

ÉCOLE DOCTORALE 269

UMR 7501

THÈSE

présentée par :

Frédéric Valet

soutenue le : **15 juillet 2020**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de Strasbourg**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques**

Etude de comportements en temps long de solutions des Equations de type Zakharov-Kuznetsov

THÈSE dirigée par :

M. CÔTE Raphaël

Professeur, Université de Strasbourg

RAPPORTEURS :

M. HOLMER Justin

Associate Professor, Brown University

M. MOLINET Luc

Professeur, Université de Tours

AUTRES MEMBRES DU JURY :

M. COMBET Vianney

Maître de Conférence, Université de Lille

M. PRIVAT Yannick

Professeur, Université de Strasbourg

M. SAUT Jean-Claude

Professeur Émérite, Université Paris-Saclay

Mme SCHÖRKHUBER Birgit

Junior Research Group Leader, Karlsruhe Institute of Technology

Étude de comportements en temps long de solutions des
Équations de type Zakharov-Kuznetsov

Résumé

Cette thèse porte sur différents aspects des comportements en temps long des équations de Zakharov-Kuznetsov généralisées:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^p) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^d, \quad d \in \{2, 3\}, \quad p \geq 2. \quad (\text{gZK})$$

Le premier chapitre résume l'état actuel des connaissances sur ces équations. Le second chapitre est consacré à la croissance polynomiale des normes de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ pour l'équation (gZK) en dimension $d = 2$ et une puissance de non-linéarité $p = 2$. Dans le troisième chapitre, on démontre l'existence et l'unicité des multi-solitons associées à différentes équations de Zakharov-Kuznetsov $((d, p) = (2, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 2))$. Enfin, dans un quatrième chapitre, on expose des idées de construction de 2-solitons avec interaction forte pour l'équation (gZK) en dimension $d = 2$ et une non-linéarité $f(u) = |u|^{p-1}u$, où $2 < p < 3$.

Abstract

In this thesis, we study different aspects of behaviors in long time of the generalized Zakharov-Kuznetsov equations:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^p) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^d, \quad d \in \{2, 3\}, \quad p \geq 2. \quad (\text{gZK})$$

The first chapter sums up the state-of-the-art knowledges on those equations. The second chapter is dedicated to polynomial growth of Sobolev norms $H^s(\mathbb{R}^2)$ for the equation (gZK) in dimension $d = 2$ and a power of nonlinearity $p = 2$. In the third chapter, we prove existence and uniqueness of multi-solitons associated with different equation of Zakharov-Kuznetsov equations $((d, p) = (2, 2), (2, 3) \text{ et } (3, 2))$. In the last chapter, we introduce some ideas of construction of a 2-solitons with strong interaction for the (gZK) equation in dimension $d = 2$ and a non-linearity $f(u) = |u|^{p-1}u$, with $2 < p < 3$.

Remerciements

La première personne à remercier est évidemment mon directeur de thèse, Raphaël Côte. Je te remercie pour l'opportunité de réaliser ma thèse sous ta direction, pour toute la connaissance que tu m'as apportée, pour ta patience d'expliquer ce que je mettais quelques fois du temps à comprendre, pour ton entrain, pour me laisser le temps d'explorer mes pistes qui n'aboutissaient pas et pour toutes tes qualités qui font de toi un excellent directeur de thèse. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler sous ta tutelle, ainsi qu'à notre collaboration. Merci encore pour toutes les opportunités que tu m'as offertes de pouvoir assister et participer à toutes sortes de conférences. Enfin, merci de m'avoir présenté des opportunités pour continuer dans la recherche.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Justin Holmer et Luc Molinet d'avoir accepté de rapporter cette thèse, et pour leur lecture attentive et les remarques pertinentes en vue d'améliorer ce manuscrit. Je remercie aussi Vianney Combet, Yannick Privat, Jean-Claude Saut et Birgit Schörkhuber d'avoir chacun accepté d'être examinateur.

Au sein du laboratoire IRMA, les séminaires réguliers m'ont permis de m'épanouir scientifiquement. Je remercie donc les membres de l'équipe MOCO, de l'équipe d'Analyse, ainsi que le séminaire Doctorant (dirigé par Audrey, Cuong, Philippe R. et Thibault, que je remercie particulièrement) pour toutes ces ouvertures scientifiques et approfondies.

Cette thèse n'aurait pas été possible sans financement : je remercie l'ENS Rennes pour ces trois premières années de thèse, et l'Université de Strasbourg pour l'opportunité de terminer mes travaux commencés en travaillant ma dernière année en tant qu'ATER.

J'ai énormément appris durant ces périodes d'enseignement en parallèle de la thèse. Je tiens à remercier pour leur éclaircissements et techniques d'apprentissages Adriano M., Arnaud D., Christine V., Loïc T., Michaël G., Miloud B., Rémy D. et Vladimir D..

Je tiens aussi à remercier les formidables membres de l'équipe administrative qui m'ont tant aidé durant toutes mes démarches : Mmes Bertschy, Bosse, Igot, Karleskind, Maurer-Spoerk et Schmitt. Je remercie également toute l'équipe de la bibliothèque de Mathématiques de Strasbourg, et leur aide pour m'y retrouver parmi tout ce savoir.

Au-delà du dur labeur, cette thèse a été accompagnée de mes fidèles co-bureaux Jean-Baptiste, Romain, Mohammad, Luca, Thibault et Antoine avec qui les discussions de maths (et pas que!) permettent de garder la tête sur la épaule, et grâce à vous, de profiter d'une agréable ambiance de travail.

Vient le moment des amis, ceux qui m'ont apporté le sourire au quotidien et ceux à qui je pense régulièrement. Je tiens à remercier Agathe et Guillaume, Camille F.,

Florian, Kim, Laura G., Maud et Maylis; Audrey et Jérémy, Aurore, Claire T., Laura V, Pierre-Alexandre deM..

Je tiens à remercier tous les doctorants et assimilés d'aujourd'hui et d'hier qui m'ont tant apporté ces dernières années (un oubli serait involontaire!), toujours dispos pour boire une bière après le séminaire : Alexander T. et Eve, Alexander S., Alexandre D., Alix, Amandine, Amaury, Anderson, Andres, Antoine, Archia, Artemiy, Arthur, Audrey V., Camille C., Céline, Claire R., Djibril, Étienne, Emmanuelle, Francisco, François, Gatien, Guillaume D., Guillaume K., Guillaume M. (Lesquels sont les grands, lesquels sont les petits?), Kien, Laura M., Lorenzo, Luca, Lukas, Marianne, Marie C., Marie H., Martin, Mikel, Nicolas, Philippe M., Pierre, Pierre-Alexandre A., Romain, Romane, Simão, Thomas, Titin, Tsung-Hsuan, Valdo, Xavier, Xing et Yohann.

Durant ces dernières années, j'ai pu m'épanouir autrement que mathématiquement. Je remercie pour leur accueil et les joies qu'ils m'ont apportées, l'antenne de Strasbourg du Refuge, et l'association Du fil et des liens de Mulhouse que m'a fait découvrir Céline. Le travail est important, mais il faut toujours garder à l'esprit que d'autres ouvertures sur le monde permettent de se sentir complet : c'est ce que ces merveilleuses associations m'ont procuré.

Je tiens à remercier les membres de ma famille pour leur soutien continuél durant cette période : mes parents, Mémé et Mamie, Sandra, Séverine, Jarod et Adryiel ; merci à mes oncles et tantes, Catherine et Philippe, Marie-Claire et Lionel, Jean-Yves, ainsi que tous mes cousin·e·s et petit·e·s-cousin·e·s. Je pense aussi fortement à Pépé et Papi, à qui je dédie cette thèse.

Enfin, je termine avec celui qui m'a accompagné ces dernières années : tu m'as supporté malgré mon mauvais caractère, toujours soutenu lorsque j'en avais besoin, et toujours été patient lorsque je prenais mon temps. Ton attention, ta joie de vivre et tes talents de pâtissier m'ont permis d'aboutir cette thèse. Je sais que j'ai pu compter sur toi, et que je le pourrai encore à l'avenir.

Merci Maxence.

Sommaire

1	Introduction aux Équations de Zakharov-Kuznetsov	3
1.1	Comment lire cette thèse?	4
1.2	Les premières observations de solitons.	5
1.2.1	Les solitons en hydrodynamique : l'équation de Korteweg-de Vries.	5
1.2.2	Les solitons en physique des plasmas	6
1.2.3	Généralisation des équations précédentes.	7
1.2.4	Justification rigoureuse des dérivations de (ZK).	8
1.2.5	Les solitons de l'équation de Schrödinger.	8
1.3	Les solitons : des objets mathématiques maniables	9
1.3.1	Une formulation explicite?	9
1.3.2	Quantités conservées, méthodes de scattering inverse et intégrabilité	9
1.3.3	Propriétés des solitons pour (ZK)	11
1.4	Problème de Cauchy et évolution des normes	11
1.4.1	Coefficient de masse critique	11
1.4.2	Le problème de Cauchy.	13
1.4.3	La croissance des normes	16
1.4.4	Explosion de la solution	19
1.5	Stabilité des solitons	19
1.5.1	Différentes notions de stabilité	19
1.5.2	Stabilité orbitale	20
1.5.3	Stabilité asymptotique	21
1.5.4	D'autres résultats de stabilité	22
1.5.5	Principe de continuation unique	22
1.6	Temps d'existence fini et explosion	22
1.7	Décomposition d'une solution en une somme de solitons	24
1.7.1	Multi-solitons en temps long	25
1.7.2	Des collisions élastiques?	29
1.8	Interactions fortes	31
1.9	Plan de la thèse et problèmes ouverts	32
2	Croissance polynomiale des normes de Sobolev	35
2.1	Statement of the result.	36
2.2	Notations and basic facts	38
2.2.1	Notations	38
2.2.2	Strichartz estimates and Bourgain spaces	40

2.3	Bilinear estimates	45
2.4	Growth of Sobolev norms	49
2.5	Appendix : Proof of lemma 16	54
3	Construction et existence de multi-solitons	59
3.1	Introduction	60
3.1.1	Solitons and multi-solitons	61
3.1.2	Main results	62
3.1.3	Outline and notations	64
3.2	Control of the $H^1(\mathbb{R}^d)$ -norm of the error	65
3.2.1	Bounds on the interaction and coercivity	65
3.2.2	Cut-off functions, adapted masses and energies	66
3.2.3	Modulation	67
3.2.4	Evolution of the masses and energies	71
3.2.5	Proof of the exponential decay (3.5)	73
3.3	H^s -estimate	76
3.3.1	Control of a localised $\dot{H}^s$ -norm of the error.	80
3.3.2	Control of the variation of the $\dot{H}^s$ -norm of the solution.	81
3.3.3	H^4 and H^s bounds of the errors	83
3.4	End of the construction of a smooth multi-soliton	86
3.5	Uniqueness	88
3.6	Appendix A : Coercivity	94
3.7	Appendix B : Local well posedness	97
4	Interaction forte entre deux solitons	99
4.1	Introduction	100
4.1.1	Position of the problem	100
4.1.2	Strong Interaction of order 2	102
4.1.3	Strong interactions of order 1.	104
4.1.4	Discussion	105
4.2	Construction	106
4.3	The Bootstrap	112
4.3.1	System of ODEs	114
4.3.2	The monster : the functional	115
4.4	Appendix : Approximation of a soliton $Q(x)$	118
	Bibliographie	123

Chapitre 1

Introduction aux Équations de Zakharov-Kuznetsov

1.1 Comment lire cette thèse?

Ce manuscrit porte sur divers aspects des solutions des équations de Zakharov-Kuznetsov généralisées (ZK). L'ensemble des problématiques liées aux équations dispersives non-linéaires étant vaste, nous rappelons dans cette introduction les différents problèmes qui viennent à se poser, ce qui aiguillera le lecteur novice en la matière, et situera au lecteur aguerri les résultats de cette thèse dans le champ des connaissances actuelles. Nous exposons dans cette introduction des problématiques différentes, qui pour autant sont inter-dépendantes : des connaissances liées à une problématique en particulier peuvent aider à la résolution d'une autre. Précisons dès à présent les résultats inédits de cette thèse: sur la croissance polynomiale des normes en section 1.4; les multi-solitons en section 1.7.1; et des prémisses de calculs d'interactions fortes en section 1.8.

L'introduction de cette thèse est organisée de la manière suivante. La découverte historique et physique des solitons, ainsi que des équations qui les modélisent sont exposées en section 1.2. Notons que ces solitons découlent d'une fonction non triviale minimiseur d'une certaine énergie, appelée ground-state : dans ce cadre, nous faisons le parallèle avec d'autres équations dispersives non-linéaires qui admettent aussi des objets intrinsèques à ces équations liés aux ground-state.

Une fois que cette équation est établie, vient le premier problème lié à une équation aux dérivées partielles : déterminer sur quel intervalle de temps la solution d'une équation existe. La section 1.4 est donc consacrée au problème de Cauchy : si une condition initiale est imposée, quel est le temps d'existence de cette solution? En particulier, les théorèmes d'existence exposés ici donnent aussi sur l'intervalle d'existence une borne sur la norme de la solution. Le pendant de cette idée est donc d'itérer ce théorème sur des intervalles de temps successifs, et ainsi déterminer une borne sur la solution au fil du temps. La section 1.4.3 est donc dédiée à la croissance des normes, et nous exposons dans cette partie un résultat novateur, portant sur la croissance polynomiale des normes de Sobolev d'une équation de (ZK) en dimension $d = 2$.

Nous continuons l'exposition de résultats actuels portant sur les équations de (ZK) en abordant le sujet de la stabilité en section 1.5, avec en particulier la question suivante : si un soliton est une solution au fil du temps, qu'en est-il si une condition initiale est un soliton perturbé? La solution va-t-elle converger vers ce soliton, ou bien s'en éloigner?

La section 1.6 est dédiée au bord du domaine de définition d'une solution : soit son temps d'existence est fini, soit il est infini. Dans le premier cas, cela signifie qu'il y a explosion en temps fini de certaines normes de Sobolev. Dans le second cas, il est aussi possible qu'une explosion ait lieu en temps infini : c'est pour cela que l'on s'intéresse à la croissance des normes. En particulier, on s'intéresse à la masse minimale nécessaire pour faire exploser une solution, ainsi qu'au profil d'explosion de cette solution à proximité du temps d'explosion.

Puisque les solitons sont solutions d'équations non-linéaires, une somme de solitons n'est plus une solution. La section 1.7 se consacre à la décomposition d'une solution en temps long comme une somme de solitons. On définit ainsi un multi-soliton comme une

solution qui en temps long se comporte comme une somme de solitons découplés. En particulier, nous exposons dans cette partie un nouveau résultat concernant l'existence et l'unicité de multi-solitons à vitesses et shift donnés. Cet objet est très régulier, dans H^s pour $s \geq 0$. Nous contrôlons de plus les normes H^s de Sobolev de l'erreur entre cette solution et la somme des solitons découplés. Notons qu'il découle de ce résultat la question de collisions élastiques : comment réagissent différents solitons qui se chevauchent ?

Il est donc naturel de se demander comment interagissent différents solitons. La section 1.8 porte sur un pan de cette problématique : elle rassemble des résultats sur des interactions fortes en temps long de deux solitons (ou objets similaires), pour lesquels le comportement en temps long va être dicté par l'interaction entre ces deux solitons. Les résultats exposés sont des interactions fortes faisant intervenir deux paramètres de modulation. Nous proposons dans la partie 1.8 de nouvelles idées pour construire des solutions proches d'une somme de deux-solitons à la même vitesse, dont l'interaction va diriger leur comportement en temps long, grâce à un seul paramètre de modulation. Cette interaction plus faible à un paramètre qu'à deux paramètres entraîne une nécessité d'un contrôle plus précis de notre solution. Nous exposons ici une partie des calculs qui permettraient d'aboutir à la construction d'une telle solution, détaillée au chapitre 4.

Au fil de cette introduction, le lecteur remarquera que plusieurs conjectures restent irrésolues, et qu'il faudra attendre encore plusieurs années avant de voir démontrés ces résultats.

1.2 Les premières observations de solitons.

1.2.1 Les solitons en hydrodynamique : l'équation de Korteweg-de Vries.

Tout commence avec l'observation des vagues. Dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, un ingénieur anglais en hydrodynamique, John Scott Russell, observa un phénomène qu'il trouva curieux et qu'il reporta dans [115]. Après l'arrêt brutal d'un bateau dans un canal longiligne, une certaine vague se propagea depuis le bateau le long du canal. L'ingénieur anglais remarqua qu'elle gardait la même forme et la même vitesse au fil du temps, et décida de la suivre à cheval. Ce qu'il fit non pas sur plusieurs mètres, mais sur plusieurs kilomètres ! Il reporta à la "British Association for the advancement of Science" cet étrange phénomène, sans qu'aucune équation disponible à l'époque ne puisse expliquer ce phénomène.

Ce qu'observa John Scott Russell est encore visible de nos jours dans plusieurs régions du monde. Par exemple, à la suite d'un mascaret (visible de nos jours sur la Gironde, et anciennement visible sur la Seine à Caudebec-en-Caux avant qu'elle soit creusée et endiguée) on peut voir ce phénomène survenir. Il faut que plusieurs conditions soient réunies, notamment une eau peu profonde, un débit fort que la vague doit remonter, et des conditions sur le bord du cours d'eau. Un canal peut satisfaire toutes ces hypothèses, et on peut encore aujourd'hui voir ce phénomène se produire.

Revenons à la recherche d'une équation. Aucune des équations linéaires disponibles à l'époque n'expliquait cet événement. De même pour les équations d'onde non linéaires. Des travaux de Boussinesq [9], Rayleigh [112], et finalement Korteweg et de Vries [60] aboutirent en 1895 à l'équation qui expliquait cette étrange vague, aujourd'hui appelée équation de Korteweg-de Vries:

$$\partial_t u + \partial_x (\partial_x^2 u + u^2) = 0, \quad (\text{KdV})$$

où t représente la variable temporelle, x la variable d'espace en une dimension (le long du canal), et (grossièrement) $u(t, x)$ la hauteur de l'eau. Cette équation dispersive est la première à expliquer le phénomène de soliton, mais... elle fut très peu étudiée dans les années qui suivirent. Il fallut attendre les années 1960 pour que cette équation soit remise sur le devant de la scène, avec des travaux de Zabusky et Kruskal. Dans [128], les deux scientifiques travaillant sur l'équation de Fermi-Pasta-Ulmann, implémentèrent des solutions de l'équation de (KdV) périodique, et observèrent (par hasard!) des solitons. Ça y est, les travaux sur les solitons pouvaient reprendre! En particulier, ils observèrent numériquement que des solitons à différentes vitesses avaient un comportement atypique : si deux solitons allaient tous les deux dans la même direction, le plus lent devant, le plus rapide derrière, alors le plus rapide rattrape le premier, puis ils retrouvent chacun leur forme, le plus lent derrière, et le plus rapide devant! Cette propriété est aussi une caractéristique de solitons de certaines équations, nous y reviendrons plus tard (1.7.2).

1.2.2 Les solitons en physique des plasmas

L'équation (KdV) fut aussi déduite de la physique des plasmas dans les cadres suivants. Ils utilisent les équations de Maxwell. Chacun des articles ci-dessous s'articule autour de l'existence d'ondes solitaires pour ces équations.

D'une part en magnéto-acoustique, Gardner et Morikawa en 1960 dans [40] considérèrent un plasma froid en trois dimensions, sans collision, et électriquement neutre. Il est considéré homogène en ions et en électrons en chaque point du plasma. Soumettons ce plasma à un champ magnétique constant dans une direction z , et un champ électrique dans la direction y ne dépendant que de la direction x . En dénotant u la vitesse des ions dans la direction x (donc dépendant d'une variable), ils montrèrent que le déplacement du plasma des particules se comporte asymptotiquement dans la direction x comme une solution de (KdV). Cette approximation utilise des changements de variables adéquats ainsi qu'un développement asymptotique à l'ordre 3.

D'autre part, Washimi et Tanuiti en 1966 dans [124] retrouvèrent aussi à partir des équations de Maxwell l'équation (KdV) dans un contexte ion-acoustique. Ils considérèrent le cas d'un plasma composé d'ions froids et d'électrons chauds soumis uniquement à un champ électrique en une dimension. La densité des ions et des électrons peut différer en chaque point de l'espace. Ils montrèrent que des perturbations d'ondes ions-acoustiques d'amplitude petite et finie se comportaient asymptotiquement comme des solutions de (KdV).

Si ces deux contextes permettent de dériver l'équation de (KdV), la généralisation à d'autres dimensions s'effectue différemment selon le problème considéré.

Prenons le cas des ondes ions-acoustiques (plasma non magnétisé). Le contexte de Washimi et Tanuiti dans [124] ne prenait en compte qu'une seule direction, et la dispersion ne s'effectuait que dans cette direction x . Kadomtsev et Petviashvili en 1970 dans [53] considérèrent une perturbation transverse dans une seule direction $y \in \mathbb{R}$. (KdV) fut donc généralisée par les deux auteurs éponymes de l'équation:

$$\partial_x (\partial_t u + 6u \partial_x u + \partial_x^3 u) + 3\sigma^2 \partial_y^2 u = 0, \quad (\text{KP})$$

avec $\sigma^2 = \pm 1$. Notons que cette perturbation transverse peut aussi se faire selon deux directions transverses $y \in \mathbb{R}^2$ avec la même équation, voir Laedke et Spatschek [63].

En magnétoacoustique, l'équation obtenue par Gardner et Morikawa [40] peut être généralisé. En effet, le cadre qu'ils considéraient comportait un champ électrique ne dépendant que d'une variable, et allant dans une seule direction. Zakharov et Kuznetsov dans [132] en 1974 considérèrent un champ électrique dérivant d'un potentiel. Dans ce cas de plasma magnétisé à basse pression, des ondes avec une décroissance dans toutes les directions se propagent le long du champ magnétique suivant l'équation de Zakharov-Kuznetsov:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^2) = 0, \quad (\text{ZK}_{3D})$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $u(t, \mathbf{x})$ est à valeurs réelles, ∂_i est la dérivée selon la $i^{\text{ème}}$ direction, où la première direction est celle du champ magnétique et de propagation de l'onde, et $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ le laplacien. En particulier, ces ondes conservent leur forme et leur vitesse au cours du temps... Oui, ce sont bien des solitons, ayant les mêmes propriétés que pour la dimension 1!

Existe-t-il une généralisation des deux précédentes équations, qui contiendrait le cas où le champ magnétique est nul (équation (KP)) et celle où le champ magnétique est imposant (équation (ZK_{3D}))? Laedke et Spatschek dans [63] déterminèrent une équation qui régissait le comportement des ondes avec un faible champ magnétique et retrouvent l'équation (KP). En revanche, leur généralisation ne correspond pas exactement à l'équation (ZK_{3D}) donnée lors d'un champ magnétique fort, déterminée par Zakharov et Kuznetsov.

1.2.3 Généralisation des équations précédentes.

D'autres contextes découlant des équations de Maxwell permettent la dérivation des équations précédentes. Dans des plasmas multi-espèces, Hillberg, Mace, Pillay et Verheest dans [123] dérivèrent des combinaisons des équations de (KdV) et de (ZK_{3D}). En particulier, pour un cas critique de densité, les équations (KdV) et (ZK_{3D}) ne tiennent plus ; la non-linéarité quadratique se transforme en non-linéarité cubique, et on obtient

les équation de Zakharov-Kuznetsov modifiées :

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^3) = 0, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{mZK}_{2D})$$

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^3) = 0, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{mZK}_{3D})$$

Lorsque le contexte est explicite, nous nous référerons à ces équations par (mZK).

Une autre généralisation à prendre en compte est le cas d'une dimension différente de 3. A l'avenir, pour une dimension $d \geq 2$ explicite, nous noterons l'équation de Zakharov-Kuznetsov:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^2) = 0, \quad \text{avec } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (\text{ZK})$$

en précisant la dimension si nécessaire. Notons que pour la dimension $d = 2$, l'équation (ZK_{2D}) sera aussi dérivée de systèmes physiques (voir 1.2.4).

Notons enfin que la non-linéarité est aussi généralisable à n'importe quelle puissance, équation intéressante au moins d'un point de vue mathématique. En dimensions 2 et 3, on parlera de l'équation de Zakharov-Kuznetsov généralisée, pour k une puissance:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^k) = 0, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{gZK})$$

Un cas de dérivation physique est donné par Munro et Parkes dans [104] en dimension 3 avec $k = \frac{3}{2}$.

Au fil de ce manuscrit, nous verrons aussi un cas particulier d'une puissance non entière.

1.2.4 Justification rigoureuse des dérivations de (ZK).

Grâce à un changement d'échelle, les équations (ZK_{3D}) et (ZK_{2D}) ont été déterminées formellement. Une justification rigoureuse de ces équations comme limite de grandes ondes à faible amplitude de l'équation d'Euler-Poisson a été donnée par Lannes, Linares et Saut dans [66].

Han-Kwan dans [47] compléta la précédente dérivation dans un cadre plus général, en prenant en compte un changement de pression au sein de l'onde. L'ajout de ce nouveau paramètre implique aussi une convergence formelle du système de Vlasov-Poisson vers l'équation de (KdV) (respectivement (ZK_{2D}), (ZK_{3D})) en dimension 1 (respectivement 2, 3).

1.2.5 Les solitons de l'équation de Schrödinger.

Nous pouvons conclure cette partie physique par l'équation de Schrödinger. En physique des ondes de milieux non-linéaires, l'équation de Schrödinger non-linéaire fut établie en 1965 par Kelley [54] avec $p = 2$:

$$i \frac{d}{dt} u + \Delta u + |u|^p u = 0, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{NLS})$$

Shabat et Zakharov montrèrent en 1972 dans [116] que pour l'équation de Schrödinger avec $p = 2$, des solitons pouvaient interagir avec un autre paquet d'ondes sans être modifiés. Remarquons que comme pour (KdV), cette équation est généralisable avec d'autres non-linéarités polynomiales et d'autres dimensions.

1.3 Les solitons : des objets mathématiques maniables

1.3.1 Une formulation explicite?

The goal of this part is to give an explicit formulation of the solitons.

Let focus first on the (KdV) equation. Whereas [40] mainly used the linear part of the (KdV) equation, [124] used an explicit formulation of a soliton. Notons Q_c un soliton, c'est-à-dire une vague se déplaçant à la vitesse c dans la direction x , dont les dérivées s'annulent à l'infini. En injectant $Q_c(x - ct)$ dans (KdV) (voir [53]), on obtient l'équation elliptique indépendante du temps:

$$-cQ_c + Q_c'' + Q_c^p = 0, \quad (1.1)$$

avec $p = 2$. Cette équation admet une solution explicite, déterminée par des outils d'équations aux dérivées partielles :

$$Q_c(x) = \frac{3c}{2} \left(\cosh \left(\frac{\sqrt{c}}{2} x \right) \right)^{-2}. \quad (1.2)$$

Ainsi on obtient l'expression explicite d'un soliton se déplaçant à la vitesse c : $Q_c(x - ct)$.

Pour l'équation de Schrödinger, revenons à la définition d'un soliton. Cette fois, la vitesse de l'onde correspond à sa vitesse de rotation, donc il suffit d'injecter $e^{i(x-ct)}Q_c(x)$ dans (NLS), et on obtient l'équation (1.1) avec $p = 3$. Ainsi, la forme des solitons associées aux problèmes magnétoacoustiques, ion-acoustiques et aux ondes en milieux non-linéaires sont caractérisés par une même équation elliptique.

Dans un second temps, Hirota en 1971 dans [50] détermina une expression explicite d'une solution de (KdV) qui a pour condition initiale une somme de N solitons. Au fil du temps, cette solution s'exprime toujours comme une somme de N solitons.

Pour les équations (modifiées) de Zakharov-Kuznetsov, aucune formulation explicite d'un soliton n'est connue. Cependant, des méthodes d'équations aux dérivées partielles permettent d'obtenir des informations suivantes sur les solitons pour les manier, voir 1.3.3.

1.3.2 Quantités conservées, méthodes de scattering inverse et intégrabilité

Les premières méthodes de résolution des équations (KdV) et (NLS) utilisent la méthode de scattering inverse.

La méthode de scattering inverse consiste à définir la solution d'une équation comme

le potentiel d'une autre équation, puis de déterminer les propriétés spectrales de cette nouvelle équation. Un des travaux pionniers sur la méthode de scattering inverse sur l'équation de (KdV) est du à Gardner, Greene, Kruskal et Miura [39]. Pour l'équation de Schrödinger non-linéaire en une dimension, on peut noter les articles de Shabat et Zakharov [130] et [131].

La seconde approche historique de résolution de ces équations consiste à déterminer l'intégrabilité des précédentes équations, c'est-à-dire l'existence d'une infinité de quantités conservées, soit d'hamiltoniens. Pour l'équation (KdV), le premier résultat d'intégrabilité vient de Fadeev et de Zakahrov [133]. Elle fut démontrée pour l'équation de Schrödinger non linéaire par Manakov et Zakharov [129] sur la droite réelle $\mathbb{R}$. En particulier, la démonstration utilise la méthode de scattering inverse, précédemment citée. Notons aussi la méthode de Lax [67], qui, à l'aide de deux opérateurs dont l'existence dépend de l'équation, permet de définir une infinité de quantités conservées.

Ces méthodes de résolution ont pour but d'identifier des propriétés des quantités conservées par ces équations. Notons que pour les équations (KdV) et (NLS) en une dimension, la masse, l'énergie sont des quantités conservées:

$$\begin{aligned} M_{NLS}(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t)|^2, \\ E_{NLS}(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |\partial_1 u|^2 - \frac{1}{p+2} |u|^{p+2}, \\ H_{5(NLS)}(u) &:= \frac{1}{2} \int |\partial_1^2 u|^2 + |u|^2 (u \partial_1^2 \bar{u} + \partial_1^2 u \bar{u}) - 2|u \partial_1 u|^2 + \frac{7}{3} |u|^6, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} M_{KdV}(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}^d} |u(t)|^2, \\ E_{KdV}(u(t)) &:= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |\partial_1 u|^2 - \frac{1}{3} u^3, \\ H_{5(KdV)}(u) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_1^2 u)^2 - \frac{10}{3} u (\partial_1 u)^2 + \frac{5}{9} u^4. \end{aligned}$$

De fait, par les précédentes théories, il existe une infinité de quantités conservées, comme toutes les équations intégrables.

À présent, pour les équations (ZK) et (mZK) en dimensions 2 et 3 :

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^p), \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad p, d \in \{2, 3\}, \quad (\text{ZK-mZK})$$

les masses et l'énergie sont aussi conservées:

$$M(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |u(t)|^2, \quad E(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} u^{p+1}.$$

Cependant, ces équations ne sont pas intégrables. Les difficultés commencent à apparaître : les calculs précédemment faits sur les solitons à partir des méthodes de scattering

inverse et d'intégrabilité ne tiennent plus pour les équations de (ZK-mZK). Il est à noter qu'une dernière quantité est en revanche conservée, qui est l'intégrale selon la direction de propagation:

$$I(u)(x_2, \dots, x_d) = \int_{\mathbb{R}} u(t, \mathbf{x}) dx_1. \quad (1.3)$$

Cette quantité dépend des coordonnées en espace, sauf de x_1 .

1.3.3 Propriétés des solitons pour (ZK)

Pour les équations de Zakharov-Kuznetsov précédemment citées, aucune formulation explicite des solitons n'est connue. En revanche, par des arguments d'EDP, on connaît l'existence, l'unicité, ainsi que des propriétés de décroissance des solitons. Soit l'équation:

$$-cv + \Delta v + f(v) = 0, \quad v(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2. \quad (1.4)$$

Théorème 1 ([2, Theorem 1] , [62]). *Soit $d \geq 2$ et $f(v) = v^p$, alors (1.4) possède une unique solution Q_c dans H^1 telle que:*

- Q_c est strictement positive.
- Q_c est radialement symétrique : $Q_c(\mathbf{x}) = Q_c(r)$ où $r = |\mathbf{x}|$ et Q_c décroît en fonction de r .
- $Q_c \in C^2(\mathbb{R}^d)$.
- Il existe des constantes C_c et δ_c telles que, pour tout multi-indice $\mathbf{i}$, avec $|\mathbf{i}| \leq 2$, on a:

$$|D^{\mathbf{i}}Q_c(\mathbf{x})| \leq C_c e^{-\delta_c |\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.5)$$

Ces propriétés d'existence et d'unicité des ground-state existent aussi pour d'autres fonctions f . Dans la section 1.8, nous étudierons une fonctionnelle $f(v) = |v|^{p-1}v$, où $2 < p < 3$:

Théorème 2 ([3, Theorem 1.1] , [90, Theorem 1]). *Considérons l'équation (1.4), avec une non-linéarité $f(v) = |v|^{p-1}v$, et $2 < p < 3$. Alors il existe une unique solution Q_c satisfaisant les conclusions du théorème 1.*

1.4 Problème de Cauchy et évolution des normes

1.4.1 Coefficient de masse critique

Lors de la détermination des équations précédentes, le but était de décrire le phénomène des solitons. Cependant, les solutions des équations précédentes peuvent ne pas exister en temps, il peut exister un phénomène de concentration : la masse de la solution se concentre en un point et crée un phénomène d'explosion, aussi appelé blow-up.

Définissons le changement d'échelle (scaling) adéquat aux équations (gZK), qui laisse invariant l'ensemble de solutions. Soit λ un réel strictement positif. À toute solution u , on définit une fonction u_λ par:

$$u_\lambda(t, \mathbf{x}) := \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{k-1}}} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right). \quad (1.6)$$

Quelque soit $\lambda > 0$, la fonction u_λ est aussi une solution.

Un phénomène de concentration se produit lorsque la solution se concentre, id est lorsque la solution ressemble localement à $u_{\lambda(t)}(t, \mathbf{x})$, avec $\lambda(t)$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers $T < +\infty$. Sachant que ce phénomène ne peut arriver que si la masse de notre solution reste finie (car constante), il faut déterminer la masse de notre solution rescalée:

$$M(u_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\frac{4}{k-1}-d}} M(u).$$

Le phénomène d'explosion dépend d'une relation entre la puissance k de la non-linéarité et la dimension d :

- Si $\frac{4}{k-1} - d > 0$, alors la masse de u_λ augmente lorsque λ tend vers 0. En particulier, ce ne peut pas être une solution, car la masse totale de notre solution est constante : le phénomène de concentration n'existe pas dans ce cas, on parle de cas sous-critique. C'est le cas de (ZK_{2D}) et (ZK_{3D}) .
- Si $\frac{4}{k-1} - d = 0$, cela signifie que toute la masse de la solution est concentrée en un point pour qu'il y ait explosion. Ce cas est appelé critique, et contient par exemple (mZK_{2D}) .
- Le dernier cas est lorsque $\frac{4}{k-1} - d < 0$, on peut assister à un phénomène de concentration, et on parle de cas sur-critique. C'est le cas notamment de (mZK_{3D}) .

Ces notions de criticalité seront utiles lorsque nous étudierons les temps d'existence de solutions. Notons que cette notion peut être élargie en déterminant pour chaque équation de (gZK), quelle semi-norme est critique pour cette équation:

$$\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s} = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{k-1}-s-\frac{d}{2}}} \|u(t)\|_{\dot{H}^s},$$

on pose donc $s_c := \frac{d}{2} - \frac{2}{k-1}$. En particulier, pour le cas de (mZK_{2D}) , on retrouve que cette équation est L^2 (donc de masse) critique.

Notons à présent que si une solution explose, c'est-à-dire qu'elle forme une bulle, on s'attend à ce que son profil proche de l'explosion soit un soliton concentré. Pour cela, on définit le rescaling de solitons. Pour la suite, on notera Q la solution de l'équation elliptique (1.1) avec la vitesse $c = 1$:

$$Q := Q_1.$$

Toutes les solutions de cette équation elliptique peuvent ainsi s'exprimer en fonction de

Q:

$$Q_c(\mathbf{x}) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}\mathbf{x}).$$

Un soliton rescalé avec c plus grand, va donc augmenter sa taille, l'accélère et le concentre. Remarquons que cette notation est ainsi cohérente avec celle introduite pour le scaling. Enfin, précisons que la décroissance exponentielle (1.5) des solitons précédemment citée peut être améliorée: il existe des constantes δ et C indépendantes de c telles que pour tout multi-indice $\mathbf{i}$:

$$|D^{\mathbf{i}}Q_c| \leq C c^{\frac{1}{k-1}} e^{-\delta\sqrt{c}|\mathbf{x}|}. \quad (1.7)$$

Plus tard, nous verrons que nous pouvons choisir $\delta = 1$, c'est la constante optimale.

1.4.2 Le problème de Cauchy.

Dans la section précédente, nous avons défini le coefficient de criticalité s_c . Cela signifie en particulier, que l'espace H^s avec s le plus petit possible dans lequel l'équation sera globalement bien posée ne peut pas être plus petit que s_c . Le but est donc de déterminer dans quel espace H^s (ou un autre espace) on peut obtenir l'existence (locale ou globale) en fonction de la régularité de la condition initiale, et de savoir si dans un espace plus grand, on peut perdre l'unicité de la solution. Un autre point particulier à prendre en compte dans cette section est, lorsque l'équation est localement bien posée, la continuité du flot sur le temps de définition par rapport aux conditions initiales, et la dépendance du temps d'existence par rapport aux conditions initiales.

Définition ([55]). *Soit (E) une équation aux dérivées partielles, avec pour condition initiale $u(t=0) = u_0$. L'équation est dite localement bien posée dans un espace de Hilbert $(X, \|\cdot\|_X)$ si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- *Existence et unicité : pour toute condition initiale $u_0 \in X$, il existe un temps $T = T(\|u_0\|_X) > 0$, un espace de fonctions Y_T et une unique fonction $u \in Y$ satisfaisant (E) avec la condition initiale u_0 sur $(-T, T) \times \mathbb{R}$.*
- *Persistance: la précédente solution u est continue à valeurs dans l'espace de départ: $u \in \mathcal{C}((-T, T), X)$.*
- *Régularité du flot : l'application qui à $u_0 \in X$ associe $u \in \mathcal{C}((-T, T), X)$ est continue.*

(E) est dite globalement bien posée si elle est localement bien posée, et si de plus chaque solution existe sur tout l'intervalle de temps $(-\infty, +\infty)$.

Avant de détailler les résultats issus du problème de Cauchy pour (ZK), rappelons quelques notions (non exhaustives) sur l'équation (KdV) généralisé. Cette équation est bien posée dans différents espaces de Sobolev, voir l'introduction de [55], qui résume les connaissances sur ce problème jusque dans les années 1990. Notons que Kenig, Ponce

et Vega dans [55] ont établi de nouveaux résultats pour l'équation de (KdV) généralisé, dont les méthodes sont aujourd'hui connues comme les estimées KPV : les estimées se font dans des espaces $L_x^p L_t^q$. Ces méthodes ont ensuite été approfondies dans des espaces de Sobolev qui prennent en compte le flot linéaire : ces espaces $X^{s,b}$, dits espaces de Bourgain et définis dans le chapitre 2, ont été utilisés par Kenig, Ponce et Vega dans [56] pour montrer que (KdV) est bien posé dans des espaces $X^{s,b} \subset L_{loc}^p(\mathbb{R}, L_t^2(\mathbb{R}))$, ou dans des espaces de Bourgain sur le tore.

Leur preuve repose sur un théorème de point fixe dans un espace de Bourgain $X^{s,b}$ adéquat. La fonctionnelle étudiée est due à la formule de Duhamel, combinée avec des estimées bilinéaires. Notons que par cette méthode, le temps d'existence (locale) dépend de la norme de la condition initiale, nous reviendrons plus tard (section 1.4.3) sur cette dépendance. Le but était à présent de déterminer l'espace le plus grand dans lequel le problème de Cauchy est bien posé pour les équations de Zakharov-Kuznetsov en adaptant leurs méthodes.

Commençons par l'équation (ZK_{2D}). Le premier article concernant un problème de Cauchy pour les équations de Zakharov-Kuznetsov est dû à Faminskii [31] en 1995. Il montra que ce problème est globalement bien posé dans H^s avec $s \geq 1$, et de plus la continuité du flot par rapport à la condition initiale. Son travail engendra une plus grande activité concernant la recherche du plus grand espace dans lequel le problème de Cauchy serait bien posé. En optimisant les outils de Faminskii, Linares et Pastor dans [68] abaissèrent ce coefficient à $s < \frac{3}{4}$. Les travaux suivants déterminèrent de plus grands espaces dans lesquels l'équation était bien posée : Molinet et Pilod dans [102] et indépendamment Grunrock et Herr dans [46] montrèrent que l'équation est localement bien posée dans H^s pour $s > \frac{1}{2}$, amélioré par Shan [117] avec $\frac{5}{7} < s < 1$ puis Kinoshita [57] avec $s > -\frac{1}{4}$. L'équation est globalement bien posée selon Shan, Wang et Zhang dans [118] pour $s > -\frac{1}{13}$.

Pour (ZK_{3D}), le premier résultat est que pour des conditions initiales dans H^s pour $s > \frac{9}{8}$, Linares et Saut dans [70] montrèrent que l'équation est localement bien posée dans cet espace. Ribault et Vento [114] améliorèrent ce résultat pour $s > 1$, puis [102] montra que l'équation est globalement bien posée dans ce même espace. Le résultat optimal attendu serait H^s pour $s > s_c$: récemment, ce résultat a été démontré par Herr et Kinoshita [49]. En conséquence, on obtient que ce problème est globalement bien posé dans L^2 .

Pour l'équation modifiée (mZK_{2D}), le premier résultat provient de Linares et Pastor [68] : l'équation est localement bien posée dans H^s pour $s > \frac{3}{4}$. De plus, cet article montre que l'équation est mal posée (le flot n'est pas continu) dans H^s pour $s < 0$. De plus, dans [69], si $s > \frac{53}{63}$ et que la condition initiale est petite (relativement à la masse du ground state), la solution existe en temps long. Ensuite, Ribaut et Vento dans [113] montrèrent que ce problème est localement bien posé dans H^s pour $s > \frac{1}{4}$. Bhattacharya, Farah et Roudenko dans [4] montrent que si la condition initiale a une masse suffisamment petite et dans H^s avec $s > \frac{3}{4}$, la solution est globalement bien posée. De plus, elle est globalement bien posée dans le même espace dans le cas défocalisant (avec un signe $-$ devant la non-linéarité). Enfin, puisque cette équation est de masse critique, une solution peut exploser

en temps fini quelque soit la régularité de la solution ; Farah, Holmer, Roudenko et Yang dans [36] montrent que des solutions proches d'un palier à énergie négative explosent en temps fini ou infini.

Enfin, listons des résultats sur les problèmes de Cauchy pour des généralisations des équations précédentes en dimension 2 et 3. Les résultats qui suivent concernent des équations critiques ou sur-critiques. Ceci implique qu'une explosion est possible en temps fini, donc les seuls résultats disponibles sur le problème de Cauchy concernent la théorie locale. De plus, pour qu'une explosion ait lieu, il faut que la solution possède suffisamment de masse (ou d'énergie) pour exploser : si la condition initiale ne possède pas assez de masse (ou d'énergie), certains théorèmes montrent que la solution existe en temps long. Dans certains cas, on pourra voir apparaître un phénomène de scattering, c'est-à-dire que la solution se comportera à l'infini comme une solution de la partie linéaire de notre équation.

Pour la dimension $d = 2$, les travaux de Linares et Pastor [69], Farah, Linares et Pastor [32] et Ribaut et Vento [113] montrèrent que le problème est localement bien posé dans des espaces plus grands que H^1 en fonction de k :

- pour $k = 4$, dans H^s avec $s > \frac{3}{4}$ dans [69], et $s > \frac{5}{12}$ dans [113]
- pour $5 \leq k \leq 8$, dans H^s avec $s > \frac{3}{4}$ [69], puis $s > s_c$ dans [113]
- pour $k \geq 9$, dans H^s avec $s \geq 1 - \frac{3}{2k-4}$ dans [69], puis $s > s_c$ dans [32] et [113].

Pour $k \geq 2$, [32] donne de plus un résultat d'existence globale : si la condition initiale est "petite" (une certaine combinaison de la masse et de l'énergie), alors la solution existe globalement dans H^1 . L'article de Grunrock [45] montre que (mZK_{3D}) est globalement bien posée dans H^s pour $s > 1$, et donc globalement bien posée dans H^1 . Pour les mêmes dimensions et une non-linéarité entière plus grande, Grunrock [44] montre que les équations (gZK) défocalisantes, pour une dimension $d = 2$ ou $d = 3$ et une non-linéarité $k \geq 4$, le problème est localement bien posé dans des espaces de Besov homogènes $\dot{B}_{2,q}^{s_c}$ si $q < \infty$, et dans $\dot{B}_{2,\infty}^{s_c,0}$. De plus, il obtient que le problème est globalement bien posé pour des données petites dans ce même espace.

Terminons avec une généralisation de (ZK) avec une non-linéarité toujours égale à $k = 2$, mais de grande dimension $d \geq 4$. Herr et Kinoshita dans [49] montrèrent que ces équations sous-critiques sont localement bien posées dans H^s pour $s > s_c$.

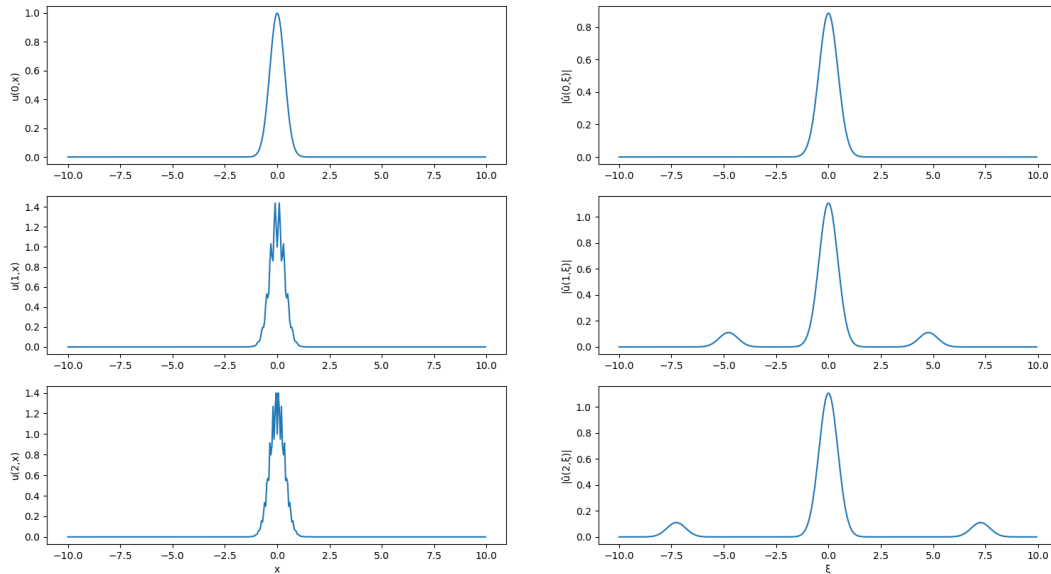
Signalons enfin le problème de la détermination de l'espace le plus grand pour lequel une équation est globalement bien posé. Dans les équations précédemment citées, le problème ne sera pas globalement bien posé dans H^{s_c} : on retrouve l'importance du coefficient critique s_c . Comme noté au début de cette partie, dans certains cas, il a été prouvé que, dans des espaces H^s où $s < s_c$, le flot n'est plus continu. La question devient donc: quel est l'espace adéquat pour étudier l'équation lorsque la donnée initiale est un "tout petit peu" plus régulière que H^{s_c} ? Pour répondre à cette question, Grunrock [44] (voir aussi Molinet et Pilod [102]) utilisa les espaces atomiques de Koch et Tataru et des espaces de Besov, qui sont plus gros que n'importe quel espace H^s avec $s > s_c$, mais plus petit H^{s_c} .

1.4.3 La croissance des normes

Soit u une solution d'une équation dispersive, sur un intervalle de temps $[0, +\infty)$, avec une condition initiale $u(0) = u_0 \in H^s$. Supposons que cette solution soit dans H^1 . Le but de cette section est d'expliciter le phénomène de croissance des normes, c'est-à-dire pour $s > 1$, expliciter à quelle vitesse peut croître la norme H^s au fil du temps. La norme H^s de u croît-elle polynomialement, exponentiellement avec le temps? Comment peut-on borner $\|u(t)\|_{H^s}$ en fonction des constantes, telles que la norme de la condition initiale $\|u_0\|_{H^s}$, ou des constantes inhérentes à l'équation?

Lorsque le système est intégrable, on obtient que n'importe quelle norme H^s pour $s > 1$ est bornée. En revanche, ce n'est a priori plus le cas lorsque l'équation n'est plus intégrable.

L'étude de la croissance des normes H^s de la solution provient du phénomène dit "de cascade". Les oscillations locales peuvent accélérer avec le temps. On peut donc reformuler le problème de la manière suivante : étant donnée une solution d'une équation dispersive non intégrable, à quelle vitesse les basses fréquences se déplacent-elles vers les hautes fréquences? Autrement dit, en identifiant la transformée de Fourier $\hat{u}$ de u , la question devient : à quelle vitesse la masse de $\hat{u}$ s'éloigne de 0? Admettons qu'une solution d'une équation dispersive possède le graphe suivant à trois temps distincts: Sur



Graphes d'une fonction u et de sa transformée de Fourier aux temps $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$

ces graphes, on observe que plus la turbulence est élevée pour la fonction u , plus les basses fréquences se déplacent vers les hautes fréquences : le but est donc de déterminer une borne de la vitesse de déplacement.

Nous prouvons dans cette thèse le résultat suivant, au chapitre 2:

Théorème 3 (Côte, Valet 2019, [25]). *Soit un entier $s \geq 2$, et une condition initiale $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Soit u la solution de (ZK_{2D}) avec la condition initiale u_0 , et $A := \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{H^1}$.*

Alors $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s)$, et pour tout $\beta > \frac{s-1}{2}$, il existe une constante $C = C(s, \beta, A)$ telle que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C(1 + |t|)^\beta (1 + \|u_0\|_{H^s}). \quad (1.8)$$

Revenons sur les résultats historiques qui ont inspiré ce résultat, à savoir dans un premier temps l'étude du problème de Cauchy. Pour l'équation de Schrödinger (NLS) périodique et l'équation de (KdV) périodique et non-périodique, Bourgain dans [6] et [7] étudia le problème de Cauchy associé à ces équations. Il montra que (NLS) était localement bien posée dans $H^s(\mathbb{T})$ pour $p < \frac{4}{1-2s}$. Il a pour cela utilisé des espaces (aujourd'hui appelés espaces de Bourgain), qui prennent en compte sur un intervalle de temps les dérivées des fonctions (H^s), ainsi que l'écart de la fonction par rapport au flot dû à la partie linéaire de notre équation (H^b). De plus le temps d'existence de notre solution dépendait de la condition initiale ([6], (4.28), (4.29) (4.30)). Pour cela, il a fallu traiter les interactions dues à la non-linéarité.

Kenig, Ponce et Vega dans [55] approfondissent ces idées pour l'équation de (KdV) : considérons l'équation de (KdV) périodique et non périodique. Ils définissent une fonctionnelle sur l'espace de Bourgain $X_T^{s,b}$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$, puis appliquent un point fixe sur cet espace pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème avec une condition initiale $u_0 \in H^s$. Le point fixe se fait sur une boule de $X_1^{s,b}$: pour r suffisamment petit, et une condition initiale satisfaisant $\|u_0\|_{H^s} \leq r$, ils considèrent la boule $\{w \in X^{s,b}; \|w\|_{X^{s,b}} \leq 2cr\}$, avec c une certaine constante, et montrent qu'il existe une unique solution u sur $[-1, 1]$. On passe ensuite à n'importe quelle norme H^s par scaling : les mêmes arguments sont toujours valables, mais avec des estimées plus précises sur les espace de Bourgain. Ils obtiennent aussi la continuité du flot par rapport à la condition initiale.

Les idées suivantes que nous allons exposer sont dues à Bourgain [8] pour des équations de Schrödinger (NLS) périodiques et l'équation des ondes non-linéaires, et à Staffilani [121] pour (NLS) périodique et sur la droite réelle, ainsi que pour l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) généralisée. Une première étude grossière de la norme d'une solution u d'une des équations précédemment citées, avec la condition initiale $u(0) = u_0 \in H^s$, mène à l'existence d'une constante $C = C(\|u_0\|_{H^1})$ et d'un temps $T = T(\|u_0\|_{H^1})$ tous deux indépendants de la norme H^s de la condition initiale, telles que, pour tout $\tau \geq 0$:

$$\forall t \in [\tau, \tau + T[, \quad \|u(t)\|_{H^s}^2 \leq C \|u(\tau)\|_{H^s}^2. \quad (1.9)$$

En itérant, cette inégalité mène ainsi à la borne exponentielle pour tout t : $\|u(t)\|_{H^s} \leq C^{|t|}$, où C dépend toujours de la condition initiale. Cette borne peut être améliorée : en effet, si à la place de (1.9) on obtient une meilleure borne telle que:

$$\forall t \in [\tau, \tau + T[, \quad \|u(t)\|_{H^s}^2 \leq \|u(\tau)\|_{H^s}^2 + C \|u(t)\|_{H^s}^{2-2\delta_s}, \quad (1.10)$$

alors la borne exponentielle peut être remplacée par une borne polynomiale:

$$\forall t \in [0, +\infty), \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C(1 + |t|)^{\delta_s^{-1}}.$$

Cette inégalité nécessite de connaître l'évolution de T , le temps d'existence locale, en fonction de la norme H^s de la condition initiale: on voit donc la nécessité d'étayer les théorèmes d'existence locale précédemment cités. De plus, pour utiliser le théorème de point fixe adéquat, la fonctionnelle qui fait intervenir la non-linéarité doit être finement majorée. C'est la pierre angulaire de ce cheminement: les interactions des différentes fréquences doivent être correctement gérées pour obtenir l'inégalité (1.10), et ainsi obtenir la croissance polynomiale. Les premières inégalités portant sur l'interaction ont été établies dans [6], [7] et [55].

Dans la lignée de Bourgain et Staffilani, nous avons montré la croissance au plus polynomiale des normes H^s d'une solution de l'équation (ZK_{2D}) . Comme précédemment souligné, le temps de résolution du problème de Cauchy doit être exprimé explicitement en fonction de la norme H^1 de la condition initiale u_0 uniquement. Puisque la norme H^1 en tout temps est contrôlée par la masse et l'énergie, qui sont des quantités conservées, elle est donc contrôlée par une constante A . Le temps d'existence de notre solution est au moins $T(A) > 0$ en tout point du temps. De plus, la norme H^s de notre solution sur $(-T(A), T(A))$ est contrôlée par la norme H^s de la condition initiale; ceci se résume par (voir 2.27) :

$$\sup_{-T(A) < t < T(A)} \|u(t)\|_{H^1} \leq C_0 A \quad \text{et} \quad \sup_{-T(A) < t < T(A)} \|u(t)\|_{H^s} \leq C_0 \|u_0\|_{H^s}.$$

Il faudra préciser dans le chapitre 2 les inégalités nécessaires pour établir ce lemme. Pour obtenir une inégalité du type (1.10), il faudra traiter les termes d'interaction. Molinet et Pilod dans [102] traitent pour l'équation (ZK_{2D}) les estimées bilinéaires pour résoudre le problème de Cauchy. Nous nous inspirons de leurs estimées et des bornes sur les différentes interactions pour établir la croissance des normes, et établirons la borne bilinéaire suivante : il existe des réels $-\frac{1}{2} < b' < 0$, $\frac{1}{2} < b < 1$ et $0 < \rho < \frac{1}{12}$, tels que pour tout u, v dans $X^{-\rho, b}$:

$$\|uv\|_{X^{-\rho, b'}} \lesssim \|u\|_{X^{-\rho, b}} \|v\|_{X^{-\rho, b}}.$$

Contrairement aux estimées de Molinet et Pilod [102], ces estimées font intervenir un coefficient $-\rho$ négatif. Ces estimées bilinéaires suffisent pour obtenir la croissance des normes.

Notons que ces techniques ont aussi été implémentées pour d'autres équations : Sohinger [120] traite le cas de l'équation de Schrödinger ainsi que l'équation de Hartree, et Planchon, Tzvetkov et Visciglia [111] le cas de l'équation de Schrödinger sur une variété. Le lecteur assidu pourra s'intéresser aux références dans ces articles. De plus, déterminer des solutions qui atteignent ces bornes est une tâche ardue : Hani, Pausader, Tzvetkov et Visciglia démontrent l'existence dans [48] de solution pour des équations de type Schrödinger dont les normes H^s explosent.

Enfin, notons que cette méthode n'est pas la seule à traiter la croissance des normes. La I -méthode inventée par Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao dans [15] déterminent des estimées en localisant (en Fourier) les quantités souhaitées, et ainsi gérer les interac-

tions.

1.4.4 Explosion de la solution

Continuons cette étude du temps d'existence de notre solution et de croissance des normes avec le phénomène d'explosion. Lorsque le temps d'existence de notre solution est fini, cela signifie qu'il y a explosion en temps fini. Plusieurs questions ressortent de ce phénomène : quel est le profil de notre solution au voisinage de notre solution ? Lorsqu'une telle bulle existe, son profil est-il universel ? La vitesse d'explosion est-elle indépendante de la partie régulière ? Et enfin, si une explosion a lieu en temps fini... Que se passe-t-il après l'explosion ? Comme souligné ci-dessus, une solution ne peut exploser en temps fini que lorsque l'équation est posée dans le cas critique et dans le cas sur-critique. Nous répondrons à ces questions dans la partie 1.6.

1.5 Stabilité des solitons

1.5.1 Différentes notions de stabilité

Dans la partie 1.2, nous avons abordé les premiers articles concernant la détermination d'équations dispersives possédant des solitons. Au fil de ces articles, la question de stabilité est récurrente : lorsqu'une équation est déterminée, le but est de savoir si une petite perturbation d'un soliton reste, dans un certain sens, proche d'un soliton. On distingue ainsi différents types de stabilité [28]. On considère que le flot prend des conditions initiales dans un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ et à valeurs dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_t, \mathcal{H})$. Supposons que le flot est globalement défini. Nous abordons trois types de stabilité :

- une première notion de **stabilité** dans un espace $\mathcal{H}$. On dit que u est stable dans $\mathcal{H}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que :

$$\|u_0 - v_0\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \quad \text{implique} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - v(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon.$$

Cette notion est résumée par l'idée suivante : "once closed, forever not too far".

- La **stabilité orbitale, ou stabilité au sens de Lyapounov**, plus générale que la première. Soit u une solution, et son orbite le long de $\mathbb{R}_t$: $\Gamma := \{u(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{H}$. On dit que u est orbitalement stable si une solution qui commence proche de v reste proche de l'orbite de u : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $v \in \mathcal{H}$:

$$\|v_0 - u_0\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \quad \text{implique} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{w \in \Gamma} \|v(t) - w\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon.$$

Notons que la notion de stabilité orbitale est particulièrement intéressante pour des orbites périodiques. De plus, cette notion est abordée en étudiant les variations d'un hamiltonien au voisinage d'un point d'équilibre : s'il existe une valeur propre négative de l'opérateur linéarisé autour de ce point d'équilibre qui est positive, alors le soliton n'est pas stable. En particulier, il suffit de connaître les propriétés du

spectre de l'opérateur linéarisé pour avoir une idée de la stabilité orbitale de notre soliton.

- La **stabilité asymptotique**: si v_0 est proche de u_0 , alors $v(t)$ se rapproche de plus en plus, à l'infini de $u(t)$. Il existe $\epsilon_{u_0} > 0$, et un espace $\tilde{\mathcal{H}}$ tels que

$$\|u_0 - v_0\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon \quad \text{implique} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - v(t)\|_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0.$$

Dans ce cas, u est dite asymptotiquement stable. Dans certaines définitions, notons que l'on autorise une translation régulière $x(t)$ de u dans une certaine direction, mais on exclut le scaling.

1.5.2 Stabilité orbitale

Historiquement, la première notion de stabilité abordée a été la **stabilité orbitale**, sous forme de stabilité de Lyapounov : la dérivée de l'hamiltonien en un soliton, qui est l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ autour du soliton, doit avoir un spectre (continu) positif. Ainsi, [39] montra que les solitons de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) généralisé avec une non-linéarité $p = 2, 3, 4$ sont stables. Cette notion a ensuite été appliquée à (ZK_{3D}) , et [132] montra que ces solutions sont orbitalement stables ; puis pour (KP), [53] montre que ces ondes avec une dispersion positive ne sont pas stables.

A partir des années 1980, la stabilité orbitale ne se concentre plus uniquement sur la dérivée d'un certain opérateur pour obtenir le spectre de $\mathcal{L}$, mais s'élargit de par l'étude plus précise de l'opérateur linéarisé autour d'un soliton. Ainsi, Cazenave et Lions [14] en étudiant l'équation de Schrödinger (NLS) sous-critique, montrent la stabilité orbitale des solitons. Toujours pour cette équation sous-critique, Weinstein dans [126], montre un équivalent de la stabilité orbitale, mais restreinte à des perturbations dans certaines directions. En particulier, l'opérateur linéarisé autour d'un soliton de l'équation de Schrödinger fait apparaître l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ pour (KdV). Par cette méthode, on obtient une condition de coercivité essentielle pour l'étude de la stabilité. Ce résultat est généralisé par Weinstein [127], où les résultats sont étendus à (KdV) généralisé sous-critique, ainsi qu'aux équations de Schrödinger. Bona, Souganidis et Strauss [5] montrent que des solitons sont orbitalement stables pour plusieurs équations si et seulement si on est dans le cas sous-critique : l'équation de (KdV) généralisé sous-critique en est un exemple. Cette méthode est généralisée dans un cadre théorique par Grillakis, Shatah et Strauss en 1987 [43] : on retrouve le résultat précédent que pour (KdV) généralisé sous-critique, un soliton est orbitalement stable $1 < p < 5$; pour (KdV) généralisé critique et sur-critique $p \geq 5$, les solitons sont orbitalement instables. Pego et Weinstein [109] exploitent ce résultat et montrent que dans le cas (KdV) sur-critique, il existe une valeur propre de l'opérateur linéarisé $\partial_1 \mathcal{L}$ qui fait croître exponentiellement la direction d'instabilité. On retrouve dans l'article de Merle [93] l'instabilité d'un soliton dans le cas de (KdV) critique.

Les résultats précédents portaient sur les équations de Schrödinger en toute dimension, ou sur l'équation (KdV) généralisé, donc en dimension 1 pour des solitons. La généralisation à la dimension supérieure commence aux alentours des années 2000 avec De Bouard en 1996 [29] : elle obtint la stabilité orbitale pour les (gZK) sous-critiques,

ce qui comprend (ZK_{2D}) , et (ZK_{3D}) , en suivant les idées de [126] et [5]. De plus, elle découvre qu'il n'y a pas de stabilité orbitale pour les équations (gZK) sur-critiques en dimension 2 et 3. Notons le problème non résolu du cas critique. Munro et Parkes, dans [104] et [105], ont étudié la stabilité pour d'ondes planes de (gZK) avec $k = \frac{3}{2}$ en dimension $d = 3$. De nouveaux outils tels que la monotonie et une méthode de troncature ont été utilisés par Farah, Holmer et Roudenko [34] pour redémontrer dans le cas (ZK) sur-critique $d = 2$ l'instabilité (orbitale) des solitons, sans que cette méthode soit applicable au cas critique. Cependant, les mêmes auteurs dans [35] et [33] parviennent, par deux méthodes différentes, à montrer que dans le cas critique (mZK_{2D}) , la stabilité orbitale ne tient plus.

1.5.3 Stabilité asymptotique

Au fil des années, se renforce la conjecture qu'une solution d'une équation dispersive se comporterait, en temps long, comme une somme de "briques élémentaires", tels que les solitons, plus un terme dispersif. Commençons par un soliton : si une solution se décomposerait en temps long comme un soliton explicite, il est intéressant de savoir si certaines conditions initiales permettraient d'aboutir à ce soliton. On voit apparaître la définition de **stabilité asymptotique**, et la question naturelle suivante : quel est l'ensemble de conditions initiales qui convergeraient vers un soliton, et dans quel espace? En particulier, quelle est la topologie de cet ensemble de conditions initiales?

Le premier résultat portant sur la stabilité asymptotique provient de Pego et Weinstein [110] : (KdV) généralisé sous-critique est asymptotiquement stable dans des espaces à poids, pour $p \in \{2, 3\} \cup [4, 5[$. Les deux auteurs utilisent en particulier le spectre de l'opérateur $\partial_1 L$. Les années 2000 voient apparaître quelques articles concernant la stabilité asymptotique. Pour des équations de Schrödinger, Buslaev et Perelman [10] et Cuccagna [26] montrent la stabilité asymptotique d'un soliton. Martel et Merle [73] pour (KdV) sous-critique, donc pour une puissance $p = 2, 3, 4$ montrent que les solitons sont (faiblement) asymptotiquement stables, puis asymptotiquement stables dans l'espace d'énergie (localisée) dans [76]. Notons que la stabilité asymptotique ne peut pas se faire dans tout l'espace : si les normes L^2 et H^1 d'un soliton convergent vers celles d'un soliton, alors la solution est un soliton. En revanche pour le cas critique de (KdV) généralisé, donc pour $p = 5$, Martel et Merle (re)démontrent que la stabilité asymptotique ne tient plus, en exploitant une direction d'instabilité. De plus, ils exploitent la dépendance de translation au fil du temps de la solution vers un soliton. Citons aussi, l'article de Martel et Merle [79] pour une non-linéarité généralisée : il permet en particulier de mettre en avant de nouvelles structures algébriques.

Notons enfin l'article de Côte, Muñoz, Pilod et Simpson en 2016 [24] portant sur la stabilité asymptotique de (ZK_{2D}) : dans une zone qui évolue au fil du temps, certaines conditions initiales se décomposent en temps long comme un soliton, plus un terme dispersif à l'arrière de cette solution. La stabilité asymptotique des solitons pour (ZK_{3D}) a récemment été démontrée par Farah, Holmer, Roudenko et Yang [37].

Quelques notions de stabilité sont à ce jour non déterminées pour les équations (gZK). Il est conjecturé que les solitons sont asymptotiquement stables dans les cas sous-critiques,

comme [24], instables dans les cas critiques. Des résultats numériques de Klein, Roudenko et Stoilov [58] en dimension $d = 2$ assurent que les solitons de (mZK_{2D}) dispersent si les données initiales sont petites, mais si la solution est suffisamment concentrée, elle peut exploser avec un taux explicite ; enfin pour (gZK) il a déjà été montré que la stabilité orbitale ne tient pas, [29].

1.5.4 D'autres résultats de stabilité

D'autres notions de stabilité existent pour étudier les solitons, à l'instar de la **$\mathcal{H}$ -stabilité**, avec un $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, plus fort que la stabilité orbitale, mais plus faible que la stabilité asymptotique. Merle et Vega dans [98], montrent la L^2 -stabilité pour (KdV) : une L^2 -boule autour d'un soliton est L^2 -stable, dans le sens où la solution u associée à une condition initiale dans cette boule converge L^2_{loc} à un paramètre de translation près vers un soliton, dont la vitesse peut-être différente de celui de la boule initiale. Une des idées principales de cet article est l'utilisation de la transformée de Miura, qui permet de lier une solution de (KdV) à une solution de (KdV) modifié. Une preuve alternative est donnée par Mizumachi et Tzvetkov [101], exploitant la décroissance exponentielle des directions de stabilité associée à l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$.

1.5.5 Principe de continuation unique

La question de continuation unique est d'obtenir une condition de localisation en espace-temps pour obtenir l'unicité de la solution. Pour l'équation (ZK_{2D}), Panthee [108] montra que si une solution est, sur un intervalle de temps non vide, supportée par un compact $\mathbb{R}_x$, alors elle est nulle. Sous une hypothèse de régularité suffisante de cette même équation, Bustamante, Isaza et Mejía dans [11] montrèrent le principe de continuation unique: si deux solutions sont égales à deux temps distincts, alors elles sont égales. Puis dans [12] des mêmes auteurs, si deux solutions décroissent exponentiellement rapidement à deux temps distincts dans les deux directions d'espace, alors elles sont égales. Ce résultat a été amélioré par Cossetti, Faneli et Linares [18] avec une condition de décroissance dans une seule direction, celle de propagation du soliton. Cette condition d'unicité est nommée comme principe de continuation unique.

1.6 Temps d'existence fini et explosion

Dans la partie précédente, pour étudier la stabilité, il fallait que la solution existe en temps long. Lorsque ce n'est pas le cas, la solution peut exploser en temps fini, c'est-à-dire qu'une certaine norme H^s se concentre en un certain point, et explose en temps fini. Pour les équations abordées, c'est-à-dire Schrödinger, Korteweg-de Vries et Zakharov-Kuznetsov, on étudie l'explosion de la norme H^1 . De plus, étant donnés les résultats d'existence, il faut considérer des équations critiques ou sur-critiques pour qu'une explosion en temps fini ait lieu.

Le premier article concernant l'équation de Schrödinger est dû à Glassey [42] : il considéra une solution de la masse d'un soliton qui explose en temps fini. Il utilisa un

argument de type viriel. À partir des années 1990, on construit des solutions explosant en temps fini de manière explicite à partir du ground-state, en précisant le profil de l'explosion. Merle dans [91] démontre qu'il existe des solutions qui explosent en temps fini en K points avec le profil, en chaque point, d'une bulle qui se concentre. En particulier, ce profil est construit à partir du ground state qui se concentre. La question devient donc: si la construction précédente fait intervenir une bulle, quelle est la masse minimale nécessaire pour faire exploser une solution? Si une solution possède cette masse minimale, quel est son profil? Si la masse de la condition initiale est inférieure à celle du ground-state, alors la solution existe pour tout temps. Au contraire, pour l'équation de Schrödinger critique en une dimension, Merle dans [92] montre l'unicité d'une solution qui explose avec la masse du ground-state Q : cette solution est due à une transformation conforme de Q , et paramétrisée par des paramètres laissant invariant l'ensemble des solutions. C'est la masse minimale.

À partir des années 2000, arrivent les résultats pour l'équation (KdV) généralisé. Rappelons qu'avec [55], une solution de (KdV) critique existe en temps long, et suit un phénomène de scattering. Merle [93] prouve que des solutions de (KdV), avec une masse plus grande que celle du ground state, peuvent exploser en temps fini ou infini. Cette explosion est ensuite explicitée par Martel et Merle [74] en temps fini pour la même équation, en précisant le profil de la solution au voisinage de l'explosion : un ground-state qui se concentre, plus un reste. Il est nécessaire de moduler cette décomposition par le paramètre d'explosion et le paramètre de scaling.

La masse d'une solution est conservée au fil du temps. Cependant, si une explosion a lieu, comment évolue la norme H^1 ? Revenons à l'équation de Schrödinger critique. Les travaux de Merle et Raphaël [95], [94] et [96] se concentrent sur l'équation de Schrödinger critique, et déterminent qu'à une constante multiplicative près, la norme H^1 de la solution proche du temps d'explosion T est bornée (supérieurement et inférieurement) par $\frac{\ln \ln(T-t)^{\frac{1}{2}}}{(T-t)^{\frac{1}{2}}}$. Quel est le résultat analogue pour l'équation (KdV) critique? Ce problème est resté ouvert jusqu'en 2015 avec une grande avancée par trois articles de Martel, Merle, Raphaël, [83], [84], [85]. Ces articles donnent les derniers résultats de classification d'explosion en temps fini d'une solution de (KdV) généralisé critique : ils décrivent différents comportements d'une solution qui explose en temps fini T , avec une masse proche de la masse minimale ; ils montrent l'unicité du profil d'une solution de masse minimale explosant en temps fini; enfin, si la solution a une décroissance rapide à droite, alors elle explose avec une norme H^1 équivalente à $(T-t)^{-1}$, mais ils montrent l'existence de solutions explosant en temps fini T dont la norme H^1 évolue en $(T-t)^{-\nu}$, où $\nu > \frac{11}{13}$, sous réserve de faible décroissance à droite. Ainsi, est précisée la dynamique de masse minimale. Cette explosion a été généralisée par Combet et Martel dans [17] en K points distincts, avec des solutions ayant la masse minimale nécessaire pour exploser en K points distincts : K fois la masse du ground state Q . Puisque $K-1$ bulles ne possèdent pas de décroissance polynomiale à droite, il faut cependant préciser la construction le profil de la solution explosant en K points distincts simultanément. Notons que l'existence d'une solution de masse minimale explosant en temps fini pour l'équation de Benjamin-Ono critique a été démontrée par Martel et Pilod [88].

Qu'advient-il des équations sur-critiques? Merle, Raphaël et Szeftel dans [97] ont montré, en différentes dimensions, que l'équation de (NLS) légèrement surcritique (la non-linéarité est très proche de la puissance critique), il existe une solution de masse minimale qui explose en temps fini avec un taux auto-similaire dans H^1 . Ce résultat a été adapté par Lan [64] pour (KdV) surcritique avec une puissance $5 < p \leq 5^*$, où 5^* est une constante strictement plus grande que 5, et démontre l'existence de solutions de masse minimale explosant en temps fini avec un taux auto-similaire. Cette explosion peut aussi se faire en K point distincts selon Lan [65]. Koch [59] a aussi construit des solutions de masse minimale pour (KdV) légèrement sur-critique, mais qui ne sont pas dans H^1 .

Ces travaux sur les équations de Schrödinger et de Korteweg-de Vries ouvrent la voie à l'étude d'explosions pour l'équation de Zakharov-Kuznetsov. Le premier résultat d'explosion est dû à Farah, Holmer, Roudenko et Yang [36] : il existe des solutions de (mZK_{2D}) , donc critique, qui explosent en temps fini ou infini. Ces solutions ont une masse proche (supérieurement) de celle d'un soliton, et une énergie négative. Cependant, la question de savoir si une explosion peut se faire en temps fini reste ouverte. De plus, on ignore quel serait son profil, et quelle serait la norme H^1 d'une solution (si elle existe) explosant en temps fini avec une masse minimale (celle d'un soliton). Les récentes considérations numériques de Klein, Roudenko et Stoilov [58] montrent que dans le cas critique, une explosion d'une solution de masse minimale auto-similaire pourrait avoir lieu en temps fini T avec une norme H^1 croissant en $(T - t)^{-\frac{1}{2}}$. Notons que [58] conjecture aussi que dans le cas surcritique (gZK) en dimension $d = 2$ et $p = 4$, une explosion d'une solution localisée peut aussi advenir en temps fini T , avec la croissance de la norme H^1 en $(T - t)^{\frac{2}{3(p-1)}}$. Ces problématiques demandent maintenant une preuve rigoureuse.

1.7 Décomposition d'une solution en une somme de solitons

Les solitons sont considérés comme des "briques élémentaires" des équations dispersives. Même si une somme de solitons n'est pas une solution au fil du temps, si les interactions entre ces différents solitons sont assez faibles, il est naturel de s'attendre à ce qu'une telle solution se comporte en temps long comme cette somme de solitons découplés peu modifiés. Dans un cadre général, il est naturel de se demander si une solution peut se composer comme une somme de solitons découplés en temps long. C'est la conjecture de résolution d'équations dispersives en somme de solitons : si une solution qui existe en temps long a suffisamment de régularité, comme à énergie finie, cette conjecture établit que cette solution se décomposera en temps long comme une somme de solitons découplés, plus un terme dispersif qui tend vers 0 dans une certaine norme. Dans ce cadre, nous étudions des fonctions qui en temps long se comportent comme une somme de différents solitons.

1.7.1 Multi-solitons en temps long

La conjecture de résolution en somme de solutions a été prouvée pour les équations intégrables (KdV) et (KdV) modifié par des méthodes de scattering inverse, voir un résumé dans Miura [100]. Le problème reste entier lorsque l'intégrabilité de la solution n'est plus démontrée. Pour cela, définissons un multi-soliton :

Définition 4. *Une solution u de (KdV) généralisé ou (ZK) en dimension d est un multi-soliton (ou K -soliton) en $+\infty$, s'il existe un temps T_0 , K vitesses $(c^k)_{1 \leq k \leq K} \in \mathbb{R}_+^{*K}$ distinctes et K shifts $(\mathbf{y}^k)_{1 \leq k \leq K} \in (\mathbb{R}^d)^K$ tels que, u soit définie sur $[T_0, +\infty)$ et en dénotant par R la somme des K solitons découplés :*

$$R(t, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^K Q_{c^k}(\mathbf{x} - c^k t \mathbf{e}_1 - \mathbf{y}^k),$$

la solution se rapproche à l'infini de R :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - R(t)\|_{H^1} = 0. \quad (1.11)$$

À partir des années 2000, de nouvelles méthodes ont été exploitées pour étudier les multi-solitons. Le premier article portant sur la stabilité et la stabilité asymptotique (voir 1.5.1) d'une somme de solitons de (KdV) sous-critique est du à Martel, Merle Tsai [86] : la modulation, la monotonie de quantités se rapprochant de l'énergie et de la masse autour de chacun des solitons, des conditions d'orthogonalité adéquate pour l'erreur, ainsi que la coercivité de $\mathcal{L}_c$ sur un espace adéquat sont les outils fondamentaux de la preuve de la stabilité. Les solutions exploitées ne sont pas exactement des multi-solitons, mais les estimées précises montrent que ces ensembles sont stables.

La preuve de l'existence des multisolitons est ensuite due à Martel [72] : pour (KdV) généralisé sous-critique et critique donc $p = 2, 3, 4, 5$, les multi-solitons associés à K vitesses distinctes et à K shifts existent. De plus, ces multisolitons sont uniques. Cette dernière propriété a été démontrée uniquement pour des équations de type (KdV) : la monotonie de certaines quantités est nécessaire pour la preuve. Par la suite, l'existence de multi-solitons a aussi été démontrée pour (NLS) sous-critique par Martel et Merle [77], mais sans unicité. L'unicité de multi-solitons pour des équations ne jouissant pas d'une propriété de monotonie reste ouvert.

Dans cette thèse, nous démontrons au chapitre 3 l'existence et l'unicité de multisolitons pour des équations de (ZK) sous-critiques et critiques. Cette construction se fait dans des espaces de Sobolev H^s , pour $s > 1$:

Théorème 5 (V. [122]). *Soit $K \in \mathbb{N}^*$, K vitesses distinctes $0 < c^1 < \dots < c^K$ et K shifts $(\mathbf{y}^k)_k$. Il existe un multi-soliton de (ZK) associé à ces vitesses et shifts, dénoté par R^* et défini sur un intervalle de temps $[T_0, +\infty)$. Il est unique dans H^1 au sens de (1.11). De plus, $R^* \in C^\infty([T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $\delta > 0$, et pour tout $s \geq 1$, une*

constante A_s telle que:

$$\forall t \geq T_0, \quad \|R^*(t) - R(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\delta t}.$$

Détaillons les techniques utilisées pour démontrer ce théorème.

- Tout d'abord, on considère une suite croissante de temps $(S_n)_n \rightarrow +\infty$, et une suite de solutions $(u_n)_n$ satisfaisant la condition finale $u_n(S_n) = R(S_n)$. Nous montrons que cette suite est uniformément contrôlée dans H^1 sur un intervalle de temps $[T_0, S_n]$ où T_0 est indépendant de n et sera précisé au fil des calculs:

$$\forall t \in [T_0, S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{-\sigma t}.$$

L'approximation fait appel à la modulation de la solution par dK paramètres dans le cas sous-critique, et à $(d+1)K$ paramètres dans le cas critique. Les outils de contrôle monotone de masses et d'énergies utilisés dans la preuve de cette estimée sont à rapprocher de ceux de Martel [72]. On utilise des fonctions ϕ^k qui tronquent notre solution autour de ce qui ressemble à notre $k^{\text{ième}}$ soliton, et on considère la masse M^k autour de ce qui serait un soliton:

$$\forall k \leq K, \quad M^k(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^d} u^2(t, \mathbf{x}) \phi^k(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Nous montrons des estimées de monotonie du type:

$$\forall \kappa \leq K, \forall T_0 \leq t \leq S_n, \quad \sum_{k=1}^{\kappa} (M^k(u(S_n)) - M^k(t)) \geq -C e^{-\sigma t}.$$

Nous utilisons aussi les propriétés du spectre de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ autour d'un soliton, cœur de l'étude de la stabilité. Ces différents outils permettent les premières approximations dans H^1 d'un multisoliton.

- Le contrôle des semi-normes $\dot{H}^s$ fait appel à de nouveaux arguments. Martel [72] pour (KdV) généralisé sous-critique et critique étudie la variation des normes H^s en faisant appel à des considérations algébriques pour supprimer des termes dus à la non-linéarité, et conclut par un argument de type Grönwall. Cet argument est efficace en dimension $d = 1$, mais ne tient plus en dimension $d \geq 2$. Pour pallier ce problème, il a fallu faire appel à de nouveaux ingrédients, naturels lorsque l'on contrôle l'énergie. Considérons la fonctionnelle associée à la semi-norme $\dot{H}^s$. Si $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_s)$ est un multi-indice à s composantes, on se retrouve à devoir majorer des termes bilinéaires en l'erreur avec un grand nombre de dérivées comme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|(u - R)(t)\|_{\dot{H}^s}^2) &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} |D_{\mathbf{i}}(u - R)(t)|^2 \partial_1 \phi^k(t) + \text{"autres termes"} \\ &\lesssim \|(u - R)(t)\|_{\dot{H}^s}^2 + \text{"autres termes"} \end{aligned}$$

C'est ce type de majoration qui ferait échouer l'argument de Grönwall. Pour traiter ces termes non-linéaires, on ajoute à la fonctionnelle $\dot{H}^s$ des termes comme

$\int |\partial_{(i_1 \dots i_{s-1})}(u - R)|^2 R^k$. La dérivée temporelle de ce terme contrôle les précédents termes bilinéaires en l'erreur, et ils jouissent de bonnes propriétés de monotonie. Ces nouveaux termes sont plus faciles à contrôler. On obtient une estimée améliorée:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\|(u - R)(t)\|_{H^s}^2 + \text{"Termes compensatoires"}) \\ & \lesssim \text{"termes contrôlés par monotonie"} \\ & \quad + \text{"termes exponentiellement décroissants"} . \end{aligned}$$

Cette technique utilise grandement la monotonie typique des équations de type (KdV). Une fois les contrôles des normes H^1 et H^s établis, avec une décroissance exponentielle indépendante de s , nous pouvons montrer l'existence d'un multi-soliton R^* dans ces espaces : il suffit de prendre une limite faible dans L^2 de $(u_n(T_0))_n$, qui est en fait une limite forte, et d'associer à cette nouvelle condition initiale la solution R^* . Les estimées précédentes de décroissance exponentielle des erreurs étant uniformes en n , on obtient par passage à la limite et continuité du flot la décroissance exponentielle de l'erreur $R^*(t) - R(t)$.

- Le dernier point concerne l'unicité de tels multi-solitons. On compare un multi-soliton au précédent construit R^* , dont on contrôle la différence avec la somme des K -solitons découplés. On majore ensuite cette erreur par une décroissance exponentielle. De nouveau, la propriété de monotonie est essentielle dans cette preuve. Remarquons que dans une des estimées pour la preuve, les dérivées vont porter sur R^* , et l'erreur doit être majorée par une borne H^5 . Le contrôle précédent des normes H^s , pour s suffisamment grand, est donc nécessaire.

Alors que le cas traité ci-dessus porte sur des équations sous-critiques ou critique, l'existence de multi-solitons a été adaptée pour (KdV) sur-critique. La question était donc de savoir si l'existence et l'unicité des multi-solitons étaient toujours avérée dans des cas sur-critiques. Côte, Martel et Merle dans [22] prouvent l'existence d'au moins un multi-soliton pour (KdV) surcritique. Le spectre de l'opérateur linéarisé $\partial_1 \mathcal{L}$ étant connu (voir [109]), il a fallu utiliser un argument topologique pour contrôler la direction d'instabilité, généré par une valeur propre positive. La question de l'unicité est ensuite abordée par Combet [16] : pour les mêmes équations, il prouve l'existence d'une famille de solutions qui en temps long se rapproche d'un soliton. Une description éclairée des multi-solitons est donnée par Combet [16]: toute solution qui en temps long se comporte comme un K -soliton est décrite par une famille à K paramètres. Dans les faits, chacun des paramètres est du à l'unique valeur propre simple strictement positive de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ autour de chacun des solitons. Cette étude repose de manière cruciale sur une étude du spectre de $\partial_1 \mathcal{L}$ pour (KdV). En ce qui concerne une généralisation de ces résultats pour (ZK), il faudrait déterminer un équivalent des résultats de Pego et Weinstein [109] concernant le spectre : ils utilisent la fonction d'Evans, outil très efficace en dimension $d = 1$. À la connaissance de l'auteur, il n'y a pas d'outil qui peuvent être généralisés aux dimensions supérieures, et donc la connaissance du spectre de $\mathcal{L}$ reste latente.

Comme expliqué dans 1.5, la question de savoir si une petite perturbation d'un soliton laissait la solution proche de ce même soliton est essentielle. Le pendant pour les multi-solitons est naturel : Alejo, Munoz, Vega dans [1] prouvent la stabilité L^2 ainsi que la stabilité asymptotique d'une somme de K solitons pour (KdV). L'équivalent pour la stabilité des multi-solitons de (ZK_{2D}) est dû à Côte, Muñoz, Pilod et Simpson [24] : les multi-solitons sont asymptotiquement stables. On peut conjecturer que les multi-solitons dans les autres cas sous-critiques de (ZK) sont asymptotiquement stables dans le sens de [24], avec un reste radiatif.

Notons enfin qu'il existe des constructions plus exotiques de solutions à partir de solitons. Nous connaissons le comportement en temps long d'un soliton ou d'un multi-soliton : on peut ajouter à cette solution un terme dispersif qui affecterait peu la solution précédemment considérée. Côte dans [19] montra que (KdV) critique possède des solutions qui se décomposent en multi-solitons avec un terme dispersif.

Ces constructions de multi-solitons sont généralisables à d'autres grandes familles d'équations dispersives:

- Pour les équations de type Schrödinger, rappelons le résultat de Martel et Merle [77]. Le cas de l'équation de Hartree 3D:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - \phi_{|u|^2} u = 0, \\ \Delta \phi_{|u|^2} = |u|^2 \quad \text{i.e.} \quad \phi_{|u|^2} = -\frac{1}{4\pi\|\mathbf{x}\|} \star |u|^2, \\ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \end{cases}$$

a été traité par Krieger, Martel et Raphaël dans [61]. Les auteurs construisent des 2-solitons dans les cas paraboliques et hyperboliques. Notons que les interactions entre les différents solitons ne sont pas exponentiellement décroissantes, et qu'il faut établir une approximation de la solution à tous les ordres.

- Dans la famille des équation des ondes, notons un premier article de Feireisl [38] avec la construction de multi-solitons pour l'équation des ondes semi-linéaire amortie:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u + a\partial_t u + bu = |u|^{\alpha-1} u, \\ u = u(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, d \geq 3, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \partial_t u(0, \mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où a et b sont des constantes strictement positives, et l'exposant α vérifie:

$$1 < \alpha < \alpha^* \quad \text{with} \quad \alpha^* = 1 + \min \left\{ \frac{2}{d-2}, \frac{4}{d} \right\}.$$

Dans le cas de l'équation de l'équation de Klein-Gordon non linéaire (NLKG), où f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\partial_{tt} u - \Delta u + u - f(u) = 0, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

Côte et Muñoz dans [23] explicitent une construction de multi-solitons. De plus, pour cette même équation, Côte et Martel dans [21] prouvent l'existence de solutions se décomposant à l'infini comme une somme de plusieurs solitons et de plusieurs états excités. Enfin, concernant l'équation des ondes en dimension $d = 5$, c'est-à-dire à énergie critique:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u - |u|^{\frac{4}{3}}u = 0, & (t, \mathbf{x}) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^5, \\ u(t=0) = u_0 \in \dot{H}^1, \quad \partial_t u(t=0) = u_1 \in L^2, \end{cases}$$

la construction de multi-solitons a été donnée par Martel et Merle [81].

- En mécanique des fluides, Ming, Rousset et Tzvetkov construisent des multisolitons pour les systèmes water waves dans [99].

L'étape suivante à la construction de multi-solitons est donc la résolution de la conjecture en décomposition de solitons. Comme souligné précédemment, cette conjecture a été prouvée pour (KdV) et (KdV) modifié. Pour les équations non-intégrables, cette conjecture est restée en partie ouverte. Notons l'article [20] de Côte concernant l'équation des wave maps : soit une solution explose en temps fini, soit elle se décompose, sur une suite de temps, comme une somme de solitons plus un terme radiatif. Cette décomposition a été aussi abordée par Duyckaerts, Jia, Kenig et Merle dans [30] pour l'équation des ondes critiques focalisantes. Ils montrent que les solutions se décomposent, sur une suite de temps, comme une somme de solitons découplés plus un terme radiatif.

1.7.2 Des collisions élastiques?

Le problème des collisions est le suivant : considérons la condition initiale $u_0(x) = Q_{c^1}(x - y^1) + Q_{c^2}(x - y^2)$ au temps $t = 0$, avec $c_1 > c_2$ et $y_1^1 \ll y_2^2$:

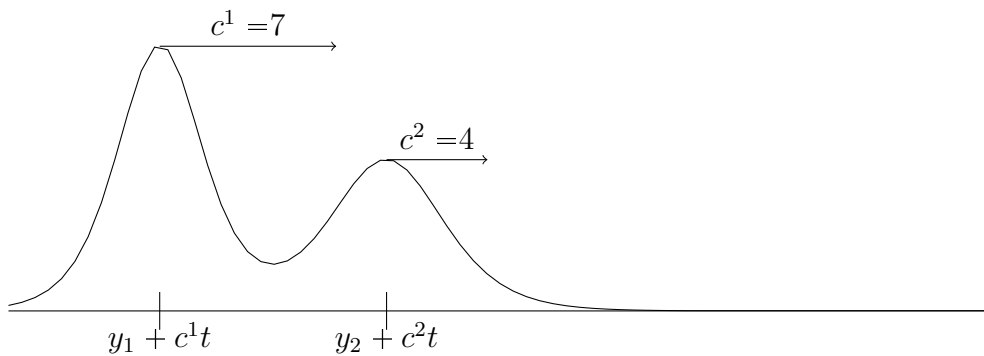


Figure 1.1: Deux solitons avant collision pour (KdV)

Au début, les deux solitons sont considérés éloignés l'un de l'autre, et leur interaction est négligeable. Puisque le premier soliton est plus massif, donc plus rapide que le deuxième, il va rattraper le premier: une collision se créera. La question est de savoir ce qu'il advient de la solution après la collision : on dit que la collision est élastique si après un temps T suffisamment large, la solution se décompose de nouveau comme une somme

de deux solitons avec les mêmes vitesses que précédemment:

$$u(t) - \sum_{i=1}^2 Q_{c^i}(\cdot - c^i t e_1 - z^i) \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}^d),$$

où les shifts z^i peuvent être modifiés:

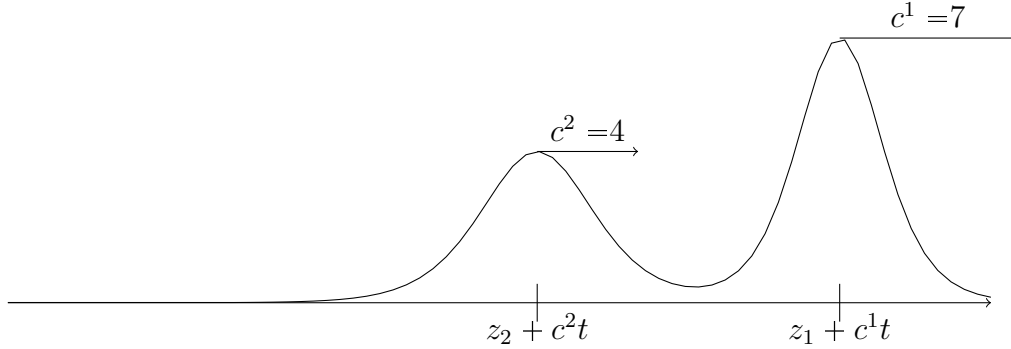


Figure 1.2: Deux solitons après collision pour (KdV)

Ce problème a en fait déjà été abordé par la méthode de scattering inverse, prédisant qu'il existait des solutions qui en temps long $t \rightarrow \pm\infty$, voir Miura [100], se décomposaient comme une somme de solitons, avec des vitesses distinctes, mais dans le cas intégrable. Ces résultats numériques ont été décrits par Zabusky et Kruskal [128] : dans le cas périodique, différents solitons interagissent de cette manière. En particulier, on voit apparaître l'interaction entre différents solitons, ce qui se passe avant et après la collision ; Hirota [50] donne aussi des formules explicites pour les solitons en temps long : si c^1 et c^2 sont deux vitesses, $\xi^1 = \sqrt{c^1}(x - c^1 t)$ et $\xi^2 = \sqrt{c^2}(x - c^2 t)$ des variables auxiliaires, et $a = \left(\frac{\sqrt{c^1} - \sqrt{c^2}}{\sqrt{c^1} + \sqrt{c^2}}\right)$, on peut exprimer un 2-solitons par:

$$u(t, x) = 2 \frac{c^1 e^{\xi^1} + c^2 e^{\xi^2} + a(\sqrt{c^1} + \sqrt{c^2})^2 e^{\xi^1 + \xi^2}}{1 + e^{\xi^1} + e^{\xi^2} + a e^{\xi^1 + \xi^2}} - 2 \frac{\left(c^1 e^{\xi^1} + c^2 e^{\xi^2} + a(\sqrt{c^1} + \sqrt{c^2}) e^{\xi^1 + \xi^2}\right)^2}{(1 + e^{\xi^1} + e^{\xi^2} + a e^{\xi^1 + \xi^2})^2}$$

Dans le cas non-intégrables, des résultats numériques montrent que certaines perturbations rendent la collision non-élastiques.

Le premier résultat de collision non-élastique est du à Martel et Merle [80] : pour (KdV) quartique, donc sous-critique mais non intégrable, les solutions qui sont des deux solitons en $-\infty$ sont des deux solitons en $+\infty$, mais les paramètres changent: les vitesses de chaque soliton se trouvent modifiées, ainsi que les shifts. De plus, un terme radiatif apparaît: ces collisions sont "presque" élastiques. Le même résultat a été prouvée pour l'équation des ondes critique 5D par Martel et Merle [82] : les collisions de deux solitons sont non-élastiques.

Ce phénomène de collisions élastiques existe pour des équations de (KdV) généralisées à n'importe quelle non-linéarité, uniquement dans trois cas particuliers, selon Muñoz [103] : pour les équations (KdV), (KdV) modifié, ainsi que pour une autre puissance spécifique $u^2 + u^3$: ce sont les seuls cas pour lesquels la collision est élastique.

Le problème se pose à présent pour les équations de type (ZK). Les premiers résultats

numériques en dimension $d = 2$, dus à Klein, Roudenko et Stoilov [58], laissent à penser que dans le cas sous-critique $p = 2$, les collisions de deux solitons de vitesses différentes, et pas nécessairement sur la même abscisse, sont élastiques.

1.8 Interactions fortes

Nous avons déjà abordé dans les sections 1.3.1 et 1.3.2 quelques notions d'interactions. En particulier, pour certaines équations intégrables, des formulations explicites existent pour exprimer une solution comme une somme de solitons avec différentes vitesses : en particulier, dans les articles précédents, l'interaction estimée entre les différents solitons était faible, dans le sens où les multi-solitons convergent vers une somme de solitons découplés, et l'interaction ne modifie pas la trajectoire à $o(1)$ près. D'autres cas d'interaction sont possibles et certains d'entre eux ont été déterminés ces cinq dernières années.

Les cas que nous allons aborder dans un premier temps, et qui sont détaillés dans le chapitre 4, concernent la construction de solutions qui se comportent comme une somme de solitons et dont l'interaction influe leur trajectoire au fil du temps. Quelques constructions de solutions dont la trajectoire est régie par l'interaction entre les différents objets ont déjà établis. L'article de Martel et Raphaël [89] porte sur l'existence de solutions de (NLS) critique qui explosent en temps infini en 0, et qui sont composées de K bulles centrées sur les sommets d'un K -gone régulier.

Pour l'équation de (KdV) généralisé sous-critique et sur-critique, Nguyen, dans [106], créa des solutions u qui se comportent en temps long comme une somme de deux solitons à la même vitesse $c = 1$, avec une correction logarithmique. Les deux solitons sont à la suite l'un de l'autre, donc leur interaction est non négligeable à l'infini : c'est cette interaction qui sépare les deux solitons avec une distance logarithmique. La distance les séparant est en $2\ln(t)$. Avec $\sigma = -1$ pour les cas sous-critiques, et $\sigma = +1$ pour les cas sur-critiques, il obtient l'existence de solutions qui se comportent ainsi:

$$\|u(t) - (Q(\cdot - ct - \ln(ct)) + \sigma Q(\cdot - t + \ln(ct)))\|_{H^1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{où } c > 0 \text{ est fixée.}$$

Citons un autre résultat d'interaction forte. Nguyen dans [107] construisit pour l'équation de Schrödinger (NLS) des solutions qui se comportent comme une somme de deux solitons, dont la vitesse de séparation des deux solitons est aussi en $2\ln(t)$. Remarquons que la construction est à rapprocher de celle de [89]. De plus, les vitesses d'oscillation des deux solitons doivent satisfaire une certaine équation pour que ces deux objets s'éloignent à cette vitesse.

Dans les trois résultats précédemment exposés, la construction nécessita de paramétrer les solutions par différents paramètres de modulation intrinsèques à l'équation (translation en espace, fréquence, scaling, transformation galiléenne, etc). La vitesse logarithmique en $2\ln(t)$ obtenue dans les deux derniers résultats est due à une équation d'ordre 2 sur la distance de séparation entre les deux solitons : elle fait intervenir deux paramètres de modulation. Nous parlons ainsi d'interaction d'ordre 2. Ces résultats d'interaction forte d'ordre 2 est aussi valable pour [89].

Notons un résultat de Martel et Nguyen [87], avec deux solitons à des vitesses distinctes pour l'équation de Schrödinger couplé : un soliton à vitesse 1, et un second à vitesse $c < 1$, et la distance logarithmique se trouve modifiée.

Dans cette thèse, nous abordons un cas d'interaction forte d'ordre 1 pour des équations de Zakharov-Kuznetsov généralisées $2D$ sous-critiques :

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + f(u)) = 0, \quad f(u) = |u|^{p-1}u, \quad 2 < p < 3, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{gZK})$$

un cas d'interaction forte d'ordre 1. D'après les précédents résultats sur (KdV) généralisé où deux solitons sont l'un derrière l'autre, la distance de séparation est logarithmique en temps $2 \ln(t)$. Pour (gZK), si les deux solitons sont centrés sur la même ordonnée, il est légitime de s'attendre à ce que l'interaction soit régie par les mêmes paramètres de modulation, c'est-à-dire d'une part le paramètre de translation dans la première direction, et puisque l'interaction est située selon la direction x_1 de déplacement du soliton, le paramètre de scaling. Nous proposons ici le cas où les deux solitons de signes opposés sont centrés sur la même abscisse:

Conjecture 6. *Il existe une solution R^* de (gZK) satisfaisant:*

$$\left\| R^*(t) - Q \left(\cdot - t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \ln(t)\mathbf{e}_2 \right) + Q \left(\cdot - t\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \ln(t)\mathbf{e}_2 \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty.$$

Par scaling, ce résultat est généralisable pour deux solitons à vitesses à $c > 0$.

Dans ce cas, le seul paramètre de modulation qui interviendra pour ces deux solitons est le paramètre de translation selon la deuxième direction x_2 . Ceci implique que le système d'équation qui régie la distance séparant les deux solitons est d'ordre 1, donc la distance qui sépare les deux solitons est en $\ln(t)$.

1.9 Plan de la thèse et problèmes ouverts

Comme notifié au cours de cette introduction, nous avons résolu plusieurs problèmes concernant les équations de Zakharov-Kuznetsov. Il reste cependant des problématiques irrésolues:

- Concernant la croissance des normes de (ZK_{2D}) , nous avons montré que la croissance était au plus polynomiale. Ce résultat est prouvé au chapitre 2. Il serait intéressant de savoir s'il existe une solution régulière non bornée, pour laquelle la croissance des normes H^s serait polynomiale, voire logarithmique, et savoir si cette croissance est optimale.
- Il reste à montrer l'explosion en temps fini de (mZK_{2D}) . De plus, les questions de masse minimale nécessaire à l'explosion et de profil à l'explosion sont ouvertes.
- Nous avons montré l'existence et l'unicité des multi-solitons associés à des vitesses distinctes pour (ZK_{2D}) , (ZK_{3D}) et (mZK_{2D}) : le chapitre 3 est dédiée à la preuve de ce théorème. La stabilité asymptotique de tels objets a été démontrée par [24].

- Dans les cas sur-critiques comme (mZK_{3D}) , il reste à montrer que les multi-solitons existent ; on s'attend, comme pour (KdV) généralisé sur-critique, que les multi-solitons puissent être paramétrés par une famille à un certain nombre de paramètres. Ce nombre dépendra du spectre de l'opérateur $\mathcal{L}$, qui reste encore à déterminer.
- Nous ignorons encore si les collisions de différents solitons, situés sur une même ordonnée ou sur une ordonnée différente, sont élastiques.
- Le fait que la dimension d soit supérieure à 2 laisse ouvert le problème des interactions de solitons en temps long. Le chapitre 4 de cette thèse est dédiée aux premiers calculs associés à un premier cas d'interaction. Les deux cas très intéressants sont ceux de deux solitons symétriques par rapport à l'axe x_1 de (ZK_{2D}) , où la non-linéarité laisse apparaître une très forte interaction entre les différents solitons, et de (mZK_{2D}) , où il manque des outils pour décrire les directions d'interaction.

Chapitre 2

Croissance polynomiale des normes de Sobolev ¹

Ce travail est le fruit d'une collaboration avec Raphaël Côte.

Abstract

We consider the Zakharov-Kuznetsov equation (ZK) in space dimension 2. Solutions u with initial data $u_0 \in H^s$ are known to be global if $s \geq 1$. We prove that for any integer $s \geq 2$, $\|u(t)\|_{H^s}$ grows at most polynomially in t for large times t . This result is related to wave turbulence and how a solution of (ZK) can move energy to high frequencies.

It is inspired by analogous results by Staffilani [121] on the non linear Schrödinger and Korteweg-de-Vries equation. The main ingredients are adequate bilinear estimates in the context of Bourgain's spaces and a careful study of the variation of the H^s norm.

¹Ce chapitre fait office d'un article intitulé : *Polynomial Growth of high Sobolev norms of solutions to the Zakharov-Kuznetsov equation*, actuellement soumis.

2.1 Statement of the result.

We are interested in the 2D Zakharov-Kuznetsov equation

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (\Delta u + u^2) = 0, & u : I_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (\text{ZK})$$

where $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ is the laplacian on $\mathbb{R}^2$, the time interval $I_t \ni 0$ is the interval of existence. This equation has been studied to model propagation, in magnetized plasma, of non-linear ion-acoustic waves, see [132]. (ZK) has also been derived from the Euler-Poisson system in dimension $d = 2$ and $d = 3$ by Lannes, Linares and Saut in [66], and from the Vlasov-Poisson equation by Han-Kwan [47].

This equation naturally enjoys some conserved quantities (at least formally) like the mass and the energy:

$$M(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} u^2(t, x, y) dx dy, \quad E(u) := \frac{1}{2} \int \left(|\nabla u(t, x, y)|^2 - \frac{1}{3} u(t, x, y)^3 \right) dx dy.$$

The Cauchy problem of (ZK) has been first studied by Faminskii in [31], who showed local and global well-posedness in $H^1(\mathbb{R}^2)$. This local well-posedness has then been improved in [69], and then by Molinet and Pilod in [102] and independently by Grünrock and Herr in [46] who proved the local well-posedness in H^s for $s \geq \frac{1}{2}$. Recently, Kinoshita [57] improved this and prove local well-posedness in H^s for any $s > -\frac{1}{4}$, which is the sharp exponent.

For $s \geq 1$, the mass $M(u)$ and the energy $E(u)$ are well defined and preserved by the flow. Due to a Gagliardo-Nirenberg inequality, there exist a universal constant C such that

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad \|v\|_{H^1}^2 \leq C(1 + E(v) + M(v)^2). \quad (2.1)$$

As a consequence (ZK) is globally well-posed, and the H^1 norm $\|u(t)\|_{H^1}$ remains bounded for all times.

One can naturally ask what happens for $\|u(t)\|_{H^s}$. If for some $s > 1$, $\|u(t)\|_{H^s} \rightarrow +\infty$, one speaks of *energy cascade phenomenon*, which means that some energy move from low frequencies to high frequencies: it is an important aspect of out of equilibrium dynamics, predicted and studied on a number of nonlinear dispersive models, under the name of *wave turbulence* in the Physics literature. To the contrary, for integrable systems, one expects that all $\|u(t)\|_{H^s}$ remain bounded.

One should note that the proof of local well-posedness often allows to give exponential (or double exponential) bounds on $\|u(t)\|_{H^s}$. On the other hand, constructing a solution which displays an energy cascade phenomenon is very delicate, we refer to the work by Hani, Pausader, Tzvetkov and Visciglia [48] for an example in the context of Schrödinger type equations.

In this article, we prove that the H^s -norm of a solution u of (ZK) equation grows at

2010 *Mathematics Subject Classification* : 35Q53 (primary), 35B65, 35Q35.

Key words : Zakharov-Kuznetsov equation; growth of high Sobolev norms.

most polynomially for large times.

Theorem 7. *Let $s \geq 2$ be an integer and $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Denote u the solution of (ZK) with initial data u_0 and $A = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_{H^1}$. Then $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s)$ and for any $\beta > \frac{s-1}{2}$, there exist a constant $C = C(s, \beta, A)$, such that*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C(1 + |t|)^\beta (1 + \|u_0\|_{H^s}), \quad (2.2)$$

The start of the study of the polynomial growth of norms is due to Staffilani [121] in the context of non linear Schrödinger and Korteweg-de Vries type equations, with ideas of Bourgain [6] and [7]. It was later extended to many situations: let us refer Isaza, Mejía and Tzvetkov [51] for the Kadomstev-Petviashvili-II equation, Sohinger [120] for the Schrödinger and Hartree equations, or Planchon, Tzvekov, Visciglia [111] for the Schrödinger equation on a manifold, and the references therein.

The method of proof in [121] is to refine the local well-posedness statement. Usually, what is proved is that given u_0 , there exist $C, T > 0$ such that one can construct a solution u on $[-T, T]$ and such that

$$\forall t \in [-T, T], \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C\|u(0)\|_{H^s}. \quad (2.3)$$

If C and T only depend on $\|u_0\|_{H^1}$, one can use an iteration argument and obtain global well-posedness in H^s with an exponential bound on the H^s norm. The heart of the method lies in the observation that, for H^s -norms (with $s > 1$), a similar bound can be obtained, but with a slightly better exponent on the H^s norm on the right-hand side. More precisely, there exists $\epsilon > 0$ and two functions $C, T : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ (C increasing, and T decreasing) such that for any solution u of (ZK), and for all $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0 - T(\|u(t_0)\|_{H^1}), t_0 + T(\|u(t_0)\|_{H^1})], \\ \|u(t)\|_{H^s} \leq \|u(t_0)\|_{H^s} + C(\|u(t_0)\|_{H^1})(1 + \|u(t_0)\|_{H^s}^{1-\epsilon}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

The key point is that the time of existence T and the amplification factor C do only depend of the H^1 norm of u , which is known to be uniformly bounded for all times, and so will essentially not depend on t_0 .

With the above improved bound (2.4) in hand, one can conclude the proof of Theorem 7 by a straightforward iteration argument, by working on the time intervals $[kT(A), (k+1)T(A)]$ for $k \in \mathbb{N}$ (see Lemma 20 for details).

To derive estimate (2.3), one considers the integral formulation of the equation, and proves that the Duhamel term enjoys a better behavior than the linear term; we use Strichartz estimates, a bilinear estimate due to Molinet and Pilod [102], and its tame version. With (2.3) in hand, one can then look for the improved version (2.4). For this, [121] makes use of bilinear estimates due to Kenig-Ponce-Vega in [56] in Bourgain spaces $X^{s,b}$, [120] relies on the I -method (first developed in [15]), and [111] considers high order modified functionals of energy type. In this paper, we will follow the method in [121] and work in suitable Bourgain spaces. In order to derive (2.4), we study the variation of the H^s norm. Compared with (KdV) for example, one has to be extra careful on how

derivatives fall on each factor, because the algebraic structure of (ZK) is not as strong as that of (KdV), and the dispersion effects are weaker for (ZK) than for (KdV): as it can be seen from the bilinear estimates in [102] which require positive index of regularity (and the fact that the local well posedness results are not optimal). To suitably bound the worst terms, we prove a new bilinear estimate (in Proposition 17) for negative regularity, which is the main new technical tool of this paper.

The article is organized as follows. We recall in section 1 Strichartz estimates and embeddings between Bourgain's spaces and Sobolev spaces for (ZK), in order to fix notations. In section 2, we collect and prove the bilinear estimates required to deal with the non linear term. In section 3, we prove a local well posedness result with time of existence depending only on $\|u(0)\|_{H^1}$, and then we conclude the proof of Theorem 7.

2.2 Notations and basic facts

2.2.1 Notations

For $x \in \mathbb{C}$, $|x|$ denotes the module of x , and for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, we use the norm

$$|(x, y)| := \sqrt{3x^2 + y^2},$$

(it is anisotropic but convenient for our purposes). We denote by $\hat{u}$ the Fourier transform with respect to the *space and time* variables, and the inverse Fourier transform by $u^\vee$. The Fourier transform with respect to t or the space variables only will be respectively denoted $\mathcal{F}_t(u)$ or $\mathcal{F}_{xy}(u)$. The derivatives will be denoted ∂_t , ∂_x or ∂_y .

For a general function $P(t, x, y)$, we define the associated self-adjoint and positive differential operator by:

$$P(D)f(t, x, y) := \int_{\mathbb{R}^3} |P(i\tau, i\xi, i\eta)| e^{i(\tau t + \xi x + \eta y)} \hat{f}(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta.$$

For instance, we will regularly use the differential operators D_x for $P = x$, D_y for $P = y$ and D_t for $P = t$ acting on frequencies:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{xy}(D_x f)(\xi, \eta) &= |\xi| \mathcal{F}_{xy}(f)(\xi, \eta), & \mathcal{F}_{xy}(D_y f)(\xi, \eta) &= |\eta| \mathcal{F}_{xy}(f)(\xi, \eta), \\ \mathcal{F}_t(D_t f)(\tau) &= |\tau| \mathcal{F}_t(f)(\tau). \end{aligned}$$

We define the derivation operator $S(D)$ with $S(t, x, y) = \langle |(x, y)| \rangle$ (where $\langle a \rangle := (1 + a^2)^{\frac{1}{2}}$ is the Japanese bracket), to the power s to define the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{F}_{xy}(S(D)^s f)(x, y) := \langle |(\xi, \eta)| \rangle^s \mathcal{F}_{xy}(f)(\xi, \eta), \quad \|f\|_{H^s} := \|S(D)^s f\|_{L^2}. \quad (2.5)$$

We will manipulate multi-indices at many places: they will always be denoted by a bold letter $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$, with i_1 and i_2 in $\mathbb{N}$. Then we denote $D^{\mathbf{i}}$ the differential operator

with i_1 derivatives on the x variable, and i_2 on the y variable:

$$D^{\mathbf{i}}f(x, y) := D_x^{i_1} D_y^{i_2} f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^{i_1} |\eta|^{i_2} e^{i(\xi x + \eta y)} \mathcal{F}_{xy}(f)(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

The length of a multi-index $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$ will be denoted by $|\mathbf{i}| := i_1 + i_2$. We also use a partial order on multi-indices:

$$\mathbf{j} \leq \mathbf{i} \quad \text{if} \quad j_1 \leq i_1 \text{ and } j_2 \leq i_2, \quad \text{and} \quad \mathbf{j} < \mathbf{i} \quad \text{if} \quad (j_1 + 1, j_2) \leq \mathbf{i} \text{ or } (j_1, j_2 + 1) \leq \mathbf{i}.$$

The linear part of the equation (ZK) $\partial_t u + \partial_x \Delta u = 0$ induces a semigroup denoted $W : \mathbb{R}_t \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2))$, defined by :

$$\mathcal{F}_{xy}(W(t)u)(\xi, \mu) := e^{it\omega(\xi, \mu)} \mathcal{F}_{xy}(u)(t, \xi, \mu) \quad \text{with} \quad \omega(\xi, \mu) = \xi(\xi^2 + \mu^2).$$

Similarly, this linear flow can be represented in space-time, which motivates the introduction of the function $F(t, x, y) := \langle |t + x(x^2 + y^2)| \rangle$ and the operator $F(D)$ to the power $b \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{F(D)^b f}(\tau, \xi, \eta) := \langle \tau - \omega(\xi, \eta) \rangle^b \widehat{f}(\tau, \xi, \eta). \quad (2.6)$$

We then introduce the adapted Bourgain spaces. Given two indices $s, b \in \mathbb{R}$, the Bourgain space $X^{s,b}$ takes into account first the norm H^s in space of a function $u(t, x, y)$, and secondly how far away (H^b in time) the solution is from the linear flow: the associated norm is

$$\|u\|_{X^{s,b}}^2 := \|S(D)^s F(D)^b u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \tau - \omega(\xi, \mu) \rangle^{2b} |\widehat{u}(\tau, \xi, \mu)|^2 d\tau d\xi d\mu,$$

where S and F are defined above in (2.5) and (2.6). $X^{s,b}$ is the completion of the Schwartz functions of $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^2$ for this norm.

Because of the conserved quantities, all the solutions u of (ZK) (even small) will not have finite $X^{s,b}$ -norm. This is why we will consider solution to a version of the integral formulation of (ZK) which is truncated in time, by the use of a smooth cut-off function. Let the non-negative smooth function ϕ equal to 1 on $[0, 1]$, and 0 outside $[-1, 2]$, and the T -dilated functions $\phi_T(t) = \phi(\frac{t}{T})$. We will always assume in the following that $T \leq 1$. The truncated Duhamel operator is given by the following formula:

$$\Psi(w)(t) := \phi_1(t)W(t)u_0 + \phi_T(t) \int_0^t W(t-t') \phi_T(t')^2 \partial_x(w^2)(t') dt'. \quad (2.7)$$

Observe that if we can construct a fixed point w such that $\Psi(w) = w$, then w is a solution to (ZK) on the interval $[-T, T]$ (with initial data $w(0) = u_0$).

In order to prove the various (bilinear) estimates, we need to work with a Littlewood-Paley decomposition. Let a positive and non increasing function χ_0 in $\mathcal{C}_0^\infty([0, +\infty))$, such that

$$\chi_0(r) = 1 \quad \text{if } r \leq \frac{5}{4}, \quad \text{and} \quad \chi_0(r) = 0 \quad \text{if } r \geq \frac{8}{5}.$$

Let

$$\chi(r) = \chi_0\left(\frac{r}{2}\right) - \chi_0(r) \quad \text{and} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \chi_j(r) := \chi\left(\frac{r}{2^j}\right).$$

We will use the following truncation operators, related to space and to the linear flow, recalling that $|(\xi, \mu)| = \sqrt{3\xi^2 + \mu^2}$:

$$P_N(u) := (\chi_N(\langle |(\xi, \mu)| \rangle) \hat{u}(\tau, \xi, \mu))^\vee \quad \text{and} \quad Q_L u := (\chi_L(\langle \tau - \omega(\xi, \mu) \rangle) \hat{u}(\tau, \xi, \mu))^\vee. \quad (2.8)$$

For $b \in \mathbb{R}$, we will sometimes denote b^+ for any number $b + \epsilon$ with $\epsilon > 0$ small. Finally, given two functions f and g (depending on space and/or time), we denote

$$f \lesssim g \quad \text{if} \quad \exists C > 0, \quad f \leq Cg,$$

for an absolute implied constant C , independent of f and g (unless otherwise specified), which can change from one line to the next. Sometimes $\lesssim$ is used for quantities involving a b^+ : in that case, the implied constant may depend on $\epsilon > 0$.

2.2.2 Strichartz estimates and Bourgain spaces

Now we recall some lemmas which are the heart of the following proofs, to begin with the Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 2:

Proposition 8 ([70, Proposition 3.1] and [68, Proposition 2.4]). *Let $\epsilon \in [0, \frac{1}{2})$, $\theta \in [0, 1]$ and define*

$$p = \frac{2}{1 - \theta}, \quad \text{and} \quad q = \frac{6}{\theta(2 + \epsilon)}.$$

Let f be a function defined on $\mathbb{R}^2$, and g be defined on $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2$. Then the following estimates hold:

$$\begin{aligned} \left\| D_x^{\frac{\epsilon\theta}{2}} W(t)f \right\|_{L_t^q L^p} &\lesssim \|f\|_{L^2}, \\ \left\| D_x^{\theta\epsilon} \int W(t - t')g(t')dt' \right\|_{L_t^q L^p} &\lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L^{p'}}, \\ \left\| D_x^{\theta\epsilon} \int W(t)g(t)dt \right\|_{L^2} &\lesssim \|g\|_{L_t^{q'} L^{p'}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

In particular, the first estimate yields an embedding in the context of Bourgain spaces:

Corollary 9 ([102, Corollary 3.2]). *There hold*

$$\|u\|_{L_{txy}^4} \lesssim \|u\|_{X^{0, \frac{5}{12}+}}, \quad (2.10)$$

Furthermore, (2.9) (up to the use of Cauchy-Schwarz inequality) gives us another embedding: if $u \in X^{s, \frac{1}{2}+}$, then uniformly in $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u\|_{X^{s, \frac{1}{2}+}}. \quad (2.11)$$

We now focus on the terms of the Duhamel formula (2.7). We give the following two linear estimates in Bourgain spaces: the first estimate is useful when dealing with the linear term; the second for the Duhamel term.

Lemma 10 ([41, Lemmas 3.1 and 3.2]). *Fix $T \leq 1$.*

Let $b \geq 0$ and $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Then:

$$\|\phi_T(t)W(t)f\|_{X^{s,b}} \lesssim T^{\frac{1}{2}-b}\|f\|_{H^s}. \quad (2.12)$$

Let $-\frac{1}{2} < b' < 0 < b \leq 1 + b'$, and $g \in X^{s,b'}$. Then

$$\left\| \phi_T(t) \int_0^t W(t-t')g(t')dt' \right\|_{X^{s,b}} \lesssim T^{1-b+b'}\|g\|_{X^{s,b'}}. \quad (2.13)$$

Proof. A proof of these estimates in the context of the Korteweg-de Vries equation is done in the review article by Ginibre [41, Lemma 3.1 and 3.2]. For the convenience of the reader, we provide below a full proof for (ZK).

The idea for estimate (2.12) is to separate the variables. In particular, we detect well the need of a fixed time interval.

$$\begin{aligned} \|\phi_T W(t)f\|_{X^{s,b}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \tau - \omega(\xi, \mu) \rangle^{2b} \left| \int e^{-i(t\tau - t\omega + x\xi + y\mu)} (\phi_T f) dx dy dt \right|^2 d\xi d\mu d\tau \\ &= \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \tau' \rangle^{2b} |\mathcal{F}_t(\phi_T)(\tau') \mathcal{F}_{xy}(f)(\xi, \mu)|^2 d\xi d\mu d\tau = \|\phi_T\|_{H_t^b}^2 \|f\|_{H_{x,y}^s}^2. \end{aligned}$$

Recalling that $\langle a \rangle \lesssim 1 + |a|$, we obtain $\|\phi_T\|_{H_t^b}^2 \leq T^{1-2b} \|\phi\|_{H_t^b}^2$, and the first estimate is proved.

For estimate (2.13): notice that the sum over t in time is in fact a division by τ in frequency. Denote $\omega := \omega(\xi, \mu)$, we split the domain whether $T|\tau - \omega| \leq 1$, and obtain:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{xy} \left(\phi_T(t) \int_0^t W(t-t')g(t')dt' \right) &= \phi_T(t) e^{it\omega} \int \frac{e^{it(\tau-\omega)} - 1}{i(\tau-\omega)} \hat{g}(\tau) d\tau \\ &= \phi_T(t) e^{it\omega} \int_{T|\tau-\omega| \geq 1} \frac{i}{\tau-\omega} \hat{g}(\tau) d\tau + \phi_T(t) e^{it\omega} \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} \int_{T|\tau-\omega| \leq 1} (i(\tau-\omega))^{k-1} \hat{g}(\tau) d\tau \\ &\quad + \phi_T(t) e^{it\omega} \int_{T|\tau-\omega| \geq 1} \frac{e^{it(\tau-\omega)}}{i(\tau-\omega)} \hat{g}(\tau) d\tau \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

For I , we proceed as in the proof of (2.12). First, by separation of variables:

$$\mathcal{F}_t(I)(\theta) = \mathcal{F}_t(\phi_T)(\theta - \omega) \int_{T|\tau-\omega| \geq 1} \frac{i}{\tau-\omega} \hat{g}(\tau) d\tau.$$

Now, observe that $b' > -\frac{1}{2}$, and the change of variable $\theta \rightarrow \theta + \omega$ gives:

$$\begin{aligned} & \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \theta - \omega \rangle^{2b} |\mathcal{F}_t(I)(\theta, \xi, \mu)|^2 d\theta d\xi d\mu \\ & \leq \|\phi_T\|_{H_t^b}^2 \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \left(\int \langle \tau - \omega \rangle^{2b'} |\hat{g}|^2 d\tau \right) \left(\int_{T|\tau - \omega| \geq 1} \frac{1}{(\tau - \omega)^{2+2b'}} d\tau \right) d\xi d\mu \\ & \lesssim T^{1-2b} \|g\|_{X^{s,b'}}^2 T^{1+2b'} = \left(T^{1-b+b'} \|g\|_{X^{s,b'}} \right)^2. \end{aligned}$$

Similarly, we compute the time Fourier transform of the term II :

$$\mathcal{F}_t(II)(\theta) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \mathcal{F}_t(t^k \phi_T)(\theta - \omega) \int_{T|\tau - \omega| \leq 1} (i(\tau - \omega))^{k-1} \hat{g}(\tau) d\tau.$$

With similar techniques we used for the term I :

$$\begin{aligned} & \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \theta - \omega \rangle^{2b} |\mathcal{F}_t(II)(\theta, \xi, \mu)|^2 d\theta d\xi d\mu \\ & \leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \|t^k \phi_T(t)\|_{H_t^b}^2 \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \left(\int \langle \tau - \omega \rangle^{2b'} |\hat{g}(\tau)|^2 d\tau \right) \\ & \quad \cdot \left(\int_{T|\tau - \omega| \leq 1} \frac{|\tau - \omega|^{2k-2}}{\langle \tau - \omega \rangle^{2b'}} d\tau \right) d\xi d\mu \\ & \lesssim \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} T^{1-2b+2k} \|g\|_{X^{s,b'}}^2 T^{1-2k+2b'} \leq \left(T^{1-b+b'} \|g\|_{X^{s,b'}} \right)^2. \end{aligned}$$

We finally need to bound III , in which the time variable t appears inside the integral on τ . The integral :

$$J(t) := \int_{T|\tau - \omega| \geq 1} \frac{e^{it(\tau - \omega)}}{i(\tau - \omega)} \hat{g}(\tau) d\tau$$

can be seen as the inverse of a Fourier transform:

$$\begin{aligned} \int \langle \theta - \omega \rangle^{2b} \left| \int e^{-it\theta} J(t) dt \right|^2 d\theta &= \int_{T|\theta - \omega| \geq 1} \frac{\langle \theta - \omega \rangle^{2b}}{(\theta - \omega)^2} |\hat{g}(\theta - \omega)|^2 d\theta \\ &\lesssim \left(T^{1-b+b'} \|\hat{g}(\xi, \mu)\|_{H_t^{b'}} \right)^2. \end{aligned}$$

Similarly, for the L^2 -norm:

$$\int \left| \int e^{-it\theta} J(t) dt \right|^2 d\theta \lesssim \left(T^{1+b'} \|\hat{g}(\xi, \mu)\|_{H_t^{b'}} \right)^2.$$

We can now compute the norm of the term III :

$$\begin{aligned}
& \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \langle \theta - \omega \rangle^{2b} |\mathcal{F}_t(III)(\theta, \xi, \mu)|^2 d\theta d\xi d\mu \\
&= \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \left(\int \langle \theta - \omega \rangle^{2b} |\mathcal{F}_t(e^{it\omega} \phi_T(t)) * \mathcal{F}_t(J)(\theta)|^2 d\theta \right) d\xi d\mu \\
&\lesssim \|\langle \tau \rangle^{2b} \mathcal{F}_t(\phi_T)\|_{L_t^1} \|J\|_{L_t^2 H^s} + \|\mathcal{F}_t(\phi_T)\|_{L_t^1} \|J\|_{X^{s,b}} \lesssim \left(T^{1-b+b'} \|g\|_{X^{s,b'}} \right)^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Observe that $X^{s,b}$ are embedded in one another as b decreases, even after truncation in time.

Lemma 11. *For all $b' < b$ satisfying $0 < b - b' < \frac{1}{2}$, and any function u in $X^{s,b}$:*

$$\|\phi_T(t)u\|_{X^{s,b'}} \lesssim T^{b-b'} \|\phi_T(t)u\|_{X^{s,b}}. \quad (2.14)$$

We emphasize that the implicit constants above do not depend on the parameters b , b' and T .

Proof. By choosing $p := \frac{1}{1+2(b'-b)}$ and $p' := \frac{1}{2(b-b')}$:

$$\begin{aligned}
\|\phi_T u\|_{X^{s,b'}}^2 &= \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \|\langle \tau - \omega \rangle^{b'} \widehat{\phi_T u}\|_{L^2}^2 d(\xi, \mu) \\
&= \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \int \langle \tau \rangle^{2b'} |\widehat{W(t)\phi_T u}|^2(\tau) d\tau d(\xi, \mu) \\
&= \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \int |\langle D_t \rangle^{2b'} \mathcal{F}_{xy}(W(t)\phi_T u)|^2 dt d(\xi, \mu) \\
&\leq \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \left(\int |\langle D_t \rangle^{b'} \mathcal{F}_{xy}(W(t)\phi_T u)|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-T \leq t \leq 2T} dt \right)^{\frac{1}{p'}} d(\xi, \mu).
\end{aligned}$$

Then by a Gagliardo-Nirenberg-Sobolev embedding $\|v(t)\|_{L_t^{2p}} \leq \|D_t^{\frac{1}{2p'}} v(t)\|_{L_t^2}$:

$$\|\phi_T u\|_{X^{s,b'}}^2 \lesssim T^{2(b-b')} \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \int |\langle D_t \rangle^{2b} W(t) \mathcal{F}_{xy}(\phi_T u)|^2 dt d(\xi, \mu) \lesssim T^{2(b-b')} \|\phi_T u\|_{X^{s,b}}^2. \quad \square$$

In the same vein, we recall an inequality of Isaza and Mejía [52] which does not focus on a time interval:

Lemma 12 ([52, Lemma 3.1]). *Let $0 < t < 1$, and $-\frac{1}{2} < b'_2 < b'_1 < b' < 0$. Thus the following inequalities hold:*

$$\|\mathbf{1}_{[0,t]} u\|_{X^{0,-b'_1}} \leq C \|u\|_{X^{0,-b'_2}} \quad (2.15)$$

$$\|\mathbf{1}_{[0,t]} u\|_{X^{0,b'_1}} \leq C \|u\|_{X^{0,b'}}. \quad (2.16)$$

In order to prove the bilinear estimates in the next section, we will make use of two preliminary lemmas already stated in Molinet Pilod [102]. The first one is the following:

Lemma 13 ([102, Proposition 3.5]). *Consider the polynomial $K(x, y) := 3x^2 - y^2$. For*

all $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\|K(D)^{1/8} e^{-t\partial_x \Delta} \phi\|_{L^4_{txy}} \lesssim \|\phi\|_{L^2_{xy}}, \quad (2.17)$$

and for all $u \in X^{0, \frac{1}{2}+}$,

$$\|K(D)^{1/8} e^{t\partial_x \Delta} u\|_{L^4} \lesssim \|u\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}. \quad (2.18)$$

Proof. This result is in fact a direct consequence of the following optimal L^4 restriction estimate for homogenous polynomial hypersurface of degree $d \geq 2$ in $\mathbb{R}^3$ proved by Carbery, Kenig and Zisler [13], which goes as follows.

Let $\Omega \in \mathbb{R}[X, Y]$ be a homogeneous polynomial of degree $d \geq 2$ and let $\Gamma(\xi, \mu) = (\xi, \mu\Omega(\xi, \mu))$. Denote $K_\Omega(\xi, \mu) = |\det \text{Hess } \Omega(\xi, \mu)|$. Then there exist a constant $C > 0$ such that

$$\forall f \in L^{4/3}(\mathbb{R}^3), \quad \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\Gamma(\xi, \mu))|^2 K_\Omega(\xi, \mu)^{1/4} d\xi d\mu \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{L^{4/3}}. \quad (2.19)$$

The symbol associated to $e^{-t\partial_x \Delta}$ is $\omega(\xi, \mu) = \xi(\xi^2 + \mu^2)$, whose Hessian is

$$\det \text{Hess } \omega(\xi, \mu) = 12\xi^2 - 4\mu^2 = 4K(\xi, \mu).$$

We can then apply (2.19) to K , and by a direct duality argument, we derive (2.17) and (2.18). $\square$

One can view this result as a $1/4$ gain of derivative when compared to the Strichartz estimate (2.9) (we refer to [102, Remark 3.1] for further details).

The second lemma reveals where the gain of regularity occurs in the dispersion relation of (ZK). It is specific to dimension 3, and so well suited to the study in Bourgain spaces of (ZK) in 2 space dimensions. We recall that the truncation operators P_N and Q_L were defined in (2.8).

Lemma 14 ([102, Proposition 3.6]). *Let N_1, N_2, L_1 and L_2 be four integers involved in the operators P_N and Q_L , and two functions u_1 and v_2 . Then*

$$\|(P_{N_1} Q_{L_1} u_1)(P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \lesssim \max(L_1, L_2)^{\frac{1}{2}} \max(N_1, N_2) \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2}. \quad (2.20)$$

If furthermore $N_2 \geq 4N_1$ or $N_1 \geq 4N_2$, then

$$\|(P_{N_1} Q_{L_1} u_1)(P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \lesssim \frac{\max(N_1, N_2)^{\frac{1}{2}}}{\min(N_1, N_2)} (L_1 L_2)^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2}. \quad (2.21)$$

Observe in inequalities (2.21) the $-\frac{1}{2}$ gain in the quotient $\frac{\max(N_1, N_2)^{\frac{1}{2}}}{\min(N_1, N_2)}$.

2.3 Bilinear estimates

The key bilinear estimate in [102] is the following:

Proposition 15 ([102, Proposition 4.1]). *Let $s > \frac{1}{2}$. Then there exists $0 < \delta < \frac{1}{4}$ such that for all u, v , two functions of $X^{s, \frac{1}{2}+\delta}$:*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X^{s, -\frac{1}{2}+2\delta}} \lesssim \|u\|_{X^{s, \frac{1}{2}+\delta}} \|v\|_{X^{s, \frac{1}{2}+\delta}}. \quad (2.22)$$

This estimates allows to gain one derivative, as required by the non linear term in (ZK), in the context of Bourgain spaces. When s is large, we need to slightly improve this estimate when $s > 1$, to derive a tame bilinear estimate where one s is exchanged for a regularity index 1: this is important so as to make a full use of H^1 bounds.

Corollary 16. *Let $s > 1$. Then there exists a constant $0 < \delta < \frac{1}{4}$, and a constant $C(s)$ such that:*

$$\forall u, v \in X^{s, \frac{1}{2}+\delta}, \quad \|\partial_x(uv)\|_{X^{s, -\frac{1}{2}+2\delta}} \leq C(s) \left(\|u\|_{X^{s, \frac{1}{2}+\delta}} \|v\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} + \|u\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} \|v\|_{X^{s, \frac{1}{2}+\delta}} \right). \quad (2.23)$$

Proof. First, by definition of the bracket,

$$\langle |(\xi_0, \mu_0)| \rangle^{2(s-1)} \leq C(s) \left(\langle |(\xi_1, \mu_1)| \rangle^{2(s-1)} + \langle |(\xi_1 - \xi_0, \mu_1 - \mu_0)| \rangle^{2(s-1)} \right),$$

which implies, by using the previous proposition :

$$\begin{aligned} & \|\partial_x(uv)\|_{X^{s, -\frac{1}{2}+2\delta}} \\ & \lesssim \|\partial_x(\langle |(\xi_1, \mu_1)| \rangle^{s-1}(u)v)\|_{X^{1, -\frac{1}{2}+2\delta}} + \|\partial_x(u\langle |(\xi_1, \mu_1)| \rangle^{s-1}(v))\|_{X^{1, -\frac{1}{2}+2\delta}} \\ & \lesssim \|\langle |(\xi_1, \mu_1)| \rangle^{s-1}u\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} \|v\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} + \|u\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} \|\langle |(\xi_1, \mu_1)| \rangle^{s-1}v\|_{X^{1, \frac{1}{2}+\delta}} \quad \square \end{aligned}$$

We will use both estimates (2.22) and (2.23) in the next section (in particular in the fixed point result). In order to prove of Theorem 7, we will also need another bilinear estimate in $X^{-\rho, b}$ spaces, with *negative* regularity index $-\rho < 0$: this gain of space derivative is crucial, and possible because we won't need the space derivative on uv there.

Proposition 17. *Let $\delta > 0$ small ($\delta < \frac{1}{12}$), $b' = -\frac{1}{2} + 2\delta$ and $b = \frac{1}{2} + \delta$. There exist a constant C , independent of δ , such that for all $0 < \rho < \frac{1}{2} - 6\delta$ the following estimate holds:*

$$\forall u, v \in X^{-\rho, b}, \quad \|uv\|_{X^{-\rho, b'}} \leq C \|u\|_{X^{-\rho, b}} \|v\|_{X^{-\rho, b}}. \quad (2.24)$$

This proposition is the main new technical result of the paper.

Proof. The idea of proof is similar to the one for (2.22) in [102], working in frequencies, and splitting in various domains. The main difference is that we will take advantage of the absence of derivative ∂_x in the estimate (2.24) compared to (2.22) to work with a lower space regularity $-\rho < 0$ instead of $s > \frac{1}{2}$.

The desired estimate (2.24) is equivalent by duality to prove

$$\int_{\mathbb{R}^6} \widehat{w}_0 \widehat{u}_1 \widehat{v}_2 \frac{\langle |(\xi_1, \eta_1)| \rangle^\rho \langle |(\xi_2, \eta_2)| \rangle^\rho}{\langle |(\xi_0, \eta_0)| \rangle^\rho} \frac{d(\tau_0, \xi_0, \mu_0) d(\tau_1, \xi_1, \mu_1)}{\langle \tau_0 - \omega_0 \rangle^{-b'} \langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b \langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b} \lesssim \|w_0\|_{L^2} \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2},$$

where $\xi_2 := \xi_0 - \xi_1$, $\mu_2 := \mu_0 - \mu_1$, $\tau_2 := \tau_0 - \tau_1$, $\widehat{w}_0 := \widehat{w}(\tau_0, \xi_0, \mu_0)$, $\widehat{u}_1 := \widehat{u}(\tau_1, \xi_1, \mu_1)$, $\widehat{v}_2 := \widehat{v}(\tau_2, \xi_2, \mu_2)$, and $\omega_i := \xi_i (\xi_i^2 + \mu_i^2)$.

We decompose along different frequencies: given integers N_0, N_1, N_2 , let

$$I_{N_0, N_1, N_2} := \int_{\mathbb{R}^6} \widehat{P_{N_0} w_0} \widehat{P_{N_1} u_1} \widehat{P_{N_2} v_2} \frac{\langle |(\xi_1, \eta_1)| \rangle^\rho \langle |(\xi_2, \eta_2)| \rangle^\rho}{\langle |(\xi_0, \eta_0)| \rangle^\rho} \frac{d(\tau_0, \xi_0, \mu_0) d(\tau_1, \xi_1, \mu_1)}{\langle \tau_0 - \omega_0 \rangle^{-b'} \langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b \langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b}.$$

Analogously, for the operators Q_L , given furthermore integers L_0, L_1, L_2 , denote

$$I_{N_0, N_1, N_2}^{L_0, L_1, L_2} := \int_{\mathbb{R}^6} (Q_{L_0} \widehat{P_{N_0} w_0}) (Q_{L_1} \widehat{P_{N_1} u_1}) (Q_{L_2} \widehat{P_{N_2} v_2}) \frac{\langle |(\xi_1, \eta_1)| \rangle^\rho \langle |(\xi_2, \eta_2)| \rangle^\rho d(\tau_0, \xi_0, \mu_0) d(\tau_1, \xi_1, \mu_1)}{\langle |(\xi_0, \eta_0)| \rangle^\rho \langle \tau_0 - \omega_0 \rangle^{-b'} \langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b \langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b}.$$

We split the frequencies into five main domains.

First domain. $N_1 \leq 2$, $N_2 \leq 2$ and $N_0 \leq 2$. We use the Plancherel equality and Hölder inequality:

$$|I_{N_0, N_1, N_2}| \lesssim \left\| \left(\frac{\widehat{u}_1}{\langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{L^4} \left\| \left(\frac{\widehat{v}_2}{\langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{L^4} \|w_0\|_{L^2},$$

and we conclude by the adequate embedding (2.10) : $X^{0, \frac{5}{12}+} \hookrightarrow L^4$.

Second domain. $4 \leq N_1$, $N_2 \leq \frac{N_1}{4}$ so $\frac{N_1}{2} \leq N_0 \leq 2N_1$. We use the upper bound of the localized frequencies (2.21):

$$\begin{aligned} I_{N_0, N_1, N_2}^{L_0, L_1, L_2} &\lesssim \frac{N_1^\rho N_2^\rho}{N_0^\rho L_0^{-b'} L_1^b L_2^b} \|(P_{N_1} Q_{L_1} u_1) (P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2} \\ &\lesssim \frac{N_1^\rho}{L_0^{-b'} L_1^b L_2^b} \frac{N_2^{\frac{1}{2}}}{N_1} L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

For $\rho < \frac{1}{2}$, the sum over L_0, L_1, L_2, N_1, N_2 and N_0 gives:

$$\sum_{N_1 \leq 2, N_2 \leq \frac{N_1}{4}, N_0} I_{N_0, N_1, N_2} \lesssim \|w_0\|_{L^2} \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}.$$

Third domain. $4 \leq N_2$, $N_1 \leq \frac{N_2}{4}$ so $\frac{N_2}{2} \leq N_0 \leq 2N_2$. By symmetry between N_1 and N_2 , the third domain is dealt with as for the second domain.

Fourth domain. $4 \leq N_1$, $N_0 \leq \frac{N_1}{4}$ so $\frac{N_1}{2} \leq N_2 \leq 2N_1$. (or equivalently, $4 \leq N_2$, $N_0 \leq \frac{N_2}{4}$ so $\frac{N_2}{2} \leq N_1 \leq 2N_2$). We use the same decomposition as the second domain, an interpolation between (2.20) and (2.21) by a coefficient $\theta \in (0, 1)$, with $\tilde{f}(x, y, z) :=$

$f(-x, -y, -z)$:

$$\begin{aligned}
I_{N_0, N_1, N_2}^{L_0, L_1, L_2} &\lesssim \frac{N_1^\rho N_2^\rho}{N_0^\rho L_0^{-b'} L_1^b L_2^b} \left\| \left(\widetilde{P_{N_1} Q_{L_1} u_1} \right) P_{N_0} Q_{L_0} w_0 \right\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{N_1^\rho}{L_0^{-b'} L_1^b L_2^b} \frac{N_0^{\frac{1}{2}(1+\theta)}}{N_1^{1-\theta}} L_0^{\frac{1}{2}(1-\theta)} L_1^{\frac{1}{2}} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2} \\
&\lesssim \frac{N_1^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\theta + \rho}}{L_0^{-b' + \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}} L_1^{b - \frac{1}{2}} L_2^b} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

By choosing θ such that $4\delta < \theta < \frac{1}{3}(1 - 2\rho)$ (this is one of the points giving the bounds on δ and ρ), the sum over L_0, L_1, L_2, N_0, N_1 and N_2 is bounded by $\|w_0\|_{L^2} \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}$.

Fifth domain. $4 \leq N_1, 4 \leq N_2, N_0 \geq \frac{N_1}{2}$ and $N_0 \geq \frac{N_2}{2}$ (so $\frac{N_2}{2} \leq N_1 \leq 2N_2, \frac{N_1}{2} \leq N_0 \leq 2N_1$ and $\frac{N_2}{2} \leq N_0 \leq 2N_2$).

We divide this domain depending on the values of ξ_i and μ_i , with a coefficient α to define later:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &:= \left\{ (\tau_0, \xi_0, \mu_0, \tau_1, \xi_1, \mu_1); (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i| \leq |\mu_i| \leq (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i|, i = 1, 2 \right\}, \\
\mathcal{D}_2 &:= \left\{ (\tau_0, \xi_0, \mu_0, \tau_1, \xi_1, \mu_1); (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i| \leq |\mu_i| \leq (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i|, i = 0, 1 \right\}, \\
\mathcal{D}_3 &:= \left\{ (\tau_0, \xi_0, \mu_0, \tau_1, \xi_1, \mu_1); (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i| \leq |\mu_i| \leq (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i|, i = 0, 2 \right\}, \\
\mathcal{D}_4 &:= \mathbb{R}_{\setminus \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3}^6.
\end{aligned}$$

First, we work on $\mathcal{D}_1$, in a subregion where $\xi_1 \xi_2 > 0$ and $\mu_1 \mu_2 > 0$. We claim that:

$$N_1^3 \lesssim \max \{ |\tau_0 - \omega_0|, |\tau_1 - \omega_1|, |\tau_2 - \omega_2| \}.$$

In fact, if $|\tau_1 - \omega_1| + |\tau_2 - \omega_2| \lesssim N_1^3$, then:

$$\begin{aligned}
&\tau_0 - \omega_0 \\
&= \tau_1 - \omega_1 + \tau_2 - \omega_2 - \xi_1 (\xi_2^2 + 2\xi_1 \xi_2 + \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2) - \xi_2 (\xi_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 + \mu_1^2 + 2\mu_1 \mu_2) \\
&\simeq \pm N_1^3,
\end{aligned}$$

which proves the claim if $\xi_1 \xi_2 > 0$ and $\mu_1 \mu_2 > 0$. The other cases are similar. We can thus argue as in the first domain, and obtain that for $\rho \leq \frac{3}{2} - 6\delta$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{N_0, N_1, N_2} I_{N_0, N_1, N_2} \\
&\lesssim \sum_{N_0, N_1, N_2} N_1^{\rho + 3b'} \left\| \left(\frac{\widehat{P_{N_1} u_1}}{\langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{X^{0, \frac{5}{6}+}} \left\| \left(\frac{\widehat{P_{N_2} u_2}}{\langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{X^{0, \frac{5}{6}+}} \|P_{N_0} w_0\|_{L^2} \\
&\lesssim \|w_0\|_{L^2} \|u_1\|_{L^2} \|v_2\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Next, the subregions $\xi_1 \xi_2 > 0$ and $\mu_1 \mu_2 < 0$, or $\xi_1 \xi_2 < 0$ and $\mu_1 \mu_2 > 0$, we use the dyadic

decomposition along the flow with the operators Q_L and by a Cauchy-Schwarz inequality:

$$I_{N_0, N_1, N_2}^{L_0, L_1, L_2} \lesssim \frac{N_1^\rho}{L_0^{-b'} L_1^b L_2^b} \|(P_{N_1} Q_{L_1} u_1) (P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2}.$$

To deal with the first L^2 -norm, we need to bound the interaction of the high/high frequencies. This is the purpose of the following lemma.

Lemma 18. *Let N_1 , N_2 , L_1 and L_2 be four integers involved in the operators P_N and Q_L , and two functions u_1 and v_2 . In the case $\frac{N_1}{2} \leq N_2 \leq 2N_1$, define the subsets S_1 and S_2 of $\mathbb{R}_{\xi_1, \mu_1}^2 \times \mathbb{R}_{\xi_2, \mu_2}^2$ by*

$$\begin{aligned} S_1(\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) &:= \{\xi_1 \xi_2 > 0, \mu_1 \mu_2 < 0\} \cup \{\xi_1 \xi_2 < 0, \mu_1 \mu_2 > 0\}, \\ S_2(\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) &:= \{\xi_1 \xi_2 < 0, \mu_1 \mu_2 < 0\}, \end{aligned}$$

and the two Fourier multipliers $(J_i)_{1 \leq i \leq 2}$, which take into account only some interaction of frequencies, by:

$$J_i(\widehat{u_1}, \widehat{v_2})(\tau, \xi, \mu) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{S_i(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1)} \widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, \mu_1) \widehat{v_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, \mu - \mu_1) d\tau_1 d\xi_1 d\mu_1.$$

Then, for α small enough, one has

$$\|J_i(P_{N_1} Q_{L_1} u_1, P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \lesssim N_1^{-\frac{1}{2}} (L_1 L_2)^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2}. \quad (2.25)$$

Observe in (2.25) the $-\frac{1}{2}$ gain for high/high interaction in $N_1^{-1/2}$; the smallness requirement on α comes from this lemma. Let us postpone its proof to the appendix, and conclude now the proof of Proposition 17. We thus use inequality (2.25) with J_1 to obtain:

$$I_{N_0, N_1, N_2}^{L_0, L_1, L_2} \lesssim \frac{1}{N_1^{\frac{1}{2}-\rho} L_0^{-b'} L_1^{b-\frac{1}{2}} L_2^{b-\frac{1}{2}}} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2} \|P_{N_0} Q_{L_0} w_0\|_{L^2},$$

and conclude summing over N_0 , N_1 , N_2 , L_0 , L_1 and L_2 . In the subregion $\xi_1 \xi_2 < 0$, $\mu_1 \mu_2 < 0$, we use the same process with J_2 in (2.25).

In the regions $\mathcal{D}_2$ and $\mathcal{D}_3$, the estimates are similar: it suffices to establish a change of variable which brings us exactly to the case of $\mathcal{D}_1$. Observe that there is no influence from neither b nor b' .

Finally, in $\mathcal{D}_4$, we use the Fourier multiplier operator $K(\xi, \mu) := |3\xi^2 - \mu^2| \gtrsim |\langle(\xi, \mu)\rangle|$, and the estimate (2.18), so that for $\rho < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} I_{N_0, N_1, N_2} &\lesssim N_1^{\rho-\frac{1}{2}} \left\| K(D)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{\widehat{P_{N_1} u_1}}{\langle \tau_1 - \omega_1 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{L^4} \left\| K(D)^{\frac{1}{8}} \left(\frac{\widehat{P_{N_2} v_2}}{\langle \tau_2 - \omega_2 \rangle^b} \right)^\vee \right\|_{L^4} \|P_{N_0} w_0\|_{L^2} \\ &\lesssim \|P_{N_0} w_0\|_{L^2} \|P_{N_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} v_2\|_{L^2}. \end{aligned} \quad \square$$

2.4 Growth of Sobolev norms

We start this section with a local well posedness result where we carefully track the dependency of the existence time: it is crucial that it only depends on $\|u_0\|_{H^1}$.

In previous results set in the context of Bourgain spaces, the proofs were made with dependency on $\|u_0\|_{H^s}$: for instance, in Kenig-Ponce-Vega [56] (where they assume $\|u_0\|_{H^s} \leq 1$ and then use a scaling argument) or Molinet Pilod [102]. This is very good for low $s < 1$, but does not quite give a suitable result in our perspective of large $s > 1$. This is why we provide a full proof below, using in particular the tame bilinear estimate (2.23) (which is only relevant for $s > 1$).

Throughout the remainder of this section we fix

$$s > 1, \quad \text{and} \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{12}\right).$$

(In particular, the constant C_0 and the function T below depend on s and δ).

Proposition 19. *There exists a universal constant $C_0 > 0$ such that if we define*

$$\forall A > 0, \quad T(A) := \frac{1}{(8C_0^2 A)^{\frac{1}{\delta}}}, \quad (2.26)$$

there exists a unique solution $u \in \mathcal{C}([-T(\|u_0\|_{H^1}), T(\|u_0\|_{H^1})], H^s)$ of (ZK) with initial condition $u(0) = u_0$. Furthermore, u satisfies the estimates :

$$\|u\|_{\mathcal{C}([-T(\|u_0\|_{H^1}), T(\|u_0\|_{H^1})], H^s)} + \|\phi_{T(\|u_0\|_{H^1})} u\|_{X^{s, \frac{1}{2} + \delta}} \leq C_0 \|u_0\|_{H^s} \quad \text{and} \quad \|\phi_{T(\|u_0\|_{H^1})} u\|_{X^{1, \frac{1}{2} + \delta}} \quad (2.27)$$

$$\leq C_0 \|u_0\|_{H^1}. \quad (2.28)$$

Proof. We consider the initial condition as u_0 , with a finite norm in H^s , $s \geq 2$. We work on

$$B := \left\{ w \in X^{s,b}; \|w\|_{X^{s,b}} \leq 2C_0 \|u_0\|_{H^s} \text{ and } \|w\|_{X^{1,b}} \leq 2C_0 \|u_0\|_{H^1} \right\},$$

with the distance $d(v, w) := \|v - w\|_{X^{1,b}}$. (B, d) is a complete metric space.

Let $T > 0$ to be chosen later. We want to apply the fixed point theorem to the function Ψ defined in (2.7) on the space B . Let δ be given as in the bilinear estimates (2.22) and (2.23), $b := \frac{1}{2} + \delta$ and $b' := 2b - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + 2\delta$. Using lemma 10 and proposition 16 :

$$\begin{aligned} \|\Psi(w)\|_{X^{s,b}} &\leq \|\phi_1(t)W(t)u_0\|_{X^{s,b}} + \left\| \phi_T(t) \int_0^t W(t-t') \phi_T(t')^2 \partial_x (w^2)(t') dt' \right\|_{X^{s,b}} \\ &\leq C_0 \left(\|u_0\|_{H^s} + T^{1-b+b'} \|\partial_x ((\phi_T(t)w)^2)\|_{X^{s,b'}} \right) \\ &\leq C_0 \|u_0\|_{H^s} (1 + 4C_0^2 T^\delta \|u_0\|_{H^1}), \end{aligned}$$

and similarly, (increasing the constant C_0 if necessary),

$$\|\Psi(w)\|_{X^{1,b}} \leq C_0 \|u_0\|_{H^1} (1 + 4T^\delta C_0^2 \|u_0\|_{H^1}).$$

Furthermore, the function Ψ is a contraction on (B, d) :

$$\|\Psi(\omega) - \Psi(\tilde{\omega})\|_{X^{1,b}} \leq C_0 T^\delta \|\omega - \tilde{\omega}\|_{X^{1,b}} \|\omega + \tilde{\omega}\|_{X^{1,b}} \leq 4C_0^2 T^\delta \|u_0\|_{H^1} \|\omega - \tilde{\omega}\|_{X^{1,b}}.$$

Hence, by choosing $T > 0$ such that $T^\delta = \frac{1}{8C_0^2 \|u_0\|_{H^1}}$, we can apply the fixed point theorem. Hence we obtain

$$\|\phi_T u\|_{X^{s,b}} \leq C_0 \|u_0\|_{H^s}.$$

The $\|u\|_{\mathcal{C}([-T\|u_0\|_{H^1}], T\|u_0\|_{H^1}], H^s)}$ bound is immediate from (2.11).

Finally, the proof of continuity of the unique solution $u \in \mathcal{C}([0, T], H^s)$ is inspired by Kenig-Ponce-Vega [56]. We consider continuity at 0, the other points are similar. Fix $t > 0$. Then the Duhamel formula can be rewritten

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-t') \partial_x ((\phi_{t'} u(t'))^2) dt'.$$

We use successively embedding (2.11), estimate (2.13) and estimate (2.22):

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(0)\|_{H^s} &\leq \|W(t)u(0) - u(0)\|_{H^s} + \left\| \int_0^t W(t-t') \partial_x ((\phi_{t'} u(t'))^2) dt' \right\|_{H^s} \\ &\leq \|W(t)u(0) - u(0)\|_{H^s} + C(b) \left\| \int_0^t W(t-t') \partial_x ((\phi_{t'} u(t'))^2) dt' \right\|_{X^{s,b}} \\ &\leq \|W(t)u(0) - u(0)\|_{H^s} + C(b) t^{1-b+b'} \|\partial_x ((\phi_t u)^2)\|_{X^{s,b'}} \\ &\leq \|W(t)u(0) - u(0)\|_{H^s} + C(b, s) t^\delta \|\phi_t u\|_{X^{s,b}}^2, \end{aligned}$$

which tends to 0 as $t \rightarrow 0$. This proves continuity at 0 in H^s . $\square$

We will now prove Theorem 7, and for this assume that $s > 1$ is an integer.

Proof of Theorem 7. We denote $u \in \mathcal{C}(I, H^s)$ to be the maximal H^s development of u_0 under the (ZK) flow. Denote

$$A := \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{H^1} \leq \sqrt{C(E(u_0) + M(u_0)^2)}.$$

(See (2.1)). The equation (ZK) is reversible, it suffices to prove (2.2) for positive times $t \geq 0$.

Proposition 19 yields that for all $t_0 \in I$, $[t_0 - T(A), t_0 + T(A)] \subset I$, and

$$\forall t \in [t_0 - T(A), t_0 + T(A)], \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C_0 \|u(t_0)\|_{H^s}.$$

This shows by iteration that $I = \mathbb{R}$, and that for all $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [kT(A), (k+1)T(A)], \quad \|u(t)\|_{H^s} \leq C_0^{k+1} \|u_0\|_{H^s}.$$

From this, we infer the exponential bound $\|u(t)\|_{H^s} \leq \exp(Ct)$ for some large constant C and all $t \geq 0$.

To improve this to a polynomial bound, we will follow the idea of Staffilani [121] to obtain more refined inequality, namely

$$\forall t \in [0, T(\|u_0\|_{H^1})], \quad \|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(0)\|_{H^s}^2 \leq C(\|u_0\|_{H^1})(1 + \|u_0\|_{H^s}^{2-\epsilon}), \quad (2.29)$$

for some ϵ close to 0 and some function $C : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

This will imply that for all $t_0 \in \mathbb{R}$, and for some uniform constant $C_1 \geq 1$ (depending on A and C)

$$\forall t \in [t_0 - T(A), t_0 + T(A)], \quad \|u(t)\|_{H^s}^2 \leq \|u(t_0)\|_{H^s}^2 + C_1(1 + \|u(t_0)\|_{H^s}^{2-\epsilon}).$$

Therefore, denoting $u_k = \sup_{t \in [kT(A), (k+1)T(A)]} \|u(t)\|_{H^s}$, then (with $t_0 = kT$)

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} \leq (u_k^2 + C_1(1 + u_k^{2-\epsilon}))^{1/2} \leq u_k + C_1(1 + u_k^{1-\epsilon}).$$

As observed in [121], an iteration argument then shows that u_k has polynomial growth: this is the content of the following lemma.

Lemma 20. *Let $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ be a sequence of non negative numbers, $K_1 > 0$, $\epsilon \in (0, 1)$ such that*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} \leq u_k + K_1(1 + u_k^{1-\epsilon}).$$

Then for any $d > \frac{1}{\epsilon}$, there exist a constant $K_2 = K_2(K_1, d)$ such that

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1} \leq K_2(1 + k)^d(1 + u_0).$$

Proof. Observe that due to convexity of $x \mapsto |x|^d$, for all $k > 0$,

$$(2 + k)^d = (1 + k)^d \left(1 + \frac{1}{1 + k}\right)^d \geq (1 + k)^d + d(1 + k)^{d-1}. \quad (2.30)$$

Also, as $1 + u_{k+1} \leq 1 + u_k + K_1(1 + u_k^{1-\epsilon}) \leq (2K_1 + 1)(1 + u_k)$, we infer that $u_k \leq (2K_1 + 1)^k(1 + u_0)$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Let $N \in \mathbb{N}$ such that $N \geq \left(\frac{K_1}{d}\right)^{1/(d\epsilon-1)}$, so that for $k \geq N$ (as $1 - d\epsilon < 0$)

$$d - K_1(1 + k)^{1-d\epsilon} \geq 1.$$

Let $K_2 := \max\left((2K_1 + 1)^N, \frac{K_1}{N^{d-1}}\right)$, so that

1. for $k \leq N$, $u_k \leq K_2(1 + u_0) \leq K_2(1 + k)^d(1 + u_0)$ and
2. for $k \geq N$,

$$K_2(1 + k)^{d-1} (d - K_1(1 + k)^{1-d\epsilon}) \geq K_2(1 + k)^{d-1} \geq K_2 N^{d-1} \geq K_1,$$

and so

$$K_2 d(1+k)^{d-1} \geq K_1 + K_1 K_2 (1+k)^{d-1+1-d\epsilon} \geq K_1 + K_1 K_2 (1+k)^{d(1-\epsilon)}. \quad (2.31)$$

We prove now the statement by induction on k . For $k = 0, \dots, N$, the statement hold due to 1. On the other side, if for some $k \geq N$, there hold $u_k \leq K_2(1+k)^d(1+u_0)$, then using (2.30) and (2.31),

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{1+u_0} &\leq K_2(1+k)^d + K_1(1+K_2(1+k)^{d(1-\epsilon)}) \leq K_2(1+k)^d + K_2 d(1+k)^{d-1} \\ &\leq K_2(2+k)^d. \end{aligned}$$

This proves the induction step for $k \geq N$, and the proof is complete. $\square$

From the above lemma, $u_k \lesssim (1+k)^{\frac{1}{\epsilon}+} (1+\|u_0\|_{H^s})$ (with implicit constant depending on A), and from there the polynomial bound (2.2) follows immediately with $\beta = \frac{1}{\epsilon}+$. We can now focus on proving (2.29).

We recall that T has been defined in the previous proposition, and $s \geq 2$ is an integer. Let $t \in [0, T]$, b and b' as in the proposition 17, satisfying $-b' \leq b$. We control the evolution of the H^s -norm:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(0)\|_{H^s}^2 &= \int_0^t \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \frac{d}{dt} |\mathcal{F}_{xy}(u)(t')|^2 d\xi d\mu dt' \\ &= \int_0^t \int \langle |(\xi, \mu)| \rangle^{2s} \phi_T(t')^3 (\mathcal{F}_{xy}(u) \mathcal{F}_{xy}(\partial_x(u^2)))(t') d\xi d\mu dt' \\ &\simeq \sum_{|\mathbf{i}| \leq s} \int_0^t \int \mathcal{F}_{xy}(D^{\mathbf{i}} \phi_T u) \mathcal{F}_{xy}(D^{\mathbf{i}} \partial_x(\phi_T^2 u^2))(t') d\xi d\mu dt' \\ &= I_0 + I_{1\dots s-1} + I_s, \end{aligned}$$

where I_0 counts the term with none derivative, I_s the terms with s derivatives, and $I_{1\dots s-1}$ the others.

Let first deal with I_0 , thus the case $|\mathbf{i}| = 0$. We obtain:

$$I_0 = \int_0^t \int \phi_T u \partial_x (\phi_T^2 u^2)(t') dx dy dt = 0.$$

Second, let us find an upper bound for $I_{1\dots s-1}$, the term for which the sum of the derivatives does not reach s . We define two constants b'_1 and b'_2 satisfying the lemma 12. By the Parseval identity, recalling the function F to follow the flow in (2.6), a Cauchy-Schwarz inequality in space and the inequalities (2.16) and (2.15), we find the flow of our

solution, up to a power b' :

$$\begin{aligned}
I_{1\dots s-1} &= \sum_{0 < |\mathbf{i}| < s} \int_0^t \int \mathcal{F}_{xy} (D^{\mathbf{i}} \phi_T u) \mathcal{F}_{xy} (D^{\mathbf{i}} \partial_x (\phi_T^2 u^2)) (t') d\xi d\mu dt' \\
&\leq \sum_{0 < |\mathbf{i}| < s} \int \left\| F(D)^{-b'_1} D^{\mathbf{i}} (\mathbf{1}_{[0,t]} \phi_T u) (t') \right\|_{L^2} \left\| F(D)^{b'_1} \partial_x D^{\mathbf{i}} (\mathbf{1}_{[0,t]} \phi_T^2 u^2) (t') \right\|_{L^2} dt' \\
&\lesssim \sum_{0 < |\mathbf{i}| < s} \left\| D^{\mathbf{i}} (\phi_T u) (t') \right\|_{X^{0, -b'_2}} \left\| \partial_x D^{\mathbf{i}} (\phi_T^2 u^2) (t') \right\|_{X^{0, b'}}.
\end{aligned}$$

Recall that $-b'_2 < b$. We can apply estimate (2.22) to the term on the right because $|\mathbf{i}| \geq 1$. We use the estimate (2.22), a Gagliardo-Nirenberg inequality, and twice estimate (2.14):

$$\begin{aligned}
I_{1\dots s-1} &\leq \sum_{0 < |\mathbf{i}| < s} \|D^{\mathbf{i}} (\phi_T u)\|_{X^{0, b}} \sum_{(0,0) \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{i}} \|\phi_T u\|_{X^{|\mathbf{j}|, b}} \|\phi_T u\|_{X^{|\mathbf{i}-\mathbf{j}|, b}} \\
&\lesssim \sum_{0 < |\mathbf{i}| < s} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{|\mathbf{i}|/s} \|\phi_T u\|_{X^{0, b}}^{1-|\mathbf{i}|/s} \sum_{(0,0) < \mathbf{j} < \mathbf{i}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{|\mathbf{i}|/s} \max \left(\|\phi_T u\|_{X^{0, b}}^{1-|\mathbf{j}|/s}, \|\phi_T u\|_{X^{0, b}} \right) \\
&\leq C \max(1, \|\phi_T u\|_{X^{0, b}}^2) \max \left(\|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{\frac{2}{s}}, \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{2(1-\frac{1}{s})} \right).
\end{aligned}$$

Third, the terms I_s with $|\mathbf{i}| = s$. We separate $I_s = I_s^1 + I_s^2$, where I_s^2 contains the two terms where all the derivatives are distributed on the same term, and I_s^1 all the others. Let $0 < \rho < \frac{1}{2}$, and $\alpha_{\mathbf{j}} := \frac{|\mathbf{j}|-1+\rho}{s-1}$. We deal first with I_s^1 , the terms where all the derivatives are not on the same term. By using the estimate (2.22):

$$\begin{aligned}
I_s^1 &:= \sum_{|\mathbf{i}|=s} \sum_{(0,0) < \mathbf{j} < \mathbf{i}} \iint |D^{\mathbf{i}} (\phi_T u) \partial_x (D^{\mathbf{j}} (\phi_T u) D^{\mathbf{i}-\mathbf{j}} (\phi_T u))| (t') dx dy dt' \\
&\lesssim \sum_{|\mathbf{i}|=s} \sum_{(0,0) < \mathbf{j} < \mathbf{i}} \|D^{\mathbf{i}} (\phi_T u)\|_{X^{-\rho, b}} \|D^{\mathbf{j}} (\phi_T u)\|_{X^{\rho, b}} \|D^{\mathbf{i}-\mathbf{j}} (\phi_T u)\|_{X^{\rho, b}} \\
&\lesssim \|\phi_T u\|_{X^{s-\rho, b}} \sum_{(0,0) < \mathbf{j} < \mathbf{i}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{\alpha_{\mathbf{j}}} \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{1-\alpha_{\mathbf{j}}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{\alpha_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}} \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{1-\alpha_{\mathbf{i}-\mathbf{j}}} \\
&\lesssim \|\phi_T u\|_{X^{s-\rho, b}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{1+\frac{2\rho-1}{s-1}} \max(1, \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{\frac{s-2\rho}{s-1}}) \\
&\leq C \max(1, \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^2) \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{2-\frac{1-\rho}{s-1}},
\end{aligned}$$

where the last line comes from a final interpolation. One can notice that the last estimate is sharp, and that $\frac{1}{2(s-1)} < \frac{1-\rho}{s-1}$.

We can not directly use the bilinear estimate (2.22) for the term I_s^2 where all the derivatives are distributed on one term, due to the lower limit of $s > \frac{1}{2}$. This term is dealt with using estimate (2.24) as it authorizes a negative index in $X^{-\rho, b}$. Let $\rho > 0$ be given by Proposition 17. We recall the definition of S in (2.5) and the Gagliardo-Nirenberg inequality $\|D^{\rho} v\|_{L_{x,y}^2} \lesssim \|D^{s-1} v\|_{L_{x,y}^2}^{\frac{\rho}{s-1}} \|v\|_{L_{x,y}^2}^{1-\frac{\rho}{s-1}}$. Using an integration by parts when needed,

we can bound

$$\begin{aligned}
I_s^2 &:= \sum_{|\mathbf{i}|=s} \iint (D^{\mathbf{i}}(\phi_T u) \partial_x (\phi_T u D^{\mathbf{i}}(\phi_T u))) (t') dx dy dt' \\
&\leq \sum_{|\mathbf{i}|=s} \iint |\partial_x(\phi_T u)| |D^{\mathbf{i}}(\phi_T u)|^2 dx dy dt' \leq \|\partial_x \phi_T u\|_{X^{\rho, -b'}} \left\| (D^{\mathbf{i}}(\phi_T u))^2 \right\|_{X^{-\rho, b'}} \\
&\lesssim \|S(D)^{\rho} \partial_x \phi_T u\|_{X^{0, b}} \|S(D)^{s-\rho}(\phi_T u)\|_{X^{0, b}}^2 \\
&\lesssim \left(\|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{1-\frac{\rho}{s-1}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{\frac{\rho}{s-1}} \right) \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{2\frac{s-\rho-1}{s-1}} \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{2\frac{\rho}{s-1}} \\
&\leq C \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^{1+\frac{\rho}{s-1}} \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{2-\frac{\rho}{s-1}}.
\end{aligned}$$

We thus notice that this time, $0 < \frac{\rho}{s-1} < \frac{1}{2(s-1)}$.

Summing up the three previous inequalities, we obtain :

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 - \|u(0)\|_{H^s}^2 \leq C \max(1, \|\phi_T u\|_{X^{1, b}}^2) \max \left(\|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{\frac{2}{s}}, \|\phi_T u\|_{X^{s, b}}^{2-\frac{\rho}{s-1}} \right)$$

and by the embeddings (2.27):

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u(0)\|_{H^s} + C \max(1, C_0 \|u(0)\|_{H^1}) C_0^{1-\frac{\rho}{2(s-1)}} \max \left(\|u(0)\|_{H^s}^{\frac{1}{s}}, \|u(0)\|_{H^s}^{1-\frac{\rho}{2(s-1)}} \right).$$

This concludes the proof of the estimate (2.29), by choosing $\epsilon = \frac{\rho}{s-1}$ and $\rho \in (0, \frac{1}{2})$. $\square$

2.5 Appendix : Proof of lemma 16

This lemma is specific to (total) dimension 3. Its proof is almost similar to that of the estimate 5.2 [102, Proposition 3.6], which is slightly different from (2.25). We recall the assumption on the coefficients: N_1, N_2, L_1 and L_2 be four integers, two functions u_1 and v_2 , and $\frac{N_1}{2} \leq N_2 \leq 2N_1$. We define the subsets:

$$\begin{aligned}
S_1(\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) &:= \{\xi_1 \xi_2 > 0, \mu_1 \mu_2 < 0\} \cup \{\xi_1 \xi_2 < 0, \mu_1 \mu_2 > 0\}, \\
S_2(\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) &:= \{\xi_1 \xi_2 < 0, \mu_1 \mu_2 < 0\},
\end{aligned}$$

and the two Fourier multipliers $(J_i)_{1 \leq i \leq 2}$, by:

$$\widehat{J_i(u_1, v_2)}(\tau, \xi, \mu) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{S_i(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1)} \widehat{u_1}(\tau_1, \xi_1, \mu_1) \widehat{v_2}(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1, \mu - \mu_1) d\tau_1 d\xi_1 d\mu_1.$$

We want to prove that:

$$\|J_i(P_{N_1} Q_{L_1} u_1, P_{N_2} Q_{L_2} v_2)\|_{L^2} \lesssim N_1^{-\frac{1}{2}} (L_1 L_2)^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1} Q_{L_1} u_1\|_{L^2} \|P_{N_2} Q_{L_2} v_2\|_{L^2}. \quad (2.32)$$

We consider J_1 first, and explain at the end how J_2 will be different. First, the

convolution of the functions brings us to define a set on which the functions are not null:

$$A_{(\xi, \mu, \tau)} := \left\{ \begin{array}{l} (\xi_1, \mu_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^3; (\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1) \in S_1, \\ |(\xi_1, \mu_1)| \simeq N_1, |(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1)| \simeq N_2, \\ |\tau_1 - \omega(\xi_1, \mu_1)| \simeq L_1, |\tau - \tau_1 - \omega(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1)| \simeq L_2 \end{array} \right\}.$$

We thus get, by Minkowski inequality, and Cauchy-Schwarz inequality:

$$\begin{aligned} & \|J_1(P_{N_1}Q_{L_1}u_1, P_{N_2}Q_{L_2}v_2)\|_{L^2} \\ & \leq \int \left(\int \mathbf{1}_{A_{(\xi, \mu, \tau)}}(\xi_1, \mu_1, \tau_1) \widehat{P_{N_1}Q_{L_1}u_1}(\xi_1, \mu_1, \tau_1)^2 \right. \\ & \quad \left. \cdot \widehat{P_{N_2}Q_{L_2}v_2}(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1, \tau - \tau_1)^2 d\xi d\mu d\tau \right)^{\frac{1}{2}} d\xi_1 d\mu_1 d\tau_1 \\ & \leq \|P_{N_1}Q_{L_1}u_1\|_{L^2} \left(\iint \mathbf{1}_{A_{(\xi, \mu, \tau)}}(\xi_1, \mu_1, \tau_1) \right. \\ & \quad \left. |\widehat{P_{N_2}Q_{L_2}v_2}(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1, \tau - \tau_1)|^2 d\xi d\mu d\tau d\xi_1 d\mu_1 d\tau_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sup_{\xi, \mu, \tau} |A_{(\xi, \mu, \tau)}|^{\frac{1}{2}} \|P_{N_1}Q_{L_1}u_1\|_{L^2} \|P_{N_2}Q_{L_2}v_2\|_{L^2}. \end{aligned}$$

To prove (2.32), it suffices to bound:

$$\sup_{\xi, \mu, \tau} |A_{(\xi, \mu, \tau)}| \lesssim \frac{L_1^{\frac{1}{2}} L_2^{\frac{1}{2}}}{N_1^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.33)$$

To do so, define the resonance function

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) := \omega(\xi_1 + \xi_2, \mu_1 + \mu_2) - \omega(\xi_1, \mu_1) - \omega(\xi_2, \mu_2).$$

On the set $A_{(\xi, \mu, \tau)}$, it writes:

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu, \mu - \mu_1) = \omega(\xi, \mu) - \omega(\xi_1, \mu_1) - \omega(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1).$$

We thus get a bound on the measure of $A_{(\xi, \mu, \tau)}$:

$$|A_{(\xi, \mu, \tau)}| \lesssim \min(L_1, L_2) |B_{(\xi, \mu, \tau)}|, \quad (2.34)$$

with

$$B_{(\xi, \mu, \tau)} := \left\{ \begin{array}{l} (\xi_1, \mu_1) \in \mathbb{R}^2; (\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1) \in S_1, \\ |(\xi_1, \mu_1)| \simeq N_1, |(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1)| \simeq N_2, \\ |\tau - \omega(\xi, \mu) + \mathcal{H}(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1)| \lesssim \max(L_1, L_2) \end{array} \right\}.$$

To bound the set $B_{(\xi, \mu, \tau)}$, we define first the set of projection on one variable:

$$B_{(\xi, \mu, \tau)}(\mu_1) := \{\xi_1 \in \mathbb{R}; (\xi_1, \mu_1) \in B_{(\xi, \mu, \tau)}\},$$

study the set by the variation of $\mathcal{H}$ along μ_1 , and conclude by a corollary of the intermediate value theorem:

Lemma 21 ([102, Lemma 3.8]). *Let I and J two intervals of $\mathbb{R}$, and $f : I \rightarrow J$ a $\mathcal{C}^1$ function. Then we get:*

$$|\{x \in I; f(x) \in J\}| \leq \frac{|J|}{\inf_{x \in I} |f'(x)|}. \quad (2.35)$$

Lets compute the variations of the function of resonance. The derivative of $\mathcal{H}$ can be bounded from below:

$$\left| \frac{d}{d\mu_1} \mathcal{H}(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1) \right| = |2\xi_1\mu_1 - 2(\xi - \xi_1)(\mu - \mu_1)| \gtrsim \max(N_1, N_2)^2 \simeq N_1^2. \quad (2.36)$$

We thus get a bound on the measure of $B_{(\xi, \mu, \tau)}$, by applying (2.35) to (2.36):

$$|B_{(\xi, \mu, \tau)}| \leq \int_{|\mu_1| \leq 2N_1, |\mu - \mu_1| \leq 2N_2} |B_{(\xi, \mu, \tau)}(\mu_1)| d\mu_1 \lesssim \max(N_1, N_2) \frac{\max(L_1, L_2)}{N_1^2} \quad (2.37)$$

$$\simeq \frac{\max(L_1, L_2)}{N_1}. \quad (2.38)$$

Gathering the bounds (2.34) and (2.37), we conclude the proof (2.33).

The assumption of working in S_1 was used in (2.36), where the sign condition was essential.

For J_2 , we work on S_2 : the result is similar, except that we differentiate $\mathcal{H}$ in the ξ_1 direction:

$$\left| \frac{d}{d\xi_1} \mathcal{H}(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1) \right| = |3\xi_1^2 + \mu_1^2 - 3(\xi - \xi_1)^2 - (\mu - \mu_1)^2|. \quad (2.39)$$

Without any assumption on the signs of the variables, we need to localize the different frequencies. The result is immediate from the following lemma:

Lemma 22 ([102, Lemma 4.2]). *Let $0 < \alpha < 1$. There exists a continuous function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying $f(\alpha) \rightarrow 0$ as $\alpha \rightarrow 0$, such that for all (ξ_1, μ_1) and (ξ_2, μ_2) satisfying:*

$$\xi_1 \xi_2 < 0, \quad \mu_1 \mu_2 < 0, \quad (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i| \leq |\mu_i| \leq (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{3} |\xi_i|,$$

we obtain:

$$|(\xi_1 + \xi_2, \mu_1 + \mu_2)|^2 \leq |(\xi_1, \mu_1)|^2 - |(\xi_2, \mu_2)|^2 + f(\alpha) \max(|(\xi_1, \mu_1)|^2, |(\xi_2, \mu_2)|^2).$$

We recall that $|(\xi_1, \mu_1)|^2 = 3\xi_1^2 + \mu_1^2 \simeq N_1^2$.

On $\mathcal{D}_{1,3}$ and S_2 , the assumptions of the lemma are satisfied, and with $\alpha > 0$ so small

that $f(\alpha) \leq \frac{1}{10}$, we deduce:

$$\frac{9}{10} |(\xi, \mu)|^2 \leq \left| |(\xi_1, \mu_1)|^2 - |(\xi - \xi_1, \mu - \mu_1)|^2 \right|,$$

and in the area of $high \times high \rightarrow high$ interaction, injecting in (2.39):

$$\left| \frac{d}{d\xi_1} \mathcal{H}(\xi_1, \xi - \xi_1, \mu_1, \mu - \mu_1) \right| \gtrsim N^2 \simeq N_1^2.$$

This estimate is equivalent to (2.36), and concludes the proof of the bound (2.33) in S_2 .

Chapitre 3

Construction et existence de multi-solitons

Abstract

We study here the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 2 and 3 and the modified Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 2. Those equations admit solitons, characterized by their velocity and their shift. Given the parameters of K solitons R^k (with distinct velocities), we prove the existence and uniqueness of a multi-soliton u such that

$$\|u(t) - \sum_{k=1}^K R^k(t)\|_{H^1} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty.$$

The convergence takes place in H^s with an exponential rate for all $s \geq 0$. The construction is made by successive approximations of the multi-soliton. We use classical arguments to control of H^1 -norms of the errors (inspired by Martel [72]), and introduce a new ingredient for the control of the H^s -norm in dimension $d \geq 2$, by a technique close to monotonicity.

3.1 Introduction

In this paper we study different versions of the equation

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_1 (\Delta u + u^p) = 0, \\ u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad u(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad u_0 \in H^1, \quad (\text{ZK})$$

where the pair (d, p) is:

- $(2, 2)$ for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 2, with $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; (ZK_{2d})
- $(2, 3)$ for the modified Zakharov-Kuznetsov equation, with $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; (mZK)
- $(3, 2)$ for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension 3, with $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, (ZK_{3d})

∂_i is the derivative with respect to the i^{th} space-coordinate, and $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_i^2$ the Laplacian.

A solution of (ZK) enjoys two conserved quantities, at least formally, the mass and the energy:

$$M(u(t)) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \text{ and } E(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(t, \mathbf{x})|^2 - \frac{1}{p+1} (u(t, \mathbf{x}))^{p+1} \right) d\mathbf{x}.$$

Equation (ZK_{3d}) was first proposed by Zakharov and Kuznetsov [132] to describe the evolution of non-linear ion-acoustic waves in magnetized plasma. Equations (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) were derived from the Euler-Poisson system in dimension $d = 2$ and $d = 3$ by Lannes, Linares and Saut in [66]; (ZK_{2d}) was also derived from the Vlasov-Poisson system by Han-Kwan [47]. Some physical considerations in [119] explain how (mZK) is derived.

Regarding the Cauchy problem, Faminskii [31] first proved that (ZK_{2d}) was globally well-posed in $H^1(\mathbb{R}^2)$, and Molinet-Pilod in [102] improved this result to local well-posedness in $H^s(\mathbb{R}^2)$ with $s > \frac{1}{2}$. In dimension $d = 3$, Ribaud-Vento [114] proved local well posedness in $H^s(\mathbb{R}^3)$ for $s > 1$, and then Molinet-Pilod [102] and independently in Grünrock-Herr [46] proved global well-posedness in the same spaces. For (mZK), the first result of local well-posedness was done by Linares-Pastor [68] for $s > 3/4$ (see also [69]), and then Ribaud-Vento [113] improved it to $s > 1/4$. In a recent work Kinoshita [57] improved local well-posedness of (ZK_{3d}) in H^s for $s \geq \frac{1}{2}$. From a different perspective, Bhattacharya-Farah-Roudenko [4] showed that solutions to the focusing (mZK) in H^s for $s \geq \frac{3}{4}$ are global, provided that the mass of the initial data is less than the mass of the ground state.

The following scaling transform leaves the set of solutions invariant:

$$u_\lambda(t, \mathbf{x}) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} u(\lambda^{\frac{3}{2}} t, \lambda^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}).$$

2010 *Mathematics Subject Classification* : 35Q53 (primary), 35Q35, 35B40, 37K40.

Key words : Zakharov-Kuznetsov equation; multi-soliton.

In particular, the H^{s_c} -norm is conserved under the scaling, with the critical scaling exponent $s_c := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} : \|u_\lambda(t)\|_{H^{s_c}} = \|u(t)\|_{H^{s_c}}$. In the studied cases, the equations are in the subcritical case for (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) and in the critical case for (mZK).

3.1.1 Solitons and multi-solitons

Nonlinear travelling waves are special solutions of these equations. Those fundamental objects keep their form along the time, and move at a velocity c in one direction. Their existence is the result of a balance between the dispersive and non-linear parts of (ZK). From [24], it is proved that those objects exist only if they move along the first axis, and thus satisfy the elliptic equation:

$$-cu + \Delta u + u^p = 0. \quad (3.1)$$

Without further assumption, there exist many solutions in $H^1(\mathbb{R}^d)$ of this elliptic equation. We will consider here only the ground state $Q_c \in H^1(\mathbb{R}^d)$ which is radially symmetric and positive: up to translation in space, and up to the sign for $p = 3$, see [62] and [2], Q_c is the unique positive solution to (3.1). $Q_c(\mathbf{x} - cte_1)$ is thus a solution to (ZK), called a soliton.

Denoting $Q := Q_1$, we observe that $Q_c(\mathbf{x}) = c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}\mathbf{x})$. Unlike the solitons of the Korteweg-de-Vries equation, Q has no explicit expression. By ODE arguments one can still obtain decay at infinity:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad |\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} Q(\mathbf{x})| = |\partial^\alpha Q(\mathbf{x})| \leq K_1(\alpha) e^{-|\mathbf{x}|}, \quad (3.2)$$

and we obtain exponential decay for all Q_c by scaling.

Given K velocities $c^k > 0$, shifts $\mathbf{y}^k \in \mathbb{R}^d$ and signs $\sigma^k \in \{(\pm 1)^p\}$, denote R^k the soliton

$$R^k(t, \mathbf{x}) := \sigma^k Q_{c^k}(\mathbf{x} - c^k t \mathbf{e}_1 - \mathbf{y}^k).$$

Due to the non-linearity, a sum of solitons is no longer a solution. However, if the velocities c^k are distincts, the solitons will decouple and interact weakly, and one wonders if there exist nonlinear solutions $u(t)$ which behave like the sum of the R_k for large times: more precisely $u(t)$ should behave like

$$u(t, \mathbf{x}) \simeq R(t, \mathbf{x}) \quad \text{where} \quad R(t) := \sum_{k=1}^K R^k(t).$$

Such solutions are called (pure) multi-solitons:

Definition 23. *A solution u of (ZK) is called a (pure) multi-soliton (or K -soliton) if for some $T_0 \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{C}([T_0, \infty), H^1)$ and it behaves at infinity as a sum of solitons with distinct speeds:*

$$u \in \mathcal{C}([T_0, \infty), H^1), \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| u(t) - \sum_{k=1}^K Q_{c^k}(\mathbf{x} - \mathbf{v}^k(t)) \right\|_{H^1} = 0, \quad (3.3)$$

where $\mathbf{v}^k(t) = c^k t \mathbf{e}_1 - \mathbf{y}^k$, for some $0 < c^1 < \dots < c^K$ and $(\mathbf{y}^k)_k \in (\mathbb{R}^d)^K$.

We say that such a u is a multi-soliton associated with the velocities $(c^k)_k$ and the shifts $(\mathbf{y}^k)_k$.

Multi-soliton were first constructed for the (KdV) equation using the inverse scattering method, see [100]. In the non integrable context, multi-solitons in the sense of the definition (3.3) were first built for the nonlinear Schrödinger (NLS) and generalized Korteweg-de Vries (gKdV) equations by Merle [91], Martel [72] and Martel-Merle [77] in the L^2 -critical and subcritical cases, and then for the supercritical cases by Côte-Martel-Merle [22]. Combet in [16] gave a classification of multi-solitons for the L^2 -supercritical (gKdV) equation. The study of multi-solitons was also developped for other dispersive equations, like the non-linear Klein-Gordon equation in [23], the water wave system in [99] and the damped Klein-Gordon equation [38, 27].

The dynamics of multi-solitons was also studied, mainly for Korteweg-de Vries type equations. We refer to [86] for a stability result. One can also ask about the behavior as $t \rightarrow -\infty$ (or minimal time of existence) of multi-solitons: this in particular requires to understand the collision of solitons. For the (KdV) equation, see [100], the inverse scattering method give explicit formulas which shows that the collision are elastic (with just and explicit shift in space): the multi-solitons structure remains at $-\infty$. However, for the non integrable quartic (gKdV) equation, Martel and Merle proved in [78] that the collisions are not fully elastic: a pure 2-soliton at $-\infty$ is no longer a 2-soliton at $+\infty$, and they are able to describe the defect of elasticity.

In this article, we will only focus on multi-solitons for positive times.

3.1.2 Main results

Our main result in this paper is to prove the existence and uniqueness of multi-solitons of (ZK) in the sense of Definition (3.3).

Theorem 24. *Let $K \in \mathbb{N}^*$, K distinct velocities $0 < c^1 < \dots < c^K$ and K shifts $(\mathbf{y}^k)_k$. There exists a multi-soliton of (ZK) associated to those velocities and shifts, denoted by R^* and defined for times in $[T_0, +\infty)$. It is unique in H^1 in the sense of (3.3). Furthermore, $R^* \in \mathcal{C}^\infty([T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$ and there exist a constant $\delta > 0$, and for all $s \geq 1$, a constant A_s such that:*

$$\forall t \geq T_0, \quad \|R^*(t) - R(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\delta t}.$$

Let us introduce right now an important constant related to the interaction of the solitons:

$$\sigma_0 := \min(c^1, c^2 - c^1, \dots, c^K - c^{K-1}).$$

The constant δ in Theorem 24 depends on the different velocities: it can be chosen as $\delta \leq \frac{\sigma_0^{3/2}}{8}$. The time T_0 depends on the velocities and the shifts. Observe that none of them depend on the regularity index s .

An important outcome of this paper is the proof of uniqueness of multi-solitons. As far as we can tell, it is the first time that this property is proved, besides the case of the (gKdV) equations, where it was proved in the L^2 subcritical and critical cases in Martel [72]. Regarding the L^2 supercritical case of (gKdV), recall that [16] gave an exhaustive classification: multi-soliton form a K -parameter family (each soliton has one instability direction, which yields one degree of freedom in the multi-soliton).

We do not consider the modified Zakahrov-Kuznetsov equation in dimension 3 (mZK_{3d}) in Theorem 24 for different reasons. Let us recall that, even though (mZK_{3d}) is not supported by any physical model, as far as we know, it is an L^2 supercritical equation, which makes it interesting by itself. In view of the study in Côte-Martel-Merle [22] for the L^2 supercritical (NLS) and (gKdV) equations, the construction would require the use of a extra topological argument. Recalling [16] for (gKdV), one would no longer expect uniqueness of multi-solitons, but rather a classification into a K -parameter family. In order to keep this article a reasonable size, we do not raise this case and leave it for future works. We focus here only on L^2 subcritical and critical cases.

One can naturally ask about stability properties of multi-solitons. Let us recall that de Bouard [29] proved orbital stability of a soliton in the L^2 subcritical cases (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}), and orbital instability in the L^2 supercritical cases. Côte-Muñoz-Pilod-Simpson in [24] strengthened this result to asymptotic stability of a soliton for (ZK_{2d}): if the initial condition is H^1 -close to a soliton, then it converges to a 1-soliton in $H^1(\{\mathbf{x}; x_1 > \beta t\})$ for some $\beta > 0$ small. [24] also give a result of asymptotic stability in the same spirit, for the sum of decoupled solitons: in view of Theorem 24, their result can naturally be interpreted as asymptotic stability in $H^1(\{\mathbf{x}; x_1 > \beta t\})$ of *multi-solitons*. The corresponding results for (ZK_{3d}) remain open.

In the L^2 critical case (mZK), solitons are unstable and can lead to some kind of blow up (see Farah-Holmer-Roudenko [35] and Farah-Holmer-Roudenko-Kay [36]).

The multi-solitons constructed in Theorem 24 are the usual one: each soliton interacts weakly with the others solitons, so that the trajectories of their center is not affected. Recently, the interest grew for highly interacting multi-solitons, where the trajectories of the centers is dictated (at leading order) by the interaction with its neighbour solitons. This happens for example for (gKdV) when considering to two solitons with same mass (and so, same speed).

The first result concerning highly interacting multi-solitons is due to Martel-Raphaël in [89], for the non-linear Schrödinger equation (NLS): they constructed a solution which behaves as a the sum of N -solitons placed on the vertices of regular N -gone (this solution blows up in infinite time). Nguyen [106] studied the problem for (gKdV): he constructed, for the L^2 subcritical and supercritical cases, 2-solitons with mass $c_1 = c_2 = 1$, and center at $t \pm \ln(\tilde{c}t) + O(1)$ (so that the distance between the centers is $2 \ln(t) + O(1)$). A similar regime was studied for (NLS) in Nguyen [107]. We expect that an analogous phenomenon can happen for (ZK).

3.1.3 Outline and notations

Recall the parameters of the K solitons are given in the statement of Theorem 24: the velocities

$$0 < c^1 < \dots < c^k < \dots < c^K,$$

and the shifts $\mathbf{y}^k = (y_1^k, y_2^k)$ for $d = 2$, or $\mathbf{y}^k = (y_1^k, y_2^k, y_3^k)$ for $d = 3$. We denote as before

$$R^k(t, x) = \sigma^k Q_{c^k}(\mathbf{x} - c^k t \mathbf{e}_1 - \mathbf{y}^k) \quad \text{and} \quad R(t) = \sum_{k=1}^K R^k(t).$$

The main steps of the proof of Theorem 24 are the following.

We consider a sequence of times S_n tending to $+\infty$, and u_n the sequence of solutions of (ZK) with final data $u_n(S_n) = R(S_n)$. We prove first that the error $u_n(t) - R(t)$ is controlled uniformly in n in H^1 on a time interval of the form $[T_0, S_n]$, where T_0 independent of n :

$$\forall t \in [T_0, S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{-\sigma t}.$$

This result uses monotonicity typical to (KdV)-like equations, see [72], and the coercivity of the linearised operator around the sum $R(t)$ of K solitons. The arguments are close to [72]. This is done in Section 3.2.

Then, we prove that the error is also controlled in H^s , for any integer $s \geq 2$. This requires a special attention due to space dimension $d \geq 2$. For (gKdV), the arguments developed in Martel [72] are appropriate functionals of the derivatives of u at level H^s combined with a Grönwall. In dimension $d \geq 2$, the different combinations of derivatives due to the non-linearity can not be managed by such an algebraic argument: the terms left aside would make the Gronwall argument fails. To circumvent this requires a careful treatment, see (3.29) for more precision. The point is that the variation of those terms can be dealt with by a monotonicity-type argument. This is done in Section 3.3.

We conclude, in Section 3.4, the existence of a multi-soliton R^* in H^s : we take as initial condition for R^* a weak limit of $u_n(T_0)$, show that it is actually a strong limit in L^2 , and so by interpolation in H^s for any $s \in \mathbb{R}^+$, and then use continuity of the flow in H^s for large s to obtain the rate of convergence $\|R^*(t) - R(t)\|_{H^s}$.

We finish with uniqueness of multi-solitons, in Section 3.5. For this, we compute the difference between an arbitrary multi-soliton, and R^* that we just constructed. As this is the difference of two nonlinear solutions, we obtain better estimates than before, taking advantage of smoothness and exponential rate of convergence for R^* . In particular, some estimates are based on L^∞ -norm of the third derivative of the difference between the multisoliton R^* and R , which implies a necessary a $H^{3+\frac{d}{2}+}$ control of $R^* - R$. It means that we actually use the H^5 regularity of R^* (see the inequality (3.65)).

3.2 Control of the $H^1(\mathbb{R}^d)$ -norm of the error

We consider an increasing sequence of times $(S_n)_n$ going to $+\infty$, and the backward solution u_n of (ZK) satisfying

$$u_n(S_n) = R(S_n).$$

As $R(S_n) \in H^\infty$, the solution u_n is well defined on a time interval $(T_n^*; S_n]$, and for all $s \geq 0$, $u_n \in \mathcal{C}((T_n^*; S_n], H^s)$.

Our main concern in this section is to prove the following bootstrap proposition which states that if one has a uniform smallness of the error $\|u_n(t) - R(t)\|_{H^1}$ on some interval of time, the error does actually decay with an exponential rate on the same interval of times.

Proposition 25. *There exist constants $L > 0$, $\alpha > 0$, A_1 and a time $T_0 > 0$ all depending on σ_0 satisfying $A_1 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} T_0} \leq \frac{\alpha}{2}$ such that the following hold. Let $t^* \in (\max(T_0, T_n^*), S_n)$. If*

$$\sup_{t \in [t^*; S_n]} \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1} \leq \alpha, \quad (3.4)$$

then

$$\forall t \in [t^*; S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} t}. \quad (3.5)$$

This section is decomposed as follow. We first recall some basic properties of (ZK) solitons. The next subsection introduces mass and energy related functional localized around each soliton. We then develop a modulation technique to decompose the solution into a sum of modulated solitons and a remainder w which satisfies orthogonality conditions. Third, we control the evolution of local masses and local energies by a monotonicity argument. Those local quantities are quadratic in the remainder term w (at leading order): due to the orthogonality condition, and an Abel transform, they are coercive and yield the desired bootstrap bound (3.5).

3.2.1 Bounds on the interaction and coercivity

As mentioned above, the interaction of two solitons is weak. For example, for the solitons R^1 and R^2 , denoting $x_0 := \frac{c^1 t + c^2 t}{2}$, we have (using also (3.2)), for $i_1, i_2 \in \llbracket 1; d \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} R_1 R_2 + |\partial_{i_1} R_1 \partial_{i_2} R_2| &\leq C_{c^1, c^2} \iint_{x_1 = -\infty}^{x_0} e^{-\sqrt{c^2} |\mathbf{x} - c^2 t \mathbf{e}_1|} d\mathbf{x} + C_{c^1, c^2} \iint_{x_1 = x_0}^{\infty} e^{-\sqrt{c^1} |\mathbf{x} - c^1 t \mathbf{e}_1|} d\mathbf{x} \\ &\leq C_{c^1, c^2} e^{-\sqrt{\sigma_0} \frac{|c^1 - c^2|}{2} t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

We can also notice that, as Q_c is radially symmetric, by the change of variable $x'_{i_2} :=$

$-x_{i_2}$, with $i_1 \neq i_2$, there hold:

$$\iint \partial_{i_1} Q_{c^k} \partial_{i_2} Q_{c^k} d\mathbf{x} = \frac{1}{4} \iint (\partial_{i_1} Q_{c^k} + \partial_{i_2} Q_{c^k})^2 d\mathbf{x} - \frac{1}{4} \iint (\partial_{i_1} Q_{c^k} - \partial_{i_2} Q_{c^k})^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (3.7)$$

The study of a solution close to a multisoliton brings us naturally to study the linearised operator $\mathcal{L}_c$ around a soliton:

$$\mathcal{L}_c(\eta) := -\Delta\eta + c\eta - pQ_c^{p-1}\eta. \quad (3.8)$$

We recall some well known properties on the operator $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1$, see [125], [126], [127], [62], [29] and a good review in [24].

Proposition 26. *The self-adjoint operator $\mathcal{L}$ satisfies the following properties:*

1. *Ker $\mathcal{L}$ is generated by two directional derivatives of the soliton :*

$$\text{Ker}\mathcal{L} = \text{Span}\{\partial_i Q, i \in \llbracket 1, d \rrbracket\}.$$

2. *$\mathcal{L}$ has a unique negative eigenvalue $-\lambda_0$ (with $\lambda_0 > 0$) of multiplicity 1, and the corresponding eigenvectors are engendered by a positive, radially symmetric function Z . For more convenience, we suppose $\|Z\|_{L^2} = 1$. Z also satisfies the exponential decay (3.2).*

3. *The essential spectrum of $\mathcal{L}$ is on the real axis, and strictly positive:*

$$\sigma_{ess} = [\lambda_{ess}; +\infty), \quad \text{with } \lambda_{ess} > 0.$$

4. *Up to orthogonality conditions, the operator $\mathcal{L}$ is coercive:*

- *for (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) , if $u \perp \partial_i Q$ for $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ and $u \perp Q$, then*

$$(\mathcal{L}u, u) \geq \lambda_{ess} \|u\|_{H^1}.$$

- *for (mZK) , if $u \perp \partial_i Q$ for $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $u \perp Q$ and $u \perp Z$ then*

$$(\mathcal{L}u, u) \geq \lambda_{ess} \|u\|_{H^1}.$$

A detailed proof of coercivity is given in appendix.

3.2.2 Cut-off functions, adapted masses and energies

As in [72], we use adequate cut-off function, defined on one direction, which will mainly see the mass of one soliton. Consider the function $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by:

$$\psi(x_1) := \frac{2}{\pi} \arctan(e^{-\frac{1}{L}x_1}),$$

with $\psi(-\infty) = 1$ and $\psi(+\infty) = 0$, and L to define later. We obtain

$$|\psi'(x_1)| \leq \frac{1}{L}\psi(x_1), \quad |\psi^{(3)}(x_1)| \leq \frac{1}{L^2}|\psi'(x_1)|. \quad (3.9)$$

As in [72], the use of a parameter L will play a role in the study of the monotonicity of the mass and for the proof of uniqueness, where we need to control the third derivative by the first. In this article, we make the choice to also use this parameter to the condition of coercivity on each H_k , see (3.67). Considering the moving solitons, we want to separate them at half of the distance between two following solitons:

$$\forall 1 \leq k \leq K-1, \quad m^k(t) := \frac{c^{k+1} + c^k}{2}t + \frac{y_1^{k+1} + y_1^k}{2}, \quad \text{and } \psi^k(t, x_1) := \psi(x_1 - m^k(t)), \quad (3.10)$$

and each cut-off function ϕ^k isolates one soliton:

$$\begin{aligned} \phi^1(t, \mathbf{x}) &:= \psi^1(t, x_1), \quad \phi^K(t, \mathbf{x}) := 1 - \psi^{K-1}(t, x_1), \\ \forall 2 \leq k \leq K-1, \quad \phi^k(t, \mathbf{x}) &:= \psi^k(t, x_1) - \psi^{k-1}(t, x_1). \end{aligned}$$

We define the new masses and energies, which mainly focus on the k -th soliton:

$$M^k(t) := \int u(t)^2 \phi^k(t) d\mathbf{x} \quad \text{and} \quad E^k(t) := \int \left(\frac{1}{2} |\nabla u(t)|^2 - \frac{1}{p+1} u(t)^{p+1} \right) \phi^k(t) d\mathbf{x}.$$

For each k , the sum of mass $\sum_{l \leq k} M^l(t)$ enjoys an (almost) monotonicity property. For the energy, the same claim is not clear. We consider adequate modified energies instead, which are better behaved:

$$\widetilde{E}^k(t) := E^k(t) + \frac{\sigma_0}{4} M^k(t). \quad (3.11)$$

Remark 27. We could have used compactly supported cut-off functions, as ψ a real valued C^3 -function satisfying, on $\mathbb{R}$:

$$\psi(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{on }]-\infty, -1] \\ 0 & \text{on } [1, \infty[\end{cases}, \quad \psi'(x_1) \leq 0, \quad \phi^k(t, x) = \psi\left(\frac{x_1 - m^k(t)}{L}\right).$$

This is done for the Schrödinger equation in [77]. However, in order to prove uniqueness, we use monotonicity argument and this requires exponentially decaying cut-off functions.

3.2.3 Modulation

We now use a modulation technique to obtain orthogonality conditions on the remainder term. For a sake of clarity, we suppose in this part that all the solitons are positive, so $\sigma^k = 1$; the proof is identical for different signs. For C^1 functions $(\mathbf{x}^k(t))_{1 \leq k \leq K}$ and $\tilde{c}^k(t)$, we denote a modulated soliton, a modulated eigenvector defined in Proposition 26 and

respectively the error by

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^k(t, \mathbf{x}) &:= Q_{\widetilde{c}^k(t)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}^k - \widetilde{\mathbf{x}}^k(t)), \\ \widetilde{Z}^k(t, \mathbf{x}) &:= Z_{\widetilde{c}^k(t)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}^k - \widetilde{\mathbf{x}}^k(t))\end{aligned}$$

and

$$w(t, \mathbf{x}) := u(t, \mathbf{x}) - \widetilde{R}(t, \mathbf{x}).$$

We will ask for two types of orthogonality conditions:

$$\forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket, \forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket, \int_{\mathbb{R}^d} w(t, \mathbf{x}) \partial_i \widetilde{R}^k(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.12)$$

or

$$\forall k \in \llbracket 1; K \rrbracket, \int_{\mathbb{R}^d} w(t, \mathbf{x}) \widetilde{Z}^k(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (3.13)$$

Proposition 28. *There exist a time $T_1 > 0$, $\alpha > 0$, $K_1 > 0$ such that the following holds. Let $S_n > T_1$ and an initial condition $u(S_n)$ such that the solution u of (ZK) satisfies, for some $t^* \in [T_1, S_n]$:*

$$\sup_{t^* \leq t \leq S_n} \|u(t) - R(t)\|_{H^1} \leq \alpha.$$

Then :

1. for the subcritical cases (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) , there exist K unique functions

$$(\widetilde{\mathbf{x}}^k)_{1 \leq k \leq K} \in \mathcal{C}^1([T_1, S_n], \mathbb{R}^d),$$

and we take $\widetilde{c}^k(t) := c^k$, such that the error term $w(t, \mathbf{x})$ satisfies the orthogonality conditions (3.12),

2. for the critical case (mZK) , there exist $2K$ unique functions

$$(\widetilde{\mathbf{x}}^k)_{1 \leq k \leq K} \in \mathcal{C}^1([T_1, S_n], \mathbb{R}^d)$$

and $(\widetilde{c}^k(t))_{1 \leq k \leq K}$ in $\mathcal{C}^1([T_1, S_n], \mathbb{R})$, such that the error term $w(t, \mathbf{x})$ satisfies the orthogonality conditions (3.12) and (3.13).

We obtain a bound on the H^1 -norm of the error and on the derivatives of $(\widetilde{x}_i^k)_{i,k}$ and of $(\widetilde{c}^k)_k$, on $[t^*, S_n]$:

$$\sum_k \left| \widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - c^k t \mathbf{e}_1 \right| + \sum_k \left| \widetilde{c}^k(t) - c^k \right| + \|w(t)\|_{H^1} \leq K_1 \|u(t) - R(t)\|_{H^1}, \quad (3.14)$$

and

$$\forall k, \quad \left| \widetilde{\mathbf{x}}^k - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1 \right| + \left| \widetilde{c}^k \right| \leq K_1 \sum_{j=1}^K \left(\int w^2(t) e^{-\sqrt{\sigma_0} |\mathbf{x} - c^j t \mathbf{e}_1|} \right)^{\frac{1}{2}} + K_1 e^{-\frac{1}{2} \sigma_0 \sqrt{\sigma_0} t}. \quad (3.15)$$

Proof. Let us prove the modulation lemma in the critical case (mZK). We use the classical implicit function theorem. To do this, we consider the function:

$$g : \left(\left(\begin{array}{ccc} \widetilde{x}_1^1 & \cdots & \widetilde{x}_1^K \\ \widetilde{x}_2^1 & \cdots & \widetilde{x}_2^K \\ \widetilde{c}^1 & \cdots & \widetilde{c}^K \end{array} \right), u \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} \int w \partial_1 \widetilde{R}^1 & \cdots & \int w \partial_1 \widetilde{R}^K \\ \int w \partial_2 \widetilde{R}^1 & \cdots & \int w \partial_2 \widetilde{R}^K \\ \int w \widetilde{Z}^1 & \cdots & \int w \widetilde{Z}^K \end{array} \right).$$

The derivative of g_{i_1, k_1} with respect to $\widetilde{x}_{i_2}^{k_2}$, with $k_1 \neq k_2$, is an integral of the product of the derivatives of two solitons, considered far enough from each other. The terms along the diagonal of the differential of g will be dominant:

$$\frac{d}{d\widetilde{x}_i^k} g_{i, k} = \int w \partial_i^2 \widetilde{R}^k - \|\partial_i Q_{c^k}\|_{L^2}^2.$$

We need to ascertain that the crossing derivatives of one soliton are small enough, with $i_1 \neq i_2$ in $\llbracket 1; d \rrbracket$, by (3.7) and by parity:

$$\frac{d}{d\widetilde{x}_{i_2}^k} g_{i_1, k} = \int w \partial_{i_1} \partial_{i_2} \widetilde{R}^k - \int \partial_{i_2} Q_{c^k} \partial_{i_1} Q_{c^k} = \int w \partial_{i_1} \partial_{i_2} \widetilde{R}^k \quad \text{and} \quad \frac{d}{d\widetilde{c}^k} g_{i_1, k} = \int w \Lambda \widetilde{R}^k.$$

For the derivatives of the third components of g :

$$\frac{d}{d\widetilde{x}_{i_2}^k} g_{3, k} = \int w \partial_{i_2} \widetilde{Z}^k \quad \text{and} \quad \frac{d}{d\widetilde{c}^k} g_{3, k} = \int w \Lambda \widetilde{Z}^k - \int \Lambda \widetilde{R}^k \widetilde{Z}^k = \int w \Lambda \widetilde{Z}^k - \frac{1}{2\lambda_0} \int Q Z.$$

Q and Z are both positive, so the last term is negative.

Finally the derivatives of g with respect to the variables $(\widetilde{x}_i^k)_{i, k}$ and $(\widetilde{c}^k)_k$ has a dominant diagonal. This proves that $\nabla_{(\widetilde{x}_i^k)_{i, k}, (\widetilde{c}^k)_k} g$ is invertible. We can then use the implicit function theorem: it gives us continuity and derivability of the variables along u , see [86]. We also get an upper bound on $u - \widetilde{R}$:

$$\begin{aligned} \|(u - \widetilde{R})(t)\|_{H^1} &\leq \|(u - R)(t)\|_{H^1} + \sum_{k=1}^K \left\| Q_{c^k}(\cdot - \mathbf{y}^k - c^k t \mathbf{e}_1) - Q_{\widetilde{c}^k}(\cdot - \mathbf{y}^k - \widetilde{\mathbf{x}}^k(t)) \right\|_{H^1} \\ &\leq \|(u - R)(t)\|_{H^1} + \sum_k |\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - c^k t \mathbf{e}_1| + \sum_k |c^k - \widetilde{c}^k(t)|. \\ &\leq C \|(u - R)(t)\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Now, it suffices to take the scalar product of the equation of the error:

$$d_t w + \partial_1(\Delta w) = -\partial_1 \left((\widetilde{R} + w)^p - \sum_{k=1}^K \widetilde{R}^k{}^p \right) + \sum_{k=1}^K \left(\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1 \right) \cdot \nabla \widetilde{R}^k - \frac{\widetilde{c}^k{}'(t)}{\widetilde{c}^k(t)} \Lambda \widetilde{R}^k$$

by $\widetilde{Z}^j$ with the orthogonality conditions $\frac{d}{dt} \left(\langle w, \widetilde{Z}^j \rangle \right) = 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \frac{\widetilde{c}^k(t)}{\widetilde{c}^k(t)} \langle \Lambda \widetilde{R}^k, \widetilde{Z}^j \rangle - \sum_{k \neq j} (\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1) \cdot \langle \nabla \widetilde{R}^k, \widetilde{Z}^j \rangle \\ &= \left\langle w, \frac{\widetilde{c}^j(t)}{\widetilde{c}^j(t)} \Lambda \widetilde{Z}^j - \widetilde{\mathbf{x}}^j(t) \cdot \nabla \widetilde{Z}^j + \partial_1 \Delta \left(\widetilde{Z}^j \right) \right\rangle - \left\langle \partial_1 \left((\widetilde{R} + w)^p - \sum_{k=1}^K \widetilde{R}^k{}^p \right), \widetilde{Z}^j \right\rangle, \end{aligned}$$

and similarly by taking the scalar product with $\partial_i \widetilde{R}^j$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K (\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1) \cdot \langle \nabla \widetilde{R}^k, \partial_i \widetilde{R}^j \rangle - (\widetilde{\mathbf{x}}^j(t) - \widetilde{c}^j \mathbf{e}_1) \cdot \langle w, \nabla \partial_i \widetilde{R}^j \rangle - \sum_{k \neq j} \frac{\widetilde{c}^k(t)}{\widetilde{c}^k(t)} \langle \Lambda \widetilde{R}^k, \partial_i \widetilde{R}^j \rangle \\ &= \frac{\widetilde{c}^j(t)}{\widetilde{c}^j(t)} \left\langle w, \Lambda \partial_i \widetilde{R}^j \right\rangle - \left\langle \left(\widetilde{R} + w \right)^p - \sum_{k=1}^K \widetilde{R}^k{}^p - p w \widetilde{R}^{p-1}, \partial_1 \partial_i \widetilde{R}^j \right\rangle. \end{aligned}$$

One can notice that in the right side of the second equation, the term $\widetilde{\mathbf{x}}^1$ can be transformed into $\widetilde{\mathbf{x}}^1 - \widetilde{c}^1 \mathbf{e}_1 + \widetilde{c}^1 \mathbf{e}_1$, and the main terms with $\widetilde{\mathbf{x}}^1 - \widetilde{c}^1 \mathbf{e}_1$ comes from the scalar product of $\langle \partial_i \widetilde{R}^k, \partial_1 \widetilde{R}^1 \rangle$, decreasing α if necessary. We thus obtain the system:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\widetilde{c}^j(t)}{\widetilde{c}^j(t)} \left(\langle \Lambda \widetilde{R}^j, \widetilde{Z}^j \rangle - \langle w, \Lambda \widetilde{Z}^j \rangle \right) + \sum_{k \neq j} \frac{\widetilde{c}^k(t)}{\widetilde{c}^k(t)} \langle \Lambda \widetilde{R}^k, \widetilde{Z}^j \rangle \\ & + (\widetilde{\mathbf{x}}^j(t) - \widetilde{c}^j \mathbf{e}_1) \cdot \langle w, \nabla \widetilde{Z}^j \rangle + \sum_{k \neq j} (\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1) \cdot \langle \nabla \widetilde{R}^k, \widetilde{Z}^j \rangle \\ &= \left\langle w, -\widetilde{c}^j \partial_1 \widetilde{Z}^j + \partial_1 \left(\Delta \widetilde{Z}^j \right) \right\rangle - \left\langle \partial_1 \left((\widetilde{R} + w)^p - \sum_{k=1}^K (\widetilde{R}^k)^p \right), \widetilde{Z}^j \right\rangle, \forall 1 \leq j \leq K, \\ & - \frac{\widetilde{c}^j(t)}{\widetilde{c}^j(t)} \langle w, \Lambda \partial_i \widetilde{R}^j \rangle - \sum_{k \neq j} \frac{\widetilde{c}^k(t)}{\widetilde{c}^k(t)} \langle \Lambda \widetilde{R}^k, \partial_i \widetilde{R}^j \rangle \\ & + \sum_{l=1}^d \left(\widetilde{x}_l^j(t) - \delta_{l,1} \widetilde{c}^j \right) \left(\delta_{i,l} \|\partial_i \widetilde{R}^j\|_{L^1}^2 - \langle w, \partial_{li} \widetilde{R}^j \rangle \right) + \sum_{k \neq j} (\widetilde{x}_l^k(t) - \widetilde{c}^k \mathbf{e}_1) \cdot \langle \nabla \widetilde{R}^k, \partial_i \widetilde{R}^j \rangle \\ &= - \left\langle \left(\widetilde{R} + w \right)^p - \sum_{k=1}^K \widetilde{R}^k{}^p - p w \widetilde{R}^{p-1}, \partial_1 \partial_i \widetilde{R}^j \right\rangle, \quad \forall 1 \leq j \leq K, \forall 1 \leq i \leq d. \end{aligned} \right.$$

This linear system with variables $(\widetilde{c}^j)_{1 \leq j \leq K}$ and $(\widetilde{x}_l^j - \delta_{l,1} \widetilde{c}^j)_{1 \leq j \leq K, 1 \leq l \leq d}$ can be rewritten into $AX = B$, with a dominant diagonal matrix A (decreasing α if necessary), and a small constant term B . We obtain the estimate (3.15), and conclude the proposition. $\square$

We now go back to the proposition: once T_1 is fixed, if the distance on $[T_1, S_n]$ between u and the sum of the n decoupled solitons is less than α , then we can modulate on the whole time interval $[T_1, S_n]$.

3.2.4 Evolution of the masses and energies

We can assume that $L \geq 1$; in the following, the interaction between the different solitons will decay faster than the interaction of a soliton $\widetilde{R}^k$ with a weight function $\phi^{k'}$, and so will be neglected.

Proposition 29. *The following expansion of mass and energy holds for all time $t \in [t^*, S_n]$:*

$$\left| M^k(t) - \left(\int Q_{c^k}^2 + 2 \int w \widetilde{R}^k \phi^k + \int w^2 \phi^k \right) \right| \leq C \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} (1 + \alpha), \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \left| E^k(t) - \left(E(Q_{c^k}) - c^k \int w \widetilde{R}^k \phi^k + \frac{1}{2} \int (|\nabla w|^2 - p \widetilde{R}^{k^{p-1}} w^2) \phi^k \right) \right| \\ & \lesssim \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \alpha \right) \|w\|_{H^1}^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \left| \left(E^k(t) + \frac{c^k}{2} M^k(t) \right) - \left(E(Q_{c^k}) + \frac{c^k}{2} \int Q_{c^k}^2 \right) - \frac{1}{2} H_k(t) \right| \\ & \lesssim \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \alpha \right) \|w\|_{H^1}^2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

with

$$H_k(t) := \int \left(c^k w^2 + |\nabla w|^2 - p \widetilde{R}^{k^{p-1}} w^2 \right) \phi^k.$$

Observe that, for $k \neq 1$:

$$\int (|\widetilde{R}^1| + |\nabla \widetilde{R}^1|) \phi^k \lesssim e^{-\frac{1}{2} \sigma_0 t} + \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} \text{ and } \int \widetilde{R}^1 (1 - \phi^1) \lesssim e^{-\frac{1}{2} \sigma_0 t} + \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t}.$$

This can be seen by considering the mass of ϕ^k is mainly far from the one of $\widetilde{R}^1$, cutting for example at the middle between m^1 and the center of the soliton $\widetilde{R}^1$. This estimate is also true for the other solitons $\widetilde{R}^k$.

Proof. The first estimate comes from a classical development of the mass; the second estimate:

$$\begin{aligned} & \left| E^k(t) - \left(E(Q_{c^k}) + \int (\nabla \widetilde{R} \cdot \nabla w - w |\widetilde{R}|^p) \phi^k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int \left(\frac{1}{2} \nabla w \cdot \nabla w - \frac{1}{p+1} \left((\widetilde{R} + w)^{p+1} - \widetilde{R}^{p+1} - (p+1) w \widetilde{R}^p \right) \right) \phi^k \right) \right| \\ & \leq C e^{-\frac{1}{2} \sigma_0 \sqrt{\sigma_0} t} + C \int w^2 e^{-\frac{1}{2} \sigma_0 \sqrt{\sigma_0} t} \phi^k. \end{aligned}$$

The only terms at which we should take care about to prove (3.17) are the higher power of w , for $3 \leq j \leq p+1$, and we use as in [24] the Sobolev embeddings $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$

for $q \geq 2$ and $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)$:

$$\left| \int w^j \phi^k \right| \leq C \|w\|_{H^1}^j.$$

□

Now that we have obtained an estimate on the linearised operators H_k around each of the solitons, we need to bound the evolutions of the energies and the masses. The following lemma expresses the (almost) monotonicity of the different quantities. Some estimates mimic those obtained in [24].

Lemma 30. *There exists $L > 0$ and $T_2 > 0$ large enough, such that for all $t^* > T_2$, the following evolutions of the mass and modified energy hold, for all $\kappa \in \llbracket 1, K \rrbracket$, $t \in [t^*, S_n]$:*

$$\sum_{k=1}^{\kappa} (M^k(S_n) - M^k(t)) \geq -CL e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t}, \quad (3.19)$$

$$\sum_{k=1}^{\kappa} (\widetilde{E}^k(S_n) - \widetilde{E}^k(t)) \geq -CL e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t}. \quad (3.20)$$

Proof. By computing the evolution of the mass for $\kappa \leq K - 1$, the definition of σ_0 , the decreasing function ψ , (3.9) and $\frac{1}{L^2} \leq \frac{\sigma_0}{4}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\kappa} M^k \right) &= \int \left(\frac{2p}{p+1} u^{p+1} - |\nabla u|^2 - 2(\partial_1 u)^2 - \frac{c^{\kappa+1} + c^{\kappa}}{2} u^2 \right) \partial_1 \psi^{\kappa} + \int u^2 \partial_1^3 \psi^{\kappa} \\ &\geq \int \left(-\frac{2p}{p+1} u^{p+1} + |\nabla u|^2 + 2(\partial_1 u)^2 + 3 \frac{\sigma_0}{4} u^2 \right) |\partial_1 \psi^{\kappa}|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Only the term u^{p+1} due to the non-linearity is non-positive. We deal with it by separating the integral into different pieces, according to the position of x_1 . We use a parameter R_0 to adapt later, and an interval centred in m^{κ} : $I_t^{\kappa} = [c^{\kappa} t + y_1^{\kappa} + R_0; c^{\kappa+1} t + y_1^{\kappa+1} - R_0]$.

Firstly, consider that we are far from the variation of ψ , so $x_1 \in I_t^{\kappa C}$, we obtain :

$$|\psi'(x_1 - m^{\kappa}(t))| \leq \frac{1}{L} C_0 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t}$$

with the condition $T_2 \geq \frac{2}{\sigma_0} \sup_{\kappa} |R_0 - \frac{1}{2} (y_1^{\kappa+1} - y_1^{\kappa})|$. Moreover, the assumption (3.4), and the Sobolev embeddings $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, for $(d, p) = (2, 2), (2, 3)$ or $(3, 2)$ with a constant C_d :

$$\int_{I_t^{\kappa C}} -\frac{2p}{p+1} u^{p+1}(t) |\partial_1 \psi^{\kappa}(t)| \geq -\frac{2p}{p+1} C_d^{p+1} (\|R(t)\|_{H^1} + \alpha)^{p+1} C_0 \frac{1}{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t}.$$

Secondly, the part where $\partial_1 \psi^{\kappa}$ can not come to the rescue uses that u is close to R ,

and R collapses on I_t^κ :

$$\begin{aligned}
& \int_{I_t^\kappa} -\frac{2p}{p+1} u^{p+1} |\partial_1 \psi^\kappa| + \int |\nabla u|^2 |\partial_1 \psi^\kappa| + \frac{3}{4} \sigma_0 u^2 |\partial_1 \psi^\kappa| \\
& \geq -\frac{2p}{p+1} C_d^{p+1} (\|u - R\|_{H^1} + \|R\|_{H^1(x_1 \in I_t^\kappa)})^{p-1} \left\| u |\partial_1 \psi^\kappa|^{\frac{1}{2}} \right\|_{H^1}^2 + \int |\nabla u|^2 |\partial_1 \psi^\kappa| \\
& \quad + \frac{3}{4} \sigma_0 \int u^2 |\partial_1 \psi^\kappa| \\
& \geq \left(-\frac{2p}{p+1} C_d^{p+1} (\alpha + \|R\|_{H^1(x_1 \in I_t^\kappa)})^{p-1} + \min \left(1, \frac{3}{4} \sigma_0 \right) \right) \int (|\nabla u|^2 + u^2) |\partial_1 \psi^\kappa|.
\end{aligned}$$

By choosing α small enough depending on σ_0 , and T_2 and R_0 large enough such that the constant on the right hand side is positive, we thus obtain:

$$\int \left(-\frac{2p}{p+1} u^{p+1} + |\nabla u|^2 + 2(\partial_1 u)^2 + 3\frac{\sigma_0}{4} u^2 \right) |\partial_1 \psi^\kappa| \geq -C e^{-\frac{1}{L} \frac{1}{4} \sigma_0 t}.$$

An integration from t to S_n concludes the first estimate on the mass.

We now compute the derivative of the sum of energy. We remember that $-\partial_1 \psi^k > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\kappa} E^k &= -\frac{1}{2} \int (\Delta u + u^p)^2 \partial_1 \psi^\kappa - \int |\partial_1 \nabla u|^2 \partial_1 \psi^\kappa + \frac{1}{2} \int |\partial_1 u|^2 \partial_1^3 \psi^\kappa \\
&\quad + p \int |\partial_1 u|^2 u^{p-1} \partial_1 \psi^\kappa + \int \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) \frac{d}{dt} \psi^\kappa \\
&\geq -\frac{1}{2L^2} \int |\partial_1 u|^2 |\partial_1 \psi^\kappa| - p \int |\partial_1 u|^2 |u|^{p-1} |\partial_1 \psi^\kappa| - \frac{1}{p+1} \frac{c^\kappa + c^{\kappa-1}}{2} \int |u|^{p+1} |\partial_1 \psi^\kappa|.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

We then use the same tools for $\widetilde{E}^k$ that we used for the mass. The first term is compensated by the ones of mass, while L is large enough. The second is dealt again by considering separately I_t^κ and $I_t^{\kappa C}$:

$$\int_{I_t^{\kappa C}} |\partial_1 u(t)|^2 |u(t)|^{p-1} |\partial_1 \psi^\kappa(t)| \leq \|u(t)\|_{L^\infty}^{p-1} \left(\alpha^2 + \int (\partial_1 R(t))^2 \right) \frac{1}{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} \leq C \frac{1}{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t},$$

and

$$\int_{I_t^\kappa} |\partial_1 u|^2 |u|^{p-1} |\partial_1 \psi^\kappa| \leq C_d^{p-1} \|u\|_{H^2(I_t^\kappa)}^{p-1} \int |\partial_1 u|^2 |\partial_1 \psi^\kappa|.$$

Increasing R_0 if necessary to diminish $\|u\|_{H^2(I_t^\kappa)}$, this term will also be compensated by the mass. The last one has already been done and uses exactly the same tools. This concludes the estimate for $\widetilde{E}^k$. $\square$

3.2.5 Proof of the exponential decay (3.5)

Recall the bound (3.4) for $t \in [t^*, S_n]$:

$$\|u(t) - R(t)\|_{H^1} \leq \alpha,$$

and recall the expression of the linearised operator localised around each soliton:

$$H_k(t) := \int \left(|\nabla w|^2 - p \widetilde{R}^k w^2 + c^k w^2 \right) \phi^k.$$

Using the local evolutions of mass and energy (3.18), we obtain for any sequence (b_k) of scalar:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^K b^k \left(E^k(t) + \frac{c^k}{2} M^k(t) \right) - \sum_{k=1}^K b^k \left(E^k(S_n) + \frac{c^k}{2} M^k(S_n) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K b^k H_k(t) \right| \\ & \lesssim \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \alpha \right) \|w\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Let us motivate our choice of the coefficients $b^k := \frac{1}{(c^k)^2}$. In order to use the mass monotonicity property, we develop the sum:

$$\sum_{k=1}^K \frac{b^k c^k}{2} M^k(t) = b^K c^K \sum_{k=1}^K \frac{M^k(t)}{2} + \sum_{\kappa=2}^K (b^{\kappa-1} c^{\kappa-1} - b^\kappa c^\kappa) \sum_{k=1}^{\kappa-1} \frac{M^k(t)}{2},$$

and for it to apply, each term has to come with a non negative coefficient: we see the constraint of $(b^k c^k)_k$ to be non increasing. We could choose, for example, $b^k = \frac{1}{c^k}$. Then, we obtain by the same formula a decomposition of the energy : $\sum_k b^k (E^k(t) - E^k(S_n))$. This

is not suitable, because the energies $\sum_{k=1}^\kappa E^k(t)$ do not satisfy the monotonicity property, as seen in Lemma 30 above. To circumvent it, we wish to consider instead the modified energies $\widetilde{E}^k$ by adding some mass and we can now use the monotonicity of $\sum_{k=1}^\kappa \widetilde{E}^k(t)$. It implies the constraint that the sequence $(b^k c^k)_k$ to be stricly decreasing, and our choice of $b^k := \frac{1}{(c^k)^2}$ comes from there (recall that the c^k are increasing order). We then obtain the following expansion:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} \left(E^k + \frac{c^k}{2} M^k \right) \\ & = \frac{1}{(c^K)^2} \sum_{k=1}^K \widetilde{E}^k + \left(\frac{1}{2c^K} - \frac{\sigma_0}{4} \frac{1}{(c^K)^2} \right) \sum_{k=1}^K M^k \\ & + \sum_{\kappa=1}^K \left[\left(\frac{1}{(c^\kappa)^2} - \frac{1}{(c^{\kappa+1})^2} \right) \sum_{k=1}^\kappa \widetilde{E}^k \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^\kappa} - \frac{1}{c^{\kappa+1}} \right) - \frac{\sigma_0}{4} \left(\frac{1}{(c^\kappa)^2} - \frac{1}{(c^{\kappa+1})^2} \right) \right) \sum_{k=1}^\kappa M^k \right]. \end{aligned}$$

By the choice of $\frac{\sigma_0}{4}$ in $\widetilde{E}^k$, we observe that the coefficients in front of each sum of $\widetilde{E}^k$ and of M^k are positive, we can thus use the monotonicity properties (3.19) and (3.20).

(3.23) gives us:

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} H_k(t) \leq C\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} + C\left(\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} + \alpha\right) \|w\|_{H^1}^2 \quad (3.24)$$

A lower bound of the left hand side uses the coercivity property, given in the following lemma, with the proof postponed to the appendix. It generalizes the classic coercivity of this quantity around one soliton.

Lemma 31. *For subcritical and critical (ZK), there exists $C_0 > 0$, such that:*

$$C_0 \|w\|_{H^1}^2 - \frac{1}{C_0} \sum_{k=1}^K \left(\int \widetilde{R}^k w \right)^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} H_k(t). \quad (3.25)$$

We now turn our attention to the terms $\int \widetilde{R}^k w$. The key to estimate this term is the appearance of a different sign in the development of the mass and the energy in (3.16) and in (3.17). We then combine with the monotonicity. A first estimate comes from mixing (3.16) and (3.19):

$$\begin{aligned} 2 \int w(t) \widetilde{R}^1(t) \phi^1(t) &\leq M_1(t) - M_1(S_n) - \int w^2(t) \phi^k(t) + C\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} \\ &\leq \|w(t)\|_{H^1}^2 + CL e^{-\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{\sigma_0}{4}t}. \end{aligned}$$

Because of the lack of monotonicity for E^1 , we use again the mass M^1 to find back $\widetilde{E}^1$, and we obtain the other inequality mixing (3.17) and (3.20):

$$\begin{aligned} \left(c^1 - \frac{\sigma_0}{8}\right) \int w(t) \widetilde{R}^1(t) \phi^1(t) &\geq -\widetilde{E}^1(t) + \widetilde{E}^1(S_n) - C\|w(t)\|_{H^1}^2 \left(1 + \sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t}\right) - C\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} \\ &\geq -C\|w(t)\|_{H^1}^2 \left(1 + \sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t}\right) - C\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t}. \end{aligned}$$

For the other $\int w \widetilde{R}^k \phi^k$, we proceed by induction using again the monotonicity. We conclude then the estimates:

$$\left| \int w(t) \widetilde{R}^k(t) \phi^k(t) \right| \lesssim \sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} + \|w(t)\|_{H^1}^2. \quad (3.26)$$

(3.24) can now bound the H^1 -norm of the error into:

$$\lambda_0 \|w(t)\|_{H^1}^2 \lesssim \sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} + \left(\sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{4}t} + \alpha\right) \|w(t)\|_{H^1}^2.$$

Taking $T_0 \geq \max(T_1, T_2)$ large enough, and α small enough, we infer

$$\|w\|_{H^1} \lesssim \sqrt{L}e^{-\frac{1}{L}\frac{\sigma_0}{8}t}.$$

Now we can improve the bound on the parameter of modulation, by integrating (3.15)

from t to S_n , and $|\widetilde{\mathbf{x}}^k(S_n) - c^k S_n \mathbf{e}_1| = \widetilde{c}^k(S_n) - c^k S_n = 0$:

$$\sum_{k=1}^K |\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - c^k t \mathbf{e}_1| + |\widetilde{c}^k(t) - c^k t| \lesssim CL^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} t}.$$

We then conclude using the bounds from the modulation:

$$\|(u - R)(t)\|_{H^1} \leq \|w(t)\|_{H^1} + \|R(t) - \widetilde{R}(t)\|_{H^1} \leq CL^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} t}.$$

By taking A_1 depending on L , and finally T_0 large enough, we have proved (3.5). This concludes the proof of Proposition 25.

A straightforward bootstrap argument shows that the minimal time t^* down to which (3.5) holds is actually $t^* = \max(T_0, T_n^*)$, that is:

Corollary 32. *For all $t \in [(\max(T_0, T_n^*), S_n]$, there hold*

$$\|u(t) - R(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} t}.$$

Proof. This is a consequence of Proposition 25, the final condition $u(S_n) - R(S_n) = 0$, and a continuity argument ($u \in \mathcal{C}([t^*, S_n], H^1)$). $\square$

We also obtain that the minimal time of existence T_n^* is in fact lower than T_0 :

Corollary 33. *The interval of existence of u_n contains $[T_0, S_n]$, and $T_n^* < T_0$. Furthermore, u_n is in $\mathcal{C}([T_0, S_n], H^s)$ for any $s \geq 1$.*

Proof. It is a consequence of the previous corollary and of the local well-posedness theory recalled in Appendix B. In fact, we get that:

$$\forall t \in [\max(T_0, T_n^*), S_n], \quad \|u_n(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} T_0} + \max_{T_0 \leq t \leq +\infty} \|R(t)\|_{H^1} =: C,$$

and the theory of local well-posedness can apply at any point of the interval $[T_0, S_n]$, with a time of existence $T(C)$. The regularity of u_n comes from the initial data in H^s for any $s \geq 1$, and the (local) continuity of the flow on the interval of existence. $\square$

3.3 H^s -estimate

In the previous section, we proved that there exist a time T_0 , constants $\delta_1 := \frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} \geq \sqrt{\sigma_0} \frac{\sigma_0}{8}$ and A_1 such that :

$$\forall t \in [T_0, S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\delta_1 t}.$$

In this section, we want first to prove that the H^s -norm of the error is exponentially decreasing. All the $\dot{H}^s$ -norm decay exponentially with the same rate δ_4 , but the constants involved highly depend on s .

Proposition 34. *Let $s \geq 4$. There exist constants A_s , $\delta_4 := \frac{\delta_1}{2}$ and a time $T_4 \geq T_0$ such that the following bound holds :*

$$\forall t \in [T_4; S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{\dot{H}^s} \leq A_s e^{-\delta_4 t}. \quad (3.27)$$

The constants above are independent of n , and more importantly, the time on which the exponential decrease holds is independent of s .

Recall that the u_n satisfy $u_n(S_n) = R(S_n)$, and u_n is defined on $[T_0, S_n]$. As above, we drop the index n and denote u_n by u ; in the computations below, the constants involved will not depend on n either. We denote v the difference of the solution u with the sum of K decoupled solitons by v :

$$v(t, \mathbf{x}) := u(t, \mathbf{x}) - R(t, \mathbf{x}). \quad (3.28)$$

Estimate (3.27) was obtained by Martel [72] for subcritical and critical (gKdV). Let us explain why this proposition requires a new argument in the context of (ZK). The goal of this part is to obtain an inequality of the type:

$$\left| \frac{d}{dt} (\|v\|_{\dot{H}^s}^2) + O(l.o.t.) \right| \lesssim \|v\|_{H^1} + \|v\|_{\dot{H}^s}^{2-\epsilon} \|v\|_{H^1}^\epsilon + \|v\|_{\dot{H}^s}^3, \quad (3.29)$$

for some fixed $\epsilon > 0$ (possibly small). The idea here is that we already know the exponential decay of the H^1 -norm of the error v , and we need by any means a bound better than $\|v\|_{\dot{H}^s}^2$, like a power equal to 3. In other words, an inequality which fails the estimate would be of the kind:

$$\left| \frac{d}{dt} (\|u\|_{\dot{H}^s}^2) + O(l.o.t.) \right| \lesssim \|v\|_{\dot{H}^s}^2 + O(l.o.t.), \quad (3.30)$$

Let recall the strategy for u a solution to the (KdV) equation in [72]. A direct derivative of the $\dot{H}^2$ -norm of the solution gives:

$$\frac{d}{dt} \left(\int |\partial_x^2 u|^2 \right) = -2 \int \partial_x^2 u \partial_x^3 (u^2).$$

This term is trilinear in u . We next replace u by $v + R$, and by developing those terms, we see some tricky terms appear:

$$\left| \int \partial_x^2 v \partial_x^2 v \partial_x (R) \right| \lesssim \|v\|_{\dot{H}^2}^2, \quad (3.31)$$

and prevent from achieving an inequality of the sense of (3.29). These quadratic terms with maximal number of derivatives on v are precisely the ones that also prevent to construct a multi-solitons via fixed point argument using dispersive estimate on the flat space.

To get rid of those terms, one solution is to modify the functional and consider

$$\frac{d}{dt} \left(\int |\partial_x^2 u|^2 - c \int \partial_x u \partial_x u u \right) \lesssim \text{"}n\text{-linear terms with lower derivatives and } n > p + 1\text{"}.$$

This strategy works in dimension $d = 1$. However, this technique does not apply anymore in dimension $d \geq 2$, let us see why for (ZK_{2d}) . Following the same scheme, the derivative of the $\dot{H}^2$ -norm is:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, i_2=1}^d \int |\partial_{i_1} \partial_{i_2} u|^2 \right) = -2 \sum_{i_1, i_2=1}^d \int \partial_{i_1, i_2} u \partial_{1, i_1, i_2} (u^2).$$

By replacing all the u by $v + R$, we see that we need to compensate for the tricky terms $\int (\partial_{i_1 i_2} v)^2 \partial_1 R$ to avoid the problematic situation illustrated in (3.30). Trying to mimic the previous strategy, let us identify the different terms to add to modify the derived quantity :

- The crossed-derivatives terms: $\int \partial_1 u \partial_2 u u$. They are not useful for those combinations. In fact, the time derivative of this quantity will give terms with an odd number of derivative ∂_2 , which does not correspond to our situation.
- The terms with same derivatives: $\int \partial_1 u \partial_1 u u$ and $\int \partial_2 u \partial_2 u u$. However, no combination of those terms can cancel the trilinear term.

We thus need another method to deal with the trilinear terms, which is the purpose of our next result. The idea is the following. Observe that the tricky terms are localised around the center of each soliton, which recalls the situation of the derivative of the energies in (3.22), where the second derivative of $u(t)$ is localised around the main variation of ψ^k , between two successive solitons:

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\kappa} E^k(u) = -\frac{1}{2} \int |\Delta u|^2 \partial_1 \psi^k + \text{"better behaved terms"}.$$

In other words, the time derivative of a localised H^{s-1} norm bounds a localised H^s -norm. After integration in time, we get

$$\int_t^{S_n} \int |\Delta u|^2 \partial_1 \psi^k \lesssim E^k(u)(S_n) - E^k(u)(t) \lesssim \|v(t)\|_{H^1}^2.$$

Now, a similar bound can be obtained with v instead of u , and from the previous section, we already know that $\|v(t)\|_{H^1}$ has an exponential decay rate. It remains to do one further observation: after performing the above computations, we now don't really need that ψ^k has its variation localized away from the solitons (because the H^1 bound has already been obtained), and so we can center it around R^k . Summing up in k , we obtain exponential decay for

$$\int_t^{S_n} \int |\nabla^2 v|^2 \partial_1 (R^{p-1}),$$

and this is exactly what is needed to adapt the strategy for (gKdV) to (ZK).

The remainder of this section is dedicated to make the above outline rigorous, so as to complete the proof of Proposition 34.

In dimension d , for $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, we denote the derivative of a function f with respect to the i^{th} variable by $\partial_i f$ or f_i . A multi-index is denoted by a bold letter $\mathbf{i}$, with length $|\mathbf{i}|$ and coefficients $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_{|\mathbf{i}|})$. Naturally, if $|\mathbf{i}| = k$ with $k \in \mathbb{N}$, then $f_{\mathbf{i}}$ denotes the derivative in the following directions: $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f$.

Let A be a large enough constant to be chosen later, and which satisfies:

$$\forall k = 1, \dots, K, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{A}{1 + x_1^2} \geq |Q_{c^k}(\mathbf{x})|^{p-1} + |\nabla Q_{c^k}(\mathbf{x})|^{p-1}.$$

We introduce now an adequate monotone function:

$$\eta(t, \mathbf{x}) := 1 + \sum_{k=1}^K \left(A \arctan(x_1 - c^k t - y_1^k) + \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.32)$$

We call this function a threshold function along the first axis. It increases along x_1 , and satisfy the fundamental pointwise estimate, at each t and $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$:

$$\eta_1(t) \geq |R(t)|^{p-1} + |\nabla R(t)|^{p-1}.$$

Due to the previous discussion, it is natural to define the function:

$$G_s(t) := e^{-\delta_1 t} + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{2-\frac{1}{s}} \|v(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{s}} + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t)\|_{H^3} (1 + \|v(t)\|_{H^1})^{p-2}. \quad (3.33)$$

This functional controls the interaction of different solitons, and the terms with the H^1 -norm of the error:

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{\sigma_0} \frac{\sigma_0}{2} t} &\leq G_s(t), \\ \|v(t)\|_{H^1} &\leq A_1 G_s(t), \\ \|v(t)\|_{H^1}^{p+1} &\leq A_1^{p+1} G_s(t). \end{aligned}$$

We recall the useful Gagliardo-Nirenberg interpolation, with $s' \leq n \leq s$, and $\theta = \frac{n-s'}{s-s'}$:

$$\|f\|_{\dot{H}^n} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s}^\theta \|f\|_{\dot{H}^{s'}}^{1-\theta}. \quad (3.34)$$

Observe that the norms $\dot{H}^s$ with small s are somehow more difficult to deal with: we deal with the nonlinearity using the Sobolev embedding $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ which requires a high regularity index $s > d/2$. This is not difficult to overcome: we will prove (3.27) directly for $s \geq s_0$ large enough, and conclude by interpolation. For (ZK), we can choose $s_0 = 4$.

3.3.1 Control of a localised $\dot{H}^s$ -norm of the error.

In this section we establish a lemma to control the $\dot{H}^s$ -norm of the error as (3.31), with a weight equal to the threshold function.

Lemma 35. *Let $s \in \mathbb{N}_{\setminus\{0\}}$, a multi-index $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_{s-1})$, with $i_j \in \llbracket 1, d \rrbracket$. The following estimate holds, for $t \in [T_0, S_n]$:*

$$\int_t^{S_n} \int \sum_{l=1}^d |v_{il}(t', \mathbf{x})|^2 \eta_1(t', \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt' \lesssim \int_t^{S_n} G_s(t') dt' + \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}^2. \quad (3.35)$$

Remark 36. *By summing over $\mathbf{i}$, we obtain the $\dot{H}^s$ -norm with the weight η_1 . Furthermore, we can notice that this bound is acceptable in view of (3.29).*

Proof. The error satisfies the following equation:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d}{dt} R + \partial_1 (\Delta R + R^p) - \partial_1 (\Delta v + (R + v)^p - R^p).$$

We differentiate $\mathbf{i}$ times, multiply by $v_{\mathbf{i}} \eta$ and integrate in space to get:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^d \int v_{il}^2 \eta_1 + 2 \int (v_{1i})^2 \eta_1 \\ &= \int v_{\mathbf{i}}^2 \eta_{111} - \frac{d}{dt} \left(\int v_{\mathbf{i}}^2 \eta \right) + \int v_{\mathbf{i}}^2 \frac{d\eta}{dt} + 2(-1)^{|\mathbf{i}|+1} \int v \partial_{\mathbf{i}} \left(\partial_{\mathbf{i}} \left(\frac{dR}{dt} + \partial_1 (\Delta R + R^p) \right) \eta \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$- 2 \int v_{\mathbf{i}} \partial_{1i} (p R^{p-1} v) \eta - 2 \int v_{\mathbf{i}} \partial_{1i} ((R + v)^p - R^p - p R^{p-1} v) \eta. \quad (3.37)$$

The left side of this equation is the left side of (3.35) up to a constant. Consider now the terms of (3.36). We want to integrate them in time. We accept a bound by the $\dot{H}^{s-1}$ -norm, because the function η and its derivative are bounded. The last term of (3.36) uses that for each k , $\partial_t R^k + \partial_1 (\Delta R^k + (R^k)^2) = 0$, and the interactions between the different solitons are weak and exponentially decreasing in (3.6). We obtain:

$$\int_t^{S_n} (3.36) dt' \lesssim \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 + \int_t^{S_n} \|v(t')\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 + \|v(t')\|_{L^2} e^{-\frac{\sigma_0}{4} \sqrt{\sigma_0} t'} dt'.$$

The tricky term is (3.37). The bilinear term in v gives us, by the embedding $H^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \left| \int v_{\mathbf{i}} \partial_{1i} (R^{p-1} v) \eta \right| &= \left| \int v_{\mathbf{i}} \partial_{1i} v R^{p-1} \eta + \int v_{\mathbf{i}} (\partial_{1i} (R^{p-1} v) - \partial_{1i} (v) R^{p-1}) \eta \right| \\ &\lesssim \left| \frac{1}{2} \int v_{\mathbf{i}}^2 \partial_1 (R^{p-1} \eta) \right| + \|v\|_{\dot{H}^{s-1}} \|v\|_{H^{s-1}} \lesssim \|v\|_{\dot{H}^{s-1}} (\|v\|_{\dot{H}^{s-1}} + \|v\|_{L^2}) \\ &\lesssim G_s(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Now the trilinear (or quadrilinear) term of (3.37). We use the Cauchy-Schwarz inequality, the distribution of the derivatives on the different terms and the embedding

$H^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left| \int v_{\mathbf{i}}(t) \partial_{\mathbf{i}}(v^2(t)) \eta(t) \right| &\lesssim \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}} \sum_{\mathbf{j} \in (l, \mathbf{i}), |\mathbf{j}| \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-|\mathbf{j}|}} \|v_{\mathbf{j}}(t)\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}} \sum_{\mathbf{j} \in (l, \mathbf{i}), |\mathbf{j}| \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-|\mathbf{j}|}} \|v(t)\|_{H^{|\mathbf{j}|+2}}. \end{aligned}$$

Using the interpolation (3.34) with $s' = 1$:

$$\begin{aligned} \left| \int v_{\mathbf{i}}(t) \partial_{\mathbf{i}}(v^2(t)) \eta(t) \right| &\lesssim \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{1-\frac{1}{s-1}} \|v(t)\|_{H^1}^{\frac{1}{s-1}} \sum_{\mathbf{j} \in (l, \mathbf{i}), |\mathbf{j}| \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{1-\frac{|\mathbf{j}|}{s-1}} \|v(t)\|_{H^1}^{\frac{|\mathbf{j}|}{s-1}} \\ &\quad \cdot \left(\|v(t)\|_{H^1} + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{\frac{|\mathbf{j}|+1}{s-1}} \|v(t)\|_{H^1}^{\frac{s-|\mathbf{j}|-2}{s-1}} \right) \\ &\lesssim \|v(t)\|_{H^1}^3 + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t)\|_{H^1} \lesssim G_s(t), \tag{3.39} \\ \left| \int v_{\mathbf{i}}(t) \partial_{\mathbf{i}}(v^3(t)) \eta(t) \right| &\lesssim \|v(t)\|_{H^1}^4 + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t)\|_{H^1} \|v(t)\|_{H^2} \lesssim G_s(t). \end{aligned}$$

By integrating (3.38) and (3.39) from t to S_n , and the Gagliardo-Nirenberg interpolation (3.34), we obtain the bounds (3.35). $\square$

3.3.2 Control of the variation of the $\dot{H}^s$ -norm of the solution.

Before giving the next lemma, let denote the different combinations of derivatives useful for the following. Let $\mathbf{i}$ a multi-index of length s . In the next computations, we will deal with $(p+1)$ -linear forms, with different combinations of derivatives:

$$L(f_0, \dots, f_p) = \int \partial_{\mathbf{i}} f_0 \partial_{\mathbf{i}}(f_1 \cdots f_p).$$

We need now to distribute the derivatives of $\partial_{\mathbf{i}}(f_1 \cdots f_p)$, in the following way: the function f_1 receives the set $\mathbf{j}_1$ of derivatives among $i_1, \dots, i_s, 1, \dots$, the function f_p which receives the set $\mathbf{j}_p$ of derivatives among the same set. One particular case, which we want to consider separately, is when all the derivatives fall on only one function: for this, we introduce the set $I_{\mathbf{i}}$ by:

$$I_{\mathbf{i}} := \left\{ (\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in (\mathcal{P}(i_1, \dots, i_s, 1))^p; \mathbf{j}_1 \cup \dots \cup \mathbf{j}_p = \mathbf{i} \cup \{1\} = (i_1, \dots, i_s, 1), \right. \\ \left. \text{with at least two } \mathbf{j}_k \text{ not empty} \right\},$$

and a special subset:

$$\tilde{I}_{\mathbf{i}} := \{(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in I_{\mathbf{i}}; \text{ with at least one } \mathbf{j}_k \text{ satisfies } |\mathbf{j}_k| = s\}.$$

In other words, the set $\tilde{I}_{\mathbf{i}}$ characterized the terms with all the derivatives on one term, except one on another term. Finally, we want to find out the term with those s derivatives:

$$\tilde{I}_{\mathbf{i}}(f_k) = \left\{ (\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in \tilde{I}_{\mathbf{i}}; |\mathbf{j}_k| = s \right\}.$$

The following lemma establishes a bound on the time evolution of s -derivatives of the solution, up to some terms with s derivatives on each error v . Those terms correspond to those in (3.35), which we will deal with Lemma 35.

Lemma 37. *Let $\mathbf{i}$ be a multi-index of length s . The following pointwise estimate holds, at each time t :*

$$\left| \frac{d}{dt} \int u_{\mathbf{i}} - p(p-1) \int v_{\mathbf{i}}^2 R^{p-2} \partial_1 R + 2 \sum_{(j_1, \dots, j_p) \in \tilde{I}_{\mathbf{i}}(v)} \int v_{\mathbf{i}} v_{j_k} \prod_{k' \neq k} R_{j_{k'}} \right| \lesssim G_s(t). \quad (3.40)$$

Proof. Let us compute the time derivative, with u a solution of (ZK):

$$\frac{d}{dt} \int u_{\mathbf{i}}^2 = -2 \int u_{\mathbf{i}} \partial_{1\mathbf{i}}(u^p).$$

Let us now distribute the $s+1$ derivatives. Two cases occur:

- either the $s+1$ are all on the same term, and we obtain:

$$-2p \int u_{\mathbf{i}} (\partial_1 u_{\mathbf{i}}) u^{p-1} = p(p-1) \int (u_{\mathbf{i}})^2 u^{p-2} \partial_1 u.$$

- or the derivatives are not all on the same term, we find back the definition of $I_{\mathbf{i}}$.

We thus develop the time derivative into:

$$\frac{d}{dt} \left(\int u_{\mathbf{i}}^2 \right) = p(p-1) \int (u_{\mathbf{i}})^2 u^{p-2} \partial_1 u - 2 \sum_{(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in I_{\mathbf{i}}} \int u_{\mathbf{i}} \prod_{k=1}^p u_{\mathbf{j}_k}. \quad (3.41)$$

To obtain the estimate (3.40), we replace in (3.41) u by $v + R$, we develop, and then estimate each term. By developing, the $(p+1)$ -linear forms are applied l times on v and $p+1-l$ times on R . We decompose the different cases.

First case : $l = 0$. We obtain the terms:

$$p(p-1) \int (R_{\mathbf{i}})^2 R^{p-2} \partial_1 R - 2 \sum_{(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in I_{\mathbf{i}}} \int R_{\mathbf{i}} \prod_{k=1}^p R_{\mathbf{j}_k}.$$

The number of derivatives is odd, then by parity of each soliton, this $(p+1)$ -linear form applied to the same soliton $(R^k, \dots, R^k)$ is null. Only remains the interaction between the different solitons. We thus get by (3.6):

$$\left| p(p-1) \int (R_{\mathbf{i}}(t))^2 R^{p-2}(t) \partial_1 R(t) - 2 \sum_{(\mathbf{j}_1, \dots, \mathbf{j}_p) \in I_{\mathbf{i}}} \int R_{\mathbf{i}}(t) \prod_{k=1}^p R_{\mathbf{j}_k}(t) \right| \leqslant C e^{-\frac{1}{2}\sigma_0 \sqrt{\sigma_0} t}.$$

Second case : $l = 1$. In that case, it means that v appears only once in the expression (3.41), with a certain number of derivatives. By integration by parts, all the derivatives

can be put on the other terms, and those terms are finally bounded by a Cauchy-Schwarz inequality by $C\|v(t)\|_{L^2}$.

Third case : $l = 2$. We need to identify how many derivatives the terms v possesses. In both v have exactly s derivatives, we find the terms in (3.40) bilinear in v . Observe that the sum is made on $\tilde{I}_i$. Those terms will need the monotonicity argument, developed in the previous subsection, and applied in the next.

The second possibility is that the two errors v do not possess s derivatives. By a Cauchy-Schwarz inequality, it implies that there are bounded by $C\|v\|_{H^s}\|v\|_{H^{s-1}}$, or more generally by:

$$C\|v\|_{\dot{H}^s}^{2-\frac{1}{s}}\|v\|_{H^1}^{\frac{1}{s}} + C\|v\|_{H^1}^2.$$

Fourth case : $l = 3$ or $l = 4$. First for $l = 3$, let focus on the number of derivatives on the three v . In the worst case, one has s derivatives, and the two others have s and 1, or $s - 1$ and 2 derivatives. We obtain, with $|\mathbf{j}_1| = s$, and $|\mathbf{j}_2| = 1$, and by the embedding $H^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\left| \int v_i v_{\mathbf{j}_1} v_{\mathbf{j}_2} R^{p-2} \right| \leq C\|v\|_{\dot{H}^s}^2 \|v_{\mathbf{j}_1}\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{\dot{H}^s}^2 \|v\|_{H^3}.$$

If we consider $|\mathbf{j}_1| = s - 1$, and $|\mathbf{j}_2| = 2$:

$$\begin{aligned} \left| \int v_i v_{\mathbf{j}_1} v_{\mathbf{j}_2} R^{p-2} \right| &\leq C\|v\|_{\dot{H}^s} \|v\|_{\dot{H}^{s-1}} \|v_{\mathbf{j}_2}\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{\dot{H}^s} \|v\|_{\dot{H}^{s-1}} \|v\|_{H^4} \\ C &\leq \|v\|_{\dot{H}^s} (\|v\|_{\dot{H}^s} \|v\|_{H^3} + \|v\|_{H^1}^2). \end{aligned}$$

The other terms with $l = 3$ have a lower number of derivatives, and thus are easier to deal with.

Now for $l = 4$, this situation is possible if $p = 3$, and the bound is similar to $l = 3$ with $\dot{H}^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Since $p \leq 3$, there is no other case for l . □

Remark 38. Notice that in the case $l = 3$, with $\mathbf{j}_1 = s - 1$ and $\mathbf{j}_2 = 2$, the bound on $s \geq s_0 = 4$ is necessary in order that the argument works.

3.3.3 H^4 and H^s bounds of the errors

Now we establish a bound of the $\dot{H}^s$ -norm for $s \geq 4$. Recall that the error $v(t) = (u - R)(t)$ (equal to 0 at time S_n), has a nice H^1 -norm on $[T_0, S_n]$ with a bound given in the previous section:

$$\forall t \in [T_0, S_n], \quad \|v(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\delta_1 t}. \quad (3.42)$$

Let us continue the discussion of the beginning of this section, before a rigorous explanation. By the previous computation, we obtain that, for time t when the solution u

exists:

$$\left| \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 - \|v(S_n)\|_{\dot{H}^s}^2 \right| \leq C_s \left(\|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 + \int_t^{S_n} G_s(t') dt' + O(l.o.t) \right).$$

$G_s(t')$ contains two main terms which lead the exponential decay.

First, $G_s(t')$ contains bilinear terms in v of the form $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{2-\frac{1}{s}} \|v(t)\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{s}}$. If we consider only the bilinear terms, the adequate power closes the bootstrap argument, and we obtain a bound $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \leq A_s e^{-\delta_s t}$, on the time interval $[T_0, S_n]$, with a constant A_s growing exponentially with s .

Second, $G_s(t')$ contains trilinear terms in v , on the form $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t)\|_{\dot{H}^3}$. If we consider the bound as $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^3$, the previous computation with the bilinear terms still holds, but on a time interval $[T_s, S_n]$, with no way to complete before T_s to a time independent of s : a bootstrap type argument gives the bound $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \leq A_s e^{-\delta_s t}$, on a time interval $[T_s, S_n]$. The trilinear terms are the source of the dependance of T on s . We require a uniform time T on which we obtain the exponential decay of all H^s -norms. The procedure needs to be accurate: we first deal with the H^4 -norm, and obtain the adequate decay on $[T_4, S_n]$. We thus bound the trilinear term by $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 A_4 e^{-\delta_4 t}$. We define for each s larger than 5, a time T_s on which the bound of the trilinear terms is lower than the bound of the bilinear terms. We use a bootstrap type argument on $[T_s, S_n]$ with an estimate on the time $T_s \geq T_4$. On the interval $[T_4, T_s]$, we bound the trilinear term by $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 A_4 e^{-\delta_4 T_4}$, and then complete by a bootstrap type argument and compactness. This procedure influences the constant A_s , but the exponential decay with the same coefficient δ_4 holds on $[T_4, S_n]$.

Let us now detail the computation to prove the proposition 34.

H^4 -norm

Let $s = 4$. We prove the following bootstrap. There exist constants A_4 , $\delta_4 := \frac{\delta_1}{2}$ and a time $T_4 \geq T_0$ such that the following bootstrap holds. Let $t^* \in [T_4, S_n]$. If

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \|v(t)\|_{\dot{H}^4} \leq A_4 e^{-\delta_4 t}, \quad (3.43)$$

then

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \|v(t)\|_{\dot{H}^4} \leq \frac{1}{2} A_4 e^{-\delta_4 t}. \quad (3.44)$$

If this bootstrap is true, because $\|v(S_n)\|_{\dot{H}^4} = 0$, it immediately proves the proposition 34 for $s = 4$.

Let assume the bootstrap assumption (3.43) with constants A_4 , T_4 to define later. With $|\mathbf{i}| = 4$, the estimate (3.40) with the help of (3.35) can now be integrated into:

$$\left| \int u_{\mathbf{i}}^2(S_n) - \int u_{\mathbf{i}}^2(t) \right| \leq C_4 \left(\|v(t)\|_{\dot{H}^3}^2 + \int_t^{S_n} G_4(t') dt' \right).$$

We obtain a bound on the error:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\mathbf{i}|=4} \int v_{\mathbf{i}}^2(t) &= \sum_{|\mathbf{i}|=4} \int (u - R)_{\mathbf{i}}^2(t) - (u - R)_{\mathbf{i}}^2(S_n) \\
&= \sum_{|\mathbf{i}|=4} \left(\int u_{\mathbf{i}}^2(t) - \int u_{\mathbf{i}}^2(S_n) \right) + 2(-1)^{1+4} \sum_{|\mathbf{i}|=4} \left(\int u(t) R_{\mathbf{ii}}(t) - \int u(S_n) R_{\mathbf{ii}}(S_n) \right) \\
&\quad + \sum_{|\mathbf{i}|=4} \left(\int R_{\mathbf{i}}(t) R_{\mathbf{i}}(t) - \int R_{\mathbf{i}}(S_n) R_{\mathbf{i}}(S_n) \right) \\
&\lesssim \sum_{|\mathbf{i}|=4} \left| \int u_{\mathbf{i}}^2(t) - u_{\mathbf{i}}^2(S_n) \right| + \|u(t) - R(t)\|_{L^2} + \|u(S_n) - R(S_n)\|_{L^2} + e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} \\
&\lesssim \|v(t)\|_{\dot{H}^3}^2 + \int_t^{S_n} G_4(t') dt' + \|v(t)\|_{L^2} + e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} \\
&\leq C_{\sigma_0, A_1, \delta_1, \delta_4} \left(e^{-\delta_1 t} + (A_4 e^{-\delta_4 t})^{2-\frac{1}{4}} (A_1 e^{-\delta_1 t})^{\frac{1}{4}} + (A_4 e^{-\delta_4 t})^3 (1 + A_1 e^{-\delta_1 t})^{p-2} \right). \tag{3.45}
\end{aligned}$$

This estimate is sufficient to conclude. In fact, by taking $\delta_4 := \frac{\delta_1}{2}$, we choose A_4 and T_4 large enough such that:

$$C_{\sigma_0, A_1, \delta_1} \left(e^{-\delta_1 t} + (A_4 e^{-\delta_4 t})^{2-\frac{1}{4}} (A_1 e^{-\delta_1 t})^{\frac{1}{4}} + (A_4 e^{-\delta_4 t})^3 (1 + A_1 e^{-\delta_1 t})^{p-2} \right) \leq \frac{A_4^2}{2^2} e^{-2\delta_4 T_4}.$$

This gives the bootstrap conclusion (3.44).

We now fixed T_4 , and $\delta_4 = \frac{\delta_1}{2}$.

H^s -norm for $s \geq 5$

As pointed out before, the arguments for $s = 4$ almost hold to prove (3.27) for $s \geq 5$. However, the bound holds until a time T_s , and the exponential decay is not uniform on a time interval. We thus separate the interval into two pieces, and prove the following bootstrap. There exists a constant B_s , such that the following holds. Let the time $T_s := \max\left(T_4, \frac{1}{\delta_4} \ln(A_4 B_s^{\frac{1}{s}})\right)$, and $t^* \in [T_s, S_n]$. If

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \|v(t)\|_{\dot{H}^s} \leq B_s A_4 e^{-\delta_4 t}, \tag{3.46}$$

then

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \|v(t)\|_{\dot{H}^s} \leq \frac{1}{2} B_s A_4 e^{-\delta_4 t}. \tag{3.47}$$

Let us suppose that this bootstrap holds on $[T_s, S_n]$. We obtain the exponential decay on $[T_s, S_n]$. A bootstrap type argument with $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t)\|_{H^3} \leq \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2 A_4 e^{-\delta_4 T_4}$, shows that $\|v(t)\|_{\dot{H}^s}^2$ is bounded on $[T_4, T_s]$ by a certain constant $\tilde{B}_s$. Gathering those two results, we obtain the exponential decay of $\|v(t)\|_{H^s}$ on $[T_4, S_n]$, and concludes the proof of proposition 34.

It remains, assuming (3.46), to deduce (3.47). The proof focuses on the case $p = 2$, the same holds for $p = 3$. By the same computations made in (3.45), the expression (3.33)

of G_s , the bound (3.46) we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{|\mathbf{i}|=s} \int v_{\mathbf{i}}^2(t) &\leq C_s \left(e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} + \|v(t)\|_{L^2} + \|v(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}^2 + \int_t^{S_n} G_s(t') dt' \right) \\ &\leq C_s \left(e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} + \|v(t)\|_{L^2} + \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{2-\frac{2}{s}} \|v(t)\|_{\dot{H}^4}^{\frac{2}{s}} + \int_t^{S_n} e^{-\delta_1 t'} + \right. \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\left. \|v(t)\|_{\dot{H}^s}^{2-\frac{1}{s}} \|v(t')\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{s}} + \|v(t')\|_{\dot{H}^s}^2 \|v(t')\|_{\dot{H}^4} dt' \right). \quad (3.49)$$

By the special choice of T_s , the bound on the last trilinear term in the integral is bounded by the bound of the bilinear term:

$$\begin{aligned} (B_s A_4 e^{-\delta t})^2 A_4 e^{-\delta_4 t} &\leq (B_s A_4 e^{-\delta t})^{2-\frac{1}{s}} (A_4 e^{-\delta_4 t})^{\frac{1}{s}} \Leftrightarrow (B_s)^{\frac{1}{s}} A_4 e^{-\delta_4 t} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow t \geq T_s \geq \frac{1}{\delta_4} \ln(A_4 B_s^{\frac{1}{s}}). \end{aligned}$$

We thus obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{|\mathbf{i}|=s} \int v_{\mathbf{i}}^2(t) &\leq C_s \left(e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} + A_1 e^{-\delta_1 t} + B_s^{2-\frac{2}{s}} A_4^2 e^{-2\delta_4 t} + \int_t^{S_n} e^{-\delta_1 t'} + B_s^{2-\frac{1}{s}} A_4^2 e^{-2\delta_4 t'} dt' \right) \\ &\leq C_s \left(\left(1 + \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}}\right) e^{-\frac{\sigma_0}{2}\sqrt{\sigma_0}t} + \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) e^{-\delta_1 t} + \left(1 + \frac{1}{2\delta_4}\right) B_s^{2-\frac{1}{s}} A_4^2 e^{-2\delta_4 t} \right). \end{aligned}$$

By choosing any B_s satisfying:

$$C_s \left(\frac{1}{A_4^2} \left(1 + \frac{2}{\sigma_0 \sqrt{\sigma_0}} + \frac{1}{\delta_1}\right) + \left(1 + \frac{1}{2\delta_4}\right) B_s^{2-\frac{1}{s}} \right) \leq \frac{1}{2} B_s^2,$$

the conclusion of the bootstrap estimate (3.47) is then proved.

Remark 39. A dependency to underline is that $B_s \geq \left(\frac{2C_s}{\delta_4}\right)^s$, with the constant C_s depending on the number of combination of s derivatives: $C_s \sim d^s$. In fact, the optimal constant is expected to be K^s , with K large enough : it is not reach here.

Remark 40. One can give an alternative proof of the proposition (34) for (ZK_{2d}) , using the polynomial growth of Sobolev norms shown in Côte-Valet [25]. From ther we get the polynomial growth of the Sobolev norms of the function u . To get the exponential decay of the H^s -norm of the error, it suffices to interpolate the polynomial growth of the H^{s+1} -norm of the error with the exponential decay of the H^1 -norm, proved in the previous section. However, those arguments need to be adapted for (mZK) and (ZK_{3d}) .

3.4 End of the construction of a smooth multi-soliton

We now complete the existence part of Theorem 24. At this point, we dispose of a sequence of solutions $(u_n)_n$ of (ZK) defined on $[T_0, S_n]$ for some fixed $T_0 \in \mathbb{R}$ and $S_n \rightarrow +\infty$, and such that for all $s \geq 0$, there exist $A_s > 0$ such that for all $n \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [T_0, S_n], \quad \|u_n(t) - R(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\delta_1 t/2}. \quad (3.50)$$

Consider the sequence $(u_n(T_0))_n$: it is bounded in each H^s , and so, up to a subsequence that we still denote $(u_n(T_0))_n$, it admits a weak limit U_0 which belongs to all H^s for $s \geq 0$.

Let us show that the convergence is actually strong.

Lemma 41. $(u_n(T_0))_n \rightarrow U_0$ strongly in L^2 , and more generally, H^s , for all $s \geq 0$.

Proof. It suffices to prove:

$$\forall \epsilon > 0, \exists K_\epsilon > 0, \forall n, \quad \int_{|x| > K_\epsilon} |u_n(T_0)|^2 < \epsilon. \quad (3.51)$$

The bound (3.51) comes from the estimate (3.4). Let $t^* > T_0$ such that $A_1 e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{8} t^*} \leq \frac{\epsilon}{2}$. The aim is to control the evolution of the mass outside a compact set. Let a function $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^+)$, null on $[0, 1]$ and equal to 1 on $[2, \infty]$. With $\gamma > 0$ and $K_\epsilon > 0$ to define later, the evolution of the mass outside a compact set gives:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \int u_n^2(t, \mathbf{x}) g\left(\frac{|\mathbf{x}| - K_\epsilon}{\gamma}\right) \right| &= \left| - \int d_1 g |\nabla u_n|^2 - 2 \int d_1 g (\partial_1 u_n)^2 + \int d_1^3 g u_n^2 + \frac{4}{3} \int d_1 g u_n^3 \right| \\ &\leq \frac{C}{\gamma} \|u_n\|_{H^1}^2 (1 + \|u_n\|_{H^2}), \end{aligned}$$

where the last term comes from Sobolev embedding. By (3.4), the H^1 -norm is uniformly bounded by a constant C , so it suffices to take K_ϵ and γ large enough to obtain:

$$\left| \frac{d}{dt} \int u_n^2(t, x) g\left(\frac{|\mathbf{x}| - K_\epsilon}{\gamma}\right) \right| \leq \frac{\epsilon}{2(t^* - T_0)}.$$

Choose γ larger to obtain $\|R(t^*) \mathbf{1}_{|x| > K+\gamma}\|_{H^1}^2 \leq \frac{\epsilon}{4}$, and integrate from T_0 to t^* of the previous equality imply:

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{x}| \geq 2(K_\epsilon + \gamma)} u_n(T_0)^2 &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{|\mathbf{x}| \geq K_\epsilon + \gamma} u_n(t^*)^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \int_{|\mathbf{x}| \geq K_\epsilon + \gamma} R(t^*)^2 + 2\|(u_n - R)(t^*)\|_{H^1}^2 \leq \epsilon, \end{aligned}$$

and concludes the proof of (3.51), and the strong convergence of $(u_n(T_0))_k \rightarrow U_0$ in L^2 . Given $s \geq 0$, by interpolation with H^{s+1} (where weak convergence hold), we conclude that $(u_n(T_0))_n \rightarrow U_0$ strongly in H^s . $\square$

Now consider the solution R^* of (ZK) with initial data $R^*(T_0) := U_0$, defined on the maximal interval to the right $[T_0, T_+)$.

Let $s > 1/4$ and $t \in [T_0, T_+)$. As $u_n(T_0) \rightarrow R^*(T_0)$ in H^s , due to the continuity of the flow in H^s (see Theorem 45 in Appendix B, where the local well posedness theory is recalled), we obtain that $u_n(t) \rightarrow R^*(t)$ in H^s . In particular, taking the limit in n in (3.50) we obtain

$$\|R^*(t) - R(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\delta_1 t/2}. \quad (3.52)$$

By inspection, $\|R(t)\|_{H^s}$ is bounded for $t \in \mathbb{R}$, so that $\|R^*(t)\|_{H^s}$ is bounded on $[T_0, T_+)$. Due to the blow up criterion in Theorem 45, we infer that $T_+ = +\infty$ (this part of the

argument is only relevant for (mZK)). The bound (3.52) is therefore valid for all $t \geq T_0$: this means that R^* is the desired multi-soliton associated to R .

Finally, observe that for all $t \in T_0$, R^* is smooth (it lies in all H^s , $s \geq 0$), so that, using the equation (ZK), we see that $\partial_t R^*$ is smooth too, and by a straightforward induction, $R^* \in C^\infty([T_0, +\infty) \times \mathbb{R}^d)$.

This concludes the existence part of Theorem 24.

Now we establish a corollary on any multi-soliton. If u is a multi-soliton in the sense of the definition (3.3), then the convergence of u to the sum of the K decoupled soliton is exponential.

Corollary 42. *Let $u \in \mathcal{C}([T, +\infty), H^1(\mathbb{R}^d))$ be a multi-soliton solution of (ZK) in the sense of definition (3.3), and denote R the associated profile. Then the convergence of u to R occurs at an exponential rate: there exist $A_1 > 0$, and $\gamma_1 > 0$ such that:*

$$\forall t \geq T, \quad \|u(t) - R(t)\|_{H^1} \leq A_1 e^{-\gamma_1 t}.$$

Proof. It follows the ideas of Martel [72, Proposition 4]. Proving this lemma is equivalent to proving Proposition 25, except that we consider u instead of u_n . Let us consider a sequence of time $S_n \rightarrow \infty$, and the solutions with the initial conditions $u_n(S_n) = u(S_n)$ on the interval $[T, S_n]$ (by uniqueness, for $t \in [T, S_n]$, $u(t) = u_n(t)$). By assumption, the sequence $\|u_n(S_n) - R(S_n)\|_{H^1}$ goes to 0. If we can prove the proposition 25 for this new $(u_n)_n$, it concludes the proof of the corollary.

To prove (3.5) for the new u_n , we mimic the proof that we already done. The difference is then only in the initial condition. The parameters L , α , T_1 and A_1 are to be found during the proof. The lemma of modulation applies similarly. The lemmas on the evolution of the masses and energies are identical : in fact, they concern the time derivative of these quantities, so it does not see the change of initial condition. The formula (3.23) see in fact the change of initial conditions $E^k(S_n)$ and $M^k(S_n)$. However, the arguments of monotonicity apply similarly, and allow to get rid of those terms. The argument of coercivity is then exactly the same. $\square$

Remark 43. *At this point, nothing is known about the convergence in H^s of $u(t) - R(t)$, since we ignore if the initial condition $u(t)$ belongs H^s for $s > 1$. In fact, by uniqueness, this will be the case!*

3.5 Uniqueness

The goal of this section is to prove uniqueness in the following sense. If two solutions behave both as $t \rightarrow +\infty$ to the same multisoliton, then they are equal. For now, we denote $R^*(t)$ the solution established in the previous section, on a time interval $[T_0, \infty)$. This is a multisoliton close to $R(t)$.

Proposition 44. *Let $u \in \mathcal{C}([T_0, \infty), H^1)$ be a solution of (ZK), and satisfying:*

$$\|u(t) - R(t)\|_{H^1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Then $u \equiv R^*$.

The proof is inspired by the techniques used by Martel on the subcritical and critical (gKdV) equations in [72], Proposition 6.

Proof. First, we can notice that it is equivalent to consider that $u - R^*$ or $u - R$ goes to 0 at infinity. For now, we will use the following notations:

$$u(t) = z(t) + R^*(t).$$

For now, we prove the uniqueness for (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) . The critical case (mZK) is dealt with at the end.

The new function z satisfies the equation:

$$z_t + \partial_1 (\Delta z + z^2 + 2zR^*) = 0.$$

To follow the scheme on the existence, we decompose the error along the different directions, which are the derivatives along an l -axis of the k^{th} soliton:

$$\tilde{z}(t) := z(t) - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^K a^{ik} R_i^k, \text{ with } a^{ik}(t) := \frac{1}{\int (R_i^k(t))^2 dx} \int R_i^k(t) z(t) dx.$$

We obtain the following estimates, for some constants C_1 and C_2 :

$$\forall t > T_0, \quad C_1 \|z(t)\|_{H^1} \leq \|\tilde{z}(t)\|_{H^1} + \sum_{i,k} |a^{ik}(t)| \leq C_2 \|z(t)\|_{H^1}.$$

We need to show that:

$$\|\tilde{z}(t)\|_{H^1} + \sum_{i,k} |a^{ik}(t)| \leq C e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' \geq t} \|z(t')\|_{H^1}. \quad (3.53)$$

If we admit this inequality, we conclude that for t large enough, $\|z(t)\|_{H^1} = 0$, and so $u \equiv R^*$. Let show this inequality in different steps.

Step 1. Estimate on $\tilde{z}(t)$.

We use the decreasing function $h(t, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^K \frac{1}{c^k} \phi^k(\mathbf{x})$. Let recall that m^k are defined in (3.10). h is close to $\frac{1}{c^k}$ where the j^{th} soliton is localised:

$$\begin{aligned} \left\| \left(h(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c_1} \right) \mathbf{1}_{[-\infty, \frac{1}{2}(m^1(t) + c^1 t + y_1^1)]} \right\|_{L^\infty} &\leq C e^{-\gamma_1 t}, \\ \forall 2 \leq k \leq K, \quad \left\| \left(h(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^k} \right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}(m^{k-1}(t) + c^k t + y_1^k), \frac{1}{2}(m^k(t) + c^k t + y_1^k)]} \right\|_{L^\infty} &\leq C e^{-\gamma_1 t}, \\ \left\| \left(h(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^K} \right) \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}(m^{K-1}(t) + c^K t + y_1^K), +\infty]} \right\|_{L^\infty} &\leq C e^{-\gamma_1 t}. \end{aligned}$$

In the other regions where the variations of h are higher, the solitons collapse, and we

will not see those variations. We claim the estimate, for a constant $\lambda_2 > 0$:

$$\int (|\nabla \tilde{z}|^2 - 2R\tilde{z}^2) h + \tilde{z}^2 \geq \lambda_2 \|\tilde{z}\|_{H^1}^2 - \frac{1}{\lambda_2} \sum_k \left(\left| \int \tilde{z} R^k \right|^2 + \sum_i \left| \int \tilde{z} R_i^k \right|^2 \right). \quad (3.54)$$

The proof of this estimate of coercivity is close to the one obtained for the existence, so we will skip it.

We already know that $|\int \tilde{z} R_i^k| \leq C e^{-\gamma_1 t}$ due to the definition of a^{ik} and the low interaction of the different solitons. We have to handle the other term. In fact, because of the weak interaction between solitons:

$$\left| \sum_{i,k} a^{ik}(t) \int R_i^j R^k \right| \leq C e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' > t} \|z(t')\|_{H^1},$$

we obtain $|\int \tilde{z} R^k - \int z R^k| \leq C e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' > t} \|z(t')\|_{H^1}$ which allows to focus on $\int z R^k$.

Step 1.1 Control of $\int z R^k$. By the equation satisfied by a soliton, we have $0 = -c^k R_1^k + \Delta R_1^k + 2R^k R_1^k$, and it implies, used corollary 42:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{d}{dt} \int R^k z \right| \\ &= \left| \int R_1^k (-c^k z + \Delta z + (z + R^*)^2 - (R^*)^2) \right| \\ &\leq \left| \int R_1^k ((z + R^*)^2 - R^{*2} - 2R^* z) \right| + \left| \int R_1^k (2R^* - 2R) z \right| + \left| \int R_1^k (2R - 2R^k) z \right| \\ &\quad + \left| \int (2R^k R_1^k - c^k R_1^k + \Delta R_1^k) z \right| \\ &\leq C e^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

In the previous estimate, we notice that we earn an error of z because we made the difference between two solutions, instead of the difference of a solution with R : see the comparison with (3.26). Then integrating the previous estimate from t to $+\infty$:

$$\left| \int R^k z \right| \leq C e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' > t} \|z(t')\|_{H^1}.$$

We can now modify (3.54) into:

$$\lambda_2 \|\tilde{z}(t)\|_{H^1}^2 \leq C e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' > t} \|z(t')\|_{H^1}^2 + \int (|\nabla \tilde{z}(t)|^2 - 2R(t)\tilde{z}^2(t)) h(t) + \tilde{z}(t)^2. \quad (3.55)$$

Step 1.2 Control of the operator L_h . Let the operator L_h defined by $L_h(z) :=$

$(-\Delta z - 2Rz)h + z$. An immediate computation gives us:

$$\begin{aligned} & \int (|\nabla \tilde{z}|^2 - 2R\tilde{z}^2) h + \tilde{z} \\ &= \int (|\nabla z|^2 - 2Rz) h + z^2 - \frac{1}{2} \int z^2 \Delta h + \frac{1}{2} \int \tilde{z}^2 \Delta h - \sum_{ik} a^{ik} \int L_h z R_i^k \\ & \quad - \sum_{ik} a^{ik} \int L_h R_i^k z + \sum_{i_1, i_2, k_1, k_2} a^{i_1 k_1} a^{i_2 k_2} \int L_h R_{i_1}^{k_1} R_{i_2}^{k_2}. \end{aligned}$$

The first term will be dealt with in the next step. We need to watch how the operator L_h acts on the i^{th} -derivative of the k^{th} soliton.

$$L_h R_i^j = (-\Delta R_i^k - 2R R_i^k) \left(h - \frac{1}{c^k} \right) + \frac{1}{c^k} (-\Delta R_i^k - 2R R_i^k + c^k R_i^k)$$

implies the following control:

$$|L_h R_i^k| \leq C e^{-\gamma_1 t} e^{-\frac{\sigma_0}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}^k - c^k t \mathbf{e}_1|}.$$

Furthermore, we can control the term which enables the operator L_h to be self-adjoint:

$$\int L_h z R_i^k = \int z L_h R_i^k - \int z (\Delta h R_i^k + 2\nabla h \cdot \nabla R_i^k),$$

which gives, by the localization of the derivatives of h :

$$\left| \int L_h z R_i^k \right| + \left| \int L_h R_i^k z \right| \leq C e^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{L^2}.$$

By a Cauchy-Schwarz inequality on the term a^{ij} , we obtain:

$$\int (|\nabla \tilde{z}|^2 - 2R\tilde{z}^2) h + \tilde{z}^2 \leq C e^{-\gamma_1 t} \|z\|_{L^2}^2 + \int (|\nabla z|^2 - 2Rz^2) h + z^2. \quad (3.56)$$

Step 1.3 Control of $\int (|\nabla z|^2 - 2Rz^2) h + z^2$. In order to study the previous quantity, we express the operator as a linearisation by the function:

$$F(t, z) := 2 \left(\frac{(z(t) + R^*(t))^3}{3} - \frac{R^*(t)^3}{3} - R^{*2}(t) z(t) \right).$$

We obtain, with the embedding $H^{\frac{d}{2}+} \hookrightarrow L^\infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int F(t, z) - 2Rz^2 \right| &\leq \left| \int F(t, z) - 2R^* z^2 \right| + \left| \int 2R^* z^2 - 2Rz^2 \right| \\ &\leq \|(R^* - R)(t)\|_{L^\infty} \int z(t)^2 \leq C e^{-\gamma_1 t} \|z\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

For now, we study the functional:

$$H(t) := \int (|\nabla z(t)|^2 - F(t, z)) h(t) + z^2(t),$$

and claim that

$$\exists K > 0, \forall t > T_0, \quad H(t) \leq K e^{-\gamma_1 t} \sup_{t' > t} \|z(t')\|_{H^1}^2. \quad (3.57)$$

It suffices to study the time variation of H , and find a lower bound by monotonicity. A computation gives us:

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int (|\nabla z|^2 - F(t, z)) \frac{dh}{dt} + 2 \int \partial_1 \Delta z \nabla z \cdot \nabla h \quad (3.58)$$

$$+ 2 \int \partial_1 ((z + R^*)^2 - R^{*2}) \nabla z \cdot \nabla h \quad (3.59)$$

$$- \int (\Delta z + (z + R^*)^2 - R^{*2})^2 \partial_1 h \quad (3.60)$$

$$- 2 \int \partial_1 (\Delta z + (z + R^*)^2 - R^{*2}) z - 2 \int R^*_t ((z + R^*)^2 - R^{*2} - 2R^* z) h \quad (3.61)$$

To find a lower bound of $\frac{dH}{dt}$, we notice first that the term (3.60) is positive, because h is decreasing in the first direction. We can now deal with (3.58):

$$\begin{aligned} (3.58) &= \int (|\nabla z|^2 - F(t, z)) \frac{dh}{dt} - 2 \int (|\nabla \partial_1 z|^2) \partial_1 h + \int (\partial_1 z)^2 \partial_1^3 h \\ &\geq \int |\nabla z|^2 \frac{dh}{dt} + \int (\partial_1 z)^2 \partial_1^3 h - \int |F(t, z)| \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

This is where the choice of the function h is crucial. Because of the estimate on ψ , we have $\frac{dh}{dt} \geq \frac{1}{4} |\partial_1^3 h|$, and the sum of the two first terms is non-negative. We obtain, with $\|h_1(t)R(t)\|_{L^\infty} \leq C e^{-\gamma_1 t}$, the definition of z and corollary (42):

$$(3.58) \geq -C \int (|z|^3(t) + |R^*(t) - R(t)|z^2(t) + |R(t)|z^2(t)) \frac{dh}{dt} \geq -C e^{-\gamma_1 t}. \quad (3.62)$$

We now develop (3.59):

$$(3.59) = 2 \int z_1^2 z h_1 + 2 \int z_1^2 R^* h_1 - \int z^2 h_{11},$$

so the estimate is straightforward, with $\|u - R\|_{L^\infty} \leq \|R^* - R\|_{H^d} \leq A_d e^{-\delta t}$, and the embedding $H^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty$, or $\|\partial_1(R^* - R)\|_{L^\infty} \leq A_{2+1} e^{-\delta t}$:

$$\begin{aligned} |(3.59)| &\leq C e^{-\gamma_1 t} \|z_1\|_{L^2}^2 + 2 \int z_1^2 |R h_1| + 2 \int z_1^2 |R^* - R| |h_1| - \int z^2 |R_1^* h_1 + R^* h_{11}| \\ &\leq C e^{-\gamma_1 t} \|z\|_{H^1}^2, \end{aligned} \quad (3.63)$$

with C depending on A_1, A_2, A_3 and γ_1 lower than δ .

It remains the terms of (3.61). We notice that $\int \partial_1 \Delta z z = \int \partial_1 (z^3) = 0$. The remaining terms give us:

$$\begin{aligned} |(3.61)| &= \left| 2 \int (\partial_1 R^* - R_t^* h) z^2 \right| \leq 2 \|\partial_1 R^* - R_t^* h\|_{L^\infty} \|z(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq 2 \left(\|\partial_1 (\Delta R^* + R^{*2} - \Delta R - R^2) h\|_{L^\infty} + \|\partial_1 (\Delta R + R^2) h - R_1\|_{L^\infty} \right) \|z\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \|\partial_1 (R - R^*)\|_{L^\infty} \|z\|_{L^2}^2 \\ &\leq C e^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (3.65)$$

with C depending on A_{3+3} and $0 < \gamma_1 < \delta$ due to the bound by the H^{2+3} -norm of the error. Notice that for this step it was necessary to get the H^5 -norm of the error.

By summing up (3.62), (3.63) and (3.65), we obtain a lower bound on the time derivative of H :

$$\frac{dH}{dt}(t) \geq C e^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{H^1}.$$

An integration from t to $+\infty$ gives us (3.57).

End of Step 1

By summing up the estimates (3.54), (3.55), (3.56) and (3.57), we obtain the desired estimate (3.53) for the term $\|\tilde{z}(t)\|_{H^1}$.

Step 2. Estimate on the $a^{ik}(t)$.

Let derive $\tilde{z}$ along the time.

$$\frac{d}{dt}(\tilde{z}(t)) = \frac{dz}{dt}(t) - \sum_{ik} \frac{da^{ik}}{dt}(t) R_i^k(t) + \sum_{ik} a^{ik}(t) R_{i1}^k(t) c^k.$$

We can then express the linearised part of the equation of the error around R^* :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{z} + (\Delta \tilde{z} + 2R^* \tilde{z})_1 &= - \sum_{ik} \frac{da^{ik}}{dt} R_i^k + \sum_{ik} a^{ik} (-\partial_1 \Delta R^k + R^k c^k - 2\partial_1 (2R^* R^k))_i \\ &\quad + \partial_1 (2R^* z - (R^* + z)^2 + R^{*2}). \end{aligned}$$

The scalar product of this expression with R_{i1}^{k1} gives us, by reminding that $0 = \frac{d}{dt} \int \tilde{z} R_i^k = \int \frac{d\tilde{z}}{dt} R_i^k - c^k \int \tilde{z} R_{i1}^k$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{da^{i_1 k_1}}{dt} \int (R_{i_1}^{k_1})^2 + \sum_{(i,k) \neq (i_1, k_1)} \frac{da^{i,k}}{dt} \int R_{i_1}^{k_1} R_i^k \right| &\lesssim \sum_{ik} |a^{ik}| e^{-\gamma_1 t} + \|\tilde{z}(t)\|_{H^1} + \|z(t)\|_{H^1}^2 \\ &\leq C e^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{H^1} \end{aligned}$$

where in the last inequality we used the step 1. One can notice that $\int R_{i_1}^{k_1} R_i^k$ is small while $(i, k) \neq (i_1, k_1)$. In particular, we find as in the modulation a matrix with a dominant

diagonal, which implies that

$$\forall(i, k), \quad \left| \frac{da^{ik}}{dt} \right| \leq Ce^{-\gamma_1 t} \|z(t)\|_{H^1}.$$

An integration from t to ∞ gives us the estimate (3.53) for the coefficients $a^{ik}(t)$, and finishes the proof.

The critical case.

The estimates for (mZK) are similar, except that we add orthogonality conditions with respect to Z^k :

$$\tilde{z}(t) := z(t) - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^K a^{ik} R_i^k - \sum_{k=1}^K b^k Z^k,$$

with

$$a^{ik}(t) := \frac{1}{\int (R_i^k(t))^2 dx} \int R_i^k(t) z(t) dx \text{ and } b^k(t) := \frac{1}{\int Z^k(t)^2 dx} \int Z^k(t) z(t) dx.$$

With the estimate (3.25) on $\tilde{z}(t)$, we obtain the lower bound asked in (3.53). The other arguments apply similarly. Once again, we use repetitively the exponential decay of R_i^k and of Z^k . $\square$

3.6 Appendix A : Coercivity

We recall the lemma 31 of coercivity :

Lemma. *For (ZK), there exists $C_0 > 0$, such that:*

$$C_0 \|w\|_{H^1}^2 - \frac{1}{C_0} \sum_{k=1}^K \left(\int \widetilde{R^k} w \right)^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} H_k(t).$$

Proof. Let deal first with the cases of (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}). The proof is close to the step 2 of the appendix A of [75]. We know a property close to coercivity of the operator $H_k(t)$: by the article of Weinstein, if we consider a function v with the orthogonality conditions $v \perp Q$, and $\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, $v \perp \partial_i Q$, then the following operator is coercive:

$$\exists C_1 > 0, \quad \int (\nabla v)^2 + v^2 - pQ^{p-1}v^2 \geq C_1 \|v\|_{H^1}^2. \quad (3.66)$$

We claim that in the case of the operators $(H_k(t))_k$, we obtain a similar coercivity condition. The cut-off function ϕ^k and the unsatisfied orthogonality condition $w \perp \widetilde{R^k}$ will change the previous estimate. Let the bilinear form $B_k(v, w) := \int \nabla v \cdot \nabla w + c^k v w - 2\widetilde{R^k} v w$.

By developing the expression of $H_k(t)$:

$$H_k(t) = B_k(w\sqrt{\phi^k}, w\sqrt{\phi^k}) - \frac{1}{4} \int w^2 \frac{(\partial_{x_1} \phi^k)^2}{\phi^k} - \int w \partial_1 w \partial_1 \phi^k.$$

The first term can be developed, by decomposing $w\sqrt{\phi^k}(t) := \alpha_0 \widetilde{R}^k + \sum_{i=1}^d \alpha_i \partial_i \widetilde{R}^k + w^k$, with

$$\alpha_0 := \frac{\langle w\sqrt{\phi^k}, \widetilde{R}^k \rangle}{\|Q_{c^k}\|_{L^2}^2}, \quad \alpha_i := \frac{\langle w\sqrt{\phi^k}, \partial_i \widetilde{R}^k \rangle}{\|\partial_i Q_{c^k}\|_{L^2}^2}, \quad \langle w^k, \widetilde{R}^k \rangle = \langle w^k, \partial_i \widetilde{R}^k \rangle = 0,$$

and using the Young inequality:

$$\begin{aligned} B_k(w\sqrt{\phi^k}, w\sqrt{\phi^k}) &= B_k(w^k, w^k) + \alpha_0^2 B_k(\widetilde{R}^k, \widetilde{R}^k) + 2\alpha_0 B_k(\widetilde{R}^k, w^k) \\ &\geq \frac{C_2}{2} \|w^k\|_{H^1}^2 - \frac{1}{C_2} \left(\int \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} \right)^2, \end{aligned}$$

with $C_2 > 0$ a constant small enough. Furthermore, by the norm:

$$\|w^k\|_{H^1} \geq \|w\sqrt{\phi^k}\|_{H^1} - C \sum_{i=0}^d |\alpha_i| \text{ so } \|w^k\|_{H^1}^2 \geq \frac{1}{2} \|w\sqrt{\phi^k}\|_{H^1}^2 - C \sum_{i=0}^d |\alpha_i|^2,$$

we obtain the upper bound:

$$B_k(w\sqrt{\phi^k}, w\sqrt{\phi^k}) \geq \frac{C_2}{4} \|w\sqrt{\phi^k}\|_{H^1}^2 - \frac{C}{C_2} \left(\left(\int \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} \right)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\int \partial_i \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} \right)^2 \right).$$

By the definition of ϕ^k , the derivative with respect to x_1 will make a factor $\frac{1}{L}$ appear: $|\partial_1 \phi^k| \leq \frac{1}{L} \phi^k$, see (3.9), which implies by taking L large enough depending on C_2 :

$$H_k(t) \geq \frac{C_2}{16} \int (\nabla w^2 + w^2) \phi_k - C \left(\left(\int \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} \right)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\int \partial_i \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} \right)^2 \right).$$

Let $k \in \llbracket 2, K-1 \rrbracket$, and the interval

$$J_t^k := \left[\frac{1}{2} (x_1^k - c^k t - y_1^k + m^{k-1}(t)) ; \frac{1}{2} (x_1^k - c^k t - y_1^k + m^k(t)) \right].$$

We obtain :

$$\begin{aligned} \left| \int \widetilde{R}^k w^k \sqrt{\phi^k} - \int \widetilde{R}^k w^k \right| &\lesssim \left(\int (\sqrt{\phi^k} - 1)^2 \mathbf{1}_{J_t^k} \right)^{\frac{1}{2}} \|w^k\|_{H^1} + \left(\int \widetilde{R}^k{}^2 \mathbf{1}_{J_t^k} \right)^{\frac{1}{2}} \|w^k\|_{H^1} \\ &\lesssim \sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} \|w^k\|_{H^2} + \left(e^{-\frac{\sigma_0}{2} t} + |\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k t e_1| \right) \|w^k\|_{H^1}, \end{aligned}$$

and similarly:

$$\begin{aligned} & \left| \int \widetilde{R}^k w^k (\sqrt{\phi^k} - 1) \right| + \sum_{i=1}^d \left| \int \partial_i \widetilde{R}^k w^k (\sqrt{\phi^k} - 1) \right| \\ & \leq C \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + |\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k t \mathbf{e}_1| \right) \|w^k\|_{H^1}, \end{aligned}$$

with C depending on the $(\mathbf{y}^k)_k$ and on the $(c^k)_k$. Adding the previous estimates from 1 to K with the weights $\frac{1}{(c^k)^2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} H_k(t) & \geq \frac{C_2}{16(c^K)^2} \sum_{k=1}^K \int (|\nabla w|^2 + w^2) \phi_k \\ & - \frac{C}{(c^1)^2} \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + \sum_k |\widetilde{\mathbf{x}}^k(t) - \widetilde{c}^k t \mathbf{e}_1| \right) \|w\|_{H^1}^2 \\ & - C \sum_{k=1}^K \left(\left(\int \widetilde{R}^k w^k \right)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\int \partial_i \widetilde{R}^k w^k \right)^2 \right). \end{aligned}$$

We find back the H^1 -norm of the error on the all space by summing the ϕ_k . Thus, we replace the last w^k by there expression with $w\sqrt{\phi^k}$, the weak interactions between $\widetilde{R}^k$ and $(1 - \sqrt{\phi^k})$, by the Young inequality and (3.14), we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K \frac{1}{(c^k)^2} H_k(t) & \geq \frac{C_2}{16(c^K)^2} \|w\|_{H^1}^2 - \frac{C}{(c^1)^2} \left(\sqrt{L} e^{-\frac{1}{L} \frac{\sigma_0}{4} t} + e^{-\frac{\sigma_0}{2} t} + \alpha \right) \|w\|_{H^1}^2 \\ & - C \sum_{k=1}^K \left(\left(\int \widetilde{R}^k w \right)^2 + \sum_{i=1}^d \left(\int \partial_i \widetilde{R}^k w \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

By taking L large enough depending only on C_2 , T_2 large enough depending on the different velocities, α small enough and the orthogonality conditions (3.12), there exists a constant C_0 small enough concluding the lemma for (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}) .

Let us now deal with the case of (mZK) . The result is similar, except that we asked for an other orthogonality condition (3.13), so we use an other parameter of modulation $(\widetilde{c}^k(t))_k$. Let $(\cdot, \cdot)$ denotes the L^2 -scalar product. We claim, as in [71] and [126], that

$$v \perp Q, v \perp Z \quad \Rightarrow \quad (Lv, v) \geq 0. \quad (3.68)$$

We use a result of [126] concerning the operator $\mathcal{L} := -\Delta + 1 - pQ^{p-1}$:

$$\inf_{(v, Q)=0} (\mathcal{L}v, v) = 0. \quad (3.69)$$

Let suppose by contradiction that there exists v , satisfying $v \perp Z$, such that $(\mathcal{L}v, v) < 0$. Let consider the operator $\mathcal{L}$ restricted to $\text{Span}\{Z, v\}$. By definition of Z , $(\mathcal{L}(Z), Z) = -\lambda_0$. Thus we can find $v_0 \in \text{Span}\{Z, v\}$, $v_0 \perp Q$ such that $(\mathcal{L}v_0, v_0) < 0$, which contradicts (3.69), and proves (3.68).

To obtain a similar coercivity inequality (3.66), suppose by contradiction that:

$$0 = \inf \{(\mathcal{L}v, v); \|v\|_{L^2} = 1, v \perp Z, v \perp \partial_1 Q, v \perp \partial_2 Q\}.$$

By taking a sequence in L^2 for which the infimum is attained, up to a subsequence, it converges to an element v . It satisfies the orthogonality condition (3.12) and (3.13), and by rescaling arguments as in [126], we can suppose that the norm of v is 1. The minimum is thus attained at a point $v \neq 0$, and there exists $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$ among the critical points of the Lagrange multiplier problem:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v - \beta v = \alpha_0 Z + \alpha_1 \partial_1 Q + \alpha_2 \partial_2 Q, \\ (\mathcal{L}v, v) = 0, \\ v \perp Z, \quad v \perp \partial_1 Q, \quad v \perp \partial_2 Q, \\ \|v\|_{L^2} = 1. \end{cases}$$

The scalar product with respect to v gives us $\beta = 0$, with the eigenvector Z gives $\alpha_0 = 0$ and with $\partial_i Q$ gives $\alpha_i = 0$. This contradiction leads to a positive infimum, and the existence of a positive constant C_1 satisfying (3.66).

The rest of the proof is then similar to the one of (ZK). $\square$

3.7 Appendix B : Local well posedness

Let us recall the local well posedness result that we will use.

Theorem 45 ([102], [46], [57] and [68, Theorem 1.1]). *Let $s > 1/2$. There exists a function $T : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ such that for any $u_0 \in H^s$, there exists a mild solution $u \in \mathcal{C}([-T(\|u_0\|_{H^s}), T(\|u_0\|_{H^s}), H^s)$ (to the Duhamel formulation) of (ZK), which is furthermore unique in some subspace. The maximal interval of existence $(T_-(u_0), T_+(u_0))$ is open and does not depend on $s > 1/4$, and if $T_+(u_0) < +\infty$, then $\|u(t)\|_{H^s} \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow T_+(u_0)$.*

Furthermore, the flow $u_0 \mapsto u$ is continuous in the following sense: given $u_0 \in H^s$, then for any compact interval $J \subset (T_-(u_0), T_+(u_0))$ and $E > 0$, there exists $\delta > 0$ such that if $\|v_0 - u_0\|_{H^s} \leq \delta$, then $J \subset (T_-(v_0), T_+(v_0))$ and $\sup_{t \in J} \|v(t) - u(t)\|_{H^s} \leq \delta$ (u and v are the solutions to (ZK) with initial data u_0 and v_0 respectively).

In particular, in the L^2 subcritical cases (ZK_{2d}) and (ZK_{3d}), if the initial condition is in H^1 , one has global existence: $(T_-(u_0), T_+(u_0)) = \mathbb{R}$. The blow up criterion is relevant for our purpose only for the case of (mZK) which is L^2 critical.

Chapitre 4

Interaction forte entre deux solitons

4.1 Introduction

4.1.1 Position of the problem

In this chapter, we study the generalized Zakharov-Kuznetsov equation in dimension $d = 2$, with a power $p \in (2, 3)$:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_1 (\Delta u + f(u)) = 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (\text{ZK2})$$

where ∂_1 denotes the derivative with respect to the first variable, Δ is the Laplacian, and $f(u) = |u|^{p-1}u$. The following scaling lets invariant the set of solution:

$$u \mapsto u_\lambda = \left[(t, \mathbf{x}) \mapsto \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^3 t, \lambda \mathbf{x}) \right].$$

In particular, it implies the critical scaling coefficient $s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$. In dimension $d = 2$, while $p < 3$, the previous equation is in the sub-critical case, which means that a situation of blow-up (λ going to $+\infty$) would imply a growth of the mass $\|u_\lambda(t)\|_{L^2} = \lambda^{\frac{4}{p-1}-d} \|u(t)\|_{L^2}$. No blow-up can happen in the sub-critical cases.

The goal of this part is to build the following 2-solitons. The existence and uniqueness of solitons are recalled in introduction, see theorem 1. Given a velocity $c = 1$, we want to create a 2-soliton with a sum (or difference) of two solitons, both moving at velocity c along the first axis, thus with the form Q_c . However, as explained in the previous part, if the two solitons are moving with the same velocities, the interaction is too large to be neglected on a long time behaviour. Furthermore, the interaction should rule the dynamics of the two solitons at a second order. The following scheme describes the different configurations:

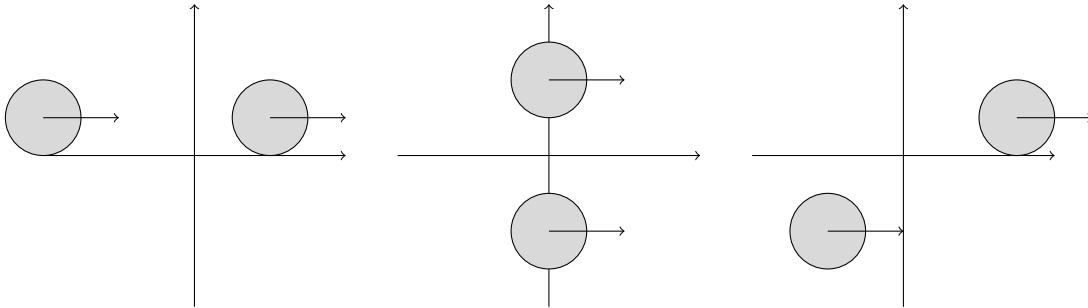


Figure 4.1: two solitons centered on the same ordinate Figure 4.2: two solitons centered on the same abscissa Figure 4.3: two solitons centered on different abscissa

Both solitons are first supposed to move at velocity $c = 1$ along the first direction x_1 . However, the interaction between the two solitons may modify their trajectory, along x_1 , as in figures 4.1 and 4.3, and along x_2 , as in figures 4.2 and 4.3. They happen along the two directions, along x_1 and along x_2 . Before going in more details of the problem we are interested in, let recall the result in dimension $d = 1$, thus for the (gKdV)-equation, of the interaction of two solitons in Nguyen ([106]) in the subcritical cases, with a power of non-linearity $2 < p < 5$. Because this problem is in dimension 1, the interaction can only

happen on the first direction. He obtained the following result : up to some assumptions, there exists a 2-solitons R^* behaving at infinity like a sum of two solitons, with a modified logarithmic velocity:

$$\|R^*(t) - Q(\cdot - (t + \ln(c_p t))) + Q(\cdot - (t - \ln(c_p t)))\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow +\infty,$$

with

$$c_p = \|Q\|_{L^2}^{-1} \sqrt{\frac{8(p-1)}{5-p}} (2p+2)^{\frac{1}{p-1}}.$$

In that case, it means that the two solitons with a different sign are repulsive, and the distance between the two solitons is increasing at a rate $2 \ln(c_p t)$.

To go back to the problem we are considering, we can expect that if the two solitons are situated on the same ordinate, see figure 4.1, then the global behaviour should be similar to the one of subcritical (gKdV) with the same logarithmic modification at the main order $2 \ln(t)$. The change of dimension should change the behaviour at the next order with the appearance of a $\ln(\ln(t)) + \ln(d_p)$, with d_p a constant, see the formal computation (4.21).

Consider now that we want to catch the behavior of a 2-solitons, centered at different ordinates, far enough from each other but with the same abscissa, as in figure 4.2. In this consideration, we propose in this chapter to give some computations to prove that the expected modification of ordinates is $\ln(c'_p t)$:

Conjecture 46. *There exists a solution R^* of (ZK2), and a constant c'_p satisfying:*

$$\left\| R^*(t) - Q\left(\cdot - t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \ln(c'_p t)\mathbf{e}_2\right) + Q\left(\cdot - t\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2} \ln(c'_p t)\mathbf{e}_2\right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Notice the main difference between the two previous cases : the repulsive behavior implies a modified logarithmic velocity, which for the first case is $2 \ln(t)$, whereas for the second case is $\ln(t)$. This difference is due to the direction of interaction, and is detailed in section 4.1.2 and 4.1.3. For the first case, the interaction is in the direction of the two solitons, whereas in the second case, the two solitons are interacting in a direction orthogonal to $\mathbf{e}_1$. In fact, the study of the interaction brings us to study three different directions: a first direction of translation, $\mathbf{e}_1$, a second direction of translation $\mathbf{e}_2$, and a direction of scaling. In the first case, the equation involving the modification along the first direction also involves the direction of scaling (because the solitons are moving in the first direction), whereas in the second case, the equation ruling the modifications of velocities only implies the interaction along $\mathbf{e}_2$.

Now, consider a slightly more different situation : the case of figure 4.3 where the two solitons are centered at different abscissa and different ordinates. The interaction should happen in the first and in the second directions. We might conjecture that the displacement along the first direction is now ruled by a logarithmic modification as in the first case in $2 \ln(d_p t) - \frac{1}{2} \ln(\ln(t))$, and the modification along the second direction is in $\ln(c'_p t) - \frac{1}{2} \ln(\ln(t))$. This mix between the different results might give by extension, with

$\sigma = \pm 1$, the existence of the following 2-solitons in dimension 2:

$$\left\| R^*(t) - \sum_{i=1}^2 (-1)^i Q \left(\cdot - \begin{pmatrix} t + (-1)^i (\ln(d_p t) - \frac{1}{4} \ln(\ln(t))) \\ (-1)^i (\frac{1}{2} \ln(c'_p t) - \frac{1}{4} \ln(\ln(t))) \end{pmatrix} \right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

The generalisation to dimension 3 is straightforward : as far as the equation is sub-critical and the same techniques apply, the logarithmic modification could hold either on the first direction, or the second, or the third, or any combination of the previous ones. We guess that the coefficient in front of the $\ln$ of the first direction is still 1, but for the other directions it should be $\frac{1}{2}$.

By comparing the different methods used for (gKdV) and the computations to come, this change of coefficient $\frac{1}{2}$ in other direction than $\mathbf{e}_1$ is intrinsic to the equation. In fact, the solitons are moving along the first direction, and the modification along the first direction is related to a modulation of the scaling. It results that the equation ruling the modification along the first axis is of order 2, whereas the equations ruling the modifications on the other axis are of order 1. This difference of order implies the appearance of a coefficient $\frac{1}{2}$.

Let us now set up the state-of-the-art of the strong interaction in long term for different objects.

4.1.2 Strong Interaction of order 2

The first article concerning the long time behavior of a sum of bubbles with strong interaction and blow-up in infinite time is due to Martel and Raphaël [89] for the critical Schrödinger equation (NLS). They consider the following situation. Let Q being the ground-state of (1.1) with $p = 3$, the solution that they construct is a sum of K bubbles given by:

$$S(t, x) := \frac{1}{|t|} Q \left(\frac{x}{|t|} \right) e^{-i \frac{x^2}{4|t|} + i \frac{1}{|t|}}$$

centered at the edges of a regular K -gone, and which blow up at 0 in infinite time. Let us define from now $\kappa = \left| 1 - e^{i \frac{2\pi}{K}} \right|$. In order to situate the different bubbles and for algebraic reasons, it is necessary to modulate the bubbles by different parameters $(\lambda, z, \gamma, \beta, b) \in (0, +\infty)^2 \times \mathbb{R}^3$. The flow is thus renormalized by:

$$dt = \lambda^2(s) ds, \quad y = \frac{x}{\lambda(s)}, \quad u(t, x) = \frac{e^{i\gamma(s)}}{\lambda(s)} v(s, y),$$

and the solution is composed of K modulated solitary waves, indexed by k , defined by:

$$P_k(s, y) = e^{i\Gamma_k(s, y - z_k(s))} Q_{a(z(s))}(y - z_k(s)), \quad (4.1)$$

with

$$\beta_k = \beta e_k, \quad z_k = z e_k, \quad \Gamma_k(s, y) = \beta_k \cdot y - \frac{b}{4} |y|^2,$$

Q_a represents the ground-state Q modulated by a in a direction, and $a(z) \sim z^{\frac{1}{2}}e^{-\kappa z}$. Among the all constants, let us emphasise those which rule the blow-up velocity: z et b . After some computations, [89] obtain the following (formal) equations (for sake of clarity, we forget the negligible terms):

$$|\dot{z} - bz| + |\dot{b} - a(z)| \lesssim z^{-\frac{1}{2}}e^{-\kappa z},$$

where $\dot{z}$ holds for the derivative of z by respect to s . Thus, (with still formal equations, because we ignore if z has a second derivative):

$$|\ddot{z} - \dot{b}z| \sim |\ddot{z} - cz^{\frac{3}{2}}e^{-\kappa z}| \lesssim z^{-\frac{1}{2}}e^{-\kappa z}.$$

To solve the previous equation, we set the function $q(z) := z^{-\frac{3}{2}}e^{\kappa z}$. The second derivative gives $\ddot{q}(z)(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} c\kappa$, so $\lim_{s \rightarrow +\infty} \left(q(z) - c\kappa \frac{s^2}{2} \right) = 0$. By approximation in this equation, we finally obtain the velocity of blow-up of concentration of the bubbles to 0: $z(s) \sim \frac{2}{\kappa} \ln(s)$.

Let us point out that in this method the equation on z is of order 2 : the equation of order 1 on z is related to the equation of order 1 on b , the term of the rotation of the phase due to the pseudo-conformal invariance, which involves z .

The next article that we introduce is concerned with the long-time behavior of a sum of solitons with strong interaction. This result is due to Nguyen [106] for the generalized (KdV) equation in the subcritical and supercritical cases. The construction of the solution is the following: by considering the solution composed of two solitons, it is modified by adding correction terms of order 1 to cancel the interaction terms. The coordinates are changed into $y := x - t$. It is then necessary to modulate the different solitons and the approximation to control the error term. An approximation V of the solution becomes:

$$\begin{aligned} V(t, y) := & Q_{1+\mu_1(t)}(y + z_1(t)) + \sigma Q_{1+\mu_2(t)}(y - z_2(t)) \\ & + e^{-z(t)} (A_1(y - z_1(t)) + A_2(y - z_2(t))) \phi(t, y), \end{aligned}$$

with μ_i and z_i the parameters of modulation, respectively related to the scaling and to the translation, $\sigma = -1$ for the subcritical cases and $\sigma = 1$ for the supercritical cases, ϕ a cut-off function to avoid a tail on the left of our approximation, and A_1 and A_2 are the approximation of the first order. We set:

$$z(t) := z_1(t) - z_2(t).$$

Because of the dimension $d = 1$, the approximation terms are equivalent to e^{-z} , and the following order is thus e^{-2z} . After some computations, we obtain the following system of equation which rules the velocities of the different solitons :

$$|\dot{\mu}_1(t) + ce^{-z}| + |\dot{\mu}_2(t) - ce^{-z}| \lesssim e^{-\frac{9}{8}z}, \quad |\mu_j(t) - \dot{z}_j(t)| \lesssim e^{-\frac{9}{16}z},$$

It implies the (formal) equation of order 2 on z :

$$|\ddot{z}(t) - ce^{-z}| \lesssim e^{-\frac{9}{8}z}.$$

Once this equation is solved, we obtain the velocity of "separation" of the two solitons $z(t) = 2\ln(t) + O(1)$. This result is the first result concerning interactions on different solitons, with interaction ruling the second order of velocity of the solitons. Let us underline that this result comes from an equation of order 2 on z , which involves the translation as well as the scaling parameter. Furthermore, a necessary condition which makes this phenomenon happens is that the direction of separation of the two solitons is the main direction on which the two solitons are moving. Even if this condition is always satisfied in dimension $d = 1$ for the generalized (KdV) equation, it is no longer the case for higher dimensions, as for (ZK).

After the article of Martel and Raphaël [89] on the Schrödinger equation, Nguyen [107] created solutions which behave in long times like a sum of two solitons with the same velocity. He considered the nonlinear Schrödinger equation in dimension d , in the subcritical and supercritical cases. The method is close to the two previous ones exposed: the decomposition of the solution is close to [89], see (4.1), by using a modulation on the different solitons:

$$\begin{aligned} P_k(s, y) &= e^{iv_k(s)(y-z_k(s))} Q(y - z_k(s)), \\ v_1(s) = v_2(s) &= -\frac{1}{2}v(s), \quad z_1(s) = -z_2(s) = \frac{1}{2}z(s). \end{aligned} \tag{4.2}$$

In this case, the system of equations ruling the velocity z of translation is given by:

$$\dot{v}(s) = c_p z |z|^{-\frac{d-3}{2}} e^{-|z|}, \quad |\dot{z} - 2v| \lesssim |z|^{-\frac{d-1}{2}} e^{-|z|},$$

or equivalently (and still formally)

$$\left| \ddot{z} - c_p z |z|^{-\frac{d-3}{2}} e^{-|z|} \right| \lesssim |z|^{-\frac{d-1}{2}} e^{-|z|}.$$

The resolution of this equation finally gives an estimate of the velocity of "translation-separation" of the solitons: $z(s) = 2\ln(s) + O(1)$. The equation of order 2 in z is due to an equation of order 1 in z and an equation of order 1 in v . The velocity of oscillation is fundamental to deal with the velocity of translation and obtain an equation of order 2.

The same line of thought holds for the coupled Schrödinger equation in Martel and Nguyen [87]. They first consider two solitons with the same velocity, whose distance is ruled in long time by an equation of order 2, coming from parameters of translation and oscillation of the phase, similar to (4.2). The new phenomenon exposed in this article is the case of two solitons with different velocities: one is equal to 1, and the second is equal to $c < 1$. The dynamics of the distance separating those two solitons is logarithmic and involves new constants: the distance between those two solitons is $\frac{1}{c} \log(t)$ in long time.

4.1.3 Strong interactions of order 1.

In this chapter, we investigate the case of strong interaction of order 1 of two solitons whose velocities in long time is equal to 1 in the first direction. The generalized equation of Zakharov-Kuznetsov (gZK) in dimension 2 possesses two directions of interaction. The

first one is similar to the results previous exposed on the (KdV) equation, with two solitons centered on the same ordinate, as in figure 4.1. It is thus natural to guess that this behavior in long time stays true for (gZK), and to surmise that the distance separating the two solitons is, in the first direction, logarithmic with $z_1(t) = 2 \ln(t) + o(\ln(t))$. The second possibility, as in figure 4.2, consists into localizing the two solitons on different ordinates, with the same abscissa. In this case, the equation leading the long-time behavior only concerns the second direction $\mathbf{e}_2$, and does not concern anymore the scaling direction. Consequently, the equation is of order 1, and after some formal computations, we obtain the equation:

$$|\dot{z}_2(t) - ce^{-|z_2(t)|}| = O(l.o.t.),$$

which implies $z_2(t) = \ln(t) + O(l.o.t.)$. Let us point out in this case the difference with the previous cases: the interaction gives an equation of order 1, a few parameters are involved in the equation, and the distance between the two solitons is smaller than in the case of two solitons situated on the same ordinate.

In order to pull away the two solitons, as [106], it is necessary to control the signs of each of the solitons. For the generalized (KdV), [106] identifies the long term interaction of $Q(x - t - \frac{1}{2}z(t)) - Q(x - t + \frac{1}{2}z(t))$ in the sub-critical case, and $Q(x - t - \frac{1}{2}z(t)) + Q(x - t + \frac{1}{2}z(t))$ in the supercritical case. We proceed in the same way for (gZK) in dimension 2: in the subcritical case, we look for solutions whose long time behavior is $Q(\mathbf{x} - t - \frac{1}{2}\mathbf{z}(t)) - Q(\mathbf{x} - t + \frac{1}{2}\mathbf{z}(t))$. In dimension 2, we thus guess that the non-linearity p is strictly lower than 3. The second constraint is that, if $p = 2$, the interaction is not concentrated enough around each of the solitons to be locally identified. The non-linearity must satisfy $2 < p < 3$, thus p is not an integer:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + |u|^{p-1}u) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in I_t \times \mathbb{R}^2, \quad 2 < p < 3. \quad (4.3)$$

Let us denote the canonical basis of $\mathbb{R}^2$ by $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. We surmise the long time behavior of two-solitons in conjecture 46.

Notice that in the case of the subcritical Zakharov-Kuznetsov equation without absolute value, a numerical computation in [58] proves that an initial condition of two solitons centered on the same abscissa results in a unique soliton.

4.1.4 Discussion

In this chapter, we use a power of non-linearity p in the interval $(2, 3)$. A first other significant case is with a non-linearity $p = 2$, that is, the 2D Zakharov-Kuznetsov equation : the interaction is strong and not localized around each of the solitons. In fact, by considering the sum (or difference) of two solitons $R^1 + R^2 = Q(\cdot - \mathbf{z}) + Q(\cdot + \mathbf{z})$, at each point $\mathbf{x}$ with $x_1 = z_1$ and $|x_2| \leq |z_2|$, we get that the interaction $Q(\mathbf{x} - \mathbf{z})Q(\mathbf{x} + \mathbf{z})$ is equivalent to $e^{-2|z|}$. The interaction is then localized on the all area where the $\mathbf{x}$ satisfy the previous values, which regroupes each point between the two soliton. In the following picture, the crosses represent the centers of mass of the solitons, and the grey area the

domain where $(R^1 R^2)(\mathbf{x}) \sim e^{-|\mathbf{z}|} \frac{1}{|\mathbf{z}|^{1/2}}$.

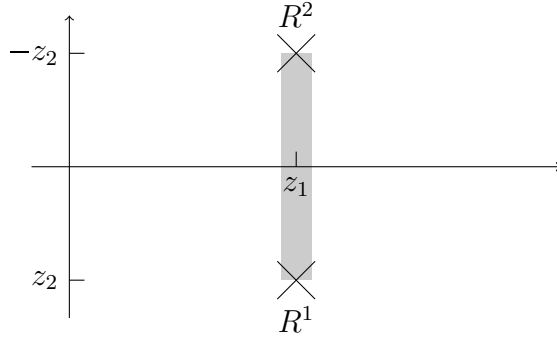


Figure 4.4: Area of interaction for an initial condition $u_0 = R^1 + R^2$ pour $p = 2$

This problem is thus still open.

Second, the critical case $p = 3$ is particular. The system of ordinary differential equations ruling $\ddot{\mu}$ can not be obtain by the same method. In fact, the derivative of the ortogonality condition $\int Q(\cdot - \mathbf{z})\epsilon$, with ϵ the error between the approximation and the solution, gives the term of leading order on μ : $\ddot{\mu} \int Q \Lambda Q$. In the particular critical case, this term is equal to zero, and we no longer obtain the term along $\ddot{\mu}$. It might be possible that the case of two solitons with the same velocity and logarithmic distance along the time does not hold anymore. Other tools are necessary to investigate this special case.

4.2 Construction

We need an adequate approximation of the 2-solitons, satisfying the equation:

$$\partial_t u + \partial_1 (\Delta u + f(u)) = 0, \quad f(u) = |u|^{p-1}u,$$

in dimension $d = 2$ thus the subcritical case, which means $p \in (2, 3)$. To do so, we need a clear approximation of a soliton at infinity to manage the interaction.

We recall the operation of scaling:

$$Q_c(\mathbf{x}) := c^{\frac{1}{p-1}} Q(\sqrt{c}(\mathbf{x})).$$

Now, let us define a soliton modulated by $\mathbf{z}^i(t) = \begin{pmatrix} z_1^i(t) \\ z_2^i(t) \end{pmatrix}$ and a parameter of scaling $\mu(t)$. We denote the solitons in the following way:

$$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad R^i(t, \mathbf{x}) := Q_{1+\mu(t)}(\mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)).$$

The solution we consider is odd on the second coordinate:

$$\begin{aligned} u(t, x_1, -x_2) &= -u(t, x_1, x_2), \\ \text{so } R^1(t, \mathbf{x}) &= -R^2(t, x_1, -x_2) \\ \text{and } z_1^1 &= z_1^2, \quad z_2^1 = -z_2^2 < 0. \end{aligned}$$

The derivative along the scaling direction brings us to define the following operator Λ on functions $g \in H^1$, and the gradient:

$$\Lambda g(\mathbf{x}) := \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \nabla \right) g(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g(\mathbf{x}) \\ \partial_2 g(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Those operators are localised on the solitons. Because we consider the rescaled solitons, we introduce the modified operator:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} R^i(t, \mathbf{x}) &:= (\Lambda Q)_{1+\dot{\mu}(t)} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \\ \text{and} \quad \tilde{\nabla} R^i(t, \mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \partial_1 Q \\ \partial_2 Q \end{pmatrix}_{1+\dot{\mu}(t)} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)). \end{aligned}$$

Those notations are more compact to deal with time derivative of a soliton:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R^i(t, \mathbf{x}) &= \left(\frac{\ddot{\mu}(t)}{(p-1)(1+\dot{\mu}(t))} + \frac{\ddot{\mu}(t)}{2(1+\dot{\mu}(t))^{\frac{1}{2}}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \cdot \nabla \right) R^i(t, \mathbf{x}) \\ &\quad - ((1 + \dot{\mu}(t)) \mathbf{e}_1 + \dot{\mathbf{z}}^i(t)) \cdot \nabla R^i(t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{\ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} R^i(t, \mathbf{x}) - ((1 + \dot{\mu}(t)) \mathbf{e}_1 + \dot{\mathbf{z}}^i(t)) \cdot \tilde{\nabla} R^i(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

So we get:

$$\frac{d}{dt} R^i + \partial_1 (\Delta R^i + f(R^i)) = \frac{\ddot{\mu}}{1 + \dot{\mu}} \tilde{\Lambda} R^i - \dot{\mathbf{z}}^i \cdot \tilde{\nabla} R^i,$$

and the different parameters live on different directions.

The two solitons with $i = 1$ or 2 are modulated by the parameters μ , z_1^i and z_2^i . To cancel the main terms of the interaction, we use the first order term P^i :

$$\begin{aligned} R^i(t, \mathbf{x}) &:= Q_{1+\dot{\mu}(t)} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)), \\ P^i(t, \mathbf{x}) &:= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{A}^i)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \\ &= \sum_{0 \leq j, k, l, m} \alpha_{j, k, l, m}^i(\mathbf{z}) (A_{j, k, l, m}^i)_{1+\dot{\mu}^i(t)} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)), \end{aligned}$$

where the functions $\alpha_{j, k, l, m}^i$ and $A_{j, k, l, m}^i$ will be defined accordingly to the decomposition of a soliton. An approximation of a soliton is given in appendix 4.4.

Due to the weight of the notations and of the computations, we continue for now with a weak approximation with two main terms, so with $j = 1$ to 2 :

$$\begin{aligned} P^i(t, \mathbf{x}) &:= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{A}^i)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \\ &= \sum_{j=1}^2 \alpha_j^i(\mathbf{z}) (A_j^i)_{1+\dot{\mu}^i(t)} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Recall that by symmetry, the first coordinate of modulation is equal for the two

solitons. We thus obtain the distance between the centers of the solitons:

$$\mathbf{z} := \mathbf{z}^2 - \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2^2 - z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z_2^2 \end{pmatrix}.$$

We look for an approximation of our solution $u(t, \mathbf{x}) \simeq \sum_{i=1}^2 (-1)^i (R^i + P^i)(t, \mathbf{x})$. The time derivative of the added term is:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P^i(t, \mathbf{x}) &= \frac{\ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} P^i(t, \mathbf{x}) - ((1 + \dot{\mu}(t)) \mathbf{e}_1 - \dot{\mathbf{z}}^i) \cdot \tilde{\nabla} P^i(t, \mathbf{x}) + \\ &\quad \left(\dot{\mathbf{z}} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i A_j^i \right) \right)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \end{aligned}$$

and thus:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (R^i + P^i) + \partial_1 (\Delta(R^i + P^i) + f(R^i + P^i)) \\ &= \frac{\ddot{\mu}(t)}{(1 + \dot{\mu}(t))} \tilde{\Lambda} (R^i + P^i)(t, \mathbf{x}) - \dot{\mathbf{z}}^i(t) \cdot \tilde{\nabla} (R^i + P^i)(t, \mathbf{x}) \\ &\quad + \partial_1 (f(R^i + P^i) - f'(R^i)P^i)(t, \mathbf{x}) \\ &\quad + (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} \left(\partial_1 (\Delta + f'(Q) - 1) \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i A_j^i \right) \right)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \\ &\quad + \left(\dot{\mathbf{z}} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i A_j^i \right) \right)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)). \end{aligned}$$

To obtain the flow of our approximation, which is composed of R^i and the corrections P^i , it suffices to compute the equation on

$$V(t, \mathbf{x}) := \sum_{i=1}^2 (-1)^i (R^i + P^i)(t, \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

and the interaction appears:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_V &:= \frac{d}{dt} V + \partial_1 (\Delta V + f(V)) \\ &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} R^i(t, \mathbf{x}) + (-1)^{i+1} \dot{\mathbf{z}}^i(t) \cdot \tilde{\nabla} R^i(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$+ (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} (-1)^i (\partial_1 I^i)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \quad (4.7)$$

$$+ (-1)^i \frac{\ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} P^i(t, \mathbf{x}) + (-1)^{i+1} \dot{\mathbf{z}}^i(t) \cdot \tilde{\nabla} P^i(t, \mathbf{x}) \quad (4.8)$$

$$+ (-1)^i \left(\dot{\mathbf{z}} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i A_j^i \right) \right)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t)) \mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \quad (4.9)$$

$$+ \partial_1 S_0(t, \mathbf{x}), \quad (4.10)$$

with the interaction term:

$$I^i(t, \mathbf{x}) = (\Delta + f'(Q(\mathbf{x})) - 1) \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j^i(\mathbf{z}) A_j^i(\mathbf{x}) \right) - f'(Q(\mathbf{x})) Q(\mathbf{x} + (-1)^i \mathbf{z})$$

and the source term:

$$S_0(t, \mathbf{x}) := f(V) - f(R^1) - f'(-R^1)(R^2 - P^1) - f(R^2) - f'(R^2)(-R^1 + P^2).$$

In the previous equation, the biggest term to inverse is due to the interaction of the different solitons, so (4.7) needs to be inversed. For a complete proof, we need to inverse an infinite number of terms. In this thesis, we focus only on the two main terms.

Evaluation of the interaction term I^i

As in the previous section, we considered β and $\tilde{\beta}$ smalls parameters on which we obtained an equivalent of a ground-state, see 4.33. We need to find a nice bound of $Q^2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x} - \mathbf{z})$ and a nice approximation of $Q(\cdot - \mathbf{z})$. To do so, consider first that $\mathbf{x} \in R_{\tilde{\beta}, \beta}^C(\mathbf{z})^C$, defined in (4.34).

$$f'(Q)(\mathbf{x})Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq |Q(\mathbf{x})Q(\mathbf{x} - \mathbf{z})|Q(\mathbf{x})^{p-2} \lesssim K \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|} Q(\mathbf{x})^{p-2},$$

so

$$\|f'(Q)Q(\cdot - \mathbf{z})\|_{H^1(\mathbf{x} \in R_{\tilde{\beta}, \beta}^C)} \lesssim \frac{e^{-(1+\tilde{\beta}(p-2))|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|}.$$

Secondly, consider $\mathbf{x} \in R_{\tilde{\beta}, \beta}(\mathbf{z})$, with the assumption of symmetry, $z_1 = 0$. We use the two first biggest terms in $\mathbf{z}$ in the function Θ in lemma 48. defined in the previous section. We can thus integrate on the area $R_{\tilde{\beta}, \beta}$, and we obtain, for $k \leq |\mathbf{z}| \leq k+1$:

$$\left\| f'(Q)(\mathbf{x}) \left(Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} e^{x_2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}}} e^{x_2} \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) \right) \right\|_{H^1(R_{\tilde{\beta}, \beta})} \leq c \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^2}.$$

It is equivalent to consider a smooth cut-off function ϕ_a , equal to 1 if $x \leq a$, and 0 if $x \geq 2a$:

$$\left\| f'(Q)(\mathbf{x}) \left(Q(\mathbf{x} - \mathbf{z}) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} e^{x_2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}}} e^{x_2} \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) \right) \right\|_{H^1} \leq c \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^2} \quad (4.11)$$

Notice that this bound can be improved into $e^{-(1+\tilde{\beta})}$ if we consider the infinite sum of terms.

How to find the α^i and A^i

To find the largest part of the non-linearity along the different directions $\partial_1 Q$, $\partial_2 Q$ and ΛQ , we use a function whose image gives the part along $\partial_2 Q$ and along ΛQ :

$$\begin{aligned} S_2(x_1, x_2) &:= \int_{x_1}^{\infty} (-\Delta + 1)^{-1} \partial_2 Q(x'_1) dx'_1, & S_0(x_1, x_2) &:= \int_{x_1}^{\infty} (-\Delta + 1)^{-1} \Lambda Q(x'_1) dx'_1, \\ L(S_2) &= \int_{x_1}^{\infty} \partial_2 Q - f'(Q) S_2, & L(S_0) &= \int_{x_1}^{\infty} \Lambda Q - f'(Q) S_0 \\ \partial_1 L S_2 &= -\partial_2 Q - \partial_1 (f'(Q) S_2), & \partial_1 L(S_0) &= -\Lambda Q - \partial_1 (f'(Q) S_0). \end{aligned}$$

A quick computation gives us, by the equation satisfied by Q :

$$\begin{aligned} \langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle &= - \int f(Q) \partial_2 S_2 = - \int (-\Delta + 1) Q \partial_2 S_2 = \\ &= \int_{\mathbf{x}} \partial_2 Q(\mathbf{x}) \int_{x_1}^{\infty} \partial_2 Q(x'_1, x_2) dx'_1 d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{x_2=-\infty}^{\infty} \left(\int_{x_1=-\infty}^{\infty} \partial_2 Q(\mathbf{x}) dx_1 \right)^2 dx_2 > 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

We want to find P^1 such that the term (4.7) is the lowest. We look for $\alpha_j^i(\mathbf{z})$, $A_j^i(\mathbf{x})$ (denoted α_j and A_j for convenience) satisfying:

$$\partial_1 \left(L \left(\sum_{j=1}^2 \alpha_j A_j \right) \right) \sim \partial_1 (-f'(Q) Q(\cdot - \mathbf{z})) + (\cdots) \Lambda Q + (\cdots) \partial_2 Q.$$

A_j is decomposed of a part $\widetilde{A}_j$ which will be an inverse image by L of the adequate term, and a term S_2 which adjust our term to satisfy the orthogonality conditions. The asset of S_2 is that it changes the orthogonality along $\partial_2 Q$ into an explicit part which lead the dynamics of the solution. Due the approximation (4.11), we thus want that $\widetilde{A}_1$ satisfies:

$$\begin{aligned} \partial_1 L \left(\alpha_1 (\widetilde{A}_1 + S_2) \right) &= \partial_1 \left(-f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} e^{x_2} \right) + (\cdots) \partial_2 Q, \\ \partial_1 L \left(\alpha_1 \widetilde{A}_1 \right) &= \partial_1 \left(-f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} e^{x_2} + \beta_1 f'(Q) S_2 \right) + (\alpha_1 + (\cdots)) \partial_2 Q. \end{aligned}$$

We define α_1 by:

$$\alpha_1(\mathbf{z}) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle} \langle f'(Q) e^{x_2}, \partial_2 Q \rangle = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} \frac{\langle e^{x_2}, f(Q) \rangle}{\langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle} < 0,$$

with the sign given by (4.12). We thus choose $\widetilde{A}_1(\mathbf{x})$, independant of $\mathbf{z}$, and even in the first direction, satisfying:

$$L \widetilde{A}_1 = -f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\alpha_1(\mathbf{z}) |\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} e^{x_2} + f'(Q) S_2.$$

The procedure is exactly similar for the second order term:

$$\alpha_2(\mathbf{z}) := K \frac{e^{-|\mathbf{z}|} \left\langle f'(Q) e^{x_2} \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right), \partial_2 Q \right\rangle}{|\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}} \langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle},$$

$$L(\widetilde{A}_2)(\mathbf{x}) := -f'(Q)(\mathbf{x}) K \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\alpha_2(\mathbf{z}) |\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}}} e^{x_2} \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) + f'(Q) S_2(\mathbf{x}).$$

We can notice that we did ask for only one orthogonality condition (for the parity) for now and $\widetilde{A}_1$ and $\widetilde{A}_2$ are not uniquely defined. Furthermore, the sign of α_2 is not defined, it may be null. We thus defined $A_1^1 := \widetilde{A}_1 + S_2$ and $A_2^1 := \widetilde{A}_2 + S_2$.

We obtain:

$$\partial_1 L(\alpha_1 A_1^1 + \alpha_2 A_2^1) = \partial_1 \left(-f'(Q) \left(K \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} e^{x_2} + K \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}}} e^{x_2} \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) \right) \right)$$

$$- (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})) \partial_2 Q.$$

The conclusion of that approximation is the construction of a good pre-image of the interaction, and we find out the leading term in the dynamic along $\partial_2 Q$. The procedure should be the same for the dynamic along ΛQ with S_0 . However, there is no term coming from the approximation which could lead to ΛQ :

$$\langle \Lambda Q, \partial_1(f'(Q)Q(\cdot - \mathbf{z})) \rangle = 0,$$

due to the parity in the x_1 -direction, which means that the interaction is totally orthogonal to the dynamics along ΛQ .

We now turn our attention to make explicit the approximation around the second soliton. The procedure is similar, except that the interaction is now $\partial_1(Q^2 Q(\cdot + \mathbf{z}))$. We obtain:

$$\alpha_1^2(\mathbf{z}) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|} \langle f'(Q) e^{-x_2}, \partial_2 Q \rangle}{|\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}} \langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle} = -\alpha_1(\mathbf{z}) > 0,$$

$$L\widetilde{A}_1^2 := -f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\alpha_1(\mathbf{z}) |\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} e^{-x_2} + f'(Q) S_2,$$

$$\alpha_2^2(\mathbf{z}) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|} \left\langle f'(Q) e^{-x_2} \left(-\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right), \partial_2 Q \right\rangle}{|\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}} \langle f'(Q) S_2, \partial_2 Q \rangle} = -\alpha_2(\mathbf{z}),$$

$$L\widetilde{A}_2^2 := -f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\alpha_2(\mathbf{z}) |\mathbf{z}|^{\frac{3}{2}}} e^{-x_2} \left(-\frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) + f'(Q) S_2.$$

We thus get the modification of the flow:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_V &:= \frac{d}{dt}V + \partial_1 (\Delta V + V^3) \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i \ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} R^i(t, \mathbf{x}) - \left((-1)^i \dot{\mathbf{z}}^i(t) + (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})) \mathbf{e}_2 \right) \cdot \tilde{\nabla} R^i(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$+ (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} (-1)^i (\partial_1 J^i)_{1+\dot{\mu}} (\mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \quad (4.14)$$

$$+ (-1)^i \frac{\ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} P^i(t, \mathbf{x}) + (-1)^{i+1} \dot{\mathbf{z}}^i(t) \cdot \tilde{\nabla} P^i(t, \mathbf{x}) \quad (4.15)$$

$$+ (-1)^i \left(\dot{\mathbf{z}} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^i A_j^i \right)_{1+\dot{\mu}} \right) (\mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) \quad (4.16)$$

$$+ \partial_1 S_0(t, \mathbf{x}). \quad (4.17)$$

with S_0 defined in (4.10), and the error J^i of approximation of the interaction:

$$\partial_1 J^i(t, \mathbf{x}) := \partial_1 \left(f'(Q) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|^{\frac{1}{2}}} e^{(-1)^{i+1} x_2} \left(1 + \frac{1}{|\mathbf{z}|} \left((-1)^{i+1} \frac{x_2}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x_1^2}{2} \right) \right) \right) \quad (4.18)$$

$$- f'(Q) Q(\cdot + (-1)^i \mathbf{z}) \Big) \quad (4.19)$$

$$= \partial_1 I^i(t, \mathbf{x}) + (-1)^i (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})) \partial_2 Q(\mathbf{x} + (-1)^i \mathbf{z}).$$

4.3 The Bootstrap

This part consists in the heart of the study of the 2-solitons. Consider V the previous constructed approximation of our solution in (4.5). The different parameters need to be evaluated or bounded by above by enough decaying functions along t , as well as the error term $\tilde{\epsilon}$. As in the construction of multi-solitons, we consider a sequence of times $(S_n)_n$, and a sequence of solutions u_n of (ZK2) with the final condition $u_n(S_n) = V(S_n)$. The goal is now to find a uniform upper bound of the error $u_n(t) - V(t)$ on a time interval $[T_0, S_n]$. For now, we drop the index n , all the next computations are considered independant of the error. To compute the error between the solution we are considering and the approximation we previously constructed. We insert the error $\tilde{\epsilon}$ or ϵ :

$$\begin{aligned} u(t, \mathbf{x}) &:= \sum_{i=1}^2 (-1)^i (R^i(t, \mathbf{x}) + P^i(t, \mathbf{x})) + \tilde{\epsilon}(t, \mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=1}^2 (-1)^i (Q_{1+\dot{\mu}(t)}(\mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1 - \mathbf{z}^i(t)) + P^i(t, \mathbf{x})) + \epsilon(t, \mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1) \\ u(t, \mathbf{x}) &= V(t, \mathbf{x}) + \epsilon(t, \mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1) = V(t, \mathbf{x}) + \tilde{\epsilon}(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

The error satisfies the equation :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\epsilon + \partial_1 (\Delta\epsilon - (1 + \dot{\mu})\epsilon + (V + \epsilon)^3 - V^3) = -\frac{d}{dt}V - \partial_1 (\Delta V + V^3) = -\mathcal{E}_V.}$$

We claim the following bootstrap. If the following bounds on a time interval $[t^*, S_n]$, with $T_0 < t^*$, hold:

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \begin{cases} |\dot{z}_1^1| + |\dot{z}_1^2| + |\ddot{\mu}| \leq C \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}} \\ |-\dot{z}_1^2 + \alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})| + |\dot{z}_2^2 + \alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})| \leq C \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}} \\ \|\tilde{\epsilon}(t)\|_{H^1} \leq C \frac{1}{t \ln(t)^\gamma}, \end{cases}$$

with $\gamma > 1$ to find out later, then the estimates can be improved into:

$$\forall t \in [t^*, S_n], \quad \begin{cases} |\dot{z}_1^1| + |\dot{z}_1^2| + |\ddot{\mu}| \leq \frac{C}{2} \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}} \\ |-\dot{z}_2^1 + (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z}))| + |\dot{z}_2^2 + (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z}))| \leq \frac{C}{2} \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}} \\ \|\tilde{\epsilon}(t)\|_{H^1} \leq \frac{C}{2} \frac{1}{t \ln(t)^\gamma}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Suppose that this bootstrap holds. We obtain, with a constant $K > 0$ and K' an other constant:

$$\left| \dot{z}_2 - 2K \frac{e^{-z_2}}{\sqrt{z_2}} - 2K' \frac{e^{-z_2}}{|z_2|^{\frac{3}{2}}} \right| \lesssim \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}}, \quad (4.21)$$

so $z_2(t) = \ln(t) - \frac{1}{2} \ln(\ln(t)) + C + O\left(\frac{1}{\ln(\ln(t))}\right).$

This computation is the origin of the conjecture 46. As a consequence, up to some cut-off functions to avoid the tails on the left of the approximation, we obtain a bound on the flow (4.13):

$$\left\| \mathcal{E}_V - \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i \ddot{\mu}(t)}{1 + \dot{\mu}(t)} \tilde{\Lambda} R^i(t, \mathbf{x}) + \left((-1)^i \dot{\mathbf{z}}^i(t) + (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} (\alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})) \mathbf{e}_2 \right) \cdot \tilde{\nabla} R^i(t, \mathbf{x}) \right\| \quad (4.22)$$

$$\leq Cg(t), \quad (4.23)$$

with

$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}} & \text{if the approximation holds on the 2 first terms,} \\ \frac{\ln(t)}{t^2} & \text{if the approximation holds on the infinite number of terms.} \end{cases} \quad (4.24)$$

4.3.1 System of ODEs

By a lemma a modulation, we claim that there exists unique functions μ , z_1^1 and z_2^1 such that the error satisfies the following orthogonality conditions:

$$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \quad 0 = \int \partial_1 R^i(t) \tilde{\epsilon}(t) = \int \partial_2 R^2(t) \tilde{\epsilon}(t) = \int R^i(t) \tilde{\epsilon}(t).$$

The time derivative of each of this orthogonality condition gives us an equation ruling the parameter μ , z_1^1 and z_2^1 .

Along the computations, we will see that a sufficient condition to obtain the estimates is:

$$\frac{d}{dt} (\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{H^1}^2) \lesssim \frac{1}{t^3 \ln(t)^3}.$$

Obtaining this estimate is the goal of section 4.3.2.

On z_1 .

By taking the time derivative of the first orthogonality condition:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \int \partial_1 R^1(t) \tilde{\epsilon}(t) \\ &= - \int \partial_1 R^1 (\partial_1 (\Delta \tilde{\epsilon} - (1 + \dot{\mu}) \tilde{\epsilon} + (V + \tilde{\epsilon})^p - V^p)) - \int \partial_1 R^1 \mathcal{E}_V + O(\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{L^2} (|\dot{\mathbf{z}}| + |\ddot{\mu}|)) \\ &= \dot{z}_1^1 \int (\partial_1 R^1)^2 + O(\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{L^2} + e^{-|\mathbf{z}|} (|\dot{z}_1^2| + |\dot{z}_2^2| + |\ddot{\mu}|) + g(t)), \end{aligned}$$

where the last terms with g exponential decay come from the interaction $\int \partial_1 R^1 \partial_2 R^2$ etc from $\mathcal{E}_V$. We thus get:

$$|\dot{z}_1^1| = O(\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{L^2} + e^{-|\mathbf{z}|} (|\dot{z}_1^2| + |\dot{z}_2^2| + |\ddot{\mu}|) + g(t)).$$

To close this estimate, we thus need that the error satisfies: $\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{L^2} = O(t^{-1} \ln(t)^{-\frac{3}{2}})$.

On z_2 .

By taking the time derivative of the second orthogonality condition (same as before, with the same conclusion):

$$|-\dot{z}_1^2 + \alpha_1(\mathbf{z}) + \alpha_2(\mathbf{z})| = O(\|\tilde{\epsilon}(t)\|_{L^2} + e^{-|\mathbf{z}|} (|\dot{z}_1^2| + |\dot{z}_2^2| + |\ddot{\mu}|) + g(t)).$$

On $\ddot{\mu}$.

To compute the equation on $\ddot{\mu}$, we take the time derivative of the orthogonality condition $\int R^1(t, \mathbf{x}) \tilde{\epsilon}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} \int R^1 \tilde{\epsilon} \\
&= \frac{\ddot{\mu}}{1 + \dot{\mu}} \int \tilde{\Lambda} R^1 \tilde{\epsilon} - \int R^1 \mathcal{E}_V - \int R^1 \partial_1 (\Delta \tilde{\epsilon} - (1 + \dot{\mu}) \tilde{\epsilon} + (f(V + \tilde{\epsilon}) - f(V))).
\end{aligned}$$

Some terms cancel by the orthogonality conditions, and we get:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^2 \int (\cdots) R^1 \partial_1 R^k + \int (\cdots) R^1 \partial_2 R^k + \ddot{\mu} \int R^1 \Lambda R^k \\
&= \frac{\ddot{\mu}}{2(1 + \dot{\mu})} \int (\mathbf{x} \cdot \nabla) R^1 \tilde{\epsilon} - \int (-\Delta + (1 + \dot{\mu}) + f'(R^1)) \partial_1 R^1 \tilde{\epsilon} \\
&\quad + \int \partial_1 R^1 (f(V + \tilde{\epsilon}) - f(V) - f'(R^1) \tilde{\epsilon}) + O(g(t)).
\end{aligned}$$

Because $\partial_1 Q$ is in the kernel of $\mathcal{L}$, we get:

$$\ddot{\mu} \left(\int R^1 \Lambda R^1 + O(\|\tilde{\epsilon}\|_{L^2}^2) \right) = O \left(g(t) + \frac{e^{-2|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|} + \|\tilde{\epsilon}\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\epsilon}\|_{L^2} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{|\mathbf{z}|} \right).$$

For this term, the biggest contribution does not come from the error ϵ , but from the source terms. We obtain that

$$|\ddot{\mu}| \lesssim \frac{t}{\ln(t)}, \quad \text{and} \quad |\mu| \lesssim \ln(t) \quad \text{or} \quad \ln(\ln(t)).$$

4.3.2 The monster : the functional

Recall that

$$u(t, \mathbf{x}) = V(t, \mathbf{x}) + \epsilon(t, \mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1) = V(t, \mathbf{x}) + \tilde{\epsilon}(t, \mathbf{x})$$

The goal of this part is to prove the bound on $\tilde{\epsilon}$ in the bootstrap (4.20)

For now, we define the functional which will correspond to the energy to deal with the quantities to modify:

$$W(t) = \int \frac{1}{2} |\nabla \epsilon|^2 + \frac{1 + \dot{\mu}}{2} |\epsilon|^2 - F(V + \tilde{\epsilon}) + F(V) + f(V) \tilde{\epsilon} - \int S_0 \tilde{\epsilon},$$

with $F(u) = \frac{1}{p+1} |u|^p$ a primitive of f . Notice that this functional is not only the energy around the error ; we also add an other term $\int S_0 \tilde{\epsilon}$, due to the source term to cancel some annoying terms. This idea can also be found in [87].

The first immediate property that we admit for now is the coercivity:

$$\|\tilde{\epsilon}\|_{H^1}^2 \lesssim \int \frac{1}{2} |\nabla \epsilon|^2 + \frac{1 + \dot{\mu}}{2} |\epsilon|^2 - F(V + \tilde{\epsilon}) + F(V) + f(V) \tilde{\epsilon}.$$

The main arguments to prove this estimate is the knowledge of the operator $\mathcal{L}$, and by the orthogonality conditions on $\tilde{\epsilon}$, the operator $\mathcal{L}$ almost satisfies a relation of coercivity.

We now turn our attention to the upper bound of W . Let us compute the time derivative of the functional $W(t)$, where $\tilde{\epsilon}(t, \mathbf{x}) := \epsilon(t, \mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) &= \int (-\mathcal{E}_V + \partial_1 S_0) (-\Delta \tilde{\epsilon} + (1 + \dot{\mu})\tilde{\epsilon} - f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V)) \\ &\quad + \frac{\ddot{\mu}}{2} \|\epsilon\|_{L^2}^2 - \int S_0 \mathcal{E}_V - \int \frac{d}{dt} S_0 \mathcal{E}_V \\ &\quad + \int \frac{d}{dt} (V(t, \cdot + (t + \mu(t))\mathbf{e}_1)) (-f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V) + f'(V)\tilde{\epsilon})(t, \cdot + (t + \mu(t))\mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

By developing the previous formula:

$$\frac{d}{dt}W(t) = \sum_{i=1}^2 (-1)^i \dot{z}_1^i \int \partial_1 R^i (-\Delta \tilde{\epsilon} + (1 + \dot{\mu})\tilde{\epsilon} - f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V)) \quad (4.25)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \left((-1)^i \dot{z}_2^i + (1 + \dot{\mu})^{\frac{3}{2}} (\alpha_1 + \alpha_2) \right) \int \partial_2 R^i (-\Delta \tilde{\epsilon} + (1 + \dot{\mu})\tilde{\epsilon} - f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V)) \quad (4.26)$$

$$+ \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{\ddot{\mu}}{(1 + \dot{\mu})} \int \tilde{\Lambda} R^i (-\Delta \tilde{\epsilon} + (1 + \dot{\mu})\tilde{\epsilon} - f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V)) \quad (4.27)$$

$$- \int ((4.14) + (4.15) + (4.16)) (-\Delta \tilde{\epsilon} + (1 + \dot{\mu})\tilde{\epsilon} - f(V + \tilde{\epsilon}) - f(V)) \quad (4.28)$$

$$+ \frac{\ddot{\mu}}{2} \|\epsilon\|_{L^2}^2 - \int S_0 \mathcal{E}_V - \int \frac{d}{dt} S_0 \mathcal{E}_V \quad (4.29)$$

$$- \int \frac{d}{dt} (V(t, \mathbf{x} + (t + \mu(t))\mathbf{e}_1)) (-f(V + \tilde{\epsilon}) + f(V) + f'(V)\tilde{\epsilon})(t, \mathbf{x} + (t + \mu(t))\mathbf{e}_1) d\mathbf{x}. \quad (4.30)$$

Notice that in (4.27), the source term (4.17) does not appear by the term $\int S_0 \epsilon$. We changed the term $\int \partial_1 S_0 (\mathcal{L}_{1+\dot{\mu}})\tilde{\epsilon}$ with a lot of space derivative, but a low decay in time, into the two last terms of (4.29), which are easier to deal with.

Let us deal briefly with each one of the terms; we want to prove that:

$$\frac{d}{dt}W(t) \lesssim \frac{1}{t \ln t^\alpha} \|\epsilon\|_{H^1}^2 + \frac{1}{t^2 \ln t^\beta} \|\epsilon\|_{H^1} + \frac{1}{t^3 \ln(t)^\gamma}.$$

Upper bound of (4.25)

Let find out a bound on each term. The bootstrap provies the bound $\dot{z}_1^i \lesssim \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}}$. In the non-linearity, the terms with a power larger than 2 are convenient. The rest is:

$$\left| \dot{z}_1^i \int \partial_1 R^i (\mathcal{L}_{1+\dot{\mu}}\epsilon) (\mathbf{x} - (t + \mu(t))\mathbf{e}_1 + \mathbf{z}^1) + \partial_1 R^i 3(V^2 - (R^i)^2)\tilde{\epsilon} \right|$$

The first term is equal to 0 because of the kernel of $\mathcal{L}$. For the second part, the remaining terms are very low: either there are bounded by $\frac{1}{t}$ (as $\alpha_1^1(\mathbf{z})\|A_1^1\|_{L^\infty}$) or the interaction between the two soliton is low ($\|\partial_1 R^1 R^2 R^2\|_{L^2} + \|\partial_1 R^1 R^1 R^2\|_{L^2} \lesssim \frac{1}{t}$). They are thus bounded by $\frac{1}{t^2 \ln(t)^{\frac{3}{2}}} \|\epsilon\|_{L^2}$, which is sufficient.

Upper bound of (4.26)

The arguments of the previous step sill hold for this term.

Upper bound of (4.27)

We already know the bound $|\ddot{\mu}| \leq \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}}$ from the bootstrap, so the terms bilinear in ϵ should be bound by:

$$\ddot{\mu} \int \tilde{\Lambda} R^i f''(V) \tilde{\epsilon}^2 \lesssim \frac{1}{t^3 \ln(t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Only remains the linear terms in $\tilde{\epsilon}$. We find by the operator $\mathcal{L}$, and with the orthogonality condition on $\tilde{\epsilon}$:

$$\ddot{\mu} \int \tilde{\Lambda} R^i (\mathcal{L}_{1+\dot{\mu}})(\tilde{\epsilon}) = \ddot{\mu} \int R^i \tilde{\epsilon} = 0.$$

Upper bound of (4.28)

Recall that J^i in (4.14) is based on the approximation we made. We roughly get $\|\partial_1 J^i\|_{L^2} \leq \frac{1}{t \ln(t)^{\frac{3}{2}}}$. However, because it possesses a first derivative ∂_1 , it might be possible to deal with it by modifying the functional, as well as the source term. Some computations are needed.

The term of (4.15) is tricky, in particular one term:

$$\int \frac{\dot{z}_2^1}{1+\dot{\mu}} \partial_2 \alpha_1^1 A_1^1 (\mathcal{L}_{1+\dot{\mu}}) \tilde{\epsilon} \leq |\dot{z}_2^1| \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} \|\tilde{\epsilon}\|_{H^1} \simeq \frac{1}{t^2} \|\tilde{\epsilon}\|_{H^1}.$$

We still need to figure out how to cancel this to large power. We also need to take care of the tail of A_1^1 . The rest of (4.15) should not be difficult to deal with.

For (4.16), the same problem occurs.

Upper bound of (4.29)

The term with $\ddot{\mu}$ is bilinear in ϵ , so the bound is easily satisfied.

The term with the time derivative on S_0 should be easy. However, the last one $\int S_0 \mathcal{E}_V$ should be dealt with precaution, because $\|S_0\|_{L^2} \sim \frac{1}{t^2}$.

Upper bound of (4.30)

This last term is the hardest one. In fact, the main term is equivalent to:

$$\sum_i \int \dot{z}_2^i \partial_2 R^i R^i \epsilon(t)^2 \leq \frac{1}{t} \|\epsilon(t)\|_{L^2}.$$

It misses the expected bound. By comparing with [106], this term appears with a first derivative instead of ∂_2 , and thus use the variation of the mass of the error to control this term. Because of different direction, this tool is no longer available. An idea would be to use the monotonicity of this quantity.

If the proof of the bootstrap is achieved, we would be able to conclude the proof of the conjecture 46.

4.4 Appendix : Approximation of a soliton $Q(x)$

Let us define:

$$L_k(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{x^n}, \quad \text{with } a_n := \frac{(-1)^n}{8^n n!} \prod_{j=1}^n (2j-1)^2.$$

Furthermore, we claim that there exists a constant $C > 0$ such that:

Lemma 47.

$$\forall 2 < \tilde{p} \leq \min(2 + \ln(2), p), \quad \forall x \in [k, k+1], \quad |Q(x) - L_k(x)| \leq C e^{-\tilde{p}x}.$$

To avoid to burden the notations, we will denote p instead of $\tilde{p}$. The main point is that it is larger than 2.

Proof. Let us fix k , and first consider $x \geq k$. We admit the following bound on L_k for $x \geq k$, whose proof uses the same tools than the ones that follow:

$$L_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right).$$

By the equation satisfied by the ground state Q : $Q'' + \frac{Q'}{r} + f(Q) - Q$, we get that:

$$\partial_x^2 \left(\frac{Q}{L_k} \right) + \partial_x \left(\frac{Q}{L_k} \right) \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{L'_k}{L_k} \right) = \frac{Q}{L_k^2} \left(-L''_k - \frac{L'_k}{x} + L_k \right) - \frac{f(Q)}{L_k}. \quad (4.31)$$

We already know the bound $f(Q)(x) \leq C e^{-px}$. Let us detail the computation to prove that the linear equation on L_k is small. Let us denote $L_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} f_k(x)$, and we get the equation on L_k :

$$L''_k + \frac{1}{x} L'_k - L_k = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(f''_k - 2f'_k + \frac{1}{4x^2} f_k \right). \quad (4.32)$$

The derivatives of f_k are:

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \sum_{n=2}^{k+1} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!^2}{(n-1)!^3 2^{2n-2}} \frac{8(n-1)}{(8x)^n}, \\ f''_k(x) &= \sum_{n=3}^{k+2} (-1)^n \frac{(2n-4)!^2}{(n-2)!^3 2^{2n-4}} \frac{8^2(n-2)(n-1)}{(8x)^n}. \end{aligned}$$

Inserting those derivative in (4.32), the terms until order $n = k+1$ are null, only the last order term remains:

$$f''_k - 2f'_k + \frac{1}{4x^2} f_k = (-1)^k \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{8^2(k^2 - k + 1)}{(8x)^{k+2}},$$

which gives, by inserting in (4.31):

$$\begin{aligned} & \partial_x \left(\partial_x \left(\frac{Q}{L_k} \right) e^{\ln(x) + 2 \ln(L_k)} \right) \\ &= e^{\ln(x) + 2 \ln(L_k)} \left(\frac{Q}{L_k^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} (-1)^{k+1} \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{8^2 (k^2 - k + 1)}{(8x)^{k+2}} - \frac{f(Q)}{L_k} \right) \\ &= xQ \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} (-1)^{k+1} \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{8^2 k^2}{(8x)^{k+2}} \right) - xL_k f(Q) \end{aligned}$$

From the equivalent on L_k :

$$\begin{aligned} \left| \partial_x \left(\frac{Q}{L_k} \right) - \frac{C}{xL_k^2} \right| &\lesssim \frac{1}{xL_k^2} e^{-2x} \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{8^2 k}{(8x)^{k+1}} + \frac{1}{xL_k^2} e^{-(p+1)x}, \\ \left| \partial_x \left(\frac{Q}{L_k} \right) - C_0 (e^{2x} + l.o.t.) \right| &\lesssim \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{8^2 k}{(8x)^{k+1}} + e^{-(p-1)x}. \end{aligned}$$

It is known that the derivative of $\frac{Q}{L_k}$ does not grow exponentially, so $C_0 = 0$. By inserting we get:

$$\left| \frac{Q}{L_k} - c \right| \lesssim \frac{(2k)!^2}{k!^3 2^{2k}} \frac{1}{(8x)^k} + e^{-(p-1)x}.$$

Thus $c = 1$, and by the Stirling formula for k large enough:

$$|Q - L_k| \lesssim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(\frac{2k}{e} \right)^{4k} k \left(\frac{e}{k} \right)^{3k} \frac{1}{k^{3/2}} \frac{1}{2^{4k}} \frac{1}{(2x)^k} + e^{-px} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \frac{e^{-k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{k}{2x} \right)^k + e^{-px}.$$

This concludes the lemma for $x \in [k, k+1]$. $\square$

In particular, by defining ϕ_n equal to 1 if $n \leq x$ and 0 if $n+1 \geq x$, and the function:

$$\Theta(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{a_n}{x^n}, \quad (4.33)$$

we get

$$\forall x \in [k, k+1], \quad |Q - \Theta|(x) \leq C e^{-px}.$$

Let find an adequate expression of Θ in (4.33), in $\mathbf{x} - \mathbf{z}$:

$$\Theta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(|\mathbf{x}-\mathbf{z}|) \frac{a_n}{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^n}.$$

To do so, let focus on a rectangle:

$$R_{\tilde{\beta}, \beta}(\mathbf{z}) := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_2| \leq \beta |\mathbf{z}|, |x_1| \leq \tilde{\beta} |\mathbf{z}| \right\}, \quad (4.34)$$

with $0 < \tilde{\beta} \leq \beta < 1$. In the following, we will use $\beta = \frac{1}{100}$, and $\tilde{\beta} \leq \frac{1}{1000}$. Those values satisfy the constraints in the following approximation of the function Θ in $R_{\tilde{\beta}, \beta}$:

Lemma 48.

$$\Theta(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|\mathbf{z}|}}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} \sum_{0 \leq k, l, m, n} \phi_n(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) \frac{a_n}{|\mathbf{z}|^n} \left(\sum_{0 \leq j \leq k} \frac{b_{j,k}}{k!} \left(1 - \frac{x_2}{|\mathbf{z}|}\right)^j |\mathbf{z}|^j \right) c_l d_{n,m} e^{x_2} \cdot \left(1 - \frac{x_2}{|\mathbf{z}|}\right)^{-2k} \left(\frac{x_1}{|\mathbf{z}|}\right)^{2k} \left(-2\frac{x_2}{|\mathbf{z}|} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{z}|^2}\right)^{l+m},$$

with

$$0 \leq (-1)^k \sum_{0 \leq j \leq k} \frac{b_{j,k}}{k!} |\mathbf{z}|^j \leq \binom{k + |\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}|} \leq 2^{k+|\mathbf{z}|}, \quad c_l \lesssim \frac{1}{l^{3/4}}, \quad d_{n,m} \leq 2^{\frac{n}{2}+m}.$$

To obtain a good approximation of Θ in $R_{\tilde{\beta}, \beta}$, we need to deal with each term with the following lemmas.

Lemma 49. *First, with $\beta \leq \frac{1}{4e}$, we obtain the existence of coefficients $b_{j,n}$ such that*

$$\forall N \geq |\mathbf{z}|, \forall |x_1| \leq (1 - \beta)|\mathbf{z}|, \quad \left| e^{-\sqrt{x_1^2 + (z_2 - x_2)^2}} - e^{-z_2 + x_2} \sum_{0 \leq j \leq k \leq N} \frac{b_{j,k}}{k!} (z_2 - x_2)^{j-2k} x_1^{2k} \right| \lesssim e^{-\frac{3}{2}(1-\beta)|\mathbf{z}|},$$

with at a fixed k , all the $b_{j,k}$ have the same signs, and we get the inequality:

$$0 \leq (-1)^k \sum_{0 \leq j \leq k} \frac{b_{j,k}}{k!} |\mathbf{z}|^j \leq \binom{k + |\mathbf{z}|}{|\mathbf{z}|} \leq 2^{k+|\mathbf{z}|}.$$

Proof. Let deal with the exponential. Instead of studying $\exp(|(x_1, x_2 - z_2)|)$, we want to use the result on (KdV) and go back to one dimension. To do so, consider first that $|x_2| \leq az_2$ with $0 < a < 1$, and by denoting $y := z_2 - x_2 > 0$, it suffices to obtain a serie development in x_1 of $\exp(\sqrt{x_1^2 + y^2})$, and to obtain a good enough bound on the rest. Recall that $y \sim z_2$. By changing the variable $X := \frac{x_1^2}{y^2}$, we obtain:

$$\exp(-\sqrt{x^2 + y^2}) = \exp(-y\sqrt{X+1}) =: g(X).$$

We thus can compute the derivatives of this function, and establish a Taylor development while $0 \leq X < 1$. Notice that each derivative will apply to the exponential, or to the rational fractional. Furthermore, y will appear the number of times that we derivate the exponential. It is thus licit to look for a development of the form:

$$g^{(n)}(X) = e^{-y\sqrt{X+1}} \sum_{k=n}^{(2n-1) \vee 0} \frac{1}{(X+1)^{\frac{k}{2}}} \sum_{j=0}^n b_{j,k,n} y^j.$$

The derivative is thus:

$$g^{(n+1)}(X) = e^{-y\sqrt{X+1}} \sum_{k=n}^{(2n-1) \vee 0} \sum_{j=0}^n b_{j,k,n} \left(\frac{-1/2}{(X+1)^{\frac{k+1}{2}}} y^{j+1} + \frac{-k/2}{(X+1)^{\frac{k+2}{2}}} y^j \right).$$

Notice that the sign of an even derivative is positive, and the sign of an odd derivative is negative. In fact, each derivative either implies the creation of a coefficient $-\frac{k}{2}$ or $-\frac{y}{2}$, and thus we get, with $0 \leq X < 1$:

$$|g^{(n+1)}(X)| \leq (n+y) |g^{(n)}(X)|,$$

or by induction:

$$|g^{(n+1)}(X)| \leq \frac{(n+[y])!}{[y]!} |g(X)|.$$

Let now denote $b_{j,n} := b_{j,0,n}$. At a fixed n , we notice that all the coefficients $(b_{j,n})_j$ have the same sign. By evaluating this formula at 0, we obtain that:

$$\boxed{\forall n, \quad 0 \leq (-1)^n n \sum_{j=0}^n b_{j,n} y^j \leq \frac{(n+[y])!}{[y]!}.}$$

We now evaluate the formula with the different coefficients on the derivative in 0. The Taylor formula gives us, with $[y] \leq (N+1)$ with N large, with the Stirling formula:

$$\begin{aligned} \left| g(X) - \sum_{n=0}^N e^{-y} \sum_{j=0}^n b_{j,n} y^j \frac{X^n}{n!} \right| &\leq \int_0^X e^{-y} \frac{(2(N+1))!}{(N+1)!} \frac{(X-x)^{N+1}}{(N+1)!} dx \\ &\lesssim e^{-y} \binom{2(N+1)}{(N+1)} \frac{X^{N+2}}{N+2} \lesssim e^{-y} (2^2 X)^{N+1} \\ &\lesssim e^{-2y} \end{aligned}$$

for C a constant (for example $C = 1$), and X bounded by a small constant (in the same example, $X \leq \frac{1}{4e}$). In other words, we obtain the existence of coefficients $(b_{j,n})_{0 \leq j \leq n}$ such that:

$$\forall N \geq [y], \forall x \leq y, \quad \left| e^{-\sqrt{x^2+y^2}} - e^{-y} \sum_{0 \leq j \leq n \leq N} \frac{b_{j,n}}{n!} y^{j-2n} x^{2n} \right| \lesssim e^{-2y}.$$

□

By the proof, we get

$$e^{-\sqrt{x_1^2+(z_2-x_2)^2}} = e^{-z_2+x_2} \sum_{0 \leq k} \left(\sum_{0 \leq j \leq k} \frac{b_{j,k}}{k!} |\mathbf{z}|^j \left(1 - \frac{x_2}{z_2}\right)^j \right) \left(1 - \frac{x_2}{z_2}\right)^{-2k} \left(\frac{x_1}{z_2}\right)^{2k}.$$

Now, the terms with a power:

Lemma 50.

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{z}|}} \sum_{l=0}^{\infty} c_l \left(-2 \frac{x_2}{|\mathbf{z}|} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{z}|^2} \right)^l, \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^n} = \frac{1}{|\mathbf{z}|^n} \sum_{m=0}^{\infty} d_{n,m} \left(-2 \frac{x_2}{|\mathbf{z}|} + \frac{|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{z}|^2} \right)^m,$$

with

$$c_l = \prod_{j=1}^l \frac{-\frac{1}{4} - j + 1}{j} \lesssim \frac{1}{l^{3/4}}, \quad \text{and} \quad d_{n,m} = \prod_{j=1}^m \frac{-\frac{n}{2} - j + 1}{j} \leq \binom{\frac{n}{2} + m}{m} \leq 2^{\frac{n}{2} + m}.$$

Proof. For more convenience, the next results need the following expression: $\mathbf{y} := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{z}|}$. Let begin with the first term, the square root. The first estimate which will be useful for the rest of the proof is the following, with a real r :

$$|\mathbf{x} - \mathbf{z}|^r = |\mathbf{z}|^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-2y_2 + |\mathbf{y}|^2)^n \prod_{j=1}^n \frac{\frac{r}{2} - j + 1}{j} \right). \quad (4.35)$$

Let $N > 0$. We can apply the previous equality with $r = -\frac{1}{2}$, and we obtain the coefficients c_l . With the same procedure, we also obtain the coefficients $d_{n,m}$. $\square$

The two previous lemmas are sufficient to obtain the approximation of Θ .

Bibliography

- [1] Miguel A. Alejo, Claudio Muñoz, and Luis Vega. The Gardner equation and the L^2 -stability of the N -soliton solution of the Korteweg-de Vries equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(1):195–212, 2013.
- [2] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4):313–345, 1983.
- [3] H. Berestycki, P.-L. Lions, and L. A. Peletier. An ODE approach to the existence of positive solutions for semilinear problems in $\mathbf{R}^N$. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(1):141–157, 1981.
- [4] Debdeep Bhattacharya, Luiz Gustavo Farah, and Svetlana Roudenko. Global well-posedness for low regularity data in the 2d modified Zakharov-Kuznetsov equation, 2019.
- [5] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss. Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 411(1841):395–412, 1987.
- [6] Jean Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2):107–156, 1993.
- [7] Jean Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.*, 3(3):209–262, 1993.
- [8] Jean Bourgain. On the growth in time of higher Sobolev norms of smooth solutions of Hamiltonian PDE. *Internat. Math. Res. Notices*, (6):277–304, 1996.
- [9] Joseph Boussinesq. Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 72(755-759):1871, 1871.
- [10] V. S. Buslaev and G. S. Perelman. On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. In *Nonlinear evolution equations*, volume 164 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 75–98. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [11] Eddye Bustamante, Pedro Isaza, and Jorge Mejía. On the support of solutions to the Zakharov-Kuznetsov equation. *J. Differential Equations*, 251(10):2728–2736, 2011.
- [12] Eddye Bustamante, Pedro Isaza, and Jorge Mejía. On uniqueness properties of solutions of the Zakharov-Kuznetsov equation. *J. Funct. Anal.*, 264(11):2529–2549, 2013.
- [13] A. Carbery, C. E. Kenig, and S. N. Ziesler. Restriction for homogeneous polynomial surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 365(5):2367–2407, 2013.

- [14] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, 85(4):549–561, 1982.
- [15] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(3):649–669, 2001.
- [16] Vianney Combet. Multi-soliton solutions for the supercritical gKdV equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(3):380–419, 2011.
- [17] Vianney Combet and Yvan Martel. Construction of multibubble solutions for the critical GKDV equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 50(4):3715–3790, 2018.
- [18] Lucrezia Cossetti, Luca Fanelli, and Felipe Linares. Uniqueness results for Zakharov-Kuznetsov equation, 2018.
- [19] Raphaël Côte. Construction of solutions to the L^2 -critical KdV equation with a given asymptotic behaviour. *Duke Math. J.*, 138(3):487–531, 2007.
- [20] Raphaël Côte. On the soliton resolution for equivariant wave maps to the sphere. *Comm. Pure Appl. Math.*, 68(11):1946–2004, 2015.
- [21] Raphaël Côte and Yvan Martel. Multi-travelling waves for the nonlinear Klein-Gordon equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370(10):7461–7487, 2018.
- [22] Raphaël Côte, Yvan Martel, and Frank Merle. Construction of multi-soliton solutions for the L^2 -supercritical gKdV and NLS equations. *Rev. Mat. Iberoam.*, 27(1):273–302, 2011.
- [23] Raphaël Côte and Claudio Muñoz. Multi-solitons for nonlinear Klein-Gordon equations. *Forum Math. Sigma*, 2:e15, 38, 2014.
- [24] Raphaël Côte, Claudio Muñoz, Didier Pilod, and Gideon Simpson. Asymptotic stability of high-dimensional Zakharov-Kuznetsov solitons. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 220(2):639–710, 2016.
- [25] Raphaël Cote and Frédéric Valet. Polynomial growth of high sobolev norms of solutions to the Zakharov-Kuznetsov equation, 2019.
- [26] Scipio Cuccagna. On asymptotic stability of ground states of NLS. *Rev. Math. Phys.*, 15(8):877–903, 2003.
- [27] Raphaël Côte, Yvan Martel, and Xu Yuan. Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear klein-gordon equation, 2020.
- [28] Stephan De Bièvre, François Genoud, and Simona Rota Nodari. Orbital stability: analysis meets geometry. In *Nonlinear optical and atomic systems*, volume 2146 of *Lecture Notes in Math.*, pages 147–273. Springer, Cham, 2015.
- [29] Anne de Bouard. Stability and instability of some nonlinear dispersive solitary waves in higher dimension. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 126(1):89–112, 1996.
- [30] Thomas Duyckaerts, Hao Jia, Carlos Kenig, and Frank Merle. Soliton resolution along a sequence of times for the focusing energy critical wave equation. *Geom. Funct. Anal.*, 27(4):798–862, 2017.

- [31] A. V. Faminskiĭ. The Cauchy problem for the Zakharov-Kuznetsov equation. *Differentsial'nye Uravneniya*, 31(6):1070–1081, 1103, 1995.
- [32] Luiz G. Farah, Felipe Linares, and Ademir Pastor. A note on the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation: local, global, and scattering results. *J. Differential Equations*, 253(8):2558–2571, 2012.
- [33] Luiz Gustavo Farah, Justin Holmer, and Svetlana Roudenko. Instability of solitons in the 2D cubic Zakharov-Kuznetsov equation, 2017.
- [34] Luiz Gustavo Farah, Justin Holmer, and Svetlana Roudenko. Instability of solitons—revisited, II: the supercritical Zakharov-Kuznetsov equation. In *Nonlinear dispersive waves and fluids*, volume 725 of *Contemp. Math.*, pages 89–109. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2019.
- [35] Luiz Gustavo Farah, Justin Holmer, and Svetlana Roudenko. On instability of solitons in the 2d cubic Zakharov-Kuznetsov equation. *São Paulo J. Math. Sci.*, 13(2):435–446, 2019.
- [36] Luiz Gustavo Farah, Justin Holmer, Svetlana Roudenko, and Kai Yang. Blow-up in finite or infinite time of the 2d cubic Zakharov-Kuznetsov equation, 2018.
- [37] Luiz Gustavo Farah, Justin Holmer, Svetlana Roudenko, and Kai Yang. Asymptotic stability of solitary waves of the 3D quadratic Zakharov-Kuznetsov equation, 2020.
- [38] Eduard Feireisl. Finite energy travelling waves for nonlinear damped wave equations. *Quart. Appl. Math.*, 56(1):55–70, 1998.
- [39] Clifford S Gardner, John M Greene, Martin D Kruskal, and Robert M Miura. Korteweg-devries equation and generalizations. vi. methods for exact solution. *Communications on pure and applied mathematics*, 27(1):97–133, 1974.
- [40] Clifford S Gardner and GK Morikawa. Similarity in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves. Technical report, New York Univ., New York. Inst. of Mathematical Sciences, 1960.
- [41] Jean Ginibre. Le probleme de Cauchy pour des edp semi-linéaires périodiques en variables d'espace. *Séminaire Bourbaki*, 796:163–187, 1995.
- [42] R. T. Glassey. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, 18(9):1794–1797, 1977.
- [43] Manoussos Grillakis, Jalal Shatah, and Walter Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, 74(1):160–197, 1987.
- [44] Axel Gruenrock. On the generalized Zakharov-Kuznetsov equation at critical regularity, 2015.
- [45] Axel Grünrock. A remark on the modified Zakharov-Kuznetsov equation in three space dimensions. *Math. Res. Lett.*, 21(1):127–131, 2014.
- [46] Axel Grünrock and Sebastian Herr. The Fourier restriction norm method for the Zakharov-Kuznetsov equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(5):2061–2068, 2014.

- [47] Daniel Han-Kwan. From Vlasov-Poisson to Korteweg–de Vries and Zakharov-Kuznetsov. *Comm. Math. Phys.*, 324(3):961–993, 2013.
- [48] Zaher Hani, Benoit Pausader, Nikolay Tzvetkov, and Nicola Visciglia. Modified scattering for the cubic Schrödinger equation on product spaces and applications. *Forum Math. Pi*, 3:e4, 63, 2015.
- [49] Sebastian Herr and Shinya Kinoshita. Subcritical well-posedness results for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension three and higher, 2020.
- [50] Ryogo Hirota. Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, 27(18):1192, 1971.
- [51] J. Pedro Isaza, L. Jorge Mejía, and Nikolay Tzvetkov. A smoothing effect and polynomial growth of the Sobolev norms for the KP-II equation. *J. Differential Equations*, 220(1):1–17, 2006.
- [52] Pedro Isaza J. and Jorge Mejía L. Global solution for the Kadomtsev-Petviashvili equation (KP-II) in anisotropic Sobolev spaces of negative indices. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 68, 12, 2003.
- [53] Boris Borisovich Kadomtsev and Vladimir Iosifovich Petviashvili. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. In *Sov. Phys. Dokl*, volume 15, pages 539–541, 1970.
- [54] PL Kelley. Self-focusing of optical beams. *Physical Review Letters*, 15(26):1005, 1965.
- [55] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(4):527–620, 1993.
- [56] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, and Luis Vega. A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):573–603, 1996.
- [57] Shinya Kinoshita. Global Well-posedness for the Cauchy problem of the Zakharov-Kuznetsov equation in 2D, 2019.
- [58] C. Klein, S. Roudenko, and N. Stoilov. Numerical study of zakharov-kuznetsov equations in two dimensions, 2020.
- [59] Herbert Koch. Self-similar solutions to super-critical gKdV. *Nonlinearity*, 28(3):545–575, 2015.
- [60] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. (5)*, 39(240):422–443, 1895.
- [61] Joachim Krieger, Yvan Martel, and Pierre Raphaël. Two-soliton solutions to the three-dimensional gravitational Hartree equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62(11):1501–1550, 2009.
- [62] Man Kam Kwong. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3):243–266, 1989.

- [63] E. W. Laedke and K. H. Spatschek. Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields. *Phys. Fluids*, 25(6):985–989, 1982.
- [64] Yang Lan. Stable self-similar blow-up dynamics for slightly L^2 -supercritical generalized KdV equations. *Comm. Math. Phys.*, 345(1):223–269, 2016.
- [65] Yang Lan. Blow-up solutions for L^2 supercritical gKdV equations with exactly k blow-up points. *Nonlinearity*, 30(8):3203–3240, 2017.
- [66] David Lannes, Felipe Linares, and Jean-Claude Saut. The Cauchy problem for the Euler-Poisson system and derivation of the Zakharov-Kuznetsov equation. In *Studies in phase space analysis with applications to PDEs*, volume 84 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 181–213. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [67] Peter D. Lax. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21:467–490, 1968.
- [68] Felipe Linares and Ademir Pastor. Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(4):1323–1339, 2009.
- [69] Felipe Linares and Ademir Pastor. Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equation. *J. Funct. Anal.*, 260(4):1060–1085, 2011.
- [70] Felipe Linares and Jean-Claude Saut. The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 24(2):547–565, 2009.
- [71] Y. Martel and F. Merle. Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation. *Geom. Funct. Anal.*, 11(1):74–123, 2001.
- [72] Yvan Martel. Asymptotic N -soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations. *Amer. J. Math.*, 127(5):1103–1140, 2005.
- [73] Yvan Martel and Frank Merle. Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 157(3):219–254, 2001.
- [74] Yvan Martel and Frank Merle. Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2 -critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3):617–664, 2002.
- [75] Yvan Martel and Frank Merle. Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation. *Ann. of Math. (2)*, 155(1):235–280, 2002.
- [76] Yvan Martel and Frank Merle. Asymptotic stability of solitons of the subcritical gKdV equations revisited. *Nonlinearity*, 18(1):55–80, 2005.
- [77] Yvan Martel and Frank Merle. Multi solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 23(6):849–864, 2006.
- [78] Yvan Martel and Frank Merle. Note on coupled linear systems related to two soliton collision for the quartic gKdV equation. *Rev. Mat. Complut.*, 21(2):327–349, 2007.
- [79] Yvan Martel and Frank Merle. Asymptotic stability of solitons of the gKdV equations with general nonlinearity. *Math. Ann.*, 341(2):391–427, 2008.
- [80] Yvan Martel and Frank Merle. Description of two soliton collision for the quartic gKdV equation. *Ann. of Math. (2)*, 174(2):757–857, 2011.

- [81] Yvan Martel and Frank Merle. Construction of multi-solitons for the energy-critical wave equation in dimension 5. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 222(3):1113–1160, 2016.
- [82] Yvan Martel and Frank Merle. Inelasticity of soliton collisions for the 5D energy critical wave equation. *Invent. Math.*, 214(3):1267–1363, 2018.
- [83] Yvan Martel, Frank Merle, and Pierre Raphaël. Blow up for the critical generalized Korteweg–de Vries equation. I: Dynamics near the soliton. *Acta Math.*, 212(1):59–140, 2014.
- [84] Yvan Martel, Frank Merle, and Pierre Raphaël. Blow up for the critical gKdV equation. II: Minimal mass dynamics. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(8):1855–1925, 2015.
- [85] Yvan Martel, Frank Merle, and Pierre Raphaël. Blow up for the critical gKdV equation III: exotic regimes. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 14(2):575–631, 2015.
- [86] Yvan Martel, Frank Merle, and Tai-Peng Tsai. Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations. *Comm. Math. Phys.*, 231(2):347–373, 2002.
- [87] Yvan Martel and Tien Vinh Nguyen. Construction of 2-solitons with logarithmic distance for the one-dimensional cubic Schrödinger system, 2019.
- [88] Yvan Martel and Didier Pilod. Construction of a minimal mass blow up solution of the modified Benjamin-Ono equation. *Math. Ann.*, 369(1-2):153–245, 2017.
- [89] Yvan Martel and Pierre Raphaël. Strongly interacting blow up bubbles for the mass critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(3):701–737, 2018.
- [90] Kevin McLeod. Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^n$. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 339(2):495–505, 1993.
- [91] Frank Merle. Construction of solutions with exactly k blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity. *Comm. Math. Phys.*, 129(2):223–240, 1990.
- [92] Frank Merle. Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power. *Duke Math. J.*, 69(2):427–454, 1993.
- [93] Frank Merle. Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(3):555–578, 2001.
- [94] Frank Merle and Pierre Raphael. Sharp upper bound on the blow-up rate for the critical nonlinear Schrödinger equation. *Geom. Funct. Anal.*, 13(3):591–642, 2003.
- [95] Frank Merle and Pierre Raphael. The blow-up dynamic and upper bound on the blow-up rate for critical nonlinear Schrödinger equation. *Ann. of Math. (2)*, 161(1):157–222, 2005.
- [96] Frank Merle and Pierre Raphael. On a sharp lower bound on the blow-up rate for the L^2 critical nonlinear Schrödinger equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 19(1):37–90, 2006.
- [97] Frank Merle, Pierre Raphaël, and Jeremie Szeftel. Stable self-similar blow-up dynamics for slightly L^2 super-critical NLS equations. *Geom. Funct. Anal.*, 20(4):1028–1071, 2010.

- [98] Frank Merle and Luis Vega. L^2 stability of solitons for KdV equation. *Int. Math. Res. Not.*, (13):735–753, 2003.
- [99] Mei Ming, Frederic Rousset, and Nikolay Tzvetkov. Multi-solitons and related solutions for the water-waves system. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(1):897–954, 2015.
- [100] Robert M. Miura. The Korteweg-de Vries equation: a survey of results. *SIAM Rev.*, 18(3):412–459, 1976.
- [101] Tetsu Mizumachi and Nikolay Tzvetkov. L^2 -stability of solitary waves for the KdV equation via Pego and Weinstein’s method. In *Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B49, pages 33–63. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014.
- [102] Luc Molinet and Didier Pilod. Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov-Kuznetsov equation and applications. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 32(2):347–371, 2015.
- [103] Claudio Muñoz. On the inelastic two-soliton collision for gKdV equations with general nonlinearity. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9):1624–1719, 2010.
- [104] Susan Munro and EJ Parkes. The derivation of a modified Zakharov–Kuznetsov equation and the stability of its solutions. *Journal of Plasma Physics*, 62(3):305–317, 1999.
- [105] Susan Munro and EJ Parkes. Stability of solitary-wave solutions to a modified Zakharov–Kuznetsov equation. *Journal of Plasma Physics*, 64(4):411–426, 2000.
- [106] Tiến Vinh Nguyễn. Strongly interacting multi-solitons with logarithmic relative distance for the gKdV equation. *Nonlinearity*, 30(12):4614–4648, 2017.
- [107] Tiến Vinh Nguyễn. Existence of multi-solitary waves with logarithmic relative distances for the NLS equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 357(1):13–58, 2019.
- [108] Mahendra Panthee. A note on the unique continuation property for Zakharov-Kuznetsov equation. *Nonlinear Anal.*, 59(3):425–438, 2004.
- [109] Robert L. Pego and Michael I. Weinstein. Eigenvalues, and instabilities of solitary waves. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 340(1656):47–94, 1992.
- [110] Robert L. Pego and Michael I. Weinstein. Asymptotic stability of solitary waves. *Comm. Math. Phys.*, 164(2):305–349, 1994.
- [111] Fabrice Planchon, Nikolay Tzvetkov, and Nicola Visciglia. On the growth of Sobolev norms for NLS on 2- and 3-dimensional manifolds. *Anal. PDE*, 10(5):1123–1147, 2017.
- [112] L. Rayleigh. On waves. *Phil. Mag.*, 1:257–259, 1876.
- [113] Francis Ribaud and Stéphane Vento. A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov-Kuznetsov equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(9-10):499–503, 2012.
- [114] Francis Ribaud and Stéphane Vento. Well-posedness results for the three-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(4):2289–2304, 2012.

- [115] J Scott Russell. Report of the committee on waves. In *Report of the 7th Meeting of the British Association for the Advancement of Science, Liverpool*, volume 417496. John Murray London, 1838.
- [116] A Shabat and V Zakharov. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet physics JETP*, 34(1):62, 1972.
- [117] Minjie Shan. Global Well-Posedness and Global Attractor for Two-dimensional Zakharov-Kuznetsov Equation, 2018.
- [118] Minjie Shan, Baoxiang Wang, and Liqun Zhang. Resonant Decompositions and Global Well-posedness for 2D Zakharov-Kuznetsov Equation in Sobolev spaces of Negative Indices, 2020.
- [119] R. Sipeic and D. J. Benney. Lump interactions and collapse in the modified Zakharov-Kuznetsov equation. *Stud. Appl. Math.*, 105(4):385–403, 2000.
- [120] Vedran Sohinger. Bounds on the growth of high Sobolev norms of solutions to nonlinear Schrödinger equations on $\mathbb{R}$. *Indiana Univ. Math. J.*, 60(5):1487–1516, 2011.
- [121] Gigliola Staffilani. On the growth of high Sobolev norms of solutions for KdV and Schrödinger equations. *Duke Math. J.*, 86(1):109–142, 1997.
- [122] Frédéric Valet. Asymptotic K-soliton-like Solutions of the Zakharov-Kuznetsov type equations, 2020.
- [123] Frank Verheest, Richard L. Mace, Sadha R. Pillay, and Manfred A. Hellberg. Unified derivation of Korteweg-de Vries–Zakharov-Kuznetsov equations in multispecies plasmas. *J. Phys. A*, 35(3):795–806, 2002.
- [124] Haruichi Washimi and Tosiya Taniuti. Propagation of ion-acoustic solitary waves of small amplitude. *Physical Review Letters*, 17(19):996, 1966.
- [125] Michael I. Weinstein. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Comm. Math. Phys.*, 87(4):567–576, 1982/83.
- [126] Michael I. Weinstein. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 16(3):472–491, 1985.
- [127] Michael I. Weinstein. Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(1):51–67, 1986.
- [128] Norman J Zabusky and Martin D Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*, 15(6):240, 1965.
- [129] V. E. Zaharov and S. V. Manakov. The complete integrability of the nonlinear Schrödinger equation. *Teoret. Mat. Fiz.*, 19:332–343, 1974.
- [130] V. E. Zaharov and A. B. vSabat. A plan for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. *Funkcional. Anal. i Prilovzen.*, 8(3):43–53, 1974.

- [131] V. E. Zakharov and A. B. vSabat. Integration of the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. II. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 13(3):13–22, 1979.
- [132] VE Zakharov and EA Kuznetsov. On threedimensional solitons. *Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz.*, 66:594–597, 1974.
- [133] Vladimir E Zakharov and Lyudvig Dmitrievich Faddeev. Korteweg-de vries equation: A completely integrable hamiltonian system. *Functional analysis and its applications*, 5(4):280–287, 1971.

Etude de comportements en temps long de solutions des Equations de type Zakharov-Kuznetsov

Résumé

Cette thèse porte sur différents aspects des comportements en temps long des équations de Zakharov-Kuznetsov généralisées:

$$\partial_t u + \partial_1(\Delta u + u^p) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \quad d \in \{2, 3\}, \quad p \geq 2.$$

Le premier chapitre résume l'état actuel des connaissances sur ces équations. Le second chapitre est consacré à la croissance polynomiale des normes de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$ pour l'équation de Zakharov-Kuznetsov en dimension $d=2$ et une puissance de non-linéarité $p=2$. Dans le troisième chapitre, on démontre l'existence et l'unicité des multi-solitons associés à différentes équations de Zakharov-Kuznetsov ($(d, p) = (2, 2)$, $(2, 3)$, et $(3, 2)$). Enfin, dans un quatrième chapitre, on expose des idées de construction de 2-solitons avec interaction forte pour l'équation en dimension $d=2$ et une non-linéarité $f(u) = |u|^{p-1}u$, où $2 < p < 3$.

Mots-Clefs : équations de Zakharov-Kuznetsov, solitons, multisolitons, croissance des normes de Sobolev.

Summary

In this thesis, we study different aspects of behaviors in long time of the generalized Zakharov-Kuznetsov equations:

$$\partial_t u + \partial_1(\Delta u + u^p) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d, \quad d \in \{2, 3\}, \quad p \geq 2.$$

The first chapter sums up the state-of-the-art knowledges on those equations. The second chapter is dedicated to polynomial growth of Sobolev norms $H^s(\mathbb{R}^2)$ for the Zakharov-Kuznetsov equation in dimension $d=2$ and a power of nonlinearity $p=2$. In the third chapter, we prove existence and uniqueness of multi-solitons associated with different equation of Zakharov-Kuznetsov equations ($(d, p) = (2, 2)$, $(2, 3)$, et $(3, 2)$). In the last chapter, we introduce some ideas of construction of a 2-solitons with strong interaction for the equation in dimension $d=2$ and a non-linearity $f(u) = |u|^{p-1}u$, with $2 < p < 3$.

Key words : Zakharov-Kuznetsov equations, solitons, multi-solitons, growth of Sobolev norms.