

École Centrale de Lyon

École doctorale **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

Unité de recherche **LTDS**

Thèse présentée par **Nicolas Di Palma**

Soutenue le **5 janvier 2022**

En vue de l'obtention du grade de docteur de l'École Centrale de Lyon

Discipline **Mécanique**

Spécialité **Dynamique des structures**

Dynamique non-linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion

Thèse dirigée par Fabrice THOUVEREZ Directeur
Benjamin CHOUVION Co-Encadrant

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Guilhem MICHON Morvan OUISSE	Professeur, ISAE-SUPAERO, MS2M Professeur, ENSMM, FEMTO-ST
<i>Examineur</i>	Vivien COURTIER	Ingénieur Méthodes, Safran Aircraft Engines
<i>Présidente</i>	Thouraya BARANGER	Professeur, Université de Lyon, LMC ²
<i>Directeurs de thèse</i>	Fabrice THOUVEREZ Benjamin CHOUVION	Professeur, École Centrale de Lyon, LTDS Maître de conférences, École Centrale de Lyon, LTDS

École Centrale de Lyon

Doctoral School **Mécanique Énergétique Génie civil Acoustique**

University Department **LTDS**

Thesis defended by **Nicolas Di Palma**

Defended on **January 5, 2022**

In order to become Doctor from École Centrale de Lyon

Academic Field **Mechanical engineering**

Speciality **Structural Dynamics**

Nonlinear dynamics of blades: multiharmonic behavior with bending-torsion coupling

Thesis supervised by Fabrice THOUVEREZ Supervisor
Benjamin CHOUVION Co-Monitor

Committee members

<i>Referees</i>	Guilhem MICHON	Professor, ISAE-SUPAERO, MS2M
	Morvan OUISSE	Professor, ENSMM, FEMTO-ST
<i>Examiner</i>	Vivien COURTIER	Methods Engineer, Safran Aircraft Engines
<i>President</i>	Thouraya BARANGER	Professor, Université de Lyon, LMC ²
<i>Supervisors</i>	Fabrice THOUVEREZ	Professor, École Centrale de Lyon, LTDS
	Benjamin CHOUVION	Associate Professor, École Centrale de Lyon, LTDS

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier messieurs Guilhem Michon et Morvan Ouisse d'avoir accepté d'évaluer ce travail de thèse ainsi que pour leurs remarques intéressantes qu'elles aient été écrites ou orales. J'ai particulièrement apprécié nos échanges le jour de la soutenance. J'adresse également mes remerciements à Thouraya Baranger pour avoir accepté de présider mon jury ainsi que pour sa curiosité et son intérêt portés à mes travaux.

Je souhaite à présent remercier les personnes qui m'ont encadré durant ces années en commençant par Fabrice Thouverez pour sa confiance, sa patience, son écoute et ses précieux conseils prodigués tout au long de cette thèse. Merci également pour m'avoir donné l'opportunité de mettre un pied dans le monde de la recherche à travers mon stage de fin d'études qui m'a donné envie de prolonger le plaisir. Je remercie également Benjamin Chouvion pour nos discussions enrichissantes et pour ces précieux conseils sur mes différents travaux de rédaction et de présentation orale.

Je remercie par ailleurs mes collègues du groupe Safran et en particulier Vivien Courtier pour sa disponibilité et pour m'avoir accueilli dans les locaux de SAE. Merci également pour l'apport de sa vision industrielle de mes travaux. Notre conversation quelques jours avant la soutenance m'a clairement rassuré et mis en confiance, merci pour cela.

Si cette thèse reste pour moi un excellent souvenir c'est aussi en partie pour tous ces coups de mains qui facilitent son bon déroulement. Aussi, je souhaite remercier Isabelle, Lionel, Stéphane, Olivier et Laurent pour leur aide précieuse que ce soit sur les plans administratifs, informatiques ou encore scientifiques. Votre travail de l'ombre mérite toute notre reconnaissance.

J'adresse à présent de chaleureux remerciements à mes collègues du LTDS, qui sans nul doute se reconnaîtront. Merci pour tous ces échanges et pour les longs moments que vous m'avez accordés afin de répondre à mes nombreuses questions. Merci également pour votre bienveillance, votre joie et vos sourires qui m'ont permis d'évoluer chaque jour dans un environnement très agréable. Je n'oublie bien évidemment pas nos innombrables moments de franche rigolade que la nostalgie me rappelle parfois.

C'est avec une grande émotion, que je ne saurais dissimuler, que j'adresse à présent mes plus profonds remerciements à mes proches. A ma famille pour son soutien. A mes parents sans qui rien de tout cela n'aurait été possible. Merci du fond du cœur pour tout ce que vous avez fait, faites, et ferez pour nous, cette thèse, c'est aussi la votre ! Enfin, j'ai une pensée pour ceux qui partagent mon quotidien. Flo, merci infiniment pour m'avoir supporté et motivé lorsque cela était nécessaire. Avec Théo vous faites de moi chaque jour le plus heureux des papas.

Dynamique non-linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion**Résumé**

Pour faire face à la demande croissante de réduction des émissions polluantes et d'amélioration continue des performances de vol, l'industrie aéronautique se tourne de plus en plus vers des turboréacteurs de grands diamètres en vue d'augmenter leur taux de dilution. La génération de ces nouvelles architectures implique une meilleure maîtrise des risques d'origine vibratoire. Plus particulièrement, la conception d'aubes de soufflante élancées de grande dimension en matériau composite favorise l'apparition de phénomènes non-linéaires de nature géométrique. Parmi eux, les résonances internes se manifestent suite à un couplage de modes dont les fréquences propres sont commensurables et donnent lieu à des réponses multi-modes pouvant accélérer la ruine par fatigue des roues aubagées.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail de thèse est d'améliorer la compréhension du phénomène de résonance interne. Il s'agit d'une part d'évaluer durant la phase de conception le risque d'apparition du phénomène et d'autre part, de comprendre l'influence des paramètres géométriques sur celui-ci. Pour répondre à cette problématique, différentes approches reposant sur des modèles de complexité croissante sont étudiées. Un modèle non-linéaire de poutre vrillée et pré-courbée avec couplage flexion-torsion est d'abord analysé. Puis, un modèle industriel représentatif d'un aube de soufflante de futures architectures non carénées est étudié, à la fois expérimentalement et numériquement. Pour chaque cas, des études dynamiques sont réalisées, reposant sur la méthode de l'équilibrage harmonique pour la recherche de solutions périodiques couplée à une procédure de calcul de branches secondaires de solutions.

Une étude paramétrique sur le modèle poutre a permis de montrer le fort impact de la partie non-linéaire du moment de flexion ainsi que de la forme des modes propres sur l'émergence de la résonance interne. Pour ce modèle, une étude d'influence a également mis en avant la modification de la typologie du comportement dynamique lors de la variation de paramètres géométriques et dissipatifs.

L'étude du modèle industriel a également permis d'observer une résonance interne 1 : 2, d'une part expérimentalement à travers une sollicitation dynamique par pot vibrant et d'autre part numériquement via l'étude d'un modèle éléments finis, réduit à l'aide de la théorie des formes normales. En particulier, il a été montré que la méthode de réduction employée permet de très bien restituer le comportement dynamique de l'aube avec et sans couplage par résonance interne avec des temps de calcul relativement faibles.

Finalement, les résultats obtenus sur les modèles poutre et industriel peuvent aisément être intégrés dans les bureaux d'études lors des procédures de conception des aubages des futures architectures pour évaluer le risque d'apparition des résonances internes.

Mots clés : résonance interne, couplage flexion-torsion, non-linéarité géométrique, équilibrage harmonique, aube de soufflante, open-rotor

Nonlinear dynamics of blades: multiharmonic behavior with bending-torsion coupling**Abstract**

In order to cope with growing demand for reducing exhaust gas emissions and increasing flight performance, the aeronautical industry is increasingly moving toward bigger diameter turbojet engine so as to improve dilution rate. The design of these new architectures implies a better control of the vibratory risks. More specifically, the conception of slender fan blades in composite material favors geometrical nonlinear phenomena appearance. Among them, internal resonances or modal interactions occur through modes coupling whose frequencies are commensurate and lead to multi-modes responses that can potentially fasten bladed disks wreck with fatigue.

In this context, the objective of this thesis is to improve the internal resonance phenomenon comprehension. On one hand, the aim is to evaluate in design phase the risk of internal resonance appearance. On the other hand, the purpose is to understand the influence of geometrical modifications on the internal resonance behavior. To tackle the problem, several approaches with growing difficulties models are studied. A nonlinear twisted and curved beam model with bending-torsion coupling is first analyzed. Then, an industrial application representative of a fan blade for future unducted engines architectures is investigated, both experimentally and numerically. For each case, dynamical studies are conducted, based on the harmonic balance method for periodic solution research and coupled with an algorithm to compute and track secondary branches.

A parametric analysis for the beam model has shown the strong impact of the nonlinear part of the bending moment, as well as the mode shapes, on the internal resonance appearance. For this model, a study of influence has also revealed the modification of the dynamical behavior when varying the geometry and the damping ratios.

The internal resonance has also been observed for the industrial model. It appeared first experimentally when exciting the blade with a vibrating pot. Then it came out numerically through a finite elements model, reduced by the normal form theory. More precisely, it was shown that the used reduction method allows a very good restitution of the dynamical behavior of the blade both with and without nonlinear coupling and with relatively small computational time.

Finally, the results obtained for both models can be easily used by engineers during de design phases of future architectures fan blades to evaluate the risk of internal resonances appearance.

Keywords: internal resonance, bending torsion coupling, geometric nonlinearity, harmonic balance method, fan blade, open-rotor

Table des matières

Remerciements	v
Résumé	vii
Table des matières	ix
Introduction générale	1
Contexte industriel	1
Contexte scientifique	2
Objectifs	3
Organisation du mémoire	3
I Dynamique des turbomachines	5
1 Description d'un turboréacteur	5
1.1 Composants et principe de fonctionnement	6
1.2 Les nouvelles architectures	8
2 Dynamique d'une structure en rotation	11
2.1 Cinématique d'une particule	11
2.2 Obtention des équations du mouvement	13
2.3 Position d'équilibre sous pré-chargement centrifuge	16
2.4 Analyse modale des structures en rotation	17
3 Étude des roues aubagées	18
3.1 Modélisation cyclique	18
3.2 Sources de vibrations	20
3.3 Dimensionnement et outils de conception	22
Bilan du chapitre	25
II Étude des systèmes non-linéaires	27
1 Méthodes classiques de résolution de systèmes non-linéaires	28
1.1 Méthode de perturbation	28
1.2 Intégration temporelle	29
2 Méthode de recherche de solutions périodiques	30
2.1 Méthodes temporelles	30
2.2 Méthode de l'équilibrage harmonique	32
2.3 Résolution numérique	36
3 Continuation de solutions	37
3.1 Algorithmes de continuation	38
3.2 Adaptation du pas de continuation	42
4 Phénoménologie des systèmes non-linéaires	43
4.1 Résonance non-linéaire	43

4.2	Stabilité des systèmes non-linéaires	47
4.3	Bifurcation	51
4.4	Analyse modale non-linéaire	57
5	Modèle phénoménologique de couplage flexion-torsion	61
5.1	Présentation du modèle	61
5.2	Résolution analytique	63
5.3	Résolution par équilibrage harmonique	68
	Bilan du chapitre	72
III	Étude d'un modèle de poutre vrillée avec pré-courbure	75
1	Introduction	76
2	Mise en équation du modèle	77
2.1	Configurations et systèmes de coordonnées	77
2.2	Troncature au second ordre	79
2.3	Expression du tenseur des déformations	80
2.4	Calcul des énergies du système	80
2.5	Discrétisation et équations de Lagrange	83
2.6	Validation de la modélisation	85
3	Étude paramétrique	88
3.1	Premier cas : section rectangulaire sans pré-courbure	89
3.2	Second cas : section profilée sans pré-courbure	91
3.3	Troisième cas : section rectangulaire avec pré-courbure	96
4	Étude d'influence	99
4.1	Paramètres géométriques	99
4.2	Paramètres dissipatifs	101
4.3	Vitesse de rotation	103
	Bilan du chapitre	104
IV	Étude d'un modèle industriel d'aubage de type fan	107
1	Introduction	107
2	Analyse expérimentale	108
2.1	Dispositif expérimental	108
2.2	Synthèse des résultats expérimentaux	109
3	Analyse numérique	115
3.1	Modèle numérique et analyse modale	115
3.2	Réduction de modèles non-linéaires géométriques	117
3.3	Application à la pale Open Rotor	126
	Bilan du chapitre	137
	Conclusion et perspectives	139
	Résultats	139
	Perspectives	141
	Table des figures	145
	Liste des tableaux	149
	Bibliographie	151

A	Complément sur le modèle de couplage flexion-torsion	165
1	Termes non-linéaires en base modale	165
2	Analyse de stabilité	166
B	Compléments sur le modèle phénoménologique de poutre non-linéaire	167
1	Fonction de gauchissement	167
2	Matrice de passage du repère global au repère local	169
3	Expression du tenseur des déformations	171
4	Exemple pour la troncature	174
C	Compléments sur la théorie de la forme normale directe (DNF)	175
1	Cas libre non-amorti	175
2	Cas amorti	177
	Liste des publications personnelles	179

Introduction générale

Contexte industriel

L'industrie aéronautique n'est aujourd'hui plus seulement concernée par des enjeux inhérents à son efficacité et sa fiabilité mais doit également faire face à des défis environnementaux. Ces derniers lui imposent principalement de diminuer les émissions de CO₂ et d'oxyde d'azote et réduire la pollution sonore engendrée notamment par les turboréacteurs. Face à ces enjeux, des programmes de recherche européens comme le programme Clean Sky ont été créés dans le but de mettre au point des solutions technologiques nouvelles capables de remplir les objectifs environnementaux fixés tout en conservant un niveau de performance élevé.

Parmi les axes de recherche envisagés, une solution concrète vise à augmenter le taux de dilution des turboréacteurs. Une conséquence directe de ce choix réside dans l'accroissement des diamètres des moteurs et par voie de conséquence, des composants qui les constituent. Face à l'augmentation de la masse des pièces constitutives des moteurs suscitée par ce choix technologique, des ajustements ont dû être effectués. Pour cela, le recours à des géométries élancées (aubes de soufflante, hélices, etc.) et minces (carter, viroles, coques, etc.) a été adopté entraînant, dans le cadre des aubages par exemple, l'apparition d'effets non-linéaires de nature géométrique liés aux grands déplacements et grandes déformations. Une souplesse plus importante de ces pièces a par ailleurs été provoquée, favorisant l'apparition d'un comportement vibratoire plus prononcé.

En termes de conception, le processus de dimensionnement des géométries élancées telles que les aubes de soufflante met en jeu diverses disciplines dont les visées sont généralement antagonistes. Celles-ci doivent en effet garantir des performances aérodynamiques optimales tout en conservant une tenue mécanique fiable. De plus, le respect de ce cahier des charges s'opère traditionnellement à l'aide d'un schéma d'optimisation sur plusieurs points de fonctionnement du moteur rendant le processus de conception particulièrement long.

Au-delà de la phase de conception, les étapes de fabrication des aubages sont également coûteuses en temps. En effet, une nouvelle technologie pour la fabrication des aubages de soufflante en matériau composite tissé 3D basée sur un procédé de moulage par injection de résine a récemment été développée. Permettant une importante réduction de masse des aubages tout en conservant des propriétés mécaniques intéressantes, cette technologie complexe nécessite cependant de nombreuses itérations pouvant rallonger les délais de fabrication à plusieurs mois.

Tenant compte des temps longs occasionnés par les étapes de conception et de fabrication conjugués à l'utilisation d'outils linéaires en phase de modélisation, l'observation des potentiels comportements non-linéaires induits par les effets géométriques des aubages ne s'effectue que très tardivement dans la phase de développement des moteurs. En particulier, l'apparition de

phénomènes vibratoires non-linéaires n'est repérable au plus tôt que lors des essais de validation en fatigue ce qui peut s'avérer préjudiciable pour l'ensemble du processus de développement.

Les phénomènes non-linéaires liés aux effets géométriques sont nombreux. Parmi eux, des cas de couplages modaux sont susceptibles de se produire. C'est le cas par exemple du phénomène de résonance interne se manifestant par un couplage de modes dont les fréquences sont commensurables ou quasi-commensurables. Cette situation a notamment été mise en évidence par Safran Aircraft Engines lors de la caractérisation du comportement vibratoire des aubages de l'Open Rotor, une architecture non carénée composée d'un doublet d'hélices contrarotatives et développée dans le cadre du programme Clean Sky. Les résultats expérimentaux ont en effet souligné la participation d'un mode de torsion lors de la sollicitation en fatigue d'un mode de flexion à partir d'une certaine amplitude de vibration. De plus, une tendance à la saturation du mode de flexion au profit du mode de torsion a été mise en évidence à plus haute amplitude de vibration. À la lumière de ces observations, il apparaît indispensable de se munir d'outils robustes et efficaces capables de prédire en amont le risque d'occurrence de ce phénomène de couplage.

C'est dans ce contexte que s'articulent les travaux présentés dans ce mémoire et dont l'objectif principal est d'améliorer la compréhension du phénomène non-linéaire de résonance interne pouvant survenir lors des sollicitations dynamiques des aubages de soufflante.

Contexte scientifique

Entreprise il y a déjà plusieurs années, la volonté d'améliorer la compréhension des phénomènes non-linéaires dans les turbomachines aéronautiques a fait l'objet de nombreux travaux portant entre autres sur des problématiques de contact rotor/stator [26, 70], de frottement [175, 203], de vibrations localisées [40, 136] ou encore de réduction des niveaux vibratoires par dispositifs piézoélectriques [166]. Pour répondre aux différentes attentes, des projets ont également été mis en place comme le projet européen EXPERTISE¹ visant à améliorer l'étude dynamique des turbines à travers différentes thématiques comme le contact frottant [39] ou l'identification des interfaces de contact [84].

Des problématiques diverses ont également pu être traitées au LTDS, portant notamment sur les non-linéarités de contact et de frottement [17, 95, 99, 120, 163] mais également sur les notions de couplage multirotors [37, 54, 56] ou encore, comme c'est le cas pour les travaux présentés dans ce mémoire, des non-linéarités géométriques liées aux grands déplacements et grandes déformations [50, 109]. De ces travaux s'est développée une certaine expertise pour traiter notamment de la modélisation non-linéaire en réponse forcée. Celle-ci exploitant la méthode de l'équilibrage harmonique, permettant la recherche dans le domaine fréquentiel de solutions périodiques d'un système dynamique en s'affranchissant du régime transitoire à l'inverse des méthodes classiques d'intégration temporelle. À cela se sont ajoutées diverses techniques pour le calculs de solutions particulières imputables au caractère non-linéaire des systèmes [164].

Le phénomène de résonance interne à proprement parler a donné lieu à de nombreuses études dans la littérature. Bon nombre d'entre elles se sont basées sur des approches analytiques pour mettre en évidence la modification du comportement dynamique induit par le couplage de modes [18, 130]. D'autres se sont appuyées sur le caractère intrinsèquement non-linéaire de la résonance interne à travers l'utilisation des modes normaux non-linéaires [73, 83, 124]. Enfin les méthodes numériques ont également fait leurs preuves pour étudier la dynamique en présence de résonance interne [79, 103]. Ces différentes études ont fait ressortir un certain nombre de

1. <http://www.msca-expertise.eu/>

caractéristiques induites par ce phénomène non-linéaire. C'est le cas par exemple des réponses multi-harmoniques et multi-modes [115], des transferts d'énergie d'un mode à l'autre [44], des cas de saturations d'amplitudes [58] ou encore des créations de solutions isolées [107].

Dans la majorité des cas d'application les études ont été restreintes à des systèmes académiques à faible nombre de degrés de liberté. En revanche, rares sont celles ayant mis en évidence le phénomène sur un système issu du milieu industriel même si des efforts en ce sens ont récemment été entrepris [135]. Par ailleurs, peu d'études établissent le lien entre la résonance interne et les paramètres physiques du modèle.

Afin d'étudier le comportement dynamique des systèmes industriels soumis à des non-linéarités géométriques, des techniques de réduction de modèles sont nécessaires. Plusieurs approches sont proposées dans la littérature et exploitent généralement les propriétés non-linéaires des systèmes. Parmi celles-ci on retrouve les méthodes consistant à enrichir une base de modes linéaires à l'aide de dérivées modales [69], de modes duaux ou compagnons [16], des modes non-linéaires [147] ou encore via une base POD [77]. Récemment, de nouvelles techniques ont vu le jour et proposent de construire le système réduit sur la base d'un changement de variables non-linéaire. Cherchant à restreindre la dynamique du système sur la notion mathématique de variété invariante, on retrouve parmi ces méthodes, le calcul des sous-variétés spectrales [59], la condensation implicite [65], l'utilisation de la théorie des formes normales [186, 197] ou encore la réduction à l'aide de variétés quadratiques [71]. À ces méthodes est généralement associée la procédure STEP [118] permettant d'estimer les raideurs non-linéaires présentes dans le modèle réduit. Due à leur récente introduction dans la littérature, ces méthodes de réduction font encore l'objet de nombreuses recherches [190].

Objectifs

S'inscrivant dans une volonté d'accroître la maîtrise des phénomènes vibratoires en dynamique non-linéaire présents au sein des turbomachines de l'industrie aéronautique, l'objectif principal du travail présenté dans ce mémoire est d'améliorer la compréhension du phénomène de couplage modal par résonance interne. Cet objectif principal se décline en plusieurs actions. Il s'agit d'une part d'évaluer durant la phase de conception le risque d'apparition d'un comportement multi-harmoniques induit par l'interaction modale. D'autre part, il est d'un intérêt majeur de comprendre l'influence de paramètres géométriques et matériaux sur l'apparition du phénomène.

Il va ainsi s'agir de proposer et mettre en place différentes modélisations, analytiques et/ou numériques, capables d'identifier pour un système donné les résonances internes et faire ressortir leurs principales caractéristiques en termes de comportement dynamique non-linéaire. Par ailleurs, il est également souhaité de réaliser une campagne expérimentale afin de mettre en évidence le phénomène sur un aubage industriel et comparer ces résultats avec d'une part la base d'essais disponibles chez Safran Aircraft Engines mais également d'autre part les données numériques issues des différentes modélisations.

Organisation du mémoire

Afin de répondre à la problématique qui vient d'être évoquée, ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Le chapitre I décrit le contexte général autour duquel s'articule le reste du manuscrit. Un rappel du principe de fonctionnement des turboréacteurs et une description des principaux organes le constituant est réalisé dans un premier temps. Différentes architectures de moteurs sont également présentées et en particulier, la technologie non carénée de l'Open Rotor à laquelle

s'intéressent plus précisément les travaux dans ce mémoire. Dans un second temps, la mise en équation d'une structure en rotation est effectuée en tenant compte des effets non-linéaires géométriques liés aux grandes déformations. Enfin dans un dernier temps, une description plus approfondie des roues aubagées est opérée. La théorie de la modélisation cyclique ainsi que les différentes sources de vibrations auxquelles sont soumises ces structures sont d'abord présentées avant de décrire les principaux outils utilisés en bureau d'études pour leur dimensionnement.

Le chapitre II s'intéresse à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires. Différentes méthodes de résolution y sont d'abord présentées en insistant particulièrement sur la méthode fréquentielle de l'équilibrage harmonique. Par la suite, certaines caractéristiques des systèmes non-linéaires sont détaillées comme la notion d'instabilité, de bifurcation ou encore de résonance non-linéaire. En particulier, le phénomène de résonance interne, élément central de ces travaux de thèse, est décrit avec attention. Enfin, le chapitre se clôt sur l'étude d'un modèle phénoménologique de couplage de modes afin de mettre en application les différentes notions abordées dans le reste du chapitre. Cette étude est également l'occasion de présenter les premiers effets d'une résonance interne sur la dynamique d'un système simplifié.

Le chapitre III a pour but d'apporter des éléments de compréhension du phénomène de résonance interne à travers l'étude d'un modèle non-linéaire de poutre vrillée et pré-courbée représentatif d'un aubage élancé de soufflante de turbo-réacteur. Après une description approfondie de la mise en équation du modèle, une étude paramétrique est réalisée afin de mettre en évidence les termes non-linéaires responsables de l'apparition de la résonance interne entre les modes de flexion et de torsion. L'analyse est ensuite complétée par une étude d'influence afin d'évaluer l'impact d'une modification de certains paramètres (géométriques, dissipatifs, etc.) sur la présence et le comportement de la résonance interne.

Le chapitre IV présente l'étude du comportement dynamique d'un aubage de la soufflante de l'Open Rotor. Deux volets, expérimental et numérique sont traités. Pour l'analyse expérimentale, la réponse forcée de l'aubage sous excitation harmonique est considérée afin d'étudier le couplage flexion-torsion. Cette étude est complétée par une analyse numérique réalisée sur un modèle aux éléments finis de l'aubage Open Rotor. Après un rappel de quelques méthodes de réduction de modèles présentant des non-linéarités géométriques, celles-ci sont employées sur le modèle industriel et une étude du comportement dynamique du modèle réduit est réalisée. Une confrontation entre les résultats numériques et expérimentaux vient ensuite clore ce chapitre.

Chapitre I

Dynamique des turbomachines

Ce chapitre présente le cadre général autour duquel vont s'articuler les différents développements de ce manuscrit. Un rappel succinct du principe de fonctionnement et des différentes architectures des turboréacteurs est réalisé dans un premier temps. Les équations de la dynamique des structures en rotation présentant des non-linéarités géométriques sont ensuite établies dans un second temps. Enfin, la dernière partie de ce chapitre traite de la modélisation des roues aubagées. La notion de symétrie cyclique est tout d'abord détaillée avant de décrire les principales sources de vibrations auxquelles sont soumises les roues aubagées. Cette dernière partie se conclut par une présentation des outils utilisés en bureau d'études pour dimensionner ces composantes et prévenir les risques de résonances.

Sommaire du chapitre

1 Description d'un turboréacteur	5
1.1 Composants et principe de fonctionnement	6
1.2 Les nouvelles architectures	8
2 Dynamique d'une structure en rotation	11
2.1 Cinématique d'une particule	11
2.2 Obtention des équations du mouvement	13
2.3 Position d'équilibre sous pré-chargement centrifuge	16
2.4 Analyse modale des structures en rotation	17
3 Étude des roues aubagées	18
3.1 Modélisation cyclique	18
3.2 Sources de vibrations	20
3.3 Dimensionnement et outils de conception	22
Bilan du chapitre	25

1 Description d'un turboréacteur

Les turboréacteurs ont pour rôle d'assurer la propulsion des avions. Il s'agit d'un élément central dans l'architecture des avions. Les enjeux économiques et environnementaux dont ils sont au cœur conduisent à des architectures complexes. Ces dernières renforcent les fortes contraintes auxquelles ils sont soumis ce qui nécessite une compréhension et une modélisation toujours plus fines. Parmi celles-ci, les sollicitations mécaniques représentent des dangers permanents dont la maîtrise est essentielle.

1.1 Composants et principe de fonctionnement

Le principe général de fonctionnement des turboréacteurs repose sur le principe d'action-réaction de Newton. L'objectif est de fournir la poussée nécessaire à la propulsion des avions. Celle-ci correspond à la différence de vitesse du fluide entre l'entrée et la sortie du système. Au sein du turboréacteur, le fluide subit une série de transformations que l'on peut diviser en 3 phases : compression, combustion et détente. Ces étapes s'opèrent à l'aide de la partie compresseur, de la chambre de combustion et de la partie turbine illustrées sur la figure I.1.

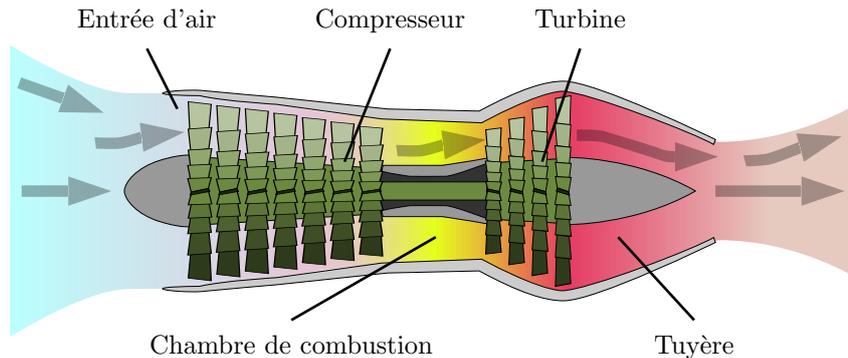


FIGURE I.1 – Schéma d'un turboréacteur simple flux

Avant de traverser ces organes, l'air extérieur pénètre tout d'abord dans le moteur à travers l'*entrée d'air*. La géométrie de cette dernière est étudiée pour limiter la distorsion du flux d'entrée et réduire la résistance à l'air. La masse d'air passe ensuite à travers le *compresseur* dont le rôle est de communiquer de l'énergie au fluide en convertissant sa vitesse en pression. Le gaz comprimé est ensuite mélangé à du kérosène avant d'entrée dans la *chambre de combustion* où une source de chaleur permanente vient enflammer le mélange fluide-carburant. Une partie de l'énergie dégagée est ensuite transférée à la *turbine* dont la rotation entraîne à son tour le compresseur en amont à l'aide d'un arbre reliant ces deux organes. L'autre partie de l'énergie traverse la *tuyère* dont la forme convergente accélère le fluide.

Afin d'améliorer l'efficacité du cycle thermodynamique, les modules compresseur et turbine sont constitués d'étages successifs comportant chacun une partie mobile, le rotor, et une partie fixe, le stator. Dans un étage de compresseur (figure I.2), la roue mobile amont accélère le fluide et la pression du fluide augmente en raison de la géométrie divergente de la section de passage du fluide. Le stator aval dit redresseur convertit une partie de la vitesse du fluide en énergie de pression. Il permet également de redresser le flux dans le sens de l'écoulement. Pour un étage de turbine, la partie stator ou distributeur se situe en amont de la roue mobile. La section convergente du distributeur convertit l'énergie de pression en énergie cinétique et dévie l'écoulement. Cette déviation du flux entraîne la rotation de la roue mobile à l'aval directement reliée au compresseur.

L'ensemble constitué du compresseur et de la turbine reliés à un arbre commun est qualifié de *corps*. Si les premiers turboréacteurs intégraient une technologie simple corps, l'essentiel de la flotte actuelle est composé d'architecture double voire triple corps. Les moteurs double corps sont constitués d'un corps *basse pression* (BP) et d'un corps *haute pression* (HP). Le corps basse pression est composé d'une *soufflante* (ou fan), d'un compresseur basse pression et d'une turbine basse pression. Le corps haute pression comprend le compresseur et la turbine haute pression. Ces éléments sont illustrés sur la figure I.3.

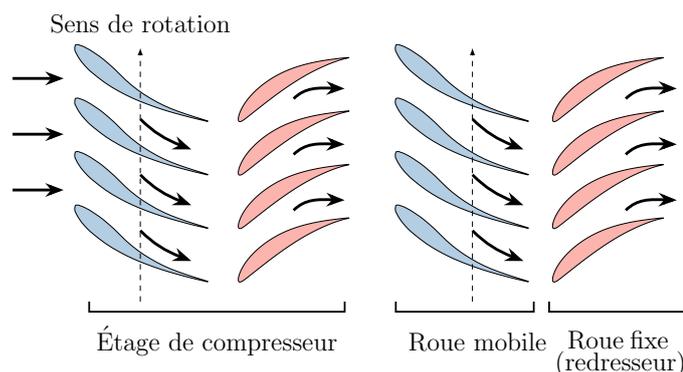


FIGURE I.2 – Schéma d'étages de compresseur

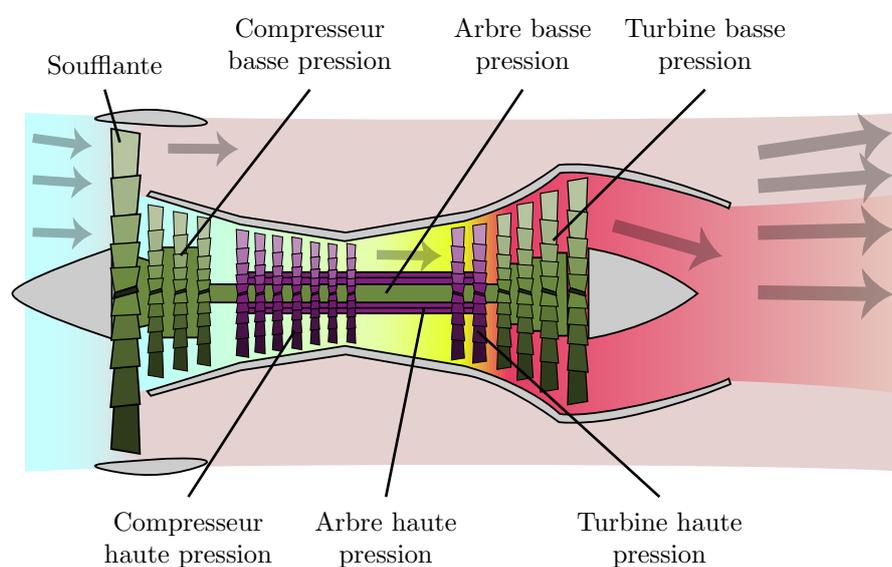


FIGURE I.3 – Schéma d'un turbofan double corps et double flux

D'un point de vue intégration, les modules compresseur et turbine sont reliés entre eux par un arbre. Les arbres des corps BP et HP sont concentriques et tournent à des vitesses différentes. Ce différentiel de vitesse octroie au moteur une meilleure efficacité à travers un taux de compression plus important. Par ailleurs, la technologie multi-corps permet une consommation réduite de carburant. Les moteurs équipés d'une soufflante sont généralement appelés *turbofan*.

La notion de flux est également une donnée importante pour caractériser le fonctionnement d'un turboréacteur. Dans les configurations en flux simple, l'ensemble du débit d'air traverse la chambre de combustion (voir figure I.1). Cette configuration, plus bruyante et polluante, se retrouve principalement pour les vitesses de vol élevées et dans l'aviation militaire. L'architecture double flux, en revanche, est la plus répandue dans l'aviation civile. Elle se caractérise par une séparation du flux entrant, après passage de la soufflante, en un flux primaire ou flux chaud et un flux secondaire dit flux froid. Le flux primaire traverse successivement le compresseur, la chambre de combustion et la turbine en subissant chacune des transformations décrites précédemment. À l'inverse, le flux froid s'écoule autour de la turbomachine et ne subit qu'une accélération induite par l'action de la soufflante. En pratique, le diamètre de la soufflante est

nettement supérieur à celui des autres roues aubagées. Cela permet d'accélérer un gros volume d'air tout en tournant à des vitesses plus faibles que le corps haute pression.

Pour les architectures double flux, le flux secondaire assure environ 80% de la poussée totale et contribue donc majoritairement à la propulsion de l'avion. En outre, la séparation du flux possède de multiples avantages tels qu'une économie de carburant, une réduction d'émission polluante ou encore une diminution de la pollution sonore. Le rapport massique du flux primaire sur le flux secondaire est appelé *taux de dilution* (ou BPR pour ByPass Ratio). Cette donnée est essentielle et guide les motoristes dans leur recherche de technologies plus performantes.

1.2 Les nouvelles architectures

1.2.1 Les moteurs en service

A l'heure actuelle, les turbofans intégrant des soufflantes de grand diamètre sont omniprésents dans l'aviation civile. Parmi eux, le CFM56 (figure I.4a) reste à ce jour le moteur le plus vendu au monde dans la catégorie des avions court et moyen-courriers. Produit et commercialisé par CFM International, société commune 50/50 entre Safran Aircraft Engines et General Electric, il affiche un taux de dilution proche de 6 avec des performances notables.

Face aux enjeux économiques et environnementaux, de nouvelles architectures ont émergé. C'est le cas notamment du LEAP (pour Leading Edge Aviation Propulsion), successeur du CFM56, et entré en service en 2016 (figure I.4b). Intégrant de nouvelles technologies et des matériaux innovants tels que le composite tissé 3D associé au procédé de moulage par injection de résine (ou RTM pour Resin Transfer Molding), ce moteur permet une forte réduction des émissions polluantes ainsi qu'une diminution des niveaux sonores. En outre, il permet de réduire la consommation de carburant de 15% par rapport au CFM56. Cela est en partie dû à l'augmentation du diamètre de la soufflante aux alentours de 2 m occasionnant un taux de dilution proche de 11.

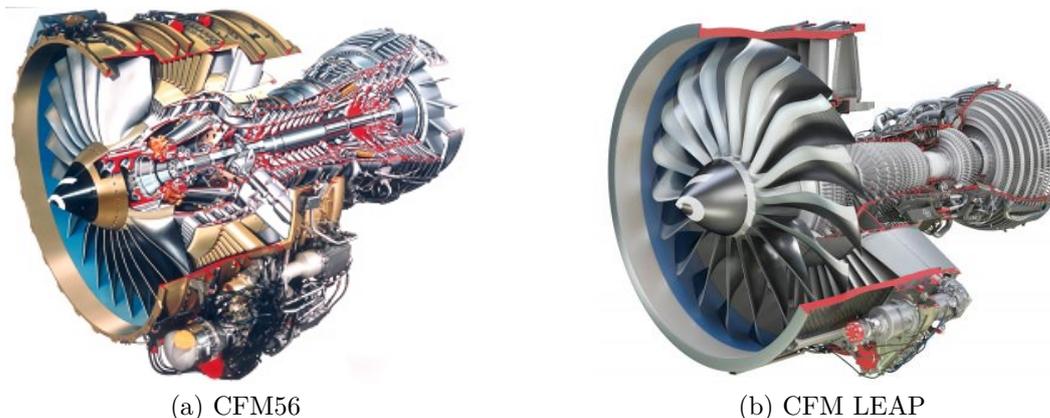


FIGURE I.4 – Moteurs CFM en service

1.2.2 Les concepts des futurs moteurs

Au début des années 2000, la commission européenne a mis au point à travers l'ACARE¹ (Advisory Council for Aviation Research and innovation in Europe) les lignes directrices définissant les objectifs à atteindre pour une industrie aéronautique plus respectueuse de

1. <https://www.acare4europe.org/>

l'environnement. Fixés à échéance 2020 (puis revu à 2050 à travers le programme Flightpath 2050) ces objectifs se résument à :

- Réduire les émissions de CO₂ de 75%
- Diminuer les rejets de NO_x de 90%
- Limiter les émissions sonores en les réduisant de 65%

En parallèle, le programme impose qu'au moins 90% des trajets intra-européens s'effectuent en moins de 4h porte-à-porte. Face à cette demande, plusieurs programmes de recherches européens ont vu le jour. C'est le cas notamment de SESAR (Single European Sky ATM Research) ou du projet d'initiative technologique Clean Sky² dont l'objectif est de développer de nouvelles technologies pour la prochaine génération d'avions.

Dans ce contexte, l'un des axes d'étude privilégié par les motoristes s'articule autour de la conception d'architectures carénées à très haut taux de dilution. C'est notamment le cas de l'UHBR (Ultra High Bypass Ratio) en développement chez Safran Aircraft Engines visant des taux au-delà de 15. D'une configuration similaire aux architectures double flux présentées précédemment, il se différencie par l'augmentation du diamètre du fan (voir figure 1.6a) lui permettant une réduction de 5 à 10% de la consommation de carburant vis à vis du LEAP.

Parmi les études menées sur cette architecture, la principale préoccupation découle directement de l'accroissement des dimensions et porte sur la nécessité de contrôler la vitesse de rotation de la soufflante afin de restreindre la vitesse en bout d'aube à des régimes subsoniques. Pour ce faire, une approche basée sur l'utilisation d'une boîte de vitesse entre le fan et le reste du corps basse pression est une des pistes envisagées. Celle-ci doit permettre de conserver une vitesse acceptable pour l'arbre BP tout en limitant celle du fan. Cette technologie est notamment utilisée sur le PW1000G de Pratt & Whitney.

Afin de valider ces briques technologiques et assurer l'intégration dans la nacelle, un démonstrateur UHBR, l'UHPE (Ultra High Propulsive Efficiency) doit effectuer ses premiers essais au sol dans le cadre du second appel à projet Clean Sky 2 lancé en 2014.

Affichant un niveau de maturité avancé, l'UHBR représente une solution à moyen terme sensée entrer en vigueur pour succéder au LEAP dans la gamme des court et moyen-courriers. Afin de préparer l'avenir, d'autres architectures sont d'ores et déjà à l'étude et prennent part au projet Clean Sky à travers le programme SAGE (Sustainable and Green Engines) visant à démontrer l'efficacité de nouvelles technologies de moteurs. Parmi celles-ci, le Counter Rotating Open Rotor (CROR) ou plus familièrement Open Rotor, pilotée par Safran Aircraft Engines au sein du consortium SAGE 2, suscite un fort intérêt.

L'Open Rotor est un moteur en rupture constitué d'un générateur de gaz conventionnel incluant une turbine entraînant un couple d'hélices composites contrarotatives et non carénées. Son architecture, à mi-chemin entre le turbopropulseur et le turbofan le place dans la catégorie dite des propfans dont une illustration est donnée figure 1.5. Le principe de fonctionnement de ce moteur est similaire à celui des architectures double flux décrit précédemment avec notamment la présence des corps HP et BP articulés autour de la chambre de combustion. La principale différence réside au niveau du doublet d'hélices, placé à l'aval du moteur juste après la turbine basse pression. La rotation de ces hélices est assurée par la turbine de puissance et l'ajout d'une boîte de vitesse.

Au-delà de la suppression de la nacelle, ce moteur intègre de nombreuses innovations technologiques telles que les pales de très grandes dimensions, un système de calage variable des

2. <https://www.cleansky.eu/>

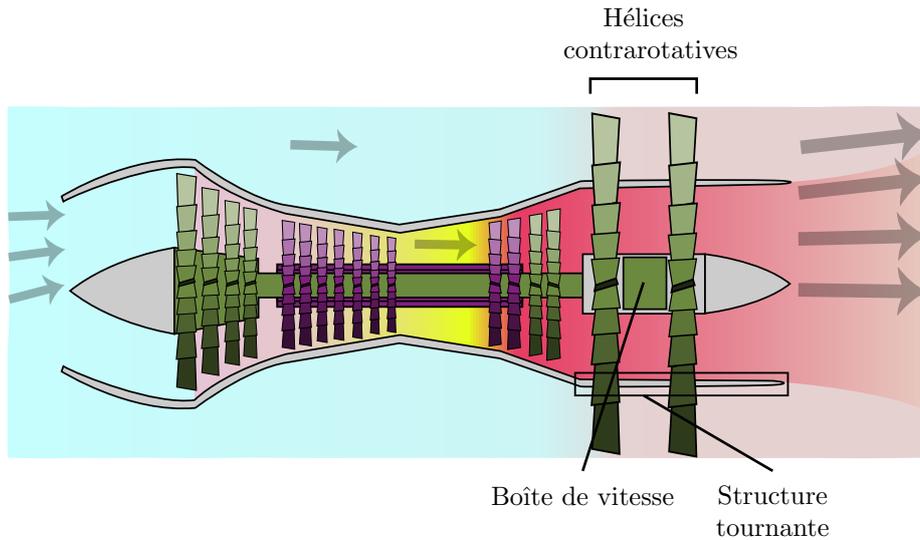


FIGURE I.5 – Schéma d'un propfan

aubes, la boîte de vitesse, ou encore un mécanisme de rotation de la structure. Deux principaux atouts se dégagent de l'utilisation de la technologie Open Rotor. Le premier concerne son taux de dilution très élevé, autour de 30 soit quasiment le triple de celui du LEAP. Cela découle directement du grand diamètre du doublet d'hélices, estimé à environ 4 m. Combiné à un allègement de masse induit par l'absence du carter, ce fort taux de dilution permet une réduction de la consommation de l'ordre de 15% par rapport au LEAP. Le second atout de l'Open Rotor concerne le redressement de l'écoulement induit par la présence de la seconde d'hélice contrarotative. Celle-ci permet en effet d'orienter le flux dans le sens de l'écoulement en supprimant la composante de giration créée lors du passage par la première rangée d'hélice et ainsi améliorer la poussée.

Afin de valider les nouvelles technologies embarquées dans l'Open Rotor, un démonstrateur moteur, dont un visuel est donné par la figure I.6b, a fait l'objet de tests sur banc d'essais en 2017 dans le cadre du programme Clean Sky.



FIGURE I.6 – Futures architectures développées dans le cadre du programme Clean Sky

La mise en service de la technologie Open Rotor n'est pour l'heure pas prévue avant plusieurs années. Néanmoins, son caractère innovant et les chiffres prometteurs qu'il entrevoit d'atteindre poussent les motoristes à accélérer les études vis à vis de cette technologie. C'est

dans ce contexte que s'articulent les travaux présentés dans ce manuscrit au sein duquel on s'attache à comprendre les phénomènes mécaniques complexes induits par la géométrie élancées des aubages de l'Open Rotor.

Cette section s'est attachée à fournir un rapide aperçu du principe de fonctionnement et des différentes architectures moteurs rencontrées dans l'aéronautique civile. Celui-ci montre le recours à des technologies de plus en plus complexes pour répondre aux enjeux économiques et environnementaux comme l'augmentation des diamètres des soufflantes que ce soit pour l'UHBR ou l'Open Rotor afin d'améliorer l'efficacité propulsive.

Ce recours à des architectures de grandes dimensions a tendance à favoriser l'apparition d'un comportement s'éloignant du cadre linéaire des petits déplacements et petites déformations. Dans ce contexte, il est nécessaire de se doter d'une modélisation fiable et robuste capable de tenir compte de ces effets. La section suivante a pour but de répondre à ce besoin en proposant la mise en équation d'une structure tournante en tenant compte des considérations de grands déplacements.

2 Dynamique d'une structure en rotation

On propose dans cette section d'établir les équations du mouvement discrétisées et non-linéaires d'une structure en rotation. Dans un premier temps, la cinématique d'une particule quelconque appartenant au solide est décrite. Puis dans un second temps, le principe variationnel de Hamilton est présenté et appliqué au cas traité. Enfin, une utilisation conjointe du principe de Hamilton et d'une discrétisation de Rayleigh-Ritz conduit aux équations régissant le mouvement du solide en rotation. La démarche employée s'inspire ici en grande partie des travaux de Gmür [46].

2.1 Cinématique d'une particule

On considère un solide déformable \mathcal{S} de volume V et de frontière Γ dans une configuration de référence non déformée (figure I.7). Dans cette configuration, une particule P_r de ce solide est définie par le vecteur position $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_f = (O, X, Y, Z)$. A l'instant $t = 0$, la particule P_r de ce solide se retrouve au point initial P_0 suite à l'application

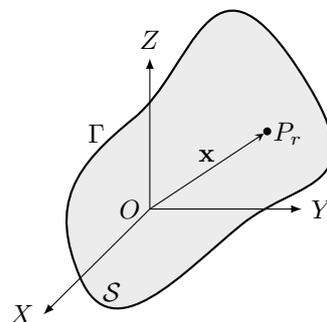


FIGURE I.7 – Solide \mathcal{S} dans la configuration de référence

d'un champs de déplacement \mathbf{u}_0 et est repérée par le vecteur position \mathbf{v}_0 tel que :

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (\text{I.1})$$

A un instant $t > 0$, sous l'effet du mouvement et de la déformation du solide, la particule est déplacée au point P_1 de vecteur position $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ dans le repère \mathcal{R}_f . Dans le repère orthonormé noté $\mathcal{R}_m = (\bar{O}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ lié au solide, la position de la particule P_1 est définie par le vecteur \mathbf{v} tel que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.2})$$

où \mathbf{u} représente le champs de déplacement à l'instant t . Le repère \mathcal{R}_m de centre \bar{O} , coïncidant avec \mathcal{R}_f à $t = 0$ se définit pour $t > 0$ comme la composition d'une translation $\mathbf{s}(t) = [s_1, s_2, s_3]^T$ de l'origine du repère par rapport à \mathcal{R}_f et d'une rotation dont la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ dans \mathcal{R}_m est définie autour d'un axe quelconque passant par \bar{O} et telle que représentée sur la figure I.8. Le vecteur position \mathbf{y} se compose de la position de l'origine \bar{O} et de la position vis à

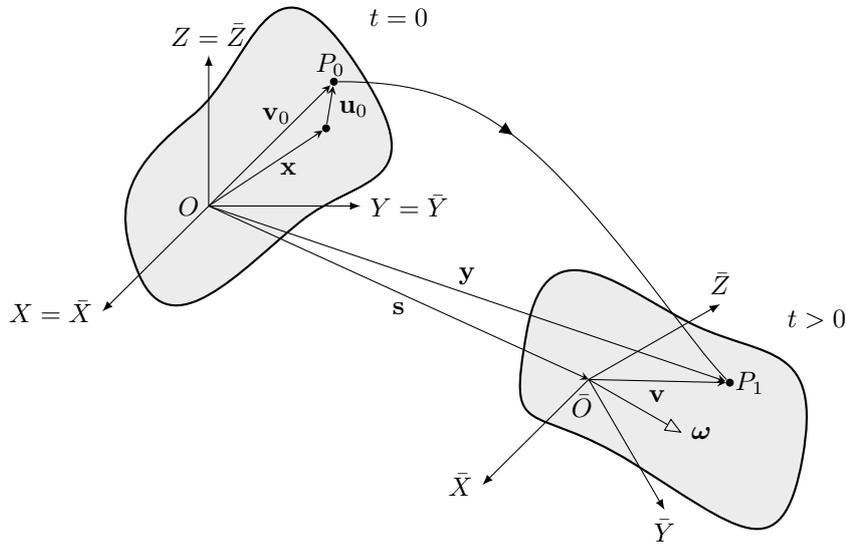


FIGURE I.8 – Solide \mathcal{S} dans les configurations initiale et déformée

vis de ce point. Dans le repère \mathcal{R}_f cela se traduit par

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.3})$$

où $\mathbf{R}(t)$ correspond à la matrice de changement de repère exprimant les vecteurs de base du repère lié \mathcal{R}_m dans le repère fixe \mathcal{R}_f . Par définition, il s'agit d'une matrice orthogonale i.e vérifiant $\mathbf{R}^T(t)\mathbf{R}(t) = \mathbf{I}$. En complément des informations données précédemment, la vitesse du point P_1 dans le repère \mathcal{R}_f s'exprime par l'expression suivante,

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{R}}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{I.4})$$

Cette expression fait intervenir la dérivée temporelle de la matrice de changement de base. Par construction, il est possible d'exprimer cette dérivée à l'aide des composantes du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de sorte que $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\boldsymbol{\Omega}(t)$ avec,

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

2.2 Obtention des équations du mouvement

2.2.1 Formulation variationnelle

Les expressions établies dans la section précédente peuvent être utilisées pour décrire la dynamique du solide \mathcal{S} . En pratique cela peut être réalisé à l'aide d'une formulation faible des équations non-linéaires de l'élastodynamique à travers le principe des travaux virtuels [161]. Dans ce manuscrit, une autre approche a été préférée et repose sur le principe de Hamilton. Celui-ci stipule que la somme des variations des énergies cinétique et potentielle et du travail des forces extérieures et des forces non conservatives entre deux instants quelconques t_1 et t_2 est nulle [112]. Mathématiquement, cela se traduit par,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{W} - \mathcal{F} dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

où \mathcal{L} correspond au Lagrangien du système défini à partir des énergies cinétique \mathcal{T} et potentielle \mathcal{V} par $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ et où \mathcal{W} et \mathcal{F} correspondent respectivement au travaux des forces extérieures et des forces non conservatives. L'application de ce principe au solide déformable décrit précédemment s'effectue en évaluant les différents termes de l'expression (I.6).

2.2.2 Énergie cinétique

L'énergie cinétique du solide \mathcal{S} s'obtient à l'aide de l'expression (I.4) définissant la vitesse absolue d'une particule élémentaire dans le repère \mathcal{R}_f et se développe sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{y}}^T \dot{\mathbf{y}} dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{u} dV \\ &\quad + \int_V \rho \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Omega}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) dV \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\mathbf{s}}^T \dot{\mathbf{s}} + 2\dot{\mathbf{s}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) dV \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

2.2.3 Énergie potentielle

L'énergie potentielle de déformation se met sous la forme,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (\text{I.8})$$

Elle fait intervenir les tenseurs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$. Sous l'hypothèse des petites perturbations on considère généralement la partie linéarisée de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Pour des systèmes présentant des non-linéarités géométriques, le tenseur de Green complet incluant les termes non-linéaires doit être considéré. Celui-ci se met sous la forme,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}^T \mathbf{u} \right) + \mathbf{grad}^T \mathbf{u} \mathbf{grad} \mathbf{u} \quad (\text{I.9})$$

où \mathbf{grad} correspond à l'opérateur matriciel du gradient.

Afin de tenir compte des effets liés aux grands déplacements, on suppose également une loi matériau hyperélastique de type Saint-Venant-Kirchhoff [12]. Celle-ci s'exprime de manière similaire à la loi de Hooke à l'aide d'une relation linéaire entre le second tenseur de Piola-

Kirchhoff σ et le tenseur des déformations complet de Green (I.9) sous la forme,

$$\sigma = \mathbb{D} : \varepsilon \quad (\text{I.10})$$

où \mathbb{D} correspond au tenseur d'élasticité d'ordre 4. En supposant un matériau isotrope, la relation précédente se simplifie sous la forme,

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (\text{I.11})$$

avec $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T$ et $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]^T$ écrits à l'aide de la notation de Voigt et \mathbf{D} exprimé sous forme matricielle,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{I.12})$$

avec λ et μ les coefficients de Lamé. En utilisant cette notation, le tenseur de Green se réécrit sous la forme simplifiée,

$$\varepsilon = \left(\nabla + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} \quad (\text{I.13})$$

où les opérateurs de dérivation ∇ et $\nabla_{\mathbf{u}}$ sont définis par,

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

et

$$\nabla_{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 2 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{I.15})$$

On retrouve ici l'opérateur linéaire ∇ rencontré dans le cadre des petites déformations. L'opé-

rateur $\nabla_{\mathbf{u}}$ sert quant à lui à exprimer la partie non-linéaire des déformations et dépend explicitement du champs de déplacement \mathbf{u} . En utilisant ces définitions, l'énergie potentielle de déformation s'écrit,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T \left(\nabla^T + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}}^T \right) \mathbf{D} \left(\nabla + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} dV \quad (\text{I.16})$$

2.2.4 Travail des forces extérieures et des forces non conservatives

Le travail des forces extérieures se compose du travail des forces volumiques \mathbf{f} et surfaciques \mathbf{t} tel que,

$$\mathcal{W} = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (\text{I.17})$$

où Γ_{σ} correspond à la portion de Γ sur laquelle s'appliquent les efforts surfaciques. Concernant les forces non conservatives, on admet ici que ce sont des forces dissipatives relatives aux amortissements visqueux cinématique et constitutif et qui s'écrivent sous la forme [178],

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V \eta_a \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV + \frac{1}{2} \int_V \eta_b (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T \mathbf{D} (\nabla \dot{\mathbf{u}}) dV \quad (\text{I.18})$$

avec η_a et η_b deux coefficients d'amortissement.

2.2.5 Discrétisation et équations de Lagrange

Sous sa forme conventionnelle, le principe de Hamilton permet de remonter aux équations continues du mouvement du solide en déformation. Afin d'établir une forme discrète de ce problème, on suppose une approximation de la solution \mathbf{u} sous la forme,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{q}(t) \quad (\text{I.19})$$

où $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ représente une matrice d'interpolation. Dans le cas d'une approximation de Rayleigh-Ritz, elle se compose de fonctions cinématiquement admissibles. Le vecteur $\mathbf{q}(t)$ correspond au vecteur de coordonnées généralisées. La substitution de (I.19) dans le principe de Hamilton (I.6) se ramène après intégration par parties des termes en vitesses à l'expression,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathbf{q}^T \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right] dt = 0 \quad (\text{I.20})$$

La variation $\delta \mathbf{q}$ étant arbitraire sur l'intervalle de temps considéré, l'application du principe de Hamilton équivaut à la résolution des équations de Lagrange définies par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad (\text{I.21})$$

En utilisant les expressions (I.7), (I.16) et (I.18), l'application des équations de Lagrange conduit finalement aux équations non-linéaires du mouvement suivantes,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^q(\mathbf{q}) + \mathbf{K}^c(\mathbf{q}) + \mathbf{P} + \mathbf{N})\mathbf{q} = \mathbf{f}^{\Omega} + \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.22})$$

avec

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dV \quad (\text{I.23a})$$

$$\mathbf{C} = \int_V \eta_a \mathbf{H}^T \mathbf{H} \, dV + \int_V \eta_b (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, dV \quad (\text{I.23b})$$

$$\mathbf{G} = 2 \int_V \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{H} \, dV \quad (\text{I.23c})$$

$$\mathbf{K} = \int_V (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, dV \quad (\text{I.23d})$$

$$\mathbf{K}^q(\mathbf{q}) = \int_V (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla \mathbf{H}) \, dV + \frac{1}{2} \int_V (\nabla \mathbf{H})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, dV \quad (\text{I.23e})$$

$$\mathbf{K}^c(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int_V (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\nabla_q \mathbf{H} \mathbf{q}) \, dV \quad (\text{I.23f})$$

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{H} \, dV \quad (\text{I.23g})$$

$$\mathbf{N} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{H} \, dV \quad (\text{I.23h})$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{H}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (\text{I.23i})$$

$$\mathbf{f}^\Omega = \int_V \rho \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x} + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}) \, dV \quad (\text{I.23j})$$

Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} et \mathbf{N} sont symétriques et correspondent respectivement aux matrices de masse, d'amortissement, de raideur linéaire et d'assouplissement centrifuge. De plus, les matrices \mathbf{M} et \mathbf{K} sont respectivement définie positive et semi-définie positive tandis que la matrice \mathbf{N} est semi-définie négative. Dans le cas où la masse volumique ρ ainsi que les coefficients d'amortissement η_a et η_b sont constants, la matrice d'amortissement \mathbf{C} s'écrit sous la forme classique d'un amortissement de Rayleigh $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Du fait de leur dépendance en $\boldsymbol{\Omega}$ et $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, les matrices de Coriolis \mathbf{G} et d'accélération angulaire \mathbf{P} sont antisymétriques. Les matrices $\mathbf{K}^q(\mathbf{q})$ et $\mathbf{K}^c(\mathbf{q})$ proviennent directement de la partie non-linéaire du tenseur de Green (I.13) et correspondent respectivement aux matrices de raideurs quadratique et cubique. En pratique, il est possible de dissocier les termes de raideurs des inconnues généralisées en réexprimant ces matrices sous la forme de tenseurs d'ordre 3 et 4. On regroupera par la suite ces termes non-linéaires sous la notation $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q})$ et on qualifiera de *non-linéaire géométrique* un système présentant ce terme dans son équation dynamique. Le vecteur \mathbf{f}^{ext} regroupe les efforts extérieurs de nature surfacique et volumique appliqués au solide. Enfin, le vecteur \mathbf{f}^Ω est un terme d'excitation lié au mouvement du système de coordonnées.

2.3 Position d'équilibre sous pré-chargement centrifuge

La rotation du système induit une déformation principalement radiale liée à l'application des efforts centrifuges. Cette déformation modifie la géométrie et les propriétés du solide dont il est nécessaire de tenir compte. Pour cela, la démarche consiste à caractériser le comportement du système autour d'une position d'équilibre dépendant directement de la vitesse de rotation. On considère dans la suite une vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ constante et le vecteur de translation de l'origine du repère \mathbf{s} nul. L'équation régissant le mouvement du système en rotation s'écrit alors,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{q} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^\Omega + \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.24})$$

La solution de (I.24) peut s'écrire comme la somme d'une contribution dynamique $\mathbf{p}(t)$ et d'une contribution statique \mathbf{q}^Ω telle que [179],

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}(t) \quad (\text{I.25})$$

où \mathbf{q}^Ω , la position d'équilibre en rotation est solution du problème statique non-linéaire,

$$(\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{q}^\Omega + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}^\Omega) = \mathbf{f}^\Omega \quad (\text{I.26})$$

La substitution de la solution (I.25) dans l'équation du mouvement donne,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{p}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) (\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}^\Omega + \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.27})$$

En effectuant un développement de Taylor à l'ordre un des efforts non-linéaires autour de la précharge statique on a,

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}^\Omega + \mathbf{p}) = \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}^\Omega) + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{q}^\Omega) \mathbf{p} \quad (\text{I.28})$$

En introduisant (I.28) dans (I.24) et en tenant compte de la relation (I.26), l'équation du mouvement linéaire autour de la précharge statique \mathbf{q}^Ω s'écrit finalement,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.29})$$

avec \mathbf{K}_Ω la matrice de raideur tangente évaluée au point \mathbf{q}^Ω et définie par,

$$\mathbf{K}_\Omega = \mathbf{K} + \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{q}^\Omega) \quad (\text{I.30})$$

En pratique, le calcul de la solution statique (I.26) s'effectue à l'aide d'un solveur non-linéaire de type Newton Raphson avec ajout éventuel d'une méthode de continuation sur Ω pour pallier les potentielles fortes variations des contributions non-linéaires.

2.4 Analyse modale des structures en rotation

On s'intéresse ici au calcul des modes propres d'une structure en rotation. Dans un état conservatif, cela revient à résoudre le système différentiel suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (\text{I.31})$$

Pour les cas dissipatifs avec et sans rotation, on pourra se référer à [46]. En supposant la solution générale sous la forme,

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \alpha e^{\lambda t}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{p}_0 \in \mathbb{C}^n \quad (\text{I.32})$$

la recherche des éléments propres du système se ramène à la résolution du problème quadratique aux valeurs propres généralisé,

$$(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{G} + \mathbf{K}_\Omega) \mathbf{p}_0 = \mathbf{0} \quad (\text{I.33})$$

Par construction, ce système admet $2n$ solutions non triviales et peut être résolu à l'aide d'algorithmes de factorisation [183]. Une autre approche consiste à réexprimer le système (I.31)

sous forme d'état en incluant l'équation triviale suivante,

$$\mathbf{K}_\Omega \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{K}_\Omega \mathbf{p} \quad (\text{I.34})$$

Ce procédé permet de transformer le système différentiel initial du second ordre en un système du premier ordre de taille $2n$ et de la forme,

$$\mathbf{B} \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{A} \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (\text{I.35})$$

avec

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_\Omega \\ -\mathbf{K}_\Omega & -\mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

En conservant la forme de la solution (I.32) et en la substituant dans (I.35), le problème aux valeurs propres généralisé pour des systèmes conservatifs en rotation s'écrit,

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{g}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \lambda \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.37})$$

De là, il est possible d'extraire les pulsations et formes propres du système. En effet, la nature antisymétrique de la matrice \mathbf{A} ainsi que le caractère symétrique et positif de la matrice \mathbf{B} permet d'obtenir n couples de valeurs propres conjuguées $\lambda_i = i\omega_i$ et $\bar{\lambda}_i = -i\omega_i$ dont les parties imaginaires sont directement les pulsations propres du système. Enfin, les vecteurs propres se scindent également en n couples de vecteurs complexes conjugués \mathbf{g}_{0_i} et $\bar{\mathbf{g}}_{0_i}$ dont les n premiers termes définissent les formes propres du système en rotation.

3 Étude des roues aubagées

Les roues aubagées représentent un des constituants principal des turboréacteurs. Présentes à la fois au niveau de la soufflante, des étages de compresseur et des étages de turbine, elles possèdent une structure particulière leur conférant certaines propriétés mathématiques exploitables en bureau d'études. Cette section a pour but de présenter les méthodes de modélisation des roues aubagées, les excitations auxquelles elles sont soumises dans leur environnement ainsi que les outils disponibles en phases de conception pour prévenir les risques vibratoires de ces composantes.

3.1 Modélisation cyclique

Les roues aubagées sont dites à symétrie cyclique. Cela signifie qu'elles peuvent être définies par la répétition circulaire d'un motif ou secteur. Mathématiquement, pour une structure comportant N secteurs, un champs de déplacement \mathbf{u}_j restreint au secteur j vérifie,

$$\mathbf{u}_{j+N} = \mathbf{u}_j \quad \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (\text{I.38})$$

Les travaux portants sur la symétrie cyclique sont nombreux et on se restreindra ici à la présentation des principaux résultats liés à cette théorie. Pour un approfondissement de ce concept, on pourra se référer aux travaux de Thomas [177]. Par ailleurs, l'approche suivie dans cette sous-section s'inspire de [148].

Dans la suite, on se limitera à une étude linéaire sans rotation. De fait, l'équation du mouvement sur le secteur j s'écrit,

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{C}_0 \dot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_j + \mathbf{f}_j^c = \mathbf{f}_j^{\text{ext}} \quad (\text{I.39})$$

où \mathbf{M}_0 , \mathbf{C}_0 et \mathbf{K}_0 correspondent aux matrices de masse, amortissement et raideur sur un secteur de référence, \mathbf{f}^{ext} sont les efforts extérieurs agissant sur le secteur et $\mathbf{f}_j^c = \mathbf{f}_{j-1 \rightarrow j} + \mathbf{f}_{j+1 \rightarrow j}$ traduisent les efforts liés à l'assemblage des secteurs adjacents. D'après la théorie de représentation linéaire des groupes cycliques [194], le champ de déplacements \mathbf{u}_j peut être exprimé sous la forme

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{ijk\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_k \quad (\text{I.40})$$

où $\alpha = 2\pi/N$ correspond à l'angle de déphasage inter-secteurs et $\tilde{\mathbf{u}}_k$ représente la composante cyclique complexe d'indice harmonique k . Par la suite, le champ de déplacement de la structure complète peut s'écrire à l'aide des composantes cycliques via,

$$\mathbf{u} = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{I.41})$$

avec

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{i\alpha} & \cdots & e^{i(N-1)\alpha} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{i(N-1)\alpha} & \cdots & e^{i(N-1)^2\alpha} \end{bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

la matrice de transformée de Fourier discrète spatiale et \mathbf{I}_{N_d} la matrice identité de taille N_d le nombre de degrés de liberté par secteur. En appliquant ce changement de variables et les propriétés d'orthogonalité de l'exponentielle complexe, la projection de l'équation (I.39) en base physique sur la base cyclique donne pour l'indice harmonique k ,

$$\mathbf{M}_0 \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \mathbf{C}_0 \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_k + \mathbf{K}_0 \tilde{\mathbf{u}}_k + (\mathbf{F}_k^H \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}^c = (\mathbf{F}_k^H \otimes \mathbf{I}_{N_d}) \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.43})$$

où \mathbf{F}_k^H désigne la matrice adjointe (transposée de la conjuguée) de \mathbf{F} restreinte à l'harmonique k . À ce stade, l'effort exercé par un secteur sur ses voisins ne permet pas de subdiviser le problème initial en sous-problèmes indépendants. Cet obstacle peut être contourné en s'appuyant sur la notion de continuité entre les secteurs, qui représente le principal atout des structures à symétrie cyclique.

En partitionnant le champ \mathbf{u} selon ses degrés de liberté intérieurs \mathbf{u}^i et de frontières gauche \mathbf{u}^g et droite \mathbf{u}^d , cette condition de continuité se traduit pour chaque secteur j par,

$$\mathbf{u}_j^g = \mathbf{u}_{j+1}^d \quad (\text{I.44})$$

Reformulée dans le domaine spectral, celle-ci se met sous la forme [105],

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^g = e^{ik\alpha} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \quad \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \quad (\text{I.45})$$

Pour un indice harmonique k fixé, la condition de continuité sous sa forme spectrale peut être définie à l'aide d'une matrice rectangulaire $\tilde{\mathbf{B}}_k$ telle que,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^g \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^d \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_f} e^{ik\alpha} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{N_i} \\ \mathbf{I}_{N_f} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}_k} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_k^d \\ \tilde{\mathbf{u}}_k^i \end{bmatrix} \quad (\text{I.46})$$

où N_i (respectivement N_f) correspond au nombre de ddl internes (respectivement sur une frontière). Finalement, la substitution de (I.46) dans (I.43) conduit au système différentiel

exprimé pour l'indice harmonique k ,

$$\tilde{\mathbf{M}}_k \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_k^d \\ \ddot{\mathbf{u}}_k^i \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{C}}_k \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_k^d \\ \dot{\mathbf{u}}_k^i \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}}_k \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k^d \\ \mathbf{u}_k^i \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_k^H \left(\mathbf{F}_k^H \otimes \mathbf{I}_{N_d} \right) \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{I.47})$$

où $\tilde{\mathbf{M}}_k = \tilde{\mathbf{B}}_k^H \mathbf{M}_0 \tilde{\mathbf{B}}_k$ (idem pour $\tilde{\mathbf{C}}_k$ et $\tilde{\mathbf{K}}_k$) et en remarquant que $\tilde{\mathbf{B}}_k^H \left(\mathbf{F}_k^H \otimes \mathbf{I}_{N_d} \right) \mathbf{f}^c = \mathbf{0}$ par définition du vecteur \mathbf{f}^c et par application du principe d'action-réaction de Newton.

Ainsi, en s'appuyant sur la modélisation cyclique, il est possible de subdiviser le problème initial sur la structure complète en un ensemble de sous-problèmes définis sur un secteur de référence et dépendants d'un indice harmonique k . Plus particulièrement, à chaque indice harmonique k correspond un certain déphasage entre les composantes cycliques mis en évidence par l'équation (I.45). Par conséquent, il suffit alors d'exprimer le vecteur des efforts extérieurs \mathbf{f}^{ext} dans la base cyclique à l'aide de la décomposition (I.40) puis de résoudre séparément l'équation (I.47) pour chaque indice harmonique k rendant le membre de droite de cette équation non nul.

Le dernier point abordé dans cette section concerne l'analyse modale des structures à symétrie cyclique. En vertu des résultats établis précédemment, le calcul des modes de la structure peut s'établir indépendamment pour chaque indice harmonique en résolvant le système,

$$\left(\tilde{\mathbf{K}}_k - \omega_k^2 \tilde{\mathbf{M}}_k \right) \tilde{\Phi}_k = \mathbf{0} \quad (\text{I.48})$$

Après reconstruction sur la roue complète, les modes de la structure se classent en 2 catégories :

- Pour $k = 0$ et $k = N/2$ (lorsque N est pair), les solutions du problème aux valeurs propres (I.48) sont dites non-dégénérées. Elles correspondent respectivement à des déformées modales pour lesquelles les secteurs vibrent en phase et en opposition de phase deux à deux.
- Les autres cas fournissent des solutions dégénérées. Dans ce cas, le sous-espace propre associé à chaque harmonique k est constitué de deux vecteurs propres orthogonaux. La combinaison de ces modes doubles se présente sous la forme de modes tournants dont le sens de propagation peut être direct ou rétrograde.

Visuellement, les déformées modales associées aux modes des structures à symétrie cyclique présentent des lignes nodales ou diamètres nodaux dont le nombre est égal à l'indice harmonique k . Par la suite, l'indice harmonique est également appelé nombre de diamètres.

Si ces résultats sont valables dans le cadre linéaire en l'absence de rotation, il est cependant important de mentionner qu'en présence de rotation, l'effet gyrosopique conduit, de par sa nature antisymétrique, à une séparation fréquentielle des modes doubles [133]. Celle-ci se traduit par l'apparition de modes sous la forme d'ondes tournantes pouvant être directes ou rétrogrades. Davantage d'information à ce sujet pourra être trouvé dans [158].

La modélisation en symétrie cyclique est une approche particulièrement utilisée en phase de conception des roues aubagées. Celle-ci permet aux ingénieurs de se munir d'outils pour estimer les risques vibratoires. Certains de ces outils seront précisés dans la section I.3.3.

3.2 Sources de vibrations

En vue de comprendre et maîtriser les phénomènes vibratoires survenant au niveau des roues aubagées, il est nécessaire de connaître et d'identifier les sources d'excitations auxquelles

elles sont soumises. Ces sources sont multiples et se différencient en deux catégories à savoir les excitations d'origines mécaniques et celles d'origines aéroélastiques.

3.2.1 Excitations mécaniques

Une première source d'excitation d'origine mécanique est celle liée à la présence de balourd. Elle se manifeste lorsque la répartition de masse autour de l'axe de rotation de la turbomachine n'est pas homogène [123]. Ce défaut d'équilibrage engendre une excitation périodique dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor. Plusieurs causes peuvent être à l'origine du balourd. C'est le cas par exemple d'un mauvais équilibrage survenant lors de l'assemblage des composantes de la turbomachine. Le balourd peut également naître des dispersions géométriques ou matériaux induites par les techniques de fabrication comme l'usinage où les récentes méthodes de conception en matériau composite pour les aubages de soufflante. Afin de réduire les risques d'apparition d'un balourd, les constructeurs imposent des tolérances de fabrication toujours plus fines. Par ailleurs, il est possible de contrebalancer le déséquilibre induit par le balourd en procédant à des ajouts de matières sous forme de masselottes ou bien en retirant de la matière par usinage.

Le balourd peut également survenir en phase de fonctionnement des suites d'une rupture par fatigue d'une aube ou bien à la suite d'une ingestion d'un corps étranger (oiseau, glace). Cette dernière peut occasionner la détérioration du moteur voire la rupture d'une ou plusieurs aubes. Le risque encouru par ce type d'événement fait l'objet d'une attention particulière en phase de conception et des essais sont programmés pour valider la rétention des débris dans le carter lors des étapes de certification. Dans le cadre de l'Open Rotor, ce dernier point représente un enjeu majeur en raison de l'absence de carénage au niveau du couple d'hélices contrarotatives. Il est alors indispensable de vérifier qu'un débris de soufflante ne vienne pas endommager voire transpercer le fuselage au niveau de la cabine.

Dans une volonté d'améliorer les rendements des turbomachines, les constructeurs ont tendance à réduire les jeux entre le sommet des aubages et le carter. Permettant de restreindre les pertes de flux liées aux fuites de l'écoulement, cette minimisation des jeux tend à favoriser les risques d'interaction entre les parties rotor et stator. Un contact peut alors survenir et s'amorcer selon différents scénarios : vibrations liés à des coïncidences modales, déformations sous chargement thermique, allongement des aubes par effets centrifuges, balourd... Lorsque le contact a lieu, les vibrations induites peuvent mener à des phénomènes d'interactions modales entre la roue aubagée et le carter [98]. Afin d'atténuer le phénomène, des solutions existent comme la mise en place d'un matériau abrasable à la surface du carter [7] venant être usiné lors du passage des aubes en cas de contact.

3.2.2 Excitations aéroélastiques

L'aéroélasticité s'intéresse au comportement vibratoire des structures dans un écoulement d'air. Lors de la traversée de la turbomachine, l'écoulement subit des perturbations au passage des différentes composantes. En particulier, la traversée des stators tels que les redresseurs ou les distributeurs engendre des fluctuations du champs de pression du fluide. Ces fluctuations ou sillages viennent directement impacter les roues aubagées situées en amont et en aval de ces stators. Plus précisément, chaque aubage du rotor subit une excitation dont la fréquence est égale au produit du nombre d'obstacles rencontrés par le fluide par la vitesse de rotation de la roue [108]. On parle dans ce cas d'excitation synchrone avec la vitesse de rotation. Ce phénomène peut s'avérer dangereux si un harmonique de l'excitation avoisine une des

fréquences propres de la roue aubagée. En phase de dimensionnement, ces cas de figure sont correctement prédits, notamment à l'aide d'outils présentés dans la section I.3.3.

L'interaction du fluide avec la structure peut également conduire à des excitations dites asynchrones, c'est à dire indépendantes de la vitesse de rotation. C'est le cas par exemple du flottement [192]. Ce phénomène se produit lorsque la vibration des aubages vient perturber l'écoulement, générant des forces aérodynamiques qui à leur tour excitent la structure. Dans ce cas, la dissipation d'énergie du système peut être inférieure à l'apport d'énergie dû aux efforts aérodynamiques. S'ensuit un échange d'énergie entre le fluide et les aubages se matérialisant par des vibrations auto-entretenues pouvant conduire à la rupture de la structure.

Le flottement peut également survenir à la suite d'une coalescence de modes des aubages, généralement de flexion et de torsion, engendrée par les efforts aérodynamiques. La prédiction des phénomènes asynchrones est généralement plus délicate que pour les excitations synchrones. Afin d'améliorer la compréhension, de nombreux travaux visant à reproduire certains phénomènes aéroélastiques comme le flottement ont été entrepris. Récemment, des études ont été menées dans le cadre du projet Clean Sky 2 sur un cas test d'UHBR [13] pour lequel la mise en flottement a tendance à s'apparenter à un couplage flexion-torsion semblable à celui observé sur des ailes d'avion.

D'autres phénomènes asynchrones peuvent occasionner des instabilités vibratoires dans la turbomachine. On pourra notamment évoquer le décollement tournant [33], le SFV (Separated Flow Vibration) ou encore l'ingestion de vortex de sol étudié notamment dans les travaux de Berthelon [8].

Dans le cas de l'architecture décarénée Open Rotor, le grand diamètre des hélices empêche une installation sous ailes comme c'est le cas pour la majorité des moteurs de l'aviation civile actuelle. Une solution alternative consiste à installer le moteur en queue d'avion (figure I.9). En contrepartie, ce positionnement l'expose à de nombreuses perturbations de l'écoulement induites notamment par l'aile de l'avion, le pylône ou encore le fuselage dans le cas d'un décollement de la couche limite.



FIGURE I.9 – Représentation de l'installation de l'Open Rotor en queue de fuselage

3.3 Dimensionnement et outils de conception

La section précédente a mis en lumière un certain nombre des risques vibratoires pouvant survenir au sein des turboréacteurs. Lors du processus de conception, des outils sont à la disposition des ingénieurs pour prévenir certains de ces risques. Cette section vise à présenter

les plus familiers.

3.3.1 Diagramme fréquences-diamètres

Comme cela a été abordé dans la section I.3.1 le spectre fréquentiel des structures à symétrie cyclique telles que les roues aubagées se décompose en modes à diamètres. Plus particulièrement, cette décomposition s’observe pour chaque famille de modes (flexion, torsion...). Le diagramme fréquences-diamètres, dont un exemple est donné en figure I.10a permet de représenter l’évolution des fréquences propres de chaque famille modale en fonction du nombre de diamètres nodaux. Divers enseignements peuvent être extraits de ce diagramme.

Un première indication concerne la participation du disque aux différentes déformées modales de la roue. Celle-ci s’observe au niveau des zones de fortes variations fréquentielles du diagramme [15]. Dans le cas de l’exemple représenté, la participation du disque concerne principalement les bas diamètres et augmente à mesure que l’on change de famille modale.

Le diagramme fréquences-diamètres peut également mettre en évidence des zones de veering [143]. Celles-ci correspondent à des situations de rapprochement fréquentiel entre deux familles modales. Ce phénomène peut engendrer des couplages de modes impliquant des échanges d’énergie.

Enfin, le diagramme peut être exploité en vue d’identifier des commensurabilités entre les fréquences propres que ce soit pour une même famille modale ou bien pour des familles différentes. Cette situation peut en effet être à l’origine de phénomènes de résonances internes sur lesquels nous reviendrons plus en détail dans les différents chapitres de ce manuscrit.

3.3.2 Diagramme de Campbell

En raison des effets de rigidification et d’assouplissement centrifuges ainsi que des effets gyroscopiques, les fréquences propres d’une structures en rotation sont amenées à évoluer en fonction de la vitesse de rotation. Cette évolution est représentée par le diagramme de Campbell dont un exemple est illustré par la figure I.10b. Dans le cas d’une structure cyclique cette représentation s’effectue pour un indice harmonique donné.

En parallèle, il est usuel de représenter sur ce même diagramme les différents harmoniques de la vitesse de rotation, appelés ordres moteur et notés EO (pour Engine Order). Cette représentation permet de mettre en évidence les risques vibratoires liés à une excitation synchrone (balourd, sillage, etc.). Cette occurrence est susceptible de se produire lorsqu’un ordre moteur intersecte une ou plusieurs fréquences propres de la structure dans la plage de fonctionnement de la turbomachine. À titre d’exemple pour la figure I.10b, une coïncidence fréquentielle entre l’ordre moteur 20 et le second mode propres de la structure survient entre 80% et 100% de la vitesse nominale du moteur.

En pratique, la seule condition de coïncidence fréquentielle n’engendre pas nécessairement de résonance de la structure. Celle-ci doit en effet être complétée par une condition dite d’appropriation modale observable à l’aide du diagramme zigzag.

3.3.3 Diagramme zigzag

Lors de l’excitation d’une roue aubagée par un ordre moteur et ses harmoniques, la condition d’appropriation modale ou de coïncidence spatiale permet de déduire les modes à diamètres réellement excités. En pratique, cette condition découle directement de la propriété de repliement de spectre des harmoniques spatiales [199]. Pour une roue aubagée possédant N secteurs, elle s’exprime par la relation mathématique suivante,

$$EO \pm k = pN \quad (\text{I.49})$$

où k correspond à l'indice harmonique du mode excité et p est un entier naturel.

Graphiquement, la relation (I.49) se traduit par le diagramme zigzag représenté par la figure I.10c pour une roue aubagée à 24 secteurs. Cet exemple montre que pour un ordre moteur égal à 20, seul le mode à 4 diamètres est excité. On retrouve ici visuellement la notion de repliement de spectre énoncée précédemment. Par conséquent, il suffit alors de vérifier que l'intersection sur le diagramme de Campbell de la figure I.10b n'est pas observée lorsque celui-ci est tracé pour l'indice harmonique $k = 4$.

En phase de conception, il est primordial de s'assurer que les conditions fréquentielles et spatiales ne sont pas toutes deux vérifiées en même temps. Auquel cas, il peut être nécessaire de réitérer un cycle de conception de la roue aubagée.

Il est également important de noter que les outils présentés dans cette section s'appuient sur une vision idéalisée selon laquelle chaque structure est parfaitement cyclique. En réalité, un désaccordage entre les différents secteurs d'une structure cyclique intervient suite à des dispersions géométriques ou matériaux entre autre. Pour de faibles dispersions, l'hypothèse de cyclicité peut être conservée en première approche. En revanche, pour un niveau de désaccordage plus important, il est nécessaire de faire appel à des méthodes spécifiques. Davantage d'information à ce sujet pourra être trouvée dans [15].

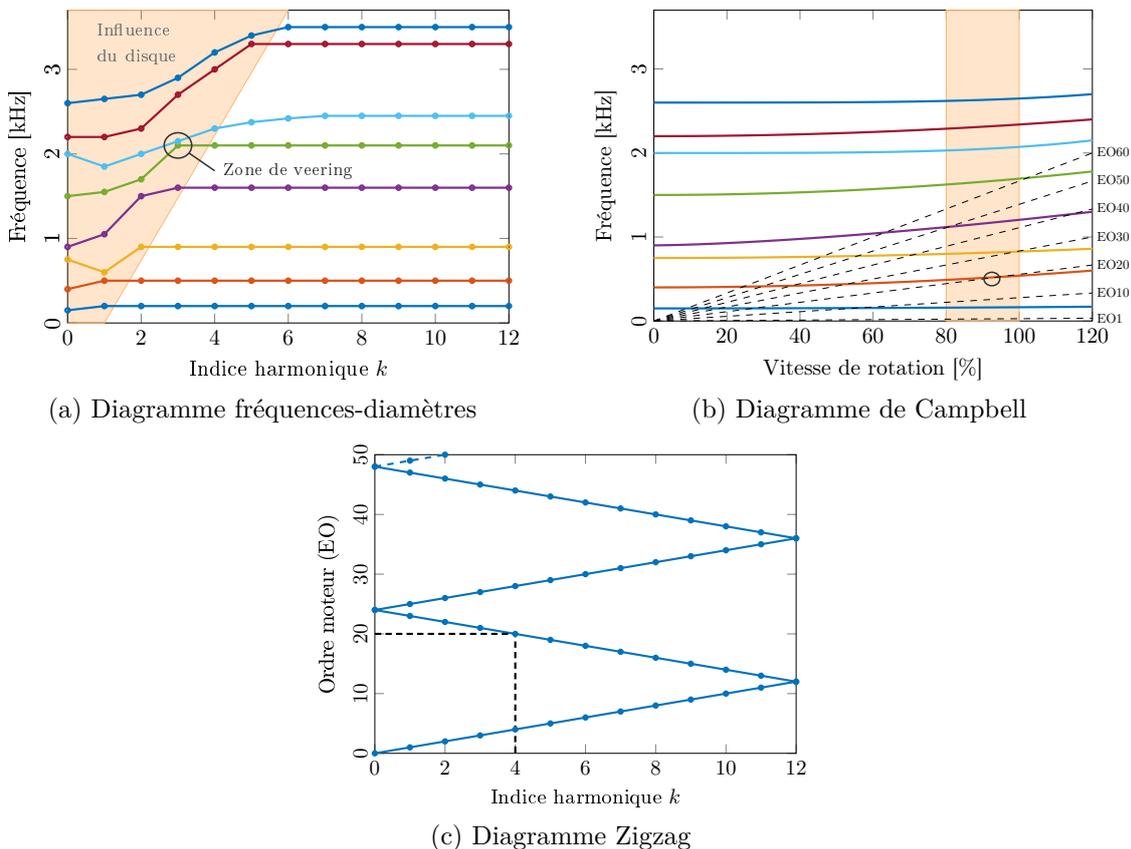


FIGURE I.10 – Diagrammes d'étude des propriétés modales et des conditions d'excitabilité des structures cycliques

Les éléments présentés jusqu'à présent permettent une très bonne maîtrise des risques vibratoires d'origines synchrones. La prédiction des risques dans les cas asynchrones relève d'un niveau de difficulté plus important et s'appuie davantage sur le retour d'expérience. Des outils empiriques peuvent également être interprétés. C'est le cas par exemple du TBC (Twist

Bend Coupling) employé notamment pour évaluer le risque vibratoire pour un certain type de flottement.

Au-delà des risques de vibrations dans les turbomachines, la principale inquiétude quant à la tenue des différents constituants relève de la fatigue vibratoire. Elle se définit comme le chargement répété d'une structure pouvant conduire à sa rupture malgré un niveau de contrainte inférieur à la limite de résistance du matériau. Des outils empiriques restent toutefois à disposition pour prévenir et anticiper l'apparition de ce type de phénomène.

3.3.4 Courbes de Wöhler et diagramme de Haigh

Les courbes de Wöhler ou courbes S-N (pour Stress vs Number of cycle) sont des courbes traduisant la relation entre le niveau de contrainte alternée σ_a et le nombre de cycles occasionnant la rupture du matériau [123]. Elles sont obtenues expérimentalement pour un rapport de charge R (ratio entre les contraintes maximale et minimale) fixé. Les courbes de Wohler, dont une illustration est donnée figure I.11a présentent généralement 3 zones distinctes correspondant respectivement à la zone de fatigue oligocyclique, à la zone d'endurance limitée ou de fatigue polycyclique et à la zone d'endurance illimité ou de sécurité. Elles se différencient principalement par le nombre de cycles nécessaire à la rupture.

Pour certains matériaux, il existe une valeur σ_D en dessous de laquelle la durée de vie du système est considérée infinie. Cette valeur correspond à la limite d'endurance et se traduit par une asymptote sur la courbe de Wöhler. On note également R_m la contrainte de rupture statique, c'est à dire la contrainte minimale occasionnant la rupture sans cyclage.

Dans la pratique, la construction de la courbe de Wöhler ne tient pas compte du chargement statique induit par la précharge centrifuge et se place à contrainte moyenne ou statique σ_m nulle (ou de manière équivalente à $R = -1$). Une alternative consiste à étudier le diagramme de Haigh (figure I.11b). Celui-ci représente la variation de la contrainte alternée engendrant la rupture en fonction de la contrainte statique pour un nombre de cycles imposés. Naturellement, l'intersection entre la courbe de Haigh et l'axe des ordonnées correspond à la limite d'endurance σ_D obtenue à contrainte moyenne nulle. De même, l'intersection avec l'axe des abscisses est assimilable à la contrainte R_m introduite précédemment. En théorie, chaque couple de point (σ_a, σ_m) en dessous de la courbe de Haigh est supposé acceptable pour la conception. Dans la pratique, plusieurs modèles ont été proposés pour simplifier le diagramme et assurer une marge de sécurité plus importante. C'est le cas par exemple de la droite de Goodman reliant la limite d'endurance à la résistance à la rupture. Plus conservatrice, la droite de Soderberg relie la limite d'endurance à la limite d'élasticité σ_e . La parabole de Gerber peut également être rencontrée dans le cas des contraintes statiques de traction [123].

D'autres diagrammes sont parfois utilisés. C'est le cas par exemple du diagramme de Goodman (ou diagramme de Smith) représentant la somme des contraintes statiques et dynamiques en fonction de la contrainte moyenne.

Bilan du chapitre

Ce chapitre introductif a permis d'établir le contexte général dans lequel s'inscrivent les travaux présentés dans ce manuscrit. Face à des enjeux économiques et environnementaux toujours plus importants, les motoristes ont l'obligation de s'adapter et de mettre au point des architectures capables de répondre aux normes qui leur sont imposées. Un des axes privilégié s'articule autour de la conception de turboréacteurs à grand diamètre pour favoriser l'accroissement du taux de dilution. Une technologie en rupture au cœur des préoccupations,

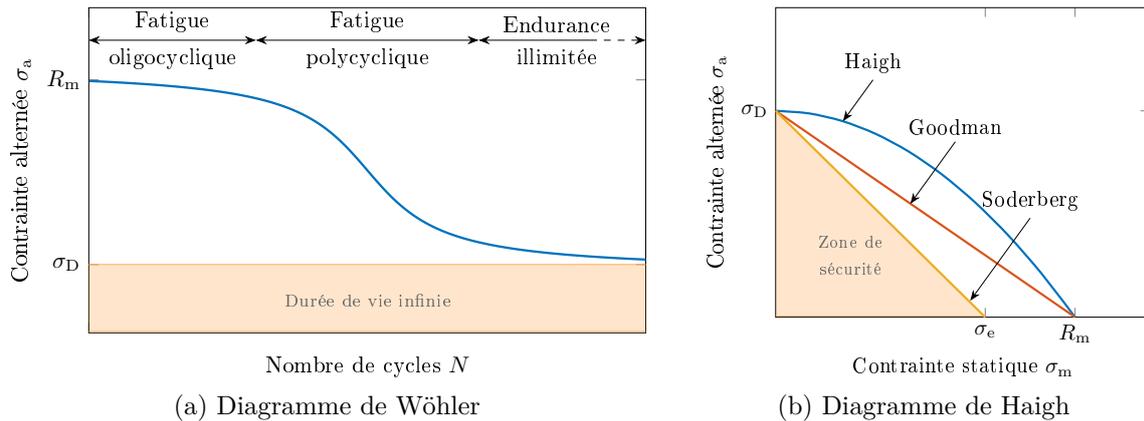


FIGURE I.11 – Diagrammes de dimensionnement en fatigue vibratoire

l'Open Rotor, est actuellement à l'étude pour équiper les futures générations d'aéronefs de l'aviation civile. Équipé d'un doublet d'hélices contrarotatives, ce moteur dit propfan présente un diamètre de l'ordre de 4 mètres. À cela s'ajoute l'utilisation d'aubages en matériau composite présentant des géométries minces et élancées si bien qu'il devient indispensable de tenir compte des grands déplacements et grandes déformations qui en découlent lors des étapes de modélisation. Si les outils actuellement utilisés en bureau d'étude lors des phases de conception s'avèrent d'une très grande utilité pour caractériser et anticiper les risques vibratoires pour certains types d'excitation, ils se basent essentiellement sur des considérations linéaires. En phase de dimensionnement, cette restriction au domaine linéaire peut avoir des conséquences non négligeables et conduire à éclipser certains phénomènes. En particulier, des phénomènes non-linéaires sont susceptibles de n'apparaître que très tardivement lors des phases d'essais de validation. Dans cette optique, le chapitre suivant s'attache à fournir les outils permettant d'étudier les systèmes non-linéaires en présence de non-linéarités géométriques ainsi que les méthodes de résolutions des équations de la dynamique pour de tels systèmes.

Chapitre II

Étude des systèmes non-linéaires

La phénoménologie des systèmes dynamiques non-linéaires est abordée dans ce second chapitre. Les principales méthodes de résolution et de recherche de solutions périodiques sont d'abord décrites en insistant notamment sur l'approche fréquentielle de la méthode de l'équilibrage harmonique. Les notions de continuation et la méthode de suivie de branches de bifurcation accompagnent également ces descriptions. Puis, des phénomènes propres aux systèmes non-linéaires sont présentés comme les situations de couplages modaux par résonance interne. Enfin, le chapitre se clôt par l'étude d'un modèle phénoménologique non-linéaire présentant un couplage flexion-torsion et représentatif de la problématique qui sera traitée au chapitre III.

Sommaire du chapitre

1 Méthodes classiques de résolution de systèmes non-linéaires	28
1.1 Méthode de perturbation	28
1.2 Intégration temporelle	29
2 Méthode de recherche de solutions périodiques	30
2.1 Méthodes temporelles	30
2.2 Méthode de l'équilibrage harmonique	32
2.3 Résolution numérique	36
3 Continuation de solutions	37
3.1 Algorithmes de continuation	38
3.2 Adaptation du pas de continuation	42
4 Phénoménologie des systèmes non-linéaires	43
4.1 Résonance non-linéaire	43
4.2 Stabilité des systèmes non-linéaires	47
4.3 Bifurcation	51
4.4 Analyse modale non-linéaire	57
5 Modèle phénoménologique de couplage flexion-torsion	61
5.1 Présentation du modèle	61
5.2 Résolution analytique	63
5.3 Résolution par équilibrage harmonique	68
Bilan du chapitre	72

Dans le chapitre précédent, les équations dynamiques d'un solide présentant des non-linéarités géométriques liées aux grands déplacements et aux grandes déformations ont été

décrites. Dans ce chapitre dédié à l'étude de la phénoménologie des systèmes non-linéaires on supposera sans perte de généralité l'équation du mouvement sous la forme,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{II.1})$$

1 Méthodes classiques de résolution de systèmes non-linéaires

1.1 Méthode de perturbation

Les méthodes de perturbation [127] constituent une première approche pour la résolution des systèmes d'équations dynamiques non-linéaires. Leur principe consiste à introduire un petit paramètre sans dimension ϵ de l'ordre de grandeur de la non-linéarité et à rechercher une approximation de la solution sous la forme d'une expansion de la forme,

$$\mathbf{x}(t, \epsilon) = \mathbf{x}_0(t) + \epsilon\mathbf{x}_1(t) + \epsilon^2\mathbf{x}_2(t) + \dots \quad (\text{II.2})$$

En injectant l'expression ci-dessus dans le système d'équations différentielles (II.1) et en regroupant les termes d'une même puissance de ϵ , on obtient un système d'équations dont la résolution fournit une à une les différentes contribution des composantes $\mathbf{x}_i(t)$ de $\mathbf{x}(t, \epsilon)$.

Parmi les méthodes les plus fréquemment rencontrées dans la littérature on retrouve la méthode de Lindstedt-Poincaré [128] ou la méthode des échelles multiples [131]. L'idée derrière la méthode de Lindstedt-Poincaré est d'introduire une nouvelle variable indépendante τ telle que $\tau = \omega t$ et de supposer une expansion de ω sous la forme,

$$\omega(\epsilon) = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots \quad (\text{II.3})$$

En supposant cette fois la solution,

$$\mathbf{x}(t, \epsilon) = \mathbf{x}_0(\tau) + \epsilon\mathbf{x}_1(\tau) + \epsilon^2\mathbf{x}_2(\tau) + \dots \quad (\text{II.4})$$

et en suivant la démarche décrite précédemment, il est possible de déterminer les expressions des contributions $\mathbf{x}_i(t)$. Cette méthode présente l'avantage de faire disparaître les termes séculaires (i.e. divergents avec le temps) dans les équations à chaque ordre ϵ . Par ailleurs, le choix d'imposer l'expression de ω garantit la présence d'une relation fréquence-amplitude propre aux systèmes non-linéaires, propriété sur laquelle nous reviendrons dans ce chapitre.

Le principe de la méthode des échelles multiples est de considérer une expansion de la solution comme étant fonction de plusieurs échelles de temps indépendantes T_i , soit,

$$\mathbf{x}(t, \epsilon) = \mathbf{x}_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon\mathbf{x}_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon^2\mathbf{x}_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (\text{II.5})$$

où $T_i = \epsilon^i t$. En réexprimant les opérateurs de dérivation dans les équations différentielles et en suivant la même démarche que précédemment, on peut déterminer les expressions des différentes contributions dans l'expansion de la solution. La méthode des échelles multiples présente l'avantage supplémentaire par rapport à la méthode de Lindstedt-Poincaré de pouvoir traiter convenablement le cas des systèmes amortis.

Les méthodes de perturbation constituent une première approche satisfaisante pour l'estimation des solutions des systèmes différentiels non-linéaires. Toutefois, elles reposent sur des développements analytiques conséquents ce qui limitent leur utilisation à des systèmes de faible dimension. Par ailleurs, l'introduction d'un petit paramètre ϵ restreint leur domaine de validité à des systèmes faiblement non-linéaires.

1.2 Intégration temporelle

Les méthodes basées sur des schémas d'intégration temporelle constituent l'approche classique et directe pour la recherche des solutions du système différentiel (II.1). Elles consistent à intégrer directement le problème afin de déterminer pas à pas la réponse du système à partir d'une condition initiale donnée.

De nombreux schémas d'intégration sont disponibles pour la résolution des systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Auquel cas, il est nécessaire de réexprimer le système sous forme d'équations d'état en introduisant le vecteur d'état $\mathbf{y}(t)$ défini par,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Appliqué au système (II.1), cela revient à écrire,

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{H}_{nl}(\mathbf{y}) = \mathbf{H}_{ex}(t) \quad (\text{II.7})$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{K} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{nl} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{ex} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{ext} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Afin de résoudre (II.7), la solution du système et sa dérivée première ainsi que les opérateurs de dérivation par rapport au temps sont discrétisés. On note alors \mathbf{y}_i l'évaluation de la solution \mathbf{y} à l'instant t_i et la détermination de \mathbf{y}_{i+1} en fonction des valeurs de \mathbf{y} et $\dot{\mathbf{y}}$ aux instants précédents s'effectue via l'expression générale [45],

$$\mathbf{y}_{i+1} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{y}_{i+1-k} - h \sum_{k=0}^m \beta_k \dot{\mathbf{y}}_{i+1-k} \quad (\text{II.9})$$

où $h = (t_{i+1} - t_i)$ est le pas de temps entre deux instant consécutifs t_i et t_{i+1} .

On distingue généralement deux familles de schémas d'intégration. Les schémas explicites et les schémas implicites. Les premiers correspondent au cas où $\beta_0 = 0$ dans l'expression (II.9). En d'autres termes l'évaluation de la solution à un instant t_i ne dépend que des solutions du système aux instants précédents. Pour les schémas implicites ($\beta_0 \neq 0$) en revanche, la solution au temps t_i dépend à la fois des solutions aux instants précédents mais aussi présents.

Parmi les schémas numériques classiquement rencontrés dans la littérature, on retrouve les schémas d'Euler explicite et implicite correspondant respectivement aux paramètres $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -1$ et $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = -1$, $\beta_1 = 0$. Ces schémas sont dits à pas simple, cela signifie que la recherche d'une solution à l'instant t_i ne fait intervenir au plus, que les grandeurs au pas précédent. Dans ce cas le paramètre m de l'expression (II.9) est égal à 1. Les schémas à pas simple s'exposent généralement à des problèmes de précision et de stabilité et on leur préfère classiquement des schémas à pas multiples soit lorsque $m > 1$ (comme par exemple le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 [36]), assurant une bonne précision.

D'autres schémas d'intégration permettent de traiter directement les équations différentielles du second ordre telles que (II.1). Cela présente l'avantage de s'affranchir du passage en système d'état et ainsi d'éviter de doubler le nombre d'inconnues du problème. Parmi ces schémas, citons notamment la famille des algorithmes de Newmark [132], pour lesquels l'estimation des solutions est fournie par,

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + h\dot{\mathbf{y}}_i + \frac{h^2}{2}((1-2\beta)\ddot{\mathbf{y}}_i + 2\beta\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}) \\ \dot{\mathbf{y}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{y}}_i + h(1-\alpha)\ddot{\mathbf{y}}_i + h\alpha\ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Le choix des paramètres α et β caractérise le schéma d'intégration. Parmi ceux-ci on retrouve la méthode de l'accélération moyenne [180] ou encore la méthode de Fox et Goodwin [41]. Davantage d'information sur les algorithmes de Newmark pourra être trouvée dans [46]. Notons enfin l'existence de méthodes du second ordre à pas multiples comme la méthode de Houbolt [66] ou encore la méthode de Wilson (ou méthode θ) [200].

Les méthodes d'intégration temporelle présentent l'intérêt d'être applicables à tout type de systèmes, en particulier à l'étude des modèles non-linéaires. De plus, elles sont généralement faciles à mettre en œuvre car présentes dans la grande majorité des logiciels de calculs. En revanche, elles perdent rapidement de leur attrait lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes présentant un grand nombre de degrés de liberté en raison du coût numérique élevé qu'elles génèrent. Par ailleurs, ces méthodes s'avèrent inadaptées à la détermination de régimes stationnaires dans la mesure où elles ne peuvent s'affranchir du calcul du régime transitoire, ce qui peut occasionner des temps de calcul très longs pour des systèmes peu amortis. Notons également que les outils d'intégration temporelle ne permettent de converger que vers des solutions stables, c'est à dire physiquement observables. Nous reviendrons ultérieurement sur la notion de stabilité des solutions de systèmes dynamiques et plus particulièrement sur celle des solutions périodiques.

Face à ces limitations, des méthodes plus appropriées pour la recherche de solutions périodiques de systèmes non-linéaires existent dans la littérature.

2 Méthode de recherche de solutions périodiques

On distingue généralement deux classes de méthodes pour la recherche de solutions périodiques des systèmes dynamiques non-linéaires, les approches temporelles et les approches fréquentielles. Les principales méthodes de chaque classe sont ici présentées. Les avantages et inconvénients de chacune sont également rappelés.

2.1 Méthodes temporelles

2.1.1 Différences finies

La méthode des différences finies permet de s'affranchir du calcul du régime transitoire des systèmes dynamiques en incluant directement la condition de périodicité dans le système d'équations. En considérant le problème (II.1) sous forme d'état (II.7) et en posant \mathbf{f} la fonction résumant le système d'équations et T la période de la solution, le système à résoudre s'écrit,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(T) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

En subdivisant la période en n échantillons de pas de temps constant $h = T/n$ et en notant $t_k = kh$ et $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)$, le système d'équations s'écrit,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k) \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n, T) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Le point central de la méthode réside dans l'utilisation des différences finies définie à l'instant t_k par,

$$\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{hT}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)) \quad (\text{II.13})$$

En utilisant la définition (II.13), on obtient le système algébrique défini par,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0 = \frac{hT}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{y}_1, t_1) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0)) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{y}_k = \frac{hT}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{y}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_k, t_k)) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_{n-1} = \frac{hT}{2}(\mathbf{f}(\mathbf{y}_0, t_0) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n-1}, t_{n-1})) \end{array} \right. \quad (\text{II.14})$$

où la condition de périodicité $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_n$ intervient à la dernière ligne. Lorsque la période T est inconnue, le problème (II.14) est sous évalué et il est nécessaire d'ajouter une condition de phase afin de fermer le système. Le système (II.14) peut finalement être résolu à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson.

2.1.2 Méthode de tir

Dans la suite de cette sous-section on notera $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ la solution $\mathbf{y}(t)$ de condition initiale \mathbf{y}_0 . La méthode de tir consiste à trouver de manière itérative une condition initiale \mathbf{y}_0 et (lorsque celle-ci est inconnue) une période T telle que la solution $\mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ réalise un mouvement périodique de période T . Pour cela, on définit une fonction \mathbf{H} , appelée fonction de tir, définie par,

$$\mathbf{H}(T, \mathbf{y}_0) \equiv \mathbf{y}(T, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 \quad (\text{II.15})$$

et représentant la différence entre la condition initiale et la réponse du système à l'instant T . Dans un premier temps, les valeurs de \mathbf{y}_0 et T sont initialisées et la fonction \mathbf{H} est évaluée à l'aide d'une intégration temporelle. Ces valeurs sont ensuite corrigées via une procédure de Newton-Raphson en effectuant un développement de Taylor au premier ordre de la fonction de tir soit,

$$\mathbf{H}(T + \Delta T, \mathbf{y}_0 + \Delta \mathbf{y}_0) \simeq \mathbf{H}(T, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y}_0 \quad (\text{II.16})$$

Le couple de solutions (T, \mathbf{y}_0) est finalement déterminé de manière itérative par résolution du système suivant,

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{y}_0} \Delta \mathbf{y}_0 = -\mathbf{H}(T, \mathbf{y}_0) \quad (\text{II.17})$$

A l'instar de la méthode des différences finies, lorsque la période T est inconnue, il est nécessaire d'ajouter une condition de phase afin de fermer le système [129, 167]. Notons que l'évaluation des dérivées partielles présentes dans l'équation (II.17) peut s'effectuer numériquement ou à l'aide des expressions analytiques rappelées dans [164].

La méthode de tir est une technique de recherche de solutions périodiques très populaire. Elle présente l'avantage de fournir directement la matrice de monodromie dont la manipulation permet de statuer sur la stabilité des solutions. En revanche, la méthode requiert à chaque itération d'effectuer une étape d'intégration temporelle ce qui peut s'avérer lourd pour des systèmes volumineux. De plus, elle présuppose de connaître une condition initiale suffisamment proche de la solution recherchée. Dans la littérature, l'utilisation de la méthode de tir a notamment permis d'étudier des systèmes exhibant des phénomènes de résonances internes [44,

78, 137].

2.1.3 Collocation orthogonale

A l'instar de la méthode des différences finies, la méthode de la collocation orthogonale s'appuie sur un échantillonnage de la période T en $n + 1$ instants t_i tels que $t_0 = 0$ et $t_n = T$. La méthode de collocation orthogonale consiste à approcher la solution sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ par un polynôme de degré maximal m . La méthode suggère que l'approximation sur chaque intervalle ne satisfasse le système d'équations qu'en m points $\xi_{i,j}$, soit,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_i(\xi_{i,j}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(\xi_{i,j})) \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad (\text{II.18})$$

Il est régulièrement d'usage de rechercher l'approximation de la solution $\mathbf{y}_i(t)$ sur chaque intervalle à l'aide des polynômes de Lagrange,

$$\mathbf{y}_i(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{y}_{i,j} \prod_{k=0, k \neq j}^m \frac{t - \xi_{i,k}}{\xi_{i,j} - \xi_{i,k}} \quad (\text{II.19})$$

en posant $\mathbf{y}_{i,j}$ la valeur du polynôme i au point d'interpolation $\xi_{i,j}$. La prise en compte de la périodicité s'effectue en considérant l'équation (II.20),

$$\mathbf{y}_{n-1,m} = \mathbf{y}_{0,0} \quad (\text{II.20})$$

De manière similaire aux méthodes précédentes, l'ajout d'une condition de phase est nécessaire pour fermer le système lorsque la période T de la solution recherchée est inconnue. Sur ce point, on pourra par exemple se référer aux travaux de Kuznetsov [91]. On notera pour la méthode de collocation orthogonale l'importance du choix des points d'interpolation $\xi_{i,j}$. En pratique, l'utilisation des points de Gauss constitue un choix souvent judicieux. Ces points sont définis comme les racines des polynômes de Legendre¹.

Cette section résume les principales méthodes de calcul des solutions périodiques d'un système dynamique non-linéaire dans le domaine temporel. D'autres méthodes, plus rarement abordées, peuvent être trouvées dans la littérature, comme la méthode reposant sur l'utilisation des sections de Poincaré [129]. Les méthodes présentées ici sont qualifiées de temporelles car agissent directement sur le système d'équations différentielles en temps (II.1). Elles présentent de plus l'avantage de s'affranchir des calculs de régime transitoire. Par ailleurs, elles sont à même de traiter tout type de problème et ne se limitent pas à l'étude de systèmes présentant des non-linéarités faibles comme c'est le cas pour les méthodes de perturbation. En revanche les approches par différences finies et collocation orthogonale présentent l'inconvénient d'augmenter la taille du problème étudié. Ce point les rend peu adaptées à l'étude de systèmes industriels à grand nombre de degrés de libertés.

Face à ces limitations, les méthodes fréquentielles constituent une alternative intéressante. Elles s'appuient sur une transposition du problème différentiel dans le domaine fréquentiel ce qui génère des systèmes de taille moindre vis à vis des méthodes temporelles.

2.2 Méthode de l'équilibrage harmonique

Comme cela a été rappelé en introduction de cette section, on distingue par opposition aux méthodes temporelles les méthodes fréquentielles pour la recherche de solutions périodiques de

1. Les polynômes de Legendre possèdent des propriétés d'orthogonalité, d'où le nom de la méthode

systèmes non-linéaires. Celles-ci exploitent la propriété de périodicité souhaitée en substituant aux inconnues temporelles celles associées à l'expression dans le domaine de Fourier. Parmi les méthodes fréquentielles rencontrées dans la littérature, on s'intéressera plus particulièrement à la méthode de l'équilibrage harmonique qui est un cas particulier de la méthode de Galerkin.

2.2.1 L'équilibrage harmonique : une méthode de Petrov-Galerkin

Les méthodes de Galerkin permettent de transformer un problème continu en un problème discret. Appliquée par exemple au système (II.1), elle suppose la solution sous la forme,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \Psi_k \eta_k(t) \quad (\text{II.21})$$

où les fonction η_k appelées fonctions d'approximation sont déterminées a priori. L'introduction de l'expression (II.21) et de ses dérivées première et seconde dans l'équation différentielle (II.1) fournit une expression résiduelle notée $\mathbf{r}(\Psi, \eta)$ généralement non nulle telle que,

$$\mathbf{r}(\Psi, \eta) = \sum_{k=1}^N [\mathbf{M}\Psi_k \ddot{\eta}_k + \mathbf{C}\Psi_k \dot{\eta}_k + \mathbf{K}\Psi_k \eta_k] + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\eta, \dot{\eta}) - \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{II.22})$$

Le principe de la méthode de Galerkin consiste à projeter ce résidu sur un sous-espace engendré par une base de fonctions tests $\xi_k(t)$, $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ [191]. De cette manière le problème différentiel de départ est transformé en un système algébrique non-linéaire d'inconnues Ψ_k et donné par :

$$\int_0^T \mathbf{r}(\Psi, \eta) \xi_k dt = 0 \quad k \in \llbracket 0, N \rrbracket \quad (\text{II.23})$$

Le choix des fonctions d'approximation dépend du type de problème étudié (on notera que dans le cas où les fonctions tests sont égales aux fonctions d'approximation i.e. $\eta_k = \xi_k$, la méthode est qualifiée de méthode de Galerkin). Dans les cas qui vont nous intéresser, nous privilégierons l'utilisation d'une base trigonométrique à la fois pour les fonctions η_k et les fonctions ξ_k .

2.2.2 Principe théorique de la méthode de l'équilibrage harmonique

La notion d'équilibrage harmonique semble avoir été introduite par Krylov et Bogoliubov [89]. Toutefois, les travaux de Nakhla et Vlach [122] sont régulièrement cités comme étant à l'initiative de la formulation actuelle de la méthode de l'équilibrage harmonique (ou HBM pour Harmonic Balance Method). La méthode peut être directement interprétée comme une méthode de Galerkin pour laquelle les fonctions d'approximations correspondent à la base des fonctions trigonométriques dont la pulsation fondamentale ω est choisie égale à celle de l'excitation harmonique. Ainsi le principe de la HBM consiste à supposer une solution du système (II.1) en régime permanent sous la forme d'une série de Fourier tronquée à un certain harmonique N_h ,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \quad (\text{II.24})$$

où les vecteurs \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k regroupent les coefficients de Fourier. Cette expression permet notamment d'imposer la périodicité de la solution recherchée en faisant explicitement intervenir la pulsation d'excitation ω . L'introduction de l'expression (II.24) et de ses dérivées dans l'équation

du mouvement (II.1) conduit au résidu \mathbf{r} dont l'expression s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_{k=1}^{N_h} [(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}) \mathbf{a}_k + (k\omega\mathbf{C})\mathbf{b}_k] \cos(k\omega t) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_h} [(\mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M}) \mathbf{b}_k - (k\omega\mathbf{C})\mathbf{a}_k] \sin(k\omega t) \\ &+ \mathbf{K}\mathbf{a}_0 + \mathbf{f}^{\text{nl}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

La projection de l'équation (II.25) sur la base des fonctions trigonométriques $[1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots, \cos(N_h\omega t), \sin(N_h\omega t)]$ permet de supprimer la dépendance en temps du système. Cette étape d'orthogonalisation est résumée par le système d'équations (II.26),

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{0} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{r}(t) \cos(k\omega t) dt = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \\ \frac{2}{T} \int_0^T \mathbf{r}(t) \sin(k\omega t) dt = \mathbf{0}, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques, le système différentiel (II.26) peut être mis sous la forme :

$$\mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) - \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.27})$$

où la matrice \mathbf{Z} appelée matrice de rigidité dynamique multi-harmonique est tridiagonale par bloc et définie par,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Z}_{N_h} \end{bmatrix}, \quad (\text{II.28})$$

où chacun des blocs \mathbf{Z}_k s'écrit

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & k\omega\mathbf{C} \\ -k\omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

On note également l'introduction d'un nouveau vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ dans l'équation algébrique (II.27) contenant les coefficients harmoniques de la décomposition en série de Fourier de \mathbf{x} ,

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_0^T, \mathbf{a}_1^T, \mathbf{b}_1^T, \dots, \mathbf{a}_{N_h}^T, \mathbf{b}_{N_h}^T]^T \quad (\text{II.30})$$

De même $\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}$ et $\hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}}$ sont formés des coefficients des développements en série de Fourier de \mathbf{f}^{nl} et \mathbf{f}^{ext} .

La méthode de l'équilibrage harmonique présente l'atout majeur de transformer un système d'équations différentielles en un système algébrique. De plus, cette méthode exploite la propriété de périodicité de la solution recherchée et permet ainsi de s'affranchir des calculs de régime transitoire. En contrepartie, la transposition dans le domaine fréquentiel conduit à l'augmentation de la taille des systèmes. La méthode de l'équilibrage a fait l'objet de nombreux travaux de recherche, on pourra notamment se référer à l'ouvrage de Krack et Gross [87] pour une description approfondie. On pourra également s'intéresser à [23, 49, 57] pour une extension

de la méthode.

2.2.3 Évaluation des termes non-linéaires

La transposition du problème différentiel initial dans le domaine fréquentiel fait apparaître le vecteur $\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega)$ contenant les coefficients de la série de Fourier des efforts non-linéaires $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$. Dans la pratique l'obtention de l'expression de ces coefficients n'est pas directe dans la mesure où la relation liant $\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}$ à $\hat{\mathbf{x}}$ est généralement inconnue (non-linéarités de frottement et de contact par exemple) ou au mieux fastidieuse à déterminer (non-linéarité géométrique par exemple). Un certain nombre de méthodes permet de contourner cette limitation. C'est le cas notamment de la méthode de collocation trigonométrique ou de la procédure d'alternance temps-fréquence [14]. La méthode de la collocation trigonométrique, détaillée dans [54], suppose l'exactitude de la solution recherchée en un nombre fixe d'instant temporels. Elle s'appuie néanmoins sur une inversion au sens des moindres carrés ce qui contraint à l'utilisation d'une matrice pseudo-inverse pouvant être gourmande en termes de coût numérique. Dans la suite, la méthode d'alternance temps-fréquence sera préférée à la méthode de collocation trigonométrique.

La méthode d'alternance temps-fréquences (où AFT pour Alternating Frequency Time) consiste à transposer le vecteur d'inconnues fréquentiel $\hat{\mathbf{x}}$ dans le domaine temporel afin de déterminer les efforts non-linéaires en fonction du temps puis de réévaluer ces efforts dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une transformée de Fourier. Cette approche tire parti du fait que l'on connaît généralement la relation liant le vecteur d'inconnues dans le domaine temporel $\mathbf{x}(t)$ aux efforts non-linéaires $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$. Notons que l'utilisation des transformées de Fourier est ici licite dans la mesure où les efforts non-linéaires, supposés d'origine géométrique, héritent de la périodicité de la solution recherchée et par conséquent peuvent se mettre sous une forme similaire à (II.24).

En pratique, le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel s'effectue au moyen d'une transformée de Fourier discrète inverse $\bar{\mathbf{F}}$ définie par,

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(N_h \omega t_1) & \sin(N_h \omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{n_t}) & \sin(\omega t_{n_t}) & \dots & \cos(N_h \omega t_{n_t}) & \sin(N_h \omega t_{n_t}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.31})$$

Partant du vecteur $\hat{\mathbf{x}}$, cette étape permet ainsi d'échantillonner le signal $\mathbf{x}(t)$ en n_t instants t_k de la période T . De manière similaire, lorsque la non-linéarité est fonction du vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}(t)$, l'échantillonnage s'accompagne d'une étape de dérivation, effectuée à l'aide de l'opérateur ∇ suivant,

$$\nabla = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \nabla_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \nabla_{N_h} \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

où

$$\nabla_k = \begin{bmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad \forall k \in \llbracket 1, N_h \rrbracket \quad (\text{II.33})$$

Puis, les vecteurs échantillonnés dans le domaine temporel s'obtiennent grâce aux relations suivantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \bar{\mathbf{F}} \nabla \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

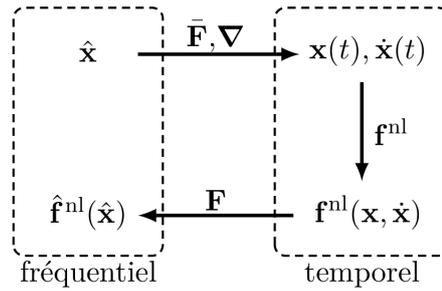


FIGURE II.1 – Procédure d'alternance temps-fréquence

Après évaluation des efforts non-linéaires échantillonnés \mathbf{f}^{nl} dans le domaine temporel, ces derniers sont transposés dans le domaine fréquentiel au moyen d'une transformée de Fourier discrète directe dont l'expression est donnée par,

$$\mathbf{F} = \frac{2}{n_t} \begin{bmatrix} 1/2 & \dots & 1/2 \\ \cos(\omega t_1) & \dots & \cos(\omega t_{n_t}) \\ \sin(\omega t_1) & \dots & \sin(\omega t_{n_t}) \\ \vdots & & \vdots \\ \cos(N_h \omega t_1) & \dots & \cos(N_h \omega t_{n_t}) \\ \sin(N_h \omega t_1) & \dots & \sin(N_h \omega t_{n_t}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_n \quad (\text{II.35})$$

La démarche de la méthode AFT est résumée par la figure II.1. Il est important de noter que les matrices de Fourier sont indépendantes de la pulsation ω dans la mesure où $\omega t_k = 2k\pi/n_t$. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de réévaluer les matrices \mathbf{F} et $\bar{\mathbf{F}}$ à chaque itération ce qui représente une économie numérique non négligeable.

La méthode AFT exploite la connaissance de la relation liant $\mathbf{x}(t)$ à $\mathbf{f}^{nl}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$. Notons toutefois que cette relation peut dans certaines situations faire intervenir des fonctions non-régulières ou discontinues comme c'est par exemple le cas pour la loi de frottement de Coulomb. Afin de pallier cette difficulté, une méthode basée sur l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange a notamment été utilisée dans les travaux de Nacivet [120, 121].

2.3 Résolution numérique

La résolution du système algébrique obtenu par équilibrage harmonique s'effectue généralement à l'aide d'un algorithme de type Newton-Raphson. Supposant la réécriture du système (II.27) sous la forme,

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad (\text{II.36})$$

le principe est d'établir de manière itérative une solution de ce système notée $\hat{\mathbf{x}}_s$ à partir d'une condition initiale $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}$. La méthode s'appuie pour cela sur un développement de Taylor au premier ordre de (II.36) au point courant $\hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ conduisant au système linéaire suivant,

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{(k)} = - \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}^{(k)}) \right]^{-1} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}^{(k)}) \quad (\text{II.37})$$

La résolution de ce système à l'itération k fournit l'incrément $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{(k)}$ permettant d'exprimer l'itéré suivant selon l'expression,

$$\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{x}}^{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{x}}^{(k)} \quad (\text{II.38})$$

Le processus itératif cesse dès lors qu'un vecteur $\hat{\mathbf{x}}_s$ satisfait l'un des critères d'arrêt de l'algorithme. Ce critère s'appuie généralement sur une évaluation du résidu telle que $\|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}_s)\| < \epsilon$ et/ou sur l'écart relatif entre deux solutions successives.

La présence de la matrice Jacobienne dans l'équation (II.37) confère à l'algorithme de Newton-Raphson la notion de méthode à gradient. Une approximation de cette matrice peut être obtenue à l'aide des différences finies. Toutefois, les coûts numériques peuvent être grandement réduits si une expression analytique de la matrice Jacobienne est fournie au solveur. En pratique, l'obtention d'une expression analytique de la matrice Jacobienne de (II.27) ne pose pas de problème particulier, à l'exception des termes liés aux composantes des efforts non-linéaires $\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}})$ dont le traitement requiert une certaine attention. Or, pour des efforts non-linéaires indépendants des termes en vitesse, la procédure AFT permet par définition d'écrire

$$\hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}} = \mathbf{F} \mathbf{f}^{\text{nl}}(\bar{\mathbf{F}}\hat{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{F}}\nabla\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{II.39})$$

Par conséquent la matrice Jacobienne des efforts non-linéaires découle directement du théorème de dérivation des fonctions composées et conduit à l'expression suivante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}} \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{F}} \nabla \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}}{\partial \omega} &= \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{F}} \frac{\partial \nabla}{\partial \omega} \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

pour laquelle une expression analytique de chacun des termes est disponible pour le type de non-linéarité étudié dans ce mémoire.

Pratiquement, la vitesse de convergence de l'algorithme de Newton-Raphson dépend de la précision de la condition initiale. Cela est d'autant plus important puisque la convergence de la méthode de Newton-Raphson est d'ordre 2. Être capable d'initialiser de manière précise l'algorithme constitue tout l'intérêt des méthodes de prédictions sur lesquelles nous reviendrons dans la section suivante.

La méthode de Newton-Raphson fait partie des méthodes les plus couramment utilisées pour la résolution des systèmes algébriques non-linéaires. D'autres approches présentes dans la littérature permettent également de résoudre ce type de problème. Citons par exemple les méthodes s'appuyant sur les espaces de Krylov [85], les approches utilisant des pseudo temps [162] ou encore les techniques basées sur des algorithmes à région de confiance [22]. Par ailleurs, l'algorithme de Newton-Raphson fait partie de ces méthodes dites locales dans le sens où elle ne détermine qu'une seule solution pour une condition initiale donnée. Par opposition, d'autres méthodes qualifiées de globales, permettent de déterminer toutes les solutions pour un jeu de paramètres donné. À ce sujet, on pourra se référer au travail de thèse de Sarrouy [164] on pourra également s'intéresser aux travaux de Grolet sur les bases de Groebner [51]. Notons toutefois que cette approche se limite à des systèmes de faible taille.

3 Continuation de solutions

Une des particularités des systèmes non-linéaires réside dans la possibilité de fournir des solutions multiples. Celles-ci naissent notamment des phénomènes de bifurcation et d'instabilité sur lesquels nous reviendrons dans la section II.4. Dans la pratique, les méthodes de continuation constituent un outil efficace pour traiter ce type de phénomène. Elles consistent à suivre les solutions d'un système en fonction de l'évolution d'un paramètre appelé paramètre de contrôle ou paramètre de bifurcation. Dans le cadre d'une application au système algébrique de la HBM,

ce paramètre sera choisi comme étant la pulsation d'excitation ω du système². Afin de montrer la dépendance au paramètre de contrôle, le membre de gauche du système (II.27) est réécrit sous la forme,

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) - \hat{\mathbf{f}}^{\text{ext}} \quad (\text{II.41})$$

La grande majorité des méthodes de continuation repose sur des algorithmes de type prédiction-correction. L'étape de prédiction fournit d'abord une approximation de la solution à l'itération suivante. Celle-ci vient ensuite être corrigée de manière itérative lors de l'étape de correction jusqu'à converger vers la solution recherchée. D'autres algorithmes de continuation tels que la méthode asymptotique numérique [21] ou les méthodes de continuation linéaire par morceaux [2, 3] peuvent également être rencontrés dans la littérature. Mentionnons également l'existence de logiciels d'études de systèmes dynamiques incluant des techniques de continuation tels que MATCONT [29] et AUTO [35].

3.1 Algorithmes de continuation

La prise en compte du paramètre ω en tant qu'inconnue du système (II.41) rend ce dernier sous-déterminé. Une solution évidente consiste à fixer a priori un ensemble de valeurs prises par ω et à calculer les solutions de (II.41) pour cet ensemble de valeurs. Il s'agit typiquement de la démarche adoptée pour l'étude des systèmes linéaires. On parle dans ce cas de continuation dite séquentielle. L'atout principal de cette méthode réside dans sa simplicité de mise en œuvre. Elle s'avère cependant totalement inadaptée face aux solutions multiples que peuvent présenter les systèmes non-linéaires. De plus, la continuation séquentielle est incapable de traiter convenablement des points de retournement et conduit, au mieux, à des phénomènes de saut d'amplitude.

Afin de pallier ces limitations, des méthodes proposent une paramétrisation des courbes de solutions à l'aide de l'abscisse curviligne s . Elles suggèrent ainsi d'exprimer les inconnues du système sous la forme $\hat{\mathbf{x}}(s), \omega(s)$.

Les sections suivantes font état des principales méthodes de prédiction et de correction utilisant la paramétrisation par longueur d'arc.

3.1.1 Les principaux prédicteurs

On supposera ici connues les n premières solutions de (II.41), $(\hat{\mathbf{x}}_1, \omega_1) \dots (\hat{\mathbf{x}}_n, \omega_n)$. L'étape de prédiction consiste à rechercher une approximation de la solution $(\hat{\mathbf{x}}_{n+1}, \omega_{n+1})$ à partir des solutions précédentes. Dans un souci de concision, on sera parfois amené à utiliser la notation $\mathbf{y} \equiv [\hat{\mathbf{x}}^T, \omega]^T$.

Prédicteur sécant La méthode de la sécante définit la prédiction à partir d'une extrapolation utilisant les deux derniers points calculés. De cette manière le point prédit, que l'on notera $\mathbf{y}_{n+1}^{(0)}$, appartient à la droite passant par les points \mathbf{y}_n et \mathbf{y}_{n-1} . La norme de la prédiction, correspondant au pas de continuation Δs , détermine la position du point prédit sur la droite. Elle correspond à la différence entre l'abscisse curviligne du point \mathbf{y}_n et celle de la prédiction. Par conséquent une prédiction par la méthode de la sécante s'obtient par l'expression,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{y}_n + \Delta s \frac{\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}}{\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{n-1}\|} \quad (\text{II.42})$$

2. Cette définition sera légèrement modifiée lors du calcul des modes non-linéaires des systèmes libres conservatifs non-linéaires

Prédicteur tangent Le prédicteur tangent évalue la prédiction à l'aide de la tangente à la branche de solutions au dernier point calculé. L'équation de la tangente au point $(\hat{\mathbf{x}}_n, \omega_n)$ s'obtient par différentiation de l'équation (II.41) vis à vis de l'abscisse curviligne s ,

$$\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}_n, \omega_n)\Delta\hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{J}_{\omega}(\hat{\mathbf{x}}_n, \omega_n)\Delta\omega_n = 0 \quad (\text{II.43})$$

où $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}$ et $\mathbf{J}_{\omega} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}$ représentent les matrices Jacobienne du système par rapport à \mathbf{x} et ω et où $\Delta\hat{\mathbf{x}}_n$ et $\Delta\omega_n$ correspondent aux incréments définissant la tangente recherchée³. En imposant la norme de la tangente égale au pas de continuation Δs ,

$$\|\Delta\hat{\mathbf{x}}_n\|^2 + \Delta\omega_n^2 = \Delta s^2 \quad (\text{II.44})$$

on obtient directement les expressions de $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ et $\Delta\omega$,

$$\Delta\omega = \frac{\pm\Delta s}{\sqrt{1 + \|\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\mathbf{J}_{\omega}\|^2}} \quad (\text{II.45a})$$

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1}\mathbf{J}_{\omega}\Delta\omega \quad (\text{II.45b})$$

Plusieurs stratégies permettent de statuer sur le signe de $\Delta\omega$. Une première approche consiste à évaluer le signe du déterminant suivant [54, 164],

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{J}_{\omega} \\ \Delta\hat{\mathbf{x}} & \Delta\omega \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Par convention, ce déterminant doit être positif lorsque la continuation s'opère dans le sens des ω croissants. Cette approche est une conséquence directe de la définition d'une tangente induite par une matrice [2]. En pratique, cette stratégie a montré certaines failles. En particulier, au voisinage de points de retournement il a été observé des situations de retour en arrière. En outre, cette méthode requiert à chaque itération le calcul d'un déterminant, ce qui peut alourdir les coûts numériques. Une seconde approche propose de statuer sur le signe de la tangente en effectuant le produit scalaire entre les deux dernières tangentes successives [50, 139]. Dans ce cas, lorsque le produit scalaire est négatif, la continuation change de sens jusqu'à ce qu'un produit positif soit de nouveau obtenu.

Finalement, une prédiction de la $n + 1^{\text{ème}}$ solution à l'aide d'un prédicteur tangent s'obtient à l'aide des équations suivantes,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{n+1}^{(0)} &= \hat{\mathbf{x}}_n + \Delta\hat{\mathbf{x}}_n \\ \omega_{n+1}^{(0)} &= \omega_n + \Delta\omega_n \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

où les expressions de $\Delta\hat{\mathbf{x}}_n$ et $\Delta\omega_n$ sont fournies par les équations (II.45a) et (II.45b).

Une illustration du prédicteur tangent est donnée par la figure II.2a. Sa robustesse ainsi que sa capacité à s'affranchir des zones de retournement font de cette méthode un outil très efficace pour la prédiction de solutions des systèmes non-linéaires. Néanmoins, il est important de noter que celle-ci fait appel à une inversion de matrice à chaque itération, ce qui peut poser problème pour certaines applications. Cette limitation sera à nouveau abordée dans la section (II.4.4) traitant des modes non-linéaires.

3. Une autre manière de définir la tangente consiste à calculer l'unique vecteur de norme Δs appartenant au noyau de la matrice $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad \mathbf{J}_{\omega}]$ [2]

Prédicteur d'ordre supérieur Cette méthode permet de déterminer une prédiction à l'aide d'une interpolation polynomiale utilisant les d dernières solutions calculées d'abscisses curviligne respectives s_d . Le principe de cette méthode consiste ainsi à générer une courbe polynomiale d'ordre d passant par chacun de ces points. La prédiction s'obtient en extrapolant la courbe jusqu'à une certaine abscisse curviligne s correspondant au point prédit. Le calcul de la prédiction peut se faire à l'aide des polynômes de Lagrange tel que,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{(0)} = \sum_{i=0}^d \mathbf{y}_{n-d+i} \prod_{j=0, j \neq i}^d \frac{s - s_{n-d+j}}{s_{n-d+i} - s_{n-d+j}} \quad (\text{II.48})$$

La méthode est représentée par la figure II.2b dans le cas $d = 3$. On remarquera que le cas $d = 1$ correspond à la prédiction sécante détaillée précédemment. Cette méthode a par exemple été employée par Cheung *et al.* [19] dans le cas d'une interpolation cubique. Il est important de noter que la précision de la prédiction ne croît pas avec l'ordre d de l'interpolation [54] et il est en général conseillé de se restreindre à des polynômes d'ordre faible.

Cette section a permis de présenter les principaux prédicteurs utilisés dans les algorithmes de continuation. Dans la très grande majorité des cas, le point prédit n'est pas solution de l'équation (II.41), l'étape de prédiction est ainsi complétée par une étape de correction dont les principales méthodes sont décrites dans la section suivante.

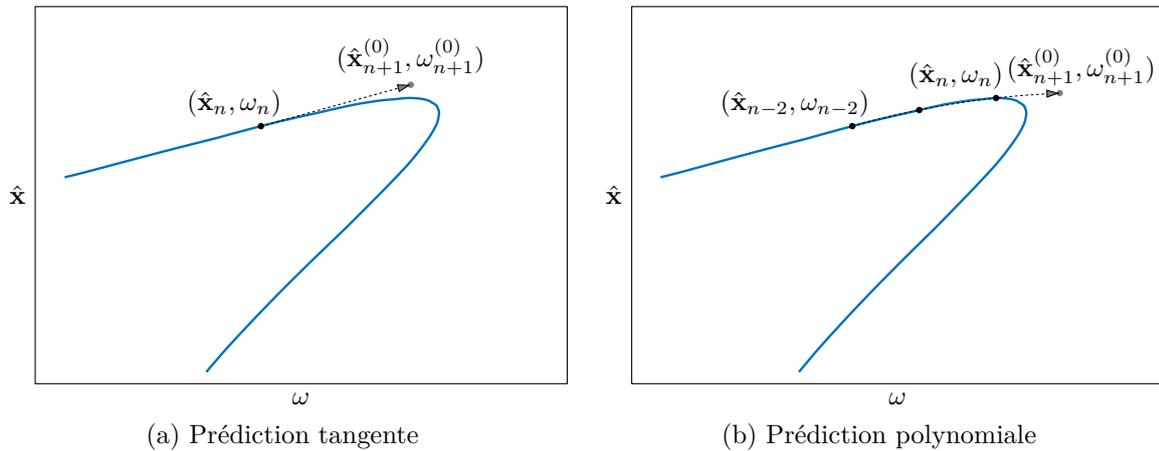


FIGURE II.2 – Principaux prédicteurs

3.1.2 Les principaux correcteurs

L'étape de correction permet de corriger de manière itérative le point prédit $\mathbf{y}_{n+1}^{(0)}$ afin que celui-ci vérifie (II.41). En pratique, cela consiste à contraindre le système en ajoutant une équation caractérisant le type de correction.

Continuation par paramétrisation sélective La continuation par paramétrisation sélective consiste à imposer la valeur d'une des composantes de la prédiction $\mathbf{y}_{n+1}^{(0)}$. De cette manière, on se ramène à un système fermé comportant autant d'inconnues que d'équations. En pratique ce type de correction revient à ajouter au système (II.41) une équation de la forme,

$$c(\mathbf{y}, \eta) = y_k - \eta = 0 \quad (\text{II.49})$$

imposant la valeur η à la $k^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{y} . Afin de garantir une flexibilité plus importante de la méthode, l'indice k et le paramètre η peuvent varier au cours de la continuation. Plusieurs stratégies pour le choix de ces paramètres sont proposées dans [167]. Le cas où la composante fixée est la pulsation ω correspond à la paramétrisation séquentielle abordée en introduction de cette section. Ce cas particulier est illustré par la figure II.3a. Notons enfin que la résolution du système augmenté comportant les équations (II.41) et (II.49) s'effectue à l'aide d'une méthode classique de Newton-Raphson.

Continuation arc-length La méthode arc-length exploite directement la paramétrisation par longueur d'arc de la courbe de solutions. Elle consiste à contraindre la solution recherchée à appartenir à l'hypersphère de centre \mathbf{y}_n et de rayon Δs . Cette contrainte revient à ajouter l'équation (II.50) définissant l'hypersphère au système (II.41),

$$c(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_n\|^2 + (\omega - \omega_n)^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (\text{II.50})$$

De cette manière, la solution $(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{n+1}$ représente l'intersection entre la branche de solutions et l'hypersphère. Numériquement, ce processus de correction peut être résolu par une méthode de type Newton-Raphson. Les incréments de la correction sont alors solutions du système augmenté s'écrivant sous la forme suivante,

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{x}}^{(i)} \\ \Delta \omega^{(i)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) & \mathbf{J}_{\omega}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \\ \frac{\partial c}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) & \frac{\partial c}{\partial \omega}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \end{bmatrix}_{(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{n+1}^{(i)}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \\ c(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \end{bmatrix}_{(\hat{\mathbf{x}}, \omega)_{n+1}^{(i)}} \quad (\text{II.51})$$

où i correspond au nombre d'itérés de la méthode de Newton-Raphson. Une illustration de la méthode est proposée par la figure II.3b.

Cette méthode est particulièrement efficace et permet de traiter sans difficulté la continuation au voisinage des points de retournement. En revanche, il est important de noter que l'intersection entre l'hypersphère et la courbe de solution $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \mathbf{0}$ n'est généralement pas unique. En particulier, une intersection avec un point en amont de la courbe intervient systématiquement ce qui peut engendrer des difficultés de convergence du solveur. L'approche par pseudo longueur d'arc permet de contourner cette limitation.

Continuation pseudo arc-length La méthode par pseudo longueur d'arc ou pseudo arc-length introduite par Keller [74, 75] impose à la solution recherchée d'appartenir à l'hyperplan orthogonal à la tangente à la courbe de solutions au point précédent et situé à une distance Δs de ce point. Cette contrainte se traduit par l'ajout de l'équation (II.52) au système (II.41) et est définie par,

$$c(\hat{\mathbf{x}}, \omega) = \Delta \hat{\mathbf{x}}^T (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_n) + \Delta \omega (\omega - \omega_n) - \Delta s^2 = 0 \quad (\text{II.52})$$

Une illustration de la méthode est donnée par la figure II.3c. Outre des avantages similaires à la méthode arc-length, la méthode pseudo arc-length présente l'intérêt de définir une intersection unique entre la courbe de solutions et l'hyperplan. Ceci permet d'éviter les difficultés de convergence mentionnées précédemment. La résolution du système augmenté comprenant l'équation de l'hyperplan est analogue au cas précédent et un schéma de Newton Raphson permet de déterminer les incréments de correction à l'aide d'un système semblable à (II.51).

Il est toutefois important de noter qu'il peut, dans certaines rares situations, ne pas exister d'intersection entre l'hyperplan et la courbe de solutions. En particulier, un pas de continuation Δs trop grand au voisinage des points de retournement peut empêcher la convergence de l'algorithme de continuation. Le choix du pas relève ainsi d'une certaine importance lors du processus de continuation. La section suivante propose de fournir certaines indications pour

orienter ce choix.

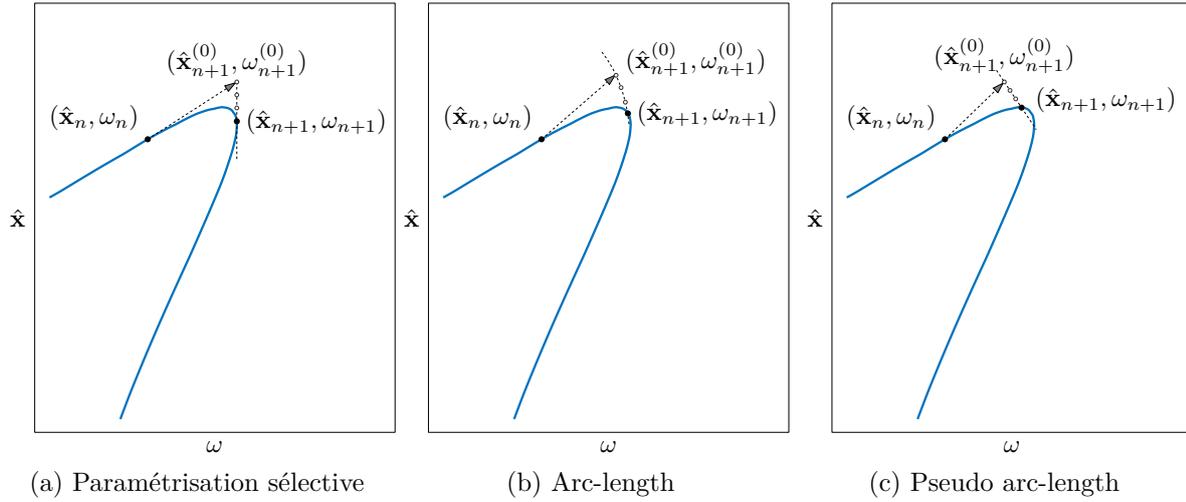


FIGURE II.3 – Principaux correcteurs

3.2 Adaptation du pas de continuation

Jusqu'à présent, l'importance du choix du pas de continuation a été omise. Or, celui-ci joue un rôle essentiel en vue d'améliorer la robustesse et la rapidité de la procédure de continuation. Un pas très faible engendre un nombre d'itérations peu élevé lors de la correction, en revanche cela conduit à la recherche d'un nombre important de points lors de la continuation des branches de solutions. Inversement, un pas élevé assure le calcul d'un nombre restreint de solutions lors de la continuation mais requiert un nombre élevé d'itérations pour assurer la convergence vers les solutions et donc un temps de calcul long. Un pas trop long pourra même dans certains cas empêcher la convergence de la procédure de Newton-Raphson. Dans les deux cas, le coût de calcul peut rapidement devenir important et il apparaît indispensable d'être capable d'ajuster ce pas lors de la continuation. En effet, il semble judicieux de considérer un pas de continuation différent selon que l'on se trouve dans une zone où la courbe de solutions évolue peu ou au niveau d'un point de retournement autour duquel la courbe de solutions est susceptible de changer brusquement de direction.

Un large choix de méthodes de pas adaptatif est présent dans la littérature. Citons notamment les travaux de Allgower et Georg [2] ou Seydel [167]. Parmi les méthodes existantes citons par exemple celle s'appuyant sur la définition d'un nombre optimal d'itérations N_{opt} . La méthode consiste à contrôler le pas de continuation de telle sorte que le nombre d'itérations moyen soit proche de N_{opt} . À l'itération n , la valeur du pas est mise à jour en fonction du ratio entre le nombre N_{opt} et le nombre d'itérations à l'étape précédente, noté N_{n-1} . Cela se traduit par l'expression suivante,

$$\Delta s_n = \frac{N_{opt}}{N_{n-1}} \Delta s_{n-1} \quad (\text{II.53})$$

où Δs_i est la valeur du pas à l'étape i . Cette méthode a notamment été employée dans [137] pour le calcul de modes non-linéaires.

Dans le cadre des travaux présentés ici, la méthode retenue est celle utilisée dans [50]. Celle-ci propose de définir deux entiers N_{min} et N_{max} correspondant respectivement au nombre minimal et maximal d'itérations. À l'étape n , la méthode consiste à réduire (d'un facteur 2 par exemple) le pas de continuation si la convergence du solveur nécessite plus de N_{max} itérations.

Auquel cas le solveur s'arrête et une nouvelle itération est réalisée avec le nouveau pas. À l'inverse, si à l'étape précédente le solveur a convergé en un nombre d'itérations N_{n-1} inférieur à N_{min} , la continuation se poursuit et le pas est augmenté. On pourra par exemple choisir un facteur d'augmentation constant ou bien multiplier le pas par le rapport N_{min}/N_{n-1} . Dans le cas où le nombre d'itérations est compris entre les deux bornes N_{min} et N_{max} , la continuation se poursuit sans modification du pas. En pratique, il est d'usage de plafonner la valeur de Δs afin d'éviter un saut trop important sur la courbe de solutions et de passer à côté de points de bifurcation. De même, il est conseillé de définir un pas minimal permettant, une fois atteint, d'avertir d'un potentiel problème de convergence du solveur.

4 Phénoménologie des systèmes non-linéaires

Cette section propose de fournir un descriptif des principaux phénomènes survenant dans le cadre de l'étude des systèmes non-linéaires. Les principales caractéristiques liées au phénomène de résonance sont d'abord présentées. Les notions de stabilité et de bifurcation sont ensuite détaillées. Enfin, l'extension de la notion de mode linéaire aux systèmes non-linéaires est présentée.

4.1 Résonance non-linéaire

Dans le cadre linéaire, la résonance traduit la situation pour laquelle le système vibre avec une amplitude maximale autour d'une fréquence dite de résonance. Ce phénomène se retranscrit par l'apparition d'un pic d'amplitude plus ou moins large sur la réponse fréquentielle du système. Dans le cadre non-linéaire, la présence des non-linéarités impacte fortement la forme de la réponse fréquentielle du système. Cela conduit à des cas de réponses multiples et à l'apparition de résonances particulières.

4.1.1 Résonance principale

Une des caractéristiques principales des systèmes non-linéaires réside dans la dépendance entre les fréquences de résonance du système et les amplitudes de vibration. Cette propriété se traduit au niveau de la réponse forcée par des phénomènes de raidissement (respectivement d'assouplissement) du système exprimant une augmentation (respectivement une diminution) de la fréquence de résonance du système avec l'amplitude (voir par exemple la figure II.3). Cette dépendance conduit à des phénomènes de saut d'amplitude, comme cela a pu être mentionné précédemment, autour desquels le comportement du système est susceptible d'évoluer brusquement.

La relation fréquence/amplitude conduit ainsi à des réponses fréquentielles sensiblement différentes de celles observées dans le cadre linéaire. Au delà de ces observations, les propriétés de superposition modale qu'exploitent les systèmes linéaires perdent leur validité pour les systèmes non-linéaires en raison des résonances non-linéaires.

4.1.2 Résonances secondaires

Outre la particularité des résonances principales rappelée ci-dessus, les systèmes non-linéaires sont susceptibles de présenter des résonances dites secondaires. Celles-ci interviennent lorsqu'il existe une relation de multiplicité entre la pulsation d'excitation ω et une des pulsations propres ω_m du système. Suite aux remarques précédentes concernant les résonances principales, on supposera par la suite que les pulsations propres ω_m mises en jeu dans les relations de résonances

ne sont pas nécessairement constantes mais varient avec l'amplitude de vibration. On distingue le cas des résonances sur-harmoniques et sous-harmoniques.

Résonances sur-harmoniques Les résonances sur-harmoniques se définissent par la relation suivante,

$$\omega \approx \frac{\omega_m}{p}, \quad p \in \mathbb{N} \quad (\text{II.54})$$

Celles-ci traduisent les cas où un harmonique de l'excitation avoisine une fréquence de résonance du système.

En pratique, la méthode de l'équilibrage harmonique ne fait face à aucune difficulté pour capturer les résonances sur-harmoniques, si ce n'est d'avoir conservé l'harmonique p dans la décomposition en série de Fourier. Une illustration de la mise en évidence des résonances sur-harmoniques peut être trouvée dans le chapitre 1 du mémoire de thèse de Grolet [50].

Résonances sous-harmoniques Contrairement au cas précédent, les résonances sous-harmoniques surgissent lorsque la relation (II.55) existe entre la pulsation d'excitation ω et une fréquence propre ω_m du système,

$$\omega \approx p\omega_m, \quad p \in \mathbb{N} \quad (\text{II.55})$$

Elles sont plus rarement observées dans la littérature. Numériquement, il est possible de les mettre en évidence au moyen de l'équilibrage harmonique en considérant une pulsation fondamentale égale à ω/p dans la décomposition en série de Fourier (II.24).

Les relations de résonances décrites jusqu'à présent n'impliquent qu'une seule pulsation propre du système. En réalité, il existe d'autres phénomènes de résonances non-linéaires faisant intervenir plusieurs pulsations propres du système.

4.1.3 Résonances combinées

Le phénomène de résonance combinée apparaît lorsque la relation (II.56) est vérifiée [130],

$$p\omega = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k \quad (\text{II.56})$$

où p et a_k sont des entiers relatifs vérifiant la relation suivante,

$$p + \sum_{k=1}^n |a_k| = M + 1 \quad (\text{II.57})$$

avec n le nombre de degrés de liberté du système et M l'ordre de la non-linéarité. Cette définition limite le nombre de résonances combinées susceptibles de se produire. Ainsi, pour un système présentant une non-linéarité quadratique ($M = 2$), une résonance combinée du type $\omega \approx \omega_m \pm \omega_p$ ($m \neq p$) est envisageable. De la même manière, pour une non-linéarité cubique ($M = 3$), les résonances $\omega \approx \omega_m \pm \omega_p \pm \omega_q$ ($m \neq p \neq q$), $\omega \approx 2\omega_m \pm \omega_p$ ou encore $2\omega \approx \omega_m \pm \omega_p$ peuvent exister. Ces cas ont notamment été abordés dans les travaux de Nayfeh [126, 130].

4.1.4 Résonance internes

Les résonances internes résultent en un couplage de modes dont les fréquences sont commensurables. Ce phénomène a été observé pour la première fois en 1863 par Froude [43] lors de

l'étude des mouvements de tangages et de roulis de bateaux. La notion de résonance interne est détaillée dans les travaux de Nayfeh et Mook [130]. Les résonances internes, aussi appelées interactions modales où encore résonances auto-paramétriques sont définies par la relation suivante,

$$\sum_{k=1}^r m_k \omega_k \approx 0, \quad \forall k, m_k \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.58})$$

où r correspond au nombre de modes impliqués dans le couplage. Elles peuvent apparaître lorsqu'un des modes impliqué dans la relation (II.58) est excité. À l'instar des résonances combinées, les résonances internes permettent à certains modes de répondre à une excitation bien que n'appartenant pas à la plage d'excitation. Il s'agit d'un phénomène purement non-linéaire que les outils classiques linéaires sont incapables de prédire.

En pratique, la nature des résonances internes observables pour un système dépend de l'ordre des non-linéarités dans les équations dynamiques. Plus précisément, pour un système dynamique présentant des termes non-linéaires quadratiques (i.e. d'ordre 2), seules les résonances internes vérifiant les relation de commensurabilité entre deux modes $\omega_i \approx 2\omega_j$ ou trois modes $\omega_i \approx \omega_j \pm \omega_k$ sont susceptibles de se produire. De la même manière, un système exhibant des non-linéarités cubiques (i.e. d'ordre 3) peut engendrer des résonances internes si les relations entre deux modes $\omega_i \approx 3\omega_j$, trois modes $\omega_i \approx 2\omega_j \pm \omega_k$, voire quatre modes $\omega_i \approx \omega_j \pm \omega_k \pm \omega_l$ existent.

De manière générale, l'apparition des résonances internes est pilotée par des termes non-linéaires particuliers. Ainsi pour deux modes i et j de coordonnées généralisées q_i et q_j et vérifiant $\omega_i \approx 2\omega_j$, les termes de la forme $q_i q_j$ et q_j^2 sont dits résonants et peuvent agir comme des termes d'excitation dans les équations. Analytiquement, il est possible de mettre en évidence ces termes résonants au moyen d'un changement de variables réalisé à l'aide de la théorie des formes normales [72, 144].

Dans la littérature, on rencontre généralement la terminologie $p : q$ pour désigner la résonance interne entre deux modes de pulsations ω_i et ω_j liées par la relation $p\omega_i \approx q\omega_j$. De même, la notation $p : q : r$ définit la résonance interne entre les modes de pulsations ω_i , ω_j et ω_k vérifiant $p\omega_i \approx q\omega_j \approx r\omega_k$.

Les résonances internes ont fait l'objet de nombreuses études dans la littérature. En raison de leur facilité d'implémentation, les méthodes de perturbations ont été utilisées de nombreuses fois sur des systèmes à faible nombre de degrés de liberté. Dans l'ouvrage de référence [130], Nayfeh et Mook ont étudié les résonances internes à l'aide des échelles multiples pour des systèmes présentant des non-linéarités quadratiques et cubiques. Dans [58] les auteurs ont mis en évidence numériquement et expérimentalement le phénomène de saturation d'amplitude sur un cas à deux degrés de liberté avec résonance interne 1 : 2. Les échelles multiples ont également été employées pour analyser des situations de résonances interne en cascade 1 : 2 : 2 et 1 : 2 : 4 [115]. De nombreux travaux ont également traité des résonances internes en s'appuyant sur la notion de mode normal non-linéaire. À ce sujet, on pourra notamment se référer à [73, 140] proposant d'étendre la notion de variété invariante à des variétés invariantes multi-modes tenant compte des modes impliqués dans la résonance interne. La méthode de tir a également été utilisée pour calculer des modes normaux non-linéaires. Dans [79, 137] cette dernière a mis en évidence la présence de résonances internes se manifestant par des comportements singuliers sur des diagrammes fréquence-énergie à partir d'un certain niveau d'énergie dans le système. Des résonances internes obtenues par équilibrage harmonique ont aussi donné lieu à des publications. On pourra notamment citer Lewandowski [102, 103] pour ces travaux sur les réponses libre et forcée de poutres. Mentionnons également les travaux de Ribeiro et Petyt

combinant HBM et approche aux éléments finis pour étudier les résonances internes de poutres élancées [151] et de plaques [150]. En raison de la commensurabilité des modes doubles des structures à symétrie cyclique, celles-ci ont naturellement tendance à favoriser l'apparition de résonance interne. Sur ce point, on pourra par exemple se référer à [44, 148]. Enfin, citons les travaux de Noel et al. [134] pour une observation expérimentale des résonances internes sur une structure aéronautique.

En théorie on peut intuitivement imaginer qu'il est facile de supprimer une résonance interne en évitant de concevoir un modèle physique dont les pulsations propres sont commensurables. En pratique cette idée est bien plus complexe à mettre en œuvre. En effet, l'étape de conception des aubages de turbomachines par exemple ne tient pas uniquement compte des problématiques liées à la dynamique des structures mais résulte d'échanges multiples entre aérodynamiciens et dynamiciens des structures. De plus, il apparait impossible de maîtriser chacune des combinaisons pouvant vérifier l'équation (II.58). Enfin, il est important de noter que l'équation (II.58) peut être vérifiée sans qu'aucune pulsation propre linéaire du système dynamique ne présente de relation de commensurabilité. En effet, rien n'empêche que cette relation soit vérifiée pour des pulsations non-linéaires [44, 76]. Ce dernier point est sans doute le plus problématique dans la mesure où la relation de dépendance liant les pulsations propres aux amplitudes est plus difficile à prédire et ne résulte pas d'un calcul de valeurs propres comme c'est le cas pour des systèmes linéaires. Face à cette problématique, l'emploi des modes normaux non-linéaires constituent une approche adaptée sur laquelle nous reviendrons dans la section II.4.4.

4.1.5 Résonances par fraction d'harmoniques

Bien qu'exceptionnelle la résonance par fraction d'harmoniques se produit lorsqu'une résonance interne intervient simultanément avec une résonance combinée. Ainsi, pour un système possédant une non-linéarité quadratique, la paire de pulsations $(\frac{1}{3}\omega, \frac{2}{3}\omega)$ est susceptible de répondre selon une résonance par fraction d'harmoniques. De même, la paire de pulsations $(\frac{1}{5}\omega, \frac{3}{5}\omega)$ vérifie à la fois la relation de résonance interne $\omega_2 \approx 3\omega_1$ et la relation de résonance combinée $\omega \approx \omega_2 + 2\omega_1$ dans le cas d'une non-linéarité cubique.

4.1.6 Solutions isolées

La réponse des systèmes dynamiques non-linéaires peut également faire apparaître des solutions qui ne sont pas rattachées à la courbe principale de solutions. Elles se présentent sous la formes de courbes fermées isolées. Dans la pratique, ces courbes ont tendance à se rapprocher de la courbe principale de solutions à mesure que l'excitation sur le système augmente. Lorsque ce rattachement a lieu, une augmentation soudaine de l'amplitude peut exister et donner lieu à des phénomènes de saut.

De part leur positionnement éloigné des autres solutions, ces courbes isolées peuvent être totalement ignorées que ce soit numériquement lors des processus de continuation ou bien expérimentalement. Cela peut amener à d'importantes sous-estimation du niveau d'amplitude de la réponse du système. Différents travaux ont permis de mettre en évidence ces solutions isolées. Sarrouy et al. a proposé de détecter ce type de solutions à l'aide d'une approche d'analyse globale pour un système à symétrie cyclique [165]. Kuether et al. a également montré, en utilisant un critère énergétique, la relation possible entre les courbes isolées et la présence de résonance interne [90]. Enfin mentionnons les travaux de Detroux et al. pour une comparaison numérique/expérimental de mise en évidence de solutions isolées [28].

4.2 Stabilité des systèmes non-linéaires

En présence de non-linéarités, les systèmes dynamiques exhibent des réponses complexes se traduisant par l'apparition de solutions multiples ou encore de saut d'amplitude comme cela a pu être mentionné précédemment. Ces phénomènes donnent lieu à la présence de solutions dites instables et donc non observables expérimentalement. La notion de stabilité constitue donc une information fondamentale pour la caractérisation des solutions des systèmes dynamiques non-linéaires.

4.2.1 Définitions

De manière générale on entend par stabilité la capacité d'une solution à retourner à un état stable à la suite d'une perturbation extérieure. Au fil du temps, plusieurs sens ont été donnés à la notion de stabilité. Parmi les plus couramment utilisés on retrouve la définition de la stabilité au sens de Lyapunov ainsi que la stabilité asymptotique [104], la stabilité au sens de Poincaré, davantage adaptée aux cas des solutions périodiques, ou encore la stabilité au sens de Lagrange s'appuyant sur la notion de solutions bornées.

Ces définitions revêtent un caractère fortement mathématiques et ne permettent pas d'établir de manière explicite une approche afin de statuer sur la stabilité des solutions. Ceci est d'autant plus vrai qu'une solution peut être stable au sens de Poincaré et instable au sens de Lyapunov. Elles demeurent donc inadaptées pour les études qui nous concernent. Face à cela, d'autres méthodes permettent d'évaluer la stabilité locale des solutions. Celles-ci s'appuient sur la linéarisation du système dynamique autour d'une solution soumise à une perturbation de faible amplitude. En vertu du théorème d'Hartman-Grobman [60], cette approche est particulièrement adaptée. Celui-ci précise que le comportement du système non-linéaire au voisinage de la solution perturbée est qualitativement similaire à celui du système linéarisé. En pratique, cette approche a fait ses preuves pour l'étude de stabilité des solutions de type points fixes. Pour l'étude des solutions périodiques il existe des outils davantage appropriés comme la théorie de Floquet et la méthode de Hill dont une description est effectuée dans la suite.

4.2.2 Théorie de Floquet

On considère dans la suite le système (II.1) réécrit sous la forme d'un système différentiel du premier ordre semblable à celui rencontré dans la section II.1.2,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \quad (\text{II.59})$$

Soit $\mathbf{y}_p(t)$ une solution périodique de (II.59) et $\mathbf{u}(t)$ une perturbation telle que l'on note $\mathbf{y}(t)$ la solution perturbée définie par,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{u}(t) \quad (\text{II.60})$$

En injectant $\mathbf{y}(t)$ dans l'équation (II.59) et en effectuant un développement de Taylor au premier ordre du résultat autour de $\mathbf{y}_p(t)$, on obtient un nouveau système différentiel défini pour la perturbation $\mathbf{u}(t)$,

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{u}(t) \quad (\text{II.61})$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p) \right) & -\mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{C} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}_p, \dot{\mathbf{x}}_p) \right) \end{bmatrix} \quad (\text{II.62})$$

correspond à la matrice Jacobienne de \mathbf{f} au point \mathbf{y}_p .

En pratique la théorie de Floquet s'applique pour des systèmes linéaires de la forme (II.61) à coefficients périodiques. Or par construction, la matrice \mathbf{A} hérite de la périodicité de \mathbf{y}_p par l'intermédiaire de la dérivée partielle de \mathbf{f} . Ainsi, il existe une période T non nécessairement minimale [129], telle que $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$. Le système (II.61) de taille $2n$ peut ainsi être résolu par la théorie de Floquet. Celle-ci postule l'existence de $2n$ solutions \mathbf{u}_i formant une base de l'ensemble des solutions de (II.61) et que l'on peut exprimer sous la forme d'une matrice fondamentale \mathbf{U} telle que,

$$\mathbf{U}(t) = [\mathbf{u}_1(t) \ \mathbf{u}_2(t) \ \dots \ \mathbf{u}_{2n}(t)] \quad (\text{II.63})$$

On déduit facilement que \mathbf{U} est solution du système différentiel,

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}(t) \quad (\text{II.64})$$

De plus, en effectuant le changement de variable qui à t associe $t+T$, on montre que $\mathbf{U}(t+T)$ est également solution de (II.64) et s'exprime donc comme une combinaison linéaire de la base formée par les \mathbf{u}_i . Il s'ensuit,

$$\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{U}(t)\Phi \quad (\text{II.65})$$

où Φ est la *matrice de monodromie*, élément central de la théorie de Floquet. En supposant cette dernière diagonalisable, on définit les matrices \mathbf{P} et \mathbf{D} telles que,

$$\Phi = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{II.66})$$

avec \mathbf{P} la matrice des vecteurs propres de Φ et \mathbf{D} celle des valeurs propres telle que,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \rho_1 & & & \\ & \rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_{2n} \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

En appliquant la relation (II.65) pour m périodes, on en déduit,

$$\mathbf{U}(t+mT) = \mathbf{U}(t)\Phi^m = \mathbf{U}(t)\mathbf{P}\mathbf{D}^m\mathbf{P}^{-1} \quad (\text{II.68})$$

Puis en posant $\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{P}$ et en supposant les ρ_i distinctes on déduit finalement,

$$\mathbf{v}_i(t+mT) = \rho_i^m \mathbf{v}_i(t) \quad (\text{II.69})$$

Par conséquent l'évolution de la perturbation se déduit des valeurs propres ρ_i appelées *multipliateurs de Floquet*. Trois conditions se déduisent :

- $\max_i |\rho_i| < 1$: l'amplitude de la perturbation décroît et tend vers 0, la solution \mathbf{y}_p est asymptotiquement stable,
- $\max_i |\rho_i| > 1$: il existe une direction selon laquelle l'amplitude de la perturbation diverge, la solution \mathbf{y}_p est instable,
- $\max_i |\rho_i| = 1$: la perturbation est périodique et une analyse au second ordre est nécessaire pour statuer sur la stabilité.

La stabilité se déduit donc de la position des coefficients de Floquet vis à vis du cercle unité, nous verrons par la suite l'importance liée à la manière dont ces coefficients quittent le cercle unité sur la nature des bifurcations du système et la perte de stabilité.

La matrice de monodromie joue donc un rôle essentiel dans la théorie de Floquet. En

pratique, son calcul se déduit de (II.65) en remarquant que,

$$\mathbf{U}(T) = \mathbf{U}(0)\Phi \quad (\text{II.70})$$

Ainsi, en imposant la condition $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}_{2n}$ à $t = 0$, la matrice de monodromie est directement égale à $\mathbf{U}(T)$. En pratique, cela revient à réaliser une intégration temporelle sur une période T de l'équation (II.61) en imposant successivement chacun des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^{2n} comme condition initiale pour \mathbf{u} .

La théorie de Floquet est une méthode temporelle facile à mettre en œuvre. En revanche, comme la plupart des méthodes faisant appel à des intégrateurs temporels, celle-ci conduit à des temps de calcul pouvant être longs. Ces derniers peuvent toutefois être réduits en utilisant les solutions issues de la HBM pour l'estimation de la solution $\mathbf{y}_p(t)$ ou encore lorsque la théorie de Floquet est appliquée conjointement avec la méthode de tir, pour laquelle une expression de la matrice de monodromie est déjà calculée à l'étape de résolution.

D'autres approches, comme la méthode de Hill, permettent de statuer sur la stabilité des solutions périodiques. Par opposition à la théorie de Floquet, la méthode de Hill s'emploie directement dans le domaine fréquentiel.

4.2.3 Méthode de Hill

Tout comme l'équilibrage harmonique, la méthode de Hill intervient dans le domaine fréquentiel. À l'instar de la théorie de Floquet, elle s'appuie sur l'ajout d'une perturbation des solutions du problème dynamique. On considère cette fois une solution $\mathbf{x}_p(t)$ de (II.1) et une perturbation $\mathbf{p}(t)$ définie par une composante périodique $\mathbf{u}(t)$ supposée de même période que $\mathbf{x}_p(t)$ et modulée par une exponentielle $e^{\lambda t}$ telle que [53],

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{p}(t) = \mathbf{x}_p(t) + \mathbf{u}(t)e^{\lambda t} \quad (\text{II.71})$$

De cette manière, l'influence de la perturbation vient être directement pilotée par le paramètre λ dont l'évolution va permettre de statuer sur la stabilité de la solution \mathbf{x}_p . En injectant (II.71) dans (II.1) on obtient l'équation suivante,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{K}\mathbf{x}_p + [\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u}]e^{\lambda t} + [2\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}] \lambda e^{\lambda t} + [\mathbf{M}\mathbf{u}] \lambda^2 e^{\lambda t} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}_p + \mathbf{p}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{II.72})$$

La perturbation étant supposée faible, la linéarisation des efforts non-linéaires est licite et donne au premier ordre,

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}_p + \mathbf{p}) = \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}_p) + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p) \mathbf{u} e^{\lambda t} \quad (\text{II.73})$$

En tenant compte de cette expression et en gardant en mémoire que $\mathbf{x}_p(t)$ est solution de (II.1), l'expression (II.72) se résume à,

$$\left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_p) \right) \mathbf{u} \right] + [2\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\mathbf{u}] \lambda + [\mathbf{M}\mathbf{u}] \lambda^2 = \mathbf{0} \quad (\text{II.74})$$

La composante $\mathbf{u}(t)$ étant périodique de même période que $\mathbf{x}_p(t)$, on suppose sa décomposition sur la même base harmonique. En appliquant à l'équation (II.74) une procédure de Galerkin identique à celle décrite pour l'équilibrage harmonique (section II.2.2), on se ramène au problème

quadratique aux valeurs propres suivant,

$$\left(\Lambda_0 + \lambda\Lambda_1 + \lambda^2\Lambda_2\right) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.75})$$

où

$$\Lambda_0 = \mathbf{Z} + \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}}{\partial \hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}_p) \quad (\text{II.76})$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & & & \\ & \Lambda_{1,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{1,N_h} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{1,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 2k\omega\mathbf{M} \\ -2k\omega\mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{II.77})$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.78})$$

Numériquement, l'obtention des matrices Λ_1 et Λ_2 est directe. De même, notons que Λ_0 correspond à la matrice jacobienne du système HBM et est automatiquement calculée lors de l'étape de résolution non-linéaire. Afin de faciliter le calcul du problème (II.75), ce dernier peut être réécrit sous la forme d'un système linéaire de taille double [27],

$$\left(\Lambda_r - \lambda\mathbf{I}_{2L}\right) \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{II.79})$$

En posant,

$$\Lambda_r = \begin{bmatrix} -\Lambda_2^{-1}\Lambda_1 & -\Lambda_2^{-1}\Lambda_0 \\ \mathbf{I}_L & \mathbf{0}_L \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \lambda\hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad L = n \times (2N_H + 1) \quad (\text{II.80})$$

La résolution de ce problème permet d'obtenir $2L = 2n \times (2N_H + 1)$ valeurs propres. Toutefois seules $2n$ de ces valeurs propres possèdent un réel sens physique et permettent de statuer sur la stabilité. Elles correspondent aux exposants de Floquet et sont notées λ_i . Moore propose dans [117] de conserver les valeurs propres dont la partie imaginaire est la plus faible en module. Lazarus et Thomas suggèrent quant à eux une version améliorée de la méthode de Hill et proposent de retenir les valeurs propres associées aux vecteurs propres de la matrice de Hill les plus symétriques [97]. Cette méthode se retrouve parfois sous l'appellation Hill2 dans la littérature et a montré des résultats similaires à ceux de la théorie de Floquet avec un gain de temps de l'ordre de 4.

La stabilité au sens de Hill se déduit finalement de la partie réelle des exposants de Floquet :

- $\max_i \Re(\lambda_i) < 0$: l'amplitude de la perturbation décroît et tend vers 0, la solution \mathbf{x}_p est asymptotiquement stable,
- $\max_i \Re(\lambda_i) > 0$: il existe une direction selon laquelle l'amplitude de la perturbation diverge, la solution \mathbf{x}_p est instable,
- $\max_i \Re(\lambda_i) = 0$: la perturbation est périodique et une analyse au second ordre est nécessaire pour statuer sur la stabilité.

Similairement à la théorie de Floquet, la manière dont les exposants de Floquet traversent l'axe des imaginaires fournit une information sur la nature de la bifurcation et le changement de stabilité.

La méthode de Hill permet de traiter la stabilité directement dans le domaine fréquentiel et

est donc adaptée à un calcul d'équilibrage harmonique. Cependant, de récentes études ont été menées afin de comparer les approches de Hill et Floquet. Celles-ci ont systématiquement mis en lumière le manque de précision de la méthode de Hill vis à vis de la théorie de Floquet que ce soit pour la méthode de Hill classique [56] et sa version améliorée Hill2 [138].

4.3 Bifurcation

Rapidement abordée dans les sections précédentes, une des particularité des systèmes non-linéaires est la propension à exhiber des phénomènes de bifurcation. Cette notion, introduite par Poincaré, est utilisée pour caractériser un changement qualitatif du comportement d'un système (nombre et type de solutions, instabilité...) sous la variation d'un ou plusieurs paramètres appelés paramètres de contrôle. Une bifurcation nécessitant la variation de m paramètres de contrôle est appelée bifurcation de co-dimension m . Dans le cadre de ce rapport, nous ne traiterons que les bifurcations de co-dimension 1 pour lesquelles le paramètre de bifurcation sera la pulsation d'excitation du système.

En pratique, la détection des points de bifurcation s'effectue parallèlement aux procédures de continuation que nous avons présentées dans la section II.3. Lors d'une étape de continuation, un changement de stabilité ou de comportement de la solution traduit généralement la présence d'un point de bifurcation. Il existe différents types de bifurcation et leur nature se détermine généralement à l'aide des multiplicateurs ou exposants de Floquet. La théorie des bifurcations étant relativement dense, on en présente ici les principaux résultats. On pourra se référer aux travaux de Nayfeh et Balachandran [129], Kuznetsov [91] ou encore Seydel [167] pour une description approfondie du phénomène.

4.3.1 Bifurcations de solutions périodiques

On s'intéresse dans cette section à l'étude des bifurcations de solutions périodiques de systèmes de la forme (II.1). Nous avons vu précédemment qu'un changement de stabilité des solutions de ce type de système pouvait s'étudier à l'aide de la théorie de Floquet ou la méthode de Hill et dépendait plus particulièrement de l'évolution des multiplicateurs ou exposants de Floquet. Dans le domaine temporel, une bifurcation survient lorsque qu'au moins un multiplicateur de Floquet ρ_i traverse le cercle unité. Dans le domaine fréquentiel, la bifurcation se traduit par la traversée de l'axe imaginaire par au moins un des exposants de Floquet λ_i . On distingue plusieurs cas selon la façon dont les multiplicateurs (resp. les exposants) de Floquet traversent le cercle unité (resp. l'axe des imaginaires). Les différents scénarios sont résumés par la figure II.4 :

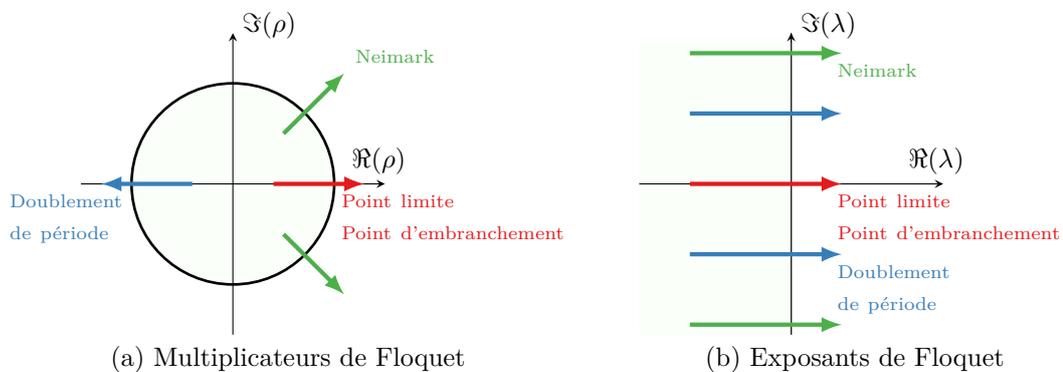


FIGURE II.4 – Bifurcations de solutions périodiques

- Un multiplicateur de Floquet traverse le cercle unité par la valeur $+1$. Dans le plan complexe, cela correspond à la traversée par un exposant de Floquet de l'axe imaginaire le long de l'axe réel. Ce scénario résulte en l'apparition d'une bifurcation de type point limite ou point d'embranchement. Un point limite ou plus couramment point de retournement correspond à la coalescence de deux branches de solutions, l'une stable et l'autre instable s'annihilant au point de bifurcation (figure II.5). Ce type de bifurcation se traduit par un retournement de la branche de solutions du système résultant en l'apparition de phénomènes de sauts d'amplitude comme cela a pu être mentionné dans les précédentes sections. En pratique, le suivi des solutions au niveau des points de retournement est parfaitement négocié par les méthodes de continuation par longueur d'arc.

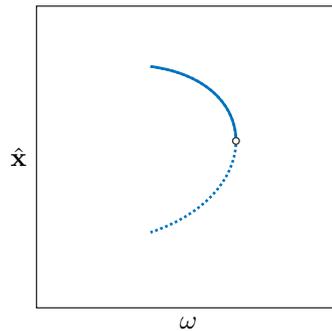


FIGURE II.5 – Point de retournement

Les points d'embranchement se caractérisent par l'apparition de branches supplémentaires stables ou instables de solutions (figure II.6). On dénombre deux familles de bifurcation de type point d'embranchement, les bifurcations transcritiques et les bifurcations par rupture de symétrie. Au niveau des bifurcations transcritiques, deux branches stable et instable deviennent respectivement instable et stable (figure II.6a). Une bifurcation transcritique mène ainsi à un échange de stabilité. Les bifurcations par rupture de symétrie correspondent à l'intersection de branches de solutions symétriques et asymétriques. On entend par symétrie l'invariance d'une solution vis à vis d'une transformation. La branche principale stable devient instable au niveau du point de bifurcation et la nouvelle branche de solutions peut être stable (cas sur-critique, figure II.6b) ou instable (cas sous-critique, figure II.6c) de part et d'autre du point de bifurcation. Dans le cas des points d'embranchement, les méthodes de continuation classiques ne permettent de suivre qu'une seule branche de solutions. Le suivi de chacune des branches peut s'effectuer à l'aide d'une méthode de changement de branche telle que présentée dans la section II.4.3.3.

- Un multiplicateur de Floquet traverse le cercle unité par la valeur -1 . Dans le plan complexe, l'exposant de Floquet traverse l'axe imaginaire via la valeur $i\omega/2$. Il s'agit du scénario de bifurcation de type doublement de période. Une branche de solutions périodiques stables de période T devient instable au point de bifurcation. En parallèle une branche de solutions périodiques stables de période $2T$ est créée dans le cas sur-critique, ou bien une branche de solutions $2T$ -périodiques instables est détruite dans le cas sous-critique. Notons que le doublement de période se déduit directement de l'équation (II.69) en prenant $m = 2$. Une solution périodique subissant une infinité de doublement de période verra sa période passer de T à $2T$ puis $4T$... jusqu'à conduire à une solution chaotique.
- Le dernier scénario survient lorsque 2 multiplicateurs complexes conjugués quittent le cercle unité. En fréquentiel, cette condition correspond à la traversée de l'axe imaginaire

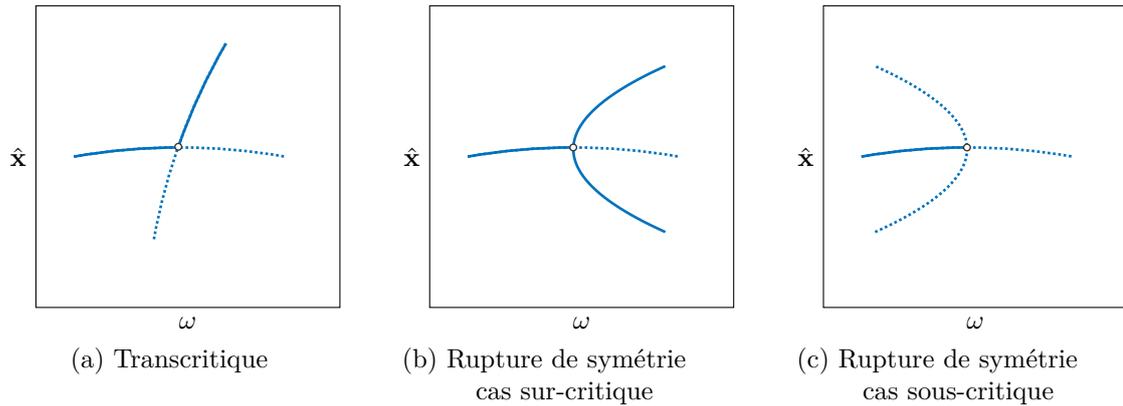


FIGURE II.6 – Points d’embranchements, branche stable [—], branche instable [- -]

par deux exposants de Floquet imaginaires purs conjugués. On assiste dans ce cas à une bifurcation de type Neimark ou Hopf de seconde espèce (figure II.7). Cette bifurcation introduit une nouvelle pulsation propre généralement incommensurable avec celle de la solution périodique existante. En cas d’incommensurabilité la bifurcation crée une solution quasi-périodique composée des deux pulsations incommensurables. De manière analogue au cas précédent, la bifurcation peut être sur ou sous-critique (figures II.7a et II.7b). Dans les deux cas, la branche de solutions périodiques stables existante devient instable au passage du point de bifurcation. Dans le cas sur-critique, une branche stable de solutions quasi-périodiques est créée. Dans le cas sous-critique, une branche instable de solutions quasi-périodiques est détruite au point de bifurcation. En pratique, les méthodes de continuation couplées à l’équilibrage harmonique classique ne permettent pas de suivre les branches de solutions quasi-périodiques en raison de l’introduction d’une nouvelle pulsation. Des méthodes permettent toutefois de traiter les situations de quasi-périodicité comme la méthode de l’équilibrage harmonique multi-dimensionnelle [57], la méthode de l’équilibrage harmonique quasi-périodique [139] ou encore la méthode de l’équilibrage harmonique à coefficients variables [204].

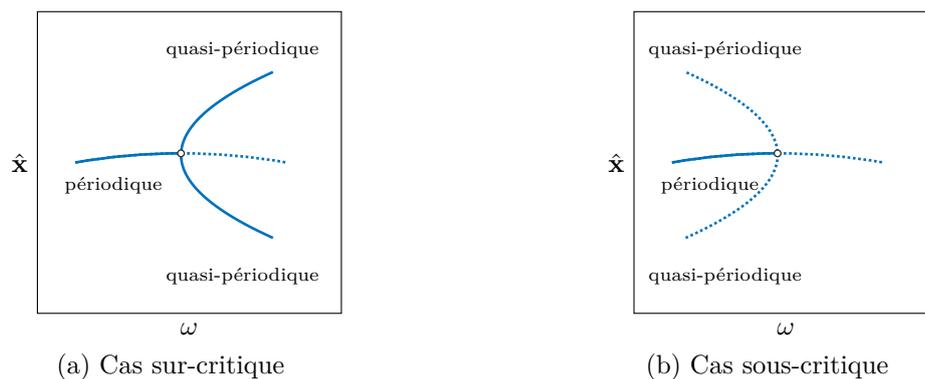


FIGURE II.7 – Bifurcations de Hopf , branche stable [—], branche instable [- -]

4.3.2 Calcul des points de bifurcation

Pour certaines situations, il peut être utile de déterminer la position exacte d’un point de bifurcation. Pour cela on peut avoir recours aux méthodes d’étude de la stabilité de Floquet ou Hill. Cependant, ces outils ne fournissent qu’une approximation de la position d’un point de

bifurcation entre deux solutions successives. De plus, les multiplicateurs et exposants de Floquet ne permettent pas de différencier les points d'embranchement des points de retournement. Une alternative consiste à s'appuyer directement sur le système algébrique de la HBM en exploitant les propriétés mathématiques des matrices du système et des différents points de bifurcation.

La procédure de calcul des points de bifurcation comporte deux étapes, à savoir, l'identification puis la localisation du point. L'étape d'identification s'opère à l'aide de fonctions tests. Celles-ci sont évaluées à chaque étape de la continuation et s'annulent au niveau d'un point de bifurcation. En pratique, il suffit de surveiller un changement de signe de ces fonctions pour caractériser la présence d'une bifurcation. Les différentes fonctions tests s'appuient directement sur la nature du point recherché.

- Un point de retournement se définit par [167] :

$$\det(\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}) = 0, \quad \mathbf{J}_{\omega} \notin \text{Im}(\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}) \quad (\text{II.81})$$

Une fonction test f pour ce point de bifurcation peut être définie à l'aide du déterminant de la matrice Jacobienne du système,

$$f = \det(\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}) \quad (\text{II.82})$$

- Similairement, un point d'embranchement se définit par,

$$\det(\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}) = 0, \quad \mathbf{J}_{\omega} \in \text{Im}(\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}) \quad (\text{II.83})$$

Dans ce cas, celui-ci peut être détecté à l'aide d'un changement de signe de la fonction [47],

$$f = \det \left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} & \mathbf{J}_{\omega} \\ \Delta \hat{\mathbf{x}} & \Delta \omega \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.84})$$

où $[\Delta \hat{\mathbf{x}}, \Delta \omega]$ correspond à la tangente utilisée pour l'étape de prédiction de la continuation.

- Enfin, la bifurcation de Neimark se caractérise par la traversée de l'axe des imaginaires par deux exposants de Floquet complexes conjugués. Deux fonctions tests équivalentes sont généralement rencontrées dans la littérature [91],

$$f = \prod_{1 \leq j < i \leq n} \lambda_i + \lambda_j, \quad f = \det(2\mathbf{A} \odot \mathbf{I}_{2n}) \quad (\text{II.85})$$

où \mathbf{A} est la matrice diagonale contenant les $2n$ exposants de Floquet, $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n})$ et \odot correspond au produit bi-alterné.

Une fois le point de bifurcation détecté, la seconde étape consiste à établir sa position précise entre les deux itérations pour lesquelles la fonction test change de signe. Cette étape repose sur la résolution d'un système augmenté comportant l'équation de la HBM et un ensemble d'équations définissant le type de bifurcation recherchée. À nouveau, le système dépend des propriétés mathématiques du point de bifurcation.

- En s'appuyant sur la définition (II.81), le point de retournement s'obtient en résolvant le système non-linéaire suivant [116],

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Celui-ci peut être résolu à l'aide d'un algorithme itératif de Newton-Raphson.

- Pour un point de branchement, la seconde condition de (II.83) se traduit par l'ajout de l'équation $\mathbf{v}^T \mathbf{J}_\omega = 0$ au système (II.86). Le système augmenté à résoudre s'écrit [167],

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) + \lambda \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}^T(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{J}_\omega(\hat{\mathbf{x}}, \omega) &= 0 \\ \mathbf{v}^T \mathbf{v} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

où le scalaire λ est introduit afin d'éviter des singularités au voisinage du point de bifurcation. Comme pour le cas précédent, le système (II.87) peut être résolu par une procédure de Newton Raphson. Pour des systèmes volumineux, Petrov propose dans [142] de résoudre (II.87) analytiquement en s'appuyant sur une régularisation de la matrice Jacobienne [201].

- Enfin le système augmenté à résoudre pour calculer la position d'un point de Neimark s'obtient en posant $\lambda = i\kappa$ et $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_r + i\hat{\mathbf{u}}_i$ dans le système (II.75) [202],

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \hat{\mathbf{u}}_r - \kappa \Delta_1 \hat{\mathbf{u}}_i - \kappa^2 \Delta_2 \hat{\mathbf{u}}_r &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}, \omega) \hat{\mathbf{u}}_i + \kappa \Delta_1 \hat{\mathbf{u}}_r - \kappa^2 \Delta_2 \hat{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{u}}_r &= 0 \\ \hat{\mathbf{u}}_r^T \hat{\mathbf{u}}_r - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.88})$$

avec Δ_1 et Δ_2 définis par (II.77) et (II.78) et \mathbf{q} un vecteur arbitraire non-orthogonal au sous-espace engendré par $\hat{\mathbf{u}}_r$ et $\hat{\mathbf{u}}_i$.

4.3.3 Branch switching

Comme nous venons de le mentionner, il peut être utile de localiser certains points de bifurcation lors de la procédure de continuation. Par exemple, au niveau d'un point d'embranchement, plusieurs branches de solutions apparaissent simultanément. Dans la pratique, les méthodes de continuation présentées dans la section II.3 ne permettent de suivre que l'une de ces branches. Or, chacune des branches issue du point de branchement est susceptible de présenter des solutions stables et donc observables expérimentalement. Pour cette raison, il est indispensable de se munir d'un outil capable d'identifier les différentes branches au niveau d'un point de branchement. C'est ce que propose la méthode de changement de branches (ou *branch switching*). L'idée sous-jacente de la méthode consiste à calculer les tangentes aux différentes branches de solutions au niveau du point de branchement. On comprend ici l'intérêt d'identifier avec précision la position du point de bifurcation.

On suppose à présent que le point de branchement a déjà été calculé à l'aide du système II.87 et on cherche à déterminer les différentes tangentes en ce point. Pour une description plus approfondie de la méthode, on pourra se référer aux travaux de Kuznetsov [91]. Dans la suite, on notera \mathbf{y}^* le point d'embranchement à l'abscisse curviligne s^* .

Par définition, les tangentes recherchées au point \mathbf{y}^* appartiennent au noyau de la matrice Jacobienne $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad \mathbf{J}_\omega]$ noté \mathcal{K} et défini par,

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}, \mathbf{J}(\mathbf{y} = \mathbf{y}^*) \mathbf{v} = \mathbf{0}\} \quad (\text{II.89})$$

Afin d'alléger les développements, le nombre de tangentes au point de bifurcation est choisi égal à 2. Le principe de la méthode consiste à exprimer les tangentes recherchées comme combinaison linéaire d'une base de \mathcal{K} . Soit $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ une telle base. Par application du théorème du rang il découle directement que la dimension du noyau de $\mathbf{J}^T(\mathbf{y}^*)$ est égale à 1. Soit $\{\mathbf{g}\}$ une base de

ce noyau. La double différenciation de (II.41) par rapport à s au point s^* donne,

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}^*) \cdot (\mathbf{y}^{*''}) + \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.90})$$

où \mathbf{H} correspond au tenseur Hessien de \mathbf{r} définissant au point \mathbf{y}^* l'application bilinéaire,

$$\mathbf{H}_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \frac{\partial^2 r_i(\mathbf{y})}{\partial y_j \partial y_k} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} u_j v_k \quad i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (\text{II.91})$$

En prémultipliant (II.90) par \mathbf{g} il vient,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}, \mathbf{J}(\mathbf{y}^*) \cdot (\mathbf{y}^{*''}) + \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{g}, \mathbf{J}(\mathbf{y}^*) \cdot (\mathbf{y}^{*''}) \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) \rangle &= 0 \\ \underbrace{\langle \mathbf{J}^T(\mathbf{y}^*) \cdot \mathbf{g}, \mathbf{y}^{*''} \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{g}, \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) \rangle &= 0 \\ \langle \mathbf{g}, \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

Or par définition, $\mathbf{y}^{*'} = \mathbf{y}'(s^*)$ est tangent à la courbe de solution au point d'abscisse s^* , il appartient donc à \mathcal{K} et se met sous la forme suivante,

$$\mathbf{y}^{*'} = \alpha_1 \mathbf{t}_1 + \alpha_2 \mathbf{t}_2 \quad (\text{II.93})$$

En utilisant (II.93), le produit scalaire (II.92) s'exprime à l'aide de la forme quadratique suivante,

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{H}(\mathbf{y}^*) (\mathbf{y}^{*'}, \mathbf{y}^{*'}) \rangle = b_{11} \alpha_1^2 + 2b_{12} \alpha_1 \alpha_2 + b_{22} \alpha_2^2 = 0 \quad (\text{II.94})$$

où

$$b_{ij} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{H}(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) \rangle \quad (\text{II.95})$$

À ce stade, il convient de remarquer que la détermination des tangentes se résume à trouver un couple de solutions (α_1, α_2) de (II.94). Kuznetsov propose dans [91] de résoudre le système en considérant l'une des tangentes fournie par le processus de continuation. On se propose ici d'opter pour une alternative basée sur un calcul de conique dont les développements sont présentés ci-dessous.

L'approche détaillée s'appuie sur une étape de diagonalisation de la matrice associée à la forme quadratique (II.94). La forme quadratique s'écrit matriciellement sous la forme suivante,

$$\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.96})$$

Dans le cas où $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$, la matrice symétrique \mathbf{B} est inversible car son déterminant est non nul. Il existe donc une matrice \mathbf{P} orthogonale ($\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$) et \mathbf{D} diagonale telles que,

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.97})$$

En introduisant (II.97) dans (II.96) et en posant $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\alpha}$ on se retrouve avec la relation suivante,

$$\beta_1 = k |\beta_2| \quad \text{avec} \quad k = \pm \sqrt{d_1/d_2} \quad (\text{II.98})$$

À ce stade, on possède une équation pour les deux inconnues β_1 et β_2 . Il suffit alors pour fermer le système d'imposer une condition supplémentaire en fixant par exemple à Δs la norme des tangentes recherchées. Le système possède alors différentes solutions en fonction du signe de β_1 et β_2 . Celles-ci sont résumées dans le tableau II.1. En pratique, les cas 2 et 3 définissent

TABLEAU II.1 – Solutions du calcul des tangentes au point d'embranchement

Cas	Hypothèses	β_1	β_2
1	$k > 0$ et $\beta_2 > 0$	$k\beta_2$	$\frac{\Delta s}{\ (kp_{11} + p_{12}) \mathbf{t}_1 + (kp_{21} + p_{22}) \mathbf{t}_2\ }$
2	$k > 0$ et $\beta_2 < 0$	$-k\beta_2$	$\frac{-\Delta s}{\ (-kp_{11} + p_{12}) \mathbf{t}_1 + (-kp_{21} + p_{22}) \mathbf{t}_2\ }$
3	$k < 0$ et $\beta_2 > 0$	$k\beta_2$	$\frac{\Delta s}{\ (kp_{11} + p_{12}) \mathbf{t}_1 + (kp_{21} + p_{22}) \mathbf{t}_2\ }$
4	$k < 0$ et $\beta_2 < 0$	$-k\beta_2$	$\frac{-\Delta s}{\ (-kp_{11} + p_{12}) \mathbf{t}_1 + (-kp_{21} + p_{22}) \mathbf{t}_2\ }$

la même tangente mais avec un sens opposé. Ceci est aussi valable pour les cas 1 et 4. La détermination du sens à suivre peut être réalisée en effectuant le produit scalaire entre les tangentes calculées et la tangente obtenue à l'itération précédente de la continuation. Une fois les couples (β_1, β_2) obtenus, il est possible de remonter aux coefficients (α_1, α_2) par la relation $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta}$ puis d'obtenir finalement les tangentes au point d'embranchement à l'aide de (II.93).

La méthode de changement de branches représente un outil essentiel pour le calculs des solutions multiples issues des points d'embranchement. La capacité à trouver la bifurcation et à déterminer les branches est d'autant plus importante que cela peut traduire un phénomène de résonance interne [76]. Dans cette section le choix a été fait de se limiter à un cas présentant deux branches. Une généralisation de la méthode à m branches est détaillée dans [75]. Notons que la méthode de changement de branches requiert l'évaluation des dérivées secondes de \mathbf{r} . Sarrouy propose dans [164] d'approcher ces dérivées à l'aide de différences finies, toutefois il est recommandé de les exprimer directement à l'aide de formules analytiques pour accroître la précision de la convergence et réduire le nombre d'itérations.

Dans ce mémoire, il a été choisi d'opter pour un calcul de tangentes pour déterminer les différentes branches de solutions. D'autres approches tirent parti du caractère structurellement instable des points d'embranchement. Elles consistent à perturber la solution au voisinage du point de bifurcation [129]. Il en résulte une cassure de la courbe de solution en différentes branches qu'il est alors possible de continuer une à une.

4.4 Analyse modale non-linéaire

Cette section vise à introduire la notion de mode non-linéaire et son intérêt pour l'étude des interactions modales pouvant survenir au sein des systèmes non-linéaires. Un mode non-linéaire peut être vu comme une extension de la notion de mode linéaire pour des systèmes non-linéaires.

4.4.1 Rappels sur l'analyse modale linéaire

Le concept de mode normal linéaire (ou LNM pour linear normal mode) constitue la pierre angulaire de la théorie des vibrations des systèmes linéaires. Dans la pratique, ils se définissent

comme les solutions du système dynamique libre et non amorti suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (\text{II.99})$$

En recherchant les solutions sous la forme $\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$, il est possible d'exprimer $\mathbf{q}(t)$ comme une fonction harmonique de pulsation ω et de se ramener à la résolution du problème aux valeurs propres suivant,

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Phi = \mathbf{0} \quad (\text{II.100})$$

où les couples $\{\omega_i, \Phi_i\}$ sont les modes normaux linéaires du système. L'un des atouts principal des modes linéaires réside dans leur capacité à découpler les équations de mouvements. Cette propriété permet d'appréhender le système dynamique comme un ensemble d'oscillateurs indépendants. De cette notion de découplage découlent deux propriétés fondamentales. La première concerne la notion d'invariance, pour laquelle tout mouvement initié sur un mode reste sur ce même mode. La seconde propriété se rapporte à la notion de superposition modale précisant que les oscillations libres et forcées peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des modes propres.

Les modes linéaires représentent un outil particulièrement efficace pour traiter les systèmes linéaires. En revanche, leur utilisation sur des systèmes non-linéaires est difficilement envisageable. En effet, la relation de dépendance entre la fréquence et l'amplitude propre aux systèmes non-linéaires rend caduque la propriété de superposition modale. Par ailleurs, les phénomènes non-linéaires tels que les interactions modales et les résonances internes brisent la propriété d'invariance. Pour ces raisons, l'emploi des modes linéaires n'est pas adapté au traitement des systèmes non-linéaires. Face à cela, les modes non-linéaires offrent une alternative intéressante.

4.4.2 Définition des modes normaux non-linéaires

La communauté des dynamiciens s'accorde à dire qu'il existe deux approches principales pour définir la notion de modes normaux non-linéaires. La première a été introduite par les travaux de Rosenberg [155-157] dans les années 1960 tandis que la seconde fait écho aux travaux de Shaw et Pierre [168-171] dans les années 1990.

L'approche de Rosenberg S'appuyant sur une extension directe du concept de mode linéaire dans le domaine non-linéaire, Rosenberg propose de définir un mode normal non-linéaire comme une vibration à l'unisson du système. Physiquement, cette définition suggère que chaque degré de liberté du système atteint son maximum d'amplitude et passe par 0 simultanément. On suppose ainsi que le déplacement de chacun des degrés de liberté du système peut être paramétré par un unique déplacement x_k tel que,

$$x_i(t) = g_i(x_k(t)) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus k \quad (\text{II.101})$$

La détermination de chacune des fonctions g_i permet ainsi d'extraire le mode normal non-linéaire. Ce dernier est généralement représenté sous forme de courbes, ou lignes modales dans un espace des phases.

En parallèle, Rosenberg introduit la notion de modes similaires et non-similaires. Des modes non-linéaires sont dits similaires lorsque leur déformée modale associée est indépendante de l'amplitude de vibration. La ligne modale correspondante est une droite dans l'espace des phases. Inversement des modes non-similaires s'apparentent à une courbe dans l'espace des phases et voient leur déformée propre varier avec l'amplitude de vibration.

La définition des modes non-linéaires proposée par Rosenberg est sujette à certaines limitations. Elle n'est en effet pas adaptée à l'étude de systèmes non-conservatifs. Par ailleurs,

la synchronicité sur laquelle elle s'appuie ne permet pas de tenir compte des interactions modales de type résonance interne. Face à cette restriction, Peeters *et al.* ont récemment proposé d'étendre la définition de Rosenberg en considérant un mode non-linéaire comme une solution périodique du système dont le mouvement de chacun des degrés de liberté n'est pas nécessairement synchrone [137].

L'approche de Shaw et Pierre Dans leurs travaux, Shaw et Pierre proposent de généraliser le concept de modes non-linéaires en tenant compte de l'amortissement dans les systèmes. Ils s'appuient pour cela sur le théorème de la variété centrale et définissent un mode normal non-linéaire comme une variété invariante bidimensionnelle dans l'espace des phases. Cette définition permet directement d'étendre la propriété d'invariance rappelée pour les modes linéaires. Dans l'approche de Shaw et Pierre, le mode non-linéaire est paramétré non seulement par le déplacement mais aussi la vitesse d'un degré de liberté du système tel que,

$$x_i(t) = g_i(x_k(t), \dot{x}_k(t)), \quad \dot{x}_i(t) = h_i(x_k(t), \dot{x}_k(t)) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus k \quad (\text{II.102})$$

Le calcul des fonctions g_i et h_i permet de construire le mode non-linéaire qui géométriquement se représente comme une surface dans l'espace des phases. À l'instar de la définition précédente, l'approche de Shaw et Pierre décrite ci-dessus se restreint à des systèmes n'exhibant pas de résonances internes. Pour pallier cela, un certain nombre de travaux a permis d'étendre l'approche par variété invariante en introduisant notamment la notion de variété invariante multi-mode [11, 73]. La présente approche a par ailleurs été reformulée dans le domaine complexe [125] puis étendue aux systèmes présentant des résonances internes [124].

4.4.3 Méthodes de calcul des modes non-linéaires

De nombreux travaux s'intéressent au calcul des modes normaux non-linéaires. Parmi ceux-ci, les premiers efforts se sont portés sur des méthodes analytiques. S'inspirant directement de la définition de Rosenberg, des méthodes basées sur une reformulation en énergie ont vu le jour [83, 106]. Bien qu'offrant une approche intéressante, ces méthodes sont restreintes à des non-linéarités impaires car s'appuient sur des propriétés de symétrie. Par ailleurs, elles demeurent limitées à des systèmes non-amortis. Des méthodes de perturbation telles que les échelles multiples ont aussi fait l'objet de travaux pour le calcul des modes non-linéaires. À ce sujet on pourra se référer à [93, 94, 125]. Citons également la méthode des formes normales introduites par Jezequel et Lamarque [72] utilisée par la suite pour le calcul des modes normaux non-linéaires [188, 189].

Les méthodes numériques ont aussi fortement contribué à enrichir la littérature quant au calcul des modes normaux non-linéaires. Parmi les principales méthodes citons notamment la méthode de l'équilibrage harmonique [95, 96, 101-103] ainsi que la méthode de tir [137, 149].

La théorie des modes normaux non-linéaires fait encore aujourd'hui l'objet de nombreux travaux et davantage d'information sur le sujet pourra être trouvée dans les ouvrages de Kerschen [80] et Vakakis [193].

4.4.4 Calcul des modes non-linéaires par équilibrage harmonique

Dans la suite de ce document, les modes normaux non-linéaires ont été obtenus à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique dont les principaux développements, adaptés au calcul modal sont rappelés ci-après.

On considère ici la recherche de solutions périodiques du système libre et conservatif suivant,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \quad (\text{II.103})$$

En suivant la procédure de Galerkin, la méthode de l'équilibrage harmonique permet d'obtenir à partir de (II.103) le système algébrique suivant,

$$\mathbf{Z}(\omega)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.104})$$

où la matrice de rigidité dynamique multi-harmonique s'écrit,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{K} & & & \\ & \mathbf{Z}_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Z}_{N_h} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (\text{II.105})$$

Dans le cas de la réponse libre, en l'absence du terme excitateur, la pulsation ω de la réponse est inconnue et le système (II.104) est sous-déterminé. Afin de refermer ce dernier, il est nécessaire d'inclure une équation supplémentaire. Pour cela, plusieurs possibilités sont envisageables. La première consiste, comme en réponse forcée, à inclure une équation de continuation ne fixant pas a priori la pulsation. Il peut s'agir par exemple d'une équation de type arc-length ou pseudo arc-length. Une seconde technique repose sur l'ajout d'une condition de phase. En effet, la sous-détermination du système peut être vue comme une conséquence du caractère autonome du système différentiel (II.103). Différentes conditions de phase ont été proposées dans la littérature. On pourra par exemple se référer aux travaux de Seydel [167] et Doedel [34]. Une approche simple consiste à imposer une vitesse initiale nulle d'un des degrés de liberté x_p du système, soit $\dot{x}_p(0) = 0$ ce qui se traduit dans le domaine fréquentiel par l'équation suivante,

$$\sum_{k=1}^{N_h} k_\omega b_k^p = 0 \quad (\text{II.106})$$

où b_k^p est la composante p du vecteur \mathbf{b}_k .

4.4.5 Compléments sur les modes normaux non-linéaires traités par HBM

Cette sous-section vise à mettre en lumière les différents points auxquels il est nécessaire de prêter attention lors du calcul des modes normaux non-linéaires par équilibrage harmonique.

Initialisation En pratique, l'initialisation d'un mode non-linéaire constitue une première étape importante dans une optique de continuation de ce dernier. En tenant compte du fait qu'un mode non-linéaire est tangent à son homologue linéaire à faible amplitude, une approche consiste à initialiser le mode non-linéaire sur le mode linéaire. Grolet [50] propose pour cela de choisir pour pulsation initiale celle du mode linéaire et d'imposer le mode propre correspondant au niveau de la première harmonique du vecteur d'inconnues $\hat{\mathbf{x}}$. Mathématiquement cela se traduit par,

$$\omega^{(0)} = \omega_i, \quad \mathbf{a}_1^{(0)} = \epsilon \Phi_i, \quad \mathbf{b}_1^{(0)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_k^{(0)} = \mathbf{b}_k^{(0)} = \mathbf{0} \quad \forall k \in \llbracket 0, N_h \rrbracket \setminus 1 \quad (\text{II.107})$$

où le paramètre ϵ , généralement petit, pilote l'amplitude de l'initialisation.

Continuation Outre la solution périodique correspondant au mode non-linéaire, l'équation (II.104) admet aussi systématiquement le vecteur nul comme solution. Une conséquence directe de ce résultat est la singularité de la matrice Jacobienne du système. Il est ainsi important de

noter qu'une procédure de continuation s'appuyant sur une prédiction tangente peut aisément fournir des résultats erronés dans la mesure où l'étape de prédiction fait intervenir une inversion de la matrice Jacobienne susmentionnée. Afin de contourner cet obstacle, il peut être judicieux d'opter pour d'autres méthodes de prédiction telles que la méthode de la sécante qui ne repose pas sur une inversion de Jacobienne.

Stabilité Comme cela a été rappelé dans la section II.4.2, l'analyse de stabilité du système s'appuie sur la position des multiplicateurs de Floquet vis à vis du cercle unité dans le cadre de la théorie de Floquet ou bien des exposants de Floquet par rapport à l'axe imaginaire du plan complexe dans le cadre de la méthode de Hill. Pour un système autonome tel que (II.103), il est possible de montrer qu'un multiplicateur de Floquet se situe nécessairement sur le cercle unité [129]. Auquel cas, il est indispensable d'isoler ce multiplicateur afin d'évaluer la stabilité à l'aide des multiplicateurs restant. Dans le cadre de la méthode de Hill, Grenat [48] propose de modifier le problème quadratique aux valeurs propres (II.75) afin de décaler l'exposant de Floquet nul.

Gestion des bifurcations En réponse forcée, la présence d'un point de bifurcation se caractérise par la singularité de la matrice Jacobienne du système HBM. En réponse libre, cette matrice est systématiquement singulière en raison du caractère autonome du système comme cela a été rappelé ci-dessus. Pour cette raison l'utilisation du produit de deux déterminants successifs est à proscrire. Afin de contourner cette limitation, une solution peut consister à utiliser le produit des valeurs propres (privé de la valeur propre nulle) des matrices Jacobiennes et à surveiller un éventuel changement de signe. En pratique, cette solution présente une certaine efficacité mais oblige un calcul de valeurs propres à chaque itération ce qui peut fortement alourdir les temps de calcul pour des systèmes de taille importante. Une autre approche consiste à utiliser directement les résultats de l'étude de stabilité à savoir les coefficients ou multiplicateurs de Floquet.

5 Modèle phénoménologique de couplage flexion-torsion

Afin d'illustrer les notions présentées dans les sections précédentes, on s'intéresse ici à un exemple d'application simplifié. On considère pour cela le modèle de profil aérodynamique illustré par la figure II.8. Ce type de modèle est généralement rencontré dans le domaine de l'aéroélasticité pour étudier les instabilités de flottement par exemple. Dans le cas présent, on s'intéresse au couplage flexion-torsion du profil. Plus particulièrement, on cherche à mettre en évidence les comportements liés à la prise en compte de non-linéarités dans le modèle et montrer l'impact de la résonance interne sur la dynamique du système.

5.1 Présentation du modèle

Le modèle est décrit dans le repère orthonormé (O, x, y, z) coïncidant avec les axes principaux du profil d'un aubage de longueur L . Le point O correspond au centre élastique de la section. On note G son centre de gravité séparé d'une distance λ de O . On note également m , la masse du système, J_G l'inertie en rotation au point G autour de l'axe z , K_{vv} la raideur de flexion liée au déplacement v du point O suivant l'axe y et $K_{\phi\phi}$ la raideur de torsion liée à la rotation ϕ autour du point O . Enfin, on considère une raideur de couplage flexion-torsion $K_{v\phi\theta'}$ tenant compte du vrillage θ' de la section autour de l'axe neutre z passant par O et perpendiculaire au plan de la section. Notons que pour une loi d'empilage linéaire, le vrillage θ' est constant le long de la fibre neutre. On supposera par la suite que le vrillage total du modèle dépend

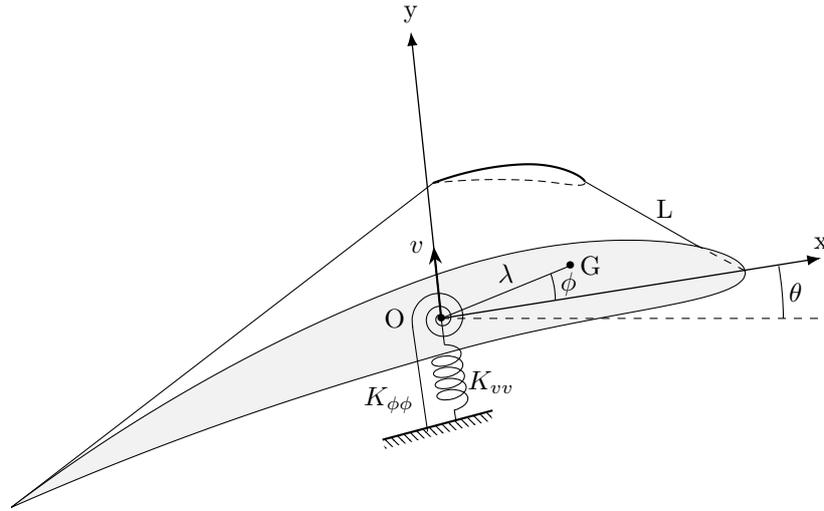


FIGURE II.8 – Modèle simplifié illustrant le couplage flexion-torsion

du déplacement de torsion ϕ du profil. Tenant compte de cela, la raideur de couplage s'écrit $K_{v\phi} \left(\theta' + \frac{\phi}{L} \right)$ et intègre désormais un terme non-linéaire. On considère par la suite que le mouvement du système est entièrement décrit par ses déplacements de rotation ϕ et de flexion v au point O.

En tenant compte de ces définitions et en supposant un angle de torsion ϕ faible, les énergies cinétiques et potentielles du système au centre élastique O s'écrivent,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{2} J_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{v} + \lambda \dot{\phi})^2 \\ \mathcal{V} &= \frac{1}{2} K_{vv} v^2 + \frac{1}{2} K_{\phi\phi} \phi^2 + K_{v\phi} \left(\theta' + \frac{\phi}{L} \right) v\phi \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

L'application des équations de Lagrange permet directement de déduire les matrices du système associées au vecteur d'inconnus $[v, \phi]^T$,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & m\lambda \\ m\lambda & m\lambda^2 + J_G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{v\phi}\theta' \\ K_{v\phi}\theta' & K_{\phi\phi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{\text{nl}} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} K_{v\phi}\phi^2 \\ 2K_{v\phi}v\phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.109})$$

On suppose de plus un effort extérieur harmonique et un amortissement modal égal à 0,12 % pour le premier mode et 0,10 % pour le second mode.

Afin de mettre en évidence un couplage de modes, les équations du mouvement sont exprimées dans le formalisme modal de telle façon que l'équation en base modale s'écrit,

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{\tilde{q}}_1 + \omega_1^2\tilde{q}_1 + \alpha_{11}\tilde{q}_1^2 + \alpha_{12}\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \alpha_{22}\tilde{q}_2^2 &= \tilde{f}_1 \cos(\omega t) \\ \ddot{\tilde{q}}_2 + 2\xi_2\omega_2\dot{\tilde{q}}_2 + \omega_2^2\tilde{q}_2 + \beta_{11}\tilde{q}_1^2 + \beta_{12}\tilde{q}_1\tilde{q}_2 + \beta_{22}\tilde{q}_2^2 &= \tilde{f}_2 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{II.110})$$

avec $[v, \phi]^T = \Psi [\tilde{q}_1, \tilde{q}_2]^T$, Ψ la matrice des modes propres du système et α_{ij}, β_{ij} les coefficients modaux des termes non-linéaires dont les expressions en fonction des grandeurs physiques du problème sont données dans l'annexe A.1.

5.2 Résolution analytique

Dans une première approche, la résolution de (II.110) est effectuée à l'aide de la méthode des échelles multiples. Pour cela, on suppose que la solution s'écrit sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &= \epsilon \tilde{q}_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 \tilde{q}_{12}(T_0, T_1) + \dots \\ \tilde{q}_2 &= \epsilon \tilde{q}_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 \tilde{q}_{22}(T_0, T_1) + \dots\end{aligned}\quad (\text{II.111})$$

avec $T_i = \epsilon^i t$. On introduit également les ordres de grandeurs suivants,

$$\xi_1 \omega_1 = \epsilon \mu_1, \quad \xi_2 \omega_2 = \epsilon \mu_2, \quad \tilde{f}_1 = \epsilon^2 f_1, \quad \tilde{f}_2 = \epsilon^2 f_2 \quad (\text{II.112})$$

Par la suite, la fréquence d'excitation est supposée au voisinage de la fréquence du second mode telle que $\omega = \omega_2 + \epsilon \sigma_2$ où σ_2 est un paramètre de detuning caractérisant l'écart entre l'excitation et la fréquence de résonance du système.

En injectant les expressions (II.111) dans l'équation différentielle (II.110) et en tenant compte des hypothèses (II.112), on obtient en égalisant les termes d'un même ordre ϵ^i et en considérant la transformation de l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1}$

Ordre ϵ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{q}_{11}}{\partial T_0^2} + \omega_1^2 \tilde{q}_{11} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{q}_{21}}{\partial T_0^2} + \omega_2^2 \tilde{q}_{21} &= 0\end{aligned}\quad (\text{II.113})$$

Ordre ϵ^2

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{q}_{12}}{\partial T_0^2} + \omega_1^2 \tilde{q}_{12} &= -2 \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\frac{\partial \tilde{q}_{11}}{\partial T_1} + \mu_1 \tilde{q}_{11} \right) - \alpha_{11} \tilde{q}_{11}^2 - \alpha_{12} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{21} - \alpha_{22} \tilde{q}_{21}^2 + f_1 \cos(\omega T_0) \\ \frac{\partial^2 \tilde{q}_{22}}{\partial T_0^2} + \omega_2^2 \tilde{q}_{22} &= -2 \frac{\partial}{\partial T_0} \left(\frac{\partial \tilde{q}_{21}}{\partial T_1} + \mu_2 \tilde{q}_{21} \right) - \beta_{11} \tilde{q}_{11}^2 - \beta_{12} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{21} - \beta_{22} \tilde{q}_{21}^2 + f_2 \cos(\omega T_0)\end{aligned}\quad (\text{II.114})$$

Les solutions de (II.113) se mettent sous la forme,

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{11} &= A_1(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + cc \\ \tilde{q}_{21} &= A_2(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + cc\end{aligned}\quad (\text{II.115})$$

où les A_i sont des fonctions complexes arbitraires et où cc désigne le complexe conjugué. En

injectant (II.115) dans (II.114) il vient,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{q}_{12}}{\partial T_0^2} + \omega_1^2 \tilde{q}_{12} &= -2i\omega_1 (A'_1 + \mu_1 A_1) e^{i\omega_1 T_0} - \alpha_{11} (A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1 \bar{A}_1) \\
&\quad - \alpha_{12} (A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} + A_2 \bar{A}_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1) T_0}) \\
&\quad - \alpha_{22} (A_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} + A_2 \bar{A}_2) + \frac{f_1}{2} e^{i(\omega_2 T_0 + \sigma_2 T_1)} + cc \\
\frac{\partial^2 \tilde{q}_{22}}{\partial T_0^2} + \omega_2^2 \tilde{q}_{22} &= -2i\omega_2 (A'_2 + \mu_2 A_2) e^{i\omega_2 T_0} - \beta_{11} (A_1^2 e^{2i\omega_1 T_0} + A_1 \bar{A}_1) \\
&\quad - \beta_{12} (A_1 A_2 e^{i(\omega_1 + \omega_2) T_0} + A_2 \bar{A}_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1) T_0}) \\
&\quad - \beta_{22} (A_2^2 e^{2i\omega_2 T_0} + A_2 \bar{A}_2) + \frac{f_2}{2} e^{i(\omega_2 T_0 + \sigma_2 T_1)} + cc
\end{aligned} \tag{II.116}$$

où la notation $(.)'$ désigne la dérivation par rapport au temps T_1 .

À ce stade, on propose de distinguer deux cas de figures à savoir les cas avec et sans résonance interne. Selon les cas, certains termes de (II.116), dits séculaires, doivent être annulés. Ces termes conduisent à des solutions particulières de la forme $T_0 e^{i\omega_i T_0}$ divergentes à l'infini. L'annulation de ces termes conduit à la résolution des équations de solvabilité.

1. En l'absence de résonance interne, les équations de solvabilité s'écrivent,

$$\begin{aligned}
A'_1 + \mu_1 A_1 &= 0 \\
2i\omega_2 (A'_2 + \mu_2 A_2) &= \frac{f_2}{2} e^{i(\sigma_2 T_1)}
\end{aligned} \tag{II.117}$$

Celles-ci assurent une non divergence des solutions de (II.116). Les solutions de (II.117) prennent la forme suivante,

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{a_1}{2} e^{-\mu_1 T_1} \\
A_2 &= \frac{a_2}{2} e^{-\mu_2 T_1} - \frac{if_2}{4\omega_2 (\mu_2 + i\sigma_2)} e^{i(\sigma_2 T_1)}
\end{aligned} \tag{II.118}$$

En régime permanent, l'amplitude du premier mode tend vers zéro tandis que celle du second mode se rapproche d'une constante. En injectant ces solutions dans les expressions (II.115) et (II.111), on obtient les réponses en régime permanent suivantes,

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= 0 + O(\epsilon^2) \\
\tilde{q}_2 &= \frac{\tilde{f}_2}{2\epsilon\omega_2 (\mu_2^2 + \sigma_2^2)^{1/2}} \sin(\omega t - \gamma_0) + O(\epsilon^2), \quad \gamma_0 = \arctan\left(\frac{\sigma_2}{\mu_2}\right)
\end{aligned} \tag{II.119}$$

Ainsi, en l'absence de résonance interne, le système se comporte au premier ordre comme un système linéaire non influencé par la présence des termes de couplages quadratiques.

2. On suppose désormais qu'il existe une relation de résonance interne entre les modes de torsion et de flexion telle que $\omega_2 \simeq 2\omega_1$. En introduisant un second paramètre de detuning σ_1 , cette relation de quasi-commensurabilité s'exprime par, $2\omega_1 = \omega_2 + \epsilon\sigma_1$. La substitution de cette relation dans (II.116) conduit aux équations de solvabilité suivantes,

$$\begin{aligned}
-2i\omega_1 (A'_1 + \mu_1 A_1) - \alpha_{12} A_2 \bar{A}_1 e^{-i\sigma_1 T_1} &= 0 \\
-2i\omega_2 (A'_2 + \mu_2 A_2) - \beta_{11} A_1^2 e^{i\sigma_1 T_1} + \frac{f_2}{2} e^{i(\sigma_2 T_1)} &= 0
\end{aligned} \tag{II.120}$$

En posant

$$A_i = \frac{a_i(T_1)}{2} e^{i\theta_i(T_1)}, \quad \gamma_1 = 2\theta_1 - \theta_2 + \sigma_1 T_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 T_1 - \theta_2 \quad (\text{II.121})$$

dans les équations de solvabilité (II.120) et en séparant les parties réelles et imaginaires on se ramène à la résolution du système suivant,

$$\begin{aligned} a'_1 &= -\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_{12}}{4\omega_1} a_1 a_2 \sin(\gamma_1) \\ a'_2 &= -\mu_2 a_2 - \frac{\beta_{11}}{4\omega_2} a_1^2 \sin(\gamma_1) + \frac{f_2}{2\omega_2} \sin(\gamma_2) \\ a_1 \theta'_1 &= \frac{\alpha_{12}}{4\omega_1} a_1 a_2 \cos(\gamma_1) \\ a_2 \theta'_2 &= \frac{\beta_{11}}{4\omega_2} a_1^2 \cos(\gamma_1) - \frac{f_2}{2\omega_2} \cos(\gamma_2) \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

En régime permanent ($a'_i = \gamma'_i = 0$), le système (II.122) possède deux solutions distinctes. Le premier cas correspond à la solution linéaire décrite par (II.119). Dans le second cas, la solution s'écrit,

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \left[-\Lambda_1 \pm \left(\frac{f_2^2}{4\beta_{11}^2} - \Lambda_2^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \\ a_2 &= 2 \frac{\omega_1}{|\alpha_{12}|} \left(4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{II.123})$$

avec

$$\Lambda_1 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\alpha_{12}\beta_{11}} [\sigma_2(\sigma_1 - \sigma_2) + 2\mu_1\mu_2], \quad \Lambda_2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\alpha_{12}\beta_{11}} [2\sigma_2\mu_1 - \mu_2(\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (\text{II.124})$$

Après substitution dans (II.115) et (II.111), les solutions en régime permanents sont de la forme,

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= 2\epsilon \left[-\Lambda_1 \pm \left(\frac{f_2^2}{4\beta_{11}^2} - \Lambda_2^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \cos\left(\frac{1}{2}(\omega t - \gamma_2 + \gamma_1)\right) + O(\epsilon^2) \\ \tilde{q}_2 &= 2\epsilon \frac{\omega_1}{|\alpha_{12}|} \left(4\mu_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 \right)^{1/2} \cos(\omega t - \gamma_2) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{II.125})$$

Ainsi, la présence d'une relation de résonance interne induit au premier ordre une réponse du premier mode dont la fréquence de vibration est égale à la moitié de la fréquence d'excitation. L'apparition de ce couplage résulte directement de la relation de commensurabilité entre les fréquences propres et de la présence des termes non-linéaires quadratiques dans les équations modales. Plus particulièrement, les expressions (II.125) montrent que les amplitudes des coordonnées modales dépendent seulement de deux coefficients modaux non-linéaires, à savoir α_{12} et β_{11} . Ces coefficients sont conservés lors de la suppression des termes séculaires et la résolution des équations de solvabilité. Les autres coefficients modaux non-linéaires n'interviennent pas dans la résonance interne. Ils participent néanmoins à la dynamique du système. En pratique, ceux-ci apparaissent au second ordre dans les expressions des solutions du système en régime permanent. Ce calcul requiert toutefois de pousser les développements analytiques des échelles multiples à l'ordre supérieur [94]. Il est également intéressant de remarquer que la réponse du second mode (celui sur lequel porte l'excitation) est indépendante de l'effort d'excitation. Nous

verrons par la suite qu'il existe un phénomène de saturation d'amplitude de ce mode au profit du premier mode due à la résonance interne.

Afin de représenter les réponses fréquentielles associées aux deux modes, les paramètres du modèle ont été choisis de sorte d'obtenir une quasi-commensurabilité entre les pulsations propres. Les valeurs retenues sont rassemblées dans le tableau II.2. Les modes propres obtenus avec ce jeu de paramètres sont décrits par,

$$\left(\omega_1 = 33,51 \text{ Hz}, \Psi_1 = \begin{bmatrix} 0,188 \\ -1,08 \end{bmatrix} \right), \quad \left(\omega_2 = 67,51 \text{ Hz}, \Psi_2 = \begin{bmatrix} -0,506 \\ -0,732 \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.126})$$

Le premier mode correspond à un mode de torsion tandis que le second s'apparente à un mode de flexion.

TABLEAU II.2 – Paramètres du modèle phénoménologique assurant la résonance interne entre les modes de flexion et de torsion

Inertie		Raideur		
Masse	Moment inertie	Flexion	Torsion	Couplée
m [kg]	J_G [kg m ²]	K_{vv} [N m ⁻¹]	$K_{\phi\phi}$ [N m]	$K_{v\phi\theta'}$ [N]
3,64	$5,855 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^5$	$3,77 \times 10^4$	$4,31 \times 10^4$

La figure II.9 illustre les amplitudes modales des deux modes en fonction de la fréquence d'excitation pour un effort extérieur de 65 N. Celles-ci ont été directement obtenues à partir des expressions (II.119) et (II.125). Pour chacune des solutions en régime permanent, la stabilité du système a été calculée en étudiant l'évolution d'une perturbation au voisinage de l'état d'équilibre. Les détails de ce calcul sont donnés dans l'annexe A.2. On représentera par la suite en traits pointillés [- -] les solutions instables et en traits pleins [—] les solutions stables.

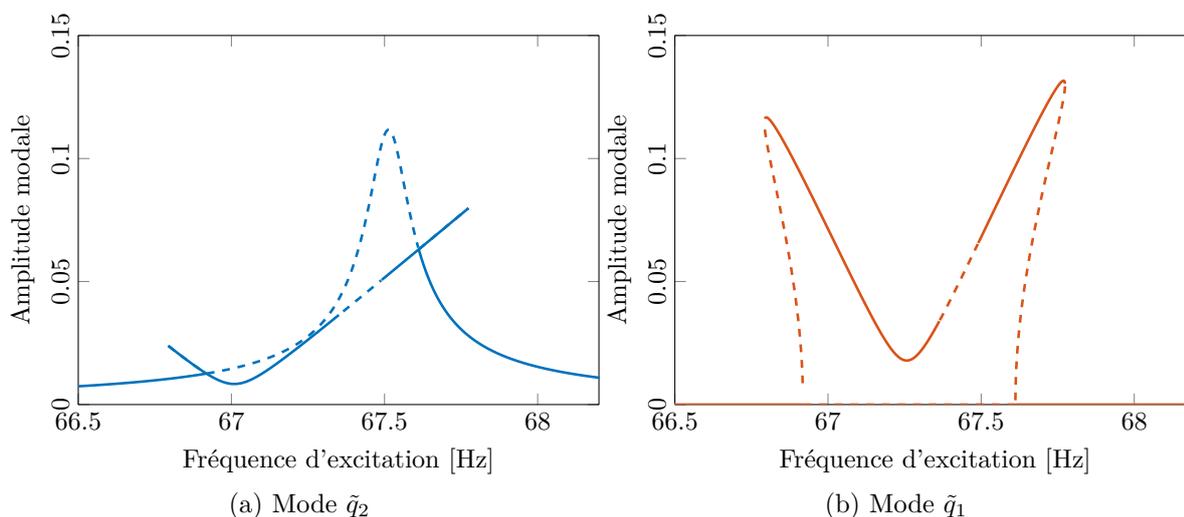


FIGURE II.9 – Réponses fréquentielles des modes de flexion et de torsion obtenues par échelles multiples

Notons tout d'abord la présence du pic principal à la fréquence de résonance du second mode (figure II.9a). En l'absence de termes non-linéaires, la réponse du système correspondrait exactement à ce pic. En réalité, en raison de la présence des termes non-linéaires, ce pic devient instable à partir d'une certaine amplitude. En parallèle, une seconde branche de solutions

apparaît au niveau du changement de stabilité. Celle-ci donne deux pics de résonances de part et d'autre du pic principal. Ces pics de résonance apparaissent simultanément sur la réponse fréquentielle du premier mode (figure II.9b) à cause de la résonance interne entre les deux modes. Le premier pic présente un effet assouplissant avec un glissement vers les basses fréquences. À l'inverse, le second pic est rigidifiant et penche vers les plus hautes fréquences. Notons qu'en l'absence de résonance interne, la réponse du mode \tilde{q}_1 serait quasiment nulle (cf. équation (II.119) et figure II.9b). Les pics observables sur la réponse de ce mode montrent clairement le forte perturbation de la dynamique du système induit par la résonance interne.

Par ailleurs, remarquons que les amplitudes maximales ne sont pas atteintes par le mode excité. De manière analogue, observons que ces maxima d'amplitude ne sont pas situés à la fréquence de résonance du mode excité (cf. (II.126)) ce qui est une propriété importante des systèmes non-linéaires.

Enfin, il est important de remarquer qu'il existe une région comprise entre 67,35 Hz et 67,5 Hz pour laquelle aucune solution stable n'existe. Nous reviendrons sur cette remarque dans la section suivante.

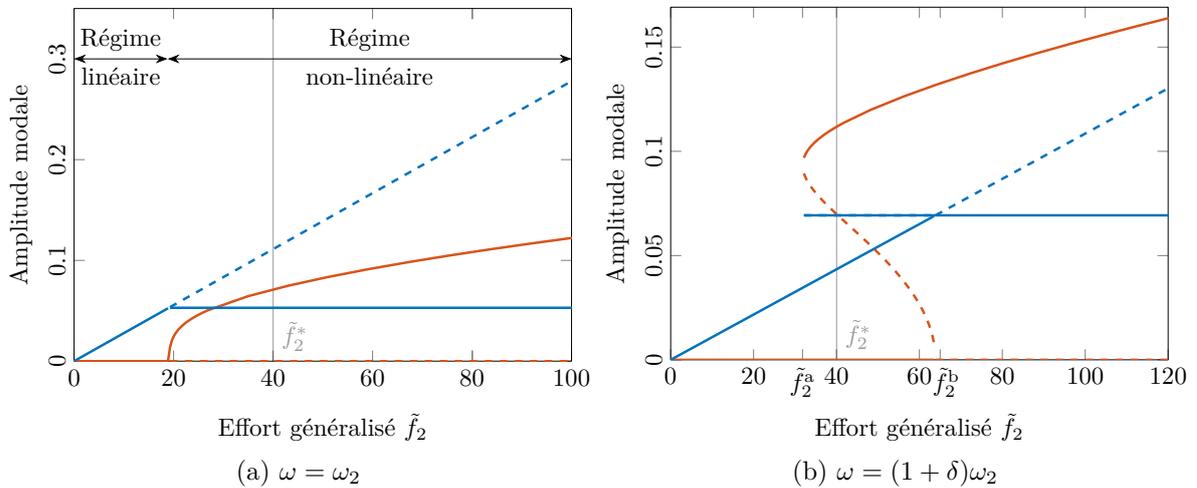


FIGURE II.10 – Évolution des amplitudes des modes de flexion et de torsion en fonction de l'effort d'excitation

Les courbes représentées sur la figure II.9 montrent qu'à certaines fréquences d'excitation, plusieurs solutions, stables et instables, peuvent exister. Cette caractéristique, propre aux systèmes non-linéaires, dépend de la fréquence mais également de l'effort d'excitation. Pour mieux s'en rendre compte, la figure II.10 trace l'évolution du nombre de solutions et de leur amplitude en fonction de l'effort d'excitation généralisé sur le second mode. Dans le premier cas (figure II.10a), la fréquence d'excitation correspond à la fréquence propre du second mode. À faible niveau d'excitation, le système se comporte linéairement avec une augmentation progressive de l'amplitude du second mode en fonction de l'effort. En parallèle, l'amplitude du premier mode reste à zéro. À partir d'une certaine valeur seuil, celle-ci devient non-nulle et commence à augmenter avec l'excitation. Simultanément, le niveau du mode \tilde{q}_2 atteint un maximum et reste constant malgré l'accroissement de l'effort d'excitation. C'est l'effet de saturation [130]. L'augmentation d'amplitude du premier mode est telle, qu'elle finit par devenir supérieure à celle du mode excité.

Dans le second cas (figure II.10b), la fréquence d'excitation est très légèrement supérieure à la fréquence du second mode. Cette fois, il existe 3 zones différentes sur le graphe. À faible amplitude, on retombe sur le cas linéaire. À forte amplitude d'excitation, le mode excité sature au profit de l'autre mode qui voit son amplitude augmenter. La troisième zone correspond à

un état intermédiaire pour lequel plusieurs solutions stables existent. Cet état se manifeste à partir d'une valeur seuil d'excitation et peut se traduire par un saut brusque d'amplitude pour les deux modes étudiés. Il est possible de déterminer analytiquement les valeurs d'excitation \tilde{f}_2^a et \tilde{f}_2^b délimitant cette zone intermédiaire à partir de l'équation (II.123). Celle-ci existe lorsque \tilde{f}_2 est compris dans l'intervalle $[2\epsilon^2 |\beta_{11}\Lambda_2|, 2\epsilon^2 |\beta_{11}| (\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)^{1/2}]$.

Afin de mieux comprendre le lien entre les différentes simulations, l'effort généralisé \tilde{f}_2^* utilisé pour obtenir la figure II.9 a été repéré sur les figures II.10a et II.10b.

L'approche analytique permet d'obtenir une première interprétation de la dynamique du système. Dans le cas présent, elle a mis en évidence le couplage de modes par résonance interne et le phénomène de saturation d'amplitude avec transfert d'énergie au mode couplé. La mise en œuvre de la méthode reste cependant délicate et requiert des développements analytiques importants pour tenir compte de l'ensemble des termes non-linéaires et obtenir une approximation de la solution au second ordre. Dans cette optique, l'approche numérique par équilibrage harmonique se veut davantage adaptée.

5.3 Résolution par équilibrage harmonique

On propose à présent de résoudre le système (II.110) à l'aide de la méthode d'équilibrage harmonique décrite dans la section II.2.2. On conservera par la suite les paramètres du modèle définis dans la section précédente pour étudier la résonance interne entre les modes de flexion et de torsion.

Dans sa formulation initiale donnée par l'expression (II.24), la HBM ne permet pas d'observer les composantes harmoniques ayant une fréquence plus faible que la fréquence d'excitation. Dans l'exemple traité ici, cela revient à occulter la réponse du mode de torsion lors de l'excitation du mode de flexion. Afin de remédier à cela, l'idée consiste à décaler la fréquence fondamentale de la réponse de sorte que la solution recherchée s'écrit sous la forme,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} \mathbf{a}_k \cos(k\omega_0 t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega_0 t) \quad (\text{II.127})$$

avec $\omega_0 = \omega/2$. De cette manière, on est en mesure d'observer la réponse du premier mode à l'aide des composantes harmoniques \mathbf{a}_1 et \mathbf{b}_1 . Ceci étant posé, on considère par la suite $N_h = 5$ harmoniques et $n_t = 100$ instants temporels pour la méthode AFT.

La réponse fréquentielle du système obtenue par HBM est représentée par la figure II.11. La réponse issue du calcul par échelles multiples ainsi que des points obtenus par intégration temporelle sont également représentés. Notons tout d'abord la bonne corrélation entre les courbes HBM et échelles multiples à faible amplitude. À mesure que l'amplitude augmente, des écarts ont tendance à apparaître, et s'expliquent par la prise en compte de l'ensemble des termes non-linéaires lors de la résolution par HBM. Cette observation confirme les remarques faites dans la section précédente sur la précision de la méthode analytique. On note par ailleurs la très bonne corrélation entre la HBM et les points d'intégration temporelle ce qui accrédite la précision de la méthode. Sur la forme à présent, remarquons la bonne aptitude de la HBM à déterminer les différentes branches de solution. En particulier, la seconde branche est issue de points d'embranchement et a été localisée à l'aide de l'algorithme de branch switching décrit dans la section II.4.3.3.

Une analyse de stabilité à l'aide de la théorie de Floquet a également été réalisée (figure II.12). Les différents points de bifurcation sur les réponses des coordonnées \tilde{q}_1 et \tilde{q}_2 ainsi

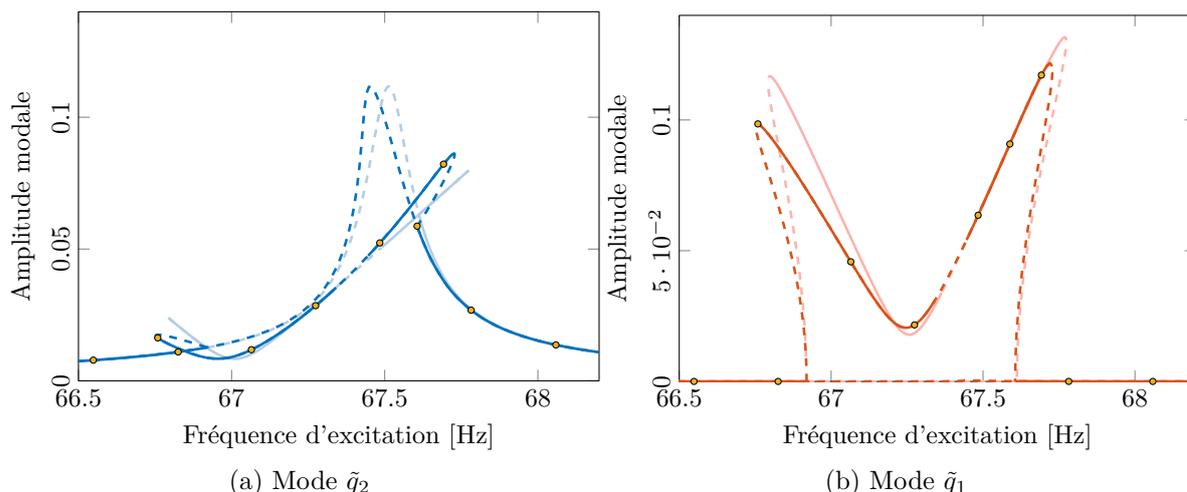


FIGURE II.11 – Réponses fréquentielles des modes de flexion et de torsion obtenues par HBM en trait foncé [—] et comparaison avec les échelles multiples en trait clair [—] et l'intégration temporelle [●]

que l'évolution des multiplicateurs de Floquet sur le cercle unité sont tracés respectivement sur les figure II.12a et II.12b. On note la présence de zones instables induites par le passage

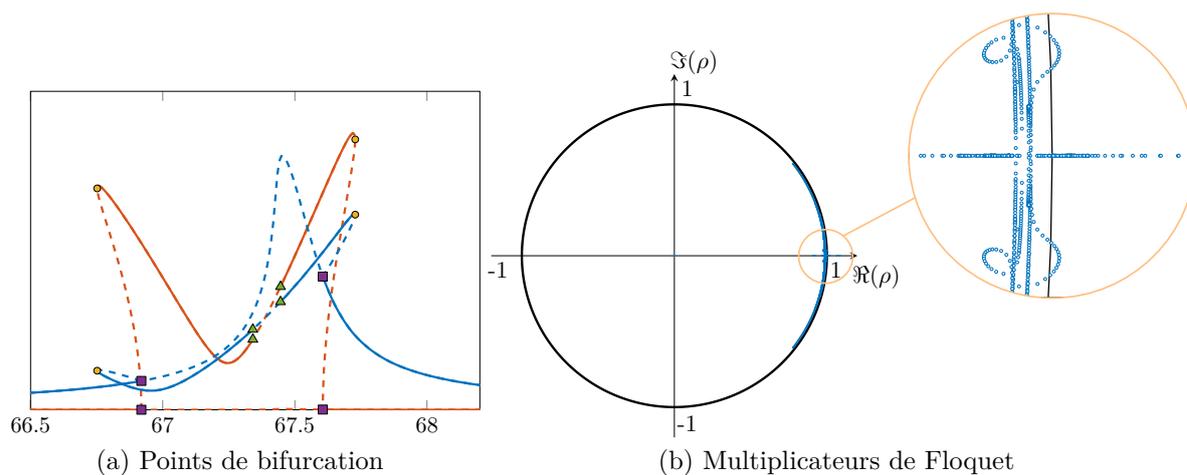


FIGURE II.12 – Étude de stabilité à l'aide des multiplicateurs de Floquet. [●] : point de retournement, [■] : point d'embranchement, [▲] : bifurcation de Hopf

de points de retournement et donnant lieu à l'apparition de solutions multiples. Remarquons également la bonne adéquation entre la présence des points d'embranchement et l'initialisation de la branche secondaire de solutions. On observe enfin la présence de bifurcations de Hopf sur la seconde branche de solutions, caractérisée par la présence de multiplicateurs complexes conjugués en dehors du cercle unité. Ces points de bifurcations délimitent une région pour laquelle aucune solution périodique stable n'existe. En revanche des solutions pseudo-périodiques apparaissent. Afin de vérifier cela, les signaux $\tilde{q}_1(t)$ et $\tilde{q}_2(t)$ obtenus par intégration temporelle dans cette région ont été tracés sur la figure II.13. Ceux-ci montrent bien le caractère pseudo-périodique de la réponse et témoignent d'un échange perpétuel d'énergie entre les deux modes.

On cherche à présent à vérifier la corrélation entre l'apparition de la seconde branche

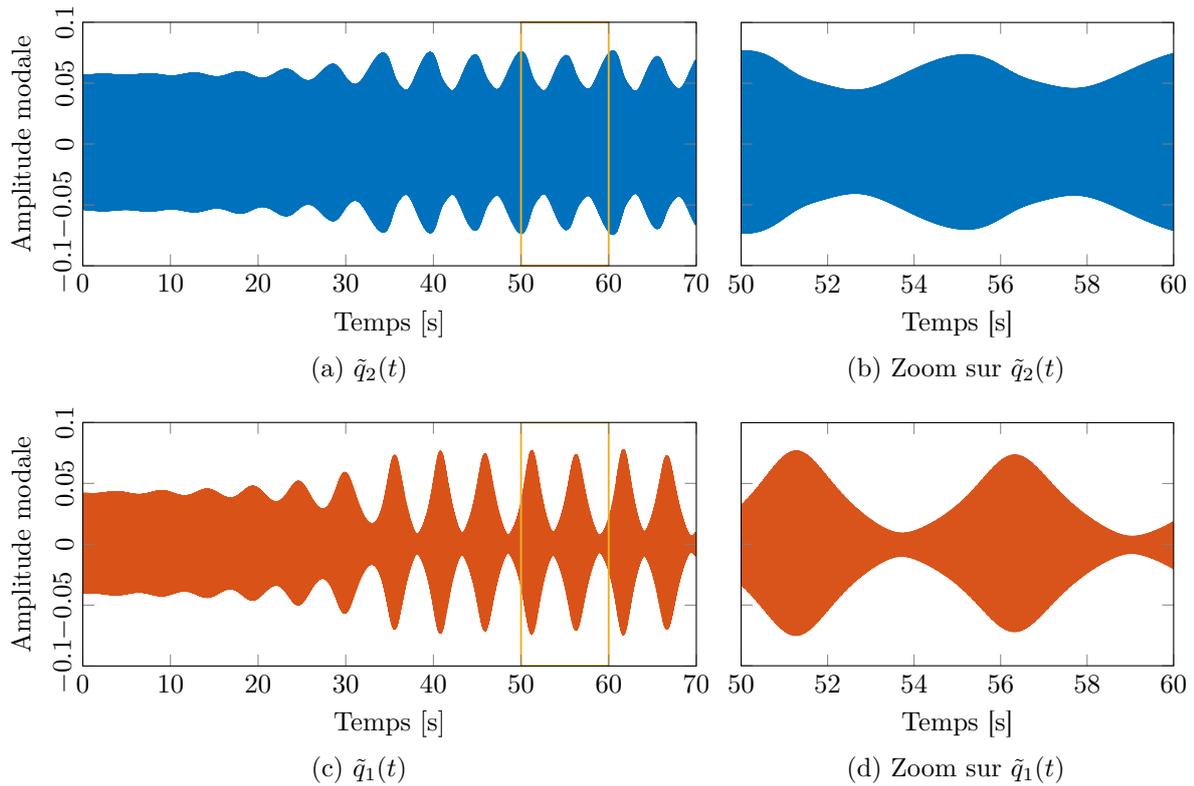


FIGURE II.13 – Résultats de l'intégration temporelle entre les deux points de bifurcation de Hopf (67,4 Hz)

de solutions et la résonance interne. Pour cela, les signaux temporels $\tilde{q}_1(t)$ et $\tilde{q}_2(t)$ ont été reconstruits à partir du calcul des coefficients harmoniques sur chacune des deux branches de solutions observées sur les réponses fréquentielles. Ces signaux, ainsi que l'amplitude des coefficients harmoniques correspondant sont représentés sur les figures II.14 et II.15 aux points (1) et (2).

Au niveau de la branche principale (point (1)), la réponse du mode \tilde{q}_2 oscille à la même fréquence que l'excitation et possède une unique composante fréquentielle selon l'harmonique 2. En parallèle, la réponse $\tilde{q}_1(t)$ est quasi nulle et répond faiblement selon les harmoniques pairs en raison du couplage non-linéaire. En revanche, au niveau de la seconde branche de solutions (point (2)), la réponse du mode \tilde{q}_1 est maintenant uniquement pilotée par l'harmonique 1. Dans ce cas, la coordonnée modale associée au premier mode vibre selon sa fréquence propre, égale à la demi-fréquence d'excitation. Le mode \tilde{q}_2 continue quant à lui de vibrer selon la fréquence d'excitation. Ainsi, chacun des deux modes vibre selon sa propre fréquence de résonance malgré une excitation autour du second mode, ce qui vient confirmer l'apparition de la résonance interne 1 : 2.

En complément de ces représentations, il est également intéressant de regarder l'impact de la résonance interne sur le comportement dynamique du système. Pour cela, on représente sur les figures II.16 et II.17 l'évolution temporelle des signaux $v(t)$ et $\phi(t)$ ainsi que le mouvement du système à un instant t_i de la période de vibration pour une fréquence d'excitation de 67,7 Hz. À cette fréquence, plusieurs solutions stables coexistent : la première appartient à la branche principale (fig II.16) tandis que la seconde se situe au niveau du second pic de résonance de la branche de bifurcation (fig II.17). Sur la branche principale, l'amplitude de vibration est assez

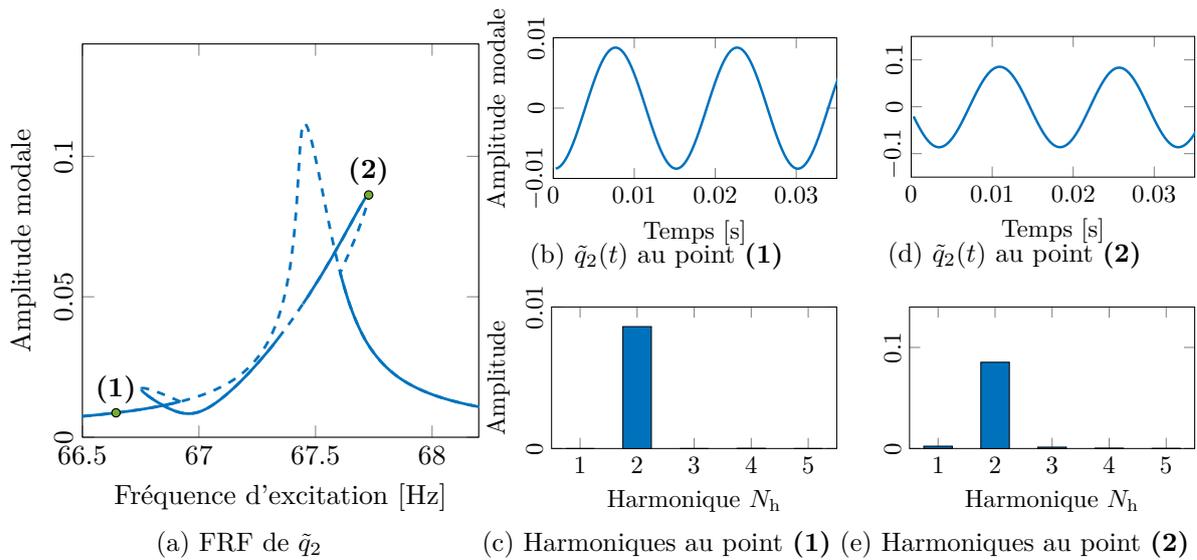


FIGURE II.14 – Signaux temporels et composantes fréquentielles de \tilde{q}_2 sur la branche principale (point (1)) et la branche secondaire (point (2))

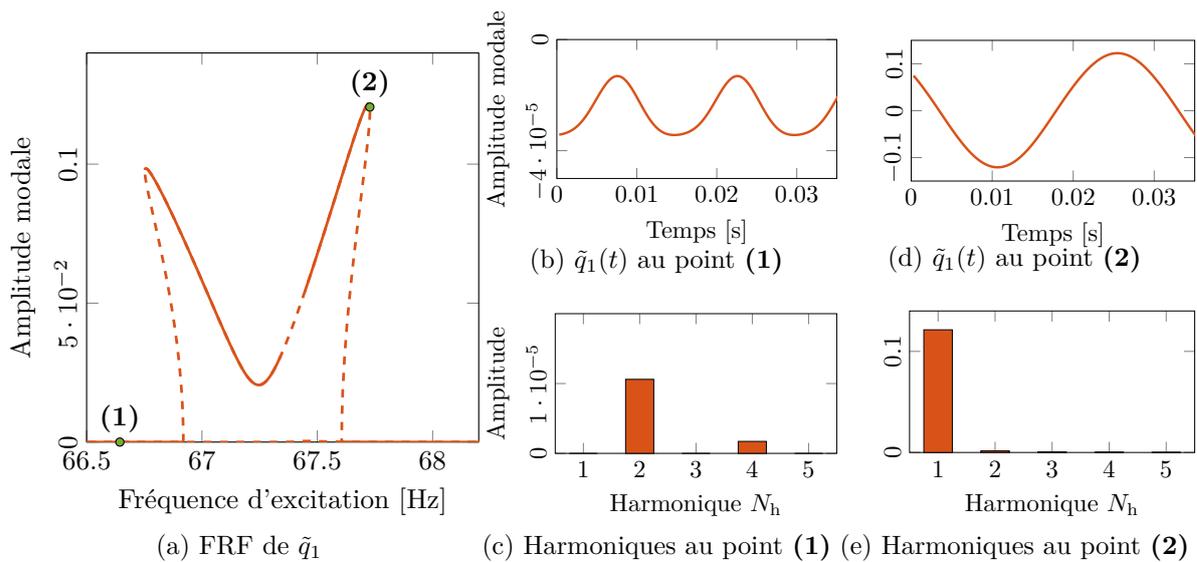
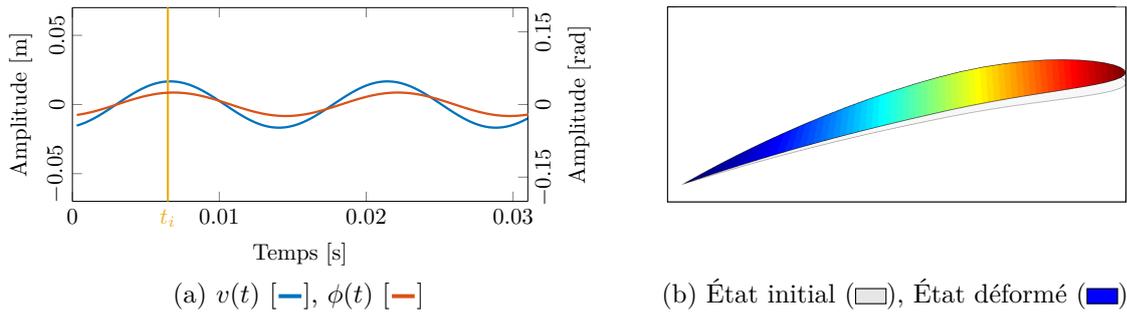
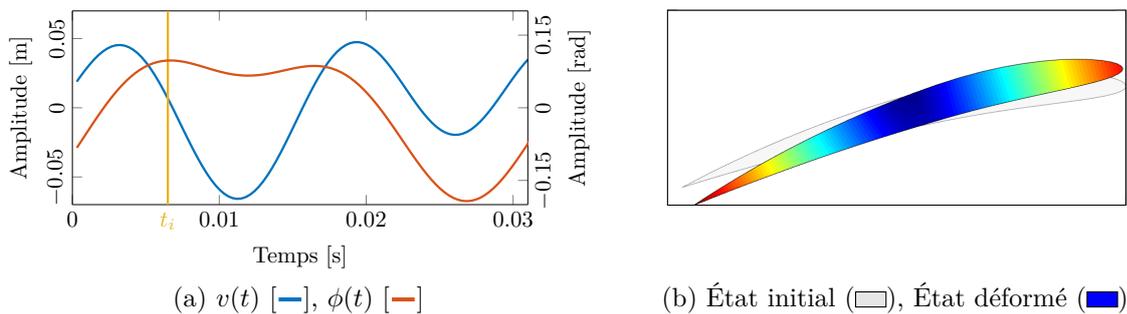


FIGURE II.15 – Signaux temporels et composantes fréquentielles de \tilde{q}_1 sur la branche principale (point (1)) et la branche secondaire (point (2))

faible et la structure vibre principalement selon le mode de flexion. A contrario, le mouvement du profil sur la branche de bifurcation montre une forte contribution en torsion en plus de la flexion. Celle-ci est due à la participation du mode de torsion induit par la résonance interne. Dans ce cas, l'amplitude de vibration peut être sensiblement supérieure à celle observée sur la branche principale.

Cet exemple illustre pour une même fréquence d'excitation, l'importante variation de la réponse dynamique de la structure en présence de résonance interne.

En conclusion, l'approche numérique reposant sur l'équilibrage harmonique constitue une alternative robuste aux approches analytiques telles que les échelles multiples. Sa précision et

FIGURE II.16 – Mouvement du profil pour $\omega = 67,7$ Hz sur la branche principaleFIGURE II.17 – Mouvement du profil pour $\omega = 67,7$ Hz sur la branche de bifurcation

sa simplicité de mise en œuvre en font un outil adapté à l'étude dynamique de systèmes avec non-linéarités géométriques. Plus précisément, cet outil semble capable de traiter avec succès des problématiques de couplage de modes par résonance interne. Plus généralement, l'exemple simplifié traité dans cette section laisse entrevoir la complexité induite par la prise en compte des termes non-linéaires dans les équations de la dynamique montrant au passage les limites d'utilisation de modèles linéaires pour étudier certains phénomènes.

Bilan du chapitre

Ce chapitre a permis d'aborder la phénoménologie des systèmes dynamiques non-linéaires. En particulier, le phénomène de résonance interne, propre à ce type de système, se définit à travers un couplage de modes dont les fréquences de résonance sont commensurables ou quasi-commensurables. Par ailleurs, la méthode fréquentielle d'équilibrage harmonique a été décrite pour la recherche de solutions périodiques de systèmes différentiels avec non-linéarités. Elle se distingue des méthodes classiques d'intégration temporelle en s'affranchissant du calcul transitoire et suppose directement la forme de la solution en régime permanent. Des outils nécessaires au calcul et au suivi des branches de solutions ont également été présentés dans ce chapitre comme la méthode AFT, la détermination des points de bifurcation ou encore les techniques de continuation. Sur ce dernier point, la méthode de branch switching permet le calcul de solutions multiples s'initiant au niveau des points d'embranchement. Cette méthode est d'autant plus importante que les solutions calculées peuvent naître d'une résonance interne.

Toutes ces notions ont été mises en application sur un modèle simplifié non-linéaire représentatif d'un couplage flexion-torsion. Ce dernier a permis de mettre en évidence la modification significative du comportement dynamique du système induit par la présence des non-linéarités. Plus particulièrement, le cas d'une résonance interne entre les modes de flexion et de torsion a

été traité et a montré qu'un mode est susceptible d'entrer en résonance malgré une fréquence propre notablement éloignée de la fréquence d'excitation. Enfin, le phénomène de saturation d'amplitude a été observé et se traduit en régime non-linéaire par un transfert d'énergie du mode autour duquel s'opère l'excitation au profit d'un autre mode en dehors de la plage d'excitation.

Dans les faits, ce type de résultat a déjà été mis en avant par le passé à travers différents exemples phénoménologiques [58, 115, 130, 131]. Cependant, rares sont les études visant à comprendre les mécanismes physiques favorisant l'apparition de phénomènes comme les résonances internes. Dans cette optique le chapitre suivant cherche à fournir des éléments de réponses à travers l'étude dynamique d'un modèle non-linéaire de poutre vrillée et courbée.

Chapitre III

Étude d'un modèle de poutre vrillée avec pré-courbure

Ce chapitre propose de caractériser la possible résonance interne d'un modèle non-linéaire de poutre incluant un pré-vrillage et une pré-courbure. La première partie du chapitre présente la modélisation et la mise en équations du modèle. Celle-ci s'appuie sur une discrétisation de Rayleigh-Ritz et une stratégie de simplification basée sur une analyse des ordres de grandeur de chacun des termes. Puis, une étude paramétrique est menée afin d'identifier les termes favorisant l'apparition de la résonance interne entre le premier mode de torsion et le second mode de flexion de la poutre. Pour cela, trois configurations du modèle initial sont générées. Enfin, une étude d'influence portant sur des paramètres géométriques et matériaux est réalisée afin d'évaluer leur impact sur la résonance interne étudiée.

Sommaire du chapitre

1 Introduction	76
2 Mise en équation du modèle	77
2.1 Configurations et systèmes de coordonnées	77
2.2 Troncature au second ordre	79
2.3 Expression du tenseur des déformations	80
2.4 Calcul des énergies du système	80
2.5 Discrétisation et équations de Lagrange	83
2.6 Validation de la modélisation	85
3 Étude paramétrique	88
3.1 Premier cas : section rectangulaire sans pré-courbure	89
3.2 Second cas : section profilée sans pré-courbure	91
3.3 Troisième cas : section rectangulaire avec pré-courbure	96
4 Étude d'influence	99
4.1 Paramètres géométriques	99
4.2 Paramètres dissipatifs	101
4.3 Vitesse de rotation	103
Bilan du chapitre	104

1 Introduction

Comme cela a été rappelé à la fin du précédent chapitre, la plupart des études menées sur les résonances internes s'intéresse au phénomène à proprement parler et ses conséquences sur la dynamique des systèmes. Néanmoins les travaux cherchant à comprendre les mécanismes physiques favorisant l'apparition de la résonance interne se font beaucoup plus rares dans la littérature. Par ailleurs, l'un des objectifs initial de ce travail de thèse est d'améliorer la maîtrise et la compréhension de la dynamique non-linéaire d'aubages de grandes dimensions.

Dans cette optique, l'objectif de ce chapitre vise à apporter des éléments de réponse à cette problématique. Pour cela, il va s'agir d'effectuer une analyse paramétrique sur un modèle de poutre non-linéaire incluant un pré-vrillage et une pré-courbure, représentatif d'une géométrie élancée telle qu'une aube de soufflante. Plus particulièrement, l'objectif est d'être en mesure d'isoler les paramètres physiques ayant une influence prépondérante sur l'émergence de la résonance interne. Dans le cadre de ce chapitre, on s'intéressera plus précisément à la résonance interne survenant entre le premier mode de torsion (1T) de la poutre et son second mode de flexion (2F). Ce choix est motivé par le fait que ces mêmes modes seront au cœur des études menées dans le prochain chapitre sur l'aubage industriel d'Open Rotor.

Afin de répondre au problème posé, il est nécessaire de se prémunir d'un modèle présentant un degré de précision suffisant et capable de tenir compte des effets non-linéaires et du couplage flexion-torsion tout en restant accessible. Ce dernier point discrimine d'emblée les modèles aux éléments finis 3D généralement de taille importante et pour lesquels l'interprétation des grandeurs physiques est plus délicate. En revanche, les modèles phénoménologiques de type poutre représentent un bon compromis entre précision, nombre de degrés de liberté et maîtrise des mécanismes physiques.

Plusieurs efforts ont été fournis pour obtenir un modèle de poutre tenant compte de la dynamique de flexion et de torsion. Houbolt et Brooks [67] ont proposé un modèle poutre incluant des équations dynamiques en torsion pour étudier le comportement d'hélices d'hélicoptère. Leurs équations finales ne tiennent toutefois pas compte des termes non-linéaires malgré la présence de ceux-ci dans les étapes intermédiaires de la modélisation. Ces travaux constituent le point de départ des futurs développements non-linéaires. Par la suite, Hodges et Dowell [64] ont établi les équations non-linéaires d'une poutre vrillée incluant un couplage flexion-torsion pour étudier la réponse dynamique et la stabilité aéroélastique de pales d'hélicoptère. Dans ces travaux, les auteurs suggèrent de ne conserver qu'un certain nombre de termes non-linéaires en s'appuyant sur une troncature au second ordre de leurs équations. Kvaternik et Kaza [92] ont ensuite proposé une autre approche pour la paramétrisation du déplacement de torsion de la poutre. Leurs équations sont similaires à celles des travaux précédents, cependant seuls les termes non-linéaires quadratiques sont conservés. Une amélioration des travaux de Hodges et Dowell a été réalisée par Rosen et Friedmann [154] proposant d'inclure certains termes du troisième ordre dans les équations. On peut également citer les développements de Crespo da Silva [24] qui a choisi d'établir les équations dynamiques à l'aide du principe de Hamilton et de conserver l'ensemble des termes non-linéaires jusqu'au troisième ordre de la troncature. Cette modélisation, plus précise, contraint néanmoins à grandement complexifier les équations. Plus récemment, Riziotis et al. [153] ont repris les travaux de Hodges et Dowell en incluant une pré-courbure initiale de la fibre neutre de la poutre pour modéliser le comportement de pales d'éolienne. Ils simplifient toutefois le modèle développé dans [64] en choisissant d'annuler le gauchissement des sections droites de la poutre. De manière générale, les travaux cités proposent une modélisation type poutre s'appuyant sur une complexification de la cinématique de la fibre neutre pour inclure les contributions non-linéaires. D'autres approches ont également été proposées pour la modélisation de poutre en grands déplacements. On pourra par exemple citer l'utilisation des

quaternions [205] ou encore le recours à une formulation mixte variationnelle [61].

Dans le cadre de ce chapitre, un modèle de poutre vrillée et pré-courbée incluant le gauchissement des sections droites a été utilisé. Celui-ci reprend l'approche de Hodges et Dowell [64], à laquelle s'ajoute la prise en compte de la pré-courbure telle qu'introduite dans les travaux de Riziotis et al. Le caractère non-linéaire de la modélisation est hérité de la prise en compte des grandes déformations de la poutre, tandis que les déplacements sont supposés modérés.

2 Mise en équation du modèle

Cette section détaille les principales étapes de la mise en équation du modèle. Dans un premier temps, la paramétrisation associée aux configurations non-déformées et déformées est introduite. Dans un second temps, les expressions des énergies du système sont établies avant d'obtenir, dans un troisième temps, les équations du mouvement de la structure après discrétisation et application des équations de Lagrange.

2.1 Configurations et systèmes de coordonnées

Soit (O, x, y, z) le système de coordonnées dans un référentiel tournant autour de l'axe z à une vitesse angulaire constante Ω . Soit une poutre de longueur L encastrée à l'origine O et dont l'autre extrémité est libre. Celle-ci subit également une rotation à la même vitesse angulaire Ω autour de l'axe z . Soit $z_e(x)$ la courbe dans le plan (O, x, z) définissant l'axe élastique de la poutre dans sa configuration initiale (voir figure III.1). On note également $\theta(x)$ le vrillage initial de la poutre, aussi appelé loi d'empilement (voir figure III.2).

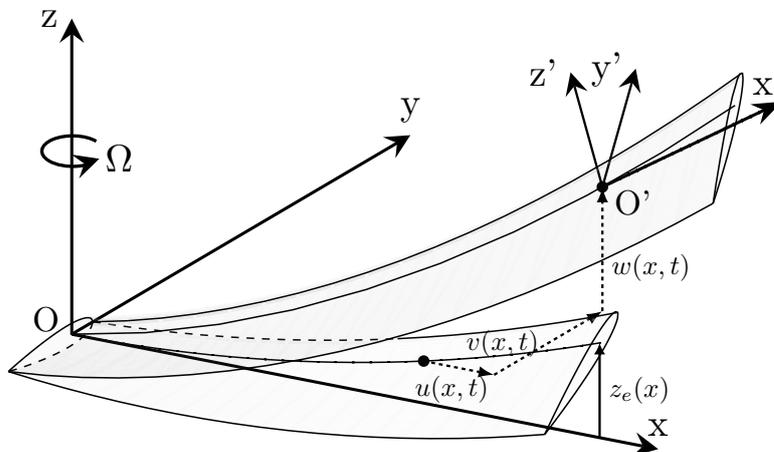


FIGURE III.1 – Configurations initiale et déformée de la poutre vrillée et pré-courbée

Les déformations de la pale sont décrites par les déplacements de son axe élastique, notés $u(x, t)$, $v(x, t)$ et $w(x, t)$ parallèles respectivement aux axes x , y et z . Ils sont tels qu'un point situé initialement à la position $(x, 0, z_e(x))$ se déplace à la position $(x + u, v, z_e(x) + w)$ après déformation. Un point dans la configuration déformée est repéré par le système de coordonnées local (O', x', y', z') . Le point O' définit le centre de cisaillement (en anglais *shear center*) de la section droite. L'axe x' est tangent à l'axe élastique de la poutre au point O' tandis que les axes y' et z' sont orientés le long des axes principaux de la section droite de la poutre. Les coordonnées selon ces axes principaux sont notées η et ζ (voir figure III.2). Afin de simplifier la

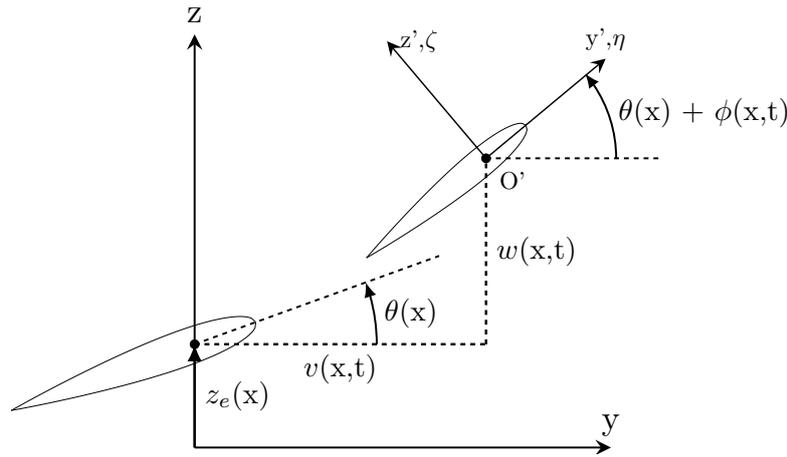


FIGURE III.2 – Section de poutre à l'extrémité libre avant et après déformations

démarche, on supposera par la suite que la section droite de la poutre possède a minima un axe de symétrie défini par l'axe y .

En plus des déplacements $u(x, t)$, $v(x, t)$ et $w(x, t)$, l'état déformé de la poutre est également décrit par l'angle de torsion $\phi(x, t)$. Celui-ci est tel que le vrillage de la poutre passe de $\theta(x)$ à l'état initial à $\theta(x) + \phi(x, t)$ à l'état déformé. Dans la suite de ce mémoire, afin d'être cohérent avec l'orientation des aubages dans une turbomachine, on supposera un vrillage en pied $\theta(x = 0) = 90^\circ$.

À partir de ces informations, le vecteur position \mathbf{r}_1 d'un point quelconque de la poutre après déformation s'obtient en sommant :

1. La position de l'axe élastique de la poutre déformée dans le repère global (O, x, y, z) : $[x + u, v, z_e + w]^T$;
2. La position relative du point vis à vis de l'axe élastique exprimée dans le repère local (O', x', y', z') : $[-\lambda(\theta + \phi)^+, \eta, \zeta]^T$.

où $(.)^+$ désigne la dérivée spatiale vis à vis de l'abscisse curviligne s parcourant l'axe élastique de la poutre déformée. Le terme $\lambda(\theta + \phi)^+$ mentionné ci-dessus caractérise une position axiale impliquant la fonction de gauchissement $\lambda(\eta, \zeta)$. Cette fonction est antisymétrique et ne dépend que des coordonnées de la section droite. Introduite par de Saint Venant dans son mémoire sur la torsion des prismes [160], la fonction de gauchissement traduit le fait que les sections planes de la poutre ne restent pas planes lors de la déformation en torsion. En pratique, cette fonction s'obtient en résolvant une équation de Laplace. Une description plus précise de cette fonction est donnée en annexe B de ce manuscrit.

En tenant compte de la description précédente, le vecteur position \mathbf{r}_1 d'un point de la poutre s'exprime ainsi dans le repère global (O, x, y, z) sous la forme,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x + u \\ v \\ w + z_e \end{bmatrix} + \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} -\lambda(\theta + \phi)^+ \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

où \mathbf{T} correspond à la matrice de passage reliant le repère global (O, x, y, z) au repère local (O', x', y', z') . Son expression ainsi que le détail de son calcul sont donnés dans l'annexe B.

2.2 Troncature au second ordre

Au cours des étapes successives de mise en équations, de très nombreux termes apparaissent dans les équations en raison de la complexité du modèle. Afin de simplifier les écritures et négliger les termes présentant une faible influence relative, une troncature au second ordre est réalisée. Le principe général de la procédure consiste à définir un paramètre sans dimension $\epsilon < 1$ supposé du même ordre de grandeur que les rapports v/L et w/L puis à exprimer chacun des termes des équations en fonction de ce paramètre. Pour ce faire, certaines hypothèses sont faites :

- Le déplacement longitudinal u est plus faible que les déplacements transverses v et w .
- La pré-courbure $z_e(x)$ est du même ordre de grandeur que les déplacements transverses v et w
- Les coordonnées η et ζ sont du même ordre que les déplacements transverses et la coordonnée x est de l'ordre de la longueur de la poutre.
- Le gauchissement λ est d'un ordre équivalent au déplacement longitudinal.
- L'angle de torsion ϕ est supposé faible, tandis que le vrillage θ est libre.

L'ensemble de ces hypothèses est résumé dans le tableau III.1 à l'aide du paramètre sans dimension ϵ .

TABLEAU III.1 – Ordres de grandeurs des variables adimensionnées du problème. $\lambda_\eta = \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}$ et

$$\lambda_\zeta = \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}$$

Grandeurs sans dimension	Ordre de grandeur
u/L	$O(\epsilon^2)$
v/L	$O(\epsilon)$
w/L	$O(\epsilon)$
ϕ	$O(\epsilon)$
x/L	$O(1)$
z_e/L	$O(\epsilon)$
η/L	$O(\epsilon)$
ζ/L	$O(\epsilon)$
λ/L^2	$O(\epsilon^2)$
λ_η/L	$O(\epsilon)$
λ_ζ/L	$O(\epsilon)$
θ	$O(1)$

La procédure de troncature au second ordre consiste alors à suivre, pour chaque expression, les étapes suivantes :

1. Adimensionnement des termes à l'aide du tableau III.1
2. Substitution des grandeurs sans dimension dans les équations
3. Identification des termes dominants (en ϵ^k avec k le plus petit possible)
4. Conservations des termes jusqu'au second ordre (en ϵ^k et ϵ^{k+1}) et suppression des termes d'ordre supérieur (ϵ^{k+2}, \dots)

Afin d'apporter plus de clarté à la procédure, un exemple d'application est fourni dans l'annexe B de ce manuscrit. La procédure de troncature est réalisée à chaque étape de la mise en équations du modèle.

2.3 Expression du tenseur des déformations

En utilisant la définition donnée dans [25], une expression générale définissant le tenseur des déformations de Green ε s'écrit,

$$\mathbf{dr}_1^T \cdot \mathbf{dr}_1 - \mathbf{dr}_0^T \cdot \mathbf{dr}_0 = 2 \begin{bmatrix} ds & d\eta & d\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x\eta} & \varepsilon_{x\zeta} \\ \varepsilon_{x\eta} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\zeta} \\ \varepsilon_{x\zeta} & \varepsilon_{\eta\zeta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ds \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

où \mathbf{dr}_1 représente la différentielle du vecteur position \mathbf{r}_1 défini précédemment (\mathbf{dr}_0 est la différentielle du vecteur position du même point avant déformation). Les variables ds , $d\eta$ et $d\zeta$ représentent des incréments le long de l'axe élastique déformé et des axes principaux de la section droite. En supposant les contraintes transverses $\sigma_{x\eta}$, $\sigma_{x\zeta}$ et de cisaillement $\sigma_{\eta\zeta}$ nulles, le développement de (III.2) et l'identification des composantes conduisent au second ordre aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & u' + \frac{1}{2} (v')^2 + \frac{1}{2} (w')^2 + w' z'_e - \lambda \phi'' + (\eta^2 + \zeta^2) \left(\theta' \phi' + \frac{1}{2} (\phi')^2 \right) \\ & - v'' [\eta \cos(\theta + \phi) - \zeta \sin(\theta + \phi)] - (w'' + z''_e) [\eta \sin(\theta + \phi) + \zeta \cos(\theta + \phi)] \\ & + z''_e [\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta] \end{aligned} \quad (\text{III.3a})$$

$$\varepsilon_{x\eta} = -(\zeta + \lambda_\eta) \phi' \quad (\text{III.3b})$$

$$\varepsilon_{x\zeta} = (\eta - \lambda_\zeta) \phi' \quad (\text{III.3c})$$

Notons tout d'abord la suppression au second ordre des composantes $\varepsilon_{x\eta}$, $\varepsilon_{x\zeta}$ et $\varepsilon_{\eta\zeta}$. Celles-ci présentent en effet un ordre de grandeur plus faible que l'ordre de la troncature. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer la présence de termes inhabituels dans l'expression (III.3a), impliquant les termes de vrillage ϕ , de gauchissement λ et de pré-courbure z_e . On retrouve en revanche des expressions similaires à celles rencontrées dans les problèmes de torsion de Saint-Venant pour les composantes $\varepsilon_{x\eta}$ et $\varepsilon_{x\zeta}$. Enfin, le terme d'ordre supérieur, $(\eta^2 + \zeta^2) \phi'^2$ dans l'équation (III.3a) est conservé en dépit de la troncature au second ordre car permet de maintenir un couplage tension-torsion dans les équations du mouvement (voir [64]).

Le lecteur souhaitant retrouver les expressions (III.3a), (III.3b) et (III.3c) pourra se référer à l'annexe B au sein de laquelle sont fournies les expressions complètes des composantes du tenseur des déformation et y appliquer la procédure de troncature au second ordre rappelée dans la section précédente.

2.4 Calcul des énergies du système

Similairement à la démarche employée dans la section I.2.2, le calcul des énergies du système va permettre l'application des équations de Lagrange après une étape de discrétisation des inconnus u , v , w et ϕ du problème.

2.4.1 Énergie potentielle

En considérant le modèle isotrope, homogène et une loi matériau de Hooke standard linéaire, l'expression générale de l'énergie potentielle de déformation s'écrit :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} E \varepsilon_{xx}^2 + G \varepsilon_{x\eta}^2 + G \varepsilon_{x\zeta}^2 d\Omega \quad (\text{III.4})$$

où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ correspond au module de cisaillement de la poutre. En introduisant les expressions (III.3a), (III.3b) et (III.3c) dans l'équation (III.4) et en s'appuyant sur les propriétés de symétrie de la section droite et d'antisymétrie de la fonction de gauchissement, l'énergie potentielle de déformation s'écrit au second ordre,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} = & \frac{1}{2} \int_0^L EA \left[u'^2 + \frac{1}{4}v'^4 + \frac{1}{4}w'^4 + u'v'^2 + u'w'^2 + \frac{1}{2}(v'w')^2 + (w'z'_e)^2 + (2u' + v'^2 + w'^2)w'z'_e \right] \\
& - EAe_\eta [v''(\cos\theta - \phi\sin\theta) + w''(\sin\theta + \phi\cos\theta) + z''_e\phi\cos\theta] (2u' + v'^2 + w'^2 + 2w'z'_e) \\
& + E Ak_A^2 \left(\theta'\phi' + \frac{1}{2}\phi'^2 \right) (2u' + v'^2 + w'^2 + 2w'z'_e) \\
& + EI_{z'} \left[\frac{1}{2}v''^2 (1 + \cos(2\theta) - 2\phi\sin(2\theta)) + \frac{1}{2}w''^2 (1 - \cos(2\theta) + 2\phi\sin(2\theta)) \right. \\
& \left. + v''w'' (\sin(2\theta) + 2\phi\cos(2\theta)) + v''z''_e\phi (1 + \cos(2\theta)) + w''z''_e\phi\sin(2\theta) + \frac{1}{2}(z''_e\phi)^2 (1 + \cos(2\theta)) \right] \\
& + EI_{y'} \left[\frac{1}{2}v''^2 (1 - \cos(2\theta) + 2\phi\sin(2\theta)) + \frac{1}{2}w''^2 (1 + \cos(2\theta) - 2\phi\sin(2\theta)) \right. \\
& \left. - v''w'' (\sin(2\theta) + 2\phi\cos(2\theta)) + v''z''_e\phi (1 - \cos(2\theta)) - w''z''_e\phi\sin(2\theta) + \frac{1}{2}(z''_e\phi)^2 (1 - \cos(2\theta)) \right] \\
& + 2EC_1^*\phi'' [-v''\sin\theta + w''\cos\theta] + 2EB_2^*(\theta'\phi') [-v''\cos\theta - w''\sin\theta] \\
& + \underline{EB_1^*(\theta'\phi')^2} + \underline{EC_1\phi''^2} + GJ\phi'^2 dx
\end{aligned} \tag{III.5}$$

où les constantes suivantes ont été introduites

$$\begin{aligned}
A &\equiv \iint_A d\eta d\zeta & Ak_A^2 &\equiv \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \\
I_{y'} &\equiv \iint_A \zeta^2 d\eta d\zeta & I_{z'} &\equiv \iint_A \eta^2 d\eta d\zeta \\
Ae_\eta &\equiv \iint_A \eta d\eta d\zeta & B_1^* &\equiv \iint_A (\eta^2 + \zeta^2)^2 d\eta d\zeta \\
J &\equiv \iint_A (\eta - \lambda_\zeta)^2 + (\zeta + \lambda_\eta)^2 d\eta d\zeta & C_1^* &\equiv \iint_A \zeta\lambda d\eta d\zeta \\
B_2^* &\equiv \iint_A \eta(\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta & C_1 &\equiv \iint_A \lambda^2 d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{III.6}$$

Parmi ces constantes, on distingue certains termes usuels tels que les moments quadratiques $I_{y'}$ et $I_{z'}$ selon les axes principaux de la section droite et le moment quadratique polaire Ak_A^2 . Remarquons également l'existence de termes induits par la présence du gauchissement λ tels que la constante de torsion J , la rigidité de torsion C_1 ainsi que la constante C_1^* . On remarque ici toute l'importance de disposer d'une expression analytique de la fonction de gauchissement sans laquelle le calcul des constantes C_1 et C_1^* devient beaucoup plus difficile. Le terme e_η caractérise quant à lui la distance selon l'axe y' entre le centre géométrique de la section droite et le centre de cisaillement (ou l'axe élastique). Enfin, les constantes B_1^* et B_2^* doivent leur présence à la prise en compte du vrillage dans la poutre.

Certains termes d'ordre supérieur ont été conservés malgré la troncature au second ordre. Ces termes (soulignés dans l'expression (III.6)) doivent être maintenus dans l'approximation afin de garantir une meilleure évaluation des modes de torsion et de leur évolution en fonction des effets centrifuges dans la poutre comme expliqué dans [64].

2.4.2 Énergie cinétique

L'expression générale de l'énergie cinétique s'écrit,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (\text{III.7})$$

où la vitesse \mathbf{v} exprimée dans le repère d'inertie se décompose en une vitesse relative dans le référentiel tournant et une vitesse d'entraînement telle que,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\Omega} = [0 \ 0 \ \Omega]^T \quad (\text{III.8})$$

avec \mathbf{r}_1 la troncature au second ordre du vecteur position fourni par l'expression (III.1). En substituant (III.8) dans (III.7) et en utilisant à nouveau les propriétés de symétrie dans la poutre, l'expression de l'énergie cinétique au second ordre est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} \int_0^L m \left[\underline{\dot{u}^2} + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \underline{(k_{m_1}^2 + k_{m_2}^2)} \dot{\phi}^2 - 2e\dot{v}\dot{\phi} \sin \theta + 2e\dot{w}\dot{\phi} \cos \theta \right] \\ & + m\Omega \left[-2\dot{u}(v + e \cos \theta) + 2\dot{v}'(ve \cos \theta + k_{m_2}^2 \cos^2 \theta + k_{m_1}^2 \sin^2 \theta) \right. \\ & + 2\dot{w}'(ve \sin \theta (k_{m_2}^2 - k_{m_1}^2) \cos \theta \sin \theta) + 2\dot{v}u - 2e\dot{v}v' \cos \theta \\ & \left. - 2e\dot{v}w' \sin \theta - 2x\dot{\phi}e(\sin \theta + \phi \cos \theta) - 2\dot{v}z'_e \sin \theta \right] \\ & + m\Omega^2 \left[v^2 + 2ve(\cos \theta - \phi \sin \theta) + 2xu - 2xz'_e e(\sin \theta + \phi \cos \theta) \right. \\ & + \frac{k_{m_2}^2}{2} \left(1 + (1 - \underline{2\phi^2}) \cos(2\theta) - 2\phi \sin(2\theta) \right) - 2xv'e(\cos \theta - \phi \sin \theta) \\ & \left. + \frac{k_{m_1}^2}{2} \left(1 - (1 - \underline{2\phi^2}) \cos(2\theta) + 2\phi \sin(2\theta) \right) - 2xw'e(\sin \theta + \phi \cos \theta) \right] dx \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

où les constantes suivantes ont été introduites :

$$\begin{aligned} m &\equiv \iint_A \rho \, d\eta \, d\zeta & mk_{m_1}^2 &\equiv \iint_A \rho \zeta^2 \, d\eta \, d\zeta \\ e &\equiv \frac{1}{m} \iint_A \rho \eta & mk_{m_2}^2 &\equiv \iint_A \rho \eta^2 \, d\eta \, d\zeta \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

Parmi ces grandeurs on retrouve la masse linéique m de la poutre ainsi que les moments d'inertie ($k_{m_1}^2$ et $k_{m_2}^2$) selon les axes principaux de la section droite. Leur somme correspond au moment polaire d'inertie. Enfin, la constante e représente la distance entre le centre de gravité de la section droite et son centre de cisaillement. Dans le cas où le matériau est homogène, le centre géométrique est confondu avec le centre de gravité, soit $e_\eta = e$ où e_η a été défini par (III.6).

À nouveau, certains termes (soulignés dans (III.9)) sont conservés en dépit d'un ordre de grandeur plus importants. Les deux premiers garantissent la définie-positivité de la matrice

de masse \mathbf{M} tandis que les deux autres permettent une meilleure évaluation de la matrice d'assouplissement centrifuge \mathbf{N} .

2.4.3 Travail des efforts extérieurs

En notant $\mathbf{u} = [u, v, w, \phi]$ et en négligeant les forces volumiques comme le poids de la poutre, l'expression du travail des efforts extérieurs agissant sur la poutre se réduit au travail des efforts surfaciques et s'écrit sous la forme

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (\text{III.11})$$

Dans les sections suivantes, les efforts extérieurs \mathbf{t} seront considérés sous la forme de forces ponctuelles et harmoniques appliquées transversalement à la poutre. Ainsi, pour une force appliquée en $x = x_i$, le travail des efforts extérieurs devient,

$$\mathcal{W} = v(x_i) f_0 \cos(\omega t) \quad (\text{III.12})$$

où ω et f_0 sont respectivement la pulsation et l'amplitude de l'excitation.

2.4.4 Homogénéisation des ordres de grandeur

À ce stade, la troncature au second ordre des énergies cinétique et potentielle a été opérée de manière indépendante. De ce fait, on notera que les termes dominants de l'énergie potentielle sont d'ordre 4 tandis que l'ordre principal des termes de l'énergie cinétique est égal à 2. Afin de manipuler le Lagrangien du système, il est nécessaire d'évaluer l'ordre relatif entre les termes d'inertie et les termes structuraux. Dans cette optique, le rapport entre ces termes est exprimé sous la forme de l'expression sans dimension suivante,

$$\frac{m\Omega^2 L^2}{EA} = O(\epsilon^2) \quad (\text{III.13})$$

Ce terme est assimilable au rapport entre l'énergie cinétique de rotation et l'énergie de traction-compression à l'extrémité libre de la poutre. Il découle directement de (III.13) une augmentation d'un ordre $O(\epsilon^2)$ de chacun des termes de l'énergie cinétique. Cette opération garantit une équivalence entre les ordres de grandeur retenus dans l'énergie cinétique et ceux retenus dans l'énergie potentielle.

2.5 Discrétisation et équations de Lagrange

L'établissement des équations matricielles du mouvement passe par une étape de discrétisation. Dans le cas présent, cette discrétisation est réalisée à l'aide d'une approximation de Rayleigh-Ritz telle que les déplacements décrits précédemment sont approximés sous la forme

suivante

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{i=1}^{N_u} f_u^i(x) q_u^i(t) = \mathbf{f}_u^T \mathbf{q}_u \\
v(x, t) &= \sum_{j=1}^{N_v} f_v^j(x) q_v^j(t) = \mathbf{f}_v^T \mathbf{q}_v \\
w(x, t) &= \sum_{k=1}^{N_w} f_w^k(x) q_w^k(t) = \mathbf{f}_w^T \mathbf{q}_w \\
\phi(x, t) &= \sum_{l=1}^{N_\phi} f_\phi^l(x) q_\phi^l(t) = \mathbf{f}_\phi^T \mathbf{q}_\phi
\end{aligned} \tag{III.14}$$

où f_u^i (respectivement f_v^j , f_w^k et f_ϕ^l) sont des fonctions d'interpolation cinématiquement admissibles pondérées par les coordonnées généralisées q_u^i (respectivement q_v^j , q_w^k et q_ϕ^l). Les entiers N_u , N_v , N_w et N_ϕ correspondent au nombre de fonctions de Ritz choisies pour l'approximation des déplacements u , v , w et de l'angle ϕ . Afin de satisfaire la condition cinématique d'encastrement en $x = 0$, les fonctions d'approximation polynomiales suivantes ont été introduites

$$\begin{aligned}
f_u^i(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^i & i \in \llbracket 1, N_u \rrbracket \\
f_v^j(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^{j+1} & j \in \llbracket 1, N_v \rrbracket \\
f_w^k(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^{k+1} & k \in \llbracket 1, N_w \rrbracket \\
f_\phi^l(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^{l+1} & l \in \llbracket 1, N_\phi \rrbracket
\end{aligned} \tag{III.15}$$

Elles présentent un bon compromis entre simplicité d'intégration et précision de calcul. Nous verrons par la suite qu'il suffit d'un nombre assez faible de fonctions d'approximation pour atteindre un niveau de convergence suffisant. D'autres fonctions d'approximation telles que les déformées propres des modes de traction-compression, flexion et torsion d'une poutre encastree libre peuvent également être utilisées. Elles permettent un gain en précision tout en considérant moins de fonctions que pour l'approximation polynomiale. Toutefois, elles introduisent des fonctions trigonométriques et hyperboliques dans l'approximation, pouvant rendre l'intégration plus complexe. Par ailleurs, le choix d'une discrétisation à l'aide d'éléments finis de type poutre est également envisageable. Cependant, il est nécessaire dans ce cas de considérer pour chaque nœud d'un élément les déplacements u , v , w et ϕ mais aussi leur dérivé spatiale respective pour assurer un bon niveau de convergence. Ceci conduit à prendre en compte 8 inconnues par nœuds ou 16 inconnues par élément menant rapidement à des systèmes de taille plus importante que pour l'approximation de Rayleigh-Ritz.

Une fois la discrétisation effectuée, les équations de Lagrange s'écrivent,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, N_u + N_v + N_w + N_\phi \tag{III.16}$$

avec $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} + \mathcal{W}$. L'application des équations (III.16) pour chacune des coordonnées généralisées conduit à l'équation différentielle non-linéaire du mouvement suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{f}^\Omega + \mathbf{f}^{\text{ext}} \tag{III.17}$$

où

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}^{\text{q}}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}^{\text{c}}(\mathbf{q}) \quad (\text{III.18})$$

et avec

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad K_{ijk}^{\text{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}, \quad K_{ijkl}^{\text{c}} = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \mathcal{V}}{\partial q_i \partial q_j \partial q_k \partial q_l} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \right) \\ G_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \right) \\ N_{ij} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \right) \\ f_i^{\Omega} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} \right) \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}} \\ f_i^{\text{ext}} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

On retrouve dans l'équation (III.17) les matrices explicitées dans la section I.2 de ce manuscrit à savoir les matrices gyroscopique \mathbf{G} et d'assouplissement centrifuge \mathbf{N} introduites par la rotation de la pale ainsi que le vecteur des efforts centrifuges \mathbf{f}^{Ω} . On retrouve également les tenseurs d'ordre 3 et 4, \mathbf{K}^{q} et \mathbf{K}^{c} , correspondant aux raideurs quadratiques et cubiques et liées aux déformations non-linéaires de la poutre.

2.6 Validation de la modélisation

Les sections précédentes ont permis d'établir au second ordre l'équation du mouvement non-linéaire d'une poutre vrillée, homogène, isotrope et présentant une pré-courbure. Avant de mettre à profit ces développements pour des études dynamiques d'interactions modales, cette section propose de valider la modélisation de la poutre.

On considère dans un premier temps la poutre droite (sans vrillage ni pré-courbure) à rotation nulle et possédant une section droite rectangulaire d'aire $l \times h$. Les paramètres choisis pour construire ce modèle sont donnés dans le tableau III.2.

TABLEAU III.2 – Paramètres de la poutre droite utilisée pour valider la modélisation

Géométrie			Matériau	
Longueur L [m]	Largeur l [m]	Hauteur h [m]	ρ [kg m ⁻³]	E [GPa]
1.3	0.4	0.04	1550	100

Les sept premières fréquences propres obtenues pour le modèle poutre sont comparées dans le tableau III.3 avec celles obtenues à partir de la théorie d'Euler-Bernoulli et dont les formules analytiques sont disponibles dans l'ouvrage de Blevins [10]. Celles-ci ont été calculées en considérant 6 fonctions par déplacements dans l'approximation de Rayleigh-Ritz ($N_u = N_v = N_w = N_\phi = 6$). Les fréquences propres obtenues pour le modèle poutre correspondent quasi parfaitement avec les fréquences propres théoriques et présentent une erreur relative très inférieure au pourcent.

Une seconde étape de validation est réalisée en considérant cette fois le vrillage, la pré-courbure et la rotation de la poutre. Sa section droite est à nouveau choisie rectangulaire et

TABLEAU III.3 – Comparaison des fréquences propres de la poutre droite

Modes	Théorie Euler-Bernoulli [Hz]	Modèle poutre [Hz]	Erreur relative [%]
1	30.71	30.71	$8,13 \times 10^{-9}$
2	185.25	185.25	$1,87 \times 10^{-9}$
3	192.46	192.46	$1,39 \times 10^{-3}$
4	307.11	307.11	$8,13 \times 10^{-9}$
5	538.89	539.06	$3,09 \times 10^{-2}$
6	555.75	555.75	$6,87 \times 10^{-4}$
7	926.25	927.58	$1,44 \times 10^{-1}$

les paramètres utilisés pour générer le modèle sont donnés dans le tableau III.4. Les éléments propres du modèle poutre sont comparés avec ceux d'un modèle éléments finis généré sur **Ansys** (considéré comme la référence) et représenté par la figure III.3. Afin d'assurer une convergence modale, la discrétisation du modèle est effectuée à l'aide d'éléments 3D en considérant 20 éléments dans le sens de la longueur et 10×2 éléments par section droite soit 14405 degrés de liberté au total. Sur **Ansys** l'analyse modale s'effectue directement après avoir calculé la position d'équilibre de la poutre en rotation. Pour le modèle poutre, le calcul des éléments propres est réalisé à l'aide la procédure rappelée dans la section I.2.3 à savoir calcul de la position d'équilibre statique puis résolution du problème aux valeurs propres généralisé.

TABLEAU III.4 – Paramètres de la poutre vrillée et pré-courbée utilisée pour valider la modélisation

Géométrie			Matériau		Vrillage	Pré-courbure	
L [m]	w [m]	h [m]	ρ [kg m^{-3}]	E [GPa]	ν	$\theta(x)$	$z_e(x)$
1.3	0.4	0.04	1550	100	0.3	$\frac{\pi}{2} + \frac{x}{L} \frac{\pi}{6}$	$0.1x^2$

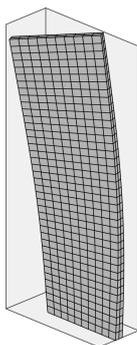


FIGURE III.3 – Modèle EF utilisé pour valider la modélisation poutre

L'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation Ω pour le modèle poutre avec 4, 5 et 6 fonctions par déplacement et le modèle **Ansys** est représentée par la figure III.4. Notons tout d'abord la convergence rapide en fonction du nombre de fonctions d'interpolation. On choisira par la suite 6 fonctions par déplacements. De plus, une bonne corrélation entre les deux modèles est observable, en particulier pour les premiers modes. Par ailleurs, l'allure générale de l'évolution des fréquences est correctement prédite par le modèle poutre. Cela est d'autant plus remarquable au niveau de la zone de veering autour de 4000 RPM entre le second mode (mode 2F en orange [—]) et le troisième mode (mode 1T en jaune [—]).

Ces observations sont complétées par la visualisation des déformées propres des modes 1T et 2F avec et sans vitesse de rotation. Les figures III.5 et III.6 illustrent les déformées pour $\Omega = 0$ RPM et $\Omega = 5000$ RPM pour le modèle poutre et le modèle EF. À nouveau, une excellente corrélation est observable entre les deux modèles pour lesquels les déformés propres sont sensiblement similaires. Cela est d'autant plus appréciable au niveau de la zone de veering à 5000 RPM pour laquelle la modélisation poutre capte avec précision le couplage entre les modes 1T et 2F.

Les observations effectuées lors de cette étape de validation montre la très bonne restitution des propriétés modales du modèle poutre vis à vis du modèle éléments finis faisant office de référence. De même les analyses en rotation assurent une bonne prise en compte des calculs statiques liés à la précontrainte centrifuge. Enfin, les très bonnes corrélations sur les modes 1T et 2F font du modèle poutre un candidat intéressant pour des études dynamiques de couplage entre ces deux modes.

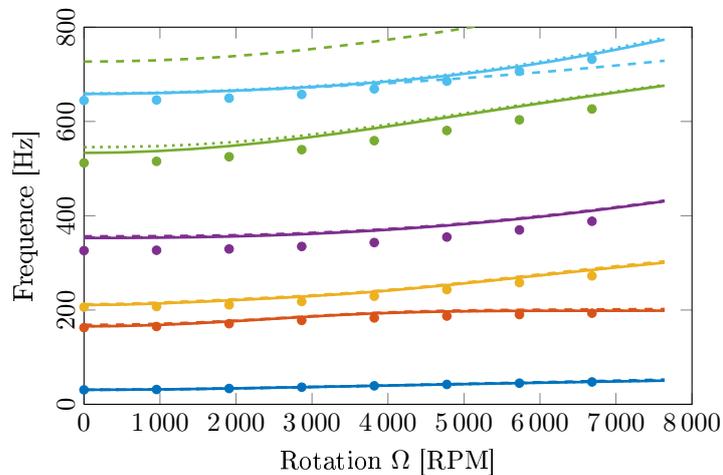


FIGURE III.4 – Diagramme de Campbell pour la second étape de validation : modèle poutre 4 fonctions [- -], 5 fonctions [...], 6 fonctions [—], Ansys [•]

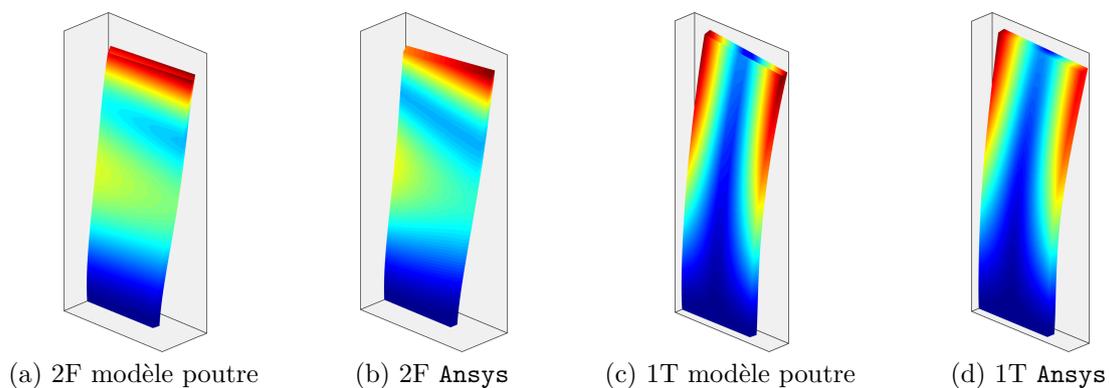


FIGURE III.5 – Déformées propres du 1^{er} mode de torsion (1T) et du 2nd mode de flexion (2F) à $\Omega = 0$ RPM. Pour le modèle poutre, les déformées sont obtenues en post-traitement à l'aide de l'équation (III.1)

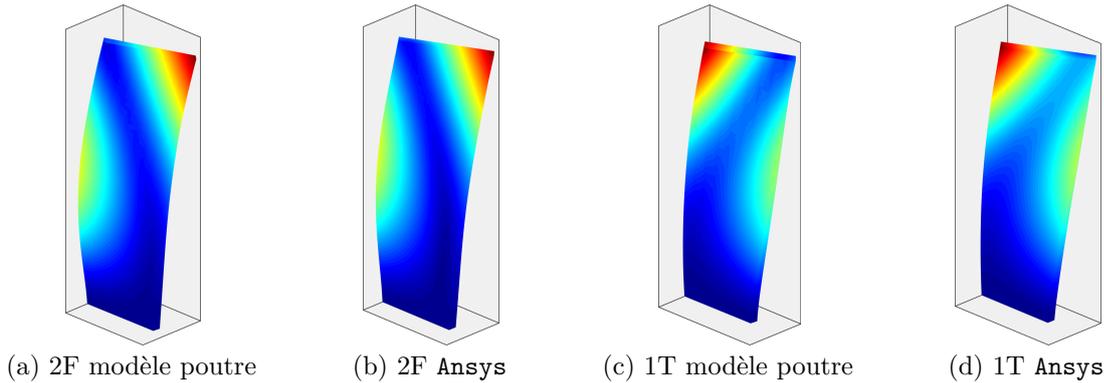


FIGURE III.6 – Déformées propres du 1^{er} mode de torsion (1T) et du 2nd mode de flexion (2F) à $\Omega = 5000$ RPM

3 Étude paramétrique

La section précédente a permis d'établir au second ordre l'équation du mouvement de la poutre vrillée en rotation avec pré-courbure. Comme rappelé dans l'introduction de ce chapitre, l'objectif est ici de mettre en évidence les éléments et caractéristiques de la poutre responsables de l'apparition d'une résonance interne entre les modes 1T et 2F. Pour réaliser cette analyse, trois configurations sont étudiées. Elles varient selon la géométrie de leur section droite, ainsi que leur niveau de pré-courbure initial. Les deux premiers cas considèrent une poutre sans pré-courbure. Ils possèdent respectivement une section droite rectangulaire et profilée (type NACA). Ces géométries ont été choisies en raison de la disponibilité d'une expression analytique de la fonction de gauchissement (voir annexe B) garantissant une meilleure évaluation des grandeurs du problème. Le troisième cas étudié intègre la pré-courbure avec une section droite rectangulaire.

Pour chacune des configurations, une étape de recalage a été effectuée de manière à garantir une quasi-commensurabilité entre les fréquences propres des modes 1T et 2F ($\omega_{2F} \simeq 2\omega_{1T}$). Dans une volonté de se rapprocher de la réalité physique, ces fréquences propres ont été choisies proches de celles obtenues expérimentalement et numériquement sur une configuration encastree libre d'aubage de soufflante de l'Open Rotor (voir chapitre IV).

Les paramètres obtenus après recalage sont rassemblés pour chacune des géométries dans le tableau III.5. Dans chacun des cas, on considère un vrillage initial défini par $\theta(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{L} \frac{\pi}{18}$ et on suppose pour le moment une rotation nulle de la poutre.

TABLEAU III.5 – Paramètres géométrique et matériau utilisés pour les 3 géométries de poutre étudiées.

Cas	Géométrie				Matériau			Pré-courbure
	Section droite	L [m]	w [m]	h [m]	ρ [kg m ⁻³]	E [GPa]	ν	$z_e(x)$
1	rectangle	1.3	0.97	0.065	1550	3.8	0.4	0
2	profil	1.2	1.1	0.12	1550	1.6	0.4	0
3	rectangle	1.2	0.96	0.065	1550	3.8	0.4	$0.1x^2$

Les trois configurations générées sont représentées par la figure III.7 et les fréquences propres obtenues après recalage sont données à titre indicatif dans le tableau III.6.

Dans la suite, la stratégie adoptée consiste pour chaque cas à vérifier l'apparition d'une résonance interne 1 : 2 entre les deux modes étudiés puis à déterminer les paramètres physiques

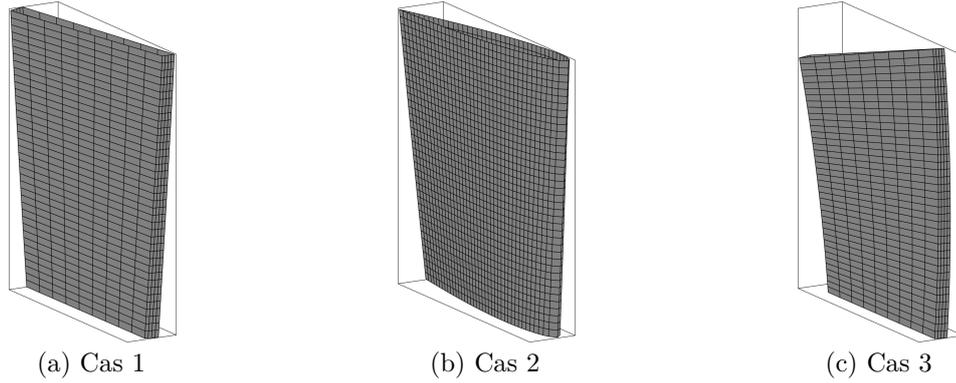


FIGURE III.7 – Représentation des 3 géométries de poutres utilisées pour réaliser l'étude paramétrique sur la résonance interne 1T/2F

TABEAU III.6 – Fréquences propres des modes 1T et 2F pour les trois géométries recalées

Cas	Mode 1T [Hz]	Mode 2F [Hz]	Ratio 2F/1T
1	35.024	70.433	2.011
2	34.386	69.109	2.010
3	35.195	70.407	2.001

pilotant directement l'apparition du phénomène. Les résultats présentés dans les sections suivantes ont fait l'objet d'une soumission à comité de lecture pour une revue internationale [30].

3.1 Premier cas : section rectangulaire sans pré-courbure

On considère pour ce premier cas une poutre vrillée à section rectangulaire ne possédant pas de pré-courbure initiale. Afin d'étudier une interaction modale entre les mode 1T et 2F, la poutre est excitée harmoniquement autour de son second mode de flexion. L'effort imposé est considéré ponctuel à l'extrémité libre de la poutre comme indiqué précédemment. Un amortissement de Rayleigh est introduit dans le modèle en imposant des taux d'amortissement des modes 1T et 2F, ξ_{1T} et ξ_{2F} égaux tout deux à 0,05 %. La réponse harmonique de la poutre est calculée à l'aide de la méthode de l'équilibrage harmonique en considérant $N_h = 5$ harmoniques. De façon similaire à ce qui a été effectué dans le chapitre II, l'harmonique fondamental de la HBM est décalé de sorte de pouvoir observer les composantes fréquentielles à la pulsation $\omega/2$. Rappelons que cette procédure a pour but de visualiser la réponse du mode 1T dont la fréquence propre est proche de la demi fréquence du mode 2F.

Dans la suite, cherchant à mettre en évidence l'apparition de modes, l'équation du mouvement (III.17) portant sur les coordonnées généralisées sera projetée sur la base modale Ψ à l'aide de la projection :

$$\mathbf{q} = \Psi \tilde{\mathbf{q}} \quad (\text{III.21})$$

L'analyse HBM viendra ensuite être directement effectuée sur les coordonnées modales. Il sera ainsi plus facile de visualiser l'apparition du mode 1T à travers la coordonnée modale \tilde{q}_{1T} en plus du mode 2F de coordonnée modale \tilde{q}_{2F} .

La réponse fréquentielle des coordonnées modales \tilde{q}_{2F} et \tilde{q}_{1T} est représentée par la figure III.8 pour un effort d'excitation croissant de 50 N à 200 N. Notons en premier lieu le caractère assouplissant des réponses avec des pics penchés vers les basses fréquences. Cette propriété est observable aussi bien pour le mode 2F (figure III.8a) que pour le mode 1T (figure III.8b) avec

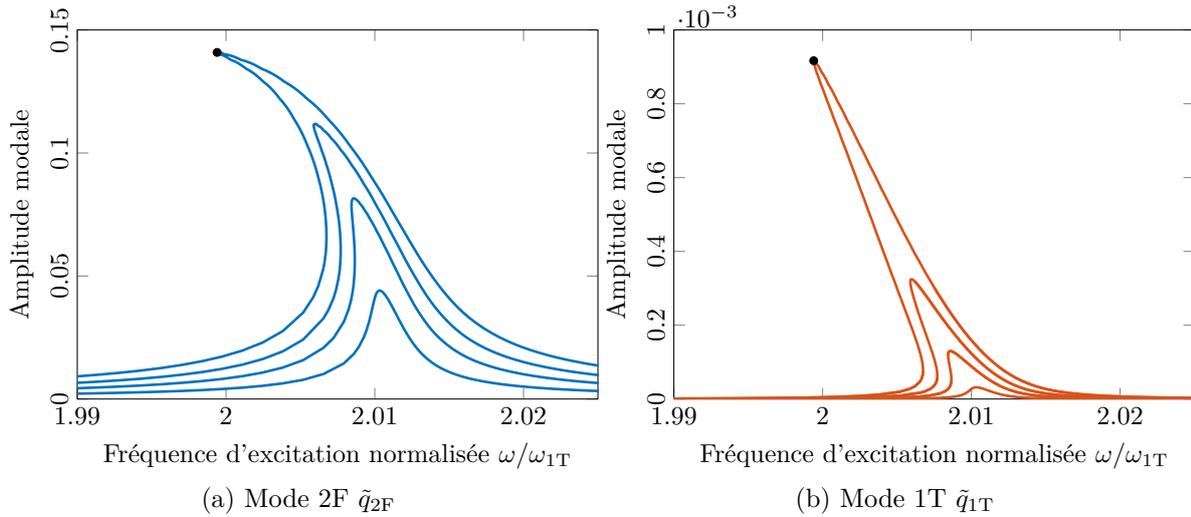


FIGURE III.8 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = [50\text{ N}, 100\text{ N}, 150\text{ N}, 200\text{ N}]$ pour le premier cas d'étude

toutefois une amplitude 100 fois plus faible pour ce dernier.

La très faible amplitude observée pour le mode 1T résulte d'un couplage non-linéaire qui n'est en aucun cas lié à la présence d'une résonance interne. Pour s'en convaincre, regardons les signaux temporels $\tilde{q}_{1T}(t)$ et $\tilde{q}_{2F}(t)$ au niveau des pics de résonance ([•] sur la figure III.8) représentés par la figure III.9. Ceux-ci montrent que la fréquence d'oscillation du signal $\tilde{q}_{2F}(t)$ est deux fois plus petite que celle du signal $\tilde{q}_{1T}(t)$. Ce couplage résulte donc de la présence d'un terme non-linéaire quadratique impliquant le mode de flexion dans l'équation du mode de torsion.

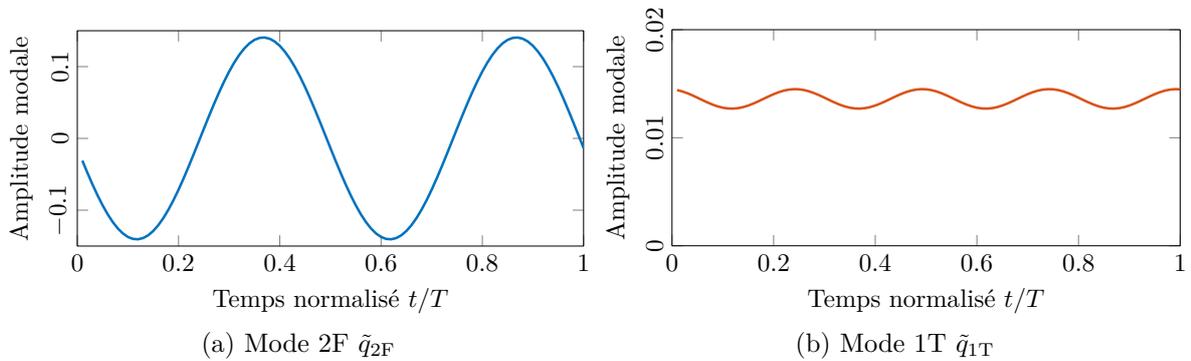


FIGURE III.9 – Signaux temporels $\tilde{q}_{2F}(t)$ (a) et $\tilde{q}_{1T}(t)$ (b) au niveau des pics de résonance [•] de la figure III.8

Il est ici intéressant de remarquer qu'en dépit de la commensurabilité des fréquences propres et de la prise en compte de non-linéarités dans la modélisation, aucune résonance interne n'intervient lors des simulations. Tout l'enjeu réside ainsi dans la capacité à comprendre les raisons pour lesquelles le phénomène n'apparaît pas. Faisons pour cela le parallèle avec les résultats établis lors de l'étude du modèle phénoménologique du chapitre précédent. Celui-ci a en effet mis en évidence la notion de termes résonants et plus particulièrement le rôle prépondérant joué par les coefficients non-linéaires α_{12} et β_{11} dans l'apparition des résonances internes 1 : 2. Pour le cas présent, ces coefficients ont été calculés en projetant les équations du mouvement de la poutre (III.17) sur la base de modes linéaires Ψ . Pour simplifier les interprétations, seuls

les coefficients non-linéaires impliquant les coordonnées modales des mode 1T et 2F seront représentés par la suite. On conservera pour cela la notation α pour les termes non-linéaires dans l'équation du mode 1T et β pour ceux de l'équation du mode 2F. Les amplitudes des coefficients impliquant les modes 1T et 2F sont représentées par la figure III.10. Comme on

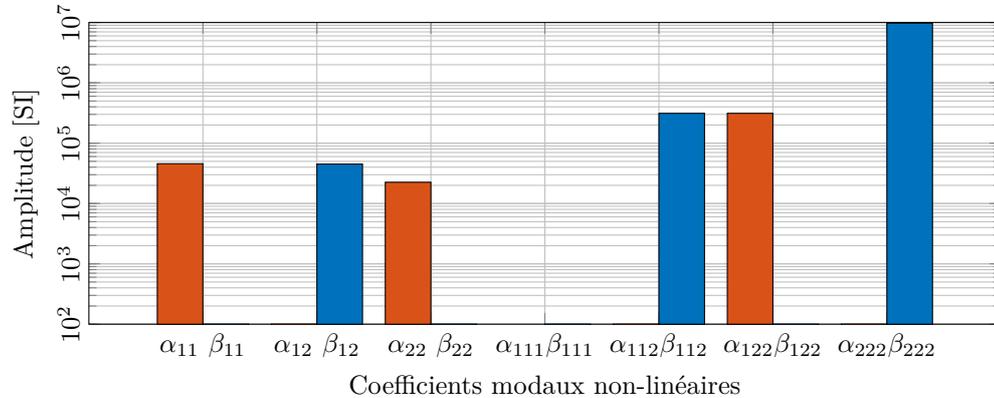


FIGURE III.10 – Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (premier cas d'étude)

pouvait s'y attendre, les termes α_{12} et β_{11} possèdent une très faible amplitude relativement aux autres coefficients. Cela suffit à justifier l'absence de résonance interne pour cette géométrie. On pourra également noter le niveau important atteint par le coefficient α_{22} qui explique la forme du signal temporel observé sur la figure III.9b.

Les faibles valeurs observées pour α_{12} et β_{11} tiennent leur cause des symétries de la poutre et plus particulièrement de la double symétrie de sa section droite. L'impact de cette symétrie est double. Tout d'abord, elle engendre une importante simplification des équations du mouvement à travers la suppression de plusieurs termes non-linéaires dans l'énergie potentielle (voir (III.5) et (III.6)). De plus, la symétrisation de la poutre engendre un fort découplage des déformées propres des modes 1T et 2F (figure III.11). En effet, le mode 1T présente une déformation en torsion pure (avec une contribution longitudinale liée à la prise en compte du gauchissement) tandis que le mode 2F présente un comportement de flexion pure (simultanément selon v et w en raison du vrillage). Ce dernier point joue un rôle essentiel lors de la projection modale permettant l'obtention des coefficients modaux non-linéaires.

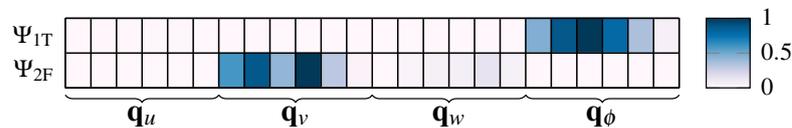


FIGURE III.11 – Vecteurs propres Ψ_{1T} et Ψ_{2F} pour le premier cas d'étude

Ce premier cas montre que la géométrie utilisée est trop simpliste pour permettre l'observation de l'interaction modale 1T/2F en dépit de la présence des termes non-linéaires.

3.2 Second cas : section profilée sans pré-courbure

Suite aux observations faites dans la section précédente, on se concentre à présent sur l'étude de la poutre vrillée présentant une section droite profilée. Ce type de section droite

est semblable à un profil NACA et possède un seul axe de symétrie (voir annexe B pour un exemple de représentation).

A nouveau, la pré-courbure initiale de la poutre est omise et on cherche à générer une interaction modale 1T/2F lors d'une excitation harmonique autour du second mode de flexion.

3.2.1 Étude fréquentielle

Les réponses fréquentielles des modes 1T et 2F pour une amplitude d'excitation de 20 N sont représentées figure III.12.

Un couplage de modes est désormais observable. Celui-ci se traduit par l'apparition de branches de bifurcations sur les réponses des modes 2F (figure III.12a) et 1T (figure III.12b). L'identification et le suivi de ces branches secondaires a été réalisé à l'aide de l'algorithme présenté dans la section II.4.3.3. La première branche de bifurcation apparaît pour une pulsation d'excitation avoisinant le double de la pulsation du mode 1T ($\omega \simeq 2\omega_{1T}$). La seconde branche, émerge quant à elle autour de la pulsation propre du mode 2F ($\omega \simeq \omega_{2F} = 2.01\omega_{1T}$). Ces branches résultent directement de l'apparition d'une résonance interne, en attestent les signaux temporels des coordonnées généralisées $\tilde{q}_{1T}(t)$ et $\tilde{q}_{2F}(t)$ (figure III.13) reconstruits à partir du calcul HBM au niveau des pics de résonances des branches de bifurcation.

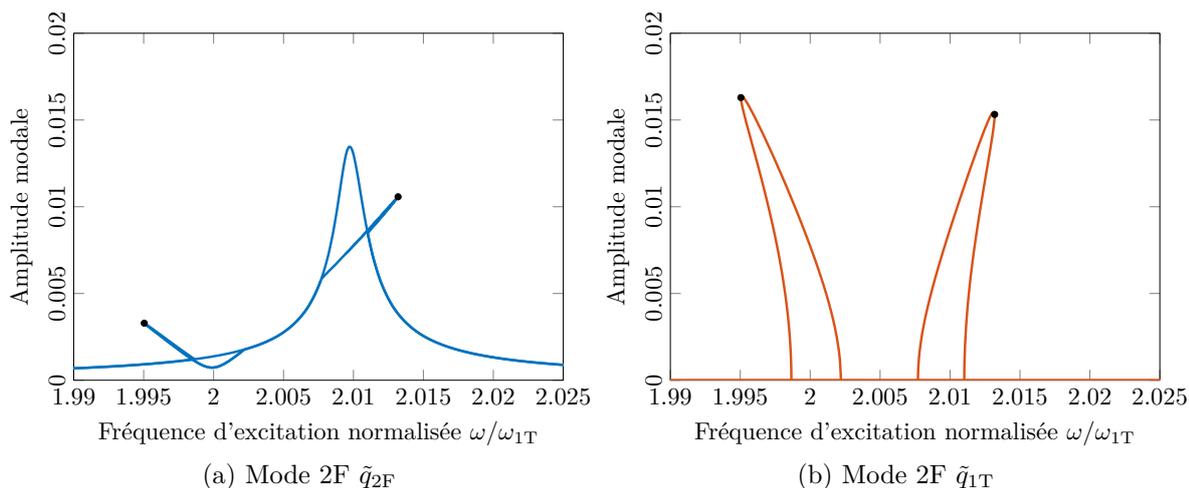


FIGURE III.12 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N pour le second cas d'étude

Sur chacune des branches, le second mode de flexion vibre à la même fréquence que celle de l'excitation (figures III.13a et III.13c). À l'inverse, le premier mode de torsion présente une fréquence d'oscillation deux fois plus faible que celle de l'excitation c'est à dire proche de ω_{1T} (figures III.13b et III.13d).

3.2.2 Analyse paramétrique

Comme lors de l'étude précédente, la présence de résonance interne peut être directement imputée à l'amplitude des coefficients modaux non-linéaires de couplage α_{12} et β_{11} . Ceux-ci sont représentés en compagnie d'autres coefficients sur la figure III.14 et affichent à présent une valeur beaucoup plus importante que dans le cas d'une section plane rectangulaire.

Au delà de la visualisation des valeurs des coefficients modaux α_{12} et β_{11} , l'enjeu principal de l'étude est de cibler les mécanismes internes à la pale conduisant à ces niveaux d'amplitude.

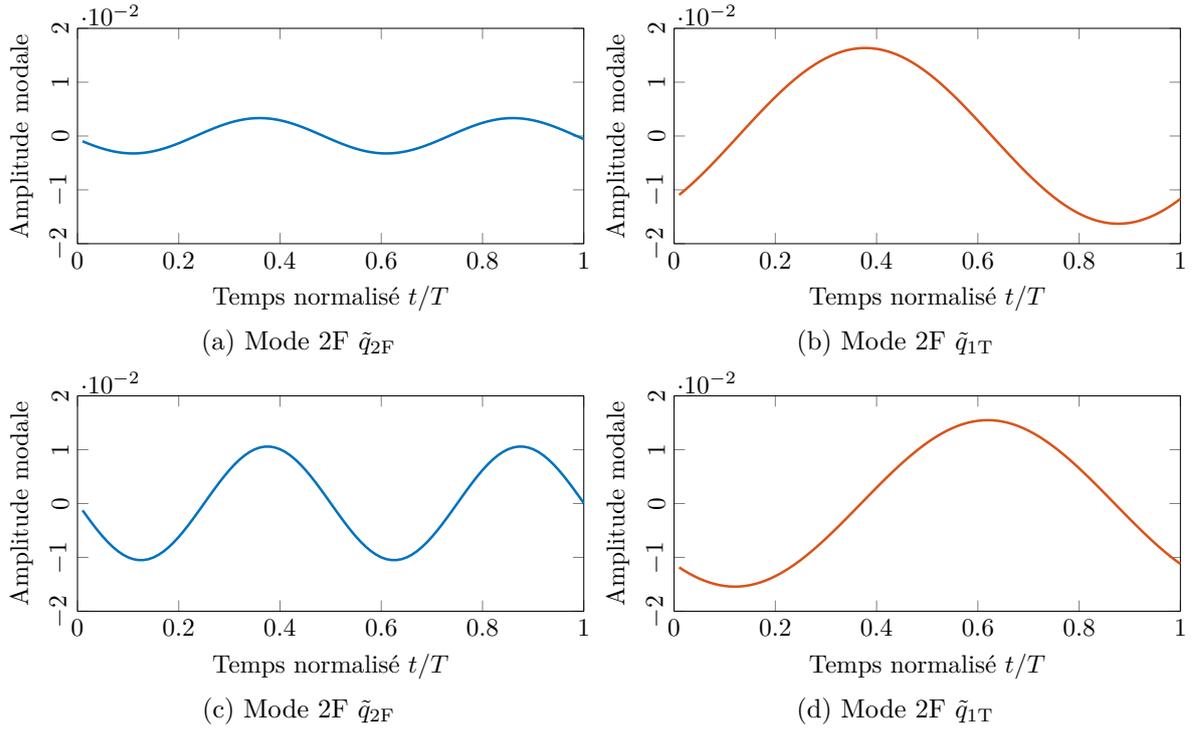


FIGURE III.13 – Signaux temporels $\tilde{q}_{2B}(t)$ et $\tilde{q}_{1T}(t)$ aux pics de résonance [•] de la première branche de bifurcation (a) et (b) et de la seconde branche de bifurcation (c) et (d) de la figure III.12

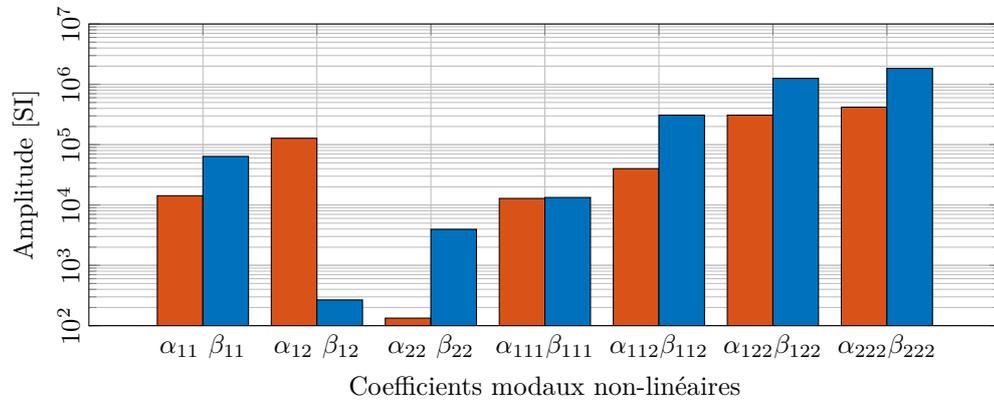


FIGURE III.14 – Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (second cas d'étude)

Il va s'agir pour cela de remonter aux origines physiques de ces coefficients à travers une étude des termes de l'énergie potentielle.

Commençons par noter E_p^{nl} la partie non-linéaire du potentiel (III.5). En exprimant le problème en base modale et en appliquant les équations de Lagrange, les efforts modaux non-linéaires associés aux équations modales des modes 1T et 2F s'écrivent,

$$\tilde{f}_{1T}^{nl} = \frac{\partial E_p^{nl}}{\partial \tilde{q}_{1T}}, \quad \tilde{f}_{2F}^{nl} = \frac{\partial E_p^{nl}}{\partial \tilde{q}_{2F}} \quad (\text{III.22})$$

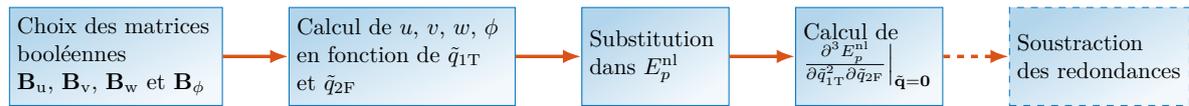


FIGURE III.15 – Démarche de l'identification des contributions au monôme $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2F}$ dans l'énergie potentielle de la poutre

la figure III.16 une unique contribution se détache de toutes les autres. Celle-ci fait intervenir les déplacements de flexion w et de torsion ϕ du mode 1T ainsi que le déplacement de flexion v du mode 2F. Avant d'aller plus loin, il est rassurant de voir que l'analyse des contributions fait ressortir un terme de couplage flexion-torsion. Après évaluation de chacun des termes de la forme uvw (incluant les formes dérivées) dans l'énergie potentielle, il apparaît que le couplage est essentiellement piloté par le terme cubique $2EI_{z'}v''w''\phi \cos(2\theta)$. Il découle directement de ce résultat que la résonance interne 1 : 2 est ici majoritairement pilotée par un unique terme que l'on peut assimiler à la partie non-linéaire du moment de flexion dans le plan induite par la torsion ϕ et le vrillage θ .

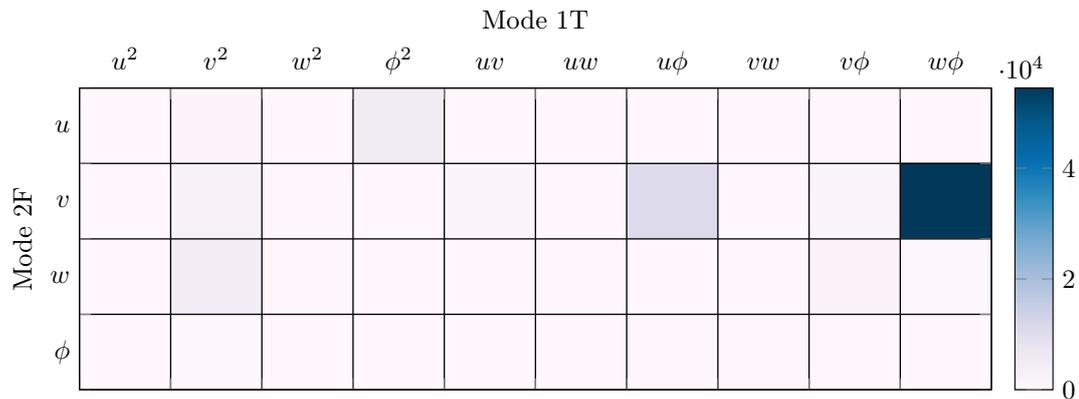
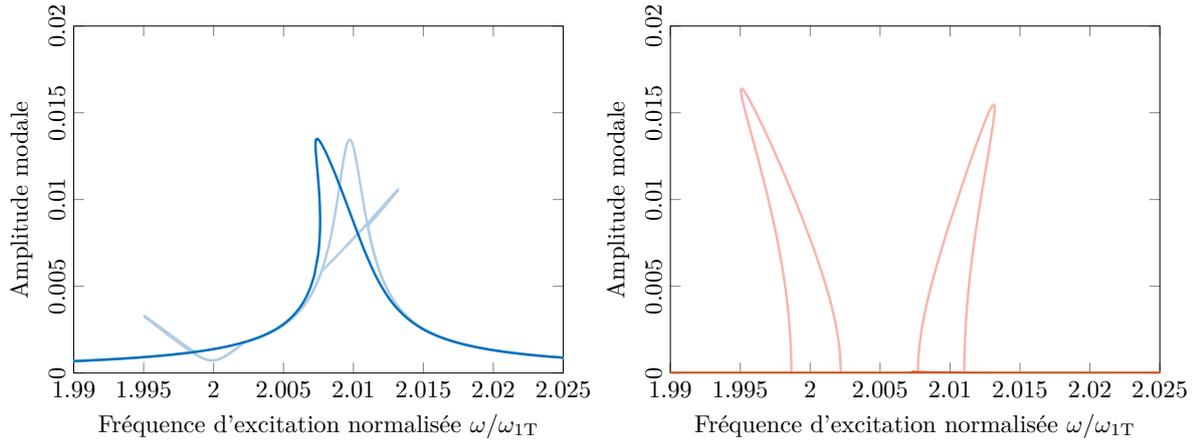


FIGURE III.16 – Contribution au terme non-linéaire $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2B}$ de l'énergie potentielle pour le second cas d'étude

De manière à vérifier ce résultat, la réponse fréquentielle du système avant et après suppression de ce terme est illustrée figure III.17. Lorsque le terme est supprimé, la résonance interne disparaît elle aussi dans la mesure où aucune branche de bifurcation n'est détectée. Dans ce cas, l'amplitude du mode 1T devient négligeable. Ces observations viennent conforter les résultats établis ci-dessus. Par ailleurs, on note que le terme supprimé est également responsable d'une partie du raidissement de la réponse dynamique puisque le pic de résonance se retrouve davantage assouplissant avec la suppression du terme de couplage.

Les résultats établis dans cette section permettent d'avoir une vision plus claire des mécanismes internes à la poutre responsables de l'apparition de la résonance interne pour la géométrie étudiée. Plus particulièrement ces résultats peuvent être directement exploités lors des phases de conception par exemple pour essayer de réduire voire annihiler l'apparition d'une résonance interne. En effet, en analysant soigneusement le terme $2EI_{z'}v''w''\phi \cos(2\theta)$ il pourrait être envisageable de réduire le moment de flexion en jouant sur les propriétés matériaux de la structure (E) ou bien modifier la forme des sections droites afin de diminuer le moment quadratique ($I_{z'}$). Par ailleurs, une réduction du vrillage de la poutre pourrait permettre d'atténuer l'effet du terme trigonométrique $\cos(2\theta)$. Enfin, un travail d'optimisation



(a) Mode 2F avec couplage [—], sans couplage [—] (b) Mode 1T avec couplage [—], sans couplage [—]

FIGURE III.17 – Réponse fréquentielle des modes 2F (a) et 1T (b) pour la poutre à section profilée avant et après suppression du terme $2EI_{z'}v''w''\phi \cos(2\theta)$ dans l'énergie potentielle

des déformées propres de la poutre pourrait être effectué de manière à réduire les déplacements de flexion w et torsion ϕ du mode 1T ainsi que le déplacement v du mode 2F. En parallèle de ces résultats, il convient de rappeler que la relation de commensurabilité reste une condition nécessaire à l'observation des résonances internes. Néanmoins, celle-ci portant sur les fréquences linéaires et non-linéaires des systèmes, un simple detuning sur les fréquences propres linéaires peut être insuffisant pour éviter l'apparition du phénomène.

3.3 Troisième cas : section rectangulaire avec pré-courbure

On s'intéresse à présent à l'effet de la pré-courbure dans le modèle. Afin d'isoler son impact, on considère de nouveau une section rectangulaire comme pour le premier cas étudié. D'un point de vue modélisation, la pré-courbure induit une modification de la rigidité linéaire et non-linéaire de la poutre comme en témoigne l'ensemble des termes dépendant de la fonction $z_e(x)$ dans l'expression du potentiel (III.5). Les réponses fréquentielles des modes 1T et 2F de la poutre sont représentées par la figure III.18 pour un effort de 10 N et comparées à celles de la figure III.8 obtenues sans pré-courbure. On note le fort changement qualitatif de la réponse dynamique induit par la prise en compte du terme de pré-courbure $z_e(x)$. En effet, des branches de bifurcation, synonymes de l'apparition de résonances internes sont désormais observables. Leurs allures sont similaires à celles rencontrées dans la section précédente avec notamment la présence de deux pics de résonance, l'un raidissant et l'autre assouplissant. Une analyse des signaux temporels reconstruits sur les branches de bifurcation, non représentés ici dans un souci de concision, montre des résultats similaires à ceux observés sur la figure III.13 et vient confirmer la présence d'une résonance interne 1 : 2. De même on notera le fort impact de la pré-courbure sur les niveaux atteints par les coefficients modaux non-linéaires (figure III.19). En particulier les termes α_{12} et β_{11} dont les amplitudes étaient négligeables sans pré-courbure (figure III.10), atteignent désormais des valeurs comprises entre 1×10^4 et 1×10^5 .

Comme pour le cas précédent, on cherche à présent à comprendre l'origine de la résonance interne ainsi que l'impact de la pré-courbure. Pour cela, la démarche rappelée par l'organigramme III.15 et visant à déterminer les contributions au terme $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2F}$ de l'énergie potentielle est à nouveau suivie. Les résultats de la simulation pour chaque choix des matrices booléennes \mathbf{B}_u , \mathbf{B}_v , \mathbf{B}_w et \mathbf{B}_ϕ sont fournis par la figure III.20. Cette fois-ci, seules deux contributions se démarquent du reste. Elles font toutes deux intervenir les déplacements de flexion v et

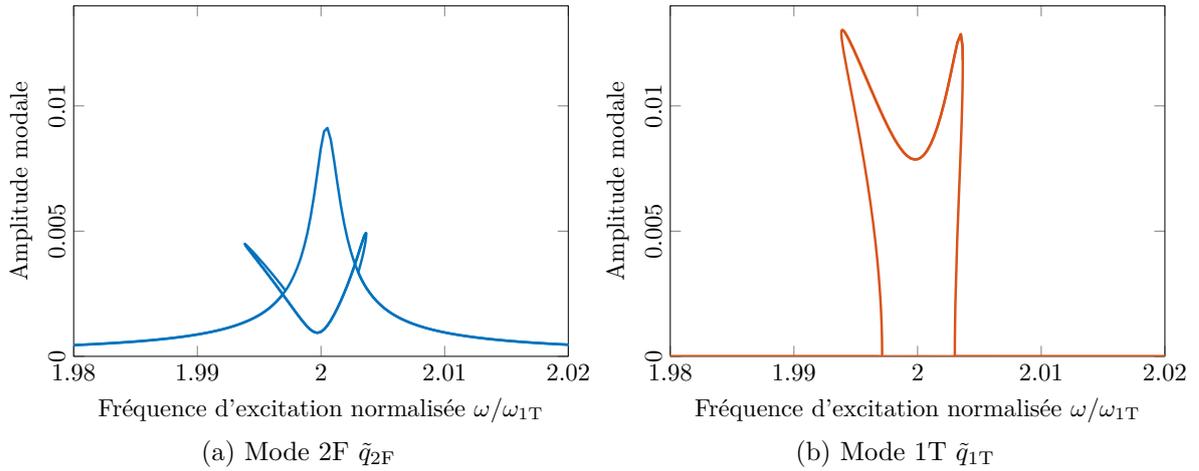


FIGURE III.18 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 10$ N pour le troisième cas d'étude

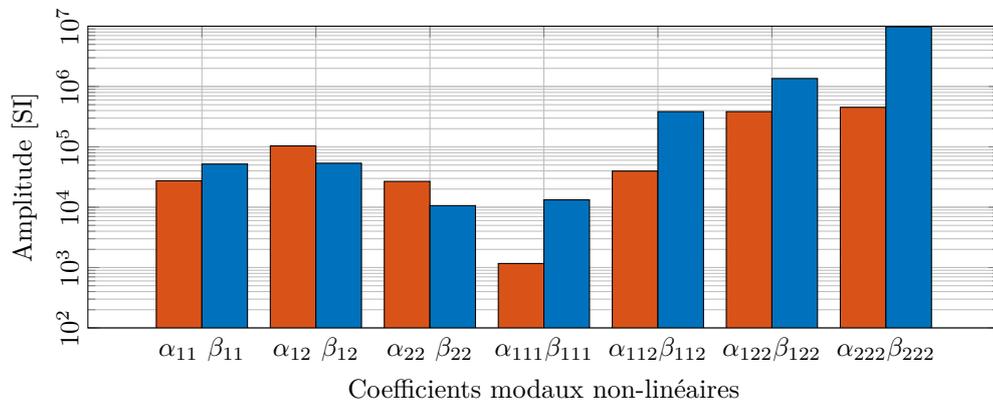


FIGURE III.19 – Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (troisième cas d'étude)

torsion ϕ du premier mode de torsion. Pour la première contribution, ces déplacements sont couplés avec le déplacement de flexion v du mode 2F tandis que le couplage s'opère avec le déplacement w du 2F pour la seconde contribution. On notera que la contribution en " $v^2\phi$ " est prépondérante devant celle en " $vw\phi$ " à travers une amplitude plus importante. Encore une fois, en analysant les termes de l'énergie potentielle faisant intervenir les expressions " $v^2\phi$ " et " $vw\phi$ " ainsi que leurs formes dérivées on s'aperçoit que les expressions $EI_{z'}(-v''^2\phi \sin(2\theta))$ et $EI_{z'}(2v''w''\phi \cos(2\theta))$ sont celles concentrant la majorité de l'amplitude de couplage recherchée. De nouveau, on se retrouve dans la situation où la résonance interne 1 : 2 est pilotée par une partie non-linéaire du moment de flexion de la poutre.

Ce résultat est vérifié en comparant les réponses fréquentielles avec et sans les deux termes de couplage identifiés (figure III.21). On observe une parfaite superposition au niveau du pic principal de la réponse du mode 2F. En revanche l'absence des branches de bifurcation vient confirmer l'annihilation de la résonance interne et démontrer l'importance des termes identifiés dans le paragraphe précédent.

De manière similaire à ce qui a été énoncé dans la section précédente, il est envisageable d'exploiter directement l'expression des deux termes de couplage pour réduire l'apparition de la résonance interne en jouant par exemple sur la raideur de flexion, le vrillage ou encore la forme des modes propres de la structure. À ce titre, il est important de remarquer que les deux termes

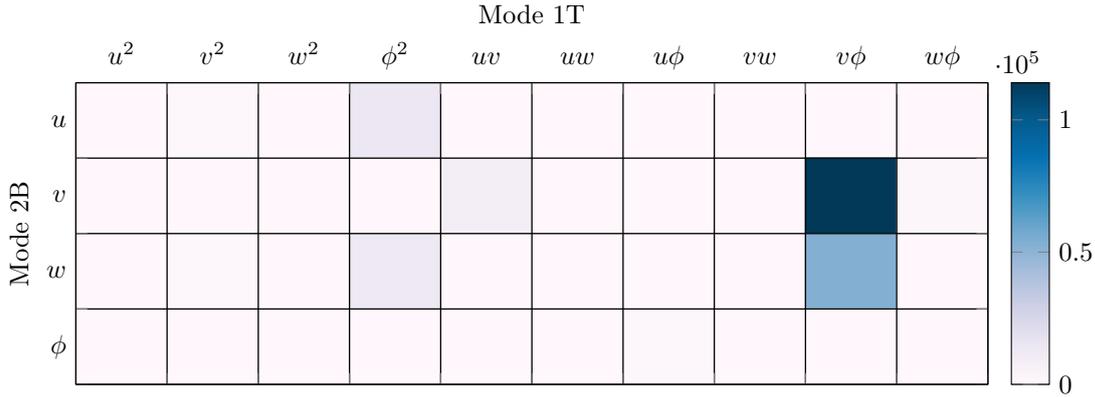
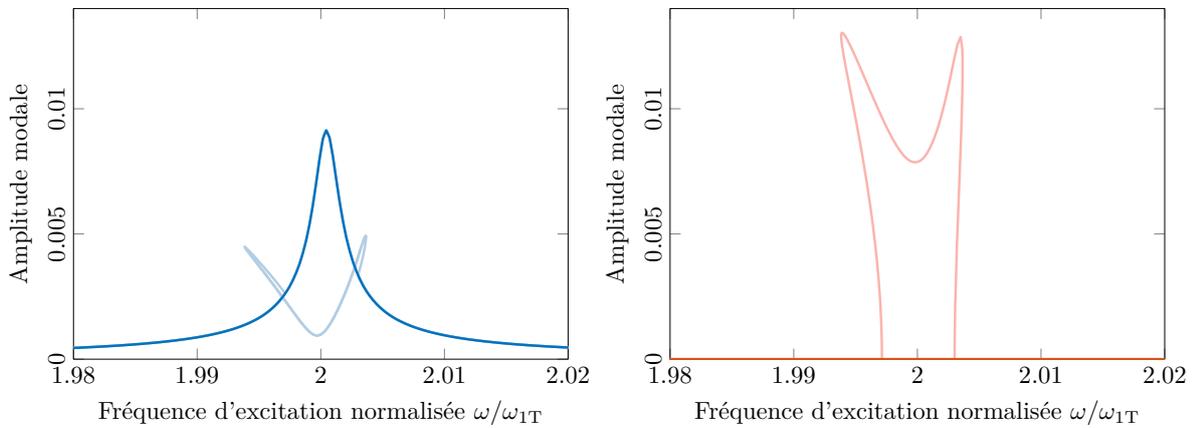


FIGURE III.20 – Contribution au terme non-linéaire $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2B}$ de l'énergie potentielle pour le troisième cas d'étude



(a) Mode 2F avec couplage [—], sans couplage [—] (b) Mode 1T avec couplage [—], sans couplage [—]

FIGURE III.21 – Réponse fréquentielle des modes 2F (a) et 1T (b) pour la poutre avec pré-courbure avant et après suppression des termes $EI_{z'}$ ($-v''^2 \phi \sin(2\theta)$) et $EI_{z'}$ ($2v''w''\phi \cos(2\theta)$) dans l'énergie potentielle

de couplage responsables de la résonance interne ne font pas intervenir dans leur expression le terme de pré-courbure $z_e(x)$. En réalité, l'influence de la pré-courbure s'exerce au niveau des déformées modales comme cela peut être apprécié en comparant les figures III.22 et III.11 illustrant les déformées propres des modes 1T et 2F respectivement avec et sans pré-courbure. Entre les deux cas, les déformées sont très similaires, cependant dans le cas pré-courbé on distingue l'apparition de composantes de torsion dans la déformée du mode 2F. En conséquence, un couplage se manifeste ce qui peut expliquer les valeurs des coefficients non-linéaires α_{12} et β_{11} obtenus lors de la projection modale.

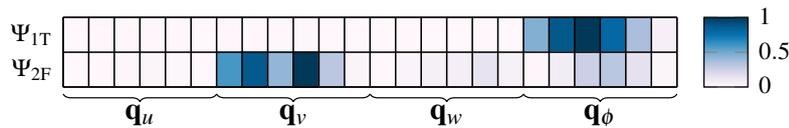


FIGURE III.22 – Modes propres Ψ_{1T} et Ψ_{2F} pour le troisième cas d'étude

Les exemples traités dans cette étude paramétrique ont permis d'identifier, pour certaines

géométries de poutres, les termes du potentiel pilotant l'apparition de la résonance interne 1 : 2. Plus précisément ceux-ci mettent en jeu la partie non-linéaire du moment de flexion de la poutre et dépendent de la rigidité de flexion et du vrillage de la structure. La forme des modes joue également un rôle de premier plan dans la mesure où une altération des déformées modales due par exemple à la prise en compte d'une faible pré-courbure de l'axe neutre peut fortement impacter l'émergence de l'interaction modale. La commensurabilité des fréquences propres reste également un élément nécessaire pour l'apparition des résonances internes bien que celle-ci puisse être difficile à prédire en régime non-linéaire.

4 Étude d'influence

En complément de l'étude précédente, on propose ici de réaliser une analyse d'influence sur différents paramètres du modèle poutre avec vrillage et pré-courbure. L'objectif à travers cette étude est d'évaluer l'impact de la variation d'un paramètre du modèle sur l'apparition et le niveau d'amplitude de la résonance interne 1 : 2. Cette section a également pour vocation de fournir une assistance aux ingénieurs des bureaux d'études lors de la phase de conception pour aider à sélectionner une géométrie pour laquelle le risque d'apparition d'une résonance interne est minimal.

Dans la suite de cette section, l'étude d'influence sera réalisée sur la géométrie vrillée avec pré-courbure et section rectangulaire introduite dans la section précédente.

4.1 Paramètres géométriques

Lors des phases de conception, par exemple des aubages de turboréacteur, la géométrie des aubes est généralement fortement contrainte par le dimensionnement aérodynamique. Les paramètres géométriques tels que la longueur des aubes ou bien le vrillage ou la pré-courbure sont habituellement fixés tôt dans le processus de conception et ne sont pas ou très peu modifiés lors du dimensionnement mécanique. Pour cette raison, on suggère ici de s'intéresser à deux autres paramètres, davantage libres, à savoir la corde co et l'épaisseur ep de la section droite.

On considère dans un premier temps l'influence d'une variation géométrique de la corde. Les fréquences propres des modes 1T et 2F de la poutre pour une corde comprise entre 0,93 m et 0,98 m sont données dans le tableau III.7. On remarque une faible influence de la corde sur

TABLEAU III.7 – Fréquences propres des modes 1T et 2F en fonction de la corde

Corde co [m]	Mode 1T [Hz]	Mode 2F [Hz]	Ratio 2F/1T
0.93	35.751	70.394	1.969
0.94	35.559	70.398	1.980
0.95	35.537	70.403	1.990
0.96	35.195	70.407	2.001
0.97	35.023	70.412	2.011
0.98	34.856	70.416	2.020

la fréquence propre du mode 2F qui augmente très légèrement. En revanche, elle est un peu plus visible sur l'évolution du mode 1T qui voit sa fréquence diminuer avec l'augmentation de la corde. En conséquence, le ratio 2F/1T a tendance à augmenter avec la corde. Les réponses fréquentielles des modes 1T et 2F de la poutre soumise à un effort de 20 N pour ces différentes valeurs de corde co sont illustrées par la figure III.23. Les analyses présentées dans la suite ont été réalisées pour ce niveau fixe d'effort. Néanmoins, on peut considérer que le comportement global est indépendant de l'amplitude d'excitation.

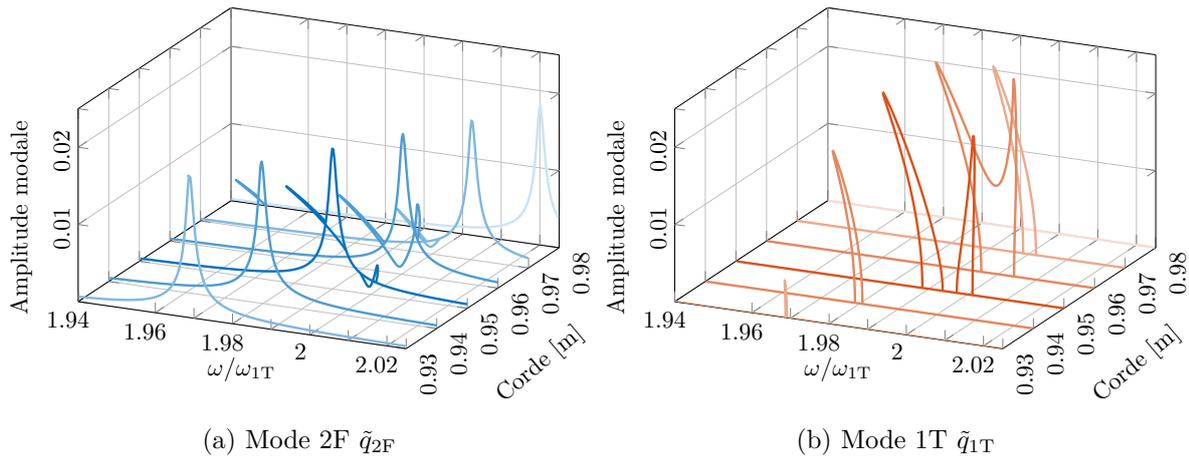


FIGURE III.23 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N en fonction de la longueur de la corde de la poutre

Notons la présence de la résonance interne, à travers l'apparition de branches de bifurcation, pour une plage de valeurs de corde comprise entre 0,93 m et 0,97 m. En dehors de cet intervalle, la résonance interne disparaît comme le montrent les réponses fréquentielles pour une corde de 0,98 m.

On remarque également une variation du comportement des branches de bifurcation à mesure que l'on s'éloigne de la commensurabilité entre les modes (pour $co = 0,96$ m). En effet, l'amplitude du mode 1T a tendance à décroître et on observe une disparition progressive du second pic de résonance sur la branche de bifurcation.

Enfin, il est important de noter le parallèle entre la valeur de co et le ratio 1T/2F. En effet, on remarque que l'interaction modale est observable jusqu'à un rapport des fréquences propres égal à environ 1.97 lorsque la corde diminue. Au contraire, l'interaction modale disparaît plus rapidement lorsqu'on augmente la corde puisqu'elle n'est plus observable au delà d'un ratio 2F/1T égal à environ 2.01. Cela peut s'expliquer par l'assouplissement plus prononcé du premier pic de résonance de la branche de bifurcation. En phase de conception, il peut alors être judicieux d'augmenter la corde pour voir la résonance interne disparaître plus rapidement.

Une étude similaire a été menée sur l'influence de l'épaisseur de la poutre sur le comportement de la résonance interne. Les fréquences propres des modes 1T et 2F pour différentes valeurs de ep sont regroupées dans le tableau III.8.

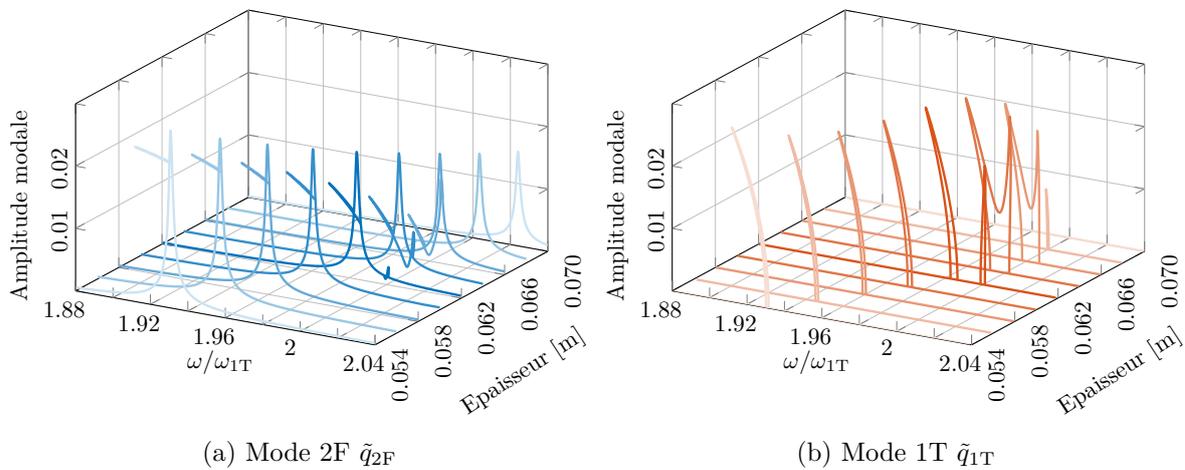
On constate une augmentation de la fréquence propre des modes 1T et 2F avec l'épaisseur. Toutefois, le second mode de flexion semble davantage impacté ce qui conduit à l'accroissement du ratio 2F/1T. À nouveau, les réponses forcées des deux modes sous une excitation de 20 N sont illustrées par la figure III.24 pour différentes valeurs d'épaisseur de la poutre.

Encore une fois, des résonances internes corrélées à la présence de branches de bifurcations sont présentes. Celles-ci n'apparaissent plus au delà d'une épaisseur de 0,068 m. Toutefois, contrairement à l'étude précédente, il semble qu'il n'existe pas de limite inférieure d'épaisseur pour laquelle la résonance interne disparaît. Celle-ci est en effet toujours présente pour une épaisseur de 0,054 m pour laquelle le ratio des fréquences propres 2F/1T est d'environ 1.93 donc assez loin de la commensurabilité.

En parallèle, en observant l'amplitude maximale des branches de bifurcation sur le mode 1T, on se rend compte que celle-ci a tendance à diminuer lorsqu'on s'éloigne d'un rapport des fréquences proche de 2 (pour $ep = 0,066$ m) puis augmente à nouveau en deçà d'une épaisseur de 0,058 m. En revanche, pour le mode 2F, les amplitudes maximales de la branche principale

TABLEAU III.8 – Fréquences propres des modes 1T et 2F en fonction de l'épaisseur de la poutre

Épaisseur ep [m]	Mode 1T [Hz]	Mode 2F [Hz]	Ratio 2F/1T
0.054	30.323	58.554	1.9310
0.056	31.200	60.712	1.9459
0.058	32.082	62.869	1.9596
0.060	32.968	65.025	1.9724
0.062	33.857	67.179	1.9842
0.064	34.748	69.332	1.9952
0.066	35.643	71.483	2.0055
0.068	36.539	73.632	2.0151
0.070	37.438	75.779	2.0241

FIGURE III.24 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N en fonction de l'épaisseur de la poutre

et de la branche de bifurcation croissent systématiquement lorsque l'épaisseur diminue. Par ailleurs cela semble aussi avoir un impact sur les rigidités non-linéaires dans le système en favorisant la présence de la résonance interne malgré un écart notable avec la commensurabilité.

Des similitudes existent cependant entre ces courbes et celles de la figure III.23 comme la disparition progressive du second pic de résonance des branches de bifurcation lorsqu'on s'éloigne du cas commensurable.

Comme pour le cas précédent, cette étude recommande d'augmenter l'épaisseur de la structure pour voir la résonance interne disparaître.

4.2 Paramètres dissipatifs

On cherche ici à étudier l'impact des paramètres dissipatifs sur l'interaction modale. Jusqu'à présent, des taux d'amortissement arbitraires ont été utilisés. On suggère à présent d'évaluer les conséquences d'une augmentation des taux d'amortissement des modes 1T et 2F sur la dynamique du système et plus particulièrement sur le comportement de la résonance interne. Pour cela les réponses fréquentielles des deux modes sont tracées sur les figures III.25 et III.26 en fonction respectivement du taux d'amortissement des modes 1T et 2F pour un effort de 20 N. Pour chaque figure, le taux d'amortissement associé au second mode est considéré constant et égal à 0,05 %.

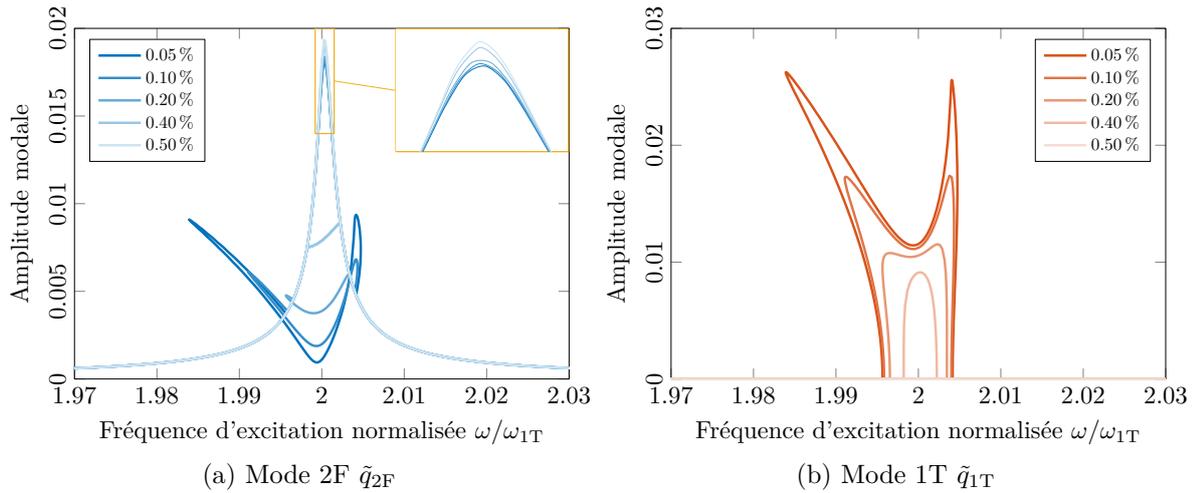


FIGURE III.25 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N en fonction du taux d'amortissement ξ_{1T} du mode 1T

Lorsque le taux d'amortissement ξ_{1T} du mode 1T augmente, on observe naturellement une diminution d'amplitude de la coordonnée modale \tilde{q}_{1T} (figure III.25b). En parallèle, le pic principal de la réponse du mode 2F voit son amplitude légèrement augmenter (voir le zoom sur la figure III.25a). Ceci peut s'expliquer par la réduction du transfert d'énergie au mode 1T via la résonance interne. De plus, l'étalement fréquentiel des branches de bifurcation du mode 2F diminuent avec l'augmentation de l'amortissement tandis que l'amplitude maximale sur ces branches subit une décroissance avant d'augmenter à nouveau. À partir d'un certain seuil d'amortissement, les branches de bifurcation disparaissent pour les deux modes. À ce moment, seul le pic principal sur la figure III.25a demeure et l'amplitude du mode 1T devient négligeable dû à la disparition de la résonance interne.

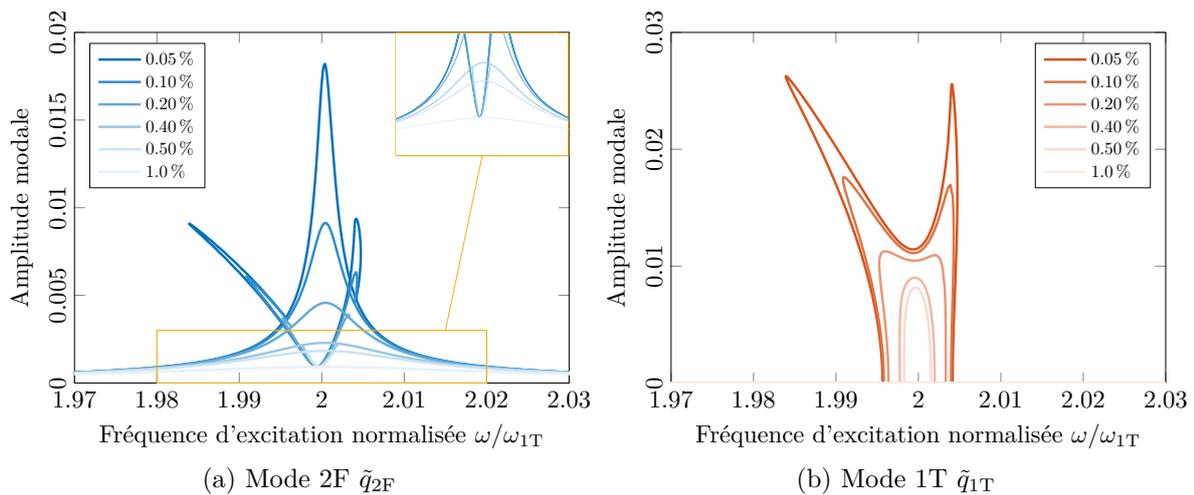


FIGURE III.26 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N en fonction du taux d'amortissement ξ_{2F} du mode 2F

En ce qui concerne l'augmentation du taux d'amortissement ξ_{2F} du mode 2F (figure III.26), on remarque une diminution d'amplitude du mode 2F aussi bien au niveau de la branche principale que de la branche de bifurcation (figure III.26a). Cette décroissance se répercute

directement sur l'amplitude du mode 1T (figure III.26b) qui diminue également en raison d'un niveau plus faible d'énergie à transmettre lors de l'interaction modale. On note cependant que la résonance interne persiste malgré l'augmentation de l'amortissement jusqu'à ce que l'amplitude maximale du mode 2F soit inférieure au "U" formé par les branches de bifurcation (voir le zoom sur la figure III.26a pour un amortissement de 1%).

4.3 Vitesse de rotation

Pour clore ce chapitre, on s'intéresse enfin à l'influence de la vitesse de rotation sur la commensurabilité des fréquences des modes 1T et 2F et donc sur l'apparition potentielle de la résonance interne. On considère pour cela le modèle vrillé et pré-courbé dont les paramètres sont listés dans le tableau III.9.

TABLEAU III.9 – Paramètres géométrique et matériau utilisés pour le modèle en rotation avec

$$\theta(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{L} \frac{\pi}{18}$$

Géométrie		Matériau			Pré-courbure		
Section droite	L [m]	w [m]	h [m]	ρ [kg m ⁻³]	E [GPa]	ν	$z_e(x)$
rectangle	1.2	0.6	0.06	1550	3.8	0.4	$0.1x^2$

Le diagramme de Campbell associé à cette géométrie est représenté sur la figure III.27. En

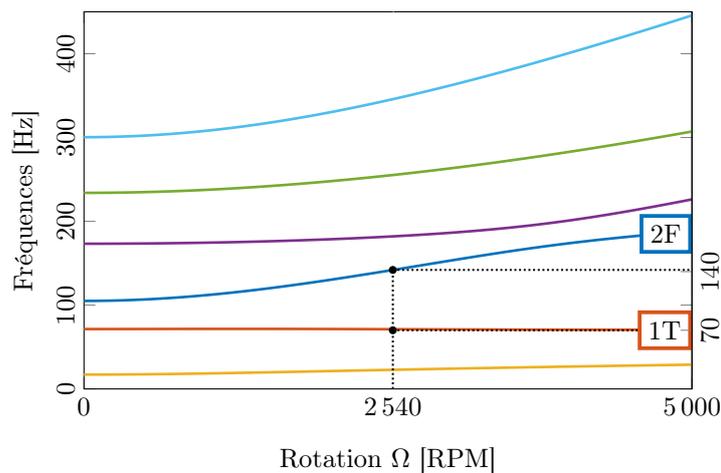


FIGURE III.27 – Diagramme de Campbell du modèle poutre en rotation

l'absence de rotation, les fréquences propres des modes 1T et 2F ne sont pas commensurables. À mesure que la rotation augmente, la fréquence du mode 2F augmente dû à la rigidification de la poutre sous l'effet des efforts centrifuges. En parallèle le mode 1T est peu impacté par le chargement centrifuge. Lorsque la rotation avoisine les 2540 RPM, la rigidification du mode 2F est telle que les fréquences propres des deux modes sont quasi-commensurables et une résonance interne 1 : 2 est susceptible d'apparaître.

Afin de vérifier cela les réponses fréquentielles associées aux deux modes sont représentées sur les figures III.28 à 0 RPM et III.29 à 2540 RPM. À vitesse de rotation nulle, la réponse dynamique s'opère presque exclusivement sur le second mode de flexion. En comparaison, la réponse du mode 1T est négligeable. Dans ce cas, la résonance interne ne survient pas car les fréquences propres des deux modes sont incommensurables. À l'inverse, lorsque la vitesse de rotation est à 2540 RPM, une branche de bifurcation apparaît au niveau des réponses fréquentielles des modes 1T et 2F, traduisant l'émergence de la résonance interne 1 : 2. Cet

exemple prouve qu'une interaction modale est susceptible d'exister en rotation malgré une forte incommensurabilité à vitesse nulle.

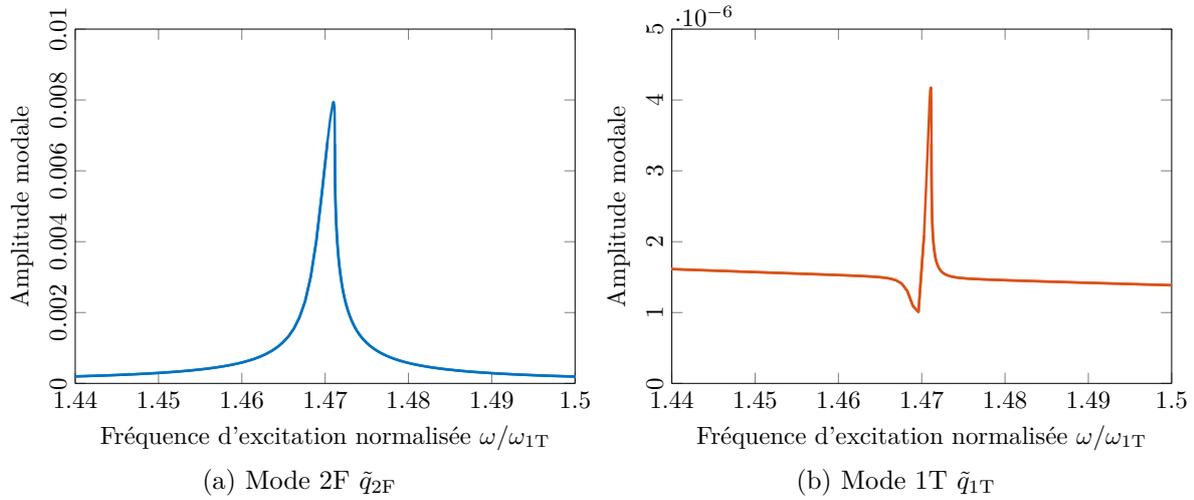


FIGURE III.28 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $\Omega = 0$ RPM

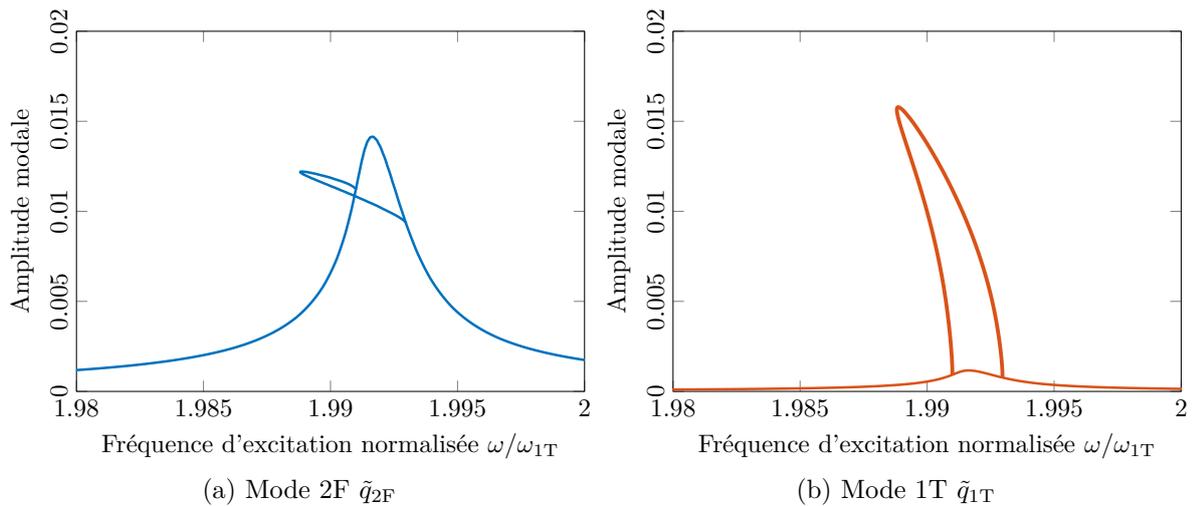


FIGURE III.29 – Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $\Omega = 2540$ RPM

Bilan du chapitre

Un modèle phénoménologique de poutre vrillée et pré-courbée a été étudié dans ce chapitre. Une modélisation des équations du mouvement, valables jusqu'au second ordre, a été réalisée en intégrant les contributions non-linéaires dans l'expression du tenseur des déformations du modèle.

Dans le but de comprendre et d'identifier les mécanismes internes à la structure responsables de l'interaction modale 1 : 2 entre le second mode de flexion et le premier mode de torsion, une étude paramétrique a été réalisée. Celle-ci s'est appuyée sur l'élaboration de trois géométries distinctes et a permis d'identifier certains paramètres influant sur l'apparition de la résonance

interne. En particulier, il a été montré la nécessité pour la poutre de posséder une section non doublement symétrique ou une pré-courbure initiale pour que la résonance interne existe. A l'inverse, cette étude a montré que le vrillage seul de la poutre ne suffit pas à garantir l'apparition du phénomène. Par ailleurs, l'étude paramétrique a permis de mettre en évidence les termes non-linéaires de l'énergie potentielle pilotant l'apparition de la résonance interne. En particulier, les analyses démontrent que l'interaction modale résulte essentiellement des termes de couplage flexion-torsion introduits par la partie non-linéaire du moment de flexion de la poutre. De plus, la forme des déformées modales des modes de flexion et de torsion joue également un rôle prépondérant dans l'émergence de la résonance interne.

Afin de mieux caractériser le comportement dynamique de la structure, une étude d'influence a par la suite été réalisée. Plus particulièrement, l'évolution de la résonance interne sous la variation de paramètres géométriques et dissipatifs a été présentée. Il en ressort des éléments pouvant être directement exploités en phase de conception par les bureaux d'études.

Dans ce chapitre, un modèle de poutre a été défini afin de mieux comprendre le mécanisme d'apparition des résonances internes. En pratique, les analyses autour des systèmes industriels comme les aubages ou les roues aubagées s'appuient généralement sur des modèles éléments finis. Toutefois, les méthodes d'analyse usuelles ne permettent pas d'observer sur ces modèles les phénomènes non-linéaires tels que les couplages par interactions modales. Dans cette optique, le prochain chapitre propose d'étudier la résonance interne sur un modèle éléments finis industriel. Cette étude numérique est également complétée par un volet expérimental visant à faire apparaître le phénomène.

Chapitre IV

Étude d'un modèle industriel d'aubage de type fan

Ce chapitre propose d'étudier le comportement dynamique d'un aubage du démonstrateur Open Rotor avec une attention particulière prêtée à la présence de résonance interne. Une première étude, expérimentale, est réalisée en configuration encastrée-libre sous excitation à l'aide d'un pot vibrant. Puis cette étude est complétée par une analyse numérique sur un modèle éléments finis industriel de l'aubage. Des méthodes de réduction de modèles non-linéaires avec non-linéarités géométriques sont d'abord présentées puis appliquées au modèle éléments finis afin de caractériser son comportement dynamique et la présence de résonance interne. Enfin, une comparaison entre les données expérimentales et numériques est réalisée.

Sommaire du chapitre

1 Introduction	107
2 Analyse expérimentale	108
2.1 Dispositif expérimental	108
2.2 Synthèse des résultats expérimentaux	109
3 Analyse numérique	115
3.1 Modèle numérique et analyse modale	115
3.2 Réduction de modèles non-linéaires géométriques	117
3.3 Application à la pale Open Rotor	126
Bilan du chapitre	137

1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'étude d'un aubage de soufflante du démonstrateur Open Rotor SAGE2 mis au point dans le cadre du programme européen CleanSky et visible sur la figure I.6b. La technologie de l'aubage est similaire à celle du LEAP et correspond à une pale monolithique tissée 3D et mise en forme à l'aide du procédé RTM mentionné dans le chapitre I. L'aubage est issu de la première hélice de la soufflante (dite amont) et possède une envergure d'environ 1350 mm pour une largeur maximale (d'une extrémité à l'autre) avoisinant les 830 mm. La géométrie très élancée de la pale possède également une faible épaisseur autorisant ainsi des grands déplacements et grandes déformations et conférant à l'aubage des effets non-linéaires géométriques.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement dynamique non-linéaire de la pale Open Rotor. Plus particulièrement, il s'agit de mettre en évidence le phénomène de couplage flexion-torsion intervenant à travers une résonance interne entre le premier mode de torsion et le deuxième mode de flexion.

Pour cela, on considère deux approches. Dans un premier temps, une étude expérimentale sur la pale est réalisée dans une configuration encastree-libre pour mettre en évidence la résonance interne (de type 1 : 2) entre les modes mentionnés ci-dessus. Puis dans un second temps, les résultats expérimentaux sont comparés à des simulations numériques réalisées sur le modèle d'aubage Open Rotor discrétisé à l'aide des éléments finis. Afin de manipuler un modèle de taille raisonnable, une étape de réduction est opérée à l'aide de méthodes adaptées à la réduction des systèmes présentant des non-linéarités géométriques.

2 Analyse expérimentale

Cette section décrit l'activité expérimentale réalisée sur l'aubage Open Rotor. La première partie détaille le dispositif expérimental ainsi que le matériel utilisé pour l'instrumentation. La seconde partie présente les résultats des essais réalisés et notamment la mise en évidence de la résonance interne.

2.1 Dispositif expérimental

2.1.1 Montage expérimental

Les essais ont été réalisés en configuration encastree-libre. Pour ce faire, le pied de l'aubage est d'abord inséré dans l'alvéole d'un mors en acier. L'encastrement vient ensuite être réalisé en appliquant un effort de cale sous le pied de la pale. Cette opération s'effectue au moyen de 4 vis situées dans la partie inférieure du mors. Le protocole de serrage consiste à exercer, à l'aide d'une clé dynamométrique, un effort progressif par paliers en suivant un ordre de serrage des vis jusqu'à un couple cible assimilé à un effort de précharge centrifuge. Afin d'éviter un glissement du mors sur le sol lors des cycles vibratoires, un revêtement élastomère est placé au préalable sous le mors (voir figure IV.2).

2.1.2 Instrumentation

L'excitation du système est réalisée ponctuellement au niveau de la pale à l'aide d'un pot vibrant de référence 2100E11 [114]. Celui-ci est maintenu en suspension et relié à un pont de levage. Afin de réduire les risques de débâtements au niveau de l'excitateur et limiter son influence sur la dynamique du système, le point d'excitation est choisi dans une zone où la réponse des modes 1T et 2F reste assez faible. De même, la zone sélectionnée ne présente pas de courbure importante afin d'éviter un décollement de l'instrumentation sur la pale. La tige métallique reliée au pot et permettant l'excitation est directement vissée au niveau d'une tête d'impédance PCB Piezotronics de référence 288D01 [111], elle-même fixée sur la pale à l'aide de colle cyanolite. La tête d'impédance permet une mesure simultanée de l'effort et de l'accélération au point d'excitation.

Des accéléromètres PCB Piezotronics, de référence M353B18 [1], sont également positionnés sur l'aube pour mesurer sa dynamique. Ceux-ci ont été placés en certains points des nœuds et des ventres des modes 1T et 2F dont les déformées expérimentales ont été fournies par Safran Aircraft Engines et dont une représentation numérique est donnée par la figure IV.11. Les positions des accéléromètres et de la tête d'impédance sont illustrées par la figure IV.1. L'ensemble des capteurs a été placé coté intrados. Les accéléromètres sont placés en milieu et

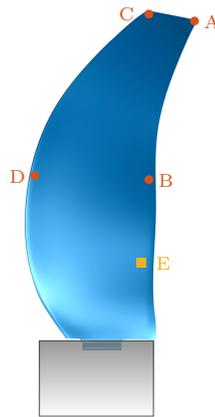


FIGURE IV.1 – Position des capteurs sur la pale. [●] : Accéléromètres, [■] : Tête d'impédance

tête de pale. Les capteurs A et B sont situés coté bord de fuite tandis que les capteurs C et D sont placés au niveau du bord d'attaque de la pale. En se référant à la figure IV.11 représentant la forme des modes 1T et 2F, on note que les points A et B ont été placés respectivement au niveau des maximums de débattement des modes 2F et 1T. Le point C se situe également dans une zone de vibration importante du mode de torsion. De plus, la position du point D est telle qu'elle permet d'observer un déplacement de torsion tout en se situant proche d'une ligne nodale du mode de flexion. Enfin, on pourra vérifier que l'excitation se situe dans une zone de vibration raisonnable mais suffisante pour être transmise à l'ensemble de la pale.

Le montage expérimental et l'instrumentation de la pale sont représentés sur la figure IV.2. On notera la géométrie complexe de l'aubage, en particulier liée à sa faible épaisseur, son vrillage et ses courbures multiples notamment au niveau de la tête de pale. On remarquera également la position du pot vibrant en suspension, placé avec précision pour assurer un maintien rectiligne de la tige d'excitation en sortie du pot et vissée à la tête d'impédance.

Le choix du type d'excitation fournie par le pot vibrant à la pale s'effectue à l'aide du logiciel Hewlett Packard de référence HP 3566/67A [176]. Celui-ci génère un signal de consigne numérique traduit en un signal analogique par l'intermédiaire d'une carte de génération Hewlett Packard HP 35653A [110]. Le signal de consigne est ensuite transmis au pot vibrant après amplification à l'aide d'un amplificateur de puissance situé en amont du pot.

La récupération des données issues des accéléromètres et de la tête d'impédance s'opère à l'aide d'une carte d'acquisition HP 35652B [110] enfichée dans le même châssis que la carte de génération. Le signal analogique est alors converti en signal numérique pour la visualisation des données.

Ces étapes sont résumées par le schéma de la figure IV.3.

2.2 Synthèse des résultats expérimentaux

Cette section détaille les différentes analyses expérimentales opérées sur le modèle. Celles-ci débutent par une analyse modale permettant de vérifier la relation de commensurabilité entre les fréquences propres des modes d'intérêt. L'étude est complétée par une série d'analyses harmoniques autour du deuxième mode de flexion pour un effort d'excitation croissant.

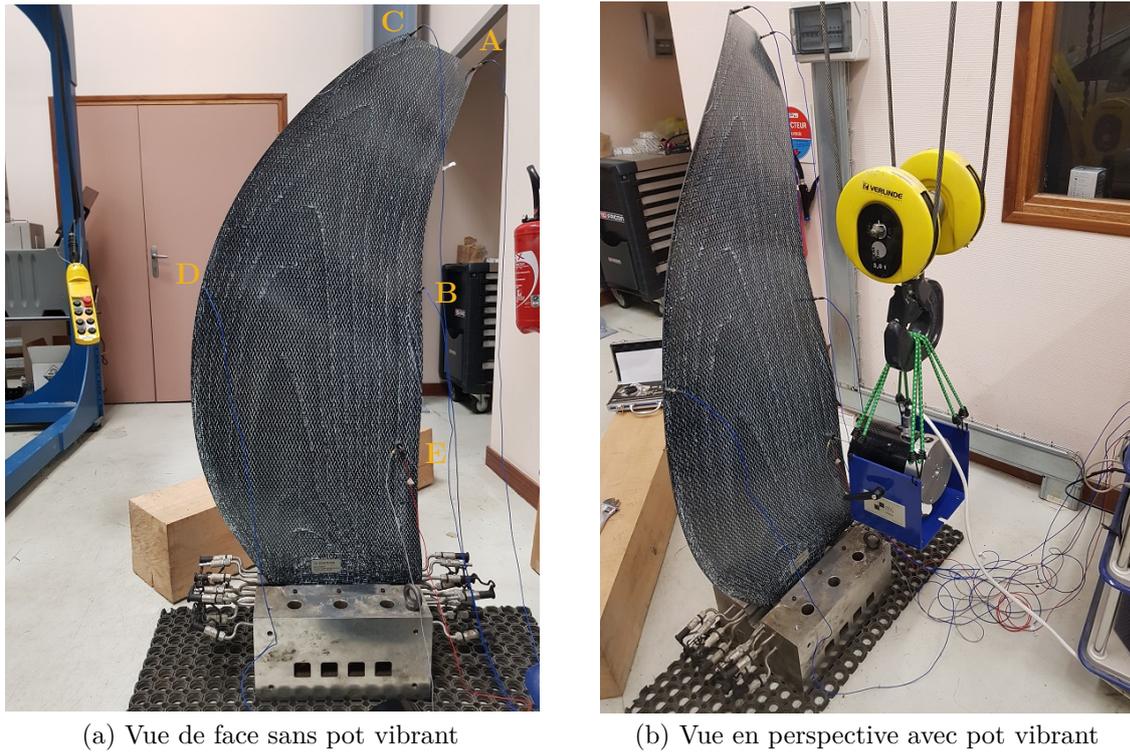


FIGURE IV.2 – Montage expérimental et instrumentation de la pale

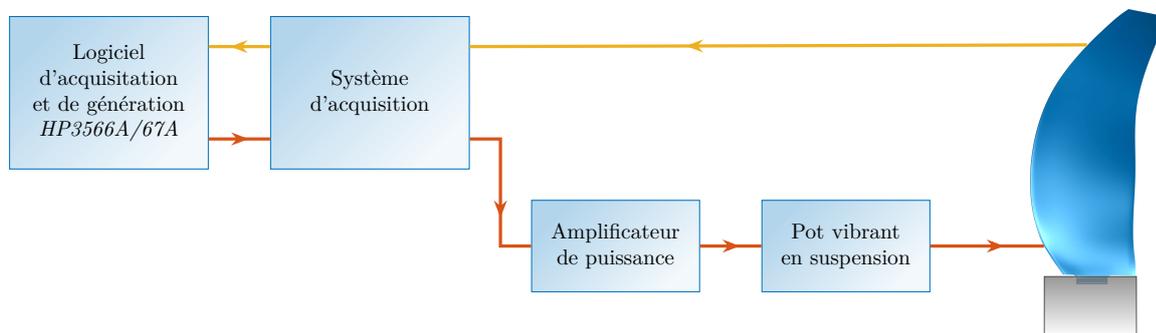


FIGURE IV.3 – Schéma du dispositif expérimental

2.2.1 Analyse modale expérimentale

L'analyse modale à faible niveau est effectuée en imposant une source d'excitation aléatoire au niveau du pot vibrant. Celle-ci est réalisée sur une plage fréquentielle de 0 à 200 Hz. La fonction de réponse en fréquence (FRF) obtenue pour chacun des points de mesure est représentée par la figure IV.4. Celle-ci met en évidence 6 modes sur la plage fréquentielle étudiée dont les caractéristiques (fréquences propres et coefficients d'amortissement pour les 4 premiers) sont répertoriées dans le tableau IV.1. Les coefficients d'amortissement ont été calculés par la méthode classique de l'atténuation à -3 dB, exploitable en raison de la séparation fréquentielle des modes. En ce qui concerne les fréquences propres, notons que le comportement à très basse fréquence découle de la présence des modes de corps rigides ainsi que des modes de suspension introduits par la nature du montage du pot vibrant. Les valeurs expérimentales seront comparées ultérieurement aux valeurs obtenues sur le modèle numérique. On remarquera que la fréquence du mode 3 (2F) est proche du double de celle du mode 2 (1T). Cette condition

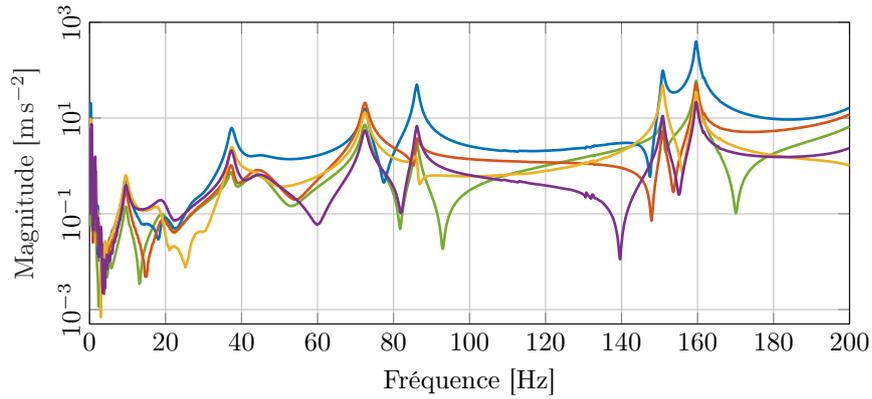


FIGURE IV.4 – Fonction de réponse en fréquence de la pale pour une excitation aléatoire. A : [—], B : [—], C : [—], D : [—], E : [—]

de quasi-commensurabilité est primordiale en vue d'espérer observer une résonance interne entre ces deux modes.

Modes	Fréquences exp. Hz	Amortissement
1	9.50	0.0505
2	37.38	0.0189
3	72.5	0.0096
4	86.12	0.0051

TABLEAU IV.1 – Fréquences propres et coefficients d'amortissement pour les 4 premiers modes propres de la pale

Il est également possible à partir des FRFs de la figure IV.4 de déterminer les participations modales Φ_{om} en chaque point de mesure sur la pale à l'aide de l'expression de la fonction de transfert suivante,

$$H_{oi}(\Omega) = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi_{ok}\Phi_{ki}}{\omega_k^2 - \Omega^2 + 2j\xi_k\omega_k\Omega} \quad (\text{IV.1})$$

avec o l'output (i.e le capteur d'accélération), i l'input (i.e le capteur d'effort), n le nombre de modes. Ces participations modales sont données dans le tableau IV.2. Elles permettent de vérifier la conformité de l'analyse expérimentale avec les données numériques sur lesquels nous reviendrons par la suite. En ce sens, on retrouve pour le mode 1T un maximum d'amplitude au niveau du capteur au point A et un maximum pour le mode 2F au niveau du capteur au point B.

Capteurs	Mode 1 (1F)	Mode 2 (1T)	Mode 3 (2F)	Mode 4
A	28.3	329.8	365.7	1570
B	15.19	54.74	487.8	118.1
C	32.09	131.0	308.0	49.72
D	20.02	111.4	128.5	213.9
E	7.141	39.27	169.8	95.31

TABLEAU IV.2 – Participations modales Φ_{om} , o : capteur d'accélération, m : mode

2.2.2 Excitation harmonique autour du mode 2F

Une excitation harmonique autour du deuxième mode de flexion a été appliquée à la pale pour différents niveaux d'excitation. Cette procédure a été réalisée dans le but d'activer les non-linéarités dans la pale engendrant l'apparition du mode 1T dans la réponse de la structure. Le spectre des signaux d'accélération aux points A, B, C et D pour différents niveaux d'excitation sont représentés sur la figure IV.5. Ceux-ci ont été obtenus à partir d'une transformée de Fourier discrète appliquée sur les signaux fenêtrés à l'aide d'une fenêtre de Hanning de manière à atténuer les effets de bord. Notons que les spectres au point E n'ont pas été représentés en raison de leurs très faibles niveaux.

Pour de faibles niveaux d'excitation (figures IV.5a et IV.5b), la structure répond principalement selon l'harmonique à la fréquence du mode 2F (f_{2F}). Toutefois, les harmoniques de ce mode ($2f_{2F}$, $3f_{2F}$, $4f_{2F}$...) répondent également à l'excitation avec des niveaux non-négligeables. Ceci témoigne de l'activation des non-linéarités géométriques dans la structure.

A partir d'un certain niveau d'excitation, une composante à la fréquence du mode 1T (f_{1T}) apparaît sur les différents spectres. Ses harmoniques aux fréquences $2f_{1T}$, $3f_{1T}$... font également leur apparition dans la réponse de la structure. À nouveau, les non-linéarités de la structure sont à l'origine de cette réponse multi-harmoniques. Notons cependant que les niveaux des participations aux fréquences f_{1T} , $3f_{1T}$... sont très en deçà des niveaux atteints par les composantes fréquentielles à la fréquence f_{2F} et à ceux de ses harmoniques.

L'apparition d'une composante à la fréquence f_{1T} dans la réponse est établie, cependant il reste à vérifier que celle-ci correspond bien à une réponse du premier mode de torsion et non à une réponse sous-harmonique du mode 2F ou à une anomalie survenue lors des essais. Pour cela, les composantes temporelles aux fréquences f_{1T} et f_{2F} des signaux d'accélération ont été extraites des signaux complets issus des capteurs d'accélération (par transformée de Fourier directe puis inverse après extraction) afin de vérifier la cohérence avec les déformées modales de la figure IV.11. Pour plus de clarté, on préférera par la suite illustrer les signaux de déplacements, obtenus par double intégration des signaux d'accélération.

Premièrement, la figure IV.6 représente la composante temporelle à la fréquence f_{2F} aux points A à D pour un niveau d'effort $F = 74$ N. Les amplitudes relatives observées sont en adéquation avec celles de la figure IV.11. En effet, le maximum d'amplitude est observé au point B tandis que les signaux issus des capteurs en A et C, d'amplitude équivalente ont un niveau plus faible que celui au point B. En termes de phase, l'opposition de phase entre le signal en B et les 3 autres points est lui aussi en accord avec la déformée modale du mode 2F. Ces observations justifient que la composante à la fréquence f_{2F} correspond bien à la réponse du deuxième mode de flexion.

Deuxièmement, la figure IV.7 représente aux points A à D la composante temporelle à la fréquence f_{1T} . Cette fois-ci les amplitudes relatives sont totalement différentes de celles observées lors de la situation précédente. Le maximum d'amplitude se situe maintenant au niveau du point A ce qui est cohérent avec la déformée du mode 1T (voir figure IV.11). De plus, c'est désormais le signal au point D qui est en opposition de phase avec les signaux des trois autres voies. À nouveau, cela est en accord avec la déformée du mode 1T. À partir de ces observations, il est possible de conclure que la composante observée à la fréquence f_{1T} correspond bien à la réponse du premier mode de torsion ce qui justifie l'apparition d'une résonance interne dans la structure lors d'une excitation du mode 2F.

Pour clore l'étude harmonique, l'évolution de l'amplitude de réponse à la fréquence f_{1T} en fonction de celle à la fréquence f_{2F} est représentée sur la figure IV.8. La figure met à nouveau en évidence la distinction entre les cas avant et après apparition du mode 1T dans la réponse. Par ailleurs, ce graphique montre que l'amplitude à la fréquence f_{1T} augmente beaucoup plus rapidement que celle à la fréquence f_{2F} . Si la tendance venait à se poursuivre, le cas d'une

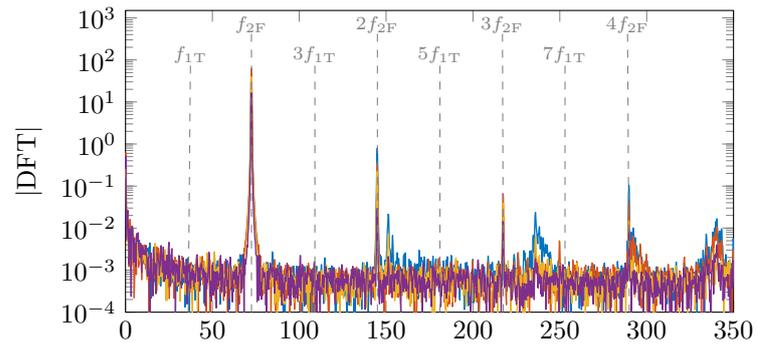
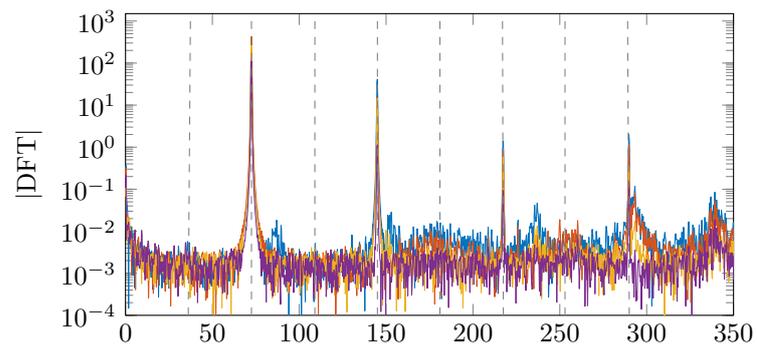
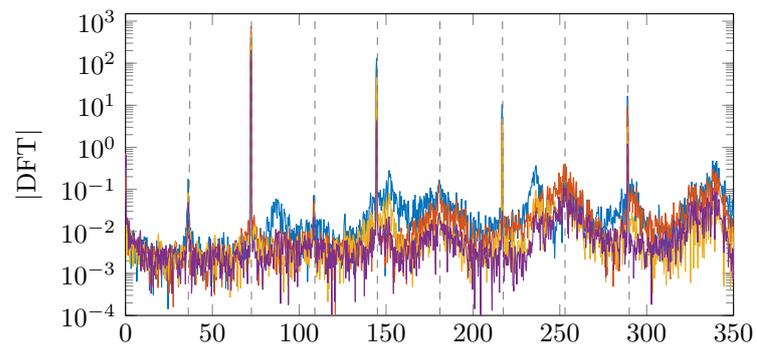
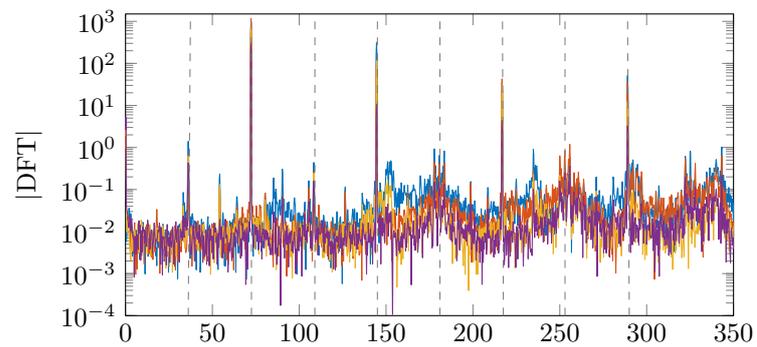
(a) $F = 4 \text{ N}$ (b) $F = 19 \text{ N}$ (c) $F = 34 \text{ N}$ (d) $F = 74 \text{ N}$

FIGURE IV.5 – Spectres fréquentiels aux points A [—], B [—], C [—] et D [—] pour différents efforts d'excitation

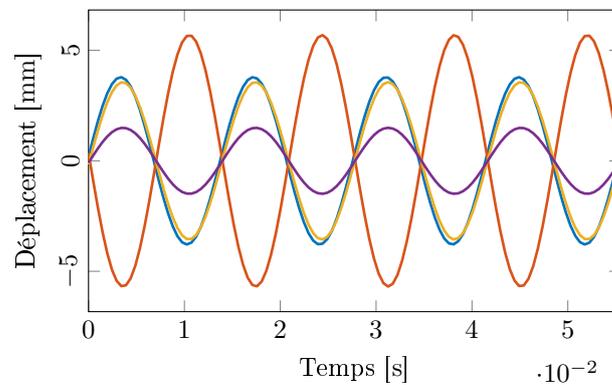


FIGURE IV.6 – Composantes temporelles pour $F = 74\text{ N}$ des signaux d'accélération à la fréquence f_{2F} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]

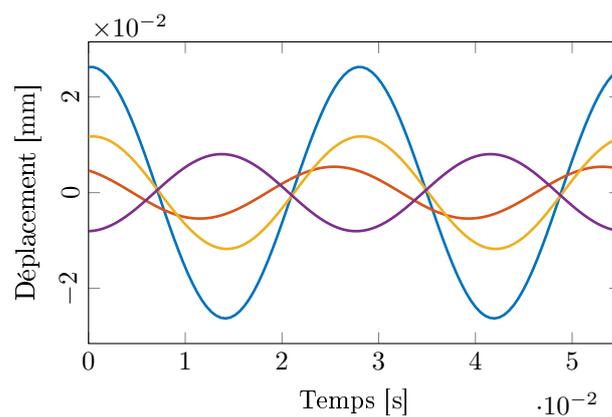


FIGURE IV.7 – Composantes temporelles pour $F = 74\text{ N}$ des signaux d'accélération à la fréquence f_{1T} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]

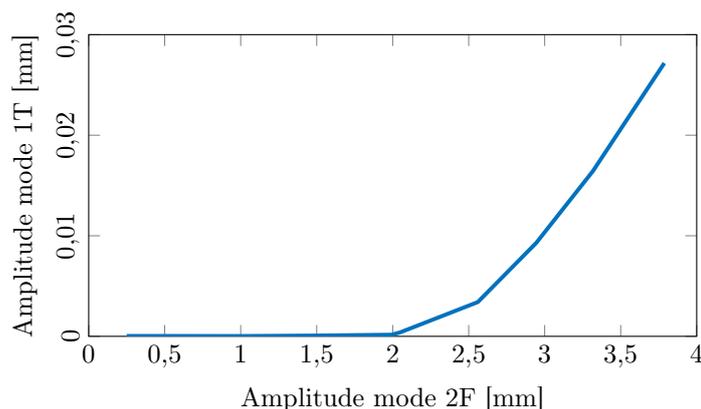


FIGURE IV.8 – Évolution du déplacement à la fréquence f_{1T} en fonction de celui à la fréquence f_{2F} pour $F=74$ N au point A

saturation du mode 2F au profit du mode 1T serait envisageable. Ce résultat est à mettre en regard des phénomènes de saturation de modes en présence de résonance interne observés par exemple dans les travaux de Nayfeh [130].

3 Analyse numérique

Comme on a pu le rappeler en introduction de ce chapitre, l'objectif est d'étudier le comportement dynamique non-linéaire des aubages de l'Open Rotor. En particulier, les études menées cherchent à caractériser la présence d'une résonance interne entre les modes de flexion et de torsion. La section précédente a permis de mettre en évidence le phénomène à travers une étude expérimentale sur un aubage provenant du démonstrateur Open Rotor dans le cadre du programme SAGE2. On propose à présent de vérifier et de comparer ces résultats avec des simulations numériques réalisées sur un modèle équivalent à celui traité expérimentalement.

Dans un premier temps, le modèle éléments finis utilisé est présenté. Puis dans un second temps, une description des méthodes de réduction des systèmes non-linéaires géométriques est effectuée avant, dans un troisième temps, d'appliquer ces méthodes au modèle numérique et de comparer les simulations sur les modèles réduits avec les résultats expérimentaux.

3.1 Modèle numérique et analyse modale

Le modèle numérique utilisé dans le reste de cette section est illustré sur la figure IV.9. Il s'agit d'un aubage similaire à celui traité expérimentalement et discrétisé par éléments finis à l'aide du logiciel SAMCEF (v15r01-03). Celui-ci possède 59765 nœuds ce qui correspond à 179295 degrés de liberté. Il est essentiellement maillé à l'aide d'éléments hexaédriques de degré 1 mais comporte également des éléments tétraédriques, de degré 1 également, au niveau des portées en pied d'aubage.

Comme mentionné précédemment, le modèle industriel d'aubage est réalisé à l'aide d'un matériau composite et mis en forme selon un procédé spécifique. Afin de se rapprocher des propriétés matériaux résultantes, le modèle numérique est subdivisé en différentes zones au sein desquelles sont définis des attributs matériaux différents.

Concernant les conditions aux limites de l'aubage, un encastrement est défini au niveau des portées en pied d'aubage. Par conséquent, les déplacements en chacun des nœuds des portées sont nuls pour chacune des trois directions (voir figure IV.10). Par suite, le mors n'est pas modélisé dans le logiciel éléments finis et les éventuelles conditions de glissement du pied de la



FIGURE IV.9 – Modèle aux éléments finis de la pale Open Rotor défini sur SAMCEF

pale dans l'alvéole du mors, qui pourraient survenir malgré l'effort de serrage ne sont ainsi pas prise en compte. De même, la liaison amortissante introduite entre le mors et le sol à l'aide du tapis élastomère (voir figure IV.2) dans le cadre des essais ainsi que la dynamique du mors ne sont pas reproduites numériquement.

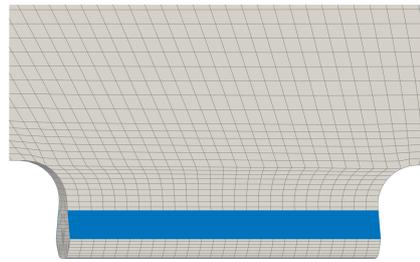


FIGURE IV.10 – Zone d'encastrement en pied d'aubage

En considérant ces conditions cinématiques, les modes propres de l'aubage ont été déterminés et les trois premiers ont été représentés sur la figure IV.11. Ceux-ci ont été obtenus à l'aide du module *DYNAM* de SAMCEF. Les fréquences propres associées sont répertoriées dans le tableau IV.3 et comparées avec celles obtenues de manière expérimentale.

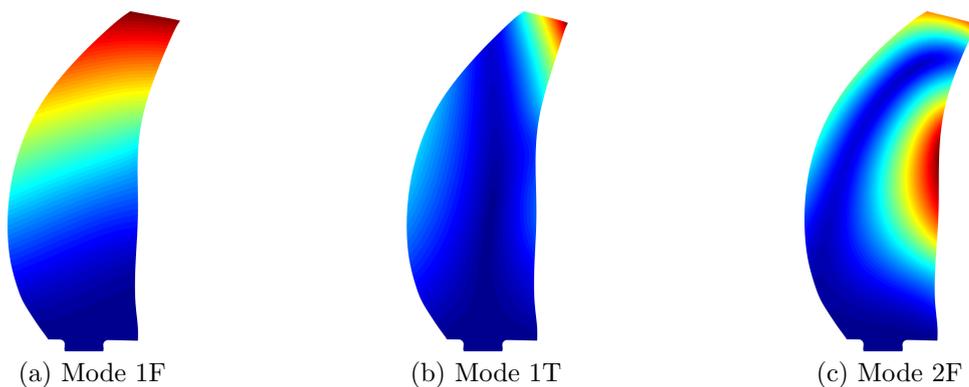


FIGURE IV.11 – Déformées propres des trois premiers modes du modèle de la pale Open Rotor

De manière globale, les modes obtenus expérimentalement sont plus rigides que ceux déterminés numériquement. Cette différence observée peut être imputable à la dynamique du mors sur son support élastique. Notons toutefois que la fréquence du premier mode obtenu expérimentalement est plus souple que son homologue numérique. Ceci peut s'expliquer par la

Modes	Fréquences exp. Hz	Fréquences num. Hz
1	9.50	13.42
2	37.38	34.35
3	72.5	70.48
4	86.12	83.75

TABLEAU IV.3 – Comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques de la pale Open Rotor

présence des modes de suspension pouvant perturber le premier mode. De même, la couche élastomère introduite pour amortir les vibrations de l'ensemble aube+mors induit une raideur à l'interface qui n'est pas modélisée numériquement. La masse ajoutée due à la présence des capteurs sur la pale peut participer aussi aux glissements des fréquences propres observées.

De ces remarques se pose alors la question d'un éventuel recalage du modèle numérique sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

3.2 Réduction de modèles non-linéaires géométriques

Afin de pouvoir évaluer de manière efficace la dynamique non-linéaire des structures industrielles complexes telles que l'aubage Open Rotor traité dans ce chapitre, il est indispensable d'avoir recours à des méthodes de réduction de manière à se ramener à un modèle à faible nombre de degrés de liberté. Le développement de techniques de réduction capable de reproduire avec fidélité la dynamique des systèmes à grand nombre de degrés de liberté suscite un fort intérêt dans la communauté scientifique. Différentes méthodes ont vu le jour pour répondre à la problématique et on propose ici d'en détailler quelques unes.

On suppose dans la suite l'équation de la dynamique non-linéaire sous la forme,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{IV.2})$$

avec $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x})$ le terme de force non-linéaire de nature géométrique ou raideurs non-linéaires.

3.2.1 Projection de Galerkin

L'idée de base derrière la méthode de réduction par projection de Galerkin est de rechercher une solution approchée \mathbf{x}_r du problème dynamique sous la forme d'une combinaison linéaire d'une base Ψ telle que,

$$\mathbf{x}_r(t) = \Psi\mathbf{q}(t) \quad (\text{IV.3})$$

où \mathbf{q} est un vecteur de coordonnées généralisées de taille r avec $r \ll n$ et n la dimension du système initial. La projection de Galerkin consiste alors à introduire la solution approchée (IV.3) dans l'équation dynamique (IV.2) puis à projeter la résultante sur l'espace réduit, conduisant au système,

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}} \quad (\text{IV.4})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{M}} = \Psi^T \mathbf{M} \Psi, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \Psi^T \mathbf{C} \Psi, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \Psi^T \mathbf{K} \Psi, \quad \tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi\mathbf{q}), \quad \tilde{\mathbf{f}}^{\text{ext}} = \Psi^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (\text{IV.5})$$

Il est important de remarquer que le système différentiel réduit (IV.4) possède une structure similaire au système initial (IV.2). Ainsi, il est parfaitement envisageable de faire appel aux méthodes de résolution et de recherche de solution périodiques décrites dans le chapitre II pour

résoudre (IV.4).

Lors de la réduction par projection de Galerkin, deux principaux enjeux apparaissent. Le premier consiste à choisir la base de réduction Ψ permettant de restituer le plus fidèlement possible la dynamique du système initial. En particulier, dans le cadre de ce mémoire, il est essentiel de se doter d'une base de réduction permettant à la fois de capturer la dynamique du second mode de flexion mais également d'autoriser la présence du premier mode de torsion dans la réponse dynamique au voisinage du mode 2F. Le second enjeu réside dans l'évaluation des efforts non-linéaires dans l'espace réduit. Les deux sous-sections suivantes proposent des stratégies pour répondre à ces deux enjeux.

3.2.2 Évaluation des raideurs réduites

L'évaluation des raideurs réduites $\tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\mathbf{q})$ représente un challenge important dans la procédure de réduction. En effet, une mauvaise maîtrise de cette étape peut résulter en une sur-évaluation ou sous-évaluation des raideurs pouvant conduire à un mauvais comportement du modèle réduit. En pratique, différentes approches sont proposées pour assurer une évaluation correcte des efforts non-linéaires réduits.

L'approche directe consiste à simplement projeter le terme non-linéaire tel que cela est fait pour les matrices linéaires du système. Cette démarche s'appuie sur une réécriture du terme non-linéaire $\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x})$ sous la forme,

$$\mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \quad (\text{IV.6})$$

où \otimes correspond au produit de Kronecker et où \mathbf{G} et \mathbf{H} sont une réécriture matricielle des tenseurs \mathbf{K}^{q} et \mathbf{K}^{c} de tailles respectives $n \times n^2$ et $n \times n^3$ et regroupant les coefficients des monômes non-linéaires. Dans ce cas, l'obtention des efforts non-linéaires réduits s'effectue simplement en introduisant l'expression de Galerkin $\mathbf{x} = \Psi\mathbf{q}$ dans (IV.6) puis en projetant tel que,

$$\tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}}(\mathbf{q}) = \Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi\mathbf{q}) = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \otimes \mathbf{q} \quad (\text{IV.7})$$

avec

$$\tilde{\mathbf{G}} = \Psi^T \mathbf{G} \Psi \otimes \Psi, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \Psi^T \mathbf{H} \Psi \otimes \Psi \otimes \Psi \quad (\text{IV.8})$$

Cette démarche présente généralement deux principaux inconvénients. Tout d'abord, elle requiert de manipuler des grandeurs volumineuses lorsque le nombre de degré de liberté est important. De plus, elle suppose l'accès aux matrices \mathbf{G} et \mathbf{H} ce qui n'est généralement pas le cas pour un modèle issu d'un code éléments finis.

Afin de pallier ces limitations, une méthode alternative a été développée. Celle-ci propose d'exprimer a priori les efforts non-linéaires réduits sous la forme polynomiale suivante,

$$\Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^{\text{q}} q_j q_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=j}^r \sum_{l=k}^r \tilde{\mathbf{K}}_{jkl}^{\text{c}} q_j q_k q_l \quad (\text{IV.9})$$

où r est la dimension du vecteur d'inconnues modales \mathbf{q} . Proposée dans [118], la méthode consiste alors à déterminer les composantes des tenseurs \mathbf{K}^{q} et \mathbf{K}^{c} à l'aide d'une procédure d'évaluation des raideurs non-linéaires (ou *STEP* pour STifness Evaluation Procedure). Le principe est d'imposer un certain nombre de déplacements nodaux \mathbf{x}_p bien choisis et d'effectuer une série d'analyses statiques non-linéaires de manière à remonter aux raideurs $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{q}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}^{\text{c}}$ des forces non-linéaires réduites quadratique et cubique. La procédure se résume comme suit.

En imposant des déplacements \mathbf{x}_p associés au mode Ψ_j sous la forme $\mathbf{x}_p = \Psi_j q_j$, il est

possible d'isoler les composantes $\tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{jjj}^c$ via l'équation (IV.10).

$$\Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi_j q_j) = \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{jjj}^c q_j q_j q_j \quad (\text{IV.10})$$

De même, une relation liant les composantes $\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^q$, $\tilde{\mathbf{K}}_{jjk}^c$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{jkk}^c$ aux efforts non-linéaires réduits s'obtient en imposant des déplacements associés à deux modes linéaires, $\mathbf{x}_p = \Psi_j q_j + \Psi_k q_k$ à l'aide de l'équation (IV.11).

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi_j q_j + \Psi_k q_k) &= \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{jjj}^c q_j q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{kk}^q q_k q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{kkk}^c q_k q_k q_k \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^q q_j q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{jjk}^c q_j q_j q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{jkk}^c q_j q_k q_k \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

Enfin, les coefficients $\tilde{\mathbf{K}}_{jkl}^c$ peuvent être extraits de la relation (IV.12) en considérant des déplacements selon 3 modes linéaires, $\mathbf{x}_p = \Psi_j q_j + \Psi_k q_k + \Psi_l q_l$.

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi_j q_j + \Psi_k q_k + \Psi_l q_l) &= \tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{kk}^q q_k q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{ll}^q q_l q_l \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{jk}^q q_j q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{jl}^q q_j q_l + \tilde{\mathbf{K}}_{kl}^q q_k q_l \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{jjj}^c q_j q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{kkk}^c q_k q_k q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{lll}^c q_l q_l q_l \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{jjk}^c q_j q_j q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{kjj}^c q_k q_j q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{jjl}^c q_j q_j q_l \\ &+ \tilde{\mathbf{K}}_{llj}^c q_l q_l q_j + \tilde{\mathbf{K}}_{kkl}^c q_k q_k q_l + \tilde{\mathbf{K}}_{llk}^c q_l q_l q_k + \tilde{\mathbf{K}}_{jkl}^c q_j q_k q_l \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Chacun des termes $\tilde{\mathbf{K}}_{jk}^q$ et $\tilde{\mathbf{K}}_{jkl}^c$ se déduit finalement en recombinaison les équations (IV.10) à (IV.12) pour différents choix de déplacements imposés. Par exemple, les raideurs réduites de la forme $\tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q$ s'obtiennent à l'aide des déplacements imposés $+\Psi_j q_j$ et $-\Psi_j q_j$ selon le même mode Ψ_j par,

$$\tilde{\mathbf{K}}_{jj}^q = \frac{1}{q_j^2} \left(\Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(\Psi_j q_j) + \Psi^T \mathbf{f}^{\text{nl}}(-\Psi_j q_j) \right) \quad (\text{IV.13})$$

La STEP est un outil parfaitement adapté à la réduction de systèmes issus de codes éléments finis en se basant uniquement sur des opérations standards. Par ailleurs, il s'agit d'une méthode non-intrusive, c'est à dire qu'elle n'intervient pas lors de la construction du modèle et peut être réalisée indépendamment une fois le modèle créé. Enfin, l'utilisation des modes propres linéaires pour la STEP n'est pas une obligation. D'autres vecteurs comme les dérivées modales où les modes compagnons (détaillés dans la section suivante) peuvent être utilisés. On prendra toutefois garde à vérifier que le déplacement imposé est suffisamment important pour activer le régime non-linéaire.

La STEP a souvent été employée dans la littérature et parmi les modèles d'application, on pourra notamment citer [5, 31, 197] proposant une utilisation sur des modèles éléments finis d'aubages industriels. De plus, certaines tentatives d'améliorations de la méthode ont été récemment proposées pour corriger l'évaluation des raideurs réduites. Balmaseda a proposé de corriger la STEP dans le cadre d'une utilisation avec des modes linéaires, en appliquant un filtrage des forces non-linéaires à l'aide d'une méthode POD (pour Proper Orthogonal Decomposition) [6]. Une utilisation de la STEP sur une sélection réduite de degrés de liberté a également été suggérée pour des structures minces [81, 195].

3.2.3 Choix des bases de réduction

Le second enjeu pour la réduction de modèles non-linéaires géométriques s'apparente au choix de la base de réduction à utiliser. Formellement, plusieurs choix pour la base Ψ peuvent

être envisagés et on propose ici d'en approfondir certains.

Modes linéaires La réduction à l'aide des modes linéaires constitue l'approche la plus naturelle et simple à mettre en œuvre. Ces derniers s'obtiennent par résolution du système aux valeurs propres généralisé,

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Psi_i = \mathbf{0} \quad (\text{IV.14})$$

Le choix des modes à retenir dans la base dépend généralement de la plage fréquentielle d'étude ainsi que de considérations sur la forme de l'excitation du système. Pour des systèmes linéaires, l'utilisation des modes propres est particulièrement efficace. Ils possèdent de plus une propriété d'invariance précisant qu'un mouvement initié sur un mode ou un ensemble de modes reste confiné sur cet ensemble. Appliqués à des modèles faiblement non-linéaires ou à basse amplitude de vibration, les modes linéaires constituent une base de réduction plutôt adaptée. Cependant, lorsque l'amplitude augmente, les non-linéarités prennent une place plus importante et le recours aux modes linéaires n'est plus suffisant. En effet, en régime non-linéaire, la déformée du système peut faire intervenir des participations modales de modes largement en dehors de la plage fréquentielle d'étude. C'est le cas par exemple de la sollicitation transverse d'une poutre bi-encasté dont la déformée fait intervenir un mouvement longitudinal haute fréquence [109]. De plus, la dépendance des modes en amplitudes brise la propriété d'invariance et un mouvement initié sur un mode peut basculer sur un autre comme cela s'observe pour une résonance interne.

Pour mieux s'en rendre compte, une réduction à l'aide des modes linéaires est appliquée au modèle de poutre vrillée et pré-courbé traité dans la section III.3.3. Les résultats sont illustrés par la figure IV.12 et comparés au modèle complet considéré comme la référence. Le

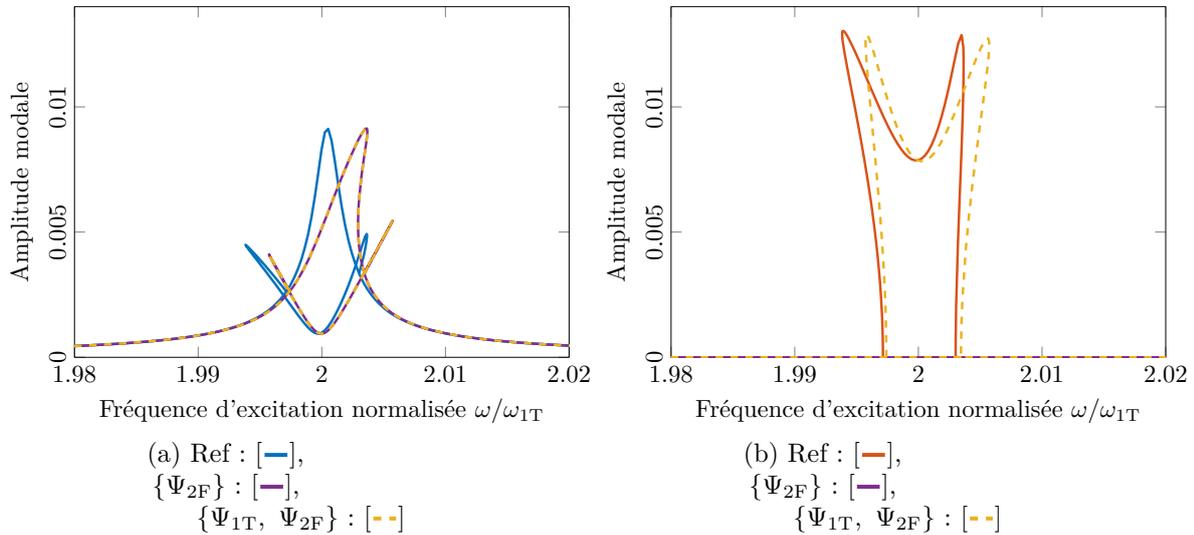


FIGURE IV.12 – Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires

comportement à basse amplitude est correctement restitué par le modèle réduit obtenu par projection sur le mode Ψ_{2F} . En revanche, à plus haute amplitude, un décalage s'opère et le modèle réduit est beaucoup plus rigide que le modèle complet. Par ailleurs, on note l'absence de réponse du mode de torsion lorsque seul le mode de flexion est pris en compte dans la réduction. En ajoutant le mode de torsion à la base de réduction, la résonance interne est capturée. Toutefois un effet rigidifiant est observé. Celui-ci est également présent sur la réponse du mode 1T. Il est clair à travers cet exemple que la réduction s'appuyant uniquement sur les modes linéaires ne suffit pas à recouvrer de manière précise le comportement dynamique des

systèmes non-linéaires. Une solution pourrait être d'ajouter à la base de réduction d'autres modes linéaires, cependant le choix de ceux à considérer n'est pas forcément simple.

Pour pallier cela, des approches proposent d'enrichir la base de réduction en s'appuyant sur le caractère non-linéaire du système.

Dérivées modales Les dérivées modales utilisées pour la réduction de systèmes dynamiques non-linéaires ont été introduites par Idelsohn et Cardona [69]. Elles tirent parti de la dépendance en amplitude de vibration des modes propres comme cela a pu être mentionné précédemment. Formellement, cette notion permet d'écrire la solution approchée du système dynamique non-linéaire sous la forme $\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{q})\mathbf{q}$. Cette relation admet un développement de Taylor au second ordre autour de la position d'équilibre $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}}$ ce qui permet d'écrire,

$$\mathbf{x} \simeq \mathbf{x}|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i q_j \quad (\text{IV.15})$$

où il est possible de remarquer que,

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \Psi_i \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad (\text{IV.16})$$

mettant en évidence la présence des modes linéaires tangents au voisinage de la position d'équilibre du système. De même, un développement de la dérivée seconde dans l'expression IV.15 donne,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial q_i} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} \quad (\text{IV.17})$$

faisant apparaître les termes de dérivées modales des modes i et j vis à vis de leurs coordonnées généralisées q_i et q_j au voisinage de \mathbf{x}_0 . En introduisant la notation simplifiée $\partial \Psi_{ij}$ pour définir le membre de droite de l'expression (IV.17) et en écrivant le terme $q_i q_j$ sous la forme d'une nouvelle coordonnée généralisée p_{ij} , le développement de \mathbf{x} s'écrit finalement sous la forme,

$$\mathbf{x} \simeq \sum_{i=1}^r \Psi_i \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \partial \Psi_{ij} \Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{0}} p_{ij} = [\Psi \ \partial \Psi] \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

Par conséquent, la solution \mathbf{x} s'écrit donc linéairement comme une combinaison de modes propres à laquelle s'applique une correction induite par les dérivées modales. On notera ici la simplification engendrée par les termes p_{ij} . La conservation de la forme originale tenant compte des termes quadratiques $q_i q_j$ a récemment été à l'origine de travaux portant sur le calcul de variétés quadratiques [71, 159].

En pratique, il est possible de faire apparaître les dérivées modales en différentiant le problème aux valeurs propres généralisé (IV.14),

$$\left(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M} \right) \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \right) \Psi_i \quad (\text{IV.19})$$

En exploitant la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport à la matrice de masse, il est possible de montrer que,

$$\frac{\partial \omega_i^2}{\partial q_j} = \Psi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \Psi_i \quad (\text{IV.20})$$

Par ailleurs, la dérivée de la matrice de raideur par rapport à la coordonnée généralisée q_j peut

être obtenue par différence finie [173],

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} = \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x}_0 + \delta q_j \Psi_j) - \mathbf{K}(\mathbf{x}_0)}{\delta q_j} \quad (\text{IV.21})$$

Grâce à cette dernière équation, chacune des grandeurs du problème (IV.19) est connue. Toutefois, l'inversion de ce dernier pour obtenir la dérivée modale n'est pas directe en raison de la singularité de la matrice du membre de gauche de (IV.19). Slaats suggère de diminuer la taille du problème à l'aide d'une matrice de transformation [173]. Une autre solution consiste à augmenter la taille du système en imposant une condition de normalisation des modes. Cette approche est notamment celle employée par Jain [71] proposant de dériver la relation d'orthogonalité des modes par rapport à la masse. Enfin, il a été montré dans [68] que les termes d'inertie présents dans (IV.19) peuvent être négligés. Dans ce cas, la recherche des dérivées modales se ramène à la résolution du système suivant,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j} \Psi_i \quad (\text{IV.22})$$

Les solutions de ce système sont dénommées dans la littérature dérivées modales statiques (où SMD pour Static Modal Derivatives). Elles possèdent des propriétés de symétrie ce qui permet de réduire de moitié le nombre de calculs.

En pratique, les approches mentionnées ci-dessus requièrent chacune d'avoir accès au terme $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial q_j}$. Or, ce point n'est pas systématiquement garanti lors de l'utilisation de logiciels éléments finis. Afin de remédier à cela, il est possible de calculer numériquement les dérivées modales par différences finies telles que,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} = \frac{\Psi_i(\mathbf{x}_0 + \delta q_j \Psi_j(\mathbf{x}_0)) - \Psi_i(\mathbf{x}_0)}{\delta q_j} \quad (\text{IV.23})$$

où le premier terme du numérateur correspond au mode i du système déformé selon le mode Ψ_j au point \mathbf{x}_0 . L'avantage de cette approche numérique est d'être facilement implémentable dans un code aux éléments finis.

L'utilisation des dérivées modales pour la réduction de modèle est illustrée par la figure IV.13 pour la poutre vrillée et pré-courbée. Il apparaît assez naturel d'enrichir la base constituée des modes linéaires 1T et 2F par leurs dérivées modales respectives vis à vis des coordonnées généralisées. La prise en compte de la dérivée modale $\partial \Psi_{2F2F}$ du mode 2F vis à vis de sa coordonnée généralisée, permet de corriger le raidissement induit par les modes linéaires. Toutefois l'approximation des branches de bifurcation reste insuffisamment précise. En ajoutant à la base de réduction la dérivée modale $\partial \Psi_{1T1T}$ du mode 1T vis à vis de sa coordonnée généralisée, une légère amélioration de la prédiction des branches de bifurcation est observable. En intégrant finalement la dérivée modale croisée $\partial \Psi_{1T2F}$ à la base réduite, une quasi-superposition des réponses fréquentielles des modes 1T et 2F est obtenue. Ainsi pour cet exemple simplifié, il suffit de considérer une base réduite composée de cinq vecteurs pour recouvrer la dynamique du système et couplage dû à la résonance interne.

Modes compagnons À l'instar des dérivées modales, la méthode des modes compagnons propose d'enrichir une base de réduction existante à l'aide de modes dits compagnons ou duaux. Décrit dans [16], le principe de cette approche consiste à soumettre le système à une série de chargements statiques du régime linéaire au non-linéaire puis d'extraire, à partir des champs de déplacements résultants, les modes compagnons au moyen d'une décomposition en valeurs

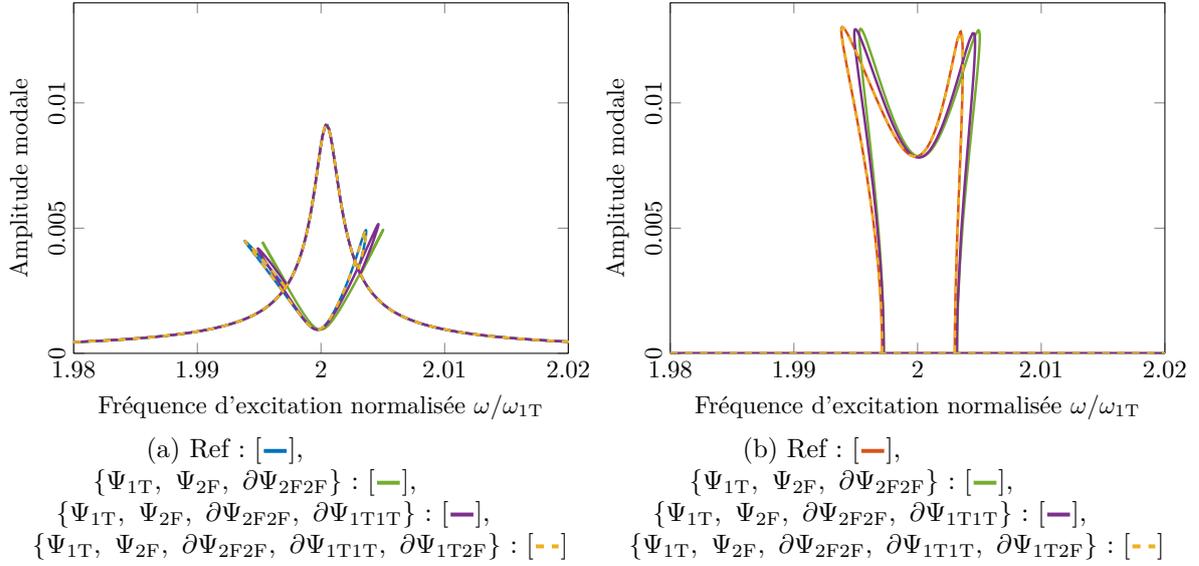


FIGURE IV.13 – Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires et des dérivées modales

singulières (ou SVD pour Singular Value Decomposition). La première étape de la méthode consiste ainsi à résoudre un ensemble de problèmes statiques de la forme,

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_{ij,\alpha} + \mathbf{f}^{\text{nl}}(\mathbf{x}_{ij,\alpha}) = \mathbf{f}_{ij,\alpha} \quad (\text{IV.24})$$

où il est possible en pratique de montrer qu'il est suffisant de choisir des chargements statiques selon un ou deux modes tels que [82],

$$\mathbf{f}_{ij,\alpha} = \frac{\alpha}{2}\mathbf{K}(\Psi_i + \Psi_j) \quad (\text{IV.25})$$

avec \mathbf{K} la matrice de raideur linéaire du système, Ψ_i et Ψ_j (avec potentiellement $i = j$) des modes dits dominants, c'est à dire susceptibles de participer fortement à la réponse de la structure et avec α des paramètres pouvant être positifs et négatifs et dont les amplitudes sont telles que les solutions $\mathbf{x}_{ij,\alpha}$ du problème statique (IV.24) parcourent les régimes linéaires et fortement non-linéaires.

Une fois les $\mathbf{x}_{ij,\alpha}$ obtenus, la seconde étape de la méthode consiste à extraire de ces champs de déplacements les contributions non-linéaires en soustrayant leur projection sur la base de réduction Ψ , soit,

$$\mathbf{y}_{ij,\alpha} = \mathbf{x}_{ij,\alpha} - \sum_{k=1}^r \left(\Psi_k^T \mathbf{M} \mathbf{x}_{ij,\alpha} \right) \Psi_k \quad (\text{IV.26})$$

où la matrice Ψ contient les modes linéaires ainsi que les modes compagnons déjà calculés et normalisés par rapport à la matrice de masse.

Enfin, la dernière étape de la procédure consiste à réaliser la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\mathbf{Y}_{ij} = [\mathbf{y}_{ij,\alpha_{\min}}, \dots, \mathbf{y}_{ij,\alpha_{\max}}]$ telle que,

$$\mathbf{Y}_{ij} = \mathbf{U}_{ij} \mathbf{S}_{ij} \mathbf{V}_{ij} \quad (\text{IV.27})$$

À partir de là, le choix des vecteurs de la matrice \mathbf{U}_{ij} à conserver peut s'appuyer sur un critère basé sur les valeurs singulières disponibles dans le matrice \mathbf{S}_{ij} . En pratique, les modes compagnons correspondent aux vecteurs pour lesquels les valeurs singulières sont les plus élevées

[16]. Des critères en énergie de déformation peuvent également être retenus dans le cas où la structure se déforme selon un mode à forte raideur.

Après extraction des modes compagnons, l'ensemble de la procédure peut être réitéré en considérant un nouveau cas de chargement sur d'autres modes. L'extraction réalisée lors de la seconde étape (IV.26) doit alors tenir compte de la nouvelle base de réduction Ψ intégrant les modes compagnons déjà calculés.

À nouveau, la méthode de réduction est appliquée à la poutre vrillée et pré-courbée. Trois cas de chargement ont été considérés pour obtenir le modèle réduit : le premier selon le mode 2F ($i = j = 2F$), le second selon le mode 1T ($i = j = 1T$) et le dernier selon les deux modes simultanément ($i = 1T$ et $j = 2F$). Lors de chaque chargement, des modes compagnons ont été extraits et intégrés à la base de réduction. Au total, 4 modes compagnons (1+1+2) ont été retenus et sélectionnés en fonction du niveau de leur valeur singulière, illustré sur la figure IV.14a. On y observe notamment une décroissance très rapide justifiant le choix des vecteurs retenus. Pour chacun des cas de chargement, les valeurs de α ont été choisies de telle sorte que le système entre en régime non-linéaire. Pour mieux s'en rendre compte, l'évolution du déplacement de torsion en fonction de α pour le premier cas de chargement est illustré par la figure IV.14b. La dynamique du modèle réduit à l'aide des modes compagnons est comparée

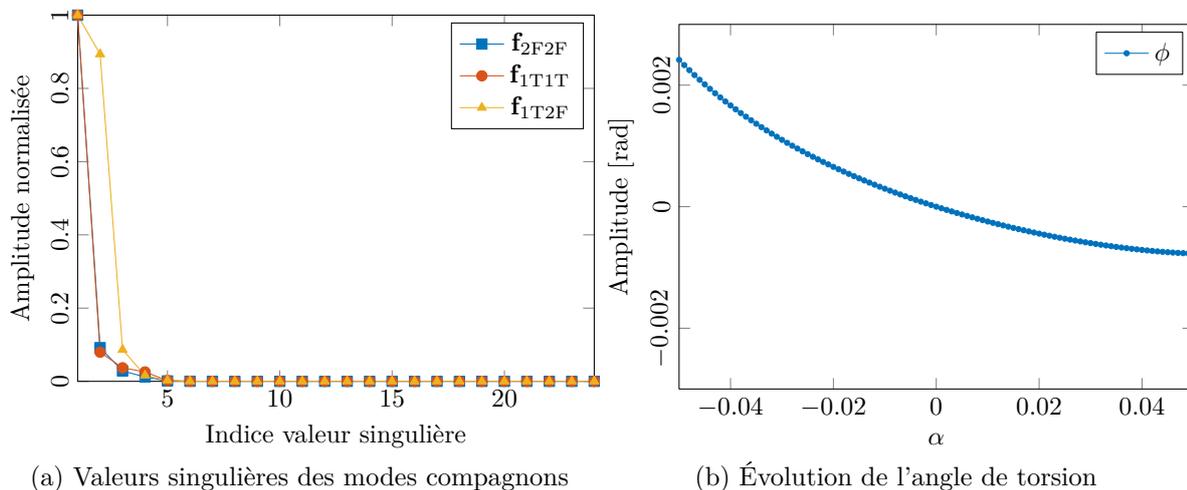


FIGURE IV.14 – Justification des modes compagnons retenus pour la réduction

à celle du modèle complet sur la figure IV.15. Une très bonne corrélation est observable, aussi bien pour le mode 2F que le mode 1T. À nouveau les branches de bifurcation sont correctement prédites, montrant l'efficacité de la méthode pour traiter des cas de résonance interne.

3.2.4 Forme normale directe

Récemment, une nouvelle approche s'appuyant sur la théorie des formes normales a été étudiée pour la réduction de modèles industriels issus de codes éléments finis. La théorie des formes normales tire son origine des théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac [55, 144]. Appliquée au domaine des vibrations, elle a d'abord été mise en place et étudiée par Jézéquel et Lamarque [72] pour l'étude de systèmes dynamiques à un et deux degrés de liberté. D'autres travaux sont venus enrichir la littérature à ce sujet. On pourra notamment citer [100] pour une exploitation des formes normales à l'aide des complexes, ou encore [20] utilisant les formes normales pour la recherche de bifurcations. Par la suite, Touzé [185, 187] a proposé d'utiliser les formes normales pour la réduction de modèles non-linéaires. L'idée générale s'appuie sur l'introduction d'un changement de variables non-linéaires permettant de passer de l'espace de

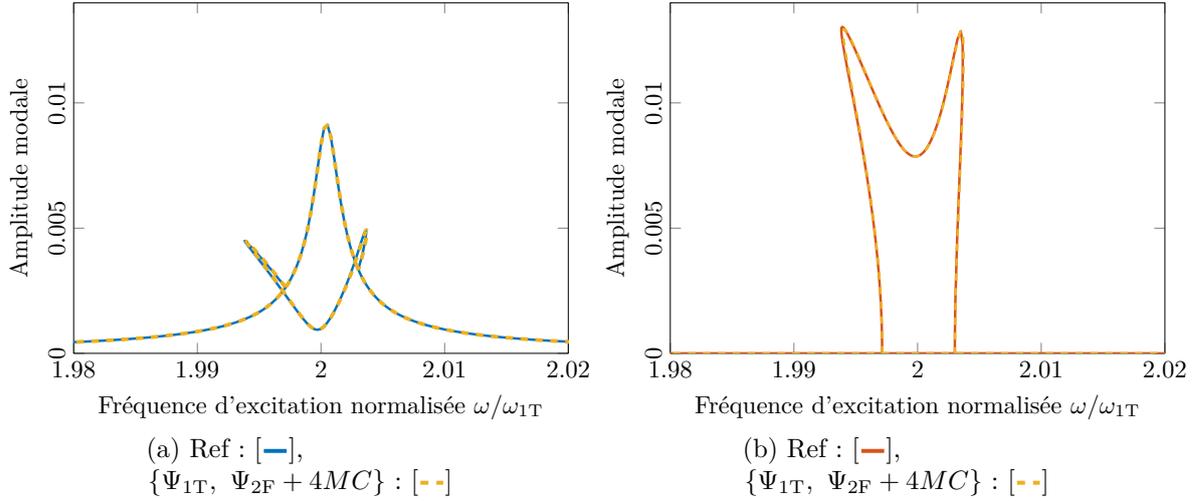


FIGURE IV.15 – Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires et des modes compagnons

départ à un sous-espace ne conservant que les termes participant à la dynamique du système. Plus précisément, Touzé montre que ce changement de variables permet de restreindre la dynamique sur une variété invariante de l'espace des phases similaire à la notion introduite par Shaw et Pierre [168]. De cette manière, toute solution initiée sur l'espace réduit défini par la variété reste confinée sur cet espace, étendant ainsi la propriété d'invariance évoquée précédemment pour les systèmes linéaires.

L'approche s'appuyant sur la forme normale a notamment été utilisée par Touzé dans le cas non-amorti [185] et Touzé et Amabili [187] en tenant compte de l'amortissement. Pour chaque cas, la méthode requiert au préalable une réécriture du système complet en base modale. Dans le cadre de l'étude d'un modèle industriel issu d'un code aux éléments finis, ce point est particulièrement délicat. Bien qu'il soit théoriquement possible de faire appel à la STEP pour obtenir les raideurs non-linéaires en base modale, cela s'avère en pratique irréalisable en raison des temps de calcul prohibitifs et de la place mémoire nécessaire pour réaliser l'opération.

Afin de palier cette limitation, Vizzaccaro a récemment proposé de complètement réécrire le changement de variables conduisant à la forme normale à partir des inconnues physiques du problème sans passer par une projection modale [197]. Le nom de forme normale directe (ou DNF pour Direct Normal Form) a été donné à cette procédure. En raison d'une démarche assez conséquente, les étapes permettant de construire le modèle réduit sont détaillées dans l'annexe C de ce mémoire.

Appliquée à un système présentant une résonance interne 1 : 2, la DNF sur les deux modes impliqués dans la résonance conduit au modèle réduit au second ordre en coordonnées normales,

$$\begin{aligned}
& \ddot{r}_1 + \left(\zeta_M + \zeta_K \omega_1^2 \right) \dot{r}_1 + \omega_1^2 r_1 + \left(g_{12}^1 + g_{21}^1 \right) r_1 r_2 \\
& + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[\left(A_{ijk}^1 + h_{ijk}^1 \right) r_i r_j r_k + B_{ijk}^1 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k + C_{ijk}^1 r_i r_j \dot{r}_k \right] = f_1 \\
& \ddot{r}_2 + \left(\zeta_M + \zeta_K \omega_2^2 \right) \dot{r}_2 + \omega_2^2 r_2 + g_{11}^2 r_1^2 \\
& + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[\left(A_{ijk}^2 + h_{ijk}^2 \right) r_i r_j r_k + B_{ijk}^2 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k + C_{ijk}^2 r_i r_j \dot{r}_k \right] = f_2
\end{aligned} \tag{IV.28}$$

où l'expression des grandeurs présentes dans l'équation est explicitée dans l'annexe C. Le passage des coordonnées normales aux coordonnées physiques s'obtient finalement à l'aide du changement de variables non-linéaire définissant la variété invariante (voir l'annexe C).

L'application de la DNF à la poutre vrillée et pré-courbée est représentée par la figure IV.16. Encore une fois, une très bonne corrélation est observée. Ceci est d'autant plus intéressant que

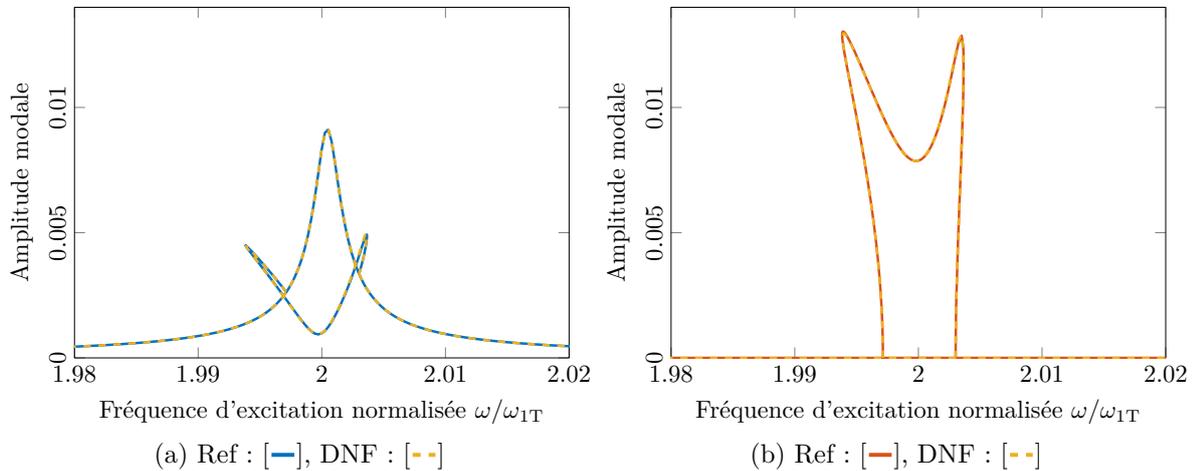


FIGURE IV.16 – Réduction du modèle poutre à l'aide de la forme normale directe

le système réduit ne comporte que deux degrés de liberté correspondant aux modes 1T et 2F. En effet, l'essentiel de la méthode se concentre sur la procédure aboutissant au modèle réduit. Celle-ci requiert un coût numérique plus important que pour la réduction par projection de Galerkin. En contrepartie, le système réduit se restreint aux seuls modes impliqués dans la réponse dynamique, nécessitant toutefois de supposer a priori la participation de ces modes dans la réponse.

Cette section a permis de présenter certaines des méthodes de réduction pouvant être appliquées à des modèles éléments finis incluant des non-linéarités géométriques. En particulier, celles-ci ont été appliquées au modèle poutre introduit dans le chapitre III et ont montré des résultats encourageants et une bonne aptitude à restituer la dynamique en présence de résonance interne. La liste des méthodes décrites dans cette section reste non exhaustive et d'autres approches existent dans la littérature. À ce propos, citons par exemple la méthode de condensation implicite (ou ICE pour Implicit Condensation and Expansion) [65], le recours aux variétés quadratiques [71] ou encore la théorie des sous-variétés spectrales [59] appliquée par exemple à la réduction de modèles éléments finis de poutres à grand nombre de degrés de liberté [145].

À ce jour, la recherche d'une méthode de réduction robuste fait encore l'objet de nombreux travaux et il est difficile de favoriser une méthode plutôt qu'une autre. De récentes études comparatives tentent toutefois d'apporter certains éléments de réponse [172, 190, 196] mais elles restent encore peu nombreuses lorsqu'il s'agit de la réduction de modèles industriels. Tenant compte de ces remarques on propose dans la suite d'appliquer les méthodes décrites dans cette section à la réduction du modèle EF de pale Open Rotor.

3.3 Application à la pale Open Rotor

Dans cette dernière section, on s'intéresse à l'étude dynamique du modèle numérique de la pale Open Rotor. L'étape de réduction du modèle à l'aide des méthodes décrites dans la section précédente est d'abord effectuée. Puis les simulations en réponses forcées sont étudiées

avec une attention particulière aux cas des résonances internes. Enfin une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux est abordée.

3.3.1 Étape préliminaire

Comme on a pu le voir précédemment, les fréquences propres numériques et expérimentales présentent certains écarts. En pratique, dans une volonté de comparaison, il peut être intéressant de recalibrer le modèle éléments finis à l'aide des fréquences propres linéaires expérimentales. Sur le principe, cette option n'est pas incompatible avec la réduction s'appuyant sur les dérivées modales pour laquelle le calcul de la base réduite s'opère par différences finies sur les modes propres du système. En revanche, cela devient plus délicat pour la détermination des modes compagnons et le calcul de la forme normale directe dans la mesure où les matrices \mathbf{K} pour le premier, et \mathbf{K} et \mathbf{M} pour le second, sont requises pour le calcul du système réduit. Corriger les matrices réduites linéaires sans opérer de modifications sur les matrices complètes peut alors conduire à des incohérences sur le modèle réduit.

Une solution peut être de calculer les nouvelles matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} à l'aide des données expérimentales comme proposé dans [42]. Toutefois, pour des systèmes de taille importante comme c'est le cas ici, la place mémoire requise pour le calcul peut être insuffisante. Une solution plus rigoureuse consiste à directement modifier le modèle EF en tenant compte entre autre du mors, de la liaison avec le sol, de l'encastrement en pied d'aubage pour converger vers le modèle expérimental.

Dans le cadre de cette thèse, il a été préféré de conserver le modèle numérique existant sans opérer de recalage sur la partie linéaire. En revanche, les coefficients d'amortissement extraits des données expérimentales ont été directement implémentés dans la résolution numérique.

3.3.2 Réduction du modèle industriel

La réduction du modèle industriel est ici présentée en vue d'effectuer des calculs dynamiques sur le modèle réduit. Pour ce faire, les méthodes de réductions détaillées dans la section précédente ont été programmées sur MATLAB à partir des données d'entrée fournies par les différentes analyses (modales, statiques, etc.) de SAMCEF. Pour simplifier l'écriture on notera ML, DM, MC et DNF, pour se référer aux modes linéaires, aux dérivées modales, aux modes compagnons et à la forme normale directe.

Les dérivées modales ont été calculées selon la méthode des différences finies rappelée par l'équation (IV.23). Les mêmes vecteurs de la base réduite que ceux retenus pour l'exemple d'application du modèle poutre ont été calculés, à savoir les dérivées modales $\partial\Psi_{1T1T}$, $\partial\Psi_{1T2F}$ et $\partial\Psi_{2F2F}$. Celles-ci sont représentées par la figure IV.17. Notons la forme complexe de ces dernières liée à la géométrie vrillée et élancée de la pale et assez éloignée des modes classiques linéaires comme illustré par exemple par la figure IV.11. Il est également intéressant d'observer le comportement en flexion et torsion pour chacune d'elles laissant supposer un bon choix de base de réduction pour capturer le couplage modal.

Concernant les modes compagnons, ceux-ci ont été obtenus en suivant la procédure rappelée par les équations (IV.24) à (IV.27). Pour cela, trois familles de chargements successives ont été utilisées : selon le mode 1T, selon le mode 2F et selon un couplage des deux modes. Pour chaque cas, le paramètre de chargement α (voir (IV.24)) a été choisi de sorte que le système passe du régime linéaire au régime non-linéaire. Afin d'illustrer ces propos, le déplacement en tête d'aubage en fonction de α pour le dernier cas de chargement est illustré par la figure IV.18b. On remarque facilement l'évolution non-linéaire du déplacement ce qui confirme la bonne application

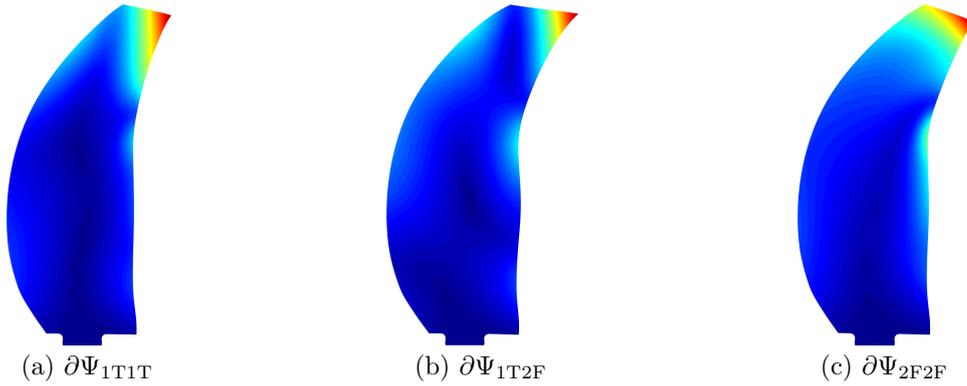
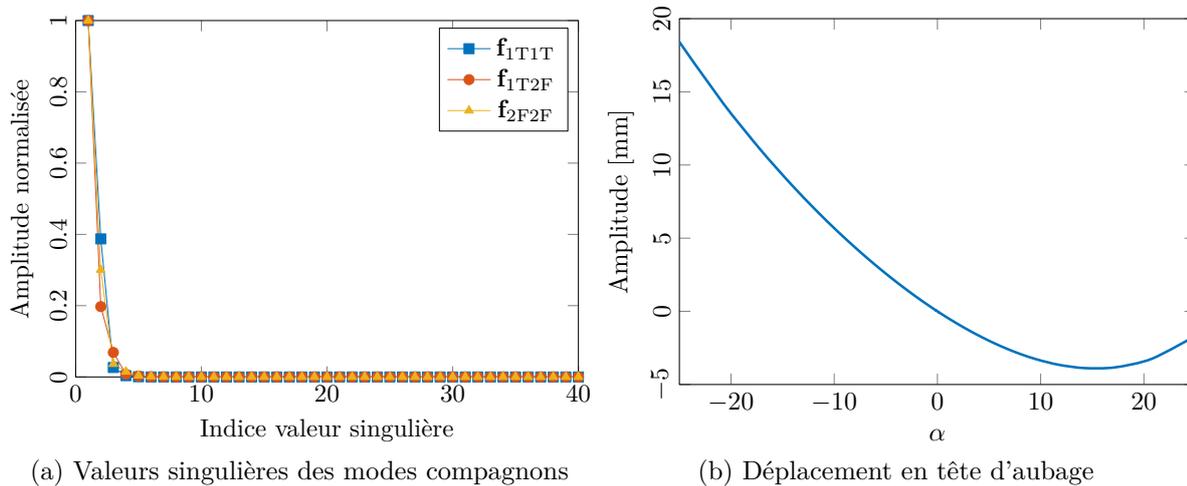


FIGURE IV.17 – Dérivées modales utilisées pour la réduction de la pale Open Rotor

de la méthode. Comme précédemment, le choix des modes compagnons à extraire s'appuie sur un critère portant sur les valeurs singulières de la SVD. L'évolution de celles-ci est illustrée pour les trois familles de chargement sur la figure IV.18b. On note une rapide décroissance des valeurs singulières justifiant de ne retenir qu'un nombre restreint de modes compagnons. Au vu des valeurs, le choix a été fait de ne conserver que deux modes compagnons par chargement conduisant à une base de réduction composée de 8 vecteurs (2ML + 6MC). Comme pour les dérivées modales, les modes compagnons retenus sont illustrés sur la figure IV.19.

Comme précédemment, ces modes présentent des géométries assez complexes et éloignées des modes de flexion ou de torsion. Notons également la similitude entre le mode compagnon MC1 et la dérivée modale $\partial\Psi_{1T1T}$ représentée par la figure IV.17a. De même, le mode compagnon MC4 peut être rapproché de la dérivée modale $\partial\Psi_{1T2F}$ illustrée en figure IV.17b. Ces observations montrent qu'en dépit de méthodes de construction très différentes, les vecteurs des bases réduites obtenues par dérivées modales et modes compagnons présentent une certaine cohérence.



(a) Valeurs singulières des modes compagnons

(b) Déplacement en tête d'aubage

FIGURE IV.18 – Justification des modes compagnons retenus pour la réduction

Pour ces deux bases de réduction, le calcul des raideurs non-linéaires réduites a été effectué par la méthode STEP, présentée dans la section IV.3.2.2, en choisissant les coefficients q_j , q_k et q_l de sorte d'avoir un déplacement maximum imposé dans le régime non-linéaire. Plusieurs simulations ont été réalisées avec différents choix de coefficients pour vérifier la convergence de la STEP. Les raideurs réduites obtenues pour chaque cas sont représentées par les figures IV.20a,

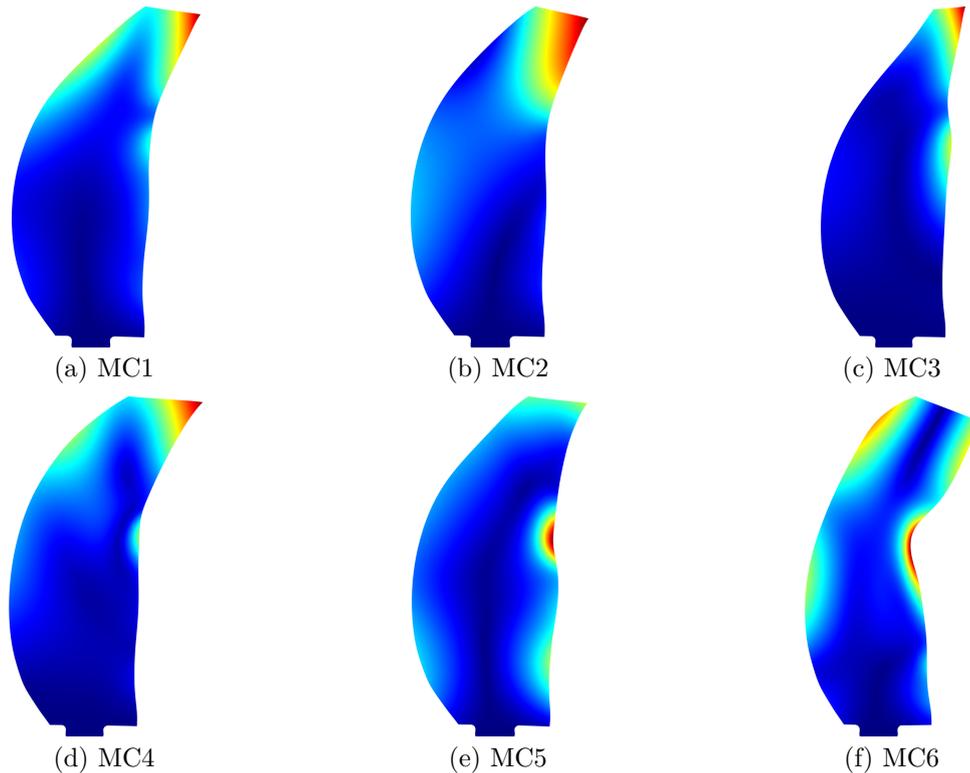


FIGURE IV.19 – Modes compagnons utilisés pour la réduction de la pale Open Rotor

IV.20b et IV.20c.

Un niveau de convergence très satisfaisant peut être observé. En effet, les raideurs réduites quadratiques et cubiques sont quasiment identiques pour chaque choix de coefficients. Pour les raideurs réduites linéaires, des écarts apparaissent. Toutefois, ceux-ci portent sur des valeurs relativement faibles (jusqu'à 10^2) en comparaison des autres coefficients allant jusqu'à 10^9 .

Le calcul de la forme normale directe représente la dernière méthode de réduction utilisée sur le modèle industriel. Celle-ci a été obtenue au second ordre à l'aide de la procédure décrite dans l'annexe C de ce document. Seuls les modes 1T et 2F ont été choisis comme modes maîtres pour le calcul et les spécificités liées à la résonance interne 1 : 2 ont été prises en compte conformément à la méthode décrite dans l'annexe C. Finalement, le système réduit obtenu se met sous la forme de l'équation (IV.28). À nouveau, une vérification de la convergence du modèle réduit a été réalisée en choisissant plusieurs ensembles de coefficients pour les calculs de la STEP. Les résultats obtenus pour les composantes des tenseurs \mathbf{g} , \mathbf{h} , \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} sont représentés par la figure IV.21. Comme précédemment, une très bonne convergence des grandeurs présentes dans le modèle réduit est observable. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer la correction apportée par le tenseur \mathbf{A} sur les termes de raideurs cubiques \mathbf{h} . En effet, pour certaines composantes, la valeur prise par ces deux tenseurs est quasi identique (en réalité de signe opposée). Cette correction va venir annuler la participation du terme associé dans la dynamique réduite. C'est le cas par exemple pour le premier terme pour lequel on a $A_{111}^1 \simeq -h_{111}^1$. Par conséquent, le monôme r_1^3 ne va que très peu peser dans la dynamique réduite. Cette observation a également été faite dans [197] lors de la réduction d'un aubage en condition encastree-libre.

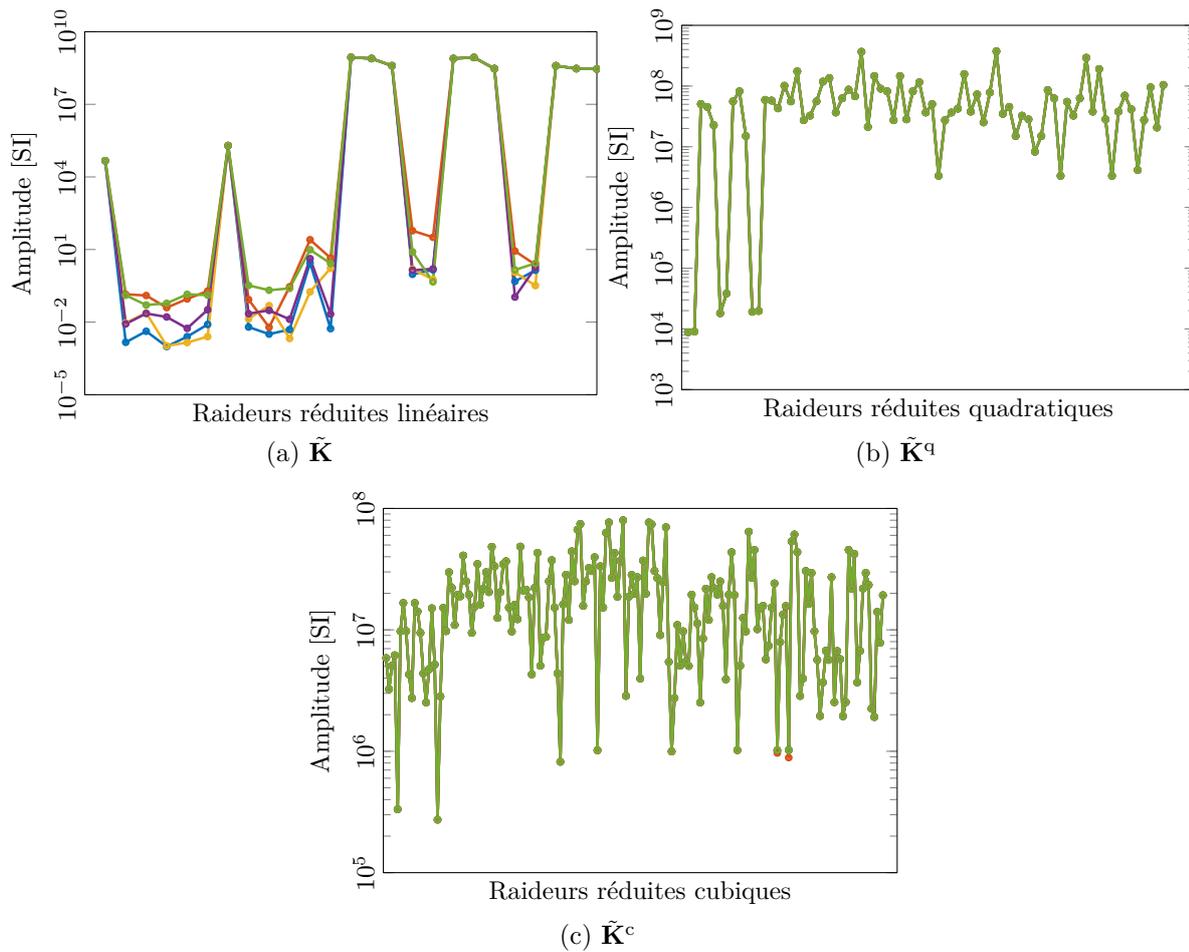


FIGURE IV.20 – Raideurs réduites obtenues par STEP à l'aide des dérivées modales pour différents coefficients q_j, q_k, q_l

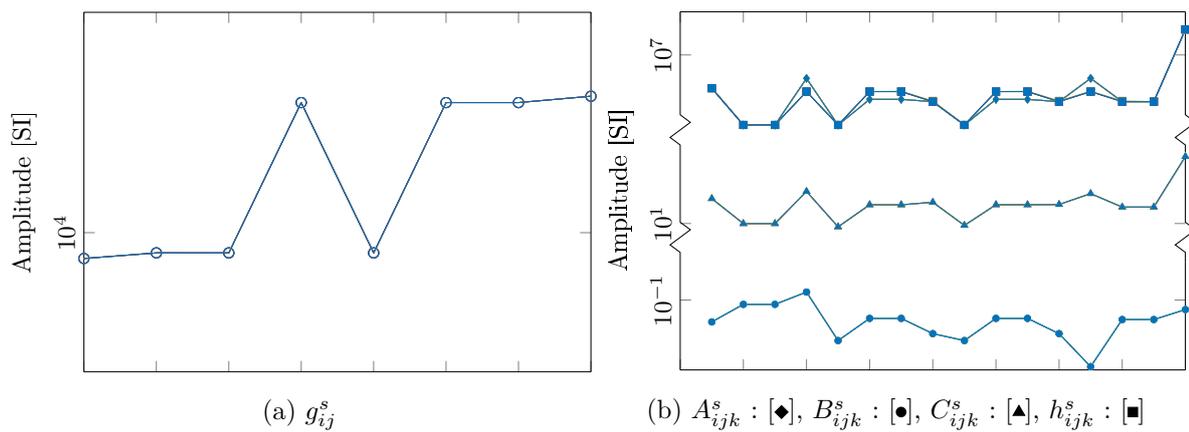


FIGURE IV.21 – Convergence des composantes des tenseurs utilisés dans le modèle réduit par la forme normale directe

3.3.3 Étude dynamique du modèle

La section précédente a permis de générer les modèles réduits de la pale Open Rotor, on s'intéresse à présent au comportement dynamique de ces derniers. Rappelons que l'objectif principal de l'étude est d'être capable de mettre en évidence la présence du couplage entre le mode de flexion et le mode de torsion à travers la résonance interne 1 : 2 ainsi que de vérifier la cohérence des simulations avec les données expérimentales détaillées précédemment.

La dynamique de l'aubage est ici étudiée autour du second mode de flexion du système. La recherche des solutions périodiques des systèmes réduits est effectuée au moyen de la HBM en considérant $N_h = 5$ harmoniques et en choisissant $n_{it} = 100$ instants temporels pour la discrétisation de la méthode AFT. Une excitation ponctuelle et harmonique est supposée au niveau d'un nœud du maillage à proximité du point E (voir figure IV.1) pour se rapprocher de la configuration expérimentale.

On propose dans un premier temps d'observer les réponses des coordonnées modales des modes 1T et 2F pour chaque méthode de réduction et pour une amplitude d'excitation $F_0 = 10$ N, 20 N, 40 N et 60 N. Celles-ci sont représentées par la figure IV.22. La réponse du modèle réduit à l'aide des seuls modes linéaires Ψ_{1T} et Ψ_{2F} pour $F_0 = 10$ N est également illustrée (figure IV.22a). Celle-ci présente un très fort raidissement. Comme cela a été abordé lors de la réduction du modèle poutre, ce comportement est typique des modèles non-linéaires réduits à l'aide d'une base de modes linéaires. Davantage de détails sur ce modèle réduit pourra être trouvé dans [31].

On s'intéresse à présent plus particulièrement aux réponses des modèles réduits à l'aide des trois méthodes étudiées. On note la très bonne corrélation des réponses fréquentielles pour les trois premiers niveaux d'excitation (figures IV.22a et IV.22b). Pour chacune des méthodes, la correction de l'effet rigidifiant est convenablement prise en compte et une restitution du pic de résonance linéaire est faite. En revanche, à plus haute amplitude d'excitation (figures IV.22c et IV.22d), des écarts importants apparaissent. On observe en effet un fort effet rigidifiant sur la réponse des modèles réduits par dérivées modales et modes compagnons. Celui-ci est sensiblement équivalent pour les deux modèles. A contrario, le modèle réduit par la DNF conserve un pic de résonance non penché. En parallèle de ces écarts sur la branche principale des solutions périodiques, des branches de bifurcation apparaissent pour chacun des modèles réduits. Ces branches sont également visibles sur la réponse fréquentielle du mode 1T. De manière générale, elles sont relativement différentes pour chacun des modèles réduits. Pour les modèles réduits par DM et MC, un raidissement des branches de bifurcation est visible mais la fréquence d'apparition et l'amplitude maximale atteinte présentent des écarts importants. Pour le modèle réduit par DNF, deux branches de bifurcation existent et semblent apparaître autour de la même fréquence. Celles-ci présentent un très faible effet assouplissant avec des pics légèrement penchés vers les basses fréquences.

Les temps de calcul des modèles réduits et de la réponse dynamique pour chacune des méthodes ont également été comparés. Ceux-ci ont été obtenus sur un serveur de calcul Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2690 @ 2.90GHz et sont donnés dans le tableau IV.4. De manière logique, le calcul de la base réduite à l'aide des dérivées modales est assez rapide car il repose sur l'utilisation des différences finies. À l'inverse, la détermination de la base réduite à l'aide des modes compagnons prend davantage de temps dû à la résolution des systèmes statiques linéaires et non-linéaires pour chaque cas de chargement. Pour ce qui est des calculs STEP, les temps de calcul sont naturellement plus longs pour la réduction à l'aide des modes compagnons car la base est composée de 8 vecteurs contre 5 pour la réduction par dérivées modales. Rappelons que la STEP requiert le calcul de $(r^4 + 6r^3 + 5r^2) / 6$

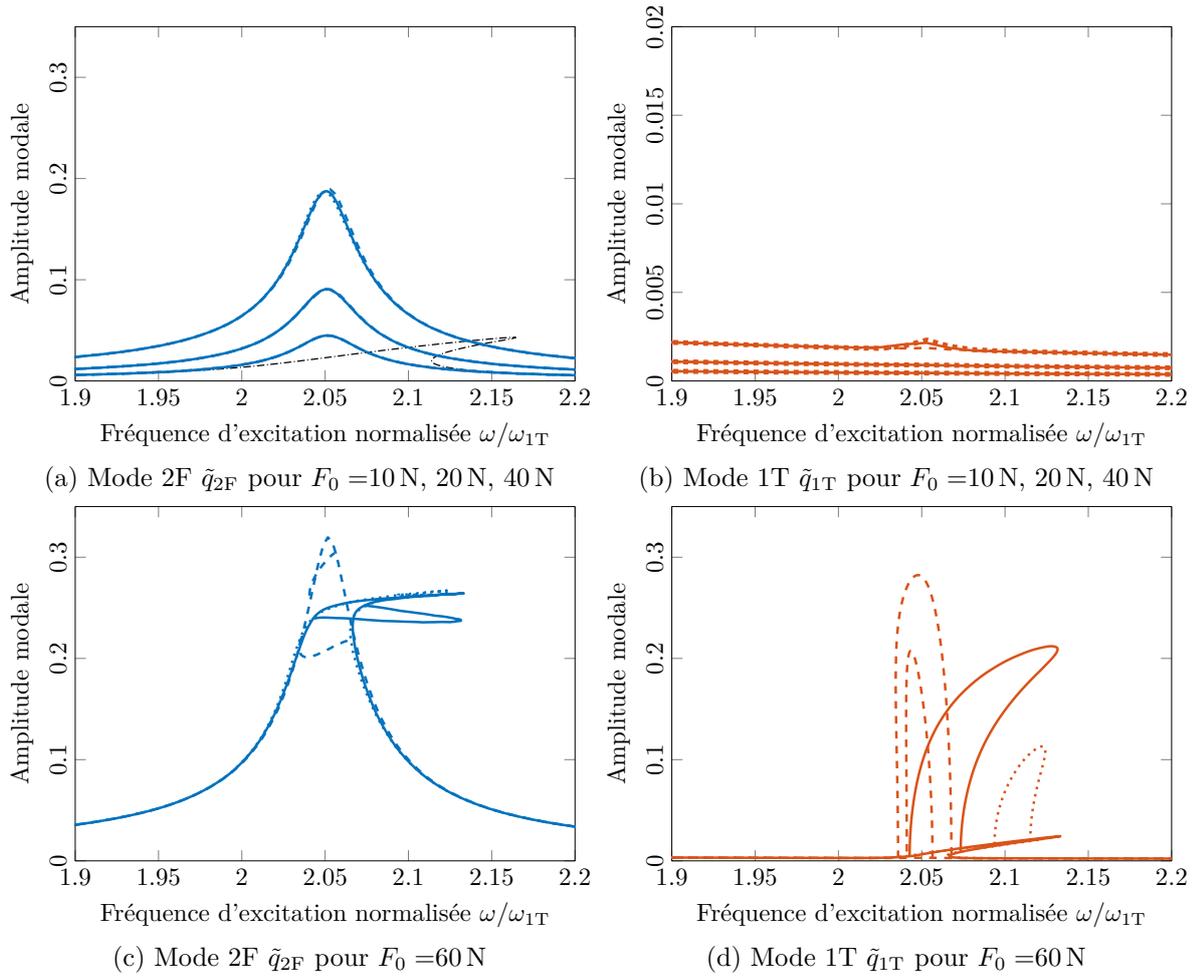


FIGURE IV.22 – Réduction du modèle industriel à l'aide des dérivées modales [—], des modes compagnons [···] et de la forme normale directe [- -]. (a) et (b) : $F_0 = 10\text{ N}, 20\text{ N}, 40\text{ N}$, (c) et (d) : $F_0 = 60\text{ N}$. Réduction à l'aide des modes linéaires pour $F_0 = 10\text{ N}$ [- -]

	Modèle réduit [s]		HBM [s]
	Base réduite	STEP	
Dérivées modales	2527 (~ 42 min)	16143 (~ 4 h29 min)	9
Modes compagnons	30960 (~ 8 h36 min)	51480 (~ 14 h18 min)	16
DNF	45780 (~ 12 h43 min)		7

TABLEAU IV.4 – Temps requis pour la création des modèles réduits et la résolution du système dynamique réduit

coefficients, où r est la taille du système réduit. La STEP est également responsable de la majorité du temps requis pour établir le modèle réduit par DNF car elle est utilisée pour déterminer les tenseurs \mathbf{g} , \mathbf{h} , \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} présents dans le système dynamique réduit (IV.28).

Au regard des résultats présentés jusqu'ici, il apparaît difficile de légitimer une méthode de réduction plutôt qu'une autre, bien que le fort raidissement observé pour la réponse des modèles réduits par dérivées modales et modes compagnons puissent prêter à interrogation. Une étude de convergence plus approfondie est alors nécessaire. Toutefois, ce type d'analyse

dépasse le champ d'étude de ce travail de thèse et les résultats présents pourront servir de base sur lesquelles s'appuyer pour des travaux futurs. On pourra tout de même noter le fort potentiel des méthodes étudiées pour traiter la réduction de modèles comportant des résonances internes.

3.3.4 Comparaison calcul/essais

Tenant compte des remarques précédentes, on propose dans la suite de ce chapitre de ne se concentrer que sur le modèle réduit par DNF pour ne pas alourdir les figures et les explications.

Afin de comparer les résultats numériques et expérimentaux, on s'intéresse dans un premier temps à la réponse dynamique du système aux nœuds du maillage correspondants aux différentes positions des capteurs d'accéléérations. Ces réponses ont été reconstruites à l'aide du changement de variables (C.3) à partir des solutions périodiques de la HBM sur le système réduit. Afin de se rapprocher de la configuration expérimentale, les réponses dans le repère global ont par la suite été projetées dans le repère local associé aux différents nœuds d'étude. Cette projection s'effectue à l'aide d'une matrice de passage composée des vecteurs \mathbf{n}_1 et \mathbf{n}_2 dans le plan de l'élément et $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ normal au plan de l'élément et donc dans la direction du capteur. Les réponses fréquentielles aux point A, B, C et D dans la direction normale à l'aubage sont illustrées par la figure IV.23 pour les différents niveaux d'excitation.

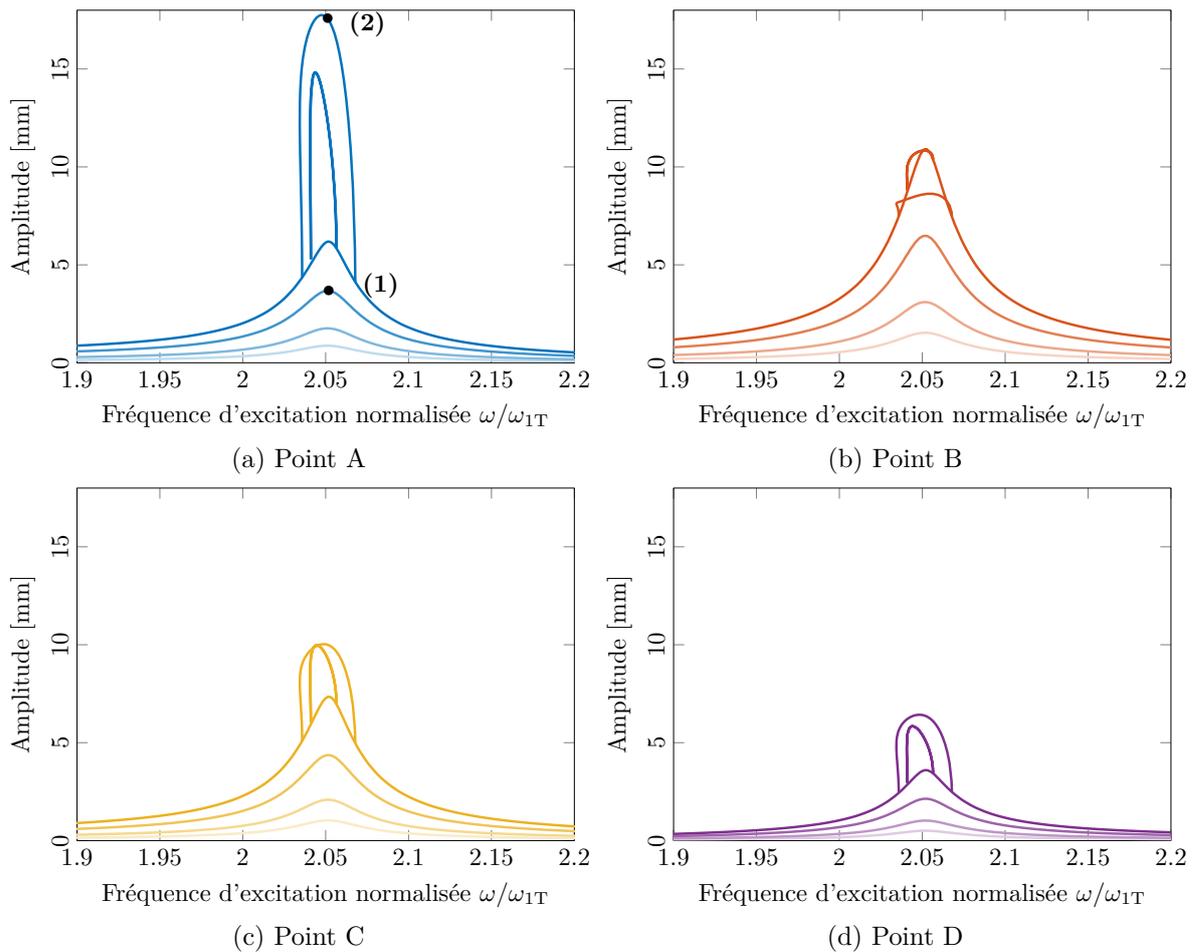


FIGURE IV.23 – Réponses fréquentielles au niveau de la position des capteurs A, B, C, et D pour $F_0 = 10\text{ N}$, 20 N , 40 N et 60 N

A faible amplitude d'excitation, seul le mode 2F participe à la réponse du système, qui se comporte linéairement. L'amplitude maximale de vibration s'observe au niveau du point B tandis que les niveaux aux point A et C sont moindres. Le point D, situé proche d'une ligne nodale du mode 2F conserve une faible amplitude de vibration.

A plus haut niveau d'excitation, les branches de bifurcations apparaissent. Celles-ci traduisent la présence de la résonance interne 1 : 2 avec l'apparition du mode 1T. En effet, notons le fort impact de l'apparition des branches sur l'amplitude de vibration du point A situé sur un ventre du mode 1T (voir figure IV.11) avec un niveau maximal multiplié par 3. Au niveau des points B, C et D, l'impact de la résonance interne est plus mesuré voire quasi nul pour le point B situé dans une zone peu sollicitée du mode 1T. Ces premières observations montrent une bonne capacité du modèle réduit à restituer le comportement dynamique du système.

En complément de ces premiers résultats, on représente l'allure de la déformée de la pale en deux points de la réponse fréquentielle à 60 N à un instant donné (figure IV.24). Ces déformées ont été reconstruites à partir du changement de variable non-linéaire de la forme normale directe. Pour le premier point, appartenant à la branche principale, la déformée correspond purement au mode 2F. En effet, comme on a pu le mentionner, le mode 1T ne participe pas du tout à la réponse dynamique. En revanche, pour le second point, choisi sur une des branches de bifurcation de la réponse fréquentielle, la présence du mode 1T dans la réponse dynamique modifie grandement la déformée de la structure. On note en effet, une transition de la déformée du mode 2F vers le mode 1T bien que l'excitation s'effectue autour du mode de flexion.

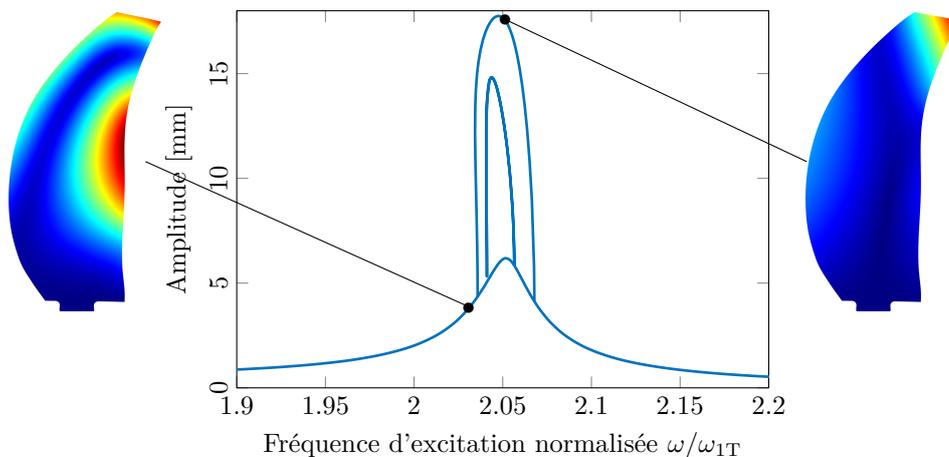


FIGURE IV.24 – Déformée de la pale Open Rotor lors de la réponse dynamique

Afin d'approfondir ces analyses, les harmoniques ainsi que les signaux temporels des déplacements pour différents niveaux de la réponse fréquentielle sont représentés par la figure IV.25. Les figures IV.25a et IV.25b correspondent au point (1) situé à la fréquence du mode 2F sur la branche principale de la réponse pour $F_0 = 40$ N (voir figure IV.23a). Les figures IV.25c et IV.25d traitent quant à elles du point (2) positionné sur une des branches de bifurcation de la réponse à 60 N et également choisi à la fréquence du mode 2F.

Pour $F_0 = 40$ N, on retrouve la réponse dominante au niveau du point B. Par ailleurs, le contenu fréquentiel de la réponse ne contient que les harmoniques paires. Autrement dit, la réponse s'opère selon le mode 2F et ses harmoniques. Ce résultat a également été observé expérimentalement comme rappelé par la figure IV.5. Au niveau des signaux temporels, on note l'opposition de phase entre le déplacement au point B et les déplacements aux points A,

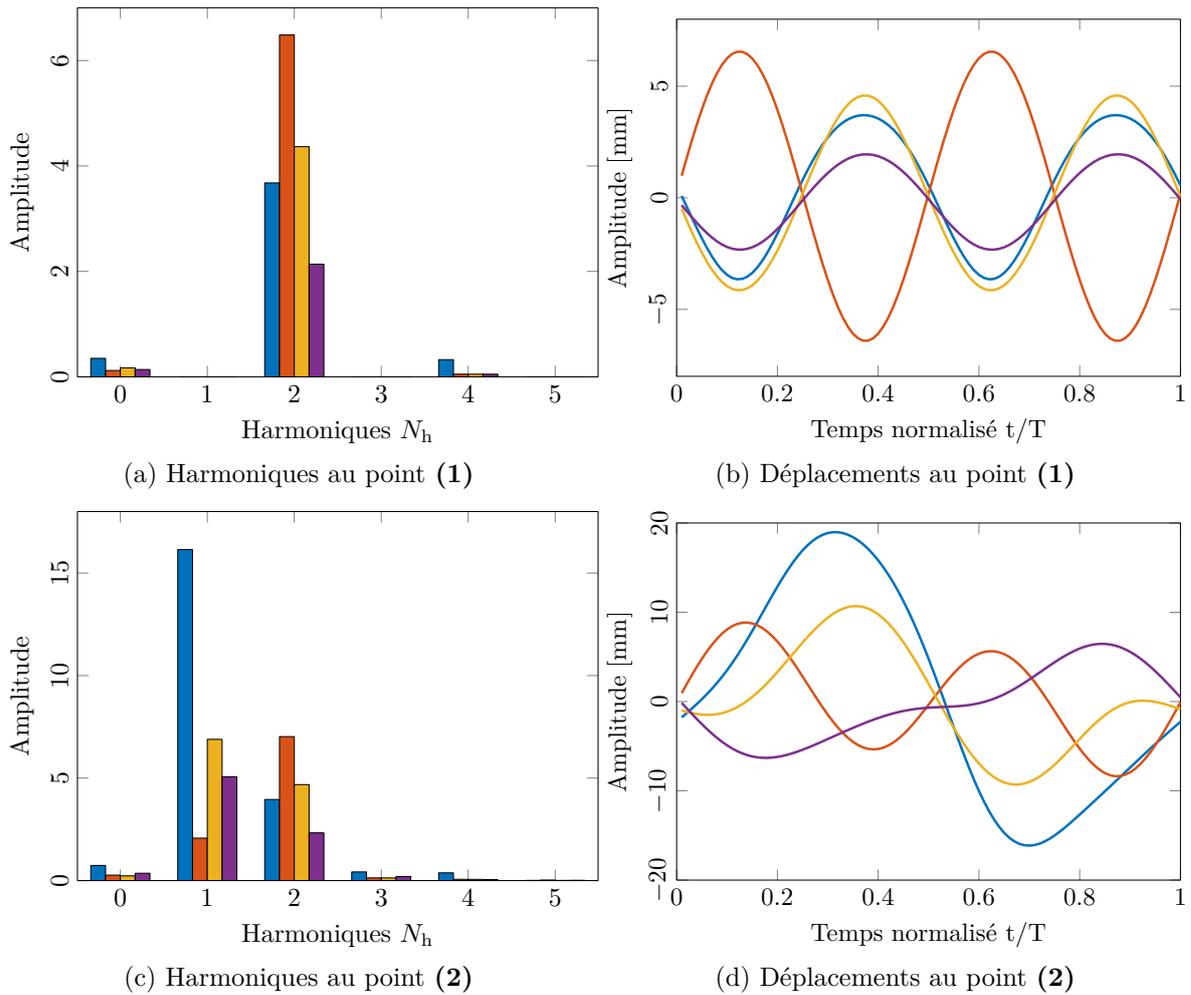


FIGURE IV.25 – Déplacements et composantes harmoniques sur la branche principale à 40 N (point (1)) et sur la branche de bifurcation à 60 N (point (2)) aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]

C et D (figure IV.25b). À nouveau, un comportement similaire a été observé sur les résultats expérimentaux montrant la bonne capacité du modèle réduit à restituer la physique de l'aubage.

Pour $F_0 = 60$ N, l'apparition des branches modifie fortement le contenu harmonique de la réponse fréquentielle. En effet, on note désormais la participation supplémentaire des harmoniques impairs, correspondant à la réponse du mode 1T et de ses harmoniques (figure IV.25c). Un comportement similaire a été perçu lors des essais en présence de la résonance interne (voir figure IV.5d). Concernant les signaux temporels, le déplacement au point A est désormais majoritairement piloté par l'harmonique 1 relative au mode 1T. Pour les points C et D, un couplage harmonique important a lieu avec la réponse des harmoniques pairs et impairs. Enfin, au point B, peu impacté par la résonance interne, le déplacement s'apparente à une sinusoïde de fréquence égale à celle du mode 2F. On notera ici la cohérence du choix du paramètre N_H fait précédemment dans la mesure où les niveaux à partir de l'harmonique 5 deviennent négligeables. De même, la propreté des signaux temporels montre un choix approprié du paramètre de discrétisation n_{it} .

Pour compléter l'analyse, on regarde à présent plus précisément les composantes des signaux temporels aux fréquences des modes 1T et 2F (figure IV.26) au niveau du point (2). Pour

la composante à la fréquence f_{2F} (figure IV.26a), on retrouve un résultat similaire à celui observé sur la figure IV.25b avec notamment une réponse prépondérante au niveau du nœud B et une opposition de phase avec les déplacements des autres nœuds. Sur la figure IV.26a ont également été superposés les signaux expérimentaux illustrés auparavant par la figure IV.6. Une très bonne cohérence en terme de phase et d'amplitude est observable avec notamment des ordres de grandeur similaires entre les résultats numériques et expérimentaux. Notons que la normalisation du temps a été opérée en considérant respectivement les fréquences propres numériques et expérimentales.

Concernant la figure IV.26b illustrant la composante du déplacement à la fréquence f_{1T} , celle-ci est à mettre en regard de la figure IV.7 issue des essais. On observe en effet un comportement en chaque nœud relativement similaire avec notamment une réponse prépondérante au point A localisé sur un ventre du mode 1T. On note également une similarité au niveau de la phase des signaux de déplacement avec un déplacement au point D en opposition de phase avec les déplacements aux points A, B et C comme cela a pu être apprécié expérimentalement. En revanche les niveaux d'amplitude observés en essais sont très en deçà de ceux issus du calcul numérique. Cela peut s'expliquer par les moyens d'essais mis en place ne permettant d'observer que le début de l'apparition de la résonance interne dont le niveau est encore très faible. En revanche, les simulations numériques permettent de couvrir des niveaux d'amplitude beaucoup plus élevés et d'appréhender de façon plus approfondie ce qui se passe au niveau de l'interaction modale. Mentionnons également l'écart de commensurabilité entre les deux modes étudiés expérimentalement et numériquement pouvant favoriser une apparition plus ou moins rapide de la résonance interne.

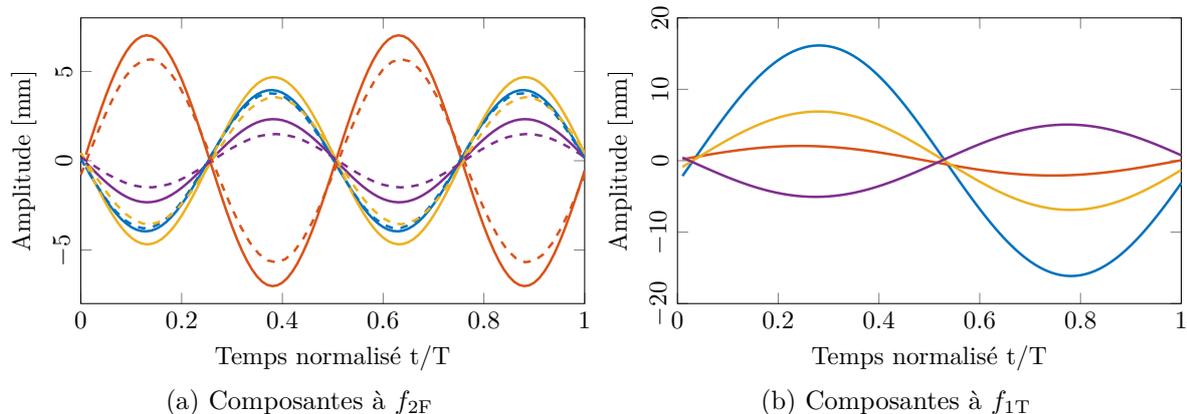


FIGURE IV.26 – Composantes temporelles numériques [—] et expérimentales [-·-] du déplacement pour $F_0 = 60$ N aux fréquences f_{1T} et f_{2F} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—].

A nouveau, ces résultats montrent la bonne restitution du comportement dynamique du système réduit aux différents points d'étude et démontrent le potentiel de la forme normale pour réduire les systèmes industriels en présence de résonances internes.

Enfin pour clore ce chapitre, l'évolution des amplitudes des composantes numériques aux fréquences f_{2F} et f_{1T} en fonction de l'effort d'excitation a été étudiée et est représentée par la figure IV.27. À basse amplitude, le système réduit se comporte de manière linéaire, la composante à la fréquence du mode 2F croît linéairement et celle à la fréquence du mode 1T reste nulle. À partir d'un certain niveau d'excitation (autour de 43 N), l'amplitude de la composante à la fréquence f_{2F} sature et reste à un niveau constant autour de 4 mm malgré l'augmentation du

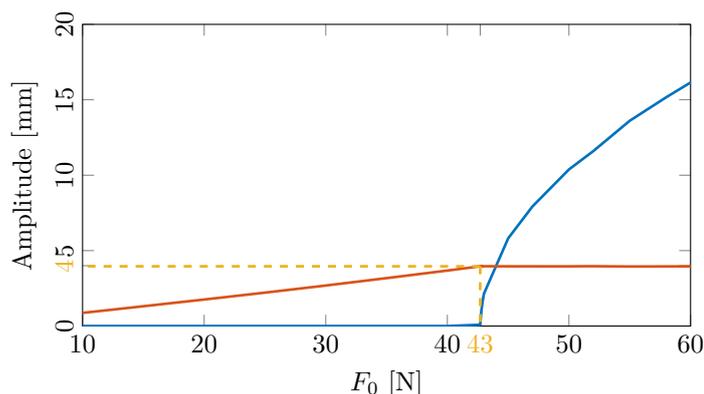


FIGURE IV.27 – Évolution des amplitudes des composantes aux fréquences f_{2F} [—] et f_{1T} [—] du modèle réduit

niveau d'excitation. En parallèle, l'amplitude de la composante à la fréquence f_{1T} augmente brusquement dû à l'apparition de la résonance interne. Rapidement, celle-ci dépasse celle du mode 2F bien que l'excitation s'effectue autour de sa fréquence propre. On assiste ainsi au phénomène de saturation, déjà abordé lors de l'étude du modèle phénoménologique au chapitre II. Notons enfin que lorsque l'excitation augmente encore, l'amplitude de la composante à la fréquence f_{1T} devient largement plus importante que celle à la fréquence f_{2F} .

Ces résultats présentent une certaine cohérence avec les observations expérimentales que ce soit au niveau de l'amplitude d'apparition du mode 1T et de l'intensité de l'effort extérieur générant la résonance interne. En effet, il a été observé expérimentalement l'apparition de la résonance interne pour un effort extérieur proche de 34 N (voir figure IV.5) contre environ 43 N pour les simulations numériques. De même, la résonance interne survient expérimentalement lorsque l'amplitude de la composante à la fréquence du mode 2F atteint environ 2 mm (voir figure IV.8) contre 4 mm numériquement. Si les ordres de grandeur sont similaires, les écarts observés peuvent toutefois provenir de l'absence de recalage effectué entre le modèle numérique et la structure réelle. De ce fait, des conditions de commensurabilité différentes entre les fréquences des modèles numérique et expérimental peuvent directement se répercuter sur l'instant d'apparition de la résonance interne.

Bilan du chapitre

L'étude de la dynamique d'un modèle industriel d'aubage de l'Open Rotor est présentée dans ce chapitre. Celle-ci a été scindée en deux parties : un volet expérimental et une analyse numérique. Pour les essais, l'aubage a été encastré dans un mors rigide puis excité ponctuellement à l'aide d'un pot vibrant en suspension pour différentes amplitudes d'excitation. La mesure des signaux d'accélération au niveau des nœuds et des ventres des modes 1T et 2F a permis de mettre en évidence la réponse du mode de torsion lors d'une excitation autour du mode de flexion. Plus particulièrement, l'évolution relative de la composante temporelle du déplacement à la fréquence du mode 1T a été comparée à celle du mode 2F et a montré un début de transition vers la saturation du mode de flexion au profit du mode de torsion.

L'analyse numérique a consisté dans un premier temps en une étude des méthodes de réduction de modèles non-linéaires géométriques. La réduction à l'aide de la projection de Galerkin a d'abord été présentée puis appliquée au modèle poutre introduit dans le chapitre précédent en considérant des bases de réduction formées de modes linéaires, de dérivées modales

et de modes compagnons. Une seconde approche pour la réduction a été décrite et s'inspire de la théorie des formes normales. Plus précisément, la forme normale directe propose d'établir le modèle réduit à partir des inconnues de problème EF directement. Le calcul des raideurs réduites au moyen de la méthode STEP a également été mis en place.

Dans un second temps, les méthodes de réduction ont été appliquées au modèle éléments finis de l'aubage Open Rotor définie sur **SAMCEF**. Une bonne restitution du comportement linéaire a été observée pour chacune des méthodes. En revanche a plus haute amplitude, des écarts sont apparus sous l'effet des non-linéarités et l'apparition de branches de bifurcation. Par la suite, seule l'utilisation de la forme normale directe sur le modèle industriel a été approfondie.

L'étude de la dynamique du modèle réduit a permis de mettre en évidence l'apparition de la résonance interne se traduisant par un changement de comportement du système dynamique avec la participation du mode 1T dans la réponse. Par ailleurs, le modèle réduit a permis de restituer une bonne partie du comportement dynamique observé expérimentalement. En particulier, le caractère multi-harmonique a été observé sur la réponse numérique. Par ailleurs, les amplitudes relatives aux nœuds du maillage correspondant à la position des capteurs ainsi que les déphasages sur les signaux vibratoires ont montré une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux. Enfin, le phénomène de saturation avec transfert d'énergie du mode 2F vers le mode 1T, identifié lors des essais, a été retrouvé numériquement à l'aide du modèle réduit.

Conclusion et perspectives

Les travaux réalisés durant cette thèse s'inscrivent dans la volonté des motoristes de l'industrie aéronautique d'améliorer la compréhension des phénomènes de dynamique non-linéaire des roues aubagées. Plus particulièrement, l'objectif a été d'accroître la maîtrise d'un phénomène non-linéaire de couplage de modes plus communément appelé résonance interne ou interaction modale, se traduisant par une réponse dynamique multi-modes dont les fréquences sont commensurables. Le couplage flexion-torsion a plus particulièrement été étudié dans ces travaux. Les sections suivantes s'attachent à fournir une description des principaux résultats obtenus pour répondre à cette problématique ainsi que des pistes pour exploiter et améliorer ces résultats.

Résultats

Afin d'étudier le comportement dynamique des systèmes non-linéaires en présence de non-linéarités géométriques, une méthode fréquentielle d'équilibrage harmonique a été utilisée. Couplée à une procédure d'alternance temps-fréquence, celle-ci a permis d'étudier le régime périodique en transformant le problème différentiel initial en un système algébrique. Pour tenir compte du changement qualitatif du comportement des solutions périodiques en présence de résonance interne, une méthode de détection et calcul de branches de bifurcation a été intégrée à la procédure de continuation par longueur d'arc. S'appuyant sur les propriétés de singularité du système algébrique, celle-ci a consisté en la recherche des tangentes aux courbes de solutions aux points de bifurcation. Cette démarche générale a été appliquée à différents cas d'étude de complexité croissante.

Une première application sur un modèle phénoménologique de couplage flexion-torsion représentatif d'une section profilée d'aubage a été traitée. Après une étape de recalage assurant la condition de quasi-commensurabilité entre les modes de flexion et de torsion, la détermination du comportement dynamique du système a été réalisée via deux approches : analytique et numérique.

L'approche analytique s'est appuyée sur la méthode des échelles multiples. Facile à mettre en œuvre pour des systèmes de taille raisonnable, cette dernière a permis de voir qu'un nombre très restreint de termes non-linéaires polynomiaux, ou termes résonnants, participent à l'émergence de la résonance interne 1 : 2. Par ailleurs, l'étude du comportement dynamique en présence de l'interaction modale a mis en évidence la réponse simultanée des modes de flexion et de torsion lors d'une sollicitation harmonique autour du mode de flexion. De même, un phénomène de saturation de l'amplitude vibratoire du mode de flexion a été observé au profit du mode de torsion à partir d'un certain niveau d'excitation. Enfin, selon le niveau de précision de la commensurabilité fréquentielle des conditions de solutions multiples stables ont été observées.

L'approche analytique a été complétée par une approche numérique s'appuyant sur la méthode d'équilibrage harmonique, modifiée afin de prendre en compte un décalage sur la pulsation fondamentale. Une bonne corrélation avec la méthode analytique a été obtenue à faibles amplitudes de vibration. En revanche des écarts sont apparus à plus hauts niveaux vibratoires compte tenu de l'approximation jusqu'au second ordre retenue pour l'approche analytique. Les résultats HBM ont également été comparés à ceux issus d'une méthode d'intégration temporelle et ont montré une très bonne corrélation justifiant le choix de cette méthode pour les études dynamiques. En particulier, les branches de solutions issues de points de bifurcation, synonymes de l'émergence de la résonance interne, ont été correctement prédites par l'équilibrage harmonique.

Une analyse du comportement dynamique induit par la présence de la résonance interne a également mis en lumière plusieurs comportements pathologiques imprédictibles sur un modèle linéaire. En particulier, des cas de solutions pseudo-périodiques ont été observés suite à la présence de points de bifurcation de Hopf. De plus une analyse des coefficients harmoniques issus du calcul HBM en différents points de la réponse fréquentielle du système a mis en avant le caractère multi-harmoniques du système lors de l'interaction modale.

Dans une volonté d'améliorer la compréhension de la résonance interne et face à l'absence dans la littérature d'études visant à établir le lien entre la cinématique d'un système et l'apparition du phénomène, l'analyse d'un modèle poutre non-linéaire avec couplage flexion-torsion a été réalisée. Afin de se rapprocher d'une configuration d'aubage de soufflante, le modèle a consisté en une structure vrillée, possédant une pré-courbure initiale et incluant les effets liés au gauchissement des sections droites. En raison de la multitude de termes non-linéaires générés, une troncature des équations a été opérée, s'appuyant sur les ordres de grandeurs de chacun des termes. L'intérêt d'utiliser un modèle poutre est double. D'une part, il représente un bon compromis entre une taille raisonnable et une bonne représentativité de la cinématique d'une aube. D'autre part, il permet la maîtrise de chaque étape de sa construction et offre un accès à chacun des termes intervenant dans la mise en équation, à l'inverse, par exemple, des modèles issus de logiciels éléments finis.

A travers ce modèle, un double objectif a été fixé. Dans un premier temps il a été question de mettre en évidence les termes cinématiques non-linéaires responsables du couplage entre les modes de flexion et de torsion. Dans un second temps l'objectif a consisté à réaliser une étude d'influence portant sur des paramètres géométriques et dissipatifs du modèle ainsi que sur la vitesse de rotation de la poutre.

Pour répondre au premier objectif, trois géométries vrillées ont été étudiées, variant principalement selon la forme de leur section droite et la prise en compte de la pré-courbure. Dans le cas de la poutre à section rectangulaire sans pré-courbure, aucune résonance interne n'a été observée malgré la quasi-commensurabilité des fréquences des modes de flexion et de torsion. Ceci a montré que le vrillage seul ne suffit pas à l'apparition de la résonance interne. En revanche, l'interaction modale a été détectée lorsque la double symétrie de la section droite est rompue ou lorsque la courbure initiale est prise en compte. Afin de répondre à la problématique et d'isoler les principales contributions pilotant l'apparition de la résonance interne, un algorithme a été développé dans le but d'évaluer le poids de chacun des termes modaux non-linéaires dans le couplage modal. Les résultats ont montré que la résonance interne est essentiellement pilotée par la partie non-linéaire du moment de flexion de la poutre induit par son vrillage et sa torsion. Par ailleurs, il a été démontré que la forme des modes joue également un rôle prépondérant dans l'apparition de l'interaction modale. Un parallèle entre ces résultats et les méthodes de conception des aubages peut être exploité en bureau d'études

pour tenter d'amoindrir le risque d'apparition des résonances internes.

Divers enseignements ont également été tirés de l'étude d'influence. Il a en effet été montré qu'une variation des épaisseurs et largeurs de la poutre impacte fortement la réponse fréquentielle en particulier au niveau des branches de bifurcation traduisant le couplage. De même, l'influence des paramètres dissipatifs a montré globalement une atténuation du couplage avec l'augmentation du coefficient d'amortissement jusqu'à une valeur seuil au delà de laquelle l'énergie du mode de flexion n'est plus transférée au mode de torsion.

Face à l'enjeu industriel que représentent ces travaux, la dernière partie de ce manuscrit s'est intéressée à l'étude du comportement dynamique d'un aubage de démonstrateur Open Rotor. Deux volets : numérique et expérimental ont été étudiés.

La partie expérimentale a consisté en une étude dynamique de l'aubage encastré dans un mors et soumis à une excitation ponctuelle à l'aide d'un pot vibrant. Les mesures, relevés sur des accéléromètres ont montré à partir d'un certain niveau d'excitation l'apparition d'une composante à une fréquence égale à la moitié de celle de l'excitation ainsi que ses harmoniques sur les spectres fréquentiels. Un post-traitement de ces résultats a démontré la corrélation entre cette composante et une résonance interne faisant intervenir le mode 1T. Une évolution relative plus importante de l'amplitude du mode 1T par rapport à celle du mode 2F a également été démontrée lors des essais, laissant supposer une transition vers la saturation d'amplitude.

L'étude numérique a porté sur un modèle de l'aubage Open Rotor construit sur le logiciel éléments finis SAMCEF. Afin d'étudier sa dynamique, une étape préalable de réduction a été nécessaire. Plusieurs méthodes ont pour cela été testées : les dérivées modales, les modes compagnons et la forme normale directe. Un comportement similaire a été observé sur les modèles réduits à bas niveau vibratoire. En revanche, des écarts assez importants ont été observés à plus haute amplitude de vibration en même temps que l'apparition de la résonance interne sur les modèles réduits. Face à ces disparités, seule la dynamique du modèle réduit par la forme normale directe a été approfondie. Les résultats obtenus ont montré une bonne cohérence avec les données expérimentales. En particulier, plusieurs observations faites lors des essais ont été restituées par le modèle réduit. En premier lieu, l'apparition de l'interaction modale à partir d'un seuil de vibration a été observée. De plus, le caractère multi-harmonique de la réponse fréquentielle a également été retrouvé par la HBM avec notamment la participation du mode 1T et ses harmoniques en présence de résonance interne. Par ailleurs, l'extraction des signaux temporels vibratoires a affiché une bonne cohérence avec les signaux relevés sur les accéléromètres, que ce soit en terme d'amplitude mais également de déphasage entre les différents nœuds observés. Enfin, le phénomène de saturation, observé expérimentalement, a été constaté sur le modèle réduit numérique au-delà d'un seuil d'excitation.

Ces résultats sont d'autant plus encourageants que le modèle réduit ne comporte que deux degrés de liberté, relatifs aux deux modes intervenant dans le couplage. Cela en fait un bon candidat potentiellement exploitable en bureau d'études pour évaluer le risque d'apparition d'une résonance interne sur une géométrie industrielle.

Perspectives

Les travaux décrits dans ce mémoire laissent envisager de nombreuses perspectives, que ce soit en terme d'amélioration des méthodes numériques utilisées, de complexification des modèles étudiés ou encore de mise en application des résultats obtenus.

Un premier axe d'amélioration pourrait être d'optimiser les temps de résolution par équilibre harmonique. Ceux-ci dépendent principalement du nombre d'harmoniques retenus dans l'approximation en série de Fourier et de la précision de la méthode AFT pour l'évaluation des termes non-linéaires et de leur matrice Jacobienne. Sur le premier point, une procédure de sélection d'harmoniques comme présentée dans [52] pourrait être utilisée. En effet, les résultats dans ce mémoire ont montré de fortes disparités du contenu harmonique selon les cas avec et sans résonance interne, qu'il pourrait ainsi être intéressant d'exploiter pour réduire les temps de calcul. Pour le second point, il serait opportun d'utiliser les propriétés de symétrie des tenseurs non-linéaires pour accélérer les calculs. L'utilisation du calcul parallèle constituerait également une piste à approfondir en ce sens comme suggéré dans [9].

Concernant le modèle poutre établi au chapitre III, plusieurs pistes d'amélioration sont envisageables. Tout d'abord, une troncature au second ordre a été adoptée dans les développements. Il pourrait être intéressant d'effectuer un développement des expressions à l'ordre supérieur en s'inspirant de [24] pour voir l'impact sur les contributions cinématiques pilotant la présence de la résonance interne.

De plus, l'hypothèse d'une faible pré-courbure a été faite dans les travaux de ce mémoire. En réalité, la forme élancée des aubages de soufflante, comme sur l'Open Rotor, montre une courbure assez importante qu'il faudrait prendre en compte dans la modélisation. Dans le même ordre d'idée, une pré-courbure monodirectionnelle a été supposée pour la construction du modèle et il pourrait être intéressant de prendre également en compte la pré-courbure dans la direction orthogonale. Par ailleurs, plusieurs éléments pourraient être intégrés au modèle pour le rapprocher d'une configuration plus réaliste comme la prise en compte d'une loi d'empilage plus complexe ou encore une géométrie de section variable le long de la fibre neutre de la poutre. À plus long terme, la prise en compte d'une loi matériau composite pourrait être une piste à développer, en s'appuyant par exemple sur les travaux de Hodges [62, 63].

Une autre piste de développement pourrait être de générer à partir du modèle poutre, un modèle cyclique incluant plusieurs secteurs et une participation du disque. Cela permettrait d'une part de se rapprocher d'une configuration réelle mais également d'autre part d'étudier une dynamique bien plus complexe. En effet, il s'agirait alors d'étudier les transferts d'énergie entre les modes d'un secteur seul et des modes à diamètres induits par l'hypothèse de symétrie cyclique. Par ailleurs, un tel modèle permettrait de mettre en place des stratégies de réduction adaptées et appliquées sur l'ensemble de la roue. Il serait alors question de voir comment déployer ces approches en tenant compte de la symétrie cyclique ou encore de regarder la possible apparition de solutions isolées [51]. Notons qu'à l'heure actuelle des travaux sur le modèle cyclique évoqué sont d'ores et déjà entrepris avec des premiers résultats encourageants.

En ce qui concerne le modèle industriel d'aubage, il pourrait être intéressant de compléter les résultats expérimentaux obtenus en étudiant par exemple la réponse de l'aubage à un sinus balayé pour déterminer la plage fréquentielle sur laquelle intervient la résonance interne. Par ailleurs des essais complémentaires pourraient être effectués en considérant un effort d'excitation plus important pour tenter d'observer l'effet de saturation d'amplitude. Dans les travaux réalisés, ceci n'a pas pu être effectué en raison du caractère intrusif du pot vibrant, il pourrait alors être nécessaire d'utiliser une autre source d'excitation permettant d'avoir des débattements plus importants. Des essais en configuration sous vide permettraient également d'avoir une réponse dynamique plus importante.

Pour le modèle éléments finis, il pourrait être particulièrement intéressant de recalibrer le modèle numérique de manière à retrouver les fréquences propres obtenues expérimentalement. Pour cela, il faudrait tenir compte du mors de serrage dans la modélisation numérique ainsi

que de la cale sous le pied de l'aubage. Dans le même temps, il faudrait prendre en compte l'effort de serrage au niveau du pied et modéliser la couche élastomère entre le mors et le sol.

Afin d'améliorer la précision du modèle réduit, des études de convergence devrait être réalisée en s'appuyant par exemple, dans le cas des dérivées modales, sur des critères de sélection des vecteurs de la base réduite comme proposé par Tiso [182]. De même, pour la réduction à l'aide des formes normales, une troncature au second ordre du changement de variables non-linéaires a été faite dans ces travaux. Un développement à des ordres supérieurs pourrait être effectué en se basant par exemple sur les indications fournies dans [135]. Par ailleurs, plusieurs travaux ont mis en évidence certaines limites de la méthode STEP, en particulier lorsque les amplitudes de vibration deviennent importantes. Celle-ci étant au cœur des différentes méthodes de réduction, il pourrait être recommandé de se pencher sur une amélioration de la méthode en s'inspirant par exemple des récents travaux de Balmaseda [4].

De manière générale, les travaux réalisés dans ce mémoire ont porté sur l'interaction modale entre les modes de flexion et de torsion selon une relation de commensurabilité 1 : 2. Une perspective intéressante serait d'étudier l'ensemble des couplages possibles de manière à évaluer le risque global d'apparition de résonance interne. Un tel exercice demanderait alors d'identifier au préalable les résonances internes possibles de manière à conserver dans le système réduit l'ensemble des modes susceptibles de participer à la dynamique.

A terme, l'objectif principal serait d'appliquer la démarche suivie au chapitre IV directement en bureau d'études en phase de conception sur un modèle éléments finis d'aubage afin d'évaluer le risque de résonance interne. Pour cela, des efforts plus réalistes pourraient être considérés comme des chargements aérodynamiques.

Table des figures

I.1	Schéma d'un turboréacteur simple flux	6
I.2	Schéma d'étages de compresseur	7
I.3	Schéma d'un turbofan double corps et double flux	7
I.4	Moteurs CFM en service	8
I.5	Schéma d'un propfan	10
I.6	Futures architectures développées dans le cadre du programme Clean Sky	10
I.7	Solide \mathcal{S} dans la configuration de référence	11
I.8	Solide \mathcal{S} dans les configurations initiale et déformée	12
I.9	Représentation de l'installation de l'Open Rotor en queue de fuselage	22
I.10	Diagrammes d'étude des propriétés modales et des conditions d'excitabilité des structures cycliques	24
I.11	Diagrammes de dimensionnement en fatigue vibratoire	26
II.1	Procédure d'alternance temps-fréquence	36
II.2	Principaux prédicteurs	40
II.3	Principaux correcteurs	42
II.4	Bifurcations de solutions périodiques	51
II.5	Point de retournement	52
II.6	Points d'embranchements, branche stable [—], branche instable [- -]	53
II.7	Bifurcations de Hopf , branche stable [—], branche instable [- -]	53
II.8	Modèle simplifié illustrant le couplage flexion-torsion	62
II.9	Réponses fréquentielles des modes de flexion et de torsion obtenues par échelles multiples	66
II.10	Évolution des amplitudes des modes de flexion et de torsion en fonction de l'effort d'excitation	67
II.11	Réponses fréquentielles des modes de flexion et de torsion obtenues par HBM en trait foncé [—] et comparaison avec les échelles multiples en trait clair [—] et l'intégration temporelle [●]	69
II.12	Étude de stabilité à l'aide des multiplicateurs de Floquet. [●] : point de retournement, [■] : point d'embranchement, [▲] : bifurcation de Hopf	69
II.13	Résultats de l'intégration temporelle entre les deux points de bifurcation de Hopf (67,4 Hz)	70
II.14	Signaux temporels et composantes fréquentielles de \tilde{q}_2 sur la branche principale (point (1)) et la branche secondaire (point (2))	71
II.15	Signaux temporels et composantes fréquentielles de \tilde{q}_1 sur la branche principale (point (1)) et la branche secondaire (point (2))	71
II.16	Mouvement du profil pour $\omega = 67,7$ Hz sur la branche principale	72
II.17	Mouvement du profil pour $\omega = 67,7$ Hz sur la branche de bifurcation	72

III.1	Configurations initiale et déformée de la poutre vrillée et pré-courbée	77
III.2	Section de poutre à l'extrémité libre avant et après déformations	78
III.3	Modèle EF utilisé pour valider la modélisation poutre	86
III.4	Diagramme de Campbell pour la second étape de validation : modèle poutre 4 fonctions [-], 5 fonctions [···], 6 fonctions [—], Ansys [●]	87
III.5	Déformées propres du 1 ^{er} mode de torsion (1T) et du 2 nd mode de flexion (2F) à $\Omega = 0$ RPM. Pour le modèle poutre, les déformées sont obtenues en post-traitement à l'aide de l'équation (III.1)	87
III.6	Déformées propres du 1 ^{er} mode de torsion (1T) et du 2 nd mode de flexion (2F) à $\Omega = 5000$ RPM	88
III.7	Représentation des 3 géométries de poutres utilisées pour réaliser l'étude paramétrique sur la résonance interne 1T/2F	89
III.8	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = [50 \text{ N}, 100 \text{ N}, 150 \text{ N}, 200 \text{ N}]$ pour le premier cas d'étude . . .	90
III.9	Signaux temporels $\tilde{q}_{2F}(t)$ (a) et $\tilde{q}_{1T}(t)$ (b) au niveau des pics de résonance [●] de la figure III.8	90
III.10	Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (premier cas d'étude)	91
III.11	Vecteurs propres Ψ_{1T} et Ψ_{2F} pour le premier cas d'étude	91
III.12	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20 \text{ N}$ pour le second cas d'étude	92
III.13	Signaux temporels $\tilde{q}_{2B}(t)$ et $\tilde{q}_{1T}(t)$ aux pics de résonance [●] de la première branche de bifurcation (a) et (b) et de la seconde branche de bifurcation (c) et (d) de la figure III.12	93
III.14	Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (second cas d'étude)	93
III.15	Démarche de l'identification des contributions au monôme $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2F}$ dans l'énergie potentielle de la poutre	95
III.16	Contribution au terme non-linéaire $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2B}$ de l'énergie potentielle pour le second cas d'étude	95
III.17	Réponse fréquentielle des modes 2F (a) et 1T (b) pour la poutre à section profilée avant et après suppression du terme $2EI_{z'} v'' w'' \phi \cos(2\theta)$ dans l'énergie potentielle	96
III.18	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 10 \text{ N}$ pour le troisième cas d'étude	97
III.19	Coefficients modaux non-linéaires impliquant les modes 1T et 2F dans les équations en base modale de ces deux modes (troisième cas d'étude)	97
III.20	Contribution au terme non-linéaire $\tilde{q}_{1T}^2 \tilde{q}_{2B}$ de l'énergie potentielle pour le troisième cas d'étude	98
III.21	Réponse fréquentielle des modes 2F (a) et 1T (b) pour la poutre avec pré-courbure avant et après suppression des termes $EI_{z'} (-v''^2 \phi \sin(2\theta))$ et $EI_{z'} (2v'' w'' \phi \cos(2\theta))$ dans l'énergie potentielle	98
III.22	Modes propres Ψ_{1T} et Ψ_{2F} pour le troisième cas d'étude	98
III.23	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20 \text{ N}$ en fonction de la longueur de la corde de la poutre . .	100
III.24	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20 \text{ N}$ en fonction de l'épaisseur de la poutre	101
III.25	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20 \text{ N}$ en fonction du taux d'amortissement ξ_{1T} du mode 1T	102

III.26	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $F = 20$ N en fonction du taux d'amortissement ξ_{2F} du mode 2F	102
III.27	Diagramme de Campbell du modèle poutre en rotation	103
III.28	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $\Omega = 0$ RPM	104
III.29	Réponses fréquentielles du second mode de flexion (a) et du premier mode de torsion (b) pour $\Omega = 2540$ RPM	104
IV.1	Position des capteurs sur la pale. [●] : Accéléromètres, [■] : Tête d'impédance	109
IV.2	Montage expérimental et instrumentation de la pale	110
IV.3	Schéma du dispositif expérimental	110
IV.4	Fonction de réponse en fréquence de la pale pour une excitation aléatoire. A : [—], B : [—], C : [—], D : [—], E : [—]	111
IV.5	Spectres fréquentiels aux points A [—], B [—], C [—] et D [—] pour différents efforts d'excitation	113
IV.6	Composantes temporelles pour $F = 74$ N des signaux d'accélération à la fréquence f_{2F} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]	114
IV.7	Composantes temporelles pour $F = 74$ N des signaux d'accélération à la fréquence f_{1T} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]	114
IV.8	Évolution du déplacement à la fréquence f_{1T} en fonction de celui à la fréquence f_{2F} pour $F=74$ N au point A	115
IV.9	Modèle aux éléments finis de la pale Open Rotor défini sur SAMCEF	116
IV.10	Zone d'encastrement en pied d'aubage	116
IV.11	Déformées propres des trois premiers modes du modèle de la pale Open Rotor	116
IV.12	Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires	120
IV.13	Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires et des dérivées modales	123
IV.14	Justification des modes compagnons retenus pour la réduction	124
IV.15	Réduction du modèle poutre à l'aide des modes linéaires et des modes compagnons	125
IV.16	Réduction du modèle poutre à l'aide de la forme normale directe	126
IV.17	Dérivées modales utilisées pour la réduction de la pale Open Rotor	128
IV.18	Justification des modes compagnons retenus pour la réduction	128
IV.19	Modes compagnons utilisés pour la réduction de la pale Open Rotor	129
IV.20	Raideurs réduites obtenues par STEP à l'aide des dérivées modales pour différents coefficients q_j, q_k, q_l	130
IV.21	Convergence des composantes des tenseurs utilisés dans le modèle réduit par la forme normale directe	130
IV.22	Réduction du modèle industriel à l'aide des dérivées modales [—], des modes compagnons [---] et de la forme normale directe [-·]. (a) et (b) : $F_0 = 10$ N, 20 N, 40 N, (c) et (d) : $F_0 = 60$ N. Réduction à l'aide des modes linéaires pour $F_0 = 10$ N [---]	132
IV.23	Réponses fréquentielles au niveau de la position des capteurs A, B, C, et D pour $F_0 = 10$ N, 20 N, 40 N et 60 N	133
IV.24	Déformée de la pale Open Rotor lors de la réponse dynamique	134
IV.25	Déplacements et composantes harmoniques sur la branche principale à 40 N (point (1)) et sur la branche de bifurcation à 60 N (point (2)) aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]	135
IV.26	Composantes temporelles numériques [—] et expérimentales [-·] du déplacement pour $F_0 = 60$ N aux fréquences f_{1T} et f_{2F} aux points A [—], B [—], C [—] et D [—]	136
IV.27	Évolution des amplitudes des composantes aux fréquences f_{2F} [—] et f_{1T} [—] du modèle réduit	137

B.1	Déplacement longitudinal pour différentes sections d'une poutre sollicitée en torsion	169
B.2	Section infinitésimale de l'axe élastique de la poutre déformée	170
B.3	Illustration de la troncature au second ordre pour des termes du tenseur des déformations	174

Liste des tableaux

II.1	Solutions du calcul des tangentes au point d'embranchement	57
II.2	Paramètres du modèle phénoménologique assurant la résonance interne entre les modes de flexion et de torsion	66
III.1	Ordres de grandeurs des variables adimensionnées du problème. $\lambda_\eta = \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}$ et $\lambda_\zeta = \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}$	79
III.2	Paramètres de la poutre droite utilisée pour valider la modélisation	85
III.3	Comparaison des fréquences propres de la poutre droite	86
III.4	Paramètres de la poutre vrillée et pré-courbée utilisée pour valider la modélisation	86
III.5	Paramètres géométrique et matériau utilisés pour les 3 géométries de poutre étudiées.	88
III.6	Fréquences propres des modes 1T et 2F pour les trois géométries recalées	89
III.7	Fréquences propres des modes 1T et 2F en fonction de la corde	99
III.8	Fréquences propres des modes 1T et 2F en fonction de l'épaisseur de la poutre .	101
III.9	Paramètres géométrique et matériau utilisés pour le modèle en rotation avec $\theta(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{L} \frac{\pi}{18}$	103
IV.1	Fréquences propres et coefficients d'amortissement pour les 4 premiers modes propres de la pale	111
IV.2	Participations modales Φ_{om} , o : capteur d'accélération, m : mode	111
IV.3	Comparaison des fréquences propres expérimentales et numériques de la pale Open Rotor	117
IV.4	Temps requis pour la création des modèles réduits et la résolution du système dynamique réduit	132

Bibliographie

- [1] *Accelerometer, ICP - Product Specifications*. M353B18. PCB Piezotronics. 2011 (cf. p. 108).
- [2] E. ALLGOWER et K. GEORG. *Numerical continuation methods : an introduction*. T. 13. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 38 sq., 42).
- [3] E. ALLGOWER et K. GEORG. “Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations”. *Siam review* 22.1 (1980), p. 28-85. DOI : [10.1137/1022003](https://doi.org/10.1137/1022003) (cf. p. 38).
- [4] M. BALMASEDA AGUIRRE. “Reduced order models for nonlinear dynamic analysis of rotating structures : Application to turbomachinery blades”. Thèse de doctorat. Université de Lyon, 2019 (cf. p. 143).
- [5] M. BALMASEDA AGUIRRE, G. JACQUET-RICHARDET, A. PLACZEK et D.-M. TRAN. “Reduced order models for nonlinear dynamic analysis with application to a fan blade”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 142.4 (2020), p. 041002. DOI : [10.1115/1.4044805](https://doi.org/10.1115/1.4044805) (cf. p. 119).
- [6] M. BALMASEDA AGUIRRE, G. JACQUET-RICHARDET, A. PLACZEK et D. M. TRAN. “Reduced Order Models For Dynamic Analysis of Nonlinear Rotating Structures”. *ECCM-ECFD Conferences 2018*. GLASGOW, United Kingdom, 2018 (cf. p. 119).
- [7] A. BATAILLY, M. LEGRAND, A. MILLECAMPES et F. GARCIN. “Numerical-Experimental Comparison in the Simulation of Rotor/Stator Interaction Through Blade-Tip/Abradable Coating Contact”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.8 (2012). DOI : [10.1115/1.4006446](https://doi.org/10.1115/1.4006446) (cf. p. 21).
- [8] T. BERTHELON. “Réponse forcée du FAN sous ingestion de Vortex”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2020 (cf. p. 22).
- [9] *Parallel Harmonic Balance Method for Analysis of Nonlinear Dynamical Systems*. T. Volume 11 : Structures and Dynamics : Structural Mechanics, Vibration, and Damping ; Supercritical CO2. Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air. 2020. DOI : [10.1115/GT2020-15392](https://doi.org/10.1115/GT2020-15392) (cf. p. 142).
- [10] R. D. BLEVINS. *Formulas for natural frequency and mode shape*. New York : Van Nostrand Reinhold, 1979 (cf. p. 85).
- [11] N. BOIVIN, C. PIERRE et S. SHAW. “Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances”. *Journal of Sound and Vibration* 182.2 (1995), p. 336-341. DOI : [10.1006/jsvi.1995.0201](https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0201) (cf. p. 59).
- [12] J. BONET et R. D. WOOD. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. 2^e éd. Cambridge University Press, 2008. DOI : [10.1017/CBO9780511755446](https://doi.org/10.1017/CBO9780511755446) (cf. p. 13).

- [13] C. BRANDSTETTER, V. PAGES, P. DUQUESNE, B. PAOLETTI, S. AUBERT et X. OTTAVY. “Project PHARE-2—A High-Speed UHBR Fan Test Facility for a New Open-Test Case”. *Journal of Turbomachinery* 141.10 (2019). DOI : [10.1115/1.4043883](https://doi.org/10.1115/1.4043883) (cf. p. 22).
- [14] T. CAMERON et J. H. GRIFFIN. “An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems”. *Journal of applied mechanics* 56.1 (1989), p. 149-154. DOI : [10.1115/1.3176036](https://doi.org/10.1115/1.3176036) (cf. p. 35).
- [15] M. P. CASTANIER et C. PIERRE. “Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration : current status and emerging directions”. *Journal of Propulsion and power* 22.2 (2006), p. 384-396. DOI : [10.2514/1.16345](https://doi.org/10.2514/1.16345) (cf. p. 23 sq.).
- [16] Y.-W. CHANG, X. WANG, E. CAPIEZ-LERNOUT, M. MIGNOLET et C. SOIZE. “Reduced order modelling for the nonlinear geometric response of some curved structures”. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, IFASD 2011. AAAF-AIAA. 2011*, paper-IFASD (cf. p. 3, 122, 124).
- [17] D. CHARLEUX. “Etude des effets de la friction en pied d’aube sur la dynamique des roues aubagées”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2006 (cf. p. 2).
- [18] S. CHEN, Y. CHEUNG et S. LAU. “On the internal resonance of multi-degree-of-freedom systems with cubic non-linearity”. *Journal of Sound and Vibration* 128.1 (1989), p. 13-24. DOI : [10.1016/0022-460x\(89\)90677-9](https://doi.org/10.1016/0022-460x(89)90677-9) (cf. p. 2).
- [19] Y. CHEUNG, S. CHEN et S. LAU. “Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems”. *Journal of Sound and Vibration* 140.2 (1990), p. 273-286. DOI : [10.1016/0022-460x\(90\)90528-8](https://doi.org/10.1016/0022-460x(90)90528-8) (cf. p. 40).
- [20] S.-N. CHOW, C. LI et D. WANG. *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*. Cambridge University Press, 1994 (cf. p. 124).
- [21] B. COCHELIN, N. DAMIL et M. POTIER-FERRY. *Méthode asymptotique numérique*. 2007. DOI : [10.1080/17797179.2008.9737353](https://doi.org/10.1080/17797179.2008.9737353) (cf. p. 38).
- [22] A. R. CONN, N. I. GOULD et P. L. TOINT. *Trust region methods*. T. 1. Siam, 2000. DOI : [10.1137/1.9780898719857](https://doi.org/10.1137/1.9780898719857) (cf. p. 37).
- [23] N. COUDEYRAS, J.-J. SINOÛ et S. NACIVET. “A new treatment for predicting the self-excited vibrations of nonlinear systems with frictional interfaces : The constrained harmonic balance method, with application to disc brake squeal”. *Journal of sound and vibration* 319.3-5 (2009), p. 1175-1199. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.06.050](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.050) (cf. p. 34).
- [24] M. CRESPO DA SILVA. “Flap-lag-torsional dynamic modelling of rotor blades in hover and in forward flight, including the effect of cubic nonlinearities” (1981) (cf. p. 76, 142).
- [25] M. A. CRISFIELD. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures : Advanced Topics*. 1st. John Wiley & Sons, Inc., 1997. ISBN : 047195649X (cf. p. 80).
- [26] E. DELHEZ, F. NYSSSEN, J.-C. GOLINVAL et A. BATAILLY. “Assessment of geometric nonlinearities influence on NASA rotor 37 response to blade tip/casing rubbing events”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* (2021) (cf. p. 2).
- [27] T. DETROUX, L. RENSON, L. MASSET et G. KERSCHEN. “The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 296 (2015), p. 18 -38. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.07.017> (cf. p. 50).
- [28] T. DETROUX, J.-P. NOËL, L. N. VIRGIN et G. KERSCHEN. “Experimental study of isolas in nonlinear systems featuring modal interactions”. *Plos one* 13.3 (2018), e0194452. DOI : [10.1371/journal.pone.0194452](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0194452) (cf. p. 46).

- [29] A. DHOOGHE, W. GOVAERTS et Y. A. KUZNETSOV. “MATCONT : a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs”. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 29.2 (2003), p. 141-164. DOI : [10.1145/980175.980184](https://doi.org/10.1145/980175.980184) (cf. p. 38).
- [30] N. DI PALMA, B. CHOUVION et F. THOUVEREZ. “Parametric study on internal resonances for a simplified nonlinear blade model”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 141 (2022), p. 103941. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103941](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103941) (cf. p. 89).
- [31] N. DI PALMA, A. MARTIN, F. THOUVEREZ et V. COURTIER. “Nonlinear harmonic analysis of a blade model subjected to large geometrical deflection and internal resonance”. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*. T. 58691. American Society of Mechanical Engineers. 2019, V07BT35A017. DOI : [10.1115/gt2019-91213](https://doi.org/10.1115/gt2019-91213) (cf. p. 119, 131).
- [32] S. DJORDJEVIC. “The dynamic flexural response of propeller blades”. Mém. de mast. 1982 (cf. p. 169).
- [33] J DODDS et M VAHDATI. “Rotating stall observations in a high speed compressor—Part I : Experimental study”. *Journal of Turbomachinery* 137.5 (2015), p. 051002 (cf. p. 22).
- [34] E. J. DOEDEL. “Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations”. *Numerical Continuation Methods for dynamical systems*. Springer, 2007, p. 1-49. DOI : [10.1007/978-1-4020-6356-5_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6356-5_1) (cf. p. 60).
- [35] E. J. DOEDEL, A. R. CHAMPNEYS, T. F. FAIRGRIEVE, Y. A. KUZNETSOV, B. SANDSTEDTE et X. WANG. “AUTO 97 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)” (1997) (cf. p. 38).
- [36] J. R. DORMAND et P. J. PRINCE. “A family of embedded Runge-Kutta formulae”. *Journal of computational and applied mathematics* 6.1 (1980), p. 19-26. DOI : [10.1016/0771-050x\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050x(80)90013-3) (cf. p. 29).
- [37] C. DUMARTINEIX. “Modélisation et étude de la dynamique complexe d’un système bi-rotor aubagé couplé”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2019 (cf. p. 2).
- [38] W. J. DUNCAN. “LV. Applications of the Galerkin method to the torsion and flexure of cylinders and prisms”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 25.169 (1938), p. 634-649. DOI : [10.1080/14786443808562047](https://doi.org/10.1080/14786443808562047) (cf. p. 169).
- [39] A FANTETTI, L. TAMATAM, M. VOLVERT, I LAWAL, L LIU, L SALLES, M. BRAKE, C. SCHWINGSHACKL et D NOWELL. “The impact of fretting wear on structural dynamics : Experiment and Simulation”. *Tribology International* 138 (2019), p. 111-124 (cf. p. 2).
- [40] F. FONTANELA, A. GROLET, L. SALLES et N. HOFFMANN. “Computation of quasi-periodic localised vibrations in nonlinear cyclic and symmetric structures using harmonic balance methods”. *Journal of Sound and Vibration* 438 (2019), p. 54-65 (cf. p. 2).
- [41] L. FOX et E. GOODWIN. “Some new methods for the numerical integration of ordinary differential equations”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. T. 45. 3. Cambridge University Press. 1949, p. 373-388. DOI : [10.1017/s0305004100025007](https://doi.org/10.1017/s0305004100025007) (cf. p. 30).
- [42] M. FRISWELL et J. E. MOTTERSHEAD. *Finite element model updating in structural dynamics*. T. 38. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 127).
- [43] W. FROUDE. “Remarks on Mr. Scott Russell’s paper on rolling”. *Transactions of the Institute of Naval Research* 4 (1863), p. 232-275 (cf. p. 44).

- [44] F. GEORGIADES, M. PEETERS, G. KERSCHEN, J.-C. GOLINVAL et M. RUZZENE. “Modal Analysis of a Nonlinear Periodic Structure with Cyclic Symmetry”. *AIAA Journal* 47 (2009), p. 1014 -1025. DOI : [10.2514/1.40461](https://doi.org/10.2514/1.40461) (cf. p. 3, 31, 46).
- [45] M. GÉRADIN et D. J. RIXEN. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2014 (cf. p. 29).
- [46] T. GMÜR. *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. PPUR presses polytechniques, 1997 (cf. p. 11, 17, 30).
- [47] W GOVAERTS, Y. A. KUZNETSOV, V DE WITTE, A DHOOGHE, H. MEIJER, W MESTROM, A RIET et B SAUTOIS. “MATCONT and CL MATCONT : Continuation toolboxes in matlab”. *Gent University and Utrecht University* (2011) (cf. p. 54).
- [48] C. GRENAT. “Nonlinear Normal Modes and multi-parametric continuation of bifurcations : Application to vibration absorbers and architected MEMS sensors for mass detection”. Theses. Université de Lyon, 2018 (cf. p. 61).
- [49] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “On a new harmonic selection technique for harmonic balance method”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43-60. DOI : [10.1016/j.ymssp.2012.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.01.024) (cf. p. 34).
- [50] A. GROLET. “Dynamique non-linéaire des structures mécaniques : application aux systèmes à symétrie cyclique”. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2013 (cf. p. 2, 39, 42, 44, 60).
- [51] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Computing multiple periodic solutions of nonlinear vibration problems using the harmonic balance method and Groebner bases”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 52 (2015), p. 529-547. DOI : [10.1016/j.ymssp.2014.07.015](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2014.07.015) (cf. p. 37, 142).
- [52] A. GROLET et F. THOUVEREZ. “On a new harmonic selection technique for harmonic balance method”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 30 (2012), p. 43-60. DOI : [10.1016/j.ymssp.2012.01.024](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.01.024) (cf. p. 142).
- [53] G. V. GROLL et D. EWINS. “The Harmonic Balance Method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems”. *Journal of Sound and Vibration* 241.2 (2001), p. 223 -233. DOI : <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3298> (cf. p. 49).
- [54] M. GRUIN. “Dynamique non-linéaire d’une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d’un turboréacteur”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2012 (cf. p. 2, 35, 39 sq.).
- [55] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. T. 42. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 124).
- [56] M. GUSKOV. “Dynamique non-linéaire des systèmes multirotors. Etudes numérique et expérimentale”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 2, 51).
- [57] M. GUSKOV, J.-J. SINOUE et F. THOUVEREZ. “Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics”. *Mechanics Research Communications* 35.8 (2008), p. 537-545. DOI : [10.1016/j.mechrescom.2008.05.002](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.05.002) (cf. p. 34, 53).
- [58] A. HADDOW, A. BARR et D. MOOK. “Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure”. *Journal of Sound and Vibration* 97.3 (1984), p. 451 -473. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90272-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90272-4) (cf. p. 3, 45, 73).

- [59] G. HALLER et S. PONSIOEN. “Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence, uniqueness and use in model reduction”. *Nonlinear dynamics* 86.3 (2016), p. 1493-1534. DOI : [10.1007/s11071-016-2974-z](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2974-z) (cf. p. 3, 126).
- [60] P. HARTMAN. “A lemma in the theory of structural stability of differential equations”. 1960. DOI : [10.1090/s0002-9939-1960-0121542-7](https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1960-0121542-7) (cf. p. 47).
- [61] D. H. HODGES. “A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams”. *International journal of solids and structures* 26.11 (1990), p. 1253-1273. DOI : [10.1016/0020-7683\(90\)90060-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90060-9) (cf. p. 77).
- [62] D. H. HODGES. *Nonlinear composite beam theory*. American Institute of Aeronautics et Astronautics, 2006. DOI : [10.2514/4.866821](https://doi.org/10.2514/4.866821) (cf. p. 142).
- [63] D. H. HODGES. “Review of composite rotor blade modeling”. *AIAA journal* 28.3 (1990), p. 561-565. DOI : [10.2514/3.10430](https://doi.org/10.2514/3.10430) (cf. p. 142).
- [64] D. H. HODGES et E. H. DOWELL. “Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades” (1974) (cf. p. 76 sq., 80, 82, 171).
- [65] J. J. HOLLKAMP et R. W. GORDON. “Reduced-order models for nonlinear response prediction : Implicit condensation and expansion”. *Journal of Sound and Vibration* 318.4-5 (2008), p. 1139-1153. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.04.035](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.035) (cf. p. 3, 126).
- [66] J. C. HOUBOLT. “A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft”. *Journal of the Aeronautical Sciences* 17.9 (1950), p. 540-550. DOI : [10.2514/8.1722](https://doi.org/10.2514/8.1722) (cf. p. 30).
- [67] J. C. HOUBOLT et G. W. BROOKS. *Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending, and torsion of twisted nonuniform rotor blades*. T. 1346. National Advisory Committee for Aeronautics, 1957 (cf. p. 76).
- [68] S. R. IDELSOHN et A. CARDONA. “A load-dependent basis for reduced nonlinear structural dynamics”. *Computers & Structures* 20.1-3 (1985), p. 203-210. DOI : [10.1016/b978-0-08-032789-1.50026-4](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-032789-1.50026-4) (cf. p. 122).
- [69] S. R. IDELSOHN et A. CARDONA. “A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 49.3 (1985), p. 253-279. DOI : [10.1016/0045-7825\(85\)90125-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90125-2) (cf. p. 3, 121).
- [70] G. JACQUET-RICHARDET, M. TORKHANI, P. CARTRAUD, F. THOUVEREZ, T. N. BARANGER, M. HERRAN, C. GIBERT, S. BAGUET, P. ALMEIDA et L. PELETAN. “Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 40.2 (2013), p. 401-420 (cf. p. 2).
- [71] S. JAIN, P. TISO, J. B. RUTZMOSER et D. J. RIXEN. “A quadratic manifold for model order reduction of nonlinear structural dynamics”. *Computers & Structures* 188 (2017), p. 80-94. DOI : [10.1016/j.compstruc.2017.04.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.04.005) (cf. p. 3, 121 sq., 126).
- [72] L. JEZEQUEL et C. LAMARQUE. “Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory”. *Journal of Sound and Vibration* 149.3 (1991), p. 429 -459. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90446-Q](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90446-Q) (cf. p. 45, 59, 124).
- [73] D. JIANG, C. PIERRE et S. SHAW. “The construction of non-linear normal modes for systems with internal resonance”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 40.5 (2005), p. 729-746. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.010](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.08.010) (cf. p. 2, 45, 59).
- [74] H. B. KELLER. “Lectures on numerical methods in bifurcation problems”. *Applied Mathematics* 217 (1987), p. 50 (cf. p. 41).

- [75] H. B. KELLER. “Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems”. *Application of bifurcation theory* (1977), p. 359-384 (cf. p. 41, 57).
- [76] G. KERSCHEN. “Definition and Fundamental Properties of Nonlinear Normal Modes”. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. Springer, 2014, p. 1-46. DOI : [10.1007/978-3-7091-1791-0_1](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0_1) (cf. p. 46, 57).
- [77] G. KERSCHEN, J.-c. GOLINVAL, A. F. VAKAKIS et L. A. BERGMAN. “The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview”. *Nonlinear dynamics* 41.1 (2005), p. 147-169. DOI : [10.1007/s11071-005-2803-2](https://doi.org/10.1007/s11071-005-2803-2) (cf. p. 3).
- [78] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J. C. GOLINVAL et C. STÉPHAN. “Nonlinear Modal Analysis of a Full-Scale Aircraft”. *Journal of Aircraft* 50.5 (2013), p. 1409-1419. DOI : [10.2514/1.C031918](https://doi.org/10.2514/1.C031918) (cf. p. 31).
- [79] G. KERSCHEN, M. PEETERS, J.-C. GOLINVAL et A. F. VAKAKIS. “Nonlinear normal modes, Part I : A useful framework for the structural dynamicist”. *Mechanical systems and signal processing* 23.1 (2009), p. 170-194. DOI : [10.1016/j.ymssp.2008.04.002](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002) (cf. p. 2, 45).
- [80] G. KERSCHEN, S. SHAW, C TOUZÉ, O. GENDELMAN, B COCHELIN et A. VAKAKIS. *Modal analysis of nonlinear mechanical systems*. T. 555. Springer, 2014. DOI : [10.1007/978-1-4939-6503-8_35-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4939-6503-8_35-1) (cf. p. 59).
- [81] K. KIM, V. KHANNA, X. WANG et M. MIGNOLET. “Nonlinear reduced order modeling of flat cantilevered structures”. *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 17th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 11th AIAA No. 2009*, p. 2492. DOI : [10.2514/6.2009-2492](https://doi.org/10.2514/6.2009-2492) (cf. p. 119).
- [82] K. KIM, A. G. RADU, X. WANG et M. P. MIGNOLET. “Nonlinear reduced order modeling of isotropic and functionally graded plates”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 49 (2013), p. 100-110. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2012.07.008](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.07.008) (cf. p. 123).
- [83] M. E. KING et A. F. VAKAKIS. “An Energy-Based Approach to Computing Resonant Nonlinear Normal Modes”. *Journal of Applied Mechanics* 63.3 (1996), p. 810-819. DOI : [10.1115/1.2823367](https://doi.org/10.1115/1.2823367) (cf. p. 2, 59).
- [84] S. KLAASSEN et D. RIXEN. “Using SEMM to Identify the Joint Dynamics in Multiple Degrees of Freedom Without Measuring Interfaces”. *Dynamic Substructures, Volume 4*. Springer, 2020, p. 87-99 (cf. p. 2).
- [85] D. A. KNOLL et D. E. KEYES. “Jacobian-free Newton–Krylov methods : a survey of approaches and applications”. *Journal of Computational Physics* 193.2 (2004), p. 357-397. DOI : [10.1016/j.jcp.2003.08.010](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.010) (cf. p. 37).
- [86] J. B. KOSMATKA. “The use of cross-section warping functions in composite rotor blade analysis” (1992) (cf. p. 169).
- [87] M. KRACK et J. GROSS. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer, 2019. DOI : [10.1007/978-3-030-14023-6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6) (cf. p. 34).
- [88] J. L. KRAHULA et G. F. LAUTERBACH. “A finite element solution for Saint-Venant torsion”. *AIAA Journal* 7.12 (1969), p. 2200-2203. DOI : [10.2514/3.5516](https://doi.org/10.2514/3.5516) (cf. p. 169).
- [89] N. M. KRYLOV et N. N. BOGOLIUBOV. *Introduction to non-linear mechanics*. Princeton university press, 1949 (cf. p. 33).

- [90] R. J. KUETHER, L. RENSON, T. DETROUX, C. GRAPPASONNI, G. KERSCHEN et M. S. ALLEN. “Nonlinear normal modes, modal interactions and isolated resonance curves”. *Journal of Sound and Vibration* 351 (2015), p. 299-310. DOI : [10.1016/j.jsv.2015.04.035](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.04.035) (cf. p. 46).
- [91] Y. A. KUZNETSOV. *Elements of applied bifurcation theory*. T. 112. Springer Science & Business Media, 2013 (cf. p. 32, 51, 54 sqq.).
- [92] R. G. KVATERNIK et K. R. KAZA. “Nonlinear curvature expressions for combined flapwise bending, chordwise bending, torsion and extension of twisted rotor blades” (1976) (cf. p. 76).
- [93] W LACARBONARA et G REGA. “Resonant non-linear normal modes. Part II : activation/orthogonality conditions for shallow structural systems”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38.6 (2003), p. 873-887. DOI : [10.1016/s0020-7462\(02\)00034-3](https://doi.org/10.1016/s0020-7462(02)00034-3) (cf. p. 59).
- [94] W. LACARBONARA, G. REGA et A. NAYFEH. “Resonant non-linear normal modes. Part I : analytical treatment for structural one-dimensional systems”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 38.6 (2003), p. 851-872. DOI : [10.1016/s0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/s0020-7462(02)00033-1) (cf. p. 59, 65).
- [95] D. LAXALDE. “Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2007 (cf. p. 2, 59).
- [96] D. LAXALDE et F. THOUVEREZ. “Complex Non-Linear Modal Analysis for Mechanical Systems : Application to Turbomachinery Bladings With Friction Interfaces”. *Journal of Sound and Vibration* 322.4-5 (2009), p. 1009-1025. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.11.044](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.044) (cf. p. 59).
- [97] A. LAZARUS et O. THOMAS. “A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems”. *Comptes Rendus Mécanique* 338.9 (2010), p. 510 -517. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.crme.2010.07.020> (cf. p. 50).
- [98] M. LEGRAND, C. PIERRE, P. CARTRAUD et J.-P. LOMBARD. “Two-dimensional modeling of an aircraft engine structural bladed disk-casing modal interaction”. *Journal of Sound and Vibration* 319.1 (2009), p. 366-391. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.019> (cf. p. 21).
- [99] E. LEMOINE. “Approche couplée pour l’étude du contact sous chargement dynamique vibratoire : application à l’usure par fretting du contact aube-disque”. Thèse de doctorat. Ecole Centrale de Lyon, 2021 (cf. p. 2).
- [100] A. LEUNG et Q. ZHANG. “Complex normal form for strongly non-linear vibration systems exemplified by Duffing–van der Pol equation”. *Journal of Sound and Vibration* 213.5 (1998), p. 907-914 (cf. p. 124).
- [101] R LEWANDOWSKI. “Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures—part 1 : theoretical background”. *International journal of solids and structures* 34.15 (1997), p. 1925-1947. DOI : [10.1016/s0020-7683\(96\)00127-8](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(96)00127-8) (cf. p. 59).
- [102] R LEWANDOWSKI. “Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures—part 2 : numerical strategy and examples”. *International journal of solids and structures* 34.15 (1997), p. 1949-1964. DOI : [10.1016/s0020-7683\(96\)00126-6](https://doi.org/10.1016/s0020-7683(96)00126-6) (cf. p. 45, 59).

- [103] R. LEWANDOWSKI. “Non-linear free vibrations of beams by the finite element and continuation methods”. *Journal of Sound and Vibration* 170.5 (1994), p. 577-593. DOI : [10.1006/jsvi.1994.1088](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1088) (cf. p. 2, 45, 59).
- [104] A. LIAPOUNOFF. “Problème général de la stabilité du mouvement”. fr. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques* 2e série, 9 (1907), p. 203-474. DOI : [10.5802/afst.246](https://doi.org/10.5802/afst.246) (cf. p. 47).
- [105] R. MACNEAL, R. HARDER et J. MASON. “NASTRAN cyclic symmetry capability.[application to solid rocket propellant grains and space antennas]” (1973) (cf. p. 19).
- [106] L. MANEVICH et I. V. MIKHLIN. “On periodic solutions close to rectilinear normal vibration modes”. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 36.6 (1972), p. 988-994. DOI : [10.1016/0021-8928\(72\)90032-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(72)90032-9) (cf. p. 59).
- [107] F. MANGUSSI et D. H. ZANETTE. “Internal resonance in a vibrating beam : a zoo of nonlinear resonance peaks”. *PloS one* 11.9 (2016), e0162365. DOI : [10.1371/journal.pone.0162365](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0162365) (cf. p. 3).
- [108] J. MARSHALL et M. IMREGUN. “A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications”. *Journal of fluids and structures* 10.3 (1996), p. 237-267 (cf. p. 21).
- [109] A. MARTIN. “Réduction en dynamique non-linéaire géométrique : Application au cas des structures à symétrie cyclique”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2019 (cf. p. 2, 120).
- [110] *Measurement Hardware - Technical Specifications*. HP 3565S. Hewlett Packard. 1998 (cf. p. 109).
- [111] *Mechanical Impedance Sensor - Product Specifications*. 288D01. PCB Piezotronics. 2017 (cf. p. 108).
- [112] L. MEIROVITCH. *Methods of Analytical Dynamics*. Advanced engineering series. McGraw-Hill, 1970. ISBN : 9780070414556 (cf. p. 13).
- [113] R. MINDLIN. “Solution of St. Venant’s torsion problem by power series”. *International Journal of Solids and Structures* 11.3 (1975), p. 321-328. DOI : [10.1016/0020-7683\(75\)90071-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90071-2) (cf. p. 169).
- [114] *Modal Shaker - Datasheet*. 2100E11. The Modal Shop. 2020 (cf. p. 108).
- [115] M. MONTEIL, C. TOUZÉ, O. THOMAS et S. BENACCHIO. “Nonlinear forced vibrations of thin structures with tuned eigenfrequencies : the cases of 1 :2 :4 and 1 :2 :2 internal resonances”. *Nonlinear Dynamics* 75.1-2 (2014), p. 175-200. DOI : [10.1007/s11071-013-1057-7](https://doi.org/10.1007/s11071-013-1057-7) (cf. p. 3, 45, 73).
- [116] G. MOORE et A. SPENCE. “The calculation of turning points of nonlinear equations”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 17.4 (1980), p. 567-576. DOI : [10.1137/0717048](https://doi.org/10.1137/0717048) (cf. p. 54).
- [117] G. MOORE. “Floquet theory as a computational tool”. *SIAM journal on numerical analysis* 42.6 (2005), p. 2522-2568. DOI : [10.1137/s0036142903434175](https://doi.org/10.1137/s0036142903434175) (cf. p. 50).
- [118] A. MURAVYOV, A. RIZZI et A. STEPHEN. “Determination of nonlinear stiffness with application to random vibration of geometrically nonlinear structures”. *Computers & Structures* 81.15 (2003), p. 1513-1523. DOI : [10.1016/s0045-7949\(03\)00145-7](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(03)00145-7) (cf. p. 3, 118).

- [119] N. MUSKHELISHVILI. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Springer Science & Business Media, 1977. DOI : [10.1007/978-94-017-3034-1](https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1) (cf. p. 167).
- [120] S. NACIVET. “Modélisation du frottement en pied d’aube par une approche fréquentielle”. Thèse de doctorat. École Centrale de Lyon, 2002 (cf. p. 2, 36).
- [121] S. NACIVET, C. PIERRE, F. THOUVEREZ et L. JÉZÉQUEL. “A dynamic Lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems”. *Journal of Sound and Vibration* 265.1 (2003), p. 201-219. DOI : [10.1016/s0022-460x\(02\)01447-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(02)01447-5) (cf. p. 36).
- [122] M NAKHLA et J. VLACH. “A piecewise harmonic balance technique for determination of periodic response of nonlinear systems”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2 (1976), p. 85-91. DOI : [10.1109/tcs.1976.1084181](https://doi.org/10.1109/tcs.1976.1084181) (cf. p. 33).
- [123] M. NAUDIN et J.-M. PUGNET. “Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines” (1999) (cf. p. 21, 25).
- [124] A. H. NAYFEH, C. CHIN et S. A. NAYFEH. “On Nonlinear Normal Modes of Systems With Internal Resonance”. *Journal of Vibration and Acoustics* 118.3 (1996), p. 340-345. DOI : [10.1115/1.2888188](https://doi.org/10.1115/1.2888188) (cf. p. 2, 59).
- [125] A. H. NAYFEH et S. A. NAYFEH. “On nonlinear modes of continuous systems”. *Journal of Vibration and Acoustics* 116.1 (1994), p. 129-136. DOI : [10.1115/1.2930388](https://doi.org/10.1115/1.2930388) (cf. p. 59).
- [126] A. H. NAYFEH et L. ZAVODNEY. “The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic non-linearities to a combination parametric resonance”. *Journal of Sound and Vibration* 107.2 (1986), p. 329 -350. DOI : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(86\)90242-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(86)90242-7) (cf. p. 44).
- [127] A. H. NAYFEH. *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, 2011 (cf. p. 28).
- [128] A. H. NAYFEH. *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008 (cf. p. 28).
- [129] A. H. NAYFEH et B. BALACHANDRAN. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008 (cf. p. 31 sq., 48, 51, 57, 61).
- [130] A. H. NAYFEH et D. T. MOOK. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, 2008 (cf. p. 2, 44 sq., 67, 73, 115).
- [131] A. H. NAYFEH, D. T. MOOK et L. R. MARSHALL. “Nonlinear coupling of pitch and roll modes in ship motions”. *Journal of Hydronautics* 7.4 (1973), p. 145-152. DOI : [10.2514/3.62949](https://doi.org/10.2514/3.62949) (cf. p. 28, 73).
- [132] N. M. NEWMARK. “A method of computation for structural dynamics”. American Society of Civil Engineers. 1959. DOI : [10.1061/jmcea3.0000098](https://doi.org/10.1061/jmcea3.0000098) (cf. p. 29).
- [133] M. NIKOLIC, E. P. PETROV et D. J. EWINS. “Coriolis Forces in Forced Response Analysis of Mistuned Bladed Disks”. *Journal of Turbomachinery* 129.4 (2006), p. 730-739. DOI : [10.1115/1.2720866](https://doi.org/10.1115/1.2720866) (cf. p. 20).
- [134] J. NOËL, L. RENSON et G. KERSCHEN. “Complex dynamics of a nonlinear aerospace structure : Experimental identification and modal interactions”. *Journal of Sound and Vibration* 333.12 (2014), p. 2588-2607. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.01.024> (cf. p. 46).

- [135] A. OPRENI, A. VIZZACCARO, A. FRANGI et C. TOUZÉ. “Model Order Reduction based on Direct Normal Form : Application to Large Finite Element MEMS Structures Featuring Internal Resonance”. *Nonlinear Dynamics* (2021). DOI : [10.1007/s11071-021-06641-7](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06641-7) (cf. p. 3, 143, 177 sq.).
- [136] A. PAPANGELO, F. FONTANELA, A. GROLET, M. CIAVARELLA et N. HOFFMANN. “Multistability and localization in forced cyclic symmetric structures modelled by weakly-coupled Duffing oscillators”. *Journal of Sound and Vibration* 440 (2019), p. 202-211 (cf. p. 2).
- [137] M. PEETERS, R. VIGUIÉ, G. SÉRANDOUR, G. KERSCHEN et J.-C. GOLINVAL. “Nonlinear normal modes, Part II : Toward a practical computation using numerical continuation techniques”. *Mechanical systems and signal processing* 23.1 (2009), p. 195-216. DOI : [10.1016/j.ymsp.2008.04.003](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.04.003) (cf. p. 32, 42, 45, 59).
- [138] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI et G. JACQUET-RICHARDET. “A comparison of stability computational methods for periodic solution of nonlinear problems with application to rotordynamics”. *Nonlinear Dynamics* 72.3 (2013), p. 671-682. DOI : [10.1007/s11071-012-0744-0](https://doi.org/10.1007/s11071-012-0744-0) (cf. p. 51).
- [139] L. PELETAN, S. BAGUET, M. TORKHANI et G. JACQUET-RICHARDET. “Quasi-periodic harmonic balance method for rubbing self-induced vibrations in rotor–stator dynamics”. *Nonlinear Dynamics* 78.4 (2014), p. 2501-2515. DOI : [10.1007/s11071-014-1606-8](https://doi.org/10.1007/s11071-014-1606-8) (cf. p. 39, 53).
- [140] E. PESHECK, N. BOIVIN, C. PIERRE et S. W. SHAW. “Nonlinear Modal Analysis of Structural Systems Using Multi-Mode Invariant Manifolds”. *Nonlinear Dynamics* 25.1-3 (2001), p. 183-205. DOI : [10.1023/A:1012910918498](https://doi.org/10.1023/A:1012910918498) (cf. p. 45).
- [141] D. A. PETERS et R. A. ORMISTON. “Technical Notes : The Effects of Second Order Blade Bending on the Angle of Attack of Hingeless Rotor Blades”. *Journal of the American Helicopter Society* 18.4 (1973), p. 45-48. DOI : [10.4050/jahs.18.45](https://doi.org/10.4050/jahs.18.45) (cf. p. 169 sq.).
- [142] E. PETROV. “Analysis of Bifurcations in Multiharmonic Analysis of Nonlinear Forced Vibrations of Gas Turbine Engine Structures With Friction and Gaps”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 138.10 (2016), p. 102502. DOI : [10.1115/1.4032906](https://doi.org/10.1115/1.4032906) (cf. p. 55).
- [143] C. PIERRE. “Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures”. *Journal of Sound and Vibration* 126.3 (1988), p. 485-502 (cf. p. 23).
- [144] H. POINCARÉ. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste : Méthodes de MM. Newcomb, Glyden, Lindstedt et Bohlin. 1893. T. 2.* Gauthier-Villars it fils, 1893 (cf. p. 45, 124).
- [145] S. PONSIOEN, S. JAIN et G. HALLER. “Model reduction to spectral submanifolds and forced-response calculation in high-dimensional mechanical systems”. *Journal of Sound and Vibration* 488 (2020), p. 115640. DOI : [10.1016/j.jsv.2020.115640](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115640) (cf. p. 126).
- [146] L. PRANDTL. “Zur torsion von prismatischen stäben”. *Physikalische Zeitschrift* 4.758,759 (1903), p. 29 (cf. p. 167).
- [147] S. QUAEGEBEUR, B. CHOUVION et F. THOUVEREZ. “Nonlinear cyclic reduction for the analysis of mistuned cyclic systems”. *Journal of Sound and Vibration* 499 (2021), p. 116002 (cf. p. 3).
- [148] S. QUAEGEBEUR, B. CHOUVION, F. THOUVEREZ et L. BERTHE. “Energy transfer between nodal diameters of cyclic symmetric structures exhibiting polynomial nonlinearities : Cyclic condition and analysis”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 139 (2020), p. 106604. DOI : [10.1016/j.ymsp.2019.106604](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.106604) (cf. p. 18, 46).

- [149] L. RENSON, G. KERSCHEN et B. COCHELIN. “Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering”. *Journal of Sound and Vibration* 364 (2016), p. 177-206. DOI : [10.1016/j.jsv.2015.09.033](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.033) (cf. p. 59).
- [150] P. RIBEIRO et M. PETYT. “Non-linear free vibration of isotropic plates with internal resonance”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 35.2 (2000), p. 263-278. DOI : [10.1016/s0020-7462\(99\)00013-x](https://doi.org/10.1016/s0020-7462(99)00013-x) (cf. p. 46).
- [151] P. RIBEIRO et M. PETYT. “Non-linear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical finite-element method”. *Journal of Sound and vibration* 224.4 (1999), p. 591-624. DOI : [10.1006/jsvi.1999.2193](https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2193) (cf. p. 46).
- [152] W. RITZ. “Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* 1909.135 (1909), p. 1-61. DOI : [10.1515/crll.1909.135.1](https://doi.org/10.1515/crll.1909.135.1) (cf. p. 169).
- [153] V. RIZIOTIS, S. VOUTSINAS, D. MANOLAS, E. POLITIS et P. CHAVIAROPOULOS. “Aeroelastic analysis of pre-curved rotor blades”. *Proceedings of the European Wind Energy Conference and Exhibition (EWEC'10)*. 2010 (cf. p. 76).
- [154] A. ROSEN. *Nonlinear equations of equilibrium for elastic helicopter or wind turbine blades undergoing moderate deformation*. T. 159478. National Aeronautics et Space Administration, 1978 (cf. p. 76).
- [155] R. M. ROSENBERG. “The Normal Modes of Nonlinear n-Degree-of-Freedom Systems”. *Journal of Applied Mechanics* 29.1 (1962), p. 7-14. DOI : [10.1115/1.3636501](https://doi.org/10.1115/1.3636501) (cf. p. 58).
- [156] R. M. ROSENBERG et J. K. KUO. “Nonsimilar Normal Mode Vibrations of Nonlinear Systems Having Two Degrees of Freedom”. *Journal of Applied Mechanics* 31.2 (1964), p. 283-290. DOI : [10.1115/1.3629599](https://doi.org/10.1115/1.3629599) (cf. p. 58).
- [157] R. ROSENBERG. “On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom”. Sous la dir. de G. CHERNYI, H. DRYDEN, P. GERMAIN, L. HOWARTH, W. OLSZAK, W. PRAGER, R. PROBSTEIN et H. ZIEGLER. T. 9. *Advances in Applied Mechanics*. Elsevier, 1966, p. 155 -242. DOI : [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70008-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70008-5) (cf. p. 58).
- [158] V. RUFFINI. “Coriolis effects in bladed discs” (2016) (cf. p. 20).
- [159] J. B. RUTZMOSER, D. J. RIXEN, P. TISO et S. JAIN. “Generalization of quadratic manifolds for reduced order modeling of nonlinear structural dynamics”. *Computers & Structures* 192 (2017), p. 196-209. DOI : [10.1016/j.compstruc.2017.06.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.06.003) (cf. p. 121).
- [160] M de SAINT-VENANT. *Mémoire sur la torsion des prismes : avec des considérations sur leur flexion ainsi que sur l'équilibre intérieur des solides élastiques en général : et des formules pratiques pour le calcul de leur résistance à divers efforts s'exerçant simultanément*. Imprimerie nationale, 1856 (cf. p. 78, 168).
- [161] J. SALENÇON. *Mécanique des milieux continus : Concepts généraux*. T. 1. Editions Ecole Polytechnique, 2005 (cf. p. 13).
- [162] L. SALLES, L. BLANC, F. THOUVEREZ, A. M. GOUSKOV et P. JEAN. “Dual time stepping algorithms with the high order harmonic balance method for contact interfaces with fretting-wear”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 134.3 (2012), p. 032503 (cf. p. 37).
- [163] L. SALLES. “Etude de l'usure par fretting sous chargements dynamiques dans les interfaces frottantes : Application aux pieds d'aubes de turbomachines”. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2010 (cf. p. 2).

- [164] E. SARROUY. “Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires-Application à la dynamique des rotors”. Thèse de doctorat. Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2008 (cf. p. 2, 31, 37, 39, 57).
- [165] E. SARROUY, A. GROLET et F. THOUVEREZ. “Global and bifurcation analysis of a structure with cyclic symmetry”. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46.5 (2011), p. 727-737. DOI : [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.005](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.02.005) (cf. p. 46).
- [166] A. SÉNÉCHAL. “Réduction de vibrations de structure complexe par shunts piézoélectriques : application aux turbomachines”. Thèse de doctorat. Paris, CNAM, 2011 (cf. p. 2).
- [167] R. SEYDEL. *Practical bifurcation and stability analysis*. T. 5. Springer Science & Business Media, 2009. DOI : [10.1007/978-1-4419-1740-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1740-9) (cf. p. 31, 41 sq., 51, 54 sq., 60).
- [168] S. W. SHAW et C. PIERRE. “Non-linear normal modes and invariant manifolds”. *Journal of Sound Vibration* 150 (1991), p. 170-173. DOI : [10.1016/0022-460x\(91\)90412-d](https://doi.org/10.1016/0022-460x(91)90412-d) (cf. p. 58, 125, 176).
- [169] S. W. SHAW et C. PIERRE. “Normal modes for non-linear vibratory systems”. *Journal of sound and vibration* 164.1 (1993), p. 85-124. DOI : [10.1006/jsvi.1993.1198](https://doi.org/10.1006/jsvi.1993.1198) (cf. p. 58).
- [170] S. W. SHAW et C. PIERRE. “Normal modes of vibration for non-linear continuous systems”. *Journal of sound and vibration* 169.3 (1994), p. 319-347. DOI : [10.1006/jsvi.1994.1021](https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1021) (cf. p. 58).
- [171] S. W. SHAW et C. PIERRE. “On nonlinear normal modes”. *Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*. Publ by ASME. 1992, p. 1-5 (cf. p. 58, 176).
- [172] Y. SHEN, A. VIZZACCARO, N. KESMIA, T. YU, L. SALLES, O. THOMAS et C. TOUZÉ. “Comparison of reduction methods for finite element geometrically nonlinear beam structures”. *Vibration* 4.1 (2021), p. 175-204. DOI : [10.3390/vibration4010014](https://doi.org/10.3390/vibration4010014) (cf. p. 126).
- [173] P. SLAATS, J DE JONGH et A. SAUREN. “Model reduction tools for nonlinear structural dynamics”. *Computers & structures* 54.6 (1995), p. 1155-1171. DOI : [10.1016/0045-7949\(94\)00389-k](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00389-k) (cf. p. 122).
- [174] I. S. SOKOLNIKOFF, R. D. SPECHT et al. *Mathematical theory of elasticity*. T. 83. McGraw-Hill New York, 1956 (cf. p. 168).
- [175] Y. SUN, J. YUAN, E. DENIMAL et L. SALLES. “Nonlinear modal analysis of frictional ring damper for compressor blisk”. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 143.3 (2021), p. 031008 (cf. p. 2).
- [176] *Technical Specifications*. HP 3566A and 3567A. Hewlett Packard. 1998 (cf. p. 109).
- [177] D. L. THOMAS. “Dynamics of rotationally periodic structures”. *International journal for numerical methods in engineering* 14.1 (1979), p. 81-102. DOI : [10.1002/nme.1620140107](https://doi.org/10.1002/nme.1620140107) (cf. p. 18).
- [178] G. THOMAS. *Dynamique des structures : analyse modale numérique / Thomas Gmür*. fre. [Mécanique]. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, C 1997. ISBN : 2-88074-333-8 (cf. p. 15).
- [179] O. THOMAS, A. SÉNÉCHAL et J.-F. DEÜ. “Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams”. *Nonlinear dynamics* 86.2 (2016), p. 1293-1318. DOI : [10.1007/s11071-016-2965-0](https://doi.org/10.1007/s11071-016-2965-0) (cf. p. 17).
- [180] S. TIMOSHENKO. *Vibration Problems in Engineering*. Van Nostrand, 1928 (cf. p. 30).

- [181] S. TIMOSHENKO et J. GOODIER. *Theory of Elasticity*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, 1951 (cf. p. 167 sq.).
- [182] P. TISO. “Effective modal derivatives based reduction method for geometrically nonlinear structures”. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. T. 54785. 2011, p. 399-406. DOI : [10.1115/detc2011-48315](https://doi.org/10.1115/detc2011-48315) (cf. p. 143).
- [183] F. TISSEUR et K. MEERBERGEN. “The quadratic eigenvalue problem”. *SIAM review* 43.2 (2001), p. 235-286. DOI : [10.1137/s0036144500381988](https://doi.org/10.1137/s0036144500381988) (cf. p. 17).
- [184] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE. “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes”. *Journal of Sound and Vibration* 273.1 (2004), p. 77-101. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.04.005> (cf. p. 175 sq.).
- [185] C. TOUZÉ. *A normal form approach for nonlinear normal modes*. Research Report Publications du LMA, numéro 156. LMA, 2003 (cf. p. 124 sq., 175, 177 sq.).
- [186] C. TOUZÉ. “Normal form theory and nonlinear normal modes : Theoretical settings and applications”. *Modal Analysis of Nonlinear Mechanical Systems*. Sous la dir. de G. KERSCHEN. Vienna : Springer Vienna, 2014, p. 75-160. ISBN : 978-3-7091-1791-0. DOI : [10.1007/978-3-7091-1791-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1791-0_3) (cf. p. 3).
- [187] C. TOUZÉ et M. AMABILI. “Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures”. *Journal of sound and vibration* 298.4-5 (2006), p. 958-981. DOI : [10.1016/j.jsv.2006.06.032](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.032) (cf. p. 124 sq., 177).
- [188] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. CHAIGNE. “Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes”. *Journal of Sound and Vibration* 273.1-2 (2004), p. 77-101. DOI : [10.1016/j.jsv.2003.04.005](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.04.005) (cf. p. 59).
- [189] C. TOUZÉ, O. THOMAS et A. HUBERDEAU. “Asymptotic non-linear normal modes for large-amplitude vibrations of continuous structures”. *Computers & structures* 82.31-32 (2004), p. 2671-2682. DOI : [10.1016/j.compstruc.2004.09.003](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.09.003) (cf. p. 59).
- [190] C. TOUZÉ, A. VIZZACCARO et O. THOMAS. “Model order reduction methods for geometrically nonlinear structures : a review of nonlinear techniques”. *Nonlinear Dynamics* (2021). DOI : [10.1007/s11071-021-06693-9](https://doi.org/10.1007/s11071-021-06693-9) (cf. p. 3, 126).
- [191] M. URABE. “Galerkin’s procedure for nonlinear periodic systems”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20.2 (1965), p. 120-152. DOI : [10.1007/bf00284614](https://doi.org/10.1007/bf00284614) (cf. p. 33).
- [192] M. VAHDATI et N. CUMPSTY. “Aeroelastic instability in transonic fans”. *journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 138.2 (2016) (cf. p. 22).
- [193] A. F. VAKAKIS. *Normal modes and localization in nonlinear systems*. Springer, 2001 (cf. p. 59).
- [194] R. VALID et R. OHAYON. “Théorie et calcul statique et dynamique des structures à symétries cycliques”. *La Recherche aérospatiale* (1985), p. 251-263 (cf. p. 19).
- [195] A. VIZZACCARO, A. GIVOIS, P. LONGOBARDI, Y. SHEN, J.-F. DEÛ, L. SALLES, C. TOUZÉ et O. THOMAS. “Non-intrusive reduced order modelling for the dynamics of geometrically nonlinear flat structures using three-dimensional finite elements”. *Computational Mechanics* 66.6 (2020), p. 1293-1319. DOI : [10.1007/s00466-020-01902-5](https://doi.org/10.1007/s00466-020-01902-5) (cf. p. 119).

- [196] A. VIZZACCARO, L. SALLES et C. TOUZÉ. “Comparison of nonlinear mappings for reduced-order modelling of vibrating structures : normal form theory and quadratic manifold method with modal derivatives”. *Nonlinear Dynamics* 103.4 (2021), p. 3335-3370 (cf. p. 126).
- [197] A. VIZZACCARO, Y. SHEN, L. SALLES, J. BLAHOŠ et C. TOUZÉ. “Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 384 (2021), p. 113957. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.113957> (cf. p. 3, 119, 125, 129, 175 sqq.).
- [198] C. WANG. “Exact Torsion Solutions for Certain Airfoil Shapes”. *AIAA Journal* (2017), p. 4387-4389. DOI : [10.2514/1.j055855](https://doi.org/10.2514/1.j055855) (cf. p. 168).
- [199] S. J. WILDHEIM. “Excitation of Rotationally Periodic Structures”. *Journal of Applied Mechanics* 46.4 (1979), p. 878-882. DOI : [10.1115/1.3424671](https://doi.org/10.1115/1.3424671) (cf. p. 23).
- [200] E. WILSON, I FARHOOMAND et K. BATHE. “Nonlinear dynamic analysis of complex structures”. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 1.3 (1972), p. 241-252. DOI : [10.1002/eqe.4290010305](https://doi.org/10.1002/eqe.4290010305) (cf. p. 30).
- [201] P. WRIGGERS et J. C. SIMO. “A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30.1 (1990), p. 155-176. DOI : [10.1002/nme.1620300110](https://doi.org/10.1002/nme.1620300110) (cf. p. 55).
- [202] L. XIE, S. BAGUET, B. PRABEL et R. DUFOUR. “Bifurcation tracking by Harmonic Balance Method for performance tuning of nonlinear dynamical systems”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 88 (2017), p. 445-461. DOI : [10.1016/j.ymssp.2016.09.037](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.09.037) (cf. p. 55).
- [203] J. YUAN, A. FANTETTI, E. DENIMAL, S. BHATNAGAR, L. PESARESI, C. SCHWINGSHACKL et L. SALLES. “Propagation of friction parameter uncertainties in the nonlinear dynamic response of turbine blades with underplatform dampers”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 156 (2021), p. 107673 (cf. p. 2).
- [204] B ZHOU, F THOUVEREZ et D LENOIR. “A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response in nonlinear systems”. *Mechanical Systems and Signal Processing* 64 (2015), p. 233-244. DOI : [10.1016/j.ymssp.2015.04.022](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.04.022) (cf. p. 53).
- [205] E. ZUPAN, M. SAJE et D. ZUPAN. “The quaternion-based three-dimensional beam theory”. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 198.49-52 (2009), p. 3944-3956. DOI : [10.1016/j.cma.2009.09.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.09.002) (cf. p. 77).

Annexe A

Complément sur le modèle de couplage flexion-torsion

1 Termes non-linéaires en base modale

On s'intéresse ici à l'expression des termes non-linéaires en base modale du modèle phénoménologique en fonction des grandeurs physiques. On notera $\mathbf{u} = [v, \phi]^T$ le vecteur d'inconnus. On commence par réexprimer les efforts non-linéaires sous la forme,

$$\mathbf{f}^{\text{nl}} = \mathbf{K}^{\text{q}} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\mathbf{K}^{\text{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_{v\phi}}{L} \\ 0 & \frac{K_{v\phi}}{L} & \frac{K_{v\phi}}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

En effectuant le passage en base modale $\mathbf{u} = \Psi \mathbf{q}$ dans l'expression ci-dessus, puis en la projetant à l'aide de la matrice Ψ^T on obtient,

$$\tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}} = \Psi^T \mathbf{K}^{\text{q}} (\Psi \otimes \Psi) (\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}) \quad (\text{A.3})$$

définissant le vecteur $\tilde{\mathbf{f}}^{\text{nl}}$ des efforts non-linéaires exprimés dans la base modale. La matrice contenant les coefficients modaux des termes non-linéaires s'exprime alors sous la forme,

$$\tilde{\mathbf{K}}^{\text{q}} = \Psi^T \mathbf{K}^{\text{q}} (\Psi \otimes \Psi) \quad (\text{A.4})$$

On en déduit finalement l'écriture des coefficients α_{ij} et β_{ij} à l'aide des grandeurs physiques,

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{3K_{v\phi}}{L} (\Psi_{11} \Psi_{12}^2) \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = \beta_{11} &= \frac{K_{v\phi}}{L} (2\Psi_{11} \Psi_{12} \Psi_{22} + \Psi_{12}^2 \Psi_{21}) \\ \alpha_{22} = \beta_{12} = \beta_{21} &= \frac{K_{v\phi}}{L} (2\Psi_{12} \Psi_{21} \Psi_{22} + \Psi_{22}^2 \Psi_{11}) \\ \beta_{22} &= \frac{3K_{v\phi}}{L} (\Psi_{21} \Psi_{22}^2) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

2 Analyse de stabilité

Cette section détaille le calcul de la stabilité du modèle phénoménologique pour la résolution à l'aide des échelles multiples. Il repose sur l'ajout d'une perturbation au voisinage de l'état d'équilibre du système (noté $(\bar{\cdot})$) soit,

$$a_1 = \bar{a}_1 + \Delta a_1, \quad a_2 = \bar{a}_2 + \Delta a_2, \quad \gamma_1 = \bar{\gamma}_1 + \Delta \gamma_1, \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_2 + \Delta \gamma_1 \quad (\text{A.6})$$

La substitution des solutions perturbées dans les équations de solvabilités (II.122) aboutit au système différentiel de la forme,

$$\Delta' = \mathbf{D}\Delta \quad (\text{A.7})$$

avec

$$\Delta = [\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2]^T, \quad \mathbf{D} = (D_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 4} \quad (\text{A.8})$$

Le calcul des coefficients de la matrice \mathbf{D} donne,

$$\begin{aligned} D_{11} &= -\mu_1 + \frac{\alpha_{12}\bar{a}_2 \sin(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_1} & D_{12} &= \frac{\alpha_{12}\bar{a}_1 \sin(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_1} \\ D_{13} &= \frac{\alpha_{12}\bar{a}_1\bar{a}_2 \cos(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_1} & D_{14} &= 0 \\ D_{21} &= -\frac{\beta_{11}\bar{a}_1 \sin(\bar{\gamma}_1)}{2\omega_2} & D_{22} &= -\mu_2 \\ D_{23} &= -\frac{\beta_{11}\bar{a}_1 \cos(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_2} & D_{24} &= \frac{f_2 \cos(\bar{\gamma}_2)}{2\omega_2} \\ D_{31} &= -\frac{\beta_{11}\bar{a}_1 \cos(\bar{\gamma}_1)}{2\omega_2\bar{a}_2} & D_{32} &= \left[\frac{\sigma_1}{\bar{a}_2} + \frac{\alpha_{12} \cos(\bar{\gamma}_1)}{\omega_1} \right] \\ D_{33} &= -\frac{\alpha_{12}\bar{a}_2 \sin(\bar{\gamma}_1)}{2\omega_1} + \frac{\beta_{11}\bar{a}_1^2 \sin(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_2\bar{a}_2} & D_{34} &= -\frac{f_2 \sin(\bar{\gamma}_2)}{2\omega_2\bar{a}_2} \\ D_{41} &= -\frac{\beta_{11}\bar{a}_1 \cos(\bar{\gamma}_1)}{2\omega_2\bar{a}_2} & D_{42} &= \frac{\sigma_2}{\bar{a}_2} \\ D_{43} &= \frac{\beta_{11}\bar{a}_1^2 \sin(\bar{\gamma}_1)}{4\omega_2\bar{a}_2} & D_{44} &= -\frac{f_2 \sin(\bar{\gamma}_2)}{2\omega_2\bar{a}_2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Les solutions de (A.7) s'écrivent sous la forme d'une combinaison linéaire de $e^{i\lambda_i t}$ où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de coefficient \mathbf{D} . La stabilité du système est alors vérifiée si la partie réelle de chacune de ces valeurs propres est négative.

Annexe B

Compléments sur le modèle phénoménologique de poutre non-linéaire

1 Fonction de gauchissement

Cette section fait un rappel de la définition et des méthodes de calculs de la fonction de gauchissement et fournit les expressions analytiques pour certaines géométries de section simples. Pour une description plus approfondie, on pourra se référer à [119, 181].

La fonction de gauchissement naît dans les problèmes de torsion des poutres. Elle caractérise le gauchissement que subissent les sections droites sous l'action d'un couple. Pour une poutre de section S soumise à un effort de torsion, le fonction de gauchissement λ vérifie le système suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \zeta^2} = 0 & \forall (\eta, \zeta) \in S \\ \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} - \zeta \right) \frac{d\zeta}{ds} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + \eta \right) \frac{d\eta}{ds} = 0, & \forall (\eta, \zeta) \in \partial S \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où s définit l'abscisse curviligne le long d'une section droite et ∂S représente la frontière de cette section.

En pratique, la recherche d'une solution vérifiant la condition aux limites du système (B.1) peut être délicate. Pour palier cet obstacle, une alternative consiste à résoudre le système équivalent suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = -2 & \forall (\eta, \zeta) \in S \\ \Phi = 0 & \forall (\eta, \zeta) \in \partial S \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où Φ désigne la fonction de contrainte de Prandtl [146], reliée à la fonction de gauchissement par la relation,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} - \zeta \right) \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} + \eta \right) \quad (\text{B.3})$$

Le système (B.2) présente l'avantage de grandement simplifier la condition aux limites sur la frontière de la section. Ainsi, le calcul de la fonction de gauchissement peut être directement réalisé à partir du système (B.1) ou bien en résolvant le système pour la fonction de contrainte (B.2) puis en intégrant les relations (B.3).

Dans la littérature, une expression analytique de la fonction de gauchissement a pu être

obtenue pour certaines géométries de section simples. Pour une section elliptique de demi grand axe a et demi petit axe b , on vérifie facilement que l'expression de la fonction de gauchissement

$$\lambda(\eta, \zeta) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \eta \zeta \quad (\text{B.4})$$

est solution du système (B.1) Le déplacement longitudinal associé à ce gauchissement est illustré par la figure B.1a.

Dans le cas d'une section rectangulaire comme celle utilisée dans le chapitre III, le calcul de la fonction de gauchissement peut être obtenue directement via la résolution de (B.1) [174] ou bien en passant par la fonction de contrainte [181]. Pour un rectangle de section $2a \times 2b$ elle s'écrit sous la forme d'une série infinie suivante,

$$\lambda(\eta, \zeta) = \eta \zeta - \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi\zeta}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)} \right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{2a}\right) \quad (\text{B.5})$$

Numériquement, la manipulation de cette série peut être délicate. En pratique, sa convergence est très rapide et il suffit de considérer les premiers termes pour avoir un niveau de précision satisfaisant. Comme pour l'ellipse, le déplacement longitudinal associé au gauchissement de la section rectangulaire est illustré sur la figure B.1b. Logiquement on s'aperçoit que le maximum de déplacement se situe dans les zones les plus éloignées du centre de la section.

Plus généralement, De Saint Venant a montré que le système (B.3) définissant la fonction de contrainte admet une infinité de solutions dont la forme générale s'écrit [160],

$$\Phi = -\frac{(\eta^2 + \zeta^2)}{2} + \sum_n a_n \Re((\eta + i\zeta)^n) + \sum_m b_m \Im((\eta + i\zeta)^m) \quad (\text{B.6})$$

En effet, cette expression vérifie automatiquement la première équation (B.2). De plus, la second équation du système (B.2) permet d'affirmer que toute section définie par l'annulation de la fonction (B.6) admet nécessairement celle-ci comme fonction de contrainte. S'inspirant de ce résultat, Wang [198] propose de choisir une solution composée des trois premiers termes de puissance paire a_0 , a_2 et a_4 telle que,

$$\Phi(\eta, \zeta) = -\frac{((\eta + \eta_0)^2 + \zeta^2)}{2} + a_0 + a_2 \left((\eta + \eta_0)^2 - \zeta^2 \right) + a_4 \left((\eta + \eta_0)^4 - 6(\eta + \eta_0)^2 \zeta^2 + \zeta^4 \right) \quad (\text{B.7})$$

L'annulation de cette fonction conduit directement à l'équation définissant la section droite de la poutre,

$$\zeta(\eta) = \pm \sqrt{\frac{B(\eta) - \sqrt{B^2(\eta) - 4a_4 C(\eta)}}{2a_4}} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\begin{aligned} B &= 1/2 + a_2 + 6a_4(\eta + \eta_0)^2 & C &= a_0 + (a_2 - 1/2)(\eta + \eta_0)^2 + a_4(\eta + \eta_0)^4 \\ a_0 &= 0 & a_4 &= \frac{(1/2 - a_2)}{c^2} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En choisissant judicieusement les constantes a_2 , a_4 , la forme de la section définie par l'équation (B.8) est semblable à un profil aérodynamique dont la fonction de gauchissement se déduit

directement par intégration de (B.7) et s'écrit,

$$\lambda(\eta, \zeta) = -2a_2(\eta + \eta_0)y - 4a_4y(\eta + \eta_0) \left((\eta + \eta_0)^2 - y^2 \right) + \eta_0y \quad (\text{B.10})$$

Comme pour les sections précédentes, le déplacement longitudinal sur la section profilée est représenté figure B.1c. On notera que le paramètre η_0 est ici introduit pour faire correspondre le centre de cisaillement du profil avec son axe de rotation.

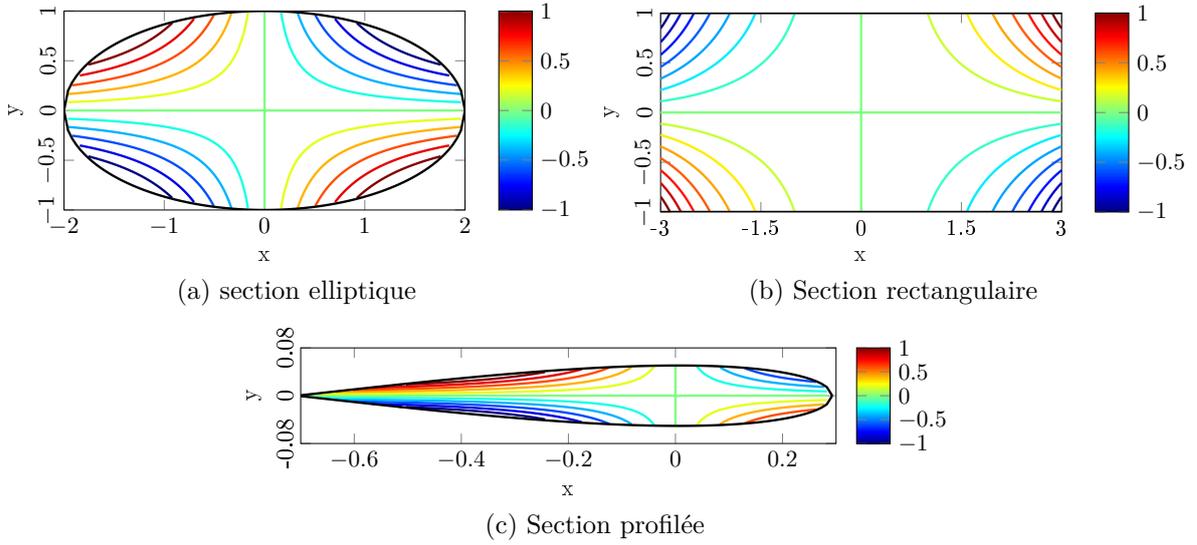


FIGURE B.1 – Déplacement longitudinal pour différentes sections d'une poutre sollicitée en torsion

La détermination d'une formulation analytique exacte de la fonction de gauchissement peut s'avérer très difficile voire impossible pour certaines géométries complexes. Face à cela, différentes stratégies ont été proposées pour déterminer une solution approchée de la fonction de gauchissement. Duncan suggère d'utiliser une méthode de Galerkin pour approcher la forme de la fonction de contrainte [38]. Ritz [152] propose quant à lui l'utilisation d'une méthode énergétique pour la résolution du problème de torsion de Saint Venant. Une autre approche, proposée par Mindlin [113], suppose de développer la fonction de gauchissement sous la forme d'une double série entière. Cette méthode a notamment été appliquée par Kosmatka [86] pour l'étude d'un profil NACA. D'autres méthodes d'approximation ont été présentées et on pourra notamment citer l'utilisation des éléments finis [88] ou encore des méthodes expérimentales [32].

2 Matrice de passage du repère global au repère local

On s'intéresse ici à l'expression de la matrice de passage entre le repère global et le repère local de la poutre déformée. En s'appuyant sur [141] et en considérant une section de longueur Δs de l'axe élastique de la poutre déformée (figure B.2), l'expression de la matrice de passage \mathbf{T} s'écrit à l'aide des angles d'Euler sous la forme,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \\ -\cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \sin \gamma \sin \beta & \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha & -\sin \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

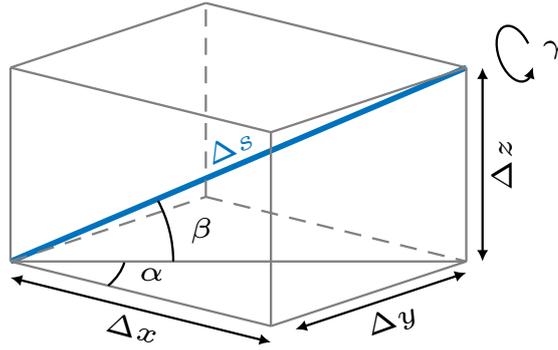


FIGURE B.2 – Section infinitésimale de l'axe élastique de la poutre déformée

A l'aide des notations introduites sur la figure B.2, la matrice \mathbf{T} se réécrit,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta s} & \frac{\Delta y}{\Delta s} & \frac{\Delta z}{\Delta s} \\ -\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \left[\Delta y \cos \gamma + \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta s} \sin \gamma \right] & \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \left[\Delta x \cos \gamma - \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta s} \sin \gamma \right] & \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \sin \gamma \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \left[\Delta y \sin \gamma - \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta s} \cos \gamma \right] & \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \left[\Delta x \sin \gamma - \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta s} \cos \gamma \right] & \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

où les Δx , Δy et Δz peuvent s'exprimer à l'aide des variables v et w ,

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \sqrt{1 - v^{+2} - (w^+ + z_e^+)^2}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = v^+, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = w^+ + z_e^+, \quad (\text{B.13})$$

où $(.)^+$ désigne la dérivée spatiale vis à vis de l'abscisse curviligne s .

De même, il est possible de réexprimer γ en fonction des variables v , w , θ et ϕ à travers la résolution d'une équation différentielle sur \mathbf{T} [141],

$$\gamma = \theta + \phi - \int_0^s \frac{v^{++} (w^+ + z_e^+)}{\sqrt{1 - v^{+2} - (w^+ + z_e^+)^2}} ds - \int_0^s \frac{(w^+ + z_e^+)^2 (w^{++} + z_e^{++}) v^+}{(1 - (w^+ + z_e^+)^2) \sqrt{1 - v^{+2} - (w^+ + z_e^+)^2}} ds \quad (\text{B.14})$$

En s'appuyant sur les ordres de grandeurs définis dans la section III.2.2 et en supposant une pré-courbure modérée, on a :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz_e}{dx}\right)^2}} \simeq 1 \quad (\text{B.15})$$

Par conséquent, on assimile au second ordre la coordonnée curviligne s à l'abscisse x . Cette remarque implique directement la relation $d./ds \simeq d./dx$.

Finalement, la matrice de passage \mathbf{T} s'écrit au second ordre,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2} (v')^2 - \frac{1}{2} (w' + z_e')^2 & v' & w' + z_e' \\ -[v' \cos(\theta + \phi) + (w' + z_e') \sin(\theta + \phi)] & \cos(\theta + \hat{\phi} + v'(w' + z_e')) \left(1 - \frac{1}{2} (v')^2\right) & \sin(\theta + \hat{\phi}) \left(1 - \frac{1}{2} (w' + z_e')^2\right) \\ [v' \sin(\theta + \phi) - (w' + z_e') \cos(\theta + \phi)] & -\sin(\theta + \hat{\phi} + v'(w' + z_e')) \left(1 - \frac{1}{2} (v')^2\right) & \cos(\theta + \hat{\phi}) \left(1 - \frac{1}{2} ((w' + z_e')^2)\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

en notant $(\cdot)' = d./dx$ et avec,

$$\hat{\phi} \equiv \phi - \int_0^x v''(w' + z'_e) dx \quad (\text{B.17})$$

3 Expression du tenseur des déformations

Cette section fournit les étapes permettant d'obtenir l'expression du tenseur des déformation de la poutre vrillée et pré-courbée. Les développements de cette section s'inspirent grandement de [64] et sont adaptés pour tenir compte de la pré-courbure.

Le calcul du tenseur des déformations se déduit de l'équation (III.2) à partir des expressions des vecteurs \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_0 d'un point de la poutre avant et après déformation. L'expression de \mathbf{r}_1 est donnée par (III.1). Le vecteur position \mathbf{r}_0 s'obtient à partir de \mathbf{r}_1 en mettant l'ensemble des déplacements à zéro, soit,

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x - \lambda_0 \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) - z'_e \sin \theta \eta_0 - z'_e \cos \theta \zeta_0 \\ \eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta \\ z_e - \lambda_0 \theta' z'_e + \eta_0 \sin \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + \zeta_0 \cos \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

en posant,

$$\eta_0 = \eta \Big|_{u=v=w=\phi=0}, \quad \zeta_0 = \zeta \Big|_{u=v=w=\phi=0}, \quad \lambda_0(\eta_0, \zeta_0) = \lambda(\eta, \zeta) \Big|_{u=v=w=\phi=0} \quad (\text{B.19})$$

La différentielle de ce vecteur s'obtient directement sous la forme,

$$d\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} \left[x^+ - \lambda_0 \theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) x^+ + \lambda_0 \theta' z_e'' z_e' x^+ - z_e'' x^+ (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \right. \\ \quad \left. - z_e' \theta' x^+ (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) \right] ds \\ \quad + \left[-\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) - z_e' \sin \theta \frac{d\eta_0}{d\eta} \right] d\eta \\ \quad + \left[-\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) - z_e' \cos \theta \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \right] d\zeta \\ \left[-\theta' x^+ (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \right] ds + \frac{d\eta_0}{d\eta} \cos \theta d\eta - \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \sin \theta d\zeta \\ \left[z_e' x^+ - \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') x^+ + \theta' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) \right. \\ \quad \left. - z_e' z_e'' x^+ (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \right] ds \\ \quad + \left[-\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' z_e' + \frac{d\eta_0}{d\eta} \sin \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \right] d\eta \\ \quad + \left[-\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' z_e' + \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \cos \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \right] d\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

avec

$$\lambda_{\eta_0} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \eta_0}, \quad \lambda_{\zeta_0} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \zeta_0} \quad (\text{B.21})$$

La différentielle du vecteur \mathbf{r}_1 s'écrit,

$$d\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} x^+ + u^+ \\ v^+ \\ w^+ + z_e^+ \end{bmatrix} d\mathbf{r} + \mathbf{T}^{T+} \begin{bmatrix} -\lambda(\theta + \phi)^+ \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} d\mathbf{r} + \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} -\lambda(\theta + \phi)^{++} d\mathbf{r} - (\lambda_{\eta} d\eta + \lambda_{\zeta} d\zeta) (\theta + \phi)^+ \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

En remarquant que $\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I}_3$, et en utilisant la relation liant la matrice de changement de repère \mathbf{T} à la matrice antisymétrique $\mathbf{\Omega}$ (voir chapitre I),

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{T+} = \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_i \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

avec ω_i , ω_j et ω_k les composantes du vecteur de rotation définies par,

$$\omega_i = (\theta + \phi)^+ \quad (\text{B.24a})$$

$$\omega_j = \frac{-\cos(\theta + \hat{\phi}) \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^+ \frac{\Delta x}{\Delta s} + \sin(\theta + \hat{\phi}) \left(\frac{\Delta y}{\Delta s} \frac{\Delta z}{\Delta s} \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^+ + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^+ - \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^+ \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2\right)}{\frac{\Delta x}{\Delta s} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s}} \quad (\text{B.24b})$$

$$\omega_k = \frac{\cos(\theta + \hat{\phi}) \left(\frac{\Delta y}{\Delta s} \frac{\Delta z}{\Delta s} \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^+ + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^+ - \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^+ \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2\right) + \sin(\theta + \hat{\phi}) \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^+ \frac{\Delta x}{\Delta s}}{\frac{\Delta x}{\Delta s} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s}} \quad (\text{B.24c})$$

l'expression du vecteur $d\mathbf{r}_1$ dans le repère local s'écrit,

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}_1 = \mathbf{T} \begin{bmatrix} x^+ + u^+ \\ v^+ \\ w^+ + z_e^+ \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_k & \omega_j \\ \omega_k & 0 & -\omega_i \\ -\omega_j & \omega_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda(\theta + \phi)^+ \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} ds \\ + \begin{bmatrix} -\lambda(\theta + \phi)^{++} ds - (\lambda_\eta d\eta + \lambda_\zeta d\zeta) (\theta + \phi)^+ \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

En injectant les expressions (B.20) et (B.25) de $d\mathbf{r}_0$ et $d\mathbf{r}_1$ dans l'équation (III.2) définissant le tenseur des déformations on obtient l'ensemble d'équations suivant,

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{11} = 1 + (-\eta\omega_k + \zeta\omega_j)^2 + [\lambda\omega_k(\theta + \phi)^+ + \zeta\omega_i]^2 + [\lambda\omega_j(\theta + \phi)^+ + \eta\omega_i]^2 + \lambda^2(\theta + \phi)^{++2} \quad (\text{B.26a}) \\ + 2(-\eta\omega_k + \zeta\omega_j) - 2\lambda(\theta + \phi)^{++}(1 - \eta\omega_k + \zeta\omega_j) - x^{+2} \left[1 - \lambda_0\theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right) + \lambda_0\theta' z_e'' z_e' \right]^2 \\ - z_e''^2 x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)^2 - z_e'^2 \theta'^2 x^{+2} (-\eta_0 \cos \theta + \zeta_0 \sin \theta)^2 \\ + 2z_e'' x^{+2} \left[1 - \lambda_0\theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right) + \lambda_0\theta' z_e'' z_e' \right] (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \\ - 2z_e' \theta' x^{+2} \left[1 - \lambda_0\theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right) + \lambda_0\theta' z_e'' z_e' \right] (-\eta_0 \cos \theta + \zeta_0 \sin \theta) \\ + 2z_e'' z_e' \theta' x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) (-\eta_0 \cos \theta + \zeta_0 \sin \theta) - \theta'^2 x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)^2 \\ - z_e'^2 x^{+2} - \lambda_0^2 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') x^{+2} - \theta'^2 x^{+2} \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right)^2 (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta)^2 \\ - z_e'^2 z_e''^2 x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)^2 + 2z_e' x^{+2} \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') \\ - 2z_e' \theta' x^{+2} \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) + 2z_e'^2 z_e'' x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \\ + 2\lambda_0 \theta' x^{+2} (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') \left(1 - \frac{z_e'^2}{2} \right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) \\ - 2\lambda_0 z_e' z_e'' x^{+2} (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) \\ + 2z_e'' z_e' \theta' x^{+2} (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12} = & \lambda\lambda_\eta(\theta + \phi)^+(\theta + \phi)^{++} - \lambda_\eta(\theta + \phi)^+(1 - \eta\omega_k + \zeta\omega_j) - [\lambda\omega_k(\theta + \phi)^+ + \zeta\omega_i] \quad (\text{B.26b}) \\
& + \lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \left[1 - \lambda_0 \theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + \lambda_0 \theta' z_e'' z_e'\right] \\
& - \lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' z_e'' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) + \lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta'^2 z_e' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (-\eta \cos \theta + \zeta \sin \theta) \\
& + z_e' \sin \theta \frac{d\eta_0}{d\eta} x^+ \left[1 - \lambda_0 \theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + \lambda_0 \theta' z_e' z_e'' - z_e'' (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) + z_e' \theta' (-\eta \cos \theta + \zeta \sin \theta)\right] \\
& + \lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' z_e' x^+ \left[z_e' - \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') + \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) - z_e' z_e'' (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)\right] \\
& - x^+ \frac{d\eta_0}{d\eta} \sin \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \left[z_e' - \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') + \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta)\right. \\
& \left. - z_e' z_e'' (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)\right] + \theta' x^+ \frac{d\eta_0}{d\eta} \cos \theta (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{13} = & \lambda\lambda_\zeta(\theta + \phi)^+(\theta + \phi)^{++} - \lambda_\zeta(\theta + \phi)^+(1 - \eta\omega_k + \zeta\omega_j) + [\lambda\omega_j(\theta + \phi)^+ + \eta\omega_i] \quad (\text{B.26c}) \\
& + \lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \left[1 - \lambda_0 \theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + \lambda_0 \theta' z_e'' z_e'\right] \\
& - \lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' z_e'' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) + \lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta'^2 z_e' x^+ \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (-\eta \cos \theta + \zeta \sin \theta) \\
& + z_e' \cos \theta \frac{d\zeta_0}{d\zeta} x^+ \left[1 - \lambda_0 \theta'' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + \lambda_0 \theta' z_e' z_e'' - z_e'' (\eta \sin \theta + \zeta \cos \theta) + z_e' \theta' (-\eta \cos \theta + \zeta \sin \theta)\right] \\
& + \lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' z_e' x^+ \left[z_e' - \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') + \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta) - z_e' z_e'' (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)\right] \\
& - x^+ \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \cos \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) \left[z_e' - \lambda_0 (\theta'' z_e' + \theta' z_e'') + \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) (\eta_0 \cos \theta - \zeta_0 \sin \theta)\right. \\
& \left. - z_e' z_e'' (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)\right] - \theta' x^+ \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \sin \theta (\eta_0 \sin \theta + \zeta_0 \cos \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{22} = & 1 + \lambda_\eta^2 (\theta + \phi)^{+2} - \left[\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) - z_e' \sin \theta \frac{d\eta_0}{d\eta}\right]^2 - \left(\frac{d\eta_0}{d\eta}\right)^2 \cos^2 \theta \quad (\text{B.26d}) \\
& - \left[\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' z_e' + \frac{d\eta_0}{d\eta} \sin \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{23} = & \lambda_\eta \lambda_\zeta (\theta + \phi)^{+2} - \left[\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + z_e' \sin \theta \frac{d\eta_0}{d\eta}\right] \left[\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) + z_e' \cos \theta \frac{d\zeta_0}{d\zeta}\right] \quad (\text{B.26e}) \\
& + \frac{d\eta_0}{d\eta} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \cos \theta \sin \theta - \left[\lambda_{\eta_0} \frac{d\eta_0}{d\eta} \theta' z_e' + \frac{d\eta_0}{d\eta} \sin \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right)\right] \left[\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' z_e' + \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \cos \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{33} = & 1 + \lambda_\zeta^2 (\theta + \phi)^{+2} - \left[\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right) - z_e' \cos \theta \frac{d\zeta_0}{d\zeta}\right]^2 - \left(\frac{d\zeta_0}{d\zeta}\right)^2 \sin^2 \theta \quad (\text{B.26f}) \\
& - \left[\lambda_{\zeta_0} \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \theta' z_e' + \frac{d\zeta_0}{d\zeta} \cos \theta \left(1 - \frac{z_e'^2}{2}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

4 Exemple pour la troncature

Il s'agit dans cette section de proposer un exemple d'application de la troncature au second ordre. On considère pour cela l'exemple décrit par la figure B.3 accompagné des différentes étapes à suivre.

La première étape permet de réexprimer l'expression de départ à l'aide des termes sans dimension présentés dans le tableau III.1. Par la suite il s'agit d'identifier les termes prépondérants dans l'expression. Dans cet exemple, les deux premiers termes sont d'ordre $O(\epsilon^2)$, le troisième terme est d'ordre $O(\epsilon^3)$ et le dernier terme est d'ordre $O(\epsilon^4)$. L'ordre $O(\epsilon^2)$ étant dominant, la troncature au second ordre consiste alors à conserver l'ensemble des termes jusqu'à l'ordre $O(\epsilon^3)$. L'expression finale est alors semblable à celle de départ à l'exception du terme du quatrième ordre qui est supprimé.

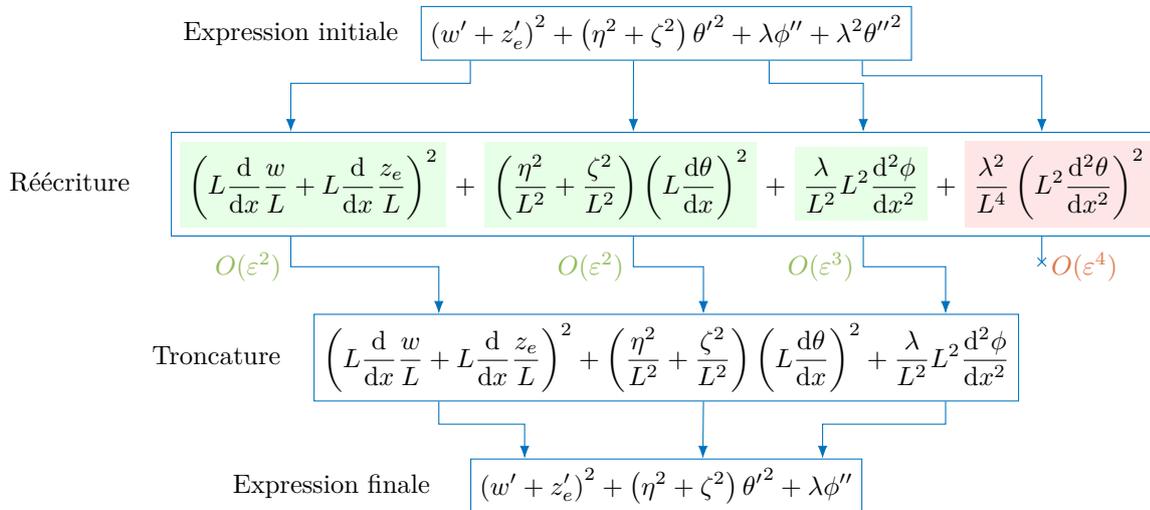


FIGURE B.3 – Illustration de la troncature au second ordre pour des termes du tenseur des déformations

Annexe C

Compléments sur la théorie de la forme normale directe (DNF)

Cette annexe propose de fournir les principales étapes décrivant la méthode de réduction de la forme normale directe développée par Vizzaccaro dans [197].

1 Cas libre non-amorti

On suppose dans la suite de cette section que le système dynamique non-linéaire s'écrit sous la forme,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

où \mathbf{G} et \mathbf{H} sont les applications définissant les termes non-linéaires quadratiques et cubiques vérifiant,

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \mathbf{G}_{rs} x_r x_s, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \mathbf{H}_{rst} x_r x_s x_t \quad (\text{C.2})$$

Le changement de variables non-linéaire au second ordre peut être défini selon l'écriture suivante,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n_r} \Psi_i r_i + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \left(\bar{\mathbf{a}}_{ij} r_i r_j + \bar{\mathbf{b}}_{ij} s_i s_j \right) + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \bar{\mathbf{c}}_{ij} r_i s_j \\ \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^{n_r} \Psi_i s_i + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} r_i r_j + \bar{\boldsymbol{\beta}}_{ij} s_i s_j \right) + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} r_i s_j \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$ et en introduisant les coordonnées normales de déplacement r_i et de vitesse s_i . On note également n_r le nombre de modes maîtres retenus pour la réduction et Ψ_i les modes linéaires associés. Au premier ordre, le changement de variables (C.3) est équivalent à une projection de Galerkin sur la base des modes linéaires. Les tenseurs $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ et $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ permettent de corriger cette projection de manière à définir l'espace réduit comme un sous-espace invariant de l'espace des phases. En pratique, il est possible de déduire leur expression des grandeurs \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$, définies à partir du changement de variables en base modale et dont les expressions sont fournies dans [184, 185]. Cette procédure est notamment réalisée dans [197] et aboutit dans le

cas non-amorti aux expressions suivantes,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{a}}_{ij} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} + \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}) \\
\bar{\mathbf{b}}_{ij} &= \frac{1}{2\omega_i\omega_j} (\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} - \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}) \\
\bar{\gamma}_{ij} &= \frac{\omega_j - \omega_i}{2\omega_j} \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} + \frac{\omega_j + \omega_i}{2\omega_j} \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij} \\
\bar{\mathbf{c}}_{ij} &= \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} = \bar{\boldsymbol{\beta}}_{ij} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

où sont introduits les tenseurs $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}$ et $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}$ définis par,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij} &= \left((\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{G}(\Psi_i, \Psi_j) \\
\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij} &= \left((-\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{G}(\Psi_i, \Psi_j)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

En l'absence de résonances internes d'ordre 2 (de la forme $\omega_p = \pm\omega_i \pm \omega_j$), le calcul de composantes des tenseurs $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}$ et $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}$ peut s'effectuer sans difficulté par résolution de systèmes linéaires en remarquant que les vecteurs $\mathbf{G}(\Psi_i, \Psi_j)$ peuvent être obtenus à l'aide de la méthode STEP décrite dans la section IV.3.2.2.

L'application du changement de variables au second ordre (C.3) conduit finalement au système dynamique réduit en coordonnées normales suivant $\forall p \in [1, n_r]$,

$$\ddot{r}_p + \omega_p^2 r_p + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \left[(A_{ijk}^p + h_{ijk}^p) r_i r_j r_k + B_{ijk}^p r_i \dot{r}_j \dot{r}_k \right] = 0 \tag{C.6}$$

où les termes A_{ijk}^p , B_{ijk}^p et h_{ijk}^p sont définis par [197],

$$\begin{aligned}
A_{ijk}^p &= 2\Psi_p^T \mathbf{G}(\Psi_i, \bar{\mathbf{a}}_{kj}) \\
B_{ijk}^p &= 2\Psi_p^T \mathbf{G}(\Psi_i, \bar{\mathbf{b}}_{kj}) \\
h_{ijk}^p &= \Psi_p^T \mathbf{H}(\Psi_i, \Psi_j, \Psi_k)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

À nouveau, chacun de ces termes peut être calculé simplement en utilisant la procédure STEP. On notera la présence de termes en vitesses dans la dynamique réduite (C.6). Ce point est notamment en accord avec les travaux de Shaw et Pierre sur la construction des variétés invariantes [168, 171]. Il est également intéressant de remarquer qu'en l'absence de résonance interne d'ordre 2, l'équation de la dynamique réduite (C.6) ne contient aucun terme quadratique. Ces termes sont en effet non-résonants dans ce cas et ne participent pas à la dynamique du système. On remarquera enfin la présence de l'ensemble des termes cubiques dans la dynamique réduite. En pratique ces termes ne participent pas tous à la dynamique. Formellement, il est possible de supprimer les termes cubiques non résonants en explicitant le changement de variables non-linéaire (C.3) jusqu'à l'ordre 3. Cette opération est notamment réalisée en coordonnées modales dans [184] et en coordonnées physiques dans [197].

Jusqu'à présent, le déroulement de la procédure de réduction a été effectué en supposant l'absence de résonance interne du second ordre. Dans le cadre des applications traitées dans ce mémoire, on s'intéresse particulièrement au cas d'une résonance interne 1 : 2 entre les modes de torsion et de flexion. En présence d'une résonance de ce type, il existe des indices i et j pour lesquels il n'est plus possible de résoudre par simple inversion les équations définissant $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}$

et $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij}$. En effet, dans ce cas les matrices $(\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}$ et $(-\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}$ peuvent devenir singulières.

Une solution proposée notamment dans [135, 197] consiste à résoudre un système augmenté de la forme,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}} \\ g_{ij}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}} & \mathbf{M}\Psi_p \\ (\mathbf{M}\Psi_p)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\Psi_i, \Psi_j) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

où $\bar{\mathbf{Z}}$ est égal à $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}$ ou $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij}$, $\bar{\mathbf{D}}$ est la matrice non-inversible de la forme $((\pm\omega_i \pm \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K})$ et p est l'indice de la pulsation propre impliquée dans la résonance interne. Dans l'espace modal, ce système force l'annulation de la composante non-inversible. Dans le domaine physique, le système équivaut à rendre la solution $\bar{\mathbf{Z}}$ orthogonale par rapport à la masse au vecteur propre Ψ_p .

D'après la théorie des formes normales, une conséquence directe de la présence d'une résonance interne du second ordre est la conservation dans les équations de la dynamique réduites (C.6) de monômes quadratiques [185]. Ces termes deviennent résonants ce qui n'était pas le cas en l'absence de résonance interne. Par ailleurs, il est clair qu'une modification des termes $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{s}_{ij}$ et $\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{d}_{ij}$ va directement impacter, d'après (C.4) et (C.7), les grandeurs A_{ijk}^p , B_{ijk}^p et h_{ijk}^p . Par conséquent, la résonance interne modifie non seulement la partie quadratique du changement de variables (C.3) mais également les termes cubiques. Dans le cadre de la résonance interne 1 : 2, la dynamique réduite selon les deux modes impliqués, notés pour simplifier 1 et 2, s'écrit

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 + \omega_1^2 r_1 + (g_{12}^1 + g_{21}^1) r_1 r_2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[(A_{ijk}^1 + h_{ijk}^1) r_i r_j r_k + B_{ijk}^1 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k \right] &= 0 \\ \ddot{r}_2 + \omega_2^2 r_2 + g_{11}^2 r_1^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[(A_{ijk}^2 + h_{ijk}^2) r_i r_j r_k + B_{ijk}^2 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

où les termes g_{12}^1 , g_{21}^1 et g_{11}^2 doivent être inclus dans la dynamique en raison de la résonance interne.

2 Cas amorti

La section précédente a permis d'établir la dynamique sur le mode non-linéaire en utilisant la transformation non-linéaire proposée par la théorie des formes normales. En pratique, on cherche dans ce mémoire à représenter la réponse forcée des systèmes réduits. Cette section propose d'explicitier les équations de la dynamique réduites en tenant compte de l'amortissement et d'un effort d'excitation extérieur. On suppose ainsi le système dynamique complet sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{F} \quad (\text{C.10})$$

avec $\mathbf{C} = \zeta_M \mathbf{M} + \zeta_K \mathbf{K}$ la matrice d'amortissement de Rayleigh. On suppose dans la suite des taux d'amortissement ξ_p faibles pour chacun des modes retenus dans la réduction. La prise en compte de l'amortissement pour le calcul des formes normales a été traitée dans [187] dans le formalisme modal et étendu dans [197] pour le calcul direct des formes normales (DNF) et on propose dans cette annexe d'en fournir les principaux résultats.

Dans le cas des systèmes amortis, la démarche est similaire à celle employée dans la section précédente et consiste à supposer le changement de variables (C.3). Sa substitution dans

les équations dynamiques (C.10) modifie de manière générale les tenseurs $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ et $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ définis dans le cas non-amorti par (C.4). Ces modifications se traduisent par la présence des taux d'amortissement ξ_i dans les expressions. Toutefois, sous l'hypothèse de faibles taux d'amortissement, un développement de Taylor peut être effectué et il est possible de montrer que les termes $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ et $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ ne sont pas modifiés au premier ordre par la prise en compte de l'amortissement. En revanche, celui-ci impacte les expressions de $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ et $\bar{\mathbf{c}}$ telles que,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}}_{ij} &= \left(\zeta_M + 3\omega_i^2 \zeta_K \right) \bar{\mathbf{b}}_{ij} - 2\zeta_K \bar{\mathbf{a}}_{ij} + \left(-\zeta_M + 2\omega_i^2 \zeta_K \right) \left(\bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}} s_{ij} + \bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{dd}} d_{ij} \right) \\ &+ \left(-\zeta_M + 2\omega_j^2 \zeta_K \right) (\omega_i / \omega_j) \left(\bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}} s_{ij} - \bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{dd}} d_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} = -\omega_i^2 \bar{\mathbf{c}}_{ij}$$

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ij} = \bar{\mathbf{c}}_{ij} - (\zeta_i + \zeta_j) \bar{\mathbf{b}}_{ij}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}} s_{ij} &= \left((\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{M} \bar{\mathbf{Z}} s_{ij} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{dd}} d_{ij} &= \left((-\omega_i + \omega_j)^2 \mathbf{M} - \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{M} \bar{\mathbf{Z}} d_{ij} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

A nouveau, il est nécessaire pour le calcul des tenseur $\bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{ss}}$ et $\bar{\mathbf{Z}}_{\mathbf{dd}}$ de dissocier les cas avec et sans résonance interne d'ordre 2. Si une telle relation existe, une procédure similaire à celle rappelée dans la section précédente peut être employée.

L'application du changement de variables non-linéaire dans le cas amorti conduit à la forme normale $\forall p \in [1, n_r]$,

$$\ddot{r}_p + \left(\zeta_M + \zeta_K \omega_p^2 \right) \dot{r}_p + \omega_p^2 r_p + \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} \left[\left(A_{ijk}^p + h_{ijk}^p \right) r_i r_j r_k + B_{ijk}^p r_i \dot{r}_j \dot{r}_k + C_{ijk}^p r_i r_j \dot{r}_k \right] = f_p \quad (\text{C.13})$$

avec,

$$\begin{aligned} C_{ijk}^p &= 2\Psi_p^T \mathbf{G}(\Psi_i, \bar{\mathbf{c}}_{kj}) \\ f_p &= \Psi_p^T F \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

L'équation (C.13) caractérise la dynamique des n_r modes choisis pour la réduction sur l'espace réduit ou variété construite à l'aide du changement de variables non-linéaire au second ordre (C.3). En pratique, il est possible d'étendre ce changement de variables à des ordres supérieurs. Touze [185] et Vizzaccaro [197] proposent respectivement d'aller jusqu'à l'ordre 3. De son côté, Opreni détaille les équations à résoudre jusqu'à l'ordre cinq [135]). Dans le cadre de ces travaux de thèse, la troncature au second ordre a été adoptée. Par ailleurs, la résonance interne 1 : 2 a été considérée. Par conséquent, la dynamique réduite sur les deux modes impliqués s'écrit,

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &+ \left(\zeta_M + \zeta_K \omega_1^2 \right) \dot{r}_1 + \omega_1^2 r_1 + \left(g_{12}^1 + g_{21}^1 \right) r_1 r_2 \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[\left(A_{ijk}^1 + h_{ijk}^1 \right) r_i r_j r_k + B_{ijk}^1 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k + C_{ijk}^1 r_i r_j \dot{r}_k \right] = f_1 \\ \ddot{r}_2 &+ \left(\zeta_M + \zeta_K \omega_2^2 \right) \dot{r}_2 + \omega_2^2 r_2 + g_{11}^2 r_1^2 \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[\left(A_{ijk}^2 + h_{ijk}^2 \right) r_i r_j r_k + B_{ijk}^2 r_i \dot{r}_j \dot{r}_k + C_{ijk}^2 r_i r_j \dot{r}_k \right] = f_2 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Liste des publications personnelles

Revues internationales avec comité de lecture

- Nicolas Di Palma, Benjamin Chouvion, Fabrice Thouverez. Parametric Study on Internal Resonances for a Simplified Nonlinear Blade Model. 2021. [hal-03353678](#)

Colloques internationaux avec actes publiés

- Nicolas Di Palma, Adrien Martin, Fabrice Thouverez, Vivien Courtier. Nonlinear Harmonic Analysis of a Blade Model Subjected to Large Geometrical Deflection and Internal Resonance. *ASME Turbo Expo 2019 : Turbomachinery Technical Conference and Exposition*, Jun 2019, Phoenix, United States. [hal-02159855](#)

Colloques nationaux avec actes publiés

- Nicolas Di Palma, Adrien Martin, Fabrice Thouverez, Benjamin Chouvion, Vivien Courtier. Étude des résonances internes d'un modèle réduit d'aubage soumis à des non-linéarités géométriques. *CSMA 2019 - Colloque national en calcul des structures, Mai 2019, Giens, France*. [hal-02098705](#)

Dynamique non-linéaire des aubages : comportement multi-harmonique avec couplage torsion-flexion

Résumé

Pour faire face à la demande croissante de réduction des émissions polluantes et d'amélioration continue des performances de vol, l'industrie aéronautique se tourne de plus en plus vers des turboréacteurs de grands diamètres en vue d'augmenter leur taux de dilution. La génération de ces nouvelles architectures implique une meilleure maîtrise des risques d'origine vibratoire. Plus particulièrement, la conception d'aubes de soufflante élancées de grande dimension en matériau composite favorise l'apparition de phénomènes non-linéaires de nature géométrique. Parmi eux, les résonances internes se manifestent suite à un couplage de modes dont les fréquences propres sont commensurables et donnent lieu à des réponses multi-modes pouvant accélérer la ruine par fatigue des roues aubagées.

Dans ce contexte, l'objectif de ce travail de thèse est d'améliorer la compréhension du phénomène de résonance interne. Il s'agit d'une part d'évaluer durant la phase de conception le risque d'apparition du phénomène et d'autre part, de comprendre l'influence des paramètres géométriques sur celui-ci. Pour répondre à cette problématique, différentes approches reposant sur des modèles de complexité croissante sont étudiées. Un modèle non-linéaire de poutre vrillée et pré-courbée avec couplage flexion-torsion est d'abord analysé. Puis, un modèle industriel représentatif d'un aubage de soufflante de futures architectures non carénées est étudié, à la fois expérimentalement et numériquement. Pour chaque cas, des études dynamiques sont réalisées, reposant sur la méthode de l'équilibrage harmonique pour la recherche de solutions périodiques couplée à une procédure de calcul de branches secondaires de solutions.

Une étude paramétrique sur le modèle poutre a permis de montrer le fort impact de la partie non-linéaire du moment de flexion ainsi que de la forme des modes propres sur l'émergence de la résonance interne. Pour ce modèle, une étude d'influence a également mis en avant la modification de la typologie du comportement dynamique lors de la variation de paramètres géométriques et dissipatifs.

L'étude du modèle industriel a également permis d'observer une résonance interne 1 : 2, d'une part expérimentalement à travers une sollicitation dynamique par pot vibrant et d'autre part numériquement via l'étude d'un modèle éléments finis, réduit à l'aide de la théorie des formes normales. En particulier, il a été montré que la méthode de réduction employée permet de très bien restituer le comportement dynamique de l'aubage avec et sans couplage par résonance interne avec des temps de calcul relativement faibles.

Finalement, les résultats obtenus sur les modèles poutre et industriel peuvent aisément être intégrés dans les bureaux d'études lors des procédures de conception des aubages des futures architectures pour évaluer le risque d'apparition des résonances internes.

Mots clés : résonance interne, couplage flexion-torsion, non-linéarité géométrique, équilibrage harmonique, aubage de soufflante, open-rotor

Nonlinear dynamics of blades: multiharmonic behavior with bending-torsion coupling

Abstract

In order to cope with growing demand for reducing exhaust gas emissions and increasing flight performance, the aeronautical industry is increasingly moving toward bigger diameter turbojet engine so as to improve dilution rate. The design of these new architectures implies a better control of the vibratory risks. More specifically, the conception of slender fan blades in composite material favors geometrical nonlinear phenomena appearance. Among them, internal resonances or modal interactions occur through modes coupling whose frequencies are commensurate and lead to multi-modes responses that can potentially fasten bladed disks wreck with fatigue.

In this context, the objective of this thesis is to improve the internal resonance phenomenon comprehension. On one hand, the aim is to evaluate in design phase the risk of internal resonance appearance. On the other hand, the purpose is to understand the influence of geometrical modifications on the internal resonance behavior. To tackle the problem, several approaches with growing difficulties models are studied. A nonlinear twisted and curved beam model with bending-torsion coupling is first analyzed. Then, an industrial application representative of a fan blade for future unducted engines architectures is investigated, both experimentally and numerically. For each case, dynamical studies are conducted, based on the harmonic balance method for periodic solution research and coupled with an algorithm to compute and track secondary branches.

A parametric analysis for the beam model has shown the strong impact of the nonlinear part of the bending moment, as well as the mode shapes, on the internal resonance appearance. For this model, a study of influence has also revealed the modification of the dynamical behavior when varying the geometry and the damping ratios.

The internal resonance has also been observed for the industrial model. It appeared first experimentally when exciting the blade with a vibrating pot. Then it came out numerically through a finite elements model, reduced by the normal form theory. More precisely, it was shown that the used reduction method allows a very good restitution of the dynamical behavior of the blade both with and without nonlinear coupling and with relatively small computational time.

Finally, the results obtained for both models can be easily used by engineers during de design phases of future architectures fan blades to evaluate the risk of internal resonances appearance.

Keywords: internal resonance, bending torsion coupling, geometric nonlinearity, harmonic balance method, fan blade, open-rotor

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. M. OUISSE
Professeur - FEMTO ST - Mécanique Appliquée (UFC) - 24 rue de l'Epitaphe
25000 BESANCON

et de

M. G. MICHON
Directeur de Recherche - ISAE SupAéro - Institut Clément Ader - Dépt. MSM
10 avenue Édouard-Belin - BP 54032 - 31055 Toulouse CEDEX

Monsieur DI PALMA Nicolas

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 17 décembre 2021

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon
Le directeur des Formations


Grégory VIAL