



# Thèse

pour obtenir le grade de

Docteur d'Aix-Marseille Université

Discipline : Sciences de l'ingénieur

Spécialité : Acoustique

---

## Création d'un système de mesures acoustiques de référence en basse fréquence et fort niveau : Le Short Kundt Tube

---

Soutenue le 23 Mars 2020 par

Marion Volpe

### Membres du jury

<b>Rapporteurs</b>	Marie-Annick Galland	ECL - Lyon
	Hervé Lissek	EPFL - Lausanne
<b>Examineurs</b>	Teresa Bravo	ITEFI - Madrid
	Cécile Guianvarc'h	LNE, CNAM - Paris
	Emmanuel Gourdon	ENTPE - Lyon
	Pierrick Lotton	LAUM - Le Mans
<b>Directeur de Thèse</b>	Pierre-Olivier Mattei	LMA - Marseille
<b>Co-directeur de thèse</b>	Renaud Côte	LMA - Marseille
<b>Invité</b>	Sergio Bellizi	LMA - Marseille



# REMERCIEMENTS

---

Je tiens tout d'abord à remercier grandement mes directeurs de thèse, Sergio Bellizzi et Renaud Côte, pour leur implication, leur patience et leur encadrement durant cette thèse. Un grand merci également à Pierre-Olivier Mattei d'avoir accepté de prendre la suite de Sergio après son départ à la retraite.

Je remercie Marie-Annick Galland et Hervé Lissek d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Merci également à Teresa Bravo, Cécile Guianvarc'h, Emmanuel Gourdon et Pierrick Lotton d'avoir accepté de faire partie du jury.

Un grand merci aux membres du LMA et plus particulièrement à l'équipe Sons pour leur accueil et le temps passé à leur côté. Un remerciement particulier à Marc Pachebat, Jacques Chatron et à l'équipe du SERM pour leur aide précieuse pendant les manips.

D'un point de vue plus personnel, un grand merci à toutes les personnes qui m'entourent :

- à mes parents pour m'avoir poussé à faire des études, en m'achetant tous les anabacs du 04, même si j'ai toujours été longue au démarrage
- à mes grands-parents d'avoir toujours veillé sur Alix et moi
- à Alix, la meilleure sœur de tout l'hexagone, ma meuf sûre qui sait mieux que moi ce qu'il faut mettre dans mes lettres de motivation
- à Kesh, le bff qu'on rêve tous d'avoir
- à Mehdi, Boris, Lucas, Vincent, Renat, Mehdi, Sabah d'être toujours là
- à Don, Sarrob, Gibgib, Étienne pour toutes ces séances de grimpe, ces maredsous et ces parties de pétanque (merci l'appli Obut)
- aux doctorants / post-doc du labo et plus particulièrement Ana, Patryk, Martin et Augustin
- la team Restanques, Pago et Nico pour ces heures au téléphone et pour être mes psy bien trop souvent
- à mes copines Laetitia, Marine et Marion
- à Axel d'être là, d'avoir toujours les bons mots et de m'avoir supporté bien plus que prévu pendant l'année 2020,

Merci à tous de faire en sorte que ma vie soit une cour de récré, toute douce et pleine de bons moments ! Vous allez me manquer et j'espère que vous viendrez dans l'Est même si il pleut.

---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Notions d'acoustique en ondes planes . . . . .	7
1.1.1 Équations des ondes . . . . .	7
1.1.2 Onde plane harmonique . . . . .	8
1.1.3 Onde plane périodique . . . . .	9
1.1.4 Coefficient de réflexion . . . . .	9
1.1.5 Impédance acoustique . . . . .	10
1.1.6 Coefficient de réflexion et impédance en paroi . . . . .	10
1.2 Dispositifs d'absorption acoustique existants . . . . .	11
1.2.1 Systèmes passifs . . . . .	11
1.2.2 Systèmes actifs . . . . .	12
1.2.3 Absorbeurs non linéaires de type NES . . . . .	13
1.3 Techniques de mesure de paramètres acoustiques linéaires . . . . .	15
1.3.1 Capteur d'impédance . . . . .	15
1.3.2 Méthodes in-situ . . . . .	16
1.3.3 Tube d'impédance . . . . .	16
1.4 Éléments de traitement du signal en non linéaire . . . . .	17
1.4.1 Excitation Sinus . . . . .	17
1.4.2 Excitation sinus balayé synchronisé . . . . .	18
1.5 Estimation de la réponse d'un système non linéaire . . . . .	20
1.5.1 Équilibrage harmonique . . . . .	21
1.5.2 Modèle de distorsion polyharmonique . . . . .	21
1.6 Caractérisation de charges acoustiques non linéaires . . . . .	23
1.6.1 Méthode par linéarisation . . . . .	23
1.6.2 Estimation par matrice de diffusion . . . . .	25
1.6.3 Modèle d'Hammerstein polynomial . . . . .	26
<b>2 Dispositif de mesures : le tube de Kundt court</b>	<b>29</b>
2.1 Dispositif expérimental . . . . .	30

---

2.1.1	Short Kundt Tube . . . . .	30
2.1.2	Chaîne d'acquisition . . . . .	30
2.1.3	Mesure du seuil de détection . . . . .	32
2.2	Modélisation linéaire du Short Kundt Tube . . . . .	33
2.2.1	Jonction en T . . . . .	34
2.2.2	Modèle linéaire du haut-parleur . . . . .	34
2.2.3	Propagation dans un guide d'ondes avec pertes . . . . .	36
2.2.4	Modèle du système complet . . . . .	37
2.2.5	Influence de la longueur du tube arrière du SKT . . . . .	39
2.2.6	Relation avec le modèle électro-acoustique de la source . . . . .	40
2.3	Charges acoustiques testées . . . . .	41
2.3.1	Membrane de haut-parleur agissant comme NES . . . . .	41
2.3.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Caractérisation par linéarisation de l'impédance</b>	<b>47</b>
3.1	Principe de la méthode [15] . . . . .	48
3.2	Étalonnage de la source . . . . .	49
3.2.1	Détermination expérimentale des paramètres de la source . . . . .	49
3.2.2	Comparaison avec le modèle de la source . . . . .	52
3.3	Applications aux absorbeurs . . . . .	53
3.3.1	Membrane de haut-parleur . . . . .	53
3.3.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Modélisation numérique de charges acoustiques non linéaires par distorsion polyharmonique</b>	<b>61</b>
4.1	Matrice de diffusion . . . . .	62
4.1.1	Définition . . . . .	62
4.1.2	Extension à l'impédance . . . . .	63
4.2	Approche théorique . . . . .	64
4.2.1	Modélisation théorique de l'absorbeur . . . . .	64
4.2.2	Méthode par équilibrage harmonique . . . . .	64
4.2.3	Modèle de distorsion polyharmonique . . . . .	66
4.2.4	Procédure numérique associée . . . . .	70
4.3	Applications aux absorbeurs . . . . .	71
4.3.1	Membrane visco-élastique circulaire . . . . .	71
4.3.2	Résonateur de Helmholtz non linéaire . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Approches expérimentales pour la caractérisation de charges acoustiques non linéaires par distorsion polyharmonique</b>	<b>81</b>
5.1	Estimation de la matrice de diffusion simplifiée . . . . .	82
5.1.1	Formulation du problème . . . . .	82

---

5.1.2	Procédure de mesure . . . . .	83
5.1.3	Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus . . . . .	86
5.1.4	Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus balayé synchronisé	86
5.2	Estimation de la relation matricielle complète . . . . .	87
5.2.1	Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type série de Fourier . . . . .	87
5.2.2	Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type sinus balayé synchronisé . . . . .	90
5.2.3	Passerelle entre les deux approches . . . . .	91
5.2.4	Étape 1 : Identification d'un modèle de Hammerstein . . . . .	93
5.2.5	Étape 2 : Modèle de Hammerstein comme modèle de distorsion polyhar- monique . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Application des méthodes expérimentales à des absorbeurs acoustiques non linéaires</b>	<b>101</b>
6.1	Estimation de la matrice de diffusion simplifiée . . . . .	102
6.1.1	Membrane de haut-parleur . . . . .	102
6.1.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	108
6.2	Estimation de la matrice de diffusion complète . . . . .	132
6.2.1	Membrane de haut-parleur . . . . .	132
6.2.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	137
6.3	Comparaison entre méthodes . . . . .	146
6.3.1	Membrane de haut-parleur . . . . .	146
6.3.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	148
	<b>Conclusion</b>	<b>153</b>
	<b>Annexes</b>	<b>155</b>
A	Caractérisation linéaire des supports des membranes nano-fibreuses . . . . .	156
A.1	Substrat . . . . .	156
A.2	Substrat + Adhésif . . . . .	156
B	Comparaison des paramètres linéaires des membranes nano-fibreuses pour une amplitude d'excitation $A = 1$ . . . . .	158
C	Caractérisation non-linéaire des supports des membranes nano-fibreuses . . . . .	159
C.1	Substrat . . . . .	159
C.2	Substrat + Adhésif . . . . .	162
D	Estimation de la matrice de diffusion complète pour $N=5$ pour la membrane de haut-parleur . . . . .	165
E	Comparaison entre $P_n(f)$ pour $n \leq 5$ et la pression seuil pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres $0.2 \text{ g/m}^2$ } . . . . .	167
	<b>Bibliographie</b>	<b>168</b>
	<b>Résumé / Abstract</b>	<b>173</b>

**Communications**

**175**

# INTRODUCTION

---

Depuis de nombreuses années, la lutte contre le bruit est un problème majeur de santé publique [1]. Les nuisances sonores sont de plus en plus présentes, que ce soit dans les milieux urbain, industriel, dans les transports . . . La recherche s’est donc naturellement tournée vers les thématiques de pollution sonore, afin de trouver des moyens efficaces pour pallier ce problème. De nombreuses technologies permettant le contrôle du bruit sont disponibles : les systèmes passifs permettent l’isolation de structures par dissipation de l’énergie ou annulation des vibrations. On compte parmi eux les matériaux absorbants (matériaux poreux, fibreux, plaques micro perforées) et les absorbeurs dynamiques (résonateurs type Helmholtz). Les systèmes actifs reposent quant à eux sur la génération d’un “anti-bruit” en opposition de phase avec le bruit à absorber.

Cependant, toutes ces solutions ne présentent pas d’efficacité majeure à basses fréquences de par leurs dimensions proportionnelles aux longueurs d’onde. Pour lutter contre les basses fréquences, des recherches s’orientent vers les systèmes sub-longueur d’onde à base de résonateurs. Le Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique de Marseille mène depuis une dizaine d’années des recherches sur la lutte contre le bruit basses fréquences et fort niveau. Basés sur les travaux de Vakakis [2, 3], de nouveaux absorbeurs vibro-acoustiques non linéaires de type Nonlinear Energy Sink (NES), efficaces à basses fréquences, ont vu le jour. On compte parmi eux une membrane visco-élastique circulaire en latex [4], une membrane de haut-parleur agissant comme NES [5], un NES hybride passif-actif [6], des absorbeurs de vibrations de plaques [7]. Le Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de Lyon a également travaillé sur cette problématique, en développant un résonateur de Helmholtz non linéaire [8, 9] fonctionnant à basses fréquences. Pour finir et sans être exhaustif citons aussi les membranes nanofibreuses [10] (fruit d’une collaboration avec Tomáš Ulrich de l’Institute for Nanomaterials, Advanced Technologies and Innovations de Liberec) qui ont été développées dans ce but mais avec un mécanisme physique basé à priori sur la dissipation visqueuse.

Ces travaux de thèse sont consacrés au développement de techniques d’identification pour la caractérisation de ces absorbeurs de bruit non linéaires et plus généralement des charges acoustiques non linéaires, à basses fréquences et pour de forts niveaux d’excitation. L’objectif est de mettre en évidence les caractéristiques acoustiques de ces dispositifs, en vue d’exploiter et d’expliquer leurs capacités d’absorption. De nombreuses technologies sont à ce jour disponibles comme le tube d’impédance [11, 12], le capteur d’impédance [13, 14] . . . Dans le cas de notre étude à basses fréquences et à fort niveau, aucune de ces méthodes n’est optimale, notamment dû aux fréquences traitées et aux dimensions de nos absorbeurs. Pour pallier à cela, il a été développé au LMA un nouveau banc de mesure appelé Short Kundt Tube (SKT) [15], permettant d’atteindre des basses fréquences, des forts niveaux et dont la taille est adaptée aux absorbeurs étudiés. Ce dispositif est une configuration particulière de capteur d’impédance : il est constitué d’une source acoustique connectée à un tube, à l’extrémité duquel est fixé l’ab-

sorbeur à caractériser. L'utilisation de ce banc de mesure repose sur une unique mesure de pression à l'intérieur du système, proche de l'absorbeur, et sur un étalonnage préalable de la source à partir de terminaisons connues analytiquement.

Une fois nos mesures de pression obtenues, différentes méthodes peuvent être utilisées pour obtenir la caractérisation acoustique d'absorbeurs non linéaires. Une première méthode de caractérisation par linéarisation [15] est utilisée pour estimer des paramètres acoustiques dits apparents. On parle alors d'impédance apparente et de coefficient de réflexion apparent, dépendant du niveau d'excitation. Cette méthode permet d'obtenir une première idée du comportement non linéaire de nos charges acoustiques, notamment en mettant en évidence des effets de mollissement, de raidissement ou de dissipation d'énergie.

Néanmoins, les non-linéarités présentes dans le système ne sont pas exploitées avec cette première méthode. La notion de coefficient de réflexion apparent est alors étendue et formulée en terme de matrice de diffusion afin de quantifier la génération d'harmoniques due à la présence de non-linéarités dans le système. Cette matrice de diffusion relie les amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde incidente aux amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde réfléchie [16]. À partir d'une modélisation de la charge acoustique par une équation différentielle non linéaire reliant pression acoustique et débit volumique, la relation matricielle est mise en évidence en combinant une méthode d'équilibrage harmonique et une approche par distorsion polyharmonique [17].

La connaissance de ce nouveau modèle non linéaire permet d'obtenir les composantes de la matrice de diffusion à partir de données expérimentales. Une première approche donne un accès direct à une matrice de diffusion simplifiée, constituée uniquement de termes diagonaux et de la première colonne. Elle est basée sur des simplifications permettant d'obtenir ces coefficients sans utiliser d'identification non linéaire. Une seconde approche est quant à elle basée sur l'identification d'un modèle non linéaire basé sur une estimation par modèle d'Hammerstein, permettant d'obtenir tous les coefficients de cette matrice de diffusion.

Il est à noter que ces méthodes sont appliquées à différents absorbeurs non linéaires soumis à différentes excitations. Dans le cas de cette étude, nous nous concentrerons sur une excitation de type sinus balayé synchronisé, permettant d'obtenir en une unique acquisition des données sur une large plage fréquentielle. Une fois mises en place et appliquées à divers absorbeurs non linéaires, toutes ces approches sont comparées de façon à choisir le mieux adaptées aux besoins de caractérisation.

Le manuscrit est organisé comme suit : après une présentation des principales notions d'acoustiques utilisées dans ces travaux, le premier chapitre fait état de quelques dispositifs d'absorption existants et de techniques de mesures permettant de les caractériser dans le domaine linéaire. Le domaine non linéaire est ensuite abordé, en développant quelques méthodes d'estimation de réponses non linéaires ainsi que la caractérisation de charges acoustiques non linéaires. Le second chapitre présente le dispositif de mesure Sort Kundt Tube, de sa modélisation numérique à sa mise en place expérimentale. Les différentes charges acoustiques non linéaires étudiées y sont présentées. Dans le troisième chapitre, la première méthode de caractérisation par linéarisation est présentée et appliquée aux absorbeurs. Le chapitre quatre fait part de la modélisation numérique de charges acoustiques par distorsion polyharmonique. Une fois le modèle établi, la matrice de diffusion en ondes de pression est estimée numériquement pour différents absorbeurs non linéaires. Le cinquième chapitre présente les méthodes expérimentales pour l'estimation des matrices de diffusion simplifiée et complète, par modèle de distorsion polyharmonique. Ces différentes méthodes sont par la suite appliquées dans le chapitre six pour différents absorbeurs non linéaires. Elles y sont confrontées et les différents dispositifs comparés. Enfin, un bilan de ces travaux est dressé et les perspectives

---

développées.



# 1

Le premier chapitre de ce manuscrit pose le contexte scientifique dans lequel évolue cette thèse. Dans un premier temps, une présentation des principales notions d'acoustiques utilisées dans ces travaux, tiré des ouvrages [18, 19], est réalisé, afin d'explicitier les différentes grandeurs évoquées tout au long de ces travaux. Une revue de quelques dispositifs existants pour le contrôle du bruit ainsi que les technologies linéaires disponibles pour caractériser leur efficacité acoustique sont présentés. Pour finir, il est exposé des modèles permettant d'estimer la réponse d'un système non linéaire et donc de caractériser les absorbeurs de bruit non linéaires dont nous disposons.

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Notions d'acoustique en ondes planes</b>	<b>7</b>
1.1.1	Équations des ondes	7
1.1.2	Onde plane harmonique	8
1.1.3	Onde plane périodique	9
1.1.4	Coefficient de réflexion	9
1.1.5	Impédance acoustique	10
1.1.6	Coefficient de réflexion et impédance en paroi	10
<b>1.2</b>	<b>Dispositifs d'absorption acoustique existants</b>	<b>11</b>
1.2.1	Systèmes passifs	11
1.2.2	Systèmes actifs	12
1.2.3	Absorbeurs non linéaires de type NES	13
<b>1.3</b>	<b>Techniques de mesure de paramètres acoustiques linéaires</b>	<b>15</b>
1.3.1	Capteur d'impédance	15
1.3.2	Méthodes in-situ	16
1.3.3	Tube d'impédance	16
<b>1.4</b>	<b>Éléments de traitement du signal en non linéaire</b>	<b>17</b>
1.4.1	Excitation Sinus	17
1.4.2	Excitation sinus balayé synchronisé	18
<b>1.5</b>	<b>Estimation de la réponse d'un système non linéaire</b>	<b>20</b>
1.5.1	Équilibrage harmonique	21
1.5.2	Modèle de distorsion polyharmonique	21
<b>1.6</b>	<b>Caractérisation de charges acoustiques non linéaires</b>	<b>23</b>
1.6.1	Méthode par linéarisation	23
1.6.2	Estimation par matrice de diffusion	25
1.6.3	Modèle d'Hammerstein polynomial	26

---



## 1.1. Notions d'acoustique en ondes planes

### 1.1.1. Équations des ondes

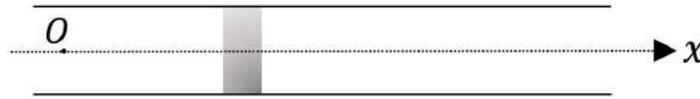
On se limite à la propagation d'une onde sonore dans un guide d'ondes, sous les hypothèses d'ondes planes, dans un fluide au repos non visqueux et sans conductivité thermique. Pour rappel, en ondes planes la pression est constante sur tout plan perpendiculaire  $Ox$  comme représenté en Figure 1.1. La pression acoustique  $p(t, x)$  et la vitesse  $v(t, x)$  satisfont les équations de conservation d'Euler. En l'absence de source, l'équation de conservation de la masse est donnée au premier ordre par

$$\rho \frac{\partial v(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

et l'équation de conservation de la quantité de mouvement est donnée au premier ordre par

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} + \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

$t$  désigne le temps,  $x$  la position,  $\rho$  la densité du fluide et  $c$  la célérité du son dans le milieu (ici l'air).



**Figure 1.1** – Tranche de fluide au repos dans un guide d'ondes

Les équations (1.1) et (1.2) permettent d'écrire l'équation des ondes dans le domaine temporel comme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (1.3)$$

À l'aide du changement de variables  $(t, x) \rightarrow (u_1 = t - \frac{x}{c}, u_2 = t + \frac{x}{c})$ , on peut montrer que la solution générale de (1.3) en ondes planes s'exprime sous la forme

$$p(t, x) = f^+(t - \frac{x}{c}) + f^-(t + \frac{x}{c}) \quad (1.4)$$

où  $f^+$  et  $f^-$  sont deux fonctions quelconques deux fois dérivables.  $f^+$  représente une onde se déplaçant dans le sens des  $x$  positifs (onde dite progressive ou incidente) et  $f^-$  une onde se déplaçant dans le sens des  $x$  négatifs (onde dite régressive ou réfléchie).

Dans le cas général, le champ de pression s'exprime comme la somme d'une onde de pression progressive  $p^+(t, x)$  et d'une onde de pression régressive  $p^-(t, x)$  comme

$$p(t, x) = p^+(t, x) + p^-(t, x). \quad (1.5)$$

L'équation de conservation de la masse (1.1) et l'expression de la pression (1.4) permettent d'exprimer la vitesse acoustique sous la forme

$$v(t, x) = \frac{1}{\rho c} \left( f^+(t - \frac{x}{c}) - f^-(t + \frac{x}{c}) \right) = \frac{1}{\rho c} (p^+(t, x) - p^-(t, x)). \quad (1.6)$$

La connaissance de la vitesse acoustique permet alors de calculer le débit acoustique  $q(t, x)$  défini comme

$$q(t, x) = Sv(t, x) \quad (1.7)$$

avec  $S$  la section du guide d'ondes.

### 1.1.2. Onde plane harmonique

Nous allons à présent nous focaliser sur la notion d'ondes planes harmoniques s'exprimant pour une onde incidente comme

$$p^+(t, x) = p^+ \cos(\omega t - kx + \phi^+) \quad (1.8)$$

et pour une onde réfléchie comme

$$p^-(t, x) = p^- \cos(\omega t + kx + \phi^-). \quad (1.9)$$

$p^+$  et  $p^-$  sont les termes d'amplitudes,  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation de l'onde,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  le nombre d'onde (nombre de longueur d'onde dans  $2\pi$  mètres),  $\lambda = \frac{c}{f}$  la longueur d'onde et  $\phi^+$  et  $\phi^-$  les phases à l'origine.

Pour une fréquence  $f$  donnée, la solution temporelle d'une onde plane harmonique peut s'écrire à partir de (1.5) comme

$$p(t, x) = p^+ \cos(2\pi ft - kx + \phi^+) + p^- \cos(2\pi ft + kx + \phi^-). \quad (1.10)$$

En régime harmonique, une partie imaginaire est injectée à la solution, transformant l'équation (1.10) en

$$p(t, x) = \text{Re} \left\{ p^+ e^{j\phi^+} e^{j(2\pi ft - kx)} + p^- e^{j\phi^-} e^{j(2\pi ft + kx)} \right\} \quad (1.11)$$

En pratique, la pression acoustique s'exprime expérimentalement par une grandeur réelle mesurable, définie comme la partie réelle de  $p(t, x)$ .

On choisit ici la convention  $e^{-jkx}$  pour les ondes incidentes et  $e^{jkx}$  pour les ondes réfléchies.

Dans le domaine fréquentiel, la pression acoustique s'écrit comme la somme des ondes de pression incidente et réfléchie

$$P(f, x) = P^+(f, x) + P^-(f, x). \quad (1.12)$$

La dépendance au temps  $t$  se traduisant par une constante, les ondes incidente et réfléchie s'écrivent alors respectivement

$$P^+(f, x) = p^+ e^{j\phi^+} e^{-jkx} \quad (1.13)$$

et

$$P^-(f, x) = p^- e^{j\phi^-} e^{jkx}. \quad (1.14)$$

Cette équation peut également être obtenue en calculant (1.4) dans le domaine fréquentiel.  $P^+(f, x)$  désigne alors la transformée de Fourier de  $f^+(t - \frac{x}{c})$  calculée avec le changement de variable  $t' = t - \frac{x}{c}$  et  $P^-(f, x)$  la transformée de Fourier de  $f^-(t + \frac{x}{c})$  calculée avec le changement de variable  $t' = t + \frac{x}{c}$ .

---

### 1.1.3. Onde plane périodique

On considère ici la pression acoustique comme une onde périodique de fréquence  $f$ , constituée d'une fondamentale et de  $N$  harmoniques. Elle peut être décomposée en une série de Fourier de  $N$  termes comme

$$p(t, x) = \sum_{n=1}^N P_n(f, x) e^{jn2\pi ft}. \quad (1.15)$$

Chaque composante harmonique  $P_n(f, x)$  du champ de pression est alors représentée d'après (1.12) par

$$P_n(f, x) = P_n^+(f, x) + P_n^-(f, x) \quad (1.16)$$

où  $P_n^+(f, x)$  (respectivement  $P_n^-(f, x)$ ) désigne le coefficient de Fourier de l'onde incidente (respectivement réfléchie) associée.

De la même manière, la vitesse acoustique (1.6) peut également être exprimée dans le domaine de Fourier par

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^N V_n(f, x) e^{jn2\pi ft} \quad (1.17)$$

pour une harmonique  $n$  et une fréquence  $f$  comme

$$V_n(f, x) = \frac{1}{\rho c} (P_n^+(f, x) - P_n^-(f, x)) \quad (1.18)$$

### 1.1.4. Coefficient de réflexion

Lorsqu'une onde acoustique entre en contact avec une surface, une réflexion a lieu, transformant l'onde aller en onde retour. Cette transformation peut se modéliser à l'aide d'une fonction appelée fonction de réflexion  $f_r(t, x)$  [19] (p158). Dans le cas d'une réflexion à l'origine, la fonction de réflexion est définie par

$$f_r(t, x) * f^+(t) * \delta(t - \frac{x}{c}) = f^-(t) * \delta(t + \frac{x}{c}) \quad (1.19)$$

où  $\delta(t + \frac{x}{c})$  désigne une impulsion d'onde aller et  $\delta(t - \frac{x}{c})$  une impulsion d'onde retour, comme définies dans (1.4), toutes deux indépendantes de  $x$ .

Dans le domaine fréquentiel, la réflexion d'une onde peut être caractérisée par le coefficient de réflexion  $R(f, x)$ . Il est défini en tout point  $x$  du guide d'ondes comme le rapport entre une onde de pression réfléchie  $P^-(f, x)$  (Eq. (1.13)) et une onde de pression incidente  $P^+(f, x)$  (Eq. (1.14)) comme

$$R(f, x) = \frac{P^-(f, x)}{P^+(f, x)} e^{2jkx}. \quad (1.20)$$

Ce coefficient  $R(f, x)$  peut également être obtenu par transformée de Fourier de la fonction de réflexion  $f_r(t, x)$ .

La composante harmonique  $P_n(f, x)$  du champ de pression (1.16) peut se réécrire en fonction du coefficient de réflexion (1.20) sous la forme

$$P_n(f, x) = P_n^+(f, x) (e^{jn2\pi ft} + R_n(f, 0) e^{-jn2\pi ft}) \quad (1.21)$$

où  $R_n(f, 0)$  désigne le coefficient de réflexion au point d'abscisse  $x = 0$ .

### 1.1.5. Impédance acoustique

L'impédance acoustique permet de décrire l'absorption de l'énergie reçue par une surface. On parle dans la littérature de trois types d'impédances : l'impédance acoustique, l'impédance acoustique caractéristique et l'impédance acoustique spécifique. Dans le domaine fréquentiel, l'impédance acoustique est donnée en tout point  $x$  du guide d'onde par le rapport entre la pression acoustique  $P(f, x)$  et la vitesse acoustique  $V(f, x)$  comme

$$Z_v(f, x) = \frac{P(f, x)}{V(f, x)}. \quad (1.22)$$

Une autre manière d'estimer cette impédance acoustique est possible à partir du débit acoustique, comme

$$Z(f) = \frac{P(f)}{Q(f)}. \quad (1.23)$$

Dans le cas des ondes planes, l'impédance acoustique caractéristique informe sur la nature du milieu dans lequel l'onde acoustique se propage. Elle s'exprime par le produit entre la densité du fluide  $\rho$  et la célérité de l'onde dans ce milieu  $c$  comme

$$Z_c = \rho c. \quad (1.24)$$

Cette impédance peut également être exprimée en fonction du coefficient de réflexion par

$$R(f, x) = \frac{Z_v(f, x) - Z_c}{Z_v(f, x) + Z_c} \quad (1.25)$$

L'impédance acoustique spécifique est quant à elle une grandeur adimensionnée, définie comme le rapport de l'impédance acoustique  $z(t, x)$  par l'impédance caractéristique du milieu  $Z_c$  comme

$$z_{spe}(t, x) = \frac{p(t, x)}{Z_c v(t, x)}. \quad (1.26)$$

### 1.1.6. Coefficient de réflexion et impédance en paroi

On considère dans un guide d'ondes deux points d'abscisse  $x_1$  et  $x_2$  représentés en Figure 1.2. La pression et la vitesse sont exprimées en  $x_1$  et  $x_2$  par

$$P(f, x_{1,2}) = P(f, x_{1,2})e^{-jkx_{1,2}} + P(f, x_{1,2})e^{jkx_{1,2}} \quad (1.27)$$

$$V(f, x_{1,2}) = \frac{1}{\rho c} \left( P(f, x_{1,2})e^{-jkx_{1,2}} - P(f, x_{1,2})e^{jkx_{1,2}} \right) \quad (1.28)$$

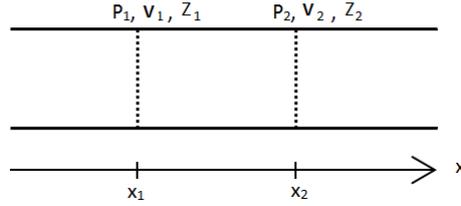
où  $x_{1,2}$  désigne  $x_1$  ou  $x_2$ .

Sous la forme matricielle et en développant les exponentielles, on obtient la matrice de transfert suivante

$$\begin{pmatrix} P(f, x_1) \\ V(f, x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k(x_2 - x_1)) & Z_c j \sin(k(x_2 - x_1)) \\ Z_c^{-1} j \sin(k(x_2 - x_1)) & \cos(k(x_2 - x_1)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(f, x_2) \\ V(f, x_2) \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

qui relie la pression et la vitesse en  $x_2$  à la pression et la vitesse en  $x_1$ .

---



**Figure 1.2** – Illustration de l'impédance ramenée

Partant de l'impédance grâce à l'équation (1.22), il est possible d'obtenir la formule de l'impédance ramenée, permettant d'obtenir l'impédance en n'importe quel point du tube si on la connaît en un point comme

$$Z(f, x_1) = \frac{Z_c}{S} \frac{j \tan(k(x_2 - x_1)) + \frac{SZ(f, x_2)}{Z_c}}{1 + j \frac{SZ(f, x_2)}{Z_c} \tan(k(x_2 - x_1))}. \quad (1.30)$$

## 1.2. Dispositifs d'absorption acoustique existants

### 1.2.1. Systèmes passifs

Les systèmes passifs permettent un contrôle du bruit sans apport d'énergie extérieure. Ils sont souvent faciles à mettre en œuvre et très utilisés à l'heure actuelle. On en distingue différents types :

**Les matériaux absorbants** Les matériaux poreux [20] (Figure 1.3.(a)), fibreux [21] (Figure 1.3.(b)) ou les plaques micro perforées [22] (Figure 1.3.(c)) sont des systèmes d'absorption régulièrement utilisés en acoustique du bâtiment. Lorsqu'une onde sonore pénètre dans le matériau des phénomènes de dissipation visco-thermiques (frottement de l'air, aux échanges de chaleur entre l'air et le matériau ...) vont alors se produire, atténuant l'onde incidente. Ces matériaux sont efficaces lorsqu'ils sont placés à des maxima de vitesse, ce qui amène à utiliser des épaisseurs égales au moins au quart de la longueur d'onde lorsque ces absorbeurs sont placés sur des parois rigides [23]. Ils sont donc à utiliser dans le cas de fréquences médiums ou aiguës. À basses fréquences, la longueur d'onde peut atteindre plusieurs mètres et donc l'épaisseur de matériau à utiliser serait trop importante (ex : à 100 Hz,  $e = \lambda/4 = 85$  cm).



**Figure 1.3** – Exemple de (a) matériau poreux, (b) fibreux et de (c) plaques micro-perforées.

**Les absorbeurs dynamiques** Les absorbeurs dynamiques linéaires de type résonateurs de Helmholtz (Figure 1.4) sont efficaces à basses et moyennes fréquences ( $< 1000$  Hz). Ils sont constitués d'une cavité fermée connectée à l'extérieur par un petit tube (également appelé col), le tout jouant le rôle d'un système masse-ressort. Ces dispositifs permettent d'absorber les vibrations autour d'une fréquence de résonance précise, ce qui restreint son champ d'action.



Figure 1.4 – Résonateur de Helmholtz

### 1.2.2. Systèmes actifs

À la différence des systèmes passifs, un système actif [24] apporte de l'énergie à un système. Le principe (Figure 1.5) est basé sur la génération d'un "anti-bruit", c'est-à-dire un champ acoustique en opposition de phase avec le bruit primaire à absorber. Cet anti-bruit va permettre d'atténuer le bruit présent dans le milieu à contrôler. Ce dispositif est efficace à basses fréquences mais est difficile à mettre en place lorsque plusieurs modes de résonance sont présents (ex : acoustique des salles). Le système actif le plus connu est le casque à réduction de bruit [25] car le contrôle actif est réalisé localement.

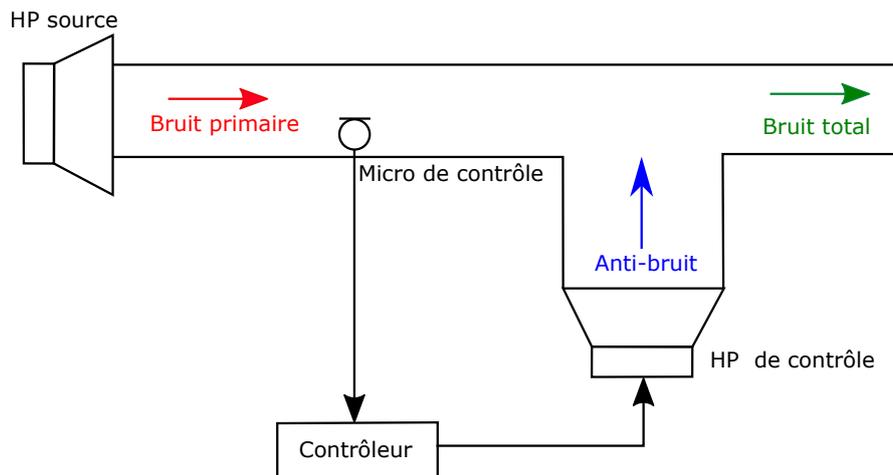
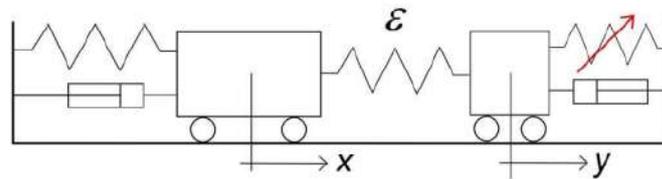


Figure 1.5 – Schéma de principe d'un système actif

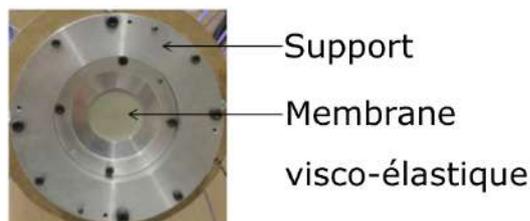
### 1.2.3. Absorbeurs non linéaires de type NES

Afin d'absorber une onde sonore sur une large bande de basses fréquences, des absorbeurs non linéaires de type “Nonlinear Energy Sink” (que nous désignerons dans la suite par l'acronyme NES) ont été développés. Ils vont permettre la réduction d'un bruit grâce à des phénomènes non linéaires et peuvent être vu comme l'extension d'un résonateur de Helmholtz au domaine non linéaire. Un des avantages du NES est sa capacité à s'auto-adapter à la fréquence de résonance du système à contrôler. Ces dispositifs purement non linéaires sont constitués d'une masse et d'un ressort de raideur non linéaire et permettent d'extraire l'énergie d'un système. Ils s'appuient sur le principe de pompage énergétique ou de transfert d'énergie irréversible [2, 3] : on considère un système primaire linéaire assimilable à un système masse-ressort couplé par un ressort linéaire de raideur  $\varepsilon$  à un système secondaire constitué d'une masse et d'un ressort non linéaire (Figure 1.6). Lorsque le système primaire est soumis à une excitation, un transfert d'énergie va se produire de la structure primaire vers la structure non linéaire, cette dernière dissipant alors l'énergie reçue.



**Figure 1.6** – Système linéaire couplé à un oscillateur non linéaire [4]

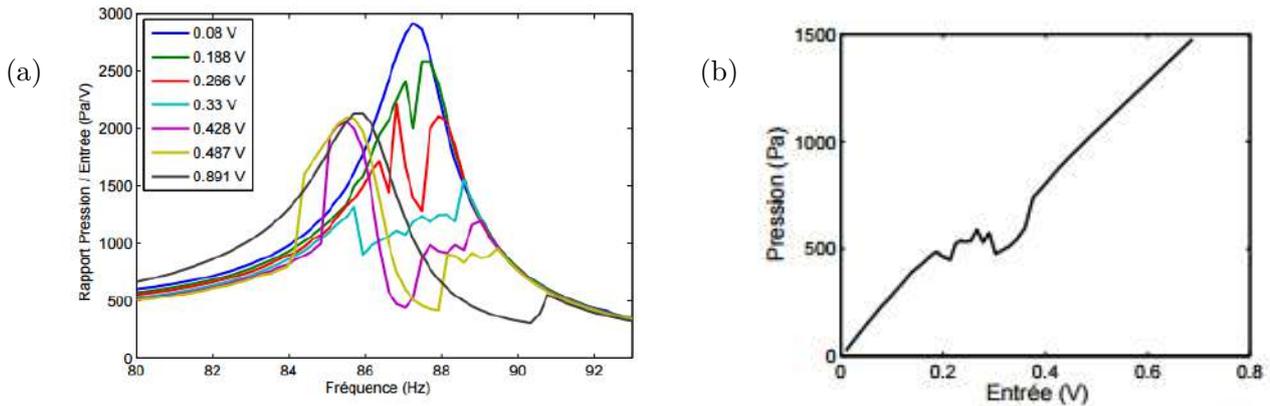
Un des premiers NES développés au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique est la membrane visco-élastique circulaire [4]. Comme visible sur la Figure 1.7, il s'agit d'une fine membrane de latex encastrée entre deux disques servant de support et permettant de bonnes conditions d'encastrement. Cette membrane est caractérisée par une non-linéarité géométrique de type raideur cubique lorsqu'elle est déformée transversalement et le matériau utilisé est supposé linéaire.



**Figure 1.7** – Membrane visco-élastique circulaire

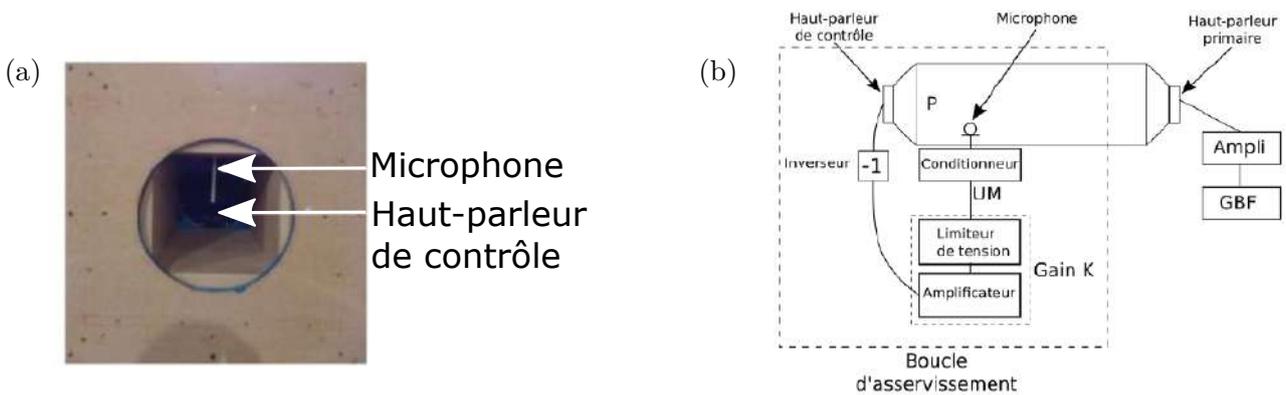
Les phénomènes d'absorption par une membrane visco-élastique circulaire sont visibles en Figure 1.8.(a) grâce à la représentation des réponses en fréquence de ce système en fonction du niveau d'excitation. Pour des niveaux d'excitation faibles ( $U_{excitation} = 0,08$  V), la réponse en fréquence de la membrane visco-élastique présente un pic de résonance caractéristique. Ceci traduit l'absence de pompage et confirme que l'énergie reste localisée dans le système linéaire. Pour des niveaux d'excitation dépassant la valeur seuil de  $U_1 = 0,188$  V, l'écrêtage des pics de résonance informe sur la présence d'absorption, de dissipation ou de rayonnement de l'énergie. Au delà d'un second seuil d'une valeur de  $U_2 = 0,428$  V, le système retrouve un comportement avec un pic résonant. Ce phénomène est dû à la saturation de l'absorption au delà d'une valeur seuil.

Ces phénomènes sont confirmés grâce à l'estimation de la ligne de crête des maxima de pression en fonction de la tension d'entrée appliquée au système visible en Figure 1.8.(b). Pour des valeurs de tension d'entrée inférieures à la première valeur seuil  $U_1$  la courbe présente une caractéristique croissante, signifiant que l'absorbeur ne réagit pas. Entre  $U_1$  et  $U_2$ , un plateau de pompage est visible, directement lié à l'écrêtage des pics de résonance, ce qui traduit l'action du NES sur la diminution du niveau sonore. Au delà de ce plateau de pompage, la caractéristique de l'absorbeur redevient classique.



**Figure 1.8** – (a) Réponses fréquentielles en fonction des niveaux d'entrée et (b) Ligne de crête des maxima de pression obtenues expérimentalement [4]

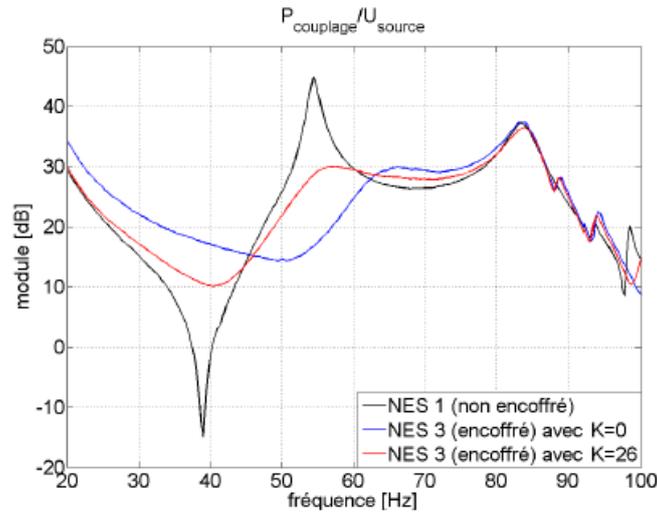
Afin de limiter le rayonnement présent à l'arrière de cette membrane et permettre son utilisation dans un milieu clos, un absorbeur hybride passif-actif a été développé [6]. Cet absorbeur appelé NES hybride est constitué d'une membrane visco-élastique circulaire équipée d'un encoffrement arrière (Figure 1.9).



**Figure 1.9** – (a) NES hybride. (b) Schéma de principe du NES hybride [6]

Un microphone de mesure est placé dans l'encoiffement, relié à un haut-parleur de contrôle via une boucle de feedback. Cette boucle d'asservissement en pression permet de réduire la pression acoustique présente dans l'encoiffement (due au rayonnement de la face arrière de la membrane), le terme de raideur ajouté ainsi que la taille du volume arrière (nécessaire lors d'applications industrielles). L'impact de l'encoiffement et de la boucle d'asservissement caractérisée par le gain  $K$  sur le système est représenté sur la Figure 1.10.(b) : l'encoiffement permet une absorption des pics de résonance du système, la boucle d'asservissement quant à

elle permet une translation de la fréquence de résonance.



**Figure 1.10** – Comparaison des fonctions de transfert entre le NES non encoffré et encoffré pour différentes valeurs du gain  $K$  [6]

Les membranes utilisées pour réaliser ces NES sont peu coûteuses, faciles à construire et fiables, mais leurs caractéristiques mécaniques résultent de leur conception initiale (forme, épaisseur et matériau utilisé). Elles ne peuvent pas être ajustées lors de l’opération, ce qui peut être une limitation pour l’optimisation de leurs performances.

## 1.3. Techniques de mesure de paramètres acoustiques linéaires

Pour pouvoir utiliser un absorbeur de bruit de façon optimale, il est nécessaire de connaître son comportement et ses caractéristiques acoustiques. L’estimation de l’impédance et du coefficient de réflexion permet alors de quantifier son efficacité et sa capacité d’absorption. Ces estimations peuvent être réalisées par méthode utilisant un capteur ou par méthodes indirectes permettant, grâce à des mesures et calculs, d’estimer ces paramètres acoustiques.

### 1.3.1. Capteur d’impédance

Un capteur d’impédance [13, 14] a été développé par la LAUM et le CTTM. Il s’agit d’un banc de mesure permettant de déterminer l’impédance d’entrée d’un système connecté au capteur. Le capteur est représenté en Figure 1.11. Un piston rigide oscille de façon à produire un débit connu dans le capteur, en s’assurant qu’aucune résonance mécanique ne soit présente dans la bande de fréquence d’étude. La face arrière du piston est positionnée dans une cavité fermée et la terminaison à étudier est placée du côté de la face avant du piston. Un microphone est présent dans chaque cavité afin d’y mesurer les pressions. L’impédance mesurée par le capteur sera alors définie par

$$Z_{\text{capteur}} = -\frac{1}{jC\omega} \frac{P_{\text{avant}}}{P_{\text{arrière}}} \quad (1.31)$$

avec  $C = V/\rho c^2$  la compliance acoustique de la cavité arrière de volume  $V$ ,  $\rho$  la masse volumique

de l'air et  $c$  la célérité du son.

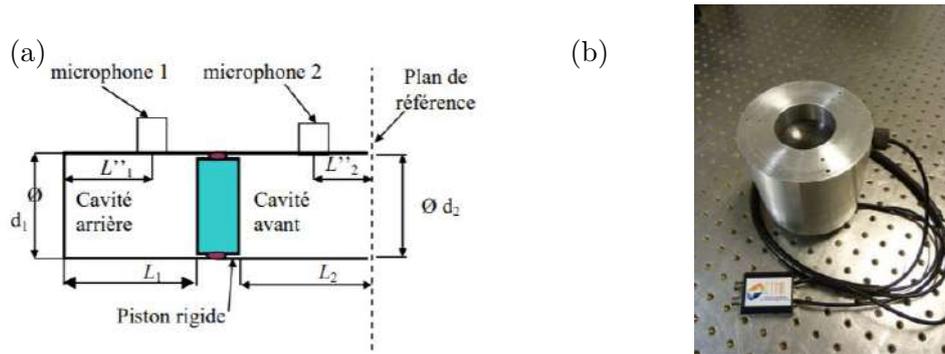


Figure 1.11 – (a) Schéma de principe et (b) capteur d'impédance [14]

### 1.3.2. Méthodes in-situ

Il est décrit dans [26] un récapitulatif des différentes méthodes de mesure in situ de l'impédance et de l'absorption. Elles permettent de réaliser des mesures directement dans le milieu à étudier, sans utiliser d'environnement d'étude spécifique (ex : chambre réverbérante). Il existe trois types de méthodes de mesure :

- les méthodes de séparation temporelle, qui consistent à séparer les champs sonores incidents et réfléchis grâce à différentes mesures de pression.
- les méthodes de champ acoustique qui reposent sur la formulation mathématique du champ sonore. L'impédance et l'absorption seront calculées grâce à des mesures de pression et/ou de vitesse proche de l'échantillon à caractériser.
- Les méthodes alternatives reposant sur l'intensité sonore, les ultrasons, ...

Les méthodes in-situ sont répandues car elles sont simples à mettre en place et nécessitent généralement au maximum deux mesures de pression. Cependant elles présentent un caractère intrusif et la présence de microphone peut engendrer la perturbation du champ acoustique.

### 1.3.3. Tube d'impédance

La méthode du tube à impédance a été développée par Chung et Blaser dans [11, 12], puis normalisée par la norme ISO 10534-2. Le montage expérimental est présenté en Figure 1.12 : un haut-parleur alimenté par un générateur de fréquence est placé à l'extrémité d'un tube et génère une onde acoustique incidente. Celle-ci se propage dans le tube au bout duquel est placé un échantillon à caractériser, réfléchissant l'onde incidente en une onde réfléchie. Cette onde réfléchie présente une amplitude plus faible, dû à l'absorption d'une partie de l'onde incidente par l'échantillon. Ce phénomène est quantifié grâce à une méthode de mesure à deux microphones placés dans le tube et proche de l'échantillon, mesurant les pressions  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  en deux points du tube. Ces pressions peuvent être exprimées dans le domaine fréquentiel en calculant leurs transformées de Fourier, permettant d'obtenir  $P_1(f)$  et  $P_2(f)$ . Il est alors possible de déterminer la fonction de transfert entre les deux microphones  $H_{12}(f)$  comme le rapport des pressions fréquentielles (ou le rapport entre le spectre transversal  $S_{12}(f) = P_2(f)\overline{P_1}(f)$  et l'autospectre  $S_{11}(f) = P_1(f)\overline{P_1}(f)$ ) comme

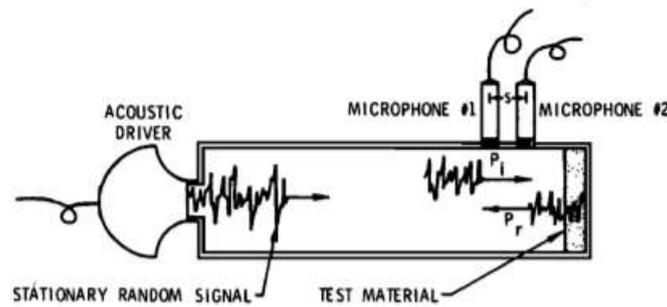
$$H_{12}(f) = \frac{P_2(f)}{P_1(f)} = \frac{S_{12}(f)}{S_{11}(f)}. \quad (1.32)$$

Le coefficient de réflexion du système pourra alors être obtenu à partir de l'estimation de la fonction de transfert  $H_{12}(f)$  par

$$R(f) = \frac{H_{12}(f) - H_{\text{Im}}(f)}{H_{\text{Re}}(f) - H_{12}(f)} \quad (1.33)$$

avec  $H_{\text{Re}}(f) = \frac{\text{Re}(P_2(f))}{\text{Re}(P_1(f))}$  et  $H_{\text{Im}}(f) = \frac{\text{Im}(P_2(f))}{\text{Im}(P_1(f))}$ .

À noter qu'un étalonnage entre les deux microphones est à réaliser au préalable, afin de supprimer leurs différences de phase et de sensibilité.



**Figure 1.12** – Montage expérimental du tube à impédance par Chung et Blaser dans [11]

Les dimensions du tuyau définissent la plage en fréquence d'utilisation. Dans le cas d'une étude à basses fréquences et fort niveau, les dimensions d'un tube à impédance sont très importantes : pour un système à caractériser présentant une fréquence de résonance de 30 Hz, un tube d'impédance de 2.8 m est nécessaire.

## 1.4. Éléments de traitement du signal en non linéaire

Lorsqu'une onde acoustique est utilisée comme signal d'entrée d'un système non linéaire, une génération d'harmoniques plus élevées, multiples de la fréquence d'excitation du système, se produit en sortie de ce même système.

Afin de pouvoir caractériser au mieux le système non linéaire étudié, il est nécessaire de choisir comme excitation un signal dont on peut obtenir la décomposition harmonique. À partir d'une excitation sinus, les harmoniques du système sont obtenues par calcul du coefficient de Fourier à la fréquence d'excitation. À partir d'une excitation en sinus balayé synchronisé, une méthode d'obtention des harmoniques a été développée dans [27, 28].

### 1.4.1. Excitation Sinus

Le calcul du coefficient de Fourier permet d'obtenir des données fréquentielles pour chaque harmonique. Initialement, cette technique est utilisée pour extraire des signaux de faible amplitude noyés dans du bruit. Le principe est de multiplier le signal par une sinusoïde de même fréquence.

Soit un signal acoustique généré par la source tel que

$$s(t) = \sum_{k=0}^N S_k \cos(2\pi k f_e t + \Phi_k) \quad (1.34)$$

avec  $N$  le nombre d'harmoniques étudiées,  $f_e$  la fréquence d'excitation,  $S_k$  l'amplitude et  $\Phi_k$  la phase.

L'objectif est d'extraire à partir d'une mesure de  $s(t)$ , les amplitudes et les phases qui caractérisent chaque harmonique. La première étape consiste à multiplier ce signal par  $\cos(2\pi n f_e t)$  avec  $n$  l'harmonique à déterminer. En moyennant sur un grand nombre de périodes, et après résolution mathématique, on obtient une équation de la forme

$$\frac{f_e}{M} \int_0^{M/f_e} s(t) \cos(2\pi n f_e t) dt = \frac{S_n(f)}{2} \cos(\Phi_n(f)) = S_C(f) \quad (1.35)$$

où  $M$  est le nombre de périodes utilisées. De la même manière, en multipliant le signal  $s(t)$  par  $\sin(2\pi n f_e t)$  et en moyennant sur un grand nombre de périodes, on obtient

$$\frac{f_e}{M} \int_0^{M/f_e} s(t) \sin(2\pi n f_e t) dt = \frac{S_n(f)}{2} \sin(\Phi_n(f)) = S_S(f) \quad (1.36)$$

Grâce aux équations (1.35) et (1.36), les valeurs de  $\Phi_n(f)$  et  $S_n(f)$  peuvent être déterminées pour chaque harmonique comme

$$\Phi_n(f) = \tan^{-1}\left(-\frac{S_C(f)}{S_S(f)}\right) \quad (1.37)$$

$$S_n(f) = 4\sqrt{S_S(f)^2 + S_C(f)^2}. \quad (1.38)$$

Pour chaque harmonique  $n$ , le signal fréquentiel est alors obtenu comme

$$X_n(f) = \frac{S_n(f)}{2} \exp^{i\Phi_n(f)}. \quad (1.39)$$

### 1.4.2. Excitation sinus balayé synchronisé

Le sinus balayé synchronisé (également appelé chirp exponentiel) est un signal dont la fréquence instantanée varie au cours du temps, entre deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Il a été défini dans [27, 28] comme

$$u(t) = A \sin(\varphi(t)) \quad (1.40)$$

avec  $A$  l'amplitude du signal.  $\varphi(t)$  désigne la phase du signal définie par

$$\varphi(t) = 2\pi f_1 L e^{t/L} \quad (1.41)$$

avec  $f_1$  la fréquence initiale et  $L$  le taux d'augmentation exponentiel de la fréquence tel que

$$L = \frac{1}{f_1} \text{round} \left( \frac{\bar{T} f_1}{\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)} \right). \quad (1.42)$$

round représente l'arrondi à l'entier supérieur,  $f_2$  la fréquence finale et  $\bar{T}$  la durée approximative du signal  $u(t)$ .

La fréquence instantanée du signal  $u(t)$  est définie comme

$$f(t) = f_1 e^{t/L} \quad (1.43)$$


---

et la durée  $T$  du signal  $u(t)$  est considérée comme le temps entre  $f_1$  et  $f_2$  soit

$$T = L \times \ln\left(\frac{f_1}{f_2}\right). \quad (1.44)$$

Le sinus balayé synchronisé étant à présent défini, nous allons chercher à estimer les réponses impulsionnelles harmoniques du système, permettant d'en obtenir ses composantes harmoniques. La réponse d'un système non linéaire  $y(t)$  soumis à une excitation sinus balayé synchronisé  $u(t)$  est considérée comme la convolution entre cette même excitation et la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système soit

$$y(t) = u(t) * h(t) \quad (1.45)$$

Plus précisément, la réponse  $y(t)$  est considérée comme une somme d'harmoniques du signal d'entrée, convoluée par la réponse impulsionnelle totale  $h(t)$  du système comme

$$y(t) = u(t) * h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\varphi(t)) * h_n(t). \quad (1.46)$$

La réponse impulsionnelle totale du système  $h(t)$  est alors définie comme la somme des harmoniques des réponses impulsionnelles  $h_n(t)$  décalées dans le temps comme

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t + \Delta t_n) \quad (1.47)$$

avec

$$\Delta t_n = L \times \ln(n) \quad (1.48)$$

correspondant aux instants où apparaissent ces réponses impulsionnelles.

En combinant les équations (1.40), (1.46) et (1.47), le signal de sortie  $y(t)$  peut être défini comme

$$y(t) = A \sin(\varphi(t)) * \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t + \Delta t_n) \quad (1.49)$$

L'équation (1.46) nous permet d'obtenir l'expression de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système non linéaire à partir des données d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$  telle que

$$h(t) = y(t) * \tilde{u}(t) \quad (1.50)$$

avec  $\tilde{u}(t)$  le filtre inverse du signal d'entrée. Dans le domaine fréquentiel, la réponse impulsionnelle (1.50) s'exprime comme

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[y(t)]\mathcal{F}[\tilde{u}(t)]] = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[y(t)]\tilde{U}(f)] \quad (1.51)$$

avec  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  respectivement la transformée et la transformée inverse de Fourier.  $\tilde{U}(f)$  est l'expression analytique du filtre inverse du signal d'entrée défini comme

$$\tilde{U}(f) = \frac{1}{\mathcal{F}[u(t)]} = 2\sqrt{\frac{f}{L}} \exp\left[-j2\pi fL \left(1 - \ln\left(\frac{f}{f_1}\right)\right) + j\frac{\pi}{4}\right]. \quad (1.52)$$

En réalisant un fenêtrage temporel sur (1.51) basé sur (1.47), on peut écrire dans le domaine fréquentiel et pour chaque harmonique  $n$ ,

$$H_n(f) = \mathcal{F}[h_n(t)]. \quad (1.53)$$


---

permettant d'obtenir les composantes fréquentielles du système. Les composantes harmoniques du signal d'entrée  $u(t)$  à partir de (1.53) sont alors définies comme

$$U_n(f) = \frac{A}{2} H_n(f). \quad (1.54)$$

### Comparaison de deux sweep

Il est à noter que le choix des paramètres initiaux du sweep ( $f_1, f_2, A$  et  $\bar{T}$ ) influe sur le résultat de la mesure. Nous allons chercher ici à déterminer les paramètres pour lesquels deux sweep présentent le même taux de variation de fréquence  $L$  donné par

$$L = \frac{1}{f_1} \text{round}\left(\frac{\bar{T} f_1}{\ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}\right). \quad (1.55)$$

Prenons deux signaux sweep  $x_a(t)$  et  $x_b(t)$  ayant été générés avec des paramètres différents. Les transformées de Fourier de ces sweep sont données dans [27] par

$$X_a(f) = A_a \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_a}{f}} \exp\left\{j2\pi L_a \left(1 - \ln\left(\frac{f}{f_{1a}}\right)\right) - j\frac{\pi}{4}\right\} \quad (1.56)$$

$$X_b(f) = A_b \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_b}{f}} \exp\left\{j2\pi L_b \left(1 - \ln\left(\frac{f}{f_{1b}}\right)\right) - j\frac{\pi}{4}\right\}. \quad (1.57)$$

Lorsque les réponses en fréquences de ces sweep sont identiques, c'est à dire pour  $X_a(f) = X_b(f)$ , on peut écrire

$$L_b \left(1 - \ln\left(\frac{f}{f_{1b}}\right)\right) = L_a \left(1 - \ln\left(\frac{f}{f_{1a}}\right)\right) \quad (1.58)$$

$$A_b = \sqrt{\frac{L_a}{L_b}} A_a. \quad (1.59)$$

Pour que deux signaux sweep aient la même transformée de Fourier, leurs taux de variation de fréquence  $L$  doivent être similaires, c'est à dire  $L_a = L_b$ . Cette égalité engendre d'après (1.58),  $f_{1a} = f_{1b}$  et d'après (1.59),  $A_a = A_b$ .

Pour que les taux des deux signaux soient identiques et en négligeant les arrondis, les bornes hautes de la plage de fréquence  $f_2$  respectent la relation suivante :

$$f_{2b} = f_{2a} \exp\left\{\frac{\bar{T}_b}{\bar{T}_a \ln\left(\frac{f_{2a}}{f_{1a}}\right)}\right\} \quad (1.60)$$

Pour un même absorbeur, le choix des paramètres initiaux du signal d'excitation influe donc sur l'estimation de ses caractéristiques acoustiques (impédance et coefficient de réflexion). Il est donc important de préciser lors d'études expérimentales les fréquences, amplitudes et durées des signaux d'excitation choisis. Si deux signaux sweep différents sont utilisés, il est alors nécessaire de satisfaire l'équation (1.60) afin de pouvoir comparer les différents résultats obtenus.

## 1.5. Estimation de la réponse d'un système non linéaire

---

### 1.5.1. Équilibrage harmonique

Le modèle de résolution par équilibrage harmonique [29] permet de faire un calcul approché des solutions périodiques de systèmes non linéaires dans le cas de réponses forcées comme

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + F(x) = W \quad (1.61)$$

où  $W$  est un terme forçant périodique mais aussi dans le cas du calcul des modes non linéaires, définis comme des familles de solutions périodiques de l'équation

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + F(x) = 0. \quad (1.62)$$

$M$ ,  $C$  et  $K$  représentent respectivement les matrices réelles de masse, d'amortissement et de raideur.  $F$  est une fonction non linéaire.

L'équilibrage harmonique consiste à chercher les solutions périodiques de l'équation non linéaire sous la forme d'une série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-H}^H A_k(n\omega) e^{jn\omega t} \quad (1.63)$$

où  $\omega$  est la pulsation du système associée à la fréquence d'excitation  $f$ .

En injectant (1.63) dans les équations (1.61) et (1.62) et en équilibrant les termes de Fourier de même ordre, on obtient respectivement

$$\left( (j\omega)^2 M + (j\omega)C + K \right) \mathbf{X}(n\omega) + \mathbf{F}(n\omega, \mathbf{X}) = W \quad (1.64)$$

et

$$\left( (j\omega)^2 M + (j\omega)C + K \right) \mathbf{X}(n\omega) + \mathbf{F}(n\omega, \mathbf{X}) = 0. \quad (1.65)$$

$\mathbf{X}(n\omega) = (X_1(n\omega), X_2(n\omega), \dots, X_m(n\omega))^T$  désigne le coefficient de Fourier  $n$  de  $X$  et  $\mathbf{F}(n\omega, \mathbf{X})$  désigne le coefficient de Fourier  $n$  de la fonction non linéaire  $F$ .

En regroupant tous les termes des équations (1.64) et (1.65), on obtient les systèmes d'équations algébriques non linéaires

$$R(Y, \omega) = L_1(\omega)Y + F(Y, \omega) + W \quad (1.66)$$

et

$$R(Y, \omega) = L_2(\omega)Y + F(Y, \omega). \quad (1.67)$$

$Y = (\mathbf{X}(0)^T, \mathbf{X}(\omega)^T, \dots, \mathbf{X}(H\omega)^T)^T$  correspond aux  $(H + 1)$  harmoniques de  $X$ .

### 1.5.2. Modèle de distorsion polyharmonique

Le modèle de distorsion polyharmonique (que l'on appellera modèle PHD pour PolyHarmonic Distorsion modeling) a été développé par J. Verspecht dans [17] pour des ondes électromagnétiques. Il permet de modéliser un système non linéaire dans le domaine fréquentiel grâce à l'estimation des paramètres de diffusion  $S_{ij}$ , reliant les différentes composantes harmoniques d'un système entre elles.

On considère un système où se propagent des ondes électromagnétiques, excité par un signal constitué d'une fondamentale et de ses harmoniques. Soit une onde incidente  $X$  et une onde réfléchie  $Y$  définies comme la combinaison d'une tension  $V$  et d'un courant  $I$  du système telles que

$$X = \frac{1}{2} (U + Z_{ce}I) \quad (1.68)$$

$$Y = \frac{1}{2} (U - Z_{ce}I) \quad (1.69)$$

avec  $Z_{ce}$  l'impédance caractéristique électrique du système en  $\Omega$ . L'approche par PHD suppose qu'il existe une famille de fonctions  $F_k$  permettant de relier les composantes spectrales incidentes  $X_H$  avec les composantes spectrales réfléchies  $Y_k$ , qui est définie comme

$$Y_k = F_k (X_0, X_1, \dots, X_H) \quad (1.70)$$

avec  $H$  le nombre d'harmonique étudiées.

La fonction complexe  $F_k$  décrit un système invariant dans le temps. Un déphasage linéaire  $\theta$  appliqué sur l'entrée  $X$  du système se traduit sur la sortie  $Y$  tel que

$$Y_k e^{jk\theta} = F_k (X_0, X_1 e^{j\theta}, \dots, X_H e^{jH\theta}). \quad (1.71)$$

En introduisant un déphasage  $\theta$  lié à la phase de la fondamentale  $X_1$  comme  $X_1 = |X_1| e^{j \arg(X_1)}$ ,  $\Phi = e^{j \arg(X_1)}$  et  $e^{j\theta} = \Phi^{-1}$ , l'équation (1.71) devient alors

$$Y_k = F_k (X_0, |X_1|, x_2 \Phi^{-2}, \dots, X_H \Phi^H) \Phi^k. \quad (1.72)$$

où le fondamentale  $X_1$  n'intervient que par son module.

En linéarisant l'expression (1.72), on obtient la formulation suivante :

$$Y_k = F_k (|X_1|) + \frac{\partial F_k}{\partial X_0} (|X_1|) X_0 + \sum_{q=2}^H \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Re}(X_q \Phi^{-q})} \operatorname{Re}(X_q \Phi^{-q}) + \sum_{q=2}^H \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Im}(X_q \Phi^{-q})} \operatorname{Im}(X_q \Phi^{-q}). \quad (1.73)$$

où  $F_k(X_1)$  est défini par

$$F_k (0, |X_1|, 0, \dots) = F_k (|X_1|). \quad (1.74)$$

et avec  $\operatorname{Re}(X_q \Phi^{-q}) = \frac{X_q \Phi^{-q} + \operatorname{conj}(X_q \Phi^{-q})}{2}$  et  $\operatorname{Im}(X_q \Phi^{-q}) = \frac{X_q \Phi^{-q} - \operatorname{conj}(X_q \Phi^{-q})}{2j}$ .

Finalement, l'expression (1.73) permet d'écrire le modèle PHD comme

$$Y_k = \sum_{q=2}^H S_q X_k + T_q \overline{X_k} \quad (1.75)$$

avec  $S_q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Re}(X_q \Phi^{-q})} - j \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Im}(X_q \Phi^{-q})} \right)$  et  $T_q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Re}(X_q \Phi^{-q})} + j \frac{\partial F_k (|X_1|)}{\partial \operatorname{Im}(X_q \Phi^{-q})} \right)$

La relation (1.75) définissant le modèle de distorsion polyharmonique met en évidence un lien entre les composantes harmoniques des ondes incidente  $X$  et réfléchie  $Y$ . Les termes  $S_q$  et  $T_q$  quantifient le couplage entre ces composantes et informent sur les transferts d'énergie entre harmoniques.

---

## 1.6. Caractérisation de charges acoustiques non linéaires

L'impédance et le coefficient de réflexion sont deux paramètres permettant de caractériser des charges acoustiques non linéaires. Dans cette section, différentes méthodes permettant leur estimation sont présentées dans les domaines linéaire et non linéaire.

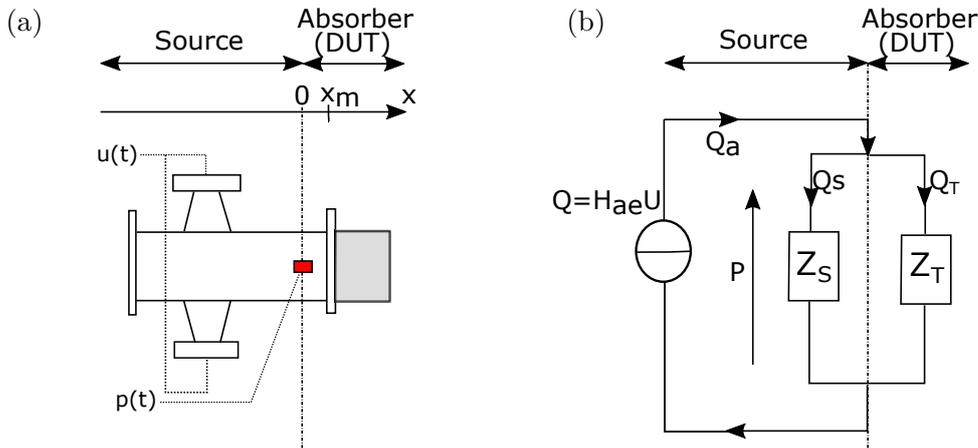
### 1.6.1. Méthode par linéarisation

On considère comme présenté dans [15] un dispositif expérimental composé d'un absorbeur connecté à un tube de Kundt à l'intérieur duquel se trouve un microphone. Le schéma de ce dispositif est représenté en Figure 3.1.(a). Sous l'hypothèse d'onde plane, on suppose que la pression  $p(t)$  mesurée par le microphone est une bonne estimation de la pression moyennée sur la section de mesure.

L'absorbeur est caractérisé par une impédance dite équivalente  $Z_T(f)$ , définie comme le rapport entre les composantes fondamentales de la pression et du débit volumique. L'absorbeur étant non linéaire,  $Z_T(f)$  correspond à une approximation linéaire de la relation entre la pression et le débit volumique. À noter que cette approximation dépend du niveau d'excitation appliqué au système (c'est-à-dire du contenu en amplitude et en fréquence de la tension  $u(t)$ ).

On considère la partie source du tube de Kundt court linéaire et invariante dans le temps. Elle peut donc être approchée par l'équivalence électroacoustique représentée en Figure 3.1.(b). Dans le domaine fréquentiel, la source est caractérisée par son impédance  $Z_S(f)$  et la fonction de transfert  $H_{ae}(f)$  entre son débit volumique  $Q_a(f)$  et la tension de contrôle  $U(f)$  définie comme

$$Q_a(f) = H_{ae}(f)U(f). \quad (1.76)$$



**Figure 1.13** – (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) Équivalence électro-acoustique du système.

En exploitant l'équivalence formelle entre les grandeurs acoustiques et électriques [30], l'impédance acoustique totale du système est définie à l'abscisse du microphone ( $x = 0$ ) par

$$Z(f) = \frac{Z_T(f)Z_S(f)}{Z_T(f) + Z_S(f)}. \quad (1.77)$$

Introduisons maintenant la fonction de transfert  $H_m(f)$ , définie comme le rapport entre la pression  $P(f)$  et la tension de contrôle  $U(f)$ . Cette fonction de transfert s'exprime à l'aide la

définition de l'impédance totale (1.77) sous la forme

$$H_m(f) = Z(f)H_{ae}(f). \quad (1.78)$$

En reportant cette expression dans (1.77), l'impédance  $Z_T(f)$ , et respectivement le coefficient de réflexion  $R_T(f)$ , de l'absorbeur s'expriment sous la forme

$$Z_T(f) = \frac{H_m(f)Z_S(f)}{H_{ae}(f)Z_S(f) - H_m(f)} \quad (1.79)$$

et

$$R_T(f) = \frac{H_m(f)Z_S(f) - Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f))}{H_m(f)Z_S(f) + Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f))}. \quad (1.80)$$

Ces deux quantités qui caractérisent l'absorbeur dépendent de la fonction de transfert  $H_m$ , directement accessible à la mesure, et de  $Z_c = \rho c/S$  l'impédance caractéristique, avec  $\rho$  la densité de l'air,  $c$  la célérité du son dans l'air et  $S$  la section du tube.  $\rho$  et  $c$  sont dépendantes de la température ambiante  $T_{amb}$  et de la pression atmosphérique  $P_{atm}$ . Elles sont définies dans la norme ISO 10534-2 comme

$$\rho = 1.186 \frac{293P_{atm}}{101325T_{amb}} \text{ et } c = 343.2 \sqrt{\frac{T_{amb}}{293}}. \quad (1.81)$$

La température ambiante est mesurée par un thermomètre et la pression atmosphérique standard de 1013 hPa est prise en référence.

L'étalonnage de la source consiste à estimer les fonctions  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  à partir de terminaisons connues, c'est-à-dire à partir de terminaisons dont on peut déterminer analytiquement l'impédance. Pour une fréquence d'excitation donnée, deux mesures peuvent être suffisantes pour résoudre les équations (1.79) et (1.80) mais l'utilisation de plusieurs terminaisons connues permet un résultat plus précis et un calcul plus robuste. Il est alors nécessaire de résoudre pour chaque fréquence d'excitation, un problème de minimisation basé sur une méthode des moindres carrés, appliqué à l'impédance  $Z_T(f)$  ou au coefficient de réflexion  $R_T(f)$ . Il permet de prendre en compte la compatibilité entre le modèle et l'expérience, et ce pour chaque terminaison connue. Dans le cas du coefficient de réflexion, la fonction coût utilisée pour déterminer les valeurs optimales de  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  est définie comme

$$f_c = \sum_{n=1}^N \left( \frac{|R_{T_n}(f)^{th} - R_{T_n}(f)|^2}{|R_{T_n}(f)|^2} \right) \quad (1.82)$$

avec  $N$  le nombre de terminaisons connues utilisées,  $R_{T_n}(f)^{th}$  les coefficients de réflexion des modèles analytiques caractérisant les terminaisons connues,  $R_{T_n}(f)$  les coefficients de réflexion expérimentaux exprimés par (1.80). Ces dernières quantités dépendent des mesures  $H_m(f)$  effectuées pour chaque terminaison connue et des inconnues  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$ .

En séparant les caractéristiques de la source  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  en parties réelles et imaginaires comme  $H_{ae} = H_{ae}^{Re} + jH_{ae}^{Im}$  et  $Z_S = Z_S^{Re} + jZ_S^{Im}$ , les valeurs optimales caractérisant  $H_{ae}(f)$  et  $Z_s(f)$  sont déduites du problème de minimisation suivant

$$\min_{H_{ae}^{Re}, H_{ae}^{Im}, Z_S^{Re}, Z_S^{Im}} f_c. \quad (1.83)$$

Ce problème de minimisation non-quadratique est résolu pour chaque fréquence avec le solveur d'optimisation non linéaire Matlab "fminsearch". Pour la première fréquence, l'algorithme est initialisé par une estimation des coefficients  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  pour deux terminaisons comme

$$H_{ae} = \frac{H_{m_1} H_{m_2} (Z_{T_1} - Z_{T_2})}{Z_{T_1} Z_{T_2} (H_{m_1} - H_{m_2})} \quad (1.84)$$

$$Z_S = \frac{Z_{T_1} Z_{T_2} (H_{m_1} - H_{m_2})}{H_{m_2} Z_{T_1} - H_{m_1} Z_{T_2}}. \quad (1.85)$$

Les fréquences sont alors considérées par ordre croissant, avec un point de départ défini par l'optimum obtenu à la fréquence précédente.

### 1.6.2. Estimation par matrice de diffusion

Un modèle multi-port pour la caractérisation d'échantillon non linéaire dans un conduit a été développé par Bodèn dans [16].

Un signal sinusoïdal est généré à la fréquence d'excitation  $f$  (*i.e.* à sa fréquence fondamentale) et la réponse du système est donnée par la pression  $P(f)$  présente dans le tube, à l'abscisse du microphone. La formulation en matrice de diffusion du modèle multi-ports caractérise la relation entre les termes harmoniques de la pression acoustique incidente ( $P_k^+(f)$ ) et les termes harmoniques de la pression acoustique réfléchie ( $P_n^-(f)$ ), tous deux à la position du microphone, comme

$$P_n^-(f) = \sum_{k=1}^{\infty} S_{nk}(f, |P_1(f)|) P_k^+(f) \text{ for } n = 1, 2, \dots. \quad (1.86)$$

Le terme  $S_{nk}(f, |P_1(f)|)$  représente le transfert d'énergie du terme harmonique ( $P_k^+(f)$ ) de la pression acoustique au terme harmonique ( $P_n^-(f)$ ). Ce terme dépend de la fréquence d'excitation  $f$  et du niveau d'amplitude de la pression acoustique représentée ici par  $|P_1(f)|$  et définissant l'amplitude de la première harmonique. (1.86) peut s'écrire sous la forme d'une matrice de diffusion :

$$\begin{pmatrix} P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ P_3^-(f) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(f, |P_1(f)|) & S_{12}(f, |P_1(f)|) & S_{13}(f, |P_1(f)|) & \cdots \\ S_{21}(f, |P_1(f)|) & S_{22}(f, |P_1(f)|) & S_{23}(f, |P_1(f)|) & \cdots \\ S_{31}(f, |P_1(f)|) & S_{32}(f, |P_1(f)|) & S_{33}(f, |P_1(f)|) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ P_3^+(f) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.87)$$

Une formulation équivalente peut être obtenue en écrivant la matrice de diffusion sous forme de matrice d'impédance, caractérisant la relation entre les termes harmoniques de la pression acoustique ( $P_n(f)$ ) à la position du microphone et les termes harmoniques du débit volumique acoustique correspondant ( $Q_k(f)$ ), définie comme

$$P_n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_{nk}(f, |P_1(f)|) Q_k(f) \text{ for } n = 1, 2, \dots \quad (1.88)$$

Le terme d'impédance  $Z_{nk}(f, |P_1(f)|)$ , représente l'opposition de la fréquence  $nf$  générée par la charge acoustique à la fréquence  $kf$  venant de la fréquence d'excitation fondamentale  $f$ .

Les matrices de diffusion en ondes de pression et en impédance peuvent être exprimées l'une par rapport à l'autre. En s'affranchissant de la dépendance en  $(f, |P_1(f)|)$  afin de simplifier

l'écriture, la relation s'écrit

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{12} & \dots \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{22} & \dots \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \frac{\rho c}{S} \begin{pmatrix} 1 + S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots \\ S_{21} & 1 + S_{22} & S_{23} & \dots \\ S_{31} & S_{32} & 1 + S_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & \dots \\ -S_{21} & 1 - S_{22} & -S_{23} & \dots \\ -S_{31} & -S_{32} & 1 - S_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \quad (1.89)$$

Plusieurs hypothèses sont ici prises en compte pour simplifier le modèle :

- L'échange d'énergie ne peut se produire que de basse à haute fréquence :  $S_{nk}(f, |P1(f)|) = 0$  pour  $n < k$ )
- Le système étudié satisfait le principe de superposition harmonique [17] :  $S_{nk}(f, |P1(f)|) = 0$  pour  $1 < k < n$ )

L'expression (1.87) devient alors

$$\begin{pmatrix} P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ P_3^-(f) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 & \dots \\ S_{21} & S_{22} & 0 & \dots \\ S_{31} & 0 & S_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ P_3^+(f) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.90)$$

Les coefficients  $S_{nk}$  de la matrice de diffusion sont obtenus à partir des réponses impulsionnelles des pressions mesurées (dont la méthode est développée dans la section suivante) ou par combinaison de l'équilibrage harmonique et d'un modèle de distorsion polyharmonique, vu en Section 1.5.

### 1.6.3. Modèle d'Hammerstein polynomial

Un système d'Hammerstein est défini comme la sortie d'un filtre linéaire  $G(f)$  dont l'entrée est une puissance du signal d'entrée.

Une cascade de  $N$  modèle d'Hammerstein (que nous appellerons par simplification modèle d'Hammerstein) définie dans [28] est représentée par le diagramme en Figure 1.14.

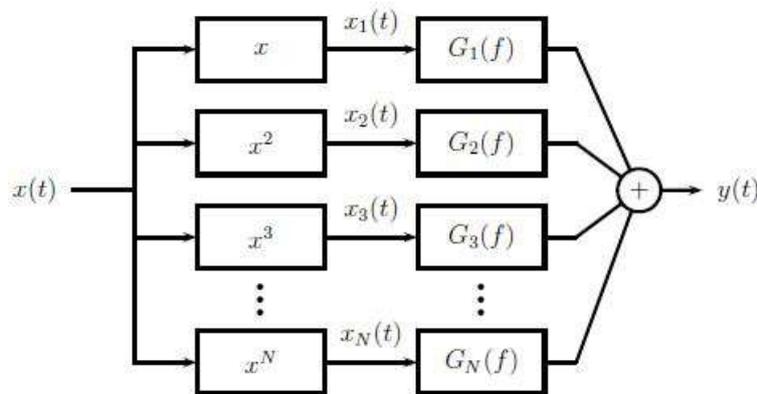


Figure 1.14 – Schéma bloc du modèle d'Hammerstein

Lors d'une excitation par sinus balayé synchronisé (1.40), les réponses impulsionnelles  $H_n(f)$

(1.53) sont alors reliées aux filtres linéaires  $G_n(f)$  par une matrice  $A$  comme

$$H_m(f) = \sum_{n=1}^N A_{n,m} G_n(f) \quad (1.91)$$

avec  $A$  définie comme

$$A_{n,m} = \begin{cases} \frac{(-1)^{2n+\frac{1-m}{2}}}{2^{n-1}} \binom{n}{\frac{n-m}{2}} & \text{pour } n \geq m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## En résumé

Afin de lutter contre le bruit, de nombreuses technologies permettent d'absorber des ondes sonores. On compte parmi elles les matériaux absorbants [20, 21] efficaces à hautes fréquences, les absorbeurs dynamiques efficaces à basses fréquences mais dans une bande de fréquence étroite, les systèmes actifs [24] efficaces à basses fréquences mais localement dans l'espace. Ces méthodes classiques ne permettent donc pas d'absorber des ondes acoustiques sur de larges plages de basses fréquences.

Pour pallier à cela, il a été développé des absorbeurs dit NES (pour Nonlinear Energy Sink). Ils peuvent s'apparenter à une extension d'un résonateur de Helmholtz au domaine non linéaire, dû à la présence d'une force de rappel non linéaire. Ces absorbeurs ont la particularité de s'adapter à la fréquence de résonance du système et fonctionnent par pompage énergétique.

Le but de ces travaux est de caractériser acoustiquement ces absorbeurs non linéaires. De nombreuses technologies sont disponibles comme les tubes d'impédance [11, 12], les capteurs d'impédance [13, 14] ... mais aucun de ces dispositifs n'est compatible avec la gamme de fréquence ou la dimension d'absorbeurs non linéaires. Le développement d'un nouveau banc de mesure [15, 31] est donc la solution pour atteindre des basses fréquences, des forts niveaux, avec une taille adaptée à la caractérisation d'absorbeurs non linéaires. De nombreuses méthodes permettent d'estimer numériquement des paramètres acoustiques non linéaires. L'équilibrage harmonique [29] est une méthode classique calculant les solutions périodiques d'un système non linéaire sous forme de séries de Fourier tronquées. On compte aussi les modèles de distorsion polyharmonique [17] qui permettent de modéliser un système non linéaire grâce à des paramètres de diffusion. Une fois la réponse non linéaire du système obtenue, différentes méthodes telles que l'estimation par matrice de diffusion [16] ou par modèle d'Hammerstein [27, 28] permettent de remonter à des paramètres acoustiques tels que l'impédance ou le coefficient de réflexion.

# 2

## DISPOSITIF DE MESURES : LE TUBE DE KUNDT COURT

---

Afin de caractériser des systèmes acoustiques à basses fréquences et à fort niveau, il a été développé au Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique une configuration particulière de capteur d'impédance appelée tube de Kundt court (ou SKT pour Short Kundt Tube) [15], permettant de travailler sur une gamme de fréquences allant de 10 à 200 Hz. De façon à pouvoir mesurer les harmoniques générées par les non-linéarités des échantillons excités dans cette bande de fréquences, une augmentation de la plage en fréquence de fonctionnement du SKT est nécessaire. Dans ce chapitre, une version modifiée de ce tube de Kundt court est présentée, lui permettant de fonctionner sur une plage fréquentielle étendue jusqu'à 700 Hz. Une modélisation de ce dispositif de mesure est utilisée de façon à comprendre son fonctionnement et à valider sa nouvelle conception. Pour finir, des absorbeurs non linéaires sont décrits, notamment au travers de mesures de leurs réponses à des excitations harmoniques ou en sinus glissant.

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>30</b>
2.1.1	Short Kundt Tube	30
2.1.2	Chaîne d'acquisition	30
2.1.3	Mesure du seuil de détection	32
<b>2.2</b>	<b>Modélisation linéaire du Short Kundt Tube</b>	<b>33</b>
2.2.1	Jonction en T	34
2.2.2	Modèle linéaire du haut-parleur	34
2.2.3	Propagation dans un guide d'ondes avec pertes	36
2.2.4	Modèle du système complet	37
2.2.5	Influence de la longueur du tube arrière du SKT	39
2.2.6	Relation avec le modèle électro-acoustique de la source	40
<b>2.3</b>	<b>Charges acoustiques testées</b>	<b>41</b>
2.3.1	Membrane de haut-parleur agissant comme NES	41
2.3.2	Membranes nanofibreuses	42

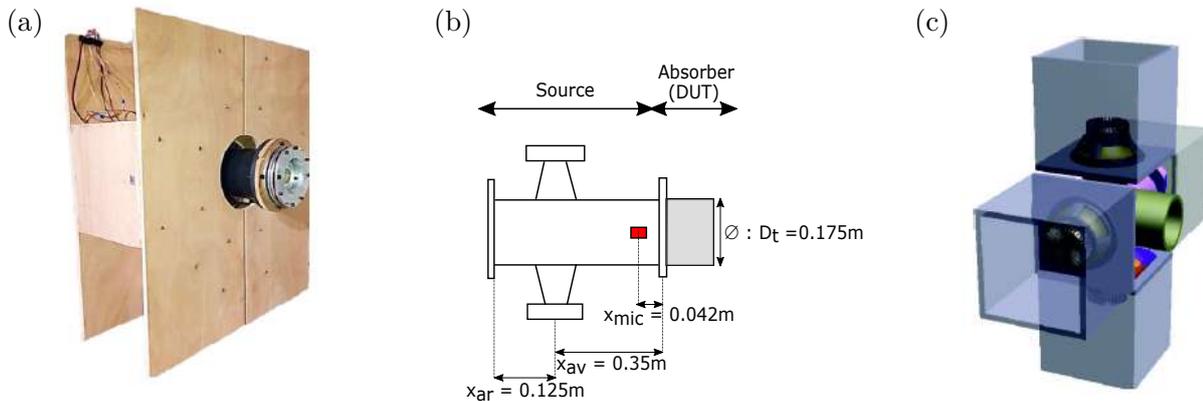
---

## 2.1. Dispositif expérimental

### 2.1.1. Short Kundt Tube

Le banc de mesure SKT présenté en Figure 2.1.(a) est une version modifiée du dispositif développé par Chauvin et al. dans [15, 31]. Il s'agit d'un tube de Kundt de petite dimension, constitué d'une source sonore et d'un tube de diamètre  $D_t = 0.175$  m. Initialement, la source partage le tube en deux sections de longueurs égales de 0.35 m. Ici, elle est située entre une section arrière fermée de longueur  $x_{ar} = 0.125$  m et une section avant de longueur  $x_{av} = 0.35$  m à l'extrémité de laquelle une charge acoustique à caractériser (appelée aussi DUT pour Device Under Test) est fixée. Le choix de ces dimensions sera justifié dans la section 2.2.5. Un microphone mesurant la pression acoustique est placé sur l'axe de la section avant du tube, entre la source et l'absorbeur, à une distance  $x_{mic} = 0.042$  m de l'extrémité du tube. Toutes les dimensions sont reportées sur la Figure 2.1.(b)

La source représentée en Figure 2.1.(c) [32] a été conçue et dimensionnée sous l'hypothèse de propagation en onde plane, de façon à exposer le DUT à des hauts niveaux de pression ( $> 300$  Pa) pour une gamme de fréquences basses ( $f = [10; 700]$  Hz). Elle est commandée en tension  $u(t)$  (ou  $U(f)$  dans le domaine fréquentiel) et est composée de deux paires parallèles de haut-parleurs synchrones placés en vis-à-vis et espacés de  $90^\circ$ . La face avant de chaque haut-parleur est connectée perpendiculairement au tube par une pièce d'adaptation imprimée en 3D, présentant un diamètre rétrécissant de 0.25 à 0.1 m. La face arrière de chaque haut-parleur est enfermée dans un caisson de 37 l, étanche à l'air. Les quatre haut-parleurs sont connectés au tube en la même abscisse et contribuent équitablement au débit acoustique. À noter que l'étanchéité à l'air de la source qui est un point critique du montage doit être vérifiée régulièrement.



**Figure 2.1** – (a) Banc de mesure SKT couplé à une membrane visco-élastique. (b) Dimensions du SKT (c) Représentation 3D de la source [15]

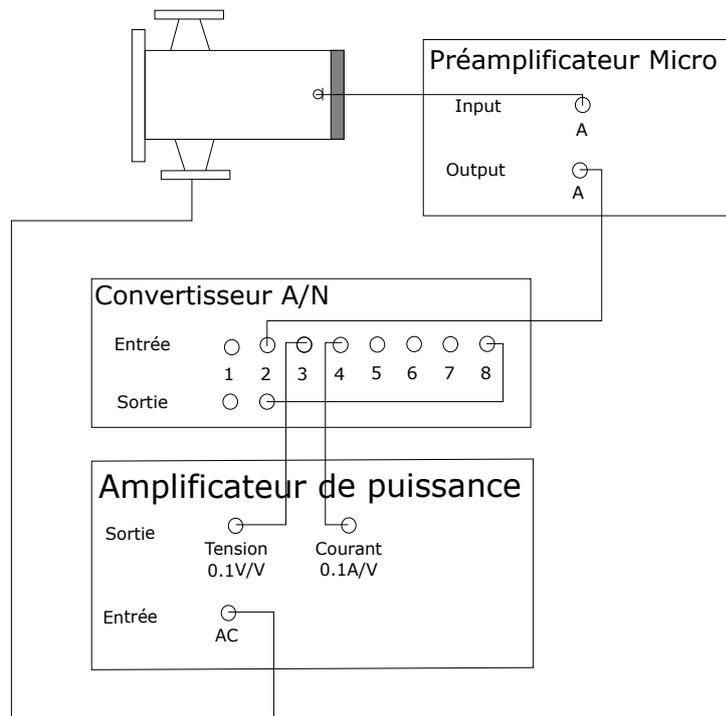
### 2.1.2. Chaîne d'acquisition

La chaîne d'acquisition illustrée de façon simplifiée en Figure 2.2 est contrôlée via Matlab fonctionnant sur un ordinateur équipé d'une carte son RME HDSPe MADI. Un convertisseur analogique/numérique Ferrofisch A16 MK-II est utilisé afin de convertir les données analogiques en numériques et inversement. Le signal source est transmis aux haut-parleurs par un amplificateur de puissance TIRA BAA120. La source est constituée de deux paires de haut-parleurs

type Beyma 10LW30/N (de diamètre 0.25 m) connectées en série. Grâce à ce montage, les quatre haut-parleurs présentent une impédance équivalente à celle d'un seul haut-parleur.

Les mesures de pression sont réalisées avec un microphone haute pression G.R.A.S 40BH 1/4", connecté à un préamplificateur G.R.A.S 26AC-1 et un amplificateur G.R.A.S. 12AA.

Les programmes développés sur Matlab permettent de générer un signal d'excitation émis par la source. Dans notre cas, nous utilisons des signaux sinus ou sinus balayé synchronisé (explicités dans la Section 1.4) de fréquences allant de  $f_1$  à  $f_2$ , d'amplitude  $A$  et d'une durée  $\bar{T}$ . Une acquisition correspond à l'enregistrement de la pression  $p(t)$  mesurée par le microphone (enregistrée sur la voie 2 du convertisseur A/N) et de la tension  $u(t)$  et de l'intensité  $i(t)$  du courant mesurés en sortie de l'amplificateur de puissance (enregistrées sur les voies 3 et 4 respectivement du convertisseur A/N).



**Figure 2.2** – Représentation schématique de la chaîne d'acquisition

**Gain de la chaîne d'acquisition** La chaîne d'acquisition a pour but de mesurer et transformer une grandeur mesurée (une tension) en une grandeur physique. Chaque appareil la constituant possède un gain et une sensibilité qui lui est propre. Dans notre cas, la sensibilité constructeur, appelée *sens*, de chaque appareil est connue mais le gain est à déterminer. Nous allons donc chercher ici à étalonner notre chaîne de mesure.

Pour chaque voie du convertisseur analogique/numérique, un générateur de test joue le rôle de source et génère une tension  $U_{test} = 0.775$  V correspondant à un niveau de 0 dBu. Le signal temporel mesuré en sortie permet d'obtenir une valeur de tension  $U_{mes}$  impactée par la chaîne d'acquisition. Connaissant la sensibilité de chaque appareil, le gain de chaque voie peut alors être calculé grâce à la formule suivante :

$$gain = \frac{U_{test}}{U_{mes} sens}. \quad (2.1)$$

Toutes ces grandeurs sont regroupées dans le Tableau 2.1. Ces gains devront alors être appliqués à chaque mesure réalisée, de façon à obtenir des grandeurs physiques.

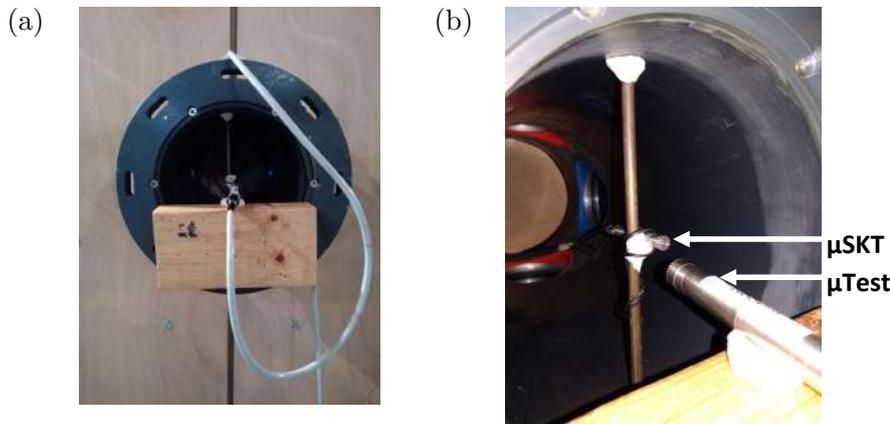
Voie	2	3	4	8
Mesure	$p(t)$	$u(t)$	$i(t)$	$u_{commande}(t)$
$U_{mes}$ (V)	0.31478	0.1018	0.10171	0.31592
sens	1.33 mV/Pa	0.1 V/A	1 V/V	1 V/V
gain	2.4620	7.6130	7.6137	2.4532

**Tableau 2.1** – Tableau récapitulatif des sensibilités et gains en fonction de la voie de mesure du convertisseur A/N.

### 2.1.3. Mesure du seuil de détection

Afin de valider la justesse des mesures réalisées au microphone, il est nécessaire de déterminer le niveau de pression à partir duquel ce dernier ne mesurera plus que du bruit de fond. Cette limite est appelée seuil de détection.

Lorsqu'il est connecté à un amplificateur G.R.A.S., la documentation du microphone présent dans le SKT informe d'une limite dynamique inférieure de 62 dB(A) à 1000 Hz soit 62 dB SPL. De façon à s'assurer que la mesure faite au microphone est valide et que nous sommes bien en présence d'une mesure de bruit de fond, une seconde acquisition est réalisée avec un microphone test, plus sensible. Le microphone test utilisé est un microphone BK 4133 1/2" équipé d'un préamplificateur BK 2619 et d'un amplificateur BK 2801, présentant d'après sa documentation une limite inférieure dynamique de 28 dB SPL. Les deux microphones sont placés sur la même abscisse dans le tube, comme présenté en Figure 2.3. Le microphone présent dans le SKT mesure une pression temporelle appelée  $p_{\mu SKT}(t)$  et le microphone test mesure une pression temporelle appelée  $p_{\mu Test}(t)$ .



**Figure 2.3** – Dispositif de mesure du bruit de fond (a) vu de face et (b) vu de côté

On ne connaît pas la calibration du microphone test. Pour pouvoir comparer les deux résultats, nous allons utiliser un coefficient de correction aux signaux afin que les niveaux mesurés soient les mêmes, défini comme

$$C = \frac{\max(p_{\mu Test}(t))}{\max(p_{\mu SKT}(t))}. \quad (2.2)$$

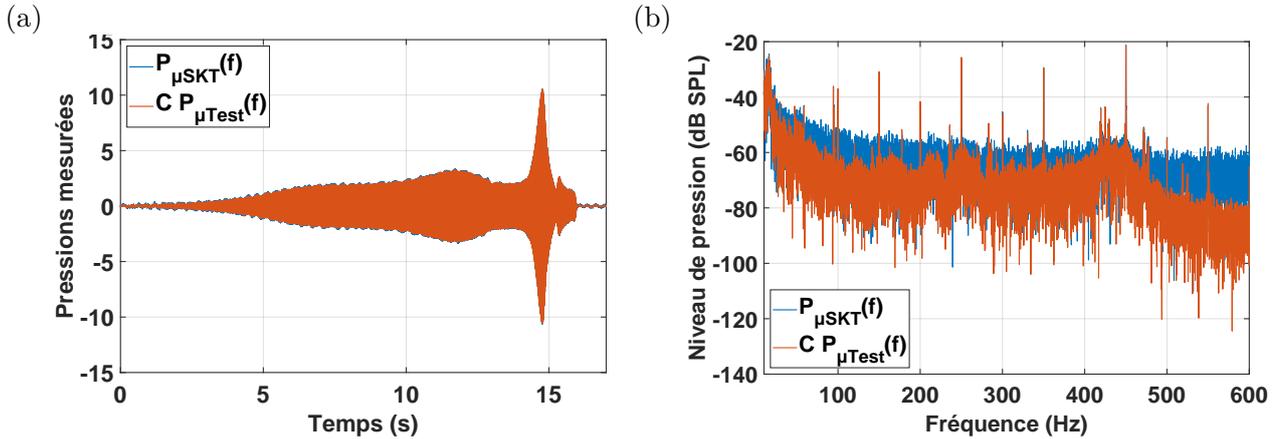
Pour estimer le bruit de fond, nous allons donc comparer  $p_{\mu Test}(t)$  la pression mesurée par le microphone test avec  $C \times p_{\mu SKT}(t)$  la pression mesurée par le microphone du SKT pondérée par le coefficient de correction.

La Figure 2.4.(a) illustre cette comparaison lorsque le système est excité par un signal sweep d'amplitude  $A = 0.02$ , pour des fréquences allant de  $f_1 = 10$  Hz à  $f_2 = 600$  Hz et une durée de signal de  $\bar{T} = 16$  s. On observe que pour un niveau d'excitation élevé les deux mesures sont proches, cela confirme la justesse des mesures et de la méthode.

Le seuil de détection est défini comme le niveau de pression mesuré par le microphone du SKT pour une amplitude de signal de  $A = 0$ . La Figure 2.3.(b) représente le module de la transformée de Fourier des mesures temporelles, estimées en dB SPL, pour une amplitude d'excitation de  $A = 0$ . Les mesures avec le microphone test sont en moyenne de l'ordre de 80 dB SPL alors que les mesures avec le microphone SKT sont beaucoup plus faibles avec un niveau de 60 dB SPL. Le microphone SKT mesure donc bien du bruit de fond pour des faibles amplitudes d'excitation. La valeur de bruit de fond mesurée par le microphone du SKT est de l'ordre de  $L = 60$  dB SPL, et donc le seuil de détection du microphone sera calculé tel que

$$P_{seuil} = 2 \times 10^{-5} \times 10^{L/20} = 2 \times 10^{-2} Pa. \quad (2.3)$$

Lors des expérimentations, si la pression mesurée au microphone est inférieure à cette pression seuil, les résultats seront faussés par le bruit de fond et donc non exploitables.



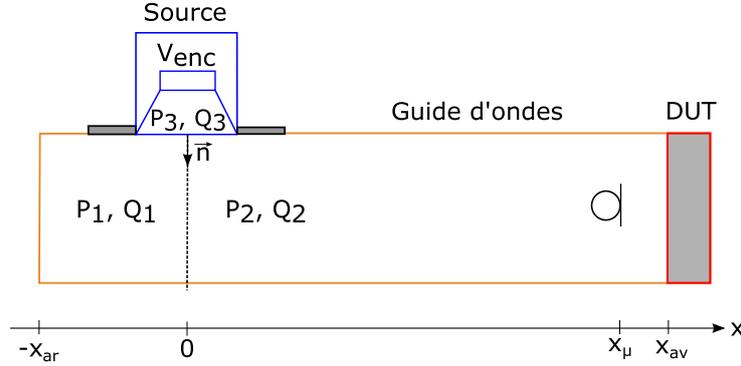
**Figure 2.4** – Signaux temporels des pressions mesurées par le microphone du SKT et le microphone test pour (a)  $A = 0.2$  et pour (b)  $A = 0$

## 2.2. Modélisation linéaire du Short Kundt Tube

Afin de configurer le banc de mesure et de valider ses nouvelles dimensions (pour rappel nous sommes passé d'un banc symétrique à un banc présentant des longueurs avant et arrière différentes), un modèle linéaire dépendant des paramètres de la source et de la géométrie du dispositif a été développé dans [32]. Cette modélisation prend en compte trois différents éléments, représentés en Figure 2.5 :

- une source acoustique unique (bleu), équivalente aux 4 haut-parleurs du dispositif réel, constituée d'un haut-parleur dont l'arrière a été encoffré dans un volume  $V_{enc}$ . La pression et le débit vus par la face avant du haut-parleur sont définis respectivement par  $P_3$  et  $Q_3$ .
- un guide d'ondes cylindrique (orange) connecté à la source au point d'abscisse  $x = 0$ , composé d'un tube arrière fermé en  $x = -x_{ar}$  voyant une pression  $P_1$  et un débit  $Q_1$  et d'un tube avant d'une longueur  $x = x_{av}$ , voyant une pression  $P_2$  et un débit  $Q_2$ .

- La longueur totale du guide d'ondes est définie par  $L = x_{av} + x_{ar}$ . Un microphone est positionné sur l'axe du guide d'ondes, à une distance  $x = x_{\mu}$ .
- un DUT (rouge) à étudier, connecté au guide d'ondes en  $x = x_{av}$ .



**Figure 2.5** – Modélisation simplifiée du SKT

### 2.2.1. Jonction en T

La jonction entre le haut-parleur et le guide d'ondes est appelée jonction en T de part sa géométrie. L'impédance  $Z_3$  vue par le haut-parleur peut être exprimée en fonction des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  caractérisant respectivement les impédances des sections arrière et avant du guide d'ondes. On suppose les dimensions faibles devant la longueur d'onde et un volume nul à la jonction. Il est alors possible d'écrire la conservation des débits

$$Q_2 = Q_3 + Q_1 \quad (2.4)$$

et la continuité des pressions

$$P_1 = P_2 = P_3 = P \quad (2.5)$$

respectant l'orientation du vecteur normal  $\vec{n}$ .

En se rapprochant d'une équivalence électroacoustique comme décrite dans [19](p.317), les impédances satisfont la relation

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_3}. \quad (2.6)$$

L'impédance vue par la face avant du haut-parleur est donc définie par

$$Z_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 - Z_2} \quad (2.7)$$

### 2.2.2. Modèle linéaire du haut-parleur

Le haut-parleur utilisé ici est un modèle de type BEYMA 10LW30N dont les paramètres constructeurs sont donnés dans le Tableau 2.2. Sa face arrière a été encoffrée dans un volume de  $V_{enc} = 0.037 \text{ m}^3$ .

Grâce à ces paramètres constructeur, des grandeurs complémentaires peuvent être calculées d'après [30] : la pulsation à la résonance

$$\omega_s = 2\pi f_s, \quad (2.8)$$

Grandeur	Valeur
Masse mobile totale $M_{ms}$ (kg)	0.053
Fréquence de résonance $f_{sHP}$ (Hz)	38
Facteur de qualité mécanique $Q_{ms}$	9.9
Facteur de qualité électrique $Q_{es}$	0.24
Résistance de la bobine $R_e$ ( $\Omega$ )	6.1
Inductance de la bobine $L_e$ (mH)	1.2
Surface émissive $S_d$ ( $m^2$ )	0.035

**Tableau 2.2** – Paramètres constructeur du haut-parleur BEYMA 10LW30N

la compliance mécanique

$$C_{ms} = 1/(M_{ms}\omega_s^2), \quad (2.9)$$

la résistance mécanique

$$R_{ms} = \omega_s M_{ms}/Q_{ms}, \quad (2.10)$$

la force de Laplace définissant le coefficient de couplage électrodynamique

$$Bl = \sqrt{R_e/(Q_{es}C_{ms}\omega_s)}, \quad (2.11)$$

et l'impédance électrique de la bobine

$$Z_e = R_e + j\omega L_e \quad (2.12)$$

où  $\omega = 2\pi f$  désigne la pulsation du système excité à la fréquence  $f$ .

Le haut-parleur est modélisé comme un oscillateur mécanique linéaire selon le modèle de Thiele et Small. Les équations décrivant le comportement électro-mécano-acoustique du haut-parleur sont données dans le domaine temporel par

$$M_{ms}\ddot{x}(t) + R_{ms}\dot{x}(t) + \frac{1}{C_{ms}}x(t) = Bli(t) + S_d(p_e(t) - p_{HP}(t)) \quad (2.13)$$

$$u(t) = L_e\dot{i}(t) + R_e i(t) + Bl\dot{x}(t). \quad (2.14)$$

$x$  est le déplacement de la masse mobile du haut-parleur,  $p_{enc}$  et  $p_{HP}$  désignent les pressions acoustiques présentes respectivement dans les volumes avant  $V_{HP}$  et arrière  $V_{enc}$  du haut-parleur,  $u$  et  $i$  représentent respectivement la tension et le courant aux bornes du haut-parleur.

En passant en variable complexe, on pose  $z = 2j\pi f$  avec  $f$  la fréquence d'excitation du système. Dans le domaine fréquentiel, les équations (2.13) et (2.14) deviennent alors

$$(zM_{ms} + R_{ms} + \frac{1}{zC_{ms}})V = -BII + S_d(P_{enc} - P_{HP}) \quad (2.15)$$

$$U = (zL_e + R_e)I - BLV \quad (2.16)$$

avec  $V$  la vitesse de la masse mobile du haut-parleur.

L'impédance acoustique vue par la face arrière du haut-parleur est définie par

$$Z_{enc}(z) = -\frac{\rho c_0^2}{V_{enc}} \frac{1}{z}. \quad (2.17)$$

où  $V_{enc}/(\rho c_0^2)$  désigne la compliance acoustique  $C_a$ . L'équation (2.16) peut alors se réécrire sous la forme

$$I = \frac{1}{Z_e(z)}(U + BlV). \quad (2.18)$$

L'impédance mécanique  $Z_{ms}$  de l'équipage mobile s'écrit pour un système linéaire comme

$$Z_{ms}(z) = zM_{ms} + R_{ms} + \frac{1}{zC_{ms}}. \quad (2.19)$$

À basses fréquences, on suppose que la pression dans le volume d'encoffrement du haut-parleur  $P_{enc}$  est proportionnel à sa variation de volume  $\Delta V_{enc}$  telle que

$$P_{enc} = -\rho c_0^2 \frac{\Delta V_{enc}}{V_{enc}} = -\rho c_0^2 \frac{S_d V}{V_{enc}} \frac{1}{z}. \quad (2.20)$$

L'impédance décrivant la correction de raideur due au volume arrière est définie comme

$$Z_{vol}(z) = \frac{P_{enc}}{S_d V} = -\frac{\rho c_0^2}{V_{enc}} \frac{1}{z}. \quad (2.21)$$

À partir des équations (2.18), (2.19), et (2.20), l'équation (2.15) devient

$$Z_{ms}(z) + Bl^2 \frac{1}{Z_e(z)} - S_d^2 Z_{vol}(z) = -Bl \frac{1}{Z_e(z)} U - S_d P_{HP} \quad (2.22)$$

où l'impédance équivalente du haut-parleur est définie par

$$Z_{HP}(z) = Z_{ms}(z) + Bl^2 \frac{1}{Z_e(z)} - S_d^2 Z_{vol}(z) \quad (2.23)$$

### 2.2.3. Propagation dans un guide d'ondes avec pertes

On se place sous l'hypothèse de propagation en ondes planes dans un guide d'ondes. Nous avons vu dans la Section 1.1.6 que l'impédance ramenée est décrite par l'équation (1.29). Elle peut être reformulée pour une propagation allant de l'abscisse du haut-parleur  $x = 0$  au microphone d'abscisse  $x = x_\mu$ , en prenant en compte des effets viscothermiques dus à la propagation dans le tube. Cette nouvelle matrice de transfert est définie comme

$$\begin{pmatrix} P \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(jk_v x_\mu) & Z_v \sinh(jk_v x_\mu) \\ Z_v^{-1} \sinh(jk_v x_\mu) & \cosh(jk_v x_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\mu(x_\mu) \\ Q_\mu(x_\mu) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

où l'impédance caractéristique du milieu  $Z_c$  est définie par

$$Z_c = \frac{\rho c}{S}, \quad (2.25)$$

la constante de propagation  $k_v$  par

$$k_v = \sqrt{\frac{1 + (\gamma_{air} - 1) f_h \omega}{1 - f_v} \frac{\omega}{c_0}}, \quad (2.26)$$


---

l'impédance linéique  $Z_v$  par

$$Z_v = \frac{\rho c_0}{S_{SKT}} \frac{1}{\sqrt{(1 - f_v)(1 + (\gamma - 1)f_h)}} \quad (2.27)$$

et les coefficients  $f_v$  et  $f_h$  respectivement par

$$f_v = \frac{1 - j}{R_{SKT}} \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho C_p \omega}} \quad (2.28)$$

$$f_h = \frac{1 - j}{R_{SKT}} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \omega}}. \quad (2.29)$$

Les constantes dans l'air sont données dans le Tableau 2.3 avec  $\mu_0 = 1.865 \times 10^{-5}$  kg/m/s,  $T = 300$  K,  $T_S = 110.4$  K,  $\lambda_0 = 2.624 \times 10^{-2}$  W/m/K,  $T_A = 245.4$  K,  $T_B = 27.6$  K. Les conditions de l'essai sont les suivantes : une température ambiante de  $T_{amb} = 295.15$  K, une pression de  $P_{amb} = 101$  Pa, une masse volumique de milieu (air) de  $\rho = \rho_0(P_{amb}/P_0)(T_0/T_{amb})$ .

Grandeur	Formule ou Valeur
Pression acoustique de référence dans l'air $P_0$ (Pa)	$2 \times 10^{-5}$
Constante spécifique des parfaits $R_g$ (J/kg/K)	287
Masse volumique de l'air $\rho_0$ (kg/m <sup>3</sup> )§	$P_0/(R_g T)$
Pression atmosphérique de référence $P_0$ (Pa)	101.325
Température de référence $T_0$ (K)	293
Vitesse du son $c_0$ (m/s)	$343.3 \sqrt{T_{amb}/T_0}$
Viscosité $\mu$ (kg/m/s)	$\mu_0 \frac{T_{amb}^{3/2}}{T} \frac{T_0 + T_S}{T_{amb} + T_S}$
Conductivité thermique $\lambda$ (W/m/K)	$\lambda_0 \frac{T_{amb}^{3/2}}{T} \frac{T_0 + T_A \exp(-T_B/T_0)}{T + T_A \exp(-T_B/T_{amb})}$
Chaleur spécifique à pression constante $C_p$ (J/kg/K)	$5R_g/2$
Chaleur spécifique à volume constant $C_v$ (J/kg/K)	$7R_g/2$
Rapport des chaleurs spécifiques $\Gamma$	$C_p/C_v$

**Tableau 2.3** – Constantes de l'air

### 2.2.4. Modèle du système complet

La matrice de transfert (2.24) peut être écrite sous la forme d'un système d'équations comme

$$P = T_{11}(x_\mu)P_\mu(x_\mu) + T_{12}(x_\mu)Q_\mu(x_\mu) \quad (2.30)$$

$$Q_2 = T_{21}(x_\mu)P_\mu(x_\mu) + T_{22}(x_\mu)Q_\mu(x_\mu) \quad (2.31)$$

en posant  $T_{11}(x_\mu) = T_{22}(x_\mu) = \cosh(jk_v x_\mu)$ ,  $T_{12}(x_\mu) = Z_v \sinh(jk_v x_\mu)$  et  $T_{21}(x_\mu) = Z_v^{-1} \sinh(jk_v x_\mu)$ .

L'impédance vue par le microphone  $Z_\mu$  peut être écrite comme le rapport entre la pression mesurée par le microphone  $P_\mu$  et le débit acoustique  $Q_\mu$ . Les équations (2.30) et (2.31) deviennent alors

$$P = T_1(x_\mu)P_\mu(x_\mu) \quad (2.32)$$

$$Q_2 = T_2(x_\mu)P_\mu(x_\mu). \quad (2.33)$$

où  $T_1(x_\mu) = T_{11}(x_\mu) + \frac{1}{Z_\mu}T_{12}(x_\mu)$  et  $T_2(x_\mu) = T_{21}(x_\mu) + \frac{1}{Z_\mu}T_{22}(x_\mu)$ .

L'impédance  $Z_\mu$  peut également être exprimée comme l'impédance ramenée de  $x_{av}$  vers  $x_\mu$  telle que

$$Z_\mu(z) = \frac{Z_v(z) \tanh(jk_v \Delta x) + Z_{term}}{1 + Z_v(z)^{-1} \tanh(jk_v \Delta x) Z_{term}} \quad (2.34)$$

avec  $\Delta x = x_{av} - x_\mu$  et  $Z_{term}$  l'impédance de sortie du SKT.

Pour une terminaison fermée,

$$Z_{term} = 1/10^{-15}; \quad (2.35)$$

pour un terminaison anéchoïque,

$$Z_{term} = Z_{c0} = \rho c_0 / S_t; \quad (2.36)$$

pour une terminaison ouverte,

$$Z_{term} = Z_{c0} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{z}{j} R_t / c_0 \right)^2 + j \left( \frac{8}{3\pi} \right) \left( \frac{z}{j} R_t / c_0 \right) \right). \quad (2.37)$$

La relation de débit à la jonction donnée par (2.4) permet de faire apparaître l'impédance  $Z_1 = P/Q_1$  comme

$$Q_3 = T_2(x_\mu)P_\mu - \frac{1}{Z_1}P. \quad (2.38)$$

De la même manière que pour  $Z_\mu$ , l'impédance  $Z_1$  est vue comme l'impédance ramenée de  $x_{ar}$  à 0 et définie comme

$$Z_1(z) = \frac{Z_v(z) \tanh(jk_v x_{ar}) + Z_{ar}}{1 + Z_v(z)^{-1} \tanh(jk_v x_{ar}) Z_{ar}} \quad (2.39)$$

où  $Z_{ar} = 1/10^{-15}$  est l'impédance d'une terminaison fermée.

Le débit  $Q_3$  est relié à la vitesse de la membrane du haut-parleur  $V$  par

$$Q_3 = S_d V. \quad (2.40)$$

L'équation (2.38) peut alors s'écrire

$$V = \frac{1}{S_d} \left( T_2(x_\mu) - \frac{1}{Z_1} T_1(x_\mu) \right) P_\mu \quad (2.41)$$

En combinant les équations (2.23), (2.30) et (2.41), le modèle du Short Kundt Tube avec source s'écrit

$$\frac{P_\mu(x_\mu)}{U} = - \frac{BlZ_e^{-1}}{\frac{Z_{HP}}{S_d} T_2(x_\mu) + \left( S_d - \frac{Z_{HP} Z_1^{-1}}{S_d} \right) T_1(x_\mu)}. \quad (2.42)$$

Ce modèle est donc dépendant de nombreux paramètres expérimentaux :

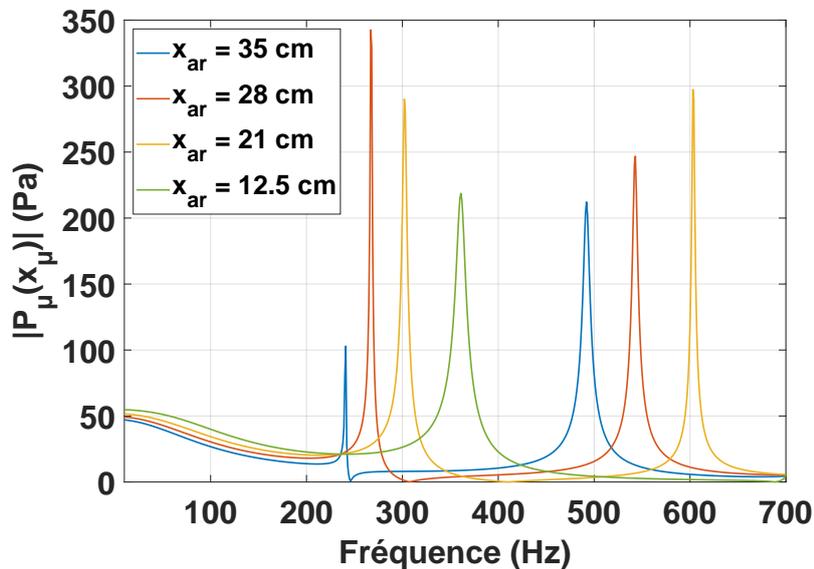
---

- la position du microphone  $x_\mu$ , influant sur la mesure de la pression  $P_\mu$  et sur les grandeurs découlant de la matrice de transfert (2.24) de  $x_\mu$  vers l'abscisse de l'absorbeur  $x_{av}$
- les paramètres du haut-parleur constituant la source, ainsi que de l'encoffrement dans lequel il est placé, modifiant l'impédance du haut-parleur  $Z_{HP}$
- le milieu de propagation, la géométrie du SKT (notamment la longueur du tube arrière  $x_{ar}$ ) et la terminaison étudiée, jouant sur l'impédance  $Z_1$ .

Tous ces paramètres sont donc à mesurer afin d'estimer au mieux les paramètres régissant le modèle de la source.

### 2.2.5. Influence de la longueur du tube arrière du SKT

Une simulation a été réalisée pour étudier l'influence de la longueur du tube arrière du SKT. Les paramètres nominaux correspondant au montage SKT sont utilisés pour cette étude avec différentes valeurs de la longueur du tube arrière  $x_{ar}$ . La Figure 2.6 représente l'amplitude des pressions mesurées à la position du microphone, en fonction de la longueur du tube arrière du SKT, pour une section avant du SKT fermée. Initialement, le SKT était conçu de façon symétrique (avec  $x_{ar} = x_{av} = 35$  cm), pour une gamme de fréquence [10; 200] Hz. Or nous avons choisi d'augmenter la plage en fréquences jusqu'à 700 Hz et en gardant cette configuration, des résonances du tube apparaissaient dans notre gamme d'étude. En raccourcissant la longueur du tube arrière, ces résonances se décalent vers les hautes fréquences, jusqu'à devenir supérieures à 700 Hz pour un tube arrière d'une longueur  $x_{ar} = 12.5$  cm. La géométrie du SKT a donc été modifiée : le tube arrière du SKT a été raccourci en ajoutant un bouchon étanche d'un diamètre égal à celui du SKT, à une distance de 12.5 cm de l'abscisse de la source.



**Figure 2.6** – Influence de la longueur du tube arrière du SKT sur la pression mesurée au microphone en fonction de la fréquence estimée grâce au modèle analytique de la source

### 2.2.6. Relation avec le modèle électro-acoustique de la source

Comme présenté dans [31], le système couplé SKT+DUT peut être représenté comme un modèle électro-acoustique, représenté en Figure 3.1.(b). La source est caractérisée par sa fonction de transfert  $H_{ae}$  entre son débit volumique  $Q$  et la tension de contrôle  $U$  et son impédance acoustique  $Z_S$ . La fonction de transfert  $H_m$  entre la pression mesurée au microphone  $P_\mu$  et la tension de contrôle  $U$  est définie par

$$H_m = \frac{P_\mu(x_\mu)}{U} = \frac{Z_S Z_\mu}{Z_S + Z_\mu} H_{ae}. \quad (2.43)$$

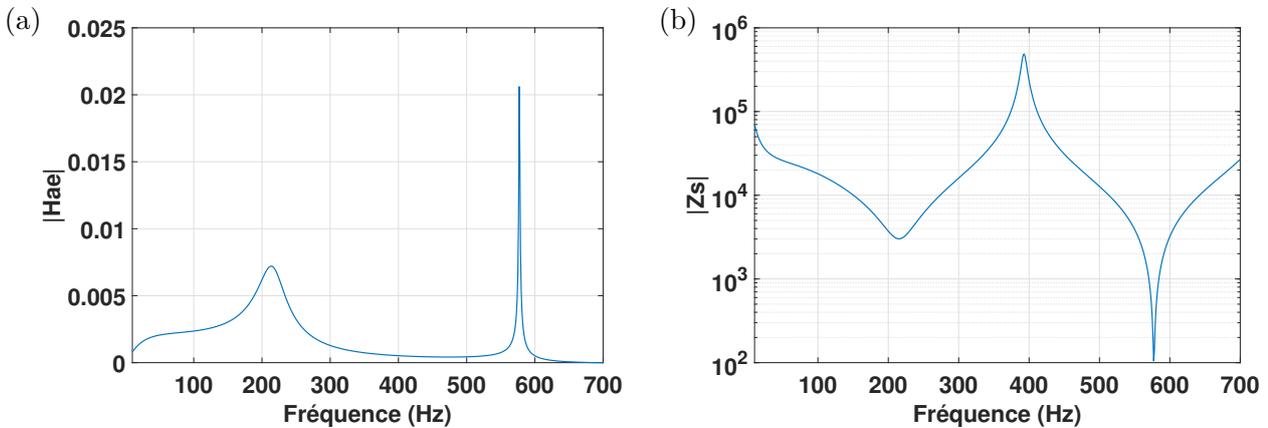
Par identification des équations (2.42) et (2.43), les grandeurs caractérisant la source du SKT sont obtenues par

$$H_{ae} = - \frac{BlZ_e^{-1}}{Z_{HP} (T_{22}(x_\mu) - Z_1^{-1}T_{12}(x_\mu)) + S_d^2 T_{12}(x_\mu)} \quad (2.44)$$

$$Z_S = \frac{Z_{HP} (T_{22}(x_\mu) - Z_1^{-1}T_{12}(x_\mu)) + S_d^2 T_{12}(x_\mu)}{Z_{HP} (T_{21}(x_\mu) - Z_1^{-1}T_{11}(x_\mu)) + S_d^2 T_{11}(x_\mu)} \quad (2.45)$$

Les paramètres de la source  $H_{ae}$  et  $Z_S$  ne dépendent pas de la mesure de la pression  $P_\mu$  et de la tension de contrôle  $U$ . Ils dépendent de la position du microphone  $x_\mu$ , de l'impédance du haut-parleur constituant la source (c'est-à-dire des paramètres du haut-parleur et de l'encoffrement dans lequel il se trouve), de la géométrie du SKT et de la terminaison étudiée.

La Figure 2.7 représente l'estimation des modules de  $H_{ae}$  et  $Z_S$  en fonction de la fréquence.  $|H_{ae}|$  reflète l'énergie apportée au système sur toute la plage de fréquence.  $H_{ae}$  et  $Z_S$  ne présentent pas de valeur nulle sur une gamme de fréquence allant de 0 à 570 Hz. Leurs réponses sont relativement lisses, hormis deux résonances à 215 Hz et 577 Hz, dues à la géométrie du banc de mesure. Ces particularités sont également visibles sur les anti-résonances de  $|Z_S|$  à ces mêmes fréquences. Le minima de  $|Z_S|$  à 577 Hz tend vers 0 et entrainera des erreurs de calcul lors de l'estimation des caractéristiques des absorbeurs. Nous souhaitons nous limiter à une bande de fréquences continues donc nous nous contenterons d'une étude sur [10; 500] Hz.



**Figure 2.7** – Estimation des caractéristiques de la source  $H_{ae}$  et  $Z_S$  grâce au modèle linéaire du SKT en fonction de la fréquence

## 2.3. Charges acoustiques testées

### 2.3.1. Membrane de haut-parleur agissant comme NES

Nous avons vu dans la Section 1.2.3 qu'une membrane visco-élastique était un NES efficace mais qu'elle présentait certaines limitations (pas d'ajustement possible pendant le fonctionnement par exemple). Afin de palier à cela, il a été développé dans [5] un NES utilisant une membrane de haut-parleur, représenté en Figure 2.8. Il s'agit d'une membrane de haut-parleur de 0,017 kg et de 0,0254 m<sup>2</sup> pour laquelle l'entourage a été remplacé par un anneau en polymère faiblement étiré. Le moteur du haut-parleur a été retiré de façon à obtenir un seuil de pompage bas. Ce NES présente un comportement élastique non linéaire fort, une faible rigidité linéaire, une masse limitée et un faible amortissement. Le tout permet une large plage de réglages lors de l'adaptation du NES aux conditions expérimentales.



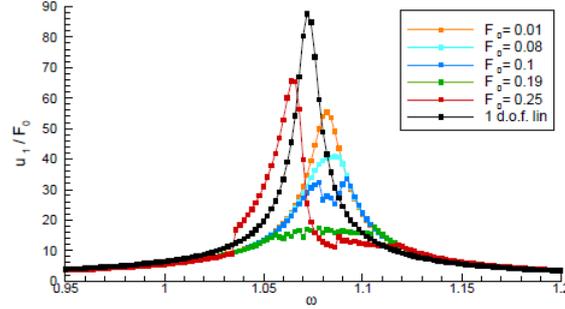
**Figure 2.8** – Membrane de haut-parleur agissant comme NES

Le comportement de cet absorbeur est régi par

$$m_l \ddot{u}(t) + c_l \dot{u}(t) + \sum_{i=1}^{Nh} k_i u(t)^i = S_{hp} p(t) \quad (2.46)$$

avec  $u(t)$  le déplacement de la masse mobile du NES,  $p(t)$  la pression acoustique mesurée dans le tube,  $m_l$  la masse du NES et  $c_l$  son amortissement,  $S_{hp}$  la section équivalente de la membrane du haut-parleur,  $k_i$  les termes de raideur non linéaire d'ordre  $i$ .

Des simulations numériques extraites de [5] permettent de mettre en évidence la présence d'un plateau de pompage similaire à celui du NES membrane. La Figure 2.9 présente l'amplitude de la réponse en fréquence d'un système non linéaire divisée par un forçage  $F_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ . Lorsque le système n'est pas soumis au forçage (courbe noire), le pompage n'a pas lieu et l'énergie reste localisée dans le système linéaire. On observe alors une réponse en fréquence caractéristique d'un système linéaire. Lorsque le niveau de forçage augmente, l'énergie est dissipée dans le système non linéaire et le phénomène de pompage apparaît sur une plage de fréquence augmentant avec le niveau (courbes orange à verte). L'absorption optimale se fait ici pour un forçage  $F_0 = 0,19$  où le pic de résonance est totalement écrêté. Au delà d'une valeur seuil de  $F_0$ , le pompage n'a de nouveau plus lieu et le système primaire présente un pic de résonance à une fréquence inférieure à la fréquence de résonance du système (courbe rouge).



**Figure 2.9** – (a) Réponse en fréquence d'un système non linéaire sans pompage (courbe noire), lors d'une absorption optimale (courbe verte) [5]

Lorsque le NES membrane est connecté au SKT, il est possible de visualiser la présence d'harmoniques grâce à une analyse temps-fréquence. Une représentation en spectrogramme des mesures est appliquée à la pression  $p(t)$  mesurée au microphone. Il s'agit d'une représentation graphique de la transformé de Fourier à court terme (TFCT), définie comme

$$S_p(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(u)h(u-t)e^{-2if(u-t)} \quad (2.47)$$

avec  $h(t)$  la fonction de fenêtrage, généralement une fenêtre gaussienne centrée autour de 0. Le spectrogramme est défini comme le module au carré de la TFCT,  $|S_x(t, f)|^2$ .

La Figure 2.10 illustre la présence d'harmoniques dans le signal mesuré  $p(t)$ , tracé en fonction de la fréquence d'acquisition et de la fréquence instantanée. Pour chaque amplitude d'excitation, la fondamentale prédomine. Plus l'amplitude d'excitation augmente, plus la présence d'harmoniques dans le signal est notable. En effet, pour un niveau  $A = 0.1$ , trois harmoniques sont visibles, contre une quinzaine pour  $A = 1$ . Ceci traduit le fort caractère non linéaire de cet absorbeur. Malgré le caractère symétrique de la membrane, les harmoniques paires et impaires ont une influence et devront donc être prises en compte. Il sera judicieux par la suite d'étudier au moins les sept premières harmoniques, qui semblent très énergétiques.

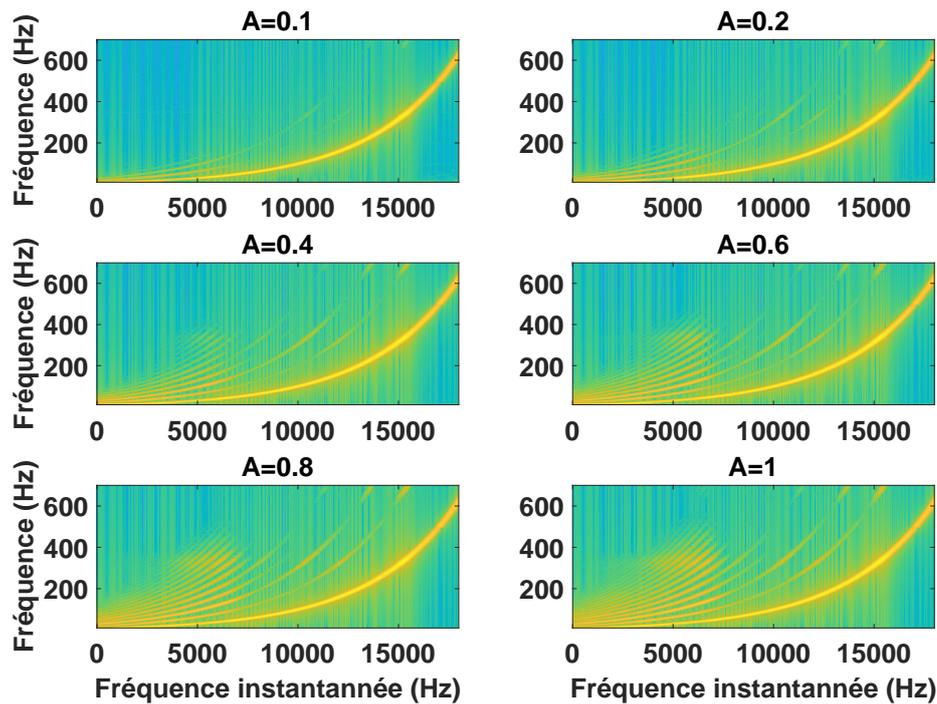
### 2.3.2. Membranes nanofibreuses

Une collaboration avec T. Ulrich de l'Institute for Nanomaterials, Advanced Technologies and Innovations de Liberec a été mise en place pour caractériser des membranes nanofibreuses. Elles sont constituées de nanofibres d'alcool polyvinylique PAV de petit diamètre déposées sur une couche de substrat (tissé ou non). Le détail de la composition des membranes est présenté dans [10].

Leur finesse et leur légèreté ont vocation à obtenir une capacité d'absorption plus importante que les absorbeurs membranes classiques. À basses fréquences, la présence de fibres et une porosité élevée engendrent des nombreuses pertes visqueuses entraînant de la dissipation de l'énergie acoustique. Ces pertes sont notamment dues aux différents frottements (entre fibres, entre la membrane et l'air ou entre les différentes couches composant la membrane) [10], à la diffusion des fibres ou à leur vibration.

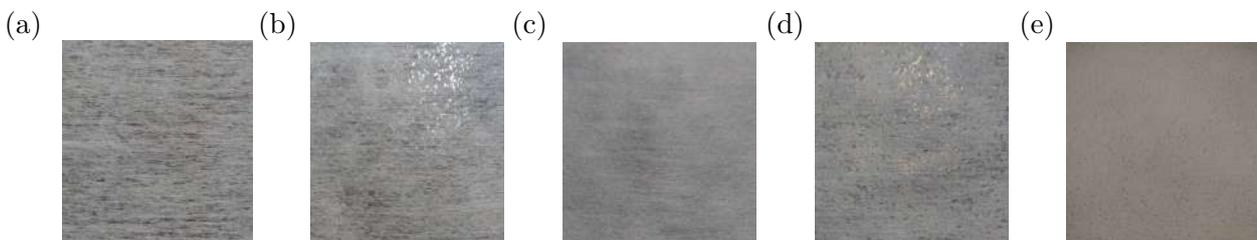
Nous avons à notre disposition cinq échantillons différents :

- Un substrat non tissé en Figure 2.11.(a)



**Figure 2.10** – Représentation temps-fréquence de la pression mesurée  $p(t)$  dans le tube pour différents niveaux d’excitation, en fonction de la fréquence et de la fréquence instantannée

- Un substrat non tissé et une couche d’adhésif en Figure 2.11.(b)
- Une membrane constituée d’une couche de substrat et de nanofibres de PAV dosées à  $0.2 \text{ g/m}^2$  en Figure 2.11.(c)
- Une membrane constituée d’une couche de substrat, d’adhésif et de nanofibres de PAV dosées à  $0.25 \text{ g/m}^2$  en Figure 2.11.(d)
- Une membrane constituée d’une couche de substrat, d’un adhésif et de nanofibres de PAV dosées à  $2 \text{ g/m}^2$  en Figure 2.11.(e)

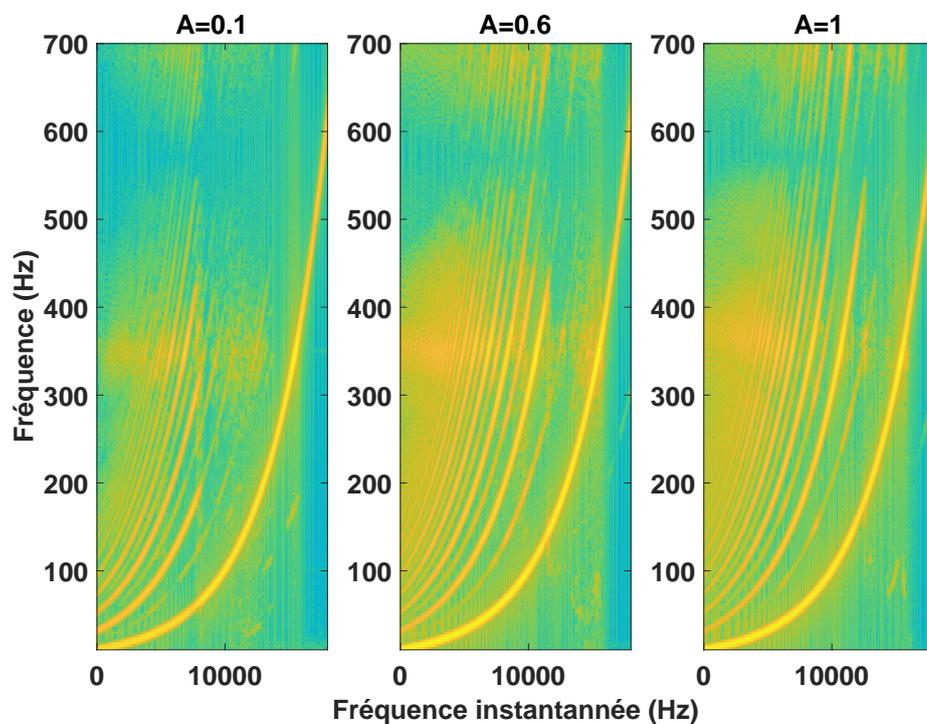


**Figure 2.11** – Photographie des échantillons de (a) substrat ; (b) substrat et adhésif ; (c) substrat et nanofibres dosées à  $0.2 \text{ g/m}^2$  ; (d) substrat, adhésif et nanofibres de PAV dosées à  $0.25 \text{ g/m}^2$  ; (e) substrat, adhésif et nanofibres de PAV dosées à  $2 \text{ g/m}^2$

Les échantillons {substrat} et {substrat + adhésif} constituent les couchent pouvant servir de support aux nanofibres. Ils n’ont pas pour but d’absorber une onde sonore et servent de référence. Ils ne seront donc pas étudiés en détail dans ce manuscrit.

De la même manière que pour la membrane de haut-parleur, il est possible de visualiser la présence d’harmoniques dans le système grâce une représentation en spectrogramme. Il est présenté en Figure 2.12 le spectrogramme de la membrane {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$  }. Cet échantillon est beaucoup plus non linéaire que la membrane de haut-parleur. En

effet, pour une amplitude d'excitation  $A = 0.1$ , de nombreuses harmoniques sont déjà visibles. La fondamentale de la pression est prédominante et les harmoniques paires sont légèrement plus faibles que les harmoniques impaires. Les membranes {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } et {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } présentent le même comportement. Par la suite, le comportement de ces absorbeurs sera étudié sur les sept premières harmoniques.



**Figure 2.12** – Représentation temps-fréquence de la pression mesurée  $p(t)$  dans le tube pour différents niveaux d'excitation, en fonction de la fréquence et de la fréquence instantannée

## En résumé

Le Short Kundt Tube [15, 31], excité par un sinus ou un sweep [27, 28], permet de caractériser des absorbeurs acoustiques non linéaires. Une pression seuil a été établie à  $2 \times 10^{-2}$  Pa grâce à une mesure du bruit de fond. Tous les résultats obtenus à partir d'une pression mesurée inférieure à cette valeur ne seront donc pas exploitables.

La modélisation de la source du SKT [32] a permis de redimensionner le banc de mesure : conçu initialement de façon symétrique sur une plage de fréquence allant de 10 à 200 Hz, sa géométrie ne permettait pas d'augmenter sa plage de fonctionnement. Des résonances internes étaient présentes et pouvaient fausser les estimations découlant de ces mesures. Une étude de la longueur du tube arrière a été réalisée : en raccourcissant ce même tube jusqu'à 0.125 cm, les résonances du tube ont été décalées au delà de notre gamme d'étude.

Cette même modélisation a permis d'obtenir une estimation théorique des paramètres de la source à savoir l'impédance et la fonction de transfert entre la pression mesurée et la tension de contrôle. La présence d'une résonance du système sur ces deux estimateurs a permis d'affiner la plage en fréquences sur laquelle les résultats ne seraient pas impactés par la géométrie du banc de mesure : ce SKT modifié est utilisable sur la plage fréquentielle [10; 500] Hz.

Différents absorbeurs non linéaires seront testés sur le SKT : une membrane de haut-parleur agissant comme NES [5] et différentes membranes nano-fibreuses [10].



# 3

## CARACTÉRISATION PAR LINÉARISATION DE L'IMPÉDANCE

---

En s'appuyant sur les travaux réalisés dans [15], une première caractérisation d'absorbeurs non linéaires peut être effectuée grâce à une méthode par linéarisation de l'impédance. À partir des mesures de la pression et de la tension appliquée à la source du SKT, et après un étalonnage de cette source, cette technique d'identification permet d'obtenir une première idée du comportement de charges acoustiques. On parle alors d'estimateurs apparents tels que l'impédance apparente  $Z_T$  et le coefficient de réflexion apparent  $R_T$ . Cette méthode déjà existante [15] a ici été adaptée à une excitation en sinus balayé synchronisé au lieu d'une excitation de type bruit blanc fenêtré. L'utilisation initiale d'une excitation large bande ne permet pas de distinguer dans la réponse les contributions dues à la fondamentale et celles dues aux harmoniques. Au contraire, l'excitation par sinus balayé synchronisé permet de ne prendre en compte que la composante fondamentale des signaux mesurés sans perturbation par les harmoniques en cas d'une présence de non-linéarités dans le système. Cette méthode est appliquée expérimentalement à une membrane de haut-parleur agissant comme NES et aux différentes membrane nanofibreuses.

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Principe de la méthode [15]</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>3.2</b>	<b>Étalonnage de la source</b> . . . . .	<b>49</b>
3.2.1	Détermination expérimentale des paramètres de la source . . . . .	49
3.2.2	Comparaison avec le modèle de la source . . . . .	52
<b>3.3</b>	<b>Applications aux absorbeurs</b> . . . . .	<b>53</b>
3.3.1	Membrane de haut-parleur . . . . .	53
3.3.2	Membranes nanofibreuses . . . . .	56

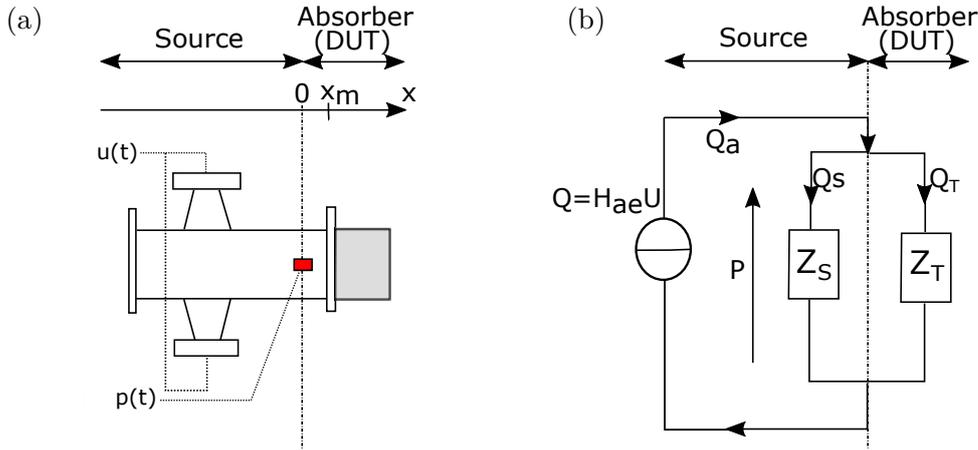
---

### 3.1. Principe de la méthode [15]

La caractérisation par linéarisation de l'impédance repose sur la méthode décrite dans la Section 1.6.1 et tirée de [15]. Comme présenté par Chauvin et al dans cet article, le dispositif expérimental est composé d'un absorber connecté à un tube de Kundt court, présenté en Section 2.1.1, à l'intérieur duquel se trouve un microphone mesurant une pression  $p(t)$ . Pour rappel, le schéma de ce dispositif est représenté en Figure 3.1.(a).

On suppose que l'absorber non linéaire à analyser est caractérisé par l'impédance dite équivalente  $Z_T(f)$  correspondant à une approximation linéaire de la relation entre la pression et le débit volumique.

La partie source du tube de Kundt court (linéaire et invariante dans le temps) peut être caractérisée par l'équivalence électroacoustique représentée pour rappel en Figure 3.1.(b). Dans le domaine fréquentiel, elle est donc définie par sa fonction de transfert  $H_{ae}(f)$  entre son débit volumique  $Q_a(f)$  et la tension de contrôle  $U(f)$  définie par l'équation (1.76), et son impédance  $Z_S(f)$  reliant la pression acoustique  $P(f)$  mesurée au microphone et le débit volumique  $Q_S(f)$  où  $Q_a(f) = Q_S(f) + Q_T(f)$  avec  $Q_T(f)$  la fraction du débit volumique vue par l'absorber.



**Figure 3.1** – (a) Schéma du dispositif expérimental. (b) Équivalence électro-acoustique du système.

L'absorber étudié est caractérisé par son impédance apparente  $Z_T$  et son coefficient de réflexion apparent  $R_T$ , définis respectivement par (1.79) et (1.80) comme

$$Z_T(f) = \frac{H_m(f)Z_S(f)}{H_{ae}(f)Z_S(f) - H_m(f)}$$

$$R_T(f) = \frac{H_m(f)Z_S(f) - Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f))}{H_m(f)Z_S(f) + Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f))}$$

avec  $H_m(f)$  la fonction de transfert entre la pression  $P(f)$  et la tension de contrôle  $U(f)$  définie par (1.78),  $Z_c = \rho c/S$  l'impédance caractéristique avec  $\rho$  la densité de l'air,  $c$  la célérité du son dans l'air et  $S$  la section du tube.

Ainsi connaissant  $H_{ae}$  et  $Z_S$ , une mesure de  $H_m$  fournit une estimation de  $Z_T$  et de  $R_T$ .

Au préalable, l'étalonnage de la source doit être réalisé afin d'obtenir une estimation des fonctions  $H_{ae}$  et  $Z_S$  à partir de terminaisons connues. La méthode d'optimisation est présentée en Section 1.6.1.

## 3.2. Étalonnage de la source

### 3.2.1. Détermination expérimentale des paramètres de la source

L'étape d'étalonnage de la source est développée dans [15]. Elle consiste à déterminer la fonction de transfert  $H_{ae}(f)$  et l'impédance de la source  $Z_S(f)$  grâce à la mesure de la fonction de transfert  $H_m(f)$  pour différentes terminaisons connues.

Il a été choisi ici sept terminaisons dont les dimensions ont été recensées dans le Tableau 3.1. Les expressions des impédances analytiques sont disponibles en Annexe A de [15].

Nom	Longueur L (m)	Terminaison
Court-Ouvert (CO)	0	Ouverte
Long-Ouvert (LO)	0.8	Ouverte
Moyen-Fermé (MF)	0.403	PVC
Court-Fermé (CF)	0	PVC
Long-Fermé (LF)	0.8	PVC
Diaphragme-Fermé (DF)	0.314	Bois
Diaphragme- Ouvert (DO)	0.314	Bois ( $R_{DO} = 0.03$ m)

**Tableau 3.1** – Caractéristiques des terminaisons connues

Initialement réalisée avec une excitation en bruit blanc [15], cette méthode a été adaptée ici à une excitation sinus balayée synchronisé

$$u(t) = A \sin \left( 2\pi f_1 e^{t/L} \right) \quad (3.1)$$

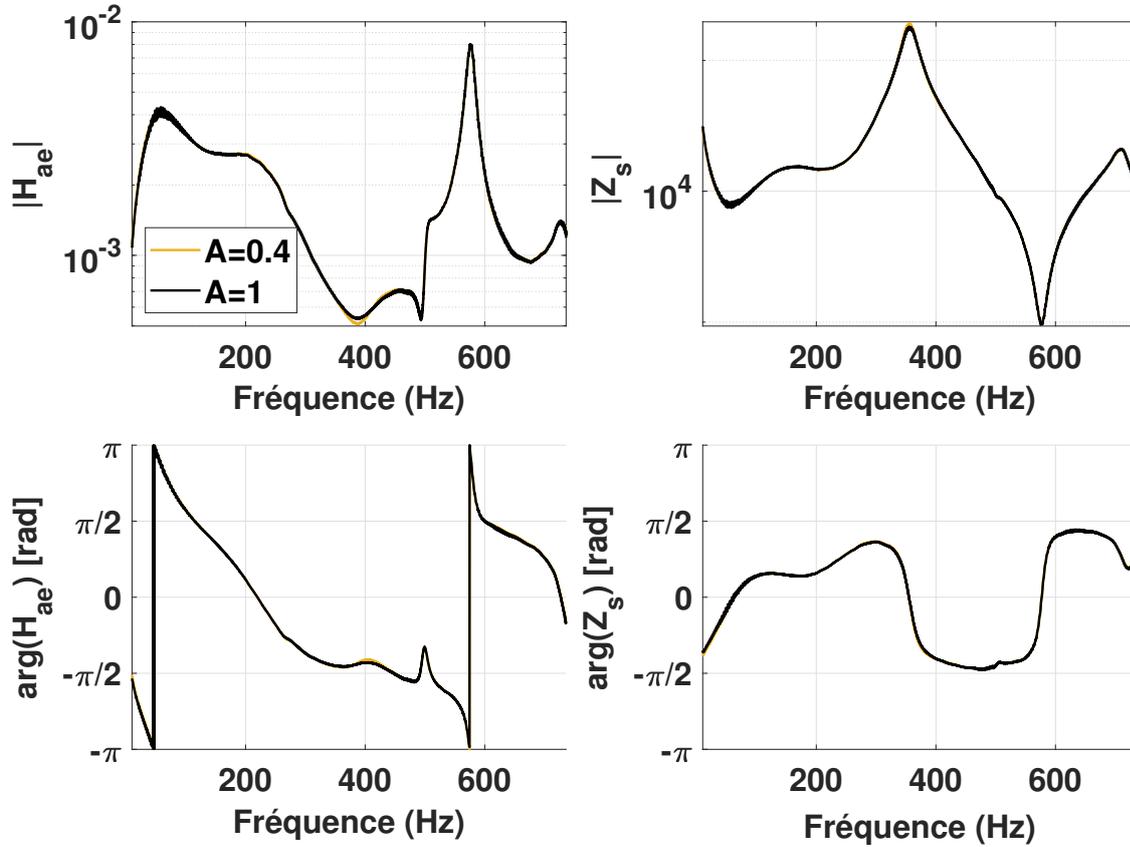
avec  $L = \frac{1}{f_1} \text{round} \left( \frac{\bar{T} f_1}{\ln \left( \frac{f_2}{f_1} \right)} \right)$ , d'une durée  $\bar{T} = 16$  s et pour une fréquence d'échantillonnage de 48000 Hz. La plage en fréquences d'excitation est comprise entre  $f_1 = 10$  Hz, la limite basse de la réponse en fréquence du microphone de mesure, et  $f_2 = 700$  Hz, fréquence au delà de laquelle des nœuds de pression apparaissent dans le tube. L'amplificateur de puissance génère une tension de commande  $U_{com}$ , dont la valeur efficace est donnée par l'afficheur de l'appareil. Chaque amplitude d'excitation  $A$  appliquée au signal d'excitation  $u(t)$  équivaut à une tension de commande  $U_{com}$  générée par l'amplificateur de puissance. L'équivalence entre ces deux grandeurs est donnée dans le Tableau 3.2. Il est à noter que l'amplitude d'excitation minimale  $A = 0.1$  a été choisie de façon à mesurer une pression au microphone supérieure à la pression seuil définie par (2.3).

<b>A</b>	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
<b><math>U_{com}</math>(V)</b>	0.7	1.3	2.6	3.9	5.2	6.5

**Tableau 3.2** – Équivalence entre les amplitudes  $A$  du signal d'excitation et les tensions de commande  $U_{com}$

La fonction de transfert  $H_m(f)$  est calculée pour chaque terminaison comme le rapport entre les transformées de Fourier de la pression mesurée au microphone  $p(t)$  (enregistrée sur la voie 2 du convertisseur A/N) et de la tension de commande  $u(t)$  (enregistrée sur la voie 3 du convertisseur

$A/N$ ). Le problème de minimisation défini par les équations (1.82) et (1.83) est alors résolu et les estimations de  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  sont représentées en Figure 3.2.



**Figure 3.2** – Evolution des coefficients  $H_{ae}$  et  $Z_s$  en fonction de la fréquence et du niveau d'excitation.

Deux zones se distinguent sur ces courbes :

- Sur la gamme de fréquence  $[10; 300]$  Hz, les résultats de  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  présentent un comportement lisse et à variation lente. La caractérisation des absorbeurs ne sera donc pas impactée par des résonances de la source sur cette plage de fréquences.
- Au delà de 300 Hz, une première résonance est visible sur  $|Z_S(f)|$  à  $f = 355$  Hz, associée à une rotation de phase sur  $arg(Z_S(f))$ . Une seconde résonance de la source est visible sur  $|H_{ae}(f)|$  à  $f = 577$  Hz, correspondant à une anti-résonance sur  $Z_S(f)$ . Elle est associée à des rotations de phase sur  $arg(H_{ae}(f))$  et  $arg(Z_S(f))$  à la même fréquence. La présence de résonances de la source peut entraîner des erreurs sur les calculs résultant de l'estimation de  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$ .
- Pour deux niveaux d'excitation différents, les estimations des fonctions  $H_{ae}$  et  $Z_S(f)$  sont très proches, confirmant l'hypothèse de linéarité de la source.

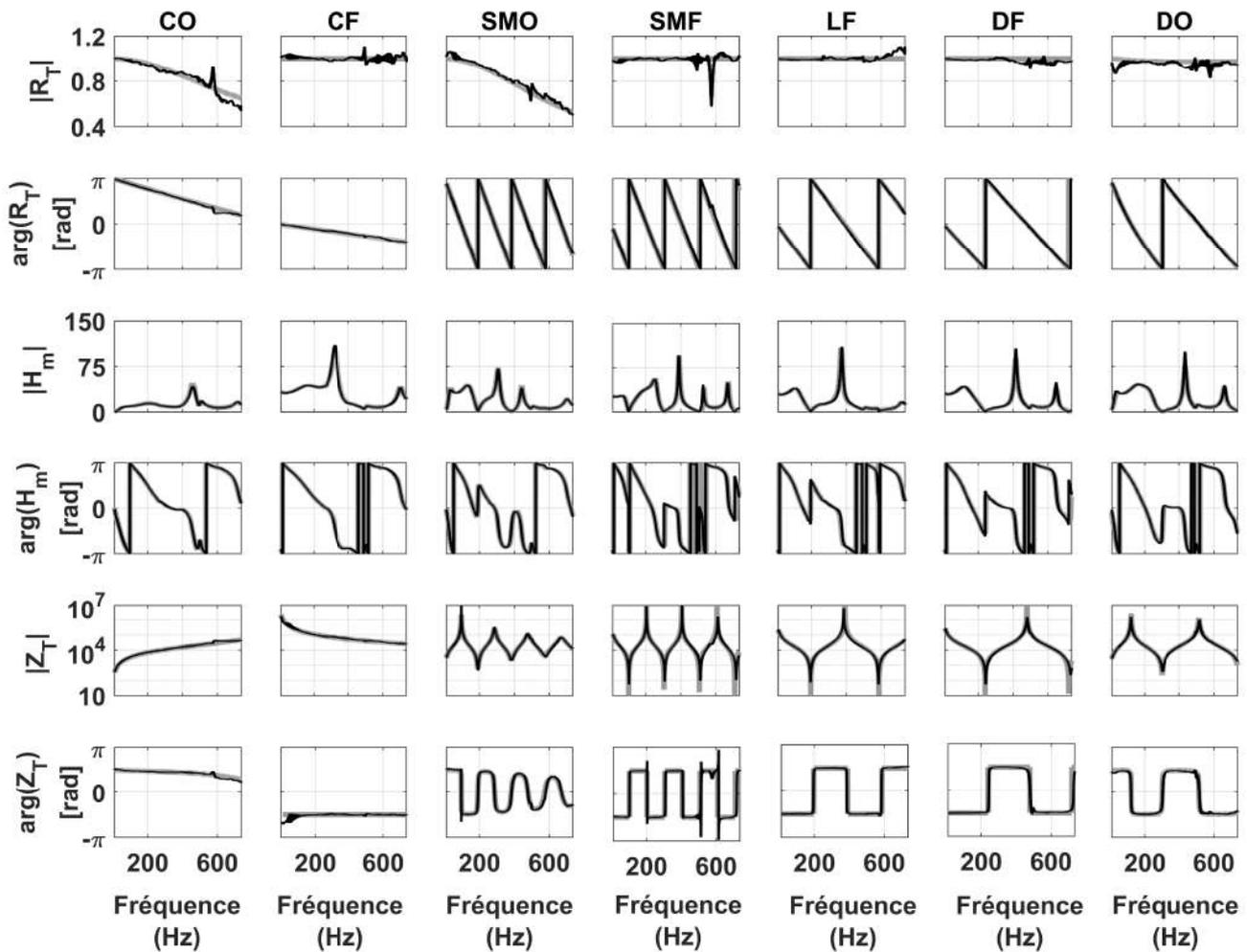
Le couple  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  obtenu permet d'estimer les coefficients  $R_T(f)$  et  $Z_T(f)$  pour chaque terminaison connue, de façon à valider nos estimations.

La Figure 3.3 présente pour chaque charge connue la comparaison entre les données théoriques et expérimentales de  $R_T(f)$ ,  $H_m(f)$  et  $Z_T(f)$ , en module et en phase. Les coefficients de réflexion  $R_T(f)$  mesurés sont comparés aux coefficients théoriques, obtenus par l'équation  $R_T(f) = \frac{Z_{th}(f) - Z_c(f)}{Z_{th}(f) + Z_c(f)}$  avec  $Z_{th}(f)$  l'impédance théorique des terminaisons connues. Les fonctions de transfert mesurées  $H_m(f)$  sont chacune comparée à la fonction de transfert reconstruite à

partir de l'équation (1.78), en utilisant les caractéristiques de la source  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  et leur impédance théorique respective. L'impédance mesurée  $Z_T(f)$  est comparée à l'impédance reconstruite à partir de (1.79) en utilisant les caractéristiques de la source  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  et la fonction de transfert mesurée  $H_m(f)$ .

Le problème de minimisation a été réalisé ici sur six terminaisons (Court-Ouvert, Long-Ouvert, Moyen-Fermé, Court-Fermé, Long-Fermé, Diaphragme-Fermé) et les données obtenues pour le Diaphragme-Ouvert sont reconstruites à partir des autres terminaisons et servent de validation.

Les courbes expérimentales de  $R_T(f)$ ,  $H_m(f)$  et  $Z_T(f)$  sont en accord avec les courbes théoriques, en module et en phase, et ce pour toutes les terminaisons connues. Les pics de résonance apparaissent aux mêmes fréquences, tout comme les rotations de phase et les amplitudes des différentes grandeurs sont identiques. La superposition des courbes sur la colonne caractérisant la terminaison Diaphragme-Ouvert permet de valider l'estimation des fonctions  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$  à partir du processus de minimisation à six terminaisons connues. Toutes ces observations permettent de conclure quant à la fiabilité du modèle obtenu et à la bonne estimation des caractéristiques de la source.



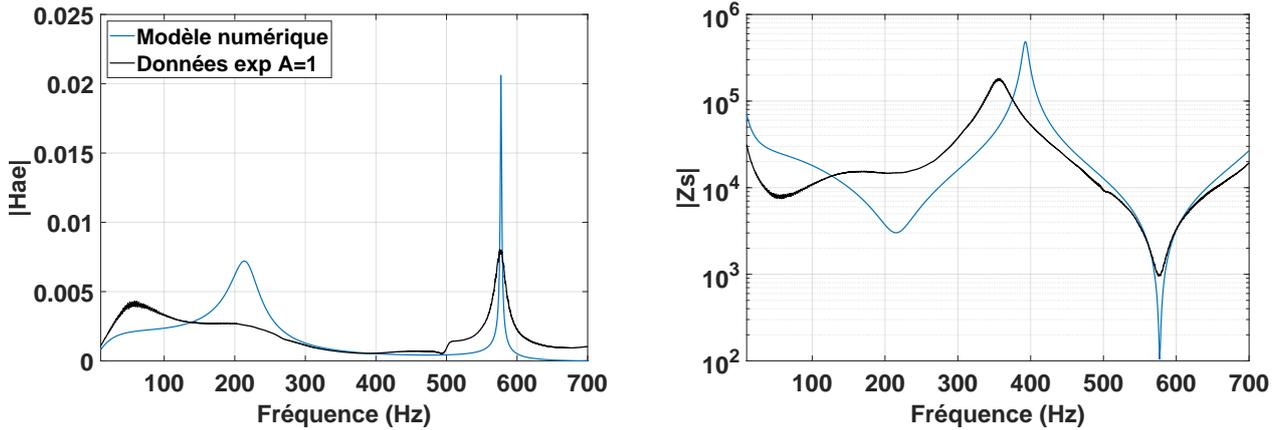
**Figure 3.3** – Estimation des coefficients  $h$ ,  $R_T$  et  $Z_T$  (-) pour chaque terminaison et comparaison avec la théorie (-)

### 3.2.2. Comparaison avec le modèle de la source

Grâce à la modélisation de la source présentée en Section 2.2.6, nous sommes à présent en mesure de comparer l'estimation des fonctions  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$ , obtenues numériquement et expérimentalement. Les résultats sont présentés en Figure 3.4. De nombreuses différences sont présentes entre les données expérimentales et numériques :

- À 52 Hz, un premier pic de résonance est visible sur la mesure expérimentale de  $|H_{ae}(f)|$  (et respectivement une anti-résonance sur  $|Z_S(f)|$ ) mais n'apparaît pas sur les données expérimentales. En augmentant numériquement le facteur de qualité électrique  $Q_e$  du haut-parleur constituant la source, cette résonance apparaît à la même fréquence. Cet écart est dû à une mauvaise modélisation de la source lors de l'estimation numérique de ses caractéristiques : un seul haut-parleur est modélisé, contre quatre constituant la source dans le dispositif expérimental. Cela influe donc sur l'estimation des fonctions  $H_{ae}$  et  $Z_S(f)$ .
- Un deuxième pic de résonance à 215 Hz est observé sur  $|H_{ae}(f)|$  fourni par le modèle, correspondant à une anti-résonance sur  $|Z_S(f)|$ . Ces pics sont bien présents sur les courbes expérimentales de ces deux grandeurs mais avec des amplitudes bien plus faibles.
- Un pic d'impédance est visible à 393 Hz sur la fonction  $|Z_S(f)|$  estimée par le modèle numérique. Sur les données numériques, ce même pic est visible à 355 Hz, soit 40 Hz plus bas. En augmentant numériquement le paramètre  $x_{av}$  définissant la longueur du tube avant du SKT, l'écart entre ces deux impédances diminue. Ces pics d'impédance sont donc liés à la géométrie du tube, et à des différences de longueurs effectives entre le modèle et l'expérimentation.
- Malgré toutes ces différences, le pic de résonance sur  $|H_{ae}(f)|$  (et l'anti-résonance sur  $|Z_S(f)|$ ) à 577 Hz est présent sur les courbes numériques et expérimentales mais avec des amplitudes différentes.

Le modèle numérique n'est donc pas en totale adéquation avec les résultats expérimentaux. Ces différences proviennent notamment du fait que le modèle numérique n'illustre pas exactement le banc de mesure expérimental. En effet, la modélisation numérique de la source n'est constituée que d'un seul haut-parleur, contre quatre expérimentalement. De plus, la modélisation de la jonction entre le haut-parleur et le tube présente quelques différences avec le dispositif expérimental. Numériquement, cette jonction est modélisée par une jonction en T, et expérimentalement, chaque haut-parleur est relié au tube par une pièce d'adaptation conique. Cette différence de géométrie influe sur le volume présent à l'avant de chaque haut-parleur et donc sur la propagation de l'onde sonore dans le tube.



**Figure 3.4** – Comparaison des estimations numériques et expérimentales de (a) la fonction de transfert  $|H_{ae}(f)|$  et de (b) l'impédance de la source  $|Z_S(f)|$ .

### 3.3. Applications aux absorbeurs

Une fois l'étalonnage de la source réalisée, la caractérisation par linéarisation de l'impédance est applicable à des terminaisons non linéaires. À partir de l'estimation de  $H_{ae}(f)$  et  $Z_S(f)$ , et de la mesure de la fonction de transfert  $H_m(f) = P(f)/U(f)$ , l'impédance  $Z_T(f)$  et le coefficient de réflexion  $R_T(f)$  sont obtenus respectivement par (1.79) et (1.80). Deux absorbeurs non linéaires sont analysés ici : une membrane de haut-parleur agissant comme NES [5] et des membranes nanofibreuses [10]. Ces deux absorbeurs ont été décrits dans les sections 2.3.1 et 2.3.2.

Les mesures ont été réalisées de la même manière que pour la caractérisation de la source, soit une excitation sinus balayé synchronisé d'une durée de 16 s, sur une gamme de fréquence allant de 10 Hz à 700 Hz et pour différents niveaux d'amplitude d'excitation. La répétabilité des mesures a été préalablement vérifiée.

#### 3.3.1. Membrane de haut-parleur

Avant toute chose, il est nécessaire de choisir comment la fonction de transfert  $H_m(f)$  va être définie. La Figure 3.5 représente l'estimation de la fonction de transfert  $H_m(f)$  de la membrane de haut-parleur, calculée à partir des transformées de Fourier de  $p(t)$  et  $u(t)$  comme

$$H_m(f) = \frac{\mathcal{F}(p(t))}{\mathcal{F}(u(t))} \quad (3.2)$$

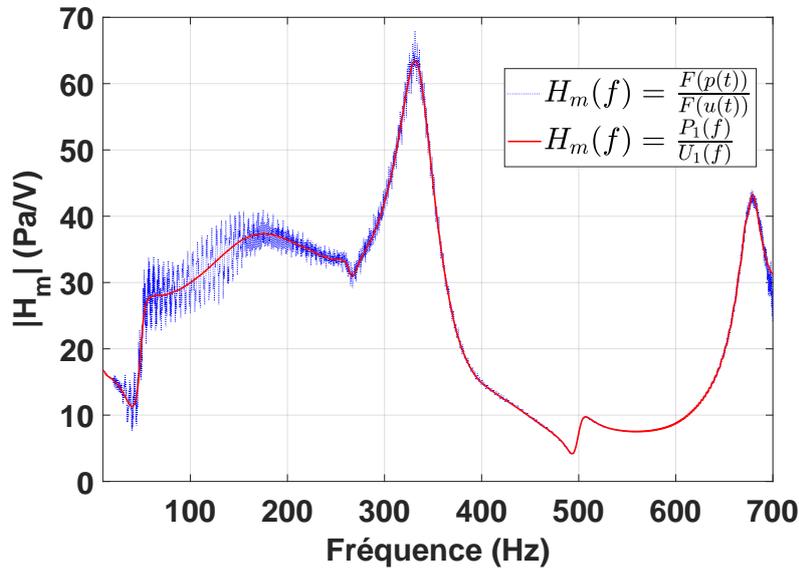
ou de la fondamentale seule

$$H_m(f) = \frac{P_1(f)}{U_1(f)}. \quad (3.3)$$

Les composantes fondamentales de la pression et de la tension de commande sont calculées comme présenté dans la Section 1.4.

Lorsque la fonction de transfert  $H_m(f)$  est calculée à partir des transformées de Fourier comme (3.2) (courbe bleue), l'estimation est très erratique et de nombreuses oscillations sont visibles à basses fréquences. Elles sont générées par les non-linéarités du système et peuvent perturber les résultats finaux. Il est donc préférable de ne prendre en compte que le terme fondamental de

la pression estimé par (3.3) (courbe rouge), qui permet une estimation plus lisse de la fonction de transfert, et ce pour chaque terminaison non linéaire testée.

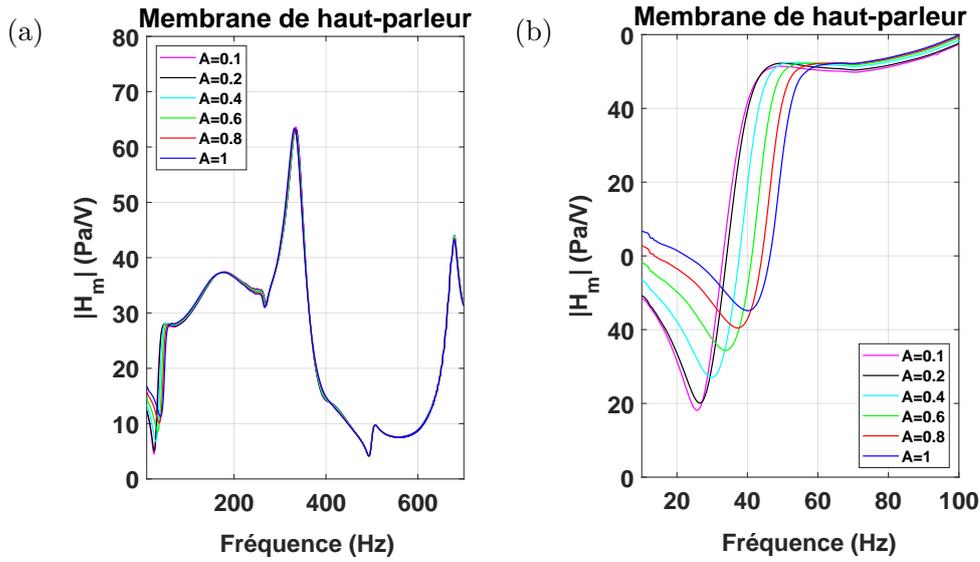


**Figure 3.5** – Estimation de la fonction de transfert  $H_m(f)$  de la membrane de haut-parleur, calculée à partir des harmoniques (-) ou de la fondamentale (-) de la pression.

La Figure 3.6.(a) illustre les fonctions de transfert  $H_m(f)$  de la membrane de haut-parleur pour différentes amplitudes d'excitation  $A$ . L'effet des non-linéarités est visible sur la gamme de fréquences [10; 100] Hz, où les pics de résonance se décalent vers les hautes fréquences à mesure que l'amplitude d'excitation augmente. Deux pics de résonance sont visibles à 330 Hz et 679 Hz, résultant des résonances de  $Z_S(f)$  autour de ces mêmes fréquences. Une anti-résonance est également présente à 493 Hz, résultant de l'anti-résonance de  $H_{ae}(f)$  à cette même fréquence. Par la suite, nous nous focaliserons sur des résultats allant jusqu'à 300 Hz, de façon à nous affranchir des erreurs dues à la caractérisation de la source.

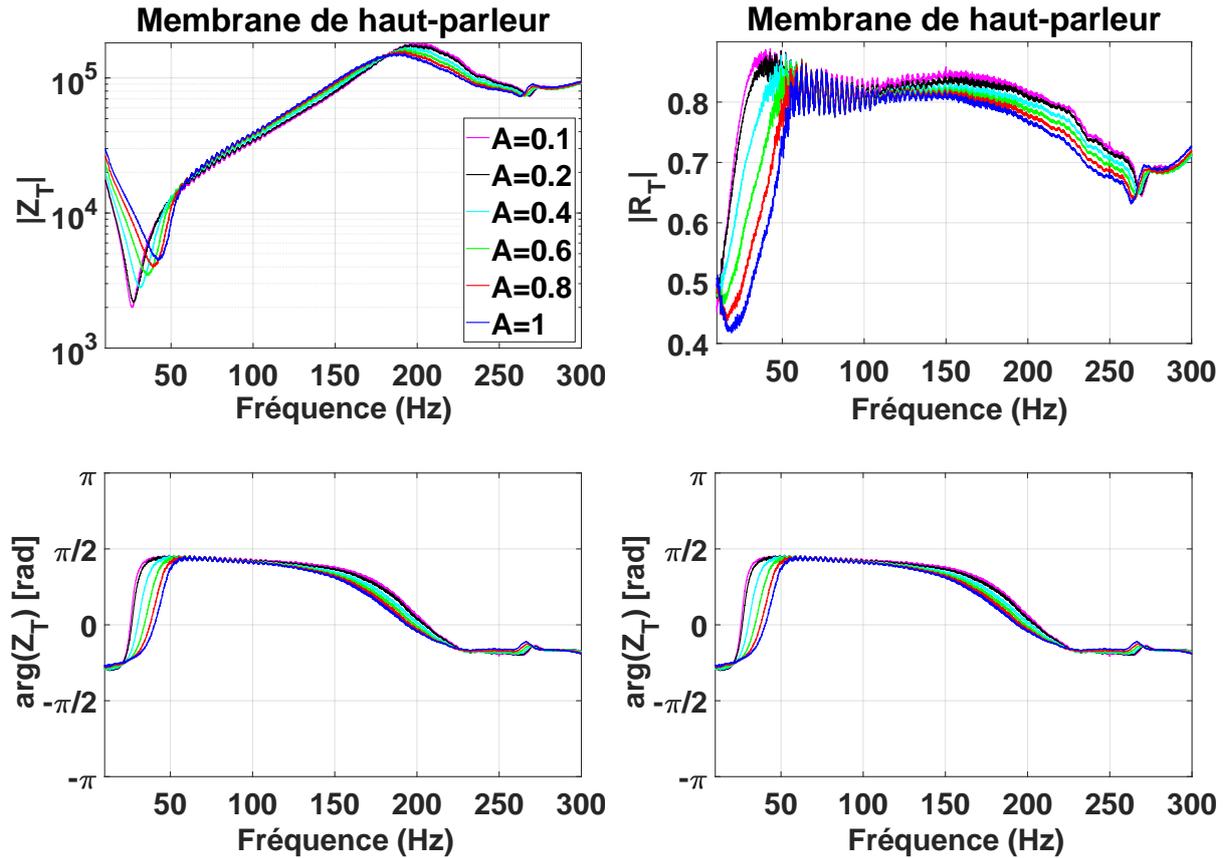
La Figure 3.6.(b) représente également  $H_m(f)$  sur une plage fréquentielle réduite de [10; 100] Hz où la non-linéarité est visible, pour différents niveaux d'excitation. Pour de faibles valeurs d'excitation, le système présente un comportement linéaire. Les fréquences de résonance sont constantes, de l'ordre de  $f = 25$  Hz pour les deux premiers niveaux. Lorsque le niveau d'excitation augmente, les fréquences de résonance se décalent vers les hautes fréquences : pour  $A = 0.4$ , la fréquence de résonance est de  $f = 30$  Hz, contre  $f = 41$  Hz pour une excitation  $A = 1$ . Cette translation de fréquence traduit le comportement non linéaire de l'absorbeur, ainsi que son caractère durcissant.

$H_m(f)$  étant connue, il est possible d'estimer l'impédance  $Z_T(f)$  et le coefficient de réflexion  $R_T(f)$  par les formules (1.79) et (1.80). Les résultats obtenus sont représentés en Figure 3.7 pour des fréquences allant jusqu'à 300 Hz et différents niveaux d'excitation. On remarque sur l'impédance le caractère durcissant du DUT avec la fréquence de résonance qui augmente nettement avec le niveau d'excitation. L'apparition d'un pic de résonance sur  $|Z_T(f)|$  engendre une rotation de phase sur  $\arg(Z_T(f))$ . Le coefficient de réflexion permet quant à lui de comparer la quantité d'énergie absorbée par l'absorbeur par rapport à une réflexion totale de l'énergie définie comme  $|R_T(f)|^2 = 1$ . L'énergie est ici extraite par l'absorbeur lors des anti-résonances de  $|R_T(f)|$  (et des rotations de phase sur  $\arg(R_T(f))$ ), sur une plage de fréquences qui s'élargit avec l'augmentation du niveau d'excitation. Seulement une partie de l'énergie est absorbée par le NES, une autre partie est rayonnée par de la face externe



**Figure 3.6** – Estimation de la fonction de transfert  $H_m(f)$  de la membrane de haut-parleur pour différents niveaux d'excitation (a) sur toute la plage de fréquences et (b) sur une plage fréquentielle réduite.

de la membrane ou convertie à différentes fréquences. Des oscillations sont visibles sur les estimations de ces courbes. Ce phénomène est dû au comportement non linéaire du DUT et à l'analyse globale en temps de la transformée de Fourier.



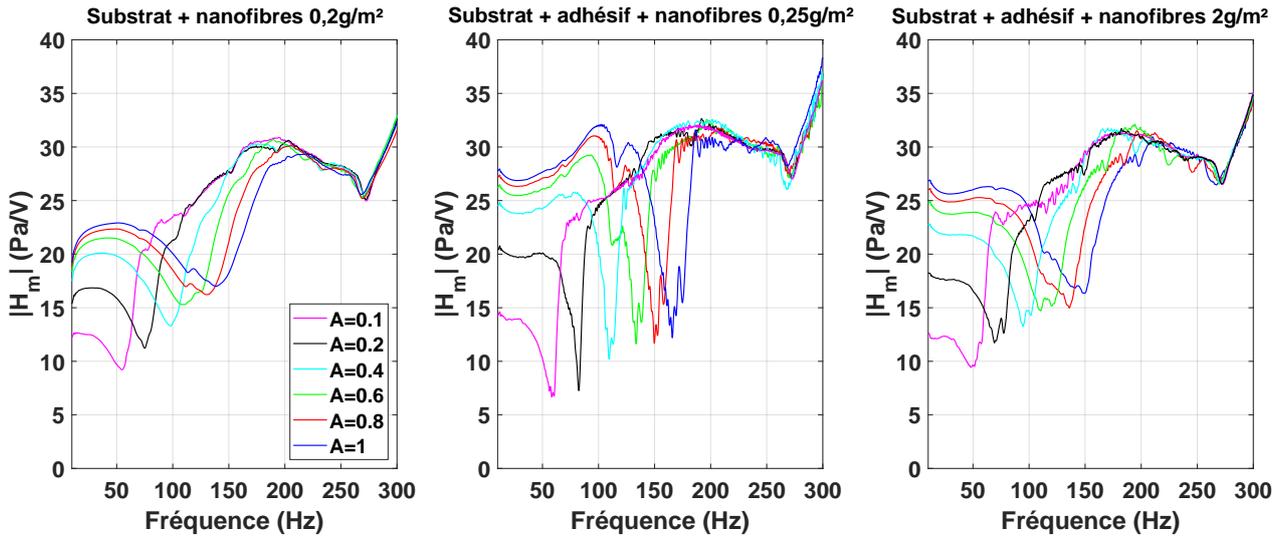
**Figure 3.7** – Estimation des modules de l'impédance  $|Z_T(f)|$  et du coefficient de réflexion  $|R_T(f)|$  de la membrane de haut-parleur pour différents niveaux d'excitation

### 3.3.2. Membranes nanofibreuses

De la même manière que pour la membrane de haut-parleur, nous allons chercher à obtenir une première caractérisation des membranes nanofibreuses en termes d'impédance apparente  $Z_T(f)$  ou de coefficient de réflexion apparent  $R_T(f)$ . Seuls les modules de ces grandeurs seront représentés. Il ne sera présenté ici que les membranes nano-fibreuses jouant le rôle d'absorbeurs, les échantillons {substrat} et {substrat + adhésif} sont présentés en Annexe A.

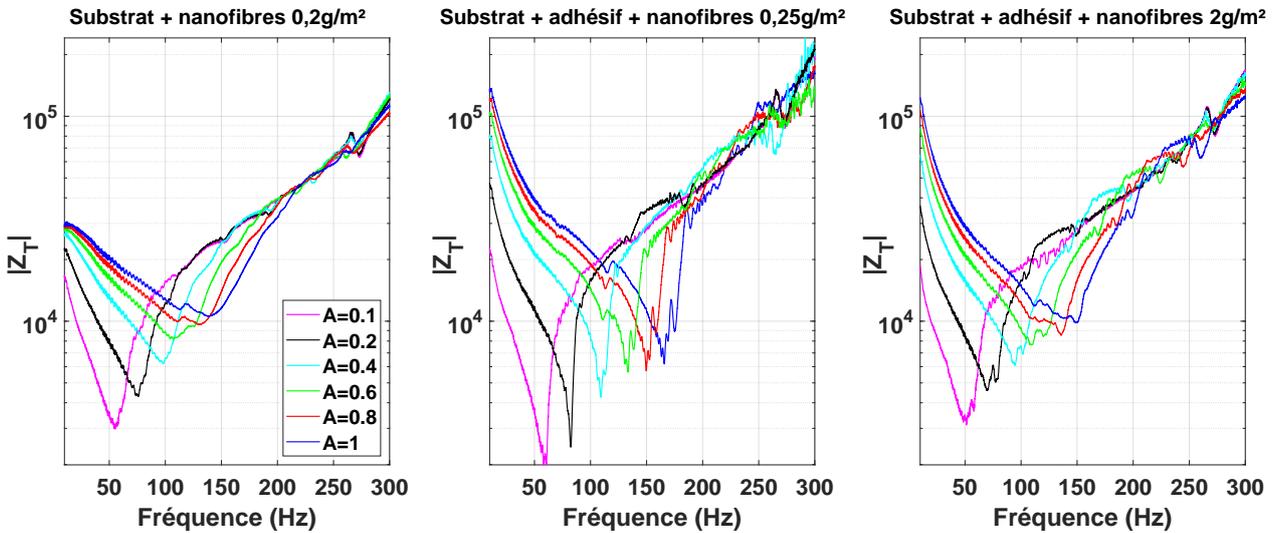
La Figure 3.8 illustre le module de la fonction de transfert  $H_m(f)$  pour chaque membrane nanofibreuse et pour différents niveaux d'excitation. Dans le cas de la membrane {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}, nous sommes en présence d'une courbe caractéristique d'impédance d'un échantillon non linéaire, avec la fréquence de résonance se décalant vers les hautes fréquences lorsque le niveau d'excitation augmente. L'ajout d'une couche d'adhésif (membrane {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}) modifie les propriétés aux basses fréquences : les pics de résonance deviennent plus étroits et  $|H_m(f)|$  a des minima plus faibles que pour la membrane sans adhésif. Lors de l'ajout de nanofibres (membrane {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}), l'estimation de  $H_m(f)$  est proche de celle obtenue pour la membrane {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}.

L'estimation du module de l'impédance apparente  $|Z_T(f)|$  pour chaque échantillon est visible en Figure 3.9. De la même manière que précédemment, l'ajout d'adhésif rend l'anti-résonance de  $|Z_T(f)|$  plus étroite, avec des minima plus faible que pour l'échantillon sans adhésif. L'ajout



**Figure 3.8** – Estimation du module de la fonction de transfert  $H_m$  pour chaque échantillon et pour différents niveaux d'excitation, le tout en fonction de la fréquence

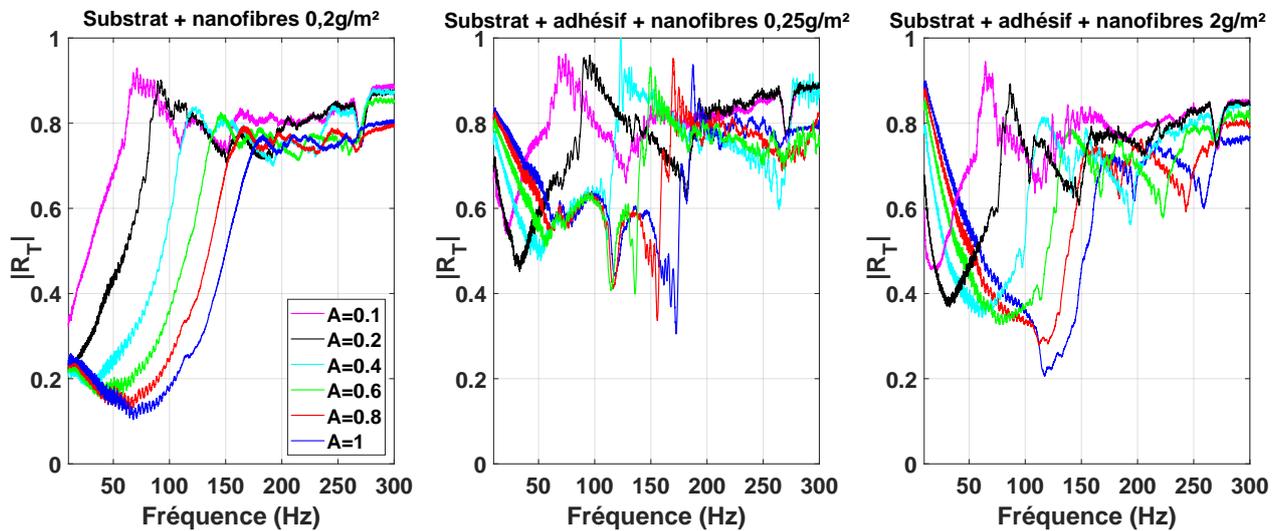
de fibres permet d'obtenir un pic de résonance plus large et donc une meilleure absorption.



**Figure 3.9** – Estimation de l'impédance  $Z_T$  des membranes nanofibreuses pour différents niveaux d'excitation

Cette absorption est bien visible sur le module du coefficient de réflexion apparent  $|R_T(f)|$  en Figure 3.10. L'ajout d'adhésif à la membrane {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} modifie fortement l'allure du coefficient de réflexion : pour une même amplitude d'excitation,  $|R_T(f)|$  augmente et le pic d'absorption s'élargit. L'énergie étant extraite par l'absorbeur lors des anti-résonances de  $|R_T(f)|$ , l'absorption de la membrane {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} est plus faible que pour la membrane {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}. Après ajout de nanofibres (membrane {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}), les valeurs de  $|R_T|$  diminuent traduisant une augmentation de l'absorption en basses fréquences. L'énergie est extraite par l'absorbeur sur une gamme de fréquences s'élargissant avec l'augmentation

du niveau d'excitation. Cette représentation des coefficients de réflexion permet de conclure que l'échantillon {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} présente les taux d'absorption les plus intéressants. Une comparaison des membranes pour un même niveau d'excitation est disponible en Annexe B.



**Figure 3.10** – Estimation de l'impédance  $R_T$  des membranes nanofibreuses pour différents niveaux d'excitation

## En résumé

La caractérisation par linéarisation de l'impédance permet d'obtenir une première estimation des caractéristiques acoustiques d'un absorbeur non linéaire. On parle alors d'impédance apparente et de coefficient de réflexion apparent.

La source est approchée par une équivalence électroacoustique. Les caractéristiques de la source (fonction de transfert entre débit et tension de commande et impédance) sont obtenues au préalable lors d'une étape d'étalonnage, à partir de terminaisons connues. Afin d'éliminer les harmoniques générées par les non-linéarités, le signal d'excitation est de type sinus balayé synchronisé. Un problème de minimisation sur le coefficient de réflexion est résolu afin d'estimer ces grandeurs. Leur visualisation permet de conclure quant à la fiabilité de la méthode jusqu'à 500 Hz, fréquence au delà de laquelle les mesures sont impactées par la géométrie du SKT.

À partir des mesures de pression et de tension de commande, ainsi que des caractéristiques de la source, l'absorbeur peut être modélisé par une impédance et un coefficient de réflexion apparents.

Deux absorbeurs ont été caractérisés grâce à cette méthode. Une membrane de haut-parleur agissant comme NES présente un comportement non linéaire et un caractère durcissant, traduit par le décalage des fréquences de résonance vers les hautes fréquences lorsque l'amplitude d'excitation augmente. Plus le niveau d'excitation augmente, plus les capacités d'absorption du NES sont intéressantes. Des membranes nano-fibreuses ont également été étudiées. Elles présentent un comportement non linéaire et raidissant. L'ajout de fibre et d'adhésif influe grandement sur les capacités d'absorption des membranes. La membrane composée de substrat, d'adhésif et ayant le plus de fibres présente les meilleures capacités d'absorption.



# 4

## MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE CHARGES ACOUSTIQUES NON LINÉAIRES PAR DISTORSION POLYHARMONIQUE

---

La caractérisation par linéarisation de l'impédance vue dans le Chapitre 3 permet d'obtenir une première estimation de l'impédance et du coefficient de réflexion apparents du système. Cependant, elle ne permet pas de prendre en compte les non-linéarités présentes, qui engendrent des générations d'harmoniques et la modification des caractéristiques acoustiques en fonction du niveau d'excitation. Dans ce chapitre, la notion de coefficient de réflexion apparent est alors étendue sous la forme d'une matrice de diffusion reliant les amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde incidente aux amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde réfléchie, en s'inspirant de travaux menés dans le domaine de l'électromagnétisme [16]. Un premier travail consiste à déterminer théoriquement la matrice de diffusion d'une charge acoustique non linéaire dont la dynamique est connue. En supposant que la dynamique de cette charge est définie par une équation différentielle non linéaire reliant la pression acoustique et le débit volumique associé, la matrice de diffusion est obtenue en combinant une méthode d'équilibrage harmonique et une description par distorsion polyharmonique [17], comme présenté dans [33]. La formulation analytique du problème ainsi que l'écriture de la procédure numérique associée sont appliquées à des absorbeurs dynamiques non linéaires.

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Matrice de diffusion</b> . . . . .	<b>62</b>
4.1.1	Définition . . . . .	62
4.1.2	Extension à l'impédance . . . . .	63
<b>4.2</b>	<b>Approche théorique</b> . . . . .	<b>64</b>
4.2.1	Modélisation théorique de l'absorbeur . . . . .	64
4.2.2	Méthode par équilibrage harmonique . . . . .	64
4.2.3	Modèle de distorsion polyharmonique . . . . .	66
4.2.4	Procédure numérique associée . . . . .	70
<b>4.3</b>	<b>Applications aux absorbeurs</b> . . . . .	<b>71</b>
4.3.1	Membrane visco-élastique circulaire . . . . .	71
4.3.2	Résonateur de Helmholtz non linéaire . . . . .	73

---

## 4.1. Matrice de diffusion

### 4.1.1. Définition

Le modèle par matrice de diffusion a été développé dans [16] et présentée en Section 1.6.2. On suppose que la source génère une excitation uniquement à la fréquence  $f$  appelée par la suite fréquence fondamentale. La pression acoustique mesurée devant l'absorbeur peut alors être décrite comme une série de Fourier sous forme d'exponentielle complexe telle que

$$p(t) = \sum_{k=-H}^H P_k(f) e^{j2\pi k f t} \quad (4.1)$$

où  $P_k(f)$  définit le coefficient de Fourier d'ordre  $k$  satisfaisant  $P_{-k}(f) = \overline{P_k(f)}$  avec  $\overline{(\cdot)}$  désignant le complexe conjugué. On se limitera ici à une représentation incluant  $H$  harmoniques.

De la même manière, les pressions incidentes  $p^+(t)$  et réfléchies  $p^-(t)$  peuvent être écrites comme

$$p^+(t) = \sum_{k=-H}^H P_k^+(f) e^{j2\pi k f t} \quad (4.2)$$

$$p^-(t) = \sum_{k=-H}^H P_k^-(f) e^{j2\pi k f t} \quad (4.3)$$

avec  $P_k^+(f)$  et  $P_k^-(f)$  les coefficients de Fourier d'ordre  $k$  satisfaisant  $P_{-k}^+(f) = \overline{P_k^+(f)}$  et  $P_{-k}^-(f) = \overline{P_k^-(f)}$ . À noter que la dépendance en fréquence des coefficients de Fourier est précisée en utilisant la fréquence fondamentale  $f$  mais que les harmoniques d'ordre  $k$  sont liées à la fréquence  $kf$ .

La matrice de diffusion considérée comme une extension de la notion de coefficient de réflexion a été introduite dans [16]. Elle définit une relation entre les termes harmoniques  $P_k^+(f)$  et  $P_k^-(f)$  des pressions acoustiques incidente et réfléchi par

$$P_k^-(f) = \sum_{n=0}^H S_{kn}(f) P_n^+(f) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, H \quad (4.4)$$

Cette relation peut être écrite sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} P_0^-(f) \\ P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{00}(f) & S_{01}(f) & S_{02}(f) & \cdots \\ S_{10}(f) & S_{11}(f) & S_{12}(f) & \cdots \\ S_{20}(f) & S_{21}(f) & S_{22}(f) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0^+(f) \\ P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

ou

$$\mathbf{P}^-(f) = \mathbf{S}(f) \mathbf{P}^+(f) \quad (4.6)$$

avec

$$\mathbf{P}^+(f) = (P_0^+(f), P_1^+(f), \dots, P_H^+(f))^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{P}^-(f) = (P_0^-(f), P_1^-(f), \dots, P_H^-(f))^T \quad (4.8)$$

et

$$\mathbf{S}(f) = \begin{pmatrix} S_{00}(f) & S_{01}(f) & S_{02}(f) & \cdots \\ S_{10}(f) & S_{11}(f) & S_{12}(f) & \cdots \\ S_{20}(f) & S_{21}(f) & S_{22}(f) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$\mathbf{S}(f) = S_{kn}(f)$  pour  $0 \leq k \leq H$  et  $0 \leq n \leq H$ .

$\mathbf{S}(f)$  désigne la matrice de diffusion à la fréquence  $f$ . La composante  $S_{kn}(f)$  représente le transfert d'énergie du terme harmonique  $P_n^+(f)$  de la pression incidente vers le terme harmonique  $P_k^-(f)$  de la pression réfléchie à la fréquence  $kf$ .

Il est facile de vérifier que si l'absorbeur étudié est linéaire,  $\mathbf{S}(f)$  est une matrice diagonale satisfaisant

$$S_{kk}(f) = R(kf) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, H \quad (4.10)$$

où  $R$  désigne le coefficient de réflexion défini par (1.20) comme  $R(f) = \frac{P^-(f)}{P^+(f)}$ . Dans ce même cas,  $\mathbf{S}(f)$  ne dépend pas de l'amplitude d'excitation appliquée au système.

#### 4.1.2. Extension à l'impédance

De façon équivalente, la matrice de diffusion peut être exprimée en terme d'impédance par les coefficients  $Z_{kn}(f)$ , reliant les termes harmoniques de la pression  $P_k(f)$  mesurée au microphone et les termes harmoniques du débit volumique associé  $Q_n(f)$  comme

$$P_k(f) = \sum_{n=0}^H Z_{kn}(f) Q_n(f) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, H. \quad (4.11)$$

Les termes d'impédance  $Z_{kn}(f)$  représentent l'opposition à la fréquence  $nf$  que la charge acoustique présente au flux acoustique à la fréquence  $kf$ . (4.11) peut être écrite sous la forme matricielle comme

$$\mathbf{P}(f) = \mathbf{Z}(f)\mathbf{Q}(f) \quad (4.12)$$

avec

$$\mathbf{P}(f) = (P_0(f), P_1(f), \dots, P_H(f))^T, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{Q}(f) = (Q_0(f), Q_1(f), \dots, Q_H(f))^T \quad (4.14)$$

et

$$\mathbf{Z}(f) = \begin{pmatrix} Z_{00}(f) & Z_{01}(f) & Z_{02}(f) & \cdots \\ Z_{10}(f) & Z_{11}(f) & Z_{12}(f) & \cdots \\ Z_{20}(f) & Z_{21}(f) & Z_{22}(f) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Il est possible d'exprimer la matrice de diffusion en impédance  $\mathbf{Z}(f)$  en fonction de la matrice de diffusion en ondes de pression  $\mathbf{S}(f)$  par l'équation (1.89) tirée de [16] comme

$$\begin{pmatrix} Z_{00} & Z_{01} & \cdots \\ Z_{10} & Z_{11} & \cdots \\ Z_{20} & Z_{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \frac{\rho c}{S} \begin{pmatrix} 1 + S_{00} & S_{01} & \cdots \\ S_{10} & 1 + S_{11} & \cdots \\ S_{20} & S_{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - S_{00} & -S_{01} & \cdots \\ -S_{10} & 1 - S_{11} & \cdots \\ -S_{20} & -S_{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} \quad (4.16)$$

## 4.2. Approche théorique

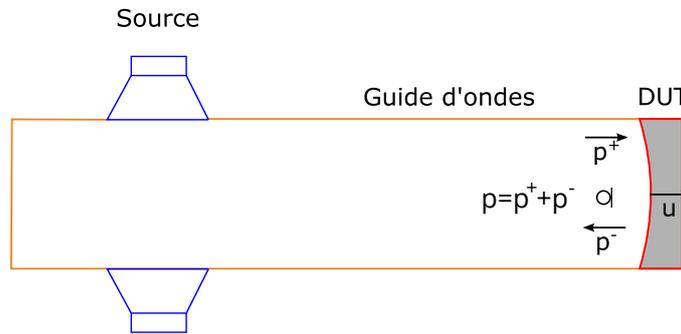
Nous cherchons à présent à développer une méthode permettant de construire analytiquement la matrice de diffusion (4.9). À partir de la modélisation de l'absorbeur étudié, cette matrice de diffusion va être obtenue en combinant équilibrage harmonique [34] et modélisation par distorsion polyharmonique [17].

### 4.2.1. Modélisation théorique de l'absorbeur

Dans cette section, on suppose que le comportement de l'absorbeur connecté au tube du SKT peut être modélisé comme

$$m_l \ddot{u}(t) + c_l \dot{u}(t) + k_l u(t) + g_{nl}(u(t), \dot{u}(t)) = S_e p(t). \quad (4.17)$$

$u$  désigne le déplacement transversal équivalent de la surface extérieure de l'absorbeur.  $m_l$  sa masse,  $c_l$  son amortissement et  $k_l$  sa raideur sont les paramètres linéaires du système et la fonction non linéaire  $g_{nl}$  désigne sa partie non linéaire.  $S_e$  représente la section efficace de l'absorbeur (avec  $S_e \leq S$  la section du guide d'onde).  $p(t) = p^+(t) + p^-(t)$  désigne la pression mesurée à l'intérieur du SKT, devant l'absorbeur. La pression acoustique à l'extérieur du guide d'onde est négligée.



**Figure 4.1** – Représentation du modèle du DUT équivalent connecté au SKT

En se rapprochant de (1.18), la vitesse  $v(t) = \dot{u}(t)$  et le débit acoustique  $q(t)$  peuvent être reliés aux pressions incidente et réfléchie comme

$$v(t) = \dot{u}(t) = \frac{1}{\rho c} (p^+(t) - p^-(t)) \quad (4.18)$$

$$q(t) = S_e v(t) \quad (4.19)$$

avec  $\rho$  la densité de l'air et  $c$  la vitesse du son dans l'air.

L'objectif maintenant est de proposer une méthode de résolution de l'équation (4.17) permettant d'approcher la matrice de diffusion.

### 4.2.2. Méthode par équilibrage harmonique

L'équilibrage harmonique permet d'obtenir les solutions périodiques de systèmes dynamiques non linéaires sous la forme de série de Fourier. La pression acoustique  $p(t)$  mesurée dans le

SKT et la réponse de l'absorbeur  $u(t)$  sont décrites jusqu'au terme d'ordre  $H$  comme

$$p(t) = \sum_{k=-H}^H P_k(f) e^{j2\pi kft} \quad (4.20)$$

$$u(t) = \sum_{k=-H}^H U_k(f) e^{j2\pi kft} \quad (4.21)$$

où  $P_{-k}(f) = \overline{P_k(f)}$  et  $U_{-k}(f) = \overline{U_k(f)}$ . En substituant les équations (4.20) et (4.21) dans le modèle de l'absorbeur (4.17) et en équilibrant les termes de même ordre jusqu'à l'ordre  $H$ , on obtient un système algébrique non linéaire dans  $\mathbb{C}$  de  $H + 1$  équations dépendant du déplacement  $U$  et de la pression mesurée  $P$ , qui peut s'écrire

$$\tilde{\mathbf{R}}(f, \mathbf{U}(f), \mathbf{P}(f)) = \mathbf{Z}(f)\mathbf{U}(f) + \mathbf{G}_{nl}(\mathbf{U}(f)) - S_e \mathbf{P}(f) = 0 \quad (4.22)$$

où

$$\mathbf{U}(f) = (U_0(f), U_1(f), \dots, U_H(f))^T \in \mathbb{C}^{H+1}, \quad (4.23)$$

$$\mathbf{P}(f) = (P_0(f), P_1(f), \dots, P_H(f))^T \in \mathbb{C}^{H+1}. \quad (4.24)$$

$\mathbf{Z}(f)$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont

$$(k_l, k_l - (2\pi f)^2 m_l + j(2\pi f) c_l, \dots, k_l - (2\pi k f)^2 m_l + j(2\pi k f) c_l) \quad (4.25)$$

et

$$\mathbf{G}_{nl}(\mathbf{U}(f)) = (G_{nl_0}(\mathbf{U}(f)), G_{nl_1}(\mathbf{U}(f)), \dots, G_{nl_H}(\mathbf{U}(f)))^T \quad (4.26)$$

est le vecteur des termes non linéaires défini à l'aide du développement en série suivant

$$g_{nl}(u(t), \dot{u}(t)) = \sum_{k=-H}^H G_{nl_k}(\mathbf{U}(f)) e^{j2\pi kft} \quad (4.27)$$

où  $G_{nl_k}(\mathbf{U}(f))$  désigne l'harmonique  $k$  de la fonction temporelle  $g_{nl}(u(t), \dot{u}(t))$ .

À partir de (4.18), les coefficients de Fourier du déplacement  $U_k(f)$  peuvent être obtenus en fonction des coefficients de Fourier de la vitesse acoustique  $V_k(f)$  comme

$$U_k(f) = \frac{V_k(f)}{jk(2\pi f)} \quad (4.28)$$

pour  $k = 1, \dots, H$ ,  $V_0$  étant toujours égal à 0.

En substituant (4.28) dans (4.22), l'équation (4.22) peut se réécrire en fonction de coefficients harmoniques non-nuls de  $v(t)$  et l'harmonique d'ordre zéro  $U_0$  de  $u(t)$  apparaît sous la forme

$$\tilde{\mathbf{R}}(f, \mathbf{U}(f), \mathbf{P}(f)) = \tilde{\mathbf{R}}(f, \mathbf{\Lambda}(f) \mathbf{V}\mathbf{V}(f), \mathbf{P}(f)) = 0 \quad (4.29)$$

où

$$\mathbf{V}\mathbf{V}(f) = (U_0, V_1(f), V_2(f), \dots, V_H(f))^T \in \mathbb{C}^{H+1} \quad (4.30)$$

et  $\mathbf{\Lambda}(f)$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont

$$\left(1, \frac{1}{j2\pi f}, \frac{1}{j2\pi 2f}, \dots, \frac{1}{j2\pi Hf}\right). \quad (4.31)$$

L'équation (4.29) peut également être exprimée en fonction des coefficients de Fourier des ondes de pressions incidente  $p^+(t)$  et réfléchiée  $p^-(t)$ . La pression acoustique mesurée en face de l'absorbeur dans le tube est définie comme

$$p(t) = p^+(t) + p^-(t). \quad (4.32)$$

et dans le domaine fréquentiel, (4.32) devient

$$P_k(f) = P_k^+(f) + P_k^-(f) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, H \quad (4.33)$$

avec  $P_k^+(f)$  les coefficients de Fourier liés à la pression acoustique incidente  $p^+(t)$  et  $P_k^-(f)$  les coefficients de Fourier liés à la pression acoustique réfléchiée  $p^-(t)$ .

Grâce à (4.18), les coefficients de Fourier de la vitesse  $v(t)$  sont liés aux coefficients de  $p^+(t)$  et  $p^-(t)$  par

$$V_k(f) = \frac{1}{\rho c} (P_k^+(f) - P_k^-(f)) \text{ pour } k = 1, 2, \dots, H. \quad (4.34)$$

Lorsque la source est coupée, la vitesse moyenne est nulle à l'intérieur du tube. Les coefficients de Fourier d'ordre 0 des ondes de pression incidente et réfléchiée satisfont alors la relation

$$P_0^-(f) = P_0^+(f) = \frac{1}{2}P_0(f). \quad (4.35)$$

En substituant les équations (4.33), (4.34) et (4.35) à (4.29), on obtient un nouveau système non linéaire défini comme

$$\mathbf{R}(f, \mathbf{P}^+(f), \mathbf{P}^-(f)) = \tilde{\mathbf{R}} \left( f, \frac{1}{\rho c} (\mathbf{P}^+(f) - \mathbf{P}^-(f)) + \mathbf{U}_0(f), \mathbf{P}^+(f) + \mathbf{P}^-(f) \right) = 0. \quad (4.36)$$

$\mathbf{P}^+(f)$  et  $\mathbf{P}^-(f)$  sont définis par (4.7), (4.8) et

$$\mathbf{P}^-(f) = (U_0(f), P_1^-(f), P_2^-(f), \dots, P_H^-(f))^T \in \mathbb{C}^{H+1} \quad (4.37)$$

$$\mathbf{U}_0(f) = (U_0(f), 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^{H+1}. \quad (4.38)$$

Le système (4.36) permet de mettre en évidence une famille de fonctions reliant les composantes harmoniques des pressions acoustiques incidente  $P_k^+(f)$  et réfléchiée  $P_k^-(f)$ , dépendant de  $U_0(f)$ . La définition de la matrice de diffusion (4.6) peut alors être exprimée comme une approximation "linéaire" de ce système (4.36), reliant  $\mathbf{P}^+(f)$  et  $\mathbf{P}^-(f)$ . Cela sera l'objet de la section suivante.

### 4.2.3. Modèle de distorsion polyharmonique

Nous cherchons à présent à linéariser le système (4.36) de façon à rendre explicite la matrice de diffusion (4.6). Pour ce faire, il est utilisé ici une approche locale développée dans [17] basée sur des développements en série de Taylor, appelée modélisation par distorsion polyharmonique. Par soucis de clarté, nous omettrons dans cette section la dépendance en fréquence.

La modélisation par distorsion polyharmonique est basée sur deux hypothèses :

**Hypothèse 1** : le système est invariant dans le temps

**Hypothèse 2** : la composante fondamentale  $P_1^+$  de la pression acoustique incidente  $p^+(t)$  est dominante

Si le couple  $(\mathbf{P}^+, \mathbf{PP}^-)$  est solution de (4.36), l'hypothèse 1 permet de montrer que le couple  $(\mathbf{P}_{mod}^+, \mathbf{PP}_{mod}^-)$  défini par

$$\mathbf{P}_{mod}^+ = (P_0^+, |P_1^+|, P_2^+ \Theta_1^{-2}, \dots, P_H^+ \Theta_1^{-H})^T, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{PP}_{mod}^- = (U_0, P_1^- \Theta_1^{-1}, P_2^- \Theta_1^{-2}, \dots, P_H^- \Theta_1^{-H})^T \quad (4.40)$$

où  $\Theta_1$  est une phase choisie comme

$$\Theta_1 = e^{j\varphi_1} \text{ avec } P_1^+ = |P_1^+| e^{j\varphi_1}, \quad (4.41)$$

satisfait l'équation (4.36) c'est-à-dire

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{P}_{mod}^+, \mathbf{PP}_{mod}^-) = 0. \quad (4.42)$$

En introduisant le vecteur  $\mathbf{P}_0^+$  qui ne dépend que du module de la composante fondamentale de  $\mathbf{P}^+$  à savoir

$$\mathbf{P}_0^+ = (0, |P_1^+|, 0, \dots, 0)^T, \quad (4.43)$$

$\mathbf{P}_{mod}^+$  peut être écrit comme

$$\mathbf{P}_{mod}^+ = \mathbf{P}_0^+ + \tilde{\mathbf{P}}^+, \quad (4.44)$$

où

$$\tilde{\mathbf{P}}^+ = (P_0^+, 0, P_2^+ \Theta_1^{-2}, \dots, P_H^+ \Theta_1^{-H})^T. \quad (4.45)$$

Nous sommes dans le cas où  $|P_1^+| \gg |P_k^+|$  pour tout  $k > 1$ . Nous avons donc

$$\|\mathbf{P}_0^+\| \gg \|\tilde{\mathbf{P}}^+\|. \quad (4.46)$$

$\mathbf{PP}_{mod}^-$  peut alors être approximé par une série de Taylor d'ordre 1 autour de  $\mathbf{P}_0^+$  en résolvant

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{P}_0^+, \mathbf{PP}_0^-) = 0. \quad (4.47)$$

par rapport à  $\mathbf{PP}_0^-$ .

Pour parvenir à la linéarisation du système (4.36), il est nécessaire de réécrire le système algébrique non linéaire (4.42) par rapport aux variables réelles  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  comme

$$\mathbf{B}(|P_1^+|, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0. \quad (4.48)$$

$\mathbf{B}$  est une fonction vectorielle de dimension  $(2H + 1)$  définie comme

$$\mathbf{B} = (\text{Re}(\mathbf{R}), \text{Im}(\mathbf{R}))^T \quad (4.49)$$

avec  $\text{Re}(\cdot)$  désignant la partie réelle et  $\text{Im}(\cdot)$  la partie imaginaire,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2(H-1)+1}$  la variable réelle définie par

$$\mathbf{X} = (P_0^+, \text{Re}(P_2^+ \Theta_1^{-2}), \dots, \text{Re}(P_H^+ \Theta_1^{-H}), \text{Im}(P_2^+ \Theta_1^{-2}), \dots, \text{Im}(P_H^+ \Theta_1^{-H}))^T \quad (4.50)$$

et  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2H+1}$  la variable réelle définie par

$$\mathbf{Y} = (U_0, \operatorname{Re}(P_1^- \Theta_1^{-1}), \dots, \operatorname{Re}(P_H^- \Theta_1^{-H}), \operatorname{Im}(P_1^- \Theta_1^{-1}), \dots, \operatorname{Im}(P_H^- \Theta_1^{-H}))^T. \quad (4.51)$$

avec

$$\operatorname{Re}(P_k^+ \Theta_1^{-k}) = \frac{1}{2}(P_k^+ \Theta_1^{-k} + \overline{(P_k^+ \Theta_1^{-k})}) \quad (4.52)$$

$$\operatorname{Im}(P_k^+ \Theta_1^{-k}) = \frac{1}{2j}(P_k^+ \Theta_1^{-k} - \overline{(P_k^+ \Theta_1^{-k})}). \quad (4.53)$$

pour  $k = 1, \dots, H$ .

Le vecteur  $\mathbf{X}$  ne dépend pas de la composante fondamentale  $P_1^+$  de  $p^+(t)$  bien que la fonction  $\mathbf{B}$  dépende directement du module de  $P_1^+$ . Le vecteur  $\mathbf{Y}$  dépend quant à lui de toutes les composantes de  $p^-(t)$ .

La résolution de (4.47) par rapport à  $\mathbf{P}\mathbf{P}_0^-$  est équivalente à la résolution de

$$\mathbf{B}(|P_1^+|, 0, \mathbf{Y}) = \mathbf{0} \quad (4.54)$$

par rapport à  $\mathbf{Y}$ .

Selon le théorème des fonctions implicites, (4.48) peut être converti en

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{X}) \quad (4.55)$$

où  $\mathbf{F}$  est une fonction vectorielle de  $\mathbf{X}$  de dimensions  $(2H + 1)$ , dont la matrice jacobienne

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{X}_j}(\mathbf{X}) \quad (4.56)$$

pour  $1 \leq i \leq 2H + 1$  et  $1 \leq j \leq 2(H - 1) + 1$  est donnée par

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{X}))}{\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, \mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{X}))}. \quad (4.57)$$

$\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{X}}$  désigne la matrice jacobienne de  $\mathbf{B}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{Y}}$  la matrice jacobienne de  $\mathbf{B}$  par rapport à  $\mathbf{Y}$ .

La fonction  $\mathbf{F}$  définie en (4.55) peut être approximée en  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$  par un développement en série de Fourier à l'ordre 1 comme

$$\mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{X}) \approx \mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{0}) + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{0})\mathbf{X} \quad (4.58)$$

qui peut être utilisé pour approximer  $\mathbf{Y}$ .

(4.58) peut être réécrite en fonction des variables complexes  $\mathbf{P}^+$  et  $\mathbf{P}\mathbf{P}^-$  en utilisant les définitions des variables réelles (4.50), (4.51), (4.52) et (4.53). L'harmonique d'ordre zéro de  $u(t)$  peut alors être exprimée par

$$U_0 = \sum_{n=0}^H S_{0n}(|P_1^+|, \Theta_1) P_n^+ + \sum_{n=0}^H T_{0n}(|P_1^+|, \Theta_1) \overline{P_n^+} \quad (4.59)$$

où

$$\begin{aligned}
 S_{00} &= \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,1} \\
 S_{01} &= \frac{\mathbf{F}_1(|P_1^+|, 0)}{|P_1^+|} \Theta_1^{n-1} \\
 S_{0n} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} + \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) \Theta_1^{-n} \\
 T_{00} &= 0 \\
 T_{01} &= 0 \\
 T_{0n} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} - \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) \Theta_1^n.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

pour  $n = 2, \dots, H$ .

Les harmoniques de la pression réfléchie  $p^-(t)$  peuvent être exprimées par rapport aux harmoniques de la pression incidente  $p^+(t)$  par

$$P_k^- = \sum_{n=0}^H S_{kn}(|P_1^+|, \Theta_1) P_n^+ + \sum_{n=0}^H T_{kn}(|P_1^+|, \Theta_1) \overline{P_n^+} \tag{4.61}$$

ou sous forme de matrice

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{S}(|P_1^+|, \Theta_1) \mathbf{P}^+ + \mathbf{T}(|P_1^+|, \Theta_1) \overline{\mathbf{P}^+} \tag{4.62}$$

où les composantes des matrices complexes  $\mathbf{S}(|P_1^+|, \Theta_1)$  et  $\mathbf{T}(|P_1^+|, \Theta_1)$  sont données par

— pour  $k = 0$

$$\begin{aligned}
 S_{00} &= 1 \\
 S_{0n} &= 0 \\
 T_{0n} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

pour  $n = 0, \dots, H$ .

— pour  $k = 1, \dots, H$ ,

$$\begin{aligned}
 S_{k0} &= (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,1} + j \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,1}) \Theta_1^k \\
 S_{k1} &= \frac{\mathbf{F}_{k+1}(|P_1^+|, 0) + j \mathbf{F}_{H+k+1}(|P_1^+|, 0)}{|P_1^+|} \Theta_1^{k-1} \\
 S_{kn} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) \\
 &\quad + j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] \Theta_1^{k-n}, \\
 T_{k0} &= 0 \\
 T_{k1} &= 0 \\
 T_{kn} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) \\
 &\quad + j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] \Theta_1^{k+n}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

pour  $n = 2, \dots, H$ .

Le terme  $\mathbf{S}_{kn}$  quantifie le couplage entre l'harmonique d'ordre  $k$  de  $p^-(t)$  et l'harmonique d'ordre  $n$  de  $p^+(t)$ .

L'équation (4.62) peut également être exprimée sous la forme d'une relation matricielle

$$\mathbf{P}'^- = \mathbf{S}'(|P_1^+|, \Theta_1) \mathbf{P}'^+ \tag{4.65}$$

où

$$\mathbf{P}'^+(f) = (P_{-H}^+(f), \dots, P_{-1}^+(f), P_0^+(f), P_1^+(f), \dots, P_H^+(f))^T, \tag{4.66}$$

$$\mathbf{P}'^-(f) = ((P_{-H}^-(f), \dots, P_{-1}^-(f), P_0^-(f), P_1^-(f), \dots, P_H^-(f))^T. \tag{4.67}$$

### Propriétés des matrices $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$

- Dans l'équation (4.62),  $\mathbf{P}^-$  apparaît comme la somme d'un terme linéaire par rapport à  $\mathbf{P}^+$  et d'un terme  $\mathbb{R}$ -linéaire par rapport à  $\mathbf{P}^+$ .
- Le module des composantes des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  ne dépend que du module de la composante fondamentale  $P_1^+$ .
- (4.64) montre que la première colonne de  $\mathbf{S}$ , ne dépendant que de la fonction  $\mathbf{F}$ , caractérise le transfert d'énergie de la composante fondamentale dominante  $P_1^+$  à toutes les composantes harmoniques de  $\mathbf{P}^-$ .
- Les autres colonnes de  $\mathbf{S}$  et la matrice  $\mathbf{T}$  ne dépendent que de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)$  qui correspondent à des termes correctifs du développement en série de Taylor au premier ordre.
- Dans le cas d'un absorbeur linéaire (c'est-à-dire si  $\mathbf{G}_{nl} = 0$ ), les termes  $\mathbf{T}_{n,k}$  sont égaux à zéro. Par conséquent, (4.62) prend la forme de (4.6). La matrice  $\mathbf{S}$  est alors diagonale et satisfait la relation (4.10).
- Dans le cas non linéaire, (4.62) est différent du cas linéaire (4.6) sauf si la fonction  $\mathbf{F}$  est holomorphe (c'est-à-dire définie et dérivable en tout point d'un ouvert de  $\mathbb{C}$ ) à  $\mathbf{X} = 0$  et satisfait

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{n+1,k} = \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+n+1,H+k-1} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{n+1,H+k-1} = -\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+n+1,k}. \quad (4.69)$$

Ces deux équation impliquent  $T_{n,k} = 0$ . Dans les cas où la matrice  $\mathbf{T}$  s'écarte de la matrice  $\mathbf{0}$ , il sera intéressant d'évaluer l'influence respective de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  pour reproduire  $\mathbf{P}^-$ .

#### 4.2.4. Procédure numérique associée

Une procédure numérique est nécessaire pour obtenir la décomposition (4.62). On considère un modèle donné défini par (4.17), un nombre d'harmoniques  $H$  et une pression acoustique  $p(t)$  donnés, définis par ses coefficients harmoniques  $H + 1$  dans une bande de fréquences  $[f_1; f_2]$ .

La première étape consiste à réécrire l'équation (4.29) dans le domaine réel comme

$$\tilde{\mathbf{R}}^{\text{RI}}(f, \mathbf{V}\mathbf{V}^{\text{RI}}, \mathbf{P}^{\text{RI}}) = 0, \quad (4.70)$$

où la fonction réelle  $\tilde{\mathbf{R}}^{\text{RI}}$  est définie par

$$\tilde{\mathbf{R}}^{\text{RI}} = \left( \tilde{\mathbf{R}}_1, \text{Re}(\tilde{\mathbf{R}}_2), \dots, \text{Re}(\tilde{\mathbf{R}}_{H+1}), \text{Im}(\tilde{\mathbf{R}}_2), \dots, \text{Im}(\tilde{\mathbf{R}}_{H+1}) \right), \quad (4.71)$$

le vecteur réel  $\mathbf{V}\mathbf{V}^{\text{RI}}$  par

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^{\text{RI}} = (\mathbf{V}\mathbf{V}_1, \text{Re}(\mathbf{V}\mathbf{V}_2), \dots, \text{Re}(\mathbf{V}\mathbf{V}_{H+1}), \text{Im}(\mathbf{V}\mathbf{V}_2), \dots, \text{Im}(\mathbf{V}\mathbf{V}_{H+1})) \quad (4.72)$$

et le vecteur réel  $\mathbf{P}^{\text{RI}}$  par

$$\mathbf{P}^{\text{RI}} = (P_0, \text{Re}(P_1), \dots, \text{Re}(P_H), \text{Im}(P_1), \dots, \text{Im}(P_H)). \quad (4.73)$$

En supposant que le vecteur de pression réel  $\mathbf{P}^{\text{RI}}$  est connu, (4.70) est résolue dans la bande de fréquences  $[f_1, f_2]$  en utilisant une méthode par continuation. Cette méthode est efficace car la fonction  $\tilde{\mathbf{R}}$  est régulière sur cet intervalle, et présente un gain de temps de calcul important.

Dans un second temps, l'intervalle  $[f_1, f_2]$  est séparé en  $f_i$  fréquences définies par  $f_i = f_1 + i\Delta f$  pour  $i = 0, \dots, N_f$  et  $\Delta f = \frac{f_2 - f_1}{N_f}$ . Pour chaque fréquence  $f_i$ ,

1.  $\mathbf{P}^+(f_i)$  et  $\mathbf{P}^-(f_i)$  sont obtenues à partir des équations (4.32) et (4.18) écrites dans le domaine de Fourier, en utilisant le couple de solution  $(\mathbf{V}\mathbf{V}(f_i), \mathbf{P}(f_i))$  obtenu d'après (4.70)
2. À partir de  $\mathbf{P}^+(f_i)$ , (4.54) est résolue par rapport à  $\mathbf{Y}$  en utilisant la fonction *FindRoot* de ©Mathematica
3. La matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  est obtenue à partir de (4.57) avec  $\mathbf{X} = \mathbf{O}$  et  $\mathbf{F}(|P_1^+|, 0) = \mathbf{Y}$
4. Pour finir, les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  sont déduites des équations (4.63) et (4.64)

### 4.3. Applications aux absorbeurs

Maintenant que la matrice de diffusion  $\mathbf{S}(f)$  peut être obtenue analytiquement grâce à la procédure numérique précédente, l'approche théorique est applicable à différents absorbeurs. Il sera étudié ici la membrane visco-élastique circulaire présentée en Section 1.2.3 et un résonateur de Helmholtz non linéaire décrit dans [8, 9].

#### 4.3.1. Membrane visco-élastique circulaire

Considérons la membrane visco-élastique circulaire en latex de la Section 1.2.3 présentant un rayon  $R_m = 0.03$  m, une section  $S_m = \pi 0.03^2$  m<sup>2</sup> et une épaisseur  $h_m = 1.8 \times 10^{-4}$  m. Le comportement non linéaire de cet absorbeur provient de sa non-linéarité géométrique lorsqu'il est soumis à un grand déplacement. Cette membrane peut être modélisée par un oscillateur non linéaire à un degré de liberté comme défini dans [4] par

$$m_m \ddot{u}(t) + c_m \dot{u}(t) + k_m u(t) + k_{nl} (u(t)^3 + 2\nu u(t)^2 \dot{u}(t)) = \frac{S_m}{2} p(t). \quad (4.74)$$

où  $u$  est le déplacement transversal du centre de la membrane, comme représenté en Figure 4.1 et  $p(t)$  est la pression acoustique mesurée à l'avant de la membrane (la pression acoustique au niveau de la face arrière de la membrane est considérée comme nulle). Les coefficients  $k_m$  and  $k_{nl}$  représentent respectivement les coefficients de rigidité linéaire et non linéaire. Les paramètres du modèle sont obtenus comme présenté dans [4] par

$$m_m = \rho_m h_m S_m, \quad c_m = \eta k_{0m}, \quad k_m = k_{0m} \frac{f_{1m}^2}{f_{0m}^2} \quad \text{et} \quad k_{nl} = \frac{1}{2} \frac{8\pi E_m h_m}{3(1-\nu^2)R_m^2}$$

avec

$$k_{0m} = \frac{2\pi E_m h_m^3}{3(1-\nu^2)R_m^2} \quad \text{et} \quad f_{0m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.015^4 \pi^4 E h_m^2}{12(1-\nu^2)\rho_m R_m^4}}$$

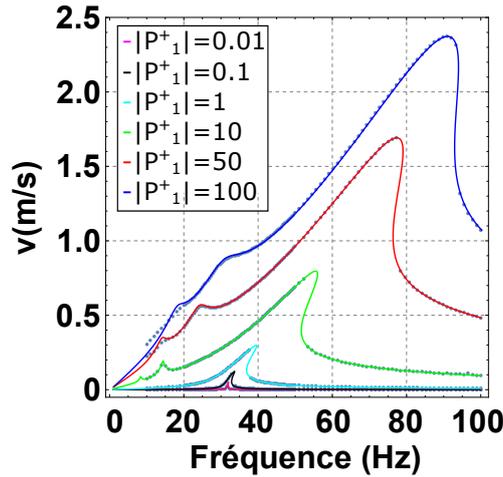
où  $\rho_m$  est la masse volumique,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $E_m$  le module d'Young de la membrane.  $f_{0m}$  et  $f_{1m} (\geq f_{0m})$  représentent respectivement les fréquences de résonance de la membrane sans et avec pré-tension. Si aucune pré-tension n'est appliquée,  $f_{1m} = f_{0m}$ .  $\eta (> 0)$  caractérise l'amortissement.

La membrane visco-élastique circulaire est caractérisée par les paramètres du latex  $\rho_m = 980$  kg.m<sup>-3</sup>,  $E_m = 1200000$  Pa,  $\nu = 0.49$  et par les paramètres d'amortissement  $\eta = 0.00114$ . Les fréquences de résonance résultantes sont  $f_{0m} = 3.45$  Hz sans pré-tension et  $f_{1m} = 40$  Hz avec pré-tension.

De par la symétrie du problème, l'étude numérique a été menée uniquement en considérant les harmoniques impaires. La pression acoustique  $p(t)$  est supposée périodique comme

$$p(t) = P_1 e^{-j2\pi ft} + P_{-1} e^{j2\pi ft}. \quad (4.75)$$

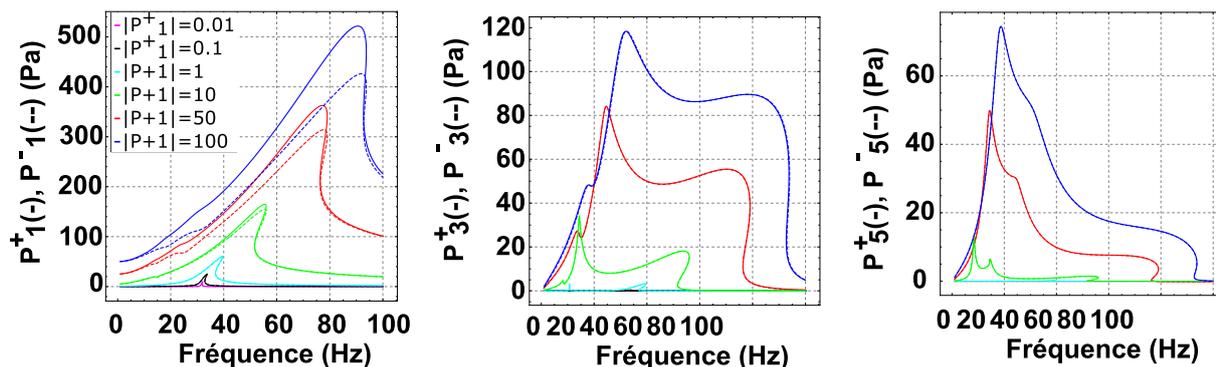
La Figure 4.2 représente les valeurs RMS de la réponse en régime permanent  $v(t) = \dot{u}(t)$  de l'équation (4.74). Elles sont obtenues par équilibrage harmonique (en utilisant uniquement les trois premières harmoniques impaires 1, 3 et 5) en résolvant le système non linéaire (4.70) sur une plage de fréquences allant de  $f_1 = 1$  Hz à  $f_2 = 100$  Hz. Les résultats sont comparés à ceux obtenus en résolvant (4.74) grâce au solveur d'équations différentielles ordinaires *NDSolve* (avec le choix Automatique pour l'option Méthode) de ©Mathematica, considéré comme la solution exacte, sur une plage en fréquence allant de  $f_1 = 10$  Hz à  $f_2 = 100$  Hz par pas de 1 Hz. Six niveaux d'excitation ont été utilisés avec  $|P_1^+| = [0.01, 0.1, 1, 10, 50, 100]$  correspondant à des niveaux de pression allant de 53.9 à 133.9 dB. L'approche par équilibrage harmonique donne des résultats en très bon accord avec l'approche de résolution directe via ©Mathematica, pour chaque niveau d'excitation. Cette comparaison valide le choix de 5 harmoniques étudiées. Elle permet d'affirmer qu'il est possible de décrire les propriétés de ce système lors d'une excitation tonale en s'intéressant aux premières harmoniques de sa réponse.



**Figure 4.2** – Simulation numérique de (4.74) dans le domaine temporel (●) et en utilisant l'équilibrage harmonique défini par (4.29) (—) pour différents niveaux de  $|P_1^+|$

La Figure 4.3 illustre les coefficients harmoniques  $P_1^+$ ,  $P_3^+$  et  $P_5^+$  (respectivement  $P_1^-$ ,  $P_3^-$  et  $P_5^-$ ) de  $p^+(t)$  (respectivement  $p^-(t)$ ) obtenus par équilibrage harmonique comme présenté dans la Section 4.2.4. On remarque que pour chaque niveau d'excitation,  $|P_1^+(f)| \geq |P_1^-(f)|$ . L'écart entre ces deux grandeurs est creusé lorsque le niveau d'excitation augmente. Pour  $k > 1$ , et parce que l'harmonique  $P_k(f)$  de  $p(t)$  est égale à zéro,  $P_k^+(f) = -P_k^-(f)$ .

Les composantes de la matrice  $\mathbf{S}$  sont rapportées sur la Figure 4.4. Les termes diagonaux de  $\mathbf{S}$  diminuent lorsque le niveau d'excitation augmente, contrairement aux termes non-diagonaux qui augmentent. Les termes diagonaux  $S_{nn}$  représentent le rapport d'énergie entre l'harmonique  $n$  de  $p^+(t)$  et l'harmonique  $n$  de  $p^-(t)$ .  $S_{11}$  étant inférieur à 1, il peut être interprété comme un coefficient de réflexion (ceci sera confirmé dans le Chapitre suivant). Les termes  $S_{kn}$  de la première colonne représentent le rapport d'énergie transmise à partir de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  de  $p^+(t)$  à l'harmonique  $k$  de  $p^-(t)$  pour  $k = [1, 3, 5]$ . Lorsque le niveau augmente, la participation de  $|P_1^+|$  dans  $|P_1^-|$  diminue et la participation de  $|P_1^+|$  dans  $|P_k^-|$  augmente pour  $k > 1$ . La bande de fréquences où ces phénomènes sont visibles augmente avec le niveau d'excitation. Les coefficients diagonaux de  $\mathbf{S}$  sont les plus élevés, signifiant que



**Figure 4.3** – Modules des composantes harmoniques de  $p^+(t)$  (—) et  $p^-(t)$  (---) obtenus par équilibrage harmonique pour différents niveaux de  $|P_1|$

l'énergie de l'onde réfléchie est principalement localisée dans sa composante fondamentale. Il est également possible de conclure que l'énergie perdue par l'onde incidente lorsqu'elle est réfléchie sur l'absorbeur, est supérieure à l'énergie diffusée à l'arrière de la membrane par les harmoniques d'ordre supérieur.

La représentation de la matrice  $\mathbf{T}$  est présentée en Figure 4.5. Contrairement à la matrice  $\mathbf{S}$ , toutes les composantes de  $\mathbf{T}$  sont faibles et seulement affectées par le comportement non linéaire à basses fréquences, montrant que  $\overline{\mathbf{P}^+}$  n'affecte pas significativement  $\mathbf{P}^-$ .

La Figure 4.6 compare  $|p_1^-|$ ,  $|p_3^-|$  et  $|p_5^-|$  obtenus par équilibrage harmonique et en utilisant (4.62) en ne prenant en compte que la matrice  $\mathbf{S}$ . Pour les deux niveaux d'excitation présentés, les résultats des deux méthodes sont en accord, validant la robustesse de la procédure numérique. Cette dernière illustre bien la présence des non-linéarités de la membrane NES. En considérant seulement une matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  simplifiée (c'est-à-dire en prenant en compte seulement les termes diagonaux et la première colonne de  $\mathbf{S}$ ), les résultats montrent un bon accord entre l'approche par équilibrage harmonique et la prédiction incluant toute la matrice  $\mathbf{S}$ .

### 4.3.2. Résonateur de Helmholtz non linéaire

Nous allons à présent étudier un résonateur de Helmholtz non linéaire (appelé aussi HNL) comme détaillé dans [8, 9]. Cet absorbeur, représenté en Figure 4.7, est constitué d'une colonne d'air située dans un col de forme cylindrique d'une longueur de 0.009 m, d'un rayon externe de 0.002 m et d'un rayon interne de 0.004 m. Ce col débouche sur une cavité de longueur 0.0215 m et de section 0.0066 m<sup>2</sup>. La masse d'air dans le col est supposée incompressible et la masse d'air dans la cavité est supposée compressible. Lorsqu'une onde acoustique entre dans le col, la masse d'air subit des frottements produisant un effet d'amortissement. La compression de l'air dans la cavité induit quant à elle une force de rappel. Des termes non linéaires interviennent alors dans les forces d'amortissement et de rappel.

Le résonateur de Helmholtz non linéaire peut être modélisé comme un oscillateur non linéaire à un degré de liberté [8, 9] écrit en variables sans dimension comme

$$\ddot{u}(t) + \delta\dot{u}(t) + \sigma|\dot{u}(t)|\dot{u}(t) + u(t) - \alpha u(t)^2 + \beta u(t)^3 = sp(t) \quad (4.76)$$

avec  $u = \frac{S}{V_0}U$  et  $t = \omega_0\bar{t}$ .  $U$  est le déplacement de l'air dans le col,  $V_0$  le volume de la cavité du HNL,  $S$  est la section transversale du col.  $\bar{t}$  désigne le temps réel et  $\omega_0$  la fréquence de résonance du NHL en régime linéaire.

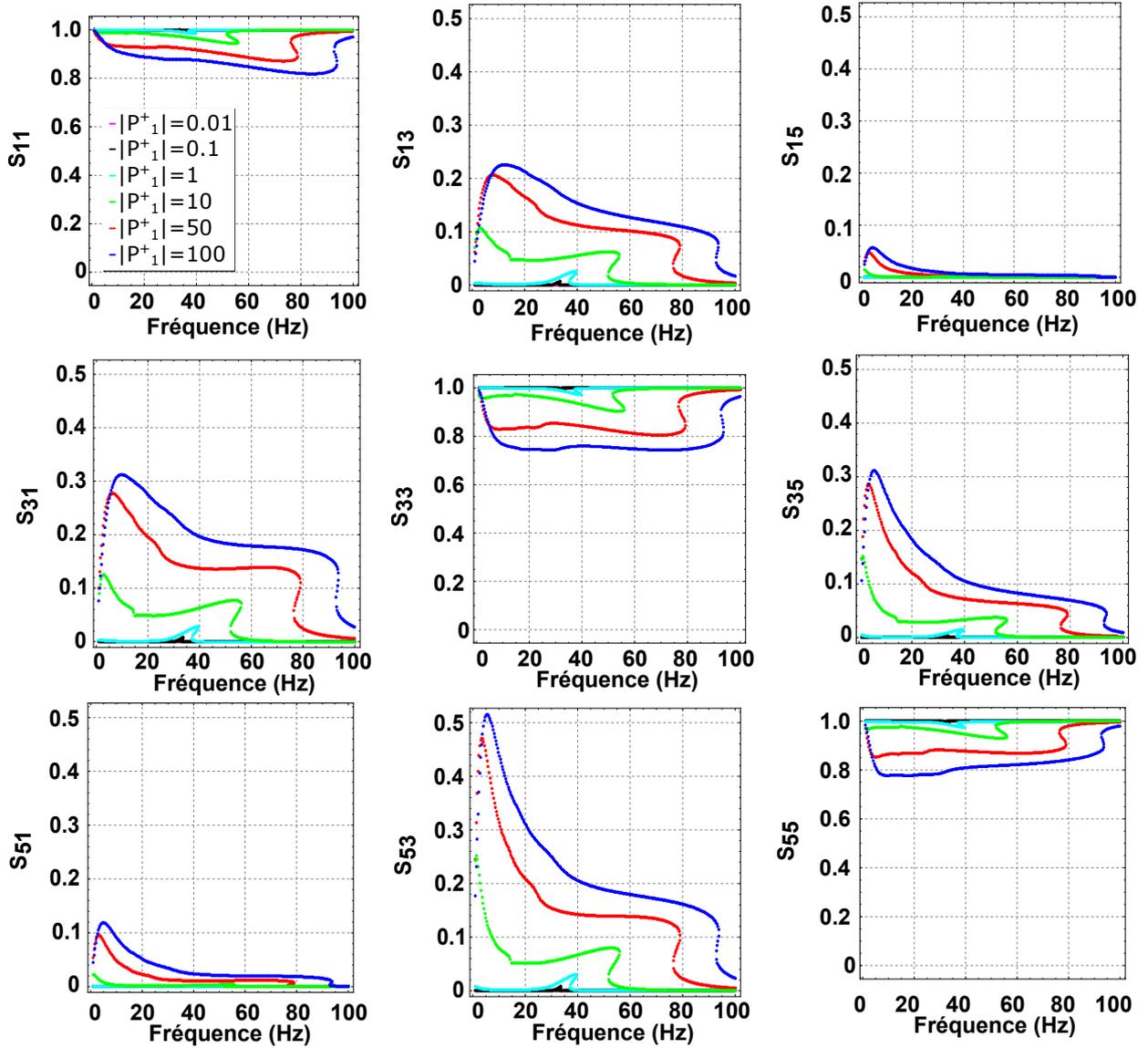


Figure 4.4 – Modules des composantes de la matrice de diffusion  $S$  pour différents niveaux de  $|P_1|$

Le terme d’amortissement non linéaire quadratique est dû au phénomène de jet présent dans l’absorbeur. La force de rappel non linéaire implique des termes quadratique et cubique, engendrés par la masse d’air présente dans la cavité du HNL.

Les valeurs numériques des paramètres de l’équation (4.76) sont données par  $\delta = 0.005$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\alpha = 1.2$ ,  $\beta = 1.36$  et  $s = 0.001$ . La fréquence de résonance naturelle résultante du NHL en régime linéaire est de  $\omega_0 = 2\pi 246$  rad/s.

La pression acoustique  $p(t)$  est supposée périodique comme

$$p(t) = P_1 e^{-j2\pi ft} + P_{-1} e^{j2\pi ft}. \quad (4.77)$$

La Figure 4.8 présente les valeurs RMS de la réponse en régime permanent  $v(t) = \dot{u}(t)$  de l’équation (4.76). Elles sont obtenues par équilibrage harmonique (avec  $H = 3$  correspondant aux trois premières harmoniques 1, 2 et 3) en résolvant le système non linéaire (4.70) sur une plage en fréquences allant de  $f_1 = 0.142$  Hz à  $f_1 = 0.164$  Hz. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus en résolvant (4.76) grâce au solveur d’équations différentielles ordinaires *NDSolve* (avec le choix Automatique pour l’option Méthode) disponible dans ©Mathematica, sur une

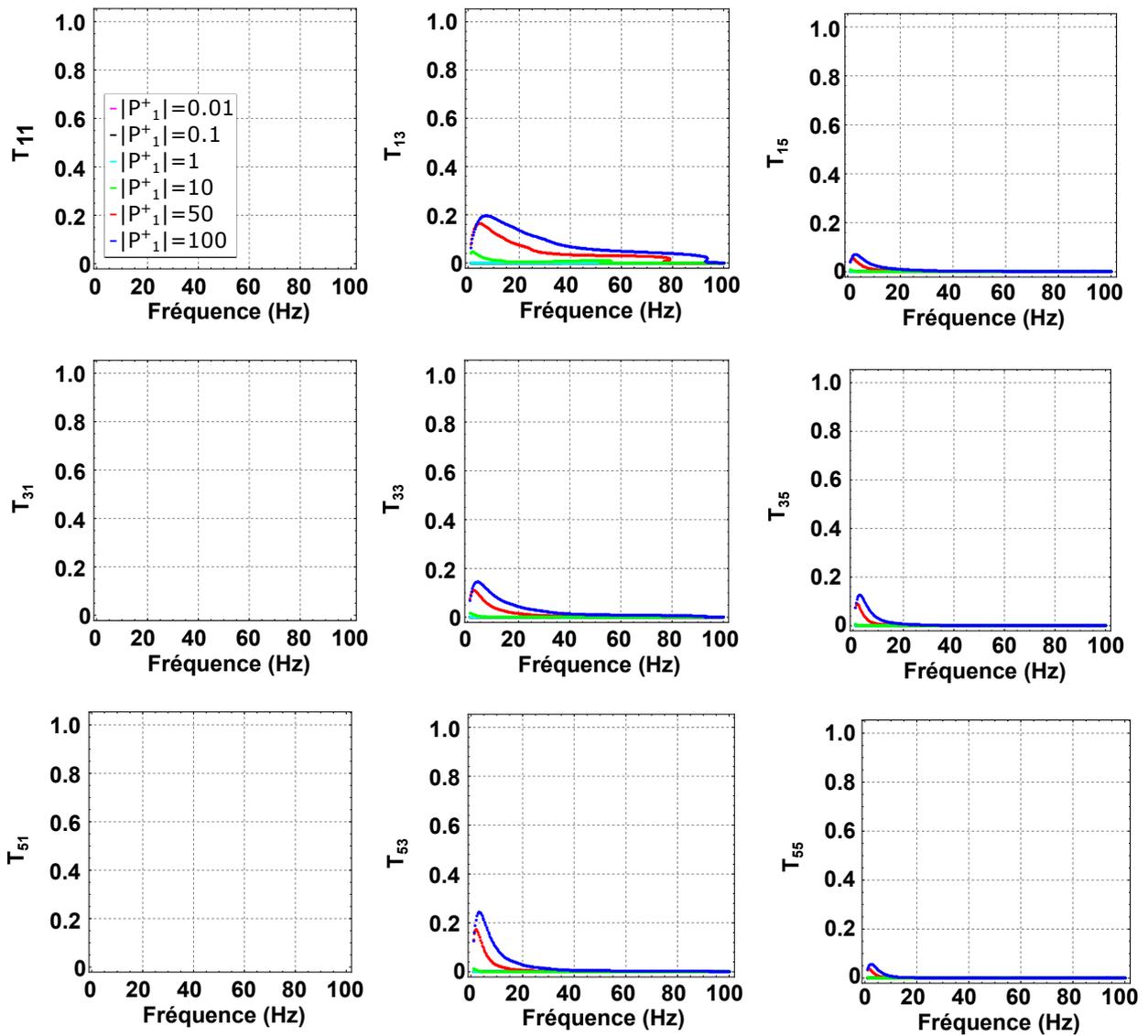


Figure 4.5 – Modules des composantes de la matrice de diffusion  $\mathbf{T}$  pour différents niveaux de  $|P_1|$

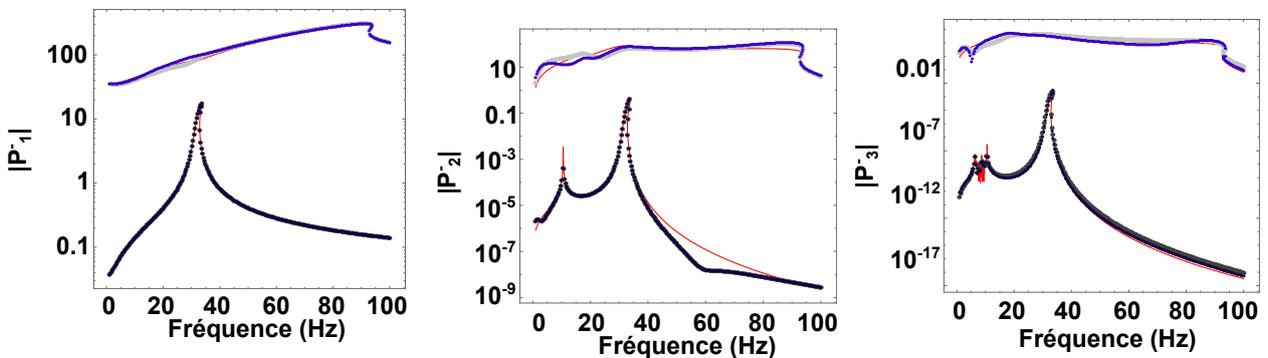
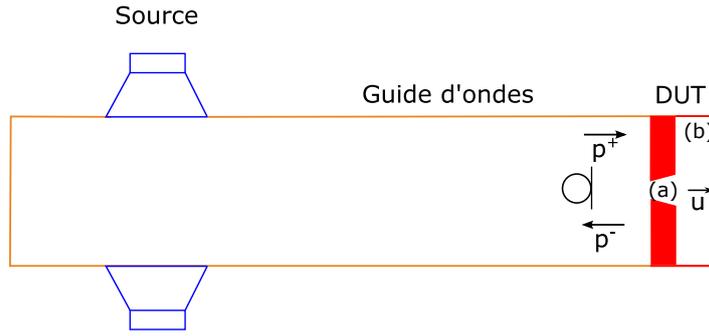


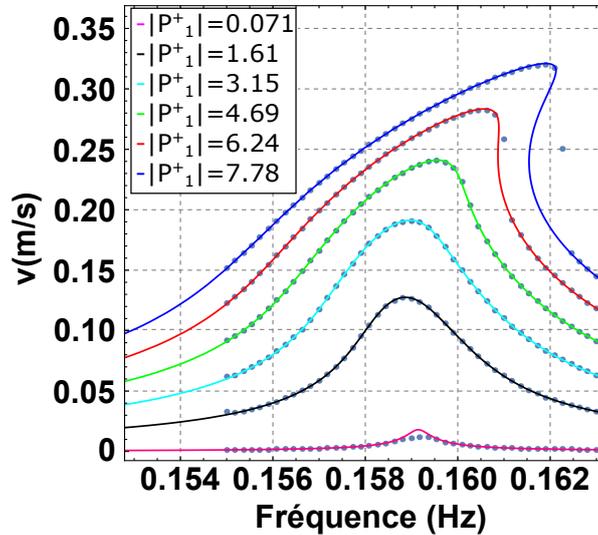
Figure 4.6 – Module des composantes harmoniques de  $p^-(t)$  obtenues par équilibrage harmonique (—) et par distorsion polyharmonique (---) en ne tenant compte que de la matrice  $\mathbf{S}$  (—, ●) et en ne tenant compte que de la matrice réduite  $\mathbf{S}$  (—) pour les niveaux d'excitation  $|P_1| = [0.1, 100]$  (de bas en haut)



**Figure 4.7** – Représentation du modèle du résonateur de Helmholtz non linéaire équivalent connecté au SKT avec (a) le col et (b) la cavité

plage de fréquences allant de  $f_1 = 0.155$  Hz à  $f_1 = 0.14$  Hz par pas de 1 Hz. Six niveaux d'excitation ont été utilisés avec  $|P_1| = [0.071, 1.61, 3.15, 4.69, 6.24, 7.78]$  correspondant à des niveaux de pression de 71 à 112 dB.

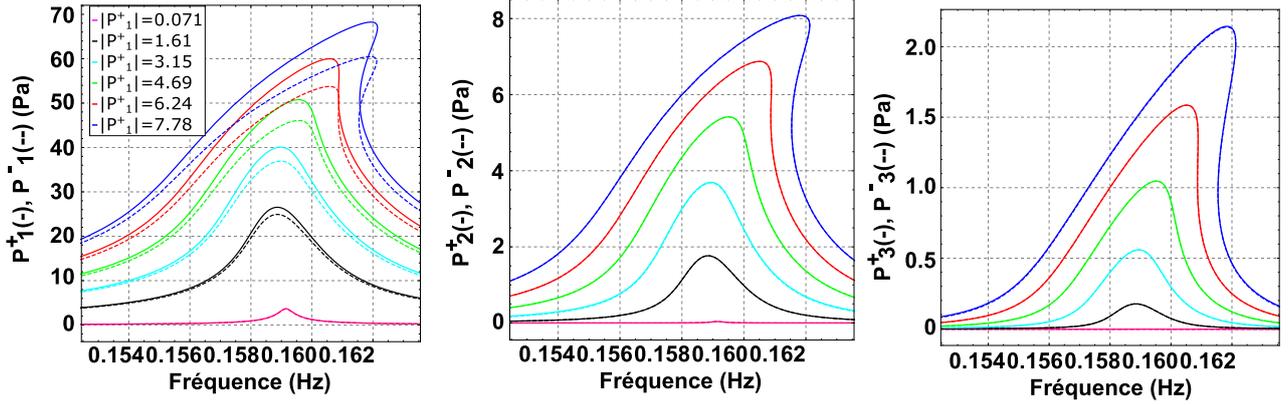
L'approche par équilibrage harmonique et l'approche par résolution directe présentent des résultats en accord pour tous les niveaux d'excitation. Cette comparaison valide le choix de  $H = 3$  harmoniques. Le HNL présente un comportement non linéaire mollissant (courbes incurvées vers la gauche) pour des niveaux d'excitation faibles et un comportement non linéaire durcissant (courbes incurvées vers la droite) pour des niveaux d'excitation plus élevés.



**Figure 4.8** – Simulation numérique de (4.76) dans le domaine temporel (●) et en utilisant l'équilibrage harmonique défini par (4.29) (–) pour différents niveaux de  $|P_1|$  (de bas en haut)

La Figure 4.9 illustre les coefficients harmoniques  $P_1^+$ ,  $P_3^+$  et  $P_5^+$  (respectivement  $P_1^-$ ,  $P_3^-$  et  $P_5^-$ ) de  $p^+(t)$  (respectivement  $p^-(t)$ ) obtenus par équilibrage harmonique comme présenté dans la Section 4.2.4. Pour chaque niveau d'excitation,  $|P_1^+(f)| \geq |P_1^-(f)|$  et l'écart entre ces deux grandeurs est creusé lorsque le niveau d'excitation augmente. Pour  $k > 1$ , et parce que l'harmonique  $P_k(f)$  de  $p(t)$  est égale à zéro,  $P_k^+(f) = -P_k^-(f)$ . Les comportements mollissant et durcissant non linéaires sont également bien visible.

Les composantes de la matrice  $\mathbf{S}$  sont visibles en Figure 4.10. On remarque de nombreuses similitudes avec l'estimation de  $\mathbf{S}$  pour la membrane visco-élastique : les termes diagonaux



**Figure 4.9** – Modules des composantes harmoniques de  $p^+(t)$  (—) et  $p^-(t)$  (---) obtenus par équilibrage harmonique pour différents niveaux de  $|P_1|$  (de bas en haut)

de  $\mathbf{S}$  diminuent et les termes non diagonaux de  $\mathbf{S}$  augmentent lorsque le niveau d'excitation augmente. La participation de  $|P_k^+|$  dans  $|P_k^-|$  diminue et la participation de  $|P_n^+|$  dans  $|P_k^-|$  augmente lorsque le niveau d'excitation augmente. Pour chaque niveau d'excitation, le comportement des termes diagonaux de  $\mathbf{S}$  est très similaire et est fortement influencé par le comportement non linéaire du NES lorsque le niveau d'excitation augmente, et ce dans une bande de fréquences étroite. La continuation des coefficients de réflexion décrite par (4.10) n'est visible que pour de faibles niveaux d'excitation.

Les coefficients diagonaux de  $\mathbf{S}$  sont là aussi les plus élevés, signifiant que l'énergie de l'onde réfléchie est principalement localisée dans sa composante fondamentale, ou que l'énergie perdue par l'onde incidente lorsqu'elle est réfléchie sur l'absorbeur est supérieure à l'énergie diffusée à l'arrière de la membrane par les harmoniques d'ordre supérieur.

Les composantes de la matrice  $\mathbf{T}$  sont présentées en Figure 4.11. Comme pour la membrane visco-élastique, les composantes de  $\mathbf{T}$  sont faibles et seulement affectées par le comportement non linéaire dans une bande de fréquences étroite.  $\overline{\mathbf{P}}^+$  n'affecte donc pas significativement  $\mathbf{P}^-$ .

La Figure 4.12 compare  $|p_1^-|$ ,  $|p_2^-|$  et  $|p_3^-|$  obtenus par équilibrage harmonique et en utilisant (4.62) en ne prenant en compte que la matrice  $\mathbf{S}$ . Pour les deux niveaux d'excitation présentés, les résultats de (4.62) sont en accord avec l'équilibrage harmonique. (4.62) permet donc bien de prédire  $\mathbf{P}^-$  à partir de  $\mathbf{P}^+$ . La procédure numérique traduit correctement l'influence des éléments non linéaires de l'absorbeur HNL. En réduisant  $\mathbf{S}$  à une matrice simplifiée présentant la première colonne et les termes diagonaux, les résultats montrent un bon accord avec l'équilibrage harmonique et la prédiction incluant toute la structure de  $\mathbf{S}$ .

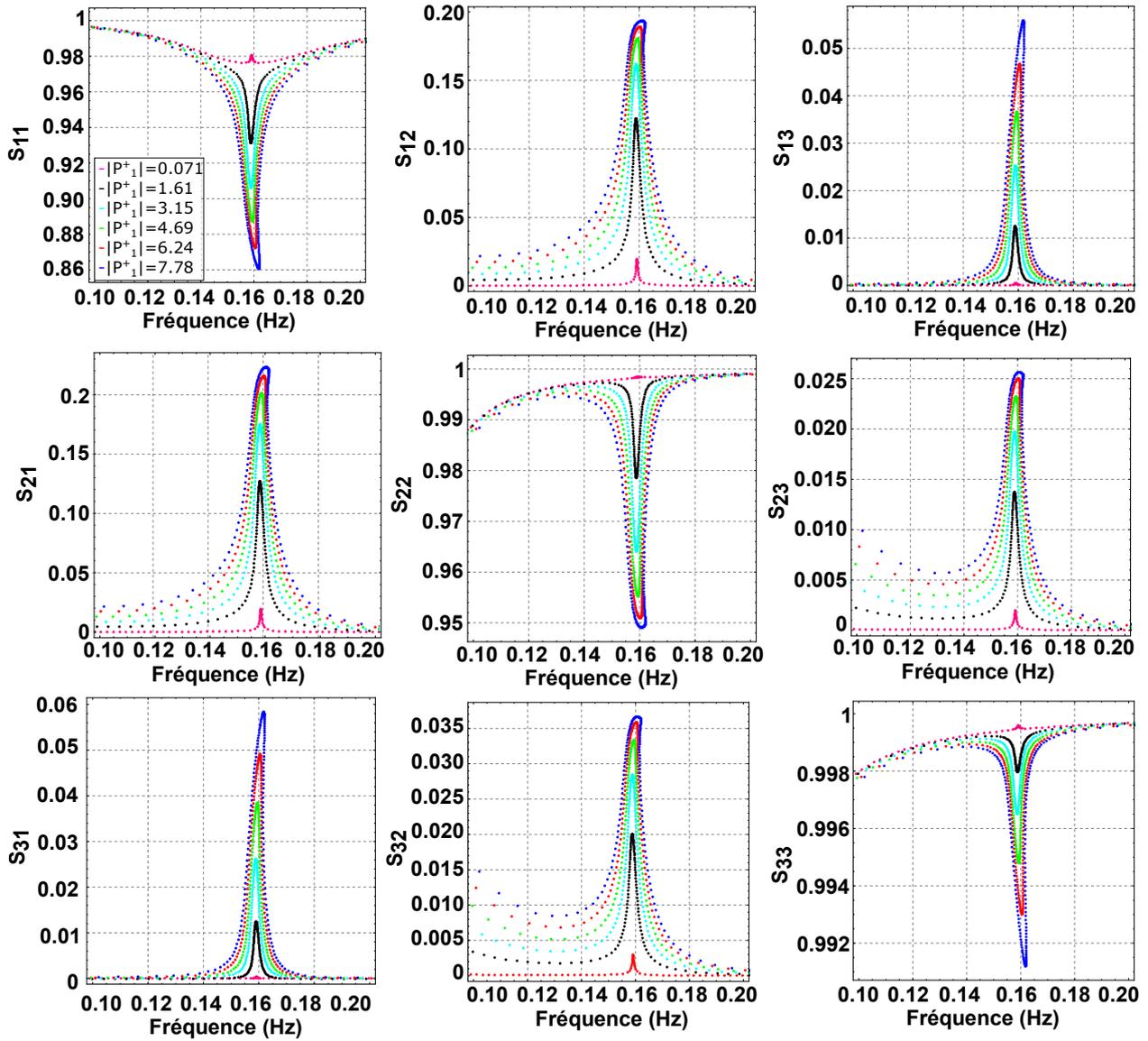


Figure 4.10 – Modules des composantes de la matrice de diffusion  $S$  pour différents niveaux de  $|P_1^+|$  (de bas en haut).

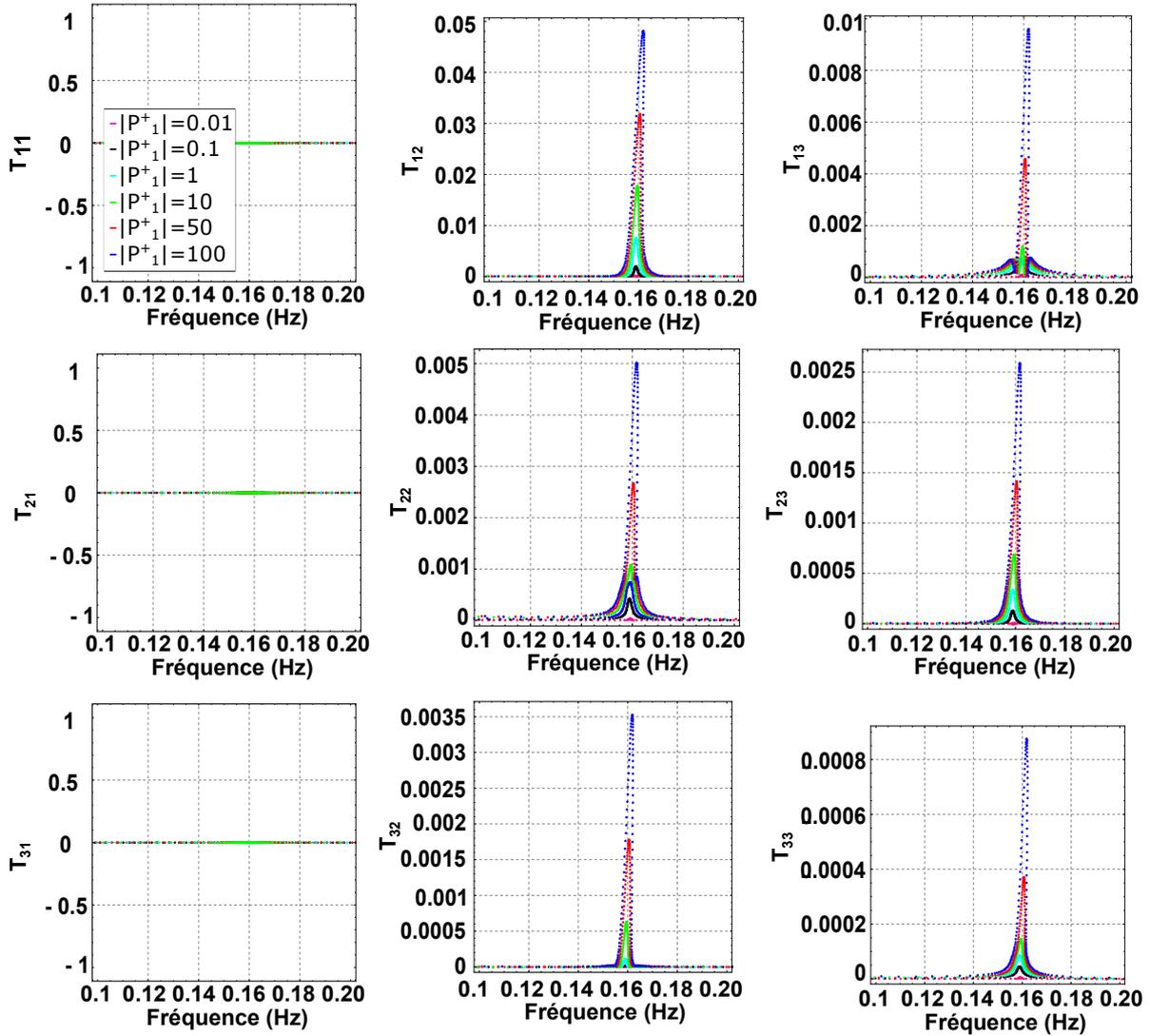


Figure 4.11 – Modules des composantes de la matrice de diffusion  $\mathbf{T}$  pour différents niveaux de  $|P_1|$  (de bas en haut).

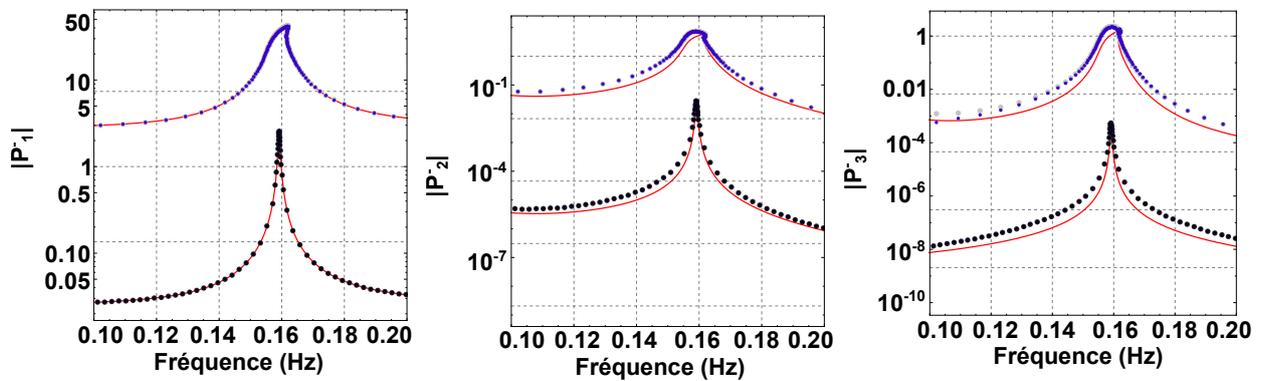


Figure 4.12 – Module des composantes harmoniques de  $p^-(t)$  obtenues par équilibrage harmonique (—) et par distorsion polyharmonique (4.62) en ne tenant compte que de la matrice  $\mathbf{S}$  (—, ●) et en ne tenant compte que de la matrice réduite  $\mathbf{S}$  (—) pour les niveaux d'excitation  $|P_1| = [0.071, 7.78]$  (de bas en haut)

## En résumé

Afin de mieux comprendre les charges acoustiques non linéaires, le modèle linéaire vu dans le Chapitre 3 a été étendu de façon à prendre en compte les transferts d'énergie entre harmoniques, à l'aide d'une matrice de diffusion [16].

Cette nouvelle méthode repose sur une modélisation non linéaire par distorsion polyharmonique [17], basée sur des développements en série de Taylor. Elle s'applique à des absorbeurs non linéaires soumis à une excitation à la fréquence fondamentale seule. Elle permet d'obtenir la relation entre les harmoniques des ondes de pressions incidentes  $P_k^+(f)$  et réfléchies  $P_n^-(f)$  à l'aide des matrices de diffusion  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ .

L'obtention de ces matrices est réalisée analytiquement à partir de deux étapes : dans un premier temps le modèle dynamique non linéaire de l'absorbeur, reliant la pression acoustique et le débit volumique associée, est résolu par équilibrage harmonique. Un nouveau système non linéaire fonction des ondes de pression incidente et réfléchi est alors obtenu. Ce système est ensuite linéarisé pour rendre explicite les matrices de diffusion. Les hypothèses découlant du modèle de distorsion polyharmonique permettent de simplifier le problème et d'obtenir les coefficients des matrices de diffusion  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ . Si la non-linéarité du système étudiée est holomorphe alors la matrice  $\mathbf{T}$  est nulle et les transferts d'énergie ne seront quantifiés que par la matrice  $\mathbf{S}$ .

La procédure numérique résultante a été appliquée sur deux absorbeurs non linéaires : une membrane visco-élastique [4] et un résonateur de Helmholtz non linéaire [8, 9]. Les matrices  $\mathbf{S}$  obtenues sont similaires, quelque soit la méthode de résolution utilisée. Cette modélisation par distorsion polyharmonique permet donc une bonne estimation numérique des matrices de diffusion et donc du transfert d'énergie entre les harmoniques.

# 5

## APPROCHES EXPÉRIMENTALES POUR LA CARACTÉRISATION DE CHARGES ACOUSTIQUES NON LINÉAIRES PAR DISTORSION POLYHARMONIQUE

---

Dans le Chapitre 4, nous avons montré que le modèle par distorsion polyharmonique permet de mettre en évidence la relation matricielle (4.62). Elle fait intervenir deux matrices ( $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ ) et permet de relier les composantes harmoniques de la pression réfléchie aux composantes harmoniques de la pression incidente et de son conjugué. L'application du modèle de distorsion polyharmonique a permis d'estimer analytiquement ces deux matrices pour différentes terminaisons acoustiques. À présent, nous allons chercher à obtenir ces mêmes matrices à partir de données expérimentales. Deux approches sont ici développées. La première approche est basée sur des hypothèses simplificatrices et donne un accès direct à une forme simplifiée de la matrice  $\mathbf{S}$ , appelée matrice de diffusion. La deuxième approche passe par l'identification d'un modèle non linéaire et permet de s'affranchir des hypothèses simplificatrices de la méthode directe. Les coefficients des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  peuvent alors être obtenus.

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Estimation de la matrice de diffusion simplifiée</b>	<b>82</b>
5.1.1	Formulation du problème	82
5.1.2	Procédure de mesure	83
5.1.3	Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus	86
5.1.4	Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus balayé synchronisé	86
<b>5.2</b>	<b>Estimation de la relation matricielle complète</b>	<b>87</b>
5.2.1	Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type série de Fourier	87
5.2.2	Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type sinus balayé synchronisé	90
5.2.3	Passerelle entre les deux approches	91
5.2.4	Étape 1 : Identification d'un modèle de Hammerstein	93
5.2.5	Étape 2 : Modèle de Hammerstein comme modèle de distorsion polyharmonique	93

---

## 5.1. Estimation de la matrice de diffusion simplifiée

### 5.1.1. Formulation du problème

Le modèle par distorsion polyharmonique permet de mettre en évidence une relation matricielle faisant intervenir les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ . Ces deux matrices permettent de relier les composantes harmoniques de la pression réfléchie aux composantes harmoniques de la pression incidente. Dans cette approche expérimentale, on suppose que les ondes de pressions incidente et réfléchie sont définies par leurs composantes fondamentales et harmoniques comme

$$\mathbf{P}^+(f) = (P_1^+(f), \dots, P_H^+(f))^T \quad (5.1)$$

$$\mathbf{P}^-(f) = (P_1^-(f), \dots, P_H^-(f))^T. \quad (5.2)$$

avec  $H$  le nombre d'harmoniques considérées.

La relation matricielle à résoudre s'exprime comme (4.62) c'est-à-dire

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{S}(|P_1^+|, \Theta_1)\mathbf{P}^+ + \mathbf{T}(|P_1^+|, \Theta_1)\overline{\mathbf{P}^+}. \quad (5.3)$$

Les résultats théoriques et l'étude numérique présentés au Chapitre 4 ont montré que le terme  $\mathbf{T}(|P_1^+|, \Theta_1)\overline{\mathbf{P}^+}$  a peu d'influence sur l'estimation de  $\mathbf{P}^-$  et peut donc être négligé. La relation matricielle (5.3) est donc uniquement fonction de la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  comme

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{S}(|P_1^+|, \Theta_1)\mathbf{P}^+. \quad (5.4)$$

Sa forme développée fait apparaître explicitement la dépendance en la fréquence fondamentale  $f$  et en omettant la dépendance en  $|P_1^+|$ ,

$$\begin{pmatrix} P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ P_3^-(f) \\ \vdots \\ P_H^-(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) & S_{13}(f) & \cdots & S_{1H}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) & S_{23}(f) & \cdots & S_{2H}(f) \\ S_{31}(f) & S_{32}(f) & S_{33}(f) & \cdots & S_{3H}(f) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{H1}(f) & S_{H2}(f) & S_{H3}(f) & \cdots & S_{HH}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ P_3^+(f) \\ \vdots \\ P_H^+(f) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Le problème à résoudre consiste à déterminer les composantes  $S_{kn}(f)$  de la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  pour une fréquence d'excitation donnée  $f$  et un niveau d'excitation donné  $A$ .

Une solution à ce problème a été proposée dans [16] et a été brièvement décrite dans la Section 1.6.2. Cette approche permet d'obtenir une matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  dite simplifiée. Les simplifications introduites résultent deux hypothèses reprises ci-après :

**Hypothèse 1** : L'échange d'énergie entre harmoniques n'est possible que des basses vers les hautes fréquences qui se traduit sur la matrice de diffusion par

$$S_{kn}(f) = 0 \text{ pour } 1 < n < k. \quad (5.6)$$

La matrice (5.5) devient alors

$$\begin{pmatrix} P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ P_3^-(f) \\ \vdots \\ P_H^-(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(f) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{31}(f) & S_{32}(f) & S_{33}(f) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{H1}(f) & S_{H2}(f) & S_{H3}(f) & \cdots & \cdots & S_{HH}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ P_3^+(f) \\ \vdots \\ P_H^+(f) \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

**Hypothèse 2** : La terminaison acoustique satisfait le principe de superposition harmonique décrit dans [17] qui se traduit par l'absence de couplage entre sous-harmoniques. Cela se répercute sur la matrice de diffusion par

$$S_{kn}(f) = 0 \text{ pour } 1 < k < n. \quad (5.8)$$

La matrice de diffusion (5.7) prend alors la forme simplifiée suivante

$$\begin{pmatrix} P_1^-(f) \\ P_2^-(f) \\ P_3^-(f) \\ \vdots \\ P_H^-(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(f) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{31}(f) & 0 & S_{33}(f) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{H1}(f) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & S_{HH}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^+(f) \\ P_2^+(f) \\ P_3^+(f) \\ \vdots \\ P_H^+(f) \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Cette matrice de diffusion simplifiée peut également être exprimée en terme d'impédance, comme présentée dans (4.12) par

$$\begin{pmatrix} P_1(f) \\ P_2(f) \\ P_3(f) \\ \vdots \\ P_H(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}(f) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_{21}(f) & Z_{22}(f) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_{31}(f) & 0 & Z_{33}(f) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{H1}(f) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & Z_{HH}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1(f) \\ Q_2(f) \\ Q_3(f) \\ \vdots \\ Q_H(f) \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Il est à noter que lorsque le système acoustique étudié est linéaire, seuls les termes  $S_{kn}(f)$  pour  $k = n$  et  $Z_{kn}(f)$  pour  $k = n$  sont non nuls. Ils correspondent respectivement au coefficient de réflexion apparent  $R_T(f)$  et à l'impédance apparente  $Z_T(f)$  de la charge acoustique tels qu'introduit dans le Chapitre 3.

## 5.1.2. Procédure de mesure

Nous allons proposer ici une procédure permettant d'extraire les différents coefficients  $S_{kn}(f)$  de la matrice simplifiée (5.9).

Cette procédure, qui reprend les étapes de la méthode proposée dans [16], a été adaptée pour une mise en œuvre sur le banc de mesure SKT.

La procédure nécessite au préalable un étalonnage de la source. Elle fournit la fonction de transfert  $H_{ae}(f)$  entre le débit volumique  $Q_a(f)$  et la tension de contrôle  $U(f)$ , et l'impédance de la source  $Z_S(f)$ . La méthode décrite dans le Chapitre 3 est utilisée pour réaliser cet étalonnage.

La procédure est basée sur une série de mesures au cours desquelles sont mesurées la pression  $p(t)$  au regard de l'échantillon à caractériser et la réponse en tension de la source  $u(t)$  pour différents niveaux d'excitation. La matrice de diffusion (5.9) est alors obtenue ligne par ligne, chaque ligne nécessitant une acquisition. Le principe de base est le suivant : nous mesurons  $S_{11}(f)$  à partir d'une première mesure à la fréquence fondamentale  $f$ , donnant également des réponses aux fréquences harmoniques pour le niveau d'excitation nominal  $A$ . Lors d'une seconde acquisition, nous mesurons les termes diagonaux  $S_{kn}(f)$  pour  $k = n > 1$  à un niveau de pression approprié, obtenu en modifiant le niveau de la source, permettant d'obtenir la première colonne  $S_{k1}(f)$  pour  $k \geq 1$  à partir de la première mesure.

Détaillons à présent les calculs.

**Détermination de  $S_{11}$**  Une première acquisition est effectuée pour une gamme de fréquences  $[f_1; f_2]$  et un niveau d'excitation  $A$ .

En utilisant les premiers termes harmoniques  $U_1(f, A)$  et  $P_1(f, A)$  des signaux mesurés de  $u(t)$  et  $p(t)$ ,  $S_{11}(f, A)$  est obtenu à partir de (1.80) comme

$$S_{11}(f, A) = \frac{H_m(f, A)Z_S(f) - Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f, A))}{H_m(f, A)Z_S(f) + Z_c(f)(Z_S(f)H_{ae}(f) - H_m(f, A))} \quad (5.11)$$

où

$$H_m(f, A) = \frac{P_1(f, A)}{U_1(f, A)} \quad (5.12)$$

et  $Z_c(f) = \rho c/S$ .

La composante fondamentale de la pression  $P_1(f, A)$  du signal mesuré  $p(t)$  s'exprime en fonction des composantes fondamentales des pressions incidente  $P_1^+(f, A)$  et réfléchie  $P_1^-(f, A)$  à partir de (1.16) comme

$$P_1(f, A) = P_1^+(f, A) + P_1^-(f, A). \quad (5.13)$$

Considérant (5.9),  $S_{11}(f)$  peut alors être exprimé en fonction de  $P_1^+(f, A)$  et  $P_1^-(f, A)$  par

$$S_{11}(f, A) = \frac{P_1^-(f, A)}{P_1^+(f, A)} \quad (5.14)$$

En combinant les équations (5.13) et (5.14), les composantes fondamentales des pressions incidente  $P_1^+(f, A)$  et réfléchie  $P_1^-(f, A)$  s'expriment par

$$P_1^+(f, A) = \frac{P_1(f, A)}{1 + R_T(f)} \quad (5.15)$$

$$P_1^-(f, A) = \frac{R_T(f)P_1(f, A)}{1 + R_T(f)} \quad (5.16)$$

Le calcul des composantes harmoniques des pressions acoustiques incidentes  $P_n^+(f, A)$  et réfléchies  $P_n^-(f, A)$  est nécessaire pour la suite de la méthode. Elles sont exprimées à partir de  $P_n(f, A)$  comme

$$P_n(f, A) = P_n^+(f, A) + P_n^-(f, A), \quad (5.17)$$

ou à partir du débit acoustique défini à partir de (1.18) comme

$$Q_n(f, A) = \frac{S}{\rho c} (P_n^-(f, A) - P_n^+(f, A)), \quad (5.18)$$

avec  $S$  la surface effective de l'absorbeur étudiée.

La connaissance du débit acoustique  $Q_n(f, A)$  est nécessaire pour résoudre ces deux équations et obtenir  $P_n^+(f, A)$  et  $P_n^-(f, A)$ . D'après l'équivalence électro-acoustique présentée en Figure 3.1.(b), à la fréquence  $f$ , le débit acoustique total  $Q(f, A)$  est défini comme la somme des débits passant par la source  $Q_S(f, A)$  et par la terminaison  $Q_T(f, A)$  comme

$$Q(f, A) = Q_S(f, A) + Q_T(f, A). \quad (5.19)$$

Pour le terme fondamental, l'équivalence électro-acoustique est définie par la Figure 5.1.(a). En appliquant une loi d'ohm à  $Z_T$ , le débit acoustique  $Q_T(f, A)$  passant par le DUT est défini comme

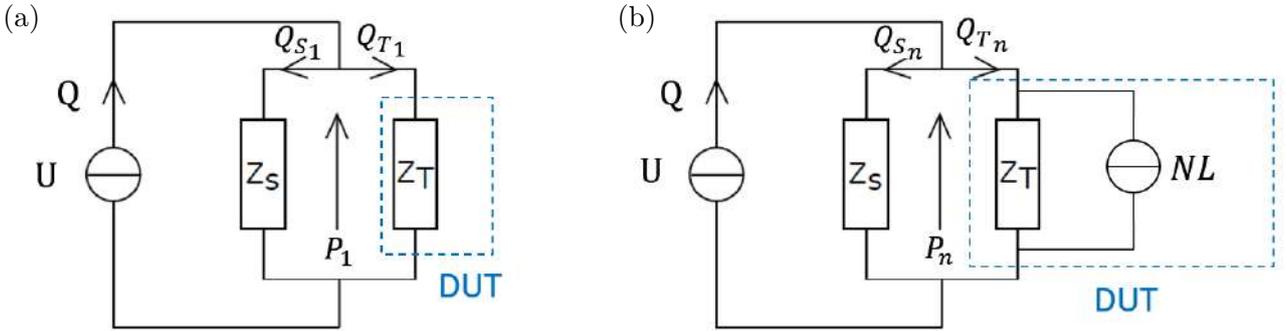
$$Q_{T1}(f, A) = \frac{P_1(f, A)}{Z_T(f)}. \quad (5.20)$$

Pour les composantes harmoniques, la source n'émettant qu'à la fréquence fondamentale  $f$ , le débit total  $Q(f, A)$  est nul. La relation

$$Q_{T_n}(f, A) = -Q_{S_n}(f, A) \quad (5.21)$$

est alors vérifiée à partir de (5.19). Cependant, les non-linéarités engendrées par le système étudié jouent le rôle de source virtuelle. L'équivalence électro-acoustique de ce cas est représenté en Figure 5.1.(b). De la même manière que précédemment, une loi d'Ohm sur  $Z_S$  permet d'établir

$$Q_{T_n}(f, A) = -Q_{S_n}(f, A) = -\frac{P_n(f, A)}{Z_S(nf)}. \quad (5.22)$$



**Figure 5.1** – Équivalences électro-acoustiques du système pour l'étude des (a) composantes fondamentales et (b) des composantes harmoniques.

En combinant les équations (5.17), (5.18) et (5.22), les composantes harmoniques des pressions incidentes  $P_n^+(f, A)$  et réfléchies  $P_n^-(f, A)$  sont obtenues par

$$P_n^+(f, A) = \frac{1}{2} \left( P_n(f, A) + \frac{\rho c}{S} Q_n(f, A) \right) \quad (5.23)$$

$$P_n^-(f, A) = \frac{1}{2} \left( P_n(f, A) - \frac{\rho c}{S} Q_n(f, A) \right) \quad (5.24)$$

**Détermination des termes diagonaux  $S_{nn}$  pour  $1 < n \leq H$**   $H - 1$  nouvelles acquisitions sont nécessaires pour obtenir les termes diagonaux  $S_{nn}$  de la matrice de diffusion ( $H$  est le nombre d'harmoniques recherchée). Pour chaque harmonique  $n$ , une acquisition est effectuée sur la plage de fréquences  $f = [n \times f'_1; n \times f'_2]$  avec  $f'_2 = f_2/H$ , à un niveau d'excitation  $A' < A$  choisi pour que toutes les acquisitions soient réalisées au même niveau d'excitation (c'est-à-dire que  $|P_1(nf, A')|$  soit proche de  $|P_n(f, A)|$  mesurée lors de la première acquisition). En utilisant les composantes fondamentales  $U_1(nf, A')$  et  $P_1(nf, A')$  mesurées, les coefficients  $S_{kn}$  pour  $k = n > 1$  sont obtenus à partir de (1.80) comme

$$S_{nn}(f, A) = \frac{H_m(nf)Z_S(nf) - Z_c(nf)(Z_S(nf)H_{ae}(nf) - H_m(nf, A'))}{H_m(nf, A')Z_S(nf) + Z_c(nf)(Z_S(nf)H_{ae}(nf) - H_m(nf, A'))} \quad (5.25)$$

où

$$H_m(nf, A') = \frac{P_1(nf, A')}{U_1(nf, A')}. \quad (5.26)$$

**Détermination des  $S_{n1}$  pour  $n > 1$**  La matrice de transfert (5.9) permet d'explicitier les coefficients de la première colonne  $S_{n1}$  pour  $n > 1$  pour chaque harmonique  $n$  comme

$$S_{n1}(f, A) = \frac{P_n^-(f, A) - S_{nn}(f, A)P_n^+(f, A)}{P_1^-(f, A)} \quad (5.27)$$

Les coefficients de la matrice de diffusion en impédance  $Z_{nk}(f)$  sont obtenus à partir des coefficients  $S_{nk}(f)$  par (1.89).

### 5.1.3. Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus

L'estimation de la matrice de diffusion simplifiée peut être obtenue pour différents types de signaux d'excitation. Dans ce premier cas, le système est excité par un signal sinusoïdal de la forme

$$e(t) = A \sin(2\pi ft + \Phi) \quad (5.28)$$

explicité dans la Section 1.4, où  $f$  est la fréquence du signal et  $A$  son amplitude. La phase  $\Phi$  est introduite arbitrairement par le générateur de signal. Chaque acquisition est réalisée avec des valeurs constantes de fréquences et d'amplitudes. Il y aura donc autant d'acquisitions que de fréquences d'excitation, d'harmoniques étudiées et d'amplitudes d'excitations soit  $N \times H \times 2N_{niv}$  où  $N$  désigne le nombre de fréquences choisies dans la plage d'étude,  $H$  le nombre d'harmoniques considérées et  $N_{niv}$  le nombre d'amplitudes d'excitation.

Les composantes harmoniques des données mesurées  $p(t)$  et  $u(t)$  sont obtenues par estimation du coefficient de Fourier à la fréquence d'excitation comme (1.39).

La durée d'une acquisition doit être limitée pour des raisons pratiques, mais elle doit être suffisamment longue pour atteindre le régime établi.

### 5.1.4. Extraction de la matrice de diffusion par excitation sinus balayé synchronisé

La source peut également être excitée par un sinus balayé synchronisé défini par [27, 28] comme

$$e(t) = A \sin(\varphi(t)). \quad (5.29)$$

et présenté dans la Section 1.6.3.  $A$  est l'amplitude d'excitation du signal et  $\varphi(t) = 2\pi f_1 e^{t/L}$  sa phase avec  $f_1$  la fréquence instantanée initiale.  $L$  est le taux d'augmentation exponentiel de la fréquence défini par (1.42) et fonction de  $f_2$  la fréquence instantanée finale et  $\bar{T}$  la durée du signal  $e(t)$ .

La réponse d'un système non linéaire excité par un sinus balayé synchronisé est considérée comme une somme des harmoniques du signal d'entrée  $e(t)$  convolué par les réponses impulsionnelles  $h_n(t)$ . Au cours d'une acquisition, la réponse en tension du haut-parleur  $u(t)$  et la pression acoustique  $p(t)$  sont enregistrées simultanément. Leur réponse est exprimée comme (1.49) par

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^p(t + \Delta t_n) * e(t) \quad (5.30)$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^u(t + \Delta t_n) * e(t) \quad (5.31)$$

avec  $\Delta t_n = L \ln(n)$  comme défini par (1.48).

Les réponses impulsionnelles totales  $h^p(t)$  et  $h^u(t)$  du système non linéaire sont obtenues à partir du signal d'entrée  $e(t)$  et des signaux mesurés  $p(t)$  et  $u(t)$  comme

$$h^p(t) = p(t) * \tilde{e}(t) \quad (5.32)$$

$$h^u(t) = u(t) * \tilde{e}(t) \quad (5.33)$$

où  $\tilde{e}(t)$  représente le filtre inverse du signal d'entrée.

Dans le domaine fréquentiel, les réponses impulsionnelles totales  $h^p(t)$  et  $h^u(t)$  s'expriment par

$$h^p(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[p(t)] \tilde{E}(f) \right] \quad (5.34)$$

$$h^u(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}[u(t)] \tilde{E}(f) \right] \quad (5.35)$$

où  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  désignent respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse.  $\tilde{E}(f)$  est l'expression analytique du filtre inverse définie par (1.52).

Un fenêtrage temporel défini grâce à  $\Delta t_n$  permet de séparer les harmoniques des réponses impulsionnelles totales afin d'obtenir  $h_n^p(t)$  et  $h_n^u(t)$ . À partir de leur transformée de Fourier  $H_n^p(f)$  et  $H_n^u(f)$ , les harmoniques de la pression  $P_n(f)$  présentées dans le SKT sont obtenues par

$$P_n(f) = A \times H_n^p(f) \quad (5.36)$$

$$P_u(f) = A \times H_n^u(f) \quad (5.37)$$

Cette méthode est moins coûteuse car le signal sinus balayé synchronisé permet de solliciter l'échantillon sur toute la plage en fréquence en une seule acquisition. Il y aura donc autant d'acquisitions que d'harmoniques et d'amplitudes d'excitation soit  $H \times N_{niv}$ .

## 5.2. Estimation de la relation matricielle complète

Nous cherchons à présent à estimer la matrice de diffusion complète, c'est-à-dire les matrices de diffusion  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$ , comme définies par (5.3). Pour ce faire, une méthode en deux étapes est proposée. Elle suppose que le système à caractériser peut être représenté par un modèle de Hammerstein. Le modèle de Hammerstein a été choisi pour sa généralité mais autres modèles pourraient être utilisés de la même manière.

Dans la première étape, nous allons nous inspirer des travaux [27, 28] où une méthode basée sur une cascade de  $N$  modèles de Hammerstein, représentée en Figure 5.2.(a), est proposée pour identifier un système non linéaire. Chaque branche est composée d'un élément polynomial non linéaire  $x^i$  pour  $i = 1, \dots, N$  à mémoire nulle, suivi d'un système linéaire  $G_i(f)$  pour  $i = 1, \dots, N$  représentant la mémoire de l'ensemble du système étudié.

Dans un premier temps, nous allons donner quelques propriétés d'une cascade de  $N$  modèles de Hammerstein.

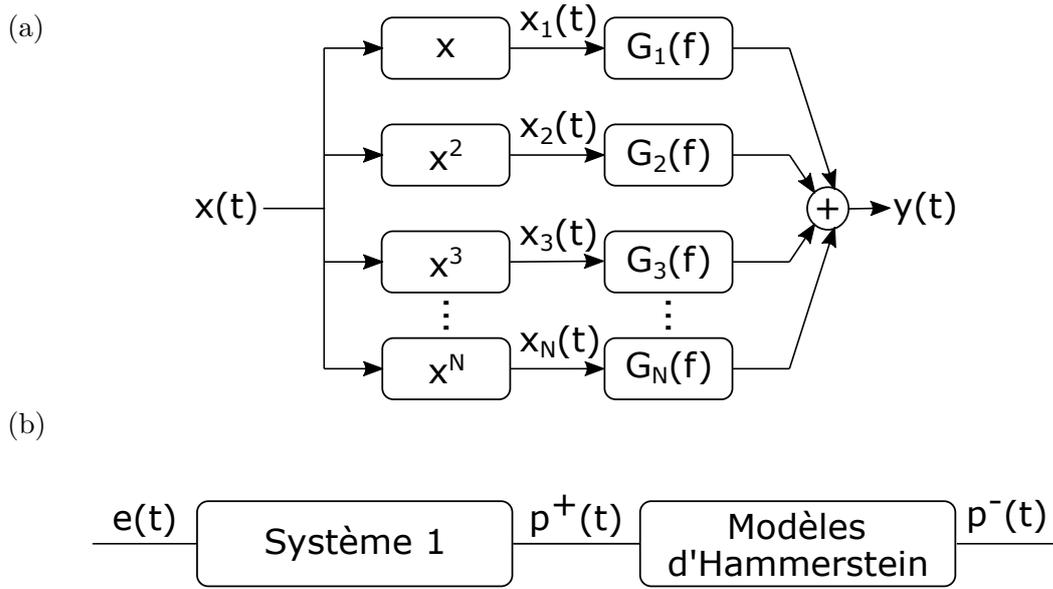
### 5.2.1. Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type série de Fourier

On considère un modèle de Hammerstein comme représenté Figure 5.2.(a), d'ordre  $N$ , de filtres linéaires  $G_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , d'entrée  $x(t)$  et de sortie  $y(t)$  définie comme

$$y(t) = \sum_{i=1}^N y_i(t) \quad (5.38)$$

où  $y_i(t)$  est la sortie du filtre  $G_i$  d'entrée  $x(t)^i$ .

Dans la suite de la section,  $p^+(t)$  désignera l'entrée  $x(t)$  et  $p^-(t)$  la sortie  $y(t)$ .



**Figure 5.2** – (a) Schéma blocs du modèle d’Hammerstein (b) Visualisation du système par modèle d’Hammerstein.

### Approche directe

On suppose ici que la pression  $p^+(t)$  et ses puissances  $p^+(t)^i$  s’écrivent sous la forme de séries de Fourier d’ordre  $H$  comme

$$p^+(t) = \sum_{n=-H}^H P_n^+ e^{j2\pi fnt} \quad (5.39)$$

et

$$p^+(t)^i = \sum_{n=-H}^H P_n^{i+} e^{j2\pi fnt} \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (5.40)$$

$P_n^+$  (respectivement  $P_n^{i+}$ ) désigne le coefficient de Fourier d’ordre  $n$  de  $p^+(t)$  (respectivement  $p^+(t)^i$ ) pour la fréquence fondamentale  $f$ . Dans ces formulations, nous supposons la relation de symétrie  $P_{-n}^+ = \overline{P_n^+}$  (respectivement  $P_{-n}^{i+} = \overline{P_n^{i+}}$ ) où  $\overline{(\cdot)}$  désigne le complexe conjugué. À noter que  $P_n^{1+}(f)$  et  $P_n^+(f)$  désignent indifféremment les coefficients de Fourier de  $p^+(t)$ .

En partant des signaux  $p^+(t)^i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , la sortie de chaque filtre linéaire  $G_i$  s’exprime sous la forme

$$y_i(t) = \sum_{n=-H}^H G_i(nf) P_n^{i+} e^{j2\pi fnt}. \quad (5.41)$$

La série de Fourier de  $p^-(t)$  définie comme

$$p^-(t) = \sum_{n=-H}^H P_n^- e^{j2\pi fnt} \quad (5.42)$$

où  $P_n^-$  désigne le coefficient de Fourier d’ordre  $n$ , est alors obtenue en reportant les équations (5.41)

dans (5.38), conduisant à

$$p^-(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=-H}^H G_i(nf) P_n^{i+} e^{j2\pi fnt} \quad (5.43)$$

$$= \sum_{n=-H}^H \left( \sum_{i=1}^N G_i(nf) P_n^{i+} \right) e^{j2\pi fnt}. \quad (5.44)$$

En identifiant terme à terme (5.42) et (5.44), on obtient les coefficients  $P_k^-(f)$  en fonction des coefficients  $P_n^{i+}$  sous la forme vectorielle suivante

$$\begin{pmatrix} P_0^- \\ P_1^- \\ P_2^- \\ \vdots \\ P_H^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^{1+} G_1(0) + P_0^{2+} G_2(0) & \cdots & + P_0^{N+} G_N(0) \\ P_1^{1+} G_1(f) + P_1^{2+} G_2(f) & \cdots & + P_1^{N+} G_N(f) \\ P_2^{1+} G_1(2f) + P_2^{2+} G_2(2f) & \cdots & + P_2^{N+} G_N(2f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_H^{1+} G_1(Hf) + P_H^{2+} G_2(Hf) & \cdots & + P_H^{N+} G_N(Hf) \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Cette relation nécessite de disposer des coefficients de Fourier de  $p^+(t)$  et de ses puissances pour en déduire celles de  $p^-(t)$ . Le calcul des coefficients  $P^{i+}(t)$  pour  $i > 2$  est en général obtenu par une approche numérique de type transformée de Fourier rapide (FFT).

### Approche par équilibrage harmonique (ou troncature harmonique)

Nous cherchons ici à développer une approximation analytique permettant le calcul de la réponse d'un modèle de Hammerstein pour une entrée de type série de Fourier.

On suppose  $p^+(t)$  définie sous la forme d'une série d'une Fourier par (5.39).  $p^+(t)$  élevé à la puissance  $i$  admet le développement en série

$$p^+(t)^i = \sum_{n=-H}^H P_n^{i+}(\mathbf{P}^+) e^{j2\pi fnt} + T_{H+1}^{i+}(f) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (5.46)$$

avec  $\mathbf{P}^+ = (P_1^+, P_2^+, \dots, P_H^+)^T$ .  $P_n^{i+}(\mathbf{P}^+)$  désigne les coefficients de Fourier de  $p^+(t)^i$  et  $T_{H+1}^{i+}(f)$  désigne la contribution de l'ensemble des coefficients de Fourier de  $p^+(t)^i$  supérieurs strictement à  $H$ . Chaque coefficient  $P_n^{i+}(\mathbf{P}^+)$  s'exprime sous la forme d'un polynôme complexe des coefficients de Fourier de  $p^+(t)$ . Ces expressions ne sont pas données mais peuvent être facilement obtenues (et manipulables pour des ordres raisonnables) à l'aide d'un code de calcul formel.

En reportant les équations (5.46) dans (5.45) et en négligeant les termes  $T_{H+1}^{i+}(f)$  (troncature modale d'ordre  $H$ ), nous aboutissons au système d'équations non linéaires

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{R}(\mathbf{P}^+) \quad (5.47)$$

où

$$\mathbf{P}^+ = (P_1^+, P_2^+, \dots, P_H^+)^T \quad (5.48)$$

$$\mathbf{P}^- = (P_0^-, P_1^-, \dots, P_H^-)^T \quad (5.49)$$

et la fonction vectorielle  $\mathbf{R}$  de composantes  $R_k$  est définie, pour  $k = 0, 1, \dots, H$ , par

$$R_k(\mathbf{P}^+) = \sum_{i=1}^N G_i(nf) P_n^{i+}(\mathbf{P}^+). \quad (5.50)$$

Il est important de rappeler ici que  $P_0^+$  et  $P_0^-$  sont des quantités réelles et que la fonction  $R_0(\mathbf{P}^+)$  est à valeurs réelles.

Le système algébrique (5.47) constitue une modélisation du système de Hammerstien dans le domaine de Fourier. Pour une fréquence d'excitation donnée  $f$  et un vecteur de coefficients de Fourier donné  $\mathbf{P}^+$ , il fournit une approximation  $\mathbf{P}^-$  de la réponse du système de Hammerstein. Cette approximation est appelée approximation par troncature harmonique d'ordre  $H$ .

La modélisation (5.47) du système de Hammerstien dans le domaine de Fourier sera utilisée pour construire un modèle de distorsion polyharmonique pour représenter le modèle de Hammerstein et en déduire la matrice de diffusion.

## 5.2.2. Réponse d'un modèle de Hammerstein sous sollicitation de type sinus balayé synchronisé

On se place à présent dans une situation similaire à celle que nous avons rencontré dans nos travaux. Elle correspond à la configuration décrite dans [28] que nous allons détailler dans le paragraphe suivant.

### Présentation de la configuration

La configuration considérée est représentée en Figure 5.2.(b). Elle correspond à la situation où le système étudié (ici représenté par le bloc "Modèles Hammerstein" d'entrée  $p^+(t)$  et de sortie  $p^-(t)$ ) est soumis à une excitation de type sinus balayé synchronisé présenté en Section 1.4, définie par le signal  $e(t)$  de la forme

$$e(t) = A \sin(\varphi(t)) \quad (5.51)$$

où  $A$  caractérise le niveau d'excitation, filtrée par un système auxiliaire inconnu.

L'objectif est toujours de caractériser la réponse  $p^-(t)$  en fonction de  $p^+(t)$ . La différence fondamentale avec la situation traitée dans la Section 5.2.1 résulte dans le fait que l'entrée du modèle  $p^+(t)$  n'est pas directement accessible à la commande.

### Lien entrée/sortie

L'utilisation d'une méthode de déconvolution non linéaire développée dans [27] mesurant la distorsion non linéaire entre l'entrée et la sortie d'un système permet de représenter, dans le domaine temporel,  $p^+(t)$  et  $p^-(t)$ . Ces deux grandeurs sont considérées séparément, comme les sorties de deux systèmes de même entrée  $e(t)$  (Figure 5.2.(b)) sous la forme

$$p^+(t) = \sum_{n=1}^H h_n^+(t - \Delta_n) * u(t) \quad (5.52)$$

et

$$p^-(t) = \sum_{n=1}^H h_n^-(t - \Delta_n) * u(t) \quad (5.53)$$

où  $h_n^{p^+}(t)$  et  $h_n^{p^-}(t)$  désignent les réponses impulsionnelles harmoniques associées respectivement à  $p^+(t)$  et  $p^-(t)$ . De-même, nous pouvons considérer chaque puissance de  $p^+(t)$ ,  $p^+(t)^i$ , comme la sortie d'un système d'entrée  $e(t)$  et les représenter sous la forme

$$p^+(t)^i = \sum_{n=1}^H h_n^{i+}(t - \Delta_n) * u(t) \text{ pour } i = 1, \dots, N \quad (5.54)$$

où  $h_n^{p+i}(t)$  désigne la réponse impulsionnelle harmonique associée à  $p^{+i}(t)$ .

Dans le domaine fréquentiel, les équations (5.52), (5.54), (5.53) s'expriment comme

$$P^+(f) = \sum_{n=1}^H H_n^+(f) e^{j2\pi f \Delta_n} U(f), \quad (5.55)$$

$$P^-(f) = \sum_{n=1}^H H_n^-(f) e^{j2\pi f \Delta_n} U(f) \quad (5.56)$$

et

$$P^{i+}(f) = \sum_{n=1}^H H_n^{+i}(f) e^{j2\pi f \Delta_n} U(f) \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (5.57)$$

$P^+(f)$ ,  $P^-(f)$  et  $P^{+i}(f)$  désignent respectivement les transformées de Fourier de  $p^+(t)$ ,  $p^-(t)$  et  $p^{+i}(t)$  et  $H_n^+(f)$ ,  $H_n^-(f)$  et  $H_n^{+i}(f)$  sont appelées les réponses en fréquences harmoniques obtenues par transformées de Fourier de  $h_n^+(t)$ ,  $h_n^-(t)$  et  $h_n^{+i}(t)$ . Les notations choisies imposent les relations suivantes :  $h_n^{+1}(t) = h_n^+(t)$  et  $H_n^{+1}(f) = H_n^+(f)$ .

Le système linéaire  $G_i(f)$  composant le modèle de Hammerstein  $i$  relie l'onde de pression réfléchie  $P^-(f)$  et les puissances de l'onde de pression incidente  $P^{i+}(f)$  par

$$P^-(f) = \sum_{i=1}^N G_i(f) P^{i+}(f) \quad (5.58)$$

qui, par substitution de (5.57) et (5.56), donne le système linéaire

$$\begin{pmatrix} H_1^-(f) \\ H_2^-(f) \\ \vdots \\ H_H^-(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1^{+1}(f) & H_1^{+2}(f) & \dots & H_1^{+N}(f) \\ H_2^{+1}(f) & H_2^{+2}(f) & \dots & H_2^{+N}(f) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_H^{+1}(f) & H_H^{+2}(f) & \dots & H_H^{+N}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1(f) \\ G_2(f) \\ \vdots \\ G_N(f) \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

Les filtres linéaires  $G_i(f)$  sont donc estimés à partir de (5.59) sur une plage de fréquences  $[i \times f_1; f_2]$  Hz.

### 5.2.3. Passerelle entre les deux approches

Notre objectif est de caractériser le comportement du modèle physique étudié en utilisant la modélisation algébrique (5.47) obtenue par troncature modale, combinée avec la méthode de déconvolution harmonique. Pour se faire nous devons établir une passerelle entre l'analyse par série de Fourier réalisée à la Section 5.2.1 et l'analyse par sinus balayé synchronisé développée en Section 5.2.2.

#### Formulation

Nous avons établi de façon formelle un lien entre coefficients de Fourier définis en Section 5.2.1 et réponses en fréquence harmonique définies en Section 5.2.2 : les coefficients de Fourier  $P_n^+(f)$ ,  $P_n^-(f)$  et  $P_n^{+i}(f)$  respectivement associés à  $p^+(t)$ ,  $p^-(t)$  et  $p^{+i}(t)$  pour  $n \geq 1$  sont exprimés comme les réponses en fréquence harmoniques  $H_n^+(nf)$ ,  $H_n^-(nf)$  et  $H_n^{+i}(nf)$  d'ordre  $n$  évaluées à la fréquence  $nf$  et pondérées par l'amplitude de la source d'excitation  $A$ , comme

$$\begin{aligned} P_n^+ &= \frac{A}{2} H_n^+(nf) e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ P_n^{i+} &= \frac{A}{2} h_n^{+i}(nf) e^{-j\frac{\pi}{2}} \\ P_n^- &= \frac{A}{2} H_n^-(nf) e^{-j\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Le coefficient complexe  $e^{-j\frac{\pi}{2}}$  a été rajouté pour adapter les phases. Ce choix d'adaptation sera explicitée à la fin de cette section.

Afin de pouvoir estimer le système matriciel (5.59), les équations (5.60) peuvent être réécrites sous la forme

$$\begin{aligned} H_n^+(f) &= \frac{2}{A} P_n^+ \left(\frac{f}{n}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} \\ H_n^{+i}(f) &= \frac{2}{A} P_n^{+i} \left(\frac{f}{n}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} \\ H_n^-(f) &= \frac{2}{A} P_n^- \left(\frac{f}{n}\right) e^{j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Cette écriture exprime la réponse en fréquence harmonique d'ordre  $n$  à la fréquence  $f$  comme la contribution de l'harmonique d'ordre  $n$  à la réponse du système physique considéré à la fréquence d'excitation  $\frac{f}{n}$ , normalisée par l'amplitude de la source d'excitation.

## Validation

Les relations (5.60) ne résultent pas d'une démarche mathématique stricte mais simplement d'une approche empirique. La validation présentée dans cette section n'est donc pas totalement rigoureuse.

Dans un premier temps, nous allons vérifier que les relations (5.60) et (5.61) permettent de faire le lien entre les équations (5.45) et (5.59), qui caractérisent les relations entrée/sortie pour un modèle de Hammerstein et ce pour les deux types d'excitations considérés : périodique de type série de Fourier et sinus balayé synchronisé.

On constate que la première équation résultant de (5.59) coïncide, après substitution de (5.61) pour  $n = 1$ , avec la deuxième équation de (5.45). De même, la deuxième équation résultant de (5.59) écrite pour la fréquence  $2f$  coïncide, après substitution de (5.61) à la fréquence  $2f$  et pour  $n = 2$ , avec la troisième équation de (5.45). On peut ainsi poursuivre jusqu'à la dernière équation, montrant que les équations (5.60) et (5.61) sont équivalentes. À noter que le coefficient complexe  $e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$  ne joue aucun rôle dans ce raisonnement.

La deuxième étape de la validation va consister à vérifier que les relations (5.60) et (5.61) transportent l'opération puissance. Ce transport est illustré par le schéma donné par le Tableau 5.1.

Sinus balayé synchronisé	Série de Fourier
$p^+(t) = \sum_{n=1}^H h_n^+(t - \Delta_n) * u(t) \Rightarrow H_n^+(f) \xrightarrow{(5.60)} P_n^+ \Rightarrow$	$p^+(t) = \sum_{n=-H}^H P_n^+ e^{j2\pi f n t}$
	$\Downarrow (5.46)$
	$p^+(t)^i = \sum_{n=-H}^H P_n^{i+}(\mathbf{P}^+) e^{j2\pi f n t}$
	$\Downarrow$
$p^+(t)^i = \sum_{n=1}^H h_n^{i+}(t - \Delta_n) * u(t) \Rightarrow H_n^{i+}(f) \xrightarrow{(5.60)} P_n^{i+} =$	$P_n^{i+}(\mathbf{P}^+)$

**Tableau 5.1** – Schéma de transport de l'opération puissance  $p^+(t) \rightarrow p^+(t)^i$  pour  $i = 2, \dots, N$

On suppose connues les réponses en fréquence harmoniques de  $p^+(t)$  et  $p^+(t)^i$ , notées respectivement  $H_n^+(f)$  et  $H_n^{i+}(f)$  (voir la première colonne du Tableau 5.1). (5.60) permet de définir les coefficients de Fourier  $P_n^+(f)$  et  $P_n^{i+}(f)$  caractérisant respectivement  $p^+(t)$  et  $p^+(t)^i$ . La validation des formules (5.60) consistent alors, en partant du développement de Fourier de  $p^+(t)$  (voir la deuxième colonne

du Tableau 5.1), à évaluer les coefficients  $P_n^{i+}(\mathbf{P}^+)$  de Fourier de  $p^+(t)^i$  à l'aide la relation (5.46) et à les comparer  $P_n^{i+}$ .

Cette seconde validation ne peut être menée à bien que numériquement. Nous l'avons systématiquement vérifiée pour les systèmes acoustiques considérés dans ce travail.

### 5.2.4. Étape 1 : Identification d'un modèle de Hammerstein

L'identification d'un système de type Hammerstein consiste à estimer le jeu de paramètres le définissant, à savoir  $N$ , le nombre de blocs du modèle et les filtres linéaires associés  $G_i(f)$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Cette estimation peut être menée à partir de la mesure des réponses en fréquence harmoniques  $H_h^{i+}(f)$  et  $H_h^{-}(f)$  de  $p^+(t)^i$  pour  $i = 1, \dots, N$  et  $p^-(t)$ .

Pour  $N$  et  $H$  fixés, (5.59) peut être résolue, pour chaque fréquence d'excitation  $f$ , suivant les inconnues  $G_i(f)$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Différents cas sont possibles :

- Pour  $H = N$ , la solution est unique si  $(H_1^{P^-}(f), \dots, H_H^{P^-}(f))^T$  est inversible.
- Pour  $H > N$ , une résolution au sens des moindres carrés est utilisée, conduisant à un résidu non nécessairement égal à zéro.

Nous noterons  $G_i^{(N,H)}(f)$  les solutions obtenues.

Le couple  $(H, N)$  est défini de façon à rendre minimal le critère

$$J(N, H) = \int_{f_1}^{f_2} \|P^-(f) - P_{mod}^-(f)\|^2 df \quad (5.62)$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont les bornes de la plage en fréquences,  $P^-(f)$  désigne la transformée de Fourier de la pression mesurée  $p^-(t)$  et  $P_{mod}^-(f)$  est obtenue à partir du modèle par

$$P_{mod}^-(f) = \sum_{i=1}^N G_i^{(N,H)}(f) P^{i+}(f) \quad (5.63)$$

où  $P^{i+}(f)$  désigne la transformée de Fourier de la pression mesurée  $p^+(t)$  élevée à la puissance  $i$ ,  $p^+(t)^i$ .

Le critère  $J(N, H)$  ne doit pas simplement reposer sur la norme du résidu associée à l'équation (5.59). Le principal intérêt de ce critère est de fournir une information globale sur la qualité du modèle.

Le modèle retenu est donné par

$$(N^{op}, H^{op}) = \text{Argmin}_{1 \leq N \leq N_{max}, N \leq H \leq H_{max}} J(N, H) \quad (5.64)$$

où  $N_{max}$  et  $H_{max}$  avec  $N_{max} \leq H_{max}$  désignent les bornes d'excursion retenues. Dans l'ensemble des travaux nous nous sommes limités à  $N_{max} = H_{max} = 7$ .

### 5.2.5. Étape 2 : Modèle de Hammerstein comme modèle de distorsion polyharmonique

Dans cette section, on suppose disposer du modèle de Hammerstein identifié à l'étape précédente. On désigne par  $N$  le nombre de blocs du modèle et par  $G_i(f)$  les filtres associés.

L'objectif est maintenant de faire le lien entre le modèle de Hammerstein et un modèle de distorsion polyharmonique. Pour se faire, nous allons approcher le modèle de Hammerstein par troncature harmonique d'ordre  $H$  donnée sous la forme (5.47). Cette fonction permet de décrire dans le domaine des fréquences le comportement du modèle.

Le modèle de Distorsion PolyHarmonique (DPH) est obtenu par approximation de (5.47) mettant en œuvre une phase de linéarisation autour d'un état stationnaire particulier.

Comme présenté dans le Chapitre 4, la construction du modèle DPH est basée sur deux hypothèses :

**Hypothèse 1** : Le système étudié est invariant par translation du temps

**Hypothèse 2** : Le signal d'entrée  $p^+(t)$  considéré admet un coefficient de Fourier d'ordre 1 dominant (c'est-à-dire que  $|P_1^+| \gg |P_n^+|$  pour  $n = 1, \dots, H$ )

L'hypothèse 1 permet de vérifier que si

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{R}(\mathbf{P}^+) \quad (5.65)$$

alors

$$\mathbf{P}_{\text{mod}}^- = \mathbf{R}(\mathbf{P}_{\text{mod}}^+) \quad (5.66)$$

où

$$\mathbf{P}_{\text{mod}}^+ = (P_0^+, |P_1^+|, P_2^+ \Theta_1^{-2}, \dots, P_H^+ \Theta_1^{-H})^T, \quad (5.67)$$

$$\mathbf{P}_{\text{mod}}^- = (P_0^-, P_1^- \Theta_1^{-1}, P_2^- \Theta_1^{-2}, \dots, P_H^- \Theta_1^{-H})^T \quad (5.68)$$

et  $\Theta_1$  est choisi tel que

$$\Theta_1 = e^{j\varphi_1} \text{ with } P_1^+ = |P_1^+| e^{j\varphi_1}. \quad (5.69)$$

Introduisons le vecteur  $\mathbf{P}_0^+$  comme

$$\mathbf{P}_0^+ = (0, |P_1^+|, 0, \dots, 0)^T \quad (5.70)$$

$\mathbf{P}_{\text{mod}}^+$  peut alors s'écrire comme

$$\mathbf{P}_{\text{mod}}^+ = \mathbf{P}_0^+ + \tilde{\mathbf{P}}^+ \quad (5.71)$$

où

$$\tilde{\mathbf{P}}^+ = (P_0, 0, P_1^+ \Theta_1^{-1}, \dots, P_H^+ \Theta_1^{-H})^T. \quad (5.72)$$

De l'hypothèse 2, on déduit que

$$\|\tilde{\mathbf{P}}^+\| \ll \|\mathbf{P}_0^+\| \quad (5.73)$$

suggérant que  $\mathbf{P}_{\text{mod}}^-$  peut être approché moyennant une approximation de Taylor d'ordre 1 au voisinage de  $\mathbf{P}_0^+$ .

Le première étape consiste à réécrire le système algébrique non linéaire (5.66) en terme de variables réelles sous la forme

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(|P_1^+|, \mathbf{X}) \quad (5.74)$$

où

$$\mathbf{X} = (P_0^+, \text{Re}(P_2^+ \Theta_1^{-2}), \dots, \text{Re}(P_H^+ \Theta_1^{-H}), \text{Im}(P_2^+ \Theta_1^{-2}), \dots, \text{Im}(P_H^+ \Theta_1^{-H}))^T \in \mathbb{R}^{2(H-1)+1}, \quad (5.75)$$

$$\mathbf{Y} = (P_0^-, \text{Re}(P_1^- \Theta_1^{-1}), \dots, \text{Re}(P_H^- \Theta_1^{-H}), \text{Im}(P_1^- \Theta_1^{-1}), \dots, \text{Im}(P_H^- \Theta_1^{-H}))^T \in \mathbb{R}^{2H+1} \quad (5.76)$$

et

$$\mathbf{F} = (\mathbf{R}_0, \text{Re}(\mathbf{R}_1), \dots, \text{Re}(\mathbf{R}_H), \text{Im}(\mathbf{R}_1), \dots, \text{Im}(\mathbf{R}_H))^T \quad (5.77)$$

est une fonction vectorielle de dimension  $2H + 1$  des variables réelles  $|P_1^+|$  et  $\mathbf{X}$ .

Le vecteur  $\mathbf{X}$  ne dépend pas de  $P_1^+$  (composante fondamentale) de  $p^+(t)$  alors que  $\mathbf{Y}$  dépend de tous les coefficients de Fourier de  $p^-(t)$ . La fonction  $\mathbf{F}$  dépend explicitement de  $|P_1^+|$  et implicitement de l'argument de  $p^+(t)$  par l'intermédiaire de  $\mathbf{X}$ .

En appliquant un développement de Taylor à l'ordre 1 au point  $\mathbf{X} = 0$ , on aboutit à

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(|P_1^+|, 0) + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)\mathbf{X} \quad (5.78)$$

où  $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)$  désigne la matrice de jacobienne de  $\mathbf{F}$  en  $\mathbf{X} = 0$ .

Partant de (5.78), on peut alors revenir aux quantités complexes en utilisant (5.75), (5.76) et les relations

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_k^- \Theta_1^{-k}) &= \frac{P_k^- \Theta_1^{-k} + \overline{P_k^- \Theta_1^{-k}}}{2} \\ \operatorname{Im}(P_k^- \Theta_1^{-k}) &= \frac{P_k^- \Theta_1^{-k} - \overline{P_k^- \Theta_1^{-k}}}{2j} \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$(5.80)$$

Calcul fait, on obtient pour  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned} P_0^- &= \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,1} P_0^+ + \mathbf{F}_1(|P_1^+|, 0) + \sum_{n=2}^H \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} + \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) P_n^+ \Theta_1^{-n} \\ &+ \sum_{n=2}^H \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} - \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) \overline{P_n^+} \Theta_1^n \end{aligned} \quad (5.81)$$

et pour  $k = 1, \dots, H$ ,

$$\begin{aligned} P_k^- \Theta_1^{-k} &= (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,1} + j \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,1}) P_0^+ + (\mathbf{F}_{k+1}(|P_1^+|, 0) + j \mathbf{F}_{H+k+1}(|P_1^+|, 0)) \\ &+ \sum_{n=2}^H \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) + j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] P_n^+ \Theta_1^{-n} \\ &+ \sum_{n=2}^H \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) - j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] \overline{P_n^+} \Theta_1^n \end{aligned} \quad (5.82)$$

Les équations (5.81) et (5.82) permettent de relier les vecteurs  $\mathbf{P}^+$  et  $\mathbf{P}^-$  sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{P}^- = \mathbf{S}(|P_1^+|, \Theta_1) \mathbf{P}^+ + \mathbf{T}(|P_1^+|, \Theta_1) \overline{\mathbf{P}^+} \quad (5.83)$$

où  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  sont deux matrices complexes  $(H+1) \times (H+1)$  définies

— pour  $k = 0$  et  $n = 2, \dots, H$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{0,0} &= \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,1} \text{ et } \mathbf{T}_{0,0} = 0 \\ \mathbf{S}_{0,1} &= \frac{\mathbf{F}_1(|P_1^+|, 0)}{|P_1^+|} \Theta_1^{k-1} \text{ et } \mathbf{T}_{0,1} = 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{0,n} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} + \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) \Theta_1^{k-n} \\ \mathbf{T}_{0,n} &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n} - \frac{1}{j} \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{1,n+H-1} \right) \Theta_1^{k+n} \end{aligned} \quad (5.85)$$

— pour  $k = 1, \dots, H$  et  $n = 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k,0} &= (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,1} + j \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,1}) \Theta_1^k \text{ et } \mathbf{T}_{k,0} = 0 \\ \mathbf{S}_{k,1} &= \frac{(\mathbf{F}_{k+1}(|P_1^+|, 0) + j \mathbf{F}_{H+k+1}(|P_1^+|, 0))}{|P_1^+|} \Theta_1^{k-1} \text{ et } \mathbf{T}_{k,1} = 0 \end{aligned} \quad (5.86)$$

— pour  $k = 1, \dots, H$  et  $n = 2, \dots, H$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{k,n} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) + j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] \Theta_1^{k-n} \\ \mathbf{T}_{k,n} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} - \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1}) + j (\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1})] \Theta_1^{n+k} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Les termes de la matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  sont donnés par rapport à  $R_n(\mathbf{P}^+)$  comme

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,n} = \frac{\partial \mathbf{F}_{k+1}(|P_1^+|, 0)}{\partial \mathbf{X}_n} = \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}_{\text{mod}}^+))}{\partial \operatorname{Re}(P_n^+ \Theta_1^{-n})} = \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}^+))}{\partial \operatorname{Re}(P_n^+)} \right) \quad (5.88)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,H+n-1} = \frac{\partial \mathbf{F}_{H+k+1}(|P_1^+|, 0)}{\partial \mathbf{X}_{H+n-1}} = \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}_{\text{mod}}^+))}{\partial \operatorname{Im}(P_n^+ \Theta_1^{-n})} = \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}^+))}{\partial \operatorname{Im}(P_n^+)} \right) \quad (5.89)$$

pour  $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}_{\text{mod}}^+$ . D'autre part

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{k+1,H+n-1} = \frac{\partial \mathbf{F}_{k+1}(|P_1^+|, 0)}{\partial \mathbf{X}_{H+n-1}} = \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}_{\text{mod}}^+))}{\partial \operatorname{Im}(P_n^+ \Theta_1^{-n})} = \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}^+))}{\partial \operatorname{Im}(P_n^+)} \right) \quad (5.90)$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(0)_{H+k+1,n} = \frac{\partial \mathbf{F}_{H+k+1}(|P_1^+|, 0)}{\partial \mathbf{X}_n} = \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}_{\text{mod}}^+))}{\partial \operatorname{Re}(P_n^+ \Theta_1^{-n})} = \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(\mathbf{R}_k(\mathbf{P}^+))}{\partial \operatorname{Re}(P_n^+)} \right), \quad (5.91)$$

pour  $\mathbf{P}^+ = \mathbf{P}_{\text{mod}}^+$ .

De plus, il apparait dans le Section 5.2.1 que les composantes de la fonction  $\mathbf{R}$  sont des combinaisons linéaires de monômes de la forme

$$G_{iN}(iHf)P_{k_1}^{+m_1} P_{k_2}^{+m_2} \dots P_{k_i}^{+m_i} \overline{P_{l_1}^{+n_1}} \overline{P_{l_2}^{+n_2}} \dots \overline{P_{l_j}^{+n_j}} \quad (5.92)$$

où  $m_1, m_2, \dots, m_i, n_1, n_2, \dots, n_j$  et  $k_1, k_2, \dots, k_i, l_1, l_2, \dots, l_j$  sont des entiers positifs ou nuls vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq m_1, m_2, \dots, m_i, n_1, n_2, \dots, n_j \leq N \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_i, l_1, l_2, \dots, l_j \leq H \\ m_1 + m_2 + \dots + m_i + n_1 + n_2 + \dots + n_j = iN \\ k_1 m_1 + k_2 m_2 + \dots + k_i m_i - l_1 n_1 - l_2 n_2 - \dots - l_j n_j = iH \end{cases} \quad (5.93)$$

avec  $0 \leq iN \leq N$  et  $0 \leq iH \leq H$ .

Ainsi, les monômes de la forme (5.92) vérifiant (5.93) vont permettre de définir la contribution à l'harmonique d'ordre  $iH$  du signal  $p^-(t)$  provenant des harmoniques de  $p^+(t)^{iN}$  pour  $iH = 0, 2, \dots, H$  filtrées respectivement par  $G_{iN}(iHf)$ .

## Analyse de la matrice $\mathbf{S}$

La matrice  $\mathbf{S}$  dépend directement de la fonction  $\mathbf{F}$  et de sa jacobienne évaluée en  $\mathbf{X} = 0$  d'après (4.55).

La fonction  $\mathbf{F}$  contribue à la deuxième colonne de  $\mathbf{S}$ , à savoir,  $\mathbf{S}_{k1}$  pour  $k = 0, 1, \dots, H$  en s'appuyant sur (4.60) et (4.64).

La matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  contribue à  $\mathbf{S}$  grâce à la présence des monômes de la forme

$$P_k^+, \quad \text{pour } k = 0, 2, 3, \dots, H \quad (5.94)$$

et des trois familles de monômes

$$\begin{aligned} & P_1^{+m} P_n^+, && \text{pour } 1 \leq m \text{ et } n = 0, 2, 3, \dots, H \\ & \frac{P_1^{+m} \overline{P_1^{+n}}}{P_1^{+n}} P_n^+, && \text{pour } 1 \leq m, n \text{ et } n = 0, 2, 3, \dots, H \\ & \frac{P_1^{+n}}{P_1^{+n}} P_n^+, && \text{pour } 1 \leq n \text{ et } n = 0, 2, 3, \dots, H. \end{aligned} \quad (5.95)$$

dans  $\mathbf{R}$ .

Les monômes associés à (5.94) contribuent aux termes diagonaux  $\mathbf{S}_{nn}$  pour  $n = 0, 2, 3, \dots, H$  et sont proportionnels respectivement à  $G_1(nf)$ . Ainsi le terme diagonal d'ordre  $n$ ,  $\mathbf{S}_{nn}$ , en tant que fonction

de la fréquence  $f$ , est influencé par le filtre linéaire  $G_1$  combiné à l'homothétie en fréquence de rapport  $n$ .

Les monômes associés à (5.95) résultent des termes non linéaires présent dans le modèle de Hammerstein. Un monôme de la forme  $P_1^{+m} P_n^+$  correspond, si il existe, au filtre d'indice  $iN$  et à l'harmonique d'ordre  $iH$

$$\begin{cases} iN &= m + 1 \\ iH &= m + n \end{cases} \quad (5.96)$$

Il contribue au terme  $\mathbf{S}_{iH,n}$  de la matrice  $\mathbf{S}$ .

Différentes conclusions sont possibles en fonction du choix de  $iN$  :

- Pour  $iN = 1$ , aucune solution satisfaisant (5.96) et compatible avec (5.93) existe
- Le choix  $iN = 2$  conduit suivant (5.96) à  $m = 2$ . On aboutit ainsi à une contribution pour la première sous-diagonale de  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S}_{iH,iH-1}$  pour  $iH = 2, \dots, H$ ). Le même raisonnement peut être mené pour les valeurs suivantes de  $iN$  conduisant respectivement à des contributions de la sous-diagonale  $(iN - 1)$  de  $\mathbf{S}$
- Pour  $iN = N$ , la sous-diagonale  $(N - 1)$  de  $\mathbf{S}$  est affectée

Si un monôme de la forme  $\overline{P_1^+}^k P_n^+$  existe, il est associé au filtre d'indice  $iN$  et à l'harmonique d'ordre  $iH$  définis par

$$\begin{cases} iN &= k + 1 \\ iH &= -k + n \end{cases} \quad (5.97)$$

De la même manière que pour le monôme précédent,

- Pour  $iN = 1$  aucune solution satisfaisant (5.97) et compatible avec (5.93) existe
- Le choix  $iN = 2$  conduit suivant (5.97) à  $k = 1$  et ainsi on aboutit à une contribution pour la première sur-diagonale de  $\mathbf{S}$  ( $\mathbf{S}_{iH-1,iH}$  pour  $iH = 2, \dots, H$ ). Le même raisonnement peut être mené pour les valeurs suivantes de  $iN$  conduisant respectivement à des contributions de la sur-diagonale  $(iN - 1)$  de  $\mathbf{S}$
- Pour  $iN = N$ , c'est la sur-diagonale  $(N - 1)$  de  $\mathbf{S}$  qui est affectée.

La matrice  $\mathbf{S}$  est donc à présent une matrice à structure multi-diagonale ayant  $2(N - 1) + 1$  diagonales non-nulles et auxquelles s'ajoute la deuxième colonne.

On peut montrer que cette structure n'est pas perturbée par l'apport de la dernière famille de monômes  $P_1^{+m} P_1^{+n} P_n^+$  dont les détails ne seront pas donnés ici.

## Analyse de la matrice $\mathbf{T}$

Les termes  $\mathbf{T}_{0n}$  pour  $n = 2, \dots, H$  sont définis par (4.63) et correspondent à (5.88) et (5.89). Les termes  $\mathbf{T}_{kn}$  pour  $k = 1, \dots, H$  et  $n = 2, \dots, H$ , sont définis dans la deuxième équation de (4.64) par, d'une part (5.88) et (5.89) et, d'autre part (5.90) et (5.91).

Si la fonction complexe  $\mathbf{R}$  est holomorphe en tant que fonction vectorielle complexe des variables

$$(P_0^+, P_2^+, \dots, P_H^+) \quad (5.98)$$

alors la matrice  $\mathbf{T}$  est identiquement nulle (conséquence des conditions de Cauchy-Riemann dans les équations précédentes).

En tant que fonction vectorielle complexe des variables

$$\hat{\mathbf{P}}^+ = (P_0^+, P_2^+, \dots, P_H^+), \quad (5.99)$$

la fonction  $\mathbf{R}$  n'est pas holomorphe au voisinage de  $\tilde{\mathbf{P}}^+ = 0$  si elle admet des monômes de la forme

$$\begin{aligned} P_1^{+m} \overline{P_n^+}, & \quad \text{pour } 1 \leq m \text{ et } k = 2, 3, \dots, H \\ P_1^{+m} \overline{P_1^{+k} P_n^+}, & \quad \text{pour } 1 \leq m, k \text{ et } n = 2, 3, \dots, H \\ \overline{P_1^{+k} P_n^+} & \quad \text{pour } 1 \leq n \text{ et } n = 2, 3, \dots, H. \end{aligned} \quad (5.100)$$

Un monôme de la forme  $\overline{P_1^{+m} P_n^+}$  correspond, si il existe, au filtre d'indice  $iN$  vérifiant  $iN = m + 1$  et à l'harmonique  $iH$  vérifiant  $iH = -m - n$ . Ce dernier coefficient ne pouvant jamais être positif, ce monôme n'apparaît jamais dans l'expression de  $\mathbf{R}$ .

Un monôme de la forme  $P_1^{+m} \overline{P_n^+}$ , définit une contribution de l'harmonique d'ordre  $iH$  filtrée par le filtre d'indice  $iN$  vérifiant

$$\begin{cases} iN = m + 1 \\ iH = m - n \end{cases} . \quad (5.101)$$

On peut alors en déduire que  $\mathbf{T}_{iH,n} = 0$  si il n'existe pas de couple  $(iN, m)$  solution de (5.101) satisfaisant les contraintes (5.93).

En fonction du choix de  $iN$ , différentes observation peuvent être faites :

- Pour  $iN = 1$ , aucune solution satisfaisant (5.101) et compatible avec (5.93) existe, de même pour  $iN = 2$
- Pour  $iN = 3$ , un seul choix est possible correspondant à  $m = 2$ ,  $n = 2$  et  $iH = 0$ . Il conduit à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{0,2}$  proportionnelle à  $G_3(0)|P_1^+|^2$
- Pour  $iN = 4$ , deux choix sont possibles correspondant, d'une part à,  $m = 3$ ,  $n = 3$  et  $iH = 0$  et conduisant à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{0,3}$  proportionnelle à  $G_4(0)|P_1^+|^3$  et, d'autre part à,  $m = 3$ ,  $n = 2$  et  $iH = 1$  et conduisant à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{1,2}$  proportionnelle à  $G_4(1)|P_1^+|^3$ . Et ainsi de suite pour  $iN$  croissant jusqu'à  $iN = N$  remplissant pour cette dernière valeur la trame oblique allant de  $\mathbf{T}_{0,N-1}$  à  $\mathbf{T}_{N-3,2}$  suivant  $\mathbf{T}_{n,N-1-n}$  pour  $n = 0, \dots, N - 3$ .

Un monôme de la forme  $P_1^{+m} \overline{P_1^{+k} P_n^+}$  définit une contribution de l'harmonique d'ordre  $iH$  filtrée par le filtre d'indice  $iN$  vérifiant

$$\begin{cases} iN = m + k + 1 \\ iH = m - k - n \end{cases} . \quad (5.102)$$

On peut alors en déduire que  $\mathbf{T}_{iH,n} = 0$  si il n'existe pas de couple  $(iN, m)$  solution de (5.102) satisfaisant les contraintes (5.93).

De la même manière que pour le monôme précédent,

- Pour  $iN = 1, 2, 3, 4$  aucune solution satisfaisant (5.102) et compatible avec (5.93) existe
- Pour  $iN = 5$ , un seul choix est possible correspondant à  $k = 1$ ,  $m = 3$ ,  $n = 2$  et  $iH = 0$  et conduit à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{0,2}$  proportionnelle à  $G_5(0)|P_1^+|^4$ .
- Pour  $iN = 6$ , deux choix sont possibles correspondant, d'une part à,  $k = 1$ ,  $m = 4$ ,  $n = 3$  et  $iH = 0$  et conduisant à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{0,3}$  proportionnelle à  $G_6(0)|P_1^+|^5$  et, d'autre part à,  $k = 1$ ,  $m = 4$ ,  $n = 2$  et  $iH = 1$  et conduisant à une valeur non nulle pour  $\mathbf{T}_{1,2}$  proportionnelle à  $G_6(f)|P_1^+|^4$ . Et ainsi de suite pour  $iN$  croissant jusqu'à  $iN = N$  remplissant pour cette dernière valeur la trame oblique allant de  $\mathbf{T}_{0,N-3}$  à  $\mathbf{T}_{N-5,2}$  suivant  $\mathbf{T}_{n,N-3-n}$  pour  $n = 0, \dots, N - 5$ .

## Lien avec la matrice de diffusion

Une première étape consiste à obtenir la forme des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  en fonction du choix du nombre d'harmonique  $H$  et du nombre de blocs d'Hammerstein  $N$ .

La donnée d'entrée du modèle d'Hammerstein représenté en Figure 5.2.(a) est la pression incidente  $p^+(t)$  définie par un développement en série de Fourier comme

$$p^+(t) = p_1^+(t) + \sum_{k=2}^{H+1} p_n^+(t)e^{2j\pi ft} + \sum_{k=2}^{H+1} \overline{p_n^+(t)e^{2j\pi ft}} \quad (5.103)$$

La fonction non linéaire  $fnl$  contenant les composantes harmoniques des termes  $p^+(t)^i$  pour  $i = 1, \dots, N$  est obtenue comme

$$fnl_i = \int_0^t p^+(t)^i e^{-2j\pi(k-1)ft} dt \text{ pour } i = 1, \dots, N \text{ et } k = 1, \dots, H \quad (5.104)$$

et permet de construire la fonction linéaire  $G$  comme

$$G = \sum_{i=1}^N fnl_i G_i. \quad (5.105)$$

À partir des équations (5.89), (5.90) et (5.91), il est alors possible de remplir les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  comme décrit par les équations (4.63) et (4.64).

Une fois la forme des matrices obtenue, on calcule les composantes harmoniques de la pression  $p(t)$  et de la commande  $u(t)$  à partir de (5.36) et (5.37). Il est possible à partir des caractéristiques acoustiques de la source  $H_{ae}$  et  $Z_S$  d'obtenir les composantes harmoniques des pressions incidente  $p^+(t)$  et réfléchi  $p^-(t)$  comme (5.23) et (5.24) avec  $Q_n(f, A) = H_{ae}(f)U(f) - \frac{P(f, A)}{Z_S}$ .

Après calcul des réponses en fréquences  $HP^+(f)$ ,  $HP^-(f)$  à partir de (5.34) appliqué à  $p^+(t)$  et  $p^-(t)$ , et de l'estimation de  $HP^{p^+}(f)$  pour  $i = 1, \dots, N$ , il est possible d'estimer les  $G_i$  à partir de (5.59).

## Mise en œuvre numérique

En pratique, une procédure numérique est requise pour obtenir la décomposition (5.3).

On suppose ici connu le modèle de Hammerstein constitué de  $N$  blocs. Chaque bloc d'indice  $iN$  pour  $iN = 1, 2, \dots, N$ , est associé à un filtre linéaire  $G_{iN}(f)$  défini sur la même bande de fréquence  $[f_{min}, f_{max}]$ . La connaissance de ce modèle résulte de l'approximation au sens des moindres carrés réalisée, comme décrite en Section 5.2.4, à partir de données expérimentales permettant de disposer des réponses en fréquence harmoniques suivant la Figure 5.2.(b) et formulées comme (5.55), (5.57) et (5.56).

On suppose connues les réponses en fréquence harmoniques (5.55), de  $p^+(t)$  sur la bande en fréquences  $[f_{min}, f_{max}]$ . Les relations (5.60) sont utilisées pour transformer ces réponses en fréquence harmoniques en coefficients de Fourier pour ainsi considérer  $p^+(t)$  en terme de série de Fourier.

On suppose donné  $H$ , le nombre d'harmoniques retenu dans la procédure de troncature modale mise en œuvre. En pratique  $H$  doit être inférieur ou égal au nombre de composantes harmoniques obtenues dans la représentation de  $p^+(t)$  en terme de réponses en fréquence harmonique.

La procédure numérique développée sous MATLAB comprend les étapes suivantes :

- Étape 1 Développement de deux fonctions MATLAB fournissant pour l'une le calcul de la fonction vectorielle  $\mathbf{B}$  (4.55) et pour l'ordre de sa matrice jacobienne au voisinage de  $\mathbf{X} = 0$ . Ces fonctions dépendent de  $H$ , de  $N$ , des  $G_{iN}(iHf)$  pour  $iN = 1, 2, \dots, N$  et  $iH = 0, 1, \dots, H$  et de  $|P_1^+|$ . Cette étape a été réalisée à l'aide de la boîte à outil "Symbolic Math Toolbox" de MATLAB.
- Étape 2 Développement d'un script MATLAB fournissant pour une partition de  $N_f + 1$  points en fréquences ( $f_i = f_{min} + i\Delta f$  avec  $\Delta f = (f_{max} - f_{min})/N_f$  pour  $i = 0, \dots, N_f$ ) de  $[f_{min}, f_{max}]$  et pour chaque fréquence  $f_i$  les estimations des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}$  suivant les relations (4.60), (4.63) et (4.64).

## En résumé

Afin de caractériser le comportement d'un absorbeur vibroacoustique non linéaire, il est nécessaire de quantifier le transfert d'énergie non linéaire entre les différentes harmoniques. Pour ce faire, nous avons décidé ici d'exprimer cet échange d'énergie sous la forme d'une matrice de diffusion, couplant les termes harmoniques des pressions acoustiques incidente et réfléchie. Cette matrice est obtenue grâce à une excitation par sinus balayé synchronisé, permettant d'obtenir des grandeurs physiques à partir des réponses impulsionnelles associées. Deux méthodes sont possibles pour expliciter les coefficients de cette matrice de diffusion. La première méthode permet d'estimer une matrice de diffusion simplifiée, composée de termes diagonaux et d'une première colonne. Cette méthode est parfaitement adaptée à une estimation expérimentale, permettant à partir des mesures de pression d'estimer les coefficients de la matrice de diffusion. La deuxième méthode repose sur une estimation par modèle d'Hammerstein. Elle permet d'estimer la matrice de diffusion complète et de s'affranchir des simplifications utilisées pour estimer la première matrice, et ne dépend pas du niveau d'excitation.

# 6

## APPLICATION DES MÉTHODES EXPÉRIMENTALES À DES ABSORBEURS ACOUSTIQUES NON LINÉAIRES

---

Nous connaissons à présent deux approches permettant de prendre en compte les non-linéarités présentes dans un système : la première consiste à estimer une matrice de diffusion simplifiée (composée de termes diagonaux et d'une première colonne), la seconde à estimer une matrice de diffusion complète, en se basant sur une cascade de modèle d'Hammerstein. Nous allons à présent appliquer ces deux approches à deux absorbeurs de bruit non linéaires : une membrane de haut-parleur agissant comme NES [5], décrite en Section 2.3.1 et différentes membranes nanofibreuses [10] présentées en Section 2.3.2, fruit d'une collaboration avec Tomáš Ulrich de l'Institute for Nanomaterials, Advanced Technologies and Innovations de Liberec. Pour chaque absorbeur testé, les deux modèles seront comparés afin de mettre en évidence leurs similitudes et leurs différences.

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Estimation de la matrice de diffusion simplifiée</b>	<b>102</b>
6.1.1	Membrane de haut-parleur	102
6.1.2	Membranes nanofibreuses	108
<b>6.2</b>	<b>Estimation de la matrice de diffusion complète</b>	<b>132</b>
6.2.1	Membrane de haut-parleur	132
6.2.2	Membranes nanofibreuses	137
<b>6.3</b>	<b>Comparaison entre méthodes</b>	<b>146</b>
6.3.1	Membrane de haut-parleur	146
6.3.2	Membranes nanofibreuses	148

---

## 6.1. Estimation de la matrice de diffusion simplifiée

L'estimation de la matrice de diffusion simplifiée est obtenue à partir de la méthode vue dans la Section 5.1. Nous allons nous focaliser ici sur des résultats obtenus par excitation sinus balayé synchronisé (1.40), présentant un gain de temps important lors des expérimentations. En effet, 1 minute est nécessaire en sinus balayé synchronisé pour réaliser une acquisition sur la plage [10; 700] Hz contre 35 minutes pour une acquisition en sinus.

Le signal est généré sur une bande de fréquence allant de  $f_1 = 10$  Hz à  $f_2 = 700$  Hz pendant une durée  $\bar{T} = 16$  s et présente une fréquence d'échantillonnage de 48000 Hz. Différentes amplitudes d'excitation ont été appliquées au système, comme présentées dans le Tableau 6.1. Il est à noter que l'amplitude d'excitation minimale  $A = 0.1$  a été choisie de façon à mesurer une pression au microphone supérieure à la pression seuil définie par (2.3) et la répétabilité des mesures a été préalablement vérifiée. Nous avons fait le choix de réaliser cette étude pour  $H = 5$  harmoniques. Les composantes harmoniques d'ordre supérieur à 5 sont présentes dans le système mais apportent une faible contribution. De plus, les estimations réalisées sur leur plage de fréquences associée sont impactées par les résonances internes du banc de mesure. Pour chaque absorbeur, il a donc été effectué 5 harmoniques  $\times$  2 amplitudes  $\times$  6 excitations soit 60 acquisitions.

<b>A</b>	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1
<b><math>U_{com}</math>(V)</b>	0.7	1.3	2.6	3.9	5.2	6.5

**Tableau 6.1** – Équivalence entre les amplitudes  $A$  du signal d'excitation et les tensions de commande  $U_{com}$

### 6.1.1. Membrane de haut-parleur

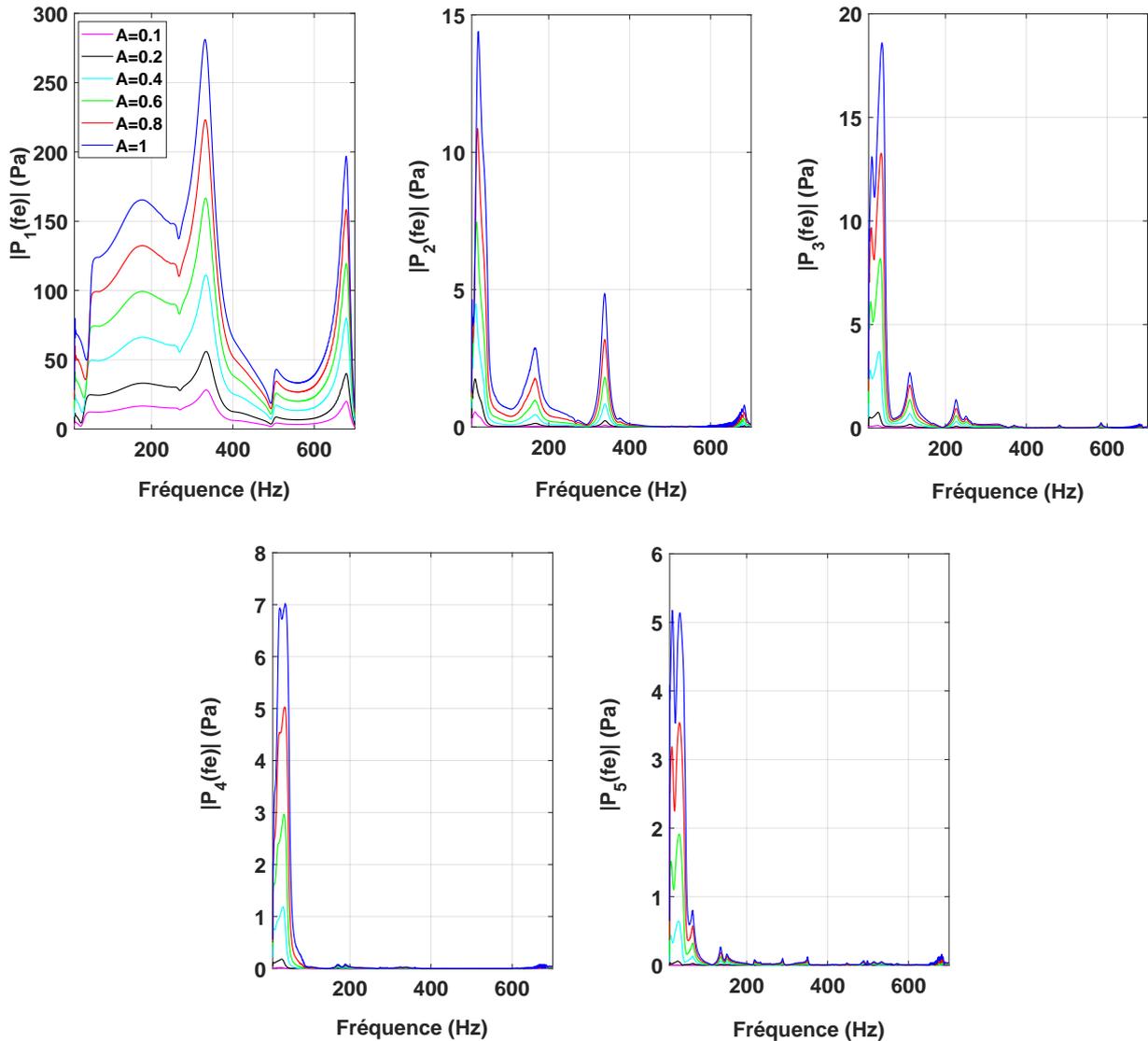
#### Estimation des composantes des pressions $P_n(f)$

Les composantes harmoniques de la pression  $p(t)$  mesurée au microphone sont estimées à partir de l'équation (5.36) et sont représentées en Figure 6.1 sur la plage fréquentielle d'expérimentation [10; 700] Hz pour les amplitudes d'excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$ . Le terme fondamental  $P_1(f)$  est prédominant par rapport aux composantes harmoniques d'ordre supérieur : pour un niveau donné  $A$ ,  $P_1(f) > P_n(f)$  pour  $n = 2, \dots, H$ . La fréquence de résonance de l'absorbeur se décale vers les hautes fréquences lorsque l'amplitude d'excitation  $A$  augmente, traduisant le caractère durcissant de la membrane de haut-parleur. Cette fréquence de résonance est illustrée par une forte diminution de la pression fondamentale dans le tube, traduisant le fait que l'absorption est maximale sur cette plage de fréquences. La composante d'ordre impair  $n = 3$  de la pression est supérieure à la composante d'ordre pair  $n = 2$  ( $|P_3(f)| > |P_2(f)|$  pour chaque fréquence et pour chaque niveau d'excitation), dues à la non-linéarité géométrique d'ordre impair de l'absorbeur. Pour finir, le niveau de pression des termes harmoniques diminue lorsque  $n$  augmente et l'amplitude de chaque composante augmente avec le niveau d'excitation.

#### Estimation de la matrice de diffusion simplifiée

L'estimation des composantes harmoniques de la pression permet d'obtenir la matrice de diffusion simplifiée par la procédure définie en Section 5.1.2. Les termes diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $n \leq 5$  sont représentées en Figure 6.2 (avec  $|S_{11}|$  représenté sur les plages fréquentielles [10; 600] Hz et [10; 100] Hz pour plus de lisibilité) et les termes de la première colonne  $S_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  sont représentés en Figure 6.3.

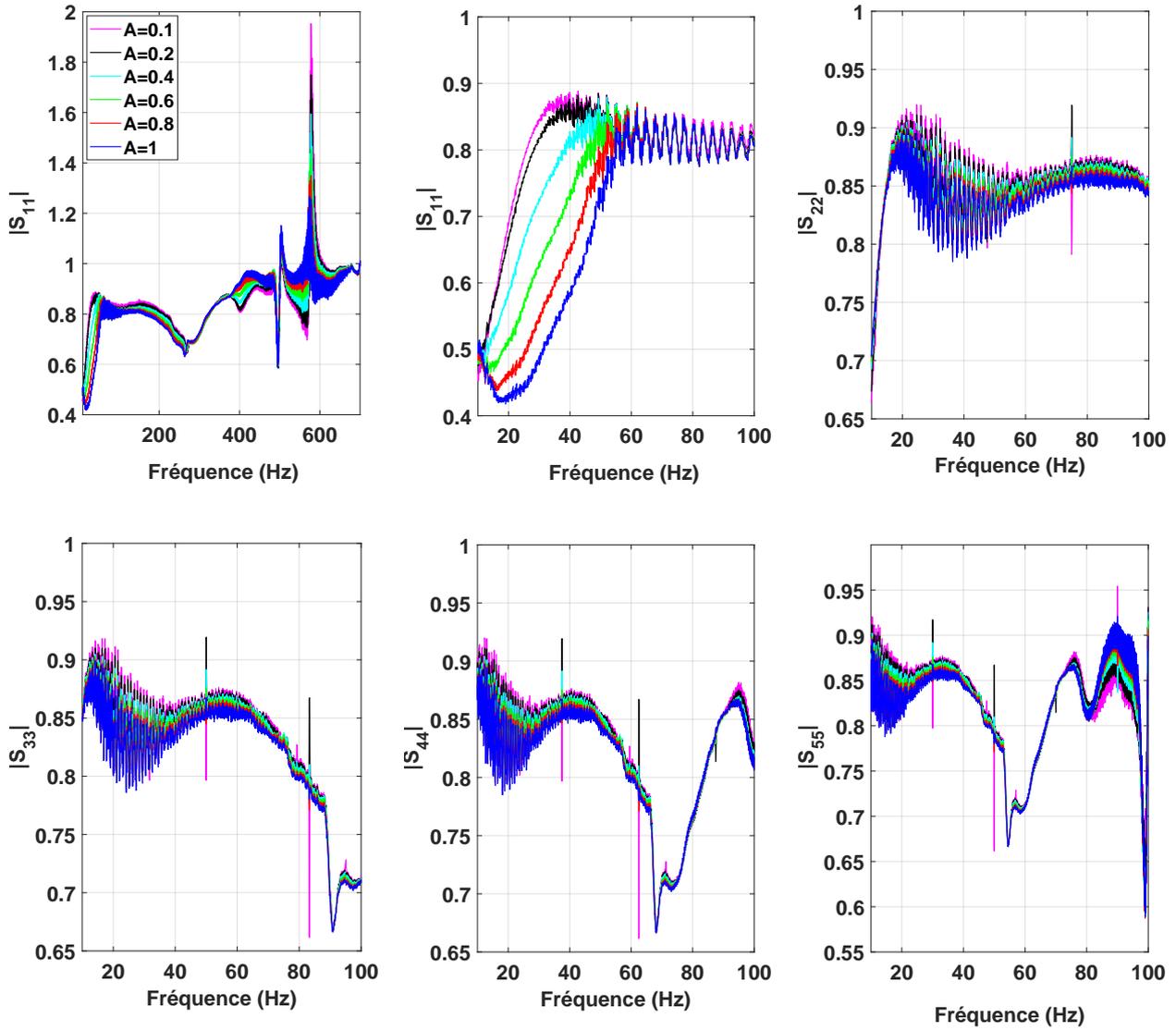
Le terme  $|S_{11}|$  présente une courbe caractéristique de coefficient de réflexion, avec  $|S_{nn}|$  pour  $1 < n \leq 5$  sa continuation à  $n \times f$  et à plus faible niveau. L'estimation de  $|S_{11}|$  est similaire à l'estimation



**Figure 6.1** – Estimation des composantes de la pression  $|P_n(f)|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d'excitation en sinus balayé synchronisé

linéaire de  $|R_T|$  faite dans le Chapitre 3. Les coefficients diagonaux de la matrice de diffusion  $S_{nn}$  présentent donc bien des courbes spécifiques de coefficients de réflexion. Le décalage des courbes vers les hautes fréquences lorsque le niveau d'excitation augmente traduit le durcissement de la membrane avec le niveau et donc illustre son caractère non linéaire. Les estimations de  $|S_{11}| > 1$  sont dues à un manque de sensibilité de la mesure à proximité des fréquences des résonances internes de la source. Les oscillations visibles sur les coefficients diagonaux de la matrice de diffusion proviennent de l'excitation par sinus balayé synchronisé et de la présence d'interaction entre les différentes harmoniques du système. L'augmentation de l'amplitude de ces oscillations aux fréquences  $n \times f_1$  confirme l'effet des harmoniques.

Les termes  $S_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  illustrent la présence d'un transfert d'énergie entre la composante fondamentale et les composantes harmoniques  $k$  du système. Ce transfert augmente avec le niveau d'excitation et est plus élevé pour les harmoniques impaires (par exemple, pour un niveau  $A$  donné,  $|S_{31}| > |S_{21}|$  et  $|S_{51}| > |S_{41}|$ ). Lorsque  $k$  augmente, l'amplitude des coefficients  $S_{k1}$  avec  $k$  pair diminue, tout comme l'amplitude des coefficients  $S_{k1}$  avec  $k$  impair.

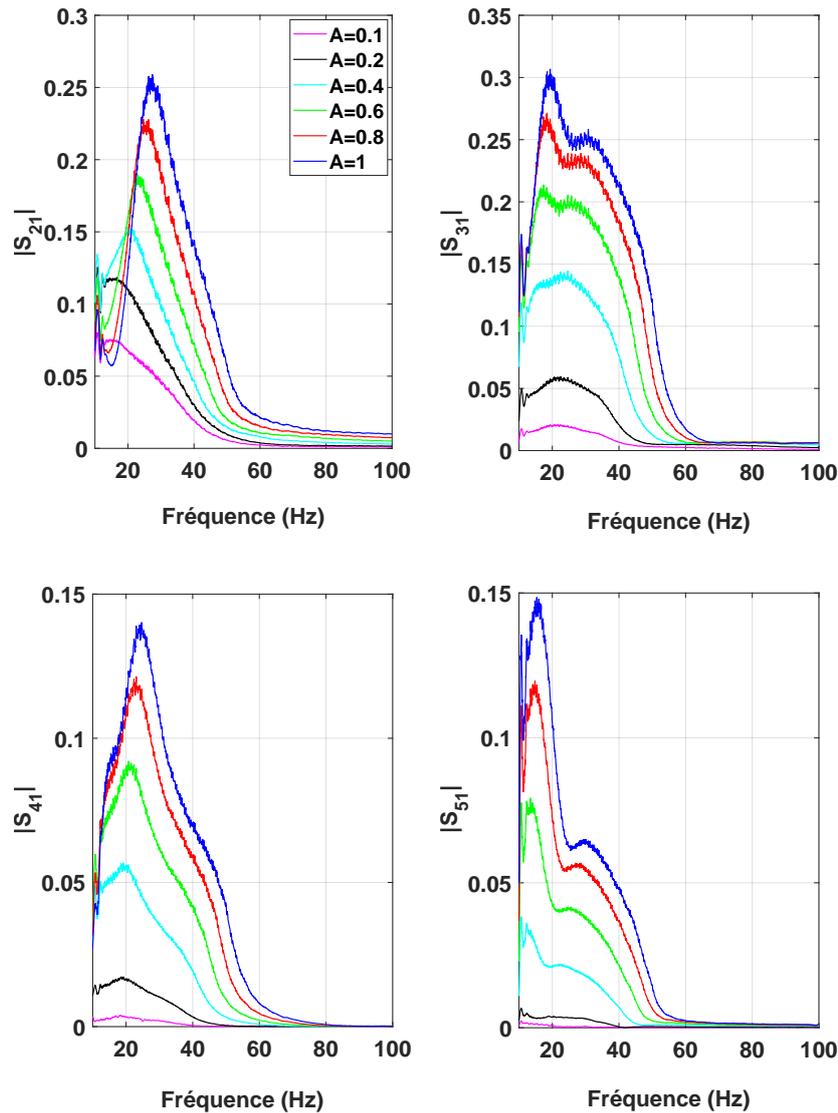


**Figure 6.2** – Estimation des coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation.

Il est à noter que seul le coefficient  $|S_{11}|$  est tracé sur la plage de fréquence totale (c'est-à-dire jusqu'à 700 Hz). Les autres coefficients de la matrice de diffusion sont tracés jusqu'à 100 Hz. En effet,  $|S_{11}|$  ne dépend que de valeurs estimées à fort niveau et sur la plage de fréquence totale allant de  $f_1 = 10$  Hz à  $f_2 = 700$  Hz (voir Section 5.1.2).  $|S_{nn}|$  pour  $n \leq 5$  et  $S_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  sont quant à eux déterminés à partir d'un niveau d'excitation plus faible  $A'$  et sur la gamme de fréquence  $[n \times f'_1; n \times f'_2]$  (voir Section 5.1.2). Il est donc nécessaire de déterminer une borne de fréquence  $f'_2 \leq f_2$  pour chaque harmonique étudiée  $n$ , de façon à ne pas dépasser la borne supérieure  $f_2$ . Dans notre cas, l'estimation de la matrice de diffusion simplifiée est réalisée pour  $H = 7$  donc  $f'_2 = \frac{f_2}{H} = 100$  Hz.

### Estimation de la matrice de diffusion simplifiée en impédance

Il est également possible d'estimer une matrice de diffusion en impédance de termes  $Z_{kn}$  grâce à l'équation (1.89). La matrice de diffusion de termes  $S_{kn}$  étant estimée à l'abscisse du microphone, il



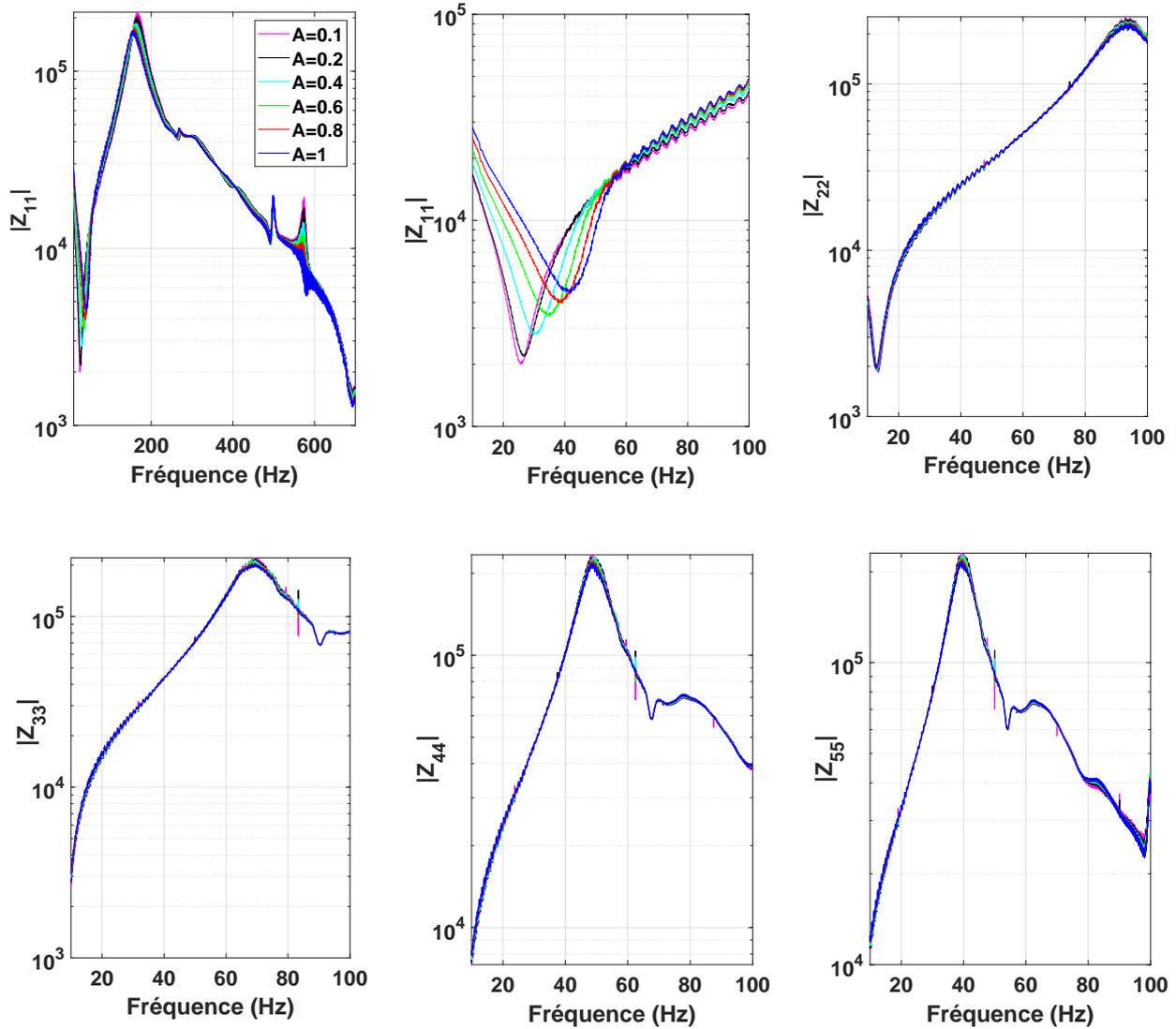
**Figure 6.3** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et de différents niveaux d’excitation.

est possible en utilisant la formule de l’impédance ramenée

$$Z_{ram} = \frac{\cos(kx_\mu) + jZ_c \sin(kx_\mu)Z^{-1}}{j \sin(kx_\mu)Z_c^{-1} + \cos(kx_\mu)Z^{-1}} \quad (6.1)$$

avec  $k = 2\pi f/c$  le nombre d’onde, d’estimer les coefficients  $Z_{kn}$  à la surface de l’absorbeur.

Les résultats obtenus sont représentés, pour les termes diagonaux  $|Z_{nn}|$  pour  $1 < n \leq 5$  en Figure 6.4 (avec  $|Z_{11}|$  représenté sur les plages fréquentielles  $[10; 600]$  Hz et  $[10; 100]$  Hz pour plus de lisibilité) et pour les termes de la première colonne  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  en Figure 6.5.  $|Z_{11}|$  est bien caractéristique d’une impédance, avec  $|Z_{nn}|$  pour  $n \leq 5$  sa continuation à  $n \times f$  et à plus faible niveau. On note un décalage de la fréquence de résonance du système avec le niveau  $A$ , ainsi qu’une augmentation de l’amplitude du pic d’impédance. La contribution des coefficients  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  diminue avec le niveau d’excitation et les termes d’ordre pair sont inférieurs aux termes d’ordre impair. Plus le niveau est élevé, plus les courbes sont lisses.



**Figure 6.4** – Estimation à la surface de l’absorbeur des coefficients diagonaux  $|Z_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et de différents niveaux d’excitation.

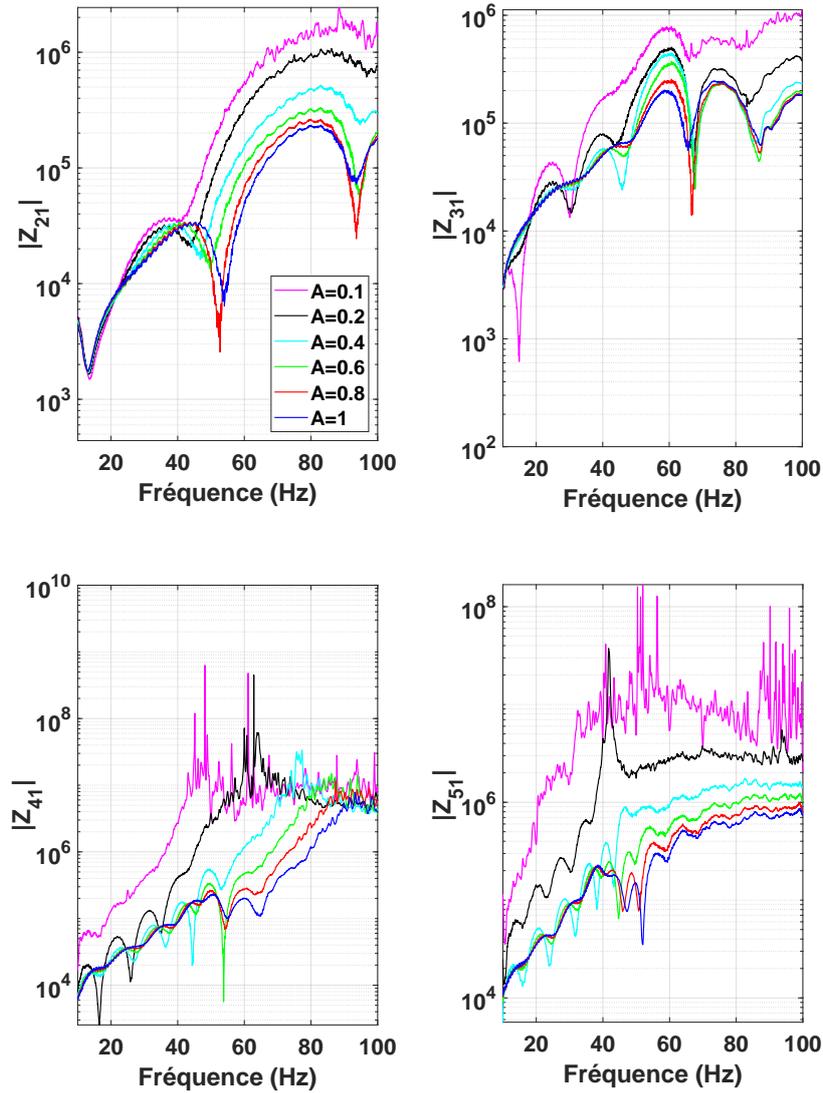
### Quantification des transferts d’énergie

L’onde incidente étant tonale, plusieurs estimateurs ont été mis en place afin d’explicitier ces transferts d’énergie.

La Figure 6.6.(a) visualise la quantité

$$\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2 \quad (6.2)$$

qui représente la quantité d’énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et transmise à l’onde réfléchie. À très basses fréquences et pour des niveaux d’amplitude  $A > 0.2$ , cet indicateur présente un minimum de 0.3, signifiant que 30 % de l’énergie de  $P_1^+(f)$  a été réfléchie. Ces courbes tendent ensuite vers un plateau où 70 % de l’énergie de  $P_1^+(f)$  a été transmise à l’onde réfléchie. L’apparition de ce plateau se décale vers les hautes fréquences lorsque le niveau d’excitation augmente. Pour une même fréquence, on remarque que plus le niveau d’excitation augmente et moins d’énergie de  $P_1^+(f)$  a été réfléchie.



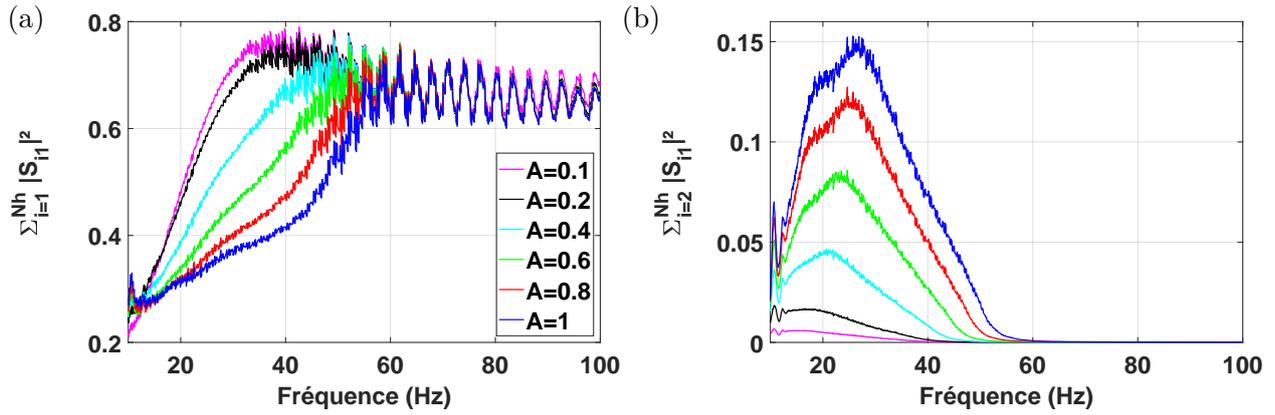
**Figure 6.5** – Estimation à la surface de l’absorbeur des coefficients de la première colonne  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et de différents niveaux d’excitation.

La Figure 6.6.(b) visualise la quantité

$$\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2 \quad (6.3)$$

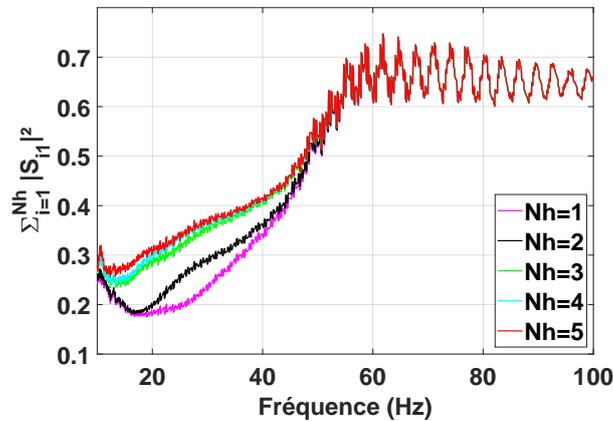
qui représente la quantité d’énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  vers les composantes harmoniques  $P_n^-(f)$  pour  $n > 1$ . La quantité d’énergie extraite de la fondamentale vers les harmoniques augmente avec l’amplitude d’excitation, tout en se décalant vers les hautes fréquences.

Prenons un exemple pour  $f = 30$  Hz et  $A = 1$  :  $\sum_{n=2}^H |S_{n1}|^2 = 0.15$  signifiant que 15 % de l’énergie de  $P_1^+(f)$  est réfléchiée sous la forme d’harmoniques  $P_n^-(f)$ .  $\sum_{n=1}^H |S_{n1}|^2 = 0.35$  signifiant que 35 % de l’énergie totale de  $P_1^+(f)$  a été transmise à l’onde réfléchiée. La différence entre ces deux grandeurs nous informe alors que 20 % de l’énergie incidente à la fréquence fondamentale est réfléchiée à cette même fréquence.



**Figure 6.6** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  et  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour  $H = 5$  pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d’excitation

La Figure 6.7 représente l’apport en énergie de chaque terme de la première colonne. On remarque que l’ajout des harmoniques 2 et 3 modifient grandement l’estimation de la quantité d’énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et transmise à l’onde réfléchiée. Les harmoniques 4 et 5 ont quant à elle peu d’influence. L’influence des composantes harmoniques est donc faible à partir de  $Nh = 4$ .



**Figure 6.7** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=1}^{Nh} |S_{i1}|^2$  pour  $Nh = [1, \dots, 5]$  pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et pour  $A = 1$

### 6.1.2. Membranes nanofibreuses

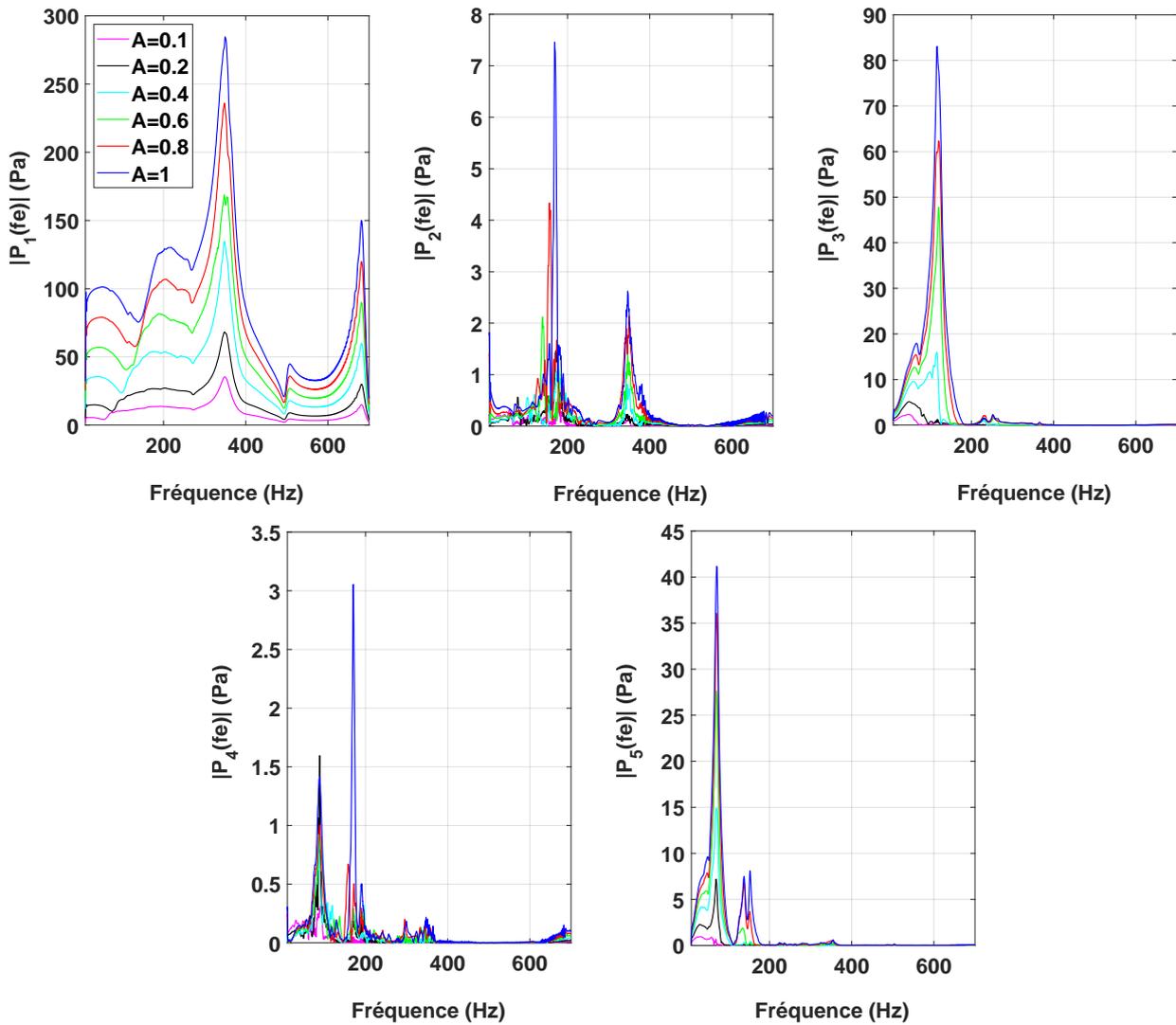
#### Estimation des composantes des pressions $P_n(f)$

Les composantes de la pression  $p(t)$  sont représentées pour {Substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } en Figure 6.8, pour {Substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } en Figure 6.9 et pour {Substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } en Figure 6.10. Comme pour la membrane de haut-parleur, la composante fondamentale  $P_1(f)$  est prédominante par rapport aux composantes harmoniques  $P_n(f)$  pour  $1 < n \leq 5$  et son amplitude augmente en fonction du niveau d’excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$ . La fréquence de résonance du système se décale vers les hautes fréquences lorsque le niveau augmente.

Les composantes d'ordre impair  $P_n(f)$  pour  $n = [3; 5]$  sont supérieures aux composantes d'ordre pair  $P_n(f)$  pour  $n = [2; 4]$ . Enfin pour un ordre donné  $n$ , l'amplitude de  $P_n(f)$  diminue avec le niveau d'excitation.

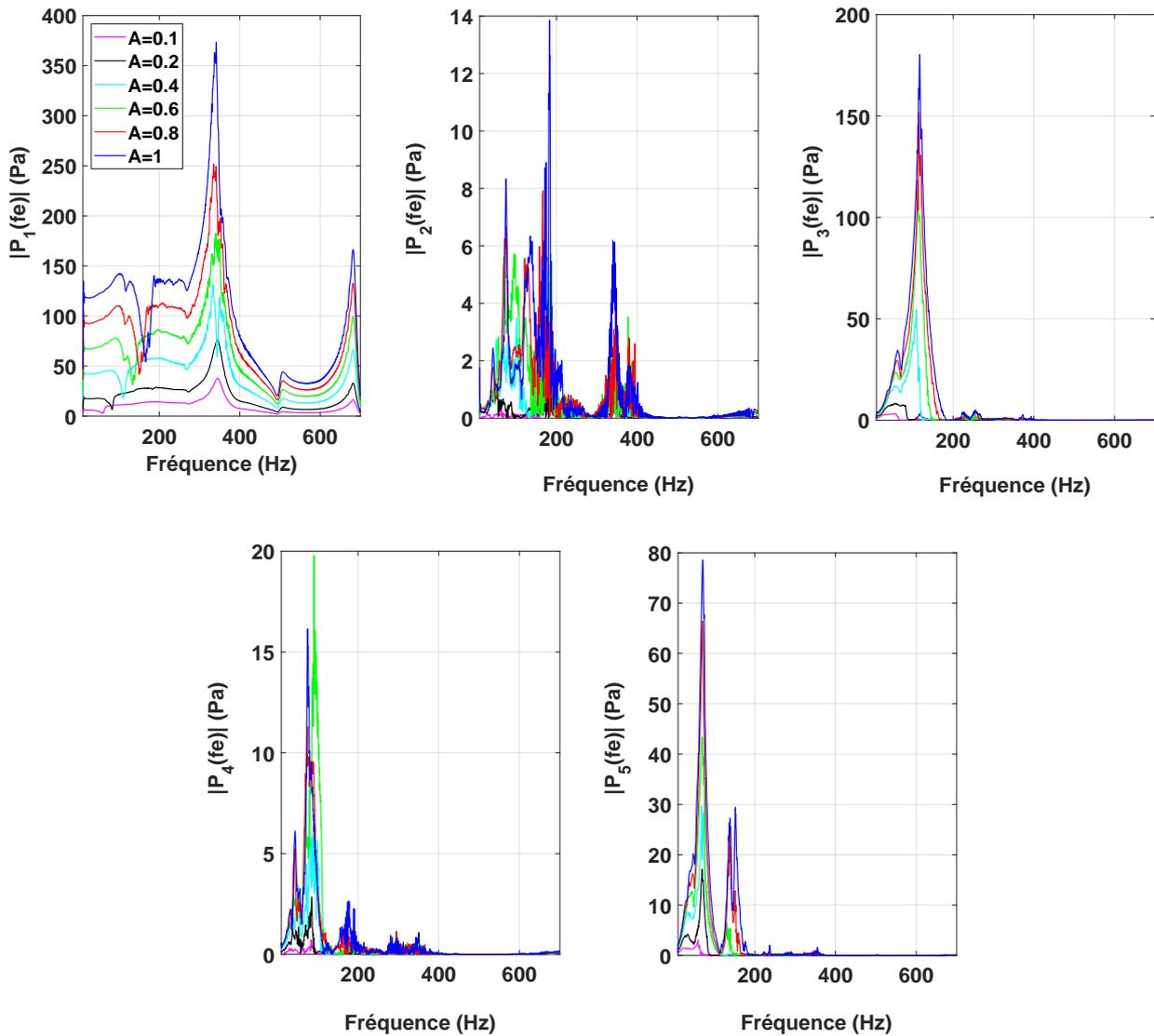
Comparons à présent pour un même niveau d'excitation  $A$  le comportement des différentes membranes nanofibreuses. La Figure 6.11 représente l'estimation des modules de la fondamentale  $P_1(f)$  et des harmoniques de la pression acoustique  $P_n(f)$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour les différentes membranes nanofibreuses et pour l'amplitude d'excitation  $A = 1$ . Les propriétés acoustiques non linéaires du substrat et du {substrat + adhésif} sont données en Annexe C.  $|P_1(f)|$  nous permet de visualiser l'évolution des résonances en fonction de la composition de la membrane. Pour la membrane {substrat + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}, la résonance se produit à 130 Hz et à une amplitude de 80 Pa. L'ajout d'adhésif (membrane {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}) translate la fréquence de résonance à 170 Hz pour une amplitude de 60 Pa. Le pic présente plus de discontinuités et est plus étroit. L'augmentation du taux de nanofibres (membrane {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}) diminue la fréquence de résonance, élargit la plage de pression minimale et lisse la courbe. Les membranes {substrat + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} présentent des résonances proches mais une plage de pression minimale différentes.

Membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}



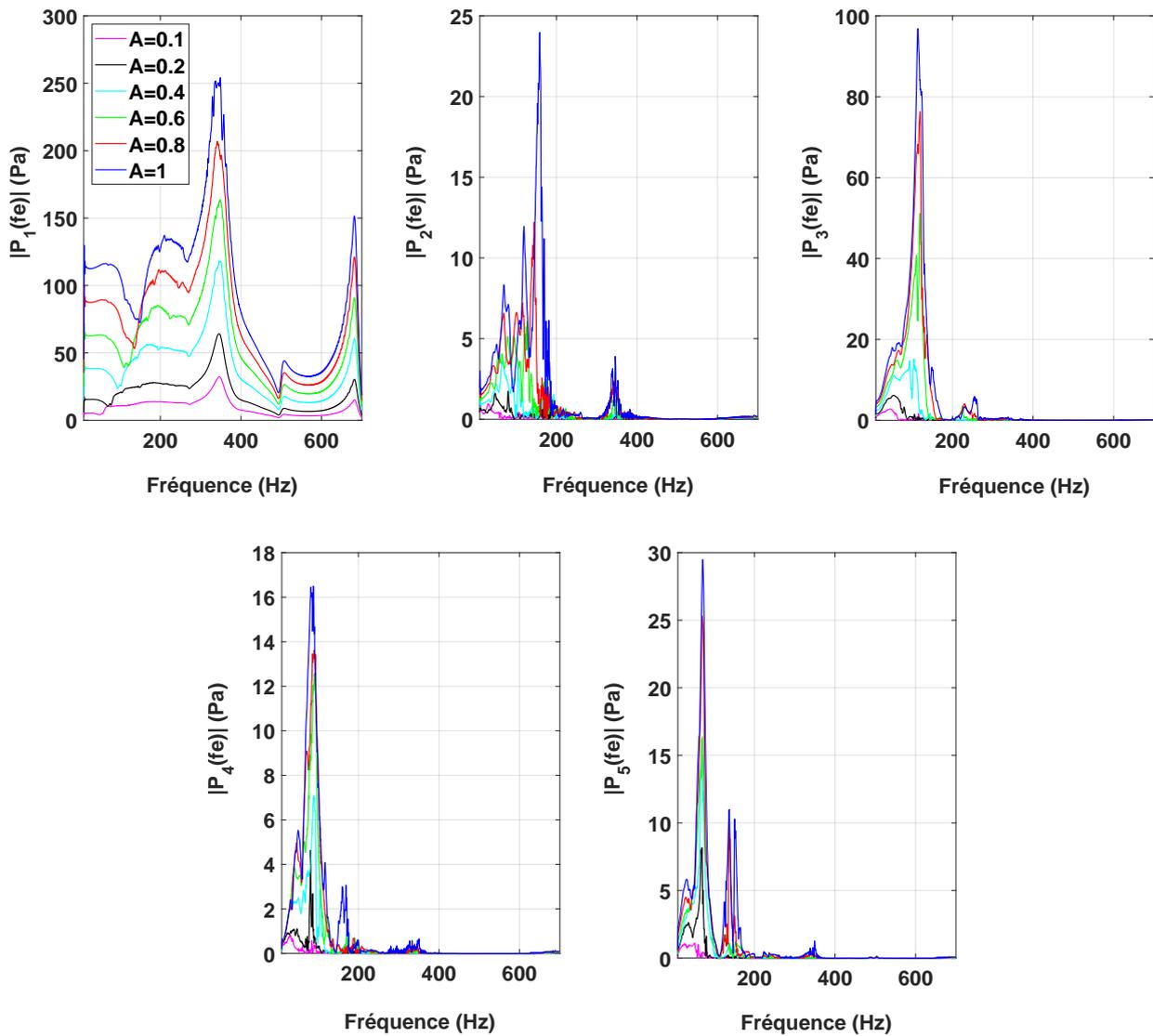
**Figure 6.8** – Estimation des modules de la pression  $P_n(f)$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d'excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}

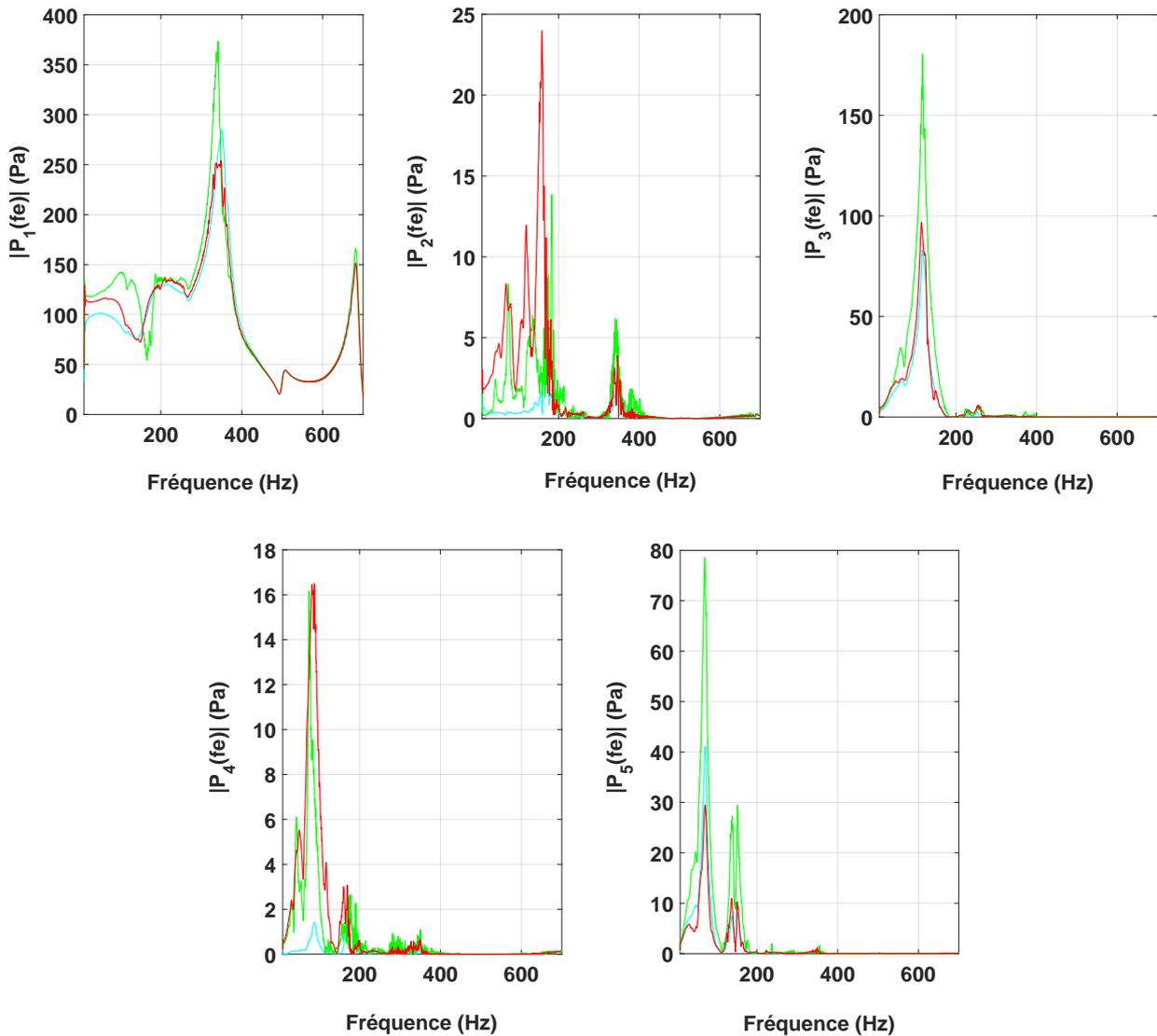


**Figure 6.9** – Estimation des modules de la pression  $P_n(f)$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d’excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}



**Figure 6.10** – Estimation des modules de la pression  $P_n(f)$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d’excitation



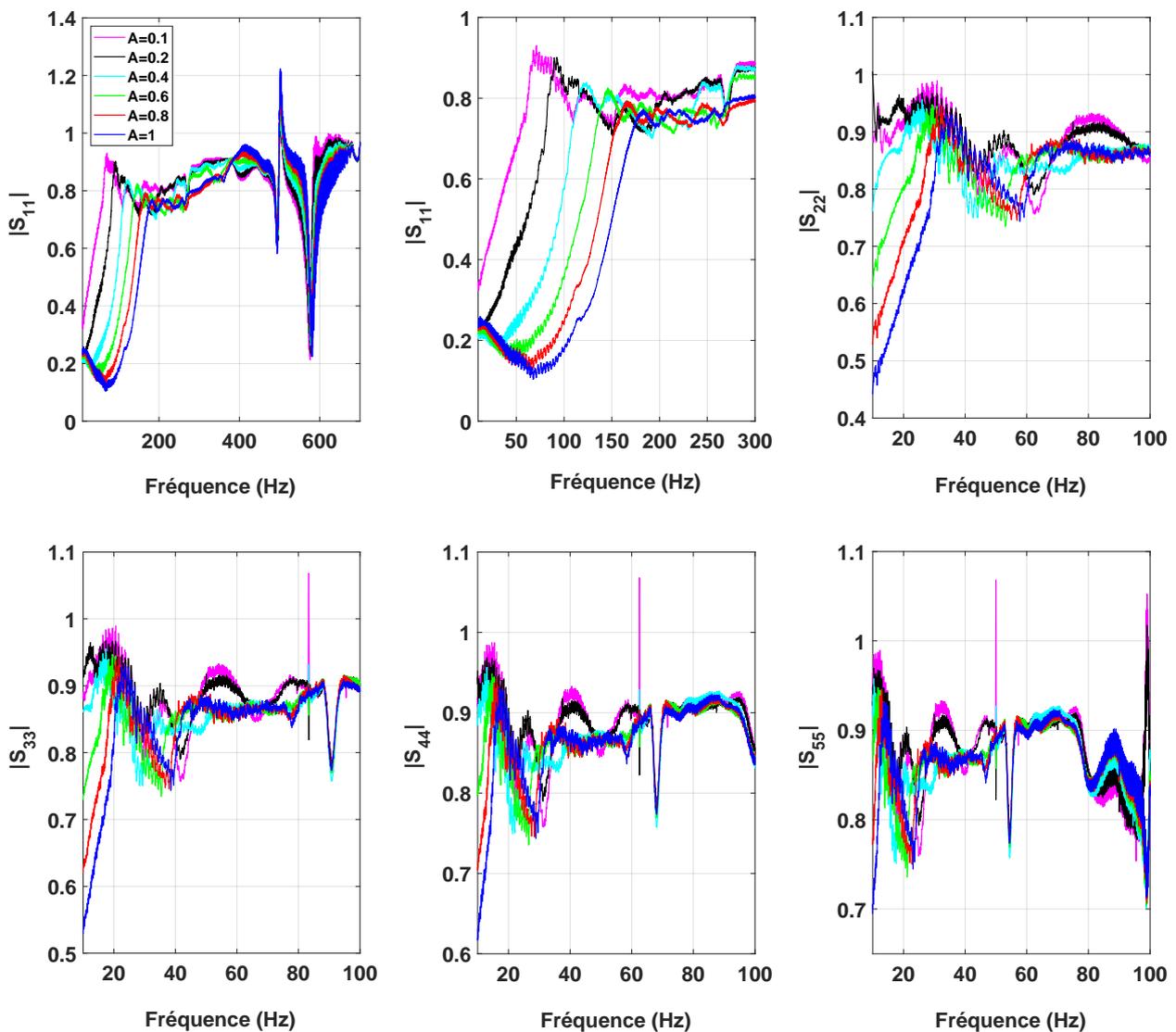
**Figure 6.11** – Estimation des modules des composantes fréquentielles de la pression  $|P_n(f)|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  pour l'amplitude d'excitation  $A = 1$  pour la membrane {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } (—), {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } (—) et {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } (—)

### Estimation de la matrice de diffusion simplifiée

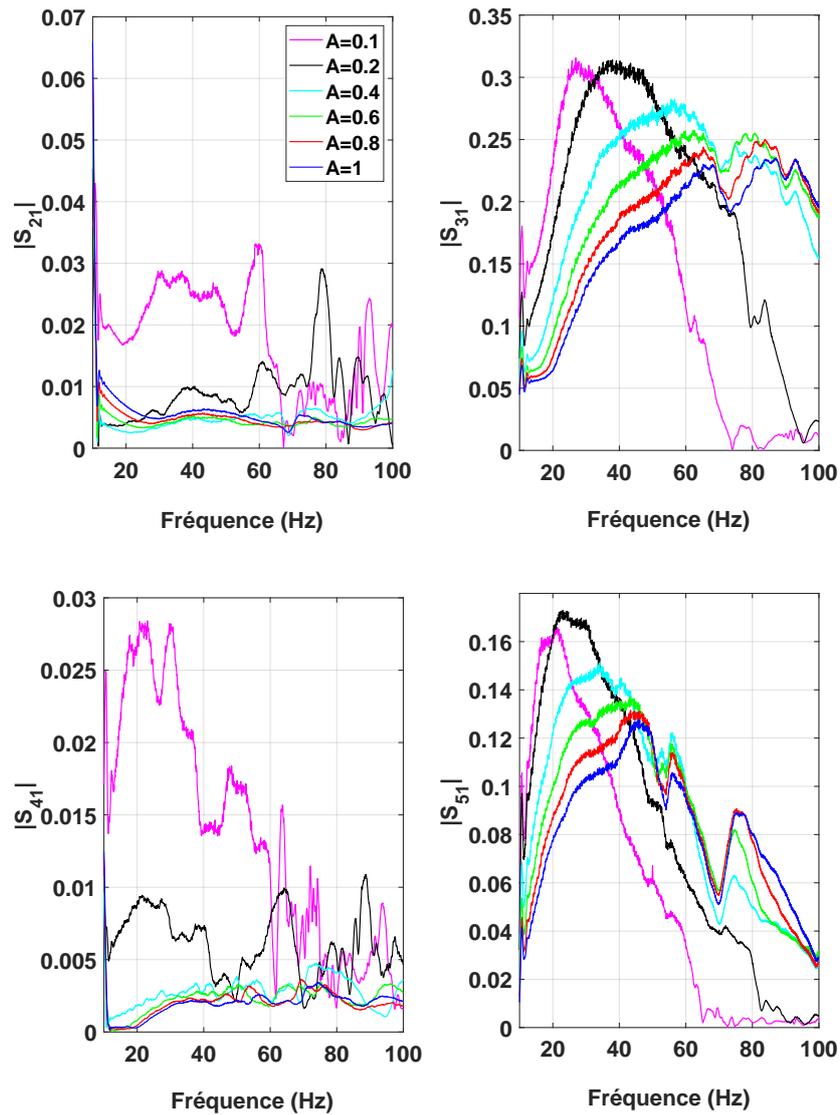
Une fois les composantes de pression calculées, la matrice de diffusion simplifiée est obtenue comme présenté en Section 5.1.2. Les figures 6.12 et 6.13 représentent la matrice simplifiée estimée pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, les figures 6.14 et 6.15 la matrice simplifiée estimée pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } et les figures 6.16 et 6.17 la matrice simplifiée estimée pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }. Pour chaque membrane, différents niveaux d'excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$  sont comparés et les termes  $|S_{11}|$  sont représentés sur les plages fréquentielles  $[10; 600] \text{ Hz}$  et  $[10; 100] \text{ Hz}$  pour plus de lisibilité. Les constatations sont ici valables pour chaque membrane. Comme lors de l'estimation de la membrane de haut-parleur, on remarque une continuité des coefficients diagonaux de la matrice de diffusion avec  $|S_{nn}|$  pour  $1 < n \leq 5$  la continuation  $|S_{11}|$  à  $n \times f$  et à faible niveau. L'amplitude de ces termes diagonaux diminuent avec le niveau d'excitation, illustrant une augmentation de l'absorption. Les termes  $|S_{11}|$  présentent tous une forme caractéristique de coefficients de réflexion.

Ils se décalent vers les hautes fréquences lorsque  $A$  augmente, modifiant la plage d'absorption maximale. Les termes de transfert d'énergie  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  diminuent avec le niveau d'excitation, traduisant le fait que moins de non-linéarités sont présentes à fort niveau. Concernant les termes de la première colonne, comme pour la membrane de haut-parleur, les termes  $|S_{k1}|$  d'ordre  $k$  impair sont supérieurs aux termes  $|S_{k1}|$  d'ordre  $k$  pair. Les coefficients pairs étant très faibles, il est difficile d'en faire ressortir une tendance nette.

Membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}

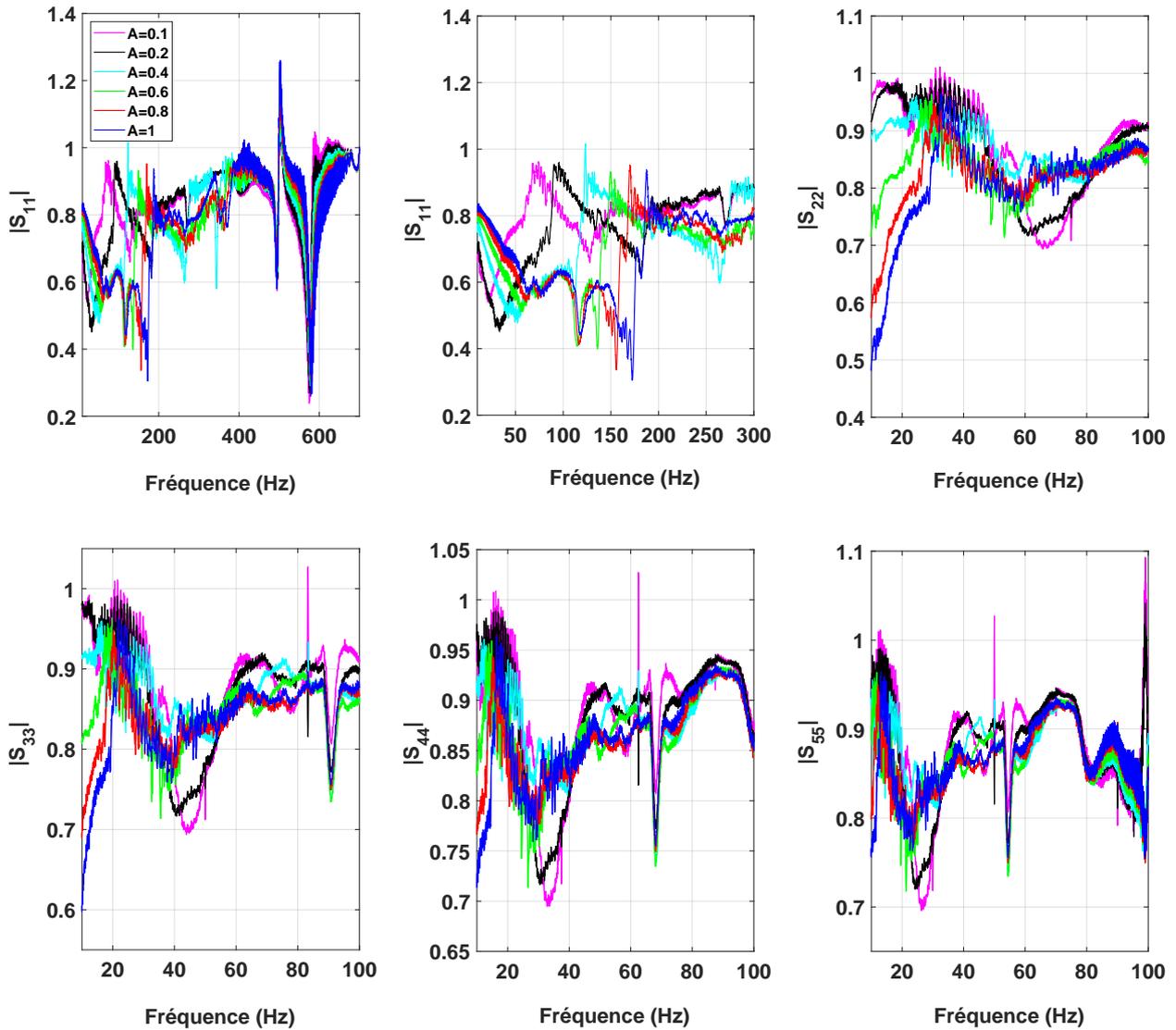


**Figure 6.12** – Estimation des coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

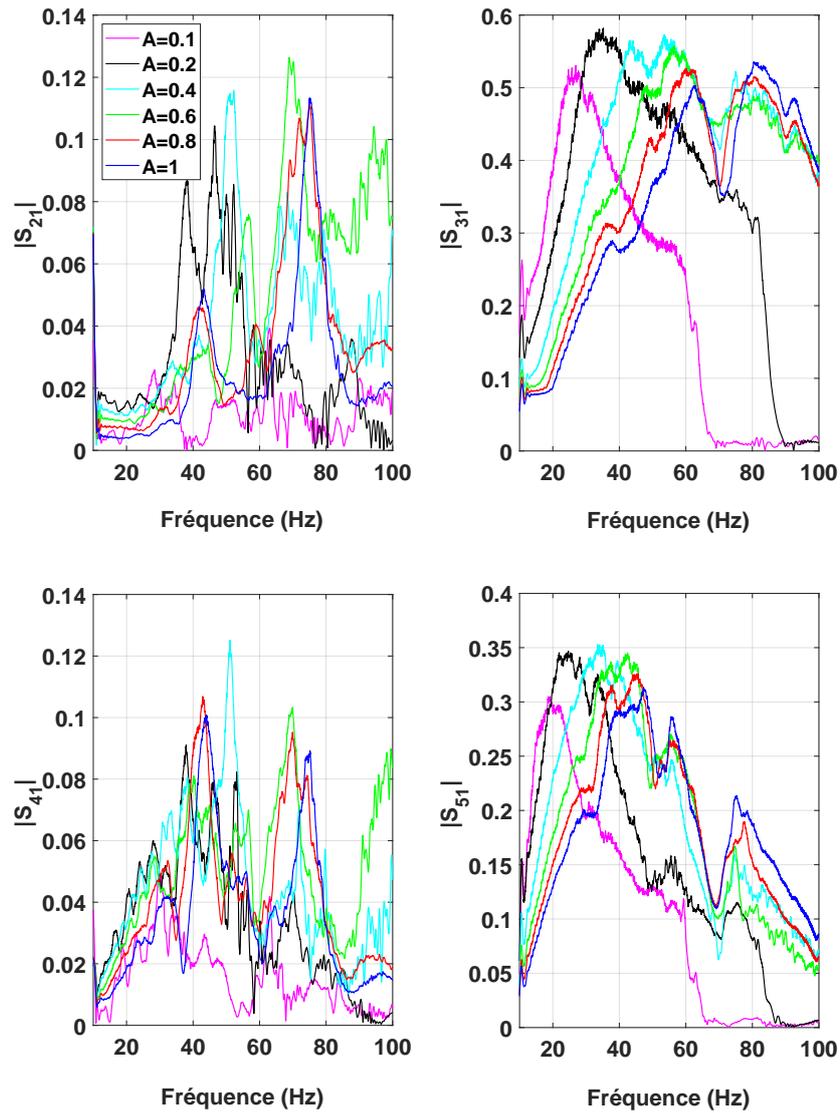


**Figure 6.13** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}

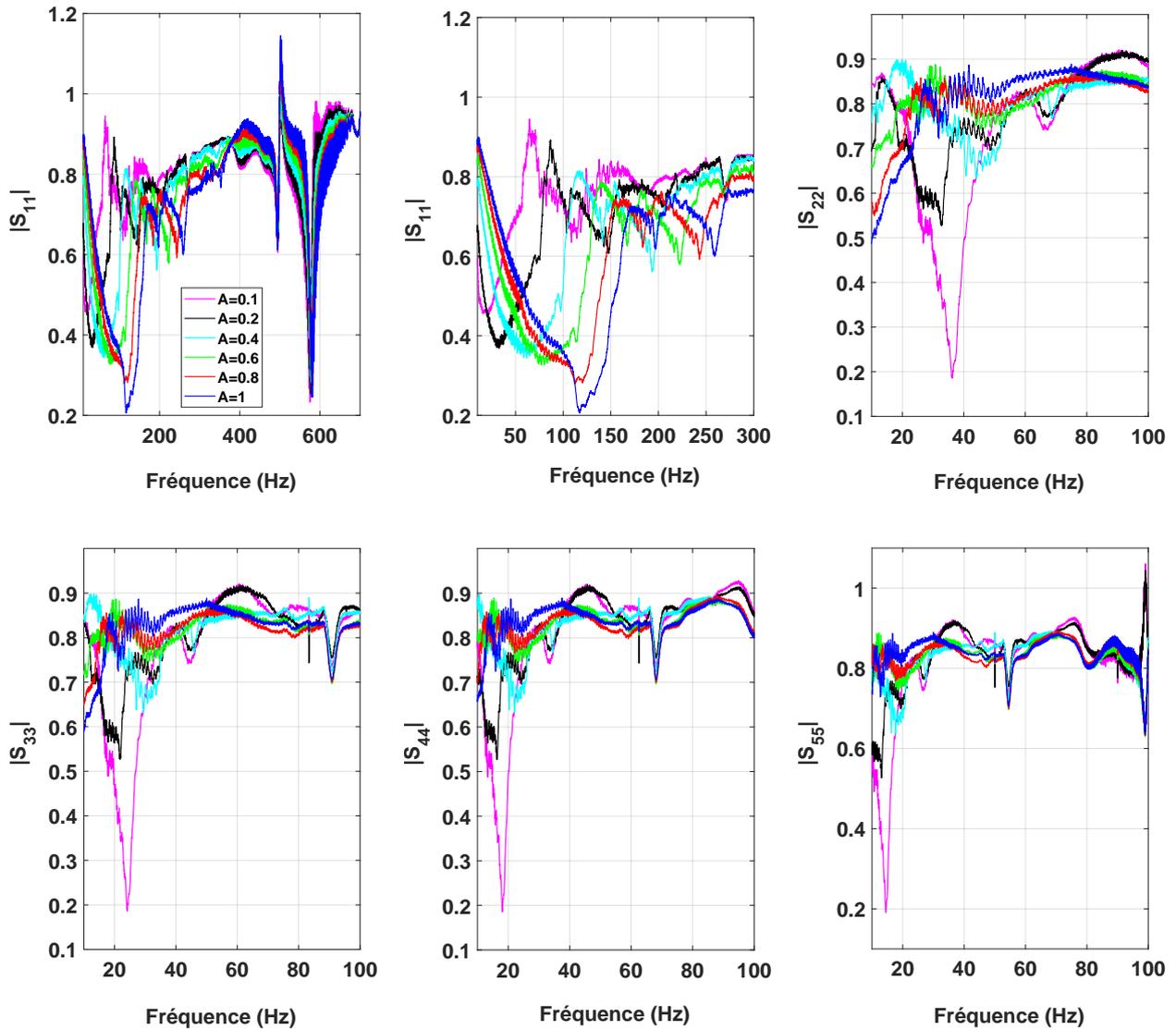


**Figure 6.14** – Estimation des coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

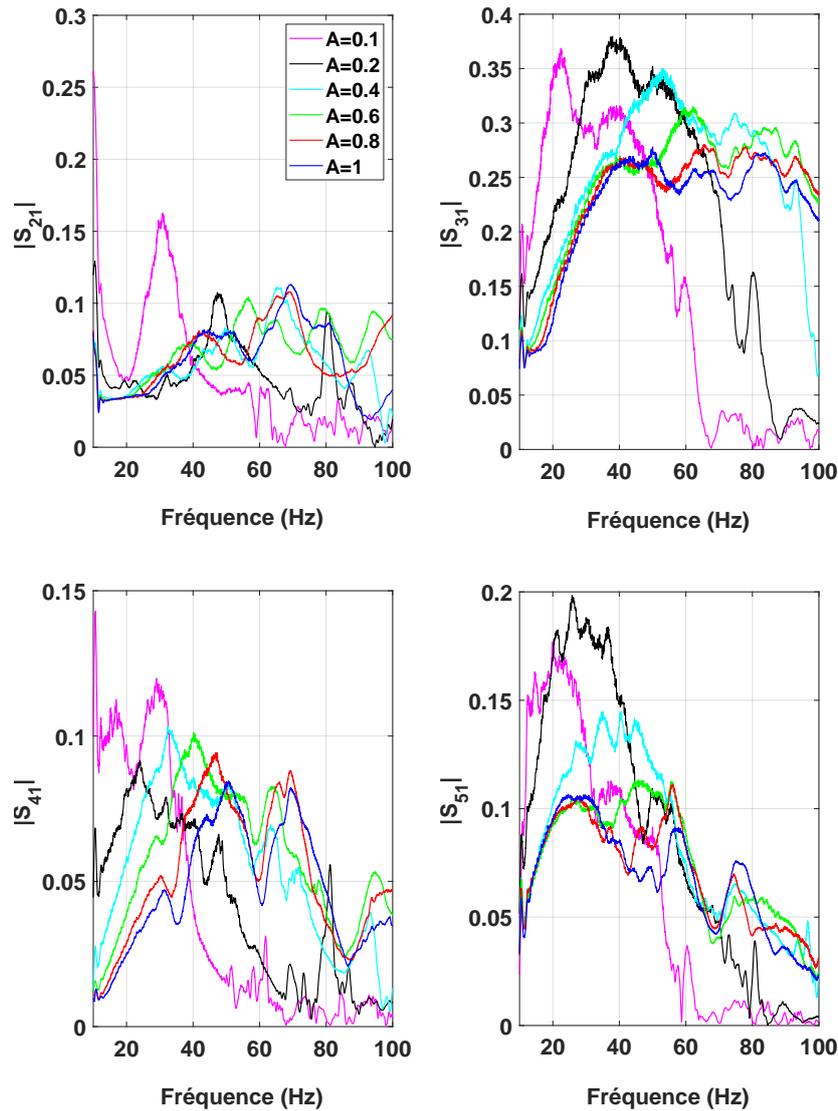


**Figure 6.15** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}

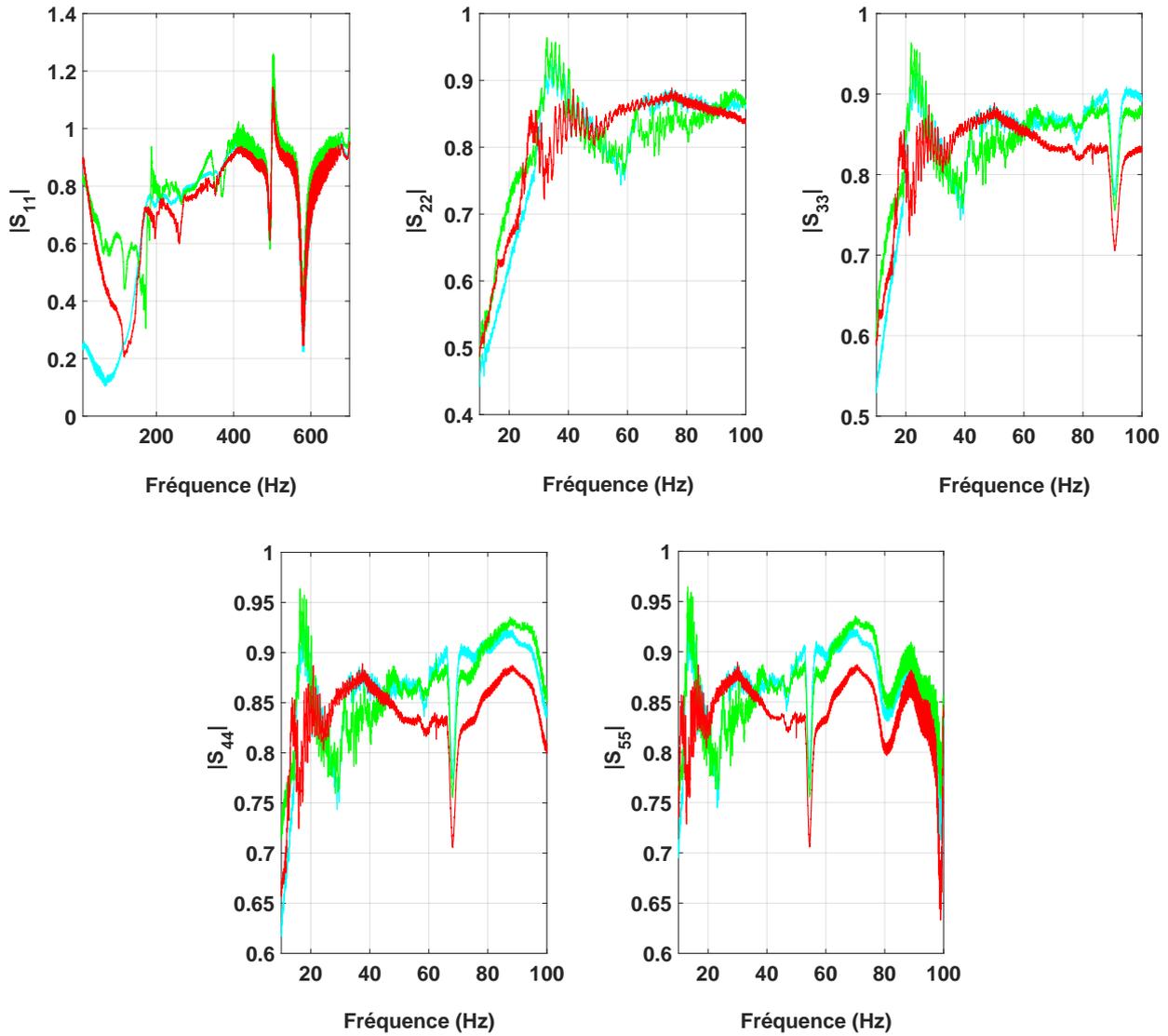


**Figure 6.16** – Estimation des coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

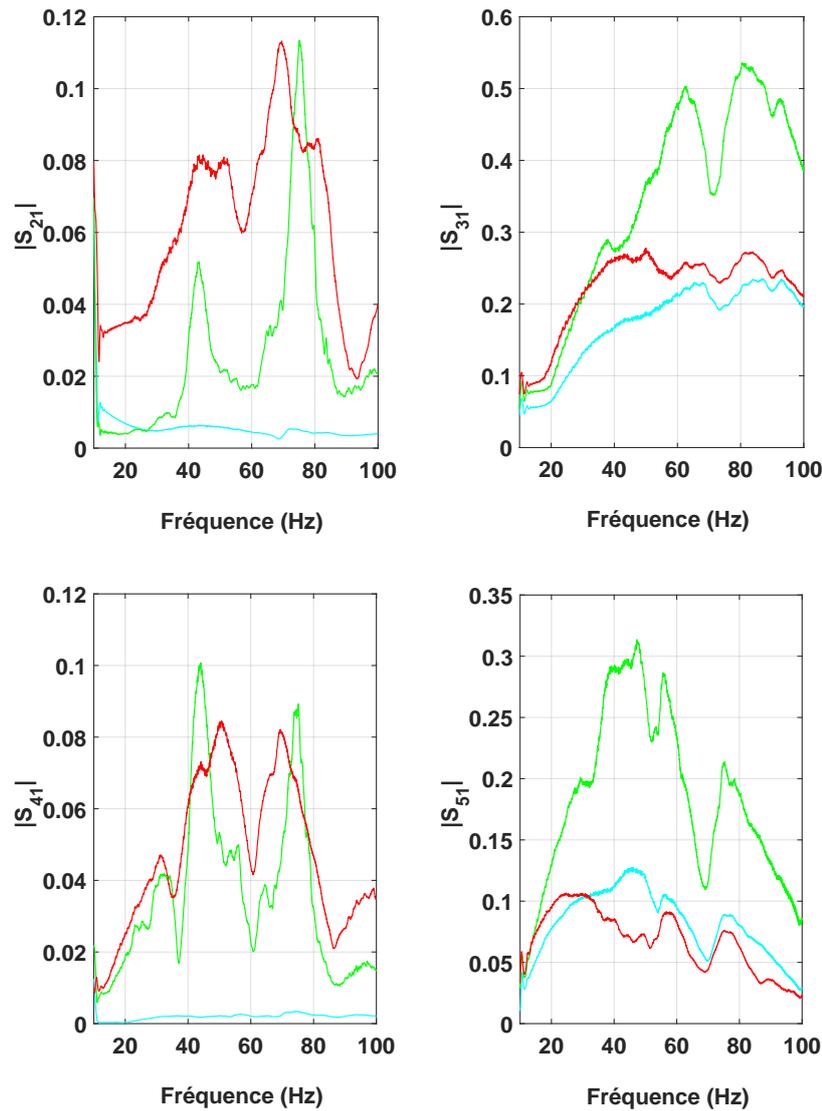


**Figure 6.17** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

Afin de visualiser l'efficacité de chaque membrane, les termes diagonaux sont représentés pour  $A = 1$  et pour chaque membrane en Figure 6.18. L'échantillon {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } présente une absorption optimale sur une plage de fréquences allant de 10 à 150 Hz avec une réflexion minimale proche de 10 % (soit une absorption proche de 90 %). L'ajout d'adhésif et de nanofibres (membrane {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }) permet de décaler le pic de résonance et d'être plus efficace entre 100 et 200 Hz avec une absorption maximale proche de 80 %. Ces deux membranes nanofibreuses présentent donc des comportements intéressants sur des plages en fréquences différentes. Les comportements erratiques des estimateurs liés à la membrane {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ }) ne permettent pas de conclure quant à l'efficacité de cette membrane. Les termes de la première colonne  $|S_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  sont représentés pour chaque membrane et pour  $A = 1$  sur le Figure 6.19. On remarque sur les composantes impaires de  $|S_{k1}|$  que les échantillons {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } et {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } présentent des non-linéarités de même ordre, contrairement aux composantes paires. L'ajout d'adhésif et de fibres augmente le transfert d'énergie entre harmoniques.



**Figure 6.18** – Estimation des coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (—), {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} (—) et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} (—), pour  $A = 1$



**Figure 6.19** – Estimation des coefficients de la première colonne  $S_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } (—), {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } (—) et {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } (—), pour  $A = 1$

### Estimation de la matrice de diffusion simplifiée en impédance

Ces matrices de diffusion peuvent également être exprimées en terme d'impédance présentées en figures 6.20 et 6.21 pour la membrane {Substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, en figures 6.22 et 6.23 pour la membrane {Substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } et en figures 6.24 6.25 pour la membrane {Substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }. Les résultats obtenus pour différents niveaux  $A$  sont comparés et les termes  $|Z_{11}|$  sont représentés sur les plages fréquentielles  $[10; 600]$  Hz et  $[10; 100]$  Hz pour plus de lisibilité. Pour chaque membrane,  $|Z_{11}|$  est bien représentatif d'une impédance, avec  $|Z_{nn}|$  pour  $n \leq 5$  sa continuation à  $n \times f$  et à plus faible niveau. Les fréquences de résonance se déplacent vers les hautes fréquences lorsque le niveau  $A$  augmente. La contribution des termes  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq k \leq 5$  diminue globalement avec le niveau mais sont très erratiques et il est donc difficile d'émettre des conclusions à partir de ces courbes.

Membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}

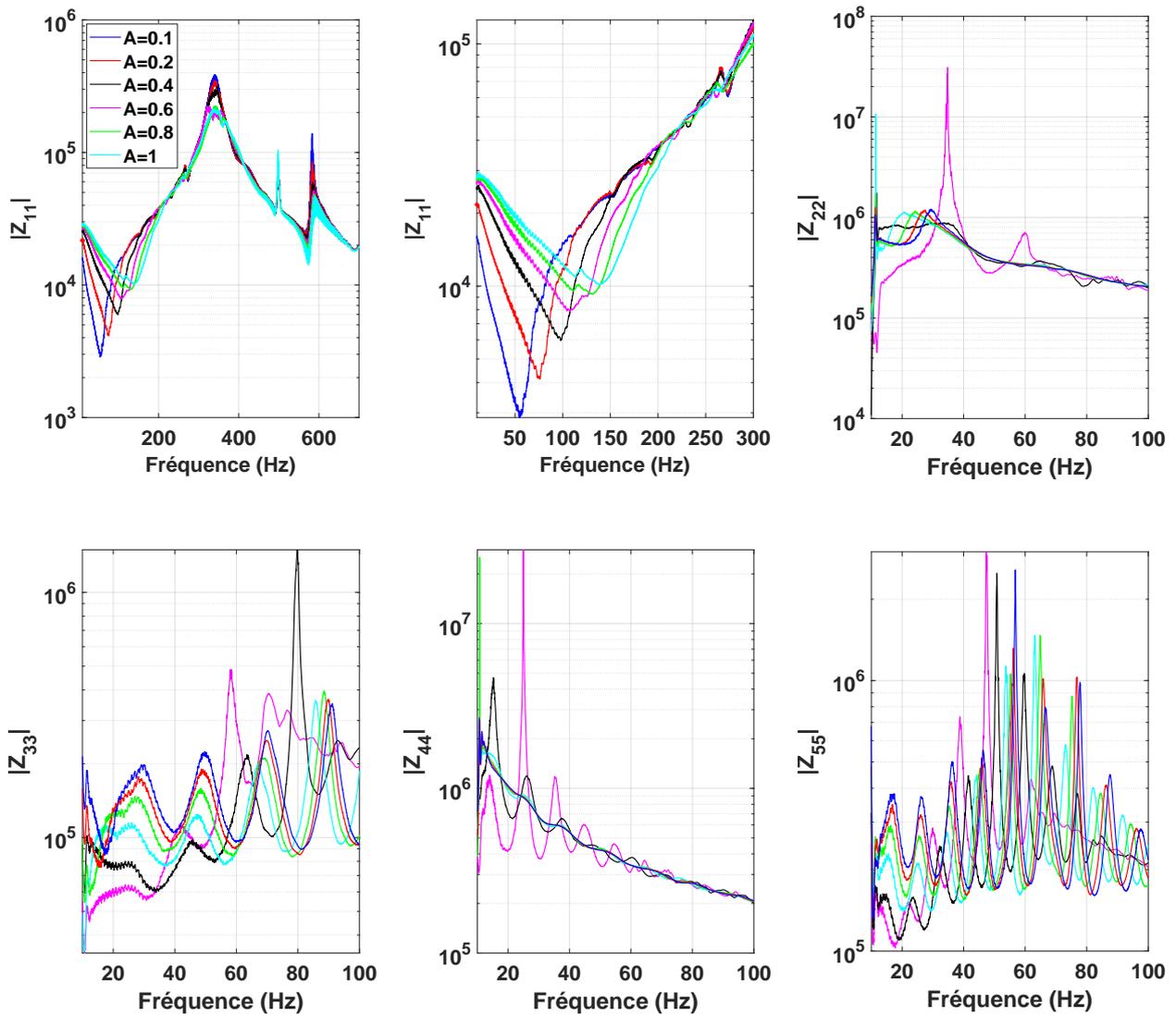
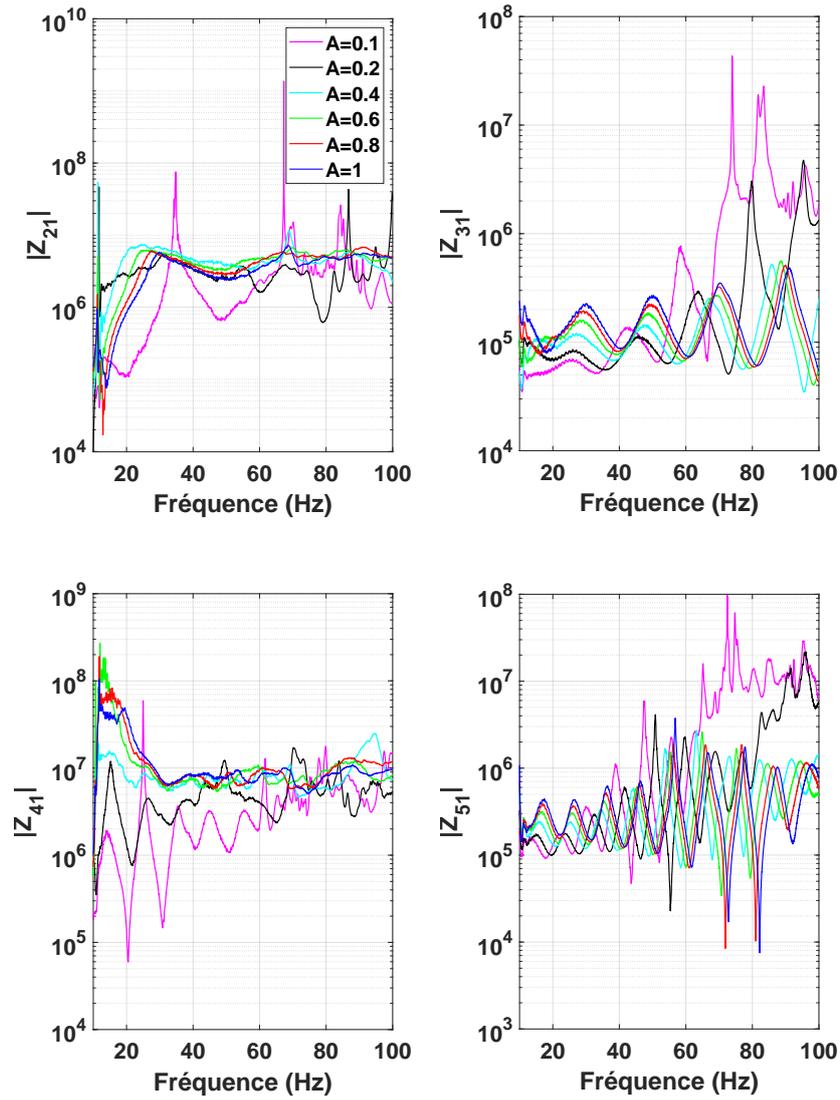


Figure 6.20 – Estimation des coefficients diagonaux  $|Z_{mn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion en impédance pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation



**Figure 6.21** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}

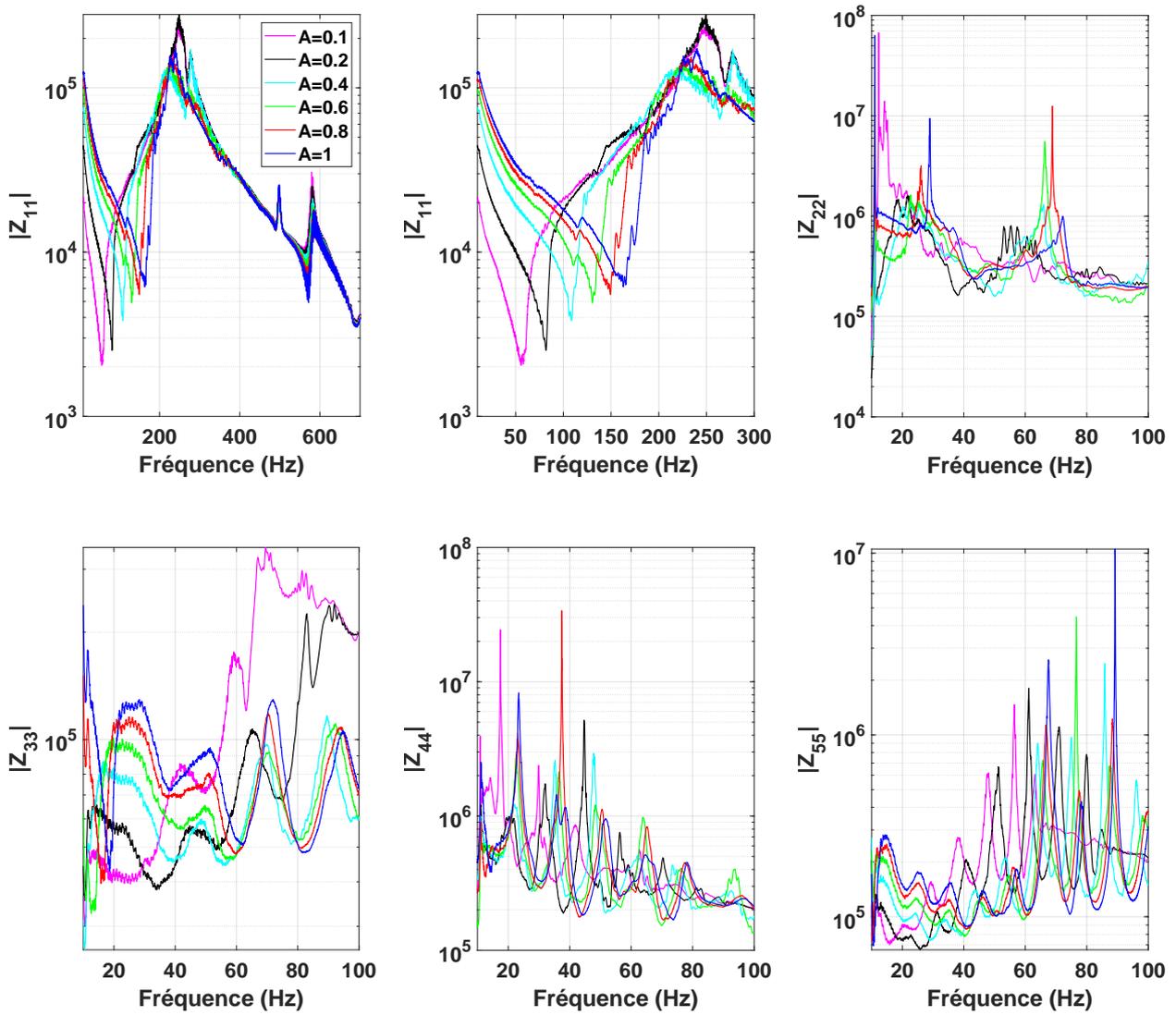
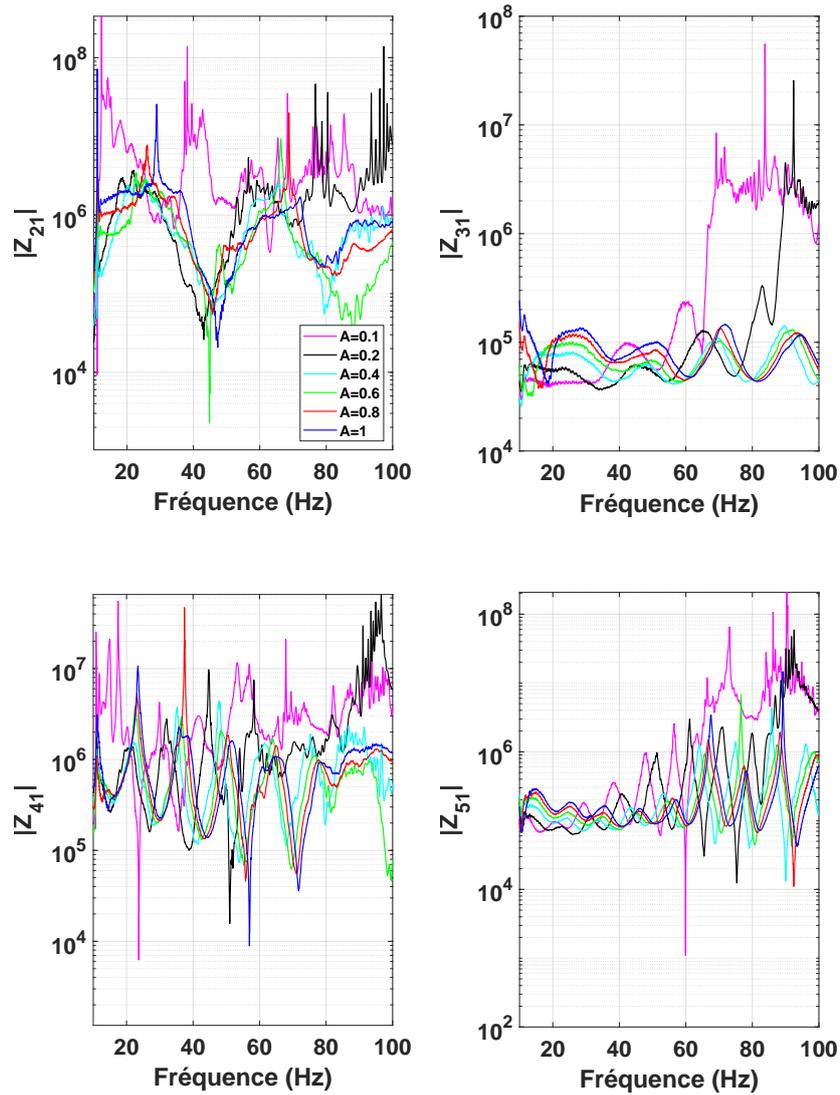


Figure 6.22 – Estimation des coefficients diagonaux  $|Z_{nm}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion en impédance pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d’excitation



**Figure 6.23** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}

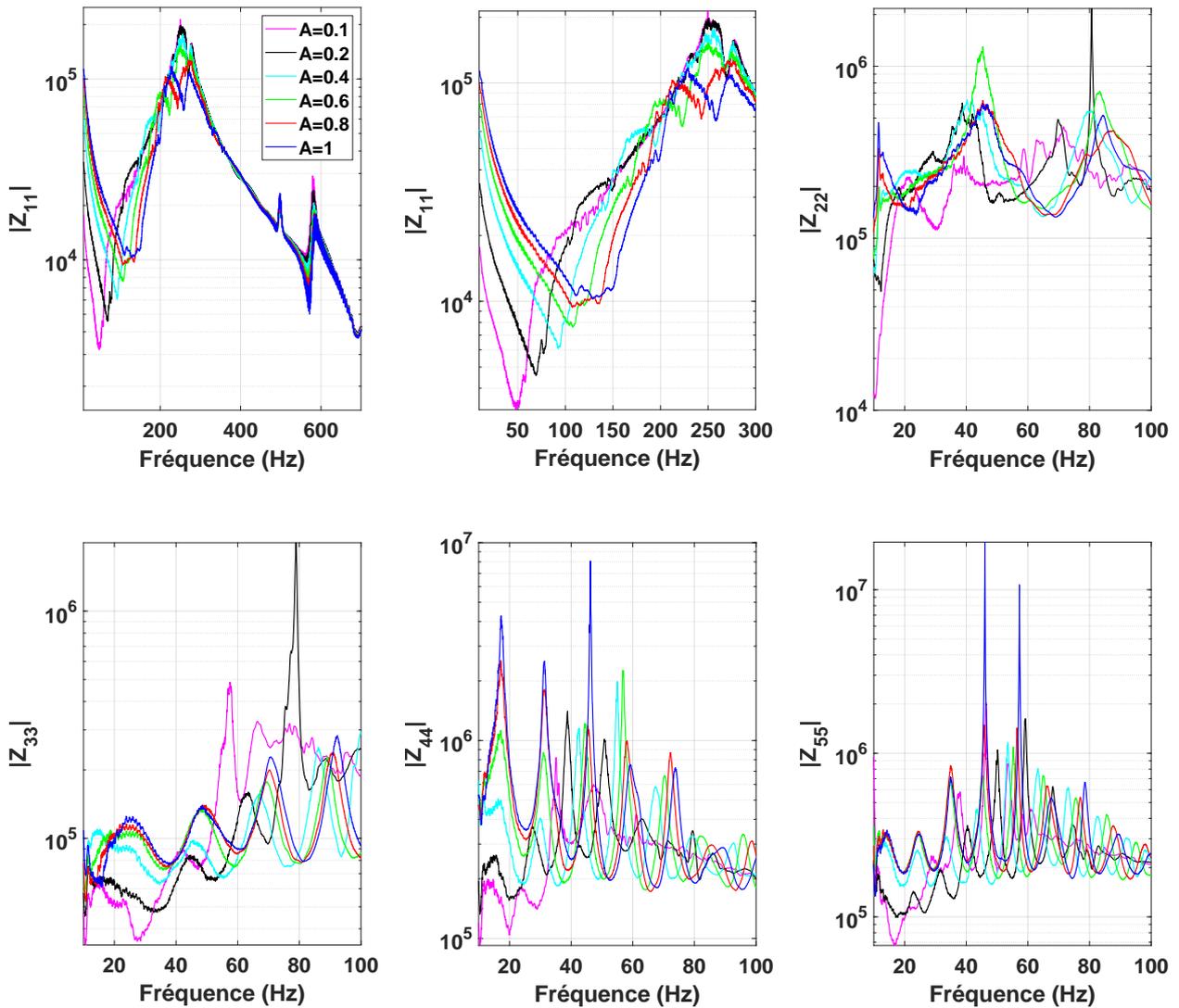
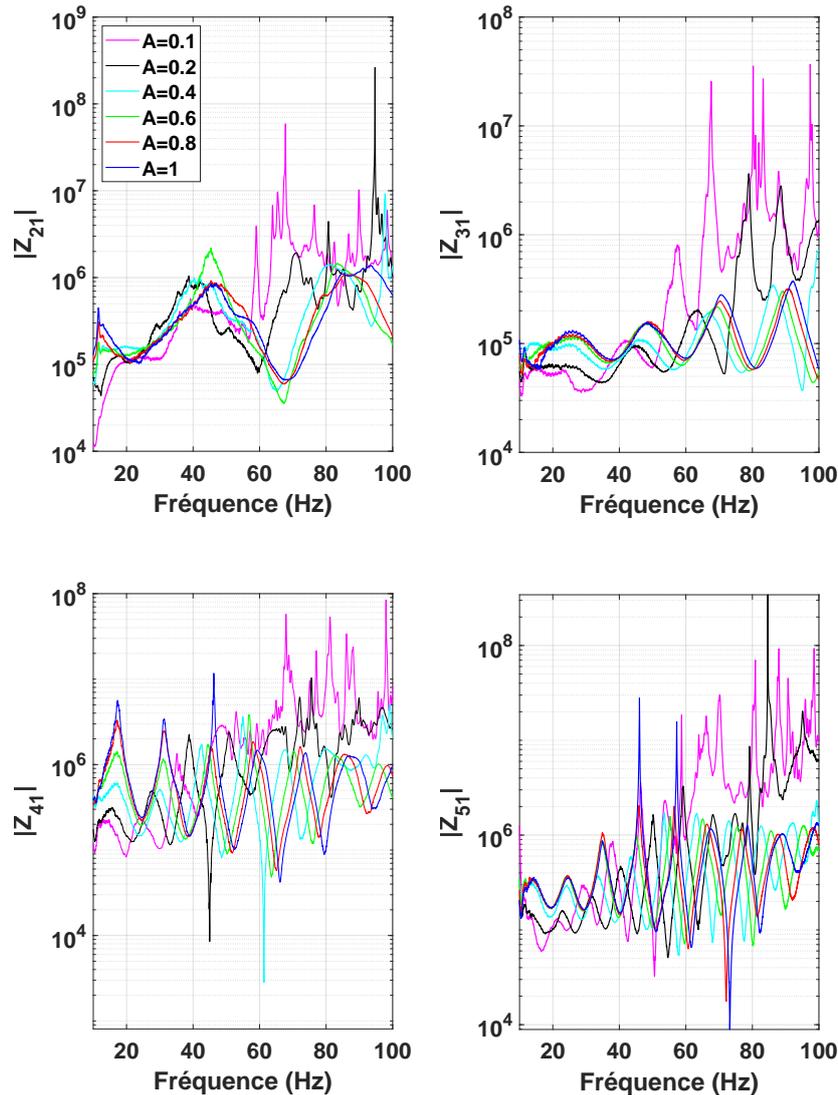
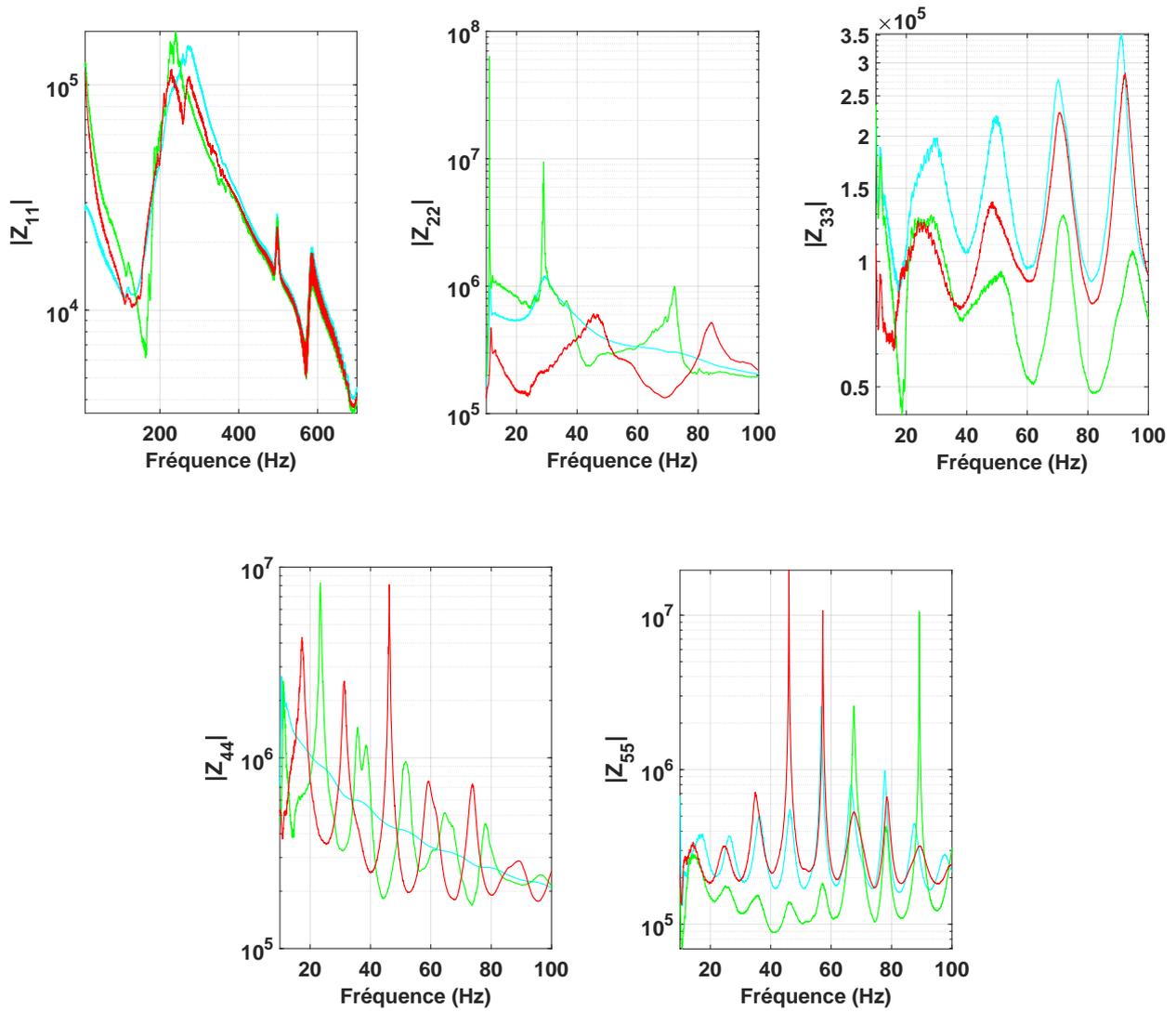


Figure 6.24 – Estimation des coefficients diagonaux  $|Z_{nm}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion en impédance pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} en fonction de la fréquence et de différents niveaux d’excitation

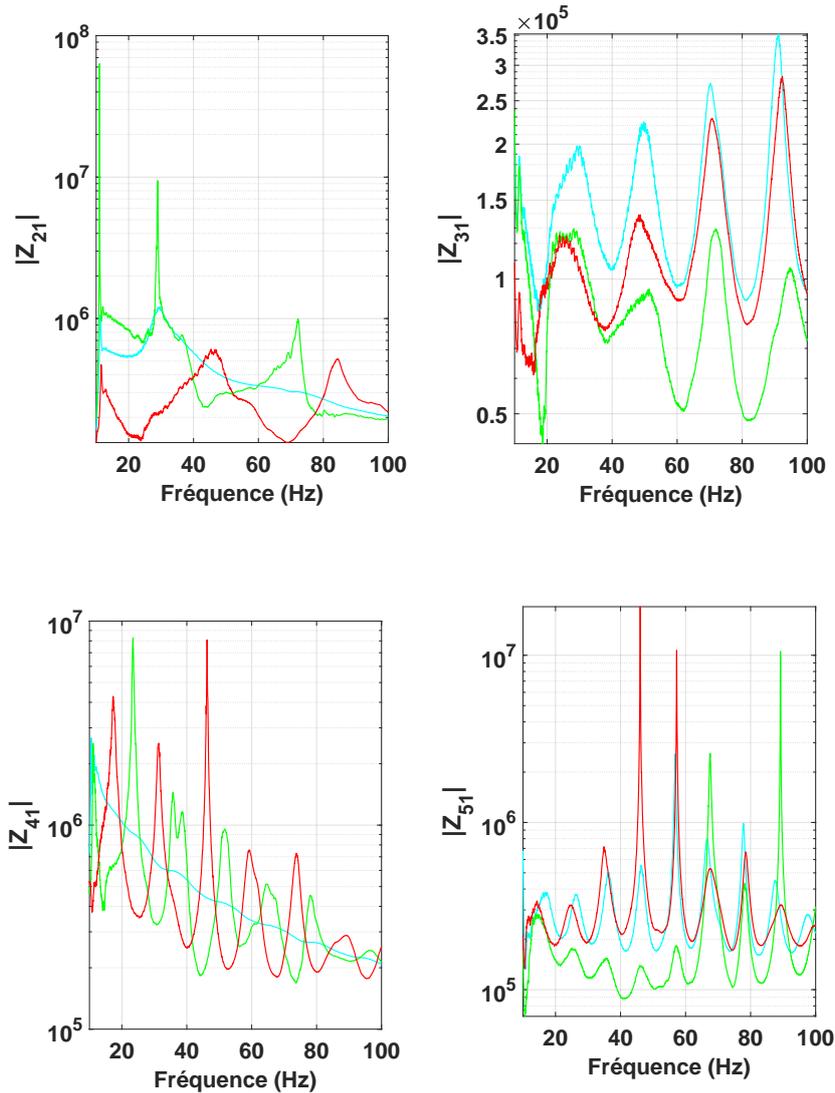


**Figure 6.25** – Estimation des coefficients de la première colonne  $|Z_{k1}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  de la matrice de diffusion pour la membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation

La Figure 6.26 représente la comparaison des coefficients diagonaux  $|Z_{nn}|$  pour  $1 \leq n \leq 5$  et la Figure 6.27 représente la comparaison des coefficients de la première colonne  $Z_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  entre chaque membrane. Ces grandeurs sont présentées pour une amplitude d'excitation de  $A = 1$ . La fréquence de résonance est proche pour chaque échantillon mais les pics de résonance présentent des largeurs différentes. Les coefficients de la première colonne  $Z_{k1}$  sont du même ordre de grandeur pour chaque membrane, et leur comportement est très erratique. Il n'est donc pas possible, en se basant seulement sur la matrice de diffusion en impédance, de quantifier l'effet de l'apport de nanofibres ou d'adhésif.



**Figure 6.26** – Estimation des modules des composantes diagonales de la matrice de diffusion  $|Z_{kn}|$  pour  $k = n$  et  $1 \leq k, n \leq 5$  pour la membrane {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (—), {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} (—) et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} (—), pour  $A = 1$



**Figure 6.27** – Estimation des modules des constantes de la première colonne  $Z_{k1}$  pour  $1 \leq k \leq 5$  de la matrice de diffusion  $Z_{kn}$  pour la membrane {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } (—), {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } (—) et {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ } (—), pour  $A = 1$

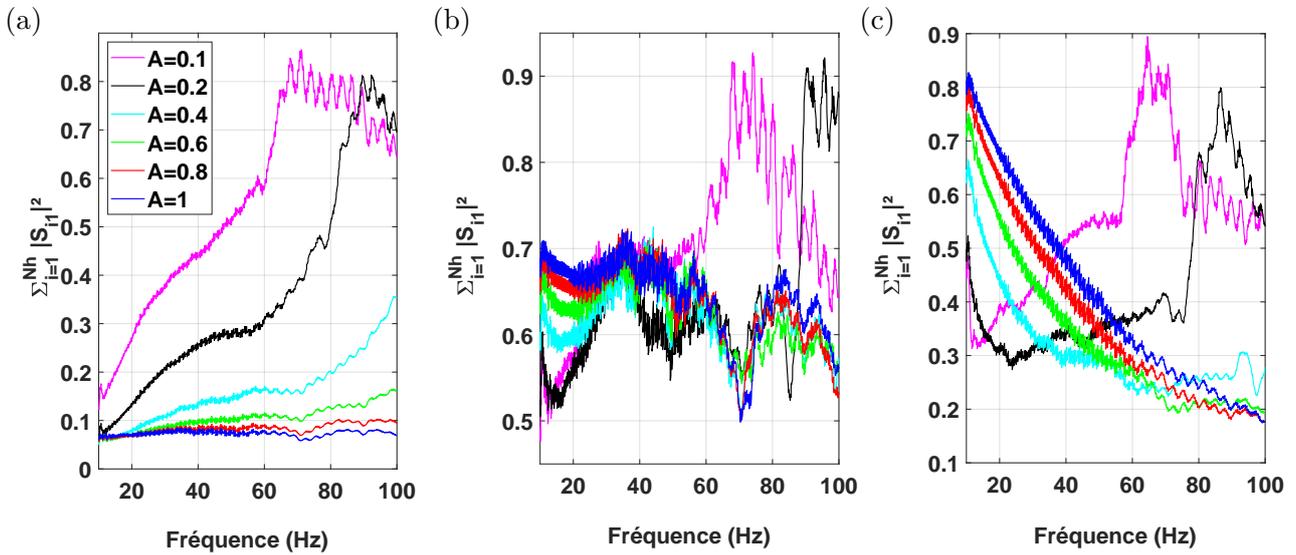
### Quantification des transferts d'énergie

Les indicateurs  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  et  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  sont ici tracés pour chaque membrane et chaque niveau d'excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$  en Figure 6.28 et Figure 6.29 respectivement. Ils représentent respectivement l'énergie extraite à partir de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et l'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  vers les composantes harmoniques  $P_n^-(f)$  pour  $n > 1$ .

Pour la membrane {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } (Figure 6.28.(a)), l'estimateur  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  décroît avec le niveau  $A$ . L'énergie renvoyée à partir de l'harmonique  $P_1^+(f)$  diminue donc avec le niveau, passant de 80 % de l'énergie de  $P_1^+(f)$  réfléchi pour  $A = 0.1$  à 10 % pour  $A = 1$ . De la même manière que pour la membrane de haut-parleur, plus le niveau d'excitation augmente, moins l'énergie

est réfléchi et donc plus l'absorption ou la transmission est importante. Pour les membranes {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} (Figure 6.28.(b)) et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} (Figure 6.28.(c)), l'énergie renvoyée à partir de l'harmonique  $P_1^+(f)$  augmente avec le niveau pour  $A > 0.2$ . L'absorption est alors plus faible lorsque le niveau d'excitation augmente.

Passons à présent à l'estimateur  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  traduisant l'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  vers les composantes harmoniques  $P_n^-(f)$  pour  $n > 1$ . Pour la membrane {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (Figure 6.28.(b)), la quantité d'énergie extraite de la fondamentale vers les harmoniques diminue avec l'amplitude d'excitation, passant de 12 % d'énergie extraite de la fondamentale pour  $A = 0.1$  à 6 % d'énergie extraite de la fondamentale pour  $A = 1$ . Pour les membranes {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} (Figure 6.29.(b)) et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} (Figure 6.29.(c)), cette même énergie décroît avec le niveau illustrant le fait que moins d'énergie a été extraite de la fondamentale vers les harmoniques, ce qui confirme les capacités d'absorption diminuant avec  $A$ .



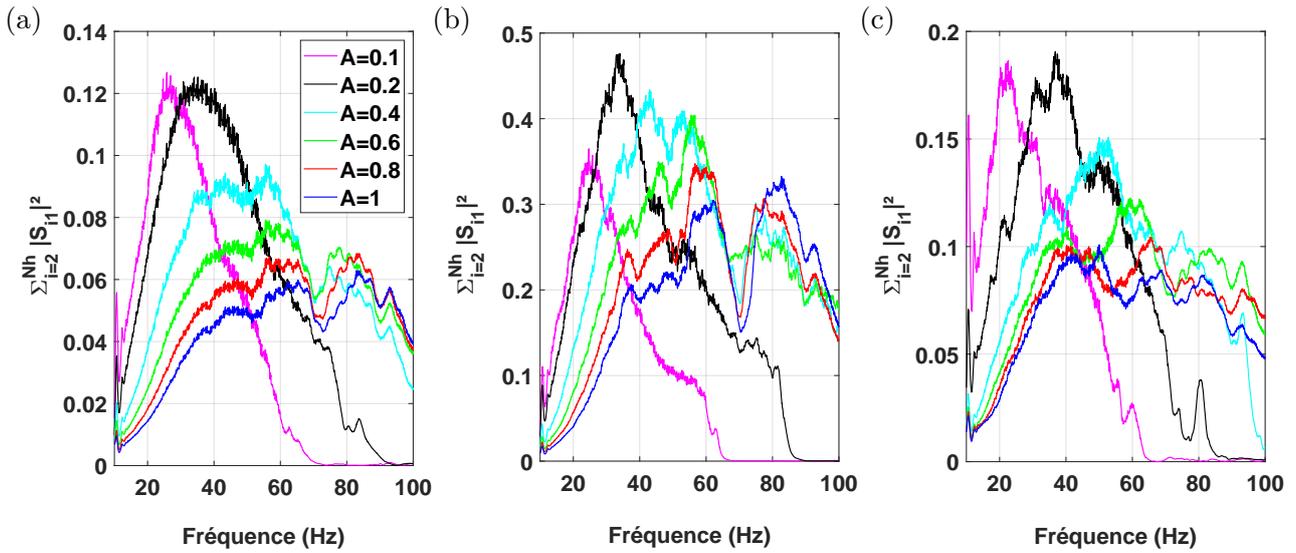
**Figure 6.28** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour la membrane (a) {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (b) {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et (c) {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, pour différents niveaux d'excitation

Afin de comparer leur efficacité, les indicateurs  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  et  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  sont tracés pour les différentes membranes et pour  $A = 1$  en Figure 6.30. Ils représentent respectivement l'énergie renvoyée à partir de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et l'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  vers les composantes harmoniques  $P_n^-(f)$  pour  $n > 1$ .

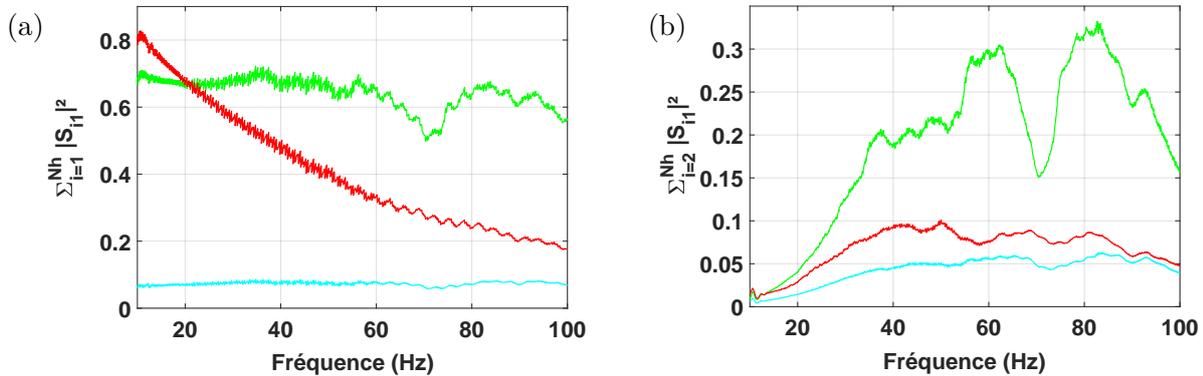
La Figure 6.30.(a) montre que l'énergie extraite de la pression fondamentale vers ses composantes harmoniques est constante pour les échantillons {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}. Pour la membrane {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, cette même énergie diminue lorsque les fréquences augmentent : pour des très basses fréquences, 80 % de l'énergie de  $P_1^+$  a été réfléchi, contre 20 % à 100 Hz c'est-à-dire proche de la fréquence de résonance du système (validant la zone où l'absorption est maximale).

La Figure 6.30.(b) permet de visualiser que la membrane {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} présente la plus haute énergie extraite de la fondamentale.

La Figure 6.31 représente l'apport en énergie de chaque terme de la première colonne pour les trois membranes nanofibreuses. Pour chacune d'elle, les termes d'ordre impair n'ont aucun effet sur l'esti-



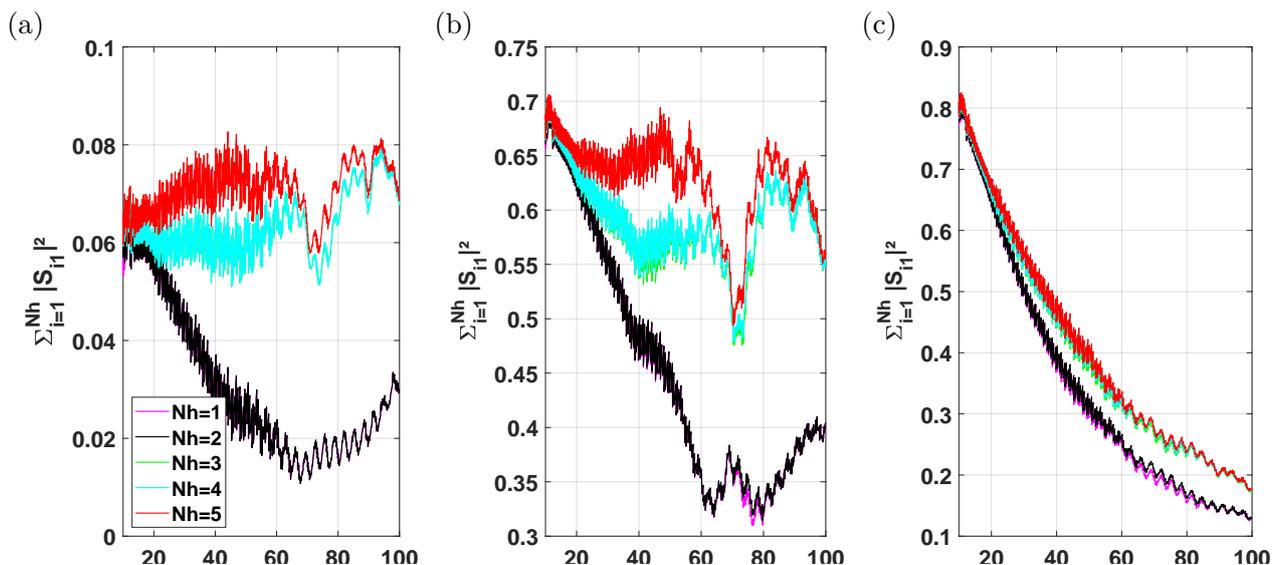
**Figure 6.29** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour la membrane (a) {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (b) {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et (c) {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, pour différents niveaux d’excitation



**Figure 6.30** – Comparaison des estimateurs (a)  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  et (b)  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour la membrane {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (—), {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} (—) et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} (—), pour  $A = 1$

mation de la quantité d’énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et transmise à l’onde réfléchie. L’ajout de l’harmonique 3 modifie grandement l’estimation de cette grandeur. L’influence des harmoniques diminuent lorsque leur ordre augmente. Les harmoniques d’ordre proche de la composante fondamentale ont donc plus d’impact sur le système.

Les membranes nanofibreuses {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} présentent différents avantages. L’ajout de nanofibres ou d’adhésif permet d’augmenter la plage en fréquence d’absorption ainsi que son niveau. En fonction de l’onde incidente à absorber, il serait alors possible de modifier la composition de ces membranes de façon à cibler la plage en fréquences où l’absorption doit avoir lieu.



**Figure 6.31** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour  $H = [1, \dots, 5]$  pour la membrane (a) {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} (b) {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et (c) {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, pour  $A = 1$  en fonction de la fréquence

## 6.2. Estimation de la matrice de diffusion complète

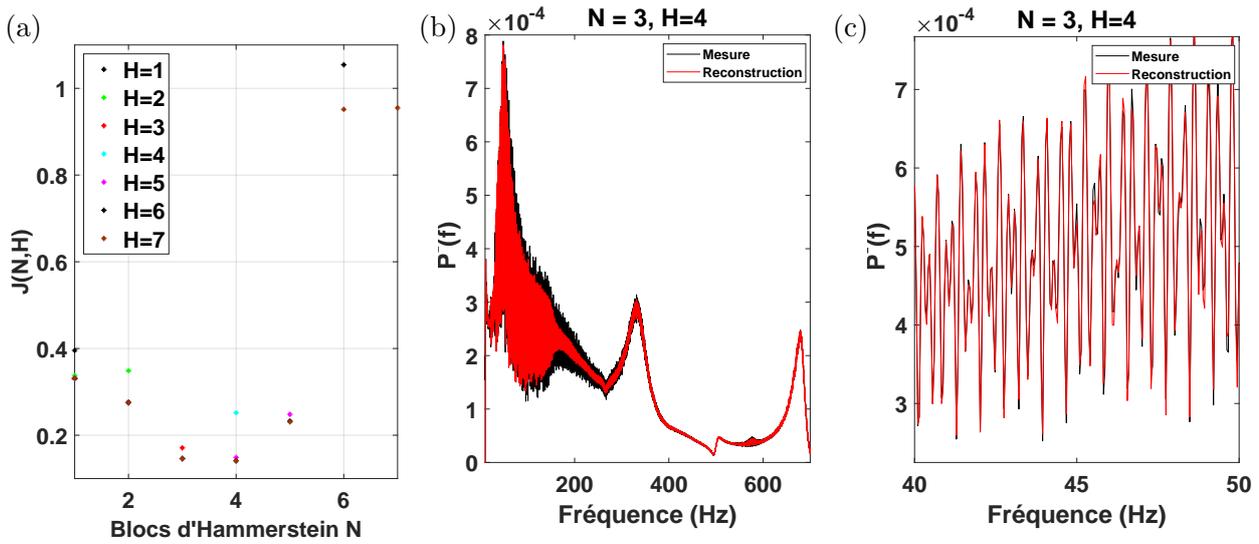
L'estimation de la matrice de diffusion complète est obtenue grâce à la méthode vue en Section 5.2. Cette méthode permet de déterminer tous les coefficients  $S_{kn}$  de la matrice de diffusion, sans dépendre du niveau d'excitation  $A$ . Les résultats expérimentaux sont obtenus de la même manière que pour l'estimation de la matrice de diffusion simplifiée, c'est-à-dire grâce à une excitation sinus balayé synchronisé sur une bande de fréquence [10; 700] Hz et d'une durée de  $\bar{T} = 16$  s.

### 6.2.1. Membrane de haut-parleur

#### Choix du modèle optimal

Une étape préalable consiste à déterminer le nombre de blocs d'Hammerstein optimal, en rendant minimale la fonction coût  $J(N, H)$  définie par (5.62). Le choix de ce nombre de blocs doit permettre une bonne estimation de la pression réfléchie  $P^-(f)$  lorsqu'elle est reconstruite à partir des filtres linéaire  $G(f)$ , en accord avec l'équation (5.58). La Figure 6.32.(a) représente cette fonction coût en fonction du nombre de blocs d'Hammerstein  $N$  et du nombre d'harmoniques  $H$ , pour la membrane de haut-parleur et pour une amplitude d'excitation  $A = 1$ . Le couple  $N = 3$  et  $H = 4$  permet d'obtenir une faible fonction coût  $J(N, H)$ . La reconstruction de  $P^-(f)$  à partir de  $G(f)$  est tracé pour ce couple  $(N, H)$  en Figure 6.32.(b) et 6.32.(c), en fonction du nombre d'harmoniques étudiées. La reconstruction avec 4 harmoniques permet une bonne estimation de la pression réfléchie, proche de la valeur mesurée, validant le choix du couple  $(N, H)$ .

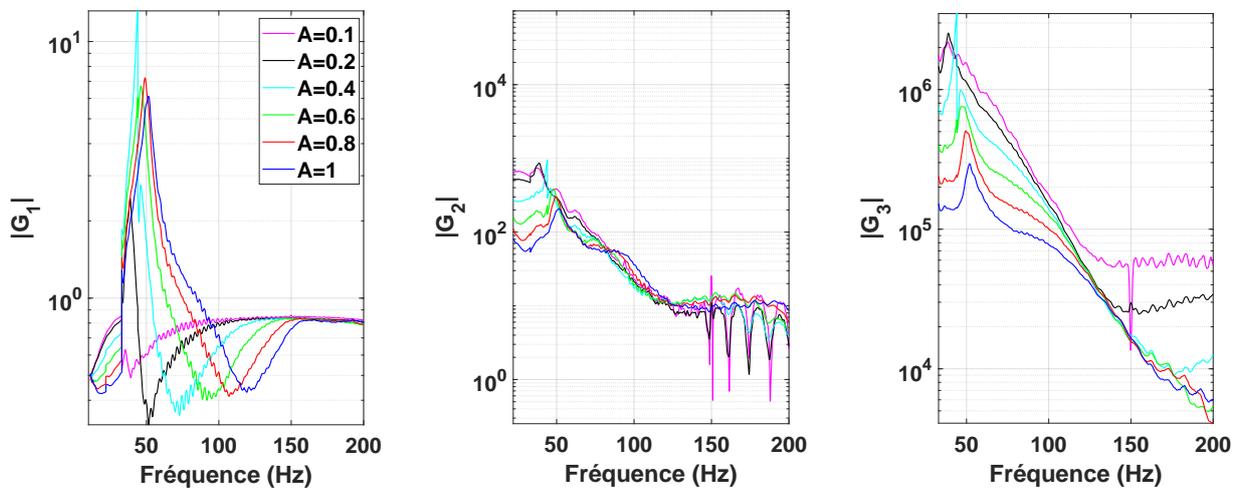
Le choix de ces paramètres ne permet pas de reconstruire une matrice de diffusion d'ordre 5. Il serait donc nécessaire dans notre cas de réaliser une estimation de la fonction linéaire  $G(f)$  avec  $N = 5$  blocs d'Hammerstein. Dans ce cas, la fonction  $J(N, H)$  ne serait pas minimale et l'estimation de la matrice de diffusion ne serait donc pas optimale. Les résultats obtenus avec ces paramètres sont représentés en Annexe E et présentent des résultats non physiques et difficilement exploitables. Nous nous contenterons donc de l'estimation de la matrice de diffusion complète à l'ordre 3 afin d'utiliser un modèle de reconstruction optimal.



**Figure 6.32** – (a) Estimation de la fonction coût  $J(N, H)$  en fonction du nombre de blocs d’Hammerstein  $N$  et du nombre d’harmonique  $H$  et (b) Reconstruction de la pression réfléchie  $P^-(f)$  en fonction de  $G(f)$  pour  $N = 3$  blocs d’Hammerstein pour  $A = 1$  pour la membrane de haut-parleur et (c) visualisation plus précise entre 40 et 50 Hz

### Estimation des filtres linéaires $G_n(f)$

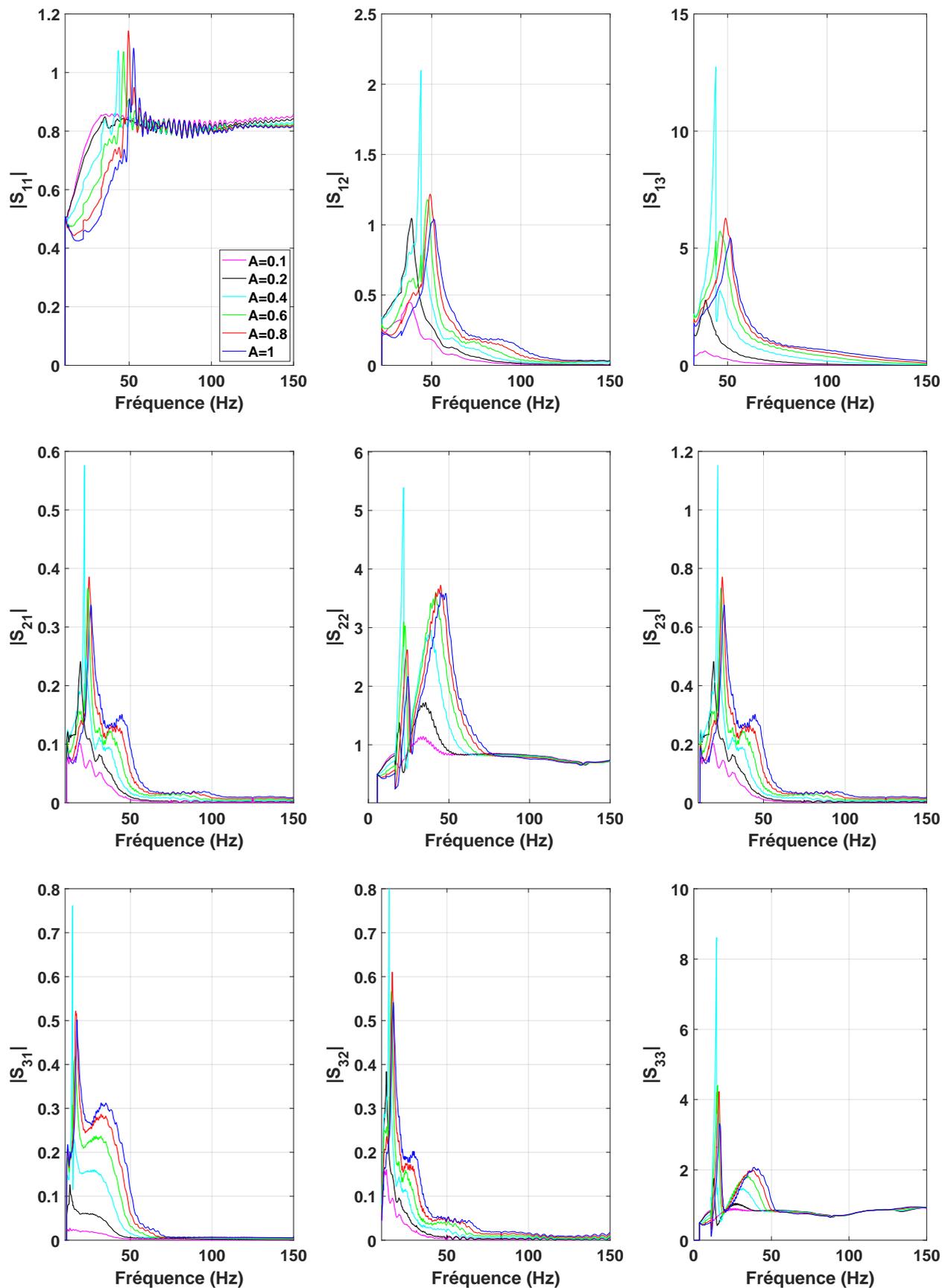
La Figure 10 représente l’estimation des filtres linéaires  $|G_n(f)|$  pour  $n = [1, 2, 3]$  par l’équation (5.59). Elle est visualisée sur la plage de fréquences  $[n \times 10; 200]$  Hz. Les fonctions  $|G_n(f)|$  y sont dépendantes du niveau d’entrée  $A$  du système et au delà de 200 Hz, tendent toutes vers une constante. Cette dépendance au niveau traduit le fait que la membrane ne peut pas être parfaitement décrite par un modèle d’Hammerstein, indépendamment du niveau d’excitation. Notons également que les fonctions  $|G_n(f)|$  diminuent globalement avec l’ordre  $n$  et que les fonctions d’ordre impair sont supérieures à la fonction d’ordre pair, traduisant la non-linéarité impaire de l’absorbeur.



**Figure 6.33** – Estimation pour la membrane de haut-parleur des fonctions linéaires  $G_n(f)$  pour 3 blocs d’Hammerstein  $N$  en fonction du niveau d’excitation  $A$  et de la fréquence

### Estimation de la matrice de diffusion complète

Disposant du modèle de Hammerstein, la matrice de diffusion complète est estimée et représentée en Figure 6.34, en fonction du niveau d'excitation  $A$ . Ses coefficients sont représentés jusqu'à 150 Hz, limite au delà de laquelle les grandeurs tendent vers une constante ou peuvent être impactées par la géométrie du SKT. Le coefficient  $S_{11}$  est représentatif d'un coefficient de réflexion à très basses fréquences, avec un décalage des courbes vers les hautes fréquences lorsque le niveau  $A$  augmente. Les coefficients diagonaux  $|S_{nn}|$  pour  $1 < n \leq 5$  sont la continuation de  $|S_{11}|$  à  $n \times f$  et à faible niveau. Pour un  $k$  donné, les coefficients non linéaires  $|S_{kn}|$  pour  $1 \leq n \leq 3$  augmentent lorsque  $n$  augmente, traduisant un fort transfert d'énergie entre composantes harmoniques (et non seulement vers la fondamentale). Les composantes non linéaires paires de la matrice de diffusion sont plus faibles que les composantes impaires, validant la non-linéarité impaire de l'absorbeur. On observe cependant de nombreuses erreurs physiques, notamment sur les coefficients diagonaux présentant des valeurs (associées à des coefficients de réflexion) supérieures à 1. Il semblerait donc que le modèle d'Hammerstein ne permettent pas de construire physiquement la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$ .

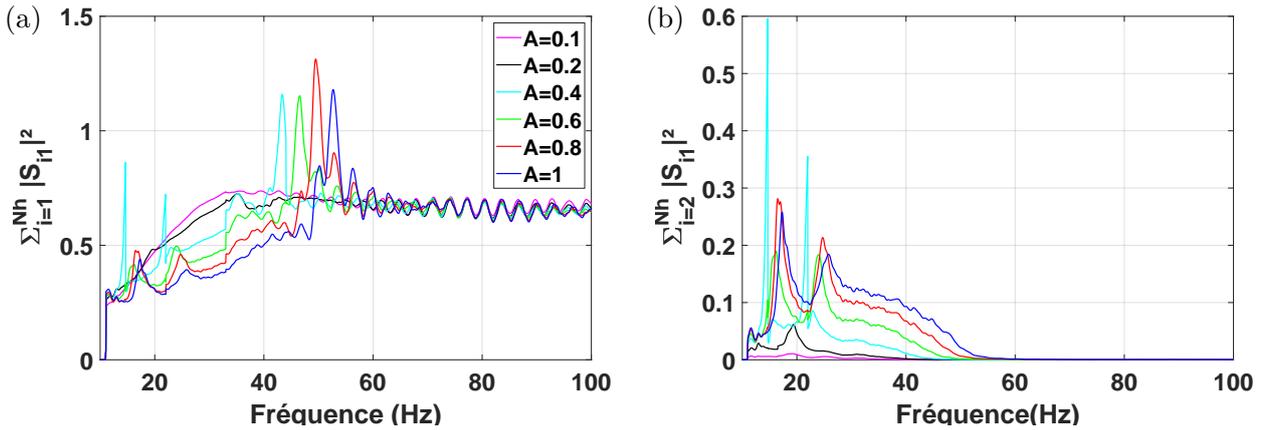


**Figure 6.34** – Visualisation de la matrice de diffusion complète estimée pour  $N = 3$  blocs d'Hamerstein pour chaque niveau d'excitation  $A$ , en fonction de la fréquence

### Quantification des transferts d'énergie

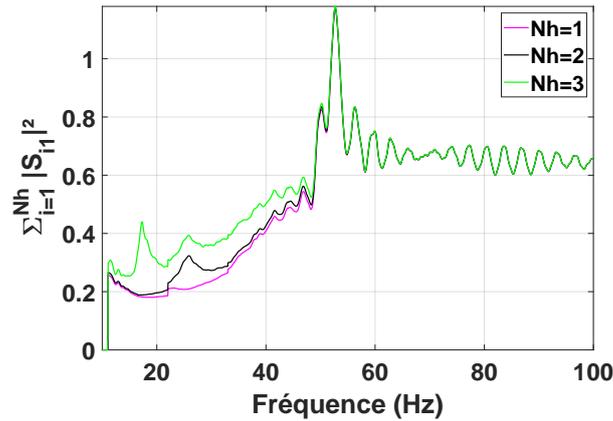
La Figure 6.35.(a) visualise la quantité  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  représentant la quantité d'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et transmise à l'onde réfléchie. À très basses fréquences, cet indicateur présente un minimum de 0.30, signifiant que 30 % de l'énergie de  $P_1^+(f)$  a été réfléchie. Ces courbes tendent ensuite vers un plateau où 70 % de l'énergie de  $P_1^+(f)$  a été transmise à l'onde réfléchie. L'apparition de ce plateau se décale vers les hautes fréquences lorsque le niveau d'excitation augmente. Pour une même fréquence, plus le niveau d'excitation augmente et moins d'énergie de  $P_1^+(f)$  a été réfléchie. Ces observations sont identiques à celles obtenues lors de l'estimation de la matrice de diffusion simplifiée (Figure 6.6.(a)), et confirment donc les résultats obtenus par le modèle.

La Figure 6.6.(b) visualise la quantité  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  représentant la quantité d'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  vers les composantes harmoniques  $P_n^-(f)$  pour  $n > 1$ . La quantité d'énergie extraite de la fondamentale vers les harmoniques augmente avec l'amplitude d'excitation, tout en se décalant vers les hautes fréquences. Là aussi, les observations concordent avec celles faites lors de l'estimation de la matrice de diffusion simplifiée (Figure 6.6.(b)). Néanmoins, les résultats obtenus ici paraissent plus chahutés. Le modèle permet donc d'avoir une bonne estimation de ces indicateurs mais manque de précision.



**Figure 6.35** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  et  $\sum_{i=2}^H |S_{i1}|^2$  pour  $H = 5$  pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d'excitation

La Figure 6.36 représente l'apport en énergie de chaque terme de la première colonne. On remarque que l'ajout des harmoniques 2 et 3 modifient grandement l'estimation de la quantité d'énergie extraite de la composante fondamentale  $P_1^+(f)$  et transmise à l'onde réfléchie. La composante paire joue ici un rôle plus important que la composante impaire. Là encore, les résultats concordent avec ceux obtenus lors de l'estimation de la matrice de diffusion simplifiée (Figure 6.7).

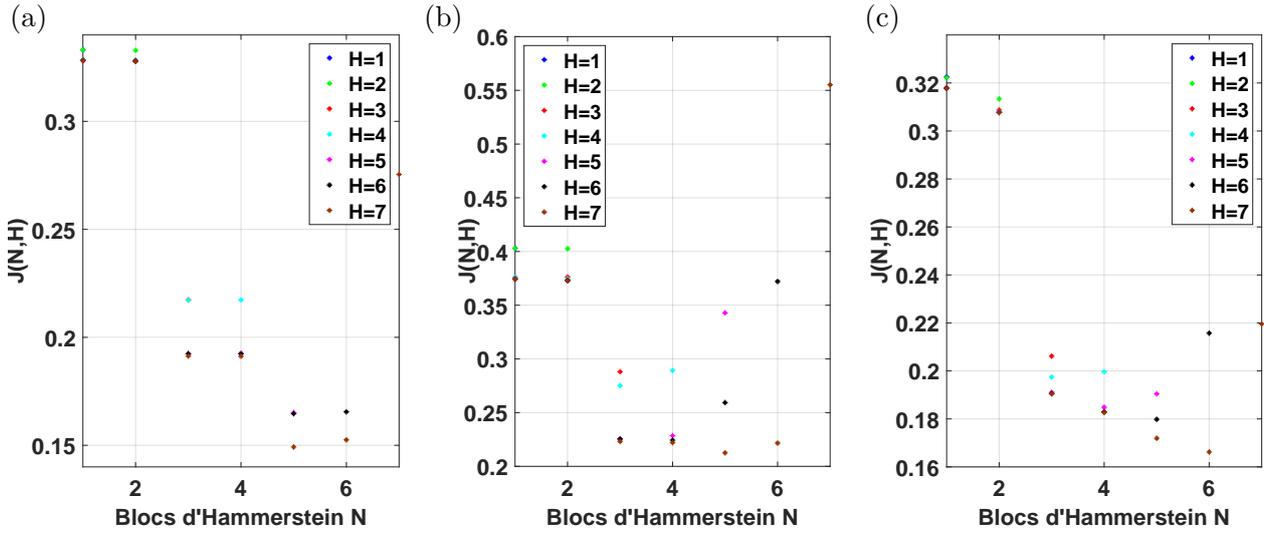


**Figure 6.36** – Représentation des estimateurs  $\sum_{i=1}^H |S_{i1}|^2$  pour  $H = [1, \dots, 5]$  pour la membrane de haut-parleur en fonction de la fréquence et pour  $A = 1$

### 6.2.2. Membranes nanofibreuses

#### Choix du modèle optimal

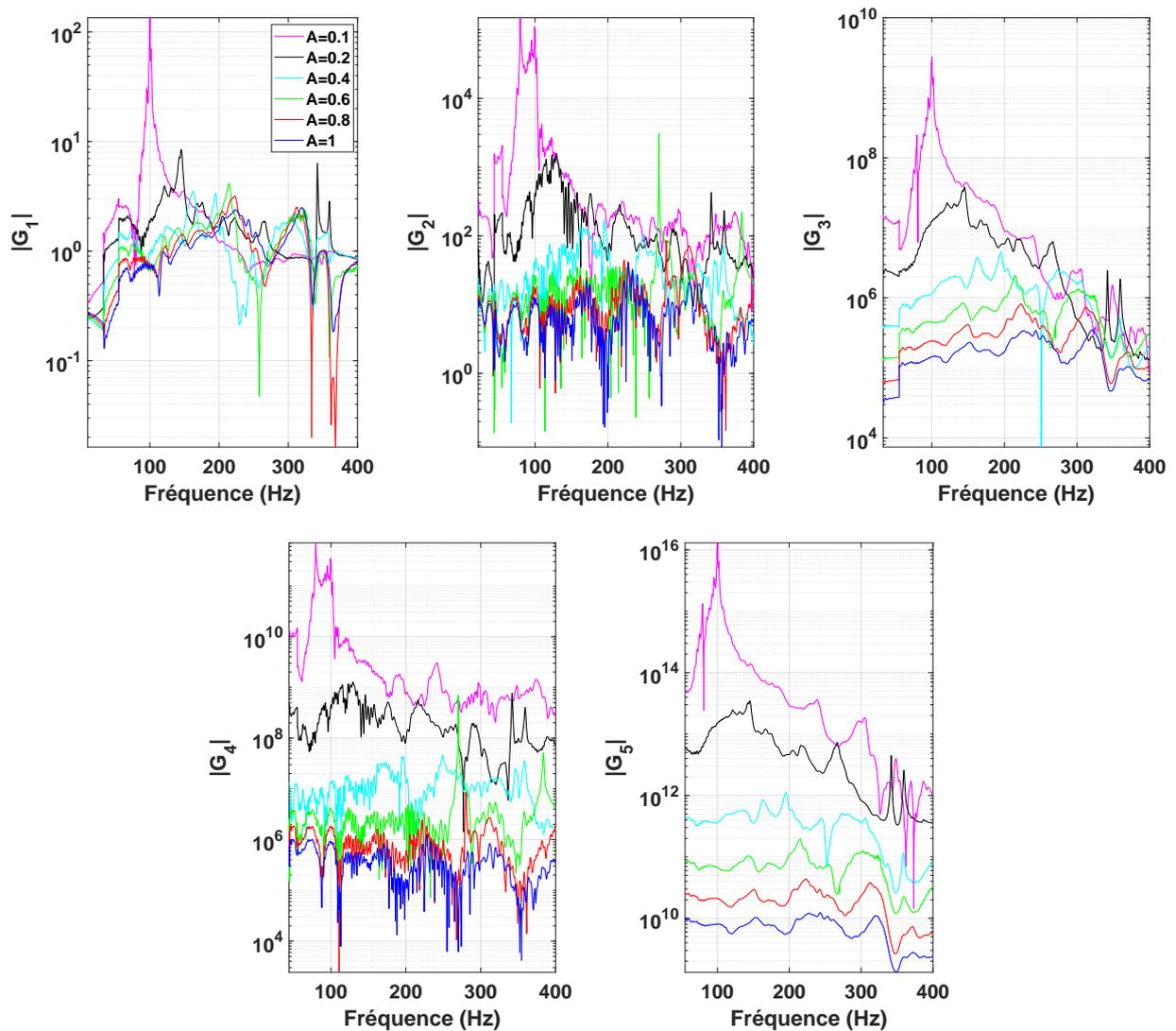
Comme pour la membrane de haut-parleur, nous allons ici déterminer le couple  $(N, H)$  minimisant la fonction coût  $J(N, H)$  (5.62) estimée pour chaque membrane nanofibreuse. La Figure 6.37 représente  $J(N, H)$  en fonction du nombre de blocs d'Hammerstein  $N$  et du nombre d'harmoniques  $H$ , pour les membranes nanofibreuses {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}, {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, et pour une amplitude d'excitation  $A = 1$ .  $J(N, H)$  est donc minimale pour  $N = 5$  et  $H = 7$  pour les membranes {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et pour  $N = 6$  et  $H = 7$  pour la membrane {substrat + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}.



**Figure 6.37** – Estimation de la fonction coût  $J(N, H)$  en fonction du nombre de blocs d’Hammerstein  $N$  et du nombre d’harmonique  $H$  pour les membranes nanofibreuses (a) {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, (b) {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } et (c) {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }

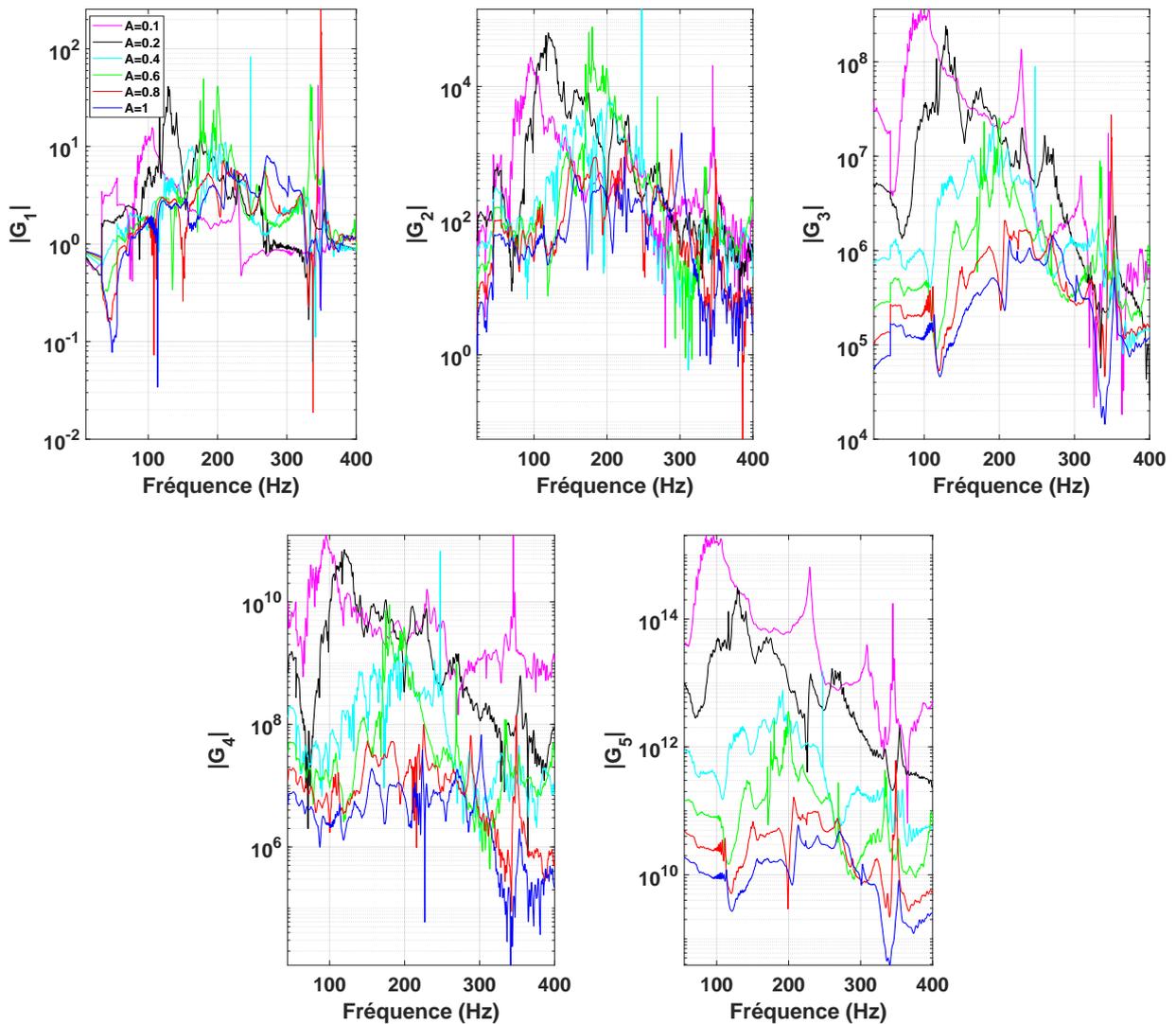
### Estimation des filtres linéaires $G_n(f)$

Une fois le couple de paramètres optimaux déterminé, les filtres linéaires  $G_n$  sont estimés et représentés sur la Figure 6.38 pour la membrane {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, sur la Figure 6.39 pour la membrane {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } et sur la Figure 6.40 pour la membrane {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }. Pour chaque membrane nanofibreuse, l’amplitude des  $|G_n(f)|$  pour  $n = [1, \dots, H]$  diminue en fonction du niveau d’excitation, contrairement à la membrane de haut-parleur. Lorsque l’ordre  $n$  augmente,  $|G_n(f)|$  augmente également, donnant un poids plus conséquent aux fonctions linéaires d’ordre élevées. Les fonctions d’ordre pair présentent un comportement très erratique, laissant penser que ces coefficients sont impactés par le bruit de mesure. La comparaison entre la représentation des harmoniques de la pression mesurée au microphone  $P_n(f)$  et la pression seuil en Annexe 12 confirme cette hypothèse. Ceci est alors une source probable d’erreur lors de l’estimation des coefficients de la matrice de diffusion. Une simulation de cette matrice a été réalisée en s’affranchissant des fonctions  $G_n(f)$  pour  $n = [2; 4]$ . Les coefficients de la matrice de diffusion sont restés inchangés, validant le fait que les termes d’ordre pair n’apportent pas d’information lors de l’estimation de la matrice de diffusion complète.

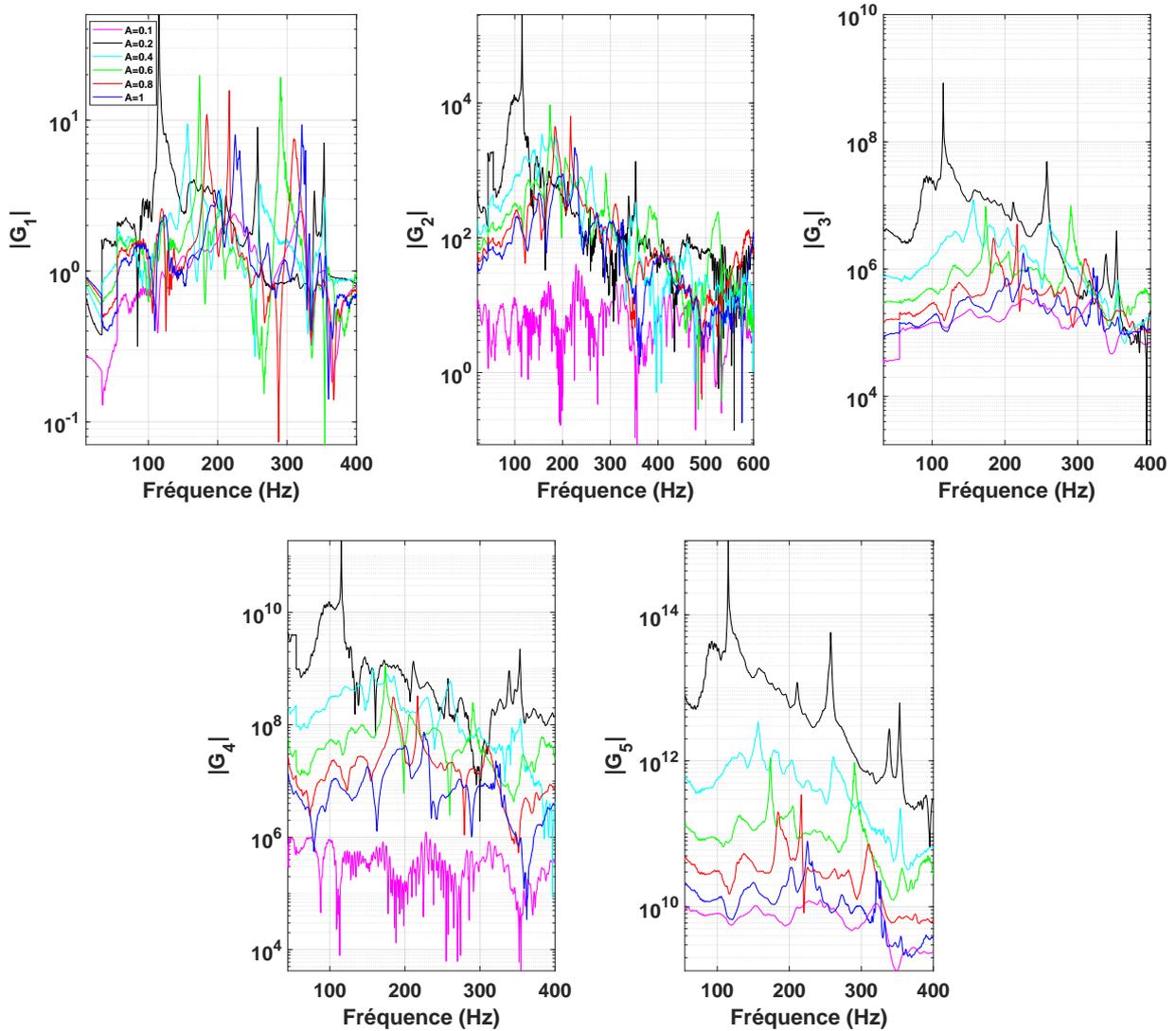
Membrane nanofibreuse {Substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}

**Figure 6.38** – Estimation pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} des fonctions linéaires  $G_n(f)$  pour 5 blocs d’Hammerstein  $N_n$  en fonction du niveau d’excitation  $A$  et de la fréquence

Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>}



**Figure 6.39** – Estimation pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} des fonctions linéaires  $G_n(f)$  pour 5 blocs d’Hammerstein  $N$  en fonction du niveau d’excitation  $A$  et de la fréquence

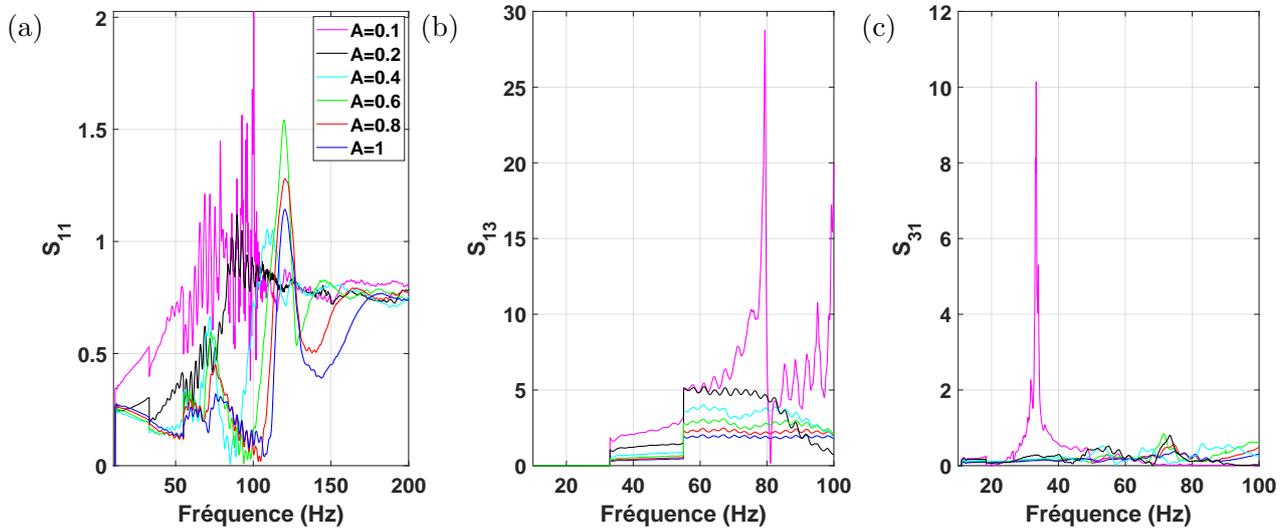
Membrane nanofibreuse {Substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}

**Figure 6.40** – Estimation pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} des fonctions linéaires  $G_n(f)$  pour 5 blocs d'Hammerstein  $N$  en fonction du niveau d'excitation  $A$  et de la fréquence

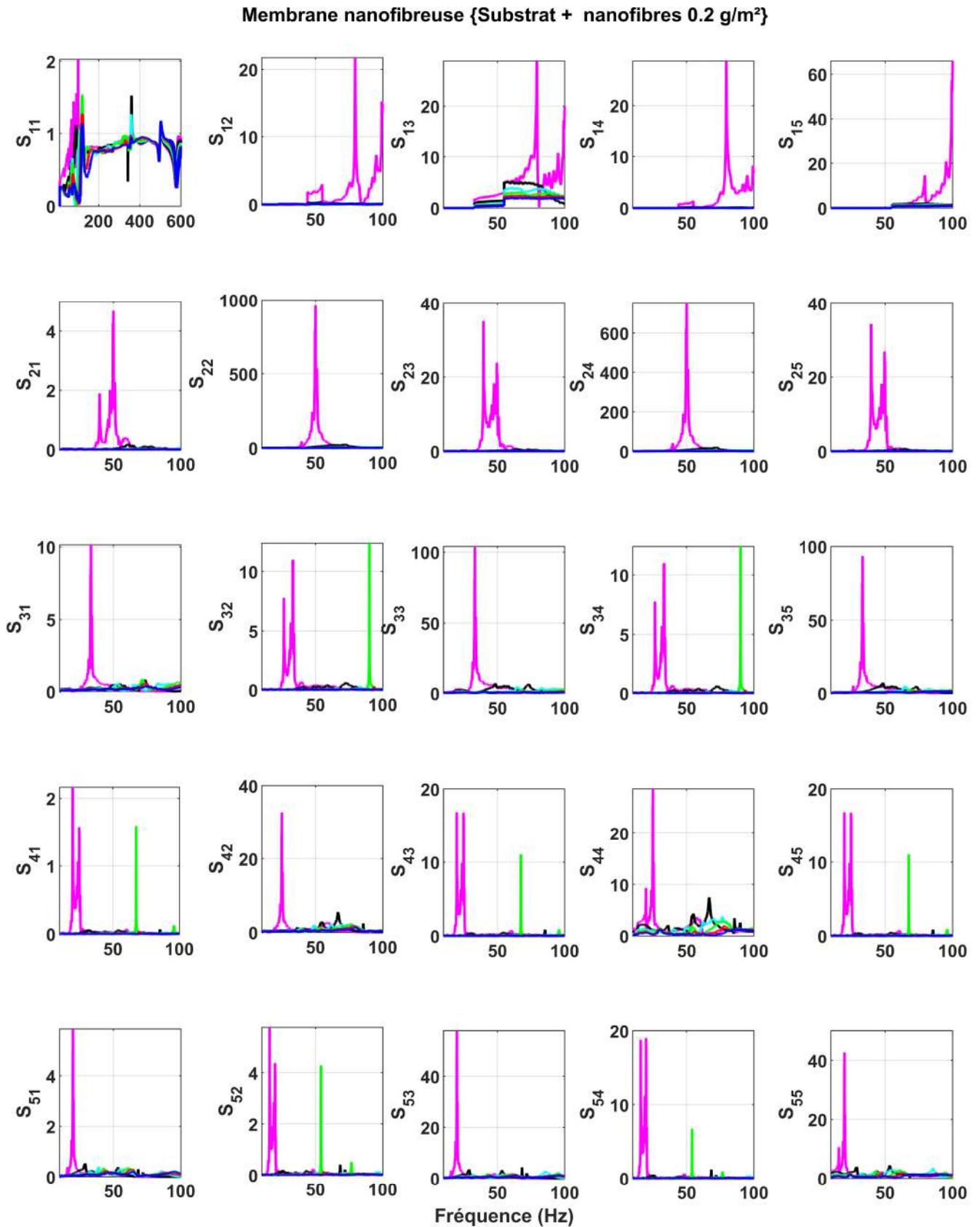
### Estimation de la matrice de diffusion complète

Les figures 6.42, 6.43 et 6.44 représentent respectivement l'estimation de la matrice de diffusion complète pour les membranes {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>}, {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} et {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, pour chaque niveau d'excitation. À très basses fréquences, les coefficients  $|S_{11}|$  sont comparables à des coefficients de réflexion (exemple en Figure 6.41.(a)) Tous les coefficients  $|S_{kn}|$  diminuent avec le niveau d'excitation, traduisant le fait que lorsque le niveau augmente, les échanges d'énergie entre harmoniques diminuent. Les résultats obtenus pour le plus faible niveau  $A = 0.1$  sont prédominants par rapport aux autres niveaux. Pour  $k$  donné supérieur à  $n$ , les coefficients non linéaires  $|S_{kn}|$  pour  $k > n$  augmentent lorsque  $n$  augmente (exemple en Figure 6.41.(b)). Pour  $k$  donné, inférieur à  $n$ , les coefficients  $|S_{kn}|$  pour  $k < n$  paires et impaires diminuent respectivement lorsque  $n$  augmente (exemple en Figure 6.41.(c)). À noter que les coefficients pairs  $|S_{kn}|$  pour  $k < n$  sont inférieurs aux coefficients impairs. On observe de nouveaux les

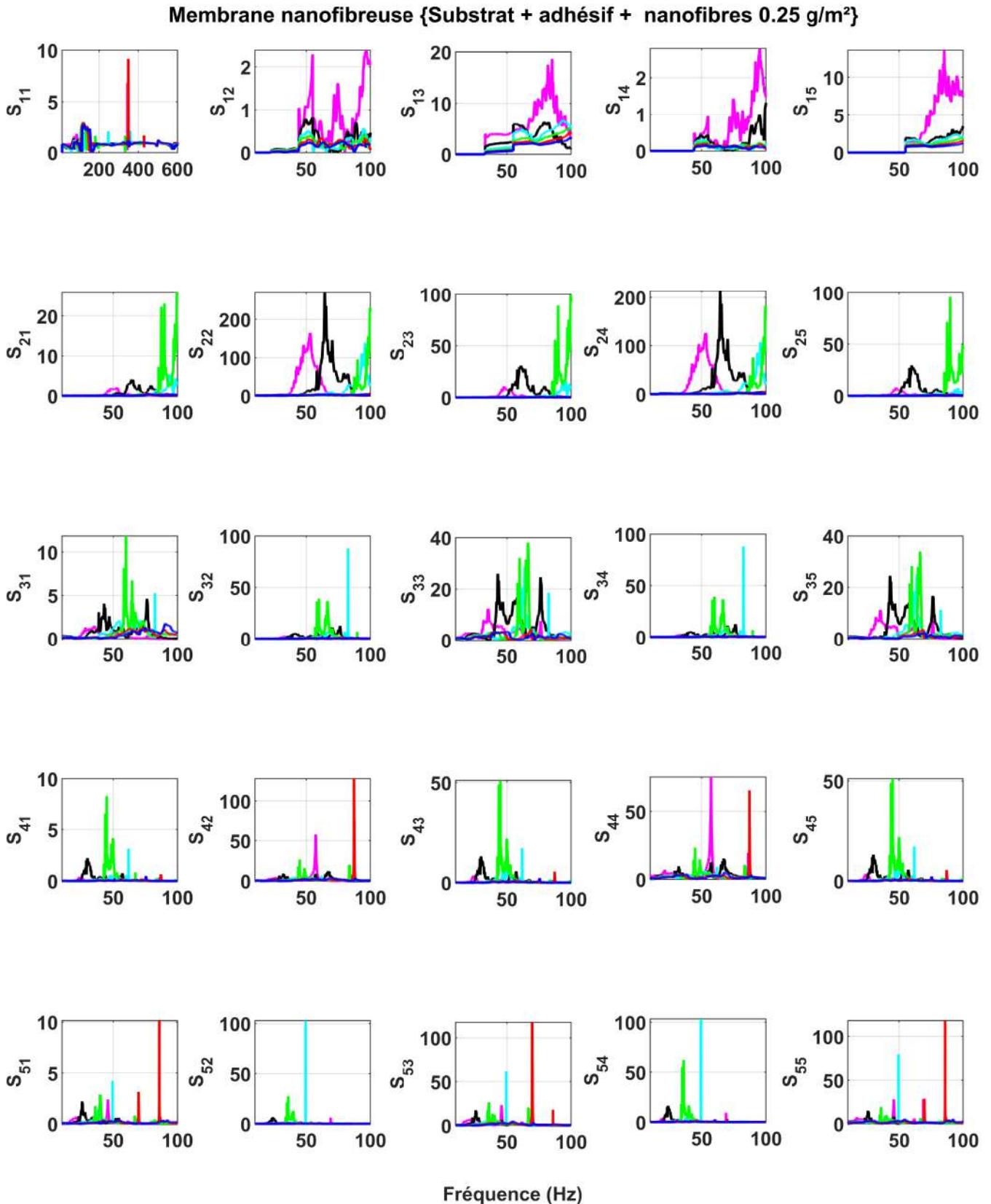
mêmes erreurs physiques, notamment sur les coefficients diagonaux présentant des valeurs (associées à des coefficients de réflexion) supérieures à 1.



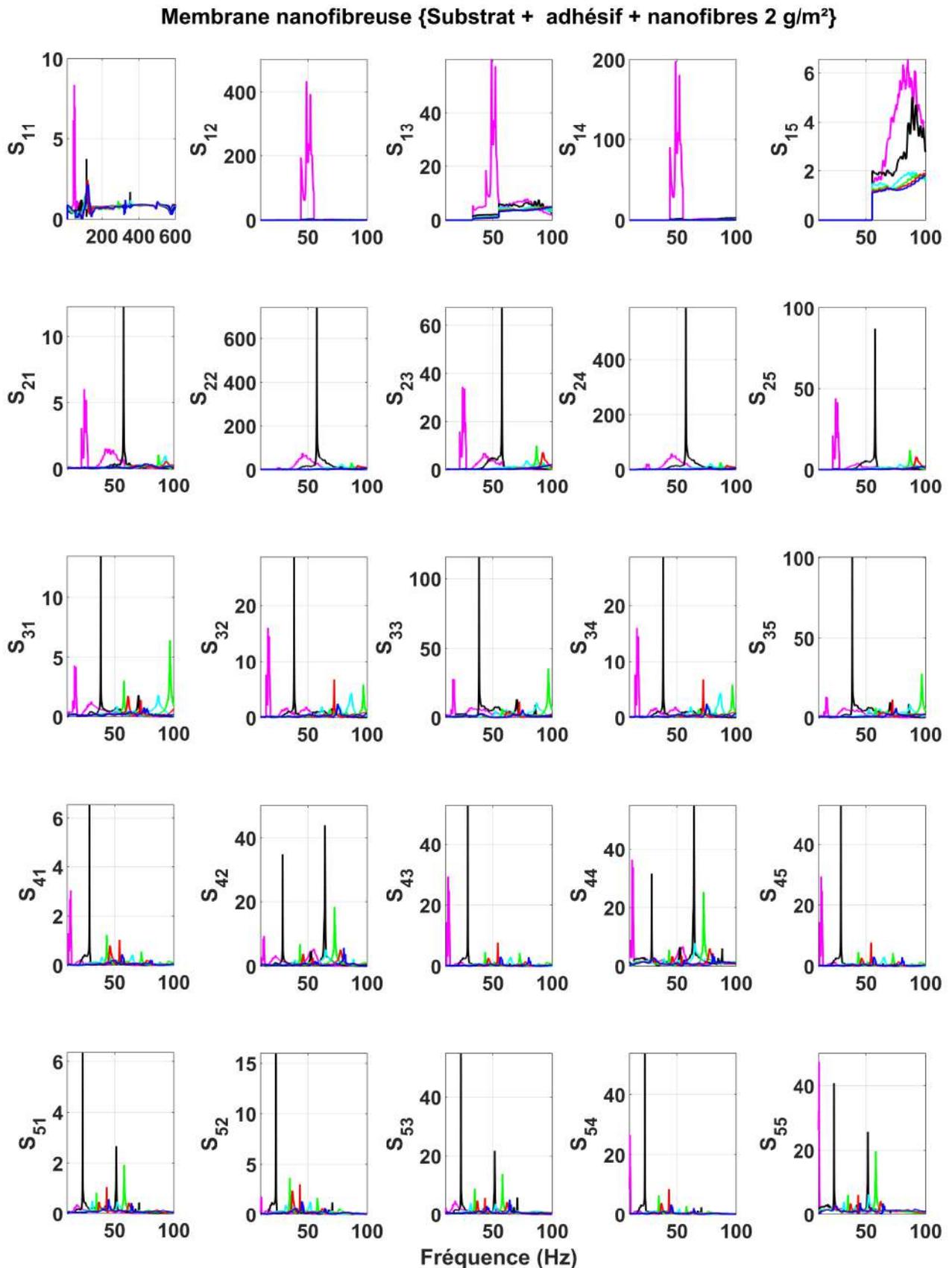
**Figure 6.41** – Visualisation des coefficients  $|S_{11}|$ ,  $|S_{12}|$  et  $|S_{21}|$  de la matrice de diffusion complète par modèle d’Hammerstein pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, pour chaque niveau d’excitation  $A$ , en fonction de la fréquence



**Figure 6.42** – Estimation de la matrice de diffusion complète pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>} à partir du modèle d’Hammerstein en fonction du niveau d’excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$



**Figure 6.43** – Estimation de la matrice de diffusion complète pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>} à partir du modèle d’Hammerstein en fonction du niveau d’excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$



**Figure 6.44** – Estimation de la matrice de diffusion complète pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>} à partir du modèle d’Hammerstein en fonction du niveau d’excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$

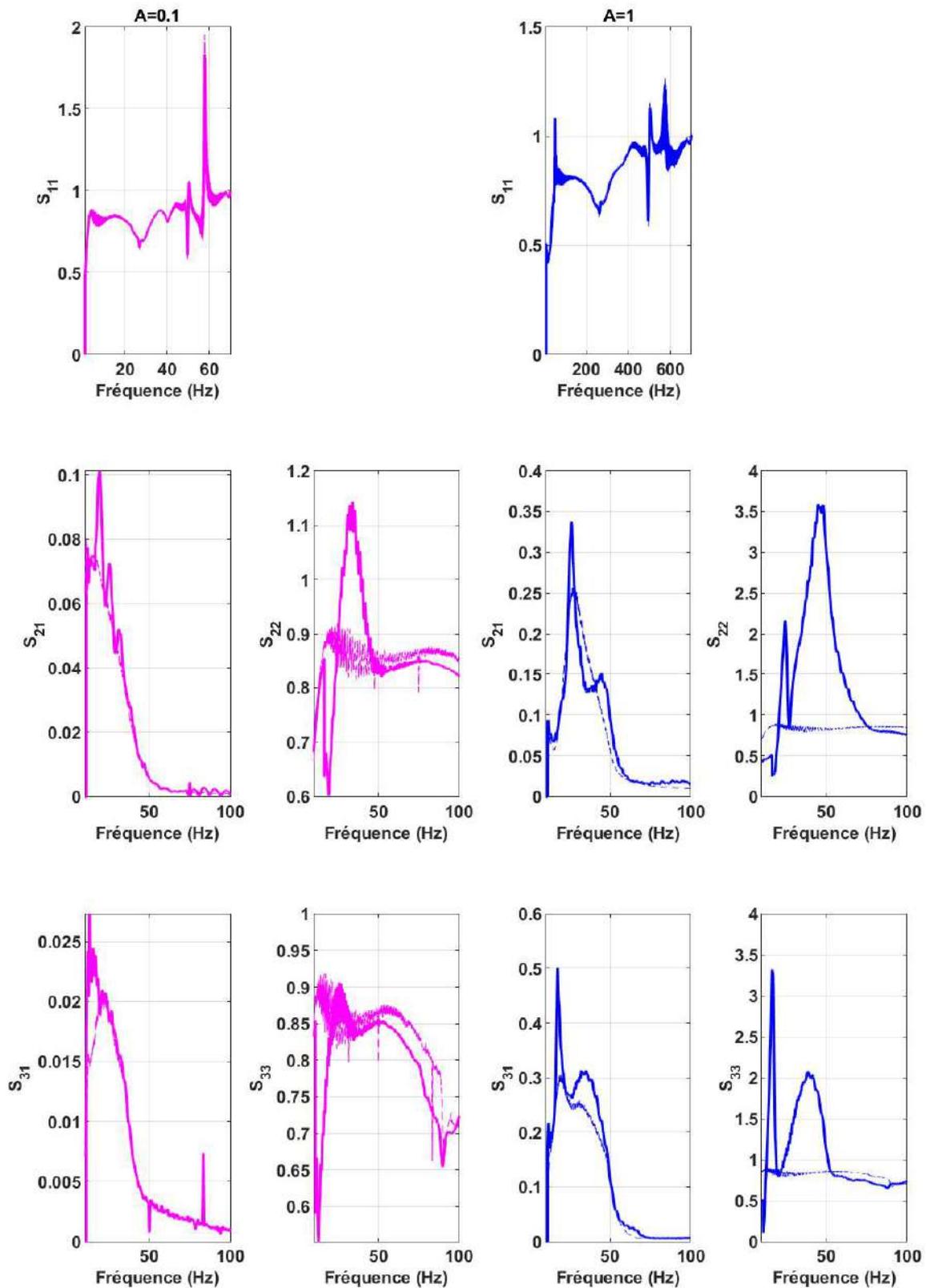
La reconstruction par modèle d'Hammerstein permet donc d'obtenir une estimation de la matrice de diffusion complète, mais ne prend pas en compte la physique du problème (notamment avec des coefficients de réflexion supérieur à 1). De plus, elle est fortement dépendante du nombre de blocs d'Hammerstein ou du nombre d'harmoniques choisi. Il serait intéressant par la suite de modifier la routine afin de pouvoir choisir au mieux les paramètres du modèle, sans que le coût de la simulation soit trop élevé, de façon à rendre le modèle plus robuste.

## 6.3. Comparaison entre méthodes

Deux méthodes sont à notre disposition pour estimer la matrice de diffusion caractérisant un absorbeur non linéaire. Nous allons dans cette section les comparer afin de mettre en évidence leurs similitudes et leurs différences.

### 6.3.1. Membrane de haut-parleur

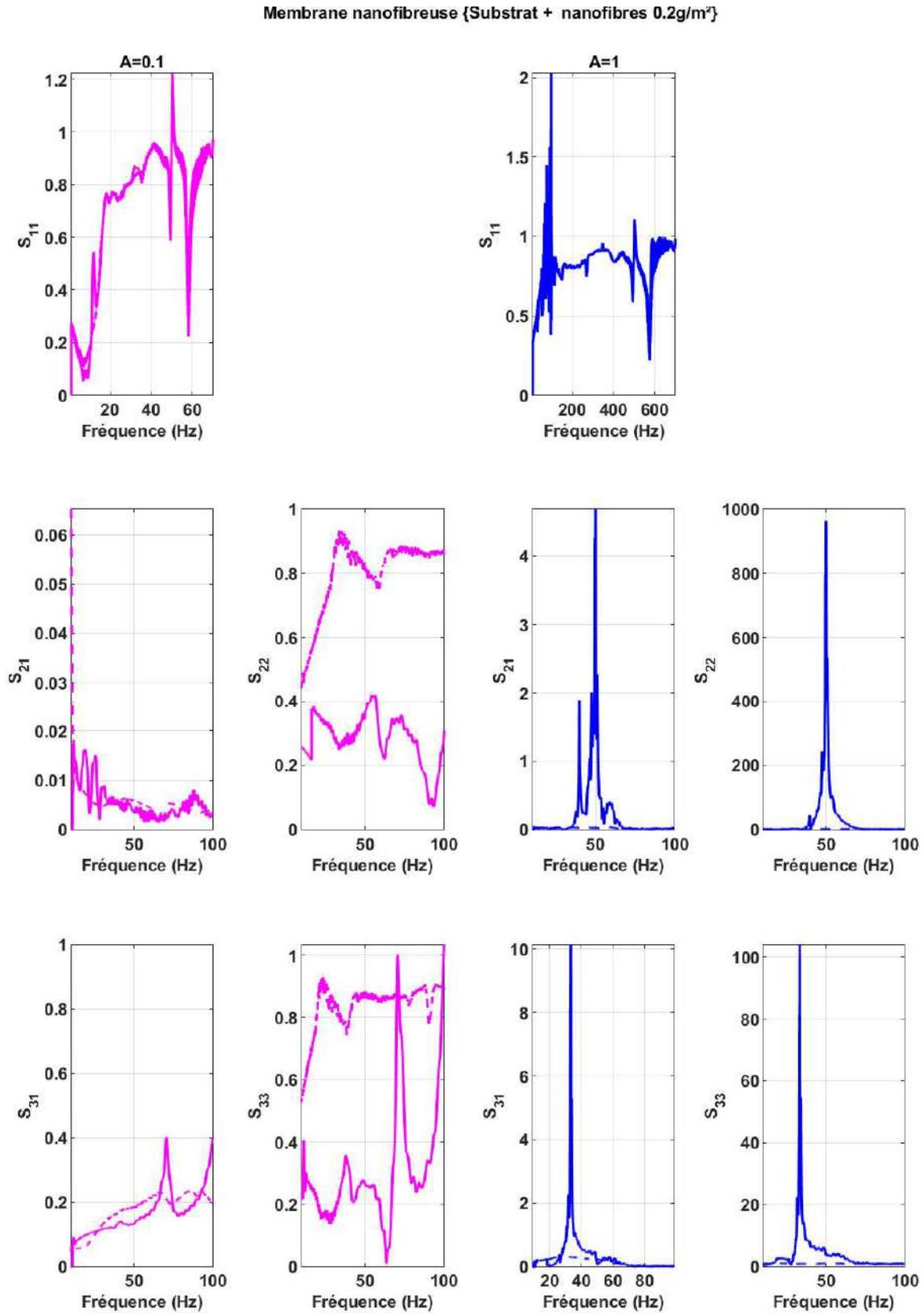
La Figure 6.45 représente une comparaison des matrices de diffusion complète et simplifiée pour la membrane de haut-parleur. Sont comparés ici les coefficients diagonaux  $S_{kn}$  pour  $k = n$  et  $1 \geq k, n \leq 3$  et les coefficients de la première colonne  $S_{k1}$  pour  $1 < k \leq 3$  pour deux niveaux d'excitation  $A = [0.1; 1]$ , ainsi que l'estimation du coefficient de réflexion linéarisé  $R_T$ . Pour chaque niveau, les coefficients  $|S_{11}|$  de la matrice de diffusion simplifiée et complète et le coefficient de réflexion linéarisé  $R_T$  présentent des résultats identiques. Le modèle d'Hammerstein réalise une estimation des termes de la première colonne de la matrice de diffusion proche des résultats de la matrice simplifiée. Néanmoins lorsque le niveau d'excitation  $A$  augmente, l'écart entre ces deux matrices augmente. Les termes diagonaux présentent de nombreuses différences, et l'écart entre les deux méthodes s'accroît avec le niveau. Le modèle d'Hammerstein ne permet donc pas de reconstruire de façon exacte tous les termes de la matrice de diffusion simplifiée. Ces écarts sont dus à l'estimation des fonctions  $G_n(f)$  et donc au choix du couple de paramètres  $(N, H)$ . Bien que dans notre cas la fonction coût  $J(N, H)$  soit minimale, il serait intéressant par la suite de mettre en place un nouveau critère permettant un meilleur choix de paramètres du modèle.



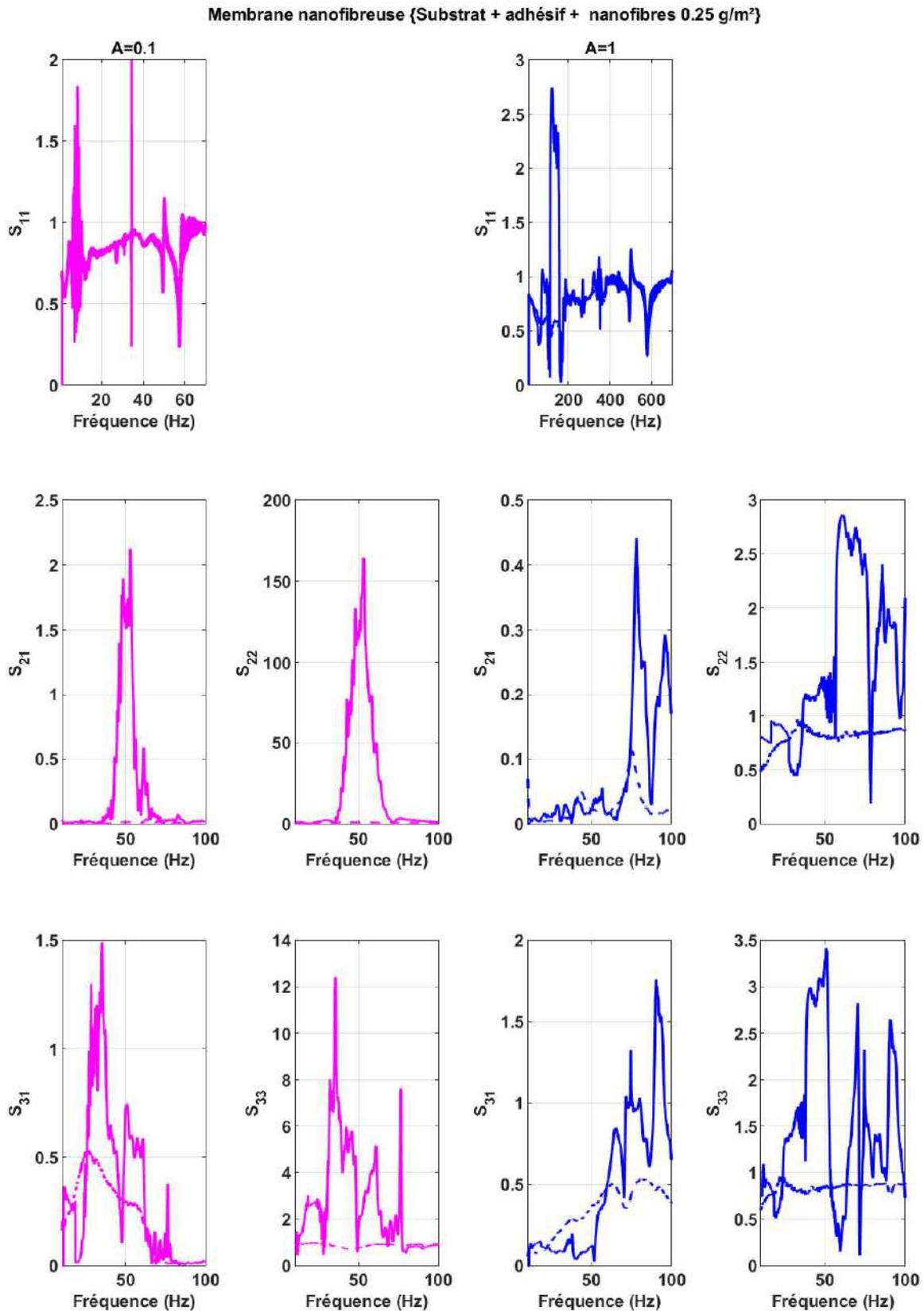
**Figure 6.45** – Comparaison des coefficients de la matrice de diffusion simplifiée (---), de la matrice de diffusion complète (—) et de la méthode par linéarisation (···) (superposée à  $S_{11}$ ) pour la membrane de haut-parleur, pour les niveaux d'excitation  $A = 0.1$  (-) et  $A = 1$  (-)

### 6.3.2. Membranes nanofibreuses

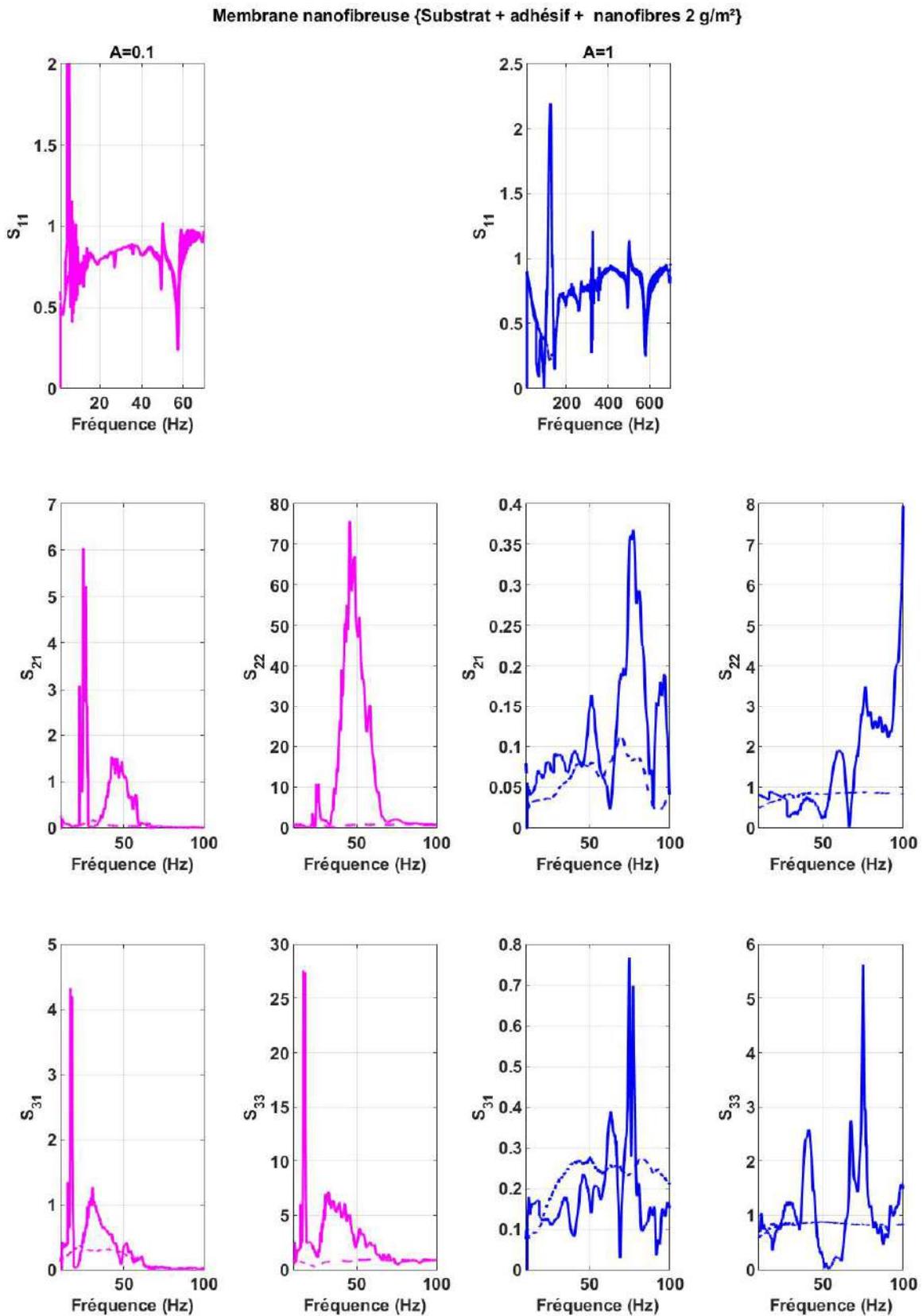
Les figures 6.46, 6.47 et 6.48 représentent les comparaisons des coefficients des matrices de diffusion simplifiées et complètes respectivement pour les membranes nanofibreuses {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ }, {substrat + adhésif + nanofibres  $0.25 \text{ g/m}^2$ } et {substrat + adhésif + nanofibres  $2 \text{ g/m}^2$ }. Elles sont comparées pour deux niveaux d'excitation  $A = [0.1; 1]$  et l'estimation des coefficients de réflexion linéarisés  $R_T$  sont également superposés aux  $|S_{11}|$ . Pour chaque niveau et chaque membrane, les coefficients  $|S_{11}|$  des matrices de diffusion simplifiées et les coefficients de réflexion linéarisés  $R_T$  présentent des résultats identiques. Le modèle d'Hammerstein réalise une estimation des  $|S_{11}|$  ayant la même tendance que pour la matrice simplifiée, mais avec des résultats bien plus erratiques. Les autres termes de ces matrices présentent des différences notables entre les méthodes. Les transferts d'énergie entre harmoniques sont plus conséquents lors de l'estimation par modèle d'Hammerstein.



**Figure 6.46** – Comparaison des coefficients de la matrice de diffusion simplifiée (---), de la matrice de diffusion complète (—) et de la méthode par linéarisation (···) (superposée à  $S_{11}$ ) pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres 0.2 g/m<sup>2</sup>, pour les niveaux d'excitation  $A = 0.1$  (-) et  $A = 1$  (-) }



**Figure 6.47** – Comparaison des coefficients de la matrice de diffusion simplifiée (---), de la matrice de diffusion complète (—) et de la méthode par linéarisation (···) (superposée à  $S_{11}$ ) pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 0.25 g/m<sup>2</sup>, pour les niveaux d'excitation  $A = 0.1$  (-) et  $A = 1$  (-)}



**Figure 6.48** – Comparaison des coefficients de la matrice de diffusion simplifiée (---), de la matrice de diffusion complète (—) et de la méthode par linéarisation (···) (superposée à  $S_{11}$ ) pour la membrane nanofibreuse {substrat + adhésif + nanofibres 2 g/m<sup>2</sup>}, pour les niveaux d'excitation  $A = 0.1$  (-) et  $A = 1$  (-)

## En résumé

Le Chapitre 5 présente deux approches permettant d'estimer les matrices de diffusion simplifiée et complète de charges acoustiques non linéaires. Ces deux méthodes ont été appliquées ici pour caractériser deux absorbeurs, une membrane de haut-parleur agissant comme NES et différentes membranes nanofibreuses.

Pour chaque charge étudiée, la matrice de diffusion simplifiée permet de retrouver un comportement non linéaire des différents absorbeurs. Elle met en évidence l'influence des différentes composantes harmoniques sur le système et permet de visualiser un transfert d'énergie vers les harmoniques supérieures.

La matrice de diffusion complète permet également de visualiser ces phénomènes. Néanmoins, les estimations obtenus présentent des comportements plus erratiques et certains résultats ne traduisent pas la physique de notre problème. Le modèle d'Hammerstein dépend fortement du choix des paramètres initiaux, diminuant sa robustesse.

La comparaison entre les deux modèles montre des estimations de la matrice de diffusion sensiblement différentes, remettant en cause le choix du modèle d'Hammerstein pour l'estimation de nos systèmes non linéaires.

## CONCLUSION

---

Cette thèse porte sur le développement de techniques d'identification pour la caractérisation d'absorbeurs de bruit non linéaires et plus généralement de charges acoustiques non linéaires, à basses fréquences et à fort niveau.

Dans le Chapitre 2, une configuration particulière de tube d'impédance, appelée tube de Kundt court (ou SKT pour Short Kundt Tube) a été présentée. Il s'agit d'une source acoustique connectée à un tube, à l'extrémité duquel est fixé l'échantillon à caractériser. Une unique mesure de pression acoustique dans le système est nécessaire pour obtenir les paramètres acoustiques des absorbeurs non linéaires à étudier. La source peut être excitée par un signal sinus ou sinus balayé synchronisé, et fonctionne à basses fréquences et pour de fort niveau d'excitation. À partir de la pression temporelle mesurée par le microphone, les composantes fréquentielles de la pression ont été obtenues par calcul du coefficient de Fourier à la fréquence d'excitation lors d'une excitation sinus, et grâce aux réponses impulsionnelles dans le cas d'une excitation en sinus balayé synchronisé. Une modélisation de la source du SKT a permis de comprendre et de redimensionner le banc de mesure existant. En raccourcissant la longueur du banc de mesure, les résonances présentes dans le tube ont été décalées vers les hautes fréquences, permettant d'augmenter la plage en fréquences de fonctionnement du SKT. Cette modélisation numérique a également permis d'obtenir une estimation théorique de l'impédance de la source et de la fonction de transfert entre la pression mesurée et la tension de contrôle appliquée à la source.

Une première méthode d'identification de paramètres non linéaires a été présentée dans le Chapitre 3. Elle se base sur des travaux développés dans [31], adapté à une excitation en sinus balayé synchronisé. La caractérisation par linéarisation permet d'obtenir une première estimation des caractéristiques acoustiques, en supposant l'absorbeur étudié linéaire. La source  $y$  est approchée par une équivalence électroacoustique, permettant d'obtenir l'impédance apparente et le coefficient de réflexion apparent de l'absorbeur étudié. Au préalable, les caractéristiques de la source (fonction de transfert entre débit et tension de commande et impédance) auront été obtenues lors d'une étape d'étalonnage, à partir de terminaisons connues analytiquement. Cette approche a été appliquée expérimentalement à deux absorbeurs dynamiques non linéaires : une membrane de haut-parleur et plusieurs membranes nanofibreuses de différentes compositions. Les résultats obtenus ont mis en évidence le comportement non linéaire et durcissant de ces absorbeurs, notamment grâce à la translation des fréquences de résonances vers les hautes fréquences lorsque le niveau d'excitation augmente. Les capacités d'absorption de ces absorbeurs sont meilleures lorsque le niveau d'excitation augmente. Dans le cas des membranes nanofibreuses, l'ajout de fibre et d'adhésif améliore leur capacité d'absorption.

Afin de prendre en compte le caractère non linéaire des charges acoustiques étudiées, le modèle linéaire a été étendu dans le Chapitre 4 à une matrice de diffusion. Ce formalisme permet de quantifier les transferts d'énergie entre harmoniques. Dans le cas d'une excitation à la fréquence fondamentale seule, la matrice de diffusion permet de relier les amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde de pression incidente aux amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde de pression réfléchie. Cette nouvelle méthode repose sur une combinaison entre équilibrage harmonique et modélisation par distorsion polyharmonique : le modèle dynamique non linéaire de l'absorbeur, reliant la pression acoustique et le débit volumique associé, est résolu par équilibrage harmonique. Un système non

linéaire est alors obtenu, fonction des ondes de pression incidentes et réfléchies, puis linéarisé. Les hypothèses découlant du modèle de distorsion polyharmonique permettent de simplifier le problème et d'obtenir les coefficients de la matrice de diffusion. Cette dernière a été estimée numériquement pour une membrane visco-élastique circulaire et un résonateur de Helmholtz non linéaire, par équilibrage harmonique et distorsion polyharmonique. Les résultats obtenus similaires quelque soit la méthode de résolution utilisée permettent de conclure quant à la justesse du modèle par distorsion polyharmonique.

Dans le Chapitre 5, ce modèle par distorsion polyharmonique a été appliqué dans le cadre d'une caractérisation expérimentale d'absorbeurs non linéaires. Deux méthodes sont possibles pour expliciter les coefficients de cette matrice de diffusion. Une première approche consiste à estimer une matrice de diffusion simplifiée, basée sur le principe de superposition harmonique et l'hypothèse que les transferts d'énergie ont lieu seulement des basses vers les hautes fréquences. Une procédure a alors été développée afin d'estimer uniquement les termes diagonaux et la première colonne de la matrice de diffusion. La seconde méthode repose sur une estimation par modèle d'Hammerstein. Elle permet d'estimer la matrice de diffusion complète et de s'affranchir des simplifications utilisées dans la première approche, le tout sans dépendre du niveau d'excitation.

Ces deux méthodes ont été mise en place expérimentalement dans le Chapitre 6. Deux absorbeurs non linéaires ont été caractérisés : une membrane de haut-parleur et des membranes nanofibreuses de différentes compositions. La matrice de diffusion simplifiée permet de retrouver un comportement non linéaire et durcissant des différents absorbeurs, avec un transfert d'énergie vers les harmoniques supérieures. La prédominance des harmoniques d'ordre impair permet de conclure quant au type de non-linéarité (ici impair). La matrice de diffusion complète permet également de visualiser ces phénomènes, mais à des niveaux très différents. La comparaison entre les deux modèles montre des estimations de la matrice de diffusion sensiblement différentes, remettant en cause la robustesse du modèle d'Hammerstein lors de l'estimation de nos systèmes non linéaires.

De nombreuses perspectives permettraient d'enrichir ses travaux de thèse. Tout d'abord, le banc de mesure présente de nombreuses limitations, notamment de taille. Il est facile de caractériser un absorbeur non linéaire présentant un diamètre égal à celui du SKT. Mais la caractérisation d'échantillons de diamètre plus petit n'a pas été réussie à ce jour. En effet, un essai sur le résonateur de Helmholtz non linéaire a présenté des résultats similaires à ceux obtenus pour une terminaison de tube fermée. Une adaptation du banc de mesure pourrait alors être effectuée pour caractériser des absorbeurs de toute taille. Ensuite, l'utilisation d'une méthode multi-micro permettrait de s'affranchir de l'étape d'étalonnage de la source. Outre le gain de temps expérimental, les erreurs de mesure dues à cet étalonnage pourrait alors être évitées.

Il serait également judicieux d'appliquer la modélisation numérique par distorsion polyharmonique aux mêmes absorbeurs étudiés lors de la caractérisation expérimentale. Ceci permettrait de connaître la validité de ce modèle et confronter résolution numérique et données expérimentales.

Pour finir, il a été montré que la modélisation par cascade de modèle d'Hammerstein n'était pas un modèle efficace pour l'estimation d'une matrice de diffusion. Il serait alors intéressant de se pencher sur les paramètres régissant ce modèle d'Hammerstein, afin de mettre en place un critère permettant de prendre en compte de façon plus réaliste la physique de notre problème. D'autres modèles non linéaires pourraient également être développés et permettraient de s'affranchir de la représentation en matrice de diffusion.

# ANNEXES

---

## Sommaire

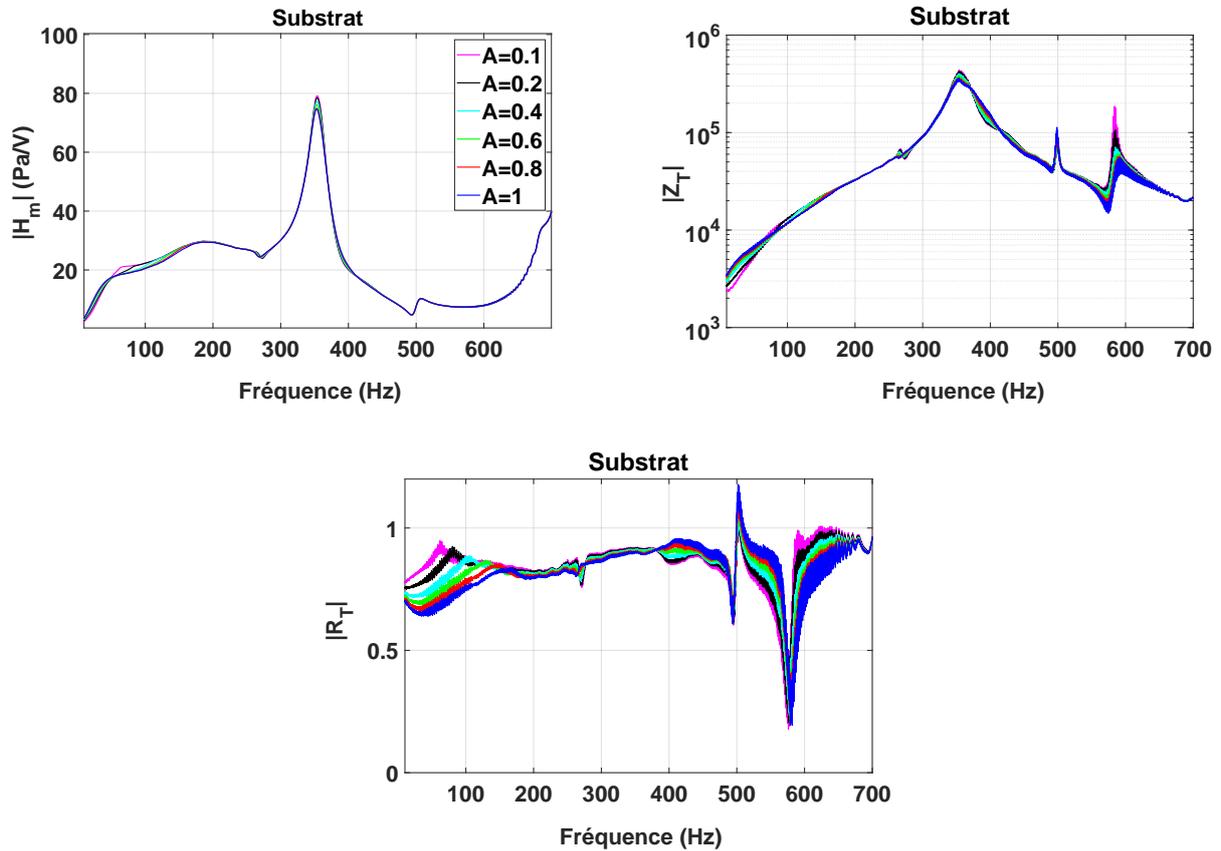
---

<b>A</b>	<b>Caractérisation linéaire des supports des membranes nano-fibreuses</b>	<b>156</b>
A.1	Substrat . . . . .	156
A.2	Substrat + Adhésif . . . . .	156
<b>B</b>	<b>Comparaison des paramètres linéaires des membranes nano-fibreuses pour une amplitude d'excitation <math>A = 1</math></b>	<b>158</b>
<b>C</b>	<b>Caractérisation non-linéaire des supports des membranes nano-fibreuses</b>	<b>159</b>
C.1	Substrat . . . . .	159
C.2	Substrat + Adhésif . . . . .	162
<b>D</b>	<b>Estimation de la matrice de diffusion complète pour <math>N=5</math> pour la membrane de haut-parleur</b>	<b>165</b>
<b>E</b>	<b>Comparaison entre <math>P_n(f)</math> pour <math>n \leq 5</math> et la pression seuil pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres <math>0.2 \text{ g/m}^2</math>}</b>	<b>167</b>

---

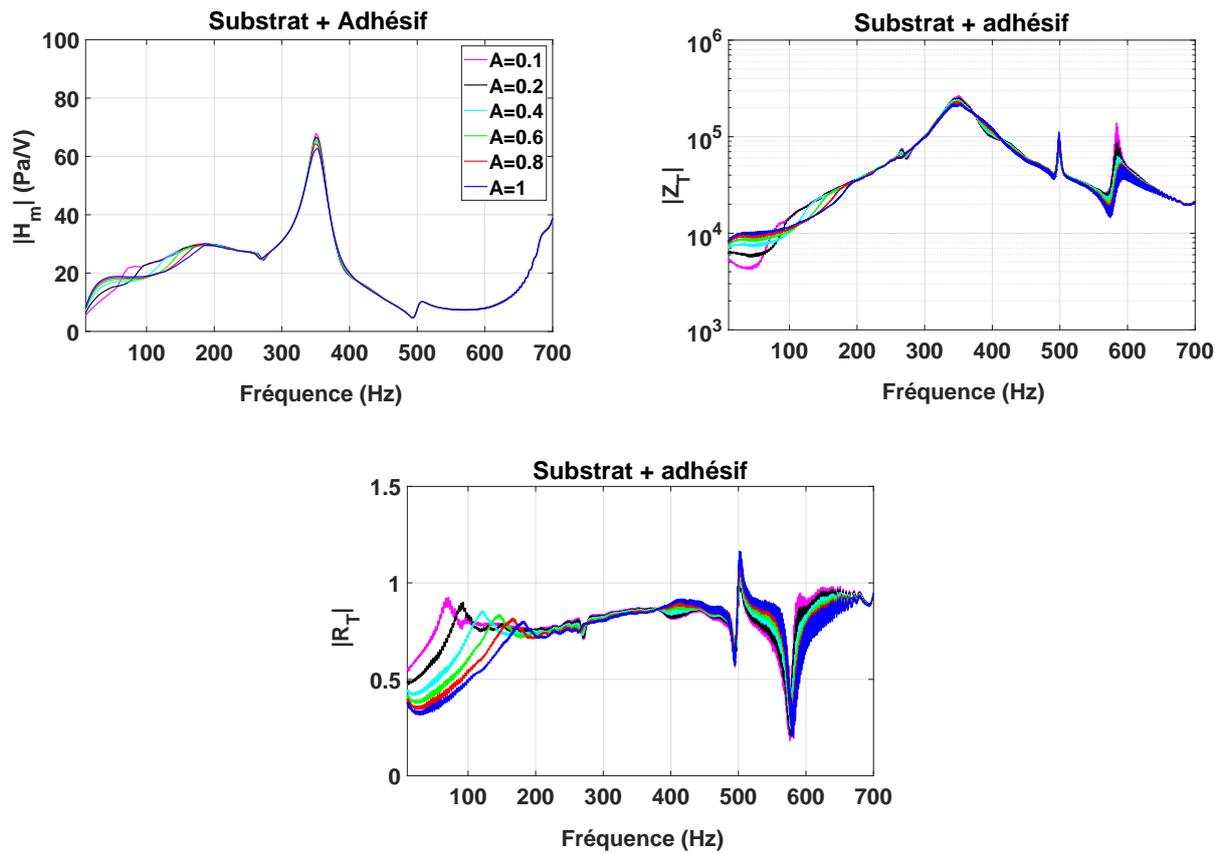
## A. Caractérisation linéaire des supports des membranes nano-fibreuses

### A.1. Substrat



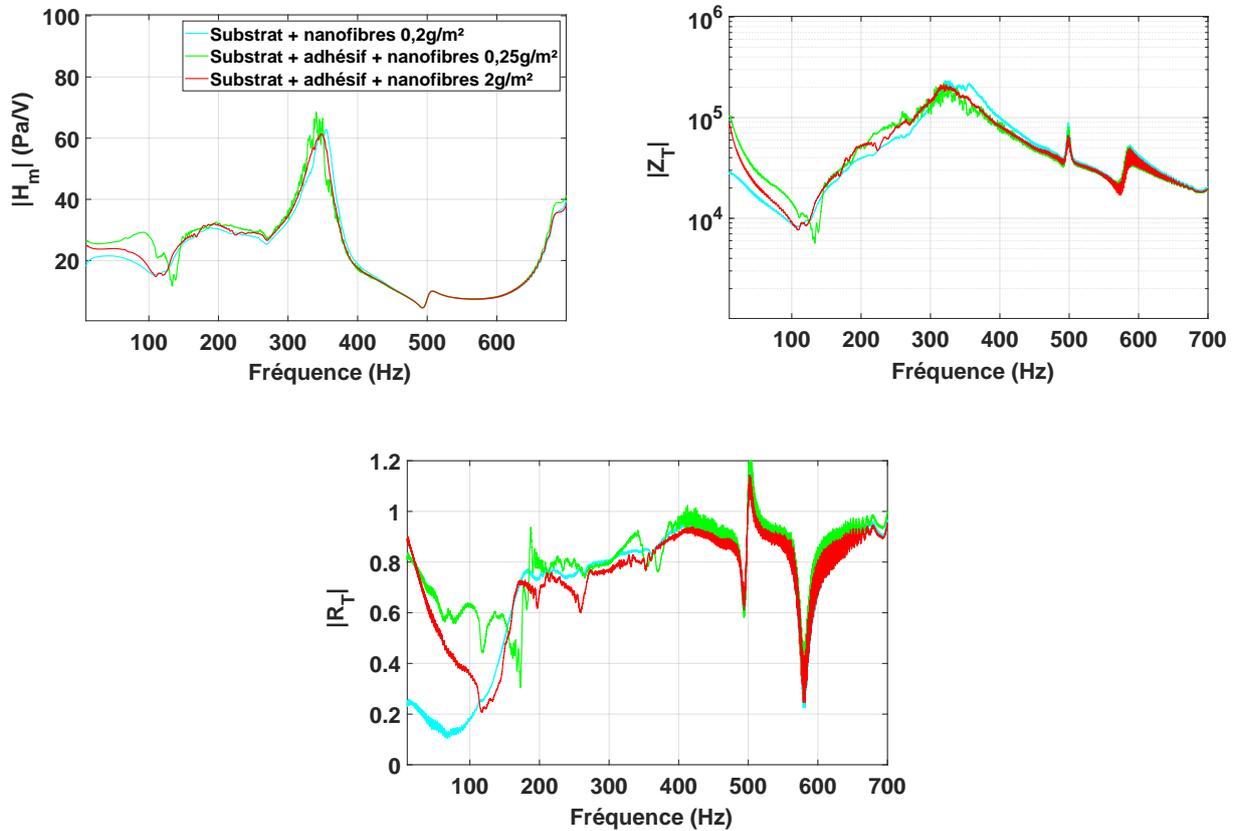
**Figure 1** – Estimation des modules de la fonction de transfert  $|H_m(f)|$ , de l'impédance  $|Z_T(f)|$  et du coefficient de réflexion  $|R_T(f)|$  pour le substrat des membranes nano-fibreuses et pour différents niveaux d'excitation

### A.2. Substrat + Adhésif



**Figure 2** – Estimation des modules de la fonction de transfert  $|H_m(f)|$ , de l'impédance  $|Z_T(f)|$  et du coefficient de réflexion  $|R_T(f)|$  pour l'échantillon {substrat + adhésif} et pour différents niveaux d'excitation

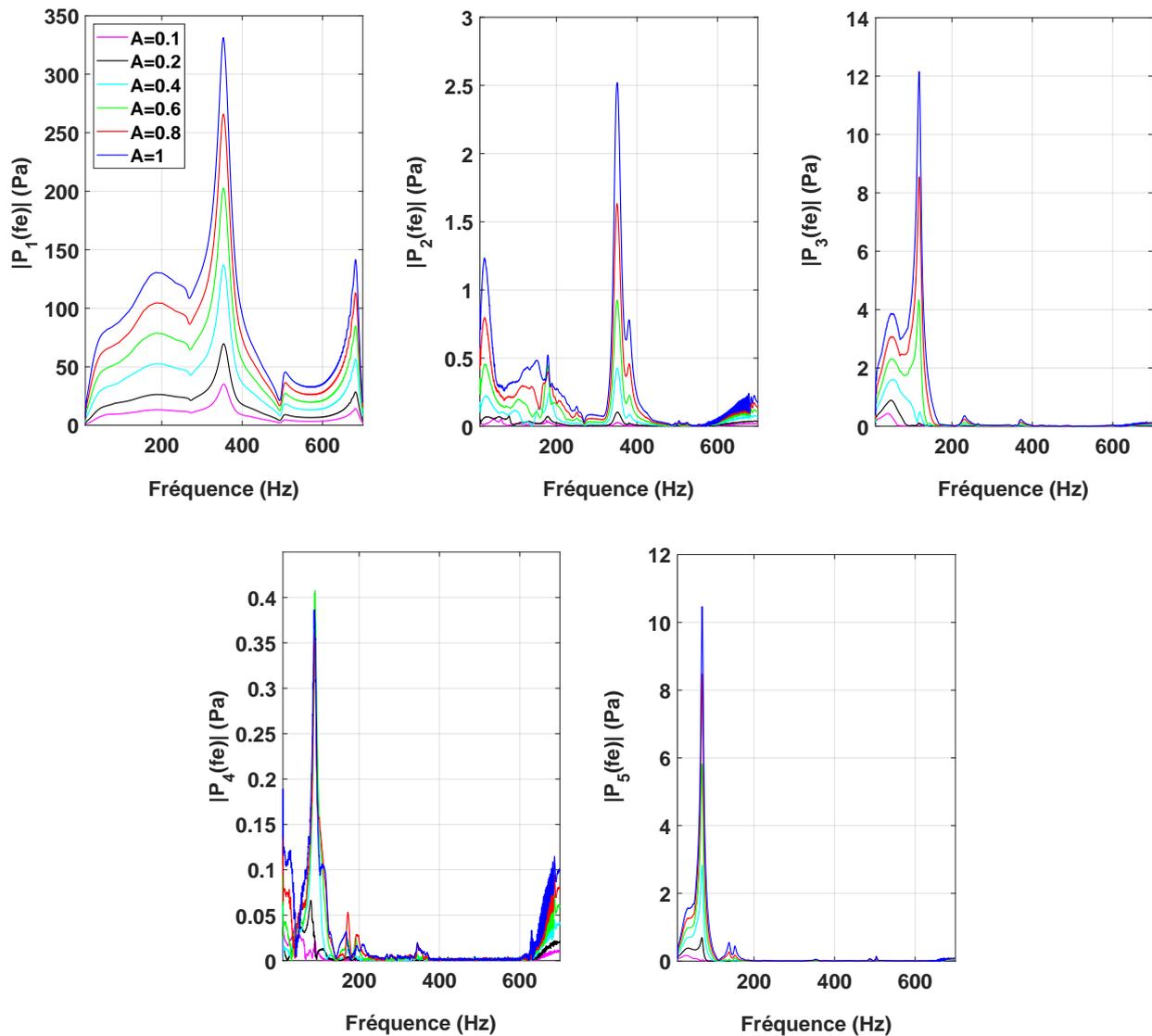
## B. Comparaison des paramètres linéaires des membranes nano-fibreuses pour une amplitude d'excitation $A = 1$



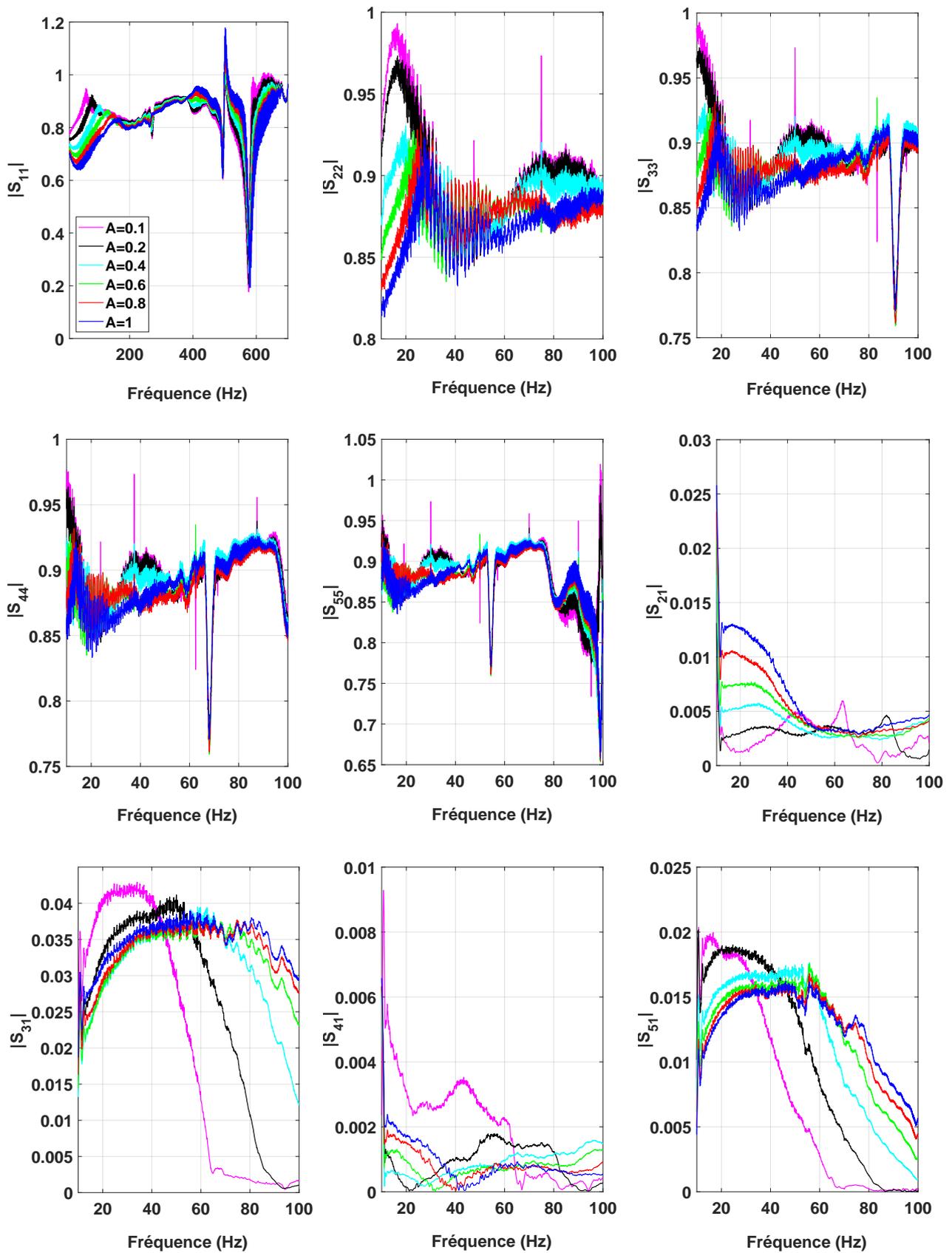
**Figure 3** – Estimation des modules de la fonction de transfert  $|H_m(f)|$ , de l'impédance  $|Z_T(f)|$  et du coefficient de réflexion  $|R_T(f)|$  pour chaque membrane nano-fibreuses et pour l'amplitude d'excitation  $A = 1$

## C. Caractérisation non-linéaire des supports des membranes nano-fibreuses

### C.1. Substrat



**Figure 4** – Estimation des modules de 5 composantes fréquentielles de la pression  $P_n(f)$  en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d'excitation



**Figure 5** – Estimation des coefficients  $|S_{kn}|$  de la matrice de diffusion en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation.

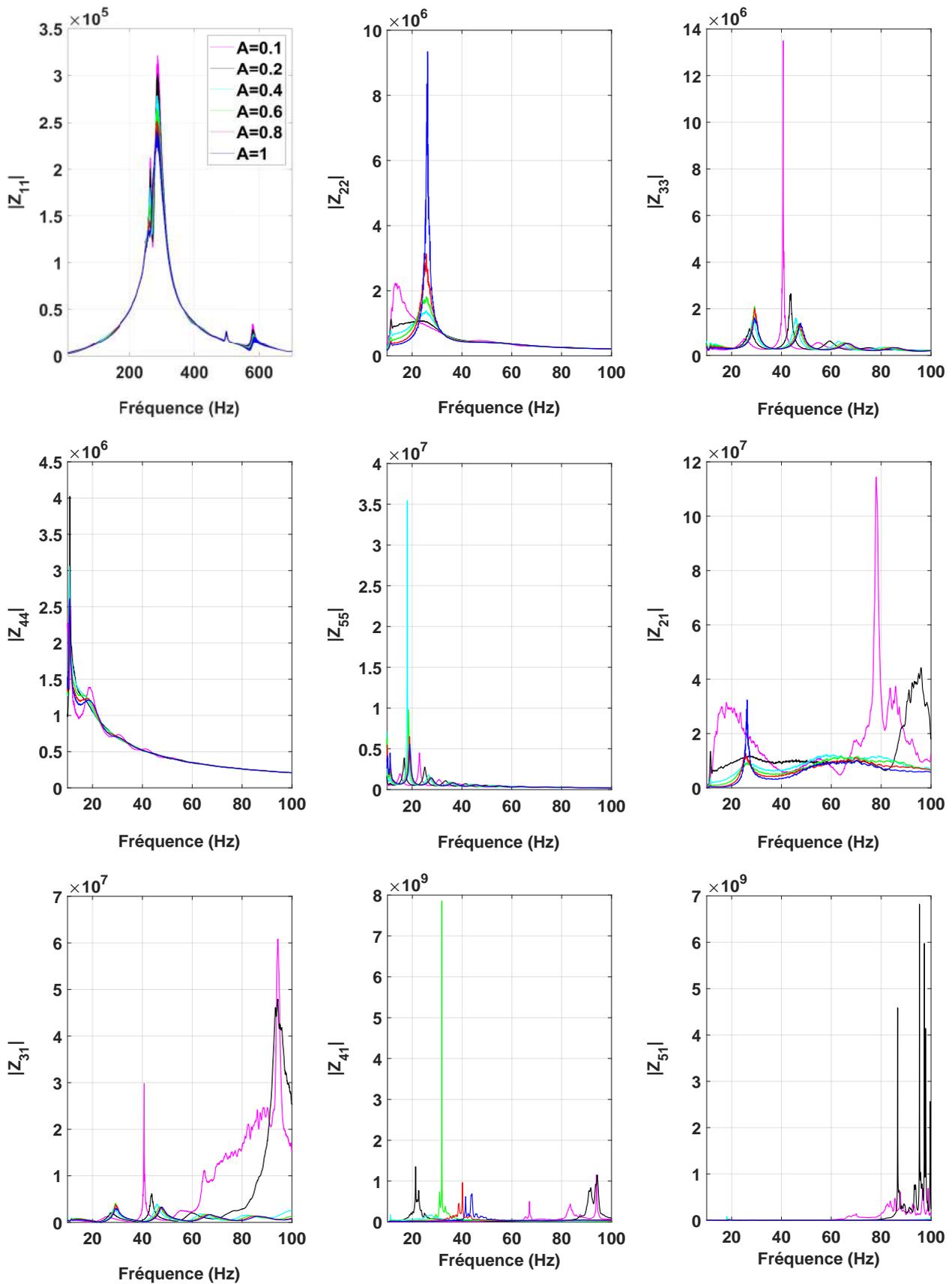
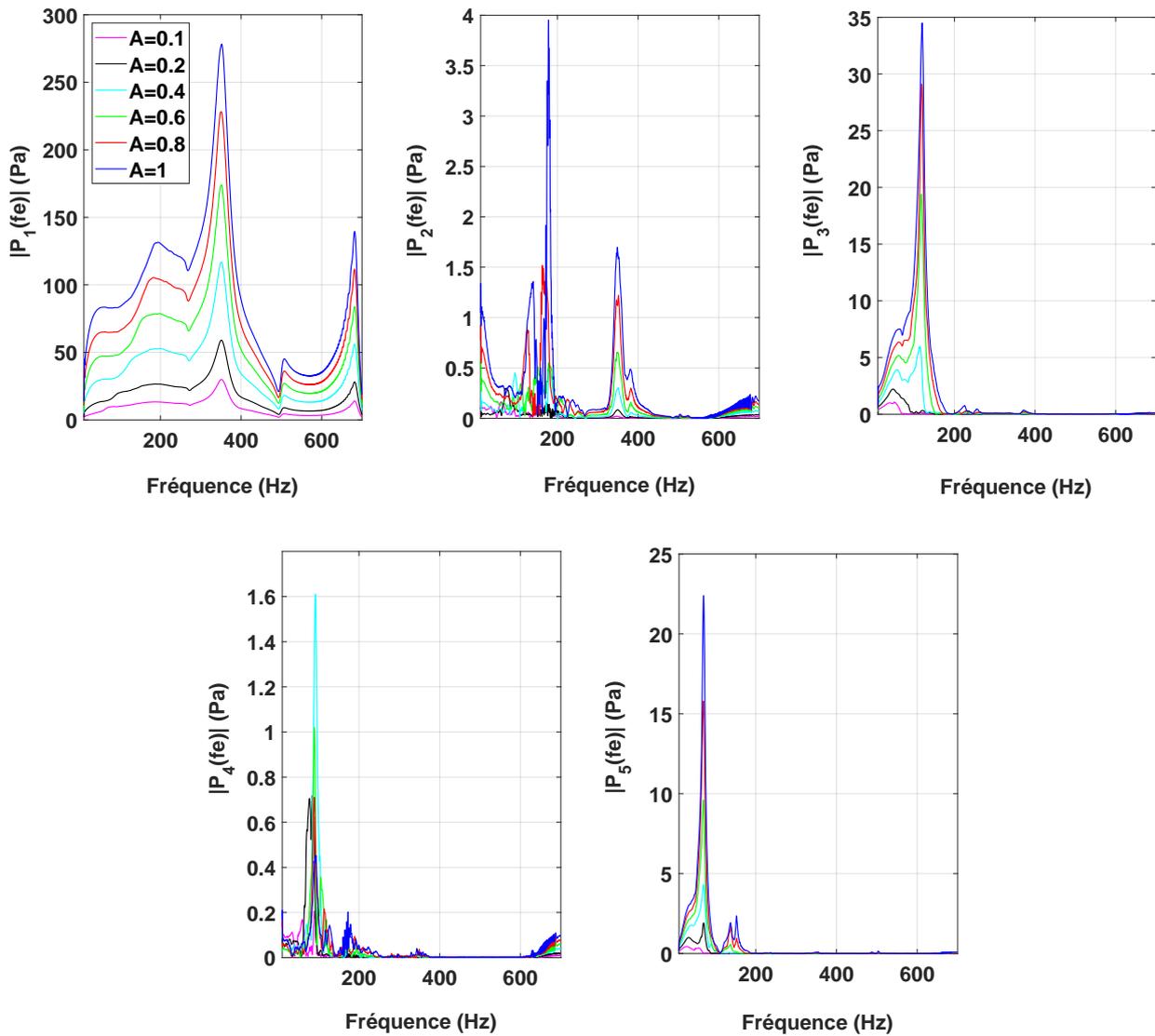


Figure 6 – Estimation des coefficients  $|Z_{kn}|$  de la matrice de diffusion en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation.

## C.2. Substrat + Adhésif



**Figure 7** – Estimation des modules de 5 composantes fréquentielles de la pression  $P_n(f)$  en fonction de la fréquence et pour différentes amplitudes d'excitation

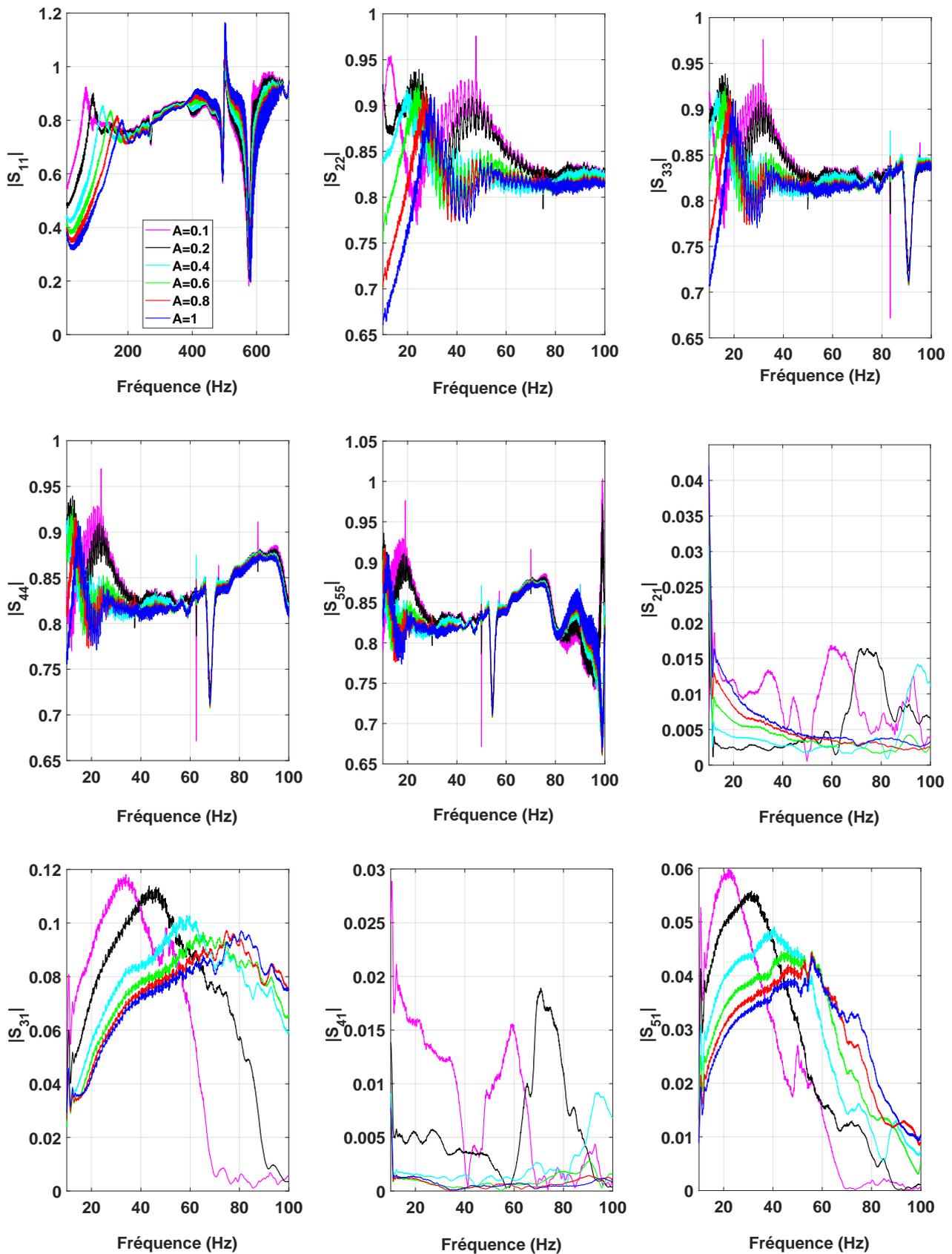
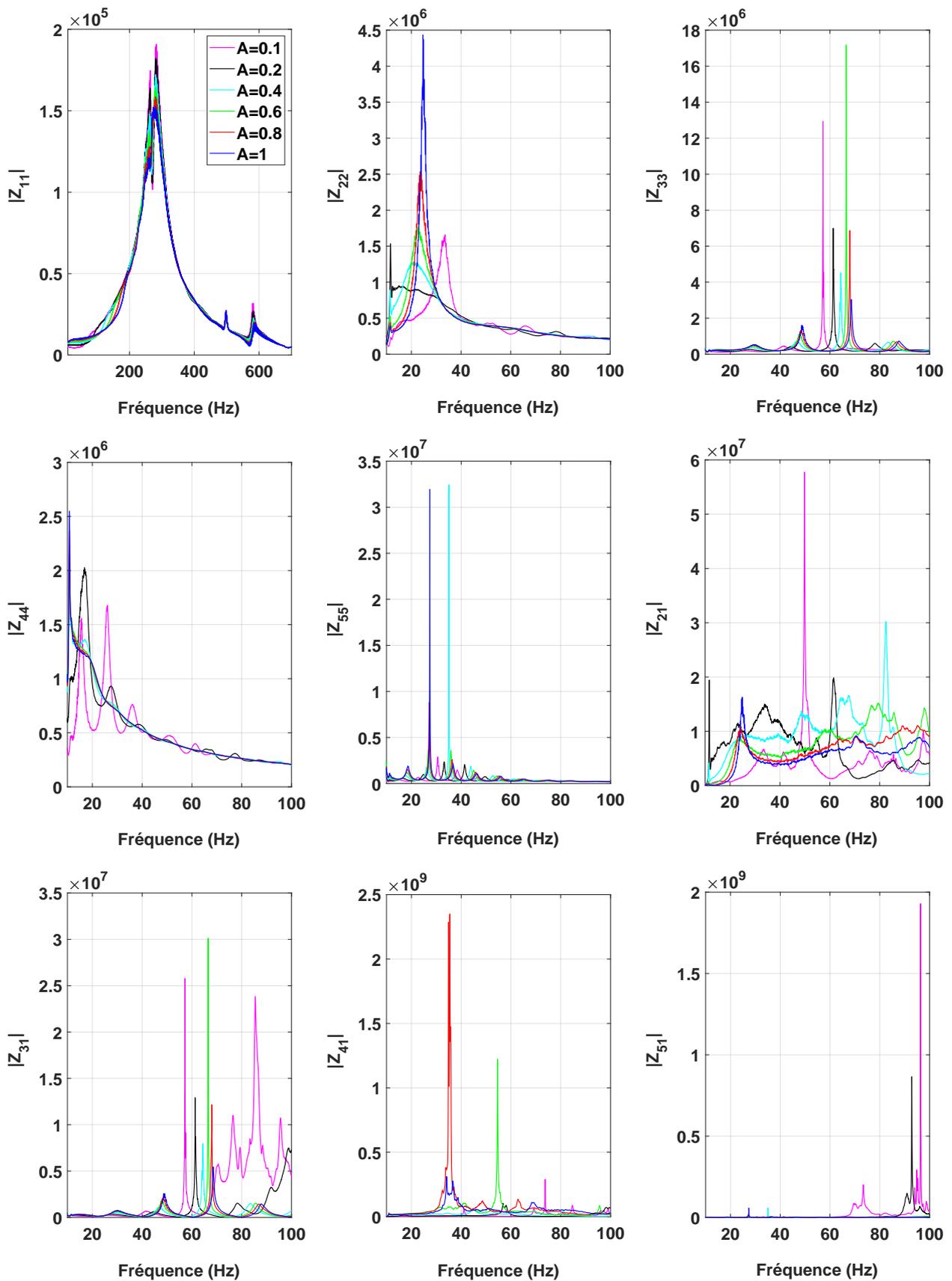
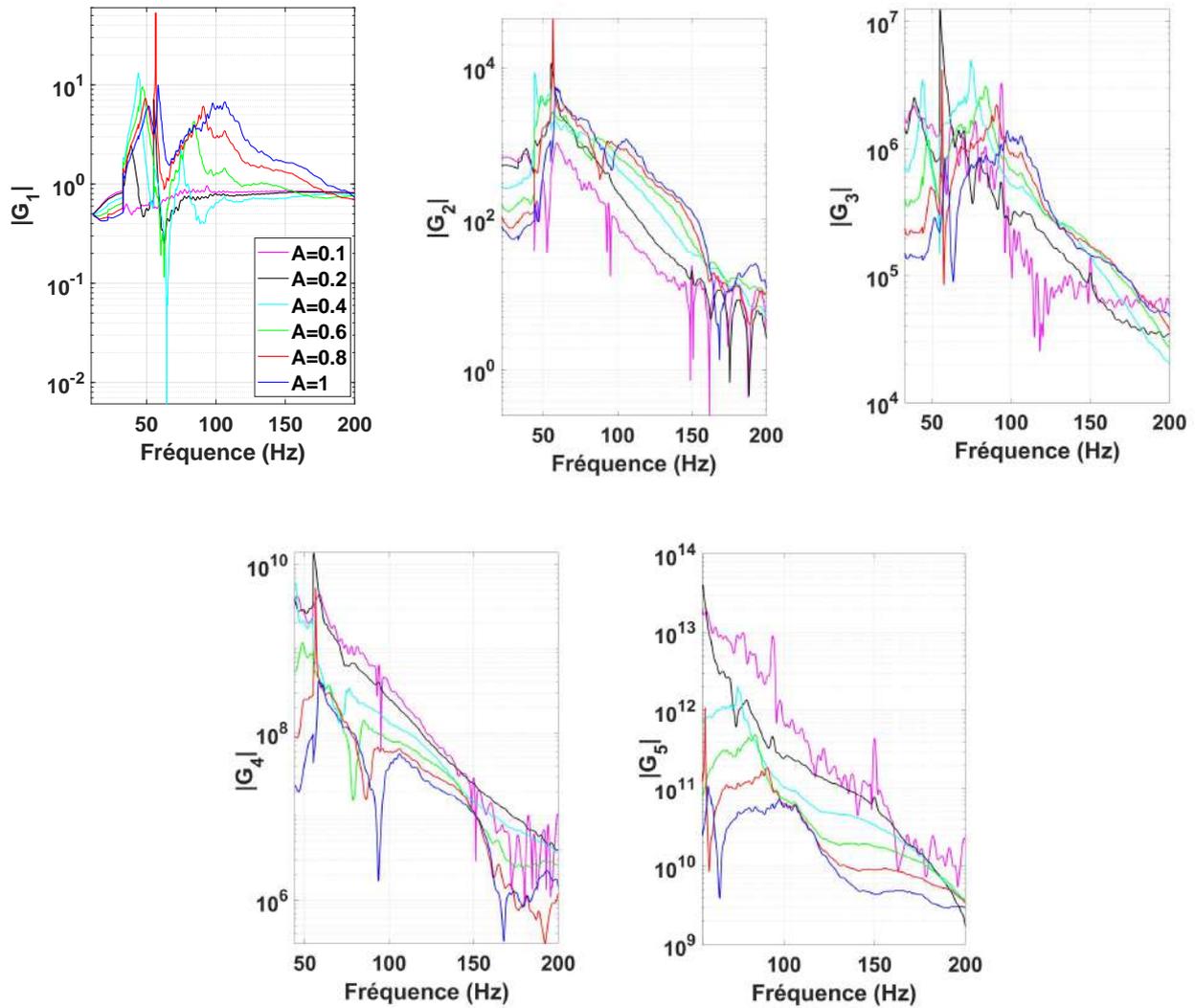


Figure 8 – Estimation des coefficients  $|S_{kn}|$  de la matrice de diffusion en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation.

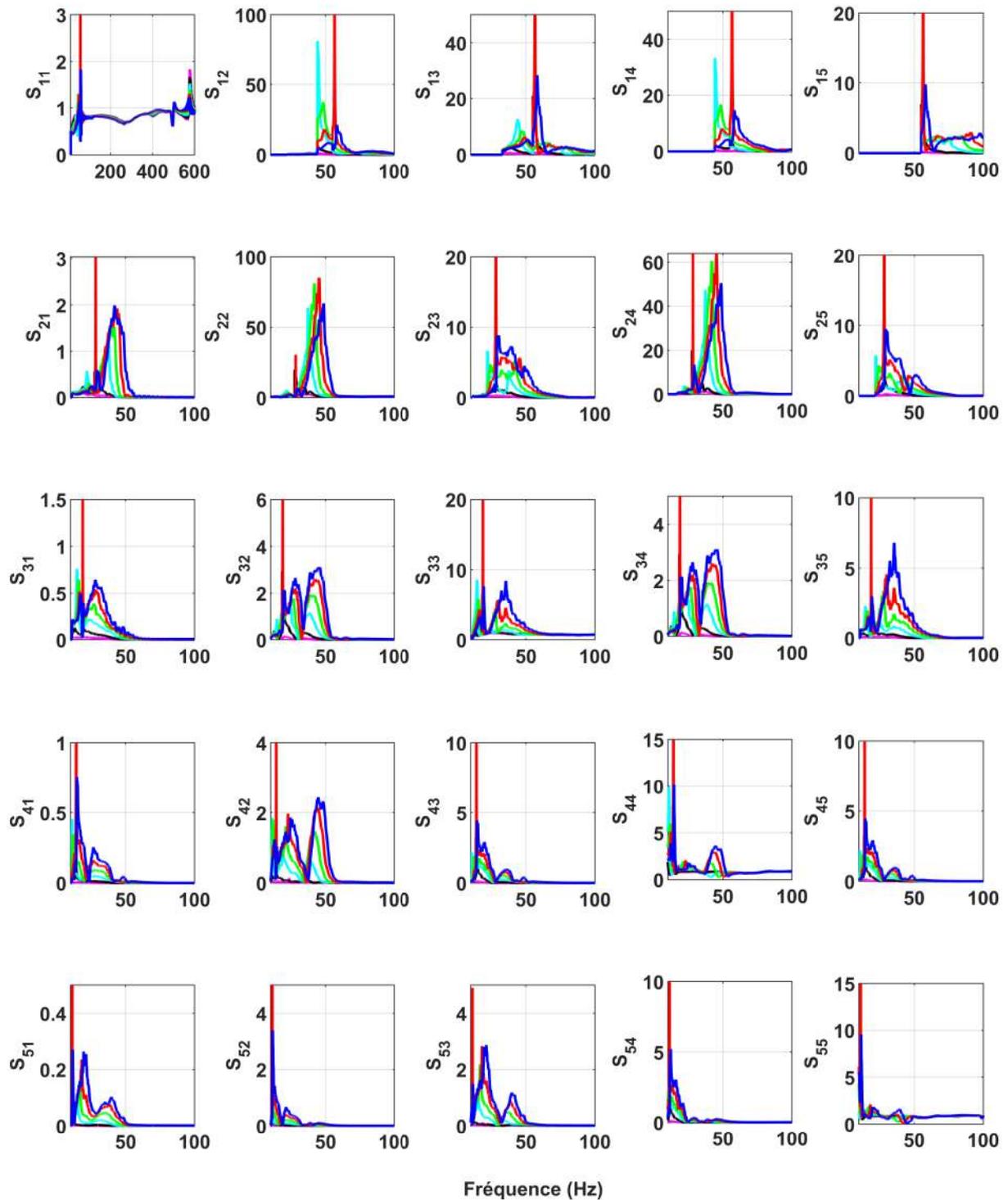


**Figure 9** – Estimation des coefficients  $|Z_{kn}|$  de la matrice de diffusion en fonction de la fréquence et de différents niveaux d'excitation.

## D. Estimation de la matrice de diffusion complète pour $N=5$ pour la membrane de haut-parleur



**Figure 10** – Estimation pour la membrane de haut-parleur des fonctions linéaires  $G_n(f)$  pour 5 blocs d’Hammerstein  $N$  en fonction du niveau d’excitation  $A$  et de la fréquence



**Figure 11** – Estimation de la matrice de diffusion complète par modèle d’Hammerstein pour la membrane de haut-parleur, pour chaque niveau d’excitation  $A = [0.1; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1]$ , en fonction de la fréquence

## E. Comparaison entre $P_n(f)$ pour $n \leq 5$ et la pression seuil pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres $0.2 \text{ g/m}^2$ }

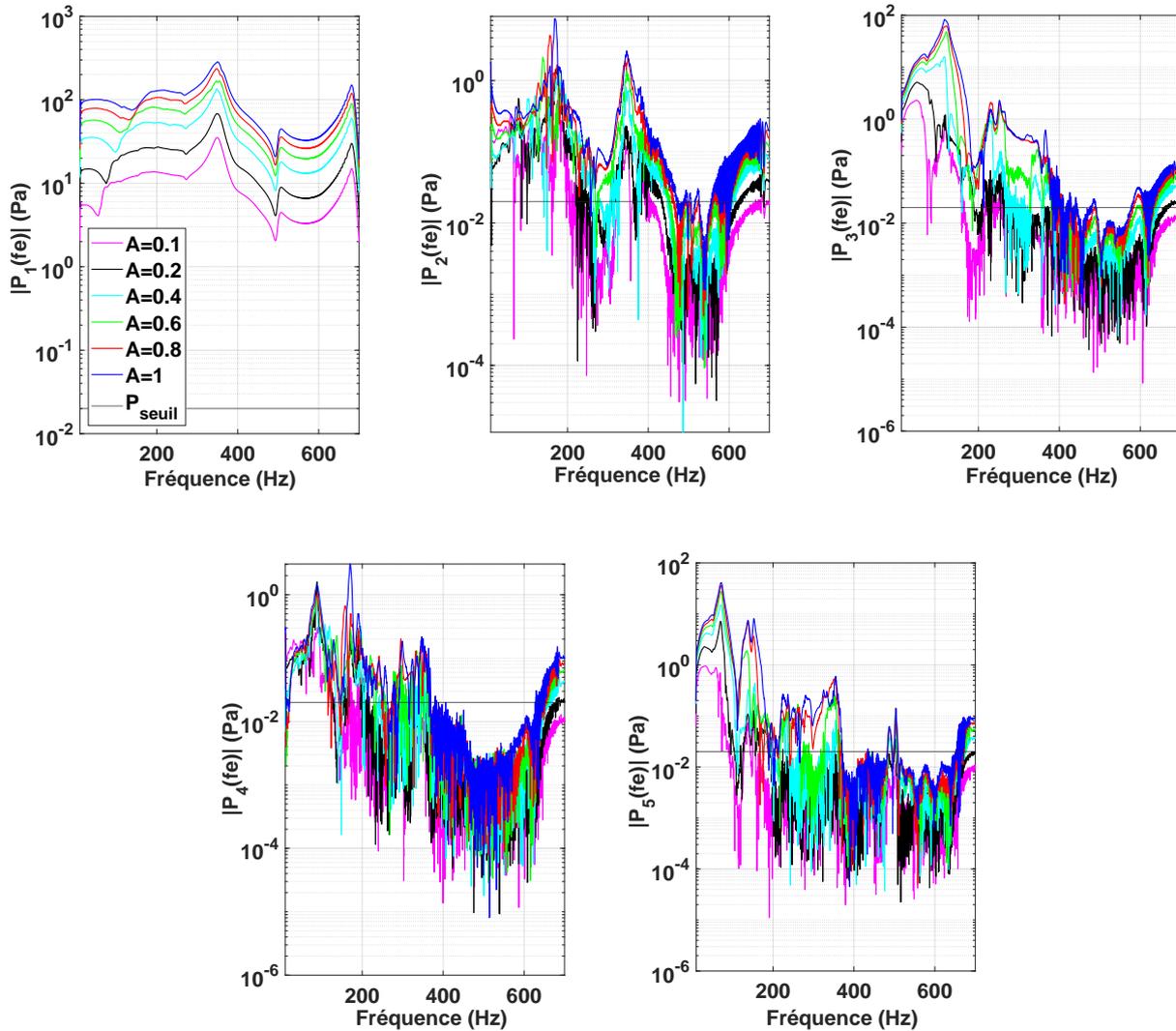


Figure 12 – Comparaison entre  $P_n(f)$  pour  $n \leq 5$  et la pression seuil pour la membrane nanofibreuse {substrat + nanofibres  $0.2 \text{ g/m}^2$ } en fonction de la fréquence et pour différents niveaux d'excitation



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] *[Etude] Coût social du bruit en France*. fr-FR.
- [2] AF VAKAKIS. “Inducing Passive Nonlinear Energy Sinks in Vibrating Systems”. In : *Journal of Vibration and Acoustics* 123 (juill. 2001).
- [3] AF VAKAKIS et Oleg GENDELMAN. “Energy Pumping in Nonlinear Mechanical Oscillators : Part II—Resonance Capture”. In : *Journal of Applied Mechanics-Transactions of The Asme - J APPL MECH* 68 (jan. 2001).
- [4] Romain BELLET. “Vers une nouvelle technique de contrôle passif du bruit : absorbeur dynamique non linéaire et pompage énergétique”. fr. Thèse de doct. Université de Provence - Aix-Marseille I, oct. 2010.
- [5] R. MARIANI et al. “Toward an adjustable nonlinear low frequency acoustic absorber”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 330.22 (oct. 2011), p. 5245-5258.
- [6] Pierre-Yvon BRYK. “Pompage énergétique en acoustique par absorbeur dynamique non-linéaire hybride passif-actif”. thesis. Aix-Marseille, mars 2018.
- [7] Volodymyr IURASOV. “Contrôle passif en vibroacoustique avec absorbeur dynamique bistable”. These de doctorat. Aix-Marseille, jan. 2018.
- [8] Valentino Alamo VARGAS. “Transfert énergétique irréversible grâce à un résonateur acoustique à comportement non-linéaire”. Thèse de doct. Université de Lyon - ENTPE, 2018.
- [9] V. ALAMO VARGAS, E. GOURDON et A. TURE SAVADKOOHI. “Nonlinear softening and hardening behavior in Helmholtz resonators for nonlinear regimes”. In : *Nonlinear Dyn* 91 (2018), p. 217-231.
- [10] Tomáš ULRICH et Jorge P ARENAS. “ROLE OF POROSITY ON NANOFIBROUS MEMBRANE SOUND ABSORPTION PROPERTIES”. en. In : (2019), p. 8.
- [11] J. Y. CHUNG et D. A. BLASER. “Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 68.3 (sept. 1980), p. 907-913.
- [12] J. Y. CHUNG et D. A. BLASER. “Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 68.3 (sept. 1980), p. 914-921.
- [13] Jean Christophe LE ROUX, Marc PACHEBAT et Jean-Pierre DALMONT. “A new impedance sensor for industrial applications”. In : *Acoustics 2012*. Sous la dir. de Société Française D’ACOUSTIQUE. Nantes, France, avr. 2012.

- [14] Le ROUX JEAN CHRISTOPHE, Marc PACHEBAT et Dalmont JEAN PIERRE. “Un capteur de nouvelle génération pour la mesure d’impédance acoustique en contexte industriel”. In : *Acoustique et Techniques : trimestriel d’information des professionnels de l’acoustique* 68 (mai 2012), p. 6.
- [15] A. CHAUVIN et al. “Acoustic characterization of a nonlinear vibroacoustic absorber at low frequencies and high sound levels”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 416 (mars 2018), p. 244-257.
- [16] Hans BODÉN. “One-sided multi-port techniques for characterisation of in-duct samples with nonlinear acoustic properties”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 331.13 (juin 2012), p. 3050-3067.
- [17] VERSPECHT et D.E. ROOT. “Polyharmonic distortion modeling”. In : *IEEE Microwave Magazine* 7.3 (juin 2006), p. 44-57.
- [18] Antoine CHAIGNE. *Ondes acoustiques*. fr. Google-Books-ID : pdnzmdm4cnAC. Editions Ecole Polytechnique, 2001.
- [19] Antoine CHAIGNE et Jean KERGOMARD. *Acoustique des instruments de musique*. fr. Google-Books-ID : wRKWDgAAQBAJ. Humensis, juill. 2015.
- [20] Jean ALLARD et Noureddine ATALLA. *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials 2e*. en. Google-Books-ID : TlgO96VLYPYC. John Wiley & Sons, oct. 2009.
- [21] M. E. DELANY et E. N. BAZLEY. “Acoustical properties of fibrous absorbent materials”. en. In : *Applied Acoustics* 3.2 (avr. 1970), p. 105-116.
- [22] Wenfang YU, Xianming ZHANG et Qingshan DONG. “Application of Microperforated-Panel Absorber in Communication Products”. en. In : *Journal of Applied Mathematics and Physics* 06.01 (2018), p. 51-57.
- [23] F. ABELÈS. “La détermination de l’indice et de l’épaisseur des couches minces transparentes”. fr. In : *Journal de Physique et le Radium* 11.7 (1950), p. 310-314.
- [24] P. A. NELSON et S. J. ELLIOTT. *Active Control of Sound*. en. Google-Books-ID : 6csYAQAIAAJ. Academic Press, 1993.
- [25] S. M. KUO, S. MITRA et WOON-SENG GAN. “Active noise control system for headphone applications”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 14.2 (mars 2006), p. 331-335.
- [26] Eric BRANDAO, Arcanjo LENZI et Stephan PAUL. “A Review of the In Situ Impedance and Sound Absorption Measurement Techniques”. In : *Acta Acustica united with Acustica* 101 (juin 2015).
- [27] Antonín NOVÁK, Pierrick LOTTON et Laurent SIMON. “Synchronized Swept-Sine : Theory, Application, and Implementation”. en. In : *Journal of the Audio Engineering Society* 63.10 (nov. 2015), p. 786-798.
- [28] Antonín NOVÁK. “Identification of nonlinear systems in acoustics”. thesis. Le Mans, jan. 2009.
- [29] Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ. “A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions”. en. In : *Journal of Sound and Vibration* 324.1 (juill. 2009), p. 243-262.
- [30] Jacques JOUHANEAU. *Notions élémentaires d’acoustique, électroacoustique*. 1999.

- [31] Alice CHAUVIN et al. “Caractérisation expérimentale d’un banc de mesures acoustique pour absorbeurs linéaires et non linéaires à basse fréquence et fort niveau : méthodes à un et plusieurs microphones”. In : *13ème Congrès Français d’Acoustique*. Le Mans, France, avr. 2016, p. 2617-1623.
- [32] Marc PACHEBAT. “Un modèle linéaire pour la conception du “Short Kundt Tube” (SKT)”. fr. In : *Publication interne* ().
- [33] Marion VOLPE, Sergio BELLIZZI et Renaud COTE. “Polyharmonic distortion approach for nonlinear acoustic load characterization”. en. In : (2020).
- [34] Malte KRACK et Johann GROSS. *Harmonic balance for nonlinear vibration problem*. Springer, 2019.



# RÉSUMÉ / ABSTRACT

---

## Résumé vulgarisé

Ce travail de thèse a pour but de mettre en évidence les capacités d'absorption du bruit de dispositifs appelés absorbeurs de bruit dit non linéaires. Contrairement aux absorbeurs de bruit classique (comme les mousses), ces dispositifs ont la particularité de s'adapter au contenu fréquentiel de ces nuisances, lorsqu'elles sont émises à basses fréquences. Un dispositif de mesure appelé tube de Kundt court est alors utilisé. Une source acoustique constituée de haut-parleurs est connectée à un tube, à l'extrémité duquel est fixé l'absorbeur de bruit à étudié. À partir d'une mesure du niveau de bruit à l'intérieur de ce tube, notre dispositif permet de mesurer la quantité de bruit absorbée. Nos absorbeurs fonctionnent dans le domaine non linéaire, c'est-à-dire que la quantité de bruit absorbée n'est pas proportionnelle à la quantité de bruit émise. Cette thèse présente donc la mise en place de méthodes permettant de caractériser les transferts d'énergie résultant de la réduction du bruit due à l'absorbeur non linéaire étudié.

## Popularized summary

The aim of this thesis is to highlight the noise absorption capacities of devices called non-linear noise absorbers. Unlike conventional noise absorbers (such as foams), these devices have the particularity to adapt itself to the frequency content of this noise, when they are emitted at low frequencies. A measuring device called a short Kundt tube is used. An acoustic source consisting of loudspeakers is connected to a tube, at the end of which the noise absorber to be studied is fixed. From a measurement of the noise level inside this tube, our device allows to measure the amount of noise absorbed. Our absorbers operate in the non-linear range, i.e. the amount of noise absorbed is not proportional to the amount of noise emitted. This thesis presents the implementation of methods to characterise the energy transfers resulting from the noise reduction due to the non-linear absorber studied.

## Résumé

Ce travail de thèse est consacré au développement de techniques d'identification pour la caractérisation d'absorbeurs de bruit non linéaires, et plus généralement de charges acoustiques non linéaires, à basses fréquences et pour de forts niveaux d'excitation. L'objectif est d'extraire les caractéristiques acoustiques de ces dispositifs, en vue d'explicitier et d'exploiter leurs capacités d'absorption. Une configuration particulière de capteur d'impédance, appelée tube de Kundt court, a été développée, compatible avec les basses fréquences et pouvant atteindre de tels niveaux. L'utilisation de ce banc de mesure repose sur une unique mesure de pression à l'intérieur du système, proche de l'absorbeur à caractériser, et sur un étalonnage préalable de la source à partir de terminaisons connues analytiquement. Une première méthode d'identification dite par linéarisation permet d'obtenir des impédances et coefficients de réflexion apparents, dépendants du niveau d'excitation du système. Afin de prendre en compte les non-linéarités présentes dans le système, la notion de coefficient de réflexion apparent est étendue et formulée en terme de matrice de diffusion. Ce formalisme permet de mettre en évidence et de quantifier les transferts d'énergie entre harmoniques, en reliant les amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde incidente aux amplitudes fondamentales et harmoniques de l'onde réfléchie. Il est formulé à l'aide d'une méthode d'équilibrage harmonique et une approche par distorsion polyharmonique. Une étude numérique appliquée à des absorbeurs non linéaires est présentée. Une seconde méthode d'identification a alors été développée donnant un accès direct à une matrice de diffusion simplifiée (termes diagonaux et première colonne). Une troisième méthode basée sur l'identification préalable d'un modèle non linéaire permet d'obtenir tous les coefficients de cette matrice. Ces trois approches sont appliquées à différents absorbeurs non linéaires et comparées. Les mesures illustrent le fait que ces méthodes ne sont pas équivalentes. La multiplicité des approches permet de choisir celles qui sont le mieux adaptées aux besoins de caractérisation.

## Abstract

This thesis is devoted to the development of identification techniques for the characterization of nonlinear noise absorbers, and more generally of non-linear acoustic loads, at low frequencies and high excitation levels. The objective is to highlight the acoustic characteristics of these devices, in order to explain their absorption capacities. A specific setup of impedance sensor named Short Kundt Tube, has been developed, compatible with low frequencies and capable of reaching high levels. This measurement setup is based on a single pressure measurement inside the system, close to the absorber to be characterized, and a prior calibration of the source from loads known analytically. A first method of identification names linearisation method gives access to apparent impedances and reflection coefficients, which are excitation level dependent. To take into account the non-linearities present in the system, the notion of apparent reflection coefficient is extended and formulated in terms of scattering matrix. This formalism makes it possible to highlight and quantify the energy transfers between harmonics, by linking the fundamental and harmonic amplitudes of the incident wave to the fundamental and harmonic amplitudes of the reflected wave. It is formulated using a harmonic balance method and a polyharmonic distortion modelling. A numerical study applied to nonlinear absorbers is presented. A second identification method is next developed and gives direct access to a simplified scattering matrix (diagonal terms and first column). A third method is based on the identification of a nonlinear model and permits to obtain all the coefficients of this matrix. All these techniques are applied to characterize different nonlinear vibroacoustic absorbers and compared. The measurements illustrate the fact that these methods are not equivalent. The multiplicity of approaches makes it possible to choose those which are best adapted to the needs of characterization.

## COMMUNICATIONS

---

### **Article soumis**

Marion Volpe, Sergio Bellizzi et Renaud Côte - Polyharmonic distortion approach for nonlinear acoustic load characterization - Journal of Sound and Vibration

### **Article de conférence**

Marion Volpe, Renaud Côte et Sergio Bellizzi - Experimental methods for characterization of one port nonlinear acoustic systems : application to sound absorbers - Forum Acusticum 2020

Marion Volpe, Sergio Bellizzi et Renaud Côte - Characterization of a nonlinear sound absorber at low frequencies and high sound levels - ICSV 2019