

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'ENVIRONNEMENT

Institut Terre et Environnement Strasbourg

THÈSE présentée par **Alexandre MICHEL**
soutenue le **09 mars 2022**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'Université de Strasbourg**
Spécialité : Géodésie/Géophysique

DÉTERMINATION DES VARIATIONS SAISONNIÈRES DE LA CHARGE EN EUROPE PAR INVERSION DES DÉPLACEMENTS GNSS CALCULÉS AVEC LE LOGICIEL GINS

THÈSE dirigée par :

M. BOY Jean-Paul

Physicien à l'ITES (Strasbourg)

M. PEROSANZ Félix

Ingénieur de recherche au CNES (Toulouse)

RAPPORTEUR-E :

Mme FLEITOUT Luce

Directrice de recherche CNRS au LGNS (Paris)

M. BRIOLE Pierre

Directeur de recherche CNRS au LGNS (Paris)

EXAMINAT-EUR-RICE :

Mme WALPERSDORF Andrea

Physicienne à l'ISTerre (Grenoble)

M. RAMILLIEN Guillaume

Directeur de recherche CNRS au GET (Toulouse)

Résumé

La circulation des fluides géophysiques (atmosphère, océans et hydrologie continentale) induit des redistributions de masse en surface et donc des déformations pouvant être mesurées avec une grande précision par les différentes techniques de géodésie spatiale. D'une part, les missions de gravimétrie spatiale GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) (2002 – 2017) et GRACE Follow-On (lancement début 2018) permettent de déterminer les variations du contenu en eau du sol avec une résolution spatiale de l'ordre de quelques centaines de kilomètres et temporelle de quelques semaines. D'autre part, les réseaux denses de stations permanentes GNSS (Global Navigation Satellite System) permettent de mesurer les déformations horizontales et verticales avec des résolutions spatiales de l'ordre de quelques kilomètres. Aux périodes saisonnières, ces déformations sont principalement dues aux redistributions de masse dans le système climatique.

Il a été montré dans les zones où les redistributions saisonnières de masse sont importantes qu'il était possible d'inverser les déformations mesurées par GNSS pour en déduire les variations saisonnières du contenu en eau du sol (neige, humidité du sol et nappes souterraines). Cela nécessite notamment l'utilisation d'un modèle de Terre déformable régi par une théorie gravito-(an)élastique et requiert un réseau dense de stations GNSS. Cette approche permet d'accéder à des longueurs d'onde (quelques dizaines de kilomètres) et des périodes (quelques jours) inférieures donc complémentaires à la gravimétrie spatiale.

Dans cette thèse, nous avons donc tiré profit de l'importante densité de stations GNSS en Europe afin de reproduire et d'améliorer le processus d'inversion décrit précédemment et d'en déduire la charge hydrologique en zone tempérée. Nous avons donc calculé les solutions GNSS sur un réseau de plus de 1000 stations en Europe avec la méthode la plus précise possible (Positionnement Précis Ponctuel avec résolution des ambiguïtés entières) car le signal saisonnier dans ces zones tempérées est de l'ordre de seulement quelques millimètres en déplacement. Nous avons également pris en compte le caractère visco-élastique de la réponse de la Terre à une perturbation afin de pouvoir vérifier la sensibilité de la déformation aux paramètres rhéologiques du modèle de Terre. Notamment, nous avons étudié, pour plusieurs modèles de Terre visco-élastiques, les déformations associées aux forces de marée solide, au rebond post-glaciaire et à la fonte actuelle des glaces aux pôles. Enfin, comme de nombreuses études antérieures à la nôtre, nous avons montré que l'effet de la viscosité du manteau, quel que soit le modèle de Terre utilisé (Maxwell ou Burgers), est complètement négligeable aux périodes annuelles et semi-annuelles auxquelles nous nous intéressons pour les redistributions de masses hydrologiques et atmosphériques. Nous resterons donc dans le cas d'un modèle purement élastique.

Enfin, nous avons développé la méthode permettant d'inverser les déplacements GNSS dans le cadre du formalisme des fonctions de Green, en appliquant une méthode d'inversion par moindres carrés régularisés. La régularisation nécessite de trouver les paramètres de lissage dont nous nous sommes employés à trouver plusieurs critères de détermination objectifs en testant l'inversion sur des déplacements GNSS synthétiques calculés à partir de la solution de charge de GRACE. Nous avons finalement inversé la composante verticale des déplacements annuels du GNSS pour retrouver le cycle saisonnier des variations de masses hydrologiques. Plusieurs résultats d'inversion ont été comparés, dont certains combinant les données GNSS et les données GRACE au sein d'une inversion conjointe.

Mots clés : géodésie spatiale, charges hydrologiques, GNSS, nombres de Love, visco-élasticité, régularisation de Tikhonov

Abstract

The circulation of geophysical fluids (atmosphere, oceans and continental hydrology) induces mass redistributions on the Earth surface and therefore deformations that can be measured with great accuracy by various space geodesy techniques. On one hand, the space gravity missions GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) (2002 - 2017) and GRACE Follow-On (launch in early 2018) allow to determine the variations of the continental hydrology with spatial resolutions of a few hundred kilometers and temporal resolutions of a few weeks. On the other hand, dense networks of permanent GNSS (Global Navigation Satellite System) stations allow to measure horizontal and vertical deformations with spatial resolutions of a few kilometers. At seasonal periods, these deformations are mainly due to mass redistribution within the climate system.

It has been shown that in areas where seasonal mass redistributions are important it is possible to invert deformations measured by GNSS in order to deduce seasonal variations in soil water content (snow, soil moisture and groundwater). This requires the use of a deformable Earth model governed by a gravito-(an)elastic theory and requires a dense network of GNSS stations. This approach allows access to wavelengths (a few tens of kilometers) and periods (a few days) that are shorter and therefore complementary to spatial gravimetry.

In this thesis, we have therefore taken advantage of the high density of GNSS stations in Western Europe in order to reproduce and improve the inversion process described above and to derive the hydrological loading in temperate regions. We then computed GNSS solutions over a network of more than 1000 stations in Europe with the most accurate method possible (Precise Point Positioning with integer ambiguity resolution) because the seasonal signal in these temperate regions generates displacements of only a few millimeters. We have also taken into account the viscoelastic behaviour of the Earth's response to a perturbation in order to verify the sensitivity of the deformation to the rheological parameters of the Earth model. In particular, we have studied, for several viscoelastic Earth models, the deformation due to solid Earth tides, post-glacial rebound, and current polar ice melting. Finally, like many previous studies, we have shown that the effect of mantle viscosity, whatever the Earth model used (Maxwell or Burgers), is completely negligible at the annual and semi-annual periods we are interested in for hydrological and atmospheric mass redistributions. We will therefore use an elastic Earth model.

Finally, we have developed the method for inverting GNSS displacements in the framework of the Green's function formalism by applying a regularized least squares inversion method. The regularization requires to find the smoothing parameters for which we have tried to find several objective determination criteria by testing the inversion on synthetic GNSS displacements computed from GRACE loading solution. We finally inverted the vertical component of the annual GNSS displacements to recover the seasonal cycle of hydrological mass variations. Several inversion results were compared, including some combining GNSS and GRACE data within a joint inversion.

Keywords : spatial geodesy, hydrological loading, GNSS, Love numbers, visco-elasticity, Tikhonov regularisation

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu mes deux directeurs de thèse Jean-Paul Boy et Félix Pérosanz pour m'avoir accompagné tout au long de ce projet. J'ai eu la chance d'être à proximité de Jean-Paul pendant toute ma thèse et d'avoir pu surgir à l'improviste dans son bureau à de nombreuses reprises pour discuter de sujets divers, que ça concerne la thèse ou non (mais quand même beaucoup la thèse) ! Je le remercie pour sa disponibilité à toute épreuve, et pour tout ce que j'ai appris à ses côtés sur le monde de la géodésie et de la recherche, aussi lors des nombreux congrès auquel j'ai eu l'opportunité de participer. Certes un peu plus loin sur le plan géographique, et malgré les difficultés liées à la crise sanitaire, je veux ici remercier Félix pour son accueil lors de nos séjours toulousains, mais également pour sa disponibilité lors de nos réunions à distance où j'ai beaucoup appris, notamment sur le GNSS et le fonctionnement de GINS. Cette thèse n'aurait pas été aussi aboutie sans leurs idées, remarques et commentaires toujours constructifs ainsi que le soutien et la confiance qu'ils m'ont toujours témoignés.

Ce travail a aussi été l'occasion de rencontrer et collaborer avec des personnes qui m'ont beaucoup apporté sur le plan scientifique et humain. Je remercie d'abord Alvaro Santamaría-Gómez pour les nombreux échanges qu'on a pu avoir au sujet de mon travail sur le GNSS et pour son regard scientifique aiguisé. Je le remercie aussi ainsi que Laurent Métivier et Joëlle Nicolas pour leur participation à mon comité de suivi de thèse, et leurs conseils précieux. Je remercie aussi Séverine Rosat pour les nombreuses et fructueuses discussions qu'on a pu avoir sur les nombres de Love et Zacharie Duputel qui m'a expliqué le cadre théorique des inversions pseudo-bayésiennes. Je remercie Kristel Chanard pour avoir toujours eu l'oeil attentif sur mes travaux depuis mon stage de M2 et pour ses conseils et remarques pertinentes. Également, je remercie Sylvain Loyer pour sa disponibilité et son implication sur les problèmes de mise en référence des solutions, mais aussi pour les discussions qu'on a pu avoir autour du GNSS en général. S'ajoutent à ces remerciements, Jean-Charles Marty et toutes les personnes qui ont fait de GINS un outil accessible et performant aujourd'hui, ainsi que toutes les personnes et collègues (Paul, Pascal, Sébastien, Pierre, Jean-Michel et beaucoup d'autres) que j'ai pu rencontrer et avec lesquelles j'ai pu échanger dans le cadre des colloques du G2, des journées GINS et du GRGS, mais aussi à l'IUGG et à l'AGU. Je me suis toujours senti intégré et j'ai passé à ces occasions des moments inoubliables tant sur le plan scientifique que sur le plan humain, que ce soit sur les plages de l'île d'Oléron ou en cavale nocturne dans San-Francisco.

Je veux aussi remercier les personnes que j'ai croisées sur mon chemin depuis que je suis arrivé à Strasbourg, il y a maintenant quatre ans. En premier lieu les ami(e)s / doctorant(e)s / docteur(e)s de l'ITES, Eric, Camille, Monica, Hugo, Myriam, Floriane, Julien, Quentin, Rohiannu, Clément(s) et les autres. Également, je remercie les étudiants que j'ai eus en cours car c'est aussi grâce à eux que je suis aujourd'hui conforté dans ma vocation future d'enseignant. Cela m'amène également à remercier tout mes amis du collectif Jolidon avec lesquels on a quand même osé et réussi un sacré pari, qui est révélateur des liens que nous avons tissés quand nous n'étions encore que de jeunes agrégatifs lyonnais. Enfin je remercie tout mes ami(e)s de longue date qui se reconnaîtront, pour leurs soutien, leurs présence, leurs blagues, et tout ce qui m'a globalement permis, des fois sans vraiment qu'ils ne le sachent, de tenir pendant toute cette période.

Je remercie infiniment ma famille pour leur soutien sans faille dans tout ce que j'entreprends depuis le tout début. Cette thèse leur est dédiée, tout particulièrement à mes parents et à ma grand-mère.

Je conclus en portant une mention très spéciale pour toi Pénélope. Nous avons la chance de vivre notre vie ensemble depuis plus des trois quarts d'une décennie, et ces quatre ans n'auront que renforcé notre complicité. Un concentré d'aller-et-retour à Strasbourg, de Vosges, de BDs, de cuisine, de (nombres de) Love ... et puis aussi de Miki, avec sa palette harmonique, sa délicatesse naturelle et les promenades au grand air en sa compagnie qui nous font certainement le plus grand bien.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Introduction	1
I Contexte de l'étude	5
1 Différents types de charge	6
1.1 Charges de marée océanique et atmosphérique	6
1.2 Charges océaniques et atmosphériques non-maréales	6
1.3 Charges hydrologiques	7
1.4 Charges cryologiques	8
2 Estimation du signal de charge	8
2.1 Missions GRACE et GRACE-FO	9
2.1.1 Présentation	9
2.1.2 Solutions mascons	9
2.2 Utilisation du GNSS	10
2.2.1 Problème direct	12
2.2.2 Problème inverse	12
3 Présentation de la situation en Europe	14
3.1 Estimation du signal de charge avec GRACE	15
3.2 Potentiel du GNSS	16
3.2.1 Réseaux de stations	16
3.2.2 Sélection des stations	17
II Solutions GNSS en Europe calculées avec le logiciel GINS	19
1 Généralités sur le GNSS	20
2 Détermination de l'équation de mesure	21
2.1 Émission, propagation et réception du signal	21
2.2 Équation de mesure de code et phase	22
3 Positionnement précis	24
3.1 Solution différenciée	25
3.2 Solution Zéro-différence	26
3.2.1 Mode PPP	26
3.2.2 Résolution des ambiguïtés entières	27
4 Utilisation de GINS pour le calcul précis de positions GNSS	29
5 Solution GR2/GRG	34
5.1 Analyse des séries temporelles et mode commun	34
5.2 Mise en référence et calcul des paramètres de Helmert	36
6 Solution MG3 (REPRO3)	37
6.1 Validation de la qualité des produits utilisés	38
6.2 Analyse des déplacements et comparaisons aux modèles hydrologiques	39
6.3 Comparaison du mode commun avec d'autres solutions	61

III Modèles rhéologiques et déformations	65
1 Déformations et contraintes dans un matériau	66
1.1 Vecteur déplacement et tenseur des déformations	66
1.2 Tenseur des contraintes	67
2 Élasticité et viscosité	67
2.1 Loi de Hooke	67
2.2 Hypothèse d'incompressibilité	68
2.3 Modélisation d'une rhéologie élastique	70
2.4 Modélisation de la viscosité	71
3 Association de plusieurs modèles rhéologiques	72
3.1 Principe de correspondance	73
3.2 Modèle de Maxwell	73
3.3 Modèle de Kelvin	76
3.4 Modèle de Burgers	77
3.5 Récapitulatif	79
IV Détermination de la déformation visco-élastique	81
1 Théorie de la gravito-élasticité pour une Terre SNREI	82
1.1 Équations constitutives de la gravito-élasticité	82
1.1.1 Conservation de la masse	82
1.1.2 Conservation de l'impulsion	83
1.1.3 Équation de Poisson	84
1.1.4 Système total	84
1.2 Système perturbé	84
1.2.1 Perturbation à l'ordre 1	84
1.2.2 Système d'équation perturbé	84
1.3 Décomposition en harmoniques sphériques	86
1.3.1 Décomposition et polynôme de Legendre	86
1.3.2 Système des y_i	87
1.4 Conditions aux limites	89
1.4.1 Effet d'un potentiel extérieur	89
1.4.2 Effet de pression/traction	90
1.4.3 Effet de surcharge	90
1.4.4 Bilan	91
1.5 Choix du modèle de Terre	91
1.5.1 Modèles élastiques	91
1.5.1.1 Croûte	91
1.5.1.2 Manteau supérieur	92
1.5.1.3 Manteau inférieur	92
1.5.1.4 Noyau liquide	93
1.5.1.5 Graine	93
1.5.2 Calcul des paramètres de Terre	94
1.6 Résolution pour une Terre SNREI non homogène avec noyau liquide	94
1.6.1 Cas du noyau liquide	94
1.6.2 Intégration numérique	96
1.7 Remarques complémentaires sur l'intégration numérique	99
1.7.1 Adimensionnement du système	99
1.7.2 Intégration en $r = 0$	99
1.7.3 Intégration numérique sans noyau liquide	99
1.7.4 Intégration pour les hauts degrés	99
2 Nombres de Love	100
2.1 Définition	100
2.2 Cas élastique	101

2.3	Cas visco-élastique (basé sur Michel & Boy (2021))	102
2.3.1	Viscoelastic models	102
2.3.2	Frequency and degree dependence	103
2.3.3	Viscosity model dependence	105
3	Déformation visco-élastique utilisant la TF (basé sur Michel & Boy (2021))	106
3.1	Computation of viscoelastic deformation with FT	106
3.1.1	Sinusoidal perturbation	106
3.1.2	Non-sinusoidal perturbation	106
3.1.3	Global perturbation	107
3.2	Applications	107
3.2.1	Solid Earth tides	108
3.2.2	GIA / Post-glacial rebound	110
3.2.3	Present-day ice melting	113
3.3	Discussion	117
3.4	Résumé	118
4	Déformation locale avec la fonction de Green	119
4.1	Pour une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α	119
4.2	Pour une masse de Dirac	120
4.3	Calcul numérique de la fonction de Green	121
V	Détermination de la charge par inversion des déplacements	123
1	Problème inverse régularisé	124
1.1	Inversion par moindres carrés	124
1.2	Régularisation de Tikhonov	125
2	Mise en équation	126
2.1	Vecteur déplacement D	126
2.2	Matrice de Green G	126
2.3	Choix de la grille de charge	128
2.4	Matrice de régularisation	129
2.5	Résumé	130
3	Inversion de déplacements GNSS synthétiques	130
3.1	Influence de la grille d'inversion	132
3.2	Influence des paramètres de lissage	133
4	Critères objectifs pour le choix des hyperparamètres	136
4.1	Fonction ABIC	136
4.2	Generalized Cross Validation (GCV)	137
4.3	Trade-off curve	138
4.4	Résultats	139
5	Lissage variable	139
5.1	Comparaison des techniques de lissage	141
5.2	Détermination conjointe de λ , R_c et R_{oc}	141
5.3	Résumé	142
6	Inversion des déplacements GNSS	142
6.1	Inversion des déplacements verticaux GNSS seuls	144
6.2	Inversion contrainte par GRACE	145
6.3	Inversion conjointe avec GRACE	147
6.4	Comparaison avec les modèles de charge	149
6.5	Conclusion	151
Conclusion		153
Bibliographie		157

Annexes	170
Liste des Figures	171
Liste des Tableaux	177
Liste des Abréviations	179
Liste des Publications et Communications	183
Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects	185
Liste des stations GNSS utilisées	207

Introduction

La diversité des phénomènes se produisant au sein du système Terre est considérable tant d'un point de vue des mécanismes physiques engagés que des échelles spatiales et temporelles sur lesquelles ils s'établissent. On peut grossièrement décrire la Terre comme un système composite d'enveloppes solides et fluides en constante interaction. Les enveloppes fluides de natures diverses (noyau liquide, océans, atmosphère) agissent gravitationnellement sur la Terre solide engendrant des déformations et des redistributions de masse. D'autre part, cette partie solide est elle-même le siège de mouvements intrinsèques comme la tectonique des plaques ou les gigantesques mouvements de convection au sein du manteau. Enfin, une grande partie de la déformation du système Terre provient de l'interaction gravitationnelle de ses masses avec les autres corps du système solaire, notamment la Lune et le Soleil. La déformation de la Terre solide est également régie par la diversité rhéologique de ses couches internes, c'est-à-dire la capacité qu'ont chacune d'elles à se déformer dans le temps sous l'effet des différentes perturbations précédemment citées. La Figure A extraite de Rummel et al. (2003) résume la majorité des événements géophysiques observés en les plaçant dans un diagramme spatio-temporel reflétant à la fois l'empreinte spatio-temporelle de la perturbation elle-même et de la réponse rhéologique induite par la Terre solide à cette perturbation.

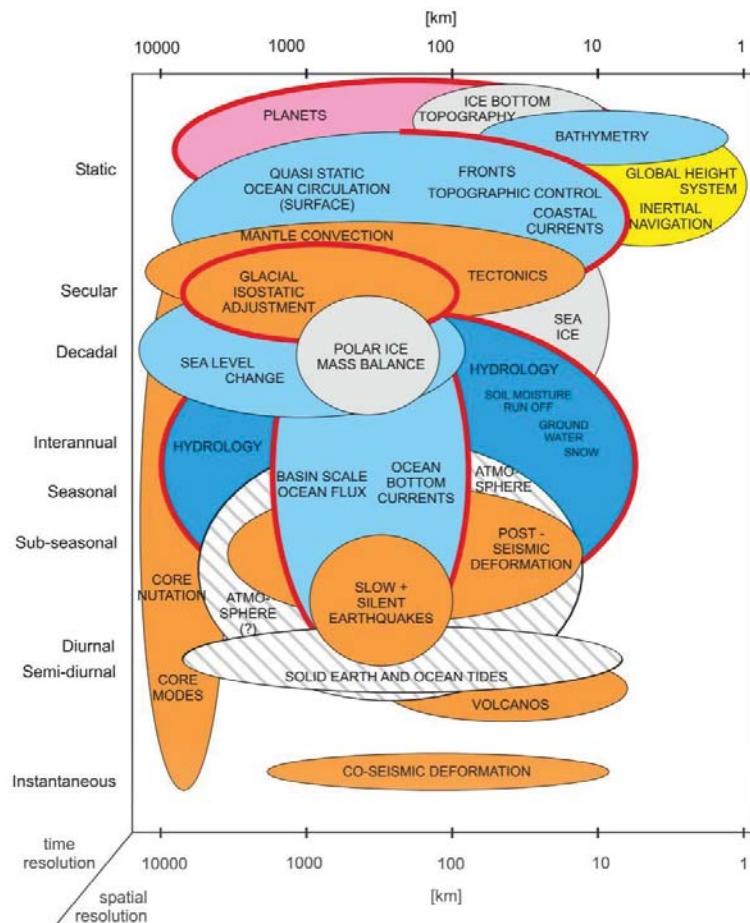


Fig. A – Répartition en fonction des échelles temporelles et spatiales de divers phénomènes géophysiques déformant directement ou indirectement la Terre. (*extrait de Rummel et al. (2003)*)

Aussi, on voit que la mesure des déformations de la Terre solide est un enjeu majeur pour la compréhension des phénomènes physiques qui les engendrent. La géodésie (qui étymologiquement signifie « mesure de la Terre ») est de ce point de vue un domaine crucial qui a pour objet de mesurer le plus précisément possible la forme géométrique de la Terre ainsi que son champ de pesanteur et ses paramètres d'orientation dans l'espace. Face à des enjeux fondamentaux à la fois scientifiques et environnementaux, mais aussi sociétaux, politiques et économiques, la communauté géodésique internationale s'est organisée au sein de l'IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) en créant l'IAG (International Association of Geodesy) dont l'une des composantes GGOS (Global Geodetic Observing System) est en charge de récolter, structurer, calculer et diffuser l'ensemble des données et modèles géodésiques disponibles à la communauté internationale. Ces tâches sont distribuées entre différents services d'observation (13 au total) dont les produits servent de base fondamentale à la majorité des études du système Terre dans lesquelles les prévisions climatiques et la prévention des risques naturels prennent une part importante. On note que la majorité de ces services d'observation s'appuient aujourd'hui sur les missions spatiales, qui ont été d'un apport sans précédent dans l'amélioration des modèles grâce à la couverture spatiale globale qu'elles permettent d'obtenir, associée à une bonne résolution temporelle. À titre d'exemple, le GNSS (Global Navigation Satellite System), le SLR (Satellite Laser Ranging) et DORIS (Doppler Orbitography by Radiopositionning Integrated on Satellite) sont trois techniques de géodésie spatiale majeures qui, associées avec le VLBI (Very Long Base Interferometry), ont entre autre contribué à la détermination de plus en plus précise d'un repère international de référence terrestre (ITRF) ([Altamimi et al., 2016](#)). On peut également citer les missions altimétriques dont l'objet est la mesure du niveau de la mer ou des hauteurs de glace par exemple, les missions gravimétriques qui permettent la mesure précise du champ de pesanteur terrestre et de sa surface de référence, le géoïde, ou encore les missions permettant de mesurer les déplacements de surface par interférométrie radar.

Le travail de thèse que nous présentons s'inscrit dans l'effort continu des dernières décennies pour améliorer notre compréhension des déplacements de surface dont la redistribution des masses de fluide à grandes et petites échelles est une des causes majeures. Le couplage important de ces masses d'eau et d'air au sein des systèmes climatiques et anthropiques rendent leur modélisation d'autant plus difficile que ces processus d'interactions sont complexes et en constante évolution, à l'aune du dérèglement climatique qui touche actuellement notre planète. La modélisation fine des variations de masse est particulièrement importante car elle permet d'améliorer drastiquement la qualité des repères de références, la modélisation de l'orbite des satellites ainsi que l'estimation du mouvement du géocentre. Il convient alors d'accroître notre compréhension de ces phénomènes en les mesurant précisément à la fois avec des mesures in-situ, très inégalement réparties, parfois laborieuses à mettre en place et peu précises, et en utilisant les outils de la géodésie spatiale permettant une couverture spatiale globale et plus homogène. Les années 2000 ont été particulièrement fructueuses pour la mesure indirecte de ces redistributions de masse par gravimétrie spatiale, avec le lancement des satellites GRACE puis GRACE-FO. Ces deux missions ont révolutionné la connaissance des transferts de masse à grande échelle en se basant sur des données gravimétriques quasi-continues pendant plus de 20 ans avec une résolution spatiale de l'ordre de 200 à 400 km et temporelle de l'ordre du mois.

C'est dans le but d'améliorer la résolution spatiale et temporelle acquise par ces missions gravimétrique que nous avons choisi de travailler avec une approche basée sur la technique GNSS donnant directement accès aux variations de la déformation avec lesquelles nous pouvons remonter aux variations de masse. L'objectif de la thèse est la détermination d'une solution régionale dont la résolution spatiale et temporelle soit complémentaire et/ou concurrente par rapport à celle obtenue avec GRACE. Nous avons choisi de réaliser cette étude sur l'Europe, zone tempérée où les variations de masses sont faibles, afin de montrer que le GNSS devenait compétitif dans ce domaine grâce notamment à la forte densité de stations géodésiques existantes, à la longévité de leur période d'acquisition (plus de 25 ans) ainsi qu'à l'amélioration continue de la qualité des traitements et à l'effort de reprocessing complet des produits orbite/horloge réalisés régulièrement par les centres d'analyse de l'IGS (International GNSS Service, faisant partie de GGOS) en vue des réalisations successives de l'ITRF. C'est dans le but d'obtenir des solutions les plus précises possibles, sur un réseau dense de stations, que nous avons calculé nos propres solutions GNSS avec le logiciel GINS développé par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et partagé au sein du Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale (GRGS), en utilisant les produits orbite/horloge des satellites GNSS fournis par le centre d'analyse

CNES-CLS. Ces produits offrent la possibilité d'un traitement préservant la nature entière des ambiguïtés de phase dans les observables GPS, ce qui participe à l'amélioration substantielle de la qualité et de la précision des solutions. Ces étapes ainsi que l'analyse détaillée des déplacements obtenus sont l'objet de la Partie II.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à la manière dont la Terre se déforme (géométriquement et gravitationnellement) sous l'effet d'une perturbation de quelque nature qu'elle soit. Nous avons donc redéveloppé dans les Parties III & IV la théorie de Love et des fonctions de Green décrite dans Farrell (1972) pour des modèles de Terre élastiques. Nous y avons inclus une méthode innovante utilisant la transformée de Fourier pour permettre la prise en compte de modèles de Terre contenant des couches de rhéologie visco-élastique. En modifiant des modèles initialement élastiques comme PREM pour y inclure des couches visco-élastiques, nous avons pu ensuite tester l'impact de ces différents modèles visco-élastiques sur les déformations induites par quelques perturbations de longue période : la fonte des glaces à la fin du Pléistocène il y a environ 12 000 ans (responsable du rebond post-glaciaire encore visible aujourd'hui), la fonte actuelle des calottes polaires liée au réchauffement climatique et les forces de marée solide agissant aux longues périodes.

Enfin, dans le but de comparer les résultats issus de GRACE et du GNSS en ce qui concerne les variations hydrologiques saisonnières, nous avons mis en place dans la Partie V une méthodologie permettant de retrouver la valeur de la perturbation de masse à partir de la déformation mesurée par GNSS en utilisant le formalisme des fonctions de Green dans le cadre d'un problème inverse. Bien que nous nous soyons intéressés pour cette thèse qu'aux variations hydrologiques, la méthodologie développée n'y est pas spécifique. Nous avons finalement comparé différents processus d'inversion dont certains utilisent la combinaison des données GNSS et GRACE/GRACE-FO afin de mettre en perspective la variabilité des solutions obtenues avec les multiples modèles hydrologiques existants dans la littérature.

Avant toutes choses, nous consacrons la Partie I à une brève introduction sur la notion de **charges** et les moyens qui permettent de les modéliser et de les mesurer. Nous y dressons aussi un état des lieux de la manière dont on étudie actuellement les déformations induites par ces charges et en expliquant comment notre travail s'inscrit au sein de ces différentes études.

Première Partie

Contexte de l'étude

Sommaire

1	Différents types de charge	6
1.1	Charges de marée océanique et atmosphérique	6
1.2	Charges océaniques et atmosphériques non-maréales	6
1.3	Charges hydrologiques	7
1.4	Charges cryologiques	8
2	Estimation du signal de charge	8
2.1	Missions GRACE et GRACE-FO	9
2.2	Utilisation du GNSS	10
3	Présentation de la situation en Europe	14
3.1	Estimation du signal de charge avec GRACE	15
3.2	Potentiel du GNSS	16

1 Différents types de charge

Il existe de nombreuses sources de déformation de la Terre solide. Dans la plupart des cas, ce sont les parties externes de la Terre comme la croûte et plus généralement la lithosphère qui sont les plus déformées tandis que les couches internes dans le manteau subissent des déformations de plus grande échelle mais d'intensité moindre. Parmi les déformations les plus importantes, on compte la déformation de la Terre solide induite par les événements tectoniques (séismes) et volcaniques qui engendrent des déformations de l'ordre de plusieurs mètres ainsi que les forces de marée lunisolaire dont l'amplitude verticale peut atteindre 30 cm ([Agnew, 2015](#)).

Il existe ensuite des déformations de la Terre solide liées à la redistribution de la matière mobile extérieure (que sont notamment les océans, l'atmosphère, l'hydroosphère et la cryosphère) pesant directement sur la surface solide. De manière générique, toute masse pesante externe à la Terre solide sera appelée **charge**. Ces charges génèrent des déformations extrêmement variables (de quelques mm pour l'atmosphère à plusieurs centaines de mètres pour la cryosphère) qui dépendent également des propriétés rhéologiques des différentes couches de la Terre comme nous le développerons dans les Parties [III](#) et [IV](#). Nous donnons un éventail non exhaustif des principaux effets de charges (ainsi que leurs modélisations) dont les déformations sous-jacentes sont mesurées à l'heure actuelle par les techniques géodésiques.

1.1 Charges de marée océanique et atmosphérique

Les déformations liées aux charges sont facilement modélisables dans le cas où les causes des redistributions de masse sont bien connues. C'est notamment le cas des forces de marée, qui redistribuent les masses océaniques engendrant des déformations particulièrement visible près des côtes ou sur les îles de petite taille et pouvant aller jusqu'à 10 cm de déformation verticale. D'autre part, le réchauffement périodique de l'atmosphère lié au Soleil induit des fluctuations de la pression de surface engendrant des déformations bien plus faibles d'environ 3 mm en vertical à l'équateur où elles sont les plus importantes. Dans les deux cas, ce sont les effets diurnes et semi-diurnes qui dominent d'où l'appellation de charges de marée océanique et atmosphérique (ou « TOAL » pour Tidal Oceanic and Atmospheric Loading). Dans ces cas particuliers, des modèles précis des déformations induites par ces redistributions de masses sont adoptés dans les conventions internationales fixées par l'IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) ([Petit & Luzum, 2010](#)), qui est un des 13 services faisant partie de GGOS. Ces conventions ont pour but de fournir les modèles et conventions scientifiques qui doivent être utilisés par la communauté internationale dans un soucis de cohérence des traitements et des résultats. Il existe donc toujours une sorte de séparation de principe entre les charges de marée (ou charges maréales) dont les modèles précis sont adoptés dans les conventions IERS et les charges non-maréales pour lesquels l'obtention d'un modèle qui fait consensus est plus difficile à cause de la plus grande variabilité des phénomènes. On note que la prise en compte des ondes de marée de plus faible amplitude que les ondes de marée principales dans le calcul des charges de marée océanique (comme les ondes non-linéaires générant des déformations très localisées et les ondes de longues périodes) permettent de raffiner les modèles de déformation notamment si l'on souhaite atteindre une précision millimétrique. Dans toute la suite, nous suivrons les conventions IERS en utilisant le modèle FES (Finite Element Solution) 2014b ([Carrere et al., 2015](#); [Lyard et al., 2021](#)) pour calculer les charges de marée océanique et les données de l'ECMWF (European Center for Medium-Range Weather Forecasts) pour modéliser les charges de marée solaire atmosphérique ([Ray & Ponte, 2003](#)).

1.2 Charges océaniques et atmosphériques non-maréales

Les courants océaniques, les surpressions ou dépressions atmosphériques, les vents de surfaces peuvent également induire des déformations de la surface de la Terre solide. Ces effets sont classés dans une catégorie à part que sont les charges océaniques et atmosphériques non-maréales (ou « NTOAL » pour Non-Tidal Oceanic and Atmospheric Loading) afin de marquer la différence avec les charges qui suivent les périodes des marées (voir Section [1.1](#)). Les déformations engendrées sont généralement inférieures au centimètre en vertical et sont susceptibles de varier énormément spatialement et temporellement en fonction des conditions

climatiques. Seuls des modèles météorologiques et océanographiques complexes permettent la prise en compte de ces effets au niveau local.

Pour les charges atmosphériques, on a accès directement à la déformation des continents en utilisant un modèle qui donne la pression de surface. On peut par exemple retrouver des variations annuelles de l'ordre de 5 mm sur l'Asie centrale liées à l'anticyclone sibérien. Au niveau des océans, on applique un modèle statique dit de baromètre inversé (ou « IB » pour Inverse Barometer) dans lequel les courants sont négligés et pour lequel l'intégralité des variations de pression atmosphérique sont compensées par des variations de hauteur d'eau. La pression au fond des océans est alors inchangée mais peut être corrigée pour inclure une partie variable dans le temps (Petrov & Boy, 2004). Ce modèle étant statique, il est typiquement valable pour des effets dont les réponses sont attendues à des périodes supérieures à 1 mois. On peut y associer des modèles de circulation océanique baroclines forcés uniquement par les flux thermiques, les flux d'eau douce (évaporation et précipitation) et les vents. On en compte plusieurs dont ECCO (Estimating the Circulation and Climate of the Ocean) (Wunsch et al., 2009) ou GLORYS (Global Ocean ReanalYsis and Simulation) (Ferry et al., 2012). Ces modèles sont également valables pour des variations supérieures ou égales à un mois.

Pour des échelles de temps inférieures, l'altimétrie et la gravimétrie spatiale ont démontré qu'il était impératif de prendre en compte la réponse dynamique des océans à la pression et aux vents. C'est dans ce but qu'à été conçu le modèle TUGO-m (Toulouse Unstructured Grid Ocean model) (Carrère & Lyard, 2003), qui modélise les variations rapides de hauteur d'eau d'un océan barotrope forcées par la pression atmosphérique et les vents (mais non forcées par les flux thermiques) avec une résolution spatiale de 0,125°¹ et une résolution temporelle de quelques heures. Comme à la fois TUGO-m et les modèles baroclines classiques utilisent un forçage par les vents de surface, il n'est pas possible de les associer pour en faire un modèle complet de charge. L'étude de nombreux modèles complets de charges océaniques et atmosphériques d'origine non-maréale a été proposée dans Mémin et al. (2020). Il y est notamment montré que TUGO-m rend de bons résultats sur l'ensemble du spectre fréquentiel de charge, y compris aux longues périodes, malgré le fait qu'il ne prend pas en compte les flux thermiques et d'eau douce.

Enfin, il existe le modèle opérationnel AOD1B (Atmosphere and Ocean De-Aliasing Level-1B) prenant en compte l'ensemble des forçages, mais dont la résolution spatiale relativement faible liée au temps de calcul du modèle le rend moins efficace que TUGO-m pour les hautes fréquences. Ce modèle est néanmoins utilisé dans la modélisation des effets rapides de l'atmosphère dans le calcul des solutions GRACE (voir Section 2.1.2).

1.3 Charges hydrologiques

Les charges hydrologiques comprennent généralement la masse des eaux douces s'écoulant en surface sous diverses formes (précipitation, bassins, rivières, etc.). Les grands bassins fluviaux (Amazonie et Congo entre autres) et les régions équatoriales soumises aux moussons possèdent de fortes déformations saisonnières (principalement de période annuelle) pouvant aller jusqu'à 2 cm en vertical (Nahmani et al., 2012; Nicolas et al., 2021). La plupart des déformations liées aux charges hydrologiques ont une empreinte annuelle forte. Il existe néanmoins quelques régions où des phénomènes de sécheresse, de pompage, de fonte, etc., donnent lieu à des déformations séculaires. La difficulté pour bien modéliser ces charges réside dans l'interaction existante avec des phénomènes complexes et fortement variables mettant en jeu des aspects météorologiques, les propriétés du sol, de la végétation, de l'activité humaine, etc. Par exemple, un sol de nature étanche va s'affaisser sous une accumulation d'eau en surface, alors qu'un sol poreux va se gonfler et présenter une surrection (effet poro-élastique (Fleitout & Chanard, 2018)). Nous utiliserons trois modèles de charges hydrologiques dans la suite : GLDAS-2.1/Noah (Global Land Data Assimilation System) (Rodell et al., 2004), MERRA2 (Modern Era Retrospective-Analysis) (Gelaro et al., 2017) et le modèle ERA5 de l'ECMWF (Hersbach et al., 2020). Le premier est un modèle basé sur l'assimilation de plusieurs modèles (pression atmosphérique, température, contenu en eau du sol, etc.) et forcé par le modèle atmosphérique assimilé tandis que les deux autres modélisent simultanément l'atmosphère, l'hydrosphère et leurs interactions. Les trois modèles hydrologiques incluent l'humidité du sol et la neige (non permanente) et GLDAS-2.1/Noah possède en plus le contenu en eau de la végétation. On notera dans la suite simplement GLDAS2 (pour GLDAS-2.1/Noah).

1. La résolution spatiale est en fait variable (grossière en plein océan et raffinée proche des côtes) puis les résultats sont interpolés/extrapolés sur une grille régulière de résolution 0,125°

La Figure 1.1 permet d'attester de l'importance des signaux de charge atmosphériques et hydrologiques en représentant leurs amplitudes annuelles issues du modèle ERA5. On y voit notamment l'importance de la variation de charge atmosphérique sur l'Asie et les variations de charge hydrologique sur les grands bassins comme l'Amazonie, le Congo ou l'Asie du Sud-Est.

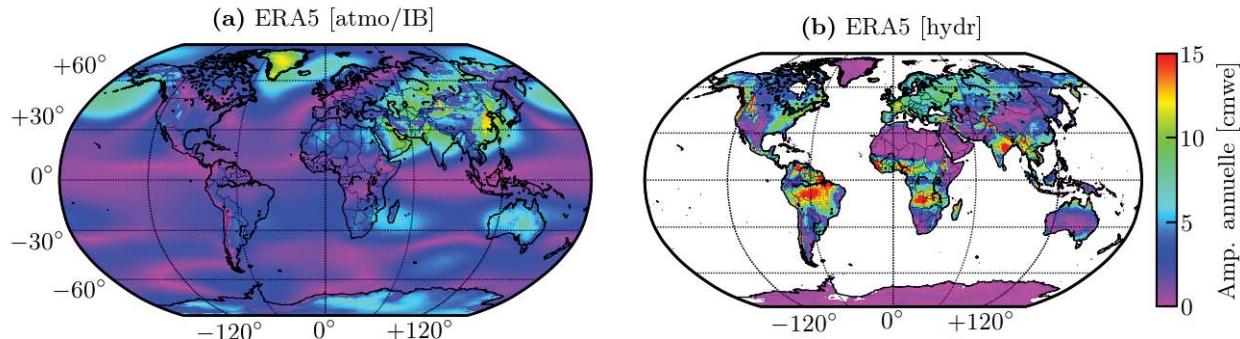


Fig. 1.1 – Amplitudes saisonnières des charges issues du modèle ERA5 : (a) atmosphériques (pression de surface convertie en hauteur d'eau équivalente) et (b) hydrologiques.

1.4 Charges cryologiques

Les charges cryologiques sont principalement dues aux glaciers et calottes polaires qui déforment la surface à cause de leurs poids. Nous nous intéressons ici à deux phénomènes de déformation observables actuellement dont la cause est une modification de la charge cryosphérique.

Rebond post-glaciaire — Le rebond post-glaciaire est un phénomène observé dans les régions polaires et jusqu'aux régions de moyennes latitudes (dans l'hémisphère Nord). La formation d'immenses calottes de glace lors du dernier âge glaciaire a constitué une charge énorme déformant les différentes couches terrestres de manière importante. La fonte de ces calottes il y a environ 12 000 ans à la fin du Pléistocène, a ainsi libéré les contraintes en surface de sorte que l'on assiste à un « rebond » des différentes couches de la Terre solide qui reprennent leur état initial. Le caractère visco-élastique de certaines couches de la Terre (le haut du manteau supérieur notamment) est la raison pour laquelle on observe encore ce rebond de nos jours dans certaines régions de hautes latitudes comme la baie d'Hudson (Canada) et la Scandinavie à hauteur de 1 à 2 cm·an⁻¹. Nous développons ces aspects dans un article ([Michel & Boy, 2021](#)) présenté dans la Partie IV. On notera GIA (Glacial Isostatic Adjustment) les modèles permettant de rendre compte du rebond post-glaciaire. On en compte plusieurs dont ICE-6G_D ([Peltier et al., 2015](#)), ainsi que d'autres qu'on trouvera dans les études de [Whitehouse et al. \(2012\)](#), [A et al. \(2013\)](#) et [Caron et al. \(2017\)](#).

Fonte des glaces actuelle — On peut de la même manière décrire la fonte des calottes polaires à l'heure actuelle comme une perte de charge, amenant donc à une relaxation de la surface. Si le phénomène est bien plus récent et de moins grande ampleur que la fonte des calottes à la fin du Pléistocène, il est néanmoins important sur le Groenland et l'Antarctique où on atteint localement des surrections allant jusqu'à 1,5 cm·an⁻¹ ([Luthcke et al., 2013](#); [Shepherd et al., 2018, 2020](#)). Devant l'accélération de la fonte ainsi que sa durée de plus en plus importante, il devient légitime de traiter le phénomène de décharge en prenant en compte le caractère visco-élastique des couches supérieures du manteau. Ce point est également traité dans l'article présenté dans la Partie IV.

2 Estimation du signal de charge

L'objet de cette thèse est de se focaliser sur la détermination du signal de charge hydrologique grâce aux données géodésiques. Nous détaillons dans cette section comment on peut estimer le signal de charge grâce aux missions spatiales gravimétriques GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) et GRACE

Follow-On et nous dressons l'état de l'art de l'utilisation du GNSS dans la mise en évidence des charges hydrologiques à l'échelle régionale.

2.1 Missions GRACE et GRACE-FO

2.1.1 Présentation

La mission spatiale GRACE a été lancée en 2002 et constitue une avancée majeure dans l'estimation du champ de gravité statique et de ses variations temporelles sur une large gamme de fréquence (de la semaine à la dizaine d'années) (Tapley et al., 2004, 2019). Deux satellites (Tom et Jerry) se suivent à une distance d'environ 220 km. On mesure la vitesse de variation de cette distance inter-satellites au micromètre par seconde près grâce au lien KBRR (K-Band Range Rate) qui est un lien radioélectrique de longueur d'onde centimétrique. Un traitement orbitographique associé à cette mesure KBRR permet d'estimer la masse intégrée du centre de la Terre au satellite (dans la ligne de visée de chaque satellite). On peut alors remonter au champ de gravité et à ses variations temporelles. On note que des accéléromètres présents dans les deux satellites permettent de mesurer les accélérations non gravitationnelles subies par les satellites (notamment les frottements atmosphériques et la pression de radiation solaire). L'orbite des satellites étant basse à environ 450 km et quasi-polaire, on peut atteindre une résolution temporelle d'un mois pour environ 300 km de résolution spatiale (les deux étant intimement liées par la trace de l'orbite sur la surface). GRACE est sensible à la totalité du champ gravitationnel terrestre (seuls les degrés 2 et 3 étant mal résolus) auquel on peut retirer les modèles hautes fréquences d'océan et d'atmosphère dit de *dealiasing* afin d'avoir accès aux variations saisonnières du champ de gravité principalement dues aux variations de la teneur en eau de la surface et du sol. On convertit donc usuellement ces variations de gravité en variations de masse accumulée à la surface que l'on exprime en hauteur d'eau équivalente. Nous utiliserons l'unité **cmwe** pour exprimer la hauteur d'eau équivalente en centimètres (centimeter water equivalent). Devant la longévité de la mission GRACE (2004-2018) et ses succès notamment en matière de climat, la communauté scientifique a poussé les agences à renouveler la mission sur un concept identique sous le nom de GRACE-FO (GRACE Follow-On) mais possédant en plus un interféromètre LRI (Laser Range Interferometer) permettant la mesure de la distance inter-satellite. Les premières mesures de la mission GRACE-FO ont été obtenues début 2019 soit quelques mois seulement après l'arrêt de la mission initiale, assurant ainsi le suivi temporel quasi parfait des variations du champ sur plus de 18 ans actuellement.

2.1.2 Solutions mascons

Il existe deux grands types de solutions donnant les variations de masse issues de GRACE. L'une consiste en une décomposition en harmoniques sphériques suivie d'un filtrage spatial de la solution pour supprimer les aberrations longitudinales (Lemoine et al., 2019). L'autre consiste à décomposer la Terre en petits éléments de surface (hexagonaux ou rectangulaires) appelés « mascons », sur lesquels on réparti de la masse pour ajuster au mieux les données. Si l'une et l'autre possèdent des avantages et des défauts (Rowlands et al., 2010), nous choisissons ici d'utiliser les solutions mascons qui permettent d'introduire naturellement des contraintes spatiales sur la répartition de la masse lors de l'estimation de la solution². Parmi les solutions mascons existantes, nous choisissons les solutions du CSR (Center for Space Research de l'Université du Texas à Austin) (Save et al., 2016) et du GSFC (Goddard Space Flight Center de la NASA) (Loomis et al., 2019a) dont les solutions sont toutes deux obtenues par un processus de régularisation (de type Tikhonov) sans filtrage ou lissage et appliquant les mêmes corrections standards aux solutions : correction du degré 1 utilisant le modèle du JPL (Sun et al., 2016), remplacement des C_{20} et C_{30} par ceux obtenus avec le SLR (Loomis et al., 2019b, 2020), correction des contributions de l'océan et de l'atmosphère à haute fréquence³ grâce au modèle AOD1B, correction du GIA avec le modèle ICE-6G_D (Peltier et al., 2015) et utilisation du champ statique GGM05C dans la modélisation des orbites. Une des différences importante concerne les incertitudes qui à défaut d'être données dans la solution CSR, sont fournies dans la solution GSFC en

2. Les contraintes spatiales sont bien plus approximatives et dures à implémentées sur les coefficients de Stokes dans le cas d'une solution utilisant la décomposition en harmoniques sphériques.

3. Ces contributions rapides peuvent en effet induire des problèmes de repliement de spectre (aliasing)

considérant les biais liés au processus de régularisation, au bruit de mesure et à la fuite de masse inter-mascons (*leakage*). On peut noter que la solution CSR fournit une interpolation des tuiles hexagonales des mascons sur une grille régulière longitude/latitude ou en harmoniques sphériques tandis que la solution GSFC fournit directement les mascons calculés sur une grille irrégulière de tuiles rectangulaires et l'interpolation de cette grille sur une grille régulière longitude/latitude (voir Figure 1.6 plus loin). L'utilisation de ces deux solutions permettra de mettre en avant la différence importante existante entre les solutions GRACE, malgré un processus de détermination quasi-similaire. La différence majeure réside dans le fait que la solution du GSFC est itérée jusqu'à ce qu'elle converge en dessous d'un certain critère au sens de la minimisation des résidus.

2.2 Utilisation du GNSS

L'utilisation massive du GNSS dans l'étude des charges a été facilitée par l'augmentation constante du nombre de stations de qualité géodésique et par la densification des réseaux déjà existants. On compte maintenant plus de 15 000 stations GNSS dont les données peuvent être utilisées pour des applications géodésiques. La répartition des stations est néanmoins assez inégale comme on peut le voir sur la Figure 1.2 issus du traitement massif du NGL (Nevada Geodetic Laboratory) d'une grande partie des stations géodésiques GNSS actuellement disponibles (Blewitt et al., 2018).

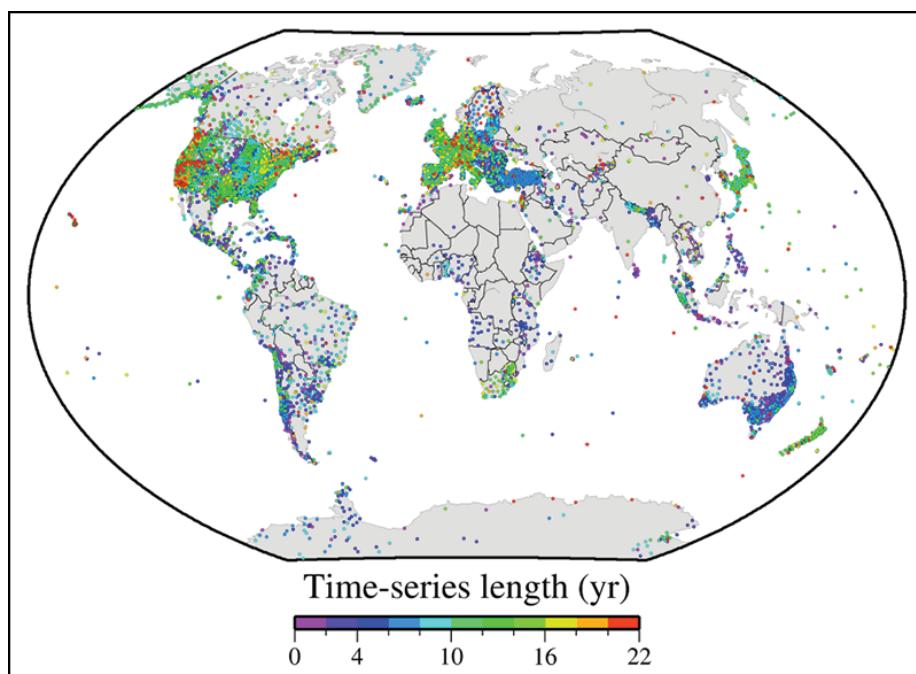


Fig. 1.2 – Stations géodésiques GNSS dont les solutions ont été calculées au NGL. (extrait de Blewitt et al. (2018))

Les régions très denses (Europe, États-Unis, Japon) contrastent avec les moins denses (Afrique, Asie centrale). La précision actuelle des traitements GNSS permet d'atteindre une résolution de l'ordre du millimètre en déplacement ce qui permet de détecter des effets de plus en plus fins. Notamment, s'il est évident que les effets de charge comme les charges hydrologiques sont principalement visibles sur la composante verticale du déplacement, ils peuvent maintenant aussi être résolus en horizontal permettant de mieux contraindre les modèles (Chanard et al., 2018a). Selon les conventions IERS (Petit & Luzum, 2010), les signaux de marée sont corrigés en amont du traitement GNSS (marée solide, charge de marée océanique et atmosphérique et charge de marée polaire). Les séries temporelles contiennent donc la signature des mouvements tectoniques et le déplacement majoritairement saisonnier dû aux charges hydrologiques et aux charges non-maréales océaniques et atmosphériques.

À titre d'exemple, nous présentons sur la Figure 1.3 les déplacements calculés à partir de la modélisation des effets de charge non-maréaux et hydrologiques distribués par l'IERS GGFC (Global Geophysical Fluid Center) via le site <http://loading.u-strasbg.fr/GGFC/itrf2020.php> en vue de l'ITRF2020. La défor-

mation est calculée pour un modèle de Terre SNREI basé sur PREM (voir Partie IV), à partir des champs ERA5 de résolution 1 heure et $0,25^\circ$ et des variations barotropes de hauteur d'eau du modèle TUGO-m forcé par la pression et les vents de ERA5 et disponible à une résolution de 1 heure et $0,125^\circ$ (interpolé/extrapolé à partir d'une grille aux éléments finis). On y voit l'apport de TUGO-m sur les déplacements des stations à proximité de l'océan par rapport à un modèle IB, les forts signaux saisonniers hydrologiques dans la bande équatoriale et la variabilité atmosphériques importantes aux moyennes et hautes latitudes.

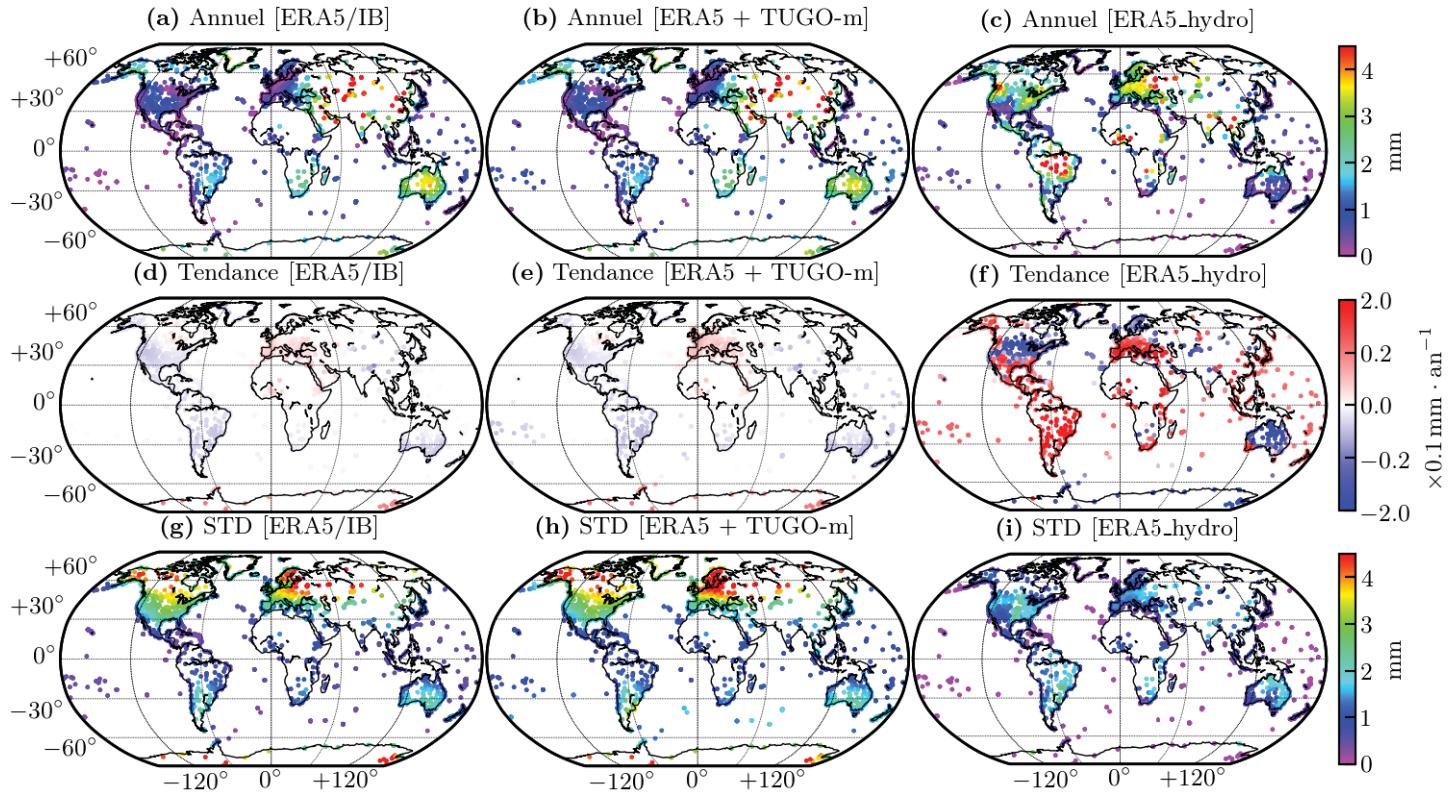


Fig. 1.3 – Amplitude annuelle, tendance et variabilité (représenté par l'écart-type) des déplacements induits par différents modèles de charge distribués par le GGFC en vue de l'ITRF2020. Ces modèles ont été calculés en utilisant les champs fourni par la réanalyse ERA5 de l'ECMWF et le modèle TUGO-m. On note que l'échelle de couleur pour la tendance est pseudo-logarithmique pour des raisons de visibilité des déplacements induits par les NTAOL.

Il faut être néanmoins très prudent quant à considérer le déplacement saisonnier GNSS comme étant dû en totalité aux effets de charge. Comme le rapportent Dong et al. (2002) et plus récemment Chanard et al. (2020), il existe de nombreuses sources de déplacement à l'origine du signal annuel dans les séries GNSS dont les amplitudes varient spatialement et temporellement. Si l'on peut néanmoins corriger par des modèles certaines contributions de ces autres effets (thermo-dilatation du sol notamment), il reste toujours des contributions dont il est difficile de s'affranchir (périodes draconitiques, multi-trajet, instabilités de monumentation de la station, mouvement des antennes). Nous reviendrons en détail sur ces considérations dans la Partie II.

Sachant cela, on peut néanmoins comparer prudemment les séries GNSS aux résultats donnés par des modèles de charge ou par GRACE et GRACE-FO. Cela a été fait massivement durant de nombreuses années, la prise en compte des charges hydrologiques et non-maréales dans les observations GNSS étant une piste sérieuse pour l'amélioration de l'ITRF (International Terrestrial Reference Frame) (Altamimi et al., 2016) et permettant de réduire drastiquement les erreurs sur la détermination des vitesses GNSS (Klos et al., 2019b). Deux approches sont possibles, l'une étudiant le problème direct de transformation de la charge en déplacement (comme sur la Figure 1.3), l'autre nécessitant une inversion du déplacement permettant d'obtenir une cartographie de la charge à partir de données géodésiques.

2.2.1 Problème direct

Résoudre le problème direct c'est passer d'une carte de charge à des mesures de déplacement localisées. Pour cela, il est nécessaire de connaître la capacité du sol à se déformer sous une certaine contrainte (ce qu'on appelle la rhéologie) et de savoir comment cette contrainte est propagée à l'intérieur de la Terre à travers les différentes couches. En fonction du type de rhéologie mais aussi de la valeur des paramètres rhéologiques, une même distribution de charge ne rendra pas compte du même déplacement. Nous renvoyons à la Partie III pour plus de détails sur le traitement du problème rhéologique. On peut alors schématiser la situation de la manière suivante : au premier ordre, on peut relier linéairement le déplacement et la charge via une matrice qui dépend des paramètres rhéologiques du sol sur lequel s'applique la charge. Mathématiquement, cela donne

$$\text{Vecteur déplacement} \longrightarrow D = GM \longleftarrow \text{Vecteur charge}, \quad (1.1)$$

où G est la matrice de Green dépendant du modèle de Terre utilisé et de sa rhéologie. Résoudre le problème direct est donc mathématiquement trivial puisqu'il consiste en un simple produit matriciel entre G et M . Il existe de nombreuses études ayant utilisé le problème direct pour comparer les déplacements GNSS avec ceux obtenus en appliquant l'Éq. (1.1) aux modèles de charge ou à GRACE. Avant le lancement de GRACE (donc avant 2004), on pouvait comparer les déplacements mesurés par GNSS sur un réseau global (peu fourni) avec les déplacements reconstitués à partir des modèles de charges (Mangiarotti et al., 2001; van Dam et al., 2001). Cela pouvait permettre la mise en évidence de nouveaux modes de déformation de la Terre notamment à l'échelle globale (Blewitt et al., 2001). Plus tard, d'autres études ont permis de comparer des réseaux globaux plus denses (Klos et al., 2019b), notamment en associant au GNSS, d'autres techniques géodésiques comme le VLBI (Very Long Base Interferometry) et le SLR (Satellite Laser Ranging) (Rogggenbuck et al., 2015). Depuis 2004, on a obtenu des cartes de charge grâce aux missions GRACE et GRACE-FO. De nombreuses études ont alors voulu réconcilier les déplacements reconstitués à partir de GRACE, les modèles hydrologiques et les déplacements GNSS, tant d'un point de vue global (Tregoning et al., 2009; Chanard et al., 2018b) que d'un point de vue régional avec des études sur les grands bassins hydrologiques équatoriaux (Nahmani et al., 2012; Fu et al., 2013; Nicolas et al., 2021), sur des zones montagneuses comme le Népal (Fu & Freymueller, 2012; Chanard et al., 2014), sur des zones soumises à l'enneigement comme l'Islande (Grapenthin et al., 2006; Drouin et al., 2016) ou le Sud de l'Alaska (Fu et al., 2012), mais aussi sur des zones où le réseau de stations GNSS est dense et le signal de charge relativement faible comme en Europe (van Dam et al., 2007; Tregoning et al., 2009) ou au Japon (Heki, 2004). Le point commun de toutes ces études est que l'on suppose la Terre comme étant élastique pour déterminer les déplacements issus des charges. Ce postulat est vérifié pour des phénomènes dont les périodes caractéristiques sont inférieures à quelques années (incluant donc la majeure partie des variations liées aux charges hydrologiques) pour lesquels les propriétés visqueuses du manteau ne se manifestent quasiment pas.

L'avantage majeur du problème direct est la facilité avec laquelle on peut arriver aux déplacements à partir d'une carte de charge et en postulant une rhéologie particulière. Néanmoins, il peut être à l'inverse intéressant de contribuer à la diversité de modèles de charge existants, en utilisant le déplacement GNSS pour estimer la charge d'un point de vue global ou régional. On dit qu'on résout le problème inverse, cette méthode fournissant au même titre que GRACE, une carte de charge issue uniquement de données géodésiques et non de modèles.

2.2.2 Problème inverse

La difficulté du problème réside dans le processus d'inversion nécessaire à la détermination du pseudo-inverse de la matrice de Green G . Une méthode connue depuis l'époque de Gauss qui est encore particulièrement utilisée aujourd'hui est la méthode des moindres carrés, permettant de trouver une solution optimale M^* minimisant les résidus $\|D - GM\|_2$ au sens de la norme 2 pour le produit matriciel. On peut alors calculer le pseudo-inverse de G noté F tel que

$$\text{Vecteur charge} \longrightarrow M^* = FD \longleftarrow \text{Vecteur déplacement}. \quad (1.2)$$

La détermination de F peut être compliquée notamment quand le problème est dit « mal posé » (voir

Partie V), c'est-à-dire lorsque le nombre d'équations indépendantes du système est plus faible ou plus important que le nombre d'inconnues à déterminer. Il convient alors d'ajouter des contraintes sur les inconnues permettant d'augmenter le nombre d'équations indépendantes les reliant. Le type et le nombre de contraintes est propre à l'utilisateur, donc subjectif, et il est alors préférable de rester prudent lors de l'interprétation de la solution obtenue.

On compte peu d'études, comparativement au cas précédent, qui ont traité le problème inverse en partant des déplacements GNSS pour accéder à la charge. On peut citer en premier lieu Wu et al. (2003) et Wu et al. (2006) qui au lieu d'inverser directement les déplacements de stations réparties sur toute la surface terrestre, ont traduit les déplacements en harmoniques sphériques afin de retomber sur un problème « bien posé » c'est-à-dire autant d'harmoniques sphériques de déplacement indépendantes que d'harmoniques sphériques de charge à déterminer. Il faut néanmoins garder à l'esprit que dans un tel schéma d'inversion, les harmoniques sphériques de déplacement déterminées à partir des solutions GNSS ne sont pas indépendantes car le réseau n'est pas homogène spatialement (Collilieux et al., 2009). De plus, la résolution (donc le degré maximum d'harmoniques sphériques) est conditionnée par la densité du réseau utilisé. On doit donc jongler habilement entre l'homogénéité du réseau et sa densité qui sont deux paramètres incompatibles au vu de l'inégale répartition des stations GNSS (Figure 1.2). On observe alors des différences majeures avec GRACE sur l'amplitude des charges notamment au niveau des zones équatoriales, en Asie centrale et aux États-Unis (Figure 1.4). Ces différences peuvent s'expliquer à la vue des incertitudes importantes de GRACE dans la zone équatoriale et du GNSS dans les zones peu ou pas couvertes par le réseau (Amazonie, Afrique). De plus, le signal de charge important issu du GNSS aux États-Unis, peut être dû à un artefact lié au poids relatif que cette zone géographique possède par rapport à d'autres en terme de densité de stations GNSS. Par exemple, il n'est pas cohérent de voir un signal si fort aux États-Unis (zone tempérée) et si faible en Amazonie (zone équatoriale). On aperçoit ici un des effet de l'inhomogène répartition des stations au sein du réseau dont nous parlions ci-dessus.

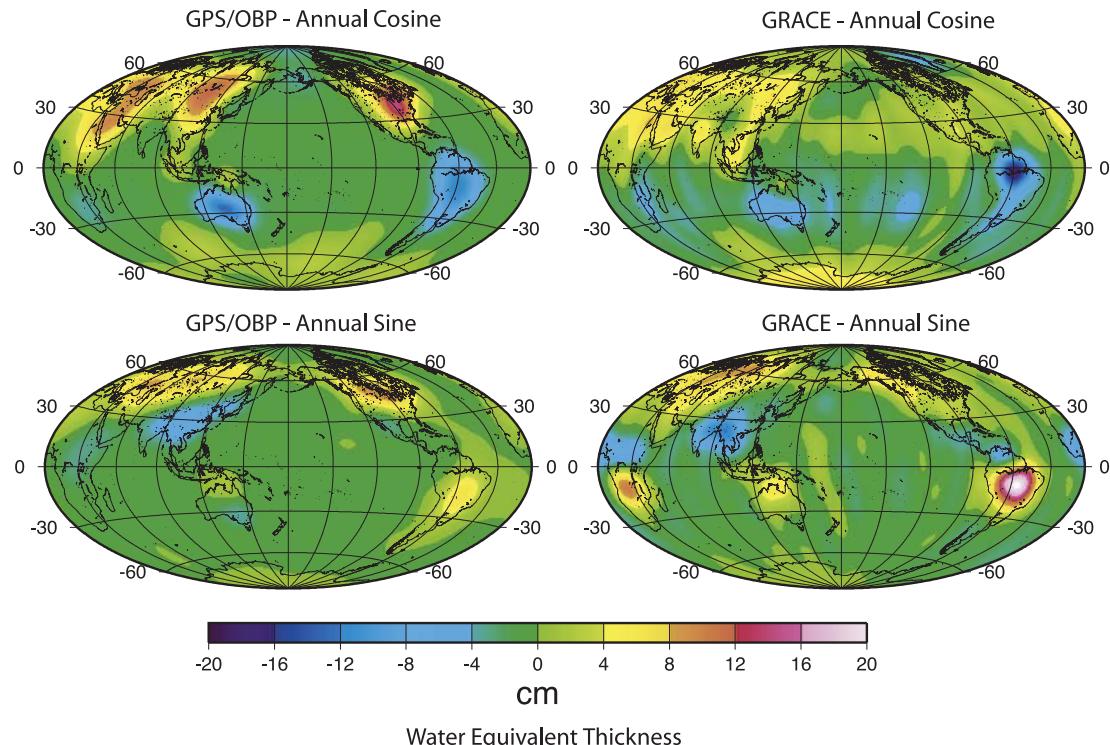


Fig. 1.4 – Amplitude annuelle des signaux en phase (COS) et en quadrature (SIN) déterminées par l'inversion des déplacements GNSS d'une part et avec GRACE d'autre part. Les données sont filtrées à 800 km et les coefficients du degré 1 et de l'harmonique zonale de degré 2 sont dans les deux cas remplacés par ceux déterminés dans une inversion conjointe du GPS et de GRACE. (*extrait de Wu et al. (2006)*)

On peut aussi choisir de traiter le problème régionalement en choisissant une région où la densité de stations est importante. C'est ce qui a été fait par Argus et al. (2014) sur la Californie. Il n'est alors plus possible d'utiliser la décomposition en harmoniques sphériques. On passe alors directement par l'inversion

des amplitudes saisonnières issues du modèle de déplacement ajusté sur les séries temporelles GNSS. Si l'on décompose la région en une grille régulière dont la résolution correspond à la distance moyenne interstations, les éléments de grille étant tous indépendants les uns des autres, on peut arriver à un problème sous-déterminé : le nombre de cases indépendantes sur lesquelles on ajuste la charge (sur lesquels on inverse le déplacement) est alors plus important que le nombre de stations GNSS. La méthode utilisée par Argus et al. (2014) est alors d'ajouter des contraintes sous la forme d'une fonction de lissage (de type Laplacien) permettant d'atténuer les différences trop importantes de charge entre cases voisines. Ceci n'est pas sans conséquences puisqu'il faut alors choisir la valeur des paramètres de lissage de manière objective ce qui est souvent difficile. On a alors recours à des arguments très subjectifs qu'il ne faut pas omettre dans l'interprétation des résultats obtenus, sous peine de cacher une source de variabilité pouvant être importante. La carte de déplacement annuel ainsi que la carte de charge obtenue après cette méthode d'inversion sont représentées sur la Figure 1.5. On voit que la charge et le déplacement vertical (compté positivement vers le haut) sont globalement en opposition de phase : lorsqu'une charge est présente le déplacement se compte négativement et inversement. Comme pour le cas précédent, on voit que l'inégale répartition des stations ne permet pas de contraindre suffisamment certaines régions comme le bassin de Tulare dans le cas présent. Il est donc nécessaire de continuer à développer et densifier les réseaux de stations GNSS. Aussi, on pourrait penser à inverser les déplacements sur une grille de charge adaptative, sur laquelle la résolution spatiale serait plus importante dans les régions où la densité de stations est forte. On développera ce point dans la Partie V.

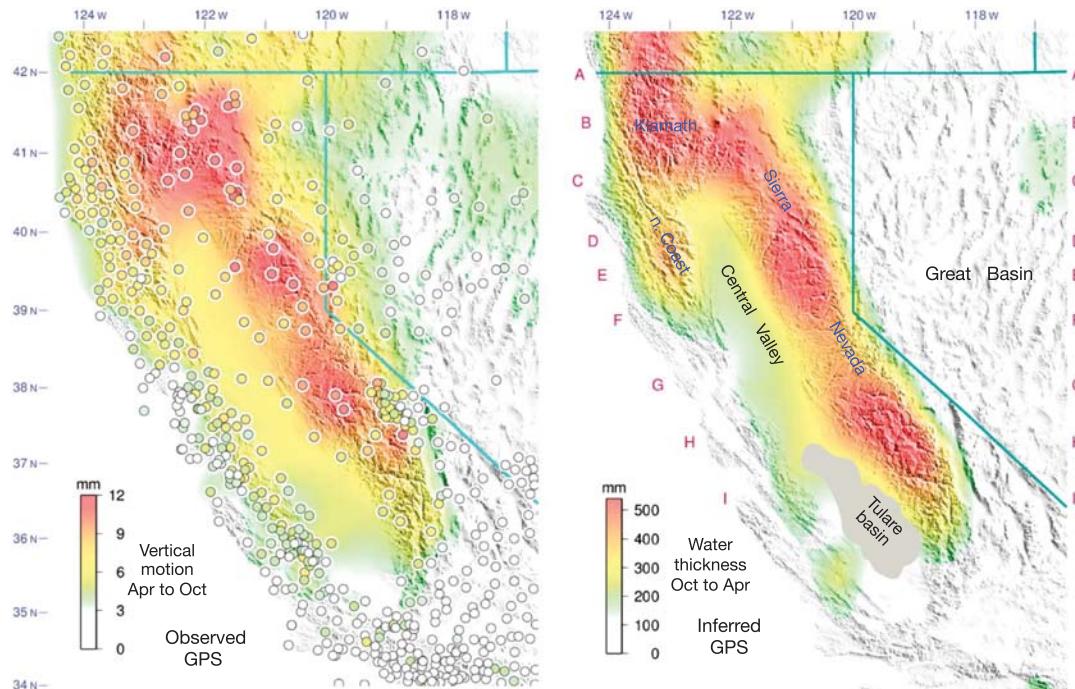


Fig. 1.5 – (à droite) Surrection mesurée par GPS pendant le printemps et l'été. Les stations GPS sont cercclées et le fond de carte est obtenu par triangulation de ces valeurs. (à gauche) Charge appliquée en automne et hiver inversée à partir des déplacements GPS du panel de droite (sauf dans le bassin de Tulare). (extrait de Argus et al. (2014))

3 Présentation de la situation en Europe

L'Europe est une zone intéressante à étudier d'un point de vue géophysique. On y rencontre de nombreux événements sismiques notamment sur le pourtour méditerranéen, des régions volcaniques (en Italie), des zones de fortes marées (dans la Manche) et une surrection post-glaciaire (Scandinavie). D'un point de vue des charges, on trouve généralement les zones les plus impactées dans les grandes chaînes montagneuses et les pays au climat fortement continental où les variations saisonnières sont très marquées. Nous allons finalement voir que cette région est également riche d'un réseau GNSS dense permettant de mener des études

intéressantes notamment sur l'Ouest et le Nord du continent.

3.1 Estimation du signal de charge avec GRACE

Dans un premier temps, nous cherchons une estimation du signal de charge en Europe avec GRACE et GRACE-FO. Nous comparons les amplitudes annuelles de deux solutions déterminées par la méthode « mascons » (voir Section 2.1.2). Ces amplitudes ont été générées par l'ajustement des tuiles par la fonction suivante

$$y(t) = y_0 + v(t - t_0) + a_1 \cos(2\pi t) + b_1 \sin(2\pi t) + a_2 \cos(4\pi t) + b_2 \sin(4\pi t), \quad (1.3)$$

où $(y_0, v, a_1, b_1, a_2, b_2)$ sont 6 paramètres ajustables, t est le temps exprimé en années civiles et $t_0 = 2000$. L'amplitude du signal annuel est donc donnée par $A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ et sa phase par $\phi = \arctan 2(b_1/a_1)$. On les a toutes deux représentées sur la Figure 1.6 pour la solution RL06v1.0 du GSFC, l'interpolation de cette même solution sur une grille régulière de $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ et la solution RL06v2.0 du CSR. Là encore, comme dans toute la suite, les amplitudes des termes saisonniers sont exprimées en centimètres de hauteur d'eau équivalente.

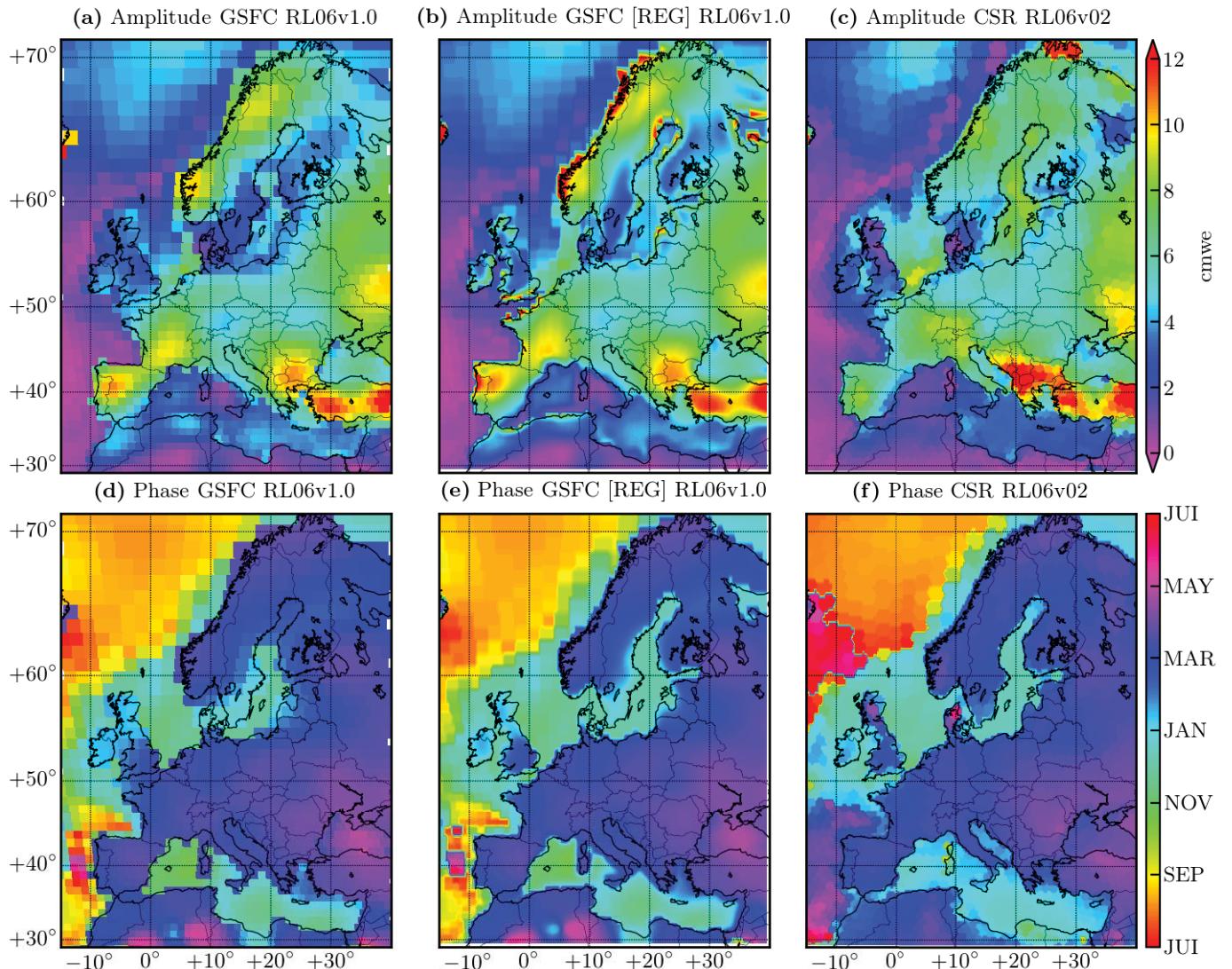


Fig. 1.6 – Amplitude annuelle exprimée en centimètres de hauteur d'eau équivalente (cmwe) de la solution GRACE/GRACE-FO RL06 du GSFC (a), son interpolation sur une grille régulière (b), et celle du CSR (c) ainsi que les phases respectives (d), (e) et (f) qui désignent le moment de l'année où la charge est la plus importante.

On voit que la solution du GSFC possède des problèmes de fuite de masse au niveau des côtes notamment

car les mascons sont à cheval sur les continents et les océans. Ce problème disparaît sur la solution interpolée [REG] notamment car l'interpolation a été réalisée de manière à placer la masse de ces tuiles côtières sur le continent. Cet effet est très visible sur la Manche et sur la côte atlantique norvégienne où toute la masse en mer a été redistribuée sur les côtes créant des zones de forte charge. En revanche, la solution du CSR possède l'avantage d'avoir une fonction masque adaptée sans avoir à redistribuer la masse lors de l'interpolation (il reste de la charge sur les océans notamment en Mer du Nord et dans la Mer Baltique). Attention, la résolution n'est pas pour autant meilleure dans la solution CSR puisque les tuiles hexagonales ont à peu près la même surface moyenne $\bar{S}_{\text{mascon}} \simeq 12\,321 \text{ km}^2$ (à latitude et longitude équivalente) que les mascons rectangulaires du GSFC. D'autre part, on voit sur les panels (b) et (c) les réminiscences des formes géométriques des tuiles initialement utilisées pour calculer la solution.

La répartition de la masse peut varier fortement d'une solution à l'autre. En plus de cela, on constate qu'il existe des zones où la solution est mal définie comme sur le Sud de l'Italie, le Danemark ou la Grande-Bretagne. On peut donner la limite de résolution de GRACE en donnant la longueur caractéristique des tuiles sur lesquelles on calcule les mascons qui est d'environ 111 km ($\sim \sqrt{\bar{S}_{\text{mascon}}}$). La longueur d'onde de GRACE au sol est donc d'environ 200 km, ce qui en pratique ne permet pas de résoudre les zones de largeurs inférieures à cette limite. Le signal est alors dilué dans les mascons environnantes et on perd en précision sur la charge. Il est donc primordial avant d'utiliser des données GRACE, de vérifier que la zone étudiée n'est pas de taille caractéristique inférieure à 200 km sous peine de voir les résultats entachés d'une incertitude importante. Notamment, l'utilisation de GRACE dans des régions continentales ou océaniques morcelées (Nord du Canada, Océanie, Grèce, etc.) ne fournira que des données peu précises pour cette même raison.

3.2 Potentiel du GNSS

3.2.1 Réseaux de stations

Nous allons voir dans cette partie en quoi le GNSS peut être un atout en Europe afin de palier au manque de résolution de GRACE dans certaines régions. Le choix de l'Europe comme zone d'étude est notamment appuyé par le fait que le réseau de stations GNSS y est très dense et installé depuis longtemps. Ainsi plus de 100 stations possèdent des données sur des périodes de plus de 20 ans, en continu. On peut aussi souligner l'effort important des organismes nationaux et internationaux pour fournir gratuitement les données brutes des stations que ce soit les fichiers d'observations (fichiers au format RINEX) ou les fichiers de suivi de stations (changement de matériels, logiciels, etc.) appelés aussi *logfiles*. Malheureusement, certains pays comme la Suisse, continuent de monnayer l'accès à leur réseau national de stations, ce qui nuit fortement à l'homogénéité de notre réseau régional. Une carte du réseau de stations que nous utiliserons dans cette thèse, et dont les données sont libres est présentée sur la Figure 1.7a.

On voit notamment que les pays de l'Ouest européen sont particulièrement denses en stations : France, Grande-Bretagne, Espagne, Italie. Le réseau devient de moins en moins dense à mesure que l'on s'éloigne vers l'Est. La liste des organismes et réseaux fournissant les données RINEX journalières des stations représentées sur la Figure 1.7 est donnée ci-dessous :

- IGN/RGP (Institut Géographique National/Réseau GNSS permanent, <http://rgp.ign.fr>),
- RENAG (Réseau National GNSS, <http://webrenag.unice.fr>),
- SONEL (Système d'Observation des variations du Niveau de la mEr à Long terme, <https://www.sonel.org>),
- EUREF (EUREF Permanent GNSS Network, <https://www.epncb.oma.be>),
- RING (Rete Integrata Nazionale GPS, <http://ring.gm.ingv.it>),
- BIGF (British Isles continuous GNSS Facility, <http://www.bigf.ac.uk>),
- CDDIS (Crustal Dynamics Data Information System, <https://cddis.nasa.gov>),
- NOA (National Observatory of Athens, <http://www.gein.noa.gr>),
- NIEP (National Institute for Earth Physics, <http://gps.infp.ro>),
- DGPA (Dutch Permanent GNSS Array, <http://gnss1.tudelft.nl/dpga/>),
- ERGNSS (Red Geodésica Nacional de Estaciones de Referencia GNSS, <https://www.ign.es/>),

- ITACYL (Red de estaciones GNSS de Castilla y León, <http://gnss.itacyl.es>),
- BKG (Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, <https://igs.bkg.bund.de>).

La densité du réseau européen est un atout pour la résolution spatiale des charges. En effet, plus le réseau est dense, plus l'on peut raffiner la grille sur laquelle on inverse le déplacement. Si la densité est suffisamment importante, on peut donc largement surpasser la résolution spatiale de GRACE et ainsi apporter une information complémentaire grâce au GNSS. Nous verrons dans la Partie V que l'on peut même inverser la charge sur une grille au pas adaptatif en fonction de la densité de stations. Ainsi, on ne perd ni ne gagne d'information par rapport au réseau existant. Le problème majeur sera alors d'interpréter les zones de notre étude où la couverture GNSS est pauvre mais où le signal de charge est en théorie important (Chaîne des Balkans, Turquie : voir Figure 1.6). Pour cela, on verra qu'il est possible de contraindre ces régions avec le signal de GRACE lui-même.

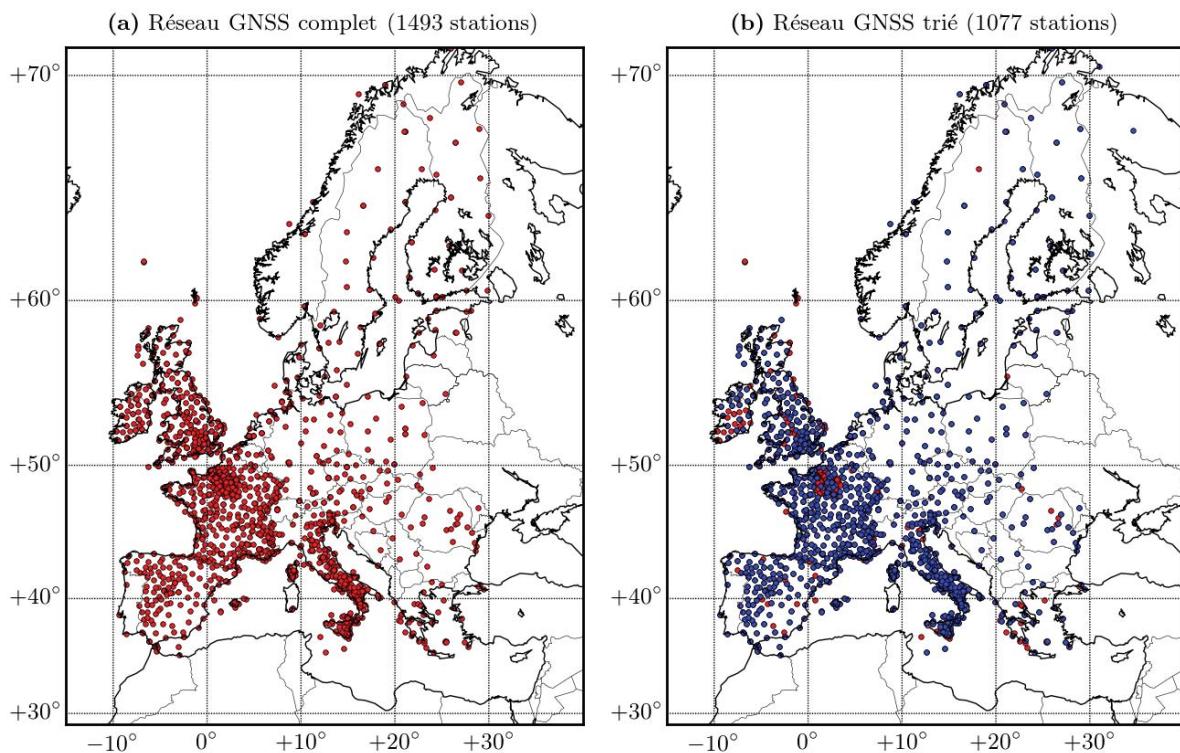


Fig. 1.7 – (a) Réseau du réseau non exhaustif des stations dont les données sont en libre accès en Europe.
(b) Sous réseau (en bleu) du réseau principal du panel (a) (en rouge) sélectionnant les stations selon les différents critères mentionnés dans la Section 3.2.2.

3.2.2 Sélection des stations

Parmi les stations du réseau de la Figure 1.7, certaines ne possèdent que quelques mois de données, certaines possèdent des trous de plusieurs mois voire de plusieurs années et ne permettent donc pas un ajustement correct du signal annuel (Blewitt & Lavallée, 2002). Il existe aussi (1) des *clusters* de stations (stations se trouvant dans un environnement très proche typiquement de l'ordre de la trentaine de mètres), (2) des stations dont le nom a changé au cours de l'acquisition des données et (3) des réattribution d'anciens noms de stations à de nouvelles stations. L'ensemble de ces problèmes (qui ne sont quasiment pas référencés), rendent difficile la sélection des « bonnes » stations. Par bonnes stations, on entend ici les stations possédant une durée minimale d'acquisition et une complétude (de la série temporelle) suffisante. Les critères que nous choisissons sont reportés dans le Tableau 1.1 et le sous-réseau sélectionné contenant 1077 stations est représenté en bleu sur la Figure 1.7b. On voit que la densité du réseau n'est peu ou pas dégradée sauf en Irlande et au Nord de la France. On peut calculer la distance moyenne inter-stations en faisant une triangulation de Delaunay et en déterminant la longueur de chaque vertex. Cette distance peut fortement varier spatialement. Elle vaut par exemple 97 km en moyenne sur l'ensemble du réseau, mais 73 km en Europe

de l'Ouest (France, Grande-Bretagne, Espagne, Italie) et 193 km en Europe de l'Est et en Scandinavie. On voit qu'on arrive avec ce réseau GNSS à atteindre globalement une résolution meilleure que celle de GRACE, ce qui justifie que l'on puisse améliorer la qualité de la solution de charge par rapport à celle de GRACE dans cette région. Avant tout, il est nécessaire d'obtenir des déplacements GNSS de qualité, c'est-à-dire ayant un bon rapport signal sur bruit, et étant les moins biaisés possible. Nous les calculons à l'aide du logiciel GINS, selon la procédure détaillée dans la Partie **II**.

Critères	Sélection 1	Sélection 2
Fin de la série	$2005 \leq \dots \leq 2019$	$2019 \leq \dots \leq 2021$
Durée de la série	≥ 5 ans	≥ 4 ans
Complétude de la série (%)	$\geq 50\%$	$\geq 70\%$

Tab. 1.1 – Critères de sélection des stations du réseau bleu de la Figure 1.7b.

Deuxième Partie

Solutions GNSS en Europe calculées avec le logiciel GINS

Sommaire

1	Généralités sur le GNSS	20
2	Détermination de l'équation de mesure	21
2.1	Émission, propagation et réception du signal	21
2.2	Équation de mesure de code et phase	22
3	Positionnement précis	24
3.1	Solution différenciée	25
3.2	Solution Zéro-différence	26
4	Utilisation de GINS pour le calcul précis de positions GNSS	29
5	Solution GR2/GRG	34
5.1	Analyse des séries temporelles et mode commun	34
5.2	Mise en référence et calcul des paramètres de Helmert	36
6	Solution MG3 (REPRO3)	37
6.1	Validation de la qualité des produits utilisés	38
6.2	Analyse des déplacements et comparaisons aux modèles hydrologiques	39
6.3	Comparaison du mode commun avec d'autres solutions	61

1 Généralités sur le GNSS

Le GNSS (Global Navigation Satellite System) est une technique de positionnement par satellite utilisée depuis les années 80 dans le domaine militaire et le domaine civil pour la navigation en temps réel. À partir des années 90, le GNSS a également été utilisé dans la recherche scientifique, notamment en géodésie car elle permet dans certaines conditions d'avoir accès à des positions très précises (subcentimétriques voire millimétriques) compatibles avec les besoins de la géodésie dont l'objectif est actuellement d'atteindre des précisions millimétrique pour la position et de l'ordre de $0,1 \text{ mm} \cdot \text{an}^{-1}$ pour les vitesses des stations géodésiques ([Altamimi et al., 2016, 2017](#)). Le principe général réside dans le calcul de la distance entre le satellite et le récepteur afin de déterminer la position de ce dernier, connaissant initialement la position du satellite. Celle-ci est soit donnée par le satellite lui-même à travers un signal appelé « Message de navigation » pour une utilisation en navigation peu précise (la précision est ici de l'ordre de quelques mètres), soit donnée par l'IGS (International GNSS Service) qui fournit gratuitement depuis 1994 des orbites précises pour les applications scientifiques. En tant que service international, l'IGS a pour but d'unifier les efforts de la communauté internationale en calculant et fournissant une solution d'orbites précises, en plus d'être un support pour de nombreux groupes de réflexion et de travail sur l'amélioration de ces produits et l'avenir du GNSS au niveau mondial.

Grâce notamment au faible coût d'installation des stations au sol, le GNSS est une technique aujourd'hui massivement employée pour le positionnement précis que ce soit en mode statique pour des stations géodésiques de référence ou en mode cinématique pour le suivi d'objets (notamment en temps quasi-réel). La densité inégalée de son réseau de récepteurs de type géodésiques au sol (voir Figure 1.2) est un atout pour de nombreuses applications (liste non exhaustive) : système de référence terrestre ([Altamimi et al., 2016](#)), mouvements tectoniques ([Calais et al., 2006; Nocquet, 2012](#)), sismologie ([Klein et al., 2018](#)), variations saisonnières hydrologiques ([Argus et al., 2014](#)), synchronisation d'horloges et transfert de temps ([Lombardi et al., 2001](#)), contenu en électron de l'ionosphère lié à des événements géophysiques ([Dautermann et al., 2009](#)) et en vue de la prévention des risques sismiques ([Heki, 2011; Eisenbeis & Occhipinti, 2021](#)). La mesure GNSS étant incontournable pour de nombreux enjeux majeurs de la géophysique, la qualité des traitements a systématiquement été améliorée depuis des années et continue encore d'être un sujet actif de recherche dans la communauté géodésique, notamment à l'IGS.

Il existe plusieurs constellations de satellites GNSS pleinement ou partiellement opérationnelles à l'heure actuelle (2022). Les États-Unis ont été les premiers à se doter d'une constellation de satellites GNSS appelée **GPS** (Global Positionning System). La Russie a également développé sa propre constellation GNSS appelée **GLONASS**, pleinement opérationnelle depuis 2011 et dont les plans orbitaux sont plus inclinés que ceux des satellites GPS pour pouvoir augmenter la précision dans les zones de hautes latitudes. Enfin, l'ESA (Agence Spatiale Européenne) a lancé son projet de constellation GNSS appelée **Galileo**, pleinement compatible avec le système GPS, délivrant un « service initial » depuis fin 2016 et qui devrait être pleinement opérationnel d'ici 2024. D'autres systèmes de navigation existent dont Beidou/Compass développé par la Chine, ainsi que des systèmes régionaux comme QZSS pour le Japon ou IRNSS pour l'Inde. Le Tableau 2.1 résume les caractéristiques principales des constellations GPS, GLONASS, Galileo et Beidou.

Caractéristiques	GPS	GLONASS	Galileo	Beidou
Pays	États-Unis	Russie	Europe	Chine
Opérationnel (pleinement)	1995	2011	2016 (2024)	2020
Altitudes des satellites (km)	20 183	19 130	23 222	21 150
Nombre de satellites	31	24	24(+6)	27(+8)
Nombres de plans orbitaux	6	3	3	3
Inclinaison des plans orbitaux	55°	64,8°	56°	55°
Fréquences utilisées (MHz)	L1 (1575,42)	G1 (1600,99)	E1 (1575,42)	B1 (1575,42)
	L2 (1227,60)	G2 (1248,06)	E5b (1207,14)	B2b (1207,14)
	L5 (1176,45)	G3 (1202,03)	E5a (1176,45)	B2a (1176,45)
			E6 (1278,75)	B3 (1268,52)

Tab. 2.1 – Caractéristiques des constellations GNSS majeures.

Pour atteindre des solutions de haute précision, il est nécessaire de modéliser avec soin l'ensemble des phénomènes et biais impactant la mesure GNSS. Nous décrivons brièvement dans la suite l'équation de mesure utilisée en vue d'un traitement précis utilisant les produits orbite/horloge de l'IGS ou d'un de ses centres d'analyse. Les mesures précises avec GLONASS n'étant possible que depuis la fin des années 2000 et les mesures avec Galileo n'étant possible qu'à partir de fin 2016, nous nous sommes limités à utiliser la constellation GPS seule dans le cadre de notre traitement de séries temporelles longues (allant jusqu'à 2001). Nous nous limiterons donc également au GPS et à ses fréquences « historiques » L1 et L2 dans les considérations théoriques que nous étudions dans la suite de cette partie.

2 Détermination de l'équation de mesure

2.1 Émission, propagation et réception du signal

Comme tout les signaux GNSS, le signal GPS est construit à partir d'un oscillateur atomique se trouvant à bord. Pour le GPS, il génère une fréquence fondamentale de 10,23 MHz permettant de générer par la suite plusieurs signaux ayant leur propre fonction comme cela est montré sur la Figure 2.1 : les signaux de codes, les signaux de phases et le message de navigation. Le message de navigation comporte des éléments d'information sur le satellite comme son numéro, son état de fonctionnement, son orientation, sa position approximative, la date d'envoi du signal dans son temps propre et son biais d'horloge approximatif par rapport au temps GPS. Les phases sont deux ondes sinusoïdales de haute fréquence typiquement de l'ordre du GHz donc de longueur d'onde décimétrique, appelée L1, L2 et L5 dans le cas du GPS et permettent une mesure de position subcentimétrique. Le code (C/A) et le code précis (noté souvent P ou Y) sont des signaux binaires (*i.e.* en créneau) pseudo-aléatoires dont la longueur caractéristique est de 1023 bits (*chip*) soit une longueur d'environ 30 m pour le code P, permettant d'atteindre des précisions de l'ordre de 30 cm sur la position. Chaque satellite possède un *chip* propre de sorte qu'il constitue une sorte de carte d'identité du satellite. Les *chips* choisis ont l'avantage d'être bien décorrélos entre eux pour pouvoir différencier facilement les satellites. L'ensemble de ces signaux est modulé selon le schéma représenté sur la Figure 2.1, avant d'être émis en direction de la Terre.

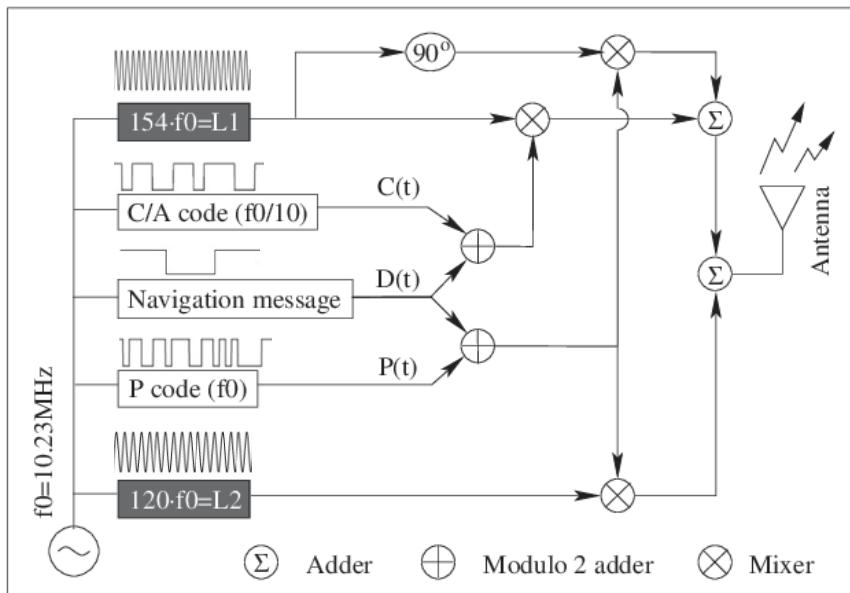


Fig. 2.1 – Schéma de la structure des différents signaux générés par les satellites GPS et leur modulation en vue de l'envoie de l'onde. (*modifié à partir de García Fernández (2004)*)

Entre le satellite et le récepteur, la propagation des signaux dans l'atmosphère est perturbée par la nature du milieu. L'ionosphère est un milieu dispersif de type plasma (les molécules sont ionisées sous l'effet des rayons solaires) dans lequel il existe une différence entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe du signal. En première approximation, dans l'ionosphère, la porteuse est avancée d'autant que l'enveloppe

est retardée. Une autre propriété d'un milieu dispersif est la propagation différente entre des signaux de fréquences différentes : le retard de l'enveloppe (respectivement l'avance de la porteuse) est proportionnel à $1/f^2$ en se limitant au premier terme d'ordre non nul. On peut alors corriger cet effet de dispersion en combinant les signaux de deux ondes de fréquences différentes, par exemple L1 et L2 (combinaison « ionosphere-free »).

Il convient ensuite d'étudier la propagation de l'onde dans la troposphère. Ce milieu est transparent, non dispersif mais possède un indice optique n pouvant fortement varier dans le temps et l'espace notamment à cause de la composition de l'atmosphère et en premier lieu sa teneur en vapeur d'eau. L'onde se propage alors à une vitesse c/n ce qui induit un retard qui dépend de l'épaisseur de troposphère traversée donc de l'élévation du satellite par rapport au récepteur. En effet, plus le satellite est proche de l'horizon, plus la couche de troposphère traversée sera grande (donc potentiellement variable) et plus le délai correspondant augmentera. On passe de quelques mètres de délai troposphérique au zénith, à quelques dizaines de mètres à basse élévation.

En suivant les recommandations des conventions de l'IERS (International Earth Rotation Service), on modélise le délai troposphérique en considérant que le délai calculé au zénith du récepteur (ZTD) peut être projeté à d'autres élévation en utilisant des fonctions de projection comme la Global Mapping Function (GMF) ([Boehm et al., 2006a](#)) ou la Vienna Mapping Function (VMF) ([Boehm et al., 2006b](#)). Le délai troposphérique pour une élévation quelconque est ainsi décrit par les contributions zénithales sèches (ZHD) et humides (ZWD) de l'atmosphère qui sont projetées à la bonne élévation grâce à la fonction de projection. On peut également y inclure des gradients qui permettent d'induire une anisotropie Nord-Sud et Est-Ouest dans la projection zénithale. Les paramètres intervenant dans les expressions des fonctions de projection doivent donc être estimés de sorte à éviter toute mauvaise modélisation et/ou délai résiduel liés aux variations du délai troposphérique. Aussi, étant donnée la difficulté de connaître précisément les conditions météorologiques notamment l'humidité autour de la station, le ZWD et les paramètres du gradient sont le plus souvent estimés comme inconnues supplémentaires. La difficulté réside dans le fait que ces paramètres sont souvent très corrélés aux biais d'horloges et à la composante verticale du déplacement de la station.

Le signal capté par l'antenne du récepteur est démodulé selon la procédure inverse de la modulation. Le signal de code reçu est alors comparé aux *chips* disponibles dans la base de données des récepteurs et une fonction de corrélation calculée entre le signal reçu et le signal de la base de données permet d'identifier le satellite et de déduire le temps de parcours de l'onde. C'est la précision avec laquelle on arrive à corrélérer les deux signaux qui limite la précision de la mesure. Pour les signaux de phase, qui sont sinusoïdaux, on ne peut mesurer l'écart de phase entre l'onde reçue et l'onde générée qu'à un nombre entier de cycles près. Nous avons donc simplement accès à un déphasage compris entre 0 et 2π mais le nombre de cycle entier N s'étant écoulé en plus de ce déphasage ne peut pas être déterminé *a priori*. Cette inconnue est appelée **ambiguïté**. Elle peut être résolue sous la forme d'un nombre réel mais identifier le nombre entier correspondant améliore sensiblement la solution de l'ensemble des paramètres. Nous verrons dans la Section 3 qu'il existe différentes techniques pour déterminer les ambiguïtés entières.

2.2 Équation de mesure de code et phase

Nous dressons ici une liste des phénomènes qui biaissent la mesure GPS, ainsi que la manière dont on peut les modéliser ou dont on doit les déterminer lors du calcul de la solution. La nature de ces biais et les corrections qui y sont apportées peuvent varier selon les traitements, la constellation et le matériel utilisé. Nous exposons ici seulement des généralités.

Effets relativistes : Le décalage en fréquence lié aux effets de relativité restreinte (dilatation du temps) et de relativité générale (*redshift* généré par la différence entre le potentiel moyen au niveau du satellite et celui au niveau du géoïde) ont été corrigés préalablement au lancement des satellites en modifiant légèrement la fréquence de l'oscillateur embarqué. Les effets de dilatation et de *redshift* restant à corriger sont ceux liés au déplacement du satellite hors de l'orbite circulaire moyenne (donc lié à l'excentricité de l'orbite) ainsi que ceux liés à la propagation du signal dans un référentiel tournant avec la Terre (effet Sagnac).

Biais d'horloge : L'horloge satellite et l'horloge récepteur ne peuvent être parfaitement synchronisées avec

l'échelle de temps GPS ce qui induit un biais supplémentaire à déterminer. Les biais d'horloge satellite sont soit fournis par l'IGS, soit éliminés du problème tandis que les biais d'horloge récepteur doivent être estimés ou éliminés¹. On note que cet écart au temps de référence est indépendant de la fréquence utilisée (L1 ou L2).

Biais hardware : Ces biais, aussi appelés biais instrumentaux, sont liés au temps de parcours du signal électrique au sein du satellite et au sein du récepteur. Dans le satellite c'est le temps de trajet entre la sortie de l'oscillateur et le lieu d'émission du signal et dans le récepteur, c'est le temps de trajet entre la réception de l'onde et l'acquisition. Ces biais dépendent non seulement du type de signal (code ou phase) mais également de la fréquence (Inter Frequency Bias, IFB), de la méthode d'acquisition du signal dans le récepteur (Differential Code Bias, DCB) et de la constellation (Inter System Bias, ISB). Étant difficilement modélisables, ils peuvent être éliminés des mesures ou bien être estimés (voir Section 3.2). Ils induisent généralement des variations pouvant aller jusqu'au mètre.

Phase center offset (PCO) : Ce terme est lié au fait que les antennes émettrices ne sont pas au centre de masse des satellites et que les antennes réceptrices ne sont pas exactement sur les marqueurs géodésiques qui définissent le point de mesure au sol par convention². Ainsi, il est nécessaire de corriger la mesure pour prendre en compte ces deux distances qui peuvent être assez importantes. Les valeurs des PCO des satellites GPS n'ayant pas été rendues publiques, elles ont été estimées par méthode inverse par les centres d'analyse de l'IGS.

Phase center variations (PCV) : Ce terme permet de positionner précisément le centre de phase d'une antenne, qui dépend de l'azimut et de l'élévation du signal ainsi que de sa fréquence. Toutes les antennes géodésiques ont fait l'objet de calibration pour les signaux GPS L1 et L2. L'ensemble des informations de PCV et PCO sont données dans des fichiers ANTEX délivrés régulièrement par l'IGS au profit des utilisateurs et utilisatrices (ftp://aiub.unibe.ch/users/villiger/igsR3_2077.atx).

Windup : Cet effet est lié aux variations de l'orientation relative de l'antenne du satellite par rapport à l'antenne du récepteur. Par exemple, si le satellite effectue une rotation complète selon son axe de lacet, la phase du signal est modifiée d'un cycle alors que la distance à la station n'a pas changée. Au cours du passage d'un satellite sa loi d'attitude peut produire des rotations allant jusqu'à un demi-tour et donc un signal de *windup* d'une dizaine de centimètres dans le cas du GPS. Cet effet doit être modélisé par un des modèles de référence décrits dans [Wu et al. \(1992\)](#) ou [Kouba \(2009\)](#) afin d'être retiré des observations.

Multi-trajet : Ce biais est très difficile à prendre en compte car il est propre à chaque situation. Le signal arrivant sur l'environnement proche d'un récepteur (végétation ou habitations sur quelques dizaines de mètres) peut être réfléchi et capté par le récepteur. Ce signal parasite (dans le cas du calcul de position précis) augmente la dispersion du signal et peut aussi créer des erreurs spectrales (recouvrement de spectre notamment) sur le signal mesuré si il est capté de manière permanente. Le multi-trajet est en pratique plus important sur les mesures de code que les mesures de phase et peut être drastiquement réduit en appliquant un filtre en élévation pour éliminer du calcul les mesures de basse élévation qui sont les plus sujettes à ces réflexions.

Ambiguïté : Ce biais sur la mesure de phase est une inconnue supplémentaire dans le problème. En effet, le déphasage complet de l'onde entre l'émission du signal par le satellite et la réception par l'antenne est $\phi = \Phi + N$, où ϕ est un nombre réel de cycle, Φ est le déphasage mesuré par le récepteur (donc modulo 1 cycle) et N est le nombre de cycles entiers s'étant écoulés (inconnu). On peut remarquer que tant que l'on possède une mesure continue du signal de phase Φ (il faut pour cela un système de boucle à verrouillage de phase) durant le passage d'un satellite, la valeur de N ne change pas.

Étant donné l'ensemble de ces phénomènes, les équations de mesure de code P et de phase Φ pour les

1. L'élimination est possible en combinant différentes observations (voir Section 3.1).

2. On utilise ces marqueurs géodésiques pour que la station soit compatible avec d'autres techniques que l'on rapporte elles aussi à ce marqueur.

deux fréquences f_1 et f_2 , entre un satellite a et un récepteur r à un temps t sont données par ([Teunissen & Kleusberg, 2012](#))

$$\begin{cases} P_1 = (\rho + \rho_1^{\text{corr}})_P + c[(dt_P)_r^a - (dt_{P1})_r] + I_1 + T + M_{P1} + \epsilon_{P1} \\ P_2 = (\rho + \rho_2^{\text{corr}})_P + c[(dt_P)_r^a - (dt_{P2})_r] + I_2 + T + M_{P2} + \epsilon_{P2} \\ \lambda_1 \Phi_1 = (\rho + \rho_1^{\text{corr}})_{\Phi} + c[(dt_{\Phi})_r^a - (dt_{\Phi1})_r] - I_1 + T - \lambda_1 N_1 + \lambda_1 w + M_{\Phi1} + \epsilon_{\Phi1} \\ \lambda_2 \Phi_2 = (\rho + \rho_2^{\text{corr}})_{\Phi} + c[(dt_{\Phi})_r^a - (dt_{\Phi2})_r] - I_2 + T - \lambda_2 N_2 + \lambda_2 w + M_{\Phi2} + \epsilon_{\Phi2} \end{cases}, \quad (2.1)$$

où P est la pseudodistance (en mètres) mesurée grâce à la fonction de corrélation appliquée sur la mesure de code P, $\Phi \in [0, 2\pi[$ est le déphasage (en cycles) sur la phase, λ est la longueur d'onde de la phase (L1 ou L2), ρ la distance géométrique entre le satellite et le récepteur, ρ^{corr} les corrections liées aux effets relativistes et aux PCO/PCV (dépendants tout deux de la fréquence), dt^a le biais d'horloge du satellite a (comprenant le biais instrumental), dt_r le biais d'horloge du récepteur r (comprenant le biais instrumental), I le délai ionosphérique, T le délai troposphérique, N l'ambiguïté entière, w l'effet *windup*, M le terme de multi-trajet et ϵ l'ensemble des termes non modélisés et sources de variabilité comprenant notamment le bruit thermique (blanc) et le bruit de scintillation (en loi de puissance) ([Teunissen & Kleusberg, 2012](#)).

Il existe de nombreuses manières de combiner ces équations ([Teunissen & Montenbruck, 2017](#)), ce qui permet de s'affranchir de certains termes en fonction de l'utilisation qu'on souhaite faire des mesures GNSS. Dans la prochaine section, on s'intéressera aux méthodes permettant d'obtenir le positionnement précis d'une station et notamment de la résolution des ambiguïtés entières.

3 Positionnement précis

Dans cette section, nous donnons un aperçu du traitement nécessaire pour calculer la position précise d'une station en utilisant le modèle donné par l'Eq. (2.1). Dans un premier temps, il faut déterminer quels sont les paramètres que l'on modélise (donc qui ne seront pas estimés), quels sont les paramètres que l'on élimine par combinaisons et quels sont les paramètres qu'il reste à estimer.

Dans le cas du positionnement précis, les paramètres que l'on modélise sont les corrections incluses dans le terme ρ^{corr} , l'effet *windup* w et la position *a priori* des stations. Nous verrons dans la Section 3.2.2 qu'il est nécessaire que cette position soit finement modélisée (typiquement avec une erreur inférieure à 5 cm) pour pouvoir estimer correctement les ambiguïtés entières sur les mesures de phase non différentiées. Les conventions IERS ([Petit & Luzum, 2010](#)) recommandent les modèles de déplacement de la station liés aux marées solides et polaires ainsi qu'aux charges de marée océanique et atmosphérique. Les charges non-maréales décrites dans la Section 1 sont systématiquement omises de la modélisation car les corrections induites sont assez faibles pour être négligées compte tenu de la précision demandée ici. Les coordonnées des satellites et leurs biais d'horloge respectifs sont donnés quant à eux par les produits précis de l'IGS (combinés ou d'un centre d'analyse en particulier).

On élimine systématiquement les délais ionosphériques grâce à la combinaison *ionosphere-free* et un modèle pour la correction de troisième ordre. Afin de simplifier la combinaison des équations faisant disparaître la contribution ionosphérique, on écrit le délai ionosphérique en fonction du seul terme à la fréquence f_1 et du facteur $\gamma = \lambda_2^2/\lambda_1^2$ qui sert de conversion entre les corrections ionosphériques du second ordre aux fréquences f_1 et f_2 . On divise également les biais d'horloge en deux termes distincts : l'un contenant les écarts des horloges au temps GPS h , l'autre étant lié aux biais instrumentaux ou biais *hardware* τ . Les termes décrivant l'écart des horloges au temps GPS ne dépendent que de la nature du signal (code ou phase) tandis que les termes de biais sont à la fois dépendant de la nature du signal, mais également de sa fréquence³. On peut modéliser cette dépendance en fréquence des biais comme ayant la même nature que la dépendance en fréquence du délai ionosphérique (propagation dans les câbles coaxiaux notamment). Ainsi, les biais *hardware* des signaux de fréquences f_1 et f_2 seront reliés par le facteur γ . Cette écriture est particulièrement intéressante lorsque l'on écrit une combinaison *ionosphere-free* ([Laurichesse et al., 2009; Loyer et al., 2012](#)).

3. En réalité, si une partie des biais *hardware* est indépendante de la fréquence, alors elle sera absorbée dans le terme d'écart à la référence h , ce qui ne pose pas de problème en soit.

On réécrit les Éqs. (2.1) avec les nouvelles notations ce qui donne

$$\begin{cases} \bar{P}_1 = (\bar{\rho} + \bar{T})_P + c\Delta_r^a h_P + c\Delta_r^a \tau_P + I_1 + \bar{\epsilon}_{P1} \\ \bar{P}_2 = (\bar{\rho} + \bar{T})_P + c\Delta_r^a h_P + \gamma c\Delta_r^a \tau_P + \gamma I_1 + \bar{\epsilon}_{P2} \\ \lambda_1 \bar{\Phi}_1 = (\bar{\rho} + \bar{T})_\Phi + c\Delta_r^a h_\Phi + c\Delta_r^a \tau_\Phi - I_1 - \lambda_1 N_1 + \lambda_1 \bar{w} + \bar{\epsilon}_{\Phi1} \\ \lambda_2 \bar{\Phi}_2 = (\bar{\rho} + \bar{T})_\Phi + c\Delta_r^a h_\Phi + \gamma c\Delta_r^a \tau_\Phi - \gamma I_1 - \lambda_2 N_2 + \lambda_2 \bar{w} + \bar{\epsilon}_{\Phi2} \end{cases}, \quad (2.2)$$

avec \bar{P} (resp. $\bar{\Phi}$) la mesure de code (resp. de phase) contenant les corrections PCO/PCV et relativistes, $\bar{\rho}$ la distance satellite-récepteur contenant les modèles IERS pour la station et l'orbite précise satellite, \bar{T} le modèle de troposphère contenant une fonction de projection, \bar{w} le modèle de l'effet *windup*, $\Delta_r^a h$ (resp. $\Delta_r^a \tau$) la différence des biais d'horloge de référence (resp. des biais *hardware*) entre le satellite et le récepteur et $\bar{\epsilon}_P$ (resp. $\bar{\epsilon}_\Phi$) l'ensemble des termes non modélisés contenant le multi-trajet pour le code (resp. la phase).

Pour le calcul d'une solution statique par jour, on estime le reste des paramètres présents dans les Éqs. (2.2) : les coordonnées résiduelles de la station (3 paramètres par jour), le biais d'horloge récepteur dt_{rec} (1 paramètre par époque - généralement toute les 30s), les ambiguïtés entières N (1 paramètre par passage de satellite - chaque saut de cycle rajoute un paramètre supplémentaire), les paramètres troposphériques contenus dans T (1 paramètre toute les 2 heures pour le délai ainsi que 2 paramètres par jour pour le gradient car on différencie le gradient Nord-Sud et le gradient Est-Ouest). On rappelle que l'ajustement de T est en fait l'ajustement des paramètres dont dépend la fonction de projection. Les délais liés au multi-trajet sont négligeables pour les mesures de phase et le cas échéant sont absorbés dans le terme ϵ ne contribuant qu'aux erreurs sur les paramètres estimés.

Pour obtenir une précision subcentimétrique sur la position mesurée, il est essentiel de résoudre l'équation de phase, le problème majeur étant la résolution de l'ambiguïté entière (non présente dans la mesure de code) fortement corrélée aux biais *hardware*. L'ambiguïté perd alors son caractère d'entier et la solution se trouve entachée d'une erreur pouvant être importante. Il existe dès lors deux techniques distinctes pour résoudre correctement les ambiguïtés en préservant leur caractère entier. La première consiste à différencier les observations afin d'éliminer les biais *hardware* et les biais d'horloge. La seconde consiste à modéliser/estimer les biais *hardware* grâce à des combinaisons astucieuses des équations de mesure. Nous présentons les deux démarches de résolution en développant d'avantage la seconde que nous avons effectivement utilisée pour notre traitement.

3.1 Solution différenciée

La méthode différentielle consiste à former des différences entre les mesures afin d'éliminer certains paramètres et éviter ainsi d'avoir à les estimer. Elle est résumée dans la Figure 2.2 pour une simple (SD), double (DD) ou triple (TD) différence entre observables. En formant les simples différences entre les mesures reliant deux récepteurs à un satellite, on élimine le biais d'horloge et le biais *hardware* satellite. En double différence, c'est-à-dire entre deux récepteurs et deux satellites, on élimine en plus le biais d'horloge et le biais *hardware* des récepteurs. Les biais *hardware* satellites et récepteurs étant éliminés, l'ambiguïté retrouve un caractère entier et peut être estimée. Enfin, si l'on différentie en plus les mesures entre deux époques, on élimine l'ambiguïté quand bien même on n'obtient que des mesures temporelles relatives.

Pendant de nombreuses années, la méthode DD a été largement utilisée faute de pouvoir estimer les biais *hardware* satellites et récepteurs. Elle souffre cependant de multiples inconvénients. Elle nécessite un calcul réseau, c'est-à-dire la résolution simultanée d'un ensemble de stations. En cela, ajouter une station au réseau initial nécessite de refaire le calcul entièrement. Si le nombre de stations est trop important, on doit traiter des sous-réseaux du réseau initial pour éviter un temps de calcul trop long. Également, ce traitement ne donne accès qu'aux positions relatives des stations les unes par rapport aux autres et l'on doit alors recalculer la solution réseau sur un repère au moyen de stations de référence, pour pouvoir obtenir la position absolue de toutes les stations dans ce repère. Enfin, le traitement est sensible aux problèmes isolés, notamment le cas d'une « mauvaise » station qui peut affecter l'ensemble de la solution. La longueur de la ligne de base entre les stations est aussi un paramètre contraignant car les paramètres que l'on élimine peuvent varier spatialement

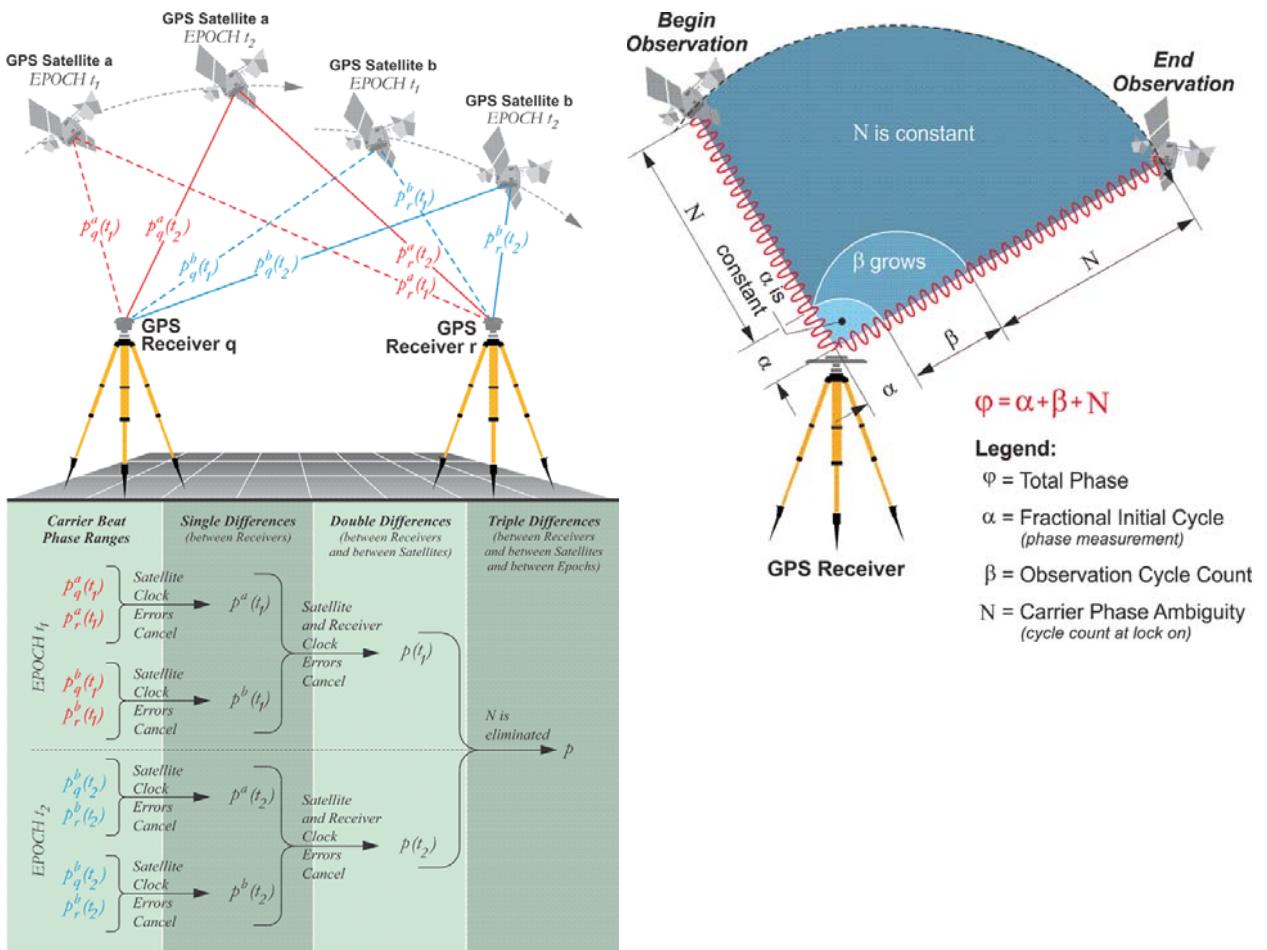


Fig. 2.2 – Schéma de combinaison des signaux de phase (notés p ici) en simple, double ou triple différence afin de s'affranchir des biais d'horloge et de l'ambiguïté de phase. Le schéma de droite résume comment on peut s'affranchir de l'ambiguïté entière en différenciant deux mesures dans le temps. (*extraits de Van Sickle (2008)*)

et doivent donc être éliminés entre stations proches (typiquement les paramètres de troposphère).

Devant ces problèmes, l'objectif de la communauté a été d'essayer de développer une technique permettant de traiter les stations indépendamment les unes des autres (en mode zéro-différence), tout en restant compétitif sur la précision obtenue.

3.2 Solution Zéro-différence

3.2.1 Mode PPP

Devant les problèmes posés par le calcul différencié, on a cherché à calculer directement la position absolue d'une station sans avoir besoin de combiner les observations de plusieurs récepteurs et surtout sans avoir besoin d'une station de référence (Zumberge et al., 1997; Blewitt, 1998). Ce mode de calcul en zéro-différence, appelé PPP pour Positionnement Ponctuel Précis (ou Precise Point Positionning en anglais), est particulièrement recherché pour le suivi cinématique de balise GNSS ou même de mesures temps réel de stations de campagne, pour lesquels il n'existe pas forcément de stations de référence proches.

La résolution en mode PPP nécessite de modéliser ou d'estimer chaque terme de l'Éq. (2.2) plutôt que de chercher à les éliminer comme en mode différentiel. Le nombre de paramètres à estimer pour chaque station est donc bien plus important qu'en mode DD et le temps de convergence de la solution peut être plus long et cela peut devenir un handicap pour le positionnement en temps réel (Choy et al., 2017; Perosanz, 2019). Néanmoins, les progrès dans la modélisation des différents termes de l'équation de mesure, a permis à cette méthode de devenir incontournable et a rendu toujours plus anecdotique la résolution en DD, sans pour autant supprimer l'intérêt de ce mode de calcul dans certains cas particuliers. Un des problèmes majeur du PPP est la présence des biais *hardware* dans les équations de mesure qui font perdre leur caractère entier aux

ambiguïtés de phase lors de l'ajustement des paramètres. La position estimée des stations est alors entachée d'une erreur importante liée à la corrélation entre les paramètres. La qualité des solutions est de ce fait dégradée et les précisions obtenues moins bonnes qu'en mode différencié.

À titre d'exemple, Fund et al. (2012) ont modélisé les cartes de corrélation entre paramètres pour un traitement cinématique en mode PPP. La Figure 2.3 extraite de leurs travaux montre que les biais d'horloge récepteur, de troposphère et la composante verticale du déplacement sont particulièrement (anti)corrélés avec des valeurs supérieures à 80 %. En effet, lorsque le satellite est au zénith de la station, ces trois paramètres traduisent tous un allongement ou une réduction directe du temps de trajet de l'onde dans la ligne de visée du satellite.

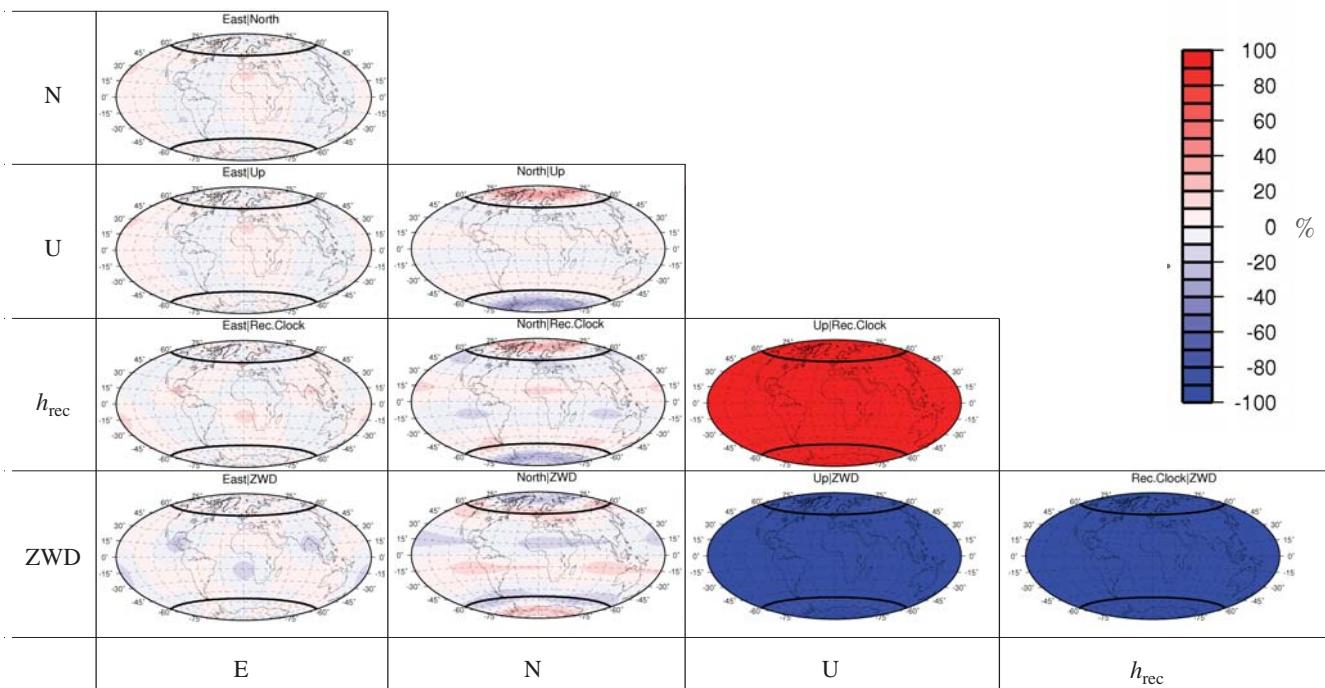


Fig. 2.3 – Cartes de corrélation (en pourcentage) entre les paramètres estimés pour un traitement cinématique en mode PPP. (extrait de Fund et al. (2012))

On remarque également une forte corrélation (plus de 40 %) sur les zones polaires entre la composante Nord et la composante verticale. Cet effet est lié à la géométrie de constellation. Les satellites GPS couvrent parfaitement toutes les longitudes mais sont limités en latitude par l'inclinaison de leurs orbites à 55° (Capderou, 2011). Ainsi, la composante Nord qui est contrainte par le trajet Nord-Sud du satellite, est fortement dégradée au delà de ces valeurs extrêmes et devient corrélée avec la composante verticale. Le jeu des corrélations induit également une corrélation entre la composante Nord et l'horloge récepteur, et dans une moindre mesure entre la composante Nord et le délai troposphérique. On peut faire une remarque sur l'apport du multi-GNSS sur cette question. Les satellites de la constellation GLONASS ont une inclinaison plus élevée (64,8°) justement pour des raisons de couverture de la zone septentrionale russe. La composante Nord y est alors moins corrélée avec les autres paramètres. De la même manière, les satellites Galileo qui possèdent à peu près la même inclinaison que les satellites GPS (56°) mais orbitent plus de 3000 km au dessus, couvriront d'avantage les zones polaires. Enfin, on remarque que la composante Est est particulièrement bien définie dans le sens où la corrélation avec les autres paramètres est faible.

3.2.2 Résolution des ambiguïtés entières

Depuis la fin des années 2000 cependant, plusieurs méthodes ont permis de déterminer ces ambiguïtés entières (Collins, 2008; Laurichesse et al., 2009; Ge et al., 2008; Bertiger et al., 2010; Geng et al., 2010) en prenant en compte le fait que certains biais *hardware* satellites sont stables dans le temps. Ils sont donc modélisables et éliminés du problème, ce qui lève en partie l'indétermination sur la nature entière de l'ambiguïté (il reste les biais *hardware* récepteurs). Nous allons décrire ici brièvement les grandes étapes de

l'estimation de ces ambiguïtés entières dans le cadre développé par [Laurichesse et al. \(2009\)](#) et [Loyer et al. \(2012\)](#) où nous renvoyons lecteurs et lectrices pour plus de détails. Le calcul d'une solution PPP en résolvant les ambiguïtés entières est appelé mode PPP-AR (pour PPP with Ambiguity Resolution) ou plus simplement IPPP (pour Integer-PPP).

Les quatre équations du système (2.2) sont combinées entre elles pour donner un nouveau système de quatre équations en partie découpées. On utilise la combinaison Melbourne-Wübbena ([Melbourne, 1985](#); [Wübbena & Hannover, 1985](#)) qui combine les quatre équations du système (2.2) pour créer une équation *geometry-free* et *ionosphere-free* avec un bruit de mesure faible comparé à la longueur d'onde associée ([Loyer et al., 2012](#)). Puis, on construit la combinaison *ionosphere-free* pour la phase d'une part et le code d'autre part. La seule équation restante pour fermer le système est l'équation ionosphérique donnant le modèle choisi pour I_1 , mais qui est inutile ici. Le système se réécrit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{WL}(\bar{\Phi}_1 - \bar{\Phi}_2) - \lambda_{NL}(\bar{P}_1/\lambda_1 + \bar{P}_2/\lambda_2) = \lambda_{WL}N_{WL} + \lambda_{WL}c\Delta_r^a\tau_{WL} \\ \frac{\gamma\bar{P}_1 - \bar{P}_2}{\gamma - 1} = (\bar{\rho} + \bar{T})_R + c\Delta_r^a h_R \\ \frac{\gamma\lambda_1\bar{\Phi}_1 - \lambda_2\bar{\Phi}_2 - \lambda_2N_{WL}}{\gamma - 1} = (\bar{\rho} + \bar{T})_L + c\Delta_r^a h_L - \lambda_{NL}N_1 + \lambda_{NL}\bar{w} \\ I_1 = ? \end{array} \right. , \quad (2.3)$$

où $\lambda_{WL} = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \simeq 86,19$ cm est la longueur d'onde Wide-Lane, $\lambda_{NL} = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_2 + \lambda_1) \simeq 10,69$ cm la longueur d'onde Narrow-Lane, $N_{WL} = N_2 - N_1$ l'ambiguïté entière Wide-Lane et $\Delta_r^a\tau_{WL} = f(h_P - h_\Phi, \tau_P, \tau_\Phi)$ la combinaison Wide-Lane des biais *hardware* satellite (WSB) et récepteur (WRB). La première équation (combinaison Melbourne-Wübbena) est très avantageuse car elle permet de mettre en évidence à partir d'une combinaison de mesures de code et de phase (et sans modèle de mesure) les biais *hardware* satellite et récepteur ainsi que la différence des ambiguïtés. Pour décorreler les deux types de biais, l'astuce réside dans ce qu'on montré [Laurichesse et al. \(2009\)](#) sur la stabilité dans le temps des biais satellite Wide-Lane (WSB). Ils peuvent donc être modélisés par une valeur τ_{WL0}^a en vue d'être retirés des observations. Il ne reste donc que le biais récepteur et l'ambiguïté WL à estimer. Le biais récepteur est le terme commun aux données de tous les passages de satellites sur la période d'acquisition et qui, une fois retiré, permet d'aligner les ambiguïtés WL associées sur des valeurs entières. Ce résultat est représenté sur la Figure 2.4 qui illustre les différentes étapes du processus.

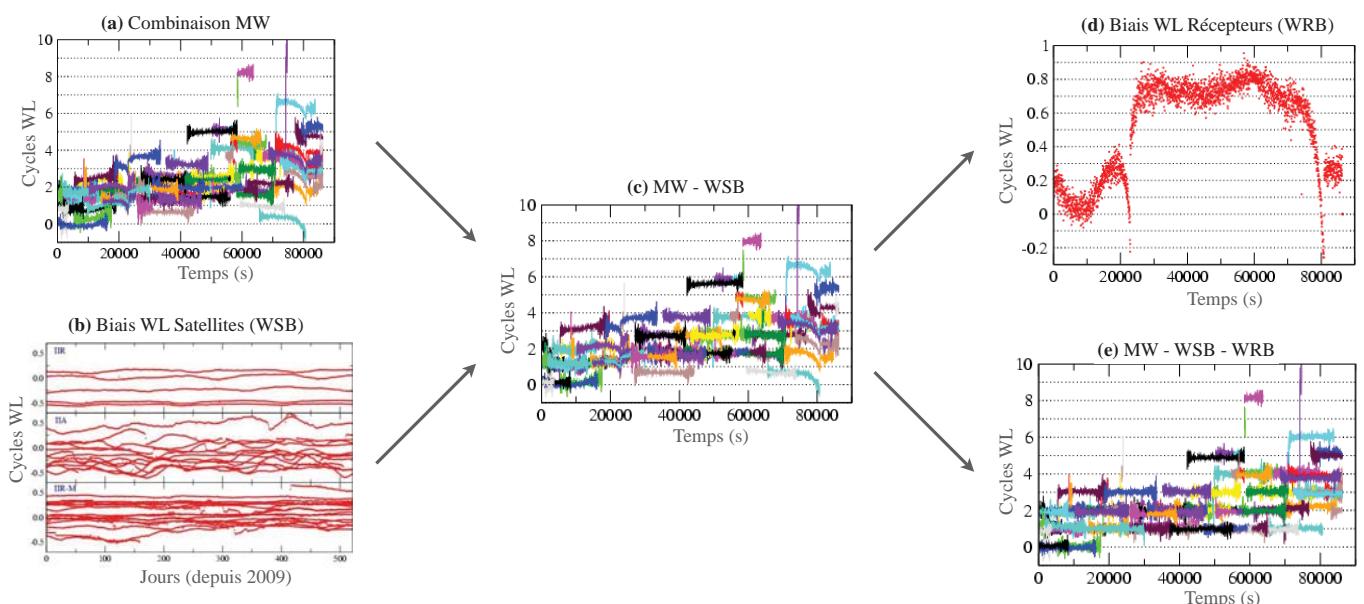


Fig. 2.4 – Schéma de la résolution des ambiguïtés WL à partir de la combinaison Melbourne-Wübbena (a) et de la modélisation des biais WL satellites (b) pour la station MCM4 (Île de Ross, Antarctique) le 22/01/2009. A partir de (c), on applique une méthode de bootstrap pour fixer les ambiguïtés entières et estimer ainsi le biais WL récepteur (d). Les résidus montrés sur (e) reflètent le caractère entier des ambiguïtés WL obtenues par ce processus. (*modifié à partir de Vaubrun (2009)*)

Une fois les ambiguïtés WL fixées sur des entiers, on réajuste les biais récepteur et les corrections au biais satellite à partir de l'équation réduite (c'est-à-dire dont on soustrait l'ambiguïté trouvée précédemment) pour améliorer le modèle de départ. On peut désormais former les quantités ionosphere-free (deuxième et troisième équations du système (2.3)) afin de déterminer N_1 . On estime la position de la station, les paramètres troposphériques, les biais d'horloges et l'ambiguïté dans une inversion non contrainte : l'ambiguïté trouvée n'est donc pas entière. On va alors soustraire aux observations tous les paramètres que l'on vient d'ajuster sauf l'ambiguïté. En traçant ces résidus en nombre de cycles NL pour chaque passage de satellite en fonction du temps, les ambiguïtés devraient être proches de valeurs entières si la précision des modèles utilisés est inférieure à 0.5 cycle NL⁴ soit environ 5 cm. Nous voyons sur la Figure 2.5 que ce critère est bien vérifié (les valeurs réelles sont proches de valeurs entières). On peut alors fixer les ambiguïtés à des valeurs entières séquentiellement (méthode appelée *bootstrapping*) sur un critère de variance-covariance. Les observations *ionosphere-free* de phase sont ensuite corrigées des ambiguïtés et une nouvelle solution peut être calculée (sans les mesures de code qui n'apportent rien à ce niveau).

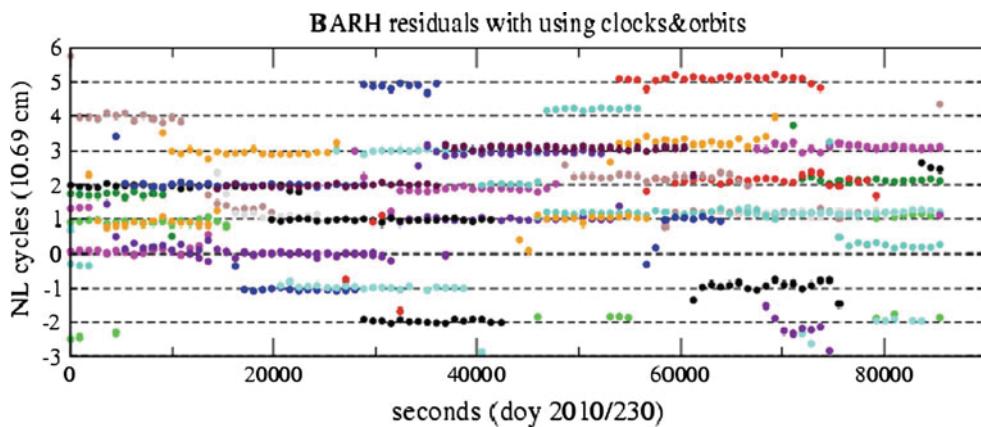


Fig. 2.5 – Ambiguïtés réelles N_1 estimées à partir de la combinaison ionosphere-free des mesures de code et de phase. (*extrait de Loyer et al. (2012)*)

La méthode présentée ici est utilisable uniquement si l'on dispose des horloges satellites « entières », c'est-à-dire des horloges satellites déterminées sur les mesures de phase non ambiguës. Le centre d'analyse CNES-CLS fournit ces produits aux utilisateurs.ices de sorte que le mode IPPP est utilisable avec la solution GRGS. En revanche, l'IGS ne fournit que des produits combinés issus de traitements différents (entre les différents CA) et avec lesquels il n'est pas encore possible de préserver le caractère « entier » des horloges lors de la combinaison, et donc de traiter des solutions en mode IPPP.

On note aussi que l'ensemble de la méthode présentée ici et dans Loyer et al. (2012) pour le GPS est reprise et validée dans Katsigianni et al. (2019b) pour Galileo, ce qui permet notamment de calculer les positions des stations en utilisant plusieurs constellations (typiquement GPS/GLONASS/Galileo) pour améliorer encore la qualité des solutions.

À précision équivalente, un avantage du traitement IPPP par rapport au traitement en DD est le temps de calcul de la solution. Prenons un exemple pour un réseau de m stations. On aura un temps de calcul en $O(m^2)$ pour un traitement en DD car on doit former $m(m - 1)/2$ lignes de base inter-stations (pour chaque époque), au lieu d'un temps de calcul en $O(m)$ en mode zéro-différence. En ordre de grandeur, un traitement journalier statique en mode DD d'un réseau de 100 stations prend presque 25 fois plus de temps qu'un traitement en IPPP et 50 fois plus qu'un traitement en PPP.

4 Utilisation de GINS pour le calcul précis de positions GNSS

Le calcul des positions précises GNSS et la manipulation des mesures GNSS en général (notamment la détermination des produits orbite/horloge satellites au centre d'analyse CNES-CLS) peut être réalisé à l'aide du logiciel GINS (Géodésie par Intégrations Numériques Simultanées) développé et maintenu par le CNES (Marty et al., 2011). Ce logiciel est notamment utilisé dans le cadre du Groupe de Recherche en

4. Valeur théorique haute ne permettant pas en pratique d'assurer la détermination évidente des ambiguïtés.

Géodésie Spatiale (GRGS) pour des activités de recherche variées comme le positionnement mais aussi le champ de gravité, la dynamique orbitale, la planétologie, etc. (voir <https://grgs.obs-mip.fr/recherche/logiciels/gins/>). Nous utilisons GINS dans le cadre de cette thèse pour pouvoir calculer notre propre solution GNSS sur le réseau de station donné sur la Figure 1.7. Le logiciel GINS permet, entre autre, de calculer les solutions GNSS en mode DD et en mode PPP en utilisant les produits orbite/horloge satellites fournis par l'IGS ou directement avec les produits GRG fournis par le centre d'analyse CNES-CLS. Ces derniers possèdent l'avantage de contenir des produits d'horloges compatibles avec la fixation des ambiguïtés entières et permettent donc une résolution en mode IPPP.

Nous décrivons comment fonctionne la chaîne de traitement pour un.e utilisateur.ice souhaitant calculer des solutions PPP ou IPPP dans GINS et notamment la manière dont nous l'avons modifiée pour la faire fonctionner dans son intégralité à Strasbourg. En premier lieu, l'utilisateur.ice doit installer le logiciel GINS sur son ordinateur local, c'est-à-dire les exécutables, les scripts, des TP-exemples de familiarisation avec les outils ainsi qu'une documentation complète des fonctionnalités des scripts, des options disponibles et des fichiers paramétrés par l'utilisateur.ice.

Nous décomposons la chaîne de traitement en trois étapes qui se succèdent : d'abord le prétraitement, puis le module PREPARS qui récolte les informations du prétraitement pour les convertir dans un format lisible par GINS et enfin le module GINS qui calcule et renvoie la solution. Ces étapes sont schématisées sur la Figure 2.6. Nous nous intéresserons ici principalement au prétraitement et aux multiples options qui y sont proposées, plutôt que sur le fonctionnement des modules PREPARS et GINS qui pourront être trouvés dans la documentation algorithmique de GINS (Marty et al., 2018). Le prétraitement comprend 3 fichiers fondamentaux : le **fichier RINEX** (Receiver Indépendant EXchange Format) qui contient toutes les observations du récepteur dont on souhaite déterminer la position, le **fichier station** qui référence l'ensemble des caractéristiques de la station (nom, numéro de DOMES, changements de matériel/logiciel sur le récepteur ou l'antenne, etc.) et le **fichier directeur** qui contient toutes les options que l'on peut paramétriser pour modifier le traitement de la station par GINS. Grâce à des scripts inclus dans le logiciel, on peut créer le fichier directeur et le fichier station à partir des informations présentes dans l'en-tête du fichier RINEX. Dès lors, il suffit de paramétriser le fichier directeur avec les paramètres souhaités (voir plus bas), puis de lancer le script *exe_ppp* qui contient le lancement coordonné de l'ensemble des scripts de la chaîne de traitement

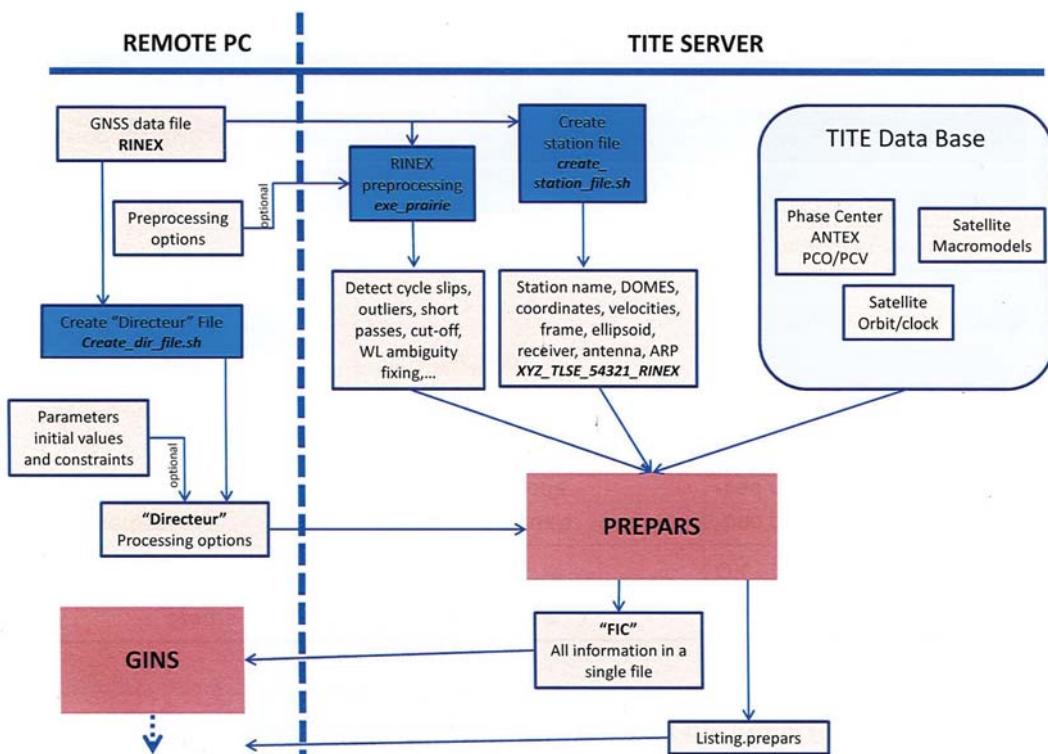


Fig. 2.6 – Schéma de la chaîne de traitement utilisée dans le cas d'un traitement GNSS avec le logiciel GINS.

à partir du fichier RINEX. Il est cependant courant que les en-têtes de RINEX soient mal renseignés ou ne contiennent pas les éléments nécessaires à la création de ces deux fichiers. Il est alors possible de créer le fichier station à partir des *logfiles* qui contiennent les informations à jour de la station considérée.

Le fichier directeur est créé et stocké sur la machine utilisateur, puis il est envoyé avec le fichier RINEX sur le serveur *tite* au CNES. Cette procédure délocalisée est justifiée par le fait que le module PREPARS nécessite une base de données très lourde contenant notamment les produits orbite/horloge satellites (GRG, IGS), les modèles (modèles météorologiques, bulletins du BIPM, éphémérides planétaires, macromodèles des satellites, etc.) et les corrections d'antennes. Également, le module *prairie* permet de pré-traiter les données notamment de calculer les WRB par époque, d'estimer les ambiguïtés WL entières pour chaque passage et de détecter les sauts de cycles. L'exécution est réalisée sur la machine délocalisée pour que l'utilisateur.ice n'ait pas besoin des WSB et des éphémérides de satellites. Le module PREPARS renvoie donc un fichier qui contient toutes les informations liées à cette base de donnée pour le transmettre sur la machine utilisateur afin que GINS puisse s'exécuter en local et délivrer les fichiers de sortie directement sur la machine utilisateur. L'avantage de ce fonctionnement délocalisé est qu'il permet une installation très légère de GINS sur la machine utilisateur mais nécessite en contrepartie un temps de calcul plus long lié aux échanges de fichiers (en connexion ssh) entre la machine utilisateur et *tite*. Pour traiter un très grand nombre de RINEX comme dans notre étude (environ 1000 stations × 20 ans × 365,25 jours ≈ 7 000 000 fichiers RINEX), cette solution n'est pas optimale et il convient alors de transférer entièrement la base de donnée sur la machine utilisateur pour ne plus avoir besoin de passer par *tite*. On peut ainsi bénéficier d'une capacité de traitement en parallèle de ces RINEX (ce qui n'est pas possible avec *tite*) et donc améliorer considérablement le temps de calcul. Nous avons donc pu récupérer l'ensemble des données, des scripts et des exécutables nécessaires à ce fonctionnement et avons pu tester avec succès cette installation sur les modes PPP et IPPP. Ce transfert de l'infrastructure complète du logiciel GINS n'avait jamais été réalisée auparavant.

La paramétrisation du fichier directeur est l'étape clé pour choisir les modèles, les produits, etc. Nous donnons à titre d'exemple un extrait du fichier directeur que nous avons utilisé pour le traitement de la station STJ9 (Strasbourg, France) au 1^{er} janvier 2020 avec les produits orbite/horloge MG3 du centre d'analyse CNES-CLS. Les mentions en rouge décrivent les lignes importantes du fichier notamment sur le choix des paramètres et modèles utilisés pour le traitement.

```

date          :
arc_start    : [25567, 19.0000000]                                « date début traitement
arc_stop     : [25567, 86389.0000000]                            « date fin traitement
model        :
environment   :
  earth_orientation_parameters   : pole/nominal_NRO
  gnss_antenna                  : ANTEX/igsR3_2077.atx      « fichier ANTEX
  gnss_clock                    : horloges/MG3/defaut       « produits d'horloge
  ionex_files                   : ionosphere/igs/defaut    « modèle ionosphère
  apriori_parameters            : EXE_PPP/valap_static
  gnss_preprocessing_options    : EXE_PPP/options_prairie_static « options pour prairie
  macromodel                    : macromod/nominal_MG3      « macromodèle
  gravity                       : unused
  ocean_tides                   : unused
  inverse_barometer             : unused
  atmospheric_pressure          : unused
  mean_sea_surface              : unused
  solar_activity                : unused
  thermosphere                  : unused
  albedo_ir                     : unused
  temporal_nutation             : unused
  trigonometric_nutation       : unused
  planet_ephemerides            : lunisolaires/de405bd1f.ad

```

```

natural_satellite : unused
atmospheric_s1s2_loading_model : charge/s1s2/s1_s2_def_cm.dat      « charges de marée
                                                               atmosphérique
center_of_mass_correction : unused
mean_pole :
compute_c21_s21_from : potential_model
iers_model : 2018.0
object :
station :
station_coordinates : XYZ_stj9_10014M001.sta                      « fichier station
ocean_tide_loading : /data/gin/data/charge/ocean/load_fes2014b_cf    « charges de marée
                                                               océanique
atmosphere_loading : unused
constellation :
- name : GNSS_GPS
gnss_center_of_mass : [corrected, corrected, corrected, corrected]
force :
gravity_field_maximum_degree : not_computed
gravity_from_sun_and_planet : not_computed
integration_reference_frame : inertial_j2000
atmospheric_drag : not_computed
thermospheric_wind : no
solar_pressure : not_computed
solid_tide : iers_2010_conventions « marée solide
gravity_from_ocean_tides : not_computed
relativistic_acceleration : not_computed
gravity_from_atmospheric_pressure_variations : not_computed
satellite_emission : not_computed
accelerometer_attitude_thrust : not_computed
observation :
removal :
minimum_gnss_data_per_pass : 0
nsigma_threshold : 5
first_iteration_residual_threshold : 0
minimum_elevation_threshold : 0
simulation_stepsize : 120
minimum_laser_raw_data : 0
minimum_doppler_data_per_pass : 0
interobject_data :
- file : orbites/MG3                                         « produits d'orbites
  name : GNSS_ephemeris
  objects : [GNSS_GPS, unknown]
  type : fixed_ephemeris
use_earth_ephemerides : yes
- file : stj90010.20o                                         « fichier RINEX
  name : GNSS_measurement
  objects : [GNSS_GPS, station]
  type : undifferentiated_gnss « mode Zero-difference
tropospheric_correction : [wet, vmf1, gpt2]                 « modèle troposphère
nb_adjusted_biases_per_day_per_station : 12                  « 1 biais tropo/2h
min_elevation_phase : 10          « coupe les mesures à basse élévation
min_elevation_range : 10          « coupe les mesures à basse élévation

```

```

apriori_obs_stddev : 0.05
apriori_model_stddev : 5.0
gps_phase_ponderation_law : [0.0035, 0.15, 1.0]           « pondération GPS
gps_code_ponderation_law : [0.6000, 0.15, 1.0]           « pondération GPS
glo_phase_ponderation_law : [0.0350, 0.15, 1.0]
glo_code_ponderation_law : [2.0000, 0.15, 1.0]
gal_phase_ponderation_law : [0.0350, 0.15, 1.0]
gal_code_ponderation_law : [1.0000, 0.15, 1.0]
gnss_options :

    phase_observations_process : yes             « inclure les mesures de phases
    clock_parameters_globally_solved : no
observation_options : [initialize_from_clock_file,
                      constellation_as_time_reference]

phase_nsigma_threshold : 0
code_nsigma_threshold : 0
max_iter_gps_removal : 3
phase_rms_threshold_after_iter_max : 0
code_rms_threshold_after_iter_max : 0
minimum_number_observations_per_pass : 0

parameter :

algorithm :
    allow_elim_at_convergence : yes
    nb_iter_min_max : [1, 20]
    convergence_criterion : 0.1
adjustment_parameters :
    stations :
        adjustment_type : [geodetic_marker_at_suppl_iter, geocenter, all_stations] « les
                                         solutions sont calculées sur le
                                         marqueur géodésique et pas à l'ARP
                                         « coordonnées XYZ
                                         « 1 solution / jour
        coordinates : cartesian_xyz
        adjustment_frequency : [1, 0, 0, 0]
        velocity : not_adjusted
        label_output : middle_of_period
    pole :
        adjustment_x_y_t : [not_adjusted, not_adjusted, not_adjusted]
        love_h2_h2_tilde : [not_adjusted, not_adjusted]
        love_k2_k2_tilde : [not_adjusted, not_adjusted]
        nutation_longitude_obliquity : [not_adjusted, not_adjusted]
user_extension :
    userext_addition :
        - "PRINT_SOLUTION_FILE"
        - "GPS__HAUTE_FREQ STJ9"
        - "GRADIENTS_TROPO 1"                         « 1 gradient tropo/jour

```

Nous remarquons que les modèles utilisés notamment pour modéliser le déplacement de la station sont bien les modèles IERS pour les marées solides ([Petit & Luzum, 2010](#)), le modèle FES2014b ([Lyard et al., 2021](#)) pour les déplacements liés aux charges de marée océanique et le modèle de [Ray & Ponte \(2003\)](#) pour les charges de marée atmosphérique S1 et S2. L'ensemble de ces corrections permettent de modéliser au mieux la distance satellite-station afin de permettre la fixation des ambiguïtés entières comme mentionné dans la Section [3.2.2](#). Nous portons l'attention sur le fait que les corrections apportées sont bien dans le CF (Centre de Figure) lorsqu'elles sont faites sur la position de la station et dans le CM (Centre de Masse) lorsqu'elles

sont appliquées sur l'orbite des satellites. En effet, les orbites sont bien calculées dans le référentiel lié au CM, tandis que les produits d'horloges GNSS contiennent la contribution du passage entre CM et CF afin que la position des stations estimées en utilisant les produits soit bien dans le CF (donc dans l'ITRF). Le CF est défini par le barycentre des positions d'un réseau hypothétique infiniment dense à la surface de la Terre tandis que le CM est le barycentre de l'ensemble des masses du système Terre (atmosphère, hydrosphère et océans inclus). On pourra se reporter à [Blewitt \(2003\)](#) pour plus de détails sur les liens entre les différents référentiels utilisés en géodésie.

Aussi on note que GINS permet désormais les traitements utilisant les fichiers ORBEX décrivant la loi d'attitude du satellite, dont une description détaillée ainsi qu'une analyse sur les déplacements PPP sont données dans [Loyer et al. \(2021\)](#).

Nous allons maintenant décrire l'analyse du traitement du réseau entier et les différences existantes entre les produits orbite/horloge que nous avons utilisés au cours de la thèse.

5 Solution GR2/GRG

Le premier traitement entier du réseau a été réalisé avec les produits orbite/horloge GR2/GRG délivrés par le centre d'analyse CNES-CLS. Ces produits sont nécessaires au traitement IPPP car ils contiennent les horloges satellites estimées avec les ambiguïtés entières fixées. Les produits GR2 sont issus du traitement pour la deuxième campagne de reprocessing de l'IGS REPRO2, qui a eu lieu fin 2013 et qui avait pour objet de recalculer l'ensemble des produits depuis 1994 jusqu'en 2014 en utilisant les derniers modèles et méthodes en date. Après 2014, les produits appelés simplement GRG, sont issus du traitement opérationnel du centre d'analyse, fournis ensuite à l'IGS pour le calcul de la solution combinée. Il faut bien noter que les produits GRG sont susceptibles d'être modifiés au cours du temps en fonction des erreurs trouvées, des corrections de modèles ou simplement des changements dans le calcul (multi-GNSS par exemple). Il est donc normal d'y trouver des discontinuités bien qu'elles soient le plus souvent absorbées dans les paramètres des modèles avec lesquels on ajuste les séries temporelles. Ce sont les données qui étaient à notre disposition et que nous avons utilisé jusqu'à la distribution des produits MG3 (voir Section 6) début 2021. Pour des raisons évoquées plus loin, nous n'avons fait qu'un traitement de ces données en mode PPP.

5.1 Analyse des séries temporelles et mode commun

Les séries temporelles issues du traitement PPP ont fait l'objet de plusieurs analyses. La première a été de détecter les sauts dans les séries en essayant d'abord plusieurs méthodes répandues comme les moyennes et écart-types glissant, avant de se résoudre à regarder les séries une à une. Nous avions également corroboré notre détection visuelle avec un catalogue des événements sismiques et des changements de matériels sur la station. Puis, nous avons décidé d'ajuster les séries temporelles avec le modèle usuel suivant

$$y(t) = y_0 + v(t - t_0) + a_1 \cos(2\pi t) + b_1 \sin(2\pi t) + a_2 \cos(4\pi t) + b_2 \sin(4\pi t) + \sum_{k=0}^N p_k \mathcal{H}(t - t_k) + \epsilon(t), \quad (2.4)$$

où $(y_0, v, a_1, b_1, a_2, b_2, p_k)$ sont les paramètres du modèle, \mathcal{H} est la fonction de Heaviside et $\epsilon(t)$ est le modèle de bruit (comprenant uniquement un bruit blanc ici). Nous n'avons dans un premier temps pas ajusté les fréquences draconitiques qui ont pour période fondamentale 351 jours pour la constellation GPS. Ce choix a été motivé par le fait que les résidus des séries temporelles après ajustement du modèle de l'Eq. (2.4), ont été décomposées en composante principale (PCA) pour détecter les signaux communs sur les grandes longueurs d'onde spatiales, auxquels les signaux draconitiques peuvent appartenir.

L'analyse des résidus des séries temporelles et des modes communs obtenus par PCA a mis en évidence des anomalies communes à toutes les stations sur certaines périodes de temps précises et ne semblant pas correspondre à des signaux géophysiques. Ces anomalies apparaissent sur les composantes Est et Nord comme on le voit sur la Figure 2.7 représentant les séries temporelles des stations ONSA (Sud de la Suède) et STJ9 (Strasbourg, France), sur les années 2013 et autour de 2016. Après des tests sur quelques stations, nous

avons pu remarquer que ces problèmes étaient toujours présents en IPPP. Nous ne nous sommes donc pas lancé dans le calcul du réseau entier en IPPP avant d'avoir réglé ce problème.

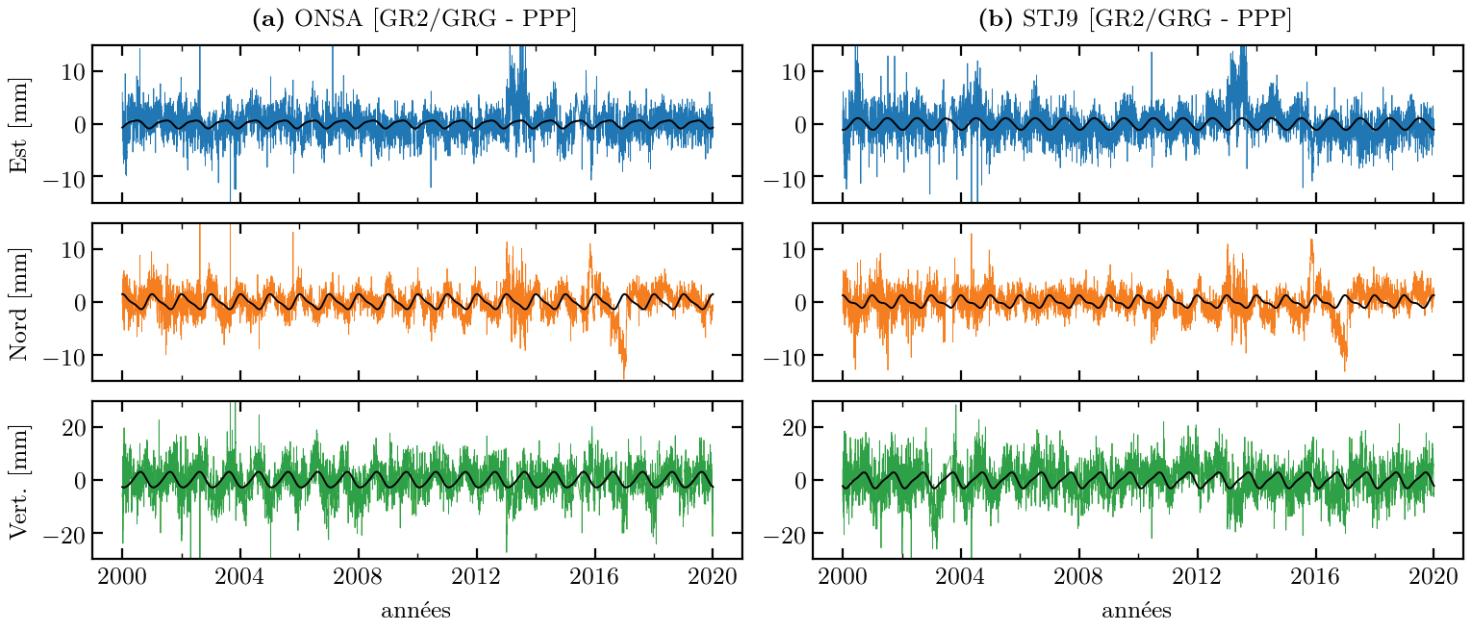


Fig. 2.7 – Résidus des séries temporelles GR2/GRG des stations ONSA (a) et STJ9 (b), après la soustraction du modèle de l’Éq. (2.4) et le rajout des termes annuels et semi-annuels (en trait plein noir).

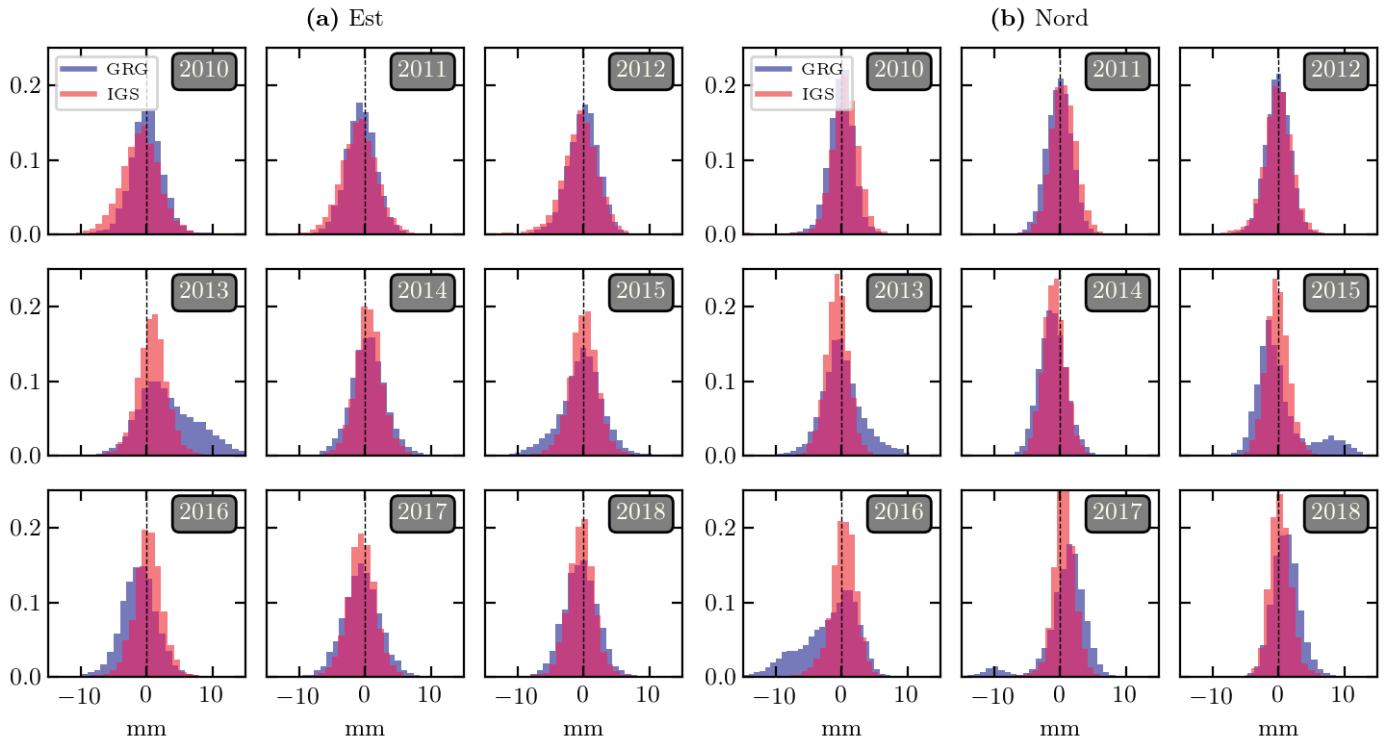


Fig. 2.8 – Histogrammes des résidus cumulés par année, de 20 stations réparties sur l’Europe, pour la solution combinée IG2/IGS (rouge) et la solution GR2/GRG (bleu), pour les composantes Est (a) et Nord (b).

Le fait que ces signaux soient assez localisés temporellement mais qu’ils aient une large empreinte spatiale (plusieurs milliers de kilomètres) nous a conduit sur la piste d’une erreur sur les produits orbite/horloge. Une analyse supplémentaire a montré que ces anomalies n’étaient effectivement pas présentes sur les résidus des séries calculées avec les produits combinés de l’IGS comme le montre la Figure 2.8, confortant ainsi notre intuition. Cette Figure montre que la distribution des résidus des solutions IGS reste centrée pour toutes les

années, ce qui diffèrent des solutions GRG. Nos recherches communes avec le centre d'analyse CNES-CLS ont permis de mettre en évidence le fait que les solutions calculées avec les produits GR2/GRG n'étaient en réalité pas correctement alignées sur l'ITRF, ce qui pouvait expliquer les problèmes dans nos solutions.

Ce problème de mise en référence des solutions, n'était alors que partiellement résolu par le centre d'analyse qui fournissait des paramètres de transformation (au sens de Helmert) permettant de réaligner les solutions sur l'ITRF sur la période 2016-2019 seulement. Nous avons donc entrepris de calculer l'intégralité des paramètres d'alignement depuis 2000, afin de pouvoir réaligner les solutions (qui étaient alors inexploitables compte tenu de la précision recherchée) que nous avions calculées sur l'ITRF et de fournir ces paramètres aux utilisateurs.ices de GINS.

5.2 Mise en référence et calcul des paramètres de Helmert

La mise en référence des solutions est un calcul qui nécessite le calcul de deux solutions sur le même réseau de stations à l'échelle globale : la solution de référence et la solution correspondante aux produits que l'on veut aligner. Ces deux solutions forment ainsi deux référentiels « de figure » (au sens défini par Blewitt (2003) et Wu et al. (2012)). Ces deux référentiels sont alors comparés et ajustés l'un sur l'autre grâce à un jeu de paramètres appelés paramètres de Helmert. Ces paramètres permettent de faire coïncider les centre de figure des deux référentiels (3 paramètres de translation), leur rayon moyen par rapport à leur centre de figure respectifs (1 paramètre de facteur d'échelle) et les écarts angulaires existants entre eux (3 paramètres de rotation). Si on nomme \mathbf{X}_{ref} les positions des stations du réseau pour la solution de référence et \mathbf{X} leur positions pour la solution à aligner, on a

$$\mathbf{X}_{\text{ref}} = \mathcal{T} + \mathcal{S} \mathcal{R} \cdot \mathbf{X}, \quad (2.5)$$

avec \mathcal{T} le vecteur translation, \mathcal{S} le facteur d'échelle et \mathcal{R} la matrice de rotation dépendant des trois angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ associés aux rotations selon chacun des trois axes (Ox), (Oy) et (Oz). En considérant les paramètres θ_1 , θ_2 et θ_3 petits (quelques dixièmes de milliseconde d'arc en pratique), on peut écrire au premier ordre en ces paramètres

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= R_1 R_2 R_3, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} + o(\theta_1, \theta_2, \theta_3), \\ &= \text{Id} + R + o(\theta_1, \theta_2, \theta_3). \end{aligned}$$

On peut également écrire $\mathcal{S} = 1 + S$ où S est la différence de facteur d'échelle entre les deux solutions. Cette différence est très petite en pratique, S atteignant au plus quelques ppb (partie par milliard). En se limitant maintenant au premier ordre en S , θ_1 , θ_2 et θ_3 , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{ref}} &= \mathcal{T} + \mathcal{S} \mathcal{R} \cdot \mathbf{X}, \\ &= \mathcal{T} + (1 + S + o(S))(\text{Id} + R + o(\theta_1, \theta_2, \theta_3)) \cdot \mathbf{X}, \\ &= \mathcal{T} + \mathbf{X} + S \mathbf{X} + R \cdot \mathbf{X} + o(S, \theta_1, \theta_2, \theta_3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ces 7 paramètres permettent donc d'ajuster les degrés 1 et 2 d'harmoniques sphériques du déplacement entre les deux référentiels.

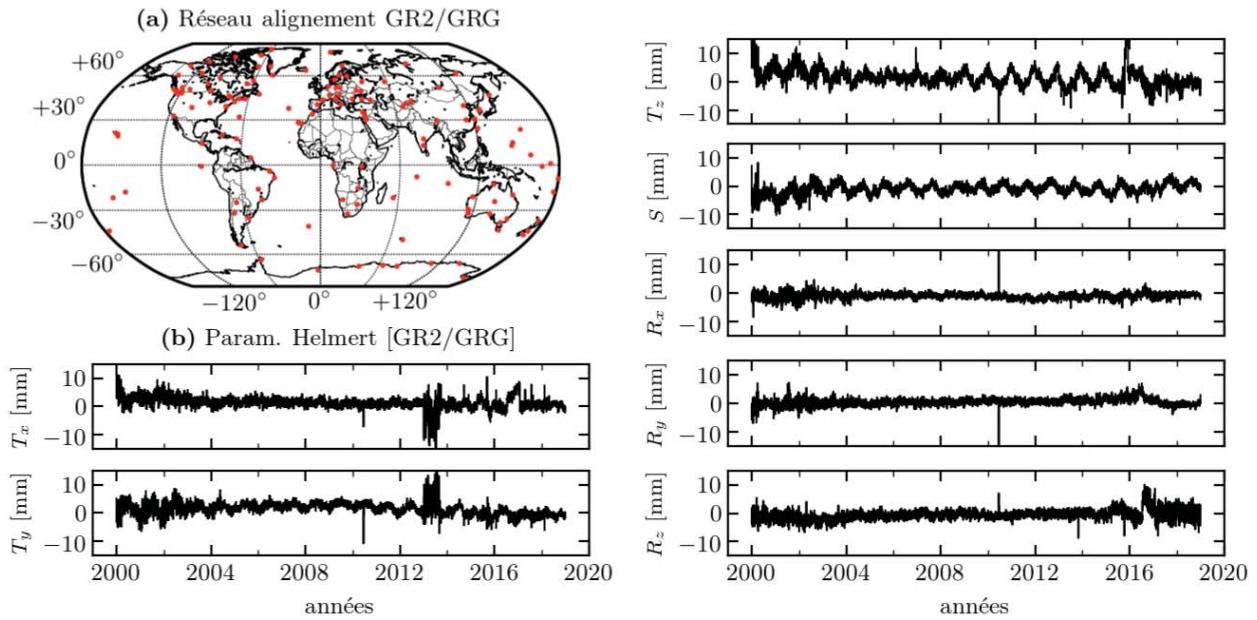


Fig. 2.9 – (a) Réseau de stations utilisé pour la mise en référence des solutions GR2/GRG avec l'IGb14.
(b) Paramètres de Helmert issus du calcul CATREF pour la mise en référence des produits GR2/GRG.

Nous avons donc calculé la solution GR2/GRG sur la période 2000-2019 sur un réseau de 179 stations appartenant au réseau IGS le plus homogène possible (Figure 2.9a) pour réaliser au mieux la notion de référentiel de Figure et éviter les problèmes inhérents aux inhomogénéités de réseau sur la détermination de ces paramètres (Collilieux et al., 2009). Ces solutions ont été converties au format SINEX (Solution INDependent EXchange format) afin qu'elles puissent être comparées avec les fichiers SINEX correspondant issus de la solution de l'IGb14 (solution IGS du réseau de stations GNSS utilisées pour l'ITRF14). L'ajustement des paramètres de Helmert a été réalisé par Sylvain Loyer (CLS) grâce au logiciel CATREF développé par l'IGN, qui est utilisé notamment pour le calcul de l'ITRF (Altamimi et al., 2007). Les paramètres calculés sont représentés sur la Figure 2.9b. On retrouve sur les translations T_x et T_y les anomalies que l'on avait sur la composante Est en 2013 et sur la quasi totalité des paramètres l'anomalie Nord autour de 2016. En réalité, ces signaux ne viennent pas du mauvais alignement avec l'ITRF mais sûrement d'un problème de modélisation dans le calcul des produits. Ayant une signature globale (degré 1 et 2 au moins), ils sont néanmoins bien capturés par les paramètres d'alignement des solutions qui permettent après ajustement de réduire fortement l'impact de ces anomalies sur les séries temporelles comme le montre la Figure 2.10.

La forte signature annuelle et la tendance visible sur la translation T_z et le facteur d'échelle S , ainsi que les variations long terme des paramètres T_y et R_y , indiquent que la solution GR2/GRG possède en effet un écart significatif avec l'ITRF. La variation du facteur d'échelle est néanmoins problématique car sous-entend un gonflement régulier d'un réseau par rapport à l'autre ce qui n'est physiquement pas acceptable. Il est probable que ce signal provienne d'un effet de réseau notamment du déséquilibre entre le nombre de stations dans l'hémisphère Nord et l'hémisphère Sud. Le couplage entre S et T_z est alors important d'autant que ce dernier paramètre capture une partie du signal de charge de degré 1 majoritairement saisonnier (Collilieux et al., 2012). Ces réflexions ont alimenté le débat pour savoir s'il fallait ou non appliquer ce facteur d'échelle pour réaliser la mise en référence⁵. Dans le doute, il nous a paru plus raisonnable d'attendre les nouveaux produits délivrés dans le cadre de la campagne REPRO3 de l'IGS, plutôt que de se livrer à des interprétations douteuses de nos résultats sur la solution GR2/GRG.

6 Solution MG3 (REPRO3)

Une première solution de la campagne de reprocessing REPRO3 de l'IGS a été livrée par le centre d'analyse CNES-CLS en Octobre 2020. L'échéance du contrat de thèse étant proche, nous avons décidé de

5. On peut aussi voir ce paramètre comme un paramètre de contrôle sur la qualité de la mise en référence.

lancer immédiatement le traitement sur notre réseau de stations. Deux mois après, l'IGS et le centre d'analyse faisaient savoir que cette solution souffrait en réalité d'un problème de modélisation de marée polaire que nous avons essayé de corriger *a posteriori* sans succès.

6.1 Validation de la qualité des produits utilisés

Les efforts du centre d'analyse pour fournir une nouvelle solution REPRO3 a permis d'aboutir à la solution Multi-GNSS MG3 en Février 2021. Cette solution étant cette fois-ci validée par le centre d'analyse et l'IGS, nous avons une fois de plus lancé le traitement sur le réseau complet. Nous avons décidé de calculer cette solution non pas en mode IPPP mais simplement en mode PPP, pour plusieurs raisons. La première est scientifique, l'IPPP n'apportant pas d'amélioration majeure sur la composante verticale, qui est celle que nous utiliserons principalement dans l'inversion (Partie V). La deuxième raison est une question de temps : l'échéance du contrat de thèse approchant, et le traitement PPP étant environ deux fois plus rapide que le traitement IPPP, il nous a paru raisonnable de traiter le réseau en mode PPP (dont le traitement parallélisé prend tout de même 2 mois et demi) pour avoir le temps nécessaire à l'analyse de ces solutions et à leur utilisation dans l'inversion. Les produits MG3 ont été conçus de sorte à être directement alignés sur l'ITRF⁶. Par mesure de précaution, nous avons analysé les paramètres de transformation entre MG3 et l'IGSR3_2077 calculés par le centre d'analyse pour vérifier qu'ils étaient bien du même ordre que la variabilité des solutions - soit de quelques mm (Figure 2.11a). On voit que les paramètres calculés avant 2002 sont très bruités notamment dû au faible nombre de stations utilisées pour la mise en référence, à leur mauvaise répartition spatiale et à la qualité dégradée des produits satellites en général. On voit qu'il y a toujours un signal saisonnier sur le facteur d'échelle mais plus sur les autres paramètres. On peut mettre en cause ici la répartition inégale des stations entre le Nord/Sud comme dans le cas de l'alignement des produits GR2/GRG. Les variations des autres paramètres restant faibles comparé au bruit de mesure, nous pouvons affirmer que l'alignement sur l'ITRF est bien réalisé. Nous avons aussi vérifié la qualité des solutions calculées avec les produits MG3 par rapport à celles calculées avec les produits GR2/GRG. La Figure 2.11b montre que les séries temporelles PPP MG3 sont d'une qualité bien meilleure que les séries PPP GR2/GRG sur l'exemple de la station STJ9, notamment car les problèmes sur les composantes Est et Nord présents sur les solutions GR2/GRG ont disparus.

6. En réalité, seules les horloges contiennent la part liée à l'alignement car elles seules font le lien entre les orbites exprimées dans le CM et les positions des stations exprimées dans CF comme discuté dans la Section 4.

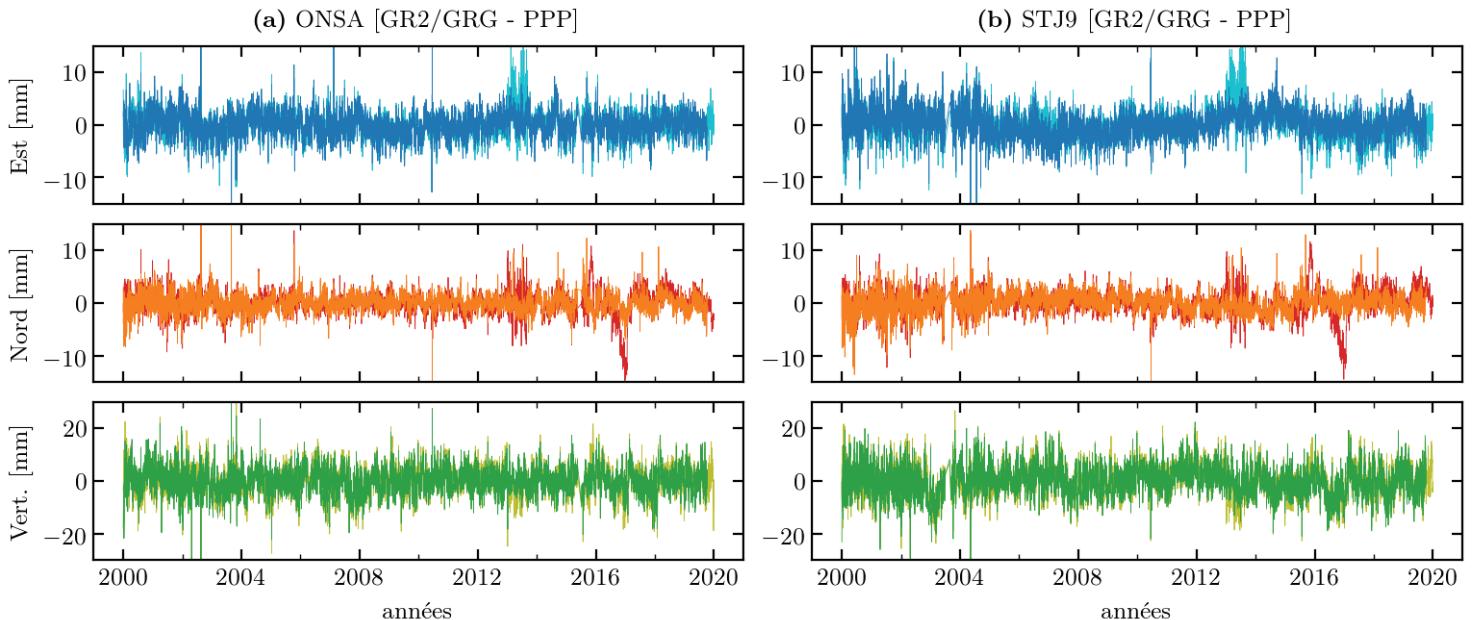


Fig. 2.10 – Séries temporelles GR2/GRG des station ONSA et STJ9 avant (en bleu ciel, rouge et vert clair) et après alignement (en bleu foncé, orange et vert foncé) sur l'ITRF en utilisant les paramètres de transformation de la Figure 2.9b.

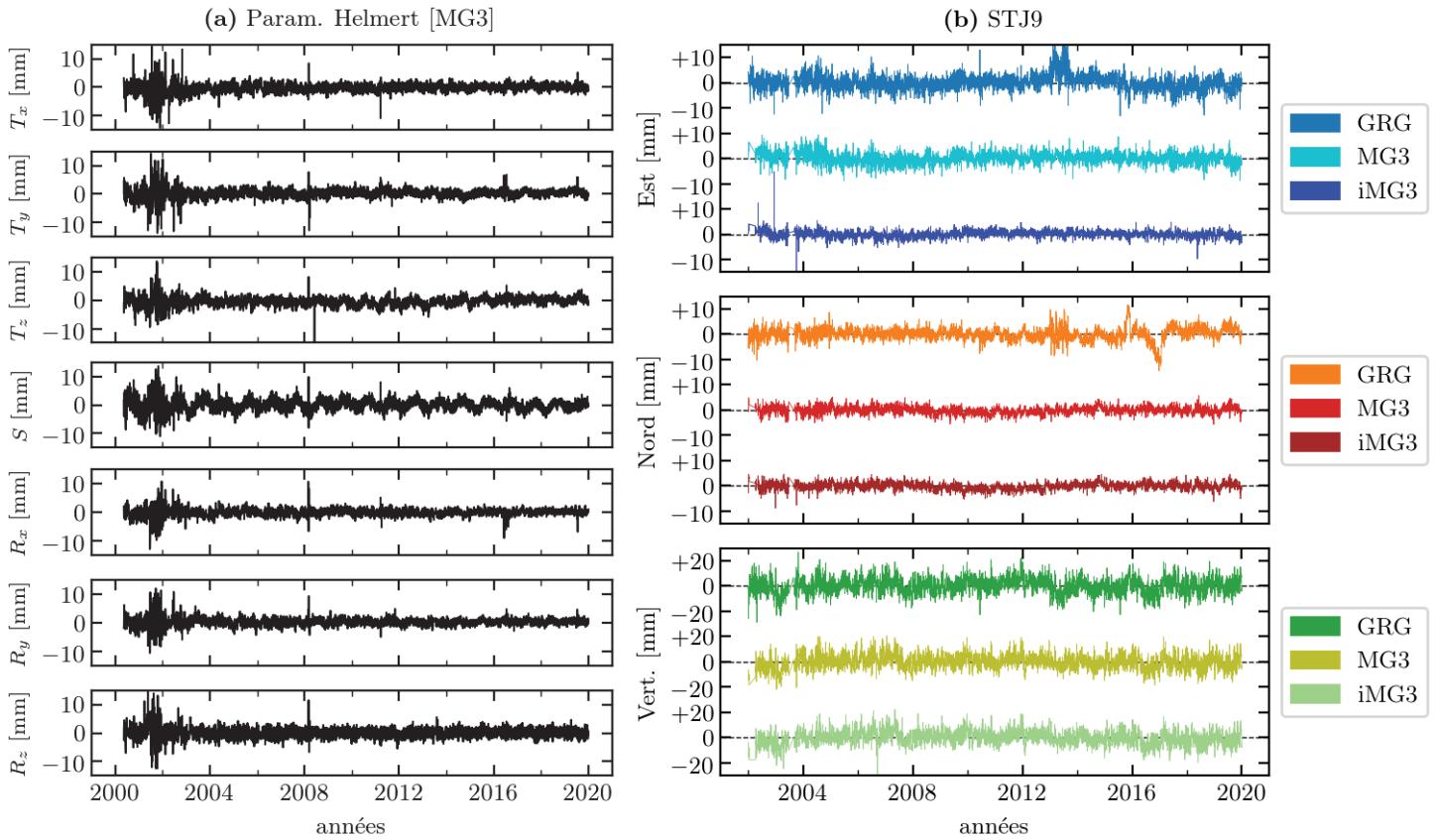


Fig. 2.11 – (a) Paramètres de Helmert issus du calcul CATREF pour la mise en référence des produits MG3 (données fournies par S. Loyer). (b) Comparaison des séries temporelles utilisant les produits GR2/GRG et MG3 en mode PPP ou IPPP pour les stations STJ9.

On a également tracé les séries temporelles MG3 en IPPP (« iMG3 ») pour montrer l’apport de la fixation des ambiguïtés entières sur la réduction de variabilité des solutions. L’apport de l’IPPP est très visible sur les solutions cinématiques (Fund et al., 2012) mais également sur le mode statique (Katsigianni et al., 2019a), bien qu’il soit soumis aux mêmes limitations que le PPP (modélisation de la troposphère et corrélations avec les autres paramètres notamment). La précision obtenue est d’ailleurs comparable à celle obtenue en DD (Fund et al., 2012). On remarque que le mode IPPP est particulièrement efficace pour réduire la variabilité de la solution sur la composante Est. Cet apport se traduit par une réduction de variabilité allant de 10-20 % aux hautes latitudes à 50 % proche de l’équateur. Ceci est lié au fait que la composante Est est certes la moins corrélée aux autres paramètres présentés dans la Figure 2.3 mais reste la plus corrélée aux biais sur la mesure de phase à cause de la trace Nord-Sud des satellites GNSS aux basses et moyennes latitudes (Melbourne, 1985; Blewitt, 1989). Avec l’amélioration de la détermination de ces biais sur une mesure de phase non ambiguë, on améliore sensiblement la précision sur cette composante, d’autant plus que cette précision n’est pas dégradée par les corrélations avec les autres paramètres estimés. Si l’IPPP permet également un gain de précision sur les composantes Nord et verticale, ce gain est atténué par la mauvaise estimation des autres paramètres lié à l’absence de passages de satellites aux hautes latitudes ($> 55^\circ$). Pour la composante verticale, la précision est de toutes manières bien moins bonne qu’en horizontal que ce soit en PPP ou en IPPP à cause de la brisure de symétrie des mesures sur l’axe vertical (les mesures ne viennent que du « haut » et pas du « bas ») alors que cette symétrie spatiale existe pour les axes horizontaux (les mesures peuvent venir de satellites au Nord, au Sud, à l’Est et à l’Ouest de la station).

6.2 Analyse des déplacements et comparaisons aux modèles hydrologiques

L’analyse des solutions obtenues avec les produits MG3 a été publiée dans l’article Michel et al. (2021) dont le contenu est exposé dans cette section. Nous donnons dans cet article les détails sur la réalisation des produits MG3 et nous comparons divers modèles d’ajustement des séries temporelles. Il sera notamment ques-

tion de l'apport de l'ajustement des fréquences draconitiques et de l'apport d'un modèle stochastique complet. Nous comparons ensuite les cycles annuels issus des séries temporelles GNSS avec ceux issus des modèles hydrologiques GLDAS2 et MERRA2 ainsi que ceux dérivés des données gravimétriques GRACE/GRACE-FO. Nous comparons aussi leurs signaux dans la bande de fréquences interannuelle grâce à une décomposition en composantes principales. L'ensemble des résultats fait l'objet d'une discussion en fin d'article tandis qu'un résumé graphique de l'article est présenté sur la Figure 2.12.

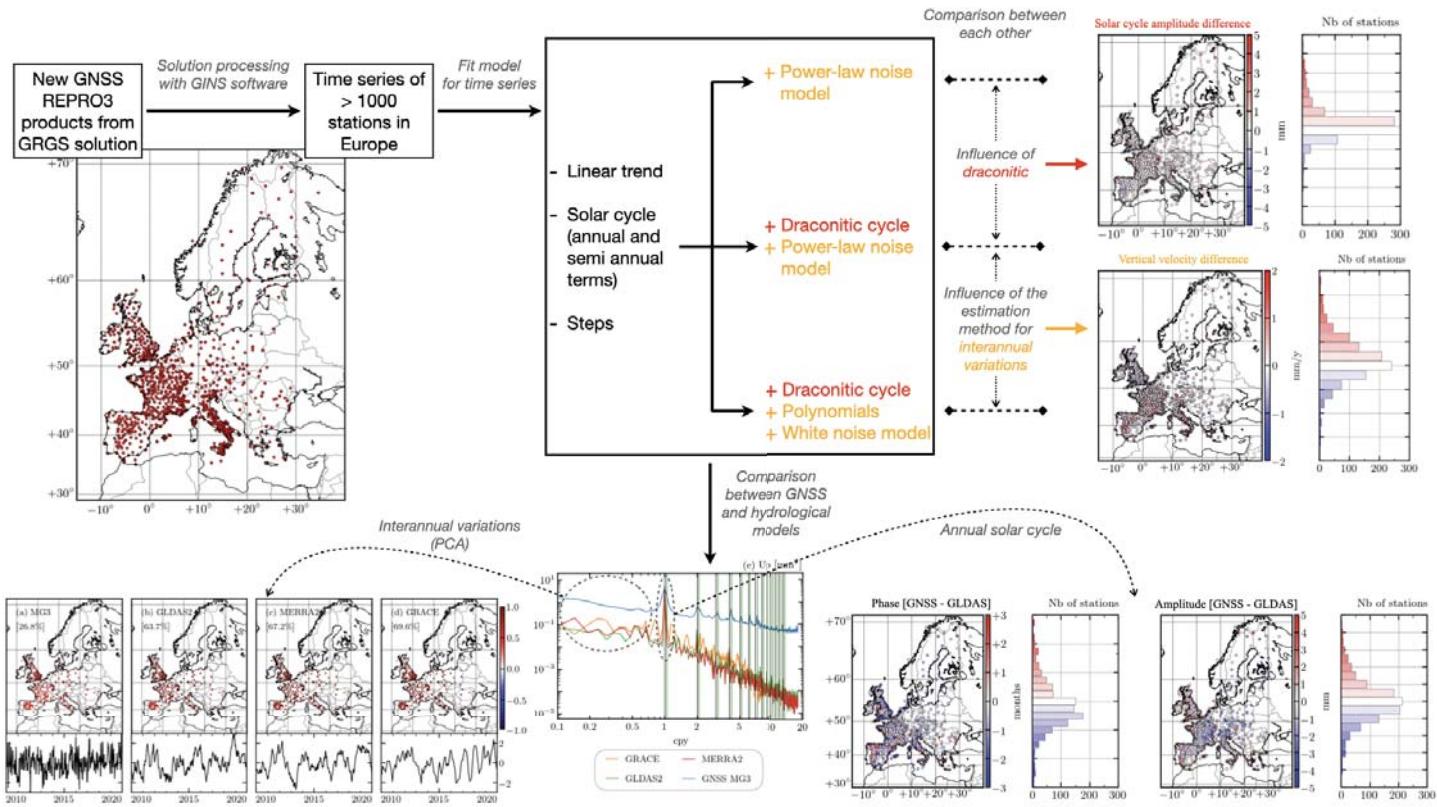


Fig. 2.12 – Résumé graphique de la méthodologie et des principaux résultats de l'article Michel et al. (2021).

Article

Analysis of GNSS Displacements in Europe and Their Comparison with Hydrological Loading Models

Alexandre Michel ^{1,*}, Alvaro Santamaría-Gómez ² , Jean-Paul Boy ¹ , Félix Perosanz ²  and Sylvain Loyer ³

¹ Institut Terre et Environnement Strasbourg (ITES, UMR7063: Université de Strasbourg, CNRS, ENGEES), 5 Rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France; jeanpaul.boy@unistra.fr

² Geosciences Environnement Toulouse (GET, UMR5563: Université de Toulouse, CNES, CNRS, IRD, UPS), 14 Avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France; alvaro.santamaria@get.omp.eu (A.S.-G.); felix.perosanz@cnes.fr (F.P.)

³ Collecte Localisation Satellites, 11 Rue Hermès, Parc Technologique du Canal, 31520 Ramonville Saint-Agne, France; sloyer@groupcls.com

* Correspondence: alexandre.michel@unistra.fr; Tel.: +33-(0)3-68-85-01-09



Citation: Michel, A.; Santamaría-Gómez, A.; Boy, J.-P.; Perosanz, F.; Loyer, S. Analysis of GNSS Displacements in Europe and Their Comparison with Hydrological Loading Models. *Remote Sens.* **2021**, *13*, 4523. <https://doi.org/10.3390/rs13224523>

Academic Editor: Chung-yen Kuo

Received: 11 October 2021

Accepted: 8 November 2021

Published: 10 November 2021

Publisher's Note: MDPI stays neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



Copyright: © 2021 by the authors. Licensee MDPI, Basel, Switzerland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

Time series of station coordinates derived from global navigation satellite systems (GNSS) have been used for decades to investigate various geophysical phenomena. Horizontal components have mostly been used to estimate tectonic activity (plate motion ([Nocquet, 2012](#); [Masson *et al.*, 2019](#)) or seismic events ([Kouba, 2003](#); [Klein *et al.*, 2016](#))), and vertical components have been used for seasonal signals due to mass redistribution (hydrological loading ([van Dam *et al.*, 2001](#); [Argus *et al.*, 2014](#); [Chanard *et al.*, 2018](#)), atmospheric loading ([Martens *et al.*, 2020](#)), nontidal ocean and atmospheric loading ([Mémin *et al.*, 2020](#)), and ice–snow loading ([Johansson *et al.*, 2002](#); [Grapenthin *et al.*, 2006](#))). All components are also used to determine reference frames, such as the International Terrestrial Reference Frame (ITRF) ([Altamimi *et al.*, 2016](#)). Aside from these signals, GNSS position time series also contain large broadband variations of unknown origin, typically represented by the combination of power-law (PL) and white noise (WH) models ([Mao *et al.*, 1999](#)), which impacts the determination and interpretation of other parameters, especially the velocity and its uncertainty ([Williams, 2003](#); [Santamaría-Gómez *et al.*, 2011](#); [Klos *et al.*, 2018](#)),

but also possibly the seasonal signal (Dong *et al.*, 2002). The origin of PL noise in GNSS position time series may have several sources: orbit mismodelling (Griffiths and Ray, 2009), tropospheric delay (Tregoning and Watson, 2009), instability of the station monumentation (Johnson and Agnew, 1995; King and Williams, 2009), and multipath (King and Watson, 2010), etc. Moreover, (Santamaría-Gómez and Ray, 2021) shows that the assessment of noise content in GNSS position series is heavily impacted by the estimation of position discontinuities, which make the interpretation even more difficult and compromise the validity of long station records. Taking into account that the broadband noise variations are also correlated spatially (Williams *et al.*, 2004; Amiri-Simkooei, 2013), the proper interpretation of the interannual variations in GNSS position time series and their common modes across a region remains a challenging task. The deformations that are observed in GNSS position time series may depend not only on the geological nature of the crust (karst aquifers (Silverii *et al.*, 2016)) and its thermal deformation (Fang *et al.*, 2014; Xu *et al.*, 2017) but also on human activities (groundwater pumping (Argus *et al.*, 2017) and mining (Gourmelen *et al.*, 2007; Muntean *et al.*, 2016)). We can suspect some apparent deformation related to the stability of the station monument. Finally, in Ray *et al.* (2008), the authors show that the power spectral density (PSD) from GNSS position time series contains harmonics of 1.04 cpy (cycle per year), known as the GPS draconitic oscillation. The origin of the draconitic oscillation and its harmonics in GNSS time series is still not well established but is most likely due to satellite orbit mismodelling (Ray *et al.*, 2008; Guo *et al.*, 2021). The first draconitic harmonic is very close to the annual solar cycle (1 cpy), so the estimated amplitudes of these two waves are strongly correlated. Thus, the interpretation of the seasonal signal, and especially the annual signal, is highly dependent on the draconitic signal estimation.

In this study, we used specific IGS REPRO3 GNSS satellite orbit and clock products computed by the CNES-CLS team on behalf of the Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale (GRGS, <https://grgs.obs-mip.fr/> (accessed on 7 November 2021)) in France. They were used to calculate station positions in precise point positioning (PPP) mode using the GINS software developed by CNES (Loyer *et al.*, 2012). We computed the daily position solutions of more than one thousand stations mainly located in Western Europe and Scandinavia. We extracted the linear velocity and seasonal signals together with their uncertainties to validate the accuracy of the estimation of the new products using different methods. We also assessed the spectral contents of the time series, especially in terms of the noise level at the interannual band.

Among the current techniques used for determining the parameters of the model, we can cite the weighted least squares method (WLS), Kalman filtering, (multi-) singular spectrum analysis (M-SSA), and the Wiener filter, all reported and analysed in Klos *et al.* (2019). We demonstrated the importance of the contribution of the interannual variation in GNSS time series by using two different methods of estimation.

The first method is based on a WLS fit using an optimized covariance matrix obtained from an MLE (maximum likelihood estimation) of a PL noise model (Williams, 2008). The interannual signal is considered as time-correlated noise by the estimator and is directly propagated in the parameter uncertainties given by the WLS.

The second method is a WLS method where only white noise is accounted for in the covariance matrix, but in which we modified the classic deterministic model (linear velocity and seasonal signal) to account for interannual variation as polynomials. Adding polynomials in the estimated model should reduce the parameter uncertainties given by WLS as it should better fit the data. However, given these polynomials, we can compute the instantaneous velocity and deduce a statistical uncertainty on the linear velocity, which reflects the variability of the instantaneous velocity around its average value. This method should provide a more realistic empirical velocity uncertainty than that directly given by the WLS in the case which is known to be far too small when only WH noise is accounted for (Santamaría-Gómez *et al.*, 2011; Santamaría-Gómez and Ray, 2021).

Then, the fundamental difference between these two approaches (respectively, WLS + MLE and WLS + polynomials + WH) is the presumed nature of the interannual variation (respectively, stochastic and deterministic) and, consequently, the estimation of the parameter uncertainties. Moreover, we highlight the need to estimate both draconitic and solar periods to prevent biasing estimates of the annual cycle. Finally, in order to search for the true geophysical signals in interannual variations, the extraction of spatial common modes from the signal is usually carried out (He *et al.*, 2017). This can be conducted using different techniques: principal component analysis (PCA) (Serpelloni *et al.*, 2013; Shen *et al.*, 2014; Wu *et al.*, 2019), independent component analysis (ICA) (Liu *et al.*, 2015), or robust statistical methods (Kreemer and Blewitt, 2021). Since the sources are not necessarily independent, it is reasonable to choose PCA in order to compare the interannual signal from GNSS with the signals derived from hydrological models, GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), and the GRACE Follow-On time variable gravity field (Tapley *et al.*, 2019). Although recent studies on interannual variations show correlations between GNSS and some global hydrology models (Elia *et al.*, 2021), we show here that models can also differ significantly from each other and that the interannual signal from GNSS should be interpreted very carefully.

2. Materials and Methods

2.1. CNES-CLS Multi-GNSS Orbits and Clock Products

The GNSS satellite orbit and clock files used in this study were generated as part of the GRGS participation in the third International GNSS Service (IGS) reprocessing campaign effort (REPRO3) to contribute to the realisation of ITRF2020. These products (referenced here as MG3) are the result of a homogeneous reprocessing of multi-GNSS data (GPS, GLONASS, and Galileo) between 2000 and 2020 using the zero difference with integer ambiguity fixing method described in Loyer *et al.* (2012) and Katsigianni *et al.* (2019). We used up-to-date models listed in Table 1, following the IGS recommendations (<http://acc.igs.org/repro3/repro3.html> (accessed on 7 November 2021)). The MG3 reference frame solutions were first evaluated and then preliminarily combined by the IGS (Rebischung, 2021). The station network includes a set of about 300 selected IGS stations that are distributed over the globe (Figure 1). The number of available satellites for each constellation and the daily number of available stations varied over the observing period as shown in Figure 2. The CNES-CLS MG3 products are available in the CDDIS (Crustal Dynamic Data Information System) archive at https://cddis.nasa.gov/archive/gnss/products/www/repro3/GRG6RE3FIN*.gz (accessed on 7 November 2021).

Table 1. Dynamical and loading models used for MG3 products.

MG3 Products	
Gravity field	EIGEN-GRGS.RL04.MEAN-FIELD (Lemoine <i>et al.</i> , 2019)
Ocean tides (gravity)	FES2014b (Finite Element Solution) (Lyard <i>et al.</i> , 2021)
Planet ephemerides	de421bdlf.ad (Folkner <i>et al.</i> , 2009)
Relativistic acceleration	Schwarzschild and geodetic precession and Lense–Thirring
Antex	IGSR3.atx (Villiger and Dach, 2020)
Mean pole (C21/S21)	IERS conventions (from geopotential model) (Petit and Luzum, 2010)
Subdaily EOP model	(Desai and Sibois, 2016)
Atmospheric tides (S1/S2)	(Ray and Ponte, 2003)
Ocean tide loading	FES2014b (Lyard <i>et al.</i> , 2021)
Centre of mass correction	FES2014b (Lyard <i>et al.</i> , 2021)
Solid tides (station)	IERS conventions (Petit and Luzum, 2010)
Reference frame	IGS_R3 [IGSMAIL-8026]
Galileo ponderation	3.5 cm/1 m
GPS ponderation	3.5 mm/60 cm
GLONASS ponderation	3.5 cm/2 m

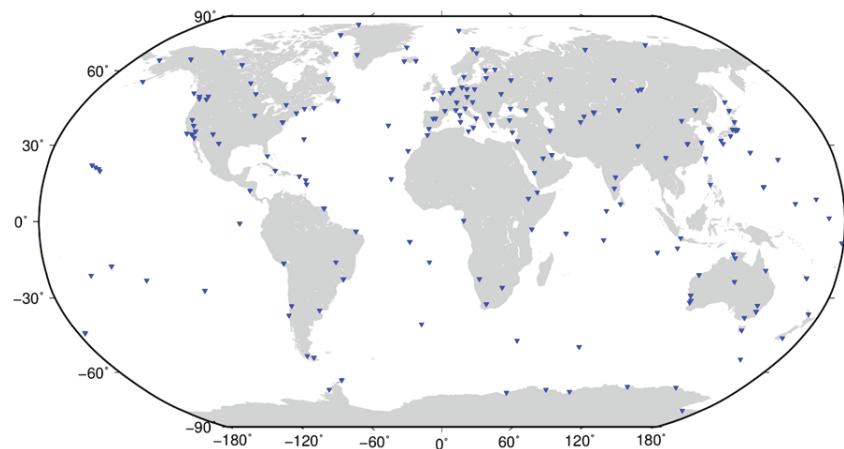


Figure 1. GNSS station network used for MG3 product computation.

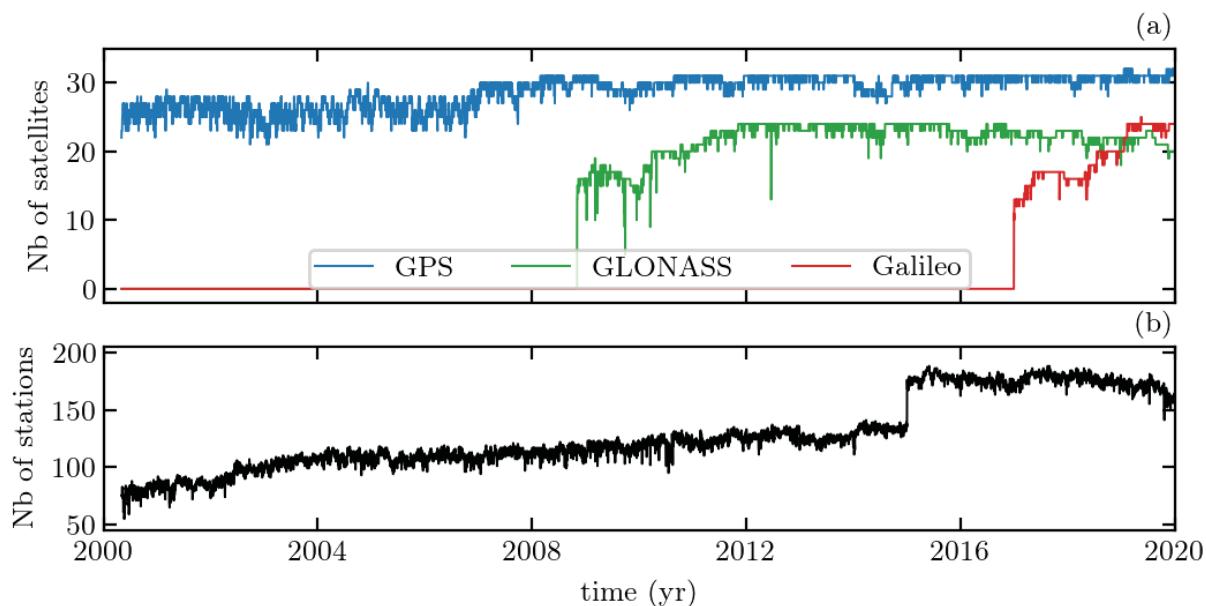


Figure 2. (a) Number of satellites and (b) number of stations used in MG3 product computation as a function of time.

2.2. Time Series Analysis

2.2.1. Selection of Stations

We computed the GNSS position time series of 1077 stations over Europe using the MG3 products and the GINS software in PPP mode. We used the same models as the ones listed in Table 1 in order to maintain consistency between the products used and the individual station processing. For the tropospheric delays, we use the global mapping function (GMF) (Boehm *et al.*, 2006) tropospheric model and the global pressure and temperature empirical function GPT2 (Lagler *et al.*). The numerous agencies and organisations providing the raw GNSS data in RINEX format are listed in the acknowledgements section.

The selected stations have a minimum time span of five years and a completeness of 50%. Some exceptions of a time span between three and four years have been considered for recent stations (ending after 2019) but with a more selective completeness criterion (minimum 70%). The distribution of stations and the statistics of the time series are shown in Figure 3. The analysed network is homogeneous and dense in Great Britain, France, Spain, and Italy, while in the remaining European countries, the station distribution is not as dense but still spatially homogeneous.

2.2.2. Parameter Estimation

For each time series, we determined different parameters corresponding to the classical model used in GNSS position adjustment:

$$\begin{aligned}
 y(t) = & y_0 + v(t - t_0) \\
 & + \sum_{m=1}^2 a_m \cos(m\omega_a t) + b_m \sin(m\omega_a t) \\
 & + \sum_{n=1}^8 c_n \cos(n\omega_d t) + d_n \sin(n\omega_d t) \\
 & + \sum_{k=1}^n s_k \mathcal{H}(t - t_k) + \varepsilon(t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

where y_0 and v are, respectively, the intercept (at epoch t_0) and the linear velocity of the station; $\omega_a/2\pi = 1$ cpy is the solar frequency; and $\omega_d/2\pi = 1.04$ cpy is the draconitic frequency. The offsets in the time series, which can be linked to known events (earthquakes and antenna or receiver changes) but are also mostly of an unknown origin (Williams, 2003), were modelled with a Heaviside function \mathcal{H} . Although automatic methods exist for offset detection (Bruni *et al.*, 2014), we chose to do it manually for all the stations using an initial seismic database and monumentation change data provided by *sitelog* files. We calculated the residuals of the time series by removing the linear trend and offsets from this preliminary database. We first removed major outliers from these residual time series using automatic detection of the largest outliers with a criterion of 5σ , where σ is the standard deviation. Then, we visually checked the precleaned residual time series in order to validate the outliers/offsets removed during the first step and refine the database if needed (adding or removing offset positions and outliers). The manual detection of offsets and outliers is essential even after applying any automatic procedure. Indeed, regardless

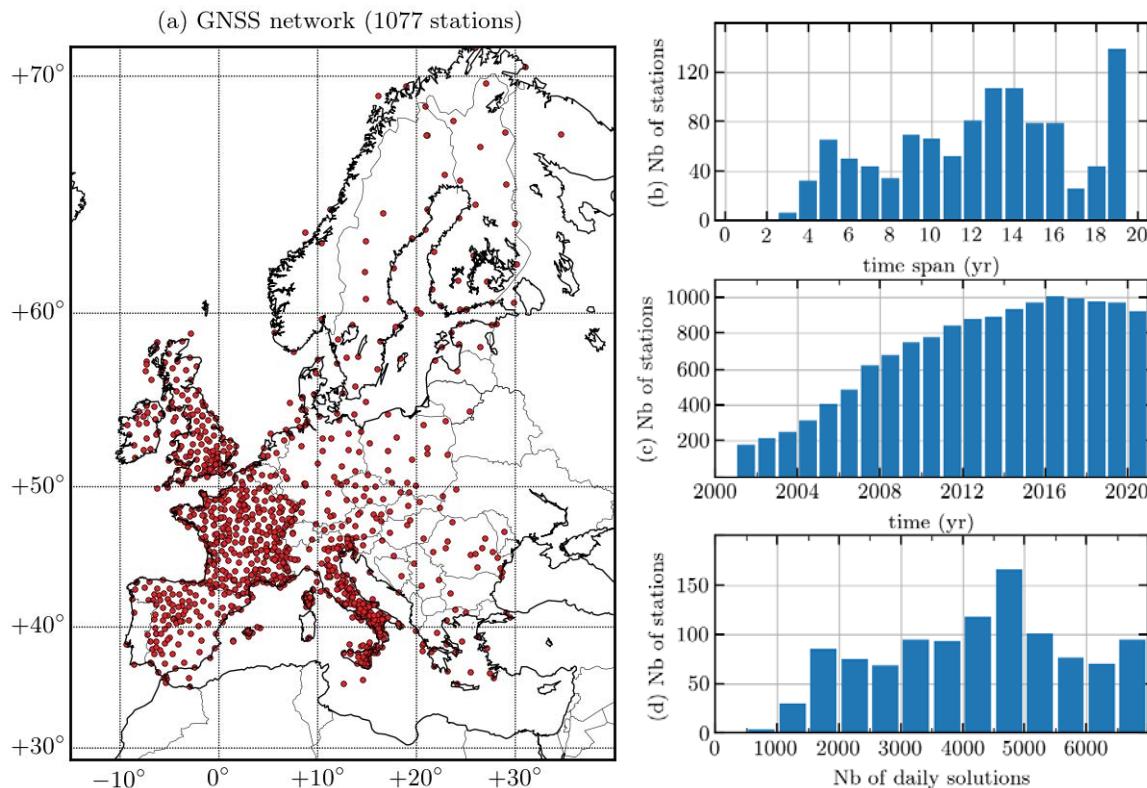


Figure 3. (a) GNSS station network and some characteristics in terms of (b) station time span, (c) station availability over time, and (d) daily solution in each station.

of its robustness, the automatic process could eliminate data, especially those corresponding to unmodelled geophysical signals. However, manual checking remains a subjective method that depends on the criteria set by each analyst. The term $\varepsilon(t)$ is the stochastic part of the model that has to be modelled and then estimated.

We used the CATS software developed by [Williams \(2008\)](#), which uses WLS estimation of the deterministic parameters of Equation (1) along with MLE determination of the stochastic component. We worked with week-averaged time series in order to obtain a good compromise between the computation time and time resolution of the series. We modelled the stochastic part using white noise (WH) and power-law noise (PL), where the spectral index was also estimated using CATS. Nevertheless, for some stations, we used only PL noise without WH noise in the stochastic part since the downsampling to weekly time series removes a large part of the WH noise contribution that can no longer be estimated properly by the software. We computed one solution with the complete model of Equation (1), called *cats_d*, and one without the estimation of the draconitic periods, simply called *cats*.

2.2.3. Interannual Polynomial Model

Since interannual variations play an important role in the determination of the model parameters and their uncertainties ([Santamaría-Gómez and Mémin, 2015](#)), especially in GNSS, instead of capturing these variations in the stochastic model, we alternatively chose to directly model most of the interannual variation within the deterministic model function. In addition to the different terms in Equation (1), we added degree 2 and degree 3 polynomial terms. This model is called *tiasd* (for trend interannual (semi-)annual steps draconitic). The low degree polynomial function was used to fit the long-term (relative to the length of the time series) interannual signal. We adjusted the model with the WLS method using the least squares algorithm of [Moré \(1978\)](#) implemented in the Python programming language. The stochastic term $\varepsilon(t)$ was then reduced to a simple WH noise estimation. We first obtained the optimal parameters of the model and calculated the residuals of the time series. These residuals could still have contained a faster interannual signal (between a year and a decade, depending on the length of the time series) and were then modelled by a polynomial of degree 4 to 11. The degree of the adjusting polynomial was chosen such that it is always inferior to the time series length (in year). For time series with a low completeness (<70%) and high standard deviation (beyond 7 mm in the vertical component), we determined the polynomial degree by analysing each time series individually while verifying that the polynomial did not overfit the series. The polynomial fitting procedure in these two steps (low degrees first and then high degrees on residuals) was decided upon to avoid the strong correlation that could have occurred between high-degree polynomials and the sinusoidal and offset terms. In order to reconstruct the full interannual variations, we added the slow and fast polynomial contributions. We calculated the instantaneous velocity by taking the first derivative of the resulting polynomial function and deducing a value of linear velocity by taking the mean of instantaneous velocities. The uncertainty on this definition of linear velocity should reflect the magnitude of the interannual variation. Then, in addition to considering only the dispersion of the positions in the calculation of the velocity uncertainty, as in the case of WH-only WLS estimation without polynomial adjustment, we also took into account the dispersion of the instantaneous velocity, which should give a more realistic uncertainty on the linear velocity. Thus, we define the uncertainty as the standard deviation of the instantaneous velocity divided by the square root of the time series length ([Collectif Jolidon, 2021](#)).

2.3. Hydrological Loading Computations

We computed surface displacements due to continental water storage variations using two state-of-the-art global hydrological models, GLDAS-2.1 (Global Land Data Assimilation System)/Noah ([Rodell et al., 2004](#)) and MERRA-2 (Modern-Era Retrospective Analysis

for Research and Applications) (Gelaro *et al.*, 2017) land component, and estimates derived from the latest (RL06v1.0) GRACE and GRACE Follow-On iterated global mascons from the NASA Goddard Space Flight Center (Loomis *et al.*, 2019). Among other differences, the GLDAS-2.1 model includes soil moisture and snow and canopy water, whereas MERRA2 only includes soil moisture and snow.

We used the classical Green's function approach (Farrell, 1972), assuming a spherically symmetric nonrotating elastic isotropic (SNREI) Earth model, using PREM (Dziewonski and Anderson, 1981) rheological parameters. More details of the loading computations can be found in Petrov and Boy (2004) and Mémin *et al.* (2020). In particular, we ensured the total water mass conservation of the hydrological models by adding/removing a uniform ocean layer to compensate for any lack/excess of water over land.

All the loading time series are available at the EOST loading service (<http://loading.u-strasbg.fr> (accessed on 7 November 2021)).

3. Results

In this section, we present the parameters that we obtained for three different estimated solutions described in the previous section (i.e., *cats_d*, *cats*, and *tiasd*) along with further analysis of the results. The properties of these three models are summarized in Table 2. Then, we can compare the effect of draconitic adjustment by comparing *cats_d* and *cats*, and we can compare the modelisation of interannual variations and stochastic parts by comparing *cats_d* and *tiasd*.

Table 2. Estimation properties of the three models considered in this article.

	<i>cats_d</i>	<i>cats</i>	<i>tiasd</i>
Draconitic frequencies adjustment	Yes	No	Yes
Interannual variation	–	–	polynomials
Stochastic model	WH + PL noise	WH + PL noise	WH noise

3.1. Tectonic Velocity

The velocity maps of *cats_d* are presented in Figure 4. We used two scales (red and green arrows) in the horizontal map to distinguish the largest velocities in Greece and Turkey, while the yellow dots represent the stations with horizontal velocities lower than

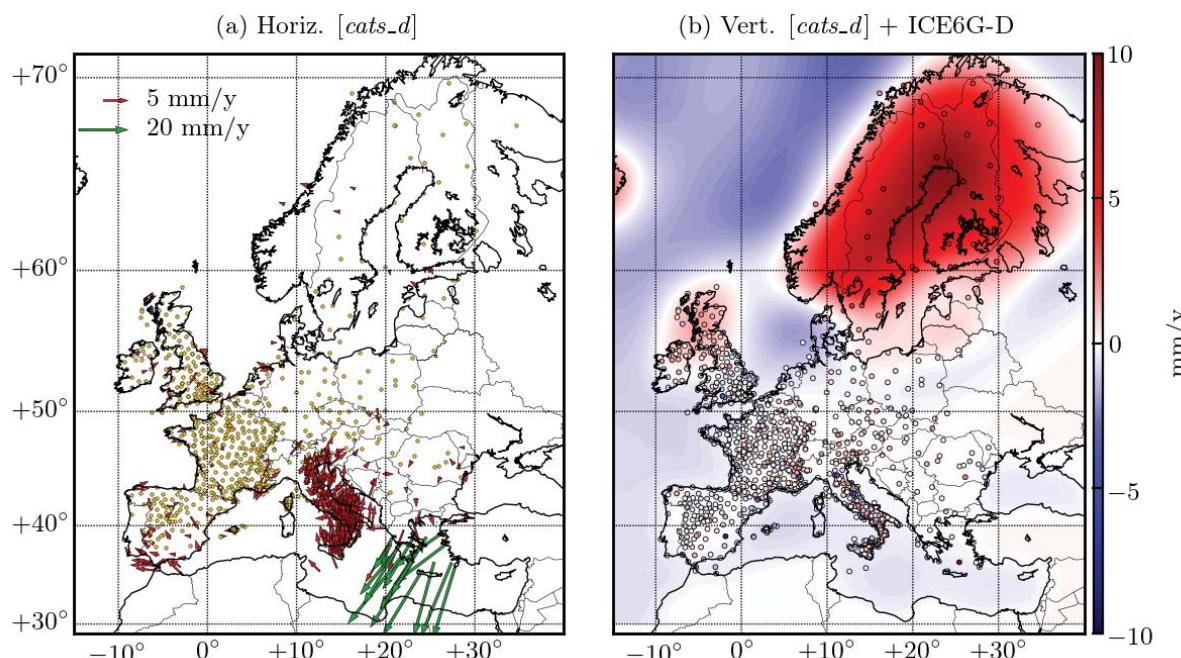


Figure 4. Velocity field of *cats_d* in (a) horizontal and (b) vertical direction, along with ICE-6G_D GIA model of Peltier *et al.* (2015). The yellow dots in (a) are stations for which the horizontal velocity is lower than 1 mm/y.

1 mm/y. In order to provide the horizontal velocity field relative to the Eurasian plate, we removed the rotation of the Eurasian plate with the Euler pole coordinates estimated in Al-tamimi *et al.* (2017) ($\text{lon}_p = -99.094(7)^\circ\text{E}$, $\text{lat}_p = 55.070(4)^\circ\text{N}$, $\omega = 0.261(1) \times 10^{-6} \text{ deg/y}$). This enabled us to compare our solution with previous regional studies (Nocquet, 2012) or the EPOS (European Plate Observing System) solution available at http://doi.osug.fr/data/public/GNSS_products/Europe/ (accessed on 7 November 2021). The vertical velocity map is represented together with the ICE-6G_D GIA model developed by Peltier *et al.* (2015, 2018). In general, there is a good match between the two, although some differences are noticeable, especially in Southern Italy, where other non-GIA geophysical signals may occur.

In Figure 5, we provide the velocity differences between *cats_d* and *cats*, *cats_d* and *tiasd*, and *cats_d* and *epos*. We observe that there are no significant differences between the

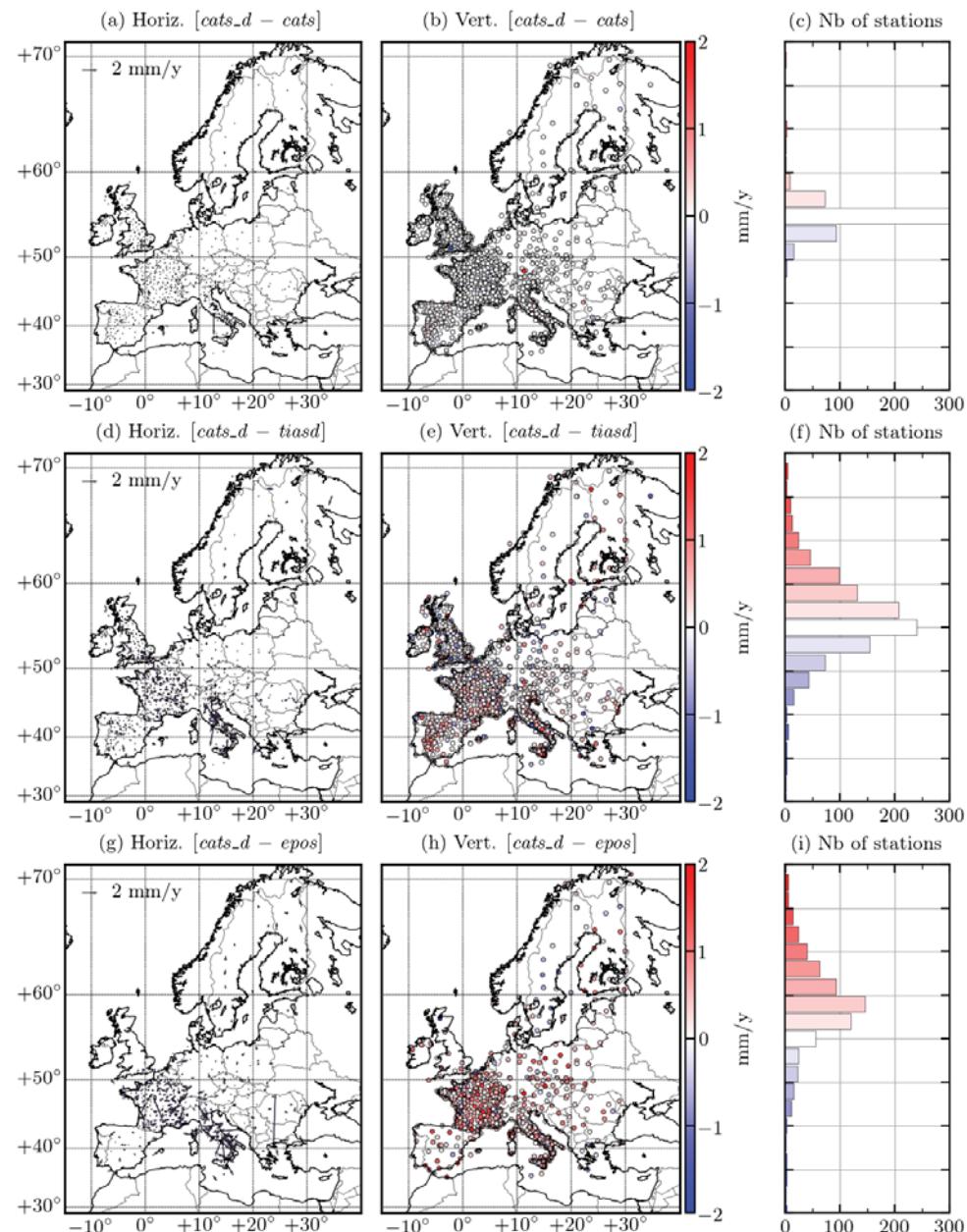


Figure 5. (a,b) Difference in velocity field between *cats_d* and *cats*. The panel (c) represents the number of stations where the vertical velocity was, respectively, overestimated (red) or underestimated (blue) by *cats_d* compared to *cats*. (d–f) are the same for the difference between *cats_d* and *tiasd*, and (g–i), between *cats_d* and the EPOS solution.

velocity values of the two CATS estimations, while *tiasd* slightly underestimated the vertical velocities compared to *cats_d*. The distribution shown by the histogram remained Gaussian for both vertical velocity differences. Moreover, we do not observe any preferential direction in the horizontal maps, such that we can make two assumptions. The first is that none of the estimation methods seem to be biased with respect to the others. The second is that we can consider the velocity differences as a random field. In order to compare our GNSS solution to other published GNSS solutions, we chose to compute the difference between *cats_d* and the EPOS solution for the common stations, as both networks are slightly different. We see that there are some systematic effects on both components, especially for the vertical component, whose distribution is shifted near 0.5 mm/y. These effects, being visible at large spatial scales, probably indicate a difference in reference frame realisation. In fact, the reference frames of the two solutions are obviously different since the IGS_R3 reference frame is specifically used in REPRO3 products. Nevertheless, when we removed this mean shift, the distribution seemed to follow the same behaviour as *cats_d*–*tiasd* (*cats_d* slightly overestimates the velocity compared to *tiasd* and *epos*).

The uncertainties of the three estimated solutions are plotted in Figure 6. They are greater for *cats* since the remaining draconitic signal in the time series contributes to a greater dispersion of the series, increasing the uncertainty estimated by CATS. In addition, *tiasd* underestimated both horizontal and vertical uncertainties by a factor varying from 3 to 4 compared to *cats_d*. Consequently, evaluating interannual variations with a complete stochastic model (WH + PL noise) rather than with WH noise only + the polynomials model provides more realistic uncertainties on velocity. Indeed, the strong correlation between the estimated coefficients of the polynomials used to model the interannual signal could lead to a significant underestimation of the instantaneous velocity dispersion and, therefore, to an underestimation of the linear velocity uncertainty.

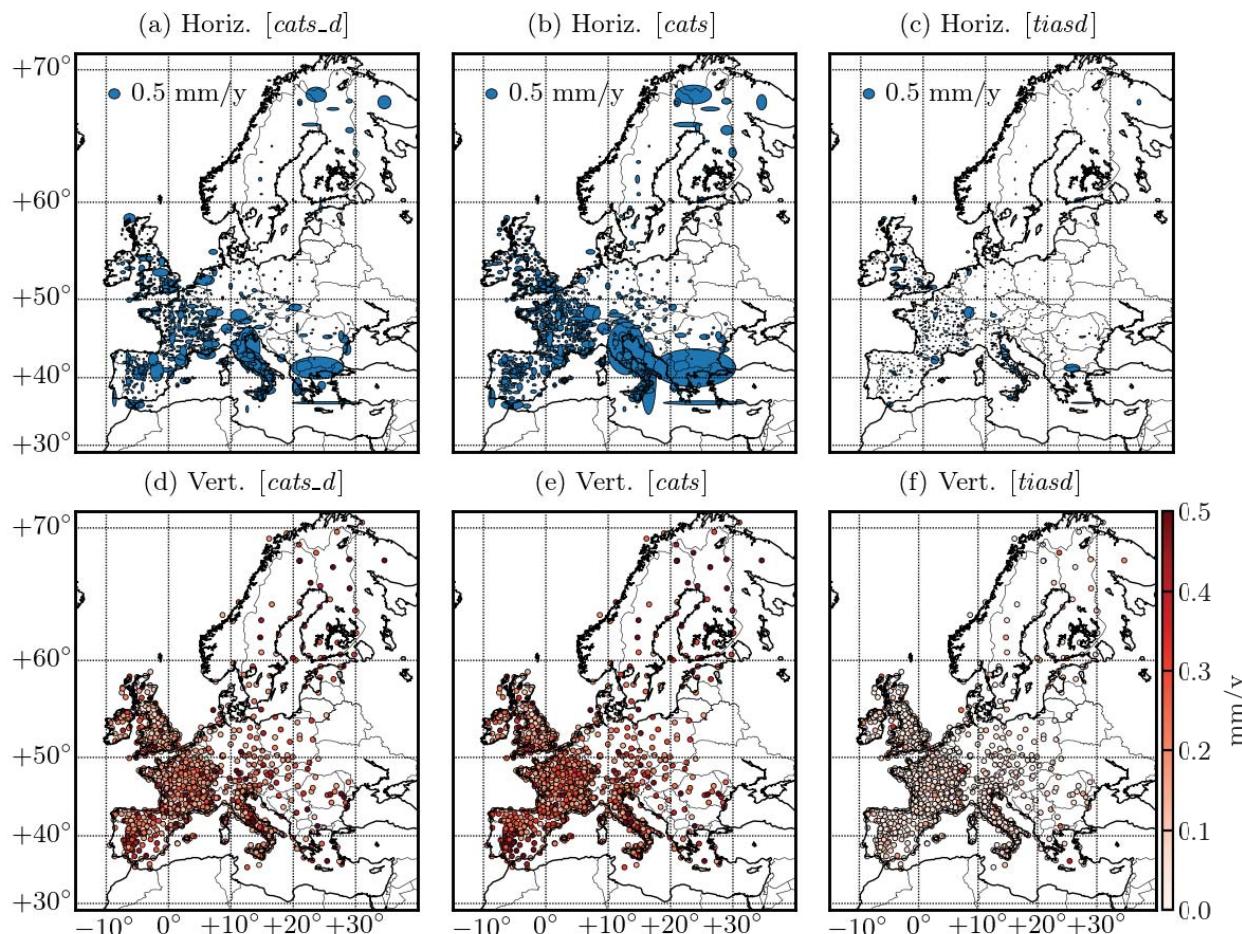


Figure 6. Uncertainty of (a–c) horizontal and (d–f) vertical velocity field for *cats_d*, *cats*, and *tiasd*.

3.2. Annual Signal

We now focus on the annual solar cycle of the time series derived from the three estimated solutions. Among the known sources of seasonal variations in GNSS position time series, we can cite the hydrological loading of amplitude ~ 4 mm in Europe (van Dam *et al.*, 2007), thermoelastic deformation of the crust of amplitude ~ 1 mm (Fang *et al.*, 2014; Xu *et al.*, 2017), nontidal loading of amplitude < 1 mm in Europe (Mémin *et al.*, 2020), and thermal dilation of the GNSS monumentation with variable amplitudes. In addition to the velocity field, the annual cycle recovery also depends on the choice of the estimation method. Figure 7 represents the phase and amplitude of *cats_d* for the vertical component with their uncertainties. The horizontal components are not shown here because their amplitudes were at the level of the resolution of the technique (the uncertainties had the same order of magnitude as the signal) and could have been dominated by GNSS monument motion, which makes the interpretation very difficult.

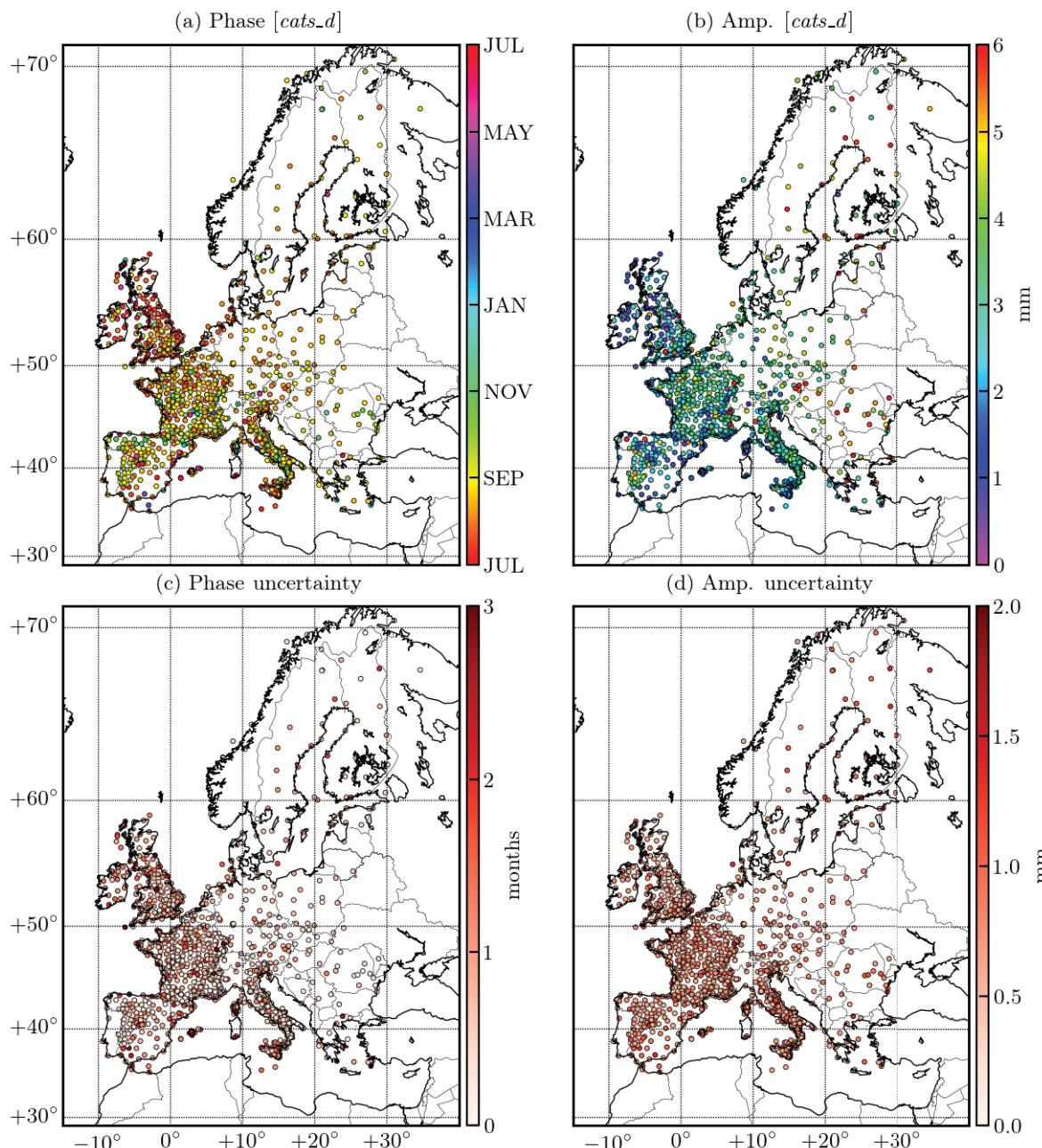


Figure 7. (a) Phase and (b) amplitude of *cats_d* along with their respective uncertainties (c,d) estimated using CATS software. The colour bar of the phase map indicates the month of maximum displacement towards the up direction.

In spite of spatial variations in both amplitude and phase from Figure 7, the results are coherent with the expectations of finding maximum displacement in the mid-summer or beginning of fall, with 3 to 4 mm of mean amplitude. We can observe some typical patterns: for example, a gradient of amplitude over Great Britain and larger amplitudes in Eastern Europe and Scandinavia due to important snow covering (compared to Western Europe) and atmospheric loading signals caused by Siberian anticyclones, both in winter. In addition, the uncertainties are mostly below 1 month for the phase and 1 mm for the amplitude, which make the results suitable for proper interpretation.

As for velocities, we compared the results of *cats* and *tiasd* with respect to *cats_d* in Figure 8. The phase differences are coloured in red when the tested model is delayed compared to *cats_d* and in blue when it is in phase advance. Note that we computed the difference in amplitudes (resp. phase) and not the amplitude (resp. phase) of the differences. We will evaluate both the effects of the interannual estimation method and draconitic adjustment in the annual solar cycle recovery.

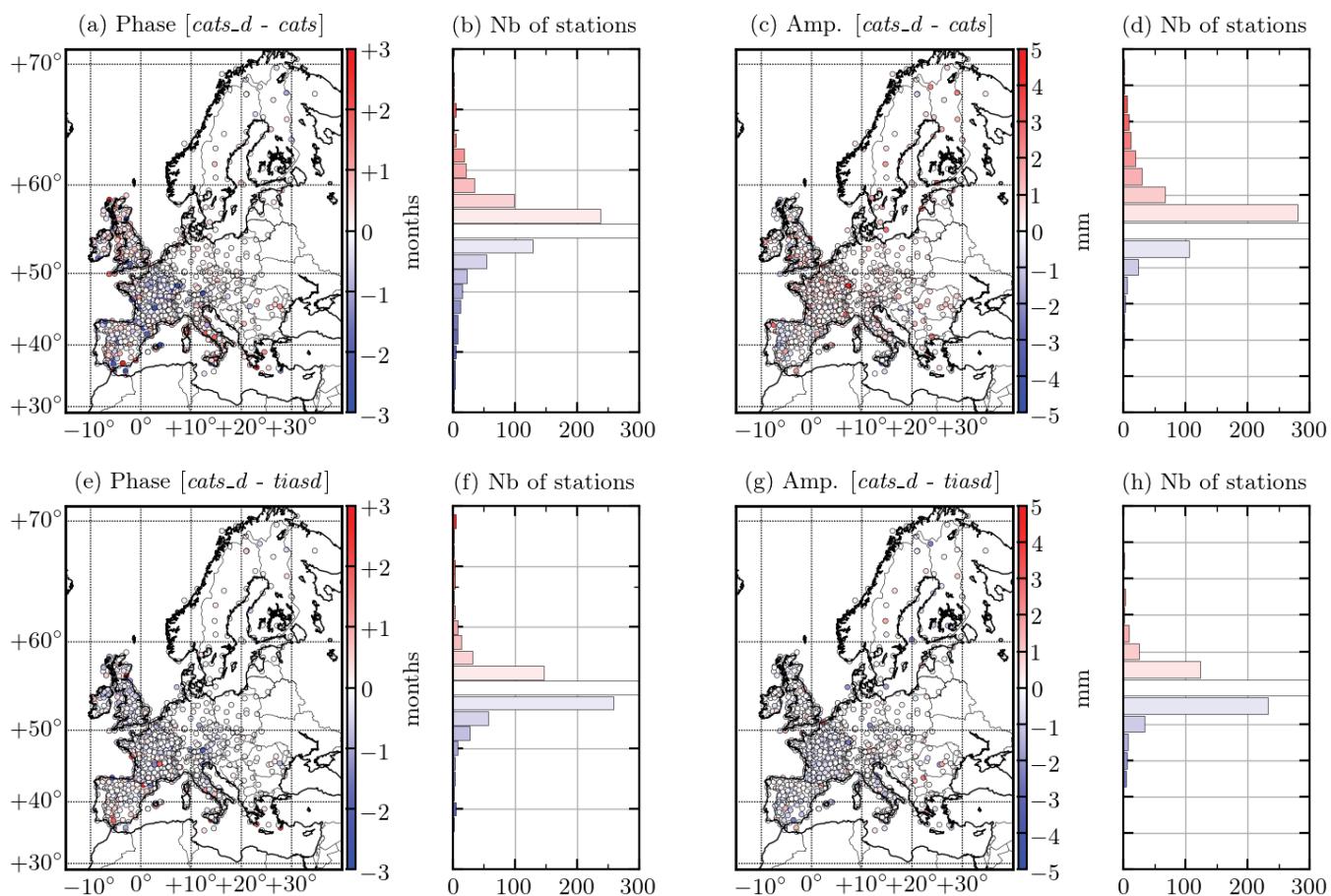


Figure 8. (a–d) Difference in annual solar cycle between *cats_d* and *cats*. Panels (b,d) represent, respectively, the number of stations where *cats* is in phase advance (blue) or delay (red) with respect to *cats_d* and the number of stations with larger (blue) or smaller (red) amplitude than *cats_d*. (e–h) are the same for the difference between *cats_d* and *tiasd*.

For the difference between *cats_d* and *cats*, there are two distinct effects resulting from the estimation of the draconic frequencies which affect the amplitude and phase of the annual solar cycle. The first is the small phase delay of *cats*, which has also a smaller amplitude compared to *cats_d*. This is consistent with the fact that the draconitic cycles can disrupt the solar cycle and that the modulation between the draconitic first harmonic and the annual solar oscillation can bias the estimation of the latter. We also remark that the distribution of the differences in the histograms reflects the spatial variability of the draconitic terms. For the difference between *cats_d* and *tiasd*, there are also two

distinct effects resulting from the estimation method of interannual variations which affect the amplitude and phase of the annual solar cycle. We observe that estimating the interannual variations with polynomials seems to increase the amplitude of the annual cycle and to create a slight advance of phase. The distribution of the differences in the histograms is tighter than in the previous case since the spatial variability of the difference is less important.

The estimation of the interannual polynomials has opposite consequences on the solar cycle amplitude/phase determination than the estimation of draconitic frequencies, but the differences remain small and near the uncertainty level observed in Figure 7: the majority of stations show differences shorter than a month for the phase and smaller than 1 mm for the amplitude. There are also some isolated and randomly distributed stations with large anomalies (phase or amplitude), meaning that the choice of a particular solution significantly impacts the results very locally. These stations should be considered as outliers or studied individually to determine the cause of these differences.

3.3. Comparison with Hydrological Models and GRACE

Taking into account that a large part of the solar annual cycle in GNSS time series in Europe is likely due to hydrological loading, we compared it with loading estimates computed from hydrological models and GRACE/GRACE Follow-On-derived continental water storage variations. The site displacements that we computed with the GLDAS2.1, MERRA2, and GRACE models are expressed in the centre of figure (CF) reference frame for SNREI Earth. The time series of loading models were adjusted according to Equation (1), excluding offsets and draconitic harmonics but adding the interannual polynomials. Since the hydrological models and EOST loading service do not provide uncertainties, we adjusted the models with the nonweighted least squares method (LS). We show in Figure 9 the differences between the amplitude and phase of the *cats_d* annual solar cycle with those of each loading model. Important differences compared with centred Gaussian distribution are shown by the histograms, especially in the phase shift, where we see that the centre of the distribution is systematically shifted towards negative phase shifts. In other words, hydrological loading models are systematically in advance of phase compared to GNSS. Concerning the amplitudes, the GLDAS2.1 and MERRA2 amplitudes are slightly larger than those for GNSS, even if the distribution is well centred on zero. For GRACE, the amplitude seems to be quite underestimated compared to GNSS. Figure 9 highlights the presence of a coherent spatial pattern, suggesting the existence of disparate common modes between the GNSS solution and the models. Nevertheless, some stations with high signal intensity have the same values for every model so that they simply indicate the difference existing locally between the GNSS solution and the models.

3.4. Principal Component Analysis of the Interannual Signal

The interannual signals derived from GNSS and derived from loading models are compared using PCA decomposition. All the time series were previously detrended (using the trend estimate from *cats_d* for GNSS) and resampled to nearly every 10 days by taking the mean of the successive intervals of the year (01/01–10/01, 11/01–20/01, 21/01–31/01, 01/02–10/02, 11/02–20/02, 21/02–28/02, ...). The intervals that contained no data were left empty. Then, we completed the time series using linear interpolation. We chose to treat GRACE time series by keeping the original sampling of one month before interpolation. We finally removed the mean seasonal signal in the same way as [Elia et al. \(2021\)](#). We obtained this cycle by calculating the mean of the collection of the same dates within years: for example, taking the mean of every 05/01, the mean of every 15/01, and so on. This is arguably the best way to filter the mean seasonal cycle compared to a sinusoidal fit. We choose to select stations only based on the following completeness criterion. The selected stations have available data between 2010 and 2020, which have accumulated gaps no longer than 60 days, the largest of which is less than 30 days, and have 90% completeness such that the interpolation should not distort the signal too much. Implementing these

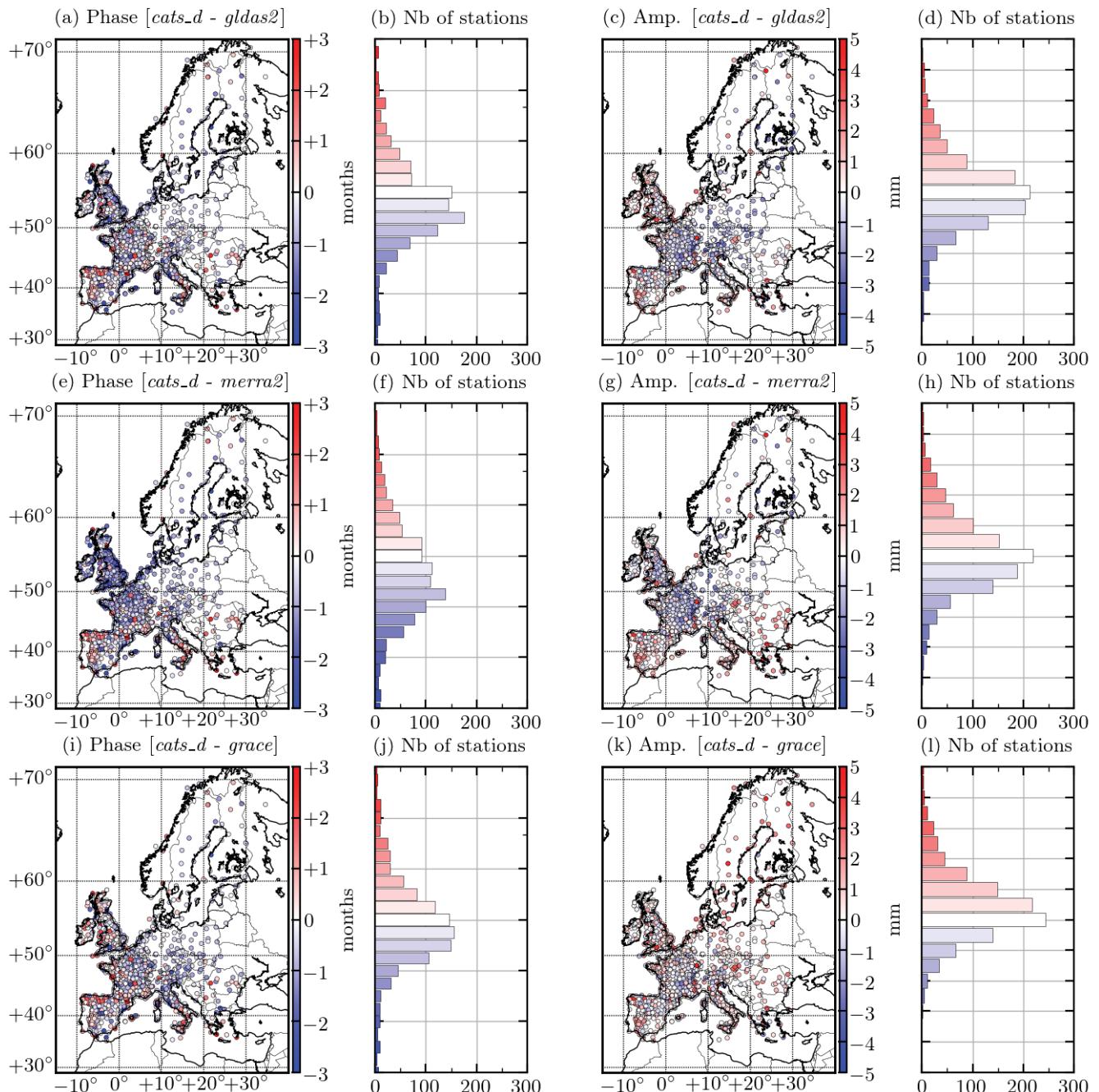


Figure 9. Differences in phase and amplitude of annual solar cycle and the associated histograms as described in Figure 8 between *cats_d* and GLDAS2.1 (a–d), MERRA2 (e–h), and GRACE (i–l).

criteria left 268 stations from the initial network presented in Figure 3. We call EOFs (empirical orthogonal functions) the spatial function and PCs (principal components) the temporal associated time series of the PCA output. The first three principal components (also called modes) of the residual time series are presented in Figure 10, where we report the variance fraction of the total variance associated with each mode in each panel. We see that the variance fraction of the GNSS is equal to or lower than the models for each mode and that the GNSS's first PCs are much noisier than the ones from the model, even after resampling the data (which removes a part of the GNSS white noise). The first mode is spatially quite homogeneous. The associated PCs are very different between GNSS and the loading models. Among the three models, we can find some common temporal patterns, but also some differences that can be important, especially with GRACE. The second and third modes are under 15% of the variance fraction but show common spatial patterns

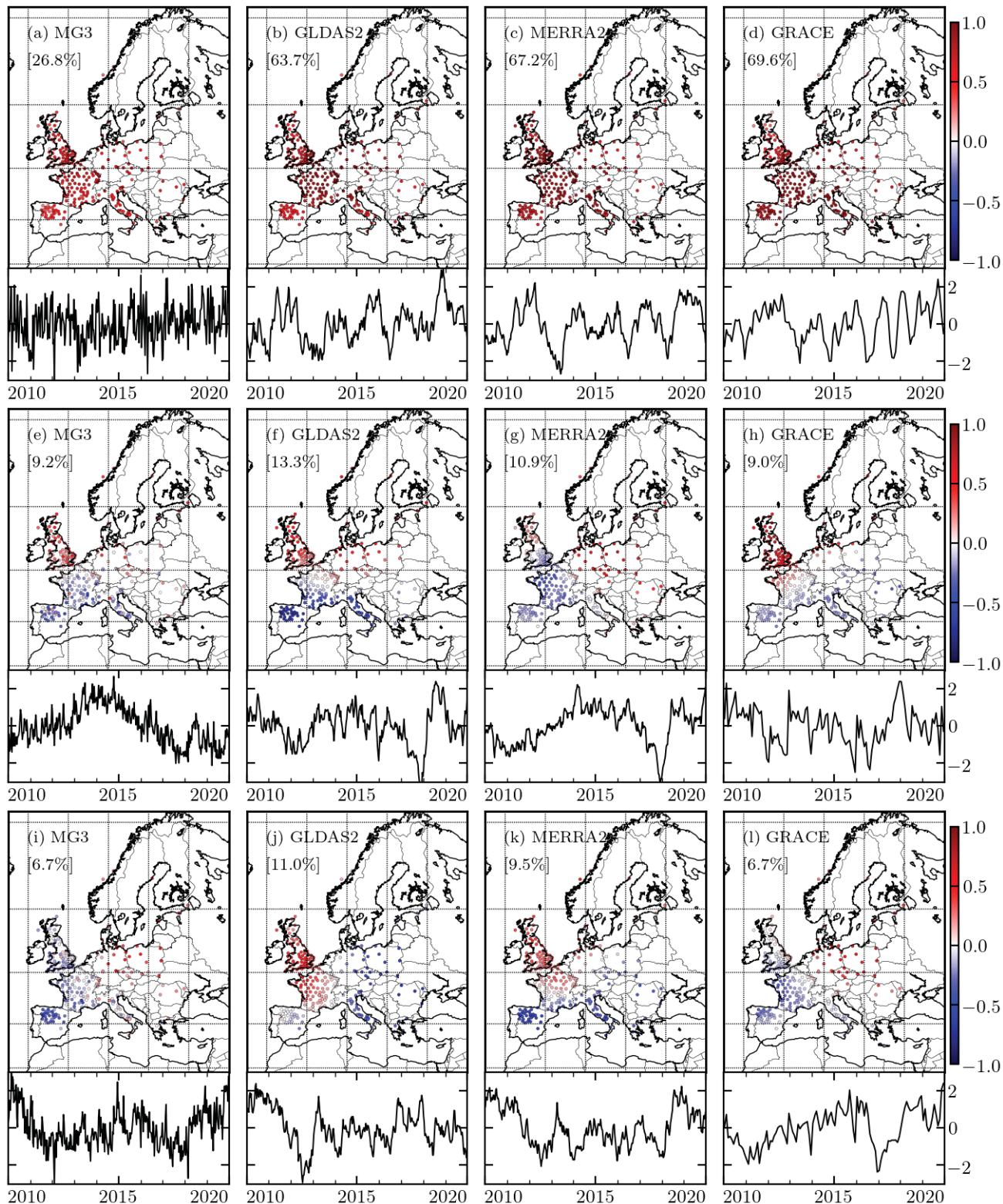


Figure 10. PCA (EOFs and associated PCs) of GNSS and the three loading models' (including GRACE) residual time series between 2010 and 2020, where the trend and the seasonal signal have been removed: (a–d) first component, (e–h) second component, and (i–l) third component. The percentage of the total variance corresponding to each mode is given in each plot. The PCs are scaled to unit variance and plotted for the period 2010 to 2020, while the corresponding EOFs are given in terms of the correlation between the initial time series and the PCs.

between the solutions. It seems that the two modes have to be interpreted simultaneously since PCs and EOFs belonging to both appear to be very similar. For example, the PCs and EOFs of panels (i), (f), (g), and (l) seem to be consistent when they belong to two different modes (the same is the case for (j), (k), and (h)).

3.5. Frequency Content and Interannual Variations

The frequency content of the detrended and 10-day-resampled loading models, along with the GNSS MG3 solution, is provided in Figure 11. The mean Lomb–Scargle (Lomb, 1976; Scargle, 1982) periodograms showing the amount of variance per frequency band were computed with Python using the algorithm described in Townsend (2010). Before stacking, the individual periodograms were un-normalized from the length of the time series in order to compare all the periodograms in a consistent manner. Moreover, the frequency range we used was the same for every time series (GNSS and models). The GNSS has a higher noise level than the loading models (the GNSS periodogram shows a larger amount of variance than the loading models), which is quite understandable if we consider the multiple sources of noise for the GNSS techniques that were listed in the Introduction section of this article. The estimation of the spectral index delivered by CATS for *cats_d* and *cats* is reported in Table 3. In *cats_d*, the spectral index seems to be overestimated when WH noise is taken into account and estimated. Moreover, since for PL noise only, *cats_d* and *cats* provide quite different results, we conclude that the index estimation is also greatly affected by the choice of the estimation model (namely including or not the draconitic cycle). As the spectral indices estimated by CATS impact the uncertainties calculation, it is important to confirm the order of magnitude of these values with the profiles of periodograms of Figure 11. First, the GNSS periodogram is well described by simple PL noise at any frequencies (a slope of constant value). This means that the PL noise contribution dominates the WH noise contribution in the plotted range of frequencies. This can be the reason why CATS fails to estimate a WH noise component in the weekly series while it is robust in estimating only PL noise. The periodograms of loading models seem to be closer to a Gauss–Markov process with a very strong annual signal. They also seem to have the same global behaviour as GNSS (especially the slope) in the interannual band, even if they have a lower variance signal. However, for frequencies greater than 1 cpy, the slopes of periodograms correspond to spectral indexes around -2 for hydrological models, while this remains around -0.7 for GNSS. The origin of this change of slope remains unknown, but we can argue that if the models do not contain WH noise, then we only see the coloured noise dominating at high frequencies. As MERRA2 and GLDAS2.1 had initial samples shorter than a day (1 and 3 hours, respectively), we further investigated to search for WH noise in the model time series. We computed the stacked periodograms of the raw model time series in order to reach frequencies around 300 cpy, where there was still no WH noise, which corroborated our previous assumption.

Table 3. PL noise mean spectral index for the each of the two CATS-estimated solutions with or without WH noise estimation along PL noise.

	East	North	Up
<i>cats_d</i> (WH + PL)	−0.89	−1.03	−0.77
<i>cats_d</i> (PL)	−0.69	−0.84	−0.63
<i>cats</i> (PL)	−0.86	−0.99	−0.75

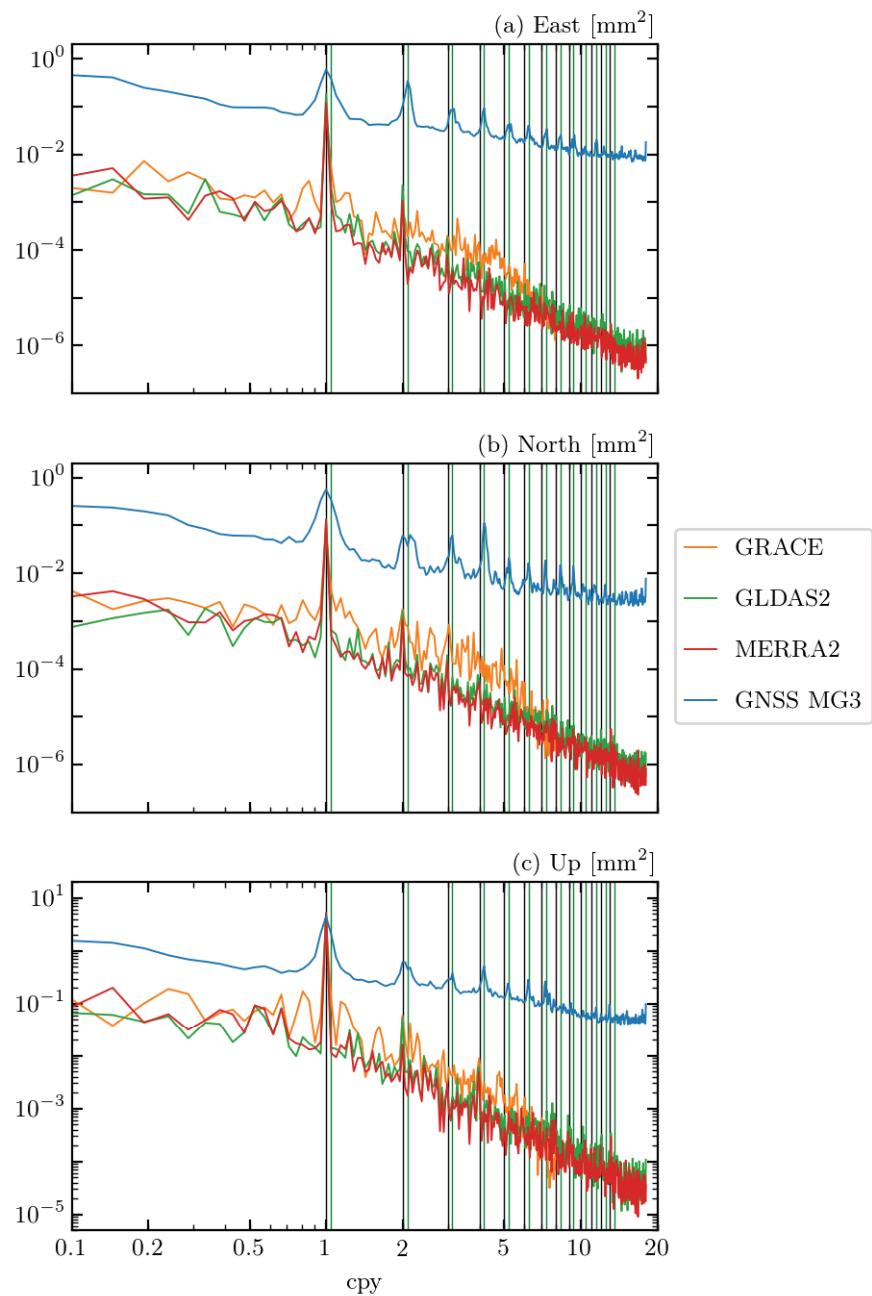


Figure 11. Lomb-Scargle periodograms for the three loading models and the detrended MG3 GNSS solution. The periodograms of all stations were stacked and then divided by the number of stations in order to obtain mean periodograms for each solution. The vertical black lines indicate the solar cycle harmonics, and the vertical green lines indicate the draconitic harmonics.

4. Discussion

4.1. Interannual Signal in GNSS Time Series

Concerning the difference between the deterministic (*tiasd*) and stochastic (*cats_d*) accounting of interannual variations, we can point out some key elements. Even if our statistical method using the dispersion of instantaneous velocity provides more realistic uncertainties (more than 10 times larger) than that directly given by the WLS method, we also observe in Figure 6 that the uncertainties for *tiasd* are three to four times smaller than those for the WSL + MLE method, which contain a complete stochastic part (WH + PL noise). Moreover, these small uncertainties are accompanied by important differences in

the velocity values compared to that estimated by CATS: the differences are nested in an interval of ± 1.5 mm/y, which is quite important considering the precision requirement on the terrestrial reference frame (such as ITRF) of 0.1 mm/y ([Altamimi et al., 2016](#)).

Even if it is mathematically correct to fit the time series with polynomials, this is clearly not suitable for geophysical interpretation. Interannual signals in GNSS time series are due to geophysical deformations in only few special cases: regions with melting ice caps or tectonic activity such as slow slip events ([Klein et al., 2016](#); [Laxon et al., 2003](#); [Klein et al., 2018](#); [Tobita, 2016](#)). If some GNSS interannual variations have been related to a geophysical origin ([Elia et al., 2021](#)), several previous studies demonstrate that there is a limitation in interpreting this type of signal in terms of geophysics at large spatial scales ([Rosat et al., 2021](#)). Interannual variations in GNSS time series are properly captured by a spatially consistent PL noise model with a relatively large amplitude, regardless of the GNSS station location or the geophysical phenomena affecting them. Therefore, to avoid a misleading interpretation of the interannual signal as a deterministic signal, we do not recommend the use of polynomials in GNSS time series adjustment models. It still remains very difficult to distinguish the true geophysical signal from the noise contribution in the residual time series.

4.2. Importance of Draconitic Adjustment

Although it is very common to see GNSS time series adjusted with only the trend and solar cycle, we emphasise here the importance of additionally fitting draconitic harmonics. The differences can be larger than the uncertainty level. The horizontal velocity uncertainties for a large number of stations almost doubled when the draconitic harmonics are not adjusted (Figure 6 and ([Santamaría-Gómez et al., 2011](#))). Even if the numerical estimations of velocity are close in *cats_d* and *cats*, estimating the draconitic periods, or not, could statistically affect the estimated velocity. The vertical component is less affected since the relative power of the draconitic oscillations is lower than that for the horizontal component, as can be seen in the periodograms in Figure 11. If we look at the annual cycle determination, the draconitic signals influence not only the uncertainties but also the values of the phase and amplitude. Even though these differences and the parameter uncertainties are of the same order of magnitude for the majority of stations, there are several stations for which the annual cycle is strongly affected by the draconitic adjustment. In fact, the separation between the solar annual and first draconitic frequencies in the estimation process is conditioned by the length of the time series. The minimum theoretical length for good separation is 25 years. Even though some of the GNSS time series are close to this duration criterion, we are still not able to properly separate the two components for the majority of stations. Moreover, there is actually no evidence that both solar and draconitic signals are stationary. There are potential amplitude variations over time, especially because of their relation to environmental changes, orbit calculation, and the contribution of local effects such as multipath, which is closely related to the time-variable antenna environment and observation geometry. A clean separation of the two signals could then be even more difficult, even for the longest records. To evaluate the correlation between these two terms, we plot the correlation coefficient values depending on the length of the time series, shown in Figure 12. We represent only the correlation coefficient for the annual/draconitic cosine and sine terms of *tiasd* that we extracted from PYTHON’s WLS estimation function. We chose to only represent the correlation coefficient for the vertical component of GNSS since we previously verified that it was extremely similar for the East and North components.

The correlation between the solar and draconitic cycles increases when the time series length increases from 4 to 10 y. For longer time spans, the correlation decreases slowly and linearly.

The correlation coefficients of the low time span stations (<10 y) are impacted by a large dispersion. The low values of these coefficients are then relatively not significant and should not be misinterpreted. As we suggested before, the parameters of the longest time span stations (19 y) are still correlated (around 0.4). Extrapolating a decorrelation slope

(-0.02 y^{-1}) for longer time spans, we found that the total decorrelation between the two cycles should happen beyond a 25-year time span (the theoretical limit), which confirms the difficulty of separating these signals, as they can change with time. In conclusion, even though the correlation between the solar annual and the first draconitic term is quite important, it is strongly recommended to include draconitic frequencies in the fit model in order to reduce the uncertainties, to avoid a joint beat frequency (which can create the illusion of no stationary annual amplitude) being unmodelled, and to try not to mix geophysical signals (mostly at solar frequency) and signals coming from orbital errors.

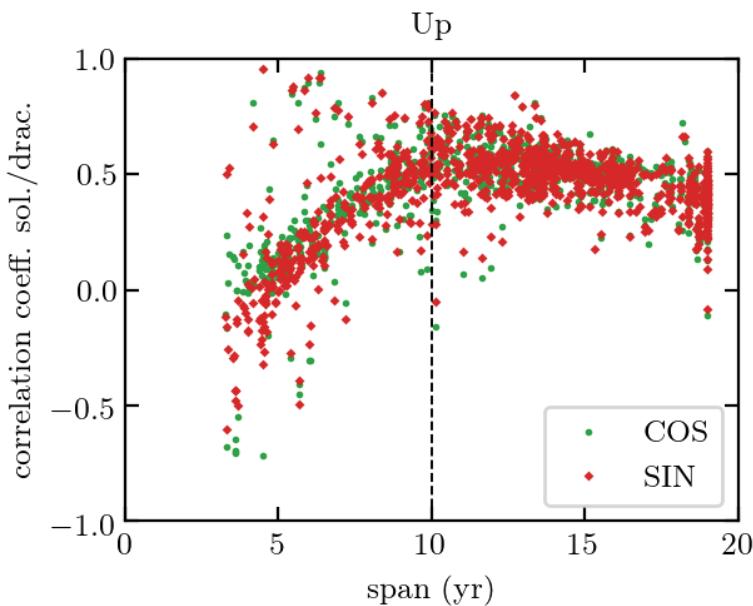


Figure 12. Coefficient of correlation between annual solar wave and draconitic first harmonic for cosine and sine terms of *tiasd* as a function of the length of the time series.

4.3. Model Phase Advance over GNSS Seasonal Signal

The phase advance of the loading models over GNSS displacement could be linked to a single shortcoming of most global hydrology models: the misrepresentation of horizontal fluxes. In general, vertical fluxes are well modelled within each individual cell of the model, but any horizontal runoff often immediately disappears in the oceans. In reality, this water is still stored for a certain time over land and flows through rivers. Examples of the importance of the surface water runoff when computing hydrological loading can be found in [Nicolas et al. \(2021\)](#) and [Nahmani et al. \(2012\)](#). Figure 9 shows that the spatial distribution of this phase advance is not compatible with such a hypothesis because there are no long rivers in Great Britain, but it can play a role in other regions of the world (the Amazon basin, for example, ([Nicolas et al., 2021](#))) and has to be carefully investigated. Globally, there is a good match between the models and the GNSS, as the differences between them for the majority of stations are of the same order of magnitude as the GNSS uncertainties (Figure 7). Nevertheless, the differences in phase values confirm that the GNSS annual cycle actually contains signals other than just those from hydrology. If we consider that the agreement between GNSS and the models is good when the histogram of the difference is close to a centred Gaussian distribution (which should indicate random errors), the agreement between GNSS and GLDAS2.1 seems worse than the agreement between GNSS and MERRA2, which seems worse than the agreement between GNSS and GRACE. This result shows the importance of dedicated gravity missions, such as GRACE and GRACE-FO, in helping to improve the modelling of continental water storage variations. The stations where the difference is similar for each loading model are stations where the GNSS annual term contains phenomena other than just the hydrological signature. For example, we did not take into account the nontidal ocean and atmospheric loading (

Mémin *et al.*, 2020; Williams and Penna, 2011; van Dam *et al.*, 2012) in the loading models that we used here. Indeed, the associated annual cycle is quite small in Europe (~ 0.5 mm) but could explain some local differences that we see in Figure 9, mostly along the coast. Given the amplitude of the differences, they could also be due to the nature of the ground (karst aquifers (Silverii *et al.*, 2016) and mining (Gourmelen *et al.*, 2007; Muntean *et al.*, 2016)), but also to the thermal deformation of the surface and antenna monuments (Fang *et al.*, 2014; Xu *et al.*, 2017). A meticulous study of each station time series should provide initial intuition into the sources of these differences, but this goes far beyond the goal of this study. In any case, we can observe that groups of stations at large spatial scales that have similar differences are expected to be more likely affected by a geophysical signal, while anomalies on isolated stations are expected to be more likely due to monumentation deformation or a multipath effect. Unlike the thin peaks corresponding to the annual solar frequency in the loading model periodograms of Figure 11, the large peaks centred on the annual solar cycle in the GNSS periodograms are another important piece of evidence for the multiplicity of annual signal content in GNSS.

4.4. Common Mode Estimation in GNSS

Since Europe has had weak tectonic activity and a stable climate over the years without great meteorological events such as El Nino or ice melting, we expected a quite low interannual signal. The PCA decomposition of GNSS in Figure 10a confirms this hypothesis since the PCs seem to be dominated by noise. Loading models have a much lower noise level than the GNSS observations and exhibit significant differences due to different estimates of continental water storage variations. By analysing the second and third modes together in Figure 10, we can find similarities between the EOFs and PCs of (i), (f), (g), and (l), on the one hand, and (j), (k), and (h), on the other hand. However, considering the discrepancies between the models themselves, it seems inadequate to indicate the superiority of any model over another. The choice of one model rather than another in the comparison with GNSS should then be particularly justified, especially if the interpretation is only based on PCA results. The difference in the total variance fraction of the first mode between GNSS and the loading models is most likely due to the difference in noise content (Figure 11).

We qualitatively compared our PCA results with those of Elia *et al.* (2021) who performed PCA of the UNR/NGL (University of Nevada Reno/Nevada Geodetic Laboratory) GNSS solutions (Blewitt *et al.*, 2018) over the same region and the same time span as in our study and removed the seasonal signal with the same method as the one presented in Section 3.4. We note that the second mode of MG3 GNSS (Figure 10e) does not appear in Elia *et al.* (2021), and we can speculate about the origin of such a uniform signal over Great Britain associated with this singular time signature. This mode could be associated with the correlated noise of the MG3 time series. As this noise component could differ from one GNSS analysis centre to another, it could be very different for NGL products.

Moreover, we would like to emphasise the importance of the choice of the GNSS network for performing PCA (Wu *et al.*, 2019). The choice of a homogeneous network is wise in order to equally distribute the signal across the entire region. However, the stations selected for the PCA also need to meet a completeness criterion during a time interval, which, most of the time, results in an inhomogeneous network. There are then two options. The first is to keep this inhomogeneous network unchanged, knowing that PCA could over-represent the regions with a denser station distribution. This could be the reason why the modes that had the largest variance fraction in our study corresponded to an important signal over the most dense regions (north of Spain, Great Britain, and France). The second option is to select specific stations in order to produce a homogeneous network, asking for subjective criterion selection. For example, what would be the criterion for choosing between two stations, both reaching the completeness criterion, being 50 km away but showing different time series? The choice of particular stations for producing the homogeneous network should thus also impact the PCA results. In conclusion, as the

choice of the network has such an impact on the PCA results, and as the GNSS noise could be specific to each GNSS solution, the discrepancies or similarities of the interannual signal given by PCA between models and GNSSs should then be considered and interpreted very carefully.

Author Contributions: This study was designed by all the authors. F.P. and S.L. were responsible for the GNSS MG3 products and GINS software. J.-P.B. provided the loading models computed from hydrology models and GRACE. A.M. computed the GNSS solutions. A.S.-G. ran the CATS treatments. A.M. and A.S.-G. analysed the results. A.M. wrote the preliminary draft, and A.M. and S.L. created the figures. All the authors contributed to the original draft preparation. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Funding: Partial funding for this study was obtained from CNES (Centre National d'Etudes Spatiales).

Institutional Review Board Statement: Not applicable.

Informed Consent Statement: Not applicable.

Data Availability Statement: The data presented in this study are available on request from the corresponding author.

Acknowledgments: We thank all the different agencies, networks, etc., for providing the daily RINEX GNSS data. All the GPS measurements used in this study were obtained from IGN/RGP (Institut Géographique National/Réseau GNSS permanent, <http://rgp.ign.fr>, (accessed on 7 November 2021)), RENAG (Réseau National GNSS, <http://webrenag.unice.fr>, (accessed on 7 November 2021)), SONEL (Système d'Observation des variations du Niveau de la mEr à Long terme, <https://www.sonel.org>, (accessed on 7 November 2021)), EUREF (EUREF Permanent GNSS Network, <https://www.epncb.oma.be>, (accessed on 7 November 2021)), RING (Rete Integrata. Nazionale GPS, <http://ring.gm.ingv.it>, (accessed on 7 November 2021)), BIGF (British Isles continuous GNSS Facility, <http://www.bigf.ac.uk>, (accessed on 7 November 2021)), CDDIS (Crustal Dynamics Data Information System, <https://cddis.nasa.gov>, (accessed on 7 November 2021)), NOA (National Observatory of Athens, <http://www.gein.noa.gr>, (accessed on 7 November 2021)), NIEP (National Institute for Earth Physics, <http://gps.infp.ro>, (accessed on 7 November 2021)), DGPA (Dutch Permanent GNSS Array, <http://gnss1.tudelft.nl/dpga/>, (accessed on 7 November 2021)), ERGNSS (Red Geodésica Nacional de Estaciones de Referencia GNSS, <https://www.ign.es/>, (accessed on 7 November 2021)), and ITACYL (Red de estaciones GNSS de Castilla y León, <http://gnss.itacyl.es>, (accessed on 7 November 2021)). We also thank anonymous reviewers whose comments and suggestions helped improve and clarify this manuscript.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

6.3 Comparaison du mode commun avec d'autres solutions

La recherche de modes communs entre les stations géodésiques est un enjeu important notamment pour comprendre et déterminer l'origine de certains signaux présents dans les séries GNSS. Il existe de nombreuses méthodes dont la décomposition en composantes principales que nous avons utilisé dans l'article [Michel et al. \(2021\)](#) pour comparer le contenu de la bande interannuelle de plusieurs modèles avec le GNSS, ou la décomposition en composantes indépendantes (moins bien adapté au problème du GNSS). Récemment, [Kreemer & Blewitt \(2021\)](#) ont mis au point une nouvelle technique permettant d'extraire le mode commun d'un réseau dense de stations GNSS quelque soit la durée et la complétude des séries temporelles ce qui est un pas en avant considérable dans l'étude des modes communs. Leur méthode repose sur une estimation des corrélations inter-stations calculées avec des méthodes statistiques robustes en faisant d'abord intervenir les meilleures stations (en terme de complétude et de longueur de la série temporelle) puis en ajoutant au fur et à mesure le reste des stations. Ce schéma itératif est donc très coûteux en temps de calcul car en grande partie non parallélisable. Nous avons codé cette méthode afin de pouvoir comparer quantitativement les écarts entre les modes communs détectés sur des solutions GNSS issues de différents centres d'analyse. Ceci est notamment motivé par le fait que les biais sur les produits orbite/horloge impactent généralement les grandes longueurs d'onde spatiales. Elles peuvent donc être visibles sur les modes communs que nous déterminons et peuvent surtout différer d'un centre d'analyse à un autre. D'autre part, nous souhaitons comparer ces modes communs avec ceux issus de GRACE et interpréter les différences en terme de signaux non-géophysiques.

Dans un premier temps, nous avons validé le code que nous avons implémenté en comparant les résultats de l'article de [Kreemer & Blewitt \(2021\)](#) avec les résultats issus de notre traitement. Cette validation passe notamment par les cartes des coefficients de corrélation inter-stations représentés sur la Figure 2.13, qui sont identiques à ceux donnés dans l'article. Pour chaque station, nous avons calculé les coefficients de corrélations ([Shevlyakov & Smirnov, 2011](#)) entre les résidus de la série temporelle (obtenus après soustraction du modèle de l'Éq. (2.4)) et les résidus de toutes les autres stations puis avons tracés ces coefficients en fonction de la distance inter-station séparant les stations de la station considérée. Pour chaque station, on crée donc un graphique de la corrélation des séries temporelles des résidus en fonction de la distance à la station. Nous ajustons une fonction affine sur chacun de ces graphiques puis nommons ccs la pente de cette fonction et cci son ordonnée à l'origine. Ce sont ces deux quantités qui sont représentés sur la Figure 2.13. On peut interpréter le coefficient cci comme la limite du coefficient de corrélation aux environs immédiats de la station considérée et le coefficient ccs comme la perte de corrélation avec la distance en chaque station.

Après avoir validé l'implémentation de la méthode, nous avons extrait un réseau commun entre les données fournies par le NGL et notre réseau européen. Nous avons à ce titre démontré que la méthode employée est

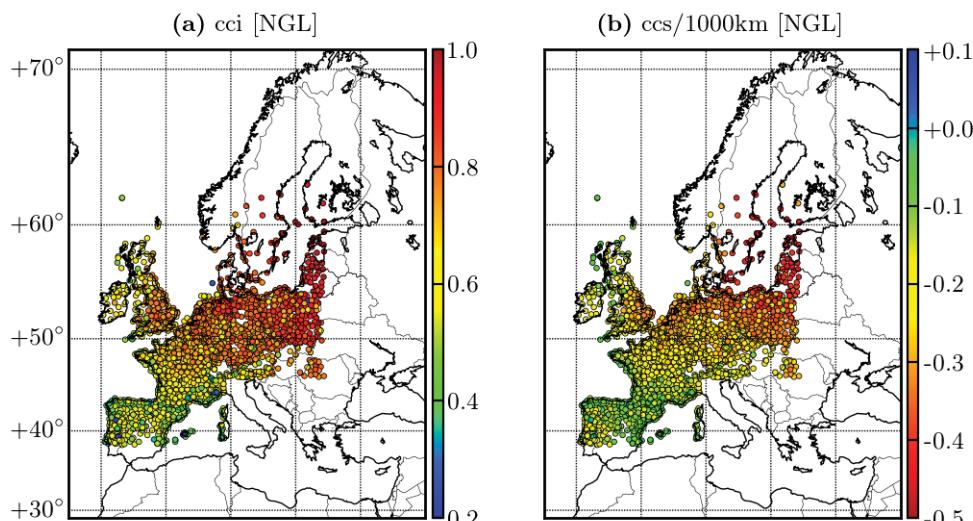


Fig. 2.13 – Ordonnée à l'origine cci (la corrélation est un nombre sans dimension) et pente de la courbe de corrélation ccs (variation de la corrélation par tranche de 1000 km) de chaque station avec le réseau pour la solution NGL utilisée par [Kreemer & Blewitt \(2021\)](#).

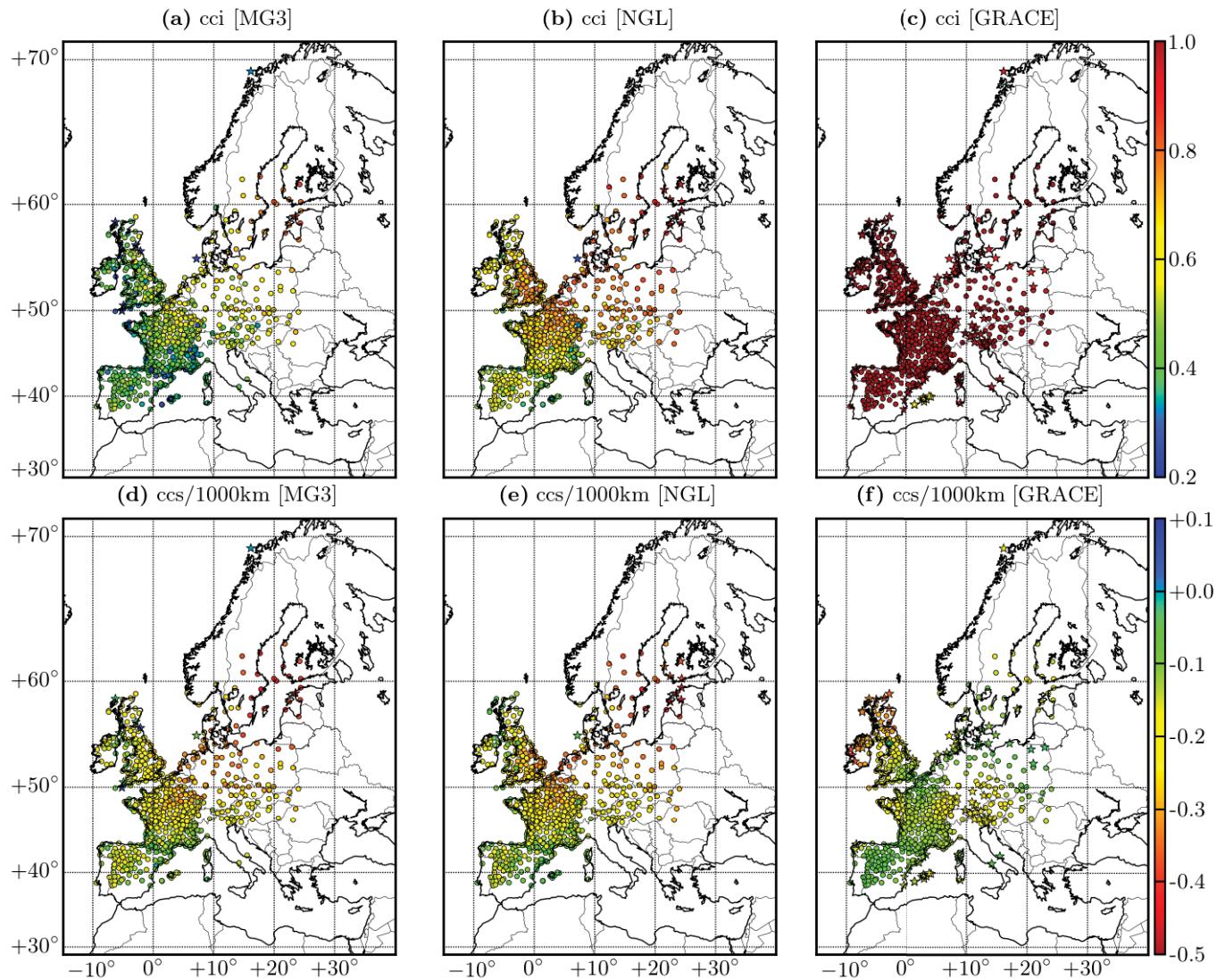


Fig. 2.14 – Ordonnée à l'origine cci et pente de la courbe de corrélation ccs de chaque station avec le réseau considéré pour (a & b) la solution MG3, (c & d) la solution NGL et (e & f) la solution GRACE.

peu sensible au changement de réseau : les cci/ccs trouvés pour le réseau complet du NGL de la Figure 2.13 sont très proches de ceux trouvés dans les panels (b) et (e) de la Figure 2.14 pour le sous-réseau commun à notre réseau. Nous représentons les cci/ccs issus du traitement des séries temporelles MG3, NGL et GRACE⁷ sur la Figure 2.14 pour le même réseau. Nous observons que la perte de décorrélation est similaire dans les deux solutions GNSS mais qu'il existe des différences avec la solution GRACE. Ces différences révèlent donc probablement une différence inter-technique. Nous voyons que la solution MG3 possède un cci moyen plus faible que la solution NGL. Cela peut laisser penser que les résidus issus de la solution NGL (ne possédant *a priori* que le bruit de mesure et les erreurs systématiques liés à la solution) possèdent un signal spatial plus cohérent que les résidus des séries temporelles MG3. Les valeurs de cci extrêmement hautes de GRACE sont le reflet du lissage de la solution sur environ 300 km. Ce lissage implique que les abords immédiats des stations possèdent un signal quasi-identique au signal de la station ce qui n'est pas le cas pour le GNSS à cause notamment des effets de station (monumentation, type de sol, multi-trajet, etc.).

Les cci/ccs sont utilisés finalement pour déterminer le mode commun en chaque station grâce à la méthode statistique décrite dans l'article de Kreemer & Blewitt (2021) auquel nous renvoyons pour plus de détails. Nous avons représenté sur la Figure 2.15 le mode commun sur la composante verticale pour trois stations et pour les solutions MG3, NGL et GRACE. Nous avons ajouté le mode commun issu du traitement MG3 mais auquel nous avons enlevé les fréquences draconitiques des résidus avant le calcul des corrélations. Nous

7. Les séries temporelles de déplacements de GRACE sont issues du même calcul que dans Michel et al. (2021), via le service de charge de l'EOST <http://loading.u-strasbg.fr/>.

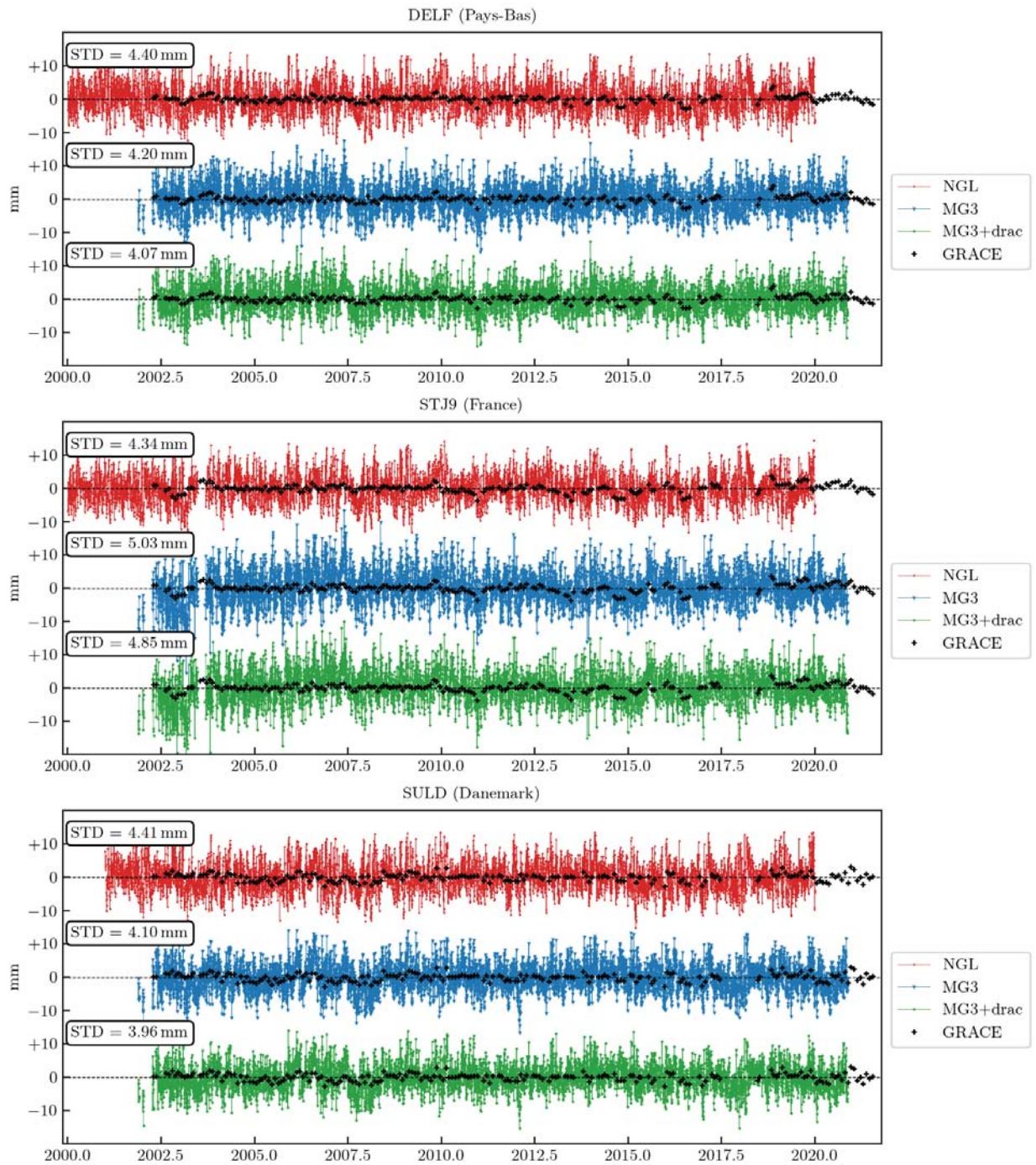


Fig. 2.15 – Mode commun pour les stations DELF (Pays-Bas), STJ9 (France) et SULD (Danemark) obtenus à partir des quatre solutions NGL, MG3, MG3 auquel on a préalablement retiré les fréquences draconitiques et GRACE.

voyons que les différentes solutions ne montrent pas de différences notables et sont la plupart du temps en accord avec le mode commun de GRACE pour les variations au long terme. Cette observation amène donc à penser que ces signaux sont bien une signature de phénomènes géophysiques car communs à la fois au GNSS et à GRACE.

Le bruit important qui compose ces séries temporelles de mode commun est néanmoins propre à chaque solution comme le témoigne la Figure 2.16 sur laquelle nous avons représenté les périodogrammes de Lomb-Scargle (Lomb, 1976; Scargle, 1982) des séries temporelles des résidus dont on a ôté ou non le mode commun déterminé précédemment. Cette figure est très instructive sur les différences spectrales existantes entre la solution MG3 et la solution NGL notamment le niveau global de bruit à haute fréquence (plus faible pour NGL que MG3) et le contenu de la bande de fréquences interannuelle. Dans tout les cas, nous retrouvons la

signature d'un bruit coloré à basse fréquence et d'un bruit blanc à plus haute fréquence qui ne sont ni l'un ni l'autre captés entièrement par le mode commun. En revanche, retirer le mode commun aux séries temporelles permet de réduire drastiquement les multiples pics à haute fréquence (qui sont notamment présents sur les séries NGL) et de réduire, en partie seulement, les pics des fréquences draconitiques particulièrement importants sur la solution MG3. La réduction du contenu fréquentiel des signaux draconitiques est forte de sens puisqu'elle signifie qu'une bonne partie de ces signaux sont captés par le mode commun. Il possèdent donc des variations spatiales de grande longueur d'onde et se mélangent ainsi à certains signaux géophysiques. Sur la solution MG3 dont les fréquences draconitiques ont été ajustées⁸, la réduction apportée par le mode commun est comparable à ce qu'on obtient pour les séries NGL. Le fait qu'une partie du bruit ait été absorbée par le mode commun et que l'autre partie subsiste dans les résidus, permet d'affirmer que les sources de bruit sont divisées en deux partie : les sources dont l'origine est globale donc liées à l'orbite ou aux produits (qui sont contenues dans le mode commun) et celles d'origine locale donc liées à la station qui subsistent dans les résidus des séries temporelles. Si extraire chaque source de bruit est une tâche difficile, notre étude permet néanmoins de quantifier la part liée à chaque type de source (globale ou locale).

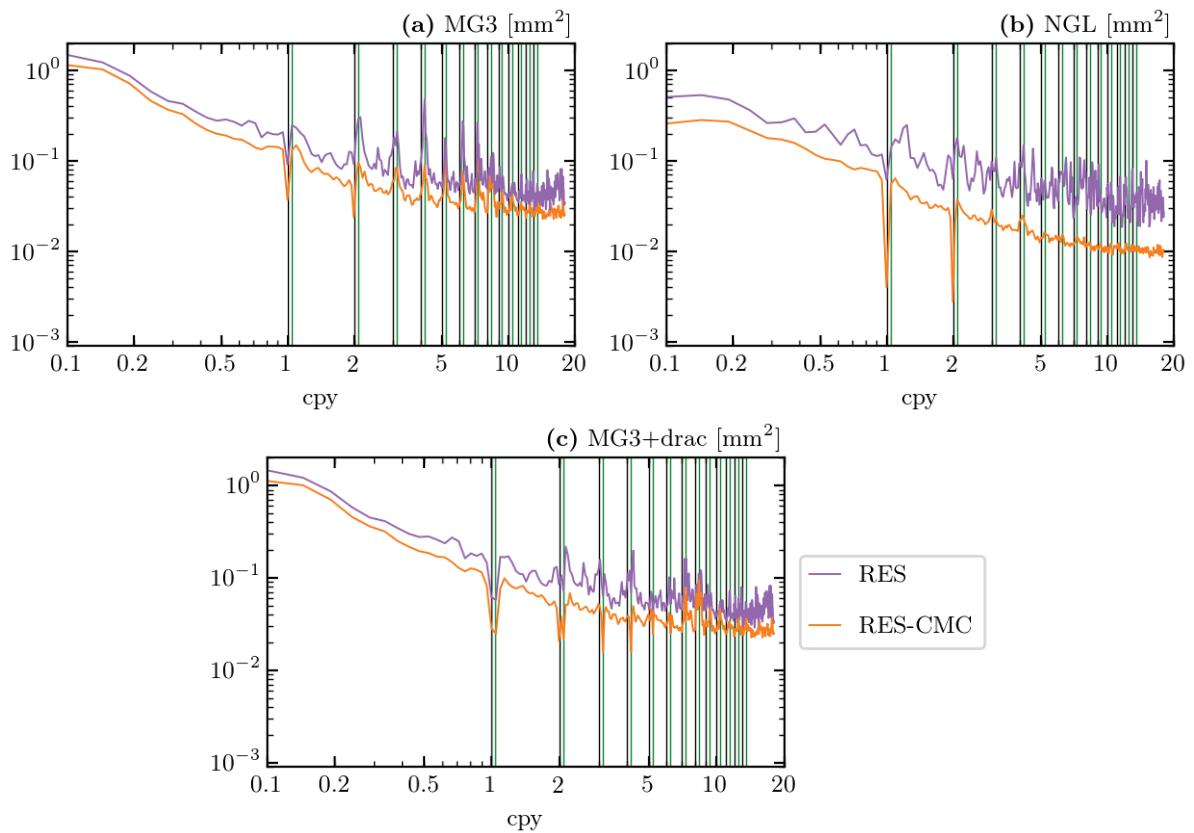


Fig. 2.16 – Périodogrammes de Lomb-Scargle cumulés des résidus (RES) et des résidus corrigés du mode commun (RES-CMC) pour les solutions MG3, NGL et MG3 auquel on a préalablement retiré les fréquences draconitiques.

Enfin, nous pourront conclure sur l'apport d'une telle méthode sur la réduction de l'incertitude sur les paramètres déterministes et stochastiques des modèles d'ajustement utilisés sur les séries temporelles. Cette notion a été en partie abordée dans Kreemer & Blewitt (2021) en ce qui concerne la diminution de l'incertitude calculée avec MIDAS (Blewitt et al., 2016) sur les vitesses des stations, mais mériterait un traitement plus complet sur les autres paramètres. Aussi, il serait intéressant de compléter cette étude avec des solutions utilisant les produits d'autres centres d'analyse (ou même directement les produits IGS) et sur d'autres régions du monde, afin de pouvoir dissocier la part de variabilité liée aux produits en eux-même et celle liée aux signaux communs à toutes les solutions dont l'origine serait soit géophysique soit lié à une erreur systématique propagée par tout les centres d'analyse. Il resterait alors à donner une interprétation de ces signaux, ce qui s'avère être une tâche particulièrement délicate.

8. Nous n'avons ajusté que les 6 premiers termes d'où le fait que l'on voit encore des pics draconitiques aux hautes fréquences.

Troisième Partie

Modèles rhéologiques et déformations

Sommaire

1	Déformations et contraintes dans un matériau	66
1.1	Vecteur déplacement et tenseur des déformations	66
1.2	Tenseur des contraintes	67
2	Élasticité et viscosité	67
2.1	Loi de Hooke	67
2.2	Hypothèse d'incompressibilité	68
2.3	Modélisation d'une rhéologie élastique	70
2.4	Modélisation de la viscosité	71
3	Association de plusieurs modèles rhéologiques	72
3.1	Principe de correspondance	73
3.2	Modèle de Maxwell	73
3.3	Modèle de Kelvin	76
3.4	Modèle de Burgers	77
3.5	Récapitulatif	79

Dans cette partie, nous nous intéressons à la notion de rhéologie des matériaux et plus particulièrement aux rudiments de la théorie de l'élasticité (Landau & Lifchitz, 1967). Les propriétés élastiques d'un matériau lui confèrent uniquement une capacité à se déformer instantanément en réponse à une contrainte. Or pour expliquer qu'une déformation puisse aussi évoluer longtemps après l'application ou le retrait d'une perturbation, il est nécessaire de faire intervenir en plus des propriétés élastiques du matériau, ses propriétés visqueuses. Nous nous pencherons aussi sur la manière dont on peut modifier la théorie élastique pour y inclure une composante visqueuse dans la relation entre contrainte et déformation. Nous donnerons les bases pour établir les équations de plusieurs modèles visco-élastiques (Maxwell, Kelvin et Burgers) dans le but de les utiliser par la suite dans la théorie gravito-(an)élastique que nous décrirons dans la Partie IV.

1 Déformations et contraintes dans un matériau

1.1 Vecteur déplacement et tenseur des déformations

Pour quantifier la déformation d'un matériau, on définit le vecteur déplacement \mathbf{u} comme la différence entre la position initiale \mathbf{x} d'un point M appartenant au solide et sa position après la déformation notée \mathbf{x}' tel que

$$u_i = x'_i - x_i, \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}u_i = \mathrm{d}x'_i - \mathrm{d}x_i, \quad (3.1)$$

si l'on considère un élément de longueur $\mathrm{d}\mathbf{x}$ déformé en un élément $\mathrm{d}\mathbf{x}'$. L'indice i représente une composante spatiale dans n'importe quel système de coordonnées. On peut déterminer entièrement le vecteur déplacement en connaissant sa dépendance en x_k . Pour cela, on écrit la différentielle de u_i en fonction de x_k comme

$$\mathrm{d}u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_k.$$

Dès lors, on peut évaluer la déformation d'un élément de longueur $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$ en un élément de longueur $\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}x'_1^2 + \mathrm{d}x'_2^2 + \mathrm{d}x'_3^2$ grâce à la relation précédente¹ (Landau & Lifchitz, 1967)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}l'^2 &= \mathrm{d}x'_i^2, \\ &= (\mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i)^2, \\ &= \mathrm{d}l^2 + 2\mathrm{d}x_i \mathrm{d}u_i + \mathrm{d}u_i^2, \\ &= \mathrm{d}l^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \mathrm{d}x_l \mathrm{d}x_m, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où les indices i , k , l et m sont muets ce qui permet de réécrire la dernière égalité comme

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k, \quad (3.3)$$

où le second terme a été remplacé par son symétrique

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_i.$$

On définit alors le **tenseur des déformations** ε d'ordre 2 et de dimension 3 par

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2\varepsilon_{ik} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_k, \quad (3.4)$$

où ε_{ik} s'exprime en fonction de u_i

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (3.5)$$

1. Dans toute la suite, nous utiliserons la notation de sommation implicite d'Einstein.

Nous remarquons que le tenseur des déformations est symétrique ($\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$) ce qui signifie qu'il ne possède donc que 6 composantes indépendantes et qu'il peut être diagonalisé dans une base particulière. Dans la suite, on négligera le troisième terme de l'Éq. (3.5) qui est d'ordre 2 en u_i .

1.2 Tenseur des contraintes

On considère désormais un système constitué d'un volume V de matériau déformé. Cette déformation de la structure cristalline initiale induit donc des forces internes dans le volume du matériau. On écrit la résultante des forces dans le volume considéré comme

$$\int_V \mathbf{F} dV, \quad \text{ou} \quad \int_V F_i dV, \quad (3.6)$$

si l'on considère la $i^{\text{ème}}$ composante de la force. Dans un solide, la cohésion entre les molécules est assurée par les forces moléculaires à l'échelle microscopique. Pour que la cohésion soit encore assurée dans le solide déformé, ces forces internes doivent être compensées par les forces appliquées par des molécules voisines par principe d'action-réaction. Ces forces sont donc compensées de proche en proche, de molécule en molécule dans le volume, jusqu'aux molécules de surface pour lesquelles seulement une partie des forces s'y appliquant peuvent être compensées à cause de la dissymétrie de l'environnement qui les entoure (il y a des molécules à l'intérieur du solide mais il n'y en a pas à l'extérieur du solide) (Landau & Lifchitz, 1967). Ainsi, seule une force extérieure s'appliquant sur la surface peut annuler le bilan de force sur ces molécules de surface. La déformation de l'élément de volume dV est ainsi entièrement gouvernée par l'application de contraintes sur sa surface et non par le bilan des forces internes qui s'y appliquent. Ces considérations peuvent être traduite mathématiquement en stipulant que \mathbf{F} est un champ vectoriel continu dans le solide tel qu'il existe un tenseur d'ordre 2 que l'on note σ et qu'on appelle tenseur des contraintes défini par

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (3.7)$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky dans l'Éq. (3.6), on obtient

$$\int_V F_i dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint_S \sigma_{ik} dS_k, \quad (3.8)$$

où dS_k est la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur $d\mathbf{S}$ orienté conventionnellement depuis le volume vers l'extérieur. On peut noter qu'on intègre sur les anciennes coordonnées x_i et non les nouvelles x'_i étant donné que les déplacements sont petits et que l'on travaille à l'ordre 1. Le terme $\sigma_{ik} dS_k$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la force que l'on applique sur la surface perpendiculaire à $d\mathbf{S}$ tandis que σ_{ik} est la $i^{\text{ème}}$ composante de la force que l'on applique sur la surface perpendiculaire à l'axe k . On peut signaler de plus que pour respecter l'équilibre des moments appliqués sur un volume infinitésimal du solide, la $i^{\text{ème}}$ composante de la force que l'on applique sur la surface perpendiculaire à l'axe k est égale à la $k^{\text{ème}}$ composante de la force que l'on applique sur la surface perpendiculaire à l'axe i . On en déduit que le tenseur des contraintes est symétrique car $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ et ne possède donc que 6 composantes indépendantes.

Lorsque l'on retire la contrainte, le matériau peut retourner dans son état initial ou conserver une déformation rémanente. Le comportement de chaque matériau sous l'effet d'une force est appelé **rhéologie** et est entièrement déterminé par la relation contrainte-déformation. Les matériaux possèdent de nombreux comportements différents qui définissent autant de rhéologies à étudier, la plus simple étant la rhéologie élastique donnant une relation linéaire entre la contrainte et la déformation.

2 Élasticité et viscosité

2.1 Loi de Hooke

Dans le cas élastique, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations sont reliés linéairement. Cela signifie que chacune des 9 composantes du tenseur des contraintes est reliée à une combinaison linéaire

des 9 coefficients du tenseur des déformations. On a donc en tout $9 \times 9 = 81$ coefficients reliant les deux tenseurs que l'on peut écrire dans un tenseur d'ordre 4 noté C tel que

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (3.9)$$

Cette équation constitue la **loi de Hooke** générale pour n'importe quel matériau élastique. Les coefficients du tenseur dépendent des propriétés du matériau notamment des micro-structures et de l'organisation moléculaire impliquée dans la cohésion du solide. Nous avons vu dans les sections précédentes que les tenseurs des déformations et des contraintes étaient symétriques c'est-à-dire qu'ils ne possèdent chacun que 6 composantes indépendantes. Cela implique que seules 6 composantes du tenseur des contraintes sont liées à une combinaison linéaire des 6 composantes indépendantes du tenseur des déformations. On a donc par symétrie uniquement $6 \times 6 = 36$ coefficients indépendants dans le tenseur C . Dans la théorie de Landau, on peut également prouver que le tenseur des contraintes dérive de l'énergie interne U par rapport au tenseur des déformations à entropie constante (ou de l'énergie libre à température constante), ce qui permet d'écrire (Landau & Lifchitz, 1967)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_S \implies C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Big|_S = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \Big|_S = C_{klji}. \quad (3.10)$$

Le nombre de coefficients indépendants est donc réduit à 21. Enfin, si l'on fait l'hypothèse que le matériau est isotrope, la relation contrainte déformation n'est désormais entièrement définie que par deux coefficients indépendants. Il existe de multiples couples de coefficients que l'on utilise en fonction des applications. On pourra citer les plus courants que sont le module de Young et le coefficient de Poisson (E, ν), le coefficient de compression et le coefficient de cisaillement (K, G) ou encore les coefficients de Lamé (λ, μ)². Si l'on écrit la relation contrainte déformation en terme de (λ, μ) , le tenseur C s'écrit simplement

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.11)$$

ce qui donne,

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \text{ou} \quad \sigma = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \text{Id} + 2\mu \varepsilon. \quad (3.12)$$

Cette relation simple sera largement utilisée dans la suite de cette étude. En remarquant que $\varepsilon_{kk} = \sigma_{kk}/(3\lambda + 2\mu)$, on peut également la renverser en exprimant le tenseur des déformations en fonction du tenseur des contraintes

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij}. \quad (3.13)$$

2.2 Hypothèse d'incompressibilité

Les contraintes sont généralement divisées en deux grands types : les contraintes de compression et les contraintes cisaillantes. Les contraintes de compression sont définies comme étant la partie du tenseur des contraintes impliquant une variation de volume du matériau. À l'inverse, les contraintes cisaillantes déforment le matériau sans en changer le volume. Cette dichotomie est primordiale dans la modélisation d'une rhéologie car elle permet de distinguer le cas compressible du cas incompressible. Nous allons décrire en détail dans la suite la prise en compte ou non de l'hypothèse d'incompressibilité.

On s'intéresse d'ores et déjà à la variation de volume d'un matériau que l'on note $\Delta V/V$. Soit un élément infinitésimal de longueur $dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ qui devient après déformation $dl' = \sqrt{dx'_1^2 + dx'_2^2 + dx'_3^2}$. Selon l'Eq. (3.4) écrite au premier ordre en ε on obtient,

$$dl' = dx'^2_i = dx_i^2 + 2\varepsilon_{kl} dx_k dx_l = (\delta_{kl} + 2\varepsilon_{kl}) dx_k dx_l. \quad (3.14)$$

². On note que le coefficient de Lamé μ est défini comme étant égal strictement au coefficient de cisaillement et est donc parfois noté G .

Profitant du caractère symétrique du tenseur des déformations, on le diagonalise dans une base orthonormée pour le réduire à ses composantes principales, ce qui permet d'écrire sans perte de généralité

$$dl'^2 = \underbrace{(1 + 2\varepsilon_{11})dx_1^2}_{dx_1'^2} + \underbrace{(1 + 2\varepsilon_{22})dx_2^2}_{dx_2'^2} + \underbrace{(1 + 2\varepsilon_{33})dx_3^2}_{dx_3'^2}. \quad (3.15)$$

Cela implique toujours au premier ordre en ε que

$$dx'_i = (1 + 2\varepsilon_{ii})^{\frac{1}{2}}dx_i \simeq (1 + \varepsilon_{ii})dx_i. \quad (3.16)$$

Le volume infinitésimal initial s'écrit dans la nouvelle base orthonormée $dV = dx_1dx_2dx_3$ et devient après déformation

$$\begin{aligned} dV' &= dx'_1dx'_2dx'_3, \\ &= (1 + \varepsilon_{11})dx_1(1 + \varepsilon_{22})dx_2(1 + \varepsilon_{33})dx_3, \\ &= (1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})(1 + \varepsilon_{33})dV, \\ &= (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + o(\varepsilon))dV, \\ &= (1 + \text{Tr}(\varepsilon) + o(\varepsilon))dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

On en déduit donc la variation relative de volume au premier ordre en ε

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV' - dV}{dV} = \text{Tr}(\varepsilon) = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.18)$$

La divergence du champ de déplacement représente donc la variation relative de volume du matériau. Grâce à cette équation on peut dorénavant séparer le tenseur des déformations comme une somme de deux tenseurs indépendants : l'un noté $\bar{\varepsilon}$, engendrant les variations de volume (sa trace est égale à celle de ε), et l'autre noté ε' , de trace nulle, qui contient les déformations cisaillantes. On peut alors définir $\bar{\varepsilon}$ comme étant la partie compressible et ε' comme étant la partie incompressible du tenseur des déformations tel que

$$\varepsilon = \underbrace{\frac{1}{3}\text{Tr}(\varepsilon)\text{Id}}_{\bar{\varepsilon}} + \underbrace{\left(\varepsilon - \frac{1}{3}\text{Tr}(\varepsilon)\text{Id}\right)}_{\varepsilon'}. \quad (3.19)$$

La loi de Hooke (Éq. (3.12)) se réécrit alors en terme de $\bar{\varepsilon}$ et ε'

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda\text{Tr}(\varepsilon)\text{Id} + 2\mu\varepsilon, \\ &= 3\lambda\bar{\varepsilon} + 2\mu(\bar{\varepsilon} + \varepsilon'), \\ &= (3\lambda + 2\mu)\bar{\varepsilon} + 2\mu\varepsilon'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

On peut dès lors faire une remarque sur le coefficient $(3\lambda + 2\mu)$ qui n'est autre que 3 fois le coefficient de compression K introduit dans la Section 2.1. Étant donné le coefficient de cisaillement G , on en déduit la loi de Hooke en fonction du couple (K, G)

$$\sigma = 3K\bar{\varepsilon} + 2G\varepsilon', \quad (3.21)$$

avec $K = \lambda + 2/3\mu$ associé à la partie compressible et $G = \mu$ associé à la partie incompressible, d'où leur noms.

D'autre part, il découle de l'Éq. (3.20), que le tenseur des contraintes possède également une décomposition en une somme de tenseurs avec trace et sans trace que l'on notent respectivement $\bar{\sigma}$ et σ' tel que $\sigma = \bar{\sigma} + \sigma'$ avec

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\text{Id} = (3\lambda + 2\mu)\bar{\varepsilon} \\ \sigma' = \sigma - \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\text{Id} = 2\mu\varepsilon' \end{cases}. \quad (3.22)$$

On appelle couramment $\bar{\sigma}$ le tenseur volumétrique et σ' le déviateur des contraintes. Ces deux termes proviennent du fait que $\frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)$ n'est autre qu'une pression lithostatique p engendrant des variations de volume du matériau et σ' le terme associé au cisaillement. Ce système de deux équations indépendantes permet de résoudre séparément la déformation associée au caractère compressible et incompressible d'un matériau sous l'effet de la contrainte σ . Attention, cette séparation est purement artificielle : si le matériau possède une partie compressible ($K \neq \infty$) et incompressible (G), on le qualifiera de compressible ; si le matériau possède uniquement une partie incompressible, on le qualifiera d'incompressible. Ainsi, l'hypothèse d'incompressibilité revient à prendre la limite $\Delta V \rightarrow 0$. En utilisant l'Éq. (3.18) et la première équation du système (3.22), on en déduit que cette limite est équivalente à

$$\text{Tr}(\varepsilon) = \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) = \frac{p}{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)} = \frac{p}{K} \rightarrow 0 \quad \sim \quad K \rightarrow \infty. \quad (3.23)$$

On note que cette limite est également atteinte si le coefficient de Lamé λ tend aussi vers l'infini. Dans cette approximation, la première équation du système (3.22) n'est plus définie et le système n'est déformé que par des contraintes cisaillantes σ' régies par la seconde équation du système (3.22). Attention, en aucun cas l'approximation incompressible n'impose que $p = \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)$ ne soit nulle ! Seulement, cette contrainte lithostatique, si elle est appliquée, n'a aucun effet sur la déformation du matériau et il convient alors de considérer σ' comme la grandeur d'intérêt. La loi de Hooke régissant le système prend alors sa forme la plus simple

$$\sigma' = 2\mu\varepsilon'. \quad (3.24)$$

On note qu'on fait généralement un abus de notations en écrivant que dans le cas incompressible $\sigma = 2\mu\varepsilon$ dans le sens où, comme la contrainte volumétrique n'a aucun effet, on peut tout aussi bien considérer qu'on n'en applique pas. Dès lors on aurait $\bar{\sigma} = 0$ et $\bar{\varepsilon} = 0$ ³.

2.3 Modélisation d'une rhéologie élastique

Le caractère élastique d'un matériau est défini par deux propriétés importantes. La première est le caractère atemporel de la loi rhéologique de Hooke qui donne la propriété **instantanée** de la déformation élastique. La seconde est la propriété linéaire qui a permis d'écrire la relation générale (3.9) dont on a déduit un certain nombre de relations dans des hypothèses simplificatrices. Ces deux propriétés définissent entièrement le caractère élastique. Dans le cas d'un cristal isotrope et incompressible, la loi de Hooke est réduite à l'Éq. (3.24). Cette relation simple a des équivalents en mécanique et en électricité et on pourra alors faire un parallèle entre ces différents domaines.

En mécanique, on peut considérer la force appliquée sur un ressort de raideur k , $F = k(l - l_0) = kd$ où d est le déplacement de l'extrémité du ressort par rapport à sa position à vide l_0 . La norme de la force F joue le rôle de la contrainte déformant le système, d la réponse du système sous l'effet de cette force et k la capacité du système à se déformer sous l'effet d'une force. Il est très courant de représenter un module rhéologique élastique par un ressort dans un schéma comme sur la Figure 3.1 représentant une rhéologie élastique dans les cas compressible et incompressible.

On peut également faire un parallèle entre la rhéologie élastique incompressible et la loi de Joule en électricité $U = RI$. En effet, dans ce cas le courant électrique I joue le rôle de la contrainte, la tension U joue le rôle de la déformation car elle est elle-même la différence entre deux potentiels comme la déformation est la différence de deux positions et la conductance $G = 1/R$ joue le rôle du module élastique. Cette analogie sera notamment utile lorsqu'il s'agira de réaliser des associations de modules rhéologiques en série ou en parallèle (voir Section 3).

3. 0 est ici pris au sens du tenseur nulle.

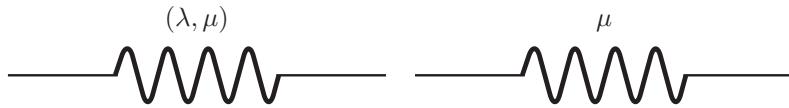


Fig. 3.1 – Représentation par un ressort d'un module rhéologique élastique compressible (à gauche) et incompressible (à droite). Les coefficients λ et μ sont les paramètres de Lamé.

2.4 Modélisation de la viscosité

Pour expliquer la dépendance temporelle de la déformation d'un milieu, il est nécessaire d'introduire des modules non-élastiques dans le modèle rhéologique pour obtenir des rhéologies à caractère non-instantanée. C'est par exemple le cas de la viscosité que l'on connaît généralement de la mécanique des fluides, et qui ici relie la contrainte à la dérivée temporelle de la déformation appelée **taux de déformation**. Si l'on exprime la force cisallante dans un écoulement laminaire selon (Ox), on obtient

$$F_x = \eta S_y \frac{dv_x}{dy} + \eta S_z \frac{dv_x}{dz}, \quad (3.25)$$

où F_x est la norme de la force dirigée dans le sens de l'écoulement, η est le coefficient de viscosité dynamique cisallante, S_y (resp. S_z) est la surface de contact entre deux feuillets de fluide, d'épaisseur infinitésimale et parallèles au plan (Oxz) (resp. (Oxy)), et $\frac{dv_x}{dy}$ (resp. $\frac{dv_x}{dz}$) est le taux de cisaillement c'est-à-dire le gradient de la vitesse des feuillets de fluide dans la direction perpendiculaire au plan (Oxz) (resp. (Oyz)) contenant le vecteur vitesse $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x$. Il est plus aisé d'écrire cette relation en terme de contrainte et de déformation matriciel

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (3.26)$$

où $\dot{\varepsilon}$ est le taux de déformation qui correspond ici au taux de cisaillement. S'il est commun de considérer la viscosité comme une force cisallante en mécanique des fluides, c'est parce qu'on néglige la force de volume qui lui est associée dans une approximation dite de Stokes, valable pour les milieux peu denses et que l'on propage généralement aux milieux denses. En toute généralité, il convient donc de considérer une viscosité de volume notée χ associée à la composante non cisallante de la force que l'on rajoute dans l'expression (3.26) de F_x : $(\chi S_i \frac{dv_i}{dx_i} + 2\eta S_x \frac{dv_x}{dx})$. Cette seconde viscosité intervient exactement de la même manière que le coefficient de Lamé λ dans la loi de Hooke (Ranalli, 1995; Landau & Lifchitz, 1988), donnant ainsi la relation linéaire complète pour un fluide isotrope

$$\sigma = \chi \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \text{Id} + 2\eta \dot{\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Le coefficient 2 devant le second terme provient du fait qu'une partie de la contrainte cisallante est contenue dans le premier terme tout comme une partie de la déformation élastique de volume était présente dans le premier terme de l'Éq. (3.12) pour le cas élastique. Pour cela nous préférerons généralement mettre un coefficient 2 dans l'Éq. (3.26) pour la cohérence des notations lorsque nous parlerons d'un cas visqueux exclusivement cisallant

$$\sigma = 2\eta \dot{\varepsilon}. \quad (3.28)$$

Nous pouvons désormais appliquer tout les résultats de la Section 2 au cas visqueux, notamment la séparation des termes compressibles et incompressibles en suivant le schéma des Éq. (3.19) et (3.20)

$$\begin{aligned} \sigma &= \chi \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \text{Id} + 2\eta \dot{\varepsilon}, \\ &= 3\chi \dot{\bar{\varepsilon}} + 2\eta (\dot{\bar{\varepsilon}} + \dot{\varepsilon}'), \\ &= (3\chi + 2\eta) \dot{\bar{\varepsilon}} + 2\eta \dot{\varepsilon}', \\ &= 3\xi \dot{\bar{\varepsilon}} + 2\eta \dot{\varepsilon}', \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec $\xi = \chi + 2/3\eta$ appelée seconde viscosité analogue du coefficient de compression K . On peut alors séparer les études des cas compressibles et incompressibles en séparant le tenseur des contraintes en sa partie volumétrique $\bar{\sigma}$ et sa partie cisaillante σ'

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\text{Id} = (3\chi + 2\eta)\dot{\varepsilon} \\ \sigma' = \sigma - \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma)\text{Id} = 2\eta\varepsilon' \end{cases}. \quad (3.30)$$

Tout comme on modélise la loi de Hooke par un ressort, nous modélisons mécaniquement un module visqueux par un piston dont la loi d'évolution est identique à celle d'un phénomène visqueux (Figure 3.2).

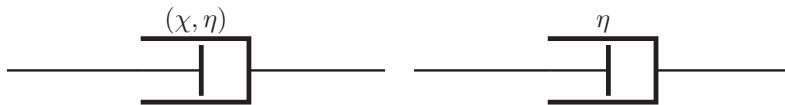


Fig. 3.2 – Représentation par un piston d'un module rhéologique visqueux compressible (à gauche) et incompressible (à droite). Les coefficients χ et η sont les viscosités respectivement de volume et dynamique du matériau.

Dans la pratique, il est particulièrement difficile de mesurer expérimentalement la valeur de la viscosité de volume. Aussi, et ce malgré le fait que les conditions d'applications de l'hypothèse de Stokes ne sont pas forcément réunies, il est commun que ce terme soit négligé permettant alors de décrire le fluide comme un fluide newtonien ([Ranalli, 1995](#)).

3 Association de plusieurs modèles rhéologiques

Pour expliquer le comportement de certains matériaux il faut parfois que l'on couple plusieurs modèles simples de rhéologie afin de représenter au mieux les observations. Si l'on utilise les analogies faites avec l'électricité, cela signifie que l'on peut associer des modèles rhéologiques en série et/ou en parallèle. Nous présentons les résultats pour des associations de modèles rhéologiques incompressibles, bien qu'ils soient également valable pour des modèles compressibles. Chacune des parties compressible et incompressible d'un modèle possède donc son propre schéma mécanique équivalent, de sorte que l'on peut les analyser indépendamment l'un de l'autre.

Dans la Figure 3.3, on représente une association de deux modèles élastiques incompressibles de coefficients μ_1 et μ_2 en série et en parallèle. On détermine alors le coefficient élastique équivalent pour chaque cas en se rappelant de l'analogie avec l'électricité : en parallèle, on additionne les conductances donc $\mu = \mu_1 + \mu_2$, tandis qu'en série on additionne les inverses des conductances donc $\mu = \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$. Plus généralement on respectera toujours les règles d'additivité/égalité des contraintes et déformations pour chaque association de modèles qui sont résumées dans le Tableau. 3.1.

Ici nous avons couplé uniquement des modèles élastiques ce qui n'a *a priori* aucun intérêt en pratique puisque ces associations sont toujours équivalentes à un modèle élastique dont on a simplement changé la valeur des coefficients. L'intérêt du couplage est de faire interagir deux (ou plusieurs) modèles rhéologiques de nature différente afin de donner au matériau les propriétés spécifiques issues de chacun des modèles utilisés. Nous allons voir dans les sections qui suivent que l'association de modèles rhéologiques élastiques et visqueux permet d'établir une équation différentielle temporelle régissant la déformation dans le matériau, qu'il s'agira de résoudre. Une exposition de plusieurs autres modèles visco-élastiques est donnée dans [Spada \(2008\)](#).

	contraintes (σ)	déformations (ε)
en série	égales	sommées
en parallèle	sommées	égales

Tab. 3.1 – Règles d'additivité ou d'égalité des contraintes et des déformations des modèles associés en série ou en parallèle.

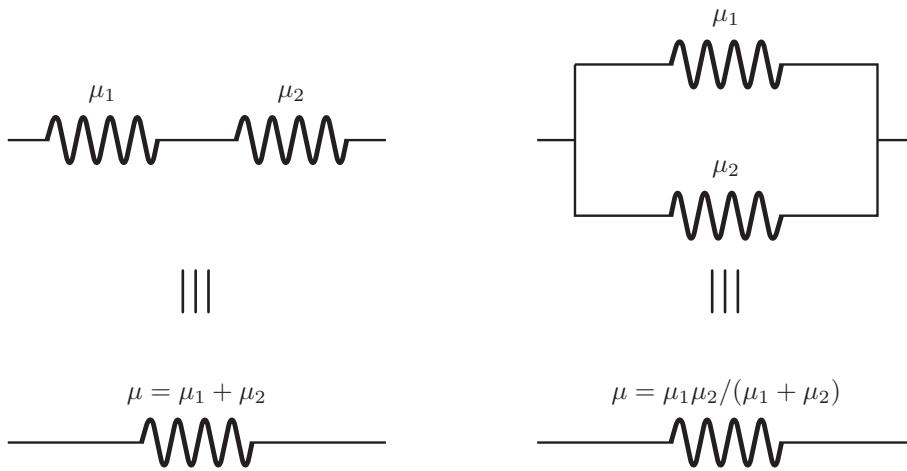


Fig. 3.3 – Modèles élastiques de coefficients μ_1 et μ_2 installés en série (à gauche) et en parallèle (à droite) ainsi que leur modules équivalents en bas.

3.1 Principale de correspondance

L’association de plusieurs modèles rhéologiques linéaires (comme c’est le cas de l’élasticité et de la viscosité), est soumis à la résolution d’une équation différentielle, elle aussi linéaire. La résolution de ce type d’équations différentielles est facilitée si l’on passe dans le domaine fréquentiel, car se réduit à une équation polynomiale en la fréquence. La résolution de cette équation fréquentielle a amené à émettre ce qu’on appelle le **principe de correspondance**. Ce principe énonce simplement la capacité que nous avons d’écrire la relation contrainte-déformation régissant n’importe quelle rhéologie linéaire d’un matériau isotrope, dans le domaine fréquentiel, sous la forme de la loi de Hooke dite « généralisée »

$$\tilde{\sigma} = \lambda(\omega) \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + 2\mu(\omega)\tilde{\varepsilon}. \quad (3.31)$$

Les tildes symbolisent le passage des tenseurs dans le domaine fréquentiel dont la variable courante est ω . Ce principe a été introduit pour la première fois par [Lee \(1955\)](#) et [Lee et al. \(1959\)](#) en utilisant la transformée de Laplace. Nous utiliserons plutôt la transformée de Fourier (TF) car elle est plus simple à manipuler mathématiquement malgré le fait qu’elle possède *a priori* un champ d’application plus restreint notamment à cause des difficultés à traiter les signaux à supports temporels bornés ([Tobie et al., 2005](#)). Néanmoins, le principe de correspondance utilisant la TF se retrouve dans certaines études récentes portant sur le calcul des déformations visco-élastiques saisonnières ([Chanard et al., 2018a](#)) ou à long terme ([Caron et al., 2017](#)). Ce changement d’outils dans le principe de correspondance, sera une des contributions majeures de ce travail sur la détermination des déformations visco-élastiques engendrées par les modèles linéaires que l’on présente dans la suite.

3.2 Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est défini par une association série d’un modèle élastique (E) et d’un modèle visqueux (V). C’est l’association visco-élastique la plus simple et elle est représentée sur la Figure 3.4 pour le cas le plus général. C’est un modèle encore largement employé dans les modèles géophysiques ([Peltier, 1974](#); [Wu & Peltier, 1982](#); [Vermeersen et al., 1996](#); [Spada, 2013](#)).



Fig. 3.4 – Modèle rhéologique de Maxwell représenté par l’association série d’un modèle élastique compressible de coefficients (λ, μ) et d’un modèle visqueux compressible de coefficients (χ, η) .

Les parties compressible et incompressible de ce modèle peuvent être résolues indépendamment. On s’intéresse d’abord à la partie incompressible. Grâce aux règles établies dans le Tableau 3.1, nous pouvons écrire

les grandeurs globales σ' et ε' (valables pour la partie incompressible uniquement) en fonction des grandeurs dans chaque modèle constitutif

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma' = \sigma'_E = \sigma'_V \\ \varepsilon' = \varepsilon'_E + \varepsilon'_V \\ \text{et} \\ \sigma'_E = 2\mu\varepsilon'_E \\ \sigma'_V = 2\eta\dot{\varepsilon}'_V \end{array} \right. . \quad (3.32)$$

En dérivant par rapport au temps la relation liant les déformations visqueuses et élastiques, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}' &= \dot{\varepsilon}'_E + \dot{\varepsilon}'_V, \\ &= \frac{\dot{\sigma}'_E}{2\mu} + \frac{\sigma'_V}{2\eta}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

puis en utilisant la relation des contraintes, on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{\dot{\sigma}'}{2\mu} + \frac{\sigma'}{2\eta} = \dot{\varepsilon}'. \quad (3.34)$$

Pour résoudre une équation différentielle de la sorte, on peut utiliser la transformée de Fourier (TF ou FT dans la suite). On passe alors dans le domaine fréquentiel tel que pour une fonction f , on note \tilde{f} sa transformée de Fourier définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} d\omega \end{array} \right., \quad (3.35)$$

où ω est une pulsation. Écrire l'équation différentielle (3.34) dans le domaine fréquentiel permet de la linéariser et de donner ainsi une relation polynomiale entre les transformées de Fourier des tenseurs σ et ε

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}' \left(\frac{i\omega}{2\mu} + \frac{1}{2\eta} \right) &= i\omega \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' \left(i\omega \frac{2\eta}{2\mu} + 1 \right) &= i\omega 2\eta \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' &= \frac{i\omega 2\eta}{\left(i\omega \frac{2\eta}{2\mu} + 1 \right)} \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' &= 2\mu \frac{\frac{i\omega 2\eta}{2\mu}}{\left(i\omega \frac{2\eta}{2\mu} + 1 \right)} \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' &= 2\mu \left[1 - \frac{1}{\left(i\omega \frac{2\eta}{\mu} + 1 \right)} \right] \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' &= 2\mu \left[1 - \frac{1}{\left(i\frac{\omega}{\omega'_m} + 1 \right)} \right] \tilde{\varepsilon}', \end{aligned} \quad (3.36)$$

où l'on définit la pulsation caractéristique $\omega'_m = \mu/\eta$. Dans le domaine fréquentiel on a donc une relation linéaire entre les contraintes et les déformations avec un terme élastique (le 1 dans le crochet) et un terme supplémentaire que l'on note $m'(\omega)$ dû à la présence du piston et à son interaction avec le ressort

$$\tilde{\sigma}' = 2\mu \left[1 - \frac{1}{\left(i \frac{\omega}{\omega_m} + 1 \right)} \right] \tilde{\varepsilon}' = 2\mu [1 - m'(\omega)] \tilde{\varepsilon}'. \quad (3.37)$$

Prenons la limite sans viscosité $\eta \rightarrow +\infty$ c'est à dire quand le piston se comporte comme un fil dans l'analogie électrique et où la contrainte est totalement transmise au module élastique. Alors $m'(\omega) \rightarrow 0$ et on retrouve la relation pour un module élastique incompressible $\sigma' = 2\mu\varepsilon'$. Si on prend par contre la limite du fluide parfait avec $\eta \rightarrow 0$ alors le piston se comporte comme un interrupteur ouvert et la contrainte cisailante ne peut être transmise au travers du fluide : on a bien $m'(\omega) \rightarrow 1$ et donc $\sigma' = 0$. Dans ce cas, le déplacement peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. La dépendance de m' en ω est celle d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω'_m . Dès lors, on retrouve que lorsque ω tend vers l'infini, seule la contrainte élastique est transmise ($m'(\omega) = 0$) alors que lorsque ω tend vers 0, la contrainte cisailante s'annule ($m'(\omega) = 1$) car le système a le temps de retrouver l'équilibre à chaque instant. Le déphasage maximal est atteint en $\omega/\omega_m = 1$.

Pour la partie compressible, la résolution est tout à fait semblable. Il suffit de remplacer les variables primées par les variables barrées, le coefficient 2μ par $(3\lambda + 2\mu)$ et le coefficient 2η par $(3\chi + 2\eta)$ car on a

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_E = \bar{\sigma}_V \\ \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_E + \bar{\varepsilon}_V \\ \text{et} \\ \bar{\sigma}_E = (3\lambda + 2\mu)\bar{\varepsilon}_E \\ \bar{\sigma}_V = (3\chi + 2\eta)\dot{\bar{\varepsilon}}_V \end{cases}. \quad (3.38)$$

On obtient donc aussi une équation différentielle de la même forme que l'Éq. (3.34) dont la solution dans l'espace de Fourier s'écrit

$$\tilde{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) [1 - \bar{m}(\omega)] \tilde{\varepsilon}, \quad (3.39)$$

où l'on définit $\bar{m}(\omega) = 1 / (i\omega/\bar{\omega}_m + 1)$ et $\bar{\omega}_m = (\lambda + 2/3\mu)/(\chi + 2/3\eta) = K/\xi$. Si l'on recombine les solutions compressibles et incompressibles que l'on vient d'obtenir, on peut donner la contrainte globale en fonction de la déformation telle que

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}', \\ &= (3\lambda + 2\mu) [1 - \bar{m}(\omega)] \tilde{\varepsilon} + 2\mu [1 - m'(\omega)] \tilde{\varepsilon}', \\ &= (3\lambda + 2\mu) [1 - \bar{m}(\omega)] \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + 2\mu [1 - m'(\omega)] \left(\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} \right), \\ &= (3\lambda + 2\mu) [1 - \bar{m}(\omega)] - 2\mu [1 - m'(\omega)] \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + 2\mu [1 - m'(\omega)] \tilde{\varepsilon}, \\ &= \underbrace{\lambda [1 - \bar{m}(\omega)] + 2/3\mu [m'(\omega) - \bar{m}(\omega)]}_{\lambda_m(\omega)} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + \underbrace{2\mu [1 - m'(\omega)]}_{2\mu_m(\omega)} \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

On retrouve alors la forme générale de la loi de Hooke dans le domaine fréquentiel où l'on a simplement changé les coefficients λ et μ par des fonctions de ω qui dépendent des paramètres du modèle rhéologique. C'est la notion de **principe de correspondance** que nous avons vu dans la Section 3.1. Cependant, étant donné ce qui a été dit dans la Section 2.4, la viscosité de volume χ est négligée dans la grande majorité des cas. Le modèle visqueux est donc réduit simplement à sa partie incompressible de sorte que $\bar{m}(\omega) = 0$: l'équation compressible se réduit à l'équation élastique $\tilde{\sigma} = (3\lambda + 2\mu)\tilde{\varepsilon}$.

On peut déterminer la solution dans le domaine temporel en prenant la transformée de Fourier inverse des Éqs. (3.37) et (3.39). Par linéarité de la transformée de Fourier, on aura alors la somme de deux fonctions temporelles telles que

$$\begin{cases} \text{TF}^{-1}(1) = \sqrt{2\pi}\delta(t) \\ \text{TF}^{-1}\left(\frac{1}{\left(i\frac{\omega}{\omega'_m} + 1\right)}\right) = \sqrt{2\pi}\omega'_m \mathcal{H}(t)e^{-\omega'_m t}, \end{cases} \quad (3.41)$$

où $\mathcal{H}(t)$ est la fonction de Heavyside ou fonction « marche » valant 0 pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$. On obtient donc

$$\begin{cases} \sigma'(t) = \sqrt{2\pi} 2\mu \left[\delta(t) - \omega'_m \mathcal{H}(t)e^{-\omega'_m t} \right] \varepsilon'(t) \\ \bar{\sigma}(t) = \sqrt{2\pi} (3\lambda + 2\mu) \left[\delta(t) - \bar{\omega}_m \mathcal{H}(t)e^{-\bar{\omega}_m t} \right] \bar{\varepsilon}(t) \end{cases}. \quad (3.42)$$

3.3 Modèle de Kelvin

Le modèle de Kelvin est défini par une association en parallèle d'un modèle élastique (E) et d'un modèle visqueux (V). Cette association est représentée sur la Figure 3.5 pour le cas le plus général.

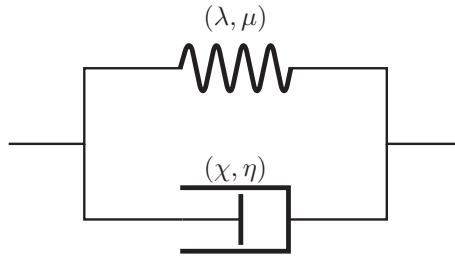


Fig. 3.5 – Modèle rhéologique de Kelvin représenté par l'association en parallèle d'un modèle élastique (λ, μ) et d'un modèle visqueux (χ, η) .

Là encore, on peut résoudre indépendamment les parties compressible et incompressible. Les deux parties ayant des modèles rhéologiques similaires, on résoudra pour l'une des deux puis nous donnerons simplement le résultat pour l'autre. Pour la partie incompressible on a pour une association parallèle (voir Tableau 3.1)

$$\begin{cases} \sigma' = \sigma'_E + \sigma'_V \\ \varepsilon' = \varepsilon'_E = \varepsilon'_V \\ \text{et} \\ \sigma'_E = 2\mu\varepsilon'_E \\ \sigma'_V = 2\eta\varepsilon'_V \end{cases}. \quad (3.43)$$

En remplaçant les expressions des contraintes dans la première équation on obtient l'équation différentielle pour le modèle de Kelvin

$$\sigma' = 2\mu\varepsilon' + 2\eta\dot{\varepsilon}' . \quad (3.44)$$

Nous passons alors encore une fois dans le domaine fréquentiel pour obtenir une relation linéaire simple entre la transformée de Fourier de σ' et celle de ε' .

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}' &= [2\mu + i\omega 2\eta] \tilde{\varepsilon}', \\ &= 2\mu \left[1 + i\omega \frac{2\eta}{2\mu} \right] \tilde{\varepsilon}', \\ &= 2\mu \left[1 + \frac{i\omega}{\omega'_k} \right] \tilde{\varepsilon}', \\ &= 2\mu [1 + k'(\omega)] \tilde{\varepsilon}', \end{aligned} \quad (3.45)$$

où nous avons introduit le paramètre $\omega'_k = \frac{\mu}{\eta}$ et la fonction $k'(\omega) = i\omega/\omega'_k$. Pour la partie compressible on obtient un résultat similaire en appliquant la même démarche

$$\tilde{\sigma} = (3\lambda + 2\mu) [1 + \bar{k}(\omega)] \tilde{\varepsilon}, \quad (3.46)$$

avec $\bar{\omega}_k = (\lambda + 2/3\mu)/(\chi + 2/3\eta) = K/\xi$ et $\bar{k}(\omega) = i\omega/\bar{\omega}_k$. Les modules étant en parallèle, le cas limite où la contrainte est intégralement transmise au module élastique est atteint lorsque le module visqueux se comporte dans la limite du fluide parfait tel que $\eta \rightarrow 0$ (interrupteur ouvert). On obtient alors $k'(\omega) \rightarrow 0$ et $\sigma' = 2\mu\varepsilon'$. À l'inverse, si $\eta \rightarrow +\infty$, le module visqueux se comporte comme un fil c'est-à-dire en limite infiniment rigide : même une contrainte infinie ne suffit pas à générer le moindre déplacement.

Si l'on combine désormais les deux parties entre elles pour exprimer la contrainte globale en fonction de la déformation, on obtient les fonctions $\lambda_k(\omega)$ et $\mu_k(\omega)$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}', \\ &= (3\lambda + 2\mu) [1 + \bar{k}(\omega)] \tilde{\varepsilon} + 2\mu [1 + k'(\omega)] \tilde{\varepsilon}', \\ &= (3\lambda + 2\mu) [1 + \bar{k}(\omega)] \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + 2\mu [1 + k'(\omega)] \left(\tilde{\varepsilon} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} \right), \\ &= \underbrace{\lambda [1 + \bar{k}(\omega)] + 2/3\mu [\bar{k}(\omega) - k'(\omega)]}_{\lambda_k(\omega)} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + \underbrace{2\mu [1 + k'(\omega)] \tilde{\varepsilon}}_{2\mu_k(\omega)}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les fonctions $\lambda_k(\omega)$ et $\mu_k(\omega)$ permettent alors d'exprimer la relation contrainte-déformation fréquentielle sous la forme de la loi de Hooke grâce au principe d'équivalence.

3.4 Modèle de Burgers

On peut se pencher sur un modèle plus complexe appelé modèle de Burgers, dans lequel on associe un modèle de Maxwell et un modèle de Kelvin en série. On adoptera les notations de la Figure 3.6 dans la suite. On prend cette fois-ci uniquement une partie élastique compressible, le reste étant composé de modèles incompressibles.

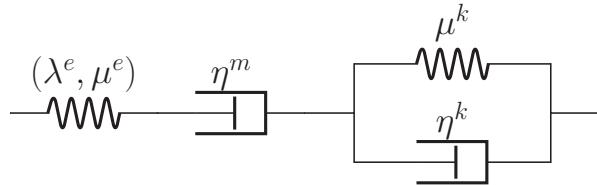


Fig. 3.6 – Modèle rhéologique de Burgers représenté par l'association série d'un modèle de Maxwell semi-compressible (λ^e, μ^e) ; (η^m) et d'un modèle de Kelvin incompressible (μ^k) ; (η^k) .

On obtient directement une relation élastique pour la partie compressible puisqu'il n'y a qu'elle qui est présente : $\bar{\sigma} = (3\lambda^e + 2\mu^e)\bar{\varepsilon}$. En revanche la partie incompressible est plus longue à résoudre mais sans difficultés. Il suffit d'appliquer les règles du Tableau 3.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma' = \sigma'^m_E = \sigma'^m_V = \sigma'^k = \sigma'^k_E + \sigma'^k_V \\ \varepsilon' = \varepsilon'^m_E + \varepsilon'^m_V + \varepsilon'^k \\ \varepsilon'^k = \varepsilon'^k_E = \varepsilon'^k_V \\ \text{et} \\ \sigma'^m_E = 2\mu^e \varepsilon'^m_E \\ \sigma'^m_V = 2\eta^m \dot{\varepsilon}'^m_V \\ \sigma'^k_E = 2\mu^k \varepsilon'^k_E \\ \sigma'^k_V = 2\eta^k \dot{\varepsilon}'^k_V \end{array} \right. . \quad (3.48)$$

On dérive alors deux fois temporellement la déformation et on utilise ensuite toutes les relations disponibles

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varepsilon}' &= \dot{\varepsilon}'_E + \dot{\varepsilon}'_V + \dot{\varepsilon}'^k, \\
 &= \frac{\ddot{\sigma}'_E}{2\mu^e} + \frac{\dot{\sigma}'_V}{2\eta^m} + \frac{\dot{\sigma}'^k}{2\eta^k}, \\
 &= \frac{\ddot{\sigma}'}{2\mu^e} + \frac{\dot{\sigma}'}{2\eta^m} + \frac{\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}'^k}{2\eta^k}, \\
 &= \frac{\ddot{\sigma}'}{2\mu^e} + \dot{\sigma}' \left(\frac{1}{2\eta^m} + \frac{1}{2\eta^k} \right) - \frac{2\mu^k}{2\eta^k} (\dot{\varepsilon}' - \dot{\varepsilon}'_E - \dot{\varepsilon}'_V), \\
 &= \frac{\ddot{\sigma}'}{2\mu^e} + \dot{\sigma}' \left(\frac{1}{2\eta^m} + \frac{1}{2\eta^k} \right) - \frac{2\mu^k}{2\eta^k} \left(\dot{\varepsilon}' - \frac{\dot{\sigma}'}{2\mu^e} - \frac{\sigma'}{2\eta^m} \right),
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

soit

$$\ddot{\sigma}' + \dot{\sigma}' \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) + \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m} \sigma' = 2\mu^e \ddot{\varepsilon}' + \frac{2\mu^e \mu^k}{\eta^k} \dot{\varepsilon}'. \tag{3.50}$$

Cette équation différentielle du second ordre peut être linéarisée en utilisant la transformée de Fourier des fonctions σ' et ε' .

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \tilde{\sigma}' + i\omega \tilde{\sigma}' \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) + \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m} \tilde{\sigma}' &= -\omega^2 2\mu^e \tilde{\varepsilon}' + i\omega \frac{2\mu^e \mu^k}{\eta^k} \tilde{\varepsilon}', \\
 \tilde{\sigma}' \left[-\omega^2 + i\omega \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) + \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m} \right] &= 2\mu^e \left[-\omega^2 + i\omega \frac{\mu^k}{\eta^k} \right] \tilde{\varepsilon}', \\
 \tilde{\sigma}' &= 2\mu^e \frac{\omega^2 - i\omega \frac{\mu^k}{\eta^k}}{\omega^2 - i\omega \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) - \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m}} \tilde{\varepsilon}',
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Plutôt que d'exprimer le résultat sous la forme $\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 + b'(\omega)] \tilde{\varepsilon}'$, nous allons le décomposer en utilisant les fonctions définies dans les modèles de Maxwell et de Kelvin. Nous allons isoler dans un premier temps le terme correspondant au modèle de Maxwell

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}' &= 2\mu^e \underbrace{\frac{i\omega \eta^m / \mu^e}{i\omega \eta^m / \mu^e + 1}}_{[1 - m'(\omega)]} \left[\frac{\left(\omega^2 - i\omega \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega \frac{\eta^m}{\mu^e} + 1 \right)}{\left(\omega^2 - i\omega \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) - \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m} \right) \left(i\omega \frac{\eta^m}{\mu^e} \right)} \right] \tilde{\varepsilon}', \\
 \tilde{\sigma}' &= 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{\left(-i\omega - \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega + \frac{\mu^e}{\eta^m} \right)}{\omega^2 - i\omega \left(\frac{\mu^e}{\eta^m} + \frac{\mu^e}{\eta^k} + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) - \frac{\mu^k \mu^e}{\eta^k \eta^m}} \right] \tilde{\varepsilon}', \\
 \tilde{\sigma}' &= 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{\left(i\omega + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega + \frac{\mu^e}{\eta^m} \right)}{\left(i\omega + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega + \frac{\mu^e}{\eta^m} \right) + i\omega \frac{\mu^e}{\eta^k}} \right] \tilde{\varepsilon},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}' &= 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \underbrace{\frac{1}{1 + \left[\frac{\frac{i\omega \mu^e}{\eta^k}}{\left(i\omega + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega + \frac{\mu^e}{\eta^m} \right)} \right]}_{b(\omega)}} \tilde{\varepsilon}', \\ \tilde{\sigma}' &= 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right] \tilde{\varepsilon}'.\end{aligned}\quad (3.52)$$

On arrive donc à un produit de deux termes entre crochets correspondant respectivement au terme de Maxwell et au terme dû à l'ajout du modèle de Kelvin. Nous allons faire une étude asymptotique pour vérifier les comportements aux limites du modèle de Burgers. En premier lieu, on essaye de retrouver le modèle de Maxwell seul lorsque l'on court-circuite le modèle de Kelvin. Pour cela nous avons vu dans la partie précédente en considérant $\eta^k \rightarrow +\infty$ que le piston tend alors vers le comportement d'un fil. Dès lors, toute la contrainte est transmise au modèle de Maxwell et la fonction $b(\omega) \rightarrow 0$. On obtient bien la relation de la Section 3.2 : $\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \tilde{\varepsilon}'$. De même si l'on fait tendre la viscosité du piston du modèle de Maxwell vers l'infini (dans la limite d'un fil), on obtient un modèle dit de Kelvin généralisé avec un ressort en série avec un modèle de Kelvin simple ayant pour expression linéarisée

$$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e \frac{i\omega + \mu^k/\eta^k}{i\omega + \left(\frac{\mu^e + \mu^k}{\eta^k} \right)} \tilde{\varepsilon}' = \frac{i\omega + \mu^k/\eta^k}{\frac{i\omega}{2\mu^e} + \frac{1}{2\eta^k} + \frac{\mu^k}{2\mu^e \eta^k}} \tilde{\varepsilon}'. \quad (3.53)$$

La dernière expression est alors propice à effectuer un dernier cas limite où l'on enlève en plus le ressort de Maxwell pour ne garder que le modèle de Kelvin simple. On prend donc $\mu^e \rightarrow +\infty$ pour que le ressort se comporte comme un fil et on obtient alors dans l'expression précédente

$$\tilde{\sigma}' \underset{\mu^e \rightarrow +\infty}{=} \frac{i\omega + \mu^k/\eta^k}{\frac{1}{2\eta^k}} \tilde{\varepsilon}' = [2\eta^k i\omega + 2\mu^k] \tilde{\varepsilon}' = 2\mu^k \left[1 + i\omega \frac{2\eta^k}{2\mu^k} \right] \tilde{\varepsilon}' = 2\mu^k [1 + k'(\omega)] \tilde{\varepsilon}', \quad (3.54)$$

où l'on retrouve bien l'équation de la Section 3.3. Enfin, si on prend $\eta^m, \eta^k \rightarrow +\infty$ ou $\eta^m, \mu^k \rightarrow +\infty$ dans l'Eq. (3.52), on retrouve bien le modèle élastique pur.

On peut encore une fois rassembler les termes incompressibles et compressibles afin d'obtenir une formulation linéaire du problème de Burgers total

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\left(\lambda^e + \frac{2}{3} \mu^e \left[\frac{m'(\omega) + b(\omega)}{1 + b(\omega)} \right] \right)}_{\lambda_b(\omega)} \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \text{Id} + \underbrace{2\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right]}_{2\mu_b(\omega)} \tilde{\varepsilon}, \quad (3.55)$$

et obtenir les fonctions de Lamé $\lambda_b(\omega)$ et $\mu_b(\omega)$ du modèle de Burgers dans le cadre du principe de correspondance.

3.5 Récapitulatif

Le Tableau 3.2 récapitule les résultats de cette partie en donnant l'expression des fonctions $m(\omega)$, $b(\omega)$, $\lambda(\omega)$ et $\mu(\omega)$ pour les rhéologies de Maxwell, de Kelvin et de Burgers. Attention toutefois, ces modèles ne sont compressibles que sur la composante élastique principale (λ^e, μ^e) ce qui diffèrent légèrement des résultats obtenus dans les Sections 3.2 et 3.3.

Modèle rhéologique	Maxwell	Kelvin (λ^e, μ^e)	Burgers
Relation fréquentielle	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \tilde{\varepsilon}'$	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 + k'(\omega)] \tilde{\varepsilon}'$	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right] \tilde{\varepsilon}'$
Fonction	$m'(\omega) = \frac{1}{\left(i\frac{\omega\eta^m}{\mu^e} + 1 \right)}$	$k'(\omega) = i\frac{\omega\eta^k}{\mu^e}$	$b(\omega) = \frac{i\omega\mu^m/\eta^k}{\left(i\omega + \frac{\mu^k}{\eta^k} \right) \left(i\omega + \frac{\mu^m}{\eta^m} \right)}$
$\lambda(\omega)$	$\lambda^e + \frac{2}{3}\mu^e m'(\omega)$	$\lambda^e - \frac{2}{3}\mu^e k'(\omega)$	$\lambda^e + \frac{2}{3}\mu^e \left[\frac{m'(\omega) + b(\omega)}{1 + b(\omega)} \right]$
$\mu(\omega)$	$\mu^e [1 - m'(\omega)]$	$\mu^e [1 + k'(\omega)]$	$\mu^e [1 - m'(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right]$

Tab. 3.2 – Tableau récapitulatif des différents modèles rhéologiques visco-élastiques traités dans cette partie avec une base incompressible et une partie compressible uniquement sur le module élastique principal.

Quatrième Partie

Détermination de la déformation visco-élastique

Sommaire

1	Théorie de la gravito-élasticité pour une Terre SNREI	82
1.1	Équations constitutives de la gravito-élasticité	82
1.2	Système perturbé	84
1.3	Décomposition en harmoniques sphériques	86
1.4	Conditions aux limites	89
1.5	Choix du modèle de Terre	91
1.6	Résolution pour une Terre SNREI non homogène avec noyau liquide	94
1.7	Remarques complémentaires sur l'intégration numérique	99
2	Nombres de Love	100
2.1	Définition	100
2.2	Cas élastique	101
2.3	Cas visco-élastique (basé sur Michel & Boy (2021))	102
3	Déformation visco-élastique utilisant la TF (basé sur Michel & Boy (2021))	106
3.1	Computation of viscoelastic deformation with FT	106
3.2	Applications	107
3.3	Discussion	117
3.4	Résumé	118
4	Déformation locale avec la fonction de Green	119
4.1	Pour une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α	119
4.2	Pour une masse de Dirac	120
4.3	Calcul numérique de la fonction de Green	121

Nous établissons ici la théorie permettant de modéliser les déformations de la Terre solide sous l'effet d'une perturbation quelconque incluant les effets de surcharge. Dans cette modélisation, nous considérerons la Terre comme étant constituée de couches ayant chacune certaines propriétés rhéologiques décrites par les modèles linéaires que nous avons développés dans la Partie III. Nous avons donc dû adapter la théorie gravito-élastique de [Alterman et al. \(1959\)](#) de sorte à pouvoir décrire les déformations visco-élastiques de certaines couches de la Terre engendrées par des perturbations agissant sur de longues durées.

Les résultats de cette partie ont été publiés dans l'article [Michel & Boy \(2021\)](#) que l'on a reporté en annexe. Néanmoins, nous avons fait le choix d'ajouter des explications et quelques résultats en plus de ce qui est présenté dans cet article, afin d'en permettre une meilleure compréhension. Nous avons donc choisi d'inclure certaines parties de l'article (directement en anglais) au sein des différentes sections qui suivent, car elles s'inscrivent dans la suite logique du propos tenu.

1 Théorie de la gravito-élasticité pour une Terre SNREI

On établit en premier lieu la déformation d'une Terre sphérique, statique (hypothèse de non-rotation), élastique et isotrope (SNREI : Spherical Non-Rotating Elastic Isotropic Earth) sous l'effet d'une perturbation. Cette perturbation peut prendre diverses formes : une contrainte en surface, un potentiel extérieur ou bien les deux à la fois. Elle induit donc une redistribution des masses internes qui dépend de la rhéologie de la Terre. C'est pourquoi nous utilisons une théorie mêlant la gravitation et la théorie de l'élasticité de la Partie III pour déterminer la déformation engendrée par la perturbation ([Longman, 1962, 1963](#)).

1.1 Équations constitutives de la gravito-élasticité

Nous exposons d'abord les lois de conservation du système gravito-élastique dans le but d'établir un système d'équation complet permettant la résolution du problème. On notera ρ^e la masse volumique, \mathbf{v} la vitesse, \mathbf{g} le champ gravitationnel et Φ le potentiel gravitationnel défini par la convention usuelle en géophysique $\mathbf{g} = \nabla\Phi$.

1.1.1 Conservation de la masse

Pour démontrer l'équation de conservation de la masse, on utilise l'équivalence entre la description lagrangienne et eulérienne de la déformation d'un milieu continu (fluide ou solide). La première décompose le matériau remplissant l'espace en *points matériels* ou particules p , pour lesquelles on mesure les grandeurs physiques locales le long de leurs trajectoires. Ces grandeurs dépendent donc à la fois des variations locales mais également des variations liées au mouvement de la particule. La seconde décompose l'espace lui-même en *points géométriques* \mathbf{x} non liés aux points matériels, et fixes par rapport à un observateur extérieur au repos. Le milieu étant continu en chaque instant, il y a donc toujours un point matériel p en un unique point de l'espace \mathbf{x} ou de manière équivalente un point \mathbf{x} est occupé par un unique point p . Cette bijection permet de répertorier les particules p autrement que par un indice, mais par exemple par leur position géométrique à un instant donné. On utilise souvent l'instant initial de sorte que p corresponde à une position géométrique unique \mathbf{x}_{0p} . Si on s'intéresse à la variation de la grandeur physique « densité », l'équivalence des deux descriptions permet d'écrire $\rho^e(\mathbf{x}, t) = \rho^l(\mathbf{x}_{0p}, t)$, où les indices e et l décrivent respectivement les descriptions eulériennes et lagrangiennes. Nous définissons ensuite le Jacobien $J(t)$ comme le déterminant de la transformation qui relie le volume $V_p(t)$ d'une particule p de matériau à un instant quelconque au volume V_{0p} de cette particule à l'instant initial. On a donc $J(t) = \left| \frac{\partial \mathbf{x}_i(t)}{\partial \mathbf{x}_{0p,j}} \right|$. En utilisant le résultat démontré dans l'Éq. (3.18) sur la variation relative de volume, on peut donc écrire $\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \mathbf{v}$ où $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$. Étant données toutes ces considérations, nous pouvons écrire la conservation de la masse d'un point de vue eulérien à un instant t quelconque sous la forme :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_p(t)} \rho^e(\mathbf{x}, t) dV,$$

où $V_p(t)$ est le volume occupé par la particule p à l'instant t . L'échange des opérations dérivée et intégrale n'est justifié que si le volume d'intégration ne dépend pas du temps. Pour remédier à cela, nous pouvons utiliser l'équivalence entre les deux descriptions pour effectuer la transformation (changement de variables) entre les variables \mathbf{x} et \mathbf{x}_{0p} au moyen du jacobien J telle que

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_p(t)} \rho^e(\mathbf{x}, t) dV, \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_{0p}} \rho^l(\mathbf{x}_{0p}, t) J dV_{0p}, \\ &= \int_{V_{0p}} \left(\frac{\partial \rho^l}{\partial t}(\mathbf{x}_{0p}, t) J + \rho^l(\mathbf{x}_{0p}, t) \frac{\partial J}{\partial t} \right) dV_{0p}, \\ &= \int_{V_{0p}} \left(\frac{d\rho^l}{dt}(\mathbf{x}_{0p}, t) J + \rho^l(\mathbf{x}_{0p}, t) J \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV_{0p}, \\ &= \int_{V_p(t)} \left(\frac{d\rho^e}{dt}(\mathbf{x}, t) + \rho^e(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV, \end{aligned} \quad (4.1)$$

On obtient donc l'équation locale de conservation de la masse dans la description eulérienne en annulant le terme sous l'intégrale

$$\frac{d\rho^e}{dt} + \rho^e \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (4.2)$$

Le changement de variable correspondant au changement de point de vue entre description eulérienne et lagrangienne fait l'objet d'un théorème connu sous le nom de *théorème de transport de Reynolds* permettant d'échanger la dérivée et l'intégrale dans une formulation eulérienne au prix de l'ajout d'un terme supplémentaire lié au transport de la quantité eulérienne le long de la trajectoire physique de la particule.

1.1.2 Conservation de l'impulsion

Comme précédemment, on considère un volume $V_p(t)$ d'une particule p de matériau. En ne considérant que la force de gravité et les contraintes appliquées sur la surface $S_p(t)$ délimitant le volume $V_p(t)$ modélisées par le tenseur σ , le principe fondamental de la dynamique donne pour les variables eulériennes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{v} dV &= \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{g} dV + \oint_{S_p(t)} \sigma \cdot \mathbf{d}\mathbf{S}, \\ \frac{d}{dt} \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{v} dV &= \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{g} dV + \int_{V_p(t)} \nabla \cdot \sigma dV, \\ \int_{V_p(t)} \left[\frac{d(\rho^e \mathbf{v})}{dt} + (\rho^e \mathbf{v}) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV &= \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{g} dV + \int_{V_p(t)} \nabla \cdot \sigma dV, \\ \int_{V_p(t)} \left[\underbrace{\left(\frac{d\rho^e}{dt} + \rho^e \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0} \mathbf{v} + \rho^e \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] dV &= \int_{V_p(t)} \rho^e \mathbf{g} dV + \int_{V_p(t)} \nabla \cdot \sigma dV. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nous avons successivement utilisé le théorème de transport de Reynolds défini précédemment puis l'équation de conservation de la masse. Le terme $\nabla \cdot \sigma$ est un vecteur appelé divergence du tenseur σ et qui s'écrit pour la coordonnée i : $(\nabla \cdot \sigma)_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$. L'Éq. (4.3) étant valable pour un volume quelconque, on en déduit l'équation locale de conservation de l'impulsion fournissant trois équations scalaires au système

$$\rho^e \frac{dv_i}{dt} = \rho^e g_i + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (4.4)$$

1.1.3 Équation de Poisson

L'équation de Poisson relie le potentiel gravitationnel Φ , défini conventionnellement en géophysique par $\mathbf{g} = \nabla\Phi$, à la densité de masse ρ^e par l'équation

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\mathcal{G}\rho^e. \quad (4.5)$$

1.1.4 Système total

Le système complet est résumé ci dessous. On y a ajouté l'Éq. (3.12) régissant la rhéologie d'un milieu élastique homogène et isotrope puisqu'on a vu que cette forme d'équation permettait en réalité d'inclure toutes les rhéologies linéaires en passant dans l'espace de Fourier. Toutes les expressions, exceptée cette dernière, sont données dans le point de vue eulérien.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\rho^e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^e \mathbf{v}) = 0 \\ \rho^e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho^e \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \nabla^2\Phi = -4\pi\mathcal{G}\rho^e \\ \boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\text{Id} + 2\mu\varepsilon \end{array} \right. . \quad (4.6)$$

1.2 Système perturbé

1.2.1 Perturbation à l'ordre 1

Les variables correspondantes au système au repos (*i.e.* sans perturbation) sont notées avec un indice 0. La vitesse \mathbf{v}_0 est nulle car on considère le système initialement au repos. On considère que l'application d'une perturbation change peu l'état du système et qu'il reste proche de son état au repos. Dès lors, on peut écrire la solution du système perturbé comme un développement à l'ordre 1 des Éqs. (4.6), où le terme d'ordre 0 correspond au système non perturbé et le terme d'ordre 1 aux « petites » modifications liées à la perturbation. On notera donc avec un indice 1 les variables d'ordre 1 à l'exception du terme de déplacement que l'on note \mathbf{u} pour être cohérent avec les notations utilisées dans la Section 1.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \\ \rho^e = \rho_0 + \rho_1 \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}_1 \\ \Phi = \phi_0 + \underbrace{\phi_1 + V}_{\text{ordre 1}}, \quad \text{ou} \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 \end{array} \right. . \quad (4.7)$$

Si la perturbation est une source gravifique, elle crée donc elle-même un potentiel extérieur V qui s'ajoute au potentiel ϕ_1 dont les causes physiques sont différentes de celles à l'origine de V . En effet, ϕ_1 est seulement associé aux modifications du potentiel terrestre liées aux variations des lignes de densité induites par la perturbation (déplacements des masses internes au système).

1.2.2 Système d'équation perturbé

En reportant les notations de la partie précédente dans le système (4.6), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho_0 + \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho_1)\mathbf{v}_1) = 0 \\ (\rho_0 + \rho_1)\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = (\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1) + \nabla \cdot (\sigma_0 + \sigma_1) \\ \nabla^2(\phi_0 + \phi_1 + V) = -4\pi\mathcal{G}(\rho_0 + \rho_1) \\ \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\text{Id} + 2\mu\varepsilon \end{array} \right. . \quad (4.8)$$

On sépare alors le système en un système d'ordre 0 et un système d'ordre 1 en négligeant les ordres supérieurs

$$\text{ordre } 0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\mathbf{v}_0) = \frac{\partial\rho_0}{\partial t} = 0 \\ \rho_0\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{0} = \rho_0\nabla\phi_0 + \nabla \cdot \sigma_0 \\ \nabla^2\phi_0 = -4\pi\mathcal{G}\rho_0 \\ \sigma_0 = \sigma_0 \end{array} \right. , \quad \text{ordre } 1 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\mathbf{v}_1) = \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}) = 0 \\ \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_1\nabla\phi_0 + \rho_0\nabla(\phi_1 + V) + \nabla \cdot \sigma_1 \\ \nabla^2(\phi_1 + V) = -4\pi\mathcal{G}\rho_1 \\ \sigma_1 = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\text{Id} + 2\mu\varepsilon \end{array} \right. .$$

On remarque qu'à l'équilibre, le tenseur des contraintes σ_0 est non nul mais sans intérêt. A l'ordre 1, les déplacements induits contribuent à la modification du tenseur via les équations élastiques (3.12)

$$\begin{aligned} \partial_j\sigma_{1,ij} &= \lambda\partial_i\partial_ku_k + \mu(\partial_i\partial_ju_j + \partial_j\partial_iu_i), \\ &= \lambda\partial_i\partial_ju_j + \mu(\partial_i\partial_ju_j + \partial_j\partial_iu_i), \\ &= (\lambda + \mu)\partial_i\partial_ju_j + \mu\partial_j\partial_iu_i, \\ \nabla \cdot \sigma_1 &= (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\nabla^2\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le tenseur précédent est donné d'un point de vu lagrangien et il est nécessaire d'écrire son équivalent eulérien pour utiliser son expression dans l'équation de conservation de l'impulsion. Au premier ordre,

$$\begin{aligned} \sigma_1^l &= \sigma_1^e + (\mathbf{u} \cdot \nabla\sigma_0^e)\text{Id}, \\ &= \sigma_1^e - (\mathbf{u} \cdot \rho_0\nabla\phi_0)\text{Id}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

où l'on a utilisé la conservation de l'impulsion à l'ordre 0 dans la deuxième ligne. On peut ensuite réécrire la conservation de la masse à l'ordre 1 telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u})) &= 0, \\ \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0\mathbf{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

en utilisant l'équation d'ordre 0 $\frac{\partial\rho_0}{\partial t} = 0$ et en considérant qu'à l'instant initial, il n'y a pas de perturbation ($\rho_1 = 0$ et $\mathbf{u} = 0$). On reporte les deux expressions déterminées précédemment dans l'équation de conservation de l'impulsion pour un régime variable. On se place alors dans l'espace de Fourier en notant ω la pulsation mais sans changer les notations afin de ne pas alourdir le propos¹

1. En régime statique, on aurait bien sûr la dérivée temporelle seconde de \mathbf{u} valant zéro et donc $\omega = 0$.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{u} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_0) - (\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u})) \nabla \phi_0 + \rho_0 \nabla(\phi_1 + V). \quad (4.12)$$

L'équation précédente étant la contribution de la conservation de la masse, de l'impulsion et la loi de Hooke, la seule équation restante pour compléter le système est l'équation de Poisson. Le système complet se résume donc à quatre équations différentielles du second ordre sur quatre inconnues que sont les composantes horizontales et verticale de \mathbf{u} et le potentiel ϕ_1

$$\begin{cases} \nabla^2(\phi_1 + V) = 4\pi G \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) \\ (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_0) - (\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u})) \nabla \phi_0 + \rho_0 \nabla(\phi_1 + V) = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{u} \end{cases}. \quad (4.13)$$

Le terme dynamique en ω^2 est nul si on se place dans le cas élastique car la réponse du système est par définition instantanée, mais peut être non négligeable lorsque le modèle rhéologique contient de la viscosité et qu'on l'excite à une fréquence non nulle.

1.3 Décomposition en harmoniques sphériques

1.3.1 Décomposition et polynôme de Legendre

Le modèle de Terre considéré étant sphérique, on peut décomposer les variables en **harmoniques sphériques** afin de faciliter la résolution du système (4.13). La décomposition d'une fonction scalaire en harmoniques sphériques est justifiée sur une surface sphérique ou s'en approchant. La décomposition d'une fonction vectorielle en harmoniques sphériques fait intervenir les modes sphéroïdaux et toroïdaux (Alterman et al., 1959; Dahlen & Tromp, 1998). Les modes toroïdaux sont des modes de torsion tangentiels de la Terre s'appliquant à la surface qui n'engendent pas de variations de volume. Les modes sphéroïdaux quant à eux peuvent avoir une composante verticale et horizontale et impliquer une variation de volume. On se place désormais dans un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) où θ est la colatitude et φ la longitude. Si l'on considère que la perturbation (même externe) s'applique en un point C de la surface, de coordonnées (a, θ_C, φ_C) (le problème est donc axisymétrique par rapport à la perturbation), alors on peut découpler les deux types de modes et les traiter indépendamment. En rajoutant les hypothèses statique et d'isotropie, nous pouvons nous contenter de résoudre le système uniquement pour les modes sphéroïdaux. Si l'on note M le point où l'on calcule la solution et (θ_M, φ_M) ses coordonnées sur la sphère, l'hypothèse d'isotropie assure alors que la solution ne dépend pas de la position absolue de C et M sur la sphère mais simplement de leur distance relative. L'angle d'arc mesurant cette distance relative est noté ψ (voir la Figure 4.1) et est fonction

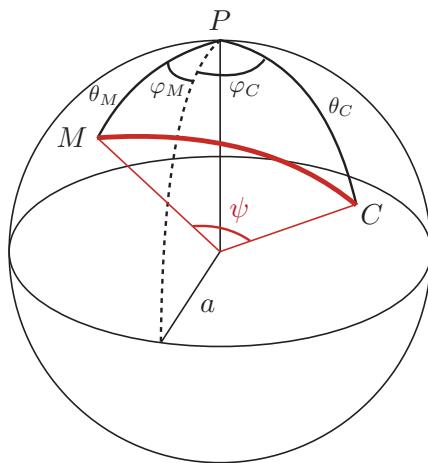


Fig. 4.1 – Définition de l'angle ψ sur la sphère terrestre entre deux points : $C(\theta_C, \varphi_C)$ représentant le point d'application de la perturbation et $M(\theta_M, \varphi_M)$ le point où l'on mesure l'effet de cette perturbation sur le système.

des couples de variables (θ_M, φ_M) et (θ_C, φ_C) tel que

$$\cos(\psi) = \cos(\theta_C) \cos(\theta_M) + \sin(\theta_C) \sin(\theta_M) \cos(\varphi_M - \varphi_C).$$

Dès lors, le point C devient un point de référence (le pôle de la décomposition en harmoniques sphériques) et le système (4.13) ne possède plus que 3 équations indépendantes. Le vecteur déplacement ne possède en effet plus que deux composantes que l'on note u_r pour le déplacement vertical et u_ψ pour le déplacement horizontal tel que $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\psi \mathbf{e}_\psi$. De plus, les modes sphéroïdaux n'auront qu'une dépendance en le degré n et pas en l'ordre m étant donné l'axisymétrie de la réponse par rapport à la perturbation (ceci est équivalent à ne considérer que les harmoniques zonales centrées sur la perturbation). Pour la décomposition, on utilise la base des polynômes de Legendre $P_n(\cos(\psi))$ et leur dérivées $\frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}$ qui dépendent du degré n et de l'angle ψ . Les expressions de ces polynômes sont données pour le degré 0 et 1 par

$$\begin{cases} P_0(\cos(\psi)) = 1 \\ \frac{\partial P_0}{\partial \cos(\psi)}(\cos(\psi)) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} P_1(\cos(\psi)) = \cos(\psi) \\ \frac{\partial P_1}{\partial \cos(\psi)}(\cos(\psi)) = -\sin(\psi) \end{cases}, \quad (4.14)$$

puis pour n'importe quel degré $n > 1$ par les formules de récurrence

$$\begin{cases} P_n(\cos(\psi)) = \frac{(2n-1)}{n} \cos(\psi) P_{n-1}(\cos(\psi)) - \frac{(n-1)}{n} P_{n-2}(\cos(\psi)), \\ \frac{\partial P_n}{\partial \cos(\psi)}(\cos(\psi)) = -\frac{n}{\sin^2(\psi)} \left(\cos(\psi) P_n(\cos(\psi)) - P_{n-1}(\cos(\psi)) \right). \end{cases} \quad (4.15)$$

La dérivée des polynômes en fonction de ψ et non de $\cos(\psi)$ est donnée simplement par

$$\frac{\partial P_n}{\partial \psi}(\cos(\psi)) = \frac{\partial P_n}{\partial \cos(\psi)}(\cos(\psi)) \frac{\partial \cos(\psi)}{\partial \psi} = -\sin(\psi) \frac{\partial P_n}{\partial \cos(\psi)}(\cos(\psi)).$$

Les polynômes et leurs dérivées calculés pour les 5 premiers degrés sont tracés sur la Figure 4.2 en fonction de $\cos(\psi)$

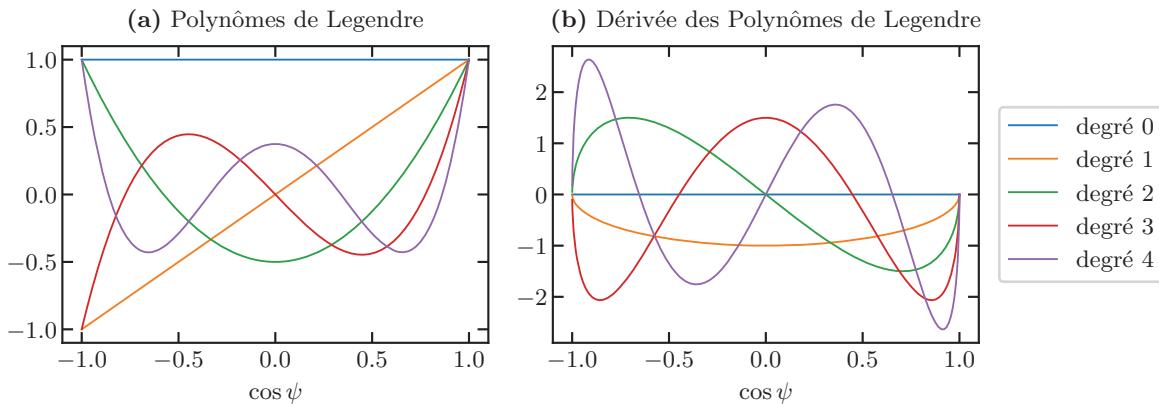


Fig. 4.2 – Les polynômes de Legendre et leur dérivée première pour les 5 premiers degrés.

1.3.2 Système des y_i

On décompose les variables \mathbf{u} et ϕ_1 sur la base des harmoniques sphériques dont on note les coefficients y_{in} où i varie de 1 à 6

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(r, \psi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_{1n}(r) P_n(\cos(\psi)) \mathbf{e}_r + y_{3n}(r) \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi} \mathbf{e}_\psi \right), \\ \phi_1(r, \psi) + V(r, \psi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y_{5n}(r) P_n(\cos(\psi)).\end{aligned}\quad (4.16)$$

Si l'on transforme le système de trois équations d'ordre 2 en un système de six équations d'ordre 1, on doit définir les dérivées des variables précédentes comme de nouvelles variables indépendantes dans le nouveau système. La dérivée du déplacement est reliée aux composantes du tenseur des contraintes par la relation $\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Ainsi, on peut définir les nouvelles variables liées au déplacement comme les composantes du vecteur traction \mathbf{T} à la surface. Le vecteur traction est un vecteur défini comme la projection du tenseur des contraintes sur la direction normale à une surface \mathbf{S} dont le vecteur de projection est noté $d\mathbf{S}$. On a donc pour la traction normale à la surface de la Terre, $\mathbf{T} = \sigma \mathbf{e}_r = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\psi} \mathbf{e}_\psi$. On décompose alors chaque composante de ce vecteur en harmoniques sphériques

$$\mathbf{T}(r, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{y_{2n}(r) P_n(\cos(\psi))}_{\sigma_{rr,n}} \mathbf{e}_r + \underbrace{y_{4n}(r) \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}}_{\sigma_{r\psi,n}} \mathbf{e}_\psi \right). \quad (4.17)$$

De plus, on définira une nouvelle variable q associée à la dérivée du potentiel ϕ_1 telle que

$$q(r, \psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} y_{6n}(r) P_n(\cos(\psi)), \quad \text{avec} \quad y_{6n}(r) = \frac{\partial y_{5n}}{\partial r}(r) - 4\pi G \rho_0 y_{1n}(r). \quad (4.18)$$

Si on écrit les Éqs. (4.13) en utilisant les décompositions définies ci-dessus, on obtient des équations différentielles du premier ordre reliant les coefficient des harmoniques sphériques y_{in} et leur dérivées. On utilisera pour cela des relations entre les dérivées des polynômes de Legendre que l'on trouvera dans (Arfken & Weber, 2005). Pour plus de clarté, on enlèvera le n des notations en gardant toujours à l'esprit que l'on résout le système pour un degré d'harmonique et on notera \dot{y} la dérivée droite de y par rapport à r (y_i ne dépendant que de r). L'obtention du système des y_i est donné en détail dans (Alterman et al., 1959; Longman, 1962; Martens, 2016).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = -\frac{2\lambda}{(\lambda+2\mu)} \frac{y_1}{r} + \frac{1}{(\lambda+2\mu)} y_2 + \frac{\lambda n(n+1)}{(\lambda+2\mu)} \frac{y_3}{r} \\ \dot{y}_2 = \left(-\omega^2 \rho_0 r - 4\rho_0 g_0 + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r} \right) \frac{y_1}{r} - \frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \frac{y_2}{r} \\ \quad + n(n+1) \left(\rho_0 g_0 - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r} \right) \frac{y_3}{r} + n(n+1) \frac{y_4}{r} - \rho_0 y_6 \\ \dot{y}_3 = -\frac{y_1}{r} + \frac{y_3}{r} + \frac{y_4}{\mu} \\ \dot{y}_4 = \left(\rho_0 g_0 - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r} \right) \frac{y_1}{r} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{y_2}{r} \\ \quad + \left(-\omega^2 \rho_0 r + \frac{2\mu (\lambda(2n^2+2n-1) + 2\mu(n^2+n-1))}{(\lambda+2\mu)r} \right) \frac{y_3}{r} - \frac{3y_4}{r} - \rho_0 \frac{y_5}{r} \\ \dot{y}_5 = y_6 + 4\pi G \rho_0 y_1 \\ \dot{y}_6 = -4\pi G \rho_0 n(n+1) \frac{y_3}{r} + \frac{n(n+1)}{r} \frac{y_5}{r} - \frac{2y_6}{r} \end{array} \right. \quad (4.19)$$

On a noté $g_0(r)$ la norme du champ de gravité et $\rho_0(r)$ la masse volumique à l'ordre 0.

1.4 Conditions aux limites

Le système précédent est défini pour $n \geq 1$ bien que le cas $n = 1$ soit plus subtil. En effet, la solution dépend du référentiel dans lequel on veut l'exprimer (Blewitt, 2003). Le cas $n = 0$ est intérressant pour notre étude puisqu'il correspond simplement à une déformation radiale uniforme de la Terre, donc à une variation de la masse totale qui violerait la conservation de la masse. Pour résoudre ce système de 6 équations à 6 inconnues pour $n \geq 1$, il est nécessaire d'obtenir 6 conditions aux limites indépendantes. On se place au départ dans un référentiel lié au centre de masse de la Terre solide (CE) où par définition, le centre de masse y est immobile et le potentiel gravitationnel au centre est nul. On peut alors donner trois conditions aux limites prises en $r = 0$ pour tout $n \geq 1$

$$y_1(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad \text{et} \quad y_5(0) = 0. \quad (4.20)$$

Nous regardons ensuite les conditions imposées par la perturbation en surface ($r = a$). Il existe en fonction du type de perturbation, différentes conditions aux limites à la surface que nous explicitons ci-dessous.

1.4.1 Effet d'un potentiel extérieur

La Terre se déforme sous l'attraction gravitationnelle induite par le potentiel perturbateur U^2 . Cette perturbation crée un excès de masse en surface appelé couramment bourrelet, modélisé par une masse surfacique δm_s qui vaut au premier ordre $\delta m_s = \rho_0 y_1(a)$. On écrit les relations de passage au travers d'une surface, décrivant la discontinuité du champ gravitationnel liée à la présence d'une masse surfacique de la même manière que l'on écrit celles du champ électrique \mathbf{E} en électromagnétisme à la traversée d'une surface chargée de charge surfacique σ_e ³. En faisant l'analogie entre les deux, on obtient

$$(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0} \quad \leftrightarrow \quad (\mathbf{g}_+ - \mathbf{g}_-) \cdot \mathbf{n} = -4\pi G \delta m_s. \quad (4.21)$$

Le vecteur \mathbf{n} est ici le vecteur normal sortant à la surface c'est-à-dire le vecteur \mathbf{e}_r et la relation précédente permet alors de relier δm_s à ϕ_1

$$\frac{\partial \phi_{1n}}{\partial r}(a^+) - \frac{\partial \phi_{1n}}{\partial r}(a^-) = -4\pi G \rho_0 y_1(a), \quad \text{avec} \quad \phi_{1n} = y_5 - U_n, \quad (4.22)$$

où U_n est le coefficient de degré n de la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel perturbateur $U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n P_n(\cos(\psi))$ pouvant être prolongé sous la surface de la Terre par continuité sous la forme $U_n^{\text{int}} \propto \left(\frac{r}{a}\right)^n$. De même, le potentiel ϕ_1 peut être prolongé par continuité à l'extérieur de la Terre avec une dépendance telle que $\phi_{1n}^{\text{ext}} \propto \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$. Ces deux prolongements permettent de calculer chacun des termes présents dans l'équation ci-dessus. On exprime également \dot{y}_5 avec la cinquième équation du système des y_i prise en $r = a^-$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_{1n}}{\partial r}(a^+) = \frac{\partial \phi_1^{\text{ext}}}{\partial r} \Big|_a = -\frac{(n+1)}{a} (y_5(a) - U_n) \\ \frac{\partial \phi_{1n}}{\partial r}(a^-) = \frac{\partial}{\partial r} (y_5 - U_n^{\text{int}}) \Big|_a = \dot{y}_5(a) - \frac{n}{a} U_n \\ \dot{y}_5 = y_6 + 4\pi G \rho_0 y_1 \end{cases} \quad (4.23)$$

De plus pour un effet de potentiel, les contraintes normale et tangentielle en surface sont nulles ce qui donne

2. C'est typiquement le cas lorsque la perturbation est induite par un corps extérieur comme la Lune ou le Soleil. Plus généralement, on résout le système dans cette configuration lorsque l'on calcule les effets de marées sur la Terre ou ses paramètres de rotation comme le mouvement du pôle ou la longueur du jour.

3. Ces relations de passages viennent du théorème de Gauss $\oint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$ intégré sur un cube ou un pavé droit englobant la frontière. On rappelle que le théorème de Gauss provient de l'équation locale du champ $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G \rho_0$.

finalement

$$\begin{cases} y_2(a) = 0 \\ y_4(a) = 0 \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}U_n \end{cases}. \quad (4.24)$$

1.4.2 Effet de pression/traction

Dans ce cas, la Terre est simplement soumise à une contrainte normale p dirigée vers le centre de la Terre et/ou une contrainte tangentielle τ . C'est typiquement le cas lorsque l'on résout le problème pour des effets atmosphériques anticycloniques ou dépressionnaires (si on néglige la masse de l'atmosphère, ce qui n'est pas forcément réaliste) ou plus rarement pour des effets tectoniques. Si on décompose la pression et la contrainte tangentielle en harmonique sphérique, on obtient $p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n P_n(\cos(\psi))$ et $\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}$ ce qui conduit aux conditions $y_2(a) = -p_n$ et $y_4(a) = \tau_n$. Comme il n'y a pas de potentiel perturbateur extérieur, on obtient les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} y_2(a) = -p_n \\ y_4(a) = \tau_n \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = 0 \end{cases}. \quad (4.25)$$

1.4.3 Effet de surcharge

Cette perturbation induit à la fois un effet de pression sur la surface mais aussi une attraction gravitationnelle sur la Terre. On utilise beaucoup ce cas notamment pour calculer les effets des charges hydrologiques, cryologiques ou atmosphériques. On modélise la charge appliquée sur la surface par une masse surfacique ζ que l'on décompose en harmoniques sphériques telle que $\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta_n P_n(\cos(\psi))$. Cette masse surfacique applique une contrainte normale sur la surface que l'on peut assimiler à une pression $p_n = g_e \zeta_n$, où g_e est la valeur du champ de pesanteur à la surface de la Terre. En plus de cette pression, elle a aussi un effet gravitationnel et peut être vue comme un corps extérieur dont le potentiel gravitationnel V agit sur la Terre. Nous sommes alors dans les mêmes conditions que pour un potentiel extérieur, et on peut appliquer au potentiel V les conditions aux limites déterminées précédemment. Le potentiel ϕ_1 est alors le potentiel lié à la déformation des lignes d'isodensité et dont la discontinuité en surface est liée à la présence d'un bourrelet. Le potentiel V joue quant à lui le rôle du potentiel extérieur créé par la charge elle-même et dont la discontinuité en surface est liée à ζ . On peut alors écrire les conditions aux limites à la surface

$$\begin{cases} y_2(a) = -g_e \zeta_n \\ y_4(a) = 0 \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a}y_5(a) = \frac{2n+1}{a}V_n \end{cases}. \quad (4.26)$$

Le potentiel V étant généré par ζ , on peut relier leurs coefficients en écrivant la discontinuité de V à la surface. En notant $V = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n P_n(\cos(\psi))$, où V_n est prolongé de chaque côté de l'interface par les dépendances $(r/a)^n$ et $(a/r)^{n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n}{\partial r}(a^+) - \frac{\partial V_n}{\partial r}(a^-) &= -4\pi G \zeta_n, \\ -\frac{(n+1)}{a}V_n - \frac{n}{a}V_n &= -4\pi G \zeta_n, \\ V_n &= \frac{4\pi G a}{2n+1} \zeta_n. \end{aligned} \quad (4.27)$$

On peut donc réécrire les conditions aux limites en fonction du seul potentiel V

$$\begin{cases} y_2(a) = -\frac{(2n+1)g_e}{4\pi G a} V_n \\ y_4(a) = 0 \\ y_6(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} V_n \end{cases}. \quad (4.28)$$

1.4.4 Bilan

Ainsi, on peut résumer les différentes conditions aux limites (dont on trouvera un descriptif plus exhaustif dans [Hinderer & Legros \(1989\)](#)) en écrivant le système général suivant,

$$\begin{cases} y_{2n}(a) = -g_e \zeta_n - p_n = -\frac{(2n+1)g_e}{4\pi G a} V_n - p_n \\ y_{4n}(a) = \tau_n \\ y_{6n}(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} U_n + 4\pi G \zeta_n = \frac{2n+1}{a} (U_n + V_n) \end{cases}. \quad (4.29)$$

qui dépend uniquement de n et du quadruplet de variables $(U_n, \zeta_n, p_n, \tau_n)$ ou (U_n, V_n, p_n, τ_n) .

1.5 Choix du modèle de Terre

Nous devons en premier lieu choisir un modèle de Terre élastique ou visco-élastique, à symétrie sphérique et isotrope. Il a souvent été utilisé en première approximation des modèles de Terre homogènes et incompressibles à une ou deux couches dont la solution a l'avantage d'être analytique et ne nécessite donc pas de calcul numérique ([Greff-Lefftz et al., 2005](#)). Ces modèles étant néanmoins peu réalistes, il est préférable de faire varier continûment les variables le long de la direction radiale. C'est le cas notamment du modèle élastique PREM ([Dziewonski & Anderson, 1981](#)) (Preliminary Reference Earth Model) que nous décrivons et utilisons dans la suite.

1.5.1 Modèles élastiques

Comme de nombreux autres (par exemple STW105 aussi connu sous le nom de REF ([Kustowski et al., 2008](#))), le modèle PREM a été calculé à partir des signaux sismiques se propageant au travers de la Terre et excitant certains modes sismiques. L'étude des réflexions et de la réfraction de ces ondes sismiques (que l'on considère élastiques) aux interfaces entre les différentes couches ainsi que certaines contraintes astrométriques et/ou géodésiques permettent ensuite d'inverser les données pour déterminer la densité et la vitesse de propagation des ondes P et S dans chaque couche. Ces vitesses sont directement reliées aux coefficients de Lamé dans l'équation de propagation des ondes élastiques⁴ par

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (4.30)$$

Tout les paramètres sont inversés sous la forme de polynômes de degré 3 dont la variable est r et où seuls les coefficients possédant les valeurs les plus grandes ont été conservés. Nous listons ci-dessous les différentes couches de la Terre incluses dans PREM ainsi que leurs propriétés mécaniques et/ou géologiques.

1.5.1.1 Croûte

La croûte terrestre est la partie la plus externe de la Terre solide et est par conséquent la partie qui a été la plus étudiée et mesurée, notamment par les géologues au cours des siècles. Elle est limitée en dessous par une surface de discontinuité de première espèce appelée surface de Mohorovičić ou plus communément « Moho ». Cette discontinuité est notamment une discontinuité de vitesse des ondes élastiques que l'on observe en réalisant des études sismiques. La croûte ne possède pas la même épaisseur et la même composition chimique et minéralogique au niveau des continents et des océans. En moyenne, l'épaisseur de la croûte océanique

4. Cette équation dérive de la conservation de l'impulsion en régime variable sans inclure les termes de gravité.

avoisine les 6 à 7 km tandis que la croûte continentale, bien plus épaisse, est de l'ordre de 35 km. La croûte continentale possède de fortes variations d'épaisseur (notamment dues aux effets d'isostasie sous les chaînes montagneuses) et l'on peut trouver des épaisseurs allant jusqu'à 60 km. D'un point de vue minéralogique, on trouve majoritairement du basalte dans la croûte océanique tandis que la croûte continentale peut être subdivisée en deux couches dont la couche supérieure serait composée majoritairement de granite (densité de $2,6 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ en moyenne selon PREM) et la couche inférieure, de basaltes mais différents des basaltes océaniques (densité de $2,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ en moyenne selon PREM). Lorsque l'on regarde un modèle de croûte anisotrope comme CRUST2.0, il existe des régions continentales et océaniques possédant des couches de roches sédimentaires dans lesquelles les comportements rhéologiques et physico-chimiques sont extrêmement variables et difficiles à décrire. Néanmoins, étant donné la faible proportion de la croûte dans l'ensemble des couches de la Terre (0,8 % du volume et 0,4 % de la masse), un modèle moyen est tout à fait acceptable pour une étude de géodynamique globale. De plus, étant données sa faible épaisseur relative et sa position externe, l'effet des hétérogénéités de la croûte (que ce soit en densité, en composition ou en épaisseur) n'affecteront que les degrés d'harmoniques sphériques les plus élevés : au dessus du degré $n = 400$ pour des variations spatiales de l'ordre de 200 km. La croûte fait partie de la lithosphère c'est à dire de la partie rigide de la Terre et on considérera donc une rhéologie élastique.

1.5.1.2 Manteau supérieur

Cette partie est souvent décrite comme la partie la plus ductile de la Terre. Le manteau supérieur est composé de cinq zones qui s'étendent du Moho jusqu'à environ 670 km de profondeur. La zone mitoyenne de la croûte est une couche rigide appelée LID (Layer at Intermediate Depth) qui complète, avec la croûte, la lithosphère. Cette partie est associée au manteau car elle ne possède pas les mêmes caractéristiques structurelles que la croûte (elles sont séparées par le Moho). La lithosphère est globalement élastique et possède une forte résistance à la déformation. Elle est donc très cassante et concentre la plupart des foyers sismiques naturels ressentis en surface. Elle est de plus morcelée en plaques dont le mouvement relatif est appelé tectonique des plaques et est connu depuis les années 60. En dessous de la lithosphère on trouve une discontinuité de seconde espèce qui marque la frontière avec une zone où la résistance mécanique est beaucoup plus faible et où les vitesses des ondes élastiques diminuent fortement avec la profondeur. On appelle cette zone asthénosphère. Elle s'étend jusqu'à la limite avec le manteau inférieur. Cette diminution de la résistance mécanique est due au fait que l'augmentation de la température avec la profondeur l'emporte sur l'augmentation de pression et permet ainsi d'atteindre les températures de fusion de certaines roches. La fusion partielle de ces roches fait diminuer largement la valeur des modules élastiques et changent le comportement rhéologique. Les 4 couches constituant l'asthénosphère sont la LVZ (Low Velocity Zone)⁵ et trois zones dites de « transition ». En géomécanique, une diminution aussi marquée de la vitesse correspond à une dissipation de l'énergie élastique ce qui n'est possible qu'en considérant un modèle visco-élastique. Dès lors, on considérera dans ces zones un modèle de Maxwell ou de Burgers. Seuls ces deux modèles sont considérés (et pas le modèle de Kelvin) car ils permettent d'expliquer à la fois les comportements élastiques observés à des échelles de temps courtes (marées diurne, surcharges) et les comportements visqueux observés sur les échelles de temps beaucoup plus longues (rebond post-glaciaire notamment). Les observations et données géologiques du rebond post-glaciaire, permettent d'encadrer les valeurs de viscosité du modèle de Maxwell dans l'asthénosphère entre $\eta \sim 10^{18}$ et $10^{23} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Lithosphère et asthénosphère sont donc des appellations géomécaniques et non des appellations géodynamiques permettant de différencier les comportements rhéologiques et mécaniques des couches, des compositions minéralogiques et des discontinuités de structure.

1.5.1.3 Manteau inférieur

Plus l'on s'enfonce à l'intérieur de la Terre, plus les effets de pression tendent à l'emporter sur les effets de température. Le manteau inférieur débute lorsque la résistance mécanique redevient forte mais tout de même moins que dans la lithosphère (partie froide). Le manteau inférieur est divisé en trois couches que l'on considérera soit élastiques, soit possédant une partie visqueuse expliquant leur faible mais tangible ductibilité. Il s'étend jusqu'à une discontinuité de première espèce et majeure dans la structure terrestre : l'interface

5. Ce terme n'est pas très bien adapté puisqu'il s'agit d'une zone de diminution de la vitesse et non d'une zone où la vitesse y est uniformément faible.

noyau-manteau (ou CMB en anglais pour Core-Mantle Boundary) que l'on nomme aussi discontinuité de Gutenberg.

1.5.1.4 Noyau liquide

L'interface noyau-manteau est un lieu où localement se déroulent des phénomènes de turbulence dans le noyau et dont la structure n'est pas une ligne arrêtée mais probablement une sorte de transition visqueuse. Le noyau liquide sera la plupart du temps considéré comme un fluide parfait c'est à dire possédant un module de cisaillement nul (la contrainte tangentielle y_4 dans un fluide parfait est nulle). Ce fluide est principalement constitué de fer et de nickel (éléments métalliques) et grâce à ses propriétés conductrices, serait le siège de courants électriques volumiques importants. Les lois de la magnétohydrodynamique (MHD) permettent d'expliquer que le noyau liquide serait en grande partie responsable du phénomène de dynamo qui entretient le champ magnétique terrestre. Les modèles de dynamo utilisés font intervenir des phénomènes chaotiques qui sont en accord avec les variations du champ à long terme et qui permettent d'expliquer notamment les phénomènes d'inversion du champ magnétique. La limite lorsque le module de cisaillement μ tend vers 0 dans les Éqs. (4.19) n'est pas définie mathématiquement et a amené à un paradoxe appelé paradoxe de Longman (Longman, 1963; Smylie & Mansinha, 1971; Dahlen, 1971). L'article de Chinnery (1975) contient les informations principales pour traiter le cas du noyau liquide rigoureusement et on détaillera ces considérations dans la section suivante.

1.5.1.5 Graine

La limite entre le noyau liquide et le noyau solide (aussi appelé « graine ») est appelée discontinuité de Lehmann ou ICB (Inner Core Boundary). En dessous de cette limite, on trouve un matériau solide à l'instar du manteau et de la croûte, constitué en grande majorité de fer et de nickel sous forme solide, et possédant donc une densité extrêmement élevée (autour de $1 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). La graine se serait formée à cause de la précipitation progressive du noyau liquide gouvernée par les effets de température et de gravité. Néanmoins, les conditions de sa formation sont toujours à l'étude dans la communauté scientifique. On prendra ici une rhéologie élastique du fait de la grande résistance mécanique probable à l'intérieur de la graine.

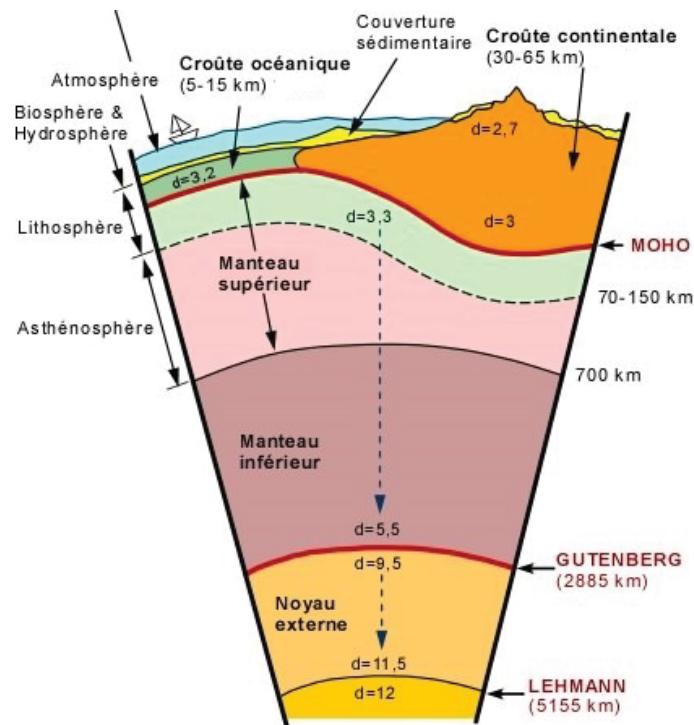


Fig. 4.3 – Schéma d'une coupe de la Terre où sont indiquées les différentes couches et discontinuités (d'après <http://www2.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/img.communes.pt/str.interne.terre.html>). Le schéma n'est pas à l'échelle.

On représente l'ensemble de ces couches dans le schéma de la Figure 4.3 où sont détaillées d'une part les couches structurales et d'autres part les couches vues en terme de géomécanique. On pourra réaliser plusieurs modifications de PREM dans la résolution du système, notamment le remplacement de l'océan par une couche élastique rigide. En effet, si le milieu en surface est un fluide parfait, il y a une indétermination sur le déplacement tangentiel et donc pas de résolution possible de la composante y_3 et du système en général⁶. Les conditions aux limites en surface décrites dans la Section 1.4 doivent être appliquées sur un milieu solide. On remplacera donc l'océan par le prolongement de la partie supérieure de la croûte jusqu'à la surface en $r = a = 6371$ km, tout en prenant soin de remplacer la valeur de la densité donnée par PREM pour cette couche, par une densité (plus faible) permettant de conserver la masse de la Terre pour le modèle. On réalise cela en prenant la densité moyenne de la couche de croûte supérieure et de l'océan pondérées par leurs épaisseurs respectives dans le modèle PREM initial. Par abus de langage, quand nous parlerons du modèle PREM, nous parlerons de ce modèle sans océan.

1.5.2 Calcul des paramètres de Terre

Dans un premier temps, nous devons implémenter des fonctions continues $V_P(r)$, $V_S(r)$ et $\rho(r)$ prenant en compte les équations polynomiales fournies par PREM (Dziewonski & Anderson, 1981) dans chaque couche. Cela permet ensuite de définir les fonctions des coefficients élastiques grâce aux Éqs. (4.30)

$$\lambda(r) = \rho(r)(V_P^2(r) - 2V_S^2(r)), \quad \text{et} \quad \mu(r) = \rho(r)V_S^2(r). \quad (4.31)$$

Nous devons également implémenter une fonction calculant le champ gravitationnel non perturbé $g_0(r)$ telle que

$$g_0(r) = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (4.32)$$

Dès lors, nous avons toutes les fonctions nécessaires (représentées sur la Figure 4.4) pour l'intégration du système (4.19) pour une Terre PREM élastique et isotrope.

1.6 Résolution pour une Terre SNREI non homogène avec noyau liquide

Pour une Terre non homogène, le calcul nécessite une intégration numérique. Nous allons décrire les différentes étapes de cette résolution numérique ainsi que les ajustements nécessaires à l'intégration d'une couche liquide (noyau externe) dans le système.

1.6.1 Cas du noyau liquide

Les premiers résultats pour établir les équations de propagation de la solution dans le noyau liquide ont été donnés par Longman (1962) qui a simplement pris la limite des équations du système (4.19) pour $\mu \rightarrow 0$. La troisième équation portant sur la dérivée de y_3 donne alors $y_4 \rightarrow 0$ ce qui est cohérent pour un fluide parfait. On obtient alors un système réduit de 5 équations qui sont consistantes si la condition suivante est vérifiée

$$\left[\frac{\rho_0}{\dot{\rho}_0} + \frac{\lambda}{\rho_0 g_0} \right] y_2 = 0. \quad (4.33)$$

Cette relation est vérifiée seulement dans deux cas particuliers distincts. Si le terme entre crochets est nul, le fluide est alors supposé en équilibre hydrostatique et homogène. De plus, la compression est adiabatique c'est-à-dire que la température n'influe pas sur les variations de densité. Cette condition est appelée condition « d'Adams-Williamson ». Il est très peu probable que cette condition soit vérifiée et on doit alors envisager l'autre cas qui est que $y_2 = 0$. Dans ce cas, on impose des contraintes normales nulles et donc une compression nulle ce qui n'est pas raisonnable en réalité. Les deux cas n'étant pas physiquement concevables, cette situation a longtemps été décrite comme un paradoxe (« le paradoxe de Longman »).

6. Il y a une constante supplémentaire à déterminer ce qui ne permet pas de résoudre le système en l'état.

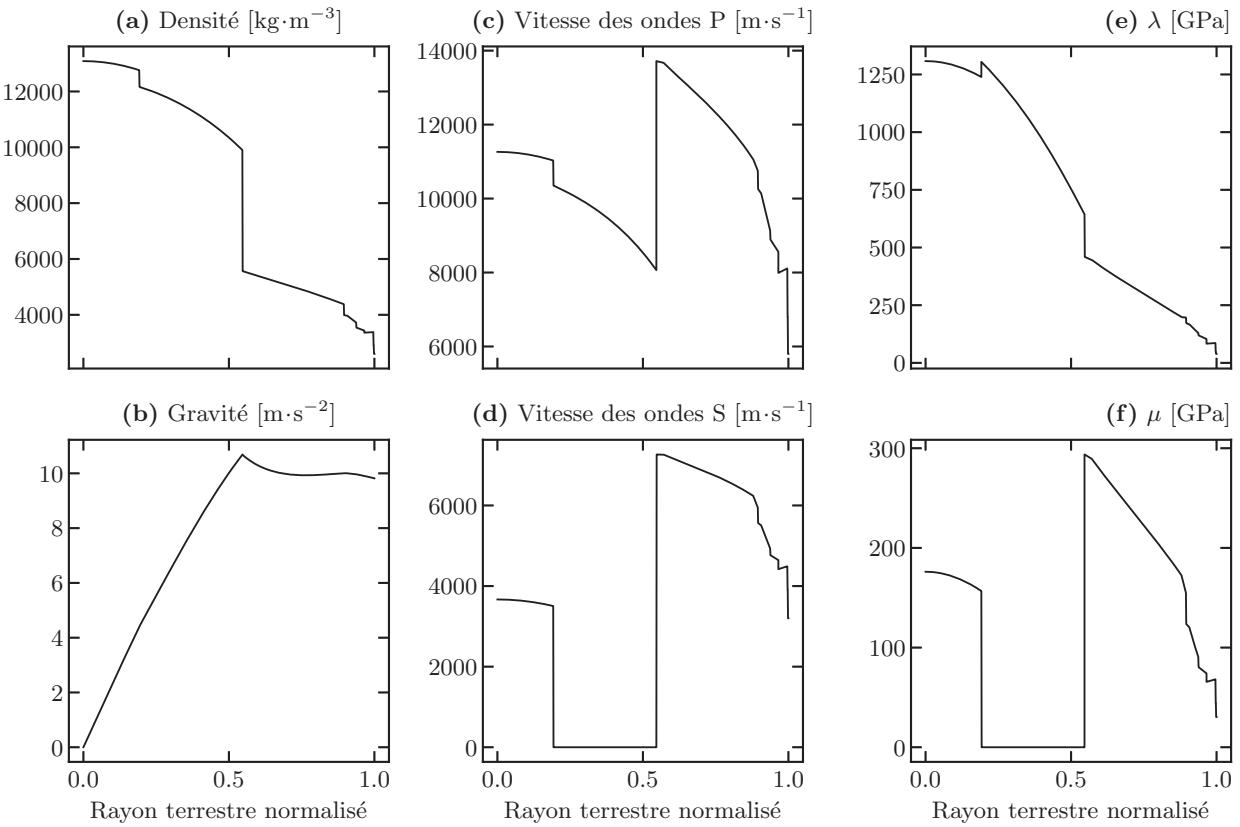


Fig. 4.4 – Paramètres de Terre du modèle PREM.

Néanmoins, l'article de Chinnery (1975) suggère que l'on adopte une approche en terme de lignes de niveau d'égales potentiel gravifique (1), pression (2), densité (3) et une ligne de niveau matérielle (4). Si le noyau est stratifié, on peut affirmer que toutes ces lignes sont égales et que les particules de fluides se déplacent sur ces lignes librement (tant qu'il n'y a pas de viscosité, le déplacement tangentiel n'est absolument pas contraint). Ainsi on peut établir le système suivant (Smylie & Mansinha, 1971; Chinnery, 1975).

$$\begin{cases} z_1 = \frac{z_5}{g_0} \\ \dot{z}_5 = z_6 + \frac{4\pi G\rho_0}{g_0} z_5 \\ \dot{z}_6 = \left[-\frac{2}{r} - \frac{4\pi G\rho_0}{g_0} \right] z_6 + \left[-\frac{16\pi G\rho_0}{rg_0} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] z_5 \end{cases} . \quad (4.34)$$

en définissant $z_1(r)$ comme le coefficient de degré n associé à la décomposition en harmonique sphérique de la fonction donnant la position de l'équipotentielle (ou l'isobare ou l'isodensité car toutes ces lignes sont les mêmes.), $z_5(r)$ le coefficient de degré n du potentiel gravitationnel et $z_6(r)$ défini (comme y_6) par $z_6 = \dot{z}_5 - 4\pi G\rho_0 z_1$. L'emploi des fonctions z_i plutôt que y_i permet de souligner la différence physique fondamentale entre les deux systèmes.

Les conditions aux limites pour une interface solide-solide impliquent la continuité de toutes les fonctions y_i et les conditions pour une interface liquide-liquide impliquent la continuité de toutes les fonctions z_i (Chinnery, 1975). Pour une interface solide-liquide en revanche, les conditions aux limites sont modifiées.

- On ne requiert pas que z_1 soit continue avec y_1 à l'interface puisque z_1 ne représente pas un déplacement de particule comme y_1 mais bien la déformation de lignes équipotentielles (ou isobares ou d'équidensité). Ces lignes peuvent donc être traversées par la frontière physique du CMB. Néanmoins, les degrés $n \geq 1$ ne modifient pas le volume du noyau, ces chevauchements du CMB sur les équipotentielles se font de telle manière que le fluide est redistribué dans les cavités créées par la déformation du CMB au niveau de ces lignes équipotentielles. Il n'y a donc aucune cavitation possible à la frontière. La condition

obtenue est

$$y_1(b^+) = z_1(b^-) + K_1.$$

- Le déplacement tangentiel n'est absolument pas constraint dans un fluide parfait. Pour un fluide stratifié, c'est comme si des couches de fluide infiniment minces glissaient les unes sur les autres sans frottement (c'est-à-dire sans viscosité). Cela implique donc qu'à l'interface, le déplacement tangentiel fasse intervenir une constante arbitraire telle que

$$y_3(b^+) = K_2.$$

- La contrainte normale doit être continue à l'interface ce qui donne

$$y_2(b^+) = K_1 \rho_0(b^-) g_0(b).$$

- La contrainte tangentielle est nulle dans le noyau car on a supposé le fluide parfait. La continuité de la contrainte donne alors

$$y_4(b^+) = 0.$$

- Le potentiel gravitationnel est continu à l'interface

$$y_5(b^+) = z_5(b^-).$$

- Étant donnée la discontinuité du déplacement radial à l'interface, la fonction y_6 ne sera pas continue et on aura une différence associée à la constante K_1 telle que

$$y_6(b^+) = z_6(b^-) - 4\pi G K_1 \rho_0(b^-).$$

La donnée de l'ensemble de ces équations et conditions aux limites permettent de réaliser l'intégration totale du système en propageant la solution à travers toutes les couches de la Terre. Dans la suite, nous donnons les détails de la manière dont nous avons procédé pour l'intégration numérique du système Terre en prenant en compte un noyau liquide.

1.6.2 Intégration numérique

Nous intégrons le système des y_i depuis le centre de la Terre jusqu'à la surface. On écrit le système des y_i vectoriellement en posant $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$.

$$\frac{dY}{dr} = S(r)Y(r), \quad (4.35)$$

Étant données les conditions initiales au centre de la Terre (Section 1.4), il existe trois solutions indépendantes Y_A^0 , Y_B^0 et Y_C^0 issues pour chacune d'une condition initiale définie à une constante arbitraire près. On peut alors écrire la solution totale en $r = 0$ en sommant les trois solutions

$$Y(r=0) = AY_A^0 + BY_B^0 + CY_C^0 = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_A + B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B + C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C, \quad (4.36)$$

On intègre le système (4.35) jusqu'à l'ICB pour chacun des vecteurs initiaux indépendamment (Y_A^0 , Y_B^0 et Y_C^0) en utilisant par exemple un intégrateur de type Runge-Kutta du second ordre⁷. La solution à l'ICB est notée Y^{ICB} dans la graine et est la somme des trois solutions Y_A^{ICB} , Y_B^{ICB} et Y_C^{ICB} issues de l'intégration des vecteurs initiaux

7. On peut aussi raffiner l'intégration et utiliser un intégrateur de type Runge-Kutta d'ordre 4 mais l'intégration est plus longue et l'amélioration du résultat est marginale.

$$Y^{\text{ICB}} = AY_A^{\text{ICB}} + BY_B^{\text{ICB}} + CY_C^{\text{ICB}}. \quad (4.37)$$

Les conditions aux limites à l'interface solide-liquide donnent alors

$$\begin{cases} y_1^{\text{ICB}} = Ay_1^A + By_1^B + Cy_1^C = z_1^{\text{ICB}} + K_1 \\ y_2^{\text{ICB}} = Ay_2^A + By_2^B + Cy_2^C = K_1\rho_0^+ g_0 \\ y_3^{\text{ICB}} = Ay_3^A + By_3^B + Cy_3^C = K_2 \\ y_4^{\text{ICB}} = Ay_4^A + By_4^B + Cy_4^C = 0 \\ y_5^{\text{ICB}} = Ay_5^A + By_5^B + Cy_5^C = z_5^{\text{ICB}} \\ y_6^{\text{ICB}} = Ay_6^A + By_6^B + Cy_6^C = z_6^{\text{ICB}} - 4\pi\mathcal{G}K_1\rho_0^+ \end{cases}. \quad (4.38)$$

On note ici le fait que la densité ρ_0^+ est bien celle prise à l'ICB mais dans le noyau liquide. On peut alors établir deux relations entre les constantes A , B et C permettant de déterminer les conditions aux limites à une constante près. La première équation est très simple à obtenir puisqu'elle est directement donnée par les conditions aux limites : $y_4^{\text{ICB}} = 0$. Elle permet d'écrire

$$C = A \underbrace{\frac{y_4^A}{y_4^C}}_{k_A} + B \underbrace{\frac{y_4^B}{y_4^C}}_{k_B}. \quad (4.39)$$

En utilisant la première, la seconde et la cinquième équation du système (4.38), ainsi que la relation $z_5 = g_0 z_1$ dans le fluide, on obtient une seconde relation

$$\begin{aligned} y_1^{\text{ICB}} &= z_1^{\text{ICB}} + K_1, \\ &= z_1^{\text{ICB}} + \frac{y_2^{\text{ICB}}}{\rho_0^+ g_0}, \\ &= \frac{z_5^{\text{ICB}}}{g_0} + \frac{y_2^{\text{ICB}}}{\rho_0^+ g_0}, \\ &= \frac{y_5^{\text{ICB}}}{g_0} + \frac{y_2^{\text{ICB}}}{\rho_0^+ g_0}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

qui permet d'écrire une relation entre B et A telle que

$$\begin{aligned} g_0 [Ay_1^A + By_1^B + Cy_1^C] &= [Ay_5^A + By_5^B + Cy_5^C] + \frac{1}{\rho_0^+} [Ay_2^A + By_2^B + Cy_2^C], \\ B &= -\underbrace{\frac{g_0 \left(y_1^A + y_4^A \frac{y_1^C}{y_4^C} \right) - \left(y_5^A + y_4^A \frac{y_5^C}{y_4^C} \right) - \frac{1}{\rho_0^+} \left(y_2^A + y_4^A \frac{y_2^C}{y_4^C} \right)}{g_0 \left(y_1^B + y_4^B \frac{y_1^C}{y_4^C} \right) - \left(y_5^B + y_4^B \frac{y_5^C}{y_4^C} \right) - \frac{1}{\rho_0^+} \left(y_2^B + y_4^B \frac{y_2^C}{y_4^C} \right)}}_{k'} A. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Les conditions aux limites sont alors données en fonction des 3 seules constantes indépendantes A , K_1 et K_2

$$\begin{cases} A[y_1^A + k'y_1^B + (k_A + k'k_B)y_1^C] = z_1^{\text{ICB}} + K_1 \\ A[y_2^A + k'y_2^B + (k_A + k'k_B)y_2^C] = K_1\rho_0^+ g_0 \\ A[y_3^A + k'y_3^B + (k_A + k'k_B)y_3^C] = K_2 \\ A[y_4^A + k'y_4^B + (k_A + k'k_B)y_4^C] = 0 \\ A[y_5^A + k'y_5^B + (k_A + k'k_B)y_5^C] = z_5^{\text{ICB}} \\ A[y_6^A + k'y_6^B + (k_A + k'k_B)y_6^C] = z_6^{\text{ICB}} - 4\pi\mathcal{G}K_1\rho_0^+ \end{cases}. \quad (4.42)$$

La partie de gauche entre crochets est connue car comporte les solutions précédemment intégrées et les

facteurs k_A , k_B et k' déterminés précédemment. La quatrième équation n'apporte aucune information et on a donc 5 équations pour déterminer les 6 inconnues $(z_1^{\text{ICB}}, z_5^{\text{ICB}}, z_6^{\text{ICB}}, K_1, K_2, A)$. On va donc obtenir la solution dans le noyau à une constante près notée A' que l'on propagera ensuite jusqu'à l'interface noyau-manteau (CMB). En redéfinissant les constantes $A' = 1/A$, $K'_1 = K_1/A$ et $K'_2 = K_2/A$, on obtient

$$\begin{cases} [y_1^A + k'y_1^B + (k_A + k'k_B)y_1^C] = A'z_1^{\text{ICB}} + K'_1 & \Rightarrow \text{donne } A'z_1^{\text{ICB}}, \\ [y_2^A + k'y_2^B + (k_A + k'k_B)y_2^C] = K'_1\rho_0^+g_0 & \Rightarrow \text{donne } K'_1, \\ [y_3^A + k'y_3^B + (k_A + k'k_B)y_3^C] = K'_2 & \Rightarrow \text{donne } K'_2, \\ [y_5^A + k'y_5^B + (k_A + k'k_B)y_5^C] = A'z_5^{\text{ICB}} & \Rightarrow \text{donne } A'z_5^{\text{ICB}}, \\ [y_6^A + k'y_6^B + (k_A + k'k_B)y_6^C] = A'z_6^{\text{ICB}} - 4\pi\mathcal{G}K'_1\rho_0^+ & \Rightarrow \text{donne } A'z_6^{\text{ICB}}. \end{cases} \quad (4.43)$$

On intègre cette fois les équations différentielles dans le noyau (c'est à dire les deux dernières équations du système (4.34) car z_1 et z_5 sont reliées linéairement par une équation non différentielle) à partir des conditions initiales $(A'z_1^{\text{ICB}}, A'z_5^{\text{ICB}}, A'z_6^{\text{ICB}})$. On intègre jusqu'au CMB et on obtient alors les solutions $A'z_5^{\text{CMB}}$ et $A'z_6^{\text{CMB}}$ puis $A'z_1^{\text{CMB}} = \frac{A'z_5^{\text{CMB}}}{g_0}$. Les conditions aux limites sont les mêmes ici pour une interface liquide-solide, que celles énoncées dans l'Éq. (4.38) en notant cette fois L_1 et L_2 les constantes dans le fluide

$$\begin{cases} y_1^{\text{CMB}} = A'z_1^{\text{CMB}} + L_1 \\ y_2^{\text{CMB}} = L_1\rho_0^-g_0 \\ y_3^{\text{CMB}} = L_2 \\ y_4^{\text{CMB}} = 0 \\ y_5^{\text{CMB}} = A'z_5^{\text{CMB}} \\ y_6^{\text{CMB}} = A'z_6^{\text{CMB}} - 4\pi\mathcal{G}L_1\rho_0^- \end{cases}. \quad (4.44)$$

On note que les fonctions z_i^{CMB} sont définies au CMB côté noyau liquide tandis que les fonctions y_i^{CMB} sont définies côté manteau. En prenant en compte l'indétermination des solutions z_i^{CMB} liée la constante A' , on obtient un système de trois solutions indépendantes α , β et γ à propager dans le manteau via le système des y_i (4.19)

$$\begin{pmatrix} y_1^{\text{CMB}} \\ y_2^{\text{CMB}} \\ y_3^{\text{CMB}} \\ y_4^{\text{CMB}} \\ y_5^{\text{CMB}} \\ y_6^{\text{CMB}} \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ g_0\rho_0^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\pi\mathcal{G}\rho_0^- \end{pmatrix}_\alpha + L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\beta + A' \begin{pmatrix} z_1^{\text{CMB}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_5^{\text{CMB}} \\ z_6^{\text{CMB}} \end{pmatrix}_\gamma. \quad (4.45)$$

La résolution finale en fonction des conditions aux limites en surface se fait en résolvant un système de Cramer, afin de déterminer les 6 inconnues du systèmes que sont $(L_1, L_2, A', y_1(a), y_3(a), y_5(a))$ en fonction des solutions α , β et γ propagées dans le manteau et des 3 conditions aux limites générales décrites par le système (4.29) sur y_2 , y_4 et y_6 . Il suffit d'inverser le système suivant

$$\begin{pmatrix} y_1^\alpha(a) & y_1^\beta(a) & y_1^\gamma(a) & -1 & 0 & 0 \\ y_2^\alpha(a) & y_2^\beta(a) & y_2^\gamma(a) & 0 & 0 & 0 \\ y_3^\alpha(a) & y_3^\beta(a) & y_3^\gamma(a) & 0 & -1 & 0 \\ y_4^\alpha(a) & y_4^\beta(a) & y_4^\gamma(a) & 0 & 0 & 0 \\ y_5^\alpha(a) & y_5^\beta(a) & y_5^\gamma(a) & 0 & 0 & -1 \\ y_6^\alpha(a) & y_6^\beta(a) & y_6^\gamma(a) & 0 & 0 & \frac{n+1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ A' \\ y_1(a) \\ y_3(a) \\ y_5(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_n - \frac{(2n+1)\mathcal{G}a}{4\pi\mathcal{G}a}V_n \\ 0 \\ \tau_n \\ 0 \\ \frac{2n+1}{a}(U_n + V_n) \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

On trouve une unique solution par valeur de quadruplet (U_n, V_n, p_n, τ_n) , ce qui détermine entièrement le déplacement vertical, horizontal et la perturbation du potentiel en surface.

1.7 Remarques complémentaires sur l'intégration numérique

1.7.1 Adimensionnement du système

Il peut être très agréable et beaucoup plus rapide en terme de calcul numérique, d'adimensionner les variables que l'on manipule. On pourra alors effectuer les changements de variables suivants décrits dans [Longman \(1963\)](#)

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = r/a \\ \rho'_0 = \rho_0/\rho_0(0) \\ \lambda' = \lambda/\lambda(0) \\ \mu' = \mu/\lambda(0) \\ g'_0 = g_0/g_e \end{array} \right. , \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} y'_1 = y_1/a \\ y'_2 = y_2/\lambda(0) \\ y'_3 = y_3/a \\ y'_4 = y_4/\lambda(0) \\ y'_5 = y_5/(a g_e) \\ y'_6 = y_6/g_e \\ z'_1 = z_1/a \\ z'_5 = z_5/(a g_e) \\ z'_6 = z_6/g_e \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Les variables r' , ρ' , λ' , μ' , g'_0 , y'_i et z'_i sont alors sans dimension et les systèmes d'équations (4.19) et (4.34) sont modifiés. Il apparaît alors dans les nouveaux systèmes, des constantes d'adimensionnement dépendant de a , $\rho_0(0)$, $\lambda(0)$, g_e et \mathcal{G} . Et si les conditions aux limites sont également modifiées, les résultats sont quant à eux indépendants de l'adimensionnement ou non du système.

1.7.2 Intégration en $r = 0$

Le système (4.19) n'est pas défini en $r = 0$ ce qui pose problème pour l'intégration au centre de la Terre. En pratique, deux options sont envisageables pour palier à ce problème. On peut d'une part commencer l'intégration depuis un r légèrement supérieur à 0 (typiquement 5 à 10 km) en appliquant les conditions (4.20). À ces profondeurs, seul le degré 1 est susceptible d'être impacté. On peut également raffiner l'intégration en considérant d'autre part une couche de Terre sphérique et homogène entre $r = 0$ et $r = 10$ km. On intègre alors analytiquement grâce à la méthode présentée par [Greff-Lefftz et al. \(2005\)](#). Les trois solutions indépendantes des y_i obtenues à la surface de cette couche sont alors les trois conditions initiales à considérer pour l'intégration numérique. On peut voir la différence entre les deux approches sur les Figures 4.6c & d.

1.7.3 Intégration numérique sans noyau liquide

Si on ne considère pas de noyau liquide, alors la Terre est entièrement solide et répond au système (4.19) sur toute sa profondeur. Dès lors on peut intégrer directement de $r \gtrsim 0$ à $r = a$ puis appliquer les conditions aux limites à la surface en inversant le système (4.46). Les solutions notées y_i^α , y_i^β et y_i^γ sont alors directement les solutions issues de l'intégration des 3 conditions initiales de l'Éq. (4.36) au centre de la Terre. On peut se placer dans ce cas pour le modèle PREM si on veut éviter d'implémenter les équations du noyau liquide. On définit alors un coefficient de cisaillement $\mu \neq 0$ mais faible dans le noyau qu'on pourra désormais intégrer avec le système des y_i « solide ». Avec $\mu_{\text{noyau}} = 10^8$ Pa, on limite déjà l'écart sur les nombres de Love à seulement quelques dixièmes de pourcents sur les bas degrés⁸ par rapport à un modèle PREM contenant un noyau liquide (cf Figure 4.5b).

1.7.4 Intégration pour les hauts degrés

Nous savons que plus le degré d'harmoniques sphériques augmente, plus la surface de la Terre est subdivisée en un nombre de zones important et donc plus les échelles spatiales concernées sont petites. Or, plus l'on descend en profondeur, plus la surface de ces zones diminue (l'ouverture angulaire reste constante). Ainsi, une perturbation possédant une certaine extension spatiale en surface influera sur des degrés plus hauts en surface que dans le manteau ou dans le noyau. Cela signifie que plus le degré de la perturbation augmente

⁸. Les artefacts autour du degré 100 n'ont pour l'instant pas pu être expliqués.

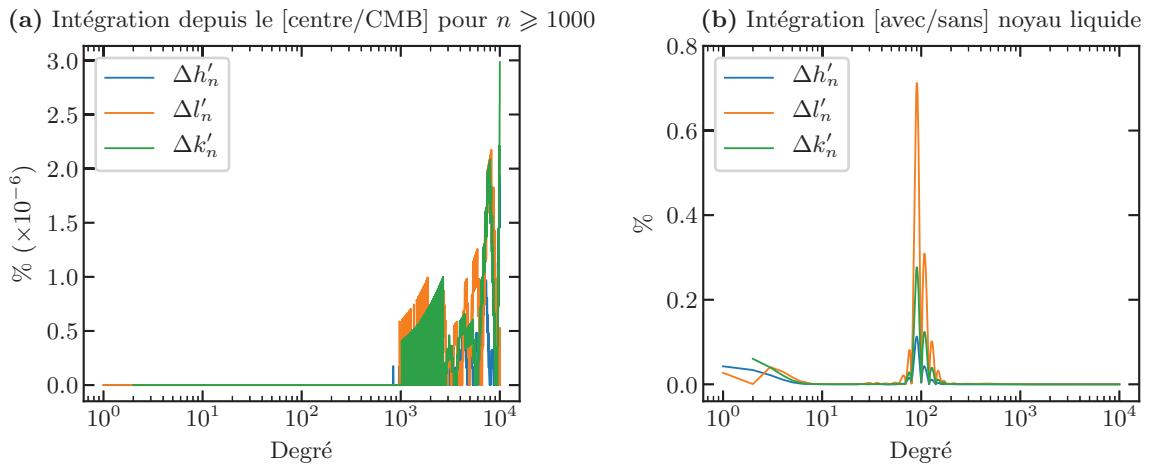


Fig. 4.5 –(a) Différence entre une intégration commençant au centre ou au CMB (seulement pour les degrés au dessus de 1000) et (b) Différence entre une intégration avec et sans noyau liquide. Dans le cas sans noyau liquide, le noyau liquide est remplacé par un noyau solide de coefficient de cisaillement $\mu \simeq 0,1 \text{ GPa}$ très faible.

(donc plus l'extension spatiale de la perturbation diminue), moins les couches les plus internes de la Terre seront impactées par cette perturbation. On peut donc dans une très bonne approximation commencer l'intégration à la CMB pour les hauts degrés (typiquement au dessus de $n = 1000$), comme si le noyau liquide et la graine n'avait pas d'influence sur des perturbations d'autant courte longueur d'onde. Cela permet de simplifier largement l'intégration car le système considéré est alors entièrement solide. On applique alors les conditions initiales (4.20) à la CMB et les conditions (4.29) à la surface. De plus, les hauts degrés font peu à peu diverger les quantités du système (4.19) : une intégration sur une profondeur plus courte permet donc en plus de limiter cet effet pouvant poser des problèmes numériques. La différence entre l'intégration totale et l'intégration depuis la CMB pour les hauts degrés, qu'on montre sur la Figure 4.5a, est de l'ordre des erreurs numériques donc négligeable.

2 Nombres de Love

2.1 Définition

Les conditions aux limites (4.29) permettent d'accéder aux solutions du système (4.19). On peut alors déterminer en surface les deux composantes de la déformation ($y_{1n}(a), y_{3n}(a)$) ainsi que la composante de potentiel générée par la perturbation $y_{5n}(a)$. Il est d'usage d'utiliser dès lors le formalisme développé dans la théorie de Love (1911), permettant d'exprimer ces solutions à l'aide de nombres sans dimension appelés nombres de Love, qui dépendent notamment du modèle de Terre utilisé (structure, rhéologie, etc.) et du type de perturbation que l'on applique. On définit ces nombres de sorte qu'ils soient la solution du problème pour une valeur unitaire de la perturbation. Ainsi il existe trois nombres de Love pour chaque type de perturbation : (h, l, k) pour un potentiel extérieur, $(\bar{h}, \bar{l}, \bar{k})$ pour une pression, (h^*, l^*, k^*) pour un cisaillement, (h', l', k') pour une surcharge. Ils sont tous définis dans le Tableau 4.1. On peut alors comparer aisément la réponse de différents modèles de Terre à une perturbation en ne comparant que leurs nombres de Love. On peut aussi vouloir exprimer la solution pour $r < a$, auquel cas on définit des nombres de Love dépendant de r . Néanmoins lorsque ce n'est pas précisé, la convention établie voudrait qu'ils soient donnés à la surface c'est à dire en $r = a$.

Avec une telle écriture de la solution on dissocie l'effet de la perturbation d'une part et de la rhéologie (incluse dans les nombres de Love) d'autre part. On a utilisé $g_e = Gm_e/a^2$ et $\bar{\rho}$, respectivement la norme du champ gravitationnel à la surface de la Terre et la masse volumique moyenne de la Terre, pour adimensionner les nombres de Love. Les expressions donnant le potentiel comportent un 1 en plus du nombre de Love de potentiel car y_5 décrit l'harmonique sphérique lié à la somme $\phi_{1n} + U_n$ telle que $\phi_{1n} = U_n k_n$.

$$\begin{bmatrix} y_{1n}(a) \\ y_{3n}(a) \\ y_{5n}(a) \end{bmatrix} = U_n \begin{bmatrix} \frac{h_n}{g_e} \\ \frac{l_n}{g_e} \\ (1 + k_n) \end{bmatrix} p_n \begin{bmatrix} \frac{\bar{h}_n}{\bar{\rho}g_e} \\ \frac{\bar{l}_n}{\bar{\rho}g_e} \\ \frac{(1 + \bar{k}_n)}{\bar{\rho}} \end{bmatrix} \tau_n \begin{bmatrix} \frac{h_n^*}{\bar{\rho}g_e} \\ \frac{l_n^*}{\bar{\rho}g_e} \\ \frac{(1 + k_n^*)}{\bar{\rho}} \end{bmatrix} V_n \begin{bmatrix} \frac{h'_n}{g_e} \\ \frac{l'_n}{g_e} \\ (1 + k'_n) \end{bmatrix}$$

Tab. 4.1 – Nombres de Love (sans dimension) de déplacement et de potentiel définis pour chaque type de perturbation.

2.2 Cas élastique

On utilise dans la suite uniquement les nombres de Love de potentiel (TLN) et les nombres de Love de surcharge (LLN). Les LLN de plusieurs modèles de Terre élastiques ont déjà été comparés dans les études de Wang et al. (2012) et de Na & Baek (2011). Les LLN et TLN calculés avec la procédure décrite dans la Section 1.6.2 pour une Terre PREM contenant un noyau liquide sont représentés sur la Figure 4.6. Les valeurs sont en accord avec celles trouvées par le programme *LoadDef* développé par Martens et al. (2019) ce qui valide la méthode d'intégration utilisée ici. Les valeurs asymptotiques pour les hauts degrés (Farrell, 1972; Martens et al., 2019) peuvent varier en fonction du modèle de croûte utilisé pour remplacer la couche océanique de PREM (nous avons utilisé ici la même que dans *LoadDef*). Comme Farrell (1972), on notera la valeur de palier à hauts degrés $(h'_\infty, l'_\infty, k'_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (h'_n, nl'_n, nk'_n)$.

Les bas degrés sont quant à eux sensibles aux conditions d'intégration au centre de la Terre (Section 1.7) qui peuvent varier entre les deux programmes et ainsi expliquer les différences observées notamment sur les LLN (ne dépassant pour autant jamais les 0.5%). Rappelons que les nombres de Love ont été calculés dans le référentiel du CE c'est à dire lié au centre de masse de la Terre solide (Blewitt, 2003). Nous n'avons pas trouvé de raisons pour expliquer les différences que l'on voit sur le TLN l_n autour du degré 100 et pour les degrés > 1000 .

On peut donner également l'évolution des nombres de Love en fonction de la profondeur pour différents degrés. Il suffit pour cela d'arrêter l'intégration des solutions α , β et γ en profondeur, puis de les multiplier respectivement par les constantes L_1 , L_2 et A' obtenues au préalable en résolvant le système (4.46) à la

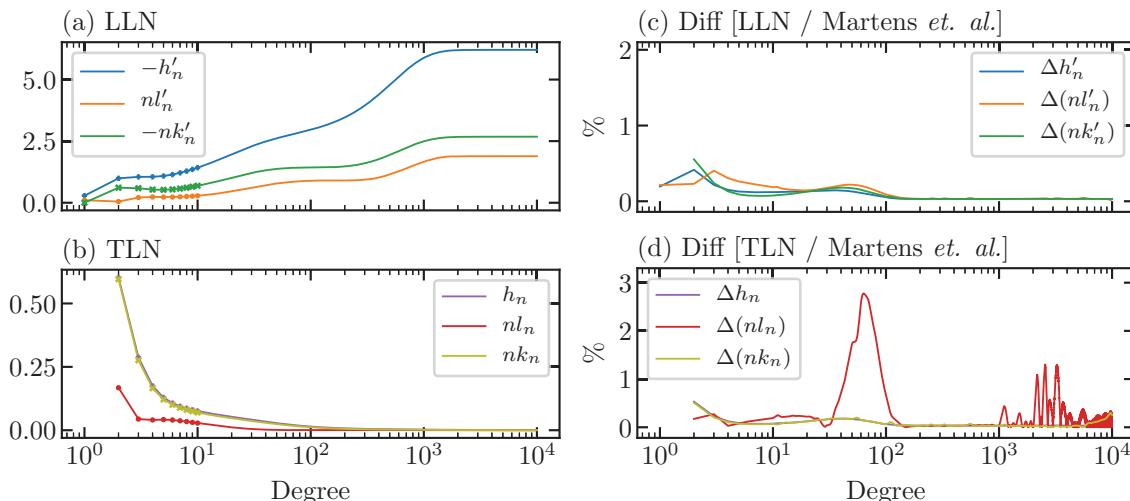


Fig. 4.6 – LLN (a) et TLN (b) pour une Terre PREM avec noyau liquide obtenus avec le schéma d'intégration exposé dans la Section 1.6. (c) et (d) sont respectivement les différences des LLN et TLN avec ceux obtenus par le logiciel *LoadDef* développé par Martens et al. (2019). (extrait de Michel & Boy (2021))

surface. La Fig. 4.7 représente cette évolution pour les LLN jusqu’au CMB. Au delà, les nombres de Love ne sont plus définis car on se trouve dans la couche du noyau liquide. On voit que plus les degrés augmentent, plus la déformation en profondeur est petite car $(h'_n, l'_n, k'_n + 1) \rightarrow (0, 0, 0)$. La déformation en surface prend quant à elle des valeurs de plus en plus importantes.

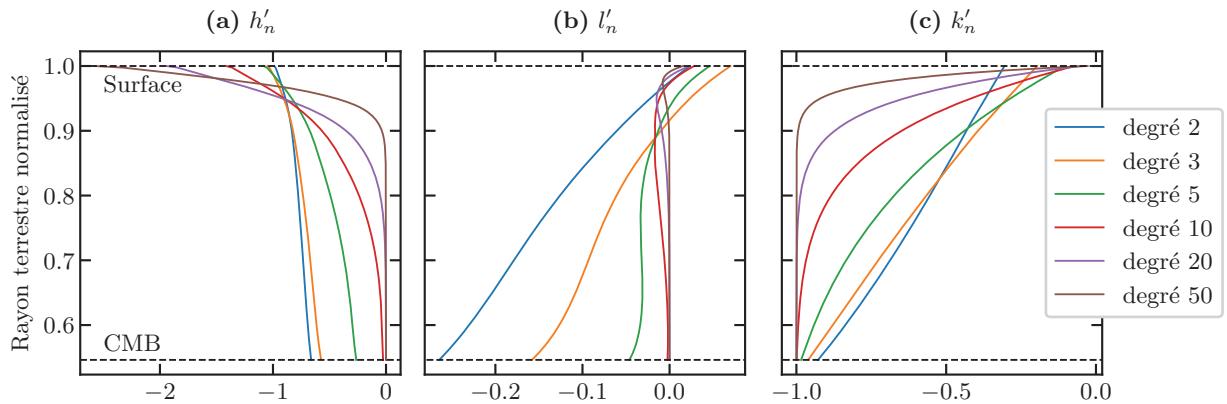


Fig. 4.7 – Évolution avec la profondeur des nombres de Love de surcharge (LLN) pour une Terre PREM.

2.3 Cas visco-élastique (basé sur Michel & Boy (2021))

Le modèle PREM fournit également des coefficients d’atténuation (Q_K et Q_μ) liés à un comportement anélastique dissipant de l’énergie dans les différentes couches. Néanmoins, ces coefficients sont le résultat d’une inversion pour seulement deux périodes d’excitation données (1s et 200s) qui sont en dessous des périodes considérées pour nos déformations d’intérêt (supérieures à 10 jours). Nous construisons donc des modèles visco-élastiques sur la base des modèles présentés dans la Section 3 permettant de prendre en compte n’importe quelle fréquence de forçage. Ces considérations ont été publiées dans Michel & Boy (2021). La partie introductive de l’article ayant fait l’objet d’un traitement très détaillé dans les sections précédentes, nous ne reportons ici que certaines parties de l’article original. Nous les avons enrichies de la Figure 4.8 représentant les paramètres λ et μ associés à une rhéologie de MAXWELL 21-23 (voir ci-dessous pour la signification) en fonction de la profondeur et de la période.

2.3.1 Viscoelastic models

In the following, we choose to construct viscoelastic models keeping the base of PREM (radial structure and variables) but considering Maxwell or Burgers models in some layers of the mantle. We do not choose continuous viscosity profiles existing in the litterature Vermeersen & Sabadini (1997); Kaufmann & Lambeck (2002); Steffen & Kaufmann (2005) because they have been computed from deformations of specific data and models. Since we aim to compare several independant geophysical processes in this study considering different viscoelastic models, the choice of non adjusted viscosity profile (i.e. not derived from specific geophysical data) is more suitable. On the other hand, dealing with continous radial viscosity function is equivalent to set an arbitrary large number of thin sublayers of constant viscosity which creates unnumerable normal modes. The normal mode approach using the Laplace transform (LT) is thus very difficult to numerically handle because of the complex poles integration. If some mathematical tricks exist to overpass these difficulties Tanaka et al. (2006); Spada & Boschi (2006), the Fourier transform (FT) provides the possibility to directly deal with these large amount of modes with a simple resampling of the discrete Fourier transform to include all the generated decay timescales. Finally, the parameters of the viscoelastic models used in this study obey the following constraints.

- The density ρ and the elastic moduli λ^e and μ^e are set to the PREM values.
- The viscosity profile (either η^m and η^k) is divided in four main layers : Core(s) from $r = 0$ to 3480 km, lower mantle (LM) from $r = 3480$ to 5701 km, upper mantle (UM) including transition zones from $r = 5701$ to 6346,6 km and lithosphere from $r = 6346,6$ km to the surface.

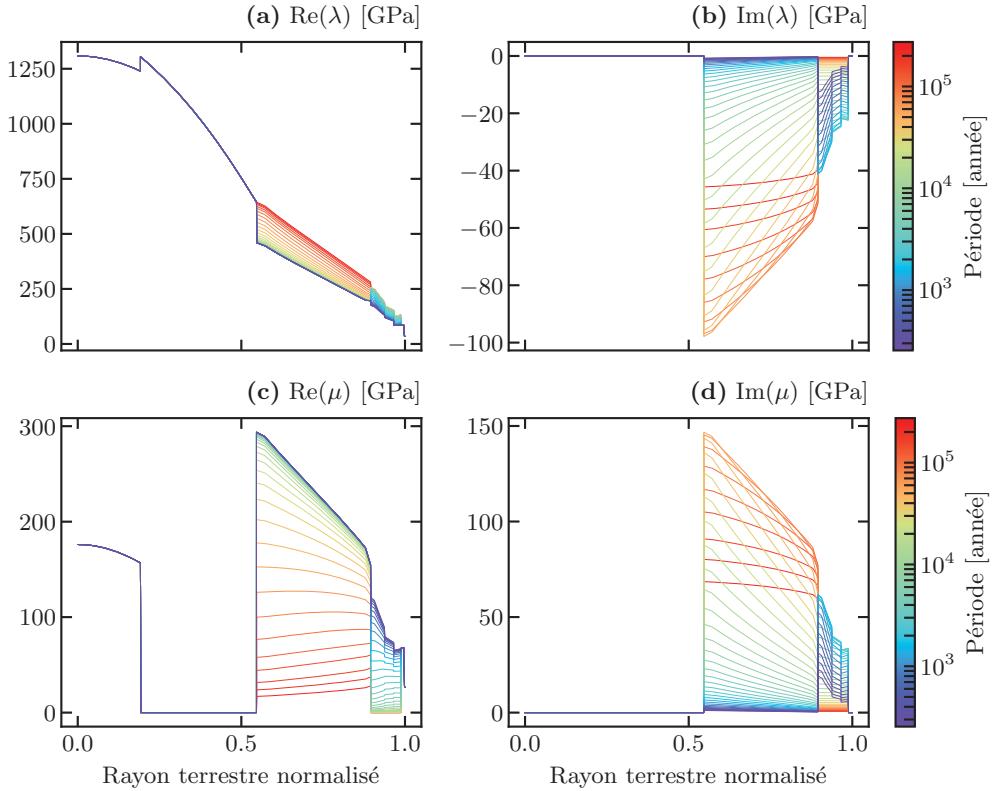


Fig. 4.8 – Paramètres rhéologiques du modèle de MAXWELL 21-23 (voir ci-dessous) en fonction du rayon et de la période. Les paramètres ρ et g (non représentés) sont identiques au cas PREM élastique de la Figure 4.4.

- The viscosities can only take constant value within each of these four layers (constant piecewise functions) and the viscosities in the Core(s) and the lithosphere are always infinite (purely elastic layers).
- We set Maxwell models both in LM and UM.
- We can choose to set Burgers model only in UM and in that case, $\mu^k = \mu^e/10$.

The notations for the rheological models used in this article are explained in the Tab. 4.2.

Notation	Explanation
MAXWELL $\log(\eta^m)$	Maxwell homogeneous model in the whole mantle of viscosity η^m
MAXWELL $\log(\eta_{\text{UM}}^m) - \log(\eta_{\text{LM}}^m)$	Maxwell model of viscosity η_{LM}^m in the lower mantle and η_{UM}^m in the upper mantle
MAXWELL $\log(\eta_{\text{UM}}^m) - \log(\eta_{\text{LM}}^m)$ BURGER $\log(\eta_{\text{UM}}^k)$	Maxwell model of viscosity η_{LM}^m in the lower mantle and Burgers model of viscosities η_{UM}^m and η_{UM}^k in the upper mantle

Tab. 4.2 – Notations pour les rheologies viscoélastiques utilisées dans cette étude où toutes les viscosités sont en Pa.s. Nous conservons les moduli élastiques compressibles (λ^e, μ^e) du PREM dans toutes les couches du modèle de la Terre, nous utilisons une rheologie viscoélastique dans le manteau et nous définissons $\mu^k = \mu^e/10$ si la rheologie de Burgers est utilisée dans l'UM.

2.3.2 Frequency and degree dependence

Taking advantage of the correspondence principle stated in Sec. 3.1, viscoelastic Love numbers are calculated in the Fourier domain for a given viscoelastic model. As a consequence, the Lamé functions $\lambda(\omega)$ and $\mu(\omega)$ are frequency and radial dependent complex functions given in the Tab. 3.2. On the other hand, ρ_0 and g_0 remain real and depend only on r . Solving the system in the Fourier domain does not change the fundamental physical concepts neither the integration and interface conditions. We can then compute the

Love numbers applying the same integration scheme than for elastic case resolving the gravito-elastic system at a given degree n and a given frequency ω_0 . We note that unlike the elastic case, the inertial term proportional to $\rho\omega^2$ coming from the impulsion conservation equation is no longer neglected even if its contribution is small. The computed Love numbers are also complex values such that the imaginary part indicates the possible temporal delay (or phase delay) of the system response compared to the perturbation. This delay is entirely induced by the viscous behavior of the system. The system can then be resonant in particular frequencies called modes depending on the viscoelastic model [Alterman et al. \(1959\)](#); [Wu & Peltier \(1982\)](#).

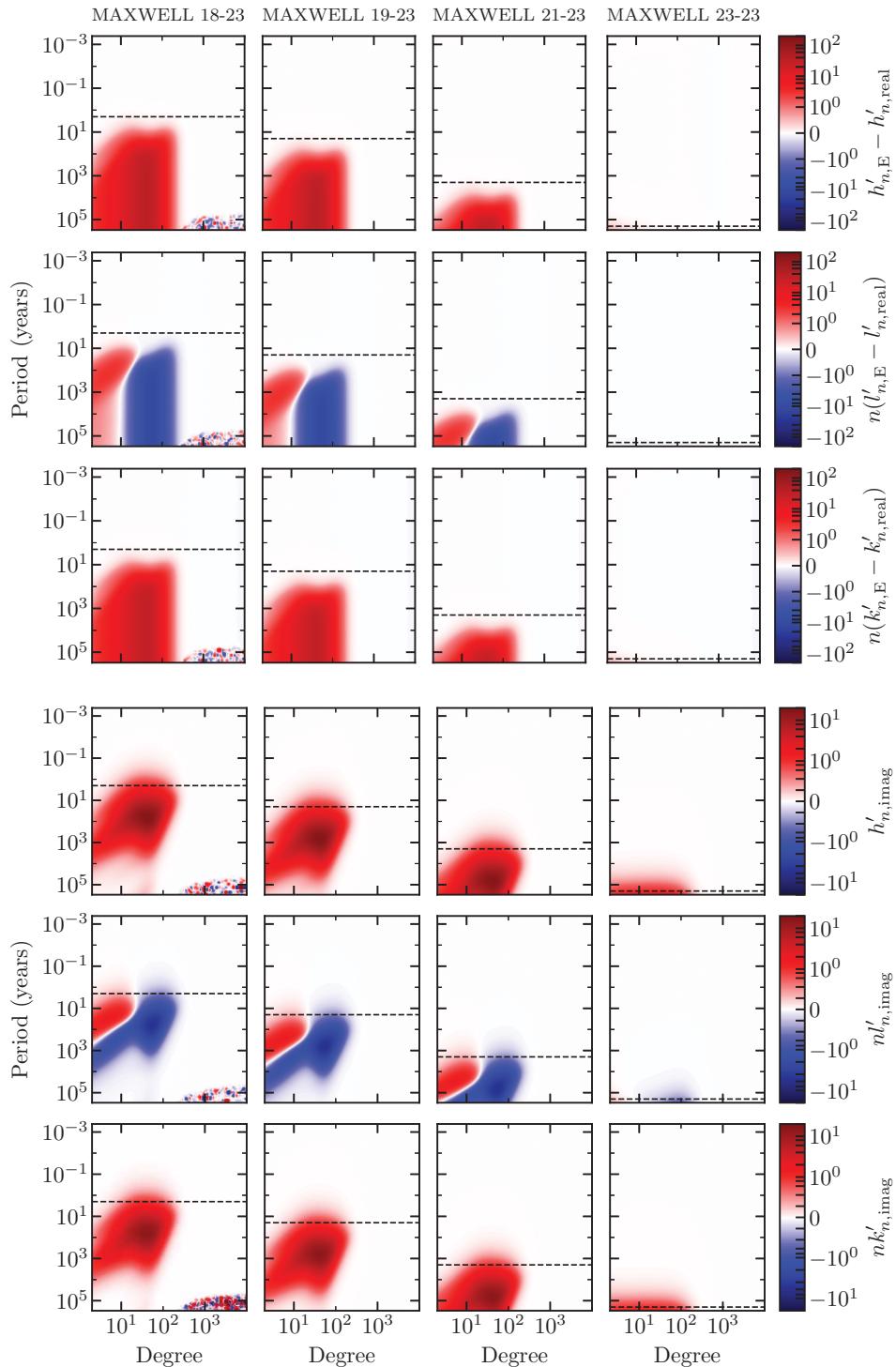


Fig. 4.9 – (a) Difference between LLN of visco-elastic Maxwell models and PREM in percent (real part above, imaginary part below). Maxwell models have respective viscosity of 10^{18} , 10^{19} , 10^{21} , 10^{23} Pa·s for upper mantle and 10^{23} Pa·s for lower mantle. The black dotted line marks the mean cutoff frequency of the equivalent low-pass filter for each model.

LLN computed for four viscoelastic Maxwell models of fixed LM viscosity ($\eta_{\text{LM}}^m = 10^{23} \text{ Pa}\cdot\text{s}$), are represented in Fig. 4.9 in function of degree and frequency. Fig. 4.9a shows the difference between the real part of viscoelastic LLN with respect to elastic ones while Fig. 4.9b represents the imaginary part of viscoelastic LLN. Since we introduce viscosity only for intermediate mantle layers, the high degrees are barely affected by the changes in the Earth model. For lower degrees, we see the behavior of low-pass filter of the Maxwell function $m(\omega)$ defined in Sec.3.2 : for periods shorter than the cutoff period, the viscoelastic LLN equals the elastic LLN and for periods longer than the cutoff period, the difference between the two increases. The cutoff period increases linearly with the UM viscosity in agreement with the theoretical formula $T^m = 2\pi\eta^m/\mu^e$ of Sec.3.2. Taking the mean value of the PREM UM shear modulus $\bar{\mu}^e = 10^{11} \text{ Pa}$, we find $T^m = 2, 20, 2000 \& 200000$ years for the successive represented Maxwell models. These values reported in black dotted lines are roughly consistent with the observed transition periods on the Fig. 4.9. For the imaginary part, the effects of viscosity seems to be bounded in a particular period interval. We also notice that the main pattern in lower UM viscosity panels are unaffected as the viscosity increases except for downward shift towards higher periods. This behavior comes from the simple rescaling of frequency ω to $\eta^m\omega/\mu^e$ such that $m(\omega)$ remains invariant as η^m increases if ω decreases. The frequency dependence of gravito-elastic equations being only in the $m(\omega)$ function (the inertial term is negligible), the results are simply shifted of the value of the scaling factor. Such behavior should not occur in Burgers models as the frequency dependence is much more complicated. As discussed in Sec. 3, the behavior of high viscosity rheology (beyond $\eta^m = 10^{23} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) MAXWELL 18-23 tends to the elastic case for a large range of the spectrum such that only the larger periods (non visible on the Figure) still change. We also notice that some artefacts appears in the lower viscosities at high degrees and long periods. It corresponds to a zone where the values of viscosities, periods and degrees are unrealistic for a physical use and for which the numerical integration becomes unstable.

2.3.3 Viscosity model dependence

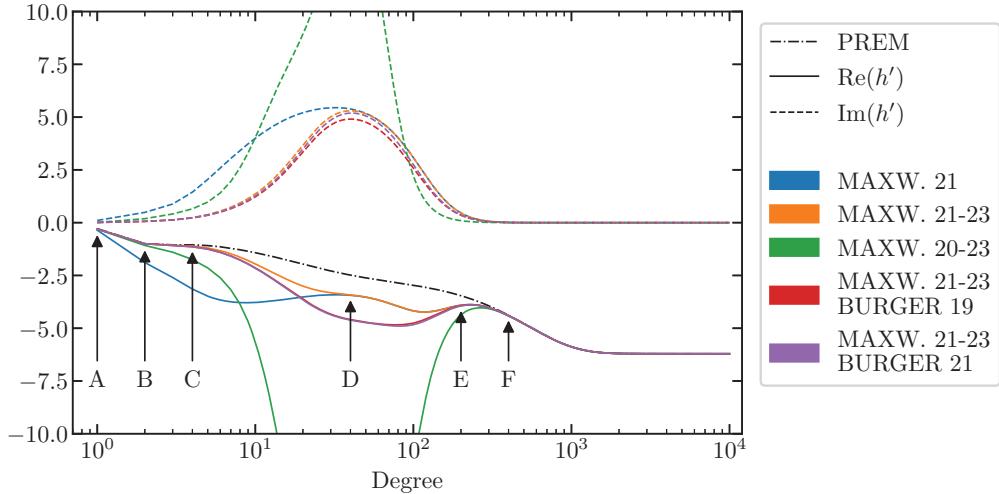


Fig. 4.10 – Real and imaginary part of vertical displacement LLN h' under an excitation of period $T = 11000$ years, for several Maxwell and Burgers models of different UM and LM mantle viscosities. We also represent h' from PREM which is a real function. Points A to F indicate the main discrepancies between models.

To compare the response of different viscoelastic models at a given frequency, we represent the vertical displacement LLN h' for some Maxwell and Burgers rheologies in Fig. 4.10. This representation is interesting to highlight the different degree ranges delimited by the markers A to F, corresponding to the preponderance of particular viscoelastic parameters in the mantle. The period is fixed to 11000 years, in order to have significative effects of viscoelasticity on the LLN (Fig.4.9). It is important to keep in mind that the results presented in this paragraph are applicable only at this particular frequency.

Since degree 1 (A) is mainly dependent of the Inner Core and liquid Core structure, we do not see any

differences between all the models. For low degrees, we see a strong deviation of MAXWELL 21 model from the others, which is due to the differences in their LM viscosity profiles which have an impact starting from degree 2. At point B, we see the shift between models with 10^{20} Pa·s and models with 10^{21} Pa·s UM viscosity. This means that the UM structure have an influence starting from degree 3. Then from point C (degree 4), Maxwell and Burgers models with same Maxwell parameters diverge from each other. This point is the lower limit where the presence of transient viscosity in Burgers model infers on LLN. The value of the transient viscosity does not impact significantly the real part of LLN, but has a little influence in their imaginary part from C to E. The point D is the reconnection point for MAXWELL 21 and MAXWELL 21-23 models, defining the upper limit where LM has no more influence on LLN and from which only the UM structure infers. At point E, there are no more differences between Burgers and Maxwell models which have equal η^m while only MAXWELL 20-23 still differs from the other viscoelastic models. Finally, the point F set the limit where the mantle structure has no more influence such that LLN are impacted by the crust structure only. Consequently, modified PREM including refined crust models as CRUST1.0 should present differences beyond F.

3 Déformation visco-élastique utilisant la TF (basé sur [Michel & Boy \(2021\)](#))

Dans cette section, nous nous basons également sur les résultats publiés dans l'article [Michel & Boy \(2021\)](#), qui décrivent la méthode de détermination de la déformation d'une perturbation qu'elle soit sinusoïdale ou non, en utilisant les nombres de Love visco-élastique que l'on a calculés en utilisant la méthode présentée dans la Section 2.3 à l'aide de la TF. Grâce à la méthode employée, nous sommes alors en mesure de calculer les déformations de différents phénomènes de longue période pour lesquels l'aspect visco-élastique du manteau est mesurable. Nous avons exploré dans [Michel & Boy \(2021\)](#), les déformations liées aux marées solides de longue période, au rebond post-glaciaire et à la fonte des glaces récente.

3.1 Computation of viscoelastic deformation with FT

3.1.1 Sinusoidal perturbation

The complex Love numbers obtained after the integration at $\omega = \omega_0$ correspond to the frequency response of the system to a time sinusoidal unit perturbation oscillating at the frequency ω_0 (ω_0 can take any value). Then it is easy to compute the viscoelastic deformation of a sinusoidal perturbation (such as tidal waves for example) by just multiplying the complex admittance of the perturbation derived from its sinusoid characteristics (amplitude and phase) with the associated complex viscoelastic Love number. The resulting deformation is also a sinusoid characterized by the obtained complex number.

3.1.2 Non-sinusoidal perturbation

We consider now the time series of the harmonic degree n of a non-sinusoidal perturbation. To solve the problem in the frequency domain, we have to compute the Discrete Fourier Transform (DFT) of this signal to obtain the frequency perturbation spectrum. Then, the Earth frequency response can be computed easily by calculating the n^{th} degree Love number for the different frequencies ω_0 of the frequency set given by the DFT. Eventually, we need to multiply the two spectra which corresponds to the convolution of the Earth response with the perturbation in the time domain. We obtain the temporal deformation after taking the inverse DFT. However, in order to avoid the calculation of Love number each time that the frequency set changes, it is easier to previously calculate the Love numbers at some well-distributed values within a large frequency range. The frequency range must include the characteristic timescales of the different geophysical phenomena that we could treat. The collection of these Love number values at these different frequencies corresponds to a good approximation of the Fourier transform of a unit impulse perturbation (temporal Dirac function). We can then linearly interpolate this Love number spectrum to the frequency set given by the DFT of any kind of perturbation.

We generally use the Fast Fourier Transform algorithm (FFT) to implement numerically the DFT. This algorithm is optimized for samples of 2^N epochs regularly spaced. Then we need to resample the initial temporal perturbation signal, especially if it is initially not regularly sampled. The resampling depends mostly on the interpolation function especially the type of spline used (linear, quadratic, cubic, etc.). For high order splines (beyond cubic), the interpolated signal should create some artefacts in the frequency domain at high frequencies especially if N is too large. For linear spline, the interpolated signal could have jerky variations which create non negligible high frequency content which can alias the DFT if N is not large enough (Nyquist criterion). A compromise can be made by choosing a cubic spline interpolation which should not create high frequency content because of its smoothness. Finally, we choose N in an intermediate range of values such that 2^N is large enough to avoid aliasing and not too large to avoid issues on temporal resampling. A good compromise is to choose N such that 2^{N-2} is the superiorly closest value to the number of samples in the initial series. For example if there are 500 samples in the initial time series, the closest power of two is $2^9 = 512$ so that we choose $N = 11$. This choice of N prevents aliasing in the spectrum calculation. If the samples are initially not regularly spaced, we should first resampling at the shortest timestep, then determine the closest power of two of the resampled time series and finally choose the optimal N . Examples are given in Sec. 3.2.2 & 3.2.3. Another trick in the computation of FFT is to artificially increase the resolution of the spectrum using zero-padding. The addition of zeros on the time series is not without effects (windowing) on the spectrum such that we advise to not employ this technique in most cases. The spectrum is less impacted by this technique if the beginning and the end of the true time series tend to zero. Therefore, we prefer to use neither zero-padding nor windowing in this study but to compute the FFT with the same number of points (2^N) as the resampled time series. We add a remark on the fact that since the viscoelastic Love numbers are not computed for the zero frequency, a special attention should be given to the corresponding coefficient in the DFT (leading to permanent deformation). If we only want relative values of deformations, the coefficient could simply be set to zero (the mean of the signal is then removed).

3.1.3 Global perturbation

The majority of perturbation signal have a non trivial spatio-temporal repartition on the Earth surface (especially loading signals). We decompose for each time step, the spatially-dependant perturbation into Spherical Harmonics (SH) to match the decomposition of our Love number calculation. We then obtain the amplitude time series of each SH coefficient. Then we apply to each SH coefficient time series representing the amount of signal in a given spatial configuration the procedure described in the previous section to obtain the associated deformation SH coefficient. The recomposition of the spatio-temporal deformation is done by the recombination of all SH coefficient for each time step. We note that since the Love numbers are degenerate in the order m for a SNREI model, every (n, m) Love numbers are equal to the zonal $(n, 0)$ Love number.

This general procedure is capable of handling a large number of geophysical signals while being fairly easy to implement and numerically fast. Moreover, it is still possible in the viscoelastic case to use Green function formalism developed in [Farrell \(1972\)](#) to deal with local sinusoidal deformations. The main difference is that the Green functions will be complex and calculated for a single frequency chosen to correspond to the perturbation signal frequency.

3.2 Applications

The viscoelastic Love numbers are used in several classical applications. We consider some particular examples : long period tidal deformations, glacial isostatic adjustment and the secular signal deduced from GRACE/GRACE-FO (Gravity Recovery And Climate Experiment - Follow-On) [Tapley et al. \(2004\)](#); [Flechner et al. \(2014\)](#), mainly due to present-day ice mass loss in Antarctica, Greenland and Alaska [Lutke et al. \(2013\)](#). We compare the elastic and several viscoelastic responses to these perturbation signals in order to evaluate the impact of slightly different rheologies. This can be useful to further investigate the usual models of deformation considering the actual experimental constraints. In particular, the viscoelastic long period tidal deformations are compared to the results of current IERS convention model [Petit & Luzum \(2010\)](#).

3.2.1 Solid Earth tides

Solid Earth tides, especially their long-period zonal constituents, are particularly interesting to investigate the Earth's rheology, as the tidal potential can be computed with high precision ([Hartmann & Wenzel, 1995](#)). Among other studies ([Dehant & Zschau, 1989](#); [Walterová & Běhounková, 2017](#)), [Benjamin et al. \(2006\)](#) investigated the anelasticity in the Earth response to the long-period tides using C_{20} observations from Satellite Laser Ranging, and Polar Motion. However, their approach is based on the absorption band process as it is commonly done in seismology but not on a consistent viscoelastic model. We propose to calculate the direct response of several viscoelastic models based on PREM with the method developed in this study to evaluate the differences with the IERS conventions ([Petit & Luzum, 2010](#)), which are classically used in the processing of geodetic data. The solid Earth tidal displacement calculation described in IERS conventions is based on [Wahr \(1981\)](#) and [Mathews et al. \(1995\)](#) Love number definitions and consists of several disparate contributions to each Love numbers and displacement terms that are computed in a two steps procedure. In addition, the non-sphericity of the Earth and the Free Core Nutation resonance have been taken into account in the IERS conventions, leading to both degree and order dependence of Love numbers, and to frequency-dependant Love numbers in the diurnal band.

Since the effect of viscoelasticity in the mantle becomes significant at long periods (Fig. 4.9), we focus on the zonal long period tidal waves. Moreover, we will only consider the predominant zonal contribution $(2, 0)$, since the higher zonal terms are several orders of magnitude lower. We propose to represent the vertical displacements induced by these $(2, 0)$ tidal constituents for some viscoelastic models and to compare the results with the IERS conventions.

We use the catalogue corresponding to the harmonic decomposition of tidal constituents given by [Doodson \(1921\)](#), in the theoretical frame developed by [Hartmann & Wenzel \(1995\)](#). We compute the complex admittance of each wave that we then multiply with the corresponding complex degree 2 TLN to obtain the Fourier transform of the deformation as described in the Sec. 3.1.1. We compute the deformation for all the $(2, 0)$ tidal waves at their respective frequencies. The degree 2 TLN associated to the main waves are reported in Tab. 4.3 where we see that the major impact is for the longest period waves and the lowest viscous models. The total deformation spectrum is given by the collection of all Dirac peaks which is none that a Fourier series as described in [Beuthe \(2015\)](#). At last in the time domain, the resulting time serie deformation is multiplied with the associated $(2, 0)$ Legendre polynomials to get latitude dependence.

Wave Frequency (cycle·yr ⁻¹)	[Nodal] 0.0537	[Ssa]	[Mm]	[Mf]
MAXWELL 18	1.668203 – 0.318953i	0.647748 – 0.186672i	0.604599 – 0.030164i	0.603753 – 0.014975i
MAXWELL 19	0.929106 – 0.437636i	0.603970 – 0.020013i	0.603487 – 0.003022i	0.603479 – 0.001498i
MAXWELL 20	0.610220 – 0.073787i	0.603481 – 0.002003i	0.603476 – 0.000302i	0.603476 – 0.000150i
MAXWELL 21	0.603545 – 0.007458i	0.603476 – 0.000200i	0.603476 – 0.000030i	0.603476 – 0.000015i
MAXWELL 22	0.603477 – 0.000746i	0.603476 – 0.000020i	0.603476 – 0.000003i	0.603476 – 0.000001i
MAXWELL 23	0.603476 – 0.000075i	0.603476 – 0.000002i	0.603476 – 0.000000i	0.603476 – 0.000000i
MAXWELL 18-23	0.612103 – 0.025199i	0.603842 – 0.002128i	0.603485 – 0.000335i	0.603478 – 0.000166i
MAXWELL 19-23	0.606343 – 0.005692i	0.603480 – 0.000224i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 20-23	0.603529 – 0.000895i	0.603476 – 0.000024i	0.603476 – 0.000004i	0.603476 – 0.000002i
MAXWELL 21-23	0.603476 – 0.000156i	0.603476 – 0.000004i	0.603476 – 0.000001i	0.603476 – 0.000000i
MAXWELL 19-23 BURGER 17	0.609618 – 0.003846i	0.608544 – 0.001500i	0.604968 – 0.002329i	0.603970 – 0.001499i
MAXWELL 19-23 BURGER 19	0.608745 – 0.005928i	0.603497 – 0.000444i	0.603476 – 0.000067i	0.603476 – 0.000033i
MAXWELL 19-23 BURGER 21	0.606374 – 0.005720i	0.603480 – 0.000226i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 21-23 BURGER 17	0.608966 – 0.000157i	0.608529 – 0.001391i	0.604959 – 0.002305i	0.603967 – 0.001484i
MAXWELL 21-23 BURGER 19	0.607071 – 0.002575i	0.603486 – 0.000226i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 21-23 BURGER 21	0.603479 – 0.000239i	0.603476 – 0.000006i	0.603476 – 0.000001i	0.603476 – 0.000000i

Tab. 4.3 – Complex degree 2 TLN for the four main tidal waves and for each of the considered viscoelastic models.

The PREM vertical deformation without the permanent tide is shown in Fig. 4.11. This displacement is a reference such that the real displacement is obtain by multiplying the reference with the Legendre polynomials. The deformation waves are contained in a 18,6 years (Nodal tide) and a 4,5 years envelope, which is itself modulated by the semi-annual wave (Ssa). The smaller periods especially Mm (27,55 days) and Mf (13,66 days) are visible on the red zoom inset of Fig.4.11.

We then compute the tidal deformations for several viscoelastic rheologies. Fig. 4.12 represents the residual vertical displacement of several viscoelastic models after PREM signal was removed. The permanent

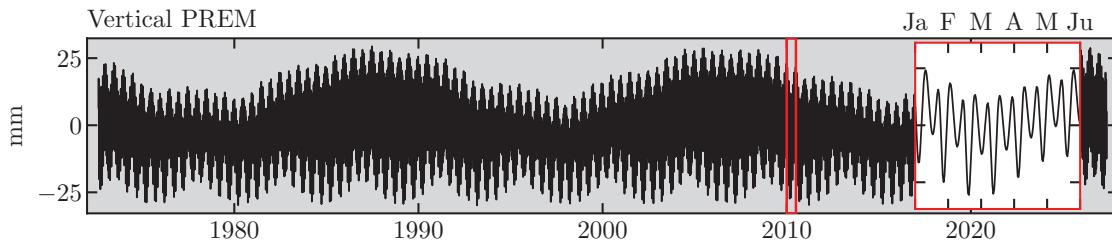


Fig. 4.11 – Elastic PREM vertical displacement of (2, 0) tidal waves from Doodson catalogue. This displacement have to be multiplied by the associated Legendre polynomials to obtain the real displacement in function of latitude. The red inset in (a) is a 6 months zoom to see the high frequencies.

tide is then automatically discarded and the signal is zero mean. The amplitude of the residuals and the corresponding normalized time series are represented separately in order to compare properly the phase shift and the frequency content of the signal. We also include the residuals calculated from the difference between the IERS conventions [Petit & Luzum \(2010\)](#) and PREM. We choose to compute the residuals for the reference displacement (without multiplying by the Legendre polynomial) because the choice of a particular latitude does not matter to compare the different models since every models are modulated by the same Legendre polynomial value at a given latitude. The reference amplitude have then to be considered as real amplitude with Legendre polynomials is equal to one (equivalent to latitude $\pm 36,5^{\circ}\text{N}$). The maximum amplitude is obtain by multiplying the reference amplitude by a factor 2,24.

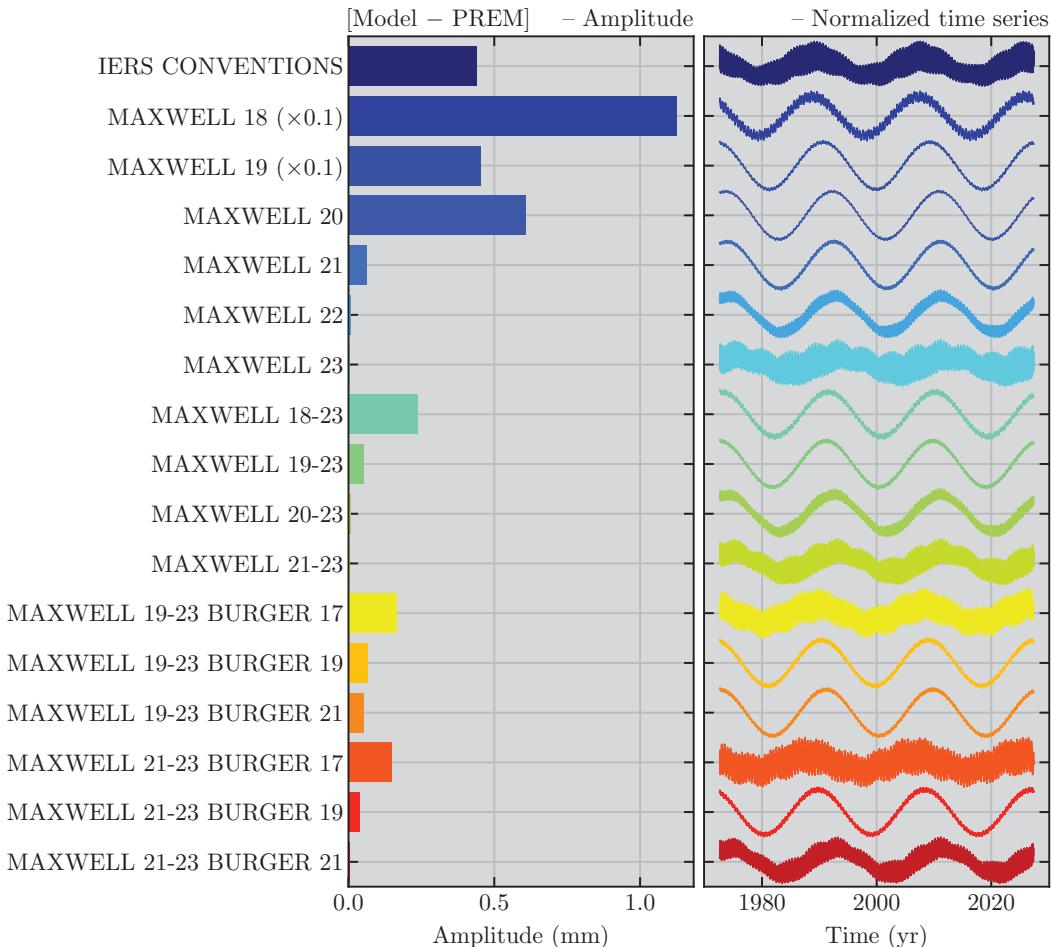


Fig. 4.12 – Residuals of the total vertical displacement generated by the (2, 0) tidal waves from Doodson catalogue, for several viscoelastic rheologies and the model given in the IERS conventions [Petit & Luzum \(2010\)](#). The residuals have been computed according to PREM displacement time series. We plotted the amplitudes (left) and the normalized time series (right).

The amplitude for the residuals of MAXWELL 18 and MAXWELL 19 models are ten times greater than the ones reported in the Figure, reflecting the important discrepancy between these models and PREM. The amplitude decreases when the viscosity increases for homogeneous viscoelastic Maxwell models. The same behavior is observed when we set the LM viscosity at 10^{23} Pa·s and that only the UM viscosity varies. Again the amplitude of Burgers models decreases as the transient viscosity η_k increases.

On the other hand, the right panel indicates that the main component of the difference between PREM and the viscoelastic models is the Lunar nodal wave at 18,6 –year period. Indeed, as we saw in Fig. 4.9 for LLN, TLN are more impacted by the viscoelasticity as the period increases. The largest tidal period computed being the Nodal wave, it is the most likely one to be affected. We also see that this wave is subject to a phase shift as the viscosity changes. We can measure it by locating the maximum displacement positions on the time series. The phase shift exists for all tidal waves but is more important for the longest periods (as they are the most likely to be impacted by the viscosity).

As every model is associated to a low pass filter with one or several cutoff frequencies, changing the viscosity model is also changing its cutoff frequencies. If the range of cutoff frequencies contains one or several of the main tidal wave, then changing even slightly the viscosity models can significantly impact the displacement of the Earth at this tidal wave frequency. We can see this effect in the Fig. 4.12 especially when we change the value of transient viscosity for Burgers models, but also as the global mantle viscosity increases.

We show the high dependence of the Earth viscoelastic parameters to the response of long-period tides. The objective should then to refine the determination of these parameters to provide optimal parameters for a realistic viscoelastic Earth model. The use of such model in the tidal deformation computation should be able to replace the actual IERS conventions two-steps procedure which does not correspond to a consistent physical model. In particular, the differences in the 18,6 –year tide deformation between the actual IERS conventions and a more realistic viscoelastic model can exceed 2 mm (after multiplying by degree 2 Legendre polynomial), which is twice the desired accuracy in position for terrestrial reference frame (Altamimi et al., 2016).

3.2.2 GIA / Post-glacial rebound

Glacial Isostatic Adjustment (GIA) is another important proof of the viscoelasticity of the Earth and has already been largely studied (Peltier et al., 1981; Lambeck et al., 1998). A GIA solution (displacement rates and ice history) is generated for a given rheology and Earth structure. We want to evaluate the sensitivity of actual deformation rates observed with a slight change in viscoelastic parameters from a GIA model (Steffen & Kaufmann, 2005; Roy & Peltier, 2015). In the same way, Caron et al. (2017) used a bayesian approach to realize such sensitivity tests on GIA models parameters. We compute the displacements given by the ICE-6G model supplied by Peltier et al. (2015) to validate our methodology on non-periodic perturbations. Taking the ice history derived from ICE-6G, we can compare the predicted actual vertical displacement rate for several Maxwell rheologies since they generally are the best to fit the GIA observed deformations.

First, we decompose the ice history into SH using the Python library SHTools (Wieczorek & Meschede, 2018). We consider the ocean as an homogeneous reservoir and determine an homogeneous sea level at each time in order to enforce the global mass conservation. As described in Sec. 3.1.2 & 3.1.3, we then compute the DFT of each SH coefficient using FFT algorithm on the time series previously resampled to $2^{11} = 2048$ epochs by cubic interpolation. We choose $N = 11$ because the initial number of sample in the ice history is 122, extended to 489 taking the minimum timestep of 250 years, and which the closest power of two is 2^9 . Some coefficients and an example of their Fourier spectrum estimation are given in Fig. 4.13 where we see that choosing too small N can create aliasing and can slightly shift in the y direction the FFT results (panel (b)). Since the input time series are real, the FFT is computed only between $f = 0$ and $f = f_s/2$ where $f_s = 0,0042 \text{ cycle}\cdot\text{yr}^{-1}$ is the sampling frequency. The rest of the spectrum is useless and redundant since it is symmetric. The frequency precision $\delta f = 1,03 \times 10^{-6} \text{ cycle}\cdot\text{yr}^{-1}$ of the FFT is given by the inverse of the total period of the ice history signal (duration of 122 kyr). It is also the most little non zero frequency to be calculated by the FFT algorithm. After multiply coefficients and LLN spectrum and take the inverse FFT, we have the temporal deformation SH coefficients which we combine with Legendre polynomials to obtain the deformation field.

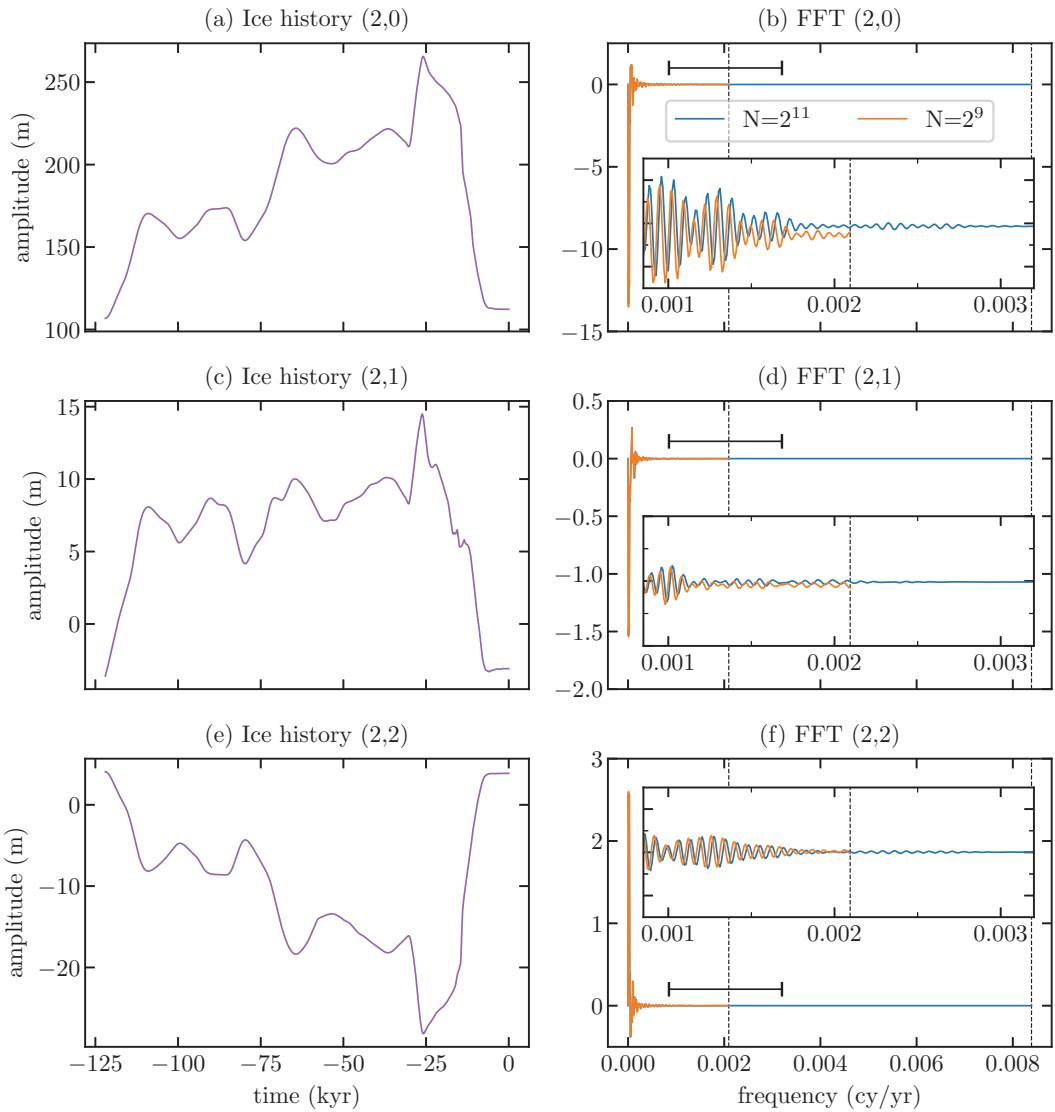


Fig. 4.13 – Cubic interpolation of time evolution and the associated FFT of (2,0), (2,1) and (2,2) SH coefficients of the ICE-6G ice history. The black dotted lines in FFT plots are the Nyquist frequencies for the two choices of N where 2^N is the number of time and frequency samples used, while the black segment are the frequency span of the inset zoom plots.

The ice history model in ICE-6G already assumes a particular rheology which was determined by the global inversion of the surface displacements and sea level data (Peltier et al., 2015). It is then interesting to evaluate the importance of a slight change in rheological parameters when we compute the vertical surface displacement. The results are shown in the Fig. 4.14, where we test five different Maxwell viscoelastic rheologies for the mantle. Their parameters have been chosen to explore the parameter space close to ICE-6G results and to be coherent with the values obtain in Kaufmann & Lambeck (2002), Steffen & Kaufmann (2005) and Caron et al. (2017) to recover the UM and LM viscosities. The amplitudes of the vertical rate are very similar to the one found in the viscoelastic prospections led in Marotta (2003). The amplitudes could significantly differ from ICE-6G showing the strong dependence in rheological parameters.

In order to compare the spatial repartition of the deformation between the different models and ICE-6G, we compute for each case, the normalized map (with unity maximum amplitude), and then define a correlation coefficient C as

$$C = \frac{\sum_{i,j} (M_{ij} - \bar{M}_{ij}) (P_{ij} - \bar{P}_{ij})}{\sqrt{\sum_{i,j} (M_{ij} - \bar{M}_{ij})^2} \sqrt{\sum_{i,j} (P_{ij} - \bar{P}_{ij})^2}}, \quad (4.48)$$

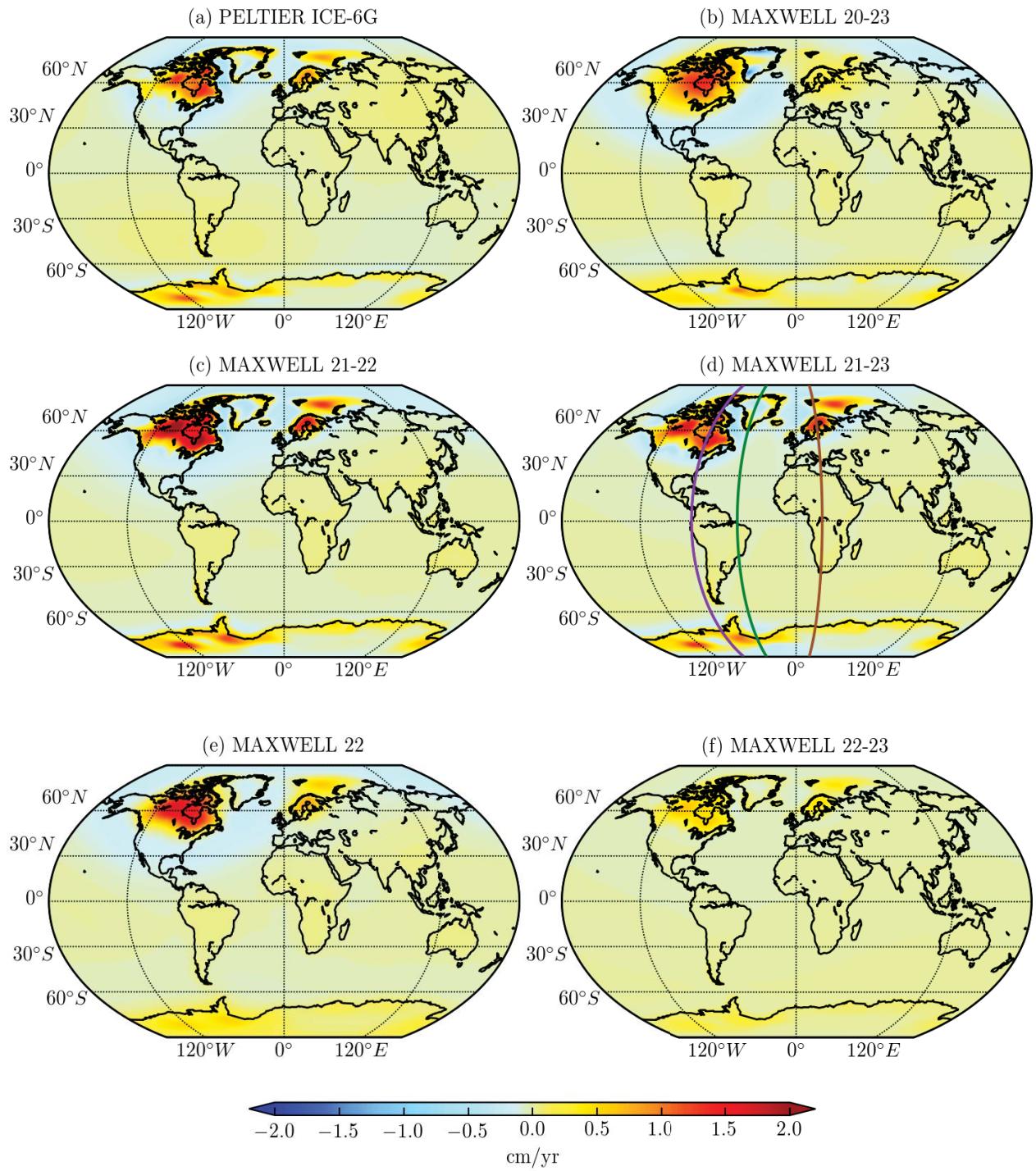


Fig. 4.14 – Actual vertical displacement rate (in $\text{cm} \cdot \text{yr}^{-1}$) computed with ice history of the model ICE-6G (Peltier et al., 2015) for several viscoelastic rheologies. The ICE-6G actual rate map is also shown as a reference. Colored meridians in (d) refer to slices shown in Fig. 4.15. The spatial correlation coefficients ($0 \leq C \leq 1$) between the normalized maps and the reference are (from (b) to (f)) : [0,57, 0,93, 0,93, 0,79, 0,87].

such that P is the normalized ICE-6G map and M one of the normalized tested rheology map. All the models presented in the Fig. 4.14 have $C > 0,55$. The rheologies with the best spatial correlation to ICE-6G are MAXWELL 21-22 and MAXWELL 21-23 reaching 0,93. The optimal parameter between amplitude and spatial pattern should be $10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s} < \eta_{\text{UM}}^m < 10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ and $10^{22} \text{ Pa} \cdot \text{s} < \eta_{\text{LM}}^m < 10^{23} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. If these values are in a good agreement with the ICE-6G model, they have to be used with precaution and maybe locally modified or refined to integrate other timescale phenomena such as post-seismic deformations or Chandler wobble. Besides, A et al. (2013) show that the determination of optimal viscosity parameters based on local studies cannot be properly generalized in global models. Then, the 3D structure of the Earth model especially

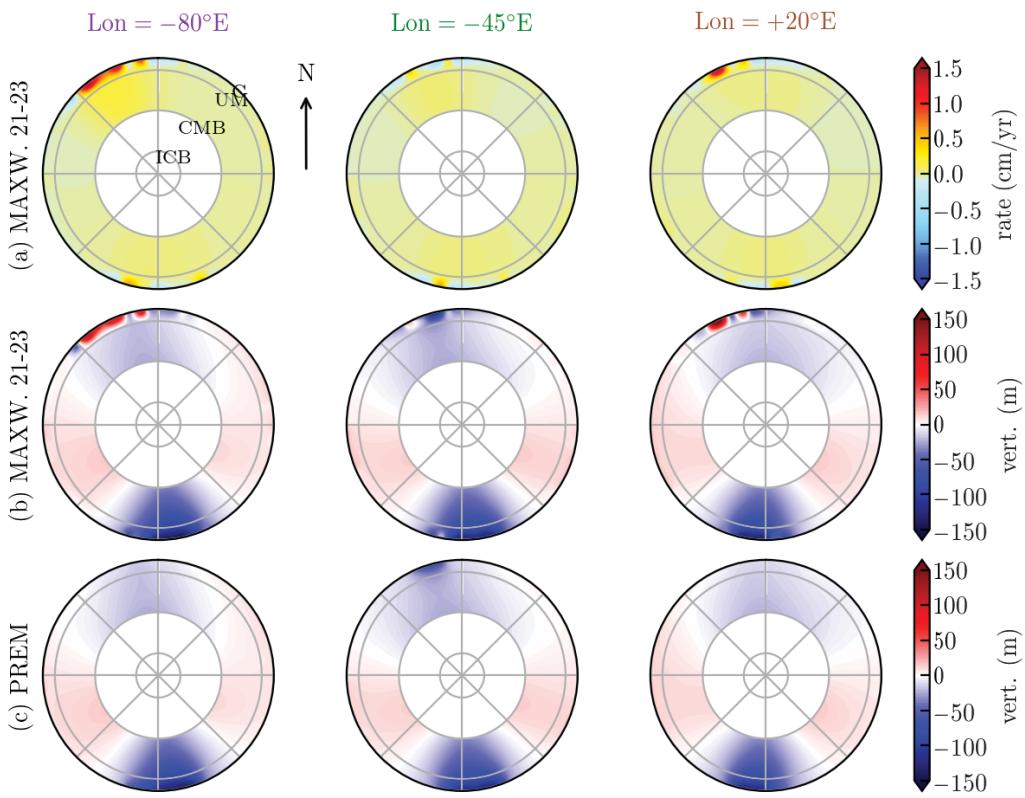


Fig. 4.15 – Vertical actual deformation rate (a) and actual steady state deformation (b,c) in the deep interior of the Earth until the CMB, along longitudinal slices pointed out by the respective colored lines in Fig.4.14d. Panels (a,b) are related to MAXWELL 21-23 rheology and (c) to PREM.

the viscosity profile, should play an important role in the observed uplift of specific regions Wu (2006); Spada et al. (2006); Wu et al. (2013).

The optimal viscosity parameters correspond to a cutoff period of 2000 or 20 000 years for LM and of 200 years for UM. The deformation rate in the LM should then be much slower than in the UM where the timescale is much shorter. To investigate this, we calculated the LLN in the deep interior of the Earth from the CMB to the surface. They have been computed by saving the three unscaled propagating solutions throughout the mantle and then multiply by scaling constants determined within the LLN at the surface. The deep deformation rates have then been computed for MAXWELL 21-23 model using the same scheme than described above (with FFT) at all depth but with a zero frequency LLN taken as elastic LLN. We reported in the Fig. 4.15(a) these deformation rates, for the three longitude slices drawn in the Fig. 4.14(d). The choice of $[-80^{\circ}\text{E}, -45^{\circ}\text{E}, 20^{\circ}\text{E}]$ longitudes has been done to cross the areas of largest deformation : Canada, Greenland, Scandinavia and Antarctica. We see that the localization of the deformation rate is mainly in the UM. This result is not surprising considering the time scales previously estimated for LM and UM. Nevertheless, this does not imply that the actual steady state deformation is null in the LM, as shown in Fig. 4.15(b). The actual steady-state deformation spreads in the whole mantle under the loading of actual and past ice sheets, especially in Antarctica where the actual ice thickness is the largest. Also, we see the formation of a positive deformation bulge beside the ice sheet subsidences. This is the signature of an internal redistribution of matter to reach the global deformation equilibrium state. We compare the actual steady state deformation from MAXWELL 21-23 with PREM (Fig. 4.15c) and see that in PREM, we only see actual ice-covered regions creating deformation since the elastic constraint in other regions (Hudson Bay, Scandinavia, etc.) has already been released thousand years ago.

3.2.3 Present-day ice melting

In addition to Pleistocene deglaciation, the Earth is experiencing present-day ice melting at high latitudes (Shepherd et al., 2018, 2020) but also of mountainous glaciers at mid latitude (Jacob et al., 2012) which can

be measured with various space techniques, such as altimetry (Helm et al., 2014) and gravimetry (Velicogna et al., 2020). For the smallest timescale of deformation, the impact of viscosity should be lower considering the values of η in the mantle. For example, Chanard et al. (2018a) studied the impact of similar viscoelastic Maxwell and Burgers models to those used in this study, on the annual loading signal. They compare GNSS displacements to site displacements recovered in solving the direct problem for several rheologies applied on GRACE data. They show that the choice of rheological models does not significantly affect the annual signal in vertical time series, but could affects the horizontal time series. This is consistent with the previous results in this paper, as shown in Fig. 4.9. However, the loading signal extracted from GRACE and GRACE-FO also contains long period signal variations, which can be due to secular climate changes (ice melting on Antarctica, Greenland and Alaska (Luthcke et al., 2013)) or to long period meteorological phenomena exceeding a decade (Trenberth, 1990). The effects of visco-elasticity should then be more important and we choose to focus on these long periods.

Then, we use the surface mass variations deduced from GRACE and GRACE-FO during the time span 2004-2020 to access intermediate frequencies of deformation, additionally to the seasonal hydrological cycles. We use the CSR RL06 Mascons solution downloaded from http://www2.csr.utexas.edu/grace/RL06_mascons.html. This solution has been improved since the RL05 release (Save et al., 2016) especially in term of resolution of the supplied regular grid which allow a proper resolution of the coastlines. As a mascons technique, the RL06 solution is free of any empirical filtering and is moreover corrected from the GIA ICE6G-C from Peltier et al. (2015). Its low degree zonal coefficients C_{20} , C_{30} have also been replaced by those derived from Satellite Laser Ranging (Loomis et al., 2019b). We use the same scheme than in Sec. 3.1.3 & 3.2.2 to compute the displacements choosing a sampling of $2^N = 1024$ which gives a sampling frequency of $f_s = 56,38 \text{ cycle} \cdot \text{yr}^{-1}$ and a frequency precision $\delta f = 0,055 \text{ cycle} \cdot \text{yr}^{-1}$.

We fit the deformation in order to only get the secular linear trend, which is the more likely to be affected by the viscoelastic rheology. This signal should denote the actual ice melting average velocity on the polar regions. We represent the associated secular displacement for different rheologies in polar regions in Fig. 4.16. To be consistent with the previous section, we choose to represent the displacements computed from PREM and patchy viscoelastic models. We choose first the MAXWELL 21-23 model consistent with GIA (Sec. 3.2.2) and with recent studies (Whitehouse et al., 2012; Peltier et al., 2015; Caron et al., 2017). Then we choose MAXWELL 18-23 to provide a model of low UM viscosity as Nield et al. (2014) suggested studying the Antarctic Peninsula. Finally we choose to represent a Burgers model with low transient viscosity.

The spatial pattern does not seem to radically change between the different viscoelastic rheologies and PREM except for the MAXWELL 18-23 rheology where we see higher deformation of the Antarctic Peninsula (Nield et al., 2014) and the Greenland coastsides. As we explore extremely long periods (a trend is considered as an nearly infinite period signal), the displacements computed for all rheologies are close from each other and the differences are only comming from the interannual variations of the ice mass loss. In particular, the subduction zone in south Alsaka between Pacific and North American plate, is not very sensitive to any particular viscosity of the UM in the range proposed by the model of Jadamec et al. (2013) : η_{UM} is from 10^{19} to $10^{21} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. In any case, it seems not reasonable to choose global value of viscosity by extrapolating from some localized subduction zones (A et al., 2013) or local studies (Nield et al., 2014; Bos et al., 2015). The main difference between models is the maximum value of the slope going from $1,3 \text{ cm} \cdot \text{yr}^{-1}$ for elastic and MAXWELL 21-23 until $1,8 \text{ cm} \cdot \text{yr}^{-1}$ adding a BURGER 17 and reaching $2,0 \text{ cm} \cdot \text{yr}^{-1}$ for the MAXWELL 18-23. It was predictable regarding Fig. 4.9, that the low viscosity models impact the most the deformation rate observed. The maximum vertical rates derived from ICESat in the Greenland are close to the one of PREM and MAXWELL 21-23, according to previous studies (Spada et al., 2012; Groh et al., 2014; Wang et al., 2018). These maximum rates are very localized in the west and south-east coasts but close to zero in the north east. Concerning Antarctica, we find the well-known ice melting uplift on the Pine Island Bay, the Byers Peninsula and the Budd coast while the west Antarctica subsides upon a thicker ice cap.

The great similarity between all of the presented models, for these range of frequencies, are maybe due to the fact that the model does not take into account the longitudinal and latitudinal dependence of the viscoelastic parameters, which can change the local uplift models such as the subduction zone of South Alaska (Jadamec et al., 2013). Also, taking into account time dependent velocities in polar ice melting should have an effect in the recovery of shorter period displacements even if the importance of viscoelasticity decreases

with the period (Fig. 4.9). Despite, the global isotropic layered model provides interesting results, since we can compute deformations for very low degrees, along with local deformations that are consistent with (but not as precise as) local laterally heterogeneous models.

We finally compared the uplift rate of several ITRF2014 geodetic stations (Altamimi et al., 2016) shown

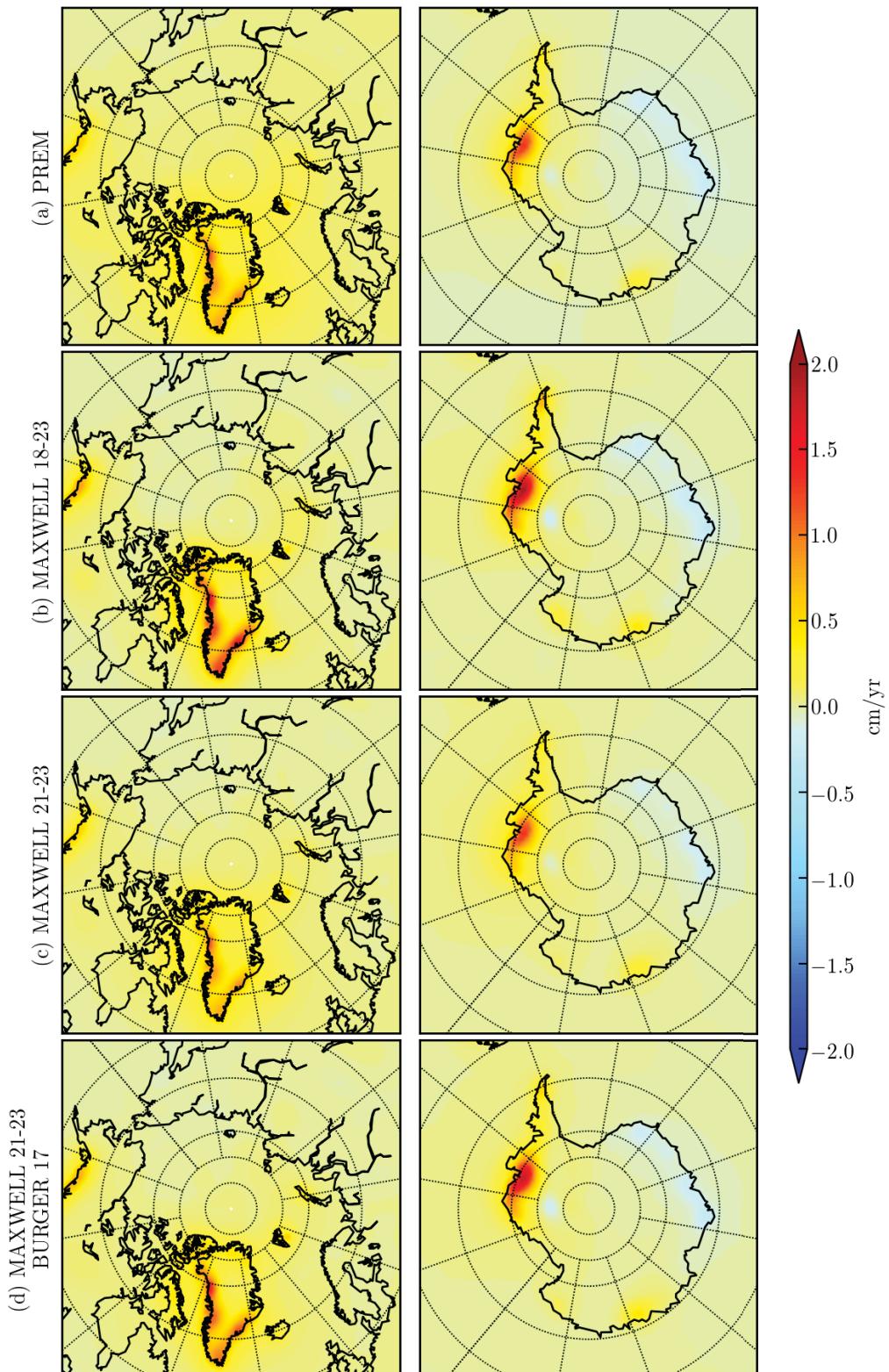


Fig. 4.16 – Actual vertical displacement rate (in $\text{cm} \cdot \text{yr}^{-1}$) from the GRACE/GRACE-FO CSR data mainly due to ice melting, for several viscoelastic rheologies and PREM.

ITRF site	PALV	CRAR	ROB4	CAS1	MAW1	SYOG	VESL
DOMES	66005M002	66001M004	66063M002	66011M001	66004M001	66006S002	66009M001
Lon. (°E)	295.949	166.668	163.190	110.520	062.871	039.584	357.158
Lat. (°N)	-64.775	-77.848	-77.034	-66.283	-67.605	-69.007	-71.674
ITRF Up rate	+5.865	-0.338	+1.076	+0.892	-0.546	+0.857	+0.782
Rates for GIA models							
ICE-6G	+2.469	+1.010	+0.995	+1.052	+0.414	+0.871	+1.381
MAXW21	+2.758	+2.781	+1.602	+1.996	+0.631	+1.201	+1.314
MAXW21-22	+3.330	+4.525	+3.229	+2.895	+1.493	+2.099	+2.293
MAXW21-23	+3.081	+3.765	+2.592	+2.783	+1.348	+2.005	+2.096
MAXW21-23	+2.938	+3.608	+2.506	+2.694	+1.331	+1.952	+2.034
BURGER 17							
Rates for GRACE data (without ICE-6G)							
PREM	+1.230	-0.027	-0.063	+0.750	-0.868	-1.311	-1.568
MAXW21	+1.499	+0.335	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-22	+1.498	+0.334	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-23	+1.498	+0.334	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-23	+2.058	+0.267	+0.231	+1.478	-0.634	-1.254	-1.675
BURGER 17							

Tab. 4.4 – Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations in Antarctica calculated for ITRF14 solution (Altamimi et al., 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.

ITRF site	CHUR	NAIN	QIKI	ALRT	THU3	KELY	QAQ1	KULU	SCOR
DOMES	40128M002	40164M001	40166M001	40162M001	43001M002	43005M002	43007M001	43003M001	43006M002
Lon. (°E)	265.911	298.311	295.966	297.660	291.175	309.055	313.952	322.851	338.050
Lat. (°N)	+58.759	+56.537	+67.559	+82.494	+76.537	+66.987	+60.715	+65.579	+70.485
ITRF Up rate	+10.96	+4.491	+4.073	+6.194	+6.240	+2.415	+4.684	+7.110	+4.055
Rates for GIA models									
ICE-6G	+8.588	+2.012	-1.448	+3.877	-0.116	+0.674	+2.497	-0.516	+1.592
MAXW21	+0.952	+1.441	-4.574	+5.211	-3.489	+1.168	+1.993	-0.546	+1.944
MAXW21-22	+14.775	+5.127	-1.080	+4.513	-2.261	+2.473	+1.572	-0.752	+0.918
MAXW21-23	+8.508	+2.989	-2.761	+4.759	-2.916	+2.508	+2.071	+0.153	+1.630
MAXW21-23	+8.557	+2.967	-2.655	+4.578	-2.884	+2.483	+1.873	+0.113	+1.512
BURGER 17									
Rates for GRACE data (without ICE-6G)									
PREM	+0.692	+0.941	+3.029	+2.945	+7.105	+7.929	+6.492	+6.881	+2.263
MAXW21	+0.374	+0.572	+2.521	+2.454	+6.556	+7.340	+5.983	+6.314	+1.769
MAXW21-22	+0.374	+0.572	+2.521	+2.453	+6.556	+7.340	+5.982	+6.313	+1.768
MAXW21-23	+0.374	+0.572	+2.521	+2.453	+6.556	+7.340	+5.982	+6.313	+1.768
MAXW21-23	+0.320	+0.424	+2.557	+2.742	+8.032	+9.331	+7.813	+7.963	+1.647
BURGER 17									
ITRF site	NYAL	KOD1	KEN1	AC15	EYAC	7277	7225	AB42	WHIT
DOMES	10317M001	40419S001	49995S001	49397M001	49402M001	40416M001	40408S002	49377M001	40136M001
Lon. (°E)	011.865	207.807	208.650	210.276	214.250	217.514	212.502	221.101	224.778
Lat. (°N)	+78.930	+57.618	+60.675	+60.481	+60.549	+60.081	+64.978	+59.340	+60.751
ITRF Up rate	+6.813	+7.608	+11.24	+7.026	+1.325	+24.59	+1.595	+17.52	+1.551
Rates for GIA models									
ICE-6G	+0.635	-0.289	+0.311	+0.361	+0.524	+0.485	-0.661	+0.461	+1.572
MAXW21	-0.130	+0.504	+1.425	+1.077	+0.315	-0.224	-0.442	-0.119	+1.180
MAXW21-22	+0.729	-1.212	-0.170	-0.443	-0.790	-0.716	-1.826	+0.392	+3.567
MAXW21-23	+0.676	-0.547	+0.336	-0.043	-0.731	-0.974	-1.716	-0.243	+2.336
MAXW21-23	+0.650	-0.562	+0.292	-0.075	-0.741	-0.971	-1.703	-0.254	+2.282
BURGER 17									
Rates for GRACE data (without ICE-6G)									
PREM	+2.470	+0.835	+2.265	+2.998	+4.472	+5.745	+0.989	+5.698	+1.848
MAXW21	+2.017	+0.537	+1.936	+2.662	+4.118	+5.382	+0.652	+5.336	+1.492
MAXW21-22	+2.017	+0.537	+1.937	+2.663	+4.118	+5.383	+0.652	+5.337	+1.493
MAXW21-23	+2.017	+0.537	+1.937	+2.663	+4.118	+5.383	+0.652	+5.337	+1.493
MAXW21-23	+2.366	+0.518	+2.529	+3.512	+5.584	+7.290	+0.590	+7.129	+1.861
BURGER 17									

Tab. 4.5 – Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations around the North pole calculated for ITRF14 solution (Altamimi et al., 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.

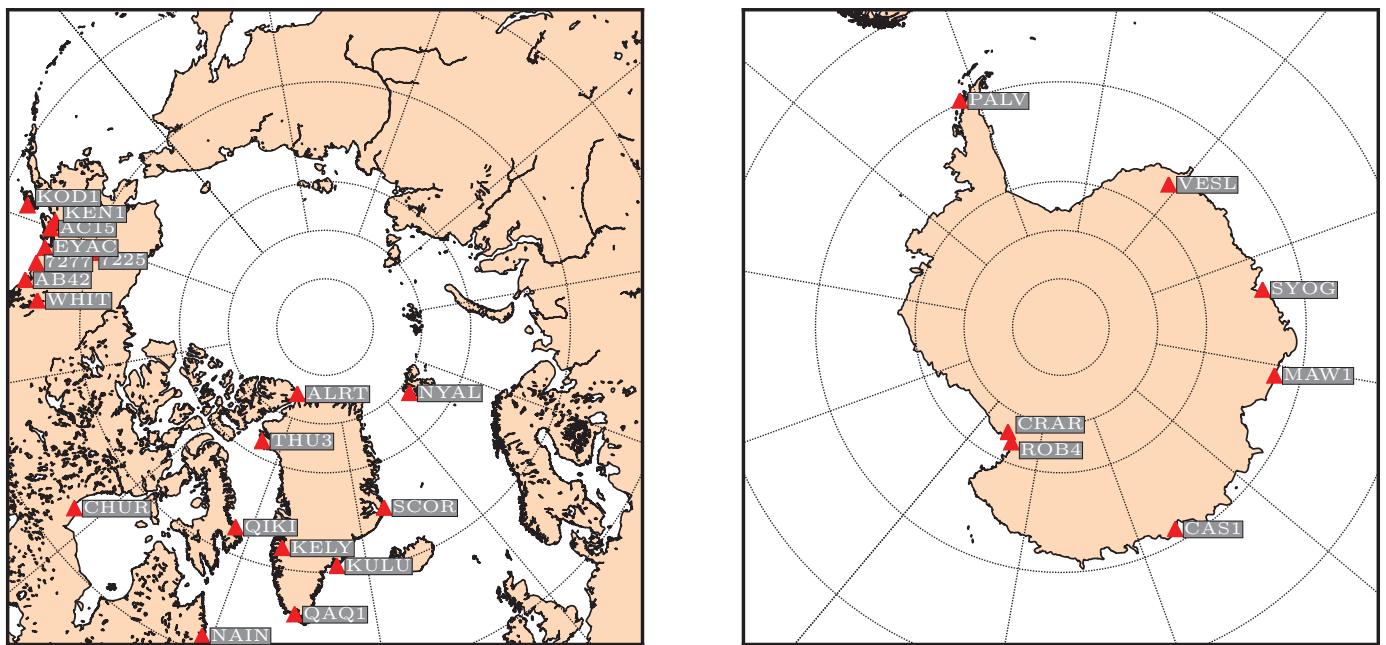


Fig. 4.17 – ITRF Stations positions for which we computed the vertical rate values in the Tab. 4.4 & 4.5.

in Fig. 4.17 at high latitude (Arctic and Antarctica) with the rates of some viscoelastic models (GIA and present-day ice melting) evaluated in this study (Tab. 4.4 & 4.5). The differences between the observed and modeled rates are quite sensitive to the localization of the stations and moreover to the rheological parameters for the GIA part. As discussed before, we see that the GRACE long term signal is less affected by changing rheological parameters. To recover a consistent rate derived from GIA and present-day ice melting, present-day ice melting rates have to be combined with the ICE-6G rates, to be consistent with the models removed from the GRACE data used in this study. The difference of rates between ITRF and models can be explained by the interpolation of station position on the rough 1×1 degree grids of the models, especially for stations on the seashore. The differences between elastic and viscoelastic modeled deformations due to present-day ice melting always exceed $0,1 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$, which is the desired accuracy of the terrestrial reference frame (Altamimi et al., 2016). In Greenland, these differences reach more than $0,5 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$. We notice a systematic deviation from the elastic case for Maxwell models of mean $-0,4 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$ in north pole and $0,3 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$ in south pole. This signal could be, among others, the signature of odd low degrees zonal deformations (including degree 1 along the Z axis) and highlights the great dependence of the low degrees to viscosity of the mantle (Fig. 4.10).

3.3 Discussion

We notice an inconsistency in the choice of an Earth rheological model between solid Earth tides in the IERS Convention (Petit & Luzum, 2010), deformation due to Glacial Isostatic Adjustment and present-day ice melting. We compute the viscoelastic deformation for these three geophysical effects using consistent Earth models, based on PREM model (Dziewonski & Anderson, 1981), in which we added anelastic parameters in the mantle layers.

For the vertical displacement, we show that the differences between the IERS Convention and more realistic viscoelastic models could exceed 1 mm for the 18,6 – year Lunar node tide. Such models should be tested in the processing of geodetic techniques (GNSS, DORIS, VLBI and SLR) long record (more than 20 years), in order to improve the realization of terrestrial reference frame.

We also show that the mantle anelasticity is no longer negligible in the vertical displacements due to present-day ice melting in polar regions (see also Métivier et al. (2020)). Indeed, the characteristic timescales (20-30 years) are comparable to the Lunar node tide. If the spatial patterns are not very different between the elastic and viscoelastic models, the differences always exceed $0,1 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$ in polar areas, and sometimes

more than $0,5 \text{ mm} \cdot \text{yr}^{-1}$ in Greenland. Similarly to the tidal deformations, we observe that the introduction of mantle viscosity affects mostly the low degrees. In particular, the Fig. 4.9 shows that degree 1 is significantly affected by the viscosity profile. As it is important to accurately study the geocenter motion (Blewitt, 2003; Métivier et al., 2010; Wu et al., 2012), which is particularly affected by present-day ice melting (Métivier et al., 2020), a viscoelastic approach should then be adopted in future models and characterization.

However, including mantle anelasticity for the present-day ice melting raises some issues about the consistency of the estimation of displacements along with the GIA. In order to properly isolate the two contributions, the same viscoelastic model should be employed for both determination of long term ice history and recent ice melting, which can be measured with altimetry (Helm et al., 2014) and gravity (Luthcke et al., 2013; Velicogna et al., 2020) missions. This requires a great effort of computation since any GIA model should then be produced in a self-consistent manner with a present-day ice melting model. Moreover, the great variability of deformation measured with geodetic techniques between nearby stations (Tab. 4.5 & 4.4) suggests inhomogeneous values of viscoelastic parameters in the mantle at various spatial scales (Métivier & Conrad, 2008; Nield et al., 2014; Bos et al., 2015) which was already included in different tomographic models of the mantle (Simmons et al., 2012; French & Romanowicz, 2014). This could largely influence past and present ice models and make their determination more complex. Unfortunately, the theoretical frame used to calculate Love numbers is for now not suited to take into account the spatial heterogeneities of the Earth structure, and should then be reviewed. This have already been done partially when we consider the ellipticity of the Earth like in Métivier et al. (2005) for example.

3.4 Résumé

Les effets visqueux des déformations n'étant visibles que pour les phénomènes dont l'extension temporelle est grande (typiquement au-delà de la décennie), nous nous sommes intéressés dans cette partie qu'aux déformations engendrées par quelques phénomènes longue période : les marées solides, le rebond post-glaciaire et la fonte des glaces actuelle. Nous avons donc en premier lieu, proposé une modification de la théorie élastique de Love pour y inclure la possibilité de modéliser des rhéologies visco-élastiques au moyen de la transformée de Fourier, plus simple mathématiquement que ce qui est fait habituellement avec la transformée de Laplace. Nous avons ensuite montré que les déformations liées aux phénomènes longue période cités précédemment, étaient fortement dépendantes des paramètres rhéologiques visqueux et du type de rhéologie visco-élastique choisie pour modéliser le manteau terrestre (type Maxwell ou Burgers). Ces couches visco-élastiques ont été introduites au sein du modèle élastique PREM. Nous avons montré une bonne concordance entre les déformations liées aux marées solides fournies par l'IERS et modélisées par une rhéologie de type Burgers. Cependant, les nombres de Love données dans les conventions IERS sont issus de traitements différents en fonction de s'ils sont utilisés pour certains phénomènes plutôt que d'autres. Il nous a donc paru important de signaler qu'une approche cohérente pour traiter toutes les perturbations, et ce quelles qu'en soient la fréquence, était possible en utilisant le formalisme que nous avons développé dans l'article. Nous avons également testé différents modèles visco-élastiques pour décrire la déformation engendrée par les phénomènes de fontes à la fin du Pléistocène et actuelle des calottes polaires. Là encore, nous avons montré que la sensibilité aux paramètres visqueux était relativement importante pour le rebond post-glaciaire et que les phénomènes visqueux commençaient à entrer en jeu dans le soulèvement induit par les fontes actuelles de glace imputées au réchauffement climatique. L'ensemble de ces résultats a permis de mettre en évidence la possibilité de traiter l'ensemble des phénomènes longue période en utilisant une approche basée sur les modèles rhéologiques de type Maxwell ou Burgers, ce qui est difficilement faisable en utilisant l'approche des modèles dissipatifs. L'enjeu serait alors la détermination des paramètres rhéologiques optimaux au sens de l'ensemble des phénomènes observés dans le cadre d'une inversion globale des observations géodésiques et géophysiques disponibles. Cet effort de grande ampleur aurait ainsi le mérite d'aboutir enfin à un modèle de Terre cohérent avec tout les phénomènes que l'on souhaite modéliser au sein et en marge des conventions IERS.

Certaines limitations aux modèles présentés demeurent toutefois comme leurs caractères isotropes et sphériques. En effet il existe de nombreuses inhomogénéités notamment sur les zones actives comme les zones de subduction (Marotta, 2003). Des modèles de Terre complets incluant la topographie, les inhomogénéités de densité et de paramètres élastiques ainsi que l'ellipticité ont été proposés dans Métivier et al. (2005)

et [Métivier & Conrad \(2008\)](#). La difficulté de prendre en compte les inhomogénéités nécessite notamment de passer par une décomposition en éléments finis et non plus en harmoniques sphériques. On pourrait aussi s'interroger sur la nécessité pour les perturbations de bas degrés, à inclure une viscosité dans le noyau liquide, sous réserve d'en trouver une estimation adéquate. Enfin il faut garder à l'esprit que l'on extrapole un modèle de Terre défini actuellement à des dizaines de milliers d'années auparavant, ce qui reste une hypothèse forte de la modélisation des phénomènes longue période, la variabilité temporelle des paramètres rhéologiques étant relativement peu connue. Outre l'amélioration des modèles de Terre, il est aussi crucial de pouvoir décorrérer les paramètres de charge et de viscosité qui sont intimement liés dans les inversions globales, par exemple pour la modélisation du GIA ([Peltier et al., 2015](#)). Cela revient en partie à contraindre le plus possible ces paramètres avec des observations spécifiques en combinant les mesures sols et les mesures spatiales d'où l'importance de la continuité des acquisitions qui permettent de jouir de séries temporelles d'observation de plus en plus longues et précises.

4 Déformation locale avec la fonction de Green

Pour les déformations liées à des surcharges, une approche alternative à celle consistante à décomposer la perturbation en harmoniques sphériques est celle utilisant le formalisme des fonctions de Green développé par [Farrell \(1972\)](#). Cette seconde approche est utilisée notamment lorsque l'on connaît la charge sur une surface restreinte de la Terre ou lorsque l'on souhaite une approche locale, sur une zone en particulier. Une fonction de Green est définie comme étant une fonction reliant la fonction d'intérêt (ici u_r , u_ψ ou ϕ_1) à la perturbation de masse m' telle que

$$\begin{cases} u_r(a, \psi) = G_r(a, \psi)m' \\ u_\psi(a, \psi) = G_\psi(a, \psi)m' \\ \phi_1(a, \psi) = G_\phi(a, \psi)m' \end{cases}. \quad (4.49)$$

Cette fonction dépend donc d'une part de la rhéologie et du modèle de Terre, mais aussi de la dépendance spatiale (la géométrie) de la surcharge que l'on considère. En notant la surcharge surfacique ζ dont le potentiel associé est V (on rappelle que $V_n(r)$ est le coefficient de la décomposition en harmoniques sphériques du potentiel excitateur $V(r, \psi)$), on peut écrire à partir des Éqs. (4.16)

$$\begin{aligned} u_r(a, \psi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y_{1n}(a) P_n(\cos(\psi)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h'_n}{g_e} V_n P_n(\cos(\psi)), \\ u_\psi(a, \psi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y_{3n}(a) \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l'_n}{g_e} V_n \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}, \\ \phi_1(a, \psi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{5n}(a) - V_n) P_n(\cos(\psi)) = \sum_{n=0}^{+\infty} k'_n V_n P_n(\cos(\psi)). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Désormais, il faut se préoccuper de ce que vaut la perturbation V_n ou ζ_n . On distinguera deux situations où V_n est analytiquement déterminée : le cas d'une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α et le cas d'une masse de Dirac appliquée en un point de la surface.

4.1 Pour une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α

Nous allons considérer dans un premier temps le cas d'une calotte sphérique surfacique de masse m' et d'extension angulaire α , où α est l'angle entre les rayons terrestres passant respectivement par le centre de la calotte et par un point de son extrémité. Les coefficients d'harmoniques zonaux d'une telle distribution de masse sont déterminés usuellement pour une masse unitaire et pour $n \geq 1$ ([Longman, 1962](#); [Farrell, 1972](#)). Pour une masse m' , on a

$$\zeta_n = m' \frac{[P_{n-1}(\cos(\alpha)) - P_{n+1}(\cos(\alpha))]}{4\pi a^2(1 - \cos(\alpha))} = \frac{(2n+1)m'}{4\pi a^2} \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right]. \quad (4.51)$$

Dès lors on peut définir le potentiel V_n en fonction de l'expression de ζ_n et de l'Éq. (4.27)

$$V_n = \frac{\mathcal{G}m'}{a} \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right]. \quad (4.52)$$

Étant donné que $g_e = \mathcal{G}m_e/a^2$, on en déduit les expressions des déplacements et du potentiel en fonction des nombres de Love. On donne donc G_r^α , G_ψ^α et G_ϕ^α , les fonctions de Green permettant de relier la masse appliquée m' aux déformations

$$\begin{aligned} u_r(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} h'_n \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right] P_n(\cos(\psi))}_{G_r^\alpha(a, \psi)}, \\ u_\psi(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} l'_n \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right] \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}}_{G_\psi^\alpha(a, \psi)}, \\ \phi_1(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{g_e a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} k'_n \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right] P_n(\cos(\psi))}_{G_\phi^\alpha(a, \psi)}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Grâce au formalisme des fonctions de Green, on peut donc relier les déplacements et le potentiel d'une Terre perturbée, à sa perturbation de surcharge m' .

4.2 Pour une masse de Dirac

En utilisant la même démarche que précédemment, on peut déterminer les fonctions de Green pour une masse m' dite « de Dirac », c'est-à-dire appliquée en un point de la surface terrestre. Pour cela, on peut prendre la limite quand $\alpha \rightarrow 0$ des expressions précédentes de ζ_n sans avoir de problèmes de convergence (Farrell, 1972)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[-\frac{1 + \cos(\alpha)}{n(n+1)\sin(\alpha)} \frac{\partial P_n(\cos(\alpha))}{\partial \alpha} \right] = \frac{2J_1(n\alpha)}{n\alpha} \rightarrow 1, \quad (4.54)$$

avec J_1 la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 1. Ainsi, on obtient des fonctions de Green G_r , G_ψ et G_ϕ bien plus simples et dépendantes uniquement des nombres de Love et des polynômes de Legendre

$$\begin{aligned} u_r(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} h'_n P_n(\cos(\psi))}_{G_r(a, \psi)}, \\ u_\psi(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}}_{G_\psi(a, \psi)}, \\ \phi_1(a, \psi) &= m' \underbrace{\frac{g_e a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} k'_n P_n(\cos(\psi))}_{G_\phi(a, \psi)}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

4.3 Calcul numérique de la fonction de Green

Pour calculer numériquement la fonction de Green, on ne peut pas sommer jusqu'à des degrés infinis et il est nécessaire de tronquer la série à un degré N . Pour le cas d'une calotte surfacique d'extension α , le terme général de la série tronquée possède une dépendance en $n^{-3/2}$ ce qui ne pose donc pas de problèmes de convergence quand on somme. Par contre pour une masse de Dirac, le problème de convergence se pose et on peut avoir des problèmes numériques. Pour éviter cela, on utilise la méthode de Kummer donnée dans [Farrell \(1972\)](#) consistant à séparer la somme infinie en deux sommes convergentes : une somme infinie calculée analytiquement et l'autre, tronquée, calculée numériquement. On utilisera pour cela les nombres de Love asymptotiques $(h'_\infty, l'_\infty, k'_\infty)$ définis dans la Section 2. Pour la fonction de Green verticale G_r , on obtient

$$\begin{aligned}
 G_r(a, \psi) &= \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} h'_n P_n(\cos(\psi)), \\
 &= \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} (h'_n - h'_\infty + h'_\infty) P_n(\cos(\psi)), \\
 &= \frac{ah'_\infty}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos(\psi)) + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos(\psi)), \\
 &= \frac{ah'_\infty}{2m_e \sin(\psi/2)} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^{+\infty} (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos(\psi)), \\
 &= \frac{ah'_\infty}{2m_e \sin(\psi/2)} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=0}^N (h'_n - h'_\infty) P_n(\cos(\psi)).
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

La première somme fait intervenir une somme usuelle de polynômes de Legendre, tandis que la seconde converge bien vers 0 si l'on choisit l'ordre de troncature tel que $h'_\infty = h'_N$. On obtient des résultats similaires pour la fonction de Green horizontale G_ψ

$$\begin{aligned}
 G_\psi(a, \psi) &= \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^{+\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}, \\
 &= \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} nl'_n - \frac{1}{n} l'_\infty + \frac{1}{n} l'_\infty \right) \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}, \\
 &= \frac{al'_\infty}{m_e} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^{+\infty} (nl'_n - l'_\infty) \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}, \\
 &= -\frac{al'_\infty}{m_e} \frac{\cos(\psi/2)(1+2\sin(\psi/2))}{2\sin(\psi/2)(1+\sin(\psi/2))} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^{+\infty} (nl'_n - l'_\infty) \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}, \\
 &= -\frac{al'_\infty}{m_e} \frac{\cos(\psi/2)(1+2\sin(\psi/2))}{2\sin(\psi/2)(1+\sin(\psi/2))} + \frac{a}{m_e} \sum_{n=1}^N (nl'_n - l'_\infty) \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\cos(\psi))}{\partial \psi}.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Les fonctions de Green verticale et horizontale sont présentées sur la Figure 4.18 pour le cas d'une masse de Dirac et d'une calotte surfacique de masse totale $m' = 1 \text{ Gt}$ (1 gigatonne) mais d'extension spatiale variable. Le panel (a) montre la fonction de Green de Dirac multipliée par l'angle ψ . Sans ce coefficient multiplicatif, on observerait une divergence de la fonction de Green en $d = 0 \text{ km}$ due à la singularité de la distribution de Dirac. La Figure 4.18a est comparable à celles qui sont présentées dans les articles de [Wang et al. \(2012\)](#) et [Dill et al. \(2015\)](#).

Les panels (b) et (c) présentent respectivement les fonctions de Green G_r^α et G_ψ^α pour différentes extensions angulaires α et pour une masse $m' = 1 \text{ Gt}$. On remarque que la singularité en zéro n'existe plus et il n'est donc pas nécessaire de multiplier la fonction de Green par ψ . On peut comparer ces figures à celles données dans [Argus et al. \(2014\)](#), permettant de valider nos calculs numériques. On observe tout de même que les déplacements horizontaux, de l'ordre du mm pour une masse d'une gigatonne, sont environ 10 fois moins

importants que les déplacements verticaux. On remarque aussi que ces fonctions de Green possèdent un palier inférieur à partir de laquelle la déformation est uniforme. En effet, la dimension de la calotte contraint un déplacement vertical uniforme sur la zone (ce qui ne crée donc pas de déplacement horizontal). On remarque aussi que plus l'extension angulaire est faible, plus la masse est concentrée dans une zone spatiale restreinte et donc plus le palier de la fonction G_r^α possède un déplacement vertical important. Pour la fonction G_ψ^α , on observe que la déformation est la plus importante sur les bords de la calotte et est négative. Au vu des conventions adoptées dans la Section 1.3, on en déduit que la matière est attirée horizontalement vers le centre de la distribution de masse, ce qui est cohérent avec l'intuition physique. La fonction se comporte en fait comme une pseudo-dérivée du déplacement vertical. Cette propriété découle principalement du fait que le déplacement horizontal est lié à la dérivée des polynômes de Legendre. On observe dans tout les cas que la déformation s'annule logiquement à mesure que d augmente.

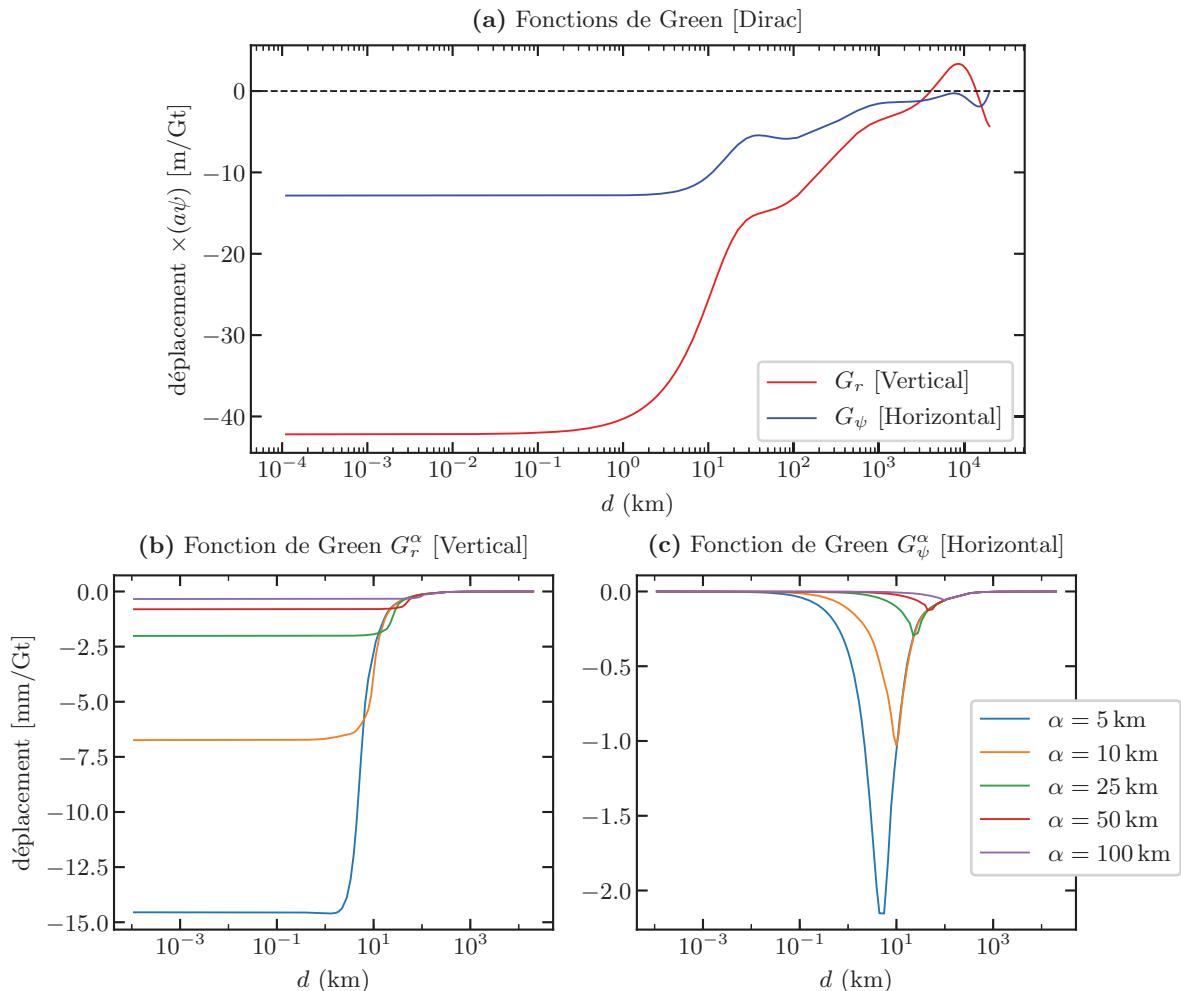


Fig. 4.18 – Fonctions de Green verticales et horizontales en fonction de la distance au centre de la distribution de masse pour (a) une masse de Dirac et pour (b & c) une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α .

Cinquième Partie

Détermination de la charge par inversion des déplacements

Sommaire

1	Problème inverse régularisé	124
1.1	Inversion par moindres carrés	124
1.2	Régularisation de Tikhonov	125
2	Mise en équation	126
2.1	Vecteur déplacement D	126
2.2	Matrice de Green G	126
2.3	Choix de la grille de charge	128
2.4	Matrice de régularisation	129
2.5	Résumé	130
3	Inversion de déplacements GNSS synthétiques	130
3.1	Influence de la grille d'inversion	132
3.2	Influence des paramètres de lissage	133
4	Critères objectifs pour le choix des hyperparamètres	136
4.1	Fonction ABIC	136
4.2	Generalized Cross Validation (GCV)	137
4.3	Trade-off curve	138
4.4	Résultats	139
5	Lissage variable	139
5.1	Comparaison des techniques de lissage	141
5.2	Détermination conjointe de λ , R_c et R_{oc}	141
5.3	Résumé	142
6	Inversion des déplacements GNSS	142
6.1	Inversion des déplacements verticaux GNSS seuls	144
6.2	Inversion contrainte par GRACE	145
6.3	Inversion conjointe avec GRACE	147
6.4	Comparaison avec les modèles de charge	149
6.5	Conclusion	151

1 Problème inverse régularisé

Le problème qui consiste à retrouver la charge à partir du déplacement est un problème inverse classique. Il nécessite de savoir relier le déplacement à la charge au moyen de la fonction de Green vue dans la Partie IV. Nous avions alors considéré le cas d'une surcharge localisée (de Dirac ou en calotte) engendrant un champ de déplacement autour d'elle et régit par la fonction de Green. Néanmoins, comme nous l'avions dit précédemment, le formalisme des fonctions de Green permet aussi de gérer les surcharges s'appliquant à un niveau régional.

1.1 Inversion par moindres carrés

Par exemple, nous voulons ici relier l'ensemble des déplacements relevés sur les stations en Europe à l'ensemble des points sur lesquelles nous voulons connaître la charge qui a engendré ces déplacements. Nous définissons alors un premier vecteur D dit de déplacement, de dimension n , qui contient les positions des stations considérées. On définit aussi le vecteur ϵ de dimension n qui contient les erreurs sur les déplacements que l'on considérera distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de covariance W tel que $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, W)$. On considérera que les erreurs sur les déplacements sont indépendantes les unes des autres de sorte que W soit diagonale. D'autre part, nous définissons le vecteur M , de dimension m , qui est inconnu et contient la charge en chacun des points de l'espace¹. L'ensemble de ces points sur lesquels on calcule la charge est appelé la **grille de charge** et le choix de cette grille sera discuté dans la Section 2.3. Enfin, nous définissons la matrice de Green G de dimension $n \times m$ que l'on explicitera dans la Section 2.2. Le problème peut donc s'écrire avec l'équation

$$D = GM + \epsilon. \quad (5.1)$$

L'existence de la solution au problème (5.1) dépend du rang r de la matrice $[D, G]$ de dimension $n \times m+1$, qui donne le nombre d'équations linéairement indépendantes pour un système linéaire non homogène. De manière équivalente, on peut lister le nombre d'information redondante dans le problème en calculant $\min(n, m+1) - r$. Comme $r \leq \min(n, m+1)$, nous pouvons distinguer plusieurs cas

- $n > m$: Le problème est dit **sur-déterminé** car il y a plus d'équations que d'inconnues. Néanmoins, la donnée importante est celle de r car c'est elle qui quantifie le nombre d'équations **indépendantes**.
 - $r = m+1$: le nombre d'équations indépendantes est supérieur strictement au nombre d'inconnues. On ne trouve alors aucune solution. Néanmoins, on peut appliquer ici la méthode des moindres carrés classique pour trouver une solution qui minimise $\Phi(M)$. Attention, dans ce cas, la fonction $\Phi(M)$ peut admettre des minima locaux.
 - $r = m$: Le nombre d'équations indépendantes est égal au nombre d'inconnues. On peut alors résoudre le système pour obtenir une unique solution si et seulement si le vecteur D est linéairement relié à un des vecteurs de G . On utilisera également la méthode des moindres carrés ici qui fournira une unique solution lorsque $\Phi(M)$ est minimale (ce minimum est unique et il n'existe pas de minima locaux). Dans le cas où ce sont deux vecteurs de G qui sont linéairement dépendants, il n'existe aucune solution au problème. On doit alors ajouter des informations a priori sur les inconnues pour se placer dans le cas $r = m+1$: on dit alors qu'on procède à une régularisation du système. On peut alors le résoudre par une méthode des moindres carrés régularisée.
 - $r < m$: le nombre d'équations indépendantes est inférieur strictement au nombre d'inconnues. Si D fait partie des vecteurs linéairement indépendants des autres, il n'existe pas de solution. Si D est par contre linéairement dépendant d'un ou de plusieurs vecteurs de G , alors le système possède une infinité de solutions. Dans les deux cas, une régularisation du système est nécessaire pour pouvoir résoudre le système par moindres carrés.
- $n = m$: Le problème est dit de bien déterminé, mais pas forcément bien posé : là encore, la recherche de solutions dépend de r .

1. Cet espace est approximativement restreint à l'espace délimité par l'empreinte spatial du réseau de stations.

- $r = m$: Le nombre d'équations indépendantes est égal au nombre d'inconnues. Le système est alors dit « de Cramer », G est carrée et inversible et l'unique solution est donnée par $M = G^{-1}D$.
- $r < m$: le nombre d'équations indépendantes est inférieur strictement au nombre d'inconnues. Si D fait partie des vecteurs linéairement indépendants des autres, il n'existe pas de solution. Si D est par contre linéairement dépendant d'un ou de plusieurs vecteurs de G , alors le système possède une infinité de solutions. Dans les deux cas, une régularisation du système est nécessaire pour pouvoir résoudre le système par moindres carrés.
- $n < m$: Le problème est dit **sous-déterminé** car les informations ne sont pas assez nombreuses pour déterminer toutes les inconnues (r sera toujours strictement inférieur à m). Si D fait partie des vecteurs linéairement indépendants des autres, il n'existe pas de solution. Si D est par contre linéairement dépendant d'un ou de plusieurs vecteurs de G , alors le système possède une infinité de solutions. Dans les deux cas, une régularisation du système est nécessaire pour pouvoir résoudre le système par moindres carrés.

La solution optimale du problème inverse au sens des moindres carrés est le vecteur M qui minimise la fonction $\Phi(M) = \|D - GM\|_W^2 = (D - GM)^T W^{-1} (D - GM)$, où $\|\cdot\|_W$ est la norme associée à la distance de Mahalanobis pour la matrice de covariance W (Mahalanobis, 1936) et où on a noté A^T la transposée de la matrice A . Autrement dit, on cherche le point d'annulation du gradient de $\Phi(M)$. Sous réserve d'inversibilité de la matrice normale $N = G^T W^{-1} G$, cette solution optimale notée M^* s'écrit

$$M^* = \underbrace{(G^T W^{-1} G)}_N^{-1} G^T W^{-1} D. \quad (5.2)$$

La mention concernant l'inversibilité de la matrice normale N est primordiale car elle conditionne l'existence même de la solution des moindres carrés. On note qu'en utilisant la formule de propagation des erreurs, on trouve que la matrice N^{-1} est la matrice de covariance de la solution M^* .

1.2 Régularisation de Tikhonov

Dans le cas où N n'est pas inversible, nous nous retrouvons dans le cas où il y a une déficience de rang et où nous devons régulariser le système pour pouvoir obtenir une solution. C'est le cas pour notre problème car le nombre de station GNSS dans le réseau n'est pas aussi important que le nombre de d'inconnues et surtout car la répartition des stations au sein du réseau est inhomogène. Il existe donc des endroits où il n'y a aucune information pour déterminer la charge et le problème est donc mal posé. Une manière courante de régulariser le système est la régularisation dite de Tikhonov, qui permet de non plus minimiser $\Phi(M)$ mais une nouvelle fonction $\Psi(M) = \|D - GM\|_W^2 + \|\Gamma M\|_V^2$. Le second terme, qui contient la matrice de Tikhonov Γ , traduit les nouvelles équations de contraintes que l'on a ajoutées au système sous la forme suivante

$$\Gamma M = 0 + e, \quad (5.3)$$

où e est le vecteur des erreurs aléatoires sur ces contraintes, suivant une loi de distribution normale de moyenne nulle et de covariance V : $e \sim \mathcal{N}(0, V)$. On peut alors écrire la solution au sens de la minimisation de Ψ comme

$$\bar{M} = (G^T W^{-1} G + \lambda \underbrace{\Gamma^T V^{-1} \Gamma}_P)^{-1} G^T W^{-1} D, \quad (5.4)$$

où nous notons l'apparition du paramètre scalaire λ (souvent appelé hyperparamètre), permettant de fixer arbitrairement l'importance ou le poids donné aux contraintes par rapport aux données dans l'inversion. Si $\lambda \rightarrow 0$, on retrouve le résultat de l'inversion par moindres carrés classique de l'Eq. (5.2).

Dans le cas le plus simple la matrice P est choisie égale à l'identité tel que le paramètre λ joue le rôle de multiplicateur de Lagrange. On peut aussi choisir des formes de Γ plus complexes comme une matrice passe-haut (donc une contrainte qui supprime les hautes fréquences et a tendance à lisser la solution). C'est ce dernier choix que nous ferons en le justifiant dans la Section 2.4. Dans tout les cas, la matrice $N + \lambda P$ (comme la matrice N) est symétrique et on joue sur les paramètres de régularisation pour qu'elle devienne

symétrique définie positive (et donc inversible). L'ajout du terme de régularisation induit un biais et une variance plus importante dans la détermination de l'inconnue M . Le rang de la matrice P sera noté p . Au même titre que N^{-1} est la matrice de covariance de M^* , la formule de propagation des erreurs implique que c'est désormais la matrice $(N + \lambda P)^{-1} N (N + \lambda P)^{-1}$ qui joue le rôle de matrice de covariance de la solution régularisée \bar{M} . La matrice de covariance *a priori* sur le vecteur inconnu M est, elle, donnée par la matrice P^{-1} .

Nous ajoutons enfin une remarque sur la possibilité d'utiliser une inversion bayésienne. Cela permettrait notamment de déterminer la distribution de probabilité des valeurs que peut prendre la solution en fonction de la distribution de probabilité des données initiales (donc des erreurs sur ces données). Or si les données au départ sont entachées d'une erreur suivant une distribution gaussienne, la distribution de probabilité de la solution sera, elle aussi, une distribution gaussienne. Il n'est donc pas nécessaire de passer par une méthode bayésienne ici : la méthode des moindres carrés nous donne exactement la solution gaussienne du problème bayésien.

2 Mise en équation

2.1 Vecteur déplacement D

Nous souhaitons déterminer les charges qui sont à l'origine du déplacement GNSS que l'on observe sur l'Europe. Or ces charges, principalement d'origine hydrologique, ont un signal saisonnier très fort notamment à une fréquence annuelle. On va donc utiliser les coefficients sinusoïdaux a_1 et b_1 du modèle que nous avons ajusté sur les séries temporelles GNSS (Michel et al., 2021) de sorte qu'ils constituent le vecteur déplacement. Le vecteur M contiendra donc les coefficients annuels sinusoïdaux de la charge à l'origine de ceux qu'on a ajusté sur le déplacement. Les coefficients de M sont calculés sur une grille qui pave la surface d'intérêt appelée **grille de charge**, dont on parlera dans les Sections 2.2 et 2.3.

2.2 Matrice de Green G

Pour constituer la matrice de Green il faut répondre à la question : *Pour un point donné où l'on a calculé le déplacement, quelle est la contribution de chaque élément de charge dans la zone autour de ce point*. On considère donc une distribution de charge quelconque $m'(\varphi_c, \theta_c)$ sur une surface S , dépendante de la longitude φ_c et de la colatitude θ_c . Le déplacement en un point $A(\varphi, \theta)$, est obtenu en convolutant la distribution de charge avec la fonction de Green sur toute la surface S . Pour le déplacement vertical, cela donne

$$u_r(a, \varphi, \theta) = G_r \star m' = \iint_S G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c, \theta_c)) dm'(\varphi_c, \theta_c). \quad (5.5)$$

Dans la pratique, la charge n'est pas donnée sous la forme d'une fonction spatiale continue. Elle est discrétisée sur une grille spatiale (régulière ou non), où la charge est uniforme au sein de chaque élément de grille mais varie d'un élément à un autre. Les éléments de grille centrés sur le point C_i de coordonnées $(\varphi_c^i, \theta_c^i)$ ont des surfaces élémentaires s_i de sorte que la relation $\sum s_i = S$ soit vérifiée (la grille pave la surface d'intérêt) et supportent chacun une certaine charge de masse $m'(s_i)$ (que l'on notera aussi m'_i). Dans la pratique, la masse m'_i qui s'applique sur s_i est donnée en terme d'une hauteur d'eau équivalente répartie de manière homogène sur la surface s_i . Cette hauteur notée $h_w(i)$ varie pour chaque surface s_i et on a donc : $m'_i = \rho_w s_i h_w(i)$. Le déplacement total au point $A(\varphi, \theta)$ est donné par la somme des contributions de déplacement induites par chaque élément de la grille de charge. Le calcul de la convolution se fait alors en discrétilisant l'intégrale sur la surface S selon la grille de charge et l'Eq. (5.5) devient

$$\begin{aligned} u_r(a, \varphi, \theta) &= \sum_i \iint_{s_i} G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w h_w(i) ds_i, \\ &= \sum_i \left(\iint_{(\varphi_c, \theta_c) \in s_i} G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w ds_i(\varphi_c, \theta_c) \right) h_w(i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left(\iint_{(\varphi_c, \theta_c) \in s_i} G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w a^2 \sin(\theta_c^i) d\theta_c d\varphi_c \right) h_w(i), \\
&= \sum_i \left(G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w a^2 \sin(\theta_c^i) \iint_{(\varphi_c, \theta_c) \in s_i} d\theta_c d\varphi_c \right) h_w(i), \\
&= \sum_i \underbrace{\left(G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w a^2 \sin(\theta_c^i) \Delta\theta_c^i \Delta\varphi_c^i \right)}_{g_i(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)} h_w(i),
\end{aligned} \tag{5.6}$$

où $\Delta\theta_c^i$ et $\Delta\varphi_c^i$ sont les dimensions de s_i respectivement en latitude et longitude². Ils sont aussi égaux à la résolution en latitude et longitude de la grille si elle est régulière. On donne aussi les expressions du déplacement horizontal pour lequel il est important de prendre en compte la fonction de projection le long des axes Est et Nord respectivement, pour être compatible avec le repère local utilisé pour exprimer les déplacements obtenus avec le GNSS.

$$\begin{pmatrix} u_{\psi, E}(a, \varphi, \theta) \\ u_{\psi, N}(a, \varphi, \theta) \end{pmatrix} = \sum_i \left(G_\psi(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)) \rho_w a^2 \begin{pmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{pmatrix} \sin(\theta_c^i) \Delta\theta_c^i \Delta\varphi_c^i \right) h_w(i), \tag{5.7}$$

où on donne $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ en fonction de θ , θ_c^i , φ , φ_c^i et ψ via les relations dans un triangle sphérique

$$\begin{cases} \cos(\beta) = \frac{\sin(\theta) \cos(\theta_c^i) - \sin(\theta_c^i) \cos(\theta) \cos(\varphi - \varphi_c^i)}{\sin(\psi)} \\ \sin(\beta) = \frac{\sin(\theta_c^i) \sin(\varphi - \varphi_c^i)}{\sin(\psi)} \end{cases}. \tag{5.8}$$

Nous pouvons utiliser les deux modèles de fonctions de Green que nous avons déterminés dans la Partie IV. Avec la **fonction de Green pour une masse d'extension spatiale α non nulle**, nous pouvons choisir α telle que $2\pi a^2(1 - \cos(\alpha)) \simeq \pi(a\alpha)^2 = ds_i$. Le calcul sera alors équivalent au modèle d'une masse s'étalant de manière homogène sur la surface s_i ³. L'avantage d'utiliser une extension spatiale non nulle est que la fonction de Green ne diverge pas lorsque $\psi \rightarrow 0$, et nous pouvons calculer le déplacement en n'importe quel point A de S (*i.e.* pour n'importe quel ψ).

En revanche, si on choisit d'utiliser la **fonction de Green pour une masse de Dirac**, cela revient à concentrer la masse m'_i au centre de chaque surface s_i , c'est-à-dire en C_i . Dès lors, se pose le problème de l'intégration de la fonction de Green lorsque le point A se trouve proche de C_i , c'est-à-dire proche de la singularité induite par la distribution de Dirac. Une astuce consiste alors à subdiviser les cellules s_i voisines de A en plusieurs sous-cellules que l'on note δs_{ij} telles que $\sum_j \delta s_{ij} = s_i$. Chacune des sous-cellules δs_{ij} est traitée comme si elle possédait elle-même une masse de Dirac en son centre égale à une fraction de la masse m'_i : $m'_{ij} = \rho_w \delta s_{ij} h_w(i)$. De cette manière, en choisissant des subdivisions de plus en plus fines à mesures que l'on s'approche de A, on peut atténuer en grande partie la singularité en C_i en la subdivisant en de multiples singularités plus faibles. Il y a cependant une limite numérique à la subdivision et cette méthode ne peut qu'approximer grossièrement le cas réel d'une fonction de Green d'extension spatiale non nulle. On donne ici la formule considérant une subdivision supplémentaire j de s_i

$$u_r(a, \varphi, \theta) = \sum_i \left(\sum_j G_r(a, \psi(\varphi, \theta, \varphi_c^{ij}, \theta_c^{ij})) \rho_w a^2 \sin(\theta_c^{ij}) \Delta\theta_c^{ij} \Delta\varphi_c^{ij} \right) h_w(i) = \sum_i g_i(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i) h_w(i).$$

Nous choisissons de travailler avec la fonction de Green pour une masse d'extension non nulle. On peut alors exprimer le déplacement attendu en chaque station du réseau de stations GNSS en fonction de la distribution de charge $m'(\varphi, \theta)$ grâce aux Éqs. (5.6) et (5.7). Ces relations étant linéaires entre le déplacement et la charge, on obtient un système linéaire possédant autant d'équations qu'il y a de stations. On peut écrire ce système

2. Attention, θ_c^i est bien la colatitude du point de charge; si à la place on choisit de travailler avec des latitudes, on doit échanger les fonctions cos par sin et les fonctions sin par cos dans toutes les formules de cette partie.

3. Attention, ce modèle présente tout de même un inconvénient puisque la charge est souvent répartie sur une grille au pavage rectangulaire alors que le modèle de fonction de Green suppose sa répartition sur un disque. Cette erreur géométrique est d'autant plus petite que la résolution de la grille est fine.

sous forme matricielle pour obtenir le système (5.1). Le vecteur D contient les déplacements $u_r(\varphi, \theta)$, la matrice G les fonctions $g_i(\varphi, \theta, \varphi_c^i, \theta_c^i)$ et le vecteur M les charges en hauteur d'eau équivalente $h_w(\varphi_c^i, \theta_c^i)$.

2.3 Choix de la grille de charge

Nous allons désormais nous pencher sur le choix d'une **grille de charge** (ou **grille d'inversion**) pertinente pour l'inversion des déplacements. Du choix de la grille de charge, dépend également le calcul de la fonction de Green car la discréttisation de S change. Nous avons plusieurs choix possibles mais nous resterons dans le cadre de grille dont les éléments sont rectangulaires mais sans être forcément réguliers. Nous pouvons donc appliquer les formules de la Section 2.2.

Pour créer une grille régulière angulairement parlant, de résolution res en degrés, il suffit de diviser la zone en surfaces rectangulaires d'aire $\Delta\varphi_c^i \times \Delta\theta_c^i = \text{res} \times \text{res}$. Il est évident que plus res est faible, plus le nombre d'inconnue m est grand et donc plus les dimensions des matrices Γ et G seront importantes. Pour des valeurs extrêmes de résolution, il est même possible que l'inversion de la matrice normale N soit trop lourde numériquement.

Nous avons aussi fait le choix de créer une grille adaptative qui permet de mieux résoudre la charge, là où la densité de stations (donc l'information sur le déplacement) est importante. En se basant sur une grille régulière de $\text{res} = 1^\circ$, nous avons donc subdivisé les éléments de grilles se trouvant dans les zones de forte densité de stations en 4 ($\text{res} = 0,5^\circ$) ou 16 ($\text{res} = 0,25^\circ$) sous-éléments en fonction de la densité de stations. Nous avons aussi choisi de raffiner la grille au niveau des côtes notamment pour que l'on puisse voir des effets océaniques locaux éventuels non-modélisés lors du traitement GNSS.

Une grille adaptative se basant sur le réseau de stations de la Figure 1.7 et une grille régulière de résolution $1^\circ \times 1^\circ$ sont représentées sur la Figure 5.1. Elles contiennent respectivement 8812 et 2310 éléments.

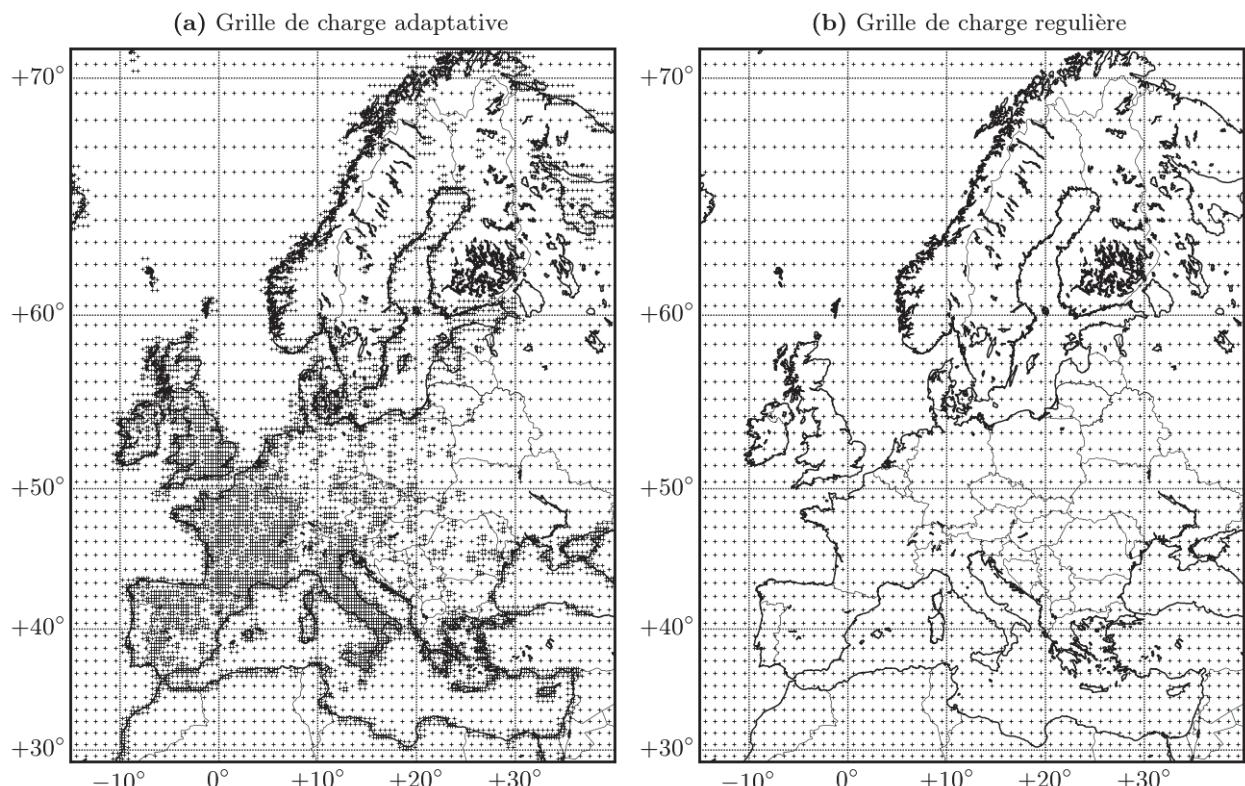


Fig. 5.1 – (a) Grille de charge adaptative (8812 points) basée sur le réseau GNSS de la Figure 1.7 que l'on n'a pas représenté ici pour ne pas surcharger la figure. (b) Grille de charge régulière de résolution $1^\circ \times 1^\circ$ (2310 points).

2.4 Matrice de régularisation

La matrice de Tikhonov que l'on choisit pour régulariser le problème est une matrice passe-haut permettant de lisser le problème. On choisit l'opérateur différence qui pour chaque couple de points de grille, associe la différence des hauteurs d'eau contenues dans M

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 0 & 1 & -1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \vdots & \vdots & 1 & & & -1 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Cette matrice est de dimension $m(m-1)/2 \times m$. L'Éq. (5.3) contraint alors la charge à être homogène sur toute la surface. Cette contrainte est pondérée par la matrice de covariance V qui indique à quelle point la contrainte peut être lâche. Plutôt que de construire V , nous donnons directement la matrice de poids V^{-1} qui est diagonale de dimension $m(m-1)/2$. Nous évaluons la rigidité de la contrainte en fonction de la distance entre les points de la grille de charge : plus ils sont proches, plus la contrainte doit être forte car plus la valeur de charge est sensée être similaire, donc plus V^{-1} doit être grande. La grille de charge possède aussi des points dans l'océan qui sont complètement non contraints par les données car il n'y a pas de stations dans l'océan. Nous contraignons alors d'autant plus les couples dont les deux points appartiennent à l'océan que les couples dont les points appartiennent au continent. Pour les couples mixtes (un point dans l'océan, l'autre sur le continent), nous appliquons soit une contrainte la plus lâche possible (poids nul) pour indiquer que ces points sont complètement décorrélés, soit un poids non nul mais faible qui permet de faire « fuiter » de la charge continentale dans l'océan. Ce dernier processus est important pour prendre en compte l'étalement des effets de charge dans les zones côtières. Nous suivons la même démarche que dans [Sabaka et al. \(2010\)](#), qui dérive des méthodes utilisées dans [Luthcke et al. \(2008\)](#) et [Wu et al. \(2009\)](#), pour définir la matrice de poids V^{-1} . Les coefficients diagonaux (qui sont les seuls non nuls) sont donnés par

$$V_{kk}^{-1} = \begin{cases} \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_c}\right), & \text{si } (C_i, C_j) \in \text{Continent} \\ \exp\left(1 + o - \frac{d_{ij}}{R_o}\right), & \text{si } (C_i, C_j) \in \text{Océan} \\ 0 \quad \text{ou} \quad \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_{oc}}\right), & \text{si } C_i \in \text{Continent}, C_j \in \text{Océan} \end{cases} \quad (5.10)$$

où C_i et C_j sont les centres des éléments de grille dont on fait la différence à la $k^{\text{ème}}$ ligne de Γ (voir Éq. (5.9)). Les distances caractéristiques de lissage sur les continents, les océans et les côtes sont notées respectivement R_c , R_o et R_{oc} . Le terme o est fixé à 1 dans notre étude et permet d'augmenter le poids moyen relatif de la contrainte sur les océans par rapport au continent. Si les contraintes sont définies de la sorte, il reste une

incertitude sur la masse absolue (seule la masse relative entre les points de grille est contrainte). En effet, comme cela est décrit dans [Sabaka et al. \(2010\)](#), ajouter un vecteur constant M_0 à la solution, ne changera pas les équations de contraintes. Pour le cas d'une résolution à l'échelle du globe, il est facile d'ajouter une contrainte stipulant que la somme des charges est globalement nulle (conservation de la masse totale). Pour le cas d'une inversion régionale, la valeur absolue de la charge est complètement inconnue a priori et il est alors préférable de se baser sur une solution de charge pré-existante. On note que sans cette contrainte sur la valeur absolue, la matrice de régularisation P de dimension $m \times m$, n'est que de rang $m - 1$.

2.5 Résumé

On peut détailler le système matriciel (5.1) avec l'équation suivante

$$2 \times n \left\{ \begin{pmatrix} a_1^{\text{sta}1} \\ \vdots \\ a_1^{\text{stan}} \\ b_1^{\text{sta}1} \\ \vdots \\ b_1^{\text{stan}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\text{sta}1}^{\text{load}1} & \dots & g_{\text{sta}1}^{\text{load}m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{\text{stan}}^{\text{load}1} & \dots & g_{\text{stan}}^{\text{load}m} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g_{\text{sta}1}^{\text{load}1} & \dots & g_{\text{sta}1}^{\text{load}m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g_{\text{stan}}^{\text{load}1} & \dots & g_{\text{stan}}^{\text{load}m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{\text{load}1} \\ \vdots \\ a_1^{\text{load}m} \\ b_1^{\text{load}1} \\ \vdots \\ b_1^{\text{load}m} \end{pmatrix} \right\} 2 \times m. \quad (5.11)$$

On peut donc décomposer la solution en deux sous systèmes indépendants (l'un pour les coefficients a_1 , l'autre pour les coefficients b_1) et/ou utiliser la notion de matrice par blocs afin de simplifier les opérations matricielles à venir. On note que la matrice de Green est la même que l'on considère les déplacements a_1 ou b_1 , car elle ne dépend que des positions des stations et des positions des éléments de la grille d'inversion. Pour la détermination de \bar{M} (et seulement pour cela), il est même possible d'utiliser la notation complexe $a_1 + ib_1$ afin de n'inverser qu'un système de taille $n \times m$ mais possédant des valeurs complexes. On retrouve alors les mêmes résultats que ceux donnés par l'Éq. (5.11).

3 Inversion de déplacements GNSS synthétiques

Nous allons tester ici l'impact de l'hyperparamètre λ et des différents paramètres de lissage introduits dans la Section 2.4. Pour cela nous procédons à l'inversion de déplacements D_{grace} calculés en résolvant le problème direct $D_{\text{grace}} = GM_{\text{grace}}$ à partir d'une solution de charge GRACE. Nous pouvons alors comparer la solution de l'inversion avec la charge originale de GRACE notée M_{grace} , qui joue le rôle de valeur de contrôle. Nous utilisons la solution GRACE du GSFC (RL06_v1) car elle contient les incertitudes sur les charges GRACE permettant de définir la matrice W .

En prévision de l'inversion des déplacements GNSS (voir Section 6), nous choisissons de déterminer ces déplacements sur les positions des stations GNSS du réseau. Nous recréons donc le problème de l'inhomogénéité du réseau à travers ces déplacements GNSS synthétiques, pouvant introduire des biais particulièrement importants comme nous ne verrons dans la suite.

Comme cela est expliqué dans la Section 2.1, nous avons extrait les amplitudes des termes sinusoïdaux annuels de la solution GRACE et nous les avons interpolé sur une grille d'inversion régulière ou adaptative pour former le vecteur M_{grace} . On réalise alors l'inversion des déplacements synthétiques sur la même grille que celle utilisée pour M_{grace} , tout en faisant varier les hyperparamètres utilisés dans la régularisation. On représente de manière équivalente l'écart entre la solution de l'inversion \bar{M} et M_{grace} grâce à l'une des deux méthodes proposées ci-dessous.

- La première consiste à tracer sur une carte la valeur de \bar{M} et la comparer directement à M_{grace} .
- La seconde est moins visuelle mais plus riche en information. Elle consiste à remplacer D_{grace} dans l'Éq. (5.4) par son expression en fonction de M_{grace} . On a alors l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= (G^T W^{-1} G + \lambda P)^{-1} G^T W^{-1} D_{\text{grace}}, \\
&= (G^T W^{-1} G + \lambda P)^{-1} G^T W^{-1} G M_{\text{grace}}, \\
&= F M_{\text{grace}}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Représenter la matrice F , permet d'avoir une idée de la relation matricielle qui relie la solution calculée et le modèle d'origine. Par exemple, nous voyons que si $\lambda = 0$ (*i.e.* il n'y a pas de régularisation), la matrice F est réduite à l'identité. Par contre si $\lambda \neq 0$, il sera intéressant de voir à quel point F s'écarte de l'identité en fonction de la valeur que nous donnons aux hyperparamètres. Par rapport à la représentation cartographique précédente, la représentation de F permet aussi d'avoir accès aux corrélations spatiales entre les éléments de la grille de charge induites par le processus d'inversion. Ces informations sont données par les éléments hors diagonale. Une ligne de la matrice F peut donc être vue comme la fuite (ou le *leackage*) de la masse depuis la tuile qui est sur la diagonale, vers les autres tuiles de la grille d'inversion.

Nous donnons dans un premier temps le résultat d'une inversion de ces déplacements synthétiques issus de GRACE sur une grille adaptative (Figure 5.2), dont le choix des paramètres sera justifié dans la Section 4. L'amplitude du signal annuel est donné en centimètres de hauteur d'eau équivalente (cmwe) et la phase correspond au mois de l'année où la charge est maximale. Nous avons choisi d'inverser la charge sur une région bien plus large que celle définie par l'empreinte spatiale du réseau de stations pour éviter les effets de bords. En effet, les déplacements des stations les plus à l'Est sont fortement impactés par la charge annuelle importante en Russie liée au climat continental fort et à l'anticyclone Sibérien. Ne pas inverser la charge sur la zone russe pourrait alors amener toute cette charge à se concentrer sur le bord de la grille ou dans des zones mal contraintes. Nous avons fait de même pour la Turquie et l'Afrique du Nord, qui possèdent elles aussi un signal de charge relativement fort. On veille toutefois à ne pas trop étendre la grille dans les zones non couvertes par le réseau car le manque d'information croissant pourrait induire de fortes erreurs sur le résultat, et ce même dans les zones denses en stations. Ces problèmes de bords disparaissent complètement si l'on inverse la charge sur toute la Terre (Wu et al., 2003, 2006).

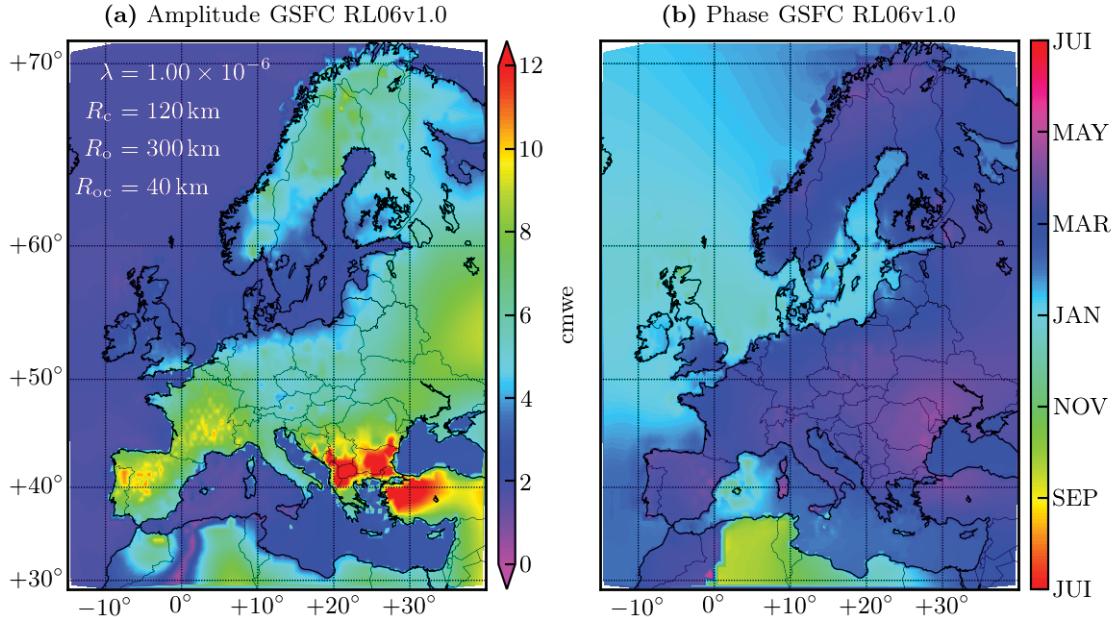


Fig. 5.2 – Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1 sur une grille adaptative. Les paramètres d'inversion ont été choisis arbitrairement et sont reportés sur la figure. La carte de phase représente le mois de l'année où la charge est la plus importante.

Nous pouvons également représenter les données sous la forme de la matrice $F - \text{Id}$ (Figure 5.3), pour voir quels sont les écarts de chaque point de grille à la solution originale. Pour une grille adaptative, il est

difficile d'organiser efficacement les points de grille en fonction de leur position spatiale sur le vecteur M . C'est le désavantage de cette représentation des résultats avec laquelle l'organisation spatiale de la grille n'est pas visible explicitement. Nous lisons cette matrice ligne par ligne. Une ligne correspond aux facteurs multiplicatifs par lesquels on multiplie la solution originale M_{grace} pour arriver à la solution issue de l'inversion \bar{M} . On s'attend à ce que les coefficients diagonaux soient inférieurs à 0 car la régularisation implique que de la masse ait été prélevée à la solution originale (éléments diagonaux) pour être dispersée sur les autres éléments de grille environnants (éléments hors-diagonale) qui présentent donc des valeurs légèrement supérieures à 0. Plus on donne d'importance au lissage (donc aux contraintes) dans l'inversion, plus cette fuite de masse entre les éléments de grille à partir de la solution originale est importante.

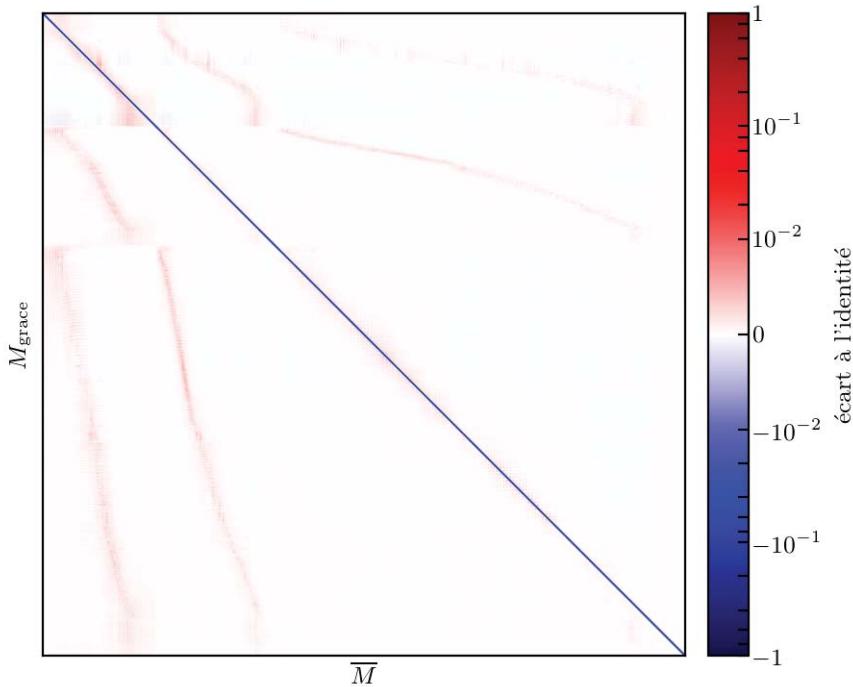


Fig. 5.3 – Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1, représentés sous la forme matriciel de l'écart à l'identité de F .

Nous allons maintenant étudier comment varie la solution si l'on change la grille d'inversion utilisée dans l'inversion ou que l'on change les valeurs des hyperparamètres.

3.1 Influence de la grille d'inversion

Nous voulons voir quel est l'impact d'une modification de la grille d'inversion sur la solution. Pour cela, on fixe les paramètres d'inversion aux valeurs qui seront justifiées dans la Section 4 ($\lambda = 1 \times 10^{-6}$, $R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km) et on calcule l'inversion sur la grille adaptative présentée sur la Figure 5.1a (notée ADP), la grille régulière de résolution 1° présentée sur la Figure 5.1b (notée REG_1.0) et une grille régulière de résolution $0,5^\circ$ (notée REG_0.5). Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 5.4. On constate que plus la résolution de la grille régulière augmente, plus la solution obtenue est lisse mais plus les dimensions du système grandissent et donc plus le temps de calcul est long (on multiplie par 4 les dimensions des vecteurs et des matrices en divisant par 2 la résolution). L'inversion sur la grille REG_1.0 possède des fuites importantes entre continent et océan et la résolution ne permet pas de résoudre correctement les régions continentales de faible étendue spatiale comme l'Italie, le Sud de la Grèce et les îles (Baléares, Sicile, Crète, etc.). Les inversions sur les grilles ADP et REG_0.5 sont proches malgré le fait que la première semble mieux résolue localement (Espagne et France).

Étant données les différences observées, il semble clair que les paramètres optimaux d'inversion seront différents en fonction de la grille d'inversion utilisée. Dès lors, il convient de se tenir à une seule grille et établir les résultats en fonction de celle-ci. Nous choisissons la grille adaptative ADP dans toute la suite car elle a l'avantage de concentrer la précision là où l'information est dense, d'être performante sur le rapport [pré-

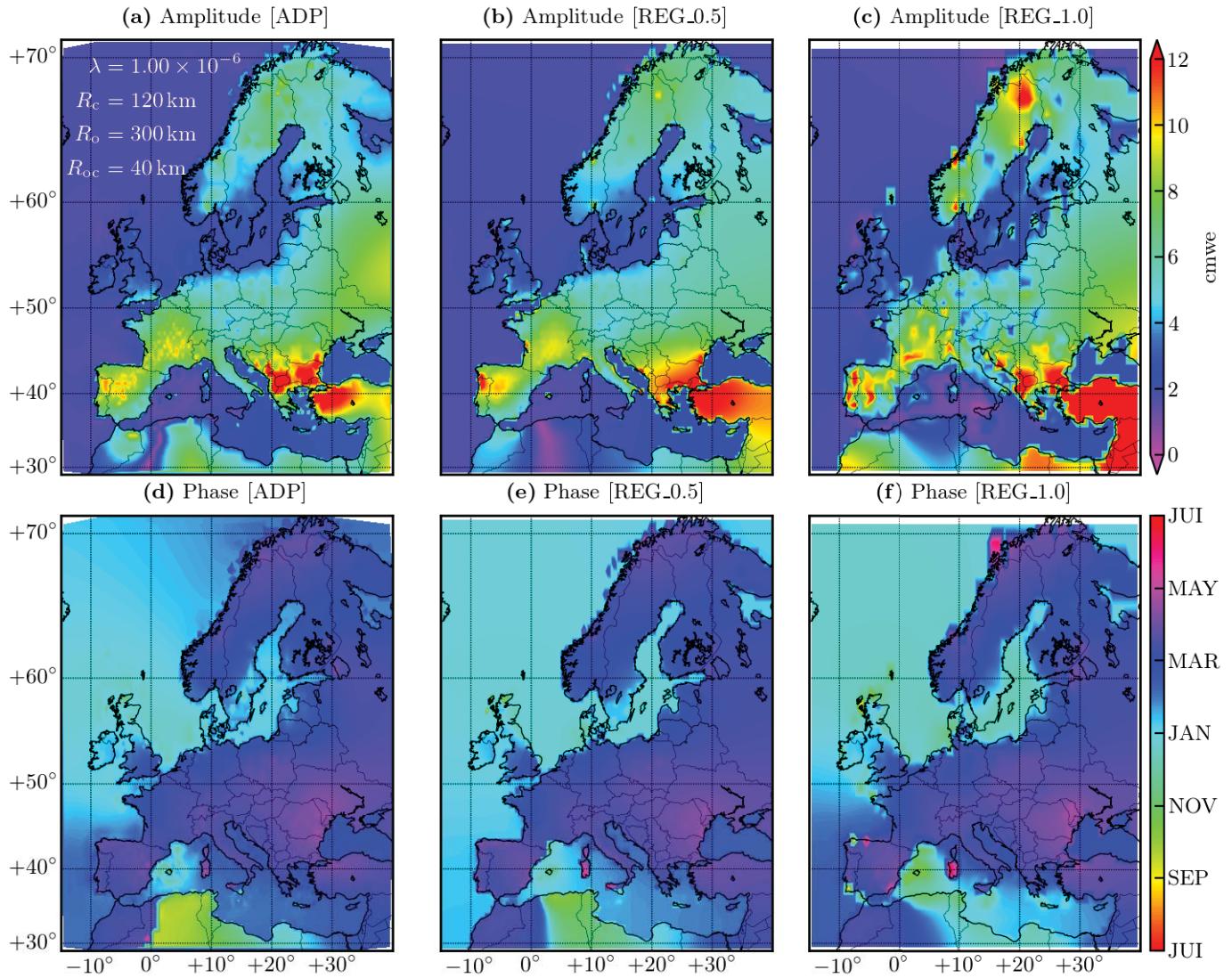


Fig. 5.4 – Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE sur la grille adaptative de la Figure 5.1a (a & d), sur une grille régulière de résolution $0,5^\circ$ (b & e), et de résolution 1° (c & f). Les paramètres d'inversion sont fixés à $\lambda = 1 \times 10^{-6}$, $R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km.

cision maximale/temps de calcul] et d'être particulièrement bien adaptée à la technique du lissage variable que nous développerons dans la Section 5.

3.2 Influence des paramètres de lissage

Nous avons représenté sur la Figure 5.5 les cartes d'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE sur la grille ADP, dont les paramètres λ et R_c varient et les autres sont fixés à $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km.

On observe d'une part que plus λ est petit, plus la valeur globale de la charge est importante. On retrouve cela mathématiquement car \bar{M} est quasiment proportionnel à λ^{-1} . Nous voyons aussi que plus R_c augmente, plus la charge est lissée et donc plus la solution est homogène spatialement. Les hyperparamètres optimaux se situent quelque part dans les intervalles de valeurs donnés sur la Figure 5.5, mais il est néanmoins difficile à ce stade d'en extraire une solution optimale. Si ces intervalles de valeurs sont relativement large (on est dans un rapport de 1 à 5 pour R_c et sur 4 ordres de grandeur pour λ), c'est pour donner une idée de la variabilité de la solution et pouvoir restreindre notre recherche des paramètres optimaux à des valeurs pour lesquelles les solutions sont à première vue « acceptables ».

Nous représentons également la variation de R_{oc} en fonction de celle de R_c sur la Figure 5.6 pour $R_o = 300$ km et $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ fixés. On voit que le paramètre de fuite de masse sur l'océan agit surtout sur

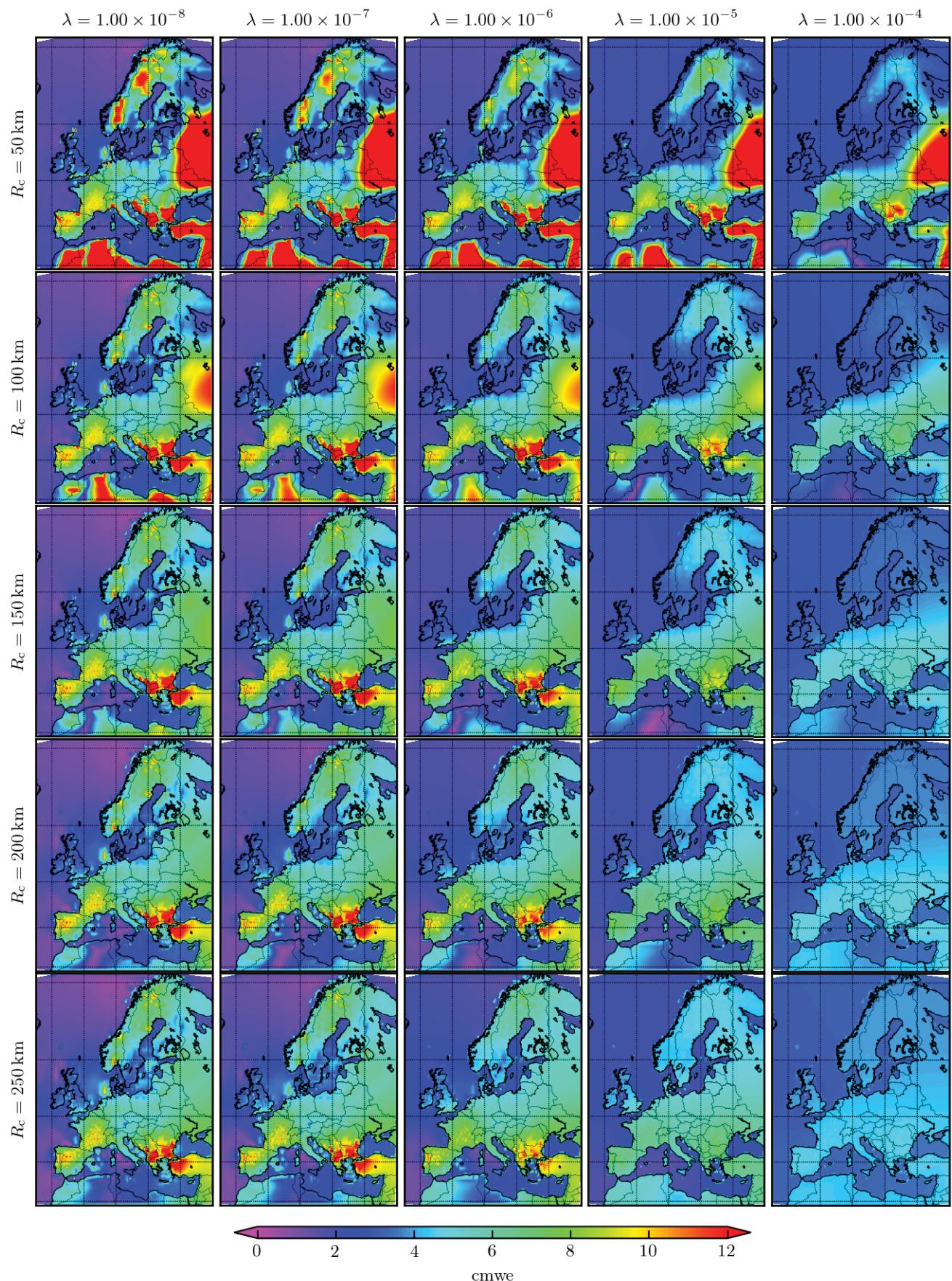


Fig. 5.5 – Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1. Les paramètres $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km sont fixés, tandis que λ et R_c varient respectivement entre 1×10^{-8} et 1×10^{-4} , et 50 km et 250 km.

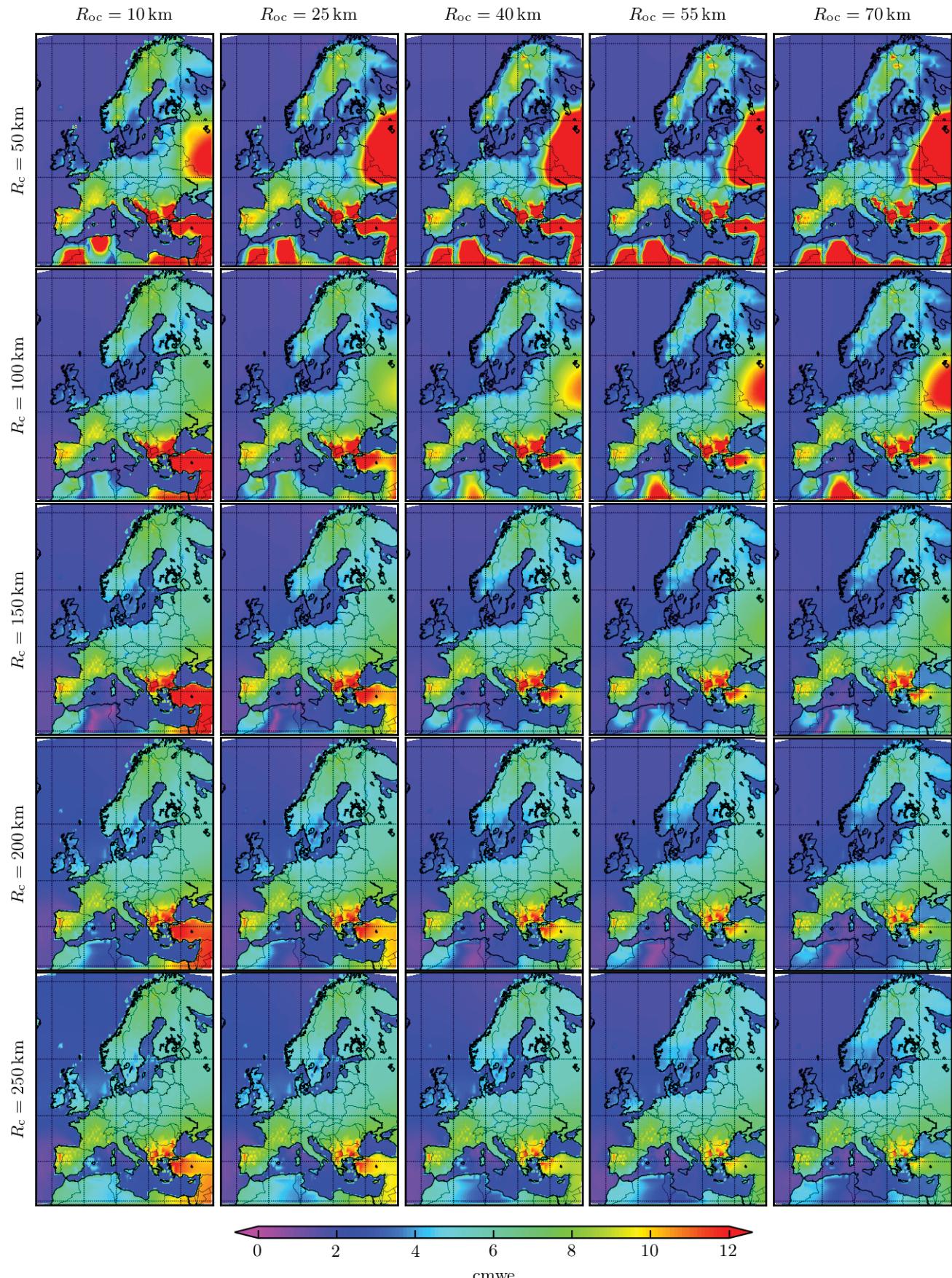


Fig. 5.6 – Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1.. Les paramètres $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ et $R_o = 300 \text{ km}$ sont fixés, tandis que R_{oc} et R_c varient respectivement entre 10 km et 70 km, et 50 km et 250 km.

l'Est de l'Europe et en particulier sur le bassin de la Mer Noire et ses environs (Turquie, Roumanie). Les changements ne sont pas contre que peu visibles sur l'océan Atlantique ou la Mer Méditerranée à cause de leurs dimensions importantes : l'effet de fuite est dilué spatialement à cause du fort lissage sur l'océan. Ce paramètre a aussi de l'influence sur les régions de faible étendue spatiale comme la péninsule scandinave, l'Italie et la Grande-Bretagne, dont la charge continentale diminue sensiblement à mesure que le paramètre R_{oc} augmente.

Les variations des paramètres de lissage (on y inclut le paramètre λ) induisent donc des variations importantes de la solution obtenue et il convient de trouver des critères objectifs permettant de trouver les paramètres optimaux pour réaliser l'inversion et donner un sens à l'interprétation des cartes de charge obtenues.

4 Critères objectifs pour le choix des hyperparamètres

Déterminer simultanément les 4 hyperparamètres de manière objective est difficile car cela requiert d'utiliser un critère qui vaut pour tous et d'appliquer ce critère pour trouver le bon jeu de paramètres dans un espace à 4 dimensions ce qui demande un temps de calcul conséquent. Il est par contre très courant dans la littérature de considérer comme primordiale la détermination de l'hyperparamètre λ car c'est à travers lui que l'on modifie le poids relatif entre les données et les contraintes. Pour cela, diverses méthodes ont été développées complémentairement (Matthews & Segall, 1993; Hansen, 1998; Fukuda et al., 2008), de sorte à établir des critères objectifs dans la détermination de λ . Nous allons développer les trois plus connues (ABIC, Generalized Cross-validation et Trade-Off curve) dont deux se basent sur la minimisation de fonctions scalaires adaptées.

Pour déterminer λ , nous devons d'abord fixer les autres paramètres. Comme cela a été évoqué dans la Partie I, La distance inter-stations varie entre 70 et 190 km. Nous choisissons donc un compromis en fixant R_c à 120 km. Dans l'océan, où les variations annuelles de la charge sont faibles, l'absence de stations nous impose de lisser beaucoup. Nous choisissons donc $R_o = 300$ km. Enfin, nous faisons fuiter la masse entre le continent et l'océan grâce à un rayon de lissage R_{oc} de 40 km pour tenir compte du fait que la longueur caractéristique des échanges entre bassin continental et océanique sur la grille ADP est compris entre la taille d'une tuile de résolution $0,25^\circ$ ($\simeq 25$ km) et celle d'une tuile de résolution $0,5^\circ$ ($\simeq 50$ km).

Enfin, nous verrons qu'il est possible de faire varier les paramètres de lissage R_c , R_o et R_{oc} en se basant sur la grille adaptative sur laquelle nous inversons les données. Le lissage devient alors dépendant de la quantité d'information locale et permet donc d'augmenter la précision dans les zones de forte densité de stations, et de la diluer dans les zones où il y a peu de données.

4.1 Fonction ABIC

La fonction ABIC (Akaike Bayesian Information Criterion) (Akaike, 1980) a été utilisée dans l'inversion des problèmes de glissements ou de déplacements le long des failles lors d'événements sismiques (Yabuki & Matsu'Ura, 1992; Fukuda et al., 2008). Elle permet de choisir les hyperparamètres de l'inversion en utilisant une méthode pseudo-bayésienne. Le résultat optimal est le paramètre maximisant la probabilité de retrouver les données initiales D après inversion. On note cette probabilité $\mathbb{P}(D|\lambda)$. On considère alors la fonction ABIC (Akaike, 1980)

$$\text{ABIC}(\lambda) = -2 \log[\mathbb{P}(D|\lambda)] + 2N_h, \quad (5.13)$$

où N_h est le nombre d'hyperparamètres considérés (ici 1). Pour maximiser $\mathbb{P}(D|\lambda)$, il faut alors minimiser ABIC. Pour un problème ne faisant intervenir que des distributions de la probabilité gaussiennes, on a

$$\mathbb{P}(D|\lambda) \propto \lambda^{2(m-1)/2} |G^T W^{-1} G + \lambda P|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} f(\bar{M})\right), \quad (5.14)$$

où le terme $\lambda^{2(m-1)/2}$ vient du facteur de normalisation dans lequel $\sqrt{\lambda}$ est pris à la puissance $p = 2(m-1)$

où p est le rang de la matrice P ⁴. On définit aussi

$$f(\bar{M}) = (D - G\bar{M})^T W^{-1} (D - G\bar{M}) + \lambda \bar{M}^T P \bar{M}. \quad (5.15)$$

La fonction ABIC peut donc s'écrire

$$\text{ABIC}(\lambda) = -2(m-1) \log(\lambda) + \log(|G^T W^{-1} G + \lambda P|) + f(\bar{M}) + C, \quad (5.16)$$

avec C une constante. Il est courant dans les études bayésiennes de rajouter un hyperparamètre jouant le rôle de facteur d'échelle multipliant la matrice des poids W (Fukuda et al., 2008). Ce nouveau paramètre permet en effet de pondérer la matrice de covariance de la distribution de probabilité associée au résultat de l'inversion bayésienne \bar{M} . Ce paramètre n'a par contre aucun effet sur la solution \bar{M} car il multiplie et divise à la fois l'Éq. (5.4).

D'un point de vue technique, le calcul du déterminant peut être difficile numériquement et il peut être nécessaire de faire appel à des fonctions permettant directement le calcul du logarithme du déterminant (`numpy.linalg.slogdet` sur Python). Nous représentons la fonction ABIC pour l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE sur la Figure 5.7. On peut alors déterminer le minimum de la courbe, c'est-à-dire le paramètre λ optimal du point de vue de ce critère : $\lambda_{\text{ABIC}} = 2,51 \times 10^{-6}$. On remarque que pour les petites valeurs de λ , la courbe possède une asymptote de pente négative. Comme l'axe des abscisses est tracé en échelle logarithmique, on peut en déduire que la fonction ABIC est dominée par le terme proportionnel à $-\log(\lambda)$. Pour les grandes valeurs de λ , la fonction ABIC possède une asymptote horizontale, et on peut en déduire que c'est le terme non logarithmique $f(\bar{M})$ qui domine. Dans la zone intermédiaire où se situe le minimum, la contribution des différents termes est plus dure à déterminer.

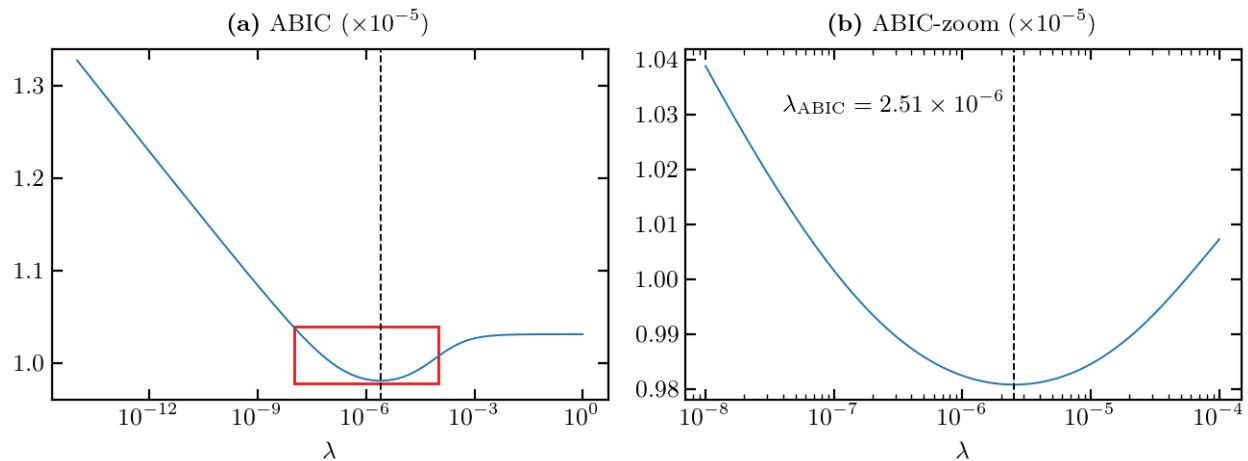


Fig. 5.7 – (a) Fonction ABIC en fonction de λ avec un zoom (b) sur la zone autour du minimum de la courbe correspondant à $\lambda_{\text{ABIC}} = 2,51 \times 10^{-6}$.

4.2 Generalized Cross Validation (GCV)

La méthode GCV est une méthode employée par beaucoup d'études qui impliquent l'inversion de données sismiques et de déplacements pour retrouver la distribution de glissement le long de failles (Matthews & Segall, 1993; Freymueller et al., 1994; Hreinsdóttir et al., 2003; Fukuda et al., 2008). L'étude de Bazán (2015) propose une méthode dérivée plus complète mais plus complexe à appréhender et à mettre en œuvre. La méthode GCV consiste à réaliser l'inversion du système en fixant λ , mais en enlevant une donnée du vecteur D . On peut ensuite calculer les données prédictes par le modèle que l'on vient d'inverser et calculer un résidu entre les données vraies et les données prédictes. On refait le processus en enlevant une autre donnée à la place de la précédente, et on réitère l'opération en enlevant tour à tour chacune des données de D . Cette méthode, appelée **Jackknife**, a été particulièrement utilisée en machine learning pour tester la robustesse de l'apprentissage, bien qu'elle soit maintenant largement remplacée par des méthodes de type **bootstrap**.

4. Attention la matrice P est une matrice par bloc (comme G dans l'Éq. (5.11)) et est donc de dimension $2m \times 2m$.

On considère alors la fonction qui prend en argument la somme de la norme des résidus au carré, qui doit donc être minimisée dans le sens où l'on veut que la méthode nous donne le paramètre λ qui permet prédire au mieux les déplacement que l'on a tour à tour retirés du jeu de donnée. On définit donc

$$GCV(\lambda) = \sum_{i=1}^n \|D - D_{(i)}(\lambda)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|D - G\bar{M}_{(i)}(\lambda)\|^2, \quad (5.17)$$

où $\bar{M}_{(i)}$ est le vecteur de charge estimé par la méthode des moindres carrés régularisés à partir du vecteur déplacement auquel on a enlevé la $i^{\text{ème}}$ donnée (ou ligne), et $D_{(i)}$ le vecteur déplacement complet prédit par cette inversion. On doit donc répéter l'inversion n fois pour chaque paramètre λ choisi et trouver ensuite le minimum de la fonction GCV. Une telle méthode étant très coûteuse en ressource, on pourra utiliser le résultat démontré par [Wahba \(1990\)](#). En notant D_{pred} le déplacement prédit par l'inversion régularisée « totale » (*i.e.* avec D complet), et $e_i = D_i - D_{\text{pred},i}$, la $i^{\text{ème}}$ composante de l'erreur entre la vraie donnée et la donnée prédite par l'inversion, on peut écrire

$$GCV = \sum_i \left(\frac{e_i(\lambda)}{1 - H_{ii}(\lambda)} \right)^2, \quad (5.18)$$

où la matrice H est la matrice de prédiction des données, définie telle que

$$\begin{aligned} D_{\text{pred}} &= G\bar{M}, \\ &= G(G^T W^{-1} G + \lambda P)^{-1} G^T W^{-1} D, \\ &= HD, \end{aligned} \quad (5.19)$$

qui dans le meilleur des cas doit être égale à l'Identité. Elle joue le même rôle que la matrice F , non plus pour la prédiction de la charge, mais des données. Grâce à ce lemme astucieux, on passe de n inversions à calculer, à une seule. Plus le paramètre λ est proche du paramètre optimal, plus le terme e_i est faible. Aussi, on contrebalance cela avec le terme au dénominateur qui donne de l'importance aux coefficients diagonaux de $\text{Id} - H$ uniquement. Nous représentons la fonction GCV pour l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE sur la Figure 5.8. On peut alors déterminer le minimum de la courbe, c'est-à-dire le paramètre λ optimal du point de vue de ce critère : $\lambda_{\text{GCV}} = 3,55 \times 10^{-8}$.

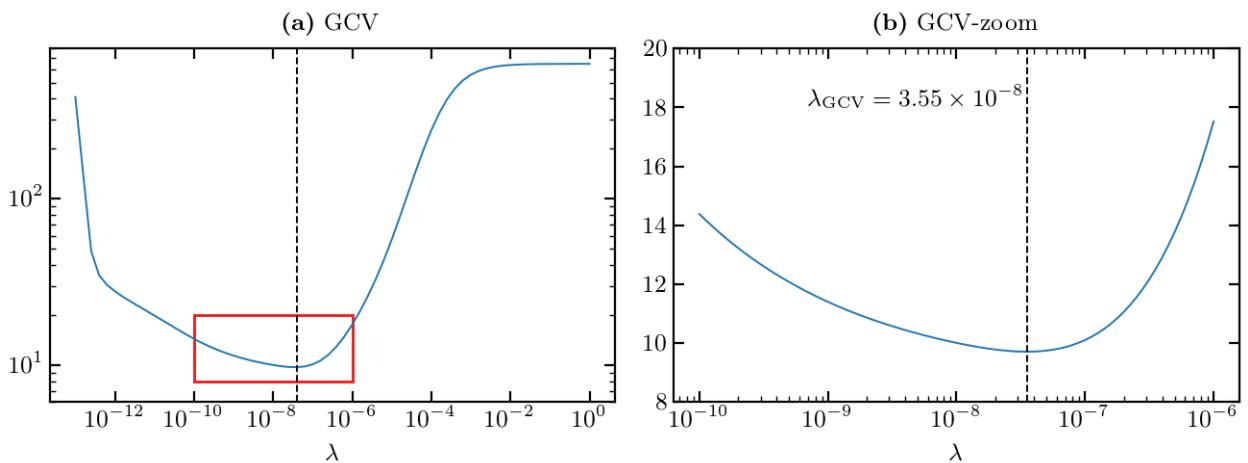


Fig. 5.8 – (a) Fonction GCV en fonction de λ avec un zoom (b) sur la zone autour du minimum de la courbe correspondant à $\lambda_{\text{GCV}} = 3,55 \times 10^{-8}$.

4.3 Trade-off curve

La Trade-off curve (ou en français « courbe de compromis ») est une méthode décrite par [Hansen \(1998\)](#), qui minimise à la fois la norme de l'erreur entre les données et les données prédites par l'inversion $\|D - G\bar{M}\|_W^2$, et à la fois la norme de l'erreur induite sur les contraintes imposées lors de l'inversion $\|\Gamma\bar{M}\|_V^2$. Chaque

inversion réalisée pour un hyperparamètre différent correspondra à un nouveau point dans l'espace défini par ces deux normes, comme on le voit sur la Figure 5.9. Ainsi la courbe est une fonction continue du paramètre λ . Si la solution est sous-régularisée (λ petits), on aura tendance à avoir une bonne correspondance avec les données mais des contraintes moins bien respectées ($\|D - G\bar{M}\|_W^2$ est petit et $\|\Gamma\bar{M}\|_V^2$ est grand) : on est sur la partie quasi-verticale de la courbe. A l'inverse, la solution est sur-régularisée si λ est grand donc si les contraintes sont bien respectées mais que les données sont mal prédites ($\|D - G\bar{M}\|_W^2$ est grand et $\|\Gamma\bar{M}\|_V^2$ est petit) : on est sur la partie quasi-horizontale de la courbe. Au carrefour de ces deux situations, on rencontre une zone où les deux normes semblent toutes les deux minimisées, correspondant à la zone où la courbe forme un « coude ». Les paramètres λ correspondants à cette zone seront donc de bons compromis pour que l'on retrouve correctement à la fois les équations de contraintes et les données. Cette méthode a le désavantage d'être assez subjective dans la détermination de λ et n'est employée que pour donner au mieux des ordres de grandeurs (Fu et al., 2015). Nous obtenons une estimation de λ égale à $(3 \pm 1) \times 10^{-7}$ par la construction géométrique que l'on a représentée sur la Figure 5.9b.

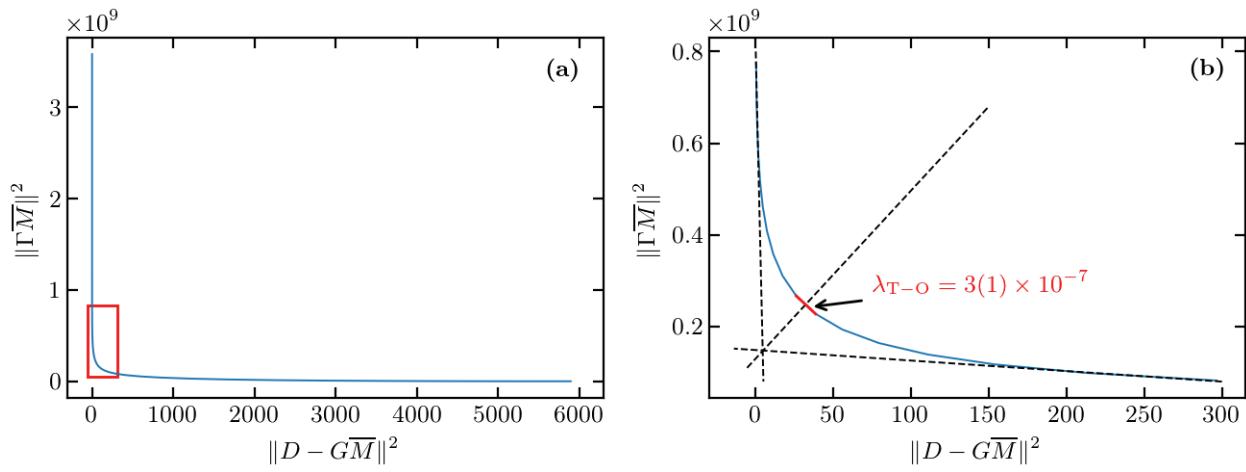


Fig. 5.9 – (a) Trade-off curve et un zoom (b) autour de la zone formant un « coude », correspondant à $\lambda_{T-O} = (3 \pm 1) \times 10^{-7}$.

4.4 Résultats

Nous représentons sur la Figure 5.10 les résultats des inversions correspondantes aux valeurs de λ que l'on a déterminé au moyen des trois critères précédemment expliqués. Nous voyons que les trois critères donnent des solutions relativement proches alors que les paramètres peuvent différer de deux ordres de grandeurs. On observe tout de même des différences localisées sur l'amplitude du signal. La solution correspondante au juste milieu entre les trois est proche de celle donnée par la méthode du Trade-Off. Sur cette dernière, la région scandinave est assez bien résolue tandis que la zone occidentale n'est pas trop bruitée. La Grande-Bretagne garde un signal d'amplitude quasi-nulle et on voit à l'Est un signal correspondant à l'anticyclone Sibérien. Par contre, la charge sur le Sud des Balkans est clairement surestimée par rapport à la solution GRACE originale. La régularisation dans cette zone pauvre en stations a en effet induit une fuite de charge depuis la Turquie sur les Balkans. La Turquie se trouve donc dépossédée d'une partie de son signal notamment à l'Est. L'Afrique du Nord n'est absolument pas contrainte et joue le rôle de tampon d'où les variabilités importantes que l'on observe mais qui n'ont pas de sens physique si ce n'est qu'elles proviennent du lissage.

5 Lissage variable

Les techniques précédentes nous ont permis d'ajuster au mieux l'hyperparamètre λ , en fixant les autres paramètres de lissage. Étant donnée la disparité d'information qui existe entre les régions riches et pauvres en stations, on pourrait aussi penser à faire varier ces paramètres en fonction de la densité de stations. Par exemple, il serait pertinent de moins lisser la solution, là où il y a beaucoup d'information et à l'inverse, de lisser davantage les régions pauvres en stations. Pour cela, il est nécessaire de déterminer l'échelle spatiale et

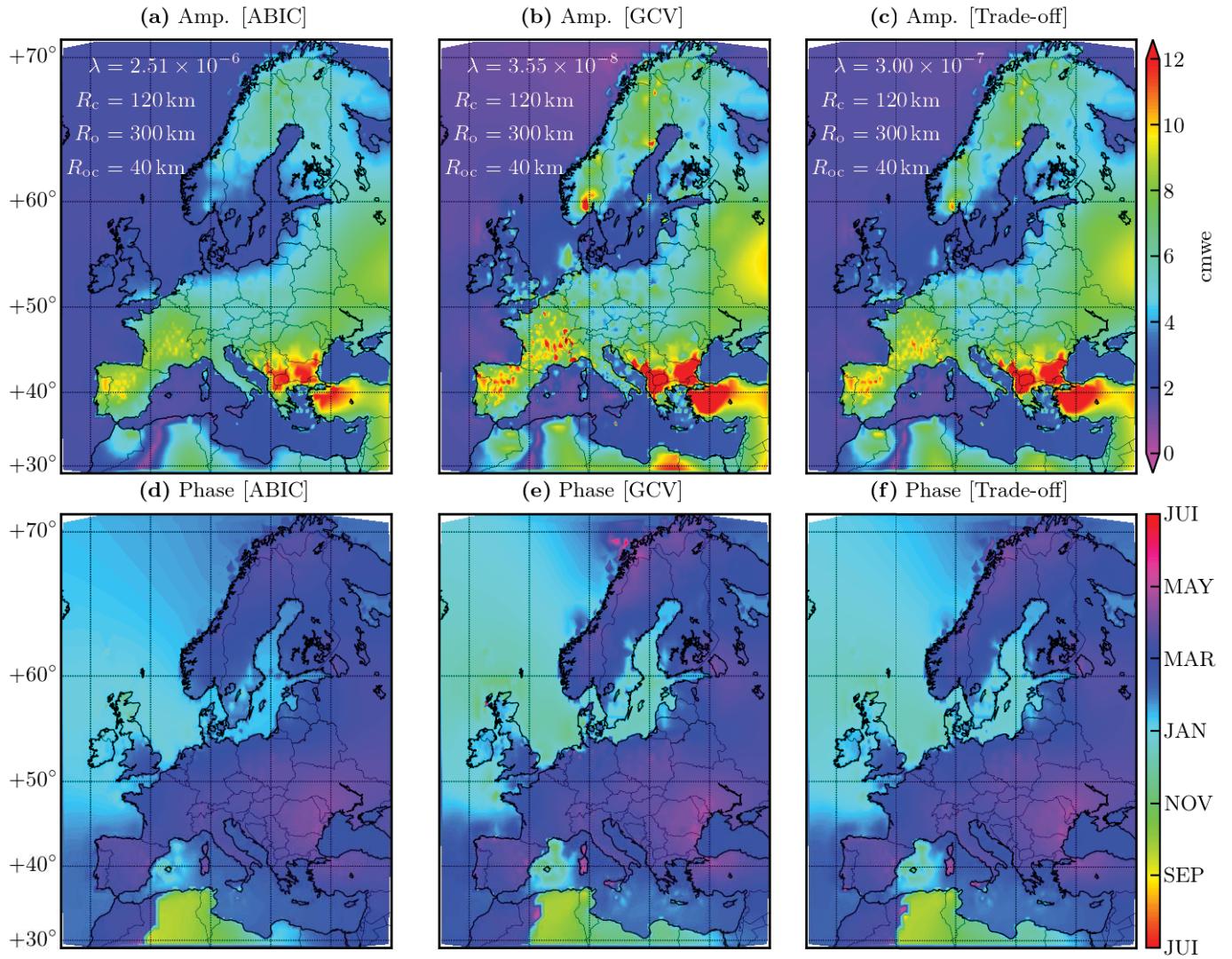


Fig. 5.10 – Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec les paramètres λ optimaux déterminés par les différents critères énoncés dans la Section 4.

l'amplitude des variations des paramètres d'un point de vue objectif. On peut postuler simplement que c'est la résolution de la grille (dont la résolution dépend en effet de la densité de station) qui fixera la longueur caractéristique du lissage. On va pouvoir ainsi moduler les paramètres en modifiant l'Eq. (5.10). On définit la matrice de poids diagonale V'^{-1} telle que :

$$V_{kk}^{\prime-1} = \begin{cases} \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_c \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } (C_i, C_j) \in \text{Continent} \\ \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 + o - \frac{d_{ij}}{R_o \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } (C_i, C_j) \in \text{Océan} \\ \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_{oc} \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } C_i \in \text{Continent}, C_j \in \text{Océan} \end{cases} \quad (5.20)$$

où C_i et C_j sont les centres des éléments de grille qui sont comparés (*i.e.* dont on fait la différence via l'opérateur Γ). Le fait que l'on multiplie l'exponentielle par la résolution permet de faire varier la valeur de λ en fonction des éléments de grille qui sont considérés. Le fait que l'on multiplie les distances caractéristiques de lissage par la résolution permet de les diminuer lorsque la résolution est bonne et de les augmenter lorsque la résolution est mauvaise. Le facteur de variabilité est choisi comme le minimum des résolutions des deux éléments de grille pour favoriser le lissage moindre de la solution. D'autres versions de ce lissage variable ont néanmoins été testées (notamment sans la multiplication de l'exponentielle par la résolution, ou alors en

multippliant par le maximum des résolution plutôt que le minimum) mais c'est celle que nous avons présentée dans l'Eq. (5.20) qui nous paraît la plus légitime pour la démarche que nous avons choisie.

Nous avons donc pris dans un premier temps les mêmes valeurs que précédemment pour $R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km. Nous avons également testé de modifier ces valeurs car le lissage variable permet plus de flexibilité sur le choix des paramètres, grâce au fait que l'on lisse seulement là où c'est nécessaire. Nous pouvons choisir des rayons de lissage bien plus petits, par exemple : $R_c = 50$ km $R_o = 100$ km et $R_{oc} = 25$ km. Nous avons pris 50 km pour modéliser la demi-distance inter-station moyenne et 25 km qui correspond environ à la plus petite résolution spatiale de la grille adaptative que nous utilisons. Dans les deux cas, nous choisissons λ en appliquant les mêmes critères que ceux que l'on a décrit précédemment (ABIC, GCV, Trade-off curve) de manière à comparer ces valeurs avec celles que l'on a obtenues en considérant un lissage « fixe⁵ ».

5.1 Comparaison des techniques de lissage

Nous résumons dans le Tableau 5.1 les résultats sur la détermination des hyperparamètres par les différents critères ABIC, GCV, Trade-off curve, pour une inversion au lissage fixe (régit par l'Eq. (5.10)) et une inversion au lissage variable (régit par l'Eq. (5.20)). L'indice (1) correspond au trio de valeurs [$R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km, $R_{oc} = 40$ km] et l'indice (2) à [$R_c = 50$ km $R_o = 100$ km, $R_{oc} = 25$ km].

Méthode	λ_{ABIC}	λ_{GCV}	$\lambda_{\text{T-O}}$
(1) Lissage fixe (Eq. (5.10))	$2,51 \times 10^{-6}$	$3,55 \times 10^{-8}$	$(3 \pm 1) \times 10^{-7}$
(1) Lissage variable (Eq. (5.20))	$2,24 \times 10^{-4}$	$3,55 \times 10^{-6}$	$(5 \pm 1) \times 10^{-5}$
(2) Lissage variable (Eq. (5.20))	$3,16 \times 10^{-3}$	$3,54 \times 10^{-5}$	$(2,5 \pm 1,0) \times 10^{-4}$

Tab. 5.1 – Valeurs optimales de l'hyperparamètre λ au vu des différents critères décrit dans cette section, en fonction de la méthode de lissage et pour des paramètres de base valant : (1) $R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km, $R_{oc} = 40$ km et (2) $R_c = 50$ km, $R_o = 100$ km, $R_{oc} = 25$ km.

On remarque que la valeur optimale de λ (que l'on notera aussi λ_{opt}) se situe dans un intervalle de 2 ordres de grandeurs entre les différents critères tel que $\lambda_{\text{ABIC}} < \lambda_{\text{T-O}} < \lambda_{\text{GCV}}$ et tel que ces 3 paramètres soient systématiquement espacés d'environ un ordre de grandeur.

On remarque aussi que les valeurs de λ varient de plusieurs ordres de grandeurs entre les différentes techniques de lissage. La différence entre les cas de lissage variable (1) et (2) confirme le fait que le paramètre λ_{opt} est fortement dépendant des autres paramètres de lissage qui ont été fixés (en l'occurrence R_c , R_o et R_{oc}). Nous voyions déjà ce résultat apparaître dans les Figures 5.5 et 5.6, où plus R_c et R_{oc} diminuent, plus la valeur de λ doit augmenter pour compenser la perte de lissage sous-jacente à la diminution des deux paramètres précédents. Étant donnée l'importance des variations de λ_{opt} avec les autres paramètres, nous avons décidé de chercher une approche objective permettant la détermination d'une configuration optimale de l'ensemble des paramètres conjointement en utilisant les critères de la Section 4.

5.2 Détermination conjointe de λ , R_c et R_{oc}

La fonction ABIC a été établie uniquement pour chercher le paramètre λ et ne peut donc être utilisée. La Trade-Off curve pourrait être utilisée mais la méthode de détermination des paramètres optimaux par la méthode graphique est très chronophage et non-automatisable ce qui est problématique pour le nombre important de configurations différentes à tester. Nous utilisons donc la méthode GCV, car elle constitue un choix objectif pour n'importe quel paramètre de lissage et qu'elle est facilement automatisable pour un grand nombre de tests dans l'espace des paramètres. Nous avons testé $36 \times 14 \times 14 = 7056$ combinaisons pour les trois paramètres λ , R_c et R_{oc} , en fixant une première fois le paramètre R_o à une valeur de 300 km et une seconde fois à une valeur de 100 km. Nous obtenons les paramètres optimaux au sens de GCV dans chacun des cas et nous appelons respectivement ces deux lots de paramètres (1') (pour $R_o = 300$ km) et (2') (pour $R_o = 100$ km). Ces paramètres sont reportés dans le Tableau 5.2 et comparés avec ceux obtenus par la méthode GCV dans les cas (1) et (2).

5. Il faut comprendre l'adjectif fixe par opposition à variable.

Hyperparamètres (lissage variable)	(1)	(2)	(1')	(2')
λ_{GCV}	$3,55 \times 10^{-6}$	$3,54 \times 10^{-5}$	$3,98 \times 10^{-7}$	$5,62 \times 10^{-6}$
R_c	120 km	50 km	275 km	125 km
R_{oc}	40 km	25 km	70 km	35 km
R_o	300 km	100 km	300 km	100 km

Tab. 5.2 – Hyperparamètres optimaux au sens de la GCV des 4 lots utilisés pour une inversion avec lissage variable. Les seuls paramètres qui ont été optimisés dans chaque cas sont reportés en rouge, les autres ayant été fixés arbitrairement.

On remarque que les rayons de lissage déterminés dans les cas (1') et (2') sont systématiquement supérieurs à ceux des cas (1) et (2), allant jusqu'à plus que doubler pour R_c , tandis que les valeurs de λ sont, à l'inverse, toujours plus faibles d'environ un ordre de grandeur. Le critère GCV étant un critère se basant sur la bonne prédictibilité des déplacements, il n'est pas étonnant de voir cette méthode privilégier globalement les faibles valeurs de λ qui font apparaître des effets de charge très localisés au niveau des emplacements des stations comme on le voit sur la Figure 5.5, tandis que les hautes valeurs de R_c servent à diminuer l'impact des effets de bord conséquents.

5.3 Résumé

Nous représentons sur la Figure 5.11 les amplitudes des cycles annuels de charge issues des inversions pour un lissage variable correspondant aux différentes situations que nous avons explorées pour ajuster les hyperparamètres. On représente en premier lieu la carte de charge originale de la solution GRACE du GSFC, puis les inversions des déplacements synthétiques issus de GRACE obtenues pour les lots de paramètres (1') et (2') déterminées par GCV. Enfin, nous donnons les résultats des inversions utilisant les lots (1) et (2) dont les valeurs optimales de λ ont été obtenues par chacun des trois critères énoncés dans la Section 4.

On voit que la qualité des solutions varie substantiellement entre les différents lots de paramètres. Les deux solutions issues de la détermination conjointe des paramètres λ , R_c et R_{oc} par la méthode GCV sont proches et ne diffèrent que sur les mers intérieures comme la Mer Noire, la Mer Égée, l'Adriatique ou la Mer Baltique. Ceci est bien entendu lié à la différence importante des valeurs de R_o entre les deux. On retrouve clairement le fait que les solutions calculées avec les paramètres optimaux au sens de la GCV possèdent des signaux forts et isolés au niveau des stations, ce qui s'explique par la nature du critère comme nous l'avons discuté plus haut. Les résultats les plus proches de la solution originale sur le continent sont ceux obtenus avec la méthode ABIC, bien qu'elle possède des failles notamment sur la Scandinavie ou la Turquie. Malgré un lissage faible, les solutions obtenues par GCV s'avèrent être plus réalistes dans les régions citées précédemment où ABIC échoue à restituer la solution originale. Enfin la solution issue des courbes de Trade-Off semble être un bon compromis entre la solution ABIC et la solution GCV, tout en restant proche de la solution originale. On remarque aussi que les inversions obtenues avec le jeu de paramètres (2) sont quasiment identiques aux solutions (1) sur le continent mais sont globalement meilleures sur la charge des mers intérieures quasi-fermées (sauf la Méditerranée) grâce à la faible valeur de R_o . Au vu de la variabilité des résultats, nous testerons par la suite l'ensemble de ces lots de paramètres pour l'inversion du cycle annuel extrait des séries temporelles de déplacement GNSS.

6 Inversion des déplacements GNSS

Après avoir testé le processus d'inversion ainsi que les différentes manières de rechercher les hyperparamètres optimaux de régularisation et de lissage, nous inversons le cycle annuel extrait des séries temporelles de déplacement GNSS afin d'obtenir la carte de charge correspondante. Dans un premier temps, nous estimons la carte de charge issue des déplacements GNSS uniquement. Puis nous verrons que les résultats obtenus avec le GNSS peuvent être améliorés en contrignant la charge avec celle de GRACE et ainsi donner une solution plus générale en tenant compte des apports -notamment locaux- du GNSS. Enfin nous réaliserons une inversion conjointe avec GRACE afin de pouvoir pondérer les deux techniques en amont du processus

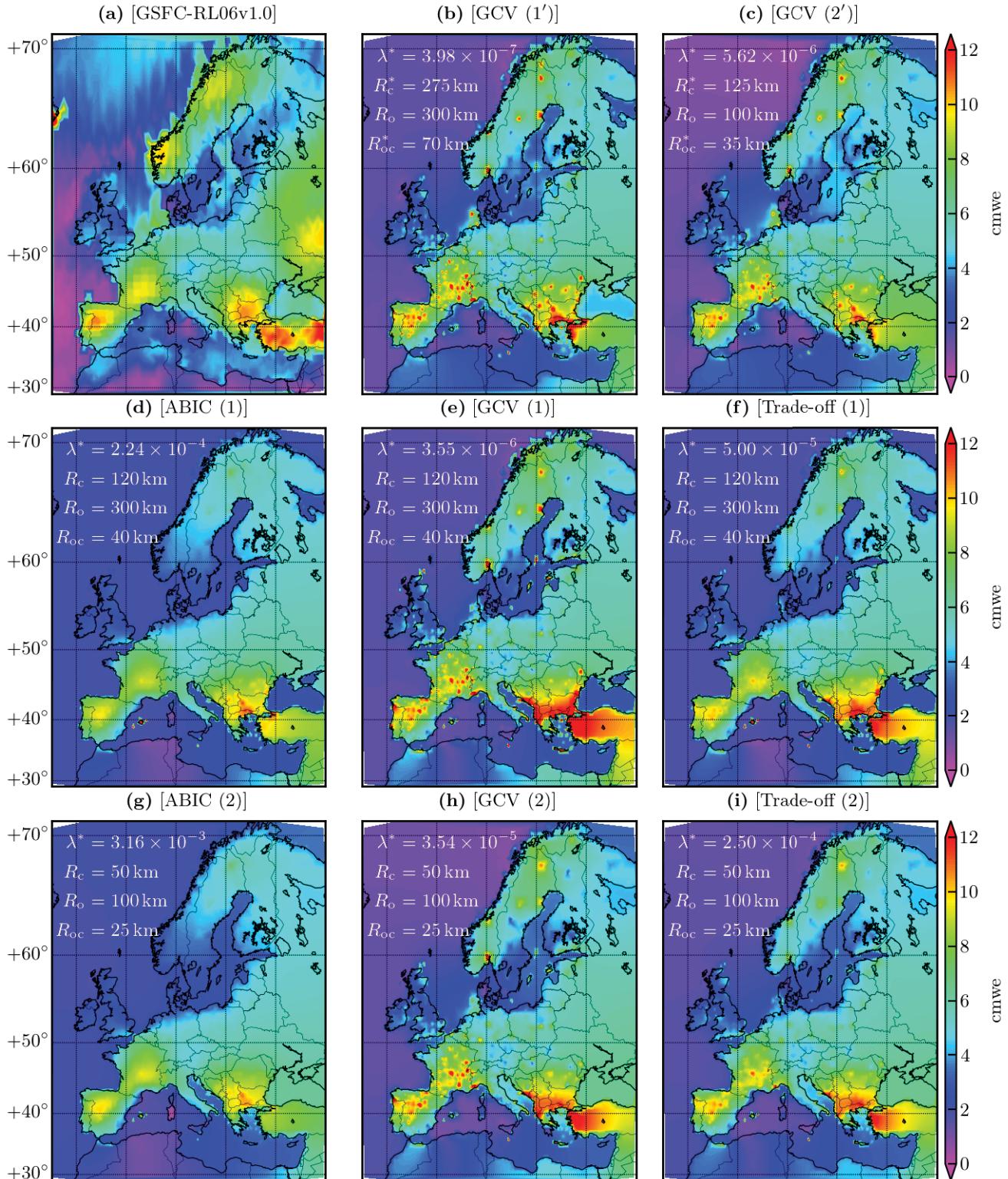


Fig. 5.11 – Résumé des résultats sur l'inversion des déplacements annuels synthétiques issus de GRACE pour différents lots de paramètres optimaux donnés dans les Tableaux 5.1 et 5.2. Les paramètres optimisés ont été annotés avec le symbole (*). Nous avons représenté en (a) la carte de charge originale de la solution GRACE utilisée.

d'inversion de manière plus rigoureuse. Néanmoins pour le cas que nous étudierons ici, l'inversion conjointe sera en fait dérivée non pas des données brutes de GRACE (lien KBRR et orbite) mais simplement des déplacements reconstitués comme dans la Section 3. Il s'agit donc plutôt de greffer facilement GRACE dans le processus de détermination d'une solution GNSS.

6.1 Inversion des déplacements verticaux GNSS seuls

Nous comparons dans un premier temps les inversions avec lissage variable dont les paramètres ont été établis dans la Section 5. Nous considérerons les situations (1') et (2') et les situations (1) et (2) pour chacune des trois méthodes d'estimation des paramètres (ABIC, GCV, Trade-Off). Nous obtenons donc 8 cartes de

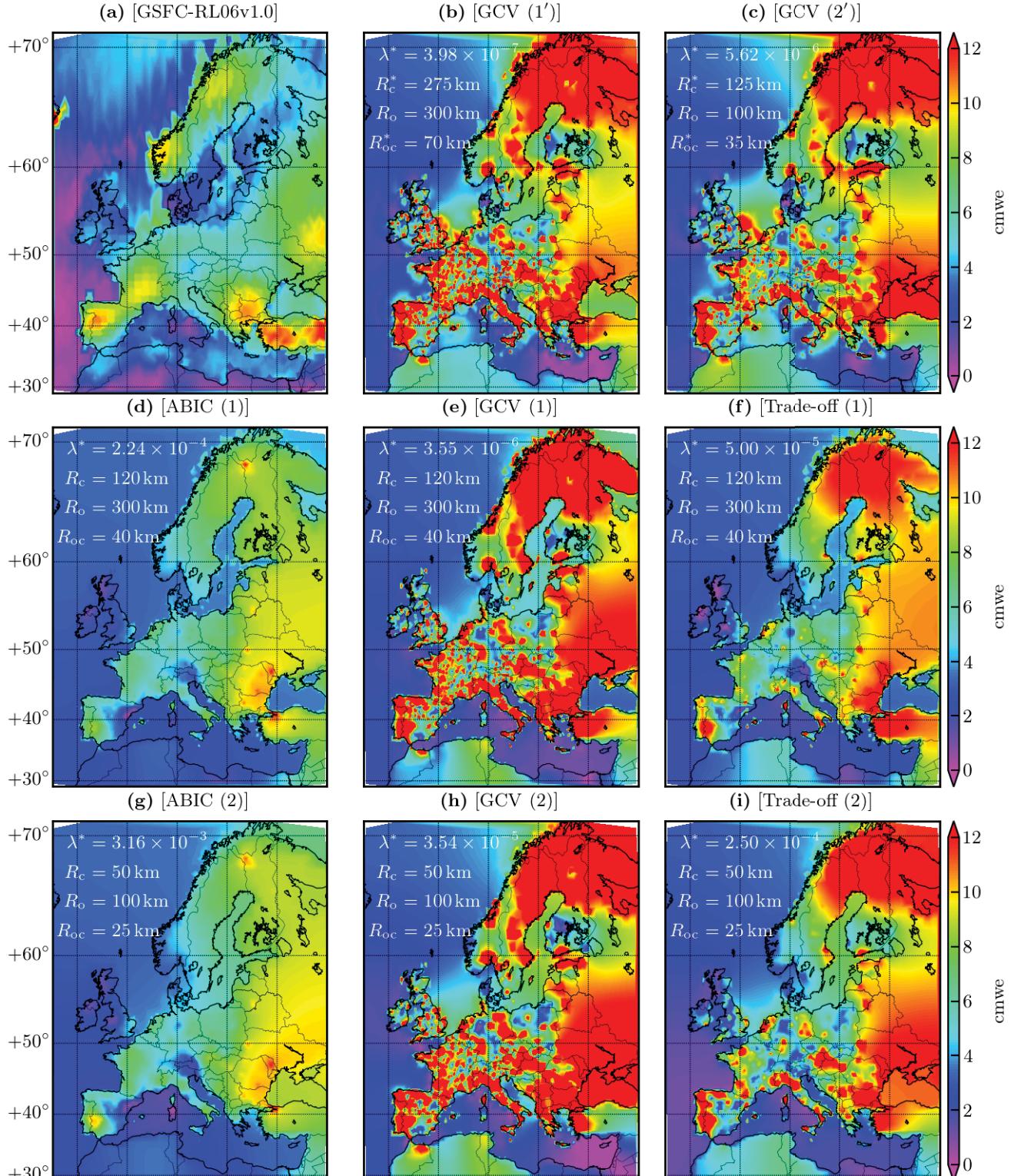


Fig. 5.12 – Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements GNSS seuls pour les différents lots de paramètres optimaux considérés dans la Section 5.3. Nous avons représenté en (a) la carte de charge originale de la solution GRACE du GSFC.

charges dont les amplitudes annuelles sont représentées sur la Figure 5.12⁶. On remarque que le haut niveau de bruit spatial existant sur les déplacements GNSS est reporté sur les solutions de charge. Et ce, malgré le fait d'avoir déterminé les hyperparamètres optimaux en utilisant le même réseau de stations que le réseau GNSS. L'estimation des paramètres par la méthode GCV résulte en une solution à la variabilité spatiale plus forte que les solutions issues des optimisations par ABIC ou Trade-Off, car c'est pour GCV que le paramètre λ possède systématiquement la valeur la plus basse. Comme nous l'avons remarqué plus haut, les différences entre les jeux de paramètres (1) et (2) ne se situent que sur les mers intérieures. L'interprétation des résultats obtenus est néanmoins rendue difficile par les différences importantes qui existent lorsque l'on fait varier λ . Pour tenter de réduire la sensibilité de la solution à ce paramètre, on peut contraindre l'ensemble de la carte de charge avec la solution GRACE afin de fixer la valeur d'amplitude et de phase aux grandes longueurs d'onde et de raffiner cette valeur grâce aux données GNSS. Le paramètre λ n'est alors pas contraint par la valeur de charge aux longues distances mais seulement par l'importance donnée au GNSS localement.

6.2 Inversion contrainte par GRACE

Les données GNSS étant assez bruitées spatialement comme nous venons de le voir, il peut être intéressant de contraindre ces variations abruptes par la solution GRACE. On peut alors tirer profit à la fois de la couverture spatiale uniforme et lisse de GRACE et des données locales et précises du GNSS. Cela revient en réalité à prendre la solution GRACE en *a priori* dans l'inversion et de ne calculer que l'écart entre cette solution relativement lisse et la solution issue de l'inversion des déplacements GNSS apportant la contribution plus locale. On change alors légèrement le problème régularisé, et l'on cherche désormais à minimiser la fonction

$$\Psi(M) = \|D - GM\|_W^2 + \|M - M_{\text{grace}}\|_U^2. \quad (5.21)$$

La matrice U , symétrique de taille m , permet de quantifier la fermeté que l'on donne aux contraintes mises en place sur M . Elle joue donc le rôle de matrice de covariance de la charge *a priori*. Les coefficients de son inverse, la matrice de poids, peuvent être définis par la même fonction (5.20) que celle qui donne les coefficients diagonaux de V'^{-1} de sorte que l'on fait toujours correspondre une corrélation entre les éléments de grille par l'intermédiaire des rayons de lissage. Les coefficients de la matrice de poids U^{-1} s'écrivent donc

$$U_{ij}^{-1} = \begin{cases} \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_c \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } (i, j) \in \text{Continent} \\ \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 + o - \frac{d_{ij}}{R_o \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } (i, j) \in \text{Océan} \\ \min(\text{res}_i, \text{res}_j) \times \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{R_{oc} \min(\text{res}_i, \text{res}_j)}\right), & \text{si } i \in \text{Continent}, j \in \text{Océan} \end{cases} \quad (5.22)$$

et la solution au problème

$$\begin{aligned} \bar{M} &= (G^T W^{-1} G + \lambda Q)^{-1} (G^T W^{-1} D + \lambda Q M_{\text{grace}}), \\ &= M_{\text{grace}} + (G^T W^{-1} G + \lambda Q)^{-1} G^T W^{-1} (D - G M_{\text{grace}}), \\ &= M_{\text{grace}} + (G^T W^{-1} G + \lambda Q)^{-1} G^T W^{-1} (D - D_{\text{grace}}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

où l'on voit que la matrice P de l'Eq (5.4) a été remplacée par la matrice $Q = U^{-1}$, de sorte que Q^{-1} joue désormais le rôle de la matrice de covariance de M . On a donc juste à réaliser une inversion dont les données sont les déplacements GNSS moins les déplacements synthétiques issus de GRACE, puis d'ajouter la solution obtenue à la charge originale de GRACE. Pour les mêmes ensembles de paramètres que dans la section précédente, nous calculons les cartes de charge dont les amplitudes annuelles sont représentées sur la Figure 5.13.

6. La phase annuelle étant relativement lisse sur l'Europe, on se restreint ici à ne montrer et ne comparer que les amplitudes pour ne pas encombrer le propos.

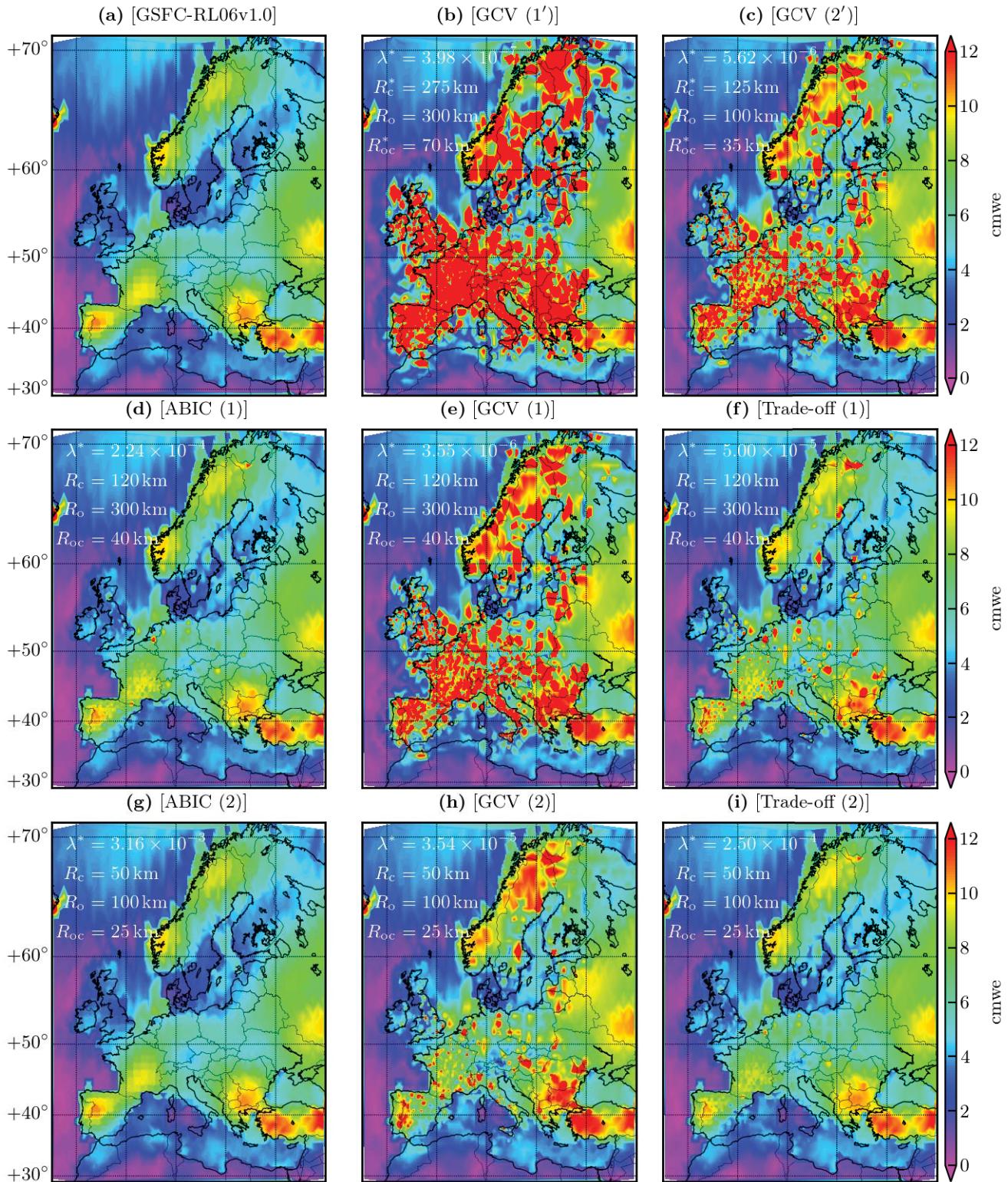


Fig. 5.13 – Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements GNSS en prenant la solution GRACE du GSFC (panel a) en *a priori* pour les différents lots de paramètres optimaux considérés dans la Section 5.3.

On retrouve la forte variabilité spatiale des inversions utilisant les paramètres optimaux GCV, et le fait que cette variabilité diminue fortement lorsque l'on augmente λ , et ce quelque soient les valeurs de R_c , R_o et R_{oc} . Les inversions utilisant les paramètres optimaux ABIC et Trade-Off ne diffèrent quasiment pas de la solution GRACE (sauf le cas du Trade-Off (1)) car leurs valeurs de λ sont trop grandes, ce qui induit un lissage trop fort de la contribution GNSS qui se retrouve noyée dans la solution GRACE. Il serait alors bon

de pouvoir pondérer la solution GRACE par rapport au GNSS autrement qu'avec λ qui ne joue que sur le lissage global. Cette pondération peut être amenée par une inversion GNSS non plus contrainte par GRACE mais conjointe avec GRACE.

6.3 Inversion conjointe avec GRACE

Si la solution GRACE est utilisée non plus comme contrainte mais dans une inverse conjointe avec les déplacements GNSS, on peut introduire un paramètre supplémentaire pour pondérer les deux jeux de données l'un par rapport à l'autre. On utilise pour cela les déplacements induits par la solution de charge issue de GRACE obtenus en résolvant le problème direct comme dans la Section 3. Cependant, contrairement à la Section 3, ces déplacements ne sont plus calculés sur les emplacements des stations GNSS car la redondance d'information n'améliorerait en rien le problème d'inhomogénéité du réseau et nécessiterait donc des paramètres de lissage identiques. Nous choisissons à la place de calculer ces déplacements sur une grille de points régulièrement espacés (tout les $0,5^\circ$) qui pavent de manière homogène la région d'inversion, y compris les océans. Le réseau de stations GNSS avec l'ajout des stations fictives de GRACE est représenté sur la Figure 5.14. On voit bien que les zones continentales mal contraintes par le GNSS ainsi que les océans sont rattrapés par la couverture de GRACE, ce qui permet en théorie de réduire l'importance du lissage.

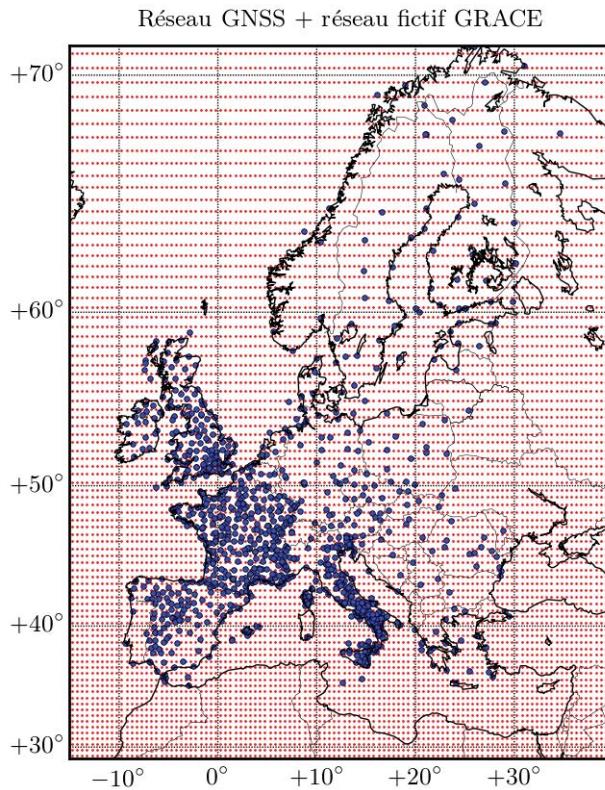


Fig. 5.14 – Carte des stations GNSS (ronds bleus) et des stations fictives où l'on a calculé le déplacement qu'engendrerait la charge issue de GRACE (points rouges).

Pour une inversion conjointe, on accumule les déplacements GNSS et les déplacements calculés à partir de GRACE dans un nouveau vecteur D . Puis on accumule également les matrices de Green avant de définir le poids relatif de chaque technique permettant de donner plus ou moins d'importance aux déplacements GNSS par rapport à ceux de GRACE. On note ce poids b , qui multiplie directement la matrice de poids des données GRACE de sorte que le problème s'écrit

$$\begin{pmatrix} D_{\text{GNSS}} \\ D_{\text{GRACE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\text{GNSS}} \\ G_{\text{GRACE}} \end{pmatrix} M, \quad \text{et} \quad W^{-1} = \begin{pmatrix} W_{\text{GNSS}}^{-1} & 0 \\ 0 & bW_{\text{GRACE}}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

où W_{GNSS}^{-1} et W_{GRACE}^{-1} sont les matrices des poids associées respectivement aux données GNSS et GRACE.

On choisira un poids $b < 1$ pour que les données GRACE soient légèrement sous pondérées par rapport au GNSS et un poids $b > 1$ pour retrouver les données GRACE au détriment des déplacements GNSS.

Malgré l'ajout des données supplémentaires de GRACE, il est toujours nécessaire de régulariser mathématiquement le problème. La couverture spatiale étant plus homogène que dans le cas du GNSS seul, il est néanmoins possible de choisir un lissage plus faible en diminuant les valeurs des hyperparamètres. On note que le lissage induit par la régularisation est important également d'un point de vue physique puisqu'il permet de « mélanger » les informations issues des deux jeux de données.

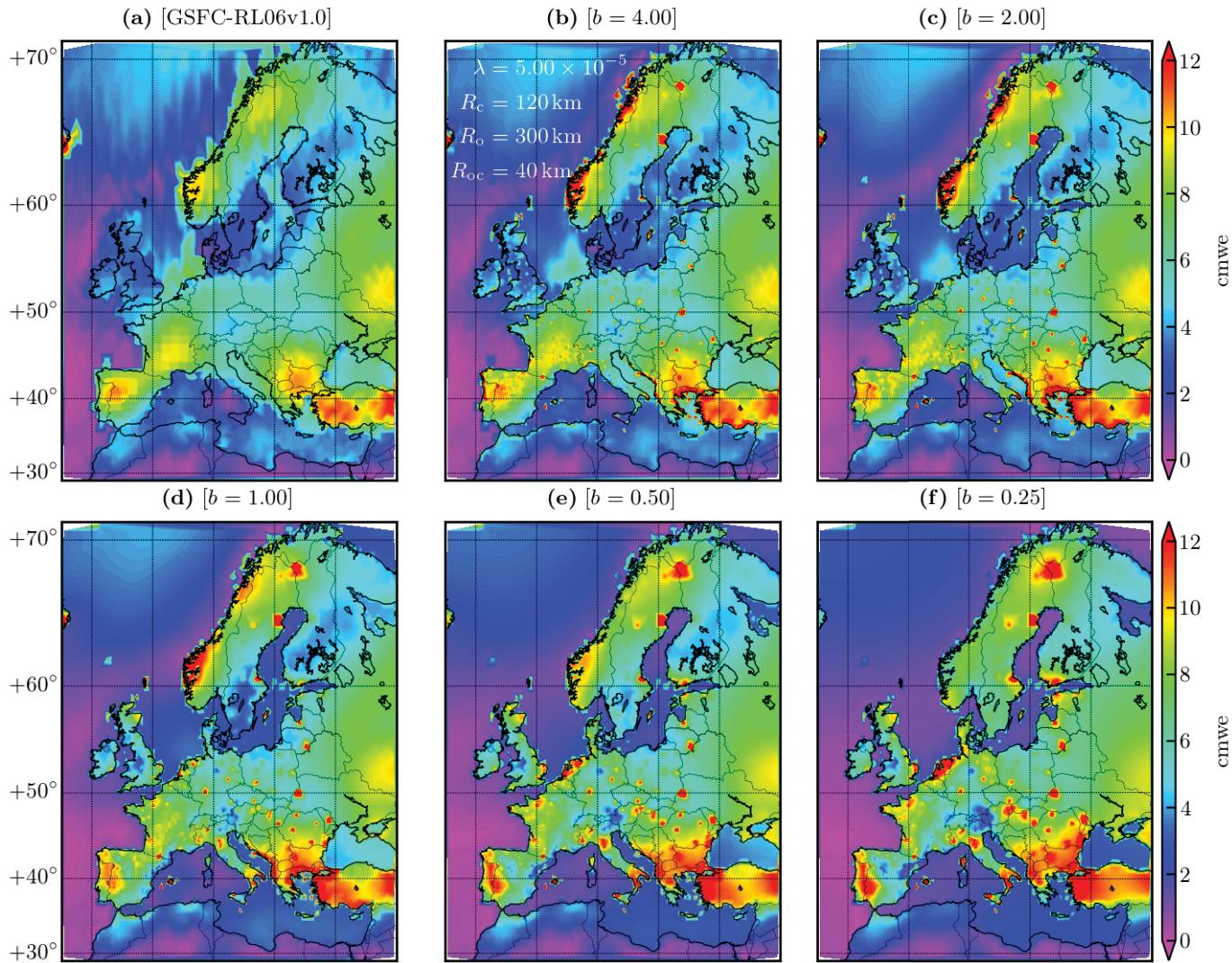


Fig. 5.15 – Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion conjointe des déplacements GNSS et des déplacements calculés à partir de GRACE en appliquant différents poids b sur les déplacements GRACE. Le lot de paramètres utilisé (issue de la méthode Trade-Off (1)) est le même pour les panels (b) à (f). La solution GRACE du GSFC avec laquelle on a calculé les déplacements est montrée en (a).

La Figure 5.15 donne les résultats des inversions conjointes utilisant les paramètres optimaux issus de la méthode du Trade-Off pour le jeu de paramètres (1) et pour plusieurs poids b différents. On retrouve le fait que plus b est grand, plus le résultat de l'inversion est proche de la solution GRACE. À l'inverse, plus le paramètre b est petit, plus on donne de poids (relatif) aux données GNSS et donc plus l'on s'écarte de la solution GRACE. Cependant, on note que même dans ce cas de figure, la présence des données GRACE dans l'inversion permet de restituer les zones faiblement peuplées en stations GNSS comme le Maghreb, la Turquie ou encore la Russie. En effet, on peut comparer la carte d'inversion donnée dans le panel (f) de la Figure 5.12 qui résulte de l'inversion du GNSS seul avec la carte du panel (f) de la Figure 5.15 ci-dessus. Les deux utilisent le même jeu de paramètres issus de la méthode du Trade-Off dans le cas (1). Dans les deux cas, le poids du GNSS dans l'inversion est important, conséquence du fait qu'on observe des similarités

sur les zones denses en stations comme la France, l'Espagne, l'Italie et la zone de faible amplitude sur les Alpes orientales centrales. Il existe malgré tout des différences majeures sur la Grande-Bretagne ainsi que la Scandinavie malgré une densité de stations relativement importante. Dans les zones faiblement peuplées en stations (Russie, Maghreb et bien sûr les océans), les deux solutions diffèrent radicalement, ce qui montre l'apport de GRACE sur l'inversion. On remarque également que plus le poids de GRACE diminue, plus les amplitudes sur les zones océaniques comme la Mer du Nord diminuent au profit d'une charge transférée sur le continent (Pays-Bas et Royaume-Uni). Ceci est bien sûr la conséquence du manque de donnée croissant sur les océans à mesure que l'apport de GRACE diminue.

6.4 Comparaison avec les modèles de charge

Nous comparons les résultats obtenus dans cette partie avec différents modèles de charge rendant compte de la charge hydrologique et de la charge atmosphérique. Cette dernière est alors convertie en hauteur d'eau équivalente afin de pouvoir être additionnée avec la charge hydrologique. À la fréquence annuelle, seuls ces signaux de charges sont *a priori* présents dans les observations GRACE et GNSS et sont susceptibles d'expliquer les observations. Nous comparons trois modèles : les composantes hydrologiques et atmosphériques des réanalyses ERA5 (Hersbach et al., 2020) et MERRA2 (Gelaro et al., 2017), et le modèle d'assimilation GLDAS2/Noah (Rodell et al., 2004). Les deux modèles de réanalyse ERA5 et MERRA2 diffèrent par leurs modèles et données atmosphériques ainsi que sur les modèles utilisés pour la circulation et le stockage de

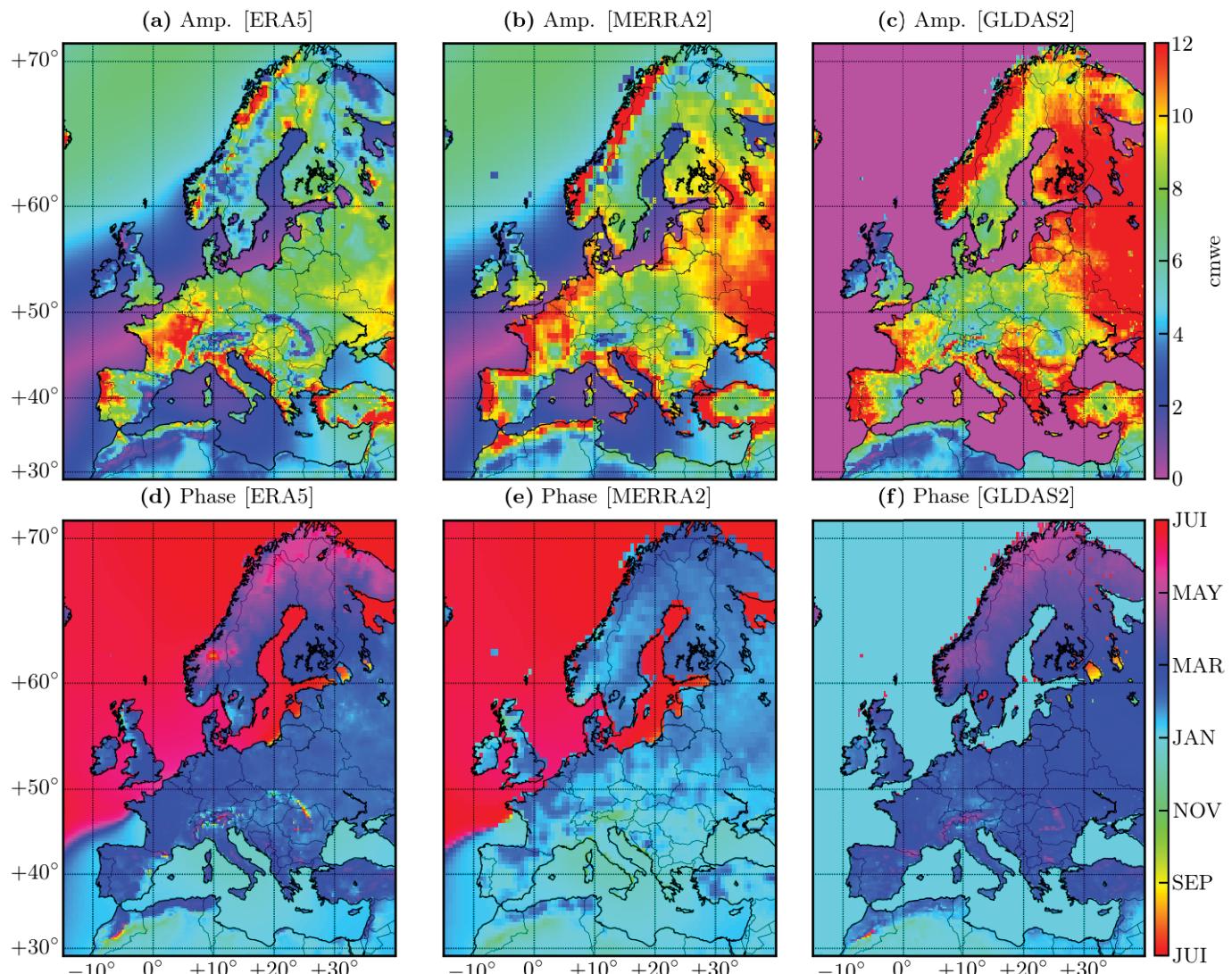


Fig. 5.16 – Amplitude annuelle et phase des modèles de charge [hydrologie+atmosphère] ERA5, MERRA2 et GLDAS2.

l'eau dans le sol, l'atmosphère, la végétation, etc. À la différence des modèles obtenus par réanalyse qui contiennent une solution cohérente des variables d'intérêt (pression, teneur en vapeur d'eau et température atmosphérique, teneur en eau et température du sol, etc.) issues du traitement unifié de modèles composites, le modèle d'assimilation GLDAS2, compile un ensemble de données (atmosphère, sol, végétation, neige, etc.) qui sont assimilés pour forcer uniquement le modèle hydrologique. Dans GLDAS2, le modèle atmosphérique influe donc sur le modèle hydrologique mais la rétroaction n'existe pas (puisque l'atmosphère n'est réduite qu'à un forçage).

Nous présentons dans la Figure 5.16, les amplitudes et phases des signaux annuels extraits des trois modèles de charges précédemment cités. Ces signaux comprennent la charge hydrologique (neige, contenu en eau du sol) et la charge atmosphérique (pression). Pour GLDAS2, nous avons calculé la charge atmosphérique à partir du modèle de forçage utilisé dans le modèle. Il existe une forte variabilité entre ces trois modèles notamment sur la phase globale et l'amplitude de l'Est européen (Balkans, Russie, Scandinavie). On remarque que les amplitudes sur le Sud de l'Europe pour les deux solutions issues des réanalyses sont cohérentes entre elles bien que ERA5 semble avoir une amplitude globalement moins élevée que MERRA2. Leurs phases diffèrent par contre d'environ 2 mois sur l'ensemble de l'Europe, ce qui constitue une différence considérable, vu la précision que l'on recherche. La solution GLDAS2 est quelque peu à part notamment car elle ne présente qu'une solution sur les continents. Pour l'amplitude, on retrouve des similitudes avec les solutions MERRA2 et ERA5 en fonction des zones géographiques : proche d'ERA5 sur le Maghreb, la France, l'Allemagne, l'Irlande et le Bénélux et proche de MERRA2 sur l'Espagne, la Grande-Bretagne, la Russie et une partie de la Scandinavie. La phase, en revanche, reste très proche de celle de ERA5.

Nous proposons une comparaison prudente entre ces modèles et les précédentes inversions que nous

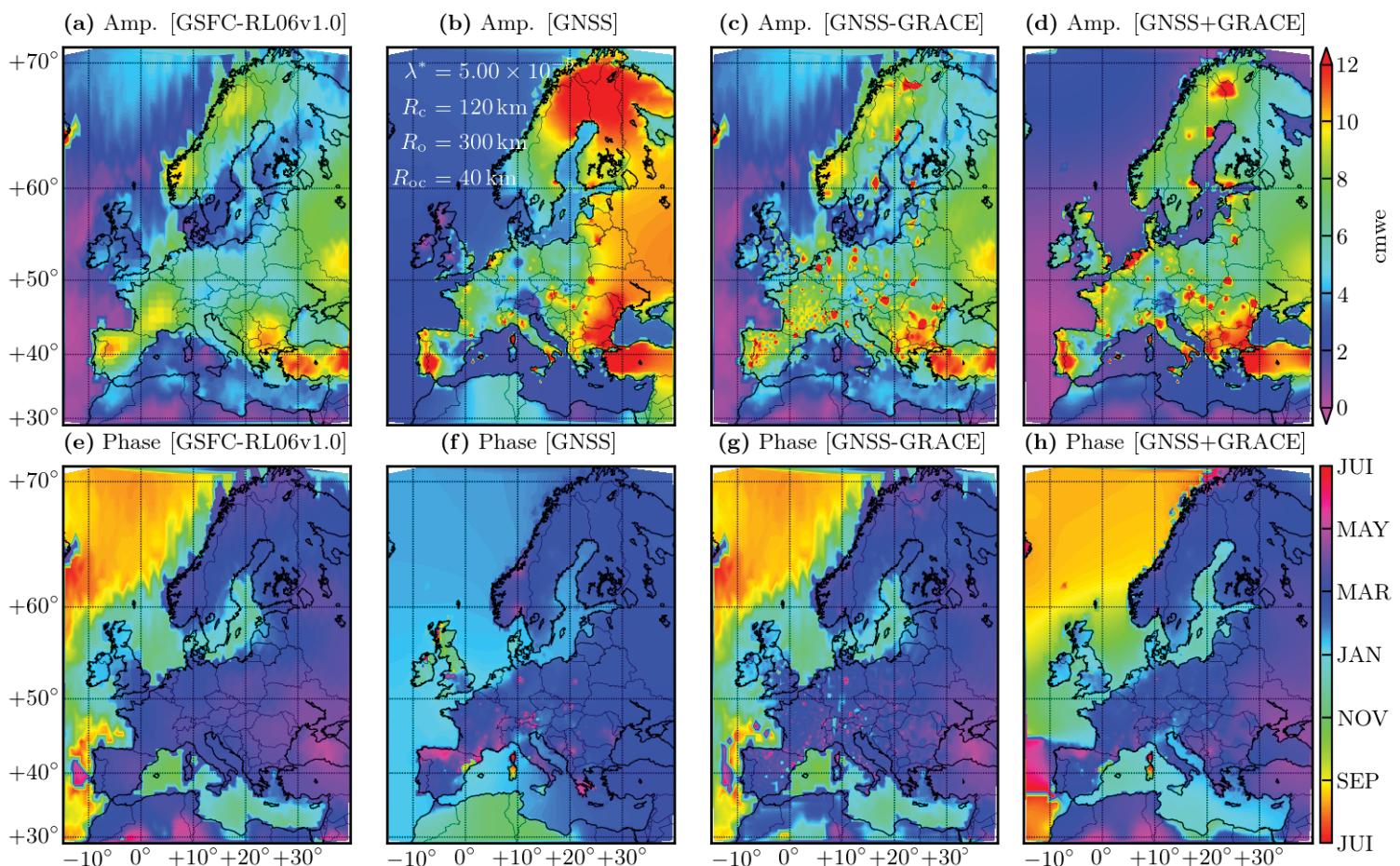


Fig. 5.17 – Amplitude annuelle et phase de la solution GRACE du GSFC (a & e), et des inversions des déplacements GNSS seuls (b & f), contraints par la charge de GRACE (c & g) et conjoints avec les déplacements issus de GRACE (d & h). Nous avons choisis les inversions utilisant les paramètres optimaux au sens de la méthode Trade-Off soit [$\lambda = 5 \times 10^{-5}$; $R_c = 120$ km ; $R_o = 300$ km ; $R_{oc} = 40$ km], et un poids relatif GNSS/GRACE de 4/1 dans l'inversion conjointe. Cela correspond aux cartes d'amplitudes présentées dans les panels (f) des Figures 5.12 5.13 et 5.15.

reportons sur la Figure 5.17. Les différences majeures entre les modèles et les inversions se situent au niveau de la phase où des écarts de plusieurs mois sont observés sur la Scandinavie et le Maghreb, ainsi que des disparités de l'ordre du mois sur l'Europe continentale. Sur l'amplitude, certaines similitudes entre les modèles et les inversions ressortent comme le fort gradient Est/Ouest sur la péninsule ibérique, le fort signal localisé sur l'Italie ou encore la zone de faible amplitude sur les Alpes orientales. Ces signaux sont absents ou très peu marqués sur GRACE, ce qui est probablement lié à la faible résolution spatiale des solutions.

Les variations spatiale des charges atmosphériques étant majoritairement à grande échelle, les différences localisées montrent l'apport d'une technique comme le GNSS sur la détermination des charges hydrologiques au niveau local. À cause de la multiplicité des phénomènes contribuant au signal annuel des séries GNSS, on peut comprendre que le GNSS ait une si grande variabilité, même à un niveau « très local ». En effet comme cela est discuté dans la Partie II, il est très difficile de séparer le signal annuel dû aux effets de charge, des autres signaux (thermo-élasticité, porosité, thermo-dilatation des antennes, repliement de spectre d'un éventuel signal multi-trajet à la période annuelle, période draconitique). Cependant, les mesures GRACE peuvent elles aussi être entachées de biais liés au bruit de mesure (lien KBRR, accéléromètres, etc.) ou aux choix de paramétrisation (solution en harmoniques sphériques ou en mascons, solution contrainte ou non contrainte, etc.) par exemple. Le GNSS constitue donc une alternative dans le sens où il peut servir de validation indépendante des résultats obtenus avec GRACE. Pour aller plus loin que l'idée de validation pour laquelle on utilise les données GNSS seules, l'inversion conjointe GRACE/GNSS nous paraît être ici une alternative innovante intéressante à mettre en avant pour permettre à chacune des deux mesures d'apporter sa plus-value à la solution. Nous avons prouvé que ce type d'inversion était possible et donnait de bons résultats notamment en ce qui concerne l'apport de GRACE dans les zones peu denses en stations et l'apport local du GNSS dans les zones enclavées ou sur les régions de faible étendue spatiale.

6.5 Conclusion

D'un point de vue méthodologique, les différents types d'inversion proposés dans cette partie pourraient être étendus à d'autres signaux que les seuls signaux annuels. En effet, il pourrait par exemple être intéressant de retrouver avec le GNSS des données de charge submensuelles inaccessible avec GRACE, sous forme de cartes d'inversion comme celles que nous avons déterminées ici. Si l'on réussit à déceler puis s'affranchir des éventuels signaux non-géophysiques résiduels dans les séries temporelles, le GNSS serait alors en mesure de compléter les mesures GRACE à la fois en terme de résolution spatiale et en terme de résolution temporelle pour des régions bien choisies, suffisamment fournies en stations.

Étant donnée la diversité des solutions que nous obtenons, notamment en fonction des paramètres de lissage, il est difficile de trancher pour une solution optimale. Cependant, la diversité des solutions pourrait permettre le calcul d'une incertitude statistique (de type A) et ainsi permettre de quantifier le niveau d'incertitude d'un modèle de charge estimé avec cette méthode. La prise en compte de ces incertitudes passe également par le fait que les données GNSS et GRACE en entrée sont elles-même entachées d'une incertitude que l'on peut propager au cours du processus d'inversion. Il faut néanmoins garder à l'esprit que la part d'incertitude liée à la propagation des erreurs formelles des données au cours du processus sera probablement moins importante que la part de l'incertitude statistique issue de la variabilité des paramètres de lissage.

Des différentes méthodes d'inversion utilisées pour retrouver la charge annuelle, c'est bien l'inversion conjointe de GRACE et du GNSS qui donne le plus de satisfaction. D'une part cette méthode permet de choisir aisément à travers le paramètre b , un compromis entre les différents jeux de données. En choisissant une distribution de stations fictives différente de celle de la Figure 5.14, on peut également modifier l'apport spatial de GRACE par rapport au GNSS. On peut par exemple penser à un réseau homogène auquel on aurait retiré les positions des véritables stations GNSS afin de ne pas mettre le signal de GRACE là où il y a du signal GNSS. On pourrait aussi penser à ne couvrir que les océans avec GRACE et ne laisser que les données GNSS agir sur les continents. Ce schéma d'inversion conjointe rend également envisageable une inversion sur l'ensemble du globe, et ce quelque soit la densité de stations GNSS et l'homogénéité du réseau. On pourrait en effet compléter le réseau GNSS existant par des stations fictives GRACE qui couvrirait l'ensemble de la planète de manière la plus homogène possible. On pourrait aussi par ce procédé, conserver exactement le même réseau de station réelle+fictive au cours du temps et ainsi éviter les problèmes soulevés par Collilieux et al. (2009) : cela revient à compléter la série temporelle GNSS en remplaçant les époques

sans solution par des stations fictives GRACE dont on aurait le cas échéant ré-échantillonné les données. Par rapport à l'inversion seule des données GNSS, cette méthode d'inversion conjointe permet aussi de s'affranchir d'une zone tampon pour la charge comme c'est le cas de l'Est européen sur le panel (b) de la Figure 5.17. Enfin, elle permet d'éviter le phénomène de sur-échantillonnage spatial que l'on peut voir sur les cartes de l'inversion contrainte par GRACE (panel (c) de la Figure 5.17), et ce pour des paramètres de lissage identiques.

Conclusion

L'objectif du travail que nous avons présenté est l'étude des déformations liées aux charges en Europe, et la détermination de la charge saisonnière à partir des déplacements GNSS d'un réseau dense de stations. Comme nous avons cherché à extraire le déplacement saisonnier des séries GNSS dont l'amplitude est relativement faible en Europe, ces séries GNSS devaient avoir un rapport signal sur bruit élevé. Enfin, nous devions adopter un modèle de déformation de la Terre solide bâti sur la théorie gravito-élastique et les fonctions de Green, permettant de prendre en compte n'importe quel type de rhéologie linéaire afin de pouvoir l'utiliser sur d'autres phénomènes que les variations saisonnières de charge, notamment des phénomènes à plus longues périodes nécessitant la prise en compte du caractère visco-élastique de la Terre.

Cette thèse a d'abord été l'objet d'un traitement GNSS massif. Nous avons en effet calculé trois solutions complètes sur notre réseau européen de stations (qui en compte plus de 1000) en fonction des produits orbite/horloge des satellites GNSS qui étaient à notre disposition au fur et à mesure de la thèse : une première solution avec les produits GR2/GRG qui souffrait de problèmes de mise en référence, une solution avec les premiers produits REPRO3 GR3 qui s'est avérée inexploitable à cause d'un problème de modélisation et enfin la solution avec les produits MG3 que nous avons pu exploiter et dont nous avons présenté certains résultats issus de l'article [Michel et al. \(2021\)](#). L'utilisation de différentes méthodes d'estimation des paramètres modélisant les séries temporelles GNSS (tendance, termes saisonniers, bruit de mesure, etc.) a permis de mettre en exergue la sensibilité de ces paramètres à la méthode d'estimation, notamment en rajoutant dans l'ajustement les fréquences draconitiques et un modèle de bruit corrélé. Ces résultats nous ont permis de trancher en faveur d'une méthode optimale pour estimer les paramètres d'ajustement des séries temporelles GNSS. Notamment, nous avons montré que l'ajustement des signaux draconitiques permettait un gain de précision sur les paramètres de vitesse, bien qu'ils soient toujours fortement corrélés avec les termes saisonniers annuels et semi-annuels pour les séries temporelles les plus longues (environ 20 ans). La comparaison entre les déplacements saisonniers extraits des séries GNSS et ceux reconstitués à partir de modèles hydrologiques et de la mission spatiale GRACE ont montré une forte variabilité spatiale et temporelle, dont plusieurs mois d'écart sur la phase du signal annuel. Cette variabilité importante a aussi été confirmée sur les signaux de la bande interannuelle grâce à une décomposition en composantes principales. Cette variabilité entre modèles et GNSS est la raison pour laquelle il est nécessaire d'être prudent sur l'interprétation des différences ou ressemblances entre les solutions GNSS et les modèles hydrologiques [Chanard et al. \(2020\)](#). Nous avons aussi entamé une étude sur la détermination et la comparaison du mode commun observé en Europe entre les séries temporelles GNSS de plusieurs centres d'analyse de l'IGS et la solution GRACE. Ces analyses préliminaires permettent notamment de réduire la variabilité à haute fréquence des solutions en captant une partie du bruit sur l'ensemble du spectre et de faire émerger les éventuels signaux de grande longueur d'onde spatiale propres à chaque solution et donc propres à chaque produit orbite/horloge. Dans une future étude, il pourra également être intéressant de tester l'application de modèles haute fréquence de charges non-maréales directement dans le calcul d'orbite/horloge du centre d'analyse pour étudier quel serait son apport sur la diminution de variabilité des solutions journalières ou subjournalières.

Ce travail de thèse a aussi été l'occasion de mettre en place un nombre important d'outils pour permettre le traitement massif en local d'un réseau de stations GNSS avec le logiciel GINS. Ces outils ont permis en premier lieu de sélectionner automatiquement les stations dont les données sont de bonne qualité, de gérer toujours automatiquement le rapatriement des fichiers *log* correspondants (changements de matériels, installations et informations générales sur la station et son environnement) et de lancer le calcul en prenant

soin de le paralléliser pour gagner en efficacité. Enfin, nous avons également développé l'ensemble des outils pour l'analyse des séries temporelles : la détection des sauts et points aberrants, l'ajustement des modèles déterministes et stochastiques, l'étude du contenu fréquentiel, etc. L'ensemble de ces outils constitue un socle important dont la vocation sera à terme de participer à la mise en place d'un service opérationnel de distribution des solutions GNSS calculées en mode PPP à partir des produits GRG (voir IGS) sur un réseau de station important. Ce genre de service existant déjà pour des milliers de stations dont les solutions sont calculées en PPP avec les produits orbite/horloge du JPL ([Blewitt et al., 2018](#)), il sera ici l'occasion de proposer des solutions d'un centre d'analyse différent ainsi que d'avoir un contrôle qualité et un suivi accru des solutions calculées, à la manière dont cela a été fait récemment par le JPL ([Heflin et al., 2020](#)). Dans le souci de donner aux utilisateurs et utilisatrices des solutions qui répondent à différentes demandes, un effort pourra aussi être fait quant au calcul de solutions en mode cinématique et/ou en temps quasi-réel, en mode multi-GNSS et en mode IPPP (en fixant les ambiguïtés entières). En ce qui concerne les solutions PPP déjà calculées sur l'Europe qui ont été utilisées dans ce travail, elles sont mises à disposition de la communauté car elles constituent un apport conséquent sur l'élaboration de solutions régionales et globales. Grâce au nombre important de stations et à la longueur des séries calculées, elles ont par exemple été incluses dans le jeu de données utilisé par Alvaro Santamaría-Gómez en vue de la combinaison des champs de vitesse au niveau régional par l'IAG ([Santamaría-Gómez, comm. personnelle](#)).

Dans un second temps, nous avons mis en évidence la variabilité des déformations visco-élastiques engendrées par des phénomènes longues périodes comme les marées solides ou les épisodes de fontes de glaces dans l'article [Michel & Boy \(2021\)](#). Nous avons testé une grande diversité de modèles visco-élastiques de Maxwell et de Burgers dans le calcul des déformations engendrées par ces phénomènes et avons réaffirmé la pertinence d'utiliser de tels modèles pour l'estimation des déformations de longue période. Les conventions IERS proposent pour chaque phénomène des valeurs pour les nombres de Love issus de traitements différents. Il serait plus cohérent d'utiliser des nombres de Love issus d'un seul et même traitement utilisant par exemple un modèle rhéologique comme ceux que nous avons présentés. Les modèles de Burgers sont particulièrement adaptés pour couvrir de nombreux phénomènes géophysiques de temps caractéristiques différents. Ils donnent d'ailleurs des résultats proches des déformations modélisées par les conventions IERS actuelles pour les déformations liées aux marées solides. Nous avons aussi montré qu'en utilisant ces modèles visco-élastiques pour calculer la déformation liée à la fonte actuelle des calottes polaires, nous trouvions des différences notables avec le cas élastique. Encore une fois, les modèles de Burgers semblent donner des résultats plus proches des observations géodésiques que les modèles de Maxwell.

Les outils développés dans la Partie IV, qui ont justement permis de prendre en compte les déformations visco-élastiques de certaines couches des modèles de Terre à l'aide de la transformée de Fourier et de retrouver la déformation à partir de la décomposition de la charge en harmoniques sphériques ou de manière équivalente en utilisant le formalisme des fonctions de Green, peuvent donc être appliqués aux fontes massives ayant lieu dans les zones polaires. Dans la même lignée que l'étude de [Mémin et al. \(2014\)](#), nous avons d'ores et déjà réalisé des tests sur l'archipel du Svalbard pour mettre en évidence la sensibilité des déformations visco-élastiques au petit âge glaciaire. Une étude plus approfondie des différents modèles rhéologiques, notamment ceux de Burgers, pourrait amener à pouvoir séparer la contribution à la déformations des différents âges glaciaires, en comparant les modèles avec les données gravimétriques d'une part ([Mémin et al., 2011](#)) et avec les séries GNSS d'autre part. D'autres méthodes comme l'altimétrie ont aussi été utilisées pour contraindre les déformations liées à la fonte actuelle ([Mazzolo, 2021](#)). La possibilité que nous avons de calculer des nombres de Love visco-élastiques en profondeur est également intéressante pour étudier les déformations intérieures et particulièrement à la CMB. Les différents modèles, incluant au besoin une certaine viscosité du noyau fluide, pourraient amener à estimer la sensibilité nécessaire aux observations en surface pour mesurer des variations de densité au niveau de la CMB. Ces études sont actuellement en cours dans le travail de thèse d'Hugo Lecomte à l'ITES, qui permet l'assimilation des données gravimétriques, géodésiques et géomagnétiques pour contraindre la dynamique du noyau fluide, et pour lequel nous avons mis à disposition nos outils. Enfin, il est également possible d'utiliser ces modèles dans le cadre de l'inversion des données géodésiques pour déterminer les paramètres rhéologiques. Récemment, [Ding et al. \(2021\)](#) ont par exemple déterminé de cette manière les paramètres d'un modèle de dissipation visco-élastique en inversant

les déplacements longue période observés dans les séries GNSS. Dans cette même logique, nous étudions actuellement la possibilité de discriminer les différents types de modèles en se basant sur les données longue période de gravimètres au sol.

Enfin, nous avons montré qu'il était possible d'inverser les déplacements saisonniers issus des séries temporelles GNSS pour retrouver la charge correspondante. Nous avons utilisé pour cela une inversion par moindres carrés régularisés dont les hyperparamètres gouvernant le lissage de la solution ont été déterminés par diverses méthodes basées sur des critères objectifs. L'une d'entre elle est issue d'un cadre pseudo-bayésien très utilisé depuis plus d'une dizaine d'années pour retrouver les déformations et contraintes à l'origine de glissements le long de failles (Yabuki & Matsu'Ura, 1992; Matthews & Segall, 1993; Fukuda & Johnson, 2008). La variabilité sur ces hyperparamètres est tout de même importante et constitue la première source d'incertitude sur les résultats obtenus. Pour diminuer l'impact de ces hyperparamètres sur la solution, notamment dans les zones peu couvertes par le GNSS, nous avons entrepris d'ajouter dans l'inversion des contraintes issues directement des variations de charge dérivées de GRACE et GRACE-FO. En ajoutant les déplacements induits par la solution de charge issue de GRACE aux déplacements GNSS dans une inversion conjointe, nous avons sensiblement amélioré la qualité (en terme de variabilité à lissage égal) de l'inversion par rapport au cas où l'on inverse que les déplacements GNSS et au cas où l'on ne fait que contraindre l'inversion avec GRACE.

Dès lors, il serait particulièrement intéressant de vérifier ce qu'apporte systématiquement l'ajout de données d'origines différentes dans l'inversion (données météorologiques ou données InSAR (Cavalié et al., 2013; Mathey et al., 2021)). On pourrait aussi ajouter les données issues des déplacements GNSS horizontaux malgré le fait qu'ils possèdent un faible signal saisonnier. En effet, le rapport signal sur bruit sur ces composantes peut être largement augmenté en utilisant un traitement en IPPP. Tout en restant prudent quant au contenu saisonnier de ces déplacements, et même si la distribution spatiale des données resterait identique, cela pourrait permettre de mieux contraindre localement la charge et donc de diminuer son incertitude. D'autre part, il semble envisageable de réaliser l'inversion conjointe non pas en utilisant les déplacements induits par la solution de charge issue de GRACE comme nous l'avons fait, mais en utilisant directement les mesures du lien KBRR entre les satellites GRACE. L'inversion des données issues du lien KBRR au niveau régional a d'ailleurs fait l'objet de récents développements méthodologiques sur des zones possédant un fort signal (Ramillien et al., 2021). D'autres questions restent ouvertes comme l'utilisation du GNSS pour augmenter la résolution temporelle des solutions de charge issues de GRACE et GRACE-FO, ou la faisabilité d'une inversion conjointe globale utilisant GRACE et le GNSS sur plus de 15 ans pour délivrer une solution de charge à l'échelle mondiale. Également, la possibilité de changer la méthode d'inversion en travaillant non plus sur une régularisation par contrainte externe mais en ajoutant directement ces contraintes (sous la forme de paramètres de modèles) dans la matrice de covariance peut être une piste sérieuse d'amélioration de la variabilité des solutions.

La détermination des charges et particulièrement des charges hydrologiques reste un objectif primordial dans un contexte de réchauffement planétaire car elles participent à l'observation des redistributions d'eau au sein du système climatique. Les variations du contenu en eau des grands bassins hydrologiques comme l'Amazonie, le bassin du Nil, du Gange ou du Congo, l'augmentation des zones arides ou en cours de désertification pour des raisons anthropiques ou naturelles, les variations de la couverture neigeuse aux hautes latitudes, sont autant d'indicateurs des changements climatiques importants en cours ou à venir. Cependant, la détermination des charges reste aussi un objectif scientifique dans les zones tempérées où la corrélation forte avec les autres observables géodésiques les rendent encore difficile à prédire et à mesurer. C'est dans cet effort de détermination des charges à l'aide des seules observations géodésiques que s'inscrivent nos travaux qui appréhendent le problème globalement et ouvrent de nouvelles perspectives d'études.

Bibliographie

- A, G., Wahr, J., & Zhong, S., 2013. Computations of the viscoelastic response of a 3-d compressible earth to surface loading : an application to glacial isostatic adjustment in antarctica and canada, *Geophysical Journal International*, **192**(2), 557–572.
- Agnew, D., 2015. Earth tides, in *Treatise on Geophysics (Second Edition)*, pp. 151–178, ed. Schubert, G., Elsevier, Oxford, second edition edn.
- Akaike, H., 1980. Likelihoood and the bayes procedure, *Trabajos de estadística y de investigación operativa*, **31**(1), 143–166.
- Altamimi, Z., Sillard, P., & Boucher, C., 2007. Catref software : Combination and analysis of terrestrial reference frames, *LAREG Technical, Institut Géographique National, Paris, France*.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L., & Collilieux, X., 2016. Itrf2014 : A new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(8), 6109–6131.
- Altamimi, Z., Métivier, L., Rebischung, P., Rouby, H., & Collilieux, X., 2017. Itrf2014 plate motion model, *Geophysical Journal International*, **209**(3), 1906–1912.
- Alterman, Z., Jarosch, H., & Pekeris, C., 1959. Oscillations of the earth, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **252**(1268), 80–95.
- Amiri-Simkooei, A., 2013. On the nature of gps draconitic year periodic pattern in multivariate position time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **118**(5), 2500–2511.
- Arfken, G. B. & Weber, H. J., 2005. *Mathematical methods for physicists 6th ed.*, Elsevier Academic Press.
- Argus, D. F., Fu, Y., & Landerer, F. W., 2014. Seasonal variation in total water storage in california inferred from gps observations of vertical land motion, *Geophysical Research Letters*, **41**(6), 1971–1980.
- Argus, D. F., Landerer, F. W., Wiese, D. N., Martens, H. R., Fu, Y., Famiglietti, J. S., Thomas, B. F., Farr, T. G., Moore, A. W., & Watkins, M. M., 2017. Sustained water loss in california's mountain ranges during severe drought from 2012 to 2015 inferred from gps, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **122**(12), 10–559.
- Bazán, F. S. V., 2015. Simple and efficient determination of the tikhonov regularization parameter chosen by the generalized discrepancy principle for discrete ill-posed problems, *Journal of Scientific Computing*, **63**(1), 163–184.
- Benjamin, D., Wahr, J., Ray, R. D., Egbert, G. D., & Desai, S. D., 2006. Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the j_2 anomaly, *Geophysical Journal International*, **165**(1), 3–16.
- Bertiger, W., Desai, S. D., Haines, B., Harvey, N., Moore, A. W., Owen, S., & Weiss, J. P., 2010. Single receiver phase ambiguity resolution with gps data, *Journal of Geodesy*, **84**(5), 327–337.
- Beuthe, M., 2015. Tides on europa : The membrane paradigm, *Icarus*, **248**, 109–134.

- Blewitt, G., 1989. Carrier phase ambiguity resolution for the global positioning system applied to geodetic baselines up to 2000 km, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **94**(B8), 10187–10203.
- Blewitt, G., 1998. Gps data processing methodology : From theory to applications, in *GPS for Geodesy*, pp. 231–270, Springer.
- Blewitt, G., 2003. Self-consistency in reference frames, geocenter definition, and surface loading of the solid earth, *Journal of geophysical research : solid earth*, **108**(B2).
- Blewitt, G. & Lavallée, D., 2002. Effect of annual signals on geodetic velocity, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B7), ETG–9.
- Blewitt, G., Lavallée, D., Clarke, P., & Nurutdinov, K., 2001. A new global mode of earth deformation : Seasonal cycle detected, *Science*, **294**(5550), 2342–2345.
- Blewitt, G., Kreemer, C., Hammond, W. C., & Gazeaux, J., 2016. Midas robust trend estimator for accurate gps station velocities without step detection, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(3), 2054–2068.
- Blewitt, G., Hammond, W. C., & Kreemer, C., 2018). Harnessing the gps data explosion for interdisciplinary science, *EOS*, **99**.
- Boehm, J., Niell, A., Tregoning, P., & Schuh, H., 2006a. Global mapping function (gmf) : A new empirical mapping function based on numerical weather model data, *Geophysical Research Letters*, **33**(7).
- Boehm, J., Werl, B., & Schuh, H., 2006b. Troposphere mapping functions for gps and very long baseline interferometry from european centre for medium-range weather forecasts operational analysis data, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **111**(B2).
- Bos, M. S., Penna, N. T., Baker, T. F., & Clarke, P. J., 2015. Ocean tide loading displacements in western europe : 2. gps-observed anelastic dispersion in the asthenosphere, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **120**(9), 6540–6557.
- Bruni, S., Zerbini, S., Raicich, F., Errico, M., & Santi, E., 2014. Detecting discontinuities in gnss coordinate time series with stars : case study, the bologna and medicina gps sites, *Journal of Geodesy*, **88**(12), 1203–1214.
- Calais, E., Han, J., DeMets, C., & Nocquet, J., 2006. Deformation of the north american plate interior from a decade of continuous gps measurements, *Journal of geophysical research : solid earth*, **111**(B6).
- Capderou, M., 2011. *Satellites : de Kepler au GPS*, Springer Science & Business Media.
- Caron, L., Métivier, L., Greff-Lefftz, M., Fleitout, L., & Rouby, H., 2017. Inverting glacial isostatic adjustment signal using bayesian framework and two linearly relaxing rheologies, *Geophysical Journal International*, **209**(2), 1126–1147.
- Carrère, L. & Lyard, F., 2003. Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing-comparisons with observations, *Geophysical Research Letters*, **30**(6).
- Carrere, L., Lyard, F., Cancet, M., & Guillot, A., 2015. Fes 2014, a new tidal model on the global ocean with enhanced accuracy in shallow seas and in the arctic region, in *EGU general assembly conference abstracts*, p. 5481.
- Cavalié, O., Pathier, E., Radiguet, M., Vergnolle, M., Cotte, N., Walpersdorf, A., Kostoglodov, V., & Cotton, F., 2013. Slow slip event in the mexican subduction zone : Evidence of shallower slip in the guerrero seismic gap for the 2006 event revealed by the joint inversion of insar and gps data, *Earth and Planetary Science Letters*, **367**, 52–60.
- Chanard, K., Avouac, J., Ramillien, G., & Genrich, J., 2014. Modeling deformation induced by seasonal variations of continental water in the himalaya region : Sensitivity to earth elastic structure, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **119**(6), 5097–5113.

- Chanard, K., Fleitout, L., Calais, E., Barbot, S., & Avouac, J.-P., 2018a. Constraints on transient viscoelastic rheology of the asthenosphere from seasonal deformation, *Geophysical Research Letters*, **45**(5), 2328–2338.
- Chanard, K., Fleitout, L., Calais, E., Rebischung, P., & Avouac, J.-P., 2018b. Toward a global horizontal and vertical elastic load deformation model derived from grace and gnss station position time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **123**(4), 3225–3237.
- Chanard, K., Métois, M., Rebischung, P., & Avouac, J.-P., 2020. A warning against over-interpretation of seasonal signals measured by the global navigation satellite system, *Nature communications*, **11**(1), 1–4.
- Chinnery, M. A., 1975. The static deformation of an earth with a fluid core : a physical approach, *Geophysical Journal International*, **42**(2), 461–475.
- Choy, S., Bisnath, S., & Rizos, C., 2017. Uncovering common misconceptions in gnss precise point positioning and its future prospect, *GPS solutions*, **21**(1), 13–22.
- Collectif Jolidon, 2021. *Physique Expérimentale*, EDP Sciences.
- Collilieux, X., Altamimi, Z., Ray, J., van Dam, T., & Wu, X., 2009. Effect of the satellite laser ranging network distribution on geocenter motion estimation, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **114**(B4).
- Collilieux, X., van Dam, T., Ray, J., Coulot, D., Métivier, L., & Altamimi, Z., 2012. Strategies to mitigate aliasing of loading signals while estimating gps frame parameters, *Journal of Geodesy*, **86**(1), 1–14.
- Collins, P., 2008. Isolating and estimating undifferenced gps integer ambiguities, in *Proceedings of the 2008 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, pp. 720–732.
- Dahlen, F., 1971. Comments on paper by de smylie and l. mansinha :‘the elasticity theory of dislocations in real earth models and changes in the rotation of the earth’, *Geophysical Journal International*, **23**(3), 355–358.
- Dahlen, F. & Tromp, J., 1998. *Theoretical Global Seismology*, Princeton University Press.
- Dautermann, T., Calais, E., & Mattioli, G. S., 2009. Global positioning system detection and energy estimation of the ionospheric wave caused by the 13 july 2003 explosion of the soufrière hills volcano, montserrat, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **114**(B2).
- Dehant, V. & Zschau, J., 1989. The effect of mantle inelasticity on tidal gravity : a comparison between the spherical and the elliptical earth model, *Geophysical Journal International*, **97**(3), 549–555.
- Desai, S. D. & Sibois, A. E., 2016. Evaluating predicted diurnal and semidiurnal tidal variations in polar motion with gps-based observations, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(7), 5237–5256.
- Dill, R., Kleemann, V., Martinec, Z., & Tesauro, M., 2015. Applying local green’s functions to study the influence of the crustal structure on hydrological loading displacements, *Journal of Geodynamics*, **88**, 14–22.
- Ding, H., Chen, Z., Pan, Y., & Zou, C., 2021. The complex love numbers of long-period zonal tides retrieved from global gps displacements : Applications for determining mantle anelasticity, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **126**(9), e2021JB022380.
- Dong, D., Fang, P., Bock, Y., Cheng, M., & Miyazaki, S., 2002. Anatomy of apparent seasonal variations from gps-derived site position time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B4), ETG–9.
- Doodson, A. T., 1921. The harmonic development of the tide-generating potential, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, **100**(704), 305–329.
- Drouin, V., Heki, K., Sigmundsson, F., Hreinsdóttir, S., & Ofeigsson, B. G., 2016. Constraints on seasonal load variations and regional rigidity from continuous gps measurements in iceland, 1997–2014, *Geophysical Journal International*, **205**(3), 1843–1858.

Dziewonski, A. M. & Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference earth model, *Physics of the earth and planetary interiors*, **25**(4), 297–356.

Eisenbeis, J. & Occhipinti, G., 2021. The tec enhancement before seismic events is an artifact, *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, **126**(4), e2020JA028733.

Elia, L., Zerbini, S., & Raicich, F., 2021. Interannual variability of gps heights and environmental parameters over europe and the mediterranean area, *Remote Sensing*, **13**(8), 1554.

Fang, M., Dong, D., & Hager, B. H., 2014. Displacements due to surface temperature variation on a uniform elastic sphere with its centre of mass stationary, *Geophysical Journal International*, **196**(1), 194–203.

Farrell, W., 1972. Deformation of the earth by surface loads, *Reviews of Geophysics*, **10**(3), 761–797.

Ferry, N., Parent, L., Garric, G., Bricaud, C., Testut, C., Le Galloudec, O., Lellouche, J., Drevillon, M., Greiner, E., Barnier, B., et al., 2012. Glorys2v1 global ocean reanalysis of the altimetric era (1992–2009) at meso scale, *Mercator Ocean–Quarterly Newsletter*, **44**.

Flechtner, F., Morton, P., Watkins, M., & Webb, F., 2014. Status of the grace follow-on mission, in *Gravity, geoid and height systems*, pp. 117–121, Springer.

Fleitout, L. & Chanard, K., 2018. Displacements and stresses induced by temperature and poroelastic pressure variations in the surficial layers for an earth with realistic elastic properties, in *AGU Fall Meeting Abstracts*, vol. 2018, pp. G53B–03.

Folkner, W. M., Williams, J. G., & Boggs, D. H., 2009. The planetary and lunar ephemeris de 421, *IPN progress report*, **42**(178), 1–34.

French, S. & Romanowicz, B. A., 2014. Whole-mantle radially anisotropic shear velocity structure from spectral-element waveform tomography, *Geophysical Journal International*, **199**(3), 1303–1327.

Freymueller, J., King, N., & Segall, P., 1994. The co-seismic slip distribution of the landers earthquake, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **84**(3), 646–659.

Fu, Y. & Freymueller, J. T., 2012. Seasonal and long-term vertical deformation in the nepal himalaya constrained by gps and grace measurements, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **117**(B3).

Fu, Y., Freymueller, J. T., & Jensen, T., 2012. Seasonal hydrological loading in southern alaska observed by gps and grace, *Geophysical Research Letters*, **39**(15).

Fu, Y., Argus, D. F., Freymueller, J. T., & Heflin, M. B., 2013. Horizontal motion in elastic response to seasonal loading of rain water in the amazon basin and monsoon water in southeast asia observed by gps and inferred from grace, *Geophysical Research Letters*, **40**(23), 6048–6053.

Fu, Y., Argus, D. F., & Landerer, F. W., 2015. Gps as an independent measurement to estimate terrestrial water storage variations in washington and oregon, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **120**(1), 552–566.

Fukuda, J. & Johnson, K. M., 2008. A fully bayesian inversion for spatial distribution of fault slip with objective smoothing, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **98**(3), 1128–1146.

Fukuda, J., Miyazaki, S., Higuchi, T., & Kato, T., 2008. Geodetic inversion for space–time distribution of fault slip with time-varying smoothing regularization, *Geophysical Journal International*, **173**(1), 25–48.

Fund, F., Perosanz, F., Mercier, F., & Loyer, S., 2012. Assessment of integer precise point positioning performances at different temporal scales, in *EGU General Assembly Conference Abstracts*, p. 9694.

García Fernández, M., 2004. *Contributions to the 3D ionospheric sounding with GPS data*, Universitat Politècnica de Catalunya.

Ge, M., Gendt, G., Rothacher, M. a., Shi, C., & Liu, J., 2008. Resolution of gps carrier-phase ambiguities in precise point positioning (ppp) with daily observations, *Journal of geodesy*, **82**(7), 389–399.

Gelaro, R., McCarty, W., Suárez, M. J., Todling, R., Molod, A., Takacs, L., Randles, C. A., Darmenov, A., Bosilovich, M. G., Reichle, R., et al., 2017. The modern-era retrospective analysis for research and applications, version 2 (merra-2), *Journal of climate*, **30**(14), 5419–5454.

Geng, J., Meng, X., Dodson, A. H., & Teferle, F. N., 2010. Integer ambiguity resolution in precise point positioning : method comparison, *Journal of Geodesy*, **84**(9), 569–581.

Gourmelen, N., Amelung, F., Casu, F., Manzo, M., & Lanari, R., 2007. Mining-related ground deformation in crescent valley, nevada : Implications for sparse gps networks, *Geophysical Research Letters*, **34**(9).

Grapenthin, R., Sigmundsson, F., Geirsson, H., Arnadóttir, T., & Pinel, V., 2006. Icelandic rhythmites : Annual modulation of land elevation and plate spreading by snow load, *Geophysical Research Letters*, **33**(24).

Greff-Lefftz, M., Métivier, L., & Legros, H., 2005. Analytical solutions of love numbers for a hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous earth, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **93**(1), 113–146.

Griffiths, J. & Ray, J. R., 2009. On the precision and accuracy of igs orbits, *Journal of Geodesy*, **83**(3-4), 277–287.

Groh, A., Ewert, H., Fritzsche, M., Rülke, A., Rosenau, R., Scheinert, M., & Dietrich, R., 2014. Assessing the current evolution of the greenland ice sheet by means of satellite and ground-based observations, *Surveys in Geophysics*, **35**(6), 1459–1480.

Guo, S., Shi, C., Wei, N., Li, M., Fan, L., & Zhang, D., 2021. Effect of ambiguity resolution on the draconitic errors in sub-daily gps position estimates, *GPS Solutions*, **25**(3), 1–13.

Hansen, P. C., 1998. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*, SIAM.

Hartmann, T. & Wenzel, H.-G., 1995. The hw95 tidal potential catalogue, *Geophysical research letters*, **22**(24), 3553–3556.

He, X., Montillet, J.-P., Fernandes, R., Bos, M., Yu, K., Hua, X., & Jiang, W., 2017. Review of current gps methodologies for producing accurate time series and their error sources, *Journal of Geodynamics*, **106**, 12–29.

Heflin, M., Donnellan, A., Parker, J., Lyzenga, G., Moore, A., Ludwig, L. G., Rundle, J., Wang, J., & Pierce, M., 2020. Automated estimation and tools to extract positions, velocities, breaks, and seasonal terms from daily gnss measurements : illuminating nonlinear salton trough deformation, *Earth and Space Science*, **7**(7), e2019EA000644.

Heki, K., 2004. Dense gps array as a new sensor of seasonal changes of surface loads, *The State of the Planet : Frontiers and Challenges in Geophysics*, **150**, 177–196.

Heki, K., 2011. Ionospheric electron enhancement preceding the 2011 tohoku-oki earthquake, *Geophysical Research Letters*, **38**(17).

Helm, V., Humbert, A., & Miller, H., 2014. Elevation and elevation change of greenland and antarctica derived from cryosat-2, *The Cryosphere*, **8**(4), 1539–1559.

Hersbach, H., Bell, B., Berrisford, P., Hirahara, S., Horányi, A., Muñoz-Sabater, J., Nicolas, J., Peubey, C., Radu, R., Schepers, D., et al., 2020. The era5 global reanalysis, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, **146**(730), 1999–2049.

- Hinderer, J. & Legros, H., 1989. Elasto-gravitational deformation, relative gravity changes and earth dynamics, *Geophysical Journal International*, **97**(3), 481–495.
- Hreinsdóttir, S., Freymueller, J. T., Fletcher, H. J., Larsen, C. F., & Bürgmann, R., 2003. Coseismic slip distribution of the 2002 mw7. 9 denali fault earthquake, alaska, determined from gps measurements, *Geophysical Research Letters*, **30**(13).
- Jacob, T., Wahr, J., Pfeffer, W. T., & Swenson, S., 2012. Recent contributions of glaciers and ice caps to sea level rise, *Nature*, **482**(7386), 514–518.
- Jadamec, M. A., Billen, M. I., & Roeske, S. M., 2013. Three-dimensional numerical models of flat slab subduction and the denali fault driving deformation in south-central alaska, *Earth and Planetary Science Letters*, **376**, 29–42.
- Johansson, J. M., Davis, J. L., Scherneck, H.-G., Milne, G. A., Vermeer, M., Mitrovica, J. X., Bennett, R. A., Jonsson, B., Elgered, G., Elósegui, P., et al., 2002. Continuous gps measurements of postglacial adjustment in fennoscandia 1. geodetic results, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B8), ETG–3.
- Johnson, H. O. & Agnew, D. C., 1995. Monument motion and measurements of crustal velocities, *Geophysical Research Letters*, **22**(21), 2905–2908.
- Katsigianni, G., Loyer, S., & Perosanz, F., 2019a. Ppp and ppp-ar kinematic post-processed performance of gps-only, galileo-only and multi-gnss, *Remote Sensing*, **11**(21), 2477.
- Katsigianni, G., Perosanz, F., Loyer, S., & Gupta, M., 2019b. Galileo millimeter-level kinematic precise point positioning with ambiguity resolution, *Earth, Planets and Space*, **71**(1), 76.
- Kaufmann, G. & Lambeck, K., 2002. Glacial isostatic adjustment and the radial viscosity profile from inverse modeling, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B11), ETG–5.
- King, M. A. & Watson, C. S., 2010. Long gps coordinate time series : multipath and geometry effects, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **115**(B4).
- King, M. A. & Williams, S. D., 2009. Apparent stability of gps monumentation from short-baseline time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **114**(B10).
- Klein, E., Fleitout, L., Vigny, C., & Garaud, J., 2016. Afterslip and viscoelastic relaxation model inferred from the large-scale post-seismic deformation following the 2010 m w 8.8 maule earthquake (chile), *Geophysical Journal International*, **205**(3), 1455–1472.
- Klein, E., Duputel, Z., Zigone, D., Vigny, C., Boy, J.-P., Doubre, C., & Meneses, G., 2018. Deep transient slow slip detected by survey gps in the region of atacama, chile, *Geophysical research letters*, **45**(22), 12–263.
- Klos, A., Olivares, G., Teferle, F. N., Hunegnaw, A., & Bogusz, J., 2018. On the combined effect of periodic signals and colored noise on velocity uncertainties, *GPS Solutions*, **22**(1), 1–13.
- Klos, A., Bogusz, J., Bos, M. S., & Gruszczynska, M., 2019a. Modelling the gnss time series : Different approaches to extract seasonal, *Geodetic Time Series Analysis in Earth Sciences*, p. 211.
- Klos, A., Gruszczynska, M., Bos, M. S., Boy, J.-P., & Bogusz, J., 2019b. Estimates of vertical velocity errors for igs itrf2014 stations by applying the improved singular spectrum analysis method and environmental loading models, in *Geodynamics and Earth tides observations from global to micro scale*, pp. 229–246, Springer.
- Kouba, J., 2003. Measuring seismic waves induced by large earthquakes with gps, *Studia Geophysica et Geodaetica*, **47**(4), 741–755.
- Kouba, J., 2009. A guide to using international gnss service (igs) products.

- Kreemer, C. & Blewitt, G., 2021. Robust estimation of spatially varying common-mode components in gps time-series, *Journal of Geodesy*, **95**(1), 1–19.
- Kustowski, B., Ekström, G., & Dziewoński, A., 2008. Anisotropic shear-wave velocity structure of the earth's mantle : A global model, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **113**(B6).
- Lagler, K., Schindelegger, M., Böhm, J., Krásná, H., & Nilsson, T., 2013. Gpt2 : Empirical slant delay model for radio space geodetic techniques, *Geophysical Research Letters*, **40**(6), 1069–1073.
- Lambeck, K., Smither, C., & Johnston, P., 1998. Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern europe, *Geophysical Journal International*, **134**(1), 102–144.
- Landau, L. & Lifchitz, E., 1967. Théorie de l'élasticité, (7).
- Landau, L. & Lifchitz, E., 1988. *Mécanique*, no. 1, Ed. Mir.
- Laurichesse, D., Mercier, F., BERTHIAS, J.-P., Broca, P., & Cerri, L., 2009. Integer ambiguity resolution on undifferenced gps phase measurements and its application to ppp and satellite precise orbit determination, *Navigation*, **56**(2), 135–149.
- Laxon, S., Peacock, N., & Smith, D., 2003. High interannual variability of sea ice thickness in the arctic region, *Nature*, **425**(6961), 947–950.
- Lee, E., 1955. Stress analysis in visco-elastic bodies, *Quarterly of applied mathematics*, **13**(2), 183–190.
- Lee, E., Radok, J., & Woodward, W., 1959. Stress analysis for linear viscoelastic materials, *Transactions of the Society of Rheology*, **3**(1), 41–59.
- Lemoine, J.-M., Biancale, R., Reinquin, F., Bourgogne, S., & Gégout, P., 2019. Cnes/grgs rl04 earth gravity field models, from grace and slr data.
- Liu, B., Dai, W., Peng, W., & Meng, X., 2015. Spatiotemporal analysis of gps time series in vertical direction using independent component analysis, *Earth, Planets and Space*, **67**(1), 1–10.
- Lomb, N. R., 1976. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data, *Astrophysics and space science*, **39**(2), 447–462.
- Lombardi, M. A., Nelson, L. M., Novick, A. N., & Zhang, V. S., 2001. Time and frequency measurements using the global positioning system, *Cal Lab : International Journal of Metrology*, **8**(3), 26–33.
- Longman, I., 1962. A green's function for determining the deformation of the earth under surface mass loads : 1. theory, *Journal of Geophysical Research*, **67**(2), 845–850.
- Longman, I., 1963. A green's function for determining the deformation of the earth under surface mass loads : 2. computations and numerical results, *Journal of Geophysical Research*, **68**(2), 485–496.
- Loomis, B., Luthcke, S., & Sabaka, T., 2019a. Regularization and error characterization of grace mascons, *Journal of geodesy*, **93**(9), 1381–1398.
- Loomis, B., Rachlin, K., & Luthcke, S., 2019b. Improved earth oblateness rate reveals increased ice sheet losses and mass-driven sea level rise, *Geophysical Research Letters*, **46**(12), 6910–6917.
- Loomis, B. D., Rachlin, K. E., Wiese, D. N., Landerer, F. W., & Luthcke, S. B., 2020. Replacing grace/grace-fo with satellite laser ranging : Impacts on antarctic ice sheet mass change, *Geophysical Research Letters*, **47**(3), e2019GL085488.
- Love, A. E. H., 1911. *Some Problems of Geodynamics : Being an Essay to which the Adams Prize in the University of Cambridge was Adjudged in 1911*, vol. 911, University Press.
- Loyer, S., Perosanz, F., Mercier, F., Capdeville, H., & Marty, J.-C., 2012. Zero-difference gps ambiguity resolution at cnes–cls igs analysis center, *Journal of Geodesy*, **86**(11), 991–1003.

- Loyer, S., Banville, S., Geng, J., & Strasser, S., 2021. Exchanging satellite attitude quaternions for improved gnss data processing consistency, *Advances in Space Research*.
- Luthcke, S. B., Arendt, A. A., Rowlands, D. D., McCarthy, J. J., & Larsen, C. F., 2008. Recent glacier mass changes in the gulf of alaska region from grace mascon solutions, *Journal of Glaciology*, **54**(188), 767–777.
- Luthcke, S. B., Sabaka, T., Loomis, B., Arendt, A., McCarthy, J., & Camp, J., 2013. Antarctica, greenland and gulf of alaska land-ice evolution from an iterated grace global mascon solution, *Journal of Glaciology*, **59**(216), 613–631.
- Lyard, F. H., Allain, D. J., Cancet, M., Carrère, L., & Picot, N., 2021. Fes2014 global ocean tide atlas : design and performance, *Ocean Science*, **17**(3), 615–649.
- Mahalanobis, P. C., 1936. On the generalised distance in statistics, *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, **2**(1), 49–55.
- Mangiarotti, S., Cazenave, A., Soudarin, L., & Crétaux, J., 2001. Annual vertical crustal motions predicted from surface mass redistribution and observed by space geodesy, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **106**(B3), 4277–4291.
- Mao, A., Harrison, C. G., & Dixon, T. H., 1999. Noise in gps coordinate time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **104**(B2), 2797–2816.
- Marotta, A. M., 2003. Benefits from goce within solid earth geophysics, *Earth Gravity Field from Space—From Sensors to Earth Sciences*, pp. 95–104.
- Martens, H. R., 2016. *Using Earth Deformation Caused by Surface Mass Loading to Constrain the Elastic Structure of the Crust and Mantle*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology.
- Martens, H. R., Rivera, L., & Simons, M., 2019. Loaddef : A python-based toolkit to model elastic deformation caused by surface mass loading on spherically symmetric bodies, *Earth and Space Science*, **6**(2), 311–323.
- Martens, H. R., Argus, D. F., Norberg, C., Blewitt, G., Herring, T. A., Moore, A. W., Hammond, W. C., & Kreemer, C., 2020. Atmospheric pressure loading in gps positions : dependency on gps processing methods and effect on assessment of seasonal deformation in the contiguous usa and alaska, *Journal of Geodesy*, **94**(12), 1–22.
- Marty, J., Loyer, S., Perosanz, F., Mercier, F., Bracher, G., Legresy, B., Portier, L., Capdeville, H., Fund, F., Lemoine, J.-M., et al., 2011. Gins : the cnes/grgs gnss scientific software, in *3rd international colloquium scientific and fundamental aspects of the Galileo programme, ESA proceedings WPP326*, vol. 31, pp. 8–10.
- Marty, J.-C., Perosanz, F., Loyer, S., Mercier, F., Capdeville, H., Lemoine, J.-M., Biancale, R., et al., 2018. *Algorithmic documentation of the GINS software*, Observatoire Midi-Pyrénées.
- Masson, C., Mazzotti, S., Vernant, P., & Doerflinger, E., 2019. Extracting small deformation beyond individual station precision from dense global navigation satellite system (gnss) networks in france and western europe, *Solid Earth*, **10**(6), 1905–1920.
- Mathews, P., Buffett, B., & Shapiro, I., 1995. Love numbers for a rotating spheroidal earth : : New definitions and numerical values, *Geophysical Research Letters*, **22**(5), 579–582.
- Mathey, M., Doin, M.-P., André, P., Walpersdorf, A., Baize, S., & Sue, C., 2021. Spatial heterogeneity of uplift pattern in the western european alps revealed by insar time-series analysis, *Geophysical Research Letters*, p. e2021GL095744.
- Matthews, M. V. & Segall, P., 1993. Estimation of depth-dependent fault slip from measured surface deformation with application to the 1906 san francisco earthquake, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **98**(B7), 12153–12163.

Mazzolo, L.-M., 2021. *Évolution de la calotte glaciaire du Svalbard par altimétrie laser*, Master's thesis, EOST.

Melbourne, W. G., 1985. The case for ranging in gps-based geodetic systems, in *Proceedings of the first international symposium on precise positioning with the Global Positioning System*, pp. 373–386, US Department of Commerce Rockville, Maryland.

Mémin, A., Rogister, Y., Hinderer, J., Omang, O., & Luck, B., 2011. Secular gravity variation at svalbard (norway) from ground observations and grace satellite data, *Geophysical Journal International*, **184**(3), 1119–1130.

Mémin, A., Spada, G., Boy, J.-P., Rogister, Y., & Hinderer, J., 2014. Decadal geodetic variations in ny-ålesund (svalbard) : role of past and present ice-mass changes, *Geophysical Journal International*, **198**(1), 285–297.

Mémin, A., Boy, J.-P., & Santamaria-Gomez, A., 2020. Correcting gps measurements for non-tidal loading, *GPS Solutions*, **24**(2), 1–13.

Métivier, L. & Conrad, C. P., 2008. Body tides of a convecting, laterally heterogeneous, and aspherical earth, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **113**(B11).

Métivier, L., Greff-Lefftz, M., & Diament, M., 2005. A new approach to computing accurate gravity time variations for a realistic earth model with lateral heterogeneities, *Geophysical Journal International*, **162**(2), 570–574.

Métivier, L., Greff-Lefftz, M., & Altamimi, Z., 2010. On secular geocenter motion : the impact of climate changes, *Earth and Planetary Science Letters*, **296**(3-4), 360–366.

Métivier, L., Rouby, H., Rebischung, P., & Altamimi, Z., 2020. Itrf2014, earth figure changes, and geocenter velocity : Implications for gia and recent ice melting, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **125**(2), e2019JB018333.

Michel, A. & Boy, J.-P., 2021. Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects, *Geophysical Journal International*, **228**(2), 1191–1212.

Michel, A., Santamaría-Gómez, A., Boy, J.-P., Perosanz, F., & Loyer, S., 2021. Analysis of gnss displacements in europe and their comparison with hydrological loading models, *Remote Sensing*, **13**(22), 4523.

Moré, J. J., 1978. The levenberg-marquardt algorithm : implementation and theory, in *Numerical analysis*, pp. 105–116, Springer.

Muntean, A., Mocanu, V., & Ambrosius, B., 2016. A gps study of land subsidence in the petrosani (romania) coal mining area, *Natural Hazards*, **80**(2), 797–810.

Na, S.-H. & Baek, J., 2011. Computation of the load love number and the load green's function for an elastic and spherically symmetric earth, *Journal of the Korean Physical Society*, **58**(5), 1195–1205.

Nahmani, S., Bock, O., Bouin, M.-N., Santamaría-Gómez, A., Boy, J.-P., Collilieux, X., Métivier, L., Panet, I., Genthon, P., De Linage, C., et al., 2012. Hydrological deformation induced by the west african monsoon : Comparison of gps, grace and loading models, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **117**(B5).

Nicolas, J., Verdun, J., Boy, J.-P., Bonhomme, L., Asri, A., Corbeau, A., Berthier, A., Durand, F., & Clarke, P., 2021. Improved hydrological loading models in south america : Analysis of gps displacements using m-ssa, *Remote Sensing*, **13**(9), 1605.

Nield, G. A., Barletta, V. R., Bordoni, A., King, M. A., Whitehouse, P. L., Clarke, P. J., Domack, E., Scambos, T. A., & Berthier, E., 2014. Rapid bedrock uplift in the antarctic peninsula explained by viscoelastic response to recent ice unloading, *Earth and Planetary Science Letters*, **397**, 32–41.

Nocquet, J.-M., 2012. Present-day kinematics of the mediterranean : A comprehensive overview of gps results, *Tectonophysics*, **579**, 220–242.

Peltier, R. W., Argus, D. F., & Drummond, R., 2018. Comment on “an assessment of the ice-6g_c (vm5a) glacial isostatic adjustment model” by purcell et al., *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **123**(2), 2019–2028.

Peltier, W., 1974. The impulse response of a maxwell earth, *Reviews of Geophysics*, **12**(4), 649–669.

Peltier, W., Wu, P., & Yuen, D. A., 1981. The viscosities of the earth’s mantle, *Anelasticity in the Earth*, **4**, 59–77.

Peltier, W. R., Argus, D., & Drummond, R., 2015. Space geodesy constrains ice age terminal deglaciation : The global ice-6g_c (vm5a) model, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **120**(1), 450–487.

Perosanz, F., 2019. Gnss : A revolution for precise geopositioning, *Comptes Rendus Physique*, **20**(3), 171–175.

Petit, G. & Luzum, B., 2010. Iers conventions (2010), Tech. rep., Bureau International des Poids et mesures sevres (france).

Petrov, L. & Boy, J.-P., 2004. Study of the atmospheric pressure loading signal in very long baseline interferometry observations, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **109**(B3).

Ramillien, G., Seoane, L., & Darrozes, J., 2021. An innovative slepien approach to invert grace kbrr for localized hydrological information at the sub-basin scale, *Remote Sensing*, **13**(9), 1824.

Ranalli, G., 1995. *Rheology of the Earth*, Springer Science & Business Media.

Ray, J., Altamimi, Z., Collilieux, X., & van Dam, T., 2008. Anomalous harmonics in the spectra of gps position estimates, *GPS solutions*, **12**(1), 55–64.

Ray, R. D. & Ponte, R. M., 2003. Barometric tides from ecmwf operational analyses, *Annales Geophysicae*, **21**(8), 1897–1910.

Rebischung, P., 2021. Terrestrial frame solutions from the igs third reprocessing, Tech. rep., Copernicus Meetings.

Rodell, M., Houser, P., Jambor, U., Gottschalck, J., Mitchell, K., Meng, C.-J., Arsenault, K., Cosgrove, B., Radakovich, J., Bosilovich, M., et al., 2004. The global land data assimilation system, *Bulletin of the American Meteorological Society*, **85**(3), 381–394.

Roggenbuck, O., Thaller, D., Engelhardt, G., Franke, S., Dach, R., & Steigenberger, P., 2015. Loading-induced deformation due to atmosphere, ocean and hydrology : model comparisons and the impact on global slr, vlbi and gnss solutions, in *REFAG 2014*, pp. 71–77, Springer.

Rosat, S., Gillet, N., Boy, J.-P., Couhert, A., & Dumberry, M., 2021. Interannual variations of degree 2 from geodetic observations and surface processes, *Geophysical Journal International*, **225**(1), 200–221.

Rowlands, D., Luthcke, S., McCarthy, J., Klosko, S., Chinn, D., Lemoine, F., Boy, J.-P., & Sabaka, T., 2010. Global mass flux solutions from grace : A comparison of parameter estimation strategies—mass concentrations versus stokes coefficients, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **115**(B1).

Roy, K. & Peltier, W., 2015. Glacial isostatic adjustment, relative sea level history and mantle viscosity : reconciling relative sea level model predictions for the us east coast with geological constraints, *Geophysical Journal International*, **201**(2), 1156–1181.

Rummel, R., Flury, J., Haagmans, R., Hughes, C., Grand, P. L., Schrama, E., Sneeuw, N., Vermeersen, B., & Woodworth, P., 2003. Scientific objectives for future geopotential missions, Tech. rep., Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie.

- Sabaka, T., Rowlands, D., Luthcke, S., & Boy, J.-P., 2010. Improving global mass flux solutions from gravity recovery and climate experiment (grace) through forward modeling and continuous time correlation, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **115**(B11).
- Santamaría-Gómez, A. & Mémin, A., 2015. Geodetic secular velocity errors due to interannual surface loading deformation, *Geophysical Journal International*, **202**(2), 763–767.
- Santamaría-Gómez, A. & Ray, J., 2021. Chameleonic noise in gps position time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **126**(3), e2020JB019541.
- Santamaría-Gómez, A., Bouin, M.-N., Collilieux, X., & Wöppelmann, G., 2011. Correlated errors in gps position time series : Implications for velocity estimates, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **116**(B1).
- Save, H., Bettadpur, S., & Tapley, B. D., 2016. High-resolution csr grace rl05 mascons, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(10), 7547–7569.
- Scargle, J. D., 1982. Studies in astronomical time series analysis. ii-statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data, *The Astrophysical Journal*, **263**, 835–853.
- Serpelloni, E., Faccenna, C., Spada, G., Dong, D., & Williams, S. D., 2013. Vertical gps ground motion rates in the euro-mediterranean region : New evidence of velocity gradients at different spatial scales along the nubia-eurasia plate boundary, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **118**(11), 6003–6024.
- Shen, Y., Li, W., Xu, G., & Li, B., 2014. Spatiotemporal filtering of regional gnss network's position time series with missing data using principle component analysis, *Journal of Geodesy*, **88**(1), 1–12.
- Shepherd, A., Ivins, E., Rignot, E., Smith, B., Van Den Broeke, M., Velicogna, I., Whitehouse, P., Briggs, K., Joughin, I., Krinner, G., et al., 2018. Mass balance of the antarctic ice sheet from 1992 to 2017, *Nature*, **558**, 219–222.
- Shepherd, A., Ivins, E., Rignot, E., Smith, B., Van Den Broeke, M., Velicogna, I., Whitehouse, P., Briggs, K., Joughin, I., Krinner, G., et al., 2020. Mass balance of the greenland ice sheet from 1992 to 2018, *Nature*, **579**(7798), 233–239.
- Shevlyakov, G. & Smirnov, P., 2011. Robust estimation of the correlation coefficient : An attempt of survey, *Austrian Journal of Statistics*, **40**(1&2), 147–156.
- Silverii, F., d'Agostino, N., Métois, M., Fiorillo, F., & Ventafridda, G., 2016. Transient deformation of karst aquifers due to seasonal and multiyear groundwater variations observed by gps in southern apennines (italy), *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(11), 8315–8337.
- Simmons, N. A., Myers, S. C., Johannesson, G., & Matzel, E., 2012. Llnl-g3dv3 : Global p wave tomography model for improved regional and teleseismic travel time prediction, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **117**(B10).
- Smylie, D. & Mansinha, L., 1971. The elasticity theory of dislocations in real earth models and changes in the rotation of the earth, *Geophysical Journal International*, **23**(3), 329–354.
- Spada, G., 2008. Alma, a fortran program for computing the viscoelastic love numbers of a spherically symmetric planet, *Computers & Geosciences*, **34**(6), 667–687.
- Spada, G., 2013. Love numbers of a generalized maxwell sphere, *Studia Geophysica et Geodaetica*, **57**(1), 1–16.
- Spada, G. & Boschi, L., 2006. Using the post-widder formula to compute the earth's viscoelastic love numbers, *Geophysical Journal International*, **166**(1), 309–321.
- Spada, G., Antonioli, A., Cianetti, S., & Giunchi, C., 2006. Glacial isostatic adjustment and relative sea-level changes : the role of lithospheric and upper mantle heterogeneities in a 3-d spherical earth, *Geophysical Journal International*, **165**(2), 692–702.

- Spada, G., Ruggieri, G., Sørensen, L. S., Nielsen, K., Melini, D., & Colleoni, F., 2012. Greenland uplift and regional sea level changes from icesat observations and gia modelling, *Geophysical Journal International*, **189**(3), 1457–1474.
- Steffen, H. & Kaufmann, G., 2005. Glacial isostatic adjustment of scandinavia and northwestern europe and the radial viscosity structure of the earth's mantle, *Geophysical Journal International*, **163**(2), 801–812.
- Sun, Y., Riva, R., & Ditmar, P., 2016. Optimizing estimates of annual variations and trends in geocenter motion and j_2 from a combination of grace data and geophysical models, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **121**(11), 8352–8370.
- Tanaka, Y., Okuno, J., & Okubo, S., 2006. A new method for the computation of global viscoelastic post-seismic deformation in a realistic earth model (i)—vertical displacement and gravity variation, *Geophysical Journal International*, **164**(2), 273–289.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Ries, J. C., Thompson, P. F., & Watkins, M. M., 2004. Grace measurements of mass variability in the earth system, *Science*, **305**(5683), 503–505.
- Tapley, B. D., Watkins, M. M., Flechtner, F., Reigber, C., Bettadpur, S., Rodell, M., Sasgen, I., , Famiglietti, J. S., Landerer, F. W., Chambers, D. P., Reager, J. T., Gardner, A. S., Save, H., Ivins, E. R., Swenson, S. C., Boening, C., Dahle, C., Wiese, D. N., Dobslaw, H., Tamisiea, M. E., & Velicogna, I., 2019. Contributions of grace to understanding climate change, *Nature Climate Change*, **9**, 358–369.
- Teunissen, P. J. & Kleusberg, A., 2012. *GPS for Geodesy*, Springer Science & Business Media.
- Teunissen, P. J. & Montenbruck, O., 2017. *Springer handbook of global navigation satellite systems*, vol. 1, Springer.
- Tobie, G., Mocquet, A., & Sotin, C., 2005. Tidal dissipation within large icy satellites : Applications to europa and titan, *Icarus*, **177**(2), 534–549.
- Tobita, M., 2016. Combined logarithmic and exponential function model for fitting postseismic gnss time series after 2011 tohoku-oki earthquake, *Earth, Planets and Space*, **68**(1), 1–12.
- Townsend, R., 2010. Fast calculation of the lomb-scargle periodogram using graphics processing units, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **191**(2), 247.
- Tregoning, P. & Watson, C., 2009. Atmospheric effects and spurious signals in gps analyses, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **114**(B9).
- Tregoning, P., Watson, C., Ramillien, G., McQueen, H., & Zhang, J., 2009. Detecting hydrologic deformation using grace and gps, *Geophysical Research Letters*, **36**(15).
- Trenberth, K. E., 1990. Recent observed interdecadal climate changes in the northern hemisphere, *Bulletin of the American Meteorological Society*, **71**(7), 988–993.
- van Dam, T., Wahr, J., Milly, P., Shmakin, A., Blewitt, G., Lavallée, D., & Larson, K., 2001. Crustal displacements due to continental water loading, *Geophysical Research Letters*, **28**(4), 651–654.
- van Dam, T., Wahr, J., & Lavallée, D., 2007. A comparison of annual vertical crustal displacements from gps and gravity recovery and climate experiment (grace) over europe, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **112**(B3).
- van Dam, T., Collilieux, X., Wuite, J., Altamimi, Z., & Ray, J., 2012. Nontidal ocean loading : amplitudes and potential effects in gps height time series, *Journal of Geodesy*, **86**(11), 1043–1057.
- Van Sickle, J., 2008. *GPS for land surveyors*, CRC press.
- Vaubrun, J., 2009. *Détermination de méthodes de fixaison des ambiguïtés Wide-Lane dans les mesure de phase en GPS bi-fréquence non différencié*, Master's thesis, ENAC.

- Velicogna, I., Mohajerani, Y., Landerer, F., Mouginot, J., Noel, B., Rignot, E., Sutterley, T., van den Broeke, M., van Wessem, M., & Wiese, D., 2020. Continuity of ice sheet mass loss in greenland and antarctica from the grace and grace follow-on missions, *Geophysical Research Letters*, **47**(8), e2020GL087291.
- Vermeersen, L. & Sabadini, R., 1997. A new class of stratified viscoelastic models by analytical techniques, *Geophysical Journal International*, **129**(3), 531–570.
- Vermeersen, L. A., Sabadini, R., & Spada, G., 1996. Analytical visco-elastic relaxation models, *Geophysical research letters*, **23**(7), 697–700.
- Villiger, A. & Dach, R., 2020. International gnss service : Technical report 2019, Tech. rep., IGS Central Bureau and University of Bern.
- Wahba, G., 1990. *Spline models for observational data*, SIAM.
- Wahr, J. M., 1981. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless earth, *Geophysical Journal International*, **64**(3), 677–703.
- Walterová, M. & Běhouková, M., 2017. Tidal effects in differentiated viscoelastic bodies : a numerical approach, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **129**(1), 235–256.
- Wang, H., Xiang, L., Jia, L., Jiang, L., Wang, Z., Hu, B., & Gao, P., 2012. Load love numbers and green's functions for elastic earth models prem, iasp91, ak135, and modified models with refined crustal structure from crust 2.0, *Computers & Geosciences*, **49**, 190–199.
- Wang, S.-Y., Chen, J., Wilson, C. R., Li, J., & Hu, X., 2018. Reconciling grace and gps estimates of long-term load deformation in southern greenland, *Geophysical Journal International*, **212**(2), 1302–1313.
- Whitehouse, P. L., Bentley, M. J., Milne, G. A., King, M. A., & Thomas, I. D., 2012. A new glacial isostatic adjustment model for antarctica : calibrated and tested using observations of relative sea-level change and present-day uplift rates, *Geophysical Journal International*, **190**(3), 1464–1482.
- Wieczorek, M. A. & Meschede, M., 2018. Shtools : Tools for working with spherical harmonics, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **19**(8), 2574–2592.
- Williams, S., 2003a. The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series, *Journal of Geodesy*, **76**(9-10), 483–494.
- Williams, S. & Penna, N., 2011. Non-tidal ocean loading effects on geodetic gps heights, *Geophysical Research Letters*, **38**(9).
- Williams, S. D., 2003b. Offsets in global positioning system time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **108**(B6).
- Williams, S. D., 2008. Cats : Gps coordinate time series analysis software, *GPS solutions*, **12**(2), 147–153.
- Williams, S. D., Bock, Y., Fang, P., Jamason, P., Nikolaidis, R. M., Prawirodirdjo, L., Miller, M., & Johnson, D. J., 2004. Error analysis of continuous gps position time series, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **109**(B3).
- Wu, J.-T., Wu, S. C., Hajj, G. A., Bertiger, W. I., & Lichten, S. M., 1992. Effects of antenna orientation on gps carrier phase, *Astrodynamicas 1991*, pp. 1647–1660.
- Wu, P., 2006. Sensitivity of relative sea levels and crustal velocities in laurentide to radial and lateral viscosity variations in the mantle, *Geophysical Journal International*, **165**(2), 401–413.
- Wu, P. & Peltier, W., 1982. Viscous gravitational relaxation, *Geophysical Journal International*, **70**(2), 435–485.

- Wu, P., Wang, H., & Steffen, H., 2013. The role of thermal effect on mantle seismic anomalies under laurentia and fennoscandia from observations of glacial isostatic adjustment, *Geophysical Journal International*, **192**(1), 7–17.
- Wu, S., Nie, G., Liu, J., Wang, K., Xue, C., Wang, J., Li, H., Peng, F., & Ren, X., 2019. A sub-regional extraction method of common mode components from igs and cmonoc stations in china, *Remote Sensing*, **11**(11), 1389.
- Wu, X., Heflin, M. B., Ivins, E. R., Argus, D. F., & Webb, F. H., 2003. Large-scale global surface mass variations inferred from gps measurements of load-induced deformation, *Geophysical research letters*, **30**(14).
- Wu, X., Heflin, M. B., Ivins, E. R., & Fukumori, I., 2006. Seasonal and interannual global surface mass variations from multisatellite geodetic data, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **111**(B9).
- Wu, X., Blom, R. G., Ivins, E. R., Oyafuso, F. A., & Zhong, M., 2009. Improved inverse and probabilistic methods for geophysical applications of grace gravity data, *Geophysical Journal International*, **177**(3), 865–877.
- Wu, X., Ray, J., & van Dam, T., 2012. Geocenter motion and its geodetic and geophysical implications, *Journal of Geodynamics*, **58**, 44–61.
- Wübbena, G. & Hannover, U., 1985. Software developments for geodetic positioning with gps, in *Positioning with GPS-1985 : Proceedings, First International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System*, vol. 1, p. 403, US Department of Commerce, Rockville, Maryland.
- Wunsch, C., Heimbach, P., Ponte, R. M., Fukumori, I., & MEMBERS, E.-G. C., 2009. The global general circulation of the ocean estimated by the ecco-consortium, *Oceanography*, **22**(2), 88–103.
- Xu, X., Dong, D., Fang, M., Zhou, Y., Wei, N., & Zhou, F., 2017. Contributions of thermoelastic deformation to seasonal variations in gps station position, *GPS Solutions*, **21**(3), 1265–1274.
- Yabuki, T. & Matsu’Ura, M., 1992. Geodetic data inversion using a bayesian information criterion for spatial distribution of fault slip, *Geophysical Journal International*, **109**(2), 363–375.
- Zumberge, J., Heflin, M., Jefferson, D., Watkins, M., & Webb, F., 1997. Precise point positioning for the efficient and robust analysis of gps data from large networks, *Journal of geophysical research : solid earth*, **102**(B3), 5005–5017.

Table des figures

A	Répartition en fonction des échelles temporelles et spatiales de divers phénomènes géophysiques déformant directement ou indirectement la Terre. (<i>extrait de Rummel et al. (2003)</i>)	1
1.1	Amplitudes saisonnières des charges issues du modèle ERA5 : (a) atmosphériques (pression de surface convertie en hauteur d'eau équivalente) et (b) hydrologiques.	8
1.2	Stations géodésiques GNSS dont les solutions ont été calculées au NGL. (<i>extrait de Blewitt et al. (2018)</i>)	10
1.3	Amplitude annuelle, tendance et variabilité (représenté par l'écart-type) des déplacements induits par différents modèles de charge distribués par le GGFC en vue de l'ITRF2020. Ces modèles ont été calculés en utilisant les champs fourni par la réanalyse ERA5 de l'ECMWF et le modèle TUGO-m. On note que l'échelle de couleur pour la tendance est pseudo-logarithmique pour des raisons de visibilité des déplacements induits par les NTAOL.	11
1.4	Amplitude annuelle des signaux en phase (COS) et en quadrature (SIN) déterminées par l'inversion des déplacements GNSS d'une part et avec GRACE d'autre part. Les données sont filtrées à 800 km et les coefficients du degré 1 et de l'harmonique zonale de degré 2 sont dans les deux cas remplacés par ceux déterminés dans une inversion conjointe du GPS et de GRACE. (<i>extrait de Wu et al. (2006)</i>)	13
1.5	(à droite) Surrection mesurée par GPS pendant le printemps et l'été. Les stations GPS sont cerclées et le fond de carte est obtenu par triangulation de ces valeurs. (à gauche) Charge appliquée en automne et hiver inversée à partir des déplacements GPS du panel de droite (sauf dans le bassin de Tulare). (<i>extrait de Argus et al. (2014)</i>)	14
1.6	Amplitude annuelle exprimée en centimètres de hauteur d'eau équivalente (cmwe) de la solution GRACE/GRACE-FO RL06 du GSFC (a), son interpolation sur une grille régulière (b), et celle du CSR (c) ainsi que les phases respectives (d), (e) et (f) qui désignent le moment de l'année où la charge est la plus importante.	15
1.7	(a) Réseau du réseau non exhaustif des stations dont les données sont en libre accès en Europe. (b) Sous réseau (en bleu) du réseau principal du panel (a) (en rouge) sélectionnant les stations selon les différents critères mentionnés dans la Section 3.2.2.	17
2.1	Schéma de la structure des différents signaux générés par les satellites GPS et leur modulation en vue de l'envoie de l'onde. (<i>modifié à partir de García Fernández (2004)</i>)	21
2.2	Schéma de combinaison des signaux de phase (notés p ici) en simple, double ou triple différence afin de s'affranchir des biais d'horloge et de l'ambiguïté de phase. Le schéma de droite résume comment on peut s'affranchir de l'ambiguïté entière en différenciant deux mesures dans le temps. (<i>extraits de Van Sickle (2008)</i>)	26
2.3	Cartes de corrélation (en pourcentage) entre les paramètres estimés pour un traitement cinématique en mode PPP. (<i>extrait de Fund et al. (2012)</i>)	27

2.4	Schéma de la résolution des ambiguïtés WL à partir de la combinaison Melbourne-Wübbena (a) et de la modélisation des biais WL satellites (b) pour la station MCM4 (Île de Ross, Antarctique) le 22/01/2009. A partir de (c), on applique une méthode de bootstrap pour fixer les ambiguïtés entières et estimer ainsi le biais WL récepteur (d). Les résidus montrés sur (e) reflètent le caractère entier des ambiguïtés WL obtenues par ce processus. (<i>modifié à partir de Vaubrun (2009)</i>)	28
2.5	Ambiguïtés réelles N_1 estimées à partir de la combinaison ionosphere-free des mesures de code et de phase. (<i>extrait de Loyer et al. (2012)</i>)	29
2.6	Schéma de la chaîne de traitement utilisée dans le cas d'un traitement GNSS avec le logiciel GINS.	30
2.7	Résidus des séries temporelles GR2/GRG des stations ONSA (a) et STJ9 (b), après la soustraction du modèle de l'Eq. (2.4) et le rajout des termes annuels et semi-annuels (en trait plein noir).	35
2.8	Histogrammes des résidus cumulés par année, de 20 stations réparties sur l'Europe, pour la solution combinée IG2/IGS (rouge) et la solution GR2/GRG (bleu), pour les composantes Est (a) et Nord (b).	35
2.9	(a) Réseau de stations utilisé pour la mise en référence des solutions GR2/GRG avec l'IGb14. (b) Paramètres de Helmert issus du calcul CATREF pour la mise en référence des produits GR2/GRG.	37
2.10	Séries temporelles GR2/GRG des station ONSA et STJ9 avant (en bleu ciel, rouge et vert clair) et après alignement (en bleu foncé, orange et vert foncé) sur l'ITRF en utilisant les paramètres de transformation de la Figure 2.9b.	38
2.11	(a) Paramètres de Helmert issus du calcul CATREF pour la mise en référence des produits MG3 (données fournies par S. Loyer). (b) Comparaison des séries temporelles utilisant les produits GR2/GRG et MG3 en mode PPP ou IPPP pour la stations STJ9.	39
2.12	Résumé graphique de la méthodologie et des principaux résultats de l'article Michel et al. (2021).	40
2.13	Ordonnée à l'origine cci (la corrélation est un nombre sans dimension) et pente de la courbe de corrélation ccs (variation de la corrélation par tranche de 1000 km) de chaque station avec le réseau pour la solution NGL utilisée par Kreemer & Blewitt (2021).	61
2.14	Ordonnée à l'origine cci et pente de la courbe de corrélation ccs de chaque station avec le réseau considéré pour (a & b) la solution MG3, (c & d) la solution NGL et (e & f) la solution GRACE.	62
2.15	Mode commun pour les stations DELF (Pays-Bas), STJ9 (France) et SULD (Danemark) obtenus à partir des quatre solutions NGL, MG3, MG3 auquel on a préalablement retiré les fréquences draconitiques et GRACE.	63
2.16	Périodogrammes de Lomb-Scargle cumulés des résidus (RES) et des résidus corrigés du mode commun (RES-CMC) pour les solutions MG3, NGL et MG3 auquel on a préalablement retiré les fréquences draconitiques.	64
3.1	Représentation par un ressort d'un module rhéologique élastique compressible (à gauche) et incompressible (à droite). Les coefficients λ et μ sont les paramètres de Lamé.	71
3.2	Représentation par un piston d'un module rhéologique visqueux compressible (à gauche) et incompressible (à droite). Les coefficients χ et η sont les viscosités respectivement de volume et dynamique du matériau.	72
3.3	Modèles élastiques de coefficients μ_1 et μ_2 installés en série (à gauche) et en parallèle (à droite) ainsi que leur modules équivalents en bas.	73
3.4	Modèle rhéologique de Maxwell représenté par l'association série d'un modèle élastique compressible de coefficients (λ, μ) et d'un modèle visqueux compressible de coefficients (χ, η)	73
3.5	Modèle rhéologique de Kelvin représenté par l'association en parallèle d'un modèle élastique (λ, μ) et d'un modèle visqueux (χ, η)	76
3.6	Modèle rhéologique de Burgers représenté par l'association série d'un modèle de Maxwell semi-compressible (λ^e, μ^e) ; (η^m) et d'un modèle de Kelvin incompressible (μ^k) ; (η^k)	77

4.1	Définition de l'angle ψ sur la sphère terrestre entre deux points : $C(\theta_C, \varphi_C)$ représentant le point d'application de la perturbation et $M(\theta_M, \varphi_M)$ le point où l'on mesure l'effet de cette perturbation sur le système.	86
4.2	Les polynômes de Legendre et leur dérivée première pour les 5 premiers degrés.	87
4.3	Schéma d'une coupe de la Terre où son indiquées les différentes couches et discontinuités (d'après http://www2.ggl.ulaval.ca/personnel/bourque/img.communes.pt/str.interne.terre.html). Le schéma n'est pas à l'échelle.	93
4.4	Paramètres de Terre du modèle PREM.	95
4.5	(a) Différence entre une intégration commençant au centre ou au CMB (seulement pour les degrés au dessus de 1000) et (b) Différence entre une intégration avec et sans noyau liquide. Dans le cas sans noyau liquide, le noyau liquide est remplacé par un noyau solide de coefficient de cisaillement $\mu \simeq 0,1 \text{ GPa}$ très faible.	100
4.6	LLN (a) et TLN (b) pour une Terre PREM avec noyau liquide obtenus avec le schéma d'intégration exposé dans la Section 1.6. (c) et (d) sont respectivement les différences des LLN et TLN avec ceux obtenus par le logiciel <i>LoadDef</i> développé par Martens et al. (2019). (<i>extrait de Michel & Boy (2021)</i>)	101
4.7	Évolution avec la profondeur des nombres de Love de surcharge (LLN) pour une Terre PREM. 102	
4.8	Paramètres rhéologiques du modèle de MAXWELL 21-23 (voir ci-dessous) en fonction du rayon et de la période. Les paramètres ρ et g (non représentés) sont identiques au cas PREM élastique de la Figure 4.4.	103
4.9	(a) Difference between LLN of visco-elastic Maxwell models and PREM in percent (real part above, imaginary part below). Maxwell models have respective viscosity of 10^{18} , 10^{19} , 10^{21} , $10^{23} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ for upper mantle and $10^{23} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ for lower mantle. The black dotted line marks the mean cutoff frequency of the equivalent low-pass filter for each model.	104
4.10	Real and imaginary part of vertical displacement LLN h' under an excitation of period $T = 11\,000$ years, for several Maxwell and Burgers models of different UM and LM mantle viscosities. We also represent h' from PREM which is a real function. Points A to F indicate the main discrepancies between models.	105
4.11	Elastic PREM vertical displacement of (2,0) tidal waves from Doodson catalogue. This displacement have to be multiplied by the associated Legendre polynomials to obtain the real displacement in function of latitude. The red inset in (a) is a 6 months zoom to see the high frequencies.	109
4.12	Residuals of the total vertical displacement generated by the (2,0) tidal waves from Doodson catalogue, for several viscoelastic rheologies and the model given in the IERS conventions Petit & Luzum (2010). The residuals have been computed according to PREM displacement time series. We plotted the amplitudes (left) and the normalized time series (right).	109
4.13	Cubic interpolation of time evolution and the associated FFT of (2,0), (2,1) and (2,2) SH coefficients of the ICE-6G ice history. The black dotted lines in FFT plots are the Nyquist frequencies for the two choices of N where 2^N is the number of time and frequency samples used, while the black segment are the frequency span of the inset zoom plots.	111
4.14	Actual vertical displacement rate (in $\text{cm}\cdot\text{yr}^{-1}$) computed with ice history of the model ICE-6G (Peltier et al., 2015) for several viscoelastic rheologies. The ICE-6G actual rate map is also shown as a reference. Colored meridians in (d) refer to slices shown in Fig.4.15. The spatial correlation coefficients ($0 \leq C \leq 1$) between the normalized maps and the reference are (from (b) to (f)) : [0,57, 0,93, 0,93, 0,79, 0,87].	112
4.15	Vertical actual deformation rate (a) and actual steady state deformation (b,c) in the deep interior of the Earth until the CMB, along longitudinal slices pointed out by the respective colored lines in Fig.4.14d. Panels (a,b) are related to MAXWELL 21-23 rheology and (c) to PREM.	113
4.16	Actual vertical displacement rate (in $\text{cm}\cdot\text{yr}^{-1}$) from the GRACE/GRACE-FO CSR data mainly due to ice melting, for several viscoelastic rheologies and PREM.	115
4.17	ITRF Stations positions for which we computed the vertical rate values in the Tab. 4.4 & 4.5. 117	

4.18 Fonctions de Green verticales et horizontales en fonction de la distance au centre de la distribution de masse pour (a) une masse de Dirac et pour (b & c) une calotte sphérique surfacique d'extension angulaire α	122
5.1 (a) Grille de charge adaptative (8812 points) basée sur le réseau GNSS de la Figure 1.7 que l'on n'a pas représenté ici pour ne pas surcharger la figure. (b) Grille de charge régulière de résolution $1^\circ \times 1^\circ$ (2310 points).	128
5.2 Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1 sur une grille adaptative. Les paramètres d'inversion ont été choisis arbitrairement et sont reportés sur la figure. La carte de phase représente le mois de l'année où la charge est la plus importante.	131
5.3 Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1, représentés sous la forme matriciel de l'écart à l'identité de F	132
5.4 Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE sur la grille adaptative de la Figure 5.1a (a & d), sur une grille régulière de résolution $0,5^\circ$ (b & e), et de résolution 1° (c & f). Les paramètres d'inversion sont fixés à $\lambda = 1 \times 10^{-6}$, $R_c = 120$ km, $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km.	133
5.5 Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1,. Les paramètres $R_o = 300$ km et $R_{oc} = 40$ km sont fixés, tandis que λ et R_c varient respectivement entre 1×10^{-8} et 1×10^{-4} , et 50 km et 250 km.	134
5.6 Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec la solution GSFC RL06_v1,. Les paramètres $\lambda = 1 \times 10^{-6}$ et $R_o = 300$ km sont fixés, tandis que R_{oc} et R_c varient respectivement entre 10 km et 70 km, et 50 km et 250 km.	135
5.7 (a) Fonction ABIC en fonction de λ avec un zoom (b) sur la zone autour du minimum de la courbe correspondant à $\lambda_{ABIC} = 2,51 \times 10^{-6}$	137
5.8 (a) Fonction GCV en fonction de λ avec un zoom (b) sur la zone autour du minimum de la courbe correspondant à $\lambda_{GCV} = 3,55 \times 10^{-8}$	138
5.9 (a) Trade-off curve et un zoom (b) autour de la zone formant un « coude », correspondant à $\lambda_{T-O} = (3 \pm 1) \times 10^{-7}$	139
5.10 Cycle annuel de la charge déterminé par l'inversion des déplacements synthétiques issus de GRACE avec les paramètres λ optimaux déterminés par les différents critères énoncés dans la Section 4.	140
5.11 Résumé des résultats sur l'inversion des déplacements annuels synthétiques issus de GRACE pour différents lots de paramètres optimaux donnés dans les Tableaux 5.1 et 5.2. Les paramètres optimisés ont été annotés avec le symbole (*). Nous avons représenté en (a) la carte de charge originale de la solution GRACE utilisée.	143
5.12 Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements GNSS seuls pour les différents lots de paramètres optimaux considérés dans la Section 5.3. Nous avons représenté en (a) la carte de charge originale de la solution GRACE du GSFC.	144
5.13 Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion des déplacements GNSS en prenant la solution GRACE du GSFC (panel a) en <i>a priori</i> pour les différents lots de paramètres optimaux considérés dans la Section 5.3.	146
5.14 Carte des stations GNSS (ronds bleus) et des stations fictives où l'on a calculé le déplacement qu'engendrerait la charge issue de GRACE (points rouges).	147
5.15 Amplitudes du cycle annuel de la charge déterminées par l'inversion conjointe des déplacements GNSS et des déplacements calculés à partir de GRACE en appliquant différents poids b sur les déplacements GRACE. Le lot de paramètres utilisé (issue de la méthode Trade-Off (1)) est le même pour les panels (b) à (f). La solution GRACE du GSFC avec laquelle on a calculé les déplacements est montrée en (a).	148

5.16 Amplitude annuelle et phase des modèles de charge [hydrologie+atmosphère] ERA5, MERRA2 et GLDAS2.	149
5.17 Amplitude annuelle et phase de la solution GRACE du GSFC (a & e), et des inversions des déplacements GNSS seuls (b & f), contraints par la charge de GRACE (c & g) et conjoints avec les déplacements issus de GRACE (d & h). Nous avons choisis les inversions utilisant les paramètres optimaux au sens de la méthode Trade-Off soit [$\lambda = 5 \times 10^{-5}$; $R_c = 120$ km; $R_o = 300$ km; $R_{oc} = 40$ km], et un poids relatif GNSS/GRACE de 4/1 dans l'inversion conjointe. Cela correspond aux cartes d'amplitudes présentées dans les panels (f) des Figures 5.12 5.13 et 5.15.	150

Liste des tableaux

1.1	Critères de sélection des stations du réseau bleu de la Figure 1.7b.	18
2.1	Caractéristiques des constellations GNSS majeures.	20
3.1	Règles d'additivité ou d'égalité des contraintes et des déformations des modèles associés en série ou en parallèle.	72
3.2	Tableau récapitulatif des différents modèles rhéologiques visco-élastiques traités dans cette partie avec une base incompressible et une partie compressible uniquement sur le module élastique principal.	80
4.1	Nombres de Love (sans dimension) de déplacement et de potentiel définis pour chaque type de perturbation.	101
4.2	Notations for viscoelastic rheologies used in this study where all viscosities are in Pa.s. We keep the compressible elastic moduli (λ^e, μ^e) from PREM in every layers of the Earth model, we use viscoelastic model only in the mantle and we set $\mu^k = \mu^e/10$ if Burgers rheology is used in the UM.	103
4.3	Complex degree 2 TLN for the four main tidal waves and for each of the considered viscoelastic models.	108
4.4	Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations in Antarctica calculated for ITRF14 solution (Altamimi et al., 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.	116
4.5	Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations around the North pole calculated for ITRF14 solution (Altamimi et al., 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.	116
5.1	Valeurs optimales de l'hyperparamètre λ au vu des différents critères décrit dans cette section, en fonction de la méthode de lissage et pour des paramètres de base valant : (1) $R_c = 120 \text{ km}$, $R_o = 300 \text{ km}$, $R_{oc} = 40 \text{ km}$ et (2) $R_c = 50 \text{ km}$, $R_o = 100 \text{ km}$, $R_{oc} = 25 \text{ km}$.	141
5.2	Hyperparamètres optimaux au sens de la GCV des 4 lots utilisés pour une inversion avec lissage variable. Les seuls paramètres qui ont été optimisés dans chaque cas sont reportés en rouge, les autres ayant été fixés arbitrairement.	142

Liste des Abréviations

ABIC	Akaike Bayesian Information Criterion
ADP	Grille ADaPtative
ANTEX	ANTenna EXchange format
AOD1B	Atmosphere and Ocean De-Aliasing Level-1B
BKG	Bundesamt für Kartographie und Geodäsie
BIGF	British Isles continuous GNSS Facility
BIPM	Bureau International des Poids et Mesures
CATREF	Combination and Analysis of Terrestrial Reference Frames
CATS	Coordinates Time series Analysis Software
CDDIS	Crustal Dynamics Data Information System
CE	Centre de masse de la Terre solide
CF	Centre de Figure
CLS	Collecte Localisation Satellites
CM	Centre de Masse
CMB	Core Mantle Boundary
CMC	Common Mode Components
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales
CNRS	Centre National de Recherche Scientifique
CSR	Center for Space Research
DCB	Differential Code Bias
DD	Double Différence
DFT	Discrete Fourier Transform
DGPA	Dutch Permanent GNSS Array
DOMES	Directory of MERIT Sites
DORIS	Doppler Orbitography by Radiopositionning Integrated on Satellite
ECCO	Estimating the Circulation and Climate of the Ocean
ECMWF	European Center for Medium-Range Weather Forecasts
EOF	Empirical Orthogonal Functions
EOST	École et Observatoire des Sciences de la Terre
EPOS	European Plate Observing System
ERA	ECMWF ReAnalysis
ERGNSS	Red Geodésica Nacional de Estaciones de Referencia GNSS
ESA	European Space Agency
EUREF	EUREF Permanent GNSS Network
FES	Finite Element Solution
FFT	Fast Fourier Transform
FT	Fourier Transform
GCV	Generalized Cross-Validation
GGFC	Global Geophysical Fluid Center
GGOS	Global Geodetic Observing System
GIA	Glacial Isostatic Adjustment

GINS	Géodésie par Intégration Numérique Simultanée
GLDAS	Global Land Data Assimilation System
GLONASS	Acronyme russe de « GNSS »
GLORYS	GLobal Ocean ReanalYsis and Simulation
GMF	Global Mapping Function
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positionning System
GRACE	Gravity Recovery And Climate Experiment
GRACE-FO	Gravity Recovery And Climate Experiment - Follow On
GRGS	Groupe de Recherche en Géodésie Spatiale
GSFC	Goddard Space Flight Center
IAG	International Association of Geodesy
IB	Inverse Barometer
ICB	Inner Core Boundary
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IFB	Inter-Frequency Bias
IGN/RGP	Institut Géographique National/Réseau GNSS permanent
IGS	International GNSS Service
InSAR	Interferometric Synthetic Aperture Radar
IPPP	Integer - Positionnement Ponctuel Précis
IRNSS	Indian Regional Navigation Satellite System
ISB	Inter-System Bias
ITACYL	Red de estaciones GNSS de Castilla y León
ITES	Institut Terre et Environnement de Strasbourg
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
JPL	Jet Propulsion Laboratory
KBRR	K-Band Range Rate
LLN	Load Love Numbers
LM	Lower Mantle
LRI	Laser Range Interferometer
LT	Laplace Transform
LVZ	Low Velocity Zone
MERRA	Modern Era Retrospective-Analysis
MLE	Maximum Likelihood Estimation
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NGL	Nevada Geodetic Laboratory
NIEP	National Institute for Earth Physics
NL	Narrow-Lane
NOA	National Observatory of Athens
NTOAL	Non-Tidal Oceanic and Atmospheric Loading
ORBEX	ORBit EXchange format
PC	Principal Component
PL	Power-Law noise
PCA	Principal Component Analysis
PCO	Phase Center Offset
PCV	Phase Center Variations
PPP	Positionnement Ponctuel Précis
PPP-AR	Positionnement Ponctuel Précis with Ambiguity Resolution
PREM	Preliminary Reference Earth Model
PSD	Power Spectral Density
QZSS	Quasi-Zenith Satellite System

REG	Grille REGulière
RENAG	Réseau National GNSS
RING	Rete Integrata. Nazionale GPS
RINEX	Receiver INdependant EXchange format
SD	Simple Différence
SH	Spherical Harmonics
SINEX	Solution INdependant EXchange format
SLR	Satellite Laser Ranging
SNREI	Symetric Non-Rotating Elastic and Isotropic
SONEL	Système d'Observation des variations du Niveau de la mEr à Long terme
TD	Triple Différence
TF	Transformée de Fourier
TLN	Tidal Love Numbers
TO	Trade-Off curve
TOAL	Tidal Oceanic and Atmospheric Loading
TUGO-m	Toulouse Unstructured Grid Ocean model
UM	Upper Mantle
VLBI	Very Long Base Interferometry
VMF	Vienna Mapping Function
WH	WHite noise
WL	Wide-Lane
WLS	Weigthed Least-Square
WRB	Wide-Lane Receiver Bias
WSB	Wide-Lane Satellite Bias
ZTD	Zenithal Tropospheric Delay
ZHD	Zenithal Hydrostatic tropospheric Delay
ZWD	Zenithal Wet tropospheric Delay

Liste des Publications et Communications

Liste des Publications

Michel, A., Santamaría-Gómez, A., Boy, J.-P., Perosanz, F., & Loyer, S., 2021. Analysis of GNSS displacements in Europe and their comparison with hydrological loading models, *Remote Sensing*, **13**(22), 4523. <https://doi.org/10.3390/rs13224523>

Michel, A. & Boy, J.-P., 2021. Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects, *Geophysical Journal International*, **228**(2), 1191–1212. <https://doi.org/10.1093/gji/ggab369>

Collectif Jolidon, 2021. *Physique Expérimentale*, EDP Sciences. <https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1157/9782759825233/physique-experimentale>

Liste des Communications

Posters

Michel, A., Boy, J.-P. & Perosanz, F., Novembre 2019. Surface Seasonal Deformations in Western Europe computed from a massive GNSS processing of a global network with the GINS/PC Software. *Colloque G2*, Le Mans.

Michel, A., Boy, J.-P., Perosanz, F. & Loyer, S., Décembre 2019. Surface Seasonal Deformations in Western Europe computed from a massive GNSS processing of a global network with the GINS/PC Software. *AGU Fall Meeting*, San Francisco.

Présentations

Michel, A. & Boy, J.-P., Novembre 2018. Charge hydrologique en Europe de l'Ouest par inversion des déplacements GNSS. *Colloque G2*, Montpellier.

Michel, A., Boy, J.-P. & Perosanz, F., Juillet 2019. Hydrological Loading in Western Europe Estimated from the Inversion of GNSS Data Using GINS/PC Software. *27^{ème} Assemblée générale de l'IUGG*, Montreal.

Michel, A., Boy, J.-P. & Perosanz, F., Juin 2021. Hydrological Loading in Western Europe Estimated from the Inversion of GNSS Data Using GINS/PC Software. *Séminaire Commitee4PhD de l'ITES*, Strasbourg.

Michel, A., Santamaría-Gómez, A., Boy, J.-P., Perosanz, F., & Loyer, S., Novembre 2021. Analysis of GNSS displacements in Europe and their comparison with hydrological loading models. *Colloque G2*, Paris.

Viscoelastic Love numbers and long-period geophysical effects

A. Michel and J.-P. Boy 

ITES (UMR 7063), EOST/Université de Strasbourg, CNRS, ENGEES, 5 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France. E-mail: alexandre.michel@unistra.fr

Accepted 2021 September 10. Received 2021 September 7; in original form 2021 January 14

SUMMARY

Long term deformations strongly depend on the earth model and its rheological parameters, and in particular its viscosity. We give the general theory and the numerical scheme to compute them for any spherically non-rotating isotropic earth model with linear rheology, either elastic or viscoelastic. Although the Laplace transform (LT) is classically used to compute viscoelastic deformation, we choose here instead, to implement the integration with the Fourier transform (FT) in order to take advantage of the fast FT algorithm and avoid some of the LT mathematical difficulties. We describe the methodology to calculate deformations induced by several geophysical signals regardless of whether they are periodic or not, especially by choosing an adapted time sampling for the FT. As examples, we investigate the sensitivity of the displacements due to long period solid Earth tides, glacial isostatic adjustment and present-day ice melting, to anelastic parameters of the mantle. We find that the effects of anelasticity are important for long period deformation and relatively low values of viscosities for both Maxwell and Burgers models. We show that slight modifications in the rheological models could significantly change the amplitude of deformation but also affect the spatial and temporal pattern of the signal to a lesser extent. Especially, we highlight the importance of the mantle anelasticity in the low degrees deformation due to present-day ice melting and encourage its inclusion in future models.

Key words: Elasticity and anelasticity; Fourier analysis; Loading of the Earth; Tides and planetary waves; Satellite gravity.

1 INTRODUCTION

The deformation of the Earth or other planets induced by surface loading processes or tidal forces have been largely studied through the formalism first developed by Love (1911) for spherically symmetric non-rotating elastic isotropic (SNREI) bodies. Dimensionless numbers called Love numbers characterize the perturbation applied on the body and its interior rheological parameters. Among the different Love numbers, tidal Love numbers (TLN) are computed for an external potential perturbation and are especially used for tidal forces. In the other hand, load Love numbers (LLN) are computed for mass load laid on the body surface and are mainly used for external circulation of oceanic, hydrological and atmospheric masses. Several tools have already been developed to compute elastic Love numbers (Martens *et al.* 2019) and anelastic Love numbers (Spada 2008; Kachuck & Cathles 2019) using, respectively, the historical normal modes approach (Peltier 1974; Vermeersen & Sabadini 1997) and the propagator approach (Sabadini *et al.* 1982).

The main sources of deformation observed by the different geodetic measurements are the solid Earth tides (Agnew 2015) and ocean tidal loading (Carrere *et al.* 2016; Martens *et al.* 2016a) reaching, respectively, an amplitude of 30 and 10 cm. The circulation of global geophysical fluids induces continuous loading deformations from daily and subdaily periods, to seasonal cycles (Argus *et al.* 2014a, 2017) and longer period such as the postglacial rebound (Peltier *et al.* 1981).

Solid Earth tides and ocean tidal loading are usually modelled using the IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service) conventions (Petit & Luzum 2010) which provide the different Love numbers to be used. Those Love numbers vary not only with the harmonic degree, but also with the order, to include the Earth's ellipticity and rotation. The anelasticity is taken into account at long periods based on the absorption band process classically used in seismology (Dehant & Zschau 1989; Benjamin *et al.* 2006) which may be not appropriate for the very long periods timescales (beyond Chandler wobble period), compared to a consistent viscoelastic model with Maxwell or Burgers rheologies.

Several long time geophysical signals suggest to take into account the anelasticity of the mantle to explain the observed displacement rates (Caron *et al.* 2017). The most common example is the glacial isostatic adjustment (GIA, Spada *et al.* 2011; Argus *et al.* 2014b;

Peltier *et al.* 2015). However, some other signals such as Earth tides (especially the Moon's node of 18.6 yr period) or present-day ice melting (Spada *et al.* 2012; Lutcke *et al.* 2013), could also be affected by viscoelastic rheologies. In most studies (Zhang *et al.* 2019; Li *et al.* 2020), the anelasticity of the Earth's response to surface loading processes, including present-day ice mass loss, is still neglected but should be considered to provide a unique consistent frame of study within other long period loading deformation signals such as GIA (Métivier *et al.* 2020).

To compute viscoelastic deformations, we use the correspondence principle which allows to search solution of the gravito-elastic system in the frequency domain, using the Laplace or Fourier transforms of the time dependent variables. Most of studies use the Laplace transform (LT) which allows to handle perturbations with finite or infinite temporal extensions (Peltier 1974; Spada 2008; Sabadini *et al.* 2016). To avoid the mathematical difficulties of the LT related to the residues integration using normal modes approach (Tanaka *et al.* 2006; Spada & Boschi 2006), another option is to use the Fourier transform (FT) which is much more suitable for numerical computation thanks to algorithms such as fast-Fourier transform (FFT). The mathematical issue using the last one is that FT resolution theoretically only works with periodic signals (which have an infinite temporal extension) such as tides but not *a priori* with deformations generated by singular events such as post-seismic deformations (PSD), or secular signals such as GIA and ice melting. Dealing with finite temporal signal could create apodization phenomena which can affect the nature of the FT. In this study, we show that all the issues related to the FT including aliasing and apodization, can be overpassed with appropriate resampling of non-periodic geophysical signals.

The aim of the paper is to revisit the computation of surface deformations due to various geophysical effects, for example solid Earth tides, GIA and present-day ice mass loss, with a special attention paid to the Earth's Mantle anelasticity, using a consistent rheology model. In Section 2, we describe the different rheological models used in this study, for example elastic, and the anelastic Maxwell and Burgers rheology and provide Hooke's law in the time and frequency domain. We present the integration of the system and its variant for viscoelastic case, respectively, in Sections 3, 3.3 and 5 is devoted to the investigation of the anelastic rheology on displacements for three classical long period examples: solid Earth tides, GIA and present-day ice mass loss. Discussion and concluding remarks are finally given in Section 6.

2 RHEOLOGICAL MODELS

2.1 Elastic rheology

Hooke's law for an elastic medium and its equivalent for an isotropic viscous fluid are given by the stress–strain relations

$$\begin{cases} \sigma = \lambda^e \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{I} + 2\mu^e \varepsilon \\ \sigma = \chi \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\eta \dot{\varepsilon} \end{cases}, \quad (1)$$

where σ is the stress tensor, ε is the strain tensor, (λ^e, μ^e) are the Lamé elastic coefficients, η and χ are, respectively, the first and second viscosity, $\text{Tr}()$ is the trace of the tensor, \mathbf{I} the identity tensor and we note with upper dot the derivative with time. The second viscosity χ is related to the volume viscosity which is zero for an incompressible medium. Considering the difficulty of measuring χ experimentally, it is very common to neglect it in dense media like a fluid or a solid (which is the usual Stokes hypothesis), and to consider the medium as Newtonian (Ranalli 1995). We will adopt this hypothesis in the following, in which the second equation of eq. (1) is limited to its second term.

It is convenient to separate the compressible and incompressible part of each equation and solve both independently. We write each tensor (generic notation τ is used) as the direct sum of a full trace $\bar{\tau} = 1/3 \text{Tr}(\tau) \mathbf{I}$ and a null trace $\tau' = \tau - 1/3 \text{Tr}(\tau) \mathbf{I}$ tensor. The tensor $\bar{\varepsilon}$ represents an homogeneous and isotropic compression of the material—equivalent to an hydrostatic pressure—while ε' contains the remaining shear deformation. Applying this decomposition in the elastic equation of eq. (1), we obtain

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = (3\lambda^e + 2\mu^e)\bar{\varepsilon} = 3K\bar{\varepsilon} \\ \sigma' = 2\mu^e \varepsilon' \end{cases}, \quad (2)$$

where K is the bulk modulus. This decomposition provides to the user the possibility to choose independently the compressible and the incompressible models as parts of a global rheological model.

2.2 Maxwell rheology

Spada (2008) provides a complete synthesis of several viscoelastic models. The most used and widely studied viscoelastic model for the Earth mantle is Maxwell rheology (Peltier 1974; Wu & Peltier 1982; Vermeersen *et al.* 1996; Spada 2013). A Maxwell material is modelled by the association of a spring and a damper in series (Fig. 1). It behaves then like an elastic medium for short timescale and like a viscous fluid for long timescale. The elastic part is compressible of moduli λ^e and μ^e , and the viscous part is incompressible (see Section 2.1) of viscosity η^m . The compressible relation is then directly given by eq. (2) : $\bar{\sigma} = (3\lambda^e + 2\mu^e)\bar{\varepsilon}$, while the incompressible part is given by the differential equation

$$\frac{\dot{\sigma}'}{2\mu^e} + \frac{\sigma'}{2\eta^m} = \dot{\varepsilon}'. \quad (3)$$

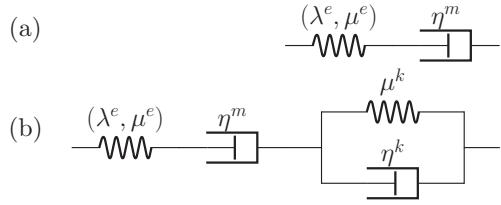


Figure 1. Maxwell (a) and Burgers (b) rheological models with a compressible elastic modulus λ^e .

We choose to find solutions of this equation in the Fourier domain, using the FT $\tilde{\sigma}'(\omega)$ and $\tilde{\varepsilon}'(\omega)$ of, respectively, σ' and ε' , where $\omega = 2\pi f$ is the angular frequency. The differential equation (eq. 3) then becomes

$$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e \left[1 - \frac{1}{\left(i\omega \frac{\eta^m}{\mu^e} + 1 \right)} \right] \tilde{\varepsilon}' = 2\mu^e [1 - m(\omega)] \tilde{\varepsilon}'. \quad (4)$$

The supplementary term $m(\omega)$ induced by the presence of the damper is characteristic of a first order low-pass system of cut-off frequency $\omega^{em} = \mu^e/\eta^m$. The total stress vanishes if either ω or η^m tends to 0, but the system is elastic ($m(\omega) = 0$) if η^m tends to infinity.

2.3 Burgers rheology

In order to introduce further relaxation timescales, we can associate an incompressible Kelvin model in series with the Maxwell block in a global model known as Burgers model (Fig. 1). We note, respectively, μ^k and η^k the shear and viscous moduli of the Kelvin part. Since the Kelvin block is incompressible, the compressible equation is reduced to its elastic part as in Section 2.2. The differential equation of the incompressible part is now a second-order equation:

$$\frac{\ddot{\sigma}'}{2\mu^e\mu^k} + \dot{\sigma}' \left(\frac{1}{2\mu^k\eta^m} + \frac{1}{2\mu^k\eta^k} + \frac{1}{2\mu^e\eta^k} \right) + \frac{\sigma'}{2\eta^m\eta^k} = \frac{\ddot{\varepsilon}'}{\mu^k} + \frac{\dot{\varepsilon}'}{\eta^k}. \quad (5)$$

This equation is quite general and we can recover several simpler models by taking the limit cases when parameters tends to infinity. Taking η^k or μ^k infinite, reproduces the Maxwell model (the Kelvin part is then equivalent to a wire transmitting all the stress but not the strain). Taking η^m infinite reproduces the general Kelvin model (SLS-V in Spada 2008) while additionally taking μ^e infinite returns the simple Kelvin model. Finally, we find the elastic limit behaviour with $\eta^k, \eta^m \rightarrow +\infty$ or $\mu^k, \eta^m \rightarrow +\infty$.

Again as a linear rheology, the solution in the Fourier domain gives a linear relation between the FT of stress and strain

$$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e \frac{\omega^2 - i\omega\omega^{kk}}{\omega^2 - i\omega(\omega^{em} + \omega^{ek} + \omega^{kk}) - \omega_r^2} \tilde{\varepsilon}', \quad (6)$$

where $\omega^{ij} = \mu^i/\eta^j$ and e, m and k means, respectively, elastic, Maxwell and Kelvin moduli. We also define the resonant frequency $\omega_r = \sqrt{\omega^{em}\omega^{kk}}$. Removing the pure elastic part from this equation, it also returns the expression of a low-pass filter but of order two, with several characteristic timescales. First, we find the Maxwell frequency ω^{em} which establishes the intersection between the low and high frequencies characteristic behaviours. A second order system can also resonate if the excitation is close to the resonant frequency ω_r and the quality factor is large. If the second condition is not satisfied (which is the case for reasonable values of parameters) the system is no longer resonant. Then, from the high frequency asymptotic straight line the Bode diagram reaches a first plateau in medium frequencies before reaching later its final horizontal asymptote at low frequencies. The length of the intermediate plateau and the shape of the diagram between it and the low frequencies asymptote is controlled, respectively, by the frequency ω^{kk} and the frequency ω^{ek} . As the Kelvin viscosity increases, the intermediate plateau shrinks and we tend to a pure Maxwell response.

The eq. (6) can be rewritten as the product of the Maxwell term defined in eq. (4) and an additional contribution due to the addition of the Kelvin modulus:

$$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right] \tilde{\varepsilon}', \quad (7)$$

with

$$b(\omega) = \frac{i\omega\omega^{ek}}{(i\omega + \omega^{kk})(i\omega + \omega^{em})}. \quad (8)$$

The eq. (7) is very convenient to numerically implement the stress function depending if we consider either elastic [$b(\omega) = 0; m(\omega) = 0$], Maxwell [$b(\omega) = 0$] or Burgers rheologies which are the most commons used models in the literature.

Table 1. Summary of the different viscoelastic models developed in this article with an elastic compressible part. We also computed the equivalent frequency-dependent Lamé parameters for each model.

Rheological model	Elastic	Maxwell	Burgers
Frequential relation (incompressible part)	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e \tilde{\varepsilon}'$	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m(\omega)] \tilde{\varepsilon}'$	$\tilde{\sigma}' = 2\mu^e [1 - m(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right] \tilde{\varepsilon}'$
Specific function definition	–	$m(\omega) = \frac{1}{(i\omega/\omega^{em} + 1)}$	$b(\omega) = \frac{i\omega\omega^{ek}}{(i\omega + \omega^{kk})(i\omega + \omega^{em})}$
$\lambda(\omega)$	λ^e	$\lambda^e + \frac{2}{3}\mu^e m(\omega)$	$\lambda^e + \frac{2}{3}\mu^e \left[\frac{m(\omega) + b(\omega)}{1 + b(\omega)} \right]$
$\mu(\omega)$	μ^e	$\mu^e [1 - m(\omega)]$	$\mu^e [1 - m(\omega)] \left[\frac{1}{1 + b(\omega)} \right]$

2.4 Generalized Hooke's law

The combination of the two linear solutions of the differential equations (compressible and incompressible part) in the Fourier domain, gives the general stress-strain expression. This general solution can be written as a Hooke's law with new frequential functions $\lambda(\omega)$ and $\mu(\omega)$ defined such that

$$\tilde{\sigma} = \lambda(\omega) \text{Tr}(\tilde{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu(\omega) \tilde{\varepsilon}. \quad (9)$$

For any linear time-dependent rheological model we can use the above expression in the frequency domain instead of the usual Hooke's law (eq. 1) used for an elastic medium. This is known as the correspondence principle firstly mentioned in Lee (1955) and Lee *et al.* (1959) with the LT. We use here the FT which is numerically easier to deal with but has an a priori more restricted area of applications (Tobie *et al.* 2005). Nevertheless, we show later that the calculation of time Love numbers derived from LT like in Spada (2008) or Kachuck & Cathles (2019) is not necessary for usual geophysical cases. Those can be treated in the Fourier domain with a special attention given to the sampling and the numerical computation of FT. The Table 1 gives the equivalent functions $m(\omega)$, $b(\omega)$, $\lambda(\omega)$ and $\mu(\omega)$ for elastic, Maxwell and Burgers compressible models in order to use the correspondence principle in viscoelastic earth models.

3 LOVE NUMBERS COMPUTATION

3.1 Self gravitating elastic system

Either elastic or generalized Hooke's law, completes the gravito-elastic deformation system of equation already including the Poisson equation, the mass conservation and the momentum conservation. The solution of displacement and perturbed potential produced by a small perturbation can be calculated for an spherically symmetric non-rotating elastic isotropic (SNREI) Earth considering a decomposition in spherical harmonics (SH). The resulting system widely known as y_{in} system (Alterman *et al.* 1959; Longman 1962) contains 6 spheroidal independent equations in radial and tangential displacement (y_{1n}, y_{3n}), radial and tangential traction vector components (y_{2n}, y_{4n}), on potential (y_{5n}) and modified gravity function (y_{6n}). For stratified earth models with a liquid core like preliminary reference earth model (PREM, Dziewonski & Anderson 1981) or STW105 also known as reference earth model (REF, Kustowski *et al.* 2008), the density ρ_0 and the rheological parameters λ and μ depends on r which require to perform the integration numerically. Several studies already dealt with the inclusion of a liquid core by taking the limit of the equations with no shear ($\mu \rightarrow 0$). This led to the Longman paradox fully explained and solved in Chinnery (1975) for a stratified liquid core. We use its results to propagate our solution throughout the liquid core.

The y_{in} system can be solved applying boundary conditions at the centre (null displacements and potential) and at the surface. The latter conditions are dependent of the perturbation as fully explained by Hinderer & Legros (1989). For the general case, if we note P an external pressure, ζ a surface mass load, U an external potential and τ a tangential component of traction we can write the general boundary conditions for a given n th degree

$$\begin{cases} y_{2n}(a) = -g_e \zeta_n - P_n \\ y_{4n}(a) = \tau_n \\ y_{6n}(a) + \frac{n+1}{a} y_5(a) = \frac{2n+1}{a} U_n + 4\pi G \zeta_n \end{cases}, \quad (10)$$

where g_e is the norm of surface gravity. Farrell (1972) and Longman (1962) already showed that the surface mass load could also be written as an external potential U' such that $\zeta_n = (2n+1)/4\pi G a U'_n$. The complete resolution scheme is reported in the Appendix.

3.2 Love numbers definition

It is commonly accepted to give the solution of the displacement and the perturbed potential at the Earth surface in function of the perturbation potential (U_n or U'_n) and dimensionless numbers first introduced by Love (1911) depending on the earth model and its rheological behaviour.

Table 2. Tidal Love numbers (TLN) (h_n, l_n, k_n) definition for an external potential perturbation U and load Love numbers (LLN) (h'_n, l'_n, k'_n) definition for an equivalent surface mass load potential U' .

$$\begin{array}{ccc} & \text{External potential} & \text{Surface loading} \\ \left[\begin{array}{c} y_{1n}(a) \\ y_{3n}(a) \\ y_{5n}(a) \end{array} \right] = & U_n \left[\begin{array}{c} h_n/g_0(a) \\ l_n/g_0(a) \\ (1+k_n) \end{array} \right], & U'_n \left[\begin{array}{c} h'_n/g_0(a) \\ l'_n/g_0(a) \\ (1+k'_n) \end{array} \right] \end{array}$$

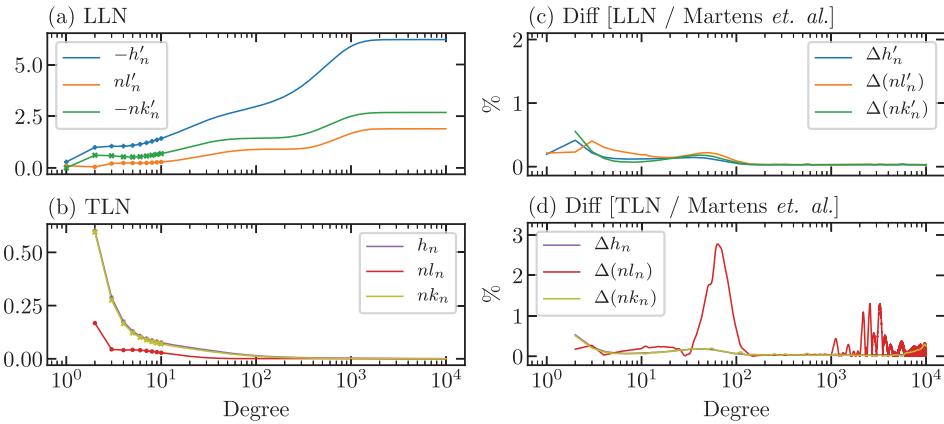


Figure 2. LLN (a) and TLN (b) for PREM with a liquid core obtained with presented integration scheme. Panels (c) and (d) are, respectively, the difference of LLN and TLN with those calculated with *LoadDef* program from Martens *et al.* (2019).

Love numbers are the response of a system to a unit perturbation potential and are then very convenient to compare solutions from different earth models. We will only use in the following, the TLN corresponding to the case of an external potential perturbation U and the LLN computed for a surface mass load perturbation ζ or equivalently a potential U' . They can be directly determined setting, respectively (U, U', τ, P) to $(1, 0, 0, 0)$ for TLN and $(0, 1, 0, 0)$ for LLN in system (A8) and in Table 2.

Several remarks on the numerical integration in order to perform high degree integration and avoid some numerical issues are given in the Appendix. LLN for several elastic models have already been compared in Wang *et al.* (2012) and in Na & Baek (2011). The elastic LLN and TLN computed with PREM containing a liquid core and following our integration scheme are given in Fig. 2. The values are consistent with those of Martens *et al.* (2019) calculated from *LoadDef* program, especially the asymptotic behaviour for high degrees (Farrell 1972; Martens *et al.* 2019). The low degrees are quite sensitive to the integration in the centre of the Earth which may be not exactly the same for both studies (see the Appendix) and could explain the differences observed especially for LLN (nonetheless never exceeded 0.5 per cent).

3.3 Integration for viscoelastic models

3.3.1 Viscoelastic models

In the following, we choose to construct viscoelastic models keeping the base of PREM (radial structure and variables) but considering Maxwell or Burgers models in some layers of the mantle. We do not choose continuous viscosity profiles existing in the literature (Vermeersen & Sabadini 1997; Kaufmann & Lambeck 2002; Steffen & Kaufmann 2005) because they have been computed from deformations of specific data and models. Since we aim to compare several independent geophysical processes in this study considering different viscoelastic models, the choice of non-adjusted viscosity profile (i.e. not derived from specific geophysical data) is more suitable. On the other hand, dealing with continuous radial viscosity function is equivalent to set an arbitrary large number of thin sublayers of constant viscosity which creates unnumerous normal modes. The normal mode approach using LT is thus very difficult to numerically handle because of the complex poles integration. If some mathematical tricks exist to overpass these difficulties (Tanaka *et al.* 2006; Spada & Boschi 2006), the FT provides the possibility to directly deal with these large amount of modes with a simple resampling of the discrete FT to include all the generated decay timescales. Finally, the parameters of the viscoelastic models used in this study obey the following constraints.

- (i) The density ρ and the elastic moduli λ^e and μ^e are set to the PREM values.
- (ii) The viscosity profile (either η^m and η^k) is divided in four main layers : Core(s) from $r = 0$ to 3480 km, lower mantle (LM) from $r = 3480$ to 5701 km, upper mantle (UM) including transition zones from $r = 5701$ to 6346.6 km and lithosphere from $r = 6346.6$ km to the surface.

Table 3. Notations for viscoelastic rheologies used in this study where all viscosities are in Pa·s. We keep the compressible elastic moduli (λ^e , μ^e) from PREM in every layers of the earth model, we use viscoelastic model only in the mantle and we set $\mu^k = \mu^e/10$ if Burgers rheology is used in the UM.

Notation	Explanation
MAXWELL $\log(\eta^m)$	— Maxwell homogeneous model in the whole mantle of viscosity η^m
MAXWELL $\log(\eta_{\text{UM}}^m) - \log(\eta_{\text{LM}}^m)$	— Maxwell model of viscosity η_{LM}^m in the lower mantle and η_{UM}^m in the upper mantle
MAXWELL $\log(\eta_{\text{UM}}^m) - \log(\eta_{\text{LM}}^m)$ BURGER $\log(\eta_{\text{UM}}^k)$	— Maxwell model of viscosity η_{LM}^m in the lower mantle and Burgers model of viscosities η_{UM}^m and η_{UM}^k in the upper mantle

- (iii) The viscosities can only take constant value within each of these four layers (constant piecewise functions) and the viscosities in the Core(s) and the lithosphere are always infinite (purely elastic layers).
- (iv) We set Maxwell models both in LM and UM.
- (v) We can choose to set Burgers model only in UM and in that case, $\mu^k = \mu^e/10$.

The notations for the rheological models used in this paper are explained in the Table 3.

3.3.2 Frequency and degree dependence

Taking advantage of the correspondence principle stated in Section 2.4, viscoelastic Love numbers are calculated in the Fourier domain for a given viscoelastic model. As a consequence, the Lamé functions $\lambda(\omega)$ and $\mu(\omega)$ are frequency and radial dependent complex functions given in the Table 1. On the other hand, ρ_0 and g_0 remain real and depend only on r . Solving the system in the Fourier domain does not change the fundamental physical concepts neither the integration and interface conditions. We can then compute the Love numbers applying the same integration scheme than for elastic case resolving the gravito-elastic system at a given degree n and a given frequency ω_0 . We note that unlike the elastic case, the inertial term proportional to $\rho\omega^2$ coming from the impulsion conservation equation is no longer neglected even if its contribution is small. The computed Love numbers are also complex values such that the imaginary part indicates the possible temporal delay (or phase delay) of the system response compared to the perturbation. This delay is entirely induced by the viscous behaviour of the system. The system can then be resonant in particular frequencies called modes depending on the viscoelastic model (Alterman *et al.* 1959; Wu & Peltier 1982).

LLN computed for four viscoelastic Maxwell models of fixed LM viscosity ($\eta_{\text{LM}}^m = 10^{23}$ Pa·s), are represented in Fig. 3 in function of degree and frequency. Fig. 3(a) shows the difference between the real part of viscoelastic LLN with respect to elastic ones while Fig. 3(b) represents the imaginary part of viscoelastic LLN. All the LLN presented have been computed using the integration scheme presented in Section 3 and the Appendix, and its variant for viscoelastic rheologies described above. Since we introduce viscosity only for intermediate mantle layers, the high degrees are barely affected by the changes in the earth model. For lower degrees, we see the behaviour of low-pass filter of the Maxwell function $m(\omega)$ defined in Section 2.2 : for periods shorter than the cut-off period, the viscoelastic LLN equals the elastic LLN and for periods longer than the cut-off period, the difference between the two increases. The cut-off period increases linearly with the UM viscosity in agreement with the theoretical formula $T^m = 2\pi\eta^m/\mu^e$ of Section 2.2. Taking the mean value of the PREM UM shear modulus $\bar{\mu}^e = 10^{11}$ Pa, we find $T^m = 2$, 20, 2000 and 200 000 yr for the successive represented Maxwell models. These values reported in black dotted lines are roughly consistent with the observed transition periods on the Fig. 3. For the imaginary part, the effects of viscosity seems to be bounded in a particular period interval. We also note that the main pattern in lower UM viscosity panels are unaffected as the viscosity increases except for downward shift towards higher periods. This behaviour comes from the simple rescaling of frequency ω to $\eta^m\omega/\mu^e$ such that $m(\omega)$ remains invariant as η^m increases if ω decreases. The frequency dependence of gravito-elastic equations being only in the $m(\omega)$ function (the inertial term is negligible), the results are simply shifted of the value of the scaling factor. Such behaviour should not occur in Burgers models as the frequency dependence is much more complicated. As discussed in Section 2, the behaviour of high viscosity rheology (beyond $\eta^m = 10^{23}$ Pa·s) MAXWELL 18–23 tends to the elastic case for a large range of the spectrum such that only the larger periods (non-visible on the figure) still change. We also note that some artefacts appears in the lower viscosities at high degrees and long periods. It corresponds to a zone where the values of viscosities, periods and degrees are unrealistic for a physical use and for which the numerical integration becomes unstable.

3.3.3 Viscosity model dependence

To compare the response of different viscoelastic models at a given frequency, we represent the vertical displacement LLN h' for some Maxwell and Burgers rheologies in Fig. 4. This representation is interesting to highlight the different degree ranges delimited by the markers

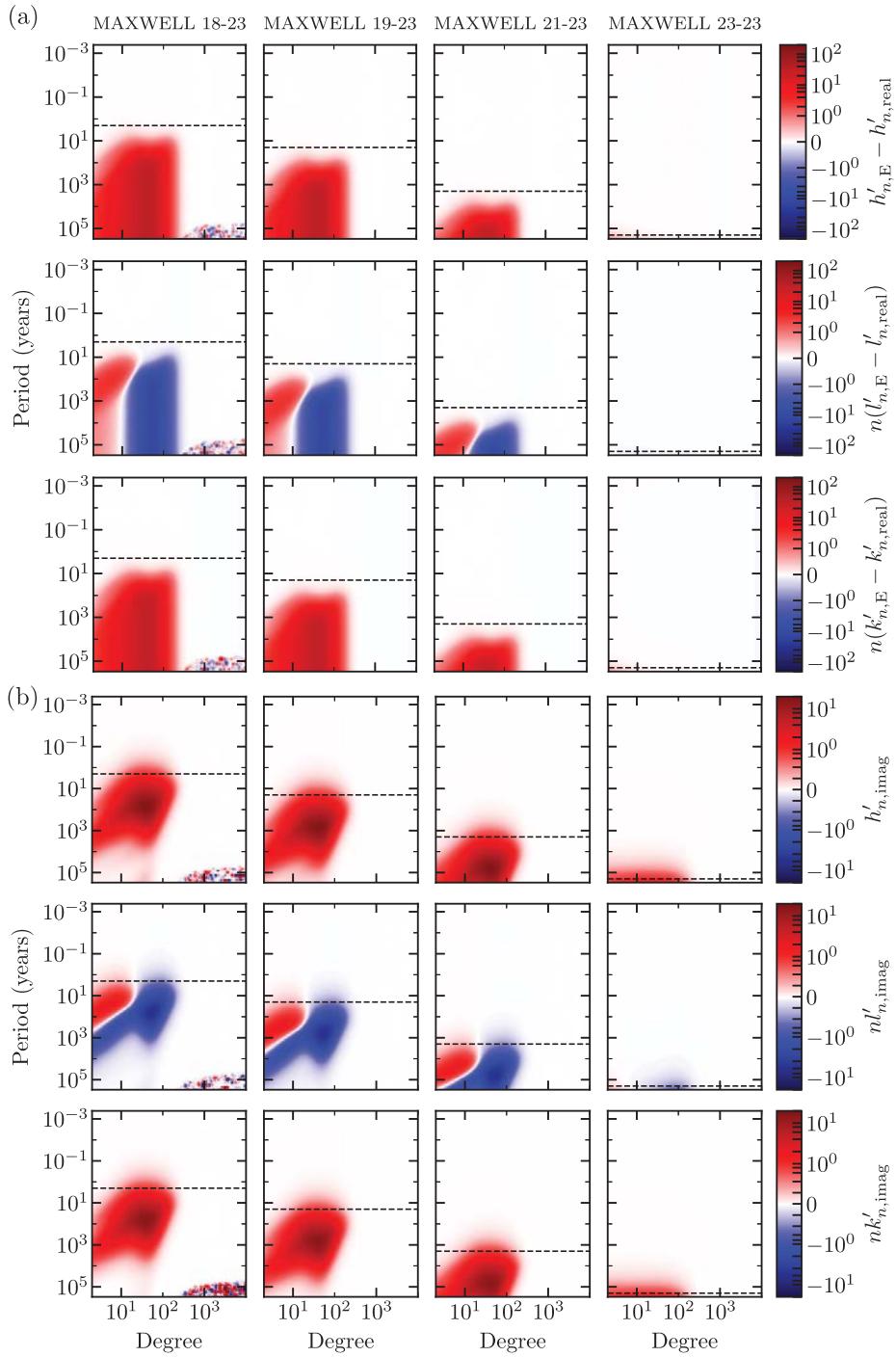


Figure 3. (a) Difference of LLN real parts in per cent between PREM and viscoelastic Maxwell models based on PREM with respective viscosity of 10^{18} , 10^{19} , 10^{21} , 10^{23} Pa·s for upper mantle and 10^{23} Pa·s for lower mantle. (b) LLN imaginary part of the models previously mentioned. The black dotted line marks the mean cut-off frequency of the equivalent low-pass filter for each model.

A to F, corresponding to the preponderance of particular viscoelastic parameters in the mantle. The period is fixed to 11 000 yr, in order to have significative effects of viscoelasticity on the LLN (Fig. 3). It is important to keep in mind that the results presented in this paragraph are applicable only at this particular frequency.

Since degree 1 (A) is mainly dependent of the Inner Core and liquid Core structure, we do not see any differences between all the models. For low degrees, we see a strong deviation of MAXWELL 21 model from the others, which is due to the differences in their LM viscosity profiles which have an impact starting from degree 2. At point B, we see the shift between models with 10^{20} Pa·s and models with 10^{21} Pa·s UM viscosity. This means that the UM structure have an influence starting from degree 3. Then from point C (degree 4), Maxwell and Burgers models with same Maxwell parameters diverge from each other. This point is the lower limit where the presence of transient

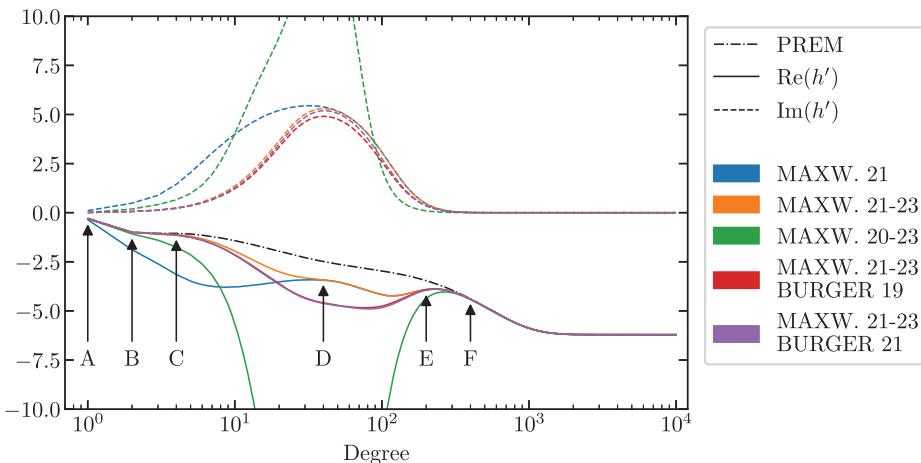


Figure 4. Real and imaginary part of vertical displacement LLN h' under an excitation of period $T = 11\,000$ yr, for several Maxwell and Burgers models of different UM and LM mantle viscosities. We also represent h' from PREM which is a real function. Points A to F indicate the main discrepancies between models.

viscosity in Burgers model infers on LLN. The value of the transient viscosity does not impact significantly the real part of LLN, but has a little influence in their imaginary part from C to E. The point D is the reconnection point for MAXWELL 21 and MAXWELL 21–23 models, defining the upper limit where LM has no more influence on LLN and from which only the UM structure infers. At point E, there are no more differences between Burgers and Maxwell models which have equal η^m while only MAXWELL 20–23 still differs from the other viscoelastic models. Finally, the point F set the limit where the mantle structure has no more influence such that LLN are impacted by the crust structure only. Consequently, modified PREM including refined crust models as CRUST1.0 should present differences beyond F.

4 COMPUTATION OF VISCOELASTIC DEFORMATION WITH FT

4.1 Sinusoidal perturbation

The complex Love numbers obtained after the integration at $\omega = \omega_0$ correspond to the frequency response of the system to a time sinusoidal unit perturbation oscillating at the frequency ω_0 . Then it is easy to compute the viscoelastic deformation of a sinusoidal perturbation (such as tidal waves for example) by just multiplying the complex admittance of the perturbation derived from its sinusoid characteristics (amplitude and phase) with the associated complex viscoelastic Love number. The resulting deformation is also a sinusoid characterized by the obtained complex number.

4.2 Non-sinusoidal perturbation

We consider now the time-series of the harmonic degree n of a non-sinusoidal perturbation. To solve the problem in the frequency domain, we have to compute the discrete Fourier transform (DFT) of this signal to obtain the frequency perturbation spectrum. Then, the Earth frequency response can be computed easily by calculating the n th degree Love number for the different frequencies ω_0 of the frequency set given by the DFT. Eventually, we need to multiply the two spectra which corresponds to the convolution of the Earth response with the perturbation in the time domain. We obtain the temporal deformation after taking the inverse DFT. However, in order to avoid the calculation of Love number each time that the frequency set changes, it is easier to previously calculate the Love numbers at some well-distributed values within a large frequency range. The frequency range must include the characteristic timescales of the different geophysical phenomena that we could treat. The collection of these Love number values at these different frequencies corresponds to a good approximation of the FT of a unit impulse perturbation (temporal Dirac function). We can then linearly interpolate this Love number spectrum to the frequency set given by the DFT of any kind of perturbation.

We generally use the FFT algorithm to implement numerically the DFT. This algorithm is optimized for samples of 2^N epochs regularly spaced. Then we need to resample the initial temporal perturbation signal, especially if it is initially not regularly sampled. The resampling depends mostly on the interpolation function especially the type of spline used (linear, quadratic, cubic, ...). For high order splines (beyond cubic), the interpolated signal should create some artefacts in the frequency domain at high frequencies especially if N is too large. For linear spline, the interpolated signal could have jerky variations which create non-negligible high frequency content which can alias the DFT if N is not large enough (Nyquist criterion). A compromise can be made by choosing a cubic spline interpolation which should not create high frequency content because of its smoothness. Finally, we choose N in an intermediate range of values such that 2^N is large enough to avoid aliasing and not too large to avoid issues on temporal resampling. A good compromise is to choose N such that 2^{N-2} is the superiorly closest value to the number of samples in the initial series. For example if there are 500 samples in the initial time-series, the closest power of two is

$2^9 = 512$ so that we choose $N = 11$. This choice of N prevents aliasing in the spectrum calculation. If the samples are initially not regularly spaced, we should first resampling at the shortest time-step, then determine the closest power of two of the resampled time-series and finally choose the optimal N . Examples are given in Sections 5.2 and 5.3. Another trick in the computation of FFT is to artificially increase the resolution of the spectrum using zero-padding. The addition of zeros on the time-series is not without effects (windowing) on the spectrum such that we advise to not use this technique in most cases. The spectrum is less impacted by this technique if the beginning and the end of the true time-series tend to zero. Therefore, we prefer to use neither zero-padding nor windowing in this study but to compute the FFT with the same number of points (2^N) as the resampled time-series. We add a remark on the fact that since the viscoelastic Love numbers are not computed for the zero frequency, a special attention should be given to the corresponding coefficient in the DFT (leading to permanent deformation). If we only want relative values of deformations, the coefficient could simply be set to zero (the mean of the signal is then removed).

4.3 Global perturbation

The majority of perturbation signal have a non-trivial spatio-temporal repartition on the Earth surface (especially loading signals). We decompose for each time step, the spatially dependant perturbation into SH to match the decomposition of our Love number calculation. We then obtain the amplitude time-series of each SH coefficient. Then we apply to each SH coefficient time-series representing the amount of signal in a given spatial configuration the procedure described in the previous section to obtain the associated deformation SH coefficient. The recomposition of the spatio-temporal deformation is done by the recombination of all SH coefficient for each time step. We note that since the Love numbers are degenerate in the order m for a SNREI model, every (n, m) Love numbers are equal to the zonal $(n, 0)$ Love number.

This general procedure is capable of handling a large number of geophysical signals while being fairly easy to implement and numerically fast. Moreover, it is still possible in the viscoelastic case to use Green's function formalism developed in (Farrell 1972) to deal with local sinusoidal deformations. The main difference is that the Green's functions will be complex and calculated for a single frequency chosen to correspond to the perturbation signal frequency.

5 APPLICATIONS

The viscoelastic Love numbers are used in several classical applications. We consider some particular examples: long period tidal deformations, GIA and the secular signal deduced from GRACE/GRACE-FO (Gravity Recovery And Climate Experiment - Follow-On, Tapley *et al.* 2004; Flechtner *et al.* 2014), mainly due to present-day ice mass loss in Antarctica, Greenland and Alaska (Luthcke *et al.* 2013). We compare the elastic and several viscoelastic responses to these perturbation signals in order to evaluate the impact of slightly different rheologies. This can be useful to further investigate the usual models of deformation considering the actual experimental constraints. In particular, the viscoelastic long period tidal deformations are compared to the results of current IERS convention model (Petit & Luzum 2010).

5.1 Solid Earth tides

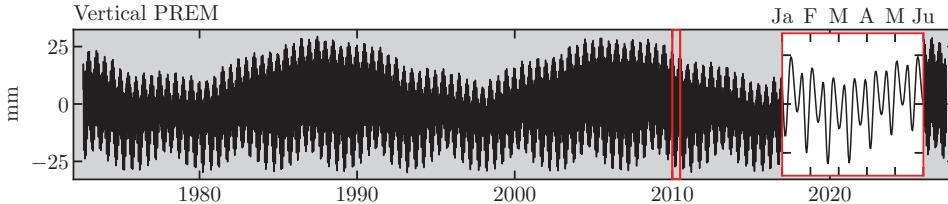
Solid Earth tides, especially their long-period zonal constituents, are particularly interesting to investigate the Earth's rheology, as the tidal potential can be computed with high precision (Hartmann & Wenzel 1995). Among other studies (Dehant & Zschau 1989; Walterova & Behounkova 2017), Benjamin *et al.* (2006) investigated the anelasticity in the Earth response to the long-period tides using C_{20} observations from Satellite Laser Ranging, and Polar Motion. However, their approach is based on the absorption band process as it is commonly done in seismology but not on a consistent viscoelastic model. We propose to calculate the direct response of several viscoelastic models based on PREM with the method developed in this study to evaluate the differences with the IERS conventions (Petit & Luzum 2010), which are classically used in the processing of geodetic data. The solid Earth tidal displacement calculation described in IERS conventions (Petit & Luzum 2010) is based on Wahr (1981) and Mathews *et al.* (1995) Love number definitions and consists of several disparate contributions to each Love numbers and displacement terms that are computed in a two steps procedure. In addition, the non-sphericity of the Earth and the Free Core Nutation resonance have been taken into account in the IERS conventions, leading to both degree and order dependence of Love numbers, and to frequency-dependant Love numbers in the diurnal band.

Since the effect of viscoelasticity in the mantle becomes significant at long periods (Fig. 3), we focus on the zonal long period tidal waves. Moreover, we will only consider the predominant zonal contribution (2,0), since the higher zonal terms are several orders of magnitude lower. We propose to represent the vertical displacements induced by these (2,0) tidal constituents for some viscoelastic models and to compare the results with the IERS conventions.

We use the catalogue corresponding to the harmonic decomposition of tidal constituents given by Doodson (1921), in the theoretical frame developed by Hartmann & Wenzel (1995). We compute the complex admittance of each wave that we then multiply with the corresponding complex degree 2 TLN to obtain the FT of the deformation as described in the Section 4.1. We compute the deformation for all the (2,0) tidal waves at their respective frequencies. The degree 2 TLN associated to the main waves are reported in Table 4 where we see that the major impact is for the longest period waves and the lowest viscous models. The total deformation spectrum is given by the collection of all Dirac

Table 4. Complex degree 2 TLN for the four main tidal waves and for each of the considered viscoelastic models.

Wave Frequency (cycle·yr ⁻¹)	[Nodal]	[Ssa]	[Mm]	[Mf]
	0.0537	2.0000	13.2555	26.7371
MAXWELL 18	1.668203 – 0.318953i	0.647748 – 0.186672i	0.604599 – 0.030164i	0.603753 – 0.014975i
MAXWELL 19	0.929106 – 0.437636i	0.603970 – 0.020013i	0.603487 – 0.003022i	0.603479 – 0.001498i
MAXWELL 20	0.610220 – 0.073787i	0.603481 – 0.002003i	0.603476 – 0.000302i	0.603476 – 0.000150i
MAXWELL 21	0.603545 – 0.007458i	0.603476 – 0.000200i	0.603476 – 0.000030i	0.603476 – 0.000015i
MAXWELL 22	0.603477 – 0.000746i	0.603476 – 0.000020i	0.603476 – 0.000003i	0.603476 – 0.000001i
MAXWELL 23	0.603476 – 0.000075i	0.603476 – 0.000002i	0.603476 – 0.000000i	0.603476 – 0.000000i
MAXWELL 18–23	0.612103 – 0.025199i	0.603842 – 0.002128i	0.603485 – 0.000335i	0.603478 – 0.000166i
MAXWELL 19–23	0.606343 – 0.005692i	0.603480 – 0.000224i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 20–23	0.603529 – 0.000895i	0.603476 – 0.000024i	0.603476 – 0.000004i	0.603476 – 0.000002i
MAXWELL 21–23	0.603476 – 0.000156i	0.603476 – 0.000004i	0.603476 – 0.000001i	0.603476 – 0.000000i
MAXWELL 19–23 BURGER 17	0.609618 – 0.003846i	0.608544 – 0.001500i	0.604968 – 0.002329i	0.603970 – 0.001499i
MAXWELL 19–23 BURGER 19	0.608745 – 0.005928i	0.603497 – 0.000444i	0.603476 – 0.000067i	0.603476 – 0.000033i
MAXWELL 19–23 BURGER 21	0.606374 – 0.005720i	0.603480 – 0.000226i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 21–23 BURGER 17	0.608966 – 0.000157i	0.608529 – 0.001391i	0.604959 – 0.002305i	0.603967 – 0.001484i
MAXWELL 21–23 BURGER 19	0.607071 – 0.002575i	0.603486 – 0.000226i	0.603476 – 0.000034i	0.603476 – 0.000017i
MAXWELL 21–23 BURGER 21	0.603479 – 0.000239i	0.603476 – 0.000006i	0.603476 – 0.000001i	0.603476 – 0.000000i

**Figure 5.** Elastic PREM vertical displacement of (2,0) tidal waves from Doodson catalogue. This displacement have to be multiplied by the associated Legendre polynomials to obtain the real displacement in function of latitude. The red inset is a 6 months zoom to see the high frequencies.

peaks which is none that a Fourier series as described in Beuthe (2015). At last in the time domain, the resulting time-series deformation is multiplied with the associated (2,0) Legendre polynomials to get latitude dependence.

The PREM vertical deformation without the permanent tide is shown in Fig. 5. This displacement is a reference such that the real displacement is obtain by multiplying the reference with the Legendre polynomials. The deformation waves are contained in a 18.6 yr (Nodal tide) and a 4.5 yr envelopes, which is itself modulated by the semi-annual wave (Ssa). The smaller periods especially Mm (27.55 d) and Mf (13.66 d) are visible on the red zoom inset of Fig. 5.

We then compute the tidal deformations for several viscoelastic rheologies. Fig. 6 represents the residual vertical displacement of several viscoelastic models after PREM signal was removed. The permanent tide is then automatically discarded and the signal is zero mean. The amplitude of the residuals and the corresponding normalized time-series are represented separately in order to compare properly the phase shift and the frequency content of the signal. We also include the residuals calculated from the difference between the IERS conventions (Petit & Luzum 2010) and PREM. We choose to compute the residuals for the reference displacement (without multiplying by the Legendre polynomial) because the choice of a particular latitude does not matter to compare the different models since every models are modulated by the same Legendre polynomial value at a given latitude. The reference amplitude have then to be considered as real amplitude with Legendre polynomials is equal to one (equivalent to latitude $\pm 36.5^\circ\text{N}$). The maximum amplitude is obtain by multiplying the reference amplitude by a factor 2.24.

The amplitude for the residuals of MAXWELL 18 and MAXWELL 19 models are ten times greater than the ones reported in the figure, reflecting the important discrepancy between these models and PREM. The amplitude decreases when the viscosity increases for homogeneous viscoelastic Maxwell models. The same behaviour is observed when we set the LM viscosity at 10^{23} Pa·s and that only the UM viscosity varies. Again the amplitude of Burgers models decreases as the transient viscosity η_k increases.

On the other hand, the right-hand panel indicates that the main component of the difference between PREM and the viscoelastic models is the Lunar nodal wave at 18.6-yr period. Indeed, as we saw in Fig. 3 for LLN, TLN are more impacted by the viscoelasticity as the period increases. The largest tidal period computed being the Nodal wave, it is the most likely one to be affected. We also see that this wave is subject to a phase shift as the viscosity changes. We can measure it by locating the maximum displacement positions on the time-series. The phase shift exists for all tidal waves but is more important for the longest periods (as they are the most likely to be impacted by the viscosity).

As every model is associated to a low pass filter with one or several cut-off frequencies, changing the viscosity model is also changing its cut-off frequencies. If the range of cut-off frequencies contains one or several of the main tidal wave, then changing even slightly the viscosity models can significantly impact the displacement of the Earth at this tidal wave frequency. We can see this effect in the Fig. 6 especially when we change the value of transient viscosity for Burgers models, but also as the global mantle viscosity increases.

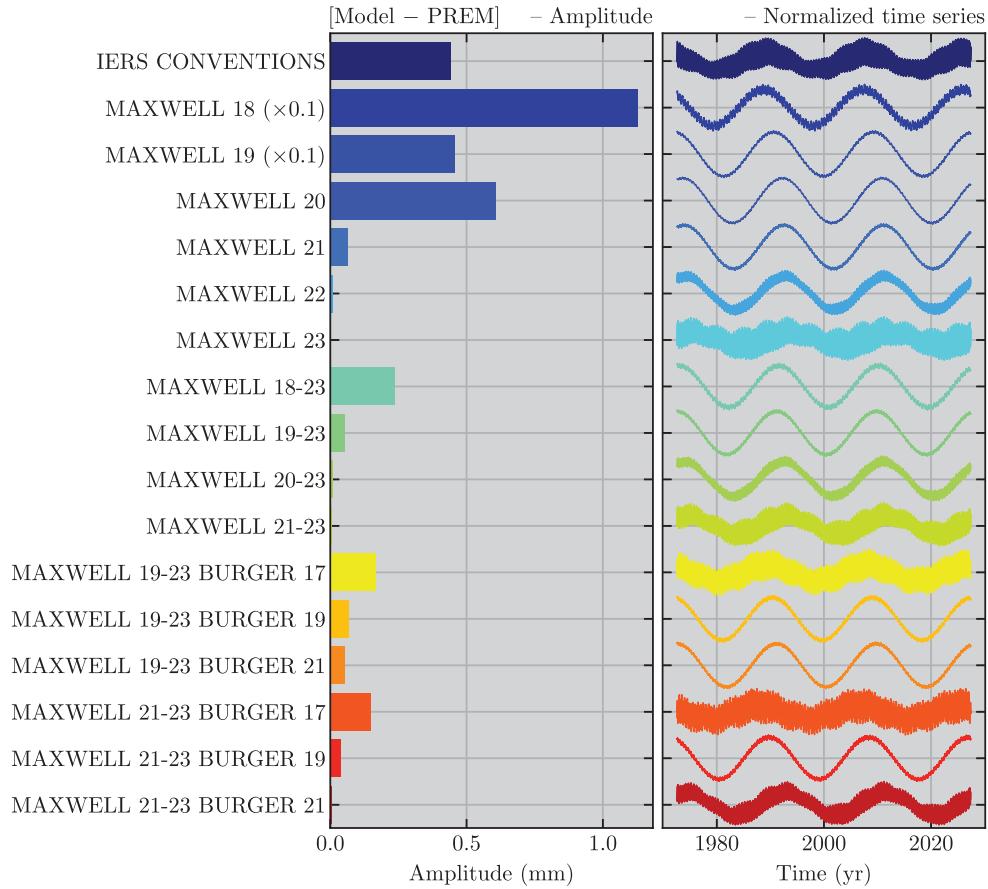


Figure 6. Residuals of the total vertical displacement generated by the (2,0) tidal waves from Doodson catalogue, for several viscoelastic rheologies and the model given in the IERS conventions (Petit & Luzum 2010). The residuals have been computed according to PREM displacement time-series. We plotted the amplitudes (left-hand panel) and the normalized time-series (right-hand panel).

We show the high dependence of the Earth viscoelastic parameters to the response of long-period tides. The objective should then to refine the determination of these parameters to provide optimal parameters for a realistic viscoelastic earth model. The use of such model in the tidal deformation computation should be able to replace the actual IERS conventions two-steps procedure which does not correspond to a consistent physical model. In particular, the differences in the 18.6-yr tide deformation between the actual IERS conventions and a more realistic viscoelastic model can exceed 2 mm (after multiplying by degree 2 Legendre polynomial), which is twice the desired accuracy in position for terrestrial reference frame (Altamimi *et al.* 2016).

5.2 GIA/postglacial rebound

GIA is another important proof of the viscoelasticity of the Earth and has already been largely studied (Peltier *et al.* 1981; Lambeck *et al.* 1998). A GIA solution (displacement rates and ice history) is generated for a given rheology and Earth structure. We want to evaluate the sensitivity of actual deformation rates observed with a slight change in viscoelastic parameters from a GIA model (Steffen & Kaufmann 2005; Roy & Peltier 2015). In the same way, Caron *et al.* (2017) used a Bayesian approach to realize such sensitivity tests on GIA models parameters. We compute the displacements given by the ICE-6G model supplied by Peltier *et al.* (2015) to validate our methodology on non-periodic perturbations. Taking the ice history derived from ICE-6G, we can compare the predicted actual vertical displacement rate for several Maxwell rheologies since they generally are the best to fit the GIA observed deformations.

First, we decompose the ice history into SH using the Python library SHTools (Wieczorek & Meschede 2018). We consider the ocean as an homogeneous reservoir and determine an homogeneous sea level at each time in order to enforce the global mass conservation. As described in Sections 4.2 and 4.3, we then compute the DFT of each SH coefficient using FFT algorithm on the time-series previously resampled to $2^{11} = 2048$ epochs by cubic interpolation. We choose $N = 11$ because the initial number of sample in the ice history is 122, extended to 489 taking the minimum time-step of 250 yr, and which the closest power of two is 2^9 . Some coefficients and an example of their Fourier spectrum estimation are given in Fig. 7 where we see that choosing too small N can create aliasing and can slightly shift in the y -direction the FFT results (panel b). Since the input time-series are real, the FFT is computed only between $f = 0$ and $f = f_s/2$, where $f_s = 0.0042 \text{ cycle}\cdot\text{yr}^{-1}$ is the sampling frequency. The rest of the spectrum is useless and redundant since it is symmetric. The frequency precision

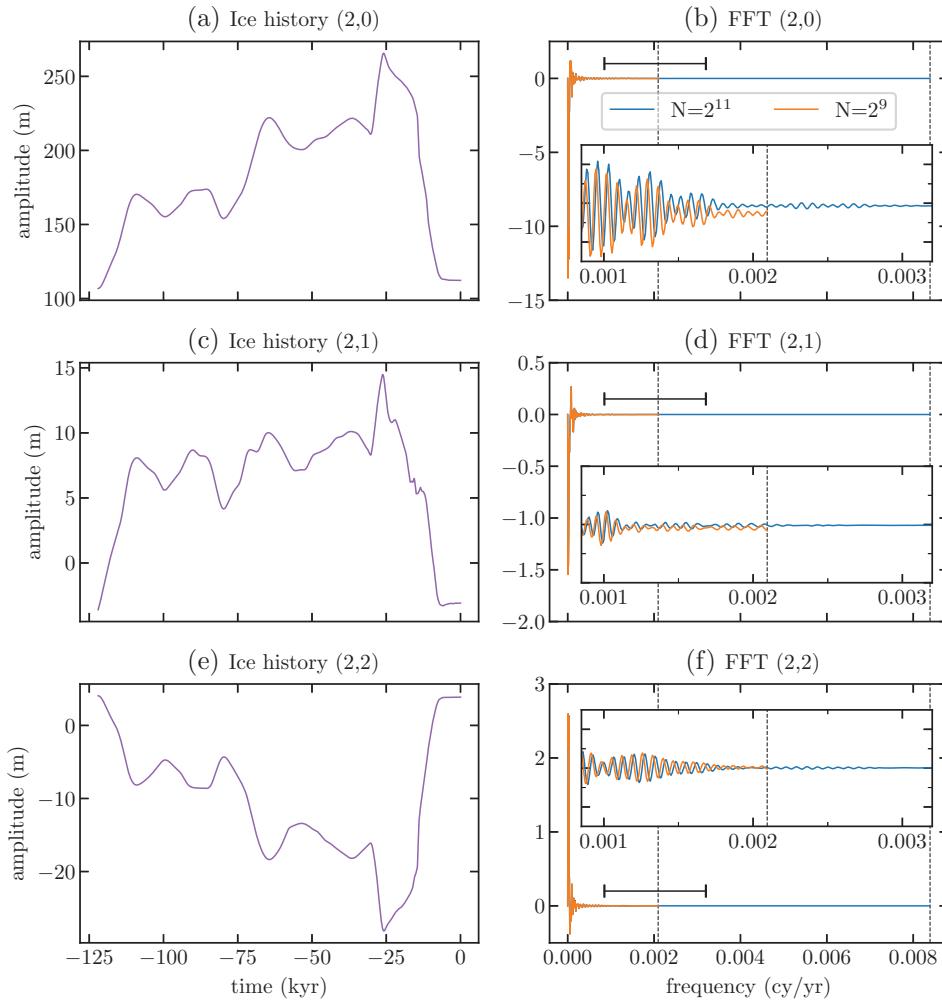


Figure 7. Cubic interpolation of time evolution and the associated FFT of (2,0), (2,1) and (2,2) SH coefficients of the ICE-6G ice history. The black dotted lines in FFT plots are the Nyquist frequencies for the two choices of N where 2^N is the number of time and frequency samples used, while the black horizontal segments are the frequency span of the inset zoom plots.

$\delta f = 1.03 \times 10^{-6}$ cycle·yr $^{-1}$ of the FFT is given by the inverse of the total period of the ice history signal (duration of 122 kyr). It is also the most little non-zero frequency to be calculated by the FFT algorithm. After multiply coefficients and LLN spectrum and take the inverse FFT, we have the temporal deformation SH coefficients which we combine with Legendre polynomials to obtain the deformation field.

The ice history model in ICE-6G already assumes a particular rheology which was determined by the global inversion of the surface displacements and sea level data (Peltier *et al.* 2015). It is then interesting to evaluate the importance of a slight change in rheological parameters when we compute the vertical surface displacement. The results are shown in the Fig. 8, where we test five different Maxwell viscoelastic rheologies for the mantle. Their parameters have been chosen to explore the parameter space close to ICE-6G results and to be coherent with the values obtain in Kaufmann & Lambeck (2002), Steffen & Kaufmann (2005) and Caron *et al.* (2017) to recover the UM and LM viscosities. The amplitudes of the vertical rate are very similar to the one found in the viscoelastic prospection led in Marotta (2003). The amplitudes could significantly differ from ICE-6G showing the strong dependence in rheological parameters.

In order to compare the spatial repartition of the deformation between the different models and ICE-6G, we compute for each case, the normalized map (with unity maximum amplitude), and then define a correlation coefficient C as

$$C = \frac{\sum_{i,j} (M_{ij} - \bar{M}_{ij})(P_{ij} - \bar{P}_{ij})}{\sqrt{\sum_{i,j} (M_{ij} - \bar{M}_{ij})^2} \sqrt{\sum_{i,j} (P_{ij} - \bar{P}_{ij})^2}}, \quad (11)$$

such that P is the normalized ICE-6G map and M one of the normalized tested rheology map. All the models presented in the Fig. 8 have $C > 0.55$. The rheologies with the best spatial correlation to ICE-6G are MAXWELL 21–22 and MAXWELL 21–23 reaching 0.93. The optimal parameter between amplitude and spatial pattern should be $10^{21} < \eta_{\text{UM}}^m < 10^{22}$ and $10^{22} < \eta_{\text{LM}}^m < 10^{23}$. If these values are in a good agreement with the ICE-6G model, they have to be used with precaution and maybe locally modified or refined to integrate other timescale phenomena such as PSD or Chandler wobble. Besides, Geruo *et al.* (2013) show that the determination of optimal viscosity parameters based

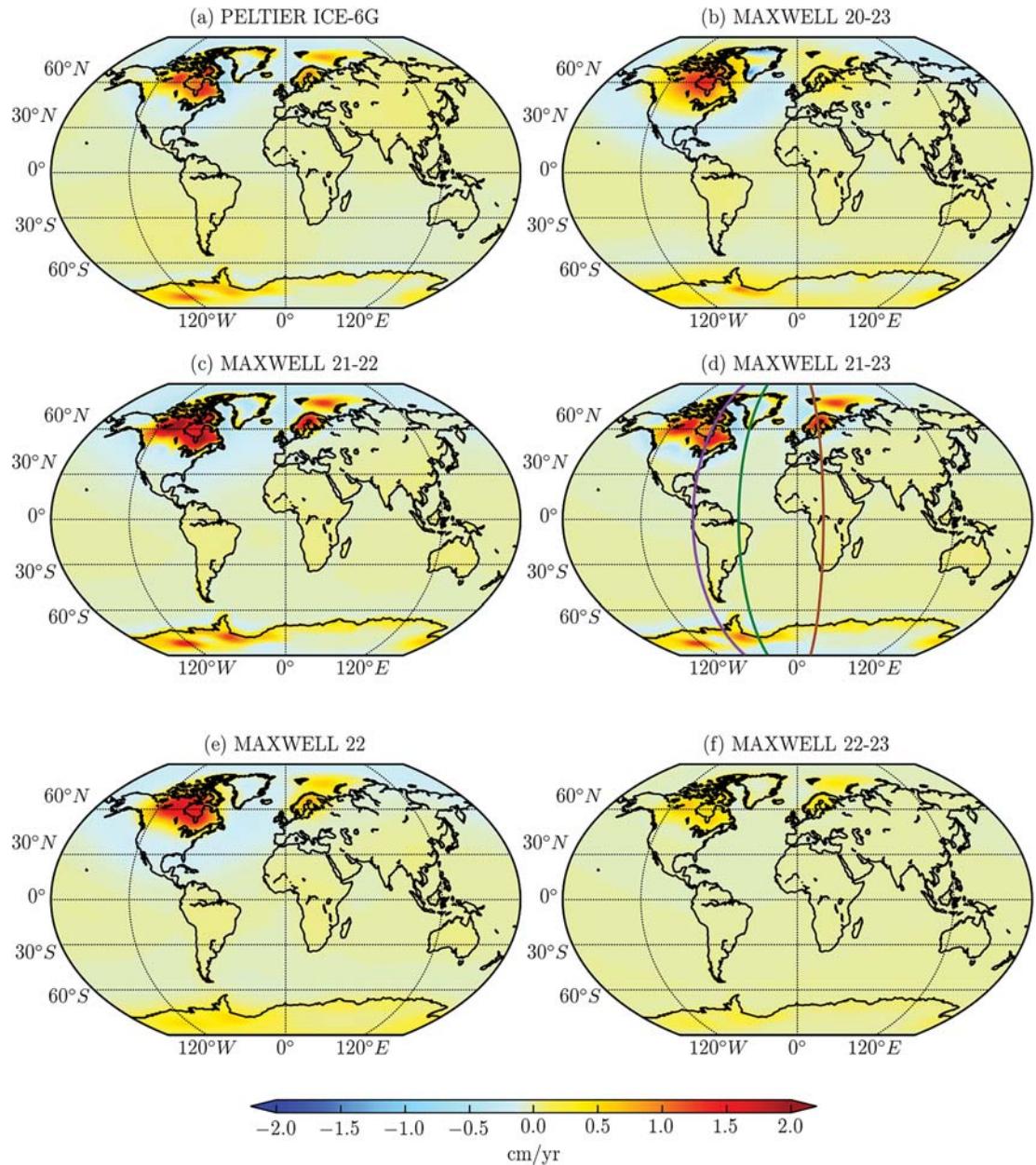


Figure 8. Actual vertical displacement rate (in $\text{cm} \cdot \text{yr}^{-1}$) computed with ice history of the model ICE-6G (Peltier *et al.* 2015) for several viscoelastic rheologies. The ICE-6G actual rate map is also shown as a reference. Coloured meridians in (d) refer to slices shown in Fig. 9. The spatial correlation coefficients ($0 \leq C \leq 1$) between the normalized maps and the reference are (from (b) to (f)) : [0.57, 0.93, 0.93, 0.79, 0.87].

on local studies cannot be properly generalized in global models. Then, the 3-D structure of the earth model especially the viscosity profile, should play an important role in the observed uplift of specific regions (Wu 2006; Spada *et al.* 2006; Wu *et al.* 2013).

The optimal viscosity parameters correspond to a cut-off period of 2000 or 20 000 yr for LM and of 200 yr for UM. The deformation rate in the LM should then be much slower than in the UM where the timescale is much shorter. To investigate this, we calculated the LLN in the deep interior of the Earth from the CMB to the surface. They have been computed by saving the three unscaled propagating solutions throughout the mantle and then multiply by scaling constants determined within the LLN at the surface. The deep deformation rates have then been computed for MAXWELL 21–23 model using the same scheme than described above (with FFT) at all depth but with a zero frequency LLN taken as elastic LLN. We reported in the Fig. 9(a) these deformation rates, for the three longitude slices drawn in the Fig. 8(d). The choice of $[-80^\circ\text{E}, -45^\circ\text{E}, +20^\circ\text{E}]$ longitudes has been done to cross the areas of largest deformation: Canada, Greenland, Scandinavia and Antarctica. We see that the localization of the deformation rate is mainly in the UM. This result is not surprising considering the time scales previously estimated for LM and UM. Nevertheless, this does not imply that the actual steady state deformation is null in the LM, as shown in Fig. 9(b). The actual steady-state deformation spreads in the whole mantle under the loading of actual and past ice sheets, especially in Antarctica where the actual ice thickness is the largest. Also, we see the formation of a positive deformation bulge beside the ice sheet

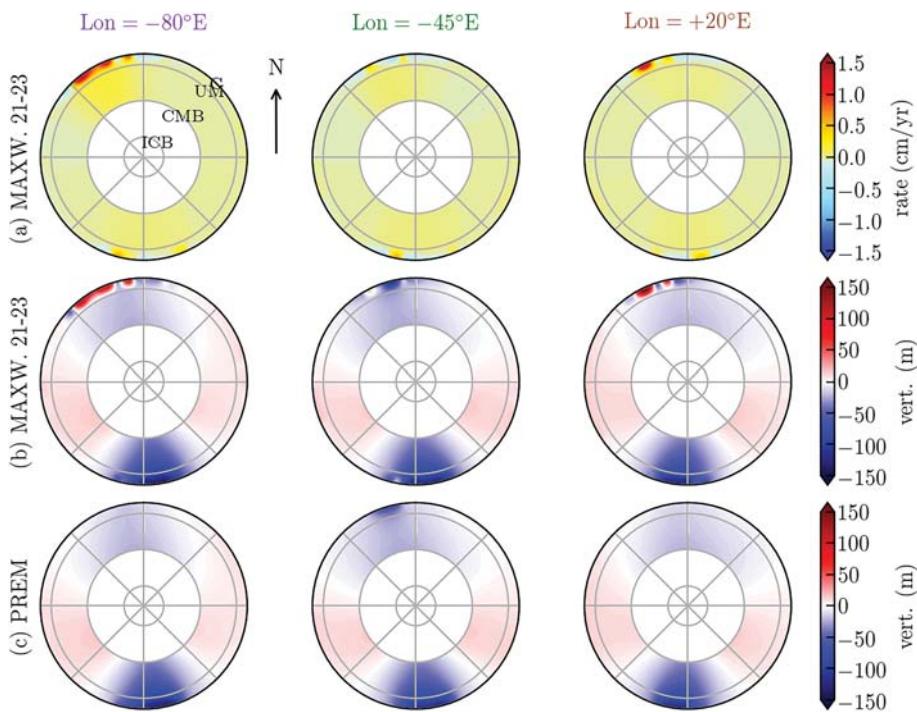


Figure 9. Vertical actual deformation rate (a) and actual steady state deformation (b, c) in the deep interior of the Earth until the CMB, along longitudinal slices pointed out by the respective coloured lines in Fig. 8(d). Panels (a, b) are related to MAXWELL 21–23 rheology and (c) to PREM.

subsidences. This is the signature of an internal redistribution of matter to reach the global deformation equilibrium state. We compare the actual steady state deformation from MAXWELL 21–23 with PREM (Fig. 9c) and see that in PREM, we only see actual ice-covered regions creating deformation since the elastic constraint in other regions (Hudson Bay, Scandinavia, ...) has already been released 1000 yr ago.

5.3 Present-day ice melting

In addition to Pleistocene deglaciation, the Earth is experiencing present-day ice melting at high latitudes (Shepherd *et al.* 2018, 2020) but also of mountainous glaciers at mid latitude (Jacob *et al.* 2012) which can be measured with various space techniques, such as altimetry (Helm *et al.* 2014) and gravimetry (Velicogna *et al.* 2020). For the smallest timescale of deformation, the impact of viscosity should be lower considering the values of η in the mantle. For example, Chanard *et al.* (2018) studied the impact of similar viscoelastic Maxwell and Burgers models to those used in this study, on the annual loading signal. They compare GNSS displacements to site displacements recovered in solving the direct problem for several rheologies applied on GRACE data. They show that the choice of rheological models does not significantly affect the annual signal in vertical time-series, but could affect the horizontal time-series. This is consistent with the previous results in this paper, as shown in Fig. 3. However, the loading signal extracted from GRACE and GRACE-FO also contains long-period signal variations, which can be due to secular climate changes (ice melting on Antarctica, Greenland and Alaska (Lutke *et al.* 2013)) or to long period meteorological phenomena exceeding a decade (Trenberth 1990). The effects of viscoelasticity should then be more important and we choose to focus on these long periods.

Then, we use the surface mass variations deduced from GRACE and GRACE-FO during the time span 2004–2020 to access intermediate frequencies of deformation, additionally to the seasonal hydrological cycles. We use the CSR RL06 Mascons solution downloaded from http://www2.csr.utexas.edu/grace/RL06_mascons.html. This solution has been improved since the RL05 release (Save *et al.* 2016) especially in term of resolution of the supplied regular grid which allow a proper resolution of the coastlines. As a mascons technique, the RL06 solution is free of any empirical filtering and is moreover corrected from the GIA ICE6G-C from Peltier *et al.* (2015). Its low degree zonal coefficients C_{20} , C_{30} have also been replaced by those derived from Satellite Laser Ranging (Loomis *et al.* 2019). We use the same scheme than in Sections 4.3 and 5.2 to compute the displacements choosing a sampling of $2^N = 1024$ which gives a sampling frequency of $f_s = 56.38$ cycle·yr⁻¹ and a frequency precision $\delta f = 0.055$ cycle·yr⁻¹.

We fit the deformation in order to only get the secular linear trend, which is the more likely to be affected by the viscoelastic rheology. This signal should denote the actual ice melting average velocity on the polar regions. We represent the associated secular displacement for different rheologies in polar regions in Fig. 10. To be consistent with the previous section, we choose to represent the displacements computed from PREM and patchy viscoelastic models. We choose first the MAXWELL 21–23 model consistent with GIA (Section 5.2) and with recent studies (Whitehouse *et al.* 2012; Peltier *et al.* 2015; Caron *et al.* 2017). Then we choose MAXWELL 18–23 to provide a model of low UM

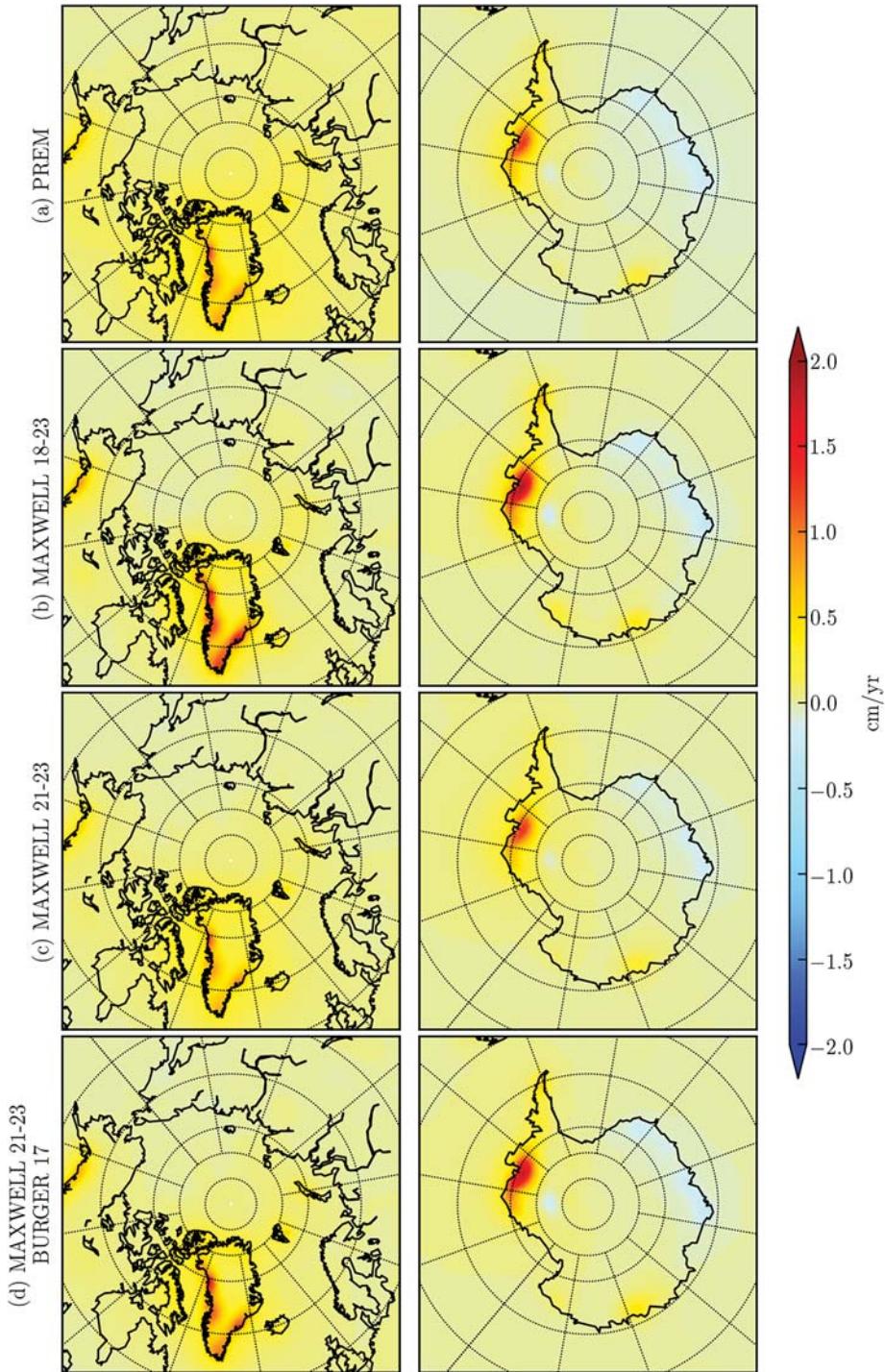


Figure 10. Actual vertical displacement rate (in $\text{cm} \cdot \text{yr}^{-1}$) from the GRACE/GRACE-FO CSR data mainly due to ice melting, for several viscoelastic rheologies and PREM.

viscosity as Nield *et al.* (2014) suggested studying the Antarctic Peninsula. Finally, we choose to represent a Burgers model with low transient viscosity.

The spatial pattern does not seem to radically change between the different viscoelastic rheologies and PREM except for the MAXWELL 18–23 rheology where we see higher deformation of the Antarctic Peninsula (Nield *et al.* 2014) and the Greenland coast side. As we explore extremely long periods (a trend is considered as an nearly infinite period signal), the displacements computed for all rheologies are close from each other and the differences are only coming from the interannual variations of the ice mass loss. In particular, the subduction zone in south Alsaka between Pacific and North American Plate, is not very sensitive to any particular viscosity of the UM in the range proposed by the model of Jadamec *et al.* (2013): η_{UM} is from 10^{19} to 10^{21} Pa·s. In any case, it seems not reasonable to choose global value of viscosity by extrapolating from some localized subduction zones (Geruo *et al.* 2013) or local studies (Nield *et al.* 2014; Bos *et al.* 2015). The main

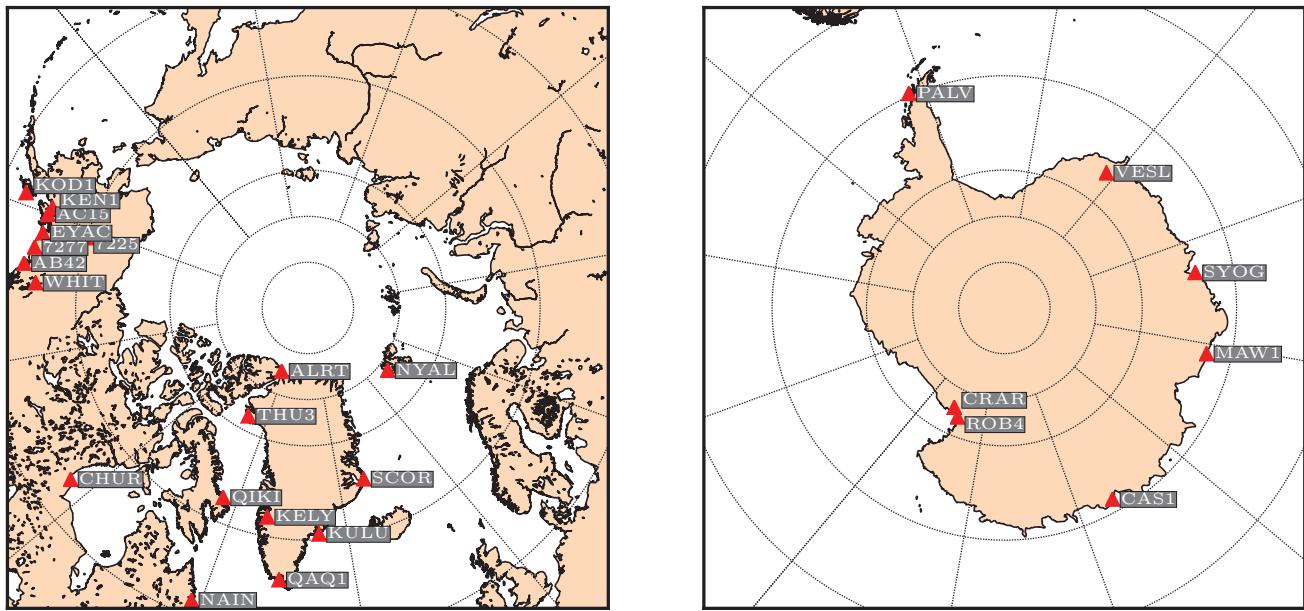


Figure 11. ITRF Stations positions for which we computed the vertical rate values in the Tables 5 and 6.

Table 5. Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations in Antarctica calculated for ITRF14 solution (Altamimi *et al.* 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.

ITRF site	PALV	CRAR	ROB4	CAS1	MAW1	SYOG	VESL
DOMES	66005M002	66001M004	66063M002	66011M001	66004M001	66006S002	66009M001
Lon. ($^{\circ}\text{E}$)	295.949	166.668	163.190	110.520	062.871	039.584	357.158
Lat. ($^{\circ}\text{N}$)	-64.775	-77.848	-77.034	-66.283	-67.605	-69.007	-71.674
ITRF Up rate	+5.865	-0.338	+1.076	+0.892	-0.546	+0.857	+0.782
Rates for GIA models							
ICE-6G	+2.469	+1.010	+0.995	+1.052	+0.414	+0.871	+1.381
MAXW21	+2.758	+2.781	+1.602	+1.996	+0.631	+1.201	+1.314
MAXW21-22	+3.330	+4.525	+3.229	+2.895	+1.493	+2.099	+2.293
MAXW21-23	+3.081	+3.765	+2.592	+2.783	+1.348	+2.005	+2.096
MAXW21-23	+2.938	+3.608	+2.506	+2.694	+1.331	+1.952	+2.034
BURGER 17							
Rates for GRACE data (without ICE-6G)							
PREM	+1.230	-0.027	-0.063	+0.750	-0.868	-1.311	-1.568
MAXW21	+1.499	+0.335	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-22	+1.498	+0.334	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-23	+1.498	+0.334	+0.300	+1.059	-0.532	-0.967	-1.222
MAXW21-23	+2.058	+0.267	+0.231	+1.478	-0.634	-1.254	-1.675
BURGER 17							

difference between models is the maximum value of the slope going from $1.3 \text{ cm}\cdot\text{yr}^{-1}$ for elastic and MAXWELL 21–23 until $1.8 \text{ cm}\cdot\text{yr}^{-1}$ adding a BURGER 17 and reaching $2.0 \text{ cm}\cdot\text{yr}^{-1}$ for the MAXWELL 18–23. It was predictable regarding Fig. 3, that the low viscosity models impact the most the deformation rate observed. The maximum vertical rates derived from ICESat in the Greenland are close to the one of PREM and MAXWELL 21–23, according to previous studies (Spada *et al.* 2012; Groh *et al.* 2014; Wang *et al.* 2018). These maximum rates are very localized in the west and southeast coasts but close to zero in the north east. Concerning Antarctica, we find the well-known ice melting uplift on the Pine Island Bay, the Byers Peninsula and the Budd coast while the west Antarctica subsides upon a thicker ice cap.

The great similarity between all of the presented models, for these range of frequencies, are maybe due to the fact that the model does not take into account the longitudinal and latitudinal dependence of the viscoelastic parameters, which can change the local uplift models such as the subduction zone of South Alaska (Jadamec *et al.* 2013). Also, taking into account time dependent velocities in polar ice melting should have an effect in the recovery of shorter period displacements even if the importance of viscoelasticity decreases with the period (Fig. 3). Despite, the global isotropic layered model provides interesting results, since we can compute deformations for very low degrees, along with local deformations that are consistent with (but not as precise as) local laterally heterogeneous models.

We finally compared the uplift rate of several ITRF2014 geodetic stations (Altamimi *et al.* 2016) shown in Fig. 11 at high latitude (Arctic and Antarctica) with the rates of some viscoelastic models (GIA and present-day ice melting) evaluated in this study (Tables 5 and 6). The

Table 6. Rates ($\text{mm}\cdot\text{yr}^{-1}$) of several ITRF stations around the North Pole calculated for ITRF14 solution (Altamimi *et al.* 2016) and for different rheologies in GIA models and GRACE deformations.

ITRF site	CHUR	NAIN	QIKI	ALRT	THU3	KELY	QAQ1	KULU	SCOR
DOMES	40128M002	40164M001	40166M001	40162M001	43001M002	43005M002	43007M001	43003M001	43006M002
Lon. ($^{\circ}$ E)	265.911	298.311	295.966	297.660	291.175	309.055	313.952	322.851	338.050
Lat. ($^{\circ}$ N)	+58.759	+56.537	+67.559	+82.494	+76.537	+66.987	+60.715	+65.579	+70.485
ITRF Up rate	+10.96	+4.491	+4.073	+6.194	+6.240	+2.415	+4.684	+7.110	+4.055
Rates for GIA models									
ICE-6G	+8.588	+2.012	-1.448	+3.877	-0.116	+0.674	+2.497	-0.516	+1.592
MAXW21	+0.952	+1.441	-4.574	+5.211	-3.489	+1.168	+1.993	-0.546	+1.944
MAXW21–22	+14.775	+5.127	-1.080	+4.513	-2.261	+2.473	+1.572	-0.752	+0.918
MAXW21–23	+8.508	+2.989	-2.761	+4.759	-2.916	+2.508	+2.071	+0.153	+1.630
MAXW21–23	+8.557	+2.967	-2.655	+4.578	-2.884	+2.483	+1.873	+0.113	+1.512
BURGER 17									
Rates for GRACE data (without ICE-6G)									
PREM	+0.692	+0.941	+3.029	+2.945	+7.105	+7.929	+6.492	+6.881	+2.263
MAXW21	+0.374	+0.572	+2.521	+2.454	+6.556	+7.340	+5.983	+6.314	+1.769
MAXW21–22	+0.374	+0.572	+2.521	+2.453	+6.556	+7.340	+5.982	+6.313	+1.768
MAXW21–23	+0.374	+0.572	+2.521	+2.453	+6.556	+7.340	+5.982	+6.313	+1.768
MAXW21–23	+0.320	+0.424	+2.557	+2.742	+8.032	+9.331	+7.813	+7.963	+1.647
BURGER 17									
ITRF site	NYAL	KOD1	KEN1	AC15	EYAC	7277	7225	AB42	WHIT
DOMES	10317M001	40419S001	49995S001	49397M001	49402M001	40416M001	40408S002	49377M001	40136M001
Lon. ($^{\circ}$ E)	011.865	207.807	208.650	210.276	214.250	217.514	212.502	221.101	224.778
Lat. ($^{\circ}$ N)	+78.930	+57.618	+60.675	+60.481	+60.549	+60.081	+64.978	+59.340	+60.751
ITRF Up rate	+6.813	+7.608	+11.24	+7.026	+1.325	+24.59	+1.595	+17.52	+1.551
Rates for GIA models									
ICE-6G	+0.635	-0.289	+0.311	+0.361	+0.524	+0.485	-0.661	+0.461	+1.572
MAXW21	-0.130	+0.504	+1.425	+1.077	+0.315	-0.224	-0.442	-0.119	+1.180
MAXW21–22	+0.729	-1.212	-0.170	-0.443	-0.790	-0.716	-1.826	+0.392	+3.567
MAXW21–23	+0.676	-0.547	+0.336	-0.043	-0.731	-0.974	-1.716	-0.243	+2.336
MAXW21–23	+0.650	-0.562	+0.292	-0.075	-0.741	-0.971	-1.703	-0.254	+2.282
BURGER 17									
Rates for GRACE data (without ICE-6G)									
PREM	+2.470	+0.835	+2.265	+2.998	+4.472	+5.745	+0.989	+5.698	+1.848
MAXW21	+2.017	+0.537	+1.936	+2.662	+4.118	+5.382	+0.652	+5.336	+1.492
MAXW21–22	+2.017	+0.537	+1.937	+2.663	+4.118	+5.383	+0.652	+5.337	+1.493
MAXW21–23	+2.017	+0.537	+1.937	+2.663	+4.118	+5.383	+0.652	+5.337	+1.493
MAXW21–23	+2.366	+0.518	+2.529	+3.512	+5.584	+7.290	+0.590	+7.129	+1.861
BURGER 17									

differences between the observed and modelled rates are quite sensitive to the localization of the stations and moreover to the rheological parameters for the GIA part. As discussed before, we see that the GRACE long-term signal is less affected by changing rheological parameters. To recover a consistent rate derived from GIA and present-day ice melting, present-day ice melting rates have to be combined with the ICE-6G rates, to be consistent with the models removed from the GRACE data used in this study. The difference of rates between ITRF and models can be explained by the interpolation of station position on the rough $1^{\circ} \times 1^{\circ}$ grids of the models, especially for stations on the seashore. The differences between elastic and viscoelastic modelled deformations due to present-day ice melting always exceed $0.1 \text{ mm}\cdot\text{yr}^{-1}$, which is the desired accuracy of the terrestrial reference frame (Altamimi *et al.* 2016). In Greenland, these differences reach more than $0.5 \text{ mm}\cdot\text{yr}^{-1}$. We note a systematic deviation from the elastic case for Maxwell models of mean $-0.4 \text{ mm}\cdot\text{yr}^{-1}$ in north pole and $+0.3 \text{ mm}\cdot\text{yr}^{-1}$ in south pole. This signal could be, among others, the signature of odd low degrees zonal deformations (including degree 1 along the Z-axis) and highlights the great dependence of the low degrees to viscosity of the mantle (Fig. 4).

6 DISCUSSION

We note an inconsistency in the choice of an Earth rheological model between solid Earth tides in the IERS Convention (Petit & Luzum 2010), deformation due to GIA and present-day ice melting. We compute the viscoelastic deformation for these three geophysical effects using consistent earth models, based on PREM model (Dziewonski & Anderson 1981), in which we added anelastic parameters in the mantle layers.

For the vertical displacement, we show that the differences between the IERS Convention (Petit & Luzum 2010) and more realistic viscoelastic models could exceed 1 mm for the 18.6-yr Lunar node tide. Such models should be tested in the processing of geodetic techniques (GNSS, DORIS, VLBI and SLR) long record (more than 20 yr), in order to improve the realization of terrestrial reference frame.

We also show that the mantle anelasticity is no longer negligible in the vertical displacements due to present-day ice melting in polar regions (see also Métivier *et al.* 2020). Indeed, the characteristic timescales (20–30 yr) are comparable to the Lunar node tide. If the spatial patterns are not very different between the elastic and viscoelastic models, the differences always exceed 0.1 mm·yr⁻¹ in polar areas, and sometimes more than 0.5 mm·yr⁻¹ in Greenland. Similarly to the tidal deformations, we observe that the introduction of mantle viscosity affects mostly the low degrees. In particular, the Fig. 3 shows that degree 1 is significantly affected by the viscosity profile. As it is important to accurately study the geocentre motion (Blewitt 2003; Métivier *et al.* 2010; Wu *et al.* 2012), which is particularly affected by present-day ice melting (Métivier *et al.* 2020), a viscoelastic approach should then be adopted in future models and characterization.

However, including mantle anelasticity for the present-day ice melting raises some issues about the consistency of the estimation of displacements along with the GIA. In order to properly isolate the two contributions, the same viscoelastic model should be used for both determination of long term ice history and recent ice melting, which can be measured with altimetry (Helm *et al.* 2014) and gravity (Luthcke *et al.* 2013; Velicogna *et al.* 2020) missions. This requires a great effort of computation since any GIA model should then be produced in a self-consistent manner with a present-day ice melting model. Moreover, the great variability of deformation measured with geodetic techniques between nearby stations (Tables 6 and 5) suggests inhomogeneous values of viscoelastic parameters in the mantle at various spatial scales (Métivier & Conrad 2008; Nield *et al.* 2014; Bos *et al.* 2015). This could largely influence past and present ice models and make their determination more complex. Unfortunately, the theoretical frame used to calculate Love numbers is for now not suited to take into account the spatial heterogeneities of the Earth structure, and should then be reviewed. This have already been done partially when we consider the ellipticity of the Earth (Métivier *et al.* 2005) for example.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially supported by the CNES (Centre National d'Etudes Spatiales). We thank the editor D. Agnew and the two anonymous reviewers for their constructive comments and remarks improving the clarity of this manuscript and the discussion about the Fourier method. AM and JPB designed the study. AM computed the Love numbers, developed the Fourier method and computed the deformations. AM wrote the preliminary draft. AM and JPB analysed the results and contributed to the original version before approved the published version of the manuscript.

DATA AVAILABILITY

The data underlying this paper are available in the paper and in its online supplementary material.

REFERENCES

- Geruo, A., Wahr, J. & Zhong, S., 2013. Computations of the viscoelastic response of a 3-D compressible Earth to surface loading: an application to glacial isostatic adjustment in Antarctica and Canada, *Geophys. J. Int.*, **192**(2), 557–572.
- Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L. & Collilieux, X., 2016. ITRF2014: a new release of the International Terrestrial Reference Frame modeling nonlinear station motions, *J. geophys. Res.*, **121**(8), 6109–6131.
- Alberman, Z., Jarosch, H. & Pekeris, C.L., 1959. Oscillations of the Earth, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **252**(1268), 80–95.
- Agnew, D.C., 2015. Earth tides, *Treatise on Geophysics*, 2nd edn, Vol. 3, pp. 151–178, Elsevier.
- Argus, D.F., Fu, Y. & Landerer, F.W., 2014. Seasonal variation in total water storage in California inferred from GPS observations of vertical land motion, *Geophys. Res. Lett.*, **41**(6), 1971–1980.
- Argus, D.F., Peltier, W.R., Drummond, R. & Moore, A.W., 2014. The Antarctica component of postglacial rebound model ICE-6G.C (VM5a) based on GPS positioning, exposure age dating of ice thicknesses, and relative sea level histories, *Geophys. J. Int.*, **198**(1), 537–563.
- Argus, D.F. *et al.*, 2017. Sustained water loss in California's mountain ranges during severe drought from 2012 to 2015 inferred from GPS, *J. geophys. Res.*, **122**(12), 10–559.
- Benjamin, D., Wahr, J., Ray, R.D., Egbert, G.D. & Desai, S.D., 2006. Constraints on mantle anelasticity from geodetic observations, and implications for the J2 anomaly, *Geophys. J. Int.*, **165**(1), 3–16.
- Beuthe, M., 2015. Tides on Europa: The membrane paradigm, *Icarus*, **248**, 109–134.
- Blewitt, G., 2003. Self-consistency in reference frames, geocenter definition, and surface loading of the solid Earth, *J. geophys. Res.*, **108**(B2), doi:10.1029/2002JB002082.
- Blewitt, G., Hammond, W.C. & Kreemer, C., 2018. Harnessing the GPS data explosion for interdisciplinary science, *Eos*, **99**, 1–2.
- Blewitt, G., Kreemer, C., Hammond, W.C. & Gazeaux, J., 2016. MIDAS robust trend estimator for accurate GPS station velocities without step detection, *J. geophys. Res.*, **121**(3), 2054–2068.
- Bos, M.S., Penna, N.T., Baker, T.F. & Clarke, P.J., 2015. Ocean tide loading displacements in western Europe: 2. GPS-observed anelastic dispersion in the asthenosphere, *J. geophys. Res.*, **120**(9), 6540–6557.
- Caron, L., Métivier, L., Greff-Lefftz, M., Fleitout, L. & Rouby, H., 2017. Inverting glacial isostatic adjustment signal using Bayesian framework and two linearly relaxing rheologies, *Geophys. J. Int.*, **209**(2), 1126–1147.
- Carrere, L., Lyard, F., Cancet, M., Guillot, A. & Picot, N., 2016. FES2014, a new tidal model: validation results and perspectives for improvements, in *Proceedings of the ESA Living Planet Symposium*, pp. 9–13.
- Chanard, K., Fleitout, L., Calais, E., Barbot, S. & Avouac, J.P., 2018. Constraints on transient viscoelastic rheology of the asthenosphere from seasonal deformation, *Geophys. Res. Lett.*, **45**(5), 2328–2338.
- Chinnery, M.A., 1975. The static deformation of an earth with a fluid core: a physical approach, *Geophys. J. Int.*, **42**(2), 461–475.
- Dehant, V. & Zschau, J., 1989. The effect of mantle inelasticity on tidal gravity: a comparison between the spherical and the elliptical Earth model, *Geophys. J. Int.*, **97**(3), 549–555.
- Doodson, A.T., 1921. The harmonic development of the tide-generating potential, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **100**(704), 305–329.

- Dziewonski, A.M. & Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth planet. Inter.*, **25**(4), 297–356.
- Farrell, W.E., 1972. Deformation of the Earth by surface loads, *Rev. Geophys.*, **10**(3), 761–797.
- Flechtner, F., Morton, P., Watkins, M. & Webb, F., 2014. *Status of the GRACE Follow-On Mission, Gravity, Geoid and Height Systems*, pp. 117–121, Springer, doi:10.1007/978-3-319-10837-7_15.
- Greff-Lefftz, M., Métivier, L. & Legros, H., 2005. Analytical solutions of love numbers for a hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous Earth, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **93**(1–4), 113–146.
- Groh, A., Ewert, H., Fritsche, M., Rülke, A., Rosenau, R., Scheinert, M. & Dietrich, R., 2014. Assessing the current evolution of the Greenland Ice Sheet by means of satellite and ground-based observations, *Surv. Geophys.*, **35**(6), 1459–1480.
- Hartmann, T. & Wenzel, H.G., 1995. The HW95 tidal potential catalogue, *Geophys. Res. Lett.*, **22**(24), 3553–3556.
- Helm, V., Humbert, A. & Miller, H., 2014. Elevation and elevation change of Greenland and Antarctica derived from CryoSat-2, *Cryosphere*, **8**, 1539–1559.
- Hinderer, J. & Legros, H., 1989. Elasto-gravitational deformation, relative gravity changes and Earth dynamics, *Geophys. J. Int.*, **97**(3), 481–495.
- Jacob, T., Wahr, J., Pfeffer, W.T. & Swenson, S., 2012. Recent contributions of glaciers and ice caps to sea level rise, *Nature*, **482**, 514–518.
- Jadamec, M.A., Billen, M.I. & Roeske, S.M., 2013. Three-dimensional numerical models of flat slab subduction and the Denali fault driving deformation in south-central Alaska, *Earth planet. Sci. Lett.*, **376**, 29–42.
- Kachuck, S.B., Cathles & L.M. III, 2019. Benchmarked computation of time-domain viscoelastic Love numbers for adiabatic mantles, *Geophys. J. Int.*, **218**(3), 2136–2149.
- Kaufmann, G. & Lambeck, K., 2002. Glacial isostatic adjustment and the radial viscosity profile from inverse modeling, *J. geophys. Res.*, **107**(B11), ETG 5–1-ETG 5–15.
- Kustowski, B., Ekström, G. & Dziewoński, A.M., 2008. Anisotropic shear-wave velocity structure of the Earth's mantle: a global model, *J. geophys. Res.*, **113**, doi:10.1029/2007JB005169.
- Lambeck, K., Smither, C. & Johnston, P., 1998. Sea-level change, glacial rebound and mantle viscosity for northern Europe, *Geophys. J. Int.*, **134**(1), 102–144.
- Laske, G., Masters, G., Ma, Z. & Pasquano, M., 2013. Update on CRUST1.0—a 1-degree Global Model of Earth's Crust, *Geophys. Res. Abstracts*, **15**, Abstract EGU2013-2658.
- Lee, E.H., 1955. Stress analysis in visco-elastic bodies, *Quart. Appl. Math.*, **13**(2), 183–190.
- Lee, E.H., Radok, J.R. M. & Woodward, W.B., 1959. Stress analysis for linear viscoelastic materials, *Trans. Soc. Rheol.*, **3**(1), 41–59.
- Li, W., Shum, C.K., Li, F., Zhang, S., Ming, F., Chen, W. & Zhang, Q., 2020. Contributions of Greenland GPS observed deformation from multisource mass loading induced seasonal and transient signals, *Geophys. Res. Lett.*, **47**(15), doi:10.1029/2020GL088627.
- Longman, I.M., 1962. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 1. Theory, *J. geophys. Res.*, **67**(2), 845–850.
- Longman, I.M., 1963. A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads: 2. Computations and numerical results, *J. geophys. Res.*, **68**(2), 485–496.
- Loomis, B.D., Rachlin, K.E. & Lutcke, S.B., 2019. Improved Earth oblateness rate reveals increased ice sheet losses and mass-driven sea level rise, *Geophys. Res. Lett.*, **46**, 6910–6917.
- Love, A.E. H., 1911. *Some Problems of Geodynamics*, Cambridge Univ. Press.
- Luthcke, S.B., Sabaka, T.J., Loomis, B.D., Arendt, A.A., McCarthy, J.J. & Camp, J., 2013. Antarctica, Greenland and Gulf of Alaska land-ice evolution from an iterated GRACE global mascon solution, *J. Glaciol.*, **59**(216), 613–631.
- Marotta, A.M., 2003. Benefits from GOCE within solid Earth geophysics, *Space Sci. Rev.*, **108**, 95–104.
- Martens, H.R., Simons, M., Owen, S. & Rivera, L., 2016. Observations of ocean tidal load response in South America from subdaily GPS positions, *Geophys. J. Int.*, **205**(3), 1637–1664.
- Martens, H.R., Rivera, L., Simons, M. & Ito, T., 2016. The sensitivity of surface mass loading displacement response to perturbations in the elastic structure of the crust and mantle, *J. geophys. Res.*, **121**(5), 3911–3938.
- Martens, H.R., Rivera, L. & Simons, M., 2019. LoadDef: a Python-based toolkit to model elastic deformation caused by surface mass loading on spherically symmetric bodies, *Earth Space Sci.*, **6**(2), 311–323.
- Mathews, P.M., Buffett, B.A. & Shapiro, I.I., 1995. Love numbers for a rotating spheroidal Earth: new definitions and numerical values, *Geophys. Res. Lett.*, **22**(5), 579–582.
- Métivier, L., Greff-Lefftz, M. & Diament, M., 2005. A new approach to computing accurate gravity time variations for a realistic earth model with lateral heterogeneities, *Geophys. J. Int.*, **162**(2), 570–574.
- Métivier, L., Conrad, C.P., 2008. Body tides of a convecting, laterally heterogeneous, and aspherical Earth, *J. geophys. Res.*, **113**(B11), doi:10.1029/2007JB005448.
- Métivier, L., Greff-Lefftz, M. & Altamimi, Z., 2010. On secular geocenter motion: the impact of climate changes, *Earth planet. Sci. Lett.*, **296**(3–4), 360–366.
- Métivier, L., Rouby, H., Reischung, P. & Altamimi, Z., 2020. ITRF2014, earth figure changes, and geocenter velocity: Implications for GIA and recent ice melting, *J. geophys. Res.*, **125**, e2019JB018333, doi:0.1029/2019JB018333.
- Na, S.H. & Baek, J., 2011. Computation of the load Love number and the load Green's function for an elastic and spherically symmetric earth, *J. Korean Phys. Soc.*, **58**(5), 1195–1205.
- Nield, G.A. et al., 2014. Rapid bedrock uplift in the Antarctic Peninsula explained by viscoelastic response to recent ice unloading, *Earth planet. Sci. Lett.*, **397**, 32–41.
- Peltier, W.R., 1974. The impulse response of a Maxwell Earth, *Rev. Geophys.*, **12**(4), 649–669.
- Peltier, W.R., Wu, P. & Yuen, D.A., 1981. The viscosities of the Earth's mantle, *Anelast. Earth*, **4**, 59–77.
- Peltier, W.R., Argus, D.F. & Drummond, R., 2015. Space geodesy constrains ice age terminal deglaciation: The global ICE-6G_C (VM5a) model, *J. geophys. Res.*, **120**(1), 450–487.
- Petit, G. & Luzum, B., 2010. IERS conventions (2010) (No. IERS-TN-36), Bureau International Des Poids Et Mesures, Sèvres (FRANCE).
- Ranalli, G., 1995. *Rheology of the Earth*, Springer Science & Business Media.
- Roy, K. & Peltier, W.R., 2015. Glacial isostatic adjustment, relative sea level history and mantle viscosity: reconciling relative sea level model predictions for the US East coast with geological constraints, *Geophys. J. Int.*, **201**(2), 1156–1181.
- Sabadini, R., Yuen, D.A. & Boschi, E., 1982. Polar wandering and the forced responses of a rotating, multilayered, viscoelastic planet, *J. geophys. Res.*, **87**(B4), 2885–2903.
- Sabadini, R., Vermeersen, B. & Cambiotti, G., 2016. *Global Dynamics of the Earth*, Springer Netherlands.
- Save, H., Bettadpur, S. & Tapley, B.D., 2016. High-resolution CSR GRACE RL05 mascons, *J. geophys. Res.*, **121**(10), 7547–7569.
- Shepherd, A., Ivins, E., Rignot et al., 2018. Mass balance of the Antarctic Ice Sheet from 1992 to 2017, *Nature*, **558**, 219–222.
- Shepherd, A., Ivins, E., Rignot, E. et al., 2020. Mass balance of the Greenland Ice Sheet from 1992 to 2018, *Nature*, **579**(7798), 233–239.
- Spada, G., Antonioli, A., Cianetti, S. & Giunchi, C., 2006. Glacial isostatic adjustment and relative sea-level changes: the role of lithospheric and upper mantle heterogeneities in a 3-D spherical Earth, *Geophys. J. Int.*, **165**(2), 692–702.
- Spada, G. & Boschi, L., 2006. Using the Post-Widder formula to compute the Earth's viscoelastic Love numbers, *Geophys. J. Int.*, **166**(1), 309–321.
- Spada, G., 2008. ALMA, a Fortran program for computing the viscoelastic Love numbers of a spherically symmetric planet, *Comput. Geosci.*, **34**(6), 667–687.

- Spada, G. *et al.*, 2011. A benchmark study for glacial isostatic adjustment codes, *Geophys. J. Int.*, **185**(1), 106–132.
- Spada, G., Ruggieri, G., Sorensen, L.S., Nielsen, K., Melini, D. & Colleoni, F., 2012. Greenland uplift and regional sea level changes from ICESat observations and GIA modelling, *Geophys. J. Int.*, **189**(3), 1457–1474.
- Spada, G., 2013. Love numbers of a generalized Maxwell sphere, *Stud. Geophys. Geod.*, **57**(1), 1–16.
- Steffen, H. & Kaufmann, G., 2005. Glacial isostatic adjustment of Scandinavia and northwestern Europe and the radial viscosity structure of the Earth's mantle, *Geophys. J. Int.*, **163**(2), 801–812.
- Tanaka, Y., Okuno, J. & Okubo, S., 2006. A new method for the computation of global viscoelastic post-seismic deformation in a realistic earth model (I)—vertical displacement and gravity variation, *Geophys. J. Int.*, **164**(2), 273–289.
- Tapley, B.D., Bettadpur, S., Ries, J.C., Thompson, P.F. & Watkins, M.M., 2004. GRACE measurements of mass variability in the Earth system, *Science*, **305**(5683), 503–505.
- Tobie, G., Mocquet, A. & Sotin, C., 2005. Tidal dissipation within large icy satellites: applications to Europa and Titan, *Icarus*, **177**(2), 534–549.
- Trenberth, K.E., 1990. Recent observed interdecadal climate changes in the Northern Hemisphere, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **71**(7), 988–993.
- Velicogna, I. *et al.*, 2020. Continuity of ice sheet mass loss in Greenland and Antarctica from the GRACE and GRACE follow-on missions, *Geophys. Res. Lett.*, **47**, e2020GL087291, doi:10.1029/2020GL087291.
- Vermeersen, L.A., Sabadini, R. & Spada, G., 1996. Analytical visco-elastic relaxation models, *Geophys. Res. Lett.*, **23**(7), 697–700.
- Vermeersen, L.L. A. & Sabadini, R., 1997. A new class of stratified viscoelastic models by analytical techniques, *Geophys. J. Int.*, **129**(3), 531–570.
- Wahr, J.M., 1981. Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth, *Geophys. J. Int.*, **64**(3), 677–703.
- Walterova, M. & Behounkova, M., 2017. Tidal effects in differentiated viscoelastic bodies: a numerical approach, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **129**(1–2), 235–256.
- Wang, H., Xiang, L., Jia, L., Jiang, L., Wang, Z., Hu, B. & Gao, P., 2012. Load Love numbers and Green's functions for elastic Earth models PREM, iasp91, ak135, and modified models with refined crustal structure from Crust 2.0, *Comput. Geosci.*, **49**, 190–199.
- Wang, S.Y., Chen, J.L., Wilson, C.R., Li, J. & Hu, X., 2018. Reconciling GRACE and GPS estimates of long-term load deformation in southern Greenland, *Geophys. J. Int.*, **212**(2), 1302–1313.
- Whitehouse, P.L., Bentley, M.J., Milne, G.A., King, M.A. & Thomas, I.D., 2012. A new glacial isostatic adjustment model for Antarctica: calibrated and tested using observations of relative sea-level change and present-day uplift rates, *Geophys. J. Int.*, **190**(3), 1464–1482.
- Wieczorek, M.A. & Meschede, M., 2018. Shtools: tools for working with spherical harmonics, *Geochem., Geophys., Geosyst.*, **19**(8), 2574–2592.
- Wu, P. & Peltier, W.R., 1982. Viscous gravitational relaxation, *Geophys. J. Int.*, **70**(2), 435–485.
- Wu, P., 2006. Sensitivity of relative sea levels and crustal velocities in Laurentide to radial and lateral viscosity variations in the mantle, *Geophys. J. Int.*, **165**(2), 401–413.
- Wu, P., Wang, H. & Steffen, H., 2013. The role of thermal effect on mantle seismic anomalies under Laurentia and Fennoscandia from observations of Glacial Isostatic Adjustment, *Geophys. J. Int.*, **192**(1), 7–17.
- Wu, X., Ray, J. & van Dam, T., 2012. Geocenter motion and its geodetic and geophysical implications, *J. Geodyn.*, **58**, 44–61.
- Zhang, B. *et al.*, 2019. Geodetic and model data reveal different spatio-temporal patterns of transient mass changes over Greenland from 2007 to 2017, *Earth planet. Sci. Lett.*, **515**, 154–163.

SUPPORTING INFORMATION

Supplementary data are available at *GJI* online.

suppl_data

Please note: Oxford University Press is not responsible for the content or functionality of any supporting materials supplied by the authors. Any queries (other than missing material) should be directed to the corresponding author for the paper.

APPENDIX: IMPLEMENTATION OF NUMERICAL INTEGRATION

Considering the y_{in} system derived in Longman (1962), we can write the matricial equivalent

$$\frac{dY}{dr} = S(r, \omega)Y(r), \quad (\text{A1})$$

where $Y(r)$ is a 6 vector containing the y_i and $S(r, \omega)$ is a 6×6 matrix depending on the density ρ_0 , the downward gravity field g_0 , the Lamé parameters λ and μ and the radius r for a stratified Earth. Different Earth models can be used (making sure that they are spherically symmetric elastic and isotropic) like PREM (Dziewonski & Anderson 1981) or STW105 also known as REF (Kustowski *et al.* 2008). Such models are generally computed from seismological data. Several other models exist and can also be used as shown in Na & Baek (2011), especially refined crust models such as CRUST1.0 (Laske *et al.* 2013). Note that for simplest stratified cases, we can find analytical solutions using power series decomposition (Wu & Peltier 1982; Greff-Lefftz *et al.* 2005).

A1 Centre boundary conditions

In the centre of the Earth, we write that there are no displacements and the perturbed potential is null: $y_1(0) = 0, y_3(0) = 0, y_5(0) = 0$. There are consequently only three independent normalized initial conditions noted Y_A^0, Y_B^0 and Y_C^0 to propagate from $r = 0$ until the ICB (inner core boundary) using the solid system (A1)

$$\begin{cases} Y_A^0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ Y_B^0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0) \\ Y_C^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{A2})$$

The global solution at the centre is $Y(r=0) = AY_A^0 + BY_B^0 + CY_C^0$ where A, B, C are undetermined constants. All the y_i being continuous through solid–solid interface, we can perform the integration of each $Y_{A,B,C}^0$ straight to the ICB where the respective solutions are noted $Y_{A,B,C}^{\text{ICB}}$. Then, we need to precisely determine the continuity of the y_i through solid–liquid interface and integrate the solution in the liquid Core.

A2 Liquid core

The equations of propagation in a liquid core are given in Chinnery (1975) for $n \geq 1$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{z_5}{g_0} \\ \dot{z}_5 = z_6 + \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} z_5 \\ \dot{z}_6 = \left[-\frac{2}{r} - \frac{4\pi G \rho_0}{g_0} \right] z_6 + \left[-\frac{16\pi G \rho_0}{rg_0} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right] z_5 \end{cases}, \quad (\text{A3})$$

where z_i are the n^{th} zonal harmonic of the deformation ($i = 1$), of the gravitational potential ($i = 5$) and such that $z_6 = \dot{z}_5 - 4\pi G \rho_0 z_1$, defined in the same way than y_6 for the solid system. We use the letter z to emphasize the conceptual difference between these variables and the one used for solid material. All the new variables are continuous throughout a liquid–liquid interface which is convenient in a stratified core. In the other hand, the solid–liquid interface conditions are (at the ICB for example) :

$$\begin{cases} y_1^{\text{ICB}} = Ay_1^A + By_1^B + Cy_1^C = z_1^{\text{ICB}} + K_1 \\ y_2^{\text{ICB}} = Ay_2^A + By_2^B + Cy_2^C = K_1 \rho_0^{\text{ICB}} g_0^{\text{ICB}} \\ y_3^{\text{ICB}} = Ay_3^A + By_3^B + Cy_3^C = K_2 \\ y_4^{\text{ICB}} = Ay_4^A + By_4^B + Cy_4^C = 0 \\ y_5^{\text{ICB}} = Ay_5^A + By_5^B + Cy_5^C = z_5^{\text{ICB}} \\ y_6^{\text{ICB}} = Ay_6^A + By_6^B + Cy_6^C = z_6^{\text{ICB}} - 4\pi G K_1 \rho_0^{\text{ICB}} \end{cases}, \quad (\text{A4})$$

where K_1 and K_2 are undetermined constants, ρ_0^{ICB} the density at the ICB in the liquid (the density should be discontinuous at the interface) and g_0^{ICB} the downward gravity field (continuous at the interface). Since z_1 and z_5 are linked by eqs (A3), we only need to find the expression of z_5^{ICB} and z_6^{ICB} to fully determine the initial condition of the integration in the fluid. Combining eqs (A4), we find

$$\begin{cases} z_5^{\text{ICB}} = A [y_5^A + k_1 y_5^B + (k_2 + k_1 k_3) y_5^C] \\ z_6^{\text{ICB}} = A \left([y_6^A + k_1 y_6^B + (k_2 + k_1 k_3) y_6^C] + \frac{4\pi G}{g_0^{\text{ICB}}} [y_2^A + k_1 y_2^B + (k_2 + k_1 k_3) y_2^C] \right) \end{cases}. \quad (\text{A5})$$

with undetermined constant A and where k_1, k_2 and k_3 are constants given by

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\rho_0^{\text{ICB}} (y_5^A + k_2 y_5^B) + (y_2^A + k_2 y_2^B) - g_0^{\text{ICB}} \rho_0^{\text{ICB}} (y_1^A + k_2 y_1^B)}{\rho_0^{\text{ICB}} (y_5^B + k_3 y_5^C) + (y_2^B + k_3 y_2^C) - g_0^{\text{ICB}} \rho_0^{\text{ICB}} (y_1^B + k_3 y_1^C)}, \\ k_2 &= \frac{y_4^A}{y_4^C}, \\ k_3 &= \frac{y_4^B}{y_4^C}. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

From the normalized initial conditions $(z_5^{\text{ICB}}/A, z_6^{\text{ICB}}/A)$, we integrate the system (A3) until the CMB (core–mantle boundary), and apply again the liquid–solid conditions (A4) to the system $(z_1^{\text{CMB}}, z_5^{\text{CMB}}, z_6^{\text{CMB}})$, giving

$$\begin{pmatrix} y_1^{\text{CMB}} \\ y_2^{\text{CMB}} \\ y_3^{\text{CMB}} \\ y_4^{\text{CMB}} \\ y_5^{\text{CMB}} \\ y_6^{\text{CMB}} \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} 1 \\ g_0^{\text{CMB}} \rho_0^{\text{CMB}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4\pi G \rho_0^{\text{CMB}} \end{pmatrix}_{\alpha} + L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\beta} + \frac{1}{A} \begin{pmatrix} z_1^{\text{CMB}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_5^{\text{CMB}} \\ z_6^{\text{CMB}} \end{pmatrix}_{\gamma} \quad (\text{A7})$$

where L_1 and L_2 are similar constants than K_1 and K_2 at the ICB and ρ_0^{CMB} is the density in the liquid core at the CMB.

A3 Integration until the outer surface

We then integrate the solid system (A1) through the mantle and the crust for the three independent initial conditions (α, β, γ) . To obtain the global solutions, we need to determine the three constants $1/A, L_1$ and L_2 with the boundary conditions at the outer surface which are

described in Section 3.1. The 6 unknown at the outer surface [$y_1(a)$, $y_3(a)$, $y_5(a)$, $1/A$, L_1 , L_2] can be obtained by solving the following Cramer system with a right member vector containing the outer boundary conditions

$$\begin{pmatrix} y_1^\alpha & y_1^\beta & y_1^\gamma & -1 & 0 & 0 \\ y_2^\alpha & y_2^\beta & y_2^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ y_3^\alpha & y_3^\beta & y_3^\gamma & 0 & -1 & 0 \\ y_4^\alpha & y_4^\beta & y_4^\gamma & 0 & 0 & 0 \\ y_5^\alpha & y_5^\beta & y_5^\gamma & 0 & 0 & -1 \\ y_6^\alpha & y_6^\beta & y_6^\gamma & 0 & 0 & \frac{n+1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 1/A \\ y_1(a) \\ y_3(a) \\ y_5(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{(2n+1)g_e}{4\pi G a} U'_n + P_n\right) \\ 0 \\ \tau_n \\ 0 \\ \frac{2n+1}{a}(U_n + U'_n) \end{pmatrix}. \quad (\text{A8})$$

We note that the boundary conditions in the outer surface (eq. 10) are applicable only if the outer layer of the Earth is solid. In the case of PREM, the outer layer is the ocean and is therefore liquid. Then it is common to replace this ocean layer by an extension of the last crustal layer. If we do this, we actually increase the density of the outer layer such that the mass of the Earth is a little larger than in the original PREM. In order to keep the original value for the mass of the Earth, we need to reassign the density of the outer crust layer as the average of the density of the ocean and the crust, weighted by the corresponding thickness of these two layers. Finally, we found an average density of $2283.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ which is less than the original density $2600 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ of the top crust layer. The difference in the Love numbers can be important especially in the high degrees asymptote. This difference reaches 15 per cent for k' (h' and l' are not affected) and between 15 per cent and 45 per cent for the TLN. We choose here to replace the ocean by the crust using the modified value of the density as Martens *et al.* (2016) did.

A4 Remarks on numerical integration

A4.1 Integration in $r = 0$

The gravito-elastic system (A1) is not mathematically defined at the origin. There are two options in order to perform the integration. The first is to begin the integration of the system from a small non-zero radius (for example $R = 1 \text{ km}$) to avoid the singularity. The second is to consider an homogeneous sphere of same radius R and determine the analytical solution of the homogeneous problem inside (Greff-Lefftz *et al.* 2005). This gives three independent solutions multiple of three constants A , B and C which are the initial conditions of the numerical integration replacing the conditions (A2). These two methods give similar results for degrees beyond 1 especially for small radii ($R < 10 \text{ km}$).

A4.2 High degree integration

It is common to implement a dimensionless form of the system for computational convenience. The equations and the boundary conditions at the surface are then divided by dimensional constants (Longman 1963). The major advantage is to perform the integration for high degrees without numerical divergence issues. We used a Runge–Kutta integrator of order 2 with integration step as small as needed and a normalization of the integration result (result is between -1 and 1). Of course, the constants $1/A$, L_1 and L_2 are affected but there are no consequences in the surface Love numbers as they are determined simultaneously to the three constants in the inversion of (A8). However, the integration function to compute Love numbers in the deep interior presented in Section 5.2 have to be unnormalized since the constants are used to determine the solutions in depth. For degrees $n > 300$, the Love numbers are no longer dependent in the inner core and liquid core structure and we can perform the integration from the base of the mantle (at the CMB) as if we integrate from the centre, applying the initial conditions (A2). The difference between a mantle and total integration for these degrees are around numerical errors ($\sim 10^{-8}$ in relative values).

Liste des stations GNSS utilisées

Ce tableau donne les résultats des tendances et des cycles annuels sinusoïdaux pour les composantes de déplacement Est Nord et verticale ajustées sur les séries temporelles des 1077 stations du réseau de la Figure 1.7b. Ces ajustements ont été obtenus en utilisant le logiciel CATS ([Williams, 2008](#)) et en ajustant par ailleurs les sauts, le cycle semi-annuel, les fréquences draconitiques, une amplitude de bruit blanc, une amplitude de bruit coloré et son indice spectral.

Nom	Longitude (°E)	Latitude (°N)	Début (yyyyddd)	Fin (yyyyddd)	Tendance (mm·an ⁻¹)	Annuel [cos] (mm)	Annuel [sin] (mm)
ABEA	52.7890	-4.7410	2005354	2009105	[Est] 0.7720	-0.5822	0.1500
					[Nord] -0.1720	0.9466	-0.5956
					[Vert] -0.5338	0.3928	-2.8109
ABEP	52.1394	-4.5713	2005214	2020365	0.0050	-0.1798	-0.1355
					0.1630	-0.2487	0.1718
					0.1725	-1.6680	-0.0774
ABYW	52.4241	-4.0044	1998099	2020365	0.7000	0.4184	0.8942
					0.4480	-0.1685	-0.1293
					-0.0368	-0.7698	0.3452
ACER	40.7867	15.9424	2007192	2020325	0.8600	-0.1784	-0.9933
					4.3690	0.0917	0.3165
					0.6340	-2.4329	-3.1611
ACNS	41.7001	-6.3521	2008049	2020366	-0.1260	-1.4322	0.3078
					0.8130	-0.2046	0.9015
					-0.5166	-4.0173	-2.8649
ACOM	46.5479	13.5149	2003186	2020304	0.2580	0.3003	-0.3239
					1.1160	-0.1304	0.6801
					1.1669	-0.4006	-1.6525
ACOR	43.3644	-8.3989	1998345	2020335	3.3640	0.4491	0.3211
					0.2170	-0.1869	-0.2300
					-2.6755	-1.7150	-0.6189
ADAR	52.7892	-4.7413	2009184	2020365	0.3530	-0.1476	-0.3073
					0.3080	-0.8559	0.5276
					0.1109	-0.8261	-1.3163
AFAL	46.5271	12.1745	2003173	2020333	-0.3340	0.5235	3.8857
					0.8420	-0.2516	0.4267
					1.4080	-0.8322	-2.7710
AGDE	43.2964	3.4664	2007185	2020366	0.0330	-0.6073	-1.4285
					0.1580	-1.4952	1.2908
					-0.3397	-1.3937	-1.4513
AGDS	43.3126	3.4743	2009104	2020366	0.2920	-0.4592	-0.3561
					0.2420	-0.4691	0.5689

					-0.2370	-0.5027	-0.6154
AGEN	44.1725	0.6115	2012041	2020366	-0.4080	1.6610	-0.8254
					0.1820	0.2609	-0.7486
					0.6757	-2.8225	-0.2955
AICI	43.3336	-1.0144	2011049	2020366	0.3030	-0.6028	-0.1972
					0.2500	-3.5877	-0.6263
					0.2229	-0.2765	-1.9530
AIGL	44.1214	3.5813	2002252	2020366	0.2740	0.1685	0.3081
					0.0760	-0.6091	0.0170
					0.2439	-0.0942	-1.9127
AILT	47.8770	3.3559	2006296	2020366	0.3590	-0.7669	-0.4942
					0.1110	-1.0025	0.2770
					0.2203	-2.5786	-2.2319
AJAC	41.9275	8.7626	2000022	2020363	0.4330	-0.2328	0.2955
					0.2140	0.0034	1.0398
					1.6845	-0.4070	-0.6880
AJAL	41.2161	-2.2736	2007129	2020366	-0.3650	-0.3819	-1.2486
					-0.1410	0.0821	1.1061
					-0.5649	-0.6383	-1.8701
ALAC	38.3389	-0.4812	1998065	2020335	-0.6170	0.1631	0.0095
					0.4110	0.5548	0.5747
					0.2862	-1.4592	-0.6278
ALBA	38.9779	-1.8564	2002190	2020335	-1.3270	0.4834	0.3492
					0.2090	0.4538	0.1414
					-8.6620	-2.1960	-0.1702
ALBI	39.9458	16.4559	2012132	2018007	0.1620	2.5507	1.6659
					4.5900	1.6243	8.2974
					-0.0505	-0.4893	14.2970
ALBO	35.9398	-3.0342	2015325	2020335	-2.1070	-0.2803	-0.3296
					1.6950	-1.8077	0.7192
					-1.2284	1.7080	1.5477
ALC1	41.0579	-0.1453	2016231	2020335	1.3890	-0.7894	-0.1724
					-0.2020	0.8223	0.9123
					-0.8154	-0.6880	-0.9985
ALDB	52.1532	1.6028	2006187	2020365	0.0870	0.3800	0.0850
					0.3610	-0.5094	-0.0013
					0.7145	-4.1495	-0.7483
ALME	36.8525	-2.4594	1999338	2020335	-1.5430	0.7710	0.2693
					0.0160	0.8759	0.3892
					0.1359	-1.7083	-0.9091
ALMO	38.7055	-4.1803	2013177	2020335	-1.0360	1.1896	-0.1238
					1.8000	-1.1252	-1.9090
					0.2738	-1.4677	-1.7830
ALOR	39.9344	4.1401	2016097	2020344	-0.0860	0.8113	-0.2645
					0.5340	-0.2531	1.0187
					-0.4697	-1.2235	-0.2705
ALPA	41.7224	12.6114	2014265	2020366	-0.7090	0.2144	0.7153
					1.4870	-0.2607	0.8752
					1.6286	0.4935	-2.8808
ALPE	45.0866	6.0835	2006303	2020366	-0.6170	-0.4245	0.0081
					0.0290	0.0273	0.7373

					0.2384	-0.4685	-3.1830
ALU2	47.0419	3.6268	2013051	2020366	0.4310	-0.5655	0.6367
					0.2650	-0.1448	0.8854
					0.0436	-1.8605	-3.6178
AMB2	45.5406	3.7501	2007255	2020366	0.5780	-0.1295	-0.1029
					-0.1240	-0.9307	0.1896
					0.3930	-1.4635	-2.0958
AMBL	54.4342	-2.9647	2004145	2009012	-0.1160	-0.1868	-0.1708
					-0.6410	-0.4074	-0.7314
					2.0230	-3.6440	0.6296
AMER	51.6772	-0.5594	2004223	2020365	0.5660	-0.6945	-0.2385
					0.1430	-0.5959	-0.1227
					-0.0520	-2.0255	-1.3926
AMTY	47.9650	2.7282	2015070	2020366	0.0710	0.8630	0.2225
					0.2340	-1.2775	0.5744
					-1.6067	-4.8508	-0.7850
AMNS	49.8588	2.2384	2012101	2020366	-0.5050	-1.1620	0.6421
					-0.3270	-2.0954	-0.3760
					-0.1523	-1.9392	-2.9816
AMUR	40.9073	16.6040	2005223	2020366	0.7990	0.2003	-0.4255
					4.3900	-0.0511	0.5299
					0.2733	-2.0167	-2.4870
ANAY	45.2403	4.6817	2012026	2020366	0.3280	0.0216	0.1485
					-0.0100	-0.7037	0.6120
					0.7011	-1.0991	-3.6069
ANCG	43.6028	13.5019	2012295	2016361	1.1580	-0.7643	0.5525
					3.9000	1.2787	1.5165
					1.4741	-1.5579	-0.9719
ANCN	43.6072	13.5316	2011214	2020366	0.7970	-0.7991	0.4023
					2.5790	-1.7476	3.6962
					0.2784	-1.4480	-2.0930
ANDE	69.3261	16.1348	2001008	2015168	-0.8710	-0.6621	0.3909
					0.8890	-3.2729	-1.8399
					2.3593	-2.5287	-3.4959
ANGE	47.4719	-0.5478	2004035	2020366	-0.0370	0.1684	-0.0975
					0.2100	0.8433	0.1165
					0.0619	-3.0791	-2.5565
ANGL	46.4056	-1.4061	2007081	2020366	0.1940	-0.4362	-0.0314
					0.1360	-1.1978	0.0197
					-0.1821	-1.4054	-1.5153
ANLX	51.6893	-5.0792	2009106	2020365	0.2820	0.0958	0.0936
					0.1000	-0.4920	0.7040
					-0.8836	-3.2183	-0.8087
APPL	51.0569	-4.1996	2004325	2020365	0.6800	-0.0510	0.0425
					0.0070	0.1611	0.5728
					-0.3074	-1.4677	-0.8362
APRC	41.7574	15.5428	2015113	2020366	1.4020	0.5231	-0.1812
					4.2220	-1.4175	1.2634
					-0.2386	0.5098	-2.9055
AQSA	39.7210	16.0837	2012130	2020366	0.2090	-0.9667	0.6452
					3.9770	0.0238	0.8431

					0.7900	-0.6224	-3.0258
AQUI	42.3682	13.3502	1999165	2020216	-0.5310	-0.5798	0.4783
					1.4040	-0.0113	0.8558
					-0.1379	-1.6003	-3.1725
ARAC	37.8939	-6.5654	2017073	2020341	-1.0830	1.8128	0.3323
					1.0030	-0.0511	0.7445
					0.2220	-2.5085	-1.0373
ARAN	45.7152	5.4247	2011083	2020038	0.6200	-2.2790	1.1499
					0.9930	-0.1865	1.1990
					1.0695	1.1686	-1.8113
ARDL	51.9158	0.9619	2009006	2020365	0.0200	-0.2572	-0.7112
					0.1780	-1.1235	-0.1159
					-0.4852	-2.6389	-0.7848
ARDN	47.7783	1.8724	2011339	2020366	-0.1210	-2.0756	-0.5763
					-0.3420	0.3208	-0.7976
					0.3187	-4.0681	-2.7218
ARDU	41.6658	-3.7426	2009211	2020366	-1.5650	0.9836	2.6599
					0.5770	-0.1935	0.9015
					-0.6532	-0.1879	-1.2121
ARIS	56.9096	-5.8494	2009184	2020365	-0.0150	-0.7760	-0.1598
					0.3450	-0.8148	0.3543
					1.5538	0.0449	-0.9967
ARNA	47.9465	0.1809	2011049	2020366	0.4580	-0.8151	0.0608
					0.4340	3.5221	0.5267
					0.1448	-1.0429	-3.2702
ARQT	42.7550	13.1987	2016257	2020365	-1.3270	-2.0812	0.9239
					4.9100	-0.1619	2.0424
					-9.2528	4.2476	-4.5039
ARSP	40.2067	-5.0828	2008073	2020366	-0.2920	0.2183	-0.1505
					-0.0380	-0.0855	0.4114
					0.0564	-0.8430	-2.2106
ARUF	43.0995	-0.4311	2014072	2020366	0.2610	0.9358	1.4100
					0.4410	-0.9040	0.2516
					-0.6897	0.5460	-1.9690
ASAP	53.2513	-3.4801	2004330	2020365	0.2760	-0.9867	0.8983
					0.1870	-0.6542	0.0853
					0.6136	-4.4784	-0.7207
ASIA	45.8663	11.5254	2008100	2017286	0.0120	1.0214	-0.6306
					0.8810	-0.4444	0.9846
					0.7294	-1.9836	-2.8786
ASTO	42.4572	-6.0547	2008072	2020366	0.1210	0.2601	-0.4805
					0.3270	-0.0545	0.4572
					-0.0038	-0.9036	-1.6362
ATAL	38.6531	22.9994	2009086	2020366	-12.0420	-0.9885	-0.4962
					-20.1060	-2.0988	1.3847
					-0.1934	-3.2106	-5.5602
ATBU	43.4760	12.5478	2010118	2020361	2.6510	1.1572	-0.3747
					3.5880	0.7925	0.9727
					-1.2041	-1.8665	-2.5630
ATFO	43.3701	12.5671	2009190	2020366	1.0670	-0.5871	0.2590
					3.8890	-0.3888	1.1444

					1.4868	-2.0134	-1.9641
					-0.2180	-0.0455	-0.4996
ATLO	43.3151	12.4071	2010083	2020363	1.8700	-0.0058	1.1032
					0.6990	-0.6670	-2.1074
					-0.8980	-0.2126	-1.4225
ATMI	43.3340	12.2673	2012026	2020366	2.0100	0.0027	0.2613
					0.6786	-0.6410	-2.4806
					0.1610	0.5973	-0.5195
ATST	42.1683	9.3360	2010298	2020366	0.2720	-0.7057	0.7625
					-0.0547	-1.6402	-2.3118
					-0.8690	0.2588	-0.4807
ATTE	43.1998	12.3505	2010084	2020190	1.7130	-0.1676	0.6749
					0.6398	-1.6017	-2.7257
					0.3140	0.7611	-0.5307
ATTL	52.5168	0.9881	2006290	2020365	0.1590	-0.0217	0.3478
					-0.9536	-2.8129	-0.0336
					-0.6820	-1.0231	0.1368
AUBG	48.4213	10.9213	2013015	2020335	0.3300	-0.3808	0.7096
					0.8758	0.0176	-3.4165
					0.1550	0.2242	-0.5802
AUCH	43.6495	0.5807	2007081	2020366	0.0850	-0.1157	0.5503
					0.0445	-2.5446	-2.0751
					0.0560	0.0718	0.5841
AUDR	58.4225	24.3137	2009004	2020366	-0.5430	-0.6822	0.5260
					2.8612	-2.7974	-3.2896
					0.2190	0.1599	0.6115
AUNI	46.1039	-0.9486	2011049	2020366	0.2620	0.6023	0.8446
					0.0418	-0.9115	-1.9579
					2.0330	-0.7065	-1.5211
AUT1	40.5668	23.0037	2005090	2020366	-6.7760	-0.3292	0.4178
					-1.3918	-2.9223	-1.8506
					0.3910	-0.7764	-0.5498
AUTN	46.9538	4.2890	2005105	2020366	0.1480	-1.4727	0.4102
					-0.6554	-1.7463	-2.0449
					0.3590	-0.4103	0.2770
AVAL	47.4940	3.9153	2013261	2020366	0.3700	-1.2997	0.6468
					0.5696	-2.7686	-3.0849
					1.2660	3.0907	-0.2473
AVI2	40.6638	-4.6782	2014213	2020366	1.4950	-0.3620	1.5135
					0.9306	-1.5524	-3.2159
					-0.0700	0.4890	-0.1246
AVIL	40.6511	-4.6793	2006019	2015342	0.4640	0.3245	-0.1058
					-0.2165	-3.0048	-2.0946
					0.0170	0.0555	-0.0931
AVR1	44.9561	5.6532	2008150	2020350	0.0150	-0.2035	0.3646
					-0.0233	-1.9926	-2.2889
					0.1960	-0.1569	-0.6333
AVRA	48.6818	-1.3630	2015085	2020366	0.5410	-2.1110	0.2438
					0.1991	-2.4040	-1.4627
					0.3390	0.3243	-0.1510
AXPV	43.4912	5.3332	2002264	2020366	1.0710	0.2965	1.2330

					-0.4669	-2.5580	-1.9520
BACA	46.5621	26.9122	2006019	2020335	-0.6740	0.0981	0.3157
					-0.1520	-0.2806	0.3352
					0.4935	-3.0280	-4.3424
BACT	44.3877	6.6495	2007222	2020366	0.4220	0.1304	0.2915
					-0.3620	0.4078	0.8149
					0.0444	-1.4687	-3.1833
BADH	50.2280	8.6099	2005059	2020293	-0.0060	-0.3244	0.0545
					0.1270	-0.4477	0.2358
					0.0516	-3.5830	-2.3927
BADJ	38.8937	-6.9893	2009274	2019365	-0.9520	-3.1545	-1.2861
					1.3780	0.7424	0.8041
					-0.7752	-0.4289	-4.0018
BAIA	47.6518	23.5577	2006019	2020335	-0.1720	-0.0818	-0.0924
					-0.2710	-0.2721	0.2655
					0.4265	-3.4514	-4.0530
BAL2	47.9306	7.5407	2012197	2020366	-0.0390	-0.7141	-0.3190
					0.4690	-0.4974	0.6813
					-0.0584	0.7961	-2.1521
BANN	44.3692	4.1563	2003184	2020366	0.1060	0.1610	-0.0033
					0.2240	0.1238	0.5005
					0.1671	-1.0709	-2.1689
BARK	51.5154	0.0969	1997115	2019134	-0.1620	-1.4173	-1.3520
					0.2710	1.1273	0.1179
					1.5604	-7.6891	-3.5983
BARR	56.9544	-7.5005	2007196	2020365	0.1250	1.4961	-0.6127
					0.0940	-0.4006	-0.1961
					0.4207	-1.3204	-0.7837
BARY	43.0357	0.6719	2007081	2020366	0.2760	-0.6378	-0.0445
					0.1560	-0.2021	0.4544
					-0.1926	-1.3229	-2.5667
BAS2	42.0015	9.0488	2013351	2020366	-1.8930	0.6743	-0.6845
					0.5860	-0.1064	0.7016
					-0.6022	2.4468	-3.4917
BAUB	43.8769	3.9670	2007313	2013106	0.3010	-0.2194	-0.7775
					-0.3530	1.2465	0.4743
					-0.0402	-4.2151	-4.1555
BBYS	48.7518	19.1510	2003185	2020091	-0.4750	-0.2241	-0.5082
					-0.1190	-0.3745	0.3263
					0.1552	-1.4678	-2.4385
BCL1	41.3418	2.1657	2016012	2020343	0.5620	-0.7159	-0.2279
					-0.1430	-0.0030	1.2473
					-2.1052	-0.4562	-1.2272
BCLN	41.4054	2.0042	2012038	2020335	-0.0300	-0.4265	-0.6120
					0.4160	-0.6703	1.0059
					-0.6277	-0.9895	-1.3344
BEA2	42.5153	3.1367	2009313	2014136	0.9260	0.7980	0.0891
					0.0590	-2.2038	-0.9093
					-0.0554	-3.0721	-4.1922
BEAV	49.4461	2.1026	2014055	2020366	0.3610	-0.4147	-0.1652
					0.1690	0.0366	-0.0503

					-0.0187	-2.1582	-2.1566
BELF	54.5772	-5.9319	2004153	2016099	-0.0320	-2.0196	0.0420
					0.0620	-0.1151	-0.0461
					1.2565	-2.4113	-0.1982
BELL	41.5996	1.4011	1998350	2020105	0.3900	-0.4598	-0.7896
					-0.2580	-0.2106	-0.1211
					0.4291	-1.7099	0.7978
BENB	57.4731	-7.3641	2007110	2020365	0.0690	0.0405	0.2746
					0.4760	-0.8002	0.2437
					0.1212	-2.7871	-0.0649
BFO1	48.3305	8.3249	2006318	2020334	0.2350	-0.2585	-0.4084
					-0.0230	-0.3624	0.5045
					0.7098	-2.3542	-1.8015
BGBC	48.4810	-4.4965	2016237	2020366	0.3120	0.7105	0.0756
					0.0530	-3.2866	1.5215
					-2.1427	-1.8724	-0.3245
BGDR	43.8891	11.8950	2012207	2020366	0.5800	0.1591	-0.4766
					2.3270	-0.9211	-0.3805
					1.8211	-0.9145	-4.2089
BIAZ	43.4720	-1.5369	2007235	2020366	0.4750	0.0517	-0.5392
					0.6080	-0.2178	0.6142
					0.2159	-1.1706	-0.4109
BIOG	41.2000	15.1326	2015238	2020366	0.8740	0.5071	0.3687
					3.9720	-1.5757	0.6537
					1.3157	-1.8331	-2.6701
BISK	50.2567	17.4286	2005068	2020335	-0.1610	0.4587	-0.1785
					-0.1100	-0.8041	-0.0429
					0.6366	-2.2004	-3.3129
BLAP	53.7769	-3.0350	2002002	2020365	0.0540	-0.2690	0.0926
					-0.5230	1.0818	0.3203
					0.3506	-2.0094	-0.4723
BLFT	47.6259	6.8585	2007134	2018353	0.2130	-0.0135	-0.5520
					0.0590	-1.2412	0.4645
					0.2599	-2.9934	-1.6011
BLG2	46.1718	5.5741	2013263	2020366	0.7680	0.4074	0.8033
					0.3270	-0.9526	0.8357
					0.3709	-2.5423	-3.3467
BLGN	44.5110	11.3506	2008126	2020366	0.3950	0.8369	0.4479
					4.3850	-0.9562	0.2561
					-3.6480	-5.7572	-2.3309
BLGU	42.9582	-0.8007	2016136	2020335	-0.1470	0.0098	0.5276
					-0.0750	-0.9075	0.1339
					0.0709	0.5266	-1.2561
BLIX	43.8735	6.3667	2009114	2020366	0.0340	0.3261	0.4694
					0.1260	0.0453	1.5240
					0.3074	0.3443	-2.2349
BLVR	47.3235	6.6113	2014322	2020366	0.0190	-0.1206	0.7062
					0.7260	-1.1547	0.9906
					1.1299	0.3916	-1.6736
BMHG	49.6592	-1.8296	2007081	2020366	-0.0000	-0.3530	-0.1060
					0.3650	-0.5430	0.0494

					-0.1860	-1.7751	-1.2612
BMNT	43.8774	0.9773	2015120	2020366	0.3060	0.0875	-0.9592
					0.1230	-1.8549	0.7266
					-0.1988	-0.9627	-3.1177
BOGO	52.4759	21.0353	1996182	2020366	-0.6640	0.4124	-0.1074
					0.0020	0.1177	0.1357
					0.0520	-2.4396	-2.7981
BOLG	44.5002	11.3568	2000001	2020335	0.3320	1.6307	0.4884
					4.1320	0.3428	-0.1071
					1.3992	-5.2693	-0.1324
BOR1	52.2770	17.0735	1994271	2020366	-0.3840	0.3326	-0.2609
					-0.5400	0.0934	-0.1179
					0.4491	-2.4675	-2.6876
BOUG	47.1656	-1.6408	2013289	2020366	0.2480	-1.7027	1.2803
					0.3730	-0.6706	0.9180
					-0.3034	-2.0504	-2.7123
BOUS	46.2880	2.2357	2009011	2020366	-0.1540	0.2759	-0.0711
					0.4180	-0.3773	0.3560
					0.7188	-1.8545	-2.8221
BPDL	52.0353	23.1273	2008094	2020335	-0.1780	-1.6360	-0.0970
					0.2260	-2.7744	-0.1425
					0.1120	-3.3035	-3.7906
BRAE	57.0067	-3.3956	2005294	2020365	0.2170	0.4819	-0.2354
					0.4540	0.9119	0.0549
					1.4153	-1.7964	-0.8781
BRAS	44.1222	11.1131	2005060	2020366	0.5560	0.2356	-0.3965
					1.8830	-0.0422	0.2992
					0.6925	-2.9314	-2.8663
BRDO	42.7746	9.4749	2010314	2020366	0.3390	1.1158	0.1453
					0.4370	0.2656	0.7186
					-0.6433	-1.4256	-0.9959
BRE2	46.8397	-0.4736	2014319	2020366	0.0160	0.7778	0.0230
					0.2150	-0.5098	0.8421
					0.3228	-2.8705	-2.7505
BREC	51.9529	-3.3817	2005187	2020365	0.2820	-0.1141	0.2546
					0.1210	-0.6187	0.0302
					-0.2018	-1.8822	-0.9233
BRET	48.6103	2.3150	2004168	2020366	0.3290	-0.6236	-0.3912
					-0.1760	-1.4339	-0.2102
					0.0734	-2.1274	-2.6547
BRIS	44.2248	11.7660	2010146	2020366	1.2340	0.3685	-0.5284
					3.7110	-0.3738	1.0303
					1.0183	-2.4041	-3.2709
BRMF	45.7261	4.9384	2014056	2020366	0.2880	0.3766	0.4856
					0.7550	-0.2013	0.2999
					0.4946	-1.2917	-2.6105
BRMZ	48.0015	0.4775	2016111	2020366	0.4550	3.0557	2.3110
					0.6160	-0.8526	0.7334
					-0.5788	-2.3811	-1.9333
BRST	48.3805	-4.4966	1998304	2020366	-0.1050	0.4293	0.6950
					0.7960	-0.0302	0.3668

					-0.5807	-2.3226	-1.3008
BRUX	50.7981	4.3586	1994114	2020366	-0.3560	0.4662	0.1853
					0.1040	0.7272	0.2216
					1.1323	-2.8163	-2.2424
BSCN	47.2469	5.9894	2001289	2020366	0.2740	-0.1448	-0.2760
					-0.0310	1.1067	1.1034
					0.3324	-2.1676	-1.8432
BSSO	41.5461	14.5943	2005014	2020366	0.5350	0.0179	-0.1597
					3.0540	0.0523	0.9218
					0.4753	-1.6796	-2.7513
BUAN	48.4861	5.3536	2007317	2018196	0.1680	-0.0689	0.0969
					0.1920	-0.2721	0.5392
					0.0542	-2.6415	-2.1332
BUCE	45.4132	25.4703	2012001	2020366	-0.1880	0.5499	1.6029
					-0.1450	-0.4105	1.1604
					0.1279	-1.7075	-4.1129
BUCK	57.6761	-2.9615	2005358	2020365	-0.3060	0.3825	0.1668
					0.2310	-0.4721	0.0888
					1.1521	-1.9197	-0.2735
BUCU	44.4639	26.1257	1999042	2020280	-0.5520	0.4340	-0.2729
					-1.2610	-0.5348	-0.2517
					2.5088	-4.1540	-4.0021
BUDP	55.7390	12.5000	2001001	2020366	-0.3550	0.1853	-0.2943
					-0.4050	-0.0952	0.2857
					1.5046	-2.2649	-1.2828
BUIT	41.0006	-3.6369	2016029	2020335	0.1670	0.9419	0.1613
					0.6600	-0.9456	-0.2762
					0.6412	0.1826	-1.8009
BULG	40.0782	15.3777	2006217	2020366	-0.2840	0.7294	-0.2049
					2.4340	0.2770	1.0218
					0.4380	-2.2396	-2.3007
BUOS	41.5881	-3.0680	2007117	2020366	-0.5310	-1.1831	-0.3884
					-0.4730	-1.6501	0.6287
					0.0207	-1.3680	-1.0139
BUT1	58.5156	-6.2609	2000142	2007212	-0.6600	-0.2238	1.3164
					-0.5170	-2.3733	-0.1895
					0.7589	0.8416	-0.1768
BUTE	47.4809	19.0565	2004264	2020335	0.2910	-1.5577	-0.9716
					-0.0530	-0.0834	0.9127
					0.2789	-3.7089	-4.2055
BUXT	53.2292	-1.9199	2009260	2020365	0.3180	-1.0241	-0.2318
					0.2110	-0.0598	0.6355
					0.1675	-0.0083	0.2754
BUZE	45.6191	21.6394	2012001	2020366	-0.3390	0.7362	-1.0454
					-0.1310	0.1591	-0.5122
					-1.1849	5.1632	-3.4242
BVOI	50.3695	2.2386	2012330	2020366	0.8510	1.7243	0.4799
					0.1880	-0.0411	-0.1638
					1.2590	-1.9994	-3.2993
BVSM	49.1842	5.3718	2011146	2017226	0.2810	-0.0512	-0.7627
					0.3640	0.6331	1.3540

					1.3773	1.6935	-1.1104
BYDG	53.1346	17.9936	2008093	2020335	-0.1510	-0.3924	-0.1624
					0.0720	-1.3418	0.0454
					0.7777	-3.2221	-2.8929
BZRG	46.4990	11.3368	1998001	2020213	-0.4700	1.2714	-0.1345
					0.7170	1.5637	0.8291
					1.9388	-2.9034	-2.4729
CABW	51.9695	4.9262	2001218	2019136	-0.3640	-0.7919	0.5039
					-0.7540	0.6484	0.0981
					0.0832	-2.5388	-0.4582
CACE	39.4789	-6.3418	2000340	2020335	-0.4310	0.6816	0.5645
					0.5090	0.1825	0.6426
					-0.3197	-2.3929	-2.0057
CACI	47.0569	3.9328	2006340	2020366	0.4140	0.4615	-0.7554
					0.0110	-0.4289	0.2197
					-0.0627	-2.5358	-2.4033
CADM	41.0776	16.2737	2001001	2014039	1.0130	-0.7564	0.1333
					4.3520	1.2791	1.2420
					0.0465	-2.7374	-1.2898
CAEN	49.1827	-0.4571	2005314	2020366	-0.3490	-0.0110	0.2111
					0.4670	-0.1991	0.0664
					-0.3050	-2.2025	-1.0520
CAFE	41.0281	15.2366	2005318	2020366	0.1670	0.1031	-0.1447
					3.3550	0.0672	0.7308
					1.6310	-1.1939	-3.2181
CAFI	43.3292	11.9662	2007282	2020366	-0.2360	0.5979	0.3182
					2.0240	0.2500	-0.1494
					0.4448	-2.5215	-2.1935
CAGG	40.5573	15.5114	2015224	2020366	-0.9780	-0.8834	-1.1568
					1.8430	-1.9467	0.8076
					1.2806	0.9718	-2.9475
CAGL	39.1359	8.9728	1996001	2013262	-0.1850	-0.8054	-0.8117
					0.1900	0.4277	0.7730
					-0.0044	-1.7606	-0.5308
CAKO	46.3871	16.4391	2011263	2020340	0.9050	4.3649	1.4138
					1.2440	-0.2939	1.0298
					-0.0582	-1.7023	-3.6853
CAMA	43.3962	6.3327	2013075	2020366	0.0760	-0.2728	-0.2452
					1.2470	-1.1054	0.0494
					0.1078	0.1104	-1.6637
CAML	55.4252	-5.6019	2009009	2019254	-0.7540	2.1184	-0.8533
					-0.3330	-0.3968	0.9340
					-5.0937	-3.0952	1.9217
CAMO	50.2183	-5.3273	1998099	2020365	0.2520	0.3993	-0.1017
					0.2720	-0.3016	0.2051
					-0.3043	-0.8634	0.6818
CAMP	41.9182	8.7908	2010134	2020366	-0.0620	-0.5861	0.0013
					0.6000	-0.3766	0.3646
					-0.3379	-1.4876	-1.7807
CANE	43.5546	7.0157	2005150	2020366	0.3000	0.2257	-0.0931
					0.5120	0.2196	0.9405

					-0.6137	-1.7715	-1.6245
CANT	43.4720	-3.7981	2000071	2020335	-0.0360	0.4441	0.2768
					0.3260	-0.0578	-0.1171
					-0.3856	-1.5944	-1.2128
CANV	46.0083	12.4350	2004141	2020333	0.0390	0.9541	0.4518
					1.4940	-0.5939	-0.0761
					0.1902	-1.8588	-1.6621
CAOC	42.2895	13.4844	2010271	2020366	-0.7740	-0.7650	-0.0699
					2.5770	-1.6945	1.0469
					0.4605	0.3811	-3.0434
CAPT	44.2952	-0.2567	2012081	2020366	0.2010	-0.9595	0.0099
					0.4090	-0.6224	0.7038
					-0.2259	-1.4934	-2.7018
CAR1	39.2534	16.2114	2009174	2020347	0.7620	-0.0454	-0.0785
					3.6100	-0.1305	1.1904
					0.4879	-2.1376	-3.3021
CARD	52.1000	-0.4170	2003012	2008274	0.4460	-1.1390	1.4980
					0.0830	0.1999	-0.0030
					0.1287	-0.7681	2.6004
CARG	37.5966	-0.9739	2014143	2020335	-0.6430	1.6251	0.3365
					2.0380	-1.0386	0.6657
					-0.0197	0.0636	-1.4933
CARI	51.5311	-3.1068	2004323	2020365	-0.1310	3.4500	0.7566
					0.1500	-0.1444	-0.0432
					-0.3191	-2.5041	-1.3573
CARL	54.8954	-2.9383	2000103	2020365	0.1230	-0.5837	-0.2608
					0.0610	0.2317	0.0158
					0.8915	-2.5165	-0.4169
CARM	51.8589	-4.3085	2000074	2005176	0.0490	0.4523	0.5223
					-2.2990	0.5314	-0.2729
					1.5982	-0.3814	-4.9137
CARO	39.2537	16.2113	2006244	2011186	0.4580	1.0026	0.0781
					3.3590	0.7669	1.5140
					-0.8555	-1.4200	1.4635
CARQ	47.2990	-1.5091	2007173	2020366	-0.1470	-1.0456	0.0705
					0.3320	-0.0046	0.0351
					0.3906	-3.6864	0.2091
CARV	38.0459	-1.9677	2015128	2020344	-0.5350	2.0586	-0.8138
					0.0190	-1.2871	0.9631
					0.9519	-1.3757	-2.1965
CASB	53.8507	-9.2873	2007079	2019339	0.2540	-0.3093	0.6342
					-0.2350	0.1970	0.4500
					2.0602	-2.6266	-0.7818
CASC	38.6934	-9.4185	1997200	2020194	-0.1460	-0.1358	0.2400
					0.4490	0.6642	0.3007
					-0.2922	-1.1771	-0.7237
CASP	42.7908	10.8652	2007163	2020366	-0.6210	0.4974	0.2113
					0.9340	-0.3753	-0.1665
					-0.0969	-1.6486	-1.4174
CATT	54.3727	-1.7163	2016168	2020365	0.0180	1.2452	-0.4829
					0.4020	-0.6776	0.4233

					0.1628	-2.6234	-1.9116
CATU	38.7304	-5.5388	2009274	2019365	-0.7140	-0.2992	-0.5291
					0.8080	-1.3123	1.0410
					0.2227	-1.0895	-3.2955
CAUS	44.1816	1.6150	2008364	2020366	0.1860	0.9201	-0.1024
					0.3790	-0.1738	0.7525
					0.3860	-2.6719	-2.1415
CAVA	45.4794	12.5827	2001199	2011061	-0.1820	0.2062	-0.0954
					2.3450	0.4909	0.7365
					-1.2591	-3.9953	-1.8994
CAZA	37.9379	-5.7598	2017077	2020335	-0.6610	0.0339	-1.7664
					0.7780	-2.9958	-0.3838
					0.4812	-1.3709	0.2015
CBON	39.6137	3.3923	2016097	2020344	0.1610	0.1450	-0.6004
					-0.6600	0.8408	1.1830
					-0.1967	-0.8439	-0.8281
CBRY	45.5813	5.9092	2006296	2020366	0.1250	-0.3612	-0.1401
					0.2210	0.6518	0.3829
					0.4346	-2.3689	-2.4000
CCEX	39.4723	-6.3779	2009295	2019365	-1.1660	-0.7766	-0.7417
					-0.8930	-0.5236	1.1628
					0.3595	-2.6763	-4.4389
CDJ2	44.7288	-0.5299	2014070	2020366	0.2850	0.8059	0.7184
					0.3310	-1.9209	-0.2782
					-0.3266	-1.4827	-3.2533
CDRD	40.5900	-6.5381	2007038	2020366	-0.3340	-0.1672	0.0714
					0.2520	0.8956	0.7768
					-0.2327	-1.0948	-2.2804
CDRU	40.4897	15.3047	2005245	2020366	-0.4760	1.2290	0.2577
					2.2760	0.8042	1.0269
					0.9266	-1.7565	-2.8957
CEBR	40.4534	-4.3679	2007100	2020096	-0.3910	-0.5255	-0.6556
					0.2020	-0.4409	-0.0187
					0.3044	-0.7436	-1.6620
CELI	39.4027	16.5088	2011292	2020366	0.8980	0.0951	0.4175
					3.5150	-0.1376	1.3735
					0.7638	1.1150	-2.9485
CELL	38.2603	15.8939	2005250	2020196	-1.1130	-0.5726	-1.0887
					3.9630	-1.1494	1.4401
					0.4722	-0.8147	0.0002
CERA	41.5977	14.0180	2006201	2020366	0.0640	-1.3737	3.0730
					2.3530	-0.5747	1.7732
					0.5939	-2.2397	-1.6888
CERN	46.2570	6.0606	2011009	2020366	0.0380	-0.6257	0.3599
					0.2980	-0.8201	0.6977
					0.5126	-2.0179	-2.7128
CERT	41.9491	12.9818	2006093	2020186	-1.2250	1.1217	-0.3563
					0.6360	0.0898	1.1502
					0.5183	-2.0652	-2.7685
CESI	43.0050	12.9046	2007054	2020366	0.1320	0.7560	0.0341
					2.8180	-0.4747	1.1028

					0.4176	-3.7218	-1.1916
					-4.2690	-0.7895	-0.5625
CEU1	35.8920	-5.3064	2001236	2020335	1.2020	0.1415	0.3667
					-0.9025	-1.1124	-1.2319
					0.0220	0.1826	1.1643
CEVY	49.2877	5.2871	2013036	2020366	0.1460	-0.0949	0.5055
					0.3271	-2.2115	-2.5010
					-1.1290	1.3513	0.2714
CFRM	49.6848	18.3532	2009351	2020335	0.6080	-0.7591	0.7413
					0.9147	-1.9139	-3.2557
					0.3370	0.1564	-0.5221
CHAS	47.8627	4.5594	2006340	2020366	0.0380	-0.5454	0.3884
					0.0530	-2.6798	-2.4085
					0.1220	-0.2089	0.4091
CHBL	48.9776	0.5567	2012069	2020366	0.5700	-0.6066	-0.3443
					-0.1605	-4.5142	-4.3291
					0.2280	0.1606	0.6669
CHBR	47.7148	-1.3878	2008142	2020366	0.1780	-1.0653	0.1962
					-0.0646	-1.7221	-1.8306
					-0.0670	2.1564	0.5733
CHBS	47.2506	1.6564	2008213	2020366	-0.0060	-0.7840	0.0998
					-0.2252	-2.8528	-2.2406
					-0.2770	-0.7279	-1.2580
CHE2	48.6672	2.8829	2006045	2020366	-0.1440	1.1280	0.0341
					-1.3824	-2.7540	-2.4545
					-0.1440	-0.3332	-0.2610
CHIO	51.1490	-1.4383	2009206	2020365	0.0360	-0.8542	0.6613
					-0.3197	-1.2427	-1.4554
					0.0630	-1.7918	-0.3010
CHIZ	46.1335	-0.4077	2000293	2020366	0.1870	-1.4233	-0.2314
					-0.0342	-1.2345	-1.9813
					0.6720	1.1205	1.9872
CHLD	49.7121	4.7638	2016023	2020366	0.6520	-0.8539	1.1237
					-0.2309	-3.2711	-0.9094
					0.0700	-0.4343	-0.1059
CHLN	49.8097	2.8016	2009031	2020366	0.0930	-0.6749	0.2988
					-0.1919	-2.2770	-3.1794
					-1.2560	-0.4442	1.1040
CHMX	45.9262	6.8730	2007243	2020196	-0.1230	0.9031	0.2739
					0.6524	-3.0448	-4.4438
					-0.1900	-0.2105	-0.0608
CHPH	48.4602	1.5009	2007168	2020366	0.4380	-0.6497	0.1583
					-0.1205	-1.8767	-2.0696
					0.1520	0.5440	-0.7968
CHRM	48.3718	6.2812	2007304	2019114	-0.0230	0.2604	0.7931
					1.6370	-2.7121	-1.7722
					-0.0090	0.9155	0.9482
CHRX	46.1281	0.4124	2016024	2020366	0.5870	0.4211	0.0843
					0.1610	-2.1354	-2.2958
					-0.6490	-0.1451	0.0850
CHTL	45.3042	6.3588	1999104	2020366	0.1200	0.8332	0.1953

					2.2090	-0.9842	-3.7368
CKS1	53.9438	-8.0899	2010330	2020347	0.3010	-0.7664	-0.4555
					0.7120	-0.5310	0.5393
					2.0796	-0.4433	-1.3999
CLAP	44.2485	6.9271	2003095	2020366	2.1810	-0.0398	0.6649
					1.6510	0.3887	1.0891
					-1.6676	-1.1815	-2.7245
CLAW	52.3588	-1.3315	2008346	2020365	0.7940	-0.9494	-0.1023
					0.5970	-1.6196	0.2074
					-0.6910	-1.6981	-0.6222
CLFD	45.7610	3.1111	2006310	2020366	0.3570	-0.5072	-0.6110
					0.0860	-0.6808	0.3661
					-0.1300	-3.9138	-2.2687
CLIB	50.7717	15.0599	2009351	2020335	-0.8170	-0.3089	-0.2471
					-0.1640	-0.7139	0.5280
					1.6045	-1.9977	-3.6356
CLMT	45.7751	3.1455	2009104	2020185	0.0900	0.5700	0.5053
					0.3830	-1.6385	0.4685
					-0.3296	-0.9559	-2.3307
CLN1	52.3550	-7.6954	2010330	2020347	0.4460	0.5333	-0.0387
					0.2900	-0.5588	0.6800
					0.4877	-1.0618	-0.2571
CLTA	37.1586	13.9627	2014015	2020366	0.0790	0.6298	1.7487
					2.3080	-2.1305	0.7732
					-2.6839	-0.6875	0.9008
CMPR	40.3179	15.3029	2005244	2020366	-0.3450	1.3362	0.2178
					2.1800	-0.2094	1.1886
					0.5850	-1.5391	-2.0949
CNNE	43.5692	6.9659	2014300	2020366	-0.2540	-0.1356	-0.8850
					0.4530	-0.3347	0.9942
					-0.5599	-1.3069	-2.4149
COAU	49.6436	3.5178	2012311	2020366	0.1820	-0.1153	0.6478
					0.0760	-0.7708	0.6031
					-0.0975	-2.4624	-1.8878
COBA	37.9156	-4.7211	2004105	2020344	-0.9020	0.0090	-0.3657
					0.3190	0.4232	0.5628
					0.5665	-1.3984	-1.0922
COCR	46.6108	0.9968	2015203	2020366	-0.5210	3.8472	0.9867
					-0.1950	0.1737	1.4238
					-0.8390	-2.6121	-1.8583
CODR	45.9585	12.9791	2007122	2020333	-0.3630	0.2496	-0.3527
					2.2550	0.5902	0.9767
					-0.4768	-2.9566	-2.0226
COLC	51.8944	0.8972	2000118	2007331	-0.2700	1.3024	-0.1109
					-0.0720	-0.6411	0.7501
					0.5918	-1.3728	-1.2484
COLR	40.1934	16.4222	2011256	2018198	0.6960	-0.0032	-0.3798
					4.6570	0.1573	0.5799
					1.1770	-1.2140	-1.2029
COMO	45.8022	9.0956	2002108	2020335	0.0370	-1.5417	-1.1152
					0.1060	-0.0802	0.4969

					0.1049	-3.7204	-2.9593
CONI	42.4117	13.3932	2009098	2020366	0.0150	0.2639	-0.4083
					1.7560	-0.5434	0.8915
					-0.4748	-1.6510	-2.3598
CONN	48.7302	3.9178	2015267	2020366	0.5000	0.1622	-0.1341
					-0.0120	2.1350	2.1376
					-0.3632	-4.1461	-2.0015
CORI	39.9816	-6.5196	2009274	2019365	-0.4400	-0.4046	-0.1867
					0.8140	0.9483	0.7704
					0.0199	-0.3444	-2.3974
CORL	37.8944	13.3039	2006132	2020361	-1.2460	-0.4811	-1.0402
					3.7370	-0.1539	0.7820
					0.6672	-3.2178	-2.6527
CORT	42.2989	9.1529	2011175	2020366	0.1700	-0.2879	0.8468
					0.4360	-1.2621	0.5429
					0.0899	1.3840	-1.0180
CORZ	43.1824	-0.2398	2012025	2020366	0.2690	-1.0732	-0.0546
					0.4910	0.7032	1.0694
					0.1603	-0.0776	-2.8542
COST	44.1615	28.6575	2006001	2020366	-0.4750	-0.2331	0.4353
					-0.5710	0.3175	1.0884
					0.3812	-2.4044	-5.0985
COUD	51.0229	2.3741	2007222	2020366	-0.0510	0.2399	0.0203
					-0.0120	-0.4259	-0.2549
					-0.6526	-2.6325	-1.3532
COUT	45.0411	-0.1176	2007262	2020366	0.0980	-1.1227	0.0686
					0.1540	-0.7670	-0.0785
					-0.3627	-2.0894	-1.0992
CPAR	50.0395	15.7832	2009351	2020335	-0.2240	0.3103	-0.2721
					0.1910	-1.1115	0.6567
					1.0166	-2.1668	-3.0739
CRAC	40.3814	16.4352	2005349	2020366	0.8630	0.4412	0.1478
					4.3050	0.3372	0.8681
					0.9960	-1.8093	-1.6924
CRAK	50.1024	13.7292	2009351	2020335	-0.1390	0.2888	-0.2668
					0.0600	-0.3275	0.6494
					0.8616	-2.0056	-3.2372
CRAL	43.1284	0.3672	2010040	2020366	0.1210	0.1323	-0.3182
					0.2790	-0.5219	0.8764
					-0.2865	-1.5548	-0.9490
CRAU	43.1239	6.0760	2016347	2020366	-0.8830	0.9398	-1.2875
					-0.1570	-0.6526	2.2862
					-2.2883	-3.2610	0.8447
CRCL	45.1780	28.1363	2012119	2020366	0.3220	-0.5406	0.8230
					1.2610	-0.8809	1.8956
					-0.6584	0.5999	-5.2443
CREI	49.2629	2.5118	2003198	2018073	0.0590	-0.0597	0.1242
					0.3280	-0.1754	0.1854
					0.0360	-1.8635	-1.7871
CREU	42.3188	3.3156	1998350	2020105	0.6440	-0.0444	-0.1501
					0.0220	0.1128	1.0354

					0.4256	-1.2777	-0.7433
					0.2590	-0.4472	-0.2053
CRK1	51.8849	-8.5330	2007079	2020347	0.3610	-1.4921	0.2660
					0.3434	-0.7072	-0.5591
					0.7310	-0.3430	0.1500
CRMI	43.7956	10.9795	2006286	2020358	1.8020	-0.0169	0.7546
					0.0985	-1.9015	-2.0488
					0.2090	1.0537	-1.1716
CSOS	42.5119	0.4856	2016172	2020366	0.6890	0.1748	1.3509
					-0.4777	-0.8812	-0.5574
					-0.5340	0.1169	-0.2350
CSSB	43.2093	12.2454	2006179	2020366	1.7320	0.1127	0.6857
					0.5199	-2.2371	-2.6456
					0.0800	0.3877	0.1144
CSTN	43.5278	1.5001	2009105	2020366	0.6390	-1.3411	0.9279
					-0.1560	-1.7881	-1.5105
					-0.2100	0.3245	-0.2041
CTAB	49.4098	14.6802	2009351	2020335	0.0730	-0.3341	0.6315
					0.8778	-1.6048	-2.6158
					2.4050	-1.1723	-1.7174
CTEL	42.8566	13.1880	2016319	2020366	0.1010	0.7345	2.9080
					-6.9286	1.1331	-1.4607
					0.4830	0.2947	0.2748
CUBX	44.8689	-0.5664	2002277	2020366	-0.0790	-0.1997	-0.2298
					0.1535	-2.8713	-2.0435
					-0.0780	1.0166	0.2198
CUCC	39.9938	15.8155	2005249	2019035	3.1790	0.3493	0.8984
					0.3863	-2.1149	-3.3978
					-0.4770	0.7825	-0.0131
CUEN	40.0728	-2.1397	2014104	2020335	0.1810	-0.9839	0.9704
					0.2156	-0.9586	-2.9336
					0.3920	-0.3393	-0.2311
CULA	46.5489	2.3474	2015242	2020366	0.5330	-1.6860	0.4866
					0.5041	-1.7206	-2.2864
					0.5300	-0.1465	0.3236
CVN1	53.9935	-7.3648	2007079	2020347	0.4480	-0.6530	0.2736
					1.3224	-1.3284	-0.2735
					0.1820	0.2128	-0.0645
DARE	53.3448	-2.6405	2000101	2020335	0.1210	-0.3656	-0.2714
					0.4132	-1.7875	-0.7182
					0.0870	-0.9282	1.3489
DBMH	48.6038	6.3641	2016181	2020366	0.1070	-0.7769	1.5706
					-0.1973	-3.3011	-2.6302
					0.2870	0.0530	-0.4385
DEGE	60.0314	20.3845	2005271	2016310	-1.0840	-0.1604	0.1603
					6.7438	-4.1136	-2.1782
					-0.1820	-0.0079	0.1248
DELF	51.9861	4.3876	1996005	2020366	-0.3730	-0.6089	-0.4677
					0.2472	-4.4590	-1.6855
					-0.3380	0.7595	0.2310
DENT	50.9337	3.3997	1996001	2020366	-0.0130	0.1599	-0.0541

					-0.1633	-1.7230	-1.4069
					-0.6430	-0.6011	-0.0749
DEVA	45.8784	22.9135	2006019	2020335	-1.3070	-0.9030	0.4308
					0.9712	-4.6832	-4.0398
					0.1410	0.3180	0.1828
DGLG	50.9937	2.3448	2003012	2020366	0.3270	1.2423	-0.3120
					-0.5649	-2.5409	-1.1679
					0.1530	-0.4333	0.4809
DHUI	48.3994	2.1766	2014266	2020366	-0.1500	-2.4846	0.4514
					-2.0958	-4.0804	-0.0689
					0.0250	0.2298	0.1878
DIEP	52.5881	8.3422	2004350	2020335	0.2470	-0.0853	0.0109
					0.3561	-1.9869	-1.4822
					0.0910	0.0813	-0.3613
DIJO	47.3106	5.0651	2009104	2018323	0.0500	-0.4935	0.4841
					-0.3618	-0.9571	-2.1177
					0.1820	-0.6121	-0.5532
DILL	49.3716	6.6997	2004341	2020335	-0.1730	-0.4280	0.2429
					0.5137	-1.7601	-2.2634
					0.2590	-0.3607	0.1666
DIPL	48.5899	-2.0760	2008213	2020366	0.2370	-1.6883	0.0406
					-0.3037	-1.7258	-1.8277
					1.1000	-1.0904	-2.2467
DIPP	49.9292	1.0845	2015022	2020366	-0.9750	0.1995	1.3942
					-0.5740	-2.3846	-2.6175
					0.3320	-0.5911	-0.2687
DJON	47.3554	5.0450	2011183	2020366	0.7520	-0.8298	0.3112
					-0.2220	-1.3013	-3.0610
					0.3320	-0.5911	-0.2687
DNG1	54.6592	-8.0877	2010330	2020347	0.5730	-0.8231	0.4394
					0.8354	-1.4228	-0.6891
					0.1090	0.3287	-1.5889
DOCO	49.1402	5.9345	2007234	2020366	0.0070	-0.4295	-0.0371
					1.4825	-2.3405	0.6719
					0.1590	0.1929	-0.4125
DOJX	48.3628	5.1605	2008206	2020366	0.2140	-0.2612	0.5844
					1.0808	-1.9764	-2.2918
					0.0530	-1.2962	0.5705
DOLB	48.5535	-1.7342	2016032	2020366	0.4090	-0.3540	0.8433
					-0.2238	-2.6940	-1.2506
					0.1690	0.8939	-0.5242
DOMP	48.6345	-0.5561	2015085	2020366	-0.0150	0.7995	0.8987
					-1.5372	-5.2989	-0.8648
					0.1970	-1.1536	0.6331
DOUL	50.1621	2.3521	2013024	2020366	0.3330	-1.5001	-0.0132
					-0.5733	-2.4831	-1.5864
					0.0700	0.1634	-0.1289
DOUR	50.0949	4.5950	1996001	2020366	-0.2890	0.5414	-0.3249
					0.6898	-2.1497	-2.5590
					-0.2570	-1.4822	-1.0876
DRES	51.0298	13.7297	1997297	2016252	-0.1830	-0.1197	0.1099

					-0.4172	-3.6148	-2.8735
DROW	52.2518	-2.1979	2000004	2020365	-0.0740	0.0722	-0.0338
					0.3060	-0.5032	-0.1867
					-0.5744	-0.8243	-0.8330
DRUM	55.6272	-3.7361	2004311	2020365	0.5490	0.1449	0.0322
					0.3290	-0.4310	0.2067
					1.2183	-0.9209	-0.3491
DRUS	48.7674	7.9507	2007133	2020366	0.5440	0.5239	-0.1239
					0.2130	-0.8462	0.2395
					1.0064	-2.9421	-1.8602
DUB2	42.6500	18.1104	2000266	2020366	1.5500	0.8238	0.5138
					3.9640	-0.1134	-0.7096
					-0.2177	-2.9748	-2.8425
DUDE	56.4639	-2.8773	2011273	2020365	-0.0400	-0.7419	0.0038
					-0.1210	-1.4014	0.7236
					-1.4124	1.7670	1.0426
DUNG	50.9266	0.9765	2004223	2020365	0.5220	-0.2675	-0.0993
					0.0470	-0.4414	-0.2057
					-1.3329	-3.2784	-0.4846
DUNK	50.8605	-3.2399	2000036	2020365	0.2690	0.0761	0.2846
					-0.0540	-0.2151	-0.1300
					0.0805	-1.9009	-0.9030
DUNQ	51.0481	2.3667	2015005	2020366	0.2530	0.3054	0.1599
					1.1960	-1.4638	-4.1816
					-1.1435	-0.4302	-4.8489
DUTH	41.1402	24.9168	2008257	2020335	0.9040	-0.4396	0.8192
					-2.4200	-0.7704	0.1104
					0.3761	-3.0752	-3.2679
DYNG	38.0786	23.9324	2011132	2020344	-16.5210	-0.5185	0.1607
					-25.6010	0.2108	0.9453
					0.6335	-1.7730	-4.0405
EASN	53.6490	0.1164	2004145	2020365	0.1560	-0.1196	-0.2514
					0.1680	-0.3145	-0.1163
					-0.1750	-2.7760	-0.2483
EAST	50.7774	0.3063	2004288	2009105	0.1330	0.3782	0.1836
					-0.2420	0.7045	-0.3879
					-0.3629	-0.8917	-0.8268
EBRE	40.8209	0.4923	1996029	2020105	0.2450	-0.8835	-0.9239
					-0.0240	-0.2847	0.6954
					-0.4015	-0.8887	-0.1701
ECNV	37.5956	14.7125	2007046	2014032	-2.0990	0.4772	0.3596
					1.8160	-0.0162	3.8152
					-0.5201	-4.8155	-3.0643
EDIN	55.9248	-3.2948	2000076	2020252	0.1140	0.1907	0.2364
					0.2120	-0.6231	-0.1308
					1.3477	-1.8423	-0.3196
EFBG	50.5253	6.8819	2002136	2020334	-0.1950	0.8930	0.3921
					-0.0190	-0.1029	-0.0046
					0.9792	0.1679	-1.0031
EGLT	45.4034	2.0520	2001286	2020366	-0.0330	-0.5836	-0.2369
					-0.1250	0.1660	0.8005

					0.3201	-0.1012	-2.4143
EIVV	37.5136	15.0821	2006001	2020366	0.7350	0.1271	0.2377
					0.7860	0.6054	1.2282
					1.9133	-2.3446	-1.5697
EIJS	50.7582	5.6836	1996242	2020366	-0.3370	0.1223	0.0488
					-0.1430	-0.5862	0.0509
					1.4524	-3.0543	-2.0982
EIVI	38.9512	1.4069	2016097	2020344	1.3730	-0.4182	-1.9035
					0.1330	0.8830	1.6619
					0.1189	-0.1725	1.4639
ELBA	42.7529	10.2111	2000313	2020209	-0.4500	0.4142	-0.0666
					0.2220	0.3272	0.6915
					0.1800	-2.4789	-2.0303
ENAV	40.5823	14.3349	2003357	2020366	-0.7130	0.4351	0.4023
					1.4060	0.6464	0.8343
					0.2736	-1.6824	-1.3812
ENIS	54.3954	-7.6449	2008114	2020246	-1.3470	-0.3750	0.1084
					0.6480	-0.9906	0.4008
					0.2511	-0.9427	-0.5677
ENTZ	48.5494	7.6399	2004336	2020366	-0.0580	-0.2491	-0.2043
					0.2350	0.4127	0.3302
					-0.5054	-2.1817	-2.0820
EOST	48.5798	7.7625	2007102	2020366	0.1280	-0.3667	0.0827
					-0.0200	-1.2357	0.7258
					-0.3728	-3.3635	-2.3041
EPR2	49.2165	-0.3664	2015071	2020366	-0.0550	0.7502	-0.0973
					0.4290	-1.4057	0.5293
					-0.5802	-1.7676	-2.8898
EQHE	50.6804	1.5676	2011187	2019308	0.3250	-0.7769	0.1225
					1.1180	0.0999	0.1664
					0.2898	-0.2640	-2.1359
ERCK	48.8730	7.3642	2009077	2020366	-0.0410	-0.2061	-0.0202
					0.2500	-0.4281	0.3900
					0.2364	-1.9277	-3.1887
ERLA	49.5865	11.0046	1997216	2020334	0.3090	-0.0848	-0.3030
					0.1200	0.4708	0.6502
					0.3029	-2.3922	-2.2554
ESAB	45.3071	4.7979	2005045	2020366	0.5520	-2.6101	-3.2829
					0.5790	-1.7506	-0.2679
					0.2042	-3.7472	-3.4347
ESBC	55.4936	8.4568	2005041	2020366	-0.2340	-0.1236	0.4307
					-0.2820	-0.5197	0.1742
					0.5377	-2.0538	-1.2745
ESBH	55.4603	8.4398	2004317	2020366	-1.2370	0.7419	0.6912
					0.6800	-0.2687	0.1060
					-0.6827	-3.4467	-0.9060
ESCO	42.6936	0.9757	1999212	2020105	-0.1160	0.3362	1.1156
					0.2350	0.1504	1.0860
					0.1173	-3.0444	-4.5883
ESKD	55.3124	-3.2069	2005320	2020365	0.6220	0.0458	0.0971
					0.0580	-0.3947	-0.0083

					1.4894	-1.7282	-0.6313
ETOI	48.5732	7.7523	2014319	2020366	-0.2370	1.1659	0.0069
					-0.1030	-0.0662	1.3712
					-0.0972	-3.4879	-4.5340
EUSK	50.6741	6.7635	1998092	2020294	-0.0720	0.3145	0.0966
					0.5310	-0.2840	0.1412
					-1.1812	-2.6780	-2.6031
EXMO	50.6134	-3.4100	2005138	2020365	0.0570	0.3371	0.3766
					-0.3100	-1.0178	-0.3707
					0.3319	-2.4789	0.1994
EZEV	43.7744	7.4973	2009058	2020366	0.3540	1.4102	0.7901
					0.1070	-0.3448	0.6763
					-0.3691	-0.9688	-1.8729
FAJP	43.2074	2.0258	2014106	2020366	0.0760	-0.2711	0.0557
					0.4170	-0.8226	0.8211
					-0.0624	-0.5568	-3.5102
FARB	51.2799	-0.7727	2004288	2020360	0.4740	-0.1732	-0.0792
					0.6540	-0.1095	0.4252
					-0.9614	-1.3253	-0.5959
FAUG	57.1357	-4.6885	2007196	2020365	0.2240	-0.0563	-0.4701
					0.0140	-0.3479	0.0521
					2.3389	-1.9387	-0.9880
FAYE	43.6208	6.6895	2014362	2020366	-0.4440	0.2127	-0.2940
					0.1130	-0.0493	1.6814
					-0.0571	-2.1938	-0.9645
FCLZ	45.6430	5.9857	1998155	2012004	-0.7780	0.0318	1.0450
					-0.0070	-0.1406	0.4909
					1.0922	0.1389	0.8066
FDET	47.4070	0.6228	2012355	2020366	1.0900	0.0157	0.0351
					0.4950	-0.4675	0.6938
					-1.2390	-2.4997	-1.8540
FERR	44.6460	-1.2488	2005147	2012044	0.5940	-0.3317	1.6972
					-0.0770	0.8332	-0.5484
					-1.0303	-8.2676	-4.6982
FETA	49.2008	3.5093	2006340	2020366	0.8430	0.6859	-0.0504
					0.7550	0.1268	0.2805
					0.9274	-1.7503	-1.8770
FEUR	45.7348	4.2292	2013165	2020366	0.6940	-0.7997	0.2324
					0.2020	3.6923	0.7302
					-0.9678	-0.2489	-2.7352
FFMJ	50.0906	8.6650	2002051	2020366	-0.3010	0.4691	-0.2385
					0.0550	-0.9478	0.1829
					-0.3567	-2.8163	-3.0826
FIED	46.7727	5.7149	2013263	2020354	-0.6090	0.6087	0.3874
					0.8930	-2.3169	1.3996
					0.2850	2.2205	-6.2786
FILF	42.5603	2.4171	2014255	2020366	0.4750	-1.1500	1.0976
					0.3730	-1.1342	0.6647
					-0.4072	3.0212	-3.8570
FINS	60.2291	19.9513	2014329	2020231	-0.1480	0.4326	0.4247
					-0.7880	-0.4736	0.7924

					6.6456	-3.1353	-4.7938
FJC2	43.0482	2.7949	2002293	2020366	-0.6030	-0.1045	-0.2499
					0.2240	0.1660	0.6193
					0.7551	-0.3896	0.2023
FLDW	53.7186	8.3076	2008217	2020366	0.3850	0.3762	0.1462
					-0.0020	-0.9078	0.1751
					-0.3681	-5.1172	-2.0629
FLGY	47.0400	6.1262	2013222	2020182	0.5050	-0.3288	0.5427
					0.6780	-0.1010	0.9634
					1.0018	0.2802	-2.6647
FLRC	44.3253	3.5945	2009049	2020366	0.2460	-0.0402	-0.0770
					-0.1950	-0.5910	0.8716
					1.0238	-1.4792	-2.0641
FOUC	49.8420	1.5807	2007133	2018073	0.2230	0.1295	-0.3049
					-0.0770	0.0247	0.2228
					-0.1389	-2.5598	-1.2431
FOUG	47.8844	6.3654	2016151	2020366	0.6410	-0.2107	0.2992
					0.4200	-0.2642	0.7967
					-0.8827	-0.4644	-0.2115
FOYL	54.9838	-7.3367	2006259	2020246	0.4880	0.0595	-0.1201
					0.5910	-1.6878	-0.4371
					1.1665	0.4610	-1.4600
FRAG	41.5095	0.3242	2012031	2020334	0.0530	-0.9947	-0.2212
					0.4960	0.7058	1.0965
					-0.7208	-2.0965	-2.0883
FRAN	49.4768	0.1740	2013329	2020366	0.4720	-2.5569	1.0195
					0.3960	-0.4860	-0.3645
					-0.6658	-3.0291	-2.9659
FRES	41.9735	14.6693	2005259	2020045	1.0460	-0.2843	-1.0110
					3.2950	-0.1327	1.0369
					0.2274	-1.7834	-2.5926
FRGN	46.8203	4.8521	2016152	2020366	0.2150	-0.5007	0.4437
					0.2360	-0.3836	2.1413
					-0.5767	-3.6659	-0.5540
FROC	63.8652	8.6603	2007129	2020366	-1.1570	-0.0410	0.5294
					0.4240	-0.1184	-0.0596
					2.4517	-1.7284	-2.2299
FRRL	43.4614	-8.3382	2016113	2020341	3.0520	1.0770	-0.2967
					1.4000	-0.2875	0.8661
					-1.0597	0.2528	-0.9587
FRTT	47.6803	5.5663	2008206	2020366	-0.2860	0.7179	-0.9475
					0.3120	0.3261	0.7904
					-0.0001	-2.5931	-2.0459
FRUL	40.8779	14.2253	2007005	2020366	1.6060	-0.2325	-0.1471
					3.7330	-0.5481	0.8200
					1.7337	-2.2631	-2.9217
FUSE	46.4142	13.0011	2007253	2020333	0.0280	-0.1310	-0.6323
					1.1110	-0.8700	0.6986
					0.9723	-0.5661	-1.7712
GAIA	41.1060	-8.5891	2000002	2020194	-0.0090	0.0412	1.0925
					0.0740	0.4292	0.7198

					0.0872	-1.3993	-1.4920
GALF	37.7107	14.5665	2006328	2020258	-2.6650	0.0337	2.4465
					4.0900	1.2039	-1.3772
					1.0632	-2.1352	-0.5784
GANP	49.0347	20.3229	2003286	2020285	-1.1150	-1.1945	-0.4841
					-0.5880	-0.5697	-0.2833
					0.4839	-0.0709	-3.0488
GATE	41.5131	14.9099	2009182	2020348	0.7690	-0.2313	-0.0517
					3.7780	-0.5426	0.6665
					1.1386	-1.3370	-3.4641
GBLM	37.9903	14.0261	2003047	2020366	-0.6810	-0.3845	-1.4817
					5.9270	1.3435	0.5290
					7.1388	-3.0382	2.3131
GDIJ	47.3327	5.0447	2010293	2020169	0.2770	0.7304	-0.2107
					0.1940	-0.2176	0.9175
					0.0441	-1.9829	-2.9775
GELL	53.4503	14.3212	2007313	2020335	-0.1770	0.4111	-0.2187
					-0.4350	-0.3885	0.2192
					0.0248	-2.4072	-2.8499
GENO	44.4194	8.9211	1998204	2020216	0.3780	0.6174	0.1107
					-0.0810	0.2993	0.8393
					0.0715	-2.2945	-2.3170
GESR	54.5744	11.9229	2004301	2020366	-0.2280	0.0475	0.0692
					-0.3250	-0.2537	-0.1619
					0.5932	-2.3690	-2.0289
GIBR	36.1482	-5.3650	2009159	2015286	-5.9410	-0.5109	-1.3808
					-0.0230	-3.1880	1.6792
					-0.2924	-0.0388	1.0439
GIE1	47.6130	2.7815	2011250	2020366	0.0410	-1.4464	-0.3820
					0.0880	-1.1565	0.3882
					0.2790	-0.3410	-3.0269
GIGG	54.0759	-2.3088	2004145	2020365	0.7610	-1.1627	-0.2492
					0.2190	-0.4182	0.2359
					0.2112	-1.4972	-0.6969
GINA	43.6755	5.7871	1998037	2020366	-0.0230	0.0479	-0.3098
					0.1080	0.0829	0.5924
					0.3997	-1.3330	-0.4987
GIRA	55.2434	-4.8576	2008346	2020365	0.1190	-0.3186	-0.1475
					0.5440	-0.0469	0.0695
					1.4272	-0.7326	-0.1715
GIRO	42.0416	2.8551	2012032	2020344	0.0030	1.7073	0.2683
					1.1630	0.5583	0.8570
					-0.8245	-1.1867	-0.9442
GLAS	55.8540	-4.2965	2000075	2020365	0.1720	0.5084	0.2838
					0.5560	-0.8664	-0.2616
					1.1885	-1.3902	-0.7200
GLRA	44.8393	4.5241	2008052	2020366	0.1800	0.5823	-0.3047
					0.1660	-0.8039	0.4121
					0.0557	-2.0380	-1.7501
GLW1	53.2807	-9.0607	2007079	2020347	-0.1160	-0.2907	-0.1395
					0.6820	-0.1645	0.4319

					0.1336	-1.7280	-0.2324
					4.5530	-0.5089	-1.0160
GNAL	42.5837	13.5198	2010258	2020366	3.6880	-0.0186	-1.9990
					1.6364	-1.7212	-1.0177
					-0.2720	0.1605	-0.2415
GOET	51.5002	9.9506	2006347	2020334	0.5900	-0.0592	0.8635
					0.1145	-1.7471	-2.4249
					-0.5820	0.7665	-0.7655
GOPE	49.9137	14.7856	1995258	2020366	0.2900	0.0846	0.1339
					0.3648	-2.9694	-1.6856
					-0.4670	-0.0526	0.1957
GOR2	53.0497	11.3496	2008191	2020335	-0.4040	-0.8465	-0.0915
					0.2292	-2.5591	-3.7527
					0.2760	-0.3797	0.0745
GORN	48.4129	-0.8075	2007081	2020366	0.3090	-0.3167	0.4096
					-0.0746	-2.6372	-1.8224
					0.2460	0.9650	-0.6406
GORS	52.5756	1.7319	2009032	2020365	0.3660	-0.8018	-0.0724
					-0.7322	-2.2477	-1.5729
					-1.2480	2.2316	0.1876
GRA1	37.1899	-3.5964	2017132	2020335	0.1570	1.8217	1.4283
					-0.1493	0.0205	1.6095
					0.1080	0.4732	0.2786
GRAS	43.7547	6.9206	1995053	2020366	0.2900	0.0368	1.0055
					0.1990	-0.9546	-1.8065
					0.7190	0.3835	-0.0304
GRAZ	47.0671	15.4935	1992189	2020366	0.5900	0.0441	0.3291
					0.0958	-3.1507	-2.5688
					0.5700	0.7415	-0.6866
GRIS	39.7405	15.8531	2015218	2020246	3.6140	-0.9722	0.9549
					0.2318	-0.6396	-3.6283
					-0.0640	1.1904	0.5891
GRO1	41.0670	15.1009	2008297	2020366	2.8790	0.1284	1.1241
					1.5661	-0.8784	-2.2481
					0.0410	0.2770	0.1881
GROG	43.4263	9.8920	2005187	2018100	0.4440	0.3861	0.9813
					0.1828	-1.6889	-1.2445
					-1.0060	1.7688	0.5052
GROI	47.6480	-3.5080	2002301	2014202	-0.5000	0.9267	0.2380
					-0.0451	-1.8803	-0.4299
					0.5190	0.5640	-0.0272
GRON	47.1067	2.7082	2008169	2020366	0.5760	-0.4479	0.1995
					0.5016	-1.6679	-1.6893
					0.0330	0.0210	-0.0674
GROT	41.0728	15.0599	2004145	2020366	2.6580	0.0791	0.7030
					1.5449	-1.8214	-2.9748
					0.5290	1.0967	-0.3334
GRZM	44.2648	11.1481	2008114	2020366	3.5700	0.9814	1.0950
					0.0995	-1.5999	-1.5284
					-0.0180	-0.1798	-0.5164
GSR1	46.0481	14.5437	2001026	2020091	2.1580	-0.4074	0.7021

					0.7759	-3.1138	-2.5349
GUAR	41.7944	13.3122	2006151	2020366	-0.7830	1.5697	0.0500
					1.3930	0.3329	0.8868
					0.1230	0.4209	-2.1544
GUDI	42.0591	-7.1250	2015068	2020335	-0.3470	0.5618	0.6344
					0.8080	-2.0796	-0.1714
					-0.4078	1.4480	-4.3089
GUIJ	40.5467	-5.6778	2007032	2020366	-0.2150	-0.9217	-0.5974
					0.6080	0.2758	0.0028
					-0.0850	-0.8195	-2.7858
GUIL	44.6622	6.6619	2007316	2020366	-0.1700	0.5876	0.7455
					0.0070	-0.2559	1.0517
					1.3430	2.9389	-2.1645
GUIP	48.4446	-4.4118	2002291	2020366	0.2430	0.2435	0.1322
					0.2770	0.0926	0.0735
					-0.2553	-2.1369	-0.0538
GUMA	43.0628	13.3352	2008100	2020366	2.0790	-0.4708	0.1131
					3.7690	-0.8748	0.8170
					-0.6235	-0.4003	-1.8572
GWWL	52.7380	15.2052	2008093	2020335	-0.2920	0.3108	0.1229
					0.0500	-1.5658	-0.1567
					0.9449	-2.1916	-2.0939
HAGA	37.2858	15.1550	2006111	2020366	-1.1460	0.4691	0.1433
					4.6370	-0.3573	0.9761
					-0.3001	-1.9727	-0.7067
HARD	50.9497	-0.5287	2004145	2020365	-0.2050	0.7762	0.6311
					-0.1810	-0.6434	0.0846
					0.5474	-2.6508	-1.8665
HAS6	56.0922	13.7180	2011167	2020118	-0.4280	0.0353	0.2327
					-0.3410	-0.7110	0.4593
					1.8686	-2.5380	-3.6481
HAVL	36.9598	15.1219	2006101	2020366	-1.5430	0.3833	-0.3086
					4.6900	0.1868	1.1603
					-0.4347	-2.5199	-1.6088
HEAU	49.5807	-1.7780	2002304	2014281	-0.0390	-0.5691	1.0240
					-0.0400	0.5815	-0.0549
					-0.4550	-1.9782	-1.3176
HELG	54.1745	7.8931	1999313	2020366	-0.2140	0.1995	0.4163
					0.1780	0.3364	0.2795
					0.0934	-3.0259	-0.9688
HERO	50.8675	0.3357	2009093	2020365	0.3300	-0.2929	-0.8377
					0.2540	-0.8200	0.2091
					0.2381	-0.7797	-2.3613
HERR	39.1814	-5.0500	2009338	2019365	-0.4790	-0.7311	-0.2583
					0.3430	-0.9563	0.5016
					0.2881	-1.0733	-3.2795
HERT	50.8675	0.3344	2003078	2020366	-0.2290	0.1848	0.4806
					0.1370	-0.4607	-0.2497
					0.1503	-2.3752	-1.7081
HETT	68.4067	23.6653	2014043	2020231	-0.6440	1.8855	0.3349
					0.2710	0.3176	0.9645

					6.2003	-8.6255	-6.6254
HFL2	47.3129	11.3861	1995268	2011185	-0.4460	0.7386	1.0992
					0.3600	1.7732	4.3974
					1.9886	-0.4286	-4.3652
HIRS	57.5911	9.9675	2004315	2020366	-0.5790	0.0008	0.5807
					-0.4070	-0.5110	0.1542
					2.4496	-2.0554	-1.8668
HKBL	47.3773	13.7713	2000280	2017277	0.4750	0.9311	0.2276
					1.4960	0.3164	0.7910
					0.2852	-1.4289	-0.7881
HLNI	37.3486	14.8719	2010046	2020366	-1.4300	0.1154	-0.1574
					4.1980	-0.2473	1.0902
					0.4821	-1.6429	-1.0046
HMDC	36.9590	14.7831	2006159	2020366	-1.5560	-0.1301	-1.1385
					4.4910	0.0536	0.6690
					-0.5615	-2.7641	0.0680
HOBU	53.0506	10.4763	1997189	2020366	-0.3540	-0.2000	-0.1710
					-0.2340	0.5516	0.1375
					1.0147	-2.0993	-2.3362
HOE2	54.7587	8.2934	2005185	2015139	-0.3580	-0.0148	0.2538
					0.0760	-0.0385	-0.0420
					-0.4303	-3.7380	-0.9703
HOFJ	50.3129	11.8759	2007066	2020335	-0.0940	0.3519	-0.3287
					0.4420	-0.4365	0.4637
					-0.7029	-2.5008	-2.2224
HOL2	54.3729	10.1568	2005283	2020366	-0.6640	0.1606	0.0693
					-0.1620	0.2428	0.1802
					-0.0575	-2.5482	-1.8397
HOLA	43.9698	3.2216	2014259	2020366	0.1600	0.3415	0.3131
					0.1110	-0.2529	0.8460
					1.5300	-1.7409	-1.9134
HOLY	53.3177	-4.6421	2004331	2020365	0.1040	-0.0744	0.0870
					0.0710	-0.1582	0.0267
					-1.0690	-3.2403	-0.0467
HONS	70.9771	25.9649	2007044	2020366	-0.6170	0.3348	0.4622
					-0.0110	-0.6202	-1.0288
					2.7051	-1.3251	-3.6142
HOOB	53.4829	-1.3797	2004145	2020365	-0.2060	0.2350	-0.3930
					-0.6340	-0.3940	0.0434
					2.5591	-1.8460	-0.5304
HORT	51.5484	-4.2012	2005187	2010084	0.2360	0.2750	1.7495
					-0.5150	0.4417	0.8876
					-1.4226	-1.0111	1.2170
HRM1	51.4537	-1.2839	1999083	2011203	-0.1420	0.0923	1.2065
					-0.3420	0.0930	0.6702
					0.5585	-2.4229	-0.7336
HRSN	49.9254	4.0733	2007133	2020366	0.1110	-0.7459	-0.3918
					0.0510	-0.9923	0.0602
					0.3123	-2.6604	-2.3770
HUE1	37.1320	-6.8337	2017194	2020335	-2.3920	2.1111	0.5528
					1.4760	0.3122	0.4393

					-0.6262	0.3117	0.6482
HUEG	47.8339	7.5962	2002049	2020366	0.1630	0.6187	-0.1675
					0.3280	0.3591	0.6558
					-0.1039	-1.9009	-2.3494
HUEL	37.2000	-6.9203	2003103	2020335	-1.6080	-0.9493	-0.6279
					1.0180	1.0040	0.8398
					0.2090	-3.0745	-1.8273
HUNG	51.4043	-1.5139	2010228	2020365	0.2440	0.2997	0.2536
					0.1440	-0.4504	1.2248
					0.0179	-0.7550	-2.5584
HVZN	37.1783	14.7155	2005365	2019271	-2.9200	3.0410	2.8099
					4.1180	2.0454	2.2416
					-0.8081	-0.3970	-0.7229
IACL	38.5339	14.3564	2007130	2020170	-0.9350	0.4616	-0.0950
					4.3900	0.5036	0.8696
					-0.5342	-2.0447	-0.4064
IBIZ	38.9112	1.4490	2004288	2020335	0.0440	0.2597	-0.1207
					0.1190	0.5734	0.8484
					-1.3559	-1.5783	-0.1079
IENG	45.0151	7.6394	2003338	2020366	0.4240	1.2110	0.3368
					-0.3800	0.5534	0.0101
					0.9665	-3.5090	-3.1658
IFIL	38.5642	14.5753	2007275	2020366	-0.0010	0.8597	-0.0126
					3.4910	-0.0275	0.9245
					-0.5463	-1.7947	-0.7418
IGEO	47.0304	28.8435	2007184	2020335	-1.0620	-1.4347	-0.2278
					0.0600	-2.2395	0.1042
					0.5600	-4.2628	-5.3305
IGMI	43.7956	11.2138	2006344	2020099	0.3830	0.0984	0.1175
					2.0890	1.7251	1.5688
					0.6291	-2.9900	-2.6838
IGNE	40.4458	-3.7095	2005335	2020336	-0.0330	0.3641	0.2869
					-0.1960	-0.8626	-0.1899
					1.4829	-1.7896	-0.9801
IJMU	52.4620	4.5561	2004365	2020366	0.4790	0.3276	0.1079
					0.0330	-0.5728	-0.8539
					-1.4702	-3.2462	-1.0111
ILBO	47.1246	0.4178	2007133	2020366	0.3960	-1.4429	-0.0168
					0.2880	-0.7820	0.5042
					-0.7813	0.1149	-2.5081
ILDX	46.0094	-1.1768	2012039	2020366	0.1330	0.2069	0.5361
					0.1610	0.5498	1.0759
					-0.5581	-1.6581	-1.8670
INGP	42.3825	13.3156	2003267	2020366	-0.2010	-0.1805	0.1944
					1.7600	0.1286	0.6046
					1.1278	-0.7148	-0.1055
INGR	41.8280	12.5147	2001002	2020366	-1.1920	2.2830	1.1548
					1.1610	0.5665	0.6387
					0.3584	-1.8191	-2.2889
INVR	57.4863	-4.2193	2000002	2020365	0.1390	-0.4638	0.2315
					0.7410	0.4607	-0.0808

					-0.7102	-2.0271	0.0746
IOMN	54.3292	-4.3885	2001081	2006144	0.0990	-0.3639	0.5168
					-0.2520	1.1319	-0.5393
					1.4575	2.7723	-4.4068
IOMS	54.0867	-4.6345	2001079	2016248	0.2690	-0.5878	0.1451
					0.0640	0.4198	0.1414
					0.5493	-1.4723	-0.1306
IPRO	40.7651	14.0239	2005001	2018051	-3.5010	0.5246	0.1920
					-0.1910	0.8493	1.1192
					0.1497	-1.8790	-2.4365
IRBE	57.5544	21.8520	2016064	2020079	0.7610	0.3468	1.4704
					-0.7550	-0.1757	-0.1598
					2.4052	-6.8708	-3.1991
ISLA	49.1038	2.2064	2007255	2020366	0.5790	-0.6974	-0.2112
					0.0110	-0.0555	0.1878
					-0.3001	-2.3189	-1.6730
ISPS	43.3543	-2.5536	2016076	2020335	-0.1720	0.1274	0.5424
					1.1770	-0.2723	0.8962
					-0.6078	-0.9251	0.2676
ISTA	41.1044	29.0193	1999345	2020366	-0.4290	0.2522	0.1672
					-1.4260	0.6538	0.7269
					0.3999	-3.8116	-5.5914
IXSG	48.8994	2.0640	2015273	2020366	1.0050	-0.1485	0.6580
					-0.0680	-0.8035	0.1368
					1.1639	-2.0974	-2.1458
IZMI	38.3948	27.0818	2008223	2020366	-22.0870	-0.5652	-0.1391
					-16.6000	-0.4474	0.7758
					0.4311	-2.8655	-4.3874
JACA	42.5673	-0.7265	2011055	2020342	-0.1270	-0.6126	-0.1123
					-0.0060	-0.0641	0.8261
					0.2872	0.3082	-2.4972
JARG	47.8622	2.1206	2006296	2020366	0.2700	-0.4540	-0.0928
					0.0320	0.6998	0.5221
					-0.1343	-2.3891	-2.4393
JERE	38.3200	-6.7794	2009274	2019365	-1.0960	0.6666	0.2684
					0.7880	1.5803	1.3621
					0.0003	-0.9173	-3.7032
JOAN	46.1840	13.4161	2007179	2020333	-0.0890	0.0725	-0.4651
					2.1560	-0.3150	0.5979
					0.2940	-1.2192	-1.8247
JOEN	62.3912	30.0961	1996300	2020231	0.1660	0.1052	0.5161
					-0.8340	-0.6317	-0.0985
					4.0313	-1.2209	-3.1138
JON6	57.7454	14.0597	2011167	2020118	-0.5550	0.0095	-0.3987
					-0.5740	-1.0365	0.9220
					3.9042	-1.9549	-3.2595
JONZ	45.4414	-0.4466	2015343	2020366	0.1330	1.0656	-0.2584
					0.3560	-1.9097	0.4217
					-0.4898	-2.7176	-1.5300
JOPP	38.6068	15.8857	2006249	2020366	1.0140	0.4755	0.0164
					3.2720	0.7767	1.2290

					0.3181	-1.4894	-1.6482
JOUX	46.5286	5.7960	2000110	2020366	-0.0120	-0.3694	-0.3874
					0.4160	-0.0707	0.2135
					0.3409	-0.8888	-2.0158
JOZE	52.0973	21.0315	1993215	2020366	-0.5750	0.9936	0.3977
					-0.1340	0.0221	0.2634
					-0.1920	-1.4338	-3.1999
KAD6	59.4441	13.5056	2011167	2020118	-0.6230	0.4091	-0.0615
					-0.5300	-1.0029	0.8437
					6.3363	-3.3855	-2.7780
KARL	49.0112	8.4113	1997180	2020366	0.0620	-1.0386	-0.3813
					0.0910	-1.0621	0.0537
					-0.0416	-2.9550	-2.8545
KASI	39.7464	19.9355	2007091	2017126	-3.8550	2.2043	0.7480
					-0.0750	1.1609	1.1810
					-0.5779	-3.1145	-4.1110
KATC	35.9515	27.7808	2005278	2019350	-8.9310	1.6847	0.9321
					-29.1420	-0.7942	0.2090
					0.0476	0.5618	0.0654
KATO	50.2533	19.0356	2003204	2020366	0.3950	-0.5945	0.0448
					-3.0170	0.8154	0.9308
					-0.5640	-2.6507	-3.1909
KELO	55.5956	-2.4401	2006134	2020365	0.0070	0.7397	0.3183
					0.1830	-0.0024	0.2721
					0.9622	-3.3115	-0.7882
KEV2	69.7559	27.0071	2014043	2020231	-0.3970	0.5266	0.6063
					0.4560	0.0016	0.0823
					4.1899	0.0251	-3.5515
KEYW	52.8790	-1.0781	2007196	2020365	0.0470	0.1229	-0.4805
					-0.3440	-0.5425	0.0824
					0.0658	-2.1109	-1.2879
KILN	56.4549	-4.3207	2009007	2020365	0.9950	-0.5936	0.3223
					0.0930	-0.1720	0.2759
					1.7542	-2.1081	-2.9181
KILP	68.9416	20.9141	2014043	2020231	-0.8090	0.2133	0.6375
					0.5950	-0.1623	0.5461
					5.1502	0.2028	-3.7939
KING	52.7514	0.4015	2000002	2020365	-0.5910	0.0390	-0.3048
					-0.2990	0.1546	-0.4536
					-0.8178	-3.0006	-1.1212
KINL	58.4588	-5.0523	2007196	2020365	-0.0590	-0.4696	0.1640
					-0.2780	-1.0597	0.1494
					1.7803	-1.1702	-0.8778
KINT	57.2453	-2.3286	2010008	2020365	0.1970	0.2193	-0.1865
					0.2290	-0.6783	0.3498
					1.2309	-2.0825	-0.8934
KIRO	67.8776	21.0602	1996310	2020169	-0.7960	0.1958	-0.1881
					0.5330	-1.0317	-0.0050
					7.4891	-6.6530	-4.0392
KIRK	54.8395	-4.0474	2005294	2020365	-0.1150	1.6645	-0.3790
					-0.7500	-1.2175	0.6280

					-0.7266	-1.6609	-0.4344
KIRU	67.8574	20.9685	1993189	2020096	-0.6860	0.6061	-0.0656
					0.1940	0.0888	0.4029
					7.0454	1.2249	-3.4731
KIRW	58.9534	-2.9016	2007196	2020365	-0.1250	0.1298	-0.2266
					0.4670	-0.4924	0.2960
					0.5773	-1.2484	-0.0918
KIV2	62.8199	25.7019	2014043	2020231	0.7730	0.2851	0.5710
					-1.0310	-0.0930	0.9753
					7.3191	-2.0136	-2.4623
KLOK	39.5647	22.0144	2008199	2020366	-3.1400	0.1229	-0.6406
					-8.2570	-0.2662	1.2255
					-0.0811	-1.3917	-4.1477
KLOP	50.2198	8.7299	1997180	2020344	-0.0400	0.2634	-0.1580
					0.1590	-0.0215	0.1979
					0.6337	-1.8681	-2.5607
KLRE	54.9649	-6.6180	2004153	2020347	0.2740	-0.0625	-0.0165
					0.9430	-0.3000	-0.0301
					0.0077	-2.2886	-0.5068
KNJA	43.5665	22.2553	2012133	2020335	0.2520	-0.3339	1.7603
					-1.2300	-0.1477	0.9943
					0.2277	-0.7821	-5.1655
KOE2	46.6742	13.0093	2001152	2017277	0.1240	2.7436	-0.1676
					0.8800	-0.1828	1.0193
					1.8926	-1.7184	-2.6066
KONE	47.8658	-3.9024	2007304	2020366	0.2110	-0.6115	0.0922
					0.3060	-1.1893	0.4160
					-0.3360	-1.8713	-1.4847
KOPE	45.5481	13.7246	2006001	2020366	3.4000	0.8492	-0.3029
					2.4480	0.6171	0.9652
					0.5018	-1.7552	-1.7702
KOS1	52.1734	5.8182	1991022	2020366	1.2420	1.5255	0.4623
					0.7030	-0.0988	-0.6658
					0.6272	-3.1202	-2.1605
KRAW	50.0661	19.9205	2003016	2020335	-0.3720	0.0477	-0.3941
					0.0400	-1.9998	-0.3934
					0.5377	-3.5595	-3.0668
KRBG	47.1462	10.6268	2001330	2017277	0.0820	0.5452	-0.0251
					0.8780	0.9250	0.3033
					0.0562	-1.0842	-1.9690
KTZ2	47.4182	12.3595	2008001	2017277	-1.0920	0.0646	-0.3304
					-0.3020	-0.3514	0.4236
					-0.4361	-1.3076	0.9141
KUNZ	49.1073	15.2009	2005266	2020335	0.0600	0.0402	-0.0977
					0.6480	-0.5582	0.3540
					1.1342	-1.0157	-3.3572
KURE	58.2556	22.5101	2008091	2020105	0.0790	0.2578	0.2552
					-0.8010	-0.3929	0.4705
					2.8112	-3.4363	-2.0304
KUU2	65.9102	29.0336	2014043	2020231	0.1510	2.3274	0.3875
					-0.7420	-0.7146	0.9609

					8.1412	-3.2517	-5.2263
LACA	43.6810	2.7276	2005365	2020160	0.1410	-0.0861	-0.2597
					0.0730	-0.0687	0.5177
					0.1593	0.3918	-1.9410
LAGO	37.0989	-8.6684	2000002	2020194	-1.1000	0.3483	0.3765
					1.7730	1.0333	1.1584
					-0.3152	-0.7592	-0.9053
LAMA	53.8924	20.6699	1994356	2020335	-0.5940	-0.1594	-0.0534
					0.3620	-0.1009	0.1404
					0.2958	-2.5043	-2.6969
LAMP	35.4995	12.6057	1999085	2020216	-2.3240	0.1151	-0.0106
					2.3960	-0.3879	0.4066
					-0.4000	-1.2914	0.0315
LARN	41.7281	12.8330	2016124	2020366	-1.0930	-1.0463	-0.5675
					1.8360	0.3491	1.2444
					-0.3436	-2.3819	-1.3540
LASP	44.0733	9.8397	2006001	2020366	0.2470	0.2241	-0.4182
					0.6190	0.2483	0.3448
					-0.0834	-1.7265	-1.7300
LAVL	48.0728	-0.7234	2011049	2020366	0.0750	-2.1637	-0.2943
					0.3360	3.7802	1.3309
					-0.0558	0.1888	-2.8506
LBRD	44.6814	-0.5278	2007262	2020366	0.3110	0.0583	0.0476
					0.1420	-0.3750	0.3910
					-0.3661	-2.0765	-2.7235
LBUG	44.9454	0.9211	2007235	2020366	0.7750	0.6451	-1.7974
					0.2280	0.0514	0.3593
					0.2449	-2.5790	-1.5951
LCAR	57.4203	-5.4641	2007287	2020365	0.0270	-0.8226	0.2097
					0.4850	-1.5430	0.4489
					1.2116	-0.7157	-1.2783
LCAU	44.9782	-1.0755	2006340	2020303	0.1340	-0.1318	0.2042
					0.3710	0.0470	0.5062
					-0.2698	-1.3881	-1.6534
LDB2	52.2091	14.1209	2005319	2020335	0.0800	0.1441	-0.4752
					-0.0890	-0.5810	0.0334
					0.4048	-3.0429	-2.8098
LEBE	45.9161	5.6247	2005141	2020366	0.1480	-0.2545	-0.2439
					0.2100	-0.3753	0.2380
					0.6100	-1.1542	-1.7305
LEED	53.8002	-1.6638	2000002	2020365	0.1740	0.1721	0.1249
					-0.0200	1.0635	0.0616
					0.2951	-2.1475	-0.7647
LEEK	53.1278	-1.9813	2004145	2020365	0.1050	-1.4347	-0.2557
					0.0980	-0.1845	-0.0978
					0.1511	-0.4745	-0.2304
LEIJ	51.3540	12.3741	2001290	2020366	-0.2670	-0.7495	-0.1437
					-0.2030	-0.2677	-0.0568
					-0.0529	-3.1744	-3.1516
LEK6	60.7222	14.8771	2011167	2020118	-0.7730	0.2218	0.3990
					-0.3420	-0.5664	0.9077

					7.8735	-3.4490	-2.2992
LENE	49.1493	0.9070	2007133	2020366	0.1310	0.1852	0.2297
					0.1430	-0.5196	0.0190
					-0.1823	-2.2856	-2.6109
LEON	42.5884	-5.6510	2007085	2020366	-0.4590	-0.3227	-1.7734
					0.3400	-0.5874	-1.4281
					-0.3757	-0.6785	-0.6090
LERM	42.0267	-3.7568	2008067	2020366	1.1680	-0.7700	-0.4632
					0.3360	-0.1230	0.2405
					-0.0965	-0.8878	-1.5906
LETO	50.5139	1.6191	2007358	2020366	0.0540	-0.1245	-0.0559
					0.3160	-0.4402	0.2681
					0.0052	-1.3664	-1.8000
LFAZ	45.1166	5.3985	2005010	2020366	0.4500	-0.3086	0.0761
					0.1520	0.2599	0.3951
					0.3726	-0.2797	-2.3719
LGAR	44.2974	0.3789	2007255	2020366	-0.2830	0.6255	0.6406
					0.2430	-0.0390	0.7968
					-0.2575	-1.8184	-3.0457
LGBO	45.3871	0.5879	2016151	2020366	-0.7110	1.1187	0.1099
					1.1570	-2.5622	-1.4971
					-0.4570	-2.4305	-0.6987
LGES	45.8177	1.2307	2012283	2020366	-0.0740	-0.1962	0.2807
					0.1350	-0.3104	0.8725
					0.4499	-2.8510	-2.6255
LI3D	38.6389	15.1141	2004132	2012366	-1.3710	0.1626	-1.4379
					1.9700	0.1244	1.4779
					-4.5473	0.5815	1.6691
LIAR	49.9692	-5.1878	2012019	2020365	-0.9480	0.8574	0.9937
					0.6280	-0.2791	0.5467
					-8.6078	-1.7473	-3.2639
LICF	52.7100	-1.8137	2004148	2020365	0.2960	-0.4755	0.0018
					0.2150	-0.2312	-0.0912
					0.4378	-1.8376	-1.4453
LICO	40.8764	14.0496	2004001	2020366	-4.0810	-0.8694	0.0551
					3.6730	0.1849	0.6707
					0.7593	-1.2054	-1.3673
LIL2	50.6135	3.1360	2001033	2020366	-0.0500	0.4350	0.5074
					-0.1390	-0.0083	-0.1184
					-0.0406	-2.1969	-1.5737
LINO	53.2503	-0.5201	2004145	2020365	0.1930	0.3876	0.2795
					-0.0250	-0.1873	-0.1299
					0.3199	-2.2942	-1.6058
LINZ	48.3098	14.2831	2000325	2020366	0.2240	-0.4314	-0.2721
					0.3040	0.4938	0.4585
					1.0568	-3.1382	-2.5717
LLER	38.2368	-6.0107	2009274	2019365	-1.1460	1.8276	-0.0952
					0.6500	1.2341	1.4462
					0.1089	-0.5870	-3.9089
LLIV	42.4784	1.9731	1999134	2020105	0.3780	0.5673	-0.2275
					-0.0120	0.8868	0.9541

					0.2899	-0.8377	-1.9423
LMCU	50.6428	3.0768	2002144	2020350	-0.2690	-0.4749	0.1309
					0.0150	0.5609	-0.0217
					0.0378	-3.2463	-1.8338
LMDM	46.0691	3.6615	2015242	2020366	0.8850	0.3073	-0.8377
					0.0280	1.0183	2.2259
					-0.0105	-0.4906	-2.0412
LMR1	52.6740	-8.5757	2007079	2020347	0.6820	0.4848	0.3287
					0.4750	-0.2395	0.2531
					0.9398	-1.6603	-0.4135
LNGN	41.5005	14.2526	2006153	2016338	0.1480	0.5134	0.5667
					2.5230	-1.5160	1.9677
					0.6199	-1.1946	0.7821
LNSS	42.6028	13.0402	2006150	2020366	-1.0520	-0.3957	0.2835
					1.8500	-0.1450	0.8042
					0.3749	-1.3825	-2.6500
LOCG	56.0135	-5.4461	2005070	2020365	0.2370	0.0399	0.4406
					0.1800	-0.6948	-0.0616
					-3.1604	-2.8219	1.8187
LODZ	51.7787	19.4595	2008093	2020335	-0.0700	-0.1361	0.2976
					0.0460	-0.0105	0.8037
					0.4102	-2.0520	-2.7431
LOFT	54.5629	-0.8634	2005294	2020365	1.6830	-0.3664	0.0157
					0.5820	0.0147	-0.0110
					-1.5028	-2.2041	-0.4786
LOND	51.4894	-0.1199	2000002	2007104	0.2230	4.0141	1.3103
					-0.5210	2.5780	-0.1554
					-0.6259	-3.0187	-3.2949
LONS	46.6785	5.5570	2015223	2020366	0.0850	-0.1938	0.7684
					0.2430	-0.1897	0.4994
					0.3464	-2.2662	-1.5734
LOSV	38.4457	14.9482	2006003	2020366	-0.5230	0.3265	-0.0019
					6.2010	0.9646	1.0107
					-7.8434	-0.8906	-0.9816
LOV6	59.3379	17.8289	2011236	2020366	-0.1820	0.6980	0.0660
					-0.6320	-0.5938	0.7495
					6.1617	-4.1154	-3.0370
LOVJ	67.8910	34.6159	2010335	2020366	-0.1040	0.6430	-1.9163
					0.3860	-0.6263	-2.4532
					2.7918	-1.7370	-4.7792
LPAS	47.3414	-3.1742	2014270	2020366	-0.3200	0.1202	0.4639
					0.2870	0.1687	0.7079
					-1.1212	-1.8685	-0.7163
LPEL	42.0469	14.1832	2008102	2020366	2.0140	-0.1444	0.0805
					3.1820	0.4379	0.7355
					-1.5972	-0.7513	-2.1711
LPPZ	48.4463	-4.7604	2007234	2020366	0.3960	0.2039	0.1687
					0.4410	-0.2675	0.1767
					-0.2869	-0.6839	-0.5682
LROC	46.1589	-1.2193	2001327	2020366	0.0720	-0.1654	0.4673
					0.0570	1.1798	0.6012

					-0.0795	-1.8498	-2.1218
LRTZ	48.6905	6.1915	2007309	2020366	-0.2990	0.8915	0.8791
					-0.2500	0.4836	0.7402
					-0.1144	-0.1600	-3.2492
LSIE	49.1497	0.2607	2013171	2020366	-0.4100	0.4101	0.9404
					0.3020	0.2557	0.7795
					-0.2882	-3.1291	-2.8485
LUCE	47.4383	7.2682	2007304	2020366	0.1010	0.2206	0.4463
					0.3900	-0.3218	0.6801
					0.3360	-0.8059	-1.5595
LUGO	42.9931	-7.5447	2011160	2020335	0.0690	-0.4875	0.2574
					0.6700	-0.2221	0.2695
					1.5412	2.4401	-5.7551
LUMI	42.6029	8.8274	2010134	2020366	-0.1490	-0.1474	-0.1824
					0.5870	0.2823	0.8171
					0.1881	-0.3440	-1.5605
LURI	42.8884	9.4759	2010168	2020366	-0.2760	-1.2692	-0.0733
					0.7750	-0.4422	0.8175
					-0.0567	-0.7139	-1.3928
LUZZ	39.4460	16.2878	2006315	2018044	0.6120	-0.2736	0.0231
					3.4170	0.4530	0.8612
					1.3796	-1.5864	-4.2014
LYN1	53.4163	-4.2892	2000142	2005176	0.5320	-0.2881	0.7377
					-1.2050	-0.3694	1.2623
					0.6715	-0.0049	-1.7276
MOSE	41.8931	12.4933	2004289	2020135	-1.6220	1.3167	0.4594
					0.6270	0.6962	1.1602
					0.3476	-2.7439	-3.3717
MACY	52.5889	-3.8518	2008346	2020365	0.2050	-0.1418	0.4102
					0.2130	-0.5819	0.0548
					0.3559	-0.6751	-1.6991
MAD2	40.4292	-4.2497	1997188	2020366	-0.4680	1.1630	0.2033
					0.0060	2.0396	0.3703
					1.0267	-1.1178	-1.6091
MAGA	45.7754	10.6291	2006130	2020366	-0.3000	0.4811	-0.2313
					0.6330	-0.0886	0.8181
					0.5098	-1.7230	-1.7548
MAGR	48.1869	3.3224	2015242	2020366	0.3130	1.0397	0.0562
					0.2970	-0.6965	0.8216
					-0.0395	-3.2968	-0.6960
MAID	51.2727	0.5129	2007264	2013212	0.2820	1.9691	0.1451
					-0.0210	-1.1896	-0.2724
					-0.0777	-3.9666	-2.1378
MAIS	51.3037	0.4834	2014204	2020365	0.0270	0.3525	-0.0480
					0.0860	-0.7677	0.4994
					0.0395	-1.5707	-2.6457
MAKS	47.9230	7.0315	2007121	2020366	0.3490	0.0054	0.0366
					0.1090	-0.0885	0.4135
					0.5133	-1.4880	-2.8977
MALA	36.7261	-4.3935	2000089	2020335	-2.3050	-0.4878	-0.8079
					-0.8740	0.6361	0.6709

					0.8260	-1.4533	-1.1302
MALG	57.0061	-5.8284	2000152	2009027	-0.1630	0.0452	0.2334
					0.1290	0.4590	-0.0764
					1.5966	-0.2031	0.7624
MALL	39.5526	2.6246	2000133	2020344	-1.3240	-0.6388	-0.0911
					-0.1110	0.9155	0.6825
					0.0840	-2.8412	-0.4946
MALT	35.8380	14.5262	2006157	2019221	-1.7680	-0.0695	0.0468
					4.5450	0.2110	1.0062
					-0.3375	-2.1035	-0.8129
MAN2	48.0186	0.1553	1998111	2020366	0.1180	-0.7462	-0.2899
					0.2210	0.3342	-0.4932
					0.4767	-2.2308	-1.4826
MANR	53.5116	-2.2350	2004145	2020365	0.2770	0.2815	0.5797
					0.0980	0.1634	0.3873
					0.3103	0.0446	-1.4787
MAON	42.4282	11.1307	2005118	2020366	-0.5940	0.2531	-0.2167
					0.5140	0.0552	0.5111
					-0.0676	-1.9081	-1.5129
MAR6	60.5951	17.2585	1996300	2020118	-0.4830	0.2333	0.0360
					-0.7390	-0.2126	-0.0260
					8.0015	-4.1540	-2.2089
MARJ	50.3569	12.8935	2005068	2015247	-0.2870	0.6320	-0.6140
					-0.0180	-0.3889	0.1359
					0.5014	-3.7517	-1.4497
MARS	43.2788	5.3538	1998197	2020366	-0.3980	-0.0555	0.4148
					0.2070	0.9980	1.1179
					-0.4905	-1.8426	-1.3021
MART	51.3917	1.3829	2004288	2020365	-0.9040	-0.2315	-0.3057
					0.6870	0.1342	0.0403
					-1.0152	-1.9214	-0.9527
MATC	46.2892	1.6048	2015242	2020366	0.1040	1.1402	0.5802
					0.4420	0.2672	0.9112
					0.1222	-3.0261	-1.2394
MATE	40.6491	16.7045	1992097	2020216	0.4710	0.9077	0.1573
					4.4320	0.4704	0.5440
					0.5485	-2.3180	-2.4517
MAUP	48.5239	0.5374	2011049	2020366	0.4360	0.5338	0.4082
					0.2330	-0.1687	0.3696
					0.0287	-1.9349	-2.3422
MAZE	45.5717	-0.5924	2015048	2020366	-0.2230	2.0698	0.8543
					0.3830	3.2182	1.9454
					-1.9329	-4.3215	0.8891
MCEL	40.3255	15.8015	2006215	2020366	0.3810	0.1220	0.0734
					4.3090	-0.1558	0.9455
					0.5117	-1.5673	-2.7472
MCHA	51.9977	-2.9996	2009198	2015333	-0.3460	-0.3999	0.5344
					-0.1010	-0.5710	-0.0388
					0.5465	-3.0390	-0.1458
MCRV	40.7826	15.1681	2005202	2020366	-0.8610	-1.9412	0.6597
					2.1670	-0.5993	0.9156

					1.1693	-3.2153	-2.8021
MCSR	38.0646	15.2301	2010257	2020366	2.4260	0.5234	-0.1726
					6.8100	-0.3113	1.0760
					0.1418	-0.9576	-0.9864
MDEA	45.9245	13.4356	2003024	2020333	-0.4590	0.2528	-0.0622
					2.6240	-0.1668	0.6187
					-0.0524	-1.7694	-2.2626
MDOR	45.7990	4.8090	2002267	2013346	0.6730	-0.4352	-0.0830
					0.1940	0.0844	0.5520
					-0.1532	-1.3374	-3.5704
MDPM	42.9413	-3.4836	2007068	2020366	0.1930	-0.4128	-0.2475
					0.4160	0.7492	0.5943
					-0.1650	1.0060	-2.0971
MEDA	38.9163	-6.3486	2009274	2019365	-0.8210	-1.3437	-0.5406
					1.1290	2.8272	2.2122
					-0.4558	-2.1772	-4.3346
MEDI	44.5200	11.6468	1996001	2020216	1.2770	-0.1367	0.7396
					2.3690	0.2523	-0.4659
					-1.5417	-2.4921	-2.9251
MELA	41.7060	15.1271	2008009	2020366	0.8920	1.1128	0.3179
					4.3060	-0.3648	1.3709
					0.0749	-1.6260	-3.0373
MELI	35.2812	-2.9516	2011348	2020335	-3.0040	-1.1114	-0.4641
					2.9440	0.7643	1.0845
					-0.2124	-2.3067	-1.5332
MELN	48.5395	2.6725	2007081	2020366	0.0770	0.1630	0.1330
					-0.3080	-0.6437	0.2076
					0.7819	-2.5086	-1.9857
MENC	40.0006	3.8312	2016097	2020344	0.1770	1.4322	-0.1703
					0.5800	0.0749	1.7307
					-1.1114	-1.5236	2.0918
MERY	48.5145	3.8869	2006340	2020366	-0.0280	0.4299	-0.6919
					0.6320	-0.4594	0.2634
					0.2376	-2.5238	-2.2930
METS	60.2172	24.3953	1991125	2020231	0.1040	-0.4975	0.2060
					-1.2620	-0.4719	0.0972
					5.1490	-4.1939	-3.6138
MFUS	41.0579	14.8340	2011322	2020366	-0.8290	0.8529	0.6909
					2.3350	0.8063	0.9936
					0.5660	-0.6074	-2.6058
MGAB	42.9130	12.1114	2008094	2020366	-1.6580	0.9163	-0.2344
					1.5450	-0.7147	0.3885
					0.3136	-0.7456	-1.6476
MGIS	47.9758	2.7138	2010332	2020366	0.2520	0.3710	0.0337
					0.1270	0.5624	0.8716
					0.6626	-2.4142	-2.4472
MGRD	45.9753	12.0151	2009253	2020366	-0.1420	0.4599	0.3581
					1.1970	-0.1476	0.2350
					0.8111	-0.0402	-0.8087
MIBR	42.6803	-2.9384	2011176	2020366	-0.0360	0.0882	0.7005
					0.4560	-0.4004	0.5086

					0.4735	-1.4748	-4.5670
MICH	43.9241	5.7176	1998196	2020366	-0.0790	0.2307	0.3712
					0.0380	-0.0468	0.2153
					0.1787	-1.2147	-1.7306
MIK3	61.5741	27.1028	2014043	2020231	0.1810	0.0393	0.8309
					-0.8280	-0.4890	0.4837
					4.9759	-1.6996	-3.3087
MILA	38.2706	15.2307	2005334	2020179	0.0410	0.1652	0.1796
					5.1280	0.1962	0.3121
					0.3363	-0.5824	-1.3788
MILO	38.0082	12.5843	2001278	2012082	-0.6560	-1.5481	-2.6043
					2.7340	0.9835	1.3191
					0.5315	-2.1591	-0.8151
MILT	52.0242	-0.7718	2007330	2013143	0.5240	1.1710	0.8934
					-0.2330	0.6099	-0.3222
					-0.2449	-1.4388	-2.1301
MIMZ	44.2006	-1.2283	2007133	2019307	0.3200	0.5956	-0.2084
					0.6820	0.2359	0.2319
					1.2082	-0.9459	-1.9167
MIRE	48.2949	6.1213	2009104	2020366	-0.0070	0.4334	0.3817
					0.1260	0.1263	0.7952
					0.0458	-2.0804	-2.4944
MLAG	43.4309	12.7787	2012216	2020366	1.0560	-0.1108	0.9923
					3.3790	-0.3718	1.0488
					1.1271	-0.9135	-2.2674
MLVL	48.8411	2.5873	1999334	2020366	0.2070	1.0772	0.1222
					-0.1440	0.4398	-0.0148
					0.3681	-2.0433	-2.4354
MMME	37.9352	15.2540	2005135	2012137	1.6000	-0.4252	-1.1190
					6.1210	0.9634	0.3869
					0.5111	-3.0080	-0.5458
MMNO	39.8700	15.9721	2011258	2020366	-0.6000	1.2668	-0.4608
					2.5960	-0.5848	0.9612
					0.5359	-1.0232	-2.6082
MNBL	47.4958	6.8061	2009105	2020366	-0.2310	-0.2115	-0.1315
					0.1730	-0.2909	0.9149
					0.2752	-0.7478	-2.3742
MNGM	43.8162	28.5876	2012264	2020366	1.2440	-2.2546	2.2594
					2.2430	0.1394	-0.9572
					-3.1994	-1.0330	-3.2515
MNOV	38.0286	15.1356	2010132	2019356	-0.6750	-0.6879	0.2453
					6.8920	0.0842	0.0381
					-0.1224	2.2561	1.3020
MNTP	43.6462	3.8691	2015258	2020366	-0.0040	0.3137	-0.3719
					0.2060	0.0602	0.7177
					-0.2029	-2.4344	-2.3754
MOCO	41.3712	15.1586	2005308	2020366	0.8710	-0.0319	0.1185
					3.8870	0.2922	1.2349
					0.6828	-2.1239	-2.8463
MODA	45.2138	6.7101	1998290	2020366	-0.1580	0.3956	0.1435
					-0.3740	1.4684	0.7059

					2.0815	-1.7388	-3.1596
MODE	44.6290	10.9487	2006068	2020366	0.7110	-0.6917	-0.3730
					3.8950	-1.0192	0.9074
					-3.0873	-4.3787	-2.8875
MODR	41.1461	13.8808	2006193	2020055	-0.9250	0.0688	-0.8488
					1.8920	0.2664	0.0656
					0.5465	-1.1598	-1.4702
MOFA	49.6547	0.5982	2015202	2020366	0.3970	0.3321	0.3201
					0.5720	-2.6221	0.0193
					-0.6825	-2.4622	-1.2289
MOFR	37.1207	-5.4624	2014275	2020335	-1.9180	0.0273	1.0046
					0.6920	1.5974	0.8914
					1.4560	-0.9682	-0.3453
MOGN	46.1483	4.8029	2004336	2020366	0.4000	-0.3051	-0.3101
					0.1070	0.2539	0.5941
					-0.8347	-1.3010	-1.4765
MOLI	40.8412	-1.8793	2013338	2020335	1.6880	0.1715	-0.3391
					-2.6260	0.7182	0.8253
					-1.3424	-1.2960	-0.9099
MONA	42.8968	13.3371	2016314	2020366	2.0390	-0.4899	-0.5615
					5.2780	-0.4010	-0.0289
					0.4040	0.2737	-5.4930
MONC	45.0739	7.9272	2005133	2020366	0.2410	0.3570	-0.5254
					0.1230	-0.9942	0.7138
					-0.4195	0.6445	-0.7123
MONS	46.5486	3.2856	2015259	2020366	0.0800	-1.2074	-0.1599
					0.5690	-2.3734	0.1089
					0.7768	-2.8736	-1.4522
MOPI	48.3727	17.2739	1996162	2020097	0.0760	-0.3628	-0.1467
					0.2450	0.9255	0.6113
					0.8793	-2.8852	-5.3942
MOPS	44.6294	10.9492	2007095	2020366	1.2830	-0.6264	-1.0257
					3.7890	0.0899	0.5608
					-2.8798	-3.7660	-3.1633
MORN	45.6939	0.2725	2008038	2020366	0.1100	1.0237	-0.0958
					0.1550	0.2744	0.4221
					-0.3589	-1.3396	-2.7948
MORO	55.2129	-1.6855	2008350	2020365	-0.0400	0.4523	0.2177
					0.1270	-0.4173	0.3575
					0.6058	-0.6070	-1.0976
MOTA	39.5032	-2.8700	2013193	2020335	-0.9570	-0.3937	-0.3185
					-0.1090	1.2830	0.8613
					0.6292	-1.6651	-1.5979
MOX2	50.6422	11.6162	2003084	2020334	-0.0470	0.1408	-0.2219
					0.2460	-0.2079	0.0079
					0.2771	-1.3675	-0.9382
MPAZ	37.9531	16.0067	2006290	2020366	1.7040	-0.3960	-0.2437
					2.7730	0.6841	1.4328
					1.1187	-2.2413	-1.6131
MPNC	38.1465	15.3529	2010020	2020366	0.6840	0.9947	2.4441
					5.1230	-1.1063	-1.4292

					0.9139	1.1709	2.2519
MPRA	46.2408	12.9877	2002221	2020333	-0.2910	-0.2448	-0.3611
					1.7080	-0.3828	0.1418
					0.0865	-1.9854	-1.9166
MPRV	46.1724	0.5255	2011285	2020366	-0.1740	0.4157	-0.3439
					0.0270	1.3484	0.6744
					1.1288	-2.6261	-3.9044
MRGE	45.7698	7.0611	2005251	2020366	-0.2750	0.3219	-0.5162
					-0.4800	0.7527	1.2776
					1.8095	-0.6425	-3.3025
MRKT	54.2371	-6.5035	2006258	2020347	0.6760	-0.1200	0.1639
					0.1470	-0.6464	0.1506
					0.8959	-1.9944	-0.4283
MRLC	40.7564	15.4887	2004328	2020366	0.5740	-0.3733	0.1333
					3.6380	-0.3895	0.4197
					1.3400	-1.2791	-3.5054
MRON	46.7472	6.3524	2013276	2020366	-0.0850	-0.7938	0.7963
					0.7960	-0.8376	0.9732
					1.0504	-1.2611	-3.0559
MRVN	41.0609	16.1959	2006137	2020366	0.8810	0.3682	-0.2701
					4.3840	0.0481	0.2698
					0.1895	-2.4838	-1.4748
MSAG	41.7121	15.9097	2006145	2020366	0.9720	0.3085	-0.2259
					4.0530	0.4762	0.6840
					0.3893	-2.3536	-2.6145
MSGT	42.8796	1.6294	2007326	2020366	-0.0500	-0.0318	-0.6123
					0.1030	0.0920	0.7166
					1.2801	0.2367	-2.3052
MSMM	43.8107	6.1998	2009328	2020366	0.1520	0.4623	0.1742
					0.2980	0.5577	1.1626
					0.1452	-0.6392	-3.0854
MSRT	45.5414	1.5214	2008142	2020366	0.4710	-0.2401	-0.1709
					0.3080	-0.3180	0.7208
					0.1590	-1.7073	-2.4328
MSRU	38.2638	15.5083	2006001	2020366	0.2330	0.6875	-0.1761
					4.2150	0.2294	0.7661
					-0.0240	-1.3220	-1.4878
MT01	45.7487	12.2006	2008289	2020366	-0.3480	-0.3644	-0.3540
					2.0720	0.3697	0.6591
					0.5831	-1.3924	-2.7384
MT06	45.8313	12.1364	2014281	2020366	-0.1150	0.7430	0.1545
					2.1720	-0.0619	0.1104
					-0.4808	-0.2757	-2.2322
MT10	45.8882	11.8989	2015183	2020366	0.3200	-0.3481	-0.9699
					1.3520	0.2527	1.1066
					0.4301	-2.2943	-1.2567
MTBG	47.7379	16.4042	1998302	2012292	-0.1150	1.8994	-0.3390
					0.7170	-1.1672	0.0486
					0.6184	-3.8806	-3.8918
MTBT	48.4903	4.5640	2016111	2020366	0.8910	0.0831	2.0837
					0.1760	-1.1178	0.5711

					0.9516	-2.6569	-2.5166
					0.1640	0.8416	0.4825
MTDM	43.8828	-0.4849	2007247	2020366	0.2770	0.6937	0.3884
					0.3318	-1.2399	-2.9710
					-0.5810	0.3314	-0.3920
MTER	42.5088	13.2143	2010258	2020366	1.7670	-0.6099	0.4568
					0.4660	-0.3950	-1.8965
					0.0840	0.1794	0.2571
MTMN	46.4294	0.8791	2007133	2020366	0.0750	-0.9873	0.1148
					0.1398	-1.9085	-3.0003
					-0.8570	0.7778	-0.0689
MTMR	40.9184	15.0026	2015224	2020366	2.2510	0.1059	0.9656
					0.6425	2.0212	-3.3893
					0.1150	0.1267	-0.0667
MTP2	43.6388	3.8641	1999121	2020366	-0.0080	0.5111	0.5475
					0.2024	-2.0261	-2.0013
					1.2560	-0.7056	-1.9575
MTRZ	44.3128	11.4250	2008273	2020366	5.2870	1.0863	0.2205
					0.1763	-1.8825	-3.2415
					-0.0910	0.2301	-0.1334
MTSN	40.2662	15.7512	2006215	2018331	3.4790	-0.1934	0.8454
					0.9050	-1.4891	-3.0176
					1.0580	0.6680	-0.4684
MTTG	38.0031	15.6999	2006010	2020338	2.8710	0.1614	1.0621
					0.9058	-1.0942	-1.0357
					-1.1210	0.9602	-0.2346
MTTO	42.4555	12.9927	2005195	2020366	0.9550	0.7031	0.6473
					1.0582	-3.0876	-4.3698
					-1.1950	0.4130	0.9282
MUCR	38.0430	14.8739	2011124	2020366	8.3740	-0.0615	0.4290
					0.5665	-0.1426	-0.7512
					0.0540	0.8967	0.2230
MUEJ	48.1490	11.5682	2003098	2018270	0.0560	0.3511	0.7576
					-0.6351	-1.0858	-1.2915
					0.7330	0.5692	-0.9967
MUR1	43.2632	12.5247	2004177	2020366	0.7140	0.3052	2.5083
					0.8213	-1.8772	-1.6941
					-0.3990	0.4240	-0.4993
MVAL	43.3821	12.4066	2006179	2020365	1.8460	0.5547	1.2617
					1.2156	-1.2618	-2.0793
					0.1970	-0.3607	-0.7538
MYRG	42.1684	-5.2635	2008146	2020366	0.7050	0.4584	0.6162
					0.0380	-2.5598	-1.4387
					0.1130	0.3199	0.0022
NARB	43.1983	2.9726	2010346	2020366	0.2400	0.2650	0.9746
					0.2410	-0.9918	-1.9150
					1.0710	0.5487	-4.0302
NAS1	51.4008	-3.5513	2000142	2005176	-0.3710	0.2087	0.7036
					0.8704	-2.5955	-3.6106
					-0.6320	1.3494	0.2061
NAVA	39.8949	-5.5451	2009274	2019365	0.3610	0.0500	0.3896

					-0.6878	-0.8090	-2.3716
NAYC	46.6979	0.3973	2012331	2020366	0.2090	-0.0489	1.2080
					0.2000	0.4122	1.4571
					-0.0144	-1.5998	-2.6206
NCAS	54.9791	-1.6166	2000002	2020365	-0.3990	-0.2408	-0.1894
					0.0750	-0.2998	-0.2739
					1.3652	-2.3977	-0.8959
NEAB	36.5092	23.0603	2012227	2020366	-17.3920	-0.0275	-0.2577
					-26.9050	0.3989	0.7442
					0.1655	0.4061	-0.1683
NEMI	41.7177	12.7176	2016075	2020366	-0.5170	1.4485	0.4573
					-1.1230	-0.3527	1.3144
					0.7743	-2.6204	-3.7881
NEWR	52.2668	0.4153	2008168	2020365	0.1740	-0.1258	0.0378
					0.1540	-0.4461	0.3174
					-0.0533	-1.5498	-1.6147
NFO1	51.3745	1.4445	2000148	2005176	-0.7420	1.9422	-1.4206
					-0.5620	-0.3772	0.6402
					0.8350	-2.0164	-4.9368
NGER	47.4720	-0.5478	2015202	2020366	-0.0160	0.6180	0.1718
					0.3150	0.0445	0.5394
					-0.1902	-3.3346	-2.4011
NICA	43.7033	7.2273	2002350	2020285	0.2290	0.4795	0.0405
					0.4160	0.4732	0.8837
					0.5054	-1.3657	-2.1048
NICE	43.7255	7.3000	2000350	2020366	0.1690	-0.2813	-0.1640
					0.0090	0.2977	0.2971
					-0.2217	-1.0761	-1.3564
NJOE	59.4607	28.0413	2015170	2020366	-0.0210	-0.8130	0.4708
					-0.4000	-0.9113	0.6210
					2.4646	-3.7648	-5.1481
NMCU	47.2192	-1.5986	2010074	2020366	0.0250	0.4048	0.6746
					0.1780	-1.2502	0.1691
					-0.2549	-2.4291	-3.1588
NOA1	38.0471	23.8640	2006072	2020366	-16.1410	-1.5554	-1.0886
					-25.9620	-0.5561	-0.1072
					0.7047	-0.1782	-0.8477
NOCI	40.7888	17.0644	2005208	2020366	0.9670	-0.2079	0.0641
					4.2210	-0.0821	0.5082
					0.4223	-1.7614	-2.6027
NOGT	48.0353	5.3480	2012293	2020366	-0.0860	-0.6937	-0.2229
					-0.0790	0.7185	0.5016
					0.7728	-2.0999	-1.5389
NOMI	36.4217	25.4286	2006129	2016019	-8.2250	0.7352	0.4763
					-29.9430	0.3705	1.1295
					11.2055	-2.4269	-2.3755
NOR7	58.5901	16.2464	2011173	2020118	-0.4590	0.6648	-0.1172
					-0.5240	-0.4719	0.5670
					4.7572	-2.7845	-2.4702
NORT	52.2516	-0.9125	2000002	2005082	-0.5310	-1.0917	0.7083
					-1.0790	0.0045	0.1854

					1.0702	-1.1273	-4.8420
NOT1	36.8761	14.9898	2000259	2020216	-1.6890	-0.2224	0.2209
					4.7200	0.2345	0.7874
					-0.6803	-2.0767	-0.0120
					-0.1760	1.3845	0.9748
NOYL	48.1046	-1.5065	2014257	2020366	0.2140	0.2956	0.8959
					-2.5736	-3.7744	0.2099
					0.5790	-0.7189	0.4276
NPAZ	43.1396	20.5193	2011252	2020335	-0.4430	-0.3717	0.7220
					0.5852	1.8955	-4.0051
					0.1130	0.2965	1.1632
NPLD	51.4210	-0.3396	2001004	2007349	-0.6590	0.2358	0.8316
					0.6388	-0.3766	-0.8996
					0.0590	-2.1517	0.9934
NSLG	55.0090	-1.4323	1998074	2020357	-0.0590	2.4317	0.3818
					2.2054	-3.1411	-1.0971
					-0.7690	-0.5891	-0.8956
NTZ1	53.3297	13.0726	1998304	2018304	-0.2970	-0.0695	-0.3487
					-0.8138	-3.0538	-3.2812
					0.0790	-0.6782	-0.2447
NVPT	46.6800	0.2651	2011187	2020366	0.3830	0.3198	0.8737
					0.1767	-0.7870	-2.2553
					-0.9780	9.7908	-9.2526
NVRK	41.3369	23.8698	2007194	2013187	-2.9760	-3.4472	6.3426
					0.9818	-8.4681	0.5565
					0.2660	0.4824	0.3757
NWR1	52.3895	-6.9303	2007079	2020347	0.3050	0.2141	0.1059
					0.7390	-2.9819	-1.0373
					-0.0210	0.1481	0.1699
OAK1	51.1176	-0.9051	2015315	2020366	0.2890	-0.7727	0.2502
					-0.4209	-3.9501	-3.8921
					0.0580	0.2208	0.1591
OBAN	56.4513	-5.4408	2007110	2020365	-0.8420	-0.6262	0.1406
					-0.7001	-1.0762	-1.3268
					-0.7710	0.3441	1.5455
OBE4	48.0848	11.2779	2001217	2020008	-0.2890	0.0156	1.0475
					2.6678	-3.1684	-2.8395
					0.3880	0.1076	0.2350
OGAG	44.7878	6.5397	2011200	2020366	0.1440	0.5074	0.6109
					1.5704	0.3205	-4.4175
					-0.7130	1.5715	2.2794
OISO	48.1376	1.9697	2016088	2020366	-0.9610	1.4919	2.7773
					0.2808	-2.5694	-1.0415
					0.0030	-0.1478	0.5282
OLK2	61.1910	21.5058	1997001	2020231	-1.0100	-0.4286	-0.1203
					7.6203	-2.3000	-2.0316
					-0.2850	-0.4328	-1.3408
OLME	41.2855	-4.6839	2006114	2018192	0.2720	0.1290	0.8925
					-0.0456	-0.7468	0.7604
					0.2590	-0.2476	0.1892
OMGH	54.6162	-7.2559	2004153	2020347	0.4440	-0.2483	0.0232

					1.0990	-0.6327	-0.8229
ONSA	57.3953	11.9255	1991182	2020169	-0.7020	0.0216	0.3191
					-0.6870	0.0359	0.5275
					3.1675	-2.9502	-1.3609
OOST	51.2254	2.9223	2003124	2020013	-0.1670	-0.2056	-0.2029
					-0.0620	-0.7899	-0.7980
					-0.1591	-2.7940	-1.5885
OPMT	48.8359	2.3349	2002020	2020366	0.1120	-0.8563	-0.1371
					-0.1780	0.3988	0.0826
					0.3545	-2.3175	-2.5634
ORIV	61.6163	24.2117	2014043	2020231	0.0420	-0.2077	0.6728
					-0.7850	-0.2830	0.4756
					6.6022	-1.9265	-3.2231
OROS	46.5550	20.6710	2001324	2020335	-0.0180	-0.2058	-0.0268
					0.0140	0.3385	0.4953
					-0.6809	-3.8928	-3.0722
OSAN	42.3242	8.6324	2011110	2019177	-0.3370	-0.4600	0.7512
					0.5470	-0.0479	-0.3463
					-0.0280	0.5556	-1.4554
OSK6	57.0657	15.9969	2011169	2020118	-0.2980	0.3870	-0.3174
					-0.5430	-0.6376	1.0293
					2.5879	-3.3310	-1.7667
OSLS	59.7366	10.3678	2000304	2020366	-0.8410	0.1963	0.1724
					-0.2050	0.0034	0.1689
					4.6578	0.8778	-1.8708
OST6	63.4428	14.8580	2011189	2020118	-1.3350	-0.0246	0.3908
					0.2090	-0.2745	0.6235
					8.6874	-3.6276	-3.3426
OTER	46.9149	1.0381	2012256	2020366	0.1070	-0.8828	0.5966
					0.2810	1.1871	0.8603
					-0.2283	-1.0549	-3.0235
OUL2	65.0864	25.8925	2014043	2020231	0.1990	0.5374	0.4001
					-0.3300	-0.2849	0.6728
					9.5903	-3.1546	-4.5292
OVE6	66.3178	22.7734	2011223	2020118	-0.3350	-1.2644	-1.0116
					0.1610	-0.4197	0.8590
					9.4828	-5.3896	-2.8979
OXFR	51.8240	-1.2885	2005046	2020365	0.6550	-0.3557	0.1253
					0.0910	0.0962	0.0075
					-0.2817	-2.4093	-0.8631
PACA	40.8705	14.5564	2003121	2019033	-1.1360	-0.0909	-0.0968
					1.6990	-0.4014	0.5098
					-0.9878	-1.6448	-2.2597
PADT	50.5411	-4.9368	2009064	2020365	0.2680	-0.0214	0.2870
					0.8810	-0.0332	1.1296
					-0.6611	-1.8961	-1.6477
PALI	43.3757	4.8105	2007341	2020366	-0.1840	0.3528	0.3696
					0.4280	-0.3295	0.6941
					-1.0480	-1.2538	-1.6225
PALZ	40.9439	15.9601	2006220	2020366	1.0190	0.3268	-0.6620
					4.4660	0.2047	0.6975

					0.6853	-1.4453	-2.6693
PAMO	46.4668	4.1176	2015242	2020366	0.3210	1.7175	0.2947
					0.7050	-1.9185	0.8874
					0.3729	-3.2964	-2.2370
PAOL	41.0312	14.5675	2009272	2020366	-0.4680	0.6312	-0.3441
					2.1660	-0.1529	0.8784
					-0.4783	-1.0695	-2.1462
PARD	43.4314	2.8235	2007201	2020366	0.5410	0.5113	0.0616
					0.2000	-0.0955	0.6919
					-0.3412	-0.6092	-1.6714
PARM	44.7646	10.3122	2005289	2020366	0.9620	0.0434	-0.8184
					1.8660	1.4571	1.6534
					-0.2045	-5.4859	1.6502
PASA	43.3218	-1.9315	2007043	2020366	0.0910	0.3506	0.3166
					0.2620	-0.1965	0.3740
					0.3543	-0.3626	-1.8850
PAT0	38.2837	21.7867	2009026	2020366	-16.9140	-0.2900	-0.5097
					-20.8420	0.1387	0.8457
					0.0080	-0.6407	-2.3358
PAYR	43.5514	2.3397	2009084	2020366	0.3180	0.2037	0.3706
					0.9650	-3.3003	-0.4166
					0.2224	-1.0240	-2.6783
PAZO	45.8057	13.0526	2007340	2020333	0.1030	1.0978	-0.6022
					2.1680	0.3233	0.6525
					0.7048	-3.2561	-1.7903
PBIL	50.5218	-2.4575	2004330	2020365	0.2920	-0.1291	0.3402
					-0.4320	0.1018	0.2339
					-1.7556	-1.8314	-1.1050
PDBC	40.8998	-5.2001	2007269	2018185	0.0670	0.6351	0.4554
					-0.5770	0.6528	0.5461
					0.3545	-1.9102	-0.6146
PDOM	45.7721	2.9646	2013084	2020366	-0.1590	0.9502	-0.0015
					0.1910	0.5288	0.6664
					0.7489	1.4169	-0.0269
PENA	41.5922	-4.1196	2006114	2018199	0.2530	-0.4019	-0.6996
					0.0530	-0.3981	0.1545
					-0.7076	-1.4316	-1.7526
PENC	47.7896	19.2815	1996063	2020366	0.1340	0.3986	0.2263
					0.3960	-0.1920	0.5477
					-0.1033	-3.4024	-2.8578
PENI	40.3957	0.3589	2012135	2020333	0.1320	-0.0553	0.1854
					-0.0080	0.2496	0.2063
					0.2402	-1.5103	-0.3385
PERP	42.6892	2.8821	2007081	2020366	0.5170	-0.2739	-1.2788
					0.1190	-0.5947	0.2607
					0.4612	-1.8454	-1.6638
PERX	46.9601	6.4562	2013193	2020366	0.1530	3.3618	1.4924
					0.5050	0.9650	1.5619
					0.8505	-1.6249	-1.9047
PESR	43.9410	12.8405	2006180	2017364	1.3320	-3.8062	-5.2010
					8.3210	2.2815	-5.6258

					-3.7255	-10.4356	4.2457
PETE	52.5838	-0.2632	2004145	2020365	0.1060	0.2323	0.1002
					0.1160	0.6759	0.7002
					0.5037	-2.3093	-1.6553
PEVL	50.5044	3.1097	2008142	2016274	-0.0490	0.3743	-0.3947
					0.1000	0.0224	0.4245
					0.0759	-2.1829	-1.3426
PEYR	43.6313	0.2157	2011311	2019210	-0.4170	-1.5376	-0.8538
					0.5050	-0.2603	0.7837
					-0.0367	0.6327	-2.9484
PFA2	47.5153	9.7847	1997100	2020335	0.5960	0.2920	0.0418
					0.4210	-0.0123	0.2668
					1.3131	-2.1627	-2.3396
PIAA	42.2350	8.6293	2010299	2020366	-0.3210	1.5113	0.2818
					0.4100	-0.0351	0.9632
					1.1620	-3.0226	-1.9500
PIET	43.4507	12.4019	2006180	2020365	-0.0610	0.4233	-0.4335
					1.9930	0.4226	0.5729
					1.1176	-2.3164	-2.7185
PIGN	41.2000	14.1799	2011223	2020366	-0.5200	0.4811	0.2007
					2.9480	0.7450	0.8653
					0.9937	-0.1142	-1.9933
PING	38.1618	13.3142	2009122	2020366	-1.2460	0.7375	0.1990
					3.8580	-1.4915	0.2833
					0.1408	-1.9939	-1.1268
PIOB	43.6075	12.5261	2012216	2020366	1.2000	0.4969	-0.3260
					3.2620	-0.3476	0.8319
					1.3506	-0.2242	-3.0701
PIPA	39.4851	16.8158	2007108	2020366	1.2060	0.7328	0.3165
					3.5990	-0.2595	1.1789
					1.0601	-1.8534	-3.2515
PLAC	38.4494	16.4383	2005258	2020366	1.4480	0.2317	-0.3058
					2.9450	0.4474	0.9822
					1.3064	-3.0476	-2.1704
PLEM	48.1710	-2.5980	2007081	2020366	-0.1090	-0.2677	0.6043
					0.2020	-0.4059	-0.1861
					-0.3756	-2.0981	-1.8683
PLOE	47.7461	-3.4273	2006338	2020366	0.1240	-0.3313	-0.8130
					0.2580	0.3457	2.0892
					-0.6555	-2.1476	0.9959
PMCO	41.5440	15.1291	2015124	2020274	5.0040	0.3084	0.6912
					0.1470	0.8621	0.8038
					-0.5852	0.2927	-4.0916
PMTG	50.8023	-1.1112	2001268	2016283	0.5160	0.7615	1.2374
					0.3670	1.5065	-0.5393
					0.0415	-1.6357	-0.9397
PMTH	50.4165	-4.1262	2004044	2020366	0.0570	0.0577	0.3055
					0.2040	-0.2692	0.0049
					0.2387	-2.3349	-0.4546
PNDB	48.2972	-4.0922	2002264	2014223	0.9610	-0.1085	0.1091
					-0.3800	0.5183	0.0742

					-0.3683	-1.4544	-0.1524
PNTV	48.0545	-2.9322	2016111	2020366	-0.5030	0.8967	0.8939
					-0.1330	-0.3105	0.8958
					-0.3607	-2.5609	-1.8392
POBU	46.3828	4.1603	2008010	2020366	0.7050	0.7909	0.2706
					0.2740	-0.4677	0.5559
					-0.0231	-1.5265	-2.2091
POFI	41.7174	13.7119	2007087	2020366	-0.5440	0.9429	0.1141
					2.3250	1.0883	1.0164
					0.4774	-2.2149	-2.7657
PONF	42.5511	-6.5818	2007024	2020366	0.2770	-0.7396	-0.6132
					-2.4200	-0.1449	0.4506
					0.0301	-0.8308	-2.2919
PONT	38.6190	20.5852	2007046	2020366	-5.1640	0.8267	0.2106
					-8.1890	0.3961	0.6832
					-0.2654	-2.7950	-2.2673
POOL	50.7759	-1.9106	2004280	2020365	0.2020	-0.2587	0.2539
					-0.4550	0.7202	0.6541
					0.3945	-1.7399	-1.3965
PORE	45.2260	13.5950	2011263	2020366	-0.4520	0.6667	0.3712
					2.9970	0.3234	0.6610
					0.0310	-0.8024	-1.4085
PORK	54.8419	-5.1199	2005320	2009105	0.4930	-1.2938	0.5631
					-0.7940	0.4296	-0.1893
					1.0183	-1.8742	-1.1617
POTS	52.3793	13.0661	1994275	2020008	-0.4300	0.0374	0.1082
					-0.0010	-0.2318	0.0228
					1.2336	-3.3173	-3.1069
POUS	50.1384	12.2979	2005068	2020335	-0.6680	0.0551	0.1519
					-0.2100	-0.0789	0.2384
					0.1760	-2.2460	-2.3018
POZE	45.3328	17.6755	2011263	2020340	0.9790	-0.1938	0.4830
					1.1780	-0.3271	1.0937
					0.3640	-1.5137	-2.6175
PQRL	42.9833	6.2061	2003260	2016217	0.0210	-0.9865	-0.5027
					0.2910	0.8950	1.7120
					-0.2922	-1.5272	-0.8257
PRAE	50.2029	-3.7203	2005308	2020365	-0.0230	0.0915	0.1248
					0.1260	-0.2751	0.1824
					-1.3951	-1.5654	-0.7168
PRAT	43.8856	11.0991	1998127	2020366	0.2380	0.3273	0.4686
					1.9330	-0.4414	0.1301
					0.2885	-2.5229	-2.4934
PREC	42.8453	13.0399	2016319	2020366	-1.3540	2.5438	1.9657
					1.7560	0.5154	1.7606
					-0.9523	-3.6085	-4.5322
PRIE	43.2768	5.3727	2007234	2020366	0.1430	0.2008	-0.1585
					0.2470	-1.1175	0.0955
					-0.0776	-1.6637	-2.0944
PRIS	51.7191	-0.8286	2017221	2020365	-0.2370	1.3756	0.3189
					-0.3770	-1.0750	1.4098

					-0.3466	-2.5715	-2.2801
PRKV	39.2457	26.2650	2007181	2020366	-19.8800	0.0990	0.7517
					-13.9030	-0.1664	0.9032
					0.8915	-2.4078	-4.6608
PRNY	46.9049	6.3383	2007304	2020366	-0.1770	-1.6768	-2.1783
					0.2420	-0.4919	0.4503
					0.2454	-0.1302	-1.0760
PRRS	49.1898	-1.4170	2016032	2020020	0.2800	-1.5593	-1.7975
					0.2690	0.0569	-0.4756
					-0.6693	-1.7252	-2.7665
PRT2	53.0382	-7.3140	2007079	2020347	1.0860	-0.1131	0.1881
					0.3850	-0.4939	0.3971
					1.5854	-1.5865	-0.9932
PSB1	41.2234	14.8107	2006086	2020366	-0.1210	0.0783	0.4183
					2.5050	-0.4560	0.6998
					0.9493	-0.9694	-3.5031
PSBR	42.0512	-6.6369	2007304	2020366	0.2890	-0.2162	-0.5017
					0.6420	-0.3896	-0.2701
					0.2224	-0.4721	-2.8379
PTBB	52.2962	10.4597	2000090	2020366	-0.2190	0.4472	-0.0225
					0.0610	-1.1382	-0.3893
					0.5898	-0.7524	-1.4382
PTRC	47.2740	0.3056	2011285	2020366	0.5580	1.0568	0.8153
					0.1220	-0.0982	0.8130
					1.0828	0.6847	-3.4201
PTRJ	41.3643	14.5289	2006199	2020366	-0.1990	-0.0874	0.3331
					2.3140	-0.0603	0.2584
					0.6765	-2.0764	-3.4078
PTRP	40.5320	16.0608	2007184	2020366	0.5710	0.7131	-0.9457
					4.2700	-0.2068	-0.0552
					1.1595	-1.4816	-3.1299
PUIG	42.4157	1.8705	2016162	2020335	-1.4480	2.1993	1.3244
					3.7630	-2.4369	0.7227
					-2.6912	1.9580	-0.7026
PUYA	44.8577	6.4793	2005335	2020366	0.2240	-1.2036	-0.8843
					0.0580	0.2964	1.0698
					1.5886	-1.8486	-3.1494
PUYO	43.5270	-0.9135	2015344	2020366	-0.0250	-0.1170	0.6152
					0.2570	-0.5622	0.5268
					0.4088	-1.3582	-0.6864
PUYV	45.0436	3.8789	2004256	2020366	-0.0270	0.0892	-0.1377
					0.3830	-0.5397	-0.1146
					-0.3276	-0.5297	-1.5576
PYHA	64.4976	24.2376	2014317	2020231	0.3620	-0.5044	0.5898
					-0.7780	-0.2461	0.7495
					9.7541	-2.7281	-3.7093
PYLO	36.9142	21.6953	2011236	2020366	-21.5170	0.5700	0.3349
					-27.0180	0.4467	1.3559
					-0.7987	-1.2257	-2.6051
PYRK	59.0066	23.5213	2014243	2020366	-1.3740	0.6361	-0.9714
					1.0210	-1.0918	1.1315

					3.4296	-3.0597	-2.5790
PZNA	43.4477	3.4133	2008169	2020366	0.0610	0.5474	-0.1219
					0.3190	0.2923	0.9203
					0.1361	-1.8391	-2.1715
QINT	41.9853	-3.0338	2007302	2020366	0.0530	0.3228	0.0908
					-0.0680	0.9544	0.9654
					-0.0436	-1.2395	-2.1745
RABU	44.2678	6.9771	2003289	2020366	0.2230	2.3872	2.2915
					-0.0400	0.4222	2.7321
					0.7198	-1.6567	-3.7700
RAFF	37.2226	14.3624	2006011	2018231	-1.8510	0.0611	0.5445
					4.3020	0.4029	0.4032
					-0.0262	-1.3921	-0.7493
RAT0	63.9856	20.8956	2006160	2020366	-0.2950	0.8675	0.0289
					-0.2940	-0.1197	1.2388
					10.3933	-2.8584	-3.7008
RDPI	41.7604	12.7103	2006254	2020265	-0.9650	0.3785	-0.1844
					0.8300	0.3963	1.3735
					1.3944	-1.5748	-2.2697
REDU	50.0015	5.1449	2003128	2020096	-0.1570	0.4265	0.0875
					-0.0720	-0.1569	-0.4033
					0.5610	-0.8234	-1.1054
REDZ	54.4724	17.1175	2008093	2020366	-0.3350	-0.0261	0.3234
					-0.0900	-0.4634	0.5313
					1.0647	-2.6973	-2.1749
RENN	48.1086	-1.6673	2002075	2020366	0.0300	-0.1880	0.2337
					0.1990	-0.7195	-0.0872
					-0.0762	-2.1545	-2.2612
RESU	37.6468	14.0568	2008071	2020366	-0.5600	0.1402	0.2271
					2.5810	0.0059	1.0639
					0.5117	-1.7136	-1.9682
REUS	41.1700	1.1685	2007001	2018070	0.0630	0.0863	-0.2858
					0.4300	-1.0234	-0.3633
					-0.7377	0.7965	1.4444
RG00	41.5588	8.7939	2001065	2020365	0.1690	0.0278	-0.0289
					0.2060	0.6176	0.7947
					0.3943	-0.8244	-1.3261
RGNC	47.2180	0.9083	2012293	2020366	0.3670	-1.0216	0.5421
					0.1080	1.4316	0.5669
					0.6219	-1.2421	-3.0292
RIA1	41.2787	-3.4803	2008064	2020366	-0.0940	-0.8433	-0.6261
					0.1910	0.7199	0.7908
					0.3220	-1.5259	-1.9216
RIAN	42.9758	-5.0061	2007058	2020366	0.2890	-0.9459	0.1743
					0.5740	-0.0482	-0.2074
					0.3196	2.8060	-5.0131
RICM	54.4129	-1.7364	2004145	2016018	0.2750	0.1424	-0.0565
					-0.0340	0.6796	-0.0840
					0.6033	-1.3457	-0.5958
RIGA	56.9486	24.0588	1996300	2020366	-0.1860	-0.1447	0.4034
					-0.6200	-0.1376	-0.1034

					1.4030	-3.7665	-3.3192
RIO1	42.4642	-2.4261	2001226	2020335	0.2060	0.2768	-0.0849
					-0.4050	-0.2312	0.0355
					0.4875	-2.3319	-1.0009
RIOS	41.8887	-5.0487	2006114	2016071	-0.0240	-0.1230	-0.0123
					0.4880	1.3492	0.0919
					-0.3601	-1.4704	-1.5708
RIXH	47.7333	7.3780	2011070	2020366	0.0970	-0.2231	0.1009
					0.3920	-0.5001	0.6197
					0.3389	-0.7498	-2.9638
RLSO	38.0558	21.4647	2009070	2020366	-14.3940	-0.2822	-1.2936
					-23.9400	-0.0520	1.6191
					-0.9198	-0.4956	-1.5953
RMPO	41.8111	12.7032	2006172	2020366	-1.0290	0.7297	0.0540
					0.9200	-0.0200	0.8639
					0.6466	-0.8699	-1.7719
RNI2	41.7035	14.1527	2004223	2020366	0.5270	-0.0617	0.5820
					2.7390	0.2010	0.7598
					1.2512	-0.8334	-2.5712
ROM2	64.2174	29.9318	2014043	2020231	0.4670	1.0487	0.4907
					-0.6390	-0.0925	0.3683
					5.9259	-3.3870	-3.7329
ROMY	49.1738	3.7687	2015259	2020366	-0.2320	0.5901	0.5739
					-0.0460	-0.1995	1.1903
					0.1919	-2.1245	-0.8605
ROPI	42.3320	13.3372	2009097	2020366	-0.3650	0.0078	0.2208
					1.8610	-0.3936	0.5998
					-0.4673	-0.5826	-2.8958
ROPR	41.7945	12.7636	2015001	2020366	-0.3620	0.4891	-1.0909
					1.6520	-0.5906	-0.1097
					0.2946	0.1274	-3.7124
ROSD	45.6915	6.6286	2005349	2020359	-0.2030	-0.7752	2.6358
					0.5520	0.1052	-0.5058
					1.1778	-1.0756	-0.9217
ROSI	45.6252	6.8558	2011320	2020366	-3.0610	0.1053	0.2933
					-7.1830	2.9675	1.9082
					-1.3192	-3.6478	-5.5020
ROSP	46.3169	23.1385	2012001	2020366	-0.6120	0.5402	0.6425
					0.0090	-0.4738	0.3854
					0.4805	0.0880	-3.7258
ROSU	45.4905	25.9439	2012179	2020366	0.3100	-1.2237	-0.0845
					-0.6540	0.3910	0.6594
					0.0158	0.0373	-5.6372
ROTG	48.7184	-3.9657	2009238	2020289	-0.0750	0.7032	1.6381
					0.4170	0.7765	1.1202
					-1.0634	-0.9120	-2.3406
ROVE	45.8935	11.0421	2005248	2020366	-0.2170	0.2106	-0.5602
					1.2360	-1.1627	0.3588
					0.8908	0.5169	-1.3749
ROVI	45.0866	11.7828	2004322	2017285	-0.0210	-0.4301	-0.2646
					1.9380	0.1400	0.2118

					-0.8680	-3.2755	-1.2456
					-0.2160	0.6520	0.6482
ROVR	45.6469	11.0721	2008171	2020009	1.1400	-0.0937	1.2349
					0.5001	-0.8383	-1.9593
					-0.0720	-0.1304	0.1756
ROYA	45.6386	-1.0244	2007081	2020366	0.0340	0.7353	0.4543
					0.2117	-1.2745	-1.9551
					1.4710	0.6153	0.6974
RSMN	43.9335	12.4507	2004331	2020366	3.4500	0.2450	1.1230
					1.3554	-1.1859	-2.6530
					0.1600	0.6232	-0.1983
RSPX	45.1482	7.2651	2006138	2020366	-0.2910	0.8879	0.5077
					1.0421	-1.2591	-2.1187
					0.6060	-0.3054	-0.2189
RST2	43.9415	5.4713	2007341	2020366	0.2270	0.5550	1.3432
					0.5537	-0.6095	-2.4987
					1.8730	0.3843	0.2515
RSTO	42.6584	14.0015	2001257	2020366	3.2670	0.4960	1.3057
					-0.1826	-1.6173	-1.7175
					-0.0090	-0.4518	0.8510
RYON	46.6932	-1.4289	2011049	2020366	0.0740	-0.4912	-0.1608
					0.4927	0.4197	-1.4054
					2.0960	-3.3573	0.8135
SABA	44.7596	19.6967	2011252	2020335	-0.0770	0.3538	0.1021
					-0.0098	-2.2518	-3.7617
					0.1860	-0.9701	1.6844
SABL	46.5300	-1.8058	2002298	2014213	-0.4370	-0.9726	0.9464
					0.0899	0.3454	-0.7029
					0.7860	-0.1459	-0.1746
SABS	55.8989	-2.1286	2004303	2020365	0.2390	0.0414	0.5383
					-2.3602	-0.7899	0.2501
					-0.6020	2.6834	3.5536
SACR	41.3975	14.7058	2004155	2020331	2.5670	-2.2704	-3.2265
					0.5427	-0.5271	4.3414
					-1.5640	0.2869	-1.2839
SACS	42.8490	11.9097	2006016	2020366	1.1730	-1.2972	0.7110
					1.0232	-1.3202	0.4416
					0.0110	-0.5025	-0.3464
SALA	40.9451	-5.4959	2006222	2020366	0.4720	0.2876	0.1262
					-0.2762	-1.8377	-2.0035
					0.8780	0.5761	0.4659
SALB	39.8770	16.3460	2009181	2018217	4.4530	-0.1388	0.5336
					1.5132	-2.4364	-3.3101
					0.3810	-1.1448	-0.4367
SALD	42.5198	-4.7429	2007205	2020366	-0.6100	0.9185	-0.1569
					-0.7027	0.7234	-1.7330
					0.7540	0.7146	0.0743
SALV	39.6715	16.2816	2015218	2020366	3.7950	-0.3008	1.3111
					1.1738	-0.8355	-3.2254
					-0.5900	2.5115	0.5009
SANO	50.6503	-1.2130	2009069	2020365	-0.6990	3.9197	0.4788

					-0.5075	-1.5159	-0.8579
SARI	41.8583	9.4025	2010134	2020266	-0.2140	0.7020	0.5474
					0.4540	0.3426	1.2959
					-0.5439	-0.3160	-2.1312
SARL	49.0025	7.0313	2007234	2020366	0.0500	-0.3243	-0.0880
					-0.4500	-0.4752	0.5883
					0.3244	-2.7033	-2.2678
SARZ	47.5245	-2.7698	2007133	2020366	0.1270	0.4751	0.1937
					0.1830	-0.5688	0.3487
					-0.1803	-1.4441	-0.9816
SAS2	54.5110	13.6431	2003027	2020366	0.1420	0.6016	0.2622
					-0.2040	-0.3965	-0.1517
					1.3148	-2.8993	-2.3722
SAUN	47.5813	0.9317	2011285	2020366	0.0220	0.6084	0.8775
					0.2360	-0.3127	-0.3135
					-0.1593	-0.1085	-1.6176
SAUV	44.2555	4.4669	1999321	2020366	-0.0870	-0.3571	-0.1766
					0.1000	0.4702	0.6420
					0.2187	-2.4602	-2.4204
SAVU	67.9608	28.9558	2014043	2020231	-0.2970	1.5395	0.7355
					0.2380	0.3725	1.3977
					6.3481	-6.5103	-3.2890
SBG2	47.8034	13.1104	1998357	2020335	0.3440	0.6936	-0.1928
					0.6550	-0.0555	0.1319
					0.4703	-0.9148	-2.0100
SBLS	47.8447	-0.3302	2007330	2020366	0.2160	0.3348	0.5413
					0.1000	-2.0231	0.9211
					0.1605	-2.1613	-2.6159
SBPO	45.0510	10.9198	2005143	2020366	0.1260	0.0679	-0.2201
					1.0660	-0.0978	0.4553
					-0.5041	-2.1318	-1.8470
SCAO	54.2525	-0.3800	2003005	2017090	0.5830	0.3669	-0.1182
					-1.1190	0.4876	-0.3686
					0.3936	-2.9373	-0.8191
SCAU	54.2525	-0.3800	2017116	2020365	0.7430	2.6263	-1.2816
					1.1700	0.7918	0.8926
					-0.6652	-7.3624	-0.6382
SCDA	44.7945	3.2675	2007140	2020366	0.0610	0.1220	-0.5073
					0.4610	-0.0577	0.5636
					0.6745	-0.4740	-1.9101
SCHR	40.1902	16.0853	2005258	2020366	0.2340	-0.9593	0.0265
					4.0530	-0.0282	0.7843
					0.9984	-3.0061	-2.6330
SCIL	49.9145	-6.2958	2010231	2020366	0.3970	-0.0943	0.1981
					0.5950	-0.2283	0.5626
					0.5439	-0.2478	-0.4123
SCOA	43.3952	-1.6817	2005348	2020366	-0.0660	-0.0992	0.0714
					0.2340	0.1154	0.9154
					-1.2796	-1.8642	-2.0510
SCOP	41.7541	9.1009	2011089	2020366	-0.2240	-0.5608	-1.1051
					0.4940	0.6904	0.7627

					0.1619	0.2679	0.5030
SCTE	40.0723	18.4672	2006033	2020366	0.5710	0.1404	0.0879
					3.8690	0.0553	0.6879
					-0.0684	-1.7076	-3.2297
SEES	48.5932	0.1712	2009092	2020366	0.0530	-0.7628	0.4141
					0.2400	-0.6663	0.1924
					0.0651	-2.8591	-2.8968
SERS	39.0359	16.6885	2005260	2020366	1.4510	0.2017	-0.1978
					3.1490	0.5254	0.9036
					1.2098	-1.6906	-2.1895
SETE	43.3976	3.6991	2007299	2020366	0.0300	-0.9048	-0.3954
					0.1280	0.2088	0.7943
					-0.2587	-1.3066	-1.8011
SEUR	46.9943	5.1515	2006340	2020366	0.1560	0.1308	0.0226
					0.1640	-0.1267	0.4681
					0.1099	-2.3355	-3.0151
SFER	36.4643	-6.2056	1996082	2020124	-4.1760	-0.3727	-0.7815
					0.3730	0.2487	0.0487
					1.2631	-2.0624	-1.9195
SG02	60.2002	25.0465	2001344	2005256	-0.3320	1.1112	2.1834
					-1.2270	1.5893	1.5219
					2.4673	-3.8084	-2.9313
SG40	60.2039	24.9611	2005262	2012038	0.6510	0.2704	0.0843
					-1.4950	0.0368	-0.3137
					4.6947	-4.8720	-3.5952
SGIL	43.6770	4.4337	2006341	2020366	0.1830	-0.4132	-0.2951
					0.3930	0.2801	0.9342
					-0.7635	-2.4637	-2.4091
SGIP	44.6355	11.1827	2005140	2020366	0.8110	0.6993	-0.1628
					2.6950	0.5268	1.0364
					-5.0837	-1.8435	-1.1994
SGRE	42.3362	13.5011	2009105	2020366	-1.1790	-0.2692	0.2983
					2.6710	-0.2000	0.6810
					-0.8943	0.2227	-2.7126
SGRT	41.7546	15.7439	2006145	2020366	0.9310	-0.1373	-0.1700
					3.9890	-0.2469	0.6043
					0.1452	-2.9243	-1.7325
SGTA	41.1356	15.3653	2005357	2020366	0.7640	0.3586	-0.4365
					3.8940	0.3869	1.6894
					1.0385	-2.2134	-2.6499
SGVA	40.9493	-4.1203	2007030	2020366	-0.1190	-0.0796	-0.4099
					-0.0060	0.3732	0.3924
					0.5697	-0.3927	-1.5914
SHAP	54.5019	-2.6852	2015281	2020365	-0.0310	0.2726	1.6264
					0.1760	-1.1017	0.6376
					0.8667	-3.4106	-1.0453
SHEE	51.4457	0.7434	1997085	2019341	-1.2960	-0.3795	-0.3489
					1.4690	5.0067	0.9306
					2.5832	-2.5079	-0.8785
SHOB	52.2429	-2.8858	2005017	2015169	-0.6440	-0.0099	0.5050
					0.6530	0.2517	0.0643

					-0.1434	-2.3001	-0.9088
SHOD	52.2430	-2.8859	2015175	2020365	0.3640	0.1440	0.3393
					0.3960	-0.8522	0.0841
					0.2643	-1.8831	-1.8122
SHOE	51.5548	0.8270	2005230	2020366	0.4320	-0.1363	0.0675
					-0.1390	-0.0490	0.2238
					-0.0436	-2.0284	-0.7375
SHRE	52.7179	-2.7164	2004145	2020365	0.2810	-0.1997	-0.0786
					0.2130	-0.2811	-0.1969
					0.1276	-1.1245	-0.9649
SINE	39.6459	3.0153	2016097	2020344	-0.3730	-0.2908	-1.4403
					0.9560	-1.3478	1.5024
					-7.1624	-2.4499	0.0877
SIRI	40.1835	15.8664	2006214	2020366	1.1830	0.4277	0.4168
					4.2050	-0.1408	0.4007
					-0.0276	-1.6622	-2.3643
SJDV	45.8791	4.6766	1997287	2020366	0.1070	0.1769	0.2392
					0.3160	-0.1236	0.2552
					0.0747	-1.7437	-2.5635
SJOR	39.3149	2.9982	2016097	2020344	0.1280	0.6320	-0.3474
					0.4890	-0.0186	1.2755
					-0.5572	-0.5773	-0.5503
SJPL	45.6632	2.6896	2008287	2020366	0.1320	0.1940	-0.3952
					0.4050	-0.3212	0.3629
					0.6794	-0.5432	-2.5744
SKE0	64.8792	21.0483	1996185	2020366	-0.5030	0.0975	-0.1474
					0.2580	0.1610	0.1728
					10.5374	-3.4621	-3.4111
SKEE	53.1419	0.3468	2009076	2020365	0.7290	0.2979	-0.2437
					-0.2540	-1.2596	-0.2584
					-1.6918	-2.5728	-1.1612
SKYR	38.9044	24.5646	2012333	2020366	-14.4210	-0.1073	1.1723
					-23.6810	-0.2886	0.8362
					0.7113	-0.0321	-2.9367
SLCN	40.3911	15.6330	2005151	2020366	-0.6810	-0.2249	0.5689
					2.7510	0.0846	0.7172
					1.4395	-1.1692	-2.8164
SLGO	54.2741	-8.4632	2007079	2020347	0.5870	0.0389	0.2343
					0.3040	-0.2890	0.3651
					1.0476	-1.2755	-1.4097
SLVT	43.9198	3.2683	2007213	2020366	0.0160	0.0605	-0.7229
					0.1870	-0.1889	0.2543
					0.3713	-1.2491	-0.8395
SMDV	40.3583	-4.3763	2016350	2020335	-0.3920	0.1053	-1.7400
					0.3790	-1.2244	1.0095
					0.2364	-4.6664	-0.8315
SMID	55.6406	9.5593	2001001	2020335	-0.7950	-0.3403	0.5185
					-0.3880	-0.6907	0.1899
					0.9421	-1.9095	-1.4395
SMLE	46.4112	-0.2219	2007133	2020366	0.1720	0.2904	-0.0386
					0.2320	-0.0346	0.4567

					0.1831	-1.6627	-2.5631
					0.1950	0.1616	0.0195
SMNE	48.8444	2.4250	2000321	2020366	-0.1920	0.7631	0.4509
					0.3550	-2.9840	-2.6697
					0.2830	0.3794	-0.4076
SMSP	49.1152	4.5814	2007081	2020366	-0.0630	-0.6703	-0.0887
					0.2531	-2.9645	-2.3168
					-2.4980	-0.7018	-0.6230
SMTG	48.6411	-2.0275	2010048	2020366	-0.7850	0.3476	0.7314
					-0.8058	-2.7484	-3.0216
					0.1000	-0.7263	-0.2365
SNAL	40.9255	15.2095	2004232	2020366	2.8500	-0.5547	0.1824
					0.0327	4.6612	-0.0276
					-0.0280	0.3757	0.1235
SNEO	52.1854	-0.1125	2009184	2020365	0.0260	-0.3617	0.5573
					-0.0746	-1.2031	-1.5776
					-0.0430	0.4001	0.6403
SNTG	42.8854	-8.5517	2013353	2020335	0.6790	0.0179	-0.4008
					0.5238	-0.9067	-2.8490
					-0.5680	1.2929	0.6860
SODA	67.4300	26.3669	1996300	2020230	-0.1910	0.0461	0.2470
					7.3918	-0.1594	-3.3835
					0.0860	-0.3433	-0.0789
SOFI	42.5561	23.3947	1997155	2020366	-1.7310	-0.4166	0.5799
					-0.2295	-3.4953	-3.7644
					-0.3390	-0.5748	-1.1825
SONS	39.6754	-3.9640	2000350	2020344	-0.0300	-0.8242	-0.8313
					-0.0037	-1.5517	-1.6331
					0.1120	0.5831	-0.2253
SOPH	43.6114	7.0541	2001013	2020366	0.0750	-0.1066	0.7822
					-0.0064	-1.6158	-1.5525
					0.2350	-0.8311	0.7611
SOPU	43.2769	-3.1542	2013181	2020366	0.6810	-0.3092	-0.2553
					-0.9819	0.3612	-2.3765
					0.1140	0.4300	-0.0194
SORI	41.7622	-2.4705	2008157	2020366	-0.1160	0.6299	0.7846
					0.3803	-1.6413	-3.5845
					-0.1290	0.3505	0.3528
SOTN	50.9377	-1.4704	2000002	2020365	0.8550	0.4156	0.2095
					-0.5574	-2.2068	-1.0740
					0.0660	0.2990	-0.1679
SOUS	44.8746	2.0271	2007133	2020366	0.1870	-0.2726	0.5750
					-0.0222	-2.5708	-1.8058
					-4.0830	-0.9353	1.2608
SPAN	38.7813	20.6736	2007142	2020366	-11.6570	-0.7459	2.0056
					-0.3804	-1.3573	-0.9353
					-0.6800	-0.2441	0.1956
SPT0	57.7150	12.8913	1996169	2020118	-0.6410	0.0009	0.2517
					4.5340	-2.0732	-1.6454
					0.6280	0.7530	0.5955
SRJV	43.8679	18.4139	1999165	2020366	1.1250	0.5137	1.0608

					0.9475	-1.0203	-3.7754
SSYX	37.1576	15.0764	2005133	2020366	-1.4040	0.0065	-0.2938
					4.4300	0.2308	0.9695
					-0.0519	-1.4155	-1.4281
STAS	59.0177	5.5986	2000304	2020366	-0.6270	0.1038	0.6515
					-0.3310	0.0789	0.4176
					1.8385	-1.9095	-1.6915
STBE	54.4909	-3.6066	2005244	2020365	0.4600	-0.3061	0.5469
					-0.4360	-0.4595	0.1937
					0.4275	-1.3383	-0.2549
STBR	48.5068	-2.7533	2012299	2020366	0.0650	-0.3749	0.6191
					0.3210	0.4592	0.4951
					0.1551	-1.8910	-2.0994
STBX	44.2594	4.1969	2012079	2020366	-0.1500	0.2953	0.1054
					0.4020	0.1231	0.8603
					0.2122	-1.9323	-2.6898
STEE	51.9015	-0.1785	2009006	2020365	0.2510	0.2164	0.2937
					0.0710	-0.3271	0.2165
					0.1683	-1.5612	-2.0134
STEY	45.2352	5.7618	2003147	2020366	-0.2650	0.5099	0.4739
					0.1360	-0.1166	0.0508
					0.8115	-0.8360	-2.8635
STFE	45.5267	3.7270	2014269	2020366	0.0470	-4.3998	-1.5675
					0.1630	0.6237	0.4282
					0.4303	0.5201	-0.7617
STGN	45.4186	2.7277	2014267	2020366	0.0520	0.5316	0.5614
					0.3480	-0.4939	0.3406
					-2.0447	-1.5101	1.0538
STJ9	48.6217	7.6838	1999313	2020366	0.0560	-0.0293	-0.1570
					0.0670	-0.0395	0.2507
					0.0906	-1.9660	-2.2447
STLO	49.1173	-1.0550	2007133	2020366	0.1610	-0.5478	0.0901
					0.2930	0.5695	0.0695
					-0.2244	-1.6560	-1.9062
STMA	46.8223	1.6557	2011221	2020366	0.0850	-3.0004	-0.4781
					1.3190	2.4705	1.1384
					0.4102	-0.3986	-3.0460
STMR	43.4492	4.4216	2008100	2020366	-0.1640	0.0151	-0.5460
					0.1950	1.1805	1.2389
					-2.0744	-3.1008	-2.2784
STNA	47.2706	-2.2028	2013276	2020366	0.2550	0.4460	0.8092
					0.3920	1.1778	0.6276
					-0.0938	-1.6831	-2.2685
STOR	58.2031	-6.3754	2007287	2020365	-0.2250	-0.1321	0.1913
					0.5900	-0.3895	0.1619
					0.1105	-1.6666	-0.6477
STPO	48.2031	15.6329	1999167	2017277	0.3770	1.0502	0.9829
					0.3600	0.5724	0.6305
					-0.1900	-2.4149	-2.5421
STPS	46.3084	3.2940	2006340	2020366	0.0490	0.9400	-0.0112
					0.1240	-0.6664	0.3085

					0.8780	-2.2948	-2.5791
STRA	51.5446	0.0095	2007264	2020365	0.2800	0.6570	0.4160
					0.0960	0.1277	0.5661
					-0.4843	-2.6959	-1.9808
STRN	54.8666	-4.7124	2009184	2020365	0.0940	0.4037	-0.1650
					0.2630	-0.6039	0.3624
					1.2572	-1.0156	-0.6512
STRU	51.7396	-2.3014	2006020	2020365	0.5860	-0.1158	0.4686
					0.3320	-0.4290	0.1892
					-0.5214	-1.7446	-0.7780
STUE	46.4722	9.3473	2005326	2017317	2.4060	1.6173	3.9916
					2.8660	0.3312	0.5760
					0.7967	0.4587	-0.9741
STV2	44.5669	6.1062	2008350	2020366	-0.0050	-0.1714	-0.1148
					0.0270	2.5602	1.4281
					1.1738	-0.6811	-2.4473
STVA	46.8879	-0.2327	2015203	2020366	0.4520	0.2626	0.1968
					0.1290	-0.5625	0.5873
					0.1933	-1.5536	-1.5212
STVD	42.0740	-6.0143	2007290	2020366	0.7080	0.4748	-2.0183
					-0.5670	-0.8010	2.0927
					-1.1491	-0.5063	-1.1420
SULD	56.8418	9.7422	2001001	2020335	-0.6800	0.0790	0.2867
					-0.5420	-0.4075	0.0336
					1.5900	-2.2606	-1.3196
SULP	49.8356	24.0145	2001169	2020366	-0.8770	0.0049	-0.2479
					0.0870	-0.7977	0.1603
					0.6294	-3.6061	-4.1873
SUME	46.9643	17.2918	2005096	2013324	0.3040	-0.1006	-0.4090
					0.3790	0.0154	0.7895
					1.3667	-3.8505	-3.0929
SUN6	62.2325	17.6598	2011270	2020118	-0.7500	0.7382	-0.0902
					-0.1970	-0.1333	1.2889
					9.7080	-3.0324	-1.4244
SUNB	51.3999	-0.4175	1997099	2012341	-0.5170	3.2035	1.0808
					0.1800	-1.4389	-0.0523
					-0.2295	-2.4890	-1.3068
SUR4	59.4636	24.3803	1998272	2020105	0.0340	0.3564	0.9966
					-1.1140	0.0451	-1.1552
					3.4887	-4.3415	-3.4397
SURF	44.4809	6.8117	2017012	2020366	-2.5010	1.8668	2.6401
					-4.8020	1.5410	3.0957
					-3.6281	-0.6900	-6.1624
SVE6	62.0174	14.7001	2011189	2020118	-0.9050	0.8229	0.5612
					0.3870	-0.3509	1.9715
					8.4173	-5.0266	-4.9656
SVIN	38.8028	15.2342	2006046	2020366	-0.2200	0.5676	-0.0093
					3.1490	-0.2273	0.4113
					-1.0815	0.3236	-2.1310
SVTL	60.5328	29.7809	1996075	2020366	0.2910	-0.6090	0.4424
					-1.1310	-0.9258	0.1777

					3.6305	-2.0754	-3.2169
SVTO	40.6044	16.4405	2006233	2020366	0.7750	0.4350	0.1568
					4.2330	0.9290	0.7095
					0.8586	-1.8370	-2.5960
SWAN	53.7365	-0.5050	2004145	2020365	0.3010	0.4797	-0.0052
					0.2780	0.5950	0.1248
					-0.0540	-2.5599	-0.4190
SWAS	51.5655	-3.9818	2010057	2020365	0.1450	-0.0462	0.1568
					0.3020	-0.4795	0.4530
					0.0594	-1.4549	-0.9012
SWKI	54.0986	22.9282	2008093	2020335	-0.5520	0.6252	0.2990
					-0.0770	-0.4031	0.2979
					-0.4867	-2.5799	-2.4565
SWR1	53.4591	-6.2190	2007079	2020347	1.3130	-0.1746	0.8657
					0.8870	-0.3322	0.2480
					0.7686	-1.7745	-1.3095
SWTG	58.2076	-6.3889	2005245	2020365	1.1520	-0.3310	0.7848
					0.5400	-0.4291	0.0313
					0.3965	-1.4538	-0.2678
TALR	39.0351	-5.2354	2014211	2020335	-0.8060	-0.9875	-0.2656
					0.6800	-0.1066	-0.0099
					1.7282	-3.8381	-2.3690
TANC	49.4733	0.4545	2013329	2020366	-0.2280	0.4755	0.0334
					0.3220	-0.4340	0.0240
					0.2700	-2.1017	-2.5660
TAR0	36.0086	-5.6024	2010135	2020335	-4.3420	0.0866	-0.5229
					1.5600	0.6279	0.2228
					0.0632	0.4152	-1.3919
TARR	41.6574	1.1660	2017178	2020335	0.1420	-0.6261	-0.7242
					-0.4190	1.1171	1.5180
					-1.0778	-2.2945	-0.9416
TAUT	51.0234	-3.0787	2002041	2019150	0.1900	0.7968	0.6356
					-0.0970	-0.4730	-0.1185
					0.2908	-2.7234	-0.3594
TBSB	51.4948	0.0373	2012120	2020244	0.2460	1.2732	1.3717
					0.1770	-3.6952	0.8635
					-0.1768	-1.9476	-1.9124
TEDD	51.4253	-0.3435	2007236	2020365	0.0440	0.4242	0.1448
					-0.3490	0.5575	0.4087
					0.2662	-1.4543	-1.7059
TEJH	55.2484	14.8393	2015309	2020366	-0.3860	0.1794	0.2350
					0.1500	-0.3782	0.3799
					0.9945	-4.2058	-2.2448
TERS	53.3627	5.2194	1996304	2020366	0.7610	0.3262	0.7258
					-1.0270	0.1550	-0.1943
					0.1978	-2.8829	-1.4610
TERU	40.3505	-1.1243	2008066	2020344	0.0940	0.4176	-0.5594
					-0.2980	0.4485	0.9009
					-0.3426	-0.4541	-1.1089
TETN	35.5616	-5.3630	2000143	2020366	-4.8210	0.9413	-0.6559
					0.4640	-0.0469	-0.7660

					0.4071	-2.2109	-0.7567
TGBF	53.5574	6.7479	2000306	2020366	-0.0850	0.2373	0.1827
					-0.6070	-0.4093	0.0920
					-0.0407	-2.4995	-1.5473
TGBU	54.1217	8.8592	2009138	2020366	-0.7780	-4.2603	-0.3028
					0.6290	1.1053	1.2150
					-0.1630	-3.1942	-1.9430
TGCU	53.8677	8.7175	2008345	2020366	-1.0250	0.8301	1.3410
					0.1700	1.5665	1.0931
					0.5958	-2.6900	-1.4884
TGDA	54.7305	8.6871	2009140	2020366	-1.5040	8.8308	3.1978
					-0.1540	-0.6490	0.1390
					-0.1540	-2.8817	-1.5171
TGDE	58.0064	7.5548	2002079	2020366	-0.7970	-0.5544	0.0159
					-0.1620	0.0378	0.5487
					2.0896	-1.7444	-1.4833
TGEM	53.3368	7.1863	2009287	2020366	-1.2060	3.5458	4.5888
					-0.0100	1.4914	1.4779
					0.0438	-2.1009	-1.8533
TGF3	55.1950	7.1582	2010054	2020233	1.1780	-0.8328	-1.1038
					-0.0420	0.1303	-0.2522
					0.0752	-4.3827	-2.9753
TGKN	53.3272	7.0307	2008150	2018248	-2.1430	0.4172	-0.6618
					-0.5260	-0.0324	0.1876
					-2.2131	-4.0295	-1.2495
TGME	53.7717	8.0926	2009209	2020366	-0.0540	-0.6196	-0.1275
					-0.2760	-0.4688	0.4508
					0.3969	-3.2577	-2.7173
TGPA	53.1082	7.3656	2009288	2020366	-3.3720	-0.0462	-0.5382
					1.9350	0.3523	0.6066
					-0.0743	-2.9070	-1.6147
TGRI	48.8414	1.9489	2015258	2020366	0.2240	0.2607	0.4978
					0.2290	0.5033	0.5596
					0.7042	-3.6964	-2.9365
THNV	49.3639	6.1703	2011251	2020366	-0.2550	-0.3705	0.2053
					-0.1040	0.4483	0.5690
					0.3213	-1.9099	-3.8434
THOR	46.2916	-0.2479	2004079	2020366	0.0540	1.0979	0.9755
					-0.2870	0.1733	0.4793
					-0.0463	-1.6871	-2.3345
THUS	58.5816	-3.7250	2007146	2020365	-0.1040	-0.0045	0.0181
					0.1030	-0.4705	0.0242
					1.0118	-1.3207	-0.7565
TILO	36.3804	27.3937	2005182	2016228	-0.1040	-0.8139	-0.2451
					-12.4810	0.3326	1.1151
					-29.8890	-0.4334	-2.1316
TIRE	56.5000	-6.8807	2010333	2020365	-0.0440	0.1262	0.3600
					0.1050	-0.5033	0.4189
					-1.1620	-0.7475	0.7525
TIRG	44.4573	28.4123	2012001	2020366	-0.1550	-0.6948	0.3118
					-0.2360	-0.1553	1.3833

					0.9560	-0.5568	-4.7723
TIT2	51.0352	6.4316	2001298	2020366	-0.3560	-0.1599	-0.0952
					-0.3510	0.0694	0.1134
					1.0365	-1.7197	-2.0809
TITO	40.6013	15.7237	2002001	2020366	0.5110	0.0466	0.1072
					4.3710	0.0271	0.6435
					-1.2476	-1.6990	-2.3153
TLIA	43.5614	1.4806	2007290	2020366	0.1010	-0.4729	-0.2638
					0.2570	-0.3899	0.2775
					0.0542	-1.8780	-2.3568
TLL1	53.2915	-6.3635	2007079	2020347	0.1700	0.6570	0.2333
					0.0440	-0.4858	0.5481
					0.7424	-1.8956	0.0535
TLMF	43.5746	1.3751	2002170	2020366	-0.2870	-2.1442	-0.6835
					0.3790	-0.3068	0.1237
					0.5734	-2.0104	-2.6467
TLSE	43.5607	1.4809	2001005	2020366	-0.2450	0.1327	-0.2852
					0.1950	-0.4724	0.1581
					-0.1897	-1.8711	-2.2861
TLSG	43.5497	1.4850	2014080	2020366	0.4470	0.5752	0.1393
					0.4680	-0.0850	0.8603
					0.0189	-1.1438	-3.0692
TOIL	59.4220	27.5366	2008102	2020105	0.1680	0.0844	0.6208
					-0.1650	-1.8488	-0.1455
					2.7040	-3.5888	-3.5698
TOLF	42.0640	12.0000	2005003	2020366	-1.3860	2.6123	2.1108
					0.9360	0.1005	-1.1003
					0.1906	0.3637	1.1933
TOR2	58.2647	26.4616	2011263	2020105	-0.2760	1.2681	0.6319
					-0.4380	-0.7532	0.8384
					1.6995	-1.8295	-3.1117
TORI	45.0634	7.6613	1997091	2020366	0.0270	1.7201	0.1180
					0.1200	-1.0471	0.3518
					0.6759	-2.6107	-2.8240
TORN	66.0776	24.3320	2014043	2020231	-0.1670	0.6985	0.7721
					0.1030	-0.1125	0.6915
					9.4444	-3.5000	-4.4657
TRAU	39.8184	2.8916	2016097	2020344	-0.1010	0.8231	-0.3110
					0.3760	-1.3098	1.2378
					-0.2921	-1.0234	-0.6546
TRBL	48.5654	1.3404	2013114	2020359	0.3610	-2.4906	-0.5708
					-0.1440	-0.4105	0.3876
					0.4645	-2.2005	-1.2987
TRDS	63.3714	10.3192	2000304	2020366	-1.4850	0.4495	0.5505
					0.5110	-0.0760	-0.5021
					4.6684	0.2880	-3.0024
TREM	42.1239	15.5108	2014163	2020366	1.2970	0.2854	-0.0343
					4.0290	-0.0786	0.8131
					0.3299	-1.5879	-2.3640
TRF2	47.9280	15.8589	2004107	2020335	0.1150	0.5691	-0.1266
					0.4530	-0.3281	0.2326

					-0.4992	-5.9938	-1.9343
					-0.3570	-0.0184	-0.7866
TRIE	45.7098	13.7635	2003039	2020334	2.5730	0.1883	0.4384
					0.1857	-1.9137	-1.6371
					2.1240	0.3060	0.2356
TRIV	41.7666	14.5502	2004272	2020366	3.7200	-0.0516	0.9870
					0.5765	-1.3329	-2.4112
					0.4670	0.3810	-0.4648
TRMO	44.2854	2.7248	2008210	2020366	-0.0670	-0.4160	0.3551
					0.4774	-0.9194	-2.3067
					-0.7040	0.5495	0.3623
TRO1	69.6627	18.9396	1998070	2020366	0.3410	0.3043	-0.3955
					3.9110	-2.1311	-3.4247
					0.0350	0.3637	-0.0386
TROP	43.2195	6.6010	2005250	2020366	0.0820	-0.0533	1.0124
					-0.1502	-0.2163	-1.2773
					-1.5970	-0.2378	0.0305
TRUJ	39.4798	-5.8556	2009274	2019365	0.9760	0.7578	1.4662
					-0.0984	-1.3864	-2.6548
					-0.6290	0.6363	0.3066
TRYS	48.2942	4.0118	2001356	2020366	0.3420	-0.2459	0.1956
					0.2694	-1.2795	-2.1780
					-4.4800	-0.4374	0.0043
TUBI	40.7867	29.4507	1998127	2020365	-1.3840	0.4711	0.3184
					-0.4769	-1.8908	-3.8655
					-0.2060	-0.1866	-0.0496
TUBO	49.2059	16.5928	2001169	2020335	0.1470	0.5293	0.6238
					0.9192	-3.4879	-2.9423
					-16.0000	-0.5894	0.4608
TUC2	35.5332	24.0706	2004270	2020366	-26.1440	-0.1524	1.5141
					-0.5891	-1.4252	-1.9352
					0.2270	0.0773	0.0104
TUD1	42.0486	-1.6034	2015296	2020335	-0.0160	-0.2244	1.2659
					-0.1528	-2.4853	-1.5066
					-0.9090	-0.2087	1.4259
TUDO	45.5938	27.6687	2012126	2020366	1.1670	-0.6653	0.5831
					-0.4916	0.4405	-3.7362
					-0.0740	0.2534	0.9397
TUO2	60.4158	22.4433	1997001	2020231	-1.0860	-0.0448	0.2706
					6.1581	-2.9340	-2.6087
					-0.3540	1.2080	-0.2491
UCAG	39.2280	9.1101	2014106	2020216	0.6180	1.2204	1.5590
					0.1222	-1.8047	-0.0145
					-0.3140	0.4869	-0.0606
UDI1	46.0375	13.2530	2002164	2020333	2.2740	0.6164	0.7315
					0.0500	-2.4555	-1.5924
					0.3260	-0.1136	0.2909
UIST	57.3534	-7.3749	2005021	2013356	0.2310	0.4011	-0.0166
					0.5951	-0.9280	-0.3665
					-0.0970	-1.8426	0.7051
ULLO	57.9057	-5.1661	2014065	2020365	0.7100	-2.9715	-0.0698

					0.8927	-1.3101	-1.2907
UMBE	43.3112	12.3286	2005132	2020366	-1.0660	1.2616	0.1624
					1.6730	-0.7324	0.2398
					0.9742	-2.3532	-2.8720
UME6	63.5781	19.5095	2011189	2020118	-0.5590	0.4575	0.3419
					-0.1810	-0.6287	0.9308
					10.2134	-5.4485	-3.4364
UNME	43.3216	-0.3257	2007168	2020366	0.1800	0.4110	-0.1803
					0.8050	0.8448	0.8675
					0.9277	-0.9342	-1.7709
UNPG	43.1194	12.3557	1997288	2020366	-0.7380	1.0379	0.0477
					1.2570	-0.1941	0.2249
					-0.1452	-1.7336	-2.7571
UNTR	42.5587	12.6738	2007046	2020324	-0.8160	0.3349	0.0109
					1.7660	-0.4056	0.4738
					0.2623	-2.9339	-2.6288
USAL	40.3349	18.1115	2010056	2020216	0.3740	-0.8862	0.0895
					4.1070	1.4156	1.6417
					0.2058	-1.4193	-2.5461
USDL	49.4329	22.5858	2008093	2020335	-0.4500	-0.5248	0.5884
					0.2570	-0.1094	0.7547
					0.7242	-2.0446	-2.6496
USIX	38.7078	13.1792	2005313	2019042	-0.3850	-0.0598	-0.1373
					1.9510	0.2020	0.6062
					-0.2667	-1.2037	-0.8221
USSI	42.9706	13.1335	2016317	2020366	3.9810	-1.8877	0.4355
					1.8130	0.5518	2.1311
					-5.4951	-2.3189	-0.5348
UZHL	48.6320	22.2976	1999167	2017292	-0.6290	0.2862	0.0268
					-0.3720	0.6038	0.2011
					0.8685	-2.4599	-3.8051
VAAS	62.9612	21.7706	1996300	2020231	-0.0270	-0.1787	0.2946
					-0.6300	-0.4792	-0.0114
					9.8286	-1.1414	0.4191
VACO	49.1338	13.7242	2005068	2020281	0.0500	0.2456	-0.1141
					0.2670	0.0871	0.2930
					-0.2662	-1.0423	-2.0793
VAE6	58.6932	12.0351	2011238	2020118	-0.8360	0.3074	0.1231
					-0.4550	-0.5780	0.9562
					5.4820	-1.1340	-4.0395
VAGA	41.4154	14.2346	2005074	2020366	-0.1380	1.0518	-2.9124
					2.5160	2.1721	-3.5613
					1.1956	-2.2260	-2.3862
VALA	41.7025	-4.7083	2007303	2020366	-0.4700	-0.8962	-0.5404
					0.2680	0.2369	0.4728
					0.3583	-1.4608	-1.9457
VALC	39.4076	-7.2483	2009295	2019365	-0.8440	-0.4259	-0.1469
					0.5310	0.2006	0.3657
					0.5547	-1.9200	-3.4093
VALE	39.4808	-0.3377	2000010	2020335	-0.2770	-0.4665	-0.6250
					0.1580	0.1562	0.0579

					-0.8094	-2.0930	-1.0655
VARS	70.3364	31.0312	2000304	2020366	-0.5650	0.4071	-0.9198
					-0.2420	0.0011	-0.7895
					3.6419	-1.9502	-3.7760
VAUD	46.9812	5.6269	2008051	2020366	0.2130	-1.3147	0.2375
					0.3210	-0.6833	1.1109
					-0.2282	-1.6520	-1.7492
VBLO	42.9394	-6.3251	2007264	2020366	0.2910	-0.6877	0.2169
					-0.1170	0.5648	0.1960
					-0.5417	-0.2884	-2.0709
VDGO	42.5159	-4.0105	2007158	2020366	-0.3580	0.0301	0.0863
					0.6760	-0.1332	0.3169
					-0.7659	0.7994	-1.4870
VDOM	47.8016	1.0571	2007081	2020366	0.1870	0.1873	0.0645
					0.1370	-0.5971	0.1470
					-0.1549	-1.4837	-2.7582
VEG1	43.4666	-7.0490	2015213	2020335	-0.0200	1.1155	0.6578
					0.5110	0.2518	-0.0480
					-0.1163	-1.3258	-0.1182
VEN1	45.4306	12.3541	2009135	2020216	-0.2020	1.4602	-0.0804
					1.8250	0.2590	0.9922
					-1.0124	-2.1041	-2.8145
VENE	45.4370	12.3320	1996001	2007206	-0.2350	-1.1240	-0.6384
					1.5420	2.6118	0.3803
					0.8284	-4.2116	-3.8886
VENT	40.7947	13.4216	2006033	2020319	-0.7640	0.2356	0.2258
					1.6710	0.1278	0.8685
					-0.3662	-0.7307	-1.2155
VFCH	47.2942	1.7197	2001250	2020366	0.1800	-0.0966	0.1159
					-0.1540	0.1736	0.3100
					0.7908	-2.2852	-2.2087
VIGG	39.9861	16.1161	2011259	2020366	0.9780	0.4895	0.7825
					4.1370	-1.0695	0.4791
					1.1658	0.3042	-2.5557
VIGO	42.1840	-8.8131	2001255	2020335	-0.1440	-0.0677	0.0043
					0.3970	0.6531	0.1402
					-0.1375	-0.6644	-1.7269
VIKC	64.8637	11.2421	2009216	2020366	-1.5410	0.2048	0.6389
					0.4660	0.6644	0.2896
					3.7906	0.5054	-3.2792
VIL0	64.6978	16.5599	1996303	2020118	-1.0570	0.0182	-0.1597
					0.3960	0.2132	-0.0485
					8.8517	-3.6888	-2.4009
VILL	40.4436	-3.9520	1994327	2020096	-0.3480	0.1784	-0.1185
					0.1330	0.1329	-0.0857
					-0.0210	-1.8928	0.4288
VILR	45.0725	5.5518	2006340	2019105	0.0120	1.3071	-0.0527
					0.2440	0.5834	0.5434
					0.0330	-2.9976	-2.2222
VIR2	60.5388	27.5549	2014043	2020231	0.1410	0.3503	0.4547
					-0.8270	-0.3117	0.8275

					3.1436	-1.3471	-3.0390
VIS0	57.6539	18.3673	1996310	2020169	-0.3020	-1.0363	0.3719
					-0.7560	0.1143	0.1561
					3.5164	-3.2550	-1.3380
VISN	44.3199	4.9492	2007222	2020366	0.2230	0.4674	0.1982
					0.1480	-0.5649	0.4364
					0.0429	-1.3603	-1.7283
VITU	41.1833	14.6301	2015184	2020366	-0.4310	0.8409	0.4014
					2.5070	-0.5889	1.5060
					1.8484	0.3138	-3.1162
VLCH	46.6070	13.8505	2001001	2017277	0.3910	0.2590	-0.7222
					0.9050	-0.6627	-0.1868
					1.7278	-3.1319	-2.3404
VLGN	49.5102	-1.4917	2016031	2020366	-0.1830	-1.5809	1.4095
					0.4190	-0.3893	0.9627
					-1.1862	-1.8252	-0.2845
VLIS	51.4429	3.5973	2006326	2020366	1.1790	-0.0652	-0.9573
					-0.5970	0.3247	0.4255
					-0.3393	-2.8931	-1.3449
VLKM	46.6614	14.6261	2001094	2017277	1.5620	2.4947	1.1642
					0.6790	-0.1086	0.2654
					-0.7474	-2.4400	-2.4825
VLNS	54.6531	25.2987	1999060	2020366	-0.2740	0.2493	0.0204
					0.2600	-0.2236	0.1756
					0.2103	-3.6111	-4.2283
VLPL	48.8267	-1.2340	2011049	2020366	-0.1440	0.6274	0.1594
					0.0620	-0.4585	0.5492
					-0.4910	-0.2647	-2.0818
VLSG	38.2244	15.6415	2005173	2017185	0.3330	1.1656	0.4072
					2.9080	3.8467	2.3495
					0.4191	-1.7721	-1.7724
VLSM	38.1768	20.5886	2007123	2020366	-7.2990	0.0229	0.1092
					-10.3470	0.9215	1.2379
					-0.9395	-1.4797	-2.4881
VNTE	49.4335	2.7799	2006046	2020366	0.1610	-2.5288	-0.7722
					0.2260	2.4119	2.5870
					-1.2362	0.6146	-0.9629
VOUR	45.6616	4.7807	2006296	2020366	0.4880	1.3287	-0.1242
					0.2430	0.2273	1.3234
					-0.8101	-3.4930	-2.7200
VRAP	45.8513	26.6498	2012095	2020366	-0.6910	-0.5703	0.8963
					-0.0430	-0.4909	0.6037
					-0.9078	0.4173	-4.3309
VTGD	41.0088	-6.4333	2007326	2020366	0.9420	0.4573	-0.5866
					0.5710	0.4582	0.5314
					-0.8954	-1.1719	-2.2136
VULT	40.9549	15.6164	2005231	2020366	0.9070	0.1679	-0.3427
					4.2680	0.4111	0.7202
					0.9776	-1.6091	-2.8099
VVLO	41.8696	13.6232	2001002	2020366	-0.4590	0.6693	-0.0533
					2.2670	-0.3697	0.9236

					2.6363	-2.7284	-1.2420
					0.1260	-0.2097	-0.0412
WAB2	46.9238	7.4643	2005115	2020366	0.1590	-0.0300	0.3548
					0.7246	-1.3644	-2.2166
					0.0130	0.0336	0.1944
WARE	50.6899	5.2453	1996001	2020366	-0.2070	-0.2444	-0.3082
					0.8952	-2.2314	-2.8167
					0.0730	-0.4432	0.1273
WARM	51.2048	-2.1817	2004316	2008259	-0.4970	0.2763	0.4707
					0.0065	-1.0964	0.5169
					0.0120	0.6868	0.1426
WARN	54.1698	12.1014	2003042	2020335	0.1470	-0.5774	-0.0948
					0.5863	-2.2491	-2.1507
					0.0380	0.2231	0.6804
WARR	51.2048	-2.1817	2015110	2020365	0.0640	-1.2195	0.2363
					-3.6944	-3.8925	4.9497
					-1.3260	0.4547	-0.1130
WATN	53.0066	-1.2501	2007044	2015067	-2.2620	-0.2486	-0.0481
					0.5541	-1.1859	-1.7512
					-0.1760	0.3079	-0.1178
WATT	52.1239	0.9581	2004049	2014095	0.4700	-0.1033	-0.6690
					-0.5522	-2.8840	-1.3211
					-0.0590	0.1097	0.1049
WEAR	54.7491	-2.2304	2004303	2020365	0.1310	-0.3252	-0.1767
					0.8110	-0.9086	-0.1747
					0.0220	0.7257	0.7285
WEIW	51.1010	0.0076	2004145	2020365	0.1510	0.7983	0.7083
					0.1162	-1.4450	-0.7234
					0.2370	0.2987	0.3146
WELL	52.3075	-0.6246	2006284	2020365	-0.0640	0.4610	0.7127
					0.0350	-2.0057	-1.4527
					0.2440	1.4694	0.1165
WELS	48.1583	14.0207	2002001	2017131	0.3640	-2.2317	0.0706
					0.6891	-3.6159	-2.5077
					0.1750	-0.1257	0.3972
WEYB	52.9449	1.1303	2004226	2020365	-0.1020	0.0678	0.0075
					-0.3850	-2.9153	-0.0892
					0.3320	-1.3564	-1.2289
WIEN	48.2189	16.3731	2002293	2017277	0.3540	0.3309	0.6417
					-0.7401	-5.3095	-4.4679
					-0.5030	6.7730	2.4235
WLBH	48.4152	7.3513	2000298	2020165	0.2450	-1.3492	4.7665
					1.8810	-6.8841	1.4534
					-0.6650	0.7568	0.3062
WROC	51.1133	17.0620	1997002	2020366	0.0150	0.2818	0.3729
					-0.1242	-3.4124	-2.9041
					-0.3000	-0.0927	0.3103
WSRA	52.9146	6.6045	1997136	2020366	0.5670	-0.0347	-0.0366
					-0.0113	-3.1791	-1.2141
					0.1090	0.9243	0.2612
WTZZ	49.1442	12.8789	1999036	2020320	0.1950	-0.0694	0.1976

					0.0737	-3.0414	-2.6690
XIXO	43.5701	-5.7019	2015325	2020335	0.0220	0.7707	0.4423
					0.7080	-0.4846	0.5445
					0.3761	-0.0302	-0.6150
YEAL	54.1623	-1.1001	2004145	2020365	0.7730	0.2648	0.5792
					0.5790	0.0460	0.1447
					-0.5268	-1.1731	0.0462
YEBE	40.5249	-3.0886	1999139	2020335	-0.3800	-0.1814	-0.1938
					-0.0210	0.8140	0.3640
					0.3505	-1.2258	-2.3523
YPOR	49.7380	0.3210	2008142	2020366	0.1900	-0.1422	0.5964
					0.0650	-0.3303	-0.0003
					-0.1232	-1.4099	-1.8230
ZADA	44.1132	15.2276	2011263	2020366	0.2930	0.0446	-0.3809
					3.2610	0.0357	0.8001
					-0.6408	-1.4811	-2.8401
ZARA	41.6334	-0.8822	2006115	2020335	-0.2930	-1.1498	-0.4957
					-0.0610	-0.0416	0.6071
					-0.0849	-1.0437	-1.3752
ZEEB	51.3359	3.2082	2003124	2020366	-0.1380	-0.6041	0.0352
					-0.6290	-0.5357	-0.3846
					-0.3950	-1.7422	-1.6696
ZFRA	38.4260	-6.4100	2010349	2020338	-0.8960	0.1745	-0.4243
					0.4860	0.4628	1.3922
					0.7064	-1.8934	-2.7746
ZIMM	46.8771	7.4653	1993121	2020366	-0.0590	-0.0455	0.0051
					0.4680	0.3106	0.1324
					1.1510	-1.8913	-2.7366
ZMRA	41.5068	-5.7392	2006328	2020366	-0.7820	2.7366	0.0203
					0.2310	0.9542	0.1340
					0.3857	-2.8370	-2.7271
ZOUF	46.5572	12.9736	2002164	2020366	0.2010	-0.2294	-0.7947
					0.9890	0.4665	1.1421
					1.6067	-2.0986	-3.1624
ZYWI	49.6867	19.2060	2003205	2020335	-0.1790	-0.5718	0.2234
					0.8110	0.1457	0.5080
					0.2502	-1.5319	-2.8185

Alexandre MICHEL

**Détermination des variations saisonnières de la charge
en Europe par inversion des déplacements GNSS
calculés avec le logiciel GINS**

École doctorale
 Sciences de la terre
et de l'environnement | ED 413
Université de Strasbourg

Résumé :

Cette étude porte sur la détermination des charges hydrologiques saisonnières en Europe. L'objectif est d'autant plus difficile que les zones tempérées possèdent un signal hydrologique saisonnier particulièrement faible, compte tenu du bruit des mesures géodésiques. L'utilisation du GNSS permet d'améliorer sensiblement la résolution spatiale avec laquelle nous calculons ces charges localement grâce à la forte densité de station, par rapport aux solutions issues de la gravimétrie spatiale (missions GRACE). Nous avons mis en place une méthodologie permettant d'inverser les déplacements saisonniers GNSS pour retrouver la charge équivalente, et ce en utilisant les déplacements de plus de 1000 stations GNSS dont les solutions ont été calculées avec le logiciel GINS. Dans un même temps, nous avons développé une méthode permettant le calcul des déformations visco-élastiques de la Terre solide, dans un nouveau formalisme utilisant la transformée de Fourier.

Mots clés : géodésie spatiale, charges hydrologiques, GNSS, nombres de Love, visco-élasticité, régularisation de Tikhonov

Abstract :

This study focuses on the determination of seasonal hydrological loads in Europe. The objective is all the more difficult as temperate zones have a particularly weak seasonal hydrological signal, given the noise of geodetic measurements. The use of GNSS allows us to significantly improve the spatial resolution with which we compute these loads locally thanks to the high density of stations, compared to solutions derived from space gravimetry (GRACE missions). We have set up a methodology to invert the GNSS seasonal displacements to find the equivalent seasonal loading, using the displacements of more than 1000 GNSS stations whose solutions have been computed with the GINS software. At the same time, we have developed a method allowing the calculation of viscoelastic deformations of the solid Earth, in a new formalism using the Fourier transform.

Keywords : spatial geodesy, hydrological loading, GNSS, Love numbers, visco-elasticity, Tikhonov regularisation