

ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE ET CHIMIE-PHYSIQUE (ED-182)

Observatoire Astronomique de Strasbourg

THÈSE

présentée par:

Quentin GIRAUD

soutenue le : 01 décembre 2020

pour obtenir le grade de: **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité: Astrophysique

Corrections général-relativistes à l'émission radio et haute-énergie d'un pulsar

THÈSE dirigée par :

[M. PETRI Jérôme]

Maître de conférences, Observatoire astronomique de Strasbourg

RAPPORTEURS :

[M. DJANNATI-ATAÏ Arache]

Directeur de recherches, Laboratoire astroparticule et cosmologie

[Mme KOTERA Kumiko]

Chargée de recherches, Institut d'astrophysique de Paris

AUTRES MEMBRES DU JURY :

[M. CERUTTI Benoît]

Chargé de recherche, Institut de planétologie et d'astrophysique de Grenoble

[M. GUILLEMOT Lucas]

Astronome adjoint, Laboratoire de Physique et de Chimie de l'Environnement et de l'espace

[M. MOTCH Christian]

Directeur de recherches, Observatoire astronomique de Strasbourg

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Jérôme Pétri, non seulement pour m'avoir permis de réaliser cette thèse mais surtout pour l'aide qu'il m'a apportée et le temps qu'il m'a consacré depuis ma seconde année de Master jusqu'à aujourd'hui.

Je remercie Arache Djannati-Atai, Kumiko Kotera et Lucas Guillemot, pour avoir pris le temps de lire et de commenter mon manuscrit, ainsi que les autres membres du jury, Chistian Motch et Benoît Cerruti, pour leurs critiques constructives de mon travail.

Je me dois aussi de remercier mes collègues : Anu Kundu, pour les conseils qu'elle m'a donnés lors de mes débuts en tant que doctorant, et Ivan Tomczak, son "remplaçant", pour m'avoir sorti plus d'une fois d'une impasse où mes travaux m'avaient conduit.

Je souhaiterais également remercier Alexandra Elbakyan, dont les efforts pour rendre la recherche scientifique accessible par tous ne peuvent qu'être appréciés, surtout en des temps aussi troublés.

Un grand merci à ma famille pour son soutien indéfectible :
-à mes parents qui m'ont aidé, entre autre, à relire et corriger la première version de ce manuscrit et ce même si je doute qu'ils y aient compris quoique ce soit,
-à ma grand-mère, pour avoir été à mon écoute,
-et à ma sœur Emma, qui était là, et c'est déjà pas mal.

Merci également à Dilan et Renaud, pour leur appui moral (et à qui je dois toujours une tournée).

Et enfin merci à tout ceux que j'ai certainement oublié de nommer ici mais qui ont rendu cette thèse possible.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 1.1 | Étoile à neutrons | 1 |
| 1.1.1 | Origine des étoiles à neutrons | 1 |
| 1.1.2 | Structure interne d’une étoile à neutrons | 3 |
| 1.1.3 | Historique | 4 |
| 1.2 | Observations des pulsars | 7 |
| 1.2.1 | Les pulsars radio | 9 |
| 1.2.2 | Les pulsars gamma | 11 |
| 1.2.3 | Émission thermique de surface | 12 |
| 1.3 | Modèles de magnétosphère d’un pulsar | 14 |
| 1.3.1 | Modèle force-free | 18 |
| 1.3.2 | Modèle dissipatif | 18 |
| 1.3.3 | Mécanismes d’émission | 19 |
| 1.3.4 | Au-delà du cylindre lumière | 26 |
| 1.3.5 | Tentatives passées | 28 |
| 1.4 | Relativité générale | 28 |
| 1.4.1 | Métrie de Schwarzschild | 31 |
| 1.4.2 | Effets relativistes | 32 |
| 1.5 | Objectifs de la thèse | 39 |
| 2 | Émission thermique de surface | 40 |
| 2.1 | Trajectoire d’un photon | 40 |
| 2.1.1 | Dans le plan équatorial | 40 |
| 2.1.2 | Dans l’espace à 3D | 44 |
| 2.1.3 | Temps de vol d’un photon | 45 |
| 2.2 | Distorsion de l’image d’une étoile | 46 |
| 2.3 | Flux thermique des calottes polaires | 50 |
| 3 | Émission magnétosphérique | 56 |
| 3.1 | Géométrie de la magnétosphère | 56 |
| 3.1.1 | Structure du champ magnétique | 57 |
| 3.1.2 | Tracé des lignes de champ | 58 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.1.3 | Forme des calottes polaires | 60 |
| 3.2 | Temps de vol des photons et aberration | 61 |
| 3.2.1 | Effet d'aberration, de retard et de champ magnétique | 62 |
| 3.2.2 | Effet de la gravitation | 63 |
| 3.3 | Émission haute énergie | 64 |
| 3.3.1 | Projection des lignes de champ | 66 |
| 3.3.2 | Cavités minces | 70 |
| 3.3.3 | Cavités épaisses | 73 |
| 3.4 | Émission radio | 77 |
| 3.5 | Courbes de lumière multifréquences | 90 |
| 4 | Caractérisation fréquentielle de l'émission magnétosphérique | 98 |
| 4.1 | Un modèle multi-longueurs d'onde cohérent | 98 |
| 4.2 | Calcul du rayonnement de courbure | 99 |
| 4.2.1 | La courbure | 99 |
| 4.2.2 | L'émissivité | 101 |
| 4.2.3 | Luminosité des calottes polaires | 102 |
| 4.2.4 | Luminosité des cavités allongées | 103 |
| 4.2.5 | Test du calcul de la courbure | 104 |
| 4.3 | Émission haute énergie | 105 |
| 4.3.1 | Spectres d'une cavité mince | 105 |
| 4.3.2 | Spectres d'une cavité épaisse | 118 |
| 4.3.3 | Altitude d'émission et énergie du rayonnement | 125 |
| 4.4 | Émission radio | 131 |
| 5 | Conclusions et perspectives | 145 |
| 5.1 | Travail effectué | 145 |
| 5.2 | Conclusion | 146 |
| 5.3 | Les limites et développements possibles | 146 |
| | Bibliographie | 147 |
| | Appendices | 156 |
| A | Métrie de Schwarzschild | 156 |
| A.1 | Schwarzschild | 156 |
| A.1.1 | Trajectoire d'un photon dans le plan équatorial | 160 |
| B | Méthodes et outils numériques | 163 |
| B.1 | Méthode d'intégration | 163 |
| B.2 | Recherche de zéro par bisection | 164 |
| B.3 | Résolution de polynôme du troisième degré | 165 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Naissance d'une étoile à neutrons | 3 |
| 1.2 | Structure interne d'une étoile à neutrons | 4 |
| 1.3 | Activité radio du pulsar PSR B1919+21 | 5 |
| 1.4 | Activité gamma du pulsar de Vela | 7 |
| 1.5 | Diagramme $P-\dot{P}$ | 8 |
| 1.6 | Carte en coordonnées galactiques des pulsars | 9 |
| 1.7 | Spectre radio de PSR B0834+06 | 10 |
| 1.8 | Distribution spectrale en énergie gamma du pulsar de Vela | 11 |
| 1.9 | Activité gamma de PSR J0659+1414 | 12 |
| 1.10 | Formation de points chauds à la surface d'un pulsar accrétant | 13 |
| 1.11 | Magnétosphère d'un pulsar | 15 |
| 1.12 | Création de paires dans la cavité polaire | 16 |
| 1.13 | Facteur de Lorentz des particules dans la magnétosphère du pulsar | 17 |
| 1.14 | Diffusion Compton | 20 |
| 1.15 | Rayonnement synchrotron | 22 |
| 1.16 | Rayonnement de courbure | 25 |
| 1.17 | Spectre de courbure | 26 |
| 1.18 | Nébuleuse de vents de pulsar à l'intérieur d'un rémanent de supernova | 27 |
| 1.19 | <i>Striped winds</i> | 28 |
| 1.20 | Détecteur d'ondes gravitationnelles | 33 |
| 1.21 | Image radio de M87* | 35 |
| 1.22 | Effet de lentille gravitationnelle | 37 |
| 1.23 | Délai Shapiro dans un système binaire composé d'un pulsar | 38 |
| 2.1 | Paramètre d'impact d'un photon | 41 |
| 2.2 | Trajectoires d'un photon autour d'un trou noir de Schwarzschild | 43 |
| 2.3 | Points d'émission à la surface de l'étoile à neutrons | 46 |
| 2.4 | Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons pour une inclinaison nulle | 48 |
| 2.5 | Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons pour une inclinaison de 30° | 48 |
| 2.6 | Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons pour une inclinaison de 60° | 49 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.7 | Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons pour une inclinaison de 90° | 49 |
| 2.8 | Géométrie utilisée | 51 |
| 2.9 | Flux thermique reçu avec $\chi = 45^\circ$ | 53 |
| 2.10 | Flux thermique reçu avec $\chi = 90^\circ$ | 53 |
| 2.11 | Flux reçu pour $\chi = 45^\circ$ avec temps de vol | 54 |
| 2.12 | Flux reçu pour $\chi = 90^\circ$ avec temps de vol | 54 |
| 2.13 | Flux reçu pour $\zeta = \chi = 45^\circ$ | 55 |
| 2.14 | Flux reçu dans l'approximation de Beloborodov | 55 |
| 3.1 | Lignes de champ magnétique pour une inclinaison $\chi = 90^\circ$ de l'axe magnétique | 60 |
| 3.2 | Forme des calottes polaires dans la métrique de Minkowski et dans la métrique de Schwarzschild | 61 |
| 3.3 | Tracé de la carte des points d'impact | 65 |
| 3.4 | Projection des lignes de champ magnétique dans un espace-temps plat avec temps de vol et aberration | 68 |
| 3.5 | Projection des lignes de champ magnétique dans la métrique de Schwarzschild avec temps de vol et aberration | 68 |
| 3.6 | Projection des lignes de champ magnétique dans la métrique de Schwarzschild avec temps de référence | 69 |
| 3.7 | Projection des lignes de champ magnétique dans la métrique de Schwarzschild avec comparaison des temps de vol | 69 |
| 3.8 | Cartes d'émission haute énergie dans un espace-temps plat | 71 |
| 3.9 | Cartes d'émission haute énergie dans la métrique de Schwarzschild | 72 |
| 3.10 | Cartes d'émission haute énergie dans un espace-temps plat pour une zone d'émission épaisse | 74 |
| 3.11 | Cartes d'émission haute énergie dans la métrique de Schwarzschild pour une zone d'émission épaisse | 75 |
| 3.12 | Points d'émission radio dans la calotte polaire | 78 |
| 3.13 | Cartes d'émission radio dans un espace-temps plat | 80 |
| 3.14 | Cartes d'émission radio dans la métrique de Schwarzschild | 81 |
| 3.15 | Points d'émission radio dans la calotte polaire avec une distribution aléatoire des points | 82 |
| 3.16 | Cartes d'émission radio dans un espace-temps plat avec une distribution aléatoire des points d'émission | 83 |
| 3.17 | Cartes d'émission radio dans la métrique de Schwarzschild avec une distribution aléatoire des points d'émission | 84 |
| 3.18 | Cartes d'émission radio pour une zone d'émission entre 2 et $3 R_\star$ dans un espace-temps plat | 86 |
| 3.19 | Cartes d'émission radio pour une zone d'émission entre 2 et $3 R_\star$ dans la métrique de Schwarzschild | 87 |
| 3.20 | Cartes d'émission radio pour une zone d'émission entre 4 et $5 R_\star$ dans un espace-temps plat | 88 |
| 3.21 | Cartes d'émission radio pour une zone d'émission entre 4 et $5 R_\star$ dans la métrique de Schwarzschild | 89 |
| 3.22 | Courbes de lumière pour $\zeta = \chi = 90^\circ$ | 91 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.23 | Courbes de lumière pour $\zeta = \chi = 60^\circ$ | 91 |
| 3.24 | Courbes de lumière pour $\chi = 45^\circ$ et $\zeta = 50^\circ$ | 92 |
| 3.25 | Courbes de lumière pour $\chi = 30^\circ$ et $\zeta = 60^\circ$ | 92 |
| 3.26 | Courbes de lumière pour $\zeta = \chi = 90^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie épaisse | 94 |
| 3.27 | Courbes de lumière pour $\zeta = \chi = 60^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie épaisse | 94 |
| 3.28 | Courbes de lumière pour $\chi = 45^\circ$ et $\zeta = 50^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie épaisse | 95 |
| 3.29 | Courbes de lumière pour $\chi = 30^\circ$ et $\zeta = 60^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie épaisse | 95 |
| 3.30 | Décalage entre la réception de deux photons émis à deux altitudes différentes | 96 |
| 4.1 | Calcul du rayon de courbure d'une hélice | 105 |
| 4.2 | Carte d'émission montrant l'énergie des photons pour $\chi = 60^\circ$ | 106 |
| 4.3 | Spectres de l'émission haute énergie (sans la puissance irradiée) . . . | 107 |
| 4.4 | Spectres intégrés de l'émission haute énergie (sans la puissance ir- radiée) pour $\chi = 60^\circ$ | 108 |
| 4.5 | Spectres du rayonnement haute énergie | 109 |
| 4.6 | Spectres intégrés de l'émission haute énergie pour $\chi = 60^\circ$ | 110 |
| 4.7 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0 et 0.1 et entre 0.1 et 0.2 | 110 |
| 4.8 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.2 et 0.3 et entre 0.3 et 0.4 | 111 |
| 4.9 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.4 et 0.5 et entre 0.5 et 0.6 | 111 |
| 4.10 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.6 et 0.7 et entre 0.7 et 0.8 | 111 |
| 4.11 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.8 et 0.9 et entre 0.9 et 1 | 112 |
| 4.12 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 1 et 3.16 GeV . | 114 |
| 4.13 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 3.16 et 10 GeV | 115 |
| 4.14 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 10 et 31.6 GeV | 116 |
| 4.15 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 31.6 et 100 GeV | 117 |
| 4.16 | Spectre du rayonnement haute énergie pour une zone d'émission épaisse | 118 |
| 4.17 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 1 et 3.16 GeV avec une zone d'émission épaisse | 119 |
| 4.18 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 3.16 et 10 GeV avec une zone d'émission épaisse | 120 |
| 4.19 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 10 et 31.6 GeV avec une zone d'émission épaisse | 121 |
| 4.20 | Cartes d'émission pour une énergie des photons entre 31.6 et 100 GeV avec une zone d'émission épaisse | 122 |
| 4.21 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0 et 0.1 et entre 0.1 et 0.2 pour une zone d'émission épaisse | 123 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.22 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.2 et 0.3 et entre 0.3 et 0.4 pour une zone d'émission épaisse | 123 |
| 4.23 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.4 et 0.5 et entre 0.5 et 0.6 pour une zone d'émission épaisse | 124 |
| 4.24 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.6 et 0.7 et entre 0.7 et 0.8 pour une zone d'émission épaisse | 124 |
| 4.25 | Spectres haute énergie pour un intervalle de phase entre 0.8 et 0.9 et entre 0.9 et 1 pour une zone d'émission épaisse | 124 |
| 4.26 | Courbes de lumière haute énergies pour différents intervalles d'énergie | 125 |
| 4.27 | Altitude d'émission du rayonnement haute énergie pour $\chi = 30^\circ$. . . | 126 |
| 4.28 | Altitude d'émission du rayonnement haute énergie pour $\chi = 60^\circ$. . . | 127 |
| 4.29 | Altitude d'émission du rayonnement haute énergie pour $\chi = 90^\circ$. . . | 128 |
| 4.30 | Points d'émission du rayonnement haute énergie | 130 |
| 4.31 | Rayon de courbure des dernières lignes de champs magnétiques | 130 |
| 4.32 | Facteur Doppler dans la magnétosphère | 131 |
| 4.33 | Spectre du rayonnement radio | 132 |
| 4.34 | Spectre du rayonnement radio émis au-dessus de l'étoile à neutrons . | 133 |
| 4.35 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 30^\circ$ et une zone d'émission située entre 2 et 3 R_\star | 135 |
| 4.36 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 60^\circ$ et une zone d'émission située entre 2 et 3 R_\star | 136 |
| 4.37 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 90^\circ$ et une zone d'émission située entre 2 et 3 R_\star | 137 |
| 4.38 | Cartes des rayons de courbure pour $\chi = 30^\circ$ | 139 |
| 4.39 | Cartes des rayons de courbure pour $\chi = 60^\circ$ | 139 |
| 4.40 | Cartes des rayons de courbure pour $\chi = 60^\circ$ | 139 |
| 4.41 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 30^\circ$ et une zone d'émission située entre 4 et 5 R_\star | 141 |
| 4.42 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 60^\circ$ et une zone d'émission située entre 4 et 5 R_\star | 142 |
| 4.43 | Cartes d'émission radio pour différentes fréquences avec $\chi = 30^\circ$ et une zone d'émission située entre 4 et 5 R_\star | 143 |
| 4.44 | Courbes de lumière radio pour différentes fréquences | 144 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Intensité du rayonnement haute énergie | 73 |
| 3.2 | Intensité du rayonnement haute énergie pour une zone d'émission avec une épaisseur | 76 |
| 3.3 | Intensité du rayonnement radio | 79 |
| 3.4 | Intensité du rayonnement radio avec une distribution aléatoire des points d'émission | 82 |
| 3.5 | Intensité rayonnement radio pour une zone d'émission entre 2 et 3 R_\star | 90 |
| 3.6 | Intensité rayonnement radio pour une zone d'émission entre 4 et 5 R_\star | 90 |

Chapitre 1

Introduction

Les étoiles à neutrons furent prédites bien avant leur découverte en tant que pulsars. Elles se manifestent sous différents régimes (accrétion, rotation, refroidissement thermique...) mais ne furent pas reconnues en tant qu'étoiles à neutrons immédiatement après leur observations par les chercheurs les ayant détectées. Dans ce chapitre on va présenter ce que sont ces étoiles à neutrons et retracer l'évolution de nos connaissances à leur sujet.

1.1 Étoile à neutrons

1.1.1 Origine des étoiles à neutrons

La destinée des étoiles de la séquence principale, dont l'énergie provient de la fusion de noyaux d'hydrogène en noyaux d'hélium, soit par le cycle proton-proton, soit par le cycle carbone-azote-oxygène (CNO), dépend en grande partie de leur masse.

Les naines rouges, qui ont une masse inférieure à la moitié de la masse du Soleil, pourraient ainsi continuer à fusionner l'hydrogène dans leur cœur pendant des milliards d'années (10^{12} ans). Pour comparaison l'âge estimé de l'Univers n'est que de 13.7 milliards d'années. Les étoiles de masse similaire à celle du Soleil ont quant à elles une "durée de vie" de l'ordre de la dizaine de milliards d'années, le Soleil étant lui-même âgé de 4.6 milliards d'années, celui-ci devrait donc continuer à briller encore au moins 5 milliards d'années. Ces deux types d'étoiles, lorsqu'elles ne disposent plus de suffisamment d'hydrogène pour continuer à produire de l'hélium, commencent à fusionner des éléments chimiques de plus en plus lourds jusqu'à l'obtention du carbone avant que leurs couches externes ne soient éjectées pour révéler au centre de ce qui fut l'étoile son cœur effondré en une naine blanche.

Dans une étoile de la séquence principale, la pression du rayonnement libéré par les réactions de fusion thermonucléaire contrebalance la gravité de l'étoile et l'empêche de s'effondrer sous sa propre masse. Une naine blanche est un astre si dense que le principe d'exclusion de Pauli s'applique entre les électrons orbitant autour de deux noyaux atomiques générant une force contrebalançant la gravité

de l'étoile que l'on appelle la pression de dégénérescence des électrons. Ces naines blanches sont des astres denses et compacts, d'une taille comparable à celle de la Terre, une dizaine de milliers de kilomètre de diamètre, mais d'une masse de l'ordre de celle du Soleil et majoritairement composées de carbone, en faisant des sortes de "diamants" cosmiques.

Certaines étoiles connaissent cependant une évolution bien différente, notamment les étoiles de la séquence principale ayant une masse au moins huit fois supérieure à celle du Soleil. Leur durée de vie est beaucoup plus courte, ces étoiles ont généralement fini de fusionner l'hydrogène seulement quelques millions d'années après leur formation. Comme leurs congénères moins massives, elles fusionnent alors des éléments de plus en plus lourds à la différence qu'elles continuent de fusionner ces éléments bien au-delà du carbone, jusqu'au noyau le plus stable, celui du fer ^{56}Fe . L'étoile ne pouvant fusionner ces noyaux de fer, du fait de leur stabilité, elle ne génère plus assez de pression thermique pour contrebalancer sa propre gravité, le cœur de l'étoile s'effondre alors sur lui même pendant que les couches externes sont expulsées lors d'un événement explosif appelé supernova, phénomène illustré dans la Fig. 1.1, et au cours duquel des éléments plus lourds que le fer sont formés, par capture neutronique puis désintégration radioactive par exemple.

Si la masse restante du cœur est supérieure à une masse limite, autour de 2 à 3 M_{\odot} , l'effondrement du cœur continue jusqu'à ce qu'il disparaisse derrière un horizon des événements, devenant alors un trou noir.

Cependant, si la masse du cœur est inférieure à cette limite, il se stabilise sous la forme d'une étoile à neutrons : les électrons sont capturés par les protons des noyaux atomiques qui se convertissent alors en neutrons dont la pression de dégénérescence, supérieure de plusieurs ordres de grandeur à celle des électrons, stoppe l'effondrement du cœur, formant ainsi un objet compact très dense d'un rayon d'une dizaine de km et d'une densité extrême de 10^{18}kg/m^3 en moyenne, comparable voire supérieure à celle d'un noyau atomique, soit 5 milliards de tonnes pour un volume d'une cuillère à café. Un tel astre peut également se former par accréation de matière sur une naine blanche évoluant dans une binaire jusqu'à ce que celle-ci dépasse la masse limite de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1931), d'une valeur approximative de $1.44 M_{\odot}$ (mais qui peut varier légèrement en fonction de la composition chimique de la naine blanche). Au-delà de cette masse limite, la pression de dégénérescence des électrons n'est plus suffisante pour contrebalancer la gravité, et la naine blanche s'effondre sur elle-même jusqu'à sa stabilisation par la pression de dégénérescence des neutrons fraîchement formés par réaction β -inverse (soit la capture d'un neutrino par un proton donnant un neutron et un positon) devenant ainsi une étoile à neutrons. On parle alors d'effondrement induit par accréation.

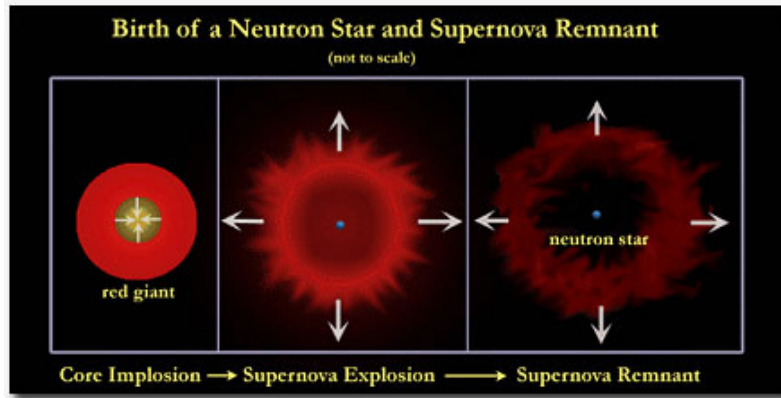


FIGURE 1.1 – Naissance d’une étoile à neutrons au cours de l’explosion d’une supernova dont l’éjecta reste visible plusieurs milliers d’années (S. Lee, CXC, NASA).

1.1.2 Structure interne d’une étoile à neutrons

L’extrême densité de ces étoiles à neutrons en font de fascinants objets d’étude notamment dans les domaines de la physique de la matière condensée, de la physique nucléaire et des particules et de la mécanique quantique en général. Ces astres sont constitués de la matière la plus dense connue dans l’Univers, impossible à reproduire en laboratoire, au point que des phénomènes d’ordre quantique deviennent visible à l’échelle macroscopique, comme la pression de dégénérescence des neutrons dont on avait parlé plus tôt et qui empêche l’étoile de s’effondrer sous sa propre gravité. Il existe de nombreuses spéculations sur les états de la matière à l’intérieur d’une étoile à neutrons, notamment concernant leur cœur où, du fait des forces de pression titanesque qui y règnent, l’on pourrait trouver de la matière et des particules exotiques par exemple des hypérons (baryon composé d’au moins un quark étrange) voire de la matière étrange (une forme de matière composée uniquement de quarks u , d et s qui serait plus stable que la matière baryonique). Il est cependant généralement admis que les couches externes des étoiles à neutrons sont quant à elles composées de matière plus ordinaire, notamment la fine surface qui serait majoritairement composée de fer. La croûte située juste en dessous et qui fait environ 1 kilomètre d’épaisseur est composée d’électrons libres et de matière baryonique ionisée par la pression qui s’enrichit en neutrons au fur et à mesure que l’on s’enfonce dans les profondeurs de l’étoile. On rencontre ainsi d’abord des ions aux noyaux enrichis en neutrons puis en s’enfonçant dans les parties les plus internes de la croûte ces ions et électrons libres baignent dans un superfluide de neutrons libres. Sous cette croûte la densité de la matière est au moins égale à celle d’un noyau atomique. On considère que de cette région jusqu’à son cœur l’étoile est constituée d’un superfluide composé essentiellement de neutrons et de quelques protons et électrons. La Fig. 1.2 représente cette structure interne d’une étoile à neutrons. Notons que les valeurs indiquées et les couches identifiées peuvent varier en fonction de l’équation d’état de la matière, qui reste incertaine dans le régime de pression et densité des étoiles à neutrons.

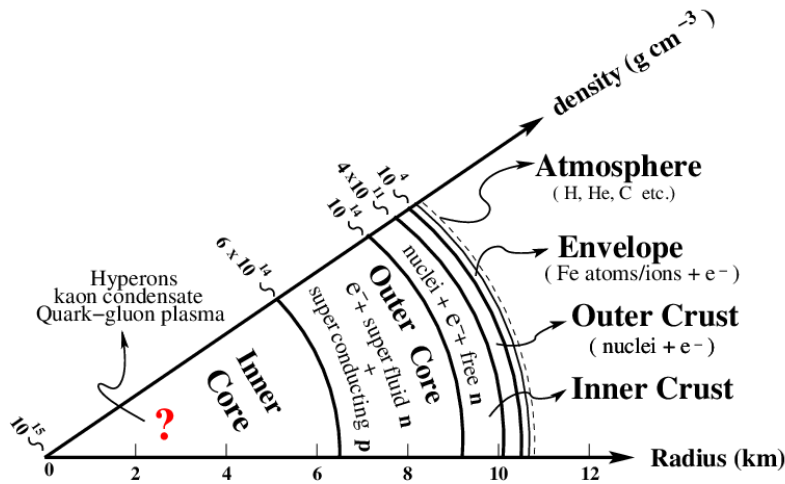


FIGURE 1.2 – Structure interne d'une étoile à neutrons, montrant les différentes couches concentriques, de densité croissant de la surface vers le centre. La composition centrale reste incertaine. Image tirée de RATHER et al., 2018.

1.1.3 Historique

Bien que communément attribuée à Lev Landau, l'existence des étoiles à neutrons a en réalité été théorisée pour la première fois par Walter Baade et Fritz Zwicky dans un article de 1934 (BAADE et ZWICKY, 1934a) où ils supposaient qu'une supernova, terme qu'ils avaient eux-mêmes introduit dans l'article (BAADE et ZWICKY, 1934b), était une phase de transition au cours de laquelle l'étoile se transformait en un astre extrêmement dense car principalement composé de neutrons.

La première observation confirmée d'un tel astre ne survint que trois décennies plus tard. En 1967, Jocelyn Bell découvrit, à l'aide du radiotélescope de l'observatoire de Mullard, en Angleterre, une source de signaux radio dont l'activité présentait des séries de pics, ou "pulses", que l'on peut voir dans la Fig. 1.3, d'une durée d'environ 0.3 seconde revenant toutes les 1.337 seconde et ce avec une précision de l'ordre du dix millionième de seconde (HEWISH et al., 1968). L'extrême régularité de cette activité fit même soupçonner, pendant un temps, une origine artificielle de ce signal dont la source fut officiellement baptisée LGM-1 pour *Little Green Men*. Les caractéristiques inhabituelles de ce "pulsar" (contraction de *pulsating star* soit "étoile pulsante") sont tout à fait explicables si l'on considère que la périodicité de ses pulses est due à la rotation d'un corps sur lui-même, la source de l'émission radio se trouvant alors à la surface (ou dans l'atmosphère) de ce corps. Il faudrait cependant que l'astre en question possède une importante vitesse de rotation, de l'ordre de la période à laquelle sont observées les pulses, mais pour que cette vitesse de rotation reste réaliste, donc au moins inférieure à la vitesse de la lumière c , cet astre devrait également avoir une taille réduite.

L'hypothèse que l'astre en question puisse être une naine blanche fut avancée mais au final seul une étoile à neutrons correspondait aux dimensions requises déterminées par les observations de ce pulsar et possédait une densité suffisante pour mainte-

nir son intégrité malgré la force centrifuge induite par la vitesse de rotation élevée. La section 1.2 détaille comment cette émission radio et la pulsation associée sont produites.

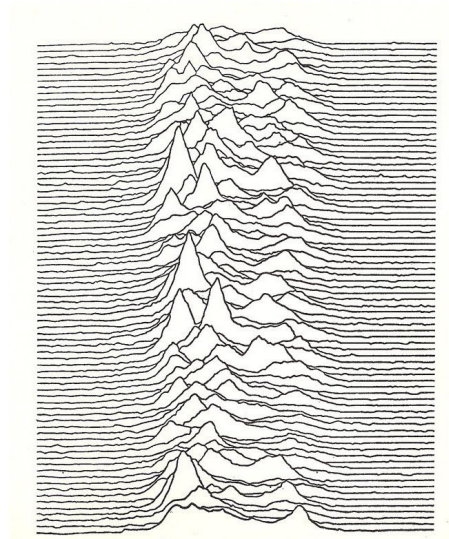


FIGURE 1.3 – Représentation de l’activité radio au cours de plusieurs périodes successives du premier pulsar découvert (PSR B1919+21) tirée de MITTON, 1977.

Moins d’un an après cette découverte majeure en astrophysique, un astre similaire fut observé au sein de la nébuleuse du Crabe (STAEIN et REIFENSTEIN, 1968), le rémanent d’une supernova qui fut visible depuis la Terre en 1054 et mentionnée par les astronomes chinois de l’époque. Un autre pulsar fut découvert la même année au sein d’un autre rémanent de supernova : le pulsar de Vela (LARGE et al., 1968). Ces observations ont confirmé qu’une étoile à neutrons est bel et bien le vestige du cœur d’une étoile massive.

En 1974, Russell Hulse et Joseph Taylor découvrirent le premier pulsar binaire, en orbite autour d’une autre étoile qui est elle aussi une étoile à neutrons (HULSE et TAYLOR, 1975). Cette découverte permis notamment de vérifier une des prédictions de la relativité générale d’Einstein : la décroissance de la période orbitale par l’émission d’ondes gravitationnelles. Si les ondes gravitationnelles émises par ce système binaire n’ont toujours pas été détectées, faute d’une sensibilité suffisante des détecteurs d’ondes gravitationnelles, la décroissance orbitale observée correspondait bien à celle prédite par la théorie de la relativité générale (WEISBERG et TAYLOR, 2005). Ce fut donc une preuve observationnelle indirecte de l’existence des ondes gravitationnelles.

En 1982 est découvert le premier pulsar milliseconde : un pulsar dont la période de rotation, et donc des pulses observés, est inférieure à 10 millisecondes (BACKER et al., 1982). Il est aujourd’hui théorisé que ces pulsars ont connu une accélération de leur vitesse de rotation par transfert de moment cinétique en accrétant de la matière d’une étoile compagne, d’où leur appellation de pulsar recyclé.

En 1992, Aleksander Wolszczan découvrit les premières exoplanètes en étudiant les perturbations qu’elles induisent sur les pulses du pulsar autour duquel elles or-

bitent (WOLSZCZAN et FRAIL, 1992). Toutes ces découvertes majeures en astrophysique sont le résultat d'un chronométrage précis et régulier des pulsars, une technique de plus en plus sophistiquée qui porte ses fruits dans d'autres domaines de l'astronomie (détermination de la densité et du champ magnétique galactique, découverte de planètes).

Toujours en 1992, Robert Duncan, Christopher Thompson et Bohdan Paczynski émirent l'hypothèse que certaines émissions répétitives de rayons gamma étaient dus à un autre type d'étoile à neutrons possédant un champ magnétique encore plus intense que celui de leurs congénères identifiés comme des pulsars : on les appelle des magnétars avec des champs supérieurs à 10^9 T (DUNCAN et THOMPSON, 1992).

En 2006, à partir des données récupérées par le *Parkes multibeam pulsar survey*, un nouveau type de pulsar fut découvert : les *Rotating radio transients* ou RRAT (McLAUGHLIN et al., 2006), les transitoires radio en rotation. Ceux-ci possèdent une émission radio très irrégulière avec des intervalles silencieux pouvant aller jusqu'à plusieurs heures entre deux séries d'émissions. Il a été prouvé que pour certains RRAT, ces irrégularités étaient purement illusoire et causées par une sensibilité trop faible des radiotélescopes utilisés, pour d'autres elles pourraient être causées par une ceinture d'astéroïdes entourant le pulsar ou simplement par le ralentissement de la rotation du pulsar avec le temps (voir Fig. 1.5) ce qui ferait à terme disparaître son émission radio.

Le 17 août 2017 la fusion de deux étoiles à neutrons fut d'abord détectée par les observatoires d'ondes gravitationnelles LIGO et Virgo puis par des techniques d'observations plus "classiques" du rayonnement électromagnétique (ABBOTT et al., 2017b). Une tel évènement se produit lorsque deux étoiles à neutrons dans un système binaire tombent l'une sur l'autre tout en tournant l'une autour de l'autre, la période orbitale du système diminuant par émission d'ondes gravitationnelles, jusqu'au contact entre les deux étoiles et la collision finale où les deux étoiles explosent en kilonova, libérant une importante quantité de rayonnement à travers tout le spectre électromagnétique ainsi que des éléments lourds synthétisés au cours de cette explosion. En fait ce genre de fusion d'étoiles à neutrons serait à l'origine de la plupart des éléments plus lourds que le fer présents dans l'Univers. Cette découverte permet notamment de confirmer que les ondes gravitationnelles se déplacent à la vitesse de la lumière modulo une très faible incertitude (ABBOTT et al., 2017a).

Pour expliquer de telles observations, on a dû établir des modèles expliquant l'origine de l'émission radio et haute énergie de ces pulsars que l'on explorera dans les sections suivantes.

1.2 Observations des pulsars

Bien que la formation d'une étoile à neutrons est un phénomène explosif très violent, celle-ci conserve toutefois certaines propriétés de l'étoile originelle, notamment son moment cinétique et son flux magnétique, entraînant à cause de sa taille réduite par l'effondrement, un champ magnétique et une vitesse de rotation élevés. Ainsi une étoile à neutrons tourne sur elle-même en à peu près une seconde et son champ magnétique, renforcé par l'effet dynamo dû à la rotation de l'étoile, dépasse le milliard de Tesla, voire la centaine de milliards de Tesla pour les magnétars. Ce serait de ce champ magnétique intense que proviendrait le rayonnement radio et haute énergie des pulsars, le champ magnétique et l'axe de rotation étant par ailleurs rarement alignés, c'est l'inclinaison de cet axe magnétique qui explique les fameuses pulsations détectées dans le rayonnement émis par ces astres.

De nos jours plus de 2000 pulsars ont été identifiés, en général observés grâce à leur émission radio, mais leur émission haute énergie, particulièrement dans le domaine des rayons γ (autour du GeV), a également pu être observée (ABDO et al., 2013; ALIU et al., 2008) grâce à des instruments comme le *Large Array Telescope* embarqué sur le satellite Fermi (Fermi/LAT) ou le *Major Atmospheric gamma-ray Imaging Cherenkov Telescop* (MAGIC). Comme pour les pulsars émettant en radio, l'émission haute énergie va présenter des pulsations que l'on peut le voir sur la Fig. 1.4 qui représente l'activité dans le domaine des rayons gamma du pulsar de Vela observé par FERMI/LAT sur plusieurs milliers de périodes (une période représentant une rotation du pulsar sur lui-même) ramené à une émission sur deux périodes du pulsar.

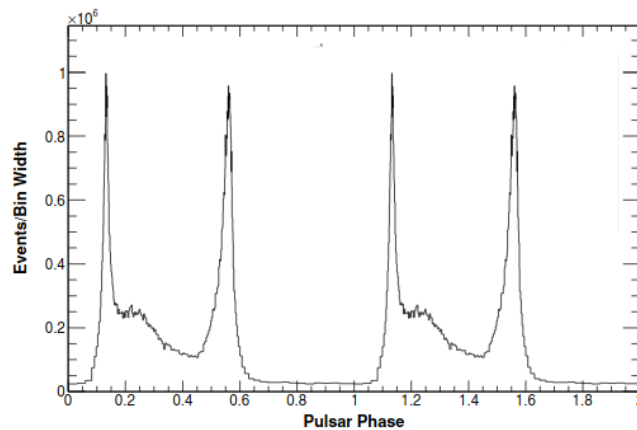


FIGURE 1.4 – Courbes de lumière dans le domaine des rayons gamma (de 20 MeV à 300 GeV) du pulsar de Vela. Image tirée de ABDO et al., 2010.

Ces observations (surtout dans le domaine radio) ont permis, comme montré en Fig. 1.5, de déterminer non seulement la période P de rotation des pulsars mais aussi la variation de cette période au cours du temps notée \dot{P} . Ces caractéristiques sont importantes car elles permettent de se donner une idée de l'âge et de l'intensité du champ magnétique du pulsar.

En effet, il est généralement admis qu'un pulsar voit sa vitesse de rotation diminuer par un phénomène de freinage magnétique, l'âge d'un pulsar sera alors égal à :

$$\tau = \frac{P}{2\dot{P}} \quad (1.1)$$

(si d'autres phénomènes n'ont pas modifié la période du pulsar comme l'accrétion de matière d'une étoile compagne pour un pulsar recyclé) et son champ magnétique sera proportionnel à $\sqrt{P\dot{P}}$ (JOHNSTON et KARASTERGIOU, 2017) :

$$B = \sqrt{\frac{3\mu_0 c^3 I}{32\pi^3 R_\star^6 \sin^2 \chi}} P \dot{P}. \quad (1.2)$$

Avec I le moment cinétique de l'étoile, χ l'angle entre l'axe de rotation et l'axe magnétique de l'étoile à neutrons et R_\star le rayon de l'étoile. Ainsi les lignes en pointillés de la Fig. 1.5 délimitent en bleu l'âge des pulsars, en vert leur champ magnétique obtenu par la formule de freinage magnétique dans le vide de l'équation (1.2) et en rouge la variation de leur énergie cinétique, celle-ci dépendant également de P et \dot{P} et du moment d'inertie I du pulsar :

$$\dot{E}_c = -I \Omega \dot{\Omega} = -4\pi^2 I \frac{\dot{P}}{P^3}. \quad (1.3)$$

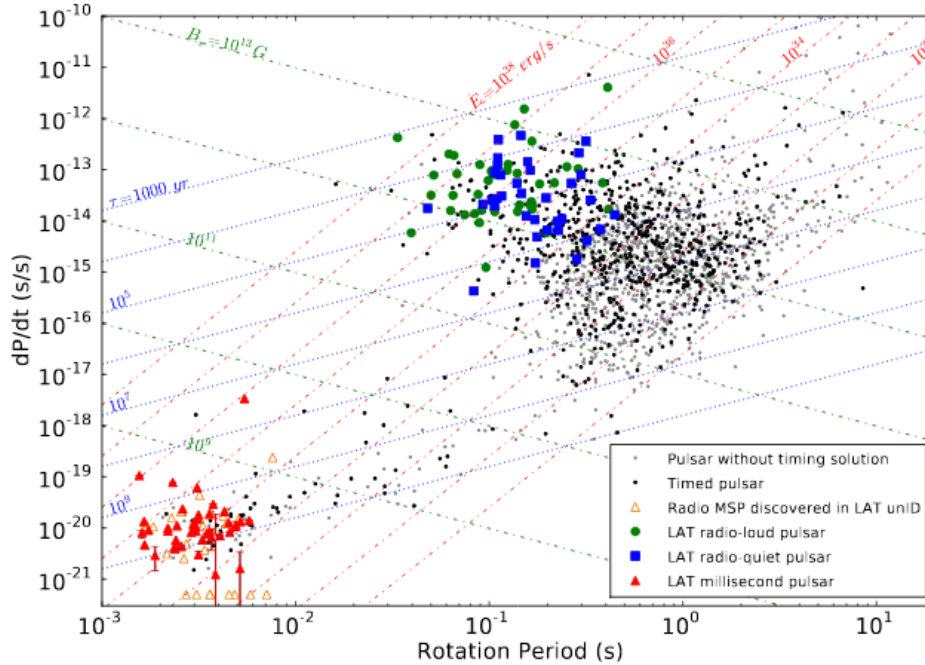


FIGURE 1.5 – Répartition des pulsars, notamment ceux observés par Fermi/LAT, en fonction de leur période (en abscisse) et de la variation de leur période au cours du temps (en ordonnée). Image tirée de ABDO et al., 2013.

Sur la Fig. 1.6, on remarque que les pulsars les plus jeunes sont concentrés dans le plan galactique tandis que les pulsars plus anciens, notamment les pulsars millisecondes, se trouvent généralement en dehors de ce plan. Cela à cause du biais d'observation : ces derniers étant plus proches de nous, d'où le fait qu'ils apparaissent plus âgés que des pulsars éloignés, mais aussi parce que ces pulsars plus âgés ont eu plus de temps pour s'éloigner du plan galactique. Les pulsars se forment dans le plan galactique avant de quitter celui-ci avec une vitesse de déplacement souvent élevée pouvant atteindre les 1000 km/s voire plus pour une minorité. Cette vitesse s'expliquerait par des asymétries lors de l'effondrement du cœur de l'étoile (BURROWS et HAYES, 1996) dû notamment à la distribution asymétrique du flux de neutrinos au cours de la supernova qui a formé l'étoile à neutrons. Cette vitesse de déplacement élevée pourrait également être d'origine purement électromagnétique, causée par un champ magnétique du pulsar décentré qui provoquerait une asymétrie dans son émission et donc une propulsion par pression de radiation (HARRISON et TADEMARU, 1975 ; LAI et al., 2001). Quelle que soit la nature l'étoile à neutrons

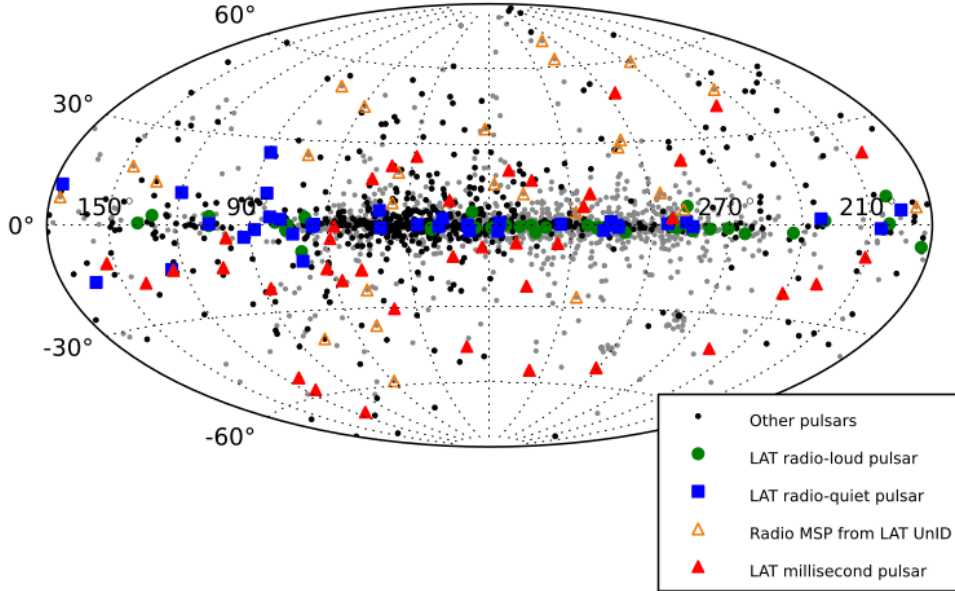


FIGURE 1.6 – Répartition spatiale des pulsars de la Fig. 1.5 selon les coordonnées galactiques. Image tirée de ABDO et al., 2013.

considérée, pulsar, magnétar ou simplement étoile à neutrons isolée se refroidissant, elles émettent essentiellement dans le domaine radio, des rayons X et des rayons gamma. Les caractéristiques de ces longueurs d'onde sont succinctement passées en revue dans les paragraphes qui suivent.

1.2.1 Les pulsars radio

D'après le *Australia Telescope National Facility (ATNF) Pulsar Catalogue* (MANCHESTER et al., 2005), 2720 pulsars émettent des pulses dans le domaine radio, parmi ceux-ci, au moins 316 ont été identifiés comme membre d'un système binaire, c'est à

dire orbitant autour d'au moins un autre corps céleste (qui peut être une autre étoile à neutrons, une naine blanche ou une étoile de la séquence principale plus ou moins évoluée). Le spectre en radio de ces pulsars ressemblent généralement à l'exemple présenté en Fig. 1.7 où les points sont les valeurs observées de ce spectre (avec une barre d'erreur observationnelle) par les radiotélescopes de l'institut Lebedev et la ligne continue est une tentative de modélisation de ce spectre, initialement proposée dans MALOFEEV et MALOV, 1980, par le produit d'une loi de puissance et d'une fonction exponentielle s'écrivant ainsi :

$$E(\nu) = \alpha \nu^{-\Gamma} e^{-\tau(\nu)} \quad (1.4)$$

avec ν la fréquence du rayonnement observé, $E(\nu)$ l'énergie totale reçue à une fréquence ν (donc $h\nu$ multiplié par le nombre de photons ayant une énergie $h\nu$), Γ l'indice spectral et α un paramètre permettant d'ajuster la courbe aux données récoltées. La fonction $\tau(\nu)$ s'exprime ainsi :

$$\tau(\nu) = \left(\frac{\nu_{max}}{\nu} \right)^{2-5\delta} \frac{\Gamma}{2-5\delta} \quad (1.5)$$

$E(\nu)$ étant maximale pour $\nu = \nu_{max}$ et δ un paramètre décrivant la dépendance de la fréquence du rayonnement à son altitude d'émission : celui-ci est compris entre 0 et 0.4. Ces spectres vont typiquement présenter, avant ν_{max} , une montée très abrupte et après une descente bien plus lente.

Dans l'exemple de la Fig. 1.7, le pulsar PSR B0834+06 montre un raidissement brutal du spectre aux alentours de 100 MHz. L'émission radio a été déterminante pour la découverte d'une fraction importante de la population des pulsars. Paradoxalement, l'énergie rayonnée en radio ne représente qu'une infime partie de l'énergie cinétique disponible du fait de la rotation de l'étoile, de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-6} .

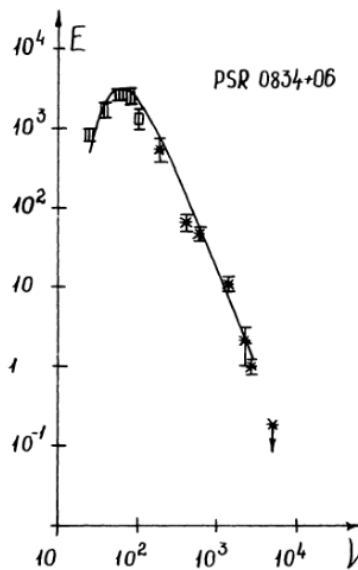


FIGURE 1.7 – Spectre radio du pulsar PSR B0834+06, image tiré de IZVEKOVA et al., 1981 avec ν la fréquence en MHz.

1.2.2 Les pulsars gamma

Parmi les sources de rayons gamma observées par Fermi/LAT, qui opèrent dans la bande 100-MeV-100 GeV, 239 ont été identifiées comme étant des pulsars (ABDOLLAHI et al., 2020). De ces observations ont pu être extraits les spectres de certains de ces pulsars, comme celui du pulsar de Vela, qui présente un spectre assez typique de l'émission gamma des pulsars, présenté dans la Fig. 1.8 où les points représentent les données obtenues par l'observation de ce pulsar et la ligne continue une modélisation du spectre à partir de ces données.

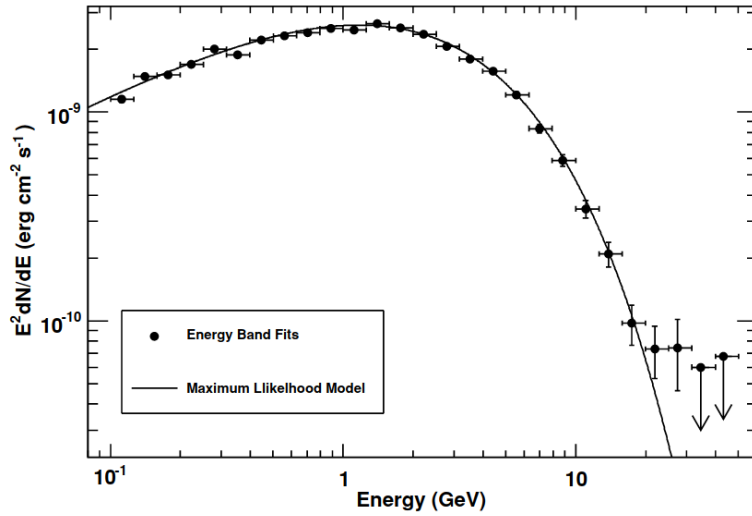


FIGURE 1.8 – Distribution spectrale en énergie du pulsar Vela (moyenné sur plusieurs milliers de phases) dans le domaine des rayons gamma, image tiré de ABDOLLAHI et al., 2010

Cette modélisation a été effectuée dans ABDOLLAHI et al., 2010 en utilisant une formule similaire à celle de l'équation (1.4) modélisant un spectre radio :

$$\frac{dN(E)}{dE} = \alpha E^\Gamma e^{-\left(\frac{E}{E_c}\right)^\beta} \quad (1.6)$$

avec E l'énergie d'un photon ($E = h\nu$), $\frac{dN(E)}{dE}$ le nombre de photons d'énergie $E \pm dE$ détectés, Γ l'indice spectral de la loi de puissance, E_c l'énergie de "coupure" au-delà de laquelle le spectre subit une décroissance exponentielle ou sous-exponentielle contrôlée par le paramètre $\beta < 1$ et α un autre paramètre ajustable.

Généralement, l'activité gamma présente au maximum deux pics importants d'émission par période du pulsar comme dans le cas de la Fig. 1.4, certains pulsars ne présentant qu'un seul pic d'émission par période comme dans l'exemple de la Fig. 1.9 pour PSR J0659+1414. Contrairement aux pulsars radio, les pulsars gamma convertissent une grande partie de leur énergie cinétique de rotation en rayonnement gamma, avec un facteur de conversion de près de 100% pour certains d'entre eux. Ces étoiles sont particulièrement intéressantes d'un point de vue

théorique car elles offrent une vision indirecte de l'électrodynamique à grande échelle de la magnétosphère (accélération de particules, dissipation sous forme de rayonnement).

Certains de ces pulsars gamma émettent du rayonnement à très haute énergie, au-delà de la bande de Fermi/LAT, autour du TeV voire plus. Ils sont visibles par les télescopes MAGIC, VERITAS et HESS-II comme par exemple le pulsar de Vela (DJANNATI-ATAÏ et H.E.S.S. COLLABORATION, 2017) et le pulsar du Crabe (ANSOLDI et al., 2016) dont une pulsation a été détectée jusqu'à plusieurs TeV. Le rayonnement inverse Compton (voir section 1.3.3) est vraisemblablement le seul mécanisme capable de produire des photons aussi énergétiques. De telles observations fournissent des contraintes importantes et précieuses sur la structure et la dynamique de leur magnétosphère.

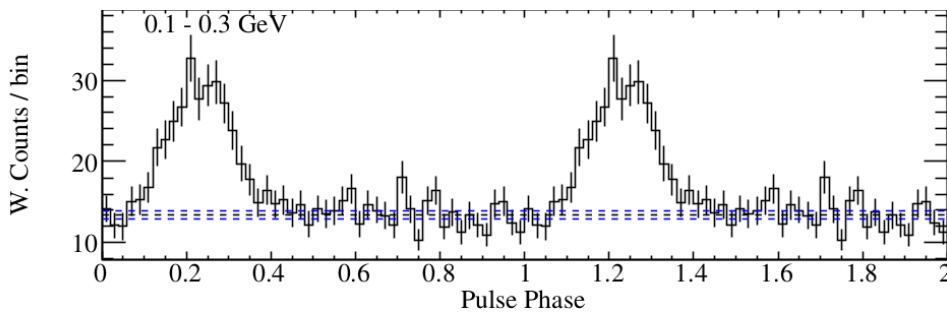


FIGURE 1.9 – Courbe de lumière dans le domaine des rayons gamma (de 100 MeV à 300 MeV) du pulsar PSR J0659+1414. Image tirée de ABDO et al., 2013.

Les pulsars observés simultanément en radio et en gamma fournissent des informations contraignantes sur la géométrie et la localisation des sites d'émission radio et de haute énergie. Le profil des pulses gamma, apparaissant généralement par paire, ainsi que le délai entre l'observation du pulse radio principal et du premier pulse gamma restreint significativement l'espace des paramètres géométriques. Cette approche a été mise à profit dans différents travaux effectués par plusieurs auteurs (par exemple JOHNSON et al., 2014; C. VENTER et al., 2011; WATTERS et al., 2008; KALAPOTHARAKOS et al., 2018; PÉTRI, 2011) en partant d'une modélisation quantitative de la magnétosphère et du vent des pulsars utilisant des simulations fluides et particulaires.

1.2.3 Émission thermique de surface

Certaines étoiles à neutrons évoluant au sein d'un système binaire "volent" de la matière à leur compagnon, cette matière formant alors un disque d'accrétion autour de l'étoile. Entraînée par le champ magnétique de l'étoile en rotation, cette matière tombe sur les calottes polaires de l'étoile à neutrons, comme illustré sur la Fig. 1.10, son énergie potentielle de gravitation est alors transformée en énergie thermique, générant ainsi deux points chauds à la surface de l'étoile dont la température est suffisamment élevée (de l'ordre de 10^6 K) pour que le rayonnement du corps noir associé se produise en rayons X dit mous de par leur faible énergie pour des rayons X, autour d'une centaine d'électron-volts.

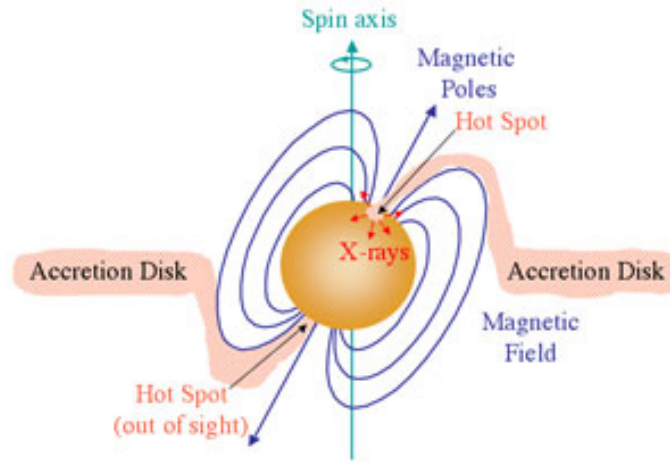


FIGURE 1.10 – Formation de points chauds à la surface d’un pulsar accrétant, image tirée de *X-ray Pulsar — COSMOS 2020*.

On peut également retrouver des points chauds émettant des rayons X à la surface d’un pulsar isolé, sans disque d’accrétion, où des particules chargées provenant de leur magnétosphère vont tomber sur les pôles sous l’action du champ magnétique. L’observation de l’émission provenant de ces points chauds, grâce à l’instrument NICER (*Neutron star Interior Composition Explorer*) installé à bord de l’ISS, a permis de contraindre la masse et le rayon de certaines étoiles à neutrons comme dans RILEY et al., 2019 pour le pulsar PSR J0030+0451. NICER a aussi mis en évidence l’intérêt des composantes multipolaires magnétiques à la surface de l’étoile, notamment pour expliquer la forme de ces tâches chaudes en rapport avec les courbes de lumière en rayons X.

Une explication détaillée et quantitative de cette multitude d’observations multi-longueurs d’onde des pulsars repose sur l’activité électromagnétique dans la magnétosphère. Nous esquissons les grandes lignes des modèles magnétosphériques dans la section qui suit.

1.3 Modèles de magnétosphère d'un pulsar

L'émission haute énergie et radio caractéristique des pulsars se produit au sein de leur magnétosphère et est due à l'accélération de particules chargées dans le champ électrique \vec{E} généré par la rotation du pulsar et de son champ magnétique \vec{B} . L'étoile à neutrons est entourée d'un plasma formé par des particules chargées arrachées de sa surface par le champ électrique, plasma enrichi par un processus de création de paires au sein de ce champ magnétique intense. D'ailleurs le facteur $e^{-\tau(\nu)}$ de l'équation (1.4), qui permet de modéliser le spectre radio d'un pulsar, serait dû à l'absorption des ondes radio par ce plasma entourant le pulsar (MALOV, 1979).

Le plasma magnétosphérique est entraîné par le champ magnétique est entre en corotation avec l'étoile, du moins jusqu'à une certaine distance de celle-ci au delà de laquelle la vitesse de corotation du plasma serait supérieure à la vitesse de la lumière. Cette limite est appelée le cylindre lumière : l'axe de révolution de ce cylindre est confondu avec l'axe de rotation de l'étoile et son rayon est égal à la vitesse de la lumière dans le vide divisée par la vitesse angulaire Ω de l'étoile à neutrons :

$$R_{\text{cyl}} = \frac{c}{\Omega} = \frac{cP}{2\pi} \quad (1.7)$$

sachant que $\Omega = \frac{2\pi}{P}$ avec P la période de rotation de l'étoile à neutrons.

Les lignes de champ magnétique sont supposées fermées uniquement à l'intérieur de ce cylindre lumière, celles sortant de ce cylindre sont dites ouvertes et sont considérées comme se refermant à l'infini. On suppose que, dans la majeure partie de la magnétosphère, la densité de charge de ce plasma est égale à la densité de Goldreich-Julian ρ_{GJ} , densité introduite par GOLDREICH et JULIAN, 1969. De l'équation de Maxwell-Gauss, on trouve pour cette densité :

$$\rho_{GJ} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \approx 2\varepsilon_0 \vec{\Omega} \cdot \vec{B} \quad (1.8)$$

Cette approximation n'est valable qu'à proximité de l'étoile, bien à l'intérieur du cylindre lumière $r \ll R_{\text{cyl}}$ avec ε_0 la permittivité du vide ($8,854 \times 10^{-12}$ F/m). Pour cette densité, le plasma écrante la composante du champ électrique parallèle au champ magnétique, soit $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, la force de Lorentz exercée par les champs magnétique et électrique sur une charge en corotation avec le pulsar sera alors nulle :

$$\vec{E} + (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} = \vec{0}. \quad (1.9)$$

Il existe, dans la magnétosphère, des cavités dans lesquelles la densité de charge ρ est différente de ρ_{GJ} , cavités situées le long des dernières lignes de champ magnétique fermées (les lignes de champ magnétique à l'intérieur du cylindre lumière qui se referment le plus loin de l'étoile). Il existe actuellement trois modèles principaux de répartition de ces cavités au sein de la magnétosphère indiqués sur la Fig. 1.11 :

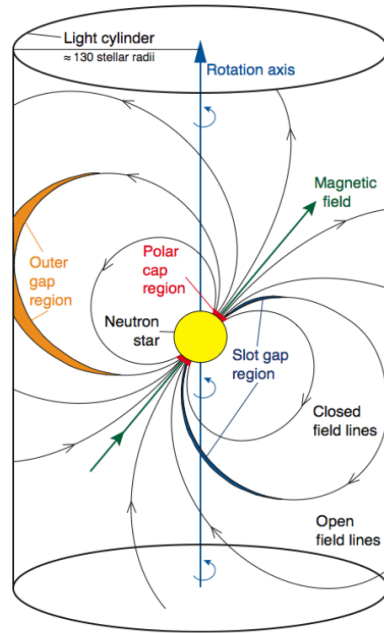


FIGURE 1.11 – Magnétosphère d'une étoile à neutrons avec le cylindre lumière et les cavités le long des dernières lignes de champ magnétique fermées, image tirée de ALIU *et al.*, 2008.

- Les cavités allongées, en bleu : cavités fines suivant les dernières lignes de champ magnétique fermées jusqu'au cylindre lumière.
- les cavités externes, en orange : cavités situées le long de la partie extérieure des dernières lignes de champ magnétique fermées, en contact avec le cylindre lumière ou passant dans son voisinage proche.
- les calottes polaires, en rouge : cavités situées juste au-dessus des deux pôles magnétiques du pulsar. Ces calottes polaires sont délimitées par les points où les dernières lignes de champ magnétique fermées traversent la surface de l'étoile à neutrons. Leur taille angulaire θ_{cp} déduite de la forme des lignes de champ pour un rotateur aligné dans le vide est $\sin \theta_{cp} = \sqrt{\frac{R_{\star}}{R_{cyl}}} \approx \theta_{cp}$. Leur taille sera donc de l'ordre de $R_{\star} \theta_{cp} = R_{\star} \sqrt{\frac{R_{\star}}{R_{cyl}}}$.

Il est à noter que tous ces modèles reposent sur un champ magnétique dipolaire à la surface de l'étoile à neutrons.

Le point essentiel à retenir est que, dans ces cavités, le champ électrique n'est plus totalement écranté, celui-ci accélère alors les particules le long des dernières lignes de champ magnétique fermées, produisant par la même occasion une émission radio et de haute énergie par rayonnement synchrotron, rayonnement de courbure ou encore par diffusion Compton inverse, voir la section 1.3.3 pour les détails sur ces mécanismes d'émission. Cette émission, et particulièrement l'émission radio prenant place supposément au niveau des cavités polaires, sera fortement directionnelle du fait de la géométrie dipolaire du champ magnétique. L'effet combiné de la rotation du pulsar et de l'inclinaison de l'axe magnétique par rapport à son axe de rotation, produit alors un comportement que l'on peut comparer à un phare : un faisceau

de photons nous éclairant à intervalle de temps régulier, toutes les périodes P de rotation (ou demi période si l'inclinaison χ de son axe magnétique est proche de 90° pour un rotateur presque orthogonal), d'où l'observation des pulses lorsque le "faisceau" du pulsar pointe vers la Terre.

L'accélération de particules dans ces cavités est également à l'origine du processus de création de paires évoqué plus haut. La formation d'une cascade de paires est illustrée sur la Fig 1.12.

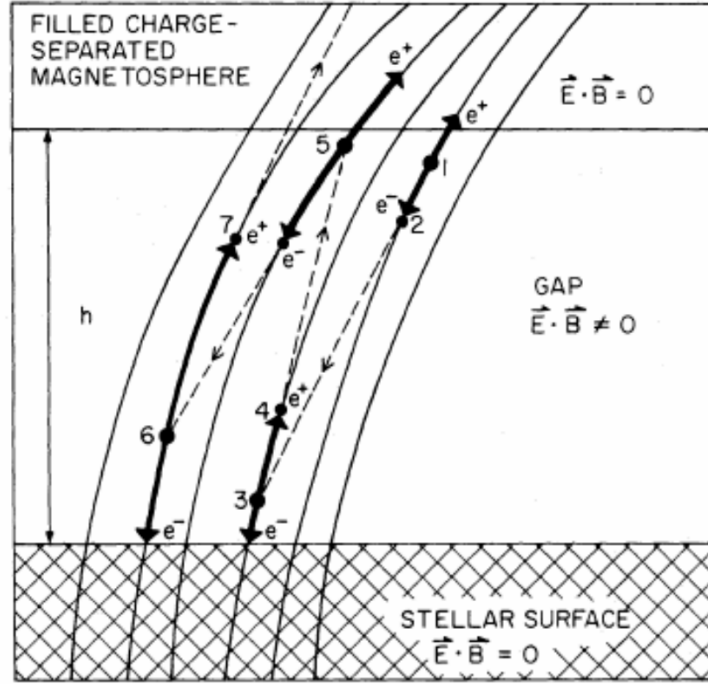


FIGURE 1.12 – *Processus de création de paires dans une cavité polaire, image tirée de RUDERMAN et SUTHERLAND, 1975.*

Un photon gamma, d'énergie ϵ supérieure à deux fois l'énergie de masse au repos d'un électron ($\epsilon > 2m_e c^2$ avec m_e la masse de l'électron) évoluant dans un champ magnétique intense, produit une paire électron-positon, en position 1 sur la figure, dont le positon va rejoindre le plasma en corotation avec l'étoile en dehors de la cavité tandis que l'électron est accéléré par le champ électrique, en position 2 sur la figure, et produit alors un autre photon gamma par rayonnement de courbure (voir section 1.3.3) générant à son tour une nouvelle paire électron-positon, elle aussi accélérée par le même champ magnétique, en position 3 sur la figure. Une cascade de paires se développe et remplit la cavité jusqu'à écrantage presque complet du champ électrique. La création de paires faiblit alors et s'arrête.

La probabilité w par unité de longueur de conversion d'un photon en une paire électron-positon est donnée par exemple dans ERBER, 1966 ou BESKIN, 2010 :

$$w = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \frac{e^3 B \sin \theta}{\hbar m_e c^3} \exp \left(-\frac{8m_e^3 c^5}{\epsilon \sin \theta} \right). \quad (1.10)$$

ε représente l'énergie du photon et θ l'angle de sa trajectoire avec la ligne de champ magnétique. La répétition de ce processus de création de paires enrichit le plasma en particules au voisinage de l'étoile et maintient sa densité autour de ρ_{GJ} en dehors des cavités tout en fournissant des particules à l'origine du rayonnement du pulsar par accélération dans les cavités le long des dernières lignes de champ magnétique fermées. Ainsi on soupçonne que la différence entre l'émission radio et l'émission haute énergie tiendrait dans le fait que l'émission radio est issue de l'accélération de paires secondaires, issues de ce processus de création de paires, avec un facteur de Lorentz γ bien moins élevé ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ avec v la vitesse de la particule) que la particule primaire à l'origine de la cascade de paires. On peut approximer le facteur de Lorentz des paires secondaires grâce à cette relation (BESKIN, 2010) :

$$\gamma \approx \frac{15B\varepsilon e\hbar}{2m_e^3 c^5}. \quad (1.11)$$

Avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ où h est la constante de Planck ($h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s), ε l'énergie du photon à l'origine de la création de paire et e la charge élémentaire ($e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb).

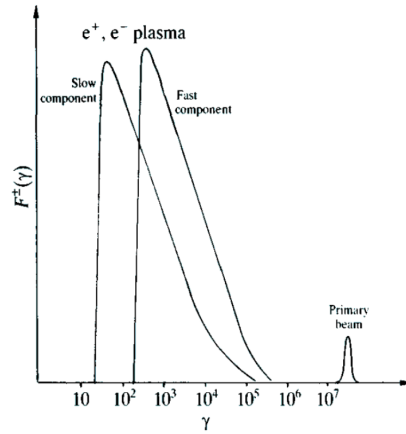


FIGURE 1.13 – Facteur de Lorentz des particules dans la magnétosphère du pulsar, image tirée de GUREVICH et al., 1993.

Le facteur de Lorentz des particules secondaires dont l'accélération est à l'origine du rayonnement radio est généralement estimé comme étant de l'ordre de $\gamma \approx 10^2$ dans les calottes polaires. Les particules primaires, arrachées de la surface de l'étoile à neutrons par le champ électrique ou issues de rayons cosmiques, ont un facteur de Lorentz estimé autour de $\gamma \approx 10^7$ ce qui leur permettrait d'émettre des rayonnements de plus haute énergie via les processus d'émissions décrits dans la section 1.3.3. Ainsi sur la Fig. 1.13 qui montre la distribution du facteur de Lorentz des particules dans la magnétosphère du pulsar, les particules issues du processus de création de paires se retrouvent elles sur la gauche du graphique.

Concernant le champ magnétique du pulsar, nous n'avons utilisé dans cette thèse que le modèle décrivant le champ magnétique d'un dipôle tournant dans le vide (car on dispose d'une solution analytique exacte pour celui-ci), modèle que nous

détaillerons dans la section 3.1, autrement dit nous n'avons pas pris en compte l'influence du plasma sur le champ magnétique du pulsar, ce modèle n'est donc pas le plus réaliste mais son expression analytique relativement compacte nous permettra de calculer efficacement et rapidement des cartes d'émission multi-longueurs d'onde. Il existe cependant des modèles plus réalistes prenant en compte la présence d'un plasma dans la description de la magnétosphère, comme par exemple le modèle *force-free* et des modèles dissipatifs que nous détaillons maintenant.

1.3.1 Modèle *force-free*

Le modèle dit *force-free* permet d'approximer une magnétosphère remplie de plasma à condition de négliger l'inertie du plasma et la dissipation d'énergie, notamment par émission de rayonnement. On peut alors poser la relation suivante annulant la densité de force de Lorentz (SPITKOVSKY, 2006) :

$$\vec{j} \wedge \vec{B} + \rho_c \vec{E} = 0 \quad (1.12)$$

avec ρ_c la densité de charge au sein du plasma et \vec{j} son vecteur densité de courant. Cette relation implique donc l'annulation de la force électromagnétique appliquée à un élément fluide, d'où l'appellation *force-free*. Pour un plasma de densité égale à celle de Goldreich-Julian, invoquant l'écrantage du champ électrique ($\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$), on peut déduire la densité de courant par la seule donnée des champs électrique et magnétique. À partir de cette condition *force free*, on aboutit à un système clos pour les équations de Maxwell selon :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \wedge \vec{B} - \vec{j} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \vec{E} \quad (1.14)$$

avec une densité de courant électrique fonction de \vec{E} et \vec{B} uniquement :

$$\vec{j} = \nabla \cdot \vec{E} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} + \frac{(\vec{B} \cdot \nabla \wedge \vec{B} - \vec{E} \cdot \nabla \wedge \vec{E}) \vec{B}}{B^2} \quad (1.15)$$

On peut ainsi retrouver la structure de la magnétosphère en intégrant numériquement ces équations.

Le fait qu'on a utilisé dans cette thèse les solutions pour un dipôle tournant dans le vide plutôt que le modèle *force-free* ne devrait pas changer grand chose au regard de la géométrie du champ magnétique cependant ce choix peut éventuellement jouer sur le délai que l'on percevra entre l'activité radio et gamma du pulsar.

1.3.2 Modèle dissipatif

Le modèle *force-free* est simple, sans paramètre libre. Il possède malheureusement le gros inconvénient de ne pas fournir de zones d'accélération de particules, un

ingrédient indispensable pour produire du rayonnement radio et de haute énergie.

Des approches plus réalistes ont été tentées pour décrire la magnétosphère du pulsar où le plasma, malgré sa densité, n'écrante pas parfaitement la composante du champ électrique parallèle aux lignes de champ magnétique ($\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ étant une idéalisation) afin de prendre en compte la dissipation dans la magnétosphère. Cela induit de nouvelles expressions pour le vecteur densité de courant \vec{j} dont on peut trouver un exemple dans GRUZINOV, 2007 :

$$\vec{j} = \frac{\rho_c \vec{E} \wedge \vec{B} + (B_0 \vec{B} + E_0 \vec{E}) \sqrt{\rho_c^2 + \gamma^2 \sigma^2 E_0^2}}{\gamma^2 (B_0^2 + E_0^2)} \quad (1.16)$$

avec :

- γ le facteur de Lorentz d'un référentiel où \vec{E} devient perpendiculaire à \vec{B} soit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ où on peut définir β ainsi :

$$\frac{\beta}{1 + \beta^2} = \frac{|\vec{E} \wedge \vec{B}|}{B^2 + E^2} \quad (1.17)$$

- B_0 et E_0 sont des invariants du champ tels que $B_0^2 - E_0^2 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$ et $B_0 E_0 = \vec{E} \cdot \vec{B}$ avec $E_0 > 0$.
- σ représente la conductivité et dépend de E_0 et B_0 . C'est un paramètre libre contrôlant le taux de dissipation dans le plasma.
- ρ_c reste la densité de charge dans le plasma présent à l'intérieur de la magnétosphère.

On peut alors retrouver la structure de la magnétosphère en incluant cette expression de \vec{j} dans les équations (1.13) et (1.14). D'autres expressions de \vec{j} ont été proposés pour prendre en compte cette dissipation, comme par exemple une de celles données dans KALAPOTHARAKOS et al., 2012 où l'on remplace le second terme de l'équation (1.15) par $\sigma \vec{E}_{\parallel}$:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2} + \sigma \vec{E}_{\parallel} \quad (1.18)$$

avec \vec{E}_{\parallel} le vecteur décrivant les composantes du champ électrique parallèles aux lignes de champ magnétique soit :

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B}}{B^2}. \quad (1.19)$$

Mais ici aussi, il faut invoquer un paramètre libre σ , une autre sorte de conductivité.

Voyons à présent les principaux mécanismes d'émission susceptibles d'expliquer le rayonnement multi-longueurs d'onde des pulsars.

1.3.3 Mécanismes d'émission

Les trois mécanismes que nous considérons sont le rayonnement inverse Compton, le rayonnement synchrotron et le rayonnement de courbure.

Diffusion Compton inverse

La diffusion Compton se produit lorsqu'un photon entre en collision avec un électron, un positon ou toute autre particule chargée, le photon transférant alors une partie de son énergie et de son impulsion à la particule sous forme d'énergie cinétique. On suppose une collision élastique où l'énergie totale est conservée et le photon "diffusé" : sa trajectoire et sa fréquence changent, sa fréquence diminuant du fait qu'une partie de son énergie est transférée à la particule. La différence entre la longueur d'onde du rayonnement avant λ_0 et après la diffusion λ s'exprime ainsi :

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (1.20)$$

avec h la constante de Planck, θ l'angle de diffusion et m la masse de la particule diffusante. Un exemple est montré en figure 1.14 pour une diffusion Compton à l'intérieur d'un atome mais le processus reste le même pour une diffusion sur une particule libre.

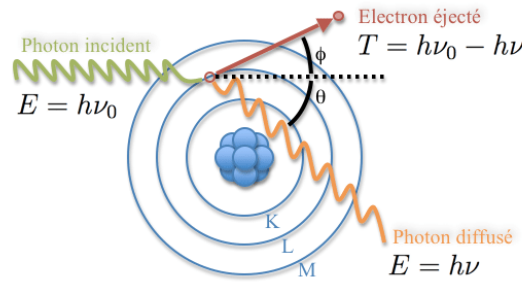


FIGURE 1.14 – Exemple de diffusion Compton dans un atome sur un électron orbitant autour du noyau atomique. Image tirée de NICOL, 2010.

À partir de la différence de longueur d'onde, on déduit l'énergie du photon une fois diffusé $E = h\nu$ en utilisant la relation liant la longueur d'onde à la fréquence pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide : $\nu = c/\lambda$.

$$E = \frac{E_0}{\frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos \theta) + 1} \quad (1.21)$$

Avec $E_0 = h\nu_0 = hc/\lambda_0$ l'énergie initiale du photon. L'énergie cinétique de la particule après diffusion est donc égale à la différence entre l'énergie initiale du photon et son énergie après la diffusion (puisque l'on suppose une collision élastique et une particule initialement au repos). Dans le cas de la diffusion Compton inverse, la particule (généralement un électron ou un positon) se déplace à une vitesse v relativiste avant la collision et possède donc déjà une importante énergie cinétique dont une partie sera alors transmise au photon qui verra sa fréquence augmenter après la diffusion. Dans le référentiel de la particule en mouvement, la relation (1.21) est valable si on remplace E par E' l'énergie finale du photon dans le référentiel de la particule, θ par θ' l'angle entre le photon incident et le photon réémis dans le

référentiel de la particule et E_0 par :

$$E'_0 = \gamma E_0 (1 - \beta \cos \theta_0) \quad (1.22)$$

l'énergie initiale du photon dans le référentiel de la particule, θ_0 étant l'angle entre la trajectoire de la particule et celle du photon incident dans le référentiel d'un observateur statique et $\beta = v/c$.

$$E' = \frac{E'_0}{\frac{E'_0}{mc^2} (1 - \cos \theta') + 1} \quad (1.23)$$

L'énergie E du photon pour un observateur statique sera alors :

$$E = \gamma E' (1 + \beta \cos \Theta) \quad (1.24)$$

Avec $\Theta = \theta' + \theta'_0$ où θ'_0 est l'angle d'incidence du photon dans le référentiel de la particule, θ' et θ sont liés par les formules d'aberration relativistes

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta} \quad (1.25)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (1 + \beta \cos \theta)}. \quad (1.26)$$

Ces mêmes relations lient θ_0 et θ'_0 . L'énergie maximale du photon diffusé sera de l'ordre de l'énergie cinétique de la particule soit $\gamma m c^2$. Si l'énergie du photon est petite devant l'énergie au repos de la particule ($E_0 \ll mc^2$ et donc $E'_0 \ll mc^2$) on pourra alors poser :

$$E \approx \gamma^2 E_0 (1 - \beta \cos \theta_0) (1 + \beta \cos \Theta) \approx \gamma^2 E_0. \quad (1.27)$$

Donc des photons de faible énergie peuvent suffire à la production de rayons gamma si l'interaction se fait avec des particules ultra-relativistes, $\gamma \gg 1$. L'énergie du photon prend un facteur gigantesque de γ^2 . Cette approximation tombe en défaut lorsque l'énergie du photon est comparable à celle de la particule. On entre alors dans le régime quantique de Klein-Nishina (KLEIN et NISHINA, 1929), qui tient compte du recul de la particule dans son référentiel de repos. Dans ce régime ultra-relativiste, la section efficace de diffusion chute fortement comparée à sa valeur dans le régime non relativiste de Thomson et l'énergie du photon diffusé sera de l'ordre de γE_0 (sans jamais dépasser l'énergie cinétique initiale de la particule).

La diffusion Compton inverse pourrait être à l'origine des rayonnements de très hautes énergies (> 100 GeV) provenant des pulsars et détectés par les télescopes à effet Cherenkov comme MAGIC (LYUTIKOV et al., 2012).

Rayonnement synchrotron

Le rayonnement synchrotron est produit par le mouvement de giration d'une particule chargée (généralement électron ou positon) autour d'une ligne de champ magnétique ce qui induit l'émission de photons due à la trajectoire circulaire de

la particule comme représenté sur la Fig. 1.15. En effet un mouvement circulaire induit une variation de la vitesse de la charge et donc l'émission d'un rayonnement, celui-ci étant appelé un rayonnement synchrotron uniquement lorsque la particule chargée se déplace à des vitesses relativistes (proches de c) comme c'est le cas dans la magnétosphère d'un pulsar à cause du puissant champ magnétique de l'étoile à neutrons.

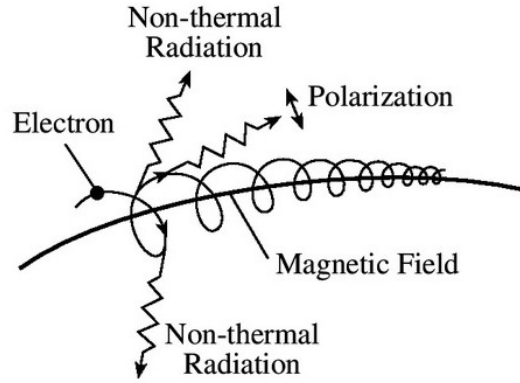


FIGURE 1.15 – Mécanisme d'émission du rayonnement synchrotron, image tirée de NASA's Cosmos 2020

La puissance rayonnée par une particule accélérée est donnée par la formule de Larmor (BRADT, 2008) :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (1.28)$$

avec q la valeur de la charge, a son accélération et ϵ_0 la permittivité du vide. Considérons le référentiel R muni d'un repère (O, x, y, z) dans lequel la charge électrique a un mouvement circulaire autour d'une ligne de champ magnétique qui est parallèle à z , le mouvement de la particule est donc compris dans le plan xy . La force de Lorentz nous donne :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (1.29)$$

avec \vec{v} la vitesse de cette charge, \vec{E} et \vec{B} sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique dans lesquels évolue la particule, or le champ électrique étant nul, la force exercée sur la particule est $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$. Comme le champ magnétique représenté par le vecteur \vec{B} est aligné avec l'axe z du repère (O, x, y, z) , \vec{F} est perpendiculaire à \vec{v} et à l'axe z d'où le mouvement circulaire de la particule.

Considérons maintenant un référentiel R' muni d'un repère (O', x', y', z') en mouvement le long de l'axe x du repère (O, x, y, z) dans le référentiel R avec une vitesse égale à la vitesse instantanée de la particule \vec{v} dans R . Dans le cas relativiste où v (la norme de \vec{v}) est non négligeable devant c , les composantes du champ électrique \vec{E}' et du champ magnétique \vec{B}' dans le référentiel (O', x', y', z') sont alors données par les transformations de Lorentz (*The Feynman Lectures on Physics Vol. II Ch.*

26 : Lorentz Transformations of the Fields 2020)

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{v} \wedge \vec{B})_{\perp} \quad (1.30)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E} \right)_{\perp} \quad (1.31)$$

avec les composantes parallèles au déplacement du repère R' dans le repère R notées avec l'indice \parallel et les composantes perpendiculaires à ce déplacement notées avec l'indice \perp . Pour un déplacement le long de l'axe x , on aura donc :

$$E_{x'} = E_x \quad B_{x'} = B_x \quad (1.32)$$

$$E_{y'} = \gamma(E_y - vB_z) \quad B_{y'} = \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) \quad (1.33)$$

$$E_{z'} = \gamma(E_z + vB_y) \quad B_{z'} = \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y) \quad (1.34)$$

avec E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z les composantes des champ électrique \vec{E} et champ magnétique \vec{B} dans le référentiel R , $E_{x'}, E_{y'}, E_{z'}, B_{x'}, B_{y'}$ et $B_{z'}$ leurs composantes dans le référentiel R' et γ le facteur de Lorentz de R' dans R : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Or

dans le référentiel R , les composantes de \vec{E} et \vec{B} sont :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Soit dans R' :

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma v B \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{B}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma B \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Initialement la particule est au repos dans le référentiel R' car alors la particule et le référentiel R' se déplacent avec la même vitesse et dans la même direction dans le référentiel R , on a donc $\vec{v}' = 0$ donc d'après l'équation (1.29) on a $\vec{F} = q\vec{E}$ et on peut ainsi en déduire l'accélération a' de la particule dans le référentiel R' :

$$a' = \frac{-q\gamma v B}{m} \quad (1.37)$$

avec m la masse de la particule. P' la puissance rayonnée par la particule dans le référentiel R' peut alors être calculée à partir de l'équation (1.28) :

$$P' = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \gamma^2 v^2 B^2. \quad (1.38)$$

La puissance étant invariante par transformation de Lorentz, celle rayonnée par la particule dans le référentiel R sera alors égale à la puissance rayonnée dans le référentiel R' soit $P' = P$.

Pour le rayonnement synchrotron dans l'atmosphère d'un pulsar, on considère

que l'émission est due soit à un électron soit à un positon (donc $q = \pm e$ avec e la charge élémentaire) et que celui-ci suit une trajectoire en spirale, et non une trajectoire parfaitement circulaire, \vec{v} et \vec{B} ne sont donc pas perpendiculaires, on nomme Φ l'angle entre ces deux vecteurs, le référentiel R' se déplace dans le référentiel R avec une vitesse \vec{v} tel que :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \sin \Phi \\ 0 \\ v \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

de manière à ce que \vec{v}' la vitesse instantanée du photon soit toujours initialement nulle. En utilisant la formule générale pour la transformée de Lorentz des champs électrique et magnétique des équations (1.30) et (1.31) on trouve :

$$\vec{E}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma v B \sin \Phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

La puissance émise par la particule est alors :

$$P = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c} \gamma^2 B^2 \beta^2 \sin^2 \Phi. \quad (1.41)$$

Pour des vitesses non relativistes, la fréquence de rotation de la particule de charge q et de masse m autour de la ligne de champ magnétique, aussi appelée fréquence cyclotron, est donnée par :

$$\nu_{\text{cyclo}} = \frac{q B}{2\pi m}. \quad (1.42)$$

Dans le cas où la vitesse de la particule est relativiste, cette fréquence est simplement la fréquence cyclotron divisée par le facteur de Lorentz :

$$\nu_{\text{sync}} = \frac{q B}{\gamma 2\pi m} = \frac{\nu_{\text{cyclo}}}{\gamma}. \quad (1.43)$$

Une autre fréquence remarquable pour l'émission synchrotron est la fréquence critique ν_c car le spectre de l'émission synchrotron présente une décroissance exponentielle passé cette limite (LEE, 2020), cette fréquence du pic de l'émission synchrotron vaut :

$$\nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_{\text{cyclo}}. \quad (1.44)$$

Cela pourrait d'ailleurs expliquer la forme que prennent les spectres des pulsars dans le domaine des rayons gamma, tel qu'on l'a vu dans la section 1.2.2, modélisé avec une coupure sous-exponentielle avec une énergie (et donc une fréquence) de coupure E_c dans l'équation (1.6), le paramètre β dans cette équation permettant alors de prendre en compte le fait que l'émission est due à l'accélération de particules avec divers facteurs de Lorentz γ .

Rayonnement de courbure

Le rayonnement de courbure est similaire au rayonnement synchrotron en cela qu'il est le produit de la trajectoire non rectiligne d'une particule chargée. La différence entre les deux est que dans le cas du rayonnement synchrotron, la particule tourne autour d'une ligne de champ magnétique alors que dans le cas du rayonnement de courbure celle-ci va suivre cette ligne de champ magnétique qui est elle-même courbée, d'où l'émission de rayonnement due à la courbure de la trajectoire. Si la trajectoire de la particule est circulaire dans le cas du rayonnement synchrotron (perpendiculairement à la ligne de champ), ce n'est pas nécessairement le cas pour le rayonnement de courbure.

Considérons comme sur la Fig. 1.16 le rayonnement de courbure comme une émission synchrotron d'une particule tournant autour d'une ligne d'un champ magnétique virtuel \vec{B}' avec une vitesse \vec{v} perpendiculaire à \vec{B}' .

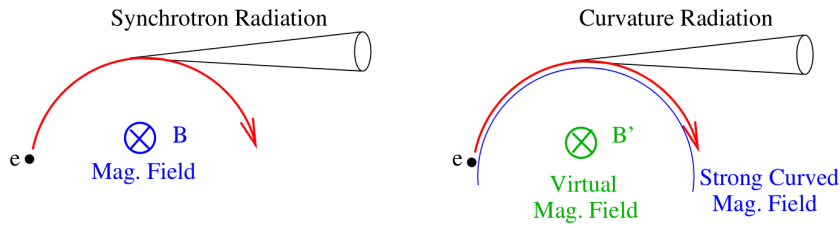


FIGURE 1.16 – Mécanisme d'émission du rayonnement de courbure, image tirée de SAITO, 2011.

L'équation (1.43) nous donne alors la fréquence de rotation de cette particule autour de la ligne de champ magnétique virtuelle : $\nu_{\text{sync}} = \frac{eB'}{2\pi\gamma m}$. Sachant que cette fréquence est l'inverse du temps que met la particule pour faire un tour autour de la ligne de champ magnétique, on a :

$$\frac{eB'}{2\pi\gamma m} = \frac{v}{2\pi\rho} \quad (1.45)$$

avec ρ le rayon de courbure de la trajectoire de la particule. Dans le cas ultra-relativiste où $v \approx c$ on peut alors poser $B' = \frac{\gamma mc}{e\rho}$. En remplaçant dans l'équation (1.41) l'angle Φ par $\frac{\pi}{2}$ et B' par $\frac{\gamma mc}{e\rho}$ on peut ainsi retrouver la puissance rayonnée par la particule accélérée (KUNDU, 2018) :

$$P_{\text{curv}} = \frac{e^2 \gamma^4 c}{6\pi \epsilon_0 \rho^2}. \quad (1.46)$$

On déduit de l'équation (1.42) que la fréquence cyclotron du rayonnement de courbure est $\nu_{\text{cyclo}} = \frac{\gamma c}{2\pi\rho}$, on peut ainsi retrouver, à partir de l'équation (1.44), la

fréquence caractéristique du rayonnement de courbure (GUREVICH et al., 1993) :

$$\nu_{\text{curv}} = \frac{3}{4\pi} \gamma^3 \frac{c}{\rho} \quad (1.47)$$

au-delà de laquelle la particule ne rayonne plus significativement. Plus précisément, la forme du spectre en énergie du rayonnement de courbure pour une particule de facteur de Lorentz γ est donnée dans JACKSON, 2001 par :

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c} \gamma F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{avec} \quad F(x) = x \int_x^{+\infty} K_{5/3}(t) dt \quad (1.48)$$

où $K_{5/3}$ est une fonction de Bessel modifiée d'ordre 5/3 (ARFKEN et WEBER, 2005). Une très bonne approximation de la fonction est d'après AHARONIAN et al., 2010 :

$$F(x) = 2.15 x^{1/3} (1 + 3.06 x)^{1/6} \frac{1 + 0.884 x^{2/3} + 0.471 x^{4/3}}{1 + 1.64 x^{2/3} + 0.974 x^{4/3}} e^{-x}. \quad (1.49)$$

La forme du spectre est représentée en figure 1.17 en ligne rouge et l'approximation en ligne bleu. La précision étant supérieure à 0.2% dans tout l'intervalle, on ne peut distinguer les courbes à l'œil nu.

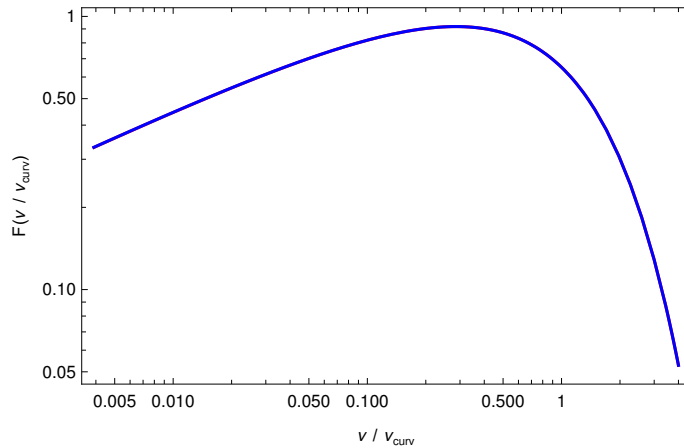


FIGURE 1.17 – Spectre du rayonnement de courbure au voisinage de la fréquence caractéristique ν_{curv} . L'approximation en bleu n'est pas distinguable de l'expression exacte en rouge.

1.3.4 Au-delà du cylindre lumière

En dehors du cylindre lumière, le champ magnétique possède une géométrie essentiellement toroïdale. Les lignes de champ magnétique considérées comme ouvertes en dehors du cylindre lumière se referment en fait avant d'atteindre le milieu interstellaire (GOLDREICH et JULIAN, 1969). Le plasma entourant l'étoile à neutrons est, comme on l'a vu, issu au moins en partie du processus de création de paires dans les cavités de la magnétosphère. Les particules formant ce plasma étant initialement accélérées dans ces cavités, comme on peut le voir sur la Fig. 1.12, avec des fac-

teurs de Lorentz $\gamma \gg 1$, ce plasma est donc animé d'une vitesse relativiste formant ainsi un vent de matière qui s'éloigne de l'étoile à neutrons. Loin à l'extérieur du cylindre lumière, la progression de ce vent sera finalement stoppée par la pression du milieu interstellaire. La collision entre le plasma et ce milieu, formant un front d'onde délimitant ce que l'on appelle une *pulsar wind nebula* ou "nébuleuse de vents de pulsar", accélère les particules présentes dans le plasma qui vont alors générer une émission électromagnétique, notamment par rayonnement synchrotron. Comme dans le cas du pulsar du Crabe, l'écoulement du plasma peut également être stoppé par la pression de la matière éjectée lors de la supernova à l'origine de l'étoile à neutrons, matière qui elle-même voit son expansion stoppée par la pression du milieu interstellaire, phénomène illustré dans la Fig. 1.18 où CSM est le milieu circumstellaire (*Circum stellar medium*) qui peut être confondu avec le milieu interstellaire :

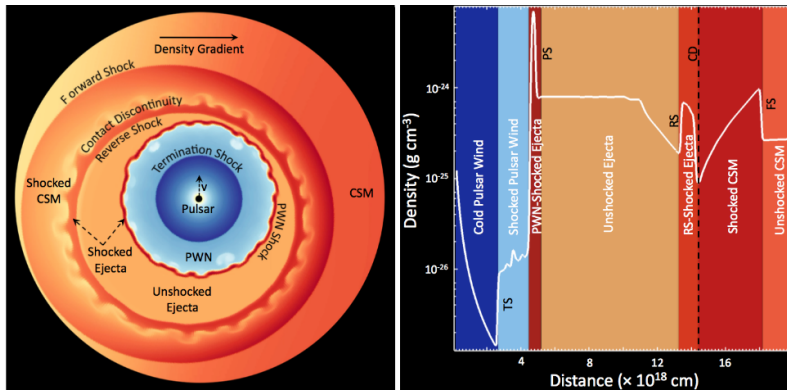


FIGURE 1.18 – Nébuleuse de vents de pulsar à l'intérieur d'un rémanent de supernova et densité de matière en fonction de la distance à l'étoile à neutrons. Image tirée de SLANE, 2017.

Comme on peut le voir sur la Fig. 1.19, si l'inclinaison entre l'axe magnétique et l'axe de rotation du pulsar est non nulle, un vent strié se formera (*striped winds*) délimité par une *couche de courant* qui est la surface de séparation entre les deux pôles magnétique du pulsar en rotation. Cette *couche de courant* est connectée aux dernières lignes de champ magnétique fermées, formant avec elles un point de reconnexion en forme de Y à la jonction entre la limite de la magnétosphère et la base du vent (au cylindre lumière). Le vent lui-même peut être une source efficace de rayonnement haute énergie (LYUBARSKII, 1996; PÉTRI, 2012). La pulsation de cette émission provient de l'effet combiné entre la forme spirale de cette couche et le mouvement relativiste du vent focalisant la lumière dans le sens du mouvement (KIRK et al., 2002).

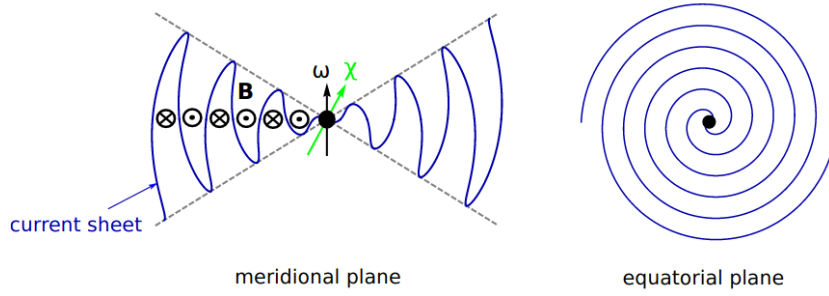


FIGURE 1.19 – Structure du vent strié d'un pulsar avec une vitesse angulaire ω et une inclinaison χ de son champ magnétique. Image tirée de MOCHOL, 2017.

1.3.5 Tentatives passées

Des simulations de l'émission d'un pulsar prenant en compte le rayonnement radio et haute énergie ont déjà été réalisées dans d'autres travaux. On peut notamment citer KALAPOTHARAKOS et al., 2014 où la vitesse des particules à l'origine de l'émission est calculée à partir d'une fonction dépendante des champs électrique et magnétique. Il a ainsi pu en être déduit le facteur de Lorentz de ces particules et donc l'énergie du rayonnement que l'on reçoit du pulsar ainsi que le décalage temporel entre la réception de l'émission haute énergie et l'émission radio provenant des calottes polaires.

On peut également citer VENTER et al., 2014 où l'émission radio et haute énergie des pulsars millisecondes ont été modélisées pour différentes géométries afin de déterminer laquelle correspondait le plus aux données récoltées par le télescope Fermi/LAT.

Notre nouvel apport à toutes ces études concerne l'inclusion des effets de relativité générale dont on rappelle les caractéristiques essentielles dans le paragraphe qui suit.

1.4 Relativité générale

La physique newtonienne montre généralement ses limites lorsqu'il s'agit de décrire le champ gravitationnel d'un astre avec un rapport masse sur rayon aussi important que celui d'une étoile à neutrons, on doit donc recourir à la théorie de la relativité générale pour avoir une vision plus complète des effets de la gravitation d'un tel astre sur son voisinage. L'un des concepts de base de cette théorie est qu'il n'existe pas de force gravitationnelle à proprement parler : la gravité peut en effet s'expliquer par des considérations purement géométriques. C'est une force fictive au même titre que la force centrifuge ou la force de Coriolis.

Considérons que notre Univers dispose de quatre dimensions : trois dimensions d'espace et une de temps, et appelons cet hyperspace à quatre dimensions l'espace-temps. D'après la théorie de la relativité générale, l'énergie d'un objet et donc sa

masse (car les deux sont liées, de par sa masse un objet au repos à une énergie de $E = m c^2$) induit une déformation de l'espace-temps et cette déformation est en fait interprétée comme étant le champ gravitationnel de l'objet.

Si on lance un objet depuis la surface de la Terre, celui-ci suivra une trajectoire courbe, en "cloche", qui le fera retomber sur la surface de la planète. Dans le cadre de la relativité générale ce n'est pas la trajectoire de cet objet qui est courbe mais bien l'espace-temps dans lequel s'inscrit cette trajectoire. Ainsi, par exemple, la Lune ne tournerait pas autour de la Terre mais ce serait l'espace-temps dans lequel s'inscrit sa trajectoire qui est courbé par la masse de la Terre.

La déformation de l'espace-temps induite par le contenu en masse-énergie d'un corps est décrite par l'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.50)$$

dont les différents termes sont :

- $g_{\mu\nu}$ est la métrique de l'espace-temps, une généralisation tensorielle du potentiel gravitationnel newtonien,
- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci : ce tenseur exprime la courbure de l'espace temps,
- $R = R^\mu{}_\mu$ est le scalaire de courbure : scalaire défini à partir de la trace du tenseur de Ricci,
- $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière responsable du champ gravitationnel,
- Λ est la constante cosmologique : cette constante a été initialement ajoutée pour que l'expression décrive un Univers statique, aujourd'hui elle permet de prendre en compte l'expansion accélérée de l'Univers. Elle n'a aucune influence sur l'espace-temps à l'échelle des étoiles à neutrons.
- G est la constante gravitationnelle ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$).

On suit ici la convention de notation d'Einstein où les composantes covariantes sont en indice et les composantes contravariantes en exposant et où $A_{\mu\nu}$ est la composante covariante de la ν -ième colonne de la μ -ième ligne de la matrice A . Avec cette convention de notation la sommation est indiquée par une répétition d'un exposant en indice : par exemple $x^\mu y_\mu = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu y_\mu$.

Soit x^μ les composantes contravariantes d'un quadrivecteur de l'espace-temps, c'est-à-dire un vecteur à quatre dimensions possédant une coordonnée temporelle et trois coordonnées spatiales, alors ses composantes covariantes sont données par $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = \sum g_{\mu\nu} x^\nu$ avec $g_{\mu\nu}$ les composantes covariantes de la métrique de l'espace-temps dans lequel s'inscrit le quadrivecteur.

Les composantes contravariantes de la métrique, $g^{\mu\nu}$, sont celles de la matrice inverse de $g_{\mu\nu}$, telles que $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$. Ainsi pour une métrique diagonale comme celle d'un trou noir statique (métrique de Schwarzschild), cette inversion se simplifie en $g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}}$.

En relativité générale, l'équivalent de la force gravitationnelle newtonienne est

donné par les symboles de Christoffel définis à partir de la métrique considérée g :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right] \quad (1.51)$$

On peut alors écrire le tenseur de Riemann (appelé aussi tenseur de Riemann-Christoffel ou encore tenseur de courbure) selon ces symboles de Christoffel :

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}\Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha} \quad (1.52)$$

Le tenseur de Ricci est une contraction de ce tenseur de Riemann :

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} \quad (1.53)$$

Le scalaire de courbure est lui-même une contraction du tenseur de Ricci :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}. \quad (1.54)$$

Quant au tenseur énergie-impulsion, comme son nom l'indique il représente la quantité de mouvement et l'énergie de la matière présentes dans l'espace-temps. Ce tenseur est symétrique, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Pour un espace-temps repéré par les coordonnées x^{μ} avec x^0 la composante temporelle, ses diverses composantes possèdent la signification physique suivante

- La composante T^{00} représente la densité d'énergie.
- Les composantes T^{i0} représentent la densité d'impulsion ou le flux d'énergie suivant la direction x^i (idem pour les composantes T^{0i} par symétrie), avec $i \neq 0$.
- Les composantes purement spatiales T^{ik} , avec $i \neq 0$ et $k \neq 0$, représentent le flux de la i -ième composante de l'impulsion suivant la direction spatiale x^k .

L'énergie et l'impulsion étant conservées, l'équation du mouvement de la matière est $\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0$ avec ∇_{ν} la dérivée covariante qui généralise la dérivée partielle aux espaces courbes.

Concernant la métrique, $g_{\mu\nu}$, dans la suite de cette thèse on s'intéresse à deux d'entre elles. La première concerne la métrique de Minkowski qui décrit un espace-temps plat et où les effets dus au champ gravitationnel sont négligés. Cette métrique est diagonale et vaut en coordonnées cartésiennes (ct, x, y, z) :

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (1.55)$$

La deuxième concerne la métrique de Schwarzschild qui décrit la déformation de l'espace-temps autour d'un objet sphérique et statique qui est une bonne approximation de la géométrie de l'espace-temps au voisinage d'une étoile à neutrons en rotation lente (disons $\nu_{\star} < 600$ Hz ou ν_{\star} est l'inverse de la période de l'étoile).

1.4.1 Métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est une solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein, elle est donc statique d'après le théorème de Birkhoff ce qui veut dire qu'elle ne dépend pas de la coordonnée temporelle $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0$ et $g^{0\nu} = 0$ lorsque $\nu \neq 0$ (R. D'INVERNO et L. a. t. F. o. M. S. R. D'INVERNO, 1992). Considérons l'intervalle d'espace-temps qui sépare deux évènements, et qui s'écrit dans l'espace-temps de métrique $g_{\mu\nu}$ sous la forme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.56)$$

La métrique de Schwarzschild étant une métrique à symétrie sphérique, les coordonnées x^μ d'un évènement seront alors avantageusement décrites en coordonnées sphériques par :

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

avec r , θ et ϕ les coordonnées dans le repère sphérique (respectivement la distance radiale, la colatitute et la longitude) dont l'origine est le centre de masse de l'objet causant la déformation de l'espace-temps. L'intervalle d'espace-temps dans cette métrique prendra alors une forme diagonale dans des coordonnées adaptées :

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.58)$$

$r^2 d\Omega^2 = r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2)$ étant l'intervalle entre deux évènements sur la surface d'une sphère de coordonnée radiale r .

L'intervalle d'espace-temps dans la métrique de Schwarzschild s'écrit (la démonstration étant donnée dans l'annexe A.1) :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (1.59)$$

$R_S = \frac{2GM}{c^2}$ est appelé le rayon de Schwarzschild de l'astre et est égal au double de son rayon gravitationnel $R_G = \frac{GM}{c^2}$. Ainsi si on se place dans cette métrique, $g_{\mu\nu}$ dans l'équation (1.50) devient :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Lorsqu'on s'éloigne de l'objet $r \rightarrow \infty$ ou lorsque la masse M de celui-ci est faible $M \rightarrow 0$ (ce qui équivaut à $R_S \rightarrow 0$ car $R_S = \frac{2GM}{c^2}$) on retrouve bien la métrique de Minkowski dans un repère sphérique, la courbure de l'espace-temps autour d'un

objet massif est donc négligeable à grande distance ou lorsque la masse de cet objet est trop faible.

La métrique de Schwarzschild représente une solution exacte des équations d'Einstein dans le vide. C'est aussi la solution la plus simple, ne possédant qu'un paramètre libre, la masse totale de l'objet considéré ainsi qu'une très bonne approximation pour des étoiles sans charge et dont la rotation est faible. Sa simplicité permet d'en extraire aisément des conclusions importantes et de portée très générale sur le comportement des horloges et des particules dans un champ gravitationnel intense. Voyons à présent ces effets relativistes, absents en théorie newtonienne.

1.4.2 Effets relativistes

La courbure de l'espace-temps influence notre perception de l'écoulement du temps et de la trajectoire des particules. La grandeur fondamentale en relativité est le temps propre que nous calculons maintenant.

Temps propre

Comme le champ gravitationnel est une déformation de l'espace-temps, l'une des conséquences de la relativité générale est que la masse d'un objet affectera l'écoulement du temps dans son voisinage. Ainsi le temps s'écoulera plus lentement à proximité d'un astre massif qu'à distance de celui-ci. Si on considère deux événements avec les mêmes coordonnées spatiales mais séparés par un intervalle de temps coordonné Δt qui est aussi le temps "réel" mesuré par un observateur lointain, dans la métrique de Schwarzschild, d'après la relation $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ où $d\tau$ est l'intervalle de temps propre, on aura :

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2. \quad (1.61)$$

On peut alors en déduire le temps propre $\Delta\tau$ qui sépare les deux événements par

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}. \quad (1.62)$$

Tant que $r > R_S$, le temps propre $\Delta\tau$ entre ces deux événements diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche du rayon de Schwarzschild R_S . À l'inverse, on aura $\Delta\tau = \Delta t$ à grande distance pour $r \rightarrow \infty$ car la métrique de Schwarzschild, asymptotiquement plate, y est alors similaire à la métrique de Minkowski où il n'y a pas d'effets gravitationnels.

Précession du périastre

Comme on l'a vu dans la section précédente, pour $r \gg R_S$ dans la métrique de Schwarzschild, on retrouve le comportement de la gravité en physique newtonienne et les trajectoires des objets dans le champ de pesanteur d'un astre massif sont décrites

par des orbites képlériennes. Cependant, dans la métrique de Schwarzschild, ces orbites varient au cours du temps si leur excentricité e est non nulle. Plus exactement la courbure de l'espace-temps entraîne une précession du périastre d'un angle δ entre deux révolutions d'un objet autour de l'astre central tel que :

$$\delta \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e)} \quad (1.63)$$

avec a le demi-grand axe de l'orbite et T le temps que met l'objet à parcourir cette orbite. Cette précession est donc importante pour une orbite avec une faible période mais une forte excentricité, c'est notamment le cas de la planète Mercure qui présente une précession purement relativiste de son périhélie de 43 secondes d'arc par siècle qu'il faut rajouter à la précession induite par les autres planètes et la non sphéricité du soleil.

Ondes gravitationnelles

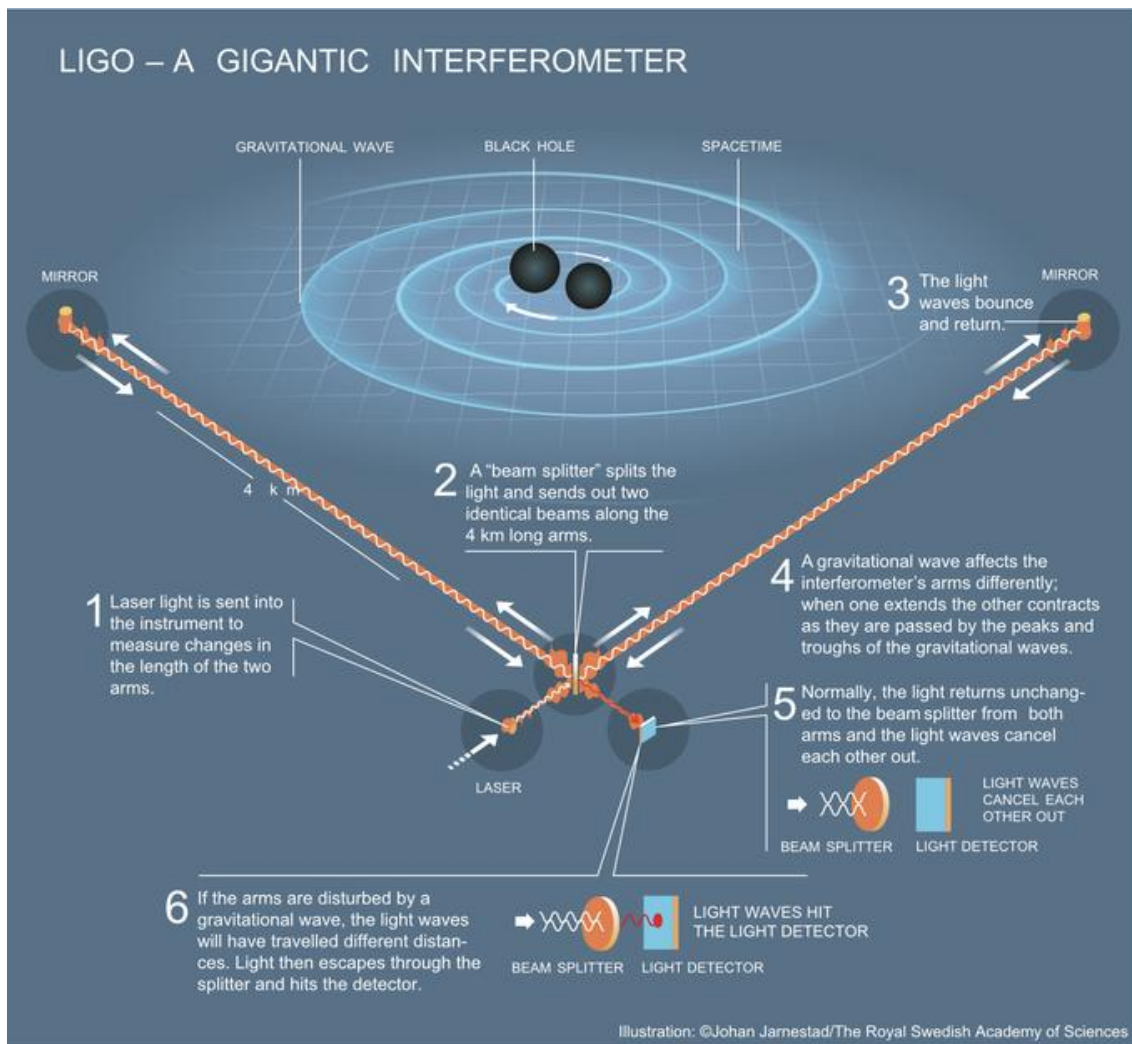


FIGURE 1.20 – Fonctionnement d'un détecteur d'onde gravitationnel (ici LIGO). Illustration réalisée par Johan Jarnestad de l'académie royale des sciences de Suède.

La relativité générale n'autorise pas une interaction à distance avec effet immédiat. Toute information se déplaçant à une vitesse inférieure ou égale à la vitesse de la lumière, la relativité générale prédit alors également l'existence d'ondes gravitationnelles, des oscillations de l'espace-temps dues à la variation d'un champ gravitationnel et se propageant à la vitesse de la lumière (on ne peut donc pas décrire ces ondes à partir de métriques statiques comme celle de Schwarzschild). Comme on l'a vu dans la section 1.1.3, ces ondes ont déjà été détectées indirectement par la mesure de la décroissance de la période orbitale d'un système binaire (WEISBERG et TAYLOR, 2005), un tel système perdant de l'énergie par émission d'ondes gravitationnelles, mais également de manière directe grâce aux détecteurs LIGO et Virgo (ABBOTT et al., 2017b) qui fonctionnent sur le principe de l'interférométrie résumé dans la Fig. 1.20 : un laser est envoyé dans les deux bras du détecteur puis est renvoyé par un miroir pour interférer avec lui même, l'intensité du laser sera alors annulée par les interférences destructives. Si une onde gravitationnelle passe par un bras du détecteur, l'espace-temps et donc le bras du détecteur sera déformé pendant un court instant par le passage de cette onde, le trajet des photons sera modifié et alors le laser n'interférera plus avec lui même, on détectera alors une intensité non-nulle au point d'interférence des deux faisceaux.

Entraînement des référentiels inertiels

Pour un astre massif tournant sur lui-même, et si son paramètre de spin a est assez important ($a = \frac{J}{Mc}$ avec J le moment cinétique de l'astre et M sa masse), alors d'après la théorie de la relativité générale on assiste à un phénomène d'entraînement des référentiels inertiels où l'espace-temps au voisinage de cet astre est entraîné dans son mouvement de rotation. La métrique de Schwarzschild ne prenant pas en compte la rotation de l'astre dont la masse déforme l'espace-temps, on doit, pour décrire ce phénomène, avoir recours à d'autres métriques comme par exemple la métrique de Kerr :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) c^2 dt^2 + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - r R_S + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ + \left(r^2 + a^2 + \frac{R_S r a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 - \left(\frac{2 R_S r a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) c dt d\phi. \quad (1.64)$$

Il existe alors, autour de l'astre en question une ergosphère de rayon :

$$R_{\text{ergo}} = R_G + \sqrt{R_G^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (1.65)$$

avec $R_G = R_S/2$ le rayon gravitationnel de l'astre. Dans cette ergosphère l'espace-temps tourne avec l'astre et tout objet qui se trouve dans cette région ne peut rester immobile et sera également entraîné par la rotation de l'astre.

Trous noirs



FIGURE 1.21 – Image radio obtenue par l'Event Horizon Telescope du trou noir supermassif au cœur de la galaxie Messier 87.

Une des prédictions les plus célèbres de la théorie de la relativité générale est l'existence de trous noirs : des astres pour lesquels rien ne peut s'échapper de leur puits gravitationnel pas même la lumière (un concept similaire avait cependant été avancé dans un cadre newtonien dès le XVIII^{ème} siècle par John Michell puis par Pierre-Simon de Laplace).

L'équation (1.59) qui représente l'intervalle d'espace-temps dans la métrique de Schwarzschild présente deux singularités en $r = 0$ et $r = R_S$. Si la première est considérée comme intrinsèque à la métrique de Schwarzschild et possédant une origine physique que l'on ne peut pas éliminer, montrant les limites de cette métrique, on peut remédier à la seconde par l'utilisation de coordonnées alternatives comme les coordonnées de Kruskal-Szekeres (KRUSKAL, 1960 ; SZEKERES, 1960) ou de Gullstrand-Painlevé (GULLSTRAND, 1922 ; PAINLEVÉ, 1921). On considère cependant que cette seconde singularité décrit l'horizon des événements d'un trou noir de Schwarzschild : soit un astre dont le rayon est inférieur à son rayon de Schwarzschild R_S , si un objet, une particule ou un photon se retrouve à une altitude inférieure au rayon de Schwarzschild de l'astre ($r < R_S$) alors les seules trajectoires possibles pour cet objet sont celles qui tombent sur la singularité centrale de la métrique $r \rightarrow 0$, l'objet ne peut donc effectivement pas s'échapper du trou noir. La métrique de Schwarzschild ne peut évidemment décrire qu'un trou noir statique, si le trou noir tourne sur lui même alors, d'après la métrique de Kerr, il y a deux horizons des événements, un horizon interne contenu dans un horizon externe :

$$R_{\text{horizon}} = R_G \pm \sqrt{R_G^2 - a^2} \quad (1.66)$$

Les trous noirs peuvent également posséder une charge électrique, ils seront alors décrits par des métriques telles que celles de Reissner-Nordström, pour un trou noir statique, ou de Kerr-Newman pour un trou noir en rotation. D'ailleurs le théorème *no-hair* prévoit que la masse, le moment cinétique et la charge sont tout ce dont on a besoin pour décrire un trou noir.

Ces trous noirs peuvent se former, comme on en a déjà discuté dans la section 1.1.1, par l'effondrement du cœur d'une étoile massive au cours d'une supernova

lorsque celui-ci a une masse supérieure à la limite de masse d'une étoile à neutrons. Cette masse maximale, déterminée par la limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, a été initialement théorisé autour de $0.7 M_{\odot}$ (TOLMAN, 1939; OPPENHEIMER et VOLKOFF, 1939), elle se situerait en fait au-delà de $2 M_{\odot}$ (comme par exemple dans MARGALIT et METZGER, 2017) lorsque l'on prend en compte l'interaction forte entre les neutrons. Ces trous noirs peuvent aussi se former lors de collisions d'astres massifs comme des étoiles à neutrons.

Il existe également des trous noirs dit supermassifs, comme celui de la Fig. 1.21, que l'on trouve au cœur des galaxies et qui pèsent plusieurs millions de masses solaires ainsi que des trous noirs intermédiaires dont la masse est comprise entre une centaine et une centaine de milliers de masses solaires. Les mécanismes de formation pour ces deux types de trous noirs n'ont pas encore été complètement élucidés.

Courbure des rayons lumineux

Du fait de la déformation de l'espace-temps, le rayonnement électromagnétique est également affecté par la gravité d'un astre massif. Ainsi la trajectoire d'un photon passant près de l'un de ces astres sera courbée par le champ gravitationnel de celui-ci, phénomène appelé *light-bending*. L'une des premières preuves de la théorie de la relativité générale fut d'ailleurs l'observation par Arthur Eddington de la déviation des rayons lumineux des étoiles par le champ gravitationnel du Soleil lors de l'éclipse solaire du 29 mai 1919 (DYSON et al., 1920).

C'est ce *light-bending* qui est à l'origine des lentilles gravitationnelles : le champ gravitationnel d'un astre ou même d'une galaxie agit comme une lentille convergente en courbant les rayons lumineux (même pour un rayonnement en dehors du spectre de la lumière visible) d'un objet situé derrière celui-ci quand observé depuis la Terre comme illustré par la Fig. 1.22. Les lentilles gravitationnelles permettent ainsi d'observer des objets qui seraient invisibles sans, elles permettent également de détecter des exoplanètes (HAN et al., 2020), voire de détecter des amas de matière noire (JEE et al., 2007) cette dernière ne pouvant être détectée directement par observation car n'interagissant, hypothétiquement, que très peu avec la matière ordinaire ou le rayonnement électromagnétique mais étant toutefois pourvu d'une masse capable de déformer l'espace-temps d'après la théorie de la relativité générale.

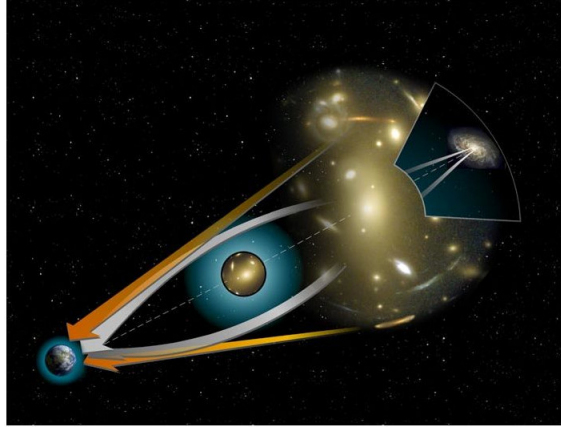


FIGURE 1.22 – Effet de lentille gravitationnelle d'un astre massif (un cluster de galaxie) sur l'image reçue sur Terre d'une galaxie avec en blanc la trajectoire réel des rayons lumineux et en orange leur trajectoire apparente (NASA).

C'est également cet effet de *light-bending* qui permet de voir le disque d'accrétion complètement entourer le trou noir de la Fig. 1.21, en effet de par son inclinaison par rapport à la ligne de visée, ce disque devrait être en partie masqué par le trou noir observé si il n'y avait pas courbure des rayons lumineux (AKIYAMA, 2019b). Cette même courbure des rayons lumineux produit une ombre du trou noir, la partie sombre centrale est alors plus grande que le trou noir lui-même car certains des photons émis par le disque d'accrétion verront leur trajectoire se courber pour tomber sur le trou noir (AKIYAMA, 2019a).

La courbure de la trajectoire des photons entraîne également un temps de retard à la réception du photon par rapport à une trajectoire linéaire, ce temps de retard est appelé le délai Shapiro. Ce retard est notamment utile pour mesurer la masse des corps présents dans un système binaire comme on peut le voir dans la Fig. 1.23 pour un système composé d'un pulsar et d'une étoile compagnon. Lorsque le compagnon passe entre le pulsar et la ligne de visée il courbe la trajectoire des rayons lumineux de par sa masse et on peut donc déduire cette dernière du temps de retard du rayonnement reçu. Connaissant la masse du compagnon et les caractéristiques orbitales du système, on en déduit la masse du pulsar (DEMOREST et al., 2010).

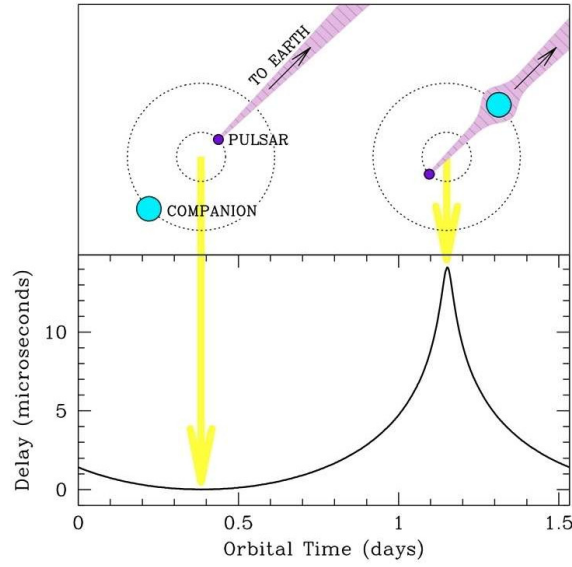


FIGURE 1.23 – Délai Shapiro dans un système binaire composé d'un pulsar. Image tirée de JACOBY, 2008.

Décalage vers le rouge gravitationnel

Une autre conséquence de la théorie de la relativité générale sur le rayonnement électromagnétique est le décalage gravitationnel vers le rouge (un effet indirect de la dilation gravitationnelle du temps). Lorsqu'un photon s'éloigne d'un astre massif, la fréquence du rayonnement correspondant diminue et inversement, lorsqu'il tombe sur l'astre il verra sa fréquence augmenter. La fréquence d'une onde électromagnétique étant l'inverse de sa période, soit la période Δt d'une onde telle que mesurée par un observateur lointain, considérons un observateur situé à la distance r . À partir de l'équation (1.62), on calcule la fréquence ν qu'il percevra :

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{R_S}{r_0}}{1 - \frac{R_S}{r}}} \quad (1.67)$$

avec ν_0 et r_0 la fréquence et l'altitude d'émission de l'onde électromagnétique. Ainsi si on considère que l'on se trouve toujours dans le champ gravitationnel de l'astre, il y aura un décalage gravitationnel vers le rouge même si l'on observe le rayonnement à $r \rightarrow \infty$ du moment que l'altitude d'émission r_0 est proche du rayon de Schwarzschild R_S . Cet effet fut démontré expérimentalement en 1959 par l'observation des transitions énergétiques de noyaux atomiques à différentes altitudes dans le champ gravitationnel terrestre (POUND et REBKA, 1959).

1.5 Objectifs de la thèse

De par leur importante densité, le rapport entre le rayon de Schwarzschild d'une étoile à neutrons et son propre rayon R_* , appelé compacité, est assez élevé, typiquement :

$$\Xi = \frac{R_s}{R_*} \approx 0.5 \quad (1.68)$$

le champ gravitationnel de l'étoile aura donc un impact sur le rayonnement que celle-ci émet tel que prédit par la théorie de la relativité générale. Leur paramètre de spin a est cependant généralement trop faible pour qu'il y ait une ergosphère en dehors de ces étoiles, même si l'entraînement des référentiels inertiels est envisageable bien que négligeable au voisinage des étoiles à neutrons en rotation lente (à l'exception des pulsars millisecondes les plus rapides). La métrique de Schwarzschild est donc suffisante pour décrire les effets du champ gravitationnel sur l'émission des pulsars dans le cadre de la relativité générale.

Si des simulations dans la métrique de Schwarzschild ont déjà été réalisées pour un rayonnement émis depuis la surface de l'étoile, comme dans GONTHIER et HARDING, 1994, peu ont été réalisés pour le rayonnement originaire des parties supérieures de la magnétosphère comprises dans le cylindre lumière, et aucune ne prenant en compte le temps de retard (délai Shapiro) induit par la courbure de la trajectoire des photons dans la métrique de Schwarzschild ou le décalage gravitationnel vers le rouge de ce rayonnement. Cette thèse a pour objectif de pallier ces lacunes particulièrement pour le rayonnement de courbure émis depuis la magnétosphère du pulsar, ainsi les chapitres suivant présentent uniquement des travaux réalisés au cours de cette thèse.

Nous verrons dans un premier temps comment simuler l'effet du champ gravitationnel sur un rayonnement électromagnétique en calculant la trajectoire d'un photon dans la métrique de Schwarzschild puis le temps qu'il met à parcourir cette trajectoire. Nous utiliserons ensuite ces formules pour en déduire le rayonnement que l'on va recevoir du pulsar pour différentes émissions : d'abord pour une émission thermique provenant de points chauds situés aux niveaux des calottes polaires, puis pour l'émission haute énergie et radio provenant de la magnétosphère, la première provenant des cavités étroites et la seconde des cavités polaires. Nous nous intéresserons d'ailleurs aux spectres de cette émission radio et haute énergie notamment pour savoir d'où, dans la magnétosphère du pulsar, provient le rayonnement le plus énergétique.

Chapitre 2

Émission thermique de surface

Avant de s'intéresser à l'émission magnétosphérique non thermique en radio et en gamma des pulsars, on étudie en guise de première application l'émission thermique de surface de l'étoile afin de tester et de vérifier notre implémentation des méthodes de calcul en espace-temps courbe.

Pour simuler cette émission dans la métrique de Schwarzschild, on a d'abord dû déterminer la trajectoire d'un photon dans cette métrique, dans un premier temps en se restreignant à un plan puis, dans un deuxième temps en réorientant ce plan contenant la trajectoire du photon dans l'espace et en tenant compte du temps de vol du photon. On a ainsi pu réaliser une image de la surface de l'étoile à neutrons telle que perçue dans la métrique de Schwarzschild afin de donner une idée des effets de la courbure de la trajectoire des photons sur l'émission provenant de cette surface. Finalement, on appliquera ces méthodes de simulation de la trajectoire et du temps de vol des photons à l'émission thermique provenant de deux points chauds situés au niveau des calottes polaires (ou pôles magnétiques) d'un pulsar.

2.1 Trajectoire d'un photon

2.1.1 Dans le plan équatorial

Afin de définir la manière dont le champ gravitationnel affecte le rayonnement émis par le pulsar, on décrit d'abord le comportement d'un photon dans la métrique de Schwarzschild centrée sur une étoile à neutrons.

La trajectoire d'un photon dans la métrique de Schwarzschild étant toujours comprise dans un plan, du fait de la symétrie sphérique de cette métrique, on peut dans un premier temps tracer la trajectoire du photon dans le plan équatorial où la colatitude θ est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ soit :

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.1)$$

La matrice $g_{\mu\nu}$ représentant la métrique s'écrira ainsi dans ce plan :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Nous avons suivi la méthode utilisée dans KRAUS, 1998 pour déterminer la trajectoire d'un photon à partir de l'équation (2.1) de la métrique de Schwarzschild dans le plan équatorial, méthode que nous avons détaillée dans l'annexe A.1.1. On déduit la trajectoire des photons à partir du paramètre d'impact b qui est défini en fonction de α et de r_0 , respectivement l'angle et l'altitude d'émission du photon :

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r_0}}} \sin \alpha. \quad (2.3)$$

Ce paramètre d'impact représente la distance entre la trajectoire du photon et une droite parallèle qui passe par l'origine comme illustré dans la Fig. 2.1 :

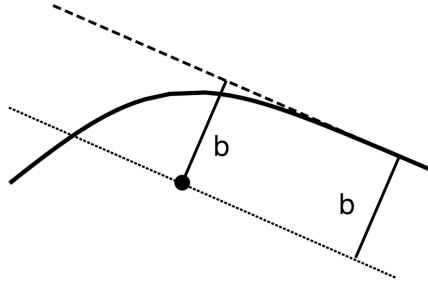


FIGURE 2.1 – Le paramètre d'impact b est la distance séparant la trajectoire du photon d'une droite parallèle passant par l'origine, image tirée de KRAUS, 1998.

Pour résumer, l'angle ϕ de la trajectoire satisfait

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - b^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}}. \quad (2.4)$$

En intégrant l'équation (2.4), on peut retrouver la coordonnée angulaire du photon en fonction de sa coordonnée radiale et donc en déduire sa trajectoire :

$$\phi(r) = \phi_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{b dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}} \quad (2.5)$$

ϕ_0 étant la coordonnée angulaire du point d'émission du photon. Pour un photon s'éloignant de l'origine du repère pour partir vers l'infini, on choisit le signe positif

tandis que pour un photon tombant sur l'origine du repère on choisit le signe négatif. Le photon tombe sur l'origine si le paramètre d'impact b est inférieur à une valeur critique b_c tel que $b_c = 1.5\sqrt{3}R_S$.

Afin de trouver la position d'un photon à l'infini, on effectue le changement de variable $u = \frac{1}{r}$. Ainsi quand la coordonnée radiale r du photon tend vers l'infini ($r \rightarrow \infty$), on a $u = 0$. En posant $u_0 = \frac{1}{r_0}$, on obtient avec ce changement de variable quand le photon part vers l'infini :

$$\phi(u) = \phi_0 - \int_{u_0}^u \frac{bdu}{\sqrt{1 - b^2u^2(1 - r_s u)}} \quad (2.6)$$

Et quand le photon tombe sur l'origine :

$$\phi(u) = \phi_0 + \int_{u_0}^u \frac{bdu}{\sqrt{1 - b^2u^2(1 - r_s u)}} \quad (2.7)$$

L'intégration de ces formules a été réalisée en utilisant la méthode présentée dans l'annexe B.1. Elle est basée sur la quadrature de Clenshaw-Curtis, par projection de la fonction à intégrer sur les polynômes de Chebyshev, voir par exemple PRESS et al., 2007. Cette méthode est rapide, efficace et précise, et converge très rapidement vers la valeur exacte comparée à une méthode classique d'intégration par les rectangles ou les trapèzes. Notre méthode de quadrature possède aussi l'avantage d'être plus rapide et précise qu'une intégration directe des équations du mouvement des photons (résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires).

Un cas particulier de trajectoire est donné par un photon qui dans un premier temps se dirige vers l'origine du repère puis dans un deuxième temps repart vers l'infini. Pour déterminer la trajectoire de ce photon, il faut diviser le mouvement en deux parties, une phase d'approche de l'étoile suivie d'une phase de récession. On procède donc comme indiqué ci-dessous :

- On commence par calculer r_{\min} , la racine la plus grande du polynôme $1 - \frac{b^2}{r^2}(1 - \frac{R_S}{r})$ (donnée par la méthode présentée dans la section B.3), qui est la plus petite distance entre le photon et l'origine sur la trajectoire et donc la coordonnée radiale du point de rebroussement du photon.
- Pour obtenir la première partie de la trajectoire, celle où le photon tombe sur l'origine, on intègre l'équation (2.7) de r_0 à r_{\min} afin de trouver $\phi(r_{\min})$, la coordonnée angulaire du point de rebroussement du photon.
- Pour obtenir la seconde partie de la trajectoire, celle où le photon repart vers l'infini, on intègre l'équation (2.6) en prenant $r_0 = r_{\min}$, soit $u_0 = \frac{1}{r_{\min}}$ et $\phi_0 = \phi_{\min}$.

Cette démarche en deux étapes est nécessaire car la fonction $\phi(r)$ est multivaluée : à un rayon r donné peuvent correspondre plusieurs valeurs de ϕ . On la sépare donc en deux fonctions $\phi(r)$ monovaluée.

La même démarche peut être suivie pour tracer la trajectoire d'un photon qui s'éloigne initialement de l'origine avant de retomber dessus à l'exception qu'ici la coordonnée radiale du point de rebroussement sera r_{\max} la racine la plus petite du polynôme et la distance maximale du photon à l'origine. Dans ce cas on intégrera d'abord l'équation (2.6) puis l'équation (2.7) une fois r_{\max} atteint.

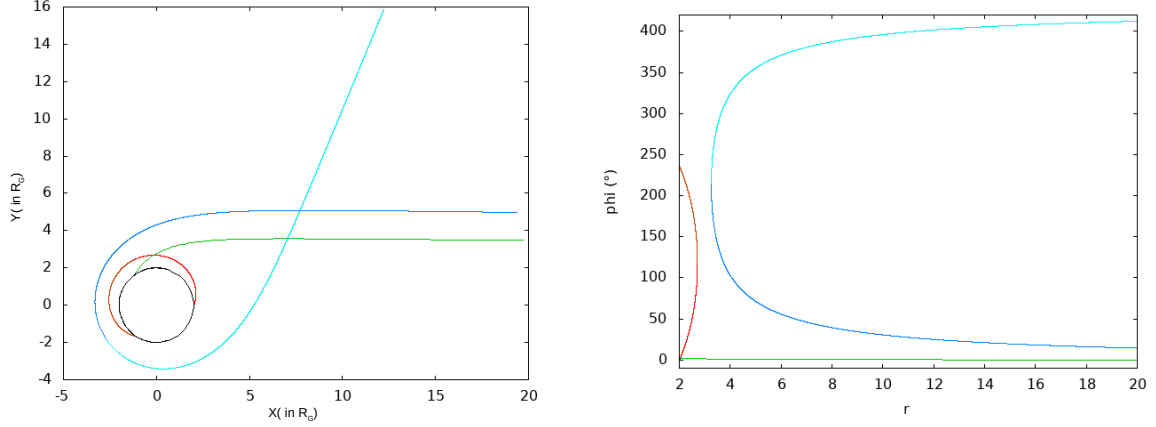


FIGURE 2.2 – À gauche, différentes trajectoires d'un photon autour d'un trou noir de Schwarzschild (en noir) dans un seul plan. Les graduations de ce graphe représentent la distance en rayons gravitationnels $R_G = \frac{1}{2}R_S$ du trou noir. À droite, coordonnée angulaire (en degrés) en fonction de la distance radiale, exprimée en rayons gravitationnels R_G du trou noir, pour les mêmes trajectoires.

La Fig. 2.2 représente les divers types de trajectoires du photon dans le plan équatorial d'un trou noir de Schwarzschild que l'on peut obtenir en intégrant les équations présentées plus haut, avec :

- en vert : la trajectoire d'un photon qui, partant de l'infini, tombe sur le trou noir ou, parcouru dans le sens inverse, celle d'un photon émis juste au-dessus de l'horizon des événements qui part vers l'infini.
- en rouge : un photon émis juste au-dessus l'horizon des événements du trou noir qui retombe sur celui-ci.
- en bleu : la trajectoire d'un photon provenant de l'infini qui dans un premier temps tombe sur le trou noir avant de s'en éloigner.

Le phénomène de *light-bending* apparaît clairement sur la partie gauche de cette figure, les trajectoires des photons sont courbées par la proximité du corps massif.

La partie droite de la Fig. 2.2 quant à elle représente l'évolution de la coordonnée angulaire ϕ en fonction de la distance radiale r pour ces trajectoires. On voit notamment que la fonction $\phi(r)$ est multivaluée dans le cas du photon qui retombe sur le trou noir ou dans le cas où le photon tombe puis finit par s'éloigner du trou noir.

Ces trajectoires ne concernent que les photons évoluant dans le plan équatorial de l'astre. Afin de déterminer la trajectoire d'un photon quelconque, il faut replacer ce plan dans l'espace à 3D en l'orientant par rapport à une direction fixe. C'est l'objet du prochain paragraphe.

2.1.2 Dans l'espace à 3D

A partir de la trajectoire du photon dans le plan équatorial, on peut retrouver n'importe quelle trajectoire dans l'espace 3D en effectuant une rotation du plan contenant le mouvement du photon. Cette opération de rotation sera réalisée grâce à la matrice des rotations d'Euler :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \beta \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

où l'on introduit les angles d'Euler α , β et γ représentant respectivement la précession, la nutation et la rotation propre de la normale du plan par rapport à une direction fixe de l'espace. Cette matrice est la synthèse de trois rotations successives afin de faire coïncider la normale du plan de la trajectoire avec une direction fixe prise par défaut le long de l'axe z .

Si on connaît la position du point d'émission et la direction de propagation initiale du photon dans un repère cartésien (O, x, y, z) , avec les rotations d'Euler on peut passer dans un repère (O, x', y', z') où le point d'émission et la direction de propagation initiale sont tous les deux contenus dans le plan $z' = 0$. Soit une droite Δ dont le vecteur directeur est la direction de propagation du photon au point d'émission et qui coupe le plan $z = 0$ en un point P , pour effectuer les rotations nécessaires on va utiliser :

- l'angle A entre l'axe x et une droite d inscrite dans le plan $z = 0$ passant par le point P et l'origine O du repère.
- l'angle B entre le plan $z = 0$ et la droite Δ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos A & -\sin A \cos B & \sin A \sin B \\ \sin A & \cos A \cos B & -\cos A \sin B \\ 0 & \sin B & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Considérons que le plan $z' = 0$ est le plan équatorial d'un repère sphérique, on peut alors déterminer les coordonnées x' et y' de chaque point de la trajectoire du photon dans le plan $z' = 0$ en intégrant l'équation (2.5) sachant que dans ce plan $x' = r \cos \phi$ et $y' = r \sin \phi$. On pourra alors retrouver les coordonnées x , y et z de chacun de ces points dans l'espace en effectuant l'opération de rotation inverse et ainsi retrouver la trajectoire du photon dans l'espace :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A \cos B & \cos A \cos B & -\sin B \\ \sin B \sin A & -\sin B \cos A & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Cette méthode des rotations d'Euler ne peut pas être appliquée à une métrique ne possédant pas la symétrie sphérique. En effet, dans une telle géométrie, les trajectoires ne sont plus contenues dans un plan. Il faut alors effectuer une intégration 3D complète, par exemple pour la métrique de Kerr qui prend en compte la rotation de l'astre. Voir RAUCH et BLANDFORD, 1994 pour un exemple d'application complet avec des formules de quadrature exactes en métrique de Kerr.

2.1.3 Temps de vol d'un photon

Comme on l'a vu pour les coordonnées spatiales du photon, on peut retrouver l'évolution de la coordonnée temporelle $\frac{dt}{dr}$ à partir des équations du mouvement (voir par exemple (A.36) et (A.37)) en remarquant que $\frac{dt}{dr} = \frac{p^t}{p^r}$. On a alors, en gardant la même définition du paramètre d'impact b :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}}. \quad (2.11)$$

En intégrant cette équation on obtient la coordonnée temporelle du photon en fonction de sa coordonnée radiale selon :

$$t(r) = t_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)}} \quad (2.12)$$

avec t le temps que met le photon, du point de vue d'un observateur lointain, pour parcourir sa trajectoire et t_0 le moment auquel le photon est émis. Le temps de parcours de la trajectoire sera alors plus important dans la métrique de Schwarzschild que dans celle de Minkowski (espace-temps plat) quand le photon passe près de l'origine du champ gravitationnel et ce bien que la vitesse locale de la lumière dans le vide reste la même. C'est le délai Shapiro dû à la courbure des rayons lumineux.

Ici aussi on peut appliquer le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ pour obtenir le temps de vol d'un photon jusqu'à l'infini. On trouve :

$$t = t_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2(1 - R_s u) \sqrt{1 - b^2 u^2(1 - R_s u)}}. \quad (2.13)$$

Pour une trajectoire scindée en deux parties, où le photon tombe dans un premier temps vers l'origine du repère puis s'en éloigne après avoir atteint un point de rebroussement en $r = r_{\min}$, on calculera d'abord le temps de parcours sur la première partie de la trajectoire en intégrant l'équation (2.13) de u_0 à $u_{\min} = \frac{1}{r_{\min}}$ puis on ajoutera à celui-ci le temps de parcours pour la deuxième partie de la trajectoire en intégrant l'équation (2.13) de u_{\min} à u (et en posant $t_0 = 0$). Même chose pour le cas d'un photon partant de l'étoile à neutrons avant de retomber dessus à part qu'ici on intégrera dans un premier temps l'équation (2.13) de u_0 à $u_{\max} = \frac{1}{R_{\max}}$ puis de u_{\max} jusqu'à $u = \frac{1}{R_s}$.

2.2 Distorsion de l'image d'une étoile

Pour se rendre compte des changements introduits par le phénomène de *light-bending*, on a réalisé des simulations de l'image de la surface de l'étoile que recevrait un observateur situé à l'infini dans un espace-temps plat et dans la métrique de Schwarzschild. On considère l'étoile comme statique et on répartit les points d'émission des photons à sa surface de manière à avoir un quadrillage, représenté sur la Fig. 2.3, où chaque photon est séparé de ses voisins par un angle de 1° en colatitude et longitude.

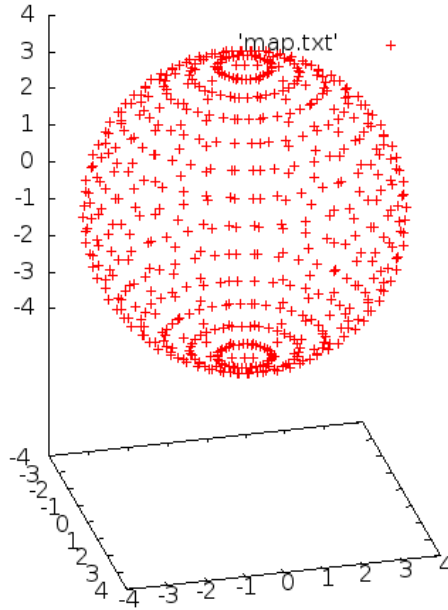


FIGURE 2.3 – Points d'émission à la surface de l'étoile à neutrons

Dans un espace temps plat, où on ne prend pas en compte les effets du champ gravitationnel, il suffit de tracer une trajectoire rectiligne jusqu'à un écran faisant figure d'observateur situé à l'infini à partir des points d'émission quand ces trajectoires ne passent pas par l'intérieur de l'étoile.

Dans la métrique de Schwarzschild, la trajectoire des photons est courbée par le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons, cet effet sera d'autant plus important que la compacité de l'étoile ($\Xi = \frac{R_S}{R_\star}$ avec R_\star le rayon de l'étoile) est grand. Pour obtenir une image de la surface de l'étoile, on recherche, à l'aide de la fonction de recherche de zéro décrite dans l'annexe B.2, l'angle d'émission du photon, compris entre -90° et 90° , qui nous donne Φ nul à l'infini (ce qui correspond à la position théorique de l'observateur) pour chacun des points d'émission précédemment fixés. À partir de cet angle d'émission θ , on en déduit le paramètre d'impact b d'après l'équation (2.3). Le point d'impact du photon sur l'écran au niveau de l'observateur se situera à la distance b de la ligne de visée d'après la Fig. 2.1 soit la distance entre le point d'impact et le centre de l'écran. Par rotation du plan contenant la trajectoire de ce photon (comme dans la section 2.1) on obtient la position du point

d'impact sur cet écran.

Les Fig. 2.4 à 2.7 sont les images ainsi obtenues de la surface de l'étoile pour différentes inclinaisons de la ligne de visée et différentes compacités Ξ de l'étoile. Ainsi chacune des figures a été réalisée avec un rayon R_\star de l'étoile de 2 et de 4 fois le rayon de Schwarzschild R_S de l'étoile à neutrons. On peut ainsi voir que, dans le cas relativiste, on reçoit une image plus grande de l'étoile à neutrons quand sa compacité augmente du fait de la courbure de la trajectoire des photons, le rayon R_∞ de l'image dans la métrique de Schwarzschild pouvant d'ailleurs être calculé ainsi :

$$R_\infty = \frac{R_\star}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_\star}}}. \quad (2.14)$$

On voit également qu'une surface plus importante de cette étoile est visible dans la métrique de Schwarzschild, révélant des détails alors cachés dans un espace-temps plat, comme les régions polaires du quadrillage qui sont bien visibles dans les Fig. 2.4 et 2.5 pour des inclinaisons de 0 ou 30° de la ligne de visée.

Ce point est important car l'émission d'un pulsar sera alors modifiée dans la métrique de Schwarzschild du fait que l'on reçoit des photons que l'on ne percevait pas en espace-temps plat. Cela permet également d'illustrer le fait que plus on s'éloigne du rayon de Schwarzschild, comme on l'a vu dans la section 1.4.1, moins les effets liés à la déformation de l'espace-temps se font ressentir.

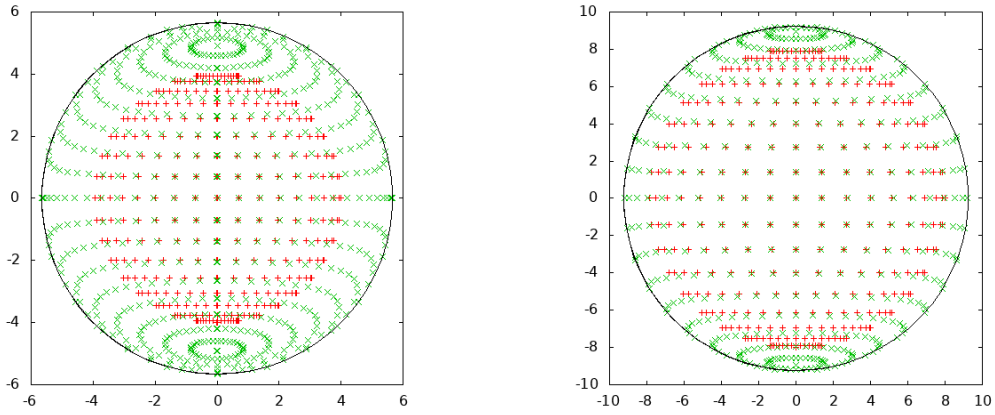


FIGURE 2.4 – Image à l’infini de la surface d’une étoile à neutrons de compacité $\Xi = 0.5$ à gauche et $\Xi = 0.25$ à droite pour une inclinaison de la ligne de visée nulle avec en noir la taille de l’image prédite par l’équation (2.14).

En rouge l’image obtenue pour un espace temps plat et en vert celle obtenue dans la métrique de Schwarzschild.

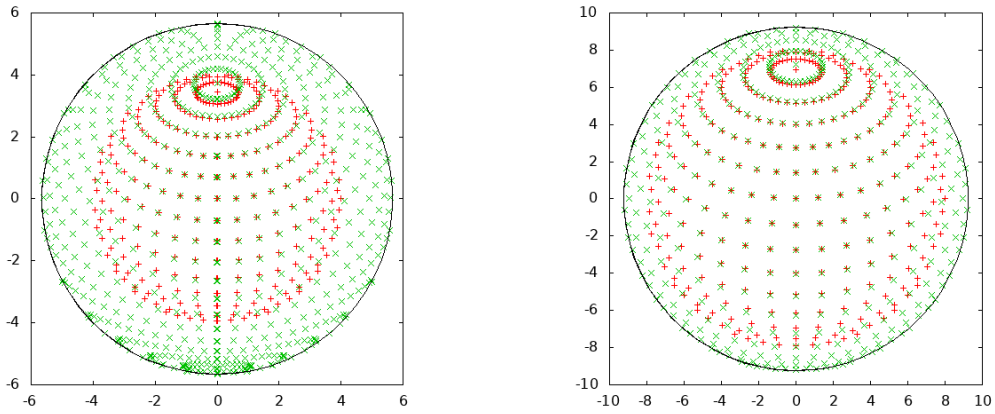


FIGURE 2.5 – Image à l’infini de la surface d’une étoile à neutrons de compacité $\Xi = 0.5$ à gauche et $\Xi = 0.25$ à droite pour une inclinaison de 30° avec en noir la taille de l’image prédite par l’équation (2.14).

En rouge l’image obtenue pour un espace temps plat et en vert celle obtenue dans la métrique de Schwarzschild.

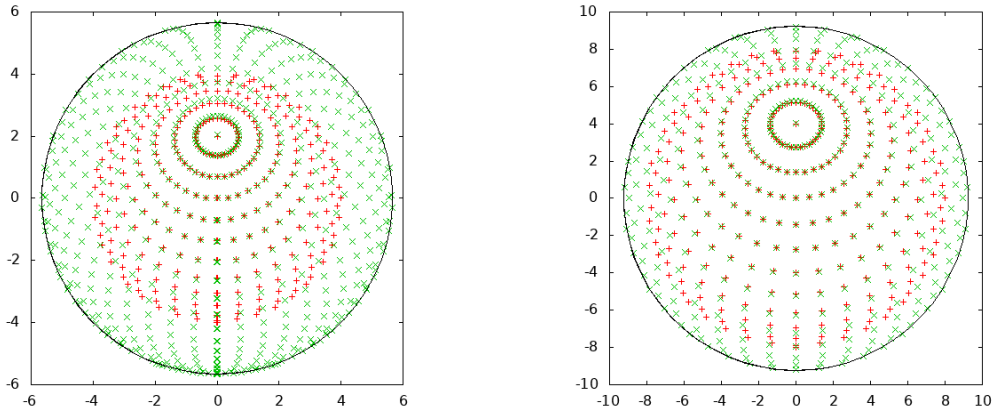


FIGURE 2.6 – Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons de compacité $\Xi = 0.5$ à gauche et $\Xi = 0.25$ à droite pour une inclinaison de 60° avec en noir la taille de l'image prédite par l'équation (2.14).

En rouge l'image obtenue pour un espace temps plat et en vert celle obtenue dans la métrique de Schwarzschild.

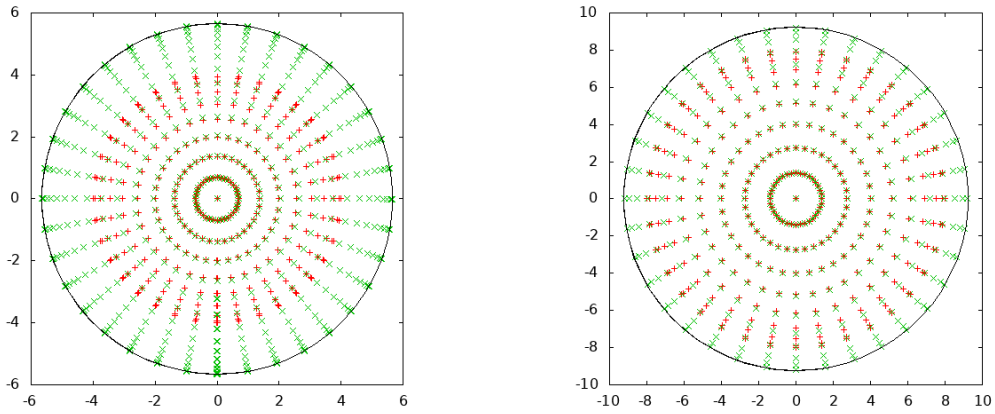


FIGURE 2.7 – Image à l'infini de la surface d'une étoile à neutrons de compacité $\Xi = 0.5$ à gauche et $\Xi = 0.25$ à droite pour une inclinaison de 90° avec en noir la taille de l'image prédite par l'équation (2.14). En rouge l'image obtenue pour un espace temps plat et en vert celle obtenue dans la métrique de Schwarzschild.

2.3 Flux thermique des calottes polaires

On peut se poser la question de comment le flux de rayonnement émanant des points chauds situés aux pôles magnétiques, comme dans le cas d'un pulsar accrétant, sera affecté par le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons.

Le flux reçu de chacun de ces points chauds par un observateur distant peut être calculé grâce à l'expression suivante (BOGDANOV et al., 2007) :

$$F(\nu) = \sqrt{1 - \frac{R_s}{R_\star}} \eta^4 I \cos \alpha \frac{\partial \cos \alpha}{\partial \cos \psi} \frac{dS}{D^2} \quad (2.15)$$

où I est l'intensité émise par la surface d'aire dS que l'on supposera ici isotrope (constante), D est la distance entre le pulsar et l'observateur et η est le facteur Doppler qui est égal à :

$$\eta = \frac{1}{\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \xi)} \quad (2.16)$$

avec :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.17)$$

le facteur de Lorentz du point chaud,

$$v = \frac{2\pi R_\star}{P\sqrt{1 - \frac{R_s}{R_\star}}} \sin \chi \quad (2.18)$$

la vitesse instantanée du point chaud qui dépend de la période de rotation P du pulsar, χ l'angle entre l'axe de rotation et l'axe magnétique du pulsar soit l'inclinaison du champ magnétique, ξ l'angle entre le vecteur vitesse du point chaud et la direction de l'observateur défini par :

$$\cos \xi = \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \sin \zeta \sin \varphi \quad (2.19)$$

ζ étant l'inclinaison sous laquelle on observe l'étoile (angle entre l'axe de rotation et la direction de l'observateur) et φ la phase du pulsar. La géométrie complète est détaillée en figure 2.8.

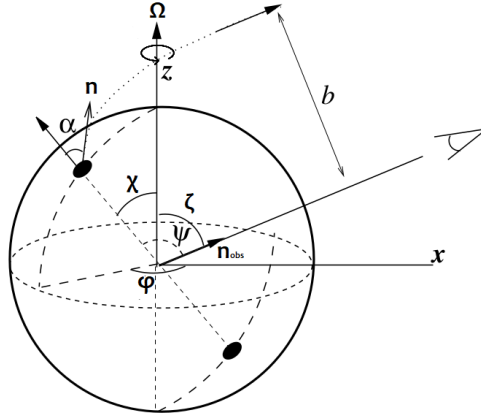


FIGURE 2.8 – Géométrie utilisée dans le calcul de la courbe de lumière d'un point chaud, image tirée de VIIRONEN et POUTANEN, 2004.

Quant à ψ il désigne la position des calottes polaires, c'est en fait l'angle entre la ligne de visée de l'observateur et l'axe magnétique et d'après VIIRONEN et POUTANEN, 2004 celui-ci vaut :

$$\cos \psi = \pm(\cos \zeta \cos \chi + \sin \zeta \sin \chi \cos \varphi) \quad (2.20)$$

soit pour la calotte polaire "nord" :

$$\cos \psi_{\text{nord}} = \cos \zeta \cos \chi + \sin \zeta \sin \chi \cos \varphi \quad (2.21)$$

et pour la calotte polaire "sud" :

$$\cos \psi_{\text{sud}} = -\cos \zeta \cos \chi - \sin \zeta \sin \chi \cos \varphi \quad (2.22)$$

L'angle ψ est égal à la coordonnée angulaire du photon à l'infini $\phi(\infty)$ donnée par l'équation (2.7) quand ϕ_0 est nul. Sachant cela, on peut retrouver l'angle d'émission initiale du photon α en utilisant une fonction de recherche de zéro par bisection (voir l'annexe B.2) afin de trouver pour quelle valeur de cet angle α la différence entre les équations (2.20) et (2.7) est nulle. Connaissant α , on peut alors calculer le flux des points chauds en posant à partir de (2.15) :

$$F(\nu) = \sqrt{1 - \frac{R_s}{R_\star}} \eta^4 I \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \frac{dS}{D^2} \quad (2.23)$$

Or à partir de l'équation (2.5), on peut calculer $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$, l'inverse de $\frac{\partial \alpha}{\partial \psi}$, ce qui donne

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \int_{r_0}^{\infty} \frac{b' dr}{r^2 \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) \right]^{3/2}} \quad (2.24)$$

où b' est la dérivée du facteur d'impact en fonction de α :

$$b' = \frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r_0}}} \cos \alpha \quad (2.25)$$

soit avec le changement de variable $u = 1/r$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = - \int_{u_0}^0 \frac{b' du}{[1 - b^2 u^2 (1 - u R_s)]^{3/2}} = \int_0^{u_0} \frac{b' du}{[1 - b^2 u^2 (1 - u R_s)]^{3/2}} \quad (2.26)$$

Comme ici les photons sont émis depuis la surface de l'étoile à neutrons, le rayon de cette étoile R_\star est donc l'altitude d'émission des photons soit $r_0 = R_\star$. Attention cependant, lorsque ψ est nul ou tend vers zéro, on utilisera la limite asymptotique $\frac{\sin \alpha}{\sin \psi} = \sqrt{1 - \frac{R_s}{R_\star}}$ ce qui donne :

$$F(\nu) = \left(1 - \frac{R_s}{R_\star}\right) \eta^4 I \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \frac{dS}{D^2}. \quad (2.27)$$

Dans un espace-temps de Minkowski sans effet du champ gravitationnel on aura $\cos \psi = \cos \alpha$, on peut donc en déduire le flux reçu du pulsar dans cette espace-temps plat :

$$F(\nu) = \sqrt{1 - \frac{R_s}{R_\star}} \eta^4 I \cos \alpha \frac{dS}{D^2}. \quad (2.28)$$

Dans tous les cas, le flux devra être considéré comme nul si l'angle α calculé à partir de (2.7) et (2.20) n'est pas compris entre -90° et 90° car sinon cela voudrait dire que les photons émis traversent l'étoile, or celle-ci n'est évidemment pas transparente.

Le flux reçu de l'étoile à neutrons est alors la somme du flux émis par chacun des deux points chauds aux pôles magnétiques, les Fig. 2.9 à 2.10 présentent le flux reçu d'une étoile à neutrons de compacité $\Xi = 0.5$ et dont le rayon du cylindre lumière est 10 fois plus grand que son propre rayon pour deux valeurs de χ l'inclinaison de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation, 90° et 45° et toutes les valeurs possibles de ζ (ici appelé colatitude). L'observateur est situé à une distance de 1000 fois le rayon du cylindre lumière, une distance à laquelle les effets du champ gravitationnel de l'étoile sur les photons sont négligeables.

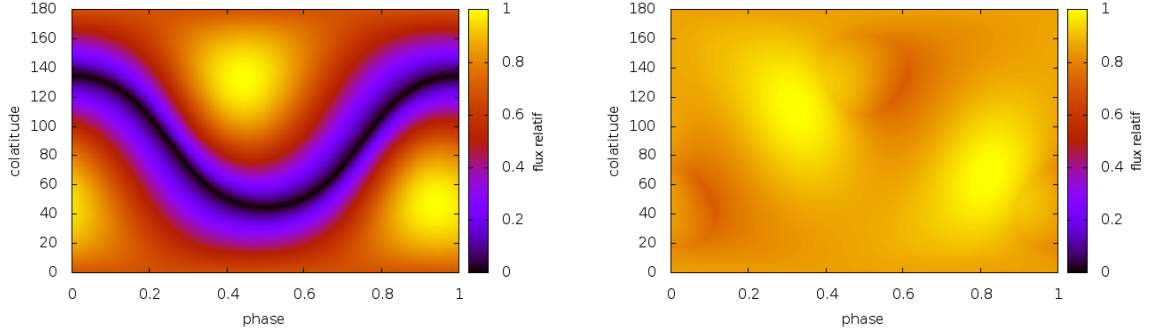


FIGURE 2.9 – Flux reçu des deux calottes polaires par un observateur distant dans un espace-temps plat à gauche et dans la métrique de Schwarzschild à droite, avec $\chi = 45^\circ$.

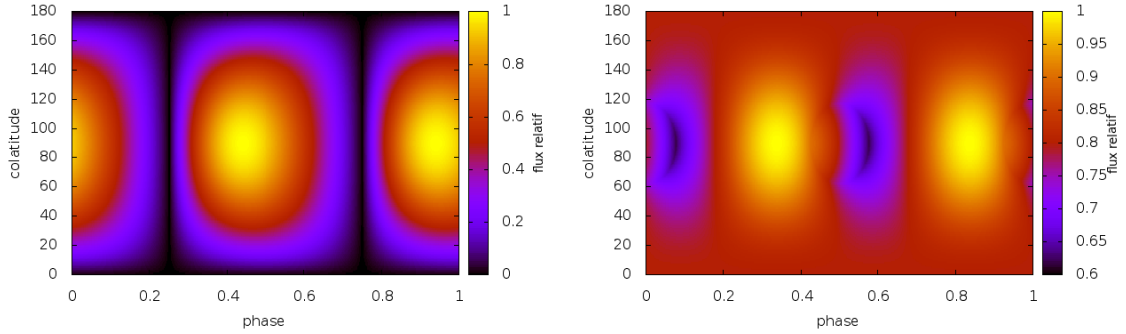


FIGURE 2.10 – Flux reçu des deux calottes polaires par un observateur distant dans un espace-temps plat à gauche et dans la métrique de Schwarzschild à droite, avec $\chi = 90^\circ$.

À ce flux il faudra rajouter un décalage par rapport à la phase dû au temps de vol des photons.

Dans le cas Minkowskien avec un espace-temps plat, ce décalage est égal à la distance séparant l'étoile de l'observateur divisée par la vitesse de la lumière plus un terme $(\frac{-\vec{n}_{obs} \cdot \vec{r}}{c})$ dépendant de la direction du point d'émission à l'observateur \vec{n}_{obs} et de \vec{r} la position du point d'émission du photon (ici on a $\|\vec{r}\| = R_\star$ comme l'émission à lieu à la surface). Ce terme permet de prendre en compte le retard qu'il y aura entre des photons émis depuis différentes positions autour de l'étoile à neutrons avec différentes directions de propagation initiale. Dans le cas relativiste, ce temps de vol peut se retrouver en intégrant une des équations (2.12) ou (2.13). Les graphiques en Fig. 2.11 et 2.12 représentent ainsi le flux reçu avec ce décalage de phase dû au temps de vol des photons.

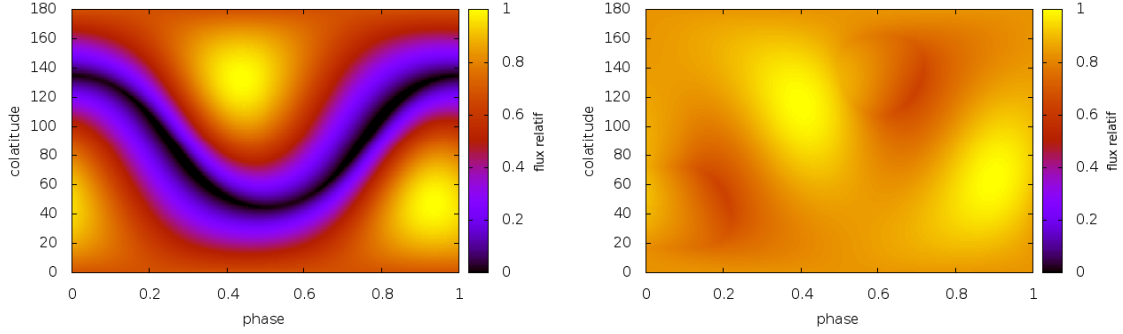


FIGURE 2.11 – Flux reçu des deux calottes polaires par un observateur distant dans un espace-temps plat à gauche et dans la métrique de Schwarzschild à droite avec $\chi = 45^\circ$ en prenant en compte le temps de vol des photons.

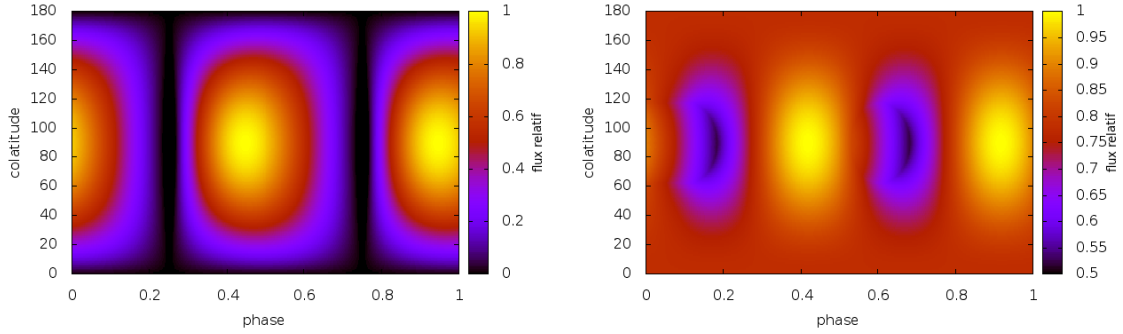


FIGURE 2.12 – Flux reçu des deux calottes polaires par un observateur distant dans un espace-temps plat à gauche et dans la métrique de Schwarzschild à droite avec $\chi = 90^\circ$ en prenant en compte le temps de vol des photons.

On a sur ces figures une répartition plus homogène du flux selon la phase et l'orientation de l'observation dans le cas relativiste du fait des phénomènes de distorsion vus dans la section 2.2 qui rendent les points chauds visibles plus longtemps lors d'une période du pulsar.

On note également un décalage de phase des points où le flux est minimum entre les deux modèles, celui-ci n'est cependant pas dû au retard induit par la courbure de la trajectoire des photons (délai Shapiro) car on le retrouve sur les graphiques de la Fig. 2.9 où on n'a pas tenu compte du temps de vol des photons. Ce décalage est simplement dû à l'addition des flux des deux points chauds à cause de la visibilité accrue de chacun d'entre eux dans la métrique de Schwarzschild. Le second point chaud n'est plus totalement caché par l'étoile lorsque le premier est visible. C'est notamment ce que l'on constate sur la Fig. 2.13 et qui révèlent le flux reçu avec et sans prise en compte du temps de vol pour χ et ζ valant 45° .

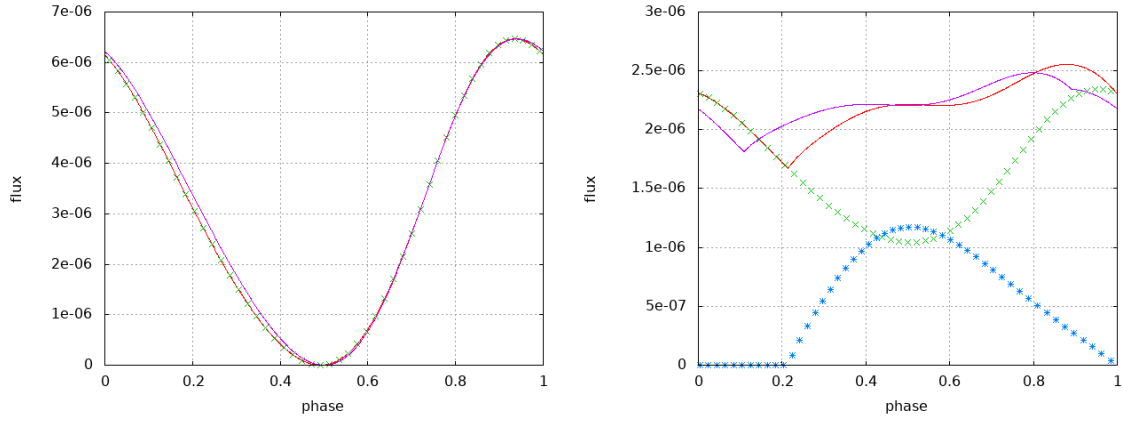


FIGURE 2.13 – Flux reçu pour $\zeta = \chi = 45^\circ$ dans un espace-temps plat à gauche et dans la métrique de Schwarzschild à droite. Les points bleus et verts représentent le flux reçu de chacune des calottes polaires, en rouge le flux total et en violet le flux total sans temps de vol des photons.

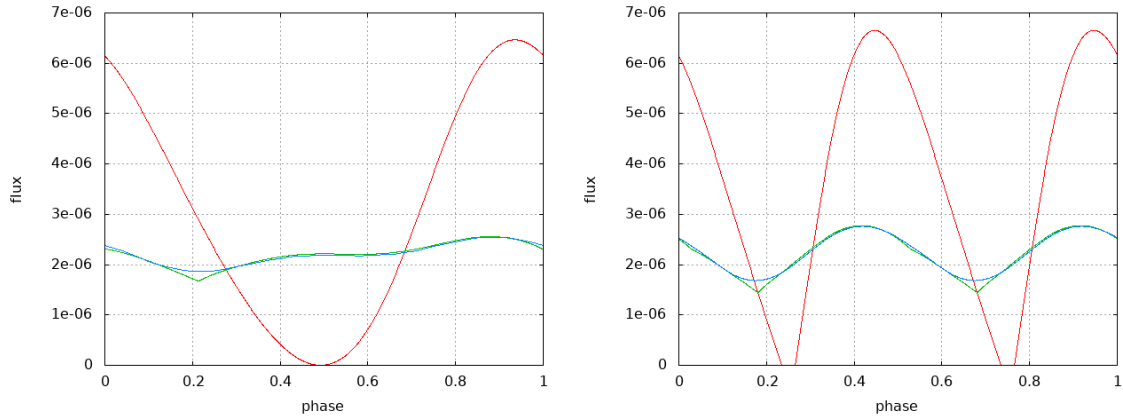


FIGURE 2.14 – Flux reçu à gauche pour $\zeta = \chi = 45^\circ$ et à droite pour $\zeta = \chi = 90^\circ$ avec en rouge le flux reçu dans un espace temps plat, en vert le flux reçu dans la métrique de Schwarzschild et en bleu l'approximation de Beloborodov du flux reçu dans la métrique de Schwarzschild. .

Pour obtenir le flux reçu des points chauds dans la métrique de Schwarzschild, on peut également utiliser l'approximation de BELOBORODOV, 2002 :

$$1 - \cos \alpha = (1 - \cos \phi) \left(1 - \frac{R_S}{R_\star} \right) \quad (2.29)$$

Que l'on peut alors comparer au flux obtenu à partir de l'équation (2.23) comme dans la Fig. 2.14 pour une valeur fixée de l'inclinaison ζ de la ligne de visée (toujours avec le temps de vol des photons). Cette approximation donne ainsi des résultats très similaires à nos simulations mais fait disparaître certaines caractéristiques de la variation du flux. En effet, on ne retrouve pas dans l'approximation de Beloborodov les augmentations brutales du flux après que celui-ci ait atteint son minimum que l'on observe en calculant le flux reçu à partir de l'équation (2.23).

Chapitre 3

Émission magnétosphérique

Les caractéristiques de l'émission thermique de surface sont très différentes de celle de la magnétosphère. En effet, la première suit fidèlement la loi d'un corps noir de température de l'ordre de 10^6 K, correspondant à des rayons X d'une énergie de l'ordre de 100 eV. La seconde provient du rayonnement de particules chargées accélérées dans la magnétosphère et produisant une émission non thermique montrant typiquement un spectre en loi de puissance avec une coupure exponentielle ou sous exponentielle. L'émission de surface est bornée à un petit intervalle de fréquences autour des rayons X mous tandis que l'émission magnétosphérique balaye tout le spectre électromagnétique des ondes radio aux rayons gamma durs de l'ordre du GeV voire très durs au-delà du TeV. L'objet de ce chapitre est d'étudier les propriétés de ce rayonnement non thermique que l'on suppose par la suite émis depuis la magnétosphère à l'intérieur du cylindre lumière. On s'intéressera tout particulièrement à l'impact quantitatif de la relativité générale sur les courbes de lumière en radio et en gamma. Commençons tout d'abord par rappeler le modèle sous-jacent basé sur le champ électromagnétique produit par un dipôle magnétique tournant et évoluant dans une métrique de Schwarzschild, puis nous verrons comment en déduire la géométrie de la magnétosphère et finalement les méthodes de détermination de l'émission pulsée qui seront appliquées à la bande haute énergie et radio.

3.1 Géométrie de la magnétosphère

Pour simuler l'émission issue de la magnétosphère du pulsar, on doit connaître la géométrie du champ magnétique de ce pulsar dans les deux cas qui nous intéressent :

1. Dans un espace-temps de Minkowski ou espace-temps plat, où le champ magnétique n'est pas affecté par le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons, pour cela on a utilisé la solution de Deutsch (DEUTSCH, 1955) pour le champ magnétique d'un dipôle tournant dans le vide.
2. Dans la métrique de Schwarzschild où l'on peut s'attendre à des modifications de la géométrie de ce champ magnétique dues à la courbure de l'espace-temps.

3.1.1 Structure du champ magnétique

Le modèle de champ magnétique utilisé ici est une extension semi-analytique de la solution de Deutsch pour la relativité générale présenté initialement dans PÉTRI, 2018 tel que :

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} \cos \chi + \vec{B}_{\perp} \sin \chi \quad (3.1)$$

avec \vec{B}_{\parallel} le champ magnétique pour un dipôle aligné ($\chi = 0^\circ$) dont les composantes B_{\parallel}^i dans un repère sphérique sont :

$$B_{\parallel}^1 = -6BR_{\star}^3 \left[\ln \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) + \frac{R_S}{r} + \frac{R_S^2}{2r^2} \right] \frac{\cos \theta}{R_S^3} \quad (3.2)$$

$$B_{\parallel}^2 = 3BR_{\star}^3 \quad (3.3)$$

$$B_{\parallel}^3 = 0 \quad (3.4)$$

La valeur de B n'est pas importante pour nos travaux car on s'intéresse à la forme du champ magnétique, pas à son intensité, on a donc normalisé ces équations de manière à avoir $B = 1$.

\vec{B}_{\perp} est le champ magnétique pour un dipôle avec l'axe magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation ($\chi = 90^\circ$) dont les composantes dans l'espace B_{\perp}^i sont :

$$B_{\perp}^1 = -\frac{6}{r} \left[\frac{\ln(1 - R_{\star})}{R_{\star}} + 1 + \frac{R_{\star}}{2} \right] \frac{\mathcal{H}_1^{(1)}(kr)}{\mathcal{H}_1^{(1)}(kR_{\star})} \sin \theta e^{i\phi} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} B_{\perp}^2 = & -3 \left[\frac{\ln(1 - R_{\star})}{R_{\star}} + 1 + \frac{R_{\star}}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}{r \mathcal{H}_1^{(1)}(kR_{\star})} \frac{\partial (r \mathcal{H}_1^{(1)}(kr))}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\omega} \tilde{\omega}_{\star} R_{\star} \mathcal{H}_2^{(1)}(kr)}{c^2 \left(1 - \frac{R_S}{R_{\star}} \right) \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} \left(\frac{\partial (r \mathcal{H}_2^{(1)}(kr))}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{\star}} \right]^{-1} \cos \theta e^{i\phi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} B_{\perp}^3 = & -3 \left[\frac{\ln(1 - R_{\star})}{R_{\star}} + 1 + \frac{R_{\star}}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}{r \mathcal{H}_1^{(1)}(kR_{\star})} \frac{\partial (r \mathcal{H}_1^{(1)}(kr))}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{\omega} \tilde{\omega}_{\star} R_{\star} \mathcal{H}_2^{(1)}(kr)}{c^2 \left(1 - \frac{R_S}{R_{\star}} \right) \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} \left(\frac{\partial (r \mathcal{H}_2^{(1)}(kr))}{\partial r} \right) \Big|_{r=R_{\star}} \right]^{-1} \cos 2\theta e^{i\phi} \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$ et $\tilde{\omega}_{\star} = \Omega - \omega_{\star}$ où $\omega = \frac{aR_S}{r^3}$ et $\omega_{\star} = \frac{aR_S}{R_{\star}^3}$ avec a le paramètre de spin de l'étoile à neutrons tel que $a = \frac{J}{Mc}$, J étant le moment cinétique de l'étoile.

$\mathcal{H}_l^{(1)}(kx)$ sont les généralisations des fonctions sphériques de Hankel (ARFKEN et WEBER, 2005) dans la métrique de Schwarzschild introduites dans PÉTRI, 2017. Ces fonctions décrivent la propagation d'une onde sortante, ici les champs magnétiques et électriques, se propageant de manière sphérique vers l'extérieur de l'étoile à neutrons, $k = \Omega/c$ étant le nombre d'onde.

On suppose que la structure interne de l'étoile à neutrons est homogène et uniforme, son moment d'inertie I est alors :

$$I = \frac{2}{5}MR_{\star}^2. \quad (3.8)$$

Or le moment cinétique J est le produit du moment d'inertie I par la vitesse angulaire Ω , sachant que $R_{cyl} = \frac{c}{\Omega}$, on a alors un paramètre de spin tel que :

$$a = \frac{2}{5} \frac{R_{\star}^2}{R_{cyl}} \lesssim 0.1. \quad (3.9)$$

Ce paramètre quantifie l'importance de l'entraînement des référentiels inertiels par un objet en rotation. Pour les pulsars, ce paramètre est très petit $a \ll 1$, sauf pour les pulsars les plus rapides pour lesquels il devient marginalement significatif. Autrement dit, pour la plupart des étoiles à neutrons, la rotation n'entraîne pas une modification significative de la courbure de l'espace-temps et la métrique de Schwarzschild d'un corps à symétrie sphérique est tout à fait justifiée. Cependant, d'après des simulations PIC (*Particle In Cells*), l'entraînement des référentiels inertiels pourrait affecter la magnétosphère du pulsar, notamment l'efficacité de la production de paires au sein de celle-ci (PHILIPPOV et al., 2015 ; PHILIPPOV et SPITKOVSKY, 2018).

3.1.2 Tracé des lignes de champ

À la base de tout mon travail de thèse dans le reste de ce manuscrit se trouve le tracé des lignes de champs magnétiques, déterminant les dernières lignes de champ fermées, et par conséquent la forme des calottes polaires et des cavités allongées. La géométrie de ces lignes de champs se déduit par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires ne dépendant pas explicitement du temps et donné en géométrie cartésienne par

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{ds}{B} \quad (3.10)$$

où $B = \|\vec{B}\|$ et $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ représente l'abscisse curviligne le long de la ligne de champ considérée. En prenant cette abscisse curviligne comme variable

indépendante, les lignes de champ sont solutions du système

$$\frac{dx}{ds} = \frac{B_x}{B} \quad (3.11a)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{B_y}{B} \quad (3.11b)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{B_z}{B} \quad (3.11c)$$

Ce système est intégré par la méthode de JAMESON et al., 1981, voir par exemple CANUTO, 2006. Notons qu'il n'y a pas de singularité de coordonnées dans ce système si on emploie les composantes cartésiennes, ce qui n'est pas le cas des composantes sphériques données dans le paragraphe précédent. Il faut donc prévoir un passage permanent entre les composantes sphériques et cartésiennes lors de l'intégration numérique du système (3.11).

Dans la Fig. 3.1 on a tracé les lignes de champ dans les deux métriques de l'espace-temps. On voit les différences induites par les deux modèles utilisés sur la géométrie du champ magnétique pour les caractéristiques de l'étoile à neutrons que l'on a choisi pour le reste de la thèse : une étoile de compacité $\Xi = 0.5$ avec un rayon du cylindre lumière $R_{cyl} = 10R_\star = 20R_S$ soit une période de rotation $P = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 2$ ms si on suppose que $R_\star \approx 10$ km. Ce modèle a été choisi afin d'accentuer les effets du champ gravitationnel : on a une compacité importante et donc une courbure importante des rayons lumineux comme on l'a vu dans la section 2.2. On a également dans ce modèle un rayon du cylindre lumière R_{cyl} pas trop grand afin que l'émission ayant lieu en son sein soit suffisamment près de l'étoile à neutrons pour que les effets du champ gravitationnel y soit significatifs dans la métrique de Schwarzschild vu que celle-ci décrit un espace-temps quasiment plat quand on s'éloigne trop de l'étoile. On devrait donc voir les effets relativistes devenir négligeables à grande distance de l'étoile à neutrons.

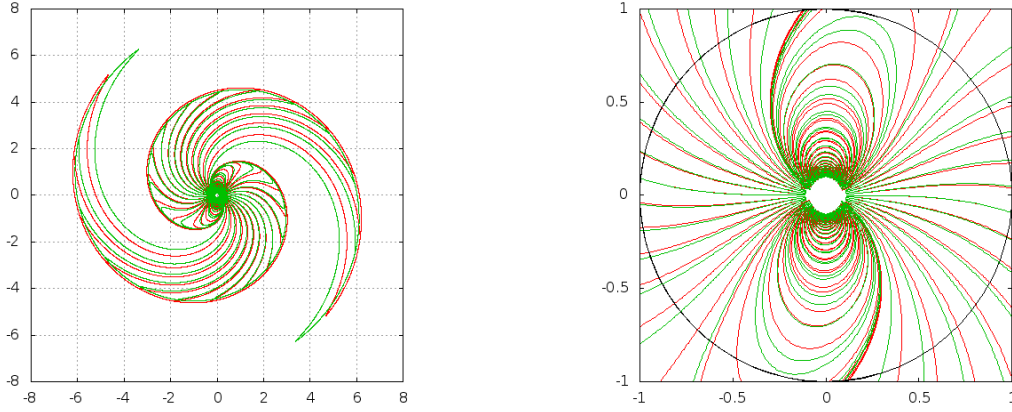


FIGURE 3.1 – A gauche, lignes de champ magnétique pour une inclinaison $\chi = 90^\circ$ de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation avec en rouge le champ magnétique dans un espace-temps plat et en vert le champ magnétique dans la métrique de Schwarzschild. A droite, lignes de champ magnétique dans le cylindre lumière (en noir) pour une inclinaison $\chi = 90^\circ$ de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation avec en rouge le champ magnétique dans un espace-temps plat et en vert le champ magnétique dans la métrique de Schwarzschild.

3.1.3 Forme des calottes polaires

Le changement de métrique mais aussi d'inclinaison χ de l'axe magnétique entraîne une modification de la forme et de la taille des calottes polaires vu qu'il s'agit des surfaces délimitées par les points où les dernières lignes de champ magnétique traversent la surface de l'étoile à neutrons. Cela pourrait influencer l'émission magnétosphérique du pulsar vu que, on l'a vu dans la section 1.2, ces calottes polaires (et surtout les cavités polaires situés juste au-dessus) ont un rôle à jouer dans l'accélération des particules responsables de l'émission magnétosphérique du pulsar.

Ainsi on peut voir sur la Fig. 3.2 que la taille de la calotte polaire sera légèrement plus grande dans un espace-temps plat que dans un espace-temps déformé par la masse de l'étoile à neutrons. On notera surtout le changement important de la forme de ces calottes polaires quand on passe de $\chi = 0^\circ$, où la calotte polaire est quasiment circulaire, à $\chi = 90^\circ$. Cela est dû au fait que les lignes de champ magnétiques sont entraînées par la rotation de l'étoile à neutrons, comme on peut le voir sur la Fig. 3.1, affectant fortement la forme des calottes polaires pour $\chi = 90$ vu que c'est pour cette inclinaison de l'axe magnétique que leur vitesse, et celle des lignes magnétiques les délimitant, sera maximale à la surface de l'étoile à neutrons.

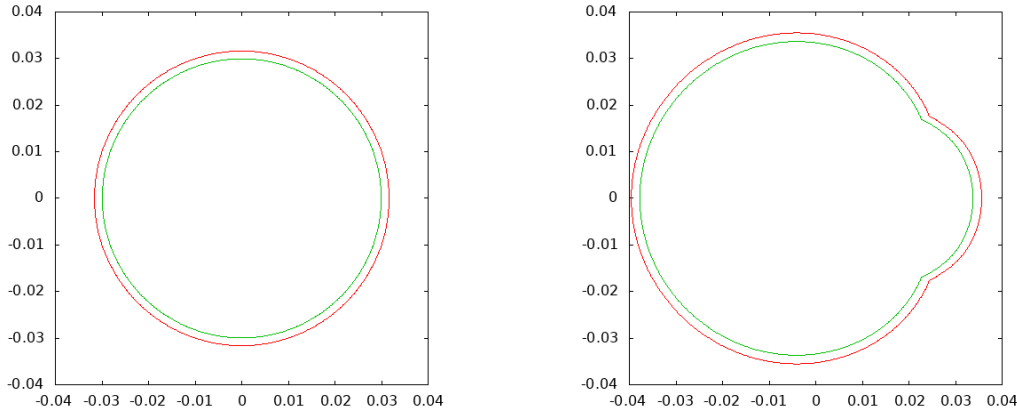


FIGURE 3.2 – *Forme des calottes polaires dans un espace-temps plat (métrique de Minkowski) en rouge et dans la métrique de Schwarzschild en vert pour une inclinaison nulle entre l'axe de rotation et l'axe magnétique ($\chi = 0^\circ$) à gauche et pour un axe magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation ($\chi = 90^\circ$) à droite.*

Dans la métrique de Schwarzschild, le rayon du cylindre lumière ne sera plus égal au rapport de c sur la vitesse angulaire $\Omega = d\phi/dt$. En effet, la limite du cylindre lumière dépendra du temps propre que l'observateur local mesure sur son horloge $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}$ comparé à dt , celui mesuré par l'horloge d'un observateur lointain. Pour un observateur local situé à l'altitude r , la vitesse de la lumière c pour cette observateur sera atteinte quand $r\Omega = c\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}$. En résolvant pour r on trouve le rayon du cylindre lumière en relativité générale par $R_{cyl}^{RG} = \frac{c}{\Omega}\sqrt{1 - \frac{R_S}{R_{cyl}^{RG}}}$ ce qui donne approximativement :

$$R_{cyl}^{RG} \approx R_{cyl} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R_S}{R_{cyl}} - \frac{3}{8} \frac{R_S^2}{R_{cyl}^2} \right). \quad (3.12)$$

On a donc, pour le modèle d'étoile à neutrons que l'on a choisi avec $R_{cyl} = 10R_\star = 20R_S$, R_{cyl}^{RG} qui vaut environ 97% de R_{cyl} , le rayon du cylindre lumière dans un espace-temps plat.

Voyons maintenant les conséquences de cette structure magnétique sur l'émission pulsée haute énergie et radio des pulsars millisecondes.

3.2 Temps de vol des photons et aberration

Dans chacune des deux métriques, plate et courbe, on va rechercher les coordonnées des points d'impact sur la sphère céleste des photons issus de l'émission radio et haute énergie du pulsar. On devra alors appliquer une correction sur ces coordonnées afin de prendre en compte le temps de vol mais aussi l'aberration due au

passage d'un référentiel en mouvement (celui du pulsar en rotation) à un référentiel fixe (celui de l'observateur représenté par la sphère céleste).

Nous rappellerons d'abord l'importance de ces effets dans un champ magnétique dipolaire dans le vide puis nous déterminerons la façon dont on va inclure ces effets dans nos simulations.

3.2.1 Effet d'aberration, de retard et de champ magnétique

L'émission radio et haute énergie des pulsars prennent naissance à haute altitude dans la magnétosphère, bien au-delà de la surface pour les pulsars jeunes de période $P \gtrsim 100$ ms. La corotation de ces sites d'émission à des vitesses relativistes imprime des caractéristiques uniques aux profils des pulses en impactant sur la relation entre la géométrie des zones émettrices et leur signature observationnelle.

PHILLIPS, 1992 a détaillé l'impact de plusieurs effets sur le temps d'arrivée des pulses de toute nature. Considérons deux zones d'émission localisées à une altitude r_1 et r_2 . Pour des photons s'éloignant radialement de l'étoile à neutrons, le délai introduit par la différence de chemin à parcourir se concrétise par un déphasage :

$$\frac{\Delta t_r}{P} = \frac{r_1 - r_2}{2\pi R_{\text{cyl}}}. \quad (3.13)$$

L'entraînement des zones de production de photons par la rotation du pulsar provoque une projection de la direction de propagation des photons dans le sens de la rotation d'une valeur de :

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{v_\phi}{c}\right) = \arctan\left(\frac{r \sin \chi}{R_{\text{cyl}}}\right). \quad (3.14)$$

Pour les deux sites d'émission, cela introduit un délai supplémentaire de :

$$\frac{\Delta t_a}{P} = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan\left(\frac{r_1 \sin \chi}{R_{\text{cyl}}}\right) - \arctan\left(\frac{r_2 \sin \chi}{R_{\text{cyl}}}\right) \right]. \quad (3.15)$$

Enfin, la rotation du dipole incurve les lignes de champ dans le sens inverse de la rotation. SHITOV, 1983 en a donné une expression simple telle que le retard induit par cet effet se monte à :

$$\frac{\Delta t_B}{P} = \frac{1.2 \sin^2 \chi}{2\pi} \left[\left(\frac{r_2}{R_{\text{cyl}}}\right)^3 - \left(\frac{r_1}{R_{\text{cyl}}}\right)^3 \right]. \quad (3.16)$$

Le retard total est alors la somme de chacune de ces contributions $\Delta t_\Sigma = \Delta t_a + \Delta t_r + \Delta t_B$.

BLASKIEWICZ et al., 1991 ont étendu cette étude à la polarisation de l'émission radio en montrant l'existence d'un délai supplémentaire entre le point d'inflexion de l'angle de polarisation et le milieu du pulse radio. À tout cela il faudrait aussi ajouter l'effet du courant magnétosphérique sur ce délai temporel comme l'ont souligné

HIBSCHMAN et ARONS, 2001.

3.2.2 Effet de la gravitation

Le temps de vol du photon étant égal à la longueur de sa trajectoire divisée par la vitesse de la lumière dans le cas d'un espace-temps plat, dans nos simulations en métrique de Minkowski, on calcule celui-ci en divisant la distance de l'étoile à neutrons à la sphère céleste R_{sphere} par la vitesse de la lumière et en rajoutant, comme on l'a vu dans la section 2.3, un terme prenant en compte la position du point d'émission par rapport à la ligne de visée ce qui donne à grande distance du pulsar :

$$t_{\text{vol}} \approx \frac{R_{\text{sphere}}}{c} - \frac{\vec{n}_{\text{obs}} \cdot \vec{r}_0}{c} \quad (3.17)$$

R_{sphere} est le rayon de la sphère céleste, \vec{r}_0 est le vecteur reliant l'origine au point d'émission du photon et \vec{n}_{obs} est le vecteur unitaire désignant la direction de l'observateur par rapport au point d'émission. Comme ici on récupère juste les coordonnées du point d'impact du photon sur la sphère céleste, "l'observateur" se situe au niveau du point d'impact et \vec{n}_{obs} a donc la même orientation que la trajectoire du photon qui elle-même est la tangente aux lignes de champ magnétique. Soit \vec{n} la direction initiale de propagation du photon qui est le vecteur tangent unitaire aux dernières lignes de champ magnétique fermées, on a donc ici $\vec{n}_{\text{obs}} = \vec{n}$.

Dans le cas d'un espace-temps déformé par la masse de l'étoile à neutrons, le temps de vol dans la métrique de Schwarzschild est calculé en intégrant l'équation (2.13).

Pour simuler l'effet de l'aberration sur le rayonnement que l'on reçoit du pulsar, on remplace le vecteur \vec{n}' donnant la direction de propagation du photon au point d'émission dans le référentiel tournant du pulsar par \vec{n} , le vecteur direction de propagation du photon au point d'émission dans le référentiel de l'observateur statique. Les composantes de ce vecteur \vec{n}' peuvent se retrouver par transformation de Lorentz :

- n'_{\parallel} et n_{\parallel} sont les composantes de \vec{n}' et \vec{n} parallèles à $\vec{\beta}$,
- n'_{\perp} et n_{\perp} sont les composantes de \vec{n}' et \vec{n} perpendiculaires à $\vec{\beta}$,

$\vec{\beta}$ étant le vecteur vitesse normalisé du point d'émission tel que $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ et comme ici la vitesse de ce point d'émission provient du fait qu'il est en corotation avec le pulsar, on a $\beta = \frac{r\Omega}{c} \sin \theta$, où θ est la colatitute du point d'émission, et on pose le

facteur de Lorentz du point d'émission $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Le facteur Doppler η associé à cette rotation est $\eta = \frac{1}{\gamma(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} = \gamma(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{n}')$, on trouve ensuite la relation donnant \vec{n}' en fonction de \vec{n} par décomposition en composante parallèle et perpendiculaire à la vitesse sont :

$$\vec{n}'_{\parallel} = \gamma \eta (\vec{n}_{\parallel} - \vec{\beta}) \quad (3.18)$$

$$\vec{n}'_{\perp} = \eta \vec{n}_{\perp} \quad (3.19)$$

ou de manière vectorielle on peut écrire \vec{n} ainsi (DYKS et RUDAK, 2003) :

$$\vec{n} = \frac{1}{\eta} \left[\vec{n}' + \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}') + 1 \right) \vec{\beta} \right]. \quad (3.20)$$

Dans un espace-temps déformé par la masse de l'étoile à neutrons, la formule d'aberration (3.20) reste valable à condition de remplacer la vitesse de corotation minskowskienne β par la vitesse de corotation telle que mesurée par un observateur local et notée β_{RG} ce qui implique de remplacer aussi le facteur de Lorentz γ par γ_{RG} tel que :

$$\beta_{RG} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{R_s}{r}}} \quad (3.21)$$

$$\gamma_{RG} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{RG}^2}}. \quad (3.22)$$

Le terme correctif dans la vitesse provient de la dilatation du temps des horloges se situant dans un champ gravitationnel. La vitesse corrigée est supérieure à son homologue minskowskien car l'horloge de l'observateur local tique plus lentement.

3.3 Émission haute énergie

Dans cette section, on trace la trajectoire des photons du rayonnement haute énergie émis depuis la magnétosphère afin de déterminer comment celui-ci est affecté par le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons.

Pour cela, on suppose que cette émission haute énergie provient des cavités allongées présentées dans la section 1.3, on admet cependant qu'il n'y a émission que pour une distance à l'origine (le centre de l'étoile à neutrons) inférieure ou égale à 95% du cylindre lumière afin d'éviter des effets indésirables, notamment en terme d'aberration, dus à des photons émis trop près du cylindre lumière et dont le facteur de Lorentz tendrait vers l'infini. Ainsi l'émission se produit le long des dernières lignes de champ magnétique fermées, depuis la calotte polaire où elles coupent la surface de l'étoile à neutrons jusqu'à $r = 0.95 R_{cyl}$, les points d'émission étant régulièrement espacés sur ces lignes de champ en imposant une distance d'un dixième du rayon de l'étoile $\Delta\ell = 0.1 R_*$ entre chaque point d'émission d'un photon. En appliquant cette technique d'un pôle magnétique jusqu'à l'autre, on aura alors des points d'émission répartis sur toute cette ligne de champ fermée. Les dernières lignes de champ magnétique sont alors les lignes de champ pour lesquelles la distance maximale de ces points à l'axe de rotation est celle du cylindre lumière. On peut alors retrouver les calottes polaires délimitées par l'identification des pieds des dernières lignes de champs qui se referment à la surface de l'étoile à neutrons.

On suppose également que l'émission par rayonnement de courbure est le principal mode d'émission haute énergie. On considère alors que les photons sont simplement émis avec une direction de propagation initiale tangente aux dernières lignes de champ magnétique comme illustré sur la Fig. 1.16. À partir d'un point d'émission,

on déduit la tangente aux lignes de champ magnétique ($\vec{t}_B = \vec{B}/B$) d'après les équations décrivant ce champ magnétique que l'on a vu dans la section 3.1, cette tangente indique la direction de propagation du photon dans le référentiel tournant \vec{n}'_{ph} . Il faut corriger cette direction de l'effet d'aberration pour en déduire la direction de propagation de ce photon \vec{n}_{ph} pour un observateur lointain inertiel en appliquant la formule d'aberration (3.20). Ce vecteur est décomposé en coordonnées sphériques par l'introduction de deux angles ϕ_{em} et θ_{em} tels que :

$$\vec{n}_{\text{ph}} = \sin \theta_{\text{em}} \cos \phi_{\text{em}} \vec{e}_x + \sin \theta_{\text{em}} \sin \phi_{\text{em}} \vec{e}_y + \cos \theta_{\text{em}} \vec{e}_z. \quad (3.23)$$

On imagine que ce photon impacte la sphère céleste à grande distance au point de coordonnées $(\phi_{\text{em}}, \theta_{\text{em}})$. ϕ_{em} est associé au temps d'arrivée des photons, il faut donc lui rajouter une correction induite par le temps de vol de la source au détecteur. Ce temps est donné par l'expression (3.17) en géométrie minkowskienne et par l'intégration de (2.13) en géométrie de Schwarzschild. Ce délai temporel supplémentaire se traduit par une phase $\delta\phi_{\text{em}}$ supplémentaire comparée au cas sans prise en compte du temps de vol d'où la phase de détection (DYKS et RUDAK, 2003) :

$$\phi = -\phi_{\text{em}} - \delta\phi_{\text{em}} \quad (3.24)$$

obtenue en inversant le signe de la phase pour tenir compte de la rotation de l'étoile (une phase $\phi_{\text{em}} > 0$ est détectée avant une phase $\phi_{\text{em}} < 0$ donc la première arrive à un instant antérieur à la deuxième). Il est à noter que le temps de vol n'influe pas sur la position θ_{em} .

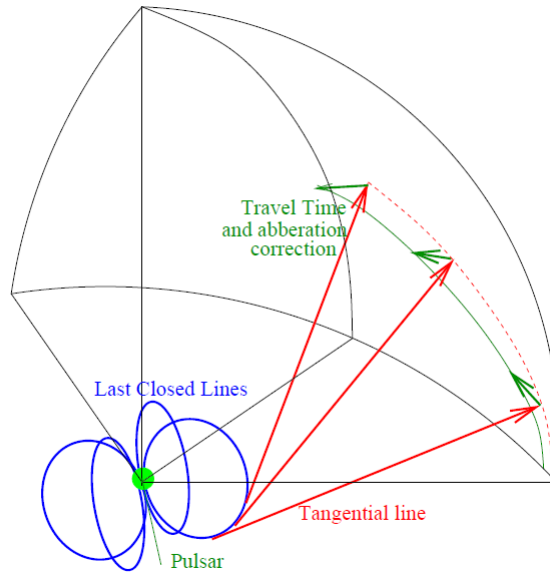


FIGURE 3.3 – Tracé de la carte des points d'impact dans le cas d'un espace-temps plat, image tirée SAITO, 2011.

Pour simuler le rayonnement haute énergie reçu dans la métrique de Schwarzschild, on a calculé, à nouveau grâce aux méthodes présentées dans la section 2.1, les coordonnées du photon quand il atteindra une distance de $r = 1000 R_{cyl}$, distance à laquelle la déformation de l'espace-temps par le champ gravitationnel de l'étoile est quasi-nulle. On peut voir ces coordonnées comme celles du point d'impact du photon sur une sphère céleste dont le rayon est de $1000 R_{cyl}$ fois celui du cylindre lumière. On trace ainsi des cartes de ces points d'impact sur cette sphère céleste dans la métrique de Schwarzschild afin de comparer avec celles obtenues dans la métrique de Minkowski où, du fait de l'espace-temps plat, l'on a juste à prolonger les tangentes aux dernières lignes de champ magnétique jusqu'à la sphère céleste, comme sur la Fig. 3.3, pour obtenir les coordonnées des points d'impact sur celle-ci.

3.3.1 Projection des lignes de champ

Avant de présenter les cartes d'émission obtenues à partir de la méthode ci-dessus, on va d'abord s'intéresser aux projections des dernières lignes de champ magnétique fermées formées par les points d'impact des photons émis le long de celle-ci sur la sphère céleste des Fig. 3.4 à 3.7, et ce afin de bien comprendre l'impact de la gravitation et du temps de vol sur les courbes de lumière.

Dans ces figures, l'inclinaison de l'axe magnétique est $\chi = 60^\circ$ et on ne considère que 32 de ces lignes de champ magnétiques réparties de façon à ce que les points où ces lignes traversent la surface de l'étoile à neutrons (au niveau des calottes polaires) soient uniformément répartis en terme de longitude dans le repère sphérique du champ magnétique.

Une longitude de 360° sur la sphère céleste correspond à une phase de 1 soit une rotation du pulsar sur lui-même. Les phases de chacune de ces cartes ont été centrées afin que chacune ait à la phase 0 le point d'impact correspondant au photon qui serait émis par le centre de la calotte polaire Nord.

La Fig. 3.4 est l'image obtenue dans un espace-temps plat en prenant en compte l'aberration et en ajoutant une correction sur la phase pour le temps de vol des photons. On y a indiqué l'angle (en degrés) entre les directions de propagation du photon avant et après avoir pris en compte l'aberration et le temps de vol. On notera ainsi que ces deux paramètres ne sont pas négligeables vu que l'on a des angles de près de 180° entre les deux directions de propagation du photon.

La Fig. 3.5 est l'image obtenue dans la métrique de Schwarzschild en prenant en compte l'aberration et en ajoutant une correction sur la phase pour le temps de vol des photons. Ici on a mesuré l'angle entre la direction initiale de propagation des photons sans aberration ni temps de vol et la direction finale de propagation du photon lors de l'impact sur la sphère céleste en prenant en compte l'aberration et le temps de vol du photon. On voit que les angles ainsi mesurés sont très similaires à ceux de la Fig. 3.4, la courbure de la trajectoire des photons ne doit donc pas être très importante, elle pourrait cependant être suffisante pour induire des effets plus subtils sur l'émission haute énergie, on peut notamment voir ici que l'image des

calottes polaires (où plutôt leur ombre) est sensiblement déformée et un peu plus étendu que dans la métrique de Minkowski.

La Fig. 3.6 est l'image obtenue dans la métrique de Schwarzschild lorsque l'on applique la correction sur la phase pour prendre en compte le temps de vol des photons dans cette métrique. Ce temps de vol est comparé à un temps de référence, celui que met le photon émis au centre de la calotte polaire Nord pour atteindre la sphère céleste. Sans surprise les photons émis loin des calottes polaires (dont on peut apercevoir la forme sur cette figure) ont l'avance la plus importante sur ce temps de référence, non seulement parce qu'ils sont émis plus près de la sphère céleste mais également parce que les effets du champ gravitationnel sont plus importants lorsque l'on se rapproche de l'étoile à neutrons et donc ils subiront moins de courbure de leur trajectoire et le délai Shapiro associé.

La Fig. 3.7 est elle aussi obtenue dans la métrique de Schwarzschild et inclut également la correction sur la phase due au temps de vol des photons. Dans cette image est comparé le temps de vol de chacun des photons dans la métrique de Schwarzschild au temps de vol qu'ils auraient dans un espace-temps plat. Comme attendu le décalage entre les deux temps de vol est plus important à proximité de l'image des calottes polaires : les photons provenant de cette zone étant émis plus près de l'étoile à neutrons, les effets de son champ gravitationnel sur eux est plus important.

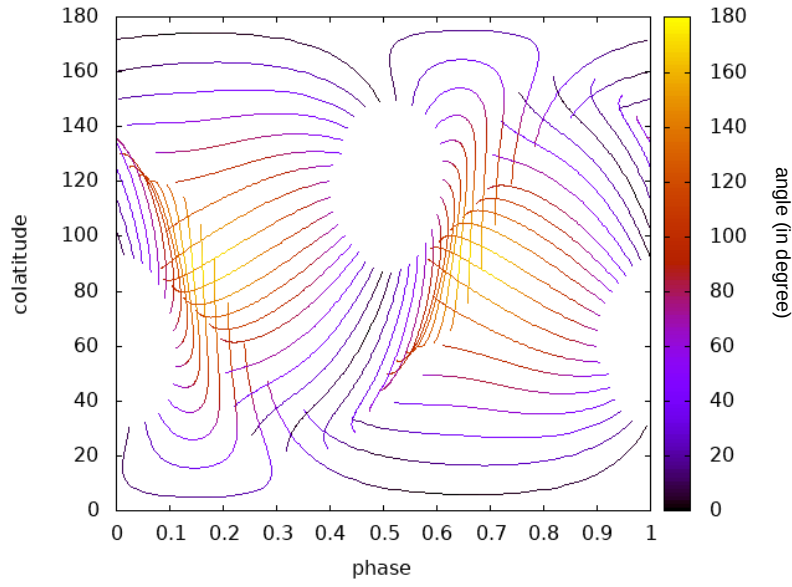


FIGURE 3.4 – Projection à partir des lignes de champs magnétiques sur la sphère céleste dans un espace-temps plat incluant les effets d’aberrations et le temps de vol propre à cette géométrie. Le code couleur représente la valeur de l’angle (en degrés) entre la direction de propagation du photon sans aberration ni temps de vol et sa direction de propagation avec temps de vol et aberration.

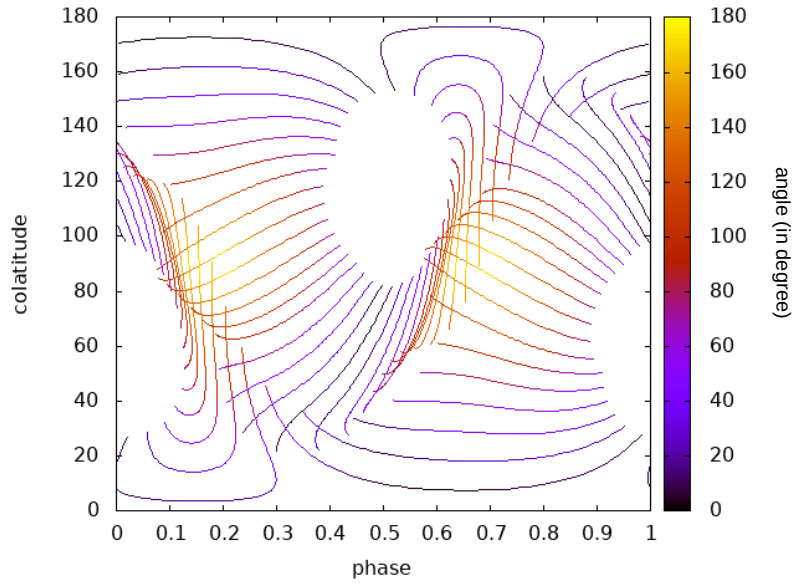


FIGURE 3.5 – Projection dans la métrique de Schwarzschild. Le code couleur représente la valeur de l’angle (en degrés) entre la direction de propagation initiale du photon sans temps de vol ni aberration et sa direction de propagation final.

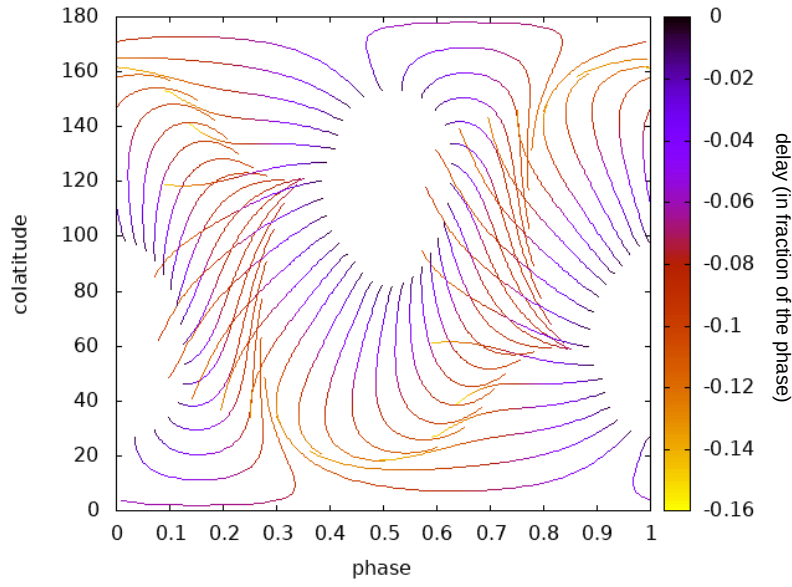


FIGURE 3.6 – *Projection dans la métrique de Schwarzschild sans effets d'aberrations. Le code couleur représente la différence (normalisé par la phase) entre le temps de vol de chaque photon et un temps de vol de référence (celui du photon émis au centre de la calotte polaire Nord).*

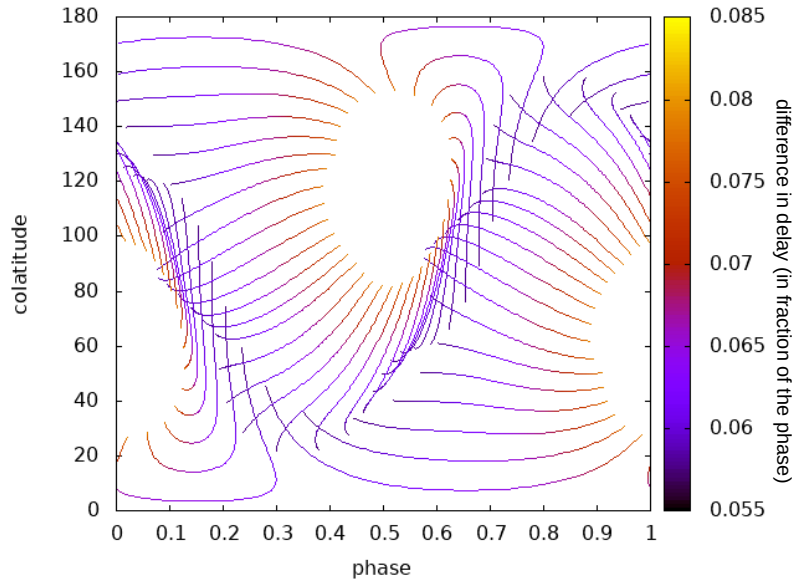


FIGURE 3.7 – *Projection dans la métrique de Schwarzschild. Le code couleur représente la différence (normalisé par la phase) entre le temps de vol de chaque photon dans la métrique de Schwarzschild et leur temps de vol dans un espace-temps plat*

3.3.2 Cavités minces

A partir des cartes d'impact des photons sur la sphère céleste, en incluant les effets d'aberration et le temps de vol des photons propre à chaque métrique, on a pu réaliser des cartes d'émission en trois dimensions : l'intensité du rayonnement reçu sur la sphère céleste en fonction des coordonnées de longitude (la phase du pulsar) et de colatitude de celle-ci $I(\phi, \theta_{\text{em}})$. L'intensité est ici déterminée comme étant le nombre de photons reçus sur la même zone de dimension 0.5×0.5 degrés en colatitude et longitude sur la surface de la sphère céleste. On considérera cette fois un millier de lignes de champ magnétique afin d'avoir une résolution suffisante du rayonnement reçu sur la sphère céleste. La Fig. 3.8 représente ces cartes d'émission, dans un espace-temps plat (métrique de Minkowski) pour différentes inclinaisons χ de l'axe magnétique : 90° , 60° et 30° . On y a aussi inclus les courbes de lumière, soit une coupe de la carte d'émission en 3 dimensions suivant la colatitude, pour différentes inclinaisons de la ligne de visée ζ qui correspond à la colatitude sur la sphère céleste (voir la section 3.5 pour une comparaison dans les deux métriques de certaines de ces courbes de lumière). La Fig. 3.9 représente la même chose mais dans la métrique de Schwarzschild. Le code couleur de ces cartes d'émission dépeint l'intensité reçue en allant du clair au sombre en partant du blanc pour une intensité nulle, l'intensité sur les cartes d'émission et les courbes de lumière est normalisée par l'intensité maximale reçue pour l'inclinaison χ correspondante de l'axe magnétique.

On retrouve sur ces cartes d'émission et les courbes de lumière associées les pulses de l'émission haute énergie. On peut remarquer, et c'est particulièrement flagrant pour le cas $\chi = 90^\circ$, que ces pulses semblent légèrement plus larges dans la métrique de Schwarzschild que dans celle de Minkowski. Cela pourrait s'expliquer par les phénomènes de distorsion de l'image que l'on avait introduits dans la section 2.2 et dont on avait déjà constaté les effets dans la section 2.3 sur le flux de rayonnements thermiques provenant des calottes polaires : la courbure des rayons lumineux augmente la taille des images reçues et augmente la visibilité de certaines zones d'émission. Comme pour les Fig. 3.4 à 3.7, on peut déjà voir que l'image de la calotte polaire sera un peu plus grande dans la métrique de Schwarzschild que dans un espace-temps plat, certainement parce que plus l'émission a lieu près de l'étoile à neutrons, plus de photons seront capturés par son champ gravitationnel et retomberont sur l'étoile. Les calottes polaires sont justement la région où les dernières lignes de champ magnétique, d'où provient l'émission, rejoignent l'étoile à neutrons. Le tableau 3.1 montre l'intensité maximale, le nombre maximum de photons reçus sur une même zone de la sphère céleste, pour les différentes valeurs de l'inclinaison χ dans les deux métriques. L'on peut y voir que l'intensité maximale du rayonnement haute énergie y est moins importante dans la métrique de Schwarzschild que dans un espace-temps plat car l'émission est plus étalée sur la sphère céleste à cause des effets de distorsion de l'image mais on peut également voir que cette différence semble diminuer avec l'inclinaison χ de l'axe magnétique.

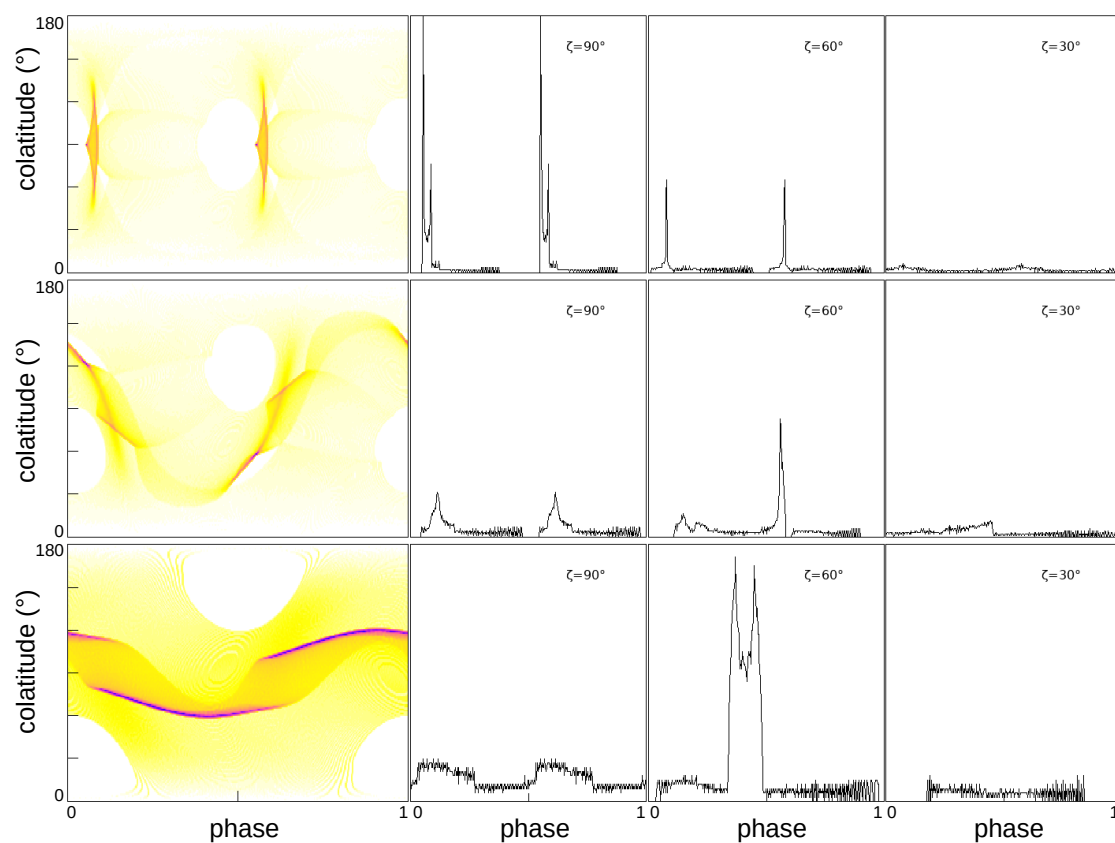


FIGURE 3.8 – Cartes d'émission pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90°, 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ .

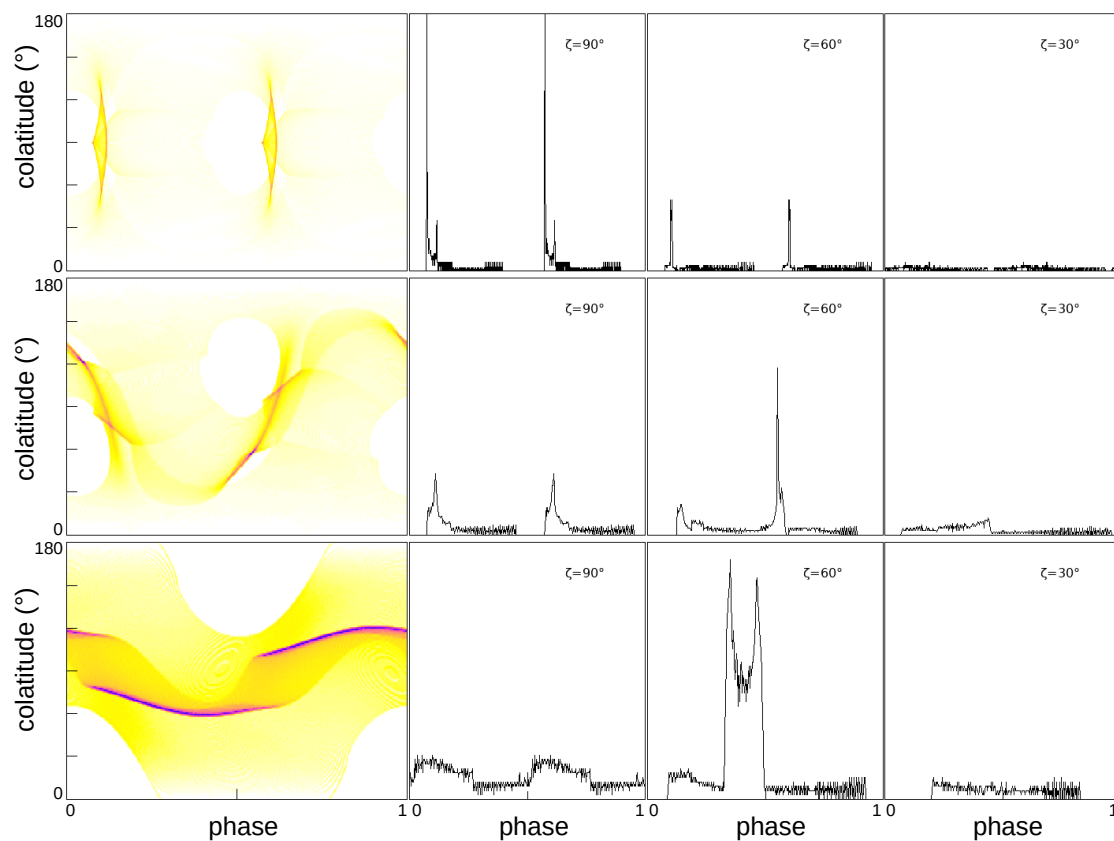


FIGURE 3.9 – Cartes d'émission pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ .

TABLE 3.1 – *Intensité maximale (en nombre de photons) du rayonnement haute énergie pour différentes valeurs de l'inclinaison χ de l'axe magnétique*

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|--------|-----------|---------------|
| 90° | 195 | 87 |
| 60° | 154 | 75 |
| 30° | 60 | 58 |

3.3.3 Cavités épaisses

Nous avons jusque là simulé l'émission provenant de particules accélérées le long des dernières lignes de champ magnétique dans les cavités allongées, la zone d'émission des photons de haute énergie était donc supposée infiniment fine. Pour que notre modèle d'émission soit plus réaliste, on suppose une certaine épaisseur de cette zone d'émission, les cavités allongées n'étant évidemment pas infiniment fines, pour cela on rajoute des lignes de champ magnétique qui vont se refermer sur l'étoile à neutrons au-dessus et en dessous des dernières lignes de champ magnétique fermées. Un poids gaussien $w(\theta)$ est attribué aux photons émis le long de ces lignes de champ de manière à ce que l'émission soit maximale le long de la dernière ligne de champ magnétique fermée :

$$w(\theta) = e^{\frac{-(\theta - \theta_{cp})^2}{\delta^2}} \quad (3.25)$$

avec $\delta = \frac{1}{5}\Delta\theta$, $\Delta\theta$ étant la variation de la colatitude du point où les lignes de champs se referment sur la surface de l'étoile à neutrons (ici on a pris $\Delta\theta = \frac{\pi}{100}$), θ étant la colatitude du point où la ligne de champ "sort" de l'étoile à neutrons (là où la ligne de champ traverse la surface de l'étoile à neutron au niveau de la calotte polaire nord), et θ_{cp} celui du point d'où "sort" la dernière ligne de champ magnétique fermée. Ces colatitudes étant mesurées dans le repère sphérique du champ magnétique où la colatitude 0 correspond à la position du pôle magnétique Nord sur la surface de l'étoile.

C'est ainsi que l'on a pu tracer les cartes d'émission des Fig. 3.10 et 3.11 pour une zone d'émission épaisse respectivement dans la métrique de Minkowski et dans la métrique de Schwarzschild.

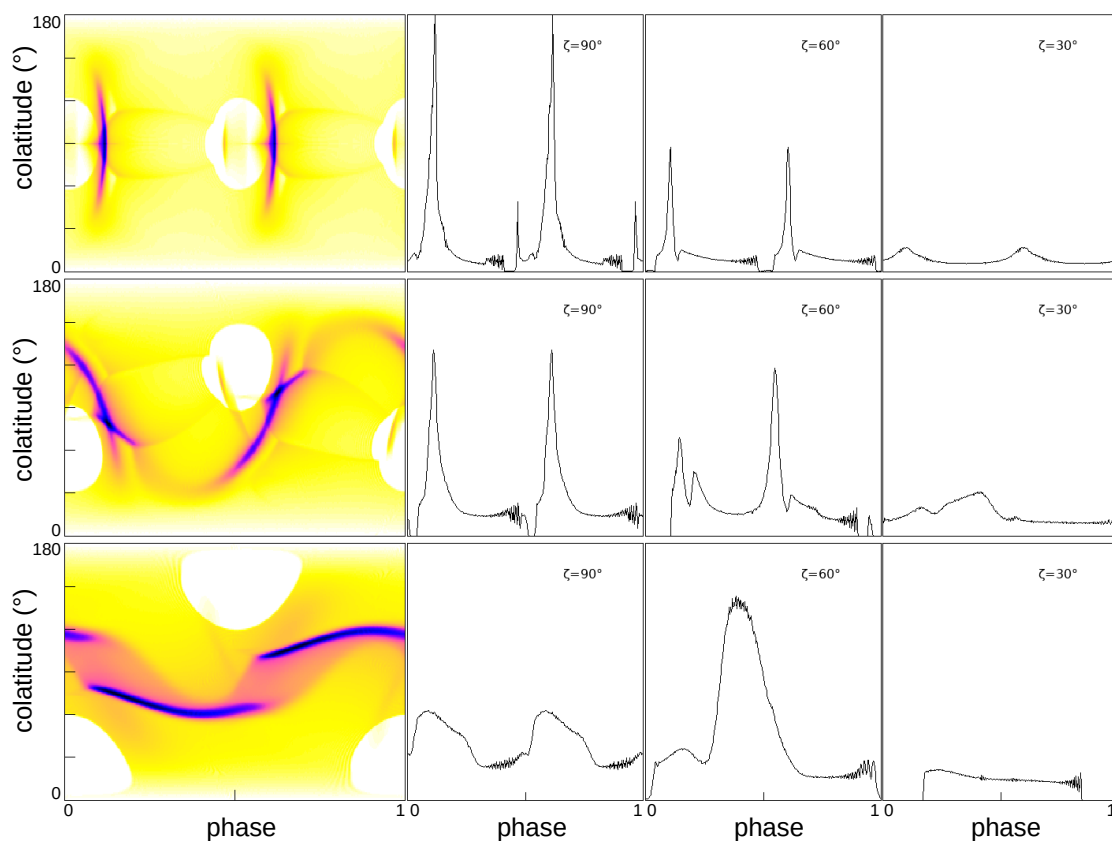


FIGURE 3.10 – Cartes d'émission dans le domaine des hautes-énergies pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat pour une épaisseur définie de la zone d'émission avec les courbes lumières pour différents angle d'observation ζ .

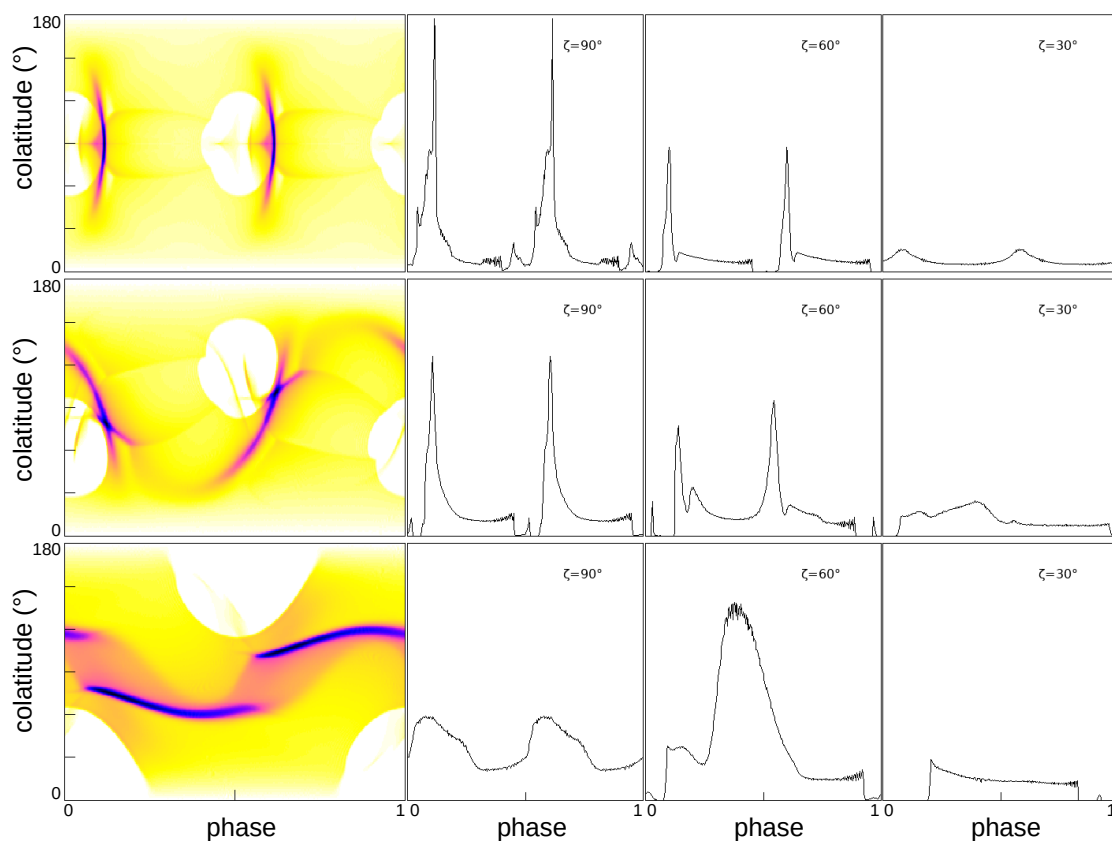


FIGURE 3.11 – Cartes d'émission dans le domaine des hautes-énergies pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild pour une épaisseur définie de la zone d'émission avec les courbes lumières pour différents angle d'observation ζ .

On constate qu'en incluant une épaisseur de la zone d'émission, les courbes de lumière sont moins abruptes, moins "piquées", et se rapprochent effectivement un peu plus de ce que l'on peut observer pour l'émission haute énergie d'un vrai pulsar, comme sur la Fig. 1.4 de la section 1.2, certains pics visible sur les Fig. 3.8 et 3.9 vont même se confondre pour former une seule pulse plus large, notamment pour $\chi = \zeta = 90^\circ$ et pour $\chi = 30^\circ$ avec $\zeta = 60^\circ$ (à nouveau, voir la section 3.5 pour une comparaison dans les deux métriques de certaines de ces courbes de lumière).

On peut également noter un contraste plus élevé entre les zones sans émission et avec émission, du fait de la multiplication des points d'émission, l'intensité du rayonnement perçu semble donc être plus importante sur toute la sphère céleste. Autre changement remarquable, l'apparition d'émission, et même de pulses au sein de l'image de la calotte polaire, cette émission ne pouvant provenir des calottes polaires elles-mêmes, elle doit être due aux lignes de champ magnétique autour des dernières lignes de champ magnétique fermées.

Comme pour le tableau 3.1, le tableau 3.2 représente l'intensité maximale reçue pour différentes valeurs de l'inclinaison χ dans un espace-temps plat (métrique de Minkowski) et dans la métrique de Schwarzschild. Contrairement à ce que l'on a pu voir dans le tableau 3.1, ici l'intensité maximale est plus importante dans la métrique de Schwarzschild malgré les effets de distorsion de l'image qui devraient normalement étaler l'intensité sur la sphère céleste. Cela pourrait être dû au délai Shapiro qui, affectant plus le rayonnement émis près de la surface de l'étoile à neutrons que celui émis à sa périphérie, pourrait générer une concentration importante de points d'impact de photons en certaine région de la sphère céleste.

TABLE 3.2 – *Intensité maximale (en nombre de photons) du rayonnement haute énergie pour différentes valeurs de l'inclinaison χ pour une zone d'émission avec une épaisseur.*

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|------------|-----------|---------------|
| 90° | 1973 | 2141 |
| 60° | 1179 | 1484 |
| 30° | 873 | 920 |

3.4 Émission radio

Dans notre modèle de magnétosphère de pulsar, on admet également la présence de cavités polaires, comme celles décrites dans la section 1.2, où l'on aura aussi une émission par rayonnement de courbure. Dans ces cavités polaires, les particules à l'origine du rayonnement de courbure sont principalement des particules secondaires issues du processus de création de paires avec un facteur de Lorentz assez faible (de l'ordre de 10^2) et les lignes de champ magnétique le long desquelles elles sont accélérées ont elle-même une faible courbure (et donc un important rayon de courbure ρ). D'après l'équation 1.47, la fréquence du rayonnement émis devrait être assez faible et il est en effet considéré que c'est dans la région polaire que provient le rayonnement radio des pulsars.

On sait que le rayon approximatif d'une calotte polaire est de $R_{cp} \approx R_* \sqrt{R_*/R_{cyl}}$. Le demi-angle au sommet du cône dont la base forme la calotte polaire est θ_{cp} . Les lignes de champ ayant une inclinaison par rapport à la normale à la surface de l'étoile et le rayonnement étant dirigé le long de ces lignes de champs, on peut montrer que les photons sont émis dans un autre cône de demi-ouverture égale à $\frac{3}{2} \theta_{cp}$. Cet angle représente une bonne approximation de la largeur des pulses radio.

L'altitude d'échappement des photons de la magnétosphère n'est pas contrainte de manière précise. Il était couramment admis que les basses fréquences proviennent du voisinage immédiat de la surface. Mais l'accumulation de données radio de plus en plus précises concernant la forme et la largeur des pulses montrèrent sans ambiguïté que pour les pulsars jeunes ces photons proviennent d'une altitude beaucoup plus haute, comparable à une fraction non négligeable de la taille du cylindre lumière, de l'ordre de 1-10% (MITRA, 2017). De plus l'angle d'ouverture du cône d'émission dépend de l'altitude de provenance des photons. Les lignes de champ dipolaire étant divergentes, un éloignement de l'étoile provoque un élargissement de ce cône et par conséquent un étalement du profil radio. Un élargissement des profils radio est effectivement observé des hautes fréquences vers les basses fréquences. Conjointement, le rayon de courbure des lignes de champ augmente et la fréquence de courbure caractéristique associée décroît. Il en résulte une relation entre la fréquence et l'altitude que l'on nomme cartographie altitude-fréquence. cette constatation sera mise à profit au prochain chapitre où nous détaillerons le calcul du rayonnement de courbure en fonction de la fréquence en y associant l'évolution de la forme des pulses.

Pour simuler cette émission radio, un échantillonnage de la calotte polaire a été réalisé en partant des pieds de lignes de champ jusqu'au pôle magnétique. L'échantillonnage est paramétré de manière à ce qu'entre le pôle magnétique et chaque point d'intersection de la ligne de champ avec la surface de l'étoile à neutrons il y ait exactement 10^4 points d'émission régulièrement espacés soit, dans le repère sphérique du champ magnétique, la colatitude de ces points est définie par :

$$\theta - \theta_{pm} = \arccos \left[1 - (1 - \cos \theta_{cp}) \frac{i}{N} \right] \quad (3.26)$$

Dans le repère sphérique où la colatitude est mesurée à partir de l'axe magnétique, θ_{cp} est la colatitude du point d'intersection entre la ligne de champ et la surface de

l'étoile à neutrons, θ_{pm} est la colatitude du pôle magnétique considéré (0 ou 180° dans ce repère) et i un entier variant entre 1 et N , N étant le nombre de points d'émission que l'on veut entre le pôle et la calotte polaire, on aura donc :

- pour la calotte polaire nord $\theta \approx \theta_{cp} \sqrt{\frac{i}{N}}$, on peut d'ailleurs voir la répartition des points d'émission dans cette calotte sur la Fig. 3.12,
- pour la calotte polaire sud $\theta \approx \pi - (\pi - \theta_{cp}) \sqrt{\frac{i}{N}}$.

Comme on l'a dit, on fixe dans les simulations ce nombre de points à $N = 10000$.

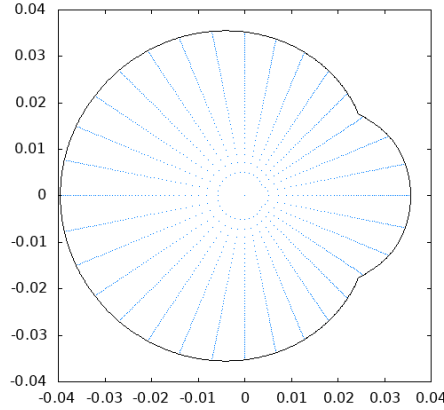


FIGURE 3.12 – Points d'émission radio dans la calotte polaire (limite en noir) pour une inclinaison de l'axe magnétique de 90° .

Il suffit d'effectuer une rotation de ce repère d'un angle égal à l'inclinaison χ entre l'axe magnétique et l'axe de rotation pour retrouver les coordonnées de ces points d'émission dans le repère sphérique du pulsar où la colatitude est mesurée à partir de l'axe de rotation. La trajectoire de ces photons radio peut être alors simulée en prenant comme direction initiale de propagation la tangente aux lignes de champ magnétique passant par ces points d'émission et l'altitude d'émission r_0 sera bien sûr égal au rayon de l'étoile R_\star du fait que les points d'émission sont situés à la surface de celle-ci. On pourra alors, comme on l'a vu pour l'émission haute énergie, soit prolonger cette tangente pour obtenir la trajectoire des photons dans un espace-temps plat soit intégrer les équations (2.6) et (2.7) pour obtenir sa trajectoire dans le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons, le tout en prenant en compte l'aberration et le temps de vol du photon grâce aux méthodes et formules présentées dans la section 3.2.

Pour se rapprocher de l'émission radio qu'on observe des pulsars, un poids est attribué à chaque photon émis depuis ces points d'émission en fonction de la distance de ces points au pôle magnétique et ce de manière à ce que le profil de l'émission se rapproche d'une gaussienne. Ainsi, lors du tracé des cartes d'émission et des courbes de lumière associés, l'intensité reçue sur une zone de 0.5×0.5 degrés de la sphère céleste ne va pas augmenter d'une unité à chaque photon reçu, à la place elle va augmenter d'un nombre I que l'on calcule ainsi pour les photons provenant de la calotte polaire nord :

$$I_{\text{nord}} = e^{-\frac{\theta^2/\theta_{cp}^2}{\sigma^2}} \quad (3.27)$$

et pour la calotte polaire sud :

$$I_{\text{sud}} = e^{\frac{-(\pi-\theta)^2/(\pi-\theta_{cp})^2}{\sigma^2}} \quad (3.28)$$

avec $\sigma = \frac{1}{\sqrt{10}}$, les angles θ et θ_{cp} étant respectivement la colatitude du point d'émission et de la limite de la calotte polaire dans le repère sphérique du champ magnétique.

Les Fig. 3.13 et 3.14 présentent les cartes d'émission ainsi obtenues pour différentes valeurs de l'inclinaison χ de l'axe magnétique ainsi que les courbes de lumière issues de ces cartes d'émission pour différentes inclinaisons ζ de la ligne de visée. On y notera que l'image de la zone d'émission semble plus grande dans la métrique de Schwarzschild comme on déjà pu le constater auparavant.

Les pulses radio semblent également plus importantes dans cette métrique que dans un espace-temps plat. Or, comme on peut le voir sur le tableau 3.3 où est affiché le maximum de l'intensité reçue pour chaque métrique, l'intensité maximale reçue dans la métrique de Schwarzschild est toujours inférieure à celle reçue dans la métrique de Minkowski. Il faut ici se rappeler que les courbes de lumière sont normalisées par le maximum d'intensité reçue sur la sphère céleste et donc que la taille plus importante des pulses dans la métrique de Schwarzschild est en fait due à une intensité maximale moindre sur la sphère céleste, ce qui n'est pas étonnant du fait des effets de distorsion de l'image que l'on a déjà observés auparavant qui ont tendance à "étaler" l'émission.

TABLE 3.3 – *Intensité maximale du rayonnement radio pour différentes valeurs de χ .*

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|--------|-----------|---------------|
| 90° | 4108 | 3194 |
| 60° | 4376 | 3381 |
| 30° | 2510 | 1986 |

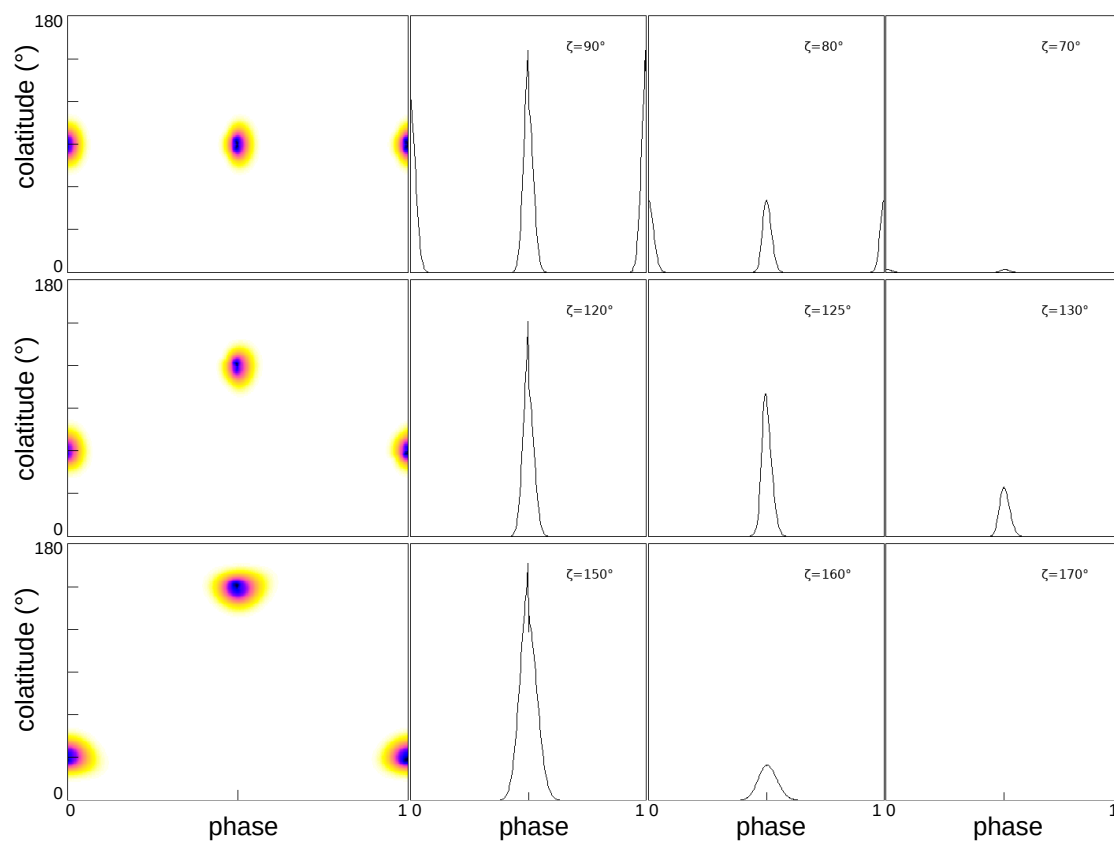


FIGURE 3.13 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ .

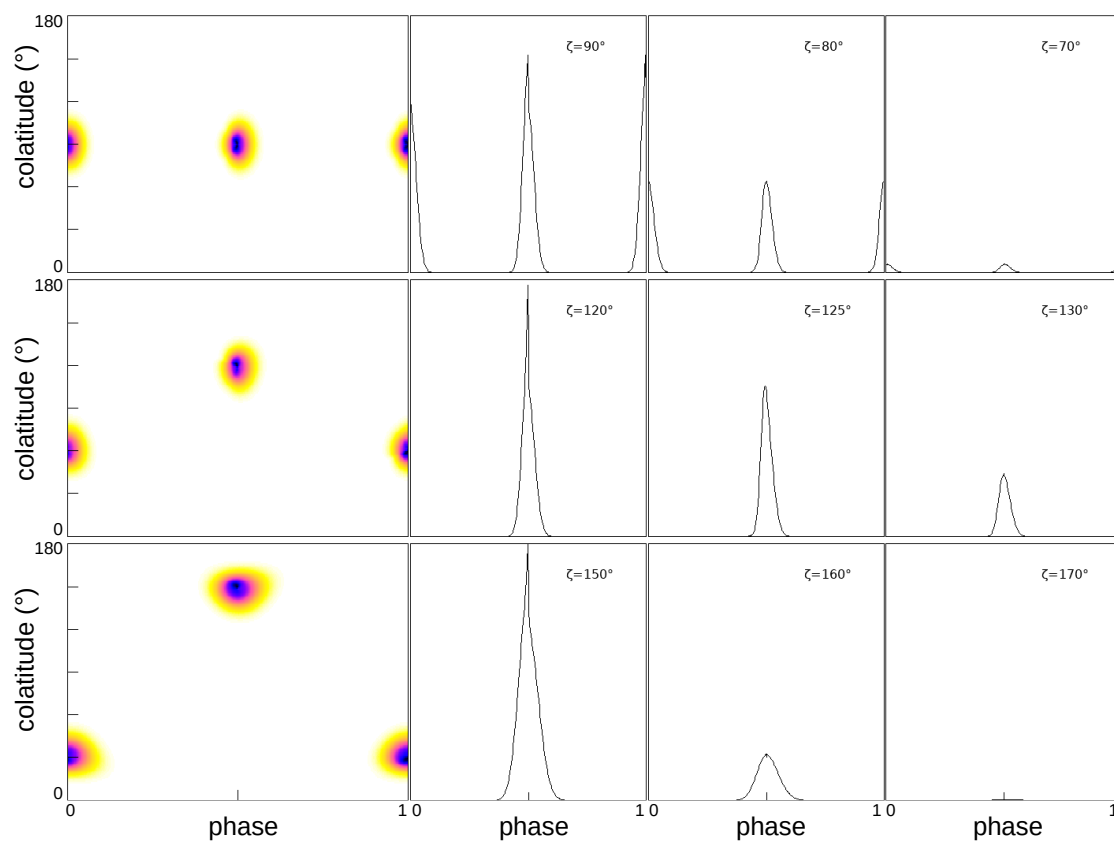


FIGURE 3.14 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ .

Pour obtenir une émission radio un peu plus réaliste, on a également essayé une répartition aléatoire mais homogène par unité de surface des points d'émission dans la calotte polaire. Pour cela on utilise la formule exacte de l'équation (3.26) en remplaçant $\frac{i}{N}$ par un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. Pour obtenir une distribution aléatoire sur les deux coordonnées à la surface de l'étoile (colatitude et longitude) dans le repère sphérique de l'axe magnétique, on a ajouté à la valeur de la longitude de chacun des points d'émission de la Fig. 3.12 un nombre aléatoire compris entre 0 et $\Delta\phi$, avec $\Delta\phi$ l'écart longitudinal entre deux rangées de points (écarts selon la longitude entre deux des dernières lignes de champ magnétique fermées sur la surface de l'étoile à neutrons). La Fig. 3.15 représente la distribution de ces points au sein de la calotte polaire Nord. On constate une nette amélioration de l'échantillonnage autour de l'axe magnétique comparé à la Fig. 3.12.

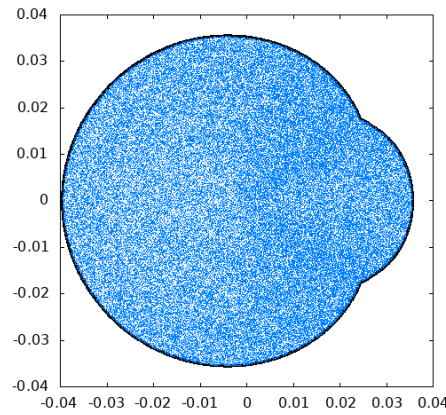


FIGURE 3.15 – Points d'émission radio dans la calotte polaire (limites en noir) pour une inclinaison de l'axe magnétique de 90° avec une distribution aléatoire mais homogène des points.

Les Fig. 3.16 et 3.17 montrent les cartes d'émission et courbes de lumière obtenues avec cette répartition des points d'émission avec 10^8 points d'émissions par calotte polaire. On retiendra de ces cartes d'émission qu'il n'y a pas vraiment de différence significative entre les deux façons de répartir les points d'émission à l'intérieur des calottes polaires, d'ailleurs il n'y a pas de différence importante entre les tableaux 3.3 et 3.4 où l'on a rapporté les intensités maximales dans chacune des métriques pour différentes valeurs de l'inclinaison χ . Dans un souci de réalisme, l'on utilisera dorénavant uniquement la répartition présentée dans la Fig. 3.15 pour l'émission radio.

TABLE 3.4 – Intensité maximale du rayonnement radio (unité arbitraire) avec la distribution des points d'émission vue dans la Fig. 3.15 pour différente valeur de χ .

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|------------|-----------|---------------|
| 90° | 4221 | 3235 |
| 60° | 4387 | 3435 |
| 30° | 2552 | 2021 |

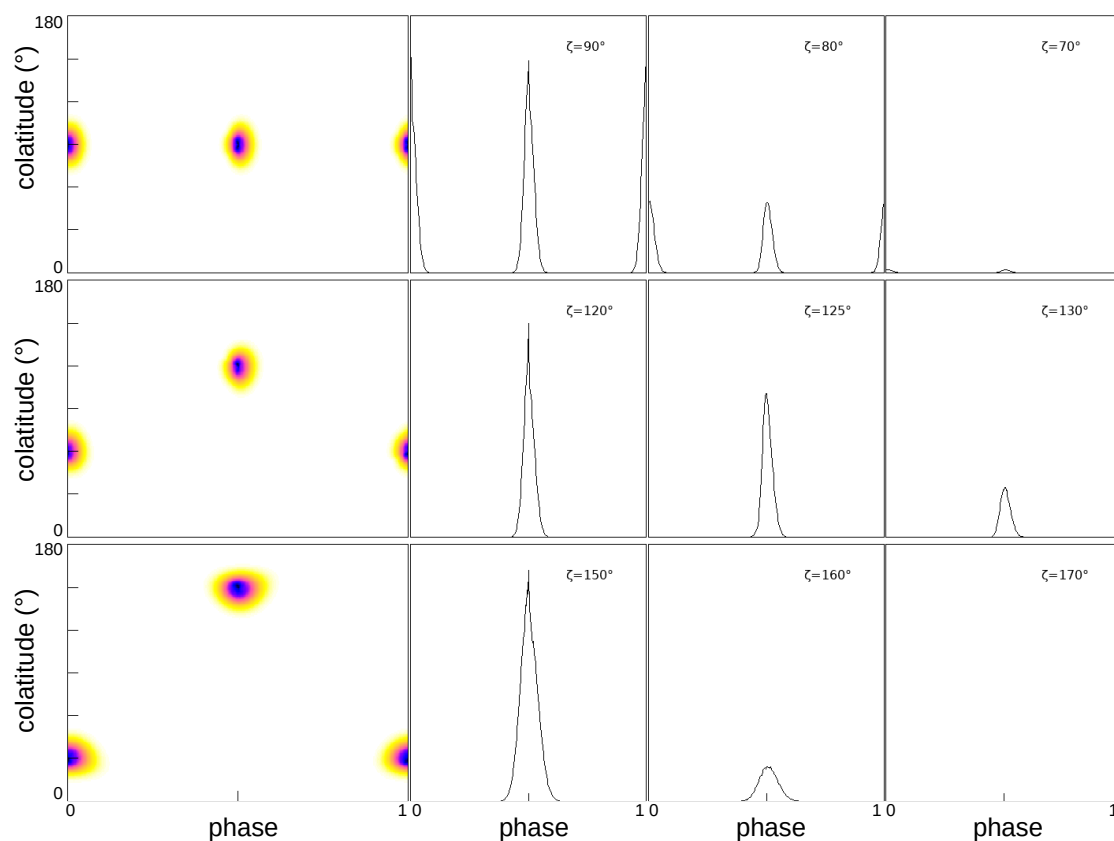


FIGURE 3.16 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angle d'observation ζ . La répartition des points d'émission dans la calotte polaire est ici aléatoire comme sur la Fig. 3.15.

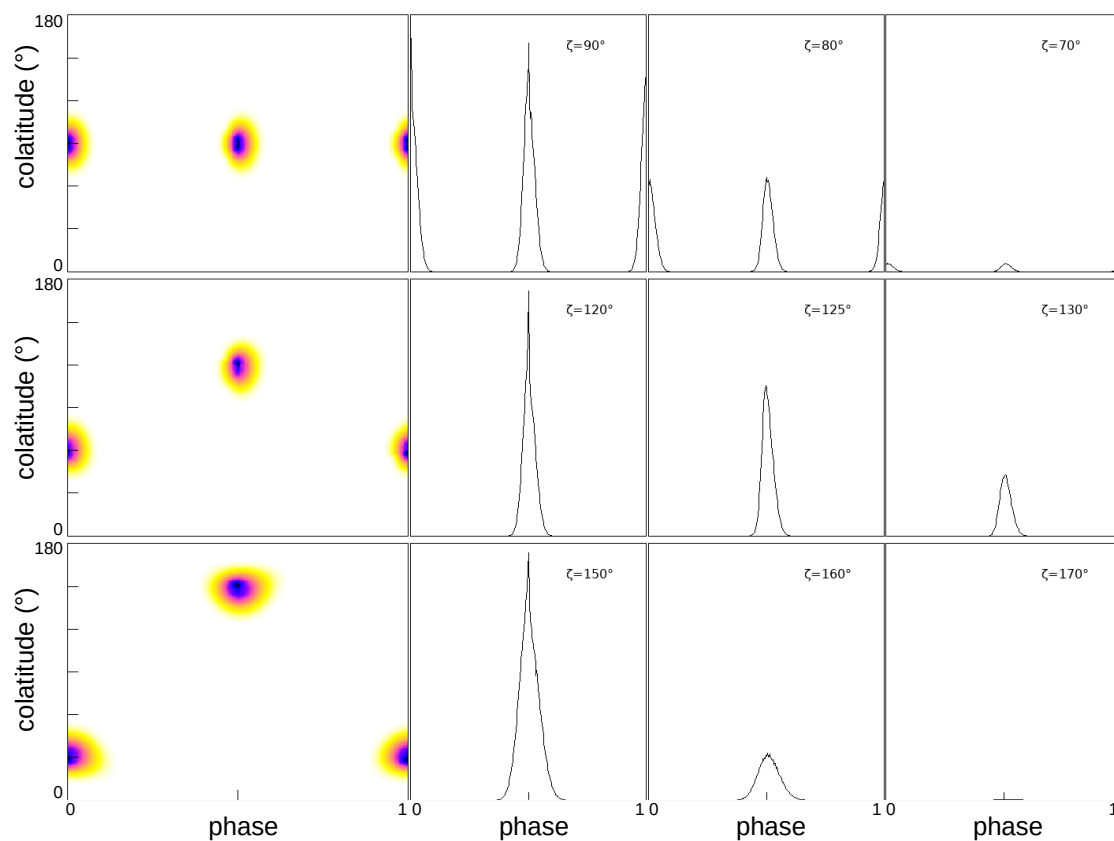


FIGURE 3.17 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild avec les courbes lumière pour différents angle d'observation ζ . La répartition des points d'émission dans la calotte polaire est ici aléatoire comme sur la Fig. 3.15.

Si pour un pulsar milliseconde, on soupçonne que l'émission radio a lieu relativement près de la surface de l'étoile à neutrons, pour les pulsars avec une période plus élevée il est généralement admis que le siège de celle-ci se situe à plusieurs fois le rayon de l'étoile R_* au-dessus des calottes polaires. On a donc réparti des points d'émission le long des lignes de champ magnétique passant par les points sur la calotte polaire de la Fig. 3.15, deux points sur la même ligne de champ étant séparés par une distance d'un dixième du rayon de l'étoile (comme pour l'émission haute énergie dans les cavités allongées).

Les Fig. 3.18 et 3.19 sont les cartes d'émission radio obtenues dans les deux métriques, respectivement Minkowski et Schwarzschild, pour une zone d'émission comprise entre 1 et 2 R_* au-dessus de la calotte polaire (donc à une distance du centre de l'étoile entre 2 et 3 R_*). Les Fig. 3.20 et 3.21 sont quant à elles les cartes d'émission radio dans la métrique de Minkowski et de Schwarzschild pour une zone d'émission comprise entre 3 et 4 R_* au-dessus de la calotte polaire (donc à une distance du centre de l'étoile entre 4 et 5 R_*). Ce qui est visible sur ces cartes d'émission, et un peu aussi sur la forme des pulses des courbes de lumière, c'est que la taille de l'image de la zone d'émission, et donc la largeur des pulses, va augmenter avec son altitude, tout simplement parce que la zone d'émission est elle-même plus large du fait que les lignes de champ magnétique divergent de plus en plus les unes des autres quand on s'éloigne de l'étoile à neutrons.

On notera également un décalage de phase des pulses comparé à l'émission provenant de la surface des Fig. 3.16 et 3.17 car la phase 0 est toujours définie comme la longitude du point d'impact du photon provenant du pôle magnétique (et donc de la surface de l'étoile à neutrons), celui-ci a alors un temps de vol plus important que celui des photons émis au-dessus de la calotte polaire ce qui se traduit sur les cartes d'émission par un décalage de la phase de ces photons.

Les tableaux 3.5 et 3.6 nous donnent les intensités maximales correspondantes dans les deux métriques pour chacune des altitudes de la zone d'émission, à nouveau l'on peut y voir que l'intensité maximale sera moins importante dans la métrique de Schwarzschild.

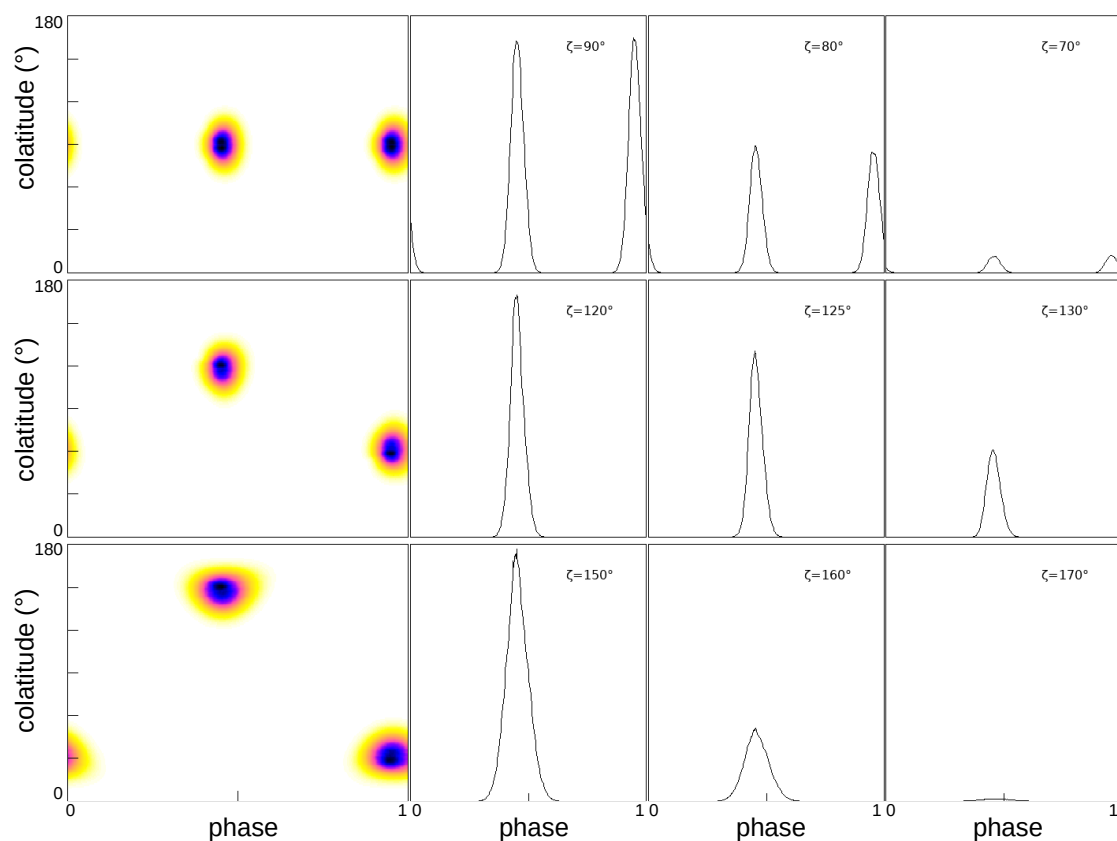


FIGURE 3.18 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ . La zone d'émission est ici comprise entre 1 et $2 R_\star$ au-dessus des calottes polaires.

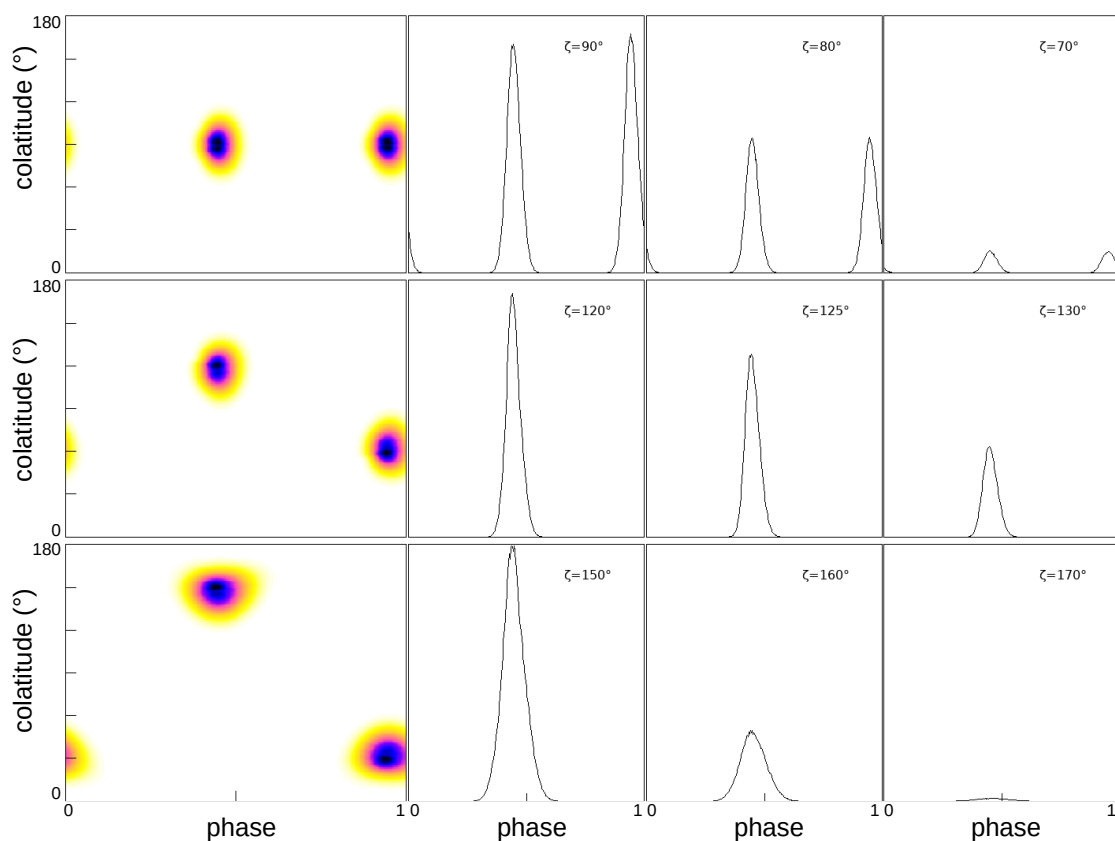


FIGURE 3.19 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ . La zone d'émission est ici comprise entre 1 et $2 R_\star$ au-dessus des calottes polaires.

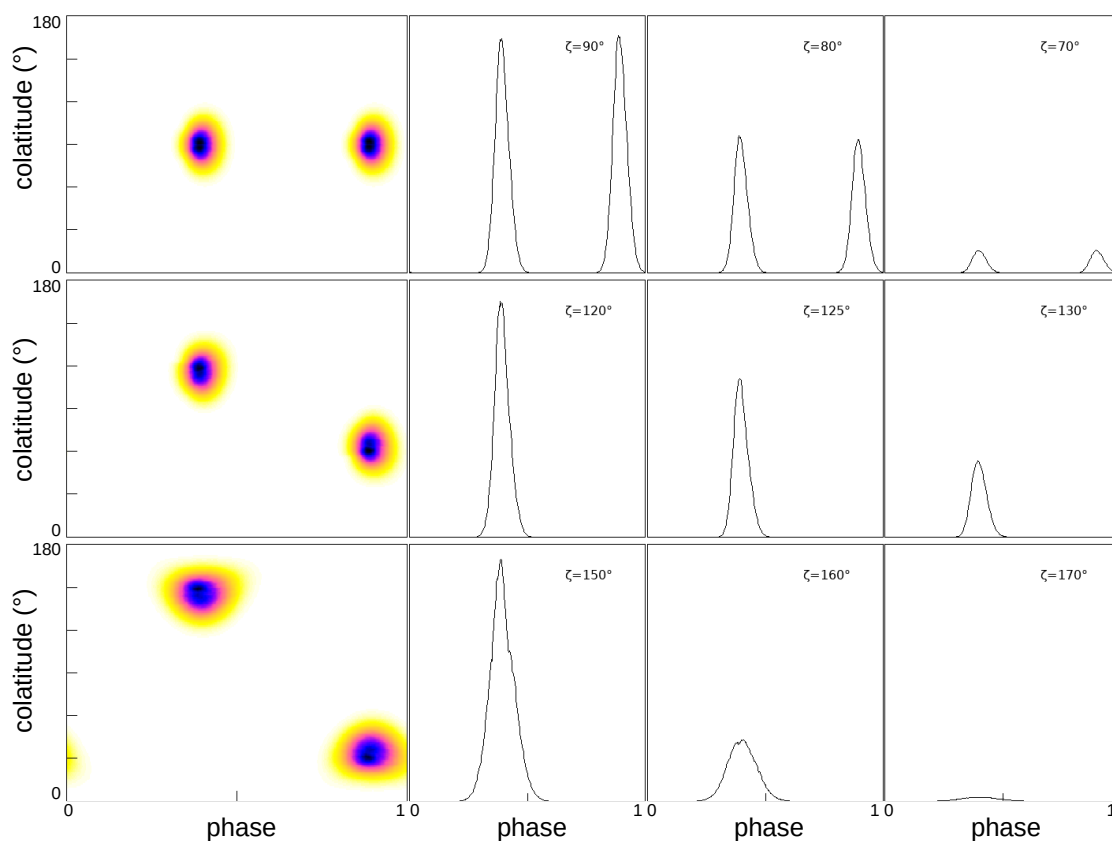


FIGURE 3.20 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ . La zone d'émission est ici comprise entre 3 et $4 R_\star$ au-dessus des calotte polaire.

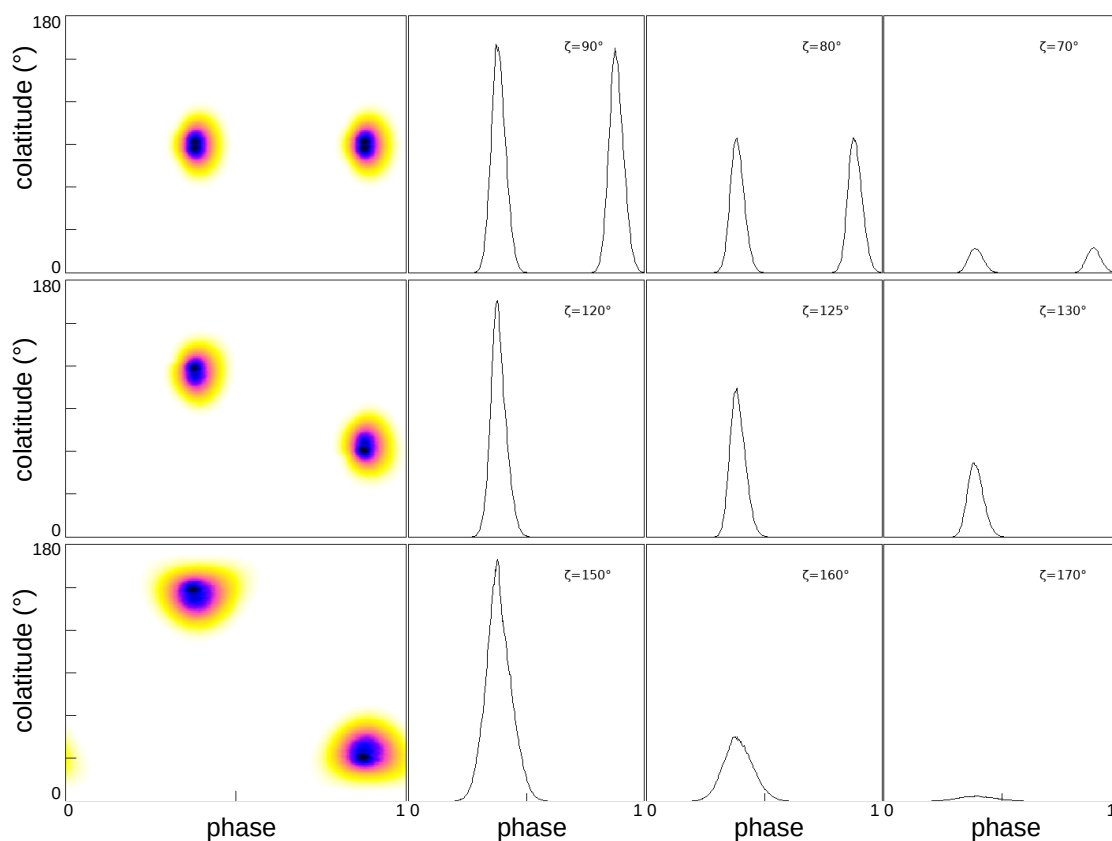


FIGURE 3.21 – Cartes d'émission dans le domaine radio pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans la métrique de Schwarzschild avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ . La zone d'émission est ici comprise entre 3 et $4 R_\star$ au-dessus des calottes polaires.

TABLE 3.5 – *Intensité maximale du rayonnement radio (unité arbitraire) pour différente valeur de χ pour une zone d'émission comprise entre 1 et 2 R_\star au-dessus des calottes polaires.*

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|--------|-----------|---------------|
| 90° | 2226 | 2023 |
| 60° | 2318 | 2071 |
| 30° | 1461 | 1340 |

TABLE 3.6 – *Intensité maximale du rayonnement radio (unité arbitraire) pour différente valeur de χ pour une zone d'émission comprise entre 3 et 4 R_\star au-dessus des calottes polaires.*

| χ | Minkowski | Schwarzschild |
|--------|-----------|---------------|
| 90° | 1980 | 1914 |
| 60° | 1908 | 1841 |
| 30° | 1194 | 1086 |

3.5 Courbes de lumière multifréquences

Afin d'avoir une meilleure idée de l'impact du champ gravitationnel, dans le cadre de la relativité générale, sur l'émission que l'on va recevoir du pulsar, on a tracé les courbes de lumière pour les deux domaines d'émission, radio et haute énergie, à partir des cartes d'émission des sections 3.3 et 3.4, ces cartes d'émission étant, comme on l'a déjà vu dans les sections correspondantes, les courbes de lumière pour toutes les inclinaisons de la ligne de visée. On garde la normalisation de ces cartes d'émission par le maximum d'intensité reçu sur la sphère céleste de manière à ce que le maximum vaille 1 pour chacun des deux types d'émission, radio et haute énergie. Ces courbes de lumière sont étendues au-delà de la première phase (chaque phase suivante étant supposée identique) pour une meilleure visibilité de la série de pulses radios. A nouveau on prendra comme début de phase (ou phase 0) pour ces courbes de lumière le moment où l'on reçoit le photon émis par pôle magnétique nord dans chacun des deux cas, espace-temps plat et métrique de Schwarzschild.

Les courbes de lumière ainsi obtenues sont représentées dans les Fig 3.22 à 3.25 avec :

- En rouge, la courbe de lumière de l'émission radio provenant de la surface de la calotte polaire reçue dans un espace-temps plat (métrique de Minkowski).
- En vert, la courbe de lumière de l'émission radio provenant de la surface de la calotte polaire reçue dans la métrique de Schwarzschild.
- En orange, la courbe de lumière de l'émission haute énergie provenant des cavités allongées reçue dans un espace-temps plat.
- En bleu, la courbe de lumière de l'émission haute énergie provenant des cavités allongées reçue dans la métrique de Schwarzschild.

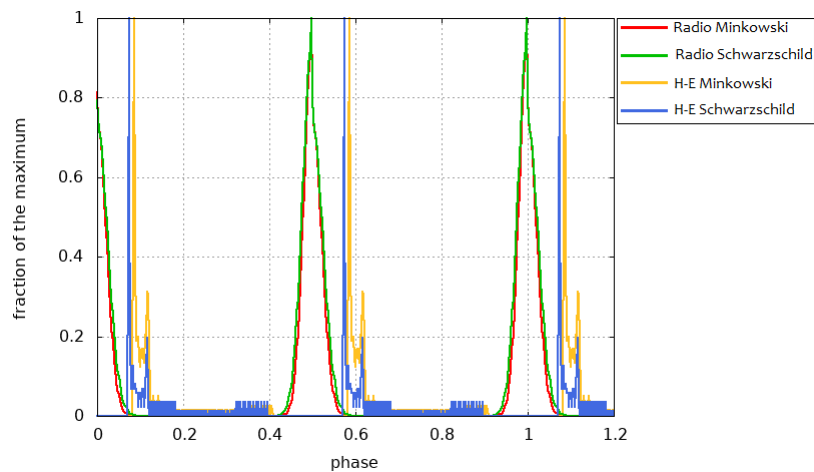


FIGURE 3.22 – Courbes de lumière dans les domaines radio et hautes-énergies pour $\chi = 90^\circ$ et $\zeta = \chi = 90^\circ$ pour une zone d'émission infiniment fine.

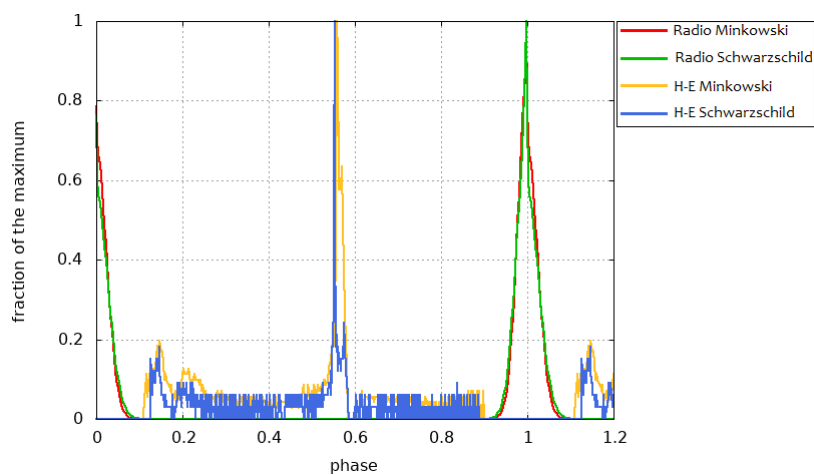


FIGURE 3.23 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = \chi = 60^\circ$ pour une zone d'émission infiniment fine.

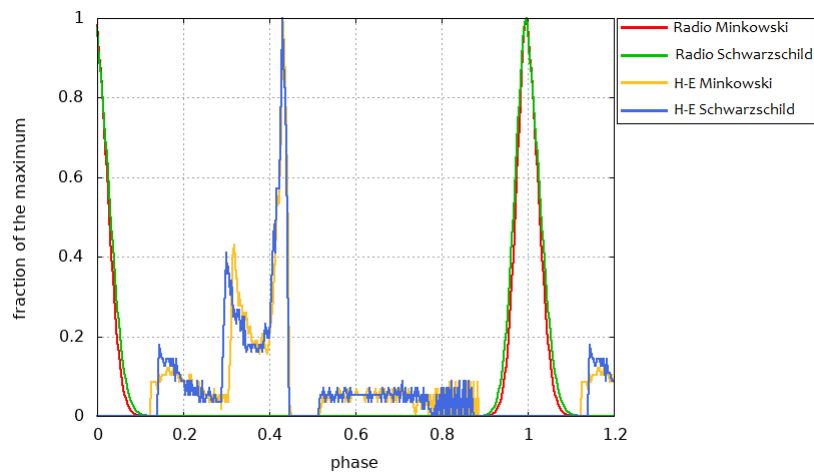


FIGURE 3.24 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 45^\circ$ et $\zeta = 50^\circ$ pour une zone d'émission infiniment fine.

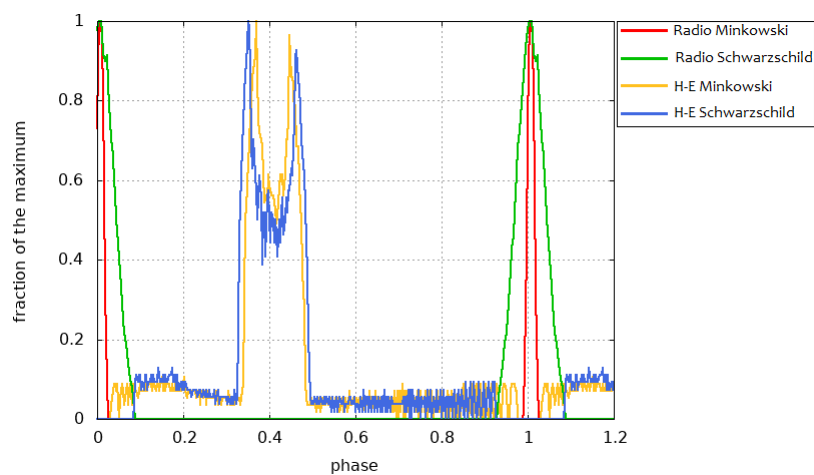


FIGURE 3.25 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 30^\circ$ et $\zeta = 60^\circ$ pour une zone d'émission infiniment fine.

Sur la Fig. 3.22 représentant ces courbes de lumière pour un axe magnétique et une ligne de visée perpendiculaire à l'axe de rotation ($\chi = \zeta = 90^\circ$), on peut voir clairement que la forme générale des pulses est plutôt bien conservée d'une métrique à l'autre cependant on peut également voir que le décalage temporel entre l'émission haute énergie et l'émission radio est légèrement moins important (de l'ordre de quelques centièmes de période) dans le cas relativiste : il s'agit probablement d'une conséquence du délai Shapiro, en effet le retard induit par la courbure de la trajectoire des photons sera plus important à proximité de l'étoile à neutrons et donc pour l'émission radio, qui ici est émis à la surface de l'étoile, par rapport à l'émission haute énergie dont la zone d'émission s'étend jusqu'à la proximité cylindre lumière.

On constate une différence plus importante de la forme des pulses haute énergie entre un espace-temps plat et la métrique de Schwarzschild dans la Fig. 3.23, où on a $\chi = \zeta = 60^\circ$, les pulses radio eux restent relativement inchangés. Dans la Fig. 3.24 ou on a $\chi = 45^\circ$ et $\zeta = 50^\circ$, on voit que la distance entre deux pics constitutifs de la pulse va varier selon la géométrie de l'espace-temps, ces deux pics vont être plus écartés dans la métrique de Schwarzschild. La Fig. 3.25 est la seule où une modification de la forme des pulses radio dans la métrique de Schwarzschild est clairement visible : comme ici on a $\chi = 30^\circ$ et $\zeta = 60^\circ$, la ligne de visée passe à la limite de la calotte polaire et donc on profite pleinement des effets de distorsion qui étendent la taille de l'image de la zone d'émission radio.

Les Fig. 3.26 à 3.29 montrent les courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie (avec le même code couleur que sur les figures précédentes) pour une zone d'émission du rayonnement haute énergie avec une certaine épaisseur le long des dernières lignes de champ magnétique fermées. Comme on en avait déjà parlé dans la section 3.3.3, les pics d'émissions en haute énergie sont plus épais, moins "acérés", certains pics d'émission fusionnent même comme sur les Fig. 3.26, 3.28 et 3.29. Il y a également des cas où l'intensité relative de ces pics semblent augmenter de manière considérable comme sur la Fig. 3.27. On constate sur les Fig. 3.26 à 3.29 l'apparition de pics d'émission hautes-énergies au sein des pulses radio, pics plus visibles dans la métrique de Schwarzschild mais également présents dans un espace-temps plat, phénomène dû à ce que l'on pouvait déjà observer sur les cartes d'émission des Fig. 3.10 et 3.11 où l'on voyait apparaître des composantes haute énergie dans "l'ombre" des calottes polaires lorsque l'on rajoute une épaisseur à la zone d'émission haute énergie. A nouveau on peut constater, en comparant les courbes oranges et bleues, que le délai sera légèrement moins important entre les pulses radios et hautes-énergies dans la métrique de Schwarzschild.

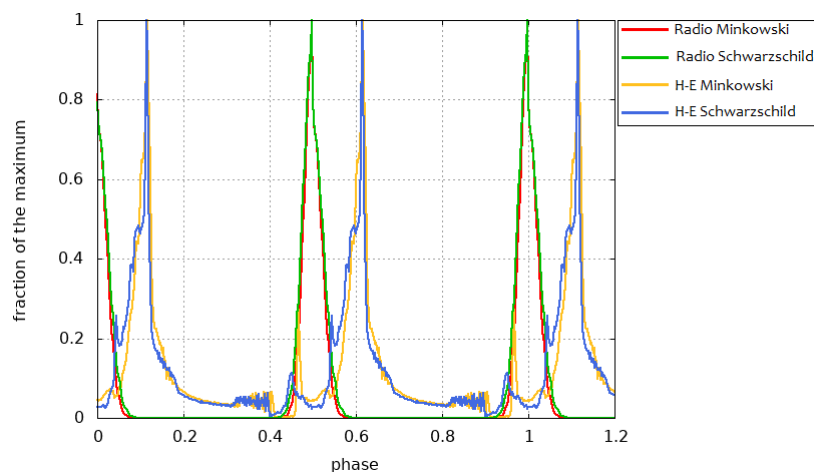


FIGURE 3.26 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute-énergie pour $\chi = 90^\circ$ et $\zeta = \chi = 90^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie avec une certaine épaisseur.

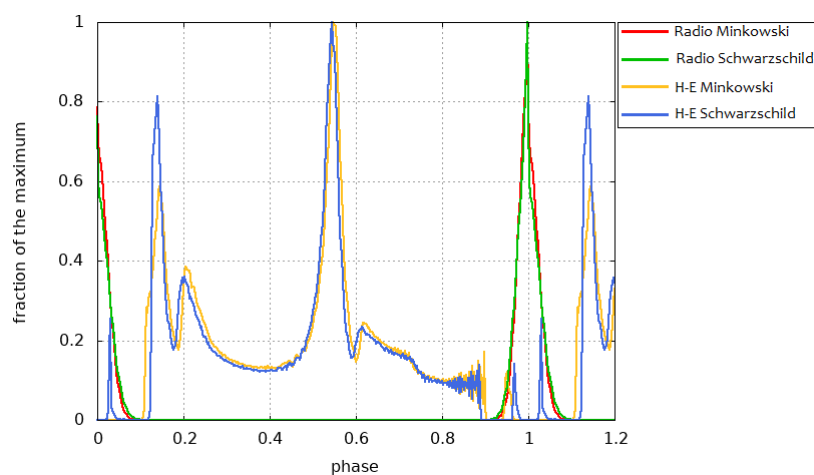


FIGURE 3.27 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = \chi = 60^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie avec une certaine épaisseur.

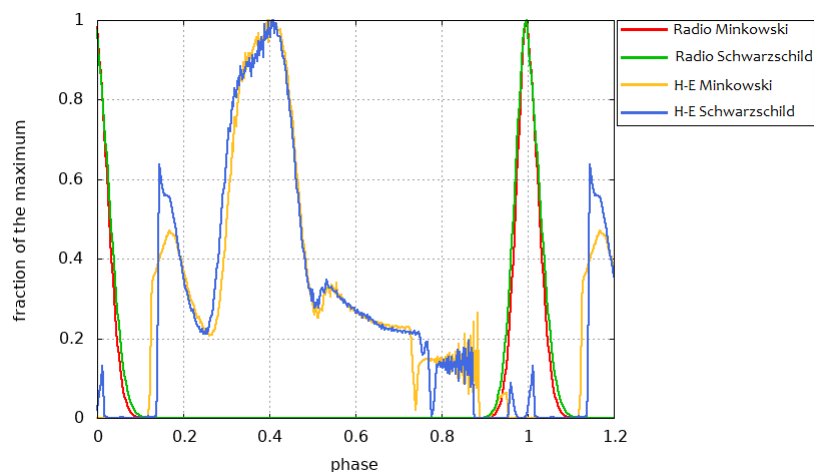


FIGURE 3.28 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 45^\circ$ et $\zeta = 50^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie avec une certaine épaisseur.

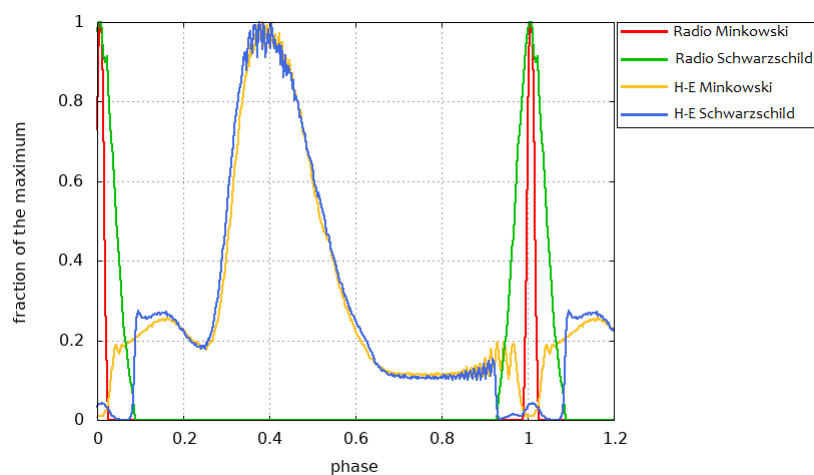


FIGURE 3.29 – Courbes de lumière dans les domaines radio et haute énergie pour $\chi = 30^\circ$ et $\zeta = 60^\circ$ pour une zone d'émission haute énergie avec une certaine épaisseur.

On peut quantifier le décalage temporel entre l'émission radio et haute énergie ainsi : soit deux photons émis à deux altitudes différentes r_1 et r_2 , si ceux-ci s'éloignent de l'étoile à neutrons, le décalage temporel Δt_{21} entre la réception des deux signaux (qui ne dépend pas de la distance à laquelle l'étoile est observée), l'intervalle espace-temps d'un photon étant toujours nul ($ds^2 = 0$), alors l'intervalle espace-temps pour des photons avec une trajectoire purement radial sera dans la métrique de Schwarzschild :

$$-\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0 \quad (3.29)$$

Ce qui nous donne :

$$c dt = \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (3.30)$$

En intégrant cette équation on peut alors calculer Δt_{21} , le décalage temporel entre deux photons émis à deux altitudes différentes r_1 et r_2 . La différence d'altitude initiale entre les deux photons étant $\Delta r_{21} = r_1 - r_2$, en normalisant par la période de rotation du pulsar $P = \frac{2\pi R_{cyl}}{c}$ on obtient :

$$\frac{\Delta t_{21}}{P} = \frac{r_1 - r_2}{2\pi R_{cyl}} + \frac{R_S}{2\pi R_{cyl}} \ln \left(\frac{r_1 - R_S}{r_2 - R_S} \right). \quad (3.31)$$

Le premier terme correspond au temps de vol du photon dans un espace-temps plat tel que donné par l'équation (3.13), c'est le second terme qui rend compte du délai Shapiro. La Fig. 3.30 montre ce délai pour diverses valeurs du paramètre de rotation R_*/R_{cyl} ainsi que pour différentes altitudes r_1 d'émission du premier photon, le deuxième photon étant émis depuis la surface ($r_2 = R_*$).

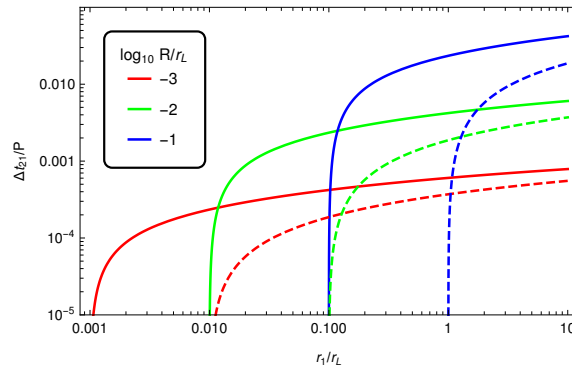


FIGURE 3.30 – Décalage $\Delta t_{21}/P$ entre la réception de deux photons émis à deux altitudes différentes pour différentes valeur du paramètre de R_*/R_{cyl} et pour une altitude d'émission initiale du premier photon à R_* en trait plein et $10R_*$ en pointillé.

On peut voir sur cette figure que le décalage temporel a une croissance plus importante quand le rapport R_*/R_{cyl} n'est pas trop faible, or comme le rayon du cylindre lumière est égal à $\frac{c}{\Omega}$ avec Ω la vitesse angulaire de l'étoile à neutrons, on en déduit que les décalages entre photons seront plus importants pour une étoile avec une vitesse de rotation élevée et donc une petite période P de rotation. Rajouté à

cela que le décalage est plus important lorsque les photons sont émis plus près de la surface de l'étoile et on en déduit donc que le décalage entre les émissions provenant des environs de la surface de l'étoile et des parties supérieures de la magnétosphère devrait être plus important pour des étoiles à neutrons avec une compacité et une vitesse de rotation importante.

Chapitre 4

Caractérisation fréquentielle de l'émission magnétosphérique

Dans le chapitre précédent, notre attention s'est portée sur la forme des pulses émis en radio et en gamma, en montrant explicitement l'impact de la gravitation sur la géométrie des profils et sur le déphasage entre le pulse radio principal et le premier pulse gamma. Nous n'avons pas tenu compte des caractéristiques fréquentielles de cette émission, fonction du point d'émission et plus particulièrement de la courbure des lignes de champ. Mais qu'en est-il de leur distribution en fréquence c'est-à-dire du spectre radio et gamma ? Comment évolue la forme des pulses en fonction de la fréquence ? Ce chapitre tente de répondre à ces questions en apportant des résultats quantitatifs précis si l'émission provient du rayonnement de courbure. Dans un premier temps, on reprend la solution du champ électromagnétique en espace-temps plat et donnée par DEUTSCH, 1955. Les effets gravitationnels et notamment le décalage gravitationnel vers le rouge n'ont pas été abordés par manque de temps, ce chapitre présentant des travaux toujours en cours.

4.1 Un modèle multi-longueurs d'onde cohérent

La modélisation multi-longueurs d'onde des pulsars en radio et en gamma se contente généralement de calculer conjointement une courbe de lumière en radio et une autre en gamma. Bien que cette stratégie permette déjà de contraindre les paramètres géométriques de la magnétosphère, ceci n'est guère satisfaisant car les profils de pulses évoluent en fonction de la fréquence ou de l'énergie. Une investigation multi-fréquences détaillée, incluant de manière cohérente le calcul des spectres radio et gamma à partir par exemple du rayonnement de courbure s'avère beaucoup plus contraignante et permettra de relier physiquement et quantitativement la géométrie des lignes de champ, l'altitude des sites de production de photons, les fonctions de distribution des particules émettrices ainsi que les courbes de lumière associées.

Dans ce dernier chapitre, on s'intéresse en profondeur à cette vision détaillée des processus d'émission à large bande de fréquences. Pour cela, on commence par

un rappel de la méthode de calcul des propriétés de l'émission de courbure, sa puissance et sa fréquence caractéristique, appliqué à la magnétosphère d'un pulsar. Puis on déterminera le spectre haute énergie autour du GeV, donc de la bande de Fermi/LAT, ainsi que quelques courbes de lumière caractéristiques pour conclure sur le spectre et les profils radio.

4.2 Calcul du rayonnement de courbure

Dans la section 1.3.3, on a vu que le calcul de la fréquence du rayonnement de courbure se fait à partir du rayon de courbure ρ de la trajectoire de la particule le long de la ligne de champ magnétique, qui n'est autre chose que le rayon de courbure de cette ligne de champ, en utilisant l'équation (1.47). Dans notre modèle, on suppose que les particules suivent les lignes de champ dans le référentiel en corotation avec l'étoile, la fréquence du rayonnement de courbure ν'_c est donc celle du référentiel en mouvement. Afin de trouver la fréquence du rayonnement émis par notre pulsar en rotation et telle que mesurée par un observateur lointain inertiel et immobile ν_c , il faut tenir compte de l'effet Doppler et effectuer une transformation de Lorentz du référentiel en corotation vers le référentiel inertiel de l'observateur. Ceci revient à multiplier l'équation (1.47) par un facteur Doppler que l'on note η dû à cette rotation. On aura ainsi $\nu_c = \eta \nu'_c$ avec le facteur Doppler de manière générale mis sous la forme :

$$\eta = \frac{1}{\gamma (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \quad (4.1)$$

\vec{n} étant le vecteur unitaire donnant la direction de propagation initiale du photon (tangent à la ligne de champ magnétique) telle que vue dans le référentiel de l'observateur et prenant en compte l'aberration, ainsi \vec{n} est donné par l'équation (3.20).

Dans la suite de ce chapitre, on se restreint à un espace-temps plat qui ne tient pas compte des effets de gravitation. À terme, on envisage de généraliser cette étude à une métrique de Schwarzschild comme dans les chapitres précédents.

4.2.1 La courbure

Par définition, le rayon de courbure ρ est égal à l'inverse de la courbure notée $\rho = 1/\kappa$ des lignes de champ magnétique.

Une trajectoire ou une ligne dans l'espace possède une courbure ainsi qu'une torsion. Localement, en un point de cette courbure, on associe un trièdre $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ encore appelé repère de Frenet. La courbure κ indique le changement dans le vecteur tangent \vec{T} et la torsion τ indique la variation dans le plan osculateur au même point. En résumé les formules de Frenet donnant les variations des vecteurs de base du

trièdre sont :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N} \quad (4.2a)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{B} \quad (4.2b)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N} \quad (4.2c)$$

La torsion n'intervient pas dans le calcul du rayonnement de courbure des particules. La courbure elle-même se déduit donc de la dérivée de la tangente $\vec{T} = \vec{B}/B$ aux lignes de champ en fonction de l'abscisse curviligne s le long de ces lignes de champ :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left\| \frac{d\vec{T}(s)}{ds} \right\|. \quad (4.3)$$

On rappelle que la variation de l'abscisse curviligne ds est reliée aux variations des coordonnées de la trajectoire (dx, dy, dz) par $ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$ dans une géométrie spatiale quelconque donnée par la métrique spatiale γ_{ik} qui est la projection spatiale de la métrique spatio-temporelle g_{ik} par rapport à un observateur donné. Dans l'espace-temps de Minkowski en coordonnées cartésiennes, cette expression se simplifie en $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Pour des courbes de géométrie connue, cette courbure peut être déterminée analytiquement, comme par exemple pour un dipôle statique pour lequel l'équation des lignes de champ est connue, les lignes étant elles-mêmes chacune contenues dans un plan. Pour un dipôle en rotation comme celui de Deutsch ou en relativité générale, il n'est pas possible d'obtenir une expression analytique de cette courbe. Il faut l'estimer numériquement en approximant la dérivée (4.3). Concrètement, on calcule cette courbure en mesurant la variation $\Delta\vec{T}$ du vecteur tangent \vec{T} aux lignes de champ magnétique lorsque l'on se déplace le long de celles-ci d'une valeur Δs de l'abscisse curviligne s suffisamment petite pour que la différence finie représente une bonne approximation de la dérivée. Typiquement une fraction du rayon de l'étoile $\Delta s \lesssim R_*$ est suffisante. On remplace alors κ dans l'équation (4.3) par une version discrétisée selon :

$$\kappa \approx \frac{\left\| \Delta\vec{T} \right\|}{\Delta s}. \quad (4.4)$$

Afin de minimiser les erreurs de discrétisation, on choisit une méthode aux différences finies centrées telle que la variation du vecteur tangent dépendant de l'abscisse curviligne soit :

$$\Delta\vec{T} \approx \vec{T}(s + \Delta s/2) - \vec{T}(s - \Delta s/2) + o(\Delta s^2). \quad (4.5)$$

Connaissant le rayon de courbure local et la valeur du champ magnétique au point d'émission dans le référentiel tournant, on remonte au spectre du rayonnement de courbure dans le référentiel inertiel de l'observateur en imposant encore une fonction de distribution en énergie pour les leptons émetteurs de photons. La situation la plus simple consiste à prendre une distribution mono-énergétique de particules et dont le spectre a été rappelé au chapitre 1.

La forme des courbes de lumière et des spectres dépend fortement de la distribution en énergie de ces particules. Les modèles actuels d'accélération de particules primaires et de création de paires secondaires et de génération supérieure (tertiaires, quaternaires,...) prédisent un pic du facteur de Lorentz autour de 10^7 pour les primaires et de 10^2 pour les autres. Bien que notre démarche s'accommode facilement d'une distribution quelconque de particules, dans ce chapitre, nous ne considérerons que des particules mono-énergétiques. Les particules primaires seront responsables de l'émission haute énergie au GeV tandis que les particules secondaires issues des cascades produiront l'émission radio.

Dans un cadre plus réaliste d'une distribution quelconque en énergie des particules et non mono-énergétique, le rayonnement étant additif linéairement, le calcul des spectres et des courbes de lumière suivra le même schéma d'addition linéaire des contributions mono-énergétiques individuelles avec des poids respectifs correspondants aux poids de la fonction de distribution. Par exemple, pour une population contenant N_1 particules d'énergie γ_1 et N_2 particules d'énergie γ_2 , l'émission totale sera N_1 fois celui du spectre mono-énergétique à γ_1 auquel se superpose N_2 fois celui du spectre mono-énergétique à γ_2 . Une distribution continue est alors sub-divisée en plusieurs intervalles de particules mono-énergétiques.

Passons maintenant en revue les résultats concernant les spectres mono-énergétiques haute énergie et radio : pour chacun des deux cas, nous supposerons qu'à chaque point d'émission, situé comme indiqué précédemment tout le long des dernières lignes de champ magnétique avec un espacement curviligne $\Delta\ell$ entre chaque point, il y a émission par rayonnement de courbure que l'on considérera provenir d'une particule avec un facteur de Lorentz γ fixé pour chaque type d'émission. On considérera à nouveau qu'il n'y a pas d'émission pour les points situés à plus de 95% de R_{cyl} de l'origine.

L'estimation classique du facteur de Lorentz maximum atteignable par les particules dans le champ électromagnétique prend en compte le freinage par la réaction de rayonnement pour compenser l'accélération par le champ électrique parallèle E_{\parallel} présent dans les cavités. La valeur précise de ce champ est fortement dépendante de la dynamique au sein de cette cavité. En égalant la puissance rayonnée (1.46) et la puissance fournie par ce champ électrique $e E_{\parallel}$, le facteur de Lorentz devient :

$$\gamma_{\max} = \left(6 \pi \varepsilon_0 \frac{E_{\parallel} \rho^2}{e} \right)^{1/4} \approx 10^7. \quad (4.6)$$

Dans notre modèle du vide, $E_{\parallel} \approx 10^{12}$ V/m correspond à la limite supérieure, celle du champ de Deutsch où le champ électrique n'est pas du tout écranté. En réalité, cette valeur est bien moindre mais le facteur de Lorentz maximum ne varie qu'en $E_{\parallel}^{1/4}$, il est donc très peu sensible à une variation importante de ce champ.

4.2.2 L'émissivité

Dans un premier temps, le calcul des spectres que nous présentons dans ce qui suit ne tient pas compte de l'éventail de fréquences auxquels les photons sont émis.

Nous approximations le spectre par une distribution de Dirac centrée sur la fréquence caractéristique ν_c et dont l'intensité correspond à la puissance totale du rayonnement intégrée sur toutes les fréquences du vrai spectre continu. Autrement dit, le spectre est approximé par

$$\frac{dI_{\text{curv}}}{d\omega} = P_{\text{curv}} \delta(\omega - \omega_c). \quad (4.7)$$

Chaque point sur une ligne de champ émet des photons à fréquence unique donnée par la fréquence caractéristique locale $\omega_c(\rho)$ (1.47) associée à la courbure locale de cette même ligne de champ. Le nombre de photons à considérer est proportionnel à la puissance totale émise $P_{\text{curv}}(\rho)$. Ceci contraste fortement avec le chapitre précédent où chaque position sur une ligne de champ donnée ne produisait qu'un seul photon d'énergie indéterminée. Dans ce chapitre, nous levons l'ambiguïté sur la fréquence en incorporant les détails du mécanisme d'émission, fréquence et puissance. L'émissivité ne sera plus constante le long d'une ligne de champ mais variera en fonction de la courbure locale.

Dans un deuxième temps, nous envisagerons d'utiliser l'expression complète du spectre du rayonnement de courbure donné par l'approximation (1.49). Enfin, dans une dernière étape, la situation la plus réaliste devra tenir compte d'une distribution énergie des particules sous la forme d'une loi de puissance telle que le nombre de particules de facteur de Lorentz entre γ et $\gamma + d\gamma$ est donné entre une valeur minimale γ_{\min} et une valeur maximale γ_{\max} par

$$\frac{dN}{d\gamma} \propto \gamma^{-p} \quad \text{avec} \quad \gamma \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}] \quad (4.8)$$

où p est l'indice spectral de la loi de puissance. Cette distribution de particule produira une autre loi de puissance pour l'émissivité j_{curv} telle que

$$j_{\text{curv}} = \int \gamma^{-p} \frac{dI_{\text{curv}}}{d\omega} d\gamma \propto \omega^{-(p-2)/3}. \quad (4.9)$$

Il existe donc une relation simple entre l'indice spectral de la distribution en loi de puissance des particules et celui des photons. Au-delà de la fréquence de coupure associée à γ_{\max} l'émissivité chute exponentiellement selon $e^{-\omega/\omega_c^{\max}}$. En dessous de la fréquence de coupure associée à γ_{\min} l'émissivité décroît selon une autre loi de puissance indépendante de la distribution des particules selon $(\omega/\omega_c^{\min})^{1/3}$.

4.2.3 Luminosité des calottes polaires

La luminosité radio des pulsars semble relativement constante à travers le diagramme $P - \dot{P}$ avec une valeur de l'ordre de $L_{\text{radio}} \approx 10^{22}$ W (SZARY et al., 2014). Bien sûr, cette valeur est entachée d'erreur puisqu'on ne connaît pas exactement l'angle solide réellement balayé par le faisceau radio. Rappelons que nous ne détectons que les photons émis le long de notre ligne de visée. Il faut donc extrapoler la forme de ce faisceau pour d'autres angles d'où l'incertitude. Malgré cela, essayons d'estimer la luminosité provenant des calottes polaires en appliquant les valeurs standards pour une calotte vide (RUDERMAN et SUTHERLAND, 1975).

Supposons que les particules rayonnent en radio sur une hauteur typique h de l'ordre de 100 m d'après RUDERMAN et SUTHERLAND, 1975. Le nombre de particules dans les calottes est donc :

$$N_h = 2 n_{\text{GJ}} \Delta V = \frac{2 \pi \varepsilon_0}{e} \frac{B R^3 h}{R_{\text{cyl}}^2}. \quad (4.10)$$

Le volume $\Delta V = \pi r_{\text{cp}}^2 h$ correspond à celui d'un cylindre de hauteur h dont la base est la surface d'une calotte polaire de rayon r_{cp} . L'émission radio est cohérente, ce qui signifie que l'intensité radio sera proportionnelle à N^2 et non à N . Mais cela impose aussi une taille des régions émettrices inférieure à la longueur d'onde $\lambda \ll h$ bien inférieure à la hauteur h des cavités. Ces ondes radio étant observées dans la gamme de fréquence de 10-1000 MHz environ, ceci implique une taille moyenne de 1 m au-delà de laquelle le rayonnement perd sa cohérence et chute brutalement en intensité. Le nombre de particules participant à la cohérence sera donc plutôt de $N_{\text{coh}} = \frac{\lambda}{h} N_h$. La luminosité totale devient alors :

$$L_{\text{radio}} \approx N_{\text{coh}}^2 P_{\text{curv}} = \frac{3}{2} N_{\text{coh}}^2 \alpha_{\text{sf}} \gamma^4 \frac{\hbar c^2}{\rho}. \quad (4.11)$$

avec α_{sf} la constante de structure fine :

$$\alpha_{\text{sf}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (4.12)$$

En appliquant ces valeurs aux pulsars millisecondes et aux pulsars jeunes, en prenant $\gamma \approx 100$, on retrouve les bons ordres de grandeur de la luminosité radio typique observée par SZARY et al., 2014. On remarque que pour un rayonnement incohérent, cette luminosité serait divisée par un facteur énorme de $N_{\text{coh}} \approx 10$ ce qui montre bien l'importance de la cohérence dans le mécanisme d'émission radio.

4.2.4 Luminosité des cavités allongées

On peut refaire une même estimation pour la luminosité gamma du rayonnement de courbure dans les cavités allongées. Les caractéristiques essentielles qui changent sont le facteur de Lorentz typique $\gamma \approx 10^7$, le rayon de courbure et surtout le rayonnement qui devient incohérent puisque aux énergies du MeV et au-delà, la taille des agrégats de particules ne peut pas dépasser 10^{-12} m rendant la cohérence impossible à ces énergies. La luminosité dépendra donc linéairement du nombre total de particules rayonnantes N_p dans le volume des cavités. Toujours en ordre de grandeur, ce volume est estimé en prenant un anneau à la base de la cavité, de rayon r_{pc} , de largeur de l'ordre de $r_{\text{pc}}/10$ et de longueur R_{cyl} ce qui donne un volume :

$$\Delta V_{\text{SG}} = 2 \pi r_{\text{pc}} \frac{r_{\text{pc}}}{10} R_{\text{cyl}} \approx R^3. \quad (4.13)$$

Le nombre total de particules est alors :

$$N_p \approx \frac{2 \varepsilon_0 \Omega B}{e} R^3 \approx \frac{R_{\text{cyl}}}{h} N_h \gg N_h. \quad (4.14)$$

$$L_{\text{gamma}} \approx N_p P_{\text{curv}} = \frac{3}{2} N_p^2 \alpha_{\text{sf}} \gamma^4 \frac{\hbar c^2}{\rho}. \quad (4.15)$$

La luminosité gamma ainsi obtenue se situe autour de 10^{28} W en accord avec les résultats de Fermi/LAT.

Soulignons que les chiffres estimés en radio et en gamma ne donnent qu'une indication sur la luminosité réelle de chaque pulsar dans chacune des longueurs d'onde. Ces calculs montrent néanmoins que le rayonnement de courbure peut expliquer simultanément l'émission radio (nécessairement cohérente) et l'émission gamma (incohérente).

Ayant vérifié l'énergétique du rayonnement, voyons à présent la forme quantitative détaillée des spectres et des courbes de lumière à haute énergie et en radio.

4.2.5 Test du calcul de la courbure

Pour vérifier que notre algorithme calculant le rayon de courbure fonctionne correctement, nous l'avons appliqué sur des formes géométriques simples comme par exemple une hélice de rayon R et de pas p dont le rayon de courbure est $\rho_{\text{theo}} = R \left[1 + \left(\frac{p}{2\pi R} \right)^2 \right]$. La Fig. 4.1 nous donne ainsi l'erreur relative de notre algorithme de calcul du rayon de courbure en fonction de l'incrément d'abscisse curviligne Δs (en unité de R) pour une hélice dont on a fixé numériquement le rayon à $R = 1$ et le pas à $p = 6\pi$, cette erreur étant définie par :

$$\epsilon = \frac{|\rho_{\text{theo}} - \rho|}{\rho_{\text{theo}}}. \quad (4.16)$$

On constate que notre méthode est bien d'ordre 2 comme il se doit pour une différence finie centrée, c'est-à-dire que $\epsilon \propto \Delta s^2$. Cette pente est représentée dans la Fig. 4.1 en noir. Prendre un pas d'espace Δs égale à une fraction de la longueur typique du système (ici le rayon de l'hélice r) permet d'obtenir une précision suffisante pour le calcul de l'émission. Dans la suite on fixe ce pas d'espace à 10% du rayon de l'étoile à neutrons R_\star .

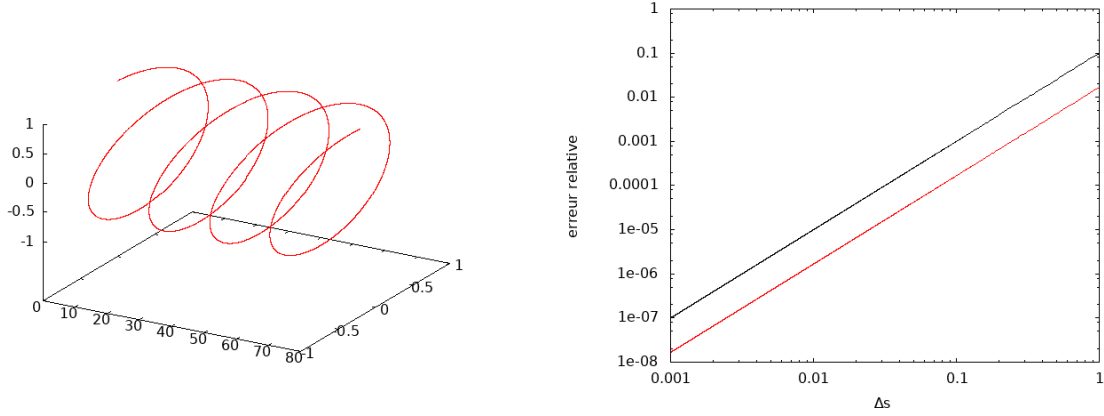


FIGURE 4.1 – A gauche : hélice de rayon 1, à droite : erreur relative du calcul du rayon de courbure en fonction de Δs en rouge et courbe de pente $\propto \Delta s^2$ en noire.

4.3 Émission haute énergie

L'émission haute énergie que nous étudions se trouve dans la bande du Fermi/LAT, soit entre 100 MeV et 100 GeV. 239 pulsars gamma ont été détectés avec des spectres très semblables comme on l'a rappelé dans l'introduction. À terme, on pourra comparer nos courbes de lumière et spectres avec des pulsars radio et gamma.

4.3.1 Spectres d'une cavité mince

Commençons par étudier les spectres et les cartes d'émission sans tenir compte du poids attribué à chaque photon en fonction de la puissance rayonnée. Dans ces conditions, on obtient par exemple la carte de la Fig. 4.2 montrant la répartition en énergie des photons provenant des cavités allongées reçus par un observateur lointain, en échelle logarithmique, l'énergie $E_c = h\nu_c$ étant obtenue en multipliant la fréquence du rayonnement observé ν_c par la constante de Planck h . Les paramètres utilisés supposent une inclinaison de $\chi = 60^\circ$ et un facteur de Lorentz γ de 10^7 pour les particules accélérées dans ces cavités, valeurs typiques citées par exemple dans BECKER, 2009 et dans GUREVICH et al., 1993. Pour chaque point de la carte repéré par la phase et l'inclinaison de la ligne de visée (ϕ, ζ) , en fait une zone de taille $0.5^\circ \times 0.5^\circ$, on affiche uniquement l'énergie du photon le plus énergétique en ce point. Cette carte dévoile donc l'efficacité de production de photons au GeV pour chaque couple (ϕ, ζ) mais sans donner la moindre indication sur la forme réelle des spectres pour chaque phase et chaque angle de la ligne de visée. Nous détaillerons ces caractéristiques plus loin.

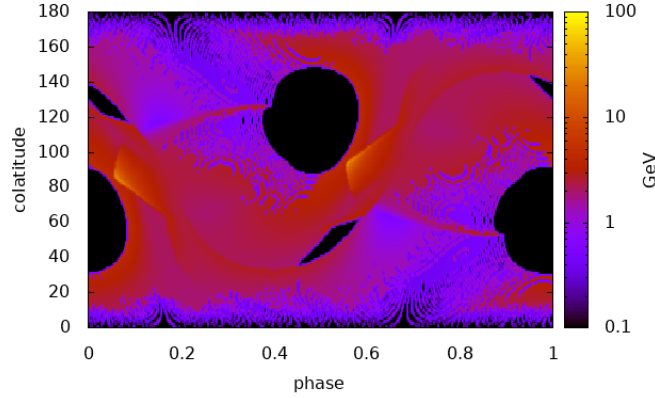


FIGURE 4.2 – Carte d'émission représentant l'énergie des photons reçus par un observateur lointain pour une inclinaison χ de l'axe magnétique de 60° .

En examinant cette carte, seules deux régions se démarquent avec des photons de très hautes énergies, autour de 50 GeV, près des points $(\phi = 0.1, \zeta = 90^\circ)$ et $(\phi = 0.6, \zeta = 90^\circ)$. Ces régions se trouvent à haute altitude, proche du cylindre lumière. Le reste de l'émission semble ne présenter, en comparaison, que peu de variation de l'énergie avec la phase ou l'angle d'inclinaison de la ligne de visée. Le résultat de cette carte est une combinaison non triviale de la courbure qui varie de manière non monotone avec l'altitude, voir la Fig 4.31, et du facteur Doppler produisant un décalage vers le bleu ou vers le rouge en fonction de la ligne de champ considérée, voir la Fig 4.32. En conséquence, les photons les plus énergétiques sont repoussés vers le cylindre lumière, mais uniquement dans les régions pour lesquelles le facteur Doppler est favorable, c'est-à-dire pour des particules se déplaçant le long des lignes de champ dans le même sens que celui de la rotation, voir la Fig. 4.30, le cas inverse produisant des photons de plus basse énergie (décalage vers le rouge).

La Fig. 4.3 représente la distribution moyennée sur la phase et la ligne de visée de l'énergie des photons issus de ces cavités allongées pour différentes inclinaisons χ de l'axe magnétique. On retrouve une distribution cohérente avec ce que l'on avait vu sur la Fig. 4.2 pour une inclinaison de 60° (courbe en vert) avec très peu de photons du côté des plus hautes énergies, au-delà de 50 GeV et une concentration importante de photons au centre du spectre, autour de quelques GeV. L'étendue du spectre varie aussi sensiblement en fonction de l'inclinaison du dipôle magnétique.

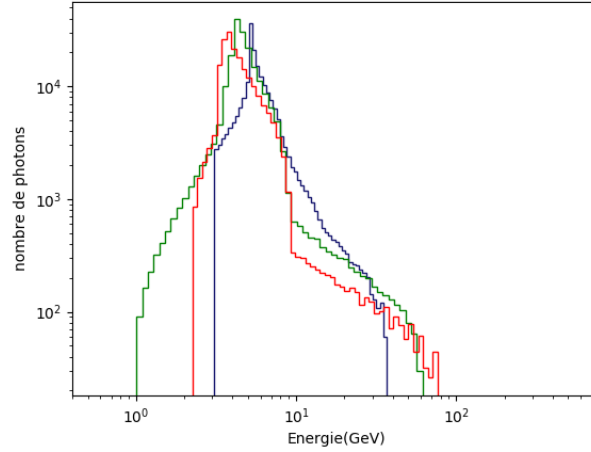


FIGURE 4.3 – Spectres de l'émission haute énergie du pulsar, en bleu pour $\chi = 30^\circ$, en vert pour $\chi = 60^\circ$ et en rouge pour $\chi = 90^\circ$.

Néanmoins, d'un point de vue observationnel et aussi plus réaliste, il est préférable de ne pas moyenner sur les angles de la ligne de visée puisqu'un observateur particulier ne verra que la partie de la carte d'émission en Fig. 4.2 correspondant à un angle ζ fixé (autrement dit une droite horizontale dans cette carte). Un exemple de la variation du spectre intégré en phase (c'est-à-dire sur toute la période du pulsar) pour $\chi = 60^\circ$ est montré en Fig. 4.4 pour différentes valeurs de l'inclinaison de la ligne de visée $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. On remarque une grande disparité dans la forme et les bornes des spectres bien que le maximum reste approximativement à la même énergie, aux environs de 4 GeV. La plus faible inclinaison de 30° montre le spectre le plus resserré avec un intervalle d'énergie restreint à la bande [3, 7] GeV. Une inclinaison plus élevée de 60° déplace cette borne inférieure à plus basse énergie jusqu'à environ 1 GeV tandis que la borne supérieure augmente jusqu'à 8-9 GeV. De plus, on constate l'apparition d'un spectre en forme de double pic, avec un pic à basse énergie, autour de 1.5 GeV et l'autre restant à 4 GeV. Nous verrons plus loin que la prise en compte de la puissance réelle rayonnée par les particules éliminera ce deuxième pic à basse énergie. Une inclinaison encore plus élevée de 90° décale le spectre en direction opposée, vers les plus hautes énergies avec une borne inférieure de 4 GeV et une borne supérieure de 30 GeV. On en conclut que le point de vue de l'observateur, par sa ligne de visée, impacte fortement le spectre moyen détecté. L'allure de ces spectres est une conséquence directe de la géométrie des lignes de champ, de leur visibilité par l'observateur, des effets d'aberration et Doppler.

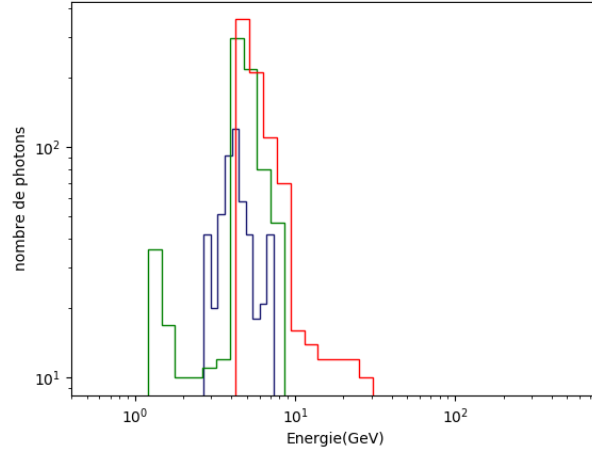


FIGURE 4.4 – *Spectres intégrés pour $\chi = 60^\circ$ et une inclinaison de la ligne de visée $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, en vert et en rouge.*

La carte d'émission de la Fig. 4.2 et les spectres des Fig. 4.3 et 4.4 ont été réalisés en partant du principe que pour chaque point d'émission le long des dernières lignes de champ magnétique fermées un seul photon est émis, c'est-à-dire en appliquant la même procédure que dans le chapitre précédent, les points successifs étant distants d'une certaine longueur Δs le long de la ligne de champ et imposée arbitrairement par le code d'intégration numérique.

Une vision plus conforme à la réalité doit tenir compte de l'efficacité de ce rayonnement de courbure. En effet, puisque l'on connaît le rayon de courbure des lignes de champ magnétique en chaque point, on peut en déduire la puissance rayonnée par une particule accélérée le long de celles-ci grâce à l'équation (1.46). Pour l'instant, nous n'avons pas indiqué la densité de particules dans les régions émettrices, nous ne pouvons donc pas calculer un flux précis détecté sur Terre mais nous pouvons donner à titre indicatif la distribution $E dN/dE$ en énergie des photons produits par le rayonnement de courbure. Les unités restent arbitraires, nous les noterons en UA .

En reprenant la même démarche que précédemment, on obtient un exemple de spectre tel que montré en Fig. 4.5. Comme nous n'avons utilisé qu'une valeur pour le facteur de Lorentz, on constate sur ces spectres des diminutions et des augmentations assez abruptes de l'intensité en fonction de la fréquence. On retrouve, comme sur le spectre de la Fig. 4.3, un faible flux de photons d'énergie supérieure à 50 GeV et un flux important de photons pour une énergie au voisinage de 5 GeV. La prise en compte de la modulation de l'intensité du spectre en fonction de la puissance rayonnée localement ne change pas la gamme de fréquence des photons émis. C'est pourquoi les limites inférieures et supérieures des spectres sont identiques dans les Fig. 4.3 et 4.5.

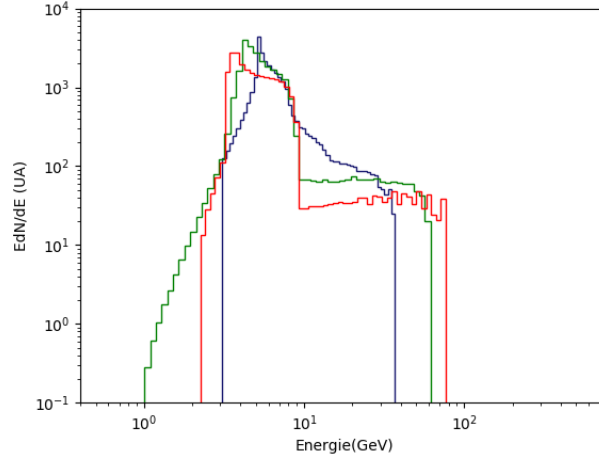


FIGURE 4.5 – Spectres du rayonnement haute énergie, en bleu pour $\chi = 30^\circ$, en vert pour $\chi = 60^\circ$ et en rouge pour $\chi = 90^\circ$.

Comme précédemment, ces spectres sont moyennés sur la phase et l'inclinaison de la ligne de visée. Un observateur réel ne mesurera que le spectre associé à une valeur fixe de la ligne de visée ζ . En suivant la même procédure que pour la distribution intégrée en photons, un autre exemple de spectre intégré en phase et tenant compte de la puissance du rayonnement de courbure est montré en Fig 4.6 pour $\chi = 60^\circ$ et pour différentes lignes de visée $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Les limites des spectres restent identiques à ceux de la Fig. 4.4 puisque l'énergie des photons rayonnés ne change pas, seul leur nombre est modifié par la prise en compte de la puissance de courbure. Le spectre en bleu pour $\zeta = 30^\circ$ est très similaire à son homologue sans prise en compte de la puissance. En revanche, pour $\zeta = 60^\circ$ en vert, le pic à basse énergie a disparu pour ne faire ressortir qu'un pic intense autour de 4-8 GeV, sous forme d'un plateau. Enfin, pour $\zeta = 90^\circ$, la composante haute énergie autour de 30 GeV ressort très nettement et devient comparable à la composante autour de 4-8 GeV. Cet exemple souligne l'importance de la puissance rayonnée sur la pondération du spectre réel d'un pulsar. On ne peut se contenter de compter des photons émis isolément en chaque point.

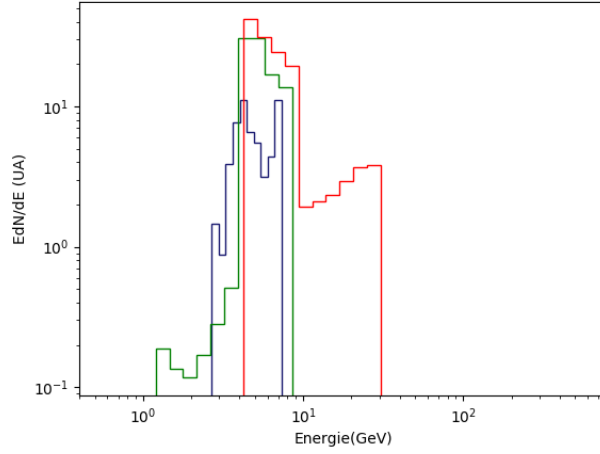


FIGURE 4.6 – Spectres intégrés pour $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, en vert et en rouge.

Grâce à ces méthodes de calcul du rayonnement, on peut aussi extraire les spectres résolus en phase pour une inclinaison de l'axe magnétique χ donnée et une ligne de visée ζ d'un observateur particulier. On a donc découpé le spectre intégré en phase ci-dessus en 10 intervalles réguliers et de longueur 10% de la période chacun $\Delta t = 0.1 P$. Les Fig. 4.7 à 4.11 représentent ces spectres pour des observations sur un dixième de la période.

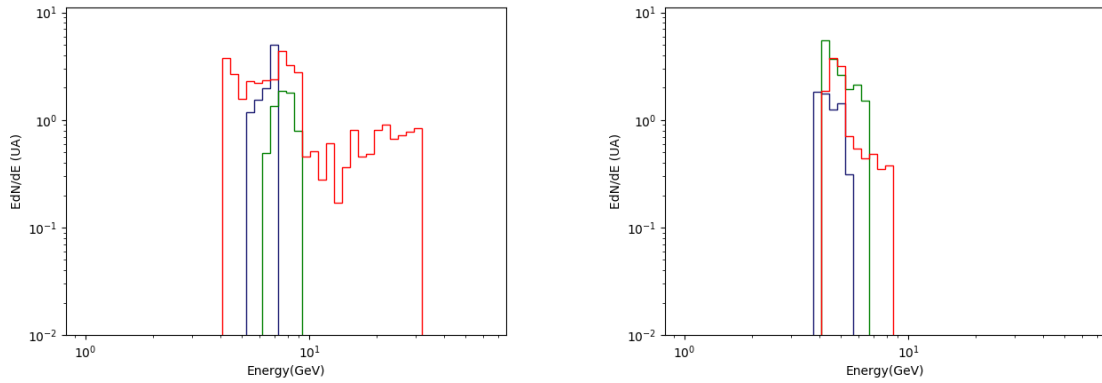


FIGURE 4.7 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0 et 0.1 à gauche et entre 0.1 et 0.2 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge.

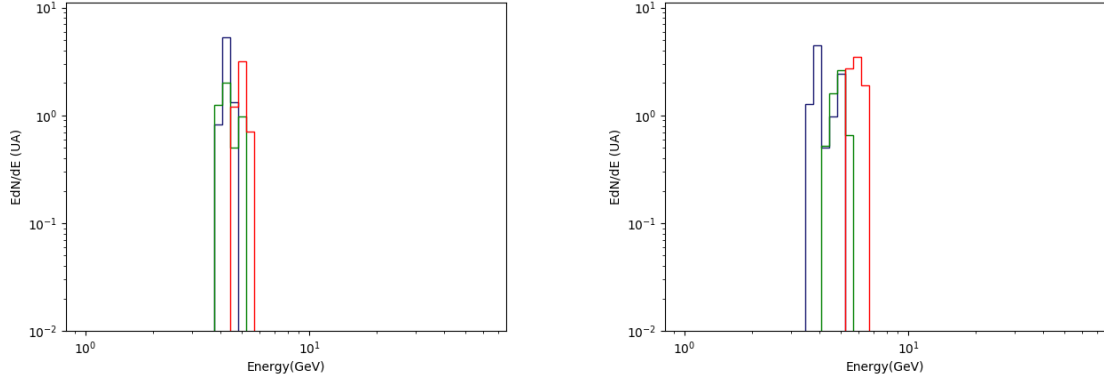


FIGURE 4.8 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.2 et 0.3 à gauche et entre 0.3 et 0.4 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge.

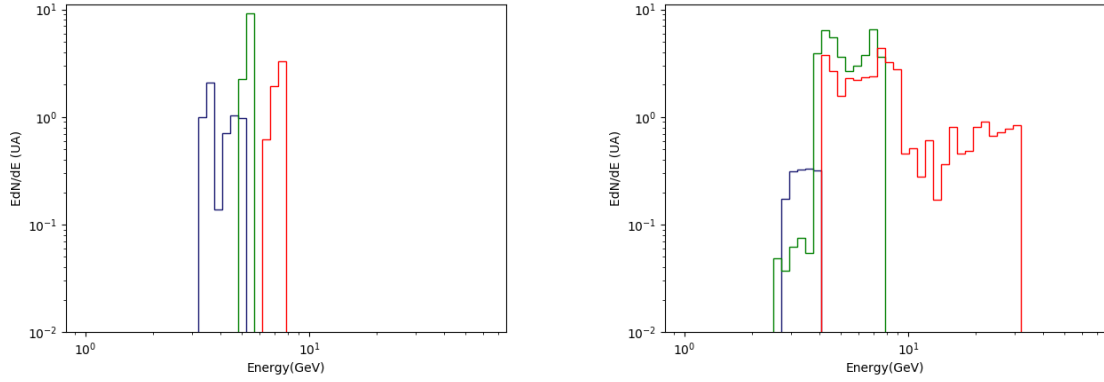


FIGURE 4.9 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.4 et 0.5 à gauche et entre 0.5 et 0.6 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge.

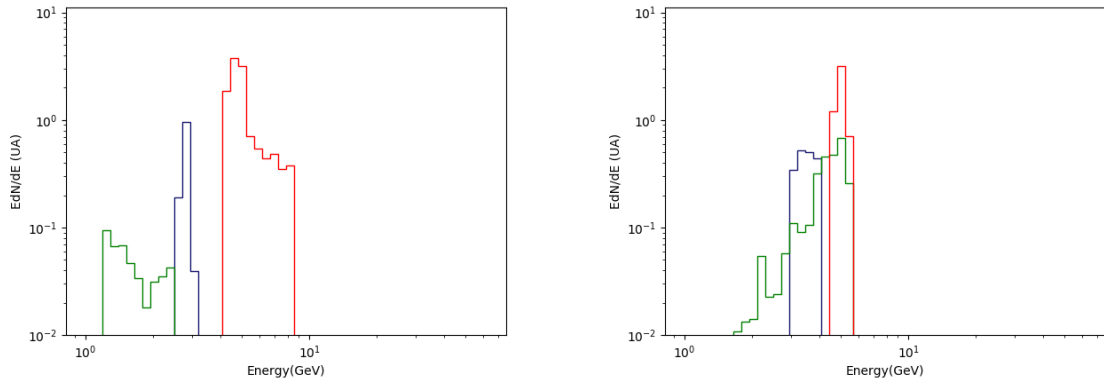


FIGURE 4.10 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.6 et 0.7 à gauche et entre 0.7 et 0.8 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge.

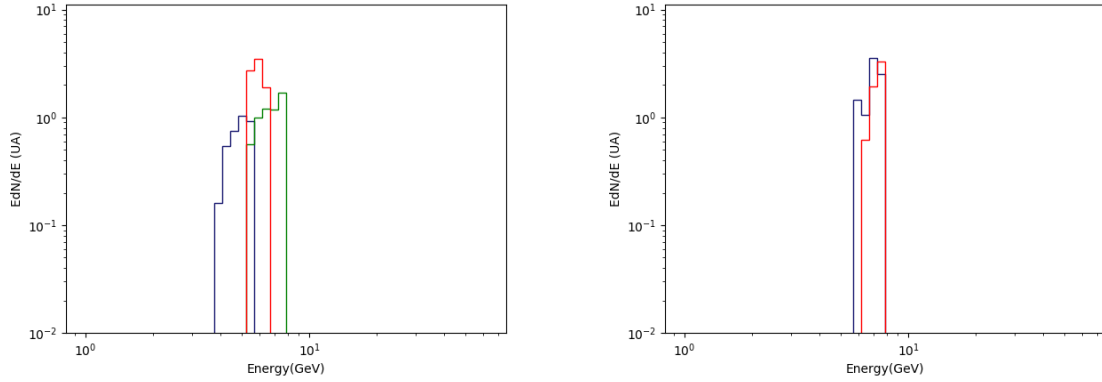


FIGURE 4.11 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.8 et 0.9 à gauche et entre 0.9 et 1 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge.

Sur la Fig. 4.7, les phases correspondent aux intervalles $[0, 0.1]$ et $[0.1, 0.2]$: On constate déjà une forte variation de la forme du spectre pour une ligne de visée inclinée à $\zeta = 90^\circ$, représentée par les courbes rouges. L'énergie des photons monte à plus de 30 GeV dans l'intervalle $[0, 0.1]$ et chute en-dessous de 9 GeV dans l'intervalle suivant $[0.1, 0.2]$. Ces variations sont beaucoup moins perceptibles pour des inclinaisons plus faibles de 30° , les courbes bleues sur nos spectres, et de 60° , les courbes vertes.

Dans la Fig. 4.8, les phases correspondent aux intervalles $[0.2, 0.3]$ et $[0.3, 0.4]$: Tous les spectres rétrécissent sensiblement avec un pic étroit en énergie autour de 5 GeV quelle que soit l'inclinaison ζ sur la courbe de gauche. Puis le spectre s'élargit à nouveau légèrement vers les plus hautes énergies sur la courbe de droite.

La séparation de ces spectres devient de plus en plus visible aux phases suivantes, par exemple en $[0.4, 0.5]$ à gauche de la Fig. 4.9. Les énergies au-delà de 30 GeV dominent à nouveau pour $\zeta = 90^\circ$ dans la phase $[0.5, 0.6]$ tandis que les deux autres spectres s'élargissent vers les basses énergies.

La séparation des spectres redevient très nette en phase $[0.6, 0.7]$, sur la courbe gauche de la Fig. 4.10. À la phase suivante en $[0.7, 0.8]$, soit la courbe de droite, les spectres se rejoignent de plus en plus pour se recentrer autour de 7 GeV.

Cette tendance continue sur les deux intervalles de phase suivants, $[0.8, 0.9]$ et $[0.9, 1]$, sur la Fig. 4.11 avec une disparition de la pulsation pour $\zeta = 60^\circ$ en phase $[0.9, 1]$ sur la courbe de droite car c'est ici que se trouve l'ombre de la calotte polaire, visible notamment sur la Fig. 4.2, qui forme alors un creux d'émission.

Notons que l'intensité maximale du spectre est peu sensible à la phase, quelles que soit l'inclinaison et la phase considérées, le maximum des spectres se situe entre 1 et 10 en unité arbitraire. Seul l'angle de $\zeta = 60^\circ$ semble montrer une forte amplitude voire une disparition du signal pour une phase donnée. À partir de la puis-

sance rayonnée par une particule, on peut en déduire le nombre de photons émis en chaque point d'émission et ainsi réaliser des cartes d'émission en utilisant les mêmes méthodes que dans les sections 3.3 et 3.4, à la différence qu'on n'incrémentera plus l'intensité d'une unité pour chaque point d'impact reçu sur une zone de $0.5^\circ \times 0.5^\circ$ de la sphère céleste mais du nombre de photons calculé à partir de la puissance du rayonnement de courbure pour une particule. Vu que l'on connaît également la fréquence ν de chaque photon, on peut alors réaliser ces cartes d'émission en fonction de la fréquence ν des photons impactant la sphère céleste. On peut ainsi associer une carte d'émission pour chaque fréquence du rayonnement. Mais en pratique, on choisit un intervalle de fréquence $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ pour construire ces cartes afin de ce conformer aux observations qui elles aussi ne montrent des courbes de lumière que pour des intervalles en fréquence (en radio) ou en énergie (au MeV/GeV).

Dans le domaine des rayons gamma, on a décidé de couper les bandes d'énergie en intervalles régulièrement espacés en échelle logarithmique. Chaque décade a été coupée en deux intervalles de sorte que les valeurs successives suivent une progression géométrique de raison $r = 10^{1/2} \approx 3.16$. Les intervalles sont donc de la forme $[r^n E_0, r^{n+1} E_0]$ avec n un entier positif et E_0 une énergie caractéristique fixée par défaut à $E_0 = 1$ GeV. Dans l'ordre, on choisit les intervalles suivants : de 1 à $\sqrt{10} \approx 3.16$ GeV, de $\sqrt{10} \approx 3.16$ à 10 GeV, de 10 à $\sqrt{100} \approx 31.6$ GeV et de $\sqrt{100} \approx 31.6$ à 100 GeV.

Les Fig. 4.12, 4.13, 4.14 et 4.15 représentent les cartes d'émission ainsi réalisées pour différentes inclinaisons χ de l'axe magnétique, ainsi que quelques courbes de lumière associées pour différentes valeurs de l'inclinaison ζ de la ligne de visée. Chacune de ces cartes ne prenant en compte que les photons compris dans une certaine gamme d'énergie que l'on choisit sous forme de suite géométrique (c'est-à-dire des intervalles de largeur constante en échelle logarithmique). Comme on l'avait déjà vu avec les spectres, la majeure partie de l'émission est concentrée entre 3.16 et 10 GeV avec quelques points d'émission de haute énergie pouvant monter au-delà de 31.6 GeV. On notera d'ailleurs que ces points d'émission de très haute énergie semblent se situer au niveau des pulses que l'on peut voir sur la Fig. 3.8 qui représente elle l'intensité du rayonnement pour toutes ces fréquences.

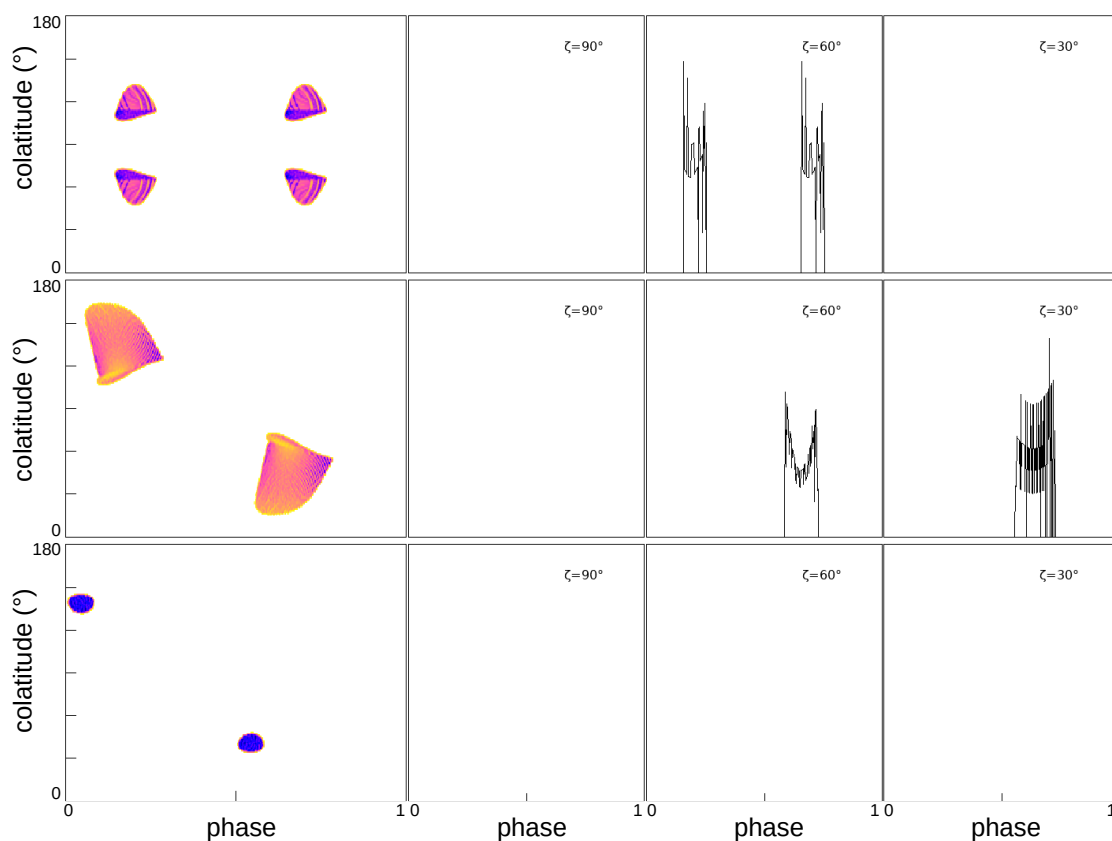


FIGURE 4.12 – Cartes d'émission des photons avec une énergie comprise entre 1 et 3.16 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes de lumière pour différents angles d'observation ζ .

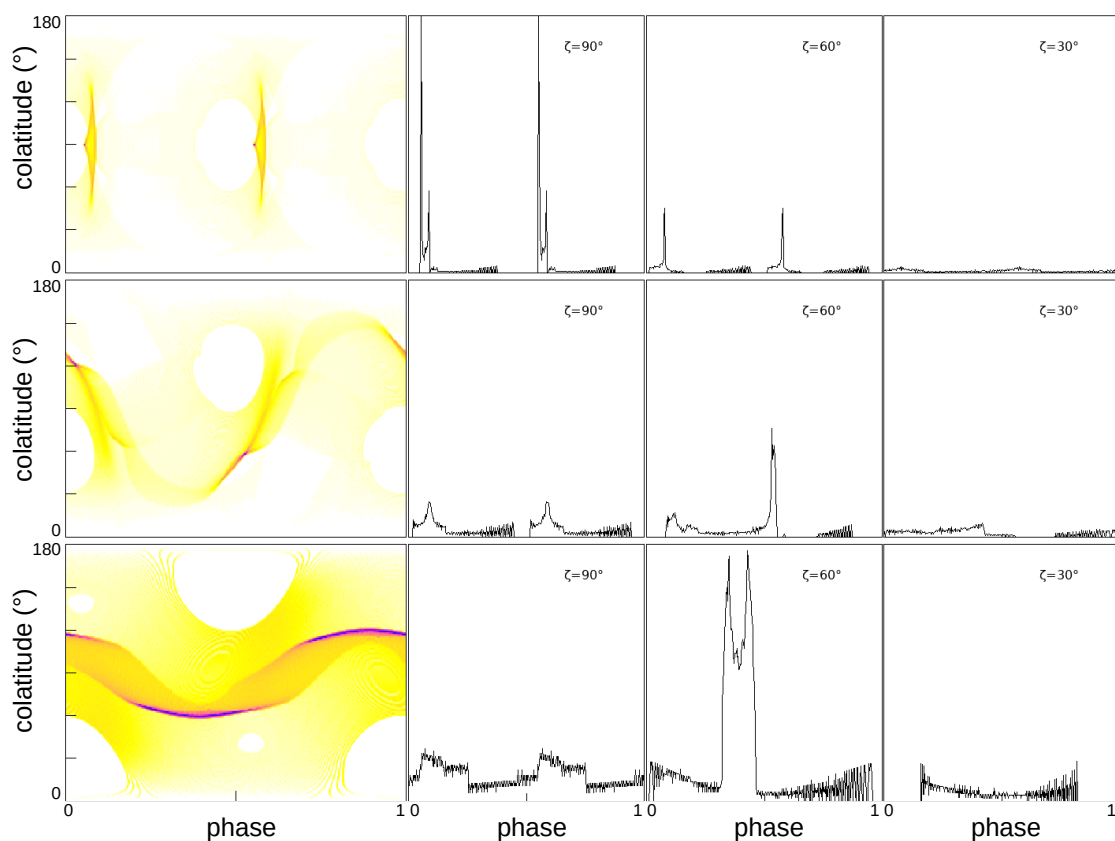


FIGURE 4.13 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 3.16 et 10 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes de lumière pour différents angles d'observation ζ .

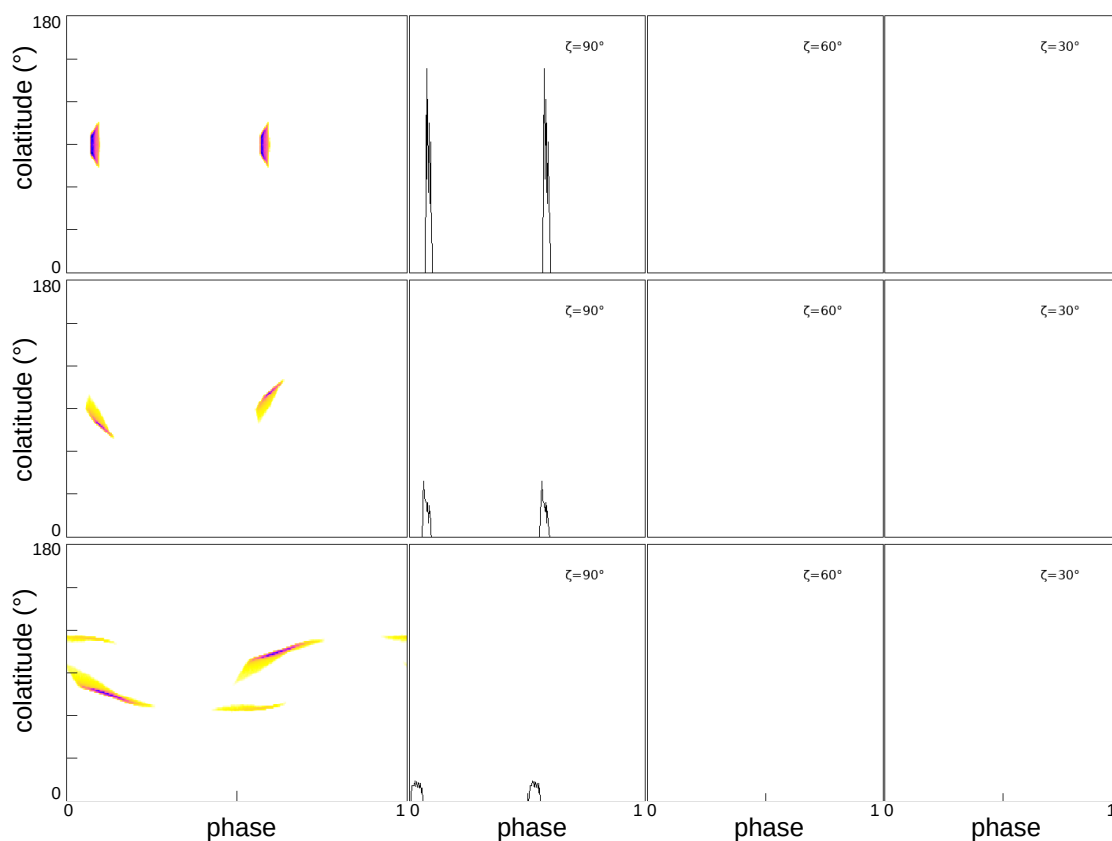


FIGURE 4.14 – Cartes d'émission pour des énergies comprises comprise entre 10 et 31.6 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes de lumière pour différents angles d'observation ζ .

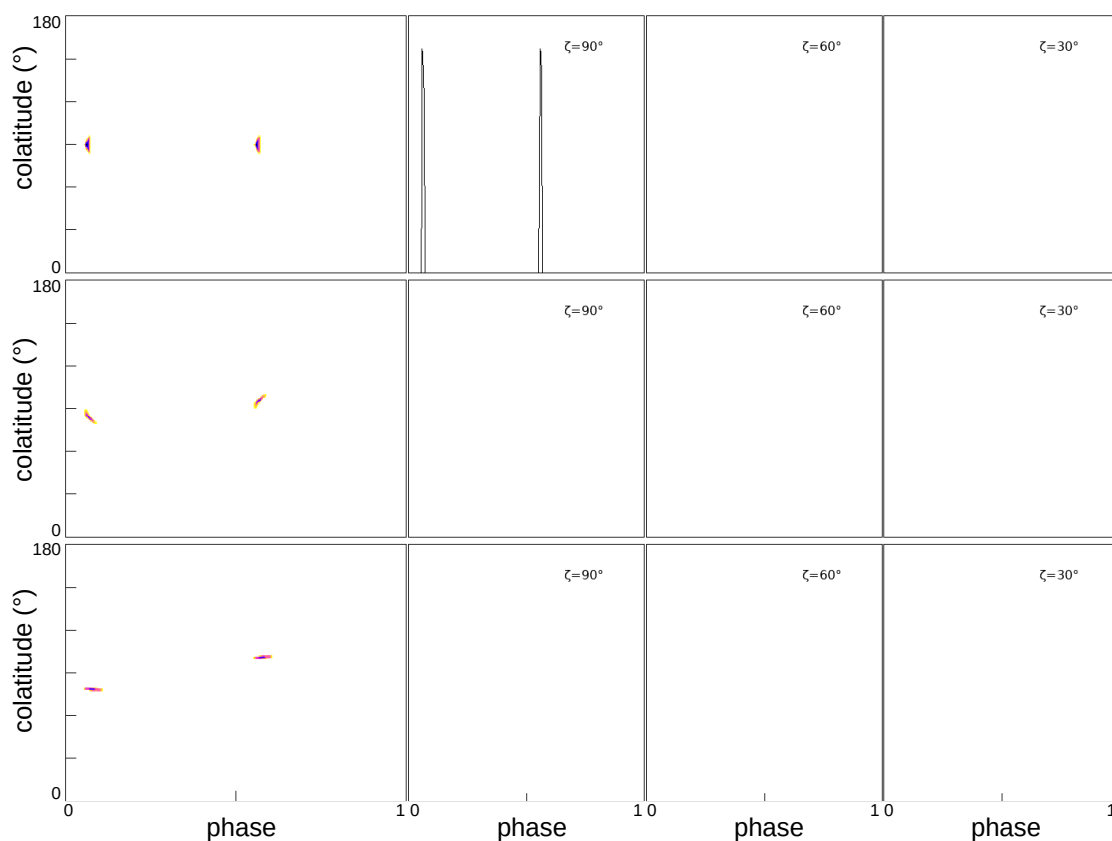


FIGURE 4.15 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 31.6 et 100 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique ((de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ).

4.3.2 Spectres d'une cavité épaisse

Les spectres et cartes d'émission des Fig. 4.2 à 4.15 ont été réalisés avec une zone d'émission infiniment fine le long des dernières lignes de champ magnétique. La Fig. 4.16 présente le spectre de l'émission haute énergie pour une zone d'émission possédant une certaine épaisseur, en utilisant la même méthode que celle qui nous a permis de tracer la carte d'émission de la Fig. 3.10.

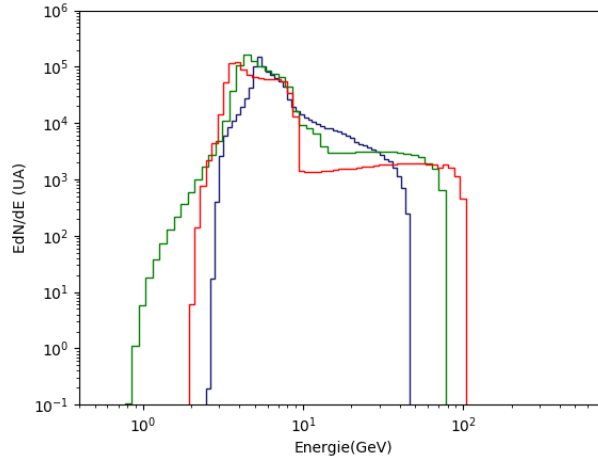


FIGURE 4.16 – Spectre du rayonnement haute énergie, en bleu pour $\chi = 30^\circ$, en vert pour $\chi = 60^\circ$ et en rouge pour $\chi = 90^\circ$ pour une zone d'émission épaisse.

D'après ce spectre, quand on inclut une épaisseur transversale à la zone d'émission, on reçoit un rayonnement supplémentaire incluant des énergies plus basses et plus élevées que celles d'une cavité mince. Au spectre de la zone infiniment mince se rajoute donc d'autres spectres issus de lignes de champ voisines mais dont la courbure varie légèrement en augmentant ou en diminuant en fonction de la nature de la ligne de champ : ouverte ou fermée, ce qui va évidemment entraîner des variations de la puissance rayonnée et de l'énergie du rayonnement. Les différences dans la forme des spectres des Fig. 4.5 et 4.16 s'expliquent aussi en partie par la modulation de l'intensité sous l'influence du facteur gaussien que nous avons introduit dans l'équation (3.25) et que l'on a également utilisé ici. Ainsi pour chaque point d'impact sur la sphère céleste, l'intensité mesurée est la puissance rayonnée par la particule multipliée par cette fonction gaussienne.

Les Fig. 4.17 à 4.20 représentent les cartes d'émission pour des cavités allongées d'une certaine épaisseur et pour différents intervalles d'énergie, les mêmes que ceux des Fig. 4.12 à 4.15, et différentes inclinaisons χ de l'axe magnétique.

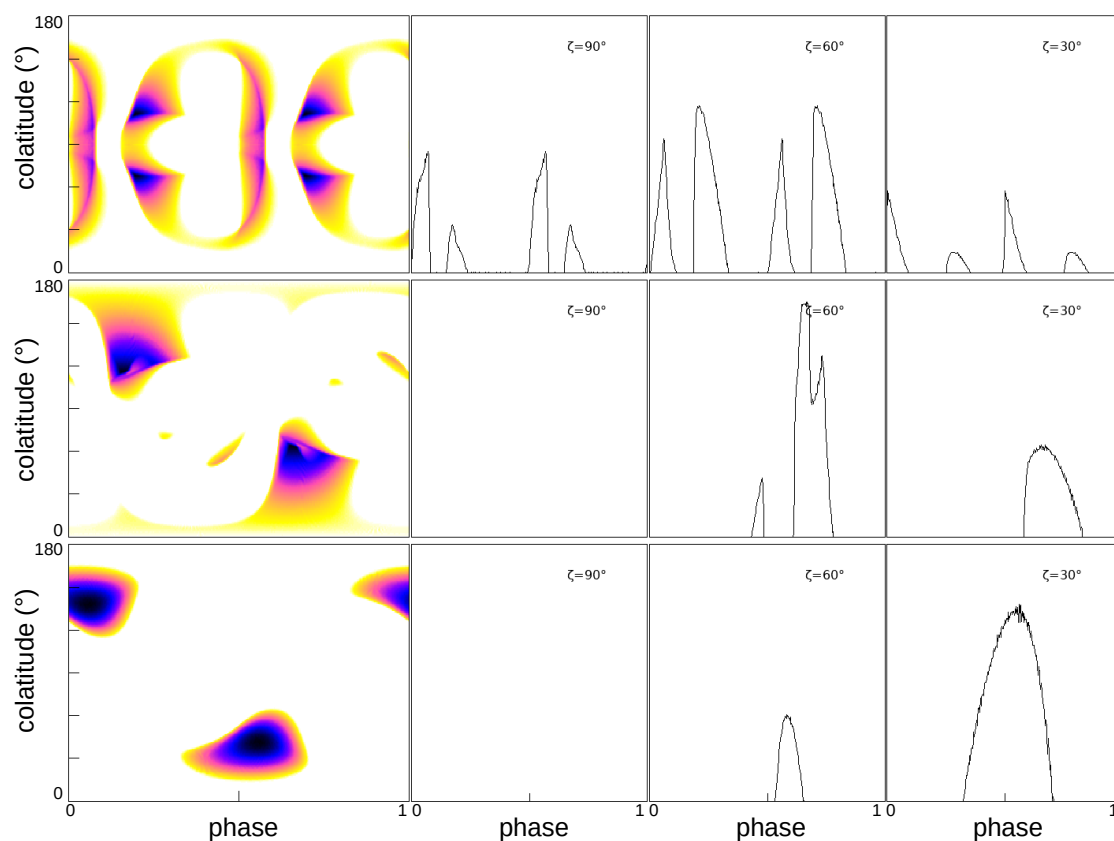


FIGURE 4.17 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 1 et 3.16 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ avec une zone d'émission épaisse.

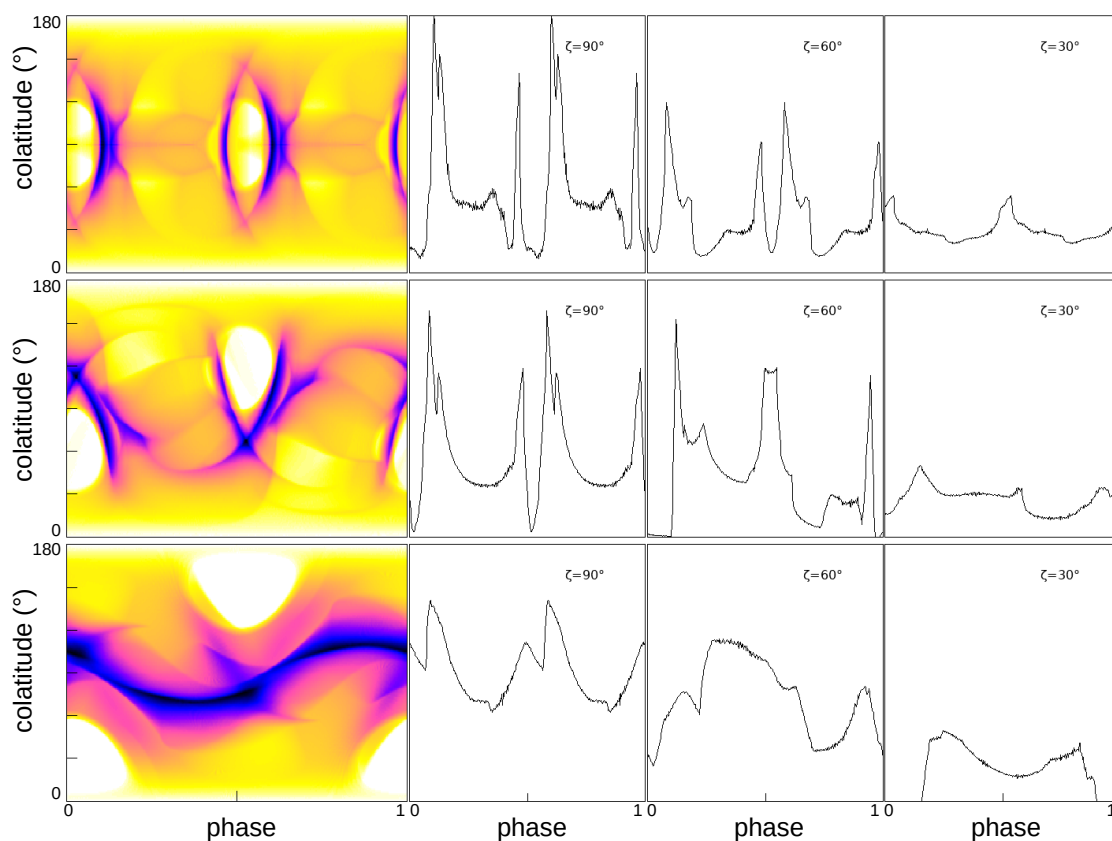


FIGURE 4.18 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 3.16 et 10 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat avec les courbes lumières pour différents angle d'observation ζ avec une zone d'émission épaisse.

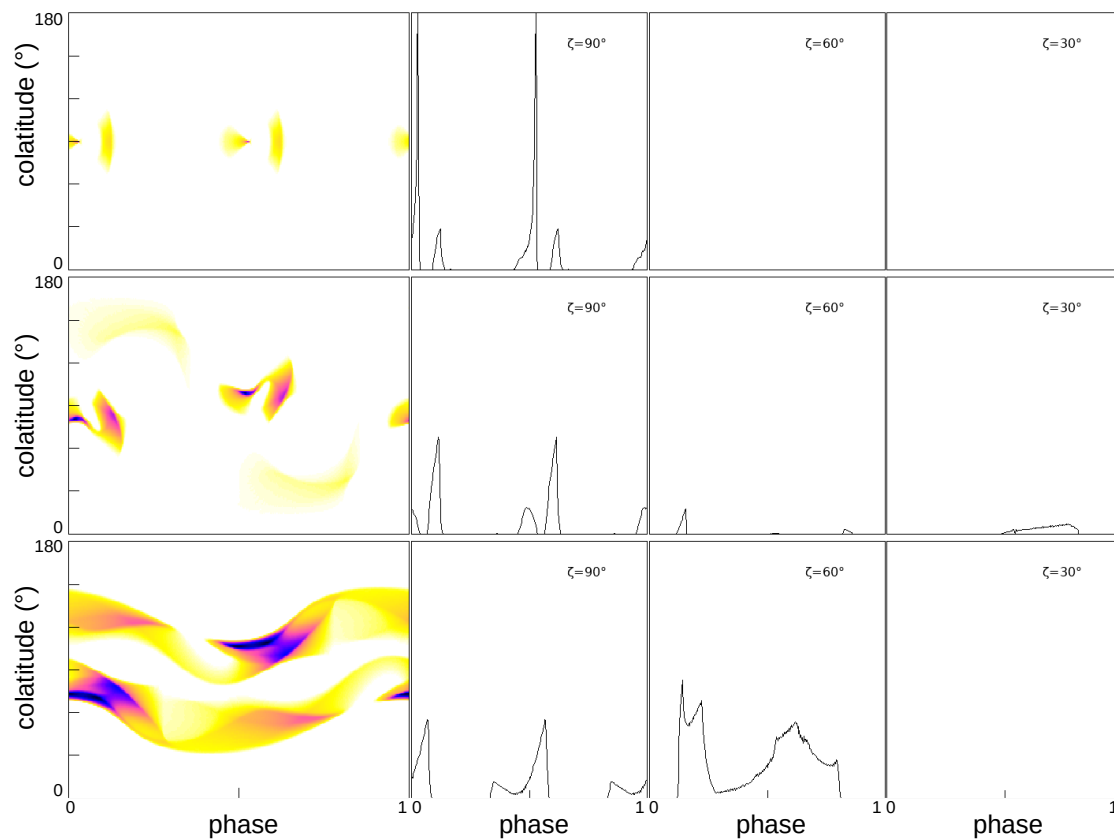


FIGURE 4.19 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 10 et 31.6 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat pour une épaisseur définie de la zone d'émission avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ avec une zone d'émission épaisse.

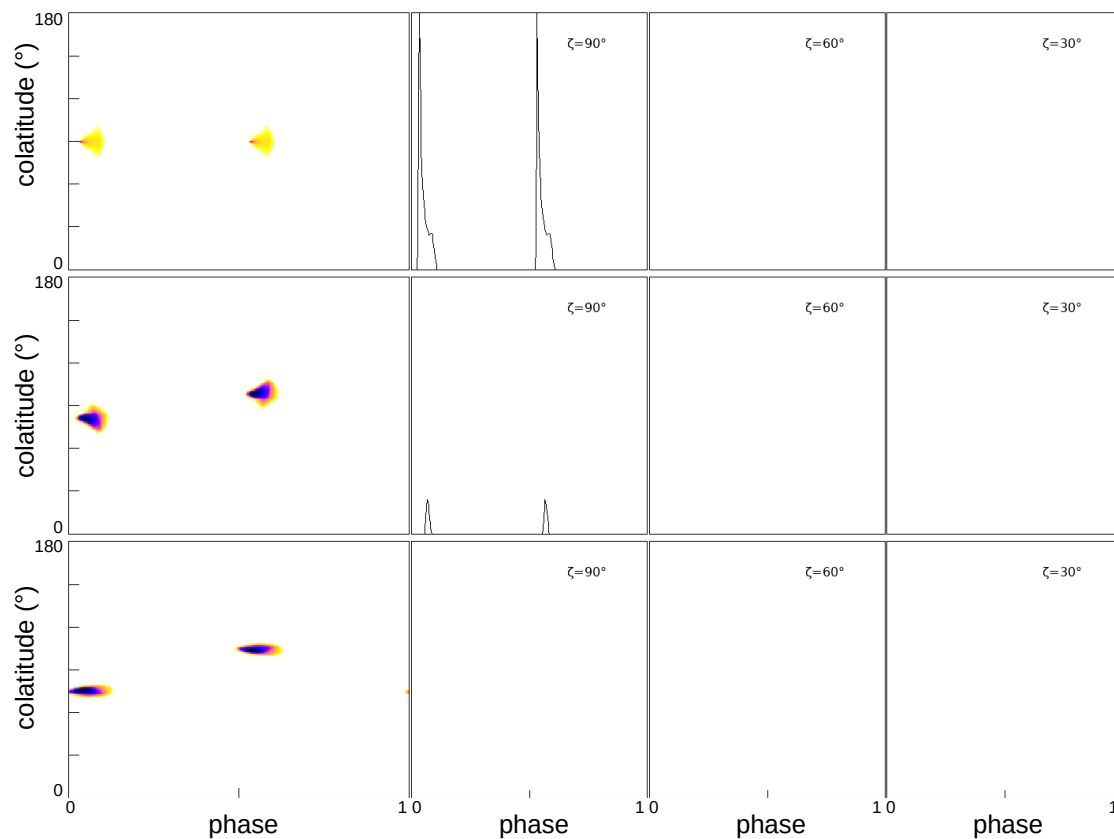


FIGURE 4.20 – Cartes d'émission pour des énergies comprises entre 31.6 et 100 GeV pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique (de haut en bas : 90° , 60° et 30°) dans un espace-temps plat pour une épaisseur définie de la zone d'émission avec les courbes lumières pour différents angles d'observation ζ avec une zone d'émission épaisse.

Les Fig 4.21 à 4.25 représentent l'évolution du spectre haute énergie sur différents intervalles de phase pour une inclinaison $\chi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs fixées de l'angle d'observation ζ . On peut y voir que l'émission y est visible pour tous les angles d'observations et pour toutes les phases contrairement aux spectres réalisés pour une émission haute énergie sans épaisseur de la zone d'émission, notamment pour la phase $[0.9, 1]$ de la Fig. 4.11, car comme on peut le voir sur les Fig. 3.10 ou encore 4.18, on reçoit de l'émission haute énergie au niveau de l'ombre de la calotte polaire.

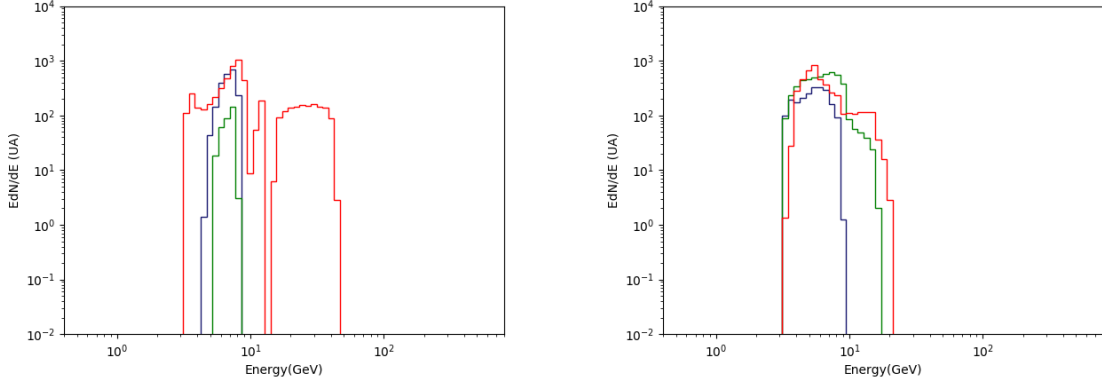


FIGURE 4.21 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0 et 0.1 à gauche et entre 0.1 et 0.2 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge pour une zone d'émission épaisse.

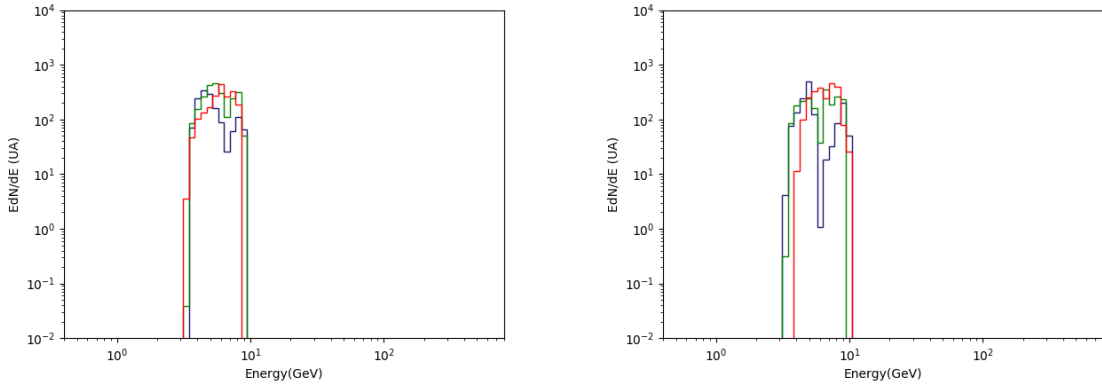


FIGURE 4.22 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.2 et 0.3 à gauche et entre 0.3 et 0.4 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge pour une zone d'émission épaisse.

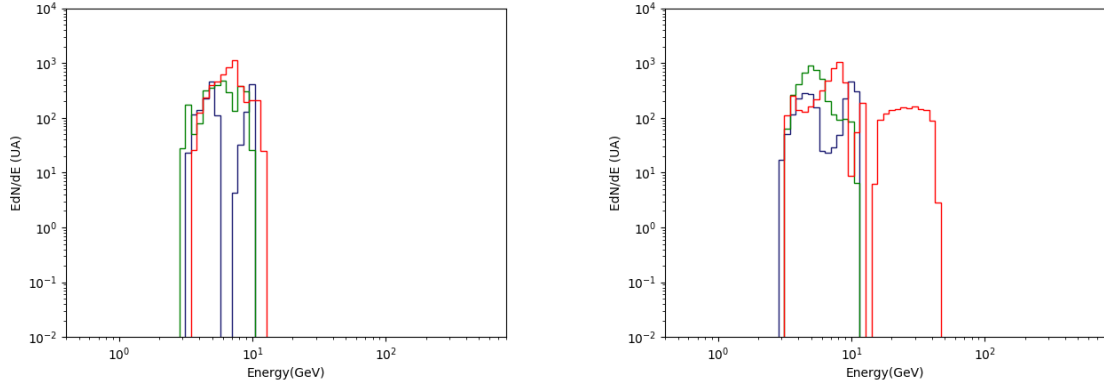


FIGURE 4.23 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.4 et 0.5 à gauche et entre 0.5 et 0.6 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge pour une zone d'émission épaisse.

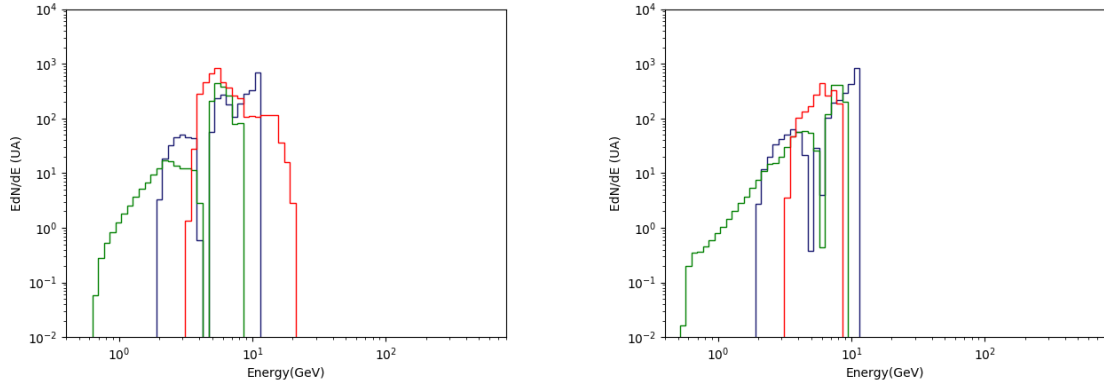


FIGURE 4.24 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.6 et 0.7 à gauche et entre 0.7 et 0.8 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge pour une zone d'émission épaisse.

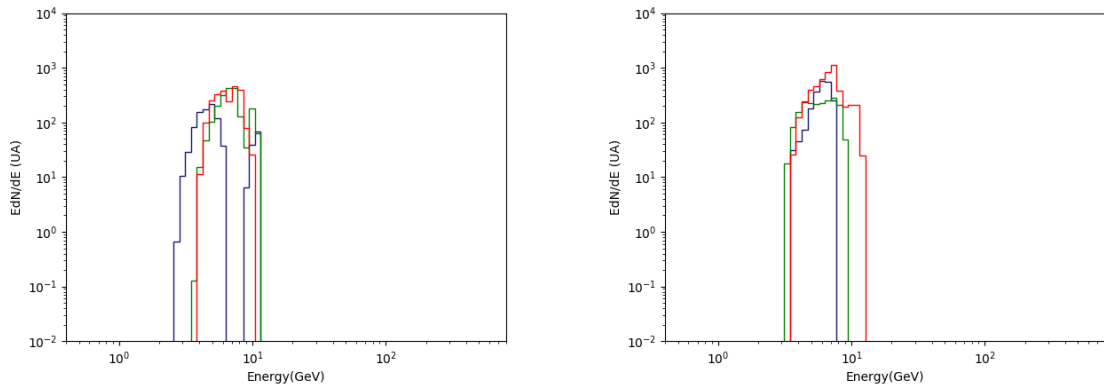


FIGURE 4.25 – Spectres intégrés pour une valeur de la phase comprise entre 0.8 et 0.9 à gauche et entre 0.9 et 1 à droite avec $\chi = 60^\circ$ et $\zeta = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ respectivement en bleu, vert et rouge pour une zone d'émission épaisse.

Quant à la Fig. 4.26 elle représente l'évolution de la forme de la courbe de lumière observée pour $\chi = \zeta = 60^\circ$ pour différentes valeurs de l'énergie, pour chacune de ces valeurs on normalise la courbe de lumière par son maximum. On y voit clairement que la forme et la largeur des pulses va dépendre de la gamme d'énergie à laquelle elles sont observées.

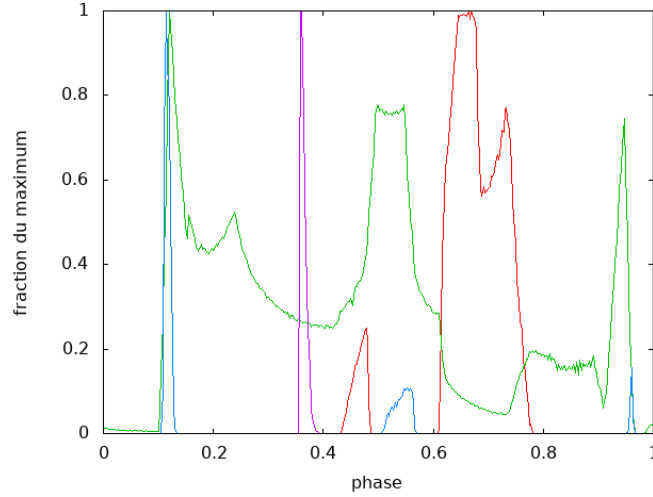


FIGURE 4.26 – Courbes de lumière pour $\chi = \zeta = 60^\circ$ pour différents intervalles d'énergie des photons : en rouge entre 1 et 3.16 GeV, en vert entre 3.16 et 10 GeV, en bleu entre 10 et 31.6 GeV et en violet entre 31.6 et 100 GeV.

Nous allons maintenant déterminer de quelle altitude dans la magnétosphère du pulsar provient cette émission pulsée de haute énergie.

4.3.3 Altitude d'émission et énergie du rayonnement

Comme on a calculé la fréquence du rayonnement de courbure émis au sein des cavités allongées et vu que l'on connaît la position des points d'émission le long des dernières lignes de champ, on peut en déduire de quelle altitude dans la magnétosphère provient quelle énergie du rayonnement. Les Fig. 4.27 à 4.29 permettent de visualiser cette répartition pour une zone d'émission infiniment mince et pour différentes inclinaisons de l'axe magnétique. Chacune de ces cartes représente les points d'impact sur la sphère céleste de photons émis entre deux altitudes différentes séparées d'une distance équivalente à une fois le rayon de l'étoile R_\star . On relève l'altitude de cette couronne sphérique à chaque fois de R_\star jusqu'au cylindre lumière de rayon $10 R_\star$. Le code couleur de ces figures reflète l'énergie observée pour les photons à l'origine de chaque point d'impact. Ainsi chacune de ces trois figures se présente avec l'arrangement ci-dessous pour l'intervalle de la position r du point d'émission des photons :

| | | |
|--------------------------|--------------------------|--|
| $[R_\star, 2 R_\star]$ | $[2 R_\star, 3 R_\star]$ | $[3 R_\star, 4 R_\star]$ |
| $[4 R_\star, 5 R_\star]$ | $[5 R_\star, 6 R_\star]$ | $[6 R_\star, 7 R_\star]$ |
| $[7 R_\star, 8 R_\star]$ | $[8 R_\star, 9 R_\star]$ | $[9 R_\star, 10 R_\star = R_{\text{cyl}}]$ |

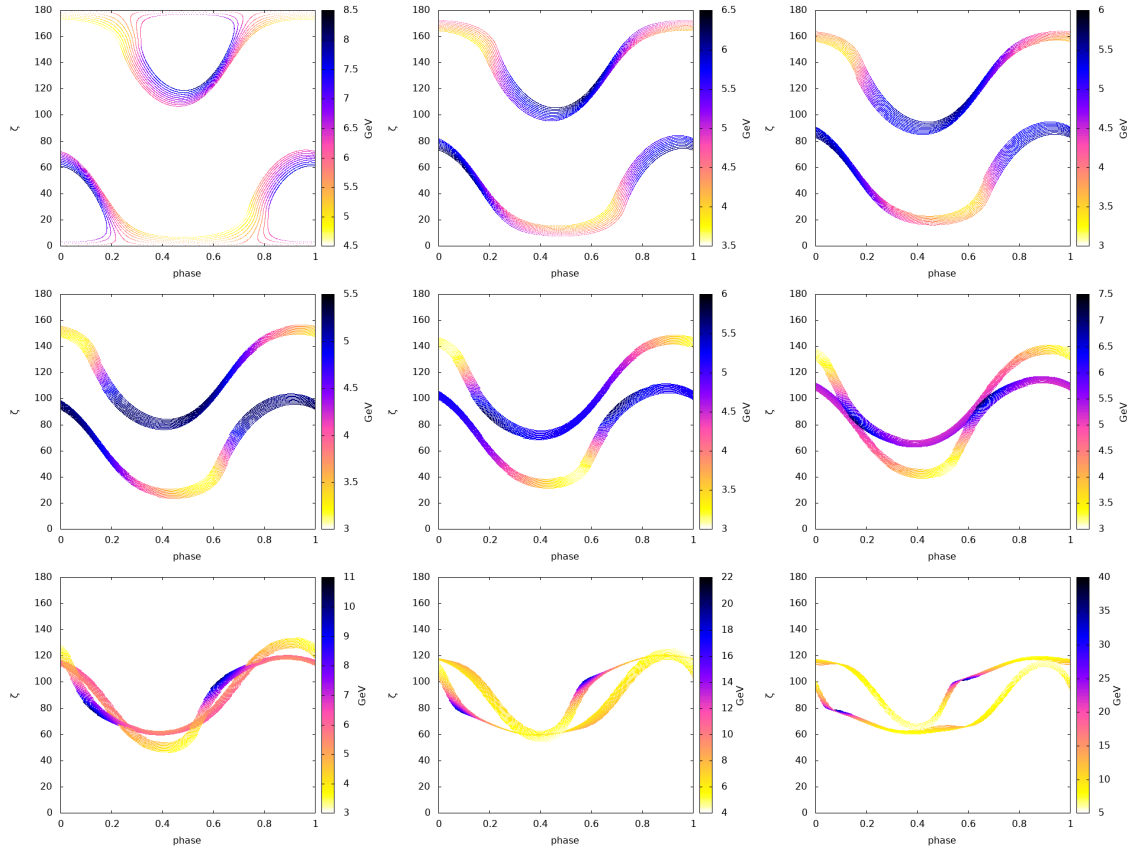


FIGURE 4.27 – Cartes d'émission pour une inclinaison $\chi = 30^\circ$ avec l'énergie des photons reçus, chaque carte représente la contribution d'une partie de la magnétosphère : celle située dans une couronne sphérique d'épaisseur R_\star dont on augmente l'altitude entre chaque carte de R_\star .

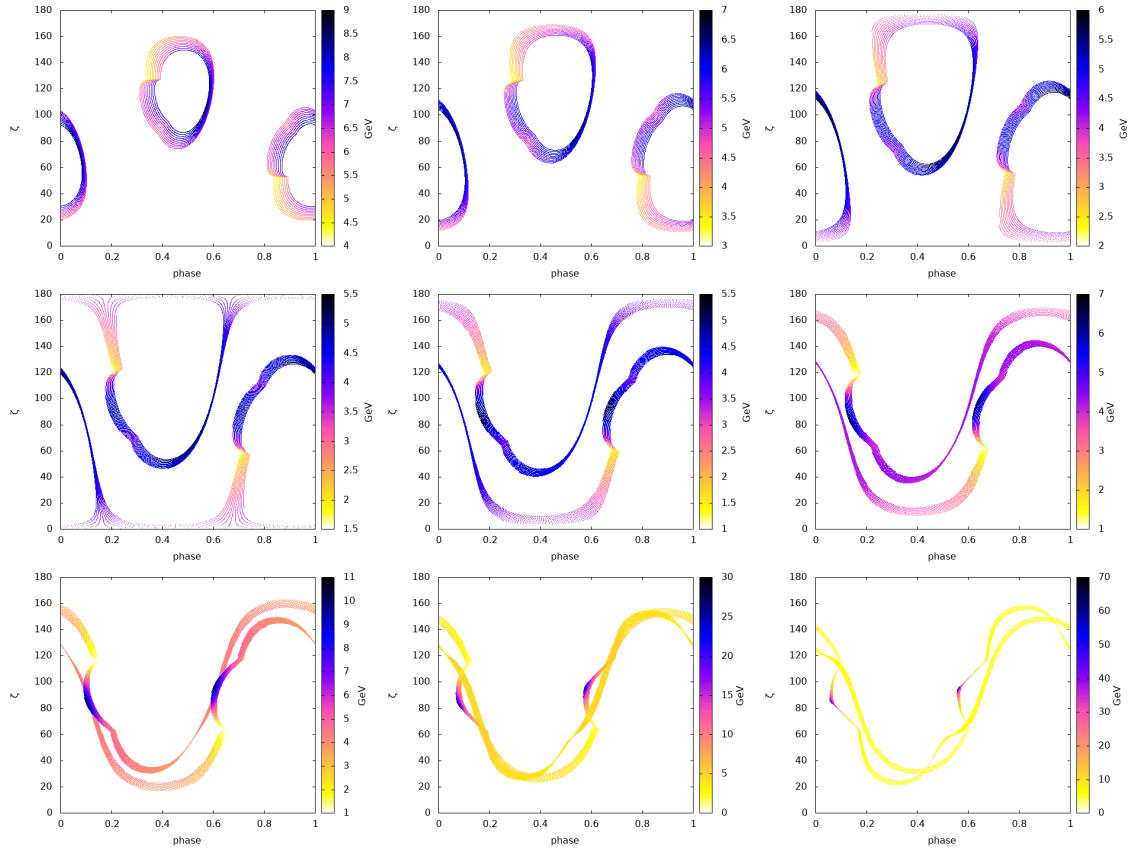


FIGURE 4.28 – Cartes d'émission pour une inclinaison $\chi = 60^\circ$ avec l'énergie des photons reçus, chaque carte représente la contribution d'une partie de la magnétosphère : celle située dans une couronne sphérique d'épaisseur R_\star dont on augmente l'altitude entre chaque carte de R_\star .

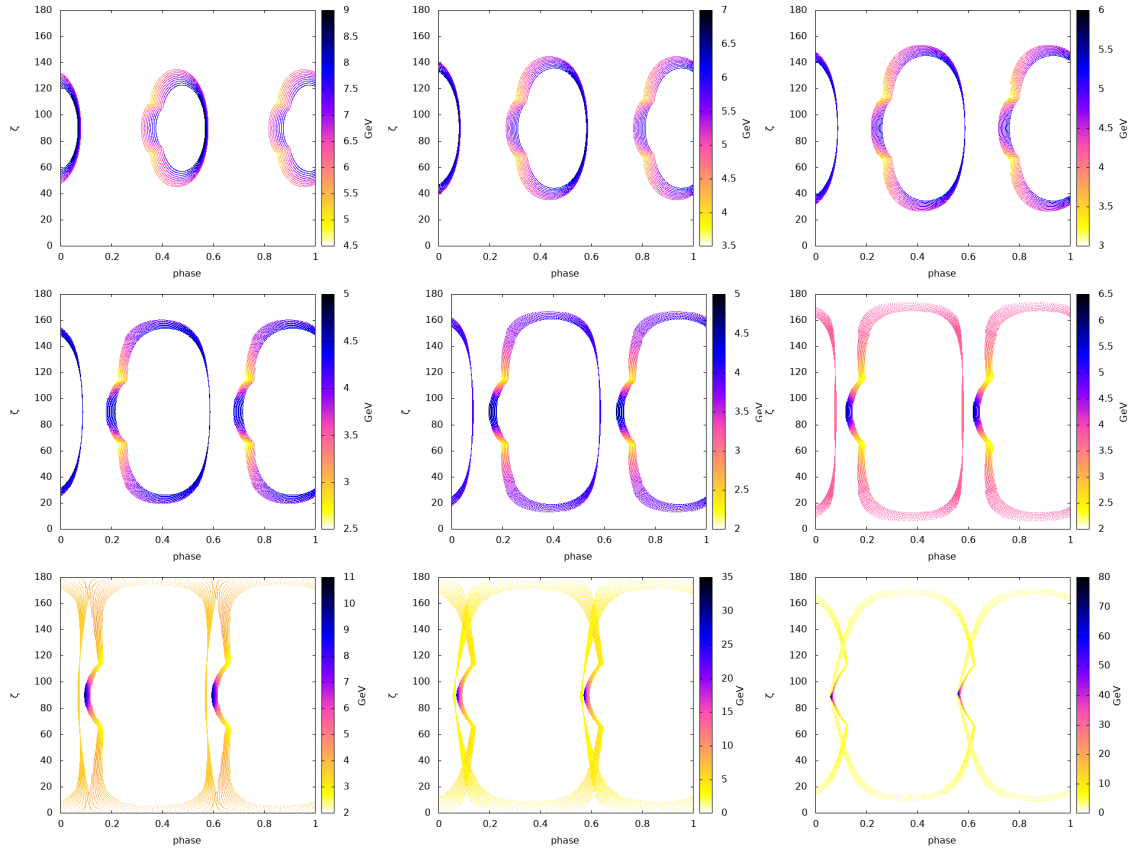


FIGURE 4.29 – Cartes d'émission pour une inclinaison $\chi = 30^\circ$ avec l'énergie des photons reçus, chaque carte représente la contribution d'une partie de la magnétosphère : celle située dans une couronne sphérique d'épaisseur R_\star dont on augmente l'altitude entre chaque carte de R_\star .

On voit sur ces images que les photons les plus énergétiques sont émis loin de la surface de l'étoile et donc près du cylindre lumière, ce qui pourrait également indiquer que les dernières lignes de champ magnétiques fermées sont plus courbées à grande distance de l'étoile à neutrons. On retrouve d'ailleurs les deux régions d'émission à haute énergie qu'on a rencontré sur la Fig. 4.15 de la section précédente dans la Fig. 4.30 qui représente la distribution des points d'émission dans les cavités externes avec l'énergie du rayonnement émis. On y voit que ces points sont situés dans les parties les plus éloignées de la magnétosphère et que leur haute énergie pourrait être due à l'entraînement du champ magnétique par la rotation de l'étoile à neutrons qui génère une courbure importante des lignes de champs magnétique. On retrouve en effet une courbure importante des lignes de champ magnétique au niveau des points d'émission de haute énergie sur la Fig. 4.31 où est indiqué le rayon de courbure des lignes de champ magnétique calculé à chaque point d'émission (plus le rayon de courbure est petit, plus la courbure des lignes de champ magnétique est importante). Cependant, on voit que les points d'émission de haute énergie ne sont pas les seuls à présenter un rayon de courbure faible, si les zones d'émission de plus haute énergie sont situées dans la partie supérieure de la magnétosphère, c'est peut être aussi du fait de l'effet Doppler dû à la rotation du pulsar. Le facteur Doppler η donné par l'équation (4.1) sera en effet plus important pour des points d'émission situés à grande distance du pulsar car leur vitesse $\vec{\beta}$ sera plus importante. La Fig. 4.32 donne une carte des points d'émission avec la valeur du facteur Doppler calculée pour chacun de ces points, ce facteur y est plus important à proximité des points d'émission de haute énergie.

Si on a une émission de plus haute énergie près du cylindre lumière, ce serait donc dû à une combinaison de plusieurs effets : une courbure favorable des lignes de champ magnétique et un facteur Doppler plus important.

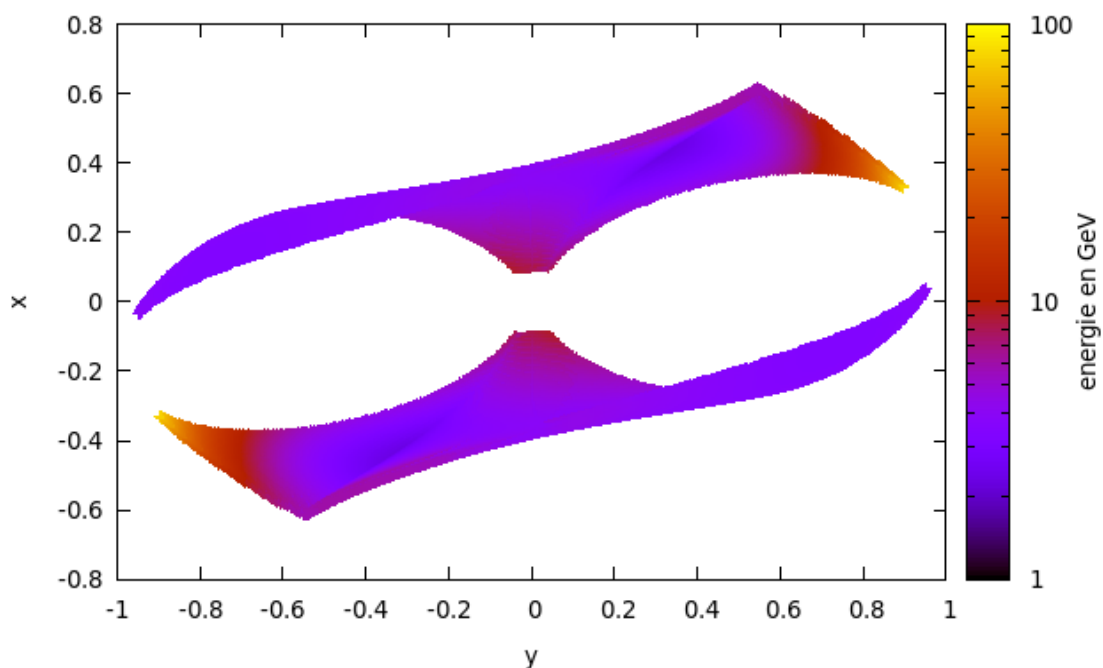


FIGURE 4.30 – Points d'émission du rayonnement haute énergie projetés dans le plan équatorial (pour $\chi = 90^\circ$) avec l'énergie du rayonnement émis en chacun de ces points.

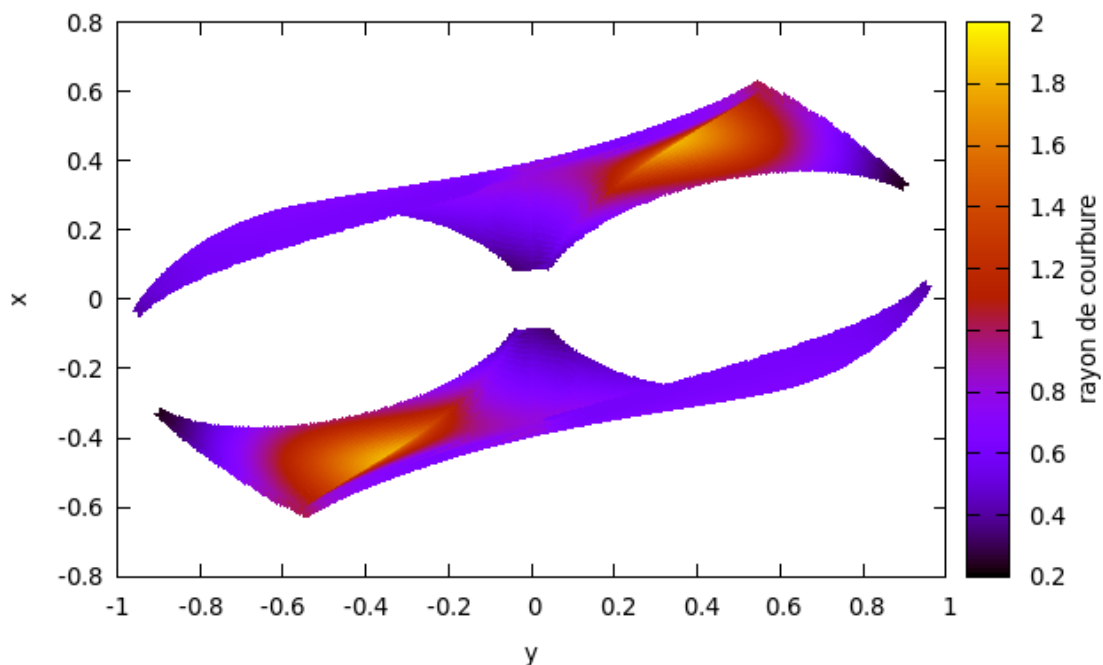


FIGURE 4.31 – Points d'émission du rayonnement haute énergie projetés dans le plan équatorial (pour $\chi = 90^\circ$) avec le rayon de courbure des lignes de champs magnétiques en chacun de ces points. L'unité de longueur pour le rayon de courbure est R_{cyl} .

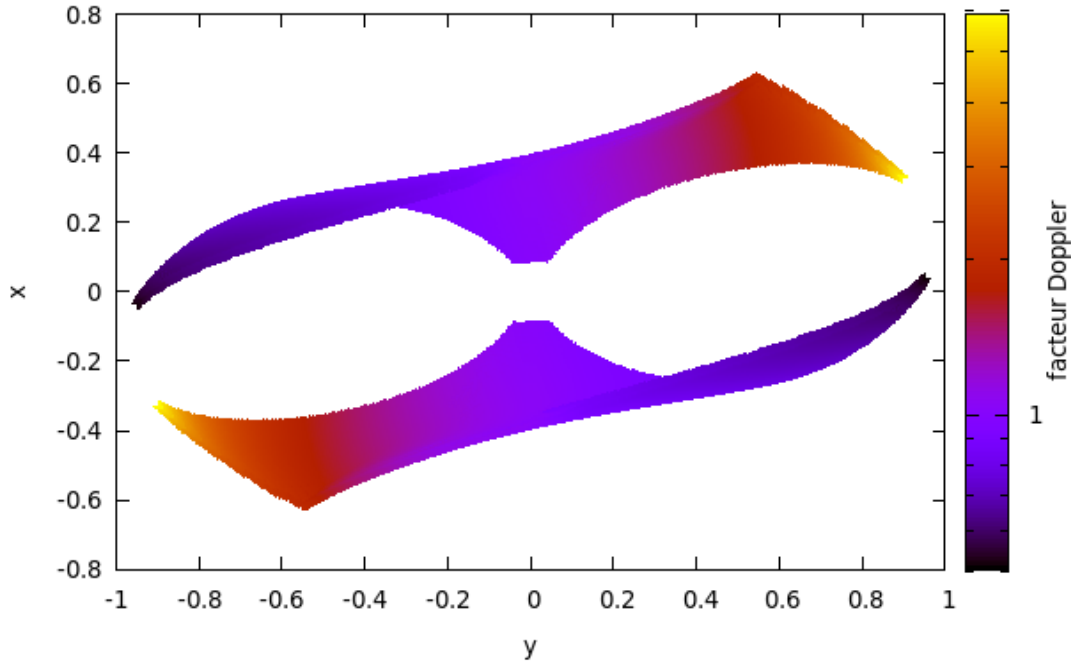


FIGURE 4.32 – Points d’émission du rayonnement haute énergie projetés dans le plan équatorial (pour $\chi = 90^\circ$) avec la valeur du facteur Doppler η en chacun de ces points.

4.4 Émission radio

Comme on l’a déjà vu dans les sections 1.2 et 3.4, l’émission radio dans les cavités polaires serait due à l’accélération de paires secondaires, des particules générées par avalanches de paires dans le champ magnétique du pulsar à partir des photons gamma de son émission haute énergie, le facteur de Lorentz de ces particules serait alors de l’ordre de $\gamma = 10^2$, comme affirmé dans GUREVICH et al., 1993. Dans ce qui suit, on prendra plus précisément un facteur de Lorentz $\gamma = 30$ pour que les fréquences calculées avec la formule de l’équation (1.46) ne soient pas trop élevées. On a également conservé le facteur gaussien vu dans les équations (3.27) et (3.28) de la section 3.4 afin de garder des pulses de formes gaussiennes et le maximum d’émission au centre de la calotte polaire. Comme pour le rayonnement haute énergie, la Fig. 4.33 nous donne ainsi le spectre du rayonnement radio du pulsar pour différentes valeurs de l’inclinaison χ du champ magnétique. Les points d’émission se situent, pour ce spectre de l’émission radio, à la surface de l’étoile et avec une même répartition que celle présentée dans la Fig. 3.15.

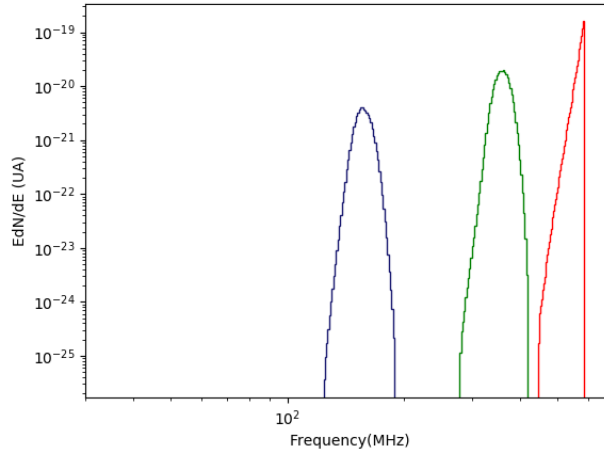


FIGURE 4.33 – Spectre du rayonnement radio, en bleu pour $\chi = 30^\circ$, en vert pour $\chi = 60^\circ$ et en rouge pour $\chi = 90^\circ$.

Sur cette Fig. 4.33, on voit que la plage de fréquences de l'émission radio dépend fortement de l'inclinaison χ , certainement à cause de la courbure des lignes de champ magnétique, plus prononcée dans le cas du rotateur perpendiculaire $\chi = 90^\circ$ comparé à un rotateur presque aligné $\chi = 30^\circ$. En effet, c'est pour un axe magnétique perpendiculaire à l'axe de rotation que les fréquences sont les plus élevées or les calottes polaires magnétiques se trouvant alors au niveau de l'équateur, les lignes de champ magnétique passant par celles-ci devraient être fortement entraînées, et donc courbées, par la rotation du pulsar (comme on le constate sur la Fig. 3.1). Les lignes de champ magnétique sont incurvées vers l'arrière, en sens inverse de la rotation comme montré par SHITOV, 1983, avec une dépendance en $\sin^2 \chi$ et en $(r/R_{\text{cyl}})^3$ selon la formule (3.16). L'effet Doppler contribue aussi en partie puisque la vitesse linéaire de corotation $v_{\text{cp}} = r \Omega \sin \chi$ est plus importante pour le rotateur perpendiculaire à cause du bras de levier de longueur $r \sin \chi$. L'amplitude de cet effet Doppler est de $\beta_{\text{cp}} = (r/R_{\text{cyl}}) \sin \chi$. De manière générale donc, la fréquence radio caractéristique ν_{radio} dépend du rapport (r/R_{cyl}) et de $\sin \chi$. On en déduit donc en effet que la gamme des ondes radio autour de ν_{radio} se comporte comme une fonction croissante de $\sin \chi$. D'autre part, cette translation du spectre vers les hautes fréquences serait atténuée pour des rotateurs plus lents que ceux étudiés durant cette thèse. En effet, pour des pulsars jeunes, de période plus grande que 100 ms, le rapport entre le rayon de l'étoile et le cylindre lumière est beaucoup plus petit que un, $(r/R_{\text{cyl}}) \ll 1$, d'où une variation en fréquence moins perceptible en fonction de $\sin \chi$.

Dans l'image présentée ci-dessus, les photons s'échappent directement de la surface de l'étoile. Dans nos simulations, la période de rotation du pulsar est limitée à 2 ms à cause du temps de calcul prohibitif pour une étoile de période plus grande. La surface est fixée à $0.1 R_{\text{cyl}}$. Pour un pulsar lent, ce rayon de $0.1 R_{\text{cyl}}$ correspond à l'altitude réelle moyenne de provenance des photons radio (elle est en fait un peu inférieure, de l'ordre de $0.05 R_{\text{cyl}}$, voir MITRA, 2017). La largeur des pulses ainsi que le délai entre le pic radio et le premier pic gamma reste donc réaliste malgré la

période trop courte. Toutefois, l'hypothèse d'une production du rayonnement radio à une altitude fixée n'est pas totalement correcte. On sait en effet que les plus hautes fréquences naissent à plus basse altitude à cause de la cartographie rayon-fréquence (PHILLIPS, 1992). Il conviendra donc par la suite d'ajouter un degré de liberté supplémentaire sur la position exacte des photons radio en instaurant par exemple un intervalle d'altitudes variables comme cela a été effectué en haute énergie.

La Fig. 4.34 représente donc ce spectre pour différentes valeurs de χ , lorsque la zone d'émission est située au dessus des calottes polaires, respectivement lorsque celle-ci est comprise entre 1 et $2 R_\star$ au-dessus à gauche et entre 3 et $4 R_\star$ au-dessus à droite. Comparé à la Fig. 4.33, l'émission ne se produit plus en un rayon r donné mais pour un intervalle entier de rayons $r \in [r_1, r_2]$. L'émission n'est plus intégrée sur une surface (la calotte polaire) mais dans tout un volume. Il en résulte une plage plus vaste de valeurs de rayons de courbure et par conséquent une émission radio plus étendue avec un spectre plus étalé, quelle que soit la valeur de χ . Cet étalement est maximal pour $\chi = 30^\circ$ et moindre pour d'autres valeurs de l'inclinaison de l'axe magnétique comme 60° et 90° . Déplacer le volume d'émission à plus haute altitude produit un étalement supplémentaire du spectre, visible en comparant les courbes de gauche et de droite de la Fig. 4.34.

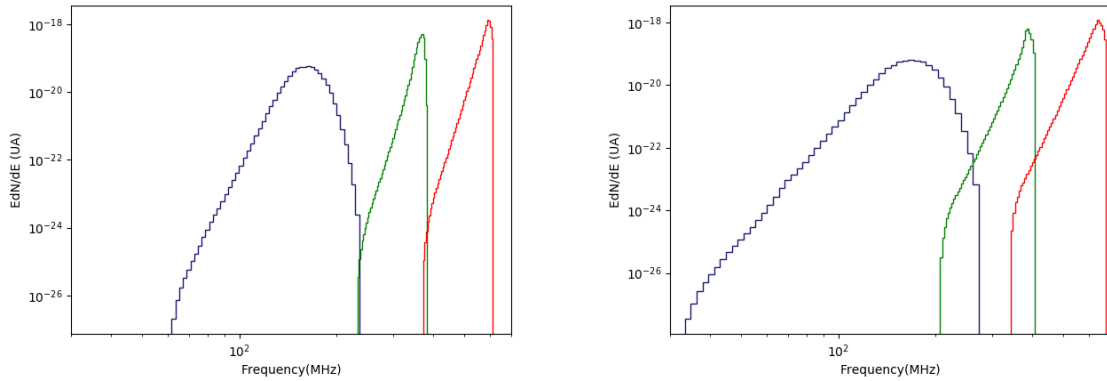


FIGURE 4.34 – À gauche, le spectre du rayonnement radio émis entre R_\star et $2 R_\star$ au-dessus de la calotte polaire, en bleu pour $\chi = 30^\circ$, en vert pour $\chi = 60^\circ$ et en rouge pour $\chi = 90^\circ$. À droite, le même spectre mais entre 3 et $4 R_\star$.

On retiendra de ces spectres que plus la zone d'émission radio est éloignée de la surface de l'étoile à neutrons, plus la plage de fréquences du rayonnement radio reçu est large, ce phénomène est d'ailleurs très important pour l'inclinaison la plus faible qui est de $\chi = 30^\circ$.

Cet élargissement des spectres peut simplement être dû au fait que nos zones d'émission au-dessus de la calotte ont une certaine épaisseur et est donc le résultat de la variation de la courbure d'une ligne de champ magnétique quand on parcourt celle-ci. D'autres phénomènes ont cependant pu affecter la forme de ces spectres, comme la géométrie des lignes de champ qui est certainement différente en altitude par rapport à celle de la surface ou le facteur Doppler qui dépend de la vitesse de rotation instantanée $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ et augmentant avec l'altitude du fait de la corotation de la magnétosphère avec l'étoile à neutrons.

Déterminons à présent l'évolution des cartes d'émission radio en fonction de la fréquence afin d'étudier l'évolution fréquentielle des pulses telle que mesurée par un observateur lointain. Les Fig. 4.35 à 4.37 montrent des exemples de cartes ainsi que les courbes de lumière correspondantes obtenues pour une émission radio provenant d'un volume situé entre 1 et 2 R_\star au-dessus des calottes polaires pour différents intervalles de fréquences. Notez que le découpage en intervalles de fréquences n'est pas identique pour les différentes valeurs de χ parce que les spectres n'ont ni la même étendue, ni les mêmes bornes inférieures et supérieures. On a optimisé le choix des fréquences pour faire ressortir au mieux les cartes d'intensité.

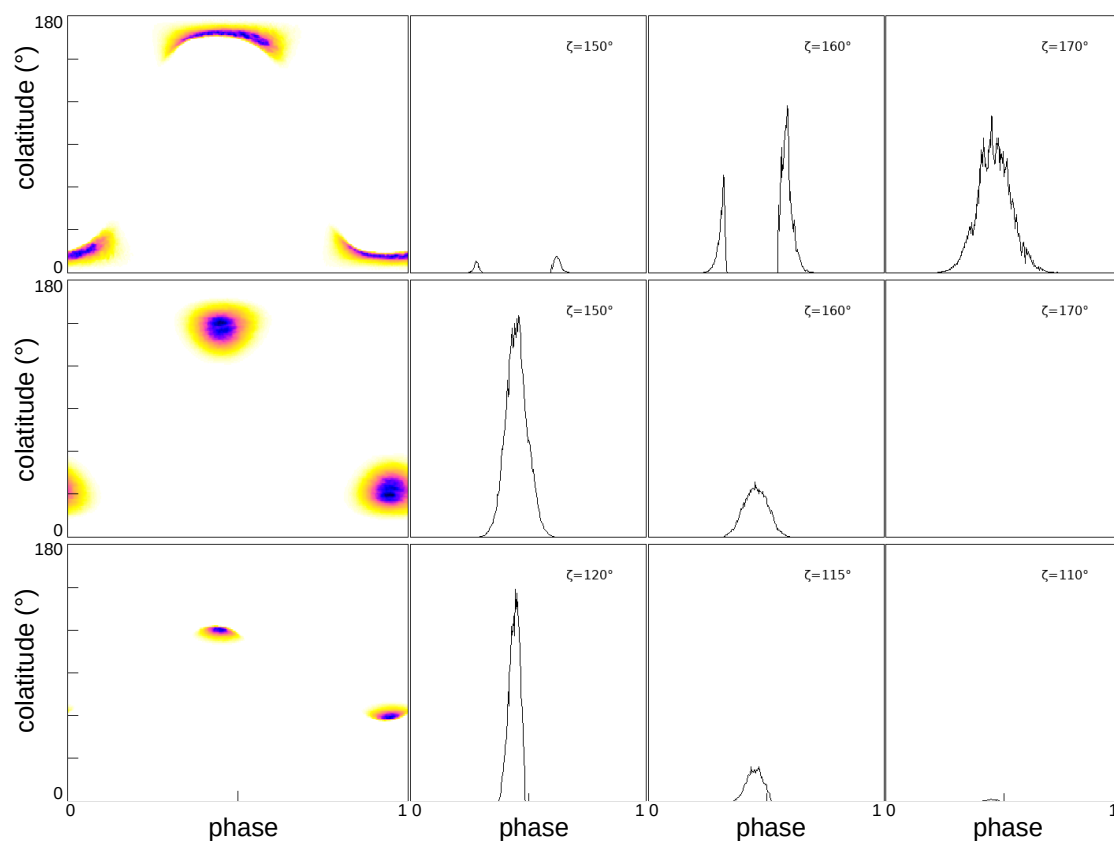


FIGURE 4.35 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 1 et $2R_*$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 30^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 30 et 120 MHz, entre 120 et 210 MHz et entre 210 et 300 MHz.

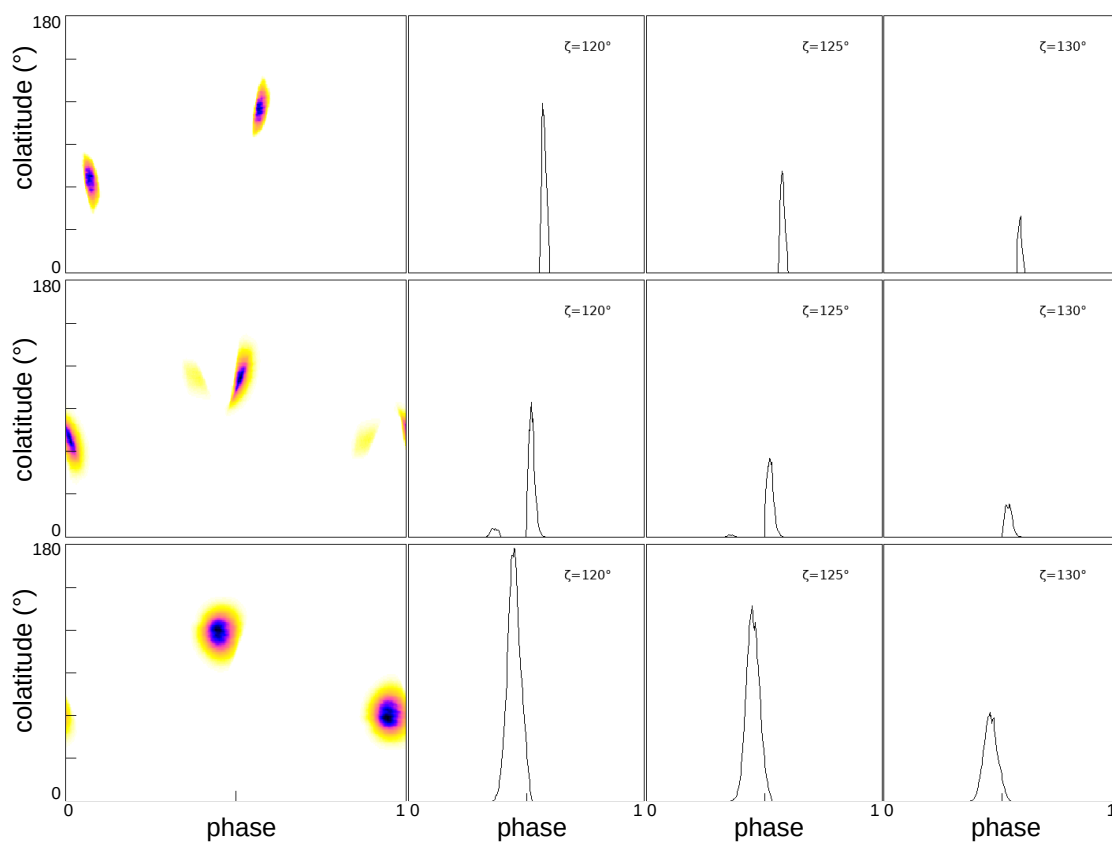


FIGURE 4.36 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 1 et $2R_*$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 60^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 200 et 270 MHz, entre 270 et 340 MHz et entre 340 et 410 MHz.

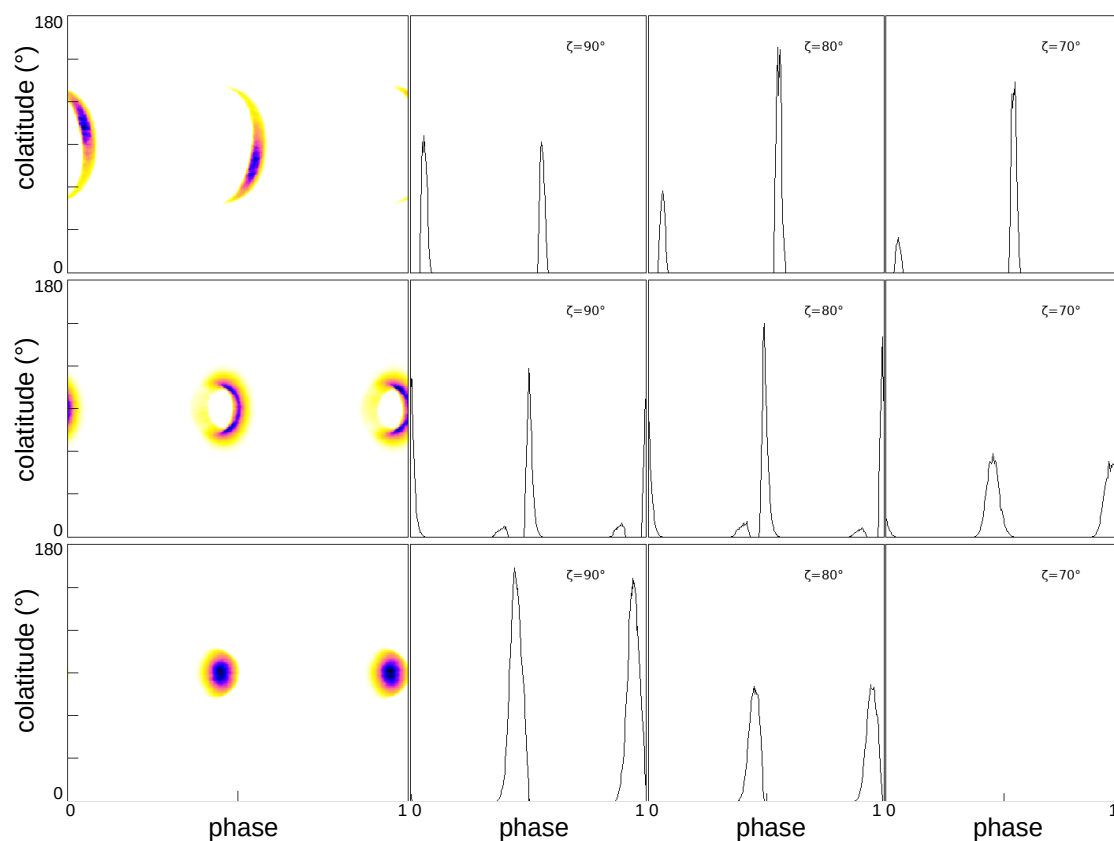


FIGURE 4.37 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 1 et $2R_*$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 90^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 330 et 450 MHz, entre 450 et 570 MHz et entre 570 et 690 MHz.

D'après ces cartes, et tout particulièrement celles de la Fig. 4.37, les basses fréquences sont émises plutôt en bordure de la zone d'émission tandis que les composantes de plus haute fréquence du rayonnement radio sont émises vers le centre de la zone d'émission. Ceci peut paraître contre-intuitif puisque pour un dipôle statique, le centre du pulse, correspondant à l'axe magnétique, est une ligne droite de courbure nulle et donc de fréquence et de puissance nulle. En clair, dans la limite statique, il n'y a pas d'émission au centre de la calotte. Les fréquences et la puissance augmentent en s'éloignant de l'axe. Mais pour un dipôle tournant, comme par exemple pour la solution de Deutsch que nous avons employée ici, le champ magnétique subit un effet de retard qui incurve toutes les lignes de champ, même celles associées à l'axe magnétique. Pour pouvoir visualiser cet effet, on a tracé les Fig. 4.38, 4.39 et 4.40 qui représentent les cartes des rayons de courbure (en unité de R_{cyl}) au point d'émission des photons pour $\chi = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. On n'affiche sur chaque zone de 0.5° sur 0.5° que le photon avec la valeur de la courbure de la ligne de champ maximale (et donc le plus petit rayon de courbure) à son point d'émission. Deux altitudes sont montrées, à gauche pour $[1, 2] R_\star$ et à droite pour $[3, 4] R_\star$. Le fait que les plus hautes fréquences se situent plutôt vers le centre des calottes polaires semble donc bien dû à la courbure des lignes de champ magnétique induite par la rotation de l'étoile. Le rayon de courbure sur les lignes de champ issues des calottes polaires est minimal dans le cas du rotateur perpendiculaire $\chi = 90^\circ$ et atteint $0.032 R_{\text{cyl}}$. Il croît quand l'axe magnétique rejoint l'axe de rotation, c'est-à-dire lorsque χ diminue. Par exemple, pour $\chi = 30^\circ$ ce rayon minimal est $0.05 R_{\text{cyl}}$ et se déplace en dehors du centre de la calotte. Conjointement le rayon de courbure maximal augmente significativement lorsque le rotateur est proche de la configuration alignée. Il n'est que de $0.048 R_{\text{cyl}}$ pour $\chi = 90^\circ$ et atteint $0.35 R_{\text{cyl}}$ pour $\chi = 30^\circ$ soit une augmentation de près d'un ordre de grandeur. Les photons produits seront beaucoup moins énergétiques dans ce second cas. Dans la limite d'un rotateur parfaitement aligné $\chi = 0^\circ$, le rayon de courbure devient infini au centre de la calotte, sur l'axe magnétique et le rayonnement de courbure s'éteint en son centre.

Ces cartes révèlent aussi un rétrécissement du profil des pulses vers les hautes fréquences puisque ces photons proviennent des régions les plus profondes de la magnétosphère. On remarque aussi une asymétrie est-ouest dans ces profils entre la rampe montante et la rampe descendante. On observe parfois deux pulses dans le profil, parfois un seul. Soulignons que ces résultats ne sont que préliminaires et qu'une éventuelle comparaison avec des observations devra tenir compte d'une distribution en énergie des particules sous forme de loi de puissance et ne pas simplement utiliser une distribution mono-énergétique comme c'est le cas actuellement. La fréquence de courbure caractéristique devra aussi être remplacée par le spectre continu centré sur cette fréquence typique. La variation fréquentielle du profil des pulses n'en sera que plus lisse et la transition entre les bandes de fréquences plus continue.

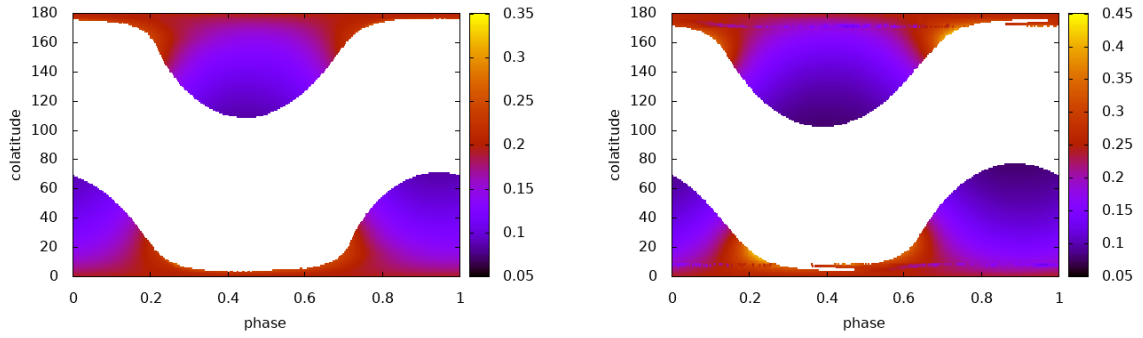


FIGURE 4.38 – Cartes des rayons de courbure (en unité de R_{cyl}) pour une inclinaison de $\chi = 30^\circ$, à gauche pour une altitude de la zone d'émission entre 1 et $2 R_\star$ et à droite entre 3 et $4 R_\star$ au-dessus des calottes polaires.

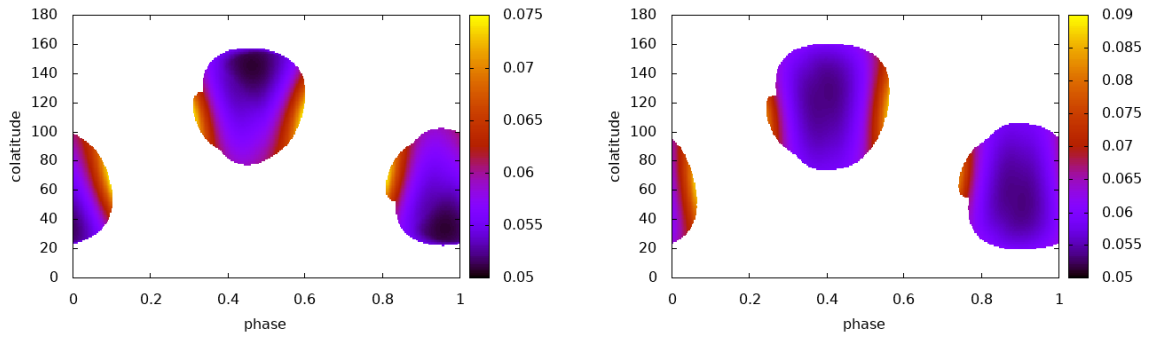


FIGURE 4.39 – Cartes des rayons de courbure (en unité de R_{cyl}) pour une inclinaison de $\chi = 60^\circ$, à gauche pour une altitude de la zone d'émission entre 1 et $2 R_\star$ et à droite entre 3 et $4 R_\star$ au-dessus des calottes polaires.

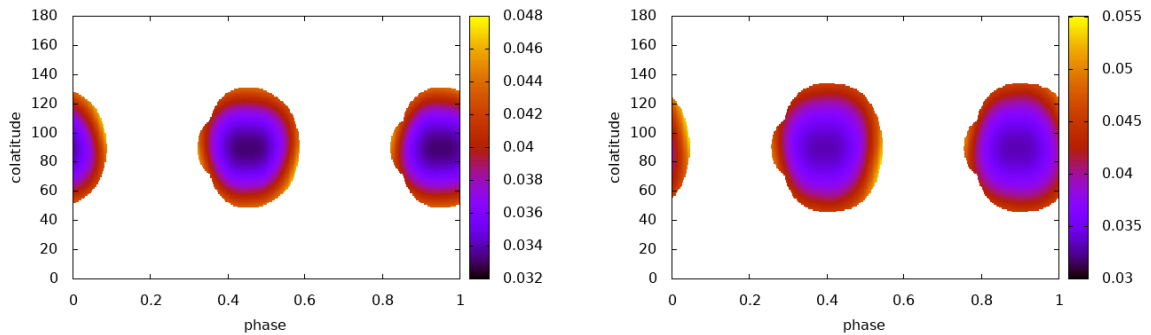


FIGURE 4.40 – Cartes des rayons de courbure (en unité de R_{cyl}) pour une inclinaison de $\chi = 90^\circ$, à gauche pour une altitude de la zone d'émission entre 1 et $2 R_\star$ et à droite entre 3 et $4 R_\star$.

L'altitude de production des photons et leur détachement de la magnétosphère en direction de l'observateur ne sont pas contraint de manière précise par les observations. Les données de polarisation radio fournissent quelques indications pour les pulsars jeunes, mais la barre d'erreur reste appréciable. Il existe donc une certaine liberté dans le choix de la hauteur des sites d'émission au-dessus des calottes polaires. C'est pourquoi nous avons aussi tracé des cartes d'émission et des courbes de lumière pour une altitude comprise dans l'intervalle $[3, 4] R_*$ comme représentées dans les Fig. 4.41 à 4.43 pour les mêmes intervalles de fréquence au-dessus des calottes polaires.

Repousser l'altitude d'émission plus loin de l'étoile entraîne un étalement du profil des pulses radio puisque les lignes de champ sont divergentes. On retrouve le fait que les hautes altitudes produisent les plus basses fréquences en rapport avec des pulses plus larges tandis que les basses altitudes produisent les fréquences les plus élevées en rapport avec des pulses plus étroits, en accord avec le modèle de cartographie altitude-fréquence. Mais dans notre cas, on s'affranchit du dipôle statique pour tenir compte de tous les effets dus à la rotation du champ magnétique, des effets d'aberration et de retard du signal, voir le paragraphe 3.2.1.

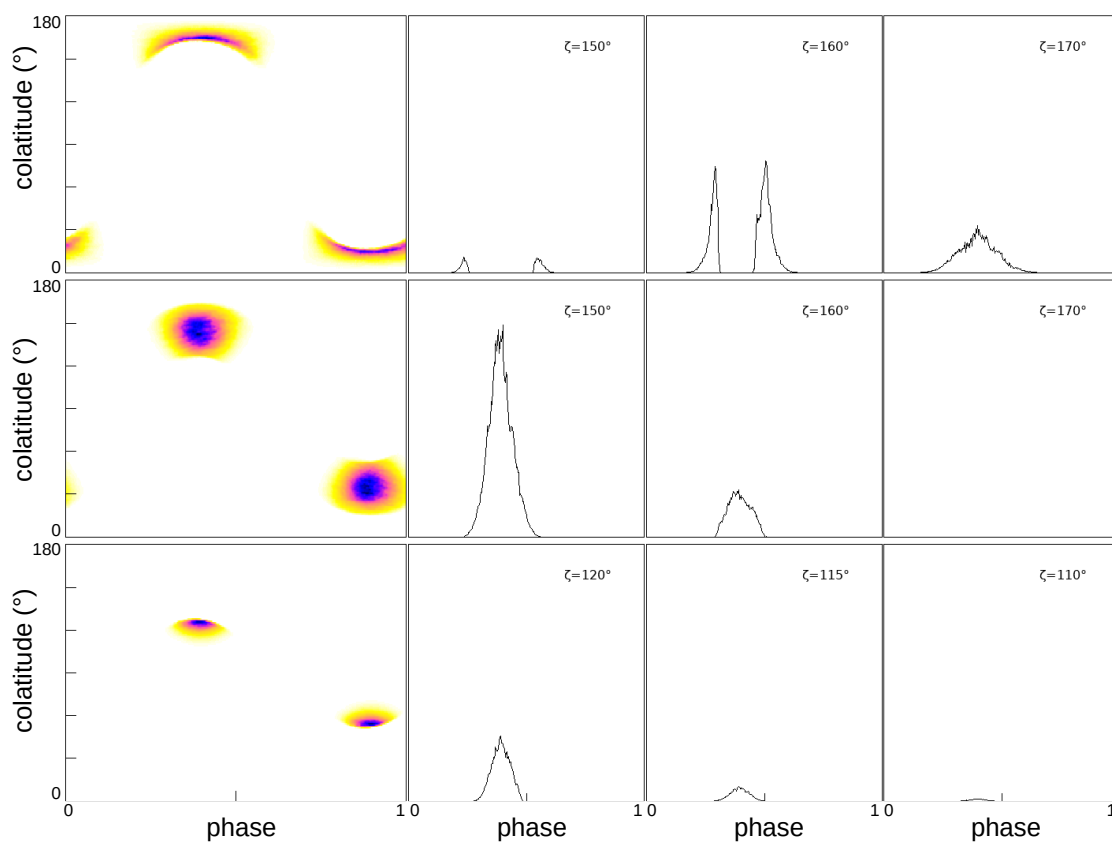


FIGURE 4.41 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 3 et $4R_\star$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 30^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 30 et 120 MHz, entre 120 et 210 MHz et entre 210 et 300 MHz.

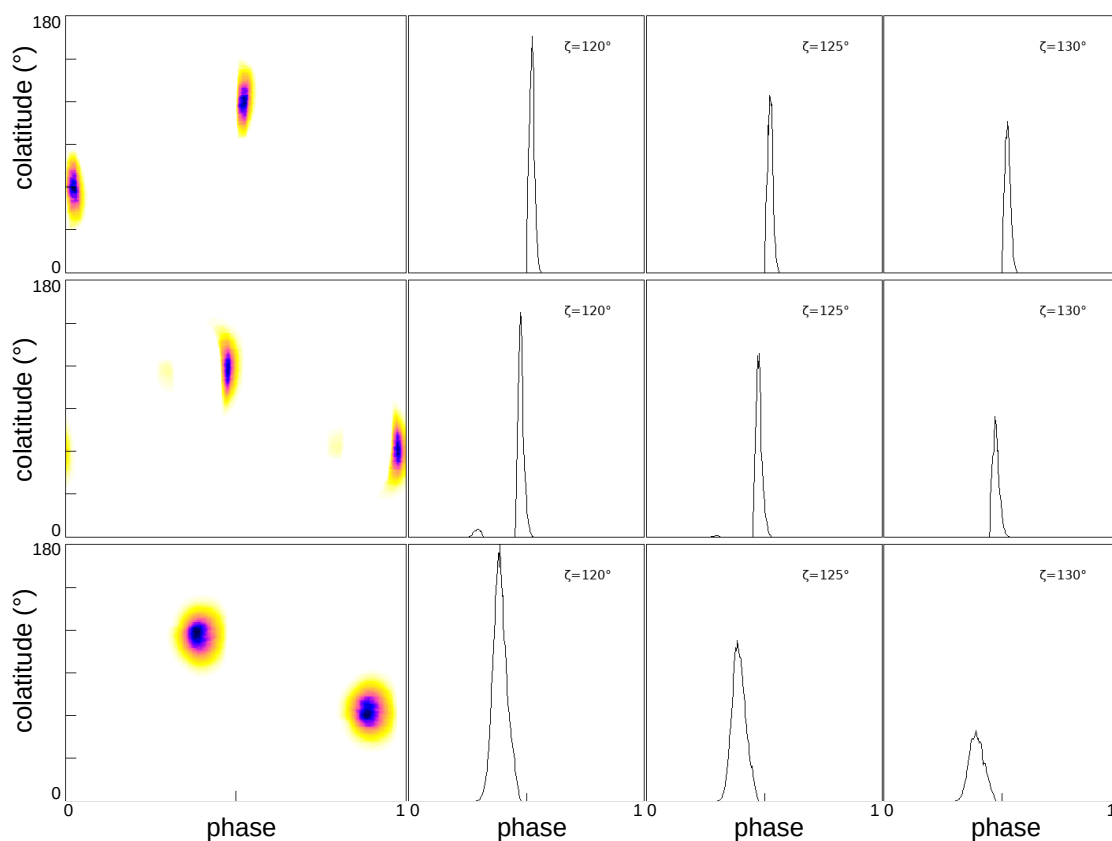


FIGURE 4.42 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 3 et $4R_*$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 60^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 30 et 120 MHz, entre 120 et 210 MHz et entre 210 et 300 MHz.

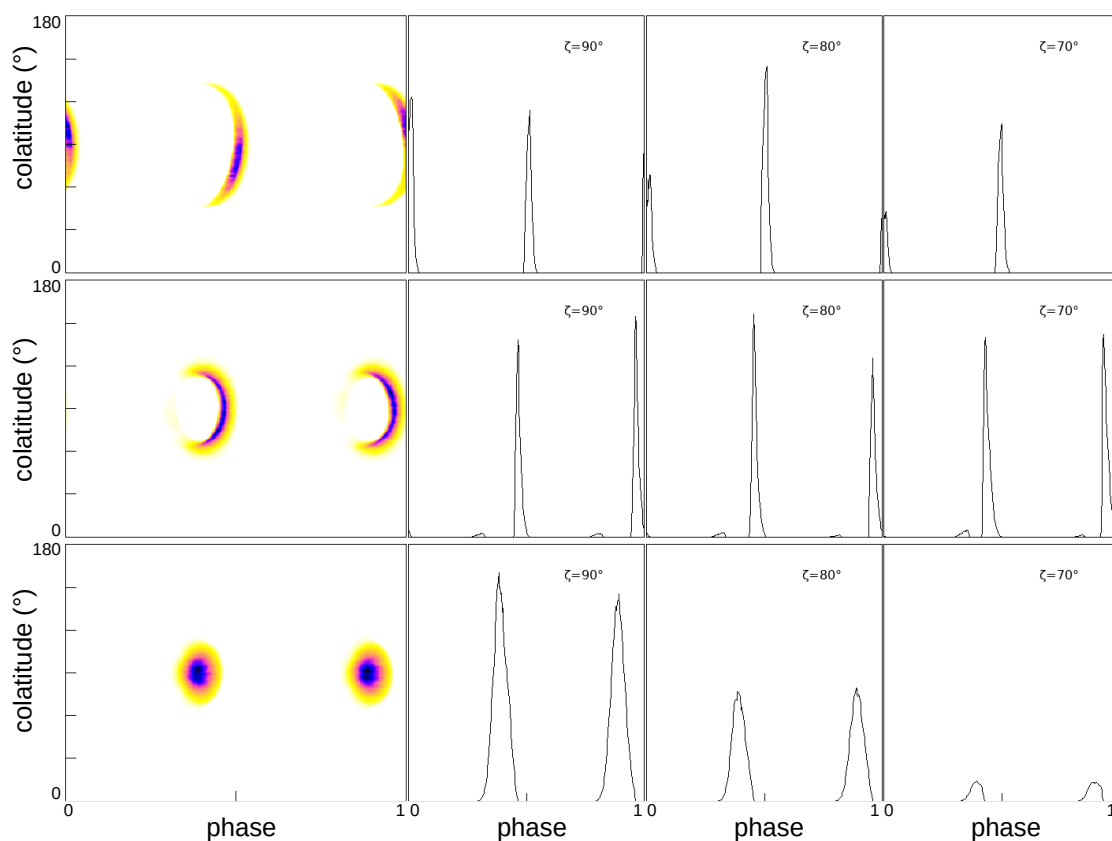


FIGURE 4.43 – Cartes d'émission radio (et quelques courbes de lumière) pour une émission provenant d'entre 3 et $4R_\star$ au-dessus des calottes polaires pour une inclinaison $\chi = 90^\circ$. De haut en bas, ces cartes représentent l'émission reçue entre 330 et 450 MHz, entre 450 et 570 MHz et entre 570 et 690 MHz.

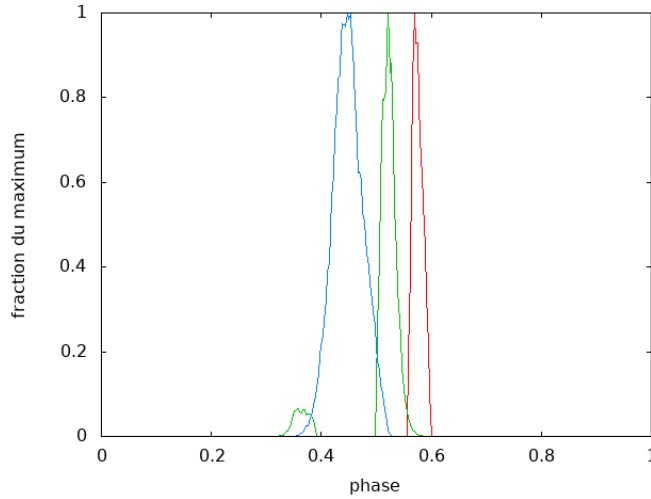


FIGURE 4.44 – Courbes de lumière de l’émission radio pour $\chi = 60^\circ$, $\zeta = 120^\circ$ et une zone d’émission située entre 1 et $2 R_\star$ au dessus des calottes polaires. En rouge pour le rayonnement compris entre 200 et 270 MHz, en vert entre 270 et 340 MHz et en bleu entre 340 et 410 MHz.

Afin de faciliter la visualisation de l’évolution des pulses radio en fonction de la fréquence, on a tracé en Fig. 4.44 la forme d’une courbe de lumière selon l’intervalle de fréquence considéré, ici celles obtenues avec une zone d’émission comprise entre 1 et $2 R_\star$ au-dessus des calotte polaires et pour une inclinaison $\chi = 60^\circ$ de l’axe magnétique et $\zeta = 120^\circ$ de la ligne de visée. Le maximum du profil en bleu dans l’intervalle [340,410] MHz est en avance de phase par rapport au profil en vert dans l’intervalle [270,340] MHz qui lui-même est en avance de phase par rapport au pulse rouge dans l’intervalle [200,270] MHz. Cette avance de phase est significative puisqu’elle représente 5 à 10% de la période du pulsar. Elle est la conséquence d’une part de l’incurvation des lignes de champ magnétique dans le sens rétrograde par rapport à la rotation stellaire et d’autre part de la production des photons haute fréquence à basse altitude, où les lignes de champ sont moins incurvées par rapport aux photons de basse fréquence produit à plus haute altitude où les lignes de champ sont plus incurvées. Cet effet dépend du rapport (R_\star/R_{cyl}) , il est négligeable pour les pulsars jeunes mais sa signature observationnelle devrait être perceptible pour les pulsars les plus rapides, les pulsars millisecondes.

Ce décalage de phase peut être calculé à partir des équations (3.13), (3.15) et (3.16) du paragraphe 3.2.1. Le décalage maximum ainsi calculé (donc pour un photon émis à $1 R_\star$ au-dessus de la surface et un autre émis à $2 R_\star$ et toujours avec $\chi = 60^\circ$) est de l’ordre de 4% de la phase. Ces effets ne peuvent donc suffire pour expliquer le décalage du pic d’émission radio de la Fig. 4.44 mais ils peuvent cependant certainement jouer un rôle dans l’émission radio que l’on observe dans les zones d’émissions étudiées.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Travail effectué

Dans cette thèse, j'ai réalisé des simulations de la trajectoire d'un photon dans la métrique de Schwarzschild, une métrique décrivant un espace-temps déformé par un objet massif à symétrie sphérique et statique. De par leur densité extrême, on s'attend à ce que l'espace-temps au voisinage des étoiles à neutrons présente une telle déformation, cette courbure de l'espace-temps étant le champ gravitationnel de l'étoile d'après la théorie de la relativité générale. J'ai donc utilisé ces simulations pour déduire la façon dont le champ gravitationnel de ces étoiles affecte le rayonnement pulsé qu'elles émettent.

J'ai commencé par le calcul de l'image de la surface de l'étoile à neutrons déformée par le champ gravitationnel en traçant la trajectoire des photons à partir de points répartis en "quadrillage" à la surface de l'étoile. Ceci m'a permis de tester ma méthode et les résultats sur un cas d'école déjà bien documenté dans la littérature sur les points chauds et l'émission thermique de surface en rayons X. J'ai en effet reproduit l'émission provenant de points chauds situés aux calottes polaires. Cette émission est prévue notamment pour un pulsar accrétant où de la matière tombe sur les pôles magnétiques. J'ai ainsi simulé le flux que l'on recevra de ces points chauds dans la métrique de Schwarzschild pour prendre en compte l'influence du champ gravitationnel, que j'ai pu comparer avec une approximation analytique de Beloborodov, rendant compte des effets de la courbure de l'espace-temps, et vérifier la précision de cette expression approchée.

J'ai ensuite simulé, toujours en traçant la trajectoire des photons dans la métrique de Schwarzschild, l'émission non-thermique magnétosphérique d'un pulsar dans les domaines radio et hautes énergies. Pour cela je suis parti de modèles connus du champ électromagnétique d'un pulsar et j'ai supposé une production de photons par rayonnement de courbure le long des dernières lignes de champ magnétique fermées pour l'émission haute énergie. J'ai ainsi réalisé des cartes d'émission et des courbes de lumière pour différentes géométries c'est-à-dire pour diverses inclinaisons de l'axe magnétique par rapport à l'axe de rotation, d'abord pour une cavité allongée infiniment mince (les points d'émission étant simplement répartis le long des dernières

lignes de champ magnétique fermées) puis pour une cavité allongée d'une certaine épaisseur et centrés autour des dernières lignes de champ magnétique fermées. Pour l'émission radio, j'ai réparti des points d'émission à l'intérieur et au-dessus des calottes polaires, dans une zone délimitée par ces dernière lignes de champ fermées.

J'ai également déterminé à partir de la géométrie du champ magnétique la fréquence d'émission du rayonnement de courbure, mais pour l'instant uniquement dans un espace-temps plat donc en négligeant l'influence du champ gravitationnel. J'ai ainsi pu en déduire les spectres de l'émission magnétosphérique du pulsar ainsi que la relation altitude/fréquence d'une manière quantitative précise.

5.2 Conclusion

Les cartes d'émission de ces différentes simulations montrent que le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons modifie sensiblement l'émission perçue par un observateur lointain, ces effets étant bien évidemment plus importants lorsque l'on se rapproche de l'étoile à neutrons. La courbure de l'espace-temps entraîne une courbure de la trajectoire des photons qui s'inscrit dans cet espace-temps, modifiant la visibilité de l'étoile à neutrons et des régions aux alentours, un point à la surface de cette étoile pourra alors être visible même situé sur la face opposée par rapport à l'observateur. Ainsi certaines régions d'émission seront visibles plus longtemps au cours d'une rotation de l'étoile à neutrons sur elle-même. Un autre élément à prendre en compte est le délai Shapiro : le temps de vol des photons qui augmente à cause de la courbure de leur trajectoire. Comme les photons émis près de la surface de l'étoile à neutrons sont plus affectés par son champ gravitationnel ceux-ci seront beaucoup plus retardés que des photons émis à haute altitude. Cela n'entraîne pas un simple décalage global des courbes de lumière imperceptible par des mesures mais va bien en modifier certaines caractéristiques et notamment le délai entre le pic radio et le premier pic en gamma. Ainsi, à cause de ce retard supplémentaire, des photons émis près de l'étoile à neutrons pourront être reçus en même temps que des photons émis plus haut dans la magnétosphère, pouvant ainsi provoquer des pics d'intensité élevée du rayonnement perçu.

J'ai également déterminé la répartition en fonction de la fréquence des régions d'émission dans la magnétosphère du pulsar avec les plus hautes fréquences émises loin de la surface de l'étoile. Cela pourrait indiquer que les composantes les plus énergétiques du spectre d'un pulsar sont moins affectées par le champ gravitationnel de celui-ci bien que nous ne pouvons vraiment le conclure car nous n'avons étudié le spectre du pulsar que dans le cadre d'un espace-temps plat sans influence du champ gravitationnel.

5.3 Les limites et développements possibles

Comme évoqué dans la section 1.4.1, j'ai employé la métrique de Schwarzschild pour décrire le champ gravitationnel de l'étoile à neutrons. Cette métrique décrit

la géométrie de l'espace-temps au voisinage d'un objet statique et ne prend pas en compte l'entraînement de l'espace-temps du fait de la rotation de l'astre. Bien que l'on ne s'attende pas à ce que cet entraînement soit important au voisinage d'une étoile à neutrons, sauf éventuellement pour les pulsars millisecondes les plus rapides, l'utilisation de la métrique de Kerr permettrait toutefois de prendre en compte ce phénomène. Mais il faudra alors tracer directement la trajectoire du photon dans l'espace à trois dimensions car celle-ci ne sera plus contenue dans un plan (la métrique de Kerr ne respecte pas la symétrie sphérique rendant impossible l'existence de trajectoires uniquement contenues dans un plan).

Bien que différents mécanismes d'émission ont lieu au sein de la magnétosphère, seul le rayonnement de courbure a été étudié ici et uniquement en provenance des cavités allongées et des cavités polaires le long des dernières lignes de champ magnétique à l'intérieur du cylindre lumière. Il pourrait être utile, afin d'avoir une vision plus complète de l'émission magnétosphérique, d'ajouter l'émission par rayonnement synchrotron et par diffusion Compton inverse à de futures simulations ainsi que d'inclure d'autres modèles avec différentes zones d'émission, comme par exemple avec des cavités externes le long des dernières lignes de champ magnétique ou le vent strié au-delà du cylindre lumière. Il ne sera cependant pas forcément utile d'inclure les effets de la gravitation pour l'émission provenant de l'extérieur du cylindre lumière car, au vu des résultats obtenus, on ne s'attend pas à ce que le champ gravitationnel y ait des effets remarquables.

Les spectres obtenus pour l'émission magnétosphérique n'ont été réalisés que pour un espace-temps plat. Pour savoir à quoi ressembleront ces spectres dans la métrique de Schwarzschild, il faudra non seulement calculer le rayon de courbure des lignes de champ magnétiques dans cette métrique mais également prendre en compte le décalage vers le rouge gravitationnel prédit par la théorie de la relativité générale qui modifiera sensiblement le spectre émanant de la surface de l'étoile. Le calcul des spectres gagnera aussi en réalisme lorsque j'aurai implémenté non plus une distribution mono-énergétique de particules mais une distribution en loi de puissance et remplacé l'approximation du spectre de courbure par sa densité spectrale de puissance (1.48).

La polarisation de l'émission pulsée pourrait être ajoutée à mes simulations des émissions radio et haute énergie. Dans le domaine radio, cette polarisation permet déjà de contraindre la géométrie du dipôle magnétique à haute altitude pour les pulsars lents. L'observation imminente de la polarisation en rayons X apportera une nouvelle contrainte forte sur la partie haute énergie du spectre, sa localisation à l'intérieur du cylindre lumière ou dans le vent.

Finalement, il faudra évidemment discuter les résultats de ces simulations en rapport avec les observations des pulsars afin de déterminer la signature de ces effets relativistes en comparant par exemple les courbes de lumière et spectres en radio et gamma pour les pulsars détectés simultanément dans ces deux bandes d'énergie.

Bibliographie

- ABBOTT, B. P. et al. (oct. 2017a). “Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger : GW170817 and GRB 170817A”. In : *The Astrophysical Journal* 848.2. Publisher : American Astronomical Society, p. L13. ISSN : 2041-8205. DOI : [10.3847/2041-8213/aa920c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c).
- ABBOTT, B. P. et al. (oct. 2017b). “Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger”. In : *The Astrophysical Journal* 848.2. Publisher : American Astronomical Society, p. L12. ISSN : 2041-8205. DOI : [10.3847/2041-8213/aa91c9](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9).
- ABDO, A. A. et al. (1^{er} avr. 2010). “The Vela Pulsar : Results from the First Year of Fermi LAT Observations”. In : *The Astrophysical Journal* 713, p. 154-165. DOI : [10.1088/0004-637X/713/1/154](https://doi.org/10.1088/0004-637X/713/1/154).
- ABDO, A. A. et al. (sept. 2013). “THE SECONDFERMILARGE AREA TELESCOPE CATALOG OF GAMMA-RAY PULSARS”. In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 208.2, p. 17. ISSN : 0067-0049. DOI : [10.1088/0067-0049/208/2/17](https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/17).
- ABDOLLAHI, S. et al. (1^{er} mar. 2020). “Fermi Large Area Telescope Fourth Source Catalog”. In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 247, p. 33. DOI : [10.3847/1538-4365/ab6bcb](https://doi.org/10.3847/1538-4365/ab6bcb).
- AHARONIAN, F. A., S. R. KELNER et A. YU. PROSEKIN (2010). “Angular, spectral, and time distributions of highest energy protons and associated secondary gamma rays and neutrinos propagating through extragalactic magnetic and radiation fields”. en. In : *Phys. Rev. D* 82.4, p. 043002. ISSN : 1550-7998, 1550-2368. DOI : [10.1103/PhysRevD.82.043002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.043002).
- AKIYAMA, Kazunori (2019a). “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole”. In : *The Astrophysical Journal Letters*, p. 17.
- (2019b). “First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring”. In : *The Astrophysical Journal Letters*, p. 31.
- ALIU, E. et al. (1^{er} nov. 2008). “Observation of Pulsed Gamma Rays Above 25 GeV from the Crab Pulsar with MAGIC”. In : *Science* 322, p. 1221. ISSN : 0036-8075. DOI : [10.1126/science.1164718](https://doi.org/10.1126/science.1164718).
- ANSOLDI, S. et al. (2016). “Teraelectronvolt pulsed emission from the Crab Pulsar detected by MAGIC”. en. In : *A&A* 585, A133. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361/201526853](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526853).
- ARFKEN, George B. et Hans-Jurgen WEBER (2005). *Mathematical methods for physicists*. 6th ed. Boston : Elsevier. ISBN : 978-0-12-059876-2 978-0-12-088584-8.

- BAADE, W. et F. ZWICKY (1^{er} mai 1934a). “Cosmic Rays from Super-novae”. In : *Proceedings of the National Academy of Science* 20, p. 259-263. DOI : [10.1073/pnas.20.5.259](#).
- (mai 1934b). “On Super-Novae”. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 20.5, p. 254-259. ISSN : 0027-8424.
- BACKER, D. C. et al. (1^{er} déc. 1982). “A millisecond pulsar”. In : *Nature* 300, p. 615-618. ISSN : 0028-0836. DOI : [10.1038/300615a0](#).
- BECKER, Werner, éd. (2009). *Neutron stars and pulsars*. Astrophysics and space science library 357. OCLC : ocn305127637. Berlin : Springer. 697 p. ISBN : 978-3-540-76964-4 978-3-540-76965-1.
- BELOBORODOV, Andrei M. (20 fév. 2002). “Gravitational Bending of Light Near Compact Objects”. In : *The Astrophysical Journal* 566.2, p. L85-L88. ISSN : 0004637X, 15384357. DOI : [10.1086/339511](#).
- BESKIN, V. S. (2010). *MHD Flows in Compact Astrophysical Objects : Accretion, Winds and Jets*. Astronomy and Astrophysics Library. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. ISBN : 978-3-642-01289-1. DOI : [10.1007/978-3-642-01290-7](#).
- BLASKIEWICZ, M., J. M. CORDES et I. WASSERMAN (1991). “A relativistic model of pulsar polarization”. In : *ApJ* 370, p. 643-669. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/169850](#).
- BOGDANOV, Slavko, George B. RYBICKI et Jonathan E. GRINDLAY (1^{er} nov. 2007). “Constraints on Neutron Star Properties from X-Ray Observations of Millisecond Pulsars”. In : *The Astrophysical Journal* 670, p. 668-676. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/520793](#).
- BRADT, Hale (22 sept. 2008). *Astrophysics Processes : The Physics of Astronomical Phenomena*. Google-Books-ID : 5ikrxCcdja4C. Cambridge University Press. 504 p. ISBN : 978-0-521-84656-1.
- BURROWS, Adam et John HAYES (1^{er} jan. 1996). “Pulsar Recoil and Gravitational Radiation Due to Asymmetrical Stellar Collapse and Explosion”. In : *Physical Review Letters* 76, p. 352-355. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.76.352](#).
- CANUTO, C., éd. (2006). *Spectral methods : fundamentals in single domains*. Scientific computation. Berlin ; New York : Springer-Verlag. ISBN : 978-3-540-30725-9.
- CHANDRASEKHAR, S. (juil. 1931). “The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs”. en. In : *The Astrophysical Journal* 74, p. 81. ISSN : [0004-637X]. DOI : [10.1086/143324](#).
- CLENSHAW, C. W. et A. R. CURTIS (1^{er} déc. 1960). “A method for numerical integration on an automatic computer”. In : *Numerische Mathematik* 2.1, p. 197-205. ISSN : 0945-3245. DOI : [10.1007/BF01386223](#).
- D’INVERNO, Ray et Lecturer at the Faculty of Mathematical Studies R. D’INVERNO (1992). *Introducing Einstein’s Relativity*. Google-Books-ID : yqcT3VICuvMC. Clarendon Press. 400 p. ISBN : 978-0-19-859686-8.
- DEMOREST, P. B. et al. (oct. 2010). “A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay”. In : *Nature* 467.7319. Number : 7319 Publisher : Nature Publishing Group, p. 1081-1083. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/nature09466](#).
- DEUTSCH, Arnim J. (1^{er} jan. 1955). “The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo”. In : *Annales d’Astrophysique* 18, p. 1. ISSN : 0365-0499.

- DJANNATI-ATAÏ, Arache et for the H.E.S.S. COLLABORATION (2017). *H.E.S.S. stereoscopic observations of the Vela Pulsar above 100 GeV*.
- DUNCAN, Robert C. et Christopher THOMPSON (1^{er} juin 1992). “Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts”. In : *The Astrophysical Journal Letters* 392, p. L9-L13. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/186413](#).
- DYKS, J. et B. RUDAK (1^{er} déc. 2003). “Two-Pole Caustic Model for High-Energy Light Curves of Pulsars”. In : *The Astrophysical Journal* 598, p. 1201-1206. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/379052](#).
- DYSON, Frank Watson, Arthur Stanley EDDINGTON et C. DAVIDSON (1^{er} jan. 1920). “IX. A determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919”. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 220.571. Publisher : Royal Society, p. 291-333. DOI : [10.1098/rsta.1920.0009](#).
- ERBER, T. (1966). “High-Energy Electromagnetic Conversion Processes in Intense Magnetic Fields”. In : *Reviews of Modern Physics* 38, p. 626-659. DOI : [10.1103/RevModPhys.38.626](#).
- GOLDREICH, Peter et William H. JULIAN (1^{er} août 1969). “Pulsar Electrodynamics”. In : *The Astrophysical Journal* 157, p. 869. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/150119](#).
- GONTHIER, P. L. et A. K. HARDING (1^{er} avr. 1994). “General relativistic corrections in the gamma-ray emission from pulsars”. In : *The Astrophysical Journal* 425, p. 767-775. DOI : [10.1086/174020](#).
- GRUZINOV, Andrei (9 oct. 2007). “Dissipative Strong-Field Electrodynamics”. In : *arXiv :0710.1875 [astro-ph]*. arXiv : [0710.1875](#).
- GULLSTRAND, Allvar (1922). “Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie”. In : *Ark.Mat.Astron.Fys* 16.8.
- GUREVICH, A. V., V. S. BESKIN et Ya. N ISTOMIN (1993). *Physics of the Pulsar Magnetosphere*. Cambridge : Cambridge University Press. ISBN : 978-0-521-03253-7. DOI : [10.1017/CB09780511564673](#).
- HAN, Cheongho et al. (1^{er} juil. 2020). “One Planet or Two Planets? The Ultra-sensitive Extreme-magnification Microlensing Event KMT-2019-BLG-1953”. In : *The Astronomical Journal* 160, p. 17. ISSN : 0004-6256. DOI : [10.3847/1538-3881/ab91ac](#).
- HARRISON, E. R. et E. TADEMARU (1^{er} oct. 1975). “Acceleration of pulsars by asymmetric radiation”. In : *The Astrophysical Journal* 201, p. 447-461. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/153907](#).
- HEWISH, A. et al. (fév. 1968). “Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source”. In : *Nature* 217.5130. Number : 5130 Publisher : Nature Publishing Group, p. 709-713. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/217709a0](#).
- HIBSCHMAN, J. A. et J. ARONS (2001). “Polarization Sweeps in Rotation-powered Pulsars”. In : *apj* 546, p. 382-393. DOI : [10.1086/318224](#).
- HULSE, R. A. et J. H. TAYLOR (1^{er} jan. 1975). “Discovery of a pulsar in a binary system”. In : *The Astrophysical Journal Letters* 195, p. L51-L53. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/181708](#).

- IZVEKOVA, V. A. et al. (1^{er} août 1981). “Radio spectra of pulsars. I - Observations of flux densities at meter wavelengths and analysis of the spectra”. In : *Astrophysics and Space Science* 78, p. 45-72. DOI : [10.1007/BF00654022](https://doi.org/10.1007/BF00654022).
- JACKSON, John David (2001). *Electrodynamique classique : Cours et exercices d'electromagnetisme*. Francais. Paris : Dunod. ISBN : 978-2-10-004411-5.
- JACOBY, Bryan Anthony (15 jan. 2008). *Recycled Pulsars*. Dissertation.Com. 116 p. ISBN : 978-1-58112-393-7.
- JAMESON, A., Wolfgang SCHMIDT et Eli TURKEL (1981). “Numerical solution of the Euler equations by finite volume methods using Runge Kutta time stepping schemes”. In : *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*. Fluid Dynamics and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics et Astronautics. DOI : [10.2514/6.1981-1259](https://doi.org/10.2514/6.1981-1259).
- JEE, M. J. et al. (juin 2007). “Discovery of a Ringlike Dark Matter Structure in the Core of the Galaxy Cluster Cl 0024+17”. In : *The Astrophysical Journal* 661.2, p. 728-749. ISSN : 0004-637X, 1538-4357. DOI : [10.1086/517498](https://doi.org/10.1086/517498).
- JOHNSON, T. J. et al. (juin 2014). “CONSTRAINTS ON THE EMISSION GEOMETRIES AND SPIN EVOLUTION OF GAMMA-RAY MILLISECOND PULSARS”. In : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 213.1. Publisher : American Astronomical Society, p. 6. ISSN : 0067-0049. DOI : [10.1088/0067-0049/213/1/6](https://doi.org/10.1088/0067-0049/213/1/6).
- JOHNSTON, Simon et Aris KARASTERGIOU (mai 2017). “Pulsar braking and the P-Pdot diagram”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 467.3, p. 3493-3499. ISSN : 0035-8711, 1365-2966. DOI : [10.1093/mnras/stx377](https://doi.org/10.1093/mnras/stx377). arXiv : [1702.03616](https://arxiv.org/abs/1702.03616).
- KALAPOTHARAKOS, Constantinos, Alice K. HARDING et Demosthenes KAZANAS (1^{er} oct. 2014). “Gamma-Ray Emission in Dissipative Pulsar Magnetospheres : From Theory to Fermi Observations”. In : *The Astrophysical Journal* 793, p. 97. DOI : [10.1088/0004-637X/793/2/97](https://doi.org/10.1088/0004-637X/793/2/97).
- KALAPOTHARAKOS, Constantinos et al. (1^{er} avr. 2012). “Toward a Realistic Pulsar Magnetosphere”. In : *The Astrophysical Journal* 749, p. 2. DOI : [10.1088/0004-637X/749/1/2](https://doi.org/10.1088/0004-637X/749/1/2).
- KALAPOTHARAKOS, Constantinos et al. (avr. 2018). “Three-dimensional Kinetic Pulsar Magnetosphere Models : Connecting to Gamma-Ray Observations”. In : *The Astrophysical Journal* 857.1. Publisher : American Astronomical Society, p. 44. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.3847/1538-4357/aab550](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aab550).
- KIRK, J. G., O. SKJÆRAASEN et Y. A. GALLANT (2002). “Pulsed radiation from neutron star winds”. In : *Astronomy & Astrophysics* 388.2, p. L29-L32. ISSN : 0004-6361, 1432-0746. DOI : [10.1051/0004-6361:20020599](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20020599).
- KLEIN, O. et Y. NISHINA (1929). “Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac”. de. In : *Z. Physik* 52.11-12, p. 853-868. ISSN : 0044-3328. DOI : [10.1007/BF01366453](https://doi.org/10.1007/BF01366453).
- KRAUS, U. (1998). “Light deflection near neutron stars.” In : p. 66-81.
- KRUSKAL, M. D. (1^{er} sept. 1960). “Maximal Extension of Schwarzschild Metric”. In : *Physical Review* 119.5. Publisher : American Physical Society, p. 1743-1745. DOI : [10.1103/PhysRev.119.1743](https://doi.org/10.1103/PhysRev.119.1743).
- KUNDU, Anu (17 sept. 2018). “Contribution of multipolar electromagnetic fields to the radio and high energy emission of pulsars”. thesis. Strasbourg.

- LAI, Dong, David F. CHERNOFF et James M. CORDES (2001). "Pulsar Jets : Implications for Neutron Star Kicks and Initial Spins". In : *The Astrophysical Journal* 549, p. 1111-1118. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/319455](https://doi.org/10.1086/319455).
- LARGE, M. I., A. E. VAUGHAN et B. Y. MILLS (oct. 1968). "A Pulsar Supernova Association ?" In : *Nature* 220.5165. Number : 5165 Publisher : Nature Publishing Group, p. 340-341. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/220340a0](https://doi.org/10.1038/220340a0).
- LEE, Cheng-Yang (24 mai 2020). "Cherenkov radiation and photo-pair production in a strong magnetic field". In : *arXiv :2005.11657 [hep-ph]*. arXiv : [2005.11657](https://arxiv.org/abs/2005.11657).
- LYUBARSKII, Y. E. (1^{er} juil. 1996). "A model for the energetic emission from pulsars." In : *Astronomy and Astrophysics* 311, p. 172-178. ISSN : 0004-6361.
- LYUTIKOV, Maxim, Nepomuk OTTE et Andrew MCCANN (20 juil. 2012). "THE VERY HIGH ENERGY EMISSION FROM PULSARS : A CASE FOR INVERSE COMPTON SCATTERING". In : *The Astrophysical Journal* 754.1, p. 33. ISSN : 0004-637X, 1538-4357. DOI : [10.1088/0004-637X/754/1/33](https://doi.org/10.1088/0004-637X/754/1/33).
- MALOFEEV, V. M. et I. F. MALOV (1^{er} fév. 1980). "Average pulsar spectra and their interpretation". In : *Soviet Astronomy* 24, p. 90-106. ISSN : 0038-5301.
- MALOV, I. F. (1^{er} avr. 1979). "On the nature of the low-frequency dropoff in pulsar spectra". In : *Soviet Astronomy* 23, p. 205. ISSN : 0038-5301.
- MANCHESTER, R. N. et al. (1^{er} avr. 2005). "The Australia Telescope National Facility Pulsar Catalogue". In : *The Astronomical Journal* 129, p. 1993-2006. DOI : [10.1086/428488](https://doi.org/10.1086/428488).
- MARGALIT, Ben et Brian D. METZGER (1^{er} déc. 2017). "Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars from Multi-messenger Observations of GW170817". In : *The Astrophysical Journal Letters* 850, p. L19. DOI : [10.3847/2041-8213/aa991c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa991c).
- McLAUGHLIN, M. A. et al. (fév. 2006). "Transient radio bursts from rotating neutron stars". In : *Nature* 439.7078. Number : 7078 Publisher : Nature Publishing Group, p. 817-820. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/nature04440](https://doi.org/10.1038/nature04440).
- MITRA, Dipanjan (2017). "Nature of Coherent Radio Emission from Pulsars". en. In : *J Astrophys Astron* 38.3, p. 52. ISSN : 0973-7758. DOI : [10.1007/s12036-017-9457-6](https://doi.org/10.1007/s12036-017-9457-6).
- MITTON, Simon (1977). *The Cambridge Encyclopaedia of Astronomy*. Google-Books-ID : CwVxQgAACAAJ. Cape. 481 p. ISBN : 978-0-224-01418-2.
- MOCHOL, Iwona (2017). "Pulsar striped winds". In : *arXiv :1702.00720 [astro-ph]* 446, p. 135-159. DOI : [10.1007/978-3-319-63031-1_7](https://doi.org/10.1007/978-3-319-63031-1_7). arXiv : [1702.00720](https://arxiv.org/abs/1702.00720).
- MOORE, Thomas A. (10 déc. 2012). *A General Relativity Workbook*. University Science Books. 500 p. ISBN : 978-1-891389-82-5.
- MÜLLER-KIRSTEN, H. J. W. (2008). *Classical Mechanics and Relativity*. Google-Books-ID : VFQ8C2iYxxoC. World Scientific. 575 p. ISBN : 978-981-283-251-1.
- NASA's Cosmos (2020). URL : <https://ase.tufts.edu/cosmos/index.asp> (visité le 29/07/2020).
- NICOL, Stan (2010). "Étude et construction d'un tomographe TEP/TDM pour petits animaux, combinant modules phoswich à scintillateurs et détecteur à pixels hybrides". In : p. 194.
- OPPENHEIMER, J. R. et G. M. VOLKOFF (15 fév. 1939). "On Massive Neutron Cores". In : *Physical Review* 55.4, p. 374-381. ISSN : 0031-899X. DOI : [10.1103/PhysRev.55.374](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.374).

- PAINLEVÉ, P. (1921). “La mécanique classique et la théorie de la relativité”. In : *Comptes Rendus Academie des Sciences (serie non specifiée)* 173, p. 677-680.
- PÉTRI, J. (11 avr. 2011). “A unified polar cap/stripped wind model for pulsed radio and gamma-ray emission in pulsars”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 412.3. Publisher : Oxford Academic, p. 1870-1880. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2010.18023.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.18023.x).
- (11 déc. 2017). “Multipolar electromagnetic fields around neutron stars : general-relativistic vacuum solutions”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 472.3, p. 3304-3336. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/stx2147](https://doi.org/10.1093/mnras/stx2147).
- (11 juin 2018). “General-relativistic pulsar magnetospheric emission”. In : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 477.1, p. 1035-1064. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/sty620](https://doi.org/10.1093/mnras/sty620).
- PÉTRI, Jérôme (2012). “High-energy emission from the pulsar striped wind : a synchrotron model for gamma-ray pulsars”. In : *MNRAS* 424.3, p. 2023-2027. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2012.21350.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21350.x).
- PHILIPPOV, Alexander A. et Anatoly SPITKOVSKY (1^{er} mar. 2018). “Ab-initio Pulsar Magnetosphere : Particle Acceleration in Oblique Rotators and High-energy Emission Modeling”. In : *The Astrophysical Journal* 855, p. 94. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.3847/1538-4357/aaabbc](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaabbc).
- PHILIPPOV, Alexander A. et al. (1^{er} déc. 2015). “Ab Initio Pulsar Magnetosphere : The Role of General Relativity”. In : *The Astrophysical Journal Letters* 815, p. L19. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1088/2041-8205/815/2/L19](https://doi.org/10.1088/2041-8205/815/2/L19).
- PHILLIPS, J. A. (1992). “Radio emission altitudes in the pulsar magnetosphere”. In : *The Astrophysical Journal* 385, p. 282-287. DOI : [10.1086/170936](https://doi.org/10.1086/170936).
- POUND, R. V. et G. A. REBKA (1^{er} nov. 1959). “Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance”. In : *Physical Review Letters* 3, p. 439-441. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.3.439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.439).
- PRESS, William H. et al. (6 sept. 2007). *Numerical Recipes 3rd Edition : The Art of Scientific Computing*. Google-Books-ID : 1aAOdzK3FegC. Cambridge University Press. 1195 p. ISBN : 978-0-521-88068-8.
- RATHER, Ishfaq, M IKRAM et Mohd IMRAN (17 déc. 2018). “Role of Hyperons in Neutron stars”. In :
- RAUCH, Kevin P. et Roger D. BLANDFORD (1^{er} jan. 1994). “Optical caustics in a kerr spacetime and the origin of rapid X-ray variability in active galactic nuclei”. In : *The Astrophysical Journal* 421, p. 46-68. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/173625](https://doi.org/10.1086/173625).
- RILEY, T. E. et al. (2019). “A NICER View of PSR J0030+0451 : Millisecond Pulsar Parameter Estimation”. en. In : *ApJL* 887.1, p. L21. ISSN : 2041-8205. DOI : [10.3847/2041-8213/ab481c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab481c).
- RUDERMAN, M. A. et P. G. SUTHERLAND (1^{er} fév. 1975). “Theory of pulsars - Polar caps, sparks, and coherent microwave radiation”. In : *The Astrophysical Journal* 196, p. 51-72. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/153393](https://doi.org/10.1086/153393).
- SAITO, Takayuki (17 mai 2011). “Study of the High Energy Gamma-ray Emission from the Crab Pulsar with the MAGIC telescope and Fermi-LAT”. In : *arXiv :1105.3400 [astro-ph]*. arXiv : [1105.3400](https://arxiv.org/abs/1105.3400).

- SHITOV, Y. P. (1983). “Period Dependence of the Spectrum and the Phenomenon of Twisting of the Magnetic Fields of Pulsars”. In : *Soviet Astronomy* 27, p. 314. ISSN : 0038-5301.
- SLANE, Patrick (2017). “Pulsar Wind Nebulae”. In : *arXiv :1703.09311 [astro-ph]*, p. 2159-2179. DOI : [10.1007/978-3-319-21846-5_95](https://doi.org/10.1007/978-3-319-21846-5_95). arXiv : [1703.09311](https://arxiv.org/abs/1703.09311).
- SPITKOVSKY, Anatoly (1^{er} sept. 2006). “Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres : Axisymmetric and Oblique Rotators”. In : *The Astrophysical Journal Letters* 648, p. L51-L54. DOI : [10.1086/507518](https://doi.org/10.1086/507518).
- STAEIN, D. H. et E. C. REIFENSTEIN III (1968). “Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula”. In : *Science* 162, p. 1481-1483. DOI : [10.1126/science.162.3861.1481](https://doi.org/10.1126/science.162.3861.1481).
- SZARY, Andrzej et al. (2014). “Radio Efficiency of Pulsars”. en. In : *ApJ* 784.1, p. 59. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1088/0004-637X/784/1/59](https://doi.org/10.1088/0004-637X/784/1/59).
- SZEKERES, György (1960). “On the singularities of a Riemannian manifold”. In : *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7, 285 (1960) 7.
- The Feynman Lectures on Physics Vol. II Ch. 26 : Lorentz Transformations of the Fields* (2020). URL : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_26.html (visité le 11/06/2020).
- TOLMAN, Richard C. (15 fév. 1939). “Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid”. In : *Physical Review* 55.4, p. 364-373. ISSN : 0031-899X. DOI : [10.1103/PhysRev.55.364](https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.364).
- VENTER, C., T. J. JOHNSON et A. K. HARDING (déc. 2011). “MODELING PHASE-ALIGNED GAMMA-RAY AND RADIO MILLISECOND PULSAR LIGHT CURVES”. In : *The Astrophysical Journal* 744.1. Publisher : American Astronomical Society, p. 34. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1088/0004-637X/744/1/34](https://doi.org/10.1088/0004-637X/744/1/34).
- VENTER, C et al. (1^{er} nov. 2014). “Modelling the light curves of Fermi LAT millisecond pulsars”. In : *arXiv e-prints* 1411, arXiv :1411.0559.
- VIIRONEN, K. et J. POUTANEN (1^{er} nov. 2004). “Light curves and polarization of accretion- and nuclear-powered millisecond pulsars”. In : *Astronomy and Astrophysics* 426, p. 985-997. ISSN : 0004-6361. DOI : [10.1051/0004-6361:20041084](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041084).
- WATTERS, Kristy et al. (19 déc. 2008). “An Atlas For Interpreting Gamma-Ray Pulsar Light Curves”. In : *Astrophysical Journal - ASTROPHYS J* 695. DOI : [10.1088/0004-637X/695/2/1289](https://doi.org/10.1088/0004-637X/695/2/1289).
- WEISBERG, J. M. et J. H. TAYLOR (juil. 2005). “The Relativistic Binary Pulsar B1913+16 : Thirty Years of Observations and Analysis”. In : *Binary Radio Pulsars*. Sous la dir. de F. A. RASIO & I. H. STAIRS. T. 328. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, p. 25-+.
- WOLSZCZAN, A. et D. A. FRAIL (1^{er} jan. 1992). “A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12”. In : *Nature* 355, p. 145-147. ISSN : 0028-0836. DOI : [10.1038/355145a0](https://doi.org/10.1038/355145a0).
- X-ray Pulsar — COSMOS* (2020). URL : <https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/X/X-ray+Pulsar> (visité le 30/07/2020).

Appendices

Annexe A

Métrie de Schwarzschild

A.1 Schwarzschild

Comme cela a notamment été fait dans MOORE, 2012, on peut trouver l'expression de l'intervalle espace-temps dans la métrie de Schwarzschild à partir de l'intervalle d'espace-temps d'une métrie à symétrie sphérique et statique de l'équation (1.58), de l'équation d'Einstein et de l'équation géodésique qui établit que pour tout objet de coordonnées spatio-temporels x^σ , on a :

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (\text{A.1})$$

On voudrait que la métrie de Schwarzschild soit diagonale, notamment pour simplifier le passage des composantes contravariantes aux composantes covariantes, or comme $g_{01} = 0$, on doit également avoir $g_{10} = 0$. On peut alors prendre une coordonnée temporelle qui donnerait la composante g_{10} nulle, ainsi en posant $ct' = ct + f$ avec f une fonction dépendante de r et ct ce qui implique :

$$cdt' = cdt + \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} cdt \quad (\text{A.2})$$

On peut alors réécrire l'équation (1.58) en posant :

$$cdt = \frac{cdt' - \frac{\partial f}{\partial r} dr}{1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (\text{A.3})$$

Ce qui nous donne :

$$ds^2 = g'_{00} c^2 dt'^2 + 2g'_{10} dr dt' + g'_{11} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$g'_{00} = g_{00} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} \quad (\text{A.5})$$

$$g'_{10} = g_{10} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-1} - g_{00} \frac{\partial f}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} \quad (\text{A.6})$$

$$g'_{11} = g_{11} + g_{00} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-2} - 2g_{10} \frac{\partial f}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)^{-1} \quad (\text{A.7})$$

On peut alors prendre f tel que $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{g_{10}}{g_{00}} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right)$ ce qui donnerait bien $g'_{10} = 0$.

Ainsi par un changement de coordonnées, nous pouvons réécrire l'équation (1.58) :

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (\text{A.8})$$

Où t , g_{00} et g_{11} correspondent respectivement au t' , g'_{00} et g'_{11} de l'équation (A.4). Si l'on prend $g_{00} = -1$ et $g_{11} = 1$, l'équation (A.4) décrit alors l'intervalle d'espace-temps pour la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques, métrique qui correspond à un espace-temps plat donc sans influence gravitationnelle :

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2). \quad (\text{A.9})$$

La métrique de Schwarzschild est à symétrie sphérique ce qui veut dire que g_{00} et g_{11} sont indépendants de θ et ϕ , on peut donc déduire des équations (1.52) et (1.53) la forme que prendra le tenseur de Ricci associé à la métrique de Schwarzschild :

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

avec :

$$R_{00} = \frac{1}{2g_{11}} \left[-\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial r^2} + \frac{1}{2g_{00}} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial t^2} + \frac{1}{2c^2 g_{11}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2c^2 g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial t} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$R_{11} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right) + \frac{g_{11}}{g_{00}} R_{00} \quad (\text{A.12})$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2g_{00}g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} + \frac{1}{2g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} + 1 - \frac{1}{g_{11}} \quad (\text{A.13})$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (\text{A.14})$$

$$R_{01} = \frac{1}{rcg_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \quad (\text{A.15})$$

Dans le cas d'un espace-temps vide, soit $T_{\mu\nu} = 0$, si on néglige la constante cosmologique Λ , alors l'équation (1.50) implique que $R_{\mu\nu} = 0$. On peut en déduire que g_{11} est indépendant du temps car si $R_{01} = 0$ alors d'après l'équation (A.15) ce n'est possible que si $\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = 0$.

Comme pour un espace-temps vide on a $R_{00} = R_{11} = 0$, on en déduit de l'équation (A.12) que :

$$\frac{g_{00}}{g_{11}} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = -\frac{\partial g_{00}}{\partial r} \quad (\text{A.16})$$

Et donc on a, à partir de l'équation (A.13) :

$$\frac{1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} + 1 - \frac{1}{g_{11}} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Soit $\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{g_{11}} \right) = 1$ que l'on peut intégrer pour obtenir :

$$g_{11} = \left(1 + \frac{K}{r} \right)^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Avec K une constante d'intégration.

La métrique de Schwarzschild étant statique, et g_{00} devant être du signe opposé aux autres composantes de la matrice, avec le bon choix de coordonnée temporel on

peut alors poser à partir de l'équation (A.16) :

$$g_{00} = - \left(1 + \frac{K}{r} \right) \quad (\text{A.19})$$

L'intervalle espace-temps s'écrira alors :

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{K}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{K}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (\text{A.20})$$

Pour trouver la valeur de K , on va utiliser la quadrivitesse u^k d'un objet au repos de coordonnées x^k , la quadrivitesse étant l'équivalent du vecteur vitesse dans l'espace-temps :

$$u^k = \frac{dx^k}{d\tau} \quad (\text{A.21})$$

avec τ le temps propre observé par cette objet. L'intervalle infinitésimal de temps propre de cette objet $d\tau$ pouvant s'écrire ainsi (MÜLLER-KIRSTEN, 2008) :

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (\text{A.22})$$

Le produit par elle même de la quadrivitesse vaudra alors $-c^2$ soit :

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2 \quad (\text{A.23})$$

Pour un objet au repos, toutes les composantes spatiales de la quadrivitesse sont nulles, on a donc $g_{00} u^0 u^0 = -c^2$ soit $u^0 = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}$. En appliquant l'équation des géodésiques définis dans l'équation (A.1) aux coordonnées x^k de cet objet au repos, on peut poser :

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \Gamma_{00}^k \frac{c^2}{g_{00}} \quad (\text{A.24})$$

ce qui équivaut à :

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = - \frac{c^2}{g_{00} g_{11}} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \quad (\text{A.25})$$

Soit en remplaçant g_{00} par $-(1 + \frac{K}{r})$ et g_{11} par $\frac{1}{1 + \frac{K}{r}}$:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = \frac{K c^2}{2 r^2} \quad (\text{A.26})$$

Afin de retrouver les lois newtoniennes lorsque l'on se retrouve à une distance importante de l'astre dont la masse déforme l'espace-temps, on doit donc avoir $K = -\frac{2GM}{c^2}$. En effet, en supposant que l'on ait plus d'effets relativistes dus au champ gravitationnel pour $r \rightarrow \infty$, on verra alors que le temps propre τ tendra à être égal au temps t pour un observateur au repos, ce qui donnera bien :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \quad (\text{A.27})$$

Soit l'accélération d'un objet dans un champ de pesanteur en mécanique newto-

nienne.

A.1.1 Trajectoire d'un photon dans le plan équatorial

Pour tracer la trajectoire du photon dans le plan équatorial de la métrique de Schwarzschild, que l'on peut alors écrire sous la forme présentée dans l'équation (2.1), on commence par retrouver les composantes du quadrivecteur quantité de mouvement de ce photon que l'on peut déduire du fait que la trajectoire du photon entre deux points de l'espace-temps obéit à l'équation géodésique (A.1). Supposons que les coordonnées du photon x^i (ici ct , r , ϕ et $\theta = \frac{\pi}{2}$) soient paramétrisées par la variable λ soit $x^i(\lambda)$ tel que la quantité de mouvement de ce photon s'écrive $p^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ avec p^i les composantes du vecteur quantité de mouvement du photon, on peut alors déduire de l'équation (A.1) :

$$\frac{dp^i}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^i p^\mu p^\nu = 0 \quad (\text{A.28})$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{dp^0}{d\lambda} + \frac{R_S}{r^2(1 - \frac{R_S}{r})} p^0 p^1 = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{dp^1}{d\lambda} + \frac{R_S(1 - \frac{R_S}{r})}{2r^2} (p^0)^2 - \frac{R_S}{2r^2(1 - \frac{R_S}{r})} (p^1)^2 - r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) (p^3)^2 = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{dp^3}{d\lambda} + \frac{2}{r} p^3 p^1 = 0 \quad (\text{A.31})$$

En intégrant ces équations on peut ainsi retrouver les composantes du vecteur quantité de mouvement du photon (p^2 étant évidemment nulle comme la coordonnée θ est constante dans le plan équatoriale) :

$$p^0 = \frac{A}{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (\text{A.32})$$

$$p^1 = \pm \sqrt{A^2 + B^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} \quad (\text{A.33})$$

$$p^2 = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$p^3 = \frac{C}{r^2} \quad (\text{A.35})$$

Avec A, B et C des constantes d'intégration paramétrisant l'orbite du photon. Comme un photon a une géodésique nulle ($ds^2 = 0$), alors le quadrivecteur p^μ doit avoir une

norme nulle or $p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 0$ uniquement si $B = 0$, on en déduit donc :

$$p^0 = \frac{A}{1 - \frac{R_S}{r}} \quad (\text{A.36})$$

$$p^1 = \pm \sqrt{A^2 - \frac{C^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} \quad (\text{A.37})$$

$$p^2 = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$p^3 = \frac{C}{r^2} \quad (\text{A.39})$$

Soit $E = -g_{\mu\nu} v^\mu p^\nu$ l'énergie du photon où v^μ est la quadrivitesse de l'observateur statique avec comme on l'a vu à la section 1.4.1, $v^0 = \frac{c}{\sqrt{-g_{00}}}$ donc l'énergie du photon est $E = \frac{cA}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}$. Quand $r \rightarrow \infty$, on a donc $A = \frac{E}{c}$, A est donc égale à l'énergie du photon à l'infini divisée par c .

On peut déduire de la quantité de mouvement du photon la dérivée de la coordonnée angulaire du photon par sa coordonnée radiale $\frac{d\phi}{dr} = \frac{p^3}{p^1}$ ce qui donne :

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{C}{r^2 \sqrt{A^2 - C^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}} \quad (\text{A.40})$$

On pose $b = \frac{C}{A}$ le paramètre d'impact du photon :

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{b}{r^2 \sqrt{1 - b^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}} \quad (\text{A.41})$$

Pour un photon émis à l'altitude r_0 , l'angle α entre sa direction de propagation initiale et la direction radiale peut être exprimé à partir des quadrivecteurs de quantité de mouvement radiale et angulaire, quadrivecteurs qui ont une seule composante non nulle, respectivement p^0 et p^3 , et qui sont donc perpendiculaire l'un par rapport à l'autre :

$$\tan \alpha = \frac{\|\vec{p}_{angulaire}\|}{\|\vec{p}_{radiale}\|} = \frac{\sqrt{g_{33} p^3 p^3}}{\sqrt{g_{11} p^1 p^1}} \quad (\text{A.42})$$

à partir des équations (A.37) et (A.39), on peut ainsi en déduire que :

$$\tan \alpha = \frac{\frac{b}{r_0}}{\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R_S}{r_0}} - \frac{b^2}{r_0^2}}} \quad (\text{A.43})$$

A partir de l'identité trigonométrique $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, on peut alors poser :

$$\sin \alpha = \frac{b}{r_0} \sqrt{1 - \frac{R_S}{r_0}} \quad (\text{A.44})$$

Annexe B

Méthodes et outils numériques

Les algorithmes présentés ici sont tirés de PRESS et al., 2007.

B.1 Méthode d'intégration

L'algorithme que l'on a utilisé pour intégrer les équations tout au long de cette thèse se base sur la quadrature de Clenshaw-Curtis décrite initialement dans CLENSHAW et CURTIS, 1960.

Soit le polynôme de Tchebychev d'ordre n :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (\text{B.1})$$

A partir de cette définition et des identités trigonométriques, on peut retrouver le polynôme de rang $n + 1$, pour $n \geq 1$:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (\text{B.2})$$

Chaque polynôme de Tchebychev de rang n va être nul n fois sur l'intervalle $[-1, 1]$, chacune des valeurs x_k de x pour lesquels ces polynômes sont nuls sont données par la formule :

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{n}\right) \quad (\text{B.3})$$

pour k un entier compris entre 0 et $n - 1$.

Les polynômes de Tchebychev obéissent à la relation d'orthogonalité suivante (pour $a < n$ et $b < n$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_a(x_k)T_b(x_k) \begin{cases} 0 & \text{pour } a \neq b \\ \frac{n}{2} & \text{pour } a = b \neq 0 \\ n & \text{pour } a = b = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

On peut alors approximer toute fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ sous la forme :

$$f(x) \approx -\frac{1}{2}c_0 + \sum_{j=0}^{N-1} c_j T_j(x) \quad (\text{B.5})$$

Avec c_j les coefficients de Tchebychev de la fonction tel que :

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) T_j(x_k) \quad (\text{B.6})$$

Soit en y incluant les équations (B.1) et (B.3) :

$$c_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \left[\cos \left(\frac{\pi(k + \frac{1}{2})}{N} \right) \right] \cos \left(\frac{\pi j(k + \frac{1}{2})}{N} \right) \quad (\text{B.7})$$

L'approximation de l'équation (B.5) sera exacte quand on prend un des x_k de l'équation (B.3) comme valeur de x .

La quadrature de Clenshaw-Curtis permet d'intégrer cette fonction $f(x)$ entre les bornes a et b à l'aide de ses coefficients de Tchebychev, mais comme le calcul de ces coefficients grâce à la formule de l'équation (B.7) n'est possible que pour une fonction définie entre -1 et 1 , on doit effectuer un changement de variable :

$$y = \frac{x - \frac{1}{2}(b+a)}{\frac{1}{2}(b-a)} \quad (\text{B.8})$$

L'intégrale de cette équation peut ainsi s'écrire :

$$\int_b^a f(y) dy = (b-a) \sum_{k=0}^N \frac{-1}{(2k+1)(2k-1)} c_{2k} \quad (\text{B.9})$$

Pour des soucis de ressources de calculs et de précision, un compromis pour la valeur de N fixée à 512 a été utilisé tout au long de cette thèse.

B.2 Recherche de zéro par bisection

On a fait appel dans cette thèse à un algorithme de recherche de zéro par bisection lorsque l'on avait besoin de connaître, pour une fonction $f(x)$, x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

D'abord on recherche un intervalle $[x_1, x_2]$ où la fonction change de signe et donc où celle-ci s'annule au moins une fois (si la fonction est continue sur cette intervalle). Si on cherche x_0 dans l'intervalle $[x_a, x_b]$, alors on peut circonscrire cette recherche

dans un intervalle $[x_1, x_2]$, pour cela on calcule $f(x_n)$ avec :

$$x_n = x_{n-1} + \delta x \quad (\text{B.10})$$

où δx vaut :

$$\delta x = \frac{x_a - x_b}{n} \quad (\text{B.11})$$

jusqu'à ce que $f(x_n)$ soit du signe opposé à $f(x_{n-1})$ (soit $f(x_{n-1}) \times f(x_n) < 0$), on enregistrera alors x_{n-1} et x_n comme les bornes de l'intervalle dans lequel se situe x_0 , respectivement x_1 et x_2 , n étant un entier que l'on a pris allant de 0 à 100.

Maintenant que l'on a circonscrit nos recherches dans un intervalle $[x_1, x_2]$ on peut utiliser la méthode de la bisection pour trouver x_0 pour laquelle $f(x_0) = 0$. On calcule pour cela l'image $f(x_m)$ du point médian x_m :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\text{B.12})$$

Si $f(x_m)$ est du même signe que $f(x_1)$ ($f(x_1) \times f(x_m) > 0$), alors on pose $x_1 = x_m$, sinon on pose $x_2 = x_m$.

On recommence l'opération en calculant l'image du point médian du nouvel intervalle $[x_1, x_2]$ jusqu'à ce que la différence entre les deux valeurs x_1 et x_2 encadrant notre racine soit inférieure à une certaine valeur que l'on a fixée à 10^{-7} et l'on supposera alors que $x_0 \approx x_1$.

B.3 Résolution de polynôme du troisième degré

Pour trouver la racine x d'un polynôme du troisième degré tel que :

$$x^3 + ax^2 + x + c = 0 \quad (\text{B.13})$$

où a , b et c sont des réels, on doit d'abord poser Q et R :

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9} \quad (\text{B.14})$$

$$R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} \quad (\text{B.15})$$

A partir de ces deux quantités, on peut calculer θ et A :

$$\theta = \arccos \left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}} \right) \quad (\text{B.16})$$

$$A = - \left[R + \sqrt{R^2 - Q^3} \right]^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{B.17})$$

Si $R^2 < Q^3$, alors l'équation (B.13) à trois solutions x_1 , x_2 et x_3 :

$$x_1 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a}{3} \quad (\text{B.18})$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3} \quad (\text{B.19})$$

$$x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta - 2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3} \quad (\text{B.20})$$

Soit B tel que $B = 0$ si $A = 0$, $B = \frac{Q}{A}$ sinon.

Si $R^2 \geq Q^3$ alors l'unique solution à l'équation (B.13) sera :

$$x = (A + B) - \frac{a}{3} \quad (\text{B.21})$$

Corrections général-relativistes à l'émission radio et haute énergie d'un pulsar

Résumé

Les étoiles à neutrons sont des astres extrêmement denses, plus denses qu'un noyau atomique, formés au cours d'une supernova. Une étoile à neutrons typique concentre ainsi une masse supérieure à celle du Soleil dans son diamètre d'une vingtaine de kilomètres. D'après la théorie de la relativité générale, qui décrit la gravité comme une déformation de l'espace-temps, le champ gravitationnel de ces étoiles devrait affecter de manière non négligeable les rayonnements électromagnétiques à proximité de celles-ci. Au cours de ma thèse, j'ai simulé les émissions radio et haute énergie provenant de l'accélération de particules le long des lignes de champ magnétique d'une étoile à neutrons dans la métrique de Schwarzschild pour savoir comment le rayonnement ainsi produit allait être affecté par les déformations de l'espace-temps au voisinage de l'étoile à neutrons.

Résumé en anglais

Neutron stars are very dense objects, denser than an atomic nucleus, formed during a supernova. A typical neutron star concentrates a mass superior to the one of the Sun in its diameter of around twenty kilometers. According to general relativity, which describes gravity as a space-time distortion, the gravitational field of those stars should have a non-negligible impact on electromagnetic radiations close to them. During my thesis, I have simulated radio and high-energy emission originating from particles accelerated along the magnetic field lines of the neutron star inside the Schwarzschild metric to have an insight of how this kind of radiations would be affected by space-time distortions in the vicinity of the neutron star.