H_n(C) = \ker(d_n)/\text{im}(d_{n+1})$. On notera $H^n(C) = H_{-n}(C)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et on parlera alors de la *cohomologie* de C . Le *complexe hom* $\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathbf{A})}(C, D)$ de deux complexes C et D dans \mathbf{A} est défini par

$$\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathbf{A})}(C, D)_n = \prod_{q-p=n} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(C_p, D_q)$$

Pour tout foncteur additif $\otimes : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ et tous complexes C et D dans \mathbf{A} , on définit un complexe $C \otimes D$ dans \mathbf{A} par

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$$

On note $\text{Ch}(\mathbf{A})$ la catégorie des complexes dans \mathbf{A} . Lorsque \mathbf{A} est une catégorie de Grothendieck¹⁸, $\text{Ch}(\mathbf{A})$ admet une structure de modèle dite *injective*¹⁹ qui est cofibramment engendrée, propre et où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les cofibrations sont les monomorphismes.

Par défaut, tous les espaces vectoriels sont sur un corps de caractéristique nulle, soit \mathbf{k} , et on note $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$. La catégorie des espaces vectoriels est notée \mathbf{Vect} . Un complexe dans \mathbf{Vect} est appelé *complexe de chaîne* et on note $\mathbf{Ch} = \text{Ch}(\mathbf{Vect})$.

18. Hov01, p. 2.

19. Hov01, p. 5.

Ensembles simpliciaux

Soit Δ la petite catégorie ayant pour objets les ensembles finis totalement ordonnés, soient $[n] = \{0, \dots, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour morphismes les applications croissantes. Un objet *simplicial* d'une catégorie \mathbf{C} est un foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$ et un objet *cosimplicial* de \mathbf{C} est un foncteur $\Delta \rightarrow \mathbf{C}$. La catégorie des objets simpliciaux de \mathbf{C} est noté \mathbf{sC} .

Un ensemble simplicial *fini* est un objet simplicial de la catégorie des ensembles finis notée \mathbf{Fin} . La catégorie des ensembles finis et pointés est notée \mathbf{Fin}' .

Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $\Delta^d = \text{Hom}_{\Delta}(_, [d]) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Fin}$ le *d-simplexe standard*, $\partial\Delta^d \subset \Delta^d$ le sous-ensemble simplicial engendré par les simplexes non-dégénérés $\sigma \neq 1_{[d]}$ son *bord* et $*$ = Δ^0 le *point*. On définit la *d-sphère* \mathbf{S}^d par le poussé-en-avant d'ensemble simplicial

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^d & \longrightarrow & \Delta^d \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & \mathbf{S}^d \end{array}$$

C'est un ensemble simplicial fini et pointé.

La catégorie \mathbf{sSet} des ensembles simpliciaux admet une structure de modèle dite *de Kan*²⁰ qui est cofibramment engendrée, propre et où les cofibrations sont les injections.

Monoïdes et modules

Soit $(\mathbf{M}, \otimes, \mathbf{1})$ une catégorie monoïdale. Un *monoïde* dans $(\mathbf{M}, \otimes, \mathbf{1})$ est un objet A de \mathbf{M} avec deux morphismes $A \otimes A \rightarrow A$ et $\mathbf{1} \rightarrow A$ rendant commutatifs les diagrammes usuels²¹ d'associativité et d'unitarité. Un *A-module* est un objet M de \mathbf{M} avec un morphisme $A \otimes M \rightarrow M$ rendant commutatif les diagrammes usuels²² d'associativité et d'unitarité. On note $A\text{-mod}$ la catégorie des *A-modules* et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_A^n la $n^{\text{ème}}$ puissance symétriques sur A et Λ_A^n la $n^{\text{ème}}$ puissance alternée sur A .

20. Hov99, p. 98 ; Hir03, p. 242 ; Hov99, p. 79.

21. Mac98, p. 170.

22. Mac98, p. 174.

On appelle *algèbres* les monoïdes commutatifs de $(\mathbf{Vect}, \otimes, \mathbf{k})$ et on note **Alg** leur catégorie (ce sont les algèbres associatives commutatives et unitaires sur \mathbf{k}). Pour toute algèbre A on note $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A , Ω_A^1 le A -module des différentielles²³ de A et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega_A^n = \bigwedge_A^n(\Omega_A^1)$. Une *partie multiplicative* de A est un sous-ensemble S de A contenant l'unité de A et stable par multiplication. On note $S^{-1}A$ l'anneau de fractions²⁴ de A défini par S et pour tout A -module M , on note $S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M$. Lorsque $S = \{1, s, s^2, \dots, s^n, \dots\}$, on note $A_s = S^{-1}A$ et $M_s = S^{-1}M$.

On appelle *CDGA* les monoïdes commutatifs de $(\mathbf{Ch}, \otimes, \mathbf{k})$ et on note **CDGA** leur catégorie (ce sont les algèbres commutatives différentielles graduées sur \mathbf{k}). Lorsque \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle, la catégorie **CDGA** admet une structure de modèle²⁵ cofibramment engendrée où les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les épimorphismes. Toute algèbre simpliciale $A : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}$ induit naturellement une CDGA comme suit. Le complexe de chaîne sous-jacent²⁶ est

$$\cdots \longrightarrow A_3 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_0$$

où la différentielle $A_n \rightarrow A_{n-1}$ est définie par la somme alternée $\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$ des faces de A . La multiplication est donnée par la composition du produit de battage²⁷ avec la multiplication de A :

$$A_p \otimes A_q \longrightarrow A_{p+q} \otimes A_{p+q} \longrightarrow A_{p+q}$$

On conserve la notation A pour la CDGA ainsi obtenue.

Faisceaux

Soit X un espace topologique. Tous les faisceaux sur X sont à valeurs dans **Vect**. Pour tout faisceau \mathcal{F} sur X , on note $\Gamma\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$.

23. Bou07, p. III.134.

24. Bou85, p. 76.

25. Hin97, p. 10, 12.

26. Wei94, p. 259.

27. Mac75, p. 240.

Un *espace annelé* X est un espace topologique muni d'un faisceau \mathcal{O}_X à valeurs dans **Alg**. On note $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}$ le faisceau hom ²⁸, $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}$ le faisceau ext ²⁹ et pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , on note $\mathcal{F}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ le faisceau dual de \mathcal{F} . Si cela ne prête à aucune confusion alors on pourra noter $\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_X}$ le produit tensoriel de \mathcal{O}_X -module.

Si X est un schéma alors on a par convention un morphisme de schéma $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{k})$ et tout morphisme de schéma $X \rightarrow Y$ rend commutatif le triangle

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & \text{Spec}(\mathbf{k}) & \end{array}$$

On note \times le produit de schéma³⁰ au dessus de $\text{Spec}(\mathbf{k})$, Ω_X^1 le \mathcal{O}_X -module des 1-différentielles³¹ de X par rapport à $\text{Spec}(\mathbf{k})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\Omega_X^n = \wedge_{\mathcal{O}_X}^n(\Omega_X^1)$. Si $X = \text{Spec}(A)$ et M est un A -module alors on note \widetilde{M} le faisceau associé à M .

28. Gro57, p. 185.

29. Gro57, p. 187.

30. Gro60, p. I.104-I.105.

31. Gro67, p. 14.

FONCTEUR DE HOCHSCHILD SUPÉRIEUR

Dans tous ce chapitre, si rien d'autre n'est spécifié, on suppose que \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle. On rappelle que toutes les algèbres sont supposées associatives, commutatives et unitaires sur \mathbf{k} .

Soit A une algèbre. Le foncteur de Loday¹

$$\mathcal{L}(A, A) : \mathbf{Fin} \longrightarrow \mathbf{Alg}$$

associe à tout ensemble fini K le produit tensoriel $A^{\otimes K}$ et à toute application $f : K \rightarrow L$ le morphisme d'algèbre $f_* : A^{\otimes K} \rightarrow A^{\otimes L}$ défini par

$$f_* \left(\bigotimes_{x \in K} a_x \right) = \bigotimes_{y \in L} \left(\prod_{f(x)=y} a_x \right)$$

L'idée de Pirashvili² est de construire une algèbre simpliciale $C(K, A)$ à partir d'un ensemble simplicial fini K en composant les foncteurs K et $\mathcal{L}(A, A)$:

$$C(K, A) : \Delta^{\text{op}} \xrightarrow{K} \mathbf{Fin} \xrightarrow{\mathcal{L}(A, A)} \mathbf{Alg}$$

On obtient par la suite une CDGA dont on note l'homologie $H(K, A)$. Notons ici que si A est une CDGA alors on peut définir³ $C(K, A)$ en prenant le complexe total du double complexe $(A^{\otimes K_p})_q$. On peut également étendre la définition de $C(K, A)$ à un ensemble simplicial quelconque K en prenant la colimite du foncteur

$$C(_, A) : (\mathbf{sFin} \downarrow K) \longrightarrow \mathbf{CDGA}$$

1. Lod98, p. 221.

2. Pir00, p. 163.

3. GTZ14, p. 643-644.

où $(\mathbf{sFin} \downarrow K)$ désigne la catégorie des ensembles simpliciaux finis au dessus de K . Ainsi défini, le *foncteur de Hochschild supérieur*

$$C : \mathbf{sSet} \times \mathbf{CDGA} \longrightarrow \mathbf{CDGA}$$

préserve⁴ les équivalences faibles et les colimites homotopiques d'ensembles simpliciaux.

Exemple 1.0.1. Soit A une CDGA. Pour tout diagramme d'ensemble simplicial

$$X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$$

on a une équivalence faible naturelle de CDGA

$$C(X \cup_Z^h Y, A) \simeq C(X, A) \underset{C(Z, A)}{\mathbb{L} \otimes} C(Y, A)$$

Etant donné notre objectif géométrique des schémas, nous n'étudierons le complexe $C(K, A)$ que lorsque A est une CDGA concentrée en degré 0, c'est-à-dire une algèbre. L'exemple suivant est important pour munir $C(K, A)$ d'une structure de A -module.

Exemple 1.0.2. Soit A une algèbre. Le complexe $C(*, A)$ est donné par

$$\dots \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} A \xrightarrow{0} A$$

donc A est un rétract de $C(*, A)$ en tant que CDGA. En particulier, si K est un ensemble simplicial pointé alors $C(K, A)$ est une CDGA sur A :

$$A \longrightarrow C(*, A) \longrightarrow C(K, A)$$

Dans toute la suite, on munira systématiquement $C(K, A)$ de la structure de CDGA sur A décrite dans l'exemple 1.0.2 lorsque K est un ensemble simplicial pointé.

4. GTZ14, p. 648.

1.1 Homologie de Hochschild d'ordre supérieur

On introduit ici le *complexe de Hochschild d'ordre supérieur* et son homologie.

Définition 1.1.1. Soient $d > 0$ un entier et A une algèbre. On définit

$$C^{[d]}(A) = C(\mathbf{S}^d, A)$$

le *complexe de Hochschild d'ordre d de A* et

$$H^{[d]}(A) = H(\mathbf{S}^d, A)$$

l'*homologie de Hochschild d'ordre d de A* . On note en particulier

$$C(A) = C^{[1]}(A)$$

le *complexe de Hochschild de A* et

$$HH(A) = H^{[1]}(A)$$

l'*homologie de Hochschild de A* .

On peut toujours calculer les premiers groupes de cette homologie.

Exemple 1.1.2. Pour tout entier $d > 0$, il existe un isomorphisme naturel de A -module

$$H_q^{[d]}(A) \cong \begin{cases} A & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < q < d \\ \Omega_A^1 & \text{si } q = d \end{cases}$$

En caractéristique nulle, c'est une conséquence⁵ de la décomposition de Hodge de Pirashvili ; mais on peut effectuer le calcul à la main **en toute caractéristique**. Notre modèle simplicial \mathbf{S}^d de la sphère est donné par

$$\dots, \mathbf{S}_{d+1}^d = \{*, s_0\sigma, \dots, s_d\sigma\}, \mathbf{S}_d^d = \{*, \sigma\}, \mathbf{S}_{d-1}^d = \{*\}, \dots, \mathbf{S}_0^d = \{*\}$$

5. Pir00, p. 166, 163, 115.

Pour décrire la différentielle en degrés $q \leq d$, il nous suffit de calculer les fibres au dessus de $\{\sigma\}$ par les différentes faces d_i :

$$d_i^{-1}\{\sigma\} = \begin{cases} \{s_0\sigma\} & \text{si } i = 0 \\ \{s_{i-1}\sigma, s_i\sigma\} & \text{si } 0 < i \leq d \\ \{s_d\sigma\} & \text{si } i = d + 1 \end{cases}$$

Supposons que d est un nombre **impair**. Le complexe $C^{[d]}(A)$ est alors donné par

$$\dots \longrightarrow A \otimes A^{\otimes d+1} \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{1} A \xrightarrow{0} A$$

donc il suffit de montrer que $H_d^{[d]}(A) \cong \Omega_A^1$. On peut utiliser pour cela la définition ⁶ de Ω_A^1 par la règle de Leibniz. Les bords de degré d dans $A \otimes A$ sont engendrés par les éléments de la forme $1 \otimes xy - y \otimes x - x \otimes y$:

$$\begin{aligned} d(1 \otimes x_0 \otimes \dots \otimes x_d) &= \left(\prod_{j \neq 0} x_j \right) \otimes x_0 + \sum_{i=1}^d (-1)^i \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) \otimes x_{i-1} x_i + \left(\prod_{j \neq d} x_j \right) \otimes x_d \\ &= \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) (x_i \otimes x_{i-1} - 1 \otimes x_{i-1} x_i + x_{i-1} \otimes x_i) \end{aligned}$$

Réciproquement, les éléments de la forme $1 \otimes xy - y \otimes x - x \otimes y$ sont des bords :

$$\begin{aligned} d(1 \otimes x \otimes y \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) &= y \otimes x - 1 \otimes xy + x \otimes y + \sum_{i=3}^{d+1} (-1)^i xy \otimes 1 \\ &= y \otimes x - 1 \otimes xy + x \otimes y \end{aligned}$$

Supposons à présent que d est un nombre **pair**. Le complexe $C^{[d]}(A)$ est alors donné par

$$\dots \longrightarrow A \otimes A^{\otimes d+1} \xrightarrow{d} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{1} A \xrightarrow{0} A$$

où μ est multiplication de A , donc il suffit de montrer que $H_d^{[d]}(A) \cong \Omega_A^1$. Par définition ⁷, on a $\Omega_A^1 = \ker(\mu)/\ker(\mu)^2$. Puisque $\ker(\mu)$ est engendré par les éléments de la forme $1 \otimes x - x \otimes 1$, les bords de degré d dans $A \otimes A$ sont dans $\ker(\mu)^2$:

6. Lod98, p. 11.

7. Bou07, p. III.134.

$$\begin{aligned}
d(1 \otimes x_0 \otimes \cdots \otimes x_d) &= \left(\prod_{j \neq 0} x_j \right) \otimes x_0 + \sum_{i=1}^d (-1)^i \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) \otimes x_{i-1} x_i - \left(\prod_{j \neq d} x_j \right) \otimes x_d \\
&= \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) (x_i \otimes x_{i-1} - 1 \otimes x_{i-1} x_i + x_{i-1} \otimes x_i) \\
&= \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) (1 \otimes x_{i-1} - x_{i-1} \otimes 1) (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i)
\end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} \left(\prod_{j \neq i-1, i} x_j \right) (x_{i-1} x_i \otimes 1) = \left(\prod_{j=0}^d x_j \right) \sum_{i=1}^d (-1)^{i-1} (1 \otimes 1) = 0$.

Réciproquement, $\ker(\mu)^2$ est engendré par des bords :

$$\begin{aligned}
d(1 \otimes x \otimes y \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) &= y \otimes x - 1 \otimes xy + x \otimes y + \sum_{i=3}^{d+1} (-1)^i xy \otimes 1 \\
&= (1 \otimes x - x \otimes 1)(y \otimes 1 - 1 \otimes y)
\end{aligned}$$

Une conséquence importante de cet exemple est que tout A -module peut être considéré comme un $C^{[d]}(A)$ -module à travers le morphisme de CDGA

$$C^{[d]}(A) \longrightarrow A$$

donné par la projection naturelle d'une CDGA gradué positivement sur son homologie de degré 0.

Pour calculer les degrés suivants, on peut avec plus d'hypothèses utiliser l'étude des foncteurs $\mathbf{Fin}' \rightarrow \mathbf{Vect}$ de Pirashvili : si A est une algèbre lisse alors il existe⁸ un isomorphisme naturel

$$H_q^{[d]}(A) \cong \mathcal{J}_q(H(\mathbf{S}^d)) \otimes_{\mathbf{Fin}'} \mathcal{L}(A, A)$$

où \mathcal{J} est la version duale et graduée du foncteur de Loday⁹ et $H(\mathbf{S}^d)$ est la cogèbre¹⁰ de l'homologie simpliciale de \mathbf{S}^d à coefficients dans \mathbf{k} . Cette dernière est engendré par un

8. Pir00, p. 175.

9. Pir00, p. 158.

10. May82, p. 137.

élément σ de degré d :

$$H_n(\mathbf{S}^d) \cong \begin{cases} \mathbf{k} & \text{si } n = 0, d \\ 0 & \text{si } n \neq 0, d \end{cases}$$

Par conséquent, son algèbre duale $H(\mathbf{S}^d)^\vee \cong \mathbf{k}[x]/(x^2)$ est engendré par un élément $x = \sigma^\vee$ de degré d et de carré nul :

$$x^2(1) = (x \otimes x)(1 \otimes 1) = 0 \otimes 0 = 0$$

$$x^2(\sigma) = (x \otimes x)(1 \otimes \sigma + \sigma \otimes 1) = 0 \otimes 1 + 1 \otimes 0 = 0$$

Le calcul¹¹ du foncteur de Loday de l'algèbre graduée $\mathbf{k}[x]/(x^2)$ par Pirashvili permet d'établir le théorème suivant.

Théorème de Pirashvili : Soient $d > 0$ un entier et A une algèbre lisse. Il existe un isomorphisme naturel de A -module

$$H_q^{[d]}(A) \cong \begin{cases} \Omega_A^j & \text{si } q = jd \text{ \& } d \text{ est impair} \\ S_A^j(\Omega_A^1) & \text{si } q = jd \text{ \& } d \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } d \nmid q \end{cases}$$

1.2 Localisation

Si R est une algèbre graduée commutative (CGA pour abrégé) et S est une partie multiplicative de l'algèbre $R_0 \subset R$ alors on définit la localisation $S^{-1}R = (S^{-1}R_0) \otimes_{R_0} R$ qui est également une CGA. Si R est plus généralement une CDGA alors $S^{-1}R$ hérite naturellement d'une structure de CDGA. On dispose alors d'un foncteur exact

$$S^{-1} : R\text{-mod} \longrightarrow (S^{-1}R)\text{-mod}$$

donné par le changement de base plat $(S^{-1}R) \otimes_R$. En particulier, on peut utiliser le lemme suivant.

11. Pir00, p. 158, 163.

Lemme 1.2.1. Soient $R' \rightarrow A$, $R \rightarrow B$ deux morphismes de CDGA, $R \rightarrow R'$ un morphisme plat de CDGA et $B' = R' \otimes_R B$. Il existe une équivalence faible naturelle de CDGA

$$A \underset{R}{\otimes}^{\mathbb{L}} B \simeq A \underset{R'}{\otimes}^{\mathbb{L}} B'$$

Démonstration. Soit Q un remplacement cofibrant de B comme CDGA sur R . Le foncteur $R' \otimes_R$ est exact, donc $Q' = R' \otimes_R Q$ est un remplacement cofibrant de B' comme CDGA sur R' . On conclut par associativité du produit tensoriel :

$$A \otimes_R Q \cong A \otimes_{R'} R' \otimes_R Q \cong A \otimes_{R'} Q'$$

Il est un fait bien connu que l'homologie de Hochschild commute avec la localisation. Nous allons généraliser ce fait à l'homologie de Hochschild supérieure associée aux ensembles simpliciaux pointés et connexes.

Exemples 1.2.2. 1. *Le cercle.* Par définition, on a $\mathbf{S}^1 \simeq * \cup_{\partial \Delta^1}^h \Delta^1 \simeq * \cup_{*\sqcup*}^h *$ donc d'après les exemples 1.0.1 et 1.0.2, le complexe de Hochschild d'une algèbre A est

$$C(A) \simeq A \underset{A^e}{\otimes}^{\mathbb{L}} A$$

où $A^e = A \otimes A$. Cette équivalence faible, bien connue¹², existe **en toute caractéristique**. Pour toute partie multiplicative S de A , on a $S^{-1}A \cong (S^{-1}A)^e \otimes_{A^e} A$ donc

$$S^{-1}C(A) \simeq (S^{-1}A) \underset{A^e}{\otimes}^{\mathbb{L}} A \simeq (S^{-1}A) \underset{(S^{-1}A)^e}{\otimes}^{\mathbb{L}} (S^{-1}A) \simeq C(S^{-1}A)$$

d'après le lemme 1.2.1.

2. *Les simplexes standards.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout sommet de Δ^n arrive avec une équivalence faible d'ensemble simplicial $* \xrightarrow{\sim} \Delta^n$. D'après l'exemple 1.0.2, on a $A \xrightarrow{\sim} C(\Delta^n, A)$ pour toute algèbre A . Ainsi, pour toute partie multiplicative S de A , le triangle commutatif suivant induit $S^{-1}C(\Delta^n, A) \simeq C(\Delta^n, S^{-1}A)$:

12. Lod98, p. 12.

$$\begin{array}{ccc}
 & S^{-1}A & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 S^{-1}C(\Delta^n, A) & \longrightarrow & C(\Delta^n, S^{-1}A)
 \end{array}$$

3. *Deux points.* D'après l'exemple 1.0.2, on a¹³ pour toute algèbre A

$$S^{-1}C(* \sqcup *, A) \simeq S^{-1}A \otimes A \not\simeq (S^{-1}A)^e \simeq C(* \sqcup *, S^{-1}A)$$

Pour démontrer le théorème principal de cette section, on dispose de deux stratégies. La première utilise le squelette des ensembles simpliciaux tandis que la seconde repose les ensembles simpliciaux minimaux.

Théorème 1.2.3. Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe et S une partie multiplicative d'une algèbre A . Le morphisme canonique de CDGA

$$S^{-1}C(K, A) \longrightarrow C(K, S^{-1}A)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration 1. En suivant les notations du paragraphe B.2, on considère

$$K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^n \subset K^{n+1} \subset \dots \subset K$$

le squelette de K . Puisque la localisation et le foncteur de Hochschild supérieur préservent¹⁴ les colimites homotopiques, on a une factorisation

$$S^{-1}C(K, A) \simeq \operatorname{hocolim}_{n \in \mathbb{N}} S^{-1}C(K^n, A) \longrightarrow \operatorname{hocolim}_{n \in \mathbb{N}} C(K^n, S^{-1}A) \simeq C(K, S^{-1}A)$$

Il suffit donc de montrer qu'à partir d'un certain rang, le morphisme canonique de CDGA

$$S^{-1}C(K^n, A) \longrightarrow C(K^n, S^{-1}A)$$

13. GTZ14, p. 646.

14. GTZ14, p. 648.

est un quasi-isomorphisme. On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, la réalisation géométrique¹⁵ de l'ensemble simplicial K^1 est un graphe connexe¹⁶ donc il existe un sous-ensemble $E \subset \Sigma_1$ et une équivalence faible d'ensemble simplicial $K^1 \simeq (\mathbf{S}^1)^{\cup_*^h E}$. Ainsi d'après l'exemple 1.2.2.1, on a les équivalences faibles de CDGA suivantes :

$$\begin{aligned} S^{-1}C(K^1, A) &\simeq S^{-1}\left(C(A)^{\otimes_A^L E}\right) \\ &\simeq \left(S^{-1}C(A)\right)^{\otimes_{S^{-1}A}^L E} \\ &\simeq \left(C(S^{-1}A)\right)^{\otimes_{S^{-1}A}^L E} \simeq C(K^1, S^{-1}A) \end{aligned}$$

Supposons $n > 1$. On a $K^n \simeq K^{n-1} \cup_{(\partial\Delta^n) \sqcup \Sigma_n}^h (\Delta^n)^{\sqcup \Sigma_n}$ où Σ_n est l'ensemble des n -simplexes non-dégénérés de K . En choisissant un sommet $* \rightarrow \partial\Delta^n$, on peut écrire d'après l'exemple 1.0.1, l'hypothèse de récurrence et le lemme 1.2.1 les équivalences faibles de CDGA suivantes :

$$\begin{aligned} S^{-1}C(K^n, A) &\simeq S^{-1}C(K^{n-1}, A) \underset{C(\partial\Delta^n, A)^{\otimes \Sigma_n}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} C(\Delta^n, A)^{\otimes \Sigma_n} \\ &\simeq C(K^{n-1}, S^{-1}A) \underset{C(\partial\Delta^n, A)^{\otimes \Sigma_n}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} C(\Delta^n, A)^{\otimes \Sigma_n} \\ &\simeq C(K^{n-1}, S^{-1}A) \underset{(S^{-1}C(\partial\Delta^n, A))^{\otimes \Sigma_n}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \left(S^{-1}C(\Delta^n, A)\right)^{\otimes \Sigma_n} \end{aligned}$$

Pour le lemme 1.2.1, on a utilisé le morphisme plat

$$(A^{\otimes n+1})^{\otimes \Sigma_n} \longrightarrow (S^{-1}A \otimes A^{\otimes n})^{\otimes \Sigma_n}$$

et le triangle commutatif de CDGA

$$\begin{array}{ccc} C(\partial\Delta^n, A)^{\otimes \Sigma_n} & \longrightarrow & C(K^{n-1}, S^{-1}A) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (S^{-1}C(\partial\Delta^n, A))^{\otimes \Sigma_n} & & \end{array}$$

Ainsi, il suffit¹⁷ pour conclure de montrer que le théorème 1.2.3 est vrai pour les ensembles

15. Hov99, p. 77.

16. Hat02, p. 6, 11.

17. Hin97, p. 9.

simpliciaux Δ^d et $\partial\Delta^d$ pour tout entier $d \geq 2$. Pour Δ^d , c'est l'exemple 1.2.2.2. Pour $\partial\Delta^d$, on peut raisonner par récurrence sur $d \geq 2$ en utilisant le poussé-en-avant homotopique¹⁸ $\partial\Delta^d \simeq \Lambda^{d,0} \cup_{\partial\Delta^{d-1}}^h \Delta^{d-1} \simeq * \cup_{\partial\Delta^{d-1}}^h *$. Avec $d = 2$, on obtient $\partial\Delta^2 = * \cup_{*\sqcup*}^h *$, tout comme dans l'exemple 1.2.2.1. Supposons $d \geq 2$. En choisissant un sommet $* \rightarrow \partial\Delta^{d-1}$, on a d'après l'exemple 1.0.1, le lemme 1.2.1 et l'hypothèse de récurrence les équivalences faibles de CDGA suivantes :

$$\begin{aligned} S^{-1}C(\partial\Delta^d, A) &\simeq S^{-1}A \underset{C(\partial\Delta^{d-1}, A)}{\otimes}^{\mathbb{L}} A \\ &\simeq S^{-1}A \underset{S^{-1}C(\partial\Delta^{d-1}, A)}{\otimes}^{\mathbb{L}} S^{-1}A \\ &\simeq S^{-1}A \underset{C(\partial\Delta^{d-1}, S^{-1}A)}{\otimes}^{\mathbb{L}} S^{-1}A \simeq C(\partial\Delta^d, S^{-1}A) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration.

Démonstration 2. Quitte à considérer un remplacement fibrant de K , il suffit de montrer que le théorème 1.2.3 est vrai pour les ensembles simpliciaux fibrants, pointés et connexes. Un tel ensemble simplicial K contient toujours un sous-ensemble simplicial minimal M qui est un rétracte par déformation de K et qui contient le point de base¹⁹. Il suffit donc de montrer que le théorème 1.2.3 est vrai pour les ensembles simpliciaux minimaux et connexes. D'après le paragraphe B.3, un tel ensemble simplicial M arrive avec une équivalence faible d'ensemble simplicial pointé

$$M \simeq \operatorname{hocolim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow M} \Delta^n$$

Puisque la localisation et le foncteur de Hochschild supérieur préservent²⁰ les colimites homotopiques, on a d'après l'exemple 1.2.2.2 les équivalences faibles d'ensembles simpliciaux

$$S^{-1}C(M, A) \simeq \operatorname{hocolim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow M} S^{-1}C(\Delta^n, A) \simeq \operatorname{hocolim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow M} C(\Delta^n, S^{-1}A) \simeq C(M, S^{-1}A)$$

ce qui achève la démonstration.

18. Hov99, p. 75.

19. May82, p. 36.

20. GTZ14, p. 648.

Corollaire 1.2.4. Soient $d > 0$ un entier et S une partie multiplicative d'une algèbre A . Le morphisme canonique de CDGA

$$S^{-1}C^{[d]}(A) \longrightarrow C^{[d]}(S^{-1}A)$$

est un quasi-isomorphisme.

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD D'ORDRE SUPÉRIEUR DES SCHÉMAS

Dans tous ce chapitre, si rien d'autre n'est spécifié, on suppose que \mathbf{k} est un corps de caractéristique nulle. On rappelle que toutes les algèbres sont supposées associatives, commutatives et unitaires sur \mathbf{k} .

Soient K un ensemble simplicial et \mathcal{O} un préfaisceau d'algèbre sur un espace topologique X . On définit le *préfaisceau de Hochschild supérieur* sur X par

$$C(K, \mathcal{O}) : U \longmapsto C(K, \mathcal{O}(U))$$

Pour tout entier $d > 0$, on notera $C^{[d]}(\mathcal{O}) = C(\mathbf{S}^d, \mathcal{O})$ et $H^{[d]}(\mathcal{O}) = H(C^{[d]}(\mathcal{O}))$ en suivant la définition 1.1.1. D'après l'exemple 1.0.2, \mathcal{O} est un rétract de $C(*, \mathcal{O})$ en tant que préfaisceau de CDGA et tout ensemble simplicial pointé K munit systématiquement $C(K, \mathcal{O})$ d'une structure de préfaisceau de CDGA sur \mathcal{O} . Aussi, l'exemple 1.1.2 induit un isomorphisme de préfaisceau d'algèbre $H_0^{[d]}(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}$ qui permet de voir tout \mathcal{O} -module comme un $C^{[d]}(\mathcal{O})$ -module via le morphisme de préfaisceau de CDGA sur X

$$C^{[d]}(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}$$

donné par la projection naturelle d'un préfaisceau de CDGA gradué positivement sur son homologie de degré 0.

Lorsque \mathcal{O} est le préfaisceau structural d'un espace annelé X , on note $\mathcal{C}(K, X)$ le faisceau de CDGA sur X associé à $C(K, \mathcal{O})$. Rappelons que dans ce cas, la catégorie $\text{Ch}(\mathcal{O}_X)$ des complexes de \mathcal{O}_X -module admet une structure de modèle *injective*¹ telle que les équi-

1. Hov01, p. 5; Hov99, p. 13; Spa88, p. 129.

valences faibles sont les quasi-isomorphismes, les cofibrations sont les monomorphismes et les objets fibrants sont *injectifs au sens de Spaltenstein*. En particulier, le foncteur du complexe hom

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)} : \mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{Ch}$$

admet un foncteur dérivé à droite.

Lorsque K est pointé, on peut définir la K -cohomologie de X à coefficients dans un complexe de \mathcal{O}_X -module \mathcal{D} , soit $H(K, X, \mathcal{D})$, en prenant la cohomologie du complexe hom dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}(K, X), \mathcal{D})$. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où $K = \mathbf{S}^d$ et \mathcal{D} est un \mathcal{O}_X -module vu comme un complexe concentré en degré 0.

Définition 2.0.1. Soient $d > 0$ un entier et X un espace annelé. On définit

$$\mathcal{C}_X^{[d]} = \mathcal{C}(\mathbf{S}^d, X)$$

le faisceau de Hochschild d'ordre d de X . Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On définit

$$H_{[d]}(X, \mathcal{F}) = H\left(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X^{[d]}, \mathcal{F})\right)$$

la cohomologie de Hochschild d'ordre d de X à coefficients dans \mathcal{F} . On note en particulier

$$\mathcal{C}_X = \mathcal{C}_X^{[1]}$$

le faisceau de Hochschild de X et

$$HH(X, \mathcal{F}) = H_{[1]}(X, \mathcal{F})$$

la cohomologie de Hochschild X à coefficients dans \mathcal{F} .

Lorsque X est un schéma, on retrouve la définition de Grothendieck et Loday² pour $d = 1$. En effet, si on choisit une résolution injective de \mathcal{O}_X -module $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$, alors on obtient³ un remplacement fibrant \mathcal{I} du complexe de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} . Ainsi, le complexe de chaîne $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{I})$ calcule le complexe hom dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$ et sa

2. Swa96, p. 60.

3. Hov01, p. 10.

cohomologie calcule le foncteur hyperext $\mathbb{E}xt_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$.

Exemple 2.0.2. *Un schéma non-séparé.* Soient A une algèbre sur un **corps quelconque** et $s \in A$ tel que le morphisme canonique $A \rightarrow A_s$ n'est pas surjectif. On considère $S = \text{Spec}(A)$, $U = D(s) = \{\mathfrak{p} \in S : s \notin \mathfrak{p}\}$ et $X = S \cup_U S$ le schéma S où le fermé $Z = V(s) = S \setminus U$ est dédoublé⁴. Le schéma X n'est pas séparé et on a

$$\Gamma \mathcal{O}_X = \Gamma \mathcal{O}_S \times_{\mathcal{O}_S(U)} \Gamma \mathcal{O}_S = A \times_{A_s} A$$

ce qui induit le diagramme de schéma

$$1_S : S \begin{array}{c} \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{j} \end{array} X \xrightarrow{p} S$$

La relation $i^*p^* = j^*p^* = 1_{\mathcal{O}_S\text{-mod}}$ montre d'une part que le foncteur p^* est exact, ce qui revient à dire⁵ que l'adjonction

$$p^* : \text{Ch}(\mathcal{O}_S) \rightleftarrows \text{Ch}(\mathcal{O}_X) : p_*$$

est de Quillen ; et d'autre part que pour tout ensemble simplicial K , il existe une équivalence faible de faisceau de CDGA sur X

$$\mathcal{C}(K, X) \cong p^*\mathcal{C}(K, S) \simeq \mathbb{L}p^*\mathcal{C}(K, X)$$

En dérivant⁶ l'adjonction enrichie $\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_S)} \circ (p^* \times 1) \cong \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)} \circ (1 \times p_*)$, on obtient pour tout complexe de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{D} un isomorphisme naturel

$$H^n(K, X, \mathcal{D}) \cong H^n(K, S, \mathbb{R}p_*\mathcal{D})$$

Au paragraphe 3.1, nous calculerons avec plus de précision les groupes de cohomologie $HH^n(X, \mathcal{F})$ pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} .

Lorsque X est un schéma séparé, on peut restreindre les préfaisceaux sur X aux

4. Gro60, p. I.101, I.138.

5. Hov01, p. 10.

6. Hov99, p. 17.

ouverts affines de X . Pour se rapprocher de la définition de Gerstenhaber et Schack⁷, on souhaiterait pouvoir définir la *cohomologie de Hochschild d'ordre d de X à coefficients dans un $C^{[d-1]}(\mathcal{O})$ -module \mathcal{M}* en prenant la cohomologie du complexe hom dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ avec la convention $C^{[0]}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^e = \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}$. Nous donnerons un sens à ce complexe hom dérivé au paragraphe 2.3 puis établirons une équivalence entre les deux définitions précédentes de la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur d'un schéma séparé à coefficients dans un faisceau quasi-cohérent au paragraphe 2.4 en appliquant l'exemple 1.0.1 au poussé-en-avant homotopique $\mathbf{S}^d \simeq * \cup_{\mathbf{S}^{d-1}}^h *$.

2.1 Décomposition de Hodge

Pour obtenir une décomposition de Hodge de la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur, nous allons aussi utiliser des techniques⁸ très proches de celles de Swan ainsi que le théorème de Pirashvili.

Pour tout espace annelé X et tout ensemble simplicial pointé K , on peut définir le *faisceau de la K -homologie de X* par $\mathcal{H}(K, X) = H(\mathcal{C}(K, X))$. Ce faisceau est également⁹ le faisceau associé au préfaisceau sur X

$$U \longmapsto H(K, \mathcal{O}_X(U))$$

D'après le théorème 1.2.3, si X est un schéma et K est connexe alors les faisceaux $\mathcal{H}_q(K, X)$ sont quasi-cohérents tels que pour tout ouvert affine U de X , le faisceau $\mathcal{H}_q(K, X)|_U$ est associé à $H_q(K, \mathcal{O}_X(U))$.

Nous sommes particulièrement intéressé par le cas où $K = \mathbf{S}^d$.

Définition 2.1.1. Soient $d > 0$ un entier et X un espace annelé. On définit

$$\mathcal{H}_X^{[d]} = H(\mathcal{C}_X^{[d]})$$

7. Swa96, p. 63.

8. Swa96, p. 60-62.

9. Gro57, p. 155.

le faisceau de l'homologie de Hochschild d'ordre d de X . On note en particulier

$$\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_X^{[1]}$$

le faisceau de l'homologie de Hochschild de X .

On peut calculer les premiers degrés de ces faisceaux dans le cas des schémas séparés.

Exemple 2.1.2. Soit X un schéma séparé sur un **corps quelconque**. Pour tout entier $d > 0$, il existe un isomorphisme naturel de \mathcal{O}_X -module

$$\mathcal{H}_{X,q}^{[d]} \cong \begin{cases} \mathcal{O}_X & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < q < d \\ \Omega_X^1 & \text{si } q = d \end{cases}$$

Il a déjà été construit sur tout ouvert affine U de X dans l'exemple 1.1.2 puisque¹⁰

$$\Omega_X^1|_U \cong \Omega_U^1$$

Ces isomorphismes naturels sont compatibles avec les restrictions, ce qui nous permet de les recoller¹¹.

On peut calculer les degrés suivants dans le cas des schémas séparés et lisses.

Théorème 2.1.3. Soient $d > 0$ un entier et X un schéma séparé et lisse. Il existe un isomorphisme naturel de \mathcal{O}_X -module

$$\mathcal{H}_{X,q}^{[d]} \cong \begin{cases} \Omega_X^j & \text{si } q = jd \text{ \& } d \text{ est impair} \\ S_{\mathcal{O}_X}^j(\Omega_X^1) & \text{si } q = jd \text{ \& } d \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } d \nmid q \end{cases}$$

Démonstration. On utilise le même argument que dans l'exemple 2.1.2 : cet isomorphisme naturel est donné¹² sur tout ouvert affine U de X par le théorème de Pirashvili. Il suffit

10. Gro67, p. 57, 60.

11. Har77, p. 67.

12. Gro67, p. 61.

alors de montrer que le foncteur de restriction $|_U$ commute avec les puissances extérieures et symétriques : pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} et tout entier $j > 0$, les \mathcal{O}_X -modules $\Lambda_{\mathcal{O}_X}^j(\mathcal{F})$ et $S_{\mathcal{O}_X}^j(\mathcal{F})$ sont respectivement définis par la colimite du foncteur

$$\mathfrak{S}_j \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-mod}$$

correspondant aux actions signature et triviale sur $\mathcal{F}^{\otimes j}$ et les foncteurs de restriction commutent¹³ avec les colimites et les produits tensoriels.

L'étude du faisceau d'homologie de Hochschild supérieure est déterminante pour calculer la *suite spectrale de Hodge* aboutissant à la cohomologie de Hochschild supérieure.

Proposition 2.1.4. Soient X un espace annelé, K un ensemble simplicial pointé et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Il existe une suite spectrale naturelle

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{F}) \implies H^{p+q}(K, X, \mathcal{F})$$

Démonstration. De la même façon que l'on a pu calculer la cohomologie de Hochschild d'ordre 1 de X à coefficients dans \mathcal{F} , on peut choisir une résolution injective de \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$ pour obtenir un remplacement fibrant \mathcal{I} du complexe de \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} . On dispose ensuite d'un double complexe $E_0^{pq} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_q(K, X), \mathcal{I}^p)$ ayant pour cohomologie totale $H(K, X, \mathcal{F})$. Si on le filtre selon les colonnes¹⁴ alors on obtient la suite spectrale annoncée puisque la première page E_1 est la cohomologie verticale qui est par ailleurs préservée par le foncteur exact $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(_, \mathcal{I}^p)$ et la deuxième page E_2 est la cohomologie horizontale qui calcule les foncteurs ext :

$$E_1^{pq} = H^q\left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}(K, X), \mathcal{I}^p)\right) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{I}^p)$$

$$E_2^{pq} \cong H^p\left(\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{I})\right) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{F})$$

En utilisant la suite spectrale de Hodge avec $K = \mathbf{S}^d$, on obtient la *décomposition de Hodge pour la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur des schémas séparés et lisses*.

13. Gro60, p. I.41-I.42.

14. Wei94, p. 141.

Théorème 2.1.5. Soient $d > 0$ un entier, X un schéma séparé et lisse et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Si d est impair alors il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{p+jd=n} H^p(X, \mathcal{T}_X^j \otimes \mathcal{F})$$

où $\mathcal{T}_X^j = (\Omega_X^j)^\vee$. Si d est pair alors il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{p+jd=n} H^p(X, \mathcal{S}_X^j \otimes \mathcal{F})$$

où $\mathcal{S}_X^j = S_{\mathcal{O}_X}^j(\Omega_X^1)^\vee$.

Démonstration. On montre d'abord que la suite spectrale de la proposition 2.1.4

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}^{[d]}, \mathcal{F}) \implies H_{[d]}^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

dégénère à la page E_2 . Swan a déjà traité¹⁵ le cas $d = 1$: la λ -décomposition de Loday induit¹⁶ une décomposition $\mathcal{C}_X = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{C}^{(i)}$ telle que $H_q(\mathcal{C}^{(i)}) = 0$ si $q \neq i$. Par conséquent la page E_2 est une somme direct de simple colonne et les différentielles sont nulles. Pour $d \geq 2$, on peut utiliser le théorème 2.1.3 : on a $\mathcal{H}_{X,q}^{[d]} \neq 0$ seulement si d divise q donc à la page E_2 , chaque ligne non nulle est encadrée par des lignes nulles :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \\
 \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\
 \dots & & E_2^{p+2,jd} & & E_2^{p+1,jd} & & E_2^{p,jd} & & E_2^{p-1,jd} & & E_2^{p-2,jd} & & \dots \\
 \dots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\
 & & \vdots & &
 \end{array}$$

15. Swa96, p. 62.

16. Swa96, p. 145, 103.

Ainsi les différentielles sont nulles et on a un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_{p+q=n} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}^{[d]}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{p+jd=n} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})$$

Calculons à présent $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})$. On peut utiliser la suite spectrale de Grothendieck induite¹⁷ par $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \quad) = \Gamma \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \quad)$:

$$F_2^{pq} = H^p\left(X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})\right) \implies \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{p+q}(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})$$

Puisque X est lisse, $\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}$ est¹⁸ localement libre de rang fini et pour tout $q > 0$, on a¹⁹ $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F}) = 0$. Ainsi, la suite spectrale F induit un isomorphisme naturel

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F}) \cong H^p\left(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})\right)$$

Enfin, le morphisme²⁰ naturel $(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]})^\vee \otimes \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,jd}^{[d]}, \mathcal{F})$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Exemple 2.1.6. On peut visualiser les groupes de cohomologie de Hochschild supérieure d'ordre d d'un schéma séparé et lisse X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} H_{[d]}^0(X, \mathcal{F}) &\cong \Gamma \mathcal{F} \\ &\vdots \\ H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) &\cong H^n(X, \mathcal{F}) && 0 < n < d \\ &\vdots \\ H_{[d]}^d(X, \mathcal{F}) &\cong H^d(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(\mathcal{T}_X \otimes \mathcal{F}) \\ &\vdots \\ H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) &\cong H^n(X, \mathcal{F}) \oplus H^{n-d}(X, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{F}) && d < n < 2d \\ &\vdots \\ H_{[d]}^{2d}(X, \mathcal{F}) &\cong H^{2d}(X, \mathcal{F}) \oplus H^d(X, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{F}) \oplus \Gamma(\mathcal{D}_X^2 \otimes \mathcal{F}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

17. Gro57, p. 148.

18. Gro67, p. 59.

19. Gro57, p. 189.

20. Gro60, p. I.49.

où $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_X^1 = \mathcal{S}_X^1 = (\Omega_X^1)^\vee$ et \mathcal{D}_X^j est \mathcal{T}_X^j si d est impair et \mathcal{S}_X^j si d est pair. En supposant $d > \dim(X)$, on a²¹ pour tout entier $n \geq 0$ un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{D}_X^j \otimes \mathcal{F})$$

où $n = jd + p$ est la *division euclidienne* de n par d avec p le reste.

2.2 Schémas Affines

La définition 2.0.1 nous amène à la question suivante. La cohomologie de Hochschild supérieure d'un schéma affine est-elle isomorphe à la cohomologie de Hochschild supérieure²² de l'algèbre sous-jacente ? Plus précisément, a-t-on un isomorphisme

$$H(K, \text{Spec}(A), \widetilde{M}) \cong H(K, A, M)$$

pour tout ensemble simplicial pointé K , toute algèbre A et tout A -module M ? L'exemple 1.2.2.3 montre qu'en général, le complexe de faisceau $\mathcal{C}(K, \text{Spec}(A))$ n'est pas équivalent au complexe de faisceau associé au complexe de Hochschild supérieur $C(K, A)$.

Grâce au théorème 1.2.3, nous allons répondre positivement à cette question lorsque l'ensemble simplicial pointé K est connexe. Nous allons également comparer dans ce cas la suite spectrale de Hodge de la proposition 2.1.4 avec la suite spectrale de Pirashvili²³.

Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. On considère le foncteur²⁴

$$\sim : A\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-mod}$$

qui associe à tout A -module M le \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \widetilde{M} . L'outil principal de ce paragraphe est l'adjonction de Quillen suivante.

21. Gro57, p. 170.

22. Gin17, p. 15.

23. Pir00, p. 165.

24. Gro60, p. I.85.

Proposition 2.2.1. Soit $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Les foncteurs

$$\sim : \text{Ch}(A) \rightleftarrows \text{Ch}(\mathcal{O}_X) : \Gamma$$

forment une adjonction de Quillen pour les structures de modèle injectives. Soient C un complexe de A -module et M un A -module. Il existe une équivalence faible naturelle de complexes de chaîne

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\tilde{C}, \tilde{M}) \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}(C, M)$$

Démonstration. L'adjonction²⁵ est un résultat classique. Il nous suffit²⁶ de montrer que le foncteur \sim préserve les cofibrations et les cofibrations triviales, ce qui est une conséquence de son exactitude²⁷. On obtient l'équivalence faible annoncée en dérivant²⁸ l'adjonction enrichie $\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)} \circ (\sim \times 1) \cong \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)} \circ (1 \times \Gamma)$. En effet, le foncteur \sim est son propre foncteur dérivé puisque tous les objets de $\text{Ch}(A)$ sont cofibrants et on a une équivalence faible naturelle de complexe de A -module $M \simeq \mathbb{R}\Gamma \tilde{M}$ puisque les faisceaux quasi-cohérents n'ont pas²⁹ de cohomologie sur X .

Pour obtenir le théorème principal de ce paragraphe, nous avons besoin d'une version faisceautique du théorème 1.2.3.

Lemme 2.2.2. Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe et $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine. Le morphisme canonique de faisceau de CDGA sur X

$$\widetilde{\mathcal{C}(K, A)} \longrightarrow \mathcal{C}(K, X)$$

est un quasi-isomorphisme.

25. Har77, p. 124.

26. Hov99, p. 14.

27. Gro60, p. I.85.

28. Hov99, p. 17.

29. Gro60, p. III.88.

Démonstration. Ce morphisme est donné sur les ouverts $D(s) = \{\mathfrak{p} \in X : s \notin \mathfrak{p}\}$ par

$$C(K, A)_s \longrightarrow C(K, A_s) \longrightarrow \mathcal{C}(K, X)(D(s))$$

D'après le théorème 1.2.3., les préfaisceaux de CDGA sur X

$$D(s) \longmapsto C(K, A)_s \quad \& \quad D(s) \longmapsto C(K, A_s)$$

sont quasi-isomorphes. Ainsi³⁰, les faisceaux associés sont quasi-isomorphes.

Théorème 2.2.3. Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Il existe un isomorphisme naturel

$$H(K, X, \mathcal{F}) \cong H(K, A, M)$$

Démonstration. Le lemme 2.2.2 et la proposition 2.2.1 induisent deux équivalences faibles naturelles

$$\mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}(K, X), \widetilde{M}) \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\widetilde{C(K, A)}, \widetilde{M}) \simeq \mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}(C(K, A), M)$$

et le complexe hom dérivé $\mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}(C(K, A), M)$ peut être calculé par le complexe de chaîne $\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}(C(K, A), M)$. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, $A^{\otimes K_n \setminus *}$ est un espace vectoriel, donc $A^{\otimes K_n}$ est un A -module libre. Cela implique³¹ que $C(K, A)$ est objet cofibrant de $\text{Ch}(A)$ pour la structure de modèle projective.

Corollaire 2.2.4. Soient $d > 0$ un entier, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}(X, \mathcal{F}) \cong H_{[d]}(A, M)$$

30. Gro57, p. 155.

31. Hov99, p. 42.

Remarque 2.2.5. *Schémas projectifs.* Soient $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ une algèbre positivement graduée et $X = \text{Proj}(A)$ le schéma projectif associé³². Pour tout ensemble simplicial pointé et connexe K , le morphisme canonique de faisceau de CDGA sur X

$$\widetilde{C(K, A)} \longrightarrow \mathcal{C}(K, X)$$

de lemme 2.2.2 est également un quasi-isomorphisme. Ici $\widetilde{C_q(K, A)}$ est le \mathcal{O}_X -module associé³³ au A -module gradué $C_q(K, A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_q(K, A_n)$. Dans ce contexte, ce morphisme est donné sur les ouverts $D_+(s) = \{\mathfrak{p} \in X : s \notin \mathfrak{p}\}$ par

$$(C(K, A)_s)_0 \longrightarrow C(K, (A_s)_0) \longrightarrow \mathcal{C}(K, X)(D_+(s))$$

D'après le théorème 1.2.3, il suffit de vérifier que les différentielles de Hochschild préservent la graduation de A : pour toute application $f : L \rightarrow L'$, on a

$$\left| f_* \left(\bigotimes_{x \in L} a_x \right) \right| = \left| \bigotimes_{y \in L'} \left(\prod_{f(x)=y} a_x \right) \right| = \sum_{y \in L'} \left(\sum_{f(x)=y} |a_x| \right) = \sum_{x \in L} |a_x| = \left| \bigotimes_{x \in L} a_x \right|$$

où $|a|$ désigne le degré d'un élément homogène a . Analogue à celle de la proposition 2.2.1, il existe une adjonction de Quillen

$$\sim : \text{Ch}(A - \text{grmod}) \rightleftarrows \text{Ch}(\mathcal{O}_X) : \Gamma_*$$

mais en général, il n'existe pas d'équivalence faible entre les complexes hom dérivés comparable à celle de la Proposition 2.2.1 puisque les \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents peuvent avoir³⁴ une cohomologie de faisceau non triviale sur X .

Étant donné le théorème 2.2.3, on souhaite comparer les deux suites spectrales qui approchent la cohomologie de Hochschild supérieure d'un schéma affine. Soit $\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}$ la catégorie des foncteurs contravariants sur la catégorie des ensembles finis pointés à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels. À tout foncteur $F : (\mathbf{Fin}')^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}$ et à tout ensemble simplicial pointé K , Pirashvili associe un espace vectoriel cosimplicial $F(K)$ en

32. Gro60, p. II.25-II.30.

33. Gro60, p. II.30-II.31.

34. Gro60, p. III.100.

prenant la composition

$$F(K) : \Delta \xrightarrow{K} (\mathbf{Fin}')^{\text{op}} \xrightarrow{F} \mathbf{Vect}$$

et par suite une suite spectrale qui approche sa cohomologie

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}}^p \left(\mathcal{J}_q(H(K)), F \right) \implies H^{p+q}(F(K))$$

où \mathcal{J} est la version duale et graduée du foncteur de Loday³⁵ et $H(K)$ est la cogèbre³⁶ de l'homologie simpliciale de K à coefficients dans \mathbf{k} . On s'intéresse au cas où K est connexe et où F est le foncteur $\mathcal{H}(A, M) = \text{Hom}_A(\mathcal{L}(A, A), M)$ pour une algèbre A et un A -module M de sorte que la cohomologie de $F(K)$ est la K -cohomologie de Hochschild³⁷ de A à coefficients dans M .

Soit $\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}$ la catégorie des foncteurs contravariants sur la catégorie des ensembles finis pointés à valeurs dans la catégorie des complexes de chaîne. Elle admet une structure de modèle dite *projective*³⁸ telle que les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les fibrations sont les épimorphismes et les objets cofibrants sont *projectifs au sens de Spaltenstein*. En particulier, le foncteur du complexe hom

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}} : (\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'})^{\text{op}} \times \mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'} \longrightarrow \mathbf{Ch}$$

admet un foncteur dérivé à droite.

Pour obtenir un isomorphisme entre la suite spectrale de Hodge de la proposition 2.1.4 et celle de Pirashvili, nous allons également utiliser une adjonction de Quillen.

Proposition 2.2.6. Soit A une algèbre. Les foncteurs

$$\otimes_{\mathbf{Fin}'} \mathcal{L}(A, A) : \mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'} \rightleftarrows \text{Ch}(A) : \mathcal{H}(A, \)$$

forment une adjonction de Quillen. Soient $F : (\mathbf{Fin}')^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}$ un foncteur et M un

35. Pir00, p. 158.

36. May82, p. 137.

37. Gin17, p. 15.

38. Hir03, p. 224; Hov99, p. 13; Spa88, p. 128.

A -module. Il existe une équivalence faible naturelle de complexes de chaîne

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(A)}\left(F \underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{L}(A, A), M\right) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}}(F, \mathcal{H}(A, M))$$

Démonstration. L'adjonction³⁹ est un résultat classique. Il nous suffit⁴⁰ de montrer que le foncteur $\mathcal{H}(A, \)$ préserve les fibrations et les fibrations triviales, ce qui est une conséquence de son exactitude : pour tout entier $n > 0$, $A^{\otimes n-1}$ est un espace vectoriel, et donc $A^{\otimes n}$ un A -module libre. On obtient l'équivalence faible annoncée en dérivant⁴¹ l'adjonction enrichie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(A)} \circ \left(\underset{\mathbf{Fin}'}{\otimes} \mathcal{L}(A, A) \times 1\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}} \circ \left(1 \times \mathcal{H}(A, \)\right)$. En effet, $\mathcal{H}(A, \)$ est son propre foncteur dérivé puisque tous les objets de $\mathrm{Ch}(A)$ sont fibrants.

Remarquons ici qu'une adjonction plus générale aurait pu être énoncée avec un foncteur arbitraire $G : \mathbf{Fin}' \rightarrow \mathbf{Vect}$ à la place de $\mathcal{L}(A, A)$, de sorte que le foncteur dérivé $\underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} G$ existe toujours. Pour tout ensemble simplicial fini pointé L , Pirashvili définit un foncteur

$$h_L : (\mathbf{Fin}')^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{sVect}$$

qui associe à tout ensemble fini pointé K l'espace vectoriel libre sur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fin}'}(K, L)$. La structure simpliciale de $h_L(K)$ est naturellement induite par la structure simpliciale de L . Pirashvili a montré⁴² qu'il existe un isomorphisme naturel d'espace vectoriel simplicial

$$h_L \underset{\mathbf{Fin}'}{\otimes} G \cong G(L)$$

On peut calculer l'homologie de $G(L)$ avec cette formule.

Lemme 2.2.7. Soient K un ensemble simplicial fini pointé et $F : \mathbf{Fin}' \rightarrow \mathbf{Vect}$ un foncteur. Il existe une équivalence faible naturelle de complexes de chaîne

$$H_q(h_K) \underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} F \simeq H_q(F(K))$$

39. Mac98, p. 222-227.

40. Hov99, p. 14.

41. Hov99, p. 17.

42. Pir00, p. 156.

Démonstration. Le foncteur h_K est ⁴³ cofibrant dans $\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}$ donc

$$H_q(h_K) \underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} F \simeq H_q\left(h_K \underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} F\right) = H_q\left(h_K \otimes_{\mathbf{Fin}'} F\right) \cong H_q(F(K))$$

Théorème 2.2.8. Soient K un ensemble simplicial pointé et connexe, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Les deux suites spectrales

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p\left(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{F}\right) \implies H^{p+q}(K, X, \mathcal{F})$$

$$\text{Ext}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}}^p\left(\mathcal{J}_q(H(K)), \mathcal{H}(A, M)\right) \implies H^{p+q}(K, A, M)$$

sont naturellement isomorphes.

Démonstration. Le lemme 2.2.2 et la proposition 2.2.1 induisent les isomorphismes naturels

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p\left(\mathcal{H}_q(K, X), \mathcal{F}\right) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p\left(H_q(\widetilde{K}, A), \widetilde{M}\right) \cong \text{Ext}_A^p\left(H_q(K, A), M\right)$$

et le lemme 2.2.7 et la proposition 2.2.6 induisent les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^p\left(H_q(K, A), M\right) &= H^p\left(\mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}\left(H_q(K, A), M\right)\right) \\ &\cong H^p\left(\mathbb{R}\text{Hom}_{\text{Ch}(A)}\left(H_q(h_K) \underset{\mathbf{Fin}'}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{L}(A, A), M\right)\right) \\ &\cong H^p\left(\mathbb{R}\text{Hom}_{\mathbf{Ch}_{\mathbf{Fin}'}}\left(H_q(h_K), \mathcal{H}(A, M)\right)\right) = \text{Ext}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}}^p\left(H_q(h_K), \mathcal{H}(A, M)\right) \end{aligned}$$

pour tous entiers $p, q \geq 0$. Ceci achève la démonstration puisque Pirashvili a montré ⁴⁴ que la seconde suite spectrale est en fait isomorphe à la suite spectrale

$$\text{Ext}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}}^p\left(H_q(h_K), \mathcal{H}(A, M)\right) \implies H^{p+q}\left(\text{Hom}_{\mathbf{Vect}_{\mathbf{Fin}'}}\left(h_K, \mathcal{H}(A, M)\right)\right)$$

43. Pir00, p. 154.

44. Pir00, p. 165-166.

Corollaire 2.2.9. Soient $d > 0$ un entier, $X = \text{Spec}(A)$ un schéma affine et $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. Les deux suites spectrales

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}^{[d]}, \mathcal{F}) \implies H_{[d]}^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

$$\text{Ext}_{\text{Vect}_{\mathbb{F}_{in'}}}^p(\mathcal{J}_q(H(\mathbf{S}^d)), \mathcal{H}(A, M)) \implies H_{[d]}^{p+q}(A, M)$$

sont naturellement isomorphes.

En particulier, si A est une algèbre lisse alors $X = \text{Spec}(A)$ est séparé et lisse et la décomposition de Hodge du théorème 2.1.5 est isomorphe à la décomposition de Pirashvili⁴⁵.

2.3 Modules sur un préfaisceau de CDGA

Dans tous ce paragraphe, \mathbf{k} est un corps quelconque.

Soit X un schéma séparé. On appelle *préfaisceau sur X* tout foncteur contravariant défini sur la catégorie $\text{Aff}(X)$ des ouverts affines de X et on note $\text{Ch}(X)$ la catégorie des préfaisceaux de complexe de chaîne sur X . Munie du produit tensoriel ponctuel \otimes , du préfaisceau complexe hom $\mathcal{H}om$ et de la structure *projective*⁴⁶, $\text{Ch}(X)$ est une catégorie de modèle monoïdale symétrique cofibramment engendrée telle que les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes, les fibrations sont les épimorphismes, les cofibrations génératrices sont les morphismes $(S^{n-1})_U \rightarrow (D^n)_U$ et les cofibrations triviales génératrices sont les morphismes $0 \rightarrow (D^n)_U$. Ici on utilise les notations⁴⁷ de Hovey et C_U désigne le préfaisceau constant égale à C sur U étendu par zéro⁴⁸ sur X .

La construction suivante peut être effectuée avec un préfaisceau de DGA sur une base d'un espace topologique. Notre contexte nous amène à travailler avec un préfaisceau de CDGA sur les ouverts affines d'un schéma séparé.

45. Pir00, p. 166.

46. Hir03, p. 224; Hov99, p. 111.

47. Hov99, p. 41.

48. Har77, p. 68.

Théorème 2.3.1. Soit \mathcal{A} un préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé X . La catégorie $\mathcal{A}\text{-mod}$ des préfaisceaux de \mathcal{A} -module sur X est une catégorie de modèle monoïdale symétrique cofibramment engendrée telle que les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les épimorphismes. De plus, si $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une cofibration de \mathcal{A} -module alors $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$ est une cofibration de $\mathcal{A}(U)$ -module pour tout ouvert affine U de X .

Démonstration. La catégorie $\mathcal{A}\text{-mod}$ est la catégorie des algèbres sur la monade ⁴⁹

$$\mathcal{A} \otimes : \text{Ch}(X) \longrightarrow \text{Ch}(X)$$

Ce foncteur commute avec les colimites. De plus, pour tout \mathcal{A} -module \mathcal{M} , l'ensemble des morphismes de \mathcal{A} -module $\mathcal{A} \otimes (S^n)_U \rightarrow \mathcal{M}$ est en bijection avec $\mathcal{M}_n(U)$ de sorte que $\mathcal{A} \otimes (S^n)_U$ un petit objet de $\mathcal{A}\text{-mod}$. Puisque tout les objets de $\text{Ch}(X)$ sont fibrants, il suffit ⁵⁰ de montrer que tout \mathcal{A} -module \mathcal{M} admet un objet chemin pour obtenir la structure de modèle : soit I le complexe de chaîne borné en bas

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{k} & \longrightarrow & \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \\ & & & & 1 & \longmapsto & (1, -1) \end{array}$$

Pour tout complexe de chaîne C , le complexe $\text{hom } C^I = \text{Hom}(I, C)$ est un objet chemin de C . Puisque les équivalences faibles et les fibrations sont définies ponctuellement dans $\text{Ch}(X)$, le préfaisceau $\mathcal{M}^I : U \mapsto \mathcal{M}(U)^I$ est un objet chemin \mathcal{A} -module \mathcal{M} . Pour étudier les cofibrations de $\mathcal{A}\text{-mod}$, on considère le produit des foncteurs des sections sur les ouverts affines de X

$$\Gamma : \mathcal{A}\text{-mod} \longrightarrow \prod_{U \in \text{Aff}(X)} (\mathcal{A}(U)\text{-mod})$$

Il admet un adjoint à droite qui associe à toute famille $(M_U)_{U \in \text{Aff}(X)}$ le \mathcal{A} -module

$$U \longmapsto \prod_{V \subset U} M_V$$

C'est un foncteur exact donc ⁵¹ Γ est un foncteur de Quillen à gauche.

49. Mac98, p. 140, 142.

50. SS00, p. 16, 9.

51. Hov99, p. 14.

Si \mathcal{A} est un préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé alors le théorème 2.3.1 nous permet de dériver⁵² le produit tensoriel ponctuel $\otimes_{\mathcal{A}}$ ainsi que le complexe $\mathrm{hom}_{\mathcal{A}}$. On peut évaluer ce produit tensoriel dérivé sur un ouvert affine de la même façon que le produit tensoriel classique.

Lemme 2.3.2. Soient \mathcal{A} un préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé X et \mathcal{M}, \mathcal{N} deux \mathcal{A} -modules. Pour tout ouvert affine U de X , on a

$$\left(\mathcal{M} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{N}\right)(U) \simeq \mathcal{M}(U) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{N}(U)$$

Démonstration. D'après le théorème 2.3.1, si \mathcal{Q} est un remplacement cofibrant du \mathcal{A} -module \mathcal{M} alors $\mathcal{Q}(U)$ est un remplacement cofibrant du $\mathcal{A}(U)$ -module $\mathcal{M}(U)$ et on a

$$\left(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}\right)(U) = \mathcal{Q}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{N}(U)$$

Nous concluons ce paragraphe par un lemme de changement de base dérivé.

Lemme 2.3.3. Soient $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé X , \mathcal{M} un \mathcal{A} -module et \mathcal{N} un \mathcal{B} -module. Il existe une équivalence faible naturelle

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{M}, \mathcal{N}\right) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$$

Démonstration. En fait, on peut obtenir une équivalence faible de préfaisceau de complexe de chaîne sur X en dérivant⁵³ l'adjonction enrichie $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}} \circ (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \times 1) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}$. En effet, le foncteur d'oubli $\mathcal{B}\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ est son propre foncteur dérivé à droite puisque tous les objets de $\mathcal{B}\text{-mod}$ sont fibrants.

Remarque 2.3.4. Soit \mathcal{A} un préfaisceau de CDGA sur un schéma séparé X . On peut voir que si $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est une cofibration (triviale) de \mathcal{A} -module alors $\mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{N}_x$ est une

52. Hov99, p. 115-116.

53. Hov99, p. 17; Mac98, p. 222-227.

cofibration (triviale) de \mathcal{A}_x -module pour tout $x \in X$. En effet, si $f : Y \rightarrow X$ est une application affine⁵⁴ et $\mathcal{A} \rightarrow f_*\mathcal{B}$ est un morphisme de préfaisceau de CDGA sur X alors on a une adjonction de Quillen

$$f^* : \mathcal{A}\text{-mod} \rightleftarrows \mathcal{B}\text{-mod} : f_*$$

puisque⁵⁵ f_* est exact. On peut appliquer ce résultat à $x : * \rightarrow X$ et $\mathcal{A} \rightarrow x_*\mathcal{A}_x$.

2.4 Lien entre les deux définitions

Le paragraphe 2.3 nous permet d'introduire la définition suivante.

Définition 2.4.1. Soient $d > 0$ un entier, X un schéma séparé, \mathcal{O} son préfaisceau structural et \mathcal{F} un \mathcal{O} -module. On définit

$$H_{[d]}(\mathcal{O}, \mathcal{F}) = H\left(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}(\mathcal{O}, \mathcal{F})\right)$$

la cohomologie de Hochschild supérieure d'ordre d de \mathcal{O} à coefficients dans \mathcal{F} .

Avec notre convention $C^{[0]}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}^e$, on retrouve la définition de Gerstenhaber et Schack⁵⁶ pour $d = 1$. En effet, si on choisit⁵⁷ une résolution projective de \mathcal{O}^e -module $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{O}$ alors on obtient un remplacement cofibrant \mathcal{P} du complexe de \mathcal{O}^e -module \mathcal{O} . Ainsi, le complexe de chaîne $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}^e)}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ calcule le complexe hom dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}^e)}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ et sa cohomologie calcule le foncteur $\mathrm{ext}_{\mathcal{O}^e}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$.

Pour relier la définition 2.0.1 et la définition 2.4.1 pour les schémas séparés, nous devons passer des préfaisceaux aux faisceaux et vice versa. Notons par $+$ le foncteur de faisceautisation et par $\#$ foncteur d'oubli.

54. Gro60, p. II.6.

55. Hov99, p. 14.

56. Swa96, p. 63.

57. Gro57, p. 135.

Lemme 2.4.2. Soient X un schéma séparé et \mathcal{O} son préfaisceau structural. Les foncteurs suivants forment une adjonction de Quillen.

$$+ : \mathrm{Ch}(\mathcal{O}) \rightleftarrows \mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X) : \#$$

Démonstration. L'adjonction⁵⁸ est un résultat classique. Il suffit⁵⁹ de montrer que le foncteur $+$ préserve les cofibrations et les cofibrations triviales, ce qui est une conséquence⁶⁰ de la remarque 2.3.4.

On peut à présent démontrer que la définition 2.0.1 et la définition 2.4.1 coïncident pour les schémas séparés et les faisceaux n'ayant pas de cohomologie de faisceau sur leurs ouverts affines, par exemple les faisceaux quasi-cohérents.

Théorème 2.4.3. Soient $d > 0$ un entier, X un schéma séparé, \mathcal{O} son préfaisceau structural et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module n'ayant pas de cohomologie de faisceau sur les ouverts affines de X . Il existe un isomorphisme naturel

$$H_{[d]}^n(X, \mathcal{F}) \cong H_{[d]}^n(\mathcal{O}, \mathcal{F}^\#)$$

Démonstration. On dérive⁶¹ l'adjonction enrichie $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)} \circ (+ \times 1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O})} \circ (1 \times \#)$ induite par le lemme 2.4.2 pour obtenir une équivalence faible naturelle

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X^{[d]}, \mathcal{F}) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O})}(C^{[d]}(\mathcal{O}), \mathcal{F}^\#)$$

car $\mathbb{L}+ \simeq +$ par exactitude⁶², $\mathcal{C}_X^{[d]} = C^{[d]}(\mathcal{O})^+$ par définition et $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^{\mathbb{R}\#}$ par hypothèse. D'après l'exemple 1.0.1 appliqué au poussé-en-avant homotopique $\mathbf{S}^d \simeq * \cup_{\mathbf{S}^{d-1}}^h *$ et le lemme 2.3.2, il existe une équivalence faible naturelle de \mathcal{O} -module

$$C^{[d]}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O} \otimes_{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}^{\mathbb{L}} \mathcal{O}$$

58. Har77, p. 64.

59. Hov99, p. 14.

60. Hov99, p. 43; Gro57, p. 155.

61. Hov99, p. 17.

62. Gro57, p. 155.

Avec le lemme 2.3.3, on obtient les équivalences faibles naturelles

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O})}(C^{[d]}(\mathcal{O}), \mathcal{F}^\#) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O})}\left(\mathcal{O} \underset{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{O}, \mathcal{F}^\#\right) \simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{C^{[d-1]}(\mathcal{O})}(\mathcal{O}, \mathcal{F}^\#)$$

Remarque 2.4.4. Si X est un schéma et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent alors \mathcal{F} n'a pas⁶³ de cohomologie de faisceau sur les ouverts affines de X . On peut donc appliquer le théorème 2.4.3 lorsque X est séparé.

63. Har77, p. 113; Gro60, p. III.88.

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD DES SCHÉMAS

Dans tous ce chapitre, \mathbf{k} est un corps quelconque. On rappelle que toutes les algèbres sont supposées associatives, commutatives et unitaires sur \mathbf{k} .

Swan définit la *cohomologie de Hochschild d'un schéma X à coefficients dans un \mathcal{O}_X -module \mathcal{F}* par $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$ où $\delta : X \rightarrow X \times X$ est le morphisme diagonal de X . Il a montré¹ que ce foncteur ext coïncide avec le foncteur hyperext $\mathbb{E}\mathrm{xt}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$ si X est un schéma quasi-projectif. Nous allons généraliser ce fait en montrant que cela est vrai pour tous les schémas séparés en utilisant le produit tensoriel dérivé de faisceau ainsi que les foncteurs image directe et image inverse dérivés².

Cette définition arrive avec la suite spectrale de Grothendieck³ usuelle

$$H^p(X \times X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \times X}}^q(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})) \implies \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{p+q}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$$

Nous montrerons qu'elle est isomorphe à la suite spectrale de la proposition 2.1.4 lorsque, par exemple, X est un schéma séparé et lisse.

3.1 Généralisation du théorème de Swan

Soit X un espace annelé. Le produit tensoriel de complexes de \mathcal{O}_X -module est dérivable en prenant une *résolution plate de Spaltenstein*⁴ de l'un des deux facteurs. Il existe

1. Swa96, p. 60.
2. Spa88, p. 147.
3. Gro57, p. 148.
4. Spa88, p. 140, 139, 147.

une relation entre ce produit tensoriel dérivé et le produit tensoriel dérivé de préfaisceau défini au paragraphe 2.3.

Lemme 3.1.1. Soient \mathcal{O} un préfaisceau d’algèbre sur un schéma séparé X et \mathcal{C}, \mathcal{D} deux complexes de \mathcal{O}^+ -module. Il existe une équivalence faible naturelle de complexes de \mathcal{O}^+ -modules

$$\left(\mathcal{C}^\# \otimes_{\mathcal{O}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}^\#\right)^+ \simeq \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}^+}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}$$

Démonstration. Soit \mathcal{Q} un remplacement cofibrant du complexe de \mathcal{O} -module $\mathcal{C}^\#$. Le complexe de \mathcal{O} -module $\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}^\#$ calcule le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C}^\# \otimes_{\mathcal{O}}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}^\#$. D’après la remarque 2.3.4, \mathcal{Q}_x est cofibrant dans $\text{Ch}(\mathcal{O}_x)$ pour tout $x \in X$ donc⁵ $\mathcal{Q}^+ \rightarrow \mathcal{C}^{\#+} \cong \mathcal{C}$ est une résolution plate de Spaltenstein sur \mathcal{O}^+ et le complexe de \mathcal{O}^+ -module $\mathcal{Q}^+ \otimes_{\mathcal{O}^+} \mathcal{D}$ calcule le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}^+}^{\mathbb{L}} \mathcal{D}$. Enfin, l’unité $1 \rightarrow \# \rightarrow \#^+$ induit un morphisme de complexe de \mathcal{O}^+ -modules

$$(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}^\#)^+ \longrightarrow (\mathcal{Q}^{\#+} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}^\#)^+ \longrightarrow (\mathcal{Q}^{\#+} \otimes_{\mathcal{O}^{\#+}} \mathcal{D}^\#)^+ = \mathcal{Q}^+ \otimes_{\mathcal{O}^+} \mathcal{D}$$

Puisque $(\mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D}^\#)_x^+ \cong \mathcal{Q}_x^+ \otimes_{\mathcal{O}_x^+} \mathcal{D}_x$ pour tout $x \in X$, c’est un isomorphisme.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d’espace annelé. Les foncteurs f^* et f_* sont également dérivables en prenant un certain type de résolution⁶ et les foncteurs $\mathbb{L}f^*$ et $\mathbb{R}f_*$ arrivent avec des adjonctions enrichies dérivées. Considérons le cas de l’inclusion $i : Z \rightarrow X$ d’un fermé Z de X . Pour tout \mathcal{O}_Z -module \mathcal{F} et tout $x \in X$, il existe⁷ un isomorphisme naturel

$$(i_*\mathcal{F})_x \cong \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{si } x \in Z \\ 0 & \text{si } x \notin Z \end{cases}$$

et donc la coüinité $i^{-1}i_* \rightarrow 1$ est un isomorphisme naturel.

5. Hin97, p. 9; Spa88, p. 139.

6. Spa88, p. 147.

7. Har77, p. 68.

Lemme 3.1.2. Soient $i : X \rightarrow Y$ un morphisme d'espace annelé et \mathcal{C} un complexe de \mathcal{O}_X -module. Si i est un homéomorphisme sur un fermé de Y alors il existe une équivalence faible naturelle de complexe de \mathcal{O}_X -module

$$\mathbb{L}i^*i_*\mathcal{C} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{C}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{Q} \rightarrow i_*\mathcal{C}$ une résolution plate de Spaltenstein sur \mathcal{O}_Y . Le complexe de \mathcal{O}_X -modules $i^*\mathcal{Q}$ calcule le foncteur dérivé $\mathbb{L}i^*i_*\mathcal{C}$. De plus, $i^{-1}\mathcal{Q} \rightarrow i^{-1}i_*\mathcal{C} \cong \mathcal{C}$ est⁸ une résolution plate de Spaltenstein sur $i^{-1}\mathcal{O}_Y$ et donc le complexe de \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} (i^{-1}\mathcal{Q})$ calcule le produit tensoriel dérivé $\mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y}^{\mathbb{L}} \mathcal{C}$. On peut conclure en utilisant la définition du foncteur image inverse $i^*\mathcal{Q} = \mathcal{O}_X \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} (i^{-1}\mathcal{Q})$.

Proposition 3.1.3. Soient X un schéma et $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal. Il existe un isomorphisme naturel de faisceau d'algèbre sur X

$$\delta^{-1}\mathcal{O}_{X \times X} \cong (\mathcal{O}_X)^e$$

Démonstration. Le morphisme est donné pour tous ouverts affines U et V de X par les restrictions du faisceau structural de X

$$\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V) \otimes \mathcal{O}_X(U \cap V)$$

Soit $U = \text{Spec}(A)$ un ouvert affine de X . On doit identifier les deux préfaisceaux sur U

$$D(r) \longmapsto \text{colim}_{D(s \otimes t) \supset \delta D(r)} (A_s \otimes A_t) \quad \& \quad D(r) \longmapsto (A_r)^e$$

où $D(r) = \{\mathfrak{p} \in U : r \notin \mathfrak{p}\}$ pour tout $r \in A$. On peut remarquer que

$$D(s \otimes t) \supset \delta D(r) \iff \sqrt{st} \ni r \implies \sqrt{s \otimes t} \ni r \otimes r \implies D(s \otimes t) \supset D(r \otimes r) \supset \delta D(r)$$

donc la colimite indexée sur les ouverts $D(s \otimes t)$ contenant $\delta D(r)$ est atteinte⁹ en l'ouvert $D(r \otimes r)$.

8. Spa88, p. 139.

9. Mac98, p. 218.

Nous donnons ici le théorème principal de ce chapitre. Il généralise un théorème de Swan¹⁰ initialement consacrés aux schémas quasi-projectifs.

Théorème 3.1.4. Soient X un schéma séparé, $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Il existe un isomorphisme naturel

$$HH(X, \mathcal{F}) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$$

Démonstration. Soit \mathcal{O} le préfaisceau structural de X . D'après le lemme 2.3.2, l'exemple 1.2.2.1, l'exactitude¹¹ du foncteur $+$, le lemme 3.1.1, la proposition 3.1.3 et le lemme 3.1.2, il existe des équivalences faibles naturelles de complexe de \mathcal{O}_X -modules

$$\mathcal{C}_X = C(\mathcal{O})^+ \simeq \left(\mathcal{O} \underset{\mathcal{O}^e}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{O} \right)^+ \simeq \mathcal{O}_X \underset{(\mathcal{O}_X)^e}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_X \underset{\delta^{-1} \mathcal{O}_{X \times X}}{\overset{\mathbb{L}}{\otimes}} \mathcal{O}_X \simeq \mathbb{L} \delta^* \delta_* \mathcal{O}_X$$

où $C(\mathcal{O}) : U \mapsto C(\mathcal{O}(U))$. Par exactitude, on a une équivalence faible naturelle $\delta_* \simeq \mathbb{R} \delta_*$. Ceci nous permet d'écrire¹² les équivalences faibles naturelles de complexe de chaîne

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F}) &\simeq \mathbb{R} \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathbb{L} \delta^* \delta_* \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \\ &\simeq \mathbb{R} \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\delta_* \mathcal{O}_X, \mathbb{R} \delta_* \mathcal{F}) \\ &\simeq \mathbb{R} \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

En fait, le theorem 3.1.4 est vrai dès que $\delta_* \simeq \mathbb{R} \delta_*$. On peut voir dans l'exemple suivant que l'obstruction provient de cette équivalence faible.

Exemple 3.1.5. *Un schéma non-séparé.* Reprenons le schéma $X = S \cup_U S$ de l'exemple 2.0.2 où $S = \text{Spec}(A)$ et $U = D(s)$. On a vu que pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , la cohomologie de Hochschild $HH(X, \mathcal{F})$ est isomorphe à la cohomologie du complexe hom dérivé $\mathbb{R} \text{Hom}_{\text{Ch}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{C}_X, \mathbb{R} p_* \mathcal{F})$. Considérons le carré commutatif de schéma¹³

10. Swa96, p. 60.

11. Gro57, p. 155.

12. Spa88, p. 147.

13. Gro60, p. I.104-I.105, I.132.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & S \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_S \\ X \times X & \xrightarrow{\Delta p} & S \times S \end{array}$$

On a ¹⁴ une équivalence faible naturelle $\mathbb{R}(\delta_S)_* \mathbb{R}p_* \simeq \mathbb{R}(\Delta p)_* \mathbb{R}(\delta_X)_*$ et puisque S est un schéma séparé, on a comme au théorème 3.1.4 une équivalence faible de complexe de \mathcal{O}_S -modules $\mathcal{C}_S \simeq \mathbb{L}(\delta_S)^*(\delta_S)_* \mathcal{O}_S$. Ainsi, il existe ¹⁵ des équivalences faibles

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{C}_X, \mathbb{R}p_* \mathcal{F}) &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_S)}(\mathbb{L}(\delta_S)^*(\delta_S)_* \mathcal{O}_S, \mathbb{R}p_* \mathcal{F}) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_{S \times S})}((\delta_S)_* \mathcal{O}_S, \mathbb{R}(\delta_S)_* \mathbb{R}p_* \mathcal{F}) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_{S \times S})}((\delta_S)_* \mathcal{O}_S, \mathbb{R}(\Delta p)_* \mathbb{R}(\delta_X)_* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^n((\delta_X)_* \mathcal{O}_X, (\delta_X)_* \mathcal{F})$ est le $n^{\mathrm{ème}}$ groupe de cohomologie du complexe hom dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}((\delta_X)_* \mathcal{O}_X, (\delta_X)_* \mathcal{F})$. Puisque δ_S est un morphisme affine ¹⁶ et $(\Delta p)^*$ un foncteur exact, on a ¹⁷ des équivalences faibles de complexe de $\mathcal{O}_{X \times X}$ -modules

$$(\delta_X)_* \mathcal{O}_X \cong (\delta_X)_* p^* \mathcal{O}_S \cong (\Delta p)^*(\delta_S)_* \mathcal{O}_S \simeq \mathbb{L}(\Delta p)^*(\delta_S)_* \mathcal{O}_S$$

et ainsi ¹⁸ des équivalences faibles

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}((\delta_X)_* \mathcal{O}_X, (\delta_X)_* \mathcal{F}) &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathbb{L}(\Delta p)^*(\delta_S)_* \mathcal{O}_S, (\delta_X)_* \mathcal{F}) \\ &\simeq \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_{S \times S})}((\delta_S)_* \mathcal{O}_S, \mathbb{R}(\Delta p)_*(\delta_X)_* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

14. Spa88, p. 147.

15. Spa88, p. 147.

16. Gro60, p. II.6.

17. Swa96, p. 73.

18. Swa96, p. 147.

3.2 Suites Spectrales

Soient X un schéma et $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal. La composition $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\delta_* \mathcal{O}_X, \quad) = \Gamma \circ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times X}}(\delta_* \mathcal{O}_X, \quad)$ donne lieu¹⁹ pour tout \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} à une suite spectrale naturelle

$$E_2^{pq} = H^p\left(X \times X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \times X}}^q(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})\right) \implies \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{p+q}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$$

En ajoutant aux hypothèses du théorème 3.1.4 l'évanescence de certains faisceaux ext (ce qui sera vérifié lorsque X est lisse) on peut montrer que cette suite spectrale est isomorphe à celle de la proposition 2.1.4.

Théorème 3.2.1. Soient X un schéma séparé, $\delta : X \rightarrow X \times X$ son morphisme diagonal et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) = 0$ pour tous entiers $p > 0$ et $q \geq 0$ alors les deux suites spectrales

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \implies HH^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

$$H^p\left(X \times X, \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{X \times X}}^q(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})\right) \implies \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X \times X}}^{p+q}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})$$

sont naturellement isomorphes.

Démonstration. On a²⁰ $\mathbb{R}\Gamma_{X \times X} \circ \delta_* \simeq \mathbb{R}\Gamma_{X \times X} \circ \mathbb{R}\delta_* \simeq \mathbb{R}(\Gamma_{X \times X} \circ \delta_*) = \mathbb{R}\Gamma_X$ et donc, de même que dans la démonstration du théorème 2.1.5, on a les isomorphismes naturels

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \cong H^p\left(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F})\right) \cong H^p\left(X \times X, \delta_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F})\right)$$

pour tous entiers $p > 0$ et $q \geq 0$. De plus, il existe un isomorphisme naturel de \mathcal{O}_X -module

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \cong H^q\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})\right)$$

pour tout entier $q \geq 0$. Pour le voir, on choisit une résolution injective de \mathcal{O}_X -module $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}$. Le complexe de \mathcal{O}_X -module $\mathcal{H}om_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{I})$ calcule²¹ le faisceau hom dérivé $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathrm{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$. Autrement dit, la cohomologie totale du double complexe de \mathcal{O}_X -

19. Gro57, p. 148.

20. Hov99, p. 17.

21. Spa88, p. 146.

module $\mathcal{E}_0^{pq} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_{X,q}, \mathcal{I}^p)$ est la cohomologie de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})$. En filtrant selon les colonnes²² \mathcal{E}_0 , la première page \mathcal{E}^1 est la cohomologie verticale qui est préservée par le foncteur exact $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\cdot, \mathcal{I}^p)$ et la deuxième page \mathcal{E}_2 est la cohomologie horizontale qui calcule les faisceaux ext :

$$\mathcal{E}_1^{pq} = H^q\left(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{C}_X, \mathcal{I}^p)\right) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{I}^p)$$

$$\mathcal{E}_2^{pq} \cong H^p\left(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{I})\right) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) \cong \begin{cases} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) & \text{if } p = 0 \\ 0 & \text{if } p > 0 \end{cases}$$

Ceci induit l'isomorphisme annoncé. En utilisant l'exactitude du foncteur δ_* et la démonstration du théorème 3.1.4, on peut conclure²³ avec les isomorphismes naturels de $\mathcal{O}_{X \times X}$ -module

$$\begin{aligned} \delta_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) &\cong \delta_* H^q\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})\right) \\ &\cong H^q\left(\delta_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathcal{C}_X, \mathcal{F})\right) \\ &\cong H^q\left(\delta_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\mathbb{L}\delta^* \delta_* \mathcal{O}_X, \mathcal{F})\right) \\ &\cong H^q\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\delta_* \mathcal{O}_X, \mathbb{R}\delta_* \mathcal{F})\right) \\ &\cong H^q\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\text{Ch}(\mathcal{O}_X)}(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F})\right) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^q(\delta_* \mathcal{O}_X, \delta_* \mathcal{F}) \end{aligned}$$

pour tout entier $q \geq 0$.

Remarque 3.2.2. Soient X un schéma séparé et lisse et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. Pour tout entier $q > 0$, le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{H}_{X,q}$ est²⁴ localement libre de rang fini et donc²⁵ pour tout entier $p > 0$, on a $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^p(\mathcal{H}_{X,q}, \mathcal{F}) = 0$ ce qui permet d'appliquer le théorème 3.2.1.

22. Wei94, p. 141.

23. Spa88, p. 147.

24. Gro67, p. 59.

25. Gro57, p. 189.

COLIMITES HOMOTOPIQUES

A.1 Structure de modèle projective

Soient \mathbf{N} une petite catégorie et \mathbf{C} une catégorie de modèle cofibramment engendrée. La catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des foncteurs $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ admet une structure de modèle dite *projective*¹ où les équivalences faibles et les fibrations sont définies ponctuellement. Autrement dit, une transformation naturelle $\alpha : F \rightarrow G$ de foncteur $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est une équivalence faible (resp. fibration) si et seulement si pour tout objet n de \mathbf{N} , le morphisme $\alpha_n : F(n) \rightarrow G(n)$ est une équivalence faible (resp. fibration) dans \mathbf{C} . En particulier, le foncteur diagonal $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ qui associe à tout objet X de \mathbf{C} le foncteur constant $n \mapsto X$ préserve les fibrations et les fibrations triviales.

Lemme A.1.1. Soient \mathbf{N} une petite catégorie et \mathbf{C} une catégorie de modèle cofibramment engendrée. Les foncteurs

$$\text{colim} : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightleftarrows \mathbf{C} : \Delta$$

forment une adjonction de Quillen.

Démonstration. L'adjonction est une autre formulation de la propriété universelle de la colimite et² Δ est un foncteur de Quillen à droite.

Définition A.1.2. Soient \mathbf{N} une petite catégorie et \mathbf{C} une catégorie de modèle cofibramment engendrée. La colimite homotopique d'un foncteur $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est l'image de F par le foncteur dérivé à gauche de $\text{colim} : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{C}$. On la note $\text{hocolim } F$, $\text{hocolim}_{\mathbf{N}} F$ ou encore $\text{hocolim}_{n \in \text{ob}(\mathbf{N})} F(n)$.

1. Hir03, p. 224.

2. Hov99, p. 14.

A.2 Structure de modèle de Reedy

Soient \mathbf{N} une catégorie de Reedy et \mathbf{C} une catégorie de modèle. Pour tout objet n de \mathbf{N} et tout foncteur $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$, on note

$$L_n F = \operatorname{colim}_{(\mathbf{N}_{+\downarrow n}) \setminus \{1_n\}} F \quad \& \quad M_n F = \operatorname{lim}_{(n \downarrow \mathbf{N}_-) \setminus \{1_n\}} F$$

La catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des foncteurs $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ admet une structure de modèle dite *de Reedy*³ définie comme suit. Une équivalence faible est une transformation naturelle $\alpha : F \rightarrow G$ de foncteur $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que pour tout objet n de \mathbf{N} , le morphisme $\alpha_n : F(n) \rightarrow G(n)$ est une équivalence faible dans \mathbf{C} . Une cofibration (triviale) est une transformation naturelle $F \rightarrow G$ telle que pour tout objet n de \mathbf{N} , le morphisme induit

$$(L_n G) \amalg_{(L_n F)} F(n) \longrightarrow G(n)$$

est une cofibration (triviale) dans \mathbf{C} . Une fibration (triviale) est une transformation naturelle $F \rightarrow G$ telle que pour tout objet n de \mathbf{N} , le morphisme induit

$$F(n) \longrightarrow G(n) \times_{(M_n G)} (M_n F)$$

est une fibration (triviale) dans \mathbf{C} . En particulier, le foncteur diagonal $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ qui associe à tout objet X de \mathbf{C} le foncteur constant $n \mapsto X$ préserve les équivalences faibles.

Lemme A.2.1. Soient \mathbf{N} une catégorie de Reedy et \mathbf{C} une catégorie de modèle. Si le foncteur diagonal $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ préserve les fibrations alors les foncteurs

$$\operatorname{colim} : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightleftarrows \mathbf{C} : \Delta$$

forment une adjonction de Quillen.

Démonstration. L'adjonction est une autre formulation de la propriété universelle de la colimite et⁴ par hypothèse, Δ est un foncteur de Quillen à droite.

3. Hov99, p. 125.

4. Hov99, p. 14.

Définition A.2.2. Soient \mathbf{N} une catégorie de Reedy et \mathbf{C} une catégorie de modèle telles que le foncteur diagonal $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ préserve les fibrations. La colimite homotopique d'un foncteur $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est l'image de F par le foncteur dérivé à gauche de $\text{colim} : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{C}$. On la note $\text{hocolim } F$, $\text{hocolim}_{\mathbf{N}} F$ ou encore $\text{hocolim}_{n \in \text{ob}(\mathbf{N})} F(n)$.

Proposition A.2.3. Soient \mathbf{N} une catégorie de Reedy et \mathbf{C} une catégorie de modèle cofibramment engendrée telles que le foncteur diagonal $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ envoie les fibrations vers des fibrations de Reedy. La colimite homotopique d'un foncteur $F : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ définie à partir de la structure de modèle projective de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ est naturellement faiblement équivalente à la colimite homotopique de F définie à partir de la structure de modèle de Reedy de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

Démonstration. Le foncteur identité induit ⁵ une équivalence de Quillen

$$(\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \text{Proj}) \xrightleftharpoons{\quad} (\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \text{Reedy})$$

entre la structure de modèle projective et la structure de modèle de Reedy. En dérivant à gauche le triangle commutatif de foncteur de Quillen à gauche

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \text{Proj}) & \xrightarrow{1_{\mathbf{C}^{\mathbf{N}}}} & (\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \text{Reedy}) \\ & \searrow \text{colim} & \swarrow \text{colim} \\ & & \mathbf{C} \end{array}$$

on obtient ⁶ les équivalences faibles naturelles de foncteur

$$(\mathbb{L}_{\text{Reedy}} \text{colim}) \circ 1_{\text{Ho}(\mathbf{C}^{\mathbf{N}})} \simeq (\mathbb{L}_{\text{Reedy}} \text{colim}) \circ (\mathbb{L}_{\text{Proj}} 1_{\mathbf{C}^{\mathbf{N}}}) \simeq \mathbb{L}_{\text{Proj}}(\text{colim} \circ 1_{\mathbf{C}^{\mathbf{N}}})$$

et ainsi $\mathbb{L}_{\text{Reedy}} \text{colim} \simeq \mathbb{L}_{\text{Proj}} \text{colim}$.

On termine ce paragraphe avec un lemme de changement de variable.

5. Hir03, p. 297.

6. Hov99, p. 17.

Lemme A.2.4. Soient \mathbf{C} une catégorie de modèle et $F : \mathbf{N}' \rightarrow \mathbf{N}$ un foncteur entre deux catégories de Reedy tel que pour tout objet $n = F(n')$ de \mathbf{N} , la restriction

$$F : (\mathbf{N}'_+ \downarrow n') \setminus \{1'_{n'}\} \longrightarrow (\mathbf{N}_+ \downarrow n) \setminus \{1_n\}$$

est un foncteur final bien défini. Le foncteur $F^* : \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}'}$ préserve les cofibrations.

Démonstration. Pour tout foncteur $G : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$, on a⁷ par hypothèse un isomorphisme naturel dans \mathbf{C}

$$L_{n'}(F^*G) = \operatorname{colim}_{(\mathbf{N}'_+ \downarrow n') \setminus \{1'_{n'}\}} (F^*G) \cong \operatorname{colim}_{(\mathbf{N}_+ \downarrow n) \setminus \{1_n\}} G = L_n G$$

A.3 Poussé-en-avant homotopique

Soient \mathbf{C} une catégorie et \mathbf{N} la petite catégorie définie par le diagramme

$$* \longleftarrow * \longrightarrow *$$

Un foncteur $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est un diagramme dans \mathbf{C}

$$X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$$

Lorsqu'elle existe, on note $X \cup_Z Y$ la colimite d'un tel foncteur. Une transformation naturelle de foncteur $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ est un diagramme commutatif dans \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccccc} A & \longleftarrow & C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

\mathbf{N} est une catégorie directe donc si \mathbf{C} est une catégorie de modèle alors la catégorie $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ des foncteurs $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ admet une structure de modèle dite *directe*⁸ définie comme

7. Mac98, p. 217.

8. Hov99, p. 120.

suit. Les équivalences faibles et les fibrations sont définies ponctuellement. Autrement dit, un diagramme commutatif dans \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccccc} A & \longleftarrow & C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

est une équivalence faible (resp. fibration) si et seulement si les trois flèches verticales sont des équivalences faibles (resp. fibrations) dans \mathbf{C} . Une cofibration (triviale) est un diagramme commutatif dans \mathbf{C}

$$\begin{array}{ccccc} A & \longleftarrow & C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tel que le morphisme $C \rightarrow Y$ ainsi que les deux morphismes induits

$$Z \cup_C A \longrightarrow X \quad \& \quad Z \cup_C B \longrightarrow Y$$

sont des cofibrations (triviales) dans \mathbf{C} . En particulier, un diagramme dans \mathbf{C}

$$X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$$

est cofibrant si et seulement si Z est cofibrant et les deux morphismes

$$Z \longrightarrow X \quad \& \quad Z \longrightarrow Y$$

sont des cofibrations dans \mathbf{C} .

Remarques A.3.1. 1. Si \mathbf{C} est cofibramment engendrée alors les structures de modèle projective et directe sur $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ coïncident⁹.

2. \mathbf{N} est en particulier une catégorie de Reedy. Les structures de modèle de Reedy et directe sur $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ coïncident et le foncteur diagonal $\Delta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ préserve les fibrations.

9. Hov99, p. 6.

On définit le *poussé-en-avant homotopique* d'un diagramme dans \mathbf{C}

$$X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$$

par la colimite homotopique du foncteur $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$ sous-jacent. On le note $X \cup_Z^h Y$.

Une catégorie de modèle \mathbf{C} est dite *propre à gauche* si pour toute cofibration $Z \rightarrow X$ et toute équivalence faible $Z \rightarrow Y$ dans \mathbf{C} , le morphisme canonique $X \rightarrow X \cup_Z Y$ est une équivalence faible. Cette hypothèse facilite le calcul d'un poussé-en-avant homotopique.

Proposition A.3.2. Soient \mathbf{C} une catégorie de modèle propre à gauche et

$$X \longleftarrow Z \longrightarrow Y$$

un diagramme dans \mathbf{C} . La factorisation cofibration/fibration triviale¹⁰

$$Z \twoheadrightarrow Y_0 \xrightarrow{\sim} Y$$

de $Z \rightarrow Y$ induit une équivalence faible $X \cup_Z^h Y \simeq X \cup_Z Y_0$ dans \mathbf{C} .

Démonstration. La démonstration est issue d'un exercice du cours¹¹ de G. Ginot. Soit

$$A \longleftarrow \langle Q \rangle \longrightarrow B_0$$

un remplacement cofibrant du diagramme dans \mathbf{C}

$$X \longleftarrow Z \twoheadrightarrow Y_0$$

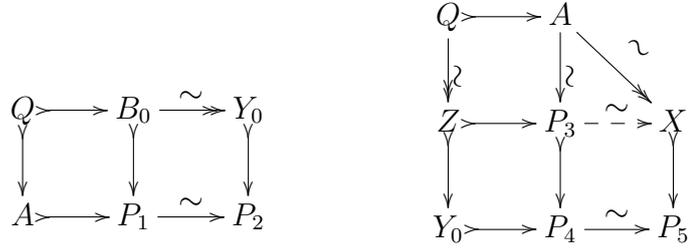
On définit successivement P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 par poussé-en-avant dans \mathbf{C} comme suit et obtient¹² les équivalences faibles dans \mathbf{C} suivantes en utilisant que les cofibrations sont

10. Hov99, p. 3.

11. Gin19.

12. Hov99, p. 6, 3.

stables par poussé-en-avant, que \mathbf{C} est propre à gauche et la propriété 2-sur-3 :



$$X \cup_Z^h Y \simeq X \cup_Z^h Y_0 = A \cup_Q B_0 = P_1 \simeq P_2 \cong A \cup_Q Y_0 \cong P_4 \simeq P_5 \cong X \cup_Z Y_0$$

ENSEMBLES SIMPLICIAUX

B.1 Lemme de Yoneda

Soit \mathbf{N} une petite catégorie. On note $\mathbf{Set}_{\mathbf{N}}$ la catégorie des foncteurs $\mathbf{N}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ et $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Set}_{\mathbf{N}}$ le foncteur qui associe un objet n de \mathbf{N} le foncteur $h_n = \text{Hom}_{\mathbf{N}}(_, n)$. Il existe¹ un isomorphisme naturel dans \mathbf{N}

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}_{\mathbf{N}}}(h_n, F) \cong F(n)$$

pour tout objet n de \mathbf{N} et tout foncteur $F : \mathbf{N}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. En particulier, h est pleinement fidèle. C'est le *plongement de Yoneda*. Pour tout foncteur $F : \mathbf{N}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, le morphisme canonique dans $\mathbf{Set}_{\mathbf{N}}$

$$\text{colim}_{h_n \rightarrow F} h_n \longrightarrow F$$

est² un isomorphisme.

Lorsque $\mathbf{N} = \mathbf{\Delta}$, on a $\mathbf{Set}_{\mathbf{N}} = \mathbf{sSet}$ et $h_n = \mathbf{\Delta}^n$. Pour tout ensemble simplicial K , les n -simplexes de K correspondent aux morphismes $\mathbf{\Delta}^n \rightarrow K$. De plus, le morphisme canonique d'ensemble simplicial

$$\text{hocolim}_{\mathbf{\Delta}^n \rightarrow K} \mathbf{\Delta}^n \longrightarrow K$$

est une équivalence faible. En effet³, la catégorie $\mathbf{\Delta}K = (\mathbf{\Delta} \downarrow K)$ des simplexes de K est une catégorie de Reedy et le foncteur diagonal $\mathbf{sSet} \rightarrow (\mathbf{sSet})^{\mathbf{\Delta}K}$ envoie les fibrations vers des fibrations de Reedy. D'après la proposition A.2.3, il suffit de montrer que la projection

1. Mac98, p. 59.
 2. Mac98, p. 247.
 3. Hir03, p. 279, 309-310.

canonique

$$\pi : \mathbf{\Delta}K \longrightarrow s\mathbf{Set}$$

qui envoie $\mathbf{\Delta}^n \rightarrow K$ vers $\mathbf{\Delta}^n$ est un objet cofibrant dans $s\mathbf{Set}^{\mathbf{\Delta}K}$ pour la structure de Reedy, autrement dit que pour tout simplexe $\sigma : \mathbf{\Delta}^n \rightarrow K$, le morphisme $L_\sigma\pi \rightarrow \pi(\sigma)$ est une cofibration d'ensemble simplicial, c'est-à-dire⁴ un monomorphisme. C'est le cas, puisqu'il s'agit de l'inclusion $\partial\mathbf{\Delta}^n \rightarrow \mathbf{\Delta}^n$, comme le montrent les isomorphismes naturels d'ensemble simplicial

$$L_\sigma\pi = \operatorname{colim}_{(\mathbf{\Delta}_+K \downarrow \sigma) \setminus \{1_\sigma\}} \pi \cong \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}^m \rightarrow \partial\mathbf{\Delta}^n} \mathbf{\Delta}^m \cong \partial\mathbf{\Delta}^n$$

qui proviennent⁵ du fait que le foncteur

$$F : (\mathbf{\Delta}_+K \downarrow \sigma) \setminus \{1_\sigma\} \longrightarrow \mathbf{\Delta}(\partial\mathbf{\Delta}^n)$$

qui envoie un triangle commutatif de $s\mathbf{Set}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Delta}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{\Delta}^n \\ & \searrow & \swarrow \sigma \\ & K & \end{array}$$

vers le simplexe induit $\mathbf{\Delta}^m \rightarrow \partial\mathbf{\Delta}^n$ est un foncteur final. En effet, pour tout simplexe $\theta : \mathbf{\Delta}^m \rightarrow \partial\mathbf{\Delta}^n$, il existe⁶ une décomposition universelle

$$[m] \xrightarrow{s} [k] \xrightarrow{d} [n]$$

qui fait de $\mu = F(d_*) : \mathbf{\Delta}^k \rightarrow \partial\mathbf{\Delta}^n$ un objet initial de $(\theta \downarrow F)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Delta}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{\Delta}^l \\ & \searrow \theta & \swarrow \nu \\ & \partial\mathbf{\Delta}^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & & [l] \\ & \nearrow & \downarrow \\ [m] & \xrightarrow{s} & [k] \xrightarrow{d} [n] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{\Delta}^m & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{\Delta}^k & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{\Delta}^l \\ & \searrow \theta & \downarrow \mu & \swarrow \nu & \\ & \partial\mathbf{\Delta}^n & & & \end{array}$$

En particulier, $(\theta \downarrow F)$ est non-vide et connexe.

4. Hov99, p. 79.

5. Mac98, p. 217.

6. Mac98, p. 177.

B.2 Squelette

Soit K un ensemble simplicial. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note K^n le sous-ensemble simplicial de K engendré par les simplexes non-dégénérés $\sigma \in K_p$ pour $p \leq n$. Ces sous-ensembles simpliciaux fournissent une filtration appelée *squelette*

$$K^0 \subset K^1 \subset \dots \subset K^n \subset K^{n+1} \subset \dots \subset K$$

telle que $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n$. De plus, le morphisme canonique

$$\operatorname{hocolim}_{n \in \mathbb{N}} K^n \longrightarrow K$$

est une équivalence faible d'ensemble simplicial. En effet, le foncteur

$$K^\bullet : (\mathbb{N}, \leq) \longrightarrow \mathbf{sSet}$$

est un objet cofibrant de $\mathbf{sSet}^{(\mathbb{N}, \leq)}$. Pour le voir⁷, on remarque que (\mathbb{N}, \leq) est une catégorie directe et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme induit

$$L_n K^\bullet = \operatorname{colim}_{m < n} K^m = K^{n-1} \longrightarrow K^n$$

est une cofibration d'ensemble simplicial, c'est-à-dire un monomorphisme.

On peut aussi construire le squelette de K par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le sous-ensemble K^0 de K est engendré par les sommets de K , puis K^n est défini à partir de K^{n-1} via le poussé-en-avant d'ensemble simplicial

$$\begin{array}{ccc} (\partial \Delta^n)^{\sqcup \Sigma_n} & \longrightarrow & K^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Delta^n)^{\sqcup \Sigma_n} & \longrightarrow & K^n \end{array}$$

où Σ_n est l'ensemble des n -simplexes non-dégénérés de K .

7. Hov99, p. 120, 79.

B.3 Ensemble simplicial minimal

Un ensemble simplicial fibrant K est dit *minimal* si pour tout simplexes σ et μ de K tels que $d_i\sigma = d_i\mu$ pour tout $i \neq j$, on a $d_j\sigma = d_j\mu$.

Si K est un ensemble simplicial minimal et connexe alors⁸ $K_0 = \pi_0(K) = *$ et le morphisme canonique d'ensemble simplicial pointé

$$\operatorname{hocolim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow K} \Delta^n \longrightarrow K$$

est une équivalence faible. En effet, il existe un unique morphisme d'ensemble simplicial $* \rightarrow K$ donc le foncteur d'oubli $(* \downarrow \Delta K) \rightarrow \Delta K$ est surjectif. En remarquant qu'un foncteur surjectif est toujours final, on peut appliquer le lemme A.2.4 et ainsi se ramener⁹ au paragraphe B.1 :

$$\operatorname{hocolim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow K} \Delta^n = \operatorname{colim}_{* \rightarrow \Delta^n \rightarrow K} \Delta^n \cong \operatorname{colim}_{\Delta^n \rightarrow K} \Delta^n = \operatorname{hocolim}_{\Delta^n \rightarrow K} \Delta^n \simeq K$$

8. May82, p. 35.

9. Mac98, p. 217.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bou07] Nicolas BOURBAKI, *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, French, Reprint of the 1970 original, Berlin : Springer, 2007, ISBN : 3-540-33849-7.
- [Bou85] N. BOURBAKI, *Eléments de mathématique. Algèbre commutative. Chapitre 1 : Modules plats. Chapitre 2 : Localisation. Chapitre 3 : Graduations, filtrations et topologies. Chapitre 4 : Idéaux premiers associés et décomposition primaire. Nouveau tirage*, French, Paris etc. : Masson. 362 p. FF 250.00 (1985). 1985.
- [Gin17] G. GINOT, « Hodge filtration and operations in higher Hochschild (co)homology and applications to higher string topology », English, in : *Algebraic topology. VIASM 2012–2015*, Cham : Springer, 2017, p. 1-104, ISBN : 978-3-319-69433-7 ; 978-3-319-69434-4, DOI : 10.1007/978-3-319-69434-4_1.
- [Gin19] G. GINOT, *Introduction à l'homotopie*, <https://www.math.univ-paris13.fr/~ginot/Homotopie/Ginot-homotopie2019.pdf>, 2019.
- [Gro57] A. GROTHENDIECK, « Sur quelques points d'algèbre homologique », French, in : *Tohoku Math. J. (2)* 9 (1957), p. 119-221, ISSN : 0040-8735.
- [Gro60] A. GROTHENDIECK, « Éléments de géométrie algébrique. I : Le langage des schémas. II : Étude globale élémentaire de quelques classe de morphismes. III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents (première partie) », French, in : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 4 (1960), p. 1-228, ISSN : 0073-8301, DOI : 10.1007/BF02684778.
- [Gro67] A. GROTHENDIECK, « Éléments de géométrie algébrique. IV : Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième partie). Rédigé avec la colloboration de Jean Dieudonné », French, in : *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* 32 (1967), p. 1-361, ISSN : 0073-8301.
- [GS88] Murray GERSTENHABER et Samuel D. SCHACK, *Algebraic cohomology and deformation theory*, English, Deformation theory of algebras and structures and applications, Nato Adv. Study Inst., Castelvecchio-Pascoli/Italy 1986, Nato ASI Ser., Ser. C 247, 11-264 (1988). 1988.

- [GTZ14] G. GINOT, T. TRADLER et M. ZEINALIAN, « Higher Hochschild homology, topological chiral homology and factorization algebras », English, in : *Commun. Math. Phys.* 326.3 (2014), p. 635-686, ISSN : 0010-3616, DOI : 10.1007/s00220-014-1889-0.
- [Har77] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, English, t. 52, Springer, Cham, 1977.
- [Hat02] Allen HATCHER, *Algebraic topology*, English, Cambridge : Cambridge University Press, 2002, ISBN : 0-521-79540-0.
- [Hin97] V. HINICH, « Homological algebra of homotopy algebras », English, in : *Commun. Algebra* 25.10 (1997), p. 3291-3323, ISSN : 0092-7872, DOI : 10.1080/00927879708826055.
- [Hir03] Philip S. HIRSCHHORN, *Model categories and their localizations*, English, t. 99, Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2003, p. xv + 457, ISBN : 0-8218-3279-4.
- [Hov01] M. HOVEY, « Model category structures on chain complexes of sheaves », English, in : *Trans. Am. Math. Soc.* 353.6 (2001), p. 2441-2457, ISSN : 0002-9947, DOI : 10.1090/S0002-9947-01-02721-0.
- [Hov99] M. HOVEY, *Model categories*, English, t. 63, Providence, RI : American Mathematical Society, 1999, p. xii + 209, ISBN : 0-8218-1359-5.
- [Lod98] J.-L. LODAY, *Cyclic homology*. English, t. 301, Berlin : Springer, 1998, p. xviii + 513, ISBN : 3-540-63074-0.
- [Mac75] S. MAC LANE, *Homology. 3rd corr. print*, English, t. 114, Springer, Cham, 1975.
- [Mac98] S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*. English, t. 5, New York, NY : Springer, 1998, p. xii + 314, ISBN : 0-387-98403-8.
- [May82] J. P. MAY, *Simplicial objects in algebraic topology. Reprint*, English, Midway Reprints. Chicago - London : The University of Chicago Press. VIII, 161 p. (1982). 1982.
- [Pir00] T. PIRASHVILI, « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », English, in : *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* 33.2 (2000), p. 151-179, ISSN : 0012-9593, DOI : 10.1016/S0012-9593(00)00107-5.

- [Spa88] N. SPALTENSTEIN, « Resolutions of unbounded complexes », English, in : *Compos. Math.* 65.2 (1988), p. 121-154, ISSN : 0010-437X.
- [SS00] S. SCHWEDE et B. E. SHIPLEY, « Algebras and modules in monoidal model categories », English, in : *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 80.2 (2000), p. 491-511, ISSN : 0024-6115, DOI : 10.1112/S002461150001220X.
- [Swa96] R. G. SWAN, « Hochschild cohomology of quasiprojective schemes », English, in : *J. Pure Appl. Algebra* 110.1 (1996), p. 57-80, ISSN : 0022-4049, DOI : 10.1016/0022-4049(95)00091-7.
- [Wei94] C. A. WEIBEL, *An introduction to homological algebra*, English, t. 38, Cambridge : Cambridge University Press, 1994, p. xiv + 450, ISBN : 0-521-43500-5.

Titre : Propriétés faisceautiques de l'homologie de Hochschild supérieure

Mot clés : Algèbre Homologique, Géométrie Algébrique, Foncteurs de Quillen

Résumé : Nous montrons que le complexe de Hochschild supérieur associé à un ensemble simplicial pointé et connexe commute avec la localisation des algèbres commutatives sur un corps de caractéristique nulle. Après avoir défini la cohomologie de Hochschild supérieure d'un schéma, nous généralisons la suite spectrale de Hodge, le théorème HKR de Pirashvili, puis démontrons l'existence d'une décomposition de Hodge pour la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur d'un schéma lisse et séparé sur un corps de caractéristique nulle. Nous montrons que cette définition et la suite spectrale de Hodge coïncident avec

la définition et la suite spectrale de Pirashvili dans le cas des ensembles simpliciaux pointés et connexes et des schémas affines. Nous définissons également une structure de modèle sur la catégorie des modules sur un pré-faisceau de CDGA pour donner une définition équivalente de la cohomologie de Hochschild d'ordre supérieur d'un schéma séparé sur un corps de caractéristique nulle à coefficients dans un faisceau quasi-cohérent. Enfin, nous généralisons le théorème de Swan à la cohomologie de Hochschild des schémas séparés sur un corps.

Title: Sheaf properties of the Higher Hochschild Homology

Keywords: Homological Algebra, Algebraic Geometry, Quillen Functors

Abstract: We show that the Higher Hochschild complex associated to a connected pointed simplicial set commutes with localization of commutative algebras over a field of characteristic zero. After defining the Higher Hochschild cohomology of a scheme, we generalize the Hodge spectral sequence, the HKR theorem of Pirashvili, and then show that there exists a Hodge decomposition for the higher order Hochschild cohomology of a separated smooth scheme over a field of characteristic zero. We show that this definition and the Hodge spectral sequence coin-

cide with the definition and the spectral sequence of Pirashvili in the case of connected pointed simplicial sets and affine schemes. We also define a model structure on the category of modules over a presheaf of CDGA to give an equivalent definition of the higher order Hochschild cohomology of a separated scheme over a field of characteristic zero with coefficients in a quasi-coherent sheaf. Finally, we generalize the theorem of Swan to the Hochschild cohomology of separate schemes over a field.